

У. РУДИН

Функциональный анализ

Перевод с английского В. Я. Лина

Под редакцией Е. А. Горина

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1975

Книга принадлежит перу видного американского математика, известного не только многочисленными научными исследованиями, но и прекрасно написанными учебниками. Многие его статьи и книги переведены на русский язык.

Новый учебник У. Рудина отличается продуманным подбором материала, мастерским изложением, разбором нетривиальных примеров приложений функционального анализа в других областях математики. В книге три основные части: общая теория; распределения и преобразования Фурье; банаховы алгебры и спектральная теория. Наряду с классическими результатами отражены и многие новые факты функционального анализа.

Книга доступна студентам средних курсов математических специальностей университетов и пединститутов. Она, несомненно, окажется полезной всем изучающим или преподающим функциональный анализ.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Имя автора этой книги, американского математика Уолтера Рудина хорошо известно советскому читателю: две из его книг, в том числе учебник математического анализа, переведены на русский язык и получили заслуженное признание. Мы не сомневаемся, что и данный курс функционального анализа должен понравиться всем изучающим или преподающим анализ.

По подбору материала и по уровню требований, предъявляемых к читателю, эта книга занимает особое положение — промежуточное между краткими сравнительно элементарными руководствами и фундаментальными сочинениями (один только внешний вид которых внушает современным студентам суеверный ужас). В принципе ее легко одолеет любой студент 3-го курса физико-математической специальности. Большое число хорошо подобранных упражнений разной степени сложности позволяют контролировать понимание при самостоятельном изучении предмета. Сколько-нибудь сложные задачи снабжаются указаниями, порой настолько развернутыми, что читатель сможет без особого напряжения восстановить детали.

Вместе с тем активный студент сумеет использовать книгу не только с целью сдать очередной экзамен, но и в качестве доступного источника представлений о «следующем уровне» функционального анализа. Конечно, такие вещи, как теорема Хана — Банаха, преобразование Фурье, обобщенные функции или понятие спектра линейного оператора, стали обязательными для студентов-математиков. Однако идеи общей линейной топологии, основные понятия теории банаховых алгебр, достаточно развернутые формы спектральной теоремы пока не входят в обязательные программы. Прочтя (или просто перелистав) книгу, можно получить приблизительное представление о состоянии некоторых классических ветвей функционального анализа. При этом ее выгодно отличает хорошее чувство меры: хотя автор является активно работающим специалистом по функциональному анализу, его учебник не перегружен результатами, представляющими интерес только для узкого круга знатоков.

Вместе с тем автор не ограничивается только стандартными приложениями общих теорем функционального анализа, но приводит и такие, которые могут показаться неожиданными. Скажем, во второй части, начинающейся с обобщенных функций,

читатель на финише получает асимптотический закон распределения простых чисел.

Книга написана аккуратно, но живо и без излишнего педантизма. При переводе мы старались по возможности сохранить стиль автора. Небольшие погрешности оригинала (в основном опечатки) исправлены без специальных оговорок. На большую часть из них нам любезно указал сам автор, за что мы ему весьма признательны. В наших подстрочных примечаниях чаще всего даются чуть более развернутые пояснения, иногда варианты доказательств или дополнительные примеры (разумеется, всю ответственность за эти примечания несем мы, а не автор).

Основной список литературы немного расширен (добавления помечены звездочкой). В соответствии с замыслом автора этот список остается весьма скромным. Наши добавления объясняются исключительно соображениями удобства для русского читателя и главным образом связаны с обилием ссылок в оригинале на один из еще не переведенных на русский язык учебников У. Рудина.

Библиографические указания (на журнальные статьи) и исторические справки собраны автором в одном из приложений в конце книги. Мы согласны с автором в том, что они не полны, и поэтому вслед за ним рекомендуем читателю не пренебрегать другими источниками библиографической и исторической информации.

В указателе терминов наряду с русскими в ряде случаев сохранены английские наименования, что сделано отчасти с целью облегчить страдания наших коллег — переводчиков и составителей словарей.

*Е. А. Горин
В. Я. Лин*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Функциональный анализ изучает некоторые тополого-алгебраические структуры, а также методы, с помощью которых сведения об этих структурах могут применяться к аналитическим задачам.

Хороший вводный учебник функционального анализа должен содержать изложение аксиоматики (т. е. общей теории топологических векторных пространств), достаточно глубокую трактовку хотя бы некоторых разделов предмета и несколько интересных приложений к другим областям математики. Я надеюсь, что данная книга удовлетворяет этим требованиям.

Предмет в целом невероятно обширен и продолжает быстро расти. (Библиография в первом томе книги [13] занимает 96 страниц и доведена только до 1957 г.) Поэтому, чтобы написать книгу умеренного объема, необходимо было выбрать лишь некоторые области и проигнорировать другие. Я хорошо знаю, что почти любой специалист, взглянув на оглавление, обнаружит отсутствие некоторых своих (и моих) излюбленных тем; но это представляется неизбежным. В мои намерения не входило написать энциклопедический трактат. Я хотел написать книгу, открывающую путь к дальнейшим исследованиям.

По этой причине были опущены многие из наиболее изысканных разделов общей теории топологических векторных пространств. Например, не рассматриваются равномерные пространства, сходимости Мура—Смита, сети и фильтры. Понятие полноты вводится лишь для метрических пространств. Не упоминаются ни борнологические, ни бочечные пространства. Двойственность, конечно, присутствует, но не в максимальной общности. Интегрирование векторных функций рассматривается только как инструмент; при этом внимание сосредоточено на интегрировании непрерывных функций со значениями в пространстве Фреше.

Тем не менее материал первой части вполне достаточен почти для всех приложений к конкретным задачам. А на это и должен быть сделан упор в подобном курсе; ведь тесное взаимодействие между абстрактным и конкретным представляет собой не только наиболее полезную, но и наиболее пленительную сторону предмета.

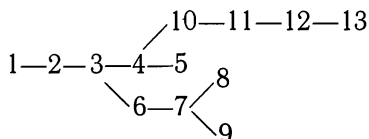
Вот некоторые другие особенности изложения отобранного материала. Довольно большая часть общей теории развита без предположения локальной выпуклости. Основные свойства компактных операторов устанавливаются с помощью теории двойствен-

ности для банаховых пространств. В главе 5 указано несколько способов применения теоремы Крейна—Мильмана о существовании крайних точек. Теория распределений и преобразования Фурье разработана достаточно подробно и применяется (в двух очень коротких главах) к двум задачам об уравнениях с частными производными и к доказательству тауберовой теоремы Винера, а также используется при обсуждении двух приложений этой теоремы. Спектральная теорема выводится из теории банаховых алгебр (а именно, из принадлежащего Гельфанду и Наймарку описания коммутативных B^* -алгебр); это, может быть, не кратчайший, но легкий путь. Функциональное исчисление в банаховых алгебрах изложено довольно подробно; так же обстоит дело с инволюциями и положительными функционалами. Включены некоторые сравнительно новые результаты о банаховых алгебрах, еще не нашедшие места в других руководствах.

Я предполагаю, что читатель хорошо знаком с теорией меры и интеграла Лебега (включая полноту пространств L^p), с основными свойствами голоморфных функций (такими, как теорема Коши в общей форме и теорема Рунге) и с некоторыми элементарными топологическими понятиями, сопутствующими обычно этим двум аналитическим теориям. Некоторые другие топологические факты кратко изложены в приложении А. Не требуется почти никакой алгебраической подготовки, кроме знания того, что такое гомоморфизм.

Исторические указания и ссылки собраны в приложении В. Некоторые из них относятся к первоисточникам, другие — к более новым книгам, статьям и обзорам, в которых можно найти дальнейшую библиографию. Имеется, конечно, много результатов, источники которых не указаны. Отсутствие ссылки ни в коем случае не означает претензию на авторство с моей стороны.

Большинство приложений сосредоточено в главах 5, 8 и 9. Некоторые приводятся в главе 11, а также более чем в 250 упражнениях; многие из упражнений снабжены указаниями. Схема зависимости глав изображена на следующей диаграмме:



Эта книга возникла из курса, который я вел в Висконсинском университете. Я имел много плодотворных бесед на различные затронутые в ней темы с некоторыми из моих коллег, особенно с Патриком Ахерном, Полем Рабиновичем, Дэниелом Шие и Робертом Тернером. С удовольствием благодарю их всех.

Уолтер Рудин

Часть первая

Общая теория

Глава 1

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Введение

1.1. Многие из задач, которыми занимаются аналитики, касаются не отдельных объектов типа функций, мер или операторов, а скорее обширных классов таких объектов. Большинство интересных классов, возникающих таким образом, оказываются векторными пространствами над полем комплексных или вещественных чисел. Поскольку во всякой аналитической задаче некоторую роль (явно или неявно) играет предельный переход, неудивительно, что эти векторные пространства можно наделить метрикой или по крайней мере топологией, естественно связанной с объектами, составляющими пространство. Простейший и наиболее важный способ сделать это состоит во введении некоторой *нормы*. Получающаяся при этом структура (точное определение дано ниже) называется *нормированным векторным пространством*, или *нормированным линейным пространством*, или просто *нормированным пространством*.

На протяжении всей этой книги термин *векторное пространство* означает векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел или над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Ради полноты в п. 1.4 приводится подробное определение.

1.2. **Нормированные пространства.** Векторное пространство X называется *нормированным пространством*, если каждому $x \in X$ сопоставлено неотрицательное вещественное число $\|x\|$, называемое *нормой* x , так что выполнены следующие условия:

- (а) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для всех x и y из X ;
- (б) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ для любого $x \in X$ и любого скаляра α ;
- (в) $\|x\| > 0$, если $x \neq 0$.

Нормой называют также *функцию*, сопоставляющую вектору x число $\|x\|$.

Каждое нормированное пространство можно рассматривать как метрическое пространство, в котором расстояние $d(x, y)$ между x и y равно $\|x - y\|$. Расстояние d обладает следующими свойствами:

- (1) $0 \leq d(x, y) < \infty$ для всех x и y ;

(ii) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ для всех x и y ;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ для всех x, y и z .

В любом метрическом пространстве *открытым шаром* радиуса r с центром в точке x называется множество

$$B_r(x) = \{y: d(x, y) < r\}.$$

В частности, если X — нормированное пространство, множества

$$B_1(0) = \{x: \|x\| < 1\} \quad \text{и} \quad \bar{B}_1(0) = \{x: \|x\| \leq 1\}$$

являются соответственно *открытым единичным шаром* и *замкнутым единичным шаром* пространства X .

Объявляя подмножество метрического пространства открытым в том и только в том случае, если оно является объединением (быть может, пустым) открытых шаров, получаем *топологию* (см. п. 1.5). Совсем легко проверить, что операции векторного пространства (сложение векторов и умножение их на скаляры) непрерывны в этой топологии, если метрика построена по норме указанным выше способом.

Банахово пространство — это нормированное пространство, *полное* относительно метрики, определяемой его нормой; полнота означает, что всякая последовательность Коши должна быть сходящейся.

1.3. Многие из наиболее известных функциональных пространств являются банаховыми пространствами. Упомянем лишь некоторые типы таких пространств: пространства непрерывных функций на компактных пространствах; хорошо известные L^p -пространства, встречающиеся в теории интегрирования; гильбертовы пространства — ближайшие родственники евклидовых пространств; некоторые пространства дифференцируемых функций; пространства непрерывных линейных отображений одного банахова пространства в другое; банаховы алгебры. Все они еще встретятся нам в дальнейшем.

Однако имеется также много пространств, которые не укладываются в эти рамки. Вот некоторые примеры:

(а) $C(\Omega)$ — пространство всех непрерывных комплексных функций на некотором открытом подмножестве Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$;

(б) $H(\Omega)$ — пространство всех функций, голоморфных в некотором открытом подмножестве Ω комплексной плоскости;

(с) C^∞ — пространство всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций на $\mathbb{R}^n$, равных 0 вне некоторого фиксированного компактного множества K с непустой внутренней частью;

(д) пространства пробных функций, используемые в теории распределений, а также пространства распределений.

Эти пространства обладают естественными топологиями, которые, как мы увидим в дальнейшем, не могут быть индуцированы нормами. Как и нормированные пространства, они служат примерами *топологических векторных пространств*—понятие, пропитывающее весь функциональный анализ.

После этой попытки краткого изложения мотивов мы приведем здесь подробные определения, сопровождаемые предварительным «рекламным просмотром» (в п. 1.9) некоторых результатов этой главы.

1.4. Векторные пространства. Буквами $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ мы всегда будем обозначать соответственно поле вещественных и поле комплексных чисел. Пусть Φ обозначает либо $\mathbf{R}$, либо $\mathbf{C}$. *Скаляр*—это элемент поля скаляров Φ . *Векторное пространство над полем Φ* представляет собой множество X (его элементы называются векторами), в котором определены две операции—*умножение на скаляры* и *сложение*,—обладающие следующими общеизвестными алгебраическими свойствами:

(а) каждой паре векторов x и y сопоставлен вектор $x+y$, причем

$$x+y=y+x \quad \text{и} \quad x+(y+z)=(x+y)+z;$$

X содержит единственный вектор 0 (*нулевой вектор*), такой, что $x+0=x$ для всех $x \in X$; для каждого $x \in X$ существует единственный вектор $-x$, такой, что $x+(-x)=0$;

(б) каждой паре (α, x) , где $\alpha \in \Phi$ и $x \in X$, сопоставлен вектор αx , причем

$$1x=x, \quad \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

и выполняются два дистрибутивных закона

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x.$$

Символ 0 будет, конечно, употребляться и для обозначения нулевого элемента поля скаляров.

Если $\Phi=\mathbf{R}$, то X называется *вещественным* векторным пространством, а если $\Phi=\mathbf{C}$,—*комплексным*. Если в некотором утверждении о векторных пространствах поле скаляров явно не указано, то подразумевается, что это утверждение относится к обоим случаям.

Если X —векторное пространство, $A \subset X$, $B \subset X$, $x \in X$ и $\lambda \in \Phi$, то будут употребляться следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x+A &= \{x+a: a \in A\}, \\ x-A &= \{x-a: a \in A\}, \\ A+B &= \{a+b: a \in A, b \in B\}, \\ \lambda A &= \{\lambda a: a \in A\}. \end{aligned}$$

В частности, через $-A$ обозначается множество всех векторов, противоположных к векторам из A .

Предостережение: может случиться, что $2A \neq A + A$ (упр. 1).

Множество $Y \subset X$ называется *подпространством* пространства X , если Y само является векторным пространством (разумеется, относительно тех же самых операций). Легко проверить, что это происходит тогда и только тогда, когда $0 \in Y$ и

$$\alpha Y + \beta Y \subset Y$$

для всех скаляров α и β .

Множество $C \subset X$ называется *выпуклым*, если

$$tC + (1-t)C \subset C \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Иными словами, требуется, чтобы C содержало $tx + (1-t)y$, если $x \in C$, $y \in C$ и $0 \leq t \leq 1$.

Множество $B \subset X$ называется *уравновешенным*, если $\alpha B \subset B$ для любого $\alpha \in \Phi$, удовлетворяющего условию $|\alpha| \leq 1$.

Векторное пространство X имеет *размерность* n ($\dim X = n$), если оно обладает *базисом* $\{u_1, \dots, u_n\}$. Последнее означает, что каждый вектор $x \in X$ допускает единственное представление в виде

$$x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad (\alpha_i \in \Phi).$$

Если $\dim X = n$ для некоторого n , то пространство X называется *конечномерным*. Если $X = \{0\}$, то (по определению) $\dim X = 0$.

Пример. Если $X = \mathbb{C}$ (одномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$), то уравновешенными являются лишь следующие множества: $\mathbb{C}$, пустое множество $\emptyset$, одноточечное множество $\{0\}$ и любой круг (открытый или замкнутый) с центром в точке 0 . Если же $X = \mathbb{R}^2$ (двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$), то уравновешенных множеств значительно больше¹⁾; например, таковым является всякий прямолинейный отрезок, середина которого находится в точке $(0, 0)$. Дело в том, что, несмотря на общеизвестную и очевидную возможность отождествления $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$, они представляют собой совершенно различные векторные пространства.

1.5. Топологические пространства. *Топологическим пространством* называется множество S , в котором выделено некоторое семейство τ подмножеств (именуемых *открытыми множествами*), обладающее следующими свойствами: S открыто, $\emptyset$ открыто, пересечение любых двух открытых множеств открыто и объединение любой совокупности открытых множеств открыто. Такое

¹⁾ Это высказывание имеет следующий точный смысл: множество уравновешенных подмножеств в $\mathbb{C}$ имеет мощность континуума c , а множество уравновешенных подмножеств в $\mathbb{R}^2$ имеет мощность 2^c . — *Прим. перев.*

семейство τ называется *топологией* в S . Если требуется явно указать, что S рассматривается как топологическое пространство с топологией τ , то вместо S будем писать (S, τ) .

Приведем список некоторых стандартных терминов, употребляемых в описанной выше ситуации.

Множество $E \subset S$ называется *замкнутым*, если его дополнение открыто. *Замыкание* $\bar{E}$ множества E —это пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E . *Внутренностью* E° множества E называется объединение всех открытых множеств, содержащихся в E . *Окрестность точки* $p \in S$ —это любое открытое множество, содержащее эту точку. Пространство (S, τ) называется *хаусдорфовым пространством*, а τ —*хаусдорфовой топологией*, если для каждой пары различных точек в S существуют непересекающиеся окрестности. Множество $K \subset S$ *компактно*, если каждое его покрытие открытыми множествами содержит конечное подпокрытие. Семейство $\tau' \subset \tau$ называется *базой* топологии τ , если каждый элемент из τ (т. е. каждое открытое множество) является объединением некоторых элементов из τ' . Совокупность γ окрестностей точки $p \in S$ называется *локальной базой в точке p* , если любая окрестность этой точки содержит некоторую окрестность, принадлежащую γ .

Если $E \subset S$ и σ —совокупность всех пересечений $E \cap V$, где $V \in \tau$, то, как легко проверить, σ является топологией в E ; мы называем ее топологией, *наследуемой E из S* (или *индуцированной топологией*).

Если топология τ порождается метрикой d (см. п. 1.2), то мы говорим, что d и τ *совместимы*.

Последовательность $\{x_n\}$ в хаусдорфовом пространстве X *сходится* к точке $x \in X$ (или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$), если любая окрестность точки x содержит все точки x_n , за исключением, быть может, конечного их числа.

1.6. Топологические векторные пространства. Предположим, что τ —такая топология в векторном пространстве X , что

- (а) *каждая точка в X является замкнутым множеством;*
- (б) *операции векторного пространства непрерывны относительно τ .*

При этих условиях τ называется *векторной топологией* в X , а X называется *топологическим векторным пространством*.

Вот более аккуратная формулировка условия (а): для любого $x \in X$ множество $\{x\}$, состоящее из единственного элемента x , является замкнутым.

Во многих руководствах условие (а) не включается в определение топологического векторного пространства. Но так как оно выполняется почти во всех приложениях и так как боль-

шинство интересных теорем содержат это условие в качестве одного из предположений, то представляется целесообразным включить его в число аксиом. [Теорема 1.12 показывает, что если выполняются (а) и (б), то топология τ хаусдорфова.]

Непрерывность сложения по определению означает, что отображение

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

декартова произведения $X \times X$ в X непрерывно: если $x_i \in X$ для $i = 1, 2$ и V — окрестность точки $x_1 + x_2$, то должны существовать такие окрестности V_i точек x_i , что

$$V_1 + V_2 \subset V.$$

Аналогично условие непрерывности умножения на скаляры означает, что отображение

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$$

произведения $\Phi \times X$ в X непрерывно: если $x \in X$, α — скаляр и V — окрестность вектора αx , то для некоторого $r > 0$ и некоторой окрестности W точки x выполняется включение $\beta W \subset V$ всякий раз, когда $|\beta - \alpha| < r$.

Подмножество E топологического векторного пространства называется *ограниченным*, если для каждой окрестности нуля V в X найдется такое число $s > 0$, что $E \subset tV$ при всех $t > s$.

1.7. Инвариантность. Пусть X — топологическое векторное пространство. Сопоставим каждому вектору $a \in X$ оператор сдвига T_a , а каждому скаляру $\lambda \neq 0$ — оператор умножения M_λ , определив их формулами

$$T_a(x) = a + x, \quad M_\lambda(x) = \lambda x \quad (x \in X).$$

Следующее простое предложение весьма важно:

Предложение. *Отображения T_a и M_λ являются гомеоморфизмами X на X .*

Доказательство. Из аксиом векторного пространства следует, что T_a и M_λ — взаимно однозначные отображения X на X и что обратными к ним служат соответственно отображения T_{-a} и $M_{1/\lambda}$. Из условий непрерывности операций векторного пространства вытекает, что эти четыре отображения непрерывны. Следовательно, каждое из них является гомеоморфизмом (т. е. непрерывным отображением, обратное к которому тоже непрерывно). ■

Одно из следствий этого предложения состоит в том, что всякая векторная топология τ *инвариантна относительно сдвигов* (или, для краткости, просто *инвариантна*): множество $E \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда все его сдвиги $a + E$ являются открытыми множествами. Таким образом, τ полностью определяется любой локальной базой.

Если речь идет о векторном пространстве, то термин *локальная база* всегда будет означать локальную базу в точке 0. Таким образом, локальная база топологического векторного пространства X — это такое семейство $\mathcal{B}$ окрестностей нуля, что любая окрестность нуля содержит некоторую окрестность, принадлежащую $\mathcal{B}$. Открытыми множествами в X являются те и только те множества, которые представляются в виде объединений сдвигов окрестностей из $\mathcal{B}$.

Метрику d на векторном пространстве X будем называть *инвариантной*, если

$$d(x+z, y+z) = d(x, y)$$

для всех x, y, z из X .

1.8. Типы топологических векторных пространств. В следующих определениях X всегда обозначает топологическое векторное пространство с топологией τ :

(а) X *локально выпукло*, если существует локальная база $\mathcal{B}$, состоящая из выпуклых окрестностей.

(b) X *локально ограничено*, если существует ограниченная окрестность нуля.

(с) X *локально компактно*, если существует окрестность нуля, замыкание которой компактно.

(d) X *метризуемо*, если топология τ совместима с некоторой метрикой.

(е) X является *F-пространством*, если его топология τ порождается некоторой полной инвариантной метрикой d (ср. п. 1.25).

(f) X называется *пространством Фреше*, если оно является локально выпуклым *F-пространством*.

(g) X называется *нормируемым*, если в нем существует такая норма, что индуцированная ею метрика совместима с топологией τ .

(h) *Нормированные пространства и банаховы пространства* уже были определены (п. 1.2).

(i) X обладает *свойством Гейне—Бореля*, если каждое замкнутое ограниченное подмножество в X компактно.

Терминология, которой мы придерживаемся в определениях (е) и (f), не является общепринятой: в некоторых руководствах требование локальной выпуклости не включается в определение пространства Фреше, тогда как в других термин «*F-пространство*» употребляется для обозначения пространств, которые мы назвали пространствами Фреше.

1.9. Вот перечень некоторых связей между введенными выше свойствами топологического векторного пространства X .

(а) Если X локально ограничено, то оно обладает счетной локальной базой (часть (с) теоремы 1.15).

(b) X метризуемо тогда и только тогда, когда оно обладает счетной локальной базой (теорема 1.24).

(с) X нормируемо тогда и только тогда, когда оно локально выпукло и локально ограничено (теорема 1.39).

(d) X конечномерно тогда и только тогда, когда оно локально компактно (теоремы 1.21 и 1.22).

(е) Если локально ограниченное пространство X обладает свойством Гейне—Бореля, то оно конечномерно (теорема 1.23).

Пространства $H(\Omega)$ и C_K^∞ , упоминавшиеся в п. 1.3, являются бесконечномерными пространствами Фреше, обладающими свойством Гейне—Бореля (п. 1.45, 1.46). Поэтому они не являются локально ограниченными и, следовательно, не нормируемы; это показывает также, что обращение утверждения (а) ложно.

С другой стороны, существуют локально ограниченные F -пространства, которые не являются локально выпуклыми (п. 1.47).

Свойства отделимости

1.10. Теорема. *Предположим, что K и C — подмножества топологического векторного пространства X , причем K компактно, C замкнуто и $K \cap C = \emptyset$. Тогда существует такая окрестность нуля V , что*

$$(K+V) \cap (C+V) = \emptyset.$$

Отметим, что $K+V$ является объединением сдвигов $x+V$ окрестности V ($x \in K$), и, значит, $K+V$ — открытое множество, содержащее K . Таким образом, из теоремы следует существование непересекающихся открытых множеств, содержащих соответственно K и C .

Доказательство. Мы начнем с доказательства следующего утверждения, которое будет полезно и в других случаях:

Для всякой окрестности нуля W в X найдется такая окрестность нуля U , которая симметрична (в том смысле, что $U = -U$) и удовлетворяет условию $U+U \subset W$.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что из равенства $0+0=0$ и непрерывности сложения следует существование таких окрестностей нуля V_1, V_2 , что $V_1+V_2 \subset W$. Полагая

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2),$$

получаем окрестность нуля U , обладающую нужными свойствами.

Применяя доказанное утверждение к U вместо W , получим новую симметричную окрестность нуля U , для которой

$$U+U+U+U \subset W.$$

Ясно, что этот процесс можно продолжить.

Если $K = \emptyset$, то $K + V = \emptyset$ и утверждение теоремы тривиально. Предположим поэтому, что $K \neq \emptyset$, и рассмотрим некоторую точку $x \in K$. Так как замкнутое множество C не содержит x и так как топология в X инвариантна относительно сдвигов, то из доказанного выше утверждения следует существование такой симметричной окрестности нуля V_x , что $x + V_x + V_x + V_x$ не пересекается с C ; при этом из симметричности V_x следует, что

$$(1) \quad (x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset.$$

Поскольку K компактно, в нем найдется такое конечное множество точек $x_1, \dots, x_n$, что

$$K \subset (x_1 + V_{x_1}) \cup \dots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Положим $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$. Тогда

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}),$$

а в силу (1) ни одно из множеств $x_i + V_{x_i} + V_{x_i}$ не пересекается с $C + V$. ■

Так как множество $C + V$ открыто, то верно даже, что замыкание множества $K + V$ не пересекается с $C + V$; в частности, замыкание $K + V$ не пересекается с C . Значительный интерес представляет следующий частный случай этого утверждения, получающийся при $K = \{0\}$.

1.11. Теорема. Если $\mathcal{B}$ — локальная база топологического векторного пространства X , то каждая из входящих в нее окрестностей нуля содержит замыкание некоторой другой окрестности нуля из $\mathcal{B}$.

До сих пор мы не пользовались предположением, что каждая точка пространства X является замкнутым множеством. Теперь мы воспользуемся этим и применим теорему 1.10 к паре различных точек вместо K и C . В результате получим, что эти точки имеют непересекающиеся окрестности. Иными словами, выполняется аксиома отделимости Хаусдорфа:

1.12. Теорема. Каждое топологическое векторное пространство является хаусдорфовым.

Теперь мы установим некоторые простые свойства операций замыкания и взятия внутренней в топологическом векторном пространстве. По поводу обозначений $\bar{E}$ и E° см. п.1.5. Отметим, что точка p принадлежит $\bar{E}$ тогда и только тогда, когда всякая ее окрестность пересекается с E .

1.13. Теорема. Пусть X — топологическое векторное пространство.

(а) Если $A \subset X$, то $\bar{A} = \bigcap (A + V)$, где V пробегает все окрестности нуля.

(б) Если $A \subset X$ и $B \subset X$, то $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A + B}$.

(с) Если Y — подпространство пространства X , то $\bar{Y}$ тоже подпространство.

(d) Если C — выпуклое подмножество в X , то $\bar{C}$ и C° тоже выпуклы.

(е) Если B — уравновешенное подмножество в X , то $\bar{B}$ тоже уравновешено; если при этом $0 \in B^\circ$, то B° уравновешено.

(f) Если E — ограниченное подмножество в X , то $\bar{E}$ тоже ограничено.

Доказательство. (а) $x \in \bar{A}$ тогда и только тогда, когда $(x + V) \cap A \neq \emptyset$ для любой окрестности нуля V , а это возможно лишь в том случае, когда $x \in A - V$ для любой окрестности нуля V . Так как $-V$ является окрестностью нуля тогда и только тогда, когда V — окрестность нуля, то утверждение доказано.

(б) Пусть $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$ и W — окрестность точки $a + b$. Существуют такие окрестности W_1 и W_2 точек a и b соответственно, что $W_1 + W_2 \subset W$. Так как $a \in \bar{A}$ и $b \in \bar{B}$, то найдутся точки $x \in A \cap W_1$ и $y \in B \cap W_2$. Тогда вектор $x + y$ принадлежит пересечению $(A + B) \cap W$, так что оно непусто. Следовательно, $a + b \in \overline{A + B}$.

(с) Пусть α и β — скаляры. В силу предложения из п.1.7 при $\alpha \neq 0$ имеем $\alpha \bar{Y} = \overline{\alpha Y}$; при $\alpha = 0$ эти два множества также, очевидно, равны. Поэтому из (b) следует, что

$$\alpha \bar{Y} + \beta \bar{Y} = \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \bar{Y};$$

для получения последнего включения мы воспользовались тем, что Y по условию является подпространством.

Доказательства выпуклости замыкания выпуклого множества и уравновешенности замыкания уравновешенного множества так похожи на доказательство (с), что при доказательстве (d) и (е) мы их опустим.

(d) Так как $C^\circ \subset C$ и C выпукло, то

$$tC^\circ + (1-t)C^\circ \subset C$$

при $0 < t < 1$. Оба слагаемых в левой части являются открытыми множествами, поэтому их сумма тоже открыта. Поскольку всякое открытое подмножество множества C содержится в C° , отсюда следует выпуклость C° .

(е) Если $0 < |\alpha| \leq 1$, то $\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ$, поскольку отображение $x \rightarrow \alpha x$ является гомеоморфизмом. Следовательно, $\alpha B^\circ \subset \alpha B \subset B$, ибо B уравновешено. Но αB° открыто, так что $\alpha B^\circ \subset B^\circ$. Если B° содержит 0, то $\alpha B^\circ \subset B^\circ$ и при $\alpha = 0$.

(f) Пусть V — окрестность нуля. По теореме 1.11 найдется такая окрестность нуля W , что $\overline{W} \subset V$. Так как E ограничено, то $E \subset tW$ для всех достаточно больших положительных t . Для таких t имеем $\overline{E} \subset t\overline{W} \subset tV$. ■

1.14. Теорема. В топологическом векторном пространстве X

(а) каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля;

(б) каждая выпуклая окрестность нуля содержит уравновешенную выпуклую окрестность нуля.

Доказательство. (а) Пусть U — окрестность нуля в X . Так как умножение на скаляры непрерывно, то найдутся такое $\delta > 0$ и такая окрестность нуля V в X , что $\alpha V \subset U$ при $|\alpha| < \delta$. Пусть W — объединение всех таких множеств αV . Тогда W — уравновешенная окрестность нуля и $W \subset U$.

(б) Пусть U — выпуклая окрестность нуля в X . Положим $A = \bigcap \alpha U$, где α пробегает все скаляры, по модулю равные 1. Выберем окрестность W как в доказательстве (а). Поскольку W уравновешена, $\alpha^{-1}W = W$ при $|\alpha| = 1$; следовательно, $W \subset \alpha U$. Поэтому $W \subset A$, откуда следует, что внутренность A° множества A является окрестностью нуля. Ясно, что $A^\circ \subset U$. Будучи пересечением выпуклых множеств, A выпукло; следовательно, A° тоже выпукло. Чтобы доказать, что A° является искомой окрестностью, мы должны показать, что A° уравновешено; для этого достаточно установить, что A уравновешено. Выберем r и β так, что $0 \leq r \leq 1$, $|\beta| = 1$. Тогда

$$r\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U.$$

Так как αU — выпуклое множество, содержащее 0, то $r\alpha U \subset \alpha U$. Таким образом, $r\beta A \subset A$. ■

Теорему 1.14 можно сформулировать в терминах свойств локальной базы. Будем говорить, что локальная база $\mathcal{B}$ уравновешена, если ее элементы являются уравновешенными множествами; аналогично назовем локальную базу выпуклой, если она состоит из выпуклых множеств.

Следствие. (а) Каждое топологическое векторное пространство обладает уравновешенной локальной базой.

(б) Каждое локально выпуклое пространство обладает уравновешенной выпуклой локальной базой.

Напомним также, что для каждой из этих локальных баз справедлива теорема 1.11.

1.15. Теорема. Пусть V — окрестность нуля в топологическом векторном пространстве X .

(а) Если $0 < r_1 < r_2 < \dots$ и $r_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

(б) Каждое компактное подмножество K пространства X ограничено.

(с) Если окрестность V ограничена и $\delta_1 > \delta_2 > \dots$, $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то семейство

$$\{\delta_n V: n = 1, 2, \dots\}$$

является локальной базой пространства X .

Доказательство. (а) Фиксируем точку $x \in X$. Так как отображение $\alpha \rightarrow \alpha x$ поля скаляров в X непрерывно, то множество всех тех α , для которых $\alpha x \in V$, открыто; оно содержит 0 и потому содержит $1/r_n$ для всех достаточно больших n . Таким образом, $(1/r_n)x \in V$, или $x \in r_n V$, при больших n .

(б) Пусть W — такая уравновешенная окрестность нуля, что $W \subset V$. Согласно (а),

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nW.$$

Поскольку K компактно, найдутся такие целые $n_1 < \dots < n_s$, что

$$K \subset n_1 W \cup n_2 W \cup \dots \cup n_s W = n_s W$$

(последнее равенство справедливо ввиду уравновешенности W). Отсюда следует, что $K \subset tW \subset tV$ при $t > n_s$.

(с) Пусть U — окрестность нуля в X . Если окрестность V ограничена, то найдется такое $s > 0$, что $V \subset tU$ при всех $t > s$. Таким образом, если n настолько велико, что $s\delta_n < 1$, то $V \subset (1/\delta_n)U$. Поэтому U фактически содержит все множества $\delta_n V$, кроме, быть может, конечного числа. ■

Линейные отображения

1.16. Определения. Если X и Y — множества, запись

$$f: X \rightarrow Y$$

будет означать, что f является отображением X в Y . Если $A \subset X$ и $B \subset Y$, то образ $f(A)$ множества A и обратный образ, или прообраз, $f^{-1}(B)$ множества B определяются условиями

$$f(A) = \{f(x): x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x: f(x) \in B\}.$$

Предположим теперь, что X и Y — векторные пространства над одним и тем же полем скаляров. Отображение $\Lambda: X \rightarrow Y$ называется линейным, если

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y$$

для всех x и y из X и всех скаляров α и β . Заметим, что если отображение Λ линейно, то вместо $\Lambda(x)$ часто пишут Λx .

Линейное отображение пространства X в его поле скаляров называется *линейным функционалом*.

Например, операторы умножения M_λ из п.1.7 линейны, а операторы сдвига T_a таковыми не являются, за исключением случая $a=0$.

Приведем некоторые свойства линейных отображений $\Lambda: X \rightarrow Y$; доказательства настолько просты, что мы их опускаем; предполагается, что $A \subset X$ и $B \subset Y$.

(a) $\Lambda 0 = 0$.

(b) Если A — подпространство (или выпуклое множество, или уравновешенное множество), то же самое верно и для $\Lambda(A)$.

(c) Если B — подпространство (или выпуклое множество, или уравновешенное множество), то же самое верно и для $\Lambda^{-1}(B)$.

(d) В частности, множество

$$\Lambda^{-1}(\{0\}) = \{x \in X: \Lambda x = 0\} = \mathcal{N}(\Lambda)$$

является подпространством пространства X и называется *нулевым пространством*, или *ядром*, отображения Λ .

Обратимся теперь к свойствам непрерывности линейных отображений.

1.17. Теорема. Пусть X и Y — топологические векторные пространства. Если линейное отображение $\Lambda: X \rightarrow Y$ непрерывно в точке 0, то оно непрерывно. В действительности Λ даже равномерно непрерывно в следующем смысле: для каждой окрестности нуля W в Y найдется такая окрестность нуля V в X , что

$$\text{из } y-x \in V \text{ следует } \Lambda y - \Lambda x \in W.$$

Доказательство. Если окрестность W выбрана, то непрерывность Λ в точке 0 показывает, что $\Lambda V \subset W$ для некоторой окрестности нуля V . Если теперь $y-x \in V$, то из линейности Λ следует, что $\Lambda y - \Lambda x = \Lambda(y-x) \in W$. Таким образом, Λ отображает окрестность $x+V$ точки x в окрестность $\Lambda x + W$ точки Λx , а это означает, что Λ непрерывно в точке x . ■

1.18. Теорема. Пусть Λ — линейный функционал на топологическом векторном пространстве X . Допустим, что $\Lambda x \neq 0$ для некоторого $x \in X$. Тогда следующие четыре свойства эквивалентны:

(a) Λ непрерывен;

(b) ядро $\mathcal{N}(\Lambda)$ замкнуто;

(c) ядро $\mathcal{N}(\Lambda)$ не плотно в X ;

(d) функционал Λ ограничен в некоторой окрестности нуля V .

Доказательство. Так как $\mathcal{N}(\Lambda) = \Lambda^{-1}(\{0\})$, а $\{0\}$ — замкнутое подмножество поля скаляров Φ , то (а) влечет за собой (b). По предположению, $\mathcal{N}(\Lambda) \neq X$, так что из (b) следует (c).

Допустим, что выполнено (c), т. е. что дополнение к $\mathcal{N}(\Lambda)$ имеет непустую внутренность. По теореме 1.14

$$(1) \quad (x + V) \cap \mathcal{N}(\Lambda) = \emptyset$$

для некоторого $x \in X$ и некоторой уравновешенной окрестности нуля V . При этом ΛV — уравновешенное подмножество поля скаляров Φ , так что либо ΛV ограничено, и тогда справедливо (d), либо $\Lambda V = \Phi$. В последнем случае найдется такой вектор $y \in V$, что $\Lambda y = -\Lambda x$, откуда $x + y \in \mathcal{N}(\Lambda)$, а это противоречит (1). Поэтому (c) влечет за собой (d).

Наконец, если выполнено (d), то $|\Lambda x| < M$ для всех $x \in V$ и некоторого $M < \infty$. Если $r > 0$ и $W = (r/M)V$, то $|\Lambda x| < r$ для всех $x \in W$. Поэтому Λ непрерывен в точке 0. По теореме 1.17 отсюда следует (а). ■

Конечномерные пространства

1.19. Среди банаховых пространств простейшими являются $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ — стандартные n -мерные векторные пространства соответственно над $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$, нормированные при помощи обычной евклидовой метрики; если, скажем,

$$z = (z_1, \dots, z_n) \quad (z_i \in \mathbf{C})$$

— вектор в $\mathbf{C}^n$, то

$$\|z\| = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}.$$

В $\mathbf{C}^n$ можно ввести и другие нормы, например

$$\|z\| = |z_1| + \dots + |z_n| \quad \text{или} \quad \|z\| = \max(|z_i|: 1 \leq i \leq n).$$

Если $n > 1$, то этим нормам отвечают, конечно, другие метрики в $\mathbf{C}^n$; легко, однако, проверить, что они индуцируют в $\mathbf{C}^n$ одну и ту же топологию. В действительности можно утверждать большее. Если X — топологическое векторное пространство над $\mathbf{C}$ и $\dim X = n$, то каждый базис в X индуцирует изоморфизм между X и $\mathbf{C}^n$. В теореме 1.21 будет установлено, что этот изоморфизм обязательно является гомеоморфизмом. Иными словами, это означает, что естественная топология в $\mathbf{C}^n$ является единственной векторной топологией, возможной в комплексном n -мерном топологическом векторном пространстве.

Мы увидим также, что конечномерные подпространства всегда замкнуты.

Все сказанное выше остается справедливым при замене комплексных скаляров вещественными.

Мы начнем с леммы, которая далее будет перекрыта теоремами 1.21 и 1.22.

1.20. Лемма. Пусть Y — подпространство топологического векторного пространства X , локально компактное в индуцированной из X топологии. Тогда Y — замкнутое подпространство в X .

Доказательство. Существует такое компактное множество $K \subset Y$, внутренность которого (относительно Y) содержит 0. Поэтому найдется такая окрестность нуля U в X , что $U \cap Y \subset K$. Выберем симметричную окрестность нуля V в X , для которой $\bar{V} + \bar{V} \subset U$. Мы утверждаем, что для любого $x \in X$ множество

$$Q = Y \cap (x + \bar{V})$$

компактно (быть может, пусто).

Чтобы убедиться в этом, фиксируем точку $y_0 \in Q$. Для любого $y \in Q$

$$y - y_0 = (y - x) + (x - y_0) \in \bar{V} + \bar{V} \subset U.$$

Кроме того, $y - y_0 \in Y$, ибо Y — подпространство. Поэтому

$$y - y_0 \in U \cap Y \subset K,$$

откуда следует, что Q содержится в компактном множестве $y_0 + K$. В то же время Q является замкнутым подмножеством в Y , поскольку $x + \bar{V}$ замкнуто в X , а Y наследует свою топологию из X . Таким образом, Q является замкнутым подмножеством компактного множества и потому компактно.

Фиксируем теперь $x \in \bar{Y}$. Пусть $\mathcal{B}$ — совокупность всех таких открытых подмножеств W пространства X , для которых $0 \in W$ и $W \subset V$; сопоставим каждому $W \in \mathcal{B}$ множество

$$E_W = Y \cap (x + \bar{W}).$$

Поскольку $W \subset V$, каждое из множеств E_W компактно. Так как $x \in \bar{Y}$, то все они непусты. Пересечение конечного числа множеств из $\mathcal{B}$ тоже принадлежит $\mathcal{B}$; отсюда следует, что $\{E_W: W \in \mathcal{B}\}$ является центрированной системой компактных множеств (т. е. такой системой, любая конечная подсистема которой имеет непустое пересечение). Поэтому существует $z \in \bigcap E_W$. Эта точка z принадлежит Y . С другой стороны, $z \in x + \bar{W}$ для любого $W \in \mathcal{B}$. Поэтому $z = x$ (теорема 1.12). Следовательно, $x \in Y$. Мы доказали, что $\bar{Y} = Y$, т. е. Y замкнуто. ■

1.21. Теорема. Пусть X — комплексное топологическое векторное пространство, Y — его подпространство, n — целое положительное число и $\dim Y = n$. Тогда

(а) каждый изоморфизм пространства $\mathbb{C}^n$ на Y является гомеоморфизмом;

(b) Y замкнуто.

Конечно, термин «гомеоморфизм» относится, с одной стороны, к евклидовой топологии пространства $\mathbb{C}^n$ и, с другой стороны, к топологии подпространства Y , которую оно наследует от X . Так как $\mathbb{C}^n$ локально компактно, то лемма 1.20 показывает, что (b) следует из (a). Данное ниже доказательство пригодно также для получения аналогичной теоремы в вещественном случае.

Доказательство. Пусть P_n обозначает утверждение теоремы. Докажем сначала справедливость P_1 . Пусть $\Lambda: \mathbb{C} \rightarrow Y$ — изоморфизм (т. е. взаимно однозначное линейное отображение $\mathbb{C}$ на Y). Положим $u = \Lambda 1$. Тогда $\Lambda \alpha = \alpha u$, и из непрерывности операций векторного пространства в Y следует, что Λ непрерывно. Заметим, что Λ^{-1} — линейный функционал на Y с ядром $\{0\}$, которое является замкнутым множеством. По теореме 1.18 этот функционал непрерывен. Справедливость P_1 доказана.

Предположим далее, что $n > 1$ и что справедливость P_{n-1} уже установлена. Пусть $\Lambda: \mathbb{C}^n \rightarrow Y$ — изоморфизм. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^n$, т. е. k -я координата вектора e_k равна 1, а остальные его координаты равны 0. Положим $u_k = \Lambda e_k$ для $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n,$$

и из непрерывности операций векторного пространства в Y снова следует непрерывность Λ . Поскольку Λ — изоморфизм, $\{u_1, \dots, u_n\}$ — базис в пространстве Y . Следовательно, существуют такие линейные функционалы $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ на Y , что каждый вектор $x \in Y$ единственным способом представим в виде

$$x = \gamma_1(x) u_1 + \dots + \gamma_n(x) u_n.$$

Ядро функционала γ_i является подпространством в Y размерности $n-1$; в силу предположения о справедливости P_{n-1} оно замкнуто в Y . Следовательно, по теореме 1.18 функционал γ_i непрерывен. Поскольку

$$\Lambda^{-1}x = (\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)) \quad (x \in Y),$$

отсюда вытекает непрерывность Λ^{-1} . Поэтому справедливо P_n . ■

1.22. Теорема. Каждое локально компактное топологическое векторное пространство X конечномерно.

Доказательство. Пусть V — окрестность нуля с компактным замыканием в X . По теореме 1.15 она ограничена, и множества $2^{-n}V$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) образуют локальную базу в X .

Из компактности $\bar{V}$ следует существование таких $x_1, \dots, x_m$ в X , что

$$\bar{V} \subset \left(x_1 + \frac{1}{2}V\right) \cup \dots \cup \left(x_m + \frac{1}{2}V\right).$$

Пусть Y — векторное подпространство в X , натянутое на векторы $x_1, \dots, x_m$. Тогда $\dim Y \leq m$. По теореме 1.21 подпространство Y замкнуто в X .

Так как $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ и $\lambda Y = Y$ для любого скаляра $\lambda \neq 0$, то

$$\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V,$$

откуда

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Продолжая действовать таким же образом, мы увидим, что

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + 2^{-n}V).$$

Поскольку $\{2^{-n}V\}$ — локальная база, из утверждения (а) теоремы 1.13 следует, что $V \subset \bar{Y}$. Но $\bar{Y} = Y$. Таким образом, $V \subset Y$, откуда $kV \subset Y$ для $k=1, 2, 3, \dots$. Поэтому, согласно утверждению (а) теоремы 1.15, $Y = X$; следовательно, $\dim X \leq m$. ■

1.23. Теорема. Если X — локально ограниченное топологическое векторное пространство, обладающее свойством Гейне — Бореля, то оно конечномерно.

Доказательство. По предположению в X существует ограниченная окрестность нуля V . Утверждение (f) теоремы 1.13 показывает, что $\bar{V}$ также ограничено. По свойству Гейне — Бореля $\bar{V}$ компактно. Это означает, что пространство X локально компактно и потому, согласно теореме 1.22, конечномерно.

Метризация

Напомним, что топология τ в множестве X называется *метризуемой*, если в X существует метрика d , совместимая с τ . В этом случае шары радиусов $1/n$ с центром в точке x образуют локальную базу в этой точке. Это дает необходимое условие метризуемости, которое для топологических векторных пространств оказывается также и достаточным.

1.24. Теорема. Если X — топологическое векторное пространство со счетной локальной базой, то в нем существует такая метрика d , что

- (а) d совместима с топологией пространства X ;
 (б) открытые шары с центром в точке 0 уравновешены;
 (с) d инвариантна, т. е. $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ для всех $x, y, z \in X$.

Если пространство X еще и локально выпукло, то метрику d можно выбрать так, чтобы, кроме условий (а), (б), (с), она удовлетворяла еще условию

- (d) все открытые шары выпуклы.

Доказательство. По теореме 1.14 пространство X обладает такой уравновешенной локальной базой $\{V_n\}$, что

$$(1) \quad V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

если X локально выпукло, эта локальная база может быть выбрана так, чтобы каждое из множеств V_n также было выпуклым.

Пусть D — множество всех рациональных чисел r , представимых в виде

$$(2) \quad r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) 2^{-n},$$

где «двоичный разряд» $c_n(r)$ равен 0 или 1, причем допускается лишь конечное число «разрядов», отличных от 0¹⁾. Таким образом, каждое $r \in D$ удовлетворяет неравенствам $0 \leq r < 1$.

Положим $A(r) = X$ при $r \geq 1$, а для $r \in D$ положим

$$(3) \quad A(r) = c_1(r) V_1 + c_2(r) V_2 + c_3(r) V_3 + \dots$$

Заметим, что каждая из этих сумм в действительности конечна. Положим

$$(4) \quad f(x) = \inf \{r: x \in A(r)\} \quad (x \in X)$$

и

$$(5) \quad d(x, y) = f(x - y) \quad (x \in X, y \in X).$$

Доказательство того, что d обладает нужными свойствами, основывается на включении

$$(6) \quad A(r) + A(s) \subset A(r+s) \quad (r \in D, s \in D).$$

Прежде чем доказывать его, продемонстрируем, как из него выводится справедливость теоремы. Поскольку каждое из множеств $A(s)$ содержит 0, из (6) следует, что

$$(7) \quad A(r) \subset A(r) + A(t-r) \subset A(t) \quad \text{при } r < t.$$

¹⁾ Иными словами, D состоит из всех двоично-рациональных чисел r , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq r < 1$; каждое такое число r допускает единственную запись в виде конечной двоичной дроби, и коэффициенты $c_n(r)$ в представлении (2) суть последовательные двоичные знаки этой дроби, стоящие после запятой. — *Прим. перев.*

Таким образом, семейство множеств $\{A(r)\}$ линейно упорядочено относительно теоретико-множественного включения. Мы утверждаем, что

$$(8) \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad (x \in X, y \in X).$$

При доказательстве (8) мы можем, конечно, считать, что правая часть < 1 . Фиксируем $\varepsilon > 0$. В D найдутся такие r и s , что

$$f(x) < r, \quad f(y) < s, \quad r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon.$$

Таким образом, $x \in A(r)$, $y \in A(s)$ и из (6) следует, что $x + y \in A(r + s)$. Отсюда получаем (8), поскольку

$$f(x+y) \leq r + s < f(x) + f(y) + \varepsilon,$$

а ε произвольно.

Так как каждое из множеств $A(r)$ уравновешено, то $f(x) = f(-x)$. Ясно, что $f(0) = 0$. Если $x \neq 0$, то $x \notin V_n = A(2^{-n})$ для некоторого n , так что $f(x) \geq 2^{-n} > 0$.

Эти свойства функции f показывают, что формула (5) определяет инвариантную относительно сдвигов метрику d на X . Открытые шары с центрами в точке 0 являются открытыми множествами:

$$(9) \quad B_\delta(0) = \{x: f(x) < \delta\} = \bigcup_{r < \delta} A(r).$$

Если $\delta < 2^{-n}$, то $B_\delta(0) \subset V_n$. Поэтому $\{B_\delta(0)\}$ является локальной базой топологии пространства X . Это доказывает справедливость (а). Так как все $A(r)$ уравновешены, то такими же являются и все $B_\delta(0)$. Если каждая из окрестностей V_n выпукла, то все $A(r)$ выпуклы, и из (7) следует выпуклость всех шаров $B_\delta(0)$, а потому и всех их сдвигов.

Доказательство формулы (6) проведем по индукции. Пусть P_N обозначает следующее утверждение:

если $r + s < 1$ и $c_n(r) = c_n(s) = 0$ для всех $n > N$, то

$$(10) \quad A(r) + A(s) \subset A(r + s).$$

Утверждение P_1 проверяется непосредственно. Предположим, что P_{N-1} справедливо для некоторого $N > 1$. Пусть $r \in D$, $s \in D$, $r + s < 1$ и $c_n(r) = c_n(s) = 0$ при $n > N$; определим r' и s' условиями

$$(11) \quad r = r' + c_N(r) 2^{-N}, \quad s = s' + c_N(s) 2^{-N}.$$

Тогда

$$(12) \quad A(r) = A(r') + c_N(r) V_N, \quad A(s) = A(s') + c_N(s) V_N,$$

и $A(r') + A(s') \subset A(r' + s')$ в силу P_{N-1} . Следовательно,

$$(13) \quad A(r) + A(s) \subset A(r' + s') + c_N(r) V_N + c_N(s) V_N.$$

Если $c_N(r) = c_N(s) = 0$, то $r = r'$, $s = s'$ и (13) превращается в (10). Если $c_N(r) = 0$ и $c_N(s) = 1$, то правая часть (13) равна

$$A(r' + s') + V_N = A(r' + s' + 2^{-N}) = A(r + s),$$

так что (10) опять справедливо. Случай $c_N(r) = 1$, $c_N(s) = 0$ разбирается тем же способом. Если $c_N(r) = c_N(s) = 1$, то правая часть (13) равна

$$\begin{aligned} A(r' + s') + V_N + V_N &\subset A(r' + s') + V_{N-1} = \\ &= A(r' + s') + A(2^{-N+1}) \subset A(r' + s' + 2^{-N+1}) = A(r + s) \end{aligned}$$

(последнее включение основано на P_{N-1}).

Таким образом, P_{N-1} влечет за собой P_N . Следовательно, (6) верно, и доказательство закончено. ■

1.25. Последовательности Коши. (а) Пусть d — метрика на множестве X . Последовательность $\{x_n\}$ в X называется *последовательностью Коши*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N , что $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ всякий раз, когда $m > N$ и $n > N$. Если каждая последовательность Коши сходится в X к некоторой точке, то d называется *полной метрикой* на X .

(б) Пусть τ — топология топологического векторного пространства X . Понятие последовательности Коши в этой ситуации можно ввести, не обращаясь к какой бы то ни было метрике. Действительно, фиксируем некоторую локальную базу $\mathcal{B}$ топологии τ и назовем последовательность $\{x_n\}$ в X *последовательностью Коши*, если для каждой окрестности нуля $V \in \mathcal{B}$ найдется такое N , что $x_n - x_m \in V$ при $n > N$ и $m > N$.

Ясно, что любая другая локальная база топологии τ приводит к тому же самому классу последовательностей Коши.

(с) Предположим теперь, что X — топологическое векторное пространство, топология τ которого совместима с *инвариантной метрикой* d . Будем временно пользоваться выражениями « d -последовательность Коши» и « τ -последовательность Коши» для последовательностей, определенных соответственно в (а) и (б). Поскольку

$$d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0)$$

и d -шары с центрами в начале образуют локальную базу топологии τ , мы приходим к такому заключению:

Последовательность $\{x_n\}$ в X является d -последовательностью Коши тогда и только тогда, когда она является τ -последовательностью Коши.

Итак, любые две инвариантные метрики на X , совместимые с топологией τ , определяют один и тот же запас последовательностей Коши. Ясно также, что таким метрикам соответствует один и тот же класс сходящихся последовательностей (а именно

класс всех τ -сходящихся последовательностей). Эти замечания устанавливают справедливость следующей теоремы.

1.26. Теорема. Если d_1 и d_2 — инвариантные метрики на векторном пространстве X , индуцирующие в X одну и ту же топологию, то

(а) d_1 и d_2 определяют один и тот же запас последовательностей Коши;

(б) метрика d_1 полна тогда и только тогда, когда полна метрика d_2 .

Отметим, что условие инвариантности существенно (упр. 12).

Следующая теорема является аналогом леммы 1.20, но условие локальной компактности заменено в ней условием полноты. Отметим также сходство доказательств этих двух результатов.

1.27. Теорема. Предположим, что Y — подпространство топологического векторного пространства X и что Y является F -пространством в топологии, наследуемой им от X . Тогда Y замкнуто в X .

Доказательство. Выберем инвариантную метрику d на подпространстве Y , совместимую с его топологией. Положим

$$B_{1/n} = \left\{ y \in Y : d(y, 0) < \frac{1}{n} \right\},$$

и пусть U_n — такая окрестность нуля в X , что $Y \cap U_n = B_{1/n}$; выберем такие симметричные окрестности нуля V_n в X , что $V_n + V_n \subset U_n$.

Допустим, что $x \in \bar{Y}$, и положим

$$E_n = Y \cap (x + V_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Если $y_1 \in E_n$ и $y_2 \in E_n$, то $y_1 - y_2$ лежит как в Y , так и в $V_n + V_n \subset U_n$, а потому и в $B_{1/n}$. Следовательно, диаметры множеств E_n стремятся к 0. Поскольку каждое из них непусто, а Y полно, отсюда следует, что Y -замыкания множеств E_n имеют ровно одну общую точку y_0 .

Пусть W — окрестность нуля в X ; положим

$$F_n = Y \cap (x + W \cap V_n).$$

Предыдущее рассуждение показывает, что Y -замыкания этих множеств F_n имеют единственную общую точку y_W . Но $F_n \subset E_n$, поэтому $y_W = y_0$. Так как $F_n \subset x + W$, то отсюда следует, что y_0 принадлежит X -замыканию множества $x + W$ для любой окрестности нуля W . Поэтому $y_0 = x$. Таким образом, $x \in Y$. Это показывает, что $\bar{Y} = Y$. ■

Иногда нам будут полезны следующие простые факты:

1.28. Теорема. (а) Если d — инвариантная относительно сдвигов метрика на векторном пространстве X , то для любого $x \in X$ и любого натурального n

$$d(nx, 0) \leq nd(x, 0).$$

(б) Если $\{x_n\}$ — сходящаяся к 0 последовательность точек метризуемого топологического векторного пространства X , то существуют такие положительные скаляры γ_n , что $\gamma_n \rightarrow \infty$ и $\gamma_n x_n \rightarrow 0$.

Доказательство. Утверждение (а) вытекает из неравенства

$$d(nx, 0) \leq \sum_{k=1}^n d(kx, (k-1)x) = nd(x, 0).$$

Чтобы доказать (б), введем в X инвариантную метрику d , совместимую с топологией¹⁾. Так как $d(x_n, 0) \rightarrow 0$, то найдется такая возрастающая последовательность положительных целых чисел n_k , что $d(x_n, 0) < k^{-2}$ при $n \geq n_k$. Положим $\gamma_n = 1$ при $n < n_1$ и $\gamma_n = k$ при $n_k \leq n < n_{k+1}$. Если n удовлетворяет последним неравенствам, то

$$d(\gamma_n x_n, 0) = d(kx_n, 0) \leq kd(x_n, 0) < k^{-1}.$$

Следовательно, $\gamma_n x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. ■

Ограниченность и непрерывность

1.29. Ограниченные множества. Понятие *ограниченного подмножества топологического векторного пространства* X было введено в п.1.6 и с тех пор уже несколько раз встречалось в тексте. Если X метризуемо, то возможно недоразумение, поскольку для подмножеств метрических пространств имеется другое хорошо известное определение ограниченности:

Пусть d — метрика на множестве X ; подмножество $E \subset X$ называется d -ограниченным, если существует такое число $M < \infty$, что $d(x, y) \leq M$ для всех x и y из E .

Если d — совместимая с топологией метрика в топологическом векторном пространстве X , то понятия ограниченности и d -ограниченности могут не совпадать, даже если метрика d инвариантна. Например, если d — метрика, построенная в теореме 1.24, то само пространство X является d -ограниченным множеством, однако, как мы вскоре увидим, X не может быть ограниченным, за исключением случая, когда $X = \{0\}$. Если X — нормированное пространство и d — метрика, индуцированная нормой, то понятия ограниченности и d -ограниченности совпадают; но если вместо d взять $d_1 = d/(1+d)$ (это инвариантная метрика, индуцирующая

¹⁾ Существование такой метрики следует из теоремы 1.24. — Прим. перев.

ту же самую топологию), то d_1 -ограниченность не эквивалентна ограниченности при $X \neq \{0\}$.

Когда речь пойдет об ограниченных подмножествах топологического векторного пространства, *ограниченность всегда будет пониматься в смысле определения п. 1.6*: множество E ограничено, если для любой окрестности нуля V включение $E \subset tV$ выполняется для всех достаточно больших положительных t .

Мы уже видели (теорема 1.15), что *компактные множества ограничены*. Чтобы указать другой тип примеров, докажем, что *последовательность Коши ограничена* (следовательно, *сходящаяся последовательность ограничена*). Действительно, пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши в X , а V и W — такие уравновешенные окрестности нуля, что $V+V \subset W$. Тогда (см. п. 1.25 (b)) существует такое N , что $x_n \in x_N + V$ для всех $n \geq N$. Выберем такое $s > 1$, что $x_N \in sV$. Тогда

$$x_n \in sV + V \subset sV + sV \subset sW \quad (n \geq N).$$

Следовательно, если t достаточно велико, то $x_n \in tW$ для всех $n \geq 1$.

Напомним, что замыкание ограниченного множества тоже ограничено (теорема 1.13).

С другой стороны, если $x \neq 0$ и $E = \{nx : n = 1, 2, \dots\}$, то E не ограничено; действительно, существует окрестность нуля V , не содержащая точки x ; при этом nx не лежит в nV , откуда следует, что E не содержится ни в одном из множеств nV .

Следовательно, *никакое подпространство пространства X , кроме $\{0\}$, не может быть ограниченным*.

Следующая теорема характеризует ограниченные множества на языке последовательностей.

1.30. Теорема. *Следующие два свойства подмножества E топологического векторного пространства эквивалентны:*

- (a) E ограничено;
- (b) *если $\{x_n\}$ — любая последовательность точек из E , а $\{\alpha_n\}$ — такая последовательность скаляров, что $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\alpha_n x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Допустим, что E ограничено. Пусть V — уравновешенная окрестность нуля в X . Тогда $E \subset tV$ для некоторого $t > 0$. Если $\alpha_n \rightarrow 0$, то найдется такое N , что $|\alpha_n|t < 1$ при $n > N$. Пусть $x_n \in E$; так как $t^{-1}E \subset V$, а окрестность V уравновешена, то $\alpha_n x_n \in V$ для всех $n > N$. Таким образом, $\alpha_n x_n \rightarrow 0$.

Если же E не ограничено, то найдутся такая окрестность нуля V и такая последовательность скаляров $r_n \rightarrow \infty$, что ни одно из множеств $r_n V$ не содержит E . Выберем такие точки

$x_n \in E$, что $x_n \notin r_n V$. Тогда ни одна из точек $r_n^{-1}x_n$ не принадлежит V , так что последовательность $\{r_n^{-1}x_n\}$ не сходится к 0. ■

1.31. Ограниченные линейные отображения. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, а $\Lambda: X \rightarrow Y$ — линейное отображение. Тогда Λ называется *ограниченным*, если оно переводит ограниченные множества в ограниченные множества, т. е. если $\Lambda(E)$ является ограниченным подмножеством пространства Y для любого ограниченного множества $E \subset X$.

Это определение не согласуется с обычным определением ограниченной функции как функции, область значений которой является ограниченным множеством. Никакая линейная функция (кроме тождественного 0) не может быть ограниченной в последнем смысле. Поэтому в дальнейшем, если речь пойдет об ограниченности линейных отображений (или преобразований), всегда будет подразумеваться приведенное выше определение этого свойства в терминах образов ограниченных множеств.

1.32. Теорема. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, а $\Lambda: X \rightarrow Y$ — линейное отображение. Рассмотрим следующие свойства, которыми может обладать (или не обладать) отображение Λ :

- (а) Λ непрерывно;
- (б) Λ ограничено;
- (с) если $x_n \rightarrow 0$, то множество $\{\Lambda x_n: n = 1, 2, \dots\}$ ограничено;
- (д) если $x_n \rightarrow 0$, то $\Lambda x_n \rightarrow 0$.

Справедливы импликации (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (с). Если пространство X метризуемо, то выполняются также импликации (с) $\Rightarrow$ (д) $\Rightarrow$ (а), так что в этом случае все четыре свойства эквивалентны.

В упражнении 13 приведен пример, показывающий, что в общем случае из (б) не следует (а).

Доказательство. Допустим, что выполняется (а). Пусть E — ограниченное подмножество в X , а W — окрестность нуля в Y . Так как Λ непрерывно (и $\Lambda 0 = 0$), то в X найдется такая окрестность нуля V , что $\Lambda(V) \subset W$. Поскольку E ограничено, $E \subset tV$ для всех достаточно больших t , так что

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW.$$

Это показывает, что $\Lambda(E)$ — ограниченное множество в Y .

Таким образом, (а) $\Rightarrow$ (б). Так как сходящиеся последовательности ограничены, то (б) $\Rightarrow$ (с).

Предположим теперь, что X метризуемо и что Λ обладает свойством (с). Пусть $x_n \rightarrow 0$. По теореме 1.28 найдется такая последовательность положительных скаляров $\gamma_n \rightarrow \infty$, что $\gamma_n x_n \rightarrow 0$. Тогда $\{\Lambda(\gamma_n x_n)\}$ — ограниченное множество в Y , и из теоремы

1.30 следует, что

$$\Lambda x_n = \gamma_n^{-1} \Lambda (\gamma_n x_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Наконец, предположим, что (а) неверно. Тогда в Y найдется такая окрестность нуля W , что $\Lambda^{-1}(W)$ не содержит никакой окрестности нуля в X . Поэтому если X имеет счетную локальную базу, то в X найдется такая последовательность $\{x_n\}$, что $x_n \rightarrow 0$, но $\Lambda x_n \notin W$. Таким образом, (d) не выполняется.

Полунормы и локальная выпуклость

1.33. Определения. Полунормой на векторном пространстве X называется такая вещественная функция p на X , что

$$(a) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y);$$

$$(b) \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

для всех x и y из X и всех скаляров α .

Свойство (а) называется *полуаддитивностью*. В теореме 1.34 будет показано, что если полунорма p удовлетворяет условию

$$(c) \quad p(x) \neq 0 \quad \text{при } x \neq 0,$$

то она является нормой.

Семейство $\mathcal{P}$ полунорм на X называется *разделяющим*, если для каждого $x \neq 0$ найдется хотя бы одна полунорма $p \in \mathcal{P}$, для которой $p(x) \neq 0$.

Далее, рассмотрим выпуклое множество $A \subset X$, которое является *поглощающим* в том смысле, что любая точка $x \in X$ принадлежит tA для некоторого $t = t(x) > 0$. [Например, из утверждения (а) теоремы 1.15 следует, что каждая окрестность нуля в топологическом векторном пространстве является поглощающим множеством. Любое поглощающее множество, очевидно, содержит 0.] Функционал Минковского μ_A множества A определяется формулой

$$\mu_A(x) = \inf \{t > 0: t^{-1}x \in A\} \quad (x \in X).$$

Заметим, что $\mu_A(x) < \infty$ для всех $x \in X$, поскольку A предполагается поглощающим. Оказывается, что полунормы на X — это в точности функционалы Минковского всевозможных *уравновешенных* выпуклых поглощающих множеств.

Полунормы тесно связаны с понятием локальной выпуклости. А именно, в локально выпуклом пространстве существует разделяющее семейство *непрерывных* полунорм. Обратно, с помощью любого разделяющего семейства полунорм $\mathcal{P}$ на векторном пространстве X можно определить в X такую локально выпуклую топологию, относительно которой все полунормы $p \in \mathcal{P}$ непрерывны. Этот метод часто используется для введения топологии. Подробности содержатся в теоремах 1.36 и 1.37.

1.34. Теорема. Пусть p — полунорма на векторном пространстве X . Тогда

(a) $p(0) = 0$;

(b) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$;

(c) $p(x) \geq 0$;

(d) $\{x: p(x) = 0\}$ является подпространством в X ;

(e) множество $B = \{x: p(x) < 1\}$ является выпуклым, уравновешенным и поглощающим, причем $p = \mu_B$.

Доказательство. Утверждение (a) получается из условия $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ при $\alpha = 0$. Из полуаддитивности p следует неравенство

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y),$$

так что $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$; справедливо такое же неравенство с переменной ролей x и y . Так как $p(x - y) = p(y - x)$, то отсюда следует (b). Из (b) при $y = 0$ вытекает (c). Если $p(x) = p(y) = 0$ и α, β — скаляры, то в силу (c)

$$0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0,$$

откуда получаем (d).

Что касается (e), то ясно, что B уравновешено. Если $x \in B$, $y \in B$ и $0 < t < 1$, то

$$p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) < 1.$$

Поэтому B выпукло. Если $x \in X$ и $s > p(x)$, то $p(s^{-1}x) = s^{-1}p(x) < 1$. Это показывает, что B является поглощающим и что $\mu_B(x) \leq s$. Поэтому $\mu_B \leq p$. Но если $0 < i \leq p(x)$, то $p(t^{-1}x) \geq 1$, так что $t^{-1}x$ не принадлежит B . Отсюда следует, что $p(x) \leq \mu_B(x)$. ■

1.35. Теорема. Предположим, что A — выпуклое поглощающее множество в векторном пространстве X . Тогда

(a) $\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$;

(b) $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ при $t \geq 0$;

(c) если A уравновешено, то μ_A является полунормой;

(d) если $B = \{x: \mu_A(x) < 1\}$ и $C = \{x: \mu_A(x) \leq 1\}$, то $B \subset A \subset C$ и $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

Доказательство. Сопоставим каждому $x \in X$ множество

$$H_A(x) = \{t > 0: t^{-1}x \in A\}.$$

Допустим, что $t \in H_A(x)$ и $s > t$. Тогда, поскольку $0 \in A$ и A выпукло, $s \in H_A(x)$. Поэтому $H_A(x)$ представляет собой полупрямую с левым концом в точке $\mu_A(x)$.

Пусть $\mu_A(x) < s$, $\mu_A(y) < t$ и $u = s + t$. Тогда $s^{-1}x \in A$ и $t^{-1}y \in A$, а так как A выпукло, то точка

$$u^{-1}(x + y) = \left(\frac{s}{u}\right)(s^{-1}x) + \left(\frac{t}{u}\right)(t^{-1}y)$$

лежит в A . Поэтому $\mu_A(x+y) \leq u$. Отсюда следует (а). Свойство (b) очевидно, а (с) тривиально следует из (а) и (b).

Если $\mu_A(x) < 1$, то $1 \in H_A(x)$, так что $x \in A$. Ясно, что если $x \in A$, то $\mu_A(x) \leq 1$. Поэтому $B \subset A \subset C$. Отсюда следует, что для любого $x \in X$ выполняются включения $H_B(x) \subset H_A(x) \subset H_C(x)$, откуда

$$\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

С целью доказать, что в действительности здесь имеют место равенства, допустим, что $\mu_C(x) < s < t$. Тогда $s^{-1}x \in C$, и потому $\mu_A(s^{-1}x) \leq 1$, так что

$$\mu_A(t^{-1}x) \leq \frac{s}{t} < 1.$$

Следовательно, $t^{-1}x \in B$, откуда $\mu_B(t^{-1}x) \leq 1$ и $\mu_B(x) \leq t$. ■

1.36. Теорема. Пусть $\mathcal{B}$ —выпуклая уравновешенная локальная база в топологическом векторном пространстве X . Сопоставим каждой окрестности $V \in \mathcal{B}$ ее функционал Минковского μ_V . Тогда $\{\mu_V: V \in \mathcal{B}\}$ —разделяющее семейство непрерывных полунорм на X .

Доказательство. Поскольку V —выпуклое уравновешенное поглощающее множество, μ_V является полунормой. Если $x \in X$ и $x \neq 0$, то $x \notin V$ для некоторой окрестности $V \in \mathcal{B}$; ясно, что тогда $\mu_V(x) \geq 1$. Таким образом, $\{\mu_V\}$ —разделяющее семейство. Если $x \in V$, то, поскольку V открыто, $tx \in V$ для некоторого $t > 1$. Следовательно, $\mu_V(x) < 1$ при $x \in V$. Если $r > 0$, то из теоремы 1.34 следует, что

$$|\mu_V(x) - \mu_V(y)| \leq \mu_V(x-y) < r$$

при $x-y \in rV$. Поэтому все μ_V непрерывны. ■

1.37. Теорема. Пусть $\mathcal{P}$ —разделяющее семейство полунорм на векторном пространстве X . Сопоставим каждой полунорме $p \in \mathcal{P}$ и каждому целому положительному числу n множество

$$V(p, n) = \left\{ x: p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Пусть $\mathcal{B}$ —совокупность всех конечных пересечений множеств $V(p, n)$. Тогда $\mathcal{B}$ —выпуклая уравновешенная локальная база топологии τ в X , превращающей X в локально выпуклое пространство, причем

(а) все полунормы $p \in \mathcal{P}$ непрерывны относительно τ ;

(b) множество $E \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда каждая полунорма $p \in \mathcal{P}$ ограничена на E .

Доказательство. Объявим множество $A \subset X$ открытым в том и только в том случае, когда оно является объединением

(быть может, пустым) сдвигов некоторых множеств из $\mathcal{B}$. Ясно, что таким способом мы получаем инвариантную относительно сдвигов топологию τ на X ; каждое множество из $\mathcal{B}$ выпукло и уравновешено, и $\mathcal{B}$ является локальной базой топологии τ .

Пусть $x \in X$ и $x \neq 0$. Тогда $p(x) > 0$ для некоторой полунормы $p \in \mathcal{P}$. Если $np(x) > 1$, то $x \notin V(p, n)$, так что 0 не принадлежит окрестности $x - V(p, n)$ точки x , и потому x не лежит в замыкании множества $\{0\}$. Таким образом, $\{0\}$ — замкнутое множество, а так как топология τ инвариантна относительно сдвигов, то любая точка в X является замкнутым множеством.

Теперь мы покажем, что сложение и умножение на скаляры непрерывны. Пусть U — окрестность нуля в X ; тогда

$$(1) \quad U \supset V(p_1, n_1) \cap \dots \cap V(p_m, n_m)$$

для некоторых $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}$ и некоторых целых положительных $n_1, \dots, n_m$. Положим

$$(2) \quad V = V(p_1, 2n_1) \cap \dots \cap V(p_m, 2n_m).$$

Так как каждая полунорма полуаддитивна, то $V + V \subset U$. Этим доказана непрерывность сложения.

Пусть теперь α — скаляр, $x \in X$, а U и V — рассмотренные выше окрестности нуля. Тогда $x \in sV$ для некоторого $s > 0$. Положим $t = s/(1 + |\alpha|s)$. Если $y \in x + tV$ и $|\beta - \alpha| < 1/s$, то вектор

$$\beta y - \alpha x = \beta(y - x) + (\beta - \alpha)x$$

принадлежит множеству

$$|\beta|tV + |\beta - \alpha|sV \subset V + V \subset U$$

(здесь мы воспользовались уравновешенностью V и легко проверяемым неравенством $|\beta|t \leq 1$). Это показывает, что умножение на скаляры непрерывно.

Таким образом, (X, τ) — локально выпуклое пространство. Непосредственно из определения $V(p, n)$ следует, что каждая полунорма $p \in \mathcal{P}$ непрерывна в нуле; в силу утверждения (b) теоремы 1.34 такая полунорма непрерывна на всем X .

Наконец, предположим, что множество $E \subset X$ ограничено. Фиксируем некоторую полунорму $p \in \mathcal{P}$. Так как $V(p, 1)$ является окрестностью нуля, то $E \subset kV(p, 1)$ для некоторого конечного положительного k . Но тогда $p(x) < k$ для всех $x \in E$. Таким образом, каждая полунорма $p \in \mathcal{P}$ ограничена на E .

Допустим теперь, что E удовлетворяет последнему условию. Пусть U — окрестность нуля, и пусть $V(p_i, n_i)$ выбраны так, что выполняется условие (1). Существуют такие числа $M_i < \infty$, что $p_i < M_i$ на E ($1 \leq i \leq m$). Отсюда следует, что $E \subset nU$, если $n > M_i n_i$ при $1 \leq i \leq m$. Поэтому множество E ограничено. ■

1.38. Замечания. (а) При доказательстве теоремы 1.37 действительно необходимо было рассматривать конечные пересечения множеств $V(p, n)$. Дело в том, что семейство $\mathcal{B}_0$ всех множеств $V(p, n)$ может не быть локальной базой ни для какой топологии в X (это семейство $\mathcal{B}_0$ обычно называют *предбазой* построенной топологии τ). Чтобы привести такой пример, возьмем в $X = \mathbb{R}^2$ семейство $\mathcal{P}$, состоящее из двух полунорм p_1, p_2 , определенных условиями $p_i(x) = |x_i|$ (здесь $(x_1, x_2) = x \in \mathbb{R}^2$). Упражнение 8 развивает это замечание.

(b) Теоремы 1.36 и 1.37 приводят к следующей естественной задаче. Если $\mathcal{B}$ — выпуклая уравновешенная локальная база топологии τ локально выпуклого пространства X , то, согласно теореме 1.36, $\mathcal{B}$ порождает разделяющее семейство $\mathcal{P}$ непрерывных полунорм на X . В свою очередь это семейство $\mathcal{P}$ способом, описанным в теореме 1.37, индуцирует в X топологию τ_1 . Верно ли, что $\tau = \tau_1$?

Ответ на этот вопрос оказывается утвердительным. Чтобы убедиться в этом, заметим, что в силу τ -непрерывности полунорм $p \in \mathcal{P}$ все множества $V(p, n)$, определенные в теореме 1.37, принадлежат τ . Следовательно, $\tau_1 \subset \tau$. Если же $W \in \mathcal{B}$ и $p = \mu_W$, то

$$W = \{x: \mu_W(x) < 1\} = V(p, 1);$$

таким образом, $W \in \tau_1$ для любого $W \in \mathcal{B}$. Отсюда следует, что $\tau \subset \tau_1$.

(с) Если $\mathcal{P} = \{p_i: i = 1, 2, 3, \dots\}$ — счетное разделяющее семейство полунорм на X , то теорема 1.37 показывает, что $\mathcal{P}$ индуцирует топологию τ со счетной локальной базой. По теореме 1.24 топология τ метризуема. В данной ситуации инвариантная относительно сдвигов метрика, совместимая с τ , может быть определена прямо по полунормам $\{p_i\}$. Положим

$$(1) \quad d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(x-y)}{1 + p_i(x-y)}.$$

Легко проверить, что d является метрикой в X . Чтобы доказать совместимость d с τ , мы покажем, что шары

$$(2) \quad B_r = \{x: d(x, 0) < r\} \quad (r > 0)$$

образуют локальную базу для τ .

Поскольку каждая полунорма p_i непрерывна (теорема 1.37), а ряд (1) равномерно сходится на $X \times X$, функция d непрерывна на $X \times X$; следовательно, каждый шар B_r является открытым множеством. Если W — окрестность нуля, то W содержит пересечение подходящим образом выбранных множеств

$$(3) \quad V(p_i, n_i) = \left\{x: p_i(x) < \frac{1}{n_i}\right\} \quad (1 \leq i \leq k).$$

Если $x \in B_r$, то

$$(4) \quad \frac{2^{-i} p_i(x)}{1 + p_i(x)} < r \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Если r достаточно мало, то неравенства (4) вынуждают величины $p_1(x), \dots, p_k(x)$ быть столь малыми, что B_r содержится в каждом из множеств (3); следовательно, $B_r \subset W$ при достаточно малых r .

Это показывает, что d совместима с τ .

Формула (1) обладает значительными преимуществами по сравнению с более сложной конструкцией, описанной в доказательстве теоремы 1.24. Правда, она пригодна лишь для локально выпуклых пространств и даже для них имеет один недостаток: шары, определяемые метрикой (1), не обязательно выпуклы. Соответствующий пример приведен в упр. 18.

1.39. Теорема. *Топологическое векторное пространство X нормируемо тогда и только тогда, когда в нем существует выпуклая ограниченная окрестность нуля.*

Доказательство. Если пространство X нормируемо и $\|\cdot\|$ — норма, совместимая с его топологией, то открытый единичный шар $\{x: \|x\| < 1\}$ является выпуклой ограниченной окрестностью нуля.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что V — выпуклая ограниченная окрестность нуля в X . По теореме 1.14 она содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля U ; разумеется, окрестность U также ограничена. Положим

$$(1) \quad \|x\| = \mu(x) \quad (x \in X),$$

где μ — функционал Минковского для U .

По утверждению (с) теоремы 1.15 множества rU ($r > 0$) образуют локальную базу топологии пространства X . Если $x \neq 0$, то $x \notin rU$ для некоторого $r > 0$; следовательно, $\|x\| \geq r$. Поэтому из теоремы 1.35 следует, что (1) определяет норму в X . Из определения функционала Минковского и того факта, что U открыто, вытекает, что

$$(2) \quad \{x: \|x\| < r\} = rU$$

для любого $r > 0$. Поэтому топология, индуцированная построенной нормой, совпадает с исходной топологией в X . ■

Факторпространства

1.40. Определения. Пусть N — подпространство векторного пространства X . Для каждого $x \in X$ обозначим через $\pi(x)$ класс смежности пространства X по N , содержащий x ; иными словами,

$$\pi(x) = x + N.$$

Классы смежности являются элементами векторного пространства X/N , называемого *факторпространством* пространства X по подпространству N ; сложение и умножение на скаляры в X/N определяются формулами

$$(1) \quad \pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y), \quad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x).$$

[Отметим, что теперь $\alpha\pi(x) = N$, если $\alpha = 0$. Это отличается от обычных обозначений, введенных в п. 1.4.] Поскольку N является векторным пространством, операции (1) определены корректно. Это означает, что если $\pi(x) = \pi(x')$ (т. е. $x' - x \in N$) и $\pi(y) = \pi(y')$, то

$$(2) \quad \pi(x) + \pi(y) = \pi(x') + \pi(y'), \quad \alpha\pi(x') = \alpha\pi(x).$$

Нулем в X/N служит $\pi(0) = N$. В силу (1) π является линейным отображением X на X/N ; ядро (нулевое пространство) π совпадает с N ; отображение π часто называют *факторотображением* (или *каноническим отображением*) X на X/N .

Допустим теперь, что τ — векторная топология в X и что N — *замкнутое* подпространство пространства X . Обозначим через τ_N совокупность всех таких множеств $E \subset X/N$, для которых $\pi^{-1}(E) \in \tau$. Оказывается, что τ_N является топологией в X/N ; она называется *фактортопологией*. Некоторые свойства фактортопологии перечислены в следующей теореме. Напомним, что отображение называется *открытым*, если образы открытых множеств являются открытыми множествами.

1.41. Теорема. Пусть N — замкнутое подпространство топологического векторного пространства X . Пусть τ — топология пространства X , а τ_N — определенное выше семейство подмножеств факторпространства X/N .

(а) τ_N является векторной топологией в X/N ; факторотображение $\pi: X \rightarrow X/N$ линейно, непрерывно и открыто.

(б) Если $\mathcal{B}$ — локальная база для τ , то совокупность всех множеств $\pi(V)$, где $V \in \mathcal{B}$, является локальной базой для τ_N .

(с) Каждое из следующих свойств пространства X наследуется пространством X/N : локальная выпуклость, локальная ограниченность, метризуемость, нормируемость.

(д) Если X является F -пространством, или пространством Фреше, или банаховым пространством, то тем же свойством обладает X/N .

Доказательство. Так как $\pi^{-1}(A \cap B) = \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B)$ и

$$\pi^{-1}(\cup E_\lambda) = \cup \pi^{-1}(E_\lambda),$$

то τ_N — топология. Множество $F \subset X/N$ является τ_N -замкнутым тогда и только тогда, когда τ -замкнуто множество $\pi^{-1}(F)$. В част-

ности, каждая точка пространства X/N есть замкнутое множество, поскольку

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = N + x,$$

а N предполагается замкнутым.

Непрерывность π следует непосредственно из определения τ_N . Далее, допустим, что $V \in \tau$. Так как

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = N + V$$

и $N + V \in \tau$, то $\pi(V) \in \tau_N$. Значит, отображение π открыто.

Пусть W — окрестность нуля в X/N ; тогда найдется такая окрестность нуля V в X , что

$$V + V \subset \pi^{-1}(W).$$

При этом $\pi(V) + \pi(V) \subset W$. Так как π открыто, то $\pi(V)$ является окрестностью нуля в X/N . Поэтому сложение в X/N непрерывно.

Непрерывность умножения на скаляры в X/N доказывается таким же способом. Справедливость (а) установлена.

Ясно, что из (а) следует (б). С помощью теорем 1.32, 1.24 и 1.39 совсем легко убедиться, что из (б) вытекает (с).

Предположим, далее, что d — инвариантная метрика в X , совместимая с τ . Определим ρ по формуле

$$\rho(\pi(x), \pi(y)) = \inf \{d(x - y, z) : z \in N\};$$

ρ можно интерпретировать как расстояние от $x - y$ до N . Мы опускаем проверку того, что функция ρ корректно определена на X/N и является инвариантной метрикой.

В частности, если X — нормированное пространство и метрика d в X порождена нормой, то формула

$$\|\pi(x)\| = \inf \{\|x - z\| : z \in N\}$$

корректно определяет в X/N такую норму, что индуцированная ею метрика в X/N совпадает с введенной выше метрикой ρ ; эта норма в X/N обычно называется *факторнормой*.

В общем случае

$$\pi(\{x \in X : d(x, 0) < r\}) = \{u \in X/N : \rho(u, 0) < r\},$$

откуда в силу (б) следует, что метрика ρ совместима с топологией τ_N . Поэтому для доказательства справедливости (d) достаточно показать, что если метрика d полна, то метрика ρ тоже полна.

Пусть $\{u_n\}$ — последовательность Коши в X/N относительно метрики ρ . В ней найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_i}\}$, что $\rho(u_{n_i}, u_{n_{i+1}}) < 2^{-i}$. Действуя по индукции, можно так выбрать элементы $x_i \in X$, что $\pi(x_i) = u_{n_i}$ и $d(x_i, x_{i+1}) < 2^{-i}$. Если метрика d полна, то последовательность Коши $\{x_i\}$ сходится к не-

которой точке $x \in X$. Из непрерывности π следует, что $u_{n_i} \rightarrow \pi(x)$ при $i \rightarrow \infty$. Но если последовательность Коши содержит сходящуюся подпоследовательность, то сама она тоже сходится. Следовательно, метрика ρ полна. ■

1.42. Теорема. *Предположим, что N и F — подпространства топологического векторного пространства X , причем N замкнуто, а F конечномерно. Тогда подпространство $N + F$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть π — факторотображение X на пространство X/N , снабженное фактортопологией. Тогда $\pi(F)$ — конечномерное подпространство в X/N ; так как X/N — топологическое векторное пространство, то из теоремы 1.21 следует, что $\pi(F)$ замкнуто в X/N . Поскольку $N + F = \pi^{-1}(\pi(F))$, а π непрерывно, мы заключаем, что $N + F$ замкнуто. [Ср. с упр. 20.] ■

1.43. Полунормы и факторпространства. Предположим, что ρ — полунорма в векторном пространстве X , и пусть

$$N = \{x: \rho(x) = 0\}.$$

Тогда N — подпространство в X (теорема 1.34). Пусть π — факторотображение X на X/N ; положим

$$\tilde{\rho}(\pi(x)) = \rho(x).$$

Если $\pi(x) = \pi(y)$, то $\rho(x - y) = 0$; поскольку

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y),$$

отсюда следует, что $\tilde{\rho}(\pi(x)) = \tilde{\rho}(\pi(y))$. Таким образом, функция $\tilde{\rho}$ корректно определена на X/N ; легко проверить, что она является нормой в X/N .

Вот хорошо известный пример. Фиксируем некоторое r , $1 \leq r < \infty$; пусть L^r — пространство всех измеримых по Лебегу функций на $[0, 1]$, для которых

$$\rho(f) = \|f\|_r = \left\{ \int_0^1 |f(t)|^r dt \right\}^{1/r} < \infty.$$

Тем самым мы определили на L^r полунорму, которая не является нормой, ибо $\|f\|_r = 0$ всякий раз, когда $f = 0$ почти всюду. Пусть N — множество всех таких «нулевых функций». Тогда L^r/N — банахово пространство; именно оно обычно и обозначается L^r . Норма в «исправленном» L^r получается переходом от ρ к $\tilde{\rho}$.

Примеры

1.44. Пространства $C(\Omega)$. Если Ω — непустое открытое множество в некотором евклидовом пространстве, то Ω является объединением счетного числа компактных множеств $K_n \neq \emptyset$, ко-

которые могут быть выбраны так, чтобы K_n содержалось во внутренности K_{n+1} ($n=1, 2, 3, \dots$). Векторное пространство $C(\Omega)$ состоит из всех комплексных непрерывных функций на Ω ; топология в нем задается разделяющим семейством полунорм

$$(1) \quad p_n(f) = \sup \{ |f(x)| : x \in K_n \}$$

в соответствии с теоремой 1.37. Так как $p_1 \leq p_2 \leq \dots$, то множества

$$(2) \quad V_n = \left\{ f \in C(\Omega) : p_n(f) < \frac{1}{n} \right\} \quad (n=1, 2, \dots)$$

образуют выпуклую локальную базу этой топологии. Согласно замечанию (с) п. 1.38, топология пространства $C(\Omega)$ совместима с метрикой

$$(3) \quad d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)}.$$

Если $\{f_i\}$ — последовательность Коши относительно этой метрики, то $p_n(f_i - f_j) \rightarrow 0$ при $i, j \rightarrow \infty$ для любого n , так что последовательность $\{f_i\}$ равномерно сходится на каждом K_n к некоторой функции $f \in C(\Omega)$. Простые вычисления показывают, что $d(f, f_i) \rightarrow 0$. Таким образом, d — полная метрика. Мы доказали, что $C(\Omega)$ является пространством Фреше.

Согласно утверждению (b) теоремы 1.37, множество $E \subset C(\Omega)$ ограничено тогда и только тогда, когда существуют такие числа $M_n < \infty$, что $p_n(f) \leq M_n$ для всех $f \in E$ и всех n , или, в более явной форме,

$$(4) \quad |f(x)| \leq M_n, \text{ если } f \in E \text{ и } x \in K_n.$$

Так как в каждом множестве V_n найдется функция f , для которой значение $p_{n+1}(f)$ сколь угодно велико, то все эти множества не ограничены. Таким образом, пространство $C(\Omega)$ не является локально ограниченным и потому ненормируемо.

1.45. Пространства $H(\Omega)$. Пусть теперь Ω — непустое открытое подмножество комплексной плоскости; определим пространство $C(\Omega)$, как в п. 1.44, и пусть $H(\Omega)$ — подпространство в $C(\Omega)$, состоящее из всех функций, голоморфных в Ω . Предел последовательности голоморфных функций, равномерно сходящейся на компактных множествах, является голоморфной функцией; поэтому $H(\Omega)$ — замкнутое подпространство в $C(\Omega)$. Следовательно, $H(\Omega)$ является пространством Фреше.

Мы покажем сейчас, что $H(\Omega)$ обладает свойством Гейне — Бореля. В силу теоремы 1.23 отсюда будет следовать, что $H(\Omega)$ не является локально ограниченным и потому ненормируемо.

Пусть E — замкнутое ограниченное подмножество в $H(\Omega)$. Тогда E удовлетворяет условию вида (4) из п. 1.44. Поэтому из

классической теоремы Монтеля о нормальных семействах голоморфных функций (см., например, [44, стр. 201]) следует, что каждая последовательность $\{f_i\} \subset E$ содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактных подмножествах множества Ω (и потому в топологии пространства $H(\Omega)$) к некоторой функции $f \in H(\Omega)$. Так как E замкнуто, то $f \in E$. Это показывает, что E компактно.

1.46. Пространства $C^\infty(\Omega)$ и $\mathcal{D}_K$. Мы начнем этот пункт с того, что введем несколько терминов, которыми будем пользоваться также при изложении теории распределений.

Если речь идет о функциях n переменных, то термин *мультииндекс* всегда будет означать упорядоченную n -строку

$$(1) \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

неотрицательных целых чисел α_i . С каждым мультииндексом α связан дифференциальный оператор

$$(2) \quad D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

порядком которого называется неотрицательное целое число

$$(3) \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Если $|\alpha| = 0$, то $D^\alpha f = f$.

Будем говорить, что комплексная функция f , определенная на некотором непустом открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, принадлежит пространству $C^\infty(\Omega)$, если $D^\alpha f \in C(\Omega)$ для любого мультииндекса α .

Носителем комплексной функции f (на любом топологическом пространстве) называется замыкание множества $\{x: f(x) \neq 0\}$.

Если K — компактное множество в $\mathbb{R}^n$, то через $\mathcal{D}_K$ обозначается пространство всех функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, носители которых содержатся в K (буква $\mathcal{D}$ постоянно употребляется для обозначения этих пространств с тех пор, как Шварц опубликовал свою работу о распределениях). Если $K \subset \Omega$, то $\mathcal{D}_K$ можно отождествить с соответствующим подпространством пространства $C^\infty(\Omega)$.

Теперь мы определим в пространстве $C^\infty(\Omega)$ топологию, которая превратит его в пространство Фреше, обладающее свойством Гейне — Бореля, причем для каждого компакта $K \subset \Omega$ подпространство $\mathcal{D}_K$ окажется замкнутым в $C^\infty(\Omega)$.

С этой целью выберем такие компактные множества K_i ($i = 1, 2, \dots$), что K_i содержится во внутренней K_{i+1} и $\Omega = \bigcup_i K_i$.

Определим полунормы p_N на $C^\infty(\Omega)$, $N = 1, 2, 3, \dots$, полагая

$$(4) \quad p_N(f) = \max \{ \|D^\alpha f(x)\| : x \in K_N, |\alpha| \leq N \}.$$

Они определяют в $C^\infty(\Omega)$ метризуемую локально выпуклую топологию (см. теорему 1.37 и замечание (с) п. 1.38). Для каждого

$x \in \Omega$ функционал $f \rightarrow f(x)$ непрерывен в этой топологии. Так как $\mathcal{D}_K$ является пересечением ядер тех из указанных функционалов, для которых x лежит в дополнении к множеству K , то $\mathcal{D}_K$ замкнуто в пространстве $C^\infty(\Omega)$.

Локальная база задается множествами

$$(5) \quad V_N = \left\{ f \in C^\infty(\Omega) : \rho_N(f) < \frac{1}{N} \right\} \quad (N = 1, 2, 3, \dots).$$

Если $\{f_i\}$ — последовательность Коши в $C^\infty(\Omega)$ (см. п.1.25), а N фиксировано, то $f_i - f_j \in V_N$ при достаточно больших i и j . Таким образом, $|D^\alpha f_i - D^\alpha f_j| < 1/N$ на K_N , если $|\alpha| \leq N$, а i и j достаточно велики. Отсюда следует, что при любом фиксированном α последовательность $\{D^\alpha f_i\}$ равномерно сходится на компактных подмножествах множества Ω к некоторой функции g_α . В частности, $f_i(x) \rightarrow g_0(x)$. Очевидно, что $g_0 \in C^\infty(\Omega)$, причем $g_\alpha = D^\alpha g_0$ и $f_i \rightarrow g_0$ в топологии пространства $C^\infty(\Omega)$.

Таким образом, $C^\infty(\Omega)$ является пространством Фреше. То же самое верно для каждого из его замкнутых подпространств $\mathcal{D}_K$.

Рассмотрим теперь замкнутое ограниченное множество $E \subset C^\infty(\Omega)$. По теореме 1.37 ограниченность E эквивалентна существованию таких чисел $M_N < \infty$, что $\rho_N(f) \leq M_N$ для всех $f \in E$ при $N = 1, 2, \dots$. Из неравенств $|D^\alpha f| \leq M_N$, справедливых на K_N при $|\alpha| \leq N$, вытекает, что для любого β с $|\beta| \leq N-1$ семейство функций $\{D^\beta f : f \in E\}$ равномерно непрерывно на K_{N-1} . Поэтому с помощью теоремы Асколи (доказанной в приложении А) и канторовского диагонального процесса получаем, что каждая последовательность функций из E содержит такую подпоследовательность $\{f_{i_j}\}$, что для любого мультииндекса β последовательность $\{D^\beta f_{i_j}\}$ равномерно сходится на компактных подмножествах множества Ω . Следовательно, $\{f_i\}$ сходится в топологии пространства $C^\infty(\Omega)$. Это означает, что E компактно.

Таким образом, $C^\infty(\Omega)$ обладает свойством Гейне — Бореля. Из теоремы 1.23 следует, что $C^\infty(\Omega)$ не является локально ограниченным и потому ненормируемо. То же самое заключение справедливо для $\mathcal{D}_K$ при условии, что K имеет непустую внутренность (в противном случае $\mathcal{D}_K = \{0\}$). Последнее утверждение вытекает из следующего предложения:

Если B_1 и B_2 — концентрические замкнутые шары в $\mathbb{R}^n$, причем B_1 лежит внутри B_2 , то существует такая функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\varphi(x) = 1$ для всех $x \in B_1$ и $\varphi(x) = 0$ для всех x , лежащих вне B_2 .

Чтобы указать такую функцию φ , мы для каждой пары чисел a, b ($0 < a < b < \infty$) построим функцию $g \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, для которой $g(x) = 0$ при $x < a$ и $g(x) = 1$ при $x > b$, и положим

$$(6) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = 1 - g(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

(предполагается, что общий центр шаров B_1 и B_2 лежит в начале). Описанная ниже конструкция функции g имеет то преимущество, что с ее помощью при подходящем выборе последовательности $\{\delta_i\}$ можно строить функции, обладающие другими полезными свойствами.

Пусть $0 < a < b < \infty$. Выберем такие положительные числа $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots$, что $\sum \delta_i = b - a$, и положим

$$(7) \quad m_n = \frac{2^n}{\delta_1 \dots \delta_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Пусть f_0 — такая непрерывная монотонная функция, что $f_0(x) = 0$ при $x < a$ и $f_0(x) = 1$ при $x > a + \delta_0$; положим

$$(8) \quad f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_{x-\delta_n}^x f_{n-1}(t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Дифференцируя этот интеграл и применяя индукцию, легко получаем, что f_n имеет n непрерывных производных и что $|D^n f_n| \leq m_n$. Если $n > r$, то

$$(9) \quad D^r f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_0^{\delta_n} (D^r f_{n-1})(x-t) dt,$$

откуда снова с помощью индукции по n получаем, что

$$(10) \quad |D^r f_n| \leq m_r \quad (n \geq r).$$

Применяя теорему о среднем значении, из (9) и (10) легко вывести оценку

$$(11) \quad |D^r f_n - D^r f_{n-1}| \leq m_{r+1} \delta_n \quad (n \geq r+2).$$

Так как $\sum \delta_n < \infty$, то при любом фиксированном r последовательность $\{D^r f_n\}$ равномерно сходится на всей оси при $n \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции g , для которой $|D^r g| \leq m_r$ при $r = 1, 2, 3, \dots$, причем $g(x) = 0$ для $x < a$ и $g(x) = 1$ для $x > b$.

1.47. Пространства L^p при $0 < p < 1$. Фиксируем некоторое p из указанной области. Элементами пространства L^p служат такие измеримые по Лебегу функции f на $[0, 1]$, для которых

$$(1) \quad \Delta(f) = \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty;$$

при этом, как обычно, функции, совпадающие почти всюду, отождествляются. Так как $0 < p < 1$, то при $a \geq 0$ и $b \geq 0$ выполняется неравенство

$$(2) \quad (a+b)^p \leq a^p + b^p.$$

Поэтому

$$(3) \quad \Delta(f+g) \leq \Delta(f) + \Delta(g),$$

так что формула

$$(4) \quad d(f, g) = \Delta(f - g)$$

определяет инвариантную метрику в L^p . Полнота этой метрики доказывается точно так же, как в хорошо известном случае $p \geq 1$. Шары

$$(5) \quad B_r = \{f \in L^p: \Delta(f) < r\}$$

образуют локальную базу топологии в L^p . Так как $B_1 = r^{-1/p} B_r$ для всех $r > 0$, то B_1 — ограниченное множество.

Таким образом, L^p — локально ограниченное F -пространство.

Мы утверждаем, что в L^p нет выпуклых открытых множеств, отличных от $\emptyset$ и L^p .

Действительно, предположим, что V — непустое выпуклое открытое множество в L^p . Не ограничивая общности, можем считать, что $0 \in V$. Тогда $V \supset B_r$ для некоторого $r > 0$. Фиксируем $f \in L^p$. Так как $p < 1$, то найдется такое положительное целое n , что $n^{p-1} \Delta(f) < r$. В силу непрерывности неопределенного интеграла от $|f|^p$ существуют такие точки

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1,$$

что

$$(6) \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p dt = n^{-1} \Delta(f) \quad (1 \leq i \leq n);$$

положим $g_i(t) = nf(t)$, если $x_{i-1} < t \leq x_i$, и $g_i(t) = 0$ в противном случае. Тогда $g_i \in V$, поскольку из (6) следует, что

$$(7) \quad \Delta(g_i) = n^{p-1} \Delta(f) < r \quad (1 \leq i \leq n),$$

а $V \supset B_r$. Так как V выпукло и

$$(8) \quad f = \frac{1}{n} (g_1 + \dots + g_n),$$

то $f \in V$. Поэтому $V = L^p$.

Отсутствие нетривиальных выпуклых открытых множеств приводит к такому любопытному следствию.

Пусть $\Lambda: L^p \rightarrow Y$ — непрерывное линейное отображение L^p в некоторое локально выпуклое пространство Y . Пусть $\mathcal{B}$ — выпуклая локальная база в Y . Если $W \in \mathcal{B}$, то множество $\Lambda^{-1}(W)$ выпукло, открыто и непусто. Поэтому $\Lambda^{-1}(W) = L^p$. Следовательно, $\Lambda(L^p) \subset W$ для любой окрестности нуля $W \in \mathcal{B}$. Отсюда мы заключаем, что $\Lambda f = 0$ для всех $f \in L^p$.

Таким образом, если $0 < p < 1$, то для любого локально выпуклого пространства Y отображение, тождественно равное 0,

является единственным непрерывным линейным отображением L^p в Y . В частности, 0 — единственный непрерывный линейный функционал на таком пространстве L^p .

В этом состоит одно из существенных отличий случая $0 < p < 1$ от хорошо известного случая $p \geq 1$.

Упражнения

1. Пусть X — векторное пространство. Все множества, фигурирующие в этом упражнении, считаются его подмножествами. Вывести из аксиом, приведенных в п. 1.4, следующие утверждения (некоторыми из них мы уже молчаливо пользовались в тексте):

(а) Если $x \in X$ и $y \in X$, то существует единственный вектор $z \in X$, для которого $x + z = y$.

(б) Если α — скаляр, а $x \in X$, то $0x = 0 = \alpha 0$.

(с) $2A \subset A + A$; при этом может статься, что $2A \neq A + A$.

(d) Множество A выпукло тогда и только тогда, когда $(s+t)A = sA + tA$ для всех положительных скаляров s и t .

(е) Объединение и пересечение любого семейства уравновешенных множеств являются уравновешенными множествами.

(f) Пересечение любого семейства выпуклых множеств выпукло.

(g) Объединение линейно упорядоченного относительно включения семейства выпуклых множеств является выпуклым множеством.

(h) Если A и B выпуклы, то $A + B$ выпукло.

(i) Если A и B уравновешены, то $A + B$ уравновешено.

(j) Показать, что утверждения (f), (g) и (h) остаются справедливыми, если заменить выпуклые множества подпространствами.

2. Выпуклой оболочкой множества A в векторном пространстве X называется множество всех выпуклых комбинаций элементов из A , т. е. множество всех сумм

$$t_1 x_1 + \dots + t_n x_n,$$

где $x_i \in A$, $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$, а n произвольно. Доказать, что выпуклая оболочка A является выпуклым множеством и совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих A .

3. Пусть X — топологическое векторное пространство. Все множества, фигурирующие в этом упражнении, считаются его подмножествами. Доказать следующие утверждения:

(а) Выпуклая оболочка любого открытого множества является открытым множеством.

(б) Если X локально выпукло, то выпуклая оболочка любого ограниченного множества ограничена (без предположения локальной выпуклости это, вообще говоря, неверно; см. п. 1.47).

(с) Если A и B ограничены, то $A + B$ ограничено.

(d) Если A и B компактны, то $A + B$ компактно.

(е) Если A компактно, а B замкнуто, то $A + B$ замкнуто.

(f) Сумма двух замкнутых множеств может не быть замкнутым множеством (поэтому включение в утверждении (b) теоремы 1.13 может оказаться строгим).

4. Пусть $B = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| \leq |z_2|\}$. Показать, что множество B уравновешено, но его внутренность не является уравновешенным множеством (ср. с утверждением (е) теоремы 1.13).

5. Изменится ли объем понятия «ограниченное множество», если в его определении, приведенном в п. 1.6, требовать только, чтобы для любой окрестности нуля V существовало *хотя бы одно* такое $t > 0$, что $E \subset tV$?

6. Доказать, что множество в топологическом векторном пространстве ограничено тогда и только тогда, когда всякое счетное подмножество этого множества ограничено.

7. Пусть X — векторное пространство всех комплексных функций на единичном отрезке $[0, 1]$, наделенное топологией при помощи семейства полунорм

$$p_x(f) = |f(x)| \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Эта топология называется *топологией поточечной сходимости*. Показать, что эта терминология оправдана.

Показать, что в X существует такая последовательность $\{f_n\}$, что (а) $\{f_n\}$ сходится к 0 при $n \rightarrow \infty$, но (б) для любой сходящейся к ∞ последовательности скаляров $\{\gamma_n\}$ последовательность $\{\gamma_n f_n\}$ не сходится к 0. [Воспользоваться тем, что множество всех сходящихся к 0 последовательностей комплексных чисел равносильно множеству всех точек отрезка $[0, 1]$.]

Это показывает, что в утверждении (б) теоремы 1.28 условие метризуемости не может быть опущено.

8. (а) Пусть $\mathcal{P}$ — разделяющее семейство полунорм на векторном пространстве X . Обозначим через $\mathcal{Q}$ минимальное семейство полунорм на X , содержащее $\mathcal{P}$ и замкнутое относительно взятия максимума (последнее означает, что если $p_1 \in \mathcal{Q}$, $p_2 \in \mathcal{Q}$ и $p = \max(p_1, p_2)$, то $p \in \mathcal{Q}$). Показать, что применение конструкции, описанной в теореме 1.37, к семействам $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ приводит к одной и той же топологии. Главное отличие $\mathcal{Q}$ от $\mathcal{P}$ состоит в том, что $\mathcal{Q}$ непосредственно приводит к локальной базе, а не к предбазе (см. замечание (а) п. 1.38).

(б) Пусть $\mathcal{Q}$ — разделяющее семейство полунорм на X , замкнутое относительно взятия максимума. Показать, что линейный функционал Λ на X непрерывен тогда и только тогда, когда существуют такая полунорма $p \in \mathcal{Q}$ и такая постоянная $M < \infty$, что $|\Lambda x| \leq M p(x)$ для всех $x \in X$.

9. Предположим, что

(а) X и Y — топологические векторные пространства;

(б) $\Lambda: X \rightarrow Y$ — линейное отображение;

(с) N — замкнутое подпространство в X ;

(д) $\pi: X \rightarrow X/N$ — факторотображение;

(е) $\Lambda x = 0$ для всех $x \in N$.

Доказать, что существует единственное отображение $f: X/N \rightarrow Y$, для которого $\Lambda = f \circ \pi$, т. е. $\Lambda x = f(\pi(x))$ для всех $x \in X$. Доказать, что это отображение f линейно и что непрерывность Λ равносильна непрерывности f . Кроме того, Λ открыто тогда и только тогда, когда f открыто.

10. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, причем $\dim Y < \infty$, и пусть $\Lambda: X \rightarrow Y$ — такое линейное отображение, что $\Lambda(X) = Y$.

(а) Доказать, что отображение Λ открыто.

(б) Доказать, что если ядро отображения Λ замкнуто, то Λ непрерывно.

11. Если N — подпространство векторного пространства X , то *коразмерностью* N в X называется размерность факторпространства X/N .

Пусть $0 < p < 1$; доказать, что в пространстве L^p любое подпространство конечной коразмерности всюду плотно (см. п. 1.47).

12. Пусть $d_1(x, y) = |x - y|$ и $d_2(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$, где $\varphi(x) = x/(1 + |x|)$. Доказать, что d_1 и d_2 — метрики в $\mathbb{R}$, индуцирующие одну и ту же топологию, хотя d_1 является полной, а d_2 нет.

13. Пусть C — векторное пространство всех комплексных непрерывных функций на $[0, 1]$. Положим

$$d(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx.$$

Пусть (C, σ) обозначает пространство C с топологией σ , индуцированной этой метрикой, а (C, τ) — то же пространство C , но с топологией τ , индуцированной семейством полунорм

$$p_x(f) = |f(x)| \quad (0 \leq x \leq 1)$$

в соответствии с теоремой 1.37.

(а) Доказать, что всякое τ -ограниченное множество в C является также σ -ограниченным; следовательно, тождественное отображение $\text{id}: (C, \tau) \rightarrow (C, \sigma)$ переводит ограниченные множества в ограниченные.

(б) Доказать, что тем не менее отображение $\text{id}: (C, \tau) \rightarrow (C, \sigma)$ разрывно, хотя (по теореме Лебега об ограниченной сходимости) оно секвенциально непрерывно. Следовательно, пространство (C, τ) не метризуемо (см. приложение А6 или теорему 1.32). Показать также непосредственно, что в (C, τ) не существует счетной локальной базы.

(с) Доказать, что каждый непрерывный линейный функционал на пространстве (C, τ) представим в виде

$$f \rightarrow \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

при подходящем выборе точек $x_1, \dots, x_n$ из $[0, 1]$ и скаляров $c_i \in \mathbb{C}$.

(д) Доказать, что (C, σ) не содержит выпуклых открытых множеств, отличных от $\emptyset$ и C .

(е) Доказать, что отображение $\text{id}: (C, \sigma) \rightarrow (C, \tau)$ разрывно.

14. Положим $K = [0, 1]$ и определим $\mathscr{D}_K$ так же, как в п. 1.46. Показать, что следующие три семейства полунорм определяют в $\mathscr{D}_K$ одну и ту же топологию (ниже $D = d/dx$ и $n = 0, 1, 2, \dots$):

$$(a) \|D^n f\|_\infty = \sup \{|D^n f(x)| : -\infty < x < \infty\};$$

$$(b) \|D^n f\|_1 = \int_0^1 |D^n f(x)| dx;$$

$$(c) \|D^n f\|_2 = \left\{ \int_0^1 |D^n f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

15. Доказать, что пространство $C(\Omega)$ (п. 1.44) не обладает свойством Гейне—Бореля.

16. Доказать, что топология пространства $C(\Omega)$ не зависит от того, как именно выбраны участвующие в ее определении множества K_n , если только они удовлетворяют условиям, указанным в п. 1.44. Сделать то же самое для пространства $C^\infty(\Omega)$ (п. 1.46).

17. В ситуации п. 1.46 доказать, что для каждого мультииндекса α отображение $f \rightarrow D^\alpha f$ пространства $C^\infty(\Omega)$ в себя (а также пространства $\mathscr{D}_K$ в себя) непрерывно.

18. Полунормы

$$p_n(f) = \sup \{|f(x)| : -n \leq x \leq n\}$$

индуцируют метрику

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} \rho_n(f-g)}{1 + \rho_n(f-g)}$$

в пространстве $C(\mathbb{R})$ (ср. п. 1.44 и замечание (с) п. 1.38). Пусть

$$f(x) = \max(0, 1 - |x|), \quad g(x) = 100f(x-2), \quad 2h = f + g.$$

Показать, что

$$d(f, 0) = \frac{1}{2}, \quad d(g, 0) = \frac{50}{101}, \quad d(h, 0) = \frac{1}{6} + \frac{50}{102}.$$

Отсюда следует, что шары радиуса $1/2$ не являются выпуклыми множествами, хотя метрика d совместима с обычной локально выпуклой топологией пространства $C(\mathbb{R})$.

Существует ли какое-нибудь положительное $r < 1$, для которого шары радиуса r выпуклы?

19. Пусть M — всюду плотное подпространство топологического векторного пространства X , и пусть Y — некоторое F -пространство, а $\Lambda: M \rightarrow Y$ — непрерывное (относительно топологии, наследуемой M из X) линейное отображение. Доказать, что Λ обладает (единственным) непрерывным линейным продолжением $\tilde{\Lambda}: X \rightarrow Y$.

Наводящее соображение. Пусть V_n — такие уравновешенные окрестности нуля в X , что $V_n + V_n \subset V_{n-1}$ и $d(0, \Lambda x) < 2^{-n}$ при $x \in M \cap V_n$. Покажите, что если $x \in X$ и $x_n \in (x + V_n) \cap M$, то $\{\Lambda x_n\}$ — последовательность Коши; пусть $\tilde{\Lambda}x$ — ее предел. Покажите, что этим корректно определяется непрерывное линейное отображение $\tilde{\Lambda}$ пространства X в Y , причем $\tilde{\Lambda}x = \Lambda x$ при $x \in M$.

20. Для каждого вещественного числа t и каждого целого n положим $e_n(t) = e^{int}$ и определим функции

$$f_n = e_{-n} + ne_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Будем рассматривать эти функции как элементы пространства $L^2(-\pi, \pi)$. Пусть X_1 — наименьшее замкнутое подпространство в L^2 , содержащее функции $e_0, e_1, e_2, \dots$, а X_2 — наименьшее замкнутое подпространство в L^2 , содержащее $f_1, f_2, f_3, \dots$. Показать, что $X_1 + X_2$ всюду плотно в L^2 , но не замкнуто. Например, вектор

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e_{-n}$$

принадлежит L^2 , но не принадлежит $X_1 + X_2$ (ср. с теоремой 1.42).

21. Пусть V — окрестность нуля в топологическом векторном пространстве X . Доказать, что существует такая вещественная непрерывная на X функция f , что $f(0) = 0$ и $f(x) = 1$, если x не принадлежит V . (Таким образом, X является *вообще регулярным* топологическим пространством.) Пусть V_n — такие уравновешенные окрестности нуля, что $V_1 + V_1 \subset V$ и $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. Постройте функцию f так же, как в доказательстве теоремы 1.24. Покажите, что f непрерывна в нуле и что

$$|f(x) - f(y)| \leq f(x - y).$$

22. Для каждой комплексной функции f , определенной на компактном интервале $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, положим

$$\omega_\delta(f) = \sup \{ |f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta, x \in I, y \in I \}.$$

Если $0 < \alpha \leq 1$, то соответствующее *липицево пространство* $\text{Lip } \alpha$ состоит, по определению, из всех функций f , для которых величина

$$\|f\| = |f(0)| + \sup \{\delta^{-\alpha} \omega_\delta(f) : \delta > 0\}$$

конечна. Положим

$$\text{lip } \alpha = \left\{ f \in \text{Lip } \alpha : \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-\alpha} \omega_\delta(f) = 0 \right\}.$$

Доказать, что $\text{Lip } \alpha$ является банаховым пространством и что $\text{lip } \alpha$ —его замкнутое подпространство.

23. Пусть X —векторное пространство всех непрерывных функций на открытом интервале $(0, 1)$. Для $f \in X$ и $r > 0$ обозначим через $V(f, r)$ множество всех $g \in X$, для которых $|g(x) - f(x)| < r$ при всех $x \in (0, 1)$. Пусть τ —топология в X , порожденная всеми такими множествами $V(f, r)$. Показать, что сложение τ -непрерывно, а умножение на скаляры таковым не является.

24. Пусть U —окрестность нуля в топологическом векторном пространстве, и пусть W и A —множества, построенные по U в доказательстве теоремы 1.14. Показать, что W может не быть выпуклым и что если U не выпукло, то A может не быть уравновешенным.

Глава 2

ПОЛНОТА

Справедливость многих важных теорем анализа зависит от полноты пространств, в которых развивается действие. Именно этим объясняются недостаточность рациональных чисел и интеграла Римана (если говорить лишь о наиболее известных примерах) и тот успех, который достигается при замене их вещественными числами и интегралом Лебега. Основным инструментом в этой области служит теорема Бэра о полных метрических пространствах (часто называемая *теоремой о категориях*). Чтобы подчеркнуть роль, которую играет понятие категории, мы доказываем некоторые теоремы этой главы (например, теоремы 2.7 и 2.11) в чуть большей общности, чем это обычно бывает нужно. После того как это сделано, приводятся также более простые варианты (легче запоминающиеся и достаточные для большинства приложений).

Бэровская категория

2.1. Определение. Пусть S — топологическое пространство. Множество $E \subset S$ называется *нигде не плотным*, если его замыкание $\bar{E}$ имеет пустую внутренность. *Множества первой категории в S* — это множества, являющиеся *счетными* объединениями нигде не плотных множеств. Каждое подмножество в S , которое не является множеством первой категории, называется *множеством второй категории*.

Эта терминология (принадлежащая Бэру), по общему признанию, довольно невыразительна и не вызывает полезных ассоциаций. Вместо нее в некоторых руководствах употребляются термины *худое (тощее)* и *нехудое (нетощее)* множество. Однако «категорные доводы» настолько укрепились в математической литературе и столь широко известны, что, по-видимому, бессмысленно настаивать на изменении.

Вот некоторые очевидные свойства категории, которыми мы будем свободно пользоваться в дальнейшем:

- (а) если B — множество первой категории в S и $A \subset B$, то A тоже множество первой категории;
 (б) каждое счетное объединение множеств первой категории является множеством первой категории;
 (с) каждое замкнутое множество $E \subset S$ с пустой внутренностью является множеством первой категории в S ;
 (д) если h — гомеоморфизм пространства S на себя, то для любого $E \subset S$ множества E и $h(E)$ имеют одну и ту же категорию в S .

2.2. Теорема Бэра. Пусть S — либо

(а) полное метрическое пространство, либо

(б) локально компактное хаусдорфово пространство;

тогда пересечение любого счетного семейства открытых всюду плотных подмножеств пространства S всюду плотно в S .

Этот результат часто называют *теоремой о категории* по следующей причине. Если $\{E_i\}$ — счетное семейство нигде неплотных подмножеств пространства S , а V_i — дополнение к $\bar{E}_i$, то каждое из множеств V_i открыто и всюду плотно; теорема Бэра показывает, что $\bigcap V_i \neq \emptyset$. Следовательно, $S \neq \bigcup E_i$.

Таким образом, полные метрические пространства и локально компактные хаусдорфовы пространства являются множествами второй категории в себе.

Доказательство. Предположим, что $V_1, V_2, V_3, \dots$ — открытые всюду плотные подмножества в S . Пусть B_0 — произвольное непустое открытое множество в S . Если $n \geq 1$ и уже выбрано некоторое непустое открытое множество B_{n-1} , то (поскольку V_n всюду плотно) можно так выбрать непустое открытое множество B_n , что

$$\bar{B}_n \subset V_n \cap B_{n-1}.$$

В случае (а) в качестве B_n можно взять некоторый шар радиуса $< 1/n$, а в случае (б) этот выбор можно сделать так, что $\bar{B}_n$ компактно. Положим

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n.$$

В случае (а) центры вложенных шаров B_n образуют последовательность Коши, сходящуюся к некоторой точке из K , так что K непусто. В случае (б) множество K непусто по соображениям компактности. По построению $K \subset B_0$ и $K \subset V_n$ при любом n . Следовательно, B_0 пересекается с $\bigcap V_n$. ■

Теорема Банаха — Штейнгауза

2.3. Равностепенная непрерывность. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, а Γ — некоторое семейство линейных отображений X в Y . Мы говорим, что семейство Γ *равностепенно непрерывно*, если для любой окрестности нуля W в Y найдется такая окрестность нуля V в X , что $\Lambda(V) \subset W$ для всех $\Lambda \in \Gamma$.

Если Γ содержит лишь одно отображение Λ , то равностепенная непрерывность, разумеется, равносильна непрерывности Λ (теорема 1.17). Мы уже видели (теорема 1.32), что непрерывные линейные отображения ограничены. Равностепенно непрерывные семейства обладают этим свойством ограниченности в равномерном смысле (теорема 2.4). По этой причине теорему Банаха — Штейнгауза 2.5 часто называют *принципом равномерной ограниченности*.

2.4. Теорема. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, Γ — равностепенно непрерывное семейство линейных отображений X в Y , а E — ограниченное подмножество в X . Тогда в Y существует такое ограниченное подмножество F , что $\Lambda(E) \subset F$ для любого $\Lambda \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть F — объединение всех множеств $\Lambda(E)$ по всем $\Lambda \in \Gamma$, и пусть W — окрестность нуля в Y . Так как семейство Γ равностепенно непрерывно, то существует такая окрестность нуля V в X , что $\Lambda(V) \subset W$ для всех $\Lambda \in \Gamma$. Поскольку E ограничено, $E \subset tV$ для всех достаточно больших положительных t . Для таких t

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW,$$

так что $F \subset tW$. Следовательно, F ограничено. ■

2.5. Теорема Банаха — Штейнгауза. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, Γ — некоторое семейство непрерывных линейных отображений X в Y , а B — множество всех таких точек $x \in X$, орбиты которых

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

ограничены в Y . Если B — множество второй категории в X , то $B = X$ и семейство Γ равностепенно непрерывно.

Доказательство. Выберем в Y такие уравновешенные окрестности нуля U и W , что $\bar{U} + \bar{U} \subset W$, и положим

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\bar{U}).$$

Если $x \in B$, то $\Gamma(x) \subset nU$ для некоторого n , так что $x \in nE$.

Следовательно,

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nE.$$

По крайней мере одно из множеств nE является множеством второй категории в X , поскольку по предположению таковым является B . Так как отображение $x \rightarrow nx$ определяет гомеоморфизм пространства X на себя, то само E тоже является множеством второй категории в X . Но E замкнуто, ибо каждое из отображений Λ непрерывно; поэтому в E существует внутренняя точка x_0 . Множество $x_0 - E$ содержит некоторую окрестность нуля V , причем

$$\Lambda(V) \subset \Lambda x_0 - \Lambda(E) \subset \bar{U} - \bar{U} \subset W$$

для всякого $\Lambda \in \Gamma$.

Это показывает, что Γ равностепенно непрерывно. По теореме 2.4 семейство Γ равномерно ограничено; в частности, каждое из множеств $\Gamma(x)$ ограничено в Y . Следовательно, $B = X$. ■

Во многих приложениях условие, что B является множеством второй категории, проверяется с помощью теоремы Бэра. Например, все F -пространства являются множествами второй категории (в себе). Это приводит к такому следствию теоремы Банаха—Штейнгауза:

2.6. Теорема. Если Γ —семейство непрерывных линейных отображений F -пространства X в топологическое векторное пространство Y и при каждом $x \in X$ множество

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x: \Lambda \in \Gamma\}$$

ограничено в Y , то семейство Γ равностепенно непрерывно.

Короче говоря, поточечная ограниченность влечет за собой равномерную ограниченность (теорема 2.4).

Отметим следующий частный случай теоремы 2.6. Пусть X — банахово, а Y —нормированное пространства; предположим, что

$$(1) \quad \sup_{\Lambda \in \Gamma} \|\Lambda x\| < \infty \text{ для всякого } x \in X.$$

Тогда теорема утверждает, что существует такое $M < \infty$, для которого

$$(2) \quad \|\Lambda x\| \leq M, \text{ если } \|x\| \leq 1 \text{ и } \Lambda \in \Gamma.$$

Следовательно,

$$(3) \quad \|\Lambda x\| \leq M \|x\| \text{ для всех } x \in X \text{ и всех } \Lambda \in \Gamma.$$

В следующей теореме устанавливается непрерывность предела последовательности непрерывных линейных отображений.

2.7. Теорема. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, а $\{\Lambda_n\}$ — последовательность непрерывных линейных отображений X в Y .

(а) Пусть C — множество всех тех $x \in X$, для которых $\{\Lambda_n x\}$ является последовательностью Коши в Y . Если C — множество второй категории в X , то $C = X$.

(б) Пусть L — множество всех тех $x \in X$, для которых существует предел

$$\Lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n x.$$

Если L — множество второй категории в X , а Y есть F -пространство, то $L = X$ и отображение $\Lambda: X \rightarrow Y$ непрерывно.

Доказательство. (а) Так как всякая последовательность Коши ограничена (п. 1.29), то теорема Банаха — Штейнгауза показывает, что семейство $\{\Lambda_n\}$ равностепенно непрерывно.

Легко проверить, что C — подпространство в X . Следовательно, C всюду плотно. [В противном случае $\bar{C}$ было бы собственным подпространством пространства X ; но собственные подпространства не имеют внутренних точек, поэтому $\bar{C}$ было бы множеством первой категории.]

Фиксируем $x \in X$, и пусть W — окрестность нуля в Y . Поскольку семейство $\{\Lambda_n\}$ равностепенно непрерывно, в X найдется такая симметричная окрестность нуля V , что $\Lambda_n(V) \subset W$ при всех n . Так как C всюду плотно, то существует точка $x' \in C \cap (x + V)$. Пусть m и n столь велики, что

$$\Lambda_n x' - \Lambda_m x' \in W;$$

тождество

$$(\Lambda_n - \Lambda_m)x = \Lambda_n(x - x') + (\Lambda_n - \Lambda_m)x' + \Lambda_m(x' - x)$$

показывает, что $\Lambda_n x - \Lambda_m x \in W + W + W$. Поэтому $\{\Lambda_n x\}$ — последовательность Коши в Y ; стало быть, $x \in C$.

(б) Из полноты Y следует, что $L = C$. Поэтому, согласно (а), $L = X$. Пусть W и V обозначают то же, что и в доказательстве утверждения (а); тогда $\Lambda_n(V) \subset W$ для всех n , откуда следует, что $\Lambda(V) \subset \bar{W}$. Таким образом, Λ непрерывно. ■

Условия части (б) теоремы 2.7 можно различными способами варьировать. Вот легко запоминающийся вариант:

2.8. Теорема. Пусть $\{\Lambda_n\}$ — последовательность непрерывных линейных отображений F -пространства X в топологическое векторное пространство Y . Если для каждого $x \in X$ существует

предел

$$\Lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n x,$$

то отображение Λ непрерывно.

Доказательство. Из теоремы 2.6 следует равностепенная непрерывность семейства $\{\Lambda_n\}$. Поэтому если W — окрестность нуля в Y , то в X найдется такая окрестность нуля V , что $\Lambda_n(V) \subset W$ для всех n . Отсюда следует, что $\Lambda(V) \subset \overline{W}$; поэтому отображение Λ непрерывно (и, очевидно, линейно). ■

В следующем варианте теоремы Банаха — Штейнгауза категорные соображения используются не для полных метрических пространств, а для компактного множества. При этом существенную роль играет также условие выпуклости (см. упр. 8).

2.9. Теорема. Пусть X и Y — топологические векторные пространства, K — компактное выпуклое подмножество в X , а Γ — такое семейство непрерывных линейных отображений X в Y , что для каждого $x \in K$ орбита

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

является ограниченным множеством в Y . Тогда существует такое ограниченное множество $B \subset Y$, что $\Lambda(K) \subset B$ для всех $\Lambda \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть B — объединение множеств $\Gamma(x)$ по всем $x \in K$, и пусть W и U — такие уравновешенные окрестности нуля в Y , что $\overline{U} + \overline{U} \subset W$. Положим

$$(1) \quad E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

Если $x \in K$, то $\Gamma(x) \subset nU$ для некоторого n , так что $x \in nE$. Следовательно,

$$(2) \quad K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cap nE).$$

Поскольку E замкнуто, теорема Бэра показывает, что хотя бы для одного n множество $K \cap nE$ имеет непустую внутренность (относительно K).

Фиксируем такое n и выберем внутреннюю точку x_0 множества $K \cap nE$; в пространстве X существует такая окрестность нуля V , что

$$(3) \quad K \cap (x_0 + V) \subset K \cap nE \subset nE.$$

Так как K компактно, то найдется такое $p > 1$, что

$$(4) \quad K \subset x_0 + pV.$$

Если теперь x —любая точка множества K , а

$$(5) \quad z = (1 - p^{-1})x_0 + p^{-1}x,$$

то $z \in K$, поскольку K выпукло. Кроме того, в силу (4)

$$(6) \quad z - x_0 = p^{-1}(x - x_0) \in V.$$

Следовательно, учитывая (3), получаем, что $z \in nE$. Так как $\Lambda(nE) \subset n\bar{U}$ для каждого $\Lambda \in \Gamma$, а $x = pz - (p-1)x_0$, то

$$\Lambda x \in pn\bar{U} - (p-1)n\bar{U} \subset pn(\bar{U} + \bar{U}) \subset pnW.$$

Таким образом, $B \subset pnW$, откуда следует, что B ограничено. ■

Теорема об открытом отображении

2.10. Открытые отображения. Пусть f —отображение топологического пространства S в топологическое пространство T . Мы говорим, что отображение f *открыто в точке* $p \in S$, если множество $f(V)$ содержит окрестность точки $f(p)$ всякий раз, когда V является окрестностью точки p . Отображение f называется *открытым*, если для всякого открытого множества $U \subset S$ его образ $f(U)$ является открытым множеством в T .

Ясно, что отображение f открыто тогда и только тогда, когда оно открыто в каждой точке $p \in S$. В силу инвариантности векторных топологий относительно сдвигов отсюда следует, что линейное отображение одного топологического векторного пространства в другое является открытым тогда и только тогда, когда оно открыто в точке 0.

Отметим также, что взаимно однозначное непрерывное отображение f пространства S на пространство T является гомеоморфизмом в том и только в том случае, когда оно открыто.

2.11. Теорема об открытом отображении. Пусть X есть F -пространство, Y —топологическое векторное пространство, а $\Lambda: X \rightarrow Y$ —такое непрерывное линейное отображение, что его образ $\Lambda(X)$ является множеством второй категории в Y . Тогда

- (i) $\Lambda(X) = Y$;
- (ii) отображение Λ открыто;
- (iii) Y является F -пространством.

Доказательство. Заметим сначала, что из (ii) следует (i), так как в Y нет открытых подпространств, отличных от Y . Чтобы доказать (ii), фиксируем в X произвольную окрестность нуля V . Мы должны показать, что множество $\Lambda(V)$ содержит некоторую окрестность нуля в пространстве Y .

Пусть d — инвариантная метрика в X , совместимая с топологией. Положим

$$(1) \quad V_n = \{x: d(x, 0) < 2^{-n}r\} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

где $r > 0$ выбрано столь малым, что $V_0 \subset V$. Мы покажем, что

$$(2) \quad \overline{\Lambda(V_1)} \subset \Lambda(V)$$

и что в Y найдется такая окрестность нуля W , что

$$(3) \quad W \subset \overline{\Lambda(V_1)}.$$

Так как $V_1 \supset V_2 - V_2$, то из утверждения (b) теоремы 1.13 следует, что

$$(4) \quad \overline{\Lambda(V_1)} \supset \overline{\Lambda(V_2) - \Lambda(V_2)} \supset \overline{\Lambda(V_2)} - \overline{\Lambda(V_2)}.$$

Поэтому существование удовлетворяющей (3) окрестности нуля W будет доказано, если мы сумеем показать, что множество $\overline{\Lambda(V_2)}$ имеет непустую внутренность. Но

$$(5) \quad \Lambda(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\Lambda(V_2),$$

поскольку V_2 — окрестность нуля. Следовательно, по крайней мере одно из множеств $k\Lambda(V_2)$ является множеством второй категории в Y . Так как отображение $y \rightarrow ky$ является гомеоморфизмом пространства Y на себя, то множество $\Lambda(V_2)$ имеет вторую категорию в Y ; поэтому его замыкание имеет непустую внутренность.

Чтобы доказать включение (2), фиксируем произвольную точку $y_1 \in \overline{\Lambda(V_1)}$. Допустим, что для некоторого $n \geq 1$ точка $y_n \in \overline{\Lambda(V_n)}$ уже выбрана, и укажем, как тогда выбирается точка $y_{n+1} \in \overline{\Lambda(V_{n+1})}$. Доказанное выше относительно V_1 справедливо и для V_{n+1} , так что $\overline{\Lambda(V_{n+1})}$ содержит окрестность нуля. Поэтому

$$(6) \quad (y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}) \cap \Lambda(V_n) \neq \emptyset.$$

Это означает, что существует такая точка $x_n \in V_n$, что

$$(7) \quad \Lambda x_n \in y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}.$$

Положим $y_{n+1} = y_n - \Lambda x_n$. Тогда $y_{n+1} \in \overline{\Lambda(V_{n+1})}$, и конструкция продолжается.

Так как $d(x_n, 0) < 2^{-n}r$ для всех $n \geq 1$, то суммы $x_1 + \dots + x_n$ образуют последовательность Коши, которая (в силу полноты X) сходится к некоторой точке $x \in X$, причем $d(x, 0) < r$. Поэтому $x \in V$. Так как

$$(8) \quad \sum_{n=1}^m \Lambda x_n = \sum_{n=1}^m (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{m+1}$$

и так как (в силу непрерывности Λ) $y_{m+1} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, мы заключаем, что $y_1 = \Lambda x \in \Lambda(V)$. Отсюда следует справедливость включения (2), и утверждение (ii) доказано.

Пусть N — ядро отображения Λ ; теорема 1.41 показывает, что X/N является F -пространством. Поэтому утверждение (iii) будет доказано, коль скоро мы построим изоморфизм f пространства X/N на пространство Y , который является также гомеоморфизмом. Это можно сделать, полагая

$$(9) \quad f(x + N) = \Lambda x \quad (x \in X).$$

Очевидно, что f является изоморфизмом и что $\Lambda x = f(\pi(x))$, где π — факторотображение, описанное в п. 1.40. Если V — открытое множество в Y , то множество

$$(10) \quad f^{-1}(V) = \pi(\Lambda^{-1}(V))$$

открыто, поскольку Λ непрерывно, а π открыто. Поэтому отображение f непрерывно. Если E — открытое множество в X/N , то множество

$$(11) \quad f(E) = \Lambda(\pi^{-1}(E))$$

открыто, так как π непрерывно, а Λ открыто. Следовательно, f является гомеоморфизмом. ■

2.12. Следствия. (а) Если Λ — непрерывное линейное отображение F -пространства X на F -пространство Y , то Λ открыто.

(б) Если Λ удовлетворяет условиям утверждения (а) и взаимно однозначно, то обратное отображение $\Lambda^{-1}: Y \rightarrow X$ непрерывно.

(с) Если $\Lambda: X \rightarrow Y$ — непрерывное линейное взаимно однозначное отображение банахова пространства X на банахово пространство Y , то существуют такие положительные вещественные числа a и b , что

$$a \|x\| \leq \| \Lambda x \| \leq b \|x\|$$

для всех $x \in X$.

(d) Если $\tau_1 \subset \tau_2$ — такие векторные топологии в векторном пространстве X , что (X, τ_1) и (X, τ_2) оба являются F -пространствами, то $\tau_1 = \tau_2$.

Доказательство. Утверждение (а) следует из теоремы 2.11 и теоремы Бэра, согласно которой Y является множеством второй категории в себе. Утверждение (б) является непосредственным следствием (а), а (с) вытекает из (б). Два неравенства, приведенные в утверждении (с), выражают непрерывность Λ^{-1} и Λ . Утверждение (d) получается применением (б) к тождественному отображению (X, τ_2) на (X, τ_1) . ■

Теорема о замкнутом графике

2.13. График. Графиком отображения f множества X в множество Y называется множество всех точек $(x, f(x))$ в декартовом произведении $X \times Y$. Если X и Y — топологические пространства и $X \times Y$

снабжено обычной топологией произведения (т. е. наименьшей топологией, содержащей все множества вида $U \times V$, где U и V — открытые множества в X и Y соответственно), а отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, то естественно ожидать, что график отображения f замкнут в $X \times Y$ (предложение 2.14). Для линейных отображений одного F -пространства в другое это тривиальное необходимое условие непрерывности оказывается также и достаточным. Этот важный факт устанавливается в теореме 2.15.

2.14. Предложение. Если X — топологическое пространство, Y — хаусдорфово пространство, а $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, то его график G замкнут.

Доказательство. Пусть Ω — дополнение к G в $X \times Y$; фиксируем произвольную точку $(x_0, y_0) \in \Omega$. Ясно, что $y_0 \neq f(x_0)$. Поэтому точки y_0 и $f(x_0)$ имеют в Y непересекающиеся окрестности V и W . Так как f непрерывно, то существует такая окрестность U точки x_0 , что $f(U) \subset W$. Таким образом, окрестность $U \times V$ точки (x_0, y_0) содержится в Ω . Это показывает, что Ω открыто. ■

Примечание. В этом предложении нельзя опустить условие хаусдорфовости пространства Y . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольное топологическое пространство X , и пусть $f: X \rightarrow X$ — тождественное отображение. Его графиком служит диагональ

$$D = \{(x, x): x \in X\} \subset X \times X.$$

Утверждение « D замкнуто в $X \times X$ » представляет собой просто другую формулировку аксиомы отделимости Хаусдорфа.

2.15. Теорема о замкнутом графике. Предположим, что

- (а) X и Y являются F -пространствами,
- (б) отображение $\Lambda: X \rightarrow Y$ линейно,
- (с) его график $G = \{(x, \Lambda x): x \in X\}$ замкнут в $X \times Y$.

Тогда отображение Λ непрерывно.

Доказательство. Произведение $X \times Y$ становится векторным пространством, если ввести в нем покомпонентные операции сложения и умножения на скаляры:

$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2).$$

Пусть d_X и d_Y — полные инвариантные метрики в X и Y соответственно, индуцирующие топологии этих пространств. Положим

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2);$$

тогда d — инвариантная метрика в $X \times Y$, совместимая с топологией произведения и превращающая его в F -пространство (про-

стую, но скучную проверку этого утверждения мы оставляем читателю в качестве упражнения).

Поскольку отображение Λ линейно, его график G является подпространством в $X \times Y$. Замкнутые подмножества полных метрических пространств сами являются полными метрическими пространствами. Поэтому G оказывается F -пространством.

Определим отображения $\pi_1: G \rightarrow X$ и $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$, полагая

$$\pi_1(x, \Lambda x) = x, \quad \pi_2(x, y) = y.$$

Тогда π_1 — непрерывное линейное взаимно однозначное отображение F -пространства G на F -пространство X . Из теоремы об открытом отображении следует, что обратное отображение

$$\pi_1^{-1}: X \rightarrow G$$

непрерывно. Но $\Lambda = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, а отображение π_2 непрерывно. Поэтому отображение Λ непрерывно. ■

З а м е ч а н и е. Проверка решающего условия (с) доказанной теоремы (т. е. замкнутости графика G отображения Λ) в приложениях часто заменяется проверкой следующего условия:

(с') если $\{x_n\}$ — такая последовательность в X , что существуют пределы

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{и} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda x_n,$$

то $y = \Lambda x$.

Докажем, что из (с') следует (с). Пусть (x, y) — произвольная предельная точка множества G . Так как пространство $X \times Y$ метризуемо, то

$$(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, \Lambda x_n)$$

для некоторой последовательности $\{x_n\}$. Из определения топологии произведения следует, что $x_n \rightarrow x$ и $\Lambda x_n \rightarrow y$. Поэтому в силу (с') получаем $y = \Lambda x$, так что $(x, y) \in G$; следовательно, G замкнуто.

Точно так же легко доказать, что из (с) следует (с').

Билинейные отображения

2.16. Определения. Предположим, что X , Y и Z — векторные пространства и что B — отображение пространства $X \times Y$ в Z . Сопоставим каждому $x \in X$ и каждому $y \in Y$ отображения

$$B_x: Y \rightarrow Z \quad \text{и} \quad B^y: X \rightarrow Z,$$

определенные формулами

$$B_x(y) = B(x, y) = B^y(x).$$

Отображение B называется *билинейным*, если для всякого x и всякого y отображения B_x и B^y линейны.

Если X , Y и Z — топологические векторные пространства, а для каждого $x \in X$ и каждого $y \in Y$ отображения B_x и B^y непрерывны, то отображение B называется *раздельно непрерывным*. Если отображение B непрерывно (относительно топологии произведения в $X \times Y$), то очевидно, что оно раздельно непрерывно. В некоторых случаях с помощью теоремы Банаха — Штейнгауза можно доказать справедливость обратного утверждения.

2.17. Теорема. Пусть X есть F -пространство, а Y и Z — топологические векторные пространства, и пусть $B: X \times Y \rightarrow Z$ — билинейное раздельно непрерывное отображение. Тогда

$$(1) \quad B(x_n, y_n) \rightarrow B(x_0, y_0) \quad \text{в } Z,$$

если $x_n \rightarrow x_0$ в X и $y_n \rightarrow y_0$ в Y . Если пространство Y метризуемо, то отсюда следует, что отображение B непрерывно.

Доказательство. Пусть U и W — такие окрестности нуля в Z , что $U + U \subset W$. Положим

$$b_n(x) = B(x, y_n) \quad (x \in X, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Так как B непрерывно при фиксированном x как функция от y , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = B(x, y_0) \quad (x \in X).$$

Поэтому для любого $x \in X$ множество $\{b_n(x)\}$ ограничено в Z . Поскольку каждое b_n является непрерывным линейным отображением F -пространства X в Z , из теоремы 2.6 следует, что семейство $\{b_n\}$ равномерно непрерывно. Следовательно, в X найдется такая окрестность нуля V , что

$$b_n(V) \subset U \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Заметим, что

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) = b_n(x_n - x_0) + B(x_0, y_n - y_0).$$

Если n достаточно велико, то (i) $x_n \in x_0 + V$, так что $b_n(x_n - x_0) \in U$, и (ii) $B(x_0, y_n - y_0) \in U$, поскольку B непрерывно по y и $B(x_0, 0) = 0$. Поэтому

$$B(x_n, y_n) - B(x_0, y_0) \in U + U \subset W$$

для всех достаточно больших n , откуда следует (1).

Если пространство Y метризуемо, то $X \times Y$ тоже метризуемо, и непрерывность B следует из (1). (См. приложение А6.)

Упражнения

1. Пусть X — бесконечномерное топологическое векторное пространство, представимое в виде объединения счетного числа своих конечномерных подпространств. Доказать, что X является множеством первой категории в себе.

Доказать, что по этой причине никакое бесконечномерное F -пространство не может иметь счетного базиса Гамеля.

[Подмножество β векторного пространства X называется *базисом Гамеля*, если оно является максимальным линейно независимым подмножеством в X . Иначе говоря, β есть базис Гамеля, если каждый вектор $x \in X$ допускает единственное представление в виде *конечной* линейной комбинации векторов из β .]

2. Множества первой и второй категории являются соответственно «малыми» и «большими» в топологическом смысле. Множество, «малое» в этом смысле, может оказаться «большим» в смысле теории меры даже в том случае, когда мера тесно связана с топологией. Чтобы убедиться в этом, постройте на единичном отрезке множество первой категории, лебегова мера которого равна 1.

3. Пусть $K = [-1, 1]$; определим $\mathcal{D}_K$, как в п. 1.46 (с заменой $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}$). Пусть $\{f_n\}$ — такая последовательность интегрируемых по Лебегу функций на K , что предел

$$\Lambda\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n(t) \varphi(t) dt$$

существует для каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Показать, что Λ является непрерывным линейным функционалом на $\mathcal{D}_K$. Показать, что существуют такое положительное целое p и такое число $M < \infty$, что

$$(1) \quad \left| \int_{-1}^1 f_n(t) \varphi(t) dt \right| \leq M \|D^p \varphi\|_{\infty}$$

для всех n и всех $\varphi \in \mathcal{D}_K$. В качестве примера рассмотреть последовательность $\{f_n\}$, где $f_n(t) = n^2$ на $[0, 1/n]$ и $f_n(t) = 0$ вне $[0, 1/n]$, и показать, что (1) справедливо при некотором $M < \infty$ и $p=1$. Построить пример, где (1) выполняется при некотором $M < \infty$ и $p=2$, но не выполняется при $p=1$ ни для какого $M < \infty$.

4. Пусть L^1 и L^2 — обычные лебеговы пространства на единичном интервале. Доказать следующими тремя способами, что L^2 является множеством первой категории в L^1 :

(а) показать, что множество $\left\{ f : \int |f|^2 \leq n \right\}$ замкнуто в L^1 , но имеет пустую внутренность;

(б) пусть $g_n(t) = n$ на $[0, n^{-3}]$ и $g_n(t) = 0$ вне $[0, n^{-3}]$; показать, что

$$\int f g_n \rightarrow 0$$

для любой функции $f \in L^2$, но не для любой функции $f \in L^1$;

(с) заметить, что естественное вложение L^2 в L^1 непрерывно, но не является отображением L^2 на все L^1 . Сделать то же самое для L^p и L^q при $1 \leq p < q$.

5. Доказать утверждения, аналогичные сформулированным в упр. 4, для пространств l^p , где l^p — банахово пространство всех комплексных функций x на множестве $\{0, 1, 2, \dots\}$, для которых норма

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^p \right\}^{1/p}$$

конечна ($p \geq 1$).

6. Определим коэффициенты Фурье $\hat{f}(n)$ функции $f \in L^2(T)$ (T — единичная окружность), полагая

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ — аддитивная группа всех целых чисел). Пусть

$$\Lambda_n f = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k).$$

Доказать, что множество $\{f \in L^2(T) : \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n f \text{ существует}\}$ является всюду плотным подпространством в $L^2(T)$ и имеет в $L^2(T)$ первую категорию.

7. Пусть $C(T)$ — множество всех непрерывных комплексных функций на единичной окружности T . Пусть $\{\gamma_n\}$ ($n \in \mathbb{Z}$) — такая последовательность комплексных чисел, что для любой функции $f \in C(T)$ существует такая функция $\Lambda f \in C(T)$, коэффициенты Фурье которой связаны с коэффициентами Фурье функции f соотношениями

$$(\Lambda f)^\wedge(n) = \gamma_n \hat{f}(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(обозначения те же, что в упр. 6). Доказать, что последовательность $\{\gamma_n\}$ тогда и только тогда обладает этим мультипликативным свойством, когда на T существует такая комплексная борелевская мера μ , что

$$\gamma_n = \int e^{-in\theta} d\mu(\theta) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Наводящее соображение. Множество $C(T)$ с обычной суп-нормой является банаховым пространством. Примените теорему о замкнутом графике. Затем рассмотрите функционал

$$f \rightarrow (\Lambda f)(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \hat{f}(n)$$

и примените к нему теорему Рисса о представлении ([27, теорема 6.19] или [13, т. I, стр. 288, теорема 3]). [Ряд $\sum \gamma_n \hat{f}(n)$ может расходиться; пользуйтесь им лишь для тригонометрических полиномов.]

8. Определим функционалы Λ_m на l^2 (см. упр. 5) формулами

$$\Lambda_m x = \sum_{n=1}^m n^2 x(n) \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

Определим элементы $x_n \in l^2$, полагая $x_n(n) = 1/n$ и $x_n(i) = 0$ при $i \neq n$. Пусть множество $K \subset l^2$ состоит из элементов $0, x_1, x_2, x_3, \dots$. Доказать, что K компактно. Вычислить $\Lambda_m x_n$. Показать, что для любого $x \in K$ множество $\{\Lambda_m x\}$ ограничено, но множество $\{\Lambda_m x_m\}$ не ограничено. Поэтому в формулировке теоремы 2.9 условие выпуклости K не может быть опущено.

Выберем такие $c_n > 0$, что $\sum c_n = 1$ и $\sum nc_n = \infty$, и положим $x = \sum c_n x_n$. Показать, что x принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества K (которая, по определению, представляет собой замыкание выпуклой оболочки) и что множество $\{\Lambda_m x\}$ не ограничено.

Показать, что выпуклая оболочка множества K не замкнута.

9. Пусть X , Y и Z — банаховы пространства, и пусть

$$B: X \times Y \rightarrow Z$$

— непрерывное билинейное отображение. Доказать, что существует такое $M < \infty$, что

$$\|B(x, y)\| \leq M \|x\| \|y\| \quad (x \in X, y \in Y).$$

Существенно ли здесь условие полноты?

10. Доказать, что билинейное отображение, непрерывное в точке $(0, 0)$, непрерывно.

11. Определим отображение $B: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, полагая $B(x_1, x_2; y) = (x_1 y, x_2 y)$ ($(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}$). Показать, что B — непрерывное билинейное отображение $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$ и что B не является открытым в точке $(1, 1; 0)$. Найти все точки, в которых отображение B открыто.

12. Пусть X — нормированное пространство всех вещественных полиномов от одной переменной с нормой

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

и пусть $B(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt$; показать, что B — билинейный функционал на $X \times X$, который раздельно непрерывен, но не непрерывен.

13. Пусть X — топологическое векторное пространство, являющееся множеством второй категории в себе, и пусть K — замкнутое выпуклое поглощающее подмножество в X . Доказать, что K содержит окрестность нуля.

Наводящее соображение. Покажите сначала, что множество $H = K \cap (-K)$ является поглощающим. По категорным соображениям H имеет непустую внутренность. Затем воспользуйтесь соотношениями

$$2H = H + H = H - H.$$

Покажите, что без предположения выпуклости K утверждение неверно, даже если $X = \mathbb{R}^2$. Покажите, что утверждение неверно, если X есть пространство L^2 , наделенное топологией с помощью L^1 -нормы (как в упр. 4).

14. (а) Пусть X и Y — топологические векторные пространства, $\{\Lambda_n\}$ — равномерно непрерывная последовательность линейных отображений X в Y , а C — множество всех тех $x \in X$, для которых $\{\Lambda_n x\}$ является последовательностью Коши в Y . Доказать, что C — замкнутое подпространство в X .

(б) Предположим, в дополнение к условиям п. (а), что Y является F -пространством и что последовательность $\{\Lambda_n x\}$ сходится для всех x из некоторого всюду плотного в X подмножества. Доказать, что тогда предел

$$\Lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n x$$

существует для всякого $x \in X$ и что отображение Λ непрерывно.

Глава 3

ВЫПУКЛОСТЬ

В этой главе изучается главным образом (хотя и не исключительно) наиболее важный класс топологических векторных пространств, а именно локально выпуклые пространства. Основными фактами как в теоретическом плане, так и с точки зрения приложений являются: (а) теорема Хана—Банаха (гарантирующая запас непрерывных линейных функционалов, достаточный для построения весьма продвинутой теории двойственности), (б) теорема Банаха—Алаоглу о компактности в сопряженном пространстве и (с) теорема Крейна—Мильмана о крайних точках. Приложения к различным задачам анализа отложены до главы 5.

Теоремы Хана — Банаха

Множественное число в заглавии употреблено по той причине, что название «теорема Хана—Банаха» обычно относится к нескольким тесно связанным между собой результатам. Среди них—теоремы 3.2 и 3.3 о продолжении с сохранением мажоранты (в которых топология не участвует), теорема 3.4 о разделении выпуклых множеств и теорема 3.6 о непрерывном продолжении. Другая теорема о разделении (из которой следует теорема 3.4) приводится в упр. 3.

3.1. Определения. *Сопряженным пространством* для топологического векторного пространства X называется векторное пространство X^* , состоящее из всех непрерывных линейных функционалов на X .

Заметим, что сложение и умножение на скаляры в X^* определяются формулами

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)x = \Lambda_1x + \Lambda_2x, \quad (\alpha\Lambda)x = \alpha \cdot \Lambda x.$$

Ясно, что эти операции действительно превращают X^* в векторное пространство.

Нам придется пользоваться тем очевидным фактом, что каждое комплексное векторное пространство является также вещественным векторным пространством. Для удобства мы будем употреблять следующую (временную) терминологию: аддитивный функционал Λ на комплексном векторном пространстве X называется *вещественно линейным* (комплексно линейным), если $\Lambda(\alpha x) = \alpha \Lambda x$ для любого $x \in X$ и любого вещественного (соответственно комплексного) скаляра α . Наше постоянно действующее соглашение, по которому всякое утверждение, не содержащее явного упоминания поля скаляров, относится как к комплексному, так и к вещественному случаю, не затрагивается введением этой временной терминологии и по-прежнему остается в силе.

Вещественная часть u комплексно линейного функционала f на X является вещественно линейным функционалом и

$$(1) \quad f(x) = u(x) - iu(ix) \quad (x \in X),$$

поскольку $z = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Re} (iz)$ для всякого $z \in \mathbb{C}$.

Обратно, если $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественно линейный функционал на комплексном векторном пространстве X , то простые вычисления показывают, что функционал f , определенный формулой (1), является комплексно линейным.

Предположим теперь, что X — комплексное топологическое векторное пространство. Из перечисленных выше фактов следует, что комплексно линейный функционал на X принадлежит X^* тогда и только тогда, когда его вещественная часть непрерывна, и что каждый непрерывный вещественно линейный функционал $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ является вещественной частью единственного функционала $f \in X^*$.

3.2. Теорема. Предположим, что

(а) M является подпространством вещественного векторного пространства X ;

(б) функция $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{и} \quad p(tx) = tp(x)$$

для всех $x \in X$, $y \in X$ и $t \geq 0$;

(с) функционал $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ линеен и $f(x) \leq p(x)$ на M .

Тогда существует такой линейный функционал $\Lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\Lambda x = f(x) \quad (x \in M)$$

и

$$-p(-x) \leq \Lambda x \leq p(x) \quad (x \in X).$$

Доказательство. Если $M \neq X$, то выберем такой вектор $x_1 \in X$, что $x_1 \notin M$, и положим

$$M_1 = \{x + tx_1: x \in M, t \in \mathbb{R}\}.$$

Ясно, что M_1 является подпространством в X . Так как

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x-x_1) + p(x_1+y),$$

то

$$(1) \quad f(x) - p(x-x_1) \leq p(y+x_1) - f(y) \quad (x, y \in M).$$

Пусть α — точная верхняя грань левой части неравенства (1) по всем $x \in M$. Тогда

$$(2) \quad f(x) - \alpha \leq p(x-x_1) \quad (x \in M)$$

и

$$(3) \quad f(y) + \alpha \leq p(y+x_1) \quad (y \in M).$$

Определим функционал f_1 на M_1 , полагая

$$(4) \quad f_1(x+tx_1) = f(x) + t\alpha \quad (x \in M, t \in \mathbb{R}).$$

Тогда f_1 — линейный функционал на M_1 и $f_1 = f$ на M .

Считая, что $t > 0$, заменим x на $t^{-1}x$ в неравенстве (2) и y на $t^{-1}y$ в неравенстве (3). Умножая полученные таким способом неравенства на t и учитывая (4), заключаем, что $f_1 \leq p$ на M_1 .

Вторую часть доказательства можно провести одним из методов трансфинитной индукции, выбранным по вкусу; можно воспользоваться либо теоремой Цермело (всякое множество можно вполне упорядочить), либо леммой Цорна, либо теоремой Хаусдорфа о существовании максимальных линейно упорядоченных подмножеств. Мы предпочитаем последний способ.

Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех упорядоченных пар (M', f') , где M' — подпространство пространства X , содержащее M , а f' — такой линейный функционал на M' , что $f' = f$ на M и $f' \leq p$ на M' . Введем в $\mathcal{P}$ частичное упорядочение, считая, что $(M', f') \leq (M'', f'')$, если $M' \subset M''$ и $f' = f''$ на M' . По теореме Хаусдорфа, в $\mathcal{P}$ существует максимальное линейно упорядоченное подмножество Ω .

Пусть Φ — множество всех таких подпространств M' пространства X , что $(M', f') \in \Omega$ для некоторого линейного функционала f' на M' . Тогда Φ линейно упорядочено относительно теоретико-множественного включения; следовательно, объединение $\tilde{M}$ всех подпространств, принадлежащих Φ , само является подпространством пространства X . Если $x \in \tilde{M}$, то $x \in M'$ для некоторого $M' \in \Phi$; положим $\Lambda x = f'(x)$, где f' — функционал, составляющий вместе с M' пару $(M', f') \in \Omega$.

Теперь легко проверить, что функционал Λ корректно определен на $\tilde{M}$, линеен, совпадает с f на M и удовлетворяет на $\tilde{M}$ неравенству $\Lambda \leq p$. Если бы $\tilde{M}$ оказалось собственным подпространством в X , то конструкция, указанная в первой части доказательства, позволила бы продолжить Λ на большее подпрост-

ранство (с сохранением всех нужных свойств), а это противоречило бы максимальнойности Ω . Поэтому $\tilde{M} = X$.

Наконец, из неравенства $\Lambda \leq p$ следует, что

$$-p(-x) \leq -\Lambda(-x) = \Lambda x$$

для всех $x \in X$, и доказательство окончено. ■

3.3. Теорема. Пусть M — подпространство векторного пространства X , p — полунорма на X , а f — такой линейный функционал на M , что

$$|f(x)| \leq p(x) \quad (x \in M).$$

Тогда на X существует такой линейный функционал Λ , что

$$\Lambda x = f(x) \quad \text{при } x \in M$$

и

$$|\Lambda x| \leq p(x) \quad \text{при } x \in X.$$

Доказательство. В вещественном случае утверждение этой теоремы содержится в теореме 3.2, поскольку $p(-x) = p(x)$ для любой полунормы p .

В комплексном случае положим $u = \operatorname{Re} f$. По теореме 3.2 на X существует такой вещественно линейный функционал U , что $U = u$ на M и $U \leq p$ на X . Пусть Λ — комплексно линейный функционал на X , вещественная часть которого совпадает с U . По соображениям, изложенным в п. 3.1, $\Lambda = f$ на M .

Наконец, для всякого $x \in X$ существует такое $\alpha \in \mathbb{C}$, что $|\alpha| = 1$ и $\alpha \Lambda x = |\Lambda x|$. Поэтому

$$|\Lambda x| = \Lambda(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x). \quad \blacksquare$$

Следствие. Если X — нормированное пространство и $x_0 \in X$, то существует такой линейный функционал $\Lambda \in X^*$, что

$$\Lambda x_0 = \|x_0\| \quad \text{и} \quad |\Lambda x| \leq \|x\| \quad \text{для всех } x \in X.$$

Доказательство. Если $x_0 = 0$, возьмем $\Lambda = 0$. Если же $x_0 \neq 0$, то применим теорему 3.3 в ситуации, когда $p(x) = \|x\|$, M — одномерное подпространство, порожденное вектором x_0 , а функционал f на M определяется условием $f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$. ■

3.4. Теорема. Пусть A и B — непустые выпуклые не пересекающиеся подмножества топологического векторного пространства X .

(а) Если A открыто, то существуют такой функционал $\Lambda \in X^*$ и такое вещественное число γ , что

$$\operatorname{Re} \Lambda x < \gamma \leq \operatorname{Re} \Lambda y$$

для всех $x \in A$ и всех $y \in B$.

(б) Если A компактно, B замкнуто, а X локально выпукло, то существуют такой функционал $\Lambda \in X^*$ и такие вещественные числа γ_1 и γ_2 , что

$$\operatorname{Re} \Lambda x < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} \Lambda y$$

для всех $x \in A$ и всех $y \in B$.

Заметим, что теорема сформулирована без указания поля скаляров; разумеется, в вещественном случае $\operatorname{Re} \Lambda = \Lambda$.

Доказательство. Достаточно доказать теорему в случае вещественного поля скаляров. Действительно, если рассматривается поле $\mathbb{C}$, а в вещественном случае теорема уже доказана, то на X существует непрерывный вещественно линейный функционал Λ_1 , дающий нужное разделение; как отмечалось в п. 3.1, единственный комплексно линейный функционал Λ на X , вещественная часть которого совпадает с Λ_1 , непрерывен, так что он обладает всеми нужными свойствами. Поэтому будем считать, что поле скаляров вещественно.

(а) Фиксируем $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$. Пусть $x_0 = b_0 - a_0$; положим $C = A - B + x_0$. Тогда C — выпуклая окрестность нуля в X ; пусть p — ее функционал Минковского. По теореме 1.35, p удовлетворяет условиям (б) теоремы 3.2. Так как $A \cap B = \emptyset$, то $x_0 \notin C$ и потому $p(x_0) \geq 1$.

Положим $f(tx_0) = t$ на подпространстве M пространства X , порожденном вектором x_0 . Если $t \geq 0$, то $f(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)$; если же $t < 0$, то $f(tx_0) < 0 \leq p(tx_0)$. Таким образом, $f \leq p$ на M . По теореме 3.2, f продолжается до линейного функционала Λ на X , удовлетворяющего условию $\Lambda \leq p$. В частности, $\Lambda \leq 1$ на C , и потому $\Lambda \geq -1$ на $-C$, так что $|\Lambda| \leq 1$ в окрестности нуля $C \cap (-C)$. По теореме 1.18, функционал Λ непрерывен на X .

Если теперь $a \in A$ и $b \in B$, то

$$\Lambda a - \Lambda b + 1 = \Lambda(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1,$$

поскольку $\Lambda x_0 = 1$, $a - b + x_0 \in C$, а C открыто. Таким образом, $\Lambda a < \Lambda b$.

Отсюда следует, что $\Lambda(A)$ и $\Lambda(B)$ — непересекающиеся выпуклые подмножества в $\mathbb{R}$, причем $\Lambda(A)$ целиком лежит слева от $\Lambda(B)$. Кроме того, $\Lambda(A)$ открыто, поскольку A открыто, а всякий ненулевой линейный функционал на X является открытым отображением. Следовательно, $\Lambda(A)$ — ограниченный справа отк-

рытый интервал. Чтобы закончить доказательство утверждения (а), достаточно в качестве γ взять правый конец интервала $\Lambda(A)$.

(b) По теореме 1.10, в X существует такая выпуклая окрестность нуля V , что $(A+V) \cap B = \emptyset$. Применяя утверждение (а) к множествам $A+V$ и B , получаем, что существует такой функционал $\Lambda \in X^*$, что $\Lambda(A+V)$ и $\Lambda(B)$ являются непересекающимися выпуклыми подмножествами вещественной оси, причем $\Lambda(A+V)$ открыто и целиком лежит слева от $\Lambda(B)$. Отсюда следует справедливость утверждения (b), поскольку $\Lambda(A)$ — компактное подмножество множества $\Lambda(A+V)$. ■

Следствие. Если X — локально выпуклое пространство, то X^* разделяет точки в X .

Доказательство. Если $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$, то применим утверждение (b) теоремы 3.4 к множествам $A = \{x_1\}$ и $B = \{x_2\}$. ■

3.5. Теорема. Пусть M — подпространство локально выпуклого пространства X и $x_0 \in X$. Если x_0 не принадлежит замыканию M , то существует такой функционал $\Lambda \in X^*$, что $\Lambda x_0 = 1$, но $\Lambda x = 0$ для всех $x \in M$.

Доказательство. Применяя утверждение (b) теоремы 3.4 к множествам $A = \{x_0\}$ и $B = \bar{M}$, найдем такой функционал $\Lambda \in X^*$, что $\Lambda x_0 \notin \Lambda(M)$. Следовательно, $\Lambda(M)$ является собственным подпространством поля скаляров, так что $\Lambda(M) = \{0\}$ и $\Lambda x_0 \neq 0$. Деля Λ на Λx_0 , получаем искомый функционал. ■

Замечание. На этой теореме основан стандартный подход к некоторым задачам аппроксимации: чтобы доказать, что точка $x_0 \in X$ принадлежит замыканию некоторого подпространства M , достаточно (если X локально выпукло) показать, что $\Lambda x_0 = 0$ для всякого непрерывного линейного функционала Λ на X , равного 0 на M .

3.6. Теорема. Если f — непрерывный линейный функционал на подпространстве M локально выпуклого пространства X , то существует такой функционал $\Lambda \in X^*$, что $\Lambda = f$ на M .

Замечание. Для нормированных пространств это непосредственное следствие теоремы 3.3. В общем случае этот результат также можно получить с помощью теоремы 3.3, если воспользоваться тем, что непрерывность линейного функционала на локально выпуклом пространстве равносильна тому, что он мажорируется некоторой непрерывной полунормой (см. теоремы 1.36 и 1.37, замечание 1.38 (b) и упр. 8 гл. 1). Приведенное ниже доказательство показывает, что теорема 3.6 зависит лишь от свойства отделимости, установленного в теореме 3.5.

Доказательство. Не теряя общности, можем считать, что f не есть тождественный 0 на M . Положим

$$M_0 = \{x \in M: f(x) = 0\}$$

и выберем такую точку $x_0 \in M$, что $f(x_0) = 1$. Так как функционал f непрерывен, то x_0 не принадлежит M -замыканию подпространства M_0 ; поскольку топология в M индуцирована топологией пространства X , а $x_0 \in M$, отсюда следует, что x_0 не принадлежит также X -замыканию подпространства M_0 .

Итак, теорема 3.5 гарантирует существование такого функционала $\Lambda \in X^*$, что $\Lambda x_0 = 1$ и $\Lambda = 0$ на M_0 .

Если $x \in M$, то $x - f(x)x_0 \in M_0$, ибо $f(x_0) = 1$. Поэтому

$$\Lambda x - f(x) = \Lambda x - f(x)\Lambda x_0 = \Lambda(x - f(x)x_0) = 0.$$

Таким образом, $\Lambda = f$ на M . ■

Приведем в заключение еще одно полезное следствие теоремы о разделении выпуклых множеств.

3.7. Теорема. Пусть B — выпуклое уравновешенное замкнутое множество в локально выпуклом пространстве X , и пусть $x_0 \in X$, но $x_0 \notin B$. Тогда существует такой функционал $\Lambda \in X^*$, что $|\Lambda x| \leq 1$ для всех $x \in B$, но $\Lambda x_0 > 1$.

Доказательство. Применим утверждение (b) теоремы 3.4 к множествам $A = \{x_0\}$ и B и заметим, что если Λ' — функционал, существование которого установлено в упомянутой теореме, то множество $\Lambda'(B)$ выпукло и уравновешено. Поэтому искомым функционал $\Lambda \in X^*$ можно получить, умножая Λ' на подходящий скаляр. ■

Слабые топологии

3.8. Предварительные сведения из топологии. В этом пункте мы хотим объяснить и проиллюстрировать некоторые явления, возникающие в ситуации, когда одно и то же множество снабжено несколькими топологиями.

Пусть τ_1 и τ_2 — две топологии в множестве X ; предположим, что $\tau_1 \subset \tau_2$, т. е. всякое τ_1 -открытое множество является также τ_2 -открытым. В этом случае мы говорим, что топология τ_1 *слабее* топологии τ_2 или что τ_2 *сильнее* τ_1 . [Отметим, что (в соответствии со смыслом знака включения $\subset$) выражения «слабее» и «сильнее» не исключают равенства.] В описанной ситуации тождественное отображение X непрерывно, если его рассматривать как отображение (X, τ_2) в (X, τ_1) , и *открыто*, если его рассматривать как отображение (X, τ_1) в (X, τ_2) .

В качестве первого примера мы покажем, что топология компактного хаусдорфова пространства обладает определенной жесткостью, а именно ее нельзя ослабить с сохранением аксиомы отделимости Хаусдорфа и нельзя усилить, не теряя компактности.

(а) Если τ_1 — хаусдорфова, а τ_2 — компактная топология в X и $\tau_1 \subset \tau_2$, то $\tau_1 = \tau_2$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольное τ_2 -замкнутое множество $F \subset X$. Так как X по условию τ_2 -компактно, то таково же F . Поскольку $\tau_1 \subset \tau_2$, отсюда следует τ_1 -компактность F (всякое τ_1 -открытое покрытие множества F является также τ_2 -открытым покрытием). Отсюда следует τ_1 -замкнутость F , ибо топология τ_1 хаусдорфова.

В качестве другого примера рассмотрим фактортопологию τ_N в факторпространстве X/N , определенную в п. 1.40, и факторотображение $\pi: X \rightarrow X/N$. По самому своему определению τ_N является сильнейшей из топологий в X/N , относительно которых отображение π непрерывно, и слабейшей из топологий, относительно которых π открыто. Иными словами, если τ' и τ'' — такие топологии в X/N , что π непрерывно относительно τ' и открыто относительно τ'' , то $\tau' \subset \tau_N \subset \tau''$.

Предположим теперь, что X — множество, а $\mathcal{F}$ — некоторое непустое семейство отображений $f: X \rightarrow Y_f$, где каждое из Y_f является топологическим пространством. [Во многих важных случаях Y_f одно и то же для всех $f \in \mathcal{F}$.] Пусть τ — семейство всех объединений всевозможных конечных пересечений множеств вида $f^{-1}(V)$, где $f \in \mathcal{F}$, а V — открытое множество в Y_f . Тогда τ — топология в X , причем она является *слабейшей* из топологий в X , относительно которых все отображения $f \in \mathcal{F}$ непрерывны: если τ' — любая другая топология, обладающая последним свойством, то $\tau \subset \tau'$. Эта топология τ называется *слабой топологией в X , индуцированной семейством $\mathcal{F}$* , или, более сжато, *$\mathcal{F}$ -топологией в X* .

Несомненно, наиболее известным примером этой ситуации служит обычный способ введения топологии в декартовом произведении X семейства топологических пространств $\{X_\alpha\}$. Если $\pi_\alpha(x)$ обозначает α -координату точки $x \in X$, то π_α отображает X на X_α и топология произведения τ в X есть, по определению, описанная выше $\{\pi_\alpha\}$ -топология, т. е. слабейшая топология, относительно которой все отображения π_α непрерывны. Предположим теперь, что каждое X_α является *компактным хаусдорфовым пространством*. Тогда (по теореме Тихонова) топология τ компактна, и из предложения (а) следует, что ее нельзя усилить, не пожертвовав теоремой Тихонова.

В последнем утверждении мы молчаливо воспользовались частным случаем следующего предложения:

(b) Если $\mathcal{F}$ — семейство отображений $f: X \rightarrow Y_f$, где X — множество, а каждое Y_f — хаусдорфово пространство, и если $\mathcal{F}$ разделяет точки в X , то $\mathcal{F}$ -топология в X является хаусдорфовой.

Действительно, если p и q — различные точки в X , то $f(p) \neq f(q)$ для некоторого $f \in \mathcal{F}$; в пространстве Y_f существуют непересекающиеся окрестности точек $f(p)$ и $f(q)$; прообразы этих окрестностей при отображении f открыты в X (по определению) и не пересекаются.

В качестве приложения изложенных выше идей докажем следующую метризационную теорему:

(c) Пусть X — компактное топологическое пространство. Если некоторая последовательность вещественных непрерывных функций $\{f_n\}$ разделяет точки в X , то пространство X метризуемо.

Пусть τ — исходная топология в X . Не ограничивая общности, можно считать, что $|f_n| \leq 1$ для всех n ; пусть τ_d — топология в X , индуцированная метрикой

$$d(p, q) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(p) - f_n(q)|.$$

Это действительно метрика, поскольку $\{f_n\}$ разделяет точки. Из τ -непрерывности функций f_n и равномерной сходимости ряда, определяющего d , на $X \times X$ следует τ -непрерывность d на $X \times X$. Поэтому шары

$$B_r(p) = \{q \in X: d(p, q) < r\}$$

являются τ -открытыми множествами в X . Таким образом, $\tau_d \subset \tau$. Так как топология τ_d индуцирована метрикой, то она хаусдорфова, и из (a) следует теперь, что $\tau_d = \tau$.

Следующая лемма находит применения при изучении векторных топологий. В частном случае $n=1$ она уже потребовалась нам в конце доказательства теоремы 3.6 (и была там доказана).

3.9. Лемма. Пусть $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ и Λ — линейные функционалы на векторном пространстве X , и пусть

$$N = \{x: \Lambda_1 x = \dots = \Lambda_n x = 0\}.$$

Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

(a) существуют такие скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что

$$\Lambda = \alpha_1 \Lambda_1 + \dots + \alpha_n \Lambda_n;$$

(b) существует такое $\gamma < \infty$, что

$$|\Lambda x| \leq \gamma \max_{1 \leq i \leq n} |\Lambda_i x| \quad (x \in X);$$

(c) $\Lambda x = 0$ для всех $x \in N$.

Доказательство. Ясно, что из (а) следует (b) и из (b) следует (с). Предположим, что выполняется (с). Пусть Φ — поле скаляров. Определим отображение $\pi: X \rightarrow \Phi^n$, полагая

$$\pi(x) = (\Lambda_1 x, \dots, \Lambda_n x).$$

Если $\pi(x) = \pi(x')$, то из (с) следует, что $\Lambda x = \Lambda x'$. Поэтому на Φ^n существует такая скалярная функция F , что $\Lambda = F \circ \pi$. Ясно, что F — линейный функционал на Φ^n . Поэтому найдутся такие $\alpha_i \in \Phi$, что

$$F(u_1, \dots, u_n) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

Таким образом,

$$\Lambda x = F(\pi(x)) = F(\Lambda_1 x, \dots, \Lambda_n x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Lambda_i x,$$

что совпадает с (а). ■

3.10. Теорема. Пусть X — векторное пространство, а X' — некоторое разделяющее точки в X векторное пространство линейных функционалов на X . Тогда X' -топология τ' превращает X в локально выпуклое пространство, сопряженное к которому совпадает с X' .

Сформулируем предположения относительно X' более явно: X' замкнуто относительно сложения и умножения на скаляры, и если x_1 и x_2 — различные точки пространства X , то $\Lambda x_1 \neq \Lambda x_2$ для некоторого $\Lambda \in X'$.

Доказательство. Поскольку пространства $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ хаусдорфовы, предложение (b) п. 3.8 показывает, что топология τ' хаусдорфова. Из линейности входящих в X' функционалов следует, что топология τ' инвариантна относительно сдвигов. Пусть $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n \in X'$ и $r_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$); тогда множество

$$(1) \quad V = \{x: |\Lambda_i x| < r_i \text{ при } 1 \leq i \leq n\}$$

выпукло и уравновешено, причем $V \in \tau'$. В действительности совокупность всех множеств V вида (1) является локальной базой топологии τ' . Таким образом, τ' — локально выпуклая топология в X .

Если V определено формулой (1), то $1/2 V + 1/2 V = V$, откуда следует непрерывность сложения. Пусть $x \in X$, и пусть α — скаляр. Тогда $x \in sV$ для некоторого $s > 0$. Если $|\beta - \alpha| < r$ и $y - x \in rV$, то вектор

$$\beta y - \alpha x = (\beta - \alpha)y + \alpha(y - x)$$

принадлежит V , когда r столь мало, что

$$r(s+r) + |\alpha|r < 1.$$

Поэтому умножение на скаляры непрерывно.

Итак, мы доказали, что τ' — локально выпуклая векторная топология. Каждый функционал $\Lambda \in X'$ непрерывен относительно τ' . Обратно, если некоторый линейный функционал Λ на X непрерывен относительно топологии τ' , то $|\Lambda x| < 1$ для всех x из некоторого множества V вида (1). Поэтому для функционалов Λ и $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ справедливо утверждение (b) леммы 3.9; следовательно, для них выполняется также утверждение (a), т. е. $\Lambda = \sum \alpha_i \Lambda_i$. Так как $\Lambda_i \in X'$, а X' — векторное пространство, то $\Lambda \in X'$. ■

Примечание. Первую часть изложенного доказательства можно было провести на основе теоремы 1.37, используя в качестве разделяющего семейства полунорм множество всех полунорм вида $\rho_\Lambda(x) = |\Lambda x|$ ($\Lambda \in X'$).

3.11. Слабая топология в топологическом векторном пространстве. Пусть X — такое топологическое векторное пространство (с топологией τ), что его сопряженное пространство X^* разделяет точки в X . [Мы знаем, что так обстоит дело для каждого локально выпуклого пространства X . Этим свойством обладают также некоторые другие пространства; см. упр. 5.] X^* -топология в пространстве X называется *слабой топологией* в X и обозначается τ_w .

Символом X_w мы будем обозначать пространство X , снабженное этой слабой топологией τ_w . Из теоремы 3.10 следует, что X_w является локально выпуклым пространством и что его сопряженное пространство совпадает с X^* .

Так как τ_w — слабейшая из топологий в X , относительно которых все функционалы $\Lambda \in X^*$ непрерывны, а топология τ обладает последним свойством, то $\tau_w \subset \tau$. В рассматриваемой ситуации топологию τ мы часто будем называть *подлинной*, или *исходной*¹⁾, топологией в X .

Такие не нуждающиеся в объяснении выражения, как «подлинная окрестность», «слабая окрестность», «подлинное замыкание», «слабое замыкание», «подлинная ограниченность», «слабая ограниченность» и т. д., будут употребляться для того, чтобы ясно было, какая при этом подразумевается топология²⁾.

¹⁾ В оригинале original topology. — Прим. перев.

²⁾ Если X — пространство Фреше (в частности, если пространство X банахово), исходную (подлинную) топологию в X обычно называют *сильной топологией*. В этом случае вместо слов «подлинный» и «подлинно» будут употребляться соответственно термины «сильный» и «сильно». Для общих локально выпуклых пространств термину «сильная топология» придается особый технический смысл (см. [18, стр. 256—268], а также [17, стр. 104]). Поэтому при изложении общих вопросов, по-видимому, разумно пользоваться введенной здесь терминологией.

Пусть, например, $\{x_n\}$ — последовательность в X . Высказывание « $x_n \rightarrow 0$ в исходной топологии» означает, что каждая подлинная окрестность нуля содержит все x_n с достаточно большими номерами n . Высказывание же « $x_n \rightarrow 0$ слабо» означает, что всякая слабая окрестность нуля содержит все x_n с достаточно большими номерами n . Так как каждая слабая окрестность нуля содержит окрестность вида

$$(1) \quad V = \{x: |\Lambda_i x| < r_i \text{ при } 1 \leq i \leq n\},$$

где $\Lambda_i \in X^*$ и $r_i > 0$, то легко видеть, что $x_n \rightarrow 0$ слабо тогда и только тогда, когда $\Lambda x_n \rightarrow 0$ для любого $\Lambda \in X^*$.

Поэтому всякая подлинно сходящаяся последовательность сходится также и слабо. [Обратное обычно не верно; см. упр. 5 и 6.]

Аналогично множество $E \subset X$ слабо ограничено (т. е. является ограниченным множеством в X_w) тогда и только тогда, когда всякая окрестность V вида (1) содержит tE для некоторого $t = t(V) > 0$. Это возможно в том и только в том случае, когда для любого $\Lambda \in X^*$ существует такое число $\gamma(\Lambda) < \infty$, что $|\Lambda x| < \gamma(\Lambda)$ при всех $x \in E$. Иными словами, множество $E \subset X$ слабо ограничено тогда и только тогда, когда каждый функционал $\Lambda \in X^*$ является ограниченной функцией на E .

Пусть V — снова множество вида (1); положим

$$N = \{x: \Lambda_1 x = \dots = \Lambda_n x = 0\}.$$

Поскольку отображение $x \rightarrow (\Lambda_1 x, \dots, \Lambda_n x)$ пространства X в $\mathbb{C}^n$ имеет своим ядром подпространство N , мы видим, что $\dim X \leq n + \dim N$. Так как $N \subset V$, то это приводит к следующему выводу:

Если пространство X бесконечномерно, то всякая слабая окрестность нуля в нем содержит бесконечномерное подпространство; поэтому для бесконечномерного X пространство X_w не может быть локально ограниченным.

Во многих случаях отсюда следует, что слабая топология строго слабее исходной. Разумеется, эти две топологии могут совпадать: например, из теоремы 3.10 следует, что $(X_w)_w = X_w$.

Теперь мы подходим к более интересному результату.

3.12. Теорема. Пусть E — выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X . Тогда слабое замыкание $\bar{E}_w$ множества E совпадает с его подлинным замыканием $\bar{E}$.

Доказательство. Поскольку множество $\bar{E}_w$ слабо замкнуто, оно подлинно замкнуто, так что $\bar{E} \subset \bar{E}_w$. Чтобы получить противоположное включение, выберем такую точку $x_0 \in X$, что $x_0 \notin \bar{E}$. Как показывает утверждение (b) теоремы 3.4, существуют

такой функционал $\Lambda \in X^*$ и такое $\gamma \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in \bar{E}$

$$\operatorname{Re} \Lambda x_0 < \gamma < \operatorname{Re} \Lambda x.$$

Поэтому множество $\{x: \operatorname{Re} \Lambda x < \gamma\}$ является слабой окрестностью точки x_0 , не пересекающейся с E . Таким образом, x_0 не принадлежит $\bar{E}_w$. Это доказывает включение $\bar{E}_w \subset \bar{E}$. ■

Следствие. Пусть X — локально выпуклое пространство.

(а) *Подпространство в X подлинно замкнуто тогда и только тогда, когда оно слабо замкнуто.*

(б) *Выпуклое подмножество пространства X подлинно всюду плотно тогда и только тогда, когда оно слабо всюду плотно.*

Доказательства очевидны. Вот другое заслуживающее внимания следствие теоремы 3.12:

3.13. Теорема. *Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство. Если $\{x_n\}$ — последовательность в X , слабо сходящаяся к некоторому $x \in X$, то в X найдется такая последовательность $\{y_i\}$, что*

(а) *каждый вектор y_i является выпуклой комбинацией конечного числа векторов x_n ;*

(б) *$y_i \rightarrow x$ в исходной топологии.*

Сформулируем свойство (а) последовательности $\{y_i\}$ в более явном виде: существуют такие неотрицательные числа α_{in} , что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{in} = 1, \quad y_i = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{in} x_n$$

и для каждого i все α_{in} , за исключением конечного числа, равны 0.

Доказательство. Пусть H — выпуклая оболочка множества всех членов последовательности $\{x_n\}$, и пусть K — слабое замыкание H . Тогда $x \in K$. По теореме 3.12, вектор x принадлежит также подлинному замыканию множества H . Поскольку исходная топология в X предполагается метризуемой, отсюда вытекает, что в H существует последовательность $\{y_i\}$, сходящаяся к x в исходной топологии. ■

Чтобы получить более осязаемое представление о содержании этой теоремы, полезно рассмотреть следующий пример.

Пусть K — компактное хаусдорфово пространство (замкнутый единичный интервал вещественной оси — уже достаточно интересный случай). Пусть f и f_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) — такие непрерывные комплексные функции на K , что $f_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ для всякого $x \in K$, причем $|f_n(x)| \leq 1$ для всех n и всех $x \in K$. Из теоремы 3.13 следует, что существует последовательность выпуклых комбинаций функций f_n , равномерно сходящаяся к f .

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим банахово пространство $C(K)$ всех комплексных непрерывных функций на K с максимумом модуля функции в качестве нормы. Сильная сходимость в $C(K)$ совпадает с равномерной сходимостью на K . Если μ — произвольная комплексная борелевская мера на K , то из теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. По теореме Рисса, сопряженное к $C(K)$ пространство может быть отождествлено с пространством всех регулярных комплексных борелевских мер на K ; поэтому $f_n \rightarrow f$ слабо в $C(K)$. Это позволяет применить теорему 3.13.

После этого краткого отступления мы возвращаемся теперь к основной линии изложения.

3.14. Слабая* топология в сопряженном пространстве. Пусть X — топологическое векторное пространство, а X^* — сопряженное к нему пространство. Следующие ниже определения имеют смысл независимо от того, разделяет X^* точки в X или нет. Заметим (это весьма важно для дальнейшего), что *каждый вектор $x \in X$ индуцирует линейный функционал f_x на X^* , определяемый формулой*

$$f_x \Lambda = \Lambda x,$$

причем семейство $\{f_x: x \in X\}$ разделяет точки в X^* .

Линейность каждого из функционалов f_x очевидна; если $f_x \Lambda = f_{x'} \Lambda'$ для всех $x \in X$, то $\Lambda x = \Lambda' x$ для всех $x \in X$, так что $\Lambda = \Lambda'$ по самому определению равенства между функциями.

Таким образом, возникает ситуация, описанная в теореме 3.10, с заменой X на X^* и X' на X .

X -топология в X^* называется *слабой* топологией* в пространстве X^* .

Из теоремы 3.10 следует, что она является локально выпуклой векторной топологией в X^* и что *каждый слабо* непрерывный линейный функционал на X^* имеет вид $\Lambda \rightarrow \Lambda x$ для некоторого $x \in X$.*

Слабая* топология обладает весьма важным свойством, связанным с компактностью, к которому мы сейчас перейдем. Некоторые патологические свойства слабой и слабой* топологий описаны в упр. 9 и 10.

Компактные выпуклые множества

3.15. Теорема Банаха — Алаоглу. *Если V — окрестность нуля в топологическом векторном пространстве X , то множество*

$$K = \{\Lambda \in X^*: |\Lambda x| \leq 1 \text{ для всех } x \in V\}$$

слабо компактно.*

Примечание. Иногда K называют *полярной* множества V . Множество K выпукло и уравновешено, потому что этими свойствами обладает единичный круг в $\mathbb{C}$ (и интервал $[-1, 1]$ в $\mathbb{R}$). В определении множества K имеется некоторая избыточность, поскольку каждый линейный функционал на X , ограниченный на V , непрерывен и потому принадлежит X^* .

Доказательство. Так как окрестности нуля являются поглощающими множествами, то для всякого $x \in X$ найдется такое число $\gamma(x) < \infty$, что $x \in \gamma(x)V$. Поэтому

$$(1) \quad |\Lambda x| \leq \gamma(x) \quad (x \in X, \Lambda \in K).$$

Пусть D_x — множество всех скаляров α , удовлетворяющих неравенству $|\alpha| \leq \gamma(x)$, и пусть τ — топология произведения в декартовом произведении P всех множеств D_x (по одному экземпляру для каждого $x \in X$). Так как каждое из множеств D_x компактно, то по теореме Тихонова P компактно. Элементами P являются все функции f на X (не только линейные), удовлетворяющие условию

$$(2) \quad |f(x)| \leq \gamma(x) \quad (x \in X).$$

Таким образом, $K \subset X^* \cap P$. Поэтому в K имеются две топологии: одна индуцирована слабой* топологией в X^* (именно к ней относится утверждение теоремы); другая индуцирована топологией τ произведения в P . Мы покажем, что

(а) эти две топологии в K совпадают,

(б) K является замкнутым подмножеством в P .

Так как P компактно, из (б) следует τ -компактность K , а тогда (а) влечет за собой слабую* компактность K .

Фиксируем некоторую точку $\Lambda_0 \in K$. Выберем произвольно $x_i \in X$ ($1 \leq i \leq n$) и $\delta > 0$ и положим

$$(3) \quad W_1 = \{\Lambda \in X^*: |\Lambda x_i - \Lambda_0 x_i| < \delta \text{ при } 1 \leq i \leq n\},$$

$$(4) \quad W_2 = \{f \in P: |f(x_i) - \Lambda_0 x_i| < \delta \text{ при } 1 \leq i \leq n\}.$$

Пусть n , x_i и δ пробегает все допустимые для них по смыслу значения. Возникающие при этом множества вида (3) образуют локальную базу слабой* топологии пространства X^* в точке Λ_0 , а множества вида (4) образуют локальную базу топологии τ пространства P в той же точке. Так как $K \subset X^* \cap P$, то

$$W_1 \cap K = W_2 \cap K,$$

откуда следует (а).

Далее, допустим, что f_0 принадлежит τ -замыканию K . Выберем произвольно $x \in X$, $y \in X$, скаляры α, β и $\varepsilon > 0$. Множество всех $f \in P$, для которых $|f - f_0| < \varepsilon$ в точках x, y и $\alpha x + \beta y$, является τ -окрестностью точки f_0 ; поэтому K содержит хотя бы

одну такую точку f . Так как все элементы K являются линейными функционалами, то

$$f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) = (f_0 - f)(\alpha x + \beta y) + \alpha(f - f_0)(x) + \beta(f - f_0)(y),$$

откуда

$$|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| < (1 + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, отсюда следует, что функция f_0 линейна. Наконец, если $x \in V$ и $\varepsilon > 0$, то аналогичное рассуждение показывает, что в K найдется функция f , для которой $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$. Так как $|f(x)| \leq 1$ по определению множества K , то отсюда следует, что $|f_0(x)| \leq 1$, и мы заключаем, что $f_0 \in K$. Это доказывает утверждение (b), а вместе с ним и теорему. ■

Если X *сепарабельно* (т. е. содержит счетное всюду плотное подмножество), то утверждение теоремы Банаха—Алаоглу можно усилить, объединяя ее со следующим результатом.

3.16. Теорема. *Если X —сепарабельное топологическое векторное пространство, а K —слабо* компактное подмножество в X^* , то K метризуемо в слабой* топологии.*

Предостережение: не следует думать, что само пространство X^* метризуемо в слабой* топологии; например, это не верно, если X —бесконечномерное банахово пространство (см. упр. 15).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ —счетное всюду плотное множество в X . Для каждого $\Lambda \in X^*$ положим $f_n(\Lambda) = \Lambda x_n$. По определению слабой* топологии все f_n являются слабо* непрерывными функциями на X^* . Если $f_n(\Lambda) = f_n(\Lambda')$ для всех n , то $\Lambda x_n = \Lambda' x_n$ для всех n , откуда следует, что $\Lambda = \Lambda'$, ибо Λ и Λ' непрерывны на X и совпадают на всюду плотном подмножестве.

Таким образом, $\{f_n\}$ —счетное семейство непрерывных функций, разделяющее точки в X^* , и метризуемость K следует из предложения (с) п. 3.8. ■

3.17. Теорема. *Если V —окрестность нуля в сепарабельном топологическом векторном пространстве X , а $\{\Lambda_n\}$ —такая последовательность в сопряженном пространстве X^* , что*

$$|\Lambda_n x| \leq 1 \quad (x \in V, n = 1, 2, 3, \dots),$$

то найдутся такая подпоследовательность $\{\Lambda_{n_i}\} \subset \{\Lambda_n\}$ и такой функционал $\Lambda \in X^*$, что для всех $x \in X$

$$\Lambda x = \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_{n_i} x.$$

Иными словами, поляра окрестности нуля сепарабельного топологического векторного пространства секвенциально компактна в слабой* топологии.

Доказательство получается объединением теорем 3. 15 и 3. 16. ■

В следующем применении теоремы Банаха—Алаоглу привлекаются также теорема Хана—Банаха и (неявно) категорные соображения.

3. 18. Теорема. *В локально выпуклом пространстве X всякое слабо ограниченное множество подлинно ограничено, и обратно.*

Как показывает часть (d) упр. 5, условие локальной выпуклости X существенно для справедливости этой теоремы.

Доказательство. Так как всякая слабая окрестность нуля в X является также подлинной окрестностью нуля, то из определения ограниченности с очевидностью следует, что каждое подлинно ограниченное множество в X слабо ограничено. Обратное утверждение составляет нетривиальную часть теоремы.

Пусть E —слабо ограниченное множество в X , и пусть U —подлинная окрестность нуля.

Так как пространство X локально выпукло, то в нем существует такая выпуклая уравновешенная подлинная окрестность нуля V , что $\bar{V} \subset U$. Пусть K —поляра окрестности V , т. е.

$$(1) \quad K = \{\Lambda \in X^*: |\Lambda x| \leq 1 \text{ для всех } x \in V\}.$$

Мы утверждаем, что

$$(2) \quad \bar{V} = \{x \in X: |\Lambda x| \leq 1 \text{ для всех } \Lambda \in K\}.$$

Ясно, что V содержится в множестве, стоящем в правой части соотношения (2); так как последнее множество подлинно замкнуто, то $\bar{V}$ также в нем содержится. Допустим, что $x_0 \in X$ и $x_0 \notin \bar{V}$. Тогда, как показывает теорема 3. 7 (с $\bar{V}$ вместо B), $\Lambda x_0 > 1$ для некоторого $\Lambda \in K$, откуда следует (2).

Так как E слабо ограничено, то для всякого $\Lambda \in X^*$ найдется такое $\gamma(\Lambda) < \infty$, что для всех $x \in E$

$$(3) \quad |\Lambda x| \leq \gamma(\Lambda).$$

Поскольку K выпукло и слабо* компактно (теорема 3.15), а функции $\Lambda \rightarrow \Lambda x$ слабо* непрерывны, условие (3) позволяет применить теорему 2.9 (с X^* вместо X и полем скаляров вместо Y) к семейству линейных функционалов $\Gamma_E = \{f_x: f_x(\Lambda) = \Lambda x, \Lambda \in X^*, x \in E\}$. В результате получаем, что существует постоянная $\gamma < \infty$, для которой

$$(4) \quad |\Lambda x| \leq \gamma \quad (x \in E, \Lambda \in K).$$

Из (2) и (4) следует, что $\gamma^{-1}x \in \bar{V} \subset U$ для всех $x \in E$. Так как окрестность V уравновешена, то

$$(5) \quad E \subset t\bar{V} \subset tU \quad (t > \gamma).$$

Таким образом, E подлинно ограничено. ■

Следствие. Если X — нормированное пространство, $E \subset X$ и для всех $\Lambda \in X^*$

$$(6) \quad \sup_{x \in E} |\Lambda x| < \infty,$$

то существует такое $\gamma < \infty$, что для всех $x \in E$

$$(7) \quad \|x\| < \gamma.$$

Доказательство. Нормированное пространство локально выпукло; условие (6) означает, что множество E слабо ограничено, а (7) означает, что оно подлинно ограничено. ■

При доказательстве теоремы Крейна—Мильмана будет полезен следующий аналог утверждения (b) теоремы 3.4.

3.19. Теорема. Пусть X — такое топологическое векторное пространство, что X^* разделяет точки в X , и пусть A и B — непересекающиеся непустые компактные выпуклые подмножества в X . Тогда существует такой функционал $\Lambda \in X^*$, что

$$\sup_{x \in A} \operatorname{Re} \Lambda x < \inf_{y \in B} \operatorname{Re} \Lambda y.$$

Отметим, что часть условий этой теоремы слабее, чем соответствующие условия теоремы 3.4 (ибо из локальной выпуклости X следует, что X^* разделяет точки в X); чтобы компенсировать это, мы предполагаем зато, что оба множества A и B компактны.

Доказательство. Пусть X_w обозначает пространство X со слабой топологией. Очевидно, что множества A и B компактны в пространстве X_w . Они также и замкнуты в X_w (поскольку пространство X_w хаусдорфово). Так как X_w локально выпукло (см. п. 3.11), мы можем на основании части (b) теоремы 3.4 (с заменой X на X_w) утверждать, что существует функционал $\Lambda \in (X_w)^*$, удовлетворяющий условию (1). Но в п. 3.11 (в качестве следствия теоремы 3.10) мы установили, что $(X_w)^* = X^*$. ■

3.20. Крайние точки. Пусть K — подмножество векторного пространства X . Непустое множество $S \subset K$ называется *крайним множеством* множества K , если ни одна точка из S не является внутренней точкой прямолинейного интервала, концы которого принадлежат K , но не принадлежат S . В аналитической форме

последнее условие выглядит так: если $x \in K$, $y \in K$, $0 < t < 1$ и

$$tx + (1-t)y \in S,$$

то $x \in S$ и $y \in S$.

Точка $x_0 \in K$ называется *крайней точкой* множества K , если одноточечное множество $\{x_0\}$ является крайним множеством для K .

Напомним, что *выпуклой оболочкой* множества $E \subset X$ называется наименьшее выпуклое множество в X , содержащее E , а *замкнутой выпуклой оболочкой* множества E называется замыкание его выпуклой оболочки.

В настоящее время не известно, верно ли, что каждое компактное выпуклое подмножество любого топологического векторного пространства имеет хотя бы одну крайнюю точку. Теоремы 3.21 и 3.22 показывают, что для широкого класса пространств запас крайних точек у таких множеств весьма обилён.

3.21. Теорема Крейна — Мильмана. Пусть X — такое топологическое векторное пространство, что X^* разделяет точки в X . Тогда всякое компактное выпуклое подмножество $K \subset X$ совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества своих крайних точек.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — семейство всех компактных крайних подмножеств множества K . Так как $K \in \mathcal{P}$, то $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Мы воспользуемся следующими двумя свойствами $\mathcal{P}$:

(а) если пересечение S всех множеств из некоторого непустого подсемейства семейства $\mathcal{P}$ непусто, то $S \in \mathcal{P}$;

(б) если $S \in \mathcal{P}$, $\Lambda \in X^*$, μ — максимум $\operatorname{Re} \Lambda$ на S и

$$S_\Lambda = \{x \in S: \operatorname{Re} \Lambda x = \mu\},$$

то $S_\Lambda \in \mathcal{P}$.

Утверждение (а) очевидно. Чтобы доказать (б), предположим, что $x \in K$, $y \in K$, $0 < t < 1$ и $tx + (1-t)y = z \in S_\Lambda$. Так как $z \in S$ и $S \in \mathcal{P}$, то $x \in S$ и $y \in S$. Поэтому $\operatorname{Re} \Lambda x \leq \mu$ и $\operatorname{Re} \Lambda y \leq \mu$. Поскольку $\operatorname{Re} \Lambda z = \mu$, а функционал Λ линеен, мы заключаем, что $\operatorname{Re} \Lambda x = \mu = \operatorname{Re} \Lambda y$, откуда $x \in S_\Lambda$ и $y \in S_\Lambda$.

Фиксируем некоторое множество $S \in \mathcal{P}$ и обозначим через $\mathcal{P}'$ совокупность всех подмножеств множества S , принадлежащих $\mathcal{P}$. Так как $S \in \mathcal{P}'$, то $\mathcal{P}'$ непусто. Частично упорядочим $\mathcal{P}'$ с помощью теоретико-множественного включения. Пусть Ω — максимальное линейно упорядоченное подсемейство в $\mathcal{P}'$, и пусть M — пересечение всех множеств, входящих в Ω . Так как Ω — центрированная система компактных множеств, то $M \neq \emptyset$. В силу (а) $M \in \mathcal{P}'$. Из максимальной Ω следует, что никакое собственное подмножество множества M не входит в $\mathcal{P}$. Поэтому в силу (б) всякий функционал $\Lambda \in X^*$ постоянен на M . Так как X^* разделяет точки в X , то M состоит из единственной точки, которая, очевидно, является крайней точкой множества K .

Итак, мы доказали, что *каждое компактное крайнее подмножество S множества K содержит крайнюю точку множества K .* [Заметим, что до сих пор мы не пользовались выпуклостью K .]

Из доказанного следует, что если H — выпуклая оболочка множества всех крайних точек K , то для любого $S \in \mathcal{P}$ множество $H \cap S$ непусто.

Так как K компактно и выпукло, то $\bar{H} \subset K$. Поэтому $\bar{H}$ компактно. Предположим (с целью получить противоречие), что некоторая точка $x_0 \in K$ не принадлежит $\bar{H}$. По теореме 3.19 найдется такой функционал $\Lambda \in X^*$, что $\operatorname{Re} \Lambda x < \operatorname{Re} \Lambda x_0$ для всех $x \in \bar{H}$. Ясно, что $\bar{H}$ не пересекается с множеством K_Λ , определенным при помощи конструкции, описанной в утверждении (b). Но, согласно (b), $K_\Lambda \in \mathcal{P}$, и мы получаем противоречие. ■

З а м е ч а н и е. Выпуклость множества K использовалась лишь при доказательстве компактности $\bar{H}$. Если пространство X предполагается локально выпуклым, то компактность $\bar{H}$ не нужна, поскольку в этом случае вместо теоремы 3.19 можно воспользоваться утверждением (b) теоремы 3.4. Приведенное выше рассуждение показывает, что в рассматриваемой ситуации $K \subset \bar{H}$. Таким образом, мы получаем следующий вариант теоремы Крейна — Мильмана.

3.22. Теорема. *Если X — локально выпуклое пространство, а E — множество всех крайних точек компакта $K \subset X$, то K содержится в замкнутой выпуклой оболочке множества E .*

Эквивалентная формулировка: замкнутые выпуклые оболочки множеств K и E совпадают.

Предыдущее замечание приводит к следующему вопросу: что можно сказать о выпуклой оболочке H компактного множества $K \subset X$? Даже в гильбертовом пространстве X множество H может не быть замкнутым. Возможны ситуации, в которых $\bar{H}$ не компактно (см. упр. 20 и 22), однако в пространствах Фреше такая патология не встречается (теорема 3.25). Доказательство последнего утверждения основано на том, что подмножество полного метрического пространства компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и вполне ограничено (см. приложение A4).

Напомним, что подмножество E метрического пространства X называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ оно содержится в объединении конечного числа открытых шаров радиуса ε . В ситуации, когда X — любое топологическое векторное пространство (не обязательно метризуемое), также можно ввести весьма близкое понятие вполне ограниченного подмножества.

3.23. Определение. Подмножество E топологического векторного пространства X называется *вполне ограниченным*, если для любой окрестности нуля V в X найдется такое *конечное* множество $F \subset X$, что $E \subset F + V$.

Если d — инвариантная метрика в метризуемом топологическом векторном пространстве X , совместимая с его топологией τ , то класс всех d -вполне ограниченных множеств совпадает с классом всех τ -вполне ограниченных множеств. [Это доказывается с помощью соображений, аналогичных изложенным в п. 1.25.]

3.24. Теорема. Пусть X — локально выпуклое пространство, а H — выпуклая оболочка вполне ограниченного множества $E \subset X$. Тогда множество H вполне ограничено.

Доказательство. Пусть U — окрестность нуля в X . Тогда в X найдутся такая выпуклая окрестность нуля V , что $V + V \subset U$, и такое конечное множество E_1 , что $E \subset E_1 + V$. Пусть H_1 — выпуклая оболочка множества E_1 .

Пусть $e_1, \dots, e_m$ — все точки множества E_1 , и пусть S — симплекс в $\mathbb{R}^m$, состоящий из всех таких $t = (t_1, \dots, t_m)$, для которых $t_i \geq 0$ и $\sum t_i = 1$; тогда

$$(t_1, \dots, t_m) \rightarrow \sum t_i e_i$$

представляет собой непрерывное отображение компактного множества S на H_1 . Поэтому множество H_1 компактно.

Если $x \in H$, то $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, где $x_i \in E$, $\alpha_i \geq 0$ и $\sum \alpha_i = 1$. Так как $E \subset E_1 + V$, то для каждого x_i найдется такая точка $y_i \in E_1$, что $x_i - y_i \in V$. Представим x в виде суммы

$$x = x' + x'',$$

где $x' = \sum \alpha_i y_i$ и $x'' = \sum \alpha_i (x_i - y_i)$. Из выпуклости V следует, что $x'' \in V$. Ясно, что $x' \in H_1$. Поэтому

$$H \subset H_1 + V.$$

Так как H_1 компактно, то найдется такое конечное множество $F \subset X$, что $H_1 \subset F + V$. Таким образом,

$$H \subset F + V + V \subset F + U.$$

Поскольку окрестность U произвольна, отсюда следует, что множество H вполне ограничено. ■

3.25. Теорема. Пусть H — выпуклая оболочка компактного подмножества K топологического векторного пространства X .

(а) Если X — пространство Фреше, то множество H компактно.

(б) Если $X = \mathbb{R}^n$, то множество H компактно.

Доказательство. (а) По теореме 3.24 множество H вполне ограничено. Так как пространство Фреше является полным метрическим пространством, то замыкание $\bar{H}$ множества H компактно¹⁾.

(б) Пусть S — симплекс в $\mathbb{R}^{n+1}$, состоящий из всех точек $t = (t_1, \dots, t_{n+1})$, для которых $t_i \geq 0$ и $\sum t_i = 1$. Из доказанной ниже леммы следует, что $x \in H$ тогда и только тогда, когда

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i$$

для некоторого $t \in S$ и некоторых $x_i \in K$ ($1 \leq i \leq n+1$). Иными словами, H совпадает с образом множества

$$S \times K \times \dots \times K$$

(K входит в это произведение $n+1$ раз) при непрерывном отображении

$$(t, x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i.$$

Поэтому H компактно. ■

Лемма. Если x принадлежит выпуклой оболочке множества $E \subset \mathbb{R}^n$, то x принадлежит выпуклой оболочке некоторого подмножества множества E , состоящего не более чем из $n+1$ точек.

Доказательство. Достаточно показать, что если $r > n$ и $x = \sum t_i x_i$ — выпуклая комбинация $r+1$ векторов $x_i \in E$, то в действительности вектор x может быть представлен в виде выпуклой комбинации r из этих векторов.

Не ограничивая общности, можно считать, что $t_i > 0$ при $1 \leq i \leq r+1$. Так как $r > n$, то r векторов x_i — x_{r+1} ($1 \leq i \leq r$) линейно зависимы. Отсюда следует, что существуют такие вещественные числа a_i , не все равные 0, что

$$\sum_{i=1}^{r+1} a_i x_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{r+1} a_i = 0.$$

Выберем такой номер m , что $|a_i/t_i| \leq |a_m/t_m|$ при $1 \leq i \leq r+1$,

¹⁾ Здесь (кроме упоминавшейся выше теоремы А4) мы неявно воспользовались еще тем, что замыкание вполне ограниченного подмножества метрического (или топологического векторного) пространства вполне ограничено. Для метрических пространств это следует из того, что любой замкнутый шар содержится в открытом шаре вдвое большего радиуса с центром в той же точке. Для топологических векторных пространств можно воспользоваться теоремой 1.11 и утверждением (е) упр. 3 гл. 1. — *Прим. перев.*

И ПОЛОЖИМ

$$c_i = t_i - \frac{a_i t_m}{a_m} \quad (1 \leq i \leq r+1).$$

Тогда $c_i \geq 0$, $\sum c_i = \sum t_i = 1$, $x = \sum c_i x_i$ и $c_m = 0$. ■

Интегрирование векторных функций

Иногда желательно иметь возможность интегрировать функции f , определенные на некотором пространстве Q с мерой μ (вещественной или комплексной) и принимающие значения в некотором топологическом векторном пространстве X . Первая проблема состоит в том, чтобы сопоставить такой функции f вектор

$$\int_Q f d\mu$$

пространства X , заслуживающий называться ее интегралом, т. е. обладающий хотя бы некоторыми из тех свойств, которыми обычно обладает интеграл. Например, для любого функционала $\Lambda \in X^*$ должно выполняться равенство

$$\Lambda \left(\int_Q f d\mu \right) = \int_Q (\Lambda f) d\mu,$$

поскольку аналогичное равенство верно для конечных сумм, а интеграл всегда является (или должен быть) пределом таких сумм в том или ином смысле. В действительности наше определение интеграла будет основано на одном этом требовании.

Известны и весьма подробно изучены также многие другие подходы к интегрированию векторных функций; некоторые из них основаны на более прямом определении интеграла как предела сумм (см. упр. 23).

3.26. Определение. Пусть Q — пространство с мерой μ , X — такое топологическое векторное пространство, что X^* разделяет точки в X , а f — такая функция на Q со значениями в X , что для всякого функционала $\Lambda \in X^*$ скалярная функция Λf интегрируема по мере μ ; заметим, что функция Λf определяется соотношением

$$(1) \quad (\Lambda f)(q) = \Lambda(f(q)) \quad (q \in Q).$$

Если существует такой вектор $y \in X$, что

$$(2) \quad \Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu$$

для любого функционала $\Lambda \in X^*$, то мы полагаем

$$(3) \quad \int_Q f d\mu = y$$

и называем этот вектор *интегралом функции f по мере μ* .

Замечание. Так как X^* разделяет точки в X , то ясно, что может существовать не более чем один такой вектор y . Поэтому здесь не возникает проблемы единственности интеграла.

Существование будет доказано лишь в довольно частном случае (достаточном, однако, для многих приложений), когда пространство Q компактно, а функция f непрерывна. В этом случае множество $f(Q)$ компактно, и единственное дополнительное условие, которое мы наложим, состоит в том, что замкнутая выпуклая оболочка этого множества тоже должна быть компактной. По теореме 3.25 это дополнительное условие автоматически выполняется, если X — пространство Фреше.

Напомним, что борелевской мерой на компактном (или локально компактном) хаусдорфовом пространстве Q называется мера¹⁾, определенная на σ -алгебре всех борелевских подмножеств пространства Q , т. е. на минимальной σ -алгебре, содержащей все открытые подмножества пространства Q . Вероятностной мерой называется положительная мера, полная масса которой равна 1.

3.27. Теорема. Пусть X — такое топологическое векторное пространство, что X^* разделяет точки в X , и пусть μ — борелевская вероятностная мера на некотором компактном хаусдорфовом пространстве Q . Если отображение $f: Q \rightarrow X$ непрерывно и если замыкание $\bar{N}$ выпуклой оболочки N множества $f(Q)$ компактно в X , то интеграл в смысле определения 3.26

$$(1) \quad y = \int_Q f d\mu$$

существует. Кроме того, $y \in \bar{N}$.

Замечание. Любая положительная борелевская мера ν на Q становится вероятностной после умножения ее на подходящее число; поэтому теорема (за исключением ее последнего утверждения) верна и для таких мер ν . С помощью теоремы Жордана

¹⁾ В определение борелевской меры μ на Q обычно включают еще следующее условие: $|\mu(E)| < \infty$ для любого компактного множества $E \subset Q$. [Для комплексных мер это всегда так по общепринятому толкованию термина «комплексная мера», однако вещественная борелевская мера (например, обычная мера Лебега в $\mathbf{R}$) может в числе своих значений иметь один (и только один) из символов $+\infty$, $-\infty$.] Как можно судить по замечанию, следующему за формулировкой теоремы 3.27, автор молчаливо предполагает, что это условие выполняется. — Прим. перев.

о разложении ее можно обобщить на любые вещественные борелевские меры, а также (если поле скаляров пространства X есть $\mathbb{C}$) на комплексные меры. В упр. 24 приводится обобщение другого рода.

Доказательство. Будем считать, что пространство X вещественно¹⁾. Мы должны доказать существование такого вектора $y \in \bar{H}$, что

$$(2) \quad \Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu$$

для любого функционала $\Lambda \in X^*$.

Пусть $L = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ — конечное подмножество в X^* , и пусть E_L — множество всех векторов $y \in \bar{H}$, удовлетворяющих соотношению (2) для каждого $\Lambda \in L$. Каждое из множеств E_L замкнуто (в силу непрерывности функционалов Λ) и потому компактно, ибо $\bar{H}$ компактно. Если все множества E_L непусты, то они образуют центрированную систему. В этом случае пересечение всех E_L непусто, и каждый вектор y , принадлежащий этому пересечению, удовлетворяет условию (2) для всех $\Lambda \in X^*$. Поэтому достаточно доказать, что $E_L \neq \emptyset$.

Рассмотрим $L = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ как отображение пространства X в $\mathbb{R}^n$. Пусть $K = L(f(Q))$. Положим

$$(3) \quad m_i = \int_Q (\Lambda_i f) d\mu \quad (1 \leq i \leq n).$$

Мы утверждаем, что точка $m = (m_1, \dots, m_n)$ принадлежит выпуклой оболочке S множества K .

Если $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ не принадлежит S , то (учитывая теорему 3.25 и утверждение (b) теоремы 3.4 и пользуясь известным видом линейных функционалов на $\mathbb{R}^n$) мы заключаем, что существуют такие вещественные числа $c_1, \dots, c_n$, для которых

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n c_i u_i < \sum_{i=1}^n c_i t_i$$

при всех $u = (u_1, \dots, u_n) \in K$. Поэтому

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n c_i \Lambda_i f(q) < \sum_{i=1}^n c_i t_i \quad (q \in Q).$$

Так как μ — вероятностная мера, то, интегрируя обе части неравенства (5), получаем, что $\sum c_i m_i < \sum c_i t_i$. Таким образом, $l \neq m$.

¹⁾ Комплексный случай легко сводится к вещественному с помощью соображений, изложенных в конце п. 3.1. — *Прим. перев.*

Это показывает, что точка m действительно принадлежит выпуклой оболочке множества K . Так как $K = L(f(Q))$, а отображение L линейно, отсюда следует, что $m = Ly$ для некоторого вектора y из выпуклой оболочки H множества $f(Q)$. Для такого вектора y имеем

$$(6) \quad \Lambda_i y = m_i = \int_Q (\Lambda_i f) d\mu \quad (1 \leq i \leq n).$$

Поэтому $y \in E_L$. ■

3.28. Теорема. Пусть X — такое топологическое векторное пространство, что X^* разделяет точки в X , а Q — такое компактное подмножество пространства X , что его замкнутая выпуклая оболочка $\bar{H}$ компактна. Тогда вектор y принадлежит $\bar{H}$ в том и только в том случае, когда на Q существует такая регулярная борелевская вероятностная мера μ , что

$$(1) \quad y = \int_Q x d\mu(x).$$

Замечания. Интеграл в (1) понимается в смысле определения 3.26 с $f(x) = x$.

Напомним, что положительная борелевская мера μ на локально компактном пространстве Q называется *регулярной*, если для любого борелевского множества $E \subset Q$

$$(2) \quad \mu(E) = \sup \{ \mu(K) : K \subset E \} = \inf \{ \mu(G) : G \supset E \},$$

где K пробегает все компактные подмножества множества E , а G — все открытые подмножества пространства Q , содержащие множество E .

Интеграл (1) представляет каждый вектор $y \in \bar{H}$ в виде «взвешенного среднего» векторов из Q или «центра массы» некоторого распределения единичной массы на Q .

Подчеркнем еще раз, что если X — пространство Фреше, то компактность $\bar{H}$ является следствием компактности Q .

Доказательство. Мы снова будем считать пространство X вещественным. Пусть $C(Q)$ — банахово пространство всех вещественных непрерывных функций на Q с $\sup$ -нормой. Теорема Рисса о представлении линейных функционалов позволяет отождествить сопряженное к $C(Q)$ пространство $C(Q)^*$ с пространством всех вещественных борелевских мер на Q , представимых в виде разности двух положительных регулярных борелевских мер на Q . Имея в виду это отождествление, определим отображение

$$(3) \quad \varphi: C(Q)^* \rightarrow X,$$

полагая

$$(4) \quad \varphi(\mu) = \int_Q x d\mu(x).$$

Пусть P — множество всех регулярных борелевских вероятностных мер на Q . Теорема утверждает, что $\varphi(P) = \bar{H}$.

Для каждого $x \in Q$ единичная мера δ_x на Q , сосредоточенная в точке x , принадлежит P . Поскольку $\varphi(\delta_x) = x$, мы видим, что $Q \subset \varphi(P)$. Так как отображение φ линейно, а множество P выпукло, отсюда следует, что выпуклая оболочка H множества Q тоже содержится в $\varphi(P)$. С другой стороны, $\varphi(P) \subset \bar{H}$, согласно теореме 3.27. Поэтому остается лишь доказать, что множество $\varphi(P)$ замкнуто в X ; мы сделаем это, доказав следующие два утверждения:

(i) множество P слабо* компактно в $C(Q)^*$;

(ii) отображение $\varphi: C(Q)^* \rightarrow X$, определенное формулой (4), непрерывно относительно слабой* топологии в $C(Q)^*$ и слабой топологии в X .

Если эти утверждения справедливы, то множество $\varphi(P)$ слабо компактно в X и потому слабо замкнуто; так как всякое слабо замкнутое множество в X подлинно замкнуто, то мы получаем требуемое заключение.

Чтобы доказать утверждение (i), заметим, что

$$(5) \quad P \subset \left\{ \mu: \left| \int_Q h d\mu \right| \leq 1, \text{ если } \|h\| < 1 \right\},$$

причем по теореме Банаха—Алаоглу большее из этих двух множеств слабо* компактно в $C(Q)^*$. Поэтому достаточно показать, что множество P слабо* замкнуто.

Для всякой неотрицательной функции $h \in C(Q)$ положим

$$(6) \quad E_h = \left\{ \mu: \int_Q h d\mu \geq 0 \right\}.$$

Так как $\mu \rightarrow \int h d\mu$ есть линейный функционал на $C(Q)^*$, порождаемый элементом $h \in C(Q)$, то из определения слабой* топологии следует, что каждое из множеств E_h слабо* замкнуто. Таким же является множество

$$(7) \quad E = \left\{ \mu: \int_Q 1 d\mu = 1 \right\}.$$

Так как множество P совпадает¹⁾ с пересечением E и всех множеств E_h , то P слабо* замкнуто.

¹⁾ Включение $P \subset E \cap \left(\bigcap_{h \geq 0} E_h \right)$ тривиально; для доказательства обратного включения следует воспользоваться тем, что рассматриваются лишь *регулярные* (т. е. представимые в виде разности двух регулярных положительных борелевских мер) вещественные борелевские меры. — *Прим. перев.*

Поскольку отображение φ линейно, для доказательства утверждения (ii) достаточно показать, что φ непрерывно в нуле. Каждая слабая окрестность нуля в X содержит множество вида

$$(8) \quad W = \{y \in X: |\Lambda_i y| < r_i \text{ при } 1 \leq i \leq n\},$$

где $\Lambda_i \in X^*$ и $r_i > 0$. Ограничение функционала Λ_i на множество Q принадлежит $C(Q)$. Поэтому множество

$$(9) \quad V = \left\{ \mu \in C(Q)^*: \left| \int_Q \Lambda_i d\mu \right| < r_i \text{ при } 1 \leq i \leq n \right\}$$

является слабой* окрестностью нуля в $C(Q)^*$. Но по определению интеграла 3:26

$$(10) \quad \int_Q \Lambda_i d\mu = \Lambda_i \left(\int_Q x d\mu(x) \right) = \Lambda_i \varphi(\mu).$$

Из (8), (9) и (10) следует, что $\varphi(V) \subset W$. Поэтому отображение φ непрерывно. ■

Следующее простое неравенство представляет собой один из возможных вариантов последнего утверждения теоремы 3.27.

3.29. Теорема. Пусть Q — компактное хаусдорфово пространство, X — банахово пространство, $f: Q \rightarrow X$ — непрерывное отображение и μ — положительная борелевская мера на Q . Тогда

$$\left\| \int_Q f d\mu \right\| \leq \int_Q \|f\| d\mu.$$

Доказательство. Пусть $y = \int_Q f d\mu$. Согласно следствию из теоремы 3.3, существует такой функционал $\Lambda \in X^*$, что $\Lambda y = \|y\|$ и $|\Lambda x| \leq \|x\|$ для всех $x \in X$. В частности,

$$|\Lambda f(q)| \leq \|f(q)\|$$

для всех $q \in Q$. Отсюда следует, что

$$\|y\| = \Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu \leq \int_Q \|f\| d\mu. \quad \blacksquare$$

Голоморфные функции

При изучении банаховых алгебр, а также в некоторых других ситуациях полезно расширить понятие голоморфности таким образом, чтобы оно стало применимо не только к комплексным, но и к векторным функциям. [Конечно, можно также расширять класс областей определения функций, переходя, например, от областей в $\mathbb{C}$ к областям в $\mathbb{C}^n$ или даже в более общих пространствах; но это другое дело.] Есть по меньшей мере два очень естественных определения голоморфности, пригодных в этой общей обстановке: «слабое» и «сильное». Оказывается, что в слу-

чае, когда рассматриваются функции со значениями в пространстве Фреше, эти определения приводят к одному и тому же классу функций.

3.30. Определение. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, и пусть X — комплексное топологическое векторное пространство.

(а) Функция $f: \Omega \rightarrow X$ называется *слабо голоморфной* в Ω , если для всякого функционала $\Lambda \in X^*$ функция Λf голоморфна в Ω в обычном смысле.

(б) Функция $f: \Omega \rightarrow X$ называется *сильно голоморфной* в Ω , если для каждой точки $z \in \Omega$ существует предел

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

в смысле топологии пространства X .

Отметим, что отношение, фигурирующее в определении (б), понимается как произведение скаляра $(w - z)^{-1}$ на вектор $f(w) - f(z)$ пространства X .

Из непрерывности и линейности функционалов Λ , участвующих в определении (а), сразу следует, что всякая сильно голоморфная функция слабо голоморфна. Если X — пространство Фреше, то верно и обратное утверждение, однако это далеко не очевидно (напомним, что слабо сходящаяся последовательность может не быть сходящейся в исходной топологии). При доказательстве этого факта важную роль будут играть теорема Коши и теорема 3.18.

Индекс точки $z \in \mathbb{C}$ относительно замкнутого пути¹⁾ Γ , не проходящего через эту точку, будет обозначаться $\text{Ind}_\Gamma(z)$; напомним, что для спрямляемого пути

$$\text{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

3.31. Теорема. Пусть $f: \Omega \rightarrow X$ — слабо голоморфная функция на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ со значениями в комплексном пространстве Фреше X . Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) функция f сильно непрерывна на Ω ;

¹⁾ Путь Γ в $\mathbb{C}$ — это непрерывное отображение γ компактного отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$; при этом символом Γ обычно обозначают как сам путь, так и образ отображения γ , т. е. компакт $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$. Путь Γ *замкнут*, если $\gamma(a) = \gamma(b)$. *Индексом* точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ относительно замкнутого пути Γ ($\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$) называют целое число $\text{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \{ \arg[\gamma(b) - z] - \arg[\gamma(a) - z] \}$, где $\arg[\gamma(t) - z]$ — какая-нибудь непрерывная ветвь многозначной функции $\text{Arg}[\gamma(t) - z]$ на отрезке $a \leq t \leq b$. Если путь Γ *спрямляем* (т. е. задающая его непрерывная функция $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ является функцией с ограниченной вариацией), то индекс $\text{Ind}_\Gamma(z)$ можно вычислять по формуле, приведенной в тексте. — *Прим. перев.*

(b) для функции f имеют место теорема Коши и формула Коши: если Γ — такой замкнутый спрямляемый путь в Ω , что $\text{Ind}_{\Gamma}(w) = 0$ для всякой точки $w \notin \Omega$, то

$$(1) \quad \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$$

и

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\zeta - z)^{-1} f(\zeta) d\zeta$$

для любой точки $z \in \Omega \setminus \Gamma$, удовлетворяющей условию $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 1$. Если Γ_1 и Γ_2 — такие замкнутые спрямляемые пути в Ω , что

$$\text{Ind}_{\Gamma_1}(w) = \text{Ind}_{\Gamma_2}(w)$$

для всякой точки $w \notin \Omega$, то

$$(3) \quad \int_{\Gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_2} f(\zeta) d\zeta;$$

(с) функция f сильно голоморфна в Ω .

Интегралы в утверждении (b) понимаются в смысле определения 3.26 и теоремы 3.27. При этом под $d\zeta$ понимается комплексная мера¹⁾ на компакте $\Gamma \subset \mathbb{C}$; можно также параметризовать Γ и интегрировать по мере Лебега — Стильтьеса на компактном интервале в $\mathbb{R}$.

Доказательство. (а) Не ограничивая общности, предположим, что $0 \in \Omega$ и $f(0) = 0$, и докажем сильную непрерывность функции f в точке 0. Положим

$$(4) \quad \Delta_r = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq r\};$$

¹⁾ Если $\Gamma(\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C})$ — спрямляемый путь, то мера $d\zeta$ на борелевских подмножествах E компакта $\Gamma = \gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$ определяется по формуле $(d\zeta)(E) = (d\gamma)(\gamma^{-1}(E))$, где $d\gamma$ — комплексная мера Лебега — Стильтьеса на

$[a, b]$, порожденная функцией γ . Ясно, что $\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_a^b f(\gamma(t)) d\gamma(t)$ для

любой непрерывной (комплексной или векторной) функции f на Γ ; если функция γ непрерывно дифференцируема, то последний интеграл можно

записать также в виде $\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$. Отметим еще, что утверждение (b)

сохраняет силу, если рассматривать «составные» спрямляемые замкнутые пути, т. е. любые конечные семейства $\Gamma = \{\Gamma_i\}$ спрямляемых замкнутых путей $\Gamma_i(\gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{C})$. При этом под индексом точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ относительно такого Γ понимается целое число $\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \sum_i \text{Ind}_{\Gamma_i}(z)$, а мера $d\zeta$

на компакте $\Gamma = \bigcup_i \Gamma_i \subset \mathbb{C}$ определяется по формуле $(d\zeta)(E) = \sum_i (d\gamma_i)(\gamma_i^{-1}(E \cap \Gamma_i))$. — Прим. перев.

тогда $\Delta_{2r} \subset \Omega$ для некоторого $r > 0$. Фиксируем такое r и обозначим через Γ положительно ориентированную границу круга Δ_{2r} .

Пусть $\Lambda \in X^*$. Так как функция $\zeta^{-1}\Lambda f(\zeta)$ голоморфна в Ω , то при $0 < |z| < 2r$

$$(5) \quad \frac{(\Lambda f)(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\Lambda f)(\zeta)}{(\zeta - z)\zeta} d\zeta.$$

Пусть $M(\Lambda)$ — максимум $|\Lambda f|$ на Δ_{2r} . Из (5) следует, что при $0 < |z| \leq r$

$$(6) \quad |z^{-1}\Lambda[f(z)]| \leq r^{-1}M(\Lambda).$$

Поэтому множество всех отношений

$$(7) \quad E_r = \left\{ \frac{f(z)}{z} : 0 < |z| \leq r \right\}$$

слабо ограничено в X . По теореме 3.18 это множество также сильно ограничено. Таким образом, для всякой (сильной) уравновешенной окрестности нуля V в X найдется такое положительное число $t = t(r, V) < \infty$, что $E_r \subset tV$. Выберем такое число $\varepsilon = \varepsilon(r, V) > 0$, что $\varepsilon < r$ и $\varepsilon t < 1$. Так как $E_\varepsilon \subset E_r$, а окрестность V уравновешена, то при $|z| \leq \varepsilon$

$$(8) \quad f(z) \in ztV \subset \varepsilon tV \subset V,$$

так что $f(\Delta_\varepsilon) \subset V$. Следовательно, функция f сильно непрерывна в нуле, а потому и в любой точке множества Ω .

В этом суть дела, все остальное получается почти автоматически¹⁾.

(b) В силу утверждения (a) и теоремы 3.27 интегралы, входящие в формулы (1)–(3), существуют. Согласно теории обычных голоморфных функций, эти формулы верны, если в них заменить f на Λf , где Λ — любой функционал из X^* . Следовательно, по определению 3.26 они верны и для рассматриваемой векторной функции f .

(c) Снова предположим, что $0 \in \Omega$ и $f(0) = 0$, и докажем сильную голоморфность функции f в точке 0. Пусть r , Δ_{2r} и Γ означают то же, что в доказательстве утверждения (a). Положим

$$(9) \quad y = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^{-2} f(\zeta) d\zeta.$$

Применяя формулу Коши (2) к функции f , после несложных вычислений получаем, что при $0 < |z| < 2r$

$$(10) \quad \frac{f(z)}{z} = y + zg(z),$$

¹⁾ Заметим, что при доказательстве утверждения (a) (в отличие от (b) и (c)) используется лишь локальная выпуклость X (позволяющая применить теорему 3.18), а метризуемость и полнота роли не играют. — *Прим. перев.*

где

$$(11) \quad g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [2re^{i\theta} (2re^{i\theta} - z)]^{-1} f(2re^{i\theta}) d\theta.$$

Пусть V — выпуклая уравновешенная окрестность нуля в X . Положим $K = \{f(\xi): |\xi| = 2r\}$. Тогда K — компакт в X , так что $K \subset tV$ для некоторого $t < \infty$. Отсюда следует, что подынтегральное выражение интеграла (11) при всех значениях θ принадлежит sV , если $s = tr^{-2}$ и $|z| \leq r$. Следовательно, $g(z) \in s\bar{V}$ при $|z| \leq r$. Поэтому левая часть формулы (10) при $z \rightarrow 0$ сильно сходится к вектору y . ■

Следующее обобщение теоремы Лиувилля об ограниченных целых функциях доказывается без использования теоремы 3.31. Оно может быть применено при изучении спектров элементов банаховых алгебр. (См. упр. 4 гл. 10.)

3.32. Теорема. Пусть X — такое комплексное топологическое векторное пространство, что X^* разделяет его точки. Предположим, что функция $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ слабо голоморфна и что $f(\mathbb{C})$ является слабо ограниченным подмножеством пространства X . Тогда функция f постоянна.

Доказательство. Для каждого функционала $\Lambda \in X^*$ комплексная функция Λf является целой и ограниченной. Поэтому из теоремы Лиувилля следует, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\Lambda f(z) = \Lambda f(0).$$

Поскольку X^* разделяет точки в X , получаем отсюда, что $f(z) = f(0)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. ■

В части (d) упр. 5 описан пример слабо ограниченного, но не сильно ограниченного множества в некотором F -пространстве X , для которого X^* разделяет точки; ср. с теоремой 3.18.

Упражнения

1. Назовем множество $H \subset \mathbb{R}^n$ гиперплоскостью, если существуют такие вещественные числа $a_1, \dots, a_n$ и c , что $a_i \neq 0$ хотя бы для одного i и что H состоит из всех точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию $\sum a_i x_i = c$.

Предположим, что E — выпуклое множество с непустой внутренностью в $\mathbb{R}^n$ и что y — граничная точка E . Доказать, что существует такая гиперплоскость H , что $y \in H$ и что E целиком лежит по одну сторону от H . (Сформулировать последнее условие более точно.) *Наводящее соображение:* предположите, что 0 — внутренняя точка множества E , рассмотрите одномерное подпространство M , содержащее точку y , и примените теорему 3.2.

2. Пусть $L^2 = L^2([-1, 1])$ (относительно меры Лебега). Для всякого скаляра α обозначим через E_α множество всех непрерывных функций f на отрезке $[-1, 1]$, для которых $f(0) = \alpha$. Показать, что каждое множество E_α

выпукло и всюду плотно в L^2 . Таким образом, если $\alpha \neq \beta$, то E_α и E_β — непересекающиеся выпуклые множества, которые не могут быть разделены никаким непрерывным линейным функционалом Λ на L^2 . Указание: что такое $\Lambda(E_\alpha)$?

3. Пусть X — вещественное векторное пространство (без топологии). Назовем точку $x_0 \in A \subset X$ *окруженной точкой* выпуклого множества A , если множество $A - x_0$ является поглощающим.

(а) Пусть A и B — непересекающиеся выпуклые множества в X , и пусть A обладает окруженной точкой. Доказать, что существует такой ненулевой линейный функционал Λ на X , что $\Lambda(A) \cap \Lambda(B)$ содержит не более одной точки. (Доказательство похоже на доказательство теоремы 3.4.)

(б) Показать (скажем, на примере $X = \mathbb{R}^2$), что при выполнении условий пункта (а) может не существовать функционала Λ , для которого множества $\Lambda(A)$ и $\Lambda(B)$ не пересекаются.

4. Пусть l^∞ — пространство всех ограниченных вещественных функций x на множестве всех положительных целых чисел. Определим на l^∞ оператор сдвига τ , полагая

$$(\tau x)(n) = x(n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Доказать, что на l^∞ существует такой линейный функционал Λ (называемый *банаховым пределом*), что

$$(a) \Lambda \tau x = \Lambda x \text{ и}$$

$$(b) \liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq \Lambda x \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x(n)$$

для всех $x \in l^\infty$. *Наводящее соображение.* Положите

$$\Lambda_n x = \frac{x(1) + \dots + x(n)}{n},$$

$$M = \{x \in l^\infty : \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n x = \Lambda x \text{ существует}\},$$

$$p(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n x$$

и примените теорему 3.2.

5. Пусть $0 < p < \infty$; обозначим через l^p пространство всех функций x (вещественных или комплексных, в зависимости от обстоятельств), определенных на множестве всех положительных целых чисел и удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty.$$

При $1 \leq p < \infty$ и $x \in l^p$ положим $\|x\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right\}^{1/p}$, а для $x \in l^\infty$ (см. предыдущее упражнение) положим $\|x\|_\infty = \sup_n |x(n)|$.

(а) Пусть $1 \leq p < \infty$; доказать, что нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_\infty$ превращают пространства l^p и l^∞ соответственно в банаховы пространства. Доказать, что если $p^{-1} + q^{-1} = 1$, то $(l^p)^* = l^q$ в следующем смысле: формула

$$\Lambda x = \sum x(n) y(n) \quad (x \in l^p, y \in l^q)$$

устанавливает взаимно однозначное линейное соответствие $\Lambda \leftrightarrow y$ между пространствами $(l^p)^*$ и l^q .

(б) Доказать, что при $1 < p < \infty$ пространство l^p содержит слабо сходящиеся последовательности, не являющиеся сильно сходящимися.

(с) С другой стороны, доказать, что каждая слабо сходящаяся последовательность в пространстве l^1 сильно сходится, несмотря на то что слабая

топология пространства l^1 отлична от его сильной топологии (которая индуцируется нормой).

(d) Доказать, что если $0 < p < 1$, то пространство l^p с метрикой

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - y(n)|^p$$

является локально ограниченным F -пространством и что оно не является локально выпуклым; показать, что тем не менее $(l^p)^*$ разделяет точки в l^p . (Таким образом, в l^p имеется много открытых выпуклых множеств, но их не хватает для образования базы топологии пространства l^p .) Показать, что $(l^p)^* = l^\infty$ в том же самом смысле, что и в утверждении (a). Показать также, что множество всех x , для которых $d(x, 0) < 1$, слабо ограничено, но не ограничено в исходной топологии.

(e) Пусть $0 < p \leq 1$, и пусть τ_p — слабая* топология, индуцированная в l^∞ пространством l^p (см. (a) и (d)). Показать, что если $0 < p < r \leq 1$, то топологии τ_p и τ_r различны (верно ли, что одна из них слабее другой?), но что они индуцируют одну и ту же топологию на каждом ограниченном по норме подмножестве пространства l^∞ . Указание: замкнутый единичный шар $\{x \in l^\infty: \|x\|_\infty \leq 1\}$ пространства l^* слабо* компактен.

6. Пусть $f_n(t) = e^{int}$ ($-\pi \leq t \leq \pi$), и пусть $L^p = L^p(-\pi, \pi)$ (относительно меры Лебега). Показать, что если $1 \leq p < \infty$, то $f_n \rightarrow 0$ в L^p слабо, но не сильно.

7. Рассмотрим в пространстве $L^\infty([0, 1])$ две топологии: индуцированную нормой ($\|f\|_\infty$ есть существенная верхняя грань $|f|$) и слабую* топологию, индуцированную представлением L^∞ как сопряженного пространства к L^1 . Пусть C — подпространство в L^∞ , состоящее из всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что относительно одной из указанных топологий C всюду плотно в L^∞ , а относительно другой нет (ср. со следствием теоремы 3.12). Доказать аналогичное утверждение с заменой слов «всюду плотно» словом «замкнуто».

8. Пусть C — банахово пространство всех комплексных непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с суп-нормой, и пусть B — замкнутый единичный шар в C . Показать, что существует такой непрерывный линейный функционал Λ на C , что $\Lambda(B)$ является открытым подмножеством комплексной плоскости; в частности, функция $|\Lambda|$ не достигает на B своей верхней грани.

9. Пусть $E \subset L^2(-\pi, \pi)$ — множество всех функций

$$f_{m,n}(t) = e^{imt} + me^{int},$$

где m и n — целые числа и $0 \leq m < n$. Пусть E_1 — множество всех $g \in L^2$, являющихся пределами слабо сходящихся последовательностей функций из E (множество E_1 называется *слабым секвенциальным замыканием* множества E).

(a) Найти все $g \in E_1$.

(b) Найти все g , принадлежащие слабому замыканию $\bar{E}_w$ множества E .

(c) Показать, что $0 \in \bar{E}_w$ и что 0 не принадлежит E_1 , хотя 0 принадлежит слабому секвенциальному замыканию множества E_1 .

Этот пример показывает, что слабое секвенциальное замыкание может не быть слабо секвенциально замкнутым множеством. Поэтому переход от данного множества к его слабому секвенциальному замыканию не является операцией замыкания в том смысле, в котором этот термин обычно употребляется в топологии. (См. также упр. 28.)

10. Представим l^1 как пространство всех вещественных функций x на множестве $S = \{(m, n): m \geq 1, n \geq 1\}$, удовлетворяющих условию

$$\|x\|_1 = \sum |x(m, n)| < \infty.$$

Пусть c_0 — пространство всех таких вещественных функций y на S , для которых $y(m, n) \rightarrow 0$ при $m+n \rightarrow \infty$, с нормой $\|y\|_\infty = \sup |y(m, n)|$.

Пусть M — подпространство в l^1 , состоящее из всех функций $x \in l^1$, удовлетворяющих уравнениям

$$mx(m, 1) = \sum_{n=2}^{\infty} x(m, n) \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

(a) Доказать, что $l^1 = (c_0)^*$. (См. также упр. 24 гл. 4.)

(b) Доказать, что подпространство M замкнуто относительно нормы в l^1 .

(c) Доказать, что M слабо* всюду плотно в l^1 (относительно слабой* топологии в l^1 , индуцированной пространством c_0 ; см. (a)).

(d) Пусть $B = \{x \in l^1: \|x\|_1 \leq 1\}$ — замкнутый единичный шар в l^1 . Доказать, что, несмотря на (c), слабое* замыкание множества $M \cap B$ не содержит ни одного шара. *Наводящее соображение:* если $\delta > 0$ и $m > 2/\delta$, то для всех $x \in M \cap B$

$$|x(m, 1)| \leq \frac{\|x\|_1}{m} < \frac{\delta}{2},$$

хотя $x(m, 1) = \delta$ для некоторого $x \in \delta B$; таким образом, δB не содержится в слабом* замыкании множества $M \cap B$; распространите это рассуждение на шары с центрами в других точках.

11. Пусть X — бесконечномерное пространство Фреше. Доказать, что пространство X^* , снабженное слабой* топологией, является множеством первой категории в себе.

12. Показать, что замкнутый (относительно нормы) единичный шар пространства c_0 не является слабо компактными; напомним, что $(c_0)^* = l^1$ (упр. 10).

13. Положим $f_N(t) = N^{-1} \sum_{n=1}^{N^2} e^{int}$. Доказать, что $f_N \rightarrow 0$ слабо в $L^2(-\pi, \pi)$.

По теореме 3.13 некоторая последовательность выпуклых комбинаций функций f_N сходится к 0 по L^2 -норме. Найти такую последовательность. Показать, что последовательность $g_N = N^{-1}(f_1 + \dots + f_N)$ таким свойством не обладает.

14. (a) Пусть Ω — локально компактное хаусдорфово пространство, а $C(\Omega)$ — пространство всех непрерывных комплексных функций на Ω . Для каждого компакта $K \subset \Omega$ определим в $C(\Omega)$ полунорму ρ_K , полагая

$$\rho_K(f) = \sup \{|f(x)|: x \in K\}.$$

Снабдим $C(\Omega)$ топологией, индуцированной этим семейством полунорм. Доказать, что для всякого функционала $\Lambda \in C(\Omega)^*$ найдется такой компакт $K \subset \Omega$ и такая комплексная борелевская мера μ на K , что

$$\Lambda f = \int_K f d\mu \quad (f \in C(\Omega)).$$

(b) Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{C}$, а $H(\Omega)$ — пространство всех функций, голоморфных в Ω . Построить такое счетное семейство Γ мер с компактными носителями, содержащимися в Ω , что пространство $H(\Omega)$ состоит в точности из тех функций $f \in C(\Omega)$, для которых $\int f d\mu = 0$ для всех $\mu \in \Gamma$.

15. Пусть X — такое топологическое векторное пространство, что X^* разделяет его точки. Доказать, что слабая* топология в X^* метризуема тогда и только тогда, когда пространство X обладает конечным или счетным базисом Гамеля (см. определение в упр. 1 гл. 2)

16. Доказать, что замкнутый единичный шар пространства L^1 (относительно меры Лебега на единичном интервале) не имеет крайних точек, но что каждая точка «поверхности» единичного шара пространства L^p ($1 < p < \infty$) является крайней точкой этого шара.

17. Найти все крайние точки замкнутого единичного шара в пространстве C всех непрерывных функций на единичном интервале с $\sup$ -нормой. (Ответ зависит от выбора поля скаляров.)

18. Пусть K — наименьшее выпуклое множество в $\mathbb{R}^3$, содержащее точки $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$ и все точки $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, где $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Показать, что множество K компактно, но множество всех его крайних точек не компактно. Существует ли такой пример в $\mathbb{R}^2$?

19. Пусть K — компактное выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что для любого $x \in K$ найдется такое $r \leq n+1$, что x представляется в виде выпуклой комбинации r крайних точек множества K . *Наводящее соображение.* Действуйте по индукции. Проведите прямую через точку x и некоторую крайнюю точку множества K и рассмотрите концевые точки отрезка, по которому эта прямая пересекается с K . Воспользуйтесь упражнением 1.

20. Допустим, что топологическое векторное пространство X содержит счетное подмножество $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, обладающее следующими свойствами:

(а) $e_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

(б) каждый вектор $x \in X$ является конечной линейной комбинацией элементов множества E : $x = \sum \gamma_n(x) e_n$;

(с) для всякого n вектор e_n не принадлежит замкнутому подпространству пространства X , порожденному остальными векторами e_i .

Например, X может быть пространством всех комплексных полиномов

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

с нормой

$$\|f\| = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2},$$

а $e_n(z) = z^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Доказать, что каждый коэффициент γ_n , участвующий в условии (б), является непрерывным линейным функционалом на X . Пусть $K = E \cup \{0\}$; тогда K компактно. Доказать, что выпуклая оболочка H множества K замкнута, но не компактна и что множество всех крайних точек H совпадает с множеством всех крайних точек K .

21. Если $0 < p < 1$, то каждая функция $f \in L^p$ (кроме $f = 0$) является средним арифметическим двух функций, менее удаленных от 0, чем f (см. п. 1.47). Используя это, построить пример счетного компактного множества $K \subset L^p$ (с единственной предельной точкой 0), не имеющего крайних точек.

22. Показать, что если $0 < p < 1$, то в пространстве l^p существует такое компактное множество K , выпуклая оболочка которого не ограничена. Это возможно, несмотря на тот факт, что $(l^p)^*$ разделяет точки в l^p ; см. упр. 5. *Наводящее соображение:* определите элементы $x_n \in l^p$, полагая

$$x_n(n) = n^{p-1}, \quad x_n(m) = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n;$$

пусть K состоит из элементов $0, x_1, x_2, x_3, \dots$; покажите, что последователь-

ность $y_N = N^{-1}(x_1 + \dots + x_N)$ не ограничена в lP .

23. Пусть μ — борелевская вероятностная мера на компактном хаусдорфовом пространстве Q , X — пространство Фреше, а $f: Q \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Разбиением пространства Q называется любое конечное семейство непустых попарно не пересекающихся борелевских подмножеств в Q , объединение которых равно Q . Доказать, что для каждой окрестности нуля V в X найдется такое разбиение $\{E_i\}$ пространства Q , что разность

$$z = \int_Q f d\mu - \sum_i \mu(E_i) f(s_i)$$

при любом выборе точек $s_i \in E_i$ принадлежит окрестности V . (Это дает представление интеграла в виде сильного предела «римановых сумм».) *Наводящее соображение.* Считайте окрестность V выпуклой и уравновешенной. Пусть разбиение $\{E_i\}$ выбрано так, что $f(s) - f(t) \in V$, если точки s и t принадлежат одному и тому же множеству E_i . Тогда, если $\Lambda \in X^*$ и $|\Lambda x| \leq 1$ для всех $x \in V$, то $|\Lambda z| \leq 1$.

24. В ситуации, описанной в теореме 3.27, рассмотрим непрерывное линейное отображение T пространства X в такое топологическое векторное пространство Y , для которого Y^* разделяет точки. Доказать, что

$$\int_Q (Tf) d\mu = T \int_Q f d\mu.$$

Указание: $\Lambda T \in X^*$ для любого $\Lambda \in Y^*$.

25. Пусть E — множество всех крайних точек компактного выпуклого подмножества K такого топологического пространства X , для которого X^* разделяет точки. Доказать, что для каждой точки $y \in K$ на компакте $Q = \bar{E}$ найдется такая регулярная борелевская вероятностная мера μ , что

$$y = \int_Q x d\mu(x).$$

26. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, X — комплексное пространство Фреше, а $f: \Omega \rightarrow X$ — голоморфная функция.

(а) Сформулировать и доказать теорему о представлении функции f степенными рядами вида $\sum (z-a)^n c_n$, где $c_n \in X$.

(б) Распространить теорему Морера на функции со значениями в X .

(с) Если последовательность комплексных голоморфных в Ω функций равномерно сходится на компактных подмножествах области Ω , то ее предел является голоморфной в Ω функцией. Обобщается ли это на голоморфные функции со значениями в X ?

27. Пусть $\{\alpha_i\}$ — ограниченное множество различных комплексных чисел,

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — такая целая функция, что $c_n \neq 0$ при всех n , и

$$g_i(z) = f(\alpha_i z).$$

Доказать, что векторное пространство, порожденное функциями g_i , всюду плотно в пространстве Фреше $H(\mathbb{C})$, определенном в п. 1.45.

Наводящее соображение. Пусть μ — такая мера с компактным носителем, что $\int g_i d\mu = 0$ для всех i , и пусть

$$\varphi(w) = \int f(wz) d\mu(z) \quad (w \in C).$$

Докажите, что $\varphi(w) = 0$ для всех w . Выведите отсюда, что $\int z^n d\mu(z) = 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots$. Воспользуйтесь результатами упр. 14.

Опишите замкнутое подпространство пространства $H(C)$, порожденное функциями g_i , в случае, когда некоторые из коэффициентов c_n равны 0.

28. Пусть X — пространство Фреше (или, в более общем случае, метризуемое локально выпуклое пространство). Доказать следующие утверждения: (а) Пространство X^* является объединением счетного числа слабо* компактных множеств E_n .

(б) Если пространство X сепарабельно, то каждое слабо* компактное множество в X^* метризуемо, слабая* топология в X^* сепарабельна и некоторое счетное подмножество пространства X^* разделяет точки в X . (Ср. с упр. 15.)

(с) Если K — слабо компактное подмножество пространства X и $x_0 \in K$ — слабая предельная точка некоторого счетного множества $E \subset K$, то существует последовательность $\{x_n\}$ точек множества E , слабо сходящаяся к точке x_0 . *Указание:* пусть Y — наименьшее замкнутое подпространство в X , содержащее E ; примените к Y утверждение (б) и покажите, что на множестве $K \cap Y$ слабая топология метризуема.

З а м е ч а н и е. Суть утверждения (с) состоит в том, что оно гарантирует существование сходящейся к x_0 *подпоследовательности*, а не *подсети*. Отметим, что существуют компактные хаусдорфовы пространства, в которых ни одна последовательность различных точек не является сходящейся.

29. Пусть $C(K)$ — банахово пространство всех непрерывных комплексных функций на компактном хаусдорфовом пространстве K с $\sup$ -нормой. Для каждого $p \in K$ определим функционал $\Lambda_p \in C(K)^*$, полагая $\Lambda_p f = f(p)$. Показать, что отображение $p \rightarrow \Lambda_p$ является гомеоморфизмом компакта K в пространство $C(K)^*$, снабженное слабой* топологией. Поэтому утверждение (с) упр. 28 не распространяется на слабо* компактные множества.

Глава 4

ДВОЙСТВЕННОСТЬ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Нормированное сопряженное к нормированному пространству

Введение. Если X и Y — топологические векторные пространства, то через $\mathcal{B}(X, Y)$ будет обозначаться совокупность всех ограниченных линейных отображений (или *операторов*) из X в Y . Для простоты вместо $\mathcal{B}(X, X)$ будет употребляться сокращенное обозначение $\mathcal{B}(X)$. Множество $\mathcal{B}(X, Y)$ само является векторным пространством относительно обычных операций сложения функций и умножения их на скаляры. (При этом играет роль лишь наличие структуры векторного пространства в Y , а не в X .) Вообще говоря, имеется много способов, позволяющих превратить $\mathcal{B}(X, Y)$ в *топологическое* векторное пространство.

В этой главе мы будем иметь дело лишь с нормированными пространствами X и Y . В этом случае пространство $\mathcal{B}(X, Y)$ само может быть нормировано очень естественным способом. В частном случае, когда Y есть поле скаляров, так что $\mathcal{B}(X, Y)$ совпадает с сопряженным пространством X^* пространства X , естественная норма в $\mathcal{B}(X, Y)$ определяет в пространстве X^* топологию, которая оказывается сильнее его слабой* топологии. Связь между банаховым пространством X и его *нормированным сопряженным* пространством X^* и составляет главный предмет исследования этой главы.

4.1. Теорема. Пусть X и Y — нормированные пространства. Сопоставим каждому оператору $\Lambda \in \mathcal{B}(X, Y)$ число

$$(1) \quad \|\Lambda\| = \sup \{\|\Lambda x\| : x \in X, \|x\| \leq 1\},$$

называемое его *нормой*. Это определение превращает $\mathcal{B}(X, Y)$ в нормированное пространство. Если пространство Y банахово, то пространство $\mathcal{B}(X, Y)$ тоже банахово.

Доказательство. Так как подмножество нормированного пространства ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре с центром в нуле, то $\|\Lambda\| < \infty$ для всякого $\Lambda \in \mathcal{B}(X, Y)$. Если α — скаляр, то $(\alpha\Lambda)(x) = \alpha \cdot \Lambda x$, так что

$$(2) \quad \|\alpha\Lambda\| = |\alpha| \|\Lambda\|.$$

Неравенство треугольника в Y показывает, что

$$\begin{aligned} \|(\Lambda_1 + \Lambda_2)x\| &= \|\Lambda_1 x + \Lambda_2 x\| \leq \|\Lambda_1 x\| + \|\Lambda_2 x\| \leq \\ &\leq (\|\Lambda_1\| + \|\Lambda_2\|)\|x\| \leq \|\Lambda_1\| + \|\Lambda_2\| \end{aligned}$$

для любого $x \in X$, удовлетворяющего условию $\|x\| \leq 1$. Поэтому

$$(3) \quad \|\Lambda_1 + \Lambda_2\| \leq \|\Lambda_1\| + \|\Lambda_2\|.$$

Если $\Lambda \neq 0$, то $\Lambda x \neq 0$ для некоторого $x \in X$; поэтому $\|\Lambda\| > 0$. Таким образом, $\mathcal{B}(X, Y)$ — нормированное пространство.

Предположим теперь, что пространство Y полно, и пусть $\{\Lambda_n\}$ — последовательность Коши в $\mathcal{B}(X, Y)$. Так как

$$(4) \quad \|\Lambda_n x - \Lambda_m x\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\| \|x\|,$$

а по предположению $\|\Lambda_n - \Lambda_m\| \rightarrow 0$, если m и n стремятся к ∞ , то $\{\Lambda_n x\}$ является последовательностью Коши в Y для всякого $x \in X$. Поэтому для любого $x \in X$ существует предел

$$(5) \quad \Lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n x.$$

Ясно, что отображение $\Lambda: X \rightarrow Y$ линейно. Пусть $\varepsilon > 0$; при достаточно больших m и n правая часть неравенства (4) не превосходит $\varepsilon \|x\|$. Отсюда следует, что для всех достаточно больших m

$$(6) \quad \|\Lambda x - \Lambda_m x\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Поэтому $\|\Lambda x\| \leq (\|\Lambda_m\| + \varepsilon) \|x\|$, так что $\Lambda \in \mathcal{B}(X, Y)$ и $\|\Lambda - \Lambda_m\| \leq \varepsilon$. Таким образом, $\Lambda_m \rightarrow \Lambda$ по норме в $\mathcal{B}(X, Y)$. Это доказывает полноту пространства $\mathcal{B}(X, Y)$. ■

4.2. Двойственность. Нам будет удобно обозначать элементы пространства X^* , сопряженного к X , через x^* и писать

$$(1) \quad \langle x, x^* \rangle$$

вместо $x^*(x)$. Эти обозначения хорошо согласуются с симметрией (или двойственностью), существующей между действием пространства X^* на X , с одной стороны, и действием X на X^* — с другой. Следующая теорема устанавливает некоторые основные свойства этой двойственности.

4.3. Теорема. Пусть B — замкнутый единичный шар в нормированном пространстве X . Положим для всякого $x^* \in X^*$

$$\|x^*\| = \sup \{ |\langle x, x^* \rangle| : x \in B \}.$$

(а) Эта норма превращает X^* в банахово пространство.

(б) Пусть B^* — замкнутый единичный шар в X^* . Тогда

$$\|x\| = \sup \{ |\langle x, x^* \rangle| : x^* \in B^* \}$$

для всякого $x \in X$. Следовательно, для каждого $x \in X$ отображение $x^* \rightarrow \langle x, x^* \rangle$ определяет ограниченный линейный функционал на пространстве X^* , причем норма этого функционала равна $\|x\|$.

(с) Шар B^* слабо* компактен.

Доказательство. Если Y — поле скаляров, то $\mathcal{B}(X, Y) = X^*$; поэтому утверждение (а) является следствием теоремы 4.1.

Фиксируем $x \in X$. Следствие теоремы 3.3 показывает, что существует такой элемент $y^* \in B^*$, что

$$(1) \quad \langle x, y^* \rangle = \|x\|.$$

С другой стороны, для всякого $x^* \in B^*$

$$(2) \quad |\langle x, x^* \rangle| \leq \|x\| \|x^*\| \leq \|x\|.$$

Утверждение (b) следует из (1) и (2).

Поскольку открытый единичный шар U всюду плотен в B , из определения нормы в X^* следует, что элемент $x^* \in X^*$ принадлежит B^* тогда и только тогда, когда $|\langle x, x^* \rangle| \leq 1$ для всех $x \in U$. Поэтому справедливость утверждения (с) непосредственно следует из теоремы 3.15. ■

Замечание. Слабая* топология в X^* является, по определению, слабейшей из топологий, относительно которых непрерывны все функционалы

$$x^* \rightarrow \langle x, x^* \rangle.$$

Поэтому утверждение (b) показывает, что топология в X^* , индуцированная нормой, сильнее, чем слабая* топология; в действительности (за исключением случая $\dim X < \infty$) первая топология строго сильнее второй, поскольку предложение, установленное в конце п. 3.11, справедливо также и для слабой* топологии.

В дальнейшем, если явно не оговорено противное, символ X^* всегда будет обозначать нормированное сопряженное пространство пространства X (при условии, что само X — нормированное пространство) и все топологические понятия, связанные с X^* , будут относиться к топологии, индуцированной нормой. (Это никоим образом не означает, что слабая* топология в X^* не будет играть важной роли.) В описанной ситуации топологии пространств X и X^* , индуцированные их нормами, будут называться *сильными*.

Теперь мы дадим другое описание операторной нормы, определенной в теореме 4.1.

4.4. Теорема. Если X и Y — нормированные пространства и $\Lambda \in \mathcal{B}(X, Y)$, то

$$\|\Lambda\| = \sup \{ |\langle \Lambda x, y^* \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y^*\| \leq 1 \}.$$

Доказательство. Применяя утверждение (b) теоремы 4.3 к вектору Λx пространства Y , получаем, что для любого $x \in X$

$$\|\Lambda x\| = \sup \{ |\langle \Lambda x, y^* \rangle| : \|y^*\| \leq 1 \}.$$

Для завершения доказательства достаточно вспомнить, что

$$\|\Lambda\| = \sup \{ \|\Lambda x\| : \|x\| \leq 1 \}. \blacksquare$$

4.5. Второе сопряженное пространство банахова пространства.

Нормированное сопряженное пространство X^* банахова пространства X само является банаховым пространством и в свою очередь имеет нормированное сопряженное пространство, которое обозначается X^{**} и также является банаховым пространством. Утверждение (b) теоремы 4.3 показывает, что каждый вектор $x \in X$ определяет единственный элемент $\phi x \in X^{**}$, удовлетворяющий соотношению

$$(1) \quad \langle x, x^* \rangle = \langle x^*, \phi x \rangle \quad (x^* \in X^*),$$

и что

$$(2) \quad \|\phi x\| = \|x\| \quad (x \in X).$$

Из (1) следует, что отображение $\phi: X \rightarrow X^{**}$ линейно, а в силу (2) оно является изометрией. Так как X сейчас предполагается полным, то $\phi(X)$ замкнуто в X^{**} .

Значит, отображение ϕ осуществляет *изометрический изоморфизм между пространством X и замкнутым подпространством $\phi(X)$ пространства X^{**}* .

Часть X отождествляют с $\phi(X)$ и рассматривают X как замкнутое подпространство пространства X^{**} .

Элементами подпространства $\phi(X)$ являются те и только те линейные функционалы на пространстве X^* , которые непрерывны относительно слабой* топологии (см. п. 3.14). Так как эта топология слабее, чем сильная топология в X^* , то может случиться, что $\phi(X)$ — собственное подпространство в X^{**} . Имеется, однако, много важных пространств X (например, все пространство L^p при $1 < p < \infty$), для которых $\phi(X) = X^{**}$; такие пространства называются *рефлексивными*. Некоторые свойства таких пространств приводятся в упр. 1.

Следует подчеркнуть, что для рефлексивности пространства X мало того, чтобы существовал *какой-нибудь* изометрический изоморфизм ϕ пространства X на пространство X^{**} ; нужно еще, чтобы этот изоморфизм удовлетворял условию (1).

4.6. Аннуляторы. Пусть X — банахово пространство, M — подпространство в X , а N — подпространство в X^* ; ни M , ни N не предполагаются замкнутыми. *Аннуляторы $M^\perp$ и ${}^\perp N$* подпространств M и N соответственно определяются следующим образом:

$$M^\perp = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = 0 \text{ для всех } x \in M\},$$

$${}^\perp N = \{x \in X : \langle x, x^* \rangle = 0 \text{ для всех } x^* \in N\}.$$

Таким образом, $M^\perp$ состоит из всех ограниченных линейных функционалов на X , равных 0 на M , а ${}^\perp N$ есть максимальное подмножество в X , на котором все функционалы из N равны 0. Ясно, что $M^\perp$ и ${}^\perp N$ являются подпространствами в X^* и X соответственно. Так как подпространство $M^\perp$ совпадает с пересечением ядер функционалов f_x по всем $x \in M$ (см. п. 4.5), то оно слабо* замкнуто в X^* . Еще проще доказывается, что ${}^\perp N$ — сильно замкнутое подпространство в X . В следующей теореме описывается двойственность между этими двумя типами аннуляторов.

4.7. Теорема. Пусть M — подпространство банахова пространства X , а N — подпространство сопряженного пространства X^* . Тогда

- (а) ${}^\perp(M^\perp)$ совпадает с сильным замыканием M в X и
- (б) $({}^\perp N)^\perp$ совпадает со слабым* замыканием N в X^* .

В связи с утверждением (а) напомним, что сильное замыкание подпространства M в X совпадает, по теореме 3.12, с его слабым замыканием.

Доказательство. Если $x \in M$, то $\langle x, x^* \rangle = 0$ для всех $x^* \in M^\perp$, так что $x \in {}^\perp(M^\perp)$. Так как подпространство ${}^\perp(M^\perp)$ сильно замкнуто, то оно содержит сильное замыкание $\bar{M}$ подпространства M . С другой стороны, если $x \notin \bar{M}$, то по теореме Хана — Банаха найдется такой функционал $x^* \in M^\perp$, что $\langle x, x^* \rangle \neq 0$, так что $x \notin {}^\perp(M^\perp)$. Утверждение (а) доказано.

Аналогично если $x^* \in N$, то $\langle x, x^* \rangle = 0$ для всех $x \in {}^\perp N$, так что $x^* \in ({}^\perp N)^\perp$. Так как подпространство $({}^\perp N)^\perp$ слабо* замкнуто, то оно содержит слабое* замыкание $\tilde{N}$ подпространства N . Если $x^* \notin \tilde{N}$, то из теоремы Хана — Банаха (в применении к локально выпуклому пространству X^* в его слабой* топологии) следует существование такого¹⁾ $x \in {}^\perp N$, что $\langle x, x^* \rangle \neq 0$. Таким образом, $x^* \notin ({}^\perp N)^\perp$, и утверждение (б) доказано. ■

Отметим в качестве следствия, что каждое сильно замкнутое подпространство пространства X совпадает с аннулятором своего аннулятора и что то же самое верно для любого слабо* замкнутого подпространства пространства X^* .

4.8. Сопряженные пространства подпространств и факторпространств. Если M — замкнутое подпространство банахова пространства X , то факторпространство X/M также является банаховым пространством относительно факторнормы, определенной при доказательстве утверждения (д) теоремы 1.41. Сопряженные

¹⁾ Напомним, что каждый слабо* непрерывный линейный функционал на X^* порождается некоторым элементом $x \in X$ (см. п. 3.14). — Прим. перев.

пространства для M и X/M могут быть описаны с помощью аннулятора $M^\perp$ подпространства M . Грубо говоря, результат состоит в том, что

$$M^* = X^*/M^\perp \quad \text{и} \quad (X/M)^* = M^\perp;$$

в действительности равенства следует заменить изометрическими изоморфизмами. В следующей теореме приводится точная формулировка.

4.9. Теорема. Пусть M — замкнутое подпространство банахова пространства X .

(а) По теореме Хана — Банаха каждый функционал $m^* \in M^*$ продолжается до некоторого функционала $x^* \in X^*$. Положим

$$\sigma m^* = x^* + M^\perp.$$

Эта формула корректно определяет отображение $\sigma: M^* \rightarrow X^*/M^\perp$, которое оказывается изометрическим изоморфизмом M^* на $X^*/M^\perp$.

(б) Пусть $\pi: X \rightarrow X/M$ — факторотображение, и пусть $Y = X/M$. Для каждого $y^* \in Y^*$ положим

$$\tau y^* = y^* \pi.$$

Тогда τ является изометрическим изоморфизмом пространства Y^* на $M^\perp$.

Доказательство. (а) Если x^* и x_1^* — два продолжения функционала m^* , то $x^* - x_1^* \in M^\perp$, так что $x^* + M^\perp = x_1^* + M^\perp$. Следовательно, отображение σ определено корректно. Тривиальная проверка показывает, что оно линейно. Так как сужение каждого функционала $x^* \in X^*$ на подпространство M принадлежит M^* , то образ отображения σ совпадает со всем пространством $X^*/M^\perp$.

Фиксируем $m^* \in M^*$. Если $x^* \in X^*$ — любое продолжение функционала m^* , то ясно, что $\|m^*\| \leq \|x^*\|$. По определению фактор-нормы точная нижняя грань чисел $\|x^*\|$ по всевозможным продолжениям x^* функционала m^* равна $\|x^* + M^\perp\|$. Следовательно,

$$\|m^*\| \leq \|x^* + M^\perp\| = \|\sigma m^*\| \leq \|x^*\|.$$

Но по теореме 3.3 существует такое продолжение x^* функционала m^* , что $\|x^*\| = \|m^*\|$. Поэтому $\|\sigma m^*\| = \|m^*\|$, что завершает доказательство утверждения (а).

(б) Если $x \in X$, то $\pi x \in Y$, причем $\pi m = 0$ для всех $m \in M$. Поэтому для каждого $y^* \in Y^*$ отображение $x \rightarrow y^* \pi x$ задает непрерывный линейный функционал τy^* на пространстве X , равный на M . Таким образом, $\tau y^* \in M^\perp$. Линейность отображения τ очевидна. Фиксируем функционал $x^* \in M^\perp$, и пусть N — его ядро. Так как $M \subset N$, то существует такой линейный функционал Λ на Y , что $\Lambda \pi = x^*$. Ядром функционала Λ служит подпространство $\pi(N)$,

которое, по определению фактортопологии в $Y = X/M$, замкнуто в Y . По теореме 1.18 функционал Λ непрерывен, так что $\Lambda \in Y^*$ и $\tau\Lambda = \Lambda\pi = x^*$. Следовательно, образ отображения τ совпадает с $M^\perp$.

Фиксируем $y^* \in Y^*$. Если $y \in Y$, $\|y\| = 1$ и $r > 1$, то (по определению факторнормы в X/M) найдется такой вектор $x_0 \in X$, что $\pi x_0 = y$ и $\|x_0\| < r$. Поэтому

$$|\langle y, y^* \rangle| = |y^* \pi x_0| = |\tau y^* x_0| \leq \|\tau y^*\| \|x_0\| \leq r \|\tau y^*\|,$$

откуда следует, что

$$\|y^*\| \leq \|\tau y^*\|.$$

С другой стороны, $\|\pi x\| \leq \|x\|$ для всех $x \in X$. Поэтому

$$\|\tau y^* x\| = \|y^* \pi x\| \leq \|y^*\| \|\pi x\| \leq \|y^*\| \|x\|,$$

откуда следует, что

$$\|\tau y^*\| \leq \|y^*\|. \blacksquare$$

Сопряженные операторы

Каждому оператору $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ мы сопоставим некоторый оператор $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$, называемый *сопряженным оператором*, и посмотрим, как различные свойства T отражаются на поведении T^* . Если пространства X и Y конечномерны, то каждый оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ может быть представлен матрицей $[T]$; в этом случае $[T^*]$ оказывается транспонированной к $[T]$ матрицей при условии, что базисы в каждой паре векторных пространств X, X^* и Y, Y^* выбраны согласованно. Мы не будем уделять специального внимания конечномерному случаю, однако заметим, что исторически именно линейная алгебра послужила основой (и в значительной степени прообразом) предмета, известного ныне под названием «теория операторов».

Многие нетривиальные свойства сопряженных операторов связаны с полнотой пространств X и Y (в частности, важную роль играет теорема об открытом отображении). По этой причине всюду в этом параграфе (за исключением теоремы 4.10, которая дает определение сопряженного оператора T^*) предполагается, что X и Y — банаховы пространства.

4.10. Теорема. Пусть X и Y — нормированные пространства. Для каждого оператора $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ существует единственный оператор $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$, удовлетворяющий при всех $x \in X$ и всех $y^* \in Y^*$ условию

$$(1) \quad \langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T^* y^* \rangle.$$

Кроме того, справедливо равенство

$$(2) \quad \|T^*\| = \|T\|.$$

Доказательство. Если $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, то для всякого $y^* \in Y^*$ положим

$$(3) \quad T^*y^* = y^* \circ T.$$

Будучи композицией двух непрерывных линейных отображений, $T^*y^* \in X^*$. Кроме того, для всех $x \in X$

$$\langle x, T^*y^* \rangle = (T^*y^*)(x) = y^*(Tx) = \langle Tx, y^* \rangle,$$

что совпадает с (1).

Если $y_1^* \in Y^*$ и $y_2^* \in Y^*$, то

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(y_1^* + y_2^*) \rangle &= \langle Tx, y_1^* + y_2^* \rangle = \langle Tx, y_1^* \rangle + \langle Tx, y_2^* \rangle = \\ &= \langle x, T^*y_1^* \rangle + \langle x, T^*y_2^* \rangle = \langle x, T^*y_1^* + T^*y_2^* \rangle \end{aligned}$$

для всех $x \in X$, так что

$$(4) \quad T^*(y_1^* + y_2^*) = T^*y_1^* + T^*y_2^*.$$

Аналогично проверяется, что $T^*(\alpha y^*) = \alpha T^*y^*$. Следовательно, отображение $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ линейно. Если $y^* \in Y^*$, $x^* \in X^*$ и $\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$ для всех $x \in X$, то $\langle x, x^* \rangle = \langle x, T^*y^* \rangle$ для всех $x \in X$, так что $x^* = T^*y^*$. Отсюда следует, что построенный оператор T^* является единственным отображением Y^* в X^* , удовлетворяющим условию (1). Наконец,

$$\begin{aligned} \sup \{ \|T^*y^*\| : \|y^*\| \leq 1 \} &= \sup \{ |\langle x, T^*y^* \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y^*\| \leq 1 \} = \\ &= \sup \{ |\langle Tx, y^* \rangle| : \|x\| \leq 1, \|y^*\| \leq 1 \} = \|T\| < \infty \end{aligned}$$

(последнее равенство следует из теоремы 4.4), так что $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$ и $\|T^*\| = \|T\|$. ■

4.11. Обозначения. Ядро (нулевое подпространство) и образ (область значений) линейного отображения $T: X \rightarrow Y$ будем обозначать через $\mathcal{N}(T)$ и $\mathcal{R}(T)$:

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\},$$

$$\mathcal{R}(T) = \{y \in Y : Tx = y \text{ для некоторого } x \in X\}.$$

Следующая теорема касается аннуляторов; обозначения см. в п. 4.6.

4.12. Теорема. Пусть X и Y — банаховы пространства, и пусть $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тогда

$$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp \quad \text{и} \quad \mathcal{N}(T) = {}^\perp \mathcal{R}(T^*).$$

Доказательство. Очевидно, что из записанных в следующих двух столбцах высказываний любые два соседних по вертикали эквивалентны:

$$y^* \in \mathcal{N}(T^*);$$

$$T^*y^* = 0;$$

$$x \in \mathcal{N}(T);$$

$$Tx = 0;$$

$$\begin{aligned} \langle x, T^*y^* \rangle &= 0 \text{ для всех } x; & \langle Tx, y^* \rangle &= 0 \text{ для всех } y^*; \\ \langle Tx, y^* \rangle &= 0 \text{ для всех } x; & \langle x, T^*y^* \rangle &= 0 \text{ для всех } y^*; \\ y^* &\in \mathcal{R}(T)^\perp. & x &\in \perp \mathcal{R}(T^*). \blacksquare \end{aligned}$$

Следствия. (а) Ядро $\mathcal{N}(T^*)$ оператора T^* слабо* замкнуто в Y^* .

(б) Образ $\mathcal{R}(T)$ оператора T тогда и только тогда всюду плотен в Y , когда оператор T^* инъективен¹⁾.

(с) Оператор T инъективен тогда и только тогда, когда образ $\mathcal{R}(T^*)$ оператора T^* слабо* всюду плотен в X^* .

Напомним, что аннулятор $M^\perp$ любого подпространства $M \subset Y$ слабо* замкнут в Y^* ; в частности, это верно для $\mathcal{R}(T)^\perp$. Поэтому из теоремы следует справедливость (а).

Что касается (б), то подпространство $\mathcal{R}(T)$ всюду плотно в Y тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(T)^\perp = \{0\}$, или, что то же самое, когда $\mathcal{N}(T^*) = \{0\}$.

Аналогично равенство $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ равносильно тому, что $\mathcal{R}(T^*)$ не аннулируется ни одним элементом $x \in X$, кроме $x = 0$; но это означает, что $\mathcal{R}(T^*)$ слабо* плотно в X^* .

Заметим, что при доказательстве утверждений (б) и (с) мы молчаливо пользовались теоремой Хана—Банаха 3.5.

Утверждение (б) имеет очень полезный аналог, позволяющий по свойствам оператора T^* судить о том, отображает ли T пространство X на все пространство Y , т.е. верно ли, что $\mathcal{R}(T) = Y$. Сначала мы найдем условия на T^* гарантирующие замкнутость образа оператора T (теорема 4.14), а затем получим упомянутый результат (теорема 4.15).

4.13. Лемма. Пусть U и V —открытые единичные шары в банаховых пространствах X и Y соответственно. Пусть $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ и $c > 0$.

(а) Если замыкание множества $T(U)$ содержит cV , то и $T(U) \supset cV$.

(б) Если $c \|y^*\| \leq \|T^*y^*\|$ для всякого $y^* \in Y^*$, то $T(U) \supset cV$.

Доказательство. (а) Не ограничивая общности, можно считать, что $c = 1$. Тогда $\overline{T(U)} \supset \bar{V}$. Поэтому для любого $y \in Y$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой вектор $x \in X$, что $\|x\| \leq \|y\|$ и $\|y - Tx\| < \varepsilon$.

¹⁾ Отображение множеств $f: X \rightarrow Y$ называется *инъективным* (сюръективным), если $f(x_1) \neq f(x_2)$ для любых двух различных элементов $x_1, x_2 \in X$ (соответственно, если $f(X) = Y$). Отображение f , одновременно инъективное и сюръективное, называется *биективным*. Ясно, что для линейного оператора инъективность равносильна тому, что его ядро тривиально (т.е. состоит из единственной точки 0).—Прим. перев.

Фиксируем $y_1 \in V$. Выберем числа $\varepsilon_n > 0$ так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1 - \|y_1\|.$$

Допустим, что для некоторого $n \geq 1$ вектор y_n уже выбран. Существует такой вектор $x_n \in X$, что $\|x_n\| \leq \|y_n\|$ и $\|y_n - Tx_n\| < \varepsilon_n$. Положим

$$y_{n+1} = y_n - Tx_n.$$

С помощью этого процесса мы по индукции определяем две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Заметим, что

$$\|x_{n+1}\| \leq \|y_{n+1}\| = \|y_n - Tx_n\| < \varepsilon_n.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \|x_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leq \|y_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1.$$

Отсюда следует (см. упр. 23), что вектор ¹⁾ $x = \sum x_n$ принадлежит U и что

$$Tx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N Tx_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (y_n - y_{n+1}) = y_1,$$

ибо $y_{N+1} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, $y_1 = Tx \in T(U)$ и утверждение (а) доказано.

Отметим, что приведенное выше рассуждение представляет собой приспособленный к менее общей ситуации вариант части доказательства теоремы об открытом отображении 2.11.

(б) Обозначим через E замыкание множества $T(U)$ и выберем какую-нибудь точку $y_0 \in Y \setminus E$. Так как множество E замкнуто, выпукло и уравновешено, то из теоремы 3.7 следует существование такого функционала $y^* \in Y^*$, что

$$|\langle y, y^* \rangle| \leq 1 < |\langle y_0, y^* \rangle|$$

для всех $y \in E$. Если $x \in U$, то $Tx \in E$, так что

$$|\langle x, T^*y^* \rangle| = |\langle Tx, y^* \rangle| \leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$c \|y^*\| \leq \|T^*y^*\| \leq 1,$$

и потому

$$1 < |\langle y_0, y^* \rangle| \leq \|y_0\| \|y^*\| \leq c^{-1} \|y_0\|,$$

или $\|y_0\| > c$. Таким образом, $cV \subset E$ и (б) следует из (а). ■

¹⁾ Именно в этом месте доказательства используется полнота пространства X . — *Прим. перев.*

4.14. Теорема. Если X и Y — банаховы пространства, а $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, то каждое из следующих трех условий влечет за собой два других:

- (а) $\mathcal{R}(T)$ замкнуто в Y ;
- (б) $\mathcal{R}(T^*)$ слабо* замкнуто в X^* ;
- (с) $\mathcal{R}(T^*)$ сильно замкнуто в X^* .

Замечание. Из теоремы 3.12 следует, что (а) выполняется тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(T)$ слабо замкнуто. Однако сильно замкнутое подпространство в X^* может не быть слабо* замкнутым (см. упр. 7 гл. 3).

Доказательство. Очевидно, что из (б) следует (с). Мы докажем, что из (а) следует (б) и что из (с) следует (а).

Предположим, что выполняется условие (а). По теореме 4.12 и утверждению (б) теоремы 4.7 подпространство $\mathcal{N}(T)^\perp$ совпадает со слабым* замыканием подпространства $\mathcal{R}(T^*)$. Поэтому для доказательства (б) достаточно показать, что $\mathcal{N}(T)^\perp \subset \mathcal{R}(T^*)$.

Фиксируем $x^* \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Формула

$$\Lambda Tx = \langle x, x^* \rangle \quad (x \in X)$$

корректно определяет линейный функционал Λ на $\mathcal{R}(T)$, так как если $Tx = Tx'$, то $x - x' \in \mathcal{N}(T)$ и потому

$$\langle x - x', x^* \rangle = 0.$$

Но мы предполагаем, что $\mathcal{R}(T)$ замкнуто, а пространство Y полно, поэтому $\mathcal{R}(T)$ тоже полно и к оператору

$$T: X \rightarrow \mathcal{R}(T)$$

применима теорема об открытом отображении. Следовательно, существует такое $K < \infty$, что для всякого $y \in \mathcal{R}(T)$ найдется вектор $x \in X$, удовлетворяющий условиям $Tx = y$ и $\|x\| \leq K \|y\|$; поэтому

$$|\Lambda y| = |\Lambda Tx| = |\langle x, x^* \rangle| \leq K \|y\| \|x^*\|.$$

Таким образом, функционал Λ непрерывен. Пусть $y^* \in Y^*$ — некоторое продолжение функционала Λ на пространство Y (по теореме Хана — Банаха такое продолжение существует). Тогда

$$\langle Tx, y^* \rangle = \Lambda Tx = \langle x, x^* \rangle \quad (x \in X),$$

откуда следует, что

$$x^* = T^* y^*.$$

Так как x^* был произвольным элементом из $\mathcal{N}(T)^\perp$, то мы доказали, что $\mathcal{N}(T)^\perp \subset \mathcal{R}(T^*)$. Поэтому из (а) следует (б).

Предположим теперь, что выполняется условие (с). Пусть Z — замыкание $\mathcal{R}(T)$ в Y . Определим оператор $S \in \mathcal{B}(X, Z)$, полагая $Sx = Tx$. Так как $\mathcal{R}(S)$ всюду плотно в Z , то из следствия

(b) теоремы 4.12 вытекает, что оператор

$$S^*: Z^* \rightarrow X^*$$

инъективен.

По теореме Хана—Банаха для всякого $z^* \in Z^*$ существует продолжение $y^* \in Y^*$; при этом для любого $x \in X$

$$\langle x, T^*y^* \rangle = \langle Tx, y^* \rangle = \langle Sx, y^* \rangle = \langle Sx, z^* \rangle = \langle x, S^*z^* \rangle.$$

Поэтому $S^*z^* = T^*y^*$. Отсюда следует, что образы операторов S^* и T^* совпадают. Так как мы предполагаем, что выполняется условие (с), то подпространство $\mathcal{R}(S^*)$ замкнуто в X^* и потому полно.

Применим теорему об открытом отображении к оператору

$$S^*: Z^* \rightarrow \mathcal{R}(S^*),$$

учитывая при этом, что он биективен; в результате мы заключаем, что существует постоянная $c > 0$, для которой

$$c \|z^*\| \leq \|S^*z^*\|$$

при всех $z^* \in Z^*$. В силу утверждения (b) леммы 4.13 отсюда следует, что отображение $S: X \rightarrow Z$ открыто. В частности, $S(X) = Z$. Но $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(S)$ по определению S . Таким образом, $\mathcal{R}(T) = Z$, так что $\mathcal{R}(T)$ —замкнутое подпространство в Y . Это завершает доказательство импликации (с) $\Rightarrow$ (a). ■

Следующая теорема весьма полезна в приложениях.

4.15. Теорема. Пусть X и Y —банаховы пространства, и пусть $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) $\mathcal{R}(T) = Y$;

(b) существует такая постоянная $c > 0$, что $\|T^*y^*\| \geq c \|y^*\|$ для всех $y^* \in Y^*$.

Доказательство. Утверждение (a) равносильно тому, что подпространство $\mathcal{R}(T)$ замкнуто и всюду плотно в Y . Поэтому из теоремы 4.14 и следствия (b) теоремы 4.12 вытекает, что (a) эквивалентно следующему утверждению:

(с) оператор T^* инъективен, и его образ $\mathcal{R}(T^*)$ сильно замкнут в X^* .

Если (с) справедливо, то, применяя теорему об открытом отображении к оператору $T^*: Y^* \rightarrow \mathcal{R}(T^*)$, получаем (b). Обратно, если справедливо (b), то очевидно, что оператор T^* инъективен

и что прообраз (относительно T^*) любой последовательности Коши в $\mathcal{R}(T^*)$ является последовательностью Коши в Y^* ; поэтому $\mathcal{R}(T^*)$ полно и, следовательно, замкнуто в X^* . ■

Компактные операторы

4.16. Определение. Предположим, что X и Y — банаховы пространства, и пусть U — открытый единичный шар в X . Оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ называется *компактным*, если замыкание множества $T(U)$ в Y компактно¹⁾.

Напомним, что подмножества топологического пространства, замыкания которых компактны, называются *относительно компактными*. Так как Y — полное метрическое пространство, то его подмножество относительно компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено. Таким образом, оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ компактен тогда и только тогда, когда множество $T(U)$ вполне ограничено. Компактность оператора T равносильна также тому, что всякая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ в X содержит такую подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, для которой $\{Tx_{n_i}\}$ сходится к некоторой точке пространства Y .

Многие из операторов, возникающих при изучении интегральных уравнений, являются компактными. Этим объясняется важность компактных операторов с точки зрения приложений. В некоторых отношениях компактные операторы настолько похожи на линейные операторы в конечномерных пространствах, насколько мы вообще вправе ожидать этого от «бесконечномерных» операторов. Как мы увидим, это сходство особенно сильно проявляется в их спектральных свойствах.

4.17. Определения. (а) Пусть X — банахово пространство. Тогда $\mathcal{B}(X)$ (напомним, что это сокращенное обозначение для $\mathcal{B}(X, X)$) является не только банаховым пространством (см. теорему 4.1), но и алгеброй: если $S \in \mathcal{B}(X)$ и $T \in \mathcal{B}(X)$, то оператор $ST \in \mathcal{B}(X)$ определяется равенством

$$(ST)(x) = S(T(x)) \quad (x \in X).$$

Легко проверить, что выполняется неравенство

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|.$$

В частности, можно определить степени оператора $T \in \mathcal{B}(X)$: $T^0 = I$ (I — тождественное отображение пространства X , $Ix = x$) и $T^n = TT^{n-1}$ для $n = 1, 2, 3, \dots$.

¹⁾ Заметим, что линейный оператор $T: X \rightarrow Y$, для которого множество $\overline{T(U)}$ компактно в Y , обязательно ограничен. — *Прим. перев.*

(b) Оператор $T \in \mathcal{B}(X)$ называется *обратимым*, если существует такой оператор $S \in \mathcal{B}(X)$, что

$$ST = I = TS;$$

в этом случае оператор S называется *обратным* к T и обозначается T^{-1} . По теореме об открытом отображении оператор $T \in \mathcal{B}(X)$ обратим тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ и $\mathcal{R}(T) = X$.

(c) *Спектром* $\sigma(T)$ оператора $T \in \mathcal{B}(X)$ называется множество всех таких скаляров λ , для которых оператор $T - \lambda I$ *необратим*. Таким образом, $\lambda \in \sigma(T)$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух следующих условий:

- (i) образ оператора $T - \lambda I$ не совпадает со всем пространством X ;
- (ii) оператор $T - \lambda I$ не инъективен.

Если выполняется условие (ii), то λ называется *собственным значением* оператора T , а $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ называется *собственным подпространством*, отвечающим этому собственному значению; каждый вектор $x \in \mathcal{N}(T - \lambda I)$, кроме $x = 0$, называется *собственным вектором* оператора T ; такой вектор удовлетворяет уравнению

$$Tx = \lambda x.$$

Вот некоторые очень простые факты, иллюстрирующие введенные понятия:

4.18. Теорема. Пусть X и Y — банаховы пространства.

(a) Если $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ и $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$, то оператор T компактен.

(b) Если оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ компактен и его образ $\mathcal{R}(T)$ замкнут, то $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$.

(c) Компактные операторы образуют замкнутое по норме подпространство в $\mathcal{B}(X, Y)$.

(d) Если оператор $T \in \mathcal{B}(X)$ компактен и $\lambda \neq 0$, то $\dim \mathcal{N}(T - \lambda I) < \infty$.

(e) Если $\dim X = \infty$ и оператор $T \in \mathcal{B}(X)$ компактен, то $0 \in \sigma(T)$.

(f) Если $S \in \mathcal{B}(X)$ и оператор $T \in \mathcal{B}(X)$ компактен, то операторы ST и TS тоже компактны.

Доказательство. Утверждение (a) очевидно. Если подпространство $\mathcal{R}(T)$ замкнуто, то оно полно (поскольку Y полно), так что T является открытым отображением X на $\mathcal{R}(T)$; если T компактен, то отсюда следует, что $\mathcal{R}(T)$ локально компактно; таким образом, утверждение (b) является следствием теоремы 1.22.

Для доказательства утверждения (d) заметим, что сужение оператора T на подпространство $Y = \mathcal{N}(T - \lambda I)$ является компакт-

ным оператором, образ которого (в силу условия $\lambda \neq 0$) совпадает с Y ; поэтому (d) следует из (b). Из (b) следует также (e), ибо если $0 \notin \sigma(T)$, то $\mathcal{R}(T) = X$. Доказательство утверждения (f) тривиально.

Если S и T — компактные операторы из X в Y , то оператор $S+T$ тоже компактен, поскольку сумма любых двух компактных подмножеств пространства Y компактна. Отсюда следует, что компактные операторы образуют подпространство Σ в пространстве $\mathcal{B}(X, Y)$. Для завершения доказательства утверждения (с) мы покажем теперь, что Σ замкнуто. Пусть оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ принадлежит замыканию Σ . Пусть U — открытый единичный шар в X , и пусть $r > 0$. Существует такой оператор $S \in \Sigma$, что $\|S - T\| < r$. Так как множество $S(U)$ вполне ограничено, то в U найдутся такие точки $x_1, \dots, x_n$, что шары радиуса r с центрами в точках Sx_i покрывают $S(U)$. Поскольку $\|Sx - Tx\| < r$ для всех $x \in U$, отсюда следует, что множество $T(U)$ покрывается шарами радиуса $3r$ с центрами в точках Tx_i . Таким образом, множество $T(U)$ вполне ограничено, и потому $T \in \Sigma$. ■

Главная цель оставшейся части этой главы состоит в изучении спектра компактного оператора $T \in \mathcal{B}(X)$. Основные результаты содержатся в теореме 4.25. Важную роль в нашем исследовании будут играть сопряженные операторы.

4.19. Теорема. Пусть X и Y — банаховы пространства. Оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ компактен тогда и только тогда, когда компактен оператор T^* .

Доказательство. Допустим, что оператор T компактен. Пусть $\{y_n^*\}$ — последовательность точек единичного шара пространства Y^* . Положим

$$f_n(y) = \langle y, y_n^* \rangle \quad (y \in Y).$$

Так как $|f_n(y) - f_n(y')| \leq \|y - y'\|$, то семейство функций $\{f_n\}$ равномерно непрерывно. Поскольку множество $T(U)$ относительно компактно в Y (здесь, как и выше, U — единичный шар пространства X), из теоремы Асколи вытекает, что последовательность $\{f_n\}$ содержит подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$, равномерно сходящуюся на $T(U)$. Заметим, что

$$\|T^*y_{n_i}^* - T^*y_{n_j}^*\| = \sup | \langle Tx, y_{n_i}^* - y_{n_j}^* \rangle | = \sup | f_{n_i}(Tx) - f_{n_j}(Tx) |$$

(верхняя грань берется по всем $x \in U$); поэтому в силу полноты пространства X^* последовательность $\{T^*y_{n_i}^*\}$ сходится. Таким образом, оператор T^* компактен.

Обратное утверждение может быть доказано тем же самым методом, но, быть может, более поучительно вывести его из уже доказанного прямого утверждения.

Пусть $\varphi: X \rightarrow X^{**}$ и $\psi: Y \rightarrow Y^{**}$ — изометрические вложения, определенные, как в п. 4.5, формулами

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, \varphi x \rangle \text{ и } \langle y, y^* \rangle = \langle y^*, \psi y \rangle.$$

Тогда

$$\langle y^*, \psi T x \rangle = \langle T x, y^* \rangle = \langle x, T^* y^* \rangle = \langle T^* y^*, \varphi x \rangle = \langle y^*, T^{**} \varphi x \rangle$$

для всех $x \in X$ и всех $y^* \in Y^*$, так что

$$\psi T = T^{**} \varphi.$$

Если $x \in U$, то φx принадлежит единичному шару U^{**} пространства X^{**} . Таким образом,

$$\psi T(U) \subset T^{**}(U^{**}).$$

Предположим теперь, что оператор T^* компактен. Тогда, согласно уже доказанному, оператор $T^{**}: X^{**} \rightarrow Y^{**}$ тоже компактен. Следовательно, множество $T^{**}(U^{**})$ вполне ограничено, а потому вполне ограничено и его подмножество $\psi T(U)$. Так как ψ — изометрия, то множество $T(U)$ тоже вполне ограничено. Таким образом, оператор T компактен. ■

4.20. Определение. Пусть M — замкнутое подпространство топологического векторного пространства X . Если в X существует такое замкнутое подпространство N , что

$$X = M + N \text{ и } M \cap N = \{0\},$$

то говорят, что подпространство M *дополняемо* в X и что X является *прямой суммой* подпространств M и N ; при этом иногда употребляют обозначение

$$X = M \oplus N.$$

В гл. 5 мы приведем примеры недополняемых подпространств. Здесь же нам понадобятся лишь следующие простые факты.

4.21. Лемма. Пусть M — замкнутое подпространство топологического векторного пространства X .

(а) Если пространство X локально выпукло и $\dim M < \infty$, то подпространство M дополняемо в X .

(б) Если $\dim(X/M) < \infty$, то подпространство M дополняемо в X .

Размерность факторпространства X/M называется *коразмерностью* подпространства M в X .

Доказательство. (а) Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис подпространства M . Тогда всякий вектор $x \in M$ допускает единственное представление в виде

$$x = \alpha_1(x) e_1 + \dots + \alpha_n(x) e_n,$$

где каждый из коэффициентов α_i является непрерывным линейным функционалом на M (теорема 1.21) и, стало быть, по теоре-

ме Хана—Банаха может быть продолжен до некоторого непрерывного линейного функционала на всем пространстве X . Выберем для каждого α_i одно из таких продолжений x_i^* , и пусть N — пересечение ядер всех функционалов x_i^* ($1 \leq i \leq n$). Тогда $X = M \oplus N$.

(b) Пусть $\pi: X \rightarrow X/M$ — факторотображение, и пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в пространстве X/M . Выберем такие векторы $x_i \in X$, что $\pi x_i = e_i$ ($1 \leq i \leq n$), и пусть N — подпространство в X , порожденное векторами $x_1, \dots, x_n$. Тогда $X = M \oplus N$. ■

4.22. Лемма. Пусть M — такое подпространство нормированного пространства X , что $\bar{M} \neq X$. Тогда для любого $r > 1$ найдется такой вектор $x \in X$, что

$$\|x\| < r \text{ и } \|x - y\| \geq 1 \text{ для всех } y \in M.$$

Доказательство. Существует вектор $x_1 \in X$, находящийся на расстоянии 1 от подпространства M , т. е.

$$\inf \{\|x_1 - y\| : y \in M\} = 1.$$

Выберем такой вектор $y_1 \in M$, что $\|x_1 - y_1\| < r$, и положим $x = x_1 - y_1$. ■

4.23. Теорема. Пусть X — банахово пространство. Если оператор $T \in \mathcal{B}(X)$ компактен и $\lambda \neq 0$, то образ оператора $T - \lambda I$ замкнут.

Доказательство. По утверждению (d) теоремы 4.18 подпространство $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ конечномерно. Поэтому, согласно утверждению (a) леммы 4.21, пространство X является прямой суммой подпространства $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ и некоторого замкнутого подпространства M . Определим оператор $S: M \rightarrow X$, полагая

$$(1) \quad Sx = Tx - \lambda x \quad (x \in M).$$

Тогда оператор S инъективен (на M). Кроме того, $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T - \lambda I)$. Чтобы показать, что подпространство $\mathcal{R}(S)$ замкнуто, достаточно доказать существование такого $r > 0$, что

$$(2) \quad r\|x\| \leq \|Sx\| \text{ для всех } x \in M.$$

Действительно, если условие (2) выполняется и если $\{Sx_n\}$ — последовательность Коши, то $\{x_n\}$ тоже является последовательностью Коши; так как M — замкнутое подпространство полного пространства X , то отсюда следует полнота $\mathcal{R}(S)$.

Если условие (2) не выполняется ни при каком $r > 0$, то в M существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $\|x_n\| = 1$, $Sx_n \rightarrow 0$ и (после перехода к подходящей подпоследовательности) $Tx_n \rightarrow x_0$ для некоторого вектора $x_0 \in X$ (именно здесь мы воспользовались компактностью оператора T). Отсюда следует, что $\lambda x_n \rightarrow x_0$. По-

этому $x_0 \in M$ и

$$Sx_0 = \lim (\lambda Sx_n) = 0.$$

Так как оператор S на M инъективен, то $x_0 = 0$. Но $\|x_n\| = 1$ для всех n , а $x_0 = \lim \lambda x_n$, так что $\|x_0\| = |\lambda| > 0$. Полученное противоречие показывает, что при некотором $r > 0$ условие (2) выполняется. ■

4.24. Теорема. Пусть X — банахово пространство, оператор $T \in \mathcal{B}(X)$ компактен, $r > 0$ и E — множество всех собственных значений λ оператора T , удовлетворяющих условию $|\lambda| > r$. Тогда

- (а) $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$ для всякого $\lambda \in E$,
- (б) множество E конечно (быть может, пусто).

Доказательство. Сначала мы покажем, что если хотя бы одно из условий (а) или (б) не выполняется, то существуют такие замкнутые подпространства M_n пространства X и такие скаляры $\lambda_n \in E$, что

- (1) $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots, \quad M_n \neq M_{n+1},$
- (2) $T(M_n) \subset M_n$ при $n \geq 1,$
- (3) $(T - \lambda_n I)M_n \subset M_{n-1}$ при $n \geq 2.$

Затем мы покажем, что это противоречит компактности оператора T , и тем самым доказательство будет окончено.

Предположим, что утверждение (а) неверно. Тогда $\mathcal{R}(T - \lambda_0 I) = X$ для некоторого $\lambda_0 \in E$. Положим $S = T - \lambda_0 I$ и возьмем в качестве M_n ядро оператора S^n (см. п. 4.17). Так как λ_0 — собственное значение оператора T , то существует ненулевой вектор $x_1 \in M_1$. Так как $\mathcal{R}(S) = X$, то в X найдется такая последовательность $\{x_n\}$, что $Sx_{n+1} = x_n$ при $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда

$$(4) \quad S^n x_{n+1} = x_1 \neq 0, \quad \text{но} \quad S^{n+1} x_{n+1} = Sx_1 = 0.$$

Следовательно, M_n является собственным замкнутым подпространством в M_{n+1} и условия (1) — (3) выполняются с $\lambda_n = \lambda_0$. [Заметим, что условие (2) выполняется благодаря тому, что $ST = TS$.]

Допустим теперь, что утверждение (б) неверно. Тогда множество E содержит последовательность $\{\lambda_n\}$ различных собственных значений оператора T . Выберем соответствующие им собственные векторы e_n и возьмем в качестве M_n (конечномерное и потому замкнутое) подпространство пространства X , порожденное векторами $e_1, \dots, e_n$. Так как числа λ_n различны, то векторы $e_1, \dots, e_n$ в совокупности линейно независимы, а потому M_{n-1} является собственным подпространством в M_n и условие (1) выполняется. Если $x \in M_n$, то

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n,$$

откуда следует, что $Tx \in M_n$ и

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)e_1 + \dots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)e_{n-1} \in M_{n-1}.$$

Таким образом, выполняются также условия (2) и (3).

Коль скоро имеются замкнутые подпространства M_n , удовлетворяющие условиям (1)–(3), то из леммы 4.22 следует, что для каждого $n \geq 2$ найдется такой вектор $y_n \in M_n$, что

$$(5) \quad \|y_n\| \leq 2 \text{ и } \|y_n - x\| \geq 1 \text{ для всех } x \in M_{n-1}.$$

При $2 \leq m < n$ положим

$$(6) \quad z = Ty_m - (T - \lambda_n I)y_n.$$

Из (2) и (3) следует, что $z \in M_{n-1}$, а тогда в силу (5)

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n - z\| = |\lambda_n| \|y_n - \lambda_n^{-1}z\| \geq |\lambda_n| > r.$$

Поэтому последовательность $\{Ty_n\}$ не содержит сходящихся подпоследовательностей, хотя последовательность $\{y_n\}$ ограничена. Но это противоречит компактности оператора T . ■

4.25. Теорема. Пусть X — банахово пространство, и пусть оператор $T \in \mathcal{B}(X)$ компактен.

(а) Если $\lambda \neq 0$, то четыре числа

$$\begin{aligned} \alpha &= \dim \mathcal{N}(T - \lambda I), \\ \beta &= \dim X / \mathcal{R}(T - \lambda I), \\ \alpha^* &= \dim \mathcal{N}(T^* - \lambda I), \\ \beta^* &= \dim X^* / \mathcal{R}(T^* - \lambda I) \end{aligned}$$

конечны и равны друг другу.

(б) Если $\lambda \neq 0$ и $\lambda \in \sigma(T)$, то λ является собственным значением операторов T и T^* .

(с) Множество $\sigma(T)$ компактно, не более чем счетно и не имеет предельных точек, кроме, быть может, точки 0.

Примечание. Под размерностью векторного пространства здесь понимается неотрицательное целое число или символ ∞ . Буква I употребляется для обозначения тождественных операторов в обоих пространствах X и X^* ; таким образом,

$$(T - \lambda I)^* = T^* - \lambda I^* = T^* - \lambda I,$$

ибо сопряженным к тождественному оператору в X служит тождественный оператор в X^* .

Спектр $\sigma(T)$ оператора T был определен в п. 4.17. В теореме 4.24 содержится следующий частный случай утверждения (а) теоремы 4.26: если $\beta = 0$, то $\alpha = 0$. Мы воспользуемся этим ниже при доказательстве неравенства (4).

Следует отметить, что спектр $\sigma(T)$ любого (а не только компактного) оператора $T \in \mathcal{B}(X)$ компактен (теорема 10.13); однако

для справедливости других утверждений о спектре, приведенных в (с), компактность оператора T существенна.

Доказательство. Для упрощения записи положим $S = T - \lambda I$.

Начнем с простого наблюдения, относящегося к факторпространствам. Пусть M_0 — замкнутое подпространство локально выпуклого пространства Y , а k — такое неотрицательное целое число, что $k \leq \dim Y/M_0$. Тогда в Y найдутся такие векторы $y_1, \dots, y_k$, что если M_j — наименьшее подпространство в Y , содержащее M_0 и векторы $y_1, \dots, y_j$, то M_{i-1} является собственным подпространством в M_i ($1 \leq i \leq k$). По теореме 1.42 каждое из подпространств M_i замкнуто. Согласно теореме 3.5, на Y существуют такие непрерывные линейные функционалы $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$, что $\Lambda_i y_i = 1$ и $\Lambda_i y_j = 0$ для всех $y \in M_{i-1}$. Эти функционалы линейно независимы. Поэтому мы приходим к следующему выводу: *если Σ — пространство всех непрерывных линейных функционалов на Y , аннулирующих подпространство M_0 , то*

$$(1) \quad \dim Y/M_0 \leq \dim \Sigma.$$

Применим это к пространству $Y = X$ и подпространству $M_0 = \mathcal{R}(S)$. По теореме 4.23 подпространство $\mathcal{R}(S)$ замкнуто. Кроме того, по теореме 4.12, $\Sigma = \mathcal{R}(S)^\perp = \mathcal{N}(S^*)$, так что неравенство (1) принимает вид

$$(2) \quad \beta \leq \alpha^*.$$

Далее, возьмем в качестве Y пространство X^* со слабой* топологией, и пусть $M_0 = \mathcal{R}(S^*)$. По теореме 4.14 подпространство $\mathcal{R}(S^*)$ слабо* замкнуто. Так как пространство Σ состоит теперь из всех слабо* непрерывных линейных функционалов на X^* , аннулирующих подпространство $\mathcal{R}(S^*)$, то оно изоморфно подпространству ${}^\perp \mathcal{R}(S^*) = \mathcal{N}(S)$ пространства X (см. п. 3.14 и теорему 4.12); поэтому неравенство (1) принимает вид

$$(3) \quad \beta^* \leq \alpha.$$

Ближайшая наша цель состоит в доказательстве неравенства

$$(4) \quad \alpha \leq \beta.$$

Заметим, что если это неравенство доказано, то справедливо также неравенство

$$(5) \quad \alpha^* \leq \beta^*,$$

поскольку оператор T^* компактен (теорема 4.19). Так как $\alpha < \infty$ согласно утверждению (d) теоремы 4.18, то из неравенств (2) — (5) следует справедливость утверждения (а).

Допустим, что неравенство (4) неверно, т. е. что $\alpha > \beta$. Поскольку $\alpha < \infty$, из леммы 4.21 следует существование таких

замкнутых подпространств E и F пространства X , что $\dim F = \beta$ и

$$(6) \quad X = \mathcal{N}(S) \oplus E = \mathcal{R}(S) \oplus F.$$

Каждый вектор $x \in X$ допускает единственное представление в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathcal{N}(S)$, $x_2 \in E$. Определим линейное отображение $\pi: X \rightarrow \mathcal{N}(S)$, полагая $\pi x = x_1$. Легко убедиться (например, с помощью теоремы о замкнутом графике) в том, что отображение π непрерывно.

Так как мы предположили, что $\dim \mathcal{N}(S) > \dim F$, то найдется такое линейное отображение φ пространства $\mathcal{N}(S)$ на пространство F , что $\varphi(x_0) = 0$ для некоторого $x_0 \neq 0$. Положим

$$(7) \quad \Phi x = Tx + \varphi \pi x \quad (x \in X).$$

Тогда $\Phi \in \mathcal{B}(X)$. Так как $\dim \mathcal{R}(\varphi) < \infty$, то оператор $\varphi \pi$ компактен; поэтому оператор Φ тоже компактен (теорема 4.18).

Заметим, что

$$(8) \quad \Phi - \lambda I = S + \varphi \pi.$$

Так как $x_0 \in \mathcal{N}(S)$, то $\pi x_0 = x_0$, и потому $\varphi \pi x_0 = 0$. Отсюда следует, что λ — собственное значение оператора Φ (а x_0 — отвечающий ему собственный вектор). Поэтому по теореме 4.24

$$(9) \quad \mathcal{R}(\Phi - \lambda I) \neq X.$$

Поскольку $\pi x = 0$ для всякого $x \in E$, соотношение (8) показывает, что

$$(10) \quad (\Phi - \lambda I)(E) = S(E) = S(X) = \mathcal{R}(S).$$

Если $x \in \mathcal{N}(S)$, то $\pi x = x$, так что, учитывая (8) и определение отображения φ , получаем

$$(11) \quad (\Phi - \lambda I)(\mathcal{N}(S)) = \varphi(\mathcal{N}(S)) = F.$$

Из (10) и (11) следует, что

$$(12) \quad \mathcal{R}(\Phi - \lambda I) \supset \mathcal{R}(S) + F = X,$$

а это противоречит (9). Таким образом, неравенство (4) справедливо, что завершает доказательство утверждения (а).

Утверждение (б) следует из (а). Действительно, если λ не является собственным значением оператора T , то $\alpha(T) = 0$ и из (а) следует, что $\beta(T) = 0$, т. е. $\mathcal{R}(T - \lambda I) = X$; но тогда оператор $T - \lambda I$ биективен и потому обратим, так что $\lambda \notin \sigma(T)$. Аналогично опровергается предположение, что λ не является собственным значением оператора T^* .

Из утверждения (б) и теоремы 4.24 следует, что множество $\sigma(T)$ не более чем счетно и не может иметь предельных точек, отличных от 0, а множество $\sigma(T) \cup \{0\}$ компактно. Если $\dim X < \infty$, то множество $\sigma(T)$ конечно; если же $\dim X = \infty$, то $0 \in \sigma(T)$ в силу утверждения (е) теоремы 4.18. Таким образом, в любом

случае множество $\sigma(T)$ компактно. Это показывает справедливость утверждения (с) и завершает доказательство теоремы. ■

Упражнения

Во всех следующих ниже упражнениях буквы X и Y обозначают банаховы пространства (если явно не оговорено противное).

1. Пусть φ —вложение X в X^{**} , описанное в п. 4.5. Пусть τ —слабая топология в X , а σ —слабая* топология в X^{**} (т. е. X^* -топология в X^{**}).

(а) Доказать, что φ —гомеоморфизм пространства (X, τ) на всюду плотное подпространство пространства (X^{**}, σ) .

(б) Доказать, что образ $\varphi(B)$ замкнутого единичного шара B пространства X является σ -всюду плотным подмножеством замкнутого единичного шара пространства X^{**} . [Воспользуйтесь теоремой Хана—Банаха 3.4.]

(с) С помощью (а), (б) и теоремы Банаха—Алаоглу доказать, что пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда шар B слабо компактен.

(д) Вывести из (с), что всякое сильно замкнутое подпространство рефлексивного пространства X рефлексивно.

(е) Доказать, что если Y —замкнутое подпространство рефлексивного пространства X , то факторпространство X/Y рефлексивно.

(ф) Доказать, что пространство X рефлексивно тогда и только тогда, когда рефлексивно пространство X^* .

Наводящее соображение. То, что из рефлексивности X следует рефлексивность X^* , можно доказать с помощью (с); для доказательства обратного утверждения примените (д) к подпространству $\varphi(X)$ пространства X^{**} .

2. Какие из пространств c_0 , l^1 , l^p , l^∞ рефлексивны? Доказать, что любое конечномерное нормированное пространство рефлексивно. Доказать, что пространство C всех комплексных непрерывных функций на единичном отрезке с суп-нормой не рефлексивно.

3. Доказать, что подмножество $E \subset \mathcal{B}(X, Y)$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда существует такое $M < \infty$, что $\|\Lambda\| \leq M$ для всех $\Lambda \in E$.

4. Напомним, что если поле скаляров есть $\mathbb{C}$, то $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. Поэтому $\Lambda^* \in \mathcal{B}(\mathbb{C}, X^*)$ для любого $\Lambda \in X^*$. Найти образ оператора Λ^* .

5. Доказать, что оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ тогда и только тогда является изометрией пространства X на пространство Y , когда T^* изометрично отображает Y^* на X^* .

6. Пусть σ и τ —слабые* топологии в пространствах X^* и Y^* соответственно. Доказать, что S тогда и только тогда является непрерывным линейным отображением пространства (Y^*, τ) в пространство (X^*, σ) , когда $S = T^*$ для некоторого $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

7. Пусть L^1 —обычное пространство интегрируемых относительно меры Лебега функций на замкнутом единичном отрезке J , и пусть $T \in \mathcal{B}(L^1, Y)$, так что $T^* \in \mathcal{B}(Y^*, L^\infty)$. Допустим, что $\mathcal{R}(T^*)$ содержит все непрерывные функции на J . Что в этом случае можно сказать о T ?

8. Доказать, что $(ST)^* = T^*S^*$. Сформулировать условия, при которых это имеет смысл.

9. Пусть $S \in \mathcal{B}(X)$ и $T \in \mathcal{B}(X)$.

(а) Показать на примере, что из $ST=I$ не следует, вообще говоря, что $TS=I$.

(б) Считая T компактным, показать, что $S(I-T)=I$ тогда и только тогда, когда $(I-T)S=I$, и что если выполняется хотя бы одно из этих равенств, то оператор $I-(I-T)^{-1}$ компактен.

10. Доказать, что если поле скаляров есть $\mathbb{C}$ или если $\dim X = \infty$, то спектр $\sigma(T)$ любого компактного оператора $T \in \mathcal{B}(X)$ непуст. Однако если $\dim X < \infty$, а поле скаляров есть $\mathbb{R}$, то спектр оператора $T \in \mathcal{B}(X)$ может быть пустым.

11. Показать, что в случае $\dim X < \infty$ равенство $\alpha = \beta$, доказанное в теореме 4.25, сводится к утверждению, что ранг квадратной матрицы «по строкам» совпадает с ее рангом «по столбцам».

12. Предположим, что образ $\mathcal{R}(T)$ оператора $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ замкнут в Y . Доказать, что

$$\dim \mathcal{N}^*(T) = \dim X^* / \mathcal{R}(T^*), \\ \dim \mathcal{N}^*(T^*) = \dim Y / \mathcal{R}(T).$$

Эти соотношения обобщают равенства $\alpha = \beta^*$ и $\alpha^* = \beta$, доказанные в теореме 4.25.

13. (а) Пусть $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $T_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ ($n=1, 2, \dots$), причем образы всех операторов T_n конечномерны и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$. Доказать, что оператор T компактен.

(б) Доказать, что если пространство Y гильбертово, то справедливо обращение утверждения (а): всякий компактный оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ может быть аппроксимирован (по операторной норме) операторами с конечномерными образами¹⁾. Указание: для любого замкнутого подпространства M гильбертова пространства Y существует проектор $\pi: Y \rightarrow M$ с нормой 1 (см. теоремы 5.16 и 12.4).

14. Определим в пространстве l^2 оператор сдвига S и оператор умножения M , полагая

$$(Sx)(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n=0, \\ x(n-1), & \text{если } n \geq 1, \end{cases} \\ (Mx)(n) = (n+1)^{-1} x(n) \quad \text{для всех } n \geq 0.$$

Пусть $T = MS$. Показать, что T — компактный оператор, не имеющий собственных значений, и что его спектр состоит из единственной точки. Вычислить нормы $\|T^n\|$ ($n=1, 2, 3, \dots$) и предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$.

15. Пусть μ — конечная (или σ -конечная) положительная мера на пространстве Ω , а $\mu \times \mu$ — порожденная ею мера-произведение на $\Omega \times \Omega$, и пусть

¹⁾ Довольно долго оставалось неизвестным, верно ли, что для любого сепарабельного банахова пространства X каждый компактный оператор $T \in \mathcal{B}(X)$ аппроксимируется (по операторной норме) операторами с конечномерными образами (такие операторы иногда для краткости называют конечномерными; близкие вопросы имеются уже в книге Банаха [4, 5]). Лишь в 1972 г. М. Энфлю построил рефлексивное сепарабельное банахово пространство X , для которого это неверно. Заметим (это простое следствие уже сказанного), что в этом пространстве X не существует базиса (т. е. такой последовательности $\{x_n\}$, что каждый вектор $x \in X$ однозначно представим сходящимся по норме рядом $x = \sum \alpha_n x_n$). — Прим. перев.

$K \in L^2(\mu \times \mu)$. Положим

$$(Tf)(s) = \int_{\Omega} K(s, t) f(t) d\mu(t) \quad (f \in L^2(\mu)).$$

(а) Доказать, что $T \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$ и

$$\|T\|^2 \leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(s, t)|^2 d\mu(s) d\mu(t).$$

(б) Пусть a_i, b_i ($1 \leq i \leq n$) — элементы пространства $L^2(\mu)$; положим $K_1(s, t) = \sum a_i(s) b_i(t)$ и определим оператор T_1 по функции K_1 так же, как по функции K определен оператор T . Доказать, что $\dim \mathcal{R}(T_1) \leq n$.

(с) Доказать, что T — компактный оператор в $L^2(\mu)$. *Указание:* воспользуйтесь упр. 13.

(д) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. Доказать, что либо для каждого $g \in L^2(\mu)$ уравнение

$$Tf - \lambda f = g$$

имеет единственное решение $f \in L^2(\mu)$, либо для некоторых g это уравнение имеет в $L^2(\mu)$ бесконечное множество решений, а для других g не имеет их вовсе. [Это утверждение называется *альтернативой Фредгольма*.]

(е) Описать сопряженный к T оператор.

16. Пусть

$$K(s, t) = \begin{cases} (1-s)t, & \text{если } 0 \leq t \leq s, \\ (1-t)s, & \text{если } s \leq t \leq 1; \end{cases}$$

определим оператор $T \in \mathcal{B}(L^2(0, 1))$, полагая

$$(Tf)(s) = \int_0^1 K(s, t) f(t) dt \quad (f \in L^2(0, 1), 0 \leq s \leq 1).$$

(а) Показать, что собственные значения оператора T суть $(n\pi)^{-2}$, $n=1, 2, 3, \dots$, причем для каждого из них соответствующее собственное подпространство одномерно и порождается собственной функцией $\sin n\pi x$. *Указание:* если $\lambda \neq 0$ и функция $f \in L^2(0, 1)$ удовлетворяет уравнению $Tf = \lambda f$, то она бесконечно дифференцируема на $[0, 1]$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $\lambda f'' + f = 0$ и условиям $f(0) = f(1) = 0$; случай $\lambda = 0$ можно исследовать отдельно.

(б) Показать, что указанные выше собственные функции образуют ортогональный базис в пространстве $L^2(0, 1)$.

(с) Исследовать уравнение $Tf - \lambda f = g$, где $g(t) = \sum c_n \sin n\pi t$.

(д) Показать, что оператор T действует также в пространстве C всех непрерывных функций на $[0, 1]$ (с суп-нормой) и компактен в этом пространстве. *Указание:* если последовательность непрерывных функций $\{f_i\}$ равномерно ограничена, то последовательность $\{Tf_i\}$ равномерно непрерывна.

17. Пусть $L^2 = L^2(0, \infty)$ относительно меры Лебега, и пусть

$$(Tf)(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f(t) dt \quad (f \in L^2, 0 < s < \infty).$$

Доказать, что оператор T ограничен в L^2 , но не компактен. [В действитель-

ности $\|T\|=2$; это утверждение является частным случаем неравенства Харди¹⁾].

18. Доказать следующие утверждения:

(а) Если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится в X , то последовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена.

(б) Если $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ и последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к $x \in X$, то последовательность $\{Tx_n\}$ слабо сходится к Tx .

(с) Если оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ компактен и последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к $x \in X$, то $\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$.

(д) Для рефлексивного пространства X справедливо и обратное утверждение: если $\|Tx_n\| \rightarrow 0$ для всякой слабо сходящейся к 0 последовательности $\{x_n\}$, то оператор T компактен. *Указание.* Воспользуйтесь утверждением (с) упр. 1 и утверждением (с) упр. 28 гл. 3.

(е) Если пространство X рефлексивно, то любой оператор $T \in \mathcal{B}(X, l^1)$ компактен; в частности, $\mathcal{R}(T) \neq l^1$. *Указание:* воспользуйтесь упр. 5 гл. 3.

(и) Если пространство Y рефлексивно, то любой оператор $T \in \mathcal{B}(c_0, Y)$ компактен.

19. Пусть Y — замкнутое подпространство в X и $x_0^* \in X^*$. Положим

$$\mu = \sup \{ |\langle x, x_0^* \rangle| : x \in Y, \|x\| \leq 1 \},$$

$$\delta = \inf \{ \|x^* - x_0^*\| : x^* \in Y^\perp \}.$$

Иными словами μ — норма сужения функционала x_0^* на подпространство Y , а δ — расстояние от x_0^* до аннулятора подпространства Y . Доказать, что $\mu = \delta$. Доказать также, что $\delta = \|x^* - x_0^*\|$ хотя бы для одного $x^* \in Y^\perp$.

20. Обобщить определения п. 4.6 и теорему 4.9 на локально выпуклые пространства. [Конечно, из формулировки упомянутой теоремы нужно исключить утверждение об изометричности построенных изоморфизмов.]

21. Пусть B и B^* — замкнутые единичные шары в пространствах X и X^* . Следующее утверждение представляет собой частичное обращение теоремы Банаха — Алаоглу: *если E — такое выпуклое подмножество в X^* , что множество $E \cap (rB^*)$ для любого $r > 0$ слабо* компактно, то E слабо* замкнуто.* [Следствие: подпространство в X^* слабо* замкнуто тогда и только тогда, когда его пересечение с B^* слабо* компактно.]

Восстановите доказательство по следующему наброску:

(i) Множество E сильно замкнуто.

(ii) Сопоставим каждому множеству $F \subset X$ его поляр

$$P(F) = \{x^* : |\langle x, x^* \rangle| \leq 1 \text{ для всех } x \in F\}.$$

Пересечение поляр $P(F)$ всех конечных множеств $F \subset r^{-1}B$ в точности совпадает с rB^* .

(iii) Теорема вытекает из следующего предложения: *если, в дополнение к условиям теоремы, $E \cap B^* = \emptyset$, то существует такой вектор $x \in X$, что $\operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle \geq 1$ для всех $x^* \in E$.*

1) Неравенство Харди состоит в том, что если $p > 1$ и $f \in L^p(0, \infty)$, а

$$F(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f(t) dt, \text{ то } F \in L^p(0, \infty) \text{ и } \|F\|_p \leq [p/(p-1)] \|f\|_p, \text{ причем кон-}$$

станта $p/(p-1)$ является наилучшей из возможных; см. [40, стр. 289]. — Прим. перев.

(iv) Доказательство предложения. Положим $F_0 = \{0\}$. Допустим, что для некоторого $k \geq 1$ уже построены такие конечные множества $F_0, \dots, F_{k-1}$, что $iF_i \subset B$ и

$$(1) \quad P(F_0) \cap \dots \cap P(F_{k-1}) \cap E \cap kB^* = \emptyset$$

(заметим, что при $k=1$ условие (1) выполняется). Положим

$$Q = P(F_0) \cap \dots \cap P(F_{k-1}) \cap E \cap (k+1)B^*.$$

Если $P(F) \cap Q \neq \emptyset$ для любого конечного множества $F \subset k^{-1}B$, то из слабой* компактности множества Q и утверждения (ii) следует, что $(kB^*) \cap Q \neq \emptyset$, а это противоречит (1). Поэтому найдется такое конечное множество $F_k \subset k^{-1}B$, для которого выполняется условие (1) с заменой k на $k+1$. Таким образом, построение может быть продолжено, и мы получаем такую бесконечную последовательность конечных множеств $F_k \subset k^{-1}B$, что условие (1) выполняется для любого $k \geq 1$. Ясно, что

$$(2) \quad E \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} P(F_k) = \emptyset.$$

Расположим все элементы множества $\bigcup F_k$ в виде последовательности $\{x_n\}$. Тогда $\|x_n\| \rightarrow 0$. Определим оператор $T: X^* \rightarrow c_0$, полагая

$$Tx^* = \{\langle x_n, x^* \rangle\}.$$

Тогда $T(E)$ — выпуклое подмножество в c_0 . В силу (2)

$$\|Tx^*\| = \sup_n |\langle x_n, x^* \rangle| \geq 1$$

для всех $x^* \in E$. Поэтому найдется такая последовательность скаляров $\{\alpha_n\}$, что $\sum |\alpha_n| < \infty$ и

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x_n, x^* \rangle \geq 1$$

для всех $x^* \in E$. Для завершения доказательства достаточно положить $x = \sum \alpha_n x_n$.

22. Пусть оператор $T \in \mathcal{B}(X)$ компактен, $\lambda \neq 0$ и $S = T - \lambda I$.

(а) Доказать, что если $\mathcal{N}(S^n) = \mathcal{N}(S^{n+1})$ для некоторого неотрицательного целого n , то $\mathcal{N}(S^n) = \mathcal{N}(S^{n+k})$ для всех $k=1, 2, 3, \dots$.

(б) Доказать, что равенство $\mathcal{N}(S^n) = \mathcal{N}(S^{n+1})$ обязательно выполняется для некоторого n . Указание: см. доказательство теоремы 4.24.

(с) Пусть m — наименьшее из неотрицательных целых чисел n , для которых верно предыдущее равенство. Доказать, что подпространство $\mathcal{N}(S^m)$ конечномерно,

$$X = \mathcal{N}(S^m) \oplus \mathcal{R}(S^m)$$

и сужение оператора S на $\mathcal{R}(S^m)$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{R}(S^m)$ на $\mathcal{R}(S^m)$.

23. Пусть $\{x_n\}$ — такая последовательность в банаховом пространстве X , что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = M < \infty.$$

Доказать, что ряд $\sum x_n$ сходится к некоторому вектору $x \in X$. Иными словами, доказать, что существует такой вектор $x \in X$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - (x_1 + \dots + x_n)\| = 0.$$

Доказать также, что $\|x\| \leq M$. [Мы воспользовались этими фактами при доказательстве леммы 4.13.]

24. Пусть c —пространство всех комплексных последовательностей

$$x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\},$$

для которых существует предел $\lim x_n = x_\infty \in \mathbb{C}$. Положим $\|x\| = \sup |x_n|$. Пусть c_0 —подпространство в c , состоящее из всех тех x , для которых $x_\infty = 0$.

(а) Описать явно два изометрических изоморфизма u и v , отображающих соответственно c^* на l^1 и c_0^* на l^1 .

(б) Определим оператор $S: c_0 \rightarrow c$, полагая $Sx = x$. Описать оператор vS^*u^{-1} , отображающий l^1 в l^1 .

(с) Определим оператор $T: c \rightarrow c_0$, полагая $Tx = y$,

$$y_1 = x_\infty, \quad y_{n+1} = x_n - x_\infty \quad \text{для } n \geq 1.$$

Доказать, что этот оператор биективен. Найти $\|T\|$ и $\|T^{-1}\|$. Описать оператор uT^*v^{-1} , отображающий l^1 в l^1 .

Глава 5

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Теорема о непрерывности

Одна из самых ранних теорем функционального анализа (Хеллинггер и Теплиц, 1910) утверждает, что если линейный оператор T в гильбертовом пространстве H симметричен, т. е.

$$(Tx, y) = (x, Ty)$$

для всех $x \in H$ и $y \in H$, то он непрерывен. Здесь, как обычно, (x, y) обозначает скалярное произведение, задающее в H структуру гильбертова пространства (см. п. 12.1).

Если последовательность $\{x_n\}$ в H такова что $\|x_n\| \rightarrow 0$, то из симметричности оператора T следует, что $Tx_n \rightarrow 0$ слабо. [Доказательство этого утверждения опирается на известное описание непрерывных линейных функционалов на H : каждый такой функционал Λ однозначно представим в виде $\Lambda x = (x, y_\Lambda)$, где $y_\Lambda \in H$.] Поэтому теорема Хеллингера — Теплица вытекает из следующей теоремы.

5.1. Теорема. Пусть X и Y суть F -пространства, причем Y^* разделяет точки в Y , и пусть $T: X \rightarrow Y$ — такой линейный оператор, что $\Lambda Tx_n \rightarrow 0$ для каждой последовательности $x_n \rightarrow 0$ и каждого функционала $\Lambda \in Y^*$. Тогда оператор T непрерывен.

Доказательство. Допустим, что $x_n \rightarrow x$ и $Tx_n \rightarrow y$. Если $\Lambda \in Y^*$, то

$$\Lambda T(x_n - x) \rightarrow 0,$$

так что

$$\Lambda y = \lim \Lambda Tx_n = \Lambda Tx.$$

Следовательно, $y = Tx$, и можно применить теорему о замкнутом графике. ■

Для банаховых пространств теорему 5.1 можно сформулировать так: если оператор $T: X \rightarrow Y$ линеен и из $\|x_n\| \rightarrow 0$ следует, что $Tx_n \rightarrow 0$ слабо, то в действительности из $\|x_n\| \rightarrow 0$ следует, что $\|Tx_n\| \rightarrow 0$.

Чтобы убедиться в существенности условия полноты, рассмотрим в качестве X пространство всех комплексных полиномов f , для которых $f(0) = f(1) = 0$, положим

$$(f, g) = \int_0^1 f \bar{g}, \quad \|f\| = (f, f)^{1/2}$$

и определим линейный оператор $T: X \rightarrow X$ формулой $(Tf)(x) = if'(x)$. Тогда $(Tf, g) = (f, Tg)$, но оператор T не является непрерывным.

Замкнутые подпространства в пространствах L^p

Доказательство следующей теоремы Гротендика также опирается на теорему о замкнутом графике.

5.2. Теорема. Пусть μ — вероятностная мера на пространстве Ω , $0 < p < \infty$ и S — такое замкнутое подпространство пространства $L^p(\mu)$, что $S \subset L^\infty(\mu)$. Тогда подпространство S конечномерно.

Доказательство. Подпространство S замкнуто в L^p и потому полно относительно L^p -топологии. Пусть j — тождественное вложение S в L^∞ . Если $\{f_n\}$ — такая последовательность в S , что $f_n \rightarrow f$ в S и $f_n \rightarrow g$ в L^∞ , то ясно, что $f = g$ почти всюду. Следовательно, оператор j удовлетворяет условиям теоремы о замкнутом графике, и мы заключаем, что существует такая постоянная $K < \infty$, что

$$(1) \quad \|f\|_\infty \leq K \|f\|_p$$

для всех $f \in S$. Здесь, как обычно, $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$, а $\|f\|_\infty$ — существенная верхняя грань $|f|$. Если $p \leq 2$, то $\|f\|_p \leq \|f\|_2$. Если же $2 < p < \infty$, то, интегрируя неравенство

$$|f|^p \leq \|f\|_\infty^{p-2} |f|^2$$

и учитывая (1), получаем, что $\|f\|_\infty \leq K^{p/2} \|f\|_2$. Таким образом, в любом случае существует такая постоянная $M < \infty$, что

$$(2) \quad \|f\|_\infty \leq M \|f\|_2 \quad (f \in S).$$

В оставшейся части доказательства мы будем иметь дело с индивидуальными функциями, а не с классами эквивалентности по модулю множеств меры 0.

Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ — ортонормальное множество в S , рассматриваемом как подпространство в L^2 . Пусть Q — счетное всюду плотное подмножество евклидова единичного шара B в $\mathbb{C}^n$. Для всякого $c = (c_1, \dots, c_n) \in B$ положим $f_c = \sum c_i \varphi_i$. Тогда $\|f_c\|_2 \leq 1$, так что $\|f_c\|_\infty \leq M$. Так как Q счетно, то найдется такое измеримое множество $\Omega' \subset \Omega$, что $\mu(\Omega') = 1$ и $|f_c(x)| \leq M$ для всех

$c \in Q$ и всех $x \in \Omega'$. При фиксированном x функция $c \rightarrow |f_c(x)|$ непрерывна на B . Поэтому $|f_c(x)| \leq M$ для всех $c \in B$ и всех $x \in \Omega'$. Отсюда следует, что $\sum |\varphi_i(x)|^2 \leq M^2$ для всякого $x \in \Omega'$. Интегрируя это неравенство, получаем, что $n \leq M^2$. Таким образом, $\dim S \leq M^2$. ■

Существенно, что в условиях доказанной теоремы фигурирует именно пространство L^∞ . Чтобы проиллюстрировать это, мы построим сейчас бесконечномерное замкнутое подпространство пространства L^1 , содержащееся в L^4 . В качестве пространства с мерой мы возьмем единичную окружность с нормированной мерой Лебега.

5.3. Теорема. Пусть E — такое бесконечное множество целых чисел, что ни одно целое число не может быть более чем одним способом представлено в виде суммы двух чисел из E . Обозначим через P_E векторное пространство всех конечных сумм вида

$$(1) \quad f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{in\theta},$$

для которых $c(n) = 0$ при всех $n \notin E$, и пусть S_E — замыкание P_E в L^1 . Тогда S_E является замкнутым подпространством в L^4 .

Примером такого множества E может служить множество $\{2^k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Возможны также примеры с более медленным ростом.

Доказательство. Если функция f имеет вид (1), то

$$f^2(e^{i\theta}) = \sum_n c(n)^2 e^{2in\theta} + \sum_{n \neq m} c(n) c(m) e^{i(n+m)\theta}.$$

Из арифметического условия, наложенного на E , следует, что

$$\int |f|^4 = \int |f^2|^2 = \sum_n |c(n)|^4 + 4 \sum_{m < n} |c(m)|^2 |c(n)|^2,$$

откуда

$$(2) \quad \int |f|^4 \leq 2 \left(\sum |c(n)|^2 \right)^2 = 2 \left(\int |f|^2 \right)^2.$$

Неравенство Гёльдера с показателями 3 и $3/2$ дает

$$(3) \quad \int |f|^2 \leq \left(\int |f|^4 \right)^{1/3} \left(\int |f| \right)^{2/3}.$$

Из неравенств (2) и (3) следует, что

$$(4) \quad \|f\|_4 \leq 2^{1/4} \|f\|_2 \quad \text{и} \quad \|f\|_2 \leq 2^{1/2} \|f\|_1$$

для всех $f \in P_E$. Поэтому всякая последовательность Коши в P_E относительно L^1 -нормы является также последовательностью Коши относительно L^4 -нормы. Следовательно, $S_E \subset L^4$. Очевидное неравенство $\|f\|_1 \leq \|f\|_4$ показывает теперь, что S_E замкнуто в L^4 . ■

Применяя некоторые соображения, связанные с двойственностью, и используя второе из неравенств (4), можно получить один интересный результат. Напомним, что коэффициенты Фурье $\hat{g}(n)$ любой функции $g \in L^\infty$ удовлетворяют условию $\sum |\hat{g}(n)|^2 < \infty$. Следующая теорема показывает, что ничего лучшего нельзя сказать и о тех из них, номера которых принадлежат довольно разреженному множеству E .

5.4. Теорема. Пусть E —такое же множество, как в теореме 5.3. Если

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a(n)|^2 = A^2 < \infty,$$

то существует такая функция $g \in L^\infty$, что $\hat{g}(n) = a(n)$ для всех $n \in E$.

Доказательство. Если $f \in P_E$, то, согласно второму из неравенств (4),

$$|\sum \hat{f}(n) a(n)| \leq A \{\sum |\hat{f}(n)|^2\}^{1/2} = A \|f\|_2 \leq 2^{1/2} A \|f\|_1.$$

Поэтому линейный функционал $f \rightarrow \sum \hat{f}(n) a(n)$ непрерывен относительно L^1 -нормы на P_E . По теореме Хана—Банаха этот функционал может быть продолжен (с сохранением нормы) до непрерывного линейного функционала на пространстве L^1 . Следовательно, существует такая функция $g \in L^\infty$ (где $\|g\|_\infty \leq 2^{1/2} A$), что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) a(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{-i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta \quad (f \in P_E).$$

Полагая здесь $f(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ ($n \in E$), получаем $\hat{g}(n) = a(n)$. ■

Область значений векторной меры

Мы приведем сейчас одно весьма замечательное приложение теорем Крейна—Мильмана и Банаха—Алаоглу.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть σ -алгебра. Вещественная мера λ на $\mathfrak{M}$ называется *неатомической*, если всякое множество $E \in \mathfrak{M}$, для которого $|\lambda|(E) > 0$, содержит такое подмножество $A \in \mathfrak{M}$, что $0 < |\lambda|(A) < |\lambda|(E)$. Здесь $|\lambda|$ —полная вариация меры λ (см. [27] или [37]).

5.5. Теорема. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ —конечные вещественные неатомические меры на σ -алгебре $\mathfrak{M}$. Определим отображение $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, полагая

$$\mu(E) = (\mu_1(E), \dots, \mu_n(E)) \quad (E \in \mathfrak{M}).$$

Тогда образ этого отображения является компактным выпуклым подмножеством в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Сопоставим каждой вещественной измеримой ограниченной функции g вектор

$$\Lambda g = \left(\int g d\mu_1, \dots, \int g d\mu_n \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Положим $\sigma = |\mu_1| + \dots + |\mu_n|$. Если $g_1 = g_2$ почти всюду относительно σ , то $\Lambda g_1 = \Lambda g_2$. Поэтому Λ можно рассматривать как линейное отображение пространства $L^\infty(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$.

Каждая из мер μ_i абсолютно непрерывна относительно δ . Поэтому из теоремы Радона—Никодима (см. [27] или [37]) следует существование таких функций $h_i \in L^1(\sigma)$, что $d\mu_i = h_i d\sigma$ ($1 \leq i \leq n$). Следовательно, Λ является слабо* непрерывным линейным отображением пространства $L^\infty(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$ (напомним, что $L^\infty(\sigma) = L^1(\sigma)^*$). Пусть

$$K = \{g \in L^\infty(\sigma) : 0 \leq g \leq 1\}.$$

Очевидно, что множество K выпукло. Так как $g \in K$ тогда и только тогда, когда

$$0 \leq \int fg d\sigma \leq \int f d\sigma$$

для всякой неотрицательной функции $f \in L^1(\sigma)$, то множество K слабо* замкнуто. Наконец, K содержится в замкнутом единичном шаре пространства $L^\infty(\sigma)$. Поэтому теорема Банаха—Алаоглу показывает, что множество K слабо* компактно. Следовательно, его образ $\Lambda(K)$ является компактным выпуклым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Теперь мы покажем, что $\mu(\mathfrak{M}) = \Lambda(K)$.

Если χ_E — характеристическая функция множества $E \in \mathfrak{M}$, то $\chi_E \in K$ и $\mu(E) = \Lambda(\chi_E)$. Таким образом, $\mu(\mathfrak{M}) \subset \Lambda(K)$. Чтобы доказать обратное включение, фиксируем какую-нибудь точку $p \in \Lambda(K)$ и положим

$$K_p = \{g \in K : \Lambda g = p\}.$$

Нам достаточно показать, что множество K_p содержит некоторую характеристическую функцию χ_E , так как тогда $p = \mu(E)$.

Заметим, что множество K_p выпукло; так как отображение Λ непрерывно, то K_p слабо* компактно. По теореме Крейна—Мильмана множество K_p имеет крайнюю точку.

Допустим, что функция $g_0 \in K_p$ не является характеристической функцией никакого множества из $\mathfrak{M}$. Тогда найдутся такое множество $E \in \mathfrak{M}$ и такое число $r > 0$, что $\sigma(E) > 0$ и $r \leq g_0 \leq 1 - r$ на E . Положим $Y = \chi_E \cdot L^\infty(\sigma)$. Так как $\sigma(E) > 0$ и мера σ неатомическая, то $\dim Y = \infty$. Поэтому в Y найдется такой ненулевой элемент g пространства $L^\infty(\sigma)$, что $\Lambda g = 0$ и $-r < g < r$. Ясно, что функции $g_0 + g$ и $g_0 - g$ принадлежат K_p . Поэтому g_0 не является крайней точкой множества K_p .

Таким образом, каждая крайняя точка множества K_p является характеристической функцией. ■

Обобщенная теорема Стоуна — Вейерштрасса

Теперь мы применим теоремы Крейна — Мильмана, Хана — Банаха и Банаха — Алаоглу к задаче аппроксимации.

5.6. Определения. Пусть $C(S)$ — известное банахово пространство всех комплексных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве S (как обычно, с sup -нормой). Подпространство A в $C(S)$ является *алгеброй*, если $fg \in A$ для любых f и g из A . Множество $E \subset S$ называется *множеством антисимметрии* относительно алгебры $A \subset C(S)$, если каждая функция $f \in A$, вещественная на E , постоянна на этом множестве (иными словами, если алгебра A_E , состоящая из сужений $f|_E$ всевозможных функций $f \in A$ на множество E , не содержит непостоянных вещественных функций).

Например, если S — компактное подмножество в $\mathbb{C}$ и A состоит из всех функций $f \in C(S)$, голоморфных во внутренних точках S , то каждая связная компонента внутренности S является множеством антисимметрии относительно A .

Пусть $A \subset C(S)$, $p \in S$, $q \in S$; положим $p \sim q$, если существует множество антисимметрии E (относительно A), содержащее обе точки p и q . Легко проверить, что этим определено отношение эквивалентности в S и что классы эквивалентности замкнуты в S . Ясно также, что классы эквивалентности являются *максимальными* множествами антисимметрии относительно A .

5.7. Теорема Бишоп. Пусть A — замкнутая подалгебра в $C(S)$, содержащая все постоянные функции. Если $g \in C(S)$ и $g|_E \in A_E$ для каждого максимального множества антисимметрии E , то $g \in A$.

Иными словами, если функция $g \in C(S)$ такова, что для всякого множества антисимметрии E (относительно A) найдется функция $f_E \in A$, совпадающая с g на E , то существует единая функция $f \in A$, совпадающая с g на *каждом* E (а именно $f = g$).

Частным случаем теоремы Бишоп является теорема Стоуна — Вейерштрасса:

Пусть A — замкнутая подалгебра в $C(S)$, содержащая все постоянные и разделяющая точки в S . Если алгебра A симметрична (т. е. из $f \in A$ следует, что $\bar{f} \in A$), то $A = C(S)$.

Действительно, в этом случае вещественные функции из A разделяют точки в S . Поэтому всякое множество антисимметрии одноточечно, так что каждая функция $g \in C(S)$ удовлетворяет условиям теоремы Бишоп.

Доказательство. Аннулятор $A^\perp$ алгебры A состоит из всех регулярных комплексных борелевских мер μ на S , для ко-

торых $\int f d\mu = 0$ при всех $f \in A$. Положим

$$K = \{\mu \in A^\perp: \|\mu\| \leq 1\},$$

где $\|\mu\| = |\mu|(S)$. Множество K выпукло, уравновешено и (согласно утверждению (с) теоремы 4.3) слабо* компактно. Если $K = \{0\}$, то $A^\perp = \{0\}$, так что $A = C(S)$ и доказывать нечего.

Допустим поэтому, что $K \neq \{0\}$, и пусть μ — крайняя точка множества K . Ясно, что $\|\mu\| = 1$. Пусть E — носитель меры μ (т. е. наименьшее из компактных множеств $F \subset S$, для которых $|\mu|(F) = \|\mu\|$ ¹⁾). Рассмотрим такую функцию $f \in A$, для которой $0 < f(x) < 1$ при всех $x \in E$, и положим

$$d\sigma = f d\mu, \quad d\tau = (1-f) d\mu.$$

Так как A — алгебра, то $\sigma \in A^\perp$ и $\tau \in A^\perp$. Так как $0 < f < 1$ на E , то $\|\sigma\| > 0$ и $\|\tau\| > 0$. Кроме того,

$$\|\sigma\| + \|\tau\| = \int_E f d|\mu| + \int_E (1-f) d|\mu| = |\mu|(E) = 1.$$

Это показывает, что μ является выпуклой комбинацией мер $\sigma_1 = \sigma/\|\sigma\|$ и $\tau_1 = \tau/\|\tau\|$. Обе эти меры принадлежат K ; но μ — крайняя точка множества K , так что одна из этих мер, скажем σ_1 , совпадает с μ (поскольку $1 \in A$, случай $\mu = \tau_1$ ничем не отличается от этого). Иными словами, $f d\mu = \|\sigma\| d\mu$, так что $f(x) = \|\sigma\|$ для всех ²⁾ $x \in E$. Поскольку A содержит постоянные, отсюда следует, что всякая функция $f \in A$, вещественная на E , постоянна на E .

Итак, мы доказали, что если мера μ служит крайней точкой множества K , то ее носитель является множеством антисимметрии относительно A .

Отсюда следует, что если функция g удовлетворяет условиям теоремы, то $\int g d\mu = 0$ для любой меры μ , являющейся крайней точкой множества K , а потому и для любой меры μ из выпуклой оболочки множества всех крайних точек K . Так как функция $\mu \rightarrow \int g d\mu$ слабо* непрерывна на K , то из теоремы Крей-

¹⁾ Такое множество E существует. Действительно, пусть Γ — семейство всех открытых множеств $Q \subset S$, для которых $|\mu|(Q) = 0$ (Γ непусто, ибо $\emptyset \in \Gamma$), и пусть $V = \bigcup_{Q \in \Gamma} Q$. Если F — компактное подмножество в V , то F

покрывается конечным числом множеств $Q \in \Gamma$, так что $|\mu|(F) = 0$. Поэтому из регулярности меры μ следует, что $|\mu|(V) = 0$, и остается положить $E = S \setminus V$. — Прим. перев.

²⁾ Так как функция f непрерывна, то $F = \{x \in E: f(x) = \|\sigma\|\}$ является компактным подмножеством в E ; из равенства $f d\mu = \|\sigma\| d\mu$ следует, что $|\mu|(F) = |\mu|(E) = \|\mu\|$, а так как E — носитель меры μ , то $F = E$. — Прим. перев.

на—Мильмана следует, что $\int g d\mu = 0$ для всех $\mu \in K$, а потому и для всех $\mu \in A^\perp$.

Таким образом, каждый непрерывный линейный функционал на $C(S)$, аннулирующий A , аннулирует также и функцию g . Поэтому из теоремы Хана—Банаха следует, что $g \in A$. ■

Приведем пример, иллюстрирующий теорему Бишопа.

5.8. Теорема. Пусть K —такое компактное множество в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$, что для любой точки $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ дополнение в $\mathbb{C}$ к множеству

$$K_t = \{z \in \mathbb{C}: (t, z) \in K\}$$

связно. Каждой функции $g \in C(K)$ сопоставим функцию g_t на K_t , полагая $g_t(z) = g(t, z)$.

Пусть $g \in C(K)$ —такая функция, что каждая из функций g_t голоморфна во всех внутренних точках множества K_t . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой полином P от переменных $t_1, \dots, t_n, z$, что

$$|P(t, z) - g(t, z)| < \varepsilon$$

для всех $(t, z) \in K$.

Доказательство. Пусть A —замыкание в $C(K)$ множества всех полиномов¹⁾ $P(t, z)$. Поскольку вещественные полиномы разделяют точки в $\mathbb{R}^n$, каждое множество антисимметрии относительно алгебры A содержится в одном из множеств K_t . Поэтому в силу теоремы 5.7 достаточно показать, что для каждой точки $t \in \mathbb{R}^n$ найдется такая функция $f \in A$, что $f_t = g_t$.

Фиксируем $t \in \mathbb{R}^n$. По теореме Мергеляна (см. [27], а также [9, стр. 71] или [21, т. 2, стр. 105]) существуют такие полиномы $P_i(z)$, что

$$g_t(z) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(z) \quad (z \in K_t)$$

и $|P_i(z)| < 2^{-i}$ для всех $z \in K_t$ и всех $i > 1$. Далее, существует вещественный полином Q на $\mathbb{R}^n$, для которого t является точкой пика в том смысле, что $Q(t) = 1$, но $|Q(s)| < 1$, если $s \neq t$ и $K_s \neq \emptyset$. Фиксируем произвольное $i > 1$. Функции φ_m , определенные на K формулой

$$\varphi_m(s, z) = |Q^m(s) P_i(z)|,$$

непрерывны и образуют монотонную (невозрастающую) последовательность, предел которой в каждой точке множества K меньше чем 2^{-i} . Так как K компактно, отсюда следует существование такого номера m_i , что $\varphi_{m_i}(s, z) < 2^{-i}$ для всех точек множе-

¹⁾ Точнее говоря, сужений таких полиномов на K .—Прим. перев.

ства K . Ряд

$$f(s, z) = \sum_{i=1}^{\infty} Q^{m_i}(s) P_i(z) \quad (m_1 = 1)$$

равномерно сходится на K , так что $f \in A$. Ясно, что $f_t = g_t$. ■

Две интерполяционные теоремы

В доказательстве первой из этих теорем участвует сопряженный оператор. Вторая же доставляет еще одно приложение теоремы Крейна—Мильмана.

Первая теорема (принадлежащая Бишопу) снова касается $C(S)$. Обозначения здесь те же, что и в теореме 5.7.

5.9. Теорема. Пусть Y — замкнутое подпространство в $C(S)$, K — компактное подмножество в S , причем $|\mu|(K) = 0$ для всех $\mu \in Y^\perp$. Если $g \in C(K)$ и $|g| < 1$, то существует такая функция $f \in Y$, что $f|_K = g$ и $|f| < 1$ на S .

Таким образом, каждая непрерывная на K функция продолжается до некоторой функции из Y . Иными словами, оператор сужения $f \rightarrow f|_K$ отображает Y на $C(K)$.

Прототипом этой теоремы послужил следующий ее частный случай:

Пусть A — диск-алгебра, т. е. алгебра всех функций, непрерывных на замыкании единичного диска $U \subset \mathbb{C}$ и голоморфных в U . Возьмем в качестве S единичную окружность T . Пусть Y состоит из сужений на T всех функций из A . По теореме о максимуме модуля подпространство Y замкнуто в $C(T)$. Если K — компактное подмножество в T лебеговой меры 0, то, как утверждает теорема Ф. и М. Риссов (см. [27] или [12, стр. 73]), K удовлетворяет условиям теоремы 5.9. Следовательно, для каждой функции $g \in C(K)$ найдется такая функция $f \in A$, что $f = g$ на K .

Доказательство. Пусть $\rho: Y \rightarrow C(K)$ — отображение сужения, т. е. $\rho f = f|_K$. Мы должны доказать, что ρ отображает открытый единичный шар пространства Y на весь открытый единичный шар пространства $C(K)$.

Рассмотрим сопряженный оператор $\rho^*: M(K) \rightarrow Y^*$, где $M(K) = C(K)^*$ — банахово пространство всех регулярных комплексных борелевских мер на K с нормой $\|\mu\| = |\mu|(K)$. Образ $\rho^*\mu$ каждой меры $\mu \in M(K)$ является ограниченным линейным функционалом на Y ; по теореме Хана—Банаха его можно продолжить с сохранением нормы на все пространство $C(S)$. Другими словами, существует такая мера $\sigma \in M(S)$, что $\|\sigma\| =$

$$= \|\rho^* \mu\| \text{ и}$$

$$\int_S f d\sigma = \langle f, \rho^* \mu \rangle = \langle \rho f, \mu \rangle = \int_K f d\mu$$

для всех $f \in Y$. Рассмотрим меру μ как элемент пространства $M(S)$ (ее носитель содержится в K). Тогда $\sigma - \mu \in Y^\perp$, и из условий, наложенных на K , следует, что $\sigma(E) = \mu(E)$ для любого борелевского множества $E \subset K$. Поэтому $\|\mu\| \leq \|\sigma\|$, и мы заключаем, что $\|\mu\| \leq \|\rho^* \mu\|$. В силу утверждения (b) леммы 4.13 отсюда следует справедливость теоремы. ■

Примечание. Так как $\|\rho^*\| = \|\rho\| \leq 1$, то справедливо также неравенство $\|\sigma\| \leq \|\mu\|$, так что $\|\sigma\| = \|\mu\|$. Отсюда, учитывая происхождение меры σ , легко получаем, что $\sigma = \mu$ (как меры на S). Таким образом, продолжение функционала $\rho^* \mu$ на $C(S)$ с сохранением нормы *единственно*.

Вторая интерполяционная теорема относится к конечным *произведениям Бляшке*, т. е. к функциям B вида

$$B(z) = c \prod_{k=1}^N \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z},$$

где $|c| = 1$ и $|\alpha_k| < 1$ при $1 \leq k \leq N$. Легко видеть, что конечные произведения Бляшке — это в точности те элементы диск-алгебры, модули которых равны 1 в каждой точке единичной окружности.

Данные интерполяционной задачи Пика — Неванлинны — это два конечных подмножества $\{z_0, \dots, z_n\}$ и $\{w_0, \dots, w_n\}$ открытого единичного диска $U \subset \mathbb{C}$, причем $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$. Указанная задача состоит в отыскании такой голоморфной функции $f: U \rightarrow U$, для которой

$$f(z_i) = w_i \quad (0 \leq i \leq n).$$

При некоторых данных эта задача вполне может не иметь решения. Например, если $\{z_0, z_1\} = \{0, 1/2\}$ и $\{w_0, w_1\} = \{0, 3/2\}$, то из леммы Шварца следует, что решения не существует. Однако если задача разрешима, то, как показывает следующая теорема, среди ее решений должны быть «очень хорошие» функции.

5.10. Теорема. Пусть $\{z_0, \dots, z_n\}$, $\{w_0, \dots, w_n\}$ — данные Пика — Неванлинны. Если множество E всех голоморфных функций $f: U \rightarrow U$, для которых $f(z_i) = w_i$ при $0 \leq i \leq n$, непусто, то оно содержит конечное произведение Бляшке.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $z_0 = w_0 = 0$. Мы покажем, что существует голоморфная

в U функция F , удовлетворяющая условиям

$$(1) \quad F(0) = 1, \quad \operatorname{Re} F(z) > 0 \quad \text{для всех } z \in U,$$

$$(2) \quad F(z_i) = \beta_i = \frac{1 + w_i}{1 - w_i} \quad \text{при } 1 \leq i \leq n$$

и имеющая вид

$$(3) \quad F(z) = \sum_{k=1}^N c_k \frac{a_k + z}{a_k - z},$$

где $c_k > 0$, $\sum c_k = 1$ и $|a_k| = 1$. Если такая функция F найдена, то функция $B = (F - 1)/(F + 1)$ является конечным произведением Бляшке и $B(z_i) = w_i$ при $0 \leq i \leq n$.

Пусть K — множество всех голоморфных в U функций F , удовлетворяющих условиям (1).

Сопоставим каждой мере $\mu \in M(T) = C(T)^*$ функцию

$$(4) \quad F_\mu(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(e^{i\theta}).$$

Эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие $\mu \leftrightarrow F_\mu$ между множеством P всех вероятностных регулярных борелевских мер на T и множеством K ([27, теоремы 11.12 и 11.19])¹⁾.

¹⁾ Ясно, что формула (4) определяет отображение $\varphi: P \rightarrow K$ (вещественная часть ядра $g(z, e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}$ совпадает с ядром Пуассона в U и положительна). Если $\mu_1, \mu_2 \in P$ и $\varphi(\mu_1) = \varphi(\mu_2)$, то, разлагая $g(z, e^{i\theta})$ в ряд Тейлора по z и учитывая, что мера $\sigma = \mu_1 - \mu_2$ вещественна, получаем, что $\int e^{-in\theta} d\sigma = 0$ для всех целых n ; так как тригонометрические полиномы плотны в $C(T)$, то $\sigma = 0$, т. е. отображение φ инъективно. Сюръективность φ составляет содержание так называемой *теоремы Герглотца* и доказывается, например, так. Пусть $F \in K$ и $u(z) = \operatorname{Re} F(z)$. При $0 < \rho < 1$ для всякого борелевского множества $E \subset T$ положим $\mu_\rho(E) = \frac{1}{2\pi} \int_E u(\rho e^{i\theta}) d\theta$. Ясно, что

μ_ρ — положительная борелевская мера на T , причем $\|\mu_\rho\| = \mu_\rho(T) = u(0) = 1$ (именно здесь мы воспользовались обоими условиями (1)). Пусть $\bar{Q}_r$ ($0 < r < 1$) — слабое* замыкание множества $Q_r = \{\mu_\rho: r < \rho < 1\}$. Тогда $\{\bar{Q}_r\}$ — центрированная система слабо* замкнутых подмножеств замкнутого единичного шара в $C(T)^*$, и из теоремы Банаха — Алаоглу следует, что существует мера $\mu \in \bigcap_{0 < r < 1} \bar{Q}_r$. Фиксируем $z \in U$ и $\varepsilon > 0$. Хорошо известно, что при $0 < \rho < 1$

$$(a) \quad F(\rho z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z, e^{i\theta}) u(\rho e^{i\theta}) d\theta$$

Определим отображение $\Lambda: M(T) \rightarrow \mathbb{C}^n$, полагая

$$(5) \quad \Lambda\mu = (F_\mu(z_1), \dots, F_\mu(z_n)).$$

Так как множество E по предположению непусто, то существует такая мера $\mu_0 \in P$, что

$$(6) \quad \Lambda\mu_0 = \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Множество P выпукло и слабо* компактно, а отображение Λ линейно и слабо* непрерывно; поэтому $\Lambda(P)$ является выпуклым компактным множеством в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Так как $\beta \in \Lambda(P)$, то β является выпуклой комбинацией $N \leq 2n+1$ крайних точек множества $\Lambda(P)$ (см. упр. 19 гл. 3). Если γ — крайняя точка множества $\Lambda(P)$, то $\Lambda^{-1}(\gamma)$ — крайнее подмножество множества P , и каждая крайняя точка множества $\Lambda^{-1}(\gamma)$ (существование их следует из теоремы Крейна—Мильмана) является крайней и для P . Отсюда следует, что существуют такие крайние точки $\mu_1, \dots, \mu_N$ множества P и такие положительные числа $c_1, \dots, c_N$, что $\sum c_k = 1$ и

$$(7) \quad \Lambda(c_1\mu_1 + \dots + c_N\mu_N) = \beta.$$

Каждая из мер μ_k , встречающихся в формуле (7), будучи крайней точкой множества P , имеет носитель, состоящий из единственной точки $a_k \in T$; поэтому

$$(8) \quad F_{\mu_k}(z) = \frac{a_k + z}{a_k - z}.$$

Если определить теперь функцию F равенством (3), то из (7) и (8) следует, что эта функция удовлетворяет условиям (1) и (2). ■

Одна теорема о неподвижной точке

Теоремы о неподвижной точке играют важную роль во многих разделах анализа и топологии. Теорема, которую мы здесь докажем, принадлежит Какутани; мы воспользуемся ею для до-

(достаточно сравнить коэффициенты Тейлора левой и правой частей). Выберем такое r , что при $r < \rho < 1$

$$(b) \quad |F(\rho z) - F(z)| < \varepsilon.$$

Так как $\mu \in \bar{Q}_r$, а $V = \left\{ \nu \in C(T)^*: \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(z, e^{i\theta}) d\nu(e^{i\theta}) \right| < \varepsilon \right\}$ — слабая* окрестность нуля в $C(T)^*$, то существует такое ρ , что $r < \rho < 1$ и $\mu_\rho \in \mu + V$, т. е.

$$(c) \quad \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(z, e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z, e^{i\theta}) d(\rho e^{i\theta}) \right| < \varepsilon.$$

Так как $z \in U$ и $\varepsilon > 0$ выбраны произвольно, то из (a), (b) и (c) следует, что $\varphi(\mu) = F$ (то, что $\mu \in P$, — очевидно). — *Прим. перев.*

казательства существования на любой компактной группе меры Хаара. При доказательстве теоремы Какутани привлекаются лишь самые основные свойства локально выпуклых пространств.

5.11. Теорема. Предположим, что

(а) K — непустое компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X ,

(б) G — равностепенно непрерывная группа линейных отображений пространства X на себя,

(с) $\Lambda(K) \subset K$ для всякого $\Lambda \in G$.

Тогда группа G имеет общую неподвижную точку в K , т. е. существует такая точка $p \in K$, что $\Lambda p = p$ для всех $\Lambda \in G$.

Условие (б) стоит, вероятно, сформулировать более явным образом. Равностепенная непрерывность определена в п. 2.3. Говоря, что G — группа, мы подразумеваем под этим, что каждый оператор $\Lambda \in G$ взаимно однозначно отображает X на X , причем обратный к нему оператор Λ^{-1} тоже принадлежит G , и что если $\Lambda_1 \in G$ и $\Lambda_2 \in G$, то $\Lambda_1 \Lambda_2 \in G$. Здесь, конечно, $(\Lambda_1 \Lambda_2)x = \Lambda_1(\Lambda_2 x)$. Условие (б) выполняется, например, если G есть группа линейных изометрий нормированного пространства X .

Доказательство. Пусть Ω — совокупность всех таких непустых компактных выпуклых множеств $H \subset K$, для которых $\Lambda(H) \subset H$ при всех $\Lambda \in G$. Упорядочим Ω по включению. Заметим, что $\Omega \neq \emptyset$, ибо $K \in \Omega$. По теореме Хаусдорфа Ω содержит максимальное линейно упорядоченное подсемейство Ω_0 . Пересечение H_0 всех множеств, принадлежащих Ω_0 , является минимальным элементом в Ω . Теорема будет доказана, если мы покажем, что H_0 содержит лишь одну точку. Чтобы сделать это, мы рассмотрим множество $H \in \Omega$, содержащее по меньшей мере две точки, и докажем, что некоторое множество $H_1 \in \Omega$ является собственным подмножеством в H .

Сначала мы покажем, что в пространстве X существует локальная база, состоящая из открытых выпуклых уравновешенных множеств U , удовлетворяющих условию $\Lambda(U) \subset U$ для всех $\Lambda \in G$.

Пусть V — выпуклая окрестность нуля в X . Так как группа G равностепенно непрерывна, то существует такая уравновешенная окрестность нуля V_1 , что $\Lambda(V_1) \subset V$ для всех $\Lambda \in G$. Пусть U — выпуклая оболочка объединения множеств $\Lambda(V_1)$ по всем $\Lambda \in G$. Тогда множество U выпукло и уравновешено, причем $U \subset V$, поскольку V выпукло. Каждый вектор $u \in U$ имеет вид

$$u = c_1 \Lambda_1 v_1 + \dots + c_n \Lambda_n v_n,$$

где $c_i \geq 0$, $\sum c_i = 1$, $\Lambda_i \in G$, $v_i \in V_1$. Если $\Lambda \in G$, то вектор

$$\Lambda u = c_1 \Lambda \Lambda_1 v_1 + \dots + c_n \Lambda \Lambda_n v_n$$

также принадлежит U , поскольку $\Lambda\Lambda_i \in G$. Следовательно, $\Lambda(U) \subset U^1$.

Допустим теперь, что множество $H \in \Omega$ содержит по крайней мере две точки. Тогда $H - H \neq \{0\}$, и потому некоторое из построенных выше множеств U не покрывает $H - H$ целиком. Так как множество $H - H$ компактно, то $H - H \subset sU$ для некоторого $s > 0$; пусть t — точная нижняя грань всех таких чисел s ; тогда $t \geq 1$. Положим $W = tU$. Тогда W — такое выпуклое уравновешенное открытое множество, что

- (1) $\Lambda(W) \subset W$ для каждого $\Lambda \in G$,
- (2) $H - H \subset (1+r)W$, если $r > 0$,
- (3) $(1-r)\bar{W}$ не покрывает $H - H$, если $0 < r < 1$.

Свойства (1) и (2) очевидны. Так как W выпукло, то

$$(1-r)\bar{W} \subset (1-r)W + \frac{1}{2}rW = \left(1 - \frac{r}{2}\right)W;$$

последнее множество не покрывает $H - H$; поэтому выполняется (3).

Поскольку множество H компактно, в нем найдутся такие точки $x_1, \dots, x_n$, что

$$(4) \quad H \subset \bigcup_{i=1}^n \left(x_i + \frac{1}{2}W\right).$$

Положим $r = 1/(4n)$ и рассмотрим множество

$$(5) \quad H_1 = H \cap \bigcap_{y \in H} (y + (1-r)\bar{W}).$$

Ясно, что оно компактно и выпукло. Чтобы доказать, что множество H_1 непусто, мы покажем, что оно содержит точку

$$(6) \quad x_0 = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

Так как H выпукло, то $x_0 \in H$. Фиксируем $y \in H$. В силу (4) найдется такой номер j , что

$$(7) \quad y \in x_j + \frac{1}{2}W.$$

Если $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, то из свойства (2) следует, что

$$(8) \quad y \in x_i + (1+r)W.$$

Складывая соотношение (7) с суммой по всем $i \neq j$ соотношений (8), деля результат на n и учитывая при этом, что W выпукло

¹⁾ Нужно еще проверить, что множество U открыто; это легко сделать, если учесть, что каждое отображение $\Lambda \in G$ является гомеоморфизмом пространства X . — *Прим. перев.*

и уравновешено, а $r = 1/4n$, получаем

$$y - x_0 \in \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} + (n-1)(1+r) \right] \mathcal{W} \subset (1-r) \mathcal{W}.$$

Таким образом, $x_0 \in y + (1-r) \mathcal{W}$ для любого $y \in H$. Следовательно, $x_0 \in H_1$.

Пусть $x \in H_1$ и $y \in H$, а $\Lambda \in G$. Так как $\Lambda^{-1}(H) \subset H$, то $y = \Lambda y_1$ для некоторого $y_1 \in H$. При этом $x \in y_1 + (1-r) \overline{\mathcal{W}}$, поскольку $x \in H_1$. Поэтому из (1) следует, что

$$\Lambda x \in \Lambda y_1 + (1-r) \Lambda(\overline{\mathcal{W}}) \subset y + (1-r) \overline{\mathcal{W}},$$

а так как $\Lambda(H) \subset H$, то $\Lambda x \in H$. Таким образом, $\Lambda x \in H_1$, так что $\Lambda(H_1) \subset H_1$ для всякого $\Lambda \in G$.

Наконец, согласно (3), существуют такие точки $x \in H$ и $y \in H$, что $x - y$ не принадлежит $(1-r) \overline{\mathcal{W}}$. Но тогда $x \notin H_1$, так что $H_1 \neq H$. ■

Мера Хаара на компактных группах

5.12. Определения. *Топологической группой* называется группа G , снабженная такой топологией, относительно которой групповые операции в G непрерывны. Наиболее экономный способ расшифровки этого условия состоит в постулировании непрерывности отображения $\varphi: G \times G \rightarrow G$, определенного равенством

$$\varphi(x, y) = xy^{-1}.$$

Из этого условия следует, что для каждого $a \in G$ отображения $x \rightarrow ax$ и $x \rightarrow xa$ являются гомеоморфизмами группы G на себя; то же верно и для отображения $x \rightarrow x^{-1}$. Поэтому топология в G полностью определяется любой своей локальной базой в единице e группы G .

Если потребовать (что мы и сделаем, начиная с этого места), чтобы каждая точка в G была замкнутым множеством, то справедливы теоремы, аналогичные теоремам 1.10, 1.11 и 1.12 (формулировки и доказательства, с точностью до изменения обозначений, остаются теми же самыми), в частности выполняется аксиома отделимости Хаусдорфа.

Если f — любая функция, определенная на G , то ее левый сдвиг $L_s f$ и правый сдвиг $R_s f$ для всякого $s \in G$ определяются формулами

$$(L_s f)(x) = f(sx), \quad (R_s f)(x) = f(xs) \quad (x \in G).$$

Комплексная функция f на G называется *равномерно непрерывной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ в G найдется такая окрестность единицы V , что

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon$$

для всех $t \in G$ и $s \in G$, удовлетворяющих условию $s^{-1}t \in V$.

Топологическая группа G , топология которой компактна, называется *компактной группой*; в этом случае через $C(G)$ обозначается, как обычно, банахово пространство всех комплексных непрерывных функций на G с $\sup$ -нормой.

5.13. Теорема. Пусть G — компактная группа, $f \in C(G)$, а $H_L(f)$ — выпуклая оболочка множества всех левых сдвигов функции f . Тогда

(а) функция f равномерно непрерывна,

(б) $H_L(f)$ является вполне ограниченным подмножеством пространства $C(G)$.

Другими словами, замыкание множества $H_L(f)$ в $C(G)$ компактно (приложение А4).

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как функция f непрерывна, то для каждого $a \in G$ существует такая окрестность единицы W_a , что $|f(t) - f(a)| < \varepsilon$ для всех $t \in aW_a$. Из непрерывности групповых операций следует существование такой окрестности единицы V_a , что $V_a V_a^{-1} \subset W_a$. Так как группа G компактна, то найдется такое конечное множество $A \subset G$, что

$$G = \bigcup_{a \in A} aV_a.$$

Положим

$$V = \bigcap_{a \in A} V_a.$$

Допустим, что $x^{-1}y \in V$. Выберем точку $a \in A$ так, чтобы $y \in aV_a$. Тогда $|f(y) - f(a)| < \varepsilon$. Кроме того, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, поскольку

$$x \in yV^{-1} \subset aV_a V_a^{-1} \subset aW_a.$$

Следовательно, $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$, и утверждение (а) доказано.

Так как $(sx)^{-1}(sy) = x^{-1}y$ для всякого $s \in G$, то

$$|(L_s f)(x) - (L_s f)(y)| = |f(sx) - f(sy)| < 2\varepsilon,$$

если $x^{-1}y \in V$. Каждая функция $g \in H_L(f)$ представима в виде конечной суммы $\sum c_s L_s f$, где $c_s \geq 0$ и $\sum c_s = 1$. Следовательно,

$$|g(x) - g(y)| < 2\varepsilon,$$

если $x^{-1}y \in V$ и $g \in H_L(f)$. Это означает, что $H_L(f)$ является равномерно непрерывным подмножеством пространства $C(G)$. Поэтому справедливость утверждения (б) следует из теоремы Асколи (приложение А5). ■

5.14. Теорема. На всякой компактной группе G существует единственная регулярная вероятностная борелевская мера μ , левинвариантная в том смысле, что

$$(1) \quad \int_G f \, d\mu = \int_G (L_s f) \, d\mu \quad (s \in G, f \in C(G)).$$

Эта мера m также правоинвариантна, т. е.

$$(2) \quad \int_G f \, dm = \int_G (R_s f) \, dm \quad (s \in G, \quad f \in C(G)),$$

и удовлетворяет условию

$$(3) \quad \int_G f(x) \, dm(x) = \int_G f(x^{-1}) \, dm(x) \quad (f \in C(G)).$$

Такая мера m называется мерой Хаара на группе G .

Доказательство. Операторы L_s удовлетворяют соотношению $L_s L_t = L_{ts}$ ($s \in G, t \in G$), поскольку

$$(L_s L_t f)(x) = (L_t f)(sx) = f(tsx) = (L_{ts} f)(x).$$

Так как каждый из операторов L_s является изометрией пространства $C(G)$ на себя, то $\{L_s: s \in G\}$ — равностепенно непрерывная группа линейных операторов в $C(G)$. Для каждой функции $f \in C(G)$ обозначим через K_f замыкание множества $H_L(f)$. По теореме 5.13 множество K_f компактно. Очевидно, что $L_s(K_f) \subset K_f$ для всякого $s \in G$. Поэтому из теоремы о неподвижной точке 5.11 следует, что в множестве K_f существует такая функция φ , что $L_s \varphi = \varphi$ для всех $s \in G$. В частности, $\varphi(s) = \varphi(e)$, так что функция φ постоянна на G . Так как K_f есть замыкание $H_L(f)$, то эта постоянная φ может быть аппроксимирована равномерно на G функциями из $H_L(f)$.

Таким образом, мы доказали, что для каждой функции $f \in C(G)$ существует по меньшей мере одна постоянная c , которая может быть равномерно на G аппроксимирована выпуклыми комбинациями левых сдвигов функции f . Точно так же доказывается существование постоянной c' , находящейся в таком же отношении к правым сдвигам функции f . Мы утверждаем, что $c = c'$.

Чтобы доказать это, фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Существуют такие конечные подмножества $\{a_i\}, \{b_j\}$ группы G и такие положительные числа α_i, β_j , что $\sum \alpha_i = 1, \sum \beta_j = 1$,

$$(4) \quad \left| c - \sum_i \alpha_i f(a_i x) \right| < \varepsilon \quad (x \in G)$$

и

$$(5) \quad \left| c' - \sum_j \beta_j f(x b_j) \right| < \varepsilon \quad (x \in G).$$

Положим $x = b_j$ в неравенстве (4); умножая получившееся неравенство на β_j и суммируя по всем j , получим

$$(6) \quad \left| c - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j) \right| < \varepsilon.$$

Аналогично, полагая в (5) $x = a_i$, умножая на α_i и суммируя по

всем i , получим

$$(7) \quad \left| c' - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j) \right| < \varepsilon.$$

Из (6) и (7) следует, что $c = c'$.

Из доказанного видно, что для каждой функции $f \in C(G)$ существует *единственное* число Mf , которое может быть равномерно аппроксимировано выпуклыми комбинациями левых сдвигов функции f , и что то же самое число Mf является единственным числом, допускающим равномерную аппроксимацию выпуклыми комбинациями правых сдвигов функции f . Очевидно, что построенный функционал M на $C(G)$ обладает следующими свойствами:

$$(8) \quad Mf \geq 0, \text{ если } f \geq 0;$$

$$(9) \quad M1 = 1;$$

$$(10) \quad M(\alpha f) = \alpha Mf \text{ для любого скаляра } \alpha;$$

$$(11) \quad M(L_s f) = Mf = M(R_s f) \text{ для всякого } s \in G.$$

Теперь мы докажем, что

$$(12) \quad M(f + g) = Mf + Mg.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$(13) \quad \left| Mf - \sum_i \alpha_i f(a_i x) \right| < \varepsilon \quad (x \in G)$$

для некоторого конечного множества $\{a_i\} \subset G$ и некоторых чисел $\alpha_i > 0$, таких, что $\sum \alpha_i = 1$. Положим

$$(14) \quad h(x) = \sum_i \alpha_i g(a_i x).$$

Тогда $h \in K_g$, и потому $K_h \subset K_g$, а так как каждое из этих множеств содержит *единственную* постоянную функцию, то $Mh = Mg$. Поэтому найдутся такое конечное множество $\{b_j\} \subset G$ и такие числа $\beta_j > 0$, где $\sum \beta_j = 1$, что

$$(15) \quad \left| Mg - \sum_j \beta_j h(b_j x) \right| < \varepsilon \quad (x \in G),$$

откуда, учитывая (14), получаем

$$(16) \quad \left| Mg - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j g(a_i b_j x) \right| < \varepsilon \quad (x \in G).$$

Заменяя x на $b_j x$ в неравенстве (13), умножая результат на β_j и суммируя по всем j , получим неравенство

$$(17) \quad \left| Mf - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j x) \right| < \varepsilon \quad (x \in G).$$

Таким образом,

$$(18) \quad \left| Mf + Mg - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (f + g)(a_i b_j x) \right| < 2\varepsilon \quad (x \in G).$$

Поскольку $\sum \alpha_i \beta_j = 1$, из (18) следует (12).

Соотношения (8), (9), (10) и (12) показывают, что M — положительный линейный функционал на $C(G)$. Поэтому из теоремы Рисса следует существование единственной регулярной вероятностной борелевской меры m на G , для которой

$$(19) \quad Mf = \int_G f \, dm \quad (f \in C(G));$$

свойства (1) и (2) следуют из (11). Чтобы доказать (3), обозначим правую часть этого соотношения через $M'f$ и заметим, что функционал M' также обладает свойствами (8) — (12); поэтому $M' = M$ и теорема доказана¹⁾. ■

Недополняемые подпространства

Свойство дополняемости подпространства топологического векторного пространства было определено в п. 4.20; лемма 4.21 доставляет некоторые примеры дополняемых подпространств. Нетрудно убедиться в том, что каждое замкнутое подпространство гильбертова пространства дополняемо (теорема 12.4). Теперь мы покажем, что некоторые хорошо известные замкнутые подпространства некоторых других банаховых пространств недополняемы. Недополняемость будет установлена с помощью одной довольно общей теоремы о компактных группах операторов, имеющих общее инвариантное подпространство; доказательство этой теоремы использует интегрирование векторных функций по мере Хаара.

¹⁾ В действительности единственность левоинвариантной меры (а вместе с ней и свойство (3)) осталась недоказанной. Доказательство можно закончить, например, следующим образом. Пусть μ — регулярная вероятностная борелевская левоинвариантная мера на G . Пусть $f \in C(G)$; легко видеть, что функция $f(st)$ непрерывна на $G \times G$. Применяя к ней теорему Фубини и учитывая, что μ левоинвариантна, а m , как доказано в тексте, правоинвариантна, имеем

$$\begin{aligned} \int_G f(t) \, d\mu(t) &= \int_G f(st) \, d\mu(t) = \int_G \left[\int_G f(st) \, d\mu(t) \right] dm(s) = \\ &= \int_G \left[\int_G f(st) \, dm(s) \right] d\mu(t) = \int_G \left[\int_G f(s) \, dm(s) \right] d\mu(t) = \\ &= \int_G f(s) \, dm(s). \end{aligned}$$

Так как меры μ и m регулярны, а f — любая непрерывная функция на G , то отсюда следует, что $\mu = m$. После этого можно доказать (3), как это сделано в тексте. Другой способ доказательства единственности левоинвариантной меры (который, возможно, ближе к замыслу автора) состоит в том, что интеграл $\int f \, d\mu$ по такой мере можно равномерно аппроксимировать выпуклыми комбинациями левых сдвигов функции f (например, с помощью сумм Римана). — *Прим. перев.*

Начнем с обзора некоторых связей между дополняемыми подпространствами и проекторами.

5.15. Проекторы. Пусть X — векторное пространство. Линейное отображение $P: X \rightarrow X$ называется *проектором* в пространстве X , если

$$P^2 = P,$$

т. е. если $P(Px) = Px$ для всякого $x \in X$.

Пусть P — проектор в X с ядром $\mathcal{N}(P)$ и образом $\mathcal{R}(P)$. Следующие факты почти очевидны:

(а) $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P) = \{x \in X: Px = x\}$;

(б) $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$;

(с) $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\}$ и $X = \mathcal{R}(P) + \mathcal{N}(P)$;

(d) если A и B — такие подпространства в X , что $A \cap B = \{0\}$ и $X = A + B$, то в X существует единственный проектор P , для которого $A = \mathcal{R}(P)$ и $B = \mathcal{N}(P)$.

Так как $(I - P)P = 0$, то $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{N}(I - P)$. Если $x \in \mathcal{N}(I - P)$, то $x - Px = 0$, так что $x = Px \in \mathcal{R}(P)$. Это доказывает равенство (а); утверждение (б) получается применением (а) к проектору $I - P$. Если $x \in \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P)$, то $x = Px = 0$; всякий вектор $x \in X$ представим в виде $x = Px + (x - Px)$, причем $x - Px \in \mathcal{N}(P)$; этим доказано утверждение (с). Если подпространства A и B удовлетворяют условиям утверждения (d), то каждый вектор $x \in X$ единственным способом представляется в виде $x = x' + x''$, где $x' \in A$ и $x'' \in B$. Положим $Px = x'$. Тривиальная проверка показывает, что P обладает нужными свойствами.

5.16. Теорема. (а) Если P — непрерывный проектор в топологическом векторном пространстве X , то

$$X = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P).$$

(б) Обратно, если X является F -пространством и $X = A \oplus B$, то проектор P с образом A и ядром B непрерывен.

Напомним, что мы пользуемся обозначением $X = A \oplus B$ лишь в том случае, когда A и B — замкнутые подпространства X , причем $A + B = X$ и $A \cap B = \{0\}$.

Доказательство. Так как операторы P и $I - P$ непрерывны, то подпространства $\mathcal{N}(P)$ и $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$ замкнуты; поэтому утверждение (а) следует из утверждения (с) п. 5.15.

Чтобы доказать (б), достаточно проверить, что проектор P удовлетворяет условиям теоремы о замкнутом графике. Пусть $x_n \rightarrow x$ и $Px_n \rightarrow y$. Так как $Px_n \in A$, а подпространство A замкнуто, то $y \in A$, и потому $y = Py$. Аналогично $x_n - Px_n \in B$, подпространство B замкнуто, так что $x - y \in B$, и потому $Py = Px$.

Таким образом, $y = Px$. Следовательно, проектор P непрерывен. ■

Следствие. Замкнутое подпространство F -пространства X тогда и только тогда дополняемо в X , когда оно является образом некоторого непрерывного в X проектора.

5.17. Группы линейных операторов. Предположим, что топологическое векторное пространство X и топологическая группа G связаны следующим образом: каждому элементу $s \in G$ сопоставлен непрерывный линейный оператор $T_s: X \rightarrow X$, причем

$$T_e = I, \quad T_{st} = T_s T_t \quad (s \in G, t \in G)$$

и отображение $(s, x) \rightarrow T_s x$ прямого произведения $G \times X$ в пространство X непрерывно.

В этом случае говорят, что группа G непрерывно и линейно действует в пространстве X .

5.18. Теорема. Пусть Y — дополняемое подпространство пространства Фреше X , и пусть компактная группа G непрерывно и линейно действует на пространстве X , причем $T_s(Y) \subset Y$ для всех $s \in G$. Тогда существует непрерывный проектор Q пространства X на подпространство Y , коммутирующий со всеми операторами T_s .

Доказательство. Для простоты будем вместо $T_s x$ писать sx . По утверждению (b) теоремы 5.16 существует непрерывный проектор P пространства X на подпространство Y . Искомый проектор Q должен удовлетворять условию $s^{-1}Qs = Q$ для всех $s \in G$. Идея доказательства состоит в том, чтобы получить проектор Q усреднением операторной функции $s \rightarrow s^{-1}Ps$ по мере Хаара $dm(s)$ на группе G . Положим

$$(1) \quad Qx = \int_G s^{-1}Psx \, dm(s) \quad (x \in X).$$

Чтобы доказать, что этот интеграл (понимаемый в смысле определения 3.26) существует, достаточно в силу теоремы 3.27 показать, что функция $f_x: G \rightarrow X$, определенная формулой

$$(2) \quad f_x(s) = s^{-1}Psx \quad (s \in G),$$

непрерывна. Фиксируем $s_0 \in G$; пусть U — окрестность точки $f_x(s_0)$ в X . Положим $y = Ps_0x$, так что

$$(3) \quad s_0^{-1}y = f_x(s_0).$$

Так как отображение $(s, z) \rightarrow sz$ предполагается непрерывным, то существуют такие окрестности V_1 и W точек $s_0 \in G$ и $y \in X$ соот-

ветственно, что

$$(4) \quad s^{-1}(W) \subset U \quad \text{для всех } s \in V_1.$$

Кроме того, поскольку проектор P непрерывен, найдется такая окрестность V_2 точки s_0 , что

$$(5) \quad Psx \in W \quad \text{для всех } s \in V_2.$$

Если $s \in V_1 \cap V_2$, то из (2), (4) и (5) следует, что $f_x(s) \in U$. Таким образом, функция f_x непрерывна.

Поскольку группа G компактна, образ каждой из функций f_x является компактным подмножеством пространства X . Поэтому из теоремы Банаха—Штейнгауза 2.6 следует, что семейство линейных операторов $\{s^{-1}Ps: s \in G\}$ равномерно непрерывно в пространстве X . Поэтому для любой выпуклой окрестности нуля U_1 найдется такая окрестность нуля U_2 , что $s^{-1}Ps(U_2) \subset U_1$ при всех $s \in G$. Так как окрестность U_1 выпукла, то из формулы (1), определяющей оператор Q , следует, что $Q(U_2) \subset \bar{U}_1$ (см. теорему 3.27). Поэтому оператор Q непрерывен. Линейность его очевидна.

Если $x \in X$, то $Psx \in Y$. Так как по условию подпространство Y инвариантно относительно всех операторов $T_s (s \in G)$, то отсюда следует, что $s^{-1}Psx \in Y$ для всякого $s \in G$. Так как Y замкнуто, то $Qx \in Y$.

Если $x \in Y$, то $sx \in Y$ и $Psx = sx$, так что $s^{-1}Psx = x$ для любого $s \in G$. Поэтому $Qx = x$.

Эти два замечания показывают, что Q является проектором пространства X на подпространство Y . Для завершения доказательства остается убедиться в том, что

$$(6) \quad Qs_0 = s_0Q \quad \text{для всякого } s_0 \in G.$$

Заметим, что $s^{-1}Pss_0 = s_0(ss_0)^{-1}P(ss_0)$. Поэтому из (1) и (2) следует, что

$$\begin{aligned} Qs_0x &= \int_G s^{-1}Pss_0x \, dm(s) = \int_G s_0f_x(ss_0) \, dm(s) = \\ &= \int_G s_0f_x(s) \, dm(s) = s_0 \int_G f_x(s) \, dm(s) = s_0Qx; \end{aligned}$$

третье равенство выполняется в силу инвариантности меры m относительно сдвигов; по поводу четвертого равенства (вынесение оператора s_0 за знак интеграла) см. упр. 24 гл. 3. ■

5.19. Примеры. В качестве первого примера рассмотрим подпространство $Y = H^1$ пространства $X = L^1$. Здесь L^1 — пространство всех интегрируемых функций на единичной окружности, а H^1 состоит из всех тех функций $f \in L^1$, для которых $\hat{f}(n) = 0$ при всех $n < 0$. Напомним, что $\hat{f}(n)$ обозначает n -й коэффициент

Фурье функции f :

$$(1) \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Заметим, что для простоты мы пишем $f(\theta)$ вместо $f(e^{i\theta})$.

В качестве группы G возьмем единичную окружность, т. е. мультипликативную группу всех комплексных чисел, по модулю равных 1, и сопоставим каждому элементу $e^{is} \in G$ оператор сдвига τ_s , полагая

$$(2) \quad (\tau_s f)(\theta) = f(s + \theta).$$

Легко проверить (см. упр. 12), что так определенное действие группы G на пространстве L^1 линейно и непрерывно и что

$$(3) \quad (\tau_s f)^\wedge(n) = e^{ins} \hat{f}(n).$$

Поэтому $\tau_s(H^1) = H^1$ для любого вещественного s .

Если бы подпространство H^1 было дополняемым в L^1 , то из теоремы 5.18 следовало бы существование такого непрерывного проектора Q пространства L^1 на H^1 , что

$$(4) \quad \tau_s Q = Q \tau_s \quad \text{для всех } s.$$

Посмотрим, как должен был бы выглядеть такой проектор.

Положим $e_n(\theta) = e^{in\theta}$. Тогда $\tau_s e_n = e^{ins} e_n$, а так как оператор Q линеен, то

$$(5) \quad Q \tau_s e_n = e^{ins} Q e_n.$$

Из (4) и (5) следует, что

$$(6) \quad (Q e_n)(s + \theta) = e^{ins} (Q e_n)(\theta).$$

Пусть $c_n = (Q e_n)(0)$. При $\theta = 0$ соотношение (6) принимает вид

$$(7) \quad Q e_n = c_n e_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

До сих пор мы пользовались лишь условием (4); воспользуемся теперь тем, что образом оператора Q служит подпространство H^1 . Так как $Q e_n \in H^1$ для всех n , то из (7) следует, что $c_n = 0$ при $n < 0$. Так как $Qf = f$ для всех $f \in H^1$, то $c_n = 1$ при $n \geq 0$. Таким образом, проектор Q (если он вообще существует) является «естественным», т. е. его действие сводится к замене нулем всех коэффициентов Фурье с отрицательными номерами, т. е.¹⁾

$$(8) \quad Q \left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \right) = \sum_0^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

¹⁾ Равенство (8) нужно понимать в том смысле, что если функция $f \in L^1$ имеет ряд Фурье $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, то функция Qf должна иметь ряд Фурье $\sum_0^{\infty} a_n e^{in\theta}$. В тексте будет доказано, что линейный оператор $Q: L^1 \rightarrow L^1$, обладающий

С целью получить противоречие рассмотрим функцию

$$(9) \quad f_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \quad (0 < r < 1),$$

которая представляет собой хорошо известное ядро Пуассона

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2};$$

в частности, $f_r > 0$. Поэтому

$$(10) \quad \|f_r\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_r(\theta)| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_r(\theta) d\theta = 1$$

для всех r . Однако

$$(11) \quad (Qf_r)(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} = \frac{1}{1-re^{i\theta}},$$

а так как $\int |1-e^{i\theta}|^{-1} d\theta = \infty$, то из леммы Фату следует, что $\|Qf_r\|_1 \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 1$. В силу (10) это противоречит непрерывности оператора Q .

Следовательно, подпространство H^1 недополняемо в L^1 .

Такой же подход можно применить к пространствам A и C , где C —пространство всех комплексных непрерывных функций на единичной окружности, а A состоит из всех тех функций $f \in C$, для которых $\hat{f}(n) = 0$ при $n < 0$. Если бы подпространство A было дополняемым в C , то существовал бы непрерывный проектор Q пространства C на A , который должен был бы удовлетворять условию (8). Если $f \in A$ и $\hat{f}|_{\theta=0} = 0$, то $2\operatorname{Re} f \in C$ и

таким свойством, не может быть непрерывным. В действительности можно утверждать чуть больше: не существует вообще никакого линейного оператора $Q: L^1 \rightarrow L^1$, удовлетворяющего условиям $Q(e^{in\theta}) = e^{in\theta}$ при $n \geq 0$ и $Q(e^{in\theta}) = 0$ при $n < 0$. Действительно, если бы такой линейный оператор Q существовал, то, как легко проверить, он имел бы замкнутый график и потому был бы непрерывным, что невозможно. Заметим еще, что отсюда следует существо-

вание такой функции $f \in L^1$ с рядом Фурье $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ не является рядом Фурье никакой функции из L^1 . Известны и конкретные примеры таких функций; так, можно показать, что $\sum_{|n| \geq 2} \frac{e^{in\theta}}{\log |n|}$ является

рядом Фурье некоторой функции из L^1 , в то время как $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{\log n}$ не может

быть рядом Фурье функции из L^1 (доказательства этих утверждений основаны на довольно тонком анализе, тогда как существование примера такого рода получается из общих соображений, «даром»). Наконец, отметим, что теорема о недополняемости H^1 в L^1 принадлежит Д. Ньюману, а ее доказательство, приведенное в тексте, предложено У. Рудином. — *Прим. перев.*

$Q(2\operatorname{Re} f) = f$; поэтому должна была бы существовать такая постоянная $M < \infty$, что

$$(12) \quad \sup_{\theta} |f(\theta)| \leq M \sup_{\theta} |\operatorname{Re} f(\theta)|$$

для всех $f \in A$, удовлетворяющих условию $f|_{\theta=0} = 0$. Однако такой постоянной не существует, в чем можно убедиться, рассматривая конформные отображения замкнутого единичного диска на высокие узкие эллипсы.

Следовательно, подпространство A недополняемо в C .

Однако если $1 < p < \infty$, то существует непрерывный проектор Q пространства L^p на подпространство H^p , удовлетворяющий условию (8). Таким образом, при $1 < p < \infty$ подпространство H^p дополняемо в L^p . Это утверждение составляет содержание теоремы М. Рисса (см. [27, теорема 17.26] или [12, стр. 215]).

В заключение приведем один результат, аналогичный утверждению (b) теоремы 5.16; мы воспользуемся им при доказательстве теоремы 11.31.

5.20. Теорема. Пусть A и B — такие замкнутые подпространства банахова пространства X , что $X = A + B$. Тогда существует такая постоянная $\gamma < \infty$, что каждый вектор $x \in X$ допускает представление в виде $x = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$ и $\|a\| + \|b\| \leq \gamma \|x\|$.

Условия этой теоремы отличаются от условий теоремы 5.16 (b), поскольку здесь не предполагается, что $A \cap B = \{0\}$.

Доказательство. Пусть Y — векторное пространство всех упорядоченных пар (a, b) ($a \in A$, $b \in B$) с покомпонентным сложением и умножением на скаляры и с нормой

$$\|(a, b)\| = \|a\| + \|b\|.$$

Так как пространства A и B полны, то Y является банаховым пространством. Отображение $\Lambda: Y \rightarrow X$, определенное формулой

$$\Lambda(a, b) = a + b,$$

сюръективно, линейно и непрерывно, поскольку $\|a + b\| \leq \|(a, b)\|$. По теореме об открытом отображении существует такая постоянная $\gamma < \infty$, что каждый вектор $x \in X$ является образом при отображении Λ некоторого элемента $(a, b) \in Y$, для которого $\|(a, b)\| \leq \gamma \|x\|$. ■

Упражнения

1. Пусть μ_1, μ_2 — меры на единичной окружности, определенные равенствами

$$d\mu_1 = \cos \theta \, d\theta, \quad d\mu_2 = \sin \theta \, d\theta.$$

Найти множество значений векторной меры $\mu = (\mu_1, \mu_2)$.

2. Построить две функции f и g на отрезке $[0, 1]$, обладающие таким свойством: если

$$d\mu_1 = f(x) \, dx \quad \text{и} \quad d\mu_2 = g(x) \, dx,$$

то множество значений векторной меры $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ есть квадрат с вершинами в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ и $(0, -1)$.

3. Предположим, что выполняются условия теоремы 5.9, и пусть $\varphi \in C(S)$, $\varphi > 0$, $g \in C(K)$ и $|g| < \varphi|_K$. Доказать, что существует такая функция $f \in Y$, для которой $f|_K = g$ и $|f| < \varphi$ на S . *Указание:* примените теорему 5.9 к пространству всех функций вида f/φ , где $f \in Y$.

4. Доказать, что носитель каждой крайней точки множества P (см. теорему 5.10) состоит из единственной точки (этим фактом мы воспользовались в конце доказательства теоремы 5.10).

5. Сформулировать и доказать аналоги теорем 1.10—1.12, упоминавшиеся в п. 5.12 (не предполагая, что группа G коммутативна).

6. Пусть G — топологическая группа, а H — максимальное связное подмножество в G , содержащее единственный элемент. Доказать, что H является нормальным делителем группы G , т. е. такой подгруппой, что $x^{-1}Hx = H$ для всех $x \in G$. *Указание:* если A и B — связные подмножества группы G , то множества A^{-1} и AB тоже связны.

7. Доказать, что всякая открытая подгруппа топологической группы замкнута (обратное, очевидно, неверно).

8. Пусть m — мера Хаара на компактной группе G , а V — непустое открытое множество в G . Доказать, что $m(V) > 0$.

9. Рассмотрим функции $e_n = e^{in\theta}$ как элементы пространства L^2 относительно меры Лебега на единичной окружности. Пусть A — наименьшее замкнутое подпространство в L^2 , содержащее все функции e_n с $n \geq 0$, а B — наименьшее замкнутое подпространство в L^2 , содержащее все функции $e_{-n} + ne_n$ с $n \geq 1$. Доказать следующие утверждения:

- (а) $A \cap B = \{0\}$;
- (б) подпространство $X = A + B$ всюду плотно в L^2 , но не совпадает с L^2 ;
- (с) хотя $X = A \oplus B$, проектор пространства X на подпространство A , имеющий своим ядром подпространство B , не непрерывен (разумеется, в X рассматривается топология, индуцированная L^2 -нормой; ср. с теоремой 5.16).

10. Пусть X — банахово пространство, $P \in \mathcal{B}(X)$, $Q \in \mathcal{B}(X)$, причем P и Q — проекторы.

(а) Показать, что сопряженный к P оператор P^* является проектором в пространстве X^* .

(б) Показать, что если $PQ = QP$ и $P \neq Q$, то $\|P - Q\| \geq 1$.

11. Пусть P и Q — проекторы в векторном пространстве X .

(а) Доказать, что оператор $P + Q$ является проектором тогда и только тогда, когда $PQ = QP = 0$. Если последние условия выполняются, то

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(P + Q) &= \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q), \\ \mathcal{R}(P + Q) &= \mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q), \\ \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) &= \{0\}.\end{aligned}$$

(б) Доказать, что если $PQ = QP$, то оператор PQ является проектором и

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(PQ) &= \mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q), \\ \mathcal{R}(PQ) &= \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q).\end{aligned}$$

(с) Какие выводы относительно утверждения (б) можно сделать, рассматривая матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

12. Доказать, что группа операторов τ_s , участвующая в примере 5.19, непрерывно действует на пространстве L^1 (в смысле определения п. 5.17). Иными словами, доказать, что

$$\|\tau_r g - \tau_s f\|_1 \rightarrow 0,$$

если $r \rightarrow s$ и $g \rightarrow f$ в L^1 .

13. Используя следующий пример, показать, что условие компактности группы G существенно для справедливости теоремы 5.18. Возьмем в качестве X пространство L^1 относительно меры Лебега на вещественной оси $\mathbb{R}$; подпространство Y пусть состоит из всех тех функций $f \in L^1$, для которых $\int_{\mathbb{R}} f = 0$; группа $G = \mathbb{R}$ (с обычной топологией) непрерывно (см. упр. 12) и

линейно действует на $X = L^1$ сдвигами: $(\tau_s f)(x) = f(s+x)$, $\tau_s Y = Y$ для всех $s \in \mathbb{R}$ и подпространство Y дополняемо в X . Тем не менее не существует коммутирующего со всеми операторами τ_s проектора пространства X на подпространство Y (даже разрывного).

14. Предположим, что T и S — такие непрерывные линейные операторы в топологическом векторном пространстве, что $T = TST$. Доказать, что образ оператора T замкнут (в случае $S = I$ это сводится к утверждению (а) теоремы 5.16).

15. Пусть S — компактное хаусдорфово пространство и A — замкнутое подпространство пространства $C(S)$. Пусть μ — крайняя точка единичного шара в $A^\perp$, а $f \in C(S)$ — такая вещественная функция что

$$\int_S g f d\mu = 0$$

для всех $g \in A$. Доказать, что тогда функция f постоянна на носителе меры μ (ср. с теоремой 5.7). Показать на примере, что это утверждение становится неверным, если не предполагать вещественности функции f .

Распределения и преобразование Фурье

Глава 6

ПРОБНЫЕ ФУНКЦИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Введение

6.1. Теория распределений освобождает дифференциальное исчисление от некоторых трудностей, возникающих ввиду существования недифференцируемых функций. Это достигается путем распространения дифференциального исчисления на класс объектов (называемых *распределениями* или *обобщенными функциями*), значительно более широкий, чем класс дифференцируемых функций, к которым дифференциальное исчисление по-прежнему применяется в своей первоначальной форме.

Для того чтобы такое расширение оказалось полезным, необходимо выполнение ряда условий. В частности, для каждого открытого множества в $\mathbf{R}^n$:

- (а) любая непрерывная функция должна быть распределением;
- (б) любое распределение обязано обладать частными производными, которые снова являются распределениями (каждое распределение тем самым будет «бесконечно дифференцируемым»). Для дифференцируемых функций новое понятие производной должно совпадать со старым;
- (с) должны сохраняться обычные формальные правила дифференциального исчисления;
- (д) достаточно богатый запас теорем сходимости должен обеспечивать возможность обычных для анализа предельных переходов.

Мы объясним мотивы следующих далее определений, ограничившись временно случаем $n = 1$. Встречающиеся ниже интегралы понимаются в смысле меры Лебега. Если пределы интегрирования не указаны, то это означает, что оно распространяется на всю вещественную ось $\mathbf{R}$.

Комплексная функция f называется *локально интегрируемой*, если она измерима и $\int_K |f| < \infty$ для любого компакта $K \subset \mathbf{R}$.

Основная идея состоит в том, чтобы интерпретировать f не как

обычную функцию, сопоставляющую каждому $x \in \mathbf{R}$ некоторое число $f(x)$, а как нечто такое, что сопоставляет каждой выбранной подходящим образом «пробной функции» φ число $\int f\varphi$. [Такая точка зрения особенно удобна для функций, возникающих в физических рассуждениях, ибо почти всегда величины могут быть измерены только в среднем. Не удивительно, что распределения использовались физиками задолго до того, как была построена их математическая теория.] Разумеется, выбор подходящего класса пробных функций следует уточнить.

Мы будем рассматривать векторное пространство $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{R})$ всех функций $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ с компактным носителем. Тогда для каждой локально интегрируемой функции f и каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}$ существует интеграл $\int f\varphi$. Кроме того, класс $\mathcal{D}$ настолько обширен, что интегралы $\int f\varphi$ однозначно определяют функцию f почти всюду (п. в.). [Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что равномерное замыкание множества $\mathcal{D}$ содержит каждую непрерывную функцию с компактным носителем.] Если функция f непрерывно дифференцируема, то

$$(1) \quad \int f' \varphi = - \int f \varphi' \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

Если $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, то

$$(2) \quad \int f^{(k)} \varphi = (-1)^k \int f \varphi^{(k)} \quad (\varphi \in \mathcal{D}, k = 1, 2, 3, \dots).$$

При интегрировании по частям здесь использована компактность носителя функции φ .

Ясно, что интегралы справа в формулах (1) и (2) имеют смысл независимо от того, дифференцируема или нет функция f , и что они определяют линейный функционал на пространстве $\mathcal{D}$.

Тем самым мы можем сопоставить каждой локально интегрируемой функции f ее « k -ю производную» $f^{(k)}$, понимая под этим линейный функционал на $\mathcal{D}$, который на элементе φ принимает значение $(-1)^k \int f \varphi^{(k)}$. Заметим, что самой функции f при этом сопоставляется линейный функционал $\varphi \rightarrow \int f\varphi$.

Распределениями будут те линейные функционалы на $\mathcal{D}$, которые непрерывны в некоторой топологии (см. определение 6.7). Предыдущие рассуждения наводят на мысль сопоставить каждому распределению Λ его «производную» Λ' по формуле

$$(3) \quad \Lambda'(\varphi) = - \Lambda(\varphi') \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

Оказывается, что при таком определении (если распространить его на случай n переменных) выполняются все перечисленные выше условия. Одно из наиболее важных достоинств получающейся в результате теории состоит в том, что она позволяет

применять технику преобразования Фурье ко многим проблемам дифференциальных уравнений в частных производных, когда классические методы перестают работать.

Пространства пробных функций

6.2. Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$. Рассмотрим непустое открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Для каждого компакта $K \subset \Omega$ пусть $\mathcal{D}_K$ — пространство Фреше, описанное в п. 1.46. Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ пробных функций является объединением всех $\mathcal{D}_K$, когда K пробегает совокупность всех компактных подмножеств множества Ω . Ясно, что $\mathcal{D}(\Omega)$ есть векторное пространство относительно обычного сложения комплексных функций и умножения их на скаляры. Точнее говоря, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ и носитель функции φ есть компактное подмножество в Ω .

Для функций $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ введем последовательность норм

$$(1) \quad \|\varphi\|_N = \max \{ |D^\alpha \varphi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq N \},$$

где $N = 0, 1, 2, \dots$; определение символов D^α и $|\alpha|$ см. в п. 1.46.

Сужение этих норм на каждое из подпространств $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ порождает на $\mathcal{D}_K$ ту же топологию, что и полунормы p_N из п. 1.46. Чтобы убедиться в этом, заметим, что каждому компактному $K \subset \Omega$ соответствует такой индекс N_0 , что $K \subset K_N$ при всех $N \geq N_0$. Для таких N имеем $\|\varphi\|_N = p_N(\varphi)$, если $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Поскольку

$$(2) \quad \|\varphi\|_N \leq \|\varphi\|_{N+1} \quad \text{и} \quad p_N(\varphi) \leq p_{N+1}(\varphi),$$

рассматриваемые топологии не меняются, если индекс N пробегает значения не от 1, а от N_0 . Поэтому на $\mathcal{D}_K$ обе топологии совпадают. Локальную базу (окрестностей нуля) образуют множества

$$(3) \quad V_N = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_K : \|\varphi\|_N < \frac{1}{N} \right\} \quad (N = 1, 2, 3, \dots).$$

Те же нормы (1) можно использовать для введения на всем $\mathcal{D}(\Omega)$ некоторой локально выпуклой метризуемой топологии (см. теорему 1.37 и утверждение (с) п. 1.38). Однако эта топология неудобна, поскольку не является полной. Действительно, пусть, например, $n = 1$ и $\Omega = \mathbb{R}$. Рассмотрим такую функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем $[0, 1]$, для которой $\varphi > 0$ на $(0, 1)$, и положим

$$\psi_m(x) = \varphi(x-1) + \frac{1}{2} \varphi(x-2) + \dots + \frac{1}{m} \varphi(x-m).$$

Тогда $\{\psi_m\}$ есть последовательность Коши в рассматриваемой топологии пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, но $\lim \psi_m$ не входит в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, поскольку носитель предельной функции не компактен.

Теперь мы определим на $\mathcal{D}(\Omega)$ другую локально выпуклую топологию τ , в которой все последовательности Коши будут схо-

дящимися. Тот факт, что она не метризуема, не создает (как мы увидим ниже) больших неудобств.

6.3. Определения. Пусть Ω — непустое открытое множество в $\mathbf{R}^n$.

(а) Для каждого компакта $K \subset \Omega$ через τ_K обозначим топологию пространства Фреше на $\mathcal{D}_K$, описанную в п. 1.46 и 6.2.

(б) β есть семейство всех выпуклых уравновешенных множеств $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$, для которых $\mathcal{D}_K \cap W \subset \tau_K$ при любом компакте $K \subset \Omega$.

(с) τ есть семейство всевозможных объединений множеств вида $\varphi + W$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $W \in \beta$ ¹⁾.

На протяжении всей этой главы символ K обозначает компактное подмножество в Ω .

6.4. Теорема. (а) τ есть топология в $\mathcal{D}(\Omega)$, а β — ее локальная база.

(б) τ превращает $\mathcal{D}(\Omega)$ в локально выпуклое топологическое векторное пространство.

Доказательство. Пусть $V_1 \in \tau$, $V_2 \in \tau$ и $\varphi \in V_1 \cap V_2$. Для доказательства утверждения (а), очевидно, достаточно установить, что

$$(1) \quad \varphi + W \subset V_1 \cap V_2$$

при некотором $W \in \beta$.

Согласно определению семейства τ , существуют такие $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $W_i \in \beta$, что

$$(2) \quad \varphi \in \varphi_i + W_i \subset V_i \quad (i = 1, 2).$$

Выберем компакт K с таким расчетом, чтобы пространство $\mathcal{D}_K$ содержало функции φ_1 , φ_2 и φ . Так как $\mathcal{D}_K \cap W_i$ открыто в $\mathcal{D}_K$, то при подходящих $\delta_i > 0$

$$(3) \quad \varphi - \varphi_i \in (1 - \delta_i) W_i.$$

Ввиду выпуклости множеств W_i это дает

$$(4) \quad \varphi - \varphi_i + \delta_i W_i \subset (1 - \delta_i) W_i + \delta_i W_i = W_i,$$

так что

$$(5) \quad \varphi + \delta_i W_i \subset \varphi_i + W_i \subset V_i \quad (i = 1, 2).$$

¹⁾ В следующих ниже теоремах 6.4 и 6.5 устанавливается, что τ есть топология на $\mathcal{D}(\Omega)$, и выясняются некоторые ее свойства. Мы рекомендуем читателю уже сейчас обратить внимание на следующее важное обстоятельство. Если $\{x_m\}$ — последовательность точек из Ω , не имеющая в Ω предельных точек, а $\varepsilon_m > 0$, то множество $\{\varphi: |\varphi(x_m)| < \varepsilon_m\}$ принадлежит семейству β , т. е. является окрестностью нуля. Этим топология τ существенно отличается от рассмотренной в п. 6.2 и от ряда других естественных топологий пространств функций (здесь уместно рассмотреть несколько примеров). В частности, именно ввиду данного свойства последовательности Коши (ограниченные множества) в топологии τ оказываются сосредоточенными на общем компакте, что в конечном счете и обеспечивает их сходимость (теорема 6.5). — *Прим. ред.*

Следовательно, соотношение (1) выполняется с $W = (\delta_1 W_1) \cap (\delta_2 W_2)$, и утверждение (а) доказано.

Предположим далее, что φ_1 и φ_2 — различные элементы из $\mathcal{D}(\Omega)$, и пусть

$$(6) \quad W = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega): \|\varphi\|_0 < \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0\},$$

где $\|\varphi\|_0$ — норма, определенная формулой (1) из п. 6.2. Тогда $W \in \beta$, причем φ_1 не содержится в $\varphi_2 + W$. Это означает, что одноточечное множество $\{\varphi_1\}$ замкнуто в топологии τ .

Сложение τ -непрерывно, поскольку ввиду выпуклости каждого из множеств $W \in \beta$ имеем

$$(7) \quad \left(\varphi_1 + \frac{1}{2} W\right) + \left(\varphi_2 + \frac{1}{2} W\right) = (\varphi_1 + \varphi_2) + W$$

для любых $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Переходя к умножению на скаляры, фиксируем некоторую константу α_0 и элемент $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Тогда

$$(8) \quad \alpha\varphi - \alpha_0\varphi_0 = \alpha(\varphi - \varphi_0) + (\alpha - \alpha_0)\varphi_0.$$

Для любого $W \in \beta$ существует такое $\delta > 0$, что $\delta\varphi_0 \in \frac{1}{2}W$. Выберем c так, чтобы выполнялось соотношение $2c(|\alpha_0| + \delta) = 1$. Так как множество W выпукло и уравновешено, то

$$(9) \quad \alpha\varphi - \alpha_0\varphi_0 \in W,$$

если $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ и $\varphi - \varphi_0 \in cW$. Тем самым доказательство полностью завершено. ■

Замечание. Всюду в дальнейшем символ $\mathcal{D}(\Omega)$ обозначает только что описанное топологическое векторное пространство $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$. Все топологические понятия, касающиеся пространства $\mathcal{D}(\Omega)$, относятся к топологии τ .

6.5. Теорема. (а) Выпуклое уравновешенное подмножество V пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ тогда и только тогда открыто, когда $V \in \beta$.

(б) Топология τ_K каждого из пространств $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ совпадает с топологией, индуцированной на $\mathcal{D}_K$ топологией $\mathcal{D}(\Omega)$.

(с) Если E — ограниченное подмножество в $\mathcal{D}(\Omega)$, то $E \subset \mathcal{D}_K$ при некотором $K \subset \Omega$ и, кроме того, существуют такие числа $M_N < \infty$, что каждое $\varphi \in E$ удовлетворяет неравенствам

$$\|\varphi\|_N \leq M_N \quad (N = 0, 1, 2, \dots).$$

(d) Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ обладает свойством Гейне — Бореля.

(е) Если $\{\varphi_i\}$ — последовательность Коши в $\mathcal{D}(\Omega)$, то $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ для некоторого компакта $K \subset \Omega$ и, кроме того,

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|_N = 0 \quad (N = 0, 1, 2, \dots).$$

(f) Если $\varphi_i \rightarrow 0$ в топологии пространства $\mathcal{D}(\Omega)$, то существует такой компакт $K \subset \Omega$, который содержит носители всех

функций φ_i и, кроме того, $D^\alpha \varphi_i \rightarrow 0$ равномерно при $i \rightarrow \infty$ для каждого мультииндекса α .

(g) В пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ каждая последовательность Коши сходится.

Замечание. В силу утверждения (b) необходимые условия, заключенные в (c), (e) и (f), являются также и достаточными. Например, если $E \subset \mathcal{D}_K$ и $\|\varphi\|_N \leq M_N < \infty$ для каждого $\varphi \in E$, то E есть ограниченное подмножество в $\mathcal{D}_K$ (п. 1.46) и, согласно (b), E есть ограниченное множество в $\mathcal{D}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть сначала $V \in \tau$. Выберем $\varphi \in \mathcal{D}_K \cap V$. По теореме 6.4, $\varphi + W \subset V$ при некотором $W \in \beta$. Следовательно,

$$\varphi + (\mathcal{D}_K \cap W) \subset \mathcal{D}_K \cap V.$$

Поскольку множество $\mathcal{D}_K \cap W$ является открытым в $\mathcal{D}_K$, мы доказали, что

$$(1) \quad \mathcal{D}_K \cap V \in \tau_K, \quad \text{если } V \in \tau \text{ и } K \subset \Omega.$$

Утверждение (a) прямо вытекает из (1), так как очевидно, что $\beta \subset \tau$.

Соотношением (1) доказана также половина утверждения (b). Чтобы доказать вторую половину, предположим, что $E \in \tau_K$. Мы должны доказать, что $E = \mathcal{D}_K \cap V$ при некотором $V \in \tau$. Согласно определению τ_K , каждому элементу $\varphi \in E$ соответствуют такое N и такое $\delta > 0$, что

$$(2) \quad \{\psi \in \mathcal{D}_K: \|\psi - \varphi\|_N < \delta\} \subset E.$$

Положим $W_\varphi = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega): \|\psi\|_N < \delta\}$. Тогда $W_\varphi \in \beta$ и

$$(3) \quad \mathcal{D}_K \cap (\varphi + W_\varphi) = \varphi + (\mathcal{D}_K \cap W_\varphi) \subset E.$$

Если V есть объединение таких множеств $\varphi + W_\varphi$, по одному для каждого $\varphi \in E$, то это множество V обладает требуемым свойством.

Для доказательства утверждения (c) рассмотрим некоторое множество $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$, которое не содержится ни в одном из пространств $\mathcal{D}_K$. Найдутся такая последовательность функций $\varphi_m \in E$ и такая последовательность различных точек $x_m \in \Omega$, не имеющая в Ω предельных точек, что $\varphi_m(x_m) \neq 0$ ($m = 1, 2, 3, \dots$). Пусть W — множество всех функций $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$(4) \quad |\varphi(x_m)| < m^{-1} |\varphi_m(x_m)| \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Так как каждый компакт $K \subset \Omega$ содержит не более чем конечное множество точек x_m , то ясно, что $\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K$. Таким образом, $W \in \beta$. Никакое кратное множества W не может содержать E , ибо $\varphi_m \notin mW$. Это показывает, что множество E не является ограниченным.

Из сказанного выше вытекает, что каждое ограниченное множество E из $\mathcal{D}(\Omega)$ содержится в некотором $\mathcal{D}_K$. Следовательно (см. п. 1.46),

$$(5) \quad \sup \{ \|\varphi\|_K : \varphi \in E \} < \infty \quad (N=0, 1, 2, \dots).$$

Тем самым полностью доказано утверждение (с).

Утверждение (d) вытекает из (с), ибо пространство $\mathcal{D}_K$ обладает свойством Гейне—Бореля.

Поскольку последовательности Коши ограничены (см. п. 1.29), из (с) следует, что любая последовательность Коши $\{\varphi_i\}$ из пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ содержится в некотором $\mathcal{D}_K$. В силу (b) последовательность $\{\varphi_i\}$ оказывается тогда последовательностью Коши в топологии τ_K . Этим доказано (е).

Утверждение (f) в точности повторяет (е).

Наконец, утверждение (g) вытекает из (b), (е) и полноты пространств $\mathcal{D}_K$. (Напомним, что $\mathcal{D}_K$ является пространством Фреше.) ■

6.6. Теорема. Пусть Λ —линейное отображение пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ в некоторое локально выпуклое пространство Y . Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

- (a) отображение Λ непрерывно;
- (b) отображение Λ ограничено;
- (c) если $\varphi_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$, то $\Lambda\varphi_i \rightarrow 0$ в Y ;
- (d) сужение отображения Λ на каждое из подпространств $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ непрерывно.

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) содержится в теореме 1.32.

Предположим, что отображение Λ ограничено и что $\varphi_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$. По теореме 6.5 тогда $\varphi_i \rightarrow 0$ в некотором $\mathcal{D}_K$ и, кроме того, сужение отображения Λ на это $\mathcal{D}_K$ является ограниченным отображением. Теперь теорема 1.32 в применении к отображению $\Lambda: \mathcal{D}_K \rightarrow Y$ показывает, что $\Lambda\varphi_i \rightarrow 0$ в Y . Таким образом, из условия (b) вытекает (с).

Предположим, что выполняется условие (с). Пусть $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ и $\varphi_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}_K$. Согласно утверждению (b) теоремы 6.5, тогда $\varphi_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$. Поэтому из (с) вытекает, что $\Lambda\varphi_i \rightarrow 0$ в Y при $i \rightarrow \infty$. Следовательно, выполняется условие (d), поскольку пространство $\mathcal{D}_K$ метризуемо.

Покажем, что условие (a) вытекает из (d). Пусть U —выпуклая уравновешенная окрестность точки 0 в Y и $V = \Lambda^{-1}(U)$. Тогда множество V также является выпуклым и уравновешенным. Согласно утверждению (a) теоремы 6.5, множество V тогда и только тогда открыто в $\mathcal{D}(\Omega)$, когда $\mathcal{D}_K \cap V$ открыто в $\mathcal{D}_K$ при любом $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Это означает, что условия (a) и (d) эквивалентны. ■

Следствие. *Каждый дифференциальный оператор $\mathcal{D}^\alpha$ порождает непрерывное отображение пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ в себя.*

Доказательство. Так как $\|D^\alpha \varphi\|_N \leq \|\varphi\|_{N+|\alpha|}$ при $N=0, 1, 2, \dots$, то D^α порождает непрерывное отображение в себя любого из подпространств $\mathcal{D}_K$. ■

6.7. Определение. Линейный функционал на пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$, непрерывный относительно топологии τ (описанной в п. 6.3), называется *распределением* в Ω .

Пространство всех распределений в Ω обозначается через $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Отметим, что теорема 6.6 применима к линейным функционалам на $\mathcal{D}(\Omega)$. Это обстоятельство приводит к следующей полезной характеристике распределений.

6.8. Теорема. *Если Λ есть линейный функционал на $\mathcal{D}(\Omega)$, то следующие два условия эквивалентны:*

(a) $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$;

(b) *каждому компакту $K \subset \Omega$ соответствуют некоторое неотрицательное целое число N и константа $C < \infty$, такие, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}_K$ выполняется неравенство*

$$|\Lambda \varphi| \leq C \|\varphi\|_N.$$

Доказательство. Это вытекает из эквивалентности условий (a) и (d) теоремы 6.6 в сочетании с описанием топологии на $\mathcal{D}_K$ при помощи полунорм $\|\varphi\|_N$, приведенным в п. 6.2.

Примечание. Если для функционала Λ существует N , обслуживающее в указанном выше смысле все компакты (быть может, с различными C), то наименьшее из таких N называется *порядком* распределения Λ . Если же таких N не существует, то говорят, что Λ есть распределение *бесконечного порядка*.

6.9. Замечание. Каждая точка $x \in \Omega$ порождает линейный функционал δ_x на $\mathcal{D}(\Omega)$ по формуле

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x).$$

Согласно теореме 6.8, функционал δ_x есть распределение порядка 0.

При $x=0$ (начало координат в $\mathbf{R}^n$) функционал $\delta = \delta_0$ часто называют *мерой Дирака* (δ -функцией Дирака) в $\mathbf{R}^n$.

Для любого компакта $K \subset \Omega$ подпространство $\mathcal{D}_K$ совпадает с пересечением ядер функционалов δ_x при x , пробегавшем дополнение к K . Поэтому каждое из подпространств $\mathcal{D}_K$ замкнуто в $\mathcal{D}(\Omega)$. [Это вытекает также из теоремы 1.27 и утверждения (b) теоремы 6.5, ибо каждое $\mathcal{D}_K$ полно.] Ясно, что ни одно из $\mathcal{D}_K$ не содержит точек, внутренних относительно $\mathcal{D}(\Omega)$. С другой

стороны, существует счетное семейство таких компактов $K_i \subset \Omega$, что $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup \mathcal{D}_{K_i}$, и поэтому пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ является множеством первой категории в себе. Наконец, так как последовательности Коши сходятся в $\mathcal{D}(\Omega)$ (теорема 6.5), то, согласно теореме Бэра, пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ не метризуемо.

Операции над распределениями

6.10. Обозначения. Как и выше, Ω будет обозначать некоторое непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — мультииндексы (см. п. 1.46), то

$$(1) \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$(2) \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \text{ где } D_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$(3) \quad \beta \leq \alpha \text{ означает, что } \beta_i \leq \alpha_i \text{ при } 1 \leq i \leq n,$$

$$(4) \quad \alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_n \pm \beta_n).$$

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$, то

$$(5) \quad x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

$$(6) \quad |x| = (x \cdot x)^{1/2} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}.$$

То обстоятельство, что знак абсолютной величины имеет разный смысл в формулах (1) и (6), не должно приводить к недоразумениям.

Если $x \in \mathbb{R}^n$ и α — мультииндекс, то *моном* x^α определяется следующим образом:

$$(7) \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

6.11. Функции и меры в качестве распределений. Пусть f — локально интегрируемая комплексная функция в Ω . Это означает, что функция f измерима по Лебегу и $\int_K |f(x)| dx < \infty$ для любого компакта $K \subset \Omega$. Здесь dx — мера Лебега, по которой берется интеграл. Положим

$$(1) \quad \Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Так как

$$(2) \quad |\Lambda_f(\varphi)| \leq \left(\int_K |f| \right) \cdot \|\varphi\|_0 \quad (\varphi \in \mathcal{D}_K),$$

то $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ в силу теоремы 6.8.

Принято отождествлять распределение Λ_f с функцией f и говорить, что такие распределения «являются» функциями.

Аналогично если μ — комплексная борелевская мера на множестве Ω или μ — положительная мера на Ω , для которой $\mu(K) < \infty$

при любом компакте $K \subset \Omega$, то равенство

$$(3) \quad \Lambda_\mu(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi d\mu \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

задает распределение Λ_μ в Ω , и это распределение обычно отождествляется с мерой μ .

6.12. Дифференцирование распределений. Если α — мультииндекс и $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, то формула

$$(1) \quad (D^\alpha \Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

(мотивированная рассуждениями п. 6.1) определяет некоторый линейный функционал $D^\alpha \Lambda$ на $\mathcal{D}(\Omega)$. Если

$$(2) \quad |\Lambda \varphi| \leq C \|\varphi\|_N$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}_K$, то

$$(3) \quad |(D^\alpha \Lambda)(\varphi)| \leq C \|D^\alpha \varphi\|_N \leq C \|\varphi\|_{N+|\alpha|}.$$

Согласно теореме 6.8, это означает, что $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Отметим, что формула

$$(4) \quad D^\alpha D^\beta \Lambda = D^{\alpha+\beta} \Lambda = D^\beta D^\alpha \Lambda$$

имеет место для любого распределения Λ и всех мультииндексов α и β просто потому, что операторы D^α и D^β коммутируют, если их рассматривать на $C^\infty(\Omega)$. Действительно,

$$\begin{aligned} (D^\alpha D^\beta \Lambda)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (D^\beta \Lambda)(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \Lambda(D^\beta D^\alpha \varphi) = \\ &= (-1)^{|\alpha+\beta|} \Lambda(D^{\alpha+\beta} \varphi) = (D^{\alpha+\beta} \Lambda)(\varphi). \end{aligned}$$

6.13. Дифференцирование функций, рассматриваемых как распределения. Производной порядка α локально интегрируемой в Ω функции f служит, по определению, распределение $D^\alpha \Lambda_f$.

Если производная $D^\alpha f$ существует в классическом смысле и является локально интегрируемой функцией, то эта функция $D^\alpha f$ задает распределение в смысле п. 6.11. Очевидная очередная задача — выяснить, всегда ли в данных условиях выполняется равенство

$$(1) \quad D^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}.$$

Более детально вопрос заключается в том, выполняется или нет соотношение

$$(2) \quad (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) (D^\alpha \varphi)(x) dx = \int_{\Omega} (D^\alpha f)(x) \varphi(x) dx$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Если функция f обладает непрерывными производными всех порядков до N включительно, то интегрирование по частям без затруднений приводит к соотношению (2) при $|\alpha| \leq N$. Однако,

вообще говоря, равенство (1) может оказаться неверным. Мы приведем пример, иллюстрирующий это обстоятельство в случае $n = 1$.

6.14. Пример. Пусть Ω — отрезок вещественной оси $\mathbf{R}$ и f — непрерывная слева функция ограниченной вариации на Ω . Если $D = d/dx$, то, как известно, $(Df)(x)$ существует п. в. и $Df \in L^1$. Мы утверждаем, что

$$(1) \quad D\Lambda_f = \Lambda_\mu,$$

где μ — мера на Ω , определяемая соотношением

$$(2) \quad \mu([a, b]) = f(b) - f(a).$$

Таким образом, равенство $D\Lambda_f = \Lambda_{Df}$ выполняется тогда и только тогда, когда функция f абсолютно непрерывна.

Чтобы проверить формулу (1), мы должны показать, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(\Lambda_\mu)(\varphi) = (D\Lambda_f)(\varphi) = -\Lambda_f(D\varphi),$$

т. е. что

$$(3) \quad \int_{\Omega} \varphi d\mu = - \int_{\Omega} \varphi'(x) f(x) dx.$$

Но формула (3) есть простое следствие теоремы Фубини, так как обе части этой формулы представляют интеграл от функции $\varphi'(x)$ по множеству

$$(4) \quad \{(x, y): x \in \Omega, y \in \Omega, x < y\}$$

относительно произведения мер dx и $d\mu$. При вычислении используется тот факт, что функция φ обладает компактным носителем в Ω .

6.15. Умножение на функцию. Пусть $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $f \in C^\infty(\Omega)$. Правая часть равенства

$$(1) \quad (f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

имеет смысл, потому что $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, если $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Следовательно, равенство (1) определяет некоторый линейный функционал $f\Lambda$ на $\mathcal{D}(\Omega)$. Мы увидим, что на самом деле $f\Lambda$ является распределением в Ω .

Подчеркнем, что с обозначениями здесь следует соблюдать осторожность: если $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, то Λf есть число, тогда как $f\Lambda$ — распределение.

Включение $f\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ доказывается при помощи формулы Лейбница

$$(2) \quad D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta} f) (D^\beta g),$$

справедливой для всех f и g из $C^\infty(\Omega)$ и всех мультииндексов α . Формула (2) устанавливается путем итерации хорошо известной формулы

$$(3) \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

Числа $c_{\alpha\beta}$ являются целыми положительными, их точные значения легко вычисляются, но для нашей ближайшей цели безразличны.

Каждому компактному $K \subset \Omega$ соответствуют такие C и N , что $|\Delta\varphi| \leq C \|\varphi\|_N$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}_K$. По формуле (2), найдется такая константа C' , зависящая только от f , K и N , что $\|f\varphi\|_N \leq C' \|\varphi\|_N$ для $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Поэтому

$$(4) \quad |(f\Delta)(\varphi)| \leq CC' \|\varphi\|_N \quad (\varphi \in \mathcal{D}_K).$$

Согласно теореме 6.8, это означает, что $f\Delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Теперь мы хотим показать, что формула Лейбница (2) справедлива с заменой g на Δ , т. е. что

$$(5) \quad D^\alpha(f\Delta) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta}f) (D^\beta\Delta).$$

Доказательство состоит в чисто формальных выкладках. Сопоставим каждой точке $u \in \mathbb{R}^n$ функцию h_u по формуле

$$h_u(x) = \exp(u \cdot x).$$

Тогда $D h_u = u^\alpha h_u$. Если в формуле (2) заменить f и g на h_u и h_v , то мы получим тождество

$$(6) \quad (u+v)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} u^{\alpha-\beta} v^\beta \quad (u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n).$$

В частности,

$$\begin{aligned} u^\alpha &= [v + (-v + u)]^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} v^{\alpha-\beta} \sum_{\gamma \leq \beta} c_{\beta\gamma} (-1)^{|\beta-\gamma|} v^{\beta-\gamma} u^\gamma = \\ &= \sum_{\gamma \leq \alpha} (-1)^{|\gamma|} v^{\alpha-\gamma} u^\gamma \sum_{\gamma \leq \beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(7) \quad \sum_{\gamma \leq \beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} c_{\alpha\beta} c_{\beta\gamma} = \begin{cases} (-1)^{|\alpha|}, & \text{если } \gamma = \alpha, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если применить формулу (2) к $D^\beta(\varphi D^{\alpha-\beta}f)$, а затем использовать (7), то получится тождество

$$(8) \quad \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} c_{\alpha\beta} D^\beta(\varphi D^{\alpha-\beta}f) = (-1)^{|\alpha|} f D^\alpha \varphi.$$

Формула (5) в конечном счете вытекает из (8). Действительно, если $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то

$$\begin{aligned} D^\alpha(f\Delta)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} (f\Delta)(D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Delta(fD^\alpha\varphi) = \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} c_{\alpha\beta} \Delta(D^\beta(\varphi D^{\alpha-\beta}f)) = \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^\beta\Delta)(\varphi D^{\alpha-\beta}f) = \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} [(D^{\alpha-\beta}f)(D^\beta\Delta)](\varphi). \end{aligned}$$

6.16. Последовательности распределений. Так как $\mathcal{D}'(\Omega)$ есть пространство всех непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{D}(\Omega)$, то к $\mathcal{D}'(\Omega)$ применимы общие рассуждения п. 3.14, согласно которым $\mathcal{D}'(\Omega)$ наделяется некоторой топологией, а именно слабой* топологией, индуцированной исходным пространством $\mathcal{D}(\Omega)$. В этой топологии $\mathcal{D}'(\Omega)$ является локально выпуклым пространством. Если $\{\Lambda_i\}$ — последовательность распределений в Ω , то утверждение

$$(1) \quad \Lambda_i \rightarrow \Lambda \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega)$$

относится к слабой* топологии и означает, что

$$(2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_i \varphi = \Lambda \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

В частности, если $\{f_i\}$ — последовательность локально интегрируемых функций в Ω , то утверждения « $f_i \rightarrow \Lambda$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ » или «последовательность $\{f_i\}$ сходится к Λ в смысле сходимости распределений» означают, что

$$(3) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int \varphi(x) f_i(x) dx = \Lambda \varphi$$

для каждого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Следующая теорема относительно почленного дифференцирования последовательностей удивительна по своей простоте.

6.17. Теорема. *Предположим, что $\Lambda_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ при $i = 1, 2, 3, \dots$ и предел (комплексное число)*

$$(1) \quad \Lambda \varphi = \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_i \varphi$$

существует для каждого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Тогда $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и

$$(2) \quad D^\alpha \Lambda_i \rightarrow D^\alpha \Lambda \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega)$$

для каждого мультииндекса α .

Доказательство. Пусть K — произвольное компактное подмножество в Ω . Так как соотношение (1) выполняется при любом $\varphi \in \mathcal{D}_K$ и так как $\mathcal{D}_K$ является пространством Фреше, то, согласно теореме Банаха — Штейнгауза 2.8, сужение функционала Λ на $\mathcal{D}_K$ есть непрерывный функционал. По теореме 6.6 это означает, что Λ — непрерывный функционал на $\mathcal{D}(\Omega)$, т. е. что $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Поэтому из соотношения (1) вытекает, что

$$\begin{aligned} (D^\alpha \Lambda)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_i(D^\alpha \varphi) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (D^\alpha \Lambda_i) \varphi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.18. Теорема. *Если $\Lambda_i \rightarrow \Lambda$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ и $g_i \rightarrow g$ в $C^\infty(\Omega)$, то $g_i \Lambda_i \rightarrow g \Lambda$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Примечание. Утверждение « $g_i \rightarrow g$ в $C^\infty(\Omega)$ » относится к топологии пространства Фреше, описанной в п. 1.46.

Доказательство. Фиксируем $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. На пространстве $C^\infty(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega)$ определим билинейный функционал B , полагая

$$B(g, \Lambda) = (g\Lambda)(\varphi) = \Lambda(g\varphi).$$

Функционал B раздельно непрерывен, и, согласно теореме 2.17,

$$B(g_i, \Lambda_i) \rightarrow B(g, \Lambda) \text{ при } i \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$(g_i \Lambda_i)(\varphi) \rightarrow (g\Lambda)(\varphi). \quad \blacksquare$$

Локализация

6.19. Локальное равенство распределений. Пусть $\Lambda_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ($i = 1, 2$), и пусть ω — открытое подмножество в Ω . Утверждение (1)

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \text{ в } \omega$$

означает, по определению, что $\Lambda_1 \varphi = \Lambda_2 \varphi$ для каждого $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$. Например, если f — локально интегрируемая функция в Ω , то $\Lambda_f = 0$ в ω тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ почти всюду в ω . Если μ — некоторая мера, то $\Lambda_\mu = 0$ в ω тогда и только тогда, когда $\mu(E) = 0$ для каждого борелевского множества $E \subset \omega$.

Приведенное определение позволяет говорить о локальных свойствах распределений. С другой стороны, оно позволяет судить о распределении в целом, если известно его локальное поведение. Точное утверждение на этот счет содержится в теореме 6.21. В его доказательстве используется разбиение единицы, которое мы и построим сначала.

6.20. Теорема. Пусть Γ — семейство открытых множеств в $\mathbb{R}^n$, объединение которых содержит Ω . Тогда существует такая последовательность $\{\psi_i\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, что $\psi_i \geq 0$ и

(а) носитель каждой из функций ψ_i содержится в некотором из множеств семейства Γ ,

$$(b) \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1 \text{ при любом } x \in \Omega,$$

(с) каждому компактному $K \subset \Omega$ соответствуют такое целое число m и такое открытое множество $W \supset K$, что

$$(1) \quad \psi_1(x) + \dots + \psi_m(x) = 1$$

для всех $x \in W$.

Такое семейство функций $\{\psi_i\}$ называется *локально конечным разбиением единицы* в Ω , подчиненным открытому покрытию Γ множества Ω . Отметим, что, как вытекает из свойств (b) и (с),

каждая точка множества Ω обладает окрестностью, которая пересекается лишь с конечным числом носителей функций ψ_i . Именно по этой причине семейство $\{\psi_i\}$ называется локально конечным.

Доказательство. Пусть S — счетное всюду плотное подмножество в Ω . Пусть последовательность $\{B_1, B_2, B_3, \dots\}$ содержит каждый замкнутый шар B_i , центр которого p_i принадлежит S , радиус r_i есть рациональное число и который целиком содержится в некотором из множеств семейства Γ . Пусть V_i — открытый шар с центром в p_i радиуса $r_i/2$. Ясно, что $\Omega = \bigcup V_i$.

Конструкция, описанная в п. 1.46, позволяет указать такие функции $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, что $\varphi_i \geq 0$, $\varphi_i = 1$ в V_i и $\varphi_i = 0$ вне B_i . Положим $\psi_1 = \varphi_1$ и по индукции

$$(2) \quad \psi_{i+1} = (1 - \varphi_1) \dots (1 - \varphi_i) \varphi_{i+1} \quad (i \geq 1).$$

Очевидно, что $\psi_i = 0$ вне B_i . Это обеспечивает выполнение условия (а). Соотношение

$$(3) \quad \psi_1 + \dots + \psi_i = 1 - (1 - \varphi_1) \dots (1 - \varphi_i)$$

тривиально при $i = 1$. Если считать его выполненным для некоторого i , то, складывая (2) и (3), мы получаем, что оно выполняется и с заменой i на $i + 1$. Поэтому (3) справедливо для всех i . Так как $\varphi_i = 1$ на V_i , то это означает, что

$$(4) \quad \psi_1(x) + \dots + \psi_m(x) = 1, \text{ если } x \in V_1 \cup \dots \cup V_m.$$

Тем самым доказано (б). Кроме того, если K — компакт, то $K \subset V_1 \cup \dots \cup V_m$ при некотором m , откуда вытекает (с). ■

6.21. Теорема. Пусть Γ — открытое покрытие открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что каждому $\omega \in \Gamma$ сопоставлено распределение $\Lambda_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$, причем

$$(1) \quad \text{если } \omega' \cap \omega'' \neq \emptyset, \quad \Lambda_{\omega'} = \Lambda_{\omega''} \text{ в } \omega' \cap \omega'',$$

Тогда существует в точности одно такое распределение $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, что

$$(2) \quad \Lambda = \Lambda_\omega \text{ в } \omega$$

при каждом $\omega \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть $\{\psi_i\}$ — локально конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию Γ в смысле теоремы 6.20. Сопоставим каждому i множество $\omega_i \in \Gamma$ с таким расчетом, чтобы оно содержало носитель функции ψ_i .

Если $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то $\varphi = \sum \psi_i \varphi$. Поскольку φ имеет компактный носитель, в этой сумме только конечное множество ненулевых членов. Положим

$$(3) \quad \Lambda \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_{\omega_i}(\psi_i \varphi).$$

Ясно, что Λ — линейный функционал на $\mathcal{D}(\Omega)$.

Покажем, что функционал Λ непрерывен. Пусть $\varphi_j \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$. Существует компакт $K \subset \Omega$, содержащий носители всех функций φ_j . Если m выбрано в соответствии с условием (с) теоремы 6.20, то

$$(4) \quad \Lambda \varphi_j = \sum_{i=1}^m \Lambda_{\omega_i}(\psi_i \varphi_j) \quad (j=1, 2, 3, \dots).$$

Так как $\psi_i \varphi_j \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(\omega_i)$ при $j \rightarrow \infty$, то из (4) вытекает, что $\Lambda \varphi_j \rightarrow 0$. Поэтому $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ в силу теоремы 6.6.

Чтобы доказать (2), зафиксируем $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Тогда

$$(5) \quad \psi_i \varphi = \mathcal{D}(\omega_i \cap \omega) \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

и $\Lambda_{\omega_i}(\psi_i \varphi) = \Lambda_{\omega}(\psi_i \varphi)$ в силу (1). Поэтому

$$(6) \quad \Lambda \varphi = \sum \Lambda_{\omega}(\psi_i \varphi) = \Lambda_{\omega}(\sum \psi_i \varphi) = \Lambda_{\omega} \varphi,$$

чем доказано равенство (2).

Таким образом, существование распределения Λ установлено. Вместе с тем единственность тривиальна, поскольку, согласно (2) (с заменой ω на ω_i), распределение Λ обязано удовлетворять условию (3). ■

Носители распределений

6.22. Определение. Пусть $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Если ω — открытое подмножество в Ω и если $\Lambda \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, то мы говорим, что *распределение Λ исчезает в ω* . Пусть W — объединение всех открытых множеств $\omega \subset \Omega$, в которых распределение Λ исчезает. *Носителем* распределения Λ называется дополнение к W (в Ω).

6.23. Теорема. Если W — описанное выше множество, то *распределение Λ исчезает в W* .

Доказательство. Множество W является объединением открытых множеств ω , в каждом из которых распределение Λ исчезает. Пусть Γ — семейство всех таких множеств ω , и пусть $\{\psi_i\}$ — локально конечное разбиение единицы в W , подчиненное покрытию Γ в смысле теоремы 6.20. Если $\varphi \in \mathcal{D}(W)$, то $\varphi = \sum \psi_i \varphi$. В этой сумме только конечное число ненулевых членов. Поэтому

$$\Lambda \varphi = \sum \Lambda(\psi_i \varphi) = 0,$$

поскольку носитель каждой из функций ψ_i содержится в некотором $\omega \in \Gamma$. ■

Наиболее значительным из утверждений следующей ниже теоремы является утверждение (d). Его дополняет упр. 20.

6.24. Теорема. Пусть $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и S_{Λ} — носитель распределения Λ .

(а) Если носитель функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ не пересекается с S_Λ , то $\Lambda\varphi = 0$.

(б) Если S_Λ пусто, то $\Lambda = 0$.

(с) Если $\psi \in C^\infty(\Omega)$ и $\psi = 1$ на некотором открытом множестве V , содержащем S_Λ , то $\psi\Lambda = \Lambda$.

(д) Если S_Λ является компактным подмножеством в Ω , то распределение Λ имеет конечный порядок. Фактически в этом случае существуют такая константа $C < \infty$ и такое неотрицательное целое N , что

$$|\Lambda\varphi| \leq C \|\varphi\|_N$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Более того, функционал Λ однозначно продолжается до непрерывного линейного функционала на $C^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Утверждения (а) и (б) очевидны. Если ψ — функция, указанная в (с), и $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то носитель функции $\varphi - \psi\varphi$ не пересекается с S_Λ . Поэтому, согласно (а), имеем $\Lambda\varphi = \Lambda(\psi\varphi) = (\psi\Lambda)(\varphi)$.

Если множество S_Λ компактно, то ввиду теоремы 6.20 найдется такая $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, что выполняется (с). Фиксируем некоторую такую ψ , и пусть K — ее носитель. По теореме 6.8 существуют такая константа c_1 и такое N , что $|\Lambda\varphi| \leq c_1 \|\varphi\|_N$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Из формулы Лейбница вытекает существование такой константы c_2 , что $\|\psi\varphi\|_N \leq c_2 \|\varphi\|_N$ для каждой $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Поэтому для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$|\Lambda\varphi| = |\Lambda(\psi\varphi)| \leq c_1 \|\psi\varphi\|_N \leq c_1 c_2 \|\varphi\|_N.$$

Так как $\Lambda\varphi = \Lambda(\psi\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то формула

$$(1) \quad \Lambda f = \Lambda(\psi f) \quad (f \in C^\infty(\Omega))$$

задает продолжение функционала Λ на $C^\infty(\Omega)$. Это продолжение непрерывно. Действительно, пусть $f_i \rightarrow 0$ в $C^\infty(\Omega)$. Тогда $D^\alpha f_i$ стремится к 0 равномерно на каждом компактном подмножестве множества Ω для любого мультииндекса α . По формуле Лейбница $\psi f_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(\Omega)$. Поскольку $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, отсюда следует, что $\Lambda f_i \rightarrow 0$.

Если $f \in C^\infty(\Omega)$ и K_0 — произвольное компактное подмножество в Ω , то существует такая $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, что $\varphi = f$ на K_0 . Отсюда следует, что $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $C^\infty(\Omega)$. Поэтому каждый функционал $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ имеет не более одного непрерывного продолжения на $C^\infty(\Omega)$. ■

Примечание. Для справедливости утверждения (а) существенно, что функция φ равна нулю не только на самом множестве S_Λ , но и в некоторой его окрестности.

Ввиду утверждения (b) простейшим нетривиальным случаем является тот, в котором S_Λ состоит из единственной точки. Множество всех таких распределений допускает полное описание.

6.25. Теорема. Пусть $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $p \in \Omega$, $\{p\}$ есть носитель распределения Λ и порядок распределения Λ равен N . Тогда существуют такие константы c_α , что

$$(1) \quad \Lambda = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta_p,$$

где δ_p — функционал, действующий по формуле

$$(2) \quad \delta_p(\varphi) = \varphi(p).$$

Обратно, каждое распределение вида (1) имеет своим носителем множество $\{p\}$ (за исключением случая, когда $c_\alpha = 0$ при всех α).

Доказательство. Ясно, что для любого мультииндекса α носителем распределения $D^\alpha \delta_p$ служит множество $\{p\}$. Этим доказано последнее утверждение теоремы.

При доказательстве нетривиальной части теоремы мы можем предположить, что $p = 0$ (начало координат в $\mathbb{R}^n$). Рассмотрим некоторую функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, для которой

$$(3) \quad (D^\alpha \varphi)(0) = 0 \text{ при всех } \alpha \text{ с } |\alpha| \leq N.$$

Наша первая цель — доказать, что $\Lambda \varphi = 0$, если φ удовлетворяет условию (3).

Пусть $\eta > 0$. Найдется такой компактный шар $K \subset \Omega$ с центром в точке 0, что

$$(4) \quad |D^\alpha \varphi| \leq \eta \text{ в } K, \text{ если } |\alpha| = N.$$

Мы утверждаем, что

$$(5) \quad |D^\alpha \varphi(x)| \leq \eta n^{N-|\alpha|} |x|^{N-|\alpha|} \quad (x \in K, |\alpha| \leq N).$$

Если $|\alpha| = N$, то это совпадает с (4). Пусть $1 \leq i \leq N$. Предположим, что (5) доказано для всех α с $|\alpha| = i$, и пусть $|\beta| = i - 1$. Градиентом функции $D^\beta \varphi$ является вектор

$$(6) \quad \text{grad } D^\beta \varphi = (D_1 D^\beta \varphi, \dots, D_n D^\beta \varphi).$$

Из индуктивного предположения вытекает, что

$$(7) \quad |(\text{grad } D^\beta \varphi)(x)| \leq n \cdot \eta n^{N-i} |x|^{N-i} \quad (x \in K),$$

и так как $(D^\beta \varphi)(0) = 0$, то, используя теорему о среднем, мы видим, что (5) выполняется с заменой α на β . Таким образом, неравенства (5) установлены.

Выберем теперь такую вспомогательную функцию $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ с носителем в единичном шаре B пространства $\mathbb{R}^n$, которая

равна 1 в некоторой окрестности точки 0. Положим

$$(8) \quad \psi_r(x) = \psi\left(\frac{x}{r}\right) \quad (r > 0, x \in \mathbb{R}^n).$$

Если r достаточно мало, то носитель функции ψ_r содержится в $rB \subset K$. По формуле Лейбница

$$(9) \quad D^\alpha(\psi_r \varphi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}\psi)\left(\frac{x}{r}\right)(D^\beta\varphi)(x) r^{|\beta| - |\alpha|}.$$

Поэтому из (5) вытекает, что для достаточно малых r

$$(10) \quad \|\psi_r \varphi\|_N \leq \eta C \|\psi\|_N$$

с подходящим C , которое зависит от n и N .

Так как распределение Λ имеет порядок N , то существует такая константа C_1 , что $|\Lambda\psi| \leq C_1 \|\psi\|_N$ для всех $\psi \in \mathcal{D}_K$. Так как $\psi_r = 1$ в некоторой окрестности носителя распределения Λ , то в силу неравенства (10) и утверждения (с) теоремы 6.24 мы получаем

$$|\Lambda\varphi| = |\Lambda(\psi_r \varphi)| \leq C_1 \|\psi_r \varphi\|_N \leq \eta C C_1 \|\psi\|_N.$$

Но η может быть любым положительным числом, так что $\Lambda\varphi = 0$, если выполняется условие (3).

Другими словами, распределение Λ исчезает на пересечении ядер функционалов $D^\alpha \delta_0$ ($|\alpha| \leq N$), так как

$$(11) \quad (D^\alpha \delta_0)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \delta_0(D^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha \varphi)(0).$$

Поэтому существование представления вида (1) вытекает из леммы 3.9. ■

Распределения как производные

Во введении к данной главе отмечалось, что одной из целей теории распределений является такое расширение понятия функции, при котором операции дифференцирования становятся выполнимыми без всяких ограничений. Эта цель уже достигнута. Обратно, как мы теперь покажем, каждое распределение представляется (по крайней мере локально) в виде $D^\alpha f$, где f — непрерывная функция и α — мультииндекс. Таким образом, рассматривая всевозможные производные от всевозможных непрерывных функций, мы получим не что иное, как класс всех распределений, и в этом смысле класс распределений представляет собой наиболее экономное расширение класса функций, отвечающее поставленной цели.

6.26. Теорема. Пусть $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и K — компактное подмножество в Ω . Тогда существуют такая непрерывная функция f

в Ω и такой мультииндекс α , что

$$(1) \quad \Delta \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) (D^{\alpha} \varphi)(x) dx$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}_K$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $K \subset Q$, где Q — единичный куб в $\mathbb{R}^n$, состоящий из всех таких точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, для которых $0 \leq x_i \leq 1$ при $i = 1, \dots, n$. Из теоремы о среднем вытекает, что при каждом $i = 1, \dots, n$

$$(2) \quad |\psi| \leq \max_{x \in Q} |(D_i \psi)(x)| \quad (\psi \in \mathcal{D}_Q).$$

Пусть $T = D_1 D_2 \dots D_n$. Для каждой точки $y \in Q$ обозначим через $Q(y)$ подмножество тех точек $x \in Q$, для которых $x_i \leq y_i$ ($1 \leq i \leq n$). Тогда

$$(3) \quad \psi(y) = \int_{Q(y)} (T\psi)(x) dx \quad (\psi \in \mathcal{D}_Q).$$

Пусть N — неотрицательное целое число. Если применить неравенство (2) к последовательным производным функции ψ , то формула (3) приводит к неравенству

$$(4) \quad \|\psi\|_N \leq \max_{x \in Q} |(T^N \psi)(x)| \leq \int_Q |(T^{N+1} \psi)(x)| dx,$$

справедливому для всех $\psi \in \mathcal{D}_Q$.

Так как $\Delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$, то существуют такие N и C , что

$$(5) \quad |\Delta \varphi| \leq C \|\varphi\|_N \quad (\varphi \in \mathcal{D}_K).$$

Поэтому неравенство (4) показывает, что

$$(6) \quad |\Delta \varphi| \leq C \int_K |(T^{N+1} \varphi)(x)| dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}_K).$$

Из формулы (3) вытекает, что отображение T инъективно на $\mathcal{D}_Q$, а потому и на $\mathcal{D}_K$. Следовательно, и отображение $T^{N+1} : \mathcal{D}_K \rightarrow \mathcal{D}_K$ инъективно. Поэтому на образе Y отображения T^{N+1} можно определить функционал Λ_1 , полагая

$$(7) \quad \Lambda_1 T^{N+1} \varphi = \Delta \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{D}_K),$$

причем неравенство (6) показывает, что

$$(8) \quad |\Lambda_1 \psi| \leq C \int_K |\psi(x)| dx \quad (\psi \in Y).$$

Последнее позволяет при помощи теоремы Хана — Банаха расширить функционал Λ_1 до ограниченного линейного функционала на пространстве $L^1(K)$. Другими словами, существует такая

ограниченная борелевская функция g на K , что

$$(9) \quad \Lambda\varphi = \Lambda_1 T^{N+1}\varphi = \int_K g(x) (T^{N+1}\varphi)(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}_K).$$

Положим $g(x) = 0$ вне K , и пусть

$$(10) \quad f(y) = \int_{-\infty}^{y_1} \dots \int_{-\infty}^{y_n} g(x) dx_n \dots dx_1 \quad (y \in \mathbb{R}^n).$$

Тогда функция f непрерывна, и n -кратное интегрирование по частям в сочетании с (9) дает

$$(11) \quad \Lambda\varphi = (-1)^n \int_{\Omega} f(x) (T^{N+2}\varphi)(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}_K).$$

Но последняя формула совпадает с формулой (1), если положить $\alpha = (N+2, \dots, N+2)$ и в случае необходимости изменить знак. ■

Для распределений Λ с компактным носителем полученный выше локальный результат превращается в следующий глобальный.

6.27. Теорема. Пусть K — компакт, а V и Ω — открытые множества в $\mathbb{R}^n$, причем $K \subset V \subset \Omega$. Предположим далее, что $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, что K есть носитель распределения Λ и что Λ имеет порядок N . Тогда существует конечное число таких непрерывных функций f_β в Ω (по одной для каждого мультииндекса β с $|\beta| \leq N+2$, где $i=1, \dots, n$) с носителями в V , что

$$(1) \quad \Lambda = \sum_{\beta} D^{\beta} f_{\beta}.$$

Производные здесь, конечно, следует понимать в смысле распределений, и формула (1) означает, что

$$(2) \quad \Lambda\varphi = \sum_{\beta} (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} f_{\beta}(x) (D^{\beta}\varphi)(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Доказательство. Выберем такое открытое множество W с компактным замыканием $\overline{W}$, что $K \subset W$ и $\overline{W} \subset V$. Применим теорему 6.26 к компакту $\overline{W}$ вместо K . Положим $\alpha = (N+2, \dots, N+2)$. Из доказательства теоремы 6.26 вытекает существование такой непрерывной функции f на Ω , что

$$(3) \quad \Lambda\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) (D^{\alpha}\varphi)(x) dx \quad [\varphi \in \mathcal{D}(W)].$$

Не нарушая соотношения (3), мы можем умножить функцию f на любую непрерывную функцию с носителем в V , равную 1 на $\overline{W}$.

Фиксируем такую функцию $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ с носителем в W , что $\psi = 1$ на некотором открытом множестве, содержащем K . Из формулы (3) следует, что тогда для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\Lambda\varphi &= \Lambda(\psi\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \cdot D^{\alpha}(\psi\varphi) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} D^{\alpha-\beta}\psi D^{\beta}\varphi.\end{aligned}$$

Но это совпадает с (2), если положить

$$f_{\beta} = (-1)^{|\alpha-\beta|} c_{\alpha\beta} f \cdot D^{\alpha-\beta}\psi \quad (\beta \leq \alpha). \quad \blacksquare$$

Наша следующая теорема описывает глобальную структуру распределений.

6.28. Теорема. Пусть $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда существуют такие непрерывные функции g_{α} в Ω , по одной для каждого мультииндекса α , что

(а) каждый компакт $K \subset \Omega$ пересекается не более чем с конечным числом носителей функций g_{α} и

$$(b) \quad \Lambda = \sum_{\alpha} D^{\alpha} g_{\alpha}.$$

Если распределение Λ имеет конечный порядок, то функции g_{α} могут быть выбраны с таким расчетом, чтобы лишь конечное число из них были ненулевыми.

Доказательство. Существуют такие компактные кубы Q_i и такие открытые множества V_i ($i=1, 2, 3, \dots$), что $Q_i \subset V_i \subset \Omega$, множество Ω есть объединение кубов Q_i и каждое компактное подмножество в Ω пересекается лишь с конечным числом множеств V_i . Далее, существуют такие функции $\varphi_i \in \mathcal{D}(V_i)$, что $\varphi_i = 1$ на Q_i . Используем эту последовательность $\{\varphi_i\}$ для построения разбиения единицы $\{\psi_i\}$, как это указано в теореме 6.20. Носитель функции ψ_i будет тогда содержаться в V_i .

Теорема 6.27 применима к каждому из распределений $\psi_i \Lambda$. Поэтому существует такое конечное семейство непрерывных функций $f_{i,\alpha}$ в V_i , что

$$(1) \quad \psi_i \Lambda = \sum_{\alpha} D^{\alpha} f_{i,\alpha}.$$

Положим

$$(2) \quad g_{\alpha} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i,\alpha}.$$

Сумма справа является локально конечной в том смысле, что каждый компакт $K \subset \Omega$ пересекается лишь с конечным числом носителей функций $f_{i,\alpha}$. Отсюда следует, что все функции g_{α} непрерывны в Ω , и тем самым выполняется свойство (а).

Так как $\varphi = \sum \psi_i \varphi$ для каждого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то мы имеем $\Lambda = \sum \psi_i \Lambda$ и, следовательно, утверждение (b) вытекает из формул (1) и (2).

Наконец, последнее утверждение вытекает из теоремы 6.27. ■

Свертки

Отправляясь от свертки двух функций, мы определим свертку распределения и пробной функции, а затем (при некоторых дополнительных условиях) свертку двух распределений. Свертки важны в приложениях преобразования Фурье к дифференциальным уравнениям. Характеристическим свойством сверток является то, что они коммутируют со сдвигами и с дифференцированиями (теоремы 6.30, 6.33, 6.37). Кроме того, дифференцирования можно рассматривать как свертки с производными меры Дирака (теорема 6.37).

Удобно несколько видоизменить обозначения и использовать буквы $u, v, \dots$ для обозначения не только функций, но и распределений.

6.29. Определения. В оставшейся части этой главы мы будем писать $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ вместо $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Если u — некоторая функция на $\mathbf{R}^n$ и $x \in \mathbf{R}^n$, то $\tau_x u$ и $\check{u}$ суть функции, определяемые равенствами

$$(1) \quad (\tau_x u)(y) = u(y - x), \quad \check{u}(y) = u(-y) \quad (y \in \mathbf{R}^n).$$

Заметим, что

$$(2) \quad (\tau_x \check{u})(y) = \check{u}(y - x) = u(x - y).$$

Если u и v — комплексные функции на $\mathbf{R}^n$, то их сверткой называется функция

$$(3) \quad (u * v)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} u(y) v(x - y) dy$$

при условии, что интеграл существует для всех (или по крайней мере для почти всех в смысле меры Лебега) $x \in \mathbf{R}^n$. Интеграл понимается в смысле Лебега. В соответствии с формулой (2) имеем

$$(4) \quad (u * v)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} u(y) (\tau_x \check{v})(y) dy.$$

Это делает естественным следующее определение:

$$(5) \quad (u * \varphi)(x) = u(\tau_x \check{\varphi}) \quad (u \in \mathcal{D}', \varphi \in \mathcal{D}, x \in \mathbf{R}^n),$$

так как если u — локально интегрируемая функция, то (5) совпадает с (4). Заметим, что $u * \varphi$ есть функция.

Соотношение $\int (\tau_x u) \cdot v = \int u \cdot (\tau_{-x} v)$, справедливое для любых функций u и v , делает естественным определение сдвига $\tau_x u$

распределения $u \in \mathcal{D}'$ по формуле

$$(6) \quad (\tau_x u)(\varphi) = u(\tau_{-x} \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}, x \in \mathbb{R}^n).$$

При этом $\tau_x u \in \mathcal{D}'$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$. Проверку непрерывности функционалов $\tau_x u$ мы предлагаем в качестве упражнения.

6.30. Теорема. Пусть $u \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{D}$. Тогда

$$(a) \quad \tau_x(u * \varphi) = (\tau_x u) * \varphi = u * (\tau_x \varphi) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n;$$

$$(b) \quad u * \varphi \in C^\infty \text{ и}$$

$$D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * (D^\alpha \varphi)$$

для каждого мультииндекса α ;

$$(c) \quad u * (\varphi * \psi) = (u * \varphi) * \psi.$$

Доказательство. Для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$(\tau_x(u * \varphi))(y) = (u * \varphi)(y - x) = u(\tau_{y-x} \check{\varphi}),$$

$$((\tau_x u) * \varphi)(y) = (\tau_x u)(\tau_y \check{\varphi}) = u(\tau_{y-x} \check{\varphi}),$$

$$(u * (\tau_x \varphi))(y) = u(\tau_y (\tau_x \varphi)^\sim) = u(\tau_{y-x} \check{\varphi}),$$

что и дает (a). Заметим, что были использованы соотношения

$$\tau_y \tau_{-x} = \tau_{y-x} \quad \text{и} \quad (\tau_x \varphi)^\sim = \tau_{-x} \check{\varphi}.$$

В дальнейшем чисто формальные выкладки типа только что проведенных будут иногда опускаться.

Если применить функционал u к обеим частям тождества

$$(1) \quad \tau_x((D^\alpha \varphi)^\sim) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\tau_x \check{\varphi}),$$

то мы получим часть соотношений (b), а именно

$$(u * (D^\alpha \varphi))(x) = ((D^\alpha u) * \varphi)(x).$$

Для доказательства остальных обозначим через e единичный вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$ и положим

$$(2) \quad \eta_r = r^{-1}(\tau_0 - \tau_{re}) \quad (r > 0).$$

Тогда соотношение (a) дает

$$(3) \quad \eta_r(u * \varphi) = u * (\eta_r \varphi).$$

Если $r \rightarrow 0$, то $\eta_r \varphi \rightarrow D_e \varphi$ в $\mathcal{D}$, где D_e обозначает дифференцирование по направлению e . Поэтому

$$\tau_x((\eta_r \varphi)^\sim) \rightarrow \tau_x(D_e \varphi)^\sim \text{ в } \mathcal{D}$$

для каждого $x \in \mathbb{R}^n$, так что

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow 0} (u * (\eta_r \varphi))(x) = (u * (D_e \varphi))(x).$$

Используя (3) и (4), мы получаем

$$(5) \quad D_e(u * \varphi) = u * (D_e \varphi),$$

и итерация формулы (5) дает (b).

Доказательство утверждения (c) мы начнем с тождества

$$(6) \quad (\varphi * \psi)^\sim(t) = \int_{\mathbf{R}^n} \check{\psi}(s) (\tau_s \check{\varphi})(t) ds.$$

Пусть K_1 и K_2 — носители функций $\check{\varphi}$ и $\check{\psi}$ соответственно. Положим $K = K_1 + K_2$. Тогда

$$s \rightarrow \check{\psi}(s) \tau_s \check{\varphi}$$

есть непрерывное отображение $\mathbf{R}^n$ в $\mathcal{D}_K$, равное 0 вне K_2 . Поэтому тождество (6) может быть переписано с использованием $\mathcal{D}_K$ -значного интеграла в виде

$$(7) \quad (\varphi * \psi)^\sim = \int_{K_2} \check{\psi}(s) \tau_s \check{\varphi} ds,$$

и теперь теорема 3.27 показывает, что

$$\begin{aligned} (u * (\varphi * \psi))(0) &= u((\varphi * \psi)^\sim) = \\ &= \int_{K_2} \check{\psi}(s) u(\tau_s \check{\varphi}) ds = \int_{\mathbf{R}^n} \psi(-s) (u * \varphi)(s) ds, \end{aligned}$$

или

$$(8) \quad (u * (\varphi * \psi))(0) = ((u * \varphi) * \psi)(0).$$

Чтобы из равенства (8) получить аналогичное равенство с заменой точки 0 произвольной точкой x , достаточно применить (8) к функции $\tau_{-x}\psi$ вместо ψ и затем использовать утверждение (a). Тем самым (c) доказано. ■

6.31. Определение. Термин *аппроксимативная единица на $\mathbf{R}^n$* будет использоваться для обозначения последовательности функций h_j вида

$$h_j(x) = j^n h(jx) \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

где $h \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $h \geq 0$ и $\int_{\mathbf{R}^n} h(x) dx = 1$.

6.32. Теорема. Пусть $\{h_j\}$ — аппроксимативная единица на $\mathbf{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{D}$ и $u \in \mathcal{D}'$. Тогда

$$(a) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi * h_j = \varphi \text{ в } \mathcal{D},$$

$$(b) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} u * h_j = u \text{ в } \mathcal{D}'.$$

Заметим, что, согласно утверждению (b), каждое распределение есть предел в топологии $\mathcal{D}'$ некоторой последовательности бесконечно дифференцируемых функций.

Доказательство. Совсем легко заметить, что $f * h_j \rightarrow f$ равномерно на компактных подмножествах, если f — непрерывная функция на $\mathbf{R}^n$. Если в качестве функции f взять здесь $D^\alpha \varphi$, то мы увидим, что $D^\alpha (\varphi * h_j) \rightarrow D^\alpha \varphi$ равномерно. Кроме того, носители всех функций $\varphi * h_j$ содержатся в некотором компакте, так как носители функций h_j стягиваются к точке 0. Этим доказано утверждение (а).

Далее, утверждение (а) в сочетании с утверждением (с) теоремы 6.30 дает (b), ибо

$$\begin{aligned} u(\check{\varphi}) &= (u * \varphi)(0) = \lim (u * (h_j * \varphi))(0) = \\ &= \lim ((u * h_j) * \varphi)(0) = \lim (u * h_j)(\check{\varphi}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.33. Теорема. (а) Если $u \in \mathcal{D}'$ и

$$(1) \quad L\varphi = u * \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{D}),$$

то L есть непрерывное линейное отображение пространства $\mathcal{D}$ в пространство C^∞ , удовлетворяющее условию

$$(2) \quad \tau_x L = L \tau_x \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

(b) Обратно, если L — непрерывное линейное отображение пространства $\mathcal{D}$ в пространство $C(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющее условию (2), то существует в точности одно такое $u \in \mathcal{D}'$, что выполняется соотношение (1).

Отметим, что, согласно утверждению (b), образ при отображении L фактически оказывается в C^∞ .

Доказательство. (а) Так как $\tau_x(u * \varphi) = u * (\tau_x \varphi)$, то соотношение (2) вытекает из соотношения (1). Для доказательства непрерывности отображения L мы должны проверить, что его сужение на каждое из подпространств $\mathcal{D}_K$ является непрерывным отображением в C^∞ . Так как каждое из $\mathcal{D}_K$ является пространством Фреше, то применима теорема о замкнутом графике. Пусть $\varphi_i \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{D}_K$ и $u * \varphi_i \rightarrow f$ в C^∞ . Мы должны показать, что $f = u * \varphi$.

Фиксируем точку $x \in \mathbf{R}^n$. Тогда $\tau_x \check{\varphi}_i \rightarrow \tau_x \check{\varphi}$ в $\mathcal{D}$, так что

$$f(x) = \lim (u * \varphi_i)(x) = \lim u(\tau_x \check{\varphi}_i) = u(\tau_x \check{\varphi}) = (u * \varphi)(x).$$

(b) Положим $u(\varphi) = (L\check{\varphi})(0)$. Так как $\varphi \rightarrow \check{\varphi}$ есть непрерывный оператор в $\mathcal{D}$ и так как «значение в точке 0» есть непрерывный линейный функционал на C , то функционал u непрерывен на $\mathcal{D}$. Таким образом, $u \in \mathcal{D}'$. Поскольку отображение L удовлетворяет условию (2), имеем

$$\begin{aligned} (L\varphi)(x) &= (\tau_{-x} L\varphi)(0) = (L\tau_{-x} \varphi)(0) = \\ &= u((\tau_{-x} \varphi)^\sim) = u(\tau_x \check{\varphi}) = (u * \varphi)(x). \end{aligned}$$

Наконец, единственность функционала u очевидна, ибо если $u \in \mathcal{D}'$ и $u * \varphi = 0$ при каждом $\varphi \in \mathcal{D}$, то

$$u(\check{\varphi}) = (u * \varphi)(0) = 0$$

при каждом $\varphi \in \mathcal{D}$, т. е. $u = 0$. ■

6.34. Определение. Пусть $u \in \mathcal{D}'$, причем u имеет компактный носитель. По теореме 6.24 функционал u однозначно продолжается до непрерывного линейного функционала на пространстве C^∞ . Это позволяет определить свертку функционала u с произвольной функцией $\varphi \in C^\infty$ по той же самой формуле, что и раньше, а именно

$$(u * \varphi)(x) = u(\tau_x \check{\varphi}) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

6.35. Теорема. Предположим, что распределение u имеет компактный носитель, и пусть $\varphi \in C^\infty$. Тогда

$$(a) \quad \tau_x(u * \varphi) = (\tau_x u) * \varphi = u * (\tau_x \varphi), \text{ если } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(b) \quad u * \varphi \in C^\infty \text{ и}$$

$$D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * (D^\alpha \varphi).$$

Если, кроме того, $\psi \in \mathcal{D}$, то

$$(c) \quad u * \psi \in \mathcal{D} \text{ и}$$

$$(d) \quad u * (\varphi * \psi) = (u * \varphi) * \psi = (u * \psi) * \varphi.$$

Доказательство. Доказательства утверждений (a) и (b) настолько похожи на доказательства аналогичных утверждений теоремы 6.30, что мы не будем их повторять. Для доказательства утверждения (c) обозначим через K и H соответственно носители u и ψ . Носителем функции $\tau_x \check{\psi}$ служит $x - H$. Следовательно,

$$(u * \psi)(x) = u(\tau_x \check{\psi}) = 0,$$

если K не пересекается с $x - H$, т. е. если не выполняется включение $x \in K + H$. Таким образом, носитель функции $u * \psi$ содержится в компактном множестве $K + H$.

Для доказательства утверждения (d) возьмем ограниченное открытое множество W , содержащее K , и выберем такую функцию $\varphi_0 \in \mathcal{D}$, что $\varphi_0 = \check{\varphi}$ в $W + H$. Тогда $(\varphi * \psi)^\sim = (\varphi_0 * \psi)^\sim$ в W , так что

$$(1) \quad (u * (\varphi * \psi))(0) = (u * (\varphi_0 * \psi))(0).$$

Если $-s \in H$, то $\tau_s \check{\varphi} = \tau_s \check{\varphi}_0$ в W . Следовательно, $u * \varphi = u * \varphi_0$ в $-H$. Это дает

$$(2) \quad ((u * \varphi) * \psi)(0) = ((u * \varphi_0) * \psi)(0).$$

Так как носитель функции $u * \psi$ содержится в $K + H$, то

$$(3) \quad ((u * \psi) * \varphi)(0) = ((u * \psi) * \varphi_0)(0).$$

По теореме 6.30 правые части равенств (1)–(3) совпадают. Поэтому совпадают и левые части. Тем самым доказано совпадение всех трех сверток из (d) в начале координат. Общий случай выводится из этого при помощи сдвига, как это проделано в конце доказательства теоремы 6.30. ■

6.36. Определение. Если $u \in \mathcal{D}'$, $v \in \mathcal{D}'$ и если по крайней мере одно из этих распределений имеет компактный носитель, то мы полагаем

$$(1) \quad L\varphi = u * (v * \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

Заметим, что данное определение корректно. Действительно, если распределение v имеет компактный носитель, то $v * \varphi \in \mathcal{D}$ и $L\varphi \in C^\infty$; если компактный носитель имеет распределение u , то снова $L\varphi \in C^\infty$, так как $\check{v} * \varphi \in C^\infty$. Кроме того, $\tau_x L = L\tau_x$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Все эти утверждения вытекают из теорем 6.30 и 6.35.

Функционал $\varphi \rightarrow (L\varphi)(0)$ на самом деле является распределением. Действительно, предположим, что $\varphi_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}$. Согласно утверждению (a) теоремы 6.33, имеем $v * \check{\varphi}_i \rightarrow 0$ в C^∞ . Если к тому же v имеет компактный носитель, то $v * \varphi_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}$, а если компактный носитель имеет распределение u , то можно воспользоваться теоремой 6.24. Итак, в любом случае $(L\check{\varphi}_i)(0) \rightarrow 0$.

Из доказательства утверждения (b) теоремы 6.33 видно, что это распределение, которое мы будем обозначать через $u * v$, связано с L формулой

$$(2) \quad L\varphi = (u * v) * \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

Другими словами, распределение $u * v \in \mathcal{D}'$ характеризуется соотношением

$$(3) \quad (u * v) * \varphi = u * (v * \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

6.37. Теорема. Пусть $u \in \mathcal{D}'$, $v \in \mathcal{D}'$ и $w \in \mathcal{D}'$.

(a) Если хотя бы одно из распределений u , v имеет компактный носитель, то $u * v = v * u$.

(b) Если S_u и S_v — носители распределений u и v и если хотя бы один из них компактен, то

$$S_{u*v} \subset S_u + S_v.$$

(c) Если по крайней мере два из носителей S_u , S_v , S_w компактны, то $(u * v) * w = u * (v * w)$.

(d) Если δ — мера Дирака и α — любой мультииндекс, то

$$D^\alpha u = (D^\alpha \delta) * u.$$

В частности, $u = \delta * u$.

(e) Если хотя бы одно из множеств S_u , S_v компактно, то

$$D^\alpha (u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)$$

для любого мультииндекса α .

Примечание. Выполнение закона ассоциативности (с) существенно зависит от сделанных предположений; см. упр. 24.

Доказательство. (а) Фиксируем элементы $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\psi \in \mathcal{D}$. Так как свертка функций коммутативна, то утверждение (с) теоремы 6.30 дает

$$(u * v) * (\varphi * \psi) = u * (v * (\varphi * \psi)) = u * ((v * \varphi) * \psi) = u * (\psi * (v * \varphi)).$$

Если компактно множество S_v , то снова применим утверждение (с) теоремы 6.30; если компактно множество S_u , то применим утверждение (d) теоремы 6.35. В любом случае получаем

$$(1) \quad (u * v) * (\varphi * \psi) = (u * \psi) * (v * \varphi).$$

Так как $\varphi * \psi = \psi * \varphi$, то те же выкладки дают

$$(2) \quad (v * u) * (\varphi * \psi) = (v * \varphi) * (u * \psi).$$

Правые части равенств (1) и (2) представляют собой свертки функций (одна из которых принадлежит $\mathcal{D}$, а другая C^∞). Поэтому они совпадают. Таким образом,

$$(3) \quad ((u * v) * \varphi) * \psi = ((v * u) * \varphi) * \psi.$$

Теперь, дважды применяя соображения единственности, использованные в конце доказательства теоремы 6.33, получаем $u * v = v * u$.

(b) Если $\varphi \in \mathcal{D}$, то непосредственное вычисление дает

$$(4) \quad (u * v) * \varphi = u * ((v * \check{\varphi})^\sim).$$

Согласно утверждению (а), мы можем без ограничения общности считать, что множество S_v компактно. Из доказательства утверждения (с) теоремы 6.35 видно, что носитель функции $v * \check{\varphi}$ содержится в $S_v - S_\varphi$. Из равенства (4) ясно, что $(u * v)(\varphi) = 0$, если S_u не пересекается с $S_\varphi - S_v$, т. е. если S_φ не пересекается с $S_u + S_v$.

(с) Из утверждения (b) следует, что свертки

$$(u * v) * w \quad \text{и} \quad u * (v * w)$$

определены, если хотя бы два из множеств S_u, S_v, S_w компактны. Если $\varphi \in \mathcal{D}$, то непосредственно по определению 6.36 имеем

$$(5) \quad (u * (v * w)) * \varphi = u * ((v * w) * \varphi) = u * (v * (w * \varphi)).$$

Если S_w компактно, то

$$(6) \quad ((u * v) * w) * \varphi = (u * v) * (w * \varphi) = u * (v * (w * \varphi)),$$

поскольку $w * \varphi \in \mathcal{D}$ в силу утверждения (с) теоремы 6.35. Сопоставление равенств (5) и (6) дает (с) в предположении, что S_w компактно.

Если S_w не компактно, то компактно S_u . Поэтому уже рассмотренный случай вместе с установленной в (а) коммутатив-

ностью дает

$$\begin{aligned} u * (v * w) &= u * (w * v) = (w * v) * u = \\ &= w * (v * u) = w * (u * v) = (u * v) * w. \end{aligned}$$

(d) Если $\varphi \in \mathcal{D}$, то $\delta * \varphi = \varphi$, поскольку

$$(\delta * \varphi)(x) = \delta(\tau_x \check{\varphi}) = (\tau_x \check{\varphi})(0) = \check{\varphi}(-x) = \varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Поэтому уже доказанное утверждение (с) в сочетании с утверждением (b) теоремы 6.30 дает

$$(D^\alpha u) * \varphi = u * D^\alpha \varphi = u * D^\alpha (\delta * \varphi) = u * (D^\alpha \delta) * \varphi.$$

Наконец, утверждение (е) вытекает из (d), (с) и (а), ибо

$$D^\alpha (u * v) = (D^\alpha \delta) * (u * v) = ((D^\alpha \delta) * u) * v = (D^\alpha u) * v$$

и

$$((D^\alpha \delta) * u) * v = (u * D^\alpha \delta) * v = u * ((D^\alpha \delta) * v) = u * D^\alpha v. \blacksquare$$

Упражнения

1. Пусть f — комплексная непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем. Доказать, что $\psi P_j \rightarrow f$ равномерно на $\mathbb{R}^n$, где $\psi \in \mathcal{D}$ и $\{P_j\}$ — подходящая последовательность полиномов.

2. Показать, что метризуемая топология на $\mathcal{D}(\Omega)$, от которой мы отказались в п. 6.2, не является полной ни для какого Ω .

3. Пусть E — произвольное замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Доказать существование такой функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $f(x) = 0$ для каждого $x \in E$ и $f(x) > 0$ для всех остальных $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Пусть $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\Lambda \varphi \geq 0$, если $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $\varphi \geq 0$. Доказать, что тогда Λ — положительная мера на Ω (конечная на всех компактных подмножествах).

5. Доказать, что числа $c_{\alpha\beta}$ в формуле Лейбница имеют следующее явное выражение:

$$c_{\alpha\beta} = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha_i!}{\beta_i! (\alpha_i - \beta_i)!}.$$

6. (а) Пусть $c_m = \exp\{-(m!)\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Верно ли, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m (D^m \varphi)(0)$$

сходится для каждого $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$?

(b) Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $\Lambda_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и что носители всех распределений Λ_i содержатся в некотором фиксированном компакте $K \subset \Omega$. Доказать, что если последовательность $\{\Lambda_i\}$ сходится в $\mathcal{D}'(\Omega)$, то порядки распределений Λ_i ограничены в совокупности. Укажите. воспользуйтесь теоремой Банаха — Штейнгауза.

(с) Можно ли в утверждении (b) опустить предположение относительно носителей?

7. Пусть $\Omega = (0, \infty)$. Положим

$$\Lambda\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} (D^m\varphi) \left(\frac{1}{m} \right) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Доказать, что Λ — распределение бесконечного порядка в Ω . Доказать, что распределение Λ нельзя продолжить до распределения в $\mathbf{R}$. Последнее означает, что не существует такого распределения $\Lambda_0 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, что $\Lambda_0 = \Lambda$ в Ω .

8. Описать все распределения, носителями которых служат конечные множества.

9. (а) Доказать, что множество $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ тогда и только тогда ограничено, когда

$$\sup \{ |\Lambda\varphi| : \varphi \in E \} < \infty$$

для каждого $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(б) Пусть $\{\varphi_j\}$ — такая последовательность элементов $\mathcal{D}(\Omega)$, что числовые последовательности $\{\Lambda\varphi_j\}$ ограничены при каждом $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Доказать, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{\varphi_j\}$ сходится в топологии $\mathcal{D}(\Omega)$.

(с) Пусть $\{\Lambda_j\}$ — такая последовательность из $\mathcal{D}'(\Omega)$, что для каждого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ числовая последовательность $\{\Lambda_j\varphi\}$ оказывается ограниченной. Доказать, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{\Lambda_j\}$ сходится в $\mathcal{D}'(\Omega)$, причем сходимость равномерна на ограниченных подмножествах $\mathcal{D}(\Omega)$. *Указание.* По теореме Банаха — Штейнгауза сужения распределений Λ_j на $\mathcal{D}_K$ равностепенно непрерывны. Примените теорему Асколи.

10. Пусть $\{f_i\}$ — некоторая последовательность локально интегрируемых функций в Ω (где Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$). Предположим, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_K |f_i(x)| dx = 0$$

для каждого компакта $K \subset \Omega$. Доказать, что $D^\alpha f_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$ для каждого мультииндекса α .

11. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^2$ и $\{f_i\}$ — последовательность гармонических функций в Ω , сходящаяся в смысле распределений к некоторому $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Точнее говоря, предположение состоит в том, что

$$\Lambda\varphi = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_i(x) \varphi(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Доказать, что последовательность $\{f_i\}$ сходится равномерно на каждом компакте в Ω и что Λ является гармонической функцией. *Указание.* Если f — гармоническая функция, то $f(x)$ есть среднее от f по малой окружности с центром в точке x .

12. Напомним, что распределение δ (мера Дирака) определяется равенством $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ при $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Для каких $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ верно, что $f\delta' = 0$? Ответить на тот же вопрос по отношению к $f\delta''$. Вывести отсюда, что функция $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ может обращаться в нуль на носителе распределения $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, хотя $f\Lambda \neq 0$.

13. Если $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, то верно ли, что любое из утверждений

$$\varphi\Lambda = 0, \quad \Lambda\varphi = 0$$

вытекает из другого?

14. Пусть K — замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что носитель распределения $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ содержится в K , и пусть функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ равна нулю на K . Доказать, что $f\Lambda = 0$. Найти другие множества K , для которых это верно (ср. с упр. 12).

15. Пусть $K \subset V \subset \Omega$, где K — компакт, а V и Ω — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что носитель некоторого распределения $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ содержится в K . Допустим, что последовательность $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$(a) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in V} |D^\alpha \varphi_i(x)| \right] = 0$$

для каждого мультииндекса α . Доказать, что тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda(\varphi_i) = 0.$$

16. Предыдущее утверждение становится неверным, если в условии (a) заменить V на K . Доказать это при помощи следующего примера, в котором $\Omega = \mathbb{R}$. Выберем такую числовую последовательность $c_1 > c_2 > \dots > 0$, что $\sum c_j < \infty$. Положим

$$\Lambda\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi(c_j) - \varphi(0)) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$$

и рассмотрим такие функции $\varphi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, что $\varphi_i(x) = 0$, если $x \leq c_{i+1}$, и $\varphi_i(x) = 1/i$, если $c_i \leq x \leq c_1$. Показать, что порядок распределения Λ равен 1.

Вместе с тем для некоторых компактов K множество V в условии (a) упр. 15 можно заменить на K . Доказать, что это так, если K — замкнутый единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$. Найти другие множества K , для которых это справедливо.

17. Пусть распределение $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет порядок N . Доказать, что имеет место представление $\Lambda = \mathcal{D}^{N+2}f$, где f — непрерывная функция. Описать всевозможные такие f для $\Lambda = \delta$.

18. Для распределения $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ найти представление, гарантированное теоремой 6.27, по возможности в наиболее явной форме.

19. Пусть $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ и $(D^\alpha \varphi)(x) = 0$ для каждого x из носителя распределения Λ и каждого мультииндекса α . Доказать, что $\Lambda\varphi = 0$. *Наводящее соображение.* Прodelайте это сначала для распределений с компактным носителем при помощи метода, использованного в теореме 6.25.

20. Доказать, что каждый непрерывный линейный функционал на пространстве $C^\infty(\Omega)$ имеет вид $f \mapsto \Lambda f$, где Λ — распределение с компактным носителем в Ω . Это утверждение является обратным к утверждению (d) теоремы 6.24.

21. Пусть $C^\infty(T)$ — пространство всех непрерывных комплексных функций на единичной окружности T в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пространство $C^\infty(T)$ можно рассматривать как подпространство в $C^\infty(\mathbb{R})$, состоящее из функций с периодом 2π . Предположим, что ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

сходится в открытом единичном диске $U \subset \mathbb{C}$. Доказать, что выполнение каждого из следующих трех условий на f влечет за собой выполнение двух других.

(а) Существуют такое $p < \infty$ и такое $\gamma < \infty$, что

$$|a_n| \leq \gamma \cdot n^p \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

(б) Существуют такое $p < \infty$ и такое $\gamma < \infty$, что

$$|f(z)| \leq \gamma \cdot (1 - |z|)^{-p} \quad (z \in U).$$

(с) Для каждого $\varphi \in C^\infty(T)$ существует $\lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) \varphi(e^{i\theta}) d\theta$ (комплексное число).

22. Показать, что для каждого $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\frac{u - \tau_x u}{x} \rightarrow Du \quad \text{в } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

при $x \rightarrow 0$. [Таким образом, как и в классической ситуации, производную распределения u можно получить в качестве предела отношения.]

23. Предположим, что $\{f_i\}$ — такая последовательность локально интегрируемых функций в $\mathbb{R}^n$, для которой

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f_i * \varphi)(x)$$

существует при каждом $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и каждом $x \in \mathbb{R}^n$. Доказать, что тогда для любого мультииндекса α последовательность $\{D^\alpha(f_i * \varphi)\}$ равномерно сходится на компактных множествах.

24. Пусть H — функция Хевисайда на $\mathbb{R}$, т. е.

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

и пусть δ — мера Дирака.

(а) Показать, что $(H * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(s) ds$, если $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(б) Показать, что $\delta' * H = \delta$.

(с) Показать, что $1 * \delta' = 0$. [Здесь 1 символизирует распределение, соответствующее локально интегрируемой функции со значениями 1 в каждой точке.]

(д) Ассоциативность свертки нарушается на указанных трех распределениях, поскольку

$$1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1,$$

но

$$(1 * \delta') * H = 0 * H = 0.$$

25. Имеется еще одна характеристика свертки, аналогичная теореме 6.33. Пусть L — непрерывное линейное отображение пространства $\mathcal{D}$ в пространство C^∞ , коммутирующее с операторами D^α , т. е.

(а) $LD^\alpha \varphi = D^\alpha L\varphi \quad (\varphi \in \mathcal{D})$.

Тогда существует такое распределение $u \in \mathcal{D}'$, что

$$L\varphi = u * \varphi \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

Наводящее соображение. Зафиксируем $\varphi \in \mathcal{D}$ и положим

$$h(x) = (\tau_{-x} L \tau_x \varphi)(0) = (L \tau_x \varphi)(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Пусть D_e — производная по направлению (этот оператор использовался в доказательстве теоремы 6.30). Показать, что

$$(D_e h)(x) = (D_e L \tau_x \varphi)(x) - (L \tau_x D_e \varphi)(x)$$

обращается в 0, если выполняется условие (а). Таким образом, $h(x) = h(0)$, откуда следует, что $\tau_x L = L \tau_x$. Нельзя ли ослабить предположение, что образ отображения L содержится в C^∞ ?

26. Если $f \in L^1((-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty))$ при каждом $\varepsilon > 0$, то определим *главное значение интеграла*, полагая (P.V. = Principal Value)

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) f(x) dx,$$

когда предел существует. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ пусть

$$\Lambda \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \log |x| dx.$$

Показать, что

$$\Lambda' \varphi = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{dx}{x},$$

$$\Lambda'' \varphi = - \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx.$$

27. Найти все распределения $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, которые удовлетворяют хотя бы одному из следующих двух условий:

(а) $\tau_x u = u$ для каждого $x \in \mathbb{R}^n$,

(б) $D^\alpha u = 0$ для каждого мультииндекса α , такого, что $|\alpha| = 1$.

Глава 7

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Основные свойства

7.1. Обозначения. (а) *Нормированной мерой Лебега* на $\mathbf{R}^n$ называется мера m_n , определяемая равенством

$$dm_n(x) = (2\pi)^{-n/2} dx.$$

Множитель $(2\pi)^{-n/2}$ упрощает формулировки теоремы обращения 7.7 и теоремы Планшереля 7.9. Обычные лебеговы пространства L^p , или $L^p(\mathbf{R}^n)$, будут нормироваться при помощи m_n :

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |f|^p dm_n \right\}^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Удобно также несколько видоизменить определение свертки двух функций на $\mathbf{R}^n$, полагая

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y) g(y) dm_n(y),$$

когда интеграл существует.

(b) Для каждой точки $t \in \mathbf{R}^n$ *характер* e_t есть функция вида

$$e_t(x) = e^{it \cdot x} = \exp \{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)\} \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Каждый характер e_t удовлетворяет функциональному уравнению

$$e_t(x+y) = e_t(x) e_t(y).$$

Таким образом, e_t есть гомоморфизм аддитивной группы $\mathbf{R}^n$ в мультипликативную группу комплексных чисел, по модулю равных 1.

(с) *Преобразованием Фурье* функции $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ называется функция $\hat{f}$, определяемая равенством

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}^n} f e_{-t} dm_n \quad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Термин «преобразование Фурье» часто используется также для обозначения отображения, сопоставляющего функции f функцию $\hat{f}$.

Отметим, что

$$\hat{f}(t) = (f * e_t)(0).$$

(d) Если α — мультииндекс, то

$$D_\alpha = (i)^{-|\alpha|} D^\alpha = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Употребление D_α вместо D^α упрощает некоторые формулы. Отметим, что

$$D_\alpha e_t = t^\alpha e_t,$$

где, как и раньше, $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}$. Пусть P — полином от n переменных с комплексными коэффициентами, скажем

$$P(\xi) = \sum c_\alpha \xi^\alpha = \sum c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Тогда дифференциальные операторы $P(D)$ и $P(-D)$, по определению, суть

$$P(D) = \sum c_\alpha D_\alpha, \quad P(-D) = \sum (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D_\alpha.$$

Из определения вытекает, что

$$P(D) e_t = P(t) e_t \quad (t \in \mathbb{R}^n).$$

(e) Оператор сдвига τ_x , как и раньше, задается равенством

$$(\tau_x f)(y) = f(y - x) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

7.2. Теорема. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$(a) (\tau_x f)^\wedge = e_{-x} \hat{f};$$

$$(b) (e_x f)^\wedge = \tau_x \hat{f};$$

$$(c) (f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g};$$

$$(d) \text{ если } \lambda > 0 \text{ и } h(x) = f(x/\lambda), \text{ то } \hat{h}(t) = \lambda^n \hat{f}(\lambda t).$$

Доказательство. Из определений вытекает, что

$$(\tau_x f)^\wedge(t) = \int (\tau_x f) \cdot e_{-t} = \int f \cdot \tau_{-x} e_{-t} = \int f \cdot e_{-t}(x) e_{-t} = e_{-x}(t) \hat{f}(t)$$

и

$$(e_x f)^\wedge(t) = \int e_x f e_{-t} = \int f e_{-(t-x)} = (\tau_x \hat{f})(t).$$

Применяя теорему Фубини, получаем (c). Чтобы доказать (d), достаточно сделать линейную замену переменных в определении $\hat{f}$. ■

7.3. Быстро убывающие функции. Это наименование употребляется иногда по отношению к тем функциям $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$(1) \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |(D_\alpha f)(x)| < \infty$$

при $N = 0, 1, 2, \dots$ [Напомним, что $|x|^2 = \sum x_i^2$.] Другими словами, требование состоит в том, что для каждого полинома P и каждого мультииндекса α функция $P \cdot D_\alpha f$ является ограниченной

на $\mathbf{R}^n$. Так как это верно с заменой полинома $P(x)$ на $(1+|x|^2)^N P(x)$, то отсюда вытекает, что любая из функций $P \cdot D_\alpha f$ содержится в $L^1(\mathbf{R}^n)$.

Все такие функции образуют векторное пространство, обозначаемое через $\mathcal{S}_n$. Счетный набор норм (1) задает в этом пространстве локально выпуклую топологию, как описано в теореме 1.37.

Ясно, что $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}_n$.

7.4. Теорема. (а) $\mathcal{S}_n$ является пространством Фреше.

(b) Если P — произвольный полином, $g \in \mathcal{S}_n$ и α — любой мультииндекс, то каждое из следующих трех отображений

$$f \rightarrow Pf, \quad f \rightarrow gf, \quad f \rightarrow D_\alpha f$$

представляет собой непрерывное линейное отображение пространства $\mathcal{S}_n$ в $\mathcal{S}_n$.

(c) Если $f \in \mathcal{S}_n$ и P — полином, то

$$(P(D)f)^\wedge = P\hat{f} \quad \text{и} \quad (Pf)^\wedge = P(-D)\hat{f}.$$

(d) Преобразование Фурье осуществляет непрерывное линейное отображение пространства $\mathcal{S}_n$ в $\mathcal{S}_n$.

Утверждение (d) будет усилено в теореме 7.7.

Доказательство. (а) Предположим, что $\{f_i\}$ — последовательность Коши в $\mathcal{S}_n$. Тогда при $i \rightarrow \infty$ для каждой пары мультииндексов α и β функции $x^\beta D^\alpha f_i(x)$ сходятся (равномерно на $\mathbf{R}^n$) к некоторым ограниченным функциям $g_{\alpha\beta}$. Ясно, что

$$g_{\alpha\beta}(x) = x^\beta D^\alpha g_{00}(x),$$

и поэтому $f_i \rightarrow g_{00}$ в $\mathcal{S}_n$. Таким образом, $\mathcal{S}_n$ полно.

(b) Очевидно, что если $f \in \mathcal{S}_n$, то $D_\alpha f \in \mathcal{S}_n$, и поэтому, в силу формулы Лейбница, Pf и gf также содержатся в $\mathcal{S}_n$. Непрерывность всех трех отображений есть простое следствие теоремы о замкнутом графике.

(c) Если $f \in \mathcal{S}_n$, то, согласно утверждению (b), и $P(D)f$ принадлежит этому пространству. Кроме того,

$$(P(D)f) * e_t = f * P(D)e_t = f * P(t)e_t = P(t)[f * e_t].$$

Беря значения этих функций в начале координат пространства $\mathbf{R}^n$, мы получим первую часть утверждения (c), а именно

$$(P(D)f)^\wedge(t) = P(t)\hat{f}(t).$$

Если $t = (t_1, \dots, t_n)$ и $t' = (t_1 + \varepsilon, t_2, \dots, t_n)$, где $\varepsilon \neq 0$, то

$$\frac{\hat{f}(t') - \hat{f}(t)}{i\varepsilon} = \int_{\mathbf{R}^n} x_1 f(x) \frac{e^{-ix_1\varepsilon} - 1}{ix_1\varepsilon} e^{-ix \cdot t} dm_n(x).$$

Так как $x_1 f \in L^1$, то применима теорема Лебега, и мы получаем

$$-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} \hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}^n} x_1 f(x) e^{-ix \cdot t} dm_n(x).$$

Этим доказана вторая часть утверждения (с) в частном случае $P(x) = x_1$. Общий случай сводится к данному путем итераций.

(d) Пусть $f \in \mathcal{S}_n$ и $g(x) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha \hat{f}(x)$. Тогда $g \in \mathcal{S}_n$. Из утверждения (с) теперь вытекает, что $\hat{g} = D_\alpha \hat{f}$ и $P \cdot D_\alpha \hat{f} = P \cdot \hat{g} = (P(D)g)^\wedge$, причем эти функции являются ограниченными, поскольку $P(D)g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Следовательно, $\hat{f} \in \mathcal{S}_n$. Если $f_i \rightarrow f$ в $\mathcal{S}_n$, то $f_i \rightarrow f$ в $L^1(\mathbf{R}^n)$. Поэтому $\hat{f}_i(t) \rightarrow \hat{f}(t)$ при всех $t \in \mathbf{R}^n$. Тот факт, что отображение $f \rightarrow \hat{f}$ является непрерывным отображением пространства $\mathcal{S}_n$ в $\mathcal{S}_n$, вытекает теперь из теоремы о замкнутом графике. ■

7.5. Теорема. Если $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, то $\hat{f} \in C_0(\mathbf{R}^n)$ и $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Здесь $C_0(\mathbf{R}^n)$ — банахово пространство всех комплексных непрерывных функций на $\mathbf{R}^n$, стремящихся к нулю на бесконечности, с сур-нормой.

Доказательство. Так как $|e_t(x)| = 1$, то ясно, что

$$(1) \quad |\hat{f}(t)| \leq \|f\|_1 \quad (f \in L^1, t \in \mathbf{R}^n).$$

Поскольку $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_n$ плотно в $L^1(\mathbf{R}^n)$. Поэтому каждой функции $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ соответствует такая последовательность функций $f_i \in \mathcal{S}_n$, что $\|f - f_i\|_1 \rightarrow 0$. Так как $\hat{f}_i \in \mathcal{S}_n \subset C_0(\mathbf{R}^n)$ и так как из (1) вытекает, что $\hat{f}_i \rightarrow \hat{f}$ равномерно на $\mathbf{R}^n$, то доказательство завершено. ■

Следующая лемма используется при доказательстве теоремы обращения. Она зависит от особенностей нормировки, выбранной для m_n .

7.6. Лемма. Если функция φ_n на $\mathbf{R}^n$ определена равенством

$$(1) \quad \varphi_n(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} |x|^2 \right\},$$

то $\varphi_n \in \mathcal{S}_n$, $\hat{\varphi}_n = \varphi_n$ и

$$(2) \quad \varphi_n(0) = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi}_n dm_n.$$

Доказательство. Ясно, что $\varphi_n \in \mathcal{S}_n$. Так как функция φ_1 удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(3) \quad y' + xy = 0,$$

то, как показывает простое вычисление (или утверждение (с) теоремы 7.4), функция $\hat{\varphi}_1$ также удовлетворяет этому дифференциальному уравнению. Следовательно, $\hat{\varphi}_1/\varphi_1$ — константа. Но, поскольку $\varphi_1(0) = 1$ и

$$\hat{\varphi}_1(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1 dm_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} dx = 1,$$

мы заключаем, что $\hat{\varphi}_1 = \varphi_1$. Далее,

$$(4) \quad \varphi_n(x) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_1(x_n) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

так что

$$(5) \quad \hat{\varphi}_n(t) = \hat{\varphi}_1(t_1) \dots \hat{\varphi}_1(t_n) \quad (t \in \mathbb{R}^n).$$

Отсюда следует, что $\hat{\varphi}_n = \varphi_n$ при всех n . Так как, по определению, $\hat{\varphi}_n(0) = \int \varphi_n dm_n$ и $\hat{\varphi}_n = \varphi_n$, мы получаем равенство (2). ■

7.7. Теорема обращения. (а) Если $g \in \mathcal{S}_n$, то

$$(1) \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g} e_x dm_n \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(b) Преобразование Фурье является непрерывным линейным взаимно однозначным отображением пространства $\mathcal{S}_n$ на $\mathcal{S}_n$ с периодом 4, и обратное отображение также непрерывно.

(с) Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$(2) \quad f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} e_x dm_n \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

то $f(x) = f_0(x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Если f и g содержатся в $L^1(\mathbb{R}^n)$, то к двойному интегралу

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) e^{-ix \cdot y} dm_n(x) dm_n(y)$$

применима теорема Фубини, которая приводит к тождеству

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} dm_n.$$

Для доказательства утверждения (а) возьмем $g \in \mathcal{S}_n$, $\varphi \in \mathcal{S}_n$ и положим $f(x) = \varphi(x/\lambda)$, где $\lambda > 0$. Тождество (3) в силу утверждения (d) теоремы 7.2 приводит к соотношению

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(t) \lambda^n \hat{\varphi}(\lambda t) dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \hat{g}(y) dm_n(y),$$

или

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \hat{\varphi}(t) dm_n(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \hat{g}(y) dm_n(y).$$

Если $\lambda \rightarrow \infty$, то $g(t/\lambda) \rightarrow g(0)$ и $\varphi(y/\lambda) \rightarrow \varphi(0)$, причем допредельные функции ограничены в совокупности. Поэтому к обоим интегралам в равенстве (4) применима теорема Лебега. В результате получается, что

$$(5) \quad g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi} dm_n = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g} dm_n.$$

Если в качестве φ использовать функцию φ_n из леммы 7.6, то соотношение (5) приведет к формуле обращения (1) для случая $x=0$. Общий случай выводится из этого, поскольку в силу утверждения (а) теоремы 7.2

$$g(x) = (\tau_{-x}g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-x}g)^{\wedge} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g} e_x dm_n.$$

Тем самым полностью доказано утверждение (а).

Для доказательства утверждения (b) введем временно обозначение $\Phi g = \hat{g}$. Формула обращения (1) показывает, что отображение Φ является инъективным на $\mathcal{S}_n$, поскольку равенство $\hat{g} = 0$, очевидно, приводит к $g = 0$. Согласно той же формуле,

$$(6) \quad \Phi^2 g = \check{g},$$

где, как и раньше, $\check{g}(x) = g(-x)$. Поэтому $\Phi^4 g = g$. Отсюда вытекает, что Φ отображает $\mathcal{S}_n$ на все $\mathcal{S}_n$. Непрерывность отображения Φ уже доказана в теореме 7.4. Для доказательства непрерывности обратного отображения теперь можно либо сослаться на теорему об открытом отображении (на теорему о замкнутом графике), либо воспользоваться тем фактом, что $\Phi^{-1} = \Phi^3$.

Для доказательства утверждения (с) мы вернемся к тождеству (3), где будем считать $g \in \mathcal{S}_n$. Если подставить формулу обращения (1) в формулу (3) и применить теорему Фубини, то мы получим

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_0 \hat{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} dm_n \quad (g \in \mathcal{S}_n).$$

Согласно утверждению (b), функции $\hat{g}$ пробегает все пространство $\mathcal{S}_n$. Так как $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_n$, то из (7) вытекает, что

$$(8) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (f_0 - f) \varphi dm_n = 0$$

для каждого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, а потому (ввиду возможности равномерной аппроксимации, описанной в упр. 1 гл. 6) и для каждой

непрерывной функции φ с компактным носителем. Отсюда следует, что $f_0 - f = 0$ почти всюду. ■

7.8. Теорема. Если $f \in \mathcal{S}_n$ и $g \in \mathcal{S}_n$, то

(a) $f * g \in \mathcal{S}_n$ и

(b) $(fg)^\wedge = \hat{f} * \hat{g}$.

Доказательство. В силу утверждения (с) теоремы 7.2 имеем $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g}$, или, если использовать обозначение из доказательства утверждения (b) теоремы 7.7,

$$(1) \quad \Phi(f * g) = \Phi f \cdot \Phi g.$$

Если заменить в формуле (1) функции f и g на $\hat{f}$ и $\hat{g}$, то получится

$$(2) \quad \Phi(\hat{f} * \hat{g}) = \Phi^2 f \cdot \Phi^2 g = \check{f} \check{g} = (fg)^\sim = \Phi^2(fg).$$

Применяя к обеим частям равенства (2) оператор Φ^{-1} , мы получаем (b). Заметим, что $fg \in \mathcal{S}_n$. Поэтому из (b) вытекает, что $\hat{f} * \hat{g} \in \mathcal{S}_n$. Но это приводит к утверждению (a), так как преобразование Фурье отображает $\mathcal{S}_n$ на $\mathcal{S}_n$. ■

7.9. Теорема Планшереля. Существует линейная изометрия Ψ пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$, которая однозначно определяется условием

$$\Psi f = \hat{f} \text{ для каждого } f \in \mathcal{S}_n.$$

Заметим, что равенство $\Psi f = \hat{f}$ продолжается с $\mathcal{S}_n$ на $L^1 \cap L^2$, поскольку $\mathcal{S}_n$ плотно и в L^1 , и в L^2 . Поэтому результат можно резюмировать следующим образом. Отображение Ψ определено всюду на L^2 , преобразование $\hat{f}$ было определено в п. 7.1 для всех $f \in L^1$; на общей области определения имеем $\Psi f = \hat{f}$. Таким образом, оператор Ψ служит расширением преобразования Фурье с $L^1 \cap L^2$ на L^2 . Это расширение Ψ по-прежнему называется преобразованием Фурье (иногда — преобразованием Фурье — Планшереля), и обозначение $\hat{f}$ используется вместо Ψf для всех $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Если f и g принадлежат $\mathcal{S}_n$, то, согласно теореме обращения,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} dm_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) dm_n(x) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{ix \cdot t} dm_n(t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) dm_n(t) \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) e^{ix \cdot t} dm_n(x). \end{aligned}$$

Последний внутренний интеграл представляет функцию, комплексно сопряженную к $\hat{g}(t)$. Тем самым мы получаем формулу Парсеваля

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f \bar{g} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} \overline{\hat{g}} dm_n \quad (f, g \in \mathcal{S}_n).$$

При $g=f$ формула (1) сводится к формуле

$$(2) \quad \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad (f \in \mathcal{S}_n).$$

Заметим, что подпространство $\mathcal{S}_n$ плотно в $L^2(\mathbf{R}^n)$ (по тем же соображениям, по которым оно плотно в $L^1(\mathbf{R}^n)$). Таким образом, формула (2) показывает, что отображение $f \rightarrow \hat{f}$ представляет собой изометрию (в L^2 -метрике) плотного в $L^2(\mathbf{R}^n)$ подпространства $\mathcal{S}_n$ на $\mathcal{S}_n$. [Тот факт, что образом служит все $\mathcal{S}_n$, вытекает из теоремы обращения.] Из элементарных соображений метрического характера теперь следует, что отображение $f \rightarrow \hat{f}$ обладает однозначно определенным непрерывным расширением $\Psi: L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ и что Ψ является линейной изометрией на все $L^2(\mathbf{R}^n)$. Некоторые подробности см. в упр. 13. ■

Стоит отметить, что формула Парсеваля (1) остается справедливой при произвольных f и g из $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Тот факт, что преобразование Фурье осуществляет L^2 -изометрию, является одним из его наиболее важных характерных свойств.

Медленно растущие распределения

Прежде чем давать определение медленно растущих (умеренных) распределений, мы установим следующее соотношение между пространствами $\mathcal{S}_n$ и $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

7.10. Теорема. (а) Подпространство $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ плотно в $\mathcal{S}_n$.

(б) Тожественное отображение подпространства $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ в $\mathcal{S}_n$ непрерывно.

В этих утверждениях речь идет, конечно, об исходных топологиях в $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\mathcal{S}_n$, описанных в п. 6.3 и 7.3.

Доказательство. (а) Пусть $f \in \mathcal{S}_n$ и $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, причем $\psi=1$ на единичном шаре пространства $\mathbf{R}^n$. Положим

$$(1) \quad f_r(x) = f(x) \psi(rx) \quad (x \in \mathbf{R}^n, r > 0).$$

Тогда $f_r \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Если P —любой полином, а α —любой мультииндекс, то

$$P(x) D^\alpha (f - f_r)(x) = P(x) \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta} f)(x) r^{|\beta|} |D^\beta [1 - \psi(rx)]|.$$

Из нашего выбора функции ψ вытекает, что $D^\beta [1 - \psi(rx)] = 0$ при $|x| \leq 1/r$ для любого мультииндекса β . Так как $f \in \mathcal{S}_n$, то $P \cdot D^{\alpha-\beta} f \in C_0(\mathbf{R}^n)$ для всех $\beta \leq \alpha$. Отсюда следует, что последняя сумма стремится к нулю равномерно на $\mathbf{R}^n$ при $r \rightarrow 0$. Таким образом, $f_r \rightarrow f$ в $\mathcal{S}_n$, и утверждение (а) доказано.

(б) Если K —произвольный компакт из $\mathbf{R}^n$, то топология, индуцированная на $\mathcal{D}_K$ пространством $\mathcal{S}_n$, очевидно, совпадает с

исходной (описанной в п. 1.46), поскольку каждая из функций $(1+|x|^2)^N$ ограничена на K . Поэтому тождественное вложение подпространства $\mathcal{D}_K$ в $\mathcal{S}_n$ непрерывно (на самом деле оно является гомеоморфизмом), и утверждение (b) теперь вытекает из теоремы 6.6. ■

7.11. Определение. Пусть $i: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}_n$ — тождественное отображение. Если L — непрерывный линейный функционал на $\mathcal{S}_n$, то положим

$$(1) \quad u_L = L \circ i.$$

Из непрерывности отображения i (теорема 7.10) вытекает, что $u_L \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Так как подпространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathcal{S}_n$, то два различных функционала L не могут приводить к одному и тому же u . Таким образом, формула (1) описывает изоморфизм между векторным пространством $\mathcal{S}'_n$, сопряженным к $\mathcal{S}_n$, с одной стороны, и некоторым пространством распределений — с другой. Возникающие так распределения называются *медленно растущими* (или *умеренными*).

Итак, *медленно растущие распределения суть в точности те функционалы $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, которые обладают непрерывным расширением на пространство $\mathcal{S}_n$.*

В свете предыдущих замечаний удобно и естественно отождествить u_L с L . *Медленно растущие распределения на $\mathbb{R}^n$ при этом оказываются в точности элементами пространства $\mathcal{S}'_n$.*

Следующие примеры призваны объяснить использование здесь термина «медленно растущий», который указывает на ограничение роста на бесконечности. (См. также упр. 3.)

7.12. Примеры. (a) *Каждое распределение с компактным носителем является медленно растущим.* Пусть K — компактный носитель некоторого распределения $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Выберем такую функцию $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, что $\psi = 1$ на некотором открытом множестве, содержащем K , и положим

$$(1) \quad \tilde{u}(f) = u(\psi f) \quad (f \in \mathcal{S}_n).$$

Если $f_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{S}_n$, то для всех производных имеем $D^\alpha f_i \rightarrow 0$ равномерно на $\mathbb{R}^n$. Поэтому $D^\alpha(\psi f_i) \rightarrow 0$ равномерно на $\mathbb{R}^n$, так что $\psi f_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Отсюда вытекает, что функционал $\tilde{u}$ непрерывен на $\mathcal{S}_n$. Так как $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $\tilde{u}$ осуществляет нужное расширение функционала u .

(b) Пусть μ — такая положительная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$, что

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-k} d\mu(x) < \infty$$

при некотором целом положительном k . Тогда μ — медленно растущее распределение. Более точно, утверждение состоит в том, что

формула

$$(3) \quad \Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

определяет непрерывный линейный функционал на $\mathcal{S}_n$.

Чтобы установить это, предположим, что $f_i \rightarrow 0$ в $\mathcal{S}_n$. Тогда

$$(4) \quad \varepsilon_i = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |f_i(x)| \rightarrow 0.$$

Так как $|\Lambda f_i|$ не более чем в ε_i раз превосходит интеграл (2), то $\Lambda f_i \rightarrow 0$. Тем самым доказана непрерывность функционала Λ .

(с) Предположим, что $1 \leq p < \infty$, $N > 0$, и пусть g — такая измеримая функция на $\mathbb{R}^n$, для которой

$$(5) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^{-N} g(x)|^p dm_n(x) = C < \infty.$$

Тогда g — медленно растущее распределение.

Как и в случае (b), положим

$$(6) \quad \Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} f g dm_n.$$

Допустим сначала, что $p > 1$, и обозначим через q сопряженный показатель. Тогда, согласно неравенству Гёльдера,

$$(7) \quad \begin{aligned} |\Lambda f| &\leq C^{1/p} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^N f(x)|^q dm_n(x) \right\}^{1/q} \leq \\ &\leq C^{1/p} B^{1/q} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^M f(x)|, \end{aligned}$$

где M столь велико, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{(N-M)q} dm_n(x) = B < \infty.$$

Неравенством (7) установлена непрерывность на $\mathcal{S}_n$ функционала Λ . Случай $p = 1$ еще проще.

(d) Из (с) вытекает, что каждая функция $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$) является медленно растущим распределением. Таким распределением является также любой полином и вообще любая измеримая функция, абсолютная величина которой оценивается полиномом.

7.13. Теорема. Если α — произвольный мультииндекс, P — произвольный полином, $g \in \mathcal{S}_n$ и u — произвольное, медленно растущее распределение, то распределения $D^\alpha u$, Pu и gu также являются медленно растущими.

Доказательство. Это непосредственно вытекает из утверждения (b) теоремы 7.4 и определений:

$$(D^\alpha u)(f) = (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha f),$$

$$(Pu)(f) = u(Pf),$$

$$(gu)(f) = u(gf). \blacksquare$$

7.14. Определение. Если $u \in \mathcal{S}'_n$, то мы полагаем

$$(1) \quad \hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}) \quad (\varphi \in \mathcal{S}_n).$$

Так как $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ есть непрерывное линейное отображение пространства $\mathcal{S}_n$ в $\mathcal{S}_n$ (утверждение (d) теоремы 7.4) и так как функционал u непрерывен на $\mathcal{S}_n$, то $\hat{u} \in \mathcal{S}'_n$.

Тем самым мы сопоставили каждому медленно растущему распределению u его *преобразование Фурье* $\hat{u}$, которое снова является медленно растущим распределением. Наша следующая теорема покажет, что формальные свойства преобразований Фурье быстро убывающих функций распространяются и на более общий случай медленно растущих распределений.

Сначала, однако, надлежит разрешить возникающую здесь проблему согласования. Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то f можно рассматривать как медленно растущее распределение, скажем u_f . Поэтому появляется возможность употреблять два определения преобразования Фурье, а именно определение (c) из п. 7.1 и определение 7.14. Вопрос состоит в том, совпадают ли эти два определения, т.е. будет ли распределение $(u_f)^\wedge$ соответствовать функции $\hat{f}$. Ответ оказывается положительным, поскольку

$$(u_f)^\wedge(\varphi) = u_f(\hat{\varphi}) = \int f \hat{\varphi} = \int \hat{f} \varphi = (u_{\hat{f}})(\varphi)$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}_n$. Третье из этих равенств равносильно тождеству (3) из п. 7.7, а остальные суть определения.

Поскольку $L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'_n$, тот же вопрос возникает и в отношении преобразования Фурье—Планшереля. Здесь снова ответ положительный, и доказательство сохраняется, так как тождество $\int f \hat{\varphi} = \int \hat{f} \varphi$ остается справедливым для любых $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in \mathcal{S}_n$.

7.15. Теорема. (a) Преобразование Фурье является непрерывным линейным взаимно однозначным отображением периода 4 пространства $\mathcal{S}'_n$ на $\mathcal{S}'_n$, и обратное отображение также непрерывно.

(b) Если $u \in \mathcal{S}'_n$ и P —любой полином, то

$$(P(D)u)^\wedge = P\hat{u} \quad \text{и} \quad (Pu)^\wedge = P(-D)\hat{u}.$$

Отметим, что эти утверждения аналогичны утверждениям (b) теоремы 7.7 и (c) теоремы 7.4. В утверждении (a) имеется в виду слабая* топология, которая порождается на $\mathcal{S}'_n$ пространством $\mathcal{S}_n$.

Заметим еще, что дифференциальные операторы $P(D)$ и $P(-D)$ определяются при помощи D_α , а не D^α (см. (d) в п. 7.1).

Доказательство. Пусть W — некоторая окрестность точки 0 в $\mathcal{S}'_n$. Тогда найдутся такие функции $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{S}'_n$, что

$$(1) \quad \{u \in \mathcal{S}'_n: |u(\varphi_i)| < 1 \text{ при } 1 \leq i \leq k\} \subset W.$$

Положим

$$(2) \quad V = \{u \in \mathcal{S}'_n: |u(\hat{\varphi}_i)| < 1 \text{ при } 1 \leq i \leq k\}.$$

Тогда V есть окрестность точки 0 в $\mathcal{S}'_n$, и, поскольку

$$(3) \quad \hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}) \quad (\varphi \in \mathcal{S}_n, u \in \mathcal{S}'_n),$$

мы видим, что $\hat{u} \in W$, если $u \in V$. Тем самым доказана непрерывность отображения Φ , где $\Phi u = \hat{u}$. Поскольку Φ обладает периодом 4 на $\mathcal{S}'_n$, соотношение (3) показывает, что Φ обладает периодом 4 и на $\mathcal{S}'_n$, т. е. что $\Phi^4 u = u$ для каждого $u \in \mathcal{S}'_n$. Поэтому Φ осуществляет взаимно однозначное отображение на все пространство, а так как $\Phi^{-1} = \Phi^3$, то отображение Φ^{-1} непрерывно.

Утверждение (b) получается из утверждения (c) теоремы 7.4 и теоремы 7.13 при помощи соотношений

$$\begin{aligned} (P(D)u)^\wedge(\varphi) &= (P(D)u)(\hat{\varphi}) = u(P(-D))(\hat{\varphi}) = \\ &= u((P\varphi)^\wedge) = \hat{u}(P\varphi) = (P\hat{u})(\varphi) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (P(-D)\hat{u})(\varphi) &= \hat{u}(P(D)\varphi) = u((P(D)\varphi)^\wedge) = \\ &= u(P\hat{\varphi}) = (Pu)(\hat{\varphi}) = (Pu)^\wedge\varphi, \end{aligned}$$

где φ — произвольная функция из $\mathcal{S}_n$. ■

7.16. Примеры. В п. 7.12 (d) мы отмечали, что полиномы представляют собой медленно растущие распределения. Их преобразования Фурье легко подсчитать. Начнем с полинома 1. Рассматриваемый в качестве распределения, он действует на пробную функцию φ по формуле

$$(1) \quad 1(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} 1\varphi \, dm_n = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi \, dm_n.$$

Поэтому

$$(2) \quad \hat{1}(\varphi) = 1(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\varphi} \, dm_n = \varphi(0) = \delta(\varphi),$$

где δ — мера Дирака на $\mathbf{R}^n$. Аналогично

$$(3) \quad \hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi \, dm_n = 1(\varphi).$$

Формулы (2) и (3) означают, что

$$(4) \quad \hat{1} = \delta \quad \text{и} \quad \hat{\delta} = 1.$$

Если использовать эти результаты и применить утверждение (b) теоремы 7.15 с $u = \delta$ и $u = 1$, то мы получим, что для любого полинома P на $\mathbb{R}^n$

$$(5) \quad (P(D)\delta)^\wedge = P \quad \text{и} \quad \hat{P} = P(-D)\delta.$$

Формулы (4) (равно как и формулы (5)) могут быть получены одна из другой при помощи теоремы обращения, которая для медленно растущих распределений формулируется так:

Если $u \in \mathcal{S}'_n$, то $(\hat{u})^\wedge = \check{u}$, где $\check{u}$ определяется равенством

$$(6) \quad \check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi}) \quad (\varphi \in \mathcal{S}_n).$$

Доказательство тривиально: согласно утверждению (a) теоремы 7.7, имеем $(\hat{\varphi})^\wedge = \check{\varphi}$, так что

$$(\hat{u})^\wedge(\varphi) = \hat{u}(\hat{\varphi}) = u((\hat{\varphi})^\wedge) = u(\check{\varphi}) = \check{u}(\varphi).$$

Заметим, что $\check{\delta} = \delta$.

Сопоставляя соотношения (5) с теоремой 6.25, мы получаем, что *распределение тогда и только тогда является преобразованием Фурье полинома, когда носителем этого распределения служит начало координат (или пустое множество)*.

Следующая лемма потребуется в доказательстве теоремы 7.19. Аналогичное утверждение с заменой пространства $\mathcal{S}_n$ на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ гораздо более очевидно и уже использовалось без всяких оговорок в доказательстве теоремы 6.30.

7.17. Лемма. Пусть $\omega = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ и $\varphi \in \mathcal{S}_n$. Если

$$(1) \quad \varphi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi(x + \varepsilon\omega) - \varphi(x)}{\varepsilon} \quad (x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0),$$

то $\varphi_\varepsilon - \partial\varphi/\partial x_1 \rightarrow 0$ в топологии пространства $\mathcal{S}_n$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Утверждение будет установлено, если показать, что преобразование Фурье функции $\varphi_\varepsilon - \partial\varphi/\partial x_1$ стремится к 0 в $\mathcal{S}_n$, т.е. что

$$(2) \quad \psi_\varepsilon \hat{\varphi} \rightarrow 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{S}_n \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где

$$(3) \quad \psi_\varepsilon(y) = \frac{\exp(i\varepsilon y_1) - 1}{\varepsilon} - i y_1 \quad (y \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0).$$

Если P — произвольный полином и α — любой мультииндекс,

$$(4) \quad P \cdot D^\alpha (\psi_\varepsilon \hat{\varphi}) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} P \cdot (D^{\alpha-\beta} \hat{\varphi}) \cdot (D^\beta \psi_\varepsilon)$$

Простое вычисление показывает, что

$$(5) \quad |D^\beta \psi_\varepsilon(y)| \leq \begin{cases} \varepsilon y_1^2, & \text{если } |\beta| = 0, \\ \varepsilon |y_1|, & \text{если } |\beta| = 1, \\ \varepsilon^{|\beta|-1}, & \text{если } |\beta| > 1. \end{cases}$$

Поэтому левая часть в (4) стремится к 0 равномерно на $\mathbf{R}^n$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Определение топологии в $\mathcal{S}_n$ (п. 7.3) теперь показывает, что соотношение (2) выполняется. ■

7.18. Определение. Если $u \in \mathcal{S}'_n$ и $\varphi \in \mathcal{S}_n$, то

$$(u * \varphi)(x) = u(\tau_x \check{\varphi}) \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Заметим, что определение корректно, поскольку $\tau_x \check{\varphi} \in \mathcal{S}_n$ при каждом $\varphi \in \mathcal{S}_n$.

7.19. Теорема. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}_n$ и u — медленно растущее распределение. Тогда

(а) $u * \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и

$$D^\alpha (u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * (D^\alpha \varphi)$$

для любого мультииндекса α ;

(b) функция $u * \varphi$ растет не быстрее полинома u , следовательно, является медленно растущим распределением;

$$(c) \quad (u * \varphi)^\wedge = \hat{\varphi} \hat{u};$$

$$(d) \quad (u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi) \text{ для каждого } \psi \in \mathcal{S}_n;$$

$$(e) \quad \hat{u} * \hat{\varphi} = (\varphi u)^\wedge.$$

Доказательство. Второе равенство в утверждении (а) доказывается точно так же, как в теореме 6.30, поскольку свертка по-прежнему коммутует со сдвигами. Кроме того, по той же причине

$$(1) \quad \left(\frac{\tau_{-\varepsilon\omega} - \tau_0}{\varepsilon} \right) (u * \varphi) = u * \left(\frac{\tau_{-\varepsilon\omega} - \tau_0}{\varepsilon} \right) \varphi.$$

Теперь лемма 7.17 позволяет утверждать, что $D^\alpha (u * \varphi) = u * (D^\alpha \varphi)$, если $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$. Итерируя этот частный случай, мы получаем (а) в полном объеме.

Пусть $p_N(f)$ для $f \in \mathcal{S}_n$ обозначает норму (1) из п. 7.3. Неравенство

$$(2) \quad 1 + |x + y|^2 \leq 2(1 + |x|^2)(1 + |y|^2) \quad (x, y \in \mathbf{R}^n)$$

показывает, что

$$(3) \quad p_N(\tau_x f) \leq 2^N (1 + |x|^2)^N p_N(f) \quad (x \in \mathbf{R}^n, f \in \mathcal{S}_n).$$

Так как u есть непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathcal{S}_n$ и так как нормы p_N определяют топологию этого про-

странства, то найдутся такие N и $C < \infty$, что

$$(4) \quad |u(f)| \leq Cp_N(f) \quad (f \in \mathcal{S}_n);$$

см. упр. 8 в гл. 1. Согласно (3) и (4), имеем

$$(5) \quad |(u * \varphi)(x)| = |u(\tau_x \check{\varphi})| \leq 2^N Cp_N(\varphi) (1 + |x|^2)^N,$$

чем и доказано утверждение (b).

Таким образом, свертка $u * \varphi$ обладает преобразованием Фурье, которое содержится в $\mathcal{S}'_n$. Если $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и носителем этой функции служит компакт K , то

$$\begin{aligned} (u * \varphi)^\wedge(\hat{\psi}) &= (u * \varphi)(\check{\psi}) = \int_{\mathbb{R}^n} (u * \varphi)(x) \psi(-x) dm_n(x) = \\ &= \int_K u[\psi(-x) \tau_x \check{\varphi}] dm_n(x) = u \left[\int_K \psi(-x) \tau_x \check{\varphi} dm_n(x) \right] = \\ &= u((\varphi * \psi)^\sim) = \hat{u}((\varphi * \psi)^\wedge) = \hat{u}(\hat{\varphi} \hat{\psi}), \end{aligned}$$

так что

$$(6) \quad (u * \varphi)^\wedge(\hat{\psi}) = (\hat{\varphi} \hat{u})(\hat{\psi}).$$

В предыдущей выкладке, когда мы вынесли u за знак интеграла, мы использовали теорему 3.27 в применении к $\mathcal{S}_n$ -значному интегралу. Итак, равенство (6) пока что доказано для функций $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Так как подпространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\mathcal{S}_n$, то, согласно утверждению (b) теоремы 7.7, преобразования Фурье элементов этого пространства также образуют всюду плотное подмножество в $\mathcal{S}_n$. Поэтому равенство (6) выполняется для каждой функции $\hat{\psi} \in \mathcal{S}_n$. Следовательно, распределения $(u * \varphi)^\wedge$ и $\hat{\varphi} \hat{u}$ совпадают. Этим доказано утверждение (c).

Теперь ясно, что два последних члена в выкладке, предшествующей (6), совпадают при каждом $\psi \in \mathcal{S}_n$. Поэтому

$$(7) \quad (u * \varphi)(\check{\psi}) = u((\varphi * \psi)^\sim),$$

а это равносильно равенству

$$(8) \quad ((u * \varphi) * \psi)(0) = (u * (\varphi * \psi))(0).$$

Если в равенстве (8) заменить ψ на $\tau_x \psi$, то мы и получим утверждение (d).

Наконец, согласно утверждению (c) и формуле (6) из п. 7.16, имеем $(\hat{u} * \hat{\varphi})^\wedge = \check{\varphi} \check{u} = (\varphi u)^\sim$. Этим доказано утверждение (e), ибо $(\varphi u)^\sim = ((\varphi u)^\wedge)^\wedge$. ■

Теоремы Пэли — Винера

Одна из классических теорем Пэли и Винера характеризует целые функции экспоненциального типа (от одного комплексного переменного), сужение которых на вещественную ось принадлежит

к L^2 , как совокупность преобразований Фурье L^2 -функций с компактным носителем (см., например, [27, теорема 19.3] или [2, стр. 179]). Мы приведем два аналогичных результата (для функций нескольких переменных), один из которых касается C^∞ -функций с компактным носителем, а другой — распределений с компактным носителем.

7.20. Определения. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и f — непрерывная комплексная функция в Ω . Тогда функция f называется *голоморфной в Ω* , если она голоморфна по каждому переменному в отдельности. Последнее означает, что если $(a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ и

$$g_i(\lambda) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \lambda, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

то каждая из функций $g_1, \dots, g_n$ обязана быть голоморфной в некоторой окрестности точки 0 комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Функция, голоморфная всюду в $\mathbb{C}^n$, называется *целой*.

Для точек из $\mathbb{C}^n$ будет использоваться обозначение $z = (z_1, \dots, z_n)$, где $z_k \in \mathbb{C}$. Если $z_k = x_k + iy_k$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, то мы пишем $z = x + iy$. Векторы

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{и} \quad y = \operatorname{Im} z$$

называются соответственно *вещественной* и *мнимой* частью z . Под $\mathbb{R}^n$ теперь понимается совокупность всех $z \in \mathbb{C}^n$, для которых $\operatorname{Im} z = 0$. Мы будем использовать также следующие обозначения (где α — мультииндекс и $t \in \mathbb{R}^n$):

$$\begin{aligned} |z| &= (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2}, \\ |\operatorname{Im} z| &= (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}, \\ z^\alpha &= z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}, \\ z \cdot t &= z_1 t_1 + \dots + z_n t_n, \\ e_z(t) &= \exp(iz \cdot t). \end{aligned}$$

7.21. Лемма. Если f — целая функция на $\mathbb{C}^n$, равная 0 на $\mathbb{R}^n$, то $f = 0$.

Доказательство. Мы считаем случай $n = 1$ известным. Пусть $\mathcal{P}_k$ обозначает следующее свойство функции f : если по крайней мере k первых координат точки z вещественны, то $f(z) = 0$. Тогда $\mathcal{P}_n$ нам дано, а $\mathcal{P}_0$ предстоит доказать. Пусть $1 \leq i \leq n$ и $\mathcal{P}_i$ выполняется. Рассмотрим вещественные $a_1, \dots, a_{i-1}$. При любых $a_{i+1}, \dots, a_n$ функция $\lambda \rightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda, a_{i+1}, \dots, a_n)$ является целой и по условию обращается в 0 на вещественной оси. Поэтому она равна 0 тождественно. Но это означает, что выполняется $\mathcal{P}_{i-1}$, и лемма доказана. ■

В следующих двух теоремах используется обозначение

$$rB = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq r\}.$$

7.22. Теорема. (а) Если носитель функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ содержится в rB и если

$$(1) \quad f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) e^{-iz \cdot t} dm_n(t) \quad (z \in \mathbb{C}^n),$$

то функция f является целой и существуют такие константы $\gamma_N < \infty$, что

$$(2) \quad |f(z)| \leq \gamma_N (1 + |z|)^{-N} e^{r| \operatorname{Im} z |} \quad (z \in \mathbb{C}^n, N = 0, 1, 2, \dots).$$

(b) Обратно, если некоторая целая функция f удовлетворяет условиям (2), то найдется такая функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ с носителем в rB , что будет иметь место представление (1).

Доказательство. (а) Если $t \in rB$, то

$$|e^{-iz \cdot t}| = e^{y \cdot t} \leq e^{|y| |t|} \leq e^{r| \operatorname{Im} z |}.$$

Поэтому подынтегральная функция в (1) принадлежит $L^1(\mathbb{R}^n)$ для каждого $z \in \mathbb{C}^n$, и, следовательно, функция f корректно определена всюду на $\mathbb{C}^n$. Непрерывность функции f тривиальна. Применение теоремы Морера по каждому переменному в отдельности показывает, что функция f является целой. Далее, интегрирование по частям дает

$$z^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} (D_\alpha \varphi)(t) e^{-iz \cdot t} dm_n(t).$$

Поэтому

$$(3) \quad |z^\alpha| |f(z)| \leq \|D_\alpha \varphi\|_1 e^{r| \operatorname{Im} z |},$$

откуда вытекает (2).

(b) Предположим, что функция f является целой и удовлетворяет условиям (2). Положим

$$(4) \quad \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{it \cdot x} dm_n(x) \quad (t \in \mathbb{R}^n).$$

Заметим сначала, что, согласно (2), функция $(1 + |x|)^N f(x)$ при каждом N содержится в $L^1(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, по тем же соображениям, которые были использованы при доказательстве утверждения (с) теоремы 7.4, имеем $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Далее, мы утверждаем, что интеграл

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + i\eta, z_2, \dots, z_n) \exp \{i[t_1(\xi + i\eta) + t_2 z_2 + \dots + t_n z_n]\} d\xi$$

не зависит от η при любых вещественных $t_1, \dots, t_n$ и комплексных $z_2, \dots, z_n$. Чтобы обнаружить это, обозначим через Γ пря-

моугольный контур в $(\xi + i\eta)$ -плоскости, одна сторона которого расположена на вещественной оси, другая — на прямой $\eta = \eta_1$, а вертикальные стороны раздвигаются в бесконечность. По теореме Коши интеграл от подынтегрального выражения в (5), взятый по Γ , равен 0. Вместе с тем, согласно условиям (2), вклад в этот интеграл, возникающий при интегрировании по вертикальным отрезкам, стремится к 0. Отсюда следует, что (5) принимает одинаковые значения при $\eta = 0$ и при $\eta = \eta_1$. Тем самым наше утверждение доказано.

Такую же процедуру можно выполнить и с остальными координатами. Поэтому наряду с (4) имеет место представление

$$(6) \quad \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + iy) e^{it \cdot (x + iy)} dm_n(x)$$

при каждом $y \in \mathbb{R}^n$.

Для данного $t \in \mathbb{R}^n$, $t \neq 0$, положим $y = \lambda t / |t|$, где $\lambda > 0$. Тогда $t \cdot y = \lambda |t|$, $|y| = \lambda$ и

$$|f(x + iy) e^{it \cdot (x + iy)}| \leq \gamma_N (1 + |x|)^{-N} e^{(r - |t|)\lambda},$$

так что

$$(7) \quad |\varphi(t)| \leq \gamma_N e^{(r - |t|)\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-N} dm_n(x),$$

где N выбрано настолько большим, чтобы последний интеграл был конечным. Пусть теперь $\lambda \rightarrow \infty$. Если $|t| > r$, то, согласно (7), $\varphi(t) = 0$. Таким образом, носитель функции φ содержится в rB .

Для вещественных z формула (1) вытекает из (4) и теоремы обращения. Но, поскольку обе части равенства (1) представляют собой целые функции, они совпадают всюду на $\mathbb{C}^n$, согласно лемме 7.21. ■

Сделаем несколько замечаний в связи со следующей затем теоремой.

Пусть u — распределение в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем. Его преобразование Фурье определяется соотношением $\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi})$ и является медленно растущим распределением. Вместе с тем определение $\hat{f}(x) = \int f e_{-x} dm_n$, принятое для функций $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, наводит на мысль, что $\hat{u}$ может оказаться функцией, а именно

$$\hat{u}(x) = u(e_{-x}) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

поскольку $e_{-x} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и, как показано в пункте (d) теоремы 6.24, значение $u(\varphi)$ имеет смысл для каждой функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Более того, $e_{-z} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ для каждого $z \in \mathbb{C}^n$, и поэтому $u(e_{-z})$ похоже на целую функцию, сужение которой на $\mathbb{R}^n$ дает $\hat{u}$. Эти

рассуждения уточняются в следующей ниже теореме. Кроме того, возникающие здесь целые функции характеризуются в ней некоторыми условиями роста.

7.23. Теорема. (а) Если носитель распределения $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ содержится в rB , порядок распределения равен N и если

$$(1) \quad f(z) = u(e_{-z}) \quad (z \in \mathbb{C}^n),$$

то функция f является целой, ее сужение на $\mathbb{R}^n$ совпадает с преобразованием Фурье от u , кроме того, существует такая константа $\gamma < \infty$, что

$$(2) \quad |f(z)| \leq \gamma (1 + |z|)^N e^{r + |\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

(б) Обратно, если f — целая функция в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условиям (2) при некоторых N и γ , то существует такое распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ с носителем в rB , что выполняется соотношение (1).

Примечание. Обозначение $\hat{u}$ иногда используется для указания расширения на $\mathbb{C}^n$, задаваемого формулой (1). Таким образом, для всех $z \in \mathbb{C}^n$ полагают

$$\hat{u}(z) = u(e_{-z}).$$

Это расширение иногда называют преобразованием Фурье—Лапласа распределения u .

Доказательство. (а) Предположим, что носитель распределения $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ содержится в rB . Зафиксируем такую функцию $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, что $\psi = 1$ на $(r+1)B$. Тогда $u = \psi u$, и, согласно утверждению (е) теоремы 7.19, имеем

$$(3) \quad \hat{u} = (\psi u)^\wedge = \hat{u} * \hat{\psi}.$$

Таким образом, $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}_n$ таково, что $\hat{\varphi} = \psi$. Тогда

$$\begin{aligned} (\hat{u} * \hat{\psi})(x) &= (\hat{u} * \hat{\varphi})(x) = \hat{u}(\tau_x \varphi) = u((\tau_x \varphi)^\wedge) = \\ &= u(e_{-x} \hat{\varphi}) = u(\psi e_{-x}) = u(e_{-x}), \end{aligned}$$

откуда в силу (3) получаем

$$(4) \quad \hat{u}(x) = u(e_{-x}) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Теперь мы хотим показать, что функция f , определенная формулой (1), является целой. Выберем $a \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}^n$ и положим

$$(5) \quad g(\lambda) = f(a + \lambda b) = u(e_{-a - \lambda b}) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Непрерывность функции f ясна: если $w \rightarrow z$ в $\mathbb{C}^n$, то $e_{-w} \rightarrow e_{-z}$ в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а u является непрерывным функционалом на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Теперь достаточно показать, что каждая из функций g , опреде-

ляемых соотношением (5), является целой, и тем самым будет установлено, что функция f целая.

Пусть Γ — некоторый прямоугольник в $\mathbf{C}$. Так как $\lambda \rightarrow e_{-a-\lambda b}$ есть непрерывное отображение из $\mathbf{C}$ в $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, то $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ -значный интеграл

$$(6) \quad F = \int_{\Gamma} e_{-a-\lambda b} d\lambda$$

определен корректно. Кроме того, «значение в точке $t \in \mathbf{R}^n$ » есть непрерывный линейный функционал на $C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Поэтому можно переставить знак этого функционала со знаком интеграла. Следовательно,

$$F(t) = \int_{\Gamma} e_{-a-\lambda b}(t) d\lambda = \int_{\Gamma} e^{-ia \cdot t} e^{-i(b \cdot t)\lambda} d\lambda = 0.$$

Таким образом, $F = 0$ и из (6) вытекает, что

$$0 = u(F) = \int_{\Gamma} u(e_{-a-\lambda b}) d\lambda = \int_{\Gamma} g(\lambda) d\lambda.$$

Следовательно, по теореме Морера функция g является целой.

Чтобы закончить доказательство утверждения (b), теперь достаточно установить формулу (2). Выберем вспомогательную бесконечно дифференцируемую функцию h на вещественной оси, для которой $h(s) = 1$, если $s < 1$, и $h(s) = 0$, если $s > 2$, и сопоставим каждой точке $z \in \mathbf{C}^n$ ($z \neq 0$) функцию

$$(7) \quad \varphi_z(t) = e^{-iz \cdot t} h(|t||z| - r|z|) \quad (t \in \mathbf{R}^n).$$

Тогда $\varphi_z \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Так как носитель распределения u содержится в rB и так как $h(|t||z| - r|z|) = 1$, если $|t| \leq |z|^{-1} + r$, то, сравнивая формулы (1) и (7), мы видим, что

$$(8) \quad f(z) = u(\varphi_z).$$

Поскольку порядок распределения u равен N , найдется такая константа $\gamma_0 < \infty$, что $|u(\varphi)| \leq \gamma_0 \|\varphi\|_N$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, где $\|\varphi\|_N$ определено формулой (1) в п. 6.2; см. утверждение (d) теоремы 6.24. Поэтому формула (8) дает

$$(9) \quad |f(z)| \leq \gamma_0 \|\varphi_z\|_N.$$

На носителе функции φ_z имеем $|t| \leq r + 2|z|$, так что

$$(10) \quad |e^{-iz \cdot t}| = e^{y \cdot t} \leq e^{2+r|\operatorname{Im} z|}.$$

Если теперь мы применим формулу Лейбница к произведению (7) и используем (10) и (9), то получится неравенство (2).

Тем самым утверждение (a) полностью доказано.

(b) Так как функция f удовлетворяет условию (2), то

$$(11) \quad |f(x)| \leq \gamma(1 + |x|)^N \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Поэтому сужение функции f на $\mathbf{R}^n$ принадлежит к $\mathcal{S}'_n$ и является преобразованием Фурье некоторого медленно растущего распределения u .

Фиксируем некоторую функцию $h \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ с носителем в B , для которой $\int h = 1$, положим $h_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-n} h(t/\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$, и пусть

$$(12) \quad f_\varepsilon(z) = f(z) \hat{h}_\varepsilon(z) \quad (z \in \mathbf{C}^n),$$

где $\hat{h}_\varepsilon$ — целая функция, сужение которой на $\mathbf{R}^n$ есть преобразование Фурье функции h_ε . Утверждение (а) теоремы 7.22 в применении к h_ε позволяет сделать заключение, что функция f_ε удовлетворяет условию (2) теоремы 7.22 с заменой r на $r + \varepsilon$. Следовательно, согласно утверждению (б) теоремы 7.22, имеем $f_\varepsilon = \hat{\varphi}_\varepsilon$, где $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, причем носитель функции φ_ε содержится в $(r + \varepsilon)B$.

Рассмотрим такую функцию $\psi \in \mathcal{S}'_n$, что носитель функции $\hat{\psi}$ не пересекается с rB . Тогда $\hat{\psi}\varphi_\varepsilon = 0$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Так как $f\psi \in L^1(\mathbf{R}^n)$ и $\hat{h}_\varepsilon(x) = \hat{h}(\varepsilon x) \rightarrow 1$, оставаясь ограниченной на $\mathbf{R}^n$, то

$$\begin{aligned} u(\hat{\psi}) &= \hat{u}(\psi) = \int f\psi \, dm_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon \psi \, dm_n = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \hat{\varphi}_\varepsilon \psi \, dm_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \hat{\psi} \varphi_\varepsilon \, dm_n = 0. \end{aligned}$$

Поэтому носитель распределения u содержится в rB .

Теперь мы видим, что $z \rightarrow u(e_{-z})$ является целой функцией, и так как соотношение (1) выполняется при всех $z \in \mathbf{R}^n$ (согласно выбору u), то лемма 7.21 позволяет закончить доказательство утверждения (б). ■

Лемма Соболева

Если Ω — открытое собственное подмножество в $\mathbf{R}^n$, то преобразование Фурье не удается определить ни для функций с областью задания Ω , ни для распределений в Ω . Вместе с тем техника преобразования Фурье порой может применяться для решения локальных задач. Теорема 7.25, известная под названием леммы Соболева, представляет собой пример такого сорта.

7.24. Определения. Говорят, что комплексная измеримая функция f , заданная на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, локально принадлежит к L^2 в Ω , если $\int_K |f|^2 \, dm_n < \infty$ для каждого компакта $K \subset \Omega$.

Аналогично распределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ локально принадлежит к L^2 , если существует такая функция g , локально принадлежащая

к L^2 на Ω , что $u(\varphi) = \int_{\Omega} g\varphi \, dm_n$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Если говорится, что функция f обладает производной в смысле распределений $D^\alpha f$, локально принадлежащей к L^2 , то подразумевается *распределение* $D^\alpha f$ и имеется в виду существование такой функции g , локально принадлежащей к L^2 , что

$$\int_{\Omega} g\varphi \, dm_n = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^\alpha \varphi \, dm_n$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. При этом заранее ничего нельзя сказать относительно существования $D^\alpha f$ в классическом смысле, т. е. в смысле предела отношений.

С другой стороны, для каждого неотрицательного целого p класс $C^{(p)}(\Omega)$ состоит из тех комплексных функций f в Ω , для которых производные $D^\alpha f$ существуют в классическом смысле при каждом мультииндексе α , $|\alpha| \leq p$, и являются непрерывными функциями.

Символ D_i^k используется для обозначения дифференциального оператора $(\partial/\partial x_i)^k$.

7.25. Теорема. Пусть n, p, r — целые числа, причем $n > 0$, $p \geq 0$ и

$$(1) \quad r > p + \frac{n}{2}.$$

Предположим, что функция f , заданная на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, такова, что ее производные в смысле распределений $D_i^k f$ локально принадлежат к L^2 в Ω при $1 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq r$.

Тогда существует такая функция $f_0 \in C^{(p)}(\Omega)$, что $f_0(x) = f(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

Заметим, что в условии теоремы не фигурируют смешанные производные, т. е. члены вида $D_1 D_2 f$. Заключение состоит в том, что функцию f можно «исправить» на множестве меры 0 с таким расчетом, чтобы она попала в $C^{(p)}(\Omega)$.

В качестве следствия отметим еще, что $f_0 \in C^\infty(\Omega)$, если все производные в смысле распределений от f локально принадлежат к L^2 .

Доказательство. По предположению существуют такие функции g_{ik} , локально принадлежащие к L^2 на Ω , что

$$(2) \quad \int_{\Omega} g_{ik} \varphi \, dm_n = (-1)^k \int_{\Omega} f D_i^k \varphi \, dm_n \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

при $1 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq r$.

Пусть ω — открытое множество, замыкание которого K есть компактное подмножество в Ω . Выберем такую функцию $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

что $\psi = 1$ на K , и определим функцию F на $\mathbf{R}^n$, полагая

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x) f(x), & \text{если } x \in \Omega, \\ 0, & \text{если } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Тогда $F \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^1(\mathbf{R}^n)$.

По формуле Лейбница на множестве Ω имеем

$$(3) \quad D_i^r F = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (D_i^{r-s} \psi) (D_i^s f) = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (D_i^{r-s} \psi) g_{is}.$$

На дополнении Ω_0 к носителю функции ψ имеем $D_i^r F = 0$. На множестве $\Omega \cap \Omega_0$ эти два распределения совпадают. Поэтому $D_i^r F$, заданное вначале как распределение в $\mathbf{R}^n$, на самом деле оказывается $L^2(\mathbf{R}^n)$ -функцией при $1 \leq i \leq n$, поскольку функции $(D_i^{r-s} \psi) g_{is}$ принадлежат $L^2(\Omega)$. [Так как $D_i^r F$ обладают компактным носителем, то они принадлежат также и к $L^1(\mathbf{R}^n)$.]

Теорема Планшереля в применении к функциям F и $D_i^r F, \dots$, $D_n^r F$ теперь показывает, что

$$(4) \quad \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{F}|^2 dm_n < \infty$$

и

$$(5) \quad \int_{\mathbf{R}^n} y_i^{2r} |\hat{F}(y)|^2 dm_n(y) < \infty \quad (1 \leq i \leq n).$$

Так как

$$(6) \quad (1 + |y|)^{2r} < (2n + 2)^r (1 + y_1^{2r} + \dots + y_n^{2r}),$$

где $|y| = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}$, то из неравенств (4) и (5) вытекает неравенство

$$(7) \quad \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |y|)^{2r} |\hat{F}(y)|^2 dm_n(y) < \infty.$$

Если J обозначает интеграл в (7), а σ_n есть $(n-1)$ -мерный объем единичной сферы пространства $\mathbf{R}^n$, то неравенство Шварца дает

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |y|)^p |\hat{F}(y)| dm_n(y) \right\}^2 &\leq J \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |y|)^{2p-2r} dm_n(y) = \\ &= J \sigma_n \int_0^\infty (1+t)^{2p-2r} t^{n-1} dt < \infty, \end{aligned}$$

поскольку $2p - 2r + n - 1 < -1$. Тем самым мы доказали, что

$$(8) \quad \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |y|)^p |\hat{F}(y)| dm_n(y) < \infty.$$

Положим

$$(9) \quad F_\omega(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{F}(y) e^{ix \cdot y} dm_n(y) \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Согласно утверждению (с) теоремы обращения 7.7, имеем $F_\omega = F$ п. в. на $\mathbb{R}^n$. Кроме того, из условия (8) вытекает, что функции $y^\alpha \hat{F}(y)$ принадлежат L^1 , если $|\alpha| \leq p$. Теперь, повторяя доказательство утверждения (с) теоремы 7.4, мы заключаем, что

$$(10) \quad F_\omega \in C^{(p)}(\mathbb{R}^n).$$

Но наша функция f совпадает с F в ω . Поэтому $f = F_\omega$ п. в. в ω .

Если ω' — другое множество типа ω , то предыдущее рассуждение доказывает существование такой функции $F_{\omega'} \in C^{(p)}(\mathbb{R}^n)$, которая совпадает с f п. в. в ω' . Поэтому $F_{\omega'} = F_\omega$ в $\omega' \cap \omega$. Следовательно, искомую функцию f_0 можно корректно определить в Ω , если в ω положить ее равной F_ω . ■

Упражнения

1. Пусть A — обратимый линейный оператор в $\mathbb{R}^n$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $g(x) = f(Ax)$. Выразить явно $\hat{g}$ через $\hat{f}$. Тем самым будет получено обобщение утверждения (d) теоремы 7.2.

2. Не порождается ли топология пространства $\mathcal{S}_n$ некоторой инвариантной метрикой, относительно которой преобразование Фурье осуществляет изометрию пространства $\mathcal{S}_n$ на себя?

3. Рассмотрим на вещественной оси функции $f(x) = e^x$ и $g(x) = e^x \cos(e^x)$. Показать, что g является медленно растущим распределением, тогда как f не является.

4. Согласно упр. 3, существуют распределения, которые не являются медленно растущими. Каждое такое распределение является непрерывным линейным функционалом на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, не имеющим непрерывного линейного расширения на $\mathcal{S}_n$. Объяснить, почему это не противоречит теореме Хана — Банаха.

5. (a) Построить последовательность в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, которая сходится к 0 в топологии $\mathcal{S}_n$ и не сходится в топологии $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Построить последовательность полиномов, которая сходится в топологии $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, но не сходится в топологии $\mathcal{S}'_n$.

6. Доказать, что операции, перечисленные в теореме 7.13, суть *непрерывные* отображения пространства $\mathcal{S}'_n$ в себя.

7. Пусть $u \in \mathcal{S}'_n$. Доказать, что

$$(\tau_x u)^\wedge = e_{-x} \hat{u} \quad \text{и} \quad (e_x u)^\wedge = \tau_x \hat{u}$$

для каждого $x \in \mathbb{R}^n$.

8. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \neq 0$, λ — комплексное число и $\hat{f} = \lambda f$. Что можно сказать относительно λ ?

9. Доказать утверждение (a) теоремы 7.8 непосредственно (не привлекая преобразований Фурье).

10. Преобразование Фурье комплексной борелевской меры μ на $\mathbf{R}^n$ обычно определяется как функция $\hat{\mu}$, задаваемая равенством

$$\hat{\mu}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot t} d\mu(t) \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Конечно, μ является медленно растущим распределением, и в таком качестве его преобразование Фурье определено в п. 7.14. Доказать, что эти два определения совпадают. Доказать, что функция $\hat{\mu}$ ограничена и равномерно непрерывна.

11. Пусть $\Lambda: \mathcal{S}_n \rightarrow C(\mathbf{R}^n)$ — непрерывное линейное отображение и $\tau_x \Lambda = \Lambda \tau_x$ при каждом $x \in \mathbf{R}^n$. Существует ли такое распределение $u \in \mathcal{S}'_n$, что

$$\Lambda(\varphi) = u * \varphi$$

для всех $\varphi \in \mathcal{S}_n$?

12. Если $\{h_j\}$ — аппроксимативная единица в смысле определения 6.31 и $u \in \mathcal{S}'_n$, то верно ли, что $u * h_j \rightarrow u$ при $j \rightarrow \infty$ в слабой* топологии пространства $\mathcal{S}'_n$?

13. Пусть X и Y — полные метрические пространства, множество A плотно в X и $f: A \rightarrow Y$ — равномерно непрерывное отображение.

(а) Доказать, что f обладает единственным непрерывным продолжением $F: X \rightarrow Y$.

(б) Если f — изометрия, то это верно и в отношении F . Доказать также, что $F(X)$ замкнуто в Y .

[Это использовалось в доказательстве теоремы Планшереля; см. также упр. 19 в гл. 1.]

14. Пусть F — целая функция в $\mathbf{C}^n$, и пусть каждому $\varepsilon > 0$ отвечают такое целое $N(\varepsilon)$ и такое $\gamma(\varepsilon) < \infty$, что

$$|F(z)| \leq \gamma(\varepsilon) (1 + |z|)^{N(\varepsilon)} e^{\varepsilon |Im z|} \quad (z \in \mathbf{C}^n).$$

Доказать, что F — полином.

15. Пусть f — целая функция в $\mathbf{C}^n$, N — положительное целое число, $r \geq 0$ и

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (1 + |z|)^N e^{r |Im z|} && \text{для всех } z \in \mathbf{C}^n, \\ |f(x)| &\leq 1 && \text{для всех } x \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

Доказать, что тогда

$$|f(z)| \leq e^{r |Im z|} \quad \text{для всех } z \in \mathbf{C}^n.$$

Наводящее соображение. Фиксируем $z = x + iy \in \mathbf{C}^n$. При $\lambda \in \mathbf{C}$ и $s > 0$ положим

$$g_s(\lambda) = (1 - is\lambda)^{-N} e^{-1/2r|y|\lambda} f(x + \lambda y).$$

Примените к большому полукругу в верхней полуплоскости принцип максимума модуля, в результате чего должно получиться неравенство $|g_s(i)| < 1$. Положите $s \rightarrow 0$.

16. В пункте (б) теоремы 7.23 не утверждается, что распределение u имеет порядок N . Следующий пример показывает, что, вообще говоря, это и неверно.

Пусть μ — вероятностная борелевская мера на $\mathbf{R}^3$, сосредоточенная на единичной сфере S^2 и инвариантная относительно всех вращений сферы S^2 . Показать (используя сферические координаты), что

$$\hat{\mu}(x) = \frac{\sin |x|}{|x|} \quad (x \in \mathbf{R}^3).$$

Положим $u = D_1 \mu$. Тогда

$$|\hat{u}(x)| = |x_1 \hat{\mu}(x)| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}^3).$$

Из упр. 15 вывести, что

$$|u(e-z)| \leq \gamma e^{|\operatorname{Im} z|} \quad (z \in \mathbb{C}^3),$$

хотя u и не является распределением порядка 0. [Его порядок равен 1.] Найти явную формулу для целой функции $u(e-z)$, $z \in \mathbb{C}^3$.

17. Пусть u — распределение в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем K , преобразование Фурье которого $\hat{u}$ является ограниченной на $\mathbb{R}^n$ функцией.

(а) Предполагая, что $n=1$ или $n=2$, доказать, что $\psi u = 0$ для каждой функции $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, которая обращается в 0 на K .

(б) Предположим, что $n=2$ и что существует вещественный полином P от двух переменных, который обращается в 0 на K . Доказать, что $Pu = 0$ и что, следовательно, $\hat{u}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных $P(-D)\hat{u} = 0$. Например, если K — единичная окружность, то

$$\hat{u} + \Delta \hat{u} = 0,$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ — оператор Лапласа.

(с) Показать, привлекая упр. 16 и полином $1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, что утверждение (б), а потому и утверждение (а) перестает быть верным, если $n=2$ заменить на $n=3$.

(д) Пусть $n=1$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} = 0$ на K и $\hat{f}$ удовлетворяет условию Липшица порядка $1/2$, т. е. $|\hat{f}(t) - \hat{f}(s)| \leq C|t-s|^{1/2}$. Доказать, что тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{u}(x) dx = 0.$$

Наводящее соображение. При каждом n обозначим через H_ε множество всех точек, лежащих вне K , но на расстоянии, меньшем чем $\varepsilon > 0$, от K . Пусть $\{h_\varepsilon\}$ — аппроксимативная единица типа фигурирующей в доказательстве утверждения (б) теоремы 7.23. Используя теорему Планшереля, докажете неравенство

$$\|u * h_\varepsilon\|_2 \leq \|\hat{u}\|_\infty \varepsilon^{-n/2} \|h_1\|_2$$

и выведите отсюда, что

$$\|u(\varphi)\| \leq \|\hat{u}\|_\infty \|h_1\|_2 \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon^{-n} \int_{H_\varepsilon} |\varphi|^2 dm_n \right\}^{1/2}$$

для каждого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, равного нулю на K .

Это даст (а), а в несколько измененном виде — (д); утверждение (б) следует из (а).

18. Обязательно ли было привлекать функцию ψ при доказательстве теоремы 7.25? Нельзя ли было просто положить $F(x) = f(x)$ на K и $F(x) = 0$ вне K ?

19. Доказать, что в предположениях теоремы 7.25 производные $D^\alpha f$ локально принадлежат к L^2 для каждого мультииндекса α , такого, что $|\alpha| \leq r$.

20. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ — непрерывная функция с преобразованием Фурье

$$\hat{f}(y) = (1 + |y|)^{-4} \{\log(2 + |y|)\}^{-1} \quad (y \in \mathbb{R}^2).$$

Так как $|y|^3 \hat{f}(y)$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}^2)$, то, согласно теореме 7.25,

$f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$. Более сильное заключение $f \in C^{(2)}(\mathbb{R}^2)$ оказывается уже неверным, что устанавливается на основе соотношения

$$\frac{f(h, 0) + f(-h, 0) - 2f(0, 0)}{h^2} \rightarrow \infty \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Это означает, что в условии (1) теоремы 7.25 знак $>$ нельзя заменить на $\geq$.

21. Предположим, что первые производные $D_1 u, \dots, D_n u$ некоторого распределения u в $\mathbb{R}^n$ являются $L^2(\mathbb{R}^n)$ -функциями. Доказать, что тогда u также есть функция и что u локально принадлежит к L^2 . [Показать, что слово «локально» в заключении, вообще говоря, опустить нельзя.] Указание. На самом деле u есть сумма L^2 -функций и некоторой целой функции.

Если $n=1$, то u оказывается даже непрерывной функцией. Показать, что это более сильное утверждение неверно при $n=2$. Например, рассмотреть функцию

$$f(x) = \frac{|\log |x||^{1/4}}{1 + |x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^2).$$

См. упр. 11 гл. 8, где приводится аналогичный результат при более слабых предположениях.

22. Периодические распределения, или распределения на торе T^n , обладают *рядами Фурье*, теория которых проще, чем теория преобразований Фурье. В значительной степени это объясняется компактностью тора: каждое распределение на T^n обладает компактным носителем. В частности, понятие медленно растущего распределения теряет смысл.

Доказать ряд указанных ниже утверждений.

Напомним, что

$$T^n = \{(e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}) : x_j \text{ вещественны}\}.$$

Функцию φ на T^n можно отождествить с 2π -периодической по каждому переменному функцией $\tilde{\varphi}$ на $\mathbb{R}^n$, полагая

$$\tilde{\varphi}(x_1, \dots, x_n) = \varphi(e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}).$$

Через $\mathbb{Z}^n$ обозначается множество (аддитивная группа) n -строк $k = (k_1, \dots, k_n)$ целых чисел k_j . Для каждого $k \in \mathbb{Z}^n$ функция e_k на T^n определяется равенством

$$e_k(e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}) = e^{ik \cdot x} = \exp \{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)\}.$$

Через σ_n обозначается мера Хаара на T^n . Если $\varphi \in L^1(\sigma_n)$, то коэффициенты Фурье этой функции суть

$$\hat{\varphi}(k) = \int_{T^n} e_{-k} \varphi d\sigma_n \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

Через $\mathcal{D}(T^n)$ обозначается пространство всех тех функций φ на T^n , для которых $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если $\varphi \in \mathcal{D}(T^n)$, то

$$\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + k \cdot k)^N |\hat{\varphi}(k)|^2 \right\}^{1/2} < \infty$$

при $N=0, 1, 2, \dots$. Указанные нормы определяют на $\mathcal{D}(T^n)$ топологию пространства Фреше, причем эта топология совпадает с топологией, задаваемой нормами

$$\max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \tilde{\varphi}(x)| \quad (N=0, 1, 2, \dots).$$

Пространство $\mathcal{D}'(T^n)$ состоит из линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(T^n)$. Элементы этого пространства называются *распределениями* на T^n . Коэффициенты Фурье распределения $u \in \mathcal{D}'(T^n)$ определяются соотношениями

$$\hat{u}(k) = u(e_{-k}) \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

Каждому распределению $u \in \mathcal{D}'(T^n)$ соответствуют такие N и C , что

$$|\hat{u}(k)| \leq C(1+|k|)^N \quad (k \in \mathbb{Z}^n).$$

Обратно, если g — такая функция на $\mathbb{Z}^n$, что $|g(k)| \leq C(1+|k|)^N$ при некоторых C и N , то $g = \hat{u}$ для подходящего $u \in \mathcal{D}'(T^n)$.

Таким образом, имеется линейное взаимно однозначное соответствие между распределениями на T^n , с одной стороны, и функциями полиномиального роста на $\mathbb{Z}^n$ — с другой.

Если $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ — конечные множества, объединение которых совпадает с $\mathbb{Z}^n$, и если $u \in \mathcal{D}'(T^n)$, то «частичные суммы»

$$\sum_{k \in E_j} \hat{u}(k) e_k$$

сходятся к u при $j \rightarrow \infty$ в смысле слабой* топологии пространства $\mathcal{D}'(T^n)$.

Свертку $u+v$ двух элементов $u \in \mathcal{D}'(T^n)$ и $v \in \mathcal{D}'(T^n)$ проще всего определить, беря элемент с коэффициентами Фурье $\hat{u}(k) \hat{v}(k)$. Имеют место аналоги теорем 6.30 и 6.37, причем доказательства сильно упрощаются.

23. Видоизменить доказательство теоремы 7.25, используя вместо преобразований Фурье ряды Фурье, соответствующие замене функции F подходящей периодической функцией.

24. Пусть $c = (2/\pi)^{1/2}$. Для $j = 1, 2, 3, \dots$ определим функции g_j на вещественной оси, полагая

$$g_j(t) = \begin{cases} c/t, & \text{если } 1/j < |t| < j, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Доказать, что последовательность $\{\hat{g}_j\}$ равномерно ограничена и поточечно сходится при $j \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что если $f \in L^2(\mathbb{R})$, то последовательность $f * g_j$ сходится в L^2 -метрике к некоторой функции $Hf \in L^2$. Эта функция называется *преобразованием Гильберта* функции f ; формально говоря,

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

[Этот интеграл существует в смысле главного значения для почти всех x , но доказательство не очевидно; если, однако, функция f , например, удовлетворяет условию Липшица порядка 1, то доказательство становится тривиальным.] Доказать, что

$$\|Hf\|_2 = \|f\|_2 \quad \text{и} \quad H(Hf) = -f$$

для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$. Таким образом, H есть L^2 -изометрия периода 4.

Верно ли, что $Hf \in \mathcal{S}_n$, если $f \in \mathcal{S}_n$?

Глава 8

ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Фундаментальные решения

8.1. Введение. Мы будем заниматься линейными дифференциальными уравнениями в частных производных с постоянными коэффициентами. Такое уравнение имеет вид

$$(1) \quad P(D)u = v,$$

где P — непостоянный полином от n переменных (с комплексными коэффициентами), $P(D)$ — соответствующий дифференциальный оператор (см. п. 7.1), v — заданная функция или распределение, а функция (или распределение) u — *решение* уравнения (1).

Распределение $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется *фундаментальным решением* для оператора $P(D)$, если оно удовлетворяет уравнению (1) с правой частью $v = \delta$, где δ — мера Дирака, т. е.

$$(2) \quad P(D)E = \delta.$$

Основной из доказанных ниже результатов (теорема 8.5, принадлежащая Мальгранжу и Эренпрайсу) состоит в том, что *такое фундаментальное решение всегда существует*.

Предположим, что E удовлетворяет уравнению (2), и пусть v имеет компактный носитель. Положим

$$(3) \quad u = E * v.$$

Тогда u есть решение уравнения (1), так как

$$(4) \quad P(D)(E * v) = (P(D)E) * v = \delta * v = v$$

в силу теорем 6.35 и 6.37.

Таким образом, существование фундаментального решения приводит к некоторой общей теореме существования для уравнения (1). Заметим еще, что общее решение уравнения (1) отличается от $E * v$ решением однородного уравнения $P(D)u = 0$. Далее, формула (3) позволяет извлечь дополнительную информацию относительно u . Например, если $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Конечно, может случиться, что свертка $E * v$ существует для некоторых v , носитель которых не компактен. Поэтому возникает

задача отыскания таких E , за поведением которых на бесконечности легко проследить. Разумеется, лучше всего было бы найти E с компактным носителем. Но этого никогда нельзя сделать. Действительно, в таком случае $\hat{E}$ является целой функцией и, согласно (2), удовлетворяет уравнению $P\hat{E}=1$. Но произведение целой функции и полинома не может равняться 1, за исключением того случая, когда они являются константами.

Однако иногда уравнение $P\hat{E}=1$ можно использовать для нахождения E , а именно когда $1/P$ — медленно растущее распределение. В этом случае преобразование Фурье от $1/P$ представляет собой фундаментальное решение, которое является медленно растущим распределением. Примеры такого сорта см. в упр. 5—9.

Другой относящийся сюда вопрос — существование решений уравнения (1) с компактным носителем, когда v обладает компактным носителем. Ответ (даваемый теоремой 8.4) отчетливо показывает, что в задачах такого сорта недостаточно изучать P на $\mathbb{R}^n$, а весьма существенно поведение P на всем комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$.

8.2. Обозначения. Символом T^n обозначается тор, состоящий из всех точек $w \in \mathbb{C}^n$ вида

$$(1) \quad w = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}),$$

где $\theta_1, \dots, \theta_n$ вещественны; σ_n есть мера Хаара на T^n , т. е. мера Лебега, деленная на $(2\pi)^n$.

Полиномом степени N в $\mathbb{C}^n$ называется функция

$$(2) \quad P(z) = \sum_{|\alpha| \leq N} c(\alpha) z^\alpha \quad (z \in \mathbb{C}^n),$$

где α пробегает мультииндексы и $c(\alpha) \in \mathbb{C}$. Если имеет место (2) и $c(\alpha) \neq 0$ хотя бы для одного α с $|\alpha|=N$, то говорят, что полином P имеет в точности степень N .

8.3. Лемма. Пусть P — полином в $\mathbb{C}^n$ в точности степени N . Тогда существует такая константа $A < \infty$, зависящая только от P , что

$$(1) \quad |f(z)| \leq Ar^{-N} \int_{T^n} |(fP)(z+rw)| d\sigma_n(w)$$

для каждой целой функции f в $\mathbb{C}^n$, каждого $z \in \mathbb{C}^n$ и каждого $r > 0$.

Доказательство. Предположим сначала, что F — целая функция одного комплексного переменного и что

$$(2) \quad Q(\lambda) = c \prod_{i=1}^N (\lambda + a_i) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Положим $Q_0(\lambda) = c \prod (1 + \bar{a}_i \lambda)$. Тогда $cF(0) = (FQ_0)(0)$. Так как на единичной окружности $|Q_0| = |Q|$, то

$$(3) \quad |cF(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(FQ)(e^{i\theta})| d\theta.$$

Заданный полином P может быть записан в виде $P = P_0 + P_1 + \dots + P_N$, где слагаемое P_j есть однородный полином степени j . Определим A , полагая

$$(4) \quad \frac{1}{A} = \int_{T^n} |P_N| d\sigma_n.$$

Интеграл положителен, поскольку P имеет в точности степень N (см. часть (b) в упр. 1). Если $z \in \mathbb{C}^n$ и $w \in T^n$, то положим

$$(5) \quad F(\lambda) = f(z + r\lambda w), \quad Q(\lambda) = P(z + r\lambda w) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Старший коэффициент полинома Q равен $r^N P_N(w)$. Поэтому из неравенства (3) получается неравенство

$$(6) \quad r^N |P_N(w)| |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(fP)(z + re^{i\theta}w)| d\theta.$$

Если мы проинтегрируем неравенство (6) по мере σ_n , то будем иметь

$$(7) \quad |f(z)| \leq Ar^{-N} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta d \int_{T^n} |(fP)(z + re^{i\theta}w)| d\sigma_n(w).$$

Но мера σ_n инвариантна относительно замен переменных $w \rightarrow e^{i\theta}w$. Следовательно, внутренний интеграл в (7) не зависит от θ . Это дает (1). ■

8.4. Теорема. Пусть P — полином от n переменных, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, причем v имеет компактный носитель. Тогда уравнение

$$(1) \quad P(D)u = v$$

в том и только в том случае обладает решением с компактным носителем, когда найдется такая целая функция g в $\mathbb{C}^n$, что

$$(2) \quad Pg = \hat{v}.$$

Если последнее условие выполняется, то уравнение (1) имеет единственное решение u с компактным носителем, причем носитель этого распределения u лежит в выпуклой оболочке носителя распределения v .

Доказательство. Если уравнение (1) обладает решением u с компактным носителем, то, согласно утверждению (а) теоремы 7.23, соотношение (2) выполняется при $g = \hat{u}$.

Обратно, предположим, что соотношение (2) выполнено для некоторой целой функции g . Выберем такое $r > 0$, что носитель распределения v содержится в шаре $rB = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq r\}$. По лемме 8.3 из (2) вытекает, что

$$(3) \quad |g(z)| \leq A \int_{T^n} |\hat{v}(z+w)| d\sigma_n(w) \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Согласно утверждению (а) теоремы 7.23, существуют такие N и γ , что

$$(4) \quad |\hat{v}(z+w)| \leq \gamma(1+|z+w|)^N \exp\{r|\operatorname{Im}(z+w)|\}.$$

Имеются такие константы c_1 и c_2 , что

$$(5) \quad 1+|z+w| \leq c_1(1+|z|)$$

$$(6) \quad |\operatorname{Im}(z+w)| \leq c_2 + |\operatorname{Im} z|$$

для всех $z \in \mathbb{C}^n$ и $w \in T^n$. Из этих неравенств вытекает, что

$$(7) \quad |g(z)| \leq C(1+|z|)^N \exp\{r|\operatorname{Im} z|\} \quad (z \in \mathbb{C}^n),$$

где C — новая константа (зависящая от γ , A , N , c_1 , c_2 и r). В силу неравенства (7) и утверждения (b) теоремы 7.23 имеем $g = \hat{u}$, где u — распределение с носителем в шаре rB . Поэтому равенство (2) превращается в соотношение $P\hat{u} = \hat{v}$, которое равносильно уравнению (1).

Единственность решения u очевидна, поскольку может существовать не более одной целой функции $\hat{u}$, удовлетворяющей уравнению $P\hat{u} = \hat{v}$.

Предыдущие рассуждения показывают, что носитель S_u распределения u содержится в каждом замкнутом шаре с центром в начале координат, который содержит носитель S_v распределения v . Поскольку из (1) вытекает, что

$$(8) \quad P(D)(\tau_x u) = \tau_x v \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

то сказанное остается справедливым по отношению к $x + S_u$ и $x + S_v$. Следовательно, S_u содержится в пересечении всех замкнутых шаров (с любыми центрами в $\mathbb{R}^n$), содержащих S_v . Но это пересечение совпадает с выпуклой оболочкой множества S_v , и доказательство закончено. ■

8.5. Теорема. Пусть P — полином в $\mathbb{C}^n$ в точности степени N . Тогда дифференциальный оператор $P(D)$ обладает фундамен-

тальным решением E , которое удовлетворяет условию

$$(1) \quad |E(\psi)| \leq Ar^{-N} \int_{T^n} d\sigma_n(\omega) \int_{R^n} |\hat{\psi}(t + r\omega)| dm_n(t)$$

при любых $\psi \in \mathcal{D}(R^n)$ и $r > 0$.

Здесь A — константа, фигурирующая в лемме 8.3. Основной момент в теореме — доказательство существования фундаментального решения, а не оценки (1), которая просто возникает в процессе доказательства.

Доказательство. Фиксируем $r > 0$ и положим

$$(2) \quad \|\psi\| = \int_{T^n} d\sigma_n(\omega) \int_{R^n} |\hat{\psi}(t + r\omega)| dm_n(t).$$

Прежде чем переходить к основной части доказательства, покажем, что

$$(3) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|\psi_j\| = 0, \text{ если } \psi_j \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{D}(R^n).$$

Заметим, что $\hat{\psi}(t + \omega) = (e_\omega \psi)^\wedge(t)$, если $t \in R^n$ и $\omega \in C^n$. Поэтому

$$(4) \quad \|\psi\| = \int_{T^n} d\sigma_n(\omega) \int_{R^n} |(e_{-r\omega} \psi)^\wedge| dm_n.$$

Если $\psi_j \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}(R^n)$, то носители всех функций ψ_j содержатся в некотором компактном множестве K . Функции $e_{r\omega}$ ($\omega \in T^n$) равномерно ограничены на K . Из формулы Лейбница следует, что

$$(5) \quad \|D^\alpha (e_{-r\omega} \psi_j)\|_\infty \leq C(K, \alpha) \max_{\beta \leq \alpha} \|D^\beta \psi_j\|_\infty.$$

Правая часть в (5) стремится к 0 при каждом α . Поэтому для любого данного $\varepsilon > 0$ существует такое j_0 , что

$$(6) \quad \|(I - \Delta)^n (e_{-r\omega} \psi_j)\|_2 < \varepsilon \quad (j > j_0, \omega \in T^n),$$

где $\Delta = D_1^2 + \dots + D_n^2$ — оператор Лапласа. Согласно теореме Планшереля, неравенство (6) равносильно неравенству

$$(7) \quad \int_{R^n} |(1 + |t|^2)^n \hat{\psi}_j(t + r\omega)|^2 dm_n(t) < \varepsilon^2,$$

а это последнее вместе с неравенством Шварца и неравенством (2) показывает, что $\|\psi_j\| < C\varepsilon$ для всех $j > j_0$, где

$$(8) \quad C^2 = \int_{R^n} (1 + |t|^2)^{-2n} dm_n(t) < \infty.$$

Тем самым (3) доказано.

Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ и

$$(9) \quad \psi = P(D)\varphi.$$

Тогда $\hat{\psi} = P\hat{\varphi}$, причем функции $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ являются целыми, так что функция $\hat{\varphi}$ полностью определяется функцией $\hat{\psi}$. В частности,

$\varphi(0)$ есть линейный функционал по ψ , определенный на образе оператора $P(D)$. Суть доказательства состоит в установлении непрерывности этого функционала. Точнее, надо установить, что функционал $\psi = P(D)\varphi \rightarrow \varphi(0)$ (вначале заданный на образе оператора $P(D)$) порождается некоторым распределением, т. е. существует такое распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, что

$$(10) \quad u(P(D)\varphi) = \varphi(0) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)),$$

поскольку тогда распределение $E = \check{\varphi}$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} (P(D)E)(\varphi) &= E(P(-D)\varphi) = u((P(-D)\varphi)^\sim) = \\ &= u(P(D)\check{\varphi}) = \check{\varphi}(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi), \end{aligned}$$

т. е. $P(D)E = \delta$, как и утверждалось.

Лемма 8.3 в применении к $P\hat{\varphi} = \hat{\psi}$ дает

$$(11) \quad |\hat{\varphi}(t)| \leq Ar^{-N} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(t+rw)| d\sigma_n(w) \quad (t \in \mathbb{R}^n).$$

По теореме обращения имеем $\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi} dm_n$. Таким образом, из

(11), (2) и (9) получаем

$$(12) \quad |\varphi(0)| \leq Ar^{-N} \|P(D)\varphi\| \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Пусть Y — подпространство в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций вида $P(D)\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Согласно (12), теорема Хана — Банаха 3.3 показывает, что линейный функционал на Y , определенный равенством $P(D)\varphi \rightarrow \varphi(0)$, расширяется до линейного функционала u на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющего условию (10) и условию

$$(13) \quad |u(\psi)| \leq Ar^{-N} \|\psi\| \quad (\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Последнее, согласно (3), означает, что $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. ■

Эллиптические уравнения

8.6. Введение. Пусть u — дважды непрерывно дифференцируемая функция на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Очень хорошо известно, что тогда функция u на самом деле принадлежит $C^\infty(\Omega)$ хотя бы потому, что каждая вещественная гармоническая функция в Ω является (по крайней мере локально) вещественной частью некоторой голоморфной функции. Теоремы такого типа, в которых устанавливается, что каждое решение некоторого дифференциального уравнения обладает большей гладкостью, чем это ясно заранее, называются *теоремами регулярности*.

Мы дадим доказательство довольно общей теоремы регулярности для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Термин «эллиптический» будет вскоре определен. Прежде всего, вероятно, интересно отметить, что уравнение

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

ведет себя совершенно иначе, чем уравнение (1), поскольку ему удовлетворяет любая функция u вида $u(x, y) = f(y)$, где f — произвольная дифференцируемая функция. Более того, если уравнение (2) интерпретировать как

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

то в качестве f можно взять совершенно произвольную функцию.

8.7. Определения. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, N — положительное целое число, $f_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ для каждого мультииндекса α , такого, что $|\alpha| \leq N$, причем хотя бы одна из функций f_α с $|\alpha| = N$ не обращается в 0 тождественно. Перечисленные данные позволяют определить линейный дифференциальный оператор

$$(1) \quad L = \sum_{|\alpha| \leq N} f_\alpha D_\alpha,$$

который на распределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ действует по правилу

$$(2) \quad Lu = \sum_{|\alpha| \leq N} f_\alpha D_\alpha u.$$

Число N называется *порядком* оператора L . Оператор

$$(3) \quad \sum_{|\alpha| = N} f_\alpha D_\alpha$$

называется *главной частью* оператора L . *Характеристическим полиномом* оператора L называется функция

$$(4) \quad p(x, y) = \sum_{|\alpha| = N} f_\alpha(x) y^\alpha \quad (x \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n).$$

Эта функция является однородным полиномом степени N по переменным $y = (y_1, \dots, y_n)$ с коэффициентами из $C^\infty(\Omega)$.

Говорят, что оператор L *эллиптический*, если $p(x, y) \neq 0$ при всех $x \in \Omega$ и всех $y \in \mathbb{R}^n$, за исключением, конечно, точки $y = 0$. Заметим, что эллиптичность определяется в терминах главной части оператора L ; члены более низкого порядка, фигурирующие в представлении (1), роли не играют.

Например, характеристическим полиномом оператора Лапласа

$$(5) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

служит $p(x, y) = -(y_1^2 + \dots + y_n^2)$, так что Δ — эллиптический оператор.

С другой стороны, если $L = \partial^2 / \partial x_1 \partial x_2$, то $p(x, y) = -y_1 y_2$, и L эллиптическим не является.

В формулировке основного результата, на который мы нацелены (теорема 8.12), фигурируют некоторые специальные пространства медленно растущих распределений, и мы начнем с их описания.

8.8. Пространства Соболева. Сопоставим каждому вещественному числу s положительную меру μ_s на $\mathbf{R}^n$, полагая

$$(1) \quad d\mu_s(y) = (1 + |y|^2)^s dm_n(y).$$

Если $f \in L^2(\mu_s)$, т. е. если $\int |f|^2 d\mu_s < \infty$, то f является медленно растущим распределением (пример (с) в п. 7.12). Поэтому f служит преобразованием Фурье некоторого медленно растущего распределения u . Векторное пространство всех таких распределений u обозначается через H^s . Наделенное нормой

$$(2) \quad \|u\|_s = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{u}|^2 d\mu_s \right)^{1/2}$$

пространство H^s , очевидно, изометрически изоморфно пространству $L^2(\mu_s)$.

Эти пространства H^s называются *пространствами Соболева*. Размерность n не указана в обозначении, поскольку она всюду в дальнейшем будет оставаться одной и той же.

По теореме Планшереля, $H^0 = L^2$.

Очевидно, что $H^s \subset H^t$, если $t < s$. Объединение X всех пространств H^s есть, следовательно, векторное пространство. Говорят, что линейный оператор $\Lambda: X \rightarrow X$ имеет порядок t , если его сужение на каждое из H^s осуществляет непрерывное отображение этого подпространства H^s в H^{s-t} . Заметим, что число t здесь не обязательно целое¹⁾.

В следующей теореме описаны свойства пространств Соболева, которые будут использоваться.

8.9. Теорема. (а) *Каждое распределение с компактным носителем принадлежит некоторому пространству H^s .*

¹⁾ В данном здесь определении порядка оператора надо сделать дополнительное ударение на слове «имеет», так как по формальному смыслу этого определения, с одной стороны, существуют операторы, не имеющие порядка, а с другой — одному и тому же оператору (например, нулевому) можно, вообще говоря, соотносить различные числа в качестве порядка. Быть может, удобнее называть операторы, подчиненные указанному условию, *имеющими порядок не выше t* , а затем порядком оператора назвать нижнюю грань допустимых t (хотя при этом все еще остается «тонкий» вопрос о достижимости). Впрочем, читатель не должен встретить в дальнейшем затруднений, если по ходу дела продумает выражения типа «оператор имеет порядок 0». — *Прим. ред.*

(b) Если $-\infty < t < \infty$, то отображение $u \rightarrow v$, задаваемое формулой

$$\hat{v}(y) = (1 + |y|^2)^{t/2} \hat{u}(y) \quad (y \in \mathbb{R}^n),$$

является линейной изометрией пространства H^s на пространство H^{s-t} и, следовательно, есть оператор порядка t , обратный к которому имеет порядок $-t$.

(c) Если $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, то отображение $u \rightarrow v$, задаваемое равенством $\hat{v} = b\hat{u}$, есть оператор порядка 0.

(d) Для каждого мультииндекса α оператор D_α имеет порядок $|\alpha|$.

(e) Если $f \in \mathcal{S}_n$, то $u \rightarrow fu$ есть оператор порядка 0.

Доказательство. Если распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель, то, согласно утверждению (a) теоремы 7.23,

$$(1) \quad |\hat{u}(y)| \leq C(1 + |y|)^N \quad (y \in \mathbb{R}^n)$$

для некоторых констант C и N . Поэтому $u \in H^s$, если $s < -N - n/2$. Этим установлено утверждение (a). Утверждения (b) и (c) очевидны. Из соотношения

$$|(D_\alpha u)^\wedge y| = |y^\alpha| |\hat{u}(y)| \leq (1 + |y|^2)^{|\alpha|/2} |\hat{u}(y)|$$

вытекает

$$(2) \quad \|D_\alpha u\|_{s-|\alpha|} \leq \|u\|_s,$$

так что (d) тоже выполнено.

Доказательство утверждения (e) опирается на неравенство

$$(3) \quad (1 + |x + y|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + |x|^2)^s (1 + |y|^2)^{|s|},$$

справедливое при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ и $-\infty < s < \infty$. Случай $s = 1$ в (3) очевиден. Заменой x на $x + y$ и y на $-y$ из него получается случай $s = -1$. Общий случай неравенства (3) получается из этих двух возведением в степень $|s|$.

Из неравенства (3) вытекает, что

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |h(x - y)|^2 d\mu_s \leq 2^{|s|} (1 + |y|^2)^{|s|} \int_{\mathbb{R}^n} |h|^2 d\mu_s$$

для любой измеримой функции h на $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь $u \in H^s$, $f \in \mathcal{S}_n$ и $t > |s| + n/2$. Так как $\hat{f} \in \mathcal{S}_n$, то $\|\hat{f}\|_t < \infty$. Положим $\gamma = \mu_{|s|+t}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\gamma < \infty$. Рассмотрим функцию $F = |\hat{u}| * |\hat{f}|$. По теореме 7.19,

$$(5) \quad |(fu)^\wedge| = |\hat{u} * \hat{f}| \leq |\hat{u}| * |\hat{f}| = F.$$

В силу неравенства Шварца

$$(6) \quad |F(x)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 d\mu_t(y) \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(x - y)|^2 d\mu_{-t}(y)$$

для каждого $x \in \mathbb{R}^n$. Проинтегрируем неравенство (6) по всему пространству $\mathbb{R}^n$ относительно меры μ_s . Согласно (4), в результате получится неравенство

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |F|^2 d\mu_s \leq 2^{1s} \gamma \|f\|_t^2 \|u\|_s^2.$$

Из неравенств (5) и (7) вытекает, что

$$(8) \quad \|fu\|_s \leq (2^{1s} \gamma)^{1/2} \|f\|_t \|u\|_s.$$

Тем самым доказано утверждение (е). ■

8.10. Определение. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что распределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ локально принадлежит к H^s , если каждой точке $x \in \Omega$ соответствует такое распределение $v \in H^s$, что $u = v$ в некоторой окрестности ω точки x . (См. п. 6.19.)

8.11. Теорема. Если $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $-\infty < s < \infty$, то следующие утверждения эквивалентны:

(а) распределение u локально принадлежит к H^s ;

(б) $\psi u \in H^s$ для каждого $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Кроме того, если s — неотрицательное целое число, то утверждения (а) и (б) эквивалентны следующему:

(с) $D_\alpha u$ локально принадлежит к L^2 при каждом α , таком, что $|\alpha| \leq s$.

Утверждение (б), быть может, требует некоторых пояснений, поскольку функционал u действует только на пробные функции с носителями в Ω . Однако ψu — функционал, сопоставляющий функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ число

$$(\psi u)(\varphi) = u(\psi\varphi),$$

а так как $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то $u(\psi\varphi)$ определено.

Доказательство. Предположим, что u локально принадлежит к H^s . Пусть K — носитель некоторой функции $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Так как K — компакт, то найдется конечное семейство открытых множеств $\omega_i \subset \Omega$, объединение которых покрывает K , причем на ω_i распределение u совпадает с некоторым $v_i \in H^s$. Существуют такие функции $\psi_i \in \mathcal{D}(\omega_i)$, что $\sum \psi_i = 1$ на K . Если $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $\psi_i \varphi \in \mathcal{D}(\omega_i)$ и, следовательно,

$$u(\psi\varphi) = \sum u(\psi_i \varphi) = \sum v_i(\psi_i \varphi).$$

Таким образом, $\psi u = \sum \psi_i \varphi v_i$. Согласно утверждению (е) теоремы 8.9, имеем $\psi_i \varphi v_i \in H^s$ при каждом i . Поэтому $\psi u \in H^s$. Это означает, что из условия (а) вытекает (б).

Если условие (б) выполняется, $x \in \mathbb{R}^n$ и если функция $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ равна 1 в некоторой окрестности ω точки x , то $u = \psi u$ в ω и, по предположению, $\psi u \in H^s$. Таким образом, из (б) вытекает (а).

Предположим снова, что выполняется условие (b). Если $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то $\psi u \in H^s$, и поэтому $D_\alpha(\psi u) \in H^{s-|\alpha|}$ в силу утверждения (d) теоремы 8.9. Если $|\alpha| \leq s$, то

$$H^{s-|\alpha|} \subset H^0 = L^2(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, $D_\alpha(\psi u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Предполагая, что $\psi = 1$ в некоторой окрестности точки $x \in \Omega$, мы видим, что $D_\alpha u$ локально принадлежит к L^2 в Ω . Поэтому из (b) вытекает (c).

Предположим, наконец, что $D_\alpha u$ локально принадлежит к L^2 для каждого мультииндекса α , такого, что $|\alpha| \leq s$. Выберем $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Из формулы Лейбница ясно, что $D_\alpha(\psi u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, если $|\alpha| \leq s$. Поэтому

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |y^\alpha|^2 |(\psi u)^\wedge(y)|^2 dm_n(y) < \infty \quad (|\alpha| \leq s).$$

Если s — неотрицательное целое число, то неравенство (1), в частности, будет выполняться, когда в качестве y^α берутся мономы $y_1^s, \dots, y_n^s$. Как и при доказательстве теоремы 7.25, отсюда вытекает, что

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|^2)^s |(\psi u)^\wedge(y)|^2 dm_n(y) < \infty.$$

Таким образом, $\psi u \in H^s$, т. е. из (c) вытекает (b), и доказательство закончено. ■

8.12. Теорема. *Предположим, что Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и*

(a) $L = \sum f_\alpha D_\alpha$ — линейный эллиптический дифференциальный оператор в Ω порядка $N \geq 1$ с коэффициентами $f_\alpha \in C^\infty(\Omega)$,

(b) коэффициенты f_α , где $|\alpha| = N$, постоянны,

(c) u и v — распределения в Ω , связанные соотношением

$$(1) \quad Lu = v,$$

причем v локально принадлежит к H^s .

Тогда u локально принадлежит к H^{s+N} .

Следствие. *Если оператор L удовлетворяет условиям (a) и (b) и если $v \in C^\infty(\Omega)$, то каждое решение u уравнения (1) принадлежит $C^\infty(\Omega)$. В частности, каждое решение однородного уравнения $Lu = 0$ содержится в $C^\infty(\Omega)$.*

В самом деле, если $v \in C^\infty(\Omega)$, то $\psi v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ для каждого $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Поэтому v локально принадлежит к H^s при каждом s . В теореме утверждается, что тогда u локально принадлежит к H^s при каждом s . Согласно теоремам 8.11 и 7.25, отсюда следует, что $u \in C^\infty(\Omega)$.

Условие (b) теоремы может быть опущено, однако его выполнение существенно упрощает доказательство.

Доказательство. Фиксируем точку $x \in \Omega$ и рассмотрим замкнутый шар $B_0 \subset \Omega$ с центром в точке x . Пусть функция $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ равняется 1 на некотором открытом множестве, содержащем B_0 . Согласно утверждению (а) теоремы 8.9, имеем $\varphi_0 u \in H^t$ при некотором t . При убывании t пространство H^t расширяется, и поэтому мы можем считать, что $t = s + N - k$, где k — положительное целое число. Выберем замкнутые шары

$$B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_k$$

с центрами в точке x , каждый из которых лежит строго внутри предыдущего. Выберем такие функции $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, что $\varphi_i = 1$ на некотором открытом множестве, содержащем B_i , и $\varphi_i = 0$ вне B_{i-1} . Так как $\varphi_0 u \in H^t$, то ввиду следующего ниже «вспомогательного» предложения мы будем иметь

$$\varphi_1 u \in H^{t+1}, \dots, \varphi_k u \in H^{t+k}.$$

Это позволяет сделать вывод, что u локально принадлежит к H^{s+N} , поскольку $t+k = s+N$ и $\varphi_k = 1$ на шаре B_k .

Предложение. Если в дополнение к условиям теоремы 8.12 имеем $\psi \in H^t$ для некоторого $t \leq s + N - 1$ и некоторой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, равной 1 на открытом множестве, содержащем носитель функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то $\varphi \psi \in H^{t+1}$.

Доказательство. Мы покажем сначала, что

$$(2) \quad L(\varphi u) \in H^{t-N+1}.$$

Рассмотрим распределение

$$(3) \quad \Lambda = L(\varphi u) - \varphi Lu = L(\varphi u) - \varphi v.$$

Так как носитель этого распределения содержится в носителе φ , то в (3) можно, не изменяя Λ , заменить u на ψu . Другими словами,

$$(4) \quad \Lambda = L(\varphi \psi u) - \varphi L(\psi u) = \sum_{|\alpha| \leq N} f_\alpha \cdot [D_\alpha(\varphi \psi u) - \varphi D_\alpha(\psi u)].$$

Из формулы Лейбница в применении к $D_\alpha(\varphi \cdot \psi u)$ видно, что производные порядка N от ψu взаимно уничтожаются в (4). Следовательно, распределение Λ представляется в виде линейной комбинации (с коэффициентами из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$) производных порядка не выше $N-1$ от ψu . Так как $\psi u \in H^t$, то, согласно утверждениям (d) и (e) теоремы 8.9, $\Lambda \in H^{t-N+1}$. По теореме 8.11 имеем $\varphi v \in H^s$, а так как $t - N + 1 \leq s$, то $\varphi v \in H^{t-N+1}$. Поэтому включение (2) является следствием соотношения (3).

Поскольку оператор L эллиптический, его характеристический полином

$$(5) \quad p(y) = \sum_{|\alpha| = N} f_\alpha y^\alpha \quad (y \in \mathbb{R}^n)$$

не имеет нулей нигде в $\mathbf{R}^n$, за исключением точки $y=0$. Рассмотрим функции

$$(6) \quad q(y) = |y|^{-N} p(y), \quad r(y) = (1 + |y|^N) q(y)$$

при $y \in \mathbf{R}^n$, $y \neq 0$, и определим операторы Q , R , S на объединении пространств Соболева, полагая

$$(7) \quad (Qw)^\wedge = q\hat{w}, \quad (Rw)^\wedge = r\hat{w}$$

и

$$(8) \quad S = \sum_{|\alpha| < N} \psi f_\alpha D_\alpha.$$

Так как p является однородным полиномом степени N , то $q(\lambda y) = q(y)$ при $\lambda > 0$. Далее, так как полином p обращается в нуль только в начале координат, то ввиду компактности единичной сферы пространства $\mathbf{R}^n$ обе функции q и $1/q$ оказываются ограниченными. Поэтому из утверждения (с) теоремы 8.9 вытекает, что оба оператора Q и Q^{-1} являются операторами порядка 0.

Функции

$$(1 + |y|^2)^{-N/2} (1 + |y|^N) \quad \text{и} \quad [(1 + |y|^2)^{-N/2} (1 + |y|^N)]^{-1}$$

также обе ограничены на $\mathbf{R}^n$. Поэтому из результатов предыдущего пункта в сочетании с утверждениями (b) и (с) теоремы 8.9 вытекает, что оператор R имеет порядок N , а обратный к нему оператор R^{-1} имеет порядок $-N$.

Поскольку $\psi f_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, из утверждений (d) и (e) теоремы 8.9 вытекает, что оператор S имеет порядок $N-1$.

Так как $p = r - q$ и так как по предположению полином p имеет постоянные коэффициенты f_α , то

$$(9) \quad \left(\sum_{|\alpha|=N} f_\alpha D_\alpha w \right)^\wedge = p\hat{w} = (r - q)\hat{w} = (Rw - Qw)^\wedge,$$

если w принадлежит некоторому пространству Соболева. Поэтому

$$(10) \quad (R - Q + S)(\varphi u) = L(\varphi u).$$

Согласно (2), имеем $L(\varphi u) \in H^{t-N+1}$.

Так как $\varphi u \in H^t$ и $\varphi \psi = \varphi$, то $\varphi u = \varphi \psi u \in H^t$ в силу утверждения (e) теоремы 8.9. Поэтому

$$(11) \quad (Q - S)(\varphi u) \in H^{t-N+1},$$

ибо оператор Q имеет порядок 0, а оператор S — порядок $N-1 \geq 0$. Из (10) теперь вытекает, что

$$(12) \quad R(\varphi u) \in H^{t-N+1},$$

и так как оператор R^{-1} имеет порядок $-N$, то мы получаем окончательно, что $\varphi u \in H^{t+1}$. ■

8.13. Пример. Пусть L — эллиптический дифференциальный оператор в $\mathbf{R}^n$ с постоянными коэффициентами и E — фундамен-

тальное решение для оператора L . В области, дополнительной к началу координат, уравнение $LE = \delta$ сводится к уравнению $LE = 0$. Согласно теореме 8.12, вне начала координат E является бесконечно дифференцируемой функцией. Характер особенности функции E в начале координат зависит, конечно, от оператора L ¹⁾.

8.14. Пример. Начало координат в $\mathbf{R}^2$ служит единственным нулем полинома $p(y) = y_1 + iy_2$. Если Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^2$ и распределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ служит (обобщенным) решением уравнения Коши — Римана

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u = 0,$$

то, по теореме 8.12, $u \in C^\infty(\Omega)$. Отсюда следует, что u является голоморфной функцией по $z = x_1 + ix_2$ в Ω . Другими словами, *каждое голоморфное распределение является голоморфной функцией*.

Упражнения

1. Следующие простые свойства голоморфных функций нескольких переменных использовались в данной главе без всяких оговорок. Проверить, что они действительно имеют место.

(а) Пусть f — целая функция в $\mathbf{C}^n$. Если $w \in \mathbf{C}^n$ и $\varphi(\lambda) = f(\lambda w)$, то φ является целой функцией одного комплексного переменного.

(б) Если P — такой полином в $\mathbf{C}^n$, что

$$\int_{T^n} |P| d\sigma_n = 0,$$

то P тождественно равен 0. *Указание:* вычислите $\int_{T^n} |P|^2 d\sigma_n$

(с) Если P — полином (не равный нулю тождественно) и g — целая функция в $\mathbf{C}^n$, то может существовать не более одной такой целой функции f , что $Pf = g$.

¹⁾ Вопрос о характере локальной особенности фундаментального решения для эллиптических операторов имеет смысл, потому что разность между двумя фундаментальными решениями служит решением однородного уравнения и, значит, является бесконечно дифференцируемой функцией. Более широкий класс дифференциальных операторов, для которых указанный вопрос сохраняет смысл, — это класс гипоеллиптических операторов. Они характеризуются, например, тем свойством, что каждое решение однородного уравнения (во всем пространстве или хотя бы в одной области) является бесконечно дифференцируемой функцией (но не обязательно локально аналитической, как это на самом деле имеет место для эллиптических операторов). Гипоеллиптические операторы допускают сравнительно простое алгебраическое описание (см., например, [47]). Характерно, что это свойство, в отличие от эллиптичности, не определяется главной частью. Например, гипоеллиптическим является оператор теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Для эллиптических операторов известно, что фундаментальное решение локально суммируемо (в начале координат); для гипоеллиптических операторов это доказано, по-видимому, только в двумерном случае (В. П. Паламонов). — *Прим. ред.*

Поискать обобщения перечисленных свойств.

2. Проверить утверждение относительно выпуклой оболочки, содержащейся в последнем предложении доказательства теоремы 8.4.

3. Найти фундаментальное решение для оператора $\partial^2/\partial x_1 \partial x_2$ в $\mathbf{R}^2$. [Имеется фундаментальное решение, которое является характеристической функцией подходящего подмножества в $\mathbf{R}^2$.]

4. Показать, что уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

удовлетворяет (в смысле распределений) каждая локально интегрируемая функция u вида

$$u(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2) \quad \text{или} \quad u(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2)$$

и что даже среди классических решений (т. е. дважды непрерывно дифференцируемых функций) не все содержатся в C^∞ . Это контрастирует с положением дел для уравнения Лапласа.

5. Для $x \in \mathbf{R}^3$ положим $f(x) = (1 + |x|^2)^{-1}$. Показать, что $f \in L^2(\mathbf{R}^3)$ и что $\hat{f}$ служит фундаментальным решением для оператора $I - \Delta$ в $\mathbf{R}^3$. Найти $\hat{f}$ путем прямого вычисления и при помощи следующих соображений:

(а) Так как функция f сферически симметрична (т. е. ее значение в данной точке зависит только от расстояния этой точки до начала координат), то и функция $\hat{f}$ сферически симметрична; см. упр. 1 в гл. 7.

(б) Вне начала координат имеем $(I - \Delta)\hat{f} = 0$ и $\hat{f} \in C^\infty$.

(с) Если $F(|y|) = \hat{f}(y)$, то, согласно (б), функция F на интервале $(0, \infty)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению, которое легко решается в явном виде.

Ответ: $\hat{f}(y) = (\pi/2)^{1/2} |y|^{-1} \exp(-|y|)$.

Проделать то же самое с $\mathbf{R}^n$ вместо $\mathbf{R}^3$; при этом должны встретиться функции Бесселя.

6. Для $0 < \lambda < n$ и $x \in \mathbf{R}^n$ положим

$$K_\lambda(x) = |x|^{-\lambda}.$$

Показать, что

$$(a) \quad \hat{K}_\lambda(y) = c(n, \lambda) K_{n-\lambda}(y) \quad (y \in \mathbf{R}^n),$$

где

$$c(n, \lambda) = 2^{n/2-\lambda} \Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Наводящие соображения. Если $n < 2\lambda < 2n$, то K_λ представляется в виде суммы некоторой L^1 -функции и некоторой L^2 -функции. Для таких λ уравнение (а) выводится из условия однородности

$$K_\lambda(tx) = t^{-\lambda} K_\lambda(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n, t > 0).$$

Случай $0 < 2\lambda < n$ получается при помощи теоремы обращения (для медленно растущих распределений). Затем предельный переход дает случай $2\lambda = n$. Константы $c(n, \lambda)$ можно вычислить, исходя из равенства $\int \hat{f} \hat{\varphi} = \int f \varphi$, где $\varphi(x) = \exp(-|x|^2/2)$.

7. Взяв $n \geq 3$ и $\lambda = 2$ в упр. 6, вывести, что $-c(n, 2) K_{n-2}$ является фундаментальным решением для оператора Лапласа Δ в $\mathbb{R}^n$. Показать, в частности, что если v имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^3$, то

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |x-y|^{-1} v(y) dy$$

служит решением уравнения $\Delta u = v$.

8. Отождествим $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ (полагая $z = x_1 + ix_2$). Пусть

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Показать, что преобразованием Фурье от $1/z$ (эта функция рассматривается здесь как медленно растущее распределение) является $-i/z$. Показать, что этот факт эквивалентен формуле Коши—Грина

$$\varphi(z) = - \int_{\mathbb{R}^2} (\bar{\partial} \varphi)(w) \frac{dm_2(w)}{w-z} \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)).$$

Так как $\partial \log |w| = 1/w$ и $\Delta = \partial \bar{\partial}$, то вывести отсюда, что

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta \varphi)(w) \log |w-z| dm_2(w) \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)).$$

Таким образом, $\log |z|$ является фундаментальным решением для оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$.

9. Используя упр. 6, показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon^{-1} - b - \hat{K}_{2-\varepsilon}(y)] = \log |y| \quad (y \in \mathbb{R}^2),$$

где b — некоторая константа. Показать, что это приводит к другому доказательству последнего утверждения из упр. 8.

10. Положим $P(D) = D^2 + aD + bI$ (мы рассматриваем здесь случай $n=1$). Пусть f и g — решения уравнения $P(D)u=0$, удовлетворяющие условиям

$$f(0) = g(0) \quad \text{и} \quad f'(0) - g'(0) = 1.$$

Определим функцию

$$G(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leq 0, \\ g(x), & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

и пусть

$$\Lambda(\varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) G(x) dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$$

Показать, что Λ является фундаментальным решением для оператора $P(D)$.

11. Пусть u — распределение в $\mathbb{R}^n$, первые производные которого $D_1 u, \dots, D_n u$ локально принадлежат к L^2 . Доказать, что тогда и u локально принадлежит к L^2 . *Указание.* Если функция $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ равна 1 в некоторой окрестности начала координат и если $\Delta E = \delta$, то $\Delta(\psi E) = \delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$u = \sum_{i=1}^n (D_i u) * (D_i(\psi E))$$

содержится в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Каждое из распределений $D_t(\psi E)$ является L^1 -функцией с компактным носителем.

12. Пусть u — такое распределение в $\mathbb{R}^n$, что Δu есть непрерывная функция. Доказать, что тогда и u является непрерывной функцией. *Указание.* Как и в упр. 11, имеем

$$u - (\psi E) * (\Delta u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

13. Доказать аналоги утверждений упр. 11 и 12 для произвольного открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

14. В условиях упр. 12 показать, что

(а) $\partial^2 u / \partial x_1^2$ локально принадлежит к L^2 , но

(б) $\partial^2 u / \partial x_1^2$ не обязательно является непрерывной функцией.

Для периодических распределений в $\mathbb{R}^2$ (см. упр. 22 в гл. 7) утверждение (б) может быть выведено следующим образом. Для каждой функции $g \in C(T^2)$ с коэффициентами Фурье $\hat{g}(m, n)$ определим функцию f , полагая

$$\hat{f}(m, n) = (1 + m^2 + n^2)^{-1} \hat{g}(m, n).$$

Тогда $f \in C(T^2)$ и $\Delta f = f - g \in C(T^2)$, так как $\sum |\hat{f}(m, n)| < \infty$. Коэффициентами Фурье функции $\partial^2 f / \partial x_1^2$ служат $-m^2 \hat{f}(m, n)$. Если бы функция $\partial^2 f / \partial x_1^2$ была непрерывной для каждой функции $g \in C(T^2)$, то $(\partial^2 f / \partial x_1^2)(0, 0)$ оказалось бы непрерывным линейным функционалом по g . Поэтому нашлась бы комплексная борелевская мера μ на T^2 с коэффициентами Фурье

$$\mu(m, n) = \frac{m^2}{1 + m^2 + n^2}.$$

Однако следующее упражнение показывает, что такой меры не существует.

15. Пусть μ — комплексная борелевская мера на T^2 и

$$\gamma(A, B) = \frac{1}{(2A+1)(2B+1)} \sum_{n=-A}^A \sum_{m=-B}^B \hat{\mu}(m, n).$$

Показать, что

$$\lim_{A \rightarrow \infty} [\lim_{B \rightarrow \infty} \gamma(A, B)] = \lim_{B \rightarrow \infty} [\lim_{A \rightarrow \infty} \gamma(A, B)].$$

Наводящее соображение. Пусть $D_A(t) = (2A+1)^{-1} \sum_{n=-A}^A e^{int}$. Тогда $D_A(x) = 1$,

если $x=0$, и $D_A(x) \rightarrow 0$ в остальных точках. Далее,

$$\gamma(A, B) = \int_{T^2} D_A(x) D_B(y) d\mu(x, y).$$

Выведите отсюда, что оба повторных предела существуют и равны $\mu(\{0, 0\})$.

Если μ — мера из упр. 14, то один из пределов оказался бы равным 1, а другой 0.

16. Пусть L — эллиптический линейный оператор на некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем порядок оператора L нечетен.

(а) Доказать, что тогда $n=1$ или $n=2$.

(б) Если $n=2$, то доказать, что все коэффициенты характеристического полинома оператора L не могут быть вещественными.

Ввиду утверждения (а) оператор Коши — Римана оказывается не очень типичным примером эллиптического оператора.

Теорема Винера

9.1. Введение. Тауберовыми называют теоремы, в которых выводится асимптотическое поведение последовательностей или функций из поведения их усреднений. Часто тауберовы теоремы представляют собой обращения довольно очевидных результатов, но обычно эти обращения требуют тех или иных дополнительных предположений, называемых *тауберовыми условиями*. Для примера рассмотрим следующие три свойства последовательности комплексных чисел $s_n = a_0 + \dots + a_n$:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s;$$

$$(b) \text{ если } f(r) = \sum_0^\infty a_n r^n, \quad 0 < r < 1, \text{ то } \lim_{r \rightarrow 1} f(r) = s;$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$

Так как $f(r) = (1-r) \sum s_n r^n$ и $(1-r) \sum r^n = 1$, то $f(r)$ при каждом $r \in (0, 1)$ есть некоторое усреднение последовательности $\{s_n\}$. Совсем легко доказать, что из (a) вытекает (b). Обратное неверно, но (b) и (c) вместе уже дают (a). Это также совсем несложно, и впервые было доказано Таубером. Тауберово условие (c) можно заменить более слабым предположением, что последовательность $\{n a_n\}$ ограничена (Литтлвуд). Примечательно, насколько более трудным делается доказательство при таком ослаблении условия (c).

В тауберовой теореме Винера речь идет об ограниченных измеримых функциях, заданных (вначале) на вещественной оси. Если $\varphi \in L^\infty(\mathbf{R})$ и если $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то почти очевидно, что $(K * \varphi)(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ для каждой функции $K \in L^1(\mathbf{R})$. Свертку $K * \varphi$ можно рассматривать как усреднение от φ , во всяком случае если $\int K = 1$. Винерово обращение (утверждение (a) теоремы 9.7) устанавливает, что если $(K * \varphi)(x) \rightarrow 0$ для одной функции $K \in L^1(\mathbf{R})$, преобразование Фурье которой нигде не обращается в нуль на вещественной оси $\mathbf{R}$, то $(f * \varphi)(x) \rightarrow 0$ для каждой функции $f \in L^1(\mathbf{R})$. Более сильное заключение, что

$\varphi(x) \rightarrow 0$, вообще говоря, неверно, но оно становится правильным при некотором довольно слабом дополнительном условии (медленная осцилляция) на φ (утверждение (b) теоремы 9.7).

Несколько неожиданное тауберово условие — отсутствие нулей у функции $\hat{K}$ — следующим образом возникает в доказательстве. Если $(K * \varphi)(x) \rightarrow 0$, то это остается верным при замене функции K ее сдвигами и, следовательно, при замене функции K любой конечной линейной комбинацией g сдвигов функции K . Если функция $\hat{K}$ не имеет нулей, то множество таких функций g плотно в L^1 (теорема 9.5). Это обстоятельство приводит к изучению подпространств в L^1 , инвариантных относительно сдвигов.

9.2. Лемма. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует такая функция $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, что $\|h\|_1 < \varepsilon$ и

$$(1) \quad \hat{h}(s) = \hat{f}(t) - \hat{f}(s)$$

для всех s из некоторой окрестности точки t .

Лемма устанавливает, что функция f аппроксимируется по L^1 -норме функцией $\hat{f} + h$, преобразование Фурье которой сохраняет постоянное значение в некоторой окрестности точки t .

Доказательство. Выберем такую функцию $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, что $\hat{g} = 1$ в некоторой окрестности начала координат. При $\lambda > 0$ положим

$$(2) \quad g_\lambda(x) = e^{it \cdot x} \lambda^{-n} g(x/\lambda) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

и пусть

$$(3) \quad h_\lambda(x) = \hat{f}(t) g_\lambda(x) - (f * g_\lambda)(x).$$

Так как $\hat{g}_\lambda(s) = 1$ в некоторой окрестности V_λ точки t , то (3) означает, что (1) будет иметь место, если в качестве h взять h_λ . Далее,

$$(4) \quad h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) [e^{-it \cdot y} g_\lambda(x) - g_\lambda(x - y)] dm_n(y).$$

Абсолютная величина выражения в квадратных скобках равна

$$(5) \quad |\lambda^{-n} g(\lambda^{-1}x) - \lambda^{-n} g(\lambda^{-1}(x - y))|.$$

Поэтому, делая замену $x = \lambda \xi$, мы видим, что

$$(6) \quad \|h_\lambda\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dm_n(y) \int_{\mathbb{R}^n} |g(\xi) - g(\xi - \lambda^{-1}y)| dm_n(\xi).$$

Внутренний интеграл в (6) не превосходит $2\|g\|_1$ и стремится к 0 при $\lambda \rightarrow \infty$ для каждого $y \in \mathbb{R}^n$. По теореме Лебега отсюда следует, что $\|h_\lambda\|_1 \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. ■

9.3. Теорема. Пусть $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и Y — некоторое подпространство в $L^1(\mathbb{R}^n)$. Если

(1) $f * \varphi = 0$ для всех $f \in Y$,
то множество

$$(2) \quad Z(Y) = \bigcap_{f \in Y} \{s \in \mathbb{R}^n: \hat{f}(s) = 0\}$$

содержит носитель (медленно растущего) распределения $\hat{\varphi}$.

Доказательство. Фиксируем некоторую точку t из дополнения к $Z(Y)$. Тогда $\hat{f}(t) = 1$ для подходящей функции $f \in Y$. По лемме 9.2 найдется такая функция $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, что $\|h\|_1 < 1$ и $\hat{h}(s) = 1 - \hat{f}(s)$ в некоторой окрестности V точки t .

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\hat{\varphi} = 0$ в V , а это эквивалентно тому, что $\hat{\varphi}(\hat{\psi}) = 0$ для каждой функции $\psi \in \mathcal{S}_n$, преобразование Фурье которой $\hat{\psi}$ сосредоточено (т. е. имеет носитель, содержащийся) в V . Так как

$$(3) \quad \hat{\varphi}(\hat{\psi}) = \varphi(\check{\psi}) = (\varphi * \psi)(0),$$

то достаточно показать, что $\varphi * \psi = 0$.

Фиксируем некоторое ψ с указанным свойством. Положим $g_0 = \psi$ и $g_m = h * g_{m-1}$ при $m \geq 1$. Тогда $\|g_m\|_1 \leq \|h\|_1^m \|\psi\|_1$, и так как $\|h\|_1 < 1$, то функция $G = \sum g_m$ содержится в $L^1(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $\hat{h}(s) = 1 - \hat{f}(s)$ на носителе функции $\hat{\psi}$, то

$$(4) \quad (1 - \hat{h}(s)) \hat{\psi}(s) = \hat{\psi}(s) \hat{f}(s) \quad (s \in \mathbb{R}^n),$$

или

$$(5) \quad \hat{\psi} = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{h}^m \hat{\psi} \hat{f} = \hat{G} \hat{f}.$$

Таким образом, $\psi = G * f$ и из (1) вытекает, что

$$(6) \quad \psi * \varphi = G * f * \varphi = 0. \quad \blacksquare$$

9.4. Теорема Винера. Если Y — замкнутое подпространство в $L^1(\mathbb{R}^n)$, инвариантное относительно сдвигов, и если множество $Z(Y)$ общих нулей преобразований Фурье функций из Y пусто, то $Y = L^1(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Инвариантность подпространства Y относительно сдвигов означает, что $\tau_x f \in Y$, если $f \in Y$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Если функция $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\int f \check{\varphi} = 0$ для каждой $f \in Y$, то ввиду указанной инвариантности Y мы имеем $f * \varphi = 0$ для всех $f \in Y$. Поэтому, согласно теореме 9.3, носитель распределения $\hat{\varphi}$ пуст и, следовательно $\hat{\varphi} = 0$ (теорема 6.24). Поскольку преобразование Фурье взаимно однозначно отображает $\mathcal{S}'_n$ на

себя (теорема 7.13), отсюда вытекает, что в качестве распределения $\varphi = 0$. Но тогда φ представляет собой и нулевой элемент пространства $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, $Y^\perp = \{0\}$. Согласно теореме Хана—Банаха, это означает, что $Y = L^1(\mathbb{R}^n)$. ■

9.5. Теорема. Пусть $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и Y — наименьшее замкнутое инвариантное относительно сдвигов подпространство в $L^1(\mathbb{R}^n)$, содержащее K . Тогда $Y = L^1(\mathbb{R}^n)$ в том и только в том случае, если $\hat{K}(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Заметим, что $Z(Y) = \{t \in \mathbb{R}^n: \hat{K}(t) = 0\}$. Таким образом, в теореме утверждается, что $Y = L^1(\mathbb{R}^n)$ в том и только в том случае, если $Z(Y)$ пусто. Но в одну сторону это вытекает из теоремы 9.4, а в другую — тривиально.

9.6. Определение. Функция $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ называется *медленно осциллирующей*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такое $A < \infty$ и такое $\delta > 0$, что

$$(1) \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon, \quad \text{если } |x| > A, |y| > A, |x - y| < \delta.$$

При $n = 1$ можно также определить свойство *медленной осцилляции на $+\infty$* ; условие (1) заменяется при этом условием

$$(2) \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon, \quad \text{если } x > A, y > A, |x - y| < \delta.$$

Конечно, аналогичное определение можно дать и для $-\infty$.

Отметим, что каждая равномерно непрерывная ограниченная функция является медленно осциллирующей и что, с другой стороны, медленно осциллирующая функция не обязательно непрерывна.

Теперь мы подошли к тауберовой теореме Винера. Утверждение (b) было добавлено Питтом.

9.7. Теорема. (a) Пусть $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{K}(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^n$ и

$$(1) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} (K * \varphi)(x) = a \hat{K}(0).$$

Тогда

$$(2) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} (f * \varphi)(x) = a \hat{f}(0)$$

для всех $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Если, кроме того, функция φ является медленно осциллирующей, то

$$(3) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = a.$$

Доказательство. Положим $\psi(x) = \varphi(x) - a$. Пусть Y — множество всех таких $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$(4) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} (f * \psi)(x) = 0.$$

Ясно, что Y есть векторное пространство. Далее, подпространство Y замкнуто в $L^1(\mathbf{R}^n)$. Действительно, предположим, что $f_i \in Y$ и $\|f - f_i\|_1 \rightarrow 0$. Так как

$$(5) \quad \|f * \psi - f_i * \psi\|_\infty \leq \|f - f_i\|_1 \|\psi\|_\infty,$$

то $f_i * \psi \rightarrow f * \psi$ равномерно на $\mathbf{R}^n$ и, следовательно, соотношение (4) выполняется для предельной функции. Так как

$$(6) \quad ((\tau_y f) * \psi)(x) = (\tau_y (f * \psi))(x) = (f * \psi)(x - y),$$

то подпространство Y инвариантно относительно сдвигов. Наконец, $K \in Y$ в силу условия (1), так как $K * a = a\hat{K}(0)$.

Из теоремы 9.5 вытекает, что $Y = L^1(\mathbf{R}^n)$. Таким образом, каждая функция $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ удовлетворяет условию (4), которое равносильно условию (2). Тем самым доказано утверждение (а).

Предположим теперь, что функция φ медленно осциллирует. Пусть $\varepsilon > 0$ и A и δ выбраны в соответствии с определением 9.6. Выберем такую функцию $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, что $f \geq 0$, $\hat{f}(0) = 1$ и $f(x) = 0$ при $|x| \geq \delta$. Согласно (2), имеем

$$(7) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} (f * \varphi)(x) = a.$$

Далее,

$$(8) \quad \varphi(x) - (f * \varphi)(x) = \int_{|y| < \delta} [\varphi(x) - \varphi(x - y)] f(y) dm_n(y).$$

Из нашего выбора A , δ и f вытекает, что

$$(9) \quad |\varphi(x) - (f * \varphi)(x)| < \varepsilon,$$

если $|x| > A + \delta$. Соотношение (3) теперь вытекает из (7) и (9). ■

9.8. Замечание. В случае $n = 1$ теорему 9.7 можно очевидным образом видоизменить, полагая $x \rightarrow +\infty$ вместо $|x| \rightarrow \infty$. В утверждении (b) достаточно считать функцию φ медленно осциллирующей на $+\infty$. Доказательства при этом не меняются.

Теорема о простых числах

9.9. Введение. Для каждого положительного числа x через $\pi(x)$ обозначается число простых чисел p , удовлетворяющих условию $p \leq x$. *Теорема о простых числах* (иначе называемая асимптотическим законом распределения простых чисел) устанавливает, что

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

Мы докажем это при помощи одной тауберовой теоремы, принадлежащей Ингаму и основанной на теореме Винера. Главная идея заключается в замене весьма нерегулярной функции π некоторой

функцией F , асимптотическое поведение которой весьма просто распознается, и в дальнейшем привлечении тауберовой теоремы, что позволяет судить о поведении π по поведению F .

9.10. Подготовка. Буква p всюду в дальнейшем обозначает некоторое простое число; m и n — положительные целые числа; x — положительное число; символ $[x]$ — целое число, определяемое неравенствами $x-1 < [x] \leq x$; запись $d|n$ означает, что d и n/d — положительные целые числа. Положим

$$(1) \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{если } n \text{ — натуральная степень какого-нибудь простого числа } p, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$(2) \quad \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n);$$

$$(3) \quad F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi\left(\frac{x}{m}\right).$$

Будут использованы следующие свойства функций ψ и F :

$$(4) \quad \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log x}{x} < \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x) \log x}{x \log(x/\log^2 x)},$$

если $x > e$, и

$$(5) \quad F(x) = x \log x - x + b(x) \log x,$$

где $b(x)$ остается ограниченной при $x \rightarrow \infty$.

Ввиду неравенств (4) теорема о простых числах оказывается следствием соотношения

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

которое будет выведено из (3) и (5) при помощи тауберовой теоремы.

Доказательство неравенств (4). Количество степеней числа p , не превосходящих x , равно $[\log x / \log p]$. Поэтому

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p \leq \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x) \log x,$$

что приводит к первому из неравенств (4). Если $1 < y < x$, то

$$\pi(x) - \pi(y) = \sum_{y < p \leq x} 1 \leq \sum_{y < p \leq x} \frac{\log p}{\log y} \leq \frac{\psi(x)}{\log y}.$$

Поэтому $\pi(x) < y + \psi(x)/\log y$. Полагая здесь $y = x/\log^2 x$, получаем вторую половину неравенств (4).

Доказательство соотношения (5). Если $n > 1$, то

$$F(n) - F(n-1) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \psi\left(\frac{n}{m}\right) - \psi\left(\frac{n-1}{m}\right) \right\}.$$

Здесь m -е слагаемое равно 0, если n/m не целое, а в противном случае оно равно $\Lambda(n/m)$. Поэтому

$$F(n) - F(n-1) = \sum_{m|n} \Lambda\left(\frac{n}{m}\right) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n.$$

Последнее равенство улавливает характер разложения числа n в произведение степеней различных простых. Так как $F(1) = 0$, то мы получаем, что

$$(7) \quad F(n) = \sum_{m=1}^n \log m = \log(n!) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

а это наводит на мысль сравнить $F(x)$ с интегралом

$$(8) \quad J(x) = \int_1^x \log t \, dt = x \log x - x + 1.$$

Если $n \leq x \leq n+1$, то

$$(9) \quad J(n) < F(n) \leq F(x) \leq F(n+1) < J(n+2),$$

так что

$$(10) \quad |F(x) - J(x)| < 2 \log(x+2).$$

Ясно, что соотношение (5) вытекает из (8) и (10).

9.11. Дзета-функция Римана. Как это принято в аналитической теории чисел, комплексное переменное теперь будет записываться в виде $s = \sigma + it$. В полуплоскости $\sigma > 1$ риманова ζ -функция определяется рядом

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Так как $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$, то этот ряд равномерно сходится на каждом компакте из указанной полуплоскости и $\zeta(s)$ оказывается там голоморфной функцией.

Простое вычисление показывает, что

$$s \int_1^{N+1} [x] x^{-1-s} dx = s \sum_{n=1}^N n \int_n^{n+1} x^{-1-s} dx = \sum_{n=1}^N n^{-s} - N(N+1)^{-s}.$$

Если $\sigma > 1$, то $N(N+1)^{-s} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Поэтому

$$(2) \quad \zeta(s) = s \int_1^{\infty} [x] x^{-1-s} dx \quad (\sigma > 1).$$

Полагая $b(x) = [x] - x$, мы получаем из представления (2), что

$$(3) \quad \zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s \int_1^{\infty} b(x) x^{-1-s} dx \quad (\sigma > 1).$$

Так как функция $b(x)$ ограничена, то последний интеграл определяет функцию, голоморфную в полуплоскости $\sigma > 0$. Таким образом, формула (3) приводит к аналитическому продолжению функции ξ в полуплоскость $\sigma > 0$. Это продолжение является в данной полуплоскости голоморфной функцией всюду, кроме точки $s=1$, где она имеет простой полюс с вычетом 1. Наиболее важное из свойств функции ξ , которое мы будем использовать, заключается в том, что эта функция не имеет нулей на прямой $\sigma=1$, т. е.

$$(4) \quad \xi(1+it) \neq 0 \quad (-\infty < t < \infty).$$

Доказательство соотношения (4) опирается на тождество

$$(5) \quad \xi(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1} \quad (\sigma > 1).$$

Так как $(1-p^{-s})^{-1} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots$, то факт совпадения произведения (5) с рядом (1) есть прямое следствие того обстоятельства, что каждое положительное целое число обладает однозначным разложением в произведение степеней простых чисел. Так как $\sum p^{-\sigma} < \infty$ при $\sigma > 1$, то из (5) вытекает, что $\xi(s) \neq 0$, если $\sigma > 1$, и что

$$(6) \quad \log \xi(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} p^{-ms} \quad (\sigma > 1).$$

Фиксируем некоторое вещественное $t \neq 0$. Если $\sigma > 1$, то, как это следует из формулы (6),

$$(7) \quad \begin{aligned} \log |\xi^3(\sigma) \xi^4(\sigma+it) \xi(\sigma+2it)| = \\ = \sum_{p,m} m^{-1} p^{-m\sigma} \operatorname{Re} \{3 + 4p^{-imt} + p^{-2imt}\} \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{Re} \{3 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}\} = 2(1 + \cos \theta)^2$ для всех вещественных θ . Поэтому

$$(8) \quad |(\sigma-1)\xi(\sigma)|^3 \left| \frac{\xi(\sigma+it)}{\sigma-1} \right|^4 |\xi(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}.$$

Если бы $\xi(1+it)$ равнялось 0, то при σ , убывающем к 1, левая часть неравенства (8) стремилась бы к конечному пределу, а именно к $|\xi'(1+it)|^4 |\xi(1+2it)|$. Но правая часть при этом стремилась бы к бесконечности. Полученное противоречие означает, что (4) имеет место.

9.12. Тауберова теорема Ингама. Пусть g —вещественная неубывающая функция на полуоси $(0, \infty)$, причем $g(x)=0$, если $x < 1$. Положим

$$(1) \quad G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{x}{n}\right) \quad (0 < x < \infty)$$

и допустим, что

$$(2) \quad G(x) = ax \log x + bx + x\varepsilon(x),$$

где a и b — константы, $a \varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} g(x) = a.$$

В качестве функции g в теореме Ингама можно взять функцию ψ из п. 9.10 — условия теоремы будут соблюдены в силу формул (3) и (5) п. 9.10. Тогда из теоремы 9.12 вытекает, что функция ψ удовлетворяет соотношению (6) из п. 9.10, что, как мы видели, приводит к теореме о распределении простых чисел.

Доказательство. Сначала мы покажем, что $x^{-1}g(x)$ ограничено. Так как функция g не убывает, то

$$\begin{aligned} g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} g\left(\frac{x}{n}\right) = G(x) - 2G\left(\frac{x}{2}\right) = \\ &= x \left\{ a \log 2 + \varepsilon(x) - \varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \right\} < Ax, \end{aligned}$$

где A — некоторая константа. Поскольку

$$g(x) = g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x}{2}\right) - g\left(\frac{x}{4}\right) + \dots,$$

то отсюда следует, что

$$(4) \quad g(x) < A \left(x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \dots \right) = 2Ax.$$

Теперь мы сделаем замену переменных, которая позволит обычным способом использовать преобразование Фурье. Для $-\infty < x < \infty$ положим

$$(5) \quad h(x) = g(e^x), \quad H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(x - \log n).$$

Тогда $h(x) = 0$, если $x < 0$, и $H(x) = G(e^x)$. Поэтому (2) превращается в равенство

$$(6) \quad H(x) = e^x (ax + b + \varepsilon_1(x)),$$

где $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Если

$$(7) \quad \varphi(x) = e^{-x} h(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

то, согласно (4), функция φ ограничена. Мы должны доказать что

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = a.$$

Пусть $k(x) = [e^x] e^{-x}$, и пусть λ — некоторое положительное иррациональное число. Положим

$$(9) \quad K(x) = 2k(x) - k(x-1) - k(x-\lambda) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Тогда $K \in L^1(-\infty, \infty)$ (более того, функция $e^x K(x)$ является ограниченной, см. упр. 8). Если $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$, то из формулы

(2) п. 9.11 вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{-xs} dx = \int_0^{\infty} [e^x] e^{-x(s+1)} dx = \int_1^{\infty} [y] y^{-2-s} dy = \frac{\zeta(1+s)}{1+s}.$$

Повторим процедуру, заменяя $k(x)$ на $k(x-1)$ и $k(x-\lambda)$, используем (9) и затем положим $\sigma \rightarrow 0$. В результате получится

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-itx} dx = (2 - e^{-it} - e^{-i\lambda t}) \frac{\zeta(1+it)}{1+it}.$$

Так как $\zeta(1+it) \neq 0$ и так как λ иррационально, то $\hat{K}(t) \neq 0$, если $t \neq 0$. Так как функция ζ имеет простой полюс с вычетом 1 при $s=1$, то правая часть равенства (10) стремится к $1+\lambda$ при $t \rightarrow 0$. Таким образом, $\hat{K}(0) \neq 0$.

Теперь мы хотим оценить $K * \varphi$, чтобы затем применить теорему Винера. Положим $u(x) = [e^x]$, пусть v — характеристическая функция множества $[0, \infty)$, и пусть μ — мера, сопоставляющая массу 1 каждой точке множества $\{\log n: n=1, 2, 3, \dots\}$ и сосредоточенная на этом множестве. В соответствии с (5) имеем $H = h * \mu$. Далее, $u = v * \mu$. Поэтому

$$(11) \quad (h * u)(x) = (h * v * \mu)(x) = (H * v)(x) = \int_0^x H(y) dy.$$

[Заметим, что здесь мы используем свертку по отношению к мере Лебега, а не к нормированной мере m_1 .] Так как

$$(\varphi * k)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{y-x} h(x-y) [e^y] e^{-y} dy = e^{-x} (h * u)(x),$$

то из (6) и (11) вытекает, что

$$(12) \quad (\varphi * k)(x) = e^{-x} \int_0^x H(y) dy = ax + b - a + \varepsilon_2(x),$$

где $\varepsilon_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Из (12) и (9) следует, что

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (K * \varphi)(x) = (1 + \lambda) a = a \int_{-\infty}^{\infty} K(y) dy.$$

Поэтому в силу теоремы Винера 9.7 (см. замечание 9.8)

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f * \varphi)(x) = a \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy$$

для каждой функции $f \in L^1(-\infty, \infty)$.

Пусть f_1 и f_2 — две неотрицательные функции с интегралом 1 и с носителями соответственно в $[0, \varepsilon]$ и $[-\varepsilon, 0]$. Согласно фор-

муле (7), функция $e^* \varphi(x)$ является неубывающей. Поэтому $\varphi(y) \leq e^* \varphi(x)$, если $x - \varepsilon \leq y \leq x$, и $\varphi(y) \geq e^{-\varepsilon} \varphi(x)$, если $x \leq y \leq x + \varepsilon$. Следовательно,

$$(15) \quad e^{-\varepsilon} (f_1 * \varphi)(x) \leq \varphi(x) \leq e^{\varepsilon} (f_2 * \varphi)(x).$$

Из (14) и (15) вытекает, что верхний и нижний пределы $\varphi(x)$ при $x \rightarrow \infty$ лежат между $ae^{-\varepsilon}$ и ae^{ε} . Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, соотношение (8) выполняется, и доказательство закончено. ■

Уравнение восстановления

В качестве еще одного применения теоремы Винера мы бегло обсудим поведение ограниченных решений φ интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t) d\mu(t) = f(x),$$

которое встречается в теории вероятностей. Здесь μ —заданная вероятностная борелевская мера, f —заданная функция, а φ предполагается ограниченной борелевской функцией, так что интеграл существует при *всех* $x \in \mathbf{R}$. Кратко это уравнение можно переписать в виде

$$\varphi - \varphi * \mu = f.$$

Мы начнем с теоремы единственности.

9.13. Теорема. Если μ —вероятностная борелевская мера на вещественной оси $\mathbf{R}$, причем носитель этой меры не содержится ни в какой циклической подгруппе группы $\mathbf{R}$, и если φ —ограниченная борелевская функция, удовлетворяющая однородному уравнению

$$(1) \quad \varphi(x) - (\varphi * \mu)(x) = 0$$

для каждого $x \in \mathbf{R}$, то существует такая константа A , что почти всюду в смысле меры Лебега $\varphi(x) = A$.

Доказательство. Поскольку μ является вероятностной мерой, $\hat{\mu}(0) = 1$. Предположим, что $\hat{\mu}(t) = 1$ для некоторого $t \neq 0$. Так как

$$(2) \quad \hat{\mu}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} d\mu(x),$$

то отсюда будет следовать, что мера μ сосредоточена на множестве всех таких точек x , где $e^{-ixt} = 1$, т. е. на множестве всех целочисленных кратных $2\pi/t$. Но это противоречит условиям теоремы, так что $\hat{\mu}(t) \neq 1$, если $t \neq 0$.

Если $\sigma = \delta - \mu$, где δ — мера Дирака, то $\hat{\sigma} = 1 - \hat{\mu}$. Поэтому $\hat{\sigma}(t) = 0$ в том и только в том случае, если $t = 0$. Уравнение (1) можно переписать в виде

$$(3) \quad \varphi * \sigma = 0.$$

Пусть $g(x) = \exp(-x^2)$, и пусть $K = g * \sigma$. Тогда $K \in L^1(\mathbf{R})$ и $\hat{K}(t) = 0$ в том и только в том случае, если $t = 0$. Кроме того, из (3) вытекает, что $K * \varphi = 0$. По теореме 9.3 (в применении к одномерному подпространству Y , порожденному функцией K) распределение $\hat{\varphi}$ имеет своим носителем одноточечное множество $\{0\}$. Поэтому $\hat{\varphi}$ есть конечная линейная комбинация меры δ и ее производных (теорема 6.25). Следовательно, φ как распределение совпадает с полиномом. Но тогда φ совпадает с полиномом почти всюду на $\mathbf{R}$ в смысле меры Лебега. Но по условию функция φ предполагается ограниченной на $\mathbf{R}$, что и приводит к требуемому заключению. ■

9.14. Свертка мер. Если μ и λ — комплексные борелевские меры на $\mathbf{R}^n$, то отображение

$$(1) \quad f \rightarrow \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x+y) d\mu(x) d\lambda(y)$$

представляет собой ограниченный линейный функционал на пространстве $C_0(\mathbf{R}^n)$ всех непрерывных функций на $\mathbf{R}^n$, стремящихся к нулю на бесконечности. По теореме Рисса о представлении существует в точности одна такая борелевская мера $\mu * \lambda$ на $\mathbf{R}^n$, что

$$(2) \quad \int_{\mathbf{R}^n} f d(\mu * \lambda) = \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x+y) d\mu(x) d\lambda(y) \quad (f \in C_0(\mathbf{R}^n)).$$

Стандартные соображения, связанные с аппроксимацией, показывают, что тогда соотношение (2) выполняется для каждой ограниченной борелевской функции f . В частности, мы видим, что

$$(3) \quad (\mu * \lambda)^{\wedge} = \hat{\mu} \hat{\lambda}.$$

Два других следствия соотношения (2) будут использоваться в доказательстве следующей теоремы. Одно из них почти очевидно и состоит в том, что

$$(4) \quad \|\mu * \lambda\| \leq \|\mu\| \|\lambda\|,$$

где норма означает полную вариацию меры. Второе составляет тот факт, что мера $\mu * \lambda$ абсолютно непрерывна (по мере Лебега m_n), если этим свойством обладает мера μ . Действительно, в этом случае

$$(5) \quad \int_{\mathbf{R}^n} f(x+y) d\mu(x) = 0$$

для каждого $y \in \mathbb{R}^n$, если f — характеристическая функция борелевского множества E нулевой лебеговой меры. Поэтому, согласно (2), получаем $(\mu * \lambda)(E) = 0$.

Напомним, что каждая комплексная борелевская мера μ обладает однозначно определенным лебеговым разложением

$$(6) \quad \mu = \mu_a + \mu_s,$$

где мера μ_a абсолютно непрерывна по мере Лебега m_n , а мера μ_s сингулярна.

Следующая теорема принадлежит Карлину.

9.15. Теорема. Пусть μ — такая вероятностная борелевская мера на $\mathbb{R}$, что

$$(1) \quad \mu_a \neq 0,$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| d\mu(x) < \infty,$$

$$(3) \quad M = \int_{-\infty}^{\infty} x d\mu(x) \neq 0.$$

Предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R})$ и что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Пусть φ — ограниченная функция, удовлетворяющая уравнению

$$(4) \quad \varphi(x) - (\varphi * \mu)(x) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Тогда пределы

$$(5) \quad \varphi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x), \quad \varphi(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$$

существуют и

$$(6) \quad \varphi(\infty) - \varphi(-\infty) = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy.$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 9.13, положим $\sigma = \delta - \mu$. Пусть

$$(7) \quad K(x) = \sigma((-\infty, x)) = \begin{cases} -\mu((-\infty, x)), & \text{если } x \leq 0, \\ \mu([x, \infty)), & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Из условия (2) вытекает, что $K \in L^1(\mathbb{R})$. Прямое вычисление (детали мы опускаем) показывает, что

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{-ixt} dx = \begin{cases} \hat{\sigma}(t)/it, & \text{если } t \neq 0, \\ M, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

и что

$$(9) \quad \int_r^s f(x) dx = (K * \varphi)(s) - (K * \varphi)(r) \quad (-\infty < r < s < \infty),$$

так как $\hat{f} = \varphi * \hat{\sigma}$.

По условию (1) мера μ не сингулярна. Те же соображения, которые использовались при доказательстве теоремы 9.13, теперь показывают, что $\hat{\sigma}(t) \neq 0$, если $t \neq 0$. Поэтому из (8) и (3) вытекает, что функция $\hat{K}$ не имеет нулей на вещественной оси $\mathbf{R}$.

Так как $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$, то из (9) следует, что функция $K * \varphi$ имеет пределы на $\pm\infty$, разность между которыми равна $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}$.

Мы покажем ниже, что функция φ является медленно осциллирующей. Если считать это установленным, то (5) и (6) будут вытекать из уже доказанных свойств функций K и $K * \varphi$ и теоремы Питта (утверждения (b) теоремы 9.7).

Повторная подстановка $\varphi = \hat{f} + \varphi * \mu$ в правую часть дает

$$(10) \quad \begin{aligned} \varphi &= \hat{f} + \hat{f} * \mu + \dots + \hat{f} * \mu^{n-1} + \varphi * \mu^n = \\ &= f_n + g_n + h_n \quad (n=2, 3, 4, \dots), \end{aligned}$$

где $\mu^1 = \mu$, $\mu^n = \mu * \mu^{n-1}$, $f_n = \hat{f} + \dots + \hat{f} * \mu^{n-1}$ и

$$(11) \quad g_n = \varphi * (\mu^n)_a, \quad h_n = \varphi * (\mu^n)_s.$$

Для каждого n функция g_n равномерно непрерывна и $f_n(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, $f_n + g_n$ — медленно осциллирующая функция. Поскольку полные вариации удовлетворяют условию

$$(12) \quad \|(\mu^n)_s\| \leq \|(\mu_s)^n\| \leq \|\mu_s\|^n,$$

то мы получаем

$$(13) \quad |h_n(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|\mu_s\|^n \quad (-\infty < x < \infty),$$

где $\|\varphi\|$ — верхняя грань $|\varphi|$ на $\mathbf{R}$. Согласно условию (1), имеем $\|\mu_s\| < 1$. Поэтому $h_n \rightarrow 0$ равномерно на $\mathbf{R}$. Следовательно, функция φ является равномерным пределом медленно осциллирующих функций $f_n + g_n$ и поэтому сама есть медленно осциллирующая функция. ■

Упражнения

1. Доказать теорему Таубера, приведенную в п. 9.1.

2. Пусть $\varphi \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$, и пусть носитель распределения $\hat{\varphi}$ состоит из k различных точек $s_1, \dots, s_k$. Построить подходящие функции $\psi_1, \dots, \psi_k$ с таким расчетом, чтобы распределение $(\varphi * \psi_j)^\wedge$ имело одноточечный носитель $\{s_j\}$, и вывести отсюда, что φ есть тригонометрический полином; точнее,

$$\varphi(x) = a_1 e^{i s_1 \cdot x} + \dots + a_k e^{i s_k \cdot x} \quad (\text{почти всюду}).$$

(Случай $k=1$ разобран в доказательстве теоремы 9.13.)

3. Пусть Y — такое замкнутое инвариантное относительно сдвигов подпространство в $L^1(\mathbf{R}^n)$, что $Z(Y)$ состоит из k различных точек. (Обозначения те же, что в теореме 9.3.) Используя упр. 2, доказать, что Y имеет коразмерность k в $L^1(\mathbf{R}^n)$, и вывести отсюда, что Y состоит в точности из

тех функций $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье которых обращается в 0 на всем множестве $Z(Y)$.

4. Доказать следующий аналог утверждения (а) теоремы 9.7. Если $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и если каждой точке $t \in \mathbb{R}^n$ соответствует такая функция $K_t \in L^1(\mathbb{R}^n)$, что $\hat{K}_t(t) \neq 0$ и $(K_t * \varphi)(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то $(f * \varphi)(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ для каждой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

5¹). (а) Пусть $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и функция $\hat{K}$ имеет хотя бы один нуль $t_0 \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$. Показать, что тогда существует такая функция $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $(K * \varphi)(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, но функция φ не обладает свойством (а) из теоремы 9.7. *Указание.* Рассмотрите функцию $\varphi(x) = e^{-it_0 \cdot x}$.

(б) Показать, что условие $t_0 \neq 0$ *существенно* в предыдущей задаче. Точнее, пусть $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{K}(t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Если функция $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $(K * \varphi)(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $(f * \varphi)(x) = \lambda \hat{f}(0)$ для всех $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, где λ — некоторая константа. В частности, левая часть здесь не зависит от x . *Указание.* Примените соображения, использованные в конце доказательства теоремы 9.13. На самом деле φ — константа.

(с) Пусть $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{K}(t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Предположим, что некоторая функция $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (K * \varphi)(x) = 0$. Показать, что тогда $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f * \varphi)(x) = 0$, если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{f}(0) = 0$.

(д) Пусть $\varphi = H$ — функция Хевисайда (см. упр. 24 в гл. 6). Показать, что для каждой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f * \varphi)(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f * \varphi)(x) = \hat{f}(0).$$

В частности, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f * \varphi)(x) = 0$, если $\hat{f}(0) = 0$, но, вообще говоря, этот предел существует не для всех $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ср. этот результат с замечанием 9.8 после теоремы Винера.

6. Пусть $\varphi(x) = \sin(x^2)$, $-\infty < x < \infty$. Показать, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f * \varphi)(x) = 0$$

для каждой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, но утверждение (б) теоремы 9.7 не выполняется по отношению к функции φ .

7. При $\alpha > 0$ пусть f_α — характеристическая функция отрезка $[0, \alpha]$. Положим $g = f_\alpha + f_\beta$, где f_β определяется аналогично f_α . Показать, что множество всех конечных линейных комбинаций сдвигов функции g тогда и только тогда плотно в $L^1(\mathbb{R})$, когда число β/α иррационально.

8. Если $\alpha > 0$ и $\alpha x = 1$, то доказать, что

$$1 - \alpha < \alpha[x] \leq 1,$$

и вывести отсюда, что функция $e^x K(x)$, фигурирующая в доказательстве теоремы 9.12, действительно является ограниченной.

9. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Обозначим через μ некоторую вероятностную меру на $\mathbb{R}$, сосредоточенную на $\mathbb{Q}$, и пусть φ — характеристическая функция множества $\mathbb{Q}$. Показать, что $\varphi(x) = (\varphi * \mu)(x)$ для всех

¹) Это упражнение несколько расширено по сравнению с приведенным в оригинале. — *Прим. ред.*

$x \in \mathbb{R}$, хотя φ и не константа. (Ср. с теоремой 9.13.) Какие еще множества, кроме $\mathbb{Q}$, дают подобный эффект?

10. Частные случаи следующих утверждений использовались в теореме 9.15. Доказать эти утверждения.

(а) Если $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то функция $k * \varphi$ равномерно непрерывна.
 (б) Если $\{\varphi_j\}$ — последовательность медленно осциллирующих функций на $\mathbb{R}^n$, равномерно сходящаяся к некоторой функции φ , то и функция φ является медленно осциллирующей.

(с) Если μ и λ — комплексные борелевские меры на $\mathbb{R}^n$, то

$$\|(\mu * \lambda)_s\| \leq \| \mu_s \| \cdot \| \lambda_s \|.$$

11. Пусть $\psi(x) = \cos(|x|^{1/3})$ и

$$f(x) = \psi(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(x-y) dy \quad (-\infty < x < \infty).$$

Доказать, что $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$, но никакое ограниченное решение уравнения

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x-y) dy = f(x)$$

не имеет пределов в $+\infty$ и $-\infty$. [Это показывает, что условие $M \neq 0$ в теореме 9.15 нельзя отбросить.]

12. Пусть μ — вероятностная мера, сосредоточенная на множестве целых чисел. Показать, что каждая функция φ на $\mathbb{R}$ с периодом 1 удовлетворяет уравнению $\varphi - \varphi * \mu = 0$. [Этот пример связан с теоремами 9.13 и 9.15.]

13. Предположим, что $\varphi \in L^\infty(0, \infty)$,

$$\int_0^\infty |K(x)| \frac{dx}{x} < \infty, \quad \int_0^\infty |H(x)| \frac{dx}{x} < \infty,$$

$$\int_0^\infty K(x) x^{-it} \frac{dx}{x} \neq 0 \quad \text{при} \quad -\infty < t < \infty$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty K\left(\frac{x}{u}\right) \varphi(u) \frac{du}{u} = 0.$$

Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty H\left(\frac{x}{u}\right) \varphi(u) \frac{du}{u} = 0.$$

Это обстоятельство аналогично утверждению (а) теоремы 9.7. Как надо видоизменить определение «медленной осцилляции», чтобы получить соответствующий аналог утверждения (б) теоремы 9.7?

14. Восполнить детали в следующем винеровском доказательстве теоремы Литтлвуда. Предположим, что $|na_n| \leq 1$, $f(r) = \sum_0^\infty a_n r^n$ и $f(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$. Если $s_n = a_0 + \dots + a_n$, то надо доказать, что $s_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

(а) $|s_n - f(1 - 1/n)| < 2$. Поэтому последовательность $\{s_n\}$ является ограниченной.

(б) Если $\varphi(x) = s_n$ на полуинтервале $[n, n+1)$ и $0 < x < y$, то

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \frac{y+1-x}{x}.$$

(с) $\int_0^{\infty} x e^{-xt} \varphi(t) dt = f(e^{-x}) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} K\left(\frac{x}{u}\right) \varphi(u) \frac{du}{u} = 0,$$

где

$$K(x) = \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

(d) $\int_0^{\infty} K(x) x^{-it} \frac{dx}{x} = \Gamma(1+it) \neq 0$, если t вещественно.

(е) Положим $H(x) = 1/(\varepsilon x)$, если $(1+\varepsilon)^{-1} < x < 1$, и $H(x) = 0$ в остальных точках. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon x} \int_x^{(1+\varepsilon)x} \varphi(y) dy = 0.$$

(f) Из (б) и (е) вытекает, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$.

Примечание. Если предположить, что $na_n \rightarrow 0$, то уже небольшого видоизменения первого шага (а) предыдущего рассуждения оказывается достаточно для доказательства.

15. Пусть Y — замкнутое подпространство в $L^1(\mathbb{R}^n)$. Доказать, что Y тогда и только тогда инвариантно относительно сдвигов, когда $f * g \in Y$ для любых $f \in Y$ и $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, замкнутые подпространства в $L^1(\mathbb{R}^n)$, инвариантные относительно сдвигов, суть в точности замкнутые идеалы групповой алгебры $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Банаховы алгебры и спектральная теория

Глава 10

БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ

Введение

10.1. Определение. *Комплексной алгеброй* называется векторное пространство A над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, в котором определено умножение, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} (1) \quad & x(yz) = (xy)z, \\ (2) \quad & (x+y)z = xz + yz, \quad x(y+z) = xy + xz \\ & \text{и} \\ (3) \quad & \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \end{aligned}$$

для всех элементов x, y и z из A и всех скаляров α .

Если к тому же A является *банаховым пространством* по отношению к некоторой норме, удовлетворяющей *мультипликативному неравенству*

$$(4) \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad (x \in A, y \in A),$$

и, кроме того, A содержит *единичный элемент* e , такой, что

$$(5) \quad xe = ex = x \quad (x \in A)$$

и

$$(6) \quad \|e\| = 1,$$

то A называется *банаховой алгеброй*.

Заметим, что мы не требуем, чтобы алгебра A была коммутативной, т. е. чтобы $xy = yx$ для всех x и y из A , и это условие не предполагается выполненным, если оно не оговаривается специально.

Ясно, что может существовать не более одного $e \in A$, который удовлетворял бы условию (5), ибо если e' также удовлетворяет этому условию, то $e' = e'e = e$.

Наличие единичного элемента очень часто опускается в определении банаховой алгебры. Однако, когда в алгебре есть единичный элемент, имеет смысл говорить об обратимости (относительно

умножения), и это делает более естественным определение спектра элемента. Последнее в свою очередь делает более наглядным развитие всей теории. Кроме того, потеря в общности от предположения о наличии единицы невелика: большинство естественно возникающих банаховых алгебр обладает единицей, и любая банахова алгебра может быть дополнена единицей следующим каноническим способом.

Предположим, что A удовлетворяет условиям (1)–(4), но не имеет единицы. Пусть A_1 состоит из всех упорядоченных пар (x, α) , где $x \in A$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Зададим на A_1 покомпонентно линейные операции, а умножение и норму определим, полагая

$$(7) \quad (x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$$

и

$$(8) \quad \|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|.$$

Тогда алгебра A_1 удовлетворяет всем условиям (1)–(6), причем единицей в этой алгебре служит пара $e = (0, 1)$. Отображение $x \rightarrow (x, 0)$ задает изометрический изоморфизм алгебры A на некоторое подпространство в A_1 (и даже на некоторый двусторонний замкнутый идеал в A_1) коразмерности 1. Если отождествить x с $(x, 0)$, то A_1 получается из A просто добавлением одномерного пространства, порожденного элементом e . См. примеры 10.3(d) и 11.13(e).

В силу условия (4) умножение является *непрерывной* операцией в A . Это означает, что если $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$, то $x_n y_n \rightarrow xy$, и вытекает из тождества

$$(9) \quad x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y).$$

В частности, умножение *непрерывно слева и непрерывно справа*:

$$(10) \quad x_n y \rightarrow xy \quad \text{и} \quad x y_n \rightarrow xy,$$

если $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$.

Интересно, что условие (4) можно заменить более слабым (на первый взгляд) условием (10) и что условие (6) можно опустить, не расширяя при этом класса рассматриваемых алгебр.

10.2. Теорема. Пусть A — банахово пространство и одновременно комплексная алгебра с единицей $e \neq 0$, причем умножение в A непрерывно слева и справа. Тогда на A существует норма, индуцирующая исходную топологию и такая, что относительно этой нормы A является банаховой алгеброй.

[Предположение $e \neq 0$ исключает неинтересный случай $A = \{0\}$.]

Доказательство. Сопоставим каждому элементу $x \in A$ оператор умножения слева M_x , определяемый равенством

$$(1) \quad M_x(z) = xz \quad (z \in A).$$

Пусть $\tilde{A}$ — множество всех таких операторов M_x . Так как умножение справа предполагается непрерывным, то $\tilde{A} \subset \mathcal{B}(A)$, где $\mathcal{B}(A)$ — банахово пространство всех ограниченных линейных операторов на A .

Ясно, что отображение $x \rightarrow M_x$ линейно. Из ассоциативности умножения вытекает, что $M_{xy} = M_x M_y$. Если $x \in A$, то

$$(2) \quad \|x\| = \|xe\| = \|M_x e\| \leq \|M_x\| \|e\|.$$

Совокупность этих фактов означает, что отображение $x \rightarrow M_x$ есть изоморфизм алгебры A на алгебру $\tilde{A}$, причем обратное отображение непрерывно. Так как

$$(3) \quad \|M_x M_y\| \leq \|M_x\| \cdot \|M_y\| \quad \text{и} \quad \|M_e\| = \|I\| = 1,$$

то $\tilde{A}$ будет банаховой алгеброй, если, конечно, она полна, т. е. если она является замкнутым подпространством в $\mathcal{B}(A)$ относительно топологии, определяемой операторной нормой (см. теорему 4.1). Если считать полноту установленной, то по теореме о замкнутом графике отображение $x \rightarrow M_x$ также оказывается непрерывным. Поэтому $\|x\|$ и $\|M_x\|$ задают на A эквивалентные нормы.

Допустим, что $T \in \mathcal{B}(A)$, $T_i \in \tilde{A}$ и $T_i \rightarrow T$ в топологии пространства $\mathcal{B}(A)$. Если T_i есть оператор умножения слева на элемент $x_i \in A$, то

$$(4) \quad T_i(y) = x_i y = (x_i e) y = T_i(e) y \quad (y \in A).$$

При $i \rightarrow \infty$ первый член в (4) стремится к $T(y)$, а $T_i(e) \rightarrow T(e)$. Так как умножение в A предполагается непрерывным слева, то отсюда следует, что последний член в (4) стремится к $T(e)y$. Положим $x = T(e)$. Тогда

$$(5) \quad T(y) = T(e)y = xy = M_x(y) \quad (y \in A),$$

так что $T = M_x \in \tilde{A}$ и, следовательно, $\tilde{A}$ замкнуто в $\mathcal{B}(A)$ ¹⁾. ■

10.3. Примеры. (а) Пусть $C(K)$ — банахово пространство всех комплексных непрерывных функций на непустом компактном ха-

¹⁾ Теорема 10.2, в частности, означает, что в банаховой ситуации из раздельной непрерывности умножения (т. е. из непрерывности слева и справа) вытекает непрерывность по совокупности сомножителей: достаточно заменить норму на эквивалентную в соответствии с теоремой 10.2, а затем, как отмечалось, воспользоваться тождеством (9) и условием (4) п. 10.1. К этому можно добавить следующее. Если в нормированной алгебре умножение непрерывно по совокупности сомножителей, то ее пополнение обладает естественной структурой банаховой алгебры (что легко проверяется). С другой стороны, рассмотрим алгебру финитных последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$

с покомпонентными алгебраическими операциями и нормой $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} |x_k|$.

Легко убедиться, что умножение здесь непрерывно слева и справа (алгебра коммутативна), но не по совокупности сомножителей. Формальное присоединение единицы в соответствии с п. 10.1 ничего не меняет. — Прим. ред.

усдорфовом пространстве K , наделенное sup -нормой. Определим умножение обычным способом, а именно $(fg)(p) = f(p)g(p)$. Тем самым $C(K)$ становится коммутативной банаховой алгеброй, единичным элементом которой служит функция, тождественно равная 1.

Если K — конечное множество, состоящее, скажем, из n элементов, то $C(K)$ есть просто $\mathbb{C}^n$ с покоординатным умножением.

В частности, при $n = 1$ мы получаем самую простую банахову алгебру: $\mathbb{C}$ с абсолютной величиной (модулем) в качестве нормы.

(b) Пусть X — банахово пространство. Тогда $\mathcal{B}(X)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов на X — является банаховой алгеброй относительно обычной операторной нормы. Тожественный оператор I служит единицей этой алгебры. Если $\dim X = n < \infty$, то алгебра $\mathcal{B}(X)$ совпадает (изоморфна) с алгеброй всех квадратных матриц порядка n . Если $\dim X > 1$, то алгебра $\mathcal{B}(X)$ не коммутативна. [Тривиальный случай $X = \{0\}$ должен быть исключен.]

Любая замкнутая подалгебра в $\mathcal{B}(X)$, содержащая оператор I , также является банаховой алгеброй. Доказательство теоремы 10.2 показывает, что на самом деле *каждая* банахова алгебра изоморфна некоторой такой алгебре.

(c) Если K — непустое компактное множество в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C}^n$ и если A — подалгебра в $C(K)$, состоящая из тех функций $f \in C(K)$, которые голоморфны во внутренних точках компакта K , то A полна (относительно sup -нормы) и, следовательно, является банаховой алгеброй.

Если K — замкнутый единичный диск в $\mathbb{C}$, то A называется *диск-алгеброй*.

(d) Пространство $L^1(\mathbb{R}^n)$ со *сверткой* в качестве умножения удовлетворяет всем требованиям определения 10.1, за исключением того, что ему недостает единицы. Единицу можно присоединить при помощи абстрактной процедуры, описанной в п. 10.1, или это можно сделать более конкретно, расширяя алгебру $L^1(\mathbb{R}^n)$ до алгебры всех комплексных борелевских мер μ на $\mathbb{R}^n$, имеющих вид

$$d\mu = f dm_n + \lambda d\delta,$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, δ — мера Дирака на $\mathbb{R}^n$ и λ — произвольный скаляр.

(e) Пусть $M(\mathbb{R}^n)$ — алгебра всех комплексных борелевских мер на $\mathbb{R}^n$ со *сверткой* (см. п. 9.14) в качестве умножения и с полной вариацией в качестве нормы. Тогда $M(\mathbb{R}^n)$ является коммутативной банаховой алгеброй с единицей δ и содержит алгебру, описанную в (d), которая является ее замкнутой подалгеброй.

10.4. Замечания. Существует ряд соображений, по которым мы занимаемся банаховыми алгебрами над полем комплексных чисел, хотя вещественные банаховы алгебры (определение которых очевидно) также изучаются.

Одно из них заключается в том, что некоторые элементарные факты о голоморфных функциях играют важную роль при построении основ теории. Это видно на примере теорем 10.9 и 10.13 и особенно проявляется в функциональном исчислении.

Другое соображение, далеко не столь очевидное, состоит в том, что поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел обладает естественной нетривиальной инволюцией (см. определение 11.14), а именно комплексным сопряжением, и что многие из наиболее глубоких свойств банаховых алгебр специального типа объясняются наличием подобной инволюции. [По той же причине теория комплексных гильбертовых пространств богаче, чем вещественных.]

С некоторой точки зрения (теорема 10.44), даже топологическое различие между полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ играет определенную роль.

Одним из наиболее важных типов отображений одной банаховой алгебры в другую служат *гомоморфизмы*. Линейное отображение h называется гомоморфизмом, если оно *мультипликативно*, т. е.

$$h(xy) = h(x)h(y).$$

Особый интерес представляет тот случай, когда образом относительно h служит простейшая из банаховых алгебр — поле $\mathbb{C}$. Большинство продвижений в коммутативной ситуации решающим образом зависит от наличия достаточно богатого запаса гомоморфизмов данной алгебры в поле $\mathbb{C}$.

Комплексные гомоморфизмы

10.5. Определение. Пусть A — комплексная алгебра и φ — линейный функционал на A , не равный 0 тождественно. Если

$$(1) \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

для всех $x \in A$ и $y \in A$, то функционал φ называется *комплексным гомоморфизмом* на алгебре A .

[Исключение функционала $\varphi \equiv 0$ сделано только ради удобства.]

Элемент $x \in A$ называется *обратимым*, если он обладает *обратным* в A , т. е. если существует такой элемент $x^{-1} \in A$, что

$$(2) \quad x^{-1}x = xx^{-1} = e,$$

где e — единичный элемент алгебры A .

Заметим, что никакой элемент $x \in A$ не может иметь более одного обратного, ибо если $yx = e = xz$, то

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z.$$

10.6. Предложение. Если φ — комплексный гомоморфизм на комплексной алгебре A с единицей e , то $\varphi(e) = 1$ и $\varphi(x) \neq 0$ для каждого обратимого элемента $x \in A$.

Доказательство. Для некоторого $y \in A$ имеем $\varphi(y) \neq 0$.
Так как

$$\varphi(y) = \varphi(ye) = \varphi(y)\varphi(e),$$

то отсюда следует, что $\varphi(e) = 1$. Если элемент x обратим, то

$$\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1,$$

так что $\varphi(x) \neq 0$. ■

Утверждения (а) и (с) следующей ниже теоремы представляют собой, по-видимому, наиболее широко используемые факты теории банаховых алгебр. В частности, из (с) вытекает, что все комплексные гомоморфизмы банаховой алгебры непрерывны.

10.7. Теорема. Пусть A — банахова алгебра, $x \in A$ и $\|x\| < 1$. Тогда

(а) элемент $e - x$ обратим,

$$(b) \quad \|(e - x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|},$$

(с) $|\varphi(x)| < 1$ для каждого комплексного гомоморфизма φ на A .

Доказательство. Так как $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ и $\|x\| < 1$, то элементы

$$(1) \quad s_n = e + x + x^2 + \dots + x^n$$

образуют в A последовательность Коши. Поскольку алгебра A полна, найдется такой элемент $s \in A$, что $s_n \rightarrow s$. Так как $x^n \rightarrow 0$ и

$$(2) \quad s_n \cdot (e - x) = e - x^{n+1} = (e - x) \cdot s_n,$$

то из непрерывности умножения вытекает, что элемент s является обратным к $(e - x)$. Далее, из (1) вытекает, что

$$\|s - e - x\| = \|x^2 + x^3 + \dots\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}.$$

Наконец, предположим, что $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| \geq 1$. Согласно утверждению (а), элемент $e - \lambda^{-1}x$ обратим. Следовательно, в силу предложения 10.6,

$$1 - \lambda^{-1}\varphi(x) = \varphi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0.$$

Поэтому $\varphi(x) \neq \lambda$. ■

Теперь мы несколько отступим от основной линии изложения, чтобы остановиться на одной теореме, которая показывает, что для банаховых алгебр предложение 10.6 на самом деле полностью характеризует комплексные гомоморфизмы среди всех линейных функционалов. Этот впечатляющий результат, по-видимому, еще ждут интересные применения.

10.8. Лемма. Пусть f — целая функция одного комплексного переменного, причем $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ и

$$(1) \quad 0 < |f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|} \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Тогда $f(\lambda) = 1$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Так как функция f не имеет нулей, то найдется такая целая функция g , что $f = \exp \{g\}$, $g(0) = g'(0) = 0$ и $\operatorname{Re} [g(\lambda)] \leq |\lambda|$. Из последнего неравенства вытекает, что

$$(2) \quad |g(\lambda)| \leq |2r - g(\lambda)| \quad (|\lambda| \leq r).$$

Функция

$$(3) \quad h_r(\lambda) = \frac{r^2 g(\lambda)}{\lambda^2 [2r - g(\lambda)]}$$

является голоморфной в диске $\{\lambda: |\lambda| < 2r\}$ и $|h_r(\lambda)| \leq 1$, если $|\lambda| = r$. Согласно теореме о максимуме модуля,

$$(4) \quad |h_r(\lambda)| \leq 1 \quad (|\lambda| \leq r).$$

Фиксируем λ , и пусть $r \rightarrow \infty$. Тогда из (3) и (4) получается, что $g(\lambda) = 0$. ■

10.9. Теорема (Глисон, Кахан, Желязко). Если φ — такой линейный функционал на банаховой алгебре A , что $\varphi(e) = 1$ и $\varphi(x) \neq 0$ для каждого обратимого элемента $x \in A$, то

$$(1) \quad \varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y) \quad (x \in A, y \in A).$$

Заметим, что непрерывность функционала φ заранее не предполагается.

Доказательство. Пусть N — пространство нулей функционала φ . Если $x \in A$ и $y \in A$, то из предположения $\varphi(e) = 1$ вытекает, что

$$(2) \quad x = a + \varphi(x)e, \quad y = b + \varphi(y)e,$$

где $a \in N$, $b \in N$. Если применить φ к произведению левых и правых частей уравнений (2), то получится

$$(3) \quad \varphi(xy) = \varphi(ab) + \varphi(x)\varphi(y).$$

Таким образом, требуемое заключение (1) эквивалентно утверждению, что

$$(4) \quad ab \in N, \text{ если } a \in N \text{ и } b \in N.$$

Предположим, что частный случай утверждения (4), а именно

$$(5) \quad a^2 \in N, \text{ если } a \in N,$$

уже доказан. Тогда, полагая в (3) $x = y$, мы получим

$$(6) \quad \varphi(x^2) = [\varphi(x)]^2 \quad (x \in A).$$

Если заменить x на $x+y$ в формуле (6), то будем иметь

$$(7) \quad \varphi(xy+yx) = 2\varphi(x)\varphi(y) \quad (x \in A, y \in A).$$

Поэтому

$$(8) \quad xy+yx \in N, \text{ если } x \in N, y \in A.$$

Рассмотрим тождество

$$(9) \quad (xy-yx)^2 + (xy+yx)^2 = 2[x(yxy) + (yx y)x].$$

Если $x \in N$, то, согласно (8), правая часть тождества (9) также содержится в N . Кроме того, из (6) и (8) вытекает, что и элемент $(xy+yx)^2$ содержится в N . Поэтому $(xy-yx)^2$ содержится в N . Еще раз применяя (6), получаем, что

$$(10) \quad xy-yx \in N, \text{ если } x \in N, y \in A.$$

Если теперь сопоставить (8) и (10), то получится (4) и, следовательно, (1).

Таким образом, формула (1) вытекает из соотношения (5) чисто алгебраически. Доказательство соотношения (5) осуществляется аналитическим методом.

По предположению пространство N не содержит обратимых элементов алгебры A . Следовательно, согласно утверждению (а) теоремы 10.7, имеем $\|e-x\| \geq 1$ для всех $x \in N$. Поэтому

$$(11) \quad \|\lambda e - x\| \geq |\lambda| = |\varphi(\lambda e - x)| \quad (x \in N, \lambda \in \mathbb{C}),$$

так что φ является *непрерывным* линейным функционалом на A с нормой 1.

Для доказательства соотношения (5) фиксируем некоторый элемент $a \in N$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|a\| = 1$. Положим

$$(12) \quad f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(a^n)}{n!} \lambda^n \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Так как $|\varphi(a^n)| \leq \|a^n\| \leq \|a\|^n = 1$, то f оказывается целой функцией, причем $|f(\lambda)| \leq \exp|\lambda|$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Далее, $f(0) = \varphi(e) = 1$ и $f'(0) = \varphi(a) = 0$.

Если мы сможем доказать, что $f(\lambda) \neq 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, то из леммы 10.8 будет следовать, что $f''(0) = 0$. Поэтому $\varphi(a^2) = 0$, и (5) будет доказано.

Ряд

$$(13) \quad E(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} a^n$$

сходится по норме алгебры A при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Из непрерывности функционала φ вытекает, что

$$(14) \quad f(\lambda) = \varphi(E(\lambda)) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Как и в скалярном случае, из (13) вытекает, что $E(\lambda)$ удовлетворяет функциональному уравнению $E(\lambda + \mu) = E(\lambda)E(\mu)$. В частности,

$$(15) \quad E(\lambda)E(-\lambda) = E(0) = e \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Поэтому для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ элемент $E(\lambda)$ обратим в алгебре A . По предположению отсюда следует, что $\varphi(E(\lambda)) \neq 0$, т. е., согласно (14), что $f(\lambda) \neq 0$. ■

Основные свойства спектров

10.10. Определения. Пусть A — банахова алгебра и $G = G(A)$ — множество всех обратимых элементов алгебры A . Если $x \in G$ и $y \in G$, то элемент $y^{-1}x$ является обратным к $x^{-1}y$. Таким образом, $x^{-1}y \in G$, и, следовательно, G является группой.

Спектр $\sigma(x)$ элемента $x \in A$ по определению есть множество всех таких комплексных чисел λ , что $\lambda e - x$ не имеет обратного. Дополнение к $\sigma(x)$ в $\mathbb{C}$ называется *резольвентным множеством* элемента x . Оно состоит из всех таких комплексных чисел λ , для которых $(\lambda e - x)^{-1}$ существует.

Спектральным радиусом элемента x называется число

$$(1) \quad \rho(x) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(x) \}.$$

Оно равняется радиусу наименьшего замкнутого диска в $\mathbb{C}$ с центром в точке 0, который содержит $\sigma(x)$. Конечно, формула (1) теряет смысл, если $\sigma(x)$ пусто. Но мы вскоре покажем, что так никогда не бывает.

10.11. Теорема. Пусть A — банахова алгебра, $x \in G(A)$, $h \in A$ и $\|h\| < 1/2 \|x^{-1}\|^{-1}$. Тогда $x + h \in G(A)$ и

$$(1) \quad \|(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2 \|x^{-1}\|^3 \|h\|^2.$$

Доказательство. Так как $x + h = x(e + x^{-1}h)$ и $\|x^{-1}h\| < 1/2$, то из теоремы 10.7 вытекает, что $x + h \in G(A)$ и что норма элемента в правой части тождества

$$(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = [(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1}$$

не превосходит $2 \|x^{-1}h\|^2 \|x^{-1}\|$. ■

10.12. Теорема. Если A — банахова алгебра, то $G(A)$ образует открытое множество в A , а отображение $x \rightarrow x^{-1}$ является гомеоморфизмом $G(A)$ на себя.

Доказательство. Из теоремы 10.11 вытекает, что $G(A)$ открыто в A и что отображение $x \rightarrow x^{-1}$ непрерывно. Так как отображение $x \rightarrow x^{-1}$ взаимно однозначно переводит $G(A)$ на себя и совпадает с обратным к нему, то оно является гомеоморфизмом. ■

10.13. Теорема. Пусть A — банахова алгебра и $x \in A$. Тогда

(а) спектр $\sigma(x)$ элемента x есть непустое компактное множество;

(б) спектральный радиус $\rho(x)$ элемента x удовлетворяет условию

$$(1) \quad \rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{1/n}.$$

Заметим, что существование предела в (1) составляет часть утверждения и что в этой формуле спектрального радиуса содержится неравенство

$$(2) \quad \rho(x) \leq \|x\|.$$

Доказательство. Если $|\lambda| > \|x\|$, то $e - \lambda^{-1}x$ содержится в $G(A)$ по теореме 10.7. Поэтому $\lambda e - x$ содержится в $G(A)$, так что $\lambda \notin \sigma(x)$. Этим доказано неравенство (2). В частности, $\sigma(x)$ — ограниченное множество.

Для доказательства замкнутости $\sigma(x)$ определим отображение $g: \mathbb{C} \rightarrow A$, полагая $g(\lambda) = \lambda e - x$. Тогда g непрерывно и дополнение Ω к $\sigma(x)$, совпадающее с $g^{-1}(G(A))$, открыто в силу теоремы 10.12. Таким образом, $\sigma(x)$ — компакт.

Определим теперь отображение $f: \Omega \rightarrow G(A)$, полагая

$$(3) \quad f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} \quad (\lambda \in \Omega).$$

Заменим x на $\lambda e - x$ и h на $(\mu - \lambda)e$ в теореме 10.11. Если $\lambda \in \Omega$ и μ достаточно близко к λ , то в результате такой подстановки получится неравенство

$$(4) \quad \|f(\mu) - f(\lambda) + (\mu - \lambda)f^2(\lambda)\| \leq 2\|f(\lambda)\|^3|\mu - \lambda|^2,$$

так что

$$(5) \quad \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} = -f^2(\lambda) \quad (\lambda \in \Omega).$$

Таким образом, f является сильно голоморфной A -значной функцией в Ω .

Если $|\lambda| > \|x\|$, то соображения, использованные в теореме 10.7, показывают, что

$$(6) \quad f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}x^n = \lambda^{-1}e + \lambda^{-2}x + \dots$$

Этот ряд равномерно сходится на каждой окружности Γ_r с центром в точке 0 и радиусом $r > \|x\|$. По теореме 3.29 законно почленное интегрирование этого ряда. Поэтому

$$(7) \quad x^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \lambda^n f(\lambda) d\lambda \quad (r > \|x\|, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Если допустить, что $\sigma(x)$ пусто, то Ω будет совпадать с $\mathbb{C}$ и, по теореме Коши 3.31, все интегралы в (7) окажутся равными 0.

Но при $n=0$ левая часть в (7) равна $e \neq 0$. Полученное противоречие означает, что $\sigma(x)$ непусто.

Так как область Ω содержит все λ , такие, что $|\lambda| > \rho(x)$, то, применяя теорему Коши 3.31 к (3), мы видим, что в формулах (7) условие $r > \|x\|$ можно заменить на $r > \rho(x)$. Из непрерывности функции f вытекает, что

$$(8) \quad M(r) = \max_{\theta} \|f(re^{i\theta})\| < \infty \quad (r > \rho(x)).$$

В сочетании с (7) это дает

$$(9) \quad \|x^n\| \leq r^{n+1} M(r),$$

а следовательно,

$$(10) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} \leq r \quad (r > \rho(x))$$

и, наконец,

$$(11) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x).$$

С другой стороны, если $\lambda \in \sigma(x)$, то из тождества

$$(12) \quad (\lambda^n e - x^n) = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1} e + \dots + x^{n-1})$$

вытекает, что элемент $\lambda^n e - x^n$ необратим. Поэтому $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ и в соответствии с формулой (2) имеем $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$, $n=1, 2, 3, \dots$. Таким образом,

$$(13) \quad \rho(x) \leq \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{1/n}.$$

Формула (1), конечно, является прямым следствием неравенств (11) и (13). ■

Непустота спектра $\sigma(x)$ приводит к прозрачной характеристике тех банаховых алгебр, которые являются алгебрами с делением.

10.14. Теорема (Гельфанд—Мазур). *Если A —такая банахова алгебра, в которой каждый ненулевой элемент обратим, то A изометрически изоморфна полю комплексных чисел.*

Доказательство. Если $x \in A$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то самое большее один из элементов $\lambda_1 e - x$ и $\lambda_2 e - x$ может равняться 0. Поэтому хотя бы один из них обратим. Так как $\sigma(x)$ непусто, то отсюда вытекает, что $\sigma(x)$ состоит ровно из одной точки, скажем точки $\lambda(x)$, для каждого $x \in A$. Так как элемент $\lambda(x)e - x$ необратим, то он равен 0. Поэтому $x = \lambda(x)e$. Следовательно, отображение $x \rightarrow \lambda(x)$ осуществляет изоморфизм алгебры A и поля $\mathbb{C}$, причем этот изоморфизм изометрический, поскольку $|\lambda(x)| = \|\lambda(x)e\| = \|x\|$ для каждого $x \in A$. ■

Теоремы 10.13 и 10.14—ключевые результаты данной главы. Большая часть содержания гл. 11—13 не зависит от остальной части гл. 10.

10.15. Замечания. (а) Быть или не быть элементу алгебры A обратимым — чисто алгебраическое обстоятельство. Поэтому спектр и спектральный радиус элемента $x \in A$ полностью определяются алгебраической структурой, вне каких бы то ни было метрических (или топологических) рассмотрений. С другой стороны, $\lim \|x^n\|^{1/n}$, очевидно, зависит от метрических свойств A . В этом состоит одно из замечательных свойств формулы спектрального радиуса: она устанавливает совпадение величин совершенно различного происхождения.

(б) Наша алгебра A может быть подалгеброй некоторой более широкой алгебры B . При этом вполне может оказаться, что некоторый элемент $x \in A$ необратим в A , но обратим в B . В этом смысле спектр элемента x зависит от алгебры, в которой мы его рассматриваем. В понятных обозначениях имеет место включение $\sigma_A(x) \supset \sigma_B(x)$, но фигурирующие здесь спектры могут различаться. Спектральный радиус, однако, совсем не реагирует на переход от A к B , поскольку формула спектрального радиуса выражает эту величину в терминах метрических свойств степеней элемента x , а они не зависят от того, что происходит вне A .

Более детально взаимоотношение между $\sigma_A(x)$ и $\sigma_B(x)$ описано в теореме 10.18.

10.16. Лемма. Пусть V и W — открытые множества в некотором топологическом пространстве X , причем $V \subset W$ и W не содержит граничных точек множества V . Тогда V есть объединение некоторых компонент множества W .

Напомним, что компонентами множества W называются его максимальные связанные подмножества.

Доказательство. Пусть Ω — компонента множества W , пересекающая V . Пусть U — дополнение к $\bar{V}$. Так как W не содержит граничных точек множества V , то Ω представляется в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств $\Omega \cap V$ и $\Omega \cap U$. Но Ω связно. Следовательно, $\Omega \cap U$ пусто. Поэтому $\Omega \subset V$.

10.17. Лемма. Пусть A — банахова алгебра, $x_n \in G(A)$ при $n = 1, 2, 3, \dots$ и x — граничная точка множества $G(A)$. Тогда, если $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$, то $\|x_n^{-1}\| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Если утверждение неверно, то найдется такое конечное M , что $\|x_n^{-1}\| < M$ для бесконечного количества номеров n . Мы можем выбрать такой номер n , что $\|x_n - x\| < 1/M$. Для этого n имеем

$$\|e - x_n^{-1}x\| = \|x_n^{-1}(x_n - x)\| < 1,$$

так что $x_n^{-1}x \in G(A)$. Поскольку $x = x_n(x_n^{-1}x)$ и $G(A)$ — группа, то получается, что $x \in G(A)$. Но это противоречит условиям, потому что $G(A)$ открыто в A . ■

10.18. Теорема. (а) Если A — замкнутая подалгебра банаховой алгебры B , причем A содержит единицу алгебры B , то $G(A)$ есть объединение компонент множества $A \cap G(B)$.

(б) Если при тех же условиях $x \in A$, то $\sigma_A(x)$ есть объединение множества $\sigma_B(x)$ и некоторого (возможно, пустого) семейства ограниченных компонент дополнения к $\sigma_B(x)$. В частности, граница множества $\sigma_A(x)$ содержится в $\sigma_B(x)$.

Доказательство. (а) Каждый элемент алгебры A , обратимый в A , разумеется, обратим и в B . Поэтому $G(A) \subset G(B)$. Оба множества $G(A)$ и $A \cap G(B)$ открыты в A . Следовательно, согласно лемме 10.16, нам достаточно установить, что никакая граничная точка y множества $G(A)$ не содержится в $G(B)$.

Предположим, что точка y есть предел некоторой последовательности $\{x_n\}$ элементов из $G(A)$. Тогда, по лемме 10.17, имеем $\|x_n^{-1}\| \rightarrow \infty$. Если бы точка y содержалась в $G(B)$, то ввиду непрерывности обратного в $G(B)$ (теорема 10.12) последовательность x_n^{-1} должна была бы сходиться к y^{-1} . В частности, числовая последовательность $\{\|x_n^{-1}\|\}$ оказалась бы ограниченной. Таким образом, $y \notin G(B)$ и утверждение (а) доказано.

(б) Пусть Ω_A и Ω_B — дополнения в $\mathbb{C}$ к $\sigma_A(x)$ и $\sigma_B(x)$ соответственно. Включение $\Omega_A \subset \Omega_B$ очевидно, ибо $\lambda \in \Omega_A$ в том и только в том случае, если $\lambda e - x \in G(A)$. Пусть λ_0 — граничная точка множества Ω_A . Тогда $\lambda_0 e - x$ есть граничная точка множества $G(A)$. Согласно утверждению (а), имеем $\lambda_0 e - x \notin G(B)$. Поэтому $\lambda_0 \notin \Omega_B$. Из леммы 10.16 теперь вытекает, что Ω_A есть объединение каких-то компонент множества Ω_B . Все остальные компоненты множества Ω_B целиком содержатся в $\sigma_A(x)$. Утверждение (б) доказано. ■

Следствие. Если $\sigma_B(x)$ не разделяет $\mathbb{C}$, т. е. если его дополнение Ω_B связно, то $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

Действительно, в таком случае Ω_B не имеет ни одной ограниченной компоненты.

Наиболее важное применение этого следствия относится к ситуации, когда $\sigma_B(x)$ состоит только из вещественных чисел.

В качестве еще одного приложения леммы 10.17 мы докажем следующую теорему, утверждение которой совпадает с утверждением теоремы Гельфанда — Мазура, но дальнейшие следствия не столь значительны.

10.19. Теорема. Если для банаховой алгебры A существует такое $M < \infty$, что

$$(1) \quad \|x\| \|y\| \leq M \|xy\| \quad (x \in A, y \in A),$$

то алгебра A изометрически изоморфна полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Доказательство. Пусть y — граничная точка для $G(A)$. Тогда $y = \lim y_n$ для некоторой последовательности $\{y_n\}$ элементов из $G(A)$. Согласно лемме 10.17, имеем $\|y_n^{-1}\| \rightarrow \infty$. По предположению

$$(2) \quad \|y_n\| \|y_n^{-1}\| \leq M \|e\| \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Следовательно, $\|y_n\| \rightarrow 0$ и поэтому $y = 0$.

Если $x \in A$ и λ — граничная точка множества $\sigma(x)$, то $\lambda e - x$ — граничная точка для $G(A)$. Таким образом, $x = \lambda e$. Другими словами, $A = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}$. ■

Естественно спросить, будут ли спектры двух элементов x и y из A близки в каком-то смысле, если близки элементы x и y . Следующая теорема дает очень простой ответ на этот вопрос.

10.20. Теорема. Пусть A — банахова алгебра, $x \in A$, Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$ и $\sigma(x) \subset \Omega$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что $\sigma(x + y) \subset \Omega$, если $y \in A$ и $\|y\| < \delta$.

Доказательство. Так как $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ есть непрерывная функция от λ в дополнении к $\sigma(x)$ и так как эта норма стремится к 0 при $\lambda \rightarrow \infty$, то существует такое $M < \infty$, что

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| < M$$

для всех λ вне Ω . Отсюда следует, что если $y \in A$, $\|y\| < 1/M$ и $\lambda \notin \Omega$, то элемент

$$\lambda e - (x + y) = (\lambda e - x) [e - (\lambda e - x)^{-1} y]$$

обратим в A , так как $\|(\lambda e - x)^{-1} y\| < 1$. Поэтому $\lambda \notin \sigma(x + y)$. Таким образом, полагая $\delta = 1/M$, мы получаем требуемое. ■

Функциональное исчисление

10.21. Введение. Если x — элемент банаховой алгебры A и $f(\lambda) = \alpha_0 + \dots + \alpha_n \lambda^n$ — полином с комплексными коэффициентами, то не может быть двух мнений относительно значения символа $f(x)$. Очевидно, что таким способом обозначается элемент алгебры A , определяемый равенством

$$f(x) = \alpha_0 e + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n.$$

Возникает вопрос: допускает ли $f(x)$ разумное определение для других функций f ? С некоторыми примерами такого сорта мы уже встречались. Так, в процессе доказательства теоремы 10.9 мы были очень близки к определению экспоненциальной функции в A . Вообще, если $f(\lambda) = \sum \alpha_k \lambda^k$ — целая функция в $\mathbb{C}$, то естественно определить $f(x) \in A$, полагая $f(x) = \sum \alpha_k x^k$; такой ряд всегда сходится. Другой пример — мероморфная функция

$$f(\lambda) = \frac{1}{\alpha - \lambda}.$$

В этом случае $f(x)$ естественно определяется равенством

$$f(x) = (\alpha e - x)^{-1},$$

которое имеет смысл для всех x , спектр которых не содержит α .

Перечисленные примеры позволяют предположить, что $f(x) \in A$ допускает разумное определение, если функция f голоморфна в некоторой открытой окрестности множества $\sigma(x)$. Это предположение действительно оправдывается, и цель может быть достигнута при помощи варианта формулы Коши, преобразующей комплексные функции на некотором открытом подмножестве комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в A -значные функции, заданные на некотором открытом множестве в A . [Как и в классическом анализе, формула Коши оказывается здесь лучшим средством, чем разложения в степенные ряды.] Далее, так определенные $f(x)$ (см. определение 10.26) обладают рядом интересных свойств. Наиболее важные из них собраны в теоремах 10.27—10.29.

Для некоторых алгебр можно пойти дальше. Например, если x — ограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве H , то символ $f(x)$ можно интерпретировать как некоторый ограниченный нормальный оператор в H для каждой непрерывной комплексной функции f на $\sigma(x)$ и даже для каждой ограниченной комплексной борелевской функции. В гл. 12 мы увидим, как это приводит к эффективному доказательству весьма общей формы спектральной теоремы.

10.22. Интегрирование A -значных функций. Пусть A — банахова алгебра и f — непрерывная A -значная функция на некотором компактном хаусдорфовом пространстве Q , на котором определена комплексная борелевская мера μ . Тогда, поскольку A является банаховым пространством, интеграл $\int f d\mu$ существует и обладает всеми теми свойствами, которые обсуждались в гл. 3. Кроме того, он обладает следующим дополнительным свойством, которое используется в дальнейшем: *если $x \in A$, то*

$$(1) \quad x \int f d\mu = \int x f(p) d\mu(p)$$

и

$$(2) \quad \left(\int f d\mu \right) x = \int f(p) x d\mu(p).$$

Для доказательства формулы (1) обозначим через M_x оператор умножения слева на элемент x (как это было и в доказательстве теоремы 10.2). Пусть Λ — некоторый ограниченный линейный функционал на A . Тогда ΛM_x также является ограниченным линейным функционалом. Следовательно, согласно определению 3.26, имеем

$$\Lambda M_x \int f d\mu = \int (\Lambda M_x f) d\mu = \Lambda \int (M_x f) d\mu$$

для каждого функционала Λ . Поэтому

$$M_x \int_Q f d\mu = \int_Q (M_x f) d\mu,$$

а это просто другая запись формулы (1). Для доказательства формулы (2) надо взять в качестве M_x оператор умножения справа на x .

10.23. Контуры. Пусть K — компактное подмножество некоторого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ и Γ — конечное семейство ориентированных отрезков $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ в Ω , ни один из которых не пересекается с K . В этой ситуации интеграл по Γ определяется равенством

$$(1) \quad \int_{\Gamma} \varphi(\lambda) d\lambda = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \varphi(\lambda) d\lambda.$$

Хорошо известно, что Γ можно выбрать с таким расчетом, чтобы иметь

$$(2) \quad \text{Ind}_{\Gamma}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\lambda}{\lambda - \zeta} = \begin{cases} 1, & \text{если } \zeta \in K, \\ 0, & \text{если } \zeta \notin \Omega, \end{cases}$$

и в этом случае для каждой голоморфной в Ω функции f и каждой точки $\zeta \in K$ справедлива формула Коши¹⁾

$$(3) \quad f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda - \zeta)^{-1} f(\lambda) d\lambda.$$

См., например, [27, теорема 13.5].

Кратко мы будем описывать ситуацию (2) словами: *контур Γ охватывает K в Ω .*

Заметим, что здесь ни K , ни Ω , ни объединение отрезков γ_i не предполагаются связными.

10.24. Лемма. Пусть A — банахова алгебра, $x \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \sigma(x)$, Ω — дополнение к α в $\mathbb{C}$ и контур Γ охватывает $\sigma(x)$ в Ω . Тогда

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = (\alpha e - x)^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Доказательство. Обозначим интеграл через y_n . Если $\lambda \notin \sigma(x)$, то

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1}.$$

Поэтому y_n , согласно п.10.22, представляется в виде суммы

$$(2) \quad (\alpha e - x)^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n d\lambda$$

¹⁾ Все сказанное в равной степени относится к произвольным кусочно-гладким и вообще к любым спрямляемым контурам. — *Прим. ред.*

(эта величина равна 0, так как $\text{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$) и

$$(3) \quad (\alpha e - x)^{-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^{n+1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Следовательно,

$$(4) \quad (\alpha e - x) y_n = y_{n+1} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Это рекуррентное соотношение показывает, что общий случай формулы (1) получается из частного случая $n = 0$. Таким образом, мы должны доказать, что

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = e.$$

Пусть Γ_r — положительно ориентированная окружность с центром в точке 0 и радиусом $r > \|x\|$. На Γ_r имеем

$$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n.$$

Почленно интегрируя этот ряд, мы получаем (5), но с заменой Γ на Γ_r . Но под знаком интеграла в (5) стоит A -значная функция, голоморфная вне $\sigma(x)$ (см. доказательство теоремы 10.13). Кроме того,

$$(6) \quad \text{Ind}_{\Gamma_r}(\xi) = 1 = \text{Ind}_{\Gamma}(\xi)$$

для каждой точки $\xi \in \sigma(x)$. Поэтому, согласно теореме Коши 3.31, интеграл (5) не изменится, если Γ заменить на Γ_r . ■

10.25. Теорема. Пусть

$$(1) \quad R(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m,k} c_{m,k} (\lambda - \alpha_m)^{-k}$$

— рациональная функция с полюсами в точках α_m (P — полином, и сумма в (1) имеет только конечное число членов). Если $x \in A$ и $\sigma(x)$ не содержит полюсов функции R , то положим

$$(2) \quad R(x) = P(x) + \sum_{m,k} c_{m,k} (x - \alpha_m e)^{-k}.$$

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, содержащее $\sigma(x)$, и контур Γ охватывает $\sigma(x)$ в Ω . Если функция R голоморфна в Ω , то

$$(3) \quad R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Доказательство. Применяем лемму 10.24. ■

Заметим, что формула (2) представляет собой наиболее естественное определение рациональной функции от элемента $x \in A$. Утверждение (3) показывает, что формула Коши приводит к тому же результату. Этим оправдано следующее ниже определение.

10.26. Определение. Пусть A — банахова алгебра, Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$ и $H(\Omega)$ — алгебра всех комплексных голоморфных функций в Ω . Согласно теореме 10.20, множество

$$(1) \quad A_\Omega = \{x \in A: \sigma(x) \subset \Omega\}$$

открыто в A .

Множество $\tilde{H}(A_\Omega)$ определяется следующим образом. Оно состоит из A -значных функций $\tilde{f}$, заданных в A_Ω , причем функция $\tilde{f}$ получается из функции $f \in H(\Omega)$ по формуле

$$(2) \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda,$$

где Γ — произвольный контур, охватывающий $\sigma(x)$ в Ω .

Приведенное определение требует некоторых пояснений.

(а) Так как Γ отстоит от $\sigma(x)$ на положительное расстояние и так как переход к обратному — непрерывная операция в $G(A)$, то подынтегральное выражение в (2) непрерывно и, следовательно, интеграл существует и $\tilde{f}(x)$ действительно является элементом алгебры A .

(б) Подынтегральная функция фактически является голоморфной A -значной функцией в дополнении к $\sigma(x)$ (точнее, в пересечении этого множества с областью голоморфности функции f). Это отмечалось в доказательстве теоремы 10.13; см. также упр. 3. Поэтому из теоремы Коши 3.31 вытекает, что $\tilde{f}(x)$ не зависит от выбора контура Γ , конечно, при условии, что Γ охватывает $\sigma(x)$ в Ω .

(с) Если $x = \alpha e$ и $\alpha \in \Omega$, то формула (2) дает

$$(3) \quad \tilde{f}(\alpha e) = f(\alpha) e.$$

Заметим, что $\alpha e \in A_\Omega$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Omega$. Если отождествить точки $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\lambda e \in A$, то каждую функцию $f \in H(\Omega)$ можно будет рассматривать как отображение некоторого подмножества множества A_Ω (а именно пересечения A_Ω с одномерным подпространством в A , порожденным элементом e) в A . При этом функцию $\tilde{f}$ можно интерпретировать как *продолжение* функции f .

Очень часто в данном контексте пишут просто $f(x)$ вместо $\tilde{f}(x)$. Мы используем здесь обозначение $\tilde{f}(x)$, поскольку оно позволяет избежать некоторых двусмысленностей, которые могут привести к недоразумениям.

(д) Если S — произвольное множество и A — некоторая алгебра, то семейство всех A -значных функций на S относительно поточечных операций умножения на скаляры, сложения и умножения образует алгебру. Например, если u и v — отображения S в A , то

$$(uv)(s) = u(s)v(s) \quad (s \in S).$$

В частности, это надо иметь в виду по отношению к A -значным функциям, определенным в A_Ω .

10.27. Теорема. Пусть A , $H(\Omega)$ и $\tilde{H}(A_\Omega)$ — те же, что и в определении 10.26. Тогда $\tilde{H}(A_\Omega)$ есть комплексная алгебра. Отображение $f \rightarrow \tilde{f}$ представляет собой изоморфизм алгебры $H(\Omega)$ на алгебру $\tilde{H}(A_\Omega)$, причем это отображение непрерывно в следующем смысле:

если $f_n \in H(\Omega)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и $f_n \rightarrow f$ равномерно на компактных подмножествах множества Ω , то

$$(1) \quad \tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x) \quad (x \in A_\Omega).$$

Если $u(\lambda) = \lambda$ и $v(\lambda) = 1$ в Ω , то $\tilde{u}(x) = x$ и $\tilde{v}(x) = e$ для каждого $x \in A_\Omega$.

Доказательство. Последнее утверждение вытекает из теоремы 10.25. Интегральное представление (2) п. 10.26 со всей очевидностью показывает, что отображение $f \rightarrow \tilde{f}$ линейно. Если $\tilde{f} = 0$, то

$$(2) \quad f(\alpha)e = \tilde{f}(\alpha e) = 0 \quad (\alpha \in \Omega),$$

так что $f = 0$. Следовательно, отображение $f \rightarrow \tilde{f}$ взаимно однозначнo.

Утверждение относительно непрерывности прямо вытекает из представления (2) п. 10.26, ибо величина $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ ограничена на Γ . [Для всех f_n надо использовать один и тот же контур Γ и применить теорему 3.29.]

Остается доказать, что отображение $f \rightarrow \tilde{f}$ мультипликативно. Точнее, надо показать, что если $\tilde{f} \in H(\Omega)$, $\tilde{g} \in H(\Omega)$ и $h(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)\tilde{g}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \Omega$, то

$$(3) \quad \tilde{h}(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \quad (x \in A_\Omega).$$

Если $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ — рациональные функции с полюсами вне Ω и если $h = \tilde{f}\tilde{g}$, то $h(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ (здесь $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ определяются, как в теореме 10.25, и равенство проверяется непосредственно). По теореме 10.25 имеем $R(x) = \tilde{R}(x)$ для каждой рациональной функции R с полюсами вне Ω , и соотношение (3) в данном случае доказано. Общий случай сводится к данному при помощи теоремы Рунге (см., например, [27, теорема 13.9]). Согласно теореме Рунге, мы можем аппроксимировать $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ равномерно на компактных подмножествах в Ω последовательностями рациональных функций f_n и g_n . Тогда последовательность $f_n g_n$ будет в том же смысле сходиться к h , и соотношение (3) в общем случае получается предельным переходом, поскольку отображение $f \rightarrow \tilde{f}$ непрерывно в указанном выше смысле.

Заметим, что алгебра $\tilde{H}(A_\Omega)$ коммутативна¹⁾, поскольку, очевидно, коммутативна изоморфная ей алгебра $H(\Omega)$. ■

10.28. Теорема. Пусть $x \in A_\Omega$ и $f \in H(\Omega)$.

(а) Элемент $\tilde{f}(x)$ тогда и только тогда обратим в A , когда $f(\lambda) \neq 0$ при каждом $\lambda \in \sigma(x)$.

(b) $\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$.

Утверждение (b) называется теоремой об отображении спектров.

Доказательство. (а) Если функция f не имеет нулей на $\sigma(x)$, то функция $g = 1/f$ голоморфна на некотором таком открытом множестве Ω_1 , что $\sigma(x) \subset \Omega_1 \subset \Omega$. Так как $fg = 1$ в Ω_1 , то теорема 10.27 (с заменой Ω на Ω_1) показывает, что $\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = e$. Поэтому элемент $\tilde{f}(x)$ обратим. Обратно, если $f(\alpha) = 0$ для некоторого $\alpha \in \sigma(x)$, то найдется такая функция $h \in H(\Omega)$, что

$$(1) \quad (\lambda - \alpha)h(\lambda) = f(\lambda) \quad (\lambda \in \Omega),$$

откуда по теореме 10.27 получаем

$$(2) \quad (x - \alpha e)\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{h}(x)(x - \alpha e).$$

Так как элемент $x - \alpha e$ необратим в A , то, согласно (2), элемент $\tilde{f}(x)$ также не может быть обратимым.

(b) Фиксируем некоторое $\beta \in \mathbb{C}$. По определению, $\beta \in \sigma(\tilde{f}(x))$ тогда и только тогда, когда элемент $\tilde{f}(x) - \beta e$ необратим в A . Применяя утверждение (а) к функции $f - \beta$, мы видим, что это происходит в том и только в том случае, если функция $f - \beta$ имеет нуль на $\sigma(x)$, т. е. если $\beta \in f(\sigma(x))$. ■

Теорема об отображении спектров позволяет включить суперпозицию функций в число операций функционального исчисления.

10.29. Теорема. Предположим, что $x \in A_\Omega$, $f \in H(\Omega)$, Ω_1 — открытое множество, содержащее $f(\sigma(x))$, $g \in H(\Omega_1)$ и $h(\lambda) = g(f(\lambda))$ в Ω_0 , где Ω_0 — множество всех $\lambda \in \Omega$, для которых $f(\lambda) \in \Omega_1$.

Тогда $\tilde{f}(x) \in A_\Omega$ и $\tilde{h}(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$.

Короче говоря, $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$, если $h = g \circ f$.

Доказательство. Согласно утверждению (b) теоремы 10.28, имеем $\sigma(\tilde{f}(x)) \subset \Omega_1$, так что $\tilde{g}(\tilde{f}(x))$ определено корректно.

¹⁾ На первый взгляд, этому можно удивиться, поскольку $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}(y)$, вообще говоря, не коммутируют. Однако $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ при каждом $x \in A_\Omega$ перестановочны, ибо оба эти элемента суть «функции от одного и того же элемента x ». По определению операций в $\tilde{H}(A_\Omega)$ (см. 10.26 (d)) это как раз и означает, что $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ коммутируют. — Прим. ред.

Фиксируем некоторый контур Γ_1 , охватывающий $f(\sigma(x))$ в Ω_1 . Существует столь малое открытое множество W , удовлетворяющее условию $\sigma(x) \subset W \subset \Omega_0$, что

$$(1) \quad \text{Ind}_{\Gamma_1}(f(\lambda)) = 1 \quad (\lambda \in W).$$

Фиксируем некоторый контур Γ_0 , охватывающий $\sigma(x)$ в W . Если $\xi \in \Gamma_1$, то $1/(\xi - f) \in H(W)$. Поэтому теорема 10.27 (где надо взять W в качестве Ω) показывает, что

$$(2) \quad [\xi e - \tilde{f}(x)]^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} [\xi - f(\lambda)]^{-1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda \quad (\xi \in \Gamma_1).$$

Так как контур Γ_1 охватывает $\sigma(\tilde{f}(x))$ в Ω_1 , то, используя (1) и (2), получаем окончательно

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\xi) [\xi e - \tilde{f}(x)]^{-1} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\xi) [\xi - f(\lambda)]^{-1} d\xi (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} g(f(\lambda)) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} h(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \tilde{h}(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Теперь мы дадим некоторые применения построенного функционального исчисления. Сначала речь будет идти о существовании корней и логарифмов. Говорят, что элемент $x \in A$ обладает *корнем* m -й степени в A , если $x = y^m$ для некоторого $y \in A$. Если $x = \exp(y)$ для некоторого $y \in A$, то y есть *логарифм* от x .

Заметим, что $\exp(y) = \sum_0^\infty y^n/n!$. Кроме того, экспоненциальная функция может быть также определена при помощи контурного интегрирования в соответствии с п. 10.26. Утверждение теоремы 10.27 о непрерывности показывает, что эти два определения экспоненты совпадают (как и для всех целых функций).

10.30. Теорема. Пусть A — банахова алгебра, $x \in A$ и спектр $\sigma(x)$ элемента x не разделяет 0 и ∞ (т. е. точка 0 принадлежит неограниченной компоненте дополнения к спектру). Тогда

- (а) элемент x обладает корнями всех степеней в A ;
- (б) элемент x обладает логарифмом в A ;
- (с) если $\varepsilon > 0$, то найдется такой полином P , что $\|x^{-1} - P(x)\| < \varepsilon$.

Кроме того, если $\sigma(x)$ лежит на положительной вещественной полуоси, то корни в (а) можно выбрать обладающими тем же свойством.

Доказательство. По предположению точка 0 принадлежит неограниченной компоненте дополнения к $\sigma(x)$. Поэтому сущест-

вует функция f , голоморфная в некотором односвязном открытом множестве $\Omega \supset \sigma(x)$, для которой

$$\exp(f(\lambda)) = \lambda.$$

Из теоремы 10.29 вытекает, что

$$\exp(\tilde{f}(x)) = x,$$

и поэтому $y = \tilde{f}(x)$ служит логарифмом для x . Если $0 < \lambda < \infty$ для каждого $\lambda \in \sigma(x)$, то функция f может быть выбрана вещественной на $\sigma(x)$. По теореме об отображении спектров в этом случае $\sigma(y)$ будет лежать на вещественной оси. Пусть $z = \exp(y/m)$. Тогда $z^m = x$. Кроме того, еще раз применяя теорему об отображении спектров, получаем: $\sigma(z) \subset (0, \infty)$, если $\sigma(y) \subset (-\infty, \infty)$. Тем самым доказаны утверждения (а) и (б), а также заключительное утверждение. Конечно, утверждение (а) можно доказать и непосредственно, не обращаясь к утверждению (б).

Для доказательства утверждения (с) заметим, что функция $1/\lambda$ допускает равномерную аппроксимацию полиномами на некотором открытом множестве, содержащем $\sigma(x)$ (теорема Рунге). После этого остается только воспользоваться утверждением о непрерывности из теоремы 10.27. ■

Перечисленные результаты не совсем тривиальны даже в случае конечномерной алгебры A . Например, из утверждения (б) в этом частном случае извлекается тот факт, что квадратная матрица M порядка n в том и только в том случае служит экспонентой некоторой матрицы, если 0 не является собственным значением матрицы M , т. е. если матрица M обратима. Чтобы вывести этот факт из утверждения (б), достаточно в качестве A рассмотреть алгебру всех комплексных квадратных матриц порядка n (или алгебру всех ограниченных линейных операторов на $\mathbb{C}^n$).

10.31. Теорема. (а) Пусть A — банахова алгебра, $x \in A$, P — полином от одного переменного и $P(x) = 0$. Тогда $\sigma(x)$ содержится в множестве нулей полинома P .

(б) В частности, если x — идемпотент, т. е. $x^2 = x$, то $\sigma(x) \subset \{0, 1\}$.

(с) Если в алгебре A имеется элемент, спектр которого несвязен, то A содержит нетривиальный идемпотент.

Тривиальными идемпотентами являются, конечно, 0 и e .

Доказательство. По теореме об отображении спектров

$$P(\sigma(x)) = \sigma(P(x)) = \sigma(0) = \{0\},$$

откуда сразу получаются (а) и (б). Если $\sigma(x)$ несвязно, то найдется пара открытых множеств Ω_0, Ω_1 с пустым пересечением,

каждое из которых пересекается с $\sigma(x)$ и объединение которых Ω содержит $\sigma(x)$. Положим $f(\lambda) = 0$ на Ω_0 и $f(\lambda) = 1$ на Ω_1 . Тогда $f \in H(\Omega)$. Пусть $y = \tilde{f}(x)$. Так как $f^2 = f$, то из теоремы 10.27 вытекает, что $y^2 = y$ и, следовательно, y — идемпотент. По теореме об отображении спектров

$$\sigma(y) = f(\sigma(x)) = \{0, 1\}.$$

Поэтому идемпотент y нетривиален, так как тривиальные идемпотенты 0 и e обладают одноточечным спектром. ■

10.32. Определение. Пусть $\mathcal{B}(X)$ — банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов на банаховом пространстве X . Точечным спектром $\sigma_p(T)$ оператора $T \in \mathcal{B}(X)$ называется множество всех собственных значений этого оператора. Таким образом, $\lambda \in \sigma_p(T)$ в том и только в том случае, если ядро $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ оператора $T - \lambda I$ имеет положительную размерность.

В случае $A = \mathcal{B}(X)$ теорема об отображении спектров допускает следующее уточнение.

10.33. Теорема. Пусть $T \in \mathcal{B}(X)$, Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, $\sigma(T) \subset \Omega$ и $f \in H(\Omega)$.

(а) Если $x \in X$, $\alpha \in \Omega$ и $Tx = \alpha x$, то $\tilde{f}(T)x = f(\alpha)x$.

(b) $f(\sigma_p(T)) \subset \sigma_p(\tilde{f}(T))$.

(с) Если $\alpha \in \sigma_p(\tilde{f}(T))$ и функция $f - \alpha$ не обращается в нуль тождественно ни в одной из компонент множества Ω , то $\alpha \in f(\sigma_p(T))$.

(d) Если f непостоянна ни в одной из компонент множества Ω , то $f(\sigma_p(T)) = \sigma_p(\tilde{f}(T))$.

Утверждение (а) устанавливает, что каждый собственный вектор оператора T с собственным значением α является также собственным вектором и для оператора $\tilde{f}(T)$ с собственным значением $f(\alpha)$.

Доказательство. (а) Если $x = 0$, то доказывать нечего. Предположим, что $x \neq 0$ и что $Tx = \alpha x$. Тогда $\alpha \in \sigma(T)$. Существует такая функция $g \in H(\Omega)$, что

$$(1) \quad f(\lambda) - f(\alpha) = g(\lambda)(\lambda - \alpha).$$

По теореме 10.27 из (1) вытекает, что

$$(2) \quad \tilde{f}(T) - f(\alpha)I = \tilde{g}(T)(T - \alpha I).$$

Так как $(T - \alpha I)x = 0$, то из формулы (2) вытекает утверждение (а).

Таким образом, если α — собственное значение оператора T , то $f(\alpha)$ — собственное значение оператора $\tilde{f}(T)$. Поэтому утверждение (b) вытекает из (а).

Если выполняются условия (с), то

$$(3) \quad \alpha \in \sigma_p(\tilde{f}(T)) \subset \sigma(\tilde{f}(T)) = f(\sigma(T)),$$

так что

$$(4) \quad f^{-1}(\alpha) \cap \sigma(T) \neq \emptyset.$$

Кроме того, множество, фигурирующее в (4), конечно, так как $\sigma(T)$ — компактное подмножество в Ω , а $f - \alpha$ не обращается тождественно в нуль ни в одной компоненте множества Ω . Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — набор нулей функции $f - \alpha$ в $\sigma(T)$, записанных с учетом кратности. Тогда можно считать, что

$$(5) \quad f(\lambda) - \alpha = g(\lambda)(\lambda - \xi_1) \dots (\lambda - \xi_n),$$

где $g \in H(\Omega)$, причем g не имеет нулей на $\sigma(T)$. Имеем

$$(6) \quad \tilde{f}(T) - \alpha I = \tilde{g}(T)(T - \xi_1 I) \dots (T - \xi_n I).$$

Согласно утверждению (а) теоремы 10.28, элемент $\tilde{g}(T)$ обратим в алгебре $\mathcal{B}(X)$. С другой стороны, $f(\alpha)$ — собственное значение оператора $\tilde{f}(T)$, и поэтому оператор $\tilde{f}(T) - \alpha I$ имеет нетривиальное ядро в X . Из формулы (6) теперь вытекает, что хотя бы один из операторов $T - \xi_i I$ также имеет нетривиальное ядро. Соответствующая ему точка ξ_i содержится в $\sigma_p(T)$. Так как $f(\xi_i) = \alpha$, то мы получаем (с).

Наконец, утверждение (d) непосредственно вытекает из утверждений (b) и (c) ¹⁾. ■

Дифференцирования

Теперь мы рассмотрим вопрос о том, в какой степени поведение тех или иных элементов алгебры $\tilde{H}(A_\Omega)$ (см. определение 10.26) похоже на поведение голоморфных функций. Нас будут интересовать такие свойства, как дифференцируемость, представимость степенными рядами и открытость («сохранение области»). Заранее можно сказать, что результаты гораздо ближе к классическим тогда, когда алгебра A коммутативна, чем без этого предположения.

10.34. Определение. Пусть X и Y — банаховы пространства, Ω — открытое множество в X , F — отображение множества Ω в Y и a — некоторая точка из Ω . Если существует такое $\Lambda \in \mathcal{B}(X, Y)$ (где $\mathcal{B}(X, Y)$ — банахово пространство всех ограниченных линейных операторов из X в Y), что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|F(a+x) - F(a) - \Lambda x\|}{\|x\|} = 0,$$

¹⁾ Заметим, что дополнительное условие на f , фигурирующее в (с) и (d), существенно. Действительно, пусть, например, $X = C([0, 1])$, $f(\lambda) \equiv 0$ и

$$(Tx)(t) = \int_0^t x(s) ds. \text{ Тогда, как легко видеть, } \sigma_p(T) = \emptyset, \text{ но } \sigma_p(\tilde{f}(T)) = \{0\} \neq \emptyset. —$$

Прим. ред.

то оператор Λ называется *производной Фреше* от F в точке a . [Единственность Λ тривиальна.]

Производная Фреше от F в точке a будет обозначаться через $(DF)_a$.

Если производная $(DF)_a$ существует для каждой точки $a \in \Omega$ и если

$$a \rightarrow (DF)_a$$

есть непрерывное отображение из Ω в $\mathcal{B}(X, Y)$, то отображение F называется *непрерывно дифференцируемым* в Ω .

10.35. Разделенные разности. Пусть A — банахова алгебра, $x \in A$ и $x+h \in A$. Если обе части тождества

$$(\lambda e - x) - (\lambda e - x - h) = h$$

умножить слева на $(\lambda e - x - h)^{-1}$ и справа на $(\lambda e - x)^{-1}$, то получится

$$(1) \quad (\lambda e - x - h)^{-1} - (\lambda e - x)^{-1} = (\lambda e - x - h)^{-1} h (\lambda e - x)^{-1}$$

при условии, конечно, что обратные существуют.

Пусть теперь Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, $x \in A_\Omega$, $x+h \in A_\Omega$ и $f \in H(\Omega)$. Выберем контур Γ , охватывающий компакт $\sigma(x) \cup \sigma(x+h)$ в Ω . Тогда из соотношения (1) вытекает, что

$$(2) \quad \tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda e - x - h)^{-1} h (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

Если элементы h и x коммутируют, т. е. если $xh = hx$, то, как показано в п. 10.22, множитель h можно вынести за знак интеграла. Этим оправдано следующее определение. Величина

$$(3) \quad (Q\tilde{f})(x; h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda e - x - h)^{-1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda$$

называется *разделенной разностью*. В предположении, что $xh = hx$, эта величина удовлетворяет равенству

$$(4) \quad \tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x) = h (Q\tilde{f})(x; h).$$

Всюду в оставшейся части данного пункта указанное предположение считается выполненным.

Если $\|h\| < 1/M$, где $M > \|(\lambda e - x)^{-1}\|$ при всех λ из Γ , то ряд

$$(5) \quad (\lambda e - x - h)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda e - x)^{-n} h^{n-1}$$

сходится по норме A , причем сходимость равномерна по $\lambda \in \Gamma$. Поэтому представление (3) разделенной разности допускает сле-

дующее преобразование:

$$(6) \quad (Q\tilde{f})(x; h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda e - x)^{-n-1} d\lambda h^{n-1} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f^{(n)}(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda h^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(x)}{n!} h^{n-1},$$

где $f^{(n)}$ — производная порядка n от f , а через $\tilde{f}^{(n)}$ для краткости обозначено $[f^{(n)}]^-$. Норма коэффициента при h^{n-1} в последнем степенном ряде оценивается произведением константы (зависящей от f и Γ) на M^n . Следовательно, этот степенной ряд сходится по норме. Таким образом, из (4) и (6) получается представление в виде степенного ряда

$$(7) \quad \tilde{f}(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{f}^{(n)}(x) h^n,$$

которое имеет место, если $xh = h$ и если норма $\|h\|$ достаточно мала. (См. упр. 9.)

Мы установили, в частности, следующую теорему.

10.36. Теорема. Пусть A — коммутативная банахова алгебра, Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, $x \in A_{\Omega}$ и $f \in H(\Omega)$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что

$$(1) \quad \tilde{f}(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{f}^{(n)}(x) h^n$$

для всех $h \in A$, таких, что $\|h\| < \delta$. Следовательно,

$$(2) \quad (D\tilde{f})_x(h) = \tilde{f}'(x)h \quad (h \in A).$$

Другими словами, оператор $(D\tilde{f})_x \in \mathcal{B}(A)$ имеет смысл и совпадает с оператором умножения на элемент $\tilde{f}'(x) \in A$.

Итак, положение здесь такое же, как и в классическом случае $A = \mathbb{C}$. Теперь мы рассмотрим некоммутативную ситуацию.

10.37. Коммутаторы. Операторы умножения слева и справа на элемент x (некоммутативной) банаховой алгебры A будут обозначаться соответственно через L_x и R_x . Так как алгебра A ассоциативна, т. е. $y(xz) = (yx)z$, то каждый оператор L_y умножения слева коммутирует с каждым оператором R_z умножения справа. В частности, операторы L_x и R_x коммутируют друг с другом и с оператором

$$(1) \quad C_x = R_x - L_x.$$

Заметим, что $C_x(y) = yx - xy$ есть так называемый коммутатор элементов x и y .

Конечно, операторы L_x , R_x и C_x принадлежат $\mathcal{B}(A)$. Легко видеть, что

$$(2) \quad \sigma(L_x) = \sigma(x) = \sigma(R_x)$$

и что $\|C_x\| \leq 2\|x\|$. Некоторая дальнейшая информация относительно $\sigma(C_x)$ будет указана в следствии к теореме 11.23.

10.38. Теорема. Пусть A — банахова алгебра, Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, $x \in A_\Omega$ и $f \in H(\Omega)$. Тогда $\tilde{f}$ есть непрерывно дифференцируемое отображение из A_Ω в A и

$$(1) \quad (D\tilde{f})_x(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} y (\lambda e - x)^{-1} d\lambda \quad (y \in A),$$

где Γ — произвольный контур, охватывающий $\sigma(x)$ в Ω .

Оператор $(Df)_x$ может быть также представлен в виде $\mathcal{B}(A)$ -значного интеграла

$$(2) \quad (D\tilde{f})_x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda I - R_x)^{-1} (\lambda I - L_x)^{-1} d\lambda$$

и в виде разделенной разности

$$(3) \quad (D\tilde{f})_x = (Q\tilde{f})(L_x; C_x).$$

Если область Ω содержит все такие λ , что $|\lambda| \leq 3\|x\|$, то

$$(4) \quad (D\tilde{f})_x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \tilde{f}^{(m)}(x) C_x^{m-1}.$$

Обозначения, использованные в формуле (3), быть может, требуют некоторых пояснений. Слева в (3) символом $\tilde{f}$ обозначена функция, действующая из A_Ω в A . Справа $\tilde{f}$ употребляется для обозначения функции из $\mathcal{B}(A)_\Omega$ в $\mathcal{B}(A)$. Таким образом, обе части формулы (3) представляют элементы алгебры $\mathcal{B}(A)$.

Доказательство. Если $M > \|(\lambda e - x)^{-1}\|$ для всех λ из Γ и если $2M\|y\| < 1$, то, как показывает теорема 10.11, норма разности между $\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x)$ и правой частью формулы (1) не превосходит произведения $2M^3\|y\|^2$ на длину контура Γ и на максимум функции $|f|$ по контуру Γ . Отсюда следует формула (1).

Пусть $g(\lambda) \in \mathcal{B}(A)$ — подынтегральное выражение в (2). Так как переход к обратному есть непрерывная операция в каждой банаховой алгебре, в том числе в алгебре $\mathcal{B}(A)$, то g — непрерывная функция на Γ и, следовательно,

$$(5) \quad T = \int_{\Gamma} g(\lambda) d\lambda$$

— корректно определенный элемент из $\mathcal{B}(A)$. Из (5) вытекает, что

$$(6) \quad Ty = \int_{\Gamma} g(\lambda) y d\lambda \quad (y \in A).$$

Но $g(\lambda)y$ есть в точности подынтегральная функция в правой части формулы (1). Поэтому формула (6) показывает, что $T = 2\pi i (D\tilde{f})_x$, и соотношение (2) установлено.

Быть может, нелишне более детально проследить, как формула (6) получается из формулы (5) и определения 3.26. Именно, если $F \in A^*$ (где A^* — пространство, сопряженное к A), $y \in A$ и $F_1 S = F(Sy)$ при $S \in \mathcal{B}(A)$, то $F_1 \in \mathcal{B}(A)^*$ и

$$F(Ty) = F_1 T = \int_{\Gamma} F_1 g(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma} F(g(\lambda)y) d\lambda = F \int_{\Gamma} g(\lambda)y d\lambda.$$

Вернемся к формуле (2). Если $x_n \rightarrow x$, то контур Γ из (2) будет охватывать $\sigma(x_n)$ в Ω для всех n , кроме, быть может, конечного числа. Отбросим это конечное множество. Тогда $(D\tilde{f})_{x_n}$ будет задаваться формулой (2) с заменой x на x_n в подынтегральном выражении. Так как

$$(7) \quad (\lambda e - x_n)^{-1} \rightarrow (\lambda e - x)^{-1} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

равномерно на Γ , то подынтегральные функции в (2) будут равномерно сходиться. Поэтому мы приходим к заключению, что отображение $x \rightarrow (D\tilde{f})_x$ непрерывно. Таким образом, функция $\tilde{f}$ непрерывно дифференцируема.

Так как $R_x = L_x + C_x$, то формула (3) есть просто другая запись формулы (2).

Пусть контур Γ в (2) есть окружность радиуса $r > 3\|x\|$ с центром в точке 0. Тогда

$$\|(\lambda I - L_x)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} L_x^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} \|x\|^n = \frac{1}{r - \|x\|}$$

для всех λ из Γ , так что

$$(8) \quad \|(\lambda I - L_x)^{-1}\| \cdot \|C_x\| \leq \frac{2\|x\|}{r - \|x\|} < 1.$$

В силу неравенств (8) выкладки, проделанные в формуле (6) п. 10.35, оказываются применимыми к $(Q\tilde{f})(L_x; C_x)$. Поэтому

$$(9) \quad (Q\tilde{f})(L_x; C_x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \tilde{f}^{(m)}(L_x) C_x^{m-1}.$$

Наконец, формула (4) вытекает из (3) и (9), поскольку

$$\begin{aligned} (10) \quad \tilde{g}(L_x)y &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\lambda) (\lambda I - L_x)^{-1} y \, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} y \, d\lambda = \tilde{g}(x)y \end{aligned}$$

для каждого $y \in A$ и каждого $g \in H(\Omega)$, в частности для $f^{(m)}$. ■

Ряд (4) действительно может оказаться расходящимся, если функция f обладает особенностью на расстоянии $3\|x\|$ от начала координат. Пример такого сорта приведен в упр. 22. Поэтому константа 3 в последней части теоремы 10.38 является наилучшей.

Если алгебра A коммутативна, то $C_x = 0$. При этом среди членов ряда (4) сохраняется только член с $m = 1$, и это согласуется с теоремой 10.36.

Следующая теорема позволит нам получить информацию относительно локальных свойств отображения, осуществляемого функцией $\tilde{f}$ из теоремы 10.36.

10.39. Теорема об обратной функции. Предположим, что

- (a) W есть открытое множество в банаховом пространстве X ;
- (b) $F: W \rightarrow X$ — непрерывно дифференцируемое отображение;
- (c) для каждой точки $x \in W$ производная $(DF)_x$ является обратимым элементом алгебры $\mathcal{B}(X)$.

Тогда каждая точка $a \in W$ обладает такой открытой окрестностью U , что

- (i) отображение F инъективно на U ;
- (ii) множество $F(U) = V$ открыто в X ;
- (iii) отображение $F^{-1}: V \rightarrow U$ непрерывно дифференцируемо.

Заключение теоремы можно кратко сформулировать, сказав, что отображение F является локальным диффеоморфизмом.

Доказательство. Если $a \in W$, $T = (DF)_a$ и

$$(1) \quad f(x) = T^{-1}[F(a+x) - F(a)] \quad (x \in W - a),$$

то так определенная функция f удовлетворяет условиям теоремы с заменой W на $W - a$. Если утверждение теоремы верно для f , то оно верно и для F . Поэтому мы можем рассматривать f вместо F . Другими словами, не ограничивая общности, мы можем (и будем) считать, что

$$(2) \quad 0 \in W, \quad F(0) = 0, \quad (DF)_0 = I.$$

При этом мы должны доказать, что точка 0 обладает окрестностью U , удовлетворяющей условиям (i), (ii) и (iii).

Фиксируем некоторое α , для которого $0 < \alpha < 1$. Пусть

$$(3) \quad \varphi(x) = x - F(x) \quad (x \in W).$$

Тогда $(D\varphi)_0 = 0$, а так как φ непрерывно дифференцируемо в W , то найдется такой открытый шар $B \subset W$ с центром в точке 0, что

$$(4) \quad \|(D\varphi)_x\| < \alpha, \text{ если } x \in B.$$

Пусть $x' \in B$, $x'' \in B$, $x_t = (1-t)x' + tx''$ и

$$(5) \quad \psi(t) = \varphi(x_t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Тогда отображение $\psi: [0, 1] \rightarrow X$ непрерывно дифференцируемо, и по правилу дифференцирования сложной функции

$$(6) \quad \psi'(t) = (D\varphi)_{x_t}(x'' - x') \quad (x = x_t).$$

Поэтому из неравенства (4) вытекает, что

$$(7) \quad \|\psi'(t)\| \leq \alpha \|x'' - x'\|.$$

Заметим, что $x_t \in B$ ввиду выпуклости этого шара. (См. упр. 10.) Так как

$$(8) \quad \varphi(x'') - \varphi(x') = \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt,$$

то на основании неравенства (7) мы заключаем, что отображение φ удовлетворяет условию Липшица:

$$(9) \quad \|\varphi(x'') - \varphi(x')\| \leq \alpha \|x'' - x'\| \quad (x' \in B, x'' \in B).$$

Теперь из формулы (3) следует, что

$$(10) \quad \|F(x'') - F(x')\| \geq (1 - \alpha) \|x'' - x'\| \quad (x' \in B, x'' \in B).$$

Поэтому отображение F инъективно в шаре B . Далее, если определить отображение $G: F(B) \rightarrow B$ условием $G(F(x)) = x$, то, согласно (10), это отображение оказывается непрерывным.

Наша ближайшая цель — доказать, что $F(B) \supset (1 - \alpha)B$.

Пусть $y \in (1 - \alpha)B$. Положим $x_0 = 0$, $x_1 = y$. Допустим, что $n \geq 1$ и что существуют такие точки $x_0, \dots, x_n$, которые удовлетворяют условиям

$$(11) \quad x_i = y + \varphi(x_{i-1}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

и

$$(12) \quad \|x_i - x_{i-1}\| \leq \alpha^{i-1} \|y\| \quad (1 \leq i \leq n).$$

[Эти условия выполнены при $n = 1$.] Согласно (12), имеем

$$(13) \quad \|x_n\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i - x_{i-1}\| \leq \sum_{i=1}^n \alpha^{i-1} \|y\| \leq (1 - \alpha)^{-1} \|y\|,$$

так что $x_n \in B$, элемент $\varphi(x_n)$ определен и мы можем положить

$$(14) \quad x_{n+1} = y + \varphi(x_n).$$

Из (14), (11) и (9) вытекает, что

$$(15) \quad \|x_{n+1} - x_n\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Тем самым по индукции получается бесконечная последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условиям (11) и (12). Так как $\alpha < 1$, то из условия (12) вытекает, что $\{x_n\}$ есть последовательность Коши, сходящаяся к некоторому элементу x , причем этот элемент, согласно (13), содержится в шаре B . Из (11) и (3) вытекает, что $F(x) = y$.

Если положить $V = (1 - \alpha)B$ и $U = G(V) = B \cap F^{-1}(V)$, то утверждения (i) и (ii) будут выполняться. Поэтому нам остается проверить, что отображение G является непрерывно дифференцируемым в V .

Пусть $y \in V$, $y + k \in V$, $k \neq 0$, $x = G(y)$, $x + h = G(y + k)$. Положим $S = (DF)_x$. Тогда

$$\begin{aligned} G(y + k) - G(y) - S^{-1}k &= h - S^{-1}k = S^{-1}(Sh - k) = \\ &= -S^{-1}[F(x + h) - F(x) - Sh]. \end{aligned}$$

Из неравенства (10) следует, что $(1 - \alpha)\|h\| \leq \|k\|$. Поэтому

$$\frac{\|G(y + k) - G(y) - S^{-1}k\|}{\|k\|} \leq \|S^{-1}\| \frac{\|F(x + h) - F(x) - Sh\|}{(1 - \alpha)\|h\|}.$$

Если $k \rightarrow 0$, то, согласно (10), и $h \rightarrow 0$. Так как $S = (DF)_x$, то последнее неравенство означает поэтому, что $S^{-1} = (DG)_y$. Другими словами,

$$(16) \quad (DG)_y = [(DF)_{G(y)}]^{-1} \quad (y \in V).$$

Так как G непрерывно отображает V в $\mathcal{B}(X)$ и так как переход к обратному в алгебре $\mathcal{B}(X)$ есть непрерывная операция (теорема 10.12), то соотношение (16) означает, что $y \rightarrow (DG)_y$ есть непрерывное отображение из V в $\mathcal{B}(X)$. ■

10.40. Теорема. Пусть A — коммутативная банахова алгебра, Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, $x \in A_\Omega$ и производная f' некоторой функции $f \in H(\Omega)$ не имеет нулей на $\sigma(x)$. Тогда элемент x обладает такой окрестностью $U \subset A_\Omega$, что сужение отображения $\tilde{f}$ на эту окрестность U является диффеоморфизмом на некоторое открытое подмножество в A .

Доказательство. По теореме 10.28 элемент $\tilde{f}'(x)$ обратим в алгебре A . Согласно теореме 10.36, отсюда следует, что элемент $(D\tilde{f})_x$ обратим в алгебре $\mathcal{B}(A)$. Так как $y \rightarrow (D\tilde{f})_y$ есть непрерывное отображение из A_Ω в A (теорема 10.38) и так как обратимые элементы в $\mathcal{B}(A)$ составляют открытое подмножество, то элемент x обладает такой окрестностью, что для любого y из этой окрестности оператор $(D\tilde{f})_y$ обратим. Теперь остается воспользоваться теоремой 10.39. ■

Может показаться, что $\tilde{f}$ осуществляет *открытое отображение* множества A_Ω в A для любой функции $f \in H(\Omega)$, которая не сводится к константе ни в одной из компонент множества Ω . Заметим, что в теореме 10.40 это не утверждается. Более того, вообще говоря, это и неверно (см., например, упр. 13). Из доказательства теоремы только видно, что отображение $\tilde{f}$ открыто вблизи каждой точки x , для которой оператор $(D\tilde{f})_x$ является обратимым.

Предположение, что f' не имеет нулей на $\sigma(x)$, означает, что функция f является локально взаимно однозначной в подходящей открытой окрестности компакта $\sigma(x)$. Теорема 10.42 покажет, что если снять дополнительное предположение о коммутативности, то из этого локального условия уже не будет вытекать открытость отображения $\tilde{f}$ в точке x . Однако аналогичная глобальная теорема оказывается справедливой.

10.41. Теорема. Пусть A — произвольная банахова алгебра, Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, $f \in H(\Omega)$, причем функция f взаимно однозначна (однолистка) в Ω . Тогда отображение $\tilde{f}$ осуществляет диффеоморфизм между A_Ω и $A_{f(\Omega)}$.

Доказательство. Пусть $g: f(\Omega) \rightarrow \Omega$ — отображение, обратное к f . Так как суперпозиции $g \circ f$ и $f \circ g$ суть тождественные отображения множеств Ω и $f(\Omega)$ соответственно, то, согласно теореме 10.29, отображение $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ тождественно в A_Ω , а отображение $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ тождественно в $A_{f(\Omega)}$. Поэтому отображение $\tilde{f}$ взаимно однозначно и его образом служит $A_{f(\Omega)}$. Кроме того, по теореме 10.38, отображение $\tilde{f}$ и обратное к нему $\tilde{g}$ оба непрерывно дифференцируемы. ■

10.42. Теорема. Пусть $A = \mathcal{B}(X)$, где X — комплексное банахово пространство, причем $\dim X > 1$. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$ и $f \in H(\Omega)$. Если функция f не является взаимно однозначной в Ω , то некоторое $T_0 \in A_\Omega$ обладает такой окрестностью U , что множество $\tilde{f}(U)$ не содержит никакой окрестности точки $\tilde{f}(T_0)$.

Таким образом, $\tilde{f}$ не будет открытым в точке T_0 .

Доказательство. По предположению множество Ω содержит две точки $\alpha \neq \beta$, в которых, скажем, $f(\alpha) = f(\beta) = c$. Пусть Y — замкнутое подпространство в X коразмерности 1. Выберем такие векторы $x_1, x_2 \in X$, что $x_i \neq 0$ и x_2 содержится в Y , а x_1 не содержится. Определим оператор $T_0 \in A$, полагая

$$(1) \quad T_0 x_1 = \alpha x_1, \quad T_0 y = \beta y, \quad \text{если } y \in Y.$$

Если $\lambda \neq \alpha$ и $\lambda \neq \beta$, то соотношения

$$x_1 \rightarrow \frac{1}{\lambda - \alpha} x_1, \quad y \rightarrow \frac{1}{\lambda - \beta} y \quad (y \in Y)$$

корректно определяют $(\lambda I - T_0)^{-1}$. Таким образом, $\sigma(T_0) = \{\alpha, \beta\}$ и $T_0 \in A_\Omega$. Согласно утверждению (а) теоремы 10.33, имеем

$$(2) \quad \tilde{f}(T_0) = cI.$$

Положим $x_3 = x_1 + x_2$, и пусть M — одномерное подпространство в X , порожденное вектором x_3 . Обозначим через δ расстояние от $T_0 x_3$ до M . Тогда $\delta > 0$, так как $T_0 x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2$ и $\alpha \neq \beta$. Пусть Ω_0 — объединение компонент множества Ω , содержащих точки α и β (конечно, таких компонент одна или две). Пусть U — множество всех тех $T \in A$, для которых

$$(3) \quad \|T - T_0\| < \frac{\delta}{\|x_3\|} \quad \text{и} \quad \sigma(T) \subset \Omega_0.$$

Тогда U — окрестность оператора T_0 . Мы покажем, что множество $\tilde{f}(U)$ не содержит ни одного из операторов $\tilde{f}(T_0) + \eta S$, где $\eta \neq 0$, а оператор $S \in A$ определяется соотношениями

$$(4) \quad Sx_1 = x_3, \quad Sy = 0 \quad \text{при} \quad y \in Y.$$

Можно рассуждать от противного. Предположим, что $\sigma(T) \subset \Omega_0$, $\eta \neq 0$ и

$$(5) \quad \tilde{f}(T) = \tilde{f}(T_0) + \eta S = cI + \eta S.$$

Тогда

$$(6) \quad \tilde{f}(T)x_3 = (c + \eta)x_3, \quad \tilde{f}(T)y = cy \quad \text{при} \quad y \in Y.$$

Таким образом, $c + \eta$ есть собственное значение оператора $\tilde{f}(T)$ с собственным подпространством M . Так как функция $f - (c + \eta)$ не обращается в нуль ни в точке α , ни в точке β , то она не обращается тождественно в нуль ни в какой компоненте множества Ω_0 . Поэтому, согласно утверждению (с) теоремы 10.33, имеем $c + \eta = f(\gamma)$ для некоторого собственного значения γ оператора T . Из утверждения (а) теоремы 10.33 легко вытекает, что собственное подпространство оператора T , отвечающее собственному значению γ , содержится в M , а так как $\dim M = 1$, то оно совпадает с M . Поэтому $Tx_3 \in M$. Следовательно, имея в виду выбор числа δ , мы получаем

$$(7) \quad \delta \leq \|Tx_3 - T_0 x_3\| \leq \|T - T_0\| \|x_3\|.$$

Таким образом, T не содержится в U . ■

10.43. Экспоненциальная функция. Для иллюстрации полученных результатов посмотрим, что мы можем сказать по поводу экспоненциальной функции, которая в каждой банаховой алгебре

A определяется степенным рядом (см. также п. 10.30)

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

(а) Если $\sigma(x)$ не содержит никаких двух различных точек, расстояние между которыми равно целочисленному кратному $2\pi i$, то ввиду компактности множества $\sigma(x)$ (числовая) функция $\exp(\lambda)$ однолистка в подходящем открытом множестве $\Omega \supset \sigma(x)$. Поэтому, согласно теореме 10.41, отображение $\exp$ есть диффеоморфизм окрестности A_Ω точки x на некоторое открытое множество в A .

(б) Производная Фреше от $\exp$ в точке x равна

$$(D \exp)_x = \exp(x) \tilde{\Phi}(C_x),$$

где целая функция Φ определяется равенством

$$\Phi(\lambda) = \frac{\exp(\lambda) - 1}{\lambda}.$$

Это вытекает из последнего утверждения теоремы 10.38, так как для функции $f(\lambda) = \exp(\lambda)$ имеем $f^{(m)} = f$ при всех $m \geq 1$.

Нулями функции Φ служат точки $2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Если ни одна из этих точек не попадает в $\sigma(C_x)$, то оператор $\tilde{\Phi}(C_x)$ обратим (в силу теоремы об отображении спектров), так что $(D \exp)_x$ и $\exp$ снова являются диффеоморфизмами вблизи точки x .

(с) В дальнейшем мы покажем (теорема 11.23), что

$$\sigma(C_x) \subset \sigma(x) - \sigma(x).$$

Тем самым устанавливается связь между рассуждениями в (а) и (б).

(д) Если алгебра A коммутативна, то оператор $(D \exp)_x$ обратим для каждого $x \in A$, поскольку он просто совпадает с оператором умножения на обратимый в A элемент $\exp(x)$ (теорема 10.36). Следовательно, как и в классической ситуации $A = \mathbb{C}$, отображение $\exp$ оказывается локальным диффеоморфизмом. Вместе с тем если $A = \mathcal{B}(X)$, то ввиду теоремы 10.42 при $\dim X > 1$ это отображение не будет открытым отображением из A в A .

Группа обратимых элементов

Теперь мы несколько более внимательно рассмотрим структуру мультипликативной группы $G = G(A)$ всех обратимых элементов банаховой алгебры A .

Компоненту G , содержащую единицу e этой группы, обозначим через G_1 . Иногда G_1 называют *главной компонентой* группы G . Напомним, что, по определению компоненты (топологического

пространства), G_1 совпадает с объединением всех связных подмножеств в G , содержащих e .

Группа G содержит множество

$$\exp(A) = \{\exp(x) : x \in A\},$$

т. е. образ экспоненциальной функции в A . Это происходит потому, что элемент $\exp(-x)$ служит обратным к $\exp(x)$. Действительно, степенной ряд, определяющий $\exp(x)$ (см. п. 10.43), приводит к функциональному уравнению

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y),$$

которое выполняется *при условии, что $xy=yx$* . Кроме того, конечно, $\exp(0)=e$.

Заметим еще, что G является топологической группой (см. п. 5.12), поскольку умножение и переход к обратному — непрерывные операции.

10.44. Теорема. (а) G_1 есть открытый нормальный делитель в G .

(б) G_1 совпадает с подгруппой, порожденной множеством $\exp(A)$.

(с) Если алгебра A коммутативна, то $G_1 = \exp(A)$.

(д) Если алгебра A коммутативна, то факторгруппа G/G_1 не имеет элементов конечного порядка (за исключением единицы).

Доказательство. (а) Согласно теореме 10.11, каждый элемент $x \in G_1$ служит центром некоторого открытого шара U , целиком входящего в G . Так как шар U пересекается с G_1 , связан и содержится в G , то $U \subset G_1$. Поэтому G_1 открыто в G .

Если $x \in G_1$, то $x^{-1}G_1$ является связным подмножеством в G , содержащим $x^{-1}x=e$. Поэтому $x^{-1}G_1 \subset G_1$ для каждого $x \in G_1$. Тем самым установлено, что G_1 — подгруппа в G . Далее, для каждого $y \in G$ множество $y^{-1}G_1y$ является подмножеством в G , содержащим e , причем это подмножество гомеоморфно G_1 и, следовательно, связно. Поэтому $y^{-1}G_1y \subset G_1$. В соответствии с определением последнее означает, что G_1 — нормальный делитель (нормальная подгруппа) в G .

(б) Пусть Γ — группа, порожденная множеством $\exp(A)$. При $n=1, 2, 3, \dots$ обозначим через E_n множество всех произведений по n элементов из $\exp(A)$. Так как $y^{-1} \in \exp(A)$ при $y \in \exp(A)$, то Γ совпадает с объединением множеств E_n . Так как произведение любых двух связных множеств является связным¹⁾, то по

¹⁾ Заметим, что здесь речь идет не о прямом произведении (хотя это верно и для прямого произведения), а о произведении в группе. Для доказательства указанного утверждения достаточно воспользоваться тем (очевидным) обстоятельством, что при непрерывном отображении связное множество остается связным. В частности, не ограничивая общности, можно предположить, что перемножаемые подмножества F', F'' группы H содержат единицу e этой группы. Тогда в компоненту точки $e \in F'F''$ войдет F'' и, следовательно, aF'' при каждом $a \in F'$. Поэтому $F'F''$ связно. — *Прим ред.*

идукции получаем, что каждое из множеств E_n связно. Вместе с тем каждое из множеств E_n содержит точку e , так что $E_n \subset G_1$. Поэтому Γ является подгруппой в G_1 .

Далее, множество $\exp(A)$ имеет внутренние точки относительно G (теорема 10.30). Поэтому тем же свойством обладает и Γ . Так как Γ является группой, а умножение на любой элемент $x \in G$ есть гомеоморфизм группы G на себя, то Γ открыто в G_1 .

Из сказанного ясно, что каждый класс смежности в группе G_1 по подгруппе Γ является открытым множеством. Таким же будет и любое объединение классов смежности, в частности объединение нетривиальных классов смежности. Но дополнение к последнему совпадает с Γ , так что Γ замкнуто в G_1 .

Таким образом, Γ открыто и замкнуто в G_1 , а так как G_1 связно, то $\Gamma = G_1$.

(с) Если алгебра A коммутативна, то функциональное уравнение, которому удовлетворяет экспоненциальная функция, показывает, что множество $\exp(A)$ является в этом случае группой. Поэтому утверждение (с) вытекает из (b).

(d) Мы должны доказать следующее предложение: *если алгебра A коммутативна, $x \in G$ и $x^n \in G_1$ для некоторого положительного целого числа n , то $x \in G_1$.*

Согласно утверждению (с), из условия вытекает, что $x^n = \exp(a)$ для некоторого $a \in A$. Положим $y = \exp(n^{-1}a)$ и $z = xy^{-1}$. Так как $y \in G_1$, то достаточно показать, что $z \in G_1$.

Ввиду коммутативности алгебры A имеем

$$z^n = x^n y^{-n} = \exp(a) \exp(-a) = e.$$

Положим $f(\lambda) = \lambda z - (\lambda - 1)e$, и пусть $E = \{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda) \in G\}$. Если $\alpha \in \sigma(z)$, то $\alpha^n \in \sigma(z^n) = \sigma(e) = \{1\}$. Поэтому если $\lambda \notin E$, то $(\lambda - 1)^n = \lambda^n$. Последнее уравнение имеет только $n - 1$ решений в $\mathbb{C}$. Следовательно, множество E связно. Поэтому $f(E)$ — связное подмножество в G , содержащее точку $f(0) = e$. Таким образом, $f(E) \subset G_1$. В частности, $z = f(1) \in G_1$. ■

В теореме 12.38 будет показано, что множество $\exp(A)$ не обязательно является группой.

Упражнения

Во всех упражнениях A обозначает некоторую банахову алгебру.

1. Пусть $x \in A$, $y \in A$.

(a) Доказать, что если элементы x и xy обратимы в A , то обратим и элемент y .

(b) Доказать, что если элементы xy и yx обратимы в A , то оба элемента x и y обратимы. [В коммутативном случае этот факт использовался при доказательстве теорем 10.13 и 10.28.]

(с) Доказать, что, вообще говоря, может быть $xy = e \neq yx$. Рассмотреть, например, правый и левый сдвиги S_R и S_L на подходящем банаховом про-

странстве функций f , заданных на множестве неотрицательных целых чисел. Операторы сдвига определяются соотношениями

$$(S_R f)(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ f(n-1), & \text{если } n \geq 1, \end{cases}$$

$$(S_L f)(n) = f(n+1) \quad \text{для всех } n \geq 0.$$

(d) Показать, что yx — нетривиальный идемпотент, если $xy = e \neq yx$.

(e) Если $\dim A < \infty$, то равенство $yx = e$ эквивалентно равенству $xy = e$.

2. Пусть $x \in A$, $y \in A$.

(a) Доказать, что элемент $e - yx$ обратим, если обратим элемент $e - xy$. *Указание.* Если z — обратный к $e - xy$, то рассмотрите $e + yzx$.

(b) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ и $\lambda \in \sigma(xy)$. Доказать, что $\lambda \in \sigma(yx)$. Показать, что, однако, $\sigma(xy)$ может содержать точку $\lambda = 0$, тогда как $\sigma(yx)$ не содержит этой точки.

(c) Доказать, что если элемент x обратим, то $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

3. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$ и отображения $f: \Omega \rightarrow A$ и $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфны. Доказать, что отображение $\varphi f: \Omega \rightarrow A$ голоморфно. [Этот факт в частном случае $\varphi(\lambda) = \lambda^n$ использовался при доказательстве теоремы 10.13.]

4. Доказательство теоремы о непустоте спектра $\sigma(x)$ может быть основано на теореме Лиувилля 3.32 и том факте, что $(\lambda e - x)^{-1} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Восполнить детали.

5. Элемент $x \in A$ называется *топологическим делителем нуля*, если существует такая последовательность $\{y_n\}$ элементов из A , что $\|y_n\| = 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} xy_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n x.$$

(a) Доказать, что каждая граничная точка x множества всех обратимых элементов алгебры A является топологическим делителем нуля. *Указание.* Положите $y_n = x_n^{-1} / \|x_n^{-1}\|$, где $x_n \rightarrow x$.

(b) Какие банаховы алгебры не имеют топологических делителей нуля, отличных от элемента 0?

6. Пусть $K = \{\lambda \in \mathbb{C}: 1 \leq |\lambda| \leq 2\}$. Положим $f(\lambda) = \lambda$. Пусть A — наименьшая замкнутая подалгебра в $C(K)$, содержащая 1 и функцию f . Пусть B — наименьшая замкнутая подалгебра в $C(K)$, содержащая функции f и $1/f$. Описать спектры $\sigma_A(f)$ и $\sigma_B(f)$.

Проделать то же самое для случая, когда K — единичная окружность.

7. Усилить следующим образом утверждение (1) о непрерывности в теореме 10.27. Если K — произвольное компактное подмножество в Ω и

$$A_K = \{x \in A: \sigma(x) \subset K\},$$

то $\tilde{f}_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$ равномерно на A_K .

8. (a) В доказательстве теоремы 10.29 использовалась теорема Фубини для векторнозначных функций. Обосновать это.

(b) Дать другое доказательство теоремы 10.29, идя по следующему пути, который не требует привлечения контурного интегрирования. Сначала доказать теорему для полиномов g , затем для рациональных функций $g \in H(\Omega_1)$, а общий случай получить при помощи теоремы Рунге.

9. В выкладке (6) из п. 10.35 используется интегрирование по частям в векторнозначном интеграле. Обосновать это.

10. Доказать теорему о дифференцировании сложной функции для векторнозначных функций, которая была использована при доказательстве теоремы 10.39. Доказать основную теорему дифференциального и интегрального исчисления (формулу Ньютона—Лейбница) для векторнозначных функций; эта теорема требуется для обоснования формулы (8) из доказательства теоремы 10.39.

11. Доказать со всеми подробностями, что сходимость в соотношении (7) из теоремы 10.38 действительно равномерна на G .

12. Пусть k — положительное целое число, $\omega = \exp(2\pi i/k)$ и отображение $f: A \rightarrow A$ задается равенством $f(x) = x^k$.

(а) Доказать, что отображение f является диффеоморфизмом в некоторой окрестности точки $x_0 \in A$, если x_0 удовлетворяет условию

$$\sigma(x_0) \cap \omega^n \sigma(x_0) = \emptyset \quad \text{при } n=1, \dots, k-1.$$

(б) Для коммутативной алгебры A это утверждение верно для любого обратимого элемента x_0 из A .

13. Пусть A — алгебра матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$. Доказать, что величина $|\alpha| + |\beta|$ задает на A норму банаховой алгебры. Положим $f(x) = x^2$ при $x \in A$. Описать $f(A)$. Является ли $f(A)$ открытым в A ? Является ли отображение f открытым? [Ср. с вопросом (б) из упр. 12.]

14. Показать, что каждая двумерная комплексная алгебра A с единицей e либо изоморфна $\mathbb{C}^2$ с покоординатными операциями, либо изоморфна алгебре, описанной в упр. 13. *Указание.* В первом случае имеется такой элемент $x \neq \pm e$, что $x^2 = e$, а во втором — такой элемент $x \neq 0$, что $x^2 = 0$. Доказать, что (в точности) одна из этих возможностей осуществляется в любой двумерной алгебре¹⁾.

Показать, что существуют трехмерные некоммутативные банаховы алгебры над полем комплексных чисел.

15. Доказать соотношение

$$\exp(C_x) = \exp(R_x) \exp(-L_x)$$

и использовать его для вывода формулы

$$\exp(-x) y \exp(x) = [\exp(C_x)] y,$$

справедливой для любых элементов x и y в произвольной банаховой алгебре A . [Обозначения те же, что в п. 10.37.]

16. Пусть $A = C(T)$ — алгебра всех непрерывных комплексных функций на единичной окружности T , наделенная $\sup$ -нормой. Доказать, что два обратимых элемента алгебры $C(T)$ тогда и только тогда принадлежат одному и тому же классу смежности по подгруппе G_1 , когда они задают гомотопные отображения окружности T в множество ненулевых комплексных

¹⁾ В частности, каждая двумерная алгебра над полем комплексных чисел оказывается коммутативной, и теперь естественно спросить, не противоречит ли этому существование некоммутативного тела кватернионов (вещественной размерности 4), которое включает в себя поле комплексных чисел. — *Прим. ред.*

чисел. Вывести отсюда, что факторгруппа G/G_1 в данном случае изоморфна аддитивной группе целых чисел. [Обозначения те же, что и в теореме 10.44.]

17. Пусть $A = M(\mathbb{R})$ — алгебра всех комплексных борелевских мер на вещественной оси со сверткой в качестве умножения (см. пример 10.3 (е)). Восполнить детали в следующем рассуждении, показывающем, что факторгруппа G/G_1 несчетна. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и δ_α — единичная мера, сосредоточенная в точке α . Предположим, что $\delta_\alpha \in G_1$. Тогда $\delta_\alpha = \exp(\mu_\alpha)$ для некоторой меры $\mu_\alpha \in M(\mathbb{R})$. Поэтому при $-\infty < t < \infty$ имеем

$$-iat = \hat{\mu}_\alpha(t) + 2k\pi i,$$

где k — целое число. Но так как функция $\hat{\mu}_\alpha$ является ограниченной, то $\alpha = 0$. Таким образом, δ_0 — единственная из мер δ_α , которая попадает в G_1 . Поэтому ни один из смежных классов группы G по подгруппе G_1 не может содержать более одной меры δ_α .

18. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, α — изолированная граничная точка для Ω , $f: \Omega \rightarrow X$ — голоморфная X -значная функция в Ω (где X — некоторое комплексное банахово пространство), n — неотрицательное целое число и величина

$$|\lambda - \alpha|^n \|f(\lambda)\|$$

остаётся ограниченной при $\lambda \rightarrow \alpha$. В таком случае говорят, что f имеет полюс (порядка $\leq n$) в точке α .

(а) Пусть $x \in A$ и $(\lambda e - x)^{-1}$ имеет полюс в каждой точке множества $\sigma(x)$. [Заметим, что такое может происходить только в том случае, когда множество $\sigma(x)$ конечно.] Доказать, что $P(x) = 0$ для некоторого нетривиального полинома P .

(б) Рассмотрим частный случай ситуации (а), когда $\sigma(x) = \{0\}$ и $(\lambda e - x)^{-1}$ имеет полюс порядка n в точке 0. Доказать, что $x^n = 0$.

19. Пусть S_R — правый сдвиг, действующий в l^2 , как это описано в упр. 1. Пусть $\{c_n\}$ — последовательность комплексных чисел, для которой $c_n \neq 0$, но $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Определим оператор $M \in \mathcal{B}(l^2)$, полагая

$$(Mf)(n) = c_n f(n) \quad (n \geq 0),$$

и пусть $T = MS_R$.

(а) Вычислить $\|T^m\|$ для $m = 1, 2, 3, \dots$.

(б) Показать, что $\sigma(T) = \{0\}$.

(с) Показать, что оператор T не имеет собственных значений. [Точечный спектр этого оператора пуст, хотя весь его спектр содержит только одну точку!]

(д) Показать, что 0 не является полюсом для $(\lambda I - T)^{-1}$.

(е) Показать, что T — компактный оператор.

20. Пусть $x \in A$, $x_n \in A$ и $\lim x_n = x$. Предположим, что Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, содержащее некоторую компоненту множества $\sigma(x)$. Доказать, что $\sigma(x_n)$ пересекается с Ω для всех достаточно больших n . [Это больше, чем утверждается в теореме 10.20.] Указание. Если $\sigma(x) \subset \Omega \cup \Omega_0$, где Ω_0 — открытое множество, не пересекающееся с Ω , то рассмотрите функцию f , равную 1 на Ω и равную 0 на Ω_0 .

21. Пусть C_R — алгебра всех вещественных непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ с суп-нормой. Она удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на банахову алгебру, за исключением того, что поле скаляров теперь служат вещественные числа.

(а) Если $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$, то $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(f) \neq 0$ для каждого обратимого

в C_R элемента f . Однако функционал φ не является мультипликативным.

(б) Пусть G и G_1 определяются для C_R в соответствии с теоремой 10.44. Показать, что группа G/G_1 имеет порядок 2.

Таким образом, аналоги теоремы 10.9 и утверждения (д) теоремы 10.44 оказываются неверными и для алгебры над вещественным полем. В каком месте не проходит доказательство утверждения (д) теоремы 10.44?

22. Пусть A — алгебра всех комплексных квадратных матриц порядка 2. отождествим A с $\mathcal{B}(C^2)$, где C^2 наделяется нормой $\|(\alpha, \beta)\| = |\alpha| + |\beta|$. [Тем самым вводится норма и в A .] Рассмотрим в A элемент

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(а) Найти $\|x\|$, $\sigma(x)$ и $\sigma(C_x)$.

(б) Пусть $t \in C$, $t^2 \neq 1$ и $\tilde{f}(\lambda) = 1/(t - \lambda)$, так что

$$\tilde{f}(y) = (te - y)^{-1} \quad (y \in A, t \notin \sigma(y)).$$

Вычислить $(D\tilde{f})_x$ и показать, что ряд $\sum (n!)^{-1} \tilde{f}^{(n)}(x) C_x^{n-1}$ сходится тогда и только тогда, когда $|t-1| > 2$ и $|t+1| > 2$. [Тем самым в последней части теоремы 10.38 константа 3 не может быть заменена меньшей.]

Частичный ответ на вопрос (б):

$$(D\tilde{f})_x \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/(t-1)^2 & b/(t^2-1) \\ c/(t^2-1) & d/(t+1)^2 \end{pmatrix}.$$

23. Что получится, если процесс присоединения единицы (описанный в п. 10.1) применить к алгебре A , обладающей единицей? Ясно, что в результате не может получиться алгебра A_1 с двумя единицами. Выяснить, в чем дело.

24. Показать, что элементы xu и yx всегда имеют один и тот же спектральный радиус¹⁾. Указание: $(xy)^n = x(yx)^{n-1}y$.

25. (а) Доказать, что алгебра A коммутативна, если существует такая константа $M < \infty$, что $\|xy\| \leq M\|yx\|$ для всех x и y из A . Указание. Имеем $\|w^{-1}yw\| \leq M\|y\|$, если w — обратимый элемент из A . Замените w на $\exp(\lambda x)$, где $x \in A$ и $\lambda \in C$. Закончите доказательство, как в теореме 12.16 (при помощи теоремы Лиувилля).

(б) Доказать, что алгебра A коммутативна, если $\|x^2\| = \|x\|^2$ для каждого $x \in A$. Указание. Покажите, что $\|x\| = \rho(x)^2$. Используя упр. 24, выведите отсюда, что $\|w^{-1}yw\| = \|y\|$. Продолжите доказательство, как в задаче (а).

26. Пусть $x \in A$ и $x^n = e$ для некоторого положительного целого n . Доказать, что $x \in G_1$. [Обозначения те же, что и в теореме 10.44.] Заменить условие $x^n = e$ более общими.

¹⁾ Более того, согласно результату задачи (б) упр. 2, всегда $\sigma(xu) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$. — Прим. ред.

²⁾ Вообще говоря, не верно, что алгебра A коммутативна, если $\rho(x) \neq 0$ при всех $x \neq 0$. Вот простейший пример (см. примечание на стр. 426). Алгебра A как банахово пространство совпадает с l^1 , а умножение на элементах естественного базиса определяется следующим образом: $e_1 \cdot e_2 = e_{12}$, $e_{19}e_{75} = e_{1975}$ и т. п. Читателю рекомендуется восполнить детали. — Прим. ред.

Глава 11

КОММУТАТИВНЫЕ БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ

В этой главе в основном речь будет идти о гельфандовской теории коммутативных банаховых алгебр, хотя некоторые результаты этой теории будут применяться и в некоммутативной ситуации. Терминология предыдущей главы остается без изменений. В частности, банаховы алгебры не предполагаются коммутативными, если это условие специально не оговаривается. Вместе с тем наличие единицы всегда имеется в виду, а полем скаляров считается поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Идеалы и гомоморфизмы

11.1. Определение. Подмножество J коммутативной комплексной алгебры A называется *идеалом*, если

(а) J является подпространством в A (точнее, линейным подпространством) и

(б) $xu \in J$ при всех $x \in A$ и $u \in J$.

Если $J \neq A$, то J называется *собственным идеалом*. *Максимальным идеалом* называется собственный идеал, который не содержится ни в каком большем собственном идеале.

11.2. Предложение. (а) *Никакой собственный идеал алгебры A не содержит обратимых элементов этой алгебры.*

(б) *Если J — идеал в коммутативной банаховой алгебре A , то его замыкание $\bar{J}$ также является идеалом.*

Доказательства столь просты, что предоставляются читателю в качестве упражнений.

11.3. Теорема. (а) *Если A — коммутативная комплексная алгебра с единицей, то каждый ее собственный идеал содержится хотя бы в одном максимальном идеале этой алгебры.*

(б) *Если A — коммутативная банахова алгебра, то каждый ее максимальный идеал замкнут.*

Доказательство. (а) Пусть J — собственный идеал алгебры A . Обозначим через $\mathcal{J}$ семейство всех собственных идеалов ал-

гебры A , содержащих идеал J . Семейство $\mathcal{P}$ частично упорядочено по включению. Пусть $\mathcal{Q}$ — максимальное линейно упорядоченное подсемейство в $\mathcal{P}$ (существование такого подсемейства вытекает из теоремы Хаусдорфа о максимальнойности и логически эквивалентно аксиоме выбора). Обозначим через M объединение идеалов, входящих в семейство $\mathcal{Q}$. Ввиду линейной упорядоченности семейства $\mathcal{Q}$ это объединение само оказывается идеалом. Очевидно, что $J \subset M$. Кроме того, $M \neq A$, поскольку ни один из идеалов семейства $\mathcal{Q}$ не содержит единицы алгебры A . Из максимальнойности семейства $\mathcal{Q}$ вытекает, что M есть максимальный идеал в A .

(b) Допустим, что M — максимальный идеал в A . Так как идеал M не содержит обратимых элементов алгебры A , а множество всех обратимых элементов открыто, то $\bar{M}$ тоже не содержит ни одного обратимого элемента. Таким образом, $\bar{M}$ является собственным идеалом в A , а так как M — максимальный идеал, то $M = \bar{M}$.

11.4. Гомоморфизмы и факторалгебры. Если A и B — коммутативные банаховы алгебры и φ — гомоморфизм из A в B (см. п. 10.4), то нуль-пространство, или *ядро*, гомоморфизма φ является, очевидно, идеалом в A , причем этот идеал тогда и только тогда замкнут, когда гомоморфизм φ непрерывен.

Обратно, предположим, что J — *замкнутый* собственный идеал в алгебре A и $\pi: A \rightarrow A/J$ — факторотображение, определяемое в соответствии с п. 1.40. Тогда A/J является банаховым пространством относительно соответствующей факторнормы (теорема 1.41). Мы покажем, что на самом деле A/J является банаховой алгеброй, а π — гомоморфизмом.

Если $x' - x \in J$ и $y' - y \in J$, то, как показывает тождество

$$(1) \quad x'y' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y),$$

имеем $x'y' - xy \in J$. Поэтому $\pi(x'y') = \pi(xy)$. Следовательно, на A/J можно корректно ввести умножение, полагая

$$(2) \quad \pi(x)\pi(y) = \pi(xy) \quad (x \in A, y \in A).$$

Легко убедиться, что при этом A/J становится комплексной алгеброй, а π — гомоморфизмом алгебр. Так как $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$, то в соответствии с определением факторнормы гомоморфизм π непрерывен.

Пусть теперь $x_i \in A$ ($i = 1, 2$) и $\delta > 0$. Тогда, снова по определению факторнормы,

$$(3) \quad \|x_i + y_i\| \leq \|\pi(x_i)\| + \delta \quad (i = 1, 2)$$

при некоторых $y_i \in J$. Так как

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \in x_1x_2 + J,$$

то

$$(4) \quad \|\pi(x_1 x_2)\| \leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \leq \|x_1 + y_1\| \|x_2 + y_2\|.$$

Поэтому из (3) вытекает мультипликативное неравенство

$$(5) \quad \|\pi(x_1) \pi(x_2)\| \leq \|\pi(x_1)\| \|\pi(x_2)\|.$$

Наконец, если e — единица алгебры A , то, согласно (2), элемент $\pi(e)$ служит единицей алгебры A/J . Так как $\pi(e) \neq 0$, то из (5) вытекает, что $\|\pi(e)\| \geq 1 = \|e\|$. Кроме того, $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ для каждого $x \in A$, так что $\|\pi(e)\| = 1$. Доказательство закончено.

Утверждение (а) следующей ниже теоремы составляет один из ключевых фактов всей развиваемой здесь теории. Фигурирующее в этой теореме множество Δ в дальнейшем наделяется некоторой компактной хаусдорфовой топологией (теорема 11.9). После этого изучение любых коммутативных банаховых алгебр в большой степени удастся свести к изучению более привычных (и более специальных) объектов, а именно алгебр непрерывных комплексных функций на Δ с поточечными операциями сложения и умножения. Вместе с тем теорема 11.5 имеет интересные конкретные следствия даже без предварительного введения указанной топологии, и это обстоятельство иллюстрируется в п. 11.6 и 11.7.

11.5. Теорема. Пусть A — коммутативная банахова алгебра и Δ — множество всех (ненулевых) комплексных гомоморфизмов алгебры A .

(а) Каждый максимальный идеал алгебры A есть ядро некоторого гомоморфизма $h \in \Delta$.

(б) Ядро каждого гомоморфизма $h \in \Delta$ есть максимальный идеал алгебры A .

(с) Элемент $x \in A$ тогда и только тогда обратим в A , когда $h(x) \neq 0$ для каждого $h \in \Delta$.

(д) Элемент $x \in A$ тогда и только тогда обратим в A , когда x не содержится ни в одном собственном идеале алгебры A .

(е) $\lambda \in \sigma(x)$ в том и только в том случае, если $\lambda = h(x)$ для некоторого $h \in \Delta$.

Доказательство. (а) Пусть M — максимальный идеал в A . Тогда идеал M замкнут (теорема 11.3), так что факторалгебра A/M является банаховой алгеброй. Выберем элемент $x \in A$, такой, что $x \notin M$, и положим

$$(1) \quad J = \{ax + y : a \in A, y \in M\}.$$

Так как $x \notin M$, то J является идеалом в A , более широким, чем M . [Элемент x представляется в виде $ex + 0 \in J$.] Таким образом, $J = A$ и $ax + y = e$ для некоторых $a \in A$ и $y \in M$. Если $\pi: A \rightarrow A/M$ — факторотображение, то $\pi(a) \pi(x) = \pi(e)$. Поэтому каждый ненулевой элемент алгебры A/M обратим в этой алгебре. По теореме

Гельфанда—Мазура существует изоморфизм j между A/M и $\mathbb{C}$. Положим $h = j \circ \pi$. Тогда $h \in \Delta$ и M служит ядром гомоморфизма h .

(b) Если $h \in \Delta$, то $h^{-1}(0)$ —идеал в A , причем этот идеал максимален, ибо его коразмерность в A равна 1.

(c) Если x —обратимый элемент в A и $h \in \Delta$, то

$$h(x)h(x^{-1}) = h(xx^{-1}) = h(e) = 1,$$

так что $h(x) \neq 0$. Если x не является обратимым, то рассмотрим множество $\{ax : a \in A\}$. Это множество, очевидно, является идеалом, причем не содержащим e и, следовательно, собственным. Поэтому оно содержится в некотором максимальном идеале (теорема 11.3) и, согласно утверждению (a), аннулируется соответствующим гомоморфизмом $h \in \Delta$. В частности, $h(x) = 0$.

(d) Никакой обратимый элемент не может содержаться в собственном идеале. Обратное утверждение установлено при доказательстве (c).

(e) Достаточно применить утверждение (c) к элементу le — x вместо x . ■

Наше первое применение касается функций в $\mathbb{R}^n$, представимых абсолютно сходящимися тригонометрическими рядами. Мы используем те же обозначения, что и в упр. 22 гл. 7.

11.6. Лемма Винера. Пусть f —функция, заданная на $\mathbb{R}^n$, и

$$(1) \quad f(x) = \sum a_m e^{im \cdot x}, \quad \sum |a_m| < \infty,$$

где обе суммы распространяются на все $m \in \mathbb{Z}^n$. Если $f(x) \neq 0$ для каждого $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$(2) \quad \frac{1}{f(x)} = \sum b_m e^{im \cdot x}, \quad \text{где } \sum |b_m| < \infty.$$

Доказательство. Пусть A —множество функций вида (1) с нормой $\|f\| = \sum |a_m|$. Легко убедиться, что A является коммутативной банаховой алгеброй относительно поточечного умножения. Единицей этой алгебры служит функция, тождественно равная 1. При каждом $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $f \rightarrow f(x)$ является комплексным гомоморфизмом алгебры A . Предположение относительно заданной функции f заключается в том, что ни один из этих гомоморфизмов не аннулирует функции f . Если мы сможем установить, что никаких других комплексных гомоморфизмов алгебры A нет, то, согласно утверждению (c) теоремы 11.5, отсюда следует, что элемент f обратим в алгебре A , а это в точности совпадает с тем утверждением, которое мы хотим доказать.

При $r = 1, \dots, n$ положим $g_r(x) = \exp(ix_r)$, где x_r есть r -я координата точки x . Тогда g_r и $1/g_r$ имеют в A норму 1. Если $h \in \Delta$, то из утверждения (c) теоремы 10.7 следует, что

$$|h(g_r)| \leq 1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{1}{h(g_r)} \right| = \left| h\left(\frac{1}{g_r}\right) \right| \leq 1.$$

Поэтому существуют такие вещественные числа y_r , что

$$(3) \quad h(g_r) = \exp(iy_r) = g_r(y) \quad (1 \leq r \leq n),$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$. Если P — любой тригонометрический полином (это означает по определению, что P есть конечная линейная комбинация произведений целочисленных степеней функций g_r и $1/g_r$), то из (3) вытекает, что

$$(4) \quad h(P) = P(y),$$

поскольку h линеен и мультипликативен. Поскольку гомоморфизм h непрерывен (теорема 10.7) и поскольку множество всех тригонометрических полиномов плотно в A (это ясно из определения нормы), из (4) вытекает, что $h(f) = f(y)$ для каждого $f \in A$. Таким образом, h сопоставляет функции $f \in A$ ее значение в точке y , и доказательство закончено. ■

Эта лемма использовалась (при $n = 1$) в первоначальном доказательстве Винера его тауберовой теоремы 9.7. Чтобы усмотреть связь, дадим иную интерпретацию леммы. Будем рассматривать решетку $\mathbf{Z}^n$ в качестве естественно вложенного подмножества в $\mathbf{R}^n$. Тогда коэффициенты a_m задают на $\mathbf{R}^n$ некоторую меру μ , сосредоточенную на $\mathbf{Z}^n$ и сопоставляющую точке $m \in \mathbf{Z}^n$ «массу» a_m . Рассмотрим теперь задачу нахождения такой комплексной меры ν , сосредоточенной на $\mathbf{Z}^n$, что свертка $\mu * \nu$ равна мере Дирака δ . Лемма Винера устанавливает, что эта задача разрешима тогда (и, очевидно, только тогда), когда преобразование Фурье меры μ не имеет нулей на $\mathbf{R}^n$. Но условие отсутствия нулей — это в точности тауберово условие в теореме 9.7.

Переходя к следующему приложению, обозначим через U^n множество всех точек $z = (z_1, \dots, z_n)$ из $\mathbf{C}^n$, для которых $|z_i| < 1$ при $1 \leq i \leq n$. Другими словами, U^n — это полидиск в $\mathbf{C}^n$, т. е. декартово произведение n экземпляров открытого единичного диска $U \subset \mathbf{C}$. Далее, $A(U^n)$ — множество всех функций f , голоморфных в полидиске U^n (см. определение 7.20) и непрерывных на его замыкании $\bar{U}^n$.

11.7. Теорема. Пусть $f_1, \dots, f_k \in A(U^n)$. Предположим, что каждой точке $z \in \bar{U}^n$ соответствует по крайней мере одно такое i , что $f_i(z) \neq 0$. Тогда найдутся такие функции $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in A(U^n)$, что

$$(1) \quad f_1(z) \varphi_1(z) + \dots + f_k(z) \varphi_k(z) = 1 \quad (z \in \bar{U}^n).$$

Доказательство. Множество $A = A(U^n)$ является коммутативной банаховой алгеброй относительно поточечных операций и $\sup$ -нормы. Пусть J — совокупность всевозможных сумм вида $\sum f_i \varphi_i$ с произвольными $\varphi_i \in A$. Тогда J — идеал в A . Если утверждение неверно, то $J \neq A$ и, следовательно (теорема 11.3), J со-

держится в некотором максимальном идеале алгебры A . Тогда (утверждение (а) теоремы 11.5) идеал J аннулируется некоторым гомоморфизмом $h \in \Delta$.

При $1 \leq r \leq n$ положим $g_r(z) = z_r$. Тогда $\|g_r\| = 1$, так что $h(g_r) = w_r$, где $|w_r| \leq 1$. Положим $w = (w_1, \dots, w_n)$. Тогда $w \in \bar{U}^n$ и $h(g_r) = g_r(w)$. Так как h — гомоморфизм, то отсюда следует, что $h(P) = P(w)$ для каждого полинома P . Но полиномы плотны в $A(U^n)$ (упр. 4). Поэтому $h(f) = f(w)$ для каждого $f \in A$ (по тем же соображениям, которые использовались в аналогичном месте доказательства теоремы 11.6).

Так как гомоморфизм h аннулирует идеал J , то получается, что $f_i(w) = 0$ при всех $1 \leq i \leq k$. Но это противоречит условию теоремы. ■

Преобразование Гельфанда

11.8. Определения. Пусть Δ — множество всех комплексных гомоморфизмов коммутативной банаховой алгебры A . Формула

$$(1) \quad \hat{x}(h) = h(x) \quad (h \in \Delta)$$

сопоставляет каждому элементу $x \in A$ функцию $\hat{x}: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$. Функцию $\hat{x}$ мы называем *преобразованием Гельфанда* элемента x .

Пусть $\hat{A}$ — множество всех таких функций $\hat{x}$ для $x \in A$. *Топологией Гельфанда* на Δ называется слабая топология, порожденная семейством $\hat{A}$, т. е. слабейшая топология, в которой все функции $\hat{x}$ непрерывны. При этом, очевидно, $\hat{A} \subset C(\Delta)$, где, как обычно, $C(\Delta)$ — алгебра всех непрерывных комплексных функций на Δ .

Так как существует взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами алгебры A и элементами множества Δ (теорема 11.5), то множество Δ , снабженное топологией Гельфанда, называется *пространством максимальных идеалов* алгебры A .

Термин «преобразование Гельфанда» применяется также для отображения $x \rightarrow \hat{x}$ алгебры A на $\hat{A}$.

Радикалом алгебры A называется пересечение всех максимальных идеалов этой алгебры. Радикал обозначается $\text{rad } A$. Если $\text{rad } A = \{0\}$, то алгебра A называется *полупростой*.

11.9. Теорема. Пусть Δ — пространство максимальных идеалов коммутативной банаховой алгебры A .

(а) Пространство Δ хаусдорфово и компактно.

(б) Преобразование Гельфанда есть гомоморфизм алгебры A на подалгебру $\hat{A}$ алгебры $C(\Delta)$, причем ядро этого гомоморфизма совпадает с радикалом $\text{rad } A$ алгебры A . Следовательно, преобразование Гельфанда тогда и только тогда является изоморфизмом, когда алгебра A полупроста.

(с) Для каждого элемента $x \in A$ множество значений функции $\hat{x}$ совпадает со спектром $\sigma(x)$ этого элемента. Поэтому

$$\|\hat{x}\|_{\infty} = \rho(x) \leq \|x\|,$$

где $\|\hat{x}\|_{\infty}$ — максимум функции $|\hat{x}(h)|$ на Δ , а включение $x \in \text{rad } A$ имеет место тогда и только тогда, когда $\rho(x) = 0$.

Доказательство. Сначала мы докажем утверждения (b) и (с). Пусть $x \in A$, $y \in A$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $h \in \Delta$. Тогда

$$(\alpha x)^{\wedge}(h) = h(\alpha x) = \alpha h(x) = (\alpha \hat{x})(h),$$

$$(x+y)^{\wedge}(h) = h(x+y) = h(x) + h(y) = \hat{x}(h) + \hat{y}(h) = (\hat{x} + \hat{y})(h)$$

и

$$(xy)^{\wedge}(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) = (\hat{x}\hat{y})(h).$$

Поэтому отображение $x \rightarrow \hat{x}$ является гомоморфизмом. Ядро этого гомоморфизма состоит из тех $x \in A$, которые удовлетворяют условию $h(x) = 0$ при каждом $h \in \Delta$. По теореме 11.5 множество таких элементов $x \in A$ совпадает с пересечением всех максимальных идеалов алгебры A , т. е. с $\text{rad } A$.

Число λ тогда и только тогда принадлежит множеству значений функции $\hat{x}$, когда $\lambda = \hat{x}(h) = h(x)$ для некоторого $h \in \Delta$. Согласно утверждению (е) теоремы 11.5, это эквивалентно тому, что $\lambda \in \sigma(x)$. Тем самым утверждения (b) и (с) доказаны.

Для доказательства утверждения (а) обозначим через A^* пространство, сопряженное к A (как банахову пространству), и пусть K — замкнутый по норме единичный шар пространства A^* . По теореме Банаха — Алаоглу множество K является слабо* компактным. Согласно утверждению (с) теоремы 10.7, имеем $\Delta \subset K$. Очевидно, что гильфандовская топология на Δ совпадает с топологией, индуцированной на Δ слабой* топологией пространства A^* . Поэтому достаточно показать, что Δ является слабо* замкнутым подмножеством в A^* .

Допустим, что точка Λ_0 принадлежит слабому* замыканию множества Δ . Мы должны показать, что

$$(1) \quad \Lambda_0(xy) = \Lambda_0 x \Lambda_0 y \quad (x \in A, y \in A)$$

и

$$(2) \quad \Lambda_0 e = 1.$$

[Заметим, что проверка условия (2) обязательна: в противном случае функционал Λ_0 мог бы оказаться нулевым, а нулевой гомоморфизм не принадлежит Δ .]

Фиксируем $x \in A$, $y \in A$ и $\varepsilon > 0$. Положим

$$(3) \quad W = \{\Lambda \in A^* : |\Lambda z_i - \Lambda_0 z_i| < \varepsilon \text{ при } 1 \leq i \leq 4\},$$

где $z_1 = e$, $z_2 = x$, $z_3 = y$ и $z_4 = xy$. Тогда множество W служит

слабой* окрестностью точки Λ_0 и поэтому содержит некоторый гомоморфизм $h \in \Delta$. Для этого гомоморфизма h имеем

$$(4) \quad |1 - \Lambda_0 e| = |h(e) - \Lambda_0 e| < \varepsilon,$$

откуда вытекает (2), и, кроме того,

$$\begin{aligned} \Lambda_0(xy) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y &= [\Lambda_0(xy) - h(xy)] + [h(x)h(y) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y] = \\ &= [\Lambda_0(xy) - h(xy)] + [h(y) - \Lambda_0 y]h(x) + [h(x) - \Lambda_0 x]\Lambda_0 y, \end{aligned}$$

откуда получается

$$(5) \quad |\Lambda_0(xy) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y| < (1 + \|x\| + \|\Lambda_0 y\|)\varepsilon.$$

Но из (5) вытекает (1), и доказательство закончено. ■

Все полупростые алгебры обладают одним важным свойством, которое выше уже отмечалось в отношении алгебры C .

11.10. Теорема. Если $\psi: B \rightarrow A$ — произвольный гомоморфизм коммутативной банаховой алгебры B в полупростую коммутативную банахову алгебру A , то этот гомоморфизм ψ непрерывен.

Доказательство. Допустим, что $x_n \rightarrow x$ в B и $\psi(x_n) \rightarrow y$ в A . По теореме о замкнутом графике достаточно показать, что $y = \psi(x)$.

Пусть Δ_A и Δ_B — пространства максимальных идеалов соответствующих алгебр. Фиксируем гомоморфизм $h \in \Delta_A$ и положим $\varphi = h \circ \psi$. Тогда $\varphi \in \Delta_B$. По теореме 1).7 гомоморфизмы h и φ непрерывны. Следовательно, для каждого гомоморфизма $h \in \Delta_A$ имеем

$$h(y) = \lim h(\psi(x_n)) = \lim \varphi(x_n) = \varphi(x) = h(\psi(x)).$$

Поэтому $y - \psi(x) \in \text{rad } A$. Так как $\text{rad } A = \{0\}$, то $y = \psi(x)$. ■

Следствие. Каждый изоморфизм между полупростыми коммутативными банаховыми алгебрами является гомеоморфизмом.

В частности, это относится к автоморфизмам полупростых коммутативных банаховых алгебр. Поэтому топология любой такой алгебры полностью определяется ее алгебраической структурой.

Алгебра $\hat{A}$, описанная в теореме 11.9, не обязательно является замкнутой подалгеброй в $C(\Delta)$ относительно sup -нормы. Будет она замкнутой или нет, зависит от соотношения между $\|x^2\|$ и $\|x\|^2$ для всех $x \in A$. Напомним, что неравенство $\|x^2\| \leq \|x\|^2$ всегда выполнено.

11.11. Лемма. Пусть A — произвольная коммутативная банахова алгебра и

$$(1) \quad r = \inf \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}, \quad s = \inf \frac{\|\hat{x}\|_\infty}{\|x\|} \quad (x \in A, x \neq 0),$$

Тогда $s^2 \leq r \leq s$.

Доказательство. Так как $\|\hat{x}\|_\infty \geq s\|x\|$, то

$$(2) \quad \|x^2\| \geq \|\hat{x}^2\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2 \geq s^2\|x\|^2$$

для каждого $x \in A$. Таким образом, $s^2 \leq r$.

Так как $\|x^2\| \geq r\|x\|^2$ для каждого $x \in A$, то индукцией по n получаем

$$(3) \quad \|x^m\| \geq r^{m-1}\|x\|^m \quad (m = 2^n, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Извлечем корни m -й степени из обеих частей неравенства (3) и в полученном неравенстве положим $m \rightarrow \infty$. Из формулы спектрального радиуса и утверждения (с) теоремы 11.9 тогда получается

$$(4) \quad \|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \geq r\|x\| \quad (x \in A).$$

Поэтому $r \leq s$. ■

11.12. Теорема. Пусть A — коммутативная банахова алгебра.

(а) Преобразование Гельфанда тогда и только тогда является изометрией (т. е. $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$ для каждого $x \in A$), когда $\|x^2\| = \|x\|^2$ для каждого $x \in A$.

(б) Алгебра A полупроста и одновременно алгебра $\hat{A}$ замкнута в $C(\Delta)$ в том и только в том случае, если существует такая константа $K < \infty$, что $\|x\| \leq K\|x^2\|$ при каждом $x \in A$.

Доказательство. (а) В обозначениях леммы 11.11 преобразование Гельфанда тогда и только тогда является изометрией, когда $s = 1$, что происходит (по лемме) в том и только в том случае, если $r = 1$.

(б) Существование указанной константы K эквивалентно условию $r > 0$, а это (по лемме) равносильно условию $s > 0$. Если $s > 0$, то отображение $x \rightarrow \hat{x}$ взаимно однозначно и обладает непрерывным обратным. Поэтому в такой ситуации алгебра $\hat{A}$ является полной (и, следовательно, замкнутой) подалгеброй в $C(\Delta)$. Обратно, если отображение $x \rightarrow \hat{x}$ взаимно однозначно и если алгебра $\hat{A}$ замкнута в $C(\Delta)$, то по теореме об открытом отображении $s > 0$. ■

11.13. Примеры. В ряде случаев пространство максимальных идеалов заданной коммутативной банаховой алгебры допускает простое явное описание. Вместе с тем в других случаях можно встретиться с совершенно невероятной патологией. В этом пункте мы приведем несколько примеров, иллюстрирующих положение дел.

(а) Пусть X — компактное хаусдорфово пространство и $C(X)$ — алгебра всех комплексных непрерывных функций на X с $\sup$ -нормой. Для каждого $x \in X$ отображение $f \rightarrow f(x)$ задает некоторый

комплексный гомоморфизм h_x . Так как алгебра $C(X)$ разделяет точки компакта X (лемма Урысона), то $h_x \neq h_y$ при $x \neq y$. Следовательно, отображение $x \rightarrow h_x$ задает вложение компакта X в Δ .

Мы утверждаем, что каждый гомоморфизм $h \in \Delta$ имеет вид h_x . Если это не так, то найдется такой максимальный идеал M в $C(X)$, который для каждой точки $p \in X$ содержит хотя бы одну функцию f с $f(p) \neq 0$. Ввиду компактности пространства X найдется конечное семейство $f_1, \dots, f_n$ функций из идеала M , таких, что в каждой точке пространства X хотя бы одна из этих функций не обращается в нуль. Положим

$$g = f_1 \bar{f}_1 + \dots + f_n \bar{f}_n.$$

Тогда $g \in M$, так как M — идеал. Вместе с тем $g > 0$ в каждой точке пространства X и, следовательно, g — обратимый элемент алгебры $C(X)$. Однако собственный идеал не может содержать обратимых элементов.

Таким образом, соответствие $x \leftrightarrow h_x$ является взаимно однозначным соответствием между X и Δ , что позволяет отождествить Δ с X . Это отождествление корректно и с топологической точки зрения: гельфандовская топология γ на Δ — слабая топология, порожденная семейством $C(X)$, и, следовательно, она слабее, чем τ — исходная топология на X ; вместе с тем γ — хаусдорфова топология, так что $\gamma = \tau$ (см. утверждение (а) в п. 3.8).

Окончательный вывод состоит в том, что X «есть» пространство максимальных идеалов алгебры $C(X)$ и что преобразование Гельфанда сводится к тождественному преобразованию на $C(X)$.

(b) Пусть A — алгебра всех абсолютно сходящихся тригонометрических рядов, описанная в п. 11.6. Мы обнаружили, что комплексные гомоморфизмы алгебры A задаются точками пространства $\mathbf{R}^n$. Так как элементы алгебры A являются 2π -периодическими функциями по каждому переменному, то пространство Δ отождествляется с тором T^n , который получается из $\mathbf{R}^n$ при помощи отображения

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}).$$

В частности, мы получаем пример, когда $\hat{A}$ плотно в $C(\Delta)$, хотя $\hat{A} \neq C(\Delta)$.

(с) Аналогично при доказательстве теоремы 11.7 было установлено, что замкнутый полидиск $\bar{U}^n$ служит пространством максимальных идеалов алгебры $A(U^n)$. Соображения, использованные в конце пункта (а), показывают, что и здесь естественная топология на $\bar{U}^n$ совпадает с топологией Гельфанда, индуцированной семейством $A(U^n)$. Кстати, аналогичное замечание можно сделать и в связи с примером (b).

(d) Последний пример допускает интересные обобщения. Пусть A — коммутативная банахова алгебра с конечным числом обра-

зующих, скажем $x_1, \dots, x_n$. Это означает, что $x_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$) и что множество всех полиномов от $x_1, \dots, x_n$ плотно в A . Положим

$$(1) \quad \varphi(h) = (\hat{x}_1(h), \dots, \hat{x}_n(h)) \quad (h \in \Delta).$$

Тогда отображение φ осуществляет гомеоморфизм пространства Δ на некоторое компактное множество $K \subset \mathbb{C}^n$. В самом деле, отображение φ непрерывно, поскольку $\hat{A} \subset C(\Delta)$. Если $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$, то $h_1(x_i) = h_2(x_i)$ для всех i . Поэтому $h_1(x) = h_2(x)$ для любого полинома x от $x_1, \dots, x_n$. Но такие полиномы плотны в A , так что $h_1 = h_2$. Итак, отображение φ взаимно однозначно.

Мы можем перенести теперь $\hat{A}$ с Δ на K и рассматривать K как пространство максимальных идеалов алгебры A . Для большей аккуратности положим

$$(2) \quad \psi(x) = \hat{x} \circ \varphi^{-1} \quad (x \in A).$$

Тогда ψ служит гомоморфизмом (изоморфизмом, если алгебра A полупроста) алгебры A на некоторую подалгебру $\psi(A)$ алгебры $C(K)$. Легко проверить, что

$$(3) \quad \psi(x_i)(z) = z_i, \quad \text{если } z = (z_1, \dots, z_n) \in K,$$

и, следовательно,

$$(4) \quad \psi(P(x_1, \dots, x_n))(z) = P(z) \quad (z \in K)$$

для каждого полинома P от n переменных.

Отсюда вытекает, что элементы алгебры $\psi(A)$ суть равномерные пределы полиномов на K .

Множества $K \subset \mathbb{C}^n$, которые возникают на этом пути в качестве пространств максимальных идеалов, обладают одним дополнительным свойством — они (в соответствии с принятой терминологией) полиномиально выпуклы: если $w \in \mathbb{C}^n$ и $w \notin K$, то существует такой полином P , что $|P(z)| \leq 1$ для каждого $z \in K$, но $|P(w)| > 1$.

Действительно, предположим, что такого полинома не существует. Так как преобразование Гельфанда не увеличивает нормы, то тогда

$$(5) \quad |P(w)| \leq \|P(x_1, \dots, x_n)\|$$

для каждого полинома P (норма справа берется в A). Поскольку $\{x_1, \dots, x_n\}$ — система образующих алгебры A , из неравенства (5) вытекает существование такого гомоморфизма $h \in \Delta$, что $\varphi(h) = w$. Но тогда $w \in K$, и мы приходим к противоречию.

Компактные полиномиально выпуклые подмножества в $\mathbb{C}$ и только они обладают связным дополнением; это легко вытекает из теоремы Рунге. Геометрическая структура полиномиально выпуклых множеств в $\mathbb{C}^n$ кажется гораздо менее понятной.

(е) Наш следующий пример показывает, что преобразование Гельфанда является обобщением преобразования Фурье, по крайней мере если последнее рассматривать в L^1 -ситуации.

Пусть A есть $L^1(\mathbf{R}^n)$, к которому в соответствии с п. 10.3 (d) добавлена единица. Элементы алгебры A однозначно представляются в виде $f + \alpha\delta$, где $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и δ — мера Дирака на $\mathbf{R}^n$. Умножением в алгебре A служит свертка:

$$(f + \alpha\delta) * (g + \beta\delta) = (f * g + \beta f + \alpha g) + \alpha\beta\delta.$$

При каждом $t \in \mathbf{R}^n$ формула

$$(6) \quad h_t(f + \alpha\delta) = \hat{f}(t) + \alpha$$

определяет некоторый комплексный гомоморфизм алгебры A . Здесь $\hat{f}$ — преобразование Фурье от f . Еще один комплексный гомоморфизм задается формулой

$$(7) \quad h_\infty(f + \alpha\delta) = \alpha.$$

Других комплексных гомоморфизмов у алгебры A нет. [Вскоре мы наметим доказательство этого утверждения.] Таким образом, в теоретико-множественном смысле пространство Δ естественно отождествляется с $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$. Зададим на Δ топологию одноточечной компактификации пространства $\mathbf{R}^n$. Так как $\hat{f}(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$ для каждого $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, то из (6) и (7) вытекает, что $\hat{A} \subset C(\Delta)$. Так как семейство $\hat{A}$ разделяет точки Δ , то слабая топология на Δ , индуцированная этим семейством, совпадает с только что описанной топологией.

Остается показать, что каждый гомоморфизм $h \in \Delta$ имеет вид (6) или (7). Если $h(f) = 0$ для каждого $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, то $h = h_\infty$. Предположим, что $h(f) \neq 0$ для некоторого $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Тогда $h(f) = \int f\beta \, dm_n$ с подходящим $\beta \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$. Поскольку $h(f * g) = h(f)h(g)$, то можно доказать, что функция β почти всюду совпадает с непрерывной функцией b , удовлетворяющей функциональному уравнению

$$(8) \quad b(x + y) = b(x)b(y) \quad (x, y \in \mathbf{R}^n).$$

Наконец, каждое ограниченное решение уравнения (8) имеет вид

$$(9) \quad b(x) = e^{-ix \cdot t} \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

при некотором $t \in \mathbf{R}^n$. Таким образом, $h(f) = \hat{f}(t)$, т. е. h представляется в виде (6).

Для $n = 1$ детали, дополняющие предыдущее рассуждение, можно найти в книге [27, п. 9.22] (а также, например, в [10] или [43]). Случай $n > 1$ рассматривается аналогично.

(f) Наш последний пример — алгебра $L^\infty(m)$. Здесь m — мера Лебега на единичном отрезке $[0, 1]$ и $L^\infty(m)$ — обычное пространство классов эквивалентности (совпадающих почти всюду) ограниченных комплексных измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой — существенная верхняя грань модуля. Операции умножения (и сложения) определяются поточечно. Очевидно, что мы действительно имеем дело с коммутативной банаховой алгеброй.

Если $f \in L^\infty(m)$ и G_f есть объединение всех таких открытых множеств $G \subset \mathbb{C}$, что $m(f^{-1}(G)) = 0$, то дополнение к G_f (называемое *множеством существенных значений* функции f), как легко видеть, совпадает со спектром $\sigma(f)$ элемента f , т. е. с множеством значений преобразования Гельфанда $\hat{f}$ этого элемента. Отсюда вытекает, что $\hat{f}$ вещественно, если f вещественно. Поэтому алгебра $L^\infty(m)^\wedge$ замкнута относительно перехода к комплексно сопряженным функциям. Следовательно, по теореме Стоуна — Вейерштрасса, алгебра $L^\infty(m)^\wedge$ плотна в $C(\Delta)$, где Δ — пространство максимальных идеалов алгебры $L^\infty(m)$. Кроме того, ясно, что отображение $f \rightarrow \hat{f}$ является изометрией, так что алгебра $L^\infty(m)^\wedge$ замкнута в $C(\Delta)$.

Итак, отображение $f \rightarrow \hat{f}$ представляет собой изометрию алгебры $L^\infty(m)$ на всю алгебру $C(\Delta)$.

Далее, соответствие $\hat{f} \rightarrow \int f dm$ представляет собой ограниченный линейный функционал на пространстве $C(\Delta)$. Поэтому, согласно теореме Рисса о функционалах в пространстве всех непрерывных функций, найдется такая регулярная борелевская вероятностная мера $\hat{m}$ на Δ , что

$$(10) \quad \int_{\Delta} \hat{f} d\hat{m} = \int_0^1 f dm \quad (f \in L^\infty(m)).$$

Пусть Ω — непустое открытое множество в Δ . По лемме Урысона, найдется такая функция $\hat{f} \in C(\Delta)$, $\hat{f} \geq 0$, что $\hat{f} = 0$ вне Ω и $\hat{f}(p) = 1$ в некоторой точке $p \in \Omega$. Соответствующая функция f будет тогда ненулевым элементом пространства $L^\infty(m)$, и интеграл (10) окажется положительным.

Таким образом, $m(\Omega) > 0$, если Ω — непустое открытое подмножество в Δ .

Далее, пусть φ — любая борелевская функция на Δ , причем $|\varphi| \leq 1$. По теореме Лузина, найдется такая последовательность функций $\hat{f}_n \in C(\Delta)$, $|\hat{f}_n| \leq 1$, которая сходится к φ по норме $L^2(\hat{m})^1$.

¹⁾ Здесь, в сущности, требуется меньше, чем теорема Лузина (в ее обычной интерпретации). Так как мера $\hat{m}$ регулярна, то $C(\Delta)$ плотно в $L^2(\hat{m})$. Теперь достаточно взять какую-нибудь последовательность функций $g_n \in C(\Delta)$, сходящуюся к φ , и заменить g_n на $g_n/|g_n|$ в тех точках, где $|g_n| > 1$. — Прим. ред.

Так как отображение $f \rightarrow \hat{f}$ перестановочно с переходом к комплексно сопряженным функциям (это мы доказали выше) и, кроме того, является гомоморфизмом, то из формулы (10) в применении к $(f_i - f_j)(\bar{f}_i - \bar{f}_j)$ вытекает, что

$$(11) \quad \int_{\Delta} |\hat{f}_i - \hat{f}_j|^2 d\hat{m} = \int_0^1 |f_i - f_j|^2 dm.$$

Таким образом, $\{f_n\}$ является последовательностью Коши в $L^2(m)$. Далее, $|f_n| \leq 1$ почти всюду по мере m . Поэтому существует такая функция $f \in L^\infty(m)$, что $f_n \rightarrow f$ в $L^2(m)$. Из формулы (11) теперь вытекает, что $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ в $L^2(\hat{m})$. Поэтому $\varphi = \hat{f}$ почти всюду по мере $\hat{m}$.

Таким образом, каждая ограниченная борелевская функция φ на Δ почти всюду по мере $\hat{m}$ совпадает с некоторой функцией $\hat{f} \in C(\Delta)$.

Получается, что $C(\Delta)$ и $L^\infty(\hat{m})$ совпадают, если их рассматривать как банаховы пространства!

Другое следствие последнего результата состоит в том, что пространство Δ экстремально несвязно. Это означает по определению, что замыкание каждого открытого множества открыто. [Следовательно, непересекающиеся открытые множества обладают непересекающимися замыканиями.]

Для доказательства рассмотрим некоторое открытое множество Ω_0 в Δ . Пусть Ω_1 — дополнение к замыканию $\bar{\Omega}_0$ множества Ω_0 и φ — характеристическая функция множества Ω_1 . По доказанному мы можем выбрать функцию $\hat{f} \in C(\Delta)$, совпадающую с φ почти всюду по мере $\hat{m}$. Так как $\varphi = 0$ в Ω_0 и так как непустые открытые множества имеют положительную меру, то из непрерывности функции $\hat{f}$ вытекает, что $\hat{f}(p) = 0$ в каждой точке $p \in \Omega_0$. Аналогично $\hat{f}(p) = 1$, если $p \in \Omega_1$. Множество тех точек, в которых значение функции $\hat{f}$ отлично от 0 и 1, имеет меру 0, поскольку $\hat{f}$ и φ совпадают почти всюду. Вместе с тем это множество открыто. Поэтому оно пусто. Пусть $K_i = \{p \in \Delta: \hat{f}(p) = i\}$, $i = 0, 1$. Тогда K_0 и K_1 — непересекающиеся компакты, а их объединение совпадает с Δ . Поэтому каждое из этих множеств открыто. Далее, $\Omega_0 \subset K_0$, $\Omega_1 \subset K_1$. Отсюда вытекает, что $\bar{\Omega}_0 = K_0$, и доказательство закончено.

Попутно мы доказали, что границы открытых множеств имеют меру 0, так как $\hat{m}(\Omega_0) = \hat{m}(K_0)$.

В заключение мы остановимся на одном применении полученных результатов к теории меры. Если E и F — измеримые множества, то будем говорить, что множество F почти содержит

множество E , если F содержит все точки множества E , за исключением множества меры 0, т. е. если $m(E \setminus F) = 0$.

Объединение несчетного семейства измеримых множеств не всегда измеримо. Однако имеет место следующее:

Если $\{E_\alpha\}$ — произвольное семейство измеримых подмножеств в $[0, 1]$, то существует такое измеримое множество $E \subset [0, 1]$, что

- (i) *множество E почти содержит каждое из множеств E_α ;*
- (ii) *если измеримое множество F почти содержит каждое из множеств E_α , то оно почти содержит и множество E .*

Таким образом, множество E представляет собой *точную верхнюю грань* семейства $\{E_\alpha\}$. Существование такого множества E означает, что булева алгебра измеримых множеств (по модулю множеств меры 0) *полна*.

Техника, которой мы теперь располагаем, позволяет дать очень простое доказательство.

Пусть f_α — характеристическая функция множества E_α . Ее преобразование Гельфанда $\hat{f}_\alpha$ является характеристической функцией некоторого открытого (и замкнутого) множества $\Omega_\alpha \subset \Delta$. Пусть Ω — объединение всех таких множеств Ω_α . Тогда множество Ω открыто и вместе с тем открыто его замыкание $\bar{\Omega}$. Существует такая функция $f \in L^\infty(m)$, что $\hat{f}$ есть характеристическая функция множества $\bar{\Omega}$. Искомое множество E состоит из тех точек $x \in [0, 1]$, для которых $f(x) = 1$.

Инволюции

11.14. Определение. Отображение $x \rightarrow x^*$ комплексной (не обязательно коммутативной) алгебры A в себя называется *инволюцией*, если это отображение обладает следующими четырьмя свойствами (для всех $x \in A$, $y \in A$ и $\lambda \in \mathbb{C}$):

- (1) $(x + y)^* = x^* + y^*$,
- (2) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$,
- (3) $(xy)^* = y^* x^*$,
- (4) $x^{**} = x$.

Другими словами, инволюция — это сопряженно-линейный анти-автоморфизм периода 2.

Элемент $x \in A$ называется *эрмитовым*, или *самосопряженным*, если $x^* = x$.

Например, $f \rightarrow \bar{f}$ есть инволюция на алгебре $C(X)$. Другой пример, представляющий для нас наибольший интерес в связи с дальнейшим, — переход от оператора в гильбертовом пространстве к сопряженному оператору.

11.15. Теорема. Пусть A — банахова алгебра с инволюцией и $x \in A$. Тогда

- (а) элементы $x + x^*$, $i(x - x^*)$ и xx^* эрмитовы;
- (б) элемент x однозначно представим в виде $x = u + iv$, где u и v — эрмитовы элементы из A ;
- (с) единица e является эрмитовым элементом;
- (д) элемент x тогда и только тогда обратим в A , когда обратим элемент x^* , причем в этом случае $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$;
- (е) $\lambda \in \sigma(x)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

Доказательство. Утверждение (а) очевидно. Если $2u = x + x^*$, $2v = i(x - x^*)$, то $x = u + iv$ есть представление, существование которого утверждается в (б). Допустим, что $x = u' + iv'$ — еще одно такое представление. Положим $w = v' - v$. Тогда оба элемента w и iw эрмитовы, так что

$$iw = (iw)^* = -iw^* = -iw.$$

Поэтому $w = 0$, откуда вытекает единственность.

Так как $e^* = ee^*$, то утверждение (с) вытекает из (а). Утверждение (д) вытекает из (с) и равенства $(xy)^* = y^*x^*$. Наконец, (е) получается из (д) в применении к $\lambda e - x$. ■

11.16. Теорема. Если банахова алгебра A коммутативна и полупроста, то каждая инволюция на A непрерывна.

Доказательство. Пусть h — комплексный гомоморфизм алгебры A . Положим $\varphi(x) = \overline{h(x^*)}$. Из условий (1) — (3) определения 11.14 вытекает, что φ является комплексным гомоморфизмом. Поэтому φ непрерывно. Допустим, что $x_n \rightarrow x$ и $x_n^* \rightarrow y$ в A . Тогда

$$\overline{h(x^*)} = \varphi(x) = \lim \varphi(x_n) = \lim \overline{h(x_n^*)} = \overline{h(y)}.$$

Так как алгебра A полупроста, то $y = x^*$. Поэтому из теоремы о замкнутом графике вытекает, что отображение $x \rightarrow x^*$ непрерывно. ■

11.17. Определение. Банахова алгебра A с инволюцией $x \rightarrow x^*$, удовлетворяющей условию

$$(1) \quad \|xx^*\| = \|x\|^2$$

для каждого $x \in A$, называется B^* -алгеброй.

Заметим, что из условия $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x\| \cdot \|x^*\|$ вытекает, что $\|x\| \leq \|x^*\|$. Далее,

$$\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|.$$

Таким образом, в любой B^* -алгебре

$$(2) \quad \|x^*\| = \|x\|.$$

Кроме того, получается, что

$$(3) \quad \|xx^*\| = \|x\| \|x^*\|.$$

Обратно, из условий (2) и (3) вытекает условие (1).

Следующая теорема будет служить основным инструментом для доказательства спектральной теоремы в гл. 12.

11.18. Теорема (Гельфанд—Наймарк). Пусть A — коммутативная B^* -алгебра с пространством максимальных идеалов Δ . Тогда преобразование Гельфанда является изометрическим изоморфизмом алгебры A на $C(\Delta)$ и обладает тем дополнительным свойством, что

$$(1) \quad h(x^*) = \overline{h(x)} \quad (x \in A, h \in \Delta),$$

или (что эквивалентно)

$$(2) \quad (x^*)^\wedge = \overline{\hat{x}} \quad (x \in A).$$

В частности, элемент x эрмитов тогда и только тогда, когда $\hat{x}$ — вещественная функция.

Условие (2) можно толковать в том смысле, что преобразование Гельфанда превращает заданную инволюцию на алгебре A в естественную инволюцию алгебры $C(\Delta)$ — комплексное сопряжение. Изоморфизмы такого типа, сохраняющие инволюцию, называются **-изоморфизмами* (иногда — инволютивными изоморфизмами).

Доказательство. Пусть $h \in \Delta$ и элемент u из A эрмитов, т. е. $u^* = u$. Мы докажем сначала, что в таком случае $h(u)$ — вещественное число. При вещественных t положим $z = u + ite$. Если $h(u) = \alpha + i\beta$, где α и β вещественны, то

$$h(z) = \alpha + i(\beta + t), \quad zz^* = u^2 + t^2e,$$

так что

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(z)|^2 \leq \|z\|^2 = \|zz^*\| \leq \|u\|^2 + t^2,$$

или

$$(3) \quad \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|u\|^2 \quad (-\infty < t < \infty).$$

Из неравенства (3) вытекает, что $\beta = 0$, т. е. что $h(u)$ вещественно.

Каждый элемент $x \in A$ можно представить в виде $x = u + iv$, где $u = u^*$, $v = v^*$. При этом $x^* = u - iv$. Так как функции $\hat{u}$ и $\hat{v}$ вещественны, то отсюда вытекает (2).

Таким образом, алгебра $\hat{A}$ замкнута относительно перехода к комплексно сопряженным функциям. Следовательно, по теореме Стоуна—Вейерштрасса, алгебра $\hat{A}$ плотна в $C(\Delta)$.

Если $x \in A$ и $y = xx^*$, то $y = y^*$, так что $\|y^2\| = \|y\|^2$. Индукцией по n отсюда получается, что $\|y^m\| = \|y\|^m$ при $m = 2^n$. Поэтому из формулы спектрального радиуса и утверждения (с) тео-

ремы 11.9 вытекает, что $\|\hat{y}\|_\infty = \|y\|$. Так как $y = xx^*$, то из (2) следует, что $\hat{y} = |\hat{x}|^2$. Поэтому

$$\|\hat{x}\|_\infty^2 = \|\hat{y}\|_\infty = \|y\| = \|xx^*\| = \|x\|^2,$$

или $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$. Таким образом, $x \rightarrow \hat{x}$ есть изометрия. Следовательно, алгебра $\hat{A}$ замкнута в $C(\Delta)$. Но мы уже доказали, что она плотна в $C(\Delta)$. Тем самым $\hat{A} = C(\Delta)$, и теорема полностью доказана. ■

Следующая теорема представляет собой частный случай только что доказанной. Она будет установлена в такой форме, где фигурирует отображение, обратное преобразованию Гельфанда, что позволяет выявить контакты результатов такого сорта с функциональным исчислением.

11.19. Теорема. Пусть A — коммутативная B^* -алгебра, содержащая такой элемент x , что полиномы от x и x^* плотны в A . Тогда формула

$$(1) \quad (\Psi f)^\wedge = f \circ \hat{x}$$

определяет изометрический изоморфизм Ψ алгебры $C(\sigma(x))$ на алгебру A , причем

$$(2) \quad \Psi \bar{f} = (\Psi f)^*$$

для каждого $f \in C(\sigma(x))$. Кроме того, если $f(\lambda) = \lambda$ на $\sigma(x)$, то $\Psi f = x$.

Доказательство. Пусть Δ — пространство максимальных идеалов алгебры A . Тогда $\hat{x}$ есть непрерывная функция на Δ с множеством значений $\sigma(x)$. Мы покажем, что отображение $\hat{x}: \Delta \rightarrow \sigma(x)$ является гомеоморфизмом. Пусть $h_1 \in \Delta$, $h_2 \in \Delta$ и $\hat{x}(h_1) = \hat{x}(h_2)$, т. е. $h_1(x) = h_2(x)$. Согласно теореме 11.18, тогда $h_1(x^*) = h_2(x^*)$. Поскольку h_1 и h_2 — гомоморфизмы, отсюда следует, что

$$h_1(P(x, x^*)) = h_2(P(x, x^*))$$

для каждого полинома P от двух переменных. Но по предположению элементы вида $P(x, x^*)$ плотны в A . Так как h_1 и h_2 непрерывны, то тем самым $h_1(y) = h_2(y)$ для каждого $y \in A$. Другими словами, $h_1 = h_2$. Это означает, что отображение $\hat{x}$ взаимно однозначно. Так как Δ — компакт, то $\hat{x}$ — гомеоморфизм, что и утверждалось.

Итак, отображение $f \rightarrow f \circ \hat{x}$ устанавливает изометрический изоморфизм между $C(\sigma(x))$ и $C(\Delta)$, причем этот изоморфизм сохраняет комплексное сопряжение.

Тем самым, по теореме 11.18, каждая функция $f \circ \hat{x}$ есть преобразование Гельфанда однозначно определенного элемента алгебры A . Этот элемент мы обозначаем через Ψf . Ясно, что $\|\Psi f\| = \|f\|_\infty$. Утверждение (2) непосредственно вытекает из формулы (2) теоремы 11.18. Если $f(\lambda) = \lambda$, то $f \circ \hat{x} = \hat{x}$, так что из (1) получается $\Psi f = x$. ■

З а м е ч а н и е. В ситуации, описанной теоремой 11.19, разумно обозначать через $\hat{f}(x)$ элемент алгебры A , преобразование Гельфанда которого равно $f \circ \hat{x}$. Такое обозначение часто и используется. При этом функциональное исчисление (для данного специального типа алгебр) расширяется на класс произвольных непрерывных функций на спектре элемента x независимо от того, голоморфны они или нет.

Часто представляет особый интерес вопрос о существовании квадратных корней из элементов алгебры. В случае алгебр с инволюцией можно спросить, при каких условиях эрмитовы элементы обладают эрмитовыми квадратными корнями.

11.20. Теорема. Пусть A — коммутативная банахова алгебра с инволюцией, $x \in A$, $x = x^*$ и $\sigma(x)$ не содержит неположительных вещественных λ . Тогда существует такой элемент $y \in A$, что $y = y^*$ и $y^2 = x$.

Отметим, что инволюция здесь не предполагается непрерывной. В дальнейшем (теорема 11.26) мы увидим, что предположение о коммутативности алгебры не существенно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω — дополнение (в $\mathbb{C}$) к множеству всех неположительных вещественных чисел. Существует такая функция $\hat{f} \in H(\Omega)$, что $\hat{f}^2(\lambda) = \lambda$ и $\hat{f}(1) = 1$. Так как $\sigma(x) \subset \Omega$, то мы можем задать (в соответствии с определением 10.26) элемент $y \in A$, полагая

$$(1) \quad y = \hat{f}(x).$$

В силу теоремы 10.27 тогда $y^2 = x$. Докажем, что $y^* = y$.

Так как множество Ω односвязно, то по теореме Рунге найдется последовательность полиномов P_n , сходящаяся к $\hat{f}$ равномерно на компактных подмножествах множества Ω . Зададим полиномы Q_n , полагая

$$(2) \quad 2Q_n(\lambda) = P_n(\lambda) + \overline{P_n(\bar{\lambda})}.$$

Так как $\hat{f}(\bar{\lambda}) = \overline{\hat{f}(\lambda)}$, то полиномы Q_n сходятся к $\hat{f}$ в том же самом смысле, что и P_n . Положим

$$(3) \quad y_n = Q_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

В силу (2) коэффициенты полиномов Q_n вещественны. Так как

$x = x^*$, то отсюда вытекает, что $y_n = y_n^*$. По теореме 10.27 имеем

$$(4) \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

так как $Q_n \rightarrow f$ и, следовательно, $Q_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$. Если предположить, что инволюция непрерывна, то множество эрмитовых элементов окажется замкнутым и тогда равенство $y^* = y$ будет прямым следствием формулы (4). В общем случае требуется дополнительное рассуждение (в котором, впрочем, мы воспользуемся отмеченным здесь обстоятельством).

Пусть R — радикал алгебры A и $\pi: A \rightarrow A/R$ — каноническое отображение. На алгебре A/R корректно определяется инволюция, если положить

$$(5) \quad [\pi(a)]^* = \pi(a^*) \quad (a \in A).$$

Если элемент $a \in A$ эрмитов, то эрмитовым будет и элемент $\pi(a)$. Так как отображение π непрерывно, то $\pi(y_n) \rightarrow \pi(y)$. По теореме 11.9 алгебра A/R изоморфна алгебре $\hat{A}$ и, следовательно, полупроста. Поэтому любая инволюция на алгебре A/R непрерывна (теорема 11.16). Отсюда вытекает, что элемент $\pi(y)$ эрмитов, т. е. $\pi(y) = \pi(y^*)$.

Итак, мы установили, что элемент $y^* - y$ принадлежит радикалу алгебры A .

В соответствии с теоремой 11.15 имеет место представление $y = u + iv$, где $u = u^*$ и $v = v^*$. Мы уже доказали, что $v \in R$. Так как $x = y^2$, то

$$(6) \quad x = u^2 - v^2 + 2iuv.$$

Пусть h — произвольный комплексный гомоморфизм алгебры A . Так как $v \in R$, то $h(v) = 0$. Поэтому $h(x) = [h(u)]^2$. По предположению $0 \notin \sigma(x)$. Следовательно, $h(x) \neq 0$, и, значит, $h(u) \neq 0$. Согласно теореме 11.5, элемент u обратим в алгебре A . Так как $x = x^*$, то из формулы (6) вытекает, что $uv = 0$. Но $v = u^{-1}(uv)$, и поэтому $v = 0$. Теорема полностью доказана. ■

Замечание. Если $\sigma(x) \subset (0, \infty)$, то и $\sigma(y) \subset (0, \infty)$. Это непосредственно вытекает из формулы (1), определяющей элемент y , и теоремы об отображении спектров.

Приложения к некоммутативным алгебрам

Некоммутативные алгебры всегда содержат коммутативные подалгебры. Наличие таких подалгебр иногда может быть использовано для распространения некоторых результатов на некоммутативную ситуацию. На тривиальном уровне мы это уже проделывали. Так, при обсуждении элементарных свойств спектров мы обычно занимались каким-то одним фиксированным элементом $x \in A$.

Конечно, замкнутая подалгебра A_0 алгебры A , порожденная этим элементом, коммутативна, и большая часть обсуждения проводилась в рамках этой коммутативной алгебры. Одна из возможных трудностей, возникающих здесь, заключается в том, что спектр элемента x в алгебре A_0 , вообще говоря, отличается от спектра этого элемента в A . Оказывается (теорема 11.22), существует простая конструкция, позволяющая обойти эту трудность. Еще один способ (теорема 11.25) можно применять, когда A — алгебра с инволюцией.

11.21. Центризатор. Если S — подмножество банаховой алгебры A , то *центризатором* этого подмножества называется множество

$$\Gamma(S) = \{x \in A: xs = sx \text{ для каждого } s \in S\}.$$

Мы говорим, что множество S *коммукативно*, если любые два элемента из S коммутируют между собой. Мы будем использовать следующие простые свойства центризатора:

(а) $\Gamma(S)$ *есть замкнутая подалгебра в A* ;

(б) $S \subset \Gamma(\Gamma(S))$;

(с) *если множество S коммукативно, то коммукативно и множество $\Gamma(\Gamma(S))$.*

В самом деле, если элементы x и y коммутируют с каждым $s \in S$, то это верно и в отношении элементов λx , $x + y$ и xy . Кроме того, $\Gamma(S)$ замкнуто, поскольку умножение в A непрерывно. Тем самым доказано утверждение (а). Так как каждый элемент $s \in S$ коммутирует со всеми элементами $x \in \Gamma(S)$, то выполняется (б). Если S коммукативно, то $S \subset \Gamma(S)$ и поэтому $\Gamma(S) \supset \Gamma(\Gamma(S))$. Отсюда вытекает (с), ибо $\Gamma(E)$, очевидно, коммукативно, если $\Gamma(E) \subset E$.

11.22. Теорема. Пусть A — банахова алгебра, $S \subset A$, причем S коммукативно, и $B = \Gamma(\Gamma(S))$. Тогда B — коммукативная банахова алгебра, $S \subset B$ и $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ для каждого элемента $x \in B$.

Доказательство. Так как $e \in B$, то п. 11.21 показывает, что B — коммукативная банахова алгебра, содержащая S . Предположим, что элемент x принадлежит B и обратим в A . Мы должны показать, что $x^{-1} \in B$. Так как $x \in B$, то $xy = yx$ для каждого $y \in \Gamma(S)$. Поэтому $y = x^{-1}yx$ и $yx^{-1} = x^{-1}y$. Но это означает, что $x^{-1} \in \Gamma(\Gamma(S)) = B$. ■

11.23. Теорема. Пусть A — банахова алгебра, $x \in A$, $y \in A$ и $xy = yx$. Тогда

$$\sigma(x + y) \subset \sigma(x) + \sigma(y) \quad \text{и} \quad \sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y).$$

Доказательство. Положим $S = \{x, y\}$, и пусть $B = \Gamma(\Gamma(S))$. Тогда $x + y \in B$, $xy \in B$, и, по теореме 11.22, мы должны дока-

зять, что

$$\sigma_B(x+y) \subset \sigma_B(x) + \sigma_B(y) \quad \text{и} \quad \sigma_B(xy) \subset \sigma_B(x) \sigma_B(y).$$

Так как алгебра B коммутативна, то для каждого элемента $z \in B$ его спектр $\sigma_B(z)$ совпадает с множеством значений преобразования Гельфанда $\hat{z}$ (которое рассматривается здесь как функция на пространстве максимальных идеалов алгебры B). Поэтому утверждение теоремы вытекает из тождеств

$$(x+y)^\wedge = \hat{x} + \hat{y} \quad \text{и} \quad (xy)^\wedge = \hat{x}\hat{y}. \quad \blacksquare$$

Ниже используются обозначения из п. 10.37. Напомним, что операторы умножения слева и справа коммутируют.

Следствие. Если $C_x = R_x - L_x$, то $\sigma(C_x) \subset \sigma(x) - \sigma(x)$.

Доказательство. Если применить теорему к коммутирующим элементам R_x и $-L_x$ алгебры $\mathcal{B}(A)$, то получится

$$\sigma(C_x) \subset \sigma(R_x) - \sigma(L_x).$$

Вместе с тем $\sigma(R_x) = \sigma(x) = \sigma(L_x)$. $\blacksquare$

11.24. Определение. Пусть A — алгебра с инволюцией. Если $x \in A$ и $xx^* = x^*x$, то элемент x называется *нормальным*. Множество $S \subset A$ называют нормальным, если S коммутативно и вместе с каждым элементом x содержит x^* .

11.25. Теорема. Пусть A — банахова алгебра с инволюцией и B — нормальное подмножество в A , причем B максимально среди нормальных подмножеств. Тогда

- (а) B есть замкнутая коммутативная подалгебра в A ;
- (б) $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ для каждого элемента $x \in B$.

Заметим, что инволюция не предполагается непрерывной. Тем не менее B оказывается замкнутым подмножеством.

Доказательство. Начнем с доказательства следующего простого критерия принадлежности к B . Если $x \in A$, причем $xx^* = x^*x$ и $xu = ux$ для каждого $u \in B$, то $x \in B$.

В самом деле, если элемент x удовлетворяет указанным условиям, то ввиду нормальности B мы будем иметь также $xu^* = u^*x$ и $x^*u = ux^*$ для каждого $u \in B$. Поэтому множество $B \cup \{x, x^*\}$ тоже будет нормальным. Поэтому $x \in B$, ибо по предположению B максимально.

Если воспользоваться указанным критерием, то становится ясно, что сумма и произведение элементов из B снова являются элементами из B . Поэтому B — коммутативная алгебра.

Предположим теперь, что $x_n \in B$ и $x_n \rightarrow x$. Так как $x_n u = u x_n$ для всех $u \in B$ и так как умножение непрерывно, то $xu = ux$. Далее,

$$x^*u = (u^*x)^* = (xu^*)^* = ux^*.$$

В частности, $x^*x_n = x_nx^*$ для всех n , откуда получается, что $x^*x = xx^*$. Согласно нашему критерию, $x \in B$. Тем самым доказано, что B — замкнутая подалгебра в A , т. е. утверждение (а).

Заметим, что $e \in B$. Для доказательства утверждения (б) предположим, что $x \in B$ и $x^{-1} \in A$. Так как x — нормальный элемент, то и элемент x^{-1} является нормальным. Кроме того, так как элемент x коммутирует с каждым элементом $y \in B$, то этим свойством обладает и элемент x^{-1} . Поэтому $x^{-1} \in B$. ■

Наше первое приложение этого результата составляет следующее усиление теоремы 11.20.

11.26. Теорема. *В условии теоремы 11.20 можно опустить слово «коммутативная».*

Доказательство. По теореме Хаусдорфа о максимальнойности данный эрмитов (а потому и нормальный) элемент $x \in A$ содержится в некотором максимальном нормальном множестве B . Согласно теореме 11.25, к x применима теорема 11.20. ■

11.27. Определение. Если x — элемент банаховой алгебры с инволюцией, то соотношение $x \geq 0$ означает, что $x = x^*$ и что $\sigma(x) \subset [0, \infty)$.

11.28. Теорема. *Каждая B^* -алгебра A обладает следующими свойствами:*

- (а) *эрмитовы элементы имеют вещественный спектр;*
- (б) *если элемент $x \in A$ нормален, то $\rho(x) = \|x\|$;*
- (в) *если $y \in A$, то $\rho(yy^*) = \|y\|^2$;*
- (г) *если $u \in A$, $v \in A$, причем $u \geq 0$ и $v \geq 0$, то $u + v \geq 0$;*
- (д) *если $y \in A$, то $yy^* \geq 0$;*
- (е) *если $y \in A$, то элемент $e + yy^*$ обратим в A .*

Доказательство. Каждый нормальный элемент $x \in A$ содержится в некотором максимальном нормальном множестве $B \subset A$. По теоремам 11.18 и 11.25 множество B является коммутативной B^* -алгеброй, изометрически изоморфной своему преобразованию Гельфанда $\hat{B} = C(\Delta)$ и обладающей тем свойством, что

$$(1) \quad \sigma(z) = \hat{z}(\Delta) \quad (z \in B).$$

Здесь $\sigma(z)$ — спектр элемента z в A , Δ — пространство максимальных идеалов алгебры B и $\hat{z}(\Delta)$ — множество значений преобразования Гельфанда элемента z , рассматриваемого как элемент алгебры B .

Если $x = x^*$, то из теоремы 11.18 вытекает, что $\hat{x}$ является вещественной функцией на Δ . Поэтому утверждение (а) вытекает из формулы (1).

Если элемент x нормален, то из формулы (1) вытекает, что $\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty$. Далее, $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$, так как алгебры B и $\hat{B}$ изометрически изоморфны. Тем самым доказано утверждение (б).

Если $y \in A$, то элемент yy^* эрмитов. Поэтому утверждение (с) вытекает из (b), так как $\rho(yy^*) = \|yy^*\| = \|y\|^2$.

Предположим, что элементы u и v удовлетворяют условиям, фигурирующим в (d). Положим $\alpha = \|u\|$, $\beta = \|v\|$, $w = u + v$, $\gamma = \alpha + \beta$. Тогда $\sigma(u) \subset [0, \alpha]$, так что

$$(2) \quad \sigma(\alpha e - u) \subset [0, \alpha],$$

и из утверждения (b) вытекает, что $\|\alpha e - u\| \leq \alpha$. По тем же соображениям $\|\beta e - v\| \leq \beta$. Следовательно,

$$(3) \quad \|\gamma e - w\| \leq \gamma.$$

Так как $w = w^*$, то из утверждения (a) получается, что множество $\sigma(\gamma e - w)$ состоит из вещественных чисел. Поэтому из неравенства (3) вытекает, что

$$(4) \quad \sigma(\gamma e - w) \subset [-\gamma, \gamma].$$

Но тогда $\sigma(w) \subset [0, 2\gamma]$. Таким образом, $w \geq 0$, и утверждение (d) доказано.

Займемся доказательством утверждения (e). Положим $x = yy^*$. Тогда элемент x эрмитов, и если B означает то же, что и в начале доказательства, то $\hat{x}$ — вещественная функция на Δ . Ввиду формулы (1) мы должны показать, что $\hat{x} \geq 0$ на Δ .

Так как $\hat{B} = C(\Delta)$, то существует такой элемент $z \in B$, что

$$(5) \quad \hat{z} = |\hat{x}| - \hat{x} \text{ на } \Delta.$$

Тогда $z = z^*$, ибо $\hat{z}$ вещественно (теорема 11.18). Положим

$$(6) \quad zy = w = u + iv,$$

где u и v — эрмитовы элементы из A . Тогда

$$(7) \quad ww^* = zyy^*z^* = zxz = z^2x$$

и, следовательно,

$$(8) \quad w^*w = 2u^2 + 2v^2 - ww^* = 2u^2 + 2v^2 - z^2x.$$

Так как $u = u^*$, то, согласно утверждению (a), множество $\sigma(u)$ вещественно. По теореме об отображении спектров отсюда вытекает, что $u^2 \geq 0$. Аналогично $v^2 \geq 0$. Из (5) ясно, что $\hat{z}^2\hat{x} \leq 0$ на Δ . Так как $z^2x \in B$, то в сочетании с формулой (1) это дает $-z^2x \geq 0$. Поэтому из (8) и утверждения (d) вытекает, что $w^*w \geq 0$.

Но $\sigma(ww^*) \subset \sigma(w^*w) \cup \{0\}$ (упр. 2 гл. 10). Поэтому и $ww^* \geq 0$. Согласно формуле (7), это означает, что $\hat{z}^2\hat{x} \geq 0$ на Δ . В силу (5) последнее неравенство может выполняться тогда и только тогда, когда $\hat{x} = |\hat{x}|$. Таким образом, $\hat{x} \geq 0$, и утверждение (e) доказано.

Наконец, утверждение (f) является следствием утверждения (e). ■

Теперь совпадение спектров может быть доказано совсем в другой ситуации, когда коммутативность роли не играет.

11.29. Теорема. *Предположим, что A есть B^* -алгебра, B — замкнутая подалгебра в A , причем $e \in B$ и $x^* \in B$, если $x \in B$. Тогда $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ для каждого $x \in B$.*

Доказательство. Предположим, что элемент x содержится в B и обратим в A . Мы должны показать, что $x^{-1} \in B$.

Так как элемент x обратим в A , то в A обратим также элемент x^* и, следовательно, элемент xx^* . Поэтому, согласно утверждению (е) теоремы 11.28, $\sigma_A(xx^*) \subset (0, \infty)$. Так как множество $\sigma_A(xx^*)$ обладает связным дополнением в $\mathbb{C}$, то, по теореме 10.18, $\sigma_B(xx^*) = \sigma_A(xx^*)$. Поэтому $(xx^*)^{-1} \in B$ и, окончательно, $x^{-1} = x^*(xx^*)^{-1} \in B$. ■

Положительные функционалы

11.30. Определение. *Положительным функционалом на банаховой алгебре A с инволюцией называется линейный функционал F , для которого*

$$F(xx^*) \geq 0$$

при каждом $x \in A$. Отметим, что алгебра A не предполагается коммутативной и что непрерывность функционала F не постулируется. [Смысл термина «положительный», конечно, зависит от рассматриваемой инволюции.]

11.31. Теорема. *Каждый положительный функционал F на банаховой алгебре A с инволюцией обладает следующими свойствами:*

$$(a) \quad F(x^*) = \overline{F(x)};$$

$$(b) \quad |F(xy^*)|^2 \leq F(xx^*) F(yy^*);$$

$$(c) \quad |F(x)|^2 \leq F(e) F(xx^*) \leq F(e)^2 \rho(xx^*);$$

$$(d) \quad |F(x)| \leq F(e) \rho(x) \text{ для каждого нормального элемента } x \in A;$$

$$(e) \quad F \text{ является ограниченным линейным функционалом на } A.$$

Кроме того, $\|F\| = F(e)$, если алгебра A коммутативна, и $\|F\| \leq \beta^{1/2} F(e)$, если инволюция удовлетворяет условию $\|x^*\| \leq \beta \|x\|$ для каждого $x \in A$.

Доказательство. Если $x \in A$ и $y \in A$, то положим

$$(1) \quad p = F(xx^*), \quad q = F(yy^*), \quad r = F(xy^*), \quad s = F(yx^*).$$

Поскольку $F[(x + \alpha y)(x^* + \bar{\alpha}y^*)] \geq 0$ для каждого $\alpha \in \mathbb{C}$, то

$$(2) \quad p + \bar{\alpha}r + \alpha s + |\alpha|^2 q \geq 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

Полагая в (2) сначала $\alpha = 1$, а затем $\alpha = i$, мы видим, что числа

$s+r$ и $i(s-r)$ вещественны. Поэтому $s=\bar{r}$. При $y=e$ это соотношение дает (а).

Если $r=0$, то неравенство (b) очевидно. При $r \neq 0$ положим в (2) параметр α равным $tr/|r|$, где t —вещественное число. Тогда неравенство (2) превратится в неравенство

$$(3) \quad p+2|r|t+qt^2 \geq 0 \quad (-\infty < t < \infty),$$

из которого вытекает, что $|r|^2 \leq pq$. Но это как раз совпадает с неравенством (b).

Так как $ee^*=e$, то первое из неравенств (c) есть просто частный случай неравенства (b). Для доказательства второго неравенства выберем некоторое $t > \rho(xx^*)$. Тогда $\sigma(te-xx^*)$ содержится в открытой правой полуплоскости. По теореме 11.26 существует такой элемент $u \in A$, что $u=u^*$ и $u^2=te-xx^*$. Поэтому

$$(4) \quad tF(e)-F(xx^*)=F(u^2) \geq 0.$$

Следовательно,

$$(5) \quad F(xx^*) \leq F(e) \rho(xx^*),$$

и утверждение (c) полностью доказано.

Если x —нормальный элемент, т. е. $xx^*=x^*x$, то из теоремы 11.23 вытекает, что $\sigma(xx^*) \subset \sigma(x)\sigma(x^*)$ и, значит,

$$(6) \quad \rho(xx^*) \leq \rho(x)\rho(x^*)=\rho(x)^2.$$

Ясно, что из неравенств (6) и (c) получается (d).

Если алгебра A коммутативна, то неравенство (d) выполняется для всех $x \in A$ и поэтому $\|F\|=F(e)$. Если $\|x^*\| \leq \beta \|x\|$, то из (c) вытекает, что $|F(x)| \leq F(e) \beta^{1/2} \|x\|$, так как $\rho(xx^*) \leq \|x\| \|x^*\|$. Этим установлены оба указанных специальных случая утверждения (e).

Прежде чем переходить к общему случаю, заметим, что $F(e) \geq 0$ и $F(x)=0$ для каждого $x \in A$, если $F(e)=0$. Действительно, и то и другое вытекает из неравенств (c). Поэтому в оставшейся части доказательства мы можем (и будем), не ограничивая общности, считать, что

$$(7) \quad F(e)=1.$$

Пусть $\bar{H}$ —замыкание множества H всех эрмитовых элементов алгебры A . Заметим, что H и iH суть вещественные векторные пространства и что $A=H+iH$ по теореме 11.15. Согласно утверждению (d), сужение функционала F на H является вещественным линейным функционалом с нормой 1. Поэтому этот вещественный функционал продолжается до вещественного функционала Φ с нормой 1 на $\bar{H}$. Теперь мы утверждаем, что

$$(8) \quad \Phi(y)=0, \text{ если } y \in \bar{H} \cap i\bar{H}.$$

Действительно, пусть $y = \lim u_n = \lim (iv_n)$, где $u_n \in H$ и $v_n \in H$. Тогда $u_n^2 \rightarrow y^2$, $v_n^2 \rightarrow -y^2$ и из неравенств (с) и (d) вытекает, что

$$(9) \quad |F(u_n)|^2 \leq F(u_n^2) \leq F(u_n^2 + v_n^2) \leq \|u_n^2 + v_n^2\| \rightarrow 0.$$

Так как $\Phi(y) = \lim F(u_n)$, то (8) доказано.

По теореме 5.20 существует такая константа $\gamma < \infty$, что каждый элемент $x \in A$ обладает представлением

$$(10) \quad x = x_1 + ix_2, \quad x_1 \in \bar{H}, \quad x_2 \in \bar{H}, \quad \|x_1\| + \|x_2\| \leq \gamma \|x\|.$$

Если $x = u + iv$, где $u \in H$, $v \in H$, то $x_1 - u$ и $x_2 - v$ содержатся в $\bar{H} \cap i\bar{H}$. Поэтому из (8) вытекает, что

$$(11) \quad F(x) = F(u) + iF(v) = \Phi(x_1) + i\Phi(x_2)$$

и, следовательно,

$$(12) \quad |F(x)| \leq |\Phi(x_1)| + |\Phi(x_2)| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \leq \gamma \|x\|. \quad \blacksquare$$

Дальнейшая информация по поводу утверждения (е) содержится в упр. 13.

Примеры положительных функционалов и связь их с положительными мерами составляют содержание следующей теоремы. В качестве весьма частного случая она содержит классическую теорему Бохнера о положительно определенных функциях. Отождествления, приводящие от одной теоремы к другой, указаны в упр. 14.

11.32. Теорема. Пусть A — коммутативная банахова алгебра с инволюцией и Δ — ее пространство максимальных идеалов. Предположим, что инволюция симметрична в том смысле, что

$$(1) \quad h(x^*) = \overline{h(x)} \quad (x \in A, h \in \Delta).$$

Обозначим через K множество всех положительных функционалов F на A , удовлетворяющих условию $F(e) \leq 1$. Пусть M — множество всех положительных регулярных борелевских мер μ на Δ , для которых $\mu(\Delta) \leq 1$. Тогда формула

$$(2) \quad F(x) = \int_{\Delta} \hat{x} d\mu$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между выпуклыми множествами K и M , причем крайним точкам соответствуют крайние точки.

В частности, мультипликативные линейные функционалы на A суть в точности крайние точки множества K .

Доказательство. Если $\mu \in M$ и F определяется формулой (2), то очевидно, что F — линейный функционал, причем $F(xx^*) = \int |\hat{x}|^2 d\mu \geq 0$, поскольку из условия (1) вытекает, что $(xx^*)^\wedge = |\hat{x}|^2$. Так как $F(e) = \mu(\Delta)$, то $F \in K$.

Если $F \in K$, то, согласно утверждению (d) теоремы 11.31, функционал F аннулирует радикал алгебры A . Поэтому существует такой функционал $\hat{F}$ на алгебре $\hat{A}$, что $F(x) = \hat{F}(\hat{x})$ для всех $x \in A$. Далее, снова по утверждению (d) теоремы 11.31, получаем

$$(3) \quad |\hat{F}(\hat{x})| = |F(x)| \leq F(e) \rho(x) = F(e) \|\hat{x}\|_{\infty} \quad (x \in A).$$

Это означает, что $\hat{F}$ является линейным функционалом с нормой $F(e)$ на подпространстве $\hat{A}$ пространства $C(\Delta)$. Продолжим этот функционал с сохранением нормы на $C(\Delta)$ и воспользуемся теоремой Рисса о представлении, согласно которой найдется такая регулярная борелевская мера μ , $\|\mu\| = F(e)$, что будет иметь место представление (2). Так как

$$(4) \quad \mu(\Delta) = \int_{\Delta} \hat{e} d\mu = F(e) = \|\mu\|,$$

то мы видим, что $\mu \geq 0^1$. Таким образом, $\mu \in M$.

Согласно условию (1), алгебра $\hat{A}$ вместе с каждой функцией содержит комплексно сопряженную. Кроме того, она содержит константы и разделяет точки компакта Δ . По теореме Стоуна — Вейерштрасса она плотна в $C(\Delta)$. Поэтому мера μ однозначно определяется функционалом F .

Одной из крайних точек множества M служит 0. Все другие отвечают единичным мерам с одноточечными носителями $h \in \Delta$. Так как каждый комплексный гомоморфизм алгебры A имеет вид $x \rightarrow \hat{x}(h)$ при некотором $h \in \Delta$, то доказательство закончено. ■

В заключение мы покажем, что крайние точки множества K суть мультипликативные функционалы даже и в том случае, когда условие (1) не выполняется.

11.33. Теорема. Пусть K — множество всех положительных функционалов F на некоторой коммутативной банаховой алгебре A с инволюцией, удовлетворяющих условию $F(e) \leq 1$. Если $F \in K$, то выполнение каждого из следующих трех условий влечет за собой выполнение двух других:

- (a) $F(xy) = F(x)F(y)$ для всех x и y из A ;
- (b) $F(xx^*) = F(x)F(x^*)$ для каждого $x \in A$;
- (c) F является крайней точкой множества K .

Доказательство. Очевидно, что (b) вытекает из (a). Предположим, что выполняется (b). Полагая здесь $x = e$, мы получаем $F(e) = F(e)^2$, так что $F(e) = 0$ или $F(e) = 1$. Если $F(e) = 0$, то

¹⁾ Это общий факт: если ψ — такой функционал на $C(\Delta)$, что $\|\psi\| = \psi(1) = 1$, то $\psi(f) \geq 0$ при $f \geq 0$. Действительно, пусть $0 \leq f \leq 1$ и $\psi(f) = \alpha + i\beta$. Тогда $|\psi(f)| \leq 1$, $|1 - \psi(f)| = |\psi(1 - f)| \leq 1$, так что $\alpha \geq 0$. Кроме того, при вещественных t имеем $1 \geq |\psi(e^{it}f)| = |1 - \beta t + i\alpha t + o(t)|$, так что $\beta = 0$. — Прим. ред.

$F=0$ ввиду утверждения (с) теоремы 11.31, и в этом случае F , конечно, является крайней точкой множества K . Предположим, что $F(e)=1$. Пусть $2F=F_1+F_2$, где $F_1 \in K$, $F_2 \in K$. Мы покажем, что $F_1=F$. Ясно, что $F_1(e)=1=F(e)$. Если элемент $x \in A$ таков, что $F(x)=0$, то

$$(1) \quad |F_1(x)|^2 \leq F_1(xx^*) \leq 2F(xx^*) = 2F(x)F(x^*) = 0$$

ввиду утверждения (b) теоремы 11.31. Таким образом, функционал F_1 совпадает с F на ядре функционала F и в точке e , не принадлежащей ядру. Поэтому $F_1=F$, т. е. из (b) вытекает (с).

Нам остается показать, что из (с) вытекает (a). Пусть F — крайняя точка множества K . Тогда либо $F(e)=0$, и в этом случае доказывать нечего, либо $F(e)=1$. Сначала мы покажем, что выполняется один специальный случай условия (a), а именно

$$(2) \quad F(xx^*y) = F(xx^*)F(y) \quad (x \in A, y \in A).$$

Выберем такой элемент x , что $\|xx^*\| < 1$. По теореме 11.20 найдется такой элемент $z \in A$, что $z=z^*$ и $z^2=e-xx^*$. Пусть

$$(3) \quad \Phi(y) = F(xx^*y) \quad (y \in A).$$

Тогда

$$(4) \quad \Phi(yy^*) = F(xx^*yy^*) = F[(xy)(xy)^*] \geq 0$$

и

$$(5) \quad (F-\Phi)(yy^*) = F[(e-xx^*)yy^*] = F(z^2yy^*) = F[(yz)(yz)^*] \geq 0.$$

Так как

$$(6) \quad 0 \leq \Phi(e) = F(xx^*) \leq F(e)\|xx^*\| < 1,$$

то из (4) и (5) вытекает, что оба функционала Φ и $F-\Phi$ принадлежат K . Если $\Phi(e)=0$, то $\Phi=0$ (и в этом случае соотношение (2), очевидно, выполняется). Если же $\Phi(e) > 0$, то из (6) получается следующее представление функционала F в виде выпуклой комбинации элементов из K :

$$(7) \quad F = \Phi(e) \cdot \frac{\Phi}{\Phi(e)} + (F-\Phi)(e) \cdot \frac{F-\Phi}{F(e)-\Phi(e)}.$$

Но по предположению F — крайняя точка, так что

$$(8) \quad \Phi = \Phi(e)F.$$

Теперь соотношение (2) непосредственно вытекает из (8) и (3).

Наконец, переход от (2) к (a) может быть совершен при помощи каждого из следующих тождеств, которые имеют место при любой инволюции. Именно, при $n=3, 4, 5, \dots$ пусть $\omega = \exp(2\pi i/n)$; если $x \in A$, то положим $z_p = e + \omega^{-p}x$. Тогда

$$(9) \quad x = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \omega^p z_p z_p^*.$$

Доказательство тождества (9) получается прямым вычислением, в котором используется тот факт, что

$$(10) \quad \sum_{p=1}^n \omega^p = \sum_{p=1}^n \omega^{2p} = 0. \quad \blacksquare$$

Упражнения

1. Доказать предложение 11.2.
2. Сформулировать и доказать аналог леммы Винера 11.6 для степенных рядов, абсолютно сходящихся в замкнутом единичном диске.
3. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Показать, что имеется естественное взаимно однозначное соответствие между замкнутыми подмножествами компакта X и замкнутыми идеалами алгебры $C(X)$.
4. Доказать, что полиномы плотны в полидиск-алгебре $A(U^n)$ (теорема 11.7). *Наводящее соображение.* Если $f \in A(U^n)$ и $0 < r < 1$, то определим f_r , полагая $f_r(z) = f(rz)$. Тогда f_r представляется суммой абсолютно (и равномерно) сходящегося на $\bar{U}^n$ кратного степенного ряда.
5. Пусть A — коммутативная банахова алгебра, $x \in A$ и функция f голоморфна в некотором открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащем множество значений функции $\hat{x}$. Доказать существование такого элемента $y \in A$, что $\hat{y} = \hat{f} \circ \hat{x}$, т.е. $h(y) = \hat{f}(h(x))$ для каждого комплексного гомоморфизма h алгебры A . Доказать, что элемент y однозначно определяется по x и f , если алгебра A полупроста.
6. Пусть A и B — коммутативные банаховы алгебры, причем алгебра B полупроста. Рассмотрим гомоморфизм $\psi: A \rightarrow B$. Предположим, что образ алгебры A относительно этого гомоморфизма плотен в B . Определим отображение $\alpha: \Delta_B \rightarrow \Delta_A$, полагая

$$(\alpha h)(x) = h(\psi(x)) \quad (x \in A, h \in \Delta_B).$$

Доказать, что α является гомеоморфизмом пространства Δ_B на некоторое компактное подмножество в Δ_A . [Тот факт, что $\psi(A)$ плотно в B , влечет за собой инъективность отображения α и, кроме того, совпадение исходной топологии Δ_B со слабой топологией, индуцированной преобразованиями Гельфанда элементов вида $\psi(x)$, $x \in A$.]

Пусть A — диск-алгебра и $B = C(K)$, где K — некоторая замкнутая дуга на единичной окружности, не совпадающая со всей окружностью. Пусть $\psi: A \rightarrow B$ — отображение сужения функций из A на K . Из теоремы Рунге легко следует, что $\psi(A)$ плотно в B , т.е. указанное выше условие выполняется. Этот пример показывает, что $\alpha(\Delta_B)$ может оказаться собственным подмножеством в Δ_A даже в том случае, когда отображение ψ инъективно.

Построить пример, когда $\psi(A) = B$, но $\alpha(\Delta_B) \neq \Delta_A$.

7. В примере 11.13 (b) утверждалось, что $\hat{A} \neq C(\Delta)$. Найти несколько доказательств этого факта.

8. Какие свойства меры Лебега использованы в примере 11.13 (f)? Сохраняются ли результаты при замене меры Лебега произвольной положительной мерой?

Восполнить детали в рассуждении, завершающем рассмотрение примера 11.13(f).

В обозначениях примера 11.13(f) показать, что $\hat{m}(S) = \hat{m}(\bar{S})$ для каждого борелевского множества $S \subset \Delta$. Таким образом, границы борелевских множеств имеют меру 0. [В тексте это было доказано для открытых множеств.]

9. Пусть C' — алгебра всех непрерывно дифференцируемых комплексных функций на отрезке $[0, 1]$ с поточечными операциями и нормой

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(а) Показать, что C' есть полупростая коммутативная банахова алгебра. Найти пространство максимальных идеалов этой алгебры.

(b) Фиксируем точку p , $0 \leq p \leq 1$. Пусть J — множество всех функций $f \in C'$, для которых $f(p) = f'(p) = 0$. Показать, что J — замкнутый идеал в C' и C'/J — двумерная алгебра с одномерным радикалом. [Тем самым получается пример полупростой алгебры с неполупростыми факторалгебрами.] Какой из двух алгебр, описанных в упр. 14 гл. 10, изоморфна алгебре C'/J ?

10. Пусть A — диск-алгебра. Сопоставим каждой функции $f \in A$ функцию $f^* \in A$ по формуле

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Тогда $f \rightarrow f^*$ есть инволюция на A .

(а) Будет ли алгебра A с этой инволюцией B^* -алгеброй?

(b) Обязательно ли $\sigma(ff^*)$ состоит только из вещественных чисел?

(с) Какие из комплексных гомоморфизмов алгебры A являются положительными функционалами относительно данной инволюции?

(d) Если μ — положительная борелевская мера на отрезке $[-1, 1]$, то

$$f \rightarrow \int_{-1}^1 f(t) d\mu(t)$$

есть положительный функционал на алгебре A . Существуют ли другие положительные функционалы?

11. Показать, что расстояние между двумя коммутирующими идемпотентами не меньше 1. Точнее, если x и y — элементы некоторой банаховой алгебры, причем $x^2 = x$, $y^2 = y$ и $xy = yx$, то либо $x = y$, либо $\|x - y\| \geq 1$. Показать, что утверждение может оказаться неверным, если $xy \neq yx$.

12. Доказать, что если $xy = yx$ для некоторых элементов x и y банаховой алгебры, то

$$\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y) \quad \text{и} \quad \rho(xy) \leq \rho(x) \rho(y).$$

13. Пусть t — некоторое достаточно большое положительное число. Зададим норму на C^2 , полагая

$$\|w\| = |w_1| + t|w_2|, \quad \text{если} \quad w = (w_1, w_2).$$

Пусть A — алгебра всех комплексных квадратных матриц порядка 2 с соответствующей операторной нормой:

$$\|y\| = \max \{\|y(w)\| : \|w\| = 1\} \quad (y \in A).$$

Для $y \in A$ обозначим через y^* матрицу, комплексно сопряженную к транспонированной. Рассмотрим некоторый фиксированный элемент $x \in A$, а именно

$$x = \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказать следующие утверждения:

(а) $\|x(w)\| = t\|w\|$, так что $\|x\| = t$;

(b) $\sigma(x) = \{t, -t\} = \sigma(x^*)$;

$$(c) \sigma(xx^*) = \{1, t^4\} = \sigma(x^*x);$$

$$(d) \sigma(x+x^*) = \{1+t^2, -1-t^2\};$$

(e) коммутативность существенна в теореме 11.23 и упр. 12;

(f) если для каждого $y \in A$ обозначить через $F(y)$ сумму всех компонент матрицы y , то F — положительный функционал на A ;

(g) равенство $\|F\| = F(e)$ (см. утверждение (e) теоремы 11.31) не выполняется, так как $F(e) = 2$, $F(x) = 1 + t^2$ и, следовательно, $\|F\| > t$;

(h) пусть K — множество всех положительных функционалов f на A , удовлетворяющих условию $f(e) \leq 1$ (как в теореме 11.33). Тогда K обладает большим количеством крайних точек, но единственный мультипликативный функционал на A — нулевой. Таким образом, коммутативность существенна для справедливости импликации (c) $\Rightarrow$ (a) в теореме 11.33.

14. Комплексная функция φ на $\mathbb{R}^n$ называется *положительно определенной*, если для любых $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ и любых комплексных $c_1, \dots, c_r$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^r c_i \bar{c}_j \varphi(x_i - x_j) \geq 0.$$

(a) Показать, что $|\varphi(x)| \leq \varphi(0)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Показать, что преобразование Фурье каждой положительной борелевской меры на $\mathbb{R}^n$ является положительно определенной функцией.

(c) Если φ — непрерывная положительно определенная функция, то φ является преобразованием Фурье некоторой конечной положительной борелевской меры (теорема Бохнера). Восстановить детали в следующем доказательстве этого утверждения:

Пусть A — алгебра со сверткой в качестве умножения, которая получается добавлением единицы к $L^1(\mathbb{R}^n)$ (как это описано в п. 10.3 (d) и 11.13(e)). Положим $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Тогда

$$f + \alpha \delta \longrightarrow \tilde{f} + \bar{\alpha} \delta$$

есть инволюция на A и функционал

$$f + \alpha \delta \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dm_n + \alpha \varphi(0)$$

является положительным. По теореме 11.32 и согласно 11.13(e), существует такая положительная мера μ на одноточечной компактификации Δ пространства $\mathbb{R}^n$, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dm_n + \alpha \varphi(0) = \int_{\Delta} (\tilde{f} + \alpha) \, d\mu.$$

Если σ — сужение меры μ на $\mathbb{R}^n$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} \, d\sigma$$

для каждого $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $\varphi = \hat{\sigma}$. [На самом деле мера μ сосредоточена на $\mathbb{R}^n$, так что $\sigma = \mu$.]

(d) Пусть P — множество всех непрерывных положительно определенных функций φ на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\varphi(0) \leq 1$. Описать крайние точки этого множества.

15. Пусть Δ — пространство максимальных идеалов некоторой коммутативной банаховой алгебры A . Замкнутое множество $\beta \subset \Delta$ называется A -гра-

ницей, если для любого $x \in A$ максимум $|\hat{x}|$ на β совпадает с максимумом $|\hat{x}|$ на всем Δ . [Очевидно, что само Δ является A -границей.]

Доказать, что пересечение ∂_A всех A -границ является A -границей.

Множество ∂_A называется *границей Шилова* алгебры A . Терминология навеяна принципом максимума модуля для голоморфных функций. Например, если A есть диск-алгебра, то ∂_A совпадает с единичной окружностью, которая служит топологической границей пространства максимальных идеалов Δ , совпадающего с замкнутым единичным диском.

Схема доказательства. Сначала проверяется, что существует A -граница β_0 , минимальная в том смысле, что никакое собственное замкнутое подмножество в β_0 уже не является A -границей. [Упорядочить семейство всех A -границ по включению и т. д.] Затем устанавливается, что $\beta_0 = \partial_A$. Действительно, пусть $h_0 \in \beta_0$ и элементы $x_1, \dots, x_n \in A$ удовлетворяют условию $\hat{x}_i(h_0) = 0$. Положим

$$V = \{h \in \Delta: |\hat{x}_i(h)| < 1 \text{ при } 1 \leq i \leq n\}.$$

Так как граница β_0 минимальна, то найдется такой элемент $x \in A$, для которого $\|\hat{x}\|_\infty = 1$ и $|\hat{x}(h)| < 1$ на $\beta_0 \setminus V$. Если $y = x^m$ и m достаточно велико, то $|\hat{x}_i y| < 1$ на β_0 при всех i . Поэтому $\|\hat{x}_i y\|_\infty < 1$. Отсюда вытекает, что равенство $|\hat{y}(h)| = \|\hat{y}\|_\infty$ может выполняться только для точек $h \in V$. Следовательно, множество V пересекается с каждой A -границей β , так что $h_0 \in \beta$. Таким образом, $\beta_0 \subset \beta$ и окончательно $\beta_0 = \partial_A$.

16. Пусть A — банахова алгебра и m — целое число, не меньшее 2. Предположим, что

$$\|x\|^m \leq K \|x^m\|$$

для каждого $x \in A$, где $K < \infty$. Доказать существование таких констант K_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, что

$$\|x\|^n \leq K_n \|x^n\| \quad (x \in A).$$

[Это дает усиление теоремы 11.12.]

17. Пусть $\{\omega_n\}$ ($-\infty < n < \infty$) — такая последовательность положительных чисел, что $\omega_0 = 1$ и

$$\omega_{m+n} \leq \omega_m \omega_n$$

для всех целых m и n . Пусть $A = A\{\omega_n\}$ — множество всех комплексных функций f целочисленного аргумента, для которых конечна норма

$$\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| \omega_n.$$

Определим умножение в A , полагая

$$(f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k) g(k).$$

(а) Показать, что $A\{\omega_n\}$ есть коммутативная банахова алгебра.

(б) Показать, что предел $R_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_n)^{1/n}$ существует, конечен и что

$$R_+ = \inf_{n \geq 0} (\omega_n)^{1/n}.$$

(с) Доказать аналогичное утверждение относительно предела $R_- = \lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_{-n})^{1/n}$. Показать, что $R_- \leq R_+$.

(д) Положим $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C}: R_- \leq |\lambda| \leq R_+\}$. Показать, что Δ можно отождествить с пространством максимальных идеалов алгебры $A\{\omega_n\}$, причем так, что преобразования Гельфанда будут представляться абсолютно сходящимися в Δ рядами Лорана.

(е) Рассмотрим следующие способы выбора последовательности $\{\omega_n\}$:

- (i) $\omega_n = 1$;
- (ii) $\omega_n = 2^n$;
- (iii) $\omega_n = 2^n$, если $n \geq 0$, $\omega_n = 1$, если $n < 0$;
- (iv) $\omega_n = 1 + 2n^2$;
- (v) $\omega_n = 1 + 2n^2$, если $n \geq 0$, $\omega_n = 1$, если $n < 0$.

В каких из этих случаев Δ совпадает с окружностью? В каких из этих случаев алгебра $A\{\omega_n\}$ будет самосопряженной в том смысле, что $\hat{A}$ вместе с каждой функцией содержит комплексно сопряженную?

(f) Всегда ли алгебра $A\{\omega_n\}$ полупроста?

(g) Существует ли такая алгебра $A\{\omega_n\}$, для которой Δ совпадает с единичной окружностью, а $\hat{A}$ состоит только из бесконечно дифференцируемых функций?

Глава 12

ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Основные факты

12.1. Определения. Комплексное векторное пространство H называется *пространством с внутренним произведением* (или *унитарным пространством*), если каждой упорядоченной паре векторов x и y из H сопоставлено комплексное число (x, y) , называемое *внутренним*, или *скалярным*, *произведением*, причем выполняются следующие условия:

- (a) $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (черта означает комплексное сопряжение);
- (b) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
- (c) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$, если $x \in H$, $y \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$;
- (d) $(x, x) \geq 0$ для всех $x \in H$;
- (e) $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Таким образом, при фиксированном y число (x, y) представляет собой линейный функционал по x , а при фиксированном x — сопряженно-линейный функционал по y . Такие функции двух переменных иногда называют *полуторалинейными*.

Если $(x, y) = 0$, то вектор x называется *ортогональным* к вектору y и иногда в этом случае используется обозначение $x \perp y$. Так как из $(x, y) = 0$ вытекает $(y, x) = 0$, то отношение $x \perp y$ симметрично. Если $E \subset H$ и $F \subset H$, то запись $E \perp F$ означает, что $(x, y) = 0$ при любых $x \in E$ и $y \in F$. Далее, через $E^\perp$ обозначается совокупность всех векторов $y \in H$, ортогональных к каждому из векторов $x \in E$.

В каждом унитарном пространстве величина

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

определяет норму (выполнение соответствующих аксиом проверяется в теореме 12.2). Если полученное нормированное пространство оказывается полным, то оно называется *гильбертовым пространством*.

12.2. Теорема. Если $x \in H$ и $y \in H$, где H — унитарное пространство, то

$$(1) \quad |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

и

$$(2) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Кроме того, условие $x \perp y$ эквивалентно условию

$$(3) \quad \|y\| \leq \|\lambda x + y\| \text{ для каждого } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Положим $\alpha = (x, y)$. Простая выкладка показывает, что

$$(4) \quad 0 \leq \|\lambda x + y\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha\lambda) + \|y\|^2.$$

Поэтому если $\alpha = 0$, т.е. $(x, y) = 0$, то неравенство (3) выполняется. При $x = 0$ неравенства (1) и (3) очевидны. Если $x \neq 0$, то положим $\lambda = -\bar{\alpha}/\|x\|^2$. При таком λ из неравенства (4) получается неравенство

$$(5) \quad 0 \leq \|\lambda x + y\|^2 = \|y\|^2 - \frac{|\alpha|^2}{\|x\|^2}.$$

Отсюда вытекает неравенство (1), а также следует, что (для указанного λ) неравенство (3) нарушается, если $\alpha \neq 0$. Возводя неравенство (2) в квадрат, легко видеть, что оно является следствием неравенства (1). Теорема доказана. ■

Примечание. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, H обозначает некоторое гильбертово пространство.

12.3. Теорема. В каждом непустом замкнутом выпуклом множестве $E \subset H$ имеется ровно один элемент с минимальной (для элементов этого множества) нормой.

Доказательство. Непосредственно из определения нормы в унитарном пространстве вытекает так называемое правило параллелограмма:

$$(1) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (x \in H, y \in H).$$

Положим

$$(2) \quad d = \inf \{\|x\| : x \in E\}.$$

Выберем такую последовательность $x_n \in E$, чтобы иметь $\|x_n\| \rightarrow d$. Так как $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in E$, то $\|x_n + x_m\|^2 \geq 4d^2$. Если в тождество (1) подставить вместо x и y соответственно x_n и x_m , то при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ правая часть в (1) будет стремиться к $4d^2$. Поэтому из (1) вытекает, что $\{x_n\}$ является последовательностью Коши в H . В силу полноты H эта последовательность сходится к некоторому элементу $x \in E$ (так как E замкнуто), для которого $\|x\| = d$.

Если $y \in E$ и $\|y\| = d$, то последовательность $\{x, y, x, y, \dots\}$, как мы только что видели, должна сходиться. Поэтому $x = y$. ■

12.4. Теорема. Если M — замкнутое подпространство в H , то $H = M \oplus M^\perp$.

Утверждение теоремы, если говорить более подробно, состоит в том, что M и $M^\perp$ суть замкнутые подпространства в H , их пересечение равно $\{0\}$, а сумма совпадает с H . Пространство $M^\perp$ называется *ортгоналиальным дополнением к M* .

Доказательство. Если $E \subset H$, то из линейности скалярного произведения (x, y) по x вытекает, что $E^\perp$ является подпространством в H , а в силу неравенства Шварца (1) из теоремы 12.2 подпространство $E^\perp$ замкнуто в H .

Если $x \in M$ и $x \in M^\perp$, то $(x, x) = 0$, так что $x = 0$. Поэтому $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Пусть $x \in H$. Применяя теорему 12.3 к множеству $x - M$, мы видим, что существует такой вектор $x_1 \in M$, который минимизирует величину $\|x - x_1\|$. Положим $x_2 = x - x_1$. Тогда $\|x_2\| \leq \|x_2 + y\|$ для всех $y \in M$. Поэтому $x_2 \in M^\perp$, согласно теореме 12.2. Так как $x = x_1 + x_2$, то мы доказали, что $M \oplus M^\perp = H$.

Следствие. Если M — замкнутое подпространство в H , то $(M^\perp)^\perp = M$.

Доказательство. Включение $M \subset (M^\perp)^\perp$ очевидно. Так как

$$M \oplus M^\perp = H = M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp,$$

то M не может быть собственным подпространством в $(M^\perp)^\perp$. ■

Теперь мы опишем пространство H^* , сопряженное к H .

12.5. Теорема. Формула

$$(1) \quad \Lambda x = (x, y) \quad (x \in H)$$

задает сопряженно-линейную изометрию $y \rightarrow \Lambda$ пространства H на H^* .

Доказательство. Если $y \in H$ и Λ определяется формулой (1), то неравенство Шварца (1) из теоремы 12.2 показывает, что $\Lambda \in H^*$ и что $\|\Lambda\| \leq \|y\|$. Так как

$$(2) \quad \|y\|^2 = (y, y) = \Lambda y \leq \|\Lambda\| \|y\|,$$

то получается, что $\|\Lambda\| = \|y\|$.

Остается показать, что каждый функционал $\Lambda \in H^*$ представляется в виде (1).

Если $\Lambda = 0$, то полагаем $y = 0$. Если $\Lambda \neq 0$, то обозначим через $\mathcal{N}(\Lambda)$ ядро функционала Λ . По теореме 12.4 можно выбрать ненулевой вектор $z \in \mathcal{N}(\Lambda)^\perp$. Так как

$$(3) \quad (\Lambda x) z - (\Lambda z) x \in \mathcal{N}(\Lambda) \quad (x \in H),$$

то $(\Lambda x)(z, z) - (\Lambda z)(x, z) = 0$. Поэтому соотношение (1) выполняется при $y = (z, z)^{-1} (\Lambda z) z$. ■

12.6. Теорема. Если $\{x_n\}$ — последовательность попарно ортогональных векторов из H , то выполнение каждого из следующих трех условий влечет за собой выполнение двух остальных.

(а) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится по норме пространства H .

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.

(с) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y)$ сходится при каждом $y \in H$.

Таким образом, сильная сходимость (а) и слабая сходимость (с) равносильны для рядов из ортогональных векторов.

Доказательство. Так как $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$, то при $n \leq m$ имеет место равенство

$$(1) \quad \|x_n + \dots + x_m\|^2 = \|x_n\|^2 + \dots + \|x_m\|^2.$$

Поэтому если выполняется условие (b), то частичные суммы ряда $\sum x_n$ образуют последовательность Коши в H . Так как пространство H полно, то это означает, что из (b) вытекает (а). Неравенство Шварца показывает, что из (а) вытекает (с). Предположим теперь, что выполняется условие (с). Зададим последовательность функционалов $\Lambda_n \in H^*$, полагая

$$(2) \quad \Lambda_n y = \sum_{i=1}^n (y, x_i) \quad (y \in H, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Из (с) вытекает, что для каждого $y \in H$ числовая последовательность $\{\Lambda_n y\}$ сходится. Поэтому, согласно теореме Банаха — Штейнгауза, последовательность $\{\|\Lambda_n\|\}$ является ограниченной. Но

$$(3) \quad \|\Lambda_n\| = \|x_1 + \dots + x_n\| = \{\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2\}^{1/2}.$$

Таким образом, из (с) вытекает (b). ■

Ограниченные операторы

В соответствии с введенными раньше обозначениями через $\mathcal{B}(H)$ мы теперь обозначаем банахову алгебру всех ограниченных линейных операторов T на гильбертовом пространстве $H \neq \{0\}$ с нормой

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Мы покажем, что $\mathcal{B}(H)$ обладает инволюцией, относительно которой $\mathcal{B}(H)$ является B^* -алгеброй.

Начнем с одной простой, но полезной теоремы единственности.

12.7. Теорема. Если $T \in \mathcal{B}(H)$ и $(Tx, x) = 0$ для каждого $x \in H$, то $T = 0$.

Доказательство. Так как $(T(x+y), (x+y))=0$, то

$$(1) \quad (Tx, y) + (Ty, x) = 0 \quad (x \in H, y \in H).$$

Если заменить здесь y на iy , то в результате получится

$$(2) \quad -i(Tx, y) + i(Ty, x) = 0 \quad (x \in H, y \in H).$$

Умножая равенство (2) на i и складывая с (1), будем иметь

$$(3) \quad (Tx, y) = 0 \quad (x \in H, y \in H).$$

При $y = Tx$ формула (3) дает $\|Tx\|^2 = 0$. Поэтому $Tx = 0$. ■

Следствие. Если $S \in \mathcal{B}(H)$, $T \in \mathcal{B}(H)$ и

$$(Sx, x) = (Tx, x)$$

для каждого $x \in H$, то $S = T$.

Доказательство. Достаточно применить теорему к оператору $S - T$. ■

Заметим, что теорема 12.7 перестает быть верной, если комплексное поле скаляров заменить вещественным: достаточно рассмотреть подходящее вращение плоскости $\mathbb{R}^2$.

12.8. Теорема. Если отображение $f: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ является по-
луторалинейным и ограниченным в том смысле, что

$$(1) \quad M = \sup \{ |f(x, y)| : \|x\| = \|y\| = 1 \} < \infty,$$

то существует в точности один такой оператор $S \in \mathcal{B}(H)$, что

$$(2) \quad f(x, y) = (x, Sy) \quad (x \in H, y \in H).$$

Кроме того, $\|S\| = M$.

Доказательство. Так как $|f(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|$, то при каждом фиксированном $y \in H$ отображение

$$x \rightarrow f(x, y)$$

является линейным функционалом на H с нормой, не превосходящей $M \|y\|$. Поэтому из теоремы 12.5 вытекает, что каждому $y \in H$ соответствует такой однозначно определенный элемент $Sy \in H$, что выполняется соотношение (2) и, кроме того, $\|Sy\| \leq M \|y\|$. Ясно, что отображение $S: H \rightarrow H$ аддитивно. Если $\alpha \in \mathbb{C}$, то

$$(x, S(\alpha y)) = f(x, \alpha y) = \bar{\alpha} f(x, y) = \bar{\alpha} (x, Sy) = (x, \alpha Sy)$$

для всех x и y из H . Поэтому отображение S линейно. Следовательно, $S \in \mathcal{B}(H)$ и $\|S\| \leq M$.

Вместе с тем

$$|f(x, y)| = |(x, Sy)| \leq \|x\| \|Sy\| \leq \|x\| \|S\| \|y\|,$$

откуда вытекает противоположное неравенство $M \leq \|S\|$. ■

12.9. Сопряжение. Если $T \in \mathcal{B}(H)$, то форма (Tx, y) является линейной по x , сопряженно-линейной по y и ограниченной. Поэтому из теоремы 12.8 вытекает, что существует такой однозначно определенный оператор $T^* \in \mathcal{B}(H)$, что

$$(1) \quad (Tx, y) = (x, T^*y) \quad (x \in H, y \in H)$$

и, кроме того,

$$(2) \quad \|T^*\| = \|T\|.$$

Мы утверждаем, что отображение $T \rightarrow T^*$ является инволюцией на $\mathcal{B}(H)$, т. е. обладает следующими четырьмя свойствами:

$$(3) \quad (T + S)^* = T^* + S^*;$$

$$(4) \quad (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*;$$

$$(5) \quad (ST)^* = T^* S^*;$$

$$(6) \quad T^{**} = T.$$

Свойство (3) очевидно, а (4), (5) и (6) вытекают из соотношений

$$(\alpha Tx, y) = \alpha (Tx, y) = \alpha (x, T^*y) = (x, \bar{\alpha} T^*y),$$

$$(STx, y) = (Tx, S^*y) = (x, T^*S^*y),$$

$$(Tx, y) = \overline{(T^*y, x)} = \overline{(y, T^{**}x)} = (T^{**}x, y).$$

Так как

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \leq \|T^*T\| \|x\|^2$$

для каждого $x \in H$, то $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. С другой стороны, из (2) получается, что

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

Поэтому для каждого $T \in \mathcal{B}(H)$ имеет место равенство

$$(7) \quad \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Таким образом, мы доказали, что $\mathcal{B}(H)$ является B^* -алгеброй относительно инволюции, определенной соотношением (1).

Примечание. Введенный выше оператор T^* иногда называют сопряженным к T в смысле гильбертова пространства (или эрмитово сопряженным), чтобы подчеркнуть отличие от сопряженного в смысле банаховых пространств, обсуждавшегося в гл. 4. В принципе единственное различие состоит в том, что переход $T \rightarrow T^*$ к эрмитово сопряженному есть не линейная, а сопряженно-линейная операция (а также в том, что эрмитово сопряженный оператор действует не в сопряженном, а в том же пространстве). С этим связана сопряженно-линейная природа изометрии, описанной в теореме 12.5. Если в соответствии с этим «перенести» оператор T^* из H в H^* , то мы окажемся в ситуации гл. 4.

12.10. Теорема. Если $T \in \mathcal{B}(H)$, то

$$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp \quad \text{и} \quad \mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp.$$

Напомним, что $\mathcal{N}(T)$ и $\mathcal{R}(T)$ обозначают соответственно ядро и образ оператора T .

Доказательство. Каждое из следующих четырех утверждений очевидно эквивалентно последующему и (или) предыдущему:

- (1) $T^*y = 0$;
- (2) $(x, T^*y) = 0$ для каждого $x \in H$;
- (3) $(Tx, y) = 0$ для каждого $x \in H$;
- (4) $y \in \mathcal{R}(T)^\perp$.

Таким образом, $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$. Поскольку $T^{**} = T$, второе утверждение теоремы вытекает из первого, если заменить там T на T^* . ■

12.11. Определение. Оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ называется

- (а) *нормальным*, если $TT^* = T^*T$;
- (б) *самосопряженным* (или *эрмитовым*), если $T^* = T$;
- (в) *унитарным*, если $T^*T = I = TT^*$, где I — единичный оператор в пространстве H ;
- (г) *проектором*, если $T^2 = T$.

Ясно, что самосопряженные и унитарные операторы нормальны. Большинство теорем данной главы посвящено нормальным операторам.

12.12. Теорема. Пусть $T \in \mathcal{B}(H)$.

- (а) Оператор T тогда и только тогда нормален, когда $\|Tx\| = \|T^*x\|$ для каждого $x \in H$.
- (б) Если оператор T нормален, то $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$.
- (в) Если оператор T нормален и $Tx = \alpha x$ при некотором $x \in H$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, то $T^*x = \bar{\alpha}x$.
- (г) Если оператор T нормален, а α и β — различные собственные значения оператора T , то соответствующие собственные подпространства ортогональны.

Доказательство. Для доказательства утверждения (а) достаточно сопоставить равенства

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= (Tx, Tx) = (T^*Tx, x), \\ \|T^*x\|^2 &= (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x) \end{aligned}$$

со следствием теоремы 12.7. Очевидно, что утверждение (б) вытекает из (а) и теоремы 12.10. Если применить утверждение (б) к оператору $T - \alpha I$, то получится (в). Наконец, если $Tx = \alpha x$ и

$Ty = \beta y$, то, применяя (с), получаем

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y) = (Tx, y) = (x, T^*y) = (x, \bar{\beta}y) = \beta(x, y).$$

Так как $\alpha \neq \beta$, то отсюда следует, что $x \perp y$. ■

12.13. Теорема. Если $U \in \mathcal{B}(H)$, то следующие три условия эквивалентны:

- (а) U — унитарный оператор;
- (б) $\mathcal{R}(U) = H$ и $(Ux, Uy) = (x, y)$ для всех $x \in H, y \in H$;
- (с) $\mathcal{R}(U) = H$ и $\|Ux\| = \|x\|$ для каждого $x \in H$.

Доказательство. Если U — унитарный оператор, то $\mathcal{R}(U) = H$, так как $UU^* = I$. Далее, $U^*U = I$, так что

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y).$$

Таким образом, из (а) вытекает (б). Очевидно, что выполнение условия (б) влечет за собой выполнение условия (с). Наконец, если выполняется условие (с), то

$$(U^*Ux, x) = (Ux, Ux) = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = (x, x)$$

для каждого $x \in H$, так что $U^*U = I$. Но (с) означает также, что U — линейная изометрия пространства H на себя. Поэтому оператор U обратим в $\mathcal{B}(H)$. Так как $U^*U = I$, то $U^{-1} = U^*$ и, следовательно, оператор U унитарен. ■

Примечание. Эквивалентность условий (а) и (б) означает, что унитарные операторы суть в точности линейные изоморфизмы пространства H , сохраняющие скалярное произведение. Таким образом, этими операторами исчерпываются *автоморфизмы гильбертова пространства*.

Эквивалентность условий (б) и (с) является также следствием упр. 2.

12.14. Теорема. Для каждого проектора $P \in \mathcal{B}(H)$ выполнение любого из следующих четырех условий влечет за собой выполнение трех остальных:

- (а) оператор P является самосопряженным;
- (б) оператор P является нормальным;
- (с) $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp$;
- (д) $(Px, x) = \|Px\|^2$ для каждого $x \in H$.

По поводу свойства (с) обычно говорят, что P является *ортogonalным проектором*.

Доказательство. Очевидно, что из условия (а) вытекает условие (б). Утверждение (б) теоремы 12.12 показывает, что $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(P)^\perp$, если P — нормальный оператор. Если к тому же P является проектором, то $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$, так что $\mathcal{R}(P)$ замкнуто. Поэтому в силу теоремы 12.4 из (б) вытекает (с).

Если выполняется условие (с), то каждый вектор $x \in H$ представим в виде $x = y + z$, где $y \perp z$, $Py = 0$ и $Pz = z$. При этом $Px = z$ и $(Px, x) = (z, z)$, так что условие (d) выполняется.

Наконец, предположим, что выполняется условие (d). Тогда

$$\|Px\|^2 = (Px, x) = (x, P^*x) = (P^*x, x).$$

Последнее равенство объясняется тем, что $\|Px\|^2$ вещественно и $(x, P^*x) = \|Px\|^2$. Таким образом, $(Px, x) = (P^*x, x)$ для каждого $x \in H$, так что $P = P^*$ в силу теоремы 12.7. Поэтому (a) вытекает из (d). ■

12.15. Теорема. Пусть $S \in \mathcal{B}(H)$, причем оператор S самосопряженный. Тогда $ST = 0$ в том и только в том случае, если $\mathcal{R}(S) \perp \mathcal{R}(T)$.

Доказательство: $(Sx, Ty) = (x, STy)$. ■

Этот результат будет очень часто использоваться в ситуации, когда оба оператора S и T являются ортогональными проекторами.

Теорема о перестановочности

Пусть x и y — коммутирующие элементы некоторой банаховой алгебры с инволюцией. Очевидно, что тогда элементы x^* и y^* также коммутируют, поскольку просто $x^*y^* = (yx)^*$. Верно ли, что при этом элемент x коммутирует с y^* ? Ответ, конечно, будет отрицательным, если, например, элемент x не является нормальным и $y = x$. Более того, ответ может оказаться отрицательным даже в том случае, когда оба элемента x и y нормальны (упр. 28). Поэтому представляет интерес тот факт, что ответ *положителен* (для нормальных x) в алгебре $\mathcal{B}(H)$ с инволюцией, определяемой переходом к сопряженному оператору в гильбертовом пространстве:

Если оператор $N \in \mathcal{B}(H)$ нормален, $T \in \mathcal{B}(H)$ и $NT = TN$, то $N^*T = TN^*$.

На самом деле имеет место даже следующий несколько более общий факт.

12.16. Теорема (Фуглид—Путнам—Розенблум). Пусть $M, N, T \in \mathcal{B}(H)$, причем операторы M и N нормальны. Если

$$(1) \quad MT = TN, \\ \text{то } M^*T = TN^*.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала произвольный оператор $S \in \mathcal{B}(H)$. Пусть $V = S - S^*$ и

$$(2) \quad Q = \exp(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n.$$

Тогда $V^* = -V$ и, следовательно,

$$(3) \quad Q^* = \exp(V^*) = \exp(-V) = Q^{-1}.$$

Поэтому оператор Q унитарен. Таким образом,

$$(4) \quad \|\exp(S - S^*)\| = 1 \text{ для каждого } S \in \mathcal{B}(H).$$

Если выполняется условие (1), то по индукции получается, что $M^k T = T N^k$ при всех $k = 1, 2, 3, \dots$. Следовательно,

$$(5) \quad \exp(M) T = T \exp(N),$$

или

$$(6) \quad T = \exp(-M) T \exp(N).$$

Положим $U_1 = \exp(M^* - M)$, $U_2 = \exp(N - N^*)$. Так как операторы M и N нормальны, то из (6) вытекает, что

$$(7) \quad \exp(M^*) T \exp(-N^*) = U_1 T U_2.$$

В силу формулы (4) имеем $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$. Поэтому соотношение (7) приводит к неравенству

$$(8) \quad \|\exp(M^*) T \exp(-N^*)\| \leq \|T\|.$$

Положим теперь

$$(9) \quad f(\lambda) = \exp(\lambda M^*) T \exp(-\lambda N^*) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Условия теоремы будут выполнены, если заменить M и N на $\bar{\lambda}M$ и $\bar{\lambda}N$ соответственно. Поэтому из неравенства (8) вытекает, что $\|f(\lambda)\| \leq \|T\|$ при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, f оказывается целой ограниченной $\mathcal{B}(H)$ -значной функцией. Следовательно, согласно теореме Лиувилля 3.32, имеем $f(\lambda) = f(0) = T$ при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому из равенства (9) вытекает, что

$$(10) \quad \exp(\lambda M^*) T = T \exp(\lambda N^*) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Сравнивая в (10) коэффициенты при λ , получаем $M^* T = T N^*$. ■

Замечание. Если просмотреть доказательство теоремы, то можно заметить, что в нем не используется никаких свойств алгебры $\mathcal{B}(H)$, кроме тех, которые означают, что она является B^* -алгеброй. Однако в силу теоремы 12.41 это обстоятельство фактически не приводит ни к какому обобщению результата.

Разложения единицы

12.17. Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ есть некоторая σ -алгебра подмножеств множества Ω и H — гильбертово пространство. В этой ситуации *разложением единицы* (на $\mathfrak{M}$) называется отображение

$$E: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(H),$$

обладающее следующими свойствами:

$$(a) \quad E(\emptyset) = 0, \quad E(\Omega) = I;$$

- (b) каждый из операторов $E(\omega)$ — самосопряженный проектор;
- (c) $E(\omega' \cap \omega'') = E(\omega') E(\omega'')$;
- (d) если $\omega' \cap \omega'' = \emptyset$, то $E(\omega' \cup \omega'') = E(\omega') + E(\omega'')$;
- (e) для любых векторов $x \in H$ и $y \in H$ функция множества $E_{x,y}$, определяемая равенством

$$E_{x,y}(\omega) = (E(\omega)x, y),$$

является комплексной мерой на $\mathfrak{M}$.

Если $\mathfrak{M}$ есть σ -алгебра всех борелевских подмножеств некоторого компактного или локально компактного хаусдорфова пространства, то к (e) обычно добавляется требование, чтобы каждая из мер $E_{x,y}$ была *регулярной* борелевской мерой. [Это условие автоматически выполняется, например, для компактных метрических пространств¹⁾; см. [27].]

Приведем некоторые прямые следствия указанных условий.

Так как каждый из операторов $E(\omega)$ является самосопряженным проектором, то

$$(1) \quad E_{x,x}(\omega) = (E(\omega)x, x) = \|E(\omega)x\|^2 \quad (x \in H).$$

Поэтому любая из функций $E_{x,x}$ будет положительной мерой на $\mathfrak{M}$, и ее полная вариация равна

$$(2) \quad \|E_{x,x}\| = E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2.$$

В силу условия (c) любые два проектора $E(\omega)$ коммутируют.

Если $\omega' \cap \omega'' = \emptyset$, то в силу условий (a) и (c) образы операторов $E(\omega')$ и $E(\omega'')$ ортогональны (теорема 12.15).

Согласно условию (d), функция E конечно-аддитивна. Возникает вопрос: будет ли функция E счетно-аддитивной, т. е. сходится ли ряд

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)$$

по норме алгебры $\mathcal{B}(H)$ к оператору $E(\omega)$, если ω есть объединение счетного семейства непересекающихся множеств $\omega_n \in \mathfrak{M}$? Так как норма проектора либо равна 0, либо не меньше 1, то частичные суммы ряда (3) могут образовывать последовательность Коши только в том случае, если все члены этого ряда, кроме конечного подмножества, нулевые. Таким образом, если исключить некоторые тривиальные ситуации, функция E никогда не бывает счетно-аддитивной в указанном смысле.

Рассмотрим, однако, то же семейство $\{\omega_n\}$ и некоторый вектор $x \in H$. Так как $E(\omega_n)E(\omega_m) = 0$ при $n \neq m$, то векторы $E(\omega_n)x$ и $E(\omega_m)x$ ортогональны (теорема 12.15). Согласно условию (e),

¹⁾ Просто в силу конечности всех рассматриваемых мер и того обстоятельства, что каждое замкнутое множество представляется в виде пересечения счетного семейства открытых. — *Прим. ред.*

имеем

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (E(\omega_n) x, y) = (E(\omega) x, y)$$

для каждого $y \in H$. Поэтому из теоремы 12.6 вытекает, что

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n) x = E(\omega) x,$$

причем ряд (5) сходится по норме пространства H . Полученный результат можно резюмировать следующим образом.

12.18. Предложение. Если E — разложение единицы и $x \in H$, то

$$\omega \rightarrow E(\omega) x$$

есть счетно-аддитивная H -значная мера на $\mathfrak{M}$.

Что же касается множеств нулевой меры, то здесь можно поступать обычным способом.

12.19. Предложение. Пусть E — разложение единицы. Если $\omega_n \in \mathfrak{M}$ и $E(\omega_n) = 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots$ и если $\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$, то $E(\omega) = 0$.

Доказательство. Так как $E(\omega_n) = 0$, то $E_{x,x}(\omega_n) = 0$ при каждом $x \in H$. Поскольку каждая из мер $E_{x,x}$ счетно-аддитивна, то $E_{x,x}(\omega) = 0$. Но $\|E(\omega)x\|^2 = E_{x,x}(\omega)$. Поэтому $E(\omega) = 0$. ■

12.20. Алгебра $L^\infty(E)$. Пусть, как и выше, E — разложение единицы на $\mathfrak{M}$. Пусть f — комплексная $\mathfrak{M}$ -измеримая функция на Ω . Существует счетное семейство $\{D_i\}$ открытых дисков, образующее базу топологии комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть V — объединение тех дисков D_i , для которых $E(f^{-1}(D_i)) = 0$. Согласно предложению 12.19, имеем $E(f^{-1}(V)) = 0$. Далее, множество V является наибольшим из открытых подмножеств в $\mathbb{C}$, обладающих этим свойством.

Множеством существенных значений функции f по определению называется дополнение к V . Это множество — наименьшее среди замкнутых подмножеств в $\mathbb{C}$, содержащих $f(p)$ для почти всех $p \in \Omega$, т. е. для всех $p \in \Omega$, за исключением тех, которые содержатся в некотором множестве $\omega \in \mathfrak{M}$ с $E(\omega) = 0$.

Мы говорим, что функция f *ограничена в существенном*, если множество ее существенных значений ограничено (и потому компактно). В последнем случае наибольшее из чисел $|\lambda|$, где λ пробегает множество существенных значений функции f , называется *существенной верхней гранью* $\|f\|_\infty$ функции f .

Пусть B — алгебра всех ограниченных комплексных $\mathfrak{M}$ -измеримых функций на Ω с нормой

$$\|f\| = \sup \{ |f(p)| : p \in \Omega \}.$$

Очевидно, что B является банаховой алгеброй и что множество $N = \{f \in B: \|f\|_\infty = 0\}$

образует идеал в B , причем этот идеал замкнут (предложение 12.19). Поэтому факторалгебра B/N является банаховой. Обычно эта факторалгебра обозначается через $L^\infty(E)$.

Норма элемента (класса смежности) $[f] = f + N$ в $L^\infty(E)$ равна $\|f\|_\infty$, спектр $\sigma([f])$ такого элемента совпадает с множеством существенных значений функции f . Как это принято в теории меры, в обозначениях мы не будем делать различия между функцией f и содержащим ее классом $[f]$.

12.21. Теорема. Если E — описанное выше разложение единицы, то формула

$$(1) \quad (\Psi(f)x, y) = \int_{\Omega} f dE_{x, y} \quad (x \in H, y \in H)$$

определяет изометрический изоморфизм Ψ между алгеброй $L^\infty(E)$ и некоторой замкнутой нормальной подалгеброй A алгебры $\mathcal{B}(H)$. Этот изоморфизм Ψ удовлетворяет условиям

$$(2) \quad \Psi(\bar{f}) = \Psi(f)^* \quad (f \in L^\infty(E))$$

и

$$(3) \quad \|\Psi(f)x\|^2 = \int_{\Omega} |f|^2 dE_{x, x} \quad (x \in H, f \in L^\infty(E)).$$

Кроме того, оператор $Q \in \mathcal{B}(H)$ в том и только в том случае коммутирует с каждым из операторов $E(\omega)$, когда Q коммутирует с каждым из операторов $\Psi(f)$.

Формула (1) иногда записывается в виде

$$(4) \quad \Psi(f) = \int_{\Omega} f dE.$$

Напомним, что подалгебра A алгебры $\mathcal{B}(H)$ называется нормальной, если она коммутативна и вместе с оператором T содержит оператор T^* (см. определение 11.24).

Доказательство. Мы начнем с рассмотрения некоторого разбиения $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ множества Ω на подмножества $\omega_i \in \mathfrak{M}$. Пусть s — простая функция, принимающая на ω_i значение α_i . Определим оператор $\Psi(s) \in \mathcal{B}(H)$, полагая

$$(5) \quad \Psi(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(\omega_i).$$

Так как каждый из операторов $E(\omega_i)$ самосопряженный, то

$$(6) \quad \Psi(s)^* = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i E(\omega_i) = \Psi(\bar{s}).$$

Если $\{\omega'_1, \dots, \omega'_m\}$ — другое разбиение того же типа и $t = \beta_j$ на ω'_j , то

$$\Psi(s) \Psi(t) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(\omega_i) E(\omega'_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(\omega_i \cap \omega'_j).$$

Так как st — простая функция, равная $\alpha_i \beta_j$ на $\omega_i \cap \omega'_j$, то отсюда следует, что

$$(7) \quad \Psi(s) \Psi(t) = \Psi(st).$$

По тем же соображениям

$$(8) \quad \Psi(\alpha s + \beta t) = \alpha \Psi(s) + \beta \Psi(t).$$

Если $x \in H$ и $y \in H$, то, согласно формуле (5),

$$(9) \quad (\Psi(s)x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (E(\omega_i)x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{x,y}(\omega_i) = \int_{\Omega} s dE_{x,y}.$$

Из формул (6) и (7) вытекает, что

$$(10) \quad \Psi(s)^* \Psi(s) = \Psi(\bar{s}) \Psi(s) = \Psi(\bar{s}s) = \Psi(|s|^2).$$

Поэтому формула (9) приводит к равенству

$$(11) \quad \|\Psi(s)x\|^2 = (\Psi(s)^* \Psi(s)x, x) = (\Psi(|s|^2)x, x) = \int_{\Omega} |s|^2 dE_{x,x},$$

из которого в силу формулы (2) п. 12.17 вытекает, что

$$(12) \quad \|\Psi(s)x\| \leq \|s\|_{\infty} \|x\|.$$

С другой стороны, так как проекторы $E(\omega_i)$ имеют взаимно ортогональные образы, то при $x \in \mathcal{R}(E(\omega_j))$ имеем

$$(13) \quad \Psi(s)x = \alpha_j E(\omega_j)x = \alpha_j x.$$

Если выбрать j с таким расчетом, чтобы иметь $|\alpha_j| = \|s\|_{\infty}$, то из (12) и (13) получится, что

$$(14) \quad \|\Psi(s)\| = \|s\|_{\infty}.$$

Пусть теперь $f \in L^{\infty}(E)$. Существует последовательность простых измеримых функций s_k , которая сходится к f по норме $L^{\infty}(E)$. Согласно (14), соответствующие операторы $\Psi(s_k)$ образуют последовательность Коши в $\mathcal{B}(H)$. Эта последовательность сходится к некоторому оператору, который мы и обозначаем через $\Psi(f)$. Легко видеть, что $\Psi(f)$ не зависит от специального выбора последовательности $\{s_k\}$. Очевидно, что из формулы (14) вытекает более общая формула

$$(15) \quad \|\Psi(f)\| = \|f\|_{\infty} \quad (f \in L^{\infty}(E)).$$

Так как каждая из мер $E_{x,y}$ конечна, то формула (1) вытекает из формулы (9) (с заменой s на s_k). Формулы (2) и (3) вытекают из (6) и (11). Аппроксимируя простыми функциями s и t

по норме $L^\infty(E)$ ограниченные измеримые функции f и g , мы видим, что формулы (7) и (8) остаются справедливыми при замене s и t на произвольные ограниченные измеримые функции f и g .

Таким образом, Ψ есть изометрический изоморфизм алгебры $L^\infty(E)$ в алгебру $\mathcal{B}(H)$. Так как алгебра $L^\infty(E)$ полна, то в силу (15) алгебра $A = \Psi(L^\infty(E))$ замкнута в $\mathcal{B}(H)$.

Наконец, если оператор Q коммутирует с каждым из операторов $E(\omega)$, то Q коммутирует и с операторами $\Psi(s)$ для простых s , а примененный выше процесс аппроксимации показывает, что тогда Q коммутирует и с каждым элементом алгебры A . ■

Спектральная теорема

Главное утверждение спектральной теоремы заключается в том, что каждый ограниченный нормальный оператор T в гильбертовом пространстве порождает (некоторым каноническим способом) разложение единицы E на борелевских подмножествах его спектра $\sigma(T)$ и что оператор T может быть восстановлен по E при помощи процесса интегрирования типа описанного в теореме 12.21. Большинство результатов теории нормальных операторов опирается на этот факт.

Вероятно, нелишне подчеркнуть, что, говоря о спектре $\sigma(T)$ оператора T , мы всегда имеем в виду всю алгебру $\mathcal{B}(H)$. Другими словами, $\lambda \in \sigma(T)$ означает, что оператор $T - \lambda I$ не имеет обратного в $\mathcal{B}(H)$. Вместе с тем мы будем иметь дело и с замкнутыми подалгебрами A алгебры $\mathcal{B}(H)$, которые обладают тем дополнительным свойством, что $I \in A$ и $S^* \in A$, если $S \in A$. [Такие алгебры иногда называют $*$ -алгебрами.] Так как алгебра $\mathcal{B}(H)$ является B^* -алгеброй, то ввиду теоремы 11.29 в такой ситуации $\sigma(T) = \sigma_A(T)$ для каждого оператора $T \in A$.

Таким образом, оператор T имеет один и тот же спектр во всех замкнутых $*$ -алгебрах в $\mathcal{B}(H)$, содержащих этот оператор.

Спектральную теорему 12.23 мы получим в качестве частного случая следующего результата, в котором речь идет не об индивидуальном операторе, а об алгебре нормальных операторов.

12.22. Теорема. Пусть A — некоторая замкнутая нормальная подалгебра алгебры $\mathcal{B}(H)$, содержащая единичный оператор I , и пусть Δ — пространство максимальных идеалов алгебры A . Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) На борелевских подмножествах пространства Δ существует в точности одно такое разложение единицы E , что

$$(1) \quad T = \int_{\Delta} \hat{T} dE$$

для каждого оператора $T \in A$, где $\hat{T}$ — преобразование Гельфанда (оператора T относительно алгебры A). Как и в теореме 12.21, формула (1) означает, что

$$(2) \quad (Tx, y) = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{x, y} \quad (x \in H, y \in H, T \in A).$$

(b) $E(\omega) \neq 0$ для каждого непустого открытого множества $\omega \subset \Delta$.

(c) Оператор $S \in \mathcal{B}(H)$ в том и только в том случае коммутирует со всеми операторами $T \in A$, если он коммутирует с каждым проектором $E(\omega)$.

Доказательство. Так как $\mathcal{B}(H)$ есть B^* -алгебра, то данная алгебра A будет коммутативной B^* -алгеброй. По теореме Гельфанда—Наймарка 11.18 отсюда следует, что отображение $T \rightarrow \hat{T}$ является изометрическим $*$ -изоморфизмом алгебры A на алгебру $C(\Delta)$.

Это приводит к прозрачному доказательству единственности разложения единицы E . Предположим, что E удовлетворяет условию (2). Так как $\hat{T}$ пробегает все пространство $C(\Delta)$, то из регулярности комплексных борелевских мер $E_{x, y}$ вытекает, что $E_{x, y}$ однозначно определяются условием (2). Строго говоря, это является следствием единственности в теореме Рисса (см. [27, теорема 6.19]). Так как по определению

$$(3) \quad (E(\omega)x, y) = E_{x, y}(\omega),$$

то каждый из проекторов $E(\omega)$ также однозначно определяется условием (2).

Приведенное доказательство единственности мотивирует следующий способ доказательства существования E . Если $x \in H$ и $y \in H$, то по теореме 11.18 отображение

$$(4) \quad \hat{T} \rightarrow (Tx, y)$$

будет ограниченным линейным функционалом на $C(\Delta)$ с нормой $\leq \|x\| \|y\|$, так как $\|\hat{T}\|_{\infty} = \|T\|$. По теореме Рисса о представлении существует такая однозначно определенная регулярная комплексная борелевская мера $\mu_{x, y}$ на Δ , что

$$(5) \quad (Tx, y) = \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{x, y} \quad (x \in H, y \in H, T \in A).$$

Если функция $\hat{T}$ вещественная, то оператор T самосопряженный и поэтому числа (Tx, y) и (Ty, x) комплексно сопряжены. Следовательно,

$$(6) \quad \mu_{x, y} = \overline{\mu_{y, x}} \quad (x \in H, y \in H).$$

При фиксированном $T \in A$ левая часть равенства (5) представляет собой линейный функционал по x и сопряженно-линейный по y . Ввиду единственности меры $\mu_{x,y}$ отсюда вытекает, что для каждого борелевского множества $\omega \subset \Delta$ отображение $(x, y) \rightarrow \mu_{x,y}(\omega)$ представляет собой полуторалинейный функционал. Так как $\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\| \|y\|$, то ограниченным полуторалинейным функционалом на H будет и

$$(7) \quad \int_{\Delta} f d\mu_{x,y}$$

при каждой ограниченной борелевской функции f на Δ . По теореме 12.8 функции f соответствует такой оператор $\Phi(f) \in \mathcal{B}(H)$, что

$$(8) \quad (\Phi(f)x, y) = \int_{\Delta} f d\mu_{x,y} \quad (x \in H, y \in H).$$

Сопоставляя формулы (5) и (8), мы видим, что

$$(9) \quad \Phi(\hat{T}) = T \quad (T \in A).$$

Следовательно, отображение Φ служит расширением отображения $\hat{T} \rightarrow T$ алгебры $C(\Delta)$ на A .

Если функция f вещественна, то из (6) вытекает, что числа $(\Phi(f)x, y)$ и $(\Phi(f)y, x)$ комплексно сопряжены. Это означает, что оператор $\Phi(f)$ самосопряженный.

Теперь мы покажем, что для любых двух ограниченных борелевских функций f и g имеет место равенство

$$(10) \quad \Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g).$$

Если $S \in A$ и $T \in A$, то $(ST)^{\wedge} = \hat{S}\hat{T}$ и из (5) вытекает, что

$$(11) \quad \int_{\Delta} \hat{S}\hat{T} d\mu_{x,y} = (STx, y) = \int_{\Delta} \hat{S} d\mu_{Tx,y}.$$

Так как $\hat{A} = C(\Delta)$, то отсюда следует, что

$$(12) \quad \hat{T} d\mu_{x,y} = d\mu_{Tx,y}$$

при любом выборе x, y и T . Интегралы (11) остаются равными если заменить $\hat{S}$ на f . Поэтому

$$(13) \quad \begin{aligned} \int_{\Delta} f \hat{T} d\mu_{x,y} &= \int_{\Delta} f d\mu_{Tx,y} = \\ &= (\Phi(f)Tx, y) = (Tx, z) = \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{x,z}, \end{aligned}$$

где $z = \Phi(f)^*y$. По тем же соображениям, что и выше, первый и последний интегралы в (13) останутся равными, если заменить там $\hat{T}$ произвольной ограниченной борелевской функцией g . Сле-

довательно,

$$(14) \quad (\Phi(fg)x, y) = \int_{\Delta} f g d\mu_{x, y} = \int_{\Delta} g d\mu_{x, z} = \\ = (\Phi(g)x, z) = (\Phi(f)\Phi(g)x, y),$$

чем и доказано (10).

Теперь мы готовы определить E . Если ω — произвольное борелевское множество в Δ и f — характеристическая функция этого множества, то мы полагаем $E(\omega) = \Phi(f)$.

Согласно формуле (10), имеем $E(\omega \cap \omega') = E(\omega)E(\omega')$. При $\omega' = \omega$ это означает, что каждый из операторов $E(\omega)$ является проектором. Так как при вещественных f оператор $\Phi(f)$ самосопряженный, то все проекторы $E(\omega)$ будут самосопряженными. Ясно, что $E(\emptyset) = \Phi(0) = 0$. Равенство $E(\Delta) = I$ вытекает из формулы (9). Из формулы (8) вытекает соотношение

$$(15) \quad (E(\omega)x, y) = \mu_{x, y}(\omega),$$

откуда получается, что функция E конечно-аддитивна. Таким образом, E — разложение единицы.

Так как формула (2) вытекает из (5) и (15), то доказательство утверждения (а) закончено.

Далее, допустим, что ω — открытое множество и $E(\omega) = 0$. Если $T \in A$ и носитель функции $\hat{T}$ содержится в ω , то из формулы (1) вытекает, что $T = 0$. Следовательно, $\hat{T} = 0$. Но $\hat{A} = C(\Delta)$, и поэтому в силу леммы Урысона $\omega = \emptyset$. Тем самым доказано утверждение (b).

Для доказательства утверждения (с) выберем произвольно $S \in \mathcal{B}(H)$, $x \in H$, $y \in H$ и положим $z = S^*y$. Тогда для любого оператора $T \in A$ и любого борелевского множества $\omega \subset \Delta$ получим

$$(16) \quad (STx, y) = (Tx, z) = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{x, z},$$

$$(17) \quad (TSx, y) = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{Sx, y},$$

$$(18) \quad (SE(\omega)x, y) = (E(\omega)x, z) = E_{x, z}(\omega),$$

$$(19) \quad (E(\omega)Sx, y) = E_{Sx, y}(\omega).$$

Если $ST = TS$ для каждого $T \in A$, то меры в (16) и (17) совпадают и поэтому $SE(\omega) = E(\omega)S$. Обратное устанавливается аналогично. ■

Теперь мы конкретизируем полученный результат для случая, когда рассматривается один оператор.

12.23. Теорема. Если $T \in \mathcal{B}(H)$ и T — нормальный оператор, то существует такое однозначно определенное разложение еди-

ницы E на борелевских подмножествах спектра $\sigma(T)$ оператора T , что

$$(1) \quad T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda).$$

Кроме того, каждый проектор $E(\omega)$ коммутирует с каждым оператором $S \in \mathcal{B}(H)$, коммутирующим с оператором T .

В такой ситуации мы будем говорить, что E —спектральное разложение оператора T .

Иногда удобно считать, что отображение E определено на всех борелевских множествах из $\mathbb{C}$, полагая $E(\omega) = 0$, если $\omega \cap \sigma(T) = \emptyset$.

Доказательство. Пусть A —наименьшая замкнутая подалгебра в $\mathcal{B}(H)$, содержащая операторы I , T и T^* . Так как оператор T нормален, то к алгебре A применима теорема 12.22. В соответствии с теоремой 11.19 отождествим пространство максимальных идеалов алгебры A с $\sigma(T)$. При этом $\hat{T}(\lambda) = \lambda$ для каждого $\lambda \in \sigma(T)$. Существование разложения E теперь вытекает из теоремы 12.22.

С другой стороны, если существует разложение E , удовлетворяющее условию (1), то по теореме 12.21

$$(2) \quad p(T, T^*) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda, \bar{\lambda}) dE(\lambda)$$

для каждого полинома p от двух переменных (с комплексными коэффициентами). По теореме Стоуна—Вейерштрасса такие полиномы плотны в пространстве $C(\sigma(T))$. Отсюда вытекает (если применить тот же прием, который употреблялся при доказательстве единственности в теореме 12.22), что проекторы $E(\omega)$ однозначно определяются по интегралам (2) и, следовательно, по оператору T .

Если $ST = TS$, то $ST^* = T^*S$ (теорема 12.16). Поэтому оператор S коммутирует с каждым оператором из алгебры A . В силу утверждения (с) теоремы 12.22 отсюда следует, что $SE(\omega) = E(\omega)S$ для каждого борелевского множества $\omega \subset \sigma(T)$. ■

12.24. Функциональное исчисление для нормальных операторов. Если E —спектральное разложение некоторого нормального оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ и f —произвольная ограниченная борелевская функция на $\sigma(T)$, то оператор

$$(1) \quad \Psi(f) = \int_{\sigma(T)} f dE$$

принято обозначать через $f(T)$.

Используя это обозначение, можно следующим образом резюмировать содержание теорем 12.21—12.23 в применении к случаю одного оператора:

Отображение $f \rightarrow f(T)$ есть гомоморфизм алгебры всех ограниченных борелевских на $\sigma(T)$ функций в алгебру $\mathcal{B}(H)$. Это отображение переводит функцию $f(\lambda) = 1$ в оператор I , функцию $f(\lambda) = \lambda$ — в оператор T и удовлетворяет условиям

$$(2) \quad \overline{f}(T) = f(T)^*$$

и

$$(3) \quad \|f(T)\| \leq \sup \{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Если $f \in C(\sigma(T))$, то в (3) имеет место равенство.

Если $f_n \rightarrow f$ равномерно, то $\|f_n(T) - f(T)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если $S \in \mathcal{B}(H)$ и $ST = TS$, то $Sf(T) = f(T)S$ для каждой ограниченной борелевской функции f .

Так как тождественная функция $f(\lambda) = \lambda$ равномерно аппроксимируется на $\sigma(T)$ простыми борелевскими функциями, то оператор T есть предел по норме $\mathcal{B}(H)$ конечных линейных комбинаций проекторов $E(\omega)$.

Наше первое применение описанного функционального исчисления составляет доказательство следующей теоремы.

12.25. Теорема. Если оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ нормален, то

$$\|T\| = \sup \{|(Tx, x)| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Достаточно показать, что

$$(1) \quad |(Tx_0, x_0)| > \|T\| - \varepsilon$$

при некотором $x_0 \in H$, таком, что $\|x_0\| = 1$.

Так как $\|T\| = \|\hat{T}\|_\infty = \rho(T)$ (теорема 11.18), то существует такое $\lambda_0 \in \sigma(T)$, что $|\lambda_0| = \|T\|$. Пусть ω — множество всех $\lambda \in \sigma(T)$, для которых $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Если E — спектральное разложение оператора T , то в силу утверждения (b) теоремы 12.22 имеем $E(\omega) \neq 0$. Поэтому найдется такой вектор $x_0 \in H$, что $\|x_0\| = 1$ и $E(\omega)x_0 = x_0$.

Пусть $f(\lambda) = \lambda - \lambda_0$ при $\lambda \in \omega$ и $f(\lambda) = 0$ для остальных $\lambda \in \sigma(T)$. Тогда

$$f(T) = (T - \lambda_0 I)E(\omega),$$

так что

$$f(T)x_0 = Tx_0 - \lambda_0 x_0.$$

Поэтому

$$|(Tx_0, x_0) - \lambda_0| = |(f(T)x_0, x_0)| \leq \|f(T)\| \leq \varepsilon,$$

ибо $|f(\lambda)| < \varepsilon$ для всех $\lambda \in \sigma(T)$. Так как $|\lambda_0| = \|T\|$, то отсюда вытекает (1). ■

12.26. Теорема. Нормальный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ является

(а) самосопряженным тогда и только тогда, когда $\sigma(T)$ лежит на вещественной оси;

(b) унитарным тогда и только тогда, когда $\sigma(T)$ лежит на единичной окружности.

Доказательство. Рассмотрим ту же алгебру A , что и в доказательстве теоремы 12.23. Тогда $\hat{T}(\lambda) = \lambda$ и $(T^*)^\wedge(\lambda) = \bar{\lambda}$ на $\sigma(T)$. Поэтому $T = T^*$ тогда и только тогда, когда $\lambda = \bar{\lambda}$ на $\sigma(T)$, и $TT^* = I$ тогда и только тогда, когда $\lambda\bar{\lambda} = 1$ на $\sigma(T)$. ■

12.27. Инвариантные подпространства. Замкнутое подпространство M пространства H называется *инвариантным подпространством* семейства операторов $\Sigma \subset \mathcal{B}(H)$, если каждый оператор $T \in \Sigma$ переводит M в себя. Например, каждое собственное подпространство оператора T является инвариантным подпространством для T . Если $\dim H < \infty$, то из спектральной теоремы вытекает, что пространство H порождается собственными подпространствами каждого нормального оператора. [Схема доказательства. Характеристической функции каждой точки из $\sigma(T)$ отвечает проектор. Сумма таких проекторов равна $E(\sigma(T)) = I$.] Если $\dim H = \infty$, то может оказаться, что оператор T вовсе не имеет собственных значений (см. упр. 20). Однако нормальный оператор по-прежнему обладает нетривиальными (т. е. не совпадающими с $\{0\}$ и H) инвариантными подпространствами.

В самом деле, пусть A — нормальная алгебра, описанная в теореме 12.22, и E — построенное там разложение единицы на борелевских подмножествах пространства Δ . Если Δ состоит из одной точки, то алгебра A состоит из операторов, кратных тождественному, и каждое подпространство в H инвариантно относительно A . Предположим, что $\Delta = \omega \cup \omega'$, где ω и ω' — непустые борелевские подмножества без общих точек. Пусть M и M' — образы проекторов $E(\omega)$ и $E(\omega')$ соответственно. Тогда $TE(\omega) = E(\omega)T$ для каждого $T \in A$. Если $x \in M$, то отсюда получается, что

$$Tx = TE(\omega)x = E(\omega)Tx,$$

т. е. $Tx \in M$. То же самое справедливо в отношении M' .

Поэтому M и M' — инвариантные подпространства для A .

Кроме того, $M' = M^\perp$ и $H = M \oplus M'$.

По тем же соображениям каждое разбиение пространства Δ на конечное или счетное семейство попарно не пересекающихся борелевских множеств порождает разложение пространства H на взаимно ортогональные подпространства, инвариантные относительно A .

Не известно, обладает ли нетривиальным инвариантным подпространством *каждый* (не обязательно нормальный) оператор $T \in \mathcal{B}(H)$, если H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство.

Собственные значения нормальных операторов

Если оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ нормален, то его собственные значения тесно связаны с его спектральным разложением (теорема 12.29). Мы выясним эту связь, используя следующий результат, основанный на применении функционального исчисления.

12.28. Теорема. Пусть E — спектральное разложение нормального оператора $T \in \mathcal{B}(H)$. Если $f \in C(\sigma(T))$ и $\omega_0 = f^{-1}(0)$, то

$$(1) \quad \mathcal{N}(f(T)) = \mathcal{R}(E(\omega_0)).$$

Доказательство. Пусть $g(\lambda) = 1$ на ω_0 и $g(\lambda) = 0$ в остальных точках множества $\sigma(T)$. Тогда $fg = 0$, так что $f(T)g(T) = 0$. Так как $g(T) = E(\omega_0)$, то отсюда следует, что

$$(2) \quad \mathcal{R}(E(\omega_0)) \subset \mathcal{N}(f(T)).$$

Если $\tilde{\omega}$ — дополнение к ω_0 в $\sigma(T)$, то $\tilde{\omega}$ можно представить в виде объединения попарно не пересекающихся борелевских множеств ω_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), каждое из которых находится на положительном расстоянии от ω_0 . Положим

$$(3) \quad f_n(\lambda) = \begin{cases} 1/f(\lambda) & \text{на } \omega_n, \\ 0 & \text{в остальных точках на } \sigma(T). \end{cases}$$

Тогда f_n — ограниченная борелевская функция на $\sigma(T)$ и

$$(4) \quad f_n(T)f(T) = E(\omega_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Из равенства (4) следует, что $E(\omega_n)x = 0$, если $f(T)x = 0$. Так как отображение $\omega \rightarrow E(\omega)x$ счетно-аддитивно (предложение 12.18), то отсюда вытекает, что $E(\tilde{\omega})x = 0$. Но $E(\tilde{\omega}) + E(\omega_0) = I$. Поэтому $E(\omega_0)x = x$. Мы доказали, что

$$(5) \quad \mathcal{N}(f(T)) \subset \mathcal{R}(E(\omega_0)).$$

Теперь (1) получается из сопоставления (2) и (5). ■

12.29. Теорема. Пусть E — спектральное разложение нормального оператора $T \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda_0 \in \sigma(T)$ и $E_0 = E(\{\lambda_0\})$. Тогда

(а) $\mathcal{N}(T - \lambda_0 I) = \mathcal{R}(E_0)$;

(б) λ_0 служит собственным значением оператора T тогда и только тогда, когда $E_0 \neq 0$;

(с) каждая изолированная точка спектра $\sigma(T)$ является собственным значением оператора T ;

(д) кроме того, если множество $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ счетно (или конечно), то каждый вектор $x \in H$ однозначно представляется в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i,$$

где $Tx_i = \lambda_i x_i$. При этом $x_i \perp x_j$, если $i \neq j$.

Утверждения (б) и (с) объясняют термин *точечный спектр*

оператора T , который относится к множеству всех собственных значений этого оператора.

Доказательство. Утверждение (а) получается непосредственно из теоремы 12.28, если положить там $f(\lambda) = \lambda - \lambda_0$. Ясно, что утверждение (b) вытекает из (а). Если λ_0 — изолированная точка множества $\sigma(T)$, то $\{\lambda_0\}$ есть непустое открытое множество в $\sigma(T)$. Поэтому $E_0 \neq 0$ в силу утверждения (b) теоремы 12.22. Следовательно, утверждение (с) вытекает из (b).

Для доказательства утверждения (d) рассмотрим проекторы $E_i = E(\{\lambda_i\})$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Если λ_i — предельная точка множества $\sigma(T)$, то проектор E_i может быть нулевым или ненулевым. Однако в любом случае проекторы E_i имеют взаимно ортогональные образы. Из счетной аддитивности отображения $\omega \rightarrow E(\omega)x$ (предложение 12.18) следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_i x = E(\sigma(T))x = x \quad (x \in H).$$

Этот ряд сходится по норме пространства H . Поэтому мы получим искомое представление, если положим $x_i = E_i x$. Единственность представления вытекает из ортогональности векторов x_i , а условие $Tx_i = \lambda_i x_i$ вытекает из утверждения (а)¹⁾. ■

12.30. Теорема. *Нормальный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ тогда и только тогда является компактным, когда выполняются два следующих условия:*

- (а) $\sigma(T)$ не имеет предельных точек, за исключением точки 0;
- (b) если $\lambda \neq 0$, то $\dim \mathcal{N}(T - \lambda I) < \infty$.

Доказательство. Необходимость не связана с нормальностью: если T — компактный оператор, то условия (а) и (b) выполняются в силу теоремы 4.25.

Предположим теперь, что условия (а) и (b) выполняются. Пусть $\{\lambda_i\}$ — последовательность всех ненулевых точек спектра $\sigma(T)$, причем $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$. Определим функции f_n , полагая $f_n(\lambda) = \lambda$, если $\lambda = \lambda_i$ и $i \leq n$, а в остальных точках множества $\sigma(T)$ положим $f_n(\lambda) = 0$. Если (как в теореме 12.29) $E_i = E(\{\lambda_i\})$, то

$$f_n(T) = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n.$$

Так как $\dim \mathcal{R}(E_i) = \dim \mathcal{N}(T - \lambda_i I) < \infty$, то каждый из операторов $f_n(T)$ будет компактным. Поскольку $|\lambda - f_n(\lambda)| \leq |\lambda_{n+1}|$

¹⁾ Единственность здесь надо понимать в том смысле, что по вектору $x \in H$ однозначно определяются его проекции на подпространства $\mathcal{R}(E_i)$ и по этим проекциям он однозначно восстанавливается. Это, конечно, не означает, что каждый вектор единственным образом представляется в виде суммы ряда по собственным векторам. Например, если оператор T нулевой, то каждый вектор собственный. Вместе с тем утверждение (d) позволяет сделать заключение, что в пространстве H существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов. — *Прим. ред.*

для всех $\lambda \in \sigma(T)$, имеем

$$\|T - f_n(T)\| \leq |\lambda_{n+1}| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty^1).$$

Из утверждения (с) теоремы 4.18 теперь вытекает, что T — компактный оператор. ■

12.31. Теорема. *Предположим, что оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ нормальный и компактный. Тогда*

(а) *T обладает собственным значением λ , для которого $|\lambda| = \|T\|$;*

(б) *оператор $f(T)$ компактен, если $f \in C(\sigma(T))$ и $f(0) = 0$.*

Доказательство. Поскольку T — нормальный оператор, по теореме 11.28 найдется такое $\lambda \in \sigma(T)$, что $|\lambda| = \|T\|$. Если $\|T\| > 0$, то точка λ будет изолированной точкой в $\sigma(T)$ (теорема 12.30) и, следовательно (теорема 12.29), собственным значением оператора T . Если $\|T\| = 0$, то утверждение (а) очевидно.

Поскольку множество $\sigma(T)$ не более чем счетно, его дополнение в $\mathbb{C}$ связно. По теореме Мергеляна (см. [27] или [9]) найдется такая последовательность полиномов p_n , что $p_n(0) = 0$ и p_n равномерно сходится к f на $\sigma(T)$. Тогда последовательность операторов $p_n(T)$ сходится к оператору $f(T)$ по норме пространства $\mathcal{B}(H)$. Так как $p_n(0) = 0$, то из утверждения (f) теоремы 4.18 вытекает, что каждый из операторов $p_n(T)$ компактен. Поэтому в силу утверждения (с) теоремы 4.18 компактен и оператор $f(T)$ ². ■

Заметим, что для доказательства утверждения (б) можно воспользоваться классической теоремой Рунге вместо более трудной теоремы Мергеляна.

Положительные операторы и квадратные корни

12.32. Теорема Пусть $T \in \mathcal{B}(H)$. Тогда

(а) $(Tx, x) \geq 0$ для каждого $x \in H$
в том и только в том случае, если

(б) $T = T^*$ и $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

Если оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ удовлетворяет условию (а), то мы называем такой оператор *положительным* и пишем $T \geq 0$. Теорема устанавливает, что эта терминология согласуется с определением 11.27.

Доказательство. Вообще говоря, числа (Tx, x) и (x, Tx) являются комплексно сопряженными. Но если выполняется усло-

¹ Если спектр T состоит из конечного числа точек, то $T - f_n(T) = 0$ для достаточно большого n . — *Прим. перев.*

² Нетрудно проверить, что в случае бесконечномерного пространства H условие $f(0) = 0$ на функцию $f \in C(\sigma(T))$ не только достаточно, но и необходимо для компактности оператора $f(T)$. — *Прим. ред.*

вие (а), то (Tx, x) вещественно, и поэтому

$$(x, T^*x) = (Tx, x) = (x, Tx)$$

для каждого $x \in H$. Из теоремы 12.7 вытекает, что $T = T^*$, и поэтому $\sigma(T)$ лежит на вещественной оси (теорема 12.26). Если $\lambda > 0$, то из (а) вытекает, что

$$\lambda \|x\|^2 = (\lambda x, x) \leq ((T + \lambda I)x, x) \leq \|(T + \lambda I)x\| \|x\|.$$

Следовательно,

$$\|(T + \lambda I)x\| \geq \lambda \|x\| \quad (x \in H).$$

Поэтому оператор $T + \lambda I$ обратим¹⁾ в $\mathcal{B}(H)$ и точка $-\lambda$ не содержится в $\sigma(T)$. Тем самым условие (b) вытекает из (а).

Предположим теперь, что выполняется условие (b), и пусть E —спектральное разложение оператора T . Тогда

$$(Tx, x) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_{x, x}(\lambda) \quad (x \in H).$$

Так как каждая из мер $E_{x, x}$ положительна и так как $\lambda \geq 0$ при $\lambda \in \sigma(T)$, то $(Tx, x) \geq 0$. Таким образом, из (b) вытекает (а). ■

12.33. Теорема. *Каждый положительный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ обладает однозначно определенным положительным квадратным корнем $S \in \mathcal{B}(H)$. Если оператор T обратим, то обратим и оператор S .*

Доказательство. Пусть A —любая замкнутая нормальная подалгебра в $\mathcal{B}(H)$, содержащая операторы I и T , и пусть Δ —пространство максимальных идеалов алгебры A . По теореме 11.18 имеем $\hat{A} = C(\Delta)$. Так как оператор T удовлетворяет условию (b) теоремы 12.32 и так как $\sigma(T) = \hat{T}(\Delta)$, то мы видим, что $\hat{T} \geq 0$. Каждая неотрицательная непрерывная функция обладает однозначно определенным непрерывным квадратным корнем. Поэтому существует ровно один такой оператор $S \in A$, что $S^2 = T$ и $\hat{S} \geq 0$. По теореме 12.32 условие $\hat{S} \geq 0$ эквивалентно условию $S \geq 0$.

Пусть, в частности, A_0 —наименьшая из таких алгебр A . Тогда существует такой оператор $S_0 \in A_0$, что $S_0^2 = T$ и $S_0 \geq 0$. Если S —какой-то другой положительный квадратный корень из T , то обозначим через A наименьшую замкнутую подалгебру в $\mathcal{B}(H)$, содержащую I и S . Тогда $T \in A$, так как $T = S^2$. Поэтому $A_0 \subset A$ и, следовательно, $S_0 \in A$. Результат предыдущего абзаца позволяет утверждать, что $S = S_0$.

¹⁾ Формально говоря, последнее неравенство устанавливает только, что ядро оператора $T + \lambda I$ тривиально (а образ замкнут). Но так как λ вещественно и (по доказанному) $T = T^*$, то этот оператор самосопряженный. Поэтому уже из тривиальности ядра вытекает (теорема 12.10), что образ совпадает с H .—Прим. ред.

Наконец, если оператор T обратим, то, поскольку операторы S и T коммутируют, оператор S обратим—обратным к нему служит оператор $T^{-1}S$. ■

12.34. Теорема. Пусть $T \in \mathcal{B}(H)$. Имеется в точности один такой положительный оператор $P \in \mathcal{B}(H)$, что $\|Px\| = \|Tx\|$ для всех $x \in H$, а именно положительный квадратный корень из оператора T^*T .

Доказательство. Заметим сначала, что

$$(1) \quad (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geq 0 \quad (x \in H)$$

и поэтому $T^*T \geq 0$. [В более абстрактной ситуации теоремы 11.28 доказать аналогичный факт было гораздо труднее!]

Далее, если $P \in \mathcal{B}(H)$ и $P = P^*$, то

$$(2) \quad (P^2x, x) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \quad (x \in H).$$

По теореме 12.7 отсюда следует, что $\|Px\| = \|Tx\|$ для всех $x \in H$ в том и только в том случае, если $P^2 = T^*T$. ■

Тот факт, что каждое комплексное число λ представимо в виде $\lambda = \alpha|\lambda|$, где $|\alpha| = 1$, приводит к задаче о представлении оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ в виде $T = UP$, где U —унитарный оператор и $P \geq 0$. Если такая факторизация возможна, то мы называем UP *полярным разложением оператора T* .

Заметим, что оператор U , будучи унитарным, является изометрическим. Поэтому из теоремы 12.34 вытекает, что множитель P однозначно определяется оператором T .

12.35. Теорема. (a) Если оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ обратим, то он обладает единственным полярным разложением $T = UP$.

(b) Если оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ нормальный, то он обладает полярным разложением $T = UP$, в котором операторы U и P коммутируют друг с другом и с оператором T .

Доказательство. (a) Если оператор T обратим, то обратимы операторы T^* и T^*T , а из теоремы 12.33 тогда вытекает, что обратим и положительный квадратный корень P из оператора T^*T . Положим $U = TP^{-1}$. Тогда оператор U обратим и

$$U^*U = P^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I,$$

так что U —унитарный оператор. Так как оператор P обратим, то единственность очевидна: $U = TP^{-1}$.

(b) Положим $p(\lambda) = |\lambda|$. Пусть $u(\lambda) = \lambda/|\lambda|$, если $\lambda \neq 0$, и $u(0) = 1$. Тогда p и u —ограниченные борелевские функции на $\sigma(T)$. Пусть $P = p(T)$ и $U = u(T)$. Так как $p \geq 0$, то из теоремы 12.32 вытекает, что $P \geq 0$. Так как $u\bar{u} = 1$, то $UU^* = U^*U = I$. Так как $\lambda = u(\lambda)p(\lambda)$, то соотношение $T = UP$ вытекает из формул функционального исчисления. ■

З а м е ч а н и е. Произвольный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ не обязательно обладает полярным разложением (см. упр. 19). Однако если P — положительный квадратный корень из оператора T^*T , то $\|Px\| = \|Tx\|$ для каждого $x \in H$ и формула

$$VPx = Tx$$

определяет линейную изометрию V пространства $\mathcal{R}(P)$ на $\mathcal{R}(T)$, которая по непрерывности продолжается до линейной изометрии замыкания пространства $\mathcal{R}(P)$ на замыкание пространства $\mathcal{R}(T)$.

Если существует линейная изометрия пространства $\mathcal{R}(P)^\perp$ на пространство $\mathcal{R}(T)^\perp$, то V можно продолжить до унитарного оператора в пространстве H и мы получаем полярное разложение для оператора T . Эта процедура полностью осуществима, когда $\dim H < \infty$, так как тогда пространства $\mathcal{R}(P)$ и $\mathcal{R}(T)$ имеют одинаковую коразмерность.

Если же продолжить V до оператора из $\mathcal{B}(H)$, полагая $Vy = 0$ для всех $y \in \mathcal{R}(P)^\perp$, то мы получим оператор V , который называется *частичной изометрией*.

Каждый оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ обладает факторизацией $T = VP$, в которой P — положительный оператор, а V — частичная изометрия.

В сочетании с теоремой 12.16 полярное разложение приводит к следующему интересному результату относительно подобия нормальных операторов.

12.36. Теорема. Пусть $M, N, T \in \mathcal{B}(H)$, причем операторы M и N нормальны, а оператор T обратим. Предположим, что

$$(1) \quad M = TNT^{-1}.$$

Если $T = UP$ — полярное разложение оператора T , то

$$(2) \quad M = UNU^{-1}.$$

Два оператора M и N , связанные соотношением (1), называются *подобными*. Если U — унитарный оператор и выполняется соотношение (2), то операторы M и N называются *унитарно эквивалентными*. Таким образом, в теореме устанавливается, что подобные нормальные операторы унитарно эквивалентны.

Доказательство. Условие (1) можно переписать в виде $MT = TN$. Из теоремы 12.16 вытекает, что $M^*T = TN^*$. Следовательно,

$$T^*M = (M^*T)^* = (TN^*)^* = NT^*,$$

так что

$$NP^2 = NT^*T = T^*MT = T^*TN = P^2N,$$

поскольку $P^2 = T^*T$. Поэтому оператор N коммутирует с $f(P^2)$ при любом $f \in C(\sigma(P^2))$ (см. п. 12.24). Так как $P \geq 0$, то

$\sigma(P^2) \subset [0, \infty)$. Если теперь $f(\lambda) = \lambda^{1/2} \geq 0$ на $\sigma(P^2)$, то отсюда получается, что $NP = PN$. Поэтому из (1) вытекает, что

$$M = (UP)N(UP)^{-1} = UPNP^{-1}U^{-1} = UNU^{-1}. \blacksquare$$

Группа обратимых операторов

Некоторые характерные свойства группы всех обратимых элементов произвольной коммутативной банаховой алгебры A были описаны в конце гл. 10. Следующие две теоремы содержат некоторую дальнейшую информацию в специальном случае $A = \mathcal{B}(H)$.

12.37. Теорема. *Группа G всех обратимых операторов $T \in \mathcal{B}(H)$ связна, и каждый оператор $T \in G$ представляется в виде произведения двух экспонент.*

Экспонентой здесь называется, конечно, оператор вида $\exp(S)$, где $S \in \mathcal{B}(H)$.

Доказательство. Пусть $T = UP$ — полярное разложение некоторого оператора $T \in G$. Напомним, что U — унитарный, а P — положительный операторы, причем оба они обратимы. Так как $\sigma(P) \subset (0, \infty)$, то на $\sigma(P)$ определена непрерывная вещественная ветвь логарифма. Поэтому из формул функционального исчисления вытекает существование такого самосопряженного оператора $S \in \mathcal{B}(H)$, что $P = \exp(S)$. Так как U — унитарный оператор, то $\sigma(U)$ лежит на единичной окружности. Существует такая ограниченная вещественная борелевская функция f на $\sigma(U)$, что

$$\exp\{if(\lambda)\} = \lambda \quad (\lambda \in \sigma(U)).$$

(Заметим, что непрерывной функции f с такими свойствами может не существовать!) Положим $Q = f(U)$. Тогда Q — самосопряженный оператор из $\mathcal{B}(H)$ и $U = \exp(iQ)$. Таким образом,

$$T = UP = \exp(iQ) \exp(S).$$

Отсюда следует также, что группа G связна. Действительно, при $0 \leq r \leq 1$ определим оператор T_r , полагая

$$T_r = \exp(irQ) \exp(rS).$$

Тогда $r \rightarrow T_r$ есть непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в группу G , причем $T_0 = I$ и $T_1 = T$. Теорема полностью доказана. $\blacksquare$

Теперь естественно спросить, каждый ли оператор $T \in G$ будет экспонентой, а не только произведением двух экспонент. Другими словами: верно ли, что произведение двух экспонент снова есть экспонента для любых сомножителей? Ответ положителен, если $\dim H < \infty$. Более того, как вытекает из теоремы 10.30, ответ будет положительным для любой конечномерной банаховой

алгебры. Однако, вообще говоря, ответ отрицателен, и мы сейчас это покажем.

12.38. Теорема. Пусть D —такое ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$, что множество

$$(1) \quad \Omega = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha^2 \in D\}$$

связно и точка 0 не принадлежит замыканию множества D . Пусть H —пространство всех голоморфных в D функций f , для которых

$$(2) \quad \int_D |f|^2 dm_2 < \infty$$

(где m_2 —плоская мера Лебега). Зададим в H скалярное произведение по формуле

$$(3) \quad (f, g) = \int_D f \bar{g} dm_2.$$

Тогда H есть гильбертово пространство. Определим оператор умножения $M \in \mathcal{B}(H)$, полагая

$$(4) \quad (Mf)(z) = zf(z) \quad (f \in H, z \in D).$$

Тогда оператор M обратим в $\mathcal{B}(H)$, но не имеет квадратного корня.

Так как каждая экспонента, очевидно, обладает корнями всех порядков, то тем самым оператор M не будет экспонентой.

Доказательство. Ясно, что формула (3) действительно задает скалярное произведение и H становится унитарным пространством. Покажем, что пространство H полно. Пусть K —компактное подмножество в D и δ —расстояние от K до дополнения к D . Пусть $z \in K$ и Δ —открытый диск радиуса δ с центром в точке z . Если $f(\zeta) = \sum a_n (\zeta - z)^n$ при $\zeta \in \Delta$, то простое вычисление показывает, что

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} |a_n|^2 \delta^{2n+2} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} |f|^2 dm_2.$$

Так как $f(z) = a_0$, то отсюда получается, что

$$(6) \quad \|f(z)\| \leq \pi^{-1/2} \delta^{-1} \|f\| \quad (z \in K, f \in H),$$

где $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Таким образом, каждая последовательность Коши из H равномерно сходится на компактных подмножествах множества D . Отсюда легко следует, что пространство H полно, т. е. является гильбертовым пространством.

Так как множество D ограничено, то $M \in \mathcal{B}(H)$. Кроме того, функция $1/z$ ограничена в D , и поэтому оператор M обратим в $\mathcal{B}(H)$.

Теперь мы покажем, что предположение о существовании такого оператора $Q \in \mathcal{B}(H)$, для которого $Q^2 = M$, приводит к противоречию. Допустим, что такой оператор Q существует. Выберем некоторую точку $\alpha \in \Omega$ и положим $\lambda = \alpha^2$. Тогда $\lambda \in D$. Пусть

$$(7) \quad M_\lambda = M - \lambda I, \quad S = Q - \alpha I, \quad T = Q + \alpha I,$$

так что

$$(8) \quad ST = M_\lambda = TS.$$

Поскольку мы имеем дело с голоморфными функциями, формула

$$(9) \quad (M_\lambda g)(z) = (z - \lambda)g(z) \quad (z \in D, g \in H)$$

показывает, что оператор M_λ инъективен и его образ $\mathcal{R}(M_\lambda)$ состоит в точности из тех $f \in H$, для которых $f(\lambda) = 0$. Поэтому из неравенства (6) вытекает, что $\mathcal{R}(M_\lambda)$ есть замкнутое подпространство в H коразмерности 1.

Так как отображение M_λ инъективно, то первое из уравнений (8) показывает, что T инъективно, а второе — что тем же свойством обладает S . Так как $\mathcal{R}(M_\lambda) \neq H$, то оператор M_λ необратим в $\mathcal{B}(H)$. Поэтому хотя бы один из операторов S или T необратим. Предположим, что необратим оператор S . Так как $M_\lambda = ST$, то $\mathcal{R}(M_\lambda) \subset \mathcal{R}(S)$, так что $\mathcal{R}(S)$ либо совпадает с $\mathcal{R}(M_\lambda)$, либо совпадает с H . Но если $\mathcal{R}(S) = H$, то по теореме об открытом отображении оператор S будет обратимым. Поэтому он взаимно однозначно отображает H на $\mathcal{R}(M_\lambda)$. Но уравнение $M_\lambda = ST$ показывает, что уже подпространство $\mathcal{R}(T)$ отображается оператором S на $\mathcal{R}(M_\lambda)$. Следовательно, это подпространство $\mathcal{R}(T)$ совпадает с H . Из равенства $\mathcal{R}(T) = H$ вытекает, что оператор T обратим.

Таким образом, мы доказали, что при каждом $\alpha \in \Omega$ в точности один из операторов $Q - \alpha I$ или $Q + \alpha I$ обратим. В частности, $\sigma(Q) \cap \Omega \neq \Omega$. Но так как множество обратимых операторов открыто в $\mathcal{B}(H)$, то по той же причине $\sigma(Q) \cap \Omega$ открыто в Ω . Вместе с тем это пересечение, очевидно, замкнуто в Ω (так как $\sigma(Q)$ — компакт) и непусто. Так как по условию множество Ω связно, то получается, что $\sigma(Q) \cap \Omega = \Omega$, и мы приходим к противоречию. ■

Простейшей областью D , для которой выполняются условия теоремы 12.38, является круговое кольцо с центром в точке 0 ¹⁾.

¹⁾ Кстати, в этом случае доказательство можно сделать несколько более наглядным. Пусть H_0 — линейная оболочка в H системы векторов z^k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Легко видеть, что H_0 плотно в H . Так как $M^k Q = Q M^k$, то $Qf = hf$ при $f \in H_0$, где $h = Q(1) \in H$. Поэтому для каждой фиксированной точки $z_0 \in D$ имеем $(Qf)(z_0) = h(z_0)f(z_0)$, если $f \in H_0$. Но $f \rightarrow f(z_0)$ — непрерывный функционал в H , оператор Q по предположению ограничен и H_0

Характеризация B^* -алгебр

Тот факт, что $\mathcal{B}(H)$ является B^* -алгеброй, широко использовался на протяжении всей этой главы. Теперь мы покажем, что верно в некотором смысле обратное (теорема 12.41)—каждая B^* -алгебра (коммутативная или нет) изометрически *-изоморфна некоторой замкнутой подалгебре подходящей алгебры $\mathcal{B}(H)$. Доказательство основано на существовании достаточно большого запаса положительных функционалов.

12.39. Теорема. *Если A есть B^* -алгебра и $z \in A$, то существует такой положительный функционал F на A , что*

$$(1) \quad F(e) = 1 \quad \text{и} \quad F(zz^*) = \|z\|^2.$$

Доказательство. Пусть A_r («вещественная часть» алгебры A)—вещественное векторное пространство, состоящее из всех эрмитовых элементов алгебры A , и P —множество тех $x \in A_r$, для которых $\sigma(x) \subset [0, \infty)$. Используя определение 11.27, можно сказать, что $x \in P$ тогда и только тогда, когда $x \geq 0$. По теореме 11.28 множество P образует конус: если $x \in P$, $y \in P$ и c —положительное вещественное число, то $cx \in P$ и $x + y \in P$. Далее, A_r содержит все элементы вида xx^* при $x \in A$. Для доказательства теоремы теперь достаточно найти такой линейный (относительно вещественных скаляров) функционал f на A_r , который удовлетворяет условиям (1) и условию

$$(2) \quad f(x) \geq 0 \quad \text{для всех } x \in P,$$

плотно в H . Следовательно, написанное равенство распространяется на все $f \in H$. Отсюда вытекает, что $h(z_0) \in \sigma(Q)$, и поэтому $\sup |h| \leq \|Q\|$. Но тогда $Qf = hf$ для всех $f \in H$, так что $h^2 = z$, и мы приходим к противоречию, ибо в круговом кольце нет такой непрерывной функции h .

Похожим способом удастся сконструировать и другие причудливые примеры. В частности, можно указать такой ограниченный обратимый оператор M в гильбертовом пространстве, для которого при каждом $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ есть такой оператор T , что $T^k = M$, но нет такого ограниченного оператора Q , что $eQ = M$. Действительно, рассмотрим область $D = \{z: z = re^{it}, \text{ где } 0 \leq t < \infty \text{ и } 1 + 2^{-(t+1)} < r < 1 + 2^{-t}\}$. Пусть H_0 —линейная оболочка системы z^k и H —ее пополнение по L^2 -норме (вопрос о совпадении этого пространства со всем пространством, указанным в теореме 12.38, мы не обсуждаем). Повторяя рассуждение предыдущего абзаца, легко убедиться, что оператор умножения на z не имеет логарифма в $\mathcal{B}(H)$, поскольку в области D функция z не имеет однозначного непрерывного ограниченного логарифма. Вместе с тем при каждом ненулевом целочисленном k функция $z^{1/k}$ корректно определяется в D и оператор умножения на $z^{1/k}$ не выводит из H (здесь можно сослаться на теорему 6.5.3 из [9], согласно которой в данном случае $z^{1/k}$ есть поточечный предел равномерно ограниченной на $\bar{D}$ последовательности рациональных функций, которые при желании можно считать полиномами от z и $1/z$).—Прим. ред.

так как затем мы положим $F(x) = f(u) + if(v)$, если $x = u + iv$, $u \in A_r$, $v \in A_r$. Так как при таком определении $F(ix) = iF(x)$, то F — линейный функционал (относительно комплексных скаляров), а из (2) вытекает, что он положителен.

Пусть M_0 — подпространство в A_r , порожденное элементами e и zz^* . Определим на M_0 функционал f_0 , полагая

$$(3) \quad f_0(\alpha e + \beta zz^*) = \alpha + \beta \|zz^*\| \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Заметим, что функционал f_0 определен корректно на M_0 даже в том случае, если e и zz^* линейно зависимы. В силу утверждения (а) теоремы 11.28 имеем $\|zz^*\| \in \sigma(zz^*)$. Поэтому $\sigma(\alpha e + \beta zz^*)$ содержит число $\alpha + \beta \|zz^*\|$. Другими словами, $f_0(x) \in \sigma(x)$, если $x \in M_0$, так что $f_0(x) \geq 0$ при $x \in P \cap M_0$. Далее, функционал f_0 удовлетворяет условию (1).

Предположим, что функционал f_0 продолжен до вещественно линейного функционала f_1 на некотором подпространстве M_1 в A_r , причем по-прежнему $f_1(x) \geq 0$ для всех $x \in P \cap M_1$. Пусть $y \in A_r$, $y \notin M_1$. Положим

$$(4) \quad E' = M_1 \cap (y - P), \quad E'' = M_1 \cap (y + P).$$

Если $x' \in E'$ и $x'' \in E''$, то $y - x' \in P$ и $x'' - y \in P$. Поэтому $x'' - x' \in P$ и, следовательно, $f_1(x') \leq f_1(x'')$. Отсюда вытекает существование такого вещественного числа c , что

$$(5) \quad f_1(x') \leq c \leq f_1(x'') \quad (x' \in E', x'' \in E'').$$

Положим

$$(6) \quad f_2(x + \alpha y) = f_1(x) + \alpha c \quad (x \in M_1, \alpha \in \mathbb{R}).$$

Если $x + y \in P$, то $-x \in E'$, так что $f_1(-x) \leq c$ и $f_1(x) \geq -c$. Поэтому $f_2(x + y) \geq 0$. Если $x - y \in P$, то $x \in E''$, так что $f_1(x) \geq c$ и $f_2(x - y) \geq c - c = 0$. Из рассмотрения этих двух случаев вытекает, что $f_2 \geq 0$ на $P \cap M_2$.

Как и в теореме Хана — Банаха, доказательство завершается при помощи трансфинитной индукции¹⁾. ■

12.40 Теорема. Если A есть B^* -алгебра и $u \in A$, причем $u \neq 0$, то существуют такое гильбертово пространство H_u и

¹⁾ При доказательстве теоремы 11.39 не обязательно повторять доказательство теоремы Хана — Банаха; можно воспользоваться результатом. Пусть x_0 — произвольный нормальный элемент из A и A_0 — подалгебра, порожденная единицей e , этим элементом и сопряженным. По теореме 11.18 имеем $\hat{A}_0 = C(\Delta)$ и $\|x_0\| = \|\hat{x}_0\|_\infty$. Пусть ξ — такая точка из Δ , что $|x_0(\xi)| = \|x_0\|$. Положим $F(x) = \hat{x}(\xi)$ для $x \in A_0$ и продолжим этот функционал с сохранением нормы на A . Из теорем 12.28, 12.29 и примечания на стр. 322 вытекает, что $F \geq 0$. — Прим. ред.

такой гомоморфизм T_u алгебры A в $\mathcal{B}(H_u)$, что $T_u(e) = I$,

$$(1) \quad T_u(x^*) = T_u(x)^* \quad (x \in A),$$

$$(2) \quad \|T_u(x)\| \leq \|x\| \quad (x \in A)$$

$$u \|T_u(u)\| = \|u\|.$$

Доказательство. Мы считаем элемент u фиксированным и в дальнейшем не пишем индекса u . Пусть F — такой положительный функционал на A , что

$$(3) \quad F(e) = 1 \quad \text{и} \quad F(u^*u) = \|u\|^2.$$

Существование таких функционалов вытекает из теоремы 12.39. Пусть

$$(4) \quad Y = \{y \in A: F(xy) = 0 \text{ при каждом } x \in A\}.$$

Так как функционал F непрерывен (теорема 11.31), то подпространство Y замкнуто в A . Для обозначения класса смежности по Y , т. е. элемента из A/Y , будем пользоваться штрихом, так что

$$(5) \quad x' = x + Y \quad (x \in A).$$

Мы утверждаем, что формула

$$(6) \quad (a', b') = F(b^*a)$$

задает скалярное произведение на A/Y .

Заметим сначала, что (a', b') корректно определено формулой (6), т. е. результат не зависит от выбора представителей a и b классов смежности. Достаточно проверить, что $F(b^*a) = 0$, если хотя бы один из элементов a или b содержится в Y . Но если $a \in Y$, то это прямо вытекает из (4). Если же $b \in Y$, то, используя утверждение (а) теоремы 11.31 и еще раз (4), снова получаем

$$(7) \quad F(b^*a) = F(a^*b) = 0.$$

Таким образом, (a', b') корректно определено, линейно по a' и сопряженно-линейно по b' . Кроме того,

$$(8) \quad (a', a') = F(a^*a) \geq 0,$$

так как F — положительный функционал. Если $(a', a') = 0$, то $F(a^*a) = 0$. Из утверждения (б) теоремы 11.31 вытекает, что тогда $F(xa) = 0$ для каждого $x \in A$. Поэтому $a \in Y$ и $a' = 0$.

Таким образом, A/Y — унитарное пространство с нормой $\|a'\| = F(a^*a)^{1/2}$. Пополнение H этого пространства есть гильбертово пространство, которое мы и будем дальше рассматривать.

Определим линейный оператор $T(x)$ на A/Y , полагая

$$(9) \quad T(x)a' = (xa)'.$$

Снова легко проверяется, что это определение корректно, т. е.

результат не зависит от выбора $a \in A'$, ибо если $y \in Y$, то $xy \in Y$ ввиду (4). (Подпространство Y является левым идеалом в A .) Очевидно, что отображение $x \rightarrow T(x)$ линейно и что

$$(10) \quad T(x_1)T(x_2) = T(x_1x_2) \quad (x_1 \in A, x_2 \in A).$$

В частности, из (9) ясно, что $T(e)$ — тождественный оператор на A/Y . Мы утверждаем, что

$$(11) \quad \|T(x)\| \leq \|x\| \quad (x \in A).$$

Если это будет установлено, то равномерная непрерывность оператора $T(x)$ позволит продолжить его до ограниченного линейного оператора на H . Заметим, что

$$(12) \quad \|T(x)a'\|^2 = ((xa)')', (xa)') = F(a^*x^*xa).$$

При фиксированном $a \in A$ рассмотрим функционал $G(x) = F(a^*xa)$. Очевидно, что G — положительный функционал на A и поэтому в силу утверждения (d) теоремы 11.31

$$(13) \quad G(x^*x) \leq G(e) \|x\|^2.$$

Таким образом,

$$(14) \quad \|T(x)a'\|^2 = G(x^*x) \leq F(a^*a) \|x\|^2 = \|a'\|^2 \|x\|^2,$$

чем и доказано (11).

Выкладка

$$\begin{aligned} (T(x^*)a', b') &= ((x^*a)')', (b') = F(b^*x^*a) = F((xb)^*a) = (a', (xb)') = \\ &= (a', T(x)b') = (T(x)^*a', b') \end{aligned}$$

показывает, что $T(x^*)a' = T(x)^*a'$ для всех $a' \in A/Y$. Так как подпространство A/Y плотно в H , то этим доказана формула (1). Поскольку $\|e'\|^2 = F(e^*e) = F(e) = 1$, из (3) и (12) получается, что

$$(15) \quad \|u\|^2 = F(u^*u) = \|T(u)e'\|^2 \leq \|T(u)\|^2.$$

Наконец, сопоставление формул (11) и (15) дает $\|T(u)\| = \|u\|$. Теорема доказана полностью. ■

12.41. Теорема. Если A есть B^* -алгебра, то существует изометрический *-изоморфизм алгебры A на некоторую замкнутую подалгебру $\mathcal{B}(H)$, где H — подходящее гильбертово пространство.

Доказательство. Пусть H — «прямая сумма» гильбертовых пространств H_u , построенных в теореме 12.40. Точное описание пространства H таково. Для элемента v декартова произведения пространств H_u обозначим через $\pi_u(v)$ координату этого элемента в сомножителе H_u . Тогда, по определению, $v \in H$ в том и только в том случае, если

$$(1) \quad \sum_u \|\pi_u(v)\|^2 < \infty,$$

где $\|\pi_u(v)\|$ есть H_u -норма $\pi_u(v)$. Сходимость ряда (1) предполагает, что среди его членов не более счетного множества отличных от нуля. Скалярное произведение в H задается формулой

$$(2) \quad (v', v'') = \sum_u (\pi_u(v'), \pi_u(v'')) \quad (v', v'' \in H),$$

так что $\|v\|^2 = (v, v)$ совпадает с левой частью в (1). Проверку для H аксиом гильбертова пространства мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Если $S_u \in \mathcal{B}(H_u)$, $\|S_u\| \leq M$ для всех u и если Sv определить как вектор, H_u -координата которого равна

$$(3) \quad \pi_u(Sv) = S_u \pi_u(v),$$

то легко проверить, что $Sv \in H$, если $v \in H$, что $S \in \mathcal{B}(H)$ и что

$$(4) \quad \|S\| = \sup_u \|S_u\|.$$

Сопоставим теперь каждому элементу $x \in A$ оператор $T(x) \in \mathcal{B}(H)$, определяя его условием, что

$$(5) \quad \pi_u(T(x)v) = T_u(x)(\pi_u(v)),$$

где T_u — оператор, описанный в теореме 12.40. Так как

$$(6) \quad \|T_u(x)\| \leq \|x\| = \|T_x(x)\|$$

по теореме 12.40, то из (4) следует, что

$$(7) \quad \|T(x)\| = \sup_u \|T_u(x)\| = \|x\|.$$

Покоординатное применение теоремы 12.40 показывает, что отображение $x \rightarrow T(x)$ алгебры A в $\mathcal{B}(H)$ обладает и всеми остальными нужными свойствами.

Упражнения

Во всех этих упражнениях H обозначает некоторое гильбертово пространство.

1. Пополнение унитарного пространства есть гильбертово пространство. Уточнить это утверждение и доказать его. (В качестве приложения см. доказательство теоремы 12.40.)

2. Пусть N — положительное целое число, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^N = 1$ и $\alpha^2 \neq 1$. Доказать, что скалярное произведение в каждом гильбертовом пространстве H удовлетворяет условиям

$$(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|x + \alpha^n y\|^2 \alpha^n$$

и

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|x + e^{i\theta} y\|^2 e^{i\theta} d\theta.$$

Какие вообще функции f и меры μ на множестве Ω приводят к тождеству

$$(x, y) = \int_{\Omega} \|x + f(p)y\|^2 d\mu(p)?$$

3. (а) Предположим, что x_n и y_n принадлежат замкнутому единичному шару пространства H и $(x_n, y_n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что тогда $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

(б) Предположим, что $x_n \in H$, $x_n \rightarrow x$ слабо и $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Доказать, что тогда $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

4. Пусть H^* — пространство, сопряженное к H . Определим отображение $\psi: H^* \rightarrow H$, полагая

$$y^*(x) = (x, \psi y^*) \quad (x \in H, y^* \in H^*)$$

(см. п. 12.5). Доказать, что H^* является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$[x^*, y^*] = (\psi y^*, \psi x^*).$$

Определим отображение $\varphi: H^{**} \rightarrow H^*$, полагая

$$z^{**}(y^*) = [y^*, \varphi z^{**}] \quad (y^* \in H^*, z^{**} \in H^{**}).$$

Показать, что φ осуществляет изоморфизм между H^{**} и H и что наличие этого изоморфизма означает рефлексивность пространства H .

5. Пусть $\{u_n\}$ — такая последовательность единичных (т. е. таких, что $\|u_n\| = 1$) векторов пространства H , для которой

$$\Gamma^2 = \sum_{i \neq j} |(u_i, u_j)|^2 < \infty.$$

Доказать, что тогда для любой последовательности $\{\alpha_i\}$ комплексных чисел

$$(1 - \Gamma) \sum_{i=m}^n |\alpha_i|^2 \leq \left\| \sum_{i=m}^n \alpha_i u_i \right\|^2 \leq (1 + \Gamma) \sum_{i=m}^n |\alpha_i|^2.$$

Вывести отсюда, что следующие свойства последовательности $\{\alpha_i\}$ эквивалентны:

(а) $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$;

(б) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$ сходится по норме H ;

(с) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (u_i, y)$ сходится при каждом $y \in H$.

Совокупность этих утверждений служит обобщением теоремы 12.6.

6. Пусть E — разложение единицы (см. п. 12.17). Доказать, что

$$|E_{x, y}(\omega)|^2 \leq E_{x, x}(\omega) E_{y, y}(\omega)$$

для всех $x \in H$, $y \in H$ и $\omega \in \mathfrak{M}$.

7. Пусть U — унитарный оператор из $\mathcal{B}(H)$ и $\varepsilon > 0$. Доказать, что если $\sigma(U)$ — собственное подмножество единичной окружности, то можно так подобрать константы $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, что будет выполняться неравенство

$$\|U^{-1} - \alpha_0 I - \alpha_1 U - \dots - \alpha_n U^n\| < \varepsilon.$$

Вместе с тем если $\sigma(U)$ заполняет всю единичную окружность, то ни при каком выборе констант α_i норма указанной разности не может быть сделана меньше 1.

Примечание. Первое утверждение можно извлечь из теоремы 12.26, но есть и более элементарный путь. Найдите его.

8. Доказать теорему 12.35 с заменой UP на PU .

9. Пусть $T = UP$ — полярное разложение обратимого оператора $T \in \mathcal{B}(H)$. Доказать, что T нормален тогда и только тогда, когда $UP = PU$.

10. Доказать, что каждый обратимый нормальный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ есть экспонента от некоторого нормального оператора $S \in \mathcal{B}(H)$.

11. Предположим, что оператор $N \in \mathcal{B}(H)$ нормален, а оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ обратим. Доказать, что оператор TNT^{-1} тогда и только тогда нормален, когда N коммутирует с T^* .

12. (а) Если операторы $S \in \mathcal{B}(H)$ и $T \in \mathcal{B}(H)$ нормальны, причем $ST = TS$, то операторы $S+T$ и ST также нормальны.

(б) Если дополнительно $S \geq 0$ и $T \geq 0$ (см. п. 12.32), то $S+T \geq 0$ и $ST \geq 0$.

(с) Показать, что могут, однако, существовать такие операторы $S \geq 0$ и $T \geq 0$, что оператор ST не является нормальным (разумеется, при этом $ST \neq TS$). Такой пример можно указать уже в случае $\dim H = 2$.

13. Для нормального оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ доказать, что $T^* = UT$ с подходящим унитарным оператором U . В каких случаях оператор U определяется однозначно?

14. Доказать, что оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ будет компактным, если компактным является оператор T^*T .

15. Построить некомпактный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$, для которого $T^2 = 0$. Может ли такой оператор быть нормальным?

16. Рассмотреть нормальный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$, спектр $\sigma(T)$ которого конечен. Описать оператор T по возможности наиболее полно.

17. Показать, что при выполнении условия (d) теоремы 12.29 уравнение $Ty = x$ имеет хотя бы одно решение $y \in H$ в том и только в том случае, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{-2} \|x_i\|^2 < \infty.$$

(Если $\lambda_i = 0$ при некотором i , то соответствующее x_i считается равным 0.)

18. Спектр $\sigma(T)$ каждого оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ можно разбить на три подмножества:

точечный спектр $\sigma_p(T)$, состоящий из всех тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $T - \lambda I$ имеет нетривиальное ядро;

непрерывный спектр $\sigma_c(T)$, состоящий из всех тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $T - \lambda I$ инъективно отображает H на всюду плотное подмножество, не совпадающее с H ;

остаточный спектр $\sigma_r(T)$, включающий все остальные $\lambda \in \sigma(T)$.

(а) Доказать, что остаточный спектр каждого нормального оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ пуст.

(б) Доказать, что если пространство H сепарабельно, то точечный спектр каждого нормального оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ не более чем счетен.

(с) Пусть S_R и S_L — правый и левый сдвиги (описанные в упр. 1 гл. 10), действующие в гильбертовом пространстве l^2 (односторонних последовательностей).

Доказать, что $(S_R)^* = S_L$ и что

$$\begin{aligned}\sigma_p(S_L) &= \sigma_r(S_R) = \{\lambda: |\lambda| < 1\}, \\ \sigma_c(S_L) &= \sigma_c(S_R) = \{\lambda: |\lambda| = 1\}, \\ \sigma_r(S_L) &= \sigma_p(S_R) = \emptyset.\end{aligned}$$

19. Пусть S_R и S_L — те же операторы. Доказать, что ни тот, ни другой не обладают полярным разложением UP с унитарным U и $P \geq 0$.

20. Пусть μ — положительная мера на некотором пространстве Ω и $H = L^2(\mu)$ с обычным скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu.$$

Для каждой функции $\varphi \in L^\infty(\mu)$ определим оператор умножения M_φ по формуле $M_\varphi(f) = \varphi f$. Тогда $M_\varphi \in \mathcal{B}(H)$.

При каких условиях на φ оператор M_φ обладает собственными значениями? Привести пример, когда $\sigma(M_\varphi) = \sigma_c(M_\varphi)$. Показать, что оператор M_φ нормален. Как связаны между собой $\sigma(M_\varphi)$ и множество существенных значений функции φ ? Показать, что отображение $\varphi \rightarrow M_\varphi$ есть изометрический *-изоморфизм алгебры $L^\infty(\mu)$ на некоторую замкнутую подалгебру $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{B}(H)$. (Некоторые патологические меры μ здесь надо исключить.) Будет ли алгебра $\mathcal{A}$ максимальной коммутативной подалгеброй в $\mathcal{B}(H)$? *Указание.* Если $T \in \mathcal{B}(H)$ и $TM_\varphi = M_\varphi T$ для всех $\varphi \in L^\infty(\mu)$ и если $\mu(\Omega) < \infty$, то оператор T совпадает с оператором умножения на $T(1)$ и поэтому $T \in \mathcal{A}$.

21. Рассмотрим нормальный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$. Пусть $\mathcal{A}$ — замкнутая подалгебра в $\mathcal{B}(H)$, порожденная операторами I , T и T^* . При каких условиях на $\sigma(T)$ (необходимых и достаточных) оператор T аппроксимируется по норме $\mathcal{B}(H)$ конечными линейными комбинациями проекторов, принадлежащих алгебре $\mathcal{A}$?

22. Каждый ли нормальный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ обладает в $\mathcal{B}(H)$ квадратными корнями? Что можно сказать о мощности множества всех квадратных корней из T ? Может ли случиться так, что два квадратных корня из одного и того же оператора T не коммутируют между собой? Возможно ли это, если $T = I$?

23. Показать, что преобразование Фурье $f \rightarrow \hat{f}$ есть унитарный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Каков его спектр? *Наводящее соображение.* При $n=1$ вычислите преобразование Фурье от

$$\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^m \exp(-x^2) \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

24. Показать, что любые два бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространства изометрически изоморфны (привлекая счетный ортонормированный базис). Показать, что пространство H , фигурирующее в теореме 12.38, сепарабельно. Показать, что ответ на вопрос, предшествующий теореме 12.38, будет отрицательным для любого бесконечномерного гильбертова пространства, сепарабельного или нет.

25. Пусть T — нормальный оператор из $\mathcal{B}(H)$, f — ограниченная борелевская функция на $\sigma(T)$ и $S = f(T)$. Доказать, что если E_T и E_S — спектраль-

ные разложения операторов T и S соответственно, то

$$E_S(\omega) = E_T(f^{-1}(\omega))$$

для каждого борелевского множества $\omega \subset \sigma(S)$.

26. Для пары операторов $S \in \mathcal{B}(H)$ и $T \in \mathcal{B}(H)$ будем писать $S \geq T$, если $S - T \geq 0$, т. е. если

$$(Sx, x) \geq (Tx, x)$$

для всех $x \in H$. Доказать эквивалентность следующих четырех свойств для любой пары самосопряженных проекторов P и Q :

- (a) $P \geq Q$;
- (b) $\mathcal{R}(P) \supset \mathcal{R}(Q)$;
- (c) $PQ = Q$;
- (d) $QP = Q$

Таким образом, если E — разложение единицы, то соотношение $E(\omega') \geq E(\omega'')$ эквивалентно включению $\omega' \supset \omega''$.

27. Пусть $*$ означает инволюцию в некоторой комплексной алгебре A , q — обратимый элемент из этой алгебры, для которого $q^* = q$, и операция $\#$ определяется равенством

$$x^\# = q^{-1}x^*q$$

для всех $x \in A$. Показать, что $\#$ определяет инволюцию на A .

28. Пусть A — алгебра всех комплексных квадратных матриц порядка 4. Если $M = (m_{ij}) \in A$, то через M^* обозначим матрицу с элементами $m_{ij}^* = \bar{m}_{ji}$. Положим

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как в упр. 27, положим

$$M^\# = Q^{-1}M^*Q \quad (M \in A).$$

(a) Показать, что операторы S и T нормальны относительно инволюции $\#$, что $ST = TS$, но $ST^\# \neq T^\#S$.

(b) Показать, что оператор $S + T$ не является нормальным относительно инволюции $\#$.

(c) Сравнить $\|SS^\#\|$ с $\|S\|^2$.

(d) Вычислить спектральный радиус $\rho(S + S^\#)$. Показать, что он отличается от $\|S + S^\#\|$.

(e) Определим $V = (v_{ij}) \in A$, полагая $v_{12} = v_{24} = i$, $v_{31} = v_{43} = -i$ и $v_{ij} = 0$ в остальных случаях. Описать $\sigma(VV^\#)$ и показать, в частности, что это множество не содержится в $[0, \infty)$.

Утверждение (a) показывает, что для некоторых инволюций теорема 12.16 перестает быть верной. Утверждение (b) демонстрирует это по отношению к утверждению (a) упр. 12. Утверждения (c), (d) и (e) показывают, что для инволюции $\#$ неверны различные утверждения теоремы 11.28.

29. Пусть X — векторное пространство всех тригонометрических полиномов на вещественной оси, т. е. функций вида

$$f(t) = c_1 e^{is_1 t} + \dots + c_n e^{is_n t},$$

где $s_k \in \mathbb{R}$ и $c_k \in \mathbb{C}$ при $1 \leq k \leq n$. Показать, что формула

$$(f, g) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^A f(t) \overline{g(t)} dt$$

задает на X скалярное произведение, причем

$$\|f\|^2 = (f, f) = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2,$$

и что пополнение H пространства X по этой норме является несепарабельным гильбертовым пространством. Показать, что пространство H содержит все *равномерные* пределы тригонометрических полиномов, т. е. совокупность всех так называемых почти периодических функций на вещественной оси $\mathbb{R}$.

30. Пусть H_w — бесконечномерное гильбертово пространство, рассматриваемое в слабой топологии. Доказать, что скалярное произведение задает на $H_w \times H_w$ раздельно непрерывную функцию, которая, однако, не является непрерывной по совокупности аргументов.

31. Пусть $T_n \in \mathcal{B}(H)$ при $n = 1, 2, 3, \dots$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| = 0$$

для каждого $x \in H$. Верно ли, что тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n^* x\| = 0$$

для каждого $x \in H$?

32. Пусть X — *равномерно выпуклое* банахово пространство. Это означает по определению, что если

$$\|x_n\| \leq 1, \quad \|y_n\| \leq 1, \quad \|x_n + y_n\| \rightarrow 2,$$

то $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$. Любое гильбертово пространство обладает этим свойством.

(а) Доказать, что теорема 12.3 выполняется для пространства X .

(б) Пусть $\|x_n\| = 1$, $\Lambda \in X^*$, $\|\Lambda\| = 1$ и $\Lambda x_n \rightarrow 1$. Доказать, что $\{x_n\}$ является последовательностью Коши (по норме пространства X). *Указание.* Рассмотрите $\Lambda(x_n + x_m)$.

(с) Доказать, что каждый функционал $\Lambda \in X^*$ достигает нормы на замкнутом единичном шаре пространства X .

(д) Предположим, что $x_n \rightarrow x$ слабо и $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Доказать, что тогда $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. *Указание.* Сведите задачу к случаю $\|x_n\| = 1$ и рассмотрите затем $\Lambda(x_n + x)$ с подходящим функционалом Λ .

(е) Показать, что некоторые банаховы пространства (например, L^1 или C) не обладают ни одним из перечисленных выше четырех свойств. Все такие пространства, следовательно, не будут равномерно выпуклыми¹⁾.

33. Доказать утверждение относительно случая $\dim H < \infty$, содержащееся в замечании после теоремы 12.35.

1) Вместе с тем нелишне, быть может, подчеркнуть, что понятие равномерной выпуклости отражает специальное свойство *нормы*. С топологической точки зрения перечисленные свойства существенно различаются. Так, свойством (с) обладают все рефлексивные банаховы пространства (это просто) и только они (это совсем не простая теорема Джеймса); в каждом сепарабельном банаховом пространстве можно так изменить норму на эквивалентную, что будет иметь место (д) (М. И. Кадец). Подробнее об этом см., например, в [14]. — *Прим. ред.*

Введение

13.1. Определения. В этой главе под *оператором в гильбертовом пространстве* H мы будем понимать линейное отображение T , область определения которого $\mathcal{D}(T)$ и область значений (образ) $\mathcal{R}(T)$ являются подпространствами пространства H .

При этом не предполагается, что оператор T ограничен или непрерывен. Конечно, если оператор T непрерывен (относительно топологии в $\mathcal{D}(T)$, индуцированной нормой пространства H), то он может быть продолжен до непрерывного оператора на замыкании $\overline{\mathcal{D}(T)}$ подпространства $\mathcal{D}(T)$, а потому и до непрерывного оператора на H , ибо подпространство $\overline{\mathcal{D}(T)}$ дополняемо в H . В этом случае оператор T является сужением некоторого оператора из $\mathcal{B}(H)$.

График $\mathcal{G}(T)$ оператора T в пространстве H —это подпространство пространства $H \times H$, состоящее из всех упорядоченных пар $\{x, Tx\}$, где x пробегает $\mathcal{D}(T)$. Очевидно, что оператор S является *расширением* оператора T [т. е. $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ и $Sx = Tx$ для всех $x \in \mathcal{D}(T)$] тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$. Последнее включение мы часто будем записывать в более простой форме:

$$(1) \quad T \subset S.$$

Оператор в H называется *замкнутым*, если его график является замкнутым подпространством пространства $H \times H$. По теореме о замкнутом графике оператор T принадлежит $\mathcal{B}(H)$ тогда и только тогда, когда он замкнут и $\mathcal{D}(T) = H$.

Мы хотим теперь сопоставить оператору T *сопряженный в смысле гильбертова пространства* (или, короче, *гильбертов сопряженный*) оператор T^* . Естественно при этом стремиться к тому, чтобы область определения $\mathcal{D}(T^*)$ оператора T^* состояла из всех $y \in H$, для которых линейный функционал

$$(2) \quad x \rightarrow (Tx, y)$$

непрерывен на $\mathcal{D}(T)$. Если вектор $y \in H$ обладает этим свойством, то по теореме Хана—Банаха функционал (2) продолжается до не-

которого непрерывного линейного функционала на пространстве H , и потому существует такой вектор $y^* \in H$, что

$$(3) \quad (Tx, y) = (x, y^*) \quad (x \in \mathcal{D}(T)).$$

Естественно было бы считать, что $T^*y = y^*$; однако вектор y^* , удовлетворяющий условию (3), определяется вектором y *однозначно* в том и только в том случае, когда область определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T *всюду плотна* в пространстве H (в этом случае мы иногда будем говорить, что оператор T *плотно определен*). По этой причине мы определяем гильбертов сопряженный T^* лишь для тех операторов T , области определения которых всюду плотны в H . Область определения $\mathcal{D}(T^*)$ оператора T^* состоит из всех $y \in H$, для которых функционал (2) непрерывен на $\mathcal{D}(T)$, а значение T^*y оператора T^* в точке $y \in \mathcal{D}(T^*)$ однозначно определяется условием

$$(4) \quad (Tx, y) = (x, T^*y) \quad (x \in \mathcal{D}(T)).$$

Шаблонная проверка показывает, что $\mathcal{D}(T^*)$ является подпространством пространства H и что оператор T^* линеен¹⁾.

Обычные алгебраические операции над неограниченными операторами следует производить с осторожностью, следя при этом за областями определения. Вот естественные определения суммы и произведения таких операторов²⁾:

$$(5) \quad \mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T), \quad (S+T)x = Sx + Tx,$$

$$(6) \quad \mathcal{D}(ST) = \{x \in \mathcal{D}(T): Tx \in \mathcal{D}(S)\}, \quad (ST)x = S(Tx).$$

13.2. Теорема. Пусть S, T и ST — *плотно определенные операторы в H* . Тогда

$$(1) \quad T^*S^* \subset (ST)^*.$$

Кроме того, если $S \in \mathcal{B}(H)$, то

$$(2) \quad T^*S^* = (ST)^*.$$

Отметим, что включение (1) означает, что оператор $(ST)^*$ является расширением оператора T^*S^* . Равенство же (2) включает

¹⁾ Заметим, что если $T \in \mathcal{B}(H)$, то данное здесь определение оператора T^* совпадает с определением п. 12.9; в частности, при этом $\mathcal{D}(T^*) = H$ и $T^* \in \mathcal{B}(H)$. — *Прим. перев.*

²⁾ Заметим, что при этом выполняются обычные законы ассоциативности $(R+S)+T = R+(S+T)$ и $(RS)T = R(ST)$. Что же касается законов дистрибутивности, то один из них сохраняет обычный вид $(R+S)T = RT + ST$, а другой, вообще говоря, справедлив лишь в ослабленной форме $T(R+S) \supset \supset TR + TS$, ибо вполне может случиться, что $(R+S)x \in \mathcal{D}(T)$, в то время как один из векторов Rx и Sx не принадлежит $\mathcal{D}(T)$. Отметим еще, что когда α — скаляр, оператор αT определяется так: если $\alpha = 0$, то $\mathcal{D}(\alpha T) = H$ и $\alpha T = 0$; если же $\alpha \neq 0$, то $\mathcal{D}(\alpha T) = \mathcal{D}(T)$ и $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$ при $x \in \mathcal{D}(T)$. — *Прим. перев.*

в себя утверждение, что области определения операторов T^*S^* и $(ST)^*$ совпадают.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{D}(ST)$ и $y \in \mathcal{D}(T^*S^*)$. Тогда

$$(3) \quad (Tx, S^*y) = (x, T^*S^*y),$$

поскольку $x \in \mathcal{D}(T)$ и $S^*y \in \mathcal{D}(T^*)$, и

$$(4) \quad (STx, y) = (Tx, S^*y),$$

ибо $Tx \in \mathcal{D}(S)$ и $y \in \mathcal{D}(S^*)$. Поэтому

$$(5) \quad (STx, y) = (x, T^*S^*y),$$

откуда следует (1).

Предположим теперь, что $S \in \mathcal{B}(H)$; тогда $\mathcal{D}(S^*) = H$ и $S^* \in \mathcal{B}(H)$. Поэтому если $y \in \mathcal{D}((ST)^*)$, то

$$(6) \quad (Tx, S^*y) = (STx, y) = (x, (ST)^*y)$$

для всех $x \in \mathcal{D}(ST)$. Следовательно, $S^*y \in \mathcal{D}(T^*)$ и потому $y \in \mathcal{D}(T^*S^*)$. Таким образом, $\mathcal{D}((ST)^*) \subset \mathcal{D}(T^*S^*)$, и для завершения доказательства остается воспользоваться включением (1). ■

13.3. Определение. Оператор T в гильбертовом пространстве H называется *симметрическим*, если

$$(1) \quad (Tx, y) = (x, Ty)$$

для всех x и y из $\mathcal{D}(T)$. Таким образом, симметрические операторы с всюду плотными областями определения — это в точности те операторы T , для которых

$$(2) \quad T \subset T^*.$$

Если $T = T^*$, то оператор T называется *самосопряженным*.

Для оператора $T \in \mathcal{B}(H)$ условия симметричности и самосопряженности, очевидно, совпадают. В общем случае это уже не так.

13.4. Пример. Пусть $H = L^2 = L^2([0, 1])$ относительно меры Лебега. Мы определим в пространстве L^2 три оператора T_1, T_2, T_3 . Их области определения таковы:

$\mathcal{D}(T_1)$ состоит из всех абсолютно непрерывных функций f на отрезке $[0, 1]$, для которых производная f' принадлежит L^2 ;

$$\mathcal{D}(T_2) = \mathcal{D}(T_1) \cap \{f: f(0) = f(1)\};$$

$$\mathcal{D}(T_3) = \mathcal{D}(T_1) \cap \{f: f(0) = f(1) = 0\};$$

ясно, что все эти подпространства всюду плотны в L^2 . Положим

$$(1) \quad T_k f = i f' \quad \text{при} \quad f \in \mathcal{D}(T_k), \quad k = 1, 2, 3.$$

Мы утверждаем, что

$$(2) \quad T_1^* = T_3, \quad T_2^* = T_2, \quad T_3^* = T_1.$$

Поскольку $T_3 \subset T_2 \subset T_1$, отсюда следует, что оператор T_2 является самосопряженным расширением симметрического (но не самосопряженного) оператора T_3 и что оператор T_1 является расширением оператора T_2 , но не является симметрическим.

Докажем утверждения (2). Заметим сначала, что если $f \in \mathcal{D}(T_k)$, $g \in \mathcal{D}(T_m)$ и $k+m=4$, то

$$(3) \quad (T_k f, g) = \int_0^1 (if') \bar{g} = \int_0^1 f \overline{(ig')} = (f, T_m g),$$

ибо при выполнении указанных условий $f(1)\bar{g}(1) = f(0)\bar{g}(0)$. Отсюда следует, что $T_m \subset T_k^*$, или

$$(4) \quad T_1 \subset T_3^*, \quad T_2 \subset T_2^*, \quad T_3 \subset T_1^*.$$

Пусть теперь $g \in \mathcal{D}(T_k^*)$ и $\varphi = T_k^* g$. Положим

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi.$$

Тогда для $f \in \mathcal{D}(T_k)$

$$(5) \quad \int_0^1 if' \bar{g} = (T_k f, g) = (f, \varphi) = f(1) \overline{\Phi(1)} - \int_0^1 f' \bar{\Phi}.$$

Если $k=1$ или 2, то подпространство $\mathcal{D}(T_k)$ содержит ненулевые постоянные, так что из (5) следует, что $\Phi(1)=0$. Если же $k=3$, то $f(1)=0$. Поэтому в любом случае

$$(6) \quad ig - \Phi \in \mathcal{D}(T_k)^\perp.$$

Так как $\mathcal{R}(T_1) = L^2$, то $ig = \Phi$, если $k=1$; а так как в этом случае $\Phi(1)=0$, то $g \in \mathcal{D}(T_3)$. Следовательно, $T_1^* \subset T_3$.

Если $k=2$ или 3, то $\mathcal{R}(T_k)$ состоит из всех тех функций $u \in L^2$, для которых $\int_0^1 u = 0$. Поэтому

$$(7) \quad \mathcal{R}(T_2) = \mathcal{R}(T_3) = Y^\perp,$$

где Y — одномерное подпространство пространства L^2 , состоящее из всех постоянных функций, так что из (6) следует, что функция $ig - \Phi$ постоянна. Таким образом, функция g абсолютно непрерывна и $g' \in L^2$, так что $g \in \mathcal{D}(T_1)$. Следовательно, $T_3^* \subset T_1$.

Если $k=2$, то $\Phi(1)=0$; поэтому $g(0)=g(1)$ и $g \in \mathcal{D}(T_2)$. Таким образом, $T_2^* \subset T_2$, и доказательство окончено.

Перед тем как обратиться к более обстоятельному изучению взаимоотношений между симметрическими и самосопряженными операторами, мы приведем пример другого рода.

13.5. Пример. Пусть, как и в предыдущем примере, $H = L^2$; определим оператор D (скажем, на $\mathcal{D}(T_1)$); сейчас не так важно,

что именно берется в качестве области определения), полагая $Df = f'$, и пусть $(Mf)(t) = tf(t)$. Тогда $(DM - MD)f = f$, или

$$(1) \quad DM - MD = I,$$

где I — тождественный оператор на области определения оператора $DM - MD$ (если считать, что $\mathcal{D}(D) = \mathcal{D}(T_1)$, то область определения оператора $DM - MD$ совпадает с $\mathcal{D}(T_1)$).

Таким образом, единичный оператор представлен в виде коммутатора двух операторов, из которых лишь один ограничен. В квантовой механике возникает вопрос о возможности представления единичного оператора в виде коммутатора двух *ограниченных* операторов на пространстве H . Ответ отрицателен, причем не только для $\mathcal{B}(H)$, но и для любой банаховой алгебры.

13.6. Теорема. Пусть A — банахова алгебра с единицей e . Если $x \in A$ и $y \in A$, то $xy - yx \neq e$.

Нижеследующее доказательство, принадлежащее Виландту, не использует даже полноты алгебры A .

Доказательство. Допустим, что $xy - yx = e$. Предположим, что для некоторого $n \geq 1$

$$(1) \quad x^n y - y x^n = n x^{n-1} \neq 0$$

(заметим, что при $n = 1$ это условие выполняется). Тогда $x^n \neq 0$ и

$$\begin{aligned} x^{n+1} y - y x^{n+1} &= x^n (xy - yx) + (x^n y - y x^n) x = \\ &= x^n e + n x^{n-1} x = (n+1) x^n \neq 0, \end{aligned}$$

так что по индукции заключаем, что условие (1) выполняется для всех n . Из (1) следует, что для любого целого положительного n

$$n \|x^{n-1}\| = \|x^n y - y x^n\| \leq 2 \|x^n\| \|y\| \leq 2 \|x^{n-1}\| \|x\| \|y\|,$$

или $n \leq 2 \|x\| \|y\|$, что, очевидно, невозможно. ■

Графики и симметрические операторы

13.7. Графики. Если H — гильбертово пространство, то $H \times H$ также можно превратить в гильбертово пространство, определяя скалярное произведение двух элементов $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ пространства $H \times H$ равенством

$$(1) \quad (\{a, b\}, \{c, d\}) = (a, c) + (b, d),$$

где в правой части фигурируют скалярные произведения элементов пространства H . Оставим в качестве упражнения проверку того, что выполняются все условия, перечисленные в п. 12.1.

В частности, норма в пространстве $H \times H$ определяется так:

$$(2) \quad \| \{a, b\} \|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

Положим

$$(3) \quad V \{a, b\} = \{-b, a\} \quad (a \in H, b \in H).$$

Тогда V — унитарный оператор в пространстве $H \times H$, удовлетворяющий условию $V^2 = -I$. Таким образом, $V^2 M = M$ для любого подпространства M пространства $H \times H$.

С помощью этого оператора можно дать весьма любопытное описание оператора T^* в терминах оператора T .

13.8. Теорема. Если T — плотно определенный оператор в пространстве H , то

$$(1) \quad \mathcal{G}(T^*) = [V\mathcal{G}(T)]^\perp,$$

где справа стоит ортогональное дополнение подпространства $V\mathcal{G}(T)$ в пространстве $H \times H$.

Отметим, что область значений любого оператора и сам оператор однозначно восстанавливаются по его графику.

Доказательство. Очевидно, что каждое из следующих четырех утверждений эквивалентно каждому из своих ближайших «соседей»:

$$(2) \quad \{y, z\} \in \mathcal{G}(T^*);$$

$$(3) \quad (Tx, y) = (x, z) \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathcal{D}(T);$$

$$(4) \quad (\{-Tx, x\}, \{y, z\}) = 0 \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathcal{D}(T);$$

$$(5) \quad \{y, z\} \in [V\mathcal{G}(T)]^\perp.$$

Эквивалентность (2) и (5) как раз и составляет содержание теоремы. ■

13.9. Теорема. Если T — плотно определенный оператор в H , то оператор T^* замкнут. В частности, самосопряженный оператор замкнут.

Доказательство. Ортогональное дополнение $M^\perp$ любого подпространства $M \subset H \times H$ замкнуто. Поэтому из теоремы 13.8 следует, что график $\mathcal{G}(T^*)$ оператора T^* замкнут в $H \times H$. ■

13.10. Теорема. Если T — замкнутый плотно определенный оператор в H , то

$$H \times H = V\mathcal{G}(T) \oplus \mathcal{G}(T^*),$$

причем справа стоит прямая сумма ортогональных подпространств.

Доказательство. Если подпространство $\mathcal{G}(T)$ замкнуто, то подпространство $V\mathcal{G}(T)$ тоже замкнуто, поскольку оператор V

унитарен. Поэтому из теоремы 13.8 следует, что $V\mathcal{D}(T) = [\mathcal{D}(T^*)]^\perp$; см. теорему 12.4. ■

Следствие. Если T — плотно определенный замкнутый оператор в H , то для любых $a, b \in H$ система уравнений

$$\begin{aligned} -Tx + y &= a, \\ x + T^*y &= b \end{aligned}$$

имеет единственное решение $\{x, y\}$, $x \in \mathcal{D}(T)$, $y \in \mathcal{D}(T^*)$.

В следующей теореме приводятся некоторые условия, при выполнении которых симметрический оператор оказывается самосопряженным.

13.11. Теорема. Пусть T — симметрический плотно определенный оператор в пространстве H .

(а) Если $\mathcal{D}(T) = H$, то оператор T самосопряжен и ограничен.

(б) Если оператор T самосопряжен и инъективен, то его образ $\mathcal{R}(T)$ всюду плотен в H и оператор T^{-1} самосопряжен.

(с) Если образ $\mathcal{R}(T)$ оператора T всюду плотен в H , то оператор T инъективен.

(д) Если $\mathcal{R}(T) = H$, то оператор T самосопряжен и инъективен, а $T^{-1} \in \mathcal{B}(H)$.

Доказательство. (а) По предположению $T \subset T^*$. Поэтому ясно, что если $\mathcal{D}(T) = H$, то $T = T^*$. Следовательно, оператор T замкнут (теорема 13.9) и, согласно теореме о замкнутом графике, непрерывен. (Можно было также сослаться на теорему 5.1.)

(б) Пусть $y \perp \mathcal{R}(T)$. Тогда функционал $x \rightarrow (Tx, y) = 0$ непрерывен на $\mathcal{D}(T)$, так что $y \in \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ и $(x, Ty) = (Tx, y) = 0$ для всех $x \in \mathcal{D}(T)$. Таким образом, $Ty = 0$. Так как оператор T по предположению инъективен, то отсюда следует, что $y = 0$. Поэтому подпространство $\mathcal{R}(T)$ всюду плотно в H .

Следовательно, T^{-1} — оператор со всюду плотной областью определения $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$, так что существует сопряженный к нему оператор $(T^{-1})^*$. Легко проверить, что выполняются соотношения

$$(1) \quad \mathcal{D}(T^{-1}) = V\mathcal{D}(-T) \quad \text{и} \quad V\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{D}(-T).$$

Так как оператор T самосопряжен, то оператор $-T$ тоже самосопряжен. Применяя теорему 13.10 к операторам¹⁾ T^{-1} и $-T$, получаем ортогональные разложения

$$(2) \quad H \times H = V\mathcal{D}(T^{-1}) \oplus \mathcal{D}((T^{-1})^*)$$

и

$$(3) \quad H \times H = V\mathcal{D}(-T) \oplus \mathcal{D}(-T) = \mathcal{D}(T^{-1}) \oplus V\mathcal{D}(T^{-1}).$$

¹⁾ В силу (1) оператор T^{-1} замкнут. — Прим. перев.

Следовательно,

$$(4) \quad \mathcal{D}((T^{-1})^*) = [V\mathcal{D}(T^{-1})]^\perp = \mathcal{D}(T^{-1}),$$

так что $(T^{-1})^* = T^{-1}$.

(с) Допустим, что $Tx = 0$. Тогда $(x, Ty) = (Tx, y) = 0$ для всякого $y \in \mathcal{D}(T)$. Таким образом, $x \perp \mathcal{R}(T)$, и потому $x = 0$.

(d) Так как $\mathcal{R}(T) = H$, то из утверждения (с) следует, что оператор T инъективен, причем $\mathcal{D}(T^{-1}) = H$. Если $x \in H$ и $y \in H$, то $x = Tz$ и $y = T\omega$ для некоторых $z \in \mathcal{D}(T)$ и $\omega \in \mathcal{D}(T)$, так что $(T^{-1}x, y) = (z, T\omega) = (Tz, \omega) = (x, T^{-1}y)$.

Поэтому оператор T^{-1} симметричен, и из утверждения (а) следует, что он самосопряжен (и ограничен), а тогда в силу (b) оператор $T = (T^{-1})^{-1}$ тоже самосопряжен. ■

13.12. Теорема. Если T — плотно определенный замкнутый оператор в H , то область определения $\mathcal{D}(T^*)$ оператора T^* всюду плотна в H и $T^{**} = T$.

Доказательство. Так как оператор V унитарен и $V^2 = -I$, то теорема 13.10 дает ортогональное разложение

$$(1) \quad H \times H = \mathcal{D}(T) \oplus V\mathcal{D}(T^*).$$

Предположим, что $z \perp \mathcal{D}(T^*)$. Тогда $(z, y) = 0$ для всех $y \in \mathcal{D}(T^*)$, и потому для всех таких y

$$(2) \quad (\{0, z\}, \{-T^*y, y\}) = 0.$$

Таким образом, $\{0, z\} \in [V\mathcal{D}(T^*)]^\perp = \mathcal{D}(T)$, откуда следует, что $z = T(0) = 0$. Поэтому подпространство $\mathcal{D}(T^*)$ всюду плотно в H , так что определен оператор T^{**} .

Применяя теорему 13.10 к оператору T^* , получаем

$$(3) \quad H \times H = V\mathcal{D}(T^*) \oplus \mathcal{D}(T^{**}).$$

Из (1) и (3) следует, что

$$(4) \quad \mathcal{D}(T^{**}) = [V\mathcal{D}(T^*)]^\perp = \mathcal{D}(T),$$

откуда $T^{**} = T$. ■

Мы увидим сейчас, что операторы вида T^*T обладают интересными свойствами. В частности, область определения такого оператора $\mathcal{D}(T^*T)$ не может быть очень маленькой.

13.13. Теорема. Пусть T — плотно определенный замкнутый оператор в пространстве H , и пусть $Q = I + T^*T$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) Оператор T^*T самосопряжен, а оператор Q взаимно однозначно отображает свою область определения

$$\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(T^*T) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(T^*)\}$$

на все пространство H . Существует единственная пара опера-

торов $B \in \mathcal{B}(H)$ и $C \in \mathcal{B}(H)$, удовлетворяющих условиям $C = TB$ и

$$(1) \quad B(I + T^*T) \subset (I + T^*T)B = I.$$

При этом $\|B\| \leq 1$, $\|C\| \leq 1$ и $B \geq 0$.

(b) Если T' — сужение оператора T на подпространство $\mathcal{D}(T^*T)$, то график $\mathcal{G}(T')$ оператора T' всюду плотен в $\mathcal{G}(T)$.

Здесь и далее буква I обозначает единичный оператор с областью определения H .

Доказательство. Если $x \in \mathcal{D}(Q)$, то $Tx \in \mathcal{D}(T^*)$, так что

$$(2) \quad (x, x) + (Tx, Tx) = (x, x) + (x, T^*Tx) = (x, Qx).$$

Поэтому $\|x\|^2 \leq \|x\| \|Qx\|$, и, следовательно, оператор Q инъективен. В частности, это показывает, что в $\mathcal{B}(H)$ не может существовать двух различных операторов B, B' , удовлетворяющих условию (1); оператор $C \in \mathcal{B}(H)$ также однозначно определяется условием $C = TB$ (если он вообще существует).

По теореме 13.10 для каждого $h \in H$ существует единственная пара векторов $Bh \in \mathcal{D}(T)$ и $Ch \in \mathcal{D}(T)$, для которых

$$(3) \quad \{0, h\} = \{-TBh, Bh\} + \{Ch, T^*Ch\}.$$

Ясно, что B и C — линейные операторы в пространстве H , причем их области определения совпадают с H . Два вектора, стоящие в правой части соотношения (3), ортогональны друг другу (теорема 13.10). Поэтому из определения нормы в пространстве $H \times H$ и теоремы Пифагора следует, что

$$(4) \quad \|h\|^2 \geq \|Bh\|^2 + \|Ch\|^2 \quad (h \in H),$$

так что $\|B\| \leq 1$ и $\|C\| \leq 1$.

Сравнение компонент векторов, входящих в соотношение (3), показывает, что $C = TB$ и что для всякого $h \in H$

$$(5) \quad h = Bh + T^*Ch = Bh + T^*TBh = QBh.$$

Поэтому $QB = I$. В частности, оператор B инъективен, а оператор Q отображает подпространство $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{D}(Q)$ на все пространство H . Так как оператор Q инъективен, то отсюда следует, что $\mathcal{R}(B) = \mathcal{D}(Q)$ и оператор Q взаимно однозначно отображает $\mathcal{D}(Q)$ на H , а оператор B взаимно однозначно отображает H на $\mathcal{D}(Q)$. Если $y \in \mathcal{D}(Q)$, то $QBQy = Qy$, а так как оператор Q инъективен, то $BQy = y$. Таким образом, $BQ \subset I$, т. е. условие (1) выполняется.

Если $h \in H$, то $h = Qx$ для некоторого $x \in \mathcal{D}(Q)$; учитывая соотношение (2), получаем

$$(6) \quad (Bh, h) = (BQx, Qx) = (x, Qx) \geq 0.$$

Следовательно, $B \geq 0$, и оператор B самосопряжен (теорема 12.32). Поэтому утверждение (b) теоремы 13.11 показывает, что оператор Q самосопряжен, а тогда самосопряжен и оператор $Q - I = T^*T$. Таким образом, утверждение (a) полностью доказано.

Так как оператор T по предположению замкнут, то его график $\mathcal{G}(T)$ является замкнутым подпространством пространства $H \times H$ и, следовательно, является гильбертовым пространством. Допустим, что вектор $\{z, Tz\} \in \mathcal{G}(T)$ ортогонален подпространству $\mathcal{G}(T')$. Тогда для каждого $x \in \mathcal{D}(T^*T) = \mathcal{D}(Q)$

$$0 = (\{z, Tz\}, \{x, Tx\}) = (z, x) + (Tz, Tx) = (z, x) + (z, T^*Tx) = (z, Qx).$$

Но $\mathcal{R}(Q) = H$. Поэтому $z = 0$, и утверждение (b) доказано. ■

13.14. Определение. Симметрический оператор T в пространстве H называется *максимальным симметрическим оператором*, если он не имеет собственных симметрических расширений, т. е. если из условий

$$(1) \quad T \subset S \quad \text{и} \quad S \text{ симметричен}$$

следует, что $S = T$.

13.15. Теорема. Самосопряженные операторы являются максимальными симметрическими операторами.

Доказательство. Предположим, что оператор T самосопряжен, а оператор S симметричен (т. е. $S \subset S^*$) и что $T \subset S$. Из этого включения, очевидно, следует (по самому определению сопряженного оператора), что $S^* \subset T^*$. Поэтому

$$S \subset S^* \subset T^* = T \subset S,$$

так что $S = T$. ■

13.16. Теорема. Если T — симметрический оператор в пространстве H (не обязательно плотно определенный), то справедливы следующие утверждения:

$$(a) \quad \|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \quad (x \in \mathcal{D}(T)).$$

(b) Оператор T замкнут тогда и только тогда, когда подпространство $\mathcal{R}(T + iI)$ замкнуто в H .

(c) Оператор $T + iI$ инъективен.

(d) Если $\mathcal{R}(T + iI) = H$, то T — максимальный симметрический оператор.

(e) Все предыдущие утверждения остаются справедливыми, если в них заменить i на $-i$.

Доказательство. Справедливость утверждения (a) вытекает из тождества

$$\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 + (ix, Tx) + (Tx, ix)$$

и симметричности оператора T . Из (а) следует, что

$$(T + iI)x \leftrightarrow \{x, Tx\}$$

является взаимно однозначным изометрическим соответствием между образом $\mathcal{R}(T + iI)$ оператора $T + iI$ и графиком оператора T ; поэтому справедливо утверждение (b). Утверждение (c) также является непосредственным следствием утверждения (a). Если $\mathcal{R}(T + iI) = H$ и T_1 — собственное расширение оператора T (т. е. $\mathcal{D}(T)$ является собственным подпространством в $\mathcal{D}(T_1)$), то оператор $T_1 + iI$ является собственным расширением оператора $T + iI$ и потому не может быть инъективным. В силу (c) оператор T_1 не симметричен, что доказывает справедливость утверждения (d).

Ясно, что все доказательство проходит без изменений, если i заменить на $-i$. ■

Преобразование Кэли

13.17. Определение. Отображение

$$(1) \quad t \rightarrow \frac{t-i}{t+i}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между вещественной осью и единичной окружностью с выколотой точкой 1. Поэтому функциональное исчисление, развитое в гл. 12, показывает, что каждый самосопряженный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ порождает унитарный оператор

$$(2) \quad U = (T - iI)(T + iI)^{-1},$$

причем любой унитарный оператор U , спектр которого не содержит точку 1, может быть получен таким способом.

Теперь мы продолжим это соответствие $T \leftrightarrow U$ до взаимно однозначного соответствия между классом всех симметрических операторов и некоторым классом изометрий.

Пусть T — симметрический оператор в пространстве H . Теорема 13.16 показывает, что

$$(3) \quad \|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \|Tx - ix\|^2 \quad (x \in \mathcal{D}(T)).$$

Поэтому существует изометрия U с областью определения и образом

$$(4) \quad \mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(T + iI) \quad \text{и} \quad \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(T - iI)$$

соответственно, определяемая формулой

$$(5) \quad U(Tx + ix) = Tx - ix \quad (x \in \mathcal{D}(T)).$$

Поскольку оператор $(T + iI)^{-1}$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{D}(U)$ на $\mathcal{D}(T)$, оператор U можно записать также в виде

$$(6) \quad U = (T - iI)(T + iI)^{-1}.$$

Оператор U называется *преобразованием Кэли* оператора T . Его основные свойства собраны в теореме 13.19. С помощью преобразования Кэли мы получим простое доказательство спектральной теоремы для самосопряженных (не обязательно ограниченных) операторов.

13.18. Лемма. Пусть U — изометрический оператор в пространстве H , т. е. $\|Ux\| = \|x\|$ для всякого $x \in \mathcal{D}(U)$.

(а) Если $x \in \mathcal{D}(U)$ и $y \in \mathcal{D}(U)$, то $(Ux, Uy) = (x, y)$.

(б) Если подпространство $\mathcal{R}(I - U)$ всюду плотно в H , то оператор $I - U$ инъективен.

(с) Если хотя бы одно из подпространств $\mathcal{D}(U)$, $\mathcal{R}(U)$ и $\mathcal{Z}(U)$ замкнуто, то два других тоже замкнуты.

Доказательство. Справедливость утверждения (а) следует, например, из любого из тождеств, приведенных в упр. 2 гл. 12. Для доказательства утверждения (б) предположим, что $x \in \mathcal{D}(U)$ и $(I - U)x = 0$, так что $x = Ux$. Тогда

$$(x, (I - U)y) = (x, y) - (x, Uy) = (Ux, Uy) - (x, Uy) = 0$$

для всякого $y \in \mathcal{D}(U)$. Таким образом, $x \perp \mathcal{R}(I - U)$, а так как $\mathcal{R}(I - U)$ всюду плотно в H , то $x = 0$. Доказательство утверждения (с) оставляем читателю в качестве упражнения. ■

13.19. Теорема. Пусть U — преобразование Кэли симметрического оператора T в пространстве H . Тогда справедливы следующие утверждения:

(а) Оператор U замкнут тогда и только тогда, когда замкнут оператор T .

(б) $\mathcal{R}(I - U) = \mathcal{D}(T)$, оператор $I - U$ инъективен, и оператор T может быть восстановлен по U при помощи формулы

$$T = i(I + U)(I - U)^{-1}.$$

(Следовательно, преобразования Кэли двух различных симметрических операторов не совпадают.)

(с) Оператор U унитарен тогда и только тогда, когда оператор T самосопряжен.

Обратно, если V — такой изометрический оператор в пространстве H , что оператор $I - V$ инъективен, то V является преобразованием Кэли некоторого симметрического оператора в пространстве H .

Доказательство. По теореме 13.16 оператор T замкнут тогда и только тогда, когда подпространство $\mathcal{R}(T + iI)$ замкнуто.

По лемме 13.18 замкнутость оператора U равносильна замкнутости его области определения $\mathcal{D}(U)$. Отсюда следует справедливость утверждения (а), ибо по определению преобразования Кэли $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(T + iI)$.

Формулы

$$(1) \quad z = Tx + ix, \quad Uz = Tx - ix \quad (x \in \mathcal{D}(T))$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow z$ между подпространствами $\mathcal{D}(T)$ и $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(T + iI)$. Ясно, что

$$(2) \quad (I - U)z = 2ix, \quad (I + U)z = 2Tx.$$

Отсюда следует, что оператор $I - U$ инъективен и $\mathcal{R}(I - U) = \mathcal{D}(T)$, т. е. оператор $(I - U)^{-1}$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{D}(T)$ на $\mathcal{D}(U)$, и что

$$(3) \quad 2Tx = (I + U)z = (I + U)(I - U)^{-1}(2ix) \quad (x \in \mathcal{D}(T)).$$

Этим доказано утверждение (b).

Предположим теперь, что оператор U самосопряжен. Тогда по теореме 13.13

$$(4) \quad \mathcal{R}(I + T^2) = H.$$

Так как

$$(5) \quad (T + iI)(T - iI) = I + T^2 = (T - iI)(T + iI)$$

(все три оператора имеют своей областью определения подпространство $\mathcal{D}(T^2)$), то из (4) следует, что

$$(6) \quad \mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(T + iI) = H$$

и

$$(7) \quad \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(T - iI) = H.$$

Так как оператор U изометричен, то в силу (6) и (7) он унитарен (теорема 12.13).

Для завершения доказательства утверждения (с) предположим, что оператор U унитарен. Тогда из утверждения (b) и нормальности оператора $I - U$ следует (см. теорему 12.12), что

$$(8) \quad [\mathcal{R}(I - U)]^\perp = \mathcal{N}(I - U) = \{0\},$$

так что подпространство $\mathcal{D}(T) = \mathcal{R}(I - U)$ всюду плотно в H . Поэтому определен сопряженный оператор T^* и $T \subset T^*$.

Фиксируем $y \in \mathcal{D}(T^*)$. Так как $\mathcal{R}(T + iI) = \mathcal{D}(U) = H$, то существует такой вектор $y_0 \in \mathcal{D}(T)$, что

$$(9) \quad (T^* + iI)y = (T + iI)y_0 = (T^* + iI)y_0$$

(последнее равенство выполняется по той причине, что $T \subset T^*$). Если $y_1 = y - y_0$, то $y_1 \in \mathcal{D}(T^*)$ и для всякого $x \in \mathcal{D}(T)$

$$(10) \quad ((T - iI)x, y_1) = (x, (T^* + iI)y_1) = (x, 0) = 0.$$

Таким образом, $y_1 \perp \mathcal{R}(T - iI) = \mathcal{R}(U) = H$, так что $y_1 = 0$ и $y = y_0 \in \mathcal{D}(T)$.

Следовательно, $T^* \subset T$, и утверждение (с) доказано.

Наконец, пусть оператор V удовлетворяет условиям, указанным в формулировке обратного утверждения теоремы. Тогда формула

$$(11) \quad x = z - Vz$$

определяет взаимно однозначное соответствие $z \leftrightarrow x$ между подпространствами $\mathcal{D}(V)$ и $\mathcal{R}(I - V)$. Определим оператор S на подпространстве $\mathcal{D}(S) = \mathcal{R}(I - V)$, полагая

$$(12) \quad Sx = i(z + Vz), \text{ если } x = z - Vz.$$

Если $x \in \mathcal{D}(S)$ и $y \in \mathcal{D}(S)$, то $x = z - Vz$ и $y = u - Vu$ для некоторых $z \in \mathcal{D}(V)$ и $u \in \mathcal{D}(V)$. Так как оператор V изометричен, то из утверждения (а) леммы 13.18 следует, что

$$(13) \quad \begin{aligned} (Sx, y) &= i(z + Vz, u - Vu) = i(Vz, u) - i(z, Vu) = \\ &= (z - Vz, iu + iVu) = (x, Sy). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор S симметричен. Так как соотношения (12) можно переписать в виде

$$(14) \quad 2iVz = Sx - ix, \quad 2iz = Sx + ix \quad (z \in \mathcal{D}(V)),$$

то мы видим, что

$$(15) \quad V(Sx + ix) = Sx - ix \quad (x \in \mathcal{D}(S))$$

и что $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(S + iI)$. Поэтому оператор V является преобразованием Кэли оператора S . ■

13.20. Индексы дефекта. Если U_1 и U_2 — преобразования Кэли симметрических операторов T_1 и T_2 , то ясно, что $T_1 \subset T_2$ тогда и только тогда, когда $U_1 \subset U_2$. Поэтому задача о симметрических расширениях симметрических операторов сводится к (более простой) задаче о расширениях изометрий.

Например, всякая изометрия U с областью определения $\mathcal{D}(U)$ расширяется (единственным образом) до изометрии, определенной на замыкании подпространства $\mathcal{D}(U)$. Поэтому из утверждения (а) теоремы 13.19 следует, что *каждый симметрический оператор в пространстве H обладает замкнутым симметрическим расширением.*

Рассмотрим теперь *замкнутый и плотно определенный симметрический оператор T в пространстве H* , и пусть U — его преобразование Кэли. Тогда подпространства $\mathcal{R}(T + iI)$ и $\mathcal{R}(T - iI)$ замкнуты и U является изометрическим отображением первого из них на второе. Размерности ортогональных дополнений этих двух подпространств называются *индексами дефекта* оператора T . (Размерность гильбертова пространства — это, по определению, мощность любого его ортонормированного базиса.)

Так как мы сейчас предполагаем, что подпространство $\mathcal{R}(I-U) = \mathcal{D}(T)$ всюду плотно в H , то для *любого* изометрического расширения U_1 оператора U подпространство $\mathcal{R}(I-U_1)$ всюду плотно в H , так что оператор $I-U_1$ инъективен (лемма 13.18) и оператор U_1 является преобразованием Кэли некоторого симметрического расширения T_1 оператора T .

Следующие три утверждения являются простыми следствиями этих замечаний и теоремы 13.19; в них мы по-прежнему предполагаем, что оператор T замкнут, симметричен и плотно определен.

(а) *Оператор T самосопряжен тогда и только тогда, когда оба его индекса дефекта равны 0.*

(б) *T является максимальным симметрическим оператором в том и только в том случае, когда хотя бы один из его индексов дефекта равен 0.*

(с) *Оператор T тогда и только тогда обладает самосопряженным расширением, когда два его индекса дефекта равны.*

Доказательства утверждений (а) и (б) очевидны. Чтобы убедиться в справедливости утверждения (с), достаточно воспользоваться утверждением (с) теоремы 13.19, заметив при этом, что всякое унитарное расширение оператора U должно изометрично отображать подпространство $[\mathcal{R}(T+iI)]^\perp$ на подпространство $[\mathcal{R}(T-iI)]^\perp$.

13.21. Пример. Пусть V —правый сдвиг в пространстве l^2 . Тогда V является изометрией, а оператор $I-V$ инъективен (гл. 12, упр. 18), так что оператор V является преобразованием Кэли некоторого симметрического оператора T . Так как $\mathcal{D}(V) = l^2$, а подпространство $\mathcal{R}(V)$ имеет коразмерность 1, то индексы дефекта оператора T равны 0 и 1.

Таким образом, мы построили пример плотно определенного замкнутого максимального оператора T , не являющегося самосопряженным.

Разложения единицы

13.22. Обозначения. Пусть H —гильбертово пространство, $\mathfrak{M}$ —некоторая σ -алгебра подмножеств некоторого множества Ω и $E: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ —разложение единицы в смысле определения 12.17. Функциональное исчисление, описанное в теореме 12.21, сопоставляет каждой функции $f \in L^\infty(E)$ оператор $\Psi(f) \in \mathcal{B}(H)$, определенный формулой

$$(1) \quad (\Psi(f)x, y) = \int_{\Omega} f dE_{x, y} \quad (x \in H, y \in H).$$

Теперь мы распространим это исчисление на неограниченные изме-

римые функции f (теорема 13.24). Мы будем пользоваться обозначениями, введенными в определении 12.17.

13.23. Лемма. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция. Положим

$$(1) \quad \mathcal{D}_f = \left\{ x \in H: \int_{\Omega} |f|^2 dE_{x,x} < \infty \right\}.$$

Тогда $\mathcal{D}_f$ является всюду плотным подпространством пространства H . Если $x \in H$ и $y \in H$, то

$$(2) \quad \int_{\Omega} |f| d|E_{x,y}| \leq \|y\| \left\{ \int_{\Omega} |f|^2 dE_{x,x} \right\}^{1/2}.$$

Если функция f ограничена и $v = \Psi(f)z$, то

$$(3) \quad dE_{x,v} = \overline{f} dE_{x,z} \quad (x \in H, z \in H).$$

Доказательство. Если $z = x + y$ и $\omega \in \mathfrak{M}$, то

$$\|E(\omega)z\|^2 \leq (\|E(\omega)x\| + \|E(\omega)y\|)^2 \leq 2\|E(\omega)x\|^2 + 2\|E(\omega)y\|^2,$$

или

$$(4) \quad E_{z,z}(\omega) \leq 2E_{x,x}(\omega) + 2E_{y,y}(\omega).$$

Это показывает, что множество $\mathcal{D}_f$ замкнуто относительно сложения. Замкнутость его относительно умножения на скаляры проверяется еще проще. Таким образом, $\mathcal{D}_f$ — подпространство пространства H .

Для каждого натурального n обозначим через ω_n подмножество множества Ω , состоящее из всех точек, в которых $|f| < n$. Если $x \in \mathcal{R}(E(\omega_n))$, то

$$(5) \quad E(\omega)x = E(\omega)E(\omega_n)x = E(\omega \cap \omega_n)x,$$

так что

$$(6) \quad E_{x,x}(\omega) = E_{x,x}(\omega \cap \omega_n) \quad (\omega \in \mathfrak{M}),$$

и потому

$$(7) \quad \int_{\Omega} |f|^2 dE_{x,x} = \int_{\omega_n} |f|^2 dE_{x,x} \leq n^2 \|x\|^2 < \infty.$$

Таким образом, $\mathcal{R}(E(\omega_n)) \subset \mathcal{D}_f$. Поскольку $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$, из счетной аддитивности векторной меры $\omega \rightarrow E(\omega)y$ следует, что $y = \lim E(\omega_n)y$ для всякого $y \in H$, так что вектор y принадлежит замыканию подпространства $\mathcal{D}_f$. Поэтому подпространство $\mathcal{D}_f$ всюду плотно в H .

Если $x \in H$ и $y \in H$, а f — ограниченная измеримая функция на Ω , то из теоремы Радона—Никодима (см. [27] или [37]) следует, что существует такая измеримая на Ω функция u , для ко-

торой $|u| = 1$ и

$$(8) \quad uf dE_{x,y} = |f| d|E_{x,y}|.$$

Поэтому

$$(9) \quad \int_{\Omega} |f| d|E_{x,y}| = (\Psi(uf)x, y) \leq \| \Psi(uf)x \| \|y\|.$$

По теореме 12.21

$$(10) \quad \| \Psi(uf)x \|^2 = \int_{\Omega} |uf|^2 dE_{x,x} = \int_{\Omega} |f|^2 dE_{x,x}.$$

Соотношения (9) и (10) показывают, что неравенство (2) справедливо для всех ограниченных измеримых функций f ; но тогда оно справедливо и для любых измеримых функций.

Наконец, если f и g — любые ограниченные измеримые функции на Ω , то по теореме 12.21

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g dE_{x,v} &= (\Psi(g)x, v) = (\Psi(g)x, \Psi(f)z) = \\ &= (\Psi(\bar{f})\Psi(g)x, z) = (\Psi(\bar{f}g)x, z) = \int_{\Omega} g\bar{f} dE_{x,z}, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость соотношения (3). ■

13.24. Теорема. Пусть E — разложение единицы на множестве Ω .

(а) Каждой измеримой функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ формула

$$(1) \quad (\Psi(f)x, y) = \int_{\Omega} f dE_{x,y} \quad (x \in \mathcal{D}_f, y \in H)$$

сопоставляет плотно определенный замкнутый оператор $\Psi(f)$ в пространстве H с областью определения $\mathcal{D}(\Psi(f)) = \mathcal{D}_f$, удовлетворяющий соотношению

$$(2) \quad \| \Psi(f)x \|^2 = \int_{\Omega} |f|^2 dE_{x,x} \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

(б) Отображение Ψ мультипликативно в следующем смысле¹⁾: если f и g — измеримые функции, то

$$(3) \quad \Psi(f)\Psi(g) \subset \Psi(fg) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}(\Psi(f)\Psi(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}.$$

Поэтому равенство $\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg)$ справедливо в том и только в том случае, если $\mathcal{D}_{fg} \subset \mathcal{D}_g$.

¹⁾ Отображение Ψ обладает также следующим свойством аддитивности: если f и g — измеримые функции на Ω , то $\Psi(f) + \Psi(g) \subset \Psi(f+g)$; равенство $\Psi(f) + \Psi(g) = \Psi(f+g)$ справедливо тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ (в частности, это всегда так, если хотя бы одна из функций f, g ограничена). — Прим. перев.

(с) Для каждой измеримой функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$(4) \quad \Psi(f)^* = \Psi(\bar{f})$$

и

$$(5) \quad \Psi(f) \Psi(f)^* = \Psi(|f|^2) = \Psi(f)^* \Psi(f).$$

Доказательство. Если $x \in \mathcal{D}_f$, то отображение $y \rightarrow \int_{\Omega} f dE_{x,y}$ определяет ограниченный сопряженно-линейный функционал на пространстве H , норма которого в силу неравенства (2) леммы 13.23 не превосходит $\left(\int_{\Omega} |f|^2 dE_{x,x} \right)^{1/2}$. Отсюда следует, что существует единственный элемент $\Psi(f)x \in H$, удовлетворяющий при всех $y \in H$ соотношению (1), причем

$$(6) \quad \|\Psi(f)x\|^2 \leq \int_{\Omega} |f|^2 dE_{x,x} \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Линейность оператора $\Psi(f)$ на $\mathcal{D}_f$ вытекает из соотношения (1), поскольку мера $E_{x,y}$ линейно зависит от x .

Сопоставим каждой измеримой функции f ее *срезку* $f_n = f\varphi_n$, где $\varphi_n(p) = 1$, если $|f(p)| \leq n$, и $\varphi_n(p) = 0$, если $|f(p)| > n$.

Так как при всяком n функция f_n ограничена, то $\mathcal{D}_{f-f_n} = \mathcal{D}_f$, и потому из неравенства (6) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что

$$(7) \quad \|\Psi(f)x - \Psi(f_n)x\|^2 \leq \int_{\Omega} |f - f_n|^2 dE_{x,x} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

для любого $x \in \mathcal{D}_f$. Поскольку функции f_n ограничены, для них выполняются соотношения вида (2) (теорема 12.21); но тогда в силу (7) соотношение (2) выполняется и для функции f .

Итак, мы доказали все, что входит в утверждение (а), за исключением замкнутости оператора $\Psi(f)$; последняя же получается из теоремы 13.9, если соотношение (4) (которое вскоре будет доказано) применить к функции $\bar{f}$ вместо f .

Переходим к доказательству утверждения (б).

Предположим сначала, что функция f ограничена. Тогда $\mathcal{D}_{fg} \subset \mathcal{D}_g$. Если $z \in H$ и $v = \Psi(\bar{f})z$, то соотношение (3) из леммы 13.23 и теорема 12.21 показывают, что

$$\begin{aligned} (\Psi(f)\Psi(g)x, z) &= (\Psi(g)x, \Psi(\bar{f})z) = (\Psi(g)x, v) = \\ &= \int_{\Omega} g dE_{x,v} = \int_{\Omega} fg dE_{x,z} = (\Psi(fg)x, z). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(8) \quad \Psi(f)\Psi(g)x = \Psi(fg)x \quad (x \in \mathcal{D}_g, \quad f \in L^{\infty}).$$

Если $y = \Psi(g)x$, то из (8) и (2) следует, что

$$(9) \quad \int_{\Omega} |f|^2 dE_{y,y} = \int_{\Omega} |fg|^2 dE_{x,x} \quad (x \in \mathcal{D}_g, f \in L^{\infty}).$$

Пусть теперь f — произвольная (быть может, неограниченная) измеримая функция. Так как равенство (9) выполняется для любой функции $f \in L^{\infty}$, то оно справедливо и для любой измеримой функции¹⁾ f . Подпространство $\mathcal{D}(\Psi(f)\Psi(g))$ состоит, по определению, из всех $x \in \mathcal{D}_g$, для которых $y \in \mathcal{D}_f$, а соотношение (9) показывает, что условие $y \in \mathcal{D}_f$ равносильно условию $x \in \mathcal{D}_{fg}$; поэтому мы видим, что

$$(10) \quad \mathcal{D}(\Psi(f)\Psi(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}.$$

Если $x \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}$, $y = \Psi(g)x$, а f_n — определенная выше срезка функции f , то $f_n \rightarrow f$ в $L^2(E_{y,y})$ и $f_n g \rightarrow fg$ в $L^2(E_{x,x})$; поэтому, применяя соотношение (8) к функциям $f_n \in L^{\infty}$ и g и учитывая (2), получаем

$$\Psi(f)\Psi(g)x = \Psi(f)y = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(f_n)y = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(f_n g)x = \Psi(fg)x,$$

что вместе с (10) доказывает утверждение (b).

Предположим теперь, что $x \in \mathcal{D}_f$ и $y \in \mathcal{D}_{\bar{f}} = \mathcal{D}_f$. Из соотношений (7) и теоремы 12.21 следует, что

$$(\Psi(f)x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Psi(f_n)x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x, \Psi(\bar{f}_n)y) = (x, \Psi(\bar{f})y).$$

Поэтому $y \in \mathcal{D}(\Psi(f)^*)$, так что $\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}(\Psi(f)^*)$, и

$$(11) \quad \Psi(\bar{f}) \subset \Psi(f)^*.$$

Чтобы перейти от (11) к (4), мы должны показать, что всякий вектор $z \in \mathcal{D}(\Psi(f)^*)$ принадлежит $\mathcal{D}_f$. Фиксируем z и положим $v = \Psi(f)^*z$. Поскольку $f_n = f\varphi_n$, из свойства мультипликативности следует, что

$$(12) \quad \Psi(f_n) = \Psi(f)\Psi(\varphi_n).$$

Так как оператор $\Psi(\varphi_n)$ самосопряжен, то в силу теорем 13.2 и 12.21 мы заключаем, что

$$\Psi(\varphi_n)\Psi(f)^* \subset [\Psi(f)\Psi(\varphi_n)]^* = \Psi(f_n)^* = \Psi(\bar{f}_n).$$

¹⁾ Так как в качестве f в соотношении (9) можно взять характеристическую функцию любого измеримого множества, то $dE_{y,y} = |g|^2 dE_{x,x}$, откуда и следует заключение, приведенное в тексте. — *Прим. перев.*

Поэтому

$$(13) \quad \Psi(\varphi_n)v = \Psi(\bar{f}_n)z \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Поскольку $|\varphi_n| \leq 1$, из соотношений (13) и (2) следует, что

$$(14) \quad \int_{\Omega} |f_n|^2 dE_{z,z} = \int_{\Omega} |\varphi_n|^2 dE_{v,v} \leq E_{v,v}(\Omega)$$

при всех n . Поэтому $z \in \mathcal{D}_f$, и соотношение (4) доказано.

Наконец, так как $\mathcal{D}_{f\bar{f}} \subset \mathcal{D}_f$, то с помощью свойства мультипликативности соотношение (5) легко выводится из соотношения (4). ■

Замечание. Если функция g ограничена, то $\mathcal{D}_{fg} \subset \mathcal{D}_g$ (просто потому, что $\mathcal{D}_g = H$), так что $\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(fg)$. Мы воспользовались этим при доказательстве равенства (12). Предыдущее равенство показывает также, что

$$(15) \quad \Psi(g)\Psi(f) \subset \Psi(f)\Psi(g),$$

ибо $\Psi(g)\Psi(f) \subset \Psi(gf) = \Psi(fg)$. Если g — характеристическая функция измеримого множества $\omega \subset \Omega$, то (15) принимает вид

$$(16) \quad E(\omega)\Psi(f) \subset \Psi(f)E(\omega).$$

Отсюда следует, что если $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}(E(\omega))$, то

$$(17) \quad E(\omega)\Psi(f)x = \Psi(f)E(\omega)x = \Psi(f)x.$$

Таким образом, оператор $\Psi(f)$ отображает подпространство $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}(E(\omega))$ в подпространство $\mathcal{R}(E(\omega))$.

Сравните это с замечаниями об инвариантных подпространствах в п. 12.27.

13.25. Теорема. В ситуации, описанной в теореме 13.24, подпространство $\mathcal{D}_f$ совпадает с H тогда и только тогда, когда $f \in L^\infty(E)$.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{D}_f = H$. Так как оператор $\Psi(f)$ замкнут, то из теоремы о замкнутом графике следует, что $\Psi(f) \in \mathcal{B}(H)$. Если $f_n = f\varphi_n$ — срезка функции f , то из свойств мультипликативности в сочетании с теоремой 12.21 следует, что

$$\|f_n\|_\infty = \|\Psi(f_n)\| = \|\Psi(f)\Psi(\varphi_n)\| \leq \|\Psi(f)\|,$$

поскольку $\|\Psi(\varphi_n)\| = \|\varphi_n\|_\infty \leq 1$. Таким образом, $\|f\|_\infty \leq \|\Psi(f)\|$ и $f \in L^\infty(E)$. Обратное утверждение содержится в теореме 12.21. ■

13.26. Определение. Резольвентным множеством линейного оператора T в пространстве H называется множество всех таких $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $T - \lambda I$ взаимно однозначно отображает подпространство $\mathcal{D}(T)$ на все пространство H , причем обратный оператор $(T - \lambda I)^{-1}$ принадлежит $\mathcal{B}(H)$.

Другими словами, оператор $T - \lambda I$ должен иметь обратный оператор $S \in \mathcal{B}(H)$, удовлетворяющий условиям

$$S(T - \lambda I) \subset (T - \lambda I)S = I.$$

Например, теорема 13.13 утверждает, что если оператор T плотно определен и замкнут, то точка -1 принадлежит резольвентному множеству оператора T^*T .

Как и в случае ограниченных операторов, спектром $\sigma(T)$ оператора T называется дополнение к его резольвентному множеству.

Некоторые свойства спектра неограниченного оператора описаны в упражнениях 17—20.

Напомним, что фигурирующее в следующей теореме множество существенных значений функции относительно заданного разложения единицы было определено в п. 12.20.

13.27. Теорема. Пусть E — разложение единицы на множестве Ω , $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция, и

$$\omega_\alpha = \{p \in \Omega: f(p) = \alpha\} \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

(а) Если α принадлежит множеству существенных значений функции f и $E(\omega_\alpha) \neq 0$, то оператор $\Psi(f) - \alpha I$ не инъективен.

(б) Если α принадлежит множеству существенных значений функции f , но $E(\omega_\alpha) = 0$, то оператор $\Psi(f)$ взаимно однозначно отображает подпространство $\mathcal{D}_f$ на некоторое собственное всюду плотное подпространство пространства H и в H существует такая последовательность векторов $\{x_n\}$, что $\|x_n\| = 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\Psi(f)x_n - \alpha x_n] = 0.$$

(с) Спектр $\sigma(\Psi(f))$ оператора $\Psi(f)$ совпадает с множеством существенных значений функции f .

В соответствии с терминологией, употреблявшейся ранее для ограниченных операторов, мы можем сказать, что точка α в случае (а) принадлежит *точечному спектру* оператора $\Psi(f)$, а в случае (б) она принадлежит *непрерывному спектру* этого оператора. Если некоторое $\alpha \in \mathbb{C}$ обладает свойствами, перечисленными в выводах утверждения (б), то иногда говорят, что α является *аппроксимативным собственным* (или *почти собственным*) значением оператора $\Psi(f)$.

Доказательство. (а) Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\alpha = 0$. Если $E(\omega_0) \neq 0$, то существует такой вектор $x_0 \in \mathcal{R}(E(\omega_0))$, что $\|x_0\| = 1$. Пусть φ_0 — характеристическая функция множества ω_0 . Тогда $f\varphi_0 = 0$, так что по свойству мультипликативности $\Psi(f)\Psi(\varphi_0) = 0$. Поскольку $\Psi(\varphi_0) = E(\omega_0)$, отсюда

следует, что

$$\Psi(f)x_0 = \Psi(f)E(\omega_0)x_0 = \Psi(f)\Psi(\varphi_0)x_0 = 0.$$

(b) Снова считаем, что $\alpha = 0$. Условия состоят теперь в том, что $E(\omega_0) = 0$, но $E(\omega_n) \neq 0$ при $n = 1, 2, 3, \dots$, где

$$\omega_n = \left\{ p \in \Omega: |f(p)| < \frac{1}{n} \right\}.$$

Выберем вектор $x_n \in \mathcal{R}(E(\omega_n))$ так, чтобы $\|x_n\| = 1$; пусть φ_n — характеристическая функция множества ω_n . По тем же соображениям, которыми мы воспользовались при доказательстве утверждения (a),

$$\|\Psi(f)x_n\| = \|\Psi(f\varphi_n)x_n\| \leq \|\Psi(f\varphi_n)\| = \|f\varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

Таким образом, $\Psi(f)x_n \rightarrow 0$, хотя $\|x_n\| = 1$.

Если $\Psi(f)x = 0$ для некоторого $x \in \mathcal{D}_f$, то

$$\int_{\Omega} |f|^2 dE_{x,x} = 0.$$

Отсюда следует, что должно выполняться условие $E_{x,x}(\Omega) = 0$, ибо $|f| > 0$ почти всюду относительно меры $E_{x,x}$. Но $E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2$, так что $x = 0$. Поэтому оператор $\Psi(f)$ инъективен.

Аналогично доказывается инъективность оператора $\Psi(f)^* = \Psi(\bar{f})$. Если $y \perp \mathcal{R}(\Psi(f))$, то функционал $x \rightarrow (\Psi(f)x, y) = 0$ непрерывен на $\mathcal{D}_f$, так что $y \in \mathcal{D}(\Psi(f)^*)$ и

$$(x, \Psi(\bar{f})y) = (\Psi(f)x, y) = 0 \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Таким образом, $\Psi(\bar{f})y = 0$, и из инъективности оператора $\Psi(\bar{f})$ следует, что $y = 0$. Это показывает, что подпространство $\mathcal{R}(\Psi(f))$ всюду плотно в H .

Так как оператор $\Psi(f)$ замкнут, то оператор $\Psi(f)^{-1}$ тоже замкнут. Если бы подпространство $\mathcal{R}(\Psi(f))$ совпадало со всем пространством H , то из теоремы о замкнутом графике следовало бы, что $\Psi(f)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Но это невозможно в силу существования построенной выше последовательности $\{x_n\}$.

Таким образом, утверждение (b) доказано.

(c) Из утверждений (a) и (b) следует, что множество существенных значений функции f содержится в спектре $\sigma(\Psi(f))$ оператора $\Psi(f)$. Чтобы получить противоположное включение, предположим, что точка 0 не принадлежит множеству существенных значений функции f . Тогда $g = 1/f \in L^\infty(E)$ и $fg = 1$, так что $\Psi(f)\Psi(g) = \Psi(1) = I$; отсюда следует, что $\mathcal{R}(\Psi(f)) = H$, и по теореме о замкнутом графике $\Psi(f)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Следовательно, $0 \notin \sigma(\Psi(f))$. ■

Следующую теорему иногда называют *принципом замены меры*

13.28. Теорема. *Предположим, что*

(а) $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ *суть σ -алгебры в множествах Ω и Ω' соответственно;*

(b) $E: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ *— разложение единицы;*

(с) $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ *— такое отображение, что $\varphi^{-1}(\omega') \in \mathfrak{M}$ для всякого $\omega' \in \mathfrak{M}'$.*

Если $E'(\omega') = E(\varphi^{-1}(\omega'))$, то $E': \mathfrak{M}' \rightarrow \mathcal{B}(H)$ также является разложением единицы, и

$$(1) \quad \int_{\Omega'} f dE'_{x,y} = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) dE_{x,y}$$

для всякой $\mathfrak{M}'$ -измеримой функции $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$, для которой хотя бы один из этих двух интегралов существует.

Доказательство. То, что E' является разложением единицы, устанавливается с помощью непосредственной проверки, которую мы опускаем. Если f — характеристическая функция, то равенство (1) превращается просто в определение разложения единицы E' . Поэтому оно справедливо для всех простых функций. Отсюда следует справедливость его и в общем случае. ■

Спектральная теорема

13.29. Нормальные операторы. Линейный оператор T (не обязательно ограниченный) в пространстве H называется *нормальным*, если он плотно определен, замкнут и удовлетворяет условию

$$T^*T = TT^*.$$

Каждый из операторов $\Psi(f)$, построенных в теореме 13.24, является нормальным (это — одно из утверждений теоремы). Мы увидим сейчас, что (как и в случае ограниченных операторов, разобранным в гл. 12) всякий нормальный оператор может быть представлен в таком виде с помощью разложения единицы на его спектре (см. определение 13.26). Для самосопряженных операторов этот результат (теорема 13.30) с помощью преобразования Кэли очень быстро выводится из спектральной теоремы для унитарных операторов. Для общих нормальных операторов будет дано другое доказательство (теорема 13.33).

13.30. Теорема. *Для всякого самосопряженного оператора A в пространстве H существует единственное разложение единицы E , определенное на σ -алгебре всех борелевских подмножеств вещественной оси и такое, что*

$$(1) \quad (Ax, y) = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_{x,y}(t) \quad (x \in \mathcal{D}(A), y \in H).$$

Кроме того, это разложение единицы E сосредоточено на множестве $\sigma(A) \subset (-\infty, \infty)$ в том смысле, что $E(\sigma(A)) = I$.

Как и в гл. 12, E будет называться спектральным разложением для оператора A .

Доказательство. Пусть U — преобразование Кэли оператора A , Ω — единичная окружность с выколотой точкой 1, а E' — спектральное разложение для оператора U (см. теоремы 13.19 (с), 12.23 и 12.26). Так как оператор $I - U$ инъективен (теорема 13.19), то, согласно утверждению (b) теоремы 12.29, $E'(\{1\}) = 0$ и потому

$$(2) \quad (Ux, y) = \int_{\Omega} \lambda dE'_{x,y}(\lambda) \quad (x \in H, y \in H).$$

Положим

$$(3) \quad f(\lambda) = \frac{i(1+\lambda)}{1-\lambda} \quad (\lambda \in \Omega)$$

и определим оператор $\Psi(f)$ по функции f и разложению единицы E' , как в теореме 13.24:

$$(4) \quad (\Psi(f)x, y) = \int_{\Omega} f dE'_{x,y} \quad (x \in \mathcal{D}_f, y \in H).$$

Так как функция f вещественна, то оператор $\Psi(f)$ самосопряжен (теорема 13.24), а из равенства $f(\lambda)(1-\lambda) = i(1+\lambda)$ в силу свойства мультипликативности получаем, что

$$(5) \quad \Psi(f)(I - U) = i(I + U).$$

В частности, из соотношения (5) следует, что $\mathcal{R}(I - U) \subset \mathcal{D}(\Psi(f))$. По теореме 13.19

$$(6) \quad A(I - U) = i(I + U)$$

и $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(I - U) \subset \mathcal{D}(\Psi(f))$. Сравнение (5) и (6) показывает, что оператор $\Psi(f)$ является самосопряженным расширением самосопряженного оператора A . По теореме 13.15, $A = \Psi(f)$. Таким образом,

$$(7) \quad (Ax, y) = \int_{\Omega} f dE'_{x,y} \quad (x \in \mathcal{D}(A), y \in H).$$

Согласно утверждению (с) теоремы 13.27, спектр $\sigma(A)$ оператора A совпадает с множеством существенных значений функции f . Поэтому $\sigma(A) \subset (-\infty, \infty)$. Заметим, что f биективно отображает Ω на вещественную ось. Поэтому, полагая для всякого борелевского множества $\omega \subset \Omega$

$$(8) \quad E(f(\omega)) = E'(\omega),$$

мы получаем искомое разложение единицы E , превращающее соотношение (7) в соотношение (1).

Точно так же, как соотношение (1) было выведено из (2) посредством преобразования Кэли, соотношение (2) может быть выведено из (1) с помощью преобразования, обратного к преобразованию Кэли. Поэтому из единственности представления (2) (теорема 12.23) следует единственность разложения единицы E , удовлетворяющего соотношению (1), что завершает доказательство. ■

Весь аппарат, развитый в теореме 13.24, может быть теперь применен к самосопряженным операторам. Следующая теорема доставляет пример такого приложения.

13.31. Теорема. Пусть A — самосопряженный оператор в пространстве H .

(а) $(Ax, x) \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ (сокращенно $A \geq 0$) тогда и только тогда, когда $\sigma(A) \subset [0, \infty)$.

(б) Если $A \geq 0$, то существует единственный самосопряженный оператор $B \geq 0$, для которого $B^2 = A$.

Доказательство. Доказательство утверждения (а) столь похоже на доказательство теоремы 12.32, что мы его опускаем.

Предположим, что $A \geq 0$, так что $\sigma(A) \subset [0, \infty)$, и

$$(1) \quad (Ax, y) = \int_0^\infty t \, dE_{x, y}(t) \quad (x \in \mathcal{D}(A), y \in H),$$

где $\mathcal{D}(A) = \{x \in H: \int_0^\infty t^2 \, dE_{x, x} < \infty\}$ (интеграл берется по лучу $[0, \infty)$). Пусть $s(t)$ — неотрицательный квадратный корень из $t \geq 0$; положим $B = \Psi(s)$, так что

$$(2) \quad (Bx, y) = \int_0^\infty s(t) \, dE_{x, y}(t) \quad (x \in \mathcal{D}_s, y \in H).$$

Если $f = g = s$, то $\mathcal{D}_{fg} \subset \mathcal{D}_g$, и по свойству мультипликативности (утверждение (б) теоремы 13.24) получаем, что $B^2 = A$. Так как функция s вещественна, то оператор B самосопряжен (утверждение (с) теоремы 13.24), а так как $s(t) \geq 0$, то, полагая в соотношении (2) $x = y$, получаем, что $B \geq 0$.

Чтобы доказать единственность, предположим, что C — самосопряженный оператор, $C \geq 0$, $C^2 = A$, и E^C — его спектральное разложение:

$$(3) \quad (Cx, y) = \int_0^\infty s \, dE_{x, y}^C(s) \quad (x \in \mathcal{D}(C), y \in H).$$

Применяя теорему 13.28 к функции $f(t) = t$ на множестве $\Omega' = [0, \infty)$, отображению $\varphi: \Omega = [0, \infty) \rightarrow \Omega' = [0, \infty)$, $\varphi(s) = s^2$, и

разложению единицы E' ,

$$(4) \quad E'(\varphi(\omega)) = E^C(\omega) \quad \text{для } \omega \subset \Omega = [0, \infty),$$

получаем

$$(5) \quad (Ax, y) = (C^2x, y) = \int_0^\infty s^2 dE_{x,y}^C(s) = \int_0^\infty t dE_{x,y}'(t).$$

Соотношения (1) и (5) и утверждение единственности из теоремы 13.30 показывают, что $E' = E$. В силу (4) разложение единицы E однозначно определяет разложение единицы E^C , а потому и оператор C . ■

При доказательстве спектральной теоремы 13.33 мы будем пользоваться следующими свойствами нормальных операторов.

13.32. Теорема. Пусть N — нормальный оператор в пространстве H . Тогда

- (a) $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(N^*)$;
- (b) $\|Nx\| = \|N^*x\|$ для всякого $x \in \mathcal{D}(N)$;
- (c) N является максимальным нормальным оператором.

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{D}(N^*N) = \mathcal{D}(NN^*)$; тогда $Ny \in \mathcal{D}(N^*)$, так что $(Ny, Ny) = (y, N^*Ny)$; аналогично $N^*y \in \mathcal{D}(N)$, а так как $N^{**} = N$ (теорема 13.12), то $(N^*y, N^*y) = (y, NN^*y)$. Поскольку $N^*N = NN^*$, отсюда следует, что

$$(1) \quad \|Ny\| = \|N^*y\| \quad \text{для всех } y \in \mathcal{D}(N^*N).$$

Фиксируем теперь $x \in \mathcal{D}(N)$. Пусть N' — сужение оператора N на подпространство $\mathcal{D}(N^*N)$. По теореме 13.13 точка $\{x, Nx\}$ принадлежит замыканию графика оператора N' . Поэтому существуют такие векторы $y_i \in \mathcal{D}(N^*N)$, что

$$(2) \quad \|y_i - x\| \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty$$

и

$$(3) \quad \|Ny_i - Nx\| \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Согласно (1), $\|N^*y_i - N^*y_j\| = \|Ny_i - Ny_j\|$, поэтому из (3) следует, что $\{N^*y_i\}$ — последовательность Коши в пространстве H . Значит, существует такой вектор $z \in H$, что

$$(4) \quad \|N^*y_i - z\| \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Поскольку оператор N^* замкнут, из (2) и (4) следует, что $\{x, z\} \in \mathcal{G}(N^*)$.

Из этого мы заключаем, во-первых, что $x \in \mathcal{D}(N^*)$, так что $\mathcal{D}(N) \subset \mathcal{D}(N^*)$, и, во-вторых, что

$$(5) \quad \|N^*x\| = \|z\| = \lim \|N^*y_i\| = \lim \|Ny_i\| = \|Nx\|.$$

Это доказывает утверждение (b) и одно из двух включений, со-

ставляющих утверждение (а). Для доказательства второго включения заметим, что оператор N^* тоже является нормальным (поскольку $N^{**} = N$), так что

$$(6) \quad \mathcal{D}(N^*) \subset \mathcal{D}(N^{**}) = \mathcal{D}(N).$$

Наконец, предположим, что оператор M нормален и что $N \subset M$. Тогда $M^* \subset N^*$, так что

$$(7) \quad \mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M^*) \subset \mathcal{D}(N^*) = \mathcal{D}(N) \subset \mathcal{D}(M),$$

и потому $\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(N)$; таким образом, $M = N$. ■

13.33. Теорема. Для каждого нормального оператора N в пространстве H существует единственное спектральное разложение E , удовлетворяющее соотношению

$$(1) \quad (Nx, y) = \int_{\sigma(N)} \lambda dE_{x, y}(\lambda) \quad (x \in \mathcal{D}(N), y \in H).$$

Кроме того, $E(\omega)S = SE(\omega)$ для всякого борелевского множества $\omega \subset \sigma(N)$ и всякого оператора $S \in \mathcal{B}(H)$, коммутирующего с оператором N в том смысле, что $SN \subset NS$.

Из соотношения (1) и теоремы 13.24 следует также, что $E(\omega)N \subset NE(\omega)$.

Доказательство. Наша первая цель состоит в том, чтобы найти такие самосопряженные проекторы P_i с попарно ортогональными образами, чтобы операторы NP_i были нормальными и выполнялись бы условия $P_i N \subset N P_i \in \mathcal{B}(H)$ и $x = \sum P_i x$ для всякого $x \in H$. Затем применение спектральной теоремы для ограниченных нормальных операторов к операторам NP_i приведет к требуемому результату.

По теореме 13.13 существуют такие операторы $B \in \mathcal{B}(H)$ и $C \in \mathcal{B}(H)$, что $B \geq 0$, $\|B\| \leq 1$, $C = NB$ и

$$(2) \quad B(I + N^*N) \subset I = (I + N^*N)B.$$

Так как $N^*N = NN^*$, то из (2) следует, что

$$(3) \quad BN = BN(I + N^*N)B = B(I + N^*N)NB \subset NB = C.$$

Таким образом, $BC = B(NB) = (BN)B \subset CB$. Так как операторы B и C ограничены, отсюда следует, что $BC = CB$, и потому оператор C коммутирует с любой ограниченной борелевской функцией от оператора B (см. п. 12.24).

Выберем такую числовую последовательность $\{t_i\}$, что $1 = t_0 > t_1 > t_2 > \dots$ и $\lim t_i = 0$. Для всякого $i \geq 1$ обозначим через p_i характеристическую функцию полуинтервала $(t_i, t_{i-1}]$ и положим $f_i(t) = p_i(t)/t$. Каждая из функций f_i ограничена на спектре $\sigma(B) \subset [0, 1]$ оператора B . Пусть E^B — спектральное разложение

для оператора B . Соотношение (2) показывает, что оператор B инъективен, так что 0 не является его собственным значением. Следовательно, $E^B(\{0\}) = 0$ и разложение единицы E^B сосредоточено на полуинтервале $(0, 1]$.

Положим

$$(4) \quad P_i = p_i(B) \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Так как $p_i p_j = 0$ при $i \neq j$, то образы проекторов P_i взаимно ортогональны. Так как $\sum p_i$ совпадает с характеристической функцией полуинтервала $(0, 1]$, то

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{\infty} P_i x = E^B((0, 1]) x = x \quad (x \in H).$$

Поскольку $p_i(t) = t f_i(t)$, имеем

$$(6) \quad N P_i = N B f_i(B) = C f_i(B) \in \mathcal{B}(H),$$

и в силу (3) $P_i N = f_i(B) B N \subset f_i(B) C$, так что

$$(7) \quad P_i N \subset N P_i.$$

Согласно (6), $\mathcal{D}(N P_i) = H$, так что

$$(8) \quad \mathcal{R}(P_i) \subset \mathcal{D}(N) \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Поэтому из (7) следует, что если $P_i x = x$, то $P_i N x = N P_i x = N x$. Таким образом, оператор N отображает подпространство $\mathcal{R}(P_i)$ в себя, т. е. $\mathcal{R}(P_i)$ является инвариантным подпространством оператора N .

Теперь мы хотим доказать, что каждый из операторов $N P_i$ является нормальным. Из включения (7) и теоремы 13.2 следует, что

$$(9) \quad (N P_i)^* \subset (P_i N)^* = N^* P_i.$$

Но $N P_i \in \mathcal{B}(H)$, так что оператор $(N P_i)^*$ определен на всем пространстве H . Поэтому

$$(10) \quad (N P_i)^* = N^* P_i,$$

и в силу (8) и (10) теорема 13.32 показывает, что

$$(11) \quad \|N P_i x\| = \|N^* P_i x\| = \|(N P_i)^* x\| \quad (x \in H).$$

По теореме 12.12 отсюда следует, что оператор $N P_i$ нормален. Вместе с соотношениями (5), (6) и (7) это показывает, что наша первая цель достигнута.

По теореме 12.23 каждый из операторов $N P_i$ обладает спектральным разложением E^i , определенным на всех борелевских подмножествах комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Так как подпространство $\mathcal{R}(P_i)$ инвариантно относительно оператора N , то проектор P_i коммутирует с оператором $N P_i$.

Поэтому для всякого борелевского множества $\omega \subset \mathbb{C}$ проектор $E^i(\omega)$ коммутирует с проектором P_i , так что

$$(12) \quad E^i(\omega) P_i x = P_i E^i(\omega) x \in \mathcal{R}(P_i) \quad (x \in H, i = 1, 2, 3, \dots).$$

Так как образы проекторов P_i попарно ортогональны, а из (5) следует, что

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \|E^i(\omega) P_i x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|P_i x\|^2 = \|x\|^2,$$

то ряд $\sum E^i(\omega) P_i x$ для всякого $x \in H$ сходится по норме пространства H ; это позволяет для любого борелевского множества $\omega \subset \mathbb{C}$ определить оператор

$$(14) \quad E(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} E^i(\omega) P_i.$$

Легко проверить, что E является разложением единицы. Следовательно, существует нормальный оператор M , определенный соотношением

$$(15) \quad (Mx, y) = \int \lambda dE_{x, y}(\lambda) \quad (x \in \mathcal{D}(M), y \in H),$$

где область интегрирования есть $\mathbb{C}$, а

$$(16) \quad \mathcal{D}(M) = \left\{ x \in H: \int |\lambda|^2 dE_{x, x}(\lambda) < \infty \right\}.$$

Мы покажем теперь, что $M = N$, и тем самым будет доказана возможность представления (1).

Для всякого $x \in H$ соотношение (14) показывает, что

$$(17) \quad E_{x, x}(\omega) = \|E(\omega)x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|E^i(\omega) P_i x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} E_{x_i, x_i}^i(\omega),$$

где $x_i = P_i x$. Если $x \in \mathcal{D}(N)$, то $P_i N x = N P_i x$, так что

$$(18) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \int |\lambda|^2 dE_{x_i, x_i}^i(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \|N P_i x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|P_i N x\|^2 = \|N x\|^2.$$

Из равенств (17) и (18) следует, что для всякого $x \in \mathcal{D}(N)$ интеграл, участвующий в определении (16) подпространства $\mathcal{D}(M)$, конечен. Поэтому

$$(19) \quad \mathcal{D}(N) \subset \mathcal{D}(M).$$

Если $x \in \mathcal{R}(P_i)$, то $x = P_i x$, и потому $E(\omega)x = E^i(\omega)x$; таким образом, $E_{x, y}^i = E_{x, y}$ для всякого $y \in H$. Стало быть,

$$(Nx, y) = (N P_i x, y) = \int \lambda dE_{x, y}^i(\lambda) = \int \lambda dE_{x, y}(\lambda) = (Mx, y).$$

Следовательно,

$$(20) \quad P_i N x = N P_i x = M P_i x \quad (x \in \mathcal{D}(N); i = 1, 2, 3, \dots).$$

Поэтому если $Q_i = P_1 + \dots + P_i$, то $Q_i N x = M Q_i x$. Таким образом,

$$(21) \quad \{Q_i x, Q_i N x\} \in \mathcal{G}(M) \quad (x \in \mathcal{D}(N); i = 1, 2, 3, \dots).$$

Так как график $\mathcal{G}(M)$ замкнут, то из (5) и (21) следует, что $\{x, N x\} \in \mathcal{G}(M)$, т. е. $N x = M x$ для всякого $x \in \mathcal{D}(N)$. Учитывая включение (19), получаем, что $N \subset M$, откуда в силу максимальнойности оператора N (теорема 13.32) следует, что $N = M$.

Это дает нам представление (1) с той лишь разницей, что вместо $\sigma(N)$ в нем пока участвует $\mathbf{C}$. Однако из утверждения (с) теоремы 13.27 следует, что разложение единицы E в действительности сосредоточено на $\sigma(N)$.

Чтобы доказать единственность спектрального разложения E , рассмотрим оператор

$$(22) \quad T = N(I + \sqrt{N^* N})^{-1},$$

где $\sqrt{N^* N}$ — единственный положительный квадратный корень из оператора $N^* N$. Если справедливо представление (1), то из теоремы 13.24 следует, что

$$(23) \quad T = \int \varphi dE,$$

где $\varphi(\lambda) = \lambda/(1 + |\lambda|)$, так что $T \in \mathcal{B}(H)$, а так как функция φ взаимно однозначно отображает $\mathbf{C}$ на открытый единичный диск, то из теоремы 13.28 следует, что спектральное разложение E^T оператора T связано с разложением единицы E соотношением

$$(24) \quad E(\omega) = E^T(\varphi(\omega))$$

(здесь $\omega \subset \mathbf{C}$ — любое борелевское множество). Поэтому единственность E^T (теорема 12.23) влечет за собой единственность E .

Наконец, предположим, что $S \in \mathcal{B}(H)$ и $SN \subset NS$. Положим $Q = Q_n = E(\tilde{\omega})$, где $\tilde{\omega} = \{\lambda: |\lambda| < n\}$, а n — некоторое положительное целое число. Тогда оператор NQ допускает представление

$$(25) \quad NQ = \int f dE,$$

где $f(\lambda) = \lambda$ на $\tilde{\omega}$ и $f(\lambda) = 0$ вне $\tilde{\omega}$, и потому является нормальным и принадлежит $\mathcal{B}(H)$. Из теоремы 13.28 следует, что спектральное разложение E' для оператора NQ удовлетворяет условию $E'(\omega) = E(f^{-1}(\omega))$, или

$$(26) \quad \begin{aligned} E'(\omega) &= E(\omega \cap \tilde{\omega}) = QE(\omega), & \text{если } 0 \notin \omega, \\ E'(\{0\}) &= E(\{0\} \cup (\mathbf{C} \setminus \tilde{\omega})) = E(\{0\}) + I - Q. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(27) \quad E(\omega) = QE(\omega) = QE'(\omega), \quad \omega \subset \tilde{\omega}.$$

Из теоремы 13.24 следует, что $QN \subset NQ = QNQ$, так что

$$(28) \quad (QSQ)(NQ) = QSNQ \subset QNSQ \subset (NQ)(QSQ).$$

Так как $(QSQ)(NQ) \in \mathcal{B}(H)$, то включения (28) в действительности являются равенствами. Поэтому из теоремы 12.23 следует, что оператор QSQ коммутирует с каждым из проекторов $E'(\omega)$.

Рассмотрим любое ограниченное борелевское множество ω и выберем число n так, чтобы $\omega \subset \tilde{\omega}$. В силу (27)

$$QSE(\omega) = QSQE'(\omega) = E'(\omega)QSQ = E(\omega)SQ,$$

так что

$$(29) \quad Q_n SE(\omega) = E(\omega)SQ_n$$

для всех достаточно больших n .

Устремляя n к бесконечности в равенстве (29), в силу предложения 12.18 получаем, что

$$(30) \quad SE(\omega) = E(\omega)S$$

для всякого ограниченного борелевского множества ω , а потому и для любого борелевского множества $\omega \subset C$. ■

Полугруппы операторов

13.34. Определения. Пусть X — банахово пространство; предположим, что каждому $t \in [0, \infty)$ таким образом сопоставлен оператор $Q(t) \in \mathcal{B}(X)$, что выполняются следующие условия:

- (a) $Q(0) = I$;
- (b) $Q(s+t) = Q(s)Q(t)$ для всех $s \geq 0$ и $t \geq 0$;
- (c) $\lim_{t \rightarrow 0} \|Q(t)x - x\| = 0$ для всякого $x \in X$.

Если выполняются условия (a) и (b), то $\{Q(t)\}$ называется *полугруппой* (или, точнее, *однопараметрической полугруппой*) операторов. Такие полугруппы допускают экспоненциальное представление при условии, что отображение $t \rightarrow Q(t)$ удовлетворяет некоторым условиям непрерывности. В качестве такого условия непрерывности мы выбрали здесь условие (c), с которым легко работать.

По аналогии с тем, что всякая ненулевая непрерывная комплексная функция f , удовлетворяющая условию $f(s+t) = f(s)f(t)$, представляется в виде $f(t) = \exp(At)$, так что число $A = f'(0)$ однозначно ее определяет, мы связываем с полугруппой $\{Q(t)\}$ операторы A_ε , определенные формулой

$$(1) \quad A_\varepsilon x = \frac{1}{\varepsilon} [Q(\varepsilon)x - x] \quad (x \in X, \varepsilon > 0),$$

и полагаем

$$(2) \quad Ax = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon x$$

для всех $x \in \mathcal{D}(A)$, т. е. для всех векторов x , для которых предел (2) существует в смысле сильной топологии в пространстве X .

Ясно, что $\mathcal{D}(A)$ является подпространством пространства X и что A — линейный оператор в X .

Этот оператор (который, по существу, есть $Q'(0)$) называется *инфинитезимальным производящим оператором* полугруппы $\{Q(t)\}$.

13.35. Теорема. Если $\{Q(t)\}$ — полугруппа операторов, удовлетворяющая сформулированным выше условиям, то

(а) для всякого $x \in X$ отображение $t \rightarrow Q(t)x$ полуси $[0, \infty)$ в пространство X непрерывно;

(б) A является плотно определенным замкнутым линейным оператором в пространстве X ;

(с) для всякого $x \in \mathcal{D}(A)$ векторная функция $Q(t)x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} Q(t)x = A Q(t)x = Q(t)Ax;$$

(d) для всякого $x \in X$

$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\exp(tA_\varepsilon)]x,$$

причем сходимость равномерна на каждом компактном подмножестве полуоси $[0, \infty)$.

Весьма замечательно, что утверждение (d) справедливо для всех $x \in X$, а не только для $x \in \mathcal{D}(A)$. Предел, фигурирующий в этом утверждении, как и предел, определяющий производную, участвующую в утверждении (с), понимается в смысле сильной топологии пространства X .

Доказательство. Если бы существовала такая последовательность $t_n \rightarrow 0$, что $\|Q(t_n)\| \rightarrow \infty$, то из теоремы Банаха — Штейнгауза следовало бы, что для некоторого $x \in X$ последовательность $\{\|Q(t_n)x\|\}$ не ограничена. Но это противоречило бы нашему предположению, что

$$(1) \quad \|Q(t)x - x\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0.$$

Следовательно, существуют такие $\delta > 0$ и $\gamma_0 < \infty$, что

$$(2) \quad \|Q(t)\| \leq \gamma_0, \quad \text{если} \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Положим $\gamma = \sup \{\|Q(s)\| : 0 \leq s \leq 1\}$. Из неравенства (2) и функционального уравнения

$$(3) \quad Q(s+t) = Q(s)Q(t)$$

следует, что $\gamma < \infty$. Кроме того, $\gamma \geq 1$ и

$$(4) \quad \|Q(t)\| \leq \gamma^{1+t} \quad (0 \leq t < \infty),$$

так как если $n \leq t < n+1$, то $Q(t) = Q(1)^n Q(t-n)$.

Неравенство (4) можно применить для оценки нормы оператора

$$\exp(tA_\varepsilon) = e^{-t/\varepsilon} \exp\left\{\frac{t}{\varepsilon} Q(\varepsilon)\right\} = e^{-t/\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q(n\varepsilon)}{n! \varepsilon^n};$$

в результате получаем, что

$$\|\exp(tA_\varepsilon)\| \leq e^{-t/\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \gamma^{1+n\varepsilon}}{n! \varepsilon^n} = \gamma \exp\left\{t \frac{\gamma^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right\}.$$

Если $0 < \varepsilon \leq 1$, то $\gamma^\varepsilon - 1 \leq \varepsilon(\gamma - 1)$. Следовательно,

$$(5) \quad \|\exp(tA_\varepsilon)\| \leq \gamma \exp(t\gamma) \quad (0 < \varepsilon \leq 1, 0 \leq t < \infty).$$

После этих приготовлений мы приступаем к главной части доказательства.

Если $x \in X$ и $\varepsilon > 0$, то условие (1) показывает, что существует такое $\eta = \eta(x, \varepsilon) > 0$, что $\|Q(t)x - x\| < \varepsilon$ при $0 \leq t \leq \eta$. Отсюда и из неравенства (4) следует, что если $0 \leq s \leq t \leq s + \eta \leq n$, то

$$\begin{aligned} \|Q(t)x - Q(s)x\| &= \|Q(s)[Q(t-s)x - x]\| \leq \\ &\leq \|Q(s)\| \|Q(t-s)x - x\| \leq \gamma^{n+1}\varepsilon. \end{aligned}$$

Это доказывает справедливость утверждения (а).

Поэтому существует X -значный интеграл

$$(6) \quad M_t(x) = \frac{1}{t} \int_0^t Q(s)x \, ds \quad (x \in X, t > 0).$$

В действительности из неравенства (4) следует, что $M_t \in \mathcal{B}(X)$ и $\|M_t\| \leq \gamma^{1+t}$. Мы утверждаем, что справедливо тождество

$$(7) \quad A_\varepsilon M_t = A_t M_\varepsilon \quad (\varepsilon > 0, t > 0).$$

Чтобы доказать это, перепишем очевидное равенство

$$\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^{t+\varepsilon} = \int_0^t + \int_t^{t+\varepsilon}$$

в виде

$$(8) \quad \int_\varepsilon^{t+\varepsilon} - \int_0^t = \int_t^{t+\varepsilon} - \int_0^\varepsilon$$

и воспользуемся последним соотношением в случае, когда подынтегральная (векторная) функция есть $Q(s)x$. В силу (3) левая часть соотношения (8) принимает вид

$$\int_0^t [Q(\varepsilon + s) - Q(s)]x \, ds = [Q(\varepsilon) - I] \int_0^t Q(s)x \, ds = \varepsilon A_\varepsilon t M_t x.$$

Точно так же проверяется, что правая часть (8) есть $tA_t \varepsilon M_\varepsilon x$, откуда следует справедливость соотношения (7).

Теперь мы можем доказать утверждение (b). Из (1) и (6) следует, что $M_t x \rightarrow x$ при $t \rightarrow 0$ для всякого $x \in X$. Если $t > 0$, то $A_t \in \mathcal{B}(X)$. Поэтому в силу (7)

$$(9) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon M_t x = A_t \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon x = A_t x.$$

Отсюда следует, что $M_t x \in \mathcal{D}(A)$ для любого $t > 0$, т. е. подпространство $\mathcal{D}(A)$ всюду плотно в X , и что

$$(10) \quad A M_t x = A_t x \quad (x \in X, t > 0).$$

Поскольку операторы $Q(s)$ и $Q(t)$ коммутируют, операторы A_ε и M_t тоже коммутируют. Поэтому из (7) следует, что если $x \in \mathcal{D}(A)$ и $t > 0$, то

$$(11) \quad M_t A x = M_t \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon A_t x = A_t x.$$

Если теперь $x_n \in \mathcal{D}(A)$, $x_n \rightarrow x$ и $A x_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$, то $A_t x = M_t y$, поскольку равенство (11) показывает, что $A_t x_n = M_t A x_n$. Так как $M_t y \rightarrow y$ при $t \rightarrow 0$, то отсюда следует, что $x \in \mathcal{D}(A)$ и $A x = y$. Таким образом, оператор A замкнут и утверждение (b) доказано.

Предположим теперь, что $x \in \mathcal{D}(A)$. Тогда для всех $t > 0$

$$(12) \quad A_\varepsilon Q(t) x = Q(t) A_\varepsilon x \rightarrow Q(t) A x \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

так что $Q(t) x \in \mathcal{D}(A)$ и

$$(13) \quad A Q(t) x = Q(t) A x.$$

Умножая соотношение (11) на t , мы получаем, что

$$(14) \quad \int_0^t Q(s) A x ds = Q(t) x - x.$$

Так как, согласно утверждению (a), подынтегральная функция $Q(s) A x$ непрерывна, то производная этого интеграла по t существует и равна $Q(t) A x$. Вместе с равенством (13) это доказывает справедливость утверждения (c).

Переходим к доказательству утверждения (d). Если $x \in \mathcal{D}(A)$ и $0 < s < t$, то утверждение (c) показывает, что

$$\frac{d}{ds} [\exp \{(t-s) A_\varepsilon\} Q(s) x] = \exp \{(t-s) A_\varepsilon\} Q(s) (A x - A_\varepsilon x),$$

а так как

$$\exp \{(t-s) A_\varepsilon\} Q(s) x = \begin{cases} Q(t) x, & \text{если } s = t, \\ \exp (t A_\varepsilon) x, & \text{если } s = 0, \end{cases}$$

то

$$Q(t)x - \exp(tA_\varepsilon)x = \int_0^t \exp\{(t-s)A_\varepsilon\} Q(s)(Ax - A_\varepsilon x) ds.$$

Согласно неравенствам (4) и (5), норма подынтегральной функции не превосходит величины

$$\gamma \exp\{(t-s)\gamma\} \gamma^{1+s} \|Ax - A_\varepsilon x\|,$$

так что

$$(15) \quad \|Q(t)x - \exp(tA_\varepsilon)x\| \leq K(t) \|Ax - A_\varepsilon x\|,$$

где K — возрастающая непрерывная функция на $[0, \infty)$.

Чтобы завершить доказательство, фиксируем $t_0 > 0$ и положим

$$(16) \quad S(t, \varepsilon) = Q(t) - \exp(tA_\varepsilon) \quad (t > 0, 0 < \varepsilon \leq 1).$$

Из неравенств (4) и (5) следует существование такой постоянной $K_0 < \infty$, что

$$(17) \quad \|S(t, \varepsilon)\| \leq K_0 \quad (0 \leq t \leq t_0, 0 < \varepsilon \leq 1).$$

Если же $x_0 \in X$ и $\eta > 0$, то найдется такой вектор $x \in \mathcal{D}(A)$, что

$$(18) \quad \|x - x_0\| < \frac{\eta}{K_0}.$$

Из неравенств (15), (17) и (18) следует, что

$$\begin{aligned} \|S(t, \varepsilon)x_0\| &\leq \|S(t, \varepsilon)x\| + \|S(t, \varepsilon)\| \|x - x_0\| < \\ &< K(t_0) \|Ax - A_\varepsilon x\| + \eta \end{aligned}$$

при $0 \leq t \leq t_0$. Так как $x \in \mathcal{D}(A)$, то мы в конце концов получаем, что для всех достаточно малых ε

$$(19) \quad \|Q(t)x_0 - \exp(tA_\varepsilon)x_0\| < \eta \quad (0 \leq t \leq t_0),$$

и доказательство окончено. ■

Теперь естественно спросить, в каких случаях можно удалить из формулировки утверждения (d) знак предела, т. е. при каких условиях справедливо экспоненциальное представление $Q(t) = \exp(tA)$. Следующие две теоремы дают ответы на этот вопрос.

13.36. Теорема. Если $\{Q(t)\}$ — полугруппа операторов, удовлетворяющая условиям п. 13.34, то следующие три условия эквивалентны:

$$(a) \quad \mathcal{D}(A) = X;$$

$$(b) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Q(\varepsilon) - I\| = 0;$$

$$(c) \quad A \in \mathcal{B}(X) \text{ и } Q(t) = e^{tA} \quad (0 \leq t < \infty).$$

Доказательство. Мы будем пользоваться теми же обозначениями, что и в доказательстве теоремы 13.35.

Если выполняется условие (а), то из теоремы Банаха — Штейнгауза следует, что для всех достаточно малых положительных ε нормы операторов A_ε ограничены в совокупности. Так как $Q(\varepsilon) - I = \varepsilon A_\varepsilon$, то отсюда следует, что выполняется условие (b).

Если выполняется условие (b), то верно также, что $\|M_t - I\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Фиксируем столь малое $t > 0$, что оператор M_t обратим в $\mathcal{B}(X)$. Так как $M_t A_\varepsilon = A_t M_\varepsilon$, то

$$(1) \quad A_\varepsilon = (M_t)^{-1} A_t M_\varepsilon.$$

Это соотношение показывает прежде всего, что предел $Ax = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon x$ существует для всякого $x \in X$ (ибо $M_\varepsilon x \rightarrow x$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $(M_t)^{-1} A_t \in \mathcal{B}(X)$), а также что $A = (M_t)^{-1} A_t$ и, наконец, что

$$(2) \quad \|A_\varepsilon - A\| \leq \|(M_t)^{-1} A_t\| \|M_\varepsilon - I\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теперь из утверждения (d) теоремы 13.35 вытекает справедливость равенства $Q(t) = \exp(tA)$, поскольку из (2) следует, что

$$(3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\exp(tA_\varepsilon) - \exp(tA)\| = 0 \quad (0 \leq t < \infty).$$

Таким образом, из (b) следует (c).

Импликация (c) $\Rightarrow$ (a) тривиальна. ■

Наша последняя теорема относится к гильбертовым пространствам.

13.37. Теорема. *Предположим, что $\{Q(t): 0 \leq t < \infty\}$ — полугруппа нормальных операторов $Q(t) \in \mathcal{B}(H)$, удовлетворяющая условию непрерывности*

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \|Q(t)x - x\| = 0 \quad (x \in H).$$

Тогда ее инфинитезимальный производящий оператор A является нормальным оператором в пространстве H , существует такая постоянная $\gamma < \infty$, что $\operatorname{Re} \lambda \leq \gamma$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$, и, наконец,

$$(2) \quad Q(t) = e^{tA} \quad (0 \leq t < \infty).$$

Если все операторы $Q(t)$ унитарны, то в пространстве H существует такой самосопряженный оператор S , что

$$(3) \quad Q(t) = e^{itS} \quad (0 \leq t < \infty).$$

Последнее утверждение этой теоремы, относящееся к унитарным полугруппам, составляет содержание классической теоремы М. Стоуна.

Примечание. Хотя $\mathcal{D}(A)$ может быть собственным подпространством пространства H , операторы e^{tA} определены на всем пространстве H и ограничены. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим спектральное разложение E^A оператора A (теорема 13.33).

Так как $|e^{t\lambda}| \leq e^{t\gamma}$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$, то функциональное исчисление, построенное в теореме 12.21, позволяет нам определить ограниченные операторы e^{tA} формулой

$$(4) \quad e^{tA} = \int_{\sigma(A)} e^{t\lambda} dE^A(\lambda) \quad (0 \leq t < \infty).$$

Теорема 13.37 допускает простое обращение: если оператор A нормален и существует такое $\gamma < \infty$, что $\operatorname{Re} \lambda \leq \gamma$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$, то формула (2) определяет полугруппу нормальных операторов $\{Q(t)\}$, удовлетворяющую условию (1), поскольку из теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что для всякого $x \in H$

$$(5) \quad \|Q(t)x - x\|^2 = \int_{\sigma(A)} |e^{t\lambda} - 1|^2 dE_{x,x}^A(\lambda) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow 0$.

Доказательство. Так как операторы $Q(s)$ и $Q(t)$ коммутируют, то из теоремы 12.16 следует, что операторы $Q(s)$ и $Q(t)^*$ тоже коммутируют. Поэтому наименьшая замкнутая подалгебра алгебры $\mathcal{B}(H)$, содержащая все операторы $Q(t)$ и все операторы $Q(t)^*$, является нормальной. Пусть Δ — ее пространство максимальных идеалов, а E — соответствующее разложение единицы (см. теорему 12.22).

Пусть f_t и a_ε — преобразования Гельфанда операторов $Q(t)$ и A_ε соответственно. Тогда

$$(6) \quad a_\varepsilon = \frac{f_\varepsilon - 1}{\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0),$$

и простое вычисление показывает, что

$$(7) \quad a_{2\varepsilon} - a_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} (a_\varepsilon)^2,$$

ибо $f_{2\varepsilon} = (f_\varepsilon)^2$. Положим

$$(8) \quad b(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2^{-n}}(p)$$

для всех тех $p \in \Delta$, для которых этот предел существует (как комплексное число), а для остальных $p \in \Delta$ положим $b(p) = 0$. Тогда b — комплексная борелевская функция на Δ . С помощью теоремы 13.24 введем оператор $B = \Psi(b)$ с областью определения

$$(9) \quad \mathcal{D}(B) = \left\{ x \in H: \int_{\Delta} |b|^2 dE_{x,x} < \infty \right\}.$$

Тогда B — нормальный оператор в пространстве H .

Мы покажем, что $A = B$.

Если $x \in \mathcal{D}(A)$, то величины $\|A_\varepsilon x\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ ограничены. Следовательно, существует такое $C_x < \infty$, что

$$(10) \quad \int_{\Delta} |a_\varepsilon|^2 dE_{x,x} = \|A_\varepsilon x\|^2 \leq C_x \quad (0 < \varepsilon \leq 1),$$

и потому в силу (7)

$$(11) \quad \int_{\Delta} |a_{2\varepsilon} - a_\varepsilon| dE_{x,x} \leq \frac{\varepsilon}{2} C_x \quad (0 < \varepsilon \leq 1).$$

Рассмотрим неравенство (11) при $\varepsilon = 2^{-n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и сложим все возникающие неравенства. Из полученного таким способом неравенства следует, что

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2^{-n+1}} - a_{2^{-n}}| < \infty \quad \text{почти всюду } [E_{x,x}].$$

Поэтому предел (8) существует почти всюду $[E_{x,x}]$, и из неравенства (10) и леммы Фату следует, что

$$(13) \quad \int_{\Delta} |b|^2 dE_{x,x} \leq C_x.$$

Таким образом, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$.

Неравенство (5) из доказательства теоремы 13.35 показывает, что $\|\exp(A_\varepsilon)\| \leq \gamma_1 < \infty$ при $0 < \varepsilon \leq 1$, где постоянная γ_1 определяется полугруппой $\{Q(t)\}$. Следовательно, $|\exp a_\varepsilon(p)| \leq \gamma_1$ для всех $p \in \Delta$, поскольку преобразование Гельфанда является изометрией B^* -алгебр. Поэтому из формулы (8) следует, что $|\exp b(p)| \leq \gamma_1$ для всех $p \in \Delta$. Таким образом, существует такое $\gamma < \infty$, что

$$(14) \quad \operatorname{Re} b(p) \leq \gamma \quad (p \in \Delta).$$

Если $\varepsilon \rightarrow 0$ по последовательности $\{2^{-n}\}$, то для любого $x \in \mathcal{D}(A)$ и любого $t \geq 0$ величина

$$(15) \quad \|\exp(tA_\varepsilon)x - \exp(tB)x\|^2 = \int_{\Delta} |\exp(ta_\varepsilon) - \exp(tb)|^2 dE_{x,x}$$

стремится к 0, поскольку подынтегральная функция при $0 < \varepsilon \leq 1$ ограничена постоянной $4\gamma_1^{2t}$ и почти всюду $[E_{x,x}]$ стремится к 0. Поэтому из утверждения (d) теоремы 13.35 следует, что

$$(16) \quad Q(t)x = e^{tB}x \quad (x \in \mathcal{D}(A)).$$

Однако функция e^{tb} ограничена на Δ , и потому $e^{tB} \in \mathcal{B}(H)$, а так как соотношение (16) показывает, что непрерывные операторы $Q(t)$ и e^{tB} совпадают на всюду плотном подпространстве $\mathcal{D}(A)$, то мы заключаем, что

$$(17) \quad Q(t) = e^{tB} \quad (0 \leq t < \infty).$$

Из равенства (17) следует, что

$$(18) \quad A_\varepsilon x - Bx = \left(\frac{e^{\varepsilon B} - I}{\varepsilon} - B \right) x,$$

так что

$$(19) \quad \|A_\varepsilon x - Bx\|^2 = \int_{\Delta} \left| \frac{e^{\varepsilon b} - 1}{\varepsilon} - b \right|^2 dE_{x,x}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ подынтегральная функция в формуле (19) стремится к 0 в каждой точке $p \in \Delta$. Так как функция $|(e^z - 1)/z|$ ограничена на всякой полуплоскости $\{z: \operatorname{Re} z \leq c\}$, а подынтегральная функция в (19) может быть записана в виде

$$\left| \frac{e^{\varepsilon b} - 1}{\varepsilon b} - 1 \right|^2 |b|^2,$$

то из неравенства (14) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что для любого $x \in \mathcal{D}(B)$

$$(20) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|A_\varepsilon x - Bx\|^2 = 0.$$

Это показывает, что $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$ и $A = B$.

Теперь из неравенства (14) и утверждения (с) теоремы 13.27 следует, что $\operatorname{Re} \lambda \leq \gamma$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$.

Нам осталось доказать лишь последнее утверждение теоремы, относящееся к унитарным полугруппам. Если каждый из операторов $Q(t)$ является унитарным, то $|f_\varepsilon| = 1$, и соотношение (6) показывает, что число $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon(p)$ является чисто мнимым для всякой

точки $p \in \Delta$, для которой этот предел существует. Поэтому $\operatorname{Re} b(p) = 0$ для всех $p \in \Delta$, и если $S = -iB$, то равенство (17) превращается в (3), а из утверждения (с) теоремы 13.24 следует, что оператор S самосопряжен. ■

Упражнения

Во всех упражнениях буква H обозначает гильбертово пространство, если не оговорено противное.

1. На протяжении этой главы мы свободно пользовались ассоциативным законом $(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$. Доказать его. Доказать также, что если $T_1 \subset T_2$, то $ST_1 \subset ST_2$ и $T_1 S \subset T_2 S$.

2. Пусть T — плотно определенный оператор в пространстве H . Доказать, что T обладает замкнутым расширением тогда и только тогда, когда подпространство $\mathcal{D}(T^*)$ всюду плотно в H . Доказать, что в этом случае оператор T^{**} является расширением оператора T .

3. Если T — плотно определенный оператор в пространстве H , то из теоремы 13.8 следует, что $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда график $\mathcal{G}(T)$ оператора T всюду плотен в пространстве $H \times H$. Показать, что это действительно может случиться.

4. Предположим, что T — плотно определенный замкнутый оператор в пространстве H и что $T^*T \subset TT^*$. Следует ли отсюда, что оператор T нормален?

5. Предположим, что T — плотно определенный оператор в пространстве H и что $(Tx, x) = 0$ для всех $x \in \mathcal{D}(T)$. Следует ли отсюда, что $Tx = 0$ для всех $x \in \mathcal{D}(T)$?

6. Для всякого оператора T в пространстве H положим

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = 0\}.$$

Доказать, что если подпространство $\mathcal{D}(T)$ всюду плотно, то

$$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp \cap \mathcal{D}(T^*).$$

Доказать, что если оператор T плотно определен и замкнут, то

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp \cap \mathcal{D}(T).$$

Это утверждение обобщает теорему 12.10.

7. Рассмотрим следующие граничные задачи для дифференциального уравнения

$$f'' - f = g,$$

где g — некоторая заданная функция из $L^2([0, 1])$:

- (i) $f(0) = f(1) = 0$;
- (ii) $f'(0) = f'(1) = 0$;
- (iii) $f(0) = f(1)$ и $f'(0) = f'(1)$.

Показать, что каждая из этих задач имеет единственное решение f , для которого производная f' абсолютно непрерывна и $f'' \in L^2([0, 1])$. Указание: скомбинируйте пример 13.4 с теоремой 13.13.

Сделайте это также с помощью явного построения решений указанных задач.

8. (a) Доказать, что оператор T в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, действующий по формуле $Tf = if'$ и имеющий в качестве области определения $\mathcal{D}(T)$ множество всех абсолютно непрерывных функций $f \in L^2$, для которых $f' \in L^2$, является самосопряженным.

Указание. Может понадобиться тот факт, что $f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm \infty$ для всякой функции $f \in \mathcal{D}(T)$. Докажите это. Или докажите более сильное утверждение, состоящее в том, что всякая функция $f \in \mathcal{D}(T)$ является преобразованием Фурье некоторой функции из $L^1(\mathbb{R})$.

(b) Фиксируем функцию $g \in L^2(\mathbb{R})$. Используя теорему 13.13, доказать, что уравнение

$$f'' - f = g$$

имеет единственное абсолютно непрерывное решение $f \in L^2$, для которого производная f' абсолютно непрерывна, $f' \in L^2$ и $f'' \in L^2$.

Доказать также с помощью прямого вычисления, что

$$f(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{t-x} g(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} e^{x-t} g(t) dt.$$

Это решение может быть также найдено с помощью преобразования Фурье.

9. Пусть H^2 — пространство всех голоморфных функций $f(z) = \sum c_n z^n$ в открытом единичном диске, удовлетворяющих условию

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Показать, что H^2 является гильбертовым пространством, изоморфным пространству l^2 , причем изоморфизм может быть определен с помощью соответствия $f \leftrightarrow \{c_n\}$.

Определим оператор $V \in \mathcal{B}(H^2)$, полагая $(Vf)(z) = zf(z)$. Показать, что оператор V является преобразованием Кэли симметрического оператора T

в пространстве H^2 , действующего по формуле

$$(Tf)(z) = i \frac{1+z}{1-z} f(z).$$

Найти образы операторов $T + iI$ и $T - iI$; показать, что один из них совпадает с H^2 , а другой имеет коразмерность 1. (Сравните с примером 13.21.)

10. В пространстве H^2 из предыдущего упражнения определим оператор V , полагая

$$(Vf)(z) = zf(z^2).$$

Показать, что оператор V изометричен и является преобразованием Кэли замкнутого симметрического оператора T в пространстве H^2 , имеющего индексы дефекта 0 и ∞ .

11. Доказать утверждение (с) леммы 13.18.

12. (а) Как связаны между собой операторы $\Psi(f) + \Psi(g)$ и $\Psi(f+g)$ в ситуации, описанной в теореме 13.24?

(б) Доказать, что если функции f и g измеримы, причем функция g ограничена, то оператор $\Psi(g)$ отображает подпространство $\mathcal{D}_f$ в себя.

(с) Доказать, что $\Psi(f) = \Psi(g)$ тогда и только тогда, когда $f = g$ почти всюду $[E]$, т. е. когда

$$E(\{p: f(p) \neq g(p)\}) = 0.$$

13. Является ли оператор C , построенный в доказательстве теоремы 13.33, нормальным?

14. Доказать, что каждый нормальный оператор N в пространстве H , ограниченный или нет, допускает полярное разложение

$$N = UP = PU,$$

где оператор U унитарен, а оператор P самосопряжен и $P \geq 0$. Кроме того, $\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(N)$.

15. Доказать следующее обобщение теоремы 12.16: если $T \in \mathcal{B}(H)$, а M и N — такие нормальные операторы в пространстве H , что $TM^* \subset N^*T$, то $TM^* \subset N^*T$.

16. Допустим, что T — такой замкнутый оператор в пространстве H , что $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ и $\|Tx\| = \|T^*x\|$ для всех $x \in \mathcal{D}(T)$. Доказать, что оператор T нормален. Указание: начните с доказательства равенства

$$(Tx, Ty) = (T^*x, T^*y) \quad (x \in \mathcal{D}(T), y \in \mathcal{D}(T)).$$

17. Доказать, что спектр $\sigma(T)$ любого оператора T в пространстве H является замкнутым подмножеством комплексной плоскости $\mathbb{C}$. (См. определение 13.26.) Указание: если $S \in \mathcal{B}(H)$ и $ST \subset TS = I$, то при малых $|\lambda|$ оператор $S(I - \lambda S)^{-1}$ ограничен и является обратным к оператору $T - \lambda I$.

18. Пусть $\varphi(t) = \exp(-t^2)$. Определим в пространстве $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ оператор $S \in \mathcal{B}(L^2)$ формулой

$$(Sf)(t) = \varphi(t) f(t-1),$$

так что $(S^2f)(t) = \varphi(t) \varphi(t-1) f(t-2)$ и т. д. (Заметим, что формула, определяющая оператор S , задает также его полярное разложение $S = PU$.)

Найти оператор S^* . Показать, что

$$\|S^n\| = \exp \left\{ -\frac{(n-1)n(n+1)}{12} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Показать, что оператор S инъективен, его образ $\mathcal{R}(S)$ всюду плотен в L^2 , а спектр $\sigma(S) = \{0\}$.

Введем оператор T с областью определения $\mathcal{D}(T) = \mathcal{R}(S)$, полагая

$$TSf = f \quad (f \in L^2).$$

Доказать, что спектр $\sigma(T)$ этого оператора пуст.

19. Пусть T_1, T_2, T_3 — операторы, рассмотренные в примере 13.14, пусть

$$\mathcal{D}(T_4) = \{f \in \mathcal{D}(T_1): f(0) = 0\},$$

и $T_4 f = if'$ для всех $f \in \mathcal{D}(T_4)$. Доказать следующие утверждения:

(а) Каждое $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит точечному спектру оператора T_1 .
 (б) Спектр $\sigma(T_2)$ оператора T_2 состоит из всех чисел вида $2\pi i n$, где n — любое целое число; точечный спектр этого оператора совпадает со всем его спектром.

(с) Для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ подпространство $\mathcal{R}(T_3 - \lambda I)$ имеет коразмерность 1. Поэтому $\sigma(T_3) = \mathbb{C}$. Точечный спектр оператора T_3 пуст.

(д) Спектр $\sigma(T_4)$ оператора T_4 пуст.

Указание: изучите дифференциальное уравнение $if' - \lambda f = g$.

Эти факты показывают, насколько спектр дифференциального оператора чувствителен к его области определения (в данном случае — к выбору граничных условий).

20. Показать, что если $\dim H = \infty$, то всякое непустое замкнутое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является спектром некоторого нормального оператора в пространстве H .

21. Определим в пространстве $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ унитарные операторы $Q(t) \in \mathcal{B}(L^2)$, полагая

$$[Q(t)f](s) = f(s+t).$$

Показать, что $\{Q(t)\}$ удовлетворяет условиям, перечисленным в определении 13.34. Найти инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{Q(t)\}$, включая явное описание его области определения и его спектра. (Здесь можно воспользоваться теоремой Планшереля.)

Показать, что экспоненциальное представление полугруппы $\{Q(t)\}$, доставляемое теоремой 13.37, формально совпадает с известным из элементарного анализа разложением Тейлора.

22. Если $f \in H^2$ (см. упр. 9) и $f(z) = \sum c_n z^n$, положим

$$[Q(t)f](z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-t} c_n z^n \quad (0 \leq t < \infty).$$

Показать, что каждый из операторов $Q(t)$ является самосопряженным и положительным. Найти инфинитезимальный производящий оператор A полугруппы $\{Q(t)\}$. Является ли оператор A самосопряженным? Показать, что весь спектр оператора A является точечным и состоит из чисел $\log 1$, $\log(1/2)$, $\log(1/3)$, ...

23. Если $f \in L^2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ и $0 < y < \infty$, положим

$$[Q(y)f](x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} f(\xi) d\xi$$

и $Q(0)f=f$. Показать, что $\{Q(y): 0 \leq y < \infty\}$ удовлетворяет условиям определения 13.34 и что $\|Q(y)\|=1$ для всех y .

[Этот интеграл представляет гармоническую в верхней полуплоскости функцию, для которой функция f служит граничным значением. Отсюда можно вывести полугрупповое свойство для $\{Q(y)\}$ (это можно также сделать, рассматривая преобразования Фурье функций $Q(y)f$).]

Найти область определения инфинитезимального производящего оператора A полугруппы $\{Q(y)\}$ и доказать, что

$$Af = -Hf',$$

где H — преобразование Гильберта (упр. 24 гл. 7).

Доказать, что оператор $-A$ самосопряжен и положителен.

Приложение А

КОМПАКТНОСТЬ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

А1. Частично упорядоченные множества. Говорят, что множество $\mathcal{P}$ *частично упорядочено* с помощью бинарного отношения $\leq$, если выполняются следующие условия:

- (i) из $a \leq b$ и $b \leq c$ следует, что $a \leq c$;
- (ii) $a \leq a$ для всякого $a \in \mathcal{P}$;
- (iii) если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.

Подмножество $\mathcal{Q}$ частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$ называется *линейно упорядоченным*, если для каждой пары элементов $a, b \in \mathcal{Q}$ выполняется хотя бы одно из условий $a \leq b$, $b \leq a$.

Теорема Хаусдорфа о максимальнойности утверждает:

Каждое непустое частично упорядоченное множество $\mathcal{P}$ содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество, т. е. такое непустое линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{Q}$, которое не является собственным подмножеством никакого другого линейно упорядоченного подмножества множества $\mathcal{P}$.

Доказательство (использующее аксиому выбора) можно найти в [27] (см. также [13]). Этой теоремой мы пользовались при доказательстве теоремы Хана—Банаха, теоремы Крейна—Мильмана и теоремы о том, что каждый собственный идеал коммутативного кольца с единицей содержится в некотором максимальном идеале. Теперь мы снова применим эту теорему (в п. А2), чтобы подготовить путь к простому доказательству теоремы Тихонова.

А2. Предбазы. Семейство $\mathcal{S}$ открытых подмножеств топологического пространства X называется *предбазой* топологии τ пространства X , если совокупность всех конечных пересечений множеств из $\mathcal{S}$ образует базу этой топологии (см. п. 1.5). Каждое подсемейство предбазы $\mathcal{S}$, для которого объединение всех входящих в него множеств совпадает с X , называется $\mathcal{S}$ -*покрытием* пространства X . По определению, пространство X компактно, если всякое открытое его покрытие содержит конечное подпокрытие. Оказывается, что достаточно проверить это свойство для $\mathcal{S}$ -покрытий.

Теорема Александра о предбазе. *Если $\mathcal{S}$ — предбаза топологии пространства X и каждое $\mathcal{S}$ -покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие, то пространство X компактно.*

Доказательство. Допустим, что пространство X не является компактным. Мы покажем, что в этом случае существует такое $\mathcal{S}$ -покрытие $\tilde{\mathcal{S}}$ пространства X , которое не содержит конечных подпокрытий.

Пусть $\mathcal{P}$ — совокупность всех открытых покрытий пространства X , не обладающих конечными подпокрытиями. По предположению $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Частично упорядочим $\mathcal{P}$ по включению; пусть Ω — максимальное линейно упорядочен-

ное подсемейство в $\mathcal{P}$, а Γ — объединение всех элементов семейства Ω (т. е. Γ состоит из тех и только тех открытых подмножеств пространства X , которые являются элементами какого-нибудь из покрытий, входящих в Ω). Тогда

(а) Γ является открытым покрытием пространства X ,

(б) покрытие Γ не имеет конечных подпокрытий, но

(с) для всякого открытого множества $V \notin \Gamma$ покрытие $\Gamma \cup \{V\}$ обладает конечным подпокрытием.

Утверждение (а) очевидно. Так как Ω линейно упорядочено, то каждое конечное подсемейство семейства Γ целиком содержится в некотором покрытии, входящем в Ω , и потому не может покрывать X ; отсюда следует справедливость утверждения (б). Утверждение (с) вытекает из максимальнойности Ω .

Положим $\tilde{\Gamma} = \Gamma \cap \mathcal{S}$. Так как $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$, то из утверждения (б) следует, что $\tilde{\Gamma}$ не имеет конечных подпокрытий. Чтобы завершить доказательство, мы покажем, что $\tilde{\Gamma}$ является покрытием пространства X .

Если это не так, то некоторая точка $x \in X$ не покрывается семейством $\tilde{\Gamma}$. Согласно утверждению (а), $x \in W$ для некоторого $W \in \Gamma$. Так как $\mathcal{S}$ является предбазой, то существуют такие множества $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{S}$, что $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i \subset W$. Поскольку точка x не покрывается семейством $\tilde{\Gamma}$, ни одно из множеств V_i не входит в Γ . Поэтому из утверждения (с) следует существование таких множеств $Y_1, \dots, Y_n$, что каждое из них является конечным объединением некоторых множеств из Γ и что $X = V_i \cup Y_i$ при $1 \leq i \leq n$. Следовательно,

$$X = Y_1 \cup \dots \cup Y_n \cup \bigcap_{i=1}^n V_i \subset Y_1 \cup \dots \cup Y_n \cup W,$$

что противоречит утверждению (б). ■

А3. Теорема Тихонова. Декартово произведение X любого непустого семейства компактных пространств X_α является компактным пространством.

Доказательство. Пусть $\pi_\alpha(x)$ обозначает X_α -координату точки $x \in X$; тогда, по определению, топология произведения в X есть слабейшая из топологий, относительно которых все отображения $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ непрерывны (см. п. 3.8). Пусть $\mathcal{S}_\alpha$ — совокупность всех множеств вида $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, где V_α — любое открытое подмножество пространства X_α . Тогда объединение $\mathcal{S}$ всех $\mathcal{S}_\alpha$ является предбазой топологии произведения в X .

Предположим, что Γ — некоторое $\mathcal{S}$ -покрытие пространства X . Положим $\Gamma_\alpha = \Gamma \cap \mathcal{S}_\alpha$. Допустим (с целью получить противоречие), что ни одно из семейств Γ_α не покрывает пространства X . Тогда для любого α найдется такая точка $x_\alpha \in X_\alpha$, что семейство Γ_α не покрывает ни одной точки множества $\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$. Пусть $x \in X$ — такая точка, что $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ для всех α ; тогда точка x не покрывается семейством Γ . Это, однако, противоречит тому, что Γ является покрытием пространства X .

Таким образом, хотя бы одно из семейств Γ_α покрывает пространство X . Так как пространство X_α компактно, то некоторое конечное подсемейство семейства Γ_α покрывает пространство X . Поскольку $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$, отсюда следует, что покрытие Γ обладает конечным подпокрытием, и из теоремы Александра вытекает, что пространство X компактно. ■

А4. Теорема. Если K — замкнутое подмножество полного метрического пространства X , то следующие свойства эквивалентны:

(а) множество K компактно;

(б) всякое бесконечное подмножество множества K имеет в K предельную точку;

(с) множество K вполне ограничено.

Напомним, что (с) означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ множество K можно покрыть конечным числом шаров радиуса ε .

Доказательство. Предположим, что множество K компактно. Если E — такое бесконечное подмножество множества K , что ни одна точка из K не является предельной для E , то существует такое открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ множества K , всякий элемент которого V_α содержит не более одной точки множества E . Поэтому покрытие $\{V_\alpha\}$ не имеет конечных подпокрытий, что противоречит компактности K . Таким образом, из (а) следует (б).

Предположим, что множество K обладает свойством (б). Пусть d — метрика в пространстве X . Фиксируем $\varepsilon > 0$ и точку $x_1 \in K$. Допустим, что точки $x_1, \dots, x_n$ множества K таковы, что $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ при $i \neq j$. Если это возможно, выберем точку $x_{n+1} \in K$ так, что $d(x_i, x_{n+1}) \geq \varepsilon$ при $1 \leq i \leq n$. Из свойства (б) следует, что этот процесс должен оборваться после некоторого конечного числа m шагов. Тогда шары радиуса ε с центрами в точках $x_1, \dots, x_m$ покрывают множество K . Таким образом, из (б) следует (с).

Предположим, что множество K вполне ограничено; пусть Γ — его открытое покрытие. Допустим (с целью получить противоречие), что покрытие Γ не имеет конечных подпокрытий. По свойству (с) множество K является объединением конечного числа замкнутых множеств, имеющих диаметры ≤ 1 . Одно из этих множеств, скажем K_1 , не может быть покрыто конечным числом элементов семейства Γ . Повторим это рассуждение с заменой множества K множеством K_1 и т. д. В результате мы получим такую последовательность замкнутых множеств K_i , что

$$(i) \quad K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots,$$

$$(ii) \quad \text{diam } K_n \leq 1/n,$$

(iii) ни одно из множеств K_n не может быть покрыто конечным числом множеств, принадлежащих Γ .

Выберем $x_n \in K_n$. Из (i) и (ii) следует, что $\{x_n\}$ — последовательность Коши, которая (поскольку пространство X полно, а каждое из множеств K_n замкнуто) сходится к некоторой точке $x \in \bigcap K_n$. Но $x \in V$ для некоторого $V \in \Gamma$, и из (ii) следует, что $K_n \subset V$, если n достаточно велико, а это противоречит свойству (iii). Таким образом, из (с) следует (а). ■

Заметим, что полнота пространства X была использована лишь при переходе от (с) к (а). Свойства (а) и (б) в действительности эквивалентны для любого метрического пространства.

А5. Теорема Асколи. Пусть X — компактное пространство, $C(X)$ — банахово пространство всех комплексных непрерывных функций на X с суп-нормой, а $\Phi \subset C(X)$ — поточечно ограниченное равномерно непрерывное семейство функций, т. е.

$$(a) \quad \sup \{ |f(x)| : f \in \Phi \} < \infty \text{ для всех } x \in X,$$

(б) для всякого $\varepsilon > 0$ каждая точка $x \in X$ имеет такую окрестность V , что

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \text{ для всех } y \in V \text{ и всех } f \in \Phi.$$

Тогда множество Φ вполне ограничено в пространстве $C(X)$.

Следствие. Так как пространство $C(X)$ полно, то замыкание множества Φ компактно и всякая последовательность функций из Φ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как пространство X компактно, то условие (б) показывает, что существуют такие точки $x_1, \dots, x_n \in X$ и такие их окрестности $V_1, \dots, V_n$ соответственно, что $X = \bigcup V_i$ и

$$(1) \quad |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \quad (f \in \Phi, x \in V_i, 1 \leq i \leq n).$$

Из условия (а) и неравенства (1) следует, что множество Φ равномерно ограничено:

$$(2) \quad \sup \{ |f(x)| : x \in X, f \in \Phi \} = M < \infty.$$

Положим $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M\}$ и сопоставим каждой функции $f \in \Phi$ точку $\rho(f) \in D^n \subset \mathbb{C}^n$, полагая

$$(3) \quad \rho(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Так как D^n можно представить как объединение конечного числа множеств с диаметрами $< \varepsilon$, то найдутся такие функции $f_1, \dots, f_m \in \Phi$, что для всякой функции $f \in \Phi$ точка $\rho(f)$ менее чем на ε удалена от некоторой точки $\rho(f_k)$.

Если $f \in \Phi$, то существует такое k ($1 \leq k \leq m$), что

$$(4) \quad |f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon \quad (1 \leq i \leq n).$$

Каждая точка $x \in X$ содержится в некоторой окрестности V_i , и для этого номера i

$$(5) \quad |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |f_k(x) - f_k(x_i)| < \varepsilon.$$

Таким образом, $|f(x) - f_k(x)| < 3\varepsilon$ для всех $x \in X$.

Поэтому 3ε -шары с центрами в точках $f_1, \dots, f_m$ покрывают множество Φ . Так как ε было выбрано произвольно, то множество Φ вполне ограничено. ■

А6. Секвенциальная непрерывность. Отображение f хаусдорфова пространства X в хаусдорфово пространство Y называется *секвенциально непрерывным*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ для любой последовательности $\{x_n\}$ в X , удовлетворяющей условию $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Теорема. (а) Всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ секвенциально непрерывно.

(б) Если для каждой точки пространства X существует счетная локальная база (в частности, если пространство X метризуемо), то всякое секвенциально непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно.

Доказательство. (а) Предположим, что $x_n \rightarrow x$ в пространстве X . Пусть V — окрестность точки $f(x)$ в пространстве Y , а $U = f^{-1}(V)$. Так как отображение f непрерывно, то U является окрестностью точки x , и потому $x_n \in U$ для всех n , за исключением, быть может, конечного числа. Следовательно, $f(x_n) \in V$ для всех «не исключительных» значений n . Таким образом, $f(x_n) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

(б) Фиксируем точку $x \in X$, и пусть $\{U_n\}$ — счетная локальная база топологии пространства X в этой точке. Допустим, что отображение f в точке x не является непрерывным. Тогда существует такая окрестность V точки $f(x)$ в пространстве Y , что ее прообраз $f^{-1}(V)$ не является окрестностью точки x . Следовательно, найдется такая последовательность точек $\{x_n\}$, что $x_n \in U_n$, $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ и $x_n \notin f^{-1}(V)$. Но тогда $f(x_n) \notin V$, так что отображение f не является секвенциально непрерывным. ■

А7. Вполне несвязные компактные пространства. Топологическое пространство X называется *вполне несвязным*, если всякое непустое связное его подмножество состоит из единственной точки.

Напомним, что множество $E \subset X$ называется *связным*, если не существует таких открытых множеств V_1, V_2 , что

$$E \subset V_1 \cup V_2, \quad E \cap V_1 \neq \emptyset, \quad E \cap V_2 \neq \emptyset, \quad \text{но} \quad E \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Теорема. Пусть K — компонента¹⁾ компактного хаусдорфова пространства X , а V — открытое множество в X , содержащее множество K . Тогда

¹⁾ См. лемму 10.16. — Прим. перев.

в пространстве X существует такое компактное открытое множество A , что $K \subset A \subset V$.

Следствие. Если X — вполне несвязное компактное хаусдорфово пространство, то компактные открытые подмножества образуют базу его топологии.

Доказательство. Пусть Γ — совокупность всех компактных открытых подмножеств пространства X , содержащих множество K . Так как $X \in \Gamma$, то $\Gamma \neq \emptyset$. Пусть H — пересечение всех множеств, принадлежащих Γ .

Предположим, что W — открытое множество, содержащее множество H . Тогда дополнения множеств, принадлежащих Γ , образуют открытое покрытие дополнения множества W . Так как дополнение множества W компактно, а семейство Γ замкнуто относительно образования конечных пересечений входящих в него множеств, то отсюда следует, что $A \subset W$ для некоторого $A \in \Gamma$.

Мы утверждаем, что множество H связно. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $H = H_0 \cup H_1$, где H_0 и H_1 — непересекающиеся компактные множества. Так как множество K связно и содержится в H , то оно содержится в одном из множеств H_0 , H_1 ; пусть, скажем, $K \subset H_0$. По лемме Урысона существуют такие непересекающиеся открытые множества W_0 , W_1 , что $H_0 \subset W_0$ и $H_1 \subset W_1$. Из рассуждений предыдущего абзаца следует, что $A \subset W_0 \cup W_1$ для некоторого $A \in \Gamma$. Положим $A_0 = A \cap W_0$. Тогда $K \subset A_0$, причем множество A_0 открыто и компактно, поскольку $A \cap W_0 = A \cap \bar{W}_0$. Таким образом, $A_0 \in \Gamma$, так что $H \subset A_0$. Отсюда следует, что $H_1 = \emptyset$.

Итак, множество H связно. Поскольку множество K является компонентой пространства X , а $H \supset K$, мы видим, что $H = K$. Применяя рассуждение второго абзаца доказательства к множествам K и V вместо H и W , получаем, что $A \subset V$ для некоторого $A \in \Gamma$. ■

Приложение В

ПРИМЕЧАНИЯ И КОММЕНТАРИИ

Абстрактное направление в анализе, развившееся позднее в предмет, известный теперь под названием *функциональный анализ*, возникло в начале века благодаря деятельности Вольтерра, Фредгольма, Гильберта, Фреше и Ф. Рисса (мы упоминаем лишь некоторые из главных имен). Они изучали интегральные уравнения, задачи о собственных значениях, ортогональные разложения и вообще линейные операции. Конечно, не случайно, что в то же время зародилась теория интеграла Лебега.

Аксиомы нормированного пространства появились в работе Ф. Рисса о компактных операторах в пространстве $C([a, b])$ (*Acta Math.*, 41 (1918), 71—98), но первое абстрактное изложение предмета содержится в диссертации Банаха 1920 г. (*Fund. Math.*, 3 (1922), 133—181). Чрезвычайно важной была книга Банаха [4], опубликованная в 1932 г. Она содержит материал, до сих пор составляющий самую существенную часть теории банаховых пространств, однако с некоторыми пропусками, которые с нашей «выигрышной позиции» кажутся странными¹⁾.

Один из таких странных пробелов — полное отсутствие комплексных скаляров, несмотря на наблюдение Винера (*Fund. Math.*, 4 (1923), 136—143), заметившего, что указанные аксиомы с тем же успехом могут быть сформулированы над полем $\mathbb{C}$ и (еще важнее) что можно построить теорию голоморфных функций со значениями в банаховом пространстве, в общих чертах очень похожую на классическую теорию комплексных голоморфных функций. В этом отношении почти ничего не было сделано вплоть до 1938 г. (см. помещенные в этом приложении примечания к гл. 3).

В историческом плане еще более обескураживает трактовка Банахом слабой сходимости, несомненно являющейся одним из наиболее важных его вкладов в предмет. Несмотря на бурное развитие топологии в двадцатые годы, а также на то, что фон Нейман явно описал слабые окрестности в гильбертовом пространстве и в алгебрах операторов (*Math. Ann.*, 102 (1930), 370—427), Банах работает лишь со слабо сходящимися *последовательностями*. Поскольку присоединение к данному множеству пределов всех его слабо сходящихся подпоследовательностей не обязательно приводит к секвенциально слабо замкнутому множеству (см. упр. 9 гл. 3), Банах вынужден был привлекать такие сложные понятия, как трансфинитное замыкание, но совершенно не пользовался значительно более простой и удобной концепцией *слабой топологии*.

¹⁾ Следующий ниже перечень «странных» книги Банаха [4] (и некоторых других классических работ) вызывает недоумение. Можно ли ставить в упрек создателю новой теории то, что он разработал ее не в максимально возможной общности, пользовался не самыми простыми техническими приемами и не построил «заодно» еще одну новую теорию? — *Прим. перев.*

В книге Банаха иногда делается излишнее предположение о сепарабельности. Так же обстоит дело с принятой фон Нейманом (*Math. Ann.*, 102 (1930), 49—131) аксиоматикой гильбертова пространства: условие сепарабельности включено в определение. В этой фундаментальной работе о неограниченных операторах доказана спектральная теорема, обобщающая полученную Гильбертом более чем на 20 лет раньше спектральную теорему для ограниченных операторов. Важный вклад в теорию операторов был также сделан в 1932 г. М. Стоуном в его книге [32].

Хотя непрерывные функции, понятно, играют в книге Банаха важную роль, он рассматривает для них лишь структуру векторного пространства; они не перемножаются. Однако пренебрежение мультипликативной структурой продолжалось не так уж долго. В работе о тауберовых теоремах (*Ann. Math.*, 33 (1932), 1—100) Винер установил и использовал мультипликативное неравенство $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ для нормы в банаховом пространстве абсолютного сходящихся рядов Фурье. Обобщение аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, предложенное М. Стоуном (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 41 (1937), 375—481, особенно стр. 453—481), несомненно, является наиболее известным примером явного использования кольцевой структуры в пространстве непрерывных функций. Интерес фон Неймана к теории операторов, возникший в связи с квантовой механикой, привел его к систематическому изучению операторных алгебр. М. Нагумо (*M. Nagumo, Jap. J. Math.*, 13 (1936), 61—80) начал изучение абстрактных нормированных колец. Однако действительное продвижение вперед в этой области связано с открытием И. М. Гельфандом важной роли максимальных идеалов коммутативной банаховой алгебры и с его конструкцией, известной теперь под названием преобразования Гельфанда (*Матем. сб.*, 9 (1941), 3—24).

До середины сороковых годов интересы специалистов по функциональному анализу были сфокусированы почти исключительно на изучении *нормированных* пространств. Первой основной работой по общей теории локально выпуклых пространств была работа Ж. Дьедоне и Л. Шварца (*J. Dieudonné, L. Schwartz, Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1 (1949), 61—101). Одной из главных побудительных причин развития этой теории послужило построение Л. Шварцем теории распределений [45] (первое издание этой книги появилось в 1950 г.). Шварц (так же, как Банах и Гельфанд) имел предшественников. Как отметил С. Бохнер в своей рецензии на книгу Шварца (*S. Bochner, Bull. Amer. Math. Soc.*, 58 (1952), 78—85), идея «обобщенных функций» восходит по меньшей мере к Риману. Эта идея была применена в книге Бохнера «Лекции об интегралах Фурье» (Физматгиз, 1962; первое (немецкое) издание вышло в Лейпциге в 1932 г.), которая сыграла весьма важную роль в развитии гармонического анализа. Работам Шварца предшествовали также работы С. Л. Соболева. Но именно Шварц превратил все в очень мощный и плавно действующий аппарат, который оказался пригодным для многих приложений, особенно к уравнениям в частных производных.

Более подробное освещение истории некоторых разделов функционального анализа можно найти в следующих обзорных статьях:

- F. F. Bonsall, A survey of Banach algebra theory, *Bull. London Math. Soc.*, 2 (1970), 257—274;
- E. R. Lorch, The structure of normed abelian rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50 (1944), 447—463;
- T. H. Hildebrandt, Integration in abstract spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 59 (1953), 111—139;
- J. Horváth, An introduction to distributions, *Amer. Math. Monthly*, 77 (1970), 227—240;
- F. Trèves, Applications of distributions to PDE theory, *Amer. Math. Monthly*, 77 (1970), 241—248;
- A. E. Taylor, Notes on the history and uses of analyticity in operator theory, *Amer. Math. Monthly*, 78 (1971), 331—342.

В первом томе серии «Studies in Mathematics» (изданном в 1962 г. Американской математической ассоциацией) содержатся следующие статьи:

Е. J. McShane, A theory of limits;
 М. H. Stone, A generalized Weierstrass approximation theorem;
 Е. R. Lorch, The spectral theorem;
 С. Goffman, Preliminaries to functional analysis.

Имеются два специальных выпуска журнала *Bull. Amer. Math. Soc.*; один из них (май 1958 г.) посвящен работам Джона фон Неймана, другой (январь 1966 г.) — работам Норберта Винера.

Теперь мы дадим более подробные литературные указания по некоторым вопросам, затронутым в данной книге.

Глава 1

По поводу общей теории топологических векторных пространств см. [8], [17], [18], [35], [48].

п. 1.8 (е). Банах в определении F -пространств постулировал лишь *раздельную* непрерывность умножения на скаляры и доказал, что из нее следует непрерывность по совокупности переменных. Доказательство этого факта, основанное на теореме Бэра, см. в [13, т. 1, стр. 65]. Другое доказательство (принадлежащее Какутани) не требует полноты пространства, но использует наличие меры Лебега в поле скаляров; см. [16, стр. 53].

Теорема 1.24. Эта метризация теорема (в более общей ситуации топологических групп) впервые была доказана Дж. Биркгофом (G. Birkhoff, *Compositio Math.*, 3 (1936), 427—430) и Какутани (S. Kakutani, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 12 (1936), 128—142). Утверждение (d) этой теоремы, возможно, является новым.

п. 1.33. Функционал Минковского выпуклого множества иногда называют *опорной функцией*.

Теорема 1.39 принадлежит А. Н. Колмогорову (*Studia Math.*, 5 (1934), 29—33). Вполне возможно, что это первая теорема о локально выпуклых пространствах.

п. 1.46. Построение функции g с помощью последовательного усреднения можно найти на стр. 80—84 работы С. Мандельброя (S. Mandelbrojt, *Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions*, The Rice Institute Pamphlet, v. 29 (1942), № 1), где этот прием приписывается Брею (Н. Е. Bray).

п. 1.47. Среди F -пространств, не являющихся локально выпуклыми, но обладающих достаточным для разделения точек запасом непрерывных линейных функционалов, особенно интересны некоторые подпространства в L^p , а именно HP -пространства (при $0 < p < 1$). Эти пространства подробно изучались в работе Дюрена, Ромберга и Шилдса (P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shields, *J. Reine Angew. Math.*, 238 (1969), 32—60), а также в работах Дюрена и Шилдса (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 141 (1969), 255—262, и *Pac. J. Math.*, 32 (1970), 69—78).

Глава 2

По существу, все результаты этой главы содержатся в [4].

Упр. 11. Кажется, не известно, обязано ли быть открытым в точке $(0, 0)$ непрерывное билинейное сюръективное отображение $B: X \times Y \rightarrow Z$, где X , Y и Z — банаховы пространства.

Упр. 13. *Бочкой* называется замкнутое выпуклое уравновешенное поглощающее множество. Пространство называется *бочечным*, если в нем всякая бочка содержит некоторую окрестность нуля. В упр. 13 утверждается, что топологическое векторное пространство второй категории является бочечным. Существуют бочечные пространства первой категории; для них справедливы некоторые варианты теоремы Банаха—Штейнгауза. См. [17, стр. 104], а также [18]. Бочечные пространства, обладающие свойством Гейне—Бореля, часто называют *монтелевскими пространствами* (см. п. 1.45).

Глава 3

Теорема 3.2 имеется в [4]. Ее комплексный вариант (теорема 3.3) был доказан Боненблостом и Собчиком (H. F. Bohnenblust, A. Sobczyk, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 91—93) и Г. А. Сухомлиновым¹⁾ (*Матем. сб.*, **3** (1938), 353—358).

Теорема 3.6. По поводу частичного обращения этой теоремы см. работу Шапиро (J. H. Shapiro, *Duke Math. J.*, **37** (1970), 639—645).

Теорема 3.15. См. работу Алаоглу (L. Alaoglu, *Ann. Math.*, **41** (1940), 252—267). Для сепарабельных банаховых пространств эта теорема доказана Банахом [4] (см. также [5, стр. 107]).

Теорема 3.18. Более короткое доказательство этой теоремы, использующее полунормы, можно найти на стр. 223 книги [8].

Теорема 3.21 для слабо* компактных выпуклых подмножеств пространства, сопряженного к банаховому, была доказана М. Г. Крейном и Д. П. Мильманом (*Studia Math.*, **9** (1940), 133—138).

История интегрирования векторных функций описана Хильдебрандтом (Т. Н. Hildebrandt, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 111—139). Понятие «слабого» интеграла (определение 3.26) введено Петтисом (B. J. Pettis, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 277—304).

История векторных голоморфных функций описана Тейлором (A. E. Taylor, *Amer. Math. Monthly*, **78** (1971), 331—342).

Теорема 3.31. Совпадение классов слабо голоморфных и сильно голоморфных функций со значениями в комплексном банаховом пространстве было доказано Данфордом (N. Dunford, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 304—356).

Теорема 3.32 была использована Тейлором (A. E. Taylor, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 70—74) для доказательства непустоты спектра любого ограниченного линейного оператора в комплексном банаховом пространстве. Так как любая банахова алгебра A изоморфна подалгебре алгебры $\mathcal{B}(A)$ (см. доказательство теоремы 10.2), то в этом результате Тейлора содержится утверждение (а) теоремы 10.13.

Упр. 9. Пример, указанный в этом упражнении, принадлежит фон Нейману (J. von Neumann, *Math. Ann.*, **102** (1930), 370—427).

Упр. 10. Прототипом этого упражнения послужила конструкция, описанная в приложении книги [4].

Упр. 25. Если дополнительно предположить, что множество K метризуемо (в индуцированной топологии), то для каждого $y \in K$ «представляющую» меру μ можно выбрать так, чтобы она была сосредоточена на самом множестве крайних точек E , а не на его замыкании $\bar{E}$. Эта теорема принадлежит Шоке (см. [36, стр. 25]). Из недавних работ в этом направлении укажем статью Буржена (R. D. Bourgin, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 323—340).

Упр. 28 (с). Это утверждение представляет собой легкую часть теоремы Эберлейна—Шмульяна (см. [13, стр. 466—469 и 503—504]). Другой критерий

¹⁾ Сухомлинов доказал аналогичную теорему и для модулей над телом кватернионов.—Прим. перев.

слабой компактности был предложен Джеймсом (R. C. James, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 113 (1964), 129—140): слабо замкнутое подмножество S банахова пространства X слабо компактно тогда и только тогда, когда для всякого функционала $x^* \in X^*$ сужение на S функции $|x^*|$ достигает на S своей верхней грани.

Глава 4

Большинство результатов этой главы содержится в [4].

Компактные операторы часто называют *вполне непрерывными*. Согласно определению Гильберта (в l^2), полная непрерывность оператора означает, что он переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся последовательность. Определение, которым пользуются теперь, было дано Ф. Риссом (F. Riesz, *Acta Math.*, 41 (1918), 71—98). В рефлексивном пространстве эти два определения совпадают (упр. 18).

п. 4.5. Джеймс построил *нерефлексивное* банахово пространство X , которое изометрически изоморфно пространству X^{**} (R. C. James, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 37 (1951), 174—177).

Теоремы 4.19 и 4.25 были доказаны Шаудером (J. Schauder, *Studia Math.*, 2 (1930), 183—196). По поводу обобщений на произвольные топологические пространства см. работу Вильямсона (J. H. Williamson, *J. Lond. Math. Soc.*, 29 (1954), 149—156)¹⁾; см. также [48, гл. 9].

Упр. 15. Эти операторы обычно называются *операторами Гильберта — Шмидта* (см. [13, т. II, гл. XI]).

Упр. 17. Операторы такого типа изучались Брауном, Халмошем и Шилдсом (A. Brown, P. R. Halmos, A. L. Shields, *Acta Sci. Math. Szeged*, 26 (1965), 125—137).

Упр. 19. Рогозинский и Шапиро воспользовались этой своеобразной «двойственностью» для получения весьма детальной информации о некоторых экстремальных задачах для голоморфных функций (W. W. Rogosinski, H. S. Shapiro, *Acta Math.*, 90 (1953), 287—318).

Упр. 21. Эта теорема была доказана М. Г. Крейном и Ю. Л. Шмульяном (*Ann. Math.*, 41 (1940), 556—583). См. также [13, т. I, стр. 465].

Глава 5

Теорема 5.1. Более общий вариант этой теоремы имеется в работе Эдвардса (R. E. Edwards, *J. Lond. Math. Soc.*, 32 (1957), 499—501).

Теорема 5.2 принадлежит Гротендику (A. Grothendieck, *Can. J. Math.*, 6 (1954), 158—160). Доказательство Гротендика менее элементарно, чем приведенное в тексте.

Теорема 5.3. По поводу тригонометрических рядов с лагунами см. работы Рудина (W. Rudin, *J. Math. Mech.*, 9 (1960), 203—228) и Кахана (J. P. Kahane, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 (1964), 199—213), а также [29, п. 5.7].

Теорема 5.5 впервые была доказана А. А. Ляпуновым (ИАН СССР, сер. матем., 3 (1940), 465—478). Доказательство, приведенное в тексте, принадлежит Линденштрауссу (J. Lindenstrauss, *J. Math. Mech.*, 15 (1966), 971—972). Ул распространил эту теорему на меры со значениями в рефлексивном банаховом пространстве или в сепарабельном сопряженном пространстве (J. J. Uhl, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 23 (1969), 158—163).

Теорема 5.7. Идея применить теорему Крейна—Мильмана для доказательства теоремы Стоуна—Вейерштрасса принадлежит де Бранжу (L. de Branges).

¹⁾ Имеется русский перевод: сб. *Математика*, 4 : 5 (1960), 85—91. — *Прим. перев.*

ges, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 (1959), 822—824). Теорема 5.7 принадлежит Бишопу (E. Bishop, *Pac. J. Math.*, 11 (1961), 777—783), а ее доказательство, приведенное в тексте, предложено Гликсбергом (I. Glicksberg, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 105 (1962), 415—435).

Теорема 5.9 доказана Бишопом (E. Bishop, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13 (1962), 140—143). По поводу аналогичных теорем в частном случае дисалгебры см. работы Рудина (W. Rudin, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), 808—811) и Карлесона (L. Carleson, *Math. Z.*, 66 (1957), 447—451). Другие приложения имеются в гл. 6 книги [30].

Теорема 5.10. Приведенное доказательство следует работе Хейнса (M. Heins, *Ann. Math.*, 52 (1950), 568—573), в которой тот же самый метод применяется к широкому классу интерполяционных задач.

Теорема 5.11 была доказана Какутани (S. Kakutani, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 14 (1938), 242—245).

Теорема 5.14. Этот простой способ построения меры Хаара на компактной группе, по существу, совпадает с предложенным фон Нейманом (*Compositio Math.*, 1 (1934), 106—114). Метод фон Неймана (хотя он чуть длиннее) даже более элементарен и замкнут в себе: в нем не используется теорема о неподвижной точке. В другой работе (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 36 (1934), 445—492) фон Нейман использовал тот же прием для построения инвариантного среднего на почти периодических функциях. Если компактность заменить локальной компактностью, то построение меры Хаара становится более трудным (см. [20], [23], [37], [43]).

Теорема 5.18 была доказана (для банаховых пространств) Рудином (*Proc. Amer. Math. Soc.*, 13 (1962), 429—432). Дальнейшие результаты о недополняемых подпространствах имеются в работах Розенталя (H. P. Rosenthal, *Projections onto translation-invariant subspaces of $L^p(G)$* , AMS Memoir, 1966, и *Acta Math.*, 124 (1970), 205—248). Известны также положительные результаты. Например, пространство c_0 дополняемо в любом separable банаховом пространстве, содержащем его (изометрически) в качестве замкнутого подпространства. Очень короткое доказательство этой теоремы А. Собчика было недавно получено Вичем (W. A. Veech, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28 (1971), 627—628).

Глава 6

Основным объектом ссылок по этому вопросу является, конечно, [45]. См. также [11], [35], [46], [48]. Очень сжатое введение в предмет содержится в [41].

Определение 6.3. Пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ наделяется здесь топологией *индуктивного предела* пространств Фреше $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Детальное обсуждение этого понятия в абстрактной ситуации см. [17, стр. 217—225]. (См. также [46, гл. 2, § 6].)

Глава 7

По поводу тех аспектов анализа Фурье, которые связаны с распределениями, мы отсылаем к [45] и [41]. (См. также гл. 2 в [11].) Теоретико-групповой аспект обсуждается в [29] и [43]. (См. также [7].) Стандартным курсом по рядам Фурье является [15].

Теорема 7.4. Тесная связь между преобразованием Фурье и дифференцированием — не случайность. Ряды Фурье появились в XVIII веке как средство для решения дифференциальных уравнений.

Теорему 7.5 иногда называют леммой Римана — Лебега.

Теорема 7.9 впервые была доказана Планшерелем (M. Plancherel, *Rend. Palermo*, 30 (1910), 289—335).

Теоремы 7.22 и 7.23. Приведенные здесь доказательства представляют собой детализированное изложение доказательств из [41].

Теорема 7.25 принадлежит С. Л. Соболеву (*Матем. сб.*, 4 (46), (1938), 471—498).

Упр. 16. Результат заимствован из первого контрпримера Л. Шварца к проблеме спектрального синтеза (L. Schwartz, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227 (1948), 424—426). (По поводу этого примера см. также [10].) Дальнейшую информацию можно найти в работе Герца (C. S. Herz, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 94 (1960), 181—232) и в гл. 7 книги [29].

Упр. 17. См. C. S. Herz, *Ann. Math.*, 68 (1958), 709—712.

Глава 8

Общие сведения: [1], [19], [34], [46]. (См. также [24].)

Существование фундаментального решения (теорема 8.5) было установлено независимо Эренпрайсом (L. Ehrenpreis, *Amer. J. Math.*, 76 (1954), 883—903) и Мальгранжем в его диссертации (B. Malgrange, *Ann. Inst. Fourier*, 6 (1955—1956), 271—355). Лемма 8.3 принадлежит Мальгранжу. Он доказывает это утверждение для преобразований Фурье f пробных функций. Мальгранж интегрирует по шару там, где мы использовали тор. С точки зрения приложений это безразлично. Весь вопрос в том, чтобы удачно оценить f через fP , т. е. проконтролировать результат деления на полином. Различные пути решения этой и более общих проблем деления такого типа нашел Эренпрайс. См. [34] и [41], где можно найти дальнейшие ссылки и более детальные результаты¹⁾.

В теореме 8.5 существенно, что коэффициенты рассматриваемого дифференциального оператора постоянны: как показал Г. Леви (H. Lewy, *Ann. Math.*, 66 (1957), 155—158), существуют уравнения с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, не имеющие решений²⁾. Весьма полно эффект отсутствия решений исследовал Хёрмандер (см. [41, гл. 6]).

п. 8.8. Изучаются также многие другие пространства типа пространств Соболева. См. [41, гл. 2]. (См. также И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, «Мир», М., 1973.)

Теорема 8.12. См. Фридрихс (K. O. Friedrichs, *Comm. Pure Appl. Math.*, 6 (1953), 299—325) и Лакс (P. D. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), 615—633)³⁾. Лакс сначала разбирает периодический случай при помощи рядов Фурье, а затем выводит из него общий случай. Он не предполагает, что

¹⁾ Л. Хёрмандер (см. сб. *Математика*, 3:5 (1959), 117—130) показал, что проблема деления на полином разрешима в пространстве медленно растущих распределений. Отсюда, в частности, вытекает, что каждое дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами обладает медленно растущим фундаментальным решением. Доказательство Хермандера использует теорему Зайденберга—Тарского и гладкие продолжения по Уитни. Более общий результат (с заменой полиномов аналитическими функциями) независимо получил Лоясевич (см., в частности, S. Łojasiewicz, *Studia Math.*, 18 (1959), 87—136). Глубокие результаты по проблеме деления и смежным проблемам получены В. П. Паламоновым (см., в частности, [24]). — *Прим. ред.*

²⁾ Очень простые примеры такого сорта указал В. В. Грушин (*Матем. заметки*, 10, № 2 (1971), 125—128). В частности, при подходящей бесконечно дифференцируемой правой части f уравнение $du/dx_1 + ix_1 du/dx_2 = f$ может не иметь никаких (даже в смысле распределений) решений в произвольно малой окрестности начала координат. — *Прим. ред.*

³⁾ Имеется русский перевод: сб. *Математика*, 1:1 (1957), 43—59. — *Прим. ред.*

коэффициенты при старших членах постоянны. См. также [13, т. II, стр. 871 и дальше].

Упр. 10. Здесь G есть так называемая функция Грина для оператора $P(D)$.

Упр. 16. В сущности, это теорема о множестве нулей однородного полинома (с комплексными коэффициентами) в $\mathbb{R}^n$. См. [1, стр. 46].

Глава 9

п. 9.1. См. Таубер (A. Tauber, *Monatsh. Math.*, 8 (1897), 273—277) и Литтлвуд (J. E. Littlewood, *Proc. London Math. Soc.*, 9 (1910), 434—448).

Теорема 9.3. Использование распределений в этом доказательстве заимствовано из работы Кореваара (J. Korevaar, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 (1965), 353—355).

Теоремы 9.4—9.7. Винер (N. Wiener, *Ann. Math.*, 33 (1932), 1—100) и Питт (H. R. Pitt, *Proc. London Math. Soc.*, 44 (1938), 243—288). Более поздние доказательства привели к различным обобщениям. Относительно дальнейших ссылок см. [29, стр. 159]. См. также Бёрлинг (A. Beurling, *Acta Math.*, 77 (1945), 127—136).

п. 9.9. Теорема о распределении простых чисел впервые была доказана независимо Адамаром (J. Hadamard, *Bull. Soc. Math. France*, 24 (1896), 199—220) и Валле-Пуссенсом (Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 20 (1896), 183—256). В обоих доказательствах использовались методы комплексного переменного. Винер дал первое тауберо доказательство, использующее его общую теорему тауберова типа. «Элементарные» доказательства были найдены в 1949 г. А. Сельбергом и П. Эрдёшем. Более простое элементарное доказательство имеется у Н. Левинсона (N. Levinson, *Amer. Math. Monthly* 76 (1969), 225—245)¹⁾. Доказательства, основанные на методах комплексного переменного, по-прежнему дают наилучшую из известных оценку остаточного члена. См. ле Век (W. J. Le Vecque, *Topics in Number Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1956, v. II, p. 251).

Теорема 9.12. Ингам (A. E. Ingham, *J. London Math. Soc.*, 20 (1945), 171—180).

Материал, касающийся уравнения восстановления, заимствован у Карлина (S. Karlin, *Pac. J. Math.*, 5 (1955), 229—257), где можно найти ссылки на более ранние работы. Нелинейный вариант уравнения восстановления обсуждается у Човера и Нея (J. Chover, P. Ney, *J. d'Analyse Math.*, 21 (1968), 381—413). См. также В. Ненгу, *Duke Math. J.*, 36 (1969), 547—558.

Упр. 7. Эта задача аппроксимации гораздо более проста в L^2 . См. [27, п. 9.16].

Глава 10

Общие ссылки: [10], [20], [22], [25], [42]. (См. также [7] и [13].) В [20] и [25] основы теории развиваются без предположения о наличии единицы

¹⁾ Нелишне, быть может, напомнить, что первый существенный шаг в проблеме распределения простых чисел был сделан П. Л. Чебышевым, который в работах, датированных 1848—1850 гг., доказал, что отношение $\pi(x)$ к $x/\log x$ ограничено сверху и снизу (причем полученные им оценки позволили ему обосновать «постулат Бертрана» о существовании простых между x и $2x$) и что предел этого отношения, если он существует, должен быть равен 1.

Элементарное доказательство закона распределения простых чисел наряду с элементарными доказательствами целого ряда других теорем теории чисел можно найти в книге А. О. Гельфонда и Ю. В. Линника «Элементарные методы в аналитической теории чисел», Физматгиз, М., 1962. — *Прим. ред.*

в алгебре. В [25] содержится некоторый материал относительно вещественных алгебр.

Работа Гельфанда (*Матем. сб.*, 9(51), (1941), 3—24) содержит теоремы 10.2, 10.13, 10.14, элементы функционального исчисления и теорему 11.9. Для преобразований Фурье мер формула спектрального радиуса (утверждение (b) теоремы 10.13) была раньше найдена Бёрлингом (Proc. IX Congrès de Math. Scandinaves, Helsingfors, 1938, pp. 345—366).

См. также примечание к теореме 3.32.

Теорема 10.9. В коммутативном случае этот результат был получен независимо Глисоном (A. M. Gleason, *J. Anal. Math.*, 19 (1967), 171—172) и Каханом и Желязко (J. P. Kahane, W. Zelazko, *Studia Math.*, 29 (1968), 339—343). Желязко (*Studia Math.*, 30 (1968), 83—85) снял предположение о коммутативности. В тексте приведено несколько более простое доказательство. См. также теорему 1.4.4 в [6] и работу Сиддики (J. A. Siddiqi, *Can. Math. Bull.*, 13 (1970), 219—220).

Теорема 10.19. Зейд (H. A. Seid, *Amer. Math. Monthly*, 77 (1970), 282—283) в случае $M=1$ получил этот результат без предположения о существовании единицы в алгебре A^1).

Теорема 10.20 устанавливает, что $\sigma(x)$ есть полунепрерывная сверху функция от x . С другой стороны, пример Какутани ([25, стр. 282]; см. также [39, стр. 62]) показывает, что, вообще говоря, $\sigma(x)$ не является непрерывной функцией от x . См. также упр. 20.

п. 10.21. Часто используются также термины *операционное* (операторное) *исчисление* или *символическое исчисление*²⁾. Весьма полно функциональное исчисление для банаховых алгебр развито в [42].

Теорема 10.38. Эти формулы дифференцирования, быть может, новые³⁾.

Теорема 10.42. Ривьер (N. M. Rivière) показал мне это доказательство для случая экспоненты, действующей в алгебре всех квадратных матриц второго порядка над полем комплексных чисел.

п. 10.43. Эти результаты (как и результаты, указанные в упр. 12) принадлежат Хилле (E. Hille, *Math. Ann.*, 136 (1958), 46—57).

Теорема 10.44 (d) принадлежит Лорху (E. R. Lorch, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 52 (1942), 238—248).

Упр. 16. Этот результат представляет собой простейший случай теоремы Аренса—Ройдена для коммутативных банаховых алгебр. Теорема Аренса—Ройдена непосредственно связывает группу G/G_1 с топологической структурой пространства максимальных идеалов алгебры A . См. статью Ройдена (H. L. Royden, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 281—298)⁴⁾. См. также заметку Аренса

¹⁾ Здесь стоит напомнить результат С. Мазура, который еще в 1938 г. показал, что алгебра изоморфна полю комплексных чисел, если $\|xy\| = \|x\| \|y\|$ для всех x и y (см. по этому поводу [10, стр. 74]).—*Прим. ред.*

²⁾ В оригинале автор употребляет термин *symbolic calculus*. При переводе решено было использовать (достаточно нейтральный) термин «функциональное исчисление», который, кстати, в аналогичной ситуации использован в русском переводе книг [7] и [9].—*Прим. ред.*

³⁾ Если говорить о новизне, то здесь речь может идти только о степени общности, в которой обоснованы формулы. См., например, Ю. Л. Далецкий и М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, «Наука», М., 1970, и В. И. Буренков, *Матем. заметки*, 10, № 2 (1971), 207—218. В частности, Буренков, рассматривая дифференцирование по параметру, подчеркивает важность условия типа «Ω содержит все λ с $|\lambda| < 3\|x\|$ » для справедливости формулы, подобной (4) из п. 10.38, и на примерах показывает, что константа 3 наилучшая.—*Прим. ред.*

⁴⁾ Имеется русский перевод: сб. *Математика*, 9:2 (1965), 98—114.—*Прим. ред.*

(R. Arens) в сборнике *Function Algebras*, Glenview, Ill., 1966, ed. F. T. Birtel, pp. 164—168¹⁾.

Упр. 17. По поводу точной структуры группы G/G , в данном случае см. работу Тейлора (J. L. Taylor, *Acta Math.*, 126 (1971), 195—225).

Упр. 25²⁾. См. ле Паж (C. Le Page, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 265 (1967), A235—A237).

Глава 11

Теорема 11.7. Для случая $n=1$ П. Коэн (P. J. Cohen, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 (1961), 159—163) нашел элементарный способ доказательства. При $n > 1$ доказательство, приведенное в тексте, по-видимому, единственное известное.

Теорема 11.9. Если алгебра A не имеет единицы, то пространство Δ локально компактно (но не компактно) и $\hat{A} \subset C_0(\Delta)$. В этом случае начало координат пространства A^* попадает в замыкание пространства Δ . См. [20, стр. 71].

Пример 11.13 (d) объясняет, почему имеется тесная связь между коммутативными банаховыми алгебрами и голоморфными функциями нескольких комплексных переменных. В данной книге эта связь не прослеживается вовсе. Нынешнее состояние дел в этом вопросе очень хорошо освещается в книгах Браудера [6], Гамелина [9] и Стаута [31]. Функциональное исчисление может быть развито для функций от нескольких элементов банаховой алгебры³⁾. См. работы Аренса и Кальдерона (R. Arens, A. P. Calderon, *Ann. Math.*, 62 (1955), 204—216) и Тейлора (J. L. Taylor, *Acta Math.*, 125 (1970), 1—38).

Пример 11.13 (e) показывает, каким образом ряд результатов гармонического анализа легко получается при помощи аппарата банаховых алгебр. См. по этому поводу [20] и [29].

Теорема 11.18 была доказана Гельфандом и Наймарком (*Матем. сб.*, 12 (1943), 197—213). В той же работе они доказали, что каждая B^* -алгебра A (коммутативная или нет) изометрически $*$ -изоморфна некоторой алгебре ограниченных операторов подходящего гильбертова пространства (теорема 12.41), если дополнительно элемент $e + x^*x$ обратим для каждого $x \in A$. То, что это дополнительное предположение излишне (утверждение (f) теоремы 11.28), было доказано И. Капланским лишь 15 лет спустя. Ссылки, касающиеся более ранней истории этой теоремы, см. в [25, стр. 248]. Гликфельд (B. J. Glickfeld, *Ill. J. Math.*, 10 (1966), 547—556) показал, что A является B^* -алгеброй, если $\| \exp(ix) \| = 1$ для каждого эрмитова элемента $x \in A$.

Теорема 11.20. Идея перехода от A к A/R для доказательства теоремы без предположения о непрерывности инволюции принадлежит Форду (J. W. M. Ford, *J. Lond. Math. Soc.*, 42 (1967), 521—522).

¹⁾ Частный случай теоремы Аренса—Ройдена, указанный в упр. 16, известен еще с 30-х годов (теорема Брушлинского—Эйленберга). Формулировку и доказательство теоремы Аренса—Ройдена в полном объеме можно найти в [9].—*Прим. ред.*

²⁾ Пример, приведенный в примечании на стр. 294, принадлежит А. С. Немировскому (*Вестник МГУ*, сер. матем., мех., № 6 (1971), 3—7). В указанной работе содержится более общий результат. В некоторых специальных классах алгебр такой эффект невозможен. Например, каждая *некоммутативная* B^* -алгебра содержит нетривиальный нильпотент (И. Капланский). См. Ж. Диксмые, C^* -алгебры и их представления, «Наука», М., 1974, стр. 73, а также упомянутую выше работу Немировского.—*Прим. ред.*

³⁾ Причем первые существенные достижения здесь принадлежит Г. Е. Шиллову (*Матем. сб.*, 32 (1953)) и Вальбруку (L. Waelbroeck, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 238 (1954), 556—558).—*Прим. ред.*

Теорема 11.23. См. R. S. Foguel, *Ark. Mat.*, 3 (1957), 449—461.

Теорема 11.25. См. P. Civin, B. Yood, *Pac. J. Math.*, 9 (1959), 415—436, особенно стр. 420. См. также [25, стр. 182].

Теорема 11.28. В более ранней редакции эти вещи имеются у Птака (V. Pták, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 2 (1970), 327—334). См. также примечание к теореме 11.18.

Теорема 11.31. См. [22] и [25]. Бонеблуст и Карлин (H. F. Bohnenblust, S. Karlin, *Ann. Math.*, 62 (1955), 217—229) выяснили связи между положительными функционалами и геометрией единичного шара банаховой алгебры.

Теорема 11.32. См. [10]. Кроме того, [20, стр. 126] и [25, стр. 230].

Теорема 11.33 имеется в работе [36] для случая непрерывной инволюции.

Упр. 13. Утверждение (g) противоречит второй половине следствия (4.5.3) из [25]. Оно также опровергает теорему (4.8.16) из [25].

Упр. 14. Впервые это было доказано Бохнером (S. Bochner, *Math. Ann.*, 108 (1933), 378—410) при помощи того же аппарата, который мы использовали в теореме 7.7. Несколькое иное доказательство см. в [29]. Приведенное здесь доказательство демонстрирует различия в изучении положительных функционалов при наличии или отсутствии единичного элемента. См. [20, стр. 128] и [25, стр. 219].

Глава 12

Общие ссылки: [13], [19], [26], [38], [39]. (См. также [3].)

Теорема 12.16. Фуглид (B. Fuglede, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 36 (1950), 35—40) доказал это утверждение в случае $M=N$, причем даже для неограниченного нормального оператора (см. упр. 15 в гл. 13). Его доказательство, использующее спектральную теорему, было затем распространено на случай $M \neq N$ Путнамом (C. R. Putnam, *Amer. J. Math.*, 73 (1951), 357—362), который получил также теорему 12.36. Приведенное в тексте короткое доказательство принадлежит Розенблюму (M. Rosenblum, *J. Lond. Math. Soc.*, 33 (1958), 376—377).

Теорема 12.22. Процесс расширения, позволяющий перейти от непрерывных функций к ограниченным, повторяет описанный в [20, стр. 123—124].

Теорема 12.23. Исторические замечания по поводу спектральной теоремы см. в [13, т. II, стр. 83—86]. См. также заметку Халмоша (P. R. Halmos, *Amer. Math. Monthly*, 70 (1963), 241—247) с другим описанием спектральной теоремы. [Интересные замечания, касающиеся различных форм спектральной теоремы, имеются также в задачнике Халмоша [39]. См., в частности, стр. 67—68.—*Ред.*]

п. 12.27. Ароншайн и Смит (N. Aronszajn, K. T. Smith, *Ann. Math.*, 60 (1954), 345—350)¹⁾ доказали, что каждый компактный оператор в банаховом пространстве обладает нетривиальным инвариантным подпространством. Бернштейн и Робинсон (A. R. Bernstein, A. Robinson, *Pac. J. Math.*, 16 (1966), 421—431) обнаружили, что это верно и для произвольного ограниченного оператора T в гильбертовом пространстве, для которого компактен оператор $p(T)$ при некотором полиноме p . Доказательство Бернштейна и Робинсона использует нестандартный анализ. Халмош (*Pac. J. Math.*, 16 (1966), 433—437) превратил его в доказательство, в котором употребляются только классические средства²⁾.

¹⁾ Имеется русский перевод: сб. *Математика*, 2:1 (1958), 97—102. Несколько упрощенное изложение см. также в [13, т. II, стр. 282—284].—*Прим. ред.*

²⁾ Всяма общие теоремы о существовании инвариантных подпространств у операторов, связанных с компактными, доказал В. И. Ломоносов (*Функц. анализ*, 7, № 3 (1973), 55—56). В частности, он показал, что если T — нену-

Теорема 12.38 была доказана Халмошем, Люмером и Шефером (P. R. Halmos, G. Lumer, J. Schäffer, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4 (1953), 142—149). В развитие этого результата Декард и Перси (D. Deckard, C. Pearcy, *Acta Sci. Math. Szeged*, 28 (1967), 1—7) показали, что образ экспоненты не обязан быть ни открытым, ни замкнутым в группе обратимых элементов. Их работа содержит некоторые ссылки на промежуточные результаты.

Теорема 12.39. См. [25, стр. 227].

Теорема 12.41. См. примечание к теореме 11.18.

Упр. 2. Результат хорошо известен, если $N=4$.

Упр. 18. Связь между операторами сдвига и проблемой инвариантных подпространств обсуждается в статье Халмоша¹⁾ (*J. Reine Angew. Math.*, 208 (1961), 102—112).

Упр. 27. Многочисленные факты, касающиеся инволюций, содержатся в работе P. Civin, B. Yood, *Pac. J. Math.*, 9 (1959), 415—436.

Упр. 32. Согласно утверждению (с), каждое равномерно выпуклое банахово пространство рефлексивно. См. упр. 1 гл. 4 и примечание к упр. 28 гл. 3. Все L^p -пространства ($1 < p < \infty$) равномерно выпуклы. См. J. A. Clarkson, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40 (1936), 396—414, или [17, стр. 355—359].

Глава 13

Литература общего характера: [13], [26], [42].

Теорема 13.6 впервые была доказана Уинтнером²⁾ (A. Wintner, *Phys. Rev.*, 71 (1947), 738—739). Более алгебраическое доказательство, приведенное в тексте, принадлежит Виландту (H. Wielandt, *Math. Ann.*, 121 (1949), 21). Несколько более общее рассуждение было использовано Клейнекке (D. C. Kleinfeske, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 535—536) для доказательства следующей теоремы о дифференцированиях: если D — такой непрерывный линейный оператор в банаховой алгебре A , что $D(xy) = (Dx)y + xDy$ для всех $x, y \in A$, то спектральный радиус элемента Dx равен 0 для всякого $x \in A$, для которого x и Dx коммутируют³⁾. См. И. Капланский, *Функциональный анализ*, гл. 3, § 4 (сб. *Математика*, 3:5 (1959), 91—115).

Браун и Перси (A. Brown, C. Pearcy, *Ann. Math.*, 82 (1965), 112—127) доказали, что ограниченный линейный оператор T в сепарабельном гильбертовом пространстве H является коммутатором тогда и только тогда, когда он *непредставим* в виде $\lambda I + C$, где $\lambda \neq 0$, а C — компактный оператор. См. также C. Schneeberger, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28 (1971), 464—472.

Преобразование Кэли, связь его с индексами дефекта и доказательство теоремы 13.30 имеются в работе фон Неймана (*Math. Ann.*, 102 (1929—1930), 49—131); там же доказана спектральная теорема для неограниченных нор-

левой компактный оператор в бесконечномерном банаховом пространстве, то все ограниченные операторы, коммутирующие с T , обладают общим нетривиальным инвариантным подпространством. Даже в случае одного оператора доказательство Ломоносова проще, чем все известные раньше. — *Прим. ред.*

¹⁾ См. также Н. К. Никольский, *Исследования по линейным операторам и теории функций*, I («Наука», Л., 1970), стр. 156—195, и его обзор в сб. «Итоги науки. Математический анализ», М., 1975. — *Прим. ред.*

²⁾ Уинтнер рассматривал лишь случай, когда x и y — ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве; Путнам (C. R. Putnam, *Amer. J. Math.*, 73 (1951), 127—131) заметил, что метод Уинтнера не требует самосопряженности. — *Прим. перев.*

³⁾ Этот результат впервые был получен Ф. В. Широковым (*УМН*, 11, № 4 (1956), 167—168), а для коммутативной алгебры А — Зингером и Вермером (I. M. Singer, J. Wermer, *Math. Ann.*, 129 (1955), 260—264). — *Прим. перев.*

мальных операторов. Материал, относящийся к графикам, содержится в другой работе фон Неймана (*Ann. Math.*, **33** (1932), 294—310). Наше доказательство теоремы 13.33 похоже на доказательство Рисса и Лорха (F. Riesz, E. R. Lorch, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **39** (1936), 331—340). См. также [13, т. II, гл. XII].

Определение 13.34. Условие непрерывности (с), фигурирующее в этом определении, может быть ослаблено: если выполняются условия (а) и (b) и $Q(t)x \rightarrow x$ слабо при $t \rightarrow 0$ для всякого $x \in X$, то выполняется также условие (с) (см. [16, стр. 322—324]). При доказательстве этого утверждения используются некоторые факты из теории интегрирования векторных функций, выходящие за рамки данной книги.

Теорема 13.35 доказана в [13], [16], [26], [42].

Теорема 13.37. М. Стоун (M. H. Stone, *Ann. Math.*, **33** (1932), 643—648); Секефальви-Надь (B. Sz.-Nagy, *Math. Ann.*, **112** (1936), 286—296).

Приложение А

п. А2. Александер (J. W. Alexander, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **25** (1939), 296—298).

п. А3. А. Н. Тихонов (*Math. Ann.*, **102** (1930), 544—561) доказал эту теорему для декартова произведения отрезков и использовал ее для построения компактного расширения вполне регулярного топологического пространства, известного теперь под названием *расширение Чеха* (или Стоуна—Чеха). Чех (E. Čech, *Ann. Math.*, **38** (1937), 823—844, особенно стр. 830) доказал теорему А3 в общем случае и изучил свойства упомянутого компактного расширения. Таким образом, оказывается, что теорему Тихонова доказал Чех, тогда как чеховское расширение построил Тихонов—хорошая иллюстрация исторической надежности математической номенклатуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Армон (Agmon S.), Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, D. van Nostrand, Princeton, N. J., 1965.
- 2*. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, «Наука», М., 1965.
- 3*. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», М., 1966.
4. Банах (Banach S.), Théorie des Opérations linéaires, Monografie Matematyczne, t. 1, Warszawa, 1932.
- 5*. Банах С., Курс функционального анализа, «Радянська школа», Київ, 1948.
6. Браудер (Browder A.), Introduction to Function Algebras, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- 7*. Бурбаки Н., Спектральная теория, «Мир», М., 1972.
8. Виланский (Wilansky A.), Functional Analysis, Blaisdell, New York, 1964.
9. Гамелин Т., Равномерные алгебры, «Мир», М., 1973.
10. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М., 1960.
11. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними (изд. 2-е), Физматгиз, М., 1959.
- 12*. Гофман К., Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1963.
13. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, т. 1, ИЛ, М., 1962; т. 2, «Мир», М., 1966; т. 3, «Мир», М., 1974.
- 14*. Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, ИЛ, М., 1961.
15. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1, 2, «Мир», М., 1965.
16. Иосида К., Функциональный анализ, «Мир», М., 1967.
17. Келли, Намиока (Kelley J. L., Namioka I.), Linear Topological Spaces, D. van Nostrand, Princeton, N. J., 1963.
18. Кёте (Köthe G.), Topological Vector Spaces, I, Springer, New York, 1969.
19. Лорх (Lorch E. R.), Spectral Theory, Oxford Univ. Press, New York, 1962.
20. Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, М., 1956.
- 21*. Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 1, 2, «Наука», М., 1968.
22. Наймарк М. А., Нормированные кольца (изд. 2-е), «Наука», М., 1968.
23. Нахбин (Nachbin L.), The Haar Integral, D. van Nostrand, Princeton, N. J., 1965.
- 24*. Паламодов В. П., Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, «Наука», М., 1967.
25. Риккарт (Rickart C. E.), General Theory of Banach Algebras, D. van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.
26. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
27. Рудин (Rudin W.), Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1966.
- 28*. Рудин У., Основы математического анализа, «Мир», М., 1966.
29. Рудин (Rudin W.), Fourier Analysis on Groups, Int. Publ., a division of John Wiley and Sons, New York, 1962.

30. Рудин У., Теория функций в полидиске, «Мир», М., 1974.
31. Страут (Stout E. L.), The Theory of Uniform Algebras, Bogden and Quigley, Tarrytown, N. J., 1971.
32. Стоун (Stone M. H.), Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 15, New York, 1932.
- 33*. Трев Ж., Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, «Мир», М., 1965.
34. Трев (Trèves F.), Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients, Gordon and Breach, New York, 1966.
35. Трев (Trèves F.), Topological Vector Spaces, Distributions, and Kernels, Acad. Press, New York, 1967.
36. Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, «Мир», М., 1968.
- 37*. Халмош П., Теория меры, «Мир», М., 1953.
38. Халмош (Halmos P. R.), Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea Publ. Comp., New York, 1951.
39. Халмош П., Гильбертово пространство в задачах, «Мир», М., 1970.
- 40*. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г., Неравенства, ИЛ, М., 1948.
41. Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.
42. Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.
43. Хьюитт Э., Росс К. А., Абстрактный гармонический анализ, т. 1, «Наука», М., 1975; т. 2, «Мир», М., 1975.
- 44*. Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, «Наука», М., 1969.
45. Шварц (Schwartz L.), Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.
- 46*. Шефер Х., Топологические векторные пространства, «Мир», М., 1971.
47. Шилов Г. Е., Математический анализ, 2-й специальный курс, «Наука», М., 1965.
48. Эдвардс Э., Функциональный анализ, «Мир», М., 1969.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Цифры, следующие за символом, указывают номер пункта, где объясняется смысл этого символа.

Пространства

$C(\Omega)$	1.3	$\mathcal{R}(T)$	4.11
$H(\Omega)$	1.3	H^1	5.19
C_K^∞	1.3	$\mathcal{D}$	6.1
$\mathcal{N}(\Lambda)$	1.16	$\mathcal{D}(\Omega)$	6.2
$\mathbf{R}^n$	1.19	$\mathcal{D}'(\Omega)$	6.7
$\mathbf{C}^n$	1.19	$\mathcal{S}_n$	7.3
X/N	1.40	$C_0(\mathbf{R}^n)$	7.5
L'	1.43	$\mathcal{S}'_n$	7.11
$\mathcal{D}_K$	1.46	$C^{(p)}(\Omega)$	7.24
$C^\infty(\Omega)$	1.46	T^n	8.2
$\text{Lip } \alpha$	упр. 22 гл. 1	H^s	8.8
l^p	упр. 5 гл. 2	$\tilde{H}(A_\Omega)$	10.26
l^∞	упр. 4 гл. 3	$A(U^n)$	11.7
X^*	3.1	$\hat{A}$	11.8
X_w	3.11	$\text{rad } A$	11.8
$\mathcal{B}(X, Y)$	4.1	H	12.1
$\mathcal{B}(X)$	4.1	$L^\infty(E)$	12.20
X^{**}	4.5	$\mathcal{D}(T)$	13.1
$M^\perp$	4.6, 12.4	$\mathcal{Z}(T)$	13.1
$^\perp N$	4.6	$\mathcal{D}_f$	13.23
$\mathcal{N}(T)$	4.11		

Операторы

D^α	1.46	τ_x	6.29
T^*	4.10, 13.1	D_α	7.1
I	4.17	$P(D)$	7.1
R_s	5.12	D_i^k	7.24
L_s	5.12	Δ	8.5
τ_s	5.19	∂	упр. 8 гл. 8
δ_x	6.9	$\bar{\partial}$	упр. 8 гл. 8
Λ_f	6.11	M_x	10.2
Λ_μ	6.11	$(DF)_a$	10.34

L_x	10.37	S_L	упр. 1 гл. 10
R_x	10.37	S_R	упр. 1 гл. 10
C_x	10.37	V	13.7

Теоретико-числовые функции и обозначения

$\pi(x)$	9.9	$\psi(x)$	9.10
$[x]$	9.10	$F(x)$	9.10
$d n$	9.10	$\zeta(s)$	9.11
$\Lambda(n)$	9.10		

Другие обозначения

$\mathbb{C}$	1.1	поле комплексных чисел
$\mathbb{R}$	1.1	поле вещественных чисел
$\ x\ $	1.2	норма
$\dim X$	1.4	размерность
$\emptyset$	1.4	пустое множество
$\bar{E}$	1.5	замыкание
E°	1.5	множество внутренних точек
$f: X \rightarrow Y$	1.16	символ функции
$f(A)$	1.16	образ
$f^{-1}(B)$	1.16	обратный образ (прообраз)
μ_A	1.33	функционал Минковского
τ_N	1.40	фактортопология
$ \alpha $	1.46	порядок мультииндекса
$p_N(f)$	1.46	полунорма
$\hat{f}(n)$	упр. 6. гл. 2	коэффициент Фурье
$\text{Ind}_\Gamma(z)$	3.30	индекс (кривой относительно точки)
$\langle x, x^* \rangle$	4.2	значение функционала x^* на элементе x
$\sigma(T)$	4.17, 13.26	спектр
$\bigoplus$	4.20	прямая сумма
$ \lambda $	5.5	полная вариация меры
$f _E$	5.6	сужение (отображения, функции)
$\ \varphi\ _N$	6.2	норма в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$
$x \cdot y$	6.10	скалярное произведение
$ x $	6.10	длина (норма) вектора $x \in \mathbb{R}^n$
x^α	6.10	моном
S_Λ	6.24	носитель
$\tilde{u}$	6.29	$\tilde{u}(x) = u(-x)$
$u * v$	6.29, 6.34, 6.37, 7.1	свертка
m_n	7.1	мера Лебега в $\mathbb{R}^n$

$\hat{f}(t)$	7.1	преобразование Фурье
e_t	7.1	характер
rB	7.22	шар радиуса r
e_z	7.20	экспонента
E	8.1	фундаментальное решение
σ_n	8.2	мера Хаара на торе T^n
μ_s	8.8	мера, связанная с пространством H^s
$Z(Y)$	9.3	множество нулей
μ_a, μ_s	9.14	компоненты лебегова разложения меры μ
e	10.1	единичный элемент (алгебры)
$G(A)$	10.10	группа обратимых элементов алгебры A
$\sigma(x)$	10.10	спектр
$\rho(x)$	10.10	спектральный радиус
A_Ω	10.26	множество элементов алгебры A , спектр которых содержится в Ω
$\tilde{f}$	10.26	A -значные голоморфные функции
$(Q\tilde{f})(x; h)$	10.35	разделенная разность
$\exp(x)$	10.37	экспоненциальная функция
Δ	11.5	пространство максимальных идеалов
U^n	11.7	полидиск
$\hat{x}$	11.8	преобразование Гельфанда
$\Gamma(S)$	11.21	централизатор
(x, y)	12.1	скалярное (внутреннее) произведение в унитарном или гильбертовом пространстве
$\frac{1}{E}$	12.1	отношение ортогональности
E	12.17	разложение единицы (спектральное)
$E_{x,y}$	12.17	спектральная мера
$T \subset S$	13.1	отношение включения для операторов

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адамар Ж. 424

Алаоглу Л. 420

Аренс Р. 425, 426

Ароншайн Н. 427

Банах С. 127, 417—420

Бёрлинг А. 424, 425

Бернштейн А. 427

Биркгоф Дж. 419

Бишоп Э. 140, 422

Боненблуст Х. 420, 427

Бохнер С. 418, 427

де Бранж Л. 421

Браудер Э. 426

Браун А. 421, 428

Брей Х. 419

Буренков В. И. 425

Буржен Р. 420

Бэр 52

Валле-Пуссен Ш. Ж. 424

Вальбрук Л. 426

де Век У. 424

Вермер 428

Виландт Х. 428

Вильямсон Дж. 421

Винер Н. 299, 417—419, 424

Вич У. 422

Вольтерра В. 417

Гамелин Т. 426

Гельфанд И. М. 265, 311, 418, 425, 426

Гельфонд А. О. 424

Герц К. 423

Гильберт Д. 417, 418, 421

Гликсберг К. 422

Гликфельд Б. 426

Глисон Э. 425

Гротендик А. 421

Грушин В. В. 423

Далецкий Ю. Л. 425

Данфорд Н. 420

Декард Д. 428

Джеймс Р. 421

Диксмье Ж. 426

Дьедонне Ж. 148

Дюрен П. 419

Желязко В. 261, 425

Зейд Х. 425

Зингер 428

Ингам А. 242, 424

Кадец М. И. 368

Какутани С. 143, 419, 422, 425

Кальдерон А. 426

Капланский И. 426, 428

Карлесон Л. 422

Карлин С. 250, 424, 427

Кахан Ж. П. 261, 421, 425

Клейнекке Д. 428

Колмогоров А. Н. 419

Кореваар Я. 424

Коэн 426

Крейн М. Г. 420, 421, 425

Лакс П. 423

Левн Г. 423

Левинсон Н. 424

Линденштраусс Й. 421

Линник Ю. В. 424

Литтлвуд Дж. 238, 424

Ломоносов В. И. 427, 428

Лорх Э. 425, 429

Лоясевич С. 423

Люмер Г. 428

Ляпунов А. А. 421

Мазур 265, 425

Мальгранж Б. 221, 423

Мандельброт С. 419

Мильман Д. П. 420

Нагумо М. 418
Наймарк М. А. 311, 426
Ней 424
фон Нейман Дж. 417—419, 420, 422, 428, 429
Немировский А. С. 426
Никольский Н. К. 428
Ньюман Д. 155

ле Паж К. 426
Паламодов В. П. 234, 423
Перси К. 428
Петтис Б. 420
Питт Г. 241, 424
Планшерель М. 422
Птак В. 427
Путнам К. 337, 427, 428

Ривьер Н. 425
Риман Б. 418
Рисс Ф. 417, 421, 429
Робинсон А. 427
Рогозинский В. 421
Розенблюм М. 337, 427
Розенталь Х. 422
Ройден Х. 425
Ромберг Б. 419
Рудин У. 155, 421, 422

Секефальви-Надь Б. 429
Сельберг А. 424
Сиддики 425
Смит К. 427
Соболев С. Л. 418, 423
Собчик А. 420, 422
Стаут Э. 426
Стейн И. 423
Стоун М. 418, 429
Сухомлинов Г. А. 420

Таубер 238, 424
Тейлор А. 420

Тейлор Дж. 426
Теплиц 132
Тихонов А. Н. 429

Уинтнер А. 428
Ул Дж. 421

Форд Дж. 426
Фредгольм А. 417
Фреше М. 417
Фридрихс К. 423
Фуглид Б. 397, 427

Халмош П. 421, 427, 428
Хейнс М. 422
Хеллингер 132
Хенри В. 424
Хёрмандер Л. 423
Хилле Э. 425
Хильдебрандт Т. 420

Чебышев П. Л. 42
Чех Э. 429
Човер Дж. 424

Шапиро Дж. 420
Шапиро Х. 421
Шаудер Ю. 421
Шварц Л. 43, 418, 423;
Шефер 428
Шилдс А. 419, 421
Шилов Г. Е. 426
Широков Ф. В. 428
Шмудьян Ю. Л. 421
Шоке 420

Эдвардс Р. 421
Энфло М. 127
Эрдёш П. 424
Эренпрайс Л. 221, 423

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

- Алгебра 137
- Альтернатива Фредгольма 128
- Аннуляторы 108
- Аппроксимативная единица 183
- Аппроксимативное собственное значение 389

- База топологии 13
- Базис векторного пространства 12
- Гамеля 64
- Банахова алгебра 255
- Банахово пространство 10
- Банахов предел 99
- Биективное отображение 113
- Билинейное отображение 63
- Борелевская мера 90
- Бочечное пространство 420
- Бочка 420
- Быстро убывающие функции 194

- Векторная топология 13
- Векторное пространство над полем скаляров 11
- Вероятностная мера 90
- Вещественное векторное пространство 11
- Вещественно линейный функционал 68
- Внутреннее произведение 329
- Внутренность множества 13
- Вполне непрерывные операторы 421
- несвязное топологическое пространство 415
- ограниченное подмножество 86, 87
- Второе сопряженное пространство 108
- Выпуклая локальная база 19
- оболочка 47, 85
- Выпуклое множество 12

- Гильбертово пространство 329
- Гильбертов сопряженный 369
- Гиперплоскость 98
- Гипоэллиптические операторы 234
- Главная компонента 288
- часть оператора 227
- Главное значение интеграла 192

- Голоморфные функции 94, 208
- Гомоморфизмы банаховых алгебр 259
- Граница Шилова 327
- График оператора 369
- отображения 60

- Данные интерполяционной задачи Пика — Неваплинны 141
- Двойственность 106
- Дзета-функция Римана 244
- Диск-алгебра 140, 258
- Дополняемое подпространство 120

- Замкнутая выпуклая оболочка 85
- Замкнутое множество 13
- Замкнутый оператор 369
- путь 95
- Замыкание 13

- Идеал 295
- Инвариантная метрика 15
- Инвариантное подпространство 349
- Инволюция 309
- Индекс точки относительно замкнутого пути 95
- Индексы дефекта 382
- Индукцированная топология 13
- Интеграл функции по мере 90
- Инфинитезимальный производящий оператор 400
- Инъективное отображение 113
- Исходная (подлинная) топология (original topology) 77

- Коммутативное множество 315
- Коммутатор 280
- Компактная группа 147
- Компактное множество 13
- Компактный оператор 117
- Комплексная алгебра 255
- мера 90
- Комплексное векторное пространство 11
- Комплексно линейный функционал 68

- Комплексный гомоморфизм 259
 Конечномерное векторное пространство 12
 Коразмерность 48, 120
 Корень 275
 Коши последовательность 28
 Крайнее множество 85
 Крайняя точка 85
- Левый сдвиг 146
 Лемма Винера 298
 — Римана — Лебега 422
 — Соболева 213
 Линейное отображение множеств 20
 Линейно упорядоченное подмножество 412
 Линейный функционал 21
 Липшицево пространство 51
 Логарифм 275
 Локальная база 13, 15
 Локально интегрируемая функция 159
- Максимальный идеал 295
 — симметрический оператор 378
 Медленно осциллирующая функция 241
 — растущие (умеренные) распределения 201
 Мера Дирака 166
 — Хаара 148
 Метризуемая топология 25
 Множество антисимметрии 137
 — второй категории 52
 — первой категории 52
 — существенных значений 307, 340
 Моном 167
 Монтелевские пространства 420
 Мультииндекс 43
- Неатомическая мера 135
 Непрерывно дифференцируемое отображение 279
 Непрерывный спектр 365, 389
 Нигде не плотное множество 52
 Норма 9
 Нормальная подалгебра 341
 Нормальный оператор 335, 391
 — элемент 316
 Нормированная мера Лебега 193
 Нормированное пространство 9
 — сопряженное 105
 Носитель меры 138
 — распределения 174
 — функции 43
- Образ множества 20
 Обратимый оператор 118
 — элемент 259
 Обратный оператор 118
 Ограниченная в существенном функция 340
 Ограниченное линейное отображение 32
 — подмножество 14
 Однопараметрическая полугруппа 399
 Окрестность 13
 Окруженная точка (internal point) 99
 Оператор сдвига 14
 — умножения 14
 Операторы Гильберта — Шмидта 421
 Операционное исчисление 425
 Опорная функция 419
 Ортогональные векторы 329
 Ортогональный проектор 336
 Открытое множество 12
 — отображение 39, 58
 Открытый шар 10
 Относительно компактное подмножество 117
 Остаточный спектр 365
- Плотно определенный оператор 370
 Поглощающее (absorbing) множество 33
 Подлинная (исходная) топология (original topology) 77
 Подобные операторы 355
 Подпространство векторного пространства 12
 Полная метрика 28
 Полное нормированное пространство 10
 Положительный оператор 352
 — функционал 319
 Полуаддитивность (subadditivity) 33
 Полугруппа операторов 399
 Полунорма (seminorm) 33
 Полупростая алгебра 300
 Полуторалинейная функция 329
 Поляра 81
 Полярное разложение оператора 354
 Порядок дифференциального оператора 43, 227
 — распределение 166
 Правый сдвиг 146
 Предбаза (subbase) 37, 412
 Преобразование Гельфанда 300
 — Гильберта 220
 — Кэли 380
 — Фурье 193
 — Фурье — Планшреля 199
 Принцип замены меры 390
 — равномерной ограниченности 54
 Проектор 151, 335

- Произведения Бляшке 141
 Производная Фреше 279
 Прообраз множества 20
 Пространства Соболева 228
 Пространство с внутренним произведе-
 нием 329
 — максимальных идеалов 300
 — простых функций 161
 — Фреше 15
 Прямая сумма 120
- Равномерно выпуклое банахово про-
 странство 368
 — непрерывная функция на топологи-
 ческой группе 146
 Равностепенно непрерывное семейство
 54
 Радикал 300
 Разбиение 103
 — единицы 172
 Разделенная разность 279
 Раздельно непрерывное отображение 63
 Разделяющее (separating) семейство по-
 лунорм 33
 Разложение единицы (resolution of
 identity) 338
 Размерность векторного пространства
 12
 — гильбертова пространства 382
 Распределения 160, 166
 — на торе 219
 Расширение оператора 369
 Регулярная мера 92
 Резольвентное множество 263, 388
 Рефлексивное пространство 108
- Самосопряженный оператор 335
 — — неограниченный 371
 — элемент 309
 Свертка мер 249
 — распределений 181, 186
 Свойство Гейне — Бореля 15
 Связное множество
 Секвенциально непрерывное отобра-
 жение 415
 Сепарабельное пространство 82
 Сильная топология 72, 77, 107
 Сильно голоморфная функция 95
 Симметрический оператор 371
 Скаляр 11
 Скалярное произведение 329
 Слабая топология 73, 74, 77
 Слабая* топология 80
 Слабо голоморфная функция 95
 Слабое секвенциальное замыкание 100
 Собственное значение 118
- Собственное подпространство 118
 Собственный вектор 118
 — идеал 295
 Совместимые (compatible) метрика и
 топология 13
 Сопряженное пространство 67
 Сопряженный оператор 111
 — — в смысле гильбертова простран-
 ства 334, 369
 Спектр оператора 118
 — — неограниченного 389
 — элемента банаховой алгебры 263
 Спектральная теорема 343
 Спектральное разложение 392
 Спектральный радиус 263
 Спрямоаемый путь 95
 Срезка (truncation) 386
 Степени оператора 117
 Существенная верхняя грань 340
 Сходимость последовательности в ха-
 усдорфовом пространстве 13
 Сюръективное отображение 113
- Тауберова теорема Винера 241
 — — Ингама 245
 Тауберовы теоремы 238
 — условия 228
 Теорема Александра о предбазе 412
 — Асколи 414
 — Банаха — Алаоглу 80
 — Банаха — Штейнгауза 54, 57
 — Бишопа 137
 — Бохнера 321
 — Винера 240
 — Гельфанда — Мазура 265
 — Гельфанда — Наймарка 311
 — Герглота 142
 — Гротендика 133
 — о замкнутом графике 61
 — Какутани 143
 — о категории (теорема Бэра) 52, 53
 — Крейна — Мильмана 86
 — об обратной функции 283
 — обращения 197
 — об открытом отображении 58
 — об отображении спектров 274
 — о простых числах 242
 — Стоуна 404
 — Стоуна — Вейерштрасса 137
 — Тихонова 413
 — Хаусдорфа о максимальности 412
 — Хеллингера — Теплица 132
 Теоремы Пэли — Винера 207
 — регулярности 226
 Топологическая группа 146
 Топологический делитель нуля 291
 Топологическое векторное простран-
 ство 13

- Топологическое векторное пространство локально выпуклое 15
 — — — компактное 15
 — — — ограниченное 15
 — — — метризуемое 15
 — — — нормируемое 15
 — пространство 12
 Топология 13
 — Гельфанда 300
 — поточечной сходимости 48.
 Точечный спектр 277, 365, 389
- У**нитарное пространство 329
 Унитарно эквивалентные операторы 355
 Унитарный оператор 335
 Уравнение восстановления 248
 Уравновешенная локальная база 19
 Уравновешенное множество 12
- Ф**акторнорма 40
 Факторотображение 39
 Факторпространство 39
 Фактортопология 39
 Формула Парсеваля 199
 Фундаментальное решение 221
 Функционал Минковского 33
 Функция Хевисайда 191
- Х**арактер 193
- Характеристический полином оператора 227
 Хаусдорфово пространство 13
- Ц**ентрализатор 315
- Ч**астичная изометрия 355
 Частично упорядоченное множество 412
- Экспонента 354
 Экспоненциальная функция 287
 Экстремально несвязное пространство 308
 Эллиптический оператор 227
 Эрмитов оператор 335
 — элемент 309
 Эрмитово сопряженный оператор 334
- Я**дро линейного отображения (null space) 21
- A -граница 327
 B^* -алгебра 310
 F -пространство 15
 $\mathcal{P}$ -покрытие 412
 *-алгебры 343
 *-изоморфизм 311

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу	5
Предисловие	7

ЧАСТЬ 1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Глава 1. Топологические векторные пространства	9
Введение	9
Свойства отделимости	16
Линейные отображения	20
Конечномерные пространства	22
Метризация	25
Ограниченность и непрерывность	30
Полунормы и локальная выпуклость	33
Факторпространства	38
Примеры	41
Упражнения	47
Глава 2. Полнота	52
Бэровская категория	52
Теорема Банаха—Штейнгауза	54
Теорема об открытом отображении	58
Теорема о замкнутом графике	60
Билинейные отображения	62
Упражнения	63
Глава 3. Выпуклость	67
Теоремы Хана—Банаха	67
Слабые топологии	73
Компактные выпуклые множества	80
Интегрирование векторных функций	89
Голоморфные функции	94
Упражнения	98
Глава 4. Двойственность в банаховых пространствах	104
Нормированное сопряженное к нормированному пространству	104
Сопряженные операторы	111
Компактные операторы	117
Упражнения	126
Глава 5. Некоторые приложения	132
Теорема о непрерывности	132
Замкнутые подпространства в пространствах L^p	133
Область значений векторной меры	135
Обобщенная теорема Стоуна—Вейерштрасса	137

Две интерполяционные теоремы	140
Одна теорема о неподвижной точке	143
Мера Хаара на компактных группах	146
Недополняемые подпространства	150
Упражнения	156

ЧАСТЬ 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Глава 6. Пробные функции и распределения	159
Введение	159
Пространства пробных функций	161
Операции над распределениями	167
Локализация	172
Носители распределений	174
Распределения как производные	177
Свертки	181
Упражнения	188
Глава 7. Преобразование Фурье	193
Основные свойства	193
Медленно растущие распределения	200
Теоремы Пэли—Винера	207
Лемма Соболева	213
Упражнения	216
Глава 8. Приложения к дифференциальным уравнениям	221
Фундаментальные решения	221
Эллиптические уравнения	226
Упражнения	234
Глава 9. Тауберовы теоремы	238
Теорема Винера	238
Теорема о простых числах	242
Уравнение восстановления	248
Упражнения	251

ЧАСТЬ 3. БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

Глава 10. Банаховы алгебры	255
Введение	255
Комплексные гомоморфизмы	259
Основные свойства спектров	263
Функциональное исчисление	268
Дифференцирования	278
Группа обратимых элементов	288
Упражнения	290
Глава 11. Коммутативные банаховы алгебры	295
Идеалы и гомоморфизмы	295

Преобразование Гельфанда	300
Инволюции	309
Приложения к некоммутативным алгебрам	314
Положительные функционалы	319
Упражнения	324
Глава 12. Ограниченные операторы в гильбертовом пространстве . . .	329
Основные факты	329
Ограниченные операторы	332
Теорема о перестановочности	337
Разложения единицы	338
Спектральная теорема	343
Собственные значения нормальных операторов	350
Положительные операторы и квадратные корни	352
Группа обратимых операторов	356
Характеризация B^* -алгебр	359
Упражнения	363
Глава 13. Неограниченные операторы	369
Введение	369
Графики и симметрические операторы	373
Преобразование Кэли	379
Разложения единицы	383
Спектральная теорема	391
Полугруппы операторов	399
Упражнения	407
Приложение А. Компактность и непрерывность	412
Приложение В. Примечания и комментарии	417
Список литературы	430
Список обозначений	432
Именной указатель	435
Указатель терминов	437