М. М. Вайнберг

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС ДЛЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

Допущено Министерством просвещения СССР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

22.162
B14

Вайнберг М. М.

B14 Функциональный анализ: Спец. курс. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1979. — 128 с.

Учебное пособие по программе физико-математических факультетов педагогических институтов представляет собой введение в функциональный анализ. В книге нашли отражение не только основные понятия и результаты (теоремы Хана—Банаха, Штенгауза и т. д.), но и приложения функционального анализа.

В $\frac{60602-589}{103(03)-79}$ 36 — 79 4309020400

ББК 22.162
517.2

ВВЕДЕНИЕ

Обобщение основных понятий математического анализа привело к более общим теориям, объединяемым названием «функциональный анализ».

В первой половине нашего столетия была создана теория общих пространств — метрических, линейных нормированных, топологических, линейных топологических. Началось и изучение функций (отображений) в таких пространствах. Была создана теория линейных функций (линейных функционалов и операторов), получившая широкие приложения в различных вопросах математики, физики и техники. Были предприняты исследования и в области нелинейного функционального анализа: общие свойства нелинейных отображений, дифференциальное и интегральное исчисления в линейных пространствах, вопросы о минимуме и минимизации нелинейных функционалов. Были созданы различные методы исследования нелинейных уравнений в функциональных пространствах, в том числе различные методы приближенного решения нелинейных уравнений. На рубеже первой и второй половин нашего столетия начались исследования по теории дифференциальных уравнений в линейных пространствах с ограниченными и неограниченными операторами. Сначала было показано, что для дифференциальных уравнений с ограниченными операторами сохраняются основные факты теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Более трудными для исследования оказались дифференциальные уравнения с неограниченными операторами (линейными и нелинейными). Эта область интенсивно развивалась за последние 20 лет. Достаточно заметить, что 20 лет назад библиография по дифференциальным уравнениям с неограниченными операторами насчитывала не более 25 названий, а в настоящее время она насчитывает их много сотен.

Не касаясь истории возникновения функционального анализа, заметим лишь, что к созданию функционального анализа привели различные прикладные задачи.

В настоящее время функциональный анализ пронизывает почти все математические дисциплины и применяется при решении различных прикладных задач.

По этой причине важно, чтобы молодежь, оканчивающая математические и физико-математические факультеты педагогических институтов, была знакома с основами линейного и нелинейного функционального анализа. Следует, однако, отметить трудности, связанные с выбором материала для спецкурса «функциональный анализ», так как имеется много монографий по функциональному анализу. При выборе материала автор воспользовался своим опытом чтения спецкурсов по функциональному анализу в Московском областном педагогическом институте им. Крупской и на мехмате МГУ. Этим определился выбор глав спецкурса.

В первых двух главах изучаются основные функциональные пространства (метрические, нормированные и, в частности, гильбертово пространство).

Главы III и IV посвящены рассмотрению линейных операторов и функционалов.

В главе V изучаются различные виды сходимости последовательностей элементов пространства и линейных функционалов, причем в последних двух параграфах этой главы рассматриваются вопросы, нужные при изучении избранных вопросов нелинейного функционального анализа, изложенных в § 19—30. Содержание последних 12 параграфов видно из оглавления. Разумеется, многие вопросы функционального анализа не вошли в данное учебное пособие и, в частности, не вошла спектральная теория линейных операторов. Даны также дополнения, в которых содержатся примеры, задачи и следующие вопросы, нужные при изучении данного спецкурса: топологическая степень отображения, функции с ограниченным изменением и интеграл Стилтьеса, абсолютно непрерывные функции и неопределенный интеграл Лебега.

В конце книги указана использованная автором литература, причем в библиографии, помещенной в [1], [4] и [5], приведены книги, по которым можно познакомиться с другими вопросами функционального анализа, не вошедшими в данное учебное пособие.

Выражаю благодарность рецензентам проф. Н. Я. Виленкину, проф. Д. А. Райкову и спец. редактору М. Е. Косицкому, оказавшим мне большую помощь в подготовке книги к печати.

Москва, январь 1976 г. М. Вайнберг

Глава I

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Метрическим пространством называется пара (E, ρ), где E — некоторое множество и $\rho(x, y)$ — вещественная функция, удовлетворяющая для всех $x, y, z \in E$ следующим условиям (аксиомам):

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. (аксиома симметрии) $\rho(y, x) = \rho(x, y)$;
3. (аксиома треугольника) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Функция ρ называется расстоянием или метрикой на E. Разумеется, если наделить множество E другим расстоянием ρ_1, то получим другое метрическое пространство. Поэтому пишут: (E, ρ_1).

1.1. Примеры.

1) Пусть E — множество всех бесконечных последовательностей комплексных чисел: $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$, $z = (z_1, z_2, z_3, \ldots)$. Положим

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Данный ряд сходится, так как он мажорируется сходящейся геометрической прогрессией. Так как все члены этого ряда неотрицательны, то $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_n = y_n$ для любого n, т. е. при $x = y$. Второе свойство метрики (симметрия) также следует из определения. Докажем свойство 3 — неравенство треугольника. С этой целью рассмотрим функцию $f(t) = \frac{t}{1+t}$ для $t \geqslant 0$. Так как $f(t) = 1 - \frac{1}{1+t}$, то это возрастающая функция при $t \geqslant 0$. Далее, так как $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, то в силу возрастания $f(t)$

$$\frac{a+b}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

откуда для любых трех последовательностей: $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ $z = (z_n)$ — комплексных чисел имеем:

$$\frac{|x_n - z_n + z_n - y_n|}{1 + |x_n - z_n + z_n - y_n|} \leqslant \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|},$$

а значит, $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

2) Другими примерами метрических пространств могут служить множества точек евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ размерности n, наделенные метрикой $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

1.2. Основные понятия.

Пусть $M = (E, \rho)$ — метрическое пространство. Последовательность $(x_n) \subset M$ называют фундаментальной, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует n_0 такое, что для любых $m, n \geqslant n_0$ справедливо неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Последовательность $(x_n) \subset M$ называют сходящейся, если существует элемент $x_0 \subset M$, обладающий тем свойством, что каждому $\varepsilon > 0$ соответствует n_0 такое, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Тогда x_0 называют пределом последовательности (x_n); говорят, что последовательность сходится к x_0 и пишут: $x_n \to x_0$ или $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Как и в классическом анализе, доказывается, что если последовательность имеет предел, то он единственный. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0'$, то $\rho(x_0, x_0') \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, x_0')$. Так как правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, а левая неотрицательна, то $\rho(x_0, x_0') = 0$, т. е. $x_0 = x_0'$.

Полным метрическим пространством называют метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится.

Отметим еще, что в каждом метрическом пространстве M расстояние есть непрерывная функция своих аргументов, т. е. если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

Доказательство. Пусть $x, y, z, u \in M$. Из неравенства треугольника следует, что

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, u) + \rho(u, z),$$
$$\rho(y, u) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, z) + \rho(z, u),$$

откуда

$$\rho(x, z) - \rho(y, u) \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, u),$$
$$\rho(y, u) - \rho(x, z) \leqslant \rho(y, x) + \rho(z, u).$$

Следовательно,

$$|\rho(x, z) - \rho(y, u)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, u).$$

Используя это неравенство, имеем:

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n).$$

Так как правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, то при $n \to \infty$ $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

В метрическом пространстве M можно рассматривать различные множества, окрестности точек, предельные точки и другие понятия классического анализа (см. § 5). Обычно под окрестностью точки $x_0 \in M$ понимают множество, содержащее открытый шар радиуса r с центром в точке x_0, т. е.

$$K(x_0, r) = \{x \mid x \in M,\ \rho(x, x_0) < r\}.$$

Точка $y \in M$ называется предельной для множества $S \subset M$, если в любой окрестности точки y содержится хотя бы одна точка из S, отличная от y. Точка $x_0 \in S$ называется внутренней точкой множества S, если она входит в S вместе с некоторой своей окрестностью $K(x_0, \varepsilon)$. Множество $Q \subset M$ называется открытым, если оно состоит из одних внутренних точек. Множество $Q \subset M$ называется замкнутым в себе, если оно содержит все свои предельные точки. Разумеется, само метрическое пространство является замкнутым. Всякое множество $T \subset M$ с метрикой, заимствованной из M, называется подпространством пространства M. Подпространства могут быть и не замкнутыми подмножествами M. Если к T присоединить все его предельные точки, то получим замыкание T; оно обозначается $\overline{T}$. Нетрудно видеть, что $\overline{T}$ — замкнутое множество.

Пусть $S, Q \subset M$. Множество S называется плотным в Q, если $\overline{S} \supset Q$. Множество $S \subset M$ называется всюду плотным, если $\overline{S} = M$. Множество $S \subset M$ называется нигде не плотным в M, если, каков бы ни был шар K, найдется другой шар $K_1 \subset K$, свободный от точек множества S. Пространство M называется сепарабельным, если в нем существует всюду плотное счетное множество.

1.3. Пространство непрерывных функций.

Рассмотрим совокупность всех непрерывных вещественных функций на $[a, b]$. Для каждых двух таких функций: $x = x(t)$, $y = y(t)$ — положим

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

ρ — метрика. Действительно, выполнение первых двух аксиом метрики очевидно. А так как для любого $t \in [a, b]$

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

то и

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

т. е. выполнено и неравенство треугольника

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Метрическое пространство, образуемое рассматриваемой совокупностью функций с введенной в ней метрикой ρ, обозначается согласно Чебышеву, который пользовался этой метрикой, через $C[a, b]$ и называется пространством непрерывных функций. Отметим, что если вместо непрерывных вещественных рассмотреть непрерывные комплексные функции на $[a, b]$ с той же метрикой, то получим комплексное пространство $C[a, b]$. Метрика пространства C называется чебышевской или равномерной.

Покажем, что $C[a, b]$ — полное метрическое пространство. Пусть $(x_n) \subset C[a, b]$ — фундаментальная последовательность, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n > n_0$ и

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon.$$

Поэтому для каждого фиксированного $t \in [a, b]$ имеем:

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \text{ при } m, n > n_0. \tag{i}$$

Тем самым $(x_n(t))$ для каждого $t \in [a, b]$ — числовая фундаментальная последовательность. Следовательно, согласно критерию Коши $(x_n(t))$ в каждой точке $t \in [a, b]$ сходится к некоторому пределу $x(t)$. Фиксируя n в неравенстве (i) и переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \forall n > n_0 \ \forall t \in [a, b] \, |x(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. сходимость оказывается равномерной на $[a, b]$. Раз последовательность непрерывных функций $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ равномерно, то согласно известной теореме анализа $x(t)$ — непрерывная функция. Полнота $C[a, b]$ этим доказана. Отметим еще следующее. Так как по известной теореме Вейерштрасса всякую непрерывную функцию на $[a, b]$ можно приблизить многочленами с рациональными коэффициентами, а множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счетно, то $C[a, b]$ сепарабельно.

Аналогично проверяется, что пространство функцией, r раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} (|x(t) - y(t)| + |x'(t) - y'(t)| + \ldots + |x^{(r)}(t) - y^{(r)}(t)|),$$

является полным метрическим пространством. Это пространство обозначается $C^r[a, b]$.

§ 2. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

2.1. Отображения в метрических пространствах.

Как и в классическом математическом анализе отображение (функция) G пространства (M_1, ρ_1) в пространство (M_2, ρ_2) определяется так: если каждому $x \in M_1$ отвечает по некоторому правилу единственная точка $y = G(x) \in M_2$, то говорят, что G отображает пространство M_1 в M_2, и пишут:

$$G\colon M_1 \to M_2$$

(M_2 может совпадать с M_1; в этом случае говорят об отображении M_1 в себя). Отображение G называется непрерывным в точке x_0 относительно множества $T \subset M_1$, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $x \in T$ и $\rho_1(x, x_0) < \delta$, то $\rho_2(G(x), G(x_0)) < \varepsilon$. Отображение G называется непрерывным на $S \subset M_1$

относительно множества $T \subset M_1$, если оно непрерывно в каждой точке S относительно множества T. Множество точек метрического пространства называется ограниченным, если можно указать шар пространства, который содержит это множество. Отображение G: $M_1 \to M_2$ называется ограниченным, если оно преобразует всякое ограниченное множество из M_1 в ограниченное множество пространства M_2.

Примером отображения в $C[a, b]$ может служить оператор Немыцкого. Пусть $f(u, x)$ — функция, непрерывная по совокупности аргументов $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < u < +\infty$. Положим для $\varphi \in C[a, b]$

$$h\varphi = f(\varphi(x), x).$$

Отображение h называется оператором Немыцкого. Об операторе h изложено в [2].

Определение 1.1. Говорят, что отображение A: $M \to M$ имеет неподвижную точку x_0, если $Ax_0 = x_0$.

Вопрос о существовании неподвижной точки представляет интерес для решения дифференциальных (линейных и нелинейных) уравнений в метрических пространствах.

Определение 1.2. Отображение A: $M \to M$ называется сжимающим, если существует такое число α, что $0 < \alpha < 1$ и

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y)$$

для всех $x, y \in M$.

2.2. Теорема существования неподвижной точки преобразования.

Теорема 2.1. ***Сжимающее отображение A полного метрического пространства в себя имеет и притом единственную неподвижную точку.***

Доказательство. Пусть M — полное метрическое пространство и A: $M \to M$ — сжимающее отображение. Возьмем произвольную точку $u_0 \in M$ и положим

$$u_1 = Au_0, \quad u_2 = Au_1 = A(Au_0) = A^2u_0,$$
$$u_3 = Au_2 = A(A^2 u_0) = A^3u_0, \ \dots,$$
$$u_k = Au_{k-1} = A(A^{k-1}u_0) = A^k u_0 \ \dots .$$

Тогда $\rho(u_k, u_{k+1}) = \rho(A^k u_0, A^{k+1}u_0) \leqslant \alpha\rho(A^{k-1}u_0, A^k u_0) \leqslant$
$$\leqslant \dots \leqslant \alpha^k\rho(u_0, u_1).$$

Из этого неравенства находим, что

$$\rho(u_n, u_{n+p}) \leqslant \rho(u_n, u_{n+1}) + \rho(u_{n+1}, u_{n+2}) + \dots + \rho(u_{n+p-1}, u_{n+p}) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^n\rho(u_0, u_1) + \alpha^{n+1}\rho(u_0, u_1) + \dots + \alpha^{n+p-1}\rho(u_0, u_1) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(u_0, u_1).$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha^n = 0$. Поэтому каждому $\varepsilon > 0$ соответствует натуральное n_0 такое, что при $n > n_0$

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(u_0, u_1) < \varepsilon.$$

Следовательно, (u_n) — фундаментальная последовательность. В силу полноты M найдется такая точка $u \in M$, что при $n \to \infty$

$$u_n \to u,$$

т. е.

$$\rho(u_n, u) \to 0.$$

Покажем, что u — неподвижная точка отображения A. Действительно, при $k \to \infty$

$$\rho(Au, u_k) = \rho(Au, Au_{k-1}) \leqslant \alpha\rho(u, u_{k-1}) \to 0,$$

т. е. и Au — предел последовательности (u_k). В силу единственности предела $u = Au$. Покажем, что u — единственная неподвижная точка. Действительно, если u и v неподвижные точки, то

$$\rho(u, v) = \rho(Au, Av) \leqslant \alpha\rho(u, v),$$

т. е.

$$\rho(u, v)(1-\alpha) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $\rho(u, v) = 0$, а значит, $u = v$. Теорема доказана.

Отметим, что путем перехода к пределу при $p \to \infty$ мы из неравенства

$$\rho(u_n, u_{n+p}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(u_0, u_1)$$

при $n = 0$ получим неравенство

$$\rho(u_0, u) \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\,\rho(u_0, u_1),$$

из которого получается оценка расстояния от неподвижной точки u до начальной точки u_0.

Замечание. Если A — сжимающее отображение лишь в некоторой части M, например в замкнутом шаре $K \subset M$, то теорема остается верной для подпространства K при дополнительном требовании, что для любого $u \in K$ также $Au \in K$.

2.3. Теорема Коши для дифференциальных уравнений.

Применим принцип сжимающих отображений к доказательству теоремы Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{2.1}$$

где f непрерывна по совокупности аргументов в полосе $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < +\infty$ и удовлетворяет в ней условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M\,|y_1 - y_2|, \tag{2.2}$$

где M — некоторая постоянная (так называемая постоянная Липшица). Ставится задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ уравнения (2.1), удовлетворяющего начальному условию

$$\varphi(x_0) = y_0,$$

где (x_0, y_0) — произвольная внутренняя точка рассматриваемой полосы. Как известно, данная задача эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{2.3}$$

Действительно, если $y(x)$ — решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию, то после интегрирования (2.1) получим (2.3). Обратно, если $y = y(x)$ — непрерывное решение уравнения (2.3), то, дифференцируя правую часть по x, приходим к (2.1), причем $y(x_0) = y_0$.

Будем рассматривать правую часть (2.3) как отображение $C[a, b]$ в себя, относящее функции $y(t) \in C[a, b]$ функцию

$$(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Докажем, что при достаточно малом $|b - a|$ A — сжимающее отображение.

Используя (2.2), находим:

$$\rho(Ay_1, Ay_2) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |Ay_1(x) - Ay_2(x)| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_1(t)) - \right.$$

$$\left. - f(t, y_2(t))]\, dt \right| \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t) \right| dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \int_{x_0}^{x} M \left| y_1(t) - y_2(t) \right| dt \right| \leqslant M \left| \int_{x_0}^{x} \rho(y_1, y_2)\, dt \right| =$$

$$= M(b - a)\, \rho(y_1, y_2),$$

т. е. $\rho(Ay_1, Ay_2) \leqslant \alpha\rho(y_1, y_2)$, где $\alpha = M(b - a) < 1$.

Таким образом, если выполнено (2.2), то уравнение (2.1) имеет в некоторой окрестности точки x_0 единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Глава II

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ИЛИ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Как известно, линейные пространства играют большую роль в линейной алгебре. В функциональном анализе они также играют исключительную роль. Сначала мы рассмотрим различные линейные пространства, а затем построим анализ в таких пространствах.

3.1. Аксиомы линейного пространства.

Пусть E — множество, в котором введена бинарная операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов x, y из E элемент из E, называемый суммой этих элементов и обозначаемый $x+y$, причем выполнены следующие аксиомы:

Для всех $x, y, z \in E$:

1. $x + y = y + x$ (коммутативность сложения).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения).
3. Существует единственный элемент 0 из E, называемый нулем, такой, что $x + 0 = x$ для всех $x \in E$.
4. Каждому элементу $x \in E$ соответствует единственный противоположный элемент из E, обозначаемый через $-x$, такой, что $x + (-x) = 0$. (Вместо $x + (-y)$ пишут $x - y$.)

Пусть, кроме того, введена операция умножения элементов из E на числа из поля $\boldsymbol{K}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

Для любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ и $x, y \in E$:

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$ (ассоциативность умножения);

$$\left.\begin{aligned} &6.\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \\ &7.\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \end{aligned}\right\} \text{(законы дистрибутивности);}$$

8. $1 \cdot x = x$.

Множество E с операциями, удовлетворяющими перечисленным аксиомам, называется линейным или векторным пространством над полем $\boldsymbol{K}$, а его элементы — векторами или точками пространства E. Пространство E называется вещественным, если $\boldsymbol{K}$ — поле вещественных чисел $\boldsymbol{R}$, и комплексным, если $\boldsymbol{K}$ — поле комплексных чисел $\boldsymbol{C}$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь вещественные или комплексные пространства и для краткости речи говорить о линейном пространстве E над соответствующим полем $\boldsymbol{K}$.

Здесь мы не останавливаемся на вопросе о зависимости перечисленных аксиом, он достаточно изучен в курсе линейной алгебры; там же рассмотрены и примеры линейных пространств.

3.2. Некоторые вспомогательные понятия.

Линейные пространства E и E' над одним и тем же полем $\boldsymbol{K}$ называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие

$$x \leftrightarrow x',$$

сохраняющее алгебраические действия, т. е. такое, что если для любых x, x', y, y' $x \leftrightarrow x'$ и $y \leftrightarrow y'$, то $x + y \leftrightarrow x' + y'$ и $\alpha x \leftrightarrow \alpha x'$ для всех $\alpha \in \boldsymbol{K}$. Подмножество F линейного пространства E над $\boldsymbol{K}$, являющееся линейным пространством относительно заимствованных из E операций сложения элементов и умножения их на скаляры из $\boldsymbol{K}$, называется линейным подпространством (или просто подпространством) пространства E. Для того чтобы F являлось подпространством, необходимо и достаточно, чтобы F вместе с каждыми своими элементами x, y содержало их сумму $x + y$ и вместе с каждым своим элементом x содержало αx для всех $\alpha \in \boldsymbol{K}$.

В линейных пространствах вводятся понятия линейной зависимости и независимости векторов. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ пространства E называются линейно независимыми, если из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = 0 \tag{3.1}$$

следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. В противном случае (т. е. когда имеет место равенство (3.1), в котором хотя бы один коэффициент α_i отличен от нуля) векторы x_1, x_2, ..., x_k называются линейно зависимыми.

Если в пространстве E существует n линейно независимых векторов, а всякие $n + 1$ векторов линейно зависимы, то говорят, что размерность пространства E равна n. Если для любого n в E существует n линейно независимых векторов, то говорят, что размерность E равна бесконечности. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — векторы из E. Тогда всевозможные линейные комбинации вида

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

образуют линейное подпространство пространства E. Его размерность не превышает n.

Множество вида $\{x + z,\ x \in L,\ \ z \in E\}$, где L — подпространство пространства E, а z — фиксированный элемент из E, мы будем называть линейным многообразием.

§ 4. НОРМИРОВАННЫЕ И БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Здесь мы рассмотрим пространства, наиболее важные для дальнейшего изложения.

4.1. Основные понятия.

Линейное пространство E над $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$ называется нормированным, если каждому вектору $x \in E$ поставлено в соответствие вещественное число, называемое нормой вектора x и обозначаемое

$\|x\|$, причем выполнены следующие аксиомы (справедливые для всех $x, y \in E$ и всех скаляров α):

1. $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$[1].
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Норма порождает на E метрику

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Действительно,

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, ибо $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$, т. е. $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, ибо $\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\|$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, ибо $\|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\|$.

Нормированное пространство всегда рассматривается также как метрическое, с указанной метрикой. Поэтому в нем имеется понятие сходимости последовательности. А именно: последовательность (x_n) сходится к вектору x_0, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует n_0 такое, что $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Как в любом метрическом пространстве, если предел существует, то он единственный. Отметим, что в нормированных пространствах алгебраические операции непрерывны. Действительно, если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то, так как

$$\|(x + y) - (x_n + y_n)\| \leqslant \|x - x_n\| + \|y - y_n\|$$

и правая часть стремится к нулю, т. е. $x_n + y_n \to x + y$ или $x + y = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n)$.

Также, если $\alpha_n \to \alpha$ и $x_n \to x$, то $\alpha x = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n x_n$, ибо $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leqslant |\alpha_n| \, \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \, \|x\|$ и правая часть стремится к нулю. Отметим еще, что если $x_n \to x_0$, то $\|x_n\| \to \|x_0\|$, а значит, (x_n) — ограниченная последовательность. Действительно, $\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$, откуда $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$. Аналогично $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|$. Следовательно, $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$. Поэтому, если $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$, то $|\|x_n\| - \|x_0\|| < \varepsilon$, а значит, $x_n \to x_0$ влечет $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Как и в метрических пространствах, последовательность $(x_n) \subset E$ называется фундаментальной, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует n_0 такое, что если $m, n \geqslant n_0$, то $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Полные нормированные пространства называются банаховыми пространствами.

Перейдем к рассмотрению примеров.

4.2. Пространства C, L^p, l^p.

Пример 1. Пространство непрерывных функций. Раньше

[1] Одним и тем же символом 0 обозначается и число нуль и вектор нуль (что именно всегда ясно из контекста).

мы видели, что это полное сепарабельное пространство. Оно линейно относительно обычной операции сложения:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

и умножения на скаляры из поля $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$. Введем теперь норму, полагая

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

Выполнение аксиом нормы легко проверяется. Например, для всех x, $y \in C[a, b]$ и $t \in C[a, b]$ имеем:

1) $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0$,

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,

3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, ибо для любого $t \in [a, b]$ $|x(t) + y(t)| \leqslant$

$$\leqslant |x(t)| + |y(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)| = \|x\| + \|y\|,$$

откуда $\|x + y\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) + y(t)| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Мы раньше видели, что $C[a, b]$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Таким образом, пространство $C[a, b]$ — банахово.

Пример 2. Пространства Лебега L^p $(p \geqslant 1)$. Пусть G — измеримое множество в s-мерном евклидовом пространстве. Будем рассматривать всевозможные вещественные или комплексные функции на G, суммируемые по Лебегу со степенью p, и введем обычные действия сложения функций и умножения функции на вещественные (соответственно комплексные) числа. Тогда получим вещественное (соответственно комплексное) линейное пространство. Действительно, если $x(t)$ и $y(t)$ суммируемы со степенью p, то их сумма также суммируема на G со степенью p, ибо она измерима и

$$|a + b|^p \leqslant 2^p (|a|^p + |b|^p), \tag{4.1}$$

что вытекает из неравенства

$$|a + b|^p \leqslant (2|a|)^p = 2^p |a|^p \leqslant 2^p (|a|^p + |b|^p) \text{ при } |b| \leqslant |a|.$$

Положим теперь

$$\|x\| = \left(\int_G |x(t)|^p dt^{\frac{1}{p}}\right). \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует:

1) $\|x\| \geqslant 0$. Нуль пространства L^p есть функция, равная нулю почти всюду на G. В теории интеграла принято, что функции, отличающиеся друг от друга лишь на множестве меры нуль, считаются эквивалентными, поэтому $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ясно также, что

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$. Третье свойство нормы есть здесь не что иное, как неравенство Минковского[1]:

$$\left(\int_G |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_G |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_G |y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отметим еще неравенство Гельдера:

$$\int_G x(t)\,y(t)\,dt \leqslant \left(\int_G |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_G |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Аналогичные неравенства справедливы для сумм. Именно, если $p > 1$ и числовые последовательности (x_k), (y_k) удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p < +\infty,$$

то справедливо неравенство Минковского

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.3}$$

и неравенство Гельдера

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

Таким образом, рассматриваемое линейное пространство оказывается нормированным с нормой (4.2). Оно называется пространством Лебега и обозначается через L^p или L_p.

Пример 3. Пространства l^p. Будем рассматривать всевозможные последовательности $(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x$ вещественных или комплексных чисел, для которых

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad p \geqslant 1.$$

Такие последовательности в силу неравенства (4.1) образуют линейное пространство относительно сложения

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 \ldots)$$

---

[1] Вывод неравенств Гельдера и Минковского можно найти, например, в книгах И. П. Натансона «Теория функций вещественного переменного» (М., Гостехиздат, 1957) и Г. Е. Шилова, Б. А. Гуревича «Интеграл, мера и производная» (М., Физматгиз, 1967).

и умножения

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \ldots)$$

на скаляры соответственно из поля $\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$. В первом случае это линейное пространство является вещественным, а во втором — комплексным. Положим в нем

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.4}$$

Это норма: выполнение первой и второй аксиом непосредственно следует из определения (4.4), а третьей — из неравенства Минковского (4.3). Такие нормированные пространства обозначаются через l^p.

В дальнейшем будет доказано (для случая $p > 1$), что L^p и l^p — полные пространства. Они полные и при $p = 1$.

4.3. Абстрактное гильбертово пространство.

Линейное пространство (вещественное или комплексное) называется гильбертовым, если в нем для любой пары векторов x, y введено скалярное произведение (x, y), удовлетворяющее следующим аксиомам (справедливым для всех x, y и $\alpha \in \boldsymbol{K}$):

1) (x, y) — вещественное или комплексное число;
2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$;
4) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
5) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

Из 2) и 3) следует $(x, \alpha y) = \bar{\alpha} (x, y)$, ибо

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \bar{\alpha}\, \overline{(y, x)} = \bar{\alpha} (x, y).$$

Из 5) и 2) следует $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$. Гильбертово пространство мы будем обозначать через H. Гильбертово пространство становится нормированным, если положить

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{4.5}$$

6) Относительно данной нормы H является полным пространством. Отметим, что из аксиомы 4) следует, что $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Далее,

$$\|\alpha x\|^2 = (\alpha x, \alpha x) = |\alpha|^2 (x, x) = |\alpha|^2 \|x\|^2,$$

так что $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

Для доказательства выполнения третьего свойства нормы нам потребуется неравенство Коши.

4.4. Неравенство Коши и треугольника.

Сначала докажем неравенство Коши

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|.$$

При $(x, y) = 0$ оно очевидно. Поэтому при доказательстве мы будем предполагать, что $(x, y) \neq 0$, и положим $\mu = \frac{(x,y)}{|(x,y)|}$, отсюда $|\mu| = 1$. Теперь при любом вещественном λ имеем:

$$0 \leqslant (\bar{\mu}x + \lambda y, \bar{\mu}x + \lambda y) = \lambda^2 (y, y) + 2\lambda \, |(x, y)| + (x, x).$$

Раз квадратный трехчлен относительно λ с вещественными коэффициентами не принимает отрицательных значений, то его дискриминант не может быть положительным, т. е.

$$|(x, y)|^2 - (x, x) (y, y) \leqslant 0.$$

Отсюда $|(x, y)|^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$ или $|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|$. Неравенство Коши доказано. Отсюда выводится неравенство треугольника. Напишем $(x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)$. Так как $(x, y) \leqslant \|x\| \|y\|$ и $(y, x) \leqslant \|x\| \|y\|$, то из данного и предыдущего неравенств находим:

$$\|x + y\|^2 \leqslant (x, x) + 2 \|x\| \|y\| + (y, y) = (\|x\| + \|y\|)^2$$

или

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

т. е. доказано неравенство треугольника. Таким образом, гильбертово пространство — банахово.

Основными примерами гильбертова пространства служат пространства l^2 и L^2. Действительно, пусть $x, y \in l^2$. Положим

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k.$$

Ряд сходится, ибо $|x_k \bar{y}_k| \leqslant \frac{1}{2} (|x_k|^2 + |\bar{y}_k|^2$, и удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, причем норма $\sqrt{(x, x)}$, порождаемая этим скалярным произведением, совпадает с исходной нормой $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ пространства l^2. Полнота пространства l^2 будет доказана в § 13.

Далее рассмотрим пространство L^2. В нем

$$\|x\| = \left(\int_G |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $x, y \in L^2$. Так как функция $x(t) \overline{y(t)}$ измерима и $|x(t) \overline{y(t)}| \leqslant \frac{1}{2} (|x(t)|^2 + |y(t)|^2)$, то интеграл $\int_G x(t) \overline{y(t)} \, dt$ существует. При этом $(x, y) = \int_G x(t) \overline{y(t)} \, dt$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения и $\sqrt{(x, x)} = \|x\|$. Доказательство полноты пространства L^2 можно найти в книгах, указанных в сноске на странице 16.

Покажем, что в абстрактном гильбертовом пространстве скалярное произведение непрерывно относительно сходимости по норме. Действительно, если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\| x_n\| \leqslant M$ и $\|y_n\| \leqslant M$ для некоторой постоянной M. Отсюда

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| = \\ = |(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)| \leqslant \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - \\ - y\| \leqslant \|x_n - x\| M + \|x\| \|y_n - y\| \to 0$$

при $n \to \infty$.

§ 5. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

5.1. Общие топологические пространства.

Система τ подмножеств множества E определяет в E топологию, если она содержит пустое множество $\varnothing$, множество E, объединение множеств любой своей подсистемы и пересечение множеств любой своей конечной подсистемы. Множества системы τ называются открытыми множествами топологического пространства (E, τ). Мы будем предполагать, что топологическое пространство (E, τ) или, кратко, E удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа: для каждой пары различных точек x_1, x_2 из (E, τ) существуют открытые множества G_1 и G_2, содержащие соответственно x_1 и x_2, и такие, что $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Окрестностью точки x пространства E называется всякое множество, содержащее открытое множество G, которому принадлежит x. Окрестность множества M пространства E определяется как множество, являющееся окрестностью любой точки из M. Точка x пространства E называется предельной точкой множества $M \subset E$, если всякая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M, отличную от x. Всякое подмножество K топологического пространства E становится топологическим подпространством, если за открытые множества в K принять пересечения $K \cap G$, где G — всевозможные открытые множества пространства E. Говорят, что эта топология в K индуцирована топологией пространства E.

Множество $M \subset E$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Как и в теории множеств, доказывается, что M замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $E \setminus M$ — открытое множество пространства E. Присоединяя к M множество M' всех его предельных точек, получим замыкание $\overline{M}$ множества M. Можно показать, что $\overline{M}$ замкнуто. Пусть E_x и E_y — топологические пространства. Отображение $F\colon E_x \to E_y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in E_x$, если любой окрестности V точки $F(x_0)$ соответствует окрестность U точки x_0 такая, что $F(U) \subset V$. F называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке своей области определения. Семейство β подмножеств из E называется базисом топологии τ, если $\beta \subset \tau$ и каждое множество из τ есть объединение множеств, принадлежащих β. Множество γ

окрестностей точки a пространства E называется базисом окрестностей этой точки, если любая ее окрестность содержит некоторую окрестность из γ.

5.2. Топологические линейные пространства.

Пусть E — вещественное линейное пространство. Говорят, что топология τ в E согласована с его линейной структурой, если в этой топологии сумма $x+y$ элементов пространства E и произведение αx скаляра α на элемент x из E непрерывны по совокупности переменных, т. е. выполнены условия:

1) для всякой окрестности V_{x+y} вектора $x+y$ существуют окрестности U_x вектора x и U_y вектора y такие, что $U_x+U_y=\{z \mid z\in E,\ z=u_1+u_2,\ u_1\in U_x,\ u_2\in U_y\}\subset V_{x+y}$;

2) для всякой окрестности $V_{\alpha x}$ вектора αx существуют $\varepsilon>0$ и окрестность U_x вектора x такие, что для всех λ, для которых $|\alpha-\lambda|<\varepsilon$,

$$\lambda U_x=\{z \mid z\in E,\quad z=\lambda u,\quad u\in U_x\}\subset V_{\alpha x}.$$

Линейное пространство с топологией, согласованной с его линейной структурой, называется топологическим линейным пространством. Топологию в линейном пространстве E можно ввести различными способами, и в частности, при помощи полунорм.

Вещественная функция $p(x)$, заданная на E, называется полунормой, если для всех векторов $x, y\in E$ и всех скаляров $\alpha\in \boldsymbol{K}$ выполняется

а) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ (полуаддитивность),

б) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$.

В частности, каждая норма есть полунорма.

Отметим, что всякая полунорма удовлетворяет условиям $p(0)=0$ и $p(x_1-x_2)\geqslant |p(x_1)-p(x_2)|$, так что $p(x)\geqslant 0$. Действительно, $p(0)=p(0x)=0p(x)=0$. Далее, в силу полуаддитивности $p(x_1-x_2)+p(x_2)\geqslant p(x_1)$, так что $p(x_1-x_2)\geqslant p(x_1)-p(x_2)$. Затем $p(x_1-x_2)=p((-1)(x_2-x_1))=|-1|p(x_2-x_1)\geqslant p(x_2)-p(x_1)$. Следовательно, $p(x_1-x_2)\geqslant |p(x_1-p(x_2)|$. Положив $x_1=x$, $x_2=0$, получим: $p(x)\geqslant |p(x)|\geqslant 0$. Полунорма p не есть норма, если существует вектор $x\neq 0$, для которого $p(x)=0$; например, множество всех вещественных непрерывных функций на R^1 имеет полунорму $p(x)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} x(t)$, которая не является нормой.

Определение 5.1. Множество M точек линейного пространства E называется: симметричным, если $-M=M$; уравновешенным, если $\lambda x\in M$ для каждого $x\in M$ и каждого λ из $\boldsymbol{R}$, для которого $|\lambda|\leqslant 1$; поглощающим, если, какова бы ни была точка $x\in E$, существует $\alpha>0$ такое, что $x\in\lambda M$, когда $|\lambda|\geqslant\alpha$; поглощающим множество $N\subset E$, если существует $\alpha>0$ такое, что $\lambda M\supset N$, когда $|\lambda|\geqslant\alpha$; выпуклым, если

$$(\lambda x+(1-\lambda)y)\in M$$

для любых $x, y \in M$ и любого $\lambda \in (0, 1)$. Всякое уравновешенное множество симметрично и содержит нуль. Имеет место следующее предложение. Если $p(x)$ — некоторая полунорма на E и c — положительное число, то множество $M = \{x \mid x \in E, \ p(x) \leqslant c\}$ — выпуклое, уравновешенное и поглощающее. Пусть Γ — множество индексов и $\{p_\gamma(x)\}$, $\gamma \in \Gamma$ — семейство полунорм на линейном пространстве E. Пусть $p_{\gamma_1}(x), \ p_{\gamma_2}(x), \ \ldots, \ p_{\gamma_n}(x)$ — произвольный конечный набор полунорм из этого семейства и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — произвольные положительные числа. Тогда

$$U = \{x \mid x \in E, p_{\gamma_i}(x) \leqslant \varepsilon_i\}, \text{ где } = 1, 2, \ldots, n$$

есть выпуклое уравновешенное поглощающее множество. Можно показать, что эти множества образуют базис окрестностей нуля однозначно определенной топологии в E, согласованной с его линейной структурой и тем самым превращающей E в топологическое линейное пространство. Множество G в нем является открытым тогда и только тогда, когда для каждой точки $x_0 \in G$ существует множество U указанного выше вида такое, что

$$x_0 + U \subset G.$$

О п р е д е л е н и е 5.2. Локально выпуклым пространством называется топологическое линейное пространство, каждая окрестность нуля которого содержит выпуклую окрестность нуля. Приведем без доказательства следующее предложение [5]. Всякое топологическое линейное пространство E, в котором топология введена указанным выше способом с помощью семейства полунорм $p_\gamma(x)$, локально выпукло, причем каждая из полунорм $p_\gamma(x)$ непрерывна. Обратно, топология всякого локально выпуклого пространства может быть задана некоторым семейством полунорм. Это семейство можно образовать из функционалов Минковского выпуклых уравновешенных открытых множеств M пространства E:

$$p_M(x) = \inf_{\alpha > 0, \ \alpha^{-1} x \in M} \alpha.$$

Глава III

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 6. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРОСТЕЙШИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть E_x и E_y — нормированные пространства над одним и тем же полем $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$).

Определение 6.1. Отображение A из линейного подпространства $D(A)$ пространства E_x в E_y называется линейным, если оно однородно

$A\alpha x = \alpha A x$ для всех $x \in D(A)$ и всех $\alpha \in \boldsymbol{K}$,

и аддитивно

$A(x+y) = Ax + Ay$ для всех $x, y \in D(A)$.

Из этого определения вытекает линейность области значения $R(A) \subset E_y$, а также, что $A(0) = 0$.

6.1. Ограниченность и норма.

Линейный оператор A называется ограниченным, если существует число $M > 0$ такое, что для каждого $x \in D(A)$ выполняется неравенство

$$\|Ax\| \leqslant M\,\|x\|. \tag{6.1}$$

Наименьшая из констант M, удовлетворяющая (6.1), называется нормой линейного оператора A и обозначается $\|A\|$.

Отметим, что произвольный оператор $A : E_x \to E_y$ называется ограниченным, если он преобразует всякое ограниченное множество из E_x в ограниченное множество пространства E_y. Как видно из (6.1), это определение сохраняется и для линейных операторов. Для этого достаточно найти образ единичной сферы пространства E_x[1].

Определение 6.2. Оператор A называется непрерывным в точке $x_0 \in E_x$, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$ такое, что $\|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|A_x - A_{x_0}\| < \varepsilon$. Это определение непрерывности (по Коши) эквивалентно следующему определению (по Гейне). A непрерывен в точке x_0, если для любой последовательности (x_n), сходящейся к x_0, Ax_n сходится к Ax_0. Эквивалентность доказывается так же, как в теории функций.

6.2. Критерий ограниченности линейных операторов.

Теорема 6.1. $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x \in D(A)\\ \|x\| \leqslant 1}} \|Ax\| = \sup\limits_{\substack{x \in D(A)\\ \|x\| = 1}} \|Ax\|$

---

[1] Действительно, единичная сфера $S_1 = \{x \mid \|x\| = 1\}$ из E_x переходит в ограниченное множество K пространства E_y.

Доказательство. Если $x \in D(A)$ и $\| x \| \leqslant 1$, то из определения $\| A \|$ имеем: $\| Ax \| \leqslant \| A \| \| x \| \leqslant \| A \|$.
Отсюда

$$\| A \| \geqslant \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \| x \| \leqslant 1}} \| Ax \|; \quad \| A \| \geqslant \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \| x \| = 1}} \| Ax \|. \tag{6.2}$$

Далее из определения $\| A \|$ следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in D(A)$ такое, что

$$\| Ax_\varepsilon \| > (\| A \| - \varepsilon) \| x_\varepsilon \|.$$

Положим $z_\varepsilon = \dfrac{x_\varepsilon}{\| x_\varepsilon \|}$. Тогда

$$\| Az_\varepsilon \| > \frac{1}{\| x_\varepsilon \|} (\| A \| - \varepsilon) \| x_\varepsilon \| = \| A \| - \varepsilon,$$

а значит

$$\sup_{\substack{x \in D(A) \\ \| x \| \leqslant 1}} \| Ax \| > \| A \| - \varepsilon; \quad \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \| x \| = 1}} \| Ax \| > \| A \| - \varepsilon.$$

Так как ε — произвольное положительное число, то отсюда

$$\sup_{\substack{x \in D(A) \\ \| x \| \leqslant 1}} \| Ax \| \geqslant \| A \|; \quad \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \| x \| = 1}} \| Ax \| \geqslant \| A \|,$$

а в соединении с (6.2) это показывает, что

$$\| A \| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \| x \| \leqslant 1}} \| Ax \| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \| x \| = 1}} \| Ax \|.$$

Теорема 6.2. ***Из непрерывности линейного оператора в нуле следует его непрерывность в любой точке из $D(A)$.***

Доказательство. Из непрерывности в 0 следует, что каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$ такое, что если $x \in D(A)$ и $\| x \| < \delta$, то

$$\| Ax \| < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь произвольные точки x_0, $x \in D(A)$ и положим $z = x - x_0$. Тогда если $\| z \| < \delta$, то

$$\| Az \| < \varepsilon,$$

т. е. из того, что $\| x - x_0 \| < \delta$, следует, что

$$\| Ax - Ax_0 \| < \varepsilon.$$

Теорема 6.3. ***Для того чтобы линейный оператор A был ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывным.***

Доказательство. Достаточность. Пусть A непрерывен. Тогда из непрерывности в нуле следует, что числу $\varepsilon = 1$ соответствует $\delta > 0$ такое, что для $x \in D(A)$ из неравенства $\| x \| < \delta$

следует $\|Ax\| < 1$. Пусть x — произвольный ненулевой вектор из $D(A)$. Тогда

$$\left\| A \frac{\delta x}{2\|x\|} \right\| < 1$$

или

$$\|Ax\| < \frac{2}{\delta}\|x\|,$$

т. е. A ограничен.

Необходимость. Пусть A — ненулевой оператор, т. е. найдется x, для которого $\|Ax\| > 0$. Допустим, что A ограничен. Рассмотрим любое $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$. Тогда, если $x \in D(A)$ и $\|x\| < \delta$, то

$$\|Ax\| < \|A\|\,\|x\| < \|A\|\frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon,$$

т. е. оператор A непрерывен в нуле, а значит, и в любой точке (см. теорему 6.2).

Важным частным случаем понятия линейного оператора является понятие линейного функционала.

Пусть R^1 — поле $\boldsymbol{R}$, рассматриваемое как вещественное линейное пространство.

Определение. Аддитивное и однородное отображение $f: E \to R^1$, где E — вещественное нормированное пространство, называется вещественным линейным функционалом на E.

Замечание. Аналогично вводится понятие комплексного линейного функционала. Именно: отображение $f: E \to C^1$, где E — комплексное нормированное пространство и C^1 — поле $\boldsymbol{C}$, рассматриваемое как комплексное линейное пространство, называется комплексным линейным функционалом, если

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

для любых $x, y \in E$ и любых $\alpha \in \boldsymbol{C}$.

В основном мы будем рассматривать вещественные линейные функционалы.

Линейный функционал f на E называется ограниченным, если для любого $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant M\|x\|, \tag{6.1}$$

где M — некоторая постоянная. Наименьшее значение M, при котором выполняется неравенство (6.1), называется нормой функционала f и обозначается $\|f\|$. Из теорем, доказанных для линейных операторов, следует, что

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| = 1} |f(x)|.$$

Далее, согласно теореме 6.3, для ограниченности f необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен (или, что то же, непрерывен в нуле).

6.3. Последовательности линейных операторов.

Пусть E_x и E_y — нормированные пространства над одним и тем же полем R или C и A, B — линейные отображения из E_x в E_y. Назовем их суммой $A+B$ оператор C такой, что $Cx = Ax + Bx$ для всех $x \in E$. Тогда $C(\alpha x) = A(\alpha x) + B(\alpha x) = \alpha(Ax + Bx) = \alpha Cx$ и $C(x+y) = A(x+y) + B(x+y) = Cx + Cy$, так что C — линейный оператор из E_x в E_y.

Обозначим теперь через $L(E_x, E_y)$ совокупность всех непрерывных линейных отображений из E_x в E_y с указанной операцией сложения и операцией умножения на скаляры, определенной формулой $(\alpha A)x = \alpha Ax$. Докажем, что $L(E_x, E_y)$ — линейное пространство. Нулем его служит нулевой оператор 0. Норма $\| A \|$ оператора $A \in L(E_x, E_y)$, введенная в § 6.1, является нормой в пространстве $L(E_x, E_y)$. Действительно,

1) $\|A\| \geqslant 0$ и $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;

2) $\|\alpha A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1} (|\alpha|\,\|Ax\|) = |\alpha| \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|\alpha\|\,\|A\|$;

3) при $\|x\| = 1$

$$\|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|,$$

а значит,

$$\|A + B\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \leqslant \|A\| + \|B\|.$$

Переходим к рассмотрению последовательностей линейных ограниченных операторов из E_x в E_y. Будем говорить, что такая последовательность (A_n) имеет предел y, если для любого вектора $x \in E_x$ существует вектор $y_x = y(x) \in E_y$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = y(x),$$

т. е. каждому $x \in E_x$ и каждому $\varepsilon > 0$ соответствует n_0 такое, что для любого натурального $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство $\|A_n x - y(x)\| < \varepsilon$. Покажем, что y — линейный оператор. Действительно,

$$y(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x = \alpha y(x).$$

Далее, для любых $x_1, x_2 \in E_x$ следует, что $y(x_1 + x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x_1 + x_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x_1 + \lim\limits_{n\to\infty} A_n x_2 = y(x_1) + y(x_2)$.

Следовательно, $y(x) = Ax$, где A — линейный оператор из E_x в E_y.

6.4. Сильная и равномерная сходимости. Связь между ними.

Определение 6.2. Последовательность $(A_n) \subset L(E_x, E_y)$ называется сильно сходящейся к оператору A (линейному по доказанному), если для любого вектора $x \in E_x$

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax,$$

и равномерно сходящейся к линейному ограниченному оператору A, если

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n - A \| = 0.$$

Разумеется, из равномерной сходимости следует сильная сходимость, ибо

$$\| A_n x - Ax \| = \| (A_n - A)x \| \leqslant \| A_n - A \| \| x \|,$$

т. е. (A_n) сходится сильно. Обратное утверждение не всегда имеет место, что видно из следующего примера.

Пусть H — гильбертово пространство с ортонормальным базисом (e_k), т. е.

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k, \\ 1 \text{ при } i = k, \end{cases}$$

$$\| e_i \| = 1,$$

причем для любого $x \in H$ имеет место представление

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \tag{6.3}$$

т. е.

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \| \to 0 \text{ при } n \to \infty^1.$$

Из этого представления следует, что

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k + \omega_n, \tag{6.4}$$

где $\| \omega_n \| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0 = n_0(\varepsilon)$. Из (6.4) имеем, что если $i \leqslant n$, то $(x, e_i) = a_i + (\omega_n, e_i)$. Отсюда так как $|(\omega_n, e_n| \leqslant \| \omega_n \| \| e_i \| < \varepsilon$, то

$$| x, e_i) - a_i | < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем: $(x, e_i) = a_i$, а потому из (6.3) следует, что

[1] Так, в l^2 эти условия выполняются, например, когда e_k — числовая последовательность, на k-м месте которой стоит 1, а на всех остальных — нули.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)e_k . \tag{6.5}$$

Рассмотрим теперь последовательность линейных операторов (A_n), действующих из H в H, полагая, что

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k .$$

Каждый из этих операторов ограничен, так как

$$\|A_n x\| = \|\sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k| \|e_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x\| \|e_k\| = n\|x\|.$$

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)e_k = x,$$

т. е. при $n \to \infty$

$$A_n x \to x = Ix,$$

где I единичный оператор из H в H, т. е. последовательность (A_n) сходится сильно к I. Покажем, что эта сходимость не является равномерной. Действительно, если $m > n + 1$, то

$$\|A_m e_{n+1} - A_n e_{n+1}\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} (e_{n+1}, e_k)e_k\| = \|e_{n+1}\| = 1.$$

Отсюда

$$\|A_m - A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_m x - A_n x\| \geqslant 1,$$

т. е. при $\varepsilon < 1$ имеет место

$$\|A_m - A_n\| > \varepsilon,$$

а значит, последовательность (A_n) не сходится равномерно.

§ 7. ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

7.1. Полнота пространств $L(E_x, E_y)$.

Теорема 7.1. ***Пусть E_x и E_y — нормированные пространства над одним и тем же полем. Если E_y полно, то $L(E_x, E_y)$ полно.***

Доказательство. Пусть (A_n) — фундаментальная последовательность ограниченных линейных операторов ($A_n : E_x \to E_y$ ограничен при любом n). Тогда из фундаментальности (A_n) следует ее сильная сходимость. Действительно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что для всех $x \in E_x$

$$\|A_m x - A_n x\| \leqslant \|A_m - A_n\| \|x\| \leqslant \varepsilon \|x\|,$$

если $m, n \geqslant n_0$, а отсюда в силу полноты E_y

$$A_n x \to Ax,$$

где согласно предыдущему (см. пункт 6.3) A — линейный оператор. Далее, так как $\|A_m - A_n\| < \varepsilon \Longrightarrow \big|\|A_m\| - \|A_n\|\big| < \varepsilon$[1], то $\|A_n\| \leqslant M = \text{const}$, а значит, $\|Ax\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x\| \leqslant M\,\|x\|$, т. е. A — ограниченный оператор. При $\|x\| \leqslant 1$ имеем для всех $m, n \geqslant n_0$ $\|A_m x - A_n x\| \leqslant \|A_m - A_n\|\,\|x\| \leqslant \|A_m - A_n\| \leqslant \varepsilon$, так что при $m \to \infty$ получаем: $\|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon$, а потому

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon;$$

значит, последовательность (A_n) сходится к A в смысле нормы пространства $L(E_x, E_y)$, т. е.

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

7.2. Сопряженное пространство и его полнота.

Пусть E — комплексное нормированное пространство. Пространство $L(E, C^1)$ называется сопряженным к E и обозначается E^*. Так как C^1 полно, то, согласно доказанной теореме, E^* — полное пространство. Аналогично, если E — вещественное линейное нормированное пространство, то

$$E^* \stackrel{\text{def}}{=} L(E, R^1)$$

называется сопряженным к E (с E) и является полным пространством. Итак, справедлива

Теорема 7.2. ***Сопряженное пространство полно.***

§ 8. ТЕОРЕМА БАНАХА — ШТЕЙНГАУЗА

8.1. Вспомогательное предложение.

Лемма о вложенных шарах. *Пусть в полном метрическом пространстве M задана последовательность замкнутых шаров $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$, где $K_n = \{x \mid x \in M,\ \rho(x, a_n) \leqslant r_n\}$ и $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существует и притом единственная точка x_0, принадлежащая каждому шару K_n.*

Доказательство. Так как $K_n \supset K_{n+p}$, то центр $a_{n+p} \in K_n$ при любом p, а потому

$$\rho(a_{n+p}, a_n) \leqslant r_n,$$

т. е. (a_n) — фундаментальная последовательность и в силу полноты M найдется точка $x_0 \in M$ такая, что $a_n \to x_0$. Далее, каков бы ни был шар K_m все точки $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ принадлежат K_m, а потому, в силу его замкнутости, и $x_0 = \lim\limits_{p\to\infty} a_{m+p}$ принадлежит K_m.

---

[1] См. пункт 4.1.

Итак, x_0 принадлежит любому шару K_m.

Единственность x_0 устанавливается так. Допустим, что существует $y_0 \in K_m$ при любом m. Тогда $\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, a_m) + \rho(a_m, y_0) \leqslant 2r_m$, и так как правая часть стремится к нулю, то $\rho(x_0, y_0) = 0$, а значит, $x_0 = y_0$.

8.2. Теорема Банаха — Штейнгауза.

Если последовательность линейных ограниченных операторов (A_n) из банахова пространства E_x в нормированное пространство E_y фундаментальна в смысле сильной сходимости, т. е. $(A_n x)$ — фундаментальная последовательность в E_y для каждого $x \in E$, то (A_n) ограничена.

Доказательство. Если в некотором шаре $K = \{x \mid x \in E_x, \|x - a\| \leqslant r\}$ последовательность $(A_n x)$ ограничена одним и тем же числом c для всех n и всех x из рассматриваемого шара, то

$$\left\| A_n \frac{x-a}{r} \right\| \leqslant \frac{1}{r} \left\| A_n x \right\| + \frac{1}{r} \left\| A_n a \right\| \leqslant \frac{c}{r} + \frac{c}{r}.$$

Но каждый вектор y с $\|y\| \leqslant 1$ представим в виде $y = \frac{x-a}{r}$, где $\|x - a\| \leqslant r$. Поэтому

$$\|A_n\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|A_n y\| \leqslant \frac{2c}{r}$$

для всех n, т. е. $(\|A_n\|)$ ограничена. Ввиду этого, если допустить что утверждение теоремы неверно, то из этого допущения будет следовать, что множество векторов $A_n x$ не ограничено ни в каком шаре пространства E_y; в частности, найдутся вектор x_1 и номер n_1 такие, что

$$\|A_{n_1} x_1\| > 1.$$

В силу непрерывности оператора A_{n_1} неравенство $\|A_{n_1} x\| > 1$ будет справедливым для всех x из некоторого шара

$$K_1 = \{x \mid x \in E_x, \|x - x_1\| \leqslant r_1\}.$$

Далее, в силу неограниченности множества векторов $A_n x$ в каждом шаре, содержащемся внутри K_1, найдутся внутренняя точка x_2 шара K_1 и номер $n_2 > n_1$ такие, что $\|A_{n_2} x_2\| > 2$. Данное неравенство в силу непрерывности оператора A_{n_2} сохранится в некотором шаре $K_2 = \{x \mid x \in E_x, \|x - x_2\| \leqslant r_2\}$, содержащемся в K_1. Продолжая этот процесс, мы получим убывающую последовательность замкнутых шаров $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$, причем можно считать, что $r_k \to 0$ при $k \to \infty$. По лемме о вложенных шарах существует точка x_0, принадлежащая всем K_n и, по построению, в ней при каждом натуральном k будет выполнено неравенство

$$\|A_{n_k} x_0\| > k.$$

Но это неравенство противоречит фундаментальности последовательности $(A_n x_0)$.

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что утверждение теоремы сохраняет силу и при более слабом предположении: последовательность $(A_n x)$ равномерно ограничена.

§ 9. ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР

9.1. Линейность оператора, обратного к линейному.

Пусть E_x и E_y нормированные пространства над одним и тем же полем R или C и F — оператор с областью определения $D = D(A) \subset E_x$ и областью значений $R = R(F)$.

Если F отображает D на R взаимно однозначно, то существует обратное отображение R на D, обозначаемое F^{-1}. Именно, каждому $y \in R$ соответствует то единственное $x = F^{-1}(y) \in D$, для которого $y = F(x)$. Разумеется, соответствие между x и y будет взаимно однозначным, если для любых x_1 и x_2

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow F(x_1) \neq F(x_2).$$

Отметим еще, что $y = F[F^{-1}(y)]$ для любого $y \in R$ и $F^{-1}[F(x)] = x$ для любого $x \in D$. В случае линейности отображения A соответствие между D и R взаимно однозначно, если $Ax = 0 \Longrightarrow x = 0$. Таким образом, если A — линейный оператор, то обратный оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $Ax = 0 \Longrightarrow x = 0$. Отметим, что оператор, обратный к линейному, также линеен. Действительно, пусть $y_1, y_2 \in R$, причем $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. Так как $y_1 + y_2 = A(x_1 + x_2)$, то $A^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2$, т. е. A^{-1} аддитивен. Далее, если $y \in R$, причем $y = Ax$, то $\lambda y = A\lambda x$, поэтому

$$A^{-1}\lambda y = \lambda x = \lambda A^{-1} y.$$

Линейность A^{-1} доказана.

9.2. Критерий ограниченности обратного оператора.

Т е о р е м а 9.1. ***Для того чтобы линейный оператор A из $D(A) \subset E_x$ в E_y имел ограниченный обратный, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $m > 0$ такое, что***

$$\|Ax\| \geqslant m\|x\| \text{ для всех } x \in D(A). \tag{9.1}$$

При этом наибольшее из таких m равно обратной величине нормы оператора A^{-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено неравенство (9.1). Тогда, если $Ax = 0$, то $x = 0$. Следовательно, A имеет обратный оператор A^{-1} и он линейный в силу линейности A. Возьмем некоторое $y \in R$ и положим $x = A^{-1}y$. Подставляя в (9.1) эти значения, получим:

$$\|y\| \geqslant m\|A^{-1}y\|,$$

или $\|A^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\|$ для любого y. Далее, $\|A^{-1}\| = \sup\limits_{y \in E,\ \|y\| = 1} \|A^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m} \sup\limits_{y \in E,\ \|y\| = 1} \|y\| = \frac{1}{m}$. Поэтому A^{-1} — ограниченный оператор и $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\max m}$.

Обратно, пусть линейный оператор A имеет ограниченный обратный, т. е. существуют A^{-1} и постоянная M такая, что $\|A^{-1}y\| \leqslant \leqslant M \|y\|$ для всех $y \in R(A)$. Возьмем теперь $x \in D(A)$ и положим $y = Ax$, тогда $x = A^{-1}y$ и

$$\|x\| \leqslant M \|Ax\|.$$

Следовательно,

$$\|Ax\| \geqslant \frac{1}{M} \|x\| \text{ для всех } x \in D(A),$$

т. е. (9.1) с $m = \frac{1}{M}$. Ясно, что

$$\frac{1}{\max m} = \min M = \|A^{-1}\|.$$

9.3. Теорема Банаха об обратном операторе.

Если ограниченный линейный оператор A взаимно однозначно отображает банахово пространство E_x на банахово пространство E_y, то обратный оператор A^{-1} ограничен.

Для доказательства нам потребуется одно предложение о множествах второй категории.

Определение. Множество B в метрическом пространстве M называется множеством первой категории в M, если его можно представить в виде объединения конечного или счетного числа нигде не плотных множеств. Всякое множество в M, не являющееся множеством первой категории, называется множеством второй категории в M.

Теорема 9.2. ***Полное метрическое пространство есть множество второй категории в себе.***

Доказательство. Пусть M — полное метрическое пространство. Допустим противное, т. е. пусть

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \tag{9.2}$$

где каждое E_k нигде не плотно. Возьмем произвольную точку $a_0 \in \in M$ и рассмотрим шар $K(a_0, 1) = \{x | x \in M, \ \rho(x, a_0) \leqslant 1\}$. Так как E_1 нигде не плотно, то найдется шар $K_1(a_1, r_1) \subset K$, свободный от точек множества E_1, причем можно считать $r_1 < \frac{1}{2}$. Далее найдется шар $K_2(a_2, r_2) \subset K_1$, свободный от точек множества E_2, причем $r_2 < \frac{1}{2^2}$. Продолжая этот процесс, мы получим убывающую последовательность шаров

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots,$$

радиусы которых стремятся к нулю, причем при любом натуральном n шар K_n не содержит точек множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$. По лемме о вложенных шарах существует точка x_0, принадлежащая каждому шару построенной последовательности. Но тогда эта точка не принадлежит никакому из множеств E_k в противоречие с (9.2).

Доказательство теоремы Банаха. Существование A^{-1} следует из взаимной однозначности оператора A. Нужно лишь доказать ограниченность A^{-1}. Рассмотрим множества

$$Y_n = \{y \mid y \in E_y, \|A^{-1}y\| \leqslant n \|y\|\}.$$

Каждый вектор $y_0 \in E_y$ попадает в какое-нибудь Y_n. Действительно, если $y_0 = 0$, то он содержится в любом Y_n, так что множества Y_n не пустые. Если $y_0 \neq 0$, то

$$\frac{\|A^{-1}y_0\|}{\|y_0\|} = c \leqslant n_0$$

для некоторого натурального числа n_0, и тогда $y_0 \in Y_{n_0}$. Ввиду этого

$$E_y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Так как E_y — полное метрическое пространство, то согласно теореме (9.2) найдутся номер m и шар $K(y_0, r)$ такие, что Y_m плотно в $K(y_0, r)$. Рассмотрим шар $K(y_1, r_1) \subset K(y_0, r)$ такой, что $y_1 \in \in Y_m$, и сферу $\|y\| = r_1$, на которой зафиксируем вектор y. Тогда $y + y_1 \in K(y_1, r_1)$, ибо

$$\|(y + y_1) - y_1\| = r_1.$$

Так как Y_m плотно в $K(y_1, r_1)$, то существует последовательность векторов

$$z_k \in K(y_1, r_1) \cap Y_m,$$

сходящихся к вектору $(y + y_1)$. При этом, если положить $y_k = = z_k - y_1$, то можно считать

$$\frac{r_1}{2} \leqslant \|y_k\| \leqslant r_1.$$

Из предыдущего следует, что при $k \to \infty$

$$y_k = (z_k - y_1) \to y,$$

а так как $y_1, z_k \in Y_m$, то $\|A^{-1}y_k\| = \|A^{-1}(z_k - y_1)\| \leqslant \|A^{-1}z_k\| + + \|A^{-1}y_1\| \leqslant m(\|z_k\| + \|y_1\|) = m(\|y_k + y_1\| + \|y_1\|) \leqslant m(\|y_k\| + + 2\|y_1\|) \leqslant m(r_1 + 2\|y_1\|) \leqslant$

$$\leqslant \frac{2m(r_1 + 2\|y_1\|)}{r_1}\|y_k\|, \text{ ибо } \|y_k\| \geqslant \frac{r_1}{2}.$$

Следовательно,

$$\|A^{-1}y_k\| \leqslant n\|y_k\|,$$

где n — натуральное число и

$$n \geqslant \frac{2m(r_1 + 2\|y_1\|)}{r_1}.$$

1^0. Таким образом, каждое $y_k \in Y_n$, а значит, любой элемент сферы

$$\|y\| = r_1$$

можно аппроксимировать векторами из Y_n.

2^0. Покажем, что Y_n всюду плотно в E_y. Пусть

$$0 \neq y \in E_y.$$

Положим

$$y' = \frac{y}{\|y\|} r_1 = \frac{r_1}{\|y\|} y.$$

Так как $\|y'\| = r_1$, то y' можно аппроксимировать векторами из Y_n, т. е. существует последовательность $(y'_k) \in Y_n$, сходящаяся к y'.

Положим $y_k = \frac{\|y\|}{r_1} y'_k$, откуда

$$\|y_k\| = \frac{\|y\|}{r_1} \|y'_k\| = \|y\|.$$

Тогда при $k \to \infty$

$$\|A^{-1} y_k\| = \left\| A^{-1} \frac{\|y\|}{r_1} y'_k \right\| = \frac{\|y\|}{r_1} \|A^{-1} y'_k\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|y\|}{r_1} n \|y'_k\| = n \|y\| = n \|y_k\|,$$

т. е. $y_k \in Y_n$. При этом $y_k \to \frac{\|y\|}{r_1} y' = y$.

Следовательно, Y плотно в E_y.

3^0. Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $y \in E_y$:

$$\|y\| = r > 0.$$

Так как Y_n всюду плотно в E_y, то существует $y_1 \in Y_n$ такой, что $\|y_1\| \leqslant r$ и $\|y - y_1\| < \frac{r}{2}$. Далее, существует $y_2 \in Y_n$ такой, что

$$\|y - (y_1 + y_2)\| < \frac{r}{2^2}, \quad \|y_2\| \leqslant \frac{r}{2}.$$

Продолжая эту конструкцию, получим последовательность (y_k), удовлетворяющую для всех k условиям

$$y_k \in Y_n, \quad \|y - (y_1 + y_2 + \ldots + y_k)\| < \frac{r}{2^k}, \quad \|y_k\| \leqslant \frac{r}{2^{k-1}}.$$

Отсюда следует, что

$$y = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

Положим теперь

$$x_k = A^{-1} y_k \quad (\text{а значит, } y_k = A x_k).$$

Тогда

$$\| x_k \| = \| A^{-1} y_k \| \leqslant n \| y_k \| \leqslant \frac{nr}{2^{k-1}}.$$

4°. Покажем, что

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$$

есть фундаментальная последовательность в E_x. Действительно,

$$\| S_{m+p} - S_m \| = \left\| \sum_{i=m+1}^{m+p} x_i \right\| \leqslant nr \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m+p-1}} \right) < \frac{nr}{2^{m-1}}.$$

Так как E_x — полное пространство, то существует $x \in E_x$ такое, что

$$x = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

Из непрерывности линейного оператора A следует:

$$Ax = A \left(\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} x_i \right) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} Ax_i = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} y_i = y.$$

Отсюда

$$\| A^{-1} y \| = \| x \| = \lim_{k \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{rn}{2^{k-1}} = 2nr = 2n \| y \|,$$

где n фиксировано. Теорема доказана.

Глава IV

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 10. ЗАМКНУТЫЕ ОПЕРАТОРЫ

10.1. Вспомогательные понятия.

Пусть E_x, E_y — нормированные пространства и A — линейный оператор с областью определения $D(A) \subset E_x$ и со значениями в E_y.

Определение 10.1. Оператор A называется замкнутым, если для всякой последовательности $(x_n) \subset D(A)$ из того, что $x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$, следует, что

$$x_0 \in D(A) \text{ и } y_0 = Ax_0.$$

Ниже укажем еще другое, эквивалентное предыдущему определение замкнутого оператора, для чего необходимо понятие графика оператора.

Определение 10.2. Пусть E_x и E_y — нормированные пространства. Тогда произведение $E_x \times E_y = E_{xy}$ с операциями

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2); \quad \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

есть линейное пространство. При этом, если положить

$$\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

то E_{xy} оказывается нормированным пространством. Это пространство будет полным, если E_x и E_y — полные пространства, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Определение 10.3. Пусть E_x и E_y — нормированные пространства и A — линейный оператор с областью определения $D(A) \subset E_x$ и со значениями в E_y. Графиком $\Gamma(A)$ оператора A называется множество $\{x, Ax\} \in E_{xy}$, где $x \in D(A)$.

Определение 10.4. Оператор A называется замкнутым линейным оператором, если его график $\Gamma(A)$ представляет собой замкнутое линейное подпространство нормированного пространства $E_{xy} = E_x \times E_y$.

Определение (10.4) эквивалентно определению (10.1), ибо условие «$x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$» равносильно условию «$(x_n, Ax_n) \to (x_0, y_0)$», так что из определения 10.1 следует замкнутость $\Gamma(A)$, и обратно. Отметим, что непрерывный оператор замкнут. Но, как видно из следующего примера, замкнутый оператор может быть разрывным.

10.2. Пример замкнутого оператора, не являющегося ограниченным.

Пусть $E_x = E_y = C\,[0, 1]$ и $A_x = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t)$ (см. § 1, пункт 1.3). Рассмотрим последовательность $(x_n(t)) = (t^n)$. Тогда $Ax_n = nt^{n-1}$, и при этом

$$\| x_n \| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} t^n = 1, \ \| Ax_n \| = n.$$

Следовательно, оператор A не ограничен. Однако он замкнут. Действительно, пусть $(x_n) \subset D\,(A)$ и

$$x_n \to x_0, \ Ax_n \to y_0$$

в $C^1\,[0, 1]$. Так как сходимость в $C^1\,[0, 1]$ равномерная, то согласно известной теореме анализа $x_0\,(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция и

$$Ax_0\,(t) = y_0\,(t) = \lim_{n \to \infty} x_n'\,(t).$$

Таким образом, $x_0 \in D\,(A)$ и $Ax_0 = y_0$, т. е. A — замкнутый оператор.

Теорема 10.1. ***Если линейный оператор A имеет ограниченный обратный оператор A^{-1}, то A замкнут.***

Доказательство. Пусть $(x_n) \subset D\,(A)$, $x_n \to x_0$ и $Ax_n \to y_0$. Полагая $y_n = Ax_n$, получим: $x_n = A^{-1}y_n$, и так как A^{-1} — ограниченный оператор, то

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} A^{-1}y_n = A^{-1}y_0.$$

Тем самым $x_0 \in D\,(A)$ и $y_0 = Ax_0$.

§ 11. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

11.1. Ортогональное дополнение к замкнутому подпространству.

Пусть H — гильбертово пространство. Напомним, что два вектора $x, y \in H$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$.

Пусть $L \subset H$ — замкнутое подпространство пространства H. Множество всех векторов из H, ортогональных каждому вектору из L, обозначают $L^{\perp}$. Множество $L^{\perp}$ представляет собой замкнутое линейное подпространство пространства H. Действительно, если $y \in L^{\perp}$, т. е. $(x, y) = 0$ для всех $x \in L$, то $\lambda y \in L^{\perp}$, ибо $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\,(x, y) = 0$. Далее, если $y_1, y_2 \in L^{\perp}$, то $(x, y_1) = (x, y_2) = 0$ для всех $x \in L$, откуда $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) = 0$ для всех $x \in L$. Следовательно, $L^{\perp}$— линейное подпространство пространства H. Наконец, если $(y_n) \subset L^\perp$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$, то в силу непрерывности скалярного произведения для любого $x \in L$

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x, y_n) = 0.$$

Отметим, что $(L^\perp)^\perp = L$ (см. ниже теорему 11.1), поэтому $y \in L^\perp$. Подпространства L и $L^\perp$ называются взаимно ортогональными.

11.2. Теорема о разложении пространства в ортогональную сумму подпространств.

Теорема 11.1. ***Если H — гильбертово пространство и L — его замкнутое линейное подпространство, то всякий вектор x из H единственным образом представляется в виде***

$$x = y + z, \tag{11.1}$$

где $y \in L$, $z \in L^\perp$.

При этом $L = (L^\perp)^\perp$.

Ввиду этого пишут:

$$H = L \oplus L^\perp$$

и говорят, что H представляется в виде ортогональной суммы замкнутых подпространств L и $L^\perp$, причем $L^\perp$ называется ортогональным дополнением к L в H (а L есть ортогональное дополнение к $L^\perp$). Пишут также:

$$y = \text{пр}_L\, x, \quad z = \text{пр}_{L^\perp}\, x.$$

Доказательство. Сначала докажем единственность представления (11.1). Допустим, что наряду с (11.1) имеется представление

$$x = y_1 + z_1, \text{ где } y_1 \in L,\ z_1 \in L^\perp. \tag{11.1'}$$

Тогда $y - y_1 = z_1 - z$, и так как $y - y_1 \in L$, а $z_1 - z \in L^\perp$, то

$$\|y - y_1\|^2 = (y - y_1, y - y_1) = (y - y_1, z_1 - z) = 0,$$

т. е. $y = y_1$ и, значит, $z = z_1$. Единственность доказана. Докажем теперь существование представления (11.1). Если $x \in L$, то $x = x + 0$. Пусть теперь $x \notin L$. Положим

$$d = \inf_{y\in L} \|x - y\|^2,$$

и пусть (y_n) — минимизирующая последовательность в L, т. е. $(y_n) \subset L$ и $d_n = \|x - y_n\|^2 \to d$. Пусть, далее, $h \in L$ $(h \neq 0)$ и

$$\varepsilon_n = \frac{(x - y_n, h)}{\|h\|^2}. \tag{11.1''}$$

Так как $y_n + \varepsilon_n h \in L$, то

$$\|x - (y_n + \varepsilon_n h)\|^2 \geqslant d. \tag{11.2}$$

Докажем теперь, что (y_n) сходится к некоторому элементу y_0. Действительно, из (11.1'') и (11.2) следует:

$$\|x - y_n\|^2 - \overline{\varepsilon_n}(x - y_n, h) - \varepsilon_n (h, x - y_n) + |\varepsilon_n|^2 \|h\|^2 \geqslant d,$$

или

$$\| x - y_n \|^2 - \frac{|(x - y_n,\ h)|^2}{\| h \|^2} \geqslant d,$$

или

$$\| h \|^2 (d_n - d) \geqslant |(x - y_n,\ h)|^2,$$

а значит

$$|(x - y_n,\ h)| \leqslant \| h \| \sqrt{d_n - d}. \tag{11.3}$$

Так как

$$|(y_n - y_m,\ h)| \leqslant |(x - y_n,\ h)| + |(x - y_m,\ h)|,$$

то при $h = y_n - y_m$ получаем:

$$\| y_n - y_m \| \leqslant \sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d},$$

откуда следует, что (y_n)— фундаментальная последовательность. В силу полноты H существует вектор $y_0 = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$. Поскольку L замкнуто, $y_0 \in L$. Переходя теперь в (11.3) к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$(x - y_0,\ h) = 0.$$

При $h = 0$ это равенство тоже справедливо. Таким образом, для произвольного $h \in L$ имеем: $(x - y_0,\ h) = 0$, откуда

$$z_0 = x - y_0 \in L^{\perp},$$

а значит,

$$x = y_0 + z_0$$

и есть требуемое представление (11.1). Наконец, если $x \in (L^{\perp})^{\perp}$, то $0 = (x,\ z_0) = (y_0,\ z_0) + (z_0,\ z_0) = (z_0,\ z_0)$, поэтому $z_0 = 0$, и значит, $x = y_0 \in L$. Тем самым $(L^{\perp})^{\perp} \subset L$. С другой стороны, очевидно, что $L \subset (L^{\perp})^{\perp}$. Таким образом, $(L^{\perp})^{\perp} = L$.

§ 12. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H функционал

$$f(x) = (x,\ y),$$

где y — фиксированный вектор из H, отличный от нуля. Разумеется, f — линейный функционал, причем, согласно неравенству Коши, $|f(x)| \leqslant \| x \| \, \| y \|$, поэтому $\| f \| \leqslant \| y \|$. Но $f\left(\frac{y}{\| y \|}\right) = \| y \|$, откуда $\| f \| = \sup\limits_{\| x \| = 1} |f(x)| \geqslant \| y \|$. Следовательно, $\| f \| = \| y \|$. Покажем, что всякий непрерывный линейный функционал в H имеет вид $f(x) = (x,\ y)$. Действительно, пусть f — непрерывный линейный функционал, заданный на H. Обозначим через L совокупность всех нулей функционала f, т. е. корней уравнения (полный прообраз 0),

$$f(x) = 0.$$

Из однородности и аддитивности f следует, что L — линейное подпространство пространства H, а из непрерывности f следует, что если последовательность (x_n) нулей f сходится к x_0, то $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, т. е. $x_0 \in L$. Таким образом, L — замкнутое линейное подпространство пространства H.

Пусть $L^\perp$ — ортогональное дополнение к L в H. По теореме 11.1,

$$H = L \oplus L^\perp.$$

Рассмотрим произвольный вектор $z \in H$, не содержащийся в L, и положим $x_0 = \text{пр}_{L^\perp} z$. Разумеется, что $x_0 \notin L$, а потому $f(x_0) = \alpha \neq 0$. Пусть $x_1 = \frac{x_0}{\alpha}$, тогда и $x_1 \notin L$, причем $f(x_1) = 1$. Рассмотрим, наконец, произвольный вектор $x \in H$ и положим $\beta = f(x)$. Тогда $f(x) - \beta f(x_1) = 0$, или $f(x - \beta x_1) = 0$, а потому $x - \beta x_1 = u \in L$. Мы, следовательно, имеем представление

$$x = \beta x_1 + u,$$

и так как $x_1 \in L^\perp$, то $x_1 \perp u$, а значит,

$$(x, x_1) = (\beta x_1 + u, x_1) = \beta \|x_1\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$f(x) = \beta = \left(x, \frac{x_1}{\|x_1\|^2}\right),$$

или для всех $x \in H$, $f(x) = (x, v)$, где $v = \frac{x_1}{\|x_1\|^2}$. При этом $|f(x)| = |(x, v)| \leqslant \|v\|\,\|x\|$, т. е. $\|f\| \leqslant \|v\|$.
Но

$$\left|f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right| = \left|\frac{(v, v)}{\|v\|}\right| = \|v\|,$$

а потому $\|f\| \geqslant \|v\|$. Таким образом, доказана

Теорема 12.1. ***Всякий непрерывный линейный функционал в H представим в виде***

$$\boldsymbol{f(x) = (x, y),\ y \in H,\ \text{где}\ \|f\| = \|y\|.} \tag{12.1}$$

§ 13. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ПРОСТРАНСТВАХ

13.1. Представление линейных непрерывных функционалов в пространствах Лебега.

Сначала рассмотрим пример. Пусть B — измеримое множество точек m-мерного евклидова пространства, $x(t)$ — произвольная функция из вещественного пространства Лебега $L^p(B)$, где $p > 1$ и $y(t)$ — фиксированная функция из вещественного пространства $L^q(B)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Рассмотрим функционал f_y:

$$f_y(x) = \int_B x(t)\, y(t) dt. \tag{13.1}$$

Он линейный. Далее, в силу неравенства Гельдера

$$|f_y(x)| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q,$$

где

$$\|x\|_p = \left(\int_B |x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|y\|_q = \left(\int_B |y(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\|f_y\| \leqslant \|y\|_q. \tag{13.2}$$

Полагая затем

$$x_0(t) = |y(t)|^{q-1} \operatorname{sign} y(t),$$

получим: $|x_0(t)|^p = |y(t)|^q$, а потому $x_0 \in L^p(B)$, причем $\|x_0\|^p = \|y_0\|^q$. Отсюда вытекает, что (при $y \neq 0$)

$$f_y\left(\frac{x_0}{\|x_0\|_p}\right) = \frac{1}{\|x_0\|_p}\int_B |y(t)|^{q-1} (\operatorname{sign} y(t))\, y(t)\, dt = \frac{1}{\|x_0\|_p} \|y\|_q^q = \|y\|_q.$$

Из данного равенства и неравенства (13.2) имеем:

$$\|f_y\| = \|y\|_q.$$

Таким образом, (13.1) есть линейный непрерывный функционал, норма которого равна норме вектора y. Оказывается, что любой линейный непрерывный функционал на $L^p(B)$ представим в виде (13.1). Доказательство этого утверждения мы приведем для случая $L^p = L^p(0, 1)$. Рассмотрим пространства $L^p = L^p(0, 1)$ и $L^q = L^q(0, 1)$, где $p > 1$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Положим

$$u_t(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ 0, & t \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \quad g(t) = f(u_t),$$

где f — заданный линейный непрерывный функционал на L^p. Функция $g(t)$ указанным равенством определена, ибо $u_t(x) \in L^p$. Покажем, что g абсолютно непрерывна[1]. Действительно, пусть задана система интервалов

$$\delta_i = (\tau_i, t_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда, полагая $\varepsilon_i = \operatorname{sign}(g(t_i) - g(\tau_i))$, имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(\tau_i)| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (g(t_i) - g(\tau^i)) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (f(u_{t_i}) - f(u_{\tau_i})) =$$

[1] См. дополнение II.

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (u_{t_i} - u_{\tau_i})\right) \leqslant \|f\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (u_{t_i} - u_{\tau_i}) \right\| =$$

$$= \|f\| \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i} dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes} \delta_i\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, функция $g(t)$ абсолютно непрерывна. Так как абсолютно непрерывная функция является интегралом Лебега от своей производной, то

$$g(t) - g(0) = \int_0^t y(t)dt, \text{ где } y(t) = g'(t).$$

Но

$$g(0) = f(u_0) = f(0) = 0,$$

значит,

$$g(t) = \int_0^t y(t)\, dt$$

и

$$f(u_t) = g(t) = \int_0^t y(t)\, dt = \int_0^1 u_t(x)\, y(x)\, dx. \tag{13.3}$$

Пусть далее

$$z_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k [u_{x_k}(x) - u_{x_{k-1}}(x)], \tag{13.4}$$

где $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = 1$ и c_k — вещественные числа. Тогда в силу (13.3) имеем:

$$f(z_n) = \int_0^1 z_n(x)\, y(x)\, dx. \tag{13.3$'$}$$

Используем теперь известное предложение, утверждающее, что, какова бы ни была ограниченная измеримая функция $z(x)$, существует равномерно ограниченная последовательность ступенчатых функций $(z_m(x))$ вида (13.4) такая, что почти всюду

$$z_m(x) \to z(x) \text{ при } m \to \infty.$$

Тогда в силу (13.3′) по теореме Лебега будем иметь:

$$\lim_{m\to\infty} f(z_m) = \lim_{m\to\infty} \int_0^1 z_m(x) y(x) dx = \int_0^1 z(x)\, y(x)\, dx.$$

Так как почти всюду $z_m(x) \to z(x)$ и последовательность $(z_m(x))$ равномерно ограничена, то при $m \to \infty$

$$\|z_m - z\| \to 0,$$

а потому, в силу непрерывности f,

$$\lim_{m\to\infty} f(z_m) = f(z).$$

Следовательно,

$$f(z) = \int_0^1 z(x) y(x) dx \tag{13.5}$$

для всякой ограниченной измеримой функции.

Рассмотрим теперь последовательность ограниченных измеримых функций:

$$u_n(x) = \begin{cases} |y(x)|^{q-1} \operatorname{sign} y(x), & \text{если } |y(x)| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |y(x)| > n. \end{cases}$$

Согласно формуле (13.5) имеем:

$$f(u_n) = \int_0^1 u_n(x)\, y(x)\, dx,$$

причем

$$\|f\|\, \|u_n\| \geqslant |f(u_n)| = \int_0^1 u_n(x)\, y(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 |u_n(x)|\, |u_n(x)|^{\frac{1}{q-1}} dx = \int_0^1 |u_n(x)|^p\, dx.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 |u_n(x)|^p\, dx \leqslant \|f\|\, \|u_n\| = \|f\| \left(\int_0^1 |u_n(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

а значит,

$$\left(\int_0^1 |u_n(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

Так как почти всюду

$$|u_n(x)| \to |y(x)|^{q-1} \text{ при } n \to \infty,$$

то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\left(\int_0^1 |y(x)|^{(q-1)p} dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|, \tag{13.6}$$

т. е. (поскольку $(q-1)\,p = q$)

$$y(t) \in L^q. \tag{13.7}$$

Если $u(x)$ — произвольная функция из $L^p(0, 1)$, то в силу (13.7) существует

$$\int_0^1 u(x)\, y(x) dx.$$

Далее, найдется последовательность ограниченных измеримых функций $(u_m(x))$ такая, что при $m \to \infty$

$$\|u - u_m\| \to 0,$$

а потому и

$$\int_0^1 u_m(x) y(x) dx \to \int_0^1 u(x) y(x) dx.$$

Но согласно (13.5)

$$f(u_m) = \int_0^1 u_m(x) y(x) dx.$$

Переходя к пределу в этом равенстве, получим:

$$f(u) = \int_0^1 u(x) y(x) dx,$$

т. е. всякий линейный непрерывный функционал на $L^p(0, 1)$ представим в виде (13.1). Используя теперь неравенство Гельдера, получим:

$$|f(u)| \leqslant \|u\|_p \|y\|_q$$

или

$$\|f\| \leqslant \|y\|_q.$$

Отсюда и из неравенства (13.6) следует, что

$$\|f\| = \|y\|_q.$$

13.2. Общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве l^p, $(p > 1)$.

Рассмотрим пространства последовательностей l^p и l^q, $(p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ над одним и тем же полем $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$). Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ — произвольный элемент из l^p, а $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ — фиксированный элемент из l^q.

Положим

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$$

и рассмотрим функционал f:

$$f_y(x) = (x, y). \tag{13.8}$$

Он линеен, причем, применяя неравенство Гельдера, находим:

$$|f_y(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|y\|_q.$$

Следовательно, этот линейный функционал ограничен и

$$\|f\| \leqslant \|y\|_q. \tag{13.9}$$

Для каждого комплексного числа z положим

$$\operatorname{sign} z = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & \text{если} \quad z \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad z = 0. \end{cases}$$

Пусть

$$x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots),$$

где для любого k

$$x_k^0 = |y_k|^{q-1} \operatorname{sign} y_k.$$

Так как $(q-1)p = q$ и $y \in l^q$, то $x_0 \in l^p$. Кроме того,

$$\|x_0\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^{(p-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y|^q{}_k\right)^{\frac{1}{p}} = \|y\|_q^{q-1}$$

и

$$f_y(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q = \|y\|_q^q = \|x_0\|_p \|y\|_q, \tag{13.10}$$

т. е.

$$\|f_y\| = \|y\|_q, \tag{13.11}$$

ибо из неравенства (13.9) и равенства (13.10) вытекает, что $\|f_y\|$ не может быть больше $\|y\|_q$. Оказывается, что любой линейный непрерывный функционал f на l^p представляется формулой (13.8) и его норма определяется равенством (13.11). Действительно, пусть (e_k) — базис в l^p, образованный векторами

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots), \\ &\ldots . \end{aligned}$$

Тогда $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ и $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$, где через y_k обозначено $\overline{f(e_k)}$. В силу непрерывности f последний ряд сходится. Покажем, что $(y_1, y_2, y_3, \ldots) = y \in l^q$. С этой целью рассмотрим последовательность $(x^{(n)})$, где

$$x^{(n)} = (x_k^{(n)}); \; x_k^{(n)} = \begin{cases} |y_k|^{q-1} \operatorname{sign} y_k, & \text{если } k \leqslant n, \\ 0 & \text{, если } k > n. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \tag{13.12}$$

и в силу ограниченности f имеем:

$$|f(x^{(n)})| \leqslant \|f\| \, \|x^{(n)}\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{13.13}$$

Из (13.12) и (13.13) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \leqslant \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

а значит,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|f\|, \tag{13.14}$$

т. е.

$$y = (y_1, y_2, y_3, \dots) \in l^q.$$

Сравнивая (13.9) и (13.14), находим:

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом,

$$f(x) = (x, y), \text{ где } y \in l^q \quad \text{и} \quad \|f\| = \|y\|_q.$$

Нами, следовательно, получено общее представление линейного непрерывного функционала в пространстве l^p, $p > 1$.

Из формулы (13.8) видно, что если $y, z \in l^q$, то $f_{y-z} = f_y - f_z$. Пусть теперь (y_n) — фундаментальная последовательность в l^q. Так как $\|f_{y_n} - f_{y_m}\| = \|f_{y_n - y_m}\| = \|y_n - y_m\|$, то (f_{y_n}) — фундаментальная последовательность в пространстве $(l^p)^*$, сопряженном к l^p. Но согласно § 7 $(l^p)^*$ полно. Следовательно, f_{y_n} сходится к некоторому непрерывному линейному функционалу f на l^p. Но, по доказанному, $f = f_y$ для некоторого $y \in l^q$. Так как $\|y_n - y\|_q = \|f_{y_n} - f_y\|$, то заключаем, что $y_n \to y$. Тем самым мы доказали, что l^q полно. Остается заметить, что q может быть любым числом больше 1: для каждого $q > 1$ существует $p > 1$ такое, что $p^{-1} + q^{-1} = 1$, а именно: $p = \frac{q}{q-1}$. В частности, пространство l^q полно и, следовательно, гильбертово.

Аналогично можно доказать полноту пространства $L^q(0, 1)$.

13.3. Представление линейных непрерывных функционалов на пространстве непрерывных функций.

Пусть $C[0, 1]$ — пространство непрерывных вещественных функций на отрезке $[0, 1]$ и $g(t)$ — функция с ограниченным изменением[1], заданная на $[0, 1]$. Рассмотрим функционал f, заданный формулой

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dg(t). \tag{13.15}$$

В силу свойств интеграла Стилтьеса[1] имеем:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

и

$$|f(x)| \leqslant \max_{0<t<1} |x(t)| V_0^1 [g] = V_0^1 [g] \|x\|, \tag{13.16}$$

т. е. f — линейный ограниченный функционал. Оказывается (как доказал Ф. Рисс), что всякий линейный непрерывный функционал f на $C[0, 1]$ представим в виде (13.15), причем

$$\|f\| = V_0^1 [g]. \tag{13.17}$$

13.4. Теорема Хана — Банаха и некоторые ее следствия.

Теорема Хана—Банаха. ***Всякий линейный непрерывный функционал f, заданный на подпространстве L нормированного пространства E, отличного от E, можно продолжить на все E с сохранением нормы.***

Доказательство. 1°. Предположим, что E вещественно. Пусть f — функционал, заданный на $L \subset E$ и $\|f\| = \|f\|_L$. Докажем существование линейного непрерывного функционала F заданного на E, такого, что $F(x) = f(x)$ для всех $x \in L$ и $\|F\|_E = \|f\|_L$.

Пусть $x_0 \in E \setminus L$. Рассмотрим множество всевозможных элементов вида

$$u = x + tx_0 \quad (x \in L, \ t \in \boldsymbol{R})$$

и обозначим его через L_1.

Оно линейно, так как, если $u \in L_1$, то $\lambda u \in L_1$ и если $u_1 = x_1 + t_1 x_0$, $u_2 = x_2 + t_2 x_0$, где $x_1, x_2 \in L$, $t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}$, то

$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2 + x_0(t_1 + t_2)) \in L_1.$$

Оказывается, что каждый элемент $u \in L_1$ представим единственным образом в виде $u = x + x_0 t \ (x \in L, \ t \in \boldsymbol{R})$.

Действительно, если существуют два таких представления

$$\begin{matrix} u = x_1 + t_1 x_0, \\ u = x_2 + t_2 x_0 \end{matrix} \qquad (x_1, x_2 \in L, \ t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}),$$

---

[1] См. дополнение I.

то $x_1 + t_1x_0 = x_2 + t_2x_0$, а значит, при $t_1 = t_2$ получим $x_1 = x_2$, а при $t_1 \neq t_2$ будет

$$x_0 = \frac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1} \in L,$$

что противоречит тому, что $x_0 \notin L$. Покажем, как распространяется f с L на L_1. По построению $L \subset L_1$. Для каждого $u \in L_1$ положим

$$\varphi(u) = f(x) - tc,$$

где $c = \text{const}$.

При $u = x_0$ имеем $\varphi(x_0) = -c$.

Покажем, что c можно подобрать так, чтобы

$$\|\varphi\|_{L_1} = \|f\|.$$

Предварительно заметим, что φ — линейный функционал. Действительно, $\varphi(\lambda u) = \varphi(\lambda x + \lambda t x_0) = f(\lambda x) - \lambda tc = \lambda(f(x) - tc) = \lambda\varphi(u)$ и $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi((x_1 + x_2) + (t_1 + t_2)x_0) = f(x_1 + x_2) - (t_1 + t_2)c = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$.

Переходим к выбору c. Рассмотрим произвольные векторы x', $x'' \in L$. Имеем: $f(x') - f(x'') = f(x' - x'') \leqslant \|f\|\,\|x' - x''\| \leqslant \|f\|\,\|x' + x_0\| + \|f\|\,\|x'' + x_0\|$, откуда $f(x') - \|f\|\,\|x' + x_0\| \leqslant f(x'') + \|f\|\,\|x'' + x_0\|$. Фиксируя сначала x'', а затем x', находим:

$$\sup_{x' \in L}(f(x') - \|f\|\,\|x' + x_0\|) \leqslant \inf_{x'' \in L}(f(x'') + \|f\|\,\|x'' + x_0\|).$$

Отсюда вытекает существование, по крайней мере, одного вещественного числа c, удовлетворяющего неравенствам

$$\sup_{x \in L}(f(x) - \|f\|\,\|x + x_0\|) \leqslant c \leqslant \inf_{x \in L}(f(x) + \|f\|\,\|x + x_0\|). \tag{13.19}$$

Покажем, что при таком значении c функционал φ ограничен и $\|\varphi\|_{L_1} = \|f\|$. С этой целью рассмотрим три случая.

1) $t > 0$. Тогда из определения φ и первого из неравенств (13.19) имеем:

$$\varphi(u) = t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) - c\right) \leqslant t\,\|f\|\left\|\frac{x}{t} + x_0\right\| = \|f\|\,\|x + tx_0\|,$$

т. е.

$$\varphi(u) \leqslant \|f\|\,\|u\|. \tag{13.20}$$

2) $t < 0$. Используя второе из неравенств (13.19), получим:

$$f\left(\frac{x}{t}\right) - c \geqslant -\|f\|\left\|\frac{x}{t} + x_0\right\| = -\frac{1}{|t|}\|f\|\,\|x + tx_0\| = \frac{1}{t}\|f\|\,\|u\|,$$

так что $\varphi(u) = t\left[f\left(\frac{x}{t}\right) - c\right] \leqslant \|f\|\,\|u\|$.

3) $t = 0$. Тогда $u = x$ и $\varphi(x) = f(x) \leqslant \|f\|\,\|x\| = \|f\|\,\|u\|$. Итак, неравенство (13.20) справедливо для всех $u \in L_1$. Заменив в нем u на $-u$, получим:

$$-\varphi(u) \leqslant \|f\|\,\|u\|.$$

В соединении с (13.20) это показывает, что $|\varphi(u)| \leqslant \|f\| \|u\|$ для всех $u \in L_1$, поэтому $\|\varphi\|_{L_1} \leqslant \|f\|$. Но так как φ — продолжение f, то $\|\varphi\|_{L_1} \geqslant \|f\|$. Следовательно,

$$\|\varphi\|_{L_1} = \|f\|.$$

Итак, функционал f продолжен с сохранением нормы с L на подпространство L_1 пространства E, натянутое на L и x_0.

В том случае, когда E сепарабельно, существует последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ элементов пространства E, всюду плотная в $E \setminus L$. Рассмотрим последовательность (L_n) подпространств пространства E, где L_{k+1} — подпространство, натянутое на L_k и x_k $(k = 1, 2, \ldots)$, так что $L_{k+1} \supset L_k$ для всякого k. По доказанному можно построить последовательность φ_n непрерывных линейных функционалов, нормы которых совпадают с $\|f\|$, причем $\varphi_1 = \varphi$ и φ_{k+1} — продолжение φ_k с L_k на L_{k+1}[1]. Положим

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k.$$

Если $x \in M$, то $x \in L_k$ для всех номеров k, начиная с некоторого, и функционалы φ_k для всех этих k имеют в точке x одно и то же значение; обозначим его $\varphi_0(x)$. Таким образом, φ_0 — общее продолжение всех функционалов φ_k на M. Покажем, что M — линейное подпространство в E и φ_0 — линейный функционал на M. Действительно, для любых векторов x, y из M существует номер k такой, что $x, y \in L_k$. Тогда и $x + y \in L_k$, а значит, $x + y \in M$ и $\varphi_0(x + y) = \varphi_k(x + y) = \varphi_k(x) + \varphi_k(y) = \varphi_0(x) + \varphi_0(y)$. Точно так же $\lambda x \in L_k \subset M$ для всех $\lambda \in \boldsymbol{R}$ и $\varphi_0(\lambda x) = \varphi_k(\lambda x) = \lambda\varphi_k(x) = \lambda\varphi_0(x)$. Очевидно, функционал φ_0 непрерывен, причем $\|\varphi_0\|_M = \|f\|$.

Пусть теперь x — произвольный элемент из E. Так как M всюду плотно в E, то существует последовательность $(x^{(n)}) \subset M$, сходящаяся к x. Рассмотрим на числовой прямой R^1 последовательность $\varphi_0(x^{(n)})$. Она фундаментальна, ибо

$$|\varphi_0(x^{(m)}) - \varphi_0(x^{(n)})| \leqslant \|\varphi_0\| \|x^{(m)} - x^{(n)}\| \to 0, \ (m, n \to \infty).$$

В силу полноты R^1 существует $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_0(x^{(n)})$. Этот предел не зависит от выбора $(x^{(n)})$. Действительно, если $x'_n \in M$ и $x'_n \to x$, то

$$|\varphi_0(x^{(n)}) - \varphi_0(x'_n)| \leqslant \|\varphi_0\| \|x^{(n)} - x'_n\| \to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \varphi_0(x'_n).$$

---

[1] Может случиться, что $x_k \in L_k$. Тогда $L_{k+1} = L_k$ и, разумеется, $\varphi_{k+1} = \varphi_k$.

Положим

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_0(x^{(n)}).$$

Линейность F легко следует из линейности φ_0, а переходя к пределу в неравенстве $|\varphi_0(x^{(n)})| \leqslant \|\varphi_0\| \, \|x^{(n)}\|$, получим: $|F(x)| \leqslant \|\varphi_0\| \, \|x\|$, так что F — ограниченный функционал, причем $\|F\| \leqslant \|f\|$. Так как, с другой стороны,

$$\|F\| = \sup_{\|x\|=1,\ x\in E} |F(x))| \geqslant \sup_{\|x\|=1,\ x\in M} |\varphi_0(x)| = \|\varphi_0\| = \|f\|,$$

то

$$\|F\| = \|f\|.$$

Итак, когда E — вещественное сепарабельное пространство, теорема Хана — Банаха доказана.

2^0. Пусть теперь E — комплексное сепарабельное пространство. Обозначим через E_R и L_R вещественные нормированные пространства, получающиеся соответственно из E и L, если рассматривать в них лишь умножение на вещественные скаляры. Тогда $g = \operatorname{Re} f$ — линейный функционал на L_R. Так как $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ для всех $x \in L$, то g непрерывен, причем $\|g\|_{L_R} \leqslant \|f\|_L = \|f\|$. Следовательно, по доказанному, существует линейный непрерывный функционал G на E_R, такой, что $G(x) = g(x)$ для всех $x \in L$ и $\|G\|_{E_R} = \|g\|_{L_R}$. Положим теперь для всех $x \in E$

$$F(x) = G(x) - iG(ix) \tag{13.21}$$

(x и ix в правой части рассматриваются как элементы E_R). F — линейный функционал на E. Действительно, согласно (13.21) $F(x+y) = F(x) + F(y)$ для всех $x, y \in E$ и $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ для всех $x \in E$ и всех $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Кроме того, $F(ix) = G(ix) - iG(-x) = iF(x)$, а тогда $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ для всех $\lambda \in \boldsymbol{C}$. Пусть теперь

$$\lambda_x = \operatorname{sign} \overline{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{\overline{F}(x)}{|\overline{F}(x)|}, & \text{если } F(x) \neq 0, \\ 0 & \text{, если } F(x) = 0, \end{cases}$$

так что $|\lambda_x| = 1$ или 0. Тогда $|F(x)| = F(\lambda_x x) = G(\lambda_x x) \leqslant \|G\|_{E_R} \|\lambda_x x\| \leqslant \|G\|_{E_R} \|x\|$, а значит, F непрерывен и $\|F\| \leqslant \|G\|_{E_R}$. Пусть $F|_L$ — сужение F на L. Так как $ix \in L$ для всех $x \in L$, то в силу (13.21) $F|_L = g(x) - ig(ix)$ для всех $x \in L$. Но $g(x) - ig(ix) = f(x)$.

Действительно, пусть $h = \operatorname{Im} f$, так что $f(x) = g(x) + ih(x)$. Так как $f(x) = -if(ix)$, то $g(x) + ih(x) = -ig(ix) + h(ix)$, откуда $h(ix) = g(x)$, а значит, $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Таким образом, $F(x) = f(x)$ для всех $x \in L$. Отсюда следует, что $|f| \leqslant \|F\|$. Но, как мы видели, $\|F\| \leqslant \|G\|_{E_R} = \|g\|_{L_R} \leqslant \|f\|$. Следовательно, $\|F\| \leqslant$

$\leqslant \|f\|$. Этим доказана теорема Хана — Банаха, когда пространство E — сепарабельно (вещественное или комплексное).

В общем случае доказательство теоремы завершается следующим образом с использованием леммы Цорна. Предварительно приведем некоторые понятия. Непустое множество A называется (частично) упорядоченным, если между некоторыми его элементами определено отношение $\prec$ такое, что

1) если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$;

2) $a \prec a$;

3) если $a \prec b$ и $b \prec a$, то $a = b$.

Множество или семейство $B \subset A$ называется линейно упорядоченным, если для любых $x, y \in B$ либо $x \prec y$, либо $y \prec x$. Пусть B — семейство элементов упорядоченного множества A; элемент x из A называется мажорантой семейства B, если $g \prec x$ для всех $g \in B$. Точной верхней границей или верхней гранью семейства B называется его мажоранта x такая, что $x \prec f$ для любой мажоранты f семейства B. Если B обладает верхней гранью, то только одной. Элемент x из A называется максимальным, если из $x \prec y$ вытекает, что $y = x$. Если в A имеется наибольший элемент, то он (единственный) максимальный. Но максимальные элементы могут существовать и когда наибольшего элемента нет.

Приведенные понятия можно проиллюстрировать на примере совокупности A всех линейных подпространств линейного пространства E, отличных от E, с отношением включения $\subset$ в качестве $\prec$. Максимальными элементами в A являются так называемые гиперподпространства пространства E, т. е. его линейные подпространства, факторпространство по которым одномерно. Справедлива

Лемма Цорна (см. [1], стр. 17). *Если каждое линейное упорядоченное семейство элементов упорядоченного множества A имеет мажоранту, то в A существует максимальный элемент.*

Переходим к завершению доказательства теоремы Хана — Банаха в общем случае. Будем рассматривать всевозможные продолжения функционала f с сохранением его нормы и обозначим множество всех продолжений через A. Введем в A упорядочение, считая, что $f' \prec f''$, где f' определено на L' и f'' на L'', если $L' \subset L''$ и f'' — продолжение $f' \subset L'$ на L''. Соотношение $f' \prec f''$ обладает всеми свойствами упорядочения. Пусть $\{f_a\}$ — произвольное линейно упорядоченное семейство функционалов из A, определенных соответственно на подпространствах L_a. Совершенно так же, как на странице 48, доказывается, что $M = \bigcup L_a$ — линейное подпространство в E и функционалы f_a обладают общим продолжением f_0 на M, где $f_0(x) = f_a(x)$, если $x \in L_a$, причем f_0 — непрерывный линейный функционал и $\|f_0\| = \|f\|$. Очевидно, f_0 есть верхняя грань семейства $\{f_a\}$ в A. Таким образом, выполнены все условия леммы Цорна и в A имеется максимальный элемент F. Он определен на всем E, ибо в противном случае, по ранее доказанному, F можно было бы продолжить с сохранением нормы, в противоречие с его максимальностью. Этим теорема доказана в общем случае.

Следствие 1. Пусть E — нормированное пространство над полем $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$) и $0 \neq x_0 \in E$. Тогда существует непрерывный линейный функционал f, заданный на всем E и удовлетворяющий условиям:

$$f(x_0) = \|x_0\|, \ \|f\| = 1.$$

Следовательно, если $f(x) = 0$ для всех $f \in E^*$, то $x = 0$.

Доказательство. Пусть

$$L = tx_0, \ t \in \boldsymbol{K},$$

L — подпространство пространства E. На L определим функционал φ так: если $x = tx_0$, то $\varphi(x) = t\|x_0\|$. Он линеен и $\varphi(x_0) = \|x_0\|$,

$$|\varphi(x)| = |t| \, \|x_0\| = \|x\|,$$

так что $\|\varphi\| = 1$. Продолжив φ на все E с сохранением нормы, мы и получим требуемый функционал f.

Следствие 2. Пусть в нормированном пространстве E заданы линейное подпространство L и вектор $x_0 \notin L$, находящийся на положительном расстоянии d ($d = \inf\limits_{x \in L} \|x - x_0\|$) от L. Тогда существует непрерывный линейный функционал f, определенный на E, и такой, что

$$f(x) = 0 \text{ для всех } x \in L, \ f(x_0) = 1, \ \|f\| = \frac{1}{d}.$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве теоремы Хана — Банаха, рассмотрим линейное подпространство

$$L_1 = (L, x_0),$$

элементы которого представим в виде

$$u = x + tx_0 \ (x \in L, \ t \in \boldsymbol{K}),$$

и положим

$$\varphi(u) = t.$$

φ — линейный функционал на L_1, причем

$$\varphi(x) = 0 \ \text{ при } \ x \in L \ \text{ и } \ \varphi(x_0) = 1.$$

Далее, при $u \neq 0$

$$|\varphi(u)| = |t| = \frac{|t| \, \|u\|}{\|u\|} = \frac{|t| \, \|u\|}{\|x + tx_0\|} =$$

$$= \frac{\|u\|}{\left\|\frac{x}{t} + x_0\right\|} = \frac{\|u\|}{\left\|x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right)\right\|} \leqslant \frac{\|u\|}{d},$$

откуда

$$\|\varphi\| \leqslant \frac{1}{d} \tag{13.22}$$

Существует последовательность $(x_n) \subset L$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \| = d.$$

Так как $|\varphi(x_n - x_0)| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| = 1$
и $|\varphi(x_n - x_0)| \leqslant \|\varphi\| \, \|x_n - x_0\|$,
то $1 \leqslant \|\varphi\| \, \|x_n - x_0\|$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$1 \leqslant \|\varphi\| d$$

или

$$\|\varphi\| \geqslant \frac{1}{d}.$$

Отсюда и из (13.22) следует, что $\|\varphi\| = \dfrac{1}{d}$.

Продолжив φ на все E с сохранением нормы, получим требуемый функционал f.

§ 14. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть E_x и E_y — нормированные пространства, A: $E_x \to E_y$ — ограниченный линейный оператор. Положим $y = Ax$ и рассмотрим произвольный непрерывный линейный функционал на $\varphi \in E_y^*$. Тогда $\varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x)$ — линейный непрерывный функционал на E_x, т. е. $f \in E_x^*$. Итак, каждому функционалу $\varphi \in E_x$ соответствует $f \in E_x^*$, т. е. $f = A^*\varphi$. $A^* : E_y^* \to E_x^*$ называют оператором, сопряженным к A.

Таким образом, для всякого $x \in E_x$ имеем:

$$(A^* \varphi)(x) = \varphi(Ax).$$

Это соотношение записывают еще так:

$$\langle x, A^*\varphi \rangle = \langle Ax, \varphi \rangle.$$

Здесь $\langle x, A^*\varphi \rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $A^*\varphi \in E_x^*$ на векторе $x \in E_x$, $\langle A_x, \varphi \rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $\varphi \in E_x^*$ на векторе $Ax \in E_y$.

Свойства оператора A^*. A^* — линейный оператор. Действительно, для всякого $x \in E_x$ имеем:

$$(A^*(\lambda\varphi))(x) = \lambda\varphi(Ax) = \lambda(A^*\varphi)(x),$$

так что

$$A^*\lambda\varphi = \lambda A^*\varphi,$$

и

$$(A^*(\varphi_1 + \varphi_2))(x) = (\varphi_1 + \varphi_2)(Ax) = \varphi(Ax) + \varphi_2(Ax) = \\ = (A^*\varphi_1)(x) + (A^*\varphi_2)(x),$$

так что

$$A^*(\varphi_1 + \varphi_2) = A^*\varphi_1 + A^*\varphi_2.$$

Отметим[1], что линейному оператору A, не являющемуся ограниченным, определенному на плотном в E_x подпространстве $D(A)$, также соответствует линейный оператор A^*, определенный на некотором подпространстве $D(A^*)$ пространства E_y^* со значениями в E_x^* и удовлетворяющий для каждого $\varphi \in D(A^*)$ соотношению

$$\langle Ax, \varphi\rangle = \langle x, A^*\varphi\rangle \text{ для всех } x \in D(A).$$

14.1. Ограниченность сопряженного оператора.

Теорема 14.1. ***Если A — ограниченный линейный оператор, то оператор A^* ограниченный и $\|A^*\| = \|A\|$.***

Доказательство. Для всех $x \in E_x$ и $\varphi \in E_y^*$ имеем:

$$\varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x),$$

$$|(A^*\varphi)(x)| = |\varphi(Ax)| \leqslant \|\varphi\|\,\|Ax\| \leqslant \|\varphi\|\,\|A\|\,\|x\|,$$

т. е.

$$\|f\| \leqslant \|\varphi\|\,\|A\|,$$

откуда

$$\|A^*\varphi\| \leqslant \|A\|\,\|\varphi\|$$

для всех $\varphi \in E_y^*$ и, значит,

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{14.1}$$

Докажем обратное неравенство. При $A = 0$ оно очевидно. Пусть $A \neq 0$ и x_0 — произвольный вектор из E_x, для которого $Ax_0 \neq 0$. Тогда по следствию 1 теоремы Хана — Банаха существует функционал $\varphi_0 \in E_y^*$ такой, что $\|\varphi_0\| = 1$ и

$$\varphi_0(y_0) = \|y_0\|; \; y_0 = Ax_0.$$

Отсюда $\|Ax_0\| = \|y_0\| = \varphi_0(y_0) = \varphi_0(Ax_0) = (A^*\varphi_0)(x_0) \leqslant \leqslant \|A^*\varphi_0\|\,\|x_0\| \leqslant \|A^*\|\,\|\varphi_0\|\,\|x_0\| = \|A^*\|\,\|x_0\|$. Отсюда следует, что $\|Ax\| \leqslant \|A^*\|\,\|x\|$ для всех $x \in E_x$ (при $Ax = 0$ это неравенство очевидно), т. е.

$$\|A\| \leqslant \|A^*\|. \tag{14.2}$$

Из (14.1) и (14.2) следует, что $\|A^*\| = \|A\|$.

14.2. Второе сопряженное пространство.

Пусть E — нормированное пространство и E^* — пространство всех линейных непрерывных функционалов на E. Оно линейно и называется сопряженным с E или сопряженным к E[2]. Рассмотрим теперь совокупность $\{F\}$ всех непрерывных линейных функционалов на E^*. Эта совокупность, как и E^*, образует полное нормированное

[1] См. [5], с. 269.
[2] См. конец § 7.

пространство; оно обозначается E^{**} и называется вторым сопряженным к E, т. е. $\{F\} = E^{**}$.

Выделим теперь в E^{**} специальное подпространство $\{F_x\}$. При фиксированном $x \in E$ и произвольном $f \in E^*$ положим $F_x(f) = f(x)$. Оказывается, что F_x — непрерывный линейный функционал на E^*. Действительно, $F_x(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = F_x(f_1) + F_x(f_2)$.

$$F_x(\lambda f) = \lambda f(x) = \lambda F_x(f).$$
$$|F_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|f\| \|x\|,$$

так что функционал F_x ограничен и

$$\|F_x\| \leqslant \|x\|. \tag{14.3}$$

По следствию 1 теоремы Хана — Банаха, если $\|x\| > 0$, то существует $f_0 \in E^*$ такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(x) = \|x\|$, тогда

$$\|x\| = |f_0(x)| = |F_x(f_0)| \leqslant \|F_x\| \|f_0\| = \|F_x\|,$$

т. е.

$$\|x\| \leqslant \|F_x\|. \tag{14.4}$$

Из (14.3) и (14.4) вытекает, что $\|F_x\| = \|x\|$.

Итак, каждому $x \in E$ соответствует $F_x \in E^{**}$. Это соответствие линейно. Действительно, $F_{x_1+x_2}(f) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = F_{x_1}(f) + F_{x_2}(f)$, т. е. $F_{x_1+x_2} = F_{x_1} + F_{x_2}$ и $F_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda F_x(f)$, т. е. $F_{\lambda x} = \lambda F_x$. Таким образом, $x \to F_x$ есть изометричное и изоморфное вложение E в E^{**}. В функциональном анализе нормированные пространства, между которыми установлен изометрический изоморфизм, обычно отождествляются. Поэтому, если функционалы F_x исчерпывают все E^{**}, пишут: $E = E^{**}$. Такие пространства E называются рефлексивными. В силу теоремы 7.2. они полны и, значит, банаховы. Примерами рефлексивных пространств могут служить пространства Лебега L^p и пространства последовательностей l^p при $p > 1$, ибо, как было показано в § 13,

$$(L^p)^* = L^q,\ (l^p)^* = l^q, \text{ где } p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

так что для них второе сопряженное с точностью до изометрического изоморфизма совпадает с исходным пространством.

З а м е ч а н и е 14.1. Пусть E — нормированное пространство и A — ограниченный линейный оператор из E в E^*. Тогда сопряженный оператор A^* действует из $(E^*)^* = E^{**}$ в E^*. Ввиду этого, если E — рефлексивное пространство, то A^* можно также считать действующим из E в E^*, ибо с точностью до изометрического изоморфизма $E^{**} = E$.

О п р е д е л е н и е 14.1. Линейный оператор, действующий из $D(A) \subset E$ в E^*, называется положительным, если для любого $x \in D(A)$ имеет место неравенство $\langle x, Ax\rangle \geqslant 0$, и строго положительным, если $\langle x, Ax\rangle > 0$ при $x \neq 0$.

Глава V

О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ СХОДИМОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 15. О СИЛЬНОЙ И СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ

15.1. Основные понятия и вспомогательные предложения.

Пусть E — нормированное пространство. Напомним, что последовательность $(x_n) \subset E$, сходящуюся по норме к вектору $x_0 \in E$, называют сходящейся (или сильно сходящейся) к x_0 и пишут: $x_n \to x_0$.

Определение 15.1. Если для любого непрерывного линейного функционала $f \in E^*$ имеет место равенство

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

то говорят, что последовательность x_n слабо сходится к вектору x_0, и пишут: $x_n \rightharpoonup x_0$.

15.2. Связь между сильной и слабой сходимостями.

Разумеется, из сильной сходимости следует слабая, ибо в силу непрерывности f имеем:

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Однако обратное предложение не всегда имеет место. Это видно из следующего примера.

Рассмотрим гильбертово пространство H с ортонормальным базисом (e_k). В п. 6.4 мы видели, что любой вектор $y \in H$ представим в виде

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \text{ где } a_k = (y, e_k).$$

Так как отсюда следует, что

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

то $a_k \to 0$, т. е. $(y, e_k) \to 0$ для всех $y \in H$. Далее, в § 12 было показано, что в гильбертовом пространстве всякий непрерывный линейный функционал f представим в виде $f(x) = (x, y)$, где y — фиксированный вектор из H. Таким образом, $f(e_n) = (e_n, y) \to 0 = f(0)$ для всех $f \in H^*$, т. е. $e_n \rightharpoonup 0$. Но $\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 = 2$.

Так что последовательность (e_n) не фундаментальна, а потому не может сходиться сильно.

Отметим еще, что если последовательность $(x_n) \subset E$ имеет слабый предел, то этот предел единственный. Действительно, если для всех $f \in E^*$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \text{ и } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\widetilde{x_0}),$$

то $f(x_0 - \widetilde{x_0}) = 0$ для всех $f \in E^*$, а значит, по следствию 1 теоремы Хана — Банаха, $\widetilde{x_0} = x_0$.

15.3. Основные теоремы о совпадении сильной и слабой сходимостей.

Лемма. *На конечномерном нормированном пространстве каждый линейный функционал непрерывен.*

Доказательство. Пусть E — нормированное пространство над полем $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{R}$ или $\boldsymbol{C}$), имеющее конечную размерность $\dim E = m$, так что в E существует m линейно независимых векторов $e_1, \ldots, e_m$ и каждый вектор $x \in E$ представим в виде их линейной комбинации:

$$x = a_1 e_1 + \ldots + a_m e_m.$$

В силу линейной независимости векторов e_k, коэффициенты a_k однозначно определяются вектором x. Положим

$$f_k(x) = a_k \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Тогда, в частности,

$$f_k(e_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

При сложении векторов и умножении их на скаляры те же действия производятся и над соответствующими коэффициентами. Таким образом, «координатные» функционалы $f_1, \ldots, f_m$ линейны. Они образуют базис линейного пространства $L(E, K)$ всех линейных функционалов на E. Действительно, если $\sum_{k=1}^{m} c_k f_k = 0$, то $c_i = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(e_i) = 0$ для всех i, так что $f_1, \ldots, f_k$ линейно независимы и для всякого $f \in L(E, K)$ и всякого $x \in E$ имеем:

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{m} f_k(x) e_k\right) = \sum_{k=1}^{m} f(e_k) f_k(x).$$

Так что f есть линейная комбинация $\sum_{k=1}^{m} f(e_k) f_k$ функционалов f_k. Тем самым доказано, что $L(E, K)$ конечномерно и $\dim L(E, K) = \dim E$. Но E^* — линейное подпространство в $L(E, K)$. Следовательно, E^* конечномерно и $\dim E^* \leqslant \dim E$. Совершенно так же $\dim E^{**} \leqslant \dim E^*$. Но в п. 14.2 было показано, что E вкладывается в E^* как линейное подпространство, так что $\dim E \leqslant \dim E^{**}$, Поэтому все рассмотренные размерности совпадают и, в частности, $\dim E^* = \dim L(E, K)$. Поскольку E^* — подпространство в $L(E, K)$, отсюда следует, что $L(E, K) = E^*$, и лемма доказана.

Теорема 15.1. ***В конечномерных нормированных пространствах слабая сходимость совпадает с сильной.***

Доказательство. Пусть E — m-мерное нормированное пространство, $(e_1, \ldots, e_m)$ — его базис и $f_1, \ldots, f_m$ — соответствующие ему координатные функционалы, введенные в доказательстве леммы. Без ограничения общности можно считать, что $\|e_k\| = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Пусть (x_n) — последовательность в E, слабо сходящаяся к x_0. Так как, согласно лемме, функционалы f_k непрерывны, то по определению слабой сходимости

$$f_k(x_n) \to f_k(x_0) \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Но $x_n = \sum_{k=1}^{m} f_k(x_n) e_k$, $x_0 = \sum_{k=1}^{m} f_k(x_0) e_k$. Поэтому $\|x_n - x_0\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} [f_k(x_n) - f_k(x_0)] e_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |f_k(x_n - f_k(x_0)|$ и, следовательно, $\|x_n - x_0\| \to 0$, т. е. x_n сильно сходится к x_0.

Для дальнейшего приведем следующее понятие. Множество M элементов метрического пространства называется относительно компактным, если всякая последовательность элементов этого множества обладает сходящейся подпоследовательностью. Замкнутое относительно компактное множество называется компактным. Отметим, что во всех параграфах, кроме § 29, в которых идет речь о компактности, можно ограничиться относительной компактностью.

Теорема 15.2. ***Для элементов относительно компактного подмножества нормированного пространства сильная и слабая сходимости совпадают.***

Доказательство. Пусть E — нормированное пространство и последовательность (x_n) элементов относительно компактного множества $\omega \subset E$ сходится слабо к вектору x_0. Покажем, что $x_n \to x_0$. По условию, для любого $y \in E^*$ имеем:

$$\langle x_0, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle. \tag{15.1}$$

Допустим, что x_n не сходится сильно к x_0. Тогда существуют возрастающая последовательность натуральных чисел (n_k) и положительное число ε такие, что для всех k

$$\|x_{n_k} - x_0\| > \varepsilon. \tag{15.2}$$

Но так как векторы x_{n_k} принадлежат относительно компактному множеству ω, то найдется подпоследовательность $(x_{n_{k_l}})$ последовательности (x_{n_k}), сходящаяся к некоторому $x \in E$, т. е. для любого $y \in E^*$ имеем:

$$\langle x, y\rangle = \lim_{l\to\infty} \langle x_{n_{k_l}}, y\rangle.$$

Отсюда и из (15.1) следует, что

$$\langle x, y\rangle = \langle x_0, y\rangle.$$

Так как это равенство справедливо для любого $y \in E^*$, то в силу следствия 1 теоремы Хана — Банаха $x = x_0$, а значит,

$$\| x_{n_{k_l}} - x_0 \| \to 0.$$

Но это противоречит неравенствам (15.2).

15.4. Некоторые предложения о слабом пределе.

Теорема 15.3. ***Если E_x и E_y — нормированные пространства и $A \in L(E_x, E_y)$, то $x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow Ax_n \rightharpoonup Ax_0$, т. е. ограниченный линейный оператор преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся.***

Доказательство. Для произвольного функционала $\varphi \in E_y^*$ имеем:

$$\varphi(Ax_n) = (A^*\varphi)(x_n) \to (A^*\varphi)(x_0) = \varphi(Ax_0),$$

а это и означает, что

$$Ax_n \rightharpoonup Ax_0.$$

Теорема 15.4. ***Слабо сходящаяся последовательность ограничена.***

Доказательство. Пусть $x_n \rightharpoonup x_0$. Это означает, что для любого $f \in E^*$

$$f(x_n) \to f(x_0),$$

т. е. (согласно п. 14.2)

$$F_{x_n}(f) \to F_{x_0}(f),$$

где F_{x_i} — функционалы из E^{**}, соответствующие векторам x_i. Так как E^* — банахово пространство, то отсюда, согласно теореме Банаха — Штейнгауза, вытекает, что последовательность $(\| F_{x_n} \|)$ ограничена. Но $\| F_{x_n} \| = \| x_n \|$.

Теорема 15.5. ***Если $x_n \rightharpoonup x_0$, то $\|x_0\| \leqslant \varliminf_n \|x_n\|$.***

Доказательство. Допустим противное, т. е. что

$$\|x_0\| > \varliminf_n \|x_n\|.$$

Возьмем какое-нибудь число c, удовлетворяющее неравенствам

$$\|x_0\| > c > \varliminf_n \|x_n\|.$$

Тогда найдется подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n) такая, что

$$\|x_0\| > c > \|x_{n_k}\|.$$

Далее, согласно следствию 1 теоремы Хана — Банаха будет существовать функционал $f_0 \in E^*$ такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(x_0) = \|x_0\| > c$. Но $f_0(x_{n_k}) \leqslant \|f_0\| \|x_{n_k}\| = \|x_{n_k}\| < c$, а значит, $f_0(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f_0(x_{n_k}) \leqslant$ $\leqslant c$, и мы пришли к противоречию.

§ 16. О СЕКВЕНЦИАЛЬНО СЛАБО ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Определение 16.1. Множество σ в нормированном пространстве E называется слабо (точнее, секвенциально слабо) замкнутым, если предел каждой слабо сходящейся последовательности элементов множества σ содержится в σ. Отметим, что сферы $\{x \mid x \in E, \|x\| = r\}$, $\{r > 0\}$ замкнуты, но, как правило, не слабо замкнуты. Например, в гильбертовом пространстве H с ортонормальным базисом $\{e_k\}$ единичная сфера не слабо замкнута, ибо $e_k \rightharpoonup 0$, т. е. для любого $f \in H^*$

$$f(e_k) \to 0 = f(0);$$

действительно, как было показано в § 12, $f(x) = (x, y)$ для некоторого $y \in H$, а из формулы (6.5) следует, что

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, y)|^2.$$

С другой стороны, замкнутые шары $\{x \mid x \in E, \|x\| \leqslant r\}$ также слабо замкнуты, так как имеет место следующая теорема Мазура [1]: всякое выпуклое замкнутое подмножество нормированного пространства слабо замкнуто.

Отметим, что эта теорема Мазура распространяется на множества, замкнутые в слабой топологии пространства E (см. [1], теорема 5.3.13). Эта топология задается следующим образом. Пусть $x_0 \in E$. Множества

$$v(x_0; l_1, l_2, \ldots, l_n, \varepsilon) =$$
$$= \{x \mid x \in E, |l_k(x - x_0)| < \varepsilon \ (k = 1, 2, \ldots n)\},$$

где ε — произвольное положительное число, а $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — произвольный конечный набор линейных функционалов из E^*, образуют базис окрестностей точки x_0 в слабой топологии пространства E (см. конец пункта 5.1).

§ 17. О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть E — нормированное пространство. Рассматривают обычно следующие два вида слабой сходимости последовательности (f_n) в E^*.

Определение 17.1. $f_n \rightharpoonup f_0$, если $F(f_n) \to F(f_0)$ для каждого $F \in E^{**}$.

Определение 17.2. Последовательность (f_n) сходится E-слабо к $f_0 \in E^*$, если $f_n(x) \to f_0(x)$ для каждого $x \in E$.

Эти два вида слабой сходимости линейных функционалов совпадают лишь в случае рефлексивных пространств E.

§ 18. О СЛАБОЙ ПОЛНОТЕ И СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ ПРОСТРАНСТВ

Определение 18.1. Нормированное пространство E называется слабо полным (точнее, слабо секвенциально полным), если в нем любая фундаментальная в смысле слабой сходимости последовательность (x_n) имеет слабый предел, т. е. из того, что $\langle x_n - x_m, y\rangle \to 0$ при $n, m \to \infty$ для всех $y \in E^*$, следует существование элемента $x_0 \in E$ такого, что

$$x_n \rightharpoonup x_0.$$

Отметим, что пространства L^p и l^p при $p \geqslant 1$ слабо полны. Всякое рефлексивное пространство слабо полно. Пространство непрерывных функций C не является слабо полным.

Определение 18.2. Множество X элементов нормированного пространства E называется слабо (секвенциально) относительно компактным, если всякая последовательность его элементов обладает слабо сходящейся подпоследовательностью.

Отметим, что таково всякое ограниченное множество в рефлексивном пространстве[1].

---

[1] Этот важный (и довольно тонкий) результат впервые доказали В. Р. Гантмахер и В. Л. Шмульян (см.: Гантмахер В. и Шмульян В. О линейных пространствах, единичная сфера которых слабо компактна. — Доклады Академии наук СССР, № 17 (1937 г.), с. 91—94).

Глава VI

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

§ 19. О НЕКОТОРЫХ ВИДАХ НЕПРЕРЫВНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

19.1. Основные определения.

Определение 19.1. Пусть E_x и E_y — нормированные пространства. Оператор $F: E_x \to E_y$ называется слабо непрерывным в точке $x_0 \in E_x$, если из $x_n \rightharpoonup x_0$ следует $F(x_n) \rightharpoonup F(x_0)$.

Определение 19.2. Оператор $F: E_x \to E_y$ называется компактным, если он преобразует всякое ограниченное множество пространства E_x в относительно компактное множество пространства E_y.

Определение 19.3. Оператор $F: E_x \to E_y$ называется вполне непрерывным, если он непрерывен и компактен.

Определение 19.4. Оператор $F: E_x \to E_y$ называется усиленно непрерывным, если он преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, т. е.

$$x_n \rightharpoonup x_0 \Longrightarrow F(x_n) \to F(x_0).$$

Определение 19.5. Оператор $F: E \to E^*$ называется коэрцитивным, если

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\langle x, F(x)\rangle}{R} = +\infty \ (R = \|x\|).$$

19.2. Связь между усиленной и полной непрерывностью.

Отметим, что в рефлексивных пространствах E_x из усиленной непрерывности оператора $F: E_x \to E_y$ следует, что этот оператор вполне непрерывен. Действительно, из усиленной непрерывности следует непрерывность, ибо $x_n \to x_0 \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x_0$. Возьмем теперь ограниченное множество $D \subset E_x$ и рассмотрим произвольную последовательность $(y_n) \subset F(D)$. Каждому y_n соответствует хотя бы один прообраз $x_n \in D$, так что $y = F(x_n)$. Так как E_x рефлексивно и D ограничено, то из $(x_n) \subset D$ можно выбрать подпоследовательность (x_{n_k}), слабо сходящуюся к некоторому вектору $x_0 \in E_x$. Отсюда в силу свойства F имеем: $y_{n_k} \to F(x_0)$, т. е. $F(D)$ относительно компактно, а значит, F вполне непрерывен. Известны, однако, примеры нелинейных вполне непрерывных отображений в L^2, не являющихся усиленно непрерывными (см. [2]).

Теорема 19.1. ***Для линейных операторов полная непрерывность совпадает с усиленной непрерывностью.***

Доказательство. Пусть $A : E_x \to E_y$ — линейный вполне непрерывный оператор. Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \rightharpoonup x_0$. Так как A — ограниченный оператор, то по теореме 15.3 $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$. Далее, по теореме 15.5 последовательность (x_n) ограничена, так что (Ax_n) относительно компактна. Но для относительно компактных множеств (см. теорему 15.2) слабая сходимость совпадает с сильной, так что из $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$ следует $Ax_n \to Ax_0$. Теорема доказана.

Замечание. Так же доказывается, что из слабой и полной непрерывности F вытекает его усиленная непрерывность (см. дополнение к главе VI, задачу 1).

§ 20. ПРОИЗВОДНАЯ И ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА

Пусть $f(x)$ — нелинейный функционал, заданный на всюду плотном линейном подпространстве $D(f)$ вещественного нормированного пространства E. Допустим, что в точке $x \in D(f)$ для всех $h \in D(f)$ существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = Vf(x, h);$$

он называется вариацией функционала f. Эта вариация есть однородный функционал от h, ибо

$$Vf(x, \alpha h) = \alpha Vf(x, h),$$

но она может и не быть аддитивным по h функционалом. Если вариация $Vf(x, h)$ — линейный по h функционал, то ее называют дифференциалом Гато и пишут:

$$Vf(x, h) = Df(x, h).$$

Этот линейный функционал от h записывают так же, как

$$Df(x, h) = f'(x)h,$$

и говорят, что $f'(x)$ — производная Гато от функционала f в точке x. Аналогично вводится понятие производной Гато от оператора F, действующего из $D(F) \subset E_x$ в E_y.

Если при данном фиксированном x производная $f'(x)$ есть ограниченный линейный функционал, т. е. $f'(x) \in E^*$, то ее называют градиентом функционала f и обозначают $\operatorname{grad} f(x)$. В этом случае:

$$Df(x, h) = \langle h, \operatorname{grad} f(x)\rangle.$$

Здесь $\langle h, \operatorname{grad} f(x)\rangle$ означает значение непрерывного линейного функционала $f'(x) = \operatorname{grad} f(x)$ на векторе $h \in D(f)$. Так как $D(f)$ плотно в E, то по непрерывности функционал можно продолжить с $D(f)$ на все E. Это продолжение также обозначается $\operatorname{grad} f(x)$. (Здесь x — фиксированный вектор из E.) Итак, по определению градиента, имеем:

$$\langle h, \operatorname{grad} f(x)\rangle = \frac{d}{dt} f(x+th)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t},$$

где $\langle h, y\rangle$ — значение линейного функционала $y \in E^*$ на векторе $h \in E$.

Если $\operatorname{grad} f(x)$ определен для любого $x \in A \subset E$, то $\operatorname{grad} f(x)$ отображает A на некоторое множество из E^*.

20.1. Примеры вычисления градиентов.

Пример 1. Пусть E — рефлексивное вещественное банахово пространство и B — линейный оператор из $D(B) \subset E$ в E и пусть $D(B)$ плотно в E. В силу рефлексивности E сопряженный оператор B^* действует из $D(B^*) \subset E$ в E^*[1]. Мы будем предполагать, что $D(B) \cap D(B^*)$ плотно в E. Рассмотрим квадратичный функционал f:

$$f(x) = \langle x, Bx\rangle \quad (D(f) = D(B) \cap D(B^*)).$$

Для него имеем: $f(x + th) - f(x) = < x + th, Bx + tBh > - \langle x, Bx\rangle = t\langle h, Bx\rangle + t\langle h, B^*x\rangle + t^2\langle h, Bh\rangle.$

Отсюда

$$\operatorname{grad} f(x) = Bx + B^*x.$$

Пример 2. Пусть H — вещественное гильбертово пространство. Тогда

$$\operatorname{grad}(x, x) = 2x; \ \operatorname{grad}\|x\| = \frac{x}{\|x\|}.$$

20.2. Формула Лагранжа и неравенство Липшица.

Если функционал $f(x)$ дифференцируем по Гато в каждой точке открытого выпуклого множества ω нормированного пространства E, то для любых x, $x + h \in \omega$ существует такое τ, $0 < \tau < 1$, что

$$f(x + h) - f(x) = Df(x + \tau h, h).$$

Доказательство. Полагая $\varphi(t) = f(x + th)$, получим:

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x + th + \Delta th) - f(x + th)}{\Delta t} = Df(x + th, h).$$

Отсюда

$$f(x + h) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) = Df(x + \tau h, h).$$

В случае ограниченности производной Гато, мы будем иметь

$$f(x + h) - f(x) = \langle h, \operatorname{grad} f(x + \tau h)\rangle,$$

так что в случае ограниченности $\operatorname{grad} f(x)$ на ω, т. е. если $\|\operatorname{grad} f(x)\| \leqslant c = \mathrm{const}$, мы из последней формулы получим неравенство Липшица

$$|f(x+h) - f(x)| = |< h, \operatorname{grad} f(x + th)>| \leqslant \|\operatorname{grad} f(x + \tau h)\| \, \|h\|,$$

т. е.

$$|f(x + h) - f(x)| \leqslant c\|h\|.$$

---

[1] См. замечание 14.1.

§ 21. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПО ФРЕШЕ

Пусть E_x и E_y — нормированные пространства и F — отображение открытого множества $\omega \subset E_x$ в E_y.

Определение 21.1. Если при фиксированном $x \in \omega$ и всех $h \in E_x$, для которых $x + h \in \omega$.

$$F(x+h) - F(x) = u(x, h) + \omega(x, h),$$

где $u(x, h)$ — линейный непрерывный по h оператор, а

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(x, h)}{\|h\|} = 0,$$

то $u(x, h)$ называется дифференциалом Фреше оператора F в точке x, а $\omega(x, h)$ — остатком этого дифференциала. Пишут:

$$u(x, h) = dF(x, h).$$

Пишут также:

$$dF(x, h) = F'(x)h,$$

где $F'(x) \in L(E_x, E_y)$ называется производной Фреше оператора F в точке x. Если $E_y = R^1$, то $F = f$ — функционал. В этом случае имеем:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \omega(x, h),$$

где производная Фреше $f'(x)$, как ограниченный линейный функционал, есть $\operatorname{grad} f(x)$.

21.1. Связь между производными по Гато и по Фреше.

Из определения производных Гато и Фреше следует, что если отображение дифференцируемо по Фреше, то оно дифференцируемо по Гато и производные совпадают. Обратное утверждение не всегда справедливо. Известны отображения, которые всюду дифференцируемы по Гато, но нигде не дифференцируемы по Фреше (см. дополнение IV).

21.2. Основная теорема.

В связи с последним представляет интерес следующая

Теорема 21.1. *Если производная Гато F' существует в некоторой окрестности v точки x_0 и непрерывна в точке x_0 в смысле нормы пространства $L(E_x, E_y)$, то в точке x_0 существует производная Фреше F', так что*

$$DF(x_0, h) = dF(x_0, h).$$

Доказательство. По условию $DF(x_0, h) = F'(x_0)h$. Предполагая $x_0 + h \in v$, имеем:

$$\omega(x_0, h) = F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)h$$

или

$$\langle \omega (x_0, h) e\rangle = \langle F (x_0 + h) - F (x_0), e\rangle - \langle F' (x_0) h, e\rangle,$$

где e — произвольный единичный вектор пространства E_y^*. Применяя формулу Лагранжа и учитывая, что

$$DF (x_0 + \tau h, h) = F' (x_0 + \tau h) h,$$

получим:

$$\langle \omega (x_0, h), e\rangle = \langle [F' (x_0 + \tau h) - F' (x_0)]h, e\rangle,$$

где $0 < \tau < 1$. Из определения нормы функционала из E_y^* следует, что при фиксированном h функционал e можно подобрать так, чтобы

$$|\langle \omega (x_0, h), e\rangle| \geqslant \frac{1}{2} \| \omega (x_0, h)\| \, \| e\| = \frac{1}{2} \|\omega (x_0, h)\|.$$

Отсюда и из предыдущего имеем:

$$\|\omega (x_0, h)\| \leqslant 2 \|F' (x_0 + \tau h) - F' (x_0)\| \, \|h\|,$$

$$\frac{\|\omega (x_0, h)\|}{\|h\|} \leqslant 2 \|F' (x_0 + \tau h) - F' (x_0)\|,$$

и так как $F' (x)$ непрерывная в точке x_0, то

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\omega (x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

§ 22. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть E — вещественное нормированное пространство и A — открытое множество из E.

Определение 22.1. Оператор $F : A \to E^*$ называется потенциальным, если для всякого $x \in A$ существует такой функционал $f (x) \in E^*$, что $F (x) = \operatorname{grad} f (x)$. При этом f называется потенциалом оператора F.

22.1. Пример оператора Немыцкого.

Пусть B — измеримое множество конечной или бесконечной лебеговой меры, принадлежащее s-мерному евклидову пространству, и $g (u, x)$ — вещественная функция, непрерывная по $u \in]-\infty, +\infty[$ при почти каждом фиксированном $x \in B$ и измерима как функция x при всяком фиксированном u. Тогда, если выполнено неравенство

$$|g (u, x)| \leqslant a (x) + b\, |u|^{p-1}, \tag{22.1}$$

где $p > 1$, $a (x) \in L^p(B)$, то оператор Немыцкого h, заданный формулой

$$hu = g (u (x), x),$$

является непрерывным потенциальным оператором. Он действует из пространства Лебега $L^p (B)$ в пространство Лебега $L^q (B)$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и его потенциал f определяется формулой

$$f(u) = f_0 + \int\limits_B dx \int\limits_0^{u(x)} g(v, x)\, dv,$$

где f_0 — произвольно заданное число.

Отметим, что неравенство (22.1) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор h был непрерывным оператором h из L^p в L^q (см. [2], § 19; там указана и история вопроса).

22.2. Условия потенциальности операторов.

Известны различные условия потенциальности оператора $F\colon E \to E^*$ (см. [2]). Приведем одно из них.

Пусть $F(x)$ имеет дифференциал Гато в некоторой окрестности v точки x_0. Тогда если

$$\langle DF(x_0, h_1) h_2\rangle = \langle DF(x_0, h_2), h_1\rangle$$

для любых $h_1 h_2 \in E$, то F называется симметрическим в точке x_0.

Теорема 22.1 (см. [2]). ***Пусть оператор $F\colon E \to E^*$ дифференцируем по Гато в каждой точке выпуклого открытого множества $\omega \subset E$. Тогда если дифференциал $DF(x, h)$ непрерывен по x в каждой точке из ω, то для потенциальности F в ω необходимо и достаточно, чтобы F был симметрическим в ω.***

Замечание. Требование непрерывности по x дифференциала можно ослабить. Достаточно, чтобы он был хеминепрерывен по x, т. е. непрерывен в точке по любому направлению. По поводу хеминепрерывности см. [3], а также определение [29.1].

22.3. Связь между потенциальным оператором и его потенциалом.

Отметим еще, что при выполнении теоремы 22.1 потенциал f оператора F определяется формулой

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle\, dt, \qquad (22.2)$$

где $f(x_0)$ — произвольно заданное число, а функция f, определяемая формулой (22.2), является потенциалом оператора F. Эта формула, выведенная в [2], может быть получена и следующим образом. Пусть F — потенциальный оператор, заданный на E. Тогда при тех же $x_0, x \in E$, при которых функция от t

$$\langle F(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0\rangle$$

ограничена на $[0,1]$ или суммируема по t на $[0,1]$, справедлива формула (22.2), связывающая F с его потенциалом f. Действительно, положим

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)),$$

получим:

$$\varphi'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x_0 + t(x - x_0) + \tau(x - x_0)) - f(x_0 + t(x - x_0))}{\tau} =$$

$$= \langle F(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0\rangle.$$

Отсюда по известной формуле восстановления первообразной (см., например, И. П. Натансон «Теория функций вещественной переменной») имеем:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,dt$$

или

$$f(x) = f(x_0) + \int_0^1 < F(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0 > dt. \qquad (22.3)$$

§ 23. СОПРЯЖЕННЫЕ И САМОСОПРЯЖЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

23.1. Сопряженные нелинейные операторы и их простейшие свойства.

Пусть E — рефлексивное вещественное банахово пространство и $F: E \to E^*$ — нелинейное непрерывно дифференцируемое по Гато, а значит, и по Фреше (см. теорему 21.1) отображение, т. е. $F' \in L(E, E^*) = L$, причем для каждого фиксированного $y \in E$

$$\| F'(x) - F'(y) \|_L \to 0 \text{ при } \| x - y \| \to 0.$$

Мы также будем предполагать, что $F(0) = 0$. Из этой совокупности операторов $\{F\}$ мы выделим класс D таких, что каждому $F \in D$ отвечает такое отображение G из той же совокупности, что

$$< G'(x)\,y,\ z > = < F'(x)\,z,\ y > \text{ (для всех } x,\ y,\ z \in E). \qquad (23.1)$$

При выполнении равенства (23.1) мы будем писать

$$G'(x) = (F'(x))^* \qquad (23.2)$$

и называть G оператором, сопряженным с F. Итак, множество D содержит все непрерывно дифференцируемые по Гато операторы, обращающиеся в нуле в нуль и имеющие сопряженные операторы G, обладающие такими же свойствами.

З а м е ч а н и е 23.1. Сопряженный оператор, если он существует, является единственным. Действительно, если равенству (23.2) удовлетворяет и отображение $\Phi \in D$, то $G'(x) = \Phi'(x)$. Но для абстрактных функций[1] $G(tx)$ и $\Phi(tx)$ имеем:

$$\frac{d}{dt} G(tx) = G'(tx)\,x,\quad \frac{d}{dt} \Phi(tx) = \Phi'(tx)\,x,$$

так что по теореме 2.7 из [2] следует:

$$G(x) = \int_0^1 G'(tx)\,x\,dt = \int_0^1 \Phi'(tx)\,x\,dt = \Phi(x).$$

---

[1] Функция вещественного аргумента со значениями в некотором функциональном пространстве называется абстрактной функцией.

Ввиду единственности сопряженного оператора G можно писать:

$$G = F^*. \tag{23.3}$$

Пользуясь таким обозначением, (23.2) можно записать в виде

$$(F')^* = (F^*)'. \tag{23.4}$$

Замечание 23.2. Для линейных операторов F и G равенство (23.3) совпадает с обычным определением сопряженного оператора.

Переходим к рассмотрению простейших свойств сопряженных операторов.

1^0. Если F имеет сопряженный оператор, то F^* также имеет сопряженный оператор и $F^{**} \equiv (F^*)^* = F$. Это свойство прямо следует из соотношения (23.1).

2^0. Если операторы F и G имеют сопряженные, то $F + G$ имеет сопряженный оператор, причем $(aF + bG)^* = aF^* + bG^*$ для любых вещественных чисел a, b.

3^0. Если F имеет сопряженный оператор, то $F^*(x) = \int\limits_0^1 (F'(tx))^* x dt$ (для всех $x \in E$).

4^0. Если оператор F имеет сопряженный, то

$$\langle F(x), x\rangle = \langle F^*(x), x\rangle.$$

Доказательство. Пользуясь свойством абстрактного интеграла (см., например, ([2] § 2)) имеем:

$$\langle F(x), x\rangle = \langle \int\limits_0^1 F'(tx)\, xdt,\ x\rangle = \int\limits_0^1 \langle F'(tx)\, x, x\rangle\, dt.$$

Но, полагая в равенстве (23.1) $y = z = x$ и учитывая равенство (23.2), можно написать:

$$\langle (F'(x))^* x, x\rangle = \langle F'(x)\, x, x\rangle.$$

Отсюда и из предыдущего следует:

$$\langle F(x), x\rangle = \int\limits_0^1 \langle F'(tx)\, x, x\rangle\ d =$$

$$= \int\limits_0^1 \langle (F'(tx)^* x,\ x\rangle\ dt = \langle \int\limits_0^1 (F'(tx))^* xdt, x\rangle = \langle F^*(x), x\rangle.$$

23.2. Симметрия и кососимметрия.

Оператор $F \in D$ называется симметрическим, если $F = F^*$. Если $F \in D$ и $F^* = -F$, то F называется кососимметрическим. Из свойств 1^0 и 2^0 непосредственно следует, что если $F \in D$, то $(F + F^*)$ — симметрический оператор, а $(F - F^*)$ — кососимметрический оператор.

Т е о р е м а 23.1. ***Оператор $F \in D$ является симметрическим тогда и только тогда, когда он сильно потенциальный (сильно, если его потенциал дифференцируем по Фреше).***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно (см. теорему 22.1) для потенциальности отображения F необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle F'(x)\,y, z\rangle = \langle F'(x)\,z, y\rangle.$$

Отсюда и из 23.1 следует: $F^* = G = F$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 23.2. ***Оператор $F \in D$ кососимметрический тогда и только тогда, когда он линейный и для любого $x \in E$ выполняется равенство***

$$\langle F(x), x\rangle = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F \in D$ кососимметричен. Тогда в силу свойства 4^0 для любого $x \in E$ имеем:

$$\langle F(x), x\rangle = \langle F^*(x), x\rangle = -\langle F(x), x\rangle,$$

т. е.

$$\langle F(x), x\rangle = 0.$$

Напишем теперь, что для любых $x, y \in E$

$$\frac{d}{dt}\langle F(x+ty),\ y\rangle = \langle F'(x+ty)\,y,\ y\rangle = \langle (F'(x+ty))^*\,y,\ y\rangle =$$
$$= \langle (F^*)'(x+ty)\,y,\ y\rangle = -\langle F'(x+ty)\,y,\ y\rangle =$$
$$= -\frac{d}{dt}\langle F(x+ty), y\rangle,$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}\langle F(x+ty),\ y\rangle = 0,$$

так что $F(x+ty)$ не зависит от t, а потому для любых $x, y \in E$ имеем:

$$\langle F(x+y), y\rangle = \langle F(x), y\rangle \text{ и } \langle F(x+y), x\rangle = \langle F(y), x\rangle.$$

Отсюда и из предыдущего следует, что

$$0 = \langle F(x+y), x+y\rangle = \langle F(x+y), x\rangle + \langle F(x+y), y\rangle =$$
$$= \langle F(x), y\rangle + \langle F(y), x\rangle,$$

т. е. для любых $x, y \in E$ следует, что

$$\langle F(x,), y\rangle = -\langle F(y), x\rangle,$$

а значит,

$$\langle F(x+z), y\rangle = \langle x+z, F(y)\rangle = \langle x, F^*(y)\rangle +$$
$$+ \langle z, F^*(y)\rangle = \langle F(x), y\rangle + \langle F(z), y\rangle,$$

так что в силу произвольности $y \in E$ имеем:

$$F(x+z) = F(x) + F(z).$$

Из аддитивности и непрерывности F следует его линейность (см., например, [4], стр. 97—98).

Отметим еще, что этот оператор не зависит от $x \in E$.

Обратно, если $A \in L = L(E, E^*)$ — линейный оператор и $\langle Ax, x\rangle = 0$ для всех $x \in E$, то

$$0 = \langle A(x+y), x+y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = \\ = \langle Ax + A^*x, y\rangle,$$

т. е. $-A = A^*$.

23.3. Условия сопряженности.

Как известно, линейный непрерывный оператор, действующий из одного нормированного пространства в другое такое пространство, всегда имеет сопряженный оператор. Иначе обстоит дело с нелинейными операторами. Оказывается, что этот вопрос связан с теорией потенциальных операторов.

Теорема 23.3. ***Для того чтобы оператор $F \in D$, необходимо и достаточно существование линейного кососимметрического оператора $A \in L$ такого, чтобы разность $(F - A)$ представляла собой потенциальный оператор.***

Доказательство. Пусть $F \in D$. Напишем тождество

$$F = \frac{1}{2}(F + F^*) + \frac{1}{2}(F - F^*).$$

Первое слагаемое в первой части — потенциальный оператор, а второе слагаемое $\frac{1}{2}(F - F^*) = A$ — кососимметрический оператор (линейный в силу теоремы 23.2 и свойства 4^0). Обратно, пусть F — непрерывно дифференцируемый оператор, $F(0) = 0$ и A — линейный кососимметрический оператор такой, что $(F - A)$ — потенциальный оператор. Тогда A, $(F - A) \in D$, а отсюда и из свойства 2^0 следует, что $F \in D$.

Замечание 23.3. Оператор A в доказанной теореме 23.3 определен однозначно. Действительно, если $F \in D$ и существуют два кососимметрических оператора A_1 и A_2, таких, что $(F - A_1)$ и $(F - A_2)$ потенциальные, то разность $A_2 - A_1 = (F - A_1) - (F - A_2)$ симметрична, а потому $A_2 - A_1 = (A_1 - A_2)^* = A_2^* - A_1^* = A_1 - A_2$, т. е.

$$A_1 = A_2.$$

Таким образом, множество D является прямой суммой пространств всех симметрических и всех кососимметрических операторов. Именно: если положим

$$F_S = \frac{1}{2}(F + F^*),\ A_F = \frac{1}{2}(F - F^*),$$

то $\quad F = F_S + A_F$

представляет собой однозначное представление операторов из D в виде суммы симметрического и кососимметрического операторов. Далее, в силу теоремы 23.3, если Φ — потенциальный непрерывно дифференцируемый оператор такой, что $\Phi(0) = 0$, и $A \in L(E, E^*)$— кососимметрический оператор, то

$$\Phi(x) - Ax = F(x) \in D$$

и $F + A = \Phi$. А так как $\Phi^* = \Phi$, то $\Phi^* = (F + A)^* = F^* - A$, $\Phi^* = \Phi = F + A$; значит, $F^* - A = F + A$, и, следовательно,

$$F^* = F + 2A. \tag{23.5}$$

Отметим, что в качестве примера оператора Φ можно взять дифференцируемый по Гато оператор Немыцкого h (см. [2], теорема 20.1), действующий из пространства Лебега $L^p(B)$, где B — ограниченное измеримое множество конечномерного евклидова пространства и $p > 1$, в пространство $L^q(B)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, полагая, что $h0 = 0$, а в качестве оператора A возьмем интегральный оператор

$$Au = \int_B K(s, t)\, u(t)\, dt,$$

где

$$K(s, t) \in L^q(B \times B) \text{ и } K(s, t) = -K(t, s).$$

Так как в пространствах Лебега сопряженный оператор совпадает с союзным[1], то $A^* = -A$. Разумеется, $A : L^p \to L^q$.

§ 24. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

24.1. Два определения выпуклого функционала и их эквивалентность.

Определение 24.1. Вещественный дифференцируемый функционал $f(x)$, заданный на открытом выпуклом множестве ω нормированного пространства E, называется выпуклым на ω, если для любых $x_1, x_0 \in \omega$ выполняется неравенство

$$f(x) - f(x_0) - Df(x_0, x - x_0) \geqslant 0, \tag{24.1}$$

и строго выпуклым, если равенство в (24.1) возможно лишь при $x = x_0$.

Если дифференциал $Df(x, h)$ ограничен по h, то неравенство (24.1) принимает вид

$$f(x) - f(x_0) - \langle F(x_0), x - x_0\rangle \geqslant 0, \tag{24.1'}$$

где $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Известно еще и следующее определение:

Определение 24.2. Если для всех $x_1, x_2 \in \omega$ и $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2), \tag{24.2}$$

то f называется выпуклым функционалом.

---

[1] Оператор $\widetilde{A} : \widetilde{A}u = \int_B K(t, s)\, u(t)\, dt$ называется союзным с $A : Au = \int_B K(s, t) u(t) dt$.

Теорема 24.1. *Для дифференцируемых по Гато функционалов определения 24.1 и 24.2 эквивалентны.*

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (24.1). Тогда для любых $x_1, x_2 \in \omega$ имеем

$$f(x_1) \geqslant f(x_0) + Df(x_0, x_1 - x_0),$$
$$f(x_2) \geqslant f(x_0) + Df(x_0, x_2 - x_0).$$

Полагая $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, после умножения этих неравенств соответственно на λ и $1-\lambda$ получим: $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \geqslant f(x_0) + Df(x_0, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_0) = f(x_0)$, т. е. $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

Таким образом, из (24.1) следует (24.2). Обратно, пусть выполнено (24.2) и $f(x)$ дифференцируем по Гато. Полагая тогда

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)),$$

получим:

$$\varphi'(t) = \frac{df(x_0 + t(x-x_0))}{dt} = Df(x_0 + t(x - x_0),\ x - x_0).$$

Отсюда при $t = 1$ и $t = 0$ получаем:

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau), \text{ где } 0 < \tau < 1.$$

Но из выпуклости f в смысле (24.2) следует, что $\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(\lambda(x_0 + t_1(x - x_0)) + (1-\lambda)(x_0 + t_2(x - x_0))) \leqslant \lambda f(x_0 + t_1(x - x_0)) + (1-\lambda)f(x_0 + t_2(x - x_0)) = \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2)$, т. е. что и φ выпукла в смысле (24.2). Из дифференцируемости и выпуклости φ следует, что φ' — возрастающая функция (см., например, Н. Бурбаки «Функция действительного переменного»), так что при $\tau > 0$, $\varphi'(\tau) \geqslant \varphi'(0)$ и, следовательно,

$$f(x) - f(x_0) - Df(x_0, x - x_0) \geqslant 0,$$

ибо $\varphi'(0) = Df(x_0, x - x_0)$. Разумеется, если f — строго выпуклый функционал, то $\varphi(t)$ — строго выпуклая функция, и тогда $\varphi'(\tau) > \varphi'(0)$.

Теорема доказана.

24.2. Связь между выпуклостью функционала и монотонностью его градиента.

Определение 24.3. Отображение $F : E \to E^*$ называется монотонным на множестве $\sigma \subset E$, если для любых $x, y \in \sigma$ выполняется неравенство

$$\langle x - y, F(x) - F(y)\rangle \geqslant 0,$$

и строго монотонным, если равенство выполняется лишь при $x = y$.

Теорема 24.2. *Для монотонности (строгой монотонности) $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$ на открытом выпуклом множестве $\omega \subset E$ необходимо и достаточно, чтобы функционал f был выпуклым (строго выпуклым).*

Доказательство. Необходимость. Пусть F — монотонный оператор. Применяя к f формулу Лагранжа, получим:

$$f(x) - f(x_0) - \langle F(x_0), x - x_0\rangle =$$
$$= \langle F(x_0 + \tau(x - x_0)),\ x - x_0\rangle - \langle F(x_0), x - x_0\rangle =$$
$$= \langle F(x_0 + \tau(x - x_0)) - F(x_0), x - x_0\rangle =$$
$$= \frac{1}{\tau}\langle F(x_0 + \tau(x - x_0)) - F(x_0), \tau(x - x_0)\rangle.$$

Полагая $x_0 + \tau(x - x_0) = y$ и учитывая, что $0 < \tau < 1$, получим:

$$f(x) - f(x_0) - \langle F(x_0),\ x - x_0\rangle = \frac{1}{\tau}\ \langle F(y) - F(x_0),$$
$$y - x_0\rangle \geqslant 0,$$

т. е. f, по теореме 24.1, — выпуклый функционал.

Достаточность. Пусть f — выпуклый (строго выпуклый) функционал. Полагая

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)),$$

получим: $\varphi'(t) = \langle F(x_0 + t(x - x_0), x - x_0\rangle$.
Так как $\varphi(t)$ — выпуклая (строго выпуклая) функция вещественного аргумента t (см. доказательство теоремы 24.1), то ее производная возрастающая (строго возрастающая функция), а потому $\varphi'(1) - \varphi'(0) \geqslant 0$
или

$$\langle F(x), x - x_0\rangle - \langle F(x_0, x - x_0) \geqslant 0,$$

т. е.

$$\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle \geqslant 0.$$

Теорема доказана.

§ 25. ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ И СЛАБО ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ СНИЗУ ФУНКЦИОНАЛЫ

Определение 25.1. Вещественный функционал f, заданный в нормированном пространстве E, называется полунепрерывным (слабо полунепрерывным) снизу в точке x_0, если какова бы ни была последовательность $(x_n) \subset E$ такая, что

$$x_n \to x_0\ (x_n \rightharpoonup x_0),$$

имеет место неравенство

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{n} f(x_n).$$

f называется полунепрерывным (слабо полунепрерывным) снизу на σ, если он обладает этим свойством в каждой точке σ. Так же как для вещественных функций можно показать, что сумма полунепрерывных (слабо полунепрерывных) снизу функционалов представляет собой полунепрерывный (слабо полунепрерывный) снизу функционал. В основном нас будет интересовать вопрос о слабой полунепрерывности снизу дифференцируемых функционалов, так как для таких функционалов мы приведем условия минимума.

25.1. О слабой полунепрерывности снизу выпуклых и дифференцируемых по Гато функционалов.

Теорема 25.1. ***Пусть на открытом выпуклом множестве*** ω ***нормированного пространства задан выпуклый и дифференцируемый по Гато функционал f. Тогда, если $Df(x, h)$ непрерывен по h, то f слабо полунепрерывен снизу на*** ω.

Доказательство. По условию f является выпуклым на ω, а потому для любых $x, x_0 \in \omega$ будем иметь

$$f(x) - f(x_0) \geqslant Df(x_0, x - x_0).$$

Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n) \subset \omega$, сходящую слабо к x_0. Имеем:

$$f(x_n) - f(x_0) \geqslant Df(x_0, x_n - x_0).$$

Так как $Df(x, h)$ — линейный непрерывный функционал по h и $x_n \rightharpoonup x_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} Df(x_0, x_n - x_0) = 0.$$

Отсюда и из предыдущего следует:

$$\varliminf_{n} [f(x_n) - f(x_0)] \geqslant \varliminf_{n} Df(x_0, x_n - x_0) = \lim_{n\to\infty} Df(x_0, x_n - x_0) = 0,$$

т. е.

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{n} f(x_n).$$

25.2. Критерий слабой полунепрерывности снизу функционалов.

Приведем теперь критерий слабой полунепрерывности снизу функционалов [3].

Теорема 25.2. ***Для того чтобы функционал f, заданный в нормированном пространстве, был слабо полунепрерывен снизу, необходимо и достаточно выполнения условия: каково бы ни было вещественное число c, множество***

$$E_c = \{x \mid f(x) \leqslant c\}$$

секвенциально слабо замкнуто.

Теорема 25.3. ***Для слабой полунепрерывности снизу выпуклого функционала, заданного в банаховом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы он был полунепрерывен снизу.***

Доказательство. Необходимость следует из определений, ибо если $x_n \to x_0$, то $x_n \rightharpoonup x_0$.

Достаточность. Из выпуклости $f(x)$ вытекает выпуклость E_c (см. теорему 25.2), а из полунепрерывности $f(x)$ вытекает замкнутость E_c, так что по теореме Мазура [1] множество E_c слабо замкнуто, а значит, по теореме 25.2 $f(x)$ слабо полунепрерывен снизу.

25.3. Опорный функционал и его связь со слабой полунепрерывностью.

Вопрос о слабой полунепрерывности снизу также связан с понятием опорного функционала.

Определение 25.1. Линейный функционал $y_0 \in E^*$ называется опорным (или субградиентом) к функционалу f в точке $x_0 \in E$, если

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \langle y_0, x - x_0 \rangle.$$

Из этого неравенства, так же как и при доказательстве теоремы 25.1, вытекает слабая полунепрерывность f снизу. Для формулировки очередной теоремы нам потребуется следующее понятие. Пусть F — отображение одного нормированного пространства в другое нормированное пространство. Если существует предел

$$V_+ F(x, h) = \lim_{t \to +0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t}$$

для любого $h \in D(F)$, то $V_+F(x, h)$ называется вариацией F в точке x по направлению h.

Теорема 25.4. ***Если F — нормированное пространство и конечный выпуклый функционал f, заданный на открытом выпуклом множестве $\omega \subset E$, имеет непрерывную по h вариацию $V_+f(x, h)$ для любого $x \in \omega$, то он имеет опорный функционал в каждой точке $x \in \omega$.***

Эта теорема доказана в п. 8.4 книги [3]. К сожалению, по вине автора там опущено требование непрерывности $V_+f(x, h)$ по h. Без этого требования теорема не верна. Действительно, неограниченный линейный функционал, заданный на нормированном пространстве E не имеет опорного ни в одной точке, хотя по определению он является выпуклым.

§ 26. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМУМА

В данном параграфе мы будем рассматривать вещественные функционалы, заданные в рефлексивных банаховых пространствах. Напомним, что в таких пространствах всякий шар слабо компактен.

26.1. Экстремальные точки функционалов и обобщенная теорема Вейерштрасса.

Пусть f — вещественный функционал, заданный в нормированном пространстве E. Точка $x_0 \in E$ называется экстремальной точкой функционала f, если в некоторой окрестности $V(x_0)$ этой точки выполняется одно из следующих неравенств:

$$1)\ f(x) \leqslant f(x_0), \quad 2)\ f(x) \geqslant f(x_0) \quad (\text{для всех } x \in V(x_0)).$$

Если второе неравенство справедливо для всех $x \in E$, то x_0 называется точкой абсолютного минимума функционала f. Далее, если f дифференцируем по Гато в точке x_0, то при выполнении условия

$$Df(x_0, h) = 0$$

точка x_0 называется критической точкой функционала f. Так как из равенства нулю дифференциала следует его непрерывность по h, ибо тогда $|Df(x_0, h)| \leqslant \|h\|$, а значит, $Df(x_0, h)$ непрерывен, то последнее равенство принимает вид

$$\langle \operatorname{grad} f(x_0), h \rangle = 0,$$

и так как это равенство справедливо для произвольного $h \in E$, то можно сказать, что x_0 — критическая точка f, если $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

Теорема 26.1. ***Пусть функционал f задан в области ω нормированного пространства E и x_0 — внутренняя точка области ω, в которой существует линейный дифференциал Гато. Тогда справедливы следующие утверждения:***

1. Для того чтобы точка x_0 была экстремальной, необходимо, чтобы она была критической, т. е. чтобы

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0. \tag{26.1}$$

2. Если дополнительно в некоторой выпуклой окрестности $U(x_0) \subset \omega$ точки x_0 функционал f выпуклый (или $\operatorname{grad} f(x)$ — монотонный оператор), то равенство (26.1) необходимо и достаточно для того, чтобы точка x_0 была точкой минимума функционала f.

Доказательство. Пусть h — произвольный фиксированный вектор пространства E. Тогда $f(x_0 + th)$ — вещественная функция, определенная в некоторой окрестности точки $t = 0$ и имеющая производную в этой точке. Отсюда, если x_0 — экстремальная точка функционала $f(x)$, то $t = 0$ есть экстремальная точка функции $f(x_0 + th)$, а потому

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + th)\big|_{t=0} = 0,$$

или

$$Df(x_0, h) = 0,$$

или

$$\langle \operatorname{grad} f(x_0), h \rangle = 0,$$

т. е. в силу произвольности h $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

Утверждение 1 доказано. Для доказательства утверждения 2 рассмотрим функционал φ, определенный формулой

$$\varphi(z) = f(z + x_0) - f(x_0).$$

В силу условий теоремы он выпуклый, дифференцируем по Гато в точке $z = 0$, причем $\varphi(0) = 0$. Если мы допустим, что x_0 — точка минимума f, то из доказанного получим, что $\operatorname{grad} \varphi(0) = 0$. Предположим, что это равенство, совпадающее с (26.1), имеет место, и покажем, что $z = 0$ — точка минимума функционала φ, откуда будет следовать, что x_0 — точка минимума функционала f. Доказательство проведем от противного. Допустим, что для некоторого вектора $z_1 \in (V(x_0) - x_0)$

$$\varphi(z_1) = \alpha < 0.$$

Тогда в силу выпуклости

$$\varphi(tz_1) = \varphi(tz_1 + (1-t)\,0) \leqslant t\varphi(z_1) = t\alpha \quad (0 < t < 1).$$

Следовательно,

$$[\varphi(0 + tz_1) - \varphi(0)]/t \leqslant \alpha,$$

а потому

$$\langle \operatorname{grad} \varphi(0),\ z_1 \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(0 + tz_1) - \varphi(0)}{t} \leqslant \alpha < 0,$$

т. е.

$$\operatorname{grad} \varphi(0) \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 26.2. (Обобщенная теорема Вейерштрасса.) ***Если на ограниченном слабо замкнутом множестве σ в рефлексивном банаховом пространстве E задан конечный слабо полунепрерывный снизу функционал f, то он ограничен снизу и достигает на σ своей нижней грани.***

Доказательство. Допустим, что f снизу не ограничен на σ. Тогда найдется такая последовательность $(x_n) \subset \sigma$, что $f(x_n) < -n$ для всех n. Так как в рефлексивном пространстве всякое слабо замкнутое ограниченное множество слабо секвенциально компактно, то из (x_n) можно выделить подпоследовательность

$$x_{n_k} \rightharpoonup x_0,$$

где $x_0 \in \sigma$. Отсюда в силу слабой полунепрерывности снизу f имеем $f(x_0) \leqslant \varliminf f(x_{n_k})$, что невозможно, так как $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = -\infty$.

Полученное противоречие доказывает ограниченность снизу f. Пусть $d = \inf\limits_{\sigma} f(x)$. Из определения d вытекает существование минимизирующей последовательности $(x_m) \subset \sigma$:

$$d = \lim_{m \to \infty} f(x_m).$$

Так как σ слабо секвекциально компактна, то последовательность (x_m) обладает подпоследовательностью $x_{mk} \rightharpoonup x_0 \in \sigma$. Тогда

$$d \leqslant f(x_0) \leqslant \varliminf_{k} f(x_{m_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x_{m_k}) = d.$$

Следовательно, $f(x_0) = d$. Теорема доказана.

26.2. Элементарный принцип критической точки.

Теорема 26.3. (Элементарный принцип критической точки.) ***Пусть $K = \{x \mid x \in E,\ \|x\| \leqslant r,\ r > 0\}$ — шар рефлексивного бана-***

хова пространства E и S — поверхность этого шара. Тогда, если слабо полунепрерывный снизу на K функционал f дифференцируем по Гато на открытом шаре $\|x\| < r$ и $\inf\limits_{\|x\|=r} f(x) > f(x^*)$, где $\|x^*\| < r$, то в точке минимума $x_0 \in K$ этого функционала $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

Доказательство. Согласно обобщенной теореме Вейерштрасса существует точка минимума $x_0 \in K$ функционала f и она не принадлежит S, ибо на S функционал f принимает бóльшие значения, чем во внутренней точке x^*. Следовательно, $\|x_0\| < r$ и, по теореме 26.1,

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0.$$

Теорема 26.4. ***Пусть вещественный функционал f, заданный в вещественном рефлексивном банаховом пространстве E, дифференцируем по Гато и*** $\operatorname{grad} f = F$ ***удовлетворяет условиям:***

1. Функция $\langle F(tx), x\rangle$ непрерывна по t на $[0, 1]$ при любом $x \in E$.

2. $\langle F(x+h) - F(x), h\rangle \geqslant 0$ (для всех $x, h \in E$, т. е. F — монотонный оператор).

3. $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \dfrac{\langle F(x), x\rangle}{\|x\|} = +\infty$, ***т. е. F коэрцитивен.***

Тогда существует точка минимума x_0 функционала F и $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$. ***Если в условии 2 знак равенства возможен лишь при $h = 0$, т. е. F — строго монотонный оператор, то точка минимума функционала единственная и в ней f принимает абсолютный минимум.***

Доказательство. Из условия 2 в силу теоремы 24.2 вытекает, что f — выпуклый функционал и потому, согласно теореме 25.1, слабо полунепрерывен снизу. Далее согласно формуле (22.2) о связи между потенциальным оператором и его потенциалом получаем:

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \langle F(tx), x\rangle\, dt,$$

причем данный интеграл существует в силу условия 1 теоремы. Так как в силу условия 2 $\langle F(tx) - F(0), x\rangle = \langle F(tx - tx) - F(tx), -tx\rangle \cdot \frac{1}{t} \geqslant 0$, то

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \langle F(tx), x\rangle\, dt = \langle F(0), x\rangle + \int_0^1 \langle F(tx) - F(0), x\rangle\, dt \geqslant \langle F(0), x\rangle + \int_{\frac{1}{2}}^1 \langle F(tx) - F(0), x\rangle dt =$$

$$= \langle F(0), x\rangle + \frac{1}{2}\langle F(t_1 x), x\rangle,$$

где $0{,}5 \leqslant t_1 \leqslant 1$. Отсюда

$$f(x) - f(0) \geqslant \frac{1}{2}\|x\|\left(\frac{\langle F(t_1 x),\ t_1 x\rangle}{\|t_1 x\|} - 2\|F(0)\|\right),$$

так что в силу условия 3 существует такое $r > 0$, что $f(x) > f(0)$ при $\|x\| \geqslant r$. Таким образом, выполнены условия теоремы 26.3, согласно которой в некоторой внутренней точке x_0 шара K_r функционал f имеет локальный минимум. В этой точке будет

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0,$$

ибо f дифференцируем по Гато. Наконец, единственность минимума f в случае, когда $\operatorname{grad} f = F$ — строго монотонный оператор, получается непосредственно. Действительно, если f имеет минимум в двух различных точках: $x_1, x_2 \in E$, то $F(x_1) = 0$ и $F(x_2) = 0$, откуда

$$\langle F(x_1) - F(x_2), x_1 - x_2\rangle = 0.$$

Однако данное равенство противоречит условию строгой монотонности F.

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма.

Лемма 26.1. *Пусть f — дифференцируемый по Гато вещественный функционал, заданный в вещественном нормированном пространстве E. Тогда если $\operatorname{grad} f = F$ удовлетворяет на сфере $S = \{x | x \in E, \|x\| = R > 0\}$ условию*

$$\langle F(x), x\rangle > 0, \tag{26.2}$$

то на этой сфере S нет таких векторов z, для которых имело бы место равенство

$$\min_{\|x\| \leqslant R} f(x) = f(z),$$

если этот минимум существует.

Доказательство легко получается от противного. Допустим, что

$$\min_{\|x\| \leqslant R} f(x) = f(x_0), \text{ где } \|x_0\| = R.$$

Тогда вещественная функция $\varphi(t) = f(x_0 + t(-x_0))$ при достаточно малых t удовлетворяет условию $\varphi(t) \geqslant \varphi(0)$, а потому $\varphi'(+0) \geqslant \geqslant 0$. Но

$$\varphi'(+0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t(-x_0)) - f(x_0)}{t} = \langle F(x_0), -x_0\rangle,$$

так что

$$\varphi'(+0) = -\langle F(x_0), x_0\rangle < 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

26.3. Теоремы существования критических точек.

Теорема 26.5. ***Пусть дифференцируемый по Гато вещественный функционал f, заданный в рефлексивном вещественном***

банаховом пространстве, слабо полунепрерывен снизу и удовлетворяет на некоторой сфере $S = \{x \mid x \in E, \|x\| = R > 0\}$ условию:

$$\langle F(x), x \rangle > 0. \tag{26.2}$$

Тогда существует внутренняя точка x_0 шара $\|x\| \leqslant R$, в которой f имеет локальный минимум, а следовательно, $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим шар $K_R = \{x \mid x \in E, \|x\| \leqslant R;\ R > 0\}$.

В силу условий теоремы он слабо замкнут и на нем f слабо полунепрерывен снизу. Ввиду этого согласно теореме 26.2 f имеет на K_R минимум, причем согласно лемме 26.1 точка минимума является внутренней точкой шара K_R.

Теорема 26.6. ***Пусть монотонный потенциальный оператор $f(x)$, заданный в рефлексивном вещественном банаховом пространстве E, удовлетворяет условию:***

$$\langle F(x), x \rangle \geqslant \|x\| \gamma(\|x\|),$$

где функция $\gamma(t)$ интегрируема на отрезке $[0, R]$ при любом $R > 0$ и

$$\varlimsup_{R \to +\infty} \int_0^R \gamma(t)\, dt = c > 0. \tag{26.3}$$

Тогда потенциал f оператора F имеет точку минимума. Эта точка минимума единственная, и в ней f принимает абсолютный минимум, если F — строго монотонный оператор.

Доказательство. Из условия (26.3) вытекает, что $\gamma(t) > 0$ на множестве положительной меры, так что найдется такое R, что при $\|x\| = R$

$$\langle F(x), x \rangle > 0.$$

Отсюда утверждение теоремы вытекает так же, как при доказательстве теоремы 26.5.

§ 27. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

27.1. Идея метода.

Пусть Φ — потенциальный оператор, т. е. $\Phi = \operatorname{grad} \varphi$. Вариационный метод доказательства существования решения уравнения

$$\Phi(x) = 0$$

сводится к нахождению критических точек функционала φ. Вот почему вопрос о безусловном минимуме функционалов представляет интерес для нелинейных уравнений с потенциальными операторами. Если Φ не является потенциальным оператором, то возможны следующие приемы (см. [3]): 1. Уравнение $\Phi(x) = 0$ заменяется эквивалентным уравнением $\psi(x) = 0$, где ψ — потенциальный оператор. 2. Ищется минимум функционала $\|\Phi(x)\| =$

$= f(x)$. Разумеется, вариационный метод не является единственным методом исследования нелинейных уравнений. Известны и другие методы: топологические, итерационные и другие, которых мы здесь не коснемся.

Приведем несколько предложений, иллюстрирующих вариационный метод.

27.2. Теоремы существования решений.

Теорема 27.1. ***Пусть потенциальный монотонный оператор F, заданный в рефлексивном вещественном банаховом пространстве E, удовлетворяет условию коэрцитивности***

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle F(x),\ x\rangle}{\|x\|} = +\infty,$$

причем $\langle F(tx),\ x\rangle$ непрерывно по t на $[0,\ 1]$ при любом $x \in E$. Тогда уравнение

$$F(x) = y$$

имеет решение при любом $y \in E^*$, т. е. F — сюръективное отображение $E \longrightarrow E^*$ (отображение E на E^*). Если F — строго монотонный оператор, то он представляет собой биективное (сюръективное и взаимно однозначное) отображение $E \longrightarrow E^*$.

Доказательство. Пусть f — потенциал оператора F и $g(x) = \langle y, x\rangle$. Положим

$$\varphi(x) = f(x) - g(x).$$

Тогда

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = F(x) - y.$$

Поступая теперь так же, как при доказательстве теоремы 26.4, получим:

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \frac{1}{2}\|x\|\left(\frac{\langle F(t_1x),\ t_1x\rangle}{t_1\|x\|} - 2\|F(0)\|\right),$$

где $\frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1$, откуда

$$\varphi(x) - \varphi(0) \geqslant \frac{1}{2}\|x\|\left(\frac{\langle F(t_1x),\ t_1x\rangle}{t_1\|x\|} - 2\|F(0)\|\right) -$$

$$-\langle y,\ x\rangle \geqslant \frac{1}{2}\|x\|\left(\frac{\langle F(t_1x),\ t_1x\rangle}{t_1\|x\|} - 2\|F(0)\| - 2\|y\|\right).$$

Отсюда в силу условия коэрцитивности F следует существование сферы

$$S = \{x \mid x \in E,\ \|x\| = r > 0\},$$

на которой $\varphi(x) > \varphi(0)$. В силу рефлексивности E шар

$$K = \{x \in E\colon \|x\| \leqslant r\}$$

слабо бикомпактен, а, кроме того, φ слабо полунепрерывен снизу, ибо f слабо полунепрерывен снизу, а $g(x)$ слабо непрерывен. Поэтому по принципу критической точки (теорема 26.3) внутри шара K имеется точка x_0, в которой

$$\operatorname{grad} \varphi(x_0) = 0, \text{ т. е. } F(x_0) - y = 0.$$

Этим доказано, что $F : E \to E^*$ сюръективен. Наконец, если F — строго монотонный оператор, то согласно доказательству теоремы 26.4 отображение $F : E \to E^*$ взаимно однозначно.

Теорема 27.2. ***Пусть потенциальный монотонный оператор F, заданный в рефлексивном вещественном банаховом пространстве E, удовлетворяет условиям:***

1. При любом $x \in E$ существует $\int_0^1 \langle F(tx), x\rangle dt$.

2. $\langle F(x), x\rangle \geqslant \|x\| \gamma(\|x\|)$, где $\gamma(t)$ — функция, интегрируемая на отрезке $[0; R]$, при любом $R > 0$ и

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^R \gamma(t)\, dt = +\infty.$$

Тогда отображение $F : E \to E^*$ сюръективно. Если F — строго монотонный оператор, то $F : E \to E^*$ биективно.

Доказательство. Пусть $F = \operatorname{grad} f$. Тогда из монотонности F следует выпуклость, а значит, и слабая полунепрерывность снизу функционала f. Отсюда следует, что и функционал

$$\varphi(x) = f(x) - \langle y, x\rangle$$

при любом фиксированном $y \in E^*$ слабо полунепрерывен снизу. Далее согласно формуле, связывающей потенциальный оператор и его потенциал,

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \langle F(tx),\ tx\rangle \frac{dt}{t},$$

так что по условию

$$f(x) - f(0) \geqslant \int_0^1 \|x\| \gamma(t\|x\|)\, dt = \int_0^R \gamma(z)\, dz, \text{ где } R = \|x\|.$$

Отсюда

$$\varphi(x) - \varphi(0) \geqslant \int_0^R \gamma(z)\, dz - \langle y,\ x\rangle \geqslant R\left(\frac{1}{R}\int_0^R \gamma(z)\, dz - \|y\|\right),$$

так что в силу условия 2 теоремы найдется такое $R = r > 0$, что на сфере $S_r = \{x \mid x \in E, \|x\| = r\}$ будет $\varphi(x) > \varphi(0)$.
Утверждение теоремы следует отсюда так же, как при доказательстве предыдущей теоремы.

Замечание 27.1. Отметим, что доказательство теоремы 27.2 можно было провести по плану доказательств теорем 26.5 и 26.6.

§ 28. МИНИМИЗИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

28.1. Минимизирующие последовательности и некоторые их свойства.

Пусть E — вещественное векторное пространство, f — вещественный функционал, заданный на E, и σ — некоторое множество из E.

Определение 28.1. Всякая последовательность $(x_n) \subset \sigma$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = d, \text{ где } d = \inf_{\sigma} f(x),$$

называется минимизирующей (для f на σ). Это определение сохраняется и тогда, когда $d = f(x_0)$, где x_0 — точка условного минимума f относительно σ или безусловного минимума f, т. е. точка локального или абсолютного минимума f относительно пространства E.

Нас будет интересовать вопрос о сходимости минимизирующих последовательностей к точке безусловного минимума функционала. При изучении этого вопроса известную роль играют выпуклые функционалы, обладающие некоторыми дополнительными свойствами.

Разумеется, не всякий выпуклый функционал имеет безусловный минимум. Даже строго выпуклый функционал может не иметь безусловного минимума. Например, вещественная функция вещественного аргумента $\varphi(t) = e^t$ строго выпукла, но безусловного минимума она не имеет. Далее, если выпуклый (даже строго выпуклый) функционал имеет минимум, то не всякая минимизирующая последовательность будет сходиться к точке минимума. Прежде чем привести такой пример, мы заметим, что если строго выпуклый функционал f имеет минимум в точке x_0, то он растет вдоль всякого луча, выходящего из точки x_0. Действительно, функционал

$$\varphi(x) = f(x_0 + x) - f(x_0)$$

также строго выпуклый и он имеет минимум в точке 0. Этот минимум строгий и единственный. Рассмотрим теперь произвольный вектор $x \neq 0$. В силу строгой выпуклости имеем:

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)\,0) \leqslant \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\,\varphi(0) = \lambda\varphi(x),$$

откуда

$$\varphi(0) < \varphi(\lambda x) < \lambda\varphi(x) < \varphi(x), \quad 0 < \lambda < 1,$$

(так как $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ для любого x), т. е. функционал $\varphi(x)$ растет вдоль луча, соединяющего нуль с любым вектором $x \in E$, так что $f(x)$ растет вдоль всякого луча, выходящего из точки x_0.

В связи с этим результатом следует заметить, что если E — конечномерное пространство, то в силу компактности в нем любого замкнутого шара можно утверждать следующее: если вещественная функция f растет вдоль каждого луча, выходящего из точки x_0, то $f(x) - f(x_0)$ обладает монотонной минорантой[1] $c(t)$ для $t \geqslant 0$, $c(0) = 0$, которую можно считать непрерывной, строго возрастающей и удовлетворяющей условию

$$f(x) - f(x_0) \geqslant c(\|x - x_0\|). \tag{28.1}$$

Разумеется, если неравенство (28.1) имеет место для функционала f, то x_0 — точка минимума $f(x)$ и всякая минимизирующая последовательность сходится к этой точке x_0. Однако, в бесконечномерных пространствах существуют строго выпуклые функционалы, имеющие в точке x_0 минимум, а значит, растущие вдоль всякого луча, выходящего из x_0, для которых тем не менее неравенство (28.1) не имеет места. Это видно из следующего примера.

Пусть (e_k) — полная ортогональная система векторов вещественного гильбертова пространства H.

Рассмотрим на H строго выпуклый функционал f:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)^2}{k^2}.$$

Он обращается в нуль лишь при $x = 0$, а при $x \neq 0$ $f(x) > 0$. Для этого функционала последовательность $x_n = \sqrt{n} e_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ является минимизирующей, ибо при $n \to \infty$

$$f(x_n) = \frac{1}{n} \to 0,$$

но $\|x_n\| = \sqrt{n} \to \infty$.

В рассмотренном примере минимизирующая последовательность оказалась неограниченной. В связи с этим возникает вопрос об условиях, обеспечивающих ограниченность всякой минимизирующей последовательности. Приведем такое условие, использующее определение 28.2.

Определение 28.2. Конечный вещественный функционал f, заданный в нормированном пространстве E, называется возрастающим, если для любого числа c множество $\{x \mid x \in E, f(x) \leqslant c\}$ ограничено.

Из этого определения вытекает, что если (x_n) — минимизирующая последовательность и $d = \inf f$, где $d < c$, то, полагая $d_n = f(x_n) \to d$ при $n \to \infty$, получим, что $d_n < c$, начиная с некоторого номера n_0, а значит, $\|x_n\| < A_c = \text{const}$ для $n = n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \ldots$.

Таким образом, справедлива

Теорема 28.1. ***Если f — возрастающий функционал, то всякая минимизирующая его последовательность ограничена.***

Из последнего утверждения вытекает, что если возрастающий функционал задан в рефлексивном банаховом пространстве и

---

[1] Монотонная миноранта отображения — монотонная функция, ограничивающая снизу это отображение.

$d = f(x_0)$, то из всякой минимизирующей последовательности $d = \inf f = f(x_0)$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к x_0.

28.2. Корректная постановка задачи минимизации.

А. Н. Тихонову принадлежит следующее определение (28.3.)

Определение 28.3. Задача минимизации вещественного функционала, заданного на некотором подмножестве нормированного пространства, поставлена корректно, если она разрешима, имеет единственное решение и к нему сходится в смысле нормы пространства любая минимизирующая последовательность.

В данном пункте мы рассмотрим задачу о безусловном минимуме функционалов, заданных в вещественных банаховых пространствах и дифференцируемых по Гато, и дадим одно достаточное условие ее корректности в смысле А. Н. Тихонова.

По существу, это достаточное условие приведет к неравенству типа (28.1), из которого, как мы видели, вытекает корректность постановки задачи минимизации функционала.

Теорема 28.1. *Пусть $\gamma(t)$ — неотрицательная функция, интегрируемая на $[0, R]$ при любом $R > 0$ и такая, что*

$$c(R) = \int_0^R \gamma(t)\,dt \tag{28.2}$$

возрастет и при некотором R:

$$c(R) > R\,\|F(0)\|. \tag{28.3}$$

Тогда если оператор $F = \operatorname{grad} f$, заданный в рефлексивном банаховом пространстве E, удовлетворяет условиям: для любых $h, y \in E$ функция $\langle F(y+th), h\rangle$ интегрируема по t на $[0, 1]$ и

$$\langle F(y+h) - F(y), h\rangle \geqslant \|h\|\,\gamma(\|h\|), \tag{28.4}$$

то задача минимизации функционала f поставлена корректно.

Доказательство. Из условия (28.4) следует, во-первых, монотонность F, а значит, слабая полунепрерывность снизу f, и, во-вторых (см. формулу 22.2), что

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \langle F(tx), x\rangle\,dt = \int_0^1 \langle F(tx) - F(0), x\rangle\,dt +$$

$$+ \langle F(0), x\rangle \geqslant \int_0^1 \|x\|\,\gamma(t\|x\|)\,dt - \|x\|\,\|F(0)\| = \int_0^R \gamma(z)\,dz -$$

$$- R\,\|F(0)\|,$$

где $R = \|x\|$. Отсюда в силу условия (28.3) функционал f имеет критическую точку x_0, т. е. f имеет точку минимума x_0, а потому $F(x_0) = 0$.

Ввиду этого имеем (см. формулу (22.2)):

$$f(x) - f(x_0) = \int_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0)) - F(x_0),\ x - x_0 \rangle\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 \| x - x_0 \| \gamma(t \| x - x_0 \|)\, dt = c(\| x - x_0 \|).$$

Отсюда вытекает единственность минимума и сходимость к нему всякой минимизирующей последовательности.

Отметим, что для выполнения неравенства (28.3) достаточно, например, чтобы

$$\overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{c(R)}{R} = +\infty.$$

Мы изучили вопрос о минимизирующих последовательностях. Ниже перейдем к рассмотрению некоторых методов построения минимизирующих последовательностей. Из известных в литературе методов минимизации нелинейных функционалов мы рассмотрим лишь три — метод наискорейшего спуска, метод Ритца и метод Ньютона.

28.3. Метод наискорейшего спуска.

Для выяснения идеи этого метода мы сначала рассмотрим случай гильбертова пространства.

Пусть в вещественном гильбертовом пространстве H задан дифференцируемый по Гато вещественный и ограниченный снизу нелинейный функционал f. Положим $d = \inf\limits_{x \in H} f$ и $F = \operatorname{grad} f$. Возьмем произвольный вектор $x_1 \in H$ и допустим, что $F(x_1) \neq 0$. Разумеется, если f — строго выпуклый функционал, то, как мы видели, он может иметь лишь единственную точку минимума и принимает в ней значение, равное d, поэтому требование $F(x_1) \neq 0$ означает, что x_1 не есть точка минимума f. Выберем вектор $h \in H$ так, чтобы его длина $\| h \| = \| F(x_1) \|$, и выясним, как нужно выбрать направление h, чтобы производная

$$\frac{d}{dt} f(x_1 + th) = \langle F(x_1 + th),\ h \rangle$$

имела наименьшее значение при $t = 0$, т. е. чтобы h было направлением наибольшего убывания $f(x)$ в точке x_1. С этой целью мы сначала выберем направление h так, чтобы $(F(x_1), h)$ имело наибольшее значение, а затем изменим знак вектора h, так что $(F(x_1), -h)$ будет иметь наименьшее значение. Так как

$$(F(x_1), h) \leqslant \| F(x_1) \| \| h \| = \| F(x_1) \|^2,$$

то $(F(x_1), h)$ примет наибольшее значение лишь при $h = F(x_1)$ и наименьшее при $h = -F(x_1)$, т. е. когда направление h совпадет с направлением антиградиента f. Положим $h_1 = -F(x_1)$ и рассмотрим вещественную функцию

$$\varphi(t) = f(x_1 + th_1),\ t \geqslant 0.$$

По построению функция $\varphi(t)$ убывает в некоторой правой полуокрестности точки $t = 0$. Пусть существует $\min \varphi(t)$ и t_1 — наименьшее положительное значение t, для которого $\varphi(t_1) = \min \varphi(t)$. Положим

$$x_2 = x_1 + t_1 h_1 = x_1 - t_1 F(x_1).$$

По построению

$$f(x_2) = f(x_1 + t_1 h_1) < f(x_1).$$

Считая $F(x_2) \neq 0$, мы можем повторить предыдущие рассуждения. Таким образом, если для каждого k $F(x_k) \neq 0$, то мы приходим к следующему процессу:

$$x_{n+1} = x_n - t_n F(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{28.5}$$

который называется процессом наискорейшего спуска или процессом градиентного спуска.

Хотя последовательность (28.5) обладает тем свойством, что

$$f(x_{n+1}) < f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{28.6}$$

она может и не быть минимизирующей.

Определение 28.4. Всякая последовательность (x_n), для которой выполняется неравенство (28.6), называется релаксационной, а числа t_n, входящие в (28.5), называются релаксационными множителями.

Отметим, что даже в случае гильбертова пространства возникают трудности при определении релаксационных множителей. Лишь в простейших случаях удается эффективно их вычислить. Ввиду этого числа t_n заменяются положительными числами ε_n, которые либо задаются априорно, либо для них указываются границы, в которых они могут изменяться произвольно. В том случае, когда t_n заменяются на ε_n, процесс (28.5) называется процессом типа спуска (градиентного типа).

Перейдем теперь к рассмотрению более общего случая, когда дифференцируемый по Гато вещественный и ограниченный снизу функционал f задан в рефлексивном вещественном банаховом пространстве E. Пусть $F = \operatorname{grad} f$ и x_1 — произвольный вектор из E такой, что $F(x_1) \neq 0$. Выберем вектор $h \in E$ так, чтобы $\|h\| = \|F(x_1)\|$. Посмотрим, как нужно выбрать направление h, чтобы производная

$$\frac{d}{dt} f(x_1 + th) = \langle F(x_1 + th), h\rangle$$

имела наименьшее значение при $t = 0$. Для этого сначала выберем h так, чтобы $\langle F(x_1), h\rangle$ имело наибольшее значение, а затем возьмем $-h$. Тогда $\langle F(x_1), -h\rangle$ будет иметь наименьшее значение. Так как

$$\langle F(x_1), h\rangle \leqslant \|F(x_1)\| \, \|h\| = \|F(x_1)\|^2, \tag{28.7}$$

то вектор h нужно выбрать так, чтобы $\langle F(x_1), h\rangle = \|F(x_1)\|^2$. С этой целью мы рассмотрим оператор U, действующий из E^* в E и удовлетворяющий условиям

$$\|Uy\| = \|y\|, \ \langle y, Uy\rangle = \|y\|^2.$$

Примером такого оператора U, если E рефлексивно и норма в E^* дифференцируема по Гато, служит (см. [3])

$$Uy = \|y\| \operatorname{grad} \|y\|.$$

Положив

$$h = UF(x_1),$$

получим:

$$\langle F(x_1), \ UF(x_1)\rangle = \|F(x_1)\|^2,$$

и согласно (28.7) верхняя грань $\langle F(x_1), h\rangle$ будет достигнута. Остается лишь положить

$$h = h_1 = -UF(x_1).$$

Предположим теперь, что можно подобрать $t_1 \geqslant 0$ так, чтобы функция $\varphi(t) = f(x_1 + th)$ имела минимум (обычно берут первый минимум). Пусть $\varphi(t_1) = \min \varphi(t)$. Тогда $f(x_2) = f(x_1 + t_1 h_1) < f(x_1)$, и мы находим, что $x_2 = x_1 - t_1 UF(x_1)$. Предполагая, что этот процесс можно неограниченно продолжать, получим:

$$x_{n+1} = x_n - t_n \ UF(x_1) \ (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{28.8}$$

Это процесс спуска. Обычно t_n не вычисляют, а рассматривают процесс

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n UF(x_n). \tag{28.9}$$

Причем на выбор (ε_n) накладывают такие ограничения, чтобы процесс типа наискорейшего спуска сходился.

Далее рассмотрим вопрос о сходимости метода градиентного спуска дифференцируемых по Гато функционалов. Сначала мы приведем следующие вспомогательные предложения:

Лемма 28.1. *Пусть вещественный функционал f, заданный в рефлексивном вещественном банаховом пространстве E, дифференцируем по Гато и его градиент F удовлетворяет условию*

$$\langle F(x+h) - F(x), h\rangle \leqslant M(r)\|h\|^2 \quad \text{при} \quad x, \ x+h \in D_r = \\ = \{x \mid x \in E, \|x\| \leqslant r\}, \tag{28.10}$$

где $M(r)$ — произвольная положительная возрастающая функция на полуоси $r \geqslant 0$ и норма E^* пространства дифференцируема по Гато. Тогда если $\varepsilon_n M_n \leqslant \frac{1}{2}$, где $M_n = \max[1, M(R_n)]$, $R_n = \|x_n\| + \|F(x_n)\|$, то процесс (28.9) будет релаксационным.

Доказательство. Используя формулу Лагранжа, процесс (28.9) и свойства оператора U, будем иметь:

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) = \langle F(x_{n+1} + \tau(x_n - x_{n+1})), \ x_n - x_{n+1}\rangle = \\ = \langle F(x_n), \ x_n - x_{n+1}\rangle - \langle F(x_{n+1} + \tau(x_n - x_{n+1})) - F(x_n),$$

$$x_{n+1}-x_n\rangle = \varepsilon_n \|F(x_n\|^2 - \frac{1}{1-\tau}\langle F(x_n+(1-\tau)(x_{n+1}-x_n))-F(x_n),$$
$$(1-\tau)(x_{n+1}-x_n)\rangle \geqslant \varepsilon_n\|F(x_n)\|^2 - M_n\|x_{n+1}-x_n\| =$$
$$= \varepsilon_n\|F(x_n)\|^2 - \varepsilon_n^2 M_n\|F(x_n)\|^2$$

или

$$f(x_n)-f(x_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_n\|F(x_n)\|^2 > 0. \tag{28.11}$$

Лемма доказана. Отметим, что для выполнения неравенства (28.10) достаточно, чтобы оператор F удовлетворял условию Липшица

$$\|F(x+h)-F(x)\| \leqslant M(r)\|h\|, \tag{28.12}$$

причем константа Липшица может быть и возрастающей функцией от $r = |x|$.

Пусть выполнены условия леммы 28.1 и $\inf\limits_{x\in E} f(x) = d > -\infty$. Положим $r_n = f(x_n) - d$.
Из неравенства (28.11) следует, что

$$r_n - r_{n+1} = f(x\ ) - f(x_{n+1}) > 0,$$

т. е. что последовательность неотрицательных чисел (r_n) убывает, а потому существует

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r_0 \geqslant 0.$$

Если допустить, что для начальной точки x_1 множество

$$E_1 = \{x \mid x \in E, f(x) \leqslant f(x_1)\}$$

ограничено, то согласно лемме 28.1 последовательность (x_n) ограничена. Разумеется, что для ограниченности множества E_1 достаточно, например, чтобы f был возрастающим функционалом (см. определение 28.2) или чтобы

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty.$$

Если $F(x)$ удовлетворяет условию (28.12), то из ограниченности последовательности вытекает ограниченность $\|F(x_n)\|$, а потому и ограниченность M_n, так что $1 \leqslant M_n \leqslant M_0$ для некоторого числа M_0 и всех n_0. Ввиду этого если мы допустим, что $\varepsilon_n M_n \geqslant \frac{1}{4}$, то получим, что $\varepsilon_n M_0 \geqslant \frac{1}{4} > 0$, и тогда из неравенства (28.11) мы получим, что

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0. \tag{28.13}$$

Итак, доказана

Лемма 28.2. *Пусть выполнены условия:*

1. E — рефлексивное вещественное банахово пространство, причем норма в E^* дифференцируема по Гато.

2. Дифференцируемый по Гато вещественный функционал f на E ограничен снизу и является возрастающим (или множество E_1 ограничено), а его градиент удовлетворяет условию Липшица (28.12).

3. Релаксационные множители ε_n удовлетворяют неравенствам $\frac{1}{4} \leqslant \varepsilon_n M_n \leqslant \frac{1}{2}$.

Тогда итерационный процесс (28.19) будет релаксационным и

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0.$$

Замечание 28.1. Разумеется, если в дополнении к условиям леммы 28.2 потребовать, чтобы

$$f(x) - d \leqslant \| F(x) \|^{\alpha}, \quad (\alpha > 0),$$

где $d = \inf f(x)$, то последовательность x_n будет минимизирующей.

Теорема 28.2. ***Пусть выполнены условия:***

1. E — рефлексивное вещественное банахово пространство, причем норма в E^* дифференцируема по Гато.

2. Вещественный функционал f, заданный на E, дифференцируем по Гато, его градиент F обладает тем свойством, что $\langle F(tx), x \rangle$ — интегрируемая по $t \in [0, 1]$ функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\| F(x+h) - F(x) \| \leqslant M(r) \| h \|, \quad x,\ x+h \in K_r = \\ = \{x \mid x \in E, \ \| x \| \leqslant r\},$$

$$\langle F(x+h) - F(x), h \rangle \geqslant \| h \| \gamma(\| h \|), \tag{28.14}$$

где $M_{(r)}$ — непрерывная возрастающая неотрицательная функция, заданная для $r \geqslant 0$, и $\gamma(t), t \geqslant 0$ — возрастающая непрерывная функция такая, что $\gamma(0) = 0$, причем функция

$$c(R) = \frac{1}{R} \int_0^R \gamma(z)\, dz$$

возрастает и при некотором R справедливо неравенство $C(R) > \| F(0) \|$.

3. $\frac{1}{4} \leqslant \varepsilon_n M_n \leqslant \frac{1}{2}$, $M_n = \max[1, M(R_n)]$, $R_n = \| x_n \| + \| F(x_n) \|$.

Тогда последовательность $x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n U F(x_n)$ ***оказывается релаксационной, минимизирующей и сходящейся к точке абсолютного минимума функционала f.***

Доказательство. Из формулы (22.2) следует, что

$$f(x) - f(0_0) = \int_0^1 \langle F(tx), \quad x \rangle\, dt =$$

$$= \langle F(0), x \rangle + \int_0^1 \langle F(tx) - F(0), \ x \rangle\, dt.$$

Отсюда и из (28.14) имеем:

$$f(x)-f(0)\geqslant\langle F(0),\quad x\rangle+\|x\|\int_0^1\gamma(t\|x\|)\,dt\geqslant\|x\|(-\|F(0)\|+$$

$$+\frac{1}{\|x\|}\int_0^{\|x\|}\gamma(z)\,dz)=R(-\|F(0)\|+c(R)),$$

где $R=\|x\|$. Отсюда в силу условия 2 теоремы

$$\lim_{\|x\|\to\infty}f(x)=+\infty,$$

т. е. $f(x)$ — возрастающий функционал.

Так как из условия (28.14) следует (см. теорему 24.2), что f — строго выпуклый функционал, то согласно теореме 28.1 существует единственная точка $x_0\in E$, в которой

$$f(x_0)=\inf_{x\in E}f(x)=d,$$

и других точек минимума f не имеет. Далее, согласно лемме 28.2 последовательность (28.19) является релаксационной и для нее

$$\lim_{n\to\infty}F(x_n)=0. \qquad (28.15)$$

Но из условия (28.14) следует, что

$$\|F(x_n)\|\geqslant\langle F(x_n),\ \frac{x_n-x_0}{\|x_n-x_0\|}\rangle=\langle F(x_n)-F(x_0),$$

$$\frac{x_n-x_0}{\|x_n-x_0\|}\rangle\geqslant\gamma(\|x_n-x_0\|),$$

ибо $F(x_0)=0$. Отсюда

$$\|x_n-x_0\|\leqslant\gamma^{-1}(\|F(x_n)\|),$$

где γ^{-1} — функция, обратная к γ, существование которой следует из условия 2 теоремы. Из последнего неравенства имеем:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0.$$

28.4. Метод Ритца.

В этом пункте мы будем предполагать, что E — сепарабельное вещественное нормированное пространство и f — конечный вещественный функционал, заданный на E. Лишь во второй половине пункта нам потребуется полнота E. Для минимизации функционала f, если он ограничен снизу на E, мы воспользуемся методом Ритца. В. Ритц применил свой метод к решению конкретных задач. В дальнейшем его метод был развит в работах С. Г. Михлина и других авторов.

При доказательстве различных предложений о методе Ритца нам потребуется следующее определение.

Определение 28.5. Функционал f называется полунепрерывным сверху (снизу) в точке $x_0\in E$, если каждому $\varepsilon>0$ соответствует $\delta>0$ такое, что как только $\|x-x_0\|<\delta$, то

$$f(x_0) - f(x) > -\varepsilon \; (f(x_0) - f(x) < \varepsilon).$$

Функционал f называется полунепрерывным сверху (снизу) на множестве $M \subset E$, если он полунепрерывен сверху (снизу) в каждой точке $x \in M$.

Приближения и системы Ритца.

Пусть f — ограниченный снизу вещественный функционал, заданный на нормированном пространстве E. Метод Ритца минимизации функционала f заключается в следующем. Сначала в E задается так называемая координатная система, т. е. линейно независимая система векторов

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{28.16}$$

множество всевозможных линейных комбинаций которых плотно в E. Затем строится последовательность конечномерных подпространств $\{E_n\}$, где E_n — n-мерное пространство, натянутое на векторы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Из ограниченности снизу f на E следует, что f ограничен снизу на E_n. Пусть

$$d_n = \inf_{x \in E_n} f(x) \; (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

По построению $d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3 \geqslant \ldots \geqslant d_n \ldots$. Допустим, что при каждом n существует такая точка $x_n \in E_n$, что

$$f(x_n) = d_n.$$

Так как $x_n \in E_n$, то

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{28.17}$$

коэффициенты a_k зависят от n. Векторы x_n называются приближениями Ритца. В данном и следующем пунктах мы займемся вопросом о нахождении этих приближений.

Пусть f дифференцируем по Гато на E и $F = \operatorname{grad} f$. Тогда f дифференцируем по Гато и на E_n, причем для произвольных векторов $x, h \in E_n$, т. е. для

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \; h = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k,$$

где α_k и β_k произвольны, мы имеем:

$$\frac{d}{dt} f(x + th) \Bigg|_{t=0} = \langle F(x), \; h \rangle = \sum_{l=1}^{n} \beta_l \; \langle F \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k), \; \varphi_l \rangle.$$

Отсюда согласно теореме 26.1 следует, что если x_n — точка абсолютного минимума f на E_n, то

$$\langle F(\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k), \varphi_i \rangle = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{28.18}$$

Система (28.18), определяющая коэффициенты a_k, называется системой Ритца.

Отметим, что в случае выпуклости f всякое решение системы (28.18) дает по формуле (28.17) приближение Ритца, т. е. точку абсолютного минимума f на E_n. Это вытекает из следующего предложения.

Лемма 28.3. *Если выпуклый функционал f, заданный в линейном пространстве (не обязательно нормированном), имеет две различные точки минимума, то его значения в этих точках совпадают.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — две точки минимума f, $d_1 = f(x_1)$ и $d_2 = f(x_2)$.

Допустим, что $d_1 < d_2$. Без ограничения общности можно считать, что $x_2 = 0$ и $d_2 = 0$, ибо в противном случае мы можем перейти к функционалу

$$\varphi(z) = f(x_2 + z) - f(x_2).$$

Итак, по допущению $d_1 < 0 = d_2 = f(0)$. Выберем такую окрестность U нуля, чтобы для всякого $x \in U$ было $f(x) \geqslant 0$. Тогда при достаточно малом положительном λ будет

$$0 = f(0) \leqslant f(\lambda x_1)$$

и в силу выпуклости f

$$0 \leqslant f(\lambda x_1) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)0) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(0) = \\ = \lambda f(x_1) = \lambda d_1.$$

Следовательно, $d_1 \geqslant 0$ в противоречии с допущением, что $d_1 < d_2 = 0$.

О разрешимости систем Ритца

Мы видели, что если на E задан выпуклый и дифференцируемый по Гато функционал, то, для того чтобы векторы x_n, заданные формулой (28.17), представляли собой приближения Ритца, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_k удовлетворяли системе Ритца (28.18). Разумеется, если f — строго выпуклый на E функционал, то он будет строго выпуклым и на $E_n \subset E$, а потому система (28.18) не может иметь более одного решения.

Здесь мы займемся вопросом о разрешимости системы (28.18). Решение $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ системы (28.18) может дать по формуле (28.17) критическую точку f, т. е. точку, в которой градиент f обращается в нуль, и только если это точка абсолютного минимума f на E_n, то решение системы (28.18) определит приближение Ритца. Но если f — выпуклый функционал, то всякая его критическая точка будет и точкой абсолютного минимума (см. теорему 26.1). Приведем предложения о разрешимости системы (28.18).

Лемма 28.4. *Если вещественный сильно возрастающий*[1] *и*

[1] Именно $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$.

дифференцируемый по Гато функционал f, заданный на E, полунепрерывен снизу на каждом подпространстве $E_n \subset E$, то система Ритца (28.18) *разрешима при любом n.*

Доказательство. Так как f — сильно возрастающий функционал, то найдется такое $r > 0$, что $f(x) > f(0)$, как только $\|x\| > r$. Рассмотрим в E_n шар $K_r^n = \{x \mid x \in E_n, \|x\| < r\}$. В силу полунепрерывности снизу f на $K_r^{(n)}$ (согласно известной теореме классического анализа) существует точка $x_0 \in K_r^{(n)}$, в которой f принимает наименьшее значение, т. е.

$$f(x_0) = \inf_{x \in K_r^{(n)}} f(x), \quad x_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k.$$

Эта точка не может принадлежать поверхности шара $K_r^{(n)}$, ибо там $f(x) > f(0)$. Но вне шара $K_r^{(n)}$ имеем: $f(x) > f(0) \geqslant f(x_0)$. Следовательно,

$$f(x_0) = \inf_{x \in E_n} f(x)$$

и, как мы видели, $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_n^0$ удовлетворяют системе (28.18). Лемма доказана.

Лемма 28.5. *Если дифференцируемый по Гато вещественный функционал f, заданный на E, с градиентом F, полунепрерывен снизу на каждом подпространстве $E_n \subset E$ и при некотором $r > 0$*

$$\langle F(x), x \rangle > 0 \text{ для всех } x \text{ с нормой } \|x\| = r, \tag{28.19}$$

то система Ритца (28.18) *разрешима при любом n.*

Доказательство. Рассмотрим в E_n шар $K_r = \{x \mid x \in E_n, \|x\| \leqslant r\}$. На нем существует точка абсолютного минимума f, ибо f полунепрерывен на K_r. Обозначим через x_0 эту точку. По лемме 26.1 x_0 — внутренняя точка шара K_r, так что при всяком $h \in E_n$

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + th)\Big|_{t=0} = 0.$$

Отсюда, так как $h = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k$ и β_k произвольны,

$$\langle F(x_0), \varphi_i \rangle = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где x_0, как вектор из E_n, имеет вид

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k, \tag{28.20}$$

т. е. система (28.18) разрешима и $a_k = a_k^0$.

О минимизации функционалов приближениями Ритца.

Лемма 28.6. *Пусть приближения Ритца (28.17) для функционала f, заданного и ограниченного снизу на E, существуют при любом n. Тогда если $f(x)$ полунепрерывен сверху, то его приближения Ритца образуют минимизирующую последовательность.*

Доказательство. Пусть $d = \inf\limits_{x \in E} f$ и $(u^{(n)}) \subset E$ — какая-нибудь минимизирующая последовательность, удовлетворяющая неравенствам

$$f(u^{(n)}) \leqslant d + \frac{1}{n} \; (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

В силу полноты координатной системы (28.16) каждому вектору $u^{(n)}$ и положительному числу δ_n соответствует такой вектор $v^{(m)} \in E_m$, что

$$v^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} a_k^{(m)} \varphi_k \; (m = m(n) \geqslant n)$$

и

$$\| u^{(n)} - v^{(m)} \| < \delta_n.$$

Так как f полунепрерывен сверху, то δ_n можно выбрать столь малым, чтобы для произвольного вектора $u \in E$, удовлетворяющего неравенству $\| u^{(n)} - u \| < \delta_n$, было

$$f(u^{(n)}) - f(u) \geqslant -\frac{1}{n}.$$

Полагая $u = v^{(m)}$, мы отсюда и из предыдущего находим, что

$$f(v^{(m)}) \leqslant f(u^{(n)}) + \frac{1}{n} \leqslant d + \frac{2}{n}.$$

Из этого неравенства следует, что $(v^{(m)})$ — минимизирующая последовательность. Но так как для приближений Ритца (28.17)

$$f(x_m) = d_m = \inf_{x \in E_m} f(x), \text{ то}$$

$$f(x_m) \leqslant f(v^{(m)}) \leqslant d + \frac{2}{n}.$$

Учитывая, что $f(x_m) \geqslant d$, заключаем, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = d$.

28.5. Метод Ньютона — Канторовича.

Метод Ньютона для решения уравнения $\varphi(t) = 0$, где φ — вещественная функция вещественного аргумента, был перенесен на абстрактный случай и развит в работах Л. В. Канторовича и других авторов для решения нелинейных уравнений в различных пространствах. Здесь мы воспользуемся этим методом для минимизации функционалов.

Построение приближений Ньютона.

Пусть f — ограниченный снизу и трижды дифференцируемый по Гато вещественный функционал, заданный в нормированном пространстве E. Положим $F = \operatorname{grad} f$ и допустим, что x_0 — точка абсолютного минимума функционала f. Если x_1 — начальное приближение к x_0, то по формуле Тейлора имеем[1]:

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \\ + \frac{1}{2} f''(x_1)(x - x_1)^2 + r_3(x_1, x)$$

или

$$f(x) = f(x_1) + \langle F(x_1), x - x_1\rangle + \frac{1}{2}\langle F'(x_1)(x - x_1), x - x_1\rangle + \\ + r_3(x_1, x).$$

Отбрасывая $r_3(x_1, x)$, мы получим квадратичный функционал

$$\varphi_1(x) = f(x_1) + \langle F(x_1), x - x_1\rangle + \frac{1}{2}\langle F'(x_1)(x - x_1), x - x_1\rangle.$$

Метод Ньютона — Канторовича заключается в том, что следующее приближение x_2 находится как точка абсолютного минимума квадратичного функционала φ_1. Для нахождения этой точки предварительно найдем $\operatorname{grad} \varphi_1(x)$. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\varphi_1(x + th)\Big|_{t=0} = \langle F(x_1), \quad h\rangle + \frac{1}{2}\langle F'(x_1)h, \ x - x_1\rangle + \\ + \frac{1}{2}\cdot\langle F'(x_1)(x - x_1), h\rangle.$$

Так как F — потенциальный оператор, то по теореме 22.1

$$\langle F'(x_1)h, x - x_1\rangle = \langle F'(x_1)(x - x_1), h\rangle,$$

откуда

$$\frac{d}{at}\varphi_1(x + th)\Big|_{t=0} = \langle F(x_1) + F'(x_1)(x - x_1), h\rangle,$$

а следовательно,

$$\Phi_1 \equiv \operatorname{grad} \varphi_1 = F(x_1) + F'(x_1)(x - x_1).$$

Если x_2 — точка абсолютного минимума $\varphi_1(x)$, то по теореме 26.1 $\Phi_1(x_2) = 0$ или

$$F(x_1) + F'(x_1)(x_2 - x_1) = 0,$$

откуда в случае существования обратного оператора

$$\Gamma(x_1) = [F'(x_1)]^{-1}$$

имеем:

$$x_2 = x_1 - \Gamma(x_1)F(x_1).$$

[1] Мы пользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Если пользоваться другой формулой — с остаточным членом в форме Пеано, то достаточно потребовать, чтобы функционал f был дважды дифференцируем или чтобы оператор F был дифференцируем один раз.

Для нахождения следующего приближения поступают так же. Именно функционал f аппроксимируется квадратичным функционалом

$$\varphi_2(x) = f(x_2) + \langle F(x_2), x - x_2\rangle + \frac{1}{2}\langle F'(x_2)(x - x_2), x - x_2\rangle,$$

а затем путем повторения предыдущих рассуждений находят, что

$$x_3 = x_2 - \Gamma(x_2) F(x_2).$$

Продолжая этот процесс, мы получим:

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma(x_n) F(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{28.21}$$

где

$$\Gamma(x) = [F'(x)]^{-1}.$$

Процесс (28.21) называется итерационным процессом (или методом) Ньютона, а векторы x_n, вычисляемые по этой формуле, называются приближениями Ньютона. Каждое приближение x_{n+1} находится как точка абсолютного минимума функционала

$$\varphi_n(x) = f(x_n) + \langle F(x_n), x - x_n\rangle + \frac{1}{2}\langle F'(x_n)(x - x_n), x - x_n\rangle. \tag{28.22}$$

При этом вектор x_{n+1} находится из равенства

$$\Phi_n \equiv \operatorname{grad} \varphi_n(x) = F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n) = 0. \tag{28.23}$$

Это равенство мы получили как необходимое условие минимума φ_n. Однако если f — выпуклый функционал, то равенство (28.23) достаточно для существования абсолютного минимума квадратичного функционала φ_n, так как справедлива следующая лемма.

Л е м м а 28.7. *Если f — выпуклый функционал, то и квадратичный функционал φ_n, заданный формулой (28.22), является выпуклым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из выпуклости f вытекает (см. [3] следствие 8.2), что для произвольных $x, h \in E$

$$\langle F'(x) h, h\rangle \geqslant 0,$$

а потому

$$\langle \Phi_n(x) - \Phi_n(y), x - y\rangle = \langle F'(x_n)(x - y), x - y\rangle \geqslant 0,$$

т. е. Φ_n — монотонный оператор, так что (см. теорему 24.2) φ_n — выпуклый функционал. Лемма доказана.

Так как φ_n — выпуклый функционал, то по теореме 26.1 равенство (28.23) необходимо и достаточно для существования точки его абсолютного минимума (см. лемму 28.3). Далее, если оператор

$$\Gamma(x) = [F'(x)]^{-1}$$

существует при любом $x \in E$, то уравнение (28.23) разрешимо при любом n.

К процессу Ньютона — Канторовича (28.21) мы пришли, исходя из задачи о минимуме функционала f. Так как в точке минимума

f его градиент F обращается в нуль, то к процессу (28.21) можно прийти (см. [4]), исходя из задачи о приближенном решении уравнения $F(x) = 0$.

§ 29. МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Теория монотонных операторов была развита сравнительно недавно (за последние двадцать лет), и она получила широкие приложения в различных областях, в частности при рассмотрении краевых задач для систем сильно эллиптических уравнений с частными производными (см. [3], где вкратце освещены история вопроса и приложения).

29.1. Основные понятия и вспомогательные предложения.

Напомним, что отображение $F: E \to E^*$ называется монотонным, если $\langle x - y,\ F(x) - F(y)\rangle \geqslant 0$, и строго монотонным, если равенство имеет место лишь при $x = y$. Отметим также (см., например, [3], теорема 1.2), что для монотонных операторов, заданных на открытом множестве нормированного пространства, понятие хеминепрерывности совпадает с понятием деминепрерывности. Приведем эти понятия.

Определение 29.1. Пусть E_x и E_y — нормированные пространства. Отображение $G: E_x \to E_y$ называется деминепрерывным в точке $x_0 \in E_x$, если для любой последовательности $x_n \to x_0$ ($x_n \in E_x$) последовательность $G(x_n) \rightharpoonup G(x_0)$, и хеминепрерывным в точке $x_0 \in D(G)$, если, каковы бы ни были вектор x, такой, что $x_0 + tx \in D(G)$ при $0 \leqslant t \leqslant \alpha$ ($\alpha = \alpha(x) > 0$), и последовательность $t_n \to 0$ при $n \to \infty$ ($0 < t_n \leqslant \alpha$), последовательность $G(x_0 + t_n x) \rightharpoonup G(x_0)$. Разумеется, из деминепрерывности следует хеминепрерывность, а для монотонных операторов справедливо и обратное утверждение.

Лемма 29.1.

Пусть E — вещественное банахово пространство и T — хеминепрерывное отображение из E и E^*. Тогда если для некоторой пары векторов $u_0 \in E$ и $v_0 \in E^*$ выполняется неравенство

$$\langle Tu - v_0, u - u_0\rangle \geqslant 0, \tag{29.1}$$

где u — произвольный вектор из E, то $v_0 = Tu_0$.

Доказательство. Допустим, что $Tu_0 \neq v_0$. Тогда по определению нормы найдется такой ненулевой вектор $z \in E$, что

$$\langle Tu_0 - v_0,\ z\rangle \geqslant \frac{1}{2}\|z\|\,\|Tu_0 - v_0\| > 0. \tag{29.2}$$

Далее, в силу хеминепрерывности оператора T, при достаточно малых положительных t имеем:

$$|\langle T(u_0 - tz) - Tu_0,\ z\rangle| \leqslant \frac{1}{3}\|z\|\,\|Tu_0 - v_0\|. \tag{29.3}$$

Но согласно неравенству (29.1) можно написать:

$$\langle T(u_0 - tz) - v_0, (u_0 - tz) - u_0\rangle \geqslant 0,$$

или

$$\langle T(u_0 - tz) - Tu_0, -tz\rangle + \langle Tu_0 - v_0, -tz\rangle \geqslant 0,$$

или

$$\langle T(u_0 - tz) - Tu_0, -z\rangle \geqslant \langle Tu_0 - v_0, z\rangle.$$

Отсюда и из неравенства (29.2) следует, что

$$|\langle T(u_0 - tz) - Tu_0, z\rangle| \geqslant \frac{1}{2}\|z\|\,\|Tu_0 - v_0\|.$$

Данное неравенство противоречит неравенству (29.3). Полученное противоречие доказывает лемму 29.1.

Лемма 29.2. *Пусть D — ограниченное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве $E^{(n)}$, содержащее нуль, и G — непрерывное отображение замыкания $\overline{D}$ в $E^{(n)}$. Тогда, если скалярное произведение $(G(x), x) > 0$, для всех $x \in D'$, где D' — граница области D, то уравнение $G(x) = 0$ имеет по крайней мере одно решение $x_0 \in D$.*

Доказательство. Пусть $G(x) = (G_1(x), G_2(x), \ldots, G_n(x))$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим отображение

$$G_t(x) = (G_{t_1}(x), G_{t_2}(x), \ldots, G_{t_n}(x)),$$

где

$$G_{t_i}(x) = tx_i + (1 - t)\,G_i(x)\ (0 \leqslant t \leqslant 1,\ x \in \overline{D}).$$

Так как на D'

$$\langle G_t(x), x\rangle = t\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (1 - t)\langle G(x), x\rangle > 0,$$

то $\|G_t(x)\| > 0$ для всех $x \in D'$ и $t \in [0, 1]$, а потому степень отображения[1] $G_t(x)$ относительно нуля, $d(0, D, G_t(x))$ одинакова для всех $t \in [0, 1]$. Но $d(0, D, G_1(x)) = 1$, так что и $d(0, D, G(x)) = d(0, D, G_0(x)) = 1$. Отсюда по известной теореме топологии[2] существует решение x_0 уравнения $G(x) = 0$, причем $x_0 \in D$.

В дальнейшем мы будем рассматривать шар $K_r = \{x \mid x \in E, \|x\| \leqslant r\}$ рефлексивного банахова пространства E как топологическое пространство (K_r, τ) с топологией, индуцируемой слабой топологией пространства E. Так как в рефлексивном банаховом пространстве всякий шар слабо компактен, то топологическое пространство (K_r, τ) компактно.

Определение 29.2. Семейство множеств топологического пространства называется центрированным, если каждое конечное его подсемейство имеет непустое пересечение.

---

[1] См. дополнение III.

[2] См.: Лере и Шаудер. — Успехи матем. наук, 1, вып. 3—4 (1946), с. 71—95. или дополнение III.

Приведем следующее известное предложение ([1] 1.5.6).

Лемма 29.3. *Для того чтобы топологическое пространство было компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имело непустое пересечение.*

Рассмотрим пример.

Пример 29.1. Пусть E — банахово пространство и $K_r = \{x \mid x \in E, \|x\| \leqslant r, r > 0\}$. Рассмотрим множество

$$E_x = \{y \mid y \in K_r, \langle G(x), x - y\rangle \geqslant 0\}, \qquad (29.4)$$

где x — фиксированный вектор из E и G — отображение E в E^*, удовлетворяющее условию: $\langle G(z), z\rangle \geqslant 0$, если $\|z\| > r$. Множество E_x не пусто, ибо при $x \in K_r$ вектор $y = x \in E_x$, а если $x \neq K_r$, то $O \in E_x$. Это множество выпукло, ибо если $y_1, y_2 \in E_x$, то для всякого $t \in (0; 1)$

$$\langle G(x), x - ty_1 - (1-t)\,y_2\rangle = \langle G(x), t(x - y_1) + (1-t)(x - y_2)\rangle = t\,\langle G(x), x - y_1\rangle + (1-t) \times \langle G(x), x - y_2\rangle \geqslant 0.$$

Наконец это множество замкнуто. Действительно, если последовательность $(y_n) \subset E_x$ и $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$, то

$$\langle G(x), x - y_0\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle G(x), x - y_n\rangle \geqslant 0,$$

а значит, $y_0 \in E_x$. Так как множество E_x выпукло и замкнуто, то по известной теореме[1] оно слабо замкнуто.

Лемма 29.4. *Пусть хеминепрерывное монотонное отображение $G(x)$ из банахова пространства E в E^* удовлетворяет условию: существует число $M > 0$ такое, что если $\|x\| \geqslant M$, то*

$$\langle G(x), x\rangle > 0.$$

Тогда существует такое число $r > 0$, что множества E_x для всевозможных $x \in E$ образуют центрированное семейство слабо замкнутых множеств.

Доказательство. Слабая замкнутость каждого множества E_x доказана при рассмотрении примера 29.1. Покажем, что каждое конечное его подсемейство $E_{x_1}, E_{x_2}, \ldots, E_{x_n}$ ($x_i \neq x_k$; $i, k \leqslant n$) имеет непустое пересечение. С этой целью рассмотрим произвольные векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ из E. Пусть E_n ($n \leqslant m$) — натянутое на них подпространство в E и $x_1, x_2, \ldots x_n$ образуют его базис. Положим $z = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = Aa$, где $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a \in E^{(n)}$, $E^{(n)}$ — n-мерное вещественное евклидово пространство. A — ограниченный линейный оператор, отображающий $E^{(n)}$ на E_n и имеющий ограниченный обратный оператор, ибо $\lambda\|a\| \leqslant \|z\| \leqslant \mu\,|a|$,

---

[1] См.: [1], теорема 5.3.13.

где

$$\lambda = \inf_{|a|=1} \|z\| \leqslant \sup_{|a|=1} \|z\| = \mu.$$

Пусть вектор $\bar{a} \in E^{(n)}$ таков, что $M \leqslant \lambda \|\bar{a}\|$, и $Q(\bar{a}) = (Q_1(\bar{a}), Q_2(\bar{a}), \ldots, Q_n(\bar{a}))$, где $Q_i(\bar{a}) = \langle G(\bar{z}), x_i \rangle, \bar{z} = A\bar{a}$, тогда

$$(Q(\bar{a}), \bar{a}) = \langle G(\bar{z}), \bar{z} \rangle > 0,$$

ибо $\|\bar{z}\| \geqslant \lambda |\bar{a}| \geqslant M$. Далее при любом $a \in E^{(n)}$ и $a^{(n)} \to a$ имеем: $z_n = Aa^{(n)} \to z = Aa$. Ввиду этого и в силу хеминепрерывности $G(z)$

$$Q_i(a^n) = \langle G(z_n), x_i \rangle \to \langle G(z), x_i \rangle = Q_i(a),$$

т. е. Q — непрерывное отображение. Отсюда по лемме 29.2 существует a^0 такое, что (при $z_0 = Aa^0$), $\langle G(z_0), z_0 \rangle = (Q(a^0), a^0) = 0$, откуда $\langle G(z_0), x_i \rangle = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, \ldots, x_m$ (если $m > n$) линейно зависят от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$\langle G(z_0), x_i \rangle = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

При этом так как $|a^0| < \|\bar{a}\|$, то

$$\|z_0\| < r = \mu \|\bar{a}\|.$$

При этом можно считать $r < 2M$. Так как G — монотонное отображение, то

$$\langle G(x_i) - G(z_0), x_i - z_0 \rangle \geqslant 0.$$

Отсюда и из предыдущего следует, что

$$\langle G(x_i), x_i - z_0 \rangle = \langle G(x_i), x_i - z_0 \rangle - \langle G(z_0), x_i \rangle + \\ + \langle G(z_0), z_0 \rangle = \langle G(x_i) - G(z_0), x_i - z_0 \rangle \geqslant 0,$$

т. е. что множества E_{x_i} имеют общую точку $y = z_0 \in K_r$.

29.2. Основные теоремы о монотонных отображениях.

Теорема 29.1. ***Пусть хеминепрерывное монотонное отображение F из рефлексивного банахова пространства E в E* удовлетворяет условию: существует такое положительное число M, что для всякого вектора $x \in E$, норма которого $\|x\| \geqslant M$, имеет место неравенство***

$$\langle F(x), x \rangle > 0.$$

Тогда существует решение уравнения $F(x) = 0$.

Доказательство. Согласно лемме 29.4 существует положительное число r такое, что множества

$$E_x = \{y | y \in K_r, \ \langle F(x), x - y \rangle \geqslant 0\},$$

где $K_r = \{y \mid y \in E, \|y\| \leqslant r\}$ и x — произвольный вектор из E, представляют собой центрированное семейство слабо замкнутых множеств из K_r. Рассматривая теперь K_r как топологическое пространство (K_r, τ) (см. п. 29.1), в силу рефлексивности E можем утверждать, что (K_r, τ) — компактное пространство. Ввиду этого согласно лемме 29.3 семейство E_x имеет непустое пересечение, т. е. существует вектор $y = x_0 \in K_r$ такой, что

$$\langle F(x), x - x_0 \rangle \geqslant 0 \text{ для всех } x \in E.$$

Отсюда и из леммы 29.1 следует, что $F(x_0) = 0$.

Теорема 29.2. ***Если $F(x)$ — хеминепрерывное монотонное и коэрцитивное отображение рефлексивного банахова пространства E в E^*, то уравнение $F(x) = v$ имеет решение при любом векторе $v \in E^*$.***

Доказательство. Так как F — коэрцитивный оператор, то существует такая вещественная функция $\gamma(t)$ неотрицательного аргумента t, что $\gamma(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$

$$\langle F(x), x \rangle \geqslant \|x\| \gamma(\|x\|).$$

Рассмотрим отображение $G_v(x) = F(x) - v$, где v — произвольно фиксированный вектор из E^*. Это отображение также хеминепрерывно и монотонно. Далее,

$$\langle G_v(x), x \rangle = \langle F(x), x \rangle - \langle v, x \rangle \geqslant \|x\| (\gamma(\|x\|) - \|v\|).$$

Отсюда вытекает существование такого положительного числа M_v, что если $\|x\| \geqslant M_v$, то $\langle G_v(x), x \rangle x > 0$. Следовательно, оператор G_v удовлетворяет всем условиям теоремы 29.1, а потому существует такой вектор x_0, что $F(x_0) = v$.

§ 30. МЕТОД ГАЛЕРКИНА — ПЕТРОВА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Здесь мы воспользуемся методом Галеркина и некоторыми его модификациями для нахождения приближенных решений нелинейных уравнений с монотонными операторами. Как известно, метод Галеркина широко применяется в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Достаточно заметить, что этот метод был использован в работах М. И. Вишика при доказательстве установленных им фундаментальных теорем о разрешимости граничных задач для систем квазилинейных дифференциальных уравнений сильно эллиптического типа. Этим методом также пользовались Ж. Лере и Ж. Лионс при доказательстве некоторых предложений М. И. Вишика применяя при этом теорию монотонных операторов.

30.1. Приближения и системы Галеркина.

Пусть E — сепарабельное нормированное пространство с базисом и F — отображение E в E^*. Метод Галеркина приближенного решения уравнения $F(x) = 0$ заключается в следующем. Сначала в пространстве E задается базис, т. е. линейно независимая система векторов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, обладающая тем свойством, что всякий вектор из E представляется единственным образом в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x) \varphi_k .$$

При помощи этого базиса строится последовательность конечномерных подпространств (E_n), где E_n — n-мерное подпространство, натянутое на векторы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Галеркинским приближением решения уравнения $F(x) = 0$ называется вектор $x_n \in E_n$, т. е.

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k , \tag{30.1}$$

удовлетворяющий системе уравнений

$$\langle F \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \right), \varphi_i \rangle = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{30.2}$$

Эта система, решение которой определяет галеркинское приближение x_n, называется системой Галеркина. Отметим, что, несмотря на то что система (30.2) совпадает с системой (28.18), вопрос о ее разрешимости решается здесь иначе. В § 28 использовались свойства функционала f, а здесь при изучении системы (30.2) будут использованы свойства отображения F.

30.2. Связь с проекционными методами.

Пусть P_n — оператор проектирования E на E_n и P_n^* — сопряженный оператор, который, как известно (см. [1] VI. 3.3 и VI. 9.19), проектирует E^* на n-мерное подпространство E_n^*. Проекционный метод приближенного решения уравнения $E(x) = 0$, где F — отображение E в E^*, заключается в том, что данное уравнение заменяется уравнением в конечномерном пространстве

$$P_n^* F (P_n x) = 0, \tag{30.3}$$

причем решение последнего уравнения называется приближенным решением исходного уравнения. Покажем, что уравнение (30.3) эквивалентно системе (30.2). Действительно, если h — произвольный вектор из E^*, то уравнение (30.3) эквивалентно уравнению

$$0 = \langle P_n^* F (P_n x), \quad h \rangle = \langle F (P_n x), \quad P_n h \rangle =$$
$$= \langle F \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right), \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle F \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right), \varphi_i \rangle,$$

а это уравнение в силу произвольности β_i эквивалентно системе (30.2). Таким образом, метод Галеркина решения рассматриваемого нами уравнения $F(x) = 0$ совпадает с проекционным методом решения этого уравнения.

Отметим еще, что если P — отображение E_x в E_y, где E_x и E_y — нормированные пространства, то проекционный метод решения уравнения $P(x) = 0$ заключается в следующем. Задаются две последовательности подпространств $(E_x^{(n)})$ и $(E_y^{(n)})$ (где n — указатель размерности), объединения которых соответственно плотны в E_x и E_y, а также последовательности проекторов (P_n) и (Q_n), где $P_n E_x = E_x^{(n)}$, $Q_n E_y = E_y^{(n)}$. Затем уравнение $P(x) = 0$ заменяется уравнением

$$Q_n P(P_n x) = 0, \tag{30.4}$$

решение которого рассматривается как приближенное решение исходного уравнения.

Если $E_x = E_y = H$, где H — гильбертово пространство, то проекционный метод называется методом Бубнова — Галеркина, а в общем случае проекционный метод носит название метода Галеркина — Петрова.

В заключение этого пункта мы отметим, что, в силу (30.4), если F — отображение E в E, то приближения Галеркина для уравнения $F(x) = 0$ найдутся из уравнения в конечномерном подпространстве

$$P_n F(P_n x) = 0. \tag{30.5}$$

30.3. О разрешимости систем Галеркина.

Лемма 30.1. *Пусть монотонный хеминепрерывный оператор F: $E \to E^*$, где E — вещественное сепарабельное нормированное пространство, удовлетворяет на сфере $\|x\| = r > 0$ условию*

$$\langle F(x), x\rangle > 0 \quad (\|x\| = r). \tag{30.6}$$

Тогда система Галеркина (30.2) разрешима при любом n и галеркинские приближения x_n удовлетворяют неравенству $\|x_n\| < r$.

Доказательство. В силу эквивалентности систем (30.2) и (30.3) достаточно показать, что уравнение (30.3) имеет решение. Положим $P_n x = z \in E_n$. Тогда в силу монотонности F и конечномерности E_n, $\Phi_n(z) = P_n^* F(z)$ есть непрерывное отображение E_n в $E_n^* = P_n^* E^*$, т. е. непрерывное отображение n-мерного пространства в n-мерное. Отождествляя E_n и E_n^*, находим, что Φ_n — непрерывное отображение n-мерного пространства в себя. Далее, так как при $\|z\| = r$

$$\langle \Phi_n(z), z\rangle = \langle P_n^* F(z), z\rangle = \langle F(z), z\rangle > 0,$$

то на сфере $\|z\| = r$ будем иметь $\|\Phi_n(z)\| > 0$. Отсюда так же, как при доказательстве леммы 29.2, находим, что уравнение $\Phi_n(z) = 0$ имеет решение, принадлежащее шару $\|z\| < r$.

30.4. О некоторых свойствах галеркинских приближений.

Здесь мы будем предполагать, что x_n — галеркинские приближения решения уравнения $F(x) = 0$, где F — отображение нормированного пространства E в E^*. В данном случае приближения x_n находятся из системы (30.2) или из уравнения (30.3).

Лемма 30.3. *Пусть галеркинские приближения x_n, удовлетворяющие системам (30.2), существуют при любом n, причем $\|x_n\| \leqslant r$. Тогда если F — ограниченный оператор, то последовательность $(F(x_n))$ сходится E-слабо к нулю.*

Доказательство. Так как $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ образуют базис в E, то произвольный вектор $h \in E$ представим в виде $h = h_n + h^{(n)}$, где $h^{(n)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k(h)\varphi_k \to 0$ при $n \to \infty$. Ввиду этого и в силу равенства (30.3) имеем:

$$\langle F(x_n), h\rangle = \langle F(x_n), h_n\rangle + \langle F(x_n), h^{(n)}\rangle =$$
$$= \langle F(x_n, P_n h_n\rangle + \langle F(x_n), h^{(n)}\rangle = \langle P_n^* F(x_n), h_n\rangle +$$
$$+ \langle F(x_n), h^{(n)}\rangle = \langle F(x_n), h^{(n)}\rangle,$$

откуда

$$|\langle F(x_n), h\rangle| \leqslant \|F(x_n)\| \, \|h^{(n)}\| \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $F(x_n) \overrightarrow{E}\, 0$. Лемма доказана.

Пусть E — сепарабельное нормированное пространство с базисом $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$; (E_n) — последовательность подпространств, рассмотренных в п. 30.1, (P_n) — последовательность проекторов ($P_n E = E_n$) и (P_n^*) — последовательность сопряженных проекторов. Как было отмечено в п. 30.2, P_n^* проектирует E^* на n-мерное подпространство E_n^*.

Пусть h — произвольный вектор из E^*, $h_n = P_n^* h$ и $h^{(n)} = h - h$. Говорят, что последовательность $\{E_n^*\}$ предельно плотна в E^*, если для всякого $h \in E^*$ $h^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 30.4. *Пусть галеркинские приближения x_n, удовлетворяющие уравнениям (30.5), существуют при любом n* и $\|x_n\| \leqslant r = \text{const}$. *Тогда если $F\colon E \to E$ есть ограниченный оператор и последовательность (E_n^*) предельно плотна в E^*, то последовательность $(F(x_n))$ сходится слабо к нулю.*

Доказательство. Пусть h — произвольный вектор из E^*, $h^{(n)} = P_n^* h$ и $h^{(n)} = h - h_n$.

Тогда $h = h_n + h^{(n)} = P_n^* h_n + h^{(n)}$ и в силу (30.5) имеем:

$$\langle F(x_n), h\rangle = \langle P_n F(x_n), h_n\rangle + \langle F(x_n), h^{(n)}\rangle =$$
$$= \langle F(x_n), h^{(n)}\rangle,$$

откуда

$$|\langle F(x_n), h\rangle| \leqslant \|F(x_n)\| \, \|h^{(n)}\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Для дальнейшего используем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 30.1. Отображение $G : E \to E^n$ называется равномерно монотонным, если

$$\langle G(x) - G(y), x - y \rangle \geqslant \| x - y \| \, \gamma(\| x - y \|),$$

где $t\gamma(t)$ — возрастающая вещественная функция, обращающаяся в нуле в нуль.

30.5. О сходимости галеркинских приближений к решению нелинейных функциональных уравнений.

Т е о р е м а 30.1. ***Пусть выполнены следующие условия: 1. E — рефлексивное вещественное банахово пространство с базисом $\{\varphi_k\}$. 2. Хеминепрерывный равномерно монотонный и ограниченный оператор $F : E \to E^*$ удовлетворяет неравенству $\langle F(x), x \rangle > 0$, если $\|x\| \geqslant r > 0$. Тогда галеркинские приближения x_n существуют при любом n и сходятся к единственному решению x_0 уравнения $F(x) = 0$.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 29.1 и в силу строгой монотонности F уравнение $F(x) = 0$ имеет единственное решение: x_0 и $\| x_0 \| < r$. Далее, по лемме 30.1 галеркинские приближения x_n существуют при любом n и $\| x_n \| < r$. Так как по условию F — равномерно монотонный оператор, то

$$I_n \equiv \langle F(x_n) - F(x_0), \; x_n - x_0 \rangle \geqslant c(\| x_n - x_0 \|), \tag{30.7}$$

где $c(t)$ — непрерывная возрастающая функция, заданная для $t \geqslant 0$ и $c(0) = 0$. Но так как $F(x_0) = 0$ и для галеркинских приближений справедливо равенство $P_n^* F(x_n) = 0$, так что

$$\langle F(x_n), x_n \rangle = \langle F(x_n), P_n x_n \rangle = \langle P_n^* F(x_n), x_n \rangle = 0,$$

то

$$I_n = \langle F(x_n), x_n \rangle - \langle F(x_n), x_0 \rangle = -\langle F(x_n), x_0 \rangle.$$

Отсюда согласно лемме 30.3 $I_n \to 0$ при $n \to \infty$, и так как функция $c(t)$ имеет обратную непрерывную возрастающую функцию $c^{-1}(t)$, обращающуюся в нуле в нуль, то из (30.7) следует, что $\| x_n - x_0 \| \leqslant c^{-1}(I_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

ДОПОЛНЕНИЯ

При составлении дополнений I и II использована книга И. П. Натансона «Теория функций вещественной переменной» (Гостехиздат, 1957).

В дополнении III используется книга П. С. Александрова «Комбинаторная топология» (Гостехиздат, 1947).

При составлении примеров и задач использована следующая литература:

1. Шилов Г. Е. Математический анализ (специальный курс). Физматгиз, 1961.
2. Книги автора [2], [3], указанные в основном тексте.
3. Статья автора настоящей книги «Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах». Успехи матем. наук, 1952, вып. 4, с. 55—102.

В дополнении IV используется книга [4] из списка литературы, указанного в основном тексте.

Дополнение I

Функции с ограниченным изменением и интеграл Стильтьеса

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f, принимающая конечные вещественные значения. Разделим $[a, b]$ на части точками

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$$

и составим сумму

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)|.$$

Определение 1. Точная верхняя грань множества всевозможных сумм V называется полным изменением функции f на $[a, b]$ и обозначается $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. Если $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty$, то говорят, что f есть функция с ограниченным изменением (или с ограниченной вариацией) на $[a, b]$.

Пример 1. Неубывающая функция есть функция с ограниченным изменением. Действительно,

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)| = f(b) - f(a).$$

Пример 2. Функция, удовлетворяющая условию Липшица на $[a, b]$, т. е. такая, что для любых $x, y \in [a, b]$

$$|f(a) - f(y)| \leqslant K|x - y| \quad (K = \mathrm{const})$$

есть функция с ограниченным изменением. Действительно,

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(a_{k-1}) - f(a_k)| \leqslant K(b - a).$$

Пример. 3. Функция $f(x) = \begin{cases} 2x \cos\frac{\pi}{2x} \text{ при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0 \text{ при } x = 0 \end{cases}$

имеет бесконечное полное изменение на $[0, 1]$. Действительно, если за точки деления $[0, 1]$ принять точки

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-2} < \ldots < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1,$$

то непосредственно находим, что $V = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

Следовательно, $\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = +\infty$.

Отметим еще, что сумма, разность и произведение двух функций с ограниченным изменением являются функциями с ограниченным изменением. Доказательство предоставляем читателю.

Отметим еще, что, для того чтобы функция f имела ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде разности двух неубывающих функций (доказательство см., например, в книге И. П. Натансона «Теория функций вещественного переменного»).

Интеграл Стильтьеса

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две ограниченные функции f и g. Разложим $[a, b]$ на части точками

$$a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

и на каждом отрезке $[a_k, a_{k+1}]$ выберем по одной точке x_k, а затем составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,[g(a_{k+1}) - g(a_k)].$$

Если при

$$\lambda = \max_k (a_{k+1} - a_k) \to 0$$

сумма σ стремится к конечному пределу I, не зависящему ни от способа разбиения $[a, b]$, ни от выбора точек x_k, то этот предел называется интегралом Стильтьеса функции f по функции g и обозначается так:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Итак, по определению число I есть интеграл Стильтьеса функции f по функции g, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что при любом способе разбиения $[a, b]$, при котором $\lambda < \delta$, $|\sigma - I| < \varepsilon$, как бы ни были выбраны точки x_k. Из этого определения следует, что интеграл Римана есть частный случай интеграла Стильтьеса при $g(x) = x$.

Отметим следующие свойства интеграла Стильтьеса, которые непосредственно следуют из определения:

1. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,dg(x) = \int_a^b f_1(x)\,dg(x) + \int_a^b f_2(x)\,dg(x).$

2. $\int_a^b f(x)\,d[g_1(x) + g_2(x)] = \int_a^b f(x)\,dg_1(x) + \int_a^b f(x)\,dg_2(x).$

3. Если α и β постоянные, то

$$\int_a^b \alpha f(x)\,d\,\beta g(x) = \alpha\beta \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Во всех этих трех равенствах из существования интеграла в правой части следует существование интеграла в левой части.

Приведем еще без доказательства одно предложение о существовании интеграла Стильтьеса (доказательство см., например, в вышеуказанной книге И. П. Натансона).

Теорема. ***Если на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна, а функция g имеет ограниченное изменение, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ существует.***

Дополнение II

Абсолютно непрерывные функции и неопределенный интеграл Лебега

1. *Абсолютно непрерывные функции*

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана конечная функция f. Если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы взаимно не пересекающихся интервалов $]a_1, b_1[\ldots]a_n, b_n[$, для которой из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \tag{1}$$

следует неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(b_k)-f(a_k))\right|<\varepsilon, \qquad (2)$$

то функция f называется абсолютно непрерывной на $[a, b]$. Из этого определения следует, что всякая абсолютно непрерывная функция непрерывна, так как можно положить $n = 1$. Отметим, что, не изменяя смысла приведенного определения, мы можем условие (2) заменить более сильным требованием, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon. \qquad (3)$$

Действительно, пусть $\delta > 0$ выбрано так, что из (1) следует неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(b_k)-f(a_k))\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем теперь любую систему попарно не пересекающихся интервалов $]a_k, b_k[$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, для которой выполнено условие (1), и разобьем ее на две части: A и B, относя к A те интервалы $]a_k, b_k[$, для которых $f(b_k) - f(a_k) \geqslant 0$, а к B все остальные интервалы. Тогда из соотношений

$$\sum_{A}|f(b_k)-f(a_k)| = \left|\sum_{A}[f(b_k)-f(a_k)]\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{B}\left|f(b_k)-f(a_k)\right| = \left|\sum_{B}[f(b_k)-f(a_k)]\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

получим неравенство (3).

Теорема 1. ***Абсолютно непрерывная функция имеет ограниченное изменение.***

Доказательство. Пусть f — абсолютно непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим такое $\delta > 0$, что для всякой системы попарно не пересекающихся интервалов $]a_k, b_k[$, для которой $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)| < 1.$$

Разобьем теперь $[a, b]$ точками $c_0 = a < c_1 < c_2 < \dots < c_p = b$ на такие части, чтобы

$$c_{k+1} - c_k < \delta \quad (k = 0, 1, 2, \dots, p-1).$$

Тогда при всяком разбиении отрезка $[c_k, c_{k+1}]$ на части сумма абсолютных приращений f на этих частях будет меньше чем 1, откуда

$$\overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}} (f) \leqslant 1, \text{ а значит, } \overset{b}{\underset{a}{V}} (f) \leqslant p.$$

Из этой теоремы, в силу примера 3 дополнения I, следует существование непрерывных, но не абсолютно непрерывных функций.

Пример 1. Если функция f на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant K\,|x' - x''|\ (x',\ x'' \in [a,\ b]),\quad K = \text{const},$$

то она абсолютно непрерывна. Доказательство предоставляется читателю.

Приведем еще без доказательства следующее предложение.

Теорема 2. ***Если функция f абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то почти в каждой точке $[a, b]$ она имеет конечную производную f', которая оказывается суммируемой функцией.***

2. *Неопределенный интеграл Лебега*

Определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана суммируемая функция f. Функция Φ:

$$\Phi(x) = C + \int_a^x f(t)\, dt$$

называется ее неопределенным интегралом Лебега.

Таким образом, f имеет бесконечное множество неопределенных интегралов, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым.

Теорема 1. ***Неопределенный интеграл Φ суммируемой функции f есть абсолютно непрерывная функция.***

Доказательство. Исходя из известного свойства суммируемых функций, можно утверждать, что каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого множества e, мера которого меньше δ,

$$\left| \int_e f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

В частности, если сумма длин конечной системы попарно не пересекающихся интервалов $]a_k, b_k[$ меньше чем δ, то

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Так как $\int_{a_k}^{b_k} f(t)\, dt = \Phi(b_k) - \Phi(a_k)$, то отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi(b_k) - \Phi(a_k)| < \varepsilon,$$

т. е. Φ — абсолютно непрерывная функция.

Приведем еще без доказательства следующее предложение.

Теорема 2. ***Производная неопределенного интеграла***

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

почти всюду существует и равна подынтегральной функции f.

Дополнение III

Понятие степени отображения

Как известно (см.: Александров П. С. Комбинаторная топология. Гостехиздат, 1947, с. 574—577), если в n-мерном пространстве $E^{(n)}$ задано непрерывное отображение Φ ограниченной замкнутой области $\overline{\omega}=\omega\cup\omega'$, где ω' — граница открытой области ω, $0\notin\Phi(\omega')$, то в точке 0 определено целое число (положительное, отрицательное или нуль) $d(0,\omega,\Phi)$, называемое степенью данного отображения и обладающее следующими свойствами:

1) Если $\omega=\omega_1\cup\omega_2$, где ω_1 и ω_2 — две области без общих внутренних точек, причем ни одна точка множества ω_1' и ω_2' не отображается в 0, то

$$d(0,\omega,\Phi)=d(0,\omega_1,\Phi)+d(0,\omega_2,\Phi)$$

(свойство аддитивности степени).

2) Если $d(0,\omega,\Phi)\neq 0$, то $0\in\Phi(\omega)$.

3) Если даны непрерывные отображения Φ_0 и Φ_1 множества $\overline{\omega}$ в $E^{(n)}$ и деформация

$$\Phi_t=(1-t)\Phi_0+t\Phi_1,\ (0\leqslant t\leqslant 1),$$

преобразующая при изменении t Φ_0 в Φ_1, причем для всех $t\in[0,1]$ выполняется условие $0\notin\Phi_t(\omega')$, то $d(0,\omega,\Phi_0)=d(0,\omega,\Phi_1)$.

Свойства 2) и 3) использованы при доказательстве леммы 29.2.

Дополнение IV

Дополнение к главе I

1. Математические пространства играют в настоящее время исключительную роль как в самой математике, так и в приложениях математики (в механике, теории упругости и в других прикладных вопросах). Возникновение метрических пространств связано с развитием математики в конце прошлого и начале нашего столетия. Основные вопросы теории этих пространств, включая полноту, сепарабельность, компактность, были сформулированы в 1906 г. французским математиком М. Фреше. В развитии теории метрических пространств большую роль сыграли и советские математики. В связи с этим следует отметить работы П. С. Александрова,

В. В. Немыцкого и А. Н. Тихонова, которые были посланы М. Фреше. О них упоминается в монографии М. Фреше **«Les espaces abstract» (Paris, Gauthier Villars, 1928).**

2. З а д а ч а. Доказать, что если задано отображение A, сжимающее в шаре $\rho(0, x) \leqslant r$ полного метрического пространства, то теорема о неподвижной точке сохраняет силу для точек данного шара, если A отображает этот шар в себя.

3. На полупрямой $x \geqslant 1$ задано отображение A: $Ax = x + \frac{1}{x}$. Будет ли это отображение сжимающим? Имеет ли оно неподвижную точку?

У к а з а н и е. а) Проверить, существует ли такое число $\alpha < 1$, что для всех x и y $(1 \leqslant x, y < +\infty)$ имеет место неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y).$$

б) Проверить непосредственно, существует ли неподвижная точка.

4. Сформулировать и доказать методом неподвижной точки теорему существования и единственности решения для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

У к а з а н и е. Метрическое пространство M состоит из вектор-функций $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с метрикой

$$\rho(y, z) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} (|y_1 - z_1|, \ldots, |y_n - z_n|).$$

5. Пусть $d(x, B) = \inf_{y \in B} \rho(x, y)$ есть расстояние от фиксированной точки x до множества B. Доказать, что $d(x, B)$ является непрерывной функцией x.

Дополнение к главе II

1. Пусть L — замкнутое подпространство нормированного пространства E, отличное от E. Доказать, что в единичном шаре $\|x\| \leqslant 1$ имеется вектор, отстоящий более чем на $\frac{1}{2}$ от всех векторов подпространства L.

У к а з а н и е. Пусть $y_0 \in E \setminus L$ и $d = \inf_{x \in L} \|y_0 - x\|$. Пусть, далее, найден $y_1 \in L$ такой, что $\|y_0 - y_1\| < 2d$. Тогда вектор $y = \frac{y_0 - y_1}{\|y_0 - y_1\|}$ удовлетворяет условию.

2. В бесконечномерном линейном нормированном пространстве всегда существует ограниченная последовательность (x_n), элементы которой удовлетворяют неравенствам

$$\|x_k - x_i\| > \frac{1}{2} (i, k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(Ф. Рисс).}$$

3. В банаховом пространстве E имеется замкнутое множество F, содержащее на каждом луче tx_0 $(0 \leqslant t < +\infty)$ отрезок, образованный точками tx_0, где $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(x_0) > 0$. Доказать, что E содержит шар (И. М. Гельфанд).

Дополнение к главам III и IV

1. Пусть $C[a, b]$ — пространство всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ и x_0 — фиксированная точка $[a, b]$. Показать, что $f(\varphi) = \varphi(x_0)$ есть непрерывный линейный функционал на $C[a, b]$.

2. Показать, что в пространстве $C[a, b]$ функционал $f(\varphi) = \int\limits_a^b \psi(t)\varphi(t)\,dt$, где ψ — фиксированная функция из $C[a, b]$, линеен и непрерывен.

3. Доказать, что если в нормированном пространстве E линейный функционал f удовлетворяет в единичном шаре $\|x\| \leqslant 1$ неравенству

$$|f(x)| \leqslant K \quad (K = \text{const}),$$

то он ограничен, т. е. для любого $x \in E$

$$|f(x)| \leqslant K\|x\|.$$

4. Пусть E и F — банаховы пространства, а A — непрерывное линейное отображение E на F. Показать, что если $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$, то существуют такие $K > 0$ и последовательность $(x_n) \subset E$, что

$$\|x_n\| \leqslant K\|y_n\|, \; Ax_n = y_n \quad (n = 0, 1, \ldots) \text{ и } x_n \to x_0.$$

5. Если E — нормированное пространство и $F \subset E$, то множество $F^{\perp} = \{x^* \mid x^* \in E^*, \quad x^*(F) = 0\}$ называется аннулятором или ортогональным дополнением F.

Показать, что если E — рефлексивное банахово пространство и F — его замкнутое подпространство, то $(F^{\perp})^{\perp} = F$. Верно ли это, если пространство E не является рефлексивным?

6. Фактор-пространство. Пусть L — подпространство линейного пространства E (пока без нормы). Элементы $x, y \in E$ называются эквивалентными относительно L, если их разность $x - y$ принадлежит L. Если элементы x и y в отдельности эквивалентны третьему z, то они эквивалентны друг другу, ибо $x - y = [(x - z) - (y - z)] \in L$. Поэтому все пространство E можно разбить на классы взаимно эквивалентных элементов так, что два элемента x и y попадают в один и тот же класс тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

Пространство L само образует один класс: класс, содержащий элемент x_0, есть совокупность всех сумм вида $x_0 + l$, где l пробегает L. Классы эквивалентных элементов обозначим $X, Y, Z, \ldots$. В совокупности этих классов вводятся линейные операции следующим образом. Пусть $x \in X$ и $y \in Y$. Тогда под суммой X и Y понимается класс Z, содержащий векторы вида $z = x + y$ для всевозможных $x \in X$ и $y \in Y$. Это определение выделяет класс Z по классам X и Y однозначно: если заменить x эквивалентным элементом $x + l$, $l \in \alpha$ и элемент y эквивалентным элементом $y + l'$, $l' \in \alpha$, то сумма $x + y$ заменится элементом $x' + y' = (x + y) + (l + l')$, эквивалентным $x + y$. Аналогично определяется произведение класса X на число α: класс αX состоит из всех элементов, эквивалентных элементу αx, где x — любой фиксированный элемент класса X. Все аксиомы линейного пространства здесь выполняются, приводясь к соответствующим аксиомам пространства E. При этом нулем пространства классов служит класс L.

Приведенное здесь линейное пространство из классов называется фактор-пространством пространства E по его подпространству L и обозначается E/L.

Пусть теперь E — нормированное пространство и L — его замкнутое подпространство. Тогда можно ввести норму и в фактор-пространство E/L, а именно полагают:

$$\| X \| = \inf_{x \in X} \| x \|.$$

Проверим выполнение аксиом нормы.

1) $\| L \| = 0$, так как $0 \in L$. Обратно, если $\| x \| = 0$, то $X = L$. Действительно, если $\| X \| = 0$, то в классе X имеется последовательность (x_n), для которой $\| x_n \| \to 0$, т. е. $x_n \to 0$. Пусть x — любой элемент класса X. Тогда $x - x_n = l_n \in L$. Но $x - x_n \to x$, а L замкнуто, так что $x \in L$, а поэтому $X = L$.

2) $\| \lambda X \| = \inf_{z \in \lambda X} \| z \| = \inf_{x \in X} \| \lambda x \| = \inf_{x \in X} |\lambda| \, \| x \| = |\lambda| \inf_{x \in X} \| x \| =$
$= |\lambda| \, \| X \|$.

3) $\| X + Y \| = \inf_{z \in X + Y} \| z \| = \inf_{x \in X,\ y \in Y} \| x + y \| \leqslant \inf_{x \in X,\ y \in Y} (\| x \| + \| y \|) =$
$= \inf_{x \in X} \| x \| + \inf_{y \in Y} \| y \| = \| X \| + \| Y \|$.

Итак, если E — нормированное пространство и L — его замкнутое подпространство, то E/L — нормированное пространство.

Пусть E — полное пространство. Тогда E/L также является полным пространством. Для доказательства рассмотрим фундаментальную последовательность классов $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Для каждого номера k существует такой номер n_k, что при любом $m =$
$= 1, 2, 3, \ldots$

$$\| X_{n_k + m} - X_{n_k} \| < \frac{1}{2^k}.$$

Отсюда, в частности, $\| X_{n_{k+1}} - X_{n_k} \| < \frac{1}{2^k}$. Выберем в классе X_{n_1} произвольный элемент x_1; далее ввиду того, что класс $X_{n_2} -$
$- X_{n_1}$ состоит из всевозможных разностей $x - x_1$, где x пробегает класс X_{n_2}, найдется элемент $x_2 \in X_{n_2}$, для которого $\| x_2 - x_1 \| < \frac{1}{2}$,

затем на таком же основании найдется элемент $x_3 \in X_{n_3}$, для которого $\|x_3 - x_2\| < \frac{1}{2^2}$ и т. д.; вообще на $(k+1)$-м шаге элемент $x_{k+1} \in X_{n_{k+1}}$ и $\|x_{k+1} - x_k\| < \frac{1}{2^k}$. Из данного построения вытекает, что последовательность (x_k) фундаментальна и, значит, в силу полноты E сходится в E к некоторому элементу x. Пусть X — класс, содержащий элемент x; тогда

$$\|X - X_{n_k}\| \leqslant \|x - x_{n_k}\| \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Таким образом, последовательность классов X_{n_k} сходится к классу X. Но тогда и вся последовательность X_n, в силу ее фундаментальности, сходится к X, и полнота E/L доказана.

7. Пусть E — рефлексивное банахово пространство, а L — его замкнутое подпространство. Показать, что L и E/L рефлексивны.

8. Пусть f — линейный функционал, заданный на линейном пространстве E. Тогда уравнение $f(x) = 0$ выделяет в E подпространство L. Показать, что фактор-пространство E/L одномерно.

Дополнение к главе V

1. З а д а ч а. Показать, что в пространстве L^2 последовательность

$$x_n = \sin n\pi t \quad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

сходится слабо к нулю, но сходимость по норме в L^2 отсутствует.

У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что всякий непрерывный линейный функционал в L^2 представим в виде

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt,$$

где $y(t)$ — фиксированная функция из $L^2(0, 1)$. Тогда $f(x_n) = \int_0^1 \sin n\pi t\, y(t)\, dt \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $x_n \rightharpoonup 0$. Затем показать, что последовательность $(\sin n\pi t)$ не является фундаментальной по норме.

2. З а д а ч а. Пусть H — гильбертово пространство, $(x_n) \subset H$ и $(y_n) \subset H$. Показать, что если $x_n \rightharpoonup x_0$ и $y_n \rightharpoonup y_0$, то, вообще говоря, (x_n, y_n) не сходится к (x_0, y_0).

У к а з а н и е. Рассмотреть пример $x_n = y_n = e_n$, где (e_n) — произвольная ортонормальная последовательность в H, которая, как мы видели, сходится слабо к нулю.

3. З а д а ч а (см. предыдущую задачу). Если $x_n \rightharpoonup x_0$ и

$$y_n \to y_0, \text{ то } (x_n, y_n) \to (x_0, y_0).$$

У к а з а н и е. Следует воспользоваться доказательством непрерывности скалярного произведения.

4. З а д а ч а (см. задачу 2). Доказать, что если $x_n \rightharpoonup x_0$ и $\|x_n\| \to \|x_0\|$, то $x_n \to x_0$.

У к а з а н и е. Воспользоваться представлением непрерывного линейного функционала в H, из которого следует, что при фиксированном x_0

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x_0) = \|x_0\|^2.$$

5. З а д а ч а. Пусть E — банахово пространство и последовательность (f_n) в E^*. Показать, что, для того чтобы

$$f_n \underset{E}{\to} f_0 \in E^*,$$

необходимо и достаточно выполнения условий:

1) $\|f_n\| \leqslant C = \text{const}$.

2) $f_n(x) \to f_0(x)$ для каждого $x \in X$, где X всюду плотно в E.

У к а з а н и е. Необходимость условия (1) следует из теоремы Банаха — Штейнгауза (см. п. 8.2). При доказательстве достаточности остается заметить, что f_n и f_0 равномерно ограничены по норме, а каждый вектор из E можно приблизить с любой степенью точности векторами из X.

З а м е ч а н и е. Отметим еще, что вместо плотности X в E достаточно потребовать, чтобы линейные комбинации векторов из X были всюду плотны в E.

Дополнение к главе VI

1. З а д а ч а. Пусть E_x, E_y — нормированные пространства и F — отображение E_x в E_y (линейность F не предполагается). Доказать, что если F слабо непрерывно и компактно, то F усиленно непрерывно, т. е. из того, что выполнены условия: 1) $F(x_n) \rightharpoonup F(x_0)$ при $x_n \rightharpoonup x_0$. 2) F преобразует всякое ограниченное множество пространства E_x в относительно компактное множество пространства E_y — из этого следует, что F преобразует любую последовательность $x_n \rightharpoonup x_0$ в последовательность $F(x_n) \to F(x_0)$.

У к а з а н и е. Пусть x_0 — фиксированная точка пространства E_x. Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \rightharpoonup x_0$. Тогда по условию $F(x_n) \rightharpoonup F(x_0)$. Отсюда, согласно теореме 15.2,

$$F(x_n) \to F(x_0),$$

ибо слабо сходящаяся последовательность $F(x_n)$ ограничена, а F — относительно компактное отображение.

2. Пример функции, имеющей дифференциал Гато, но не имеющей дифференциала Фреше.

Рассмотрим пример функции f, заданной в евклидовой плоскости (x_1, x_2):

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{при } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Так как

$$\left|\frac{x_1^3 x_2}{x_1^4+x_2^2}\right| = \frac{|x_1|^{\frac{5}{2}} \cdot |x_1|^{\frac{1}{2}} |x_2|}{x_1^4+x_2^2} \leqslant \frac{1}{2}|x_1|,$$

то f непрерывна и в точке (0, 0). Для этой функции имеем:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+th)-f(0)}{t} = h_1+h_2,$$

т. е. в точке (0, 0) она имеет дифференциал Гато. Далее,

$$\omega(0,\ h) = f(0+h) - f(0) - Df(0,\ h) = \frac{h_1^3 h_2}{h_1^4+h_l^2},$$

откуда

$$\frac{\omega(0,\ h)}{\|h\|} = \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^4+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Полагая теперь $h_2 = h_1^2$ и устремляя затем h_1 к нулю, получим:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega(0,\ h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\frac{h_1^5}{2h_1^4\sqrt{h_1^2+h_1^4}} = \frac{1}{2},$$

отсюда следует, что в точке (0, 0) данная функция не имеет дифференциала Фреше.

3. Пример отображения, имеющего всюду дифференциал Гато, но нигде не дифференцируемого по Фреше.

Пусть вещественная функция вещественных аргументов $g(u, x)$ непрерывна по $u \in (-\infty, +\infty)$ почти при каждом $x \in B$, где B — измеримое множество в конечномерном евклидовом пространстве и измерима в B по x при каждом значении u. Рассмотрим отображение $h : hu = g(u(x), x)$, называемое оператором Немыцкого (см. п. 22.1). Известно (см. [2], § 19), что для непрерывности и ограниченности отображения h из пространства L^p в пространство L^{p_1} необходимо и достаточно, чтобы $|g(u, x)| \leqslant a(x) + b|u|^r$, где $r = \frac{p}{p_1}$, $b > 0$, $a(x) \in L^{p_1}$. В частности, для действия и непрерывности h из L^2 в L^2 необходимо и достаточно, чтобы $|g(u, x)| \leqslant$ $\leqslant a(x) + b(u)$, $a(x) \in L^2$, $b = \mathrm{const} > 0$.
Покажем, что в последнем случае, если функция $g(u, x)$ имеет частную производную $g'_u(u, x)$, которая непрерывна по u и ограничена почти при всех $x \in B$ и $u \in (-\infty, +\infty)$, то существует дифференциал Гато

$$Dh(u, v) = g'_u(u, x)\, v(x).$$

Действительно, по формуле Лагранжа $h(u + tv) - hu =$ $= tg'_u(u(x) + t\theta(x)v(x), x)\, v(x)$, $0 < \theta(x) < 1$.

Отсюда так как при фиксированном $v \in L^2$

$$\lim_{t\to 0} \| t\,\theta(x)\, v(x) \| = 0,$$

то

$$Dh(u, v) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[h(u + tv) - hu] = g'_u(u(x), x)\, v(x).$$

Покажем, однако, что при выполнении рассматриваемых условий отображение h нигде не дифференцируемо по Фреше, если $g(u, x)$ не есть линейная функция относительно u. Действительно, если мы допустим, что h имеет дифференциал Фреше $dh(u, v)$, то он должен совпасть с $Dh(u, v)$ и потому, согласно предыдущему,

$$dh(u, v) = g'_u(u(x), x)\, v(x).$$

Отсюда

$$\omega(u(x), v(x), x) = h(u + v) - hu - g'_u(u(x), x)\, v(x)$$

и

$$\lim_{v\to 0} \frac{\| \omega(u(x), v(x), x) \|}{\| v \|} = 0. \tag{i}$$

Покажем, однако, что при фиксированном $u(x) \in L^2$ последнее равенство возможно лишь тогда, когда для всякой функции $v(x) \in$ $\in L^2$ почти всюду

$$\omega(u(x), v(x), x) = \omega_0(v(x), x) = 0.$$

Отсюда будет следовать, если положить $u = 0$, что

$$hv = h0 + g'_u(0, x)\, v(x).$$

Возьмем какую-нибудь функцию $v_0(x) \in L^2$ ($\| v_0 \| > 0$) и допустим, что на некотором множестве положительной меры $G \subset B$ будет

$$|\omega_0(v_0(x), x)| \geqslant a > 0. \tag{*}$$

Тогда согласно известной теореме (см. И. П. Натансон, с. 113) найдется подмножество $E \subset G$ положительной меры, на котором

$$|v_0(x)| \leqslant b = \text{const} \tag{ii}.$$

Так как $\operatorname{mes} E > 0$, то найдется точка плотности множества E, т. е. точки $x_0 \in B$ (см. И. П. Натансон, с. 285), в любой окрестности которой будет находиться подмножество положительной меры множества E, ибо, допустив противное и воспользовавшись теоремой Бореля — Лебега о покрытиях, мы пришли бы к противоречию. Рассмотрим теперь последовательность шаров $V\left(x_0, \frac{1}{k}\right)$ с центром в точке x_0, радиусы которых $r = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, и положим

$$l_k = E \cap V\left(x_0, \frac{1}{k}\right).$$

Затем построим последовательность функций

$$v_k(x) = \begin{cases} 0, & x \notin l_k, \\ v_0(x), & x \in l_k. \end{cases}$$

В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла от квадрата каждой функции пространства L^2, мы имеем $\|v_k\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Далее, согласно (*) будет:

$$\|\omega_0(v_k(x), x)\| = \left(\int_B (\omega_0(v_k(x), x))^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int_{l_k} (\omega_0(v_k(x), x))^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant a\sqrt{\operatorname{mes} l_k}.$$

Наконец, из неравенства (ii) находим:

$$\|v_k\| = \left(\int_{l_k} (v_0(x))^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant b\sqrt{\operatorname{mes} l_k}.$$

Из последующих двух неравенств следует, что

$$\frac{\|\omega_0(v_k(x), x)\|}{\|v_k\|} \geqslant \frac{a\sqrt{\operatorname{mes} l_k}}{b\sqrt{\operatorname{mes} l_k}} = \frac{a}{b} > 0,$$

а значит, (i) не выполняется.

4. Задача. Показать, что если равенство

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = DF(x_0, h)$$

выполняется равномерно по h ($\|h\| = 1$), то существует дифференциал Фреше $dF(x_0, h) = DF(x_0, h)$.

Указание. Каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что при $|t| < \delta$ равномерно по h (на сфере $\|h\| = 1$)

$$\left\| \frac{1}{t}(F(x_0 + th) - F(x_0)) - DF(x_0, h) \right\| < \varepsilon.$$

Полагая тогда

$$V = \frac{1}{t}(F(x_0 + th) - F(x_0)) - DF(x_0, h) = \frac{1}{t}\omega(x_0, th),$$

мы придем к неравенству

$$\frac{\|\omega(x_0, th)\|}{\|th\|} < \varepsilon,$$

так как $\|h\| = 1$. Следовательно,

$$DF(x_0, h) = dF(x_0, h),$$

т. е. производная Гато совпадает с производной Фреше.

5. Пример. Пусть E^m и E^n — евклидовы пространства размерностей m и n. Найти производную Гато отображения $F: E^m \to E^n$.

Решение. Любые векторы $x \in E^m$, $h \in E^m$ запишем так: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$. Аналогично запишем: $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Тогда

$$F(x + th) - F(x) = (F_1(x + th - F_1(x), \ldots, F_n(x + th) - F_n(x)).$$

Разделив на t и переходя к пределу по $t \to 0$, мы в предположении существования частных производных

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k} (i = 1, 2, 3, \ldots, n; \ k = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

получим:

$$DF(x, h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_m} h_m \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_m} h_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}.$$

Следовательно, производная Гато

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Читателю предлагается доказать, что если все частные производные, входящие в последнюю матрицу, непрерывны по совокупности аргументов $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, то производная Гато есть производная Фреше.

6. Пример. Пусть E — бесконечномерное банахово пространство. Как известно (см. Банах С. С. Курс функцьонального аналізу. Київ, Радянська школа, 1948, с. 72), в E всякая сфера $\|x\| = r$, $r > 0$ не компактна. Поэтому найдется последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ($\|x_k\| = 1$), для которой при некотором $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\|x_m - x_n\| \geqslant \varepsilon$ при $m \neq n$. Построим еще последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots$, удовлетворяющую условиям:

1) $\|y_k\| = 1$ для $k = 1, 2, 3, \ldots$; 2) $\|x_k - y_k\| = \frac{\varepsilon}{k}$.

Рассмотрим теперь функционал f, определенный следующими условиями:

1) $f(x_k) = +1$, $f(y_k) = -1$ для $k = 1, 2, 3, \ldots$

2) В шаре $\|x - x_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2k}$ $f(x) = 1 - \frac{2k}{\varepsilon}\|x - x_k\|$.

3) В шаре $\|x - y_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2k}$ $f(x) = \frac{2k}{\varepsilon}\|x - y_k\| - 1$.

4) Вне шаров $\| x - x_k \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2k}$ и $\| x - y_k \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2k}$ $f(x) = 0$.

Показать, что функционал f непрерывен и ограничен на E, но он не является равномерно непрерывным.

7. Пример. Пусть E — бесконечномерное банахово пространство (см. пример 6) и $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ($\| x_n \| = 1$) — последовательность, для которой при $m \neq n$ $\| x_m - x_n \| \geqslant \varepsilon$, где ε — положительное число меньше 1.

Рассмотрим функционал f, определенный следующими условиями:

1) $f(x_k) = k$; $k = 1, 2, 3, \ldots$

2) В шаре $\| x - x_k \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ $f(x) = k - \frac{2k}{\varepsilon} \| x - x_k \|$.

3) Вне шаров $\| x - x_k \| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$ $f(x) = 0$.

Показать, что f непрерывен в E, но не ограничен в шаре $\| x \| \leqslant 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$.

8. Пример. Показать, что если в банаховом пространстве задано однородное отображение F степени однородности $\gamma > 0$, т. е. $F(tx) = t^{\gamma} F(x)$, то из непрерывности F в нуле пространства E следует, что F ограничено в любом шаре $\| x \| \leqslant r$.

Указание. Из непрерывности F в нуле следует ограниченность в некоторой окрестности нуля.

9. Пример. Говорят, что дифференциал Фреше $df(x, h)$ функционала f имеет в шаре $K_r = \{x \mid \| x \| \leqslant r\}$ равномерный остаток $\omega(x, h)$, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что при $\| h \| < \delta$, для всех x и $x + h$, принадлежащих K_r, выполняется неравенство $| \omega(x, h) | < \varepsilon \| h \|$.

Доказать, что если отображение $F = \operatorname{grad} f$ равномерно непрерывно в K_r, то $df(x, h)$ имеет равномерный остаток.

Указание. Воспользоваться формулой Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = \langle F(x_1 + \tau(x_2 - x_1)),\ x_2 - x_1 \rangle, \text{ где } 0 < \tau < 1,$$

и равенством

$$f(x_2) - f(x_1) = \langle F(x_1),\ x_2 - x_1 \rangle + \omega(x_1, x_2 - x_1).$$

10. Пример. Показать, что если отображение F: $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$ ограничено в шаре $\| x \| \leqslant r$, то функционал f равномерно непрерывен в этом шаре.

11. Пример. Пусть $K_r = \{x \mid x \in E, \| x \| \leqslant r\}$, где E — банахово пространство и $r > 0$. Показать, что для равномерной непрерывности отображения $F = \operatorname{grad} f$ в шаре K_r, если E ограничено в K_r, необходимо и достаточно, чтобы дифференциал Фреше $df(x, h)$ имел в K_r равномерный остаток.

Указание. Необходимость следует из примера 9. Для доказательства достаточности нужно исходить из равенств

$$f(x_2 + th) - f(x_2) = \langle F(x_2), th \rangle + \omega(x_2, th),$$
$$f(x_1 + th) - f(x_1) = \langle F(x_1), th \rangle + \omega(x_1, th),$$

где $x_1, x_2 \in K_r$, $0 < t < 1$, h — произвольный вектор из E с нормой, равной α, и из неравенств

$$|\omega(x_2, t_0 h)| < \frac{1}{8}\varepsilon t_0 \alpha, \quad |\omega(x_1, t_0 h)| < \frac{1}{8}\varepsilon t_0 \alpha,$$

которые возможны в силу равномерности $\omega(x, h)$, учитывая, что $\|h\| = \alpha$. Далее (см. пример 10) нужно воспользоваться неравенством

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{8}\varepsilon t_0 \alpha, \text{ если } \|x' - x''\| < \delta$$

и неравенством

$$|\langle F(x_2) - F(x_1), t_0 h\rangle| \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| +$$
$$+ |f(x_2 + t_0 h) - f(x_1 + t_0 h)| + |\omega(x_2, t_0 h)| +$$
$$+ |\omega(x_1 + t_0 h)| < \frac{1}{2}\varepsilon t_0 \alpha,$$

которое следует из предыдущих неравенств.
Отсюда

$$|\langle F(x_2) - F(x_1), h\rangle| < \frac{1}{2}\varepsilon\alpha,$$

а в силу определений нормы можно подобрать h ($\|h\| = \alpha$) так, чтобы

$$|\langle F(x_2) - F(x_1), h\rangle| \geqslant \frac{1}{2}\|F(x_2) -$$
$$- F(x_1)\| \, \|h\| = \frac{1}{2}\|F(x_2) - F(x_1)\|\alpha.$$

Отсюда и из предыдущего следует требуемое утверждение.

Дополнение V

Теоремы о неявной функции

Пусть E_x и E_y — банаховы пространства над одним и тем же полем скаляров. Рассмотрим произведение $E_{xy} = E_x \times E_y$ с операциями (см. п. 10.1):

$$[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]; \ \lambda[x, y] = [\lambda x, \lambda y],$$

так что E_{xy} — линейное пространство, причем если положить $\|[x, y]\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$, то оно станет банаховым. Рассмотрим отображение $F: \sigma \to E_z$, где $\sigma \subset E_{xy}$ и E_z — банахово пространство. Значение F в точке $[x, y]$ мы обозначим через $F(x, y)$ и рассмотрим вопрос о существовании решения уравнения $F(x, y) = 0$

(0 — нуль пространства E_z), т. е. о существовании неявной функции $y = \Phi(x)$, определяемой этим уравнением. Предварительно введем понятия частных производных Фреше. Если при фиксированном $x \in E_x$

$$F(x, y+h) - F(x, y) = Ay + \omega(x, y; h),$$

где A — ограниченное линейное отображение из E_y в E_z и

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(xy,\ h)}{\|h\|} = 0,$$

то A_y называется частным дифференциалом Фреше отображения F по y. Пишут еще так:

$$A = F'_y(x, y),$$

и это отображение называют частной производной Фреше отображения F по y. Аналогично вводятся понятие частного дифференциала Фреше по x и частной производной Фреше $F'_x(x, y)$.

Не касаясь вопроса о связи между полным и частными дифференциалами, отметим следующее предложение.

Теорема. ***Пусть F — отображение открытой окрестности ω точки $(x_0, y_0) \in E_{xy}$ банахово пространство E_z, причем выполнены условия:***

1) $F(x_0, y_0) = 0$;
2) ***в ω существует и непрерывна F'_y;***
3) ***линейное отображение $F'_y(x_0, y_0)\colon E_y \to E_z$***

обладает обратным

$$\Gamma = [F'_y(x_0, y_0)]^{-1}\colon E_z \to E_y.$$

Тогда существует отображение Φ некоторой открытой окрестности $G \subset E_x$ точки x_0 в пространство E_y, обладающее следующими свойствами:

1°) $F(x, \Phi(x)) = 0$ **для всех** $x \in G$;
2°) $\Phi(x_0) = y_0$;
3°) ***Φ непрерывно в точке x_0.***

Отображение Φ со свойствами 1°—3° однозначно в том смысле, что если и Φ_1 — отображение со свойствами 1° — 3°, то существует такое $\delta > 0$, что как только $\|x - x_0\| < \delta$, то $\Phi_1(x) = \Phi(x)$.

Доказательство использует принцип сжимающих отображений. Пусть

$$A(x, y) = y - \Gamma F(x, y).$$

Тогда, обозначая через I тождественное отображение E_y в себя, имеем:

$$\frac{\partial A(x,\ y)}{\partial y} = I - \Gamma F'_y(x,\ y) = \Gamma[F'_y(x_0,\ y_0) - F'_y(x,\ y)]$$

и, в силу непрерывности F'_y,

$$\left\|\frac{\partial A(x,\ y)}{\partial y}\right\| \leqslant p(\delta) \ \text{ при } \|x-x_0\| < \delta,\ \|y-y_0\| < \delta,$$

где $p(\delta) \to 0$, когда $\delta \to 0$.

Ввиду этого отображение $A(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y

$$\| A(x,\ y_1) - A(x,\ y_2) \leqslant \left\|\frac{\partial A(x,\ y)}{\partial y}\right\| \| y_2 - y_1 \| \leqslant p(\delta) \| y_2 - y_1 \|,$$

если $\|x - x_0\| \leqslant \delta$, $\|y_i - y_0\| \leqslant \delta$ $(i = 1, 2)$.

Далее, в силу непрерывности $F(x, y)$ и условия $F(x_0, y_0) = 0$, имеем: $\|A(x, y_0) - y_0\| \leqslant \|\Gamma\| \, \|F(x, y_0)\| \leqslant \alpha(\delta)$,

где $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Выберем $\beta > 0$ настолько малым, чтобы $p(\beta) = p < 1$. Это возможно, так как $p(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Положим еще $\gamma < \beta$ столь малым, чтобы $\alpha(\gamma) \leqslant (1 - p) \cdot \beta$.

Тогда при $\|x - x_0\| < \gamma$ $A(x, y)$ отображает шар $\|y - y_0\| \leqslant \beta$ в себя и является сжимающим, и, следовательно, уравнение

$$y = A(x, y) = y - \Gamma F(x, y)$$

имеет в шаре $\|y - y_0\| \leqslant \beta$ единственное решение $y = \Phi(x)$, где $\Phi(x_0) = y_0$. Докажем непрерывность Φ. Так как $\Phi(x) = A(x, \Phi(x))$, то

$$\begin{aligned}\|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| &\leqslant A(x, \Phi(x)) - A(x, \Phi(x_0))\| + \\ &+ \|A(x, \Phi(x_0)) - A(x_0, \Phi(x_0)\| = \\ &= \|A(x, \Phi(x)) - A(x, \Phi(x_0)\| + \|\Gamma F(x, y_0)\| \leqslant \\ &\leqslant p\|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| + \|\Gamma\| \, \|F(x, y_0)\|.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\| \Phi(x) - \Phi(x_0) \| \leqslant \frac{1}{1-p} \| \Gamma \| F(x, y_0) \|,$$

а значит, отображение Φ непрерывно в точке x_0, ибо $F(x_0, y_0) = 0$.

Аналогично доказывается непрерывность Φ в других точках x, для которых $\|x - x_0\| \leqslant \gamma$. Теорема доказана.

Замечание. Как и в классическом случае, если отображение $F\colon E_{xy} \to E_z$ дифференцируемо n раз в некоторой окрестности точки $[x_0, y_0]$, то неявная функция $y = \Phi(x)$ дифференцируема n раз в некоторой окрестности точки x_0.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1]. Данфорд Н. и Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. Изд-во иностр. лит., 1963.

[2]. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Гостехиздат, 1956.

[3]. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. Наука, 1972.

[4]. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.

[5]. Иосида К. Функциональный анализ. Мир, 1967.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Дополнения

Мордухай Моисеевич Вайнберг

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Спец. редактор *М. Е. Косицкий*
Редактор *В. И. Ефимов*. Художественный редактор *Е. Н. Карасик*.
Переплет художника *В. П. Григорьева*. Технический редактор *Е. К. Полукарова*.
Корректор *О. С. Захарова*

ИБ № 3900

Сдано в набор 24.01.79. Подписано к печати 23.05.79. $60\times90^1/_{16}$. Бум. типогр. № 2. Гарн. литер. Печать высокая. Усл. печ. л. 8. Уч.-изд. л. 7,12. Тираж 31 000 экз. Заказ № 46. Цена 25 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.