Е. П. Ожигова

# Шарль ЭРМИТ

1822—1901

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1982

*УДК 92 Эрмит: 50«18»*

**Шарль Эрмит. Ожигова Е. П.** Л., «Наука», 1982. 288 с.

Книга посвящена жизни и деятельности крупнейшего французского математика второй половины XIX в. Шарля Эрмита, с именем которого связаны многие понятия и методы в современной математике. Наибольшую известность доставили ученому его доказательство трансцендентности числа $e$, основания натуральных логарифмов, решение общего уравнения пятой степени с помощью эллиптических функций и исследования модулярных функций. Эрмит обладал удивительным талантом преподавателя. Среди его непосредственных учеников, слушавших его лекции в Сорбонне и в Нормальной школе, — Анри Пуанкаре, Эмиль Пикар, Гастон Дарбу, Эмиль Борель и другие знаменитые математики. Эрмит был центром научных связей математиков разных стран, вел обширную переписку. Тесная дружба связывала его с П. Л. Чебышевым и его школой. Предлагаемая работа — первая монография об Эрмите. Знакомство с этой книгой может быть полезно как историкам математики, так и математикам, а также преподавателям высших и средних учебных заведений, студентам. Библ. — 700 назв., ил. — 14.

Ответственный редактор

А. П. ЮШКЕВИЧ

Елена Петровна **Ожигова**

**Шарль Эрмит**

**1822—1901**

*Утверждено к печати*

*Редколлегией серии «Научно-биографическая литература»*

Редактор издательства *Г. Л. Кирикова*

Технический редактор *И. М. Кашеварова*

Корректоры *А. А. Гинзбург* и *Е. А. Гинстлинг*

ИБ № 20021

Сдано в набор 4.06.81. Подписано к печати 26.02.82. М-13045. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Печ. л. 9=15.12 усл. печ. л. Усл. кр.-отт. 15.33. Уч.-изд. л. 16.52. Тираж 31500. Изд. № 7888. Тип. зак. 431. Цена 1 р. 10 к.

Ленинградское отделение издательства «Наука»
199164, Ленинград, В-164, Менделеевская линия, 1
Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12

$О \frac{1702010000-202}{054(02)-82}$ 47-81 НП

# Предисловие

В 1900 г. в Париже проходил Всемирный конгресс математиков. Почетным президентом его участники единодушно избрали французского математика Шарля Эрмита, отсутствовавшего по болезни, и послали ему приветственную телеграмму.

Международный конгресс математиков выражает свое восхищение и почтительную симпатию знаменитому Геометру, который составляет славу своей страны и всего научного мира как благодаря своему таланту, так и благодаря своему характеру. Математики всех стран единодушно шлют господину Эрмиту самые искренние пожелания здоровья и счастья [II, 176, с. 25].

Получив это теплое послание, Эрмит тотчас же ответил президенту Конгресса Анри Пуанкаре.

Будьте добры передать членам Конгресса мою благодарность и выразить им, сколь глубоко я тронут свидетельством их симпатии. Это свидетельство пришло в конце моей карьеры. Оно является для меня самой высшей и лучшей наградой. Оно наполняет меня радостью и гордостью, соединяя в себе дружеские и научные связи. Я отвечаю на него всем сердцем, благодарю за него друзей, адресую пожелания успеха Конгрессу, желаю, чтобы он способствовал их трудам и внес вклад в прекрасное будущее Анализа на новых путях, которые он открыл. Шарль Эрмит [II, 176, с. 25].

Шарль Эрмит был в дружеских отношениях с учеными многих стран, в том числе и с П. Л. Чебышевым. Далеко не полностью опубликованная обширная переписка Эрмита вызывает интерес не только своим математическим содержанием, но и как отражение научной жизни, состояния преподавания, политики второй половины XIX в.

Научное наследие ученого так велико и многогранно, что, по словам его ученика, Эмиля Бореля, «мы не можем и подумать проанализировать детально многочисленные мемуары Эрмита. С другой стороны, его творчество не из тех, о которых можно дать представление в нескольких строках, так как предметы, которых он коснулся своей рукой мастера, многочисленны и разнообразны. Классификацию их произвести не просто. По-видимому, эта трудность связана главным образом с замечательным единством творчества Эрмита, но это единство, если можно так сказать, не внешнее, а внутреннее. Это не был ум, который последовательно изучал ряд проблем, находящихся в одной и той же области науки. Это ум, который следует естественному развитию своих идей, не беспокоясь об искусственных барьерах, которые ему при этом постоянно приходится преодолевать. И в самом деле, он чувствует себя одинаково хорошо в области Анализа, Арифметики и Алгебры. Он может, таким образом, без труда переходить из одной области в другую, едва замечая это» [III, 2, с. XI].

Влияние Эрмита на развитие математики второй половины XIX—первой половины XX в. бесспорно. Достаточно напомнить, что почти все крупные французские математики этого периода были его учениками и среди них — Анри Пуанкаре, Эмиль Пикар, Гастон Дарбу, Поль Аппель, Эмиль Борель, Камилл Жордан, Поль Пенлеве.

Имя Эрмита в неразрывном сочетании с целым рядом математических понятий — «полиномы Эрмита», «метод непрерывного параметра Эрмита», «эрмитовы операторы», «эрмитова матрица», «эрмитово пространство», «эрмитовы формы» — не сходит со страниц научной литературы, но о нем самом написано мало. В нашей стране — лишь несколько небольших очерков-некрологов, да краткие статьи энциклопедий, за рубежом, после издания брошюры Г. Дарбу [III, 5], — только краткие заметки и очерк Г. Фрейденталя [III, 8]. Правда, в 1979 г. в серии «Жизнь замечательных людей» вышла книга об Анри Пуанкаре [II, 93], одном из наиболее известных математиков, который был учеником Эрмита. Там, разумеется, есть некоторые сведения и о нем, но они носят скорее беллетристический характер.

Среди имеющихся упоминаний об Эрмите и оценок его заслуг много неточных и часто неверных утверждений. Вот одно из наиболее известных высказываний о нем, принадлежащее Ф. Клейну [III, 31, с. 334—335].

«И в Париже со смертью Коши (1857 г.) также упала творческая продуктивность в области теории функций. Правда, с конца 40-х годов Эрмит . . . высоко держал знамя Коши. Однако этот исключительный математик не обладал необходимыми качествами для создания и развития своей собственной школы. Его потребность в поддержке толкает его к тесным отношениям вначале с Якоби, позднее с Риманом и Вейерштрассом. Эрмит был выдающейся личностью в математике, и мы о нем будем много говорить впоследствии. Мы обязаны ему многими важнейшими открытиями, проложившими широкие пути для дальнейшего исследования, но в то же время в его систематическом изложении мы находим очень много мест, оставляющих желать большей ясности. . .»

И далее: «Эрмит благодаря притягательной силе своей обаятельной личности, благодаря своему упорному стремлению поднять математику выше того одностороннего национализма, который постепенно стал охватывать молодое французское поколение, наконец, благодаря своей оживленной переписке с математиками всего мира был в течение многих десятилетий одним из важнейших центров всего математического мира. Но Эрмит не обладал той могучей целеустремленностью, которая совершенно необходима творцу нового направления математической мысли. Лишь его ученики взялись с 1880 г. за работу над немецкой теорией функций и положили начало новому расцвету французской математики: сюда относятся такие люди, как Пикар, Пуанкаре и многие другие. Пуанкаре принадлежит также и самый обстоятельный очерк о научном значении Вейерштрасса» [III, 31, с. 335].

Несмотря на в целом лестный тон, с некоторыми утверждениями Клейна невозможно согласиться. И прежде всего с тем, что Эрмит не обладал необходимыми качествами для создания и развития своей собственной школы. Почти все математики Франции (да и других стран) испытали на себе его сильнейшее влияние. Некоторые из них, будучи его непосредственными учениками, успешно продолжали различные направления его исследований, например в области квадратичных и прочих алгебраических форм, трансцендентности чисел, интегрирования уравнений с двоякопериодическими коэффициентами, а также в сфере изучения, использования и развития понятий модулярной группы и модулярной функции. Основные принципы, которых Эрмит придерживался в науке, такие как необходимость изучения разных направлений и разных дисциплин математики, стремление найти их связи, умение наблюдать математические факты и на их основе делать выводы, стремление проникнуть в глубь предмета, не ограничиваясь поверхностным знакомством с ним, воспринятые его учениками и последователями, позднее уже ими неуклонно проводились в жизнь. К тому же Эрмит был творцом не одного, а многих научных направлений (вопреки утверждению Клейна). Так, доказательство трансцендентности числа *e* явилось прообразом методов доказательств трансцендентности различных чисел и породило новые научные дисциплины, в том числе метрическую теорию чисел, а метод непрерывного параметра (введение непрерывной вещественной переменной в теорию чисел) — множество исследований, в частности и в новой области — геометрии чисел. Обобщение алгоритма непрерывных дробей развивали многие математики, применявшие его к разнообразным вопросам теории диофантовых приближений, алгебре и др. Решение уравнений степени выше четвертой с помощью эллиптических функций, интегрирование уравнения Ламе с помощью двоякопериодических функций второго рода послужили началом решения как алгебраических, так и дифференциальных уравнений посредством специальных функций. Все это позволяет говорить уже не о школе, а о множестве школ Эрмита.

Совершенно несправедливо утверждение о том, что только ученики Эрмита «взялись с 1880 г. за работу над немецкой теорией функций и положили начало новому расцвету французской математики». Именно Эрмит первые плоды своих научных исследований послал на суд немецкого ученого Якоби, позднее переписывался с учеными всего мира, приводил в своих лекциях результаты, найденные ими, рекомендовал своим студентам учиться у Вейерштрасса, теорию аналитических функций которого, наряду с теорией функций комплексного переменного Коши, излагал в своих курсах, печатал в журналах разных стран. Эрмит был первым учителем Миттаг-Леффлера, направившим его интересы в область теории аналитических функций и рекомендовавшим ему поработать под руководством Вейерштрасса. Он представлял Парижской академии и направлял во французские журналы статьи немецких (и других) математиков, первым мог оценить важность полученных результатов, подать новую идею, позволявшую сделать исследования более значительными. В этой книге читатель найдет высказывания немецких математиков Гильберта и Минковского, посвятившего Эрмиту свою книгу [II, 330], и отрывки из переписки с Дю Буа-Реймоном. Все это красноречиво свидетельствует о том, что именно Эрмит во многом содействовал расцвету теории функций в конце XIX и начале XX в., равно как и развитию других направлений математических исследований.

По словам Клейна, лишь потребность Эрмита в поддержке «толкает его к тесным отношениям сначала с Якоби, позднее с Риманом и Вейерштрассом», но такое освещение характера их взаимоотношений расходится с действительностью. Эрмит сообщил Якоби о своих первых результатах, но затем развил поданные тем идеи в совершенно неожиданных направлениях, что признавал и сам Якоби. В одном из писем к Эрмиту он писал: «Не сердитесь, милостивый государь, если какие-то из ваших открытий встретятся с моими старыми исследованиями. Так как Вы должны были начать с того, чем я кончил, имеется необходимо маленькая сфера контакта. Впоследствии, если Вы почтите меня своими сообщениями, мне останется лишь учиться» [II, 233, т. I, с. 362].

Глубокое взаимное уважение связывало Эрмита с Вейерштрассом, но именно Эрмит одним из первых выяснил связи, существующие между теориями Вейерштрасса и Коши, и в своих курсах всегда использовал и те и другие идеи. Риман, приехав в Париж, от Эрмита получил первые советы и помощь, а позднее в его лице нашел популяризатора своих идей, который к тому же содействовал изданию его сочинений на французском языке, написав к ним предисловие, поставил в Парижской академии наук конкурсную тему, связанную с его работой о простых числах.

Исследования Пуанкаре и Пикара, непосредственных учеников Эрмита, тесно связаны с его собственными. Разносторонний по своим научным интересам, Эрмит приобщал к этому и своих учеников. Поэтому их труды всегда вносили что-то новое, устанавливали неожиданные связи между, казалось бы, далекими дисциплинами, а потому приводили к новым оригинальным результатам.

Будучи поборником интернационализма в науке, Эрмит призывал к единению во имя науки ученых всех стран.

*Шарль Эрмит*

Цель предлагаемого издания — дать советскому читателю представление о жизни Эрмита, его обширной научной и педагогической работе. Материалов для воссоздания образа этого большого ученого не так уж много: это уже упомянутые очерки, в первую очередь Г. Дарбу и Э. Пикара, переписка Эрмита, воспоминания его учеников, а также его собственные математические и историко-научные сочинения. Но даже то немногое, с чем удалось ознакомиться в процессе создания этой книги, красноречиво свидетельствует о личности яркой — большого, щедрого и бескорыстного таланта, тонкого ума и обаяния. Не заботясь о своем приоритете, Эрмит постоянно делился своими идеями, соображениями, уже начатыми исследованиями, руководствуясь единственным принципом, достойным истинного ученого: важен лишь итог — открытие, а кому оно принадлежит — второстепенно. Не раз Эрмит был инициатором исследований, удовольствие продолжать которые, равно как и получать результаты, предоставлял другим ученым. Так было с доказательством трансцендентности числа $\pi$ и доказательством невозможности решения задачи квадратуры круга с помощью циркуля и линейки. Метод принадлежал Эрмиту, а слава досталась применившему этот метод к доказательству трансцендентности числа $\pi$ Ф. Линдеману. Так случилось и с теорией квадратичных форм и геометрией чисел Г. Минковского. Эрмит первым поздравлял победителя, искренне радуясь его успеху. Он всегда стремился привлечь энтузиастов в излюбленные области своих трудов — в теорию эллиптических и аналитических функций, теорию квадратичных форм.

Многие высказывания Эрмита — о преподавании математики и значении увлекательности изложения предмета, о строгости как самой математики, так и ее преподавания, о солидарности ученых в интересах развития науки, о роли наблюдения в науке вообще и в математике в частности, о необходимости ясного и доходчивого изложения рассуждений в научных трудах и в лекциях и многое другое — звучат вполне современно. Эрмит как бы принимает участие в некоторых сегодняшних спорах и дискуссиях. В собственных сочинениях он неустанно и строго следует двум важнейшим, по его глубочайшему убеждению, требованиям — четкости и доступности изложения при обязательности ссылок на то, что было сделано в данном вопросе другими учеными.

Автор не претендует на полноту описания математического творчества Ш. Эрмита, тем более — развития его идей и методов. Тема эта весьма обширна и ждет дальнейших исследований.

Талантливый математик, скромнейший человек, благородная душа, удивительный профессор — таким предстает Эрмит в своих сочинениях, переписке и воспоминаниях своих учеников.

Приведенная в книге библиография состоит из трех частей, имеющих самостоятельную нумерацию: I — работы Шарля Эрмита; II — литература, главным образом цитированная в тексте; III — статьи, специально посвященные Эрмиту, и другие источники, содержащие высказывания о нем. Ссылки на литературные источники даются в квадратных скобках с указанием номера части библиографии, порядкового номера работы в этой части, а если издание многотомное, то и номера тома, и, в случае необходимости, страницы: например [II, 3, т. 5, с. 144]. Ссылки на архивные источники, примечания к тексту даны подстрочно. В качестве приложения публикуется русский перевод писем Эрмита к А. А. Маркову.

В заключение автор выражает благодарность академику П. Я. Кочиной и профессору А. П. Юшкевичу, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд существенных замечаний, сотрудникам ЛО Архива АН СССР и Библиотеки АН СССР, в течение многих лет содействовавшим в сборе материала.[1]

[1] На стадии корректуры книги вышла в свет монография [428], затрагивающая некоторые вопросы, рассмотренные в данном издании.

# Глава 1

## Детство и юность

Шарль Эрмит родился 24 декабря 1822 г. в Дьёзе, главном городе кантона в департаменте Мёрт в Лотарингии.

Дед его с отцовской стороны, родом из Марселя, был оружейным мастером, владел значительным состоянием, имел в Париже свой дом на Шоссе д'Антен, но во время революции 1789 г. разорился, оказался в тюрьме, где и умер, а его брат и компаньон был гильотинирован. Рассказы о трагической судьбе деда и его брата, видимо, произвели сильное впечатление на маленького Шарля. Во всяком случае страх перед народными волнениями поселился в нем навсегда, а судьба его родной Лотарингии, в течение столетий остававшейся предметом кровопролитных столкновений между Францией и Германией, породила отвращение к войнам.

Отец Шарля, Фердинанд Эрмит, к моменту разорения семьи был еще очень молод. Он получил инженерное образование, хотя особой склонности к своей профессии не имел, будучи натурой скорее артистической — хорошо рисовал, превосходно музицировал. Необходимость заставила его поступить на службу в соляные копи в Дьёзе в качестве инженера. Вскоре он женился на Мадлен Лальман, дочери торговца сукном. Впоследствии супруги унаследовали торговый дом родителей Мадлен, которая проявила недюжинные коммерческие способности. Под ее умелым руководством предприятие значительно расширилось, и вскоре семья Эрмитов вместе со своим торговым домом перебралась в большой город Нанси. Фасад их собственного дома там украсила искусно нарисованная отцом Шарля вывеска с изображением отшельника в пещере и подписью «У отшельника», таившей в себе лукавый смысл:

французские слова ermite (отшельник) и Hermite (фамилия владельцев дома) звучат одинаково.

Став взрослым, Шарль любовно вспоминал детство, с глубоким уважением относился к родителям и часто повторял, что именно их неустанному труду он обязан своим образованием и возможностью посвятить себя любимой науке — математике.

У родителей Шарля было семеро детей — две дочери и пятеро сыновей. Шарль был предпоследним ребенком. Когда семья переехала в Нанси, ему было 6—7 лет, не более. Детей поместили в местный коллеж, преподавание в котором оставляло желать лучшего. По этой причине Шарля, уже проявившего способности к учению, решено было направить в Париж, где он начал посещать классы второй ступени и риторики в коллеже Анри IV. Там мальчик особенный интерес проявил к урокам физики, которую вел преподаватель Сезар Депре, ставший впоследствии профессором Сорбонны и членом Парижской академии наук (1841). Учитель литературы Кабош, назначенный позднее главным инспектором, не раз ставил в укор ученику это одностороннее увлечение. По-видимому, так оно и было, поскольку в целом занятия в коллеже не доставляли Шарлю удовольствия. Особенно неприятную память о себе оставила в душе Эрмита обстановка интерната, где он жил. Возвращаясь мыслью к этим временам, он говорил, что чувствовал себя там, как в казарме или даже в тюрьме.

Старший брат Шарля, Ипполит, окончил в коллеже Луи-ле-Гран подготовительный класс, специально предназначенный для поступавших в Политехническую школу, и в 1839 г. был зачислен туда. Впоследствии Ипполит стал геологом, опубликовал ряд работ. Его сын Густав занимался аэронавтикой. Ш. Эрмит, последовав примеру брата, в начале 1840/41 учебного года поступил в подготовительный класс по математике этого коллежа.

Коллеж Луи-ле-Гран [II, 173], основанный в 1563 г., вначале назывался «Коллеж де Клермон», по имени епископа Клермона, владельца дома, где иезуиты открыли это учебное заведение. Коллеж славился высоким уровнем преподавания и долгое время соперничал с университетом. В конце XVI в. иезуитам было предписано покинуть Париж, но в 1609 г. вновь разрешено читать лекции по теологии, а с 1610 — по всем предметам, что опять поставило коллеж в позицию конкурента университета. Чтобы урегулировать такое положение, Генеральные штаты в 1614 г. постановили подчинить коллеж университетскому регламенту, и в дальнейшем он продолжал пользоваться наилучшей репутацией среди всех остальных парижских коллежей. Немалую роль в этом играл и тот факт, что преподаватели коллежа заботились не только о знаниях учеников, но и о разумном и интересном проведении их досуга. Под руководством учителей воспитанники готовили и ставили театральные пьесы, латинские и французские, авторами которых зачастую были сами «святые отцы».

Рассказывают, что поводом для названия коллежа — Луи-ле-Гран — послужил будто бы такой случай. Однажды иезуиты пригласили Людовика (Луи) XIV на вечер вручения наград. После торжественной части состоялось представление латинской трагедии, в которой короля сравнивали с Солнцем. В антрактах давались балетные номера. Король был в восхищении и якобы сказал: «Это мой коллеж!» Наутро у входа вместо вывески «Коллеж Клермона общества иезуитов» появилась новая — «Коллеж Людовика Великого» (по-французски — «Луи-ле-Гран»). А в 1682 г. король уже официально присвоил коллежу свое имя, продолжая оказывать ему покровительство и в дальнейшем, отчего французская знать в то время всячески стремилась обучать своих детей в этом учебном заведении.

В 1762 г. коллеж ликвидировали в связи с изгнанием иезуитов из Франции, но потом вновь открыли, а во время революции 1789 г. он был единственным действующим учебным заведением такого ранга, хотя часть здания, именуемая Бельведером, была превращена в тюрьму. Патриотические настроения воспитанников коллежа снискали благосклонность к нему и Конвента. Название же его в это время особенно часто менялось: «Центральный институт стипендиатов», «Коллеж равенства» и т. д.

После воцарения Наполеона Бонапарта, удостоившего коллеж посещением и одобрением, тот стал называться Парижским, а позднее — Императорским лицеем. С падением наполеоновской империи к лицею вернулось прежнее название — «Луи-ле-Гран», а с 1848 г. он носил имя Лицея Декарта.

Из стен этого коллежа вышли многие выдающиеся деятели Франции и среди них — Мольер, Вольтер, М. Шаль, Делакруа, В. Гюго. Именно здесь, под влиянием учителя Ришара [II, 413], родилась в молодом Эрмите одержимость математикой, не покидавшая его всю жизнь.

Л.-П.-Э. Ришар (1795—1849) прославился благодаря своим ученикам. От них мы знаем о его преподавательском таланте, его познаниях, его удивительной скромности. Он был выдающимся педагогом: умел распознать наклонности учеников, увидеть в них будущих ученых или инженеров и направлять в соответствии с установленными наклонностями. Все ученики говорили о Ришаре с любовью, а когда учитель скончался, оплакивали его как друга.

Луи Поль Эмиль Ришар родился в Ренне 31 марта 1795 г. Его отец, артиллерийский офицер, служил в армиях Республики и Империи и вышел в отставку в 1815 г., после падения Наполеона, умер в Ренне в возрасте 80 лет в 1843 г. Из четверых его детей Луи был старшим, и, естественно, на него легли основные заботы о семье. Увечье, полученное при несчастном случае, помешало юному Ришару пойти по стопам отца. Он стал учителем. В 1814 г. был назначен репетитором лицея в Дуэ, в 1815 г. — учителем 6-го класса в королевском колледже в Понтиви, затем учителем специальной математики в том же учебном заведении, директором которого был его дядя с материнской стороны, аббат Гранмулен. В 1820 г. Ришар становится преподавателем элементарной математики в колледже Св. Луи в Париже, а затем занимает ту же должность в колледже Луи-ле-Гран, где вскоре начинает вести специальную математику.

Внимательно следя за успехами науки, Ришар постоянно обогащал новыми сведениями свой специальный курс. Ученики, с огромным интересом слушавшие его, прилагали все усилия, чтобы решить предложенные им трудные задачи. Ришар старался расширить горизонт учеников и приучить их самостоятельно мыслить. Недаром он смог воспитать столь выдающихся ученых. Один из его учеников — Эварист Галуа (1811—1832), гениальный математик, погибший совсем молодым на дуэли, но успевший тем не менее обрести неувядаемую славу [II, 29, 39, 206, 207]. В своих записках Галуа, в числе лиц, кому желал бы послать работу, называет Ришара [II, 206, с. 29]. Другим учеником Ришара был У. Леверье (1811—1877), знаменитый астроном, вычисления которого позволили открыть планету Нептун, директор Парижской обсерватории. Он обучался у Ришара примерно в то же время, что и Галуа.

Бескорыстная любовь к науке, владевшая учителем, передавалась и его ученикам. При поддержке Ришара в 1842 г. начал издаваться журнал кандидатов Политехнической и Нормальной школ (Nouvelles Annales de mathématiques), в первом номере которого были опубликованы две заметки Шарля Эрмита, воспитанника коллежа Луи-ле-Гран [I, 1, 2]. Для своих учеников Ришар был воплощением высокого долга и нравственной чистоты. О нем рассказывали, например, следующее. Другу детства Ришара, чиновнику, попавшему в трудное положение, надо было срочно внести большую сумму денег, иначе ему грозило увольнение, бесчестие, возможно, арест. Ришар, не задумываясь, по первой же просьбе отдал этому человеку все свои многолетние сбережения. Постоянно выполняя обязанности главы и кормильца большой семьи своих родителей, собственной он так и не обзавелся. Умер он после продолжительной болезни 11 марта 1849 г.

Математическое дарование Эрмита Ришар заметил сразу же и в разговоре с его отцом сказал: «Это — маленький Лагранж!» Шарль был не из тех учеников, которые охотно и безоговорочно подчиняются обычной программе. Сорок лет спустя он писал своему молодому другу Т. Стилтьесу: «Я тоже боялся экзаменов. Я провел год, будучи учеником специального математического класса, в библиотеке Св. Женевьевы за чтением трудов Эйлера и других, вместо того, чтобы готовиться к ответам по геометрии, статике и пр. Г-н Н. спрашивал меня с отвращением, и я утратил из-за этого унизительного удара свои фантазии школьника-ученого» [I, 225, т. I, с. 129]. Очевидно, Ришар, восхищавшийся «маленьким Лагранжем», поощрял самостоятельные занятия Эрмита (как раньше — Галуа), и вместо зубрежки ответов на билеты вступительных экзаменов в Политехническую школу Шарль изучал первоисточники, приобретая тем самым основательные познания в высшей алгебре и математическом анализе. В конце учебного года Эрмит представил на Общий конкурс сочинение, темой которого была теория исключения. Оно было удостоено первой премии. С этой работой Эрмита впоследствии ознакомился Дарбу, писавший очерк об Эрмите [III, 5]. По словам Дарбу, ученик Ришара дал в этом сочинении доказательство оригинальности своего мышления, показал глубокое знание теории симметрических функций, использовал логарифмические производные, применил знаменитую «теорему Лагранжа» [III, 5, с. 6].

Следующий год оказался для Эрмита менее удачным. Предложенная участникам Общего конкурса тема была посвящена правилу знаков Декарта. Эрмит установил такое свойство коэффициентов алгебраического уравнения: «если коэффициенты четырех последовательных членов алгебраического уравнения составляют арифметическую прогрессию, то уравнение необходимо имеет мнимые [1] корни».[2] Но это остроумное замечание не заслужило ему даже похвального отзыва. Вопросы о числе корней уравнений и знаках коэффициентов были предметом исследований и ряда дальнейших работ Эрмита. Интерес к алгебре сохранился у него навсегда.

В октябре 1842 г. Эрмит поступает в Политехническую школу, выдержав обычный для этого учебного заведения огромный конкурс, определивший ему 68-е место, что устанавливалось в зависимости от оценок на вступительных экзаменах.[3] Позднее Эрмит писал Стилтьесу о своем отвращении «к таким вещам, как, например, формула аннюитетов[4] в арифметике . . .Как счастливы те, кто может думать только об Анализе!» — восклицает он [I, 225, т. 2, с. 41]. А знание всего этого требовалось при поступлении в Политехническую школу. В утешение напомним читателю, что другой воспитанник Ришара, Эварист Галуа, дважды провалился на вступительном экзамене по математике в Политехнической школе. В ответ «на сумасшедший смех экзаменаторов», как рассказывали, он бросил в них меловой тряпкой [II, 29, 39]. Эта неудача не помешала Галуа остаться гениальным математиком. Кстати, именно Эрмиту Ришар доверил впоследствии хранившиеся у него работы Галуа, написанные на темы, предлагавшиеся Ришаром. Эти рукописи хранятся в библиотеке Парижской академии наук [II, 206, с. 38].

---

1 Заметим, что Эрмит комплексные числа называл обычно «мнимыми» (imaginaires).

2 Nouv. Ann. mathém., 1842, t. 1, p. 385. (Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles polytéchnique et normale).

3 Там же, с. 526.

4 Аннюитет (Annuité) — разновидность ежегодной прибыли с капитала.

Знаменитая Политехническая школа была основана декретом Конвента от 11 марта 1794 г. [II, 149, 353] и вначале называлась «Центральной школой публичных работ». Среди ее первых преподавателей математики и механики были Ж.-Л. Лагранж, Г. Монж, Р. Прони, Ж.-Н.-П. Ашетт. С 1 сентября 1795 г. это высшее учебное заведение было переименовано в «Политехническую школу», девизом которой с 1805 г. стали слова: «Родина, наука, слава». В том же году школу перевели в новые здания на горе Св. Женевьевы. С 1815 по 1829 г. в ней преподавал Огюстен Коши. Воспитанниками школы в разные годы были С.-Д. Пуассон, Г. Ламе, Г. Кориолис, Л. Пуансо, Ж.-В. Понселе, М. Шаль, Ж. Лиувилль, Д.-Ф. Араго, У. Леверье, А. Пуанкаре и другие крупные ученые. Директорский пост там много лет занимал ее бывший питомец генерал Понселе. Окончившие курс Политехнической школы продолжали свое инженерное образование в одном из узкоспециальных институтов, по окончании которого получали назначение на военную или гражданскую службу.

Поступив в Политехническую школу, Эрмит продолжал посещать библиотеку Св. Женевьевы и знакомиться с сочинениями классиков математики. Особенным почетом пользовались у него «Трактат по решению численных уравнений» Лагранжа [III, 266] и купленный на сэкономленные на завтраках деньги французский перевод «Арифметических исследований» К.-Ф. Гаусса [II, 210]. Эрмит говорил впоследствии, что по этим двум книгам он изучил алгебру.

Еще будучи воспитанником коллежа Луи-ле-Гран, он пробует свои силы как исследователь, видимо, по совету Ришара, публикуя две заметки в новом журнале [I, 1, 2]. В первой статье под названием «Замечания об алгебраическом решении уравнений 5-й степени» [I, 2] Эрмит обращается к задаче, волновавшей Н. Абеля, Э. Галуа, К.-Г. Якоби, в решении которой труды самого Эрмита оставили неизгладимый след. Заметим, что работа Абеля о невозможности решения в радикалах общего уравнения 5-й степени была опубликована на немецком языке в Журнале Крелле [II, 117], а на французском имелось лишь краткое изложение ее в Бюллетене Ферюссака [II, 118]. Эрмит доказал теорему Абеля своим способом (см. с. 75).

Другая заметка Эрмита, «Геометрическое место полюсов одного конического сечения относительно другого» [I, 1], была посвящена решению задачи следующего содержания: «На плоскости имеется два конических сечения *A* и *B*. Касательная к первому коническому сечению *A* является полярной ко второму *B*. Требуется найти геометрическое место ее полюсов, если предполагается, что точка касания пробегает всю кривую *A*».

В январе 1842 г. Эрмит по совету профессора Политехнической школы Ж. Лиувилля послал письмо берлинскому профессору К.-Г. Якоби с сообщением о своих исследованиях по делению абелевых трансцендентных. История повторялась. За 16 лет до этого К.-Г. Якоби, в то время приват-доцент Кёнигсбергского университета, написал письмо прославленному французскому ученому А.-М. Лежандру о своих обобщениях теории преобразования эллиптических функций. Письмо Якоби к Лежандру начиналось словами: «Милостивый государь, один молодой геометр осмеливается представить Вам несколько открытий, сделанных им в теории эллиптических функций, к которым он был приведен внимательным изучением Ваших прекрасных работ. Именно Вам, милостивый государь, эта блестящая часть Анализа обязана той высокой степенью совершенства, какой она достигла, и лишь идя по стопам столь великого мастера, геометры смогут развить ее далее тех границ, в которых она находится до сих пор. Таким образом, Вам я обязан предложить то, что следует далее, как свидетельство восхищения и преданности» [II, 233, т. I, с. 385].

Как отметил Дарбу, похвалы, воздаваемые молодым автором письма знаменитому Лежандру, были вполне тем заслужены: «В частных открытиях Фаньяно и Ландена, в гениальном интегрировании Эйлера Лежандр сумел распознать первые черты важной ветви Анализа, и несмотря на равнодушие, с каким встречали все его труды соотечественники, он не прекращал работать в течение почти пятидесяти лет над созданием теории, охватывающей все интегралы, в которые входит одна и та же иррациональность, а именно — квадратный корень из полинома четвертой степени. И именно в тот самый момент, когда Лежандр только что сумел систематизировать свои результаты и начал публикацию большого трактата по теории эллиптических функций [II, 287], открытия Якоби, за которыми последовали открытия Н. Абеля, его знаменитого современника и соперника, должны были в корне преобразовать воздвигнутое Лежандром здание и внести элементы, предназначенные для обновления всего Математического анализа. . .

С того памятного времени Якоби сделался одним из знаменитых мастеров (Maîtres) математики. Благодаря бессмертным трудам Якоби и Абеля не только достигла более высокой ступени развития теория эллиптических функций, но родилась и новая теория, источником которой была теорема Абеля, названная Лежандром monumentum aere perennius.[5] Эта теория связала изучение эллиптических функций с исследованием основных трансцендентных, полученных с помощью интегрирования некоторых алгебраических дифференциалов. К тем из них, которые ближе всего связаны с эллиптическими трансцендентными, относятся результаты, сообщенные Эрмитом» [III, 5, с. 9—10].

Эрмит распространил на абелевы функции теоремы, данные Абелем и Якоби для деления аргумента в эллиптических функциях. То, что умели делать для уравнения с одной неизвестной в теории эллиптических функций, он сумел осуществить для уравнений с несколькими неизвестными, с помощью которых производят деление абелевых функций, полученных при интегрировании квадратных корней [III, 5, с. 10].

Письмо Эрмита к Якоби напомнило Дарбу переписку Якоби с Лежандром, а Лиувиллю — дебют С.-Д. Пуассона: «Да простят нам это сравнение старой и новой Политехнической школы, но именно таким образом Пуассон при своем дебюте распространил на определение степени конечного результирующего уравнения при исключении неизвестных из любого числа уравнений метод симметрических функций, применять который раньше не умели более чем для двух уравнений с двумя неизвестными» [III, 5, с. 10]. Так писал Лиувилль [II, 309] в рапорте о работе Эрмита [I, 4].

Получив письмо Эрмита, Якоби ответил: «Самым искренним образом благодарю Вас за прекрасное и важное сообщение, которое Вы мне сделали, касающееся деления

---

[5] Памятник прочнее бронзы (лат.) — слова из стихотворения Квинта Горация Флакка «Памятник». (Гораций. Полн. собр. соч. М.—Л., 1936, с. 138).

абелевых функций. Обнаружением этого деления Вы открыли широкое поле для новых исследований и открытий, которые дадут сильный толчок прогрессу искусства анализа» [II, 231, т. 2, с. 115—122; III, 5, с. 10]. Якоби просил поблагодарить своего прославленного друга Лиувилля «за большое удовольствие, доставленное чтением мемуара молодого человека, талант которого с таким блеском проявился в самой абстрактной части науки».

Знаменитый ученый вскоре опубликовал два письма Эрмита: сначала — в Журнале Крелле, затем в своем Собрании сочинений [I, 3; II, 233].

После столь успешного начала можно было ждать не менее блестящего продолжения. Но тут в жизнь юноши вторглись события, на время задержавшие его научные занятия.

От рождения Эрмит прихрамывал на правую ногу и принужден был ходить с тростью. Это не помешало ему поступить в Политехническую школу, но в середине учебного года решением Министерства ему запрещено было продолжать там занятия. Лишь благодаря ходатайству политических деятелей его департамента Эрмита оставили в числе студентов, но с условием, что по окончании Школы он не станет претендовать на какое бы то ни было назначение на государственную службу. При таком условии пребывание в Школе теряло всякий смысл, и Эрмит, покинув ее в конце первого учебного года, остался в Париже и начал готовиться к экзаменам на степень бакалавра. Одновременно он продолжал работу в избранной им области математики — теории эллиптических функций и теории чисел. Две его статьи были представлены Парижской академии наук, и одна из них — о делении абелевых или ультраэллиптических функций [I, 4] — помещена в десятом томе «Мемуаров, представленных Академии наук посторонними учеными» (как значилось там — «воспитанником Политехнической школы»). Лиувилль представил работу юного Эрмита Парижской академии наук в заседании секции геометрии в августе 1843 г. Комиссарами (рецензентами) работы были назначены он и Ламе, но докладывал Лиувилль, который, видимо, и был автором отзыва. Свое сообщение он начал так: «Академия поручила нам, г. Ламе и мне, дать ей отчет об одном мемуаре, относящемся к одной из самых абстрактных частей Анализа — делению абелевых или ультраэллиптических функций, автор которого, г. Эрмит, лишь несколько месяцев фигурирует среди воспитанников Политехнической школы. С живейшим интересом мы представляем сегодня результаты нашего изучения. Нам достаточно несколько слов, чтобы показать всю важность работы нашего юного соотечественника» [II, 309, с. 292].

Далее Лиувилль останавливается на сравнении формул тригонометрии: выражениях косинусов (синусов) кратных дуг через косинусы (синусы) простых дуг и выражении синуса или косинуса простой дуги через синусы или косинусы кратной дуги. Формулы второго типа задач значительно сложнее. Первые формулы он называет ф о р м у л а м и  у м н о ж е н и я круговых функций, вторые — ф о р м у л а м и  д е л е н и я дуг круга.

Для эллиптических функций, продолжает Лиувилль, задачи, относящиеся к умножению, также решаются сразу, а задачи, относящиеся к делению аргумента, зависят от решения алгебраических уравнений высших степеней. Как и для тригонометрических функций, эти уравнения — от одной переменной и решаются с помощью радикалов, если допустить некоторые вспомогательные иррациональности. Абель первым дал общую теорию деления эллиптических функций. Довольно сложные формулы, которые он нашел, были затем упрощены Якоби. Рассмотрение алгебраических дифференциалов, содержащих квадратный корень от полинома 3- или 4-й степени, порождает эллиптические трансцендентные. Увеличивая степень полинома, приходят к ультраэллиптическим функциям. Чтобы перейти от теории эллиптических функций к теории ультраэллиптических, говорит Лиувилль, «надо было сначала, чтобы Абель открыл столь замечательную теорему о суммах интегралов; надо было, в особенности, чтобы г. Якоби объяснил истинный смысл этой теоремы и существенное различие в природе эллиптических трансцендентных и трансцендентных ультраэллиптических, несмотря на видимое сходство их происхождения. . . Этот великий Геометр показал, что, например, в случае полинома пятой или шестой степени под квадратным радикалом. . . нельзя, как в случае полинома меньшей степени и обычных эллиптических трансцендентных, вводить в рассмотрение простые функции от двух переменных. Здесь необходимы функции от трех и более переменных. Главная идея принадлежит г. Якоби, без нее прекрасная теорема Абеля осталась бы в некотором роде бесполезной! Не желая ничего отнимать у бессмертной репутации Геометра из Христиании, разве нельзя сказать, что г. Якоби дал доказательство своей скромности, когда назвал функции нескольких переменных, введенные им в анализ. . ., именем абелевых функций?

Как бы то ни было, теорема Абеля, соответствующим образом истолкованная, дает легкое решение задачи *умножения* (курсив мой, — *Е. О.*) аргументов на одно и то же целое число в ультраэллиптических трансцендентных и доказывает, что задача *деления* (курсив мой, — *Е. О.*) зависит от рассмотрения системы алгебраических уравнений. Общее решение этой системы уравнений составляет предмет мемуара г. Эрмита. Автор сумел осуществить это с помощью радикалов, допустив деление полных функций (то, что г. Якоби называет делением индексов)».

Отзыв заключался словами о том, что мемуар Эрмита весьма достоин одобрения Академии и что он должен быть опубликован в сборнике «Savants étrangers».

После чтения отзыва слово взял академик Либри, потребовавший от почтенного собрания не забывать о том, что он, Либри, первым доказал важное утверждение, высказанное впервые Гауссом, о делении лемнискаты на равные части. Это выступление, послужившее поводом к длительной дискуссии, продолжавшейся несколько заседаний, прямого отношения к работе Эрмита не имело. Либри оспаривал право доказательства у Абеля. Поскольку имя Либри не раз встречается на страницах данного издания и, связанное с успехами в математике, еще и печально знаменито, несколько слов о нем.

Гульельмо Брут Ицилий Тимолеон, граф Либри-Каруччи делла Сомайа (1803—1869) происходил из древнего флорентийского рода и с детства поражал своими математическими способностями. В 20 лет он уже преподавал в университете Пизы. Оказавшись замешанным в каком-то политическом деле, Либри вынужден был покинуть Италию и жить во Франции. В 1832 г. он становится профессором Коллеж де Франс, а в 1833 г. избирается в Парижскую академию наук и принимает французское подданство. Позднее он — уже профессор Сорбонны, генеральный инспектор народного образования, редактор Savants étrangers. Автор многих работ по теории чисел и истории математики (среди последних особой известностью пользуется его «История математических наук в Италии» [II, 301]), Либри в то же время был интриганом по натуре и, как оказалось, «не чист на руку». Во время порученной ему ревизии библиотек и архивов Франции он похитил ряд ценнейших рукописей и книг, которые стал сбывать за большие деньги. Началось следствие. Не дожидаясь суда, Либри бежал в Англию, захватив с собой украденное. В 1850 г. он был заочно осужден на 10 лет тюремного заключения, но продолжал распродажу книг, чем нажил значительное состояние. Часть книг, похищенных во Франции, позднее была вновь приобретена французским правительством.

В ходе дискуссии с Либри Лиувилль отметил, что в работах Либри имеются погрешности, недоказанные утверждения, а в конце одного из своих выступлений сказал: «После обсуждения, где столько говорилось об алгебраических уравнениях, я надеюсь заинтересовать Академию, известив ее, что в бумагах *Эвариста Галуа* (эти рукописи были мне доверены г. Огюстом Шевалье) (курсив мой, — *Е. О.*) Галуа замечает мимоходом, что всегда можно заставить решение данного алгебраического уравнения зависеть от решения вспомогательного уравнения, такого, что два его корня, взятые наугад, выражаются рационально один через другой и второй через первый, по желанию» (C. R., 1843, t. 17, p. 448—449).

Таким образом, в связи с первым представлением работы Эрмита Академии наук в «Отчетах» Академии появилось упоминание о наследии Эвариста Галуа и тех его результатах, развитию которых Эрмит посвятил много сил.

Один из учеников Эрмита, Поль Пенлеве, писал: «Начиная с первых работ проявляется главное свойство Эрмита — глубина. Он никогда не рассеивался в исследованиях поверхностных и туманных. Каждый вопрос представал перед ним всегда в исключительно точной форме: он проникал в его глубоко скрытые тайны, он вносил туда такой свет, что и все другие вопросы подобного рода оказывались сразу решены» [II, 343, т. 2, с. 8].

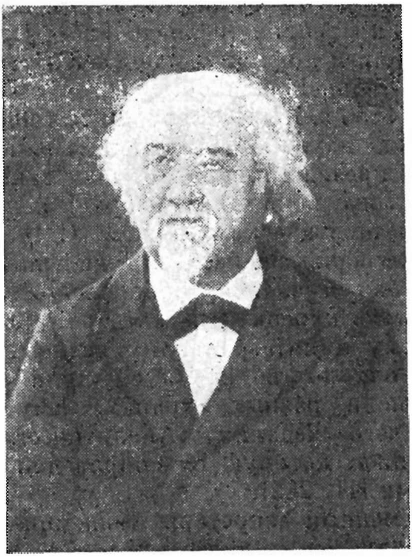
Говоря о делении абелевых трансцендентных, предмете первого письма Эрмита к Якоби, написанного в 1843 г., Пенлеве замечает, что в то время существование новых трансцендентных было еще неизвестно большинству аналитиков — «свидетельство о их рождении еще не было зарегистрировано наукой». Несмотря на это, Эрмит не побоялся сообщить прославленному Якоби о своих результатах в этой новой области. Впоследствии работа о преобразовании этих трансцендентных «окончательно поместила Эрмита среди великих математиков» [II, 343, т. 2, с. 8—9].

В это время состоялось знакомство Эрмита с братьями Бертран — Александром и Жозефом, надолго связавшее всех троих сначала дружескими, а потом и родственными узами. В программу экзаменов на степень бакалавра входил древнегреческий язык, который Эрмит стал изучать совместно с Александром Бертраном, читая с ним Гомера.

Представление об облике молодого Эрмита того периода дает карандашный портрет, помещенный в первом томе его «Сочинений»: волнистые волосы, высокий лоб, умные ласковые глаза, лицо доброжелательное и приветливое. Как позднее рассказывал Жозеф Бертран, один из братьев его отца, доктор Станислас Бертран, никогда не занимавшийся математикой, в молодости был хорошо знаком с Эваристом Галуа. Они встречались в 1830 г. в редакции журнала «Трибуна» («La Tribune») на тайных собраниях общества «Помоги себе сам, и небо тебе поможет» («Aide-toi et dieu t'aidera»). Вместе с Галуа Станислас Бертран оказался на скамье подсудимых по политическому делу. Спустя пятнадцать лет после этих событий Станислас Бертран, как-то придя к своему племяннику Жозефу, застал у того молодого человека. Присутствуя при их беседе, дядя удивленно, задумчиво и долго следил за гостем, а назавтра сказал племяннику: «Я испытал вчера величайшее волнение. Мне показалось, что в течение четверти часа я видел и слышал Эвариста Галуа». А он видел и слышал юного Эрмита [II, 131, с. 400].

Александр Бертран (1820—1902) стал впоследствии известным археологом, членом Академии надписей; Жозеф был коллегой Эрмита, поэтому о нем несколько подробнее.

Жозеф Луи Франсуа Бертран (1823—1900) родился в Париже. В детстве занимался математикой под руководством отца, выпускника Политехнической школы, потом — в колледже Св. Луи. В возрасте одиннадцати лет он успешно сдал вступительные экзамены в Политехническую школу, но не был принят по возрасту, а шесть лет спустя зачислен туда первым из кандидатов. В 17 лет он публикует свою первую научную статью по теории электричества. Затем



*Жозеф Бертран*

печатает еще ряд статей — о неопределенных формах, о теореме Якоби, по теории дифференциальных уравнений. В 1845 г. выходит его работа, в которой сформулирован так называемый «постулат Бертрана» (см. с. 29). Она обратила на себя внимание знаменитого Коши.

Еще в 1842 г. братья Бертран, возвращаясь из Версаля в Париж, попали в железнодорожную катастрофу. Оба пострадали: у Жозефа оказалась сломанной переносица, у Александра — нога. Через несколько месяцев после этого случая Жозеф женился на сестре одного из потерпевших, мадемуазель Аклок.

После окончания Политехнической школы Жозеф Бертран специализировался в области горного дела, был инспектором шахт, позднее — преподавателем в лицее. В марте 1844 г. он становится репетитором по анализу в Политехнической школе (возможно, тогда-то и состоялось его знакомство с Эрмитом), с 1847 по 1851 г. — экзаменатором, с 1856 по 1895 г. — профессором анализа. Кроме того, с 1847 г. Бертран — ассистент у профессора Ж.-Б. Био в Коллеж де Франс, а после смерти последнего — профессор той же кафедры. Он читал различные курсы, начиная с теории сравнительного изучения капиллярных явлений и кончая теорией электричества, термодинамикой и теорией ошибок.

28 апреля 1856 г. Жозеф Бертран был избран в Парижскую академию наук, в 1873 г. стал ее вице-президентом, а в 1874 г. — президентом, и этот пост занимал до 23 ноября того же года, пока его не избрали непременным секретарем по математическим наукам. С 1858 по 1862 г. он еще и профессор высшей математики в лицее Наполеона. Бертран состоял и членом Французской академии. Им издано несколько курсов — по алгебре, арифметике, дифференциальному и интегральному исчислению, термодинамике. Все они долгое время служили руководствами для студентов в разных странах. Ему принадлежит заслуга третьего издания «Аналитической механики» Ж.-Л. Лагранжа, которую он сопроводил собственными комментариями [II, 262].

Как непременный секретарь Академии наук Бертран подготовил ряд очерков о французских ученых, членах Академии наук. Он сам был членом многих академий и научных обществ, в том числе членом-корреспондентом Петербургской академии наук (1859 г.).

Характером не слишком уживчивый, Бертран своим противникам отвечал едкими эпиграммами. В журнале «Nature», откуда почерпнуты эти сведения [II, 147], сказано также, что он «стал не только ученым, но и хорошим бизнесменом, что с точки зрения широкой публики несовместимо с гениальностью» [II, 147]. Эрмит, с его обычно доброжелательным отношением к людям, далеко не всегда одобрял действия Бертрана. Между ними случались и ссоры. Однажды примирение состоялось только благодаря вмешательству С. В. Ковалевской, жившей в это время в Париже. Из переписки Эрмита с Дю Буа-Реймоном видно, что, высоко ценя Бертрана как ученого, Эрмит отрицательно относился к некоторым его человеческим проявлениям.

Вынужденный уход из Политехнической школы и подготовка к экзаменам, конечно, задержали на некоторое время научные занятия Эрмита. Но уже в августе 1844 г. он послал Якоби письмо, содержавшее новые результаты по теории эллиптических функций. В начале 1847 г. он отправляет еще четыре письма к Якоби, излагая в них основные идеи своих будущих исследований, и не только своих собственных, но и тех, которыми занимались впоследствии многие его ученики (см. с. 43).

Осенью 1845 г. состоялось знакомство Эрмита с крупнейшим французским математиком Огюстеном Коши. В это время Коши начал публиковать серию статей о перестановках и их приложениях к разным вопросам, поводом для чего ему послужила статья Ж. Бертрана, доказавшего несколько теорем, установленных Коши еще в 1815 г. Именно та статья Бертрана, где был использован им в рассуждении постулат,[6] получивший название «постулата Бертрана» [II, 133]. Г. П. Матвиевская установила [II, 58], что утверждение, подобное «постулату Бертрана», содержится в записных книжках Л. Эйлера, о чем, разумеется, Бертран знать не мог. Коши интересовало, в частности, число значений, которые может принимать функция от $n$ независимых переменных при перестановке этих переменных произвольным образом. Коши начал с определений и свойств перестановок. В своей работе [II, 168, с. 593] он говорил о том, что Бертран при доказательстве одной из теорем опирается на лемму, принятую им только на основании наблюдений над таблицами простых чисел до 6 млн, т. е. без доказательства. При этом Коши добавляет, что сам он эту теорему доказал строго, хотя нигде не опубликовал доказательство. В заметке, доложенной Академии 1 декабря 1845 г., Коши пишет: «Г. Эрмит сообщил мне, что уже давно установил транзитивную функцию, о которой я говорил, а именно ту, которая представляет только шесть различных значений. Однако метод, которым он (Эрмит, — *Е. О.*) смог установить существование этой функции, отличен от того, какому следовал я сам и который по причине своей полезности для решения многих задач кажется достаточно интересным, чтобы его изложить в какой-нибудь другой статье» [II, 155, с. 1200].

В «Мемуаре о различных свойствах систем подстановок...» Коши вновь упоминает Эрмита и даже точно датирует их свидание. Он вспоминает, что почти 30 лет назад [II, 160, с. 1247] он сам представил величины (аргументы), от которых зависит функция, индексами, сделав последние число-

---

[6] «Постулат Бертрана» состоит в следующем: «Начиная от $a > 3$ существует всегда простое число, бо́льшее, чем $a$, и меньшее, чем $2a—2$» [II, 133, с. 129].

выми. Тогда все подстановки, с помощью которых одни величины заменялись другими, оказались выраженными через индексы. «Именно так, заменяя числами различные переменные, г. Эрмиту удалось, как он сказал мне, не только установить существование транзитивной функции шести переменных, которая представляет шесть различных значений, но получить и другие результаты, относящиеся специально к простым числам 5, 7, 11 и приложимые к теории трех модулярных уравнений, степени которых суть эти простые числа, увеличенные на единицу. Хотя при встрече, которая состоялась 19 ноября (1845 г., — *Е. О.*), г. Эрмит не сказал мне, в чем точно состоит его метод, я без труда признаю, что именно эта встреча возбудила во мне живое желание углубить еще более вопросы, относящиеся к теории перестановок, и побудила меня исследовать с большим старанием все следствия, какие можно вывести из принципов, уже установленных мною в Comptes rendus. Мои исследования привели меня сначала к результатам, изложенным в двух последних заседаниях и в § 1 настоящей статьи. Теперь я укажу некоторые другие результаты, которые легко получаются из уже установленных формул» [II, 160, с. 1247—1248].[7] По-видимому, речь шла о теореме, доказанной Эрмитом в его статье [1, 2] в связи с исследованием решения уравнений пятой степени.

Несмотря на свой научный авторитет, Коши вначале не вызвал в молодом Эрмите особого расположения. Ведь именно он не дал отзыва о работах Абеля и Галуа, как неоднократно слышал Эрмит от Ришара. Может быть, по этой причине при первой встрече он не рассказал Коши, в чем точно состоит его метод. Но впоследствии они сблизились. По признанию самого Эрмита, под влиянием Коши он стал убежденным католиком, после того как тот оказал ему поддержку во время тяжелой болезни. Эрмит позна-

---

[7] В интересной и содержательной статье Любоша Нового [II, 63] остался не вполне выясненным вопрос, чем были вызваны статьи Коши в Comptes rendus за 1845 г. Именно работы Эрмита и Бертрана, как пишет сам Коши, явились стимулом для возобновления его занятий этими вопросами. При этом статьи в Comptes rendus были напечатаны раньше, чем в его «Exercices d'analyse et de physique mathématique» (Paris, 1844, p. 151—252); хотя на обложке книги стоит 1844 г., но в тексте имеются ссылки на работы 1845 г. (см., например, с. 149).

комил Коши с работой Чебышева о простых числах в натуральном ряде, содержавшей доказательство «постулата Бертрана» (см. с. 29), хорошо известного Коши со времени публикации статьи Бертрана (1845 г.).

Итак, в 1845 г., еще не окончив высшего учебного заведения, Эрмит уже получил важные научные результаты и установил дружеские отношения с тремя крупнейшими математиками — Коши, Лиувиллем, Якоби. Лишь 7 июня 1847 г. он сдал экзамены на степень бакалавра литературы, а в июле того же года — на степень бакалавра математических наук. Последний экзамен принимала комиссия, состоявшая из его прежнего учителя физики Депре, известного математика Ш. Штурма и Жозефа Бертрана, который к этому времени уже преподавал на Факультете наук. В июле 1848 г. Эрмит становится экзаменатором по приему в Политехническую школу, а с 12 декабря 1848 г. — еще и репетитором по математическому анализу.

Даже на скромном посту экзаменатора по приему в Политехническую школу Эрмит сумел оставить неизгладимый след у абитуриентов. Он обладал особым искусством самый, казалось бы, простой вопрос повернуть неожиданной гранью, что превращало его в важный и интересный, открывающий перед учащимися широкие новые горизонты. Как писал о нем Дарбу [III, 5, с. 15], «он делал более значительным и преобразовывал все, чего касался». К тому же он был удивительно терпеливым экзаменатором и отличался большой точностью суждений и оценок.

В 1848 г., поступив на службу, Эрмит сделал предложение сестре Александра и Жозефа — Луизе Бертран, которое было принято. Супруги прожили вместе более 50 лет, жена ненамного пережила Эрмита. У них были две дочери. Старшая вышла замуж за Жоржа Форестье, одного из выдающихся французских инженеров, главного инспектора мостов и дорог. Иногда Форестье помогал Эрмиту в его расчетах. Младшая дочь стала женой математика Эмиля Пикара, одного из любимых учеников отца. Впоследствии Пикар сменил Эрмита на его кафедре в Сорбонне.

Каждое лето Эрмит, обычно в сопровождении жены, ездил по стране для приема экзаменов в Политехническую школу. В свободное время посещал оперные спектакли со своими коллегами-экзаменаторами — Ж. Серре и О. Бонне. Не получив никакого музыкального образования, Эрмит унаследовал от отца прекрасный слух и превосходную музыкальную память, легко подбирал на фортепьяно услышанные мотивы. В отличие от музыкального искусства живопись и скульптура оставляли его равнодушным. Так, в письме к П. Дю Буа-Реймону от 29 января 1886 г. он писал: «Никогда не хожу на выставки картин. Я не интересуюсь ими, так как ничего в них не понимаю. Но я охотно допускаю, что большой художник. . . много прибавляет к славе своей страны» [I, 226, с. 294]. Большую часть его досуга поглощали научные занятия.

Эрмит продолжал исполнять скромные обязанности экзаменатора и репетитора, а его товарищи уже успели получить назначения на должности профессоров Сорбонны, Политехнической школы, Коллеж де Франс. Правда, в 1848 г. в связи с внезапным бегством из Франции профессора Либри (см. с. 24) оказалось вакантным его место в Коллеж де Франс, и в течение двух лет Эрмит читал там математику, пока в штат не был взят Лиувилль. В результате этих лекций Эрмит написал статью, где изложил теорию двоякопериодических функций с новой, оригинальной точки зрения. Работа эта, к сожалению, не сохранилась, и о ее содержании можно судить только по отзыву о ней, представленному Академии наук О. Коши [I, 9]. Принятый в статье способ изложения теории эллиптических функций Эрмит впоследствии использовал в своем преподавании и приложении к «Трактату» Лакруа [II, 259].

Лишь в 1862 г. по инициативе знаменитого Луи Пастера (1822—1895), основоположника современной микробиологии, при Нормальной школе была образована новая кафедра, которую в течение семи лет занимал Эрмит. Одним из первых его учеников в Нормальной школе был Гастон Дарбу, другим — Жюль Таннери, оставивший, как и Дарбу, восторженные воспоминания об Эрмите (см. с. 36). Прежде чем стать профессором, Эрмит 40 голосами из 48 был избран членом Парижской академии наук (14 июля 1856 г.), на место Ж. Бине. В 1889 г. он был вице-президентом Академии наук, в 1890 г. — президентом.

# Глава 2

## Эрмит — профессор

В 1869 г. Эрмит, которому уже исполнилось 46 лет, сменил вышедшего в отставку профессора Ж. Дюамеля в Нормальной школе и Сорбонне. 11 ноября 1869 г. он был назначен также профессором математического анализа в Политехнической школе. Кафедру в Политехнической школе он занимал до 1876 г., после чего преподавал только в Сорбонне, где с 1875 г. читал интегральное исчисление, теорию функций, теорию эллиптических функций, часто сокрушаясь по поводу того, что из регулярного преподавания исключена теория чисел. Эрмит был прирожденным преподавателем, воспитателем молодых талантов. Не случайно среди его слушателей оказалось столько будущих знаменитых ученых. Многие из них оставили свои воспоминания о методе его преподавания, свои впечатления от общения с ним и прочитанных им лекций.

Борель писал: «Одна из фраз, которая меня поразила сильнее всего в продолжение трех лет, когда я слушал лекции Эрмита, следующая: „Самым плодотворным источником математических открытий является внимательное наблюдение фактов“. Чувствовалось, что Эрмит испытал на себе всю прелесть (l'excellence) этого метода» [III, 2, с. XII].

Одним из краеугольных камней всякого математического исследования Эрмит считал наблюдение и постоянно напоминал, что оно занимает важное место в процессе математических открытий, что подтверждается историей науки. «Все ветви математики доставляют доказательства и подтверждения этого утверждения, но я их выберу предпочтительно в той ветви, которую рассматривают как наиболее абстрактную, в теории чисел» [I, 224].

В качестве фактов, установленных сначала с помощью наблюдения, Эрмит приводил периодичность разложения в цепные дроби корней неопределенного уравнения второй степени с целыми коэффициентами, закон взаимности квадратичных вычетов, который был выведен Эйлером с помощью наблюдения, приближенное выражение количества простых чисел до некоторой границы. Эрмит напоминал, что Якоби, желая узнать, верно ли, что всякое натуральное число есть сумма девяти кубов, следуя предположению, высказанному Варингом, построил с помощью искусного вычислителя таблицы, дававшие все разложения целых чисел на сумму кубов до числа 12 000. Эрмит говорил также о значении наблюдения и в самих процессах доказательства математических теорем [I, 224].

Не меньшую роль в процессе математических исследований Эрмит отводил и установлению связей между разными областями математики. Он говорил студентам: «Это Риман установил важную роль кратных точек и обнаружил с помощью своих глубоких открытий непредвиденную и в высшей степени интересную связь между Геометрией и самыми абстрактными теориями интегрального исчисления» [III, 5, с. 28]. О трудах Гаусса и Лежандра относительно разложения чисел на сумму квадратов он сказал: «Эти знаменитые геометры, проводя ценою великих усилий свои глубокие исследования в этой части высшей арифметики, стремились соединить ее с другой областью науки и дали пример того таинственного единства, какое иногда проявляется между самыми отдаленными друг от друга аналитическими работами» [III, 5, с. 28]. В очерке о Л. Кронекере Эрмит писал по поводу удивительных связей, существующих между теорией эллиптических функций и теорией квадратичных форм: «Г. Кронекер сделал очевидным, что теория квадратичных форм отрицательного определителя явилась предшественницей теории эллиптических функций, что понятия классов и родов, понятия правильных детерминантов и показателя неправильности могли бы быть получены с помощью аналитического исследования и изучения свойств трансцендентых. Эта зависимость, которую ничто не заставляло предполагать между двумя столь различными, столь далекими друг от друга областями математических знаний, — сюрприз для ума. Он привлекает внимание к пути развития науки, который от нас частично скрыт, и к таинственной координации наших работ, что удваивает наши усилия и ведет к ее дальнейшему развитию» [III, 5, с. 29].

Эрмит считал, что числа и функции анализа не являются произвольным продуктом человеческого разума. Их изучают так же, как изучают свои предметы физики, химики, зоологи и пр. [I, 224]. В одном из писем к Стилтьесу Эрмит писал: «Для себя я всего лишь алгебраист, и я никогда не оставлял сферу субъективной математики. Тем не менее я убежден, что самым абстрактным спекуляциям Анализа соответствуют реальные соотношения, существующие вне нас, которые когда-нибудь достигнут нашего сознания. Я верю, что усилия геометров создадут направление, которое заставит их идти к этой цели, и история науки, как мне кажется, доказывает, что аналитические открытия происходят в момент, необходимый для того, чтобы сделать возможным каждый новый успех в изучении явлений реального мира, которые только можно вычислять (к которым только применимы математические методы, — *Е. О.*)» [I, 225, т. I, с. 8].

В письме к Дю Буа-Реймону Эрмит говорит о необходимости сближения математики и естественных наук, «видя в простых числах, иррациональных и трансцендентных числах реальности вне нас, которые существуют с той же необходимостью, что и субстанции и все существа видимой природы». И далее: «Но изучение функций анализа есть также и изучение законов природы. . . Что до меня, то я убежден, что все аналитические факты существуют вне нас и являются нам с той же необходимостью, что и свойства материи и явления реального мира. Вследствие этого я вижу в изучении функций — изучение объективной реальности, а в законах, относящихся к функциям, — отражение физических законов» [I, 226, с. 203].

В своем преподавании Эрмит старался общие теоретические вопросы иллюстрировать примерами, в частности многочисленными примерами сопровождал изложение общих утверждений Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера по теории функций. «Прекрасное поле приложений давали ему эллиптические функции. Курс в Сорбонне служил Эрмиту поводом для его собственных исследований, всегда носивших на себе отпечаток его личности» [III, 5]. Стремление многих преподавателей внести в элементарное обучение чрезмерную строгость Эрмит не одобрял: «Восхищение, говорят, принцип познания. . . Я воспользовался бы этой мыслью, дабы выразить пожелание, чтобы уделяли в преподавании больше внимания простым и прекрасным вещам, чем высшей строгости, которая сегодня в таком почете, но весьма мало привлекательна, часто даже утомительна и не имеет большой пользы для начинающего, который не может понять, что в ней интересного». Приведя эти слова, Дарбу заключает: «Весь метод обучения Эрмита кратко описан в этих нескольких строчках: никто более него не мог вызвать восхищение вещами простыми и прекрасными» [III, 5, с. 48].

К восторженным отзывам бывших слушателей Эрмита примыкает и высказывание Пикара: «Те, кто его слушал, сохранят навсегда память об этом несравненном преподавании. Какие удивительные беседы серьезным тоном, временами вызывавшие восторг слушателей, когда по поводу самого, казалось бы, элементарного вопроса он умел открыть необъятные горизонты и когда рядом с сегодняшней наукой мы вдруг видели науку завтрашнюю» [III, 25, с. XXXIV].

Ж. Таннери вспоминал: «Сколько замечаний, тонких и глубоких, по поводу рассматриваемых сюжетов! Какой свет проливался на другие предметы, которые профессору нравилось освещать на расстоянии. Сколько удивительных примеров, предназначенных для иллюстрации материала, пленяющих слушателей заключенным в них интересом» [III, 5, с. 30]. Таннери говорил также, что «воспитанники Эрмита слушают речи, где есть и обобщения, и торжественность, и нечто вроде страстной нежности. Они ощущают свет, который проникает до самой глубины предметов, который их разъединяет и синтезирует, показывает в них тончайшие связи, придает математическим абстракциям цвет и жизнь» [III, 5, с. 33].

По словам Эмиля Бореля, «самые сложные и сухие вопросы математики, казавшиеся самыми неинтересными, преображались, так как Эрмит видел их скрытую природу. Может быть, кто-нибудь и мог бы заставить понимать математику и восхищаться ею, как он, но никто не мог бы заставить полюбить ее так глубоко, как он» [III, 2, с. XIX]. Поль Пенлеве писал, что тот, «кто имел счастье быть учеником великого Геометра, не сможет забыть трепет перед прекрасным или таинственным, пробегавший по аудитории, когда Эрмит рассказывал о каком-нибудь восхитительном открытии или говорил о чем-то неизвестном. Он был несравненный профессор, и его берущее за живое слово внезапно открывало широкие горизонты в разных областях науки. Оно возбуждало любопытство и побуждало к открытию новых важных проблем» [II, 343, т. 2, с. 7—11].

Из года в год Эрмит менял содержание своих курсов, расширял круг трактуемых вопросов, включая в лекции последние достижения математиков разных стран. Об этом свидетельствуют воспоминания слушателей, письма к зарубежным ученым, различные издания «Курса» Эрмита, явившиеся плодом его преподавания.

Портрет Эрмита-преподавателя останется незавершенным, если хоть несколько слов не будет сказано о его учебных курсах. Изданные печатным или литографским способом, они распространялись по всему миру и оказали огромное влияние на несколько поколений математиков. Первый из них — «Курс анализа для Политехнической школы» (1873 г.) [I, 78] — представляет собой учебник по дифференциальному и интегральному исчислению и состоит из «Введения» (46 с.), «Дифференциального исчисления» (42 с.), «Интегрального исчисления» (150 с.) и его «Геометрических приложений» (75 с.). По-видимому, Эрмит предполагал издать вторую часть этого курса, поскольку на обложке проставлено — «часть первая».

Вот отрывок из «Введения», которым Эрмит, видимо, предварял и устное изложение своего курса.

«Элементы математики представляют собою два обособленных отдела: Арифметику с Алгеброй и Геометрию. Нет ничего более различного в их истоках, чем соображения и методы, принадлежащие этим двум частям одной и той же науки; хотя и объединенные в Аналитической геометрии, они существенно отличаются друг от друга и тогда, когда их изучают (по отдельности), и, по-видимому, они соответствуют особым способностям и склонностям ума.

Это различие между Алгеброй и Геометрией вновь проявляется в Дифференциальном и Интегральном исчислении. На самом деле, об этих новых ветвях математики можно сказать, что они суть как бы более обширная и более плодотворная Алгебра, приложенная к тем вопросам Геометрии, которые недоступны элементарному исчислению, таким как квадратура кривых, определение объемов, ограниченных некоторыми поверхностями, спрямление плоских и пространственных кривых и т. д.

Этот взгляд сначала не подтверждается названием, часто употребляемым, — „Исчисление бесконечно малых" («calcul infinitésimale»), которое, казалось бы, предполагает изучение науки о бесконечном и происходит из более важной роли этого понятия здесь, чем в элементах. Но на самом деле роль бесконечного в этих высших отделах математики сводится к небольшому числу утверждений, настолько простых, что их можно было бы высказать и доказать в самом начале Геометрии, а повторяющееся приложение все тех же утверждений составляет то, что называют инфинитезимальным методом — методом, который будет изложен и которому в этом курсе будет дано много примеров. Но для начала мы должны сказать, что, оказываясь все более и более плодотворным, понятие бесконечного остается всегда просто понятием величины, большей, чем всякая другая данная величина, и что условия его употребления остаются всегда теми же, что и в элементах Геометрии.

. . . Предмет этих лекций, таким образом, — продолжение Алгебры, к которому присоединяется несколько весьма элементарных утверждений о бесконечном, приводящих к решению с помощью Исчисления (Calcul) вопросов Геометрии, о которой говорилось ранее.

Прежде чем перейти к изложению предмета, естественно, оглянувшись на Алгебру, убедиться, что не существует никакого разрыва между этим курсом и предшествовавшим обучением. Напомню, что начинают с распространения на буквенные величины обычных арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления). Затем рассматривают решение уравнений и систем уравнений первой степени, наконец переходят к уравнениям любой степени. Но в связи с подразделением Алгебры начинается уже специальное рассмотрение полиномов, расположенных по степеням переменной, а более глубокое изучение этого раздела образует то, что называют общей теорией уравнений (выделено Эрмитом, — *Е. О.*). Элементы Алгебры имеют, таким образом, главным предметом — свойства рациональных и целых функций одной переменной, и они приводят к Анализу (выделено Эрмитом, — *Е. О.*), то есть к общему изучению функций. Решение уравнений первой степени с несколькими неизвестными связано, впрочем, с той же точкой зрения, потому что, по существу, делается не что иное, как установление некоторых свойств системы линейных функций от нескольких переменных. Но здесь важно уяснить себе, что понимать под общим изучением функций.

Мы говорили о полиномах, но элементы приводят еще и к другим выражениям, которые называют трансцендентными, например показательной функции и логарифму, а также синусам, косинусам, тангенсам дуги. Первые изучаются в Алгебре, вторые — предмет Тригонометрии, которая, видимо, является лишь специальной главой Алгебры, дающей среди многих прочих следствий численное решение треугольников. Возникает вопрос, существуют ли функции, кроме тех, о которых мы говорили, и их комбинаций. Если ответ отрицателен, то Анализ разрешает увидеть его границы, его поле будет конечно и ограничено. Дело обстоит далеко не так! Дифференциальное и интегральное исчисление простирают свою область безгранично, служа началом и основой изучения бесчисленного количества новых функций. Понятно, таким образом, почему Лагранж дал одному из своих творений, которое посвящено изложению принципов Дифференциального и Интегрального исчисления, заглавие „Лекции по Исчислению функций". Следуя ходу мыслей этого великого геометра, мы представим о функциях, известных из элементов, некоторые соображения, которые послужат введением в этот курс и которыми мы будем часто пользоваться в дальнейшем» [I, 78, с. 1—2].

Далее Эрмит дает классификацию функций (алгебраические и трансцендентные и их подразделения). Говоря об алгебраических функциях, замечает, что они суть корни уравнения $F(x, y)=0$. Их изучение ведет «к множеству прекрасных результатов, принадлежащих одновременно Алгебре и Интегральному исчислению, и делает очевидной тесную связь между этими на первый взгляд далекими друг от друга частями Анализа» [I, 78, с. 3].

По изложению столь же оригинальный, как и «Введение», курс содержит ссылки на труды разных авторов, например Пюизё, Штурма, Коши, Бертрана, указания на неожиданные связи между разными вопросами, интересные замечания. Так, на с. 43 читаем: «Г. Чебышев дал замечательный пример другого выражения периодических функций в следующей формуле. Пусть $(x)$ — наименьшая величина, которую надо прибавить к $x$ или вычесть из $x$, чтобы получить целое число. Тогда

$$\frac{4\sin^2\pi x}{\pi^2}=\frac{(x)}{1^2}-\frac{(3x)}{3^2}-\frac{(5x)}{5^2}-\dots=\sum\alpha_n\frac{(nx)}{n^2},$$

где коэффициент $\alpha_n$ равен 0, когда $n$ — четное или делится на квадрат; равен 1, если число простых делителей $n$ четное, и равен —1, если число простых делителей $n$ нечетное» [I, 78, с. 43].

Как видим, не ограничиваясь минимумом сведений, Эрмит включил в «Курс», по мнению Поля Пенлеве, — шедевр глубины и понимания предмета — вопросы, только недавно изученные математиками.

Неоднократно переиздававшийся «Курс анализа» [I, 168], читавшийся Эрмитом в Сорбонне в течение многих лет, состоит из 25 лекций. Существует русский перевод четвертого издания [I, 232] под редакцией профессора Н. М. Гюнтера и с предисловием академика А. Н. Крылова. Совсем другой по характеру, этот курс открывается определением площади, ограниченной различными линиями, включает в себя приложения интегрального исчисления к геометрии, в частности спрямление кривых второго порядка, откуда автор переходит к эллиптическим интегралам, затем к гиперэллиптическим интегралам и спрямлению уникурсальных кривых, после чего — к приложению кратных интегралов. Затем даются начала теории функций комплексного переменного, интеграл Коши и зависимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.

При этом теорию аналитических функций Эрмит излагает сначала по Коши, затем — по Вейерштрассу, сопровождая новейшими результатами, в частности теоремами Неймана о голоморфных функциях и Миттаг-Леффлера о разложении мероморфных функций. Миттаг-Леффлер дает общее аналитическое выражение однозначной функции с одной существенно особой точкой на бесконечности и с бесконечным числом полюсов определенной кратности на конечном расстоянии. Теоремы сопровождаются приложением их к различным частным случаям. Далее освещаются различные вопросы теории функций, в том числе рассматриваются свойства функций с линиями разрыва, дается обобщение алгоритма Штурма, ряд Лагранжа и его приложение к задаче Кеплера (уравнению Кеплера), излагаются свойства полиномов Лежандра, теоремы Чебышева, вопросы теории эллиптических функций и пр.

Как уже сказано выше, курс постоянно дополнялся новыми результатами, полученными в теории функций, но говорить о нем подробнее не имеет смысла, так как читатель может ознакомиться с ним по русскому переводу [I, 232].

По словам Пенлеве, этот «Курс», хоть и был посвящен изложению теории аналитических функций по Вейерштрассу, но «вместо того, чтобы быть привязанным, как знаменитый немецкий аналитик, к единственному методу целых (степенных) рядов, Эрмит прибегает в нем к помощи всех средств методов Коши, придавая, таким образом, теории несравненные краткость и изящество. Именно по автографированному «Курсу» Эрмита, ежегодно в корне переделывавшемуся, каждая юная новая школа французских математиков изучала анализ. Можно сказать, что в собственных владениях Вейерштрасса преподавание Эрмита породило, по-видимому, больше работ, чем преподавание самого Вейерштрасса» [II, 343, т. 2, с. 10—11].

Эрмит советовал не пренебрегать тем, что можно было бы назвать простейшей математической истиной, а, вникнув в ее суть, постараться превратить в ключ к новым открытиям. Например, он останавливался на простейших частях интегрального исчисления и предлагал подумать над некоторыми элементарными понятиями. Сделанное им мимоходом на лекции замечание о выражении $\log \frac{x-a}{x-b}$ с помощью определенного интеграла привело его самого однажды к понятию того, что он называл «купюрой». Это понятие стало предметом исследования и употребления других математиков [III, 25, с. XXXV].

«В течение многих лет математики изучали теорию аналитических функций по лекциям Эрмита, ее существенные идеи представлены там особенно рельефно. В то же время чувствуется точный ум алгебраиста, каковым всегда был Эрмит» [III, 25, с. XXXV]. Давая студентам знания, лекции Эрмита еще и учили их видеть глубину математических понятий, вооружали методами исследования, закладывали принципы научного мышления. Его кафедра в Сорбонне в течение тридцати лет была одним из самых ярких очагов математического мира. Молодые ученые из любой страны встречали радушный прием у Эрмита, который всегда был готов ободрить, дать полезный совет и порадоваться успеху начинающего. Вот лишь два свидетельства этих сторон натуры Эрмита. Давид Гильберт вспоминал, что в первый его приезд в Париж Эрмит «не только продемонстрировал . . . свою знаменитую вежливость, без промедления нанеся . . . ответный визит, но также был столь добр. . . , что предложил провести со мной свободное от лекций утро» [II, 78, с. 37]. После нового доказательства Гильбертом трансцендентности чисел $e$ и $\pi$ [II, 222] Герман Минковский писал ему: «Я живо представляю себе оживление Эрмита, вызванное чтением твоей статьи. Насколько я знаю старика, я не удивлюсь, если в ближайшем будущем он сообщит тебе о своей радости, что он способен еще испытывать наслаждение от такой радости» [II, 78, с. 59].

Ученики отвечали Эрмиту горячей любовью, безграничным уважением и, конечно, своими достижениями в математических исследованиях, которые так радовали их учителя.

# Глава 3

## Теория чисел и алгебра

### Письма Эрмита к Якоби по вопросам теории чисел

В течение двух лет письмо, полученное Эрмитом от Якоби, оставалось без ответа. На то были свои причины: вынужденный уход из Политехнической школы, необходимость сдавать экзамены и устраиваться на службу, а, главное, отсутствие законченных научных результатов из-за прерванных на время исследований, хотя планы были обширные. Возобновив занятия, Эрмит решает наконец сообщить Якоби о своих новых соображениях. Извиняясь за длительное молчание, Эрмит благодарит Якоби за публикацию писем в собственном Собрании сочинений [II, 233], а затем переходит к изложению своих исследований [I, 234, с. 103], навеянных статьей Якоби [II, 228]. В этой статье автор исследовал функции от двух переменных, имеющие четыре периода, и дал формулировку понятия периодической функции: *периодической* называется функция $\lambda(u)$, если существует такая постоянная $k$, что для любого значения $u$ ($u$ — комплексная переменная)

$$\lambda(u+k)=\lambda(u).$$

Постоянную $k$ он называет *индексом* функции. Наличие одного индекса обеспечивает существование бесконечного множества других, так как любое кратное ему, положительное или отрицательное, тоже есть индекс. Тот из индексов, который не имеет *собственных делителей* (собственный делитель — делитель числа, не равный самому числу), являющихся также индексами функции, он назвал *собственным индексом*. Например, у синуса собственным индексом будет $2\pi$, у показательной функции $2\pi\sqrt{-1}$ [II, 228, с. 23]. Эллиптическая функция $\lambda(u)$ имеет два периода (индекса),

*Карл Густав Якоби*

которые нельзя свести к одному. Если $k$, $k_1$ — два таких индекса функции $\lambda\ (u)$, то

$$\lambda(u+k)=\lambda(u), \quad \lambda(u+k_1)=\lambda(u)$$

или

$$\lambda(u+mk+m_1k_1)=\lambda(u),$$

где $m$, $m_1$ — любые целые, положительные или отрицательные, числа. Здесь $mk+m_1k_1$ — тоже индекс. Якоби доказывает, что индексы $k$ и $k_1$ «несоизмеримы» между собой (то есть не имеют общего делителя), рассуждая следующим образом. Пусть $k=m\Delta$ и $k_1=m_1\Delta$ (где $m$ и $m_1$ — взаимно простые числа). Тогда можно найти такие целые $n$, $n_1$, что $mn+m_1n_1=1$. Умножив это равенство на целое $\Delta$, получим $nk+n_1k_1=\Delta$, в левой части которого содержатся как индексы $k$, $k_1$, так и их кратные. Отсюда ясно, что если индексы двух периодов функции $\lambda\ (u)$ не взаимно просты, то два периода сводятся к одному, индекс которого является их общим наибольшим делителем. Таким образом, величину отношения двух индексов, которые не получаются один из другого, нельзя считать рациональной.

Можно показать (что и делает Якоби), что ее нельзя считать и вещественной. Поэтому, если два периода не сводятся к одному, то их индексы должны быть комплексными величинами:

$$k = a + b\sqrt{-1}, \quad k_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1}.$$

Никогда не может быть $ab_1 - a_1b = 0$, иначе частное индексов

$$\frac{a_1 + b_1\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}$$

было бы вещественной величинй, что невозможно.

Затем Якоби исследует вопрос, может ли функция иметь три периода, которые нельзя составить из двух. Для доказательства берутся три таких индекса:

$$k = a + b\sqrt{-1}, \quad k_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1}, \quad k_2 = a_2 + b_2\sqrt{-1},$$

где $a$, $b$, $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ — вещественные и ни одна из разностей

$$a_1b_2 - a_2b_1, \quad a_2b - ab_2, \quad ab_1 - a_1b$$

не равна нулю, так как в противном случае или два периода сводятся к одному, или функция имеет индекс, меньший любой заданной величины, но который в то же время не может равняться нулю. Если допустить, что отношения разностей рациональны,

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b - ab_2} = \frac{m}{m_1}, \quad \frac{a_2b - ab_2}{ab_1 - a_1b} = \frac{m_1}{m_2},$$

то получаем

$$ma + m_1a_1 + m_2a_2 = 0,$$
$$mb + m_1b_1 + m_2b_2 = 0,$$

откуда

$$mk + m_1k_1 + m_2k_2 = 0,$$

где $m$, $m_1$, $m_2$ — целые числа, $> 0$ или $< 0$, не имеющие общих множителей. В этом случае, как показывает Якоби, три периода выражаются через два, и функция будет двоякопериодической. Если обозначить $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ — целые числа, $(\alpha\alpha_1\alpha_2 \neq 0)$, то равенство

$$\alpha(a_1b_2 - a_2b_1) + \alpha_1(a_2b - ab_2) + \alpha_2(ab_1 - a_1b) = 0$$

невозможно. После этих предварительных рассуждений Якоби доказывает следующее утверждение: если три периода не могут быть сведены к двум, то всегда можно определить такие целые числа $m$, $m_1$, $m_2$ (где $mm_1m_2 \neq 0$), что выражения

$$ma + m_1a_1 + m_2a_2$$

и

$$mb + m_1b_1 + m_2b_2$$

или одновременно становятся меньше любой заданной величины, или предложенная функция $\lambda(u)$ имеет индекс, меньший любой заданной величины, который, однако, не обращается в 0. Как и раньше, Якоби рассматривает разности $a_1b_2 - a_2b_1 = A$, $a_2b - ab_2 = A_1$, $ab_1 - a_1b = A_2$ и получает

$$\begin{aligned} aA + a_1A_1 + a_2A_2 &= 0, \\ bA + b_1A_1 + b_2A_2 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Обозначив $\alpha$, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — целые числа, он полагает

$$\frac{\alpha A_1}{A} - \alpha_1 = \Delta, \quad \frac{\alpha A_2}{A} - \alpha_2 = \Delta,$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha a + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 &= -[a_1\Delta + a_2\Delta_1], \\ \alpha b + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 &= -[b_1\Delta + b_2\Delta_1]. \end{aligned} \tag{2}$$

Определив числа $\alpha$, $\alpha_1$ такими, чтобы $\Delta$ было меньше любой заданной величины, третье число $\alpha_2$ надо взять таким, чтобы по абсолютной величине $\Delta_1$ было $< \frac{1}{2}$. Найденные таким образом $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ сделают выражения (2) по абсолютной величине меньшими, чем $\frac{1}{2}a_2$ и $\frac{1}{2}b_2$ (соответственно).

Следовательно, для данных величин $a$, $a_1$, $a_2$ и $b$, $b_1$, $b_2$ всегда можно найти такие целые $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, что если положить

$$\begin{aligned} a_3 &= \alpha a + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \\ b_3 &= \alpha b + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2, \end{aligned}$$

то одновременно будет $a_3 < \frac{1}{2}a_2$, $b_3 < \frac{1}{2}b_2$ по абсолютной величине.

Берем последовательно

$$\begin{aligned} &\beta a_1 + \beta_1 a_2 + \beta_2 a_3 = a_4, && \beta b_1 + \beta_1 b_2 + \beta_2 b_3 = b_4, \\ &\gamma a_2 + \gamma_1 a_3 + \gamma_2 a_4 = a_5, && \gamma b_2 + \gamma_1 b_3 + \gamma_2 b_4 = b_5, \\ &\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Коэффициенты этих уравнений $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ можно считать (согласно предыдущему) такими целыми числами, что одновременно по абсолютной величине

$$a_4 < \frac{1}{2} a_3, \quad a_5 < \frac{1}{2} a_4, \quad a_6 < \frac{1}{2} a_5, \ \ldots$$

$$b_4 < \frac{1}{2} b_3, \quad b_5 < \frac{1}{2} b_4, \quad b_6 < \frac{1}{2} b_5, \ \ldots$$

Получаются два ряда чисел $a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$; $b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$, которые, будучи продолжены достаточно далеко, приобретут члены, меньшие любой заданной величины. Пусть $a_n$, $b_n$ меньше некоторой данной величины. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} a_n &= ma + m_1 a_1 + m_2 a_2, \\ b_n &= mb + m_1 b_1 + m_2 b_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $m, m_1, m_2$ — целые числа. При этом коэффициенты обоих равенств одинаковы. Отсюда следует, что можно определить цёлые числа $m$, $m_1$, $m_2$ ($> 0$ или $< 0$) так, что одновременно оба выражения (3) станут меньше заданной величины. Якоби замечает, что $a_n$, $b_n$ не могут стать одновременно равными нулю, ибо в этом случае было бы и $mk+m_1k_1+m_2k_2=0$, что невозможно, поскольку три периода по предположению не сводятся к двум. Далее он переходит к изучению функций от двух и более переменных.

Эта статья Якоби, впервые опубликованная в журнале Крелле в 1834 г. и уже однажды побудившая Эрмита взяться за исследования, о сути которых он сообщает ее автору в первых своих письмах, теперь, изученная повторно, порождает новые идеи и соображения, которыми он спешит поделиться с Якоби. В частности, особый алгоритм, примененный тем для установления невозможности существования функции одной переменной с тремя периодами (см. с. 45—47), подал Эрмиту мысль применить аналогичное рассуждение совсем к другому вопросу — к созданию алгоритма обобщения непрерывных дробей. Этот новый алгоритм он сразу же использовал для аппроксимации иррациональных величин и в других задачах. В письме содержится также ряд результатов о квадратичных формах.

В следующем письме к Якоби Эрмит дал еще одно доказательство теоремы из теории квадратичных форм и обратил внимание Якоби на квадратичные формы, коэффициентами которых являются алгебраические числа. Он сообщил, что постарается представить на суд Якоби свой труд о модулярных уравнениях, где обосновал справедливость одного утверждения, высказанного без доказательства в «Посмертных сочинениях» Галуа, напечатанных в журнале Лиувилля за 1846 г. [II, 207]. Но наибольший интерес представляли для Эрмита свойства «иррациональностей, не выражаемых в радикалах». Он высказал следующее предположение: подобно тому, как свойства корней уравнений, относящихся к делению круга, позволили проникнуть в теорию специального вида уравнений, так свойства алгебраических иррациональностей, не выражаемых в радикалах, должны послужить исходной точкой для более глубокого проникновения в общую теорию уравнений. Видимо, уже с этого времени Эрмит задумывает исследование трансцендентности чисел.

Третье письмо Эрмита написано в ответ на письмо Якоби, доставленное Борхардтом, где имелись ценные для Эрмита указания на новейшую немецкую литературу по квадратичным формам. Эрмит попросил Борхардта перевести для него на французский язык статью Гаусса о квадратичных тернарных формах [II, 18] и очень жалел, что не мог найти никого, кто сделал бы для него перевод статьи Кронекера о комплексных числах. Именно в этом письме Эрмит кратко излагает цель своих первых исследований, которая состояла в изучении способа аппроксимации, данного Якоби для установления невозможности существования функции с тремя мнимыми периодами. Эрмит пишет в нем: «Лишь много позже я увидел, что этот вопрос и много других вопросов того же рода зависят от приведения квадратичных форм. Но когда я пришел к этому, обширные проблемы, которыми я занимался, показались мне ничтожными в сравнении с большими вопросами теории квадратичных форм, рассматриваемой общим образом. В этом громадном поле исследований, открытом для нас г. Гауссом, Алгебра и Теория чисел, как мне кажется, должны совмещаться (se confondre) в одном и том же круге аналитических понятий, о котором наши современные познания еще не позволяют составить истинное представление. Можно предположить, что именно этой части науки, построенной, таким образом, на ее истинных основаниях, предстоит дать таблицу всех элементов, в конечном или неограниченном числе, от которых зависят корни алгебраических уравнений, распределенных на непересекающиеся типы и классы по их естественным отношениям» [I, 234, т. 1, с. 136—137].

Эрмит рассмотрел также вопрос о целых значениях переменных, при которых данная квадратичная форма принимает наименьшее значение (вопрос о минимумах квадратичных форм), обнаружил, что из полученных им результатов можно вывести много следствий, относящихся к разным областям математики, в частности к теории целых алгебраических чисел, решению уравнения Norme $\varphi(\alpha)=1$, где $\varphi(\alpha)$ — целое комплексное число, составленное с помощью корня $\alpha$ уравнения $F(x)=0$ с целыми коэффициентами и с коэффициентом при старшем члене, равным 1. В качестве примера Эрмит рассматривает решение уравнения третьей степени с целыми коэффициентами $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ [I, 234, т. 1, с. 154].

Письма Эрмита, опубликованные в «Собрании сочинений» Якоби [II, 233], автор последних сопроводил своими примечаниями; те же, что опубликованы в «Сочинениях» Эрмита [I, 234, т. I], снабжены примечаниями Э. Пикара и удостоены самого восторженного отзыва в его предисловии: «Ничто не доказывает лучше, чем эти письма, гений Эрмита; творческая мощь в предметах, столь же новых, сколь и сложных, в них удивительна. Идеи толпятся здесь, им тесно, они льются через край. Они будут развиты в позднейших мемуарах, и есть среди них такие, плодотворность которых не исчерпана и сегодня. Принципы использованных методов найдены в теории квадратичных форм с любым числом переменных» [I, 234, т. I, с. XII].

Эрмит находит границу для минимума квадратичной формы при целых значениях переменных, зависящую только от детерминанта формы, и применяет полученный результат к обобщению теории непрерывных дробей, желая найти одновременное приближение нескольких величин с помощью рациональных дробей с одним и тем же знаменателем. Впервые он применил непрерывные переменные в вопросе теории чисел.

Пикар продолжает: «Элементарная теория непрерывных дробей предстает здесь в совершенно новом свете и, оказывается, может быть обобщена, а в то же время непрерывность вместе с переменной $\Delta$ оказывается введенной в арифметический вопрос» [I, 234, т. I, с. XII]. Содержащаяся в письмах к Якоби программа исследований выполнялась Эрмитом на протяжении многих лет. В ней были сформулированы, а в ряде случаев и решены, многие важные вопросы из разных разделов математики.

### Обобщение алгоритма непрерывных дробей и диофантовы приближения

Как уже говорилось, алгоритм, примененный Якоби для доказательства невозможности существования функции одной переменной с тремя периодами, подал Эрмиту идею обобщения алгоритма непрерывных дробей и изучения связанных с ним вопросов диофантовых приближений.

Попытки обобщить алгоритм непрерывных дробей[1] предпринимались и до Эрмита. Еще Эйлер применил обобщение непрерывных дробей для нахождения значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$, которые делают сколь угодно малой по абсолютной величине линейную форму $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+$ $+a_mx_m$ с произвольными коэффициентами. Лагранж заметил, что если $a$ — данное положительное действительное число, то можно найти взаимно простые натуральные числа $p$ и $q$ такие, что разность $p-aq$ по абсолютной величине будет меньше, чем $r-as$: $|p-aq|<|r-as|$ для $r<p$, $s<q$, если взять в качестве $a$ любую подходящую дробь $p/q$ для непрерывной дроби, в которую разлагается число $a$. Как утверждал Лежен-Дирихле [II, 292, с. 635—638], в теории непрерывных дробей давно известно, что если $\alpha$ иррационально, то существует бесконечно много пар целых чисел $x$, $y$, для которых

$$|x-\alpha y|<\frac{1}{|y|}.$$

Он доказал следующее обобщение этого факта: если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ таковы, что $f=x_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_mx_m$ не обращается в 0 ни для какого множества значений $x_0$, $x_1, \ldots, x_m$, то существует бесконечно много совокупностей целых $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не все из которых равны нулю, таких, что

$$|f|<\frac{1}{s^m},$$

[1] О непрерывных (цепных) дробях см., например, в кн.: Бухштаб А. А. Теория чисел. М., 1960, с. 203—236, 242—252.

*Петер Густав Лежен-Дирихле*

где $s$ — наибольший из $|x_1|$, $|x_2|$, . . . , $|x_m|$. Подобным образом можно рассуждать и относительно других форм. Например, если

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m, \quad \beta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m$$

обращаются в нуль одновременно только при равенстве нулю всех $x_1, x_2, \ldots, x_m$, то существует бесконечно много совокупностей целых $x_1, \ldots, x_n$, не все из которых равны нулю и для которых

$$|\alpha| < \frac{A}{s^a}, \quad |\beta| < \frac{B}{s^{m-2-a}},$$

где $A$, $B$ — постоянные, зависящие от $\alpha_i$, $\beta_i$, а $a$ — любая постоянная между 0 и $m - 2$.

Якоби, как уже было сказано, доказал, что можно придать $x$, $y$, $z$ такие целые значения, не равные нулю одновременно, что

$$ax + a'y + a''z \quad \text{и} \quad bx + b'y + b''z$$

одновременно будут меньше любой фиксированной величины.

В первом из писем к Якоби 1845 г. Эрмит написал: «Столь странный алгоритм, которым вы приводите два выражения

$$ma + m'a' + m''a'', \quad mb + m'b' + m''b''$$

к произвольной степени малости, разве это не первый пример нового рода аппроксимации, где с новой, более общей точки зрения представляются принципиальные вопросы теории непрерывных дробей?

Например, если даны две иррациональности $A$, $B$, можно определить, в случае если таковое существует, линейное соотношение $Aa+Bb+c=0$, где $a$, $b$, $c$ — целые. На самом деле,

$$mA - m' = \alpha, \quad mB - m'' = \beta$$

могут стать как угодно малыми (за счет выбора $m$, $m'$, $m''$, — *Е. О.*), отсюда можно заключить, что

$$a\alpha + b\beta = m(Aa + Bb) - am' - bm'' = -(am' + bm'' + cm).$$

Правая часть этого равенства есть целое число, следовательно, $a\alpha+\beta b$ не сможет стать меньше 1, если только оно не будет равно нулю. Таким образом, если найдены числа $m$, $m'$, $m''$, достаточно лишь разложить $\beta/\alpha$ в непрерывную дробь, чтобы получить искомое соотношение» [I, 234, т. 1, с 101].

Затем Эрмит ищет, где можно использовать новый алгоритм, и применяет его вначале к иррациональным величинам, определенным уравнениями третьей степени с целыми коэффициентами (подобно тому, как обычный алгоритм непрерывных дробей использовался для нахождения целочисленных решений уравнений второй степени с целыми коэффициентами). Он приходит к самым неожиданным выводам. Например, если дана бинарная квадратичная форма отрицательного детерминанта $-D$, коэффициенты которой уже не целые, а любые, то всегда можно найти таких два целых взаимно простых числа $\alpha$, $\beta$, что

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + a'\beta^2 < \sqrt{\tfrac{4}{3}D}.$$

Для форм положительного детерминанта $D$ получается неравенство

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + a'\beta^2 < \sqrt{D}.$$

Эрмит тут же переходит к обобщению полученных результатов на формы $f$ от $n+1$ переменных с целыми или иррациональными коэффициентами и детерминантом $D$ и высказывает гипотезу: всегда можно найти $n+1$ таких целых чисел $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, . . . , $\lambda$, что

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda) < \left(\frac{4}{3}\right)^{n/2} \sqrt[n+1]{D}$$ [I, 234, т. 1, с. 103].

Затем даются другие приложения нового способа аппроксимации (путем обобщения алгоритма непрерывных дробей). Вслед за Эрмитом вопросы одновременного приближения иррациональных чисел рациональными изучали Л. Кронекер, А. Гурвиц, Э. Борель и др.

## Метод непрерывного параметра

В письмах Эрмита к Якоби содержится идея одного из важнейших достижений Эрмита — метода непрерывного параметра, который сразу же находит применение к различным областям математики. Рассматривая одно из приложений алгоритма обобщения непрерывных дробей [I, 234, т. I, с. 106], он берет тернарную форму

$$f = (x' - Ax)^2 + (x'' - Bx)^2 + \frac{x^2}{\Delta},$$

детерминант которой — положительная вещественная величина $1/\Delta$, $A$ и $B$ — заданные постоянные. Тогда при любых значениях $\Delta$ можно определить три таких целых числа $m$, $m'$, $m''$, что

$$(m' - Am)^2 + (m'' - Bm)^2 + \frac{m^2}{\Delta} < \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}},$$

и, следовательно,

$$m' - Am < \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{\Delta}}, \quad m'' - Bm < \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{\Delta}}, \quad m < \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\Delta}. \qquad (4)$$

Два первых неравенства (4) показывают, что можно одновременно получить произвольную степень малости разностей $m'-Am$, $m''-Bm$. Третье неравенство дает точную меру порядка приближения дробями $m'/m$, $m''/m$ чисел $A$, $B$, причем погрешность пропорциональна $1/m\sqrt{m}$. Вычисления, аналогичные алгоритму Якоби (см. с. 45—47), приводят к последовательности целых чисел, таких как $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, которые делают линейную функцию $A\alpha+B\beta+\gamma$ величиной порядка $1/\alpha^2$ или $1/\beta^2$, и доказано, что если существует соотношение вида

$$Aa+Bb+c=0,$$

где $a$, $b$, $c$ — целые, то функция $Aa+Bb+c$ необходимо появляется, начиная с некоторого значения $\Delta$, а затем повторяется бесконечно для больших значений $\Delta$.

В данном случае $\Delta$ — непрерывный параметр, и, по-видимому, здесь впервые Эрмит его применяет. Специально введению непрерывных переменных в теорию чисел Эрмит посвящает статью, помещенную в журнале Крелле [I, 13]. Его рассуждения построены следующим образом [I, 234, т. I, с. 168]. Пусть имеется форма

$$f=(x-ay)^2+\frac{y^2}{\Delta^2},$$

в которой $a$, $\Delta$ — любые вещественные величины. Пусть форма

$$F=AX^2+2BXY+CY^2$$

— «приведенная», то есть в ней $AC<\frac{4}{3}D$, где $D=AC-B^2$, она получается из первой с помощью линейной замены переменных

$$x=mX+m_0Y,$$
$$y=nX+n_0Y.$$

Условие $AC<\frac{4}{3}D$ дает для минимального коэффициента $A$ верхнюю границу $\sqrt{\frac{4}{3}D}$. Здесь $D=\frac{1}{\Delta^2}$, $A=(m-an)^2+\frac{n^2}{\Delta^2}$. Тогда для данного значения $\Delta$ всегда можно определить два таких целых числа $m$ и $n$, что

$$(m-an)^2+\frac{n^2}{\Delta^2}<\frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Отсюда вытекают следствия [I, 234, т. 1, с. 169]:

1) можно бесконечно приблизиться к некоторой вели-

чине $a$ с помощью дробей $m/n$, так что погрешность $m/n - a$ всегда будет меньше $1/n^2\sqrt{3}$;

2) если два целых числа $m$ и $n$ дают для некоторого значения $\Delta$ минимум форме $f$, то нельзя получить два других таких целых числа $m'$, $n'$, что $n' < n$, $(m' - an')^2 < (m-an)^2$. Следовательно, $m-an$ представляет абсолютный минимум линейной функции $x-ay$ относительно любых целых значений $x$ и целых значений $y$, не превосходящих $n$. Таким образом, дробь $m/n$ приближает $a$ лучше, чем любая другая дробь с меньшим знаменателем.

Статья о введении непрерывного параметра в теорию чисел [I, 13], где теория функций связана с арифметикой и алгеброй, по удачному определению Пенлеве, явилась «представителем» творчества Эрмита. Нигде не показаны более ярко с помощью его методов и открытий скрытые связи между этими тремя направлениями математики и взаимная помощь, которую они могут и должны друг другу оказывать.

Основываясь на идее Эрмита, Е. И. Золотарев предложил свой способ определения всех последовательных минимумов квадратичных форм

$$(y-ax)^2+\frac{x^2}{\Delta},\quad A(x-z)^2+B(y-bz)^2+\frac{z^2}{\Delta},$$

где $A$, $B$ и $a$, $b$ — данные числа, $\Delta$ — переменный вещественный параметр. Он применил свой способ к решению одного неопределенного уравнения третьей степени [II, 34]. Исследования Эрмита продолжили затем Г. Ф. Вороной, Г. Минковский, Я. В. Успенский [II, 13, 14, 95, 336] и др.

## Алгебраические однородные формы

Прежде чем перейти к изложению других результатов Эрмита и его последователей по теории форм, приведем некоторые предварительные сведения.

Выражение вида

$$f=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k,$$

где $a_{ik}=a_{ki}$ — любые вещественные числа, называется **квадратичной формой от $n$ перемен-**

ных. Дискриминантом $D$ такой формы (или её детерминантом) называется определитель

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Форма от двух переменных называется двоичной, или бинарной, от трех — троичной, или тернарной, от четырех — четверичной, или кватернарной. Она называется определенной, если ее значения, кроме нулевого, которое получается лишь при нулевых значениях переменных, имеют все один и тот же знак. Если значения определенной формы всегда имеют знак плюс, она называется положительной, если минус — отрицательной. Если форма может менять знак (в зависимости от разных значений переменных), то она называется неопределенной. Формы, которые получаются одна из другой при помощи линейной замены переменных с целыми коэффициентами и определителем подстановки, равным $\pm 1$, называются эквивалентными (собственно эквивалентными, когда $+1$, несобственно, когда $-1$).

Важную роль играет понятие союзной формы. Всякий однородный многочлен второй степени от $n+1$ переменных $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ можно представить в виде

$$f=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_0}x_0+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1+\dots+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_n}x_n.$$

Если положить

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_0}=X_0,\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=X_1,\ \dots,\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_n}=X_n,$$

обозначить $D$ детерминант этой линейной системы уравнений, то подстановка переменных $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ приведет к новому многочлену, который можно записать таким образом: $D^{-1}\cdot F(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$. Форму $F$ назовем союзной формой для $f$. Форма $f(x_0, x_1 \dots, x_n)$ детерминанта $D$ называется приведенной, если для

$\frac{1}{2}\ \frac{\partial f}{\partial x_0} = Ax_0 + Bx_1 + \ldots + Lx_n$ будет

$$|A| < \left(\frac{4}{3}\right)^{n/2} \sqrt[n+1]{|D|},\ |B| < \frac{1}{2}|A|,\ |C| < \frac{1}{2}|A|,\ \ldots,$$

$$|L| < \frac{1}{2}|A|.$$

Если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимают различные целые значения, исключая систему $(0, 0, \ldots, 0)$, то среди значений, принимаемых формой $f$, будет существовать наименьшее, называемое минимумом формы $f$. Минимум вполне определен, если заданы коэффициенты формы, следовательно, он является функцией от этих коэффициентов.

Если рассмотреть множество всех положительных форм от $n$ переменных дискриминанта $D$, которое получается путем непрерывного изменения коэффициентов одной из таких форм, то будет непрерывно меняться и минимум. При этом он будет один и тот же у всех эквивалентных форм. С помощью изменения коэффициентов можно сделать минимум каким угодно малым. Этот минимум при своем изменении может достигать одного или нескольких максимумов, соответствующих различным (не эквивалентным) формам. Определение границы, выше которой не может подняться минимум положительных квадратичных форм от $n$ переменных данного дискриминанта $D$, и было той задачей, при решении которой Эрмит применил свой метод непрерывных параметров.

Вопросами теории квадратичных форм занимались многие крупные математики, в том числе Ферма, Эйлер, Лагранж, Гаусс. Вслед за Гауссом теорию квадратичных форм разрабатывал Лежен-Дирихле, посвятивший ей много статей и бóльшую часть своих «Лекций по теории чисел», изданных его учеником Р. Дедекиндом [II, 293]. Он подвел итог тому, что было сделано в этой области до него, вывел формулы для числа классов форм данного детерминанта и пр. Ему принадлежит геометрическое изложение теории приведения положительных квадратичных форм. Другим крупнейшим ученым, работавшим в области теории квадратичных форм (и форм других видов), был Эрмит. Основные идеи его исследований в этом направлении, как и во многих других, были изложены им в письмах к Якоби. Эрмит применил свой метод непрерывных параметров к отысканию верхних границ минимумов квадратичных форм и указал другие возможности его использования. Так, если дана бинарная квадратичная форма

$$f = ax^2 + 2bxy + a'y^2,$$

союзной формой для нее является положительно определенная форма

$$\varphi = (x + \alpha y)^2 + \lambda (x + \alpha' y)^2,$$

где $\lambda$ — положительный вещественный параметр. Множество форм $(f)$, полученных из $\varphi$ с помощью всех линейных подстановок с целыми коэффициентами и детерминантом, равным 1, — это совокупность приведенных форм, полученных, когда $\lambda$ изменяется непрерывно между 0 и $\infty$.

Взяв коэффициенты форм $f$ целыми, Эрмит показывает, что они во всем множестве $(f)$ ограничены. Отсюда следует, что приведенных форм конечное число. Поэтому непрерывное приведение формы $\varphi$ неизбежно даст форму, которая уже получалась раньше, и, таким образом, множество $(f)$ окажется состоящим из конечного числа форм, повторяющихся бесконечно много раз. Он иллюстрирует свой метод приведения применением его к тернарной форме [I, 234, т. I, с. 131—132]:

$$f = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^2 + \Delta (x + \beta y + \beta^2 z)(x + \gamma y + \gamma^2 z),$$

детерминант которой равен $D = \frac{27}{4} \Delta^2 A^2$, $\alpha$ — вещественные, а $\beta$ и $\gamma$ — комплексные значения корня $\sqrt[3]{A}$, $\Delta$ — непрерывный параметр, изменяющийся от 0 до $\infty$. С помощью линейной подстановки

$$x = mX + nY + pZ,$$
$$y = m'X + n'Y + p'Z,$$
$$z = m''X + n''Y + p''Z$$

он получает вместо формы $f$ другую, $F$:

$$F = [XM(\alpha) + YN(\alpha) + ZP(\alpha)]^2 +$$
$$+ \Delta [XM(\beta) + YN(\beta) + ZP(\beta)][XM(\gamma) + YN(\gamma) + ZP(\gamma)],$$

где

$$M(\alpha) = m + \alpha m' + \alpha^2 m''; \ N(\alpha) = n + \alpha n' + \alpha^2 n'';$$
$$P(\alpha) = p + \alpha p' + \alpha^2 p'',$$

и аналогичные выражения имеют $M(\beta)$, $N(\beta)$, $P(\beta)$; $M(\gamma)$, $N(\gamma)$, $P(\gamma)$. Множество приведенных форм для $f$ состоит из конечного числа форм, которые повторяются бесконечно много раз. Отсюда получается, в частности, что целое число $l = M(\alpha) M(\beta) M(\gamma)$ удовлетворяет неравенству $l < \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} A$.

Среди других результатов Эрмиту принадлежит новое доказательство теоремы Зеебера [I, 11] : для определенной приведенной квадратичной формы от трех переменных произведение коэффициентов при трех квадратах переменных всегда меньше удвоенного детерминанта. Эта граница сначала была найдена самим Зеебером [II, 386], затем доказана Гауссом в его рецензии на работу Зеебера [II, 208].

Эрмит рассматривает тернарную квадратичную форму

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$$

с произвольными коэффициентами, положительно определенную, и преобразованные формы, эквивалентные $f$. Он составляет совокупность форм, у которых коэффициент при одном из квадратов переменных имеет наименьшее возможное значение. Во вторую совокупность собирает те формы из первой, у которых коэффициент при втором квадрате переменной наименьший, и т. д. Полученная в результате этого процесса форма обладает свойствами формы, приведенной по Зееберу. Дальнейшее рассуждение основано на определении точной верхней границы минимума формы $f(x, y, 1)$ для целых значений $x$, $y$, если форма $f(x, y, z)$ — приведенная. В доказательстве Эрмит использует геометрические соображения. Так, рассматривая квадратичную форму $At^2 + 2Btu + A'u^2$ как квадрат расстояния некоторой точки до начала координат и учитывая, что наибольшее расстояние вершин некоторого треугольника с центром в начале координат от начала координат не превосходит радиуса описанной около этого треугольника окружности, он получает неравенство, определяющее верхнюю границу минимумов формы $f(x, y, 1)$, а затем — неравенство для $D$:

$$2D - aa'a'' > aa'a'' - 2a''b''^2 - \frac{1}{2} aa'(a - 2b' + a').$$

Показав, что правая часть последнего неравенства существенно положительна, устанавливает, что $aa'a'' < 2D$, то есть теорему Зеебера [I, 234, т. I, с. 99].

Перейдя к теории приведения квадратичных форм с любым числом переменных, Эрмит обнаружил, что и эти формы для заданного детерминанта могут быть распределены на классы, число которых конечно, для чего ему потребовалось ввести соответствующие понятия — эквивалентности, приведенной формы, детерминанта, союзной формы и т. д. — и, с помощью линейных преобразований трансформировав форму к приведенной, найти для коэффициентов неравенства, правые части которых зависят только от детерминанта.

Эрмит установил параллелизм, существующий между эквивалентностью неопределенных квадратичных форм от $n$ переменных и таковой для форм, разложимых на $n$ линейных множителей. Он применил свой метод непрерывного приведения к кубическим формам детерминанта $D$ и здесь также нашел неравенства для коэффициентов. Рассмотрел и приведение форм $n$-й степени от двух переменных,

$$f(x,\ y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n, \quad a_0 \neq 0,$$

и применил свои результаты к формам четвертой степени,

$$f(x,\ y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4b'xy^3 + a'y^4.$$

Исследовал такие «разложимые» формы $\varphi$ от $n$ переменных с комплексными целыми коэффициентами, где $\varphi$ является произведением линейных множителей.

Имя эрмитовых носят бинарные формы следующего вида:

$$f(v,\ u;\ \bar{v},\ \bar{u}) = Av\bar{v} + Bv\bar{u} + \bar{B}\bar{v}u + Cu\bar{u},$$

где $A$, $C$ — вещественные, а $B$, $\bar{B}$ — комплексные сопряженные, $v$, $\bar{v}$ и $u$, $\bar{u}$ — пары сопряженных комплексных чисел. Форма $f$ принимает только вещественные значения. Подстановка

$$v = aV + bU, \quad u = cV + dU,$$
$$\bar{v} = \bar{a}\bar{V} + \bar{b}\bar{U}, \quad \bar{u} = \bar{c}\bar{V} + \bar{d}\bar{U}$$

преобразует форму $f$ в другую эрмитову форму, $F$:

$$F = A'V\bar{V} + B'V\bar{U} + \bar{B}'\bar{V}U + C'U\bar{U},$$

где

$$A' = f(a,\ c;\ \bar{a},\ \bar{c}),\ C' = f(b,\ d;\ \bar{b},\ \bar{d}),\ B' = a\frac{\partial C'}{\partial b} + c\frac{\partial C'}{\partial d}.$$

Здесь

$$B'\bar{B}' - A'C' = (ad - bc)(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})(B\bar{B} - AC).$$

Если определитель подстановки равен 1, то $ad - bc = \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = 1$ и $\Delta = B'\bar{B}' - A'C'$ — инвариант, называемый детерминантом формы $f$.

Еще один вид форм, рассмотренных Эрмитом, это

$$f = \bar{x}(a_{00}x + a_{01}y + \ldots + a_{0n}v) + \ldots$$
$$\ldots + \bar{v}(a_{n0}x + a_{n1}y + \ldots + a_{nn}v)$$

от $n+1$ комплексных переменных $x, y, \ldots, v$ и сопряженных им $\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{v}$, коэффициенты $a_{ik}$ и $a_{ki}$ — комплексные сопряженные. Доказывается, что существует такая линейная подстановка $S$ для $x, y, \ldots, v$ с целыми комплексными коэффициентами и детерминантом 1, что $S$ и сопряженная ей $\bar{S}$ для переменных $\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{v}$ преобразуют любую данную форму $f$ в $F$, где

$$a_{00}a_{11} \ldots a_{nn} < 2^{\frac{n(n+1)}{2}} d$$

(где $d = |a_{jk}|$ — определитель с элементами $a_{jk}$), называемую приведенной. Приведенных форм конечное число для данного детерминанта $d$. Эрмитовы формы с разным числом переменных рассматривали также Жордан, Пикар, Пуанкаре, Умбер, Л. Диксон и другие математики.

## Развитие идей Эрмита по теории квадратичных форм

Исследования Эрмита по теории квадратичных и других алгебраических форм были продолжены многими учеными, и среди них одно из первых мест принадлежит русским математикам. Если для П. Л. Чебышева теория квадратичных форм была лишь эпизодом в его разнообразной математической деятельности [II, 108], то для его учеников А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева она стала основной темой совместных работ [II, 248—250].

Первой в этом ряду была магистерская диссертация Е. И. Золотарева [II, 34]. Она состояла из двух частей. В первой автор продолжил исследования Эрмита по отысканию верхних границ минимумов квадратичных форм данного дискриминанта. Для бинарных форм подобная задача была решена Лагранжем, для тернарных — Гауссом. Эрмит обобщил исследования Гаусса на случай форм с любым числом переменных и показал, что минимум квадратичной формы с $n$ переменными меньше, чем

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{D},$$

где $D$ — абсолютная величина дискриминанта формы. Кроме того, Эрмит, высказав предположение, что указанная верхняя граница не является точной, предлагает заменить ее другой: $2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}$. Е. И. Золотарев доказал это утверждение для $n=2$ и показал, что всегда можно выбрать квадратичную форму, достигающую этой границы, а именно

$$2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}(x_0^2+x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_0x_1+x_0x_2+\ldots).$$

Дав простое доказательство упомянутой выше теоремы Эрмита, он предложил способ приведения определенных тройничных форм, отличный от способа Гаусса [II, 18], рассмотрел решение других вопросов, связанных с определением минимумов квадратичных форм. При этом он использовал идею Эрмита о применении в теории чисел метода непрерывных параметров и предложил свой способ нахождения всех минимумов квадратичных форм вида

$$(x-az)^2+(y-bz)^2+\frac{z^2}{\Delta},$$

где $a$ и $b$ — вещественные данные числа, $\Delta$ — переменный параметр. Во второй части диссертации [II, 34] Золотарев применил разработанный в первой части метод к решению неопределенного уравнения

$$x^3+Ay^3+A^2z^3-3Axyz=1,$$

где $A$ — данное целое число, не равное полному кубу.

Начало совместных исследований Коркина и Золотарева, по-видимому, следует отнести ко времени защиты магистерской диссертации Золотарева [II, 34], где Коркин выступил со своими замечаниями. Дальнейшие беседы и размышления по этим вопросам привели к появлению их совместных работ. В 1871—1877 гг. они предпринимают исследования по теории квадратичных форм. В работе «О положительных кватернарных квадратичных формах» [II, 248] Коркин и Золотарев рассмотрели вопрос о нахождении точной верхней границы минимумов для положительных квадратичных форм с четырьмя переменными, основываясь на результате, полученном Золотаревым в диссертации для квадратичных форм с тремя переменными: с помощью унимодулярной подстановки перешли от формы с четырьмя переменными к форме с тремя переменными; минимум новой формы остается тем же, что и у исходной, и равен первому коэффициенту (в исходной форме он предполагался равным минимуму формы). В рассмотрение была введена союзная форма, и с ее помощью получено неравенство для первого коэффициента исходной формы: $a_{11} \leqslant \sqrt[4]{4D}$. Авторы замечают, что эта граница точная, поскольку существует положительная форма, имеющая минимум $\sqrt[4]{4D}$. Итог этого исследования сформулирован в виде теоремы: «Переменным любой положительной тернарной формы дискриминанта $D$ можно придать такие целые значения, что значение формы не превзойдет величины $\sqrt[4]{4D}$, причем существуют такие формы, минимумы которых равны $\sqrt[4]{4D}$» [II, 35, т. I, с. 68].

Темой следующей совместной статьи Коркина и Золотарева был вопрос о минимумах положительных квадратичных форм от $n$ переменных дискриминанта $D$ с любыми вещественными коэффициентами [II, 249]. Рассматривая совокупность всех положительных квадратичных форм от $n$ переменных дискриминанта $D$, авторы приходят к заключению, что все они могут быть получены из одной из этих форм, когда ее коэффициенты изменяются непрерывным образом. Минимум этой формы непрерывно изменяется, принимая одно и то же значение для всех эквивалентных форм. Коркин и Золотарев вводят понятие предельной, или экстремальной, формы, называя так форму, минимумы которой могут только уменьшаться при любых бесконечно малых изменениях коэффициентов, оставляющих дискриминант неизменным. В статье доказано, что предложенная Эрмитом величина $2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}$ представляет собой минимум экстремальной формы, то есть точную верхнюю границу для некоторой совокупности форм. Но есть минимумы, ее превосходящие, и, значит, она не будет точной верхней границей для всех форм данного дискриминанта, а ею будет наибольший из минимумов экстремальных форм, заключенных в этой совокупности. Для положительных форм Коркин и Золотарев использовали способ, названный ими «разложением форм по минимумам» (этот способ применял еще Эрмит) и с его помощью получили для квадратичных форм от $n$ переменных дискриминанта $D$ неравенство

$$A = \min f \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{D},$$

то есть верхнюю границу минимумов, указанную ранее Эрмитом [I, 12]. С помощью того же разложения по минимумам авторы получили другую границу, более близкую, чем у Эрмита, к точной верхней границе. Они установили, что эта граница при $n=2, 3, 4$ будет точной, а для $n=5$ уже точной не является, и нашли также верхние границы минимумов для случаев $n=2m$ и $n=2m+1$.

Темой последней совместной работы по теории квадратичных форм [II, 250] Коркина и Золотарева являются основные свойства экстремальных форм, в частности для $n=2, 3, 4, 5$.

Вслед за Коркиным и Золотаревым теорией квадратичных форм в Петербурге занимались братья А. А. и В. А. Марковы [II, 51—57], позднее Я. В. Успенский, магистерская диссертация которого была посвящена применению метода непрерывных параметров Эрмита [II, 95], где доказан ряд формул, устанавливающих зависимости для числа классов положительных бинарных квадратичных форм.

В 1883 г. Парижская академия наук присудила премию за работу на предложенную ею тему «Теория разложения целых чисел на сумму пяти квадратов» двум претендентам — англичанину Дж.-Г.-Ст. Смиту (1826—1883) и студенту Кёнигсбергского университета Г. Минковскому (1864—1909).

Эрмит был одним из комиссаров (рецензентов), рассматривавших присланные на конкурс сочинения, и написал об этой работе талантливого начинающего математика Дю Буа-Реймону (см. с. 208).

Минковский изложил основные определения и понятия теории квадратичных форм от $n$ переменных, обобщил прием Гаусса, представив формы с меньшим числом переменных через формы с большим числом переменных, и от общей теории уже легко перешел к решению конкурсной задачи. Позднее он продолжил исследования по теории квадратичных форм. Опубликовав свои соображения [II, 335] по поводу статей Эрмита [I, 11—15] и Л. Шарва [II, 172], опираясь на исследования Эрмита, а также Дж.-Г.-Ст. Смита и А. Пуанкаре, он пишет статьи по теории квадратичных положительных форм с любым числом переменных, которые легли в основу его диссертации, защищенной им в Кёнигсбергском университете в 1885 г. В тезисах к ней изложена идея о пространственном представлении квадратичной формы, воплощенная затем в цикле его работ по новой дисциплине — геометрии чисел.

По собственному признанию Минковского, его исследования по геометрии чисел были стимулированы чтением 40-го тома журнала Крелле, где были одновременно помещены письма Эрмита к Якоби [I, 12], в которых, в частности, сформулирована теорема Эрмита о верхних границах минимумов, и статья Дирихле [II, 291]. Сопоставив содержание этих публикаций, Минковский попробовал представить выявленное Эрмитом свойство квадратичных форм геометрически, а позднее пришел к заключению, что это свойство — следствие того, что эллипсоид является выпуклой поверхностью, имеющей центральную точку, и получил, таким образом, весьма плодотворный принцип, который затем применил к выпуклым телам.

В одной из своих работ [II, 328] Минковский геометрическим путем доказывает, что минимум $M$ положительной квадратичной формы от $n$ переменных удовлетворяет неравенству

$$M < A(n)\sqrt[n]{D},$$

где $M$ — минимум формы от $n$ переменных с дискриминантом $D$, и, используя асимптотическое выражение гамма-функции, находит оценку для $M$, значительно более точную, чем все предшествовавшие, в том числе и предложенная Эрмитом.

Исследования, начатые Эрмитом, Минковский продолжил и в ряде других направлений: в теории алгебраических единиц, в вопросе о конечности числа классов целочисленных квадратичных форм данного дискриминанта, приближении нескольких вещественных величин с помощью рациональных дробей, обобщения теории непрерывных дробей и пр. В 1896 г. он издал книгу «Геометрия чисел» [II, 330], в которой систематизировал полученные им результаты. Резюме этого труда на французском имеется в письме Минковского к Эрмиту [II, 331, т. I, с. 266—270], которому автор посвятил книгу [II, 330]. В последующих работах Минковский применяет свои результаты к разным областям теории чисел, в частности обобщает задачу, рассмотренную Чебышевым и Эрмитом, и показывает, что существует бесчисленное множество таких целых чисел $x$, $y$, что

$$|(\alpha x+\beta y-\xi_0)(\gamma x+\delta y-\eta_0)|<\frac{1}{4},$$

где $\xi_0$, $\eta_0$ — произвольные заданные числа [II, 49, с. 147, 328].

Те же вопросы, которые привлекали внимание Минковского, были предметом глубоких исследований русского математика Г. Ф. Вороного (1868—1908). Обобщение алгоритма непрерывных дробей, теория целых алгебраических чисел, относительные минимумы ковариантных форм, наконец, геометрия чисел — во всех этих областях Г. Ф. Вороному принадлежат фундаментальные результаты, и вместе с Минковским он по праву считается основателем геометрической теории чисел. Во многих вопросах Вороной продолжил и развил исследования Эрмита и Дирихле и русских математиков Коркина, Золотарева, А. Маркова.

Чуждый духу соперничества, мелочному честолюбию, Эрмит всегда с удовлетворением и радостью воспринимал успехи, достигнутые другими учеными в избранных им областях исследований, по достоинству оценивая их труды. Ознакомившись с первыми исследованиями Г. Минковского по геометрии чисел, он пишет ему: «С первого взгляда я понял, что Вы намного превзошли мои исследования, открыв нам в области арифметики совершенно новые пути» [II, 223, с. XIX]. И в другом письме (1892 г.): «Я полон удивления и обрадован Вашими принципами и результатами. Они открывают передо мной некий совершенно неведомый арифметический мир, где фундаментальные вопросы нашей науки трактуются с блестящим успехом, которому все геометры воздадут должное. Вы любезно указываете на мои прежние исследования (и я Вам за это искренно признателен) как на исходный пункт Ваших прекрасных работ, но Вы их настолько превзошли, что они сохранили лишь единственное достоинство — открыть путь, на который Вы вступили» [II, 223, с. XIX].

«Мне кажется, что я вижу обетованную землю», — написал Эрмит Ложелю, приславшему ему свой перевод на французский книги Минковского «Геометрия чисел», сделанный специально для Эрмита. Зная, что Эрмит плохо владеет немецким языком, но с большим интересом знакомится с его сочинениями, Минковский в дальнейшем присылал ему резюме на французском других своих работ.

## Отдельные вопросы теории чисел

Вопросы теории чисел затрагиваются во многих статьях Эрмита, но есть и заметки, специально посвященные этой теме. Вот краткое содержание некоторых из них.

В одной [I, 16] Эрмит излагает элементарное доказательство следующей теоремы: *если* $a^2+1\equiv 0 \pmod p$, *где* $p=4k+1$, $p$ — *простое, то* $p$ *представляется в виде суммы квадратов двух целых чисел*. Для доказательства он раскладывает $\frac{a}{p}$ в непрерывную дробь до тех пор, пока не получатся две такие последовательные подходящие дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$, что $n<\sqrt{p}$, $n'>\sqrt{p}$. Тогда, как известно,

$$\frac{a}{p}=\frac{m}{n}+\frac{\varepsilon}{nn'}, \quad \text{где } \varepsilon<1,$$

откуда следует, что

$$na-mp=\varepsilon\frac{p}{n'}, \quad \text{а тогда } (na-mp)^2<p.$$

Складывая последнее неравенство почленно с неравенством $n^2<p$, он получает

$$(na-mp)^2+n^2<2p;$$

левая часть этого неравенства — целое число, кратное $p$ (по условию теоремы). Следовательно, $(na-mp)^2+n^2=p$.

П. Л. Чебышев в статье [II, 99] дал приложения собственного метода приведения уравнений, в частности к представлению чисел формой $x^2-ny^2$. Как указывает автор, в случае $n=-1$ процесс сводится к остроумному способу, примененному Эрмитом для доказательства того, что все простые числа вида $4k+1$ всегда разложимы на сумму двух квадратов. Чебышев ссылается на вышеуказанную статью Эрмита [I, 16].

Способ Эрмита упоминает также И. И. Иванов, еще студентом предложивший обобщение способа Эрмита для случая разложения числа на сумму вида $x^2+Ay^2$ [II, 37].

О способе Эрмита и его обобщении он говорил и много лет спустя в своем курсе «Теории чисел» [II, 38, с. 207].

Другая заметка Эрмита [I, 18] посвящена доказательству такой теоремы: «Если $p$ — делитель формы $x^2+Ay^2$, то надлежащим образом выбранная степень $p$ всегда может быть представлена в такой же форме, то есть всегда можно получить $p^\mu=X^2+AY^2$». В конце этой заметки Эрмит формулирует более общее утверждение: «Если $p$ — делитель нормы какого-либо комплексного числа, зависящего от корня $m$-й степени из единицы, то всегда можно определить целую степень $p$, которая в точности будет выражаться этой нормой» [I, 234, т. I, с. 275]. Доказательство этой теоремы использует свойства подходящих дробей и неравенств.[2] Еще одна статья [I, 22] явилась результатом исследований по теории целых комплексных чисел. Там доказательство разложимости числа $A$ (целого, нечетного или нечетно четного) на сумму четырех квадратов [3] проведено таким образом. Сначала устанавливается возможность сравнения

$$x^2+y^2+1\equiv 0 \pmod{A}. \tag{5}$$

Пусть $A\equiv\varepsilon \pmod 4$, где $\varepsilon=1$ или $-1$. Арифметическая прогрессия с общим членом $4Az+2\varepsilon A-1$ содержит только числа, сравнимые с 1 по модулю 4, поскольку

$$2\varepsilon A-1\equiv 2\varepsilon^2-1\equiv 1 \pmod 4.$$

Эрмит замечает, что левая часть этого соотношения $2\varepsilon A-1$ и разность $4A$ взаимно просты, так как из этих двух чисел одно четное, другое нечетное, а соотношение

$$4\varepsilon A-2(2\varepsilon A-1)=2$$

показывает, что они не могут иметь других общих делителей, кроме 2. По теореме Дирихле об арифметических прогрессиях данная прогрессия содержит бесконечно много простых чисел вида $4n+1$, которые разложимы на сумму двух квадратов. То же самое будет для бесконечного множества значений $z$:

$$4Az+2\varepsilon A-1=x^2+y^2,$$

откуда следует сравнение (5).

---

[2] Основные понятия теории чисел см. в кн.: А. А. Бухштаб. Теория чисел. М., 1960.

[3] См. Бухштаб, с. 292—295.

Пусть теперь $A \equiv 2 \pmod 4$. Все сказанное будет справедливо и для новой арифметической прогрессии с общим членом $2Az+A-1$. Таким образом, возможность сравнения (5) установлена для всякого нечетного модуля или для удвоения нечетного числа. Эрмит переходит к квадратичной форме от 4-х переменных:

$$f = (Ax + \alpha z + \beta u)^2 + (Ay - \beta z + \alpha u)^2 + z^2 + u^2,$$

где целые $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют условию

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 \equiv 0 \pmod A.$$

Инвариант этой формы $\Delta$ по абсолютной величине равен $A^4$. Следовательно, если искать ее минимум для целых значений переменных, то по теореме, ранее установленной Эрмитом, найдется число, не превосходящее границы

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} \sqrt[4]{\Delta}, \text{ равной в этом случае } \sqrt[4]{\Delta}\,\frac{2^3}{3^{3/2}} < 2\sqrt[4]{\Delta},$$

и потому меньшее, чем $2A$. Но легко убедиться, что числа, представимые формой $f$, необходимо будут кратными $A$. Следовательно, этот минимум может быть равен только самому $A$, которое, таким образом, оказывается разложенным на четыре квадрата.

В одной из работ по теории квадратичных форм [I, 15] подобным образом находится выражение для числа $\varphi(M)$ всех возможных разложений $M$ на четыре квадрата:

$$\varphi(M) = 8(p+1)(p_1+1)\ldots(p_\omega+1)(q+1)(q_1+1)\ldots$$
$$\ldots(q_{\varpi}+1).$$

Здесь $M = pp_1p_2\ldots p_\omega \cdot q \cdot q_1 \ldots q_{\varpi}$,

$$p_i \equiv 1 \pmod 4,\quad q_k \equiv -1 \pmod 4,\quad i = 1, 2, \ldots, \omega;$$
$$k = 1, 2, \ldots, \varpi$$

[I, 234, т. I, с. 263].

В письме к Дж. Сильвестеру [I, 234, т. I, с. 440] Эрмит просит того подробно сообщить о предложенном способе определения числа целых положительных решений неопределенного уравнения $ax+by+cz+\ldots=n$. Сам Эрмит излагает вопрос о решении в целых положительных числах неопределенного уравнения $ax+by=n$, где $a$ и $b$ — положительные целые, не имеющие общего делителя. Эта статья была напечатана в 1857 г. в английском журнале [I, 31]. Эрмит получил выражение для всех целых положительных решений указанного уравнения в виде

$$x = E\left(\frac{n}{a}\right) - E\left(\frac{n'}{a}\right) + E\left(\frac{n''}{a}\right) - \cdots + (-1)^{i-1} E\left(\frac{n^{i-1}}{a}\right) + \\ + (-1)^i b\xi,$$

$$y = E\left(\frac{n}{b}\right) - E\left(\frac{n'}{b}\right) + E\left(\frac{n''}{b}\right) - \cdots + (-1)^{i-1} E\left(\frac{n^{i-1}}{b}\right) + \\ + (-1)^i a\eta,$$

где $E(a)$ — целая часть числа $a$, $\xi$ и $\eta$ пробегают $\omega+1$ систем значений, удовлетворяющих $\xi+\eta=\omega$. Заметим, что к подобному способу решения неопределенных уравнений прибегали и русские математики В. Я. Буняковский и Н. В. Бугаев.

Несколько работ Эрмита посвящено выводу и свойствам различных числовых тождеств. В этой области работал и Лиувилль, но публикуя результаты своих исследований [II, 315], он по неизвестным причинам избегал приводить доказательства. Это обстоятельство вызывало недоумение и досаду Эрмита, что отражено в его переписке и статьях. Вот выдержки из его письма к самому Лиувиллю: «Со времени нашей последней беседы по арифметическим вопросам, являющимся предметом Ваших исследований, в которых Вы показали новый пример плодотворности методов, принцип которых Вы храните в тайне, я, видимо, смог в некоторой степени удовлетворить пожеланию, которое Вы несколько раз высказывали мне относительно прекрасных теорем г. Кронекера о числе классов квадратичных форм. Эти теоремы, которые по своей природе, казалось бы, должны были войти в круг Ваших исследований по числовым функциям, оставались, однако, как бы изолированными и принадлежащими кругу идей, совершенно отличному, где, как представлялось, лишь теория комплексного умножения эллиптических функций могла помочь достичь успеха [I, 234, т. 2, с. 109] . . . Я исходил из тождеств, которые происходят от разложения четных функций $\theta$ в простые ряды по синусам и косинусам и важность которых показал впервые Якоби, открыв, таким образом, выражение числа разложений целого числа на четыре квадрата с помощью суммы делителей этого целого. Очень простое обобщение этого процесса состоит в том, чтобы рассмотреть вместо $\sin \operatorname{am} z$, $\cos \operatorname{am} z$ и $\Delta \operatorname{am} z$ произведения двоякопериодических функций на степени величин $\theta$, то есть выражения, имеющие период $4K$ и умноженные на экспоненциальный множитель, когда добавляют $2iK'$ к переменной» [I, 234, т. 2, с. 110]. В этом письме Эрмит приводит несколько собственных доказательств формул Кронекера и много других арифметических тождеств и предложений, полученных им с помощью теории эллиптических функций.

Письмо заканчивается словами: «Я надеюсь, дорогой собрат, Вы не забудете, что обещали мне также арифметическое письмо, которое немного приподымет вуаль, окутывающую Вас до сих пор. Если Вы сочтете возможным, я предпочел бы, чтобы это (письмо к Лиувиллю, — *Е. О.*) было напечатано в Вашем журнале (Journal de mathématiques pures et appliquées, — *Е. О.*), где я помещу далее несколько статей на разные темы, с этим связанные, которые сейчас заканчиваю» [I, 234, т. 2, с. 124].

Целый ряд теоретико-числовых тождеств содержится в статье Эрмита «О теории квадратичных форм» [I, 234, т. 2, с. 255]. Здесь он представляет функцию Эйлера $\varphi(m)$, выражающую число натуральных чисел, не превосходящих $m$ и взаимно простых с ним, причем $\varphi(1)=1$,

$$\varphi(m)=\sum_{\substack{p\leqslant m,\\ (p,\, m)=1}} 1,$$

в виде

$$\varphi(m)=m-\sum\frac{m}{a}-\sum\frac{m}{ab}+\sum\frac{m}{abc}-\cdots\pm\sum\frac{m}{abc\ldots k},$$

где $m=a^{\alpha}b^{\beta}\ldots k^{\varkappa}$ ($a, b, \ldots$ — простые числа). Затем рассмотрена функция $\Phi(n)$, равная количеству чисел, взаимно простых с $m$ в последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n$. Обозначая $E(x)$ наибольшее целое число, содержащееся в $x$, он получает

$$\Phi(n)=n-\sum E\left(\frac{n}{a}\right)+$$
$$+\sum E\left(\frac{n}{ab}\right)-\sum E\left(\frac{n}{abc}\right)+\cdots\pm E\left(\frac{n}{ab\ldots k}\right).$$

При $m=1$ полагает $\Phi(x)=E(x)$. Наконец, обозначив $\varepsilon$ величину между $-1$ и $+1$, а $\mu$ — количество простых множителей $a, b, \ldots, k$, он получает формулу для $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{x}{m}\varphi(m) + 2^{\mu-1}\varepsilon.$$

Это свойство $\Phi(x)$ используется им в дальнейшем при нахождении количества $\Phi(n/k)$ членов последовательности 1, 2, 3, . . ., $n$, взаимно простых с $m$ и делящихся на данное число $k$.

Далее Эрмит полагает

$$F(n) = \sum_{k\mid n} f(k),$$

где сумма берется по всем делителям $k$ числа $n$. Легко проверить, что

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = \sum_{l=1}^{n} f(l)\, E\left(\frac{n}{l}\right).$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = \sum_{l=1}^{n} f(l)\, \Phi\left(\frac{n}{l}\right).$$

Эти формулы используются для определения числа классов квадратичных форм данного детерминанта.

Теоретико-числовые тождества фигурируют и в письме Эрмита к Р. Липшицу [I, 234, т. 4, с. 127], а также к Дж. Сильвестеру [I, 234, т. 4, с. 136]. В работе «О некоторых арифметических следствиях формул из теории эллиптических функций» [I, 140], опубликованной в Петербурге и Стокгольме, Эрмит доказывает некоторые тождества Кронекера, содержащие зависимости для числа классов квадратичных форм отрицательного детерминанта, и останавливается на их арифметических следствиях. При этом он упоминает [I, 234, т. 4, с. 139], что приложения функции $E(x)$ были в недавнее время предметом нескольких важных сообщений Буняковского [II, 137—139]. Следует сказать, что Эрмит не упоминает о многочисленных работах по арифметическим тождествам московского профессора Н. В. Бугаева и его учеников [II, 9, 10 и другие], которым принадлежат доказательства некоторых формул Кронекера и целого ряда других арифметических тождеств (см. [II, 49, с. 220—258]), в их числе есть и доказанные Эрмитом.

В письме к Л. Фуксу Эрмит рассматривает асимптотические значения нескольких арифметических функций [I, 234, т. 4, с. 209]. «Я склонен думать, — пишет Эрмит, — что надо спрашивать у Арифметики причину аналитических преобразований, выражаемых, например, такими соотношениями:

$$\sum \frac{q^m}{1-q^m} = \sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} = \sum \frac{q^{\frac{1}{2}(n^2+n)}}{1-q^n},$$

где взяты $m=1, 3, 5, \ldots$, $n=1, 2, 3, 5, \ldots$ Если Вы обозначите $F(N)$ число нечетных делителей $N$, я скажу, что общее значение трех выражений, расположенных по степеням $q$, есть

$$\sum F(N) q^N.$$

Это видно сразу же для двух первых. Если рассмотреть третье, видим, что, поскольку

$$\frac{q^{\frac{1}{2}(n^2+n)}}{1-q^n} = \sum q^{\frac{1}{2}(n^2+n)+an}, \quad a=0, 1, 2, \ldots,$$

коэффициент при $q^N$ выражает количество решений уравнения

$$N = \frac{1}{2}(n^2+n)+an, \quad \text{то есть} \quad p(2p+2a+1)=N,$$

или $(2p-1)(p+a)=N$, в зависимости от того, будет $n=2p$ или $n=2p-1\ldots$ Число решений есть, таким образом, число нечетных делителей $N$, поочередно то меньших, то больших, чем удвоение сопряженных им делителей, и, следовательно, общее число их равно $F(N)$.

Для суммы

$$S_1 = \sum_{l=1}^{N} F(l),$$

где $F(l)$ — коэффициенты ряда $\sum F(l) q^l$ в равенстве

$$\sum \frac{q^{\frac{1}{2}(n^2+n)}}{1-q^n} = \sum F(l) q^l,$$

получается асимптотическое выражение при $N \to \infty$:

$$S_1 = \frac{1}{2} N \log N + \left(C - \frac{1}{4}\right) N,$$

где $C$ — постоянная Эйлера. Еще одно асимптотическое равенство получается для $S_2 = \sum_{l=1}^{N} \Phi(l)$, где $\Phi(l)$ — число разложений $l$ на такие множители $d$ и $d'$, что $d' > kd$, где $k$ — произвольное целое.

Письмо Крэгу [I, 234, т. 4, с. 241] посвящено доказательству формулы Гаусса для выражения количества целых значений $x$ и $y$, удовлетворяющих условию $x^2+y^2 \leqslant A$, иными словами, числа целых точек в круге. Сначала Эрмит находит число точек с целыми координатами внутри прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат, а центр — в начале координат. Потом он вписывает квадрат в круг и находит число точек с целыми координатами внутри квадрата и в части круга, лежащей между сторонами квадрата и окружностью. Он получает выражение, принадлежащее Гауссу для числа целых точек в круге, а затем аналогичным образом находит число целых точек внутри и на контуре эллипса $Ay^2+Bx^2=N$. Частным случаем этой формулы оказывается формула Гаусса для круга [I, 234, т. 4, с. 245—247].

Несколько заметок и писем Эрмита касается теории чисел Бернулли. В письме к Борхардту [I, 234, т. 3, с. 211] Эрмит дополняет несколькими замечаниями исследования Т. Клаузена [II, 175] и Штаудта [II, 396] о свойствах чисел Бернулли. Темой письма к Эд. Вейру были числа Бернулли и Эйлера. Толчком для исследований Эрмита в этом направлении послужили соотношения для чисел Бернулли, предложенные Рогелем [II, 379]. Эрмит доказал четыре формулы Рогеля, но заметил у него ошибку, и, производя вычисления, обнаружил несколько новых соотношений для чисел Бернулли, доказав их чисто алгебраическим способом [I, 234, т. 4, с. 405], в то время как раньше они были доказаны с помощью интегрального исчисления Мальмстеном [II, 318, 319].

В ответ на сообщение Сонина о выходе на русском языке его статьи [II, 84], в которой содержались результаты о представлении величин

$$\log \frac{\Gamma\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(y)}, \quad \log \Gamma(y+x) - \log \Gamma(y)$$

конечными суммами с дополнительными членами, полученные как следствия из общей теоремы о разложении функций по полиномам Бернулли, Эрмит написал ему письмо [I, 234, т. 4, с. 437]. Свою работу на ту же тему Эрмит опубликовал после Сонина, не зная о его исследованиях. Оба получили результаты достаточно близкие, но Эрмит признает превосходство Сонина в приложениях, следствиях и пр., а также с похвалой отзывается о второй части его статьи, где трактовались вопросы суммирования рядов, выражая сожаление, что не смог всего понять из-за незнания русского языка. Особенно заинтересовали Эрмита обобщения сумматорной формулы Эйлера—Маклорена, данные Сониным, и асимптотическое выражение при очень малых $h$ ряда

$$\frac{e^{-h^2}}{h} + \frac{e^{-4h^2}}{2h} + \frac{e^{-9h^2}}{3h} + \ldots,$$

которое Сонин представил в виде $\frac{c}{2h} - \frac{\log h}{h}$ ($c$ — постоянная Эйлера).

## Работы по алгебре

Первой из работ Эрмита в этой области была статья, написанная им еще в годы студенчества, об алгебраическом решении уравнений пятой степени [I, 2], где он своим способом доказал теорему Абеля о невозможности решения в радикалах общего уравнения этой степени. Статья Абеля была опубликована в 1826 г. в Журнале Крелле [II, 117], а на французском языке имелось ее резюме в Бюллетене Ферюссака [II, 118].

Эрмит основывался на сочинении Лагранжа [II, 266], где знаменитый математик установил зависимость между алгебраическим решением общего уравнения пятой степени и разложением на множители специального уравнения шестой степени, которое назвал «приведенным». Если бы это приведенное уравнение было разложимо на рациональные множители второй и третьей степени, то можно было бы найти решение уравнения пятой степени. Эрмит доказал, что подобное разложение невозможно, использовав для этой цели некоторые сведения из теории перестановок и теорему Лагранжа: «Две подобные[4] несимметрические функции корней одного и того же уравнения $X=0$ могут всегда быть выражены рационально одна через другую». Эрмит доказал эту теорему Лагранжа, рассмотрел примеры — уравнение третьей степени, затем уравнение шестой степени. Дальше он показал, что уравнение шестой степени

$$x^6 - c_1x^5 + c_2x^4 - c_3x^3 + c_4x^2 - c_5x + c_6 = 0 \qquad (6)$$

не может иметь рациональных множителей ни второй, ни третьей степени. Следствием этого явилось доказательство теоремы Лагранжа о том, что корни приведенного уравнения не могут быть выражены в квадратных и кубических радикалах. Основным в доказательстве было утверждение, что корень $l$ приведенного уравнения Лагранжа и корень $\lambda$, соответствующий той же перестановке, уравнения (6) изменяются одновременно или остаются теми же при одних и тех же перестановках, то есть суть подобные функции корней. Поэтому по теореме Лагранжа одна из них может быть выражена как рациональная функция другой: $\lambda=F(l)$. Таким образом, если $l$ содержит только квадратные и кубические радикалы, то это справедливо и для $\lambda$, что, согласно доказанному ранее, невозможно. Следовательно, приведенное уравнение Лагранжа существенно неприводимо — не имеет рациональных множителей 2-й и 3-й степени. Последнее является необходимым условием для решения уравнения 5-й степени, а поскольку оно не выполняется, то решение невозможно, равно как и решение уравнений более высокой степени.

Этой работой воспитанник коллежа Луи-ле-Гран продемонстрировал во всей полноте восприятие им принципов и методов, развитых Лагранжем в его сочинении [II, 266].

О беседе Эрмита с Коши и о статьях последнего, по его собственному признанию написанных под впечатлением замечаний Эрмита о перестановках и вычислении количества значений функции от нескольких аргументов

---

[4] П о д о б н ы м и  ф у н к ц и я м и корней Лагранж называет функции, которые одновременно изменяются или остаются теми же для одинаковых перестановок, например функции $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^m+\beta^m$, $\alpha^m\beta^m$ и т. д.

(см. с. 29—30), уже упоминалось. Следующей работой, имеющей отношение к алгебре, была статья Эрмита [I, 19], своим появлением обязанная результатам, полученным Пюизё о корнях алгебраических уравнений, рассматриваемых как функции одной переменной. Эрмит сумел связать этот вопрос с вопросом об алгебраической разрешимости алгебраических уравнений и при этом использовал принципы, указанные Галуа, впервые их поняв и разработав (см. с. 143).

Новый интерес к алгебре пробудила в Эрмите теорема Штурма. Прежде чем перейти к изложению работ Эрмита по этой тематике, напомним читателю о сути этой теоремы и ее дополнений, известных из курса высшей алгебры.

Существуют разные способы отделения корней алгебраического уравнения, но самый лучший из них в теоретическом плане дается теоремой Штурма. Впервые изложение результатов Штурма появилось в Бюллетене Ферюссака («Бюллетень математических, физических и химических наук, редактируемый гг. Штурмом и Голтье де Клобри» — 1-й отдел «Бюллетеня Ферюссака» (Bulletin Ferussac), издававшийся с 1824 по 1831 г.). Прочитанное в заседании секции геометрии Академии наук 8 июня 1829 г. и опубликованное в Бюллетене [II, 401] сообщение Штурма начиналось с благодарности Фурье, который дал автору прочесть часть своей рукописи, содержащей изложение метода отделения корней. Опираясь на принципы Фурье и подражая его доказательствам, Штурм нашел несколько новых теорем, которые и опубликовал в редактируемом им журнале, рассуждая следующим образом.

Пусть имеется уравнение

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0 \qquad (7)$$

степени $n$. Требуется найти все его вещественные корни. Сначала необходимо было проверить, не имеет ли уравнение равных (кратных) корней. Обозначив $V$ целую функцию (полином) $Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+N$, а $V_1$ — ее производную: $nAx^{n-1}+(n-1)Bx^{n-2}+\ldots+M$, Штурм находит общий наибольший делитель (ОНД) этих функций. Он делит $V$ на $V_1$, получает остаток, степень которого меньше степени делителя $V_1$. Остаток можно умножить на общий знаменатель коэффициентов этого остатка, если коэффициенты дробные, или на любое положительное число. Потом все знаки членов остатка меняются на противоположные. Получается функция $V_2$, степени, меньшей, чем степень $V_1$. Теперь делится $V_1$ на $V_2$. Функцию, полученную после замены знаков и умножения на постоянную величину остатка от деления $V_1$ на $V_2$, он обозначает $V_3$. Теперь $V_2$ делят на $V_3$ и т. д.

Если уравнение (7) не имеет кратных корней, то в конце концов в качестве остатка при очередном делении получится функция нулевой степени, то есть постоянная. Ее обозначают $V_r$, где $r \leqslant n$. Таким образом, из уравнения (7), не имеющего кратных корней, получается последовательность функций

$$V,\ V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_r, \tag{8}$$

последняя из которых — постоянная, положительная, отрицательная или 0. Теперь надо узнать, сколько корней уравнения (7) лежит между заданными границами $A$ и $B$. Для этой цели значение $A$ подставляется во все функции последовательности (8) и записываются все знаки результатов этой подстановки. Потом то же самое проделывается и с $B$. Если $A < B$, то уравнение (7) имеет между $A$ и $B$ столько вещественных корней, насколько меньше перемен знака в ряде для $x=B$, чем в ряде для $x=A$. Иными словами, разность между числом перемен знака для $x=A$ и для $x=B$ будет равна числу вещественных корней уравнения (7) в промежутке между $A$ и $B$. Если указанная разность равна 0, то вещественных корней между $A$ и $B$ нет.

Затем Штурм изложил способ нахождения кратных корней, а к уравнению $Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+\ldots+Mx^{\mu}=0$, где степени идут не подряд, применил метод, разработанный Фурье для алгебраических уравнений, которые содержат только целые степени неизвестных. Ряд функций (8) называется р я д о м Ш т у р м а. Подробно с методом Штурма и его применением можно ознакомиться в учебниках высшей алгебры ([II, 92], например).

Способ Штурма был внимательно изучен английским математиком Дж. Сильвестером [II, 410], записавшим выражения функций Штурма в виде функций от $x$ и от корней $a$, $b$, ..., $l$, $m$ уравнения (7):

$$V=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)(x-m),$$
$$V_1=\sum(x-b)(x-c)\ldots(x-l)(x-m),$$

$$V_2 = \frac{1}{\lambda_2} \sum (a-b)^2 (x-c)(x-d) \ldots (x-m) +$$
$$+ (b-c)^2 (x-a)(x-c)(x-d) \ldots (x-m),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$V_m = \frac{1}{\lambda_m} [(a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 \ldots (a-m)^2 (b-c)^2 \ldots$$
$$\ldots, (b-m)^2 \ldots (k-m)^2],$$

где величины $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ определяются по формулам

$$\lambda_2 = p_1^2, \quad \lambda_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2, \quad \lambda_4 = \left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right)^2, \quad \lambda_5 = \left(\frac{p_3 p_4}{p_2 p_3}\right)^2, \ldots,$$

а $p_k$ — по формулам

$$p_1 = m; \quad p_2 = (a-b)^2 + (a-c)^2 + \ldots + (k-m)^2,$$
$$p_3 = (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 + (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 + \ldots,$$
$$p_4 = (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 + \ldots$$

Каждая сумма $\Sigma$ представляет собой симметрическую функцию корней уравнения (7), все члены которой получаются посредством подстановок из члена, записанного под знаком $\Sigma$. Как следствие теоремы Сильвестера определяется число пар комплексных корней уравнения (7): оно равно количеству перемен знака в ряде

$$1, \ p_1, \ p_2, \ p_3, \ \ldots, \ p_m. \tag{9}$$

Изящную форму теореме Сильвестера с помощью определителей придал Борхардт: если дано уравнение (7) степени $m$, положим

$$p_1 = S_0 = m, \quad p_2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix},$$

$$p_4 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}, \ \ldots$$

Здесь $S_k$ — сумма $k$-х степеней корней уравнения $V = 0$. Тогда (7) имеет столько пар комплексных корней, сколько перемен знаков имеется в ряде $1, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ [II, 136].

Способ Эрмита для определения числа вещественных корней уравнения (7), заключающихся в промежутке $(t_0, t_1)$, состоит в следующем. Снова берется уравнение (7) [II, 83, с. 519—526]

$$V(z)=0$$

степени $m$ с вещественными коэффициентами, а $a, b, c, \ldots, k, l$ — его корни. В рассмотрение вводится функция

$$f=\frac{1}{a-t}(x_0+ax_1+a^2x_2+\ldots+a^{m-1}x_{m-1})^2+$$
$$+\frac{1}{b-t}(x_0+bx_1+b^2x_2+\ldots+b^{m-1}x_{m-1})^2+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{l-t}(x_0+lx_1+l^2x_2+\ldots+l^{m-1}x_{m-1})^2$$

от $m$ переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$, представляющая собой рациональную симметрическую функцию корней уравнения (7). Она рационально выражается через его коэффициенты, и так как они вещественны, то и функция $f$ будет вещественной, если $t$ получает вещественные значения. Иными словами, это однородная функция второй степени, зависящая от параметра $t$, то есть уже знакомая квадратичная форма, которой Эрмит придает привычный вид:

$$f=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}a_{i,j}x_ix_j,$$

где коэффициенты

$$a_{i,j}=\frac{a^{i+j}}{a-t}+\frac{b^{i+j}}{b-t}+\cdots+\frac{l^{i+j}}{l-t}.$$

Эрмит приводит функцию $f$ с помощью вещественной подстановки к виду

$$f=\Delta_0X_0^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_0}X_1^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}X_2^2+\cdots+\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_{m-2}}X_{m-1}^2,$$

где $\Delta_{m-1}$ называется **инвариантом** функции $f$ и равен произведению

$$\frac{1}{(a-t)(b-t)\ldots(l-t)}$$

на квадрат определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{m-1} \\ 1 & b & b^2 & \dots & b^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & l & l^2 & \dots & l^{m-1} \end{vmatrix} = \pm (a-b)(a-c)\dots(k-l),$$

то есть

$$\Delta_{m-1} = \frac{(a-b)^2(a-c)^2\dots(a-l)^2(b-c)^2\dots(b-l)^2\dots(k-l)^2}{(a-t)(b-t)\dots(l-t)}.$$

Если уравнение (7) не имеет равных корней, то $\Delta_{m-1} \neq 0$. Приведем формулировку теоремы Эрмита.

Дано уравнение

$$V(z) = 0$$

степени $m$ с вещественными коэффициентами, корни которого предполагаются различными: $a, b, c, \dots, l$. Запишем однородную вещественную функцию (квадратичную форму)

$$\begin{aligned} f = {} & \frac{1}{a-t}(x_0 + ax_1 + a^2x_2 + a^3x_3 + \dots + a^{m-1}x_{m-1})^2 + \\ & + \frac{1}{b-t}(x_0 + bx_1 + b^2x_2 + \dots + b^{m-1}x_{m-1})^2 + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{1}{l-t}(x_0 + lx_1 + l^2x_2 + \dots + l^{m-1}x_{m-1})^2 \end{aligned}$$

от $m$ переменных $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ с вещественным параметром $t$. Если с помощью вещественной подстановки мы приведем функцию $f$ к сумме квадратов вещественных линейных функций, то число квадратов с положительными коэффициентами будет равно числу пар комплексных корней уравнения (7) вместе с числом вещественных корней, больших, чем $t$.

Из уравнения вытекает следствие такого содержания. Если обозначить число всех вещественных корней уравнения (7) буквой $N$, число вещественных корней, бóльших $t$, через $N_1$, число таковых же, больших $t_0$, через $N_0$, а число квадратов с положительными коэффициентами в выражении функции $f$ через $(t)$, то число вещественных корней между границами $t_0$ и $t_1$, то есть в промежутке $(t_0, t_1)$, будет равно $N_0 - N_1$.

Теорема Штурма может быть получена как следствие теоремы Эрмита. Если записать функцию $f$ в виде

$$f=\Delta_0 X_0^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_0} X_1^2+\cdots+\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_{m-2}} X_{m-1}^2, \tag{10}$$

то $(t)$ показывает число положительных членов в ряде

$$\frac{\Delta_0}{1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_{m-2}}. \tag{11}$$

Но

$$\frac{\Delta_0}{1}=-\frac{V_1}{V}, \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_0}=-\frac{V_2}{V_1}, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1}=-\frac{V_3}{V_2}, \ldots, \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_{m-2}}=-\frac{V_m}{V_{m-1}},$$

поэтому $(t)$ выражает также и число отрицательных членов в ряде

$$\frac{V_1}{V}, \frac{V_2}{V_1}, \ldots, \frac{V_{m-1}}{V_{m-2}}, \frac{V_m}{V_{m-1}},$$

и потому равно числу перемен знака в ряде Штурма $V$, $V_1$, $V_2$, ..., $V_m$. Иными словами, число перемен знака, на которое уменьшится число перемен знака при переходе от $t_0$ к $t_1$, равно числу корней уравнения $V=0$.

Эрмит предложил практический способ определения числа корней уравнений (см., например, [II, 83, с. 526—530]). В письме к Борхардту [I, 234, т. I, с. 397] он, кроме ряда функций (11), рассмотрел и уравнения с комплексными коэффициентами, что привело его к теореме Коши для случая прямоугольника, круга и других замкнутых кривых. «Приведение квадратичной формы к сумме квадратов, которое было предметом Вашего мемуара об уравнении, от которого зависят вековые неравенства, играет главную роль в моих исследованиях, — пишет Эрмит своему корреспонденту. — Только вместо подстановок, где сумма квадратов новых переменных равна сумме квадратов первоначальных переменных, я рассматриваю любые вещественные подстановки» [I, 234, т. I, с. 397].

Кроме вопросов о числе корней уравнений, Эрмит в нескольких работах исследует аналитическое представление подстановок, и в той, что отличается наибольшей ясностью изложения [I, 234, т. 2, с. 280], рассматривает систему индексов (значков) $i=0, 1, 2, \ldots, p-1$ и величины $z_i$ с этими индексами. Всякую подстановку (замену) этих величин можно записать таким образом:

$$\begin{bmatrix} z_i \\ z_{\theta(i)} \end{bmatrix},$$

где $\theta(i)$ такова, что в другом порядке воспроизводит совокупность из $p$ значений индексов. Это более краткая запись явного обозначения подстановки

$$\begin{bmatrix} z_0, & z_1, & z_2, & \ldots, & z_{p-1} \\ z_a, & z_b, & z_c, & \ldots, & z_k \end{bmatrix},$$

где $a, b, c, \ldots, k$ — те же индексы $i=0, 1, 2, \ldots, p-1$, но расположенные в ином порядке. Для простого числа $p$ Эрмит рассматривает полную систему вычетов по модулю $p$. [5] Кроме того, он использует свою формулу интерполяции [I, 234, т. 2, с. 87], которой занимался в связи с публикацией работы Чебышева [II, 110]. Он ставит перед собой задачу нахождения полиномов, которые представляют подстановки $\theta(x)$. Сначала он замечает, что в случае простого числа $p$ подстановка $\theta(x)$, которая заменяет индексы $0, 1, 2, \ldots, p-1$ с помощью тех же чисел, но в другом порядке: $a, b, \ldots, k$, может быть представлена аналитически по формуле интерполяции:

$$\theta(x)=\frac{a\varphi(x)}{x\varphi'(0)}+\frac{b\varphi(x)}{(x-1)\varphi'(1)}+\frac{c\varphi(x)}{(x-2)\varphi'(2)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{k\varphi(x)}{(x-p+1)\varphi'(p-1)},$$

где

$$\varphi(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)$$
$$\text{или}\quad \varphi(x)\equiv x^p-x \pmod p,$$

то есть в виде полинома с целыми коэффициентами от $x$, причем степень этого полинома может быть сделана не превосходящей $p-2$, так как степени $\theta(x)$, бо́льшие,

---

[5] Напомним, что факт делимости $x-a$ на $p$ можно записать в виде **сравнения**: $x\equiv a \pmod p$, которое читается так: $x$ сравним с $a$ **по модулю** $p$. Для числа $x$ число $a$ является **вычетом** по модулю $p$. Числа $0, 1, 2, \ldots, p-1$ образуют **полную систему вычетов по модулю** $p$, то есть это все возможные остатки при делении на $p$ ($p$ — простое).

чем $p-2$, согласно малой теореме Ферма, заменяются степенями, сравнимыми с ними по $\mathrm{mod}\, p$ и не превосходящими $(p-2)$-й. При этом число $p$ предполагается $>2$. Любой такой полином будет выражать подстановку $\theta(x)$ по модулю $p$ только тогда, когда $n$-я степень $\theta(x)$ для $n=1, 2, 3, \ldots, p-2$ приводится к полиному степени $\leqslant p-2$ (с помощью сравнения $x^p \equiv x\ (\mathrm{mod}\, p)$). Эрмит применяет свою теорему к нахождению всех полиномов, представляющих подстановки $\theta(x)$ для случаев $p=5$ и $p=7$. Мысль о возможном существовании подобных полиномов впервые возникла у Эрмита при изучении работ Галуа, где говорилось о подстановках вида

$$\begin{bmatrix} z_x \\ z_{ax+b} \end{bmatrix}$$

Подобными вопросами занимался также итальянский математик Э. Бетти (Ann. di sci. matem., 1851, t. 2, p. 5—19; 1852, t. 3, p. 49—115).

## Доказательство трансцендентности числа *e*

Одно из наиболее известных открытий Эрмита — данное им доказательство трансцендентности числа *e*, основания натуральных логарифмов. Опубликованное, оно, по словам Г. Дарбу, явило собой «самый прекрасный мемуар Эрмита» [III, 5, с. 34].

Математики XIX в. унаследовали от предшествующих поколений ученых три знаменитые задачи древности: удвоение куба, трисекцию угла и квадратуру круга. Для последней, состоявшей в поиске возможности построения квадрата с площадью, равной площади круга, было предложено не одно решение. Декарт, например, использовал для этой цели параболу и окружность. Но доказать отсутствие возможности построения такого квадрата с помощью только циркуля и линейки не удавалось. Для первых двух задач — удвоения куба и трисекции угла — доказательство было предложено Ванцелем [II, 421], предшественником Эрмита по преподаванию в Политехнической школе. Что касается третьей, то доподлинно была известна лишь иррациональность $\pi$, доказанная в 1761 г. Ламбертом.

Задачи удвоения куба и трисекции угла приводили к решению уравнений третьей степени, содержавшемуся в классе иррациональностей, являющихся корнями алгебраических уравнений. Третья задача была намного сложнее. Лежандр [II, 281] воспроизвел доказательство иррациональности, данное Ламбертом, восполнив имеющиеся в нем пробелы, и доказал иррациональность числа $\pi^2$, а затем, вслед за Ламбертом, заметил: «Вероятно, число $\pi$ не относится даже к алгебраическим иррациональностям, то есть оно не может быть корнем алгебраического уравнения с конечным числом членов, коэффициенты которого рациональны. Но, кажется, доказать строго это утверждение трудно» [II, 281].

Первое доказательство того факта, что, кроме алгебраических, может существовать множество других «иррациональностей», получивших название трансцендентных чисел, дал Ж. Лиувилль [II, 312, 313]. Обобщив теорему Лагранжа о свойствах периодичности разложения в непрерывную дробь корней квадратных уравнений, Лиувилль доказал соответствующее свойство разложения любой алгебраической иррациональности в непрерывную дробь. Так как легко было построить бесконечное множество иррациональностей, на которые это свойство не распространялось, было установлено существование обширных классов трансцендентных чисел. Лиувилль первый привел примеры искусственно построенных им трансцендентных чисел. Впоследствии Г. Кантор [II, 150] показал, что алгебраические числа составляют лишь небольшую часть огромного множества трансцендентных чисел. Но класс алгебраических чисел настолько плотен, что, вслед за Лежандром, понимали чрезвычайную трудность нахождения доказательства непринадлежности к этому классу какой-либо иррациональности. «Именно это столь трудное доказательство Эрмит дал нам для наиболее важного в анализе числа $e$ — основания неперовых логарифмов. Он получил его, применяя к разным степеням $e$ общие методы, которые дал для одновременного приближения нескольких иррациональностей» [III, 5, с. 39—40].

Действительно, доказательство трансцендентности числа $e$ не было случайным в творчестве Эрмита. В прославленной работе [I, 89] сходятся разные линии исследований: обобщение алгоритма непрерывных дробей, которым занимались Дирихле, Якоби, Эрмит; исследования о минимумах линейных форм (Дирихле, Эрмит); одновременное приближение нескольких иррациональностей рациональными дробями (переписка Эрмита с Якоби); метод непрерывного параметра Эрмита и др. Как уже говорилось, алгоритм Якоби для приведения двух линейных трехчленов к сколь угодно малой величине подал Эрмиту мысль о новом способе аппроксимации, которая позволила бы представить с более общей точки зрения основные вопросы теории непрерывных дробей. Пусть, например, $mA-m'=\alpha$, $mB-m''=\beta$. Здесь $\alpha$ и $\beta$ можно сделать сколь угодно малыми. Отсюда видно, что

$$a\alpha+b\beta=m(Aa+Bb)-am'-bm''=-(am'+bm''+cm)$$

Правая часть этого равенства — целое число, следовательно $a\alpha+b\beta$ не может быть меньше единицы, если только не обратится в 0 [I, 234, т. I, с. 101]. Это рассуждение по сути такое же, как и в доказательстве трансцендентности $e$ (см. с. 89). Если довести вычисление чисел $m$, $m'$, $m''$ до этого предела, то надо будет лишь обратить $\beta/\alpha$ в непрерывную дробь, чтобы получить искомое соотношение.

Алгоритм непрерывных дробей в арифметике, применяемый для приближенного представления иррациональных чисел с помощью рациональных, был распространен на функции — с целью приближенного представления иррациональных функций рациональными. Если имеется такая функция от $x$, разложенная по положительным и отрицательным степеням $x$, то можно задаться целью представить приближенно эту функцию посредством рациональной функции от $x$, числитель и знаменатель которой были бы степени $n$, с заданной точностью приближения — порядка $2n+1$ относительно $x$. Теория алгебраических непрерывных дробей представляет большую аналогию с теорией непрерывных арифметических дробей [I, 234, т. I, с. XXIX]. Мы уже упоминали работу Чебышева [II, 105], давшего обобщение алгоритма алгебраических непрерывных дробей (см. с. 50). Эрмит, который занимался одновременным представлением нескольких чисел с помощью дробей, имеющих одинаковый знаменатель, должен был прийти к аналогичной задаче для нескольких функций. Этот новый способ одновременных алгебраических приближений привел его к одному из его прекраснейших открытий — трансцендентности числа $e$, основания неперовых логарифмов. Исходной точкой в прославленном мемуаре «Об экспоненциальной функции», опубликованном в 1873 г., послужило одновременное приближение некоторого числа экспоненциальных функций вида $e^{ax}$ с помощью рациональных дробей. Разности между этими экспонентами и их приближенными значениями представляются в виде определенных интегралов, и эти приближения позволяют установить, положив $x=1$ и предполагая числа $a$ целыми, что $e$ не может удовлетворять никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами. На это обстоятельство обратили внимание Пикар [I, 234, т. I, с. XXIX] и И. Тимченко, который писал, что Эрмиту принадлежит замечание о том, что процесс арифметического приведения квадратичных форм в случае бинарных форм сводится, по существу, к вычислению периодических непрерывных дробей. «Распространяя это замечание на формы с большим числом переменных, он нашел новые способы вычисления иррациональных количеств, приложимые к уравнениям высших степеней. Эти приближенные вычисления сводятся к выполнению системы периодических действий, которые представляют соответственные иррациональные количества, как непрерывные дроби представляют квадратные корни» [III, 36, с. 99]. Обобщенную теорию непрерывных дробей Эрмит применил к исследованию алгебраических иррациональностей. В 1873 г. этот же метод позволил ему доказать трансцендентность числа $e$ [III, 36, с. 99].

Непосредственно подготовительным исследованием было доказательство иррациональности $e$, изложенное в работе [I, 234, т. 3, с. 127—134], где Эрмит исходит из ряда для

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

обозначает частную сумму этого ряда $F(x)$,

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

и рассматривает отношение разности $e^x - F(x)$ к $x^{n+1}$:

$$\frac{e^x - F(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{1\cdot 2\ldots(n+1)} + \frac{x}{1\cdot 2\ldots(n+2)} + \ldots =$$
$$= \sum \frac{x^k}{1\cdot 2\ldots(n+k+1)}. \qquad (12)$$

Дифференцируя (12) $n$ раз по $x$, он приходит к другому равенству:

$$e^x\Phi(x) - \Phi_1(x) = \frac{x^{2n+1}}{n!}\sum \frac{(k+n)!}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+k+1)}\cdot\frac{x^k}{k!}, \qquad (13)$$

где $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ — полиномы с целыми коэффициентами. Предполагая, что при $x = x_0$ целом $e^{x_0}$ равно рациональному числу $b/a$, Эрмит полагает в (13) $x = x_0$. В левой части (13) при этом получается некоторое число, большее $1/a$, а в правой — величина, которая при стремлении $n$ к $\infty$ может стать меньше любого сколь угодно малого заданного числа. Полученное противоречие доказывает, что ни при каком целом $x$ не может $e^x$ быть рациональным числом. В частности, $e$ — число иррациональное.

Такой же прием Эрмит использовал и в доказательстве трансцендентности $e$ в статье «Об экспоненциальной функции» [I, 89]. Он рассматривает одновременное приближение нескольких функций $e^{ax}$, $e^{bx}$, ..., $e^{hx}$ рациональными функциями

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \quad \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$$

с одинаковым знаменателем $\Phi(x)$ с точностью до порядка $x^{\mu+1}$. Равенства, аналогичные равенству (13), получаются с помощью составления полинома

$$F(z) = z^{\mu}(z-a)^{\mu_1}(z-b)^{\mu_2}\ldots(z-h)^{\mu_n},$$

где $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = M$; $a, b, c, \ldots, h$ — вещественные числа, и рассмотрения определенных интег[ралов]

$$\int_0^a e^{-zx}F(z)\,dz, \quad \int_0^b e^{-zx}F(z)\,dz, \quad \ldots, \quad \int_0^h e^{-zx}F(z)\,dz.$$

Изложим рассуждение Эрмита в несколько упрощенном виде — по книге А. О. Гельфонда [II, 27, с. 56—57]. Идея доказательства та же, что у Эрмита.

Пусть $f(x)$ — любой многочлен от $x$, $f^k(x)$ — $k$-я производная от $f(x)$, $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f^k(x)$ — многочлен той же степени, что и $f(x)$. Интегрированием по частям можно получить тождество

$$e^x F(0)-F(x)=e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt. \qquad (14)$$

Предположим, что $e$ удовлетворяет алгебраическому уравнению с целыми рациональными коэффициентами

$$a_0+a_1e+a_2e^2+\ \dots\ +a_ne^n=0, \quad (a_0\neq 0), \qquad (15)$$

то есть $e$ — число алгебраическое. Положив в тождестве (14) $x=k$, умножив полученное равенство на $a_k$, беря последовательно $k=0, 1, 2, \dots, n$ и складывая полученные равенства, найдем

$$F(0)\sum_{k=0}^{n} a_k e^k-\sum_{k=0}^{n} a_k F(k)=-\sum_{k=0}^{n} a_k e^k\int_0^k e^{-t}f(t)\,dt, \qquad (16)$$

и поскольку $e$ удовлетворяет равенству (15), имеем

$$a_0F(0)+\sum^{n} a_kF(k)=-\sum_{k=0}^{n} a_k e^k\int_0^k e^{-t}f(t)\,dt. \qquad (17)$$

В книге Гельфонда в роли $f(t)$ выступает

$$f(t)=\frac{1}{(p-1)!}t^{p-1}\prod_{k=1}^{n}(k-t)^p,$$

где $p$ — простое число, которое $> n+|a_0|$. Теперь используем тот же прием, что и при доказательстве иррациональности $e$. Правая часть равенства (17), как легко проверить, стремится к 0 при $n\to\infty$, а левая часть по абсолютной величине при достаточно большом $n$ представляет собой число, большее или равное единице. Полученное противоречие вызвано предположением, что $e$ — алгебраическое число. Следовательно, $e$ — число трансцендентное.

Работа Эрмита с доказательством трансцендентности $e$ произвела сильнейшее впечатление на математиков. Друг Эрмита, берлинский математик Борхардт, в письме предлагает ему тут же заняться числом $\pi$. В ответ Эрмит послал новое изящное доказательство иррациональности $\pi$, предварив его словами: «Я не отваживаюсь на исследование трансцендентности $\pi$. Пусть другие попробуют этим заняться, и никто не будет больше рад, чем я, их успехам. Но, верьте мне, дорогой друг, это будет стоить им некоторых усилий» [I, 88, с. 146]. Через девять лет немецкий математик Ф. Линдеман, взяв за основу идею Эрмита, доказал трансцендентность $\pi$ [II, 303—304].

Ф. Линдеман (1852—1939) родился в Ганновере, обучался в университетах Гёттингена, Эрлангена, Мюнхена, провел год за границей, посещая лекции в университетах Парижа, Кембриджа, Оксфорда, в 1873 г. стал доктором философии (Эрланген). Он был учеником А. Клебша, после смерти которого с величайшим тщанием издал его «Лекции по геометрии». Сначала приват-доцент в Вюрцбурге, Линдеман в 1877 г. становится экстраординарным, а с 1879 г. — ординарным профессором во Фрейбурге, в 1883 г. переходит в Кёнигсбергский университет, в 1893 г. — в Мюнхенский, где спустя 30 лет было торжественно отпраздновано его 70-летие и 40-летие доказательства им трансцендентности числа $\pi$ [II, 302].

От Клебша Линдеман унаследовал интерес к теории эллиптических и абелевых функций и к геометрии кривых. Он занимался также теорией конформных отображений, алгебраическими уравнениями, геометрическим представлением квадратичных форм, теорией инвариантов, рядами, дифференциальными уравнениями, вопросами истории и философии математики и некоторыми разделами физики.

Принесшее ему известность доказательство трансцендентности $\pi$, которое позволило решить, наконец, задачу о квадратуре круга, Линдеман получил как простое следствие теоремы, обобщавшей результат Эрмита, о чем сразу же сообщил ему в письме. Тот немедленно доложил об этом Академии и опубликовал содержание письма в Отчетах заседаний Парижской академии наук (Comptes rendus) под заглавием «Об отношении окружности к диаметру и о неперовых логарифмах соизмеримых чисел или алгебраических иррациональностях» [II, 303].

Линдеман писал, что именно изучение работы Эрмита [I, 89] привело его к поискам обобщений результатов Эрмита. Он пробовал заменить в доказательстве Эрмита все целые числа некоторыми алгебраическими иррациональностями, но в столь общем виде задача оказалась слишком сложной. Тогда он перешел к более частным задачам. Убедившись, что результат Эрмита остается справедливым, если в равенстве

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \ldots + N_n e^{z_n} = 0 \qquad (18)$$

положить $N_1 = N_2 = \ldots = N_n$ и $z_0 = 0$, он получает равенство

$$N_0 + N_1 \sum_{i=1}^{n} e^{z_i} = 0 \qquad (19)$$

и приходит к общей теореме, с помощью которой, в частности, устанавливает, что равенство (18) невозможно, если предположить, что $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — некоторые алгебраические числа, различные между собой, а $N_0$, $N_1$, $N_2, \ldots, N_n$ — алгебраические числа, не равные нулю одновременно. Отсюда вытекали два следствия: «Число $\pi$, отношение окружности к диаметру, есть число трансцендентное» и «Неперовы логарифмы всех рациональных чисел, за исключением единицы и всех алгебраических иррациональностей, суть числа трансцендентные» [II, 303]. Предположение, что $\pi$ — число алгебраическое, благодаря существованию тождества Эйлера $e^{\pi i} = -1$ и соотношению типа (18), которое невозможно для алгебраических чисел, приводило к противоречию, откуда следовал вывод о трансцендентности $\pi$. Подробное доказательство было опубликовано [II, 304].

Спустя тридцать лет, выступая на своем юбилее с ответным словом на многочисленные приветствия своих учеников и почитателей, Линдеман сказал, что никогда бы не пришел к решению старинной проблемы квадратуры круга без помощи своего великого учителя Эрмита [II, 302, с. 29].

Известие о доказательстве Линдемана Эрмит воспринял с огромным удовлетворением. Он пишет Дю Буа-Реймону: «Вы понимаете, с каким интересом я встретил прекрасное открытие г. Линдемана, который любезно сообщил мне о нем и написал о своем методе письмо, прохождение которого г. Бертран не задержал и которое появится в отчете о последнем заседании [II, 303]. Для меня чрезвычайно большая радость, что я мог содействовать своими прежними исследованиями результату, который намного их превосходит и заполняет в анализе колоссальный пробел. И разве не доказывает это блестящим образом, что германцы и кельты — одно и сражаются на поле науки одним и тем же оружием!» [I, 226, с. 212—213].

Эти слова Эрмита — блестящее подтверждение его глубоко нравственной позиции истинного ученого и гражданина: искренняя радость за победу в науке, достигнутую общими усилиями ученых разных стран.

Впоследствии доказательства Эрмита и Линдемана были упрощены и усовершенствованы (Э. Руше [II, 382], А. А. Марков [II, 50], К. Вейерштрасс [II, 425], К. А. Поссе [II, 75] и др.: [II, 216], [II, 222], [II, 224]), но идея Эрмита продолжает оставаться основой всех доказательств трансцендентности этих чисел. Среди тех, кто продолжил исследования в этой области, можно назвать К. Вейерштрасса, Д. Гильберта (кстати, ученика Линдемана), А. Гурвица, П. Гордана, К. Валена, Ф. Мертенса [II, 327] и др.

В числе проблем, поставленных Д. Гильбертом перед математиками на Международном математическом конгрессе в Париже (том самом, который избрал Эрмита почетным президентом) в 1900 г., был вопрос об арифметической природе чисел вида $\alpha^\beta$, где $\alpha$ — алгебраическое число, отличное от 0 и 1, а $\beta$ — алгебраическое иррациональное число (седьмая проблема Гильберта) [II, 82, 221]. Эта проблема была решена советским математиком А. О. Гельфондом в 1934 г. [II, 21—24] и несколько позднее, независимо от него, — Т. Шнейдером [II, 383, 384]. При этом Гельфонд не забыл о том, что «первый принципиальный шаг вперед после Лиувилля в теории трансцендентных чисел был сделан Шарлем Эрмитом, применившим классический анализ к исследованию арифметической природы чисел. С помощью специального интегрального тождества, которому удовлетворяет функция $e^x$, Эрмит доказал в 1873 г. трансцендентность числа $e$ — основания натуральных логарифмов [II, 25, с. 298] . . . Несколько обобщив тождество Эрмита, Линдеман в 1882 г. доказал трансцендентность чисел вида $e^\alpha$, где $\alpha$ — алгебраическое число, откуда сразу же следует трансцендентность числа $\pi$ и тем самым отрицательное решение проблемы квадратуры круга.

Тождество Эрмита, благодаря своему весьма частному характеру, оказалось непригодным для решения других проблем в области теории трансцендентных чисел. Общая же идея о связи между арифметической природой функции, арифметическими свойствами ее тейлоровых коэффициентов и ее значений сыграла руководящую роль в дальнейшем» [II, 25, с. 298].

К. Малер, применивший некоторые формулы Эрмита к приближению экспоненциальных функций и логарифмов [II, 317], указывал, что «современная теория доказательств трансцендентности началась с прекрасной статьи Эрмита „Об экспоненциальной функции“ [I, 89]. В этой статье для данной системы различных комплексных чисел $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ и положительных целых $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ с суммой $\sigma$ Эрмит построил множество полиномов $\mathfrak{A}_0(z), \mathfrak{A}_1(z), \ldots, \mathfrak{A}_m(z)$ степеней, не превосходящих $\sigma-\rho_0, \sigma-\rho_1, \sigma-\rho_2, \ldots, \sigma-\rho_m$ соответственно, таких, что все функции

$$\mathfrak{A}_k(z)\, e^{\omega_l z}-\mathfrak{A}_l(z)\, e^{\omega_k z}, \qquad (0 \leqslant k < l \leqslant m)$$

обращаются в 0 при $z=0$ по крайней мере до порядка $\sigma+1$. Если положить $z=1$, то эти формулы дают одновременные рациональные приближения чисел $1, e, e^2, \ldots, e^m$, которые так хороши, что они влекут за собой линейную независимость этих чисел и тем самым трансцендентность $e$. В более поздней статье [I, 173] Эрмит ввел вторую систему полиномов $A_0(z), A_1(z), \ldots, A_m(z)$ степеней, больших, чем $\rho_0-1, \rho_1-1, \ldots, \rho_m-1$, соответственно, для которых сумма

$$\sum_{k=0}^{m} A_k(z)\, e^{\omega_k z}$$

обращается в 0 по крайней мере до порядка $\sigma-1$.

Полагая затем $z=1$, получаем линейную форму $a_0+a_1e+\ldots+a_me^m$, малую по абсолютной величине и с малыми целыми коэффициентами, из которой снова можно вывести трансцендентность $e$. Удивительно, что сам Эрмит не сделал этого шага, и, кажется, я первый использовал полиномы с этой целью» [II, 317]. Позднее Малер показал пользу применения полиномов Эрмита $A_k(z)$ для изучения трансцендентности чисел, доказав несколько явных оценок, свободных от неизвестных постоянных, для одновременных рациональных приближений степеней числа $e$ и для натуральных логарифмов многих рациональных чисел [II, 316].

Как писал А. О. Гельфонд, «тождество Эрмита, лежащее в основе общей теоремы Линдемана, специфично для функции $e^z$; для других функций того же типа, например для функций Бесселя, аналогичного тождества построить, по-видимому, нельзя. Более общий метод, позволяющий исследовать арифметическую природу значений достаточно широкого класса функций, имеющих алгебраические коэффициенты ряда Тейлора в нуле и удовлетворяющих алгебраическим дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами, был опубликован К. Зигелем в 1929—1930 гг. Этот метод является естественным продолжением работ Эрмита и Линдемана. Общая теорема об алгебраической независимости, им доказанная, представляет собой прямое обобщение теоремы Линдемана. Существенную роль играет в этом методе одна общая идея относительно определения нижних границ линейных форм с целыми или алгебраическими коэффициентами от степеней одного или нескольких чисел, представляющая собой развитие идеи А. Туэ в теории аппроксимации алгебраических чисел рациональными дробями» [II, 27, с. 66—67].

Дальше Гельфонд вводит понятие меры трансцендентности числа $\alpha$ и системы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, указывает, что на этом понятии основаны различные классификации трансцендентных чисел, такие как классификации Д. Д. Мордухая-Болтовского или К. Малера, и определяет числа Лиувилля с помощью этого понятия [II, 27, с. 76]. Исследованием поведения меры трансцендентности занимались многие математики. Гельфонд называет работы Мордухая-Болтовского, который впервые дал оценку меры трансцендентности чисел $e^{\omega_1}, e^{\omega_2}, \ldots, e^{\omega_s}$ и $\ln \alpha$, К. Зигеля, К. Малера, Н. Фельдмана. (Со времени издания книги Гельфонда к этим именам прибавились многие другие). Он приводит ряд полученных неравенств для нижней границы меры трансцендентности и отмечает, что «метод получения всех этих неравенств для меры является количественным оформлением идей Эрмита—Зигеля» [II, 27, с. 77], см. также [II, 1, 89, 90, 115].

# Глава 4

## Ортогональные полиномы

История ортогональных полиномов начинает свое «летосчисление», по-видимому, с работ Эйлера [II, 198], знакомого со свойством ортогональности систем тригонометрических функций и использовавшего это свойство при нахождении коэффициентов тригонометрических рядов («рядов Фурье»).

Довольно подробно история ортогональных полиномов и сферических функций рассмотрена в книге Гейне [II, 220] и в Энциклопедии математических наук [II, 192, 193]. Напомним лишь некоторые имена и результаты. Статья Ж.-Л. Лагранжа «О притяжении эллиптических сфероидов» [II, 265] послужила отправным моментом для исследований многих математиков, в первую очередь А.-М. Лежандра [II, 283—284] и П.-С. Лапласа [II, 276—277]. Встретившись с функциями, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям, например, уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0,$$

они отыскивали решения уравнений в виде рядов по отрицательным степеням параметра. Коэффициентами таких рядов оказались функции, обладающие свойством, аналогичным свойству ортогональности тригонометрических функций. Функции были многочленами и получили наименование «полиномов Лежандра», которые тот изучал и применял в сочинениях, также посвященных притяжению сфероидов [II, 283—284], и пришел к функциям $Q^{(i)}(x)$, раскладывая в ряд по степеням $R/r$ (при $R<r$) или $r/R$ (при $r<R$) функцию

$$T=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rR\cos\gamma+R^2}}.$$

Эта функция является «производящей» функцией полиномов $Q^{(i)}(x)$ Лежандра, сформулировавшего и доказавшего несколько их свойств, в том числе ортогональность в $(-1, 1)$:

$$\int\limits_{-1}^{1} Q^{(i)}(x)\,Q^{(j)}(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j; \quad \int\limits_{-1}^{1} [Q^{(i)}(x)]^2\,dx = \frac{2}{2i+1}.$$

Лаплас в своей работе [II, 276] приходит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d\left[(1-\mu^2)\dfrac{d\beta}{d\mu}\right]}{d\mu} - \frac{n^2\beta}{1-\mu^2} + i(i+2)\beta = 0, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Функция $Q^{(i)}(x)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа, может быть разложена в ряд

$$Q^{(i)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)}{1\cdot 2\ldots i}\left\{x^i - \frac{i(i-1)}{2(2i-1)}x^{i-2} + \ldots\right\},$$

где $Q^{(i)}(x)$ — многочлены от $x = \cos\gamma$, $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\cdot\sin\theta'\cdot\cos(\omega-\omega')$, а функция $T$ раскладывается в ряд

$$T = \frac{Q^{(0)}R}{r} + \frac{Q^{(1)}R^2}{r^2} + \frac{Q^{(2)}R^3}{r^3} + \ldots; \quad V = \iiint T\,d\theta\,dr\,d\omega.$$

В 1812 г. Джеймс Айвори в статье [II, 225], также посвященной притяжению сфероидов, дал выражение коэффициента $c^{(i)}$ ряда для $1/f$:

$$\frac{1}{f} = c^{(0)}\frac{1}{r} + c^{(1)}\frac{a}{r^2} + c^{(2)}\frac{a^2}{r^3} + \ldots,$$

где

$$f = (r^2 - 2r\rho\gamma + \rho^2)^{1/2},$$

а именно

$$c^{(i)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots i}\left\{\gamma^i - \frac{i(i-1)}{2(2i-1)}\gamma^{i-2} + \ldots\right\},$$

и выражение коэффициента $A^{(i)}$,

$$A^{(i)} = \frac{(-1)^i}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2i}\cdot\frac{d^i(1-\gamma^2)^i}{d\gamma^i} \quad \text{[II, 225, с. 49—60]},$$

удовлетворяющего более общему дифференциальному уравнению

$$\frac{d\left\{(1-\gamma^2)^{n+1}\cdot\frac{d^{n+1}A^{(i)}}{d\gamma^{n+1}}\right\}}{d\gamma}+(i-n)(i+n+1)(1-\gamma^2)^n\frac{d^nA^{(i)}}{d\gamma^n}=0,$$

и вывел некоторые свойства этих функций. Формула для $c^{(i)}$, позднее найденная также О. Родригесом (Родригом, Rodrigues Olinde) [II, 378] и К.-Г. Якоби [II, 237], обычно называется формулой Якоби; она была также указана Айвори в 1824 г. [II, 226]. Якоби дал выражение $c^{(i)}$ в статье, которая начинается некоторыми историческими замечаниями о функциях, получающихся при разложении функции $F(x)$:

$$F(x)=(1-2xz+z^2)^{-1/2}.$$

Он заметил, что разложение функции $(1-2xz+z^2)^{-1/2}$ в ряд

$$F(x)=A+A_1X^{(1)}+A_2X^{(2)}+\ldots+A_nX^{(n)}+\ldots,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$A^{(n)}=\frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}F(x)\cdot X^{(n)}dx,$$

имеет большое сходство с тем, которое дал Эйлер для разложений функции по синусам и косинусам кратных углов. Сам Якоби установил новое свойство функций $X^{(n)}$, состоящее в том, что

$$X^{(n)}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}. \qquad (1)$$

Для вывода этой формулы [II, 237, с. 224] Якоби использовал теорему Лагранжа о ряде для корня $y$ уравнения $y-x=z\,F(y)$. Эта формула встречалась уже у Айвори и Родригеса (а, может быть, и еще у кого-то). В конце статьи Якоби говорит, что функции вида $X^{(n)}$ он начал рассматривать в связи с изучением работы Гаусса о новом методе приближенного вычисления интегралов [II, 211] и что функция $X^{(n)}$ совпадает с той, что у Гаусса обозначена $U$ и корни которой указывают промежутки для вычисления ординат, чтобы приближение с помощью параболической кривой с ординатами, вычисленными в соответствующих точках, было наилучшим.

Ортогональными полиномами затем занимались Г. Ламе [II, 271, 272, 273] и Э. Гейне, издавший специальную книгу о сферических функциях [II, 220]. Непосредственным предшественником Эрмита в этих вопросах был

П. Л. Чебышев, который встретился с ортогональными полиномами при отыскании приближенного выражения функций, погрешность замены которым данной функции должна быть минимальной в пределах заданного промежутка [II, 114]. Задача сводилась к следующему: «Среди наибольших и наименьших значений разности $f(x)-U$ в пределах $x=\alpha-\gamma$ и $x=\alpha+\gamma$ встречается по крайней мере $n$ раз одно и то же значение. Это требует, чтобы для некоторого $l$ уравнения

$$\begin{gathered}(f(x)-U)^2-l^3=0,\\ \frac{d\,(f(x)-U)}{dx}=0\end{gathered}\tag{2}$$

имели $n$ общих корней в промежутке $[\alpha-\gamma, \alpha+\gamma]$». Полином $U$ дает решение системы уравнений (2) в промежутке $[\alpha-\gamma, \alpha+\gamma]$, и, обратно, решение уравнений (2) дает полином степени $n$ для $x\in[\alpha-\gamma, \alpha+\gamma]$. В качестве примера Чебышев находит полином $U$ степени $n$, дающий точное значение $f(x)$

$$f(x)=k_{n+1}x^{n+1}$$

при $x\in[\alpha-\gamma, \alpha+\gamma]$ и наименее уклоняющийся от нуля в этом промежутке [II, 114]. Затем он рассматривает интерполяционную формулу Лагранжа (Варинга) и представляет функцию $f(x)$ в виде непрерывной дроби, которая получается от разложения суммы

$$\frac{1}{x-x_0}+\frac{1}{x-x_1}+\cdots+\frac{1}{x-x_n}.$$

В частном случае формула для $f(x)$ дает разложение этой функции по полиномам Лежандра, которые здесь находятся с помощью разложения $\log\frac{x+1}{x-1}$ в непрерывную дробь [II, 114]. Устанавливается связь этих рассуждений с методом наименьших квадратов.

В других работах [II, 98, 110] Чебышев проводит аналогичное рассуждение в общем виде, рассматривая связь с разложением функции в непрерывную дробь и свойства таких разложений. Как отметил Н. И. Ахиезер, «в этих работах заложены основы общей теории ортогональных полиномов и дан общий метод — метод непрерывных дробей, который в этой области оставался основным орудием в течение многих лет вплоть до своего триумфа в замечательных „Исследованиях о непрерывных дробях Стилтьеса“» [II, 3].

Эрмит, по его собственным словам, заинтересовался теорией ортогональных полиномов в связи с работами Чебышева и беседами с ним (см. с. 114). Первая из статей этого цикла [I, 57] была опубликована в 1864 г., то есть спустя 10 лет после появления статьи Чебышева [II, 114]. В ней Эрмит вначале рассматривает полиномы, подобные полиномам Лежандра $X^{(n)}$ (см. с. 95). Обозначив $e^{-x^2}U_n$ производную $n$-го порядка от $e^{-x^2}$, находит[1]

$$U_0=1,\ U_1=-2x,\ U_2=4x^2-2,\ U_3=-8x^3+12x,$$
$$U_4=16x^4-48x^2+12,\ \ldots$$

и вообще

$$(-1)^n U_n=(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2x)^{n-4}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}(2x)^{n-6}+\ldots,$$

или в другой форме:

$$\frac{(-1)^{n/2}U_n}{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}=1-nx^2+\frac{n(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 2^2x^4-\frac{n(n-2)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}2^3x^6+\ldots$$

при четном $n$ и

$$\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}U_n}{2n(n-1)\ldots\left(\frac{n+1}{2}\right)}=x-\frac{n-1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2x^3+\frac{(n-1)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 2^2x^5-\ldots$$

[1] В настоящее время полиномом Эрмита называют

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n},$$

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ (то есть $H_n(x)=(-1)^n U_n(x)$) (см., например, [II, 47, с. 81]).

при $n$ нечетном. Можно доказать следующие утверждения (что и делает Эрмит [I, 57]).

1. Полиномы $U_{n+1}$, $U_n$, $U_{n-1}$ связаны зависимостью

$$U_{n+1}+2xU_n+2nU_{n-1}=0$$

и, следовательно, могут быть рассматриваемы как последовательные подходящие дроби для непрерывной дроби

$$-\cfrac{1}{2x-\cfrac{2}{2x-\cfrac{4}{2x-\ldots}}}$$

Кроме того,

$$\frac{dU_n}{dx}=-2nU_{n-1},\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

откуда получается уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2U_n}{dx^n}-2x\frac{dU_n}{dx}+2nU_n=0,\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

2. Уравнение $U_n=0$ имеет все корни вещественные, и все они заключены между $\frac{1}{\sqrt{n}}$ и $\sqrt{\frac{n^2-n}{2}}$.

3. Интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}U_n dx$$

(при любом $n$, кроме $n=0$) и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}U_nU_{n'}dx$$

(при $n$, отличном от $n'$) равны 0. Если $n=n'$, то имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}U_n^2dx=2\cdot 4\cdot 6\ \ldots 2n\cdot\sqrt{\pi}.$$

4. Всякий целый полином $F(x)$ степени $n$ можно выразить так:

$$F(x)=A_0U_0+A_1U_1+\ \ldots A_nU_n, \tag{3}$$

где $A_0$, $A_1$, $A_2$, ... — постоянные. Для доказательства достаточно заметить, что для любой степени $n$ имеем

$$(-2x)^n = U_n + \frac{n(n-1)}{1} U_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} U_{n-4} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} U_{n-6} + \ldots,$$

и аналогично будет для всякой функции $F(x)$, если положить

$$A_n = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} U_n F(x)\, dx.$$ [2]

Одно из свойств разложений (3) состоит в том, что они сохраняют ту же форму после дифференцирования и интегрирования. Действительно, имеем

$$F(x) = \sum A_n U_n, \quad F'(x) = -2 \sum (n+1) A_{n+1} U_n,$$
$$\int F(x)\, dx = -\frac{1}{2} \sum \frac{A_{n-1}}{n} U_n.$$

В частности, получается

$$\cos 2\omega x = e^{-\omega^2}\left(U_0 - \frac{\omega^2}{1 \cdot 2} U_2 + \frac{\omega^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} U_4 - \ldots\right),$$
$$\sin 2\omega x = -e^{-\omega^2}\left(\frac{\omega}{1} U_1 - \frac{\omega^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} U_3 + \frac{\omega^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} U_5 - \ldots\right).$$

Подобные результаты справедливы и для функций более общего вида, которые получаются с помощью последовательного дифференцирования выражений $e^{-ax^2}$.

Эрмит рассматривает полиномы, аналогичные полиномам $X^{(n)}$, но зависящие от нескольких переменных. Если положить $x = 2\cos\varphi$, то величины

$$V_n = 2\cos n\varphi, \quad U_n = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}$$

также будут полиномами степени $n$ от $x$ и такими, что интегралы

$$\int_{-2}^{2} V_n V_{n'} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} \quad \text{и} \quad \int_{-2}^{2} U_n U_{n'} \cdot \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\, dx$$

[2] О разложении произвольной функции $f(x)$ в ряд по полиномам Эрмита на промежутке $(-\infty, \infty)$ см. [II, 47, с. 91—100]. Разложения в работах Эрмита формальные.

равны нулю или $2\pi$ в зависимости от того, будет $n$ отлично от $n'$ или равно ему. Эти полиномы $V_n$, $U_n$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(x^2-4)\frac{d^2V_n}{dx^2}+x\frac{dV_n}{dx}-n^2V_n=0,$$

$$(x^2-4)\frac{d^2U_n}{dx^2}+2(x+1)\frac{dU_n}{dx}-n(n+1)U_n=0,$$

первое из которых имеется в «Высшей алгебре» Серре [II, 83, с. 205]. Их можно также рассматривать как знаменатели подходящих дробей для следующих непрерывных дробей:

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}=\cfrac{2}{x-\cfrac{2}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\dots}}}},$$

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}=1-\cfrac{2}{x+1-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\dots}}}$$

Полиномы Эрмита $H_n(x)$ допускают простое асимптотическое представление, полученное русским математиком А. А. Адамовым. Оно играет важную роль в теории разложения произвольных функций в ряды по полиномам Эрмита [II, 47, с. 89—91], а именно:

$$H_n(x)\approx 2^{\frac{n+1}{2}}n^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}}e^{\frac{x^2}{2}}\cos\left(\sqrt{2n+1}\,x-\frac{n\pi}{2}\right)$$

при $n\to\infty$ [II, 47, с. 91]. Эрмит напоминает также о полиномах Ламе, «свойства которых изложены с такой простотой и изяществом знаменитым геометром в его сочинении „О функциях, обратных тригонометрическим, и об изотермических поверхностях"» [II, 271, с. 231—240].

Дальше он переходит к основному предмету своего исследования. Пусть $\varphi(x, y, z, \dots)$ — квадратичная форма от $\mu$ переменных $x, y, z, \dots,$ вещественная часть которой $>0$. Обозначим $\psi(x, y, z, \dots)$ союзную форму для $\varphi(x, y, z, \dots)$, а $\delta$ — инвариант. Рассмотрим две системы целых рациональных полиномов от $x, y, z, \dots,$ определенные следующим образом.

Сначала разложим в ряд экспоненту $e^{-\varphi(x+h,\, y+h_1,\, z+h_2,\, \dots)}$

по степеням приращений $h$, $h_1$, $h_2$, ... и заменив в обозначениях Эрмита $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ через $(n)$, запишем равенство

$$e^{-\varphi(x+h,\, y+h_1,\, z+h_2,\, \ldots)} = e^{-\varphi(x,\, y,\, z,\, \ldots)} \sum \frac{h^n h_1^{n'} h_2^{n''} \ldots}{(n)(n')(n'') \ldots} U_{n,\, n',\, n'',\, \ldots}$$

Здесь $U_{n,\, n',\, n'', \ldots}$ — целые рациональные полиномы от $x$, $y$, $z$, ... степени, равной $n + n' + n'' + \ldots$. Они составляют первую систему. Вторая система получается с помощью линейной подстановки, осуществленной над приращениями $h$, $h_1$, $h_2$, .... Введем полином $\psi(k, k_1, k_2, \ldots)$, обозначим $h = \frac{d\psi}{dk}$, $h_1 = \frac{d\psi}{dk_1}$, ... и разложим по степеням $k$, $k_1$, $k_2$, ... экспоненту $e^{-\varphi\left(x+\frac{d\psi}{dk},\, y+\frac{d\psi}{dk_1},\, z+\frac{d\psi}{dk_2},\, \ldots\right)}$. Новые полиномы обозначим $V_{n,\, n',\, n'', \ldots}$, записав, как и в первом случае

$$e^{-\varphi\left(x+\frac{d\psi}{dk},\, y+\frac{d\psi}{dk_1},\, z+\frac{d\psi}{dk_2},\, \ldots\right)} = e^{-\varphi(x,\, y,\, z,\, \ldots)} \times$$

$$\times \sum \frac{k^n k_1^{n'} k_2^{n''}, \ldots}{(n)(n')(n'') \ldots} V_{n,\, n',\, n'',\, \ldots}$$

Эрмит устанавливает первое характеристическое свойство этих полиномов:

$$\sqrt{\frac{\pi^\mu}{\delta}}\, e^{4\delta(hk+h_1k_1+h_2k_2+\ldots)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots dxdydz \ldots e^{-\varphi(x,\, y,\, z,\, \ldots)} \times$$

$$\times \sum \frac{h^n h_1^{n'} h_2^{n''} \ldots}{(n)(n')(n'') \ldots} U_{n,\, n'} \ldots \sum \frac{k^n k_1^{n'} k_2^{n''} \ldots}{(n)(n')(n'') \ldots} V_{n,\, n',\, n'',\, \ldots}$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots e^{-\varphi(x,\, y,\, z,\, \ldots)} U_{n,\, n',\, n'',\, \ldots} V_{m,\, m',\, m'',\, \ldots} dxdydz$$

обращается в нуль, если никакая из разностей $n - m$, $n' - m'$, $n'' - m''$, ... не равна нулю; тогда как при $m = n$, $m' = n'$, $m'' = n''$, ... имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{-\varphi(x,\,y,\,z,\,\ldots)}U_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}V_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}dxdydz\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi^{\mu}}{\delta}}(n)(n')(n'')\ldots(4\delta)^{n+n'+n''+\ldots}$$

Это утверждение, пишет Эрмит, может служить основой для изучения разложений функции $F(x,\ y,\ z,\ \ldots)$ видов

$$F(x,\ y,\ z,\ \ldots)=\sum A_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}U_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}$$

и

$$F(x,\ y,\ z,\ \ldots)=\sum B_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}V_{n,\,n',\,n'',\,\ldots},$$

где

$$A_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}=\frac{1}{(n)(n')(n'')\ldots}\sqrt{\frac{\delta}{\pi^{\mu}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{-\varphi(x,\,y,\,z,\,\ldots)}\times$$
$$\times V_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}F(x,\ y,\ z,\ \ldots)\,dxdydz\ldots,$$

$$B_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}=\frac{1}{(n)(n')(n'')\ldots}\sqrt{\frac{\delta}{\pi^{\mu}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots e^{-\varphi(x,\,y,\,z,\,\ldots)}\times$$
$$\times U_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}F(x,\ y,\ z,\ \ldots)\,dxdy\ldots$$

Но этому вопросу должно предшествовать изучение полиномов $U$ и $V$. Поэтому он переходит к рассмотрению разложений

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x-h,\,y-h_1,\,z-h_2,\,\ldots)}=$$
$$=e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\,y,\,z,\,\ldots)}\sum\frac{h^n h_1^{n'} h_2^{n''}\ldots}{(n)(n')(n'')\ldots}U_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}$$

и

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi\left(x-\frac{1}{2\delta}\cdot\frac{d\psi}{dk},\,y-\frac{1}{2\delta}\cdot\frac{d\psi}{dk_1},\,\ldots\right)}=$$
$$=e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\,y,\,z,\,\ldots)}\sum\frac{k^n k_1^{n'} k_2^{n''}\ldots}{(n)(n')(n'')\ldots}V_{n,\,n',\,n'',\,\ldots}$$

В случае одной переменной разложение приобретает вид

$$e^{-\frac{a}{2}(x-h)^2}=e^{-x^2\frac{a}{2}}\left(U_0+\frac{h}{1}U_1+\frac{h^2}{1\cdot 2}U_2+\ldots\right)$$

и получается

$$U_n = a^n x^n - \frac{n(n-1)}{2} a^{n-1} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} a^{n-2} \times$$
$$\times x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6} a^{n-3} \cdot x^{n-6} + \ldots$$

Для четного $n$, располагая разложение по возрастающим степеням $x$, получаем

$$\frac{(-1)^{n/2} U_n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1) a^{n/2}} = 1 - \frac{nax^2}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-2) a^2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} -$$
$$- \frac{n(n-2)(n-4) a^3 x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots,$$

а для нечетного $n$

$$\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} U_n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots n a^{\frac{n+1}{2}}} = x - \frac{(n-1) ax^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n-1)(n-3) a^2 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} -$$
$$- \frac{(n-1)(n-3)(n-5) a^3 x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

К этим формулам можно присоединить еще следующие равенства:

$$U_{n+1} - axU_n + anU_{n-1} = 0,$$
$$\frac{d^2 U_n}{dx^2} - ax \frac{dU_n}{dx} + anU_n = 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} U_n U_{n'} dx = 0, \quad (n \neq n'),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} U_n^2 dx = n!\, a^n \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Затем Эрмит переходит к случаю функции двух переменных:

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Полиномы будут определяться равенствами

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x-h,\, y-h_1)} = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\, y)} \sum \frac{h^m h_1^n}{(m)\,(n)} U_{m,\,n}$$

или

$$e^{h(ax+by)+h_1(bx+cy)} = e^{\frac{1}{2}\varphi(h,\, h_1)} \sum \frac{h^m h_1^n}{(m)\,(n)} U_{m,\,n}.$$

Взяв, например, $ax+by=\xi$, $bx+cy=\eta$, получим значения $U_{m,\,n}$:

$$U_{0,\,0}=1, \quad U_{1,\,0}=\xi, \quad U_{0,\,1}=\eta, \quad U_{2,\,0}=\xi^2-a,$$
$$U_{1,\,1}=\xi\eta-b, \quad U_{0,\,2}=\eta^2-c, \ \ldots$$

Обозначив

$$F_n(x,\ a)=x^n-\frac{n\,(n-1)}{2}\,ax^{n-2}+$$
$$+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\cdot 4}\,a^2x^{n-4}-\ldots$$

(то есть выражение для $U_n$, когда в нем положено $\frac{x}{a}$ вместо $x$), получим

$$U_{m,\,n}=F_m(\xi,\ a)\,F_n(\eta,\ c)-mnbF_{m-1}(\xi,\ a)\,F_{n-1}(\eta,\ c)+$$
$$+\frac{mn\,(m-1)\,(n-1)}{1\cdot 2}\,b^2F_{m-2}(\xi,\ a)\,F_{n-2}(\eta,\ c)-$$
$$-\frac{mn\,(m-1)\,(n-1)\,(m-2)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\times$$
$$\times\, b^3F_{m-3}(\xi,\ a)\,F_{n-3}(\eta,\ c)+\ldots$$

Для определения полиномов $V_{m,\,n}$ надо взять равенство

$$e^{kx+k_1y}=e^{\frac{\psi(k,\,k_1)}{2\delta}} \sum \frac{k^m k_1^n}{(m)\,(n)}\,V_{m,\,n},$$

и при замене $x$, $y$ на $\xi$, $\eta$ и $a$, $b$, $c$ на коэффициенты союзной формы $\frac{c}{\delta}$, $\frac{-b}{\delta}$, $\frac{d}{\delta}$ (деленные на детерминант $\delta=ac-b^2$) их выражение совпадает с предыдущим.

Получаются соотношения (в обозначениях Эрмита)

$$U_{m+1,\,n}-\xi U_{m,\,n}+amU_{m-1,\,n}+bnU_{m,\,n-1}=0,$$

$$\frac{dU_{m,\,n}}{d\xi}=mU_{m-1,\,n},$$

$$U_{m,\,n-1}-\eta U_{m,\,n}+bmU_{m-1,\,n}+cnU_{m,\,n-1}=0,$$

$$\frac{dU_{m,\,n}}{d\eta}=nU_{m,\,n-1},$$

откуда приходят к двум линейным уравнениям второго порядка в частных производных:

$$a\frac{d^2U_{m,\,n}}{d\xi^2}+b\frac{d^2U_{m,\,n}}{d\xi d\eta}-\xi\frac{dU_{m,\,n}}{d\eta}+mU_{m,\,n}=0,$$

$$c\frac{d^2U_{m,\,n}}{d\eta^2}+b\frac{d^2U_{m,\,n}}{d\xi d\eta}-\eta\frac{dU_{m,\,n}}{d\xi}+nU_{m,\,n}=0.$$

Эрмит устанавливает, что уравнение $U_{m,\,n}=0$, рассматриваемое по отношению к $x$ или $y$, имеет всегда все корни вещественные. Для этого требуется рассмотреть функции

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\,y)}U_{m,\,n}=(-1)^{m+n}\frac{d^{m+n}e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\,y)}}{dx^m dy^n},$$

или, поскольку при $m=0$

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\,y)}U_{0,\,n}=(-1)^n\frac{d^n e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\,y)}}{dy^n},$$

функции

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\,y)}U_{m,\,n}=(-1)^m\frac{d^m e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\,y)}U_{0,\,n}}{dx^m}.$$

Далее он замечает, что уравнение $U_{0,\,n}=0$ допускает $n$ вещественных корней относительно $\eta=bx+cy$ и, следовательно, по отношению к $x$, каким бы ни был $y$. Экспоненциальный множитель $e^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\,y)}$ всегда положителен, поэтому производная

$$\frac{de^{-\frac{1}{2}\varphi(x,\,y)}U_{0,\,n}}{dx}$$

имеет $n-1$ корень в том же промежутке, что и предыдущие. Но выражение $e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y)}U_{0,n}$ обращается в нуль для $x=-\infty$ и $x=+\infty$, поэтому у производной будут еще два корня. Один — между $-\infty$ и наименьшим корнем уравнения $U_{0,n}=0$, другой — между наибольшим корнем этого уравнения и $+\infty$. Таким образом, уравнение $U_{1,n}=0$ допускает $n+1$ корень. Продолжая это рассуждение, получим, что для уравнения $U_{m,n}=0$ степени $m+n$ относительно $x$ существует $m+n$ вещественных корней. То же рассуждение правомерно и для $y$, и, значит, утверждение Эрмита доказано.

Заканчивает статью Эрмит замечанием о разложении функции

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n U_n(x), \quad (-\infty < x < +\infty),$$

где коэффициент $A_n$ определен соотношением

$$A_n=\frac{1}{n!\,a^n}\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} U_n F(x)\,dx,$$

которое может служить для отыскания условий сходимости этого разложения. Для этой цели Эрмит использует метод, данный Лапласом [II, 276] и примененный им к полиномам Лежандра. Он представляет интеграл уравнения

$$\frac{d^2U_n}{dx^2}-ax\frac{dU_n}{dx}+anU_n=0$$

в виде

$$U_n=p\sin\left(x\sqrt{an}\right)+q\cos\left(x\sqrt{an}\right),$$

подставляет $U_n$ в уравнение и приравнивает к нулю коэффициенты (сначала при $\sin\left(x\sqrt{an}\right)$, а затем при $\cos\left(x\sqrt{an}\right)$). При этом получается

$$axp-2\frac{dp}{dx}=\frac{1}{\sqrt{an}}\left(\frac{d^2q}{dx^2}-ax\frac{dq}{dx}\right),$$

$$2\frac{dp}{dx}-axq=\frac{1}{\sqrt{an}}\left(\frac{d^2p}{dx^2}-ax\frac{dp}{dx}\right),$$

или, если пренебречь членами, разделенными на $\sqrt{n}$, будет

$$axp - 2\frac{dp}{dx} = 0, \quad axq - 2\frac{dq}{dx} = 0,$$

откуда получается

$$p = \alpha e^{\frac{ax^2}{4}}, \quad q = \beta e^{\frac{ax^2}{4}}.$$

Постоянные $\alpha$ и $\beta$ определяются из условия, что $U_n$ будет четной или нечетной функцией от $x$, в зависимости от того, будет ли $n$ четным или нечетным. Имеем

$$(-1)^{n/2} U_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1) a^{n/2} \left(1 - \frac{nax^2}{2} + \ldots\right),$$

$$(-1)^{\frac{n+1}{2}} U_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots n a^{\frac{n+1}{2}} \left(x - \frac{(n-1)ax^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\right).$$

Для четного $n$ получается асимптотическое значение ($n \to \infty$)

$$A_n U_n = \sqrt{\frac{a}{n}}\, e^{\frac{ax^2}{4}} \cos\left(x\sqrt{an}\right) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{4}} F(x) \cos\left(x\sqrt{an}\right) dx,$$

для нечетного

$$A_n U_n = \sqrt{\frac{a}{n}}\, e^{\frac{ax^2}{4}} \sin\left(x\sqrt{an}\right) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{4}} F(x) \sin\left(x\sqrt{an}\right) dx.$$

Подставляя в интегралы вместо $x$ величину $\frac{x}{\sqrt{an}}$, можем сказать, что члены разложения $\sum A_n U_n$ при неограниченном возрастании $n$ стремятся совпасть с членами ряда

$$e^{\frac{ax^2}{4}} \sum \frac{1}{4} \left[a_n \cos\left(x\sqrt{an}\right) + b_n \sin\left(x\sqrt{an}\right)\right],$$

где предполагается

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4n}} F\left(\frac{x}{\sqrt{an}}\right) \cos x\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4n}} F\left(\frac{x}{\sqrt{an}}\right) \sin x\,dx.$$

«Эти выражения, — говорит Эрмит, — в ряде по полиномам $U_n$, согласно замечанию, сделанному Г. Бьенэме по поводу мемуара г. Чебышева „О непрерывных дробях" [II, 110], принадлежат к той очень распространенной категории разложений, которые дают формулы интерполяции с помощью метода наименьших квадратов. Я замечу, наконец, что величина $U_n$ появляется в теории теплоты и ее уже рассматривал г. Штурм в своем прекрасном мемуаре об одном классе уравнений в частных производных [II, 404]. Если обозначить $U$ температуру неоднородного стержня малой толщины, помещенного в среду постоянной температуры, получаем, как известно, уравнение

$$g\frac{dU}{dt}=\frac{d\left(k\frac{dU}{dx}\right)}{dx}-lU\text{» [I, 234, т. 2, с. 308].}$$

В письме к Борхардту [1, 234, т. 2, с. 309] Эрмит говорит, что, исходя из результата Якоби (формулы (1)), он рассмотрел полиномы от двух переменных

$$\frac{d^n(x^2+y^2-1)^n}{dx^\alpha dy^\beta}$$

при условии $\alpha+\beta=n$ и еще более общие полиномы

$$\frac{d^n(ax^2+2bxy+cy^2-1)^n}{dx^\alpha dy^\beta},$$

«имитируя, как видите, способ обобщения при переходе от эллиптических рядов к абелевым: от

$$\sum e^{mx+m^2\omega}\ \text{к}\ \sum e^{mx+ny+am^2+2bmn+cn^2}\text{».}$$

В то же время он думал и о соответствующей замене $\sqrt{1-2ax+a^2}$ выражениями

$$\sqrt{1-2ax-2by+a^2+b^2}\ \text{и}$$

$$\sqrt{1-2ax-2by+Aa^2+2Bab+Cb^2},$$

а также выражениями

$$\frac{1}{1-2ax-2by+a^2+b^2}.$$

Именно с последнего выражения он начинает рассуждение. Пусть

$$\frac{1}{1-2ax-2by+a^2+b^2}=\sum a^\alpha b^\beta U_{\alpha,\beta},$$

где $U_{\alpha,\beta}$ — целый полином от $x$ и $y$ степени $\alpha+\beta$. Тогда

$$\int\int U_{\alpha,\beta}U_{\gamma,\delta}dxdy=0,$$

где интеграл берется между пределами, найденными из условий

$$x^2+y^2\leqslant 1,\quad \alpha+\beta-\gamma-\delta\neq 0.$$

Но интеграл от произведения двух различных полиномов не оказался равен 0. Чтобы восстановить аналогию с функциями одной переменной, имеющими в качестве исходного выражения дробь $\frac{1}{1-2ax+a^2}$ (аналогию, которая тут утрачена), он решил ввести в рассмотрение полиномы $V_{\alpha,\beta}$, той же самой степени, так, чтобы было

$$\int\int U_{\alpha,\beta}V_{\gamma,\delta}dxdy=0$$

всякий раз, как индексы $\alpha$ и $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ не будут одновременно равными. Эти полиномы позволили ему обобщить полиномы Лежандра, но пришлось исходить из выражения $1-2ax-2by+a^2+b^2$. Эрмит прибегает к хорошо знакомым ему тернарным квадратичным формам. Рассматривая тернарную форму от $a$, $b$, $c$

$$c^2+2acx+2bcy+a^2+b^2,$$

он замечает, что она имеет в качестве союзной формы

$$(c-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1),$$

но положив там для упрощения $c=1$, то есть беря

$$\sqrt{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)},$$

разложение которого порождает полиномы $V_{\alpha,\beta}$, и полагая

$$\sqrt{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}=\sum a^\alpha b^\beta V_{\alpha,\beta},$$

получает следующий результат. Если обозначить $\alpha+\beta=n$,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\alpha}=n_\alpha,$$

то полиномы $V_{\alpha,\beta}$ принимают вид

$$V_{\alpha,\beta}=\frac{n_\alpha}{n!\,2^n}\cdot\frac{d^n(x^2+y^2-1)^n}{dx^\alpha dy^\beta},$$

таким образом, аналогия с полиномами Лежандра становится достаточно полной. Он находит, что какова бы ни была функция $F(x, y)$,

$$\iint F(x, y)\frac{d^n(x^2+y^2-1)^n}{dx^\alpha dy^\beta}dxdy=$$

$$=(-1)^n\iint\frac{d^nF(x, y)}{dx^\alpha dy^\beta}(x^2+y^2-1)^n dxdy$$

при условии $x^2+y^2\leqslant 1$.

«Я заключаю отсюда, — говорит Эрмит, — что

$$\iint V_{\alpha,\beta}V_{\gamma,\delta}dxdy=0,$$

если степени $\alpha+\beta$ и $\gamma+\delta$ не одни и те же, как это должно было быть в действительности из-за зависимости полиномов $V_{\alpha,\beta}$ и $U_{\alpha,\beta}$». Эрмит замечает, что $V_{\alpha,\beta}$ обладает следующим свойством: уравнение $V_{\alpha,\beta}=0$, если абстрагироваться от множителя $x$ или $y$, в зависимости от того, будет ли нечетным $\alpha$ или $\beta$, представляет собой замкнутую кривую, расстояние любой точки которой до начала координат меньше 1, так что она заключена внутри единичного круга.

Он обещает продолжить эту тему в «Отчетах» Академии. Кроме того, вычисляет два интеграла (в $x^2+y^2\leqslant 1$):

$$\iint\frac{dxdy}{(1-2ax-2by+a^2+b^2)\left(1-2a'x-2b'y+a'^2+b'^2\right)}=$$

$$=\frac{\pi}{ab'-a'b}\cdot\operatorname{arctg}\frac{ab'-ba'}{1-aa'-bb'},$$

$$\iint\frac{dxdy}{\left(1-2a'x-2b'y+a'^2+b'^2\right)\times\left[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)\right]^{1/2}}=$$

$$=-\frac{\pi}{aa'+bb'}\log(1-aa'-bb'),$$

которые нужны, чтобы установить существенные пункты теории функций $U$ и $V$.

В ранее опубликованной работе [I, 234, т. 2, с. 313] Эрмит рассмотрел уже $n$-кратные интегралы:

$$A = \iint \cdots \int \frac{dxdy \ldots du}{PP'},$$

где $P$ и $P'$ суть

$$P = 1 - 2ax - 2by - \ldots - 2lu + a^2 + b^2 + \ldots + l^2,$$
$$P' = 1 - 2a'x - 2b'y - \ldots - 2l'u + a'^2 + b'^2 + \ldots + l'^2,$$

а область интегрирования — $n$-мерный шар: $x^2 + y^2 + \ldots$ $\ldots + u^2 \leqslant 1$. Кроме того, рассмотрен интеграл

$$B = \iint \cdots \int \frac{dxdy \ldots du}{P' \sqrt{Q}},$$

где

$$Q = (1 - ax - by - \ldots - lu)^2 -$$
$$- (a^2 + b^2 + \ldots + l^2)(x^2 + y^2 + \ldots + u^2 - 1)$$

и область интегрирования та же. Для простоты Эрмит подробно интегрирует аналогичные выражения для случая двух переменных. Он переходит к полярным координатам, меняя соответственно пределы интегрирования. Эрмиту приходится интегрировать произведения тригонометрических рядов в промежутке $[0, \pi]$. В первом случае это произведение:

$$(r \sin\varphi + r^2 \sin 2\varphi + r^3 \sin 3\varphi + \ldots) \times$$
$$\times \left(r' \sin\varphi \sin\theta + \frac{r'^2}{2} \sin 2\varphi \sin\theta + \frac{r'^3}{3} \sin 3\varphi \sin 3\theta + \ldots\right).$$

Из ортогональности тригонометрических функций для интеграла

$$A = \iint \frac{d\xi d\eta}{(1 - 2r\xi + r^2)\left[1 - 2r'(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta) + r'^2\right]}$$
$$(\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1)$$

получается разложение

$$A = \frac{\pi}{ba' - ab'}\left(rr' \sin\theta + \frac{r^2 r'^2}{2} \sin 2\theta + \frac{r^3 r'^3}{3} \sin 3\theta + \ldots\right),$$

откуда следует требуемый результат. Аналогично осуществляется интегрирование и во втором случае.

Эрмит замечает, что свойства интегралов $A$ и $B$ служат исходной точкой для обобщения на функции нескольких переменных теории полиномов Лежандра.

В следующей работе [I, 234, т. 2, с. 319] Эрмит пришел к обобщению полиномов Лежандра с новой точки зрения. По отношению к этим новым функциям верны многие свойства полиномов Лежандра, в частности аналог знаменитого равенства Якоби (Айвори, Родрига) (1). Эта система полиномов и другая, с ней непосредственно связанная, приводят к разложениям функций нескольких переменных $x$, $y$, $z$, ... в пространстве, ограниченном условием $x^2+y^2+z^2+\ldots \leqslant 1$ или, в более общем случае, $\varphi(x, y, z, \ldots) \leqslant 1$, где в левой части стоит определенная и положительная квадратичная форма. «Столь плодотворный и столь известный со времен Фурье (еще Эйлера, — *Е. О.*) метод, состоящий в определении коэффициентов с помощью интегрирования после умножения функции на соответствующий множитель, — замечает Эрмит, — применяется теперь в новых обстоятельствах, но с модификацией, которая кажется характерной для функций от нескольких переменных. Интерес этих новых разложений состоит, в частности, в том, что переменные в них рассматриваются одновременно, а не в результате повторного приложения одного и того же процесса, как бывает чаще всего, к каждой из переменных $x$, $y$, $z$, ..., последовательно рассматриваемой как единственная переменная. Наконец, можно предполагать, что эти полиномы дадут решение вопросов минимума или интерполяции такого рода, как те, которые рассматривал г. Ч е б ы ш е в (выделено мной, — *Е. О.*), и это исследование, должен сказать, было вызвано различными вопросами, которые ставил мне неоднократно по этому предмету наш ученый собрат» [I, 234, т. 2, с. 320].

Идея обобщения вновь почерпнута Эрмитом из способа обобщения эллиптических рядов Якоби при переходе к абелевым функциям от любого числа переменных (эту идею Эрмит связывает с трудами Гёпеля и Розенхайна [II, 214, 380]). Сравнивая выражения

$$\sum e^{i\pi(2mx+m^2\omega)} \text{ и } \sum\sum e^{i\pi(2mx+2ny+gm^2+2hmn+g'n^2)},$$

он приходит к аналогии разложений для

$$1-2ax+a^2 \text{ и } 1-2ax-2by+ga^2+2hab+g'b^2$$

или в случае $n$ переменных $x, y, z, \ldots, u$

$$1-2ax-2by-\ldots-2ku+\varphi(a, b, \ldots, k), \tag{4}$$

где $\varphi$ — однородный полином второй степени от $a, b, \ldots, k$. Добавив одну переменную, он представляет выражение (4) в однородной форме

$$l^2-2alx-2bly-\ldots-2klu+\varphi(a, b, \ldots, k)$$

и рассматривает союзную форму

$$\psi(a, b, \ldots, k).$$

Снова исследование проводится для случая двух переменных, но может быть проделано для $n$. Случай $\varphi(a, b)=a^2+b^2$ приводит к величинам

$$1-2ax-2by+a^2+b^2$$

и

$$(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)=$$
$$=1-2ax-2by+a^2(1-y^2)+2abxy+b^2(1-x^2).$$

Он рассматривает разложение следующих функций, которые объединяет в две группы:

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1},$$
$$[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)+2abxy+b^2(1-x^2)]^{-1/2}$$

и

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-3/2},$$
$$(1-x^2-y^2)[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)+$$
$$+2abxy+b^2(1-x^2)]^{-1}.$$

«Их аналогия с функциями одной переменной, которые они содержат как частный случай в предположении, что $b=0$ и $y=0$, относится, следовательно, одновременно к полиномам Лежандра и к формулам для умножения дуг в теории круговых функций» [I, 234, т. 2, с 322]. Пусть

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}=\Sigma a^m b^n V_{m, n}.$$

Эрмит проверяет непосредственно, что $V_{m, n}$ — целый полином от $x$ и $y$ степени $x^m y^n$, имеющий единственный член этой степени. Его значения

$$V_{0,0}=1, \; V_{1,0}=2x, \; V_{0,1}=2y, \; V_{2,0}=4x^2-1,$$

$$V_{1,1}=8xy,\ V_{0,2}=4y^2-1,\ V_{3,0}=8x^3-4x,$$
$$V_{2,1}=24x^2y-4y,\ V_{1,2}=24xy^2-4x,\ \ldots$$

И наоборот, можно выразить $x^m y^n$ как линейную функцию от $V_{m,n}$ и полиномов меньшей степени, так что

$$\Sigma A_{m,n} V_{m,n}$$

будет представлять при надлежащем определении постоянных всякий целый полином от $x$ и $y$. Эрмит использует вычисленные ранее интегралы $A$ и $B$. Значение интеграла $A$ не изменяется, если заменить в нем $a$ и $b$ на $at$ и $bt$ и $a'$, $b'$ на $\frac{a'}{t}$, $\frac{b'}{t}$, поэтому $t$ в интеграле

$$\iint \Sigma a^m b^n t^{m+n} V_{m,n} \Sigma a'^{\mu} b'^{\nu} t^{-\mu-\nu} V_{\mu,\nu}\, dxdy$$

должно исчезнуть. Для этого требуется, чтобы обращался в нуль интеграл

$$\iint V_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dxdy$$

по области $x^2+y^2 \leqslant 1$, когда $m+n$ и $\mu+\nu$ различны. Но для определения коэффициентов разложения

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}=\Sigma a^m b^n V_{m,n}$$

этого предположения недостаточно. Поэтому Эрмит рассматривает функцию

$$[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)+2bxy+b^2(1-x^2)]^{-1/2}.$$

Ее разложение по целым полиномам $U_{m,n}$ степени $m+n$ имеет вид

$$[1-2ax-2by+a^2(1-y^2)+2bxy+b^2(1-x^2)]^{-1/2}= \\ =\Sigma a^m b^n U_{m,n}.$$

Интеграл $B$ уже был вычислен ранее. С его помощью Эрмит устанавливает, что

$$\iint V_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dxdy=0,$$

если $m$ и $\mu$, $n$ и $\nu$ не равны одновременно. В противном случае получается

$$\iint V_{m,n} U_{m,n}\, dxdy=\frac{\pi}{m+n+1}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{m!}.$$

Теперь обычным методом определяются коэффициенты разложения

$$F(x, y) = \Sigma A_{m,n} V_{m,n}$$

и находится, что

$$\iint F(x, y)\, U_{m,n}\, dxdy =$$

$$= \frac{\pi}{m+n+1} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{m!} A_{m,n}$$

по области $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Эрмит показывает, что $A_{m,n}$ стремится к 0, когда $m$ и $n$ неограниченно возрастают. Отсюда он выводит, что

$$U_{m,n} = \frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}} \frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)}{dx^m dy^n}.$$

В доказательстве этого утверждения использован ряд Лагранжа и разложение функции двух переменных в ряд Тейлора. В результате получается разложение

$$[1 - 2ax - 2by + a^2(1-y^2) + 2bxy + b^2(1-x^2)]^{-1/2} =$$
$$= \sum_{m,n} \frac{a^m b^n}{m!\,n!\,2^{m+n}} \frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m dy^n},$$

из которого следует: 1) полином $U_{m,n}$ есть линейная функция от разных полиномов $V_{m+n,0}, V_{m+n-1,1}, \ldots, V_{0,m+n}$ степени $m+n$; 2) если

$$F(x, y) = \Sigma A_{m,n} V_{m,n},$$

общий член разложения будет

$$\frac{\pi}{m+n-1} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{n!} A_{m,n} =$$
$$= \iint F(x, y)\, U_{m,n}\, dxdy.$$

Тогда для $A_{m,n}$ будет

$$A_{m,n} < \frac{\rho_{m,n}}{(m+n)!\,2^{m+n}},$$

где

$$\rho_{m,n} = \max\left\{\frac{d^{m+n}F(x, y)}{dx^m dy^n}\right\} \text{ при } x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Предполагая, что $\frac{\rho_{m,n}}{(m+n)!}$ не превосходит некоторой постоянной $k$, видим, что члены разложения $\Sigma A_{m,n} V_{m,n}$ не превосходят членов ряда

$$k \Sigma \frac{1}{2^{m+n}} V_{m,n},$$

представляющего функцию

$$k (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1}$$

в предположении $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. Далее на основе свойств полиномов Лежандра Эрмит устанавливает некоторые свойства полиномов $U_{m,n}$.

В результате находятся аналог формулы Якоби для полиномов Лежандра и вообще — аналог полиномов Лежандра для случая функции двух переменных — полиномы от двух переменных $U_{m,n}$. Но Эрмит напоминает, что Якоби установил соотношение (1) в 1826 г. [II, 237], а еще в 1815 г. Олинде Родригес пришел к этому выражению в диссертации «О притяжении сфероидов», представленной Факультету наук (см. с. 97). При этом в диссертации содержится другая замечательная формула:

$$\frac{1}{(m-p)!} \frac{d^{m-p} (x^2-1)^m}{dx^{m-p}} = \frac{(x^2-1)^p}{(m+p)!} \cdot \frac{d^{m+p} (x^2-1)^m}{dx^{m+p}},$$

позднее также данная Якоби и играющая важную роль в теории функций. Для полиномов $U_{m,n}$ подобного столь простого соотношения Эрмит пока не смог установить.

В статье «Интегрирование рациональных функций» [I, 234, т. 3, с. 35] Эрмит выводит формулу выделения алгебраической части интеграла от частного двух рациональных функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$:

$$\int \frac{F_1(x)}{F_2(x)} dx = \sum_a A \log (x-a) - \sum_a \frac{A_1}{x-a} - \ldots$$

$$\ldots - \sum_a \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

Как известно, аналогичную формулу вывел М. В. Остроградский [II, 69].

Эрмит рассматривает несколько примеров. В частности, он изучает произведение

$$F(x) = (x^2 - 1)^n \log \frac{x+1}{x-1}.$$

Обозначив

$$U = (x^2 - 1)^n, \quad V = \log \frac{x+1}{x-1}$$

и применив формулу производной произведения двух функций

$$\frac{d^n UV}{dx^n} = \frac{d^n U}{dx^n} V + \frac{n}{1} \cdot \frac{d^{n-1}U}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dV}{dx} + \\ + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^{n-2}U}{dx^{n-2}} \cdot \frac{d^2V}{dx^2} + \ldots,$$

он замечает, что член

$$\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \cdot \log \frac{x+1}{x-1}$$

и только он будет зависеть от логарифма, остальные будут рациональными и даже целыми. Действительно, так как (при $k \neq n$)

$$\frac{d^k \log \frac{x+1}{x-1}}{dx^k} = \frac{d^k}{dx^k} [\log(x+1) - \log(x-1)] = \\ = (-1)^{k-1}(k-1)! \left[\frac{1}{(x+1)^k} - \frac{1}{(x-1)^k}\right]$$

и поскольку производная

$$\frac{d^{n-k} (x^2-1)^n}{dx^{n-k}}$$

содержит множитель $(x^2-1)^k$, произведение будет целым по $x$. Объединив члены в полиноме $\frac{d^n F(x)}{dx^n}$, перенеся их влево и обозначив левую часть $F_n(x)$, получим соотношение

$$F_n(x) = A \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \cdot \log \frac{x+1}{x-1} + \\ + (-1)^n n! \left[\frac{\alpha}{x^{n+1}} - \frac{(n+1)\beta}{x^{n+2}} + \ldots\right].$$

Оно показывает, что при умножении

$$\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

(полинома $n$-й степени) на бесконечный ряд

$$\log \frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right)$$

произведение не будет содержать степеней $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots$, откуда следует, что при делении $F_n(x)$ на $\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$ получим частное, расположенное по убывающим степеням переменной и совпадающее с этим рядом с точностью до членов порядка $\frac{1}{x^{2n+1}}$.

Этот пример аппроксимации трансцендентной с помощью рациональной функции интересен не только сам по себе, но далее получает еще и важное приложение, делая очевидным свойство (1) полиномов Лежандра $X^{(n)}$.

«Эти функции, введенные в Анализ прославленным геометром (Лежандром, — *Е. О.*) в связи с исследованиями о притяжении сфероидов и фигуре планет, очень важны и дают место нескольким замечательным теоремам, одна из которых послужит нам новым приложением процесса интегрирования по частям. . .» [I, 234, т. 3, с. 52—53]. Отрывок этот, взятый из «Курса анализа» Эрмита, дает читателю возможность познакомиться с характером изложения, которого придерживался Эрмит в своих лекциях в Политехнической школе. Здесь он устанавливает связь между хорошо известной студентам формулой интегрирования по частям, интегрированием рациональных функций с помощью выделения алгебраической части, а затем новыми для них, но занимавшими его в это время полиномами Лежандра.

В 1873 г. Эрмита особенно привлекали вопросы приближения чисел и функций и трансцендентность величин. Поэтому он обращает внимание слушателей на один из случаев аппроксимации трансцендентной функции (логарифма) рациональными, где использует метод, примененный им в одной из своих статей [I, 234, т. 3, с. 150] и изложенный в письме к Л. Фуксу, связывая дифференциальное уравнение $(n+1)$-го порядка с одновременной аппроксимацией нескольких функций.

В статье «О полиномах Лежандра» [I, 234, т. 4, с. 314] Эрмит показывает, как установить фундаментальные свойства полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^{1} X_m X_n dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

с помощью интеграла

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}, \tag{5}$$

разложение которого в ряд по степеням $\alpha$ имеет общий член

$$\alpha^n \int_{-1}^{1} x^p X_n dx.$$

Преобразуя интеграл (5) с помощью замены $\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2} = 1 - \alpha y$, он получает

$$J = \int_{-1}^{1} \left[y + \frac{\alpha}{2}(1 - y^2)\right]^p dy,$$

представляющий собой полином от $\alpha$ степени $p$, что сразу дает при $n > p$ равенство

$$\int_{-1}^{1} x^p X_n dx = 0.$$

Раскладывая подынтегральную функцию по формуле бинома,

$$\left[y + \frac{a}{2}(1 - y^2)\right]^p = \sum \frac{\alpha^n}{2^n} p_n y^{p-n} (1 - y^2)^n,$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots, p),$$

имеем для всех значений $n \leqslant p$ равенство

$$\int_{-1}^{1} x^p X_n dx = \frac{p_n}{2^n} \int_{-1}^{1} y^{p-n} (1 - y^2)^n dy,$$

где

$$p_n = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}.$$

Интеграл в правой части равен 0 при $p-n$ нечетном, при четном выражается величиной

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p-n+1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{p+n+1}{2}+1\right)},$$

а при $p=n$ получаем

$$\int_{-1}^{1} x^n X_n dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{2^n\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}+1\right)}.$$

Этот результат приводит к равенству

$$\int_{-1}^{1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Действительно, пусть $X_n = Ax^n + Bx^{n-2} + \ldots$

Соотношение

$$\int_{-1}^{1} X_n^2 dx = A \int_{-1}^{1} x^n X_n dx$$

показывает, что достаточно найти значение постоянной $A$. Она представляет собой предел $\frac{X_n}{x^n}$ при $n \to \infty$, который находится из основного уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \sum_n \alpha^n X_n,$$

когда $\alpha$ заменяют на $\frac{\alpha}{x}$. В качестве $A$ получается

$$A = \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{n\,!} \text{ или, иначе, } A = \frac{2^n\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

С помощью соотношения

$$\Gamma\left(\frac{2n+2}{2}\right) = \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2^n}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Эрмит записывает $A$ во второй форме:

$$A = \frac{2^n \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

и после сокращения получает

$$\int_{-1}^{1} X_n^2 dx = \frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}+1\right)} = \frac{2}{2n+1}.$$

Здесь же указывается на «разрывность» формулы Лапласа

$$X_n = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^{n+1}}$$

и отмечается, что в этом случае надо принимать $\varepsilon = +1$ или $-1$ в зависимости от того, будет вещественная часть $x$ положительна или отрицательна (об этом см.: «Курс анализа» [I, 78, с. 290; 234, т. 4, с. 316]). О полиномах Лежандра говорится также в письме к Каспари [I, 234, т. 4, с. 321], где Эрмит выводит формулы Мелера [II, 325].

Пикар писал: «Еще со времен Гаусса была известна роль полиномов Лежандра в разложении $\log \frac{x+1}{x-1}$ в непрерывную дробь, и исследования г. Гейне [II, 220] и г. Кристофеля [II, 174] показали зависимости теории непрерывных дробей и некоторых линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Эрмит распространяет все эти результаты, показывая, как некоторое линейное уравнение порядка $n+1$, обобщающее уравнение Гаусса, связано со способами одновременных приближений, приложение которых он дал в мемуаре «Об экспоненциальной функции» [I, 89]. Он обобщает также результат Гаусса (если упомянуть лишь пример), раскладывая логарифмы вида $\log \frac{x-z_i}{x+z_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ в непрерывные дроби, что приводит его к обобщению с очень интересной точки зрения полиномов Лежандра» [I, 234, т. I, с. XXXII]. Здесь речь идет, по-видимому, о статье [I, 234, т. 3, с. 35].

В «Заметке об одной формуле Якоби» [I, 234, т. 3, с. 262] Эрмит говорит: «Прекрасные исследования г. Чебышева и г. Гейне об интеграле

$$\int_0^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz$$

показали роль и значение элементарной теории алгебраических непрерывных дробей в высших частях анализа. Я имею честь представить Обществу[3] новое приложение этой теории, имеющее предметом важное соотношение, открытое Якоби, а именно

$$\frac{d^n (1-x^2)^{n+1/2}}{dx^n} = c \sin[(n+1)\arccos x],$$

где $c$ постоянная» [I, 234, т. 3, с. 262].

Таким образом, в своих исследованиях, касающихся полиномов Лежандра и их обобщений, Эрмит дал обобщения полиномов Лежандра для случая функции двух и более переменных (подробно проделав все выкладки для двух переменных), рассмотрел различные аналоги «равенства Якоби» (см. с. 97) для полиномов Лежандра, дал доказательства свойств этих полиномов и их обобщений, рассмотрел приложения обобщенных полиномов Лежандра к разложению функций в ряды по этим полиномам, в частности к разложению функций, обобщающих пертурбационную функцию небесной механики. Он получил разложения функций нескольких переменных по системам ортогональных полиномов в пространстве нескольких измерений.

---

[3] Королевскому научному обществу города Льежа в Бельгии.

# Глава 5

## Теория эллиптических функций

Теория эллиптических и абелевых функций была излюбленной областью исследований Эрмита в течение всей его научной деятельности, о чем можно судить по творческому наследию, начиная с первого письма к Якоби и вплоть до последнего — к Таннери, написанного незадолго до кончины. Систематическое изложение основных понятий, методов, результатов теории эллиптических и абелевых функций Эрмит дал в приложении [I, 48] к 6-му изданию известного «Трактата» Лакруа [II, 259]. По-видимому, именно Эрмиту наука обязана применением метода теории функций комплексного переменного — интегрирования по контуру — к параллелограмму периодов эллиптической функции. Глубокое знание теории эллиптических и абелевых функций послужило Эрмиту основой для больших открытий как в ней самой, так и в ее приложениях к другим разделам математики: интегрированию дифференциальных уравнений, в первую очередь уравнения Ламе, аналитическому решению алгебраических уравнений пятой степени, теории модулярных уравнений и модулярным функциям, а также для приложений в задачах механики и астрономии.

Прежде чем перейти к краткому описанию некоторых открытий Эрмита, необходимо ознакомить читателя с основными понятиями теории эллиптических и теории аналитических функций вообще, иначе невозможно даже приблизительно изложить результаты Эрмита. Что касается истории этой области, то, например, в книге, подготовленной коллективом французских математиков и изданной под редакцией Ж. Дьедонне [II, 123], имеется хорошо написанная статья Ш. Узеля [II, 123, т. 2], содержащая достаточно точные сведения по истории эллиптических и абелевых функций от Фаньяно и Эйлера, Абеля, Якоби, Гаусса, Лежандра до работ конца XIX в. Истории создания общей теории автоморфных функций посвящена весьма содержательная статья В. М. Кузнецова [II, 43].

## Предварительные сведения

Для начала воспользуемся приемом, берущим начало в лекциях Эрмита и примененным, например, в книге Аппеля и Лакура [II, 124]: проведем параллель между теорией рациональных функций, теорией тригонометрических функций и теорией эллиптических функций. В теории рациональных функций главную роль играют формулы разложения на множители и разложения на простейшие дроби. Первая,

$$f(x)=A\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_p)}, \tag{1}$$

показывает все значения $x$, которые обращают функцию $f(x)$ в 0 или бесконечность. Вторая,

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_mx^m+ \\ +\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l}, \tag{2}$$

указывает те точки, в которых $f(x)$ становится бесконечной и каким именно образом. Для простоты считаем в (1) все $a_k$ и $b_k$, в (2) — все $a, b, c, \ldots, l$ различными.

В тригонометрии также можно указать две формулы подобного назначения и вида. Первая — разложения на множители:

$$f(x)=Ae^{mxi}\,\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_p)}. \tag{3}$$

Она показывает, при каких значениях $x$ функция обращается в 0 или бесконечность. Вторая — разложения на простейшие элементы:

$$f(x)=c_0+c_1e^{2xi}+c_2e^{4xi}+\ldots+c_me^{2mxi}+c_1'e^{-2xi}+ \\ +c_2'e^{-4xi}+\ldots+c_n'e^{-2mxi}+A\operatorname{ctg}(x-a)+ \\ +B\operatorname{ctg}(x-b)+\ldots+L\operatorname{ctg}(x-l).$$

Можно заметить, что и здесь простой элемент $\operatorname{ctg}(x-a)$ является производной от $\log \sin(x-a)$. В теории эллиптических функций также существуют две подобные формулы. При этом бóльшая часть вычислений основана на применении этих формул, одну из которых, как будет сказано дальше, установил Эрмит.

Введем некоторые определения. Функция $f(u)$ комплексного переменного $u=x+iy$ называется однозначной (uniforme) для всех значений $u$, когда она принимает только одно значение для каждого значения $u$. Однозначная функция называется регулярной в точке $a$, если можно в некоторой окрестности (то есть малой окружности с центром в точке $a$) разложить функцию в ряд Тейлора

$$f(u)=f(a)+\frac{u-a}{1}f'(a)+\frac{(u-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\dots$$
$$\dots+\frac{(u-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\dots$$

Точка, в которой функция обращается в 0, называется нулем функции. Точка, в которой, кроме функции, обращаются в 0 ее производные до порядка $n-1$ включительно, называется нулем порядка $n$. Если в нуле $a$ функции $f(u)$ ее производная в нуль не обращается, то нуль называется простым. Если однозначная функция не является регулярной в точке $a$, то точка называется особой. Если в окрестности этой точки нет других особых точек, то особая точка называется изолированной. Особая точка называется полюсом функции, если она изолированная и если функция становится бесконечной в этой точке по образцу рациональной функции, иначе говоря, если существует такая рациональная функция $\varphi(u)$,

$$\varphi(u)=\frac{A}{u-a}+\frac{A_1}{(u-a)^2}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{(u-a)^\alpha},$$

что разность $f(u)-\varphi(u)$ будет регулярной функцией в точке $a$. Величины $A, A_1, \dots, A_{\alpha-1}$ — постоянные. Рациональная дробь $\varphi(u)$ называется главной частью функции $f(u)$ в полюсе $a$. Коэффициент $A$ называется вычетом функции $f(u)$ в этом полюсе. Целое число $\alpha$ — порядок полюса. Особая точка, которая не является изолированной, называется **существенно особой**. Если точка $a$ — нуль порядка $n$ функции $f(u)$, то функцию можно представить в виде

$$f(u)=(u-a)^n g(u),$$

где $g(a)\neq 0$, а ее логарифмическая производная $\frac{f'(u)}{f(u)}$ может быть представлена как

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{n}{u-a}+\frac{g'(u)}{g(u)},\quad g(a)\neq 0,$$

где $\frac{g'(u)}{g(u)}$ — функция, регулярная в точке $a$.

Если точка $a$ — полюс функции $f(u)$ порядка $\alpha$, то можно записать функцию в виде

$$f(u)=\frac{g(u)}{(u-a)^{\alpha}},$$

а ее логарифмическую производную $\frac{f'(u)}{f(u)}$ как

$$\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{-\alpha}{u-a}+\frac{g'(u)}{g(u)},$$

где $\alpha$ — вычет логарифмической производной в точке $a$, а $\frac{g'(u)}{g(u)}$ — функция, регулярная в точке $a$.

Функция, однозначная и регулярная во всей плоскости, — постоянная.

Теперь можно сказать, что формула (2) для рациональной функции показывает полюсы и соответствующие главные части функции $f(u)$, с ее помощью рациональную функцию интегрируют. Формула (1) показывает все нули и полюсы этой функции. От формы (1) можно перейти к форме (2), взяв логарифмическую производную от $f(x)$.

Для тригонометрической функции $\frac{1}{\sin^2 u}$ формула разложения на простейшие выглядит так:

$$\frac{1}{\sin^2 u}=\frac{1}{u^2}+\sum_m{}' \frac{1}{(u-m\pi)^2},$$

где $$-\infty<m<0,\ 0<m<+\infty,$$

для $\operatorname{ctg} u$:

$$\operatorname{ctg} u = \frac{1}{u} + \sum_m \left( \frac{1}{u - m\pi} - \frac{1}{m\pi} \right).$$

В них видны полюсы этих функций. Формула разложения на множители для $\sin u$:

$$\sin u = \prod_m{}' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{u/m\pi}, \text{ где } -\infty < m < 0;$$

$$0 < m < +\infty.$$

В ней видно, что нули функции — это точки $u=0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ... Из этих формул следует периодичность тригонометрических функций. Если функция $f(u)$ имеет период $\pi$:

$$f(u + \pi) = f(u),$$

то заменой $u = \frac{\pi U'}{2\omega}$ можно получить период функции $f_1(u')$, равный $2\omega$:

$$f_1(u' + 2\omega) = f_1(u').$$

Назовем эллиптической функцию однозначную, не имеющую на конечном расстоянии других особых точек, кроме полюсов, и допускающую периоды, которые все могут быть представлены с помощью сложения и вычитания из двух примитивных $2\omega$ и $2\omega'$. Эти функции называются также двоякопериодическими, и для них

$$f(u + 2\omega) = f(u), \quad f(u + 2\omega') = f(u),$$

или

$$f(u + 2m\omega + 2n\omega') = f(u),$$

где $m$, $n$ — любые целые числа. Будем считать отношение периодов комплексным. Можно показать, что если бы оно было вещественным, функция была бы просто периодической или постоянной величиной. Производная эллиптической функции — тоже функция эллиптическая.

Двоякая периодичность геометрически представляется следующим образом. Пусть $u_0$ — комплексная переменная величина, выбранная произвольно. Рассмотрим на плоскости комплексного переменного точки

$$u_0, \; u_0 \pm 2\omega, \; u_0 \pm 2\omega', \; u_0 \pm 2\omega \pm 2\omega'$$

и, вообще,

$$u_0+2m\omega+2n\omega',$$

где $m$, $n$ — некоторые целые числа, положительные, отрицательные или 0. Точки образуют вершины параллелограммов, равных параллелограмму $P$, с вершинами $u_0$, $u_0+2\omega$, $u_0+2\omega'$, $u_0+2\omega+2\omega'$, и эта решетка параллелограммов покрывает всю плоскость. Произвольная точка $u$ попадает в один из параллелограммов $P$. Точки $u+2\omega$ занимают в других параллелограммах такое же положение, как точка $u$ в $P$, и называются гомологичными точками, а любой параллелограмм решетки — элементарным, или примитивным, параллелограммом периодов. Во всех гомологичных точках функция принимает одинаковое значение. Таким образом, достаточно знать функцию в одном элементарном параллелограмме периодов, чтобы знать ее во всей плоскости. В элементарном параллелограмме функция должна становиться бесконечной, иначе будет постоянной во всей плоскости, и при этом может иметь в элементарном параллелограмме лишь конечное число полюсов.

Построим функцию комплексного переменного, регулярную во всех точках плоскости на конечном расстоянии от начала координат и имеющую нули в точке $u=0$ и точках $2m\omega+2n\omega'$, $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$; $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$ (то есть функцию, напоминающую тригонометрическую функцию $\sin x$). Обозначив $\omega=2m\omega+2n\omega'$, рассмотрим функцию $\sigma(u)$, определенную по формуле

$$\sigma(u)=u\Pi'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

где $m=0, \pm1, \pm2, \ldots$; $n=0, \pm1, \ldots$, а точка $w=0$ исключается; эта функция нечетная: $\sigma(-u)=-\sigma(u)$. Ее логарифмическую производную обозначим $\zeta(u)$,

$$\zeta(u)=\frac{d\log\sigma(u)}{du}=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{1}{u}+\Sigma'\left[\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{1}{w^2}\right].$$

Разность

$$\zeta(u)-\frac{1}{u-2m\omega-2n\omega'}$$

регулярна в точке $2m\omega + 2n\omega'$, имеет простой полюс с вычетом 1 в каждом параллелограмме периодов. Функция $\zeta(u)$ — нечетная. Берем ее производную $\zeta'(u) = \wp(u)$:

$$\wp(u) = -\frac{d^2 \log \sigma(u)}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right].$$

Функция $\wp(u)$ — четная, напоминает функцию $\frac{1}{\sin^2 u}$, имеет один полюс в элементарном параллелограмме периодов и двоякопериодическая:

$$\wp(u + 2\omega) = \wp(u), \quad \wp(u + 2\omega') = \wp(u).$$

Интеграл от $\wp(u)$ равен

$$-\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = -\zeta(u).$$

Для функции $\zeta(u)$ выполняются равенства

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\eta, \quad \zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta',$$

где $\eta$, $\eta'$ — постоянные интегрирования, то есть $\zeta(u)$ не двоякопериодическая. Эрмит вводит новую функцию $Z(u)$, нечетную, отличающуюся от $\zeta(u)$ на величину $\frac{\eta}{\omega} u$, с периодом $2\omega$:

$$Z(u) = Z(u + 2\omega), \quad Z(u + 2\omega') = Z(u) - \frac{2\delta}{\omega}. \tag{4}$$

Она также не двоякопериодическая. Отличаясь от $\zeta(u)$ линейным членом $\frac{\eta}{\omega} u$, имеет те же особые точки, что и $\zeta(u)$, и те же главные части: $Z(u) = \frac{1}{u-a} +$ регулярная функция, $Z'(u) = -\frac{1}{(u-a)^2} +$ регулярная функция, $Z''(u) = \frac{1 \cdot 2}{(u-a)^3} +$ регулярная функция, и т. д.

Якоби рассмотрел функцию $\mathrm{H}(u)$ («эта» от $u$), логарифмическая производная которой равна $Z(u)$,

$$\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)} = Z(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - \frac{\eta}{\omega} u,$$

и другие функции:

$$\mathrm{H}_1(u)=\mathrm{H}(u+K), \quad \theta(u)=\frac{1}{i\lambda}\mathrm{H}(u+iK'),$$

$$\theta_1(u)=\frac{1}{\lambda}\mathrm{H}(u+K+iK'), \quad \theta_1(u)=\theta(u+K),$$

$$\lambda=e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \quad \operatorname{sn} u=A\frac{\mathrm{H}(u)}{\theta(u)}, \quad \operatorname{cn} u=B\frac{\mathrm{H}_1(u)}{\theta(u)},$$

$$\operatorname{dn} u=C\frac{\theta_1(u)}{\theta(u)}, \quad \text{где} \quad A=\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad B=\sqrt{\frac{k'}{k}}, \quad C=\sqrt{k'}.$$

Между функциями $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ (их обозначают также $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$) существуют следующие соотношения:

$$\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{cn}^2 u=1, \quad \operatorname{cn}^2 u=1-\operatorname{sn}^2 u, \quad \operatorname{dn}^2 u+k^2\operatorname{sn}^2 u=1,$$

$$\operatorname{dn}(u+K)=\frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{dn} K=k'.$$

При $u=K$ будет $\operatorname{sn} K=1$, $k^2+k'^2=1$, где $k$ называется модулем, $k'$ — дополнительным модулем.

Можно рассмотреть функции, обратные для $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Пусть, например, $x=\operatorname{sn} u$. Тогда корнями этого уравнения будут

$$u+4mK+2niK', \quad 2K-u+4mK+2niK',$$

где $m$, $n$ — целые. Обратная функция для $x=\operatorname{sn} u$

$$u=\arg\operatorname{sn} x,$$

а производная обратной функции для $u=\arg\operatorname{sn} x$

$$\frac{dx}{du}=\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Иными словами,

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

—производная функции, обратной для $x=\operatorname{sn} u$. Аналогично и для $\operatorname{cn} u$.

Интеграл

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{5}$$

называется эллиптическим интегралом первого рода в нормальной форме Лежандра. Заменив $k$ на $k'$, получим

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}. \qquad (6)$$

Если в (5) взять предел интегрирования $x=1$, то интеграл (5) будет равен $K$, а интеграл (6) в тех же пределах будет равен $K'$.

При $k^2=0$

$$x=\sin u, \quad \operatorname{cn} u=\cos u, \quad \operatorname{dn} u=1.$$

При $k^2=1$

$$u=\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},$$

откуда

$$x=\operatorname{sn} u=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}, \quad \operatorname{cn} u=\frac{2}{e^u+e^{-u}}.$$

## Исследования Эрмита по теории эллиптических функций и их обобщений

Начало исследований Эрмита по теории эллиптических функций восходит еще ко времени его пребывания в Политехнической школе. Именно этим вопросам посвящены первые два письма к Якоби, поводом для чего явились статьи последнего, напечатанные в Журнале Крелле [II, 228, 235], и работы Абеля [II, 119—122]. Эрмит распространил результаты, известные для эллиптических функций, на функции более общего вида. Изучение статьи Якоби [II, 228] привело Эрмита [I, 3] к теореме о делении аргумента абелевых функций, аналогичной утверждению Якоби для получения более простого выражения корней уравнений, рассмотренных Абелем.

Пусть

$$\Delta(x)=\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)},$$

$$u=\int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\Delta(x)}+\int_0^y \frac{(\alpha+\beta y)\,dy}{\Delta(y)},$$

$$u' = \int_0^x \frac{(\alpha' + \beta' x)\,dx}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha' + \beta' y)\,dy}{\Delta(y)}$$

и пусть

$$x = \lambda_0(u, u'), \quad y = \lambda_1(u, u').$$

Основное свойство этих функций от двух переменных состоит в том, что величины $\lambda_0(u+v, u'+v')$, $\lambda_1(u+v, u'+v')$ являются корнями уравнения второй степени, коэффициенты которого суть рациональные функции от

$$\lambda_0(u, u'),\ \lambda_1(u, u'),\ \Delta[\lambda_0(u, u')],\ \Delta[\lambda_1(u, u')],$$
$$\lambda_0(v, v'),\ \lambda_1(v, v'),\ \Delta[\lambda_0(v, v')],\ \Delta[\lambda_1(v, v')].$$

Отсюда следует, как заметил Эрмит, что каково бы ни было целое число $n$, две функции $\lambda_0(nu, nu')$, $\lambda_1(nu, nu')$ тоже будут корнями уравнения второй степени с рациональными коэффициентами от $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$, $\Delta[\lambda_0(u, u')]$, $\Delta[\lambda_1(u, u']$. На этом основании он заключил, что с помощью решения двух алгебраических уравнений обратно можно определить $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$ через $\lambda_0(nu, nu')$ и $\lambda_1(nu, nu')$.

В докладе о статье Эрмита Лиувилль сравнил деление аргументов эллиптических и абелевых функций с делением аргументов тригонометрических функций, например при выражении синуса кратного угла через синус простого угла, и отметил, что подобные задачи (деления аргумента) всегда значительно сложнее, чем задачи сложения или умножения аргументов (см. с. 23). Эрмит установил, что совершенно аналогичные рассуждения применимы и к другим классам ультраэллиптических функций.

Вслед за письмами к Якоби вышло в свет еще несколько статей Эрмита, в том числе «Главные теоремы анализа эллиптических функций» [I, 6]. Этот период занятий эллиптическими и абелевыми функциями завершается работой Эрмита «О теории эллиптических функций», представленной Академии наук в 1849 г. В печати появилась только маленькая заметка об этой работе [I, 8] такого содержания.

Теория эллиптических функций, которую я имею честь предложить Академии, основана главным образом на некоторых утверждениях, которые г. Коши вывел из рассмотрения интегралов, взятых между мнимыми пределами [II, 157]. Истинный аналитический смысл этих выражений был дан в первый раз, как известно, великим Геометром (Коши, — *Е. О.*). Его открытия по этому предмету явились источником исчисления вычетов, которое заключает в себе самые общие принципы, какими мы обладаем для изучения функции одной переменной. Настоящие исследования покажут новое применение этих принципов, и, может быть, окажется небезынтересным сближение методов, принадлежащих прославленным основателям теории эллиптических функций, с методами, источник которых я нашел в трудах г. Коши [I, 234, т. 1, с. 74].

Помимо этой заметки, напечатанной в Comptes rendus, сохранился отзыв о мемуаре Эрмита, принадлежащий самому О. Коши [I, 9]. В нем говорилось, что Эрмит поставил себе задачу узнать, какова самая общая форма двоякопериодической функции, подчиненной условию оставаться непрерывной вместе со своей производной для любых значений $z$, если только она не становится бесконечной. Решение задачи опиралось на утверждения, выведенные в основном с помощью методов Коши. Последний вместе с другими академиками, которым было поручено дать отзыв о работе Эрмита, рекомендовал ее к печати, но она так и не вышла в свет. В ней Эрмит впервые применил интегрирование по контуру параллелограмма периодов. Впоследствии об этом открытии Эрмита Борель написал: «Интегрирование по контуру параллелограмма периодов — одно из прекраснейших приложений интеграла Коши. Эрмит не прекращал никогда придавать самое большое значение этому великолепному аналитическому инструменту и много места уделял ему в своем преподавании» [III, 2, с. XIV]. Этому же вопросу Эрмит позднее посвятил большой очерк, опубликованный в 6-м издании «Трактата» Лакруа [II, 259].

Внимание Эрмита некоторое время было обращено на квадратичные формы и другие задачи, но с выходом в свет статей Гёпеля [II, 214] и Розенхайна [II, 380] вновь вернулось в излюбленное русло — к эллиптическим и абелевым функциям и задаче разрешимости алгебраических уравнений высших степеней.

Итогом исследований явились статьи «О теории преобразования абелевых функций» [I, 32, 34].

Вот некоторые результаты, полученные Эрмитом по теории эллиптических и абелевых функций.

Для эллиптических функций существуют формулы разложения на простейшие и разложения на множители, аналогичные соответствующим формулам для рациональных и тригонометрических функций. Формула разложения на простые элементы для эллиптической функции $f(u)$, имеющей простые полюсы $a$, $b$, $c$, . . . , $l$ в примитивном параллелограмме периодов с вычетами соответственно $A$, $B$, $C$, . . . , $L$, выглядит так:

$$f(u)=c_0+AZ(u-a)+BZ(u-b)+$$
$$+CZ(u-c)+\ldots+LZ(u-l). \qquad (7)$$

Здесь функция $Z(u)$ та же, что на с. 131. Формула принадлежит Эрмиту. Доказано, что сумма вычетов эллиптической функции, находящихся в одном параллелограмме периодов, равна нулю, то есть $A+B+C+\ldots+L=0$. Таким образом, всякая эллиптическая функция, имеющая только простые полюсы, может быть представлена формулой (7), где сумма постоянных $A+B+C+\ldots+L=0$, и обратно, всякая функция, определенная по формуле (7), где сумма постоянных $A+B+C+\ldots+L=0$, есть эллиптическая функция.

Если некоторые из полюсов кратные, формула (7) принимает следующий вид:

$$f(u)=c_0+\sum_a\Big[AZ(u-a)+A_1Z'(u-a)+\frac{A_2}{1\cdot 2}\times$$
$$\times Z''(u-a)+\ldots+(-1)^{\alpha-1}\frac{A_{\alpha-1}}{1\cdot 2\ldots(\alpha-1)}Z^{\alpha-1}(u-a)\Big], \qquad (8)$$

где $\sum\limits_a$ — сумма по всем полюсам, лежащим в параллелограмме периодов, $A+B+C+\ldots+L=0$, $Z(u-a)=$ $=\frac{1}{u-a}+$ регулярная функция, $Z'(u-a)=-\frac{1}{(u-a)^2}+$ $+$ регулярная функция, и т. д.

Вторая формула — разложения на множители — для эллиптической функции $f(u)$ записывается в виде

$$f(u)=ae^{cu}\frac{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_r)}, \qquad (9)$$

где $a$, $c$ — постоянные, $b_1$, $b_2$, . . . , $b_r$ — нули, $a_1$, $a_2$, $a_3$, . . ., $a_r$ — полюсы функции $f(u)$ в параллелограмме периодов. Число нулей эллиптической функции в параллелограмме периодов равно числу ее полюсов там, поэтому количество $b_k$ и $a_k$ одинаковое. Аналогичная формула может быть записана в обозначениях Якоби для функции $H(u)$ вместо $\sigma(u)$.

В механике и математической физике неоднократно приходится сталкиваться с однозначными функциями комплексного переменного $u$, напоминающими по своим свойствам двоякопериодические, но при добавлении к аргументу «периодов» $2\omega$ и $2\omega'$ приобретающими постоянный множитель:

$$F(u+2\omega)=\mu F(u), \quad F(u+2\omega')=\mu' F(u).$$

Эрмит, изучивший эти функции, назвал их **двоякопериодическими функциями второго рода**. Если множители $\mu$, $\mu'$ равны 1, то эта функция превращается в обычную двоякопериодическую эллиптическую. Их называют также **функциями с постоянными множителями**. Исследовав свойства этих новых функций, Эрмит вывел для них основные формулы, аналогичные таковым для эллиптических функций. Формула разложения на множители для двоякопериодических функций второго рода выглядит так:

$$F(u)=Be^{\lambda u}\frac{\mathrm{H}(u-\alpha)\,\mathrm{H}(u-b_1)\,\mathrm{H}(u-b_2)\ldots\mathrm{H}(u-b_r)}{\mathrm{H}(u)\,\mathrm{H}(u-a_1)\,\mathrm{H}(u-a_2)\ldots\mathrm{H}(u-a_r)}, \tag{10}$$

где

$$\alpha=\frac{1}{\pi i}(\omega\log\mu'-\omega'\log\mu), \quad \lambda=\frac{1}{2\omega}\log\mu.$$

Число нулей и число полюсов такой функции в параллелограмме периодов одно и то же. Если рассмотреть нули и полюсы функции со множителями $\mu$ и $\mu'$ в каком-либо параллелограмме периодов, то разность между суммами нулей и полюсов составит

$$\alpha+b_1+b_2+\ldots+b_r-(a_1+a_2+\ldots+a_r)+2m\omega+\\+2n\omega'=\frac{1}{\pi i}(\omega\log\mu'-\omega'\log\mu)+2m\omega+2n\omega'.$$

Для функции $\mathrm{H}(u)$ имеют место равенства

$$\mathrm{H}(u+2\omega)=-\mathrm{H}(u), \quad \mathrm{H}(u+2\omega')=-\mathrm{H}(u)\,e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\omega')}.$$

Эрмит вывел также и формулу разложения на простые элементы для функций с постоянными множителями (см., например, [II, 124, с. 339—340]):

$$F(u)=Af(u-a)+Bf(u-b)+\ldots+Lf(u-l).$$

Здесь $a$, $b$, ..., $l$ — полюсы в параллелограмме периодов, $A$, $B$, ..., $L$ — их вычеты. Каждый член $f(u-k)$ есть функция с постоянными множителями $\mu$, $\mu'$, имеющая в параллелограмме периодов один простой полюс.

Одна из важнейших областей приложения двоякопериодических функций второго рода (функций с постоянными множителями) — интегрирование линейных дифференциальных уравнений, однородных и имеющих коэффициентами эллиптические функции. Первое уравнение такого рода рассмотрел Г. Ламе при изучении распределения температур в однородном эллипсоиде. Названное впоследствии именем его автора — уравнением Ламе, оно было следующим:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=[n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2 y+h]\,y,$$

где $k$ — модуль, $n$ — целое число, $h$ — постоянная. Ламе ограничился интегрированием этого уравнения для частных значений постоянной $h$, выбранных таким образом, чтобы уравнение допускало решение в виде целого полинома от $\operatorname{sn} x$, или от $\operatorname{sn} x\cdot\operatorname{cn} x$, или $\operatorname{cn} x\cdot\operatorname{dn} x$. Например, для случая $n=1$ уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(2k^2\operatorname{sn}^2 y+h)\,y$$

имеет решением $y=\operatorname{sn} x$ для $h=-(1+k^2)$ и $y=\operatorname{cn} x$ для $h=-1$.

Эрмит рассмотрел общий случай уравнения Ламе, доказал, что оно всегда может быть проинтегрировано в двоякопериодических функциях второго рода и его общий интеграл

$$y=cF(x)+c_1F(-x),$$

где $F(x)$ — функция с постоянными множителями, $c$, $c_1$ — произвольные постоянные.

Первая публикация, посвященная Эрмитом этой теме, — «Об уравнении Ламе» [I, 234, т. 3, с. 118] в его «Курсе анализа» для Политехнической школы [I, 82]. В другой работе, напоминая о «прекрасных и важных исследованиях Фукса в общей теории линейных дифференциальных уравнений, позволяющих дать необходимые и достаточные условия того, чтобы общий интеграл уравнения был аналитической функцией переменной» [I, 234, т. 3, с. 361], Эрмит обращается к решению дифференциальных уравнений с помощью метода Фукса (раскладывая в ряды по возрастающим степеням переменных аналитические функции, являющиеся коэффициентами заданного уравнения).

В первой из названных статей Эрмит, в частности, излагает результаты исследований шведского математика Г. Миттаг-Леффлера, профессора Гельсингфорсского университета, говоря о нем как о молодом геометре выдающегося таланта [I, 234, т. 3, с. 371] и, таким образом, пропагандируя его результаты в то время, когда шведский ученый еще не пользовался широкой известностью. В этой статье рассмотрено уравнение Пикара

$$y''' + (\alpha - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u) y' + \beta y = 0,$$

решение которого находится с использованием эллиптических функций. Позднее общее решение этого уравнения с помощью частных решений, найденных Эрмитом, дал Пикар [II, 348, 350]. В статье, о которой идет речь, Эрмит рассмотрел и другие виды уравнений, изученные Миттаг-Леффлером [II, 337—339], а затем, обратившись к уравнению Ламе, решает его несколькими способами для случая $n=2$ и один из них применяет для общего случая любого $n$.

Теория конического маятника или движения тяжелой точки на сфере приводит к приложениям уравнения Ламе. Один из способов изучения этих вопросов дал Тиссо [II, 416], другой — Эрмит в письме к шведскому астроному Г. Гюльдену [I, 119]. Об уравнении Ламе идет речь и в письме Эрмита к Э. Гейне [I, 120], где он рассматривает и более общие уравнения, решения которых принадлежат Эрмиту и Пикару. Пикар исследовал класс дифференциальных линейных однородных уравнений, коэффициентами которых служат эллиптические функции, и показал, что уравнения этого класса интегрируются с помощью двоякопериодических функций второго рода.

Следующий тип функций, исследованный Эрмитом, был назван им *двоякопериодическими функциями третьего рода*. Такая функция однозначна, имеет лишь полюсы в конечной плоскости и удовлетворяет уравнениям

$$\varphi(x + 2\omega) = e^{ax+b} \varphi(x),$$

$$\varphi(x+2\omega')=e^{a'x+b'}\varphi(x),$$

где $a, b, a', b'$ — постоянные. Иначе говоря, она отличается от двоякопериодической функции и функции с постоянными множителями тем, что при увеличении аргумента на «период» она умножается на $e^{ax+b}$, то есть теперь множители не постоянные, а переменные, а именно, экспонента с показателем, равным линейной функции от $x$.

Эрмит и для таких функций нашел формулы разложения на простые элементы и разложения на множители, имеющие, в частности, значение в приложении этих функций к теории чисел.

После Эрмита функциями подобного рода занимались Билер, Аппель и др.

## Решение уравнений пятой степени

Введем некоторые предварительные понятия, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть $2\omega$ и $2\omega'$ — пара примитивных периодов эллиптической функции $f(u)$. Положим

$$\begin{aligned}\omega_1' &= a\omega'+b\omega,\\ \omega_1 &= c\omega'+d\omega,\end{aligned}\tag{11}$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — такие целые числа, что $ad-bc=\pm 1$.

Разрешив систему (11) относительно $\omega$ и $\omega'$, также получим линейные функции от $\omega_1$, $\omega_1'$ с целыми коэффициентами, а именно:

$$\begin{aligned}\omega' &= d\omega_1'-b\omega_1,\\ \omega &= c\omega_1'+a\omega_1.\end{aligned}\tag{12}$$

Пары периодов $2\omega$, $2\omega'$ и $2\omega_1$, $2\omega_1'$ называют э к в и в а л е н т н ы м и, если функция с периодами $2\omega$, $2\omega'$ имеет периодами также и $2\omega_1$, $2\omega_1'$, и наоборот.

Отношение $\tau$ периодов эллиптической функции

$$\tau=\frac{\omega'}{\omega}=\frac{\alpha'+\beta' i}{\alpha+\beta i}=\frac{(\alpha'+\beta' i)(\alpha-\beta i)}{\alpha^2+\beta^2}$$

есть комплексная величина. Если знак при $i$ в этом отношении положительный, то и в отношении эквивалентных периодов он будет положительным при $ad-bc=+1$ и отрицательным при $ad-bc=-1$. Обозначим

$$w = 2m\omega + 2n\omega', \quad w_1 = 2m_1\omega_1 + 2n\omega_1',$$

где $m$, $n$, $m_1$, $n_1$ — целые числа. Точки $\omega$ образуют вершины параллелограммов, построенных на периодах $2\omega$ и $2\omega'$, а точки $w_1$ — на периодах $2\omega_1$ и $2\omega_1'$. Можно доказать, что эти параллелограммы имеют одни и те же вершины (с точностью до порядка). Функция

$$\sigma(u) = u\Pi'\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

где $w = 2m\omega + 2n\omega'$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $w_1 = 2m_1\omega_1 + 2n_1\omega_1'$, $m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, инвариантна при преобразовании $2\omega$, $2\omega'$ в эквивалентные $2\omega_1$, $2\omega_1'$.

Величины

$$g_2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \Sigma' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \Sigma' \frac{1}{w^6},$$

где $w = 2m\omega + 2n\omega'$, также инвариантны при замене примитивных периодов $2\omega$, $2\omega'$ эквивалентными $2\omega_1$, $2\omega_1'$. Величина

$$I = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} \quad \text{или} \quad \frac{g_2^3}{g_3^2} = 27\frac{I}{I-1}$$

зависит только от отношения периодов $\tau$ и называется абсолютным инвариантом эллиптических функций с периодами $2\omega$ и $2\omega'$.

При замене пары периодов $2\omega$, $2\omega'$ эквивалентными $2\omega_1$, $2\omega_1'$ отношение периодов $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ станет равным $\tau_1 = \frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$. При этом вместо $I(\tau)$ получится $I(\tau_1)$ и $I(\tau) = I(\tau_1)$, иными словами,

$$I\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = I(\tau),$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — некоторые целые числа, такие, что $ad - bc = \pm 1$.

Таким образом, функция $I(\tau)$ обладает замечательным свойством — не изменять своего значения, когда заменяют величину $\tau$ на $\frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ при условии, что $a$, $b$, $c$, $d$ — целые и $ad - bc = \pm 1$. Эта простейшая модулярная функция, рассмотренная Эрмитом в связи с решением уравнения пятой степени, связана с изучением и применением подстановок. Функция $I(\tau)$ — четная, то есть $I(\tau)=I(-\tau)$, поэтому можно предполагать, что $a$, $b$, $c$, $d$ удовлетворяют условию $ad-bc=+1$. Пусть

$$\tau_1=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}. \tag{I}$$

В этом случае говорят, что $\tau_1$ получается из $\tau$ с помощью дробно-линейной подстановки, и пишут

$$\tau_1=S\tau=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}.$$

Разрешая (I) относительно $\tau$, получим другую подстановку

$$\tau=\frac{-d\tau_1+b}{c\tau_1-a},$$

которую называют обратной для $S$ и обозначают $S^{-1}$. Таким образом, $\tau=S^{-1}\tau_1$.

Положим

$$\tau_2=S'\tau_1=\frac{a'\tau_1+b'}{c'\tau_1+d'}$$

и найдем зависимость между $\tau_2$ и $\tau$. Мы получим

$$\tau_2=S'S\tau.$$

Эта новая подстановка $\tau_2$ называется произведением подстановок $S$ и $S'$ и обозначается $S'S$. Можно рассмотреть произведение и большего числа подстановок. Произведение подстановки на обратную ей есть тождественная подстановка. Имеем $\tau_1=S\tau$, $\tau=S^{-1}\tau_1$, $\tau=S^{-1}S\tau$, или $S^{-1}S=1$, или $SS^{-1}=1$.

Последовательность данных подстановок $S_1$, $S_2$, ..., $S_k$, где

$$S_k\tau=\frac{a_k\tau+b_k}{c_k\tau+d_k},$$

образует группу подстановок, если обратная подстановка для любой из этих подстановок и произведение любых двух из них снова являются подстановками этой последовательности.

Подстановки $S\tau=\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$, где $a$, $b$, $c$, $d$ — целые, подчиняющиеся условию $ad-bc=1$, образуют группу.

Эта группа называется модулярной, а функция $I(\tau)$ — инвариантна при любых подстановках этой группы. Показывается, что все подстановки модулярной группы порождаются произведением положительных и отрицательных степеней двух подстановок, а именно

$$S\tau = \tau + 1,$$
$$T\tau = -\frac{1}{\tau},$$

которые называются основными подстановками этой группы. Обратная подстановка для $S\tau$ есть $S^{-1}\tau = \tau - 1$, обратная для $T\tau$ есть $T^{-1}\tau = -1/\tau$. Геометрической интерпретацией модулярных функций много занимался Ф. Клейн, разработавший теорию этих функций [II, 244], обобщением модулярных функций и теорией так называемых фуксовых и клейновских функций — А. Пуанкаре [II, 361, 363].

Интерес к теории подстановок и модулярным функциям пробудило в Эрмите знакомство с наследием Галуа [II, 204, 207]. В работе, опубликованной в Бюллетене Ферюссака [II, 204[, тот писал о возможности понижения степени модулярного уравнения при $p=5$ [II, 206, с. 165], а в письме к Огюсту Шевалье (от 29 мая 1832 г.) — при $p=5$, 7, 11 [II, 206, с. 181]. Эрмит использовал модулярные функции при решении уравнения пятой степени.

Еще в 1843 г. Эрмит сообщил Якоби о своем большом желании показать тому работу о модулярных уравнениях, где он установил одно утверждение, высказанное в «Посмертных сочинениях» Галуа и состоящее в том, что степени модулярных уравнений шестой, восьмой и двенадцатой степени можно понизить на единицу [I, 234, т. 1, с. 135]. Видимо, Эрмиту первому удалось проникнуть в ход рассуждений Галуа. Затем он упоминает работы последнего в статье «Об алгебраических функциях» [I, 234, т. I, с. 276], тема которой была навеяна статьями Пюизё [II, 373—375] о корнях алгебраических уравнений, рассматриваемых как функции одной переменной $z$, входящей рационально в левую часть уравнения. Эрмит пишет, что теоремы Пюизё открыли широкое поле для исследований, и показывает, каким образом эти исследования позволяют определить, разрешимо ли алгебраически некоторое уравнение $F(u, z)=0$, то есть может ли неизвестная $u$ быть выражена в виде функции переменной $z$, входящей лишь под знаками радикалов целой степени. Здесь он ограничивается вопросом разрешимости уравнений в радикалах, позднее обещая показать, как теоремы Пюизё приводят к понижению степеней модулярных уравнений в случаях, указанных Галуа. Суть двух первых теорем Эрмита такова:

1) всякая функция корней $u$, инвариантная относительно подстановок $S_0, S_1, \ldots, S_{\mu-1}$,[1] может быть выражена рационально через переменную $z$;

верно и обратное утверждение:

2) всякая функция корней $u$, рационально зависящая от $z$, инвариантна при подстановках $S_0, S_1, \ldots, S_{\mu-1}$.

Группа подстановок, о которых идет речь, играет ту же роль, что и группа подстановок у Галуа. Доказав эти теоремы с помощью результатов Пюизё, Эрмит тут же применяет их к установлению необходимых и достаточных условий разрешимости в радикалах уравнения, степень которого — простое число. Условие состоит в том, чтобы всякая функция корней уравнения, инвариантная относительно подстановок вида

$$\begin{bmatrix} u_k \\ u_{ak+b} \end{bmatrix},$$

где $a$, $b$ — целые, взятые по модулю $m$, как и переменный индекс $k$, выражалась через $z$ рационально. Иначе говоря, подстановки $S_0, S_1, \ldots, S_{\mu-1}$ все должны быть указанного вида.

В следующей работе, связанной с исследованиями Галуа о разрешимости алгебраических уравнений [I, 234, т. 2, с. 5], Эрмит показал, что уравнение пятой степени, которое невозможно решить в общем виде в радикалах, может быть решено аналитически, с помощью специальных функций. Вначале оно приводится к виду

$$x^5 - x - a = 0$$

(«уравнению Джеррарда») с помощью подстановок, зависящих только от корней второй и третьей степени. Далее Эрмит напоминает, что уравнение третьей степени,

$$x^3 - 3x + 2a = 0,$$

[1] $S_k$ — подстановки типа, указанного Пюизё.

можно решить, например, в тригонометрических функциях, выразив свободный член через $\sin\alpha$ (см. II, 164). Тогда его корнями будут

$$2\sin\frac{\alpha}{3},\quad 2\sin\frac{\alpha+2\pi}{3},\quad 2\sin\frac{\alpha+4\pi}{3}.$$

Нечто подобное он хочет сделать и для уравнения пятой степени. Только роль синусов и косинусов будут играть эллиптические функции. Пусть $K$ и $K'$ — периоды эллиптического интеграла (записанного в полярных координатах):

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad K'=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

где $k$ — модуль, $k'$ — дополнительный модуль.

Выражения для $\sqrt[4]{k}$ и $\sqrt[4]{k'}$ находятся с помощью $q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$:

$$\sqrt[4]{k}=\sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum\limits_m q^{2m^2+m}}{\sum\limits_m q^{m^2}},\quad \sqrt[4]{k'}=\frac{\sum\limits_m (-1)^m q^{2m^2}}{\sum\limits_m q^{m^2}}.$$

Обозначив $q=i\pi\omega$, Эрмит получает выражения $\sqrt[4]{k}=\varphi(\omega)$, $\sqrt[4]{k'}=\psi(\omega)$ и исследует свойства функций $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$, среди которых — такие:

$$\varphi^8(\omega)+\psi^8(\omega)=1,\quad \varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right)=\psi(\omega),$$

$$\psi(\omega+1)=\frac{1}{\psi(\omega)},\quad \varphi(\omega+1)=e^{i\pi/8}\frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)}.$$

Используя эти свойства, Эрмит получает, что при замене $\omega$ на $\frac{a+b\omega}{c+d\omega}$ функции $\varphi\left(\frac{a+b\omega}{c+d\omega}\right)$ и $\psi\left(\frac{a+b\omega}{c+d\omega}\right)$ достаточно просто выражаются через $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$. Здесь целые числа $a$, $b$, $c$, $d$ подчинены единственному условию: $ad-bc=1$. Для шести различных решений сравнения $ad-bc\equiv 1 \pmod 2$ Эрмит записывает шесть соответствующих форм выражения $\frac{a+b\omega}{c+d\omega}$ и соответственно шесть выражений $\varphi\left(\frac{a+b\omega}{c+d\omega}\right)$.

Обозначив $u=\varphi(\omega)$, $v=\psi(n\omega)$, ($n$ — простое), он устанавливает, что $u$ и $v$ связаны между собой уравнением степени $n+1$, представляющим новый тип алгебраического уравнения (модулярное уравнение), корни которого получаются в виде аналитических выражений с помощью введения новой переменной. При этом он ссылается на статью Зонке [II, 392]. Эрмит напоминает утверждение Галуа о возможности понижения степени модулярных уравнений на единицу в случаях $p=5, 7, 11$: «Хотя у нас имеются лишь фрагменты его (Галуа, — *Е. О.*) работ по этому вопросу, нетрудно, следуя открытому им пути, обнаружить доказательство этого прекрасного утверждения. До сих пор удавалось только убедиться в возможности этого приведения, и оставался существенный пробел, который надо было заполнить, чтобы довести вопрос до конца» [I, 234, т. 2, с. 10]. В примечании Эрмит говорит: «После моих первых исследований, оставшихся неопубликованными, результаты которых были все же обнародованы [II, 233, т. 2, с. 249], выдающийся итальянский геометр г. Бетти напечатал работу по тому же предмету в Annali г. Тортолини» (см. с. 84 наст. изд.)

В [I, 37] Эрмит нашел, что в случае модулярного уравнения шестой степени,

$$u^6 - v^5 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^4v^4) = 0,$$

надо рассмотреть функцию

$$\Phi(\omega) = \left[\varphi(5\omega) - \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+4\cdot 16}{5}\right)\right]\times$$
$$\times\left[\varphi\left(\frac{\omega+2\cdot 16}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+3\cdot 16}{5}\right)\right].$$

Величины

$$\Phi(\omega),\ \Phi(\omega+16),\ \Phi(\omega+2\cdot 16),\ \Phi(\omega+3\cdot 16),\ \Phi(\omega+4\cdot 16)$$

— корни уравнения пятой степени,

$$\Phi^5 - 2^4\cdot 5^3\cdot \Phi\varphi^4(\omega)\psi^{16}(\omega) - 2^6\sqrt{5^5}\,\varphi^3(\omega)\psi^{16}(\omega)[1+\varphi^8(\omega)] = 0,$$

коэффициенты которого — рациональные функции от $\varphi(\omega)$. Это уравнение легко сводится к уравнению Джеррарда $x^5 - x - a = 0$, если положить

$$\Phi = \sqrt[4]{2^4 5^3}\,\varphi(\omega)\psi^4(\omega)\,x$$

и обозначить свободный член буквой $a$:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\frac{1+\varphi^8(\omega)}{\varphi^2(\omega)\cdot\psi^4(\omega)}=a.$$

Приняв за неизвестное $\varphi^4(\omega)$ или просто модуль $k$ (так как $\varphi^4(\omega)=k$), получим уравнение четвертой степени

$$k^4+A^2k^3+2k^2-A^2k+1=0,\ \text{где}\ A=\frac{\sqrt[4]{5^5}}{2}a.$$

Его можно решить аналитически. Полагая $\frac{4}{A^2}=\sin\alpha$, Эрмит находит корни этого уравнения:

$$k=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+2\pi}{4},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+3\pi}{4},\quad \operatorname{tg}\frac{3\pi+\alpha}{4}.$$

Взяв в качестве значения $k$ один из этих корней, находит соответствующее значение $\omega$. Тогда для уравнения Джеррарда получатся следующие значения $x$:

$$c\Phi(\omega),\ c\Phi(\omega+16),\ c\Phi(\omega+2\cdot 16),\ c\Phi(\omega+3\cdot 16),$$
$$c\Phi(\omega+4\cdot 16);$$
$$c=\frac{1}{\sqrt[4]{2^45^3}}\cdot\frac{1}{\varphi(\omega)\psi^4(\omega)}.$$

Система пяти функций $\Phi(\omega+16m)=\Phi_m$ обладает относительно подстановок $\frac{a+b\omega}{c+d\omega}$ свойствами, аналогичными свойствам функции $\varphi(\omega)$. Например,

$$\Phi_m(\omega+2a)=\Phi_{m+2a}(\omega)\cdot e^{-i\pi a/4}.$$

При числовых расчетах, как замечает Эрмит, быстрая сходимость рядов, стоящих в числителях и знаменателях, позволяет быстро осуществить вычисления.

Подробный вывод формул, приводимых в этой работе, Эрмит дал много лет спустя, в сентябре 1900 г., в письме к Жюлю Таннери [I, 234, т. 2, с. 13]. Но теории модулярных уравнений он посвятил ряд заметок в Comptes rendus [I, 234, т. 2, с. 38], где неоднократно ссылается на утверждение Галуа: «Всякая рациональная функция корней $v_k$, не симметрическая, которая не изменяется при замене различных индексов $k$ на $\frac{ak+b}{ck+d}$, где $a$, $b$, $c$, $d$ целые взятые по модулю $n$, и детерминант $ad-bc\neq 0$, будет рациональной функцией от $u$» (у Галуа об этом сказано в [II, 207]). Он упоминает о работах Бетти, связанных с изучением подстановок $\frac{ak+b}{ck+d}$, вспоминает результаты Кронекера [II, 252, 254] и Бриоски [II, 143] по решению уравнений пятой степени, более простому, чем у него самого. В письме к Бриоски Эрмит приводит свой способ понижения степени модулярного уравнения восьмой степени, делает несколько замечаний о подстановках и жалеет, что не может сейчас заняться этими исследованиями [I, 234, т. 2, с. 86].

Эмиль Борель писал, что «самое прекрасное открытие, которым Анализ обязан Эрмиту, это, без сомнения, — открытие модулярной функции. Эта трансцендентная, встреченная при изучении эллиптических функций, могла быть изучена полностью посредством принципов этой теории; она представила пример аналитической функции, естественная область существования которой ограничивается некоторой частью плоскости, и которая, с другой стороны, допускает дискретную группу линейных подстановок. Известно, какое значение приобрело обобщение этих различных свойств, особенно благодаря прославленным работам г. Пуанкаре» [III, 2, с. XIX]. Модулярные функции позднее привлекли внимание Ф. Клейна, посвятившего их изучению с помощью геометрических соображений ряд фундаментальных трудов. Клейн считал, что с понятием модулярной функции (судя по рукописному наследию) был знаком еще Гаусс. См. также [II, 428, с. 138—141].

Решением уравнений высших степеней с помощью эллиптических функций и их обобщений занимались Л. Кронекер, Л. К. Лахтин, Ф. Клейн, Ф. Бриоски. Преобразование ультраэллиптических функций после работ Эрмита (1855) [I, 32] стало предметом исследования московского математика П. М. Покровского [II, 71], читавшего после защиты докторской диссертации курс теории функций комплексного переменного по Брио и Буке в Киевском университете. Заметим, что появление его статьи «Об алгебраических уравнениях в связи с эллиптическими функциями Вейерштрасса» было стимулировано статьей Ковалевской [II, 42]. П. М. Покровский доказывает несколько соотношений, приведенных у Ковалевской без доказательств, и решает общую задачу обращения эллиптических интегралов с помощью функций Вейерштрасса.

Последний этап занятий Эрмита теорией эллиптических функций и их обобщений был посвящен различным приложениям этих функций.

Подводя итог работам Эрмита в этой области, Борель писал: «Аналитическое изучение эллиптических функций привело Эрмита к открытию двоякопериодических функций второго и третьего рода и к интегрированию уравнения Ламе. Эти прекрасные открытия были важны не только сами по себе. Они содержали в себе в зародыше более общие теории: теорию функций с множителями, которая была существенно развита г. Аппелем, и теорию дифференциальных уравнений с двоякопериодическими коэффициентами, с которой останется связанным имя г. Пикара» [III, 2, с. XIX—XV]. Подробное изложение теории эллиптических функций Эрмит дал в дополнении к «Трактату» Лакруа, включив туда много собственных результатов и выводов, а также результаты Вейерштрасса и Якоби, Лиувилля и Римана [I, 48].

Данное Эрмитом разложение функций просто периодических и двоякопериодических на простые элементы «было первым конкретным примером эффективного определения трансцендентных функций с помощью их особенностей; известно, какое место эта плодотворная идея заняла в Анализе благодаря трудам Римана и Вейерштрасса» [III, 2, с. XIV]. Ему же принадлежит разработка теории тета-функций, теории преобразования абелевых функций. По словам Якоби, Эрмит придал сочинениям Абеля новую форму, которая яснее подчеркнула его глубокие мысли. Наряду с лекциями Лиувилля [II, 306] труды Эрмита и многие важные советы его послужили, как писали Брио и Буке, основой их капитального труда по теории эллиптических функций [II, 145], ставшего отправным пунктом дальнейших исследований в этой области, в первую очередь А. Пуанкаре.

Борель напоминает высказывание Эрмита о том, что «теорию еще плохо знают, если каждый факт является лишь простым звеном, связанным лишь с предыдущим и последующим. Надо знать, как прийти кратчайшим путем от любой точки цепи к любой другой ее точке», — и добавляет: «Его лекции по непрерывным дробям, по эйлеровским интегралам, по эллиптическим функциям были великолепными иллюстрациями этой идеи» [III, 2, с. XIX]. Кроме того, «там, где большинство видело лишь утомительное нагромождение формул (в теории эллиптических функций, — *Е. О.*), он проницательно усмотрел скрытые связи чисел и функций, и этот взгляд привел его к прекрасным открытиям» [III, 2, с. XII].

Подробное изложение результатов Эрмита по теории эллиптических и абелевых функций имеется в прекрасной статье М. Нетера [II, 342], к которой и отсылаем читателя.

# Глава 6

## Эрмит и русские математики

Убежденный интернационалист в науке, Эрмит стремился к установлению контактов с учеными разных стран, в том числе и России. Нередко общение на чисто научной основе приобретало дружеский характер. Именно так сложились его отношения с П. Л. Чебышевым, Е. И. Золотаревым, А. Н. Коркиным, С. В. Ковалевской, А. А. Марковым и др. Русские ученые высоко ценили научные заслуги Эрмита и не менее — его личные качества. Он оказал большое влияние на творчество Коркина и Золотарева, частично и на исследования Чебышева, но и сам испытал на себе влияние последнего. Эрмит пропагандировал идеи и результаты русских математиков во Франции, сообщая о них в своих лекциях в Сорбонне и Политехнической школе и в своих печатных курсах.

В 1857 г. он был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук по представлению, составленному Чебышевым и подписанному, кроме него, В. Я. Буняковским, Д. М. Перевощиковым и Б. С. Якоби. Там, в частности, говорилось:[1]

Несмотря на всю многочисленность изысканий г. Бертрана (см. с. 27) и всю известность, которой он пользуется по всей справедливости, мы не можем поставить его выше другого французского геометра, также члена Парижской академии наук, г. Гермита (Эрмита, — *Е. О.*), посвятившего себя почти исключительно исследованиям трансцендентных функций некоторого рода и преобразованию форм. Все, что сделано г. Гермитом, носит на себе отпечаток гениальности, признанной за ним великими геометрами, занимавшимися теми же предметами. Так, в известном письме Якоби, напечатанном в I томе Собрания его сочинений [II, 233], он, отдавая должное гениальности идей Гермита, прямо указывает на то,

[1] Частично опубликовано в статье [III, 32], а полностью — в [II, 81].

что ему самому никогда не пришло бы в голову, а об остальном выражается так: «Так как Вы начинаете с того, чем я кончил, должна же быть маленькая сфера контакта».[2] Такой отзыв Якоби и по предмету, особенно близкому ему, как эллиптические функции, вполне может заменить всеобщую известность, которой еще не пользуются изыскания г. Гермита, и по предмету и по методам, быть может, слишком трудные для большинства.

В 1895 г. по представлению А. А. Маркова и Н. Я. Сонина Эрмит был избран почетным членом Петербургской академии наук. А задолго до этого он по представлению профессора К. А. Поссе был избран почетным членом Петербургского университета.[3] В 1892 г. Отделение физико-математических наук поздравило его с семидесятилетием,[4] и Совет Петербургского университета послал Эрмиту адрес:[5]

Милостивый государь,

С.-Петербургский университет, который имеет Вас в числе своих почетных членов, адресует Вам свои поздравления по случаю 70-летней годовщины Вашего рождения (см. с. 214). Вы не посторонний для нас человек. Ваши сочинения и Ваше личное влияние, направляя труды наших математиков, сделали из Вас, наряду с Великим Эйлером, одного из основных учителей нашей математической школы. Университет выражает надежду, что бог будет хранить Ваши дни еще долгие годы для прогресса науки, для Ваших друзей и Ваших учеников и для славы Франции, одним из самых славных геометров века которой Вы являетесь, принадлежащим дружественной нации, имя которой всегда есть и было символом цивилизации и прогресса.

Эрмит поблагодарил университет в своем письме к ректору.

Г. ректор,

яркое свидетельство уважения, которым почтил меня С.-Петербургский университет по случаю 70-летия, наполняет меня радостью. . . и внушает мне глубочайшую признательность. Позвольте мне искренне поблагодарить за него. Будьте добры заверить ваших коллег, профессоров математики, что они приобрели себе друга, присоединив меня к обучению их воспитанников. Они — ученики Эйлера, а я всегда разделял их чувства восхищения бессмертным Учителем, который соединял простоту, ясность, изящество с со-

---

[2] Отрывок из письма, содержащий эту фразу, см. на с. 9 наст. изд.
[3] Протокол № 36 за II половину 1886/87 ак. г. СПб., 1887, с. 86.
[4] Протоколы заседаний ОФМН Петербургской академии наук, 1892, № 318, 12 декабря 1892 г.
[5] Протоколы заседаний Совета имп. С.-Петербургского университета за осеннее полугодие 1892 г., 1893, № 47, с. 29.

вершенно исключительной творческой силой. Ваш прославленный коллега г. Чебышев вдохновлен был его гением в своих работах по теории чисел, которые так прославили русскую науку, и совсем недавно в исследованиях того же рода один из молодых людей, связанных с университетом, дал свидетельства исключительного таланта.[6] Пусть мои почитаемые и дорогие коллеги из университета соблаговолят принять в ответ на свидетельство их симпатии, столь тронувшей меня, мои самые искренние пожелания счастливых успехов их усилий во всех научных направлениях, чтобы они не переставали умножать своими трудами славу великой нации, которую Франция любит и которой восхищается. От всего сердца шлю им эти пожелания, снова выражая мою живейшую благодарность, и прошу Вас, г. ректор, принять уверения в моем величайшем уважении и совершенной преданности. Ш. Эрмит.[7]

Поздравления с 70-летием прислали Эрмиту и математики других университетов. В архиве профессора Московского университета Н. В. Бугаева[8] имеются письма Г. Дарбу по этому поводу и относительно посылки в Московский университет медали, изготовленной в честь юбилея Эрмита.

Эрмит поддерживал контакты с русскими математиками в разных областях исследований. Это — интегрирование алгебраических функций, диофантовы приближения и диофантовы уравнения, интерполяция, ортогональные многочлены, теория эллиптических функций, вопросы о минимумах квадратичных форм, исследования по теории целых алгебраических чисел, доказательства трансцендентности чисел.

Знакомство Чебышева с Эрмитом состоялось во время первой поездки русского математика за границу в 1852 г. В отчете об этой поездке Чебышев сообщил, что «по желанию гг. Лиувилля и Гермита» он занялся «развитием тех начал, на которых была написана его диссертация», представленная в С.-Петербургский университет в 1847 г. «на право чтения лекций» (pro venia legendi) [II, 113, т. 5, с. 247—248]. В диссертации был рассмотрен случай, когда интегрируемый дифференциал содержит квадратный корень от рациональной функции. Чебышев задался целью доказать, в каких случаях интегралы от двучлен-

6 Видимо, Эрмит имеет в виду исследования А. А. Маркова о целых комплексных числах, опубликованные в 1891 г. [II, 322, 324].

7 Протокол № 48 за весеннее полугодие 1893 г. Приложение IV к ст. 20 Журнала заседания 26 апреля 1893 г. СПб., 1893.

8 Архив Н. В. Бугаева в старом здании Московского государственного университета.

ных дифференциалов берутся в конечном виде в элементарных функциях. Таким образом, результатом первого знакомства с Эрмитом и Лиувиллем явились знаменитые работы Чебышева об интегрировании двучленных дифференциалов, зависящих от квадратного корня из многочлена третьей или четвертой степени. Эти исследования были продолжены Е. И. Золотаревым, а позднее — И. Л. Пташицким, И. П. Долбней, Н. Г. Чеботаревым и другими. Во время той же поездки Чебышев беседовал с Эрмитом и Лиувиллем о принципах теории эллиптических функций. Ему важно было узнать, что сделано в этой области знаменитыми французскими математиками, поскольку он сам читал курс теории эллиптических функций в университете.

И в последующие годы Чебышев не раз обращался к сочинениям Эрмита и его советам. В статье «О квадратурах» [II, 109] Чебышев писал: «В весьма важном сочинении по анализу, которое недавно издано г. Эрмитом [I, 66; 234, т. 2, с. 482], знаменитый геометр дает новую формулу для приближенного вычисления интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

В этой формуле все значения функции $\varphi(x)$ имеют один и тот же коэффициент, чем формула Эрмита существенно отличается от формулы Гаусса и что делает весьма удобными ее численные приложения. Важность приближенных формул этого рода побуждает меня предложить некоторые соображения, касающиеся разыскания таких формул» [II, 113, т. 3, с. 49].

Чебышев рассматривает интегралы более общего вида,

$$\int_{-1}^{1} F(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

и дает свою формулу для их приближенного вычисления, из которой как частные случаи получаются: при $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — случай Эрмита, а при $F(x) = 1$ — случай Гаусса. Подставляя в формулу Эрмита $x = \cos\theta$, Чебышев указывает, что данная Эрмитом формула может быть весьма полезна при отыскании приближенных величин первого члена в разложении $\varphi(\cos\theta)$ в ряд вида $A_0+$ $+A_1\cos\theta+A_2\cos 2\theta+\ldots$

Со своей стороны Эрмит впоследствии продолжал и развивал идеи Чебышева. Вопросом об ортогональных полиномах он заинтересовался в связи с исследованиями Чебышева, что видно из следующих слов Эрмита: «Можно предвидеть, что эти полиномы дадут решение вопросов минимума или интерполяции такого рода, как вопросы, которые изучал г. Чебышев, и это исследование вызвано, должен признаться, различными вопросами, которые ставил мне по этому предмету мой ученый собрат» [I, 234, т. 2, с. 319—320]. Имеется ссылка на Чебышева и в более ранней работе Эрмита [I, 234, т. 2, с. 293—308], посвященной разложению функций в ряды по ортогональным полиномам.

В письме к Борхардту Эрмит говорит: «Г. Чебышев при встрече сообщил мне об одной арифметической теореме, которая меня живо заинтересовала. Он установил в одном мемуаре, опубликованном на русском языке в Записках С.-Петербургской академии наук [II, 105], с которым я без него никогда бы не познакомился, в высшей степени замечательное утверждение, что существует бесконечно много совокупностей целых чисел $x$ и $y$ таких, что линейная функция $x-ay-b$, где $a$ и $b$ — две какие-нибудь постоянные, будет меньше по абсолютной величине, чем $\frac{1}{2|y|}$. Это, как видите, фундаментальный результат в теории непрерывных дробей, распространенный на выражение совершенно другого рода и открывающий путь для многих исследований. В письме, адресованном г. Брашману и опубликованном в Журнале Лиувилля (II серия, т. X) [II, 112], г. Чебышев, применяя то же утверждение к алгебре, рассматривает выражение $X-$ $-UY-V$, где $U$ и $V$ — две какие-нибудь функции от $x$, определяет многочлены, целые относительно этой переменной. . . Исследования знаменитого геометра по этому вопросу в высшей степени прекрасны, и по многим причинам они для меня чрезвычайно интересны, и вот замечание, к которому они меня привели. . .» [I, 234, т. 3, с. 513—514].

Замечание состояло в том, что Эрмит дал другой способ получения результата Чебышева. Рассматривая квадратичную форму от трех переменных, зависящую от непрерывных параметров $\delta$ и $\delta'$ ($\delta$, $\delta' > 0$), он находит оценку, лучшую, чем у Чебышева:

$$|x - ay - b| < \sqrt{\frac{2}{27}} \cdot \frac{1}{|y|}.$$

О результате Чебышева Эрмит упоминает также и в своем «Курсе» [I, 130, 155, 168].

Еще один пример связи работ Эрмита с соответствующими исследованиями Чебышева дает статья Эрмита «Об интерполяции» [I, 234, т. 3, с. 513—519] (см. также [I, 234, т. 2, с. 103—106]). В ней Эрмит говорит: «Вопрос, которым я хочу заняться в этой статье, имеет целью представить приближенно с помощью полинома данной степени $m$ функцию $F(x)$, у которой известны значения для $x=x_0$, $x_1$, . . ., $x_n$, где $n \geqslant m$, задавшись условием, чтобы сумма квадратов разностей между значениями этого полинома при $x=x_0$, $x_1$, . . ., умноженных каждое на данное число, была минимальной. Г. Чебышев первый решил этот важный вопрос в превосходном мемуаре о непрерывных дробях, представленном в 1855 г. С.-Петербургской академии (перевод на французский язык этого мемуара, сделанный г. Бьенэме, появился в Журнале Лиувилля, II сер., т. 3, 1859, с. 289), и именно из его исследования я извлек новый метод, который, будучи взят в обобщенной форме, дает результаты автора независимо от непрерывных дробей и связывает их непосредственно с формулой интерполяции Лагранжа» [I, 234, т. 3, с. 103].

Некоторые результаты, найденные Чебышевым, были опубликованы Эрмитом в его «Курсах». Из II издания «Курса» стал известен результат Чебышева о том, что если $\mu$ — общий наибольший делитель чисел $1+2^2$, $1+4^2$, $1+6^2$, . . ., $1+4N^2$, ($N=1$, 2, 3, . . .), то предел отношения

$$\lim \frac{\mu}{N} = \infty, \quad N \to \infty.$$

Доказательство этой теоремы восстановлено А. А. Марковым по найденным им обрывкам рукописи Чебышева и послано Эрмиту в письме, опубликованном в «Отчетах Парижской академии» [II, 320]. В ответе Эрмита на это письмо Маркова говорилось: «Память о Чебышеве, великом геометре, которого потеряла Россия, дружеские отношения, которые восходят к началу нашей карьеры, мои горестные сожаления о его кончине приходят мне на ум, когда я смотрю на фотографическую репродукцию фрагмента его вычислений, который Вы были столь добры прислать мне. Доказательство его прекрасной теоремы о простых делителях чисел вида $n^2+1$, которого никто не сумел открыть, вполне достойно его. Оно живо заинтересует друзей арифметики, которые примут его с признательностью, которая будет относиться и к Вам, когда прочтут его...» (см. с. 238, а также [II, 64, с. 25]).

В третьем издании «Курса» Эрмита [I, 155, с. 43—44] было приведено неравенство Чебышева: если одновременно обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ возрастают (убывают) в $[a, a']$, то

$$(a'-a)\int\limits_a^{a'}\varphi(x)\psi(x)\,dx > \int\limits_a^{a'}\varphi(x)\,dx\cdot\int\limits_a^{a'}\psi(x)\,dx,$$

впервые опубликованное в статье А. Н. Коркина [II, 247] (см. также [II, 64, с. 93]).

Часто в работах Чебышева и Эрмита речь шла об одних и тех же вопросах, и они давали разные доказательства одних и тех же теорем. В письме к испанскому математику Техейра Эрмит напоминает ему «прекрасную теорему Чебышева, что полином $X_n$ Лежандра есть знаменатель подходящей дроби порядка $n$ в разложении в непрерывную дробь величины

$$\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\text{»}\ [\text{I, 234, т. 4, с. 169—171}],$$

и дает свое доказательство этой теоремы.

Письма Эрмита занимают большое место в переписке Чебышева. Они напечатаны в полном собрании сочинений последнего [II, 113, т. 5, с. 424—436] и сопровождаются комментариями. Русские математики излагали результаты Эрмита в своих лекционных курсах. А. Н. Коркин и А. Н. Крылов сообщали, например, вместе с формулой Чебышева для приближенного вычисления определенных интегралов и формулу Эрмита. А. Н. Коркин излагал по Эрмиту разделы об абелевых интегралах и об уникурсальных кривых.[9]

Уже говорилось о том, что магистерская диссертация Е. И. Золотарева была написана под сильным влиянием Эрмита (см. с. 61).

Личное знакомство Золотарева с Эрмитом состоялось летом 1876 г. во время заграничной командировки первого, который писал об этом А. Н. Коркину: «Он (Эрмит, — *Е. О.*) принял меня чрезвычайно любезно и расспрашивал о наших работах. Он был удивлен чрезвычайно, узнавши, что мы имеем доказательство точного предела минимума для форм с пятью переменными» [II, 35, т. 2, с. 308—309]. Они много беседовали по различным математическим вопросам, о тематике которых можно судить по опубликованным и неопубликованным письмам Золотарева Коркину из Парижа [II, 35, т. 2, с. 167—342]. Симпатия была взаимной. Эрмит нашел в Золотареве обаятельного молодого человека и талантливого математика, а Золотарев отзывается об Эрмите как о чрезвычайно добродушном и симпатичном человеке, с мнением которого он очень считается, высоко ставя его как ученого.

В записных книжках Золотарева имеются заметки по теории эллиптических функций, о применении модулярных уравнений, о приложениях эллиптических функций к теории чисел и к интегрированию. При этом он часто упоминает имя и работы Эрмита об эллиптических функциях, об уравнениях пятой степени, его «Курс анализа для Политехнической школы». Среди «вещей, которые необходимо использовать» в связи с вычислением числа классов квадратичных форм отрицательного определителя, Золотарев записывает исследования Эрмита, Кронекера, Жубера, Дирихле.[10] В фрагменте «Приложение эллиптических функций к теории чисел»[11] Золотарев сравнивает исследования Якоби, Эрмита, Кронекера, Дирихле о числе классов квадратичных форм отрицательного детерминанта. Имеются программы намеченных исследований: «К теории модулярных уравнений третьего

---

[9] ЛО ААН, ф. 759, оп. 1, № 399. Курс дифференциального и интегрального исчисления, читанный в Морской академии в 1888—1890 гг. профессором А. Н. Коркиным; записан А. Н. Крыловым, л. 423, 430 об., 431—435 об., 436—460 [II, 64, с. 46].

[10] ЛО ААН, ф. 289, оп. 1, № 8 (М.), л. 8 об.

[11] Там же, л. 98.

порядка»,[12] «Заметка о модулярных функциях».[13] В последней Золотарев пишет о том, что еще Галуа указал возможность понизить степень модулярного уравнения на единицу для $p=5$, 7, 11. Это доказано Бетти. И после этого излагает метод Эрмита. Он рассматривает работу Эрмита об уравнении пятой степени [I, 37], его заметку «О некоторых алгебраических теоремах и решении уравнения 4-й степени» [I, 40],[14] подробно конспектирует его статью об экспоненциальной функции [I, 89],[15] упоминает исследования о точках перегиба кривых третьего порядка.[16] По Эрмиту он изучает общие свойства модулярных уравнений для $n$ простого нечетного,[17] по-видимому, желая написать статью о модулярных уравнениях. Программа такой работы у него записана, и первым пунктом стоит изучение свойств модулярных уравнений.[18]

Впоследствии, отвечая А. А. Маркову на присланную им статью о целых комплексных числах (см. с. 230—232), Эрмит писал, что она напомнила ему о вопросах, которые некогда его занимали, но затем его отвлекли от них другие предметы, и он увидел, что Золотарев, Дедекинд и другие математики значительно превзошли его. «Я не могу передать, — писал Эрмит, — какое сожаление я испытываю, вспоминая Золотарева, которого видел в Париже, с которым подружился и талант которого внушал мне одновременно восхищение и глубокую симпатию. Связывали нас теория эллиптических функций и арифметика. Его гений, если бы он был жив, с блеском проявился бы в этих двух направлениях с той творческой мощью и с тем характером ясности и простоты, которые поставили бы его в ряд величайших геометров» [II, 65, с. 13—15] (см. с. 230).

Совместные работы Коркина и Золотарева по теории квадратичных форм (см. с. 62) были также стимулированы письмами Эрмита к Якоби, о чем писал сам Коркин: «В тех же письмах поставлен вопрос о точном пределе для наименьших значений положительных квадратичных

---

12 Там же, л. 112.
13 Там же, л. 137 об.
14 Там же, л. 141 об. — 143 об.
15 Там же, № 10.
16 Там же, № 2; (см. статью М. Б. Налбандян [II, 62)].
17 Там же, л. 23—27 об.
18 Там же, л. 33, 73 об.

форм, решение которого было известно только для случая двух и трех переменных. Вопрос этот, один из труднейших, повел к целому ряду исследований, сделанных Золотаревым совместно с профессором Коркиным».[19]

Эрмит высоко оценил эти глубокие исследования и рекомендовал их своим ученикам, предлагая развивать заложенные в них идеи. Об этом свидетельствуют, например, письма профессора Л. Шарва, ученика Эрмита.[20] Письма Эрмита Коркину[21] показывают, что Эрмит старался заинтересовать Коркина теорией аналитических функций. Но ни Коркин, ни Чебышев (до него) не откликнулись на этот призыв.

Черновое письмо Коркина к Эрмиту[22] раскрывает отрицательное отношение Коркина к тем работам по теории дифференциальных уравнений, где решаются в общем виде чрезвычайно сложные и общие проблемы, без примеров, так что трудно понять и оценить их значение. Хотя в нашем распоряжении нет ответа Эрмита на это письмо Коркина, и даже вообще неизвестно, отправил ли Коркин это письмо, но можно утверждать, что в этом вопросе Коркин нашел бы в Эрмите сторонника. Из ряда высказываний Эрмита видно, что он тоже предпочитал работы, написанные ясно и конкретно. Он отмечал драгоценные и «весьма редкие в наше время качества Эйлера: ясность и простоту, которые придают науке ее красоту и заставляют полюбить ее, сделав ее изучение легким» [II, 64, с. 31]. Те же свойства таланта Золотарева Эрмит отмечал в письме к Маркову. Пикар приводит следующие слова Эрмита: «Восхищение, говорят, принцип познания. . . Я воспользовался бы этой мыслью, чтобы выразить пожелание: лучше сообщать студентам более простые и прекрасные вещи, чем увлекаться чрезвычайной строгостью, которая сегодня в таком почете, но мало привлекательна, скорее даже утомительна для начинающего, который не может понять, что в ней интересного» [I, 234, т. I, с. XXXVII].

А. А. Марков тоже переписывался с Эрмитом (см. с. 224—244). Письма эти были впервые опубликованы на фран-

---

19 ЛГИА, ф. 14, оп. 1, д. 6663а, л. 38—41. Записка Коркина о Золотареве. Опубликована в [II, 64, с. 115—116].

20 ЛО ААН, ф. 759, оп. 4, № 84.

21 Там же, № 84/8, л. 1—5.

22 Там же, № 114, л. 298—298 об., 299.

цузском языке в 1967 г. [I, 234]. Кроме того, в записях Маркова также многократно упоминается имя Эрмита. В своем рукописном курсе «О непрерывных дробях»[23] Марков, анализируя статью П. Л. Чебышева [II, 110], сравнивает результаты Чебышева с результатами Эрмита, Кронекера и Стилтьеса по тем же вопросам (см. также [II, 67]). Круг тем, затронутых в переписке Эрмита с Марковым, широк. Здесь — математические задачи, обсуждение приоритетных вопросов, отзывы об ученых, заботы, связанные с финансовым кризисом, переживаемым стокгольмским журналом Acta mathematica, и мерами по его спасению. Международное сотрудничество ученых помогло журналу, ему были отпущены нужные средства и его издание продолжается вплоть до наших дней.

А. А. Марков усовершенствовал доказательство Эрмита трансцендентности числа $e$ [II, 50].

Переписывался Эрмит и с академиком В. Я. Буняковским. К сожалению, письма эти не найдены, как и вообще не найден архив Буняковского. Можно упомянуть об одной формуле Эйлера, которая была предметом исследований Эрмита и Буняковского и вызвала обмен письмами между ними. Дело обстояло так. Эрмит прочитал в «Бюллетене Дарбу» письмо Н. Фусса к непременному секретарю Парижской академии наук М. Кондорсе от 15 мая 1778 г. [II, 203] и обратил внимание на упоминавшуюся там подстановку Эйлера для интегрирования функции

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}.$$

С помощью этой подстановки,

$$x=\frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{2}\,p},$$

Эйлер выразил интеграл через логарифмы и тригонометрические функции.

Эрмит проверил это утверждение и затем решил узнать, связан ли этот результат с характером конкретного интеграла

$$\int\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$$

[23] ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, № 4, л. 5.

*Андрей Андреевич Марков*

или все интегралы вида

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{ax^4 + 2bx^2 + c}}$$

можно вычислять с помощью алгебраической подстановки. Последнее предположение подтвердилось. Эрмит напечатал заметку по этому вопросу [I, 123]. В частном случае он рассмотрел и формулу Эйлера.

В связи с этой заметкой Эрмита В. Я. Буняковский напечатал «Замечания по поводу мемуара г. Эрмита» [II, 140], напомнив, что еще 17 лет назад опубликовал в русском журнале работу, оставшуюся неизвестной Эрмиту [II, 139], где рассмотрел в общем виде дифференциалы

$$\frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}}$$

($f(x)/F(x)$ — рациональная функция), интеграл от которых может быть выражен в алгебраических и логарифмических функциях. Среди примеров имелся и интеграл, рассмотренный Эйлером в «Интегральном исчислении» [II, 116]. Буняковский установил, когда интеграл выражается в конечном виде.

Хотя вопрос, вызвавший упомянутые статьи Эрмита и Буняковского, — один и тот же, но способы его решения у них разные, кроме того, Эрмит перенес свои исследования в область теории эллиптических функций и истолковал все полученные утверждения с этой точки зрения, что дало ему возможность новых обобщений и приложений; этого не было у Буняковского, который ограничился рассмотрением конкретного вопроса интегрального исчисления.

Эрмит был знаком и с трудами О. И. Сомова (1815—1876). По словам Е. И. Золотарева [II, 35, т. 2, с. 66], заметка Сомова о спрямлении дуг кривых обратила на себя внимание Эрмита, и в 1874 г. тот посвятил одну из своих лекций в Политехнической школе доказательству формулы Сомова.

В начале января 1882 г. в Париж приехала С. В. Ковалевская (1850—1891), чтобы встретиться там с мужем, В. О. Ковалевским (1842—1883). Ковалевская знакомится с французскими математиками — Ш. Эрмитом, А. Пуанкаре, Э. Пикаром, П. Аппелем, Г. Дарбу, Ж. Таннери. В первые же дни своего пребывания во Франции она встретилась с Эрмитом, и вскоре они стали друзьями. Обычно редко делившийся с посторонними положением своих семейных дел, Эрмит посвятил Ковалевскую в подробности взаимоотношений между своими родственниками. Письма Эрмита к Ковалевской хранятся в архиве Миттаг-Леффлера в Швеции. Их фотокопии были присланы в Советский Союз к 100-летию со дня рождения Ковалевской вместе с другими материалами, относящимися к ней. Академик П. Я. Кочина, биограф С. В. Ковалевской и издатель ее научных трудов, опубликовала письма Эрмита к Ковалевской [I, 231].

Вот фрагмент одного из них, где Эрмит говорит о своих любимых учениках: «Гг. Пикар, Аппель, Пуанкаре усиленно работают и публикуют превосходные работы. . . Меня с чрезвычайной язвительностью упрекают, что я их слишком хвалю. Таким образом, мы составляем ма-

*Софья Васильевна Ковалевская*

ленькую группу, представляющую французских математиков, самыми тесными узами связанных с немецкой наукой. Наш общий учитель — это г. Вейерштрасс, и наши лекции в Сорбонне и Политехнической школе имеют, главным образом, целью — изложить слушателям его труды и его великие открытия. Вы, Милостивая государыня, являетесь звеном симпатии между мною и великим геометром» [I, 231, с. 654].

Ратуя за участие женщин в научном творчестве, Эрмит сравнивает Ковалевскую с французской женщиной—математиком и философом Софи Жермен (1776—1831): «Вы, сударыня, больше будете способствовать успеху этого дела (деятельности женщин в науке, — *Е. О.*), чем м-ль Софи Жермен, как благодаря превосходству Вашего таланта, так и потому, что Вы появились в благоприятную эпоху». Он заверяет Ковалевскую в том, что она будет желанной гостьей в Нормальной школе для девиц в Отёй, где преподают математику Гастон Дарбу и Ж. Таннери и куда ее будет сопровождать Дарбу, но с горечью замечает: «. . .грустное чувство при мысли о будущности этих девиц. . .» [I, 231, с. 668]. И тем не менее он считает, что ее роль в науке не ограничивается ее математическими трудами, но важна и с другой точки зрения — как стимул движения за научное образование девушек [I, 231, с. 662].

С. В. Ковалевской предстояло читать в Стокгольмском университете теорию дифференциальных уравнений в частных производных. Узнав об этом, Эрмит пишет: «Вы окажете слушателям этого университета, огромную услугу, излагая им то, чего они не нашли бы ни в какой другой работе, кроме лекций Якоби» [I, 231, с. 666].

Среди других тем, обсуждавшихся в переписке Эрмита с Ковалевской, — конкурсы Парижской академии наук, в том числе конкурс на премию Бордена.[24] Как известно, такая премия была присуждена Ковалевской в 1888 г. [II, 42], и это событие также нашло отражение в письмах Эрмита. По-видимому, именно от Ковалевской он узнал об опасности, грозящей журналу Acta mathematica в 1884 г., в связи с чем Александр Бертран добивался через Министерство просвещения подписки на этот журнал не только для факультетских библиотек, но и для библиотек лицеев, гораздо более многочисленных. Отдельные места переписки посвящены награждению Пуанкаре и Аппеля премией шведского короля Оскара II за работы: Пуанкаре — о задаче трех тел и Аппеля — об абелевых функциях. Письма Эрмита к Ковалевской проникнуты чувством глубокого уважения к ней как к математику и большой симпатией. Именно Эрмит ходатайствовал перед Чебышевым о том, чтобы Ковалевской разрешили работать по специальности в России [II, 113, т. 5, с. 434].

Общее мнение русских математиков об Эрмите выразил академик Сонин в некрологе, посвященном Эрмиту:

«При известии об этой смерти затрудняешься сказать, какая утрата чувствуется горестнее: великого ли ученого, составляющего гордость и славу родной страны, беззаветно и исключительно преданного интересам науки, обогатившего содержание последней многими глубокими идеями и методами, или превосходнейшего из людей. . .

---

[24] Шарль Лоран Борден — нотариус, который в 1835 г. завещал Институту Франции 15 тысяч франков ренты.

В целом мире нет такого человека, который, имев случай вступить в личные или письменные сношения с Эрмитом, не был бы очарован и не остался бы навсегда под обаянием его благородной и величавой личности» [III, 35, с. XVII .

Влияние Эрмита сказалось и на последующих поколениях математиков. Уже в 1936 г. был издан русский перевод его «Курса анализа» [I, 232], сделанный В. М. Озерецким с 4-го французского издания, под редакцией Н. М. Гюнтера и с предисловием академика А. Н. Крылова (см. с. 40). Публикуются письма Эрмита к русским математикам [I, 230, 231, 233], статьи о нем. К 150-летию со дня его рождения в Библиотеке АН СССР в Ленинграде была открыта большая выставка его сочинений и работ, посвященных Эрмиту и развитию его идей (1972 г.).

В последние годы исследования Эрмита привлекают все большее внимание советских историков математики. В качестве примеров можно привести статью Н. И. Ахиезера об уравнениях и функциях Ламе [II, 4]; статью В. М. Кузнецова [II, 43], где рассмотрена история общей теории автоморфных функций, начиная с работ Гаусса и Якоби, и выясняется роль Эрмита и Ст. Смита в создании теории модулярных функций задолго до работ Р. Дедекинда и Ф. Клейна; статью И. А. Головинского [II, 28], в которой изучается история статьи [I, 108], где Эрмит дал решение интерполяционной задачи с кратными узлами.

Что же касается работ собственно математических, то в них постоянно используются результаты Эрмита и методы, связанные с теми, которые разработал он сам и его ученики и последователи.

# Глава 7

## Эрмит как историк математики

Помимо математических работ, перу Эрмита принадлежит немало биографических очерков о математиках, речей, предисловий к различным изданиям, высказываний по вопросам истории науки. Прекрасный исторический обзор преподавания математики в Сорбонне Эрмит дал в своей речи на открытии «Новой Сорбонны» [I, 164]. В ней содержатся краткие и точные характеристики математиков и астрономов, работавших в Сорбонне с 1809 по 1890 г. Среди его очерков и предисловий к сочинениям — предисловие к Собранию сочинений Б. Римана [I, 220], к сочинению П. Аппеля и Э. Гурса [I, 219], к биографии О. Коши, написанной А. Вальсоном [I, 218], очерки о Л. Кронекере [I, 170], Э. Куммере [I, 172], К. Вейерштрассе [I, 188], А. Кели [I, 179], Ф. Бриоски [I, 189], Ж. Альфане [I, 163] и др. Всех этих ученых Эрмит знал и лично и по их работам. Он был не только свидетелем развития истории математики XIX в., но и одним из активнейших ее творцов. Ему хорошо была известна история идей, отдельных сочинений и жизнь их авторов. Поэтому его очерки так интересны и полезны для изучения истории математических наук.

Несколько подробнее о речи Эрмита [I, 164], произнесенной 5 августа 1890 г. В числе первых преподавателей математики в Сорбонне Эрмит называет С. Лакруа, С.-Д. Пуассона, Ж.-Б. Био, Л.-Б. Франкёра, Ж. Ашетта, кратко характеризует их важнейшие труды. Говоря о Лакруа, он отмечает, например, что его «Элементарный арифметический трактат» выдержал 20 изданий, «Элементы геометрии» — 22, «Элементы алгебры» — 24.[1] Лакруа и Франкёр были авторами многих учеб-

[1] Указанные трактаты представляют собой различные тома [II, 257].

ников, переведенных на разные языки и служивших основными пособиями для преподавания в университетах разных стран. Ж.-Б. Био, преподававшему астрономию и физику, принадлежат учебные руководства по аналитической геометрии, физической астрономии, а также труды по статике, интегрированию дифференциальных уравнений в частных разностях, о вибрации поверхностей, важные открытия в области физики и астрономии. Многосторонне образованный, Ж.-Б. Био был членом Академии надписей и членом Французской академии, издал очерки по истории китайской, индийской и египетской астрономии.

А вот фрагмент яркого научного портрета С.-Д. Пуассона «кисти Эрмита».

«Математические науки были блестяще представлены в начале этого века знаменитыми геометрами. Пуассон фигурирует среди них рядом с Лапласом, Лагранжем, Фурье. По природе своих работ, своего аналитического гения, по способности пускать в ход все средства исчисления Пуассон приближается к автору „Небесной механики" (П. Лапласу, — *Е. О*)». В отличие от Лагранжа, продолжает Эрмит, посвятившего часть своих трудов абстрактной математике, «для Лапласа и Пуассона чистый анализ является не целью, а инструментом, в то время как приложения к физическим явлениям — их важнейшая цель, и Фурье, представлявший Академии наук работы Якоби, выразил чувство, которое господствовало в то время, в словах, которые мы воспроизводим: „Вопросы естественной философии, имеющие целью математическое исследование всех важных явлений, суть также достойный и главный объект размышлений геометров. Следует пожелать, чтобы те люди, которые наиболее способны усовершенствовать науку исчисления, направили свои труды к этим высоким приложениям, столь необходимым для прогресса человеческого знания". . . Но имея другую цель, Пуассон и Фурье внесли вклад и в развитие анализа, который они обогатили методами, новыми результатами, фундаментальными понятиями» [I, 234, т. 4, с. 287].

Из трудов Пуассона Эрмит в первую очередь упоминает его работы по теории притяжения: «Лаплас получил знаменитое уравнение, величайшей важности, которому удовлетворяет потенциал притяжения масс, притягиваемых внешней точкой. Пуассон дал новое соотношение, которое подходит для случая внутренней точки, в предположении, что плотность притягивающей массы постоянна, а Гаусс распространил затем его результат на случай, когда плотность изменяется по некоторому закону [I, 234, т. 4, с. 288] . . . Другой мемуар из числа справедливо прославленных относится к распределению электричества на поверхности проводников. Исходя из закона Кулона, Пуассон задается целью определить аналитически распределение электричества на поверхности этих тел и сравнить результат вычислений с наблюдениями. Он излагает вначале основы своей теории, и эти обобщения, ставшие ныне классическими, настолько сделались нам знакомы, что часто с ними уже не сопоставляют имя их автора.

Его принцип состоит в том, чтобы привести задачу электрического равновесия на некотором теле к вопросу о том, какой должна быть плотность жидкого слоя в каждой точке поверхности, чтобы действие целого слоя было нулевым внутри наэлектризованного тела. Он установил также, что электростатическое давление в каждой точке пропорционально квадрату плотности. Установив это и базируясь на условии, данном Лапласом в III томе „Небесной механики", того, чтобы притяжение слоя, ограниченного двумя почти сферическими поверхностями, было нулевым во внутренних точках, Пуассон делает отсюда вывод об электричестве на поверхности сфероида, мало отличающегося от сферы. Из своих формул он извлекает очень важное заключение: то, что для этих сфероидов электрическая плотность в каждой точке пропорциональна отталкивающей силе жидкости. Пуассон добавляет: „Естественно предположить этот общий результат", — но доказательства не дает. Доказательство дал Лаплас, дополнив в существенном пункте прекрасный мемуар, который мы анализируем. В частности, Пуассон изучает задачу о двух сферах, полностью проводящих и расположенных на некотором расстоянии друг от друга.

. . . Математическая теория статического электричества представляет, быть может, наиболее совершенную главу Математической физики, и мы увидим, что именно Пуассону принадлежит честь заложить ее основы и, следовательно, открыть путь знаменитым геометрам, которые довели эту теорию до более высокого совершенства» [I, 234, т. 4, с. 288].

Эрмит говорит и о других работах Пуассона: по магнетизму, капиллярной теории, теории теплоты, законам равновесия эластичных поверхностей, о распространении движения в упругих жидкостях, по исчислению вариаций, теории вероятностей, вибрации и движению Луны вокруг Земли и пр. Приведена цитата из письма К.-Г. Якоби к президенту Академии наук (1850 г.), где Якоби указывает на большое значение теоремы Пуассона, связанной с получением третьего интеграла системы дифференциальных уравнений, когда известны два первых.

Не менее подробно рассказывает Эрмит о сменившем Пуассона на кафедре рациональной механики Факультета наук Ш. Штурме, имя которого обычно связывают с известной теоремой из теории алгебраических уравнений и с работами по линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. О знаменитой алгебраической теореме Штурма (Эрмит много занимался ею, дав ряд ее обобщений, см. с. 77) он говорит: «Теорема Штурма имела счастье немедленно сделаться классической и занять в преподавании место, которое она сохранит навсегда. Ее доказательство, куда входят только самые элементарные рассуждения, — редкий пример простоты и изящества. Она интересует и поражает учащихся, представляя в форме одновременно таинственной и простой решение, которое долгое время ускользало от всех усилий, такого капитального вопроса: „Определить число корней уравнения, заключенных между заданными границами“. В начале их занятий она позволяет им вкусить редкое возвышенное удовольствие, какое гениальные произведения обычно дают лишь после больших усилий. Имя ее автора вскоре стало популярным во Франции, Англии, где Лондонское королевское общество присудило ему медаль Коплея, и во всей Европе» [I, 234, т. 4, с. 289].

Далее Эрмит связывает теорему Штурма с теоремой Коши, которая «почти следовала теореме Штурма, давала метод той же природы для определения мнимых корней уравнения, находящихся внутри области, ограниченной некоторым контуром. Великий геометр пришел к своему замечательному открытию на пути интегрального исчисления. Штурм в сотрудничестве с Лиувиллем, а затем один в другом мемуаре, пришел к вполне элементарному доказательству этого утверждения Коши. Позднее теорема Штурма предстала с точки зрения, совершенно отличной от точки зрения ее автора, и была выведена независимо от какого-либо рассмотрения непрерывности, из свойств квадратичных форм. Этот новый путь, где можно встретить имя Якоби, был открыт г. Сильвестером, а Штурму принадлежала честь первым доказать замечательные результаты, которые прославленный английский аналитик только сформулировал» [I, 234, т. 4, с. 292].

Довольно подробно освещается и творческий путь Понселе, создавшего на Факультете наук кафедру физической и экспериментальной механики, автора «Трактата о проективных свойствах фигур» [II, 370]. Эрмит отмечает, что Понселе, следуя своей геометрической интуиции, подошел к самым высшим теориям анализа. Он указывает, что один чрезвычайно интересный вопрос, рассмотренный Понселе в статье «Геометрическое изложение теорем о многоугольниках, вписанных или описанных, четного и нечетного порядка», «был изучен Гёпелем (имя которого связано с одним из величайших открытий нашего времени — функций двух переменных, которые являются обращением гиперэллиптических интегралов первого рода). Этот вопрос составил предмет работы великого геометра, опубликованной после его смерти . . . Результаты, изложенные в „Трактате о проективных свойствах фигур“, как показал Якоби, дают полное решение важного и трудного аналитического вопроса: приведения некоторого двойного интеграла, которому знаменитый аналитик посвятил один из своих мемуаров, к простейшему виду» [I, 234, т. 4, с. 293]. Эрмит упоминает теоремы Понселе о движущихся многоугольниках, вписанных в кривую второго порядка и описанных вокруг одной или нескольких других. «Прекрасное открытие Якоби обнаружило тесную связь этого исследования с теорией эллиптических функций и формулами этой теории, которые касаются умножения аргумента на целое число». Затем перечисляются другие заслуги Понселе, в частности изобретение им гидравлического колеса, которое превзошло все, что было сделано до него, а также создание новой системы подъемных мостов. До назначения в Сорбонну он, еще будучи офицером-сапером, преподавал механику в Меце, и лекции, прочитанные им там, имели огромный успех. На их основе были изданы сочинения [II, 366, 367]. Необходимость решения практических задач привела Понселе к исследованиям, относящимся к высшим отделам анализа. Именно ей обязан своим рождением превосходный мемуар о приложении метода средних к преобразованиям, численному вычислению и к определению границ остатка ряда [II, 368].

Другая работа [II, 369], посвященная приближенному значению в линейной форме квадратного корня из суммы или разности двух квадратов, «открыла путь оригинальным и глубоким исследованиям, которые прославили имя П. Л. Чебышева» [I, 234, т. 4, с. 294].

Останавливаясь на трудах астрономов, Эрмит сказал: «Открытие Нептуна прославило навеки имя Леверье [II, 295—300]. Оно было встречено единодушным восхищением, которое освящено временем. Оно было наиболее блестящим свидетельством могущества математического анализа в его приложениях к небесным явлениям. Многочисленные и важные труды предшествовали этому открытию, а последовавшие за ним ценнейшие исследования убеждают в том, что Леверье и без своего бессмертного открытия — первый астроном нашего времени» [I, 234, т. 4, с. 295].

Астрономические труды Леверье содержали в то же время важные математические результаты. В одном из его сочинений предметом изучения было уравнение седьмого порядка, играющее большую роль в вопросе о равновесии солнечной системы, форма этого уравнения позволяет узнать вещественность корней, давая тем самым возможность оценить влияние малых изменений коэффициентов на их числовые значения.

«Прекрасный труд Леверье привлек внимание Якоби [II, 231], который вновь взялся за этот вопрос с тем, чтобы изучить его методом более строгим и продолжив приближения более далеко. Этот труд послужил также источником знаменитого мемуара Борхардта [II, 136], который он посвятил уравнению такого же вида, но более общему и произвольной степени» [I, 234, т. 4, с. 297].

Эрмит касается трудов Г. Ламе, «инженера и физика», внесшего «свой вклад в основные вопросы анализа нашего времени» [I, 234, т. 4, с. 298]. Довольно подробно останавливается на творчестве своего учителя Лиувилля, своего товарища Серре, трудах М. Шаля, «одного из величайших украшений Факультета» [I, 234, т. 4, с. 303], в частности на работах Шаля о притяжении эллипсоидов и трудах по истории науки.

Но особенно много и восторженно Эрмит говорит о Коши, которому все части математики обязаны величайшими открытиями [I, 234, т. 4, с. 305]. Главное место в творчестве Коши, по мнению Эрмита, занимает фундаментальная идея: распространить первоначальное понятие определенного интеграла, заставляя переменную переходить от одного предела к другому, пробегая через последовательность мнимых значений по произвольному пути. «Наука не имела примера более плодотворного понятия... Эти результаты открыли путь общей теории функций, важному аналитическому творению нашего времени... Памятные открытия Римана и Вейерштрасса на этом пути, знаменитая теорема Миттаг-Леффлера были подготовлены трудами великого французского геометра» [I, 234, т. 4, с. 306]. Эрмит подробно рассказывает о различных направлениях исследований Коши, причем замечает, что «небесная механика также была объектом многочисленных прославленных мемуаров Коши», и говорит о его трудах в этой области [II, 161, 162, 167, 170 и др.]. При этом «именно с помощью своих новых астрономических методов, полученных из глубочайшего анализа, Коши смог в несколько дней проверить числовые результаты важнейшего труда, которому Леверье посвятил несколько лет, — о движении планеты Паллады, и специально — о большом неравенстве, происходящем от действия Юпитера» [I, 234, т. 4, с. 308—309].

О других представителях математических наук Эрмит говорит более кратко. Это — Пюизё, автор сочинений об алгебраических функциях [II, 374, 375], где он впервые показал важное значение критических точек для алгебраических уравнений, для интегралов от алгебраических функций и других вопросов анализа. По просьбе Леверье он очень ясно и подробно изложил упомянутый выше метод, которым Коши проверил результаты Леверье [I, 234, т. 4, с. 310]. Брио и Буке продолжили труды Коши — о свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями, и др.

Эрмит говорит о трудах Пюизё также в предисловии к книге «Теория алгебраических функций» Аппеля и Гурса [I, 219]. По словам Эрмита, работа Пюизё «Об алгебраических функциях» [II, 374] «открыла поле для исследований, которые привели к великим математическим открытиям нашего времени. Эти открытия. . . заменили понятие функции, остававшееся туманным и неопределенным, точной концепцией, которая преобразовала анализ, дав ему новое основание». Пюизё первый пролил свет на недостаточность и неверность представления алгебраических иррациональностей и других величин в виде полиномов и рациональных дробей. Исходя из теории Коши, он открыл роль критических точек и обстоятельства изменения начальных значений корней, когда переменная возвращается к своей исходной точке, описав замкнутый контур, содержащий внутри одну или несколько таких точек. «Он проследил следствия этих результатов в изучении интегралов от алгебраических дифференциалов. Пюизё узнал, что различные пути интегрирования порождают разные определения. Это привело его к объяснению происхождения, до тех пор совершенно таинственного, периодичности круговых функций, эллиптических функций, трансцендентных от нескольких переменных, определенных Якоби как обратные функции гиперэллиптических интегралов. За работами Пюизё последовали в 1857 г. работы Римана, встреченные единодушным восхищением, как самое значительное событие анализа нашего времени. Именно изложению работ великого геометра, а также исследований и открытий, порожденных ими, посвящен настоящий труд» [I, 234, т. 4, с. 557—558].

Дальше Эрмит говорит об идеях исследований Римана: «Задолго до работ Пюизё критические точки встретились в теории алгебраических кривых, их число определяло класс или степень уравнения обратной поляры. Было известно, что класс кривой уменьшается, когда она имеет кратные точки, и что тогда точки перегиба исчезают. Но эти столь интересные результаты оставались в области геометрии. Риман соединил Геометрию с Анализом, дав им новое плодотворное понятие, а именно: понятие преобразований, где координаты выражаются как рациональные функции двух переменных, которые также суть рациональные функции коррдинат. Когда имеют дело с уравнением кривой, их называют бирациональными преобразованиями (выделено Эрмитом, — *Е. О.*); когда абстрагируются от этого, называют их преобразованиями Кремоны (выделено Эрмитом, — *Е. О.*), чтобы напомнить о прекрасных работах, которые посвятил им прославленный геометр. Бесконечное число уравнений, которые выводятся из одного из них с помощью таких преобразований, рассматривается как эквивалентные. Их множество образует класс, и все они имеют общий элемент, играющий роль инварианта. Это целое число, которое Риман назвал ж а н р о м (выделено Эрмитом, — *Е. О.*) кривой и обозначил $p$; он связан с числом критических точек $n$ и со степенью $m$ равенством

$$n = 2(m + p - 1).$$

Понятия класса алгебраических уравнений, жанра и только что упомянутая зависимость числятся среди его наиболее замечательных открытий. Они привели к тому непредвиденному результату, что кратные точки, которые до сих пор рассматривались только в геометрии, стали играть фундаментальную роль в анализе как характеристические элементы основных свойств алгебраических функций» [I, 234, т. 4, с. 558].

Эрмит продолжает весьма глубокое и интересное описание достижений Римана и его последователей. В предисловии к французскому переводу сочинений Римана [I, 234, т. 4, с. 562] Эрмит говорит: «Творчество Бернгарда Римана — самое прекрасное и самое великое в анализе нашего времени; оно освящено единодушным одобрением, оно оставит в науке неизгладимый след. Современные геометры пользуются в своих работах его концепциями, постоянно демонстрируя своими открытиями их значение и плодотворность, которые несут на себе след его гения».

Мы видим, что очерки Эрмита написаны интересно и содержат оригинальные идеи о связи различных теорий и методов, некоторые из этих мыслей не устарели и сейчас. Замечу, что на русский язык эти работы, как и другие сочинения Эрмита (за небольшим исключением), не переводились. В то же время знакомство с ними было бы весьма полезно для современного читателя-математика.

# Глава 8

## Ученики Эрмита

«Деятельность такого человека, как Эрмит, не сводится только к успехам, которых достиг он сам; ориентируя усилия юных умов, он открывает двери в будущее» [II, 148, с. 14].

Учеников у Эрмита было много. И с полным основанием к ним следует причислить не только тех, кто непосредственно общался с ним, слушал его лекции, работал под его руководством, но и тех, кто учился по его учебным курсам, переписывался с ним, изучал его труды, использовал его советы. Назвать всех учеников Эрмита — задача безнадежная. Здесь будет говориться лишь о некоторых из ближайших — Э. Пикаре, Г. Дарбу, А. Пуанкаре, Ф. Тисссеране.

Гастон Дарбу (1842—1917) — один из первых выдающихся учеников Эрмита по Нормальной школе. Он родился в Ниме и после окончания местного лицея в 1859 г. поступил в математический класс лицея в Монпелье, а через год — сдавал экзамены в Политехническую школу. Одновременно он также блестяще сдал экзамены и в Нормальную школу и, к удивлению профессоров и студентов знаменитой Политехнической школы, выбрал Нормальную, которая готовила преподавателей учебных заведений. По окончании ее Дарбу на два года был оставлен при школе в качестве лаборанта. За это время он успел закончить работу об ортогональных поверхностях, которую в 1866 г. защитил как докторскую диссертацию.

До 1872 г. Дарбу преподает математику в лицеях Св. Луи и Луи-ле-Гран. В 1872 г. он одновременно становится лектором в Нормальной школе и ассистентом Ж. Лиувилля в Сорбонне, по кафедре рациональной механики. Лекции Дарбу быстро завоевывают популярность.

*Гастон Дарбу*

Вскоре он возобновляет на Факультете наук преподавание общей механики. Его лекции слушал и высоко оценил Э. Пикар, написавший большой некрологический очерк о Дарбу [II, 346]. Воспитанникам математического отделения Дарбу читал на III курсе алгебру и аналитическую геометрию. После смерти М. Шаля в 1880 г. Дарбу совсем оставил Нормальную школу и занял кафедру геометрии в Сорбонне.

Пикар писал: «Среди математиков различают чаще всего два направления ума. Одни занимаются в основном расширением поля известных понятий; не всегда заботясь о трудностях, которые они оставляют за собой, они ищут новые методы. Другие предпочитают оставаться в области хорошо разработанных понятий, чтобы углубить их. Они хотят исчерпать все их следствия и стараются сделать вполне очевидными при решении каждого вопроса все истинные элементы, от которых тот зависит. Первым часто достаточно бывает убедиться, что задача может быть решена, и они оставляют другим заботу о ее эффективном решении.

О них можно было бы сказать (как Фонтенель о Лейбнице), что им приносит удовлетворение видеть, как растут в саду растения, которые они посеяли, и они почитают семена больше, чем сами растения. (Заметим, что эту же цитату из Фонтенеля приводит и Эмиль Борель в своем очерке об Эрмите [III, 2]. По-видимому, ученикам Эрмита было ясно, что он принадлежит к математикам первого направления, — *Е. О.*).

Вторые думают, что общие методы созданы для того, чтобы быть примененными, и цену имеют только решения, доведенные до последней степени совершенства (до последнего члена). . . У Дарбу было и то, и другое направление. Следствия некоторых его работ были углублены другими больше, чем им самим. Но большая часть его работ отличается совершенством. Он любил извлекать из метода все, что тот может дать. . .» [II, 346, с. 98]. Пикар пишет, что никто не мог лучше Дарбу показать, насколько может оказаться плодотворным углубленное изучение простого случая, так как, в действительности, к общему приходят через частное. Он приводит слова Эрмита о том, что «метод открытий, в сущности, один и тот же в математических науках и в науках наблюдательных» [II, 346, с. 99].

Как и Эрмит, Дарбу старался наблюдать факты, стремился установить связи между вопросами, которые до того времени считались совершенно различными, не имеющими ничего общего. Как и Эрмит, Дарбу еще в студенческие годы сделал свои первые научные открытия. Его докторская диссертация об ортогональных поверхностях послужила началом ряда его геометрических сочинений. Ламе отмечал интерес этих исследований Дарбу для математической физики. Все свои труды по геометрии Дарбу собрал в сочинении об одном замечательном классе алгебраических поверхностей. Ему принадлежит также интерпретация неевклидовой геометрии в обычном пространстве.

В 1876 г. Дарбу опубликовал статью «Об аппроксимации функций очень больших чисел». «Такие функции встречаются в теории вероятностей и в небесной механике», — заметил по этому поводу Пикар. Хорошо известны «Лекции по теории поверхностей» [II, 180] Дарбу, его сочинения по теории уравнений в частных производных [II, 181], продолжающие линию Ампера и Монжа. В вопросе об особых решениях дифференциальных уравнений [II, 181] исследования Дарбу пересекаются с исследованиями Ф. Миндинга [II, 60] и А. Н. Коркина [II, 245, 246]. В 1889 г. Дарбу назначают деканом Факультета наук. В 1900 г. он наследовал Ж. Бертрану в должности непременного секретаря Академии наук.

Ученик Эрмита сказывался в Дарбу во многом. Так, например, он живо интересовался историей науки. Кроме очерков об отдельных ученых, которые он составлял по обязанности непременного секретаря [II, 179], ему принадлежат очерки и доклады о развитии геометрии в XIX в., о происхождении, методах и задачах дифференциальной геометрии, о геодезии, о предшественнике авиаторов — генерале Менье. «Он очень сожалел о тенденции многих французских ученых — не интересоваться историей наук. Он знал, какие трудности там встречаются и с каким трудом удается реконструировать давно забытые пути. Поэтому он заставлял своих новых собратьев по академии писать очерки об их предшественниках, очерки, которые могли бы служить документами для истории французской науки. Он старался отдать справедливость каждому из пионеров науки, которая ему обязана, и знал, насколько история может быть искажена в некоторых руках» [II, 346, с. 106].

Подобно Эрмиту, Дарбу мечтал о научной солидарности, о том времени, когда те, кто пользуется прогрессом и открытиями наук, придут на помощь исследователям, «занятым только своими работами, не заботящимся о будущем своем и своих близких». Пикар сообщает, что Дарбу собирался написать книгу о знаменитой проблеме, давшей начало дифференциальной геометрии, — проблеме географических карт. Его соблазняло изящество и практическое значение этой задачи, и он глубоко изучил ее в связи со своим преподаванием.

Таким образом, в ряде вопросов Дарбу работал параллельно с русскими учеными: Чебышевым (вопросы географических карт), Коркиным и Миндингом (особые решения дифференциальных уравнений). Вся его деятельность — свидетельство того, что он был верным учеником Эрмита. Перу Дарбу принадлежат также два очерка, посвященных Ш. Эрмиту, лучшие из всех, написанных до настоящего времени.

Умер Дарбу после операции, которую долго откладывал и которая оказалась роковой, в 1917 г.

Анри Пуанкаре (1854—1912) [II, 178] родился в Нанси в семье врача, Леона Пуанкаре. Дядя мальчика, Антони Пуанкаре, был генеральным директором мостов и дорог. Сыновья Антони, Раймон и Люсьен, впоследствии получили известность: первый стал президентом республики, второй — директором школьного обучения в Министерстве народного просвещения и искусств. Отец Пуанкаре был профессором медицинского факультета в Нанси, дядя Антони — выпускник Политехнической школы. Оба публиковались; некоторые работы братьев Пуанкаре были представлены Академии наук в Париже.

У Анри рано проявились разнообразные способности. В лицее Нанси, где некогда учился Эрмит, Пуанкаре шел первым по всем предметам, учение давалось ему легко, особенно нравились история, география и сочинения по литературе. Юность Анри Пуанкаре совпала с тяжелым для Франции временем. Нанси, находившийся в Лотарингии, оказался в центре нашествия пруссаков. Ужасы оккупации запомнились мальчику на всю жизнь.

В августе 1871 г. он становится бакалавром литературы, через несколько месяцев — бакалавром наук. Затем он поступает в класс элементарной математики и в конце 1871—1872 академического года получает первую премию на Общем конкурсе в Париже. На следующий год он занимается в классе специальной математики, где встречает своих будущих товарищей и коллег — Поля Аппеля и Кольсона. И на этот раз студент из Нанси получает первую премию на Общем конкурсе в Париже. Первым он поступает и в Политехническую школу. Как и Дарбу, он сдавал экзамены и в Политехническую и в Нормальную школу, где оказался пятым (а П. Аппель — вторым). В Политехнической школе Пуанкаре занимался блестяще, только по рисованию всегда имел нулевой балл. Лекций никогда не записывал: удивительная память позволяла ему обходиться без заметок и конспектов. Окончив Политехническую школу, он поступил в Горную. В 1876 г. он становится лиценциатом наук. С этого времени он начинает научную работу. Его внимание привлекают сочинения Коши, Пюизё, Брио и Буке. Огюстен

Коши уже изложил свои новые принципы математического анализа, основанные на теории функции комплексного переменного. Виктор Пюизё показал, как принципы Коши могут привести к существенным свойствам алгебраических функций и их интегралов. Еще до Пюизё Эрмит применил теорию функций комплексного переменного по Коши к теории эллиптических функций. Брио и Буке использовали принципы Коши в теории дифференциальных уравнений первого порядка. Бертран, высоко оценивший их труд, писал, что тот оказал самое большое влияние на исследования в этой области анализа. Изучение этого сочинения послужило началом занятий Пуанкаре теорией дифференциальных уравнений. Он публикует статью «О свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями» [II, 77, 358, 362].

Докторская диссертация, представленная им в 1878 г. Факультету наук, посвящена другой теме — интегрированию уравнений в частных производных с любым числом переменных [II, 76, 359]. Ее читало жюри в составе О. Бонне, Ж.-К. Буке и Г. Дарбу, который был докладчиком. По мнению Дарбу, в этой работе было материала на несколько хороших диссертаций, но некоторые пункты нуждались в дальнейшем развитии, были и ошибки. Пуанкаре, по словам Дарбу, «дойдя до вершины, не возвращался назад, оставляя другим прокладывать королевские дороги» [II, 178, с. XCV].

Сам Пуанкаре писал: «Я никогда не заканчивал работу без того, чтобы не жалеть о том способе, каким ее выполнил, и о принятом мною плане» [II, 93, с. 139]. Он внес исправления, о которых говорил Дарбу, но с сожалением заметил, что в голове у него были в это время уже совсем иные идеи и планы. Дарбу выделяет две главные находки диссертации Пуанкаре: функции с разрывами, которые так поразили Эрмита, и функции-алгеброиды, играющие важную роль в современном анализе [II, 178, с. XCVI].

С 1 декабря 1879 г. Пуанкаре читает лекции по анализу на Факультете наук в Кане. До этого полгода работает горным инженером, проявляя не только знания, но и хладнокровие и находчивость в разных сложных обстоятельствах. В это же время П. Аппель приступает к чтению курса механики в Дижоне, а Э. Пикар — анализа бесконечно малых в Тулузе. Через два года все они встречаются в Париже на Факультете наук. Пуанкаре становится лектором по анализу (1881/82), с 1885/86 он читает физическую и экспериментальную механику, а в 1886 г. наследует Липпману на кафедре математической физики и теории вероятностей. Одновременно с Э. Пикаром он получает знание профессора.

Научные исследования Пуанкаре посвящены самым разнообразным вопросам: теории дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, общей теории аналитических функций от одной и нескольких переменных, аналитической и небесной механике, алгебре, теории чисел, геометрии положения и т. д. Всюду он находит новые важные результаты, создает новые или совершенствует забытые методы. «Пуанкаре начинает, как Коши», — напишет о нем Дарбу [II, 178, с. XCVII].

В 1880 г. он предлагает Академии наук работу о вещественных кривых, представляющих решения дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами. (Задача, аналогичная той, которая решается в аналитической геометрии,— выяснить общую форму кривых для данного уравнения, но значительно более трудная). Рассматривая дифференциальные уравнения первого порядка вида $\frac{dy}{dx}=\frac{F(x)}{G(x)}$, где в правой части частное двух полиномов, Пуанкаре классифицирует возможные виды особых точек. В 1882 г. он рассматривает системы дифференциальных уравнений в частных производных и распространяет результат Коши (условия сходимости ряда Тейлора) на ряды, представляющие решения системы. Пуанкаре исследует решение систем дифференциальных уравнений с вещественными алгебраическими коэффициентами и доказывает, что вещественные решения могут быть найдены в общем случае с помощью рядов, сходящихся и расположенных по степеням вспомогательной переменной (параметра), которую можно выбрать бесчисленным множеством способов. Свои результаты он применил к задаче трех тел. Дарбу обобщил эти результаты Пуанкаре.

Одним из блестящих достижений Пуанкаре были его работы о фуксовых и клейновских функциях, обобщивших модулярные функции Эрмита. В 1880 г. Академия предложила вопрос на Большую премию (Grand prix): «Усовершенствовать в важнейших пунктах теорию дифференциальных уравнений». Премию присудили Альфану, Пуанкаре получил почетный отзыв за исследование об

*Анри Пуанкаре*

интегрировании линейных дифференциальных уравнений с алгебраическими коэффициентами. Он ввел в своей работе новые трансцендентные — фуксовы и клейновские функции. Дарбу так писал об этих исследованиях Пуанкаре: «Теория эллиптических функций показала нам простейшее свойство фуксовых функций — модуль эллиптической функции, рассматриваемый как отношение периодов. Эта м о д у л я р н а я ф у н к ц и я (выделено Дарбу, — *Е. О.*) была вполне изучена Эрмитом, показавшим, в частности, замечательное свойство, которым она обладает, — воспроизводиться с помощью дробных (дробно-линейных, — *Е. О.*) подстановок с целыми коэффициентами и детерминантом, равным единице. Эту теорему о модулярной функции . . . обобщил Пуанкаре, рассмотрев подстановки той же формы, но с любыми коэффициентами. Сначала надо было найти все дискретные группы, образованные такими подстановками, затем образовать функции, которые остаются неизменными, когда эти подстановки применяют к независимой переменной. Пуанкаре решает обе эти задачи с неожиданной легкостью и создает, таким образом, теорию, которая охватывает и очень частный случай тригонометрических функций, и эллиптические функции. Его исследования позволяют ему высказать замечательное утверждение, которое, по словам нашего собрата г. Умбера (Humbert), „дает ему ключи от алгебраического мира": „Две фуксовы функции, которые воспроизводятся, когда над независимой переменной производят подстановки одной той и же группы, связаны алгебраическим уравнением. Обратно, координаты точки любой алгебраической кривой выражаются через фуксовы функции и, следовательно, через однозначные функции одного и того же параметра"» [II, 178, с. CV].

Работы Пуанкаре по теории чисел послужили поводом для его избрания в секцию геометрии Академии наук. Упоминаются в статье Дарбу работы Пуанкаре по алгебре — об однородных функциях и о правиле знаков Декарта, доказательство (данное им вместе с Э. Пикаром) знаменитой теоремы Римана об однозначных функциях от $n$ переменных с $n$-периодами, изучение определителей бесконечного порядка, где его исследования встретились с трудами П. Аппеля, о функциях $\theta$ от нескольких переменных, о гиперфуксовых функциях, введенных Пикаром, о приведении абелевых интегралов, об иррегулярных интегралах линейных дифференциальных уравнений. Дарбу останавливается на работе, которую Эрмит предпочитал всем другим, — где Пуанкаре доказывает, что всякая мероморфная функция двух переменных выражается через частное двух целых функций [II, 178, с. CII]. В другой работе Пуанкаре распространяет на кратные интегралы теорию интегралов одного комплексного переменного, созданную Коши.

Камилл Жордан говорил о Пуанкаре: «Мы все рассматриваем его как самого сильного среди нас» [II, 178, с. CIII].

В 1887 г. Пуанкаре наследует Лагерру в Парижской академии наук, в 1908 становится также членом Французской академии. В 1889 г. получает премию на конкурсе, объявленном по инициативе Миттаг-Леффлера в Стокгольме в честь шестидесятилетия короля Швеции Оскара II. Он ответил на первый вопрос, формулировка которого принадлежала К. Вейерштрассу. Жюри в составе К. Вейерштрасса, Ш. Эрмита, Г. Миттаг-Леффлера сочло работу Пуанкаре достойной премии и указало, что «ее публикация откроет новую эру в истории небесной механики» [II, 178, с. CV—CVI]. Другую премию получил Аппель за исследование об интегралах функций со множителями и их приложениях к разложению абелевых функций в тригонометрические ряды. С этого времени имя Пуанкаре получило известность. После смерти Ф. Тиссерана он занимает кафедру математической астрономии в Сорбонне. Среди его публикаций много курсов, читанных на Факультете наук, в том числе «Новые методы небесной механики», «Термодинамика», «Электричество и оптика», «Исчисление вероятностей», «Математическая теория света» и др. Пользовались большой известностью не только математические, механические, физические работы Пуанкаре, но и его философские сочинения и выступления. В 1904 г. он был удостоен золотой медали Лобачевского Физико-математическим обществом Казанского университета за свои исследования по неевклидовой геометрии. В вопросе о фигурах равновесия жидкой вращающейся массы Пуанкаре встретился с А. М. Ляпуновым. Ему принадлежит около 500 печатных работ.

Мнения относительно влияния Эрмита на творчество Пуанкаре весьма разнообразны и весьма далеки от истины. Так, Ганс Фрейденталь (биограф Эрмита и Пуанкаре) считал, что Пуанкаре совершенно случайно прочитал статью Фукса, «которая захватила его воображение», и то, что после этого проблема «обрела для него первостепенное значение, объясняется случайностью, столь характерной для работ Пуанкаре» [II, 76, т. 3, с. 690]. Так Пуанкаре пришел к исследованию «фуксовых функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям $F(Sz) = F(z)$, где $S$ пробегает все подстановки группы преобразований $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$ с вещественными коэффициентами» [II, 76, т. 3, с. 692]. Об Эрмите в этой связи даже не упоминается, хотя именно такие подстановки с целыми коэффициентами рассматривал Эрмит в ряде своих работ.

По мнению того же Фрейденталя, Пуанкаре «*вдруг* (курсив мой, — *Е. О.*) превращается в одного из величайших сынов своего века, оставаясь в полном неведении относительно фундаментальных работ своих предшественников, выполненных на 25 лет раньше» [II, 76, т. 3, с. 690]. Правда, Пуанкаре «был учеником Эрмита, необычайно искусного аналитика, мало чем напоминавшего Римана, как, впрочем, и самого Пуанкаре,— математиков с сильно развитой геометрической интуицией» [II, 76, т. 3, с. 690]. Таким образом, Фрейденталь уверяет, что Пуанкаре не получил от своего учителя никаких сведений о фундаментальных трудах предшественников, в лучшем случае усвоил некоторые его аналитические приемы.

Мнение Андре Вейля совершенно иное. Он признает, что Пуанкаре в начале своего научного пути внимательно изучал труды Эрмита: «Некоторые из них (работ Пуанкаре по теории чисел, — *Е. О*) представляют интерес лишь в том отношении, что показывают нам, с каким вниманием Пуанкаре в начале своей деятельности изучал все работы Эрмита и как он усваивал его методы и результаты». Вейль считает, что Пуанкаре «не производил впечатления невежды или самоучки», хотя «чтение немецких работ явно давалось Пуанкаре с большим трудом» [II, 76, т. 3, с. 682]. Он признает влияние Эрмита на первые труды Пуанкаре по алгебраической и арифметической теории форм, в особенности кубических, тернарных и кватернарных. Вейль приводит слова Пуанкаре о том, как ему пришла в голову мысль, что «арифметические преобразования неопределенных тернарных квадратичных форм должны быть тождественны преобразованиям неевклидовой геометрии» [II, 76, т. 3, с. 683]. Дальше он пишет, что «так Пуанкаре, пользуясь средствами арифметики, построил первый пример дискретной группы и автоморфных функций» [II, 76, т. 3, с. 689]. Об Эрмите уже не говорится.

Адамар восторгается «грандиозным обобщением теории эллиптических функций», предпринятым Пуанкаре. «Можно сказать, — продолжает Адамар, — что фуксовы функции стали своеобразными „ключами от алгебраического мира“ и позволили решить одну из великих проблем — проблему интегрирования дифференциального уравнения для важного частного случая: линейного уравнения с алгебраическими коэффициентами» [II, 76, т. 3, с. 675]. Опять можно подумать, что Пуанкаре начинал с пустого места. А ведь фуксовы функции явились в результате обобщения модулярной функции, которой пользовался Эрмит, а вслед за ним и другие математики.

Фрейденталь считает, что Пуанкаре не знал не только о проблеме обращения интеграла Якоби—Римана, но и почти обо всем что было достигнуто в этой области

[II, 76, т. 3, с. 689]. В то же время Пуанкаре, еще будучи студентом Политехнической школы, писал родным, что изучает труды своего профессора Шарля Эрмита, потом — что открыл для себя знаменитого Якоби [II, 93, с. 81]. Он окончил Политехническую школу вторым по успеваемости (и первым по физико-математическим предметам), так что вряд ли мог быть «невеждой». Лекции Эрмита содержали новейшие результаты зарубежных ученых, в том числе и немецких. Следовательно, высказывания о математическом «невежестве» Пуанкаре представляются совершенно необоснованными.

Таким образом, влияние Эрмита было существенным и в отношении владения приемами исследований, и в отношении знакомства с трудами и результатами предшественников и современников. Очевидно, оригинальный склад мышления самого Пуанкаре заставил биографов отнести его новые приемы за счет его невежественности, а желание преувеличить его заслуги (как это часто делают биографы) — забыть о его учителях и предшественниках, в первую очередь об Эрмите.

Что же писал сам Пуанкаре об Эрмите?

Отмечая, что главнейшими областями математики, которыми занимался Эрмит, были Анализ, Арифметика и Алгебра и что все три «обязаны Эрмиту неоценимыми завоеваниями»; что ценность открытий Эрмита еще увеличивается благодаря тому, что он всегда старался сделать очевидной необходимость и пользу взаимосвязи различных областей математики; что, хотя Эрмит занимался главным образом чистой наукой, приложения получались при этом «в качестве процентов» [II, 178, с. CIII] и нельзя забыть, как полезно оказалось механикам и астрономам «прекрасное сочинение об уравнении Ламе, помимо его огромной аналитической плодотворности», Пуанкаре, обращаясь непосредственно к Эрмиту, говорит: «Мы не можем напомнить обо всем, чем обязана Вам наука. Мы можем, по крайней мере, сказать о том, чем Вам обязаны мы сами.

Ваше преподавание, столь ясное и столь поучительное, Ваши труды, столь глубокие и столь вдохновляющие, научили нас понимать Науку. Пример Вашей жизни, которую Вы целиком и полностью посвятили науке, жар Ваших слов, когда Вы говорили о ней, научили нас любить ее и показали нам, как надо ее любить.

Про идеи, которые Вы рассыпали, как бы не думая об этом, когда мы затем обнаруживали их, когда мы старались извлечь из них то, что в них заключено, Вы старались забыть, что они Ваши. Но мы не забыли этого, и это верно не только относительно тех из нас, кому выпала счастливая судьба слушать Ваши лекции, но и тех, которые испытали Ваше влияние на расстоянии, не непосредственно, и им хорошо известна ценность Ваших лекций, и все равным образом проникнуты чувством признательности. . . Вы равнодушны к славе, которая пришла к Вам, хотя Вы ее не искали. . .» [III, 27, с. 100—101].

Пуанкаре не говорит подробно, какими идеями и методами Эрмита он пользуется сам, но многие его исследования своим появлением обязаны Эрмиту, подобно теории фуксовых функций, упоминаемой в очерке Дарбу. В частности, применение методов теории функции комплексного переменного и методов теории групп, несомненно, вызвано исследованиями Эрмита, так же как постоянное стремление Пуанкаре установить связи между самыми, казалось бы, далекими отделами науки и его изыскания в области философских вопросов математики.

Эмиль Пикар (1856—1941) — один из наиболее близких Эрмиту учеников. Биографический очерк о нем принадлежит перу Луи де Бройля, сменившего Пикара на посту непременного секретаря Парижской академии наук [II, 148].

Пикар родился в Париже 24 июля 1856 г., обучался в лицее Анри IV (1868—1874), где одним из учителей был знаменитый историк Э. Лависс. Пикар увлекался литературой, древними языками и классической литературой, математика интересовала его в эти годы мало. В 1870 г. он с родителями находился в Париже и перенес все опасности и страдания осажденного города. Здоровье отца было подорвано лишениями этого времени, и он умер в 1872 г. Мать стала служить в той же фирме, где был управляющим ее муж. Она сумела воспитать двоих сыновей и дать им образование.

К этому времени Пикар уже увлекся математикой. В 1872 г. он становится бакалавром литературы, в 1873 г. — бакалавром наук. Курс специальной математики он слушает у известного профессора Лемонье, который заинтересовался молодым Пикаром. Первым по числу баллов Пикар поступает в Нормальную школу (по экзаменам в Политехническую школу он был вторым, но избрал для себя Нормальную школу). Его дядя со стороны матери — Пастер — был в то время директором Нормальной школы. Он и убедил юного Пикара сделать этот выбор. Брат Эмиля Пикара Эдуард окончил Политехническую школу, потом Школу мостов и дорог и в дальнейшем был генеральным инспектором мостов и дорог.

16 апреля 1877 г. Пикар блестяще защитил докторскую диссертацию «О приложении теории линейных комплексов в изучении поверхностей и пространственных кривых». Он работает вначале лаборантом в Нормальной школе, в 1878/79 г. читает лекции на Факультете наук. В 1878 г. доказывает изящную теорему о поверхностях, но его интересы перемещаются в область теории аналитических функций. Первая работа его по теории эллиптических функций была представлена Академии наук Эрмитом. «Несомненно, — пишет Луи де Бройль, — что влияние великого и глубокого аналитика, каким был Эрмит, во многом способствовало ориентации исследований Эмиля Пикара в новом направлении» [II, 148, с. 9]. В 1879 г. публикуются заметки Пикара в Comptes rendus, где он формулирует две теоремы, названные его именем. «Между прочим, именно изучение свойств классической трансцендентной функции из теории эллиптических функций, *модулярной функции, уже изученной Эрмитом* (выделено мною, — *Е. О*), привело Пикара впервые к его результатам, и здесь снова в большой степени проявилось влияние трудов Эрмита на эволюцию его идей в этот период» [II, 148, с. 9].

Некоторое время Пикар читает лекции по дифференциальному и интегральному исчислению на Факультете наук в Тулузе, продолжая свои исследования по теории дифференциальных уравнений с двоякопериодическими коэффициентами, которые теперь называются «уравнениями Пикара», занимается теорией гипергеометрических рядов, начинает исследования по теории абелевых функций. «С этого времени, — пишет Луи де Бройль, — все геометры пристально следят за работами юного ученого, оригинальность и глубина которых были признаны единодушно. Шарль Эрмит, в частности, не переставал консультировать его, направлять его исследования и отмечать ценность полученных им результатов. Дружеские отношения установились, таким образом, между ними, и ученик Эрмита сделался его коллегой. Вскоре между ними установились и родственные связи, так как в январе 1881 г. Эмиль Пикар стал зятем Эрмита» [II, 148, с. 10].

Осенью того же года Пикар вернулся в Париж и стал ассистентом профессора Буке на кафедре физической и экспериментальной механики в Сорбонне. Хотя преподавал он превосходно, его научные интересы оставались в области чистого анализа. После кончины профессора Буке Пикар в 1886 г. стал ординарным профессором Факультета наук, унаследовав курсы, читавшиеся Буке. В 1897 г. после добровольного ухода Эрмита из Сорбонны занял кафедру высшего анализа, пробыв в этой должности 34 года, пока не ушел в отставку в 1931 г.

Менее чем за 10 лет (с 1877 г.) он опубликовал свыше 100 статей и заметок, содержавших весьма важные результаты.

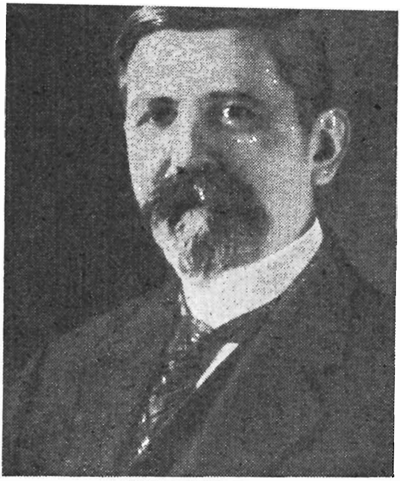
После смерти Альфана Пикар был избран в Парижскую академию наук. В это время ему было 33 года. На протяжении более 52 лет он оставался академиком и под конец оказался самым старым по времени избрания среди всех академиков Французского института.

Более сорока лет Пикар преподавал также в Центральной школе ремесел и мануфактур и был очень привязан к этому учебному заведению, давшему много знаменитых ученых и инженеров. Чтение разнообразных курсов, в том числе по механике и астрономии, позволило Пикару овладеть и этими дисциплинами, не оставив его узким специалистом в области чистого анализа. Он с удовольствием обращался к различным прикладным вопросам, мог квалифицированно судить о работах из различных областей знаний. О его лекциях по анализу с высокой похвалой отзывались все слушатели. Один из них, Морен (Maurain), впоследствии профессор, писал: «Его изложение было таким живым и интересным, что время уже не существовало для аудитории, всегда удивлявшейся, когда профессор, окончив лекцию, направлялся к ступенькам, чтобы покинуть амфитеатр. Аплодисменты звучали снова и на этот раз долго» [II, 148, с. 12]. Пикара приходили слушать многие студенты других вузов и факультетов, занимая места задолго до начала лекции. Почти все математики более молодых поколений, чем сам Пикар, были в той или иной степени его учениками. Таким образом,

*Эмиль Пикар*

Пикар явился достойным продожателем традиций Эрмита в своем преподавании.

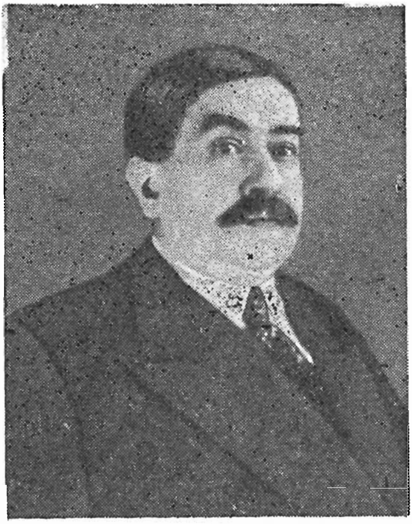
В науке ему принадлежит много важных результатов, создание новых направлений, преобразование некоторых отделов анализа. Он доказал, например, следующее: «Если для целой функции $f(z)$ существует два значения постоянной $A$, для которых уравнение $f(z)=A$ не имеет конечного корня, то функция $f(z)$ сводится к постоянной». Отсюда следует, что «если $f(z)$ целая функция, не сводящаяся к постоянной, то может существовать не более одного значения постоянной $A$ такого, что уравнение $f(z)=A$ не имеет решения» [II, 148, с. 15]. Для доказательства Пикар использовал функцию, встреченную и изученную Эрмитом в его глубоких исследованиях об эллиптических функциях, модулярную функцию, которая выражает зависимость между модулем эллиптической функции и отношением ее периодов. Впоследствии были даны более прямые доказательства этой теоремы Пикара, не использующие частные свойства модулярной функции, например, Эмилем Борелем. Сам Пикар позднее обобщил полученный результат. Вторая тео-



*Эмиль Борель*

рема Пикара состоит в следующем. Пусть аналитическая функция $f(z)$ допускает одну существенно особую изолированную точку $z_0$. Уравнение $f(z)=A$ имеет в общем случае бесконечно много корней в окрестности точки $z_0$. Может случиться, что для некоторых исключительных значений постоянной $A$ этого не будет, но не может быть более двух таких исключительных значений постоянной [II, 148, с. 16; II, 428, с. 225]. Ученики Пикара Э. Борель, П. Пенлеве и другие много способствовали развитию этого направления исследований, к которому примыкают также работы П. Монтеля, Г. Жюлиа и других. Э. Ландау писал, что «среди открытий, которыми г. Пикар обогатил математическую науку, теоремы, носящие его имя, занимают, конечно, первое место» [II, 148, с. 17].

Впоследствии Пикар занимается теорией аналитических функций от двух комплексных переменных. «Работы Эрмита о модулярной функции и группах подстановки, которая оставляет функцию инвариантной, привели Анри Пуанкаре к открытию фуксовых функций, что поместило его, совсем еще юного, в ряд величайших математиков всех времен.



*Поль Пенлеве*

Но все аналитики, которые занимались вопросами этого рода, ограничивались областью функций от одной переменной. Нужна была большая смелость, чтобы попытаться распространить эти трудные исследования на область функций двух комплексных переменных, но у Пикара ее было достаточно. В 1883 и 1884 гг. он установил два класса однозначных функций двух независимых комплексных переменных, которые назвал „гиперфуксовыми функциями“ и „гиперабелевыми функциями“. Таким образом, он пришел к открытию новой группы, называемой модулярной; эта группа Феликсом Клейном была названа «группой Пикара». Вся совокупность этих трансцендентных исследований сделала из Пикара коллегу и продолжателя идей Анри Пуанкаре» [II, 148, с. 17—18].

Параллельно с этим его заинтересовала связь между теорией функций двух комплексных переменных и теорией алгебраических поверхностей. Эти исследования были объединены в двухтомном труде, изданном совместно с Симартом [II, 352]. Лекции по этому вопросу он читал до 1930 г. Одновременно с Пикаром этими вопросами занимались М. Нетер, Энриквес, Ф. Севери, Г. Кастельнуово. Для алгебраических поверхностей было введено понятие, аналогичное понятию абелева интеграла для алгебраических кривых.

Важной областью исследований Пикара была теория дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных. Хорошо известен метод Пикара доказательства существования решения системы дифференциальных уравнений с помощью последовательных приближений. Пикар способствовал успешному развитию теории дифференциальных уравнений, введя в нее идеи Галуа (подобно тому, как идеи Галуа были применены Эрмитом, Кронекером, Бриоски в теории алгебраических уравнений). «Работы Пикара и Софуса Ли привели к более глубокому, чем раньше, проникновению в структуру дифференциальных уравнений, позволили их классифицировать, предвидеть случаи, когда они интегрируемы в квадратурах, и пролить свет на глубокое родство свойств, которые до того казались не связанными друг с другом. К этой новой области анализа, одним из основателей которой стал Пикар, относятся среди других работы наших собратьев — Эли Картана, Жюля Драха и Эрнеста Вессио» [II, 148, с. 21].

Пикар успешно работал также и в ряде других областей, в том числе в теории дифференциальных уравнений в частных производных и математической физике, в теории интегральных уравнений, занимался философией и историей науки. Он отличался глубокими и разносторонними знаниями, которые позволяли ему верно судить обо всех трудах, присылавшихся в Академию, где он в течение многих лет занимал пост непременного секретаря.

Среди учеников Эрмита были и астрономы. Один из них, Феликс Тиссеран (1845—1896), окончил Нормальную школу, в 1868 г. защитил докторскую диссертацию. Свою научную карьеру он начал с должности помощника астронома в Парижской королевской обсерватории. В 1873 г. У. Леверье реорганизовал астрономическую службу в стране, и Тиссерана назначили директором обсерватории и профессором астрономии Факультета наук в Тулузе. Позднее он становится профессором теоретической механики в Париже. С 1883 г. он приступает к чтению лекций в Сорбонне, сначала в качестве ассистента, а позднее занимает кафедру, которую прежде занимал профессор В. Пюизё. Итогом чтения лекций по небесной механике стал «Трактат по небесной механике» [II, 415], подготовка которого заняла у Тиссерана около 20 лет.

Тиссеран участвовал в астрономических экспедициях. В частности, в 1874 г. ездил в Японию для подготовки к наблюдениям прохождения Венеры перед диском Солнца. В течение ряда лет он работал над дополнением «Теории Луны» Делоне. Некоторые результаты, связанные с этой работой, содержатся в III томе его «Трактата по небесной механике» («Размышления о теории Делоне») [II, 415]. Статьи Тиссерана, опубликованные главным образом в Comptes rendus, посвящены вопросам теории интерполяции, связанным с теорией малых планет, наблюдениям солнечных пятен и другим астрономическим и математическим вопросам. Еще в Тулузе он составил «Сборник упражнений по исчислению бесконечно малых», изданный в 1876 г.

Главный труд Тиссерана — его четырехтомный трактат [II, 415]. «Это уникальное собрание методов, изящно изложенных в математической форме, обогащенных критическими замечаниями и историческими ссылками на оригинальные работы других ученых — памятник его автору» [II, 427].

В 1878 г. Тиссеран становится членом Парижской академии наук (после смерти Леверье). Он был членом Бюро долгот, с 1887 г. — членом Лондонского математического общества и других научных учреждений. Петербургская академия наук присудила ему премию Шуберта. С 1892 г. Тиссеран — директор Парижской обсерватории.

В течение многих лет он был другом Эрмита. Видимо, через него состоялось знакомство Эрмита со Стилтьесом. Возможно, что поддержка Тиссерана помогла Эрмиту устроить Стилтьеса на службу в Тулузский Факультет наук.

Следует отметить, что многие ученики Эрмита, профессора разных дисциплин — авторы фундаментальных трудов, появление которых связано с их преподаванием. Таковы курсы анализа Э. Пикара, Э. Гурса, книги Ж. Таннери, П. Аппеля и Э. Лакура, трактат Ф. Тиссерана, курсы А. Пуанкаре и многие другие. Некоторые из этих курсов были переведены на русский язык и в течение многих лет использовались в преподавании соответствующих предметов.

# Глава 9

## Переписка Эрмита

Большое место в жизни Эрмита занимала переписка с учеными многих стран. Отвечая на письма очень аккуратно, он, как и в беседах, щедро делился со своими корреспондентами мыслями и знаниями как математического, так и нематематического содержания.

Часть эпистолярного наследия Эрмита опубликована в его «Сочинениях» [I, 234] и в различных других изданиях. Особое место занимает переписка Эрмита со Стилтьесом, насчитывающая 432 письма и изданная в двух томах в 1905 г. [I, 225]. Были опубликованы также письма Эрмита А. А. Маркову, С. В. Ковалевской, П. Дю Буа-Реймону, отдельные письма к разным лицам. Но, по-видимому, еще много писем Эрмита рассеяно по различным архивам и хранится у частных лиц.

Дружба Эрмита со Стилтьесом, продолжавшаяся двенадцать лет, послужила источником обширной и весьма интересной переписки. Жан Тома Стилтьес (1856—1894), уроженец Голландии, сын известного инженера, начал свою научную карьеру в должности помощника астронома, потом увлекся математикой и благодаря содействию Эрмита получил назначение на должность профессора университета в Тулузе. В 1885 г. Стилтьес перешел во французское гражданство. В 1894 г. он был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук, а через несколько дней после получения известия об этом избрании скончался от туберкулеза.

Переписка разнообразна по тематике [I, 225]. В ней рассматриваются или упоминаются вопросы из области теории чисел, теории эллиптических функций, теории дифференциальных уравнений, в частности их интегрирование с помощью непрерывных дробей, задачи на экстремум, теория фигуры Земли. Теорема Коши о вычетах обобщается на кратные интегралы от функции комплексного переменного, затрагиваются вопросы приближенного вычисления определенных интегралов («Механические квадратуры»). Эрмит часто сообщает о результатах, принадлежащих математикам разных стран, знакомит его с математической литературой, предлагает темы для изучения. Стилтьес делится своими соображениями, высказывает различные предположения (среди них «гипотезу Стилтьеса»). Он сообщает, например, что считал своим доказательство формулы

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \log \log n + A,$$

в то время, как оно уже имелось до него у Мертенса [II, 326], а еще раньше было рассмотрено Чебышевым [II, 113, т. I, с. 189]. Вместо $A$ в формуле должно быть $A + O\left(\frac{1}{\log n}\right)$.

Приступая к исследованию связи между дзета-функцией Римана $\zeta(s)$ и эллиптическими функциями, Стилтьес по совету Эрмита старается идти путем, отличным от пути Римана. Он распространяет на ряды Дирихле некоторые соотношения, указанные Риманом для дзета-функции.

Эрмит обратил внимание Стилтьеса на работу Альфана, где имелось одно арифметическое следствие уравнения для эллиптических функций, затем предложил заняться вопросом о функциях, которые имеют уже не точки, а линии разрыва (этот вопрос Эрмит предлагал и другим математикам).

В переписке встречаются и некоторые вопросы о приоритете. Так, Эрмит сообщил Стилтьесу о сочинениях А. А. Маркова по той же тематике, послал журнал с его статьей [II, 323] (см. [II, 67]). Он познакомил Стилтьеса с Миттаг-Леффлером, сообщив, что тот читает в Стокгольме курс, в основу которого положен мемуар Римана о простых числах [II, 376]. Миттаг-Леффлер, в свою очередь, обращается к Стилтьесу с вопросами по поводу этой статьи Римана, и Стилтьес отвечает. Письма Стилтьеса, примыкающие по содержанию к переписке Эрмита и Стилтьеса, помещены в [I, 225, т. 2, с. 445—457].

Когда Стилтьеса начинают интересовать минимумы квадратичных форм, он просит Эрмита уточнить одно место из его статьи и спрашивает, было ли сделано что-либо еще в этом направлении. Эрмит отсылает Стилтьеса к статьям А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева [II, 248—250], указывая, что в переписке с этими русскими учеными сообщил им свой метод получения результатов относительно квадратичных форм. Но «их принципы, — пишет Эрмит, — кажутся мне более плодотворными и имеющими более широкую область применения, чем мои» [I, 225, т. 2, с. 346]. Речь идет о гипотезе Эрмита (см. с. 53).

Имена русских математиков упоминаются и в других местах переписки. Эрмит, например, сообщает, что Н. Я. Сонин, в то время бывший профессором Варшавского университета, а позднее ставший академиком Петербургской академии наук и живший в Петербурге, нашел новую форму остаточного члена в сумматорной формуле Эйлера—Стирлинга [II, 394, 395]. Стилтьес отвечает: «Выражение остатка в формуле Стирлинга, данное г. Сониным, прекрасно» [I, 225, т. 1, с. 404]. Эрмит посылает Стилтьесу несколько работ С. В. Ковалевской и просит узнать о них мнение более компетентных лиц. А 16 февраля 1891 г. извещает Стилтьеса о кончине Ковалевской. В ответном письме Стилтьес пишет, что очень огорчен этим сообщением, особенно после того, как узнал, что ей было всего 38 лет [1] и что она занималась также литературными трудами. Стилтьес собирает все о ней написанное и просит Эрмита просветить его в отношении литературной деятельности Ковалевской. Эрмит отвечает, что ей принадлежат очень интересные сочинения, написанные на основе автобиографических материалов, и обещает сообщить все, что узнает о ней от Миттаг-Леффлера. Несколько раз в переписке встречается имя Чебышева. Так, в 1893 г. Стилтьес использует неравенство Чебышева, и Эрмит выражает свою радость по этому поводу.

Стилтьес обобщил данное Эрмитом доказательство трансцендентности числа $e$. При этом он выразил сожаление, что в новых доказательствах трансцендентности забывают об основном пункте доказательства Эрмита, а именно — о приближении нескольких величин дробями с одинаковыми знаменателями. Он делится своими планами: подготовлена большая статья по истории теории чисел; он

[1] На самом деле ей был 41 год.

собирается заняться приложениями эллиптических функций к арифметике, дзета-функцией Римана и распределением простых чисел. В связи с этим Эрмит сообщает ему тему Большой премии Парижской академии наук, объявленную на 1892 г., — о доказательстве закона распределения простых чисел — и указывает, что тему предложил он сам. Риман при встрече в Париже некогда говорил Эрмиту, что без существенного труда его (Римана) формула [II, 79, с. 222—224] может быть сделана «числовой» (видимо, позволяющей производить вычисления?). Эрмит пригласил Стилтьеса принять участие в конкурсе, но различные обстоятельства помешали этому. Читатель может ознакомиться с этой перепиской, поскольку она имеется в крупнейших библиотеках Советского Союза.

Менее известна современному читателю переписка Эрмита с немецким математиком Полем (Паулем) Дю Буа-Реймоном [I, 226]. Изданная в 1916 г. Э. Лампе, она содержит 42 письма Эрмита за 1875—1888 гг.

П. Дю Буа-Реймон (1831—1889) [II, 422] был сыном писателя, публициста и языковеда Ф. Дю Буа-Реймона. Мать Пауля была родом из французской колонии в Берлине. Дома в основном говорили по-французски. Учился мальчик во французской гимназии в Берлине, потом в коллеже Невшателя и гимназии в Наумбурге. В Цюрихе он поступает вначале на медицинский факультет университета (1853 г.), публикует несколько работ о заболеваниях глаза и др. Затем едет в Кёнигсберг, где в эти годы работали Ф. Нейман и Ф. Ришело, и там увлекается математической физикой. В 1859 г. Дю Буа-Реймон защищает диссертацию в Берлине «О равновесии жидкостей». В дальнейшем в центре его научных интересов стоит теория капиллярности.

После окончания университета в течение многих лет он работает старшим учителем математики и физики в Фридрих-Вердер-гимназии в Берлине. Все эти годы он продолжает свои исследования в области математики. В связи с теорией характеристик Г. Монжа развивает геометрическую интерпретацию уравнений в частных производных и их интегралов. С 1865 г. г. Дю Буа-Реймон начинает преподавать в Гейдельбергском университете, где в эти годы работали знаменитые ученые — Р. Бунзен, Г. Кирхгоф, Г. Гельмгольц и др. В этот научный круг вошел теперь и Дю Буа-Реймон.

Он был удивительно искренним человеком, любил природу, понимал и глубоко чувствовал музыку, особенно Моцарта и Бетховена. Но в центре его интересов всегда была математика. Многие ученики его впоследствии стали известными профессорами и преподавателями.

Печатные работы Дю Буа-Реймона, относящиеся к гейдельбергскому периоду, посвящены уравнениям в частных производных, теории рядов Фурье, вопросам представимости функций рядами Фурье. Занимаясь этими вопросами, Дю Буа-Реймон вступает в область теории функций вещественной переменной, изучает фундаментальные разделы этой области математики, особенное внимание уделяя трудам Вейерштрасса. Результатом его занятий теорией функций вещественного переменного явился труд «Общая теория функций» [II, 183], о переводе которой на французский язык [II, 186] упоминается в письмах Эрмита. В этой книге он говорит, в частности, о различном подходе к понятию числа (основного понятия, из которого в дальнейшем получается вся его теория) — «идеалистическом» и «эмпирическом». Изложение этих противоположных точек зрения автор предлагает в форме спора двух лиц — «идеалиста» и «эмпирика». В последние годы жизни ученый вернулся к исследованиям по теории уравнений в частных производных.

С 1870 г. он становится ординарным профессором в университете Фрейберга, с 1874 г. — в Тюбингене, в 1884 г. — профессором математики в Берлинской Высшей технической школе. Умер Дю Буа-Реймон от болезни почек 7 апреля 1889 г. Большинство его математических статей напечатано в Журнале Крелле и в Mathematische Annalen [II, 422, с. 463—469].

Поводом для начала переписки Эрмита с Дю Буа-Реймоном явилась просьба последнего поискать в собрании рукописей Лагранжа какие-либо замечания о работах Ж.-Б. Фурье. Эрмит ознакомился с материалами этого собрания, состоявшего из 10 томов «in 4⁰» и 6 томов «in 8⁰», и обнаружил, что искать какое-то определенное место в этом огромном количестве листов, если оно не обозначено в предметном указателе, трудно, а может быть, и безнадежно. В указателе к собранию рукописей Лагранжа имелись указания на замечания Лагранжа о трудах Ампера, Монжа, но ничего не было сказано о Фурье. Просмотрев названия статей и статьи, по тематике близкие к трудам Фурье, — о теплоте, о тригонометрических рядах, — Эрмит и здесь не встретил никаких упоминаний о Фурье. Тогда он обратился к Ж. Лиувиллю, который, помимо того, что имел большую математическую эрудицию, находился некогда в дружеских отношениях с Дирихле и потому мог быть источником информации, полученной, по-видимому, Риманом. Отсюда следует, что Дю Буа-Реймон писал Эрмиту о какой-то информации, имевшейся у Римана, относительно упомянутых Лагранжем трудов Фурье. Все это рассказано в первом письме Эрмита от 20 мая 1875 г.

В следующем письме, от 10 июня 1875 г., Эрмит сообщил, что Лиувилль не помнит, чтобы когда-нибудь сообщал Дирихле о существовании заметки Лагранжа, посвященной теории теплоты Фурье, упомянутой Риманом в его работе о представлении функции тригонометрическим рядом [I, 226, с. 233]. После настойчивых расспросов Эрмита Лиувилль вспомнил, что в рукописях Лагранжа имеется какой-то короткий отрывок, совершенно незначительный и, без сомнения, относящийся к какому-то критическому замечанию С.-Д. Пуассона. Эрмит писал, что история анализа и сам математический анализ очень заинтересованы в отыскании записей Лагранжа о работах Фурье, но, к сожалению, он ничего больше не может сделать.

В этом же письме он обещал содействовать публикации статей и резюме работ Дю Буа-Реймона в парижских журналах. Эрмит сетует на то, что его корреспондент не обратился к нему непосредственно (а, видимо, через кого-то другого): «Может быть, Вы думаете, что из-за принадлежности к странам с разными языками, странам, между которыми война провела кровавую борозду, уже не существует никакого сходства в профессиональных трудах и обязанностях тех, кто посвятил себя тому же роду занятий? Более доверчивый, чем Вы, я, не колеблясь, могу сказать Вам, что, придя домой после утомительной лекции на Факультете наук, которую я читал с больным горлом и где излагал теорему Эйзенштейна с прекрасным доказательством г. Гейне о коэффициентах разложения в ряд корней алгебраических уравнений, я с удовольствием встретился с одним немецким коллегой и искренне посочувствовал тому, что он, как и я, не имеет возможности размышлять без помех и сконцентрировать все свое время и все силы на одном вопросе.

Только на каникулах, вдали от Парижа, на берегу моря или в Пиренеях, среди своих детей и внуков, я осмеливаюсь взяться за какой-нибудь вопрос, а к концу октября, к сожалению, должен забросить его, с тем, чтобы вновь надеть на себя этот несчастный хомут (collier de misère). Аналогия ситуаций создает столь естественную и законную симпатию, что наперекор политическим и военным чувствам (ressentiments de la guerre) я выражаю ее, думая, что она будет принята благосклонно.[2]

И в сфере научных отношений между двумя странами некоторые признаки свидетельствуют о том, что реальный и всеобщий мир скоро будет заключен, чтобы вернуть науке ее наиболее ценную привилегию: создавать узы личного уважения и привязанности между теми, кто посвятил себя науке» [I, 226, с. 195—196].

По поручению профессора О. Бонне Эрмит благодарит Дю Буа-Реймона за присланную им статью о формуле Фурье [II, 185] и говорит о большом уважении Бонне к трудам Дю Буа-Реймона. Он рассказывает о своем споре с Бонне по поводу доказательства этой формулы, данного Пуассоном в «Теории теплоты», объясняет, в чем состоял предмет этого спора: Эрмит не согласен с результатом Коши, «с моим дорогим и обожаемым учителем», что для него необычно, а Бонне, как раз, придерживается мнения Коши. Затем Эрмит выражает свою радость, узнав, что его корреспондент занялся арифметическими вопросами и способами аппроксимации иррациональных и трансцендентных величин, т. е. областью, в которой Эрмит незадолго до того сделал крупнейшее открытие.

Очень интересен фрагмент письма Эрмита от 1 февраля 1881 г., где он рассуждает о понятии разрывной функции: «Не знаю, разделяете ли Вы впечатление, которое заставляет меня испытывать поистине замечательное обобщение, какое понятие разрывности функции приобрело в наши дни. В течение долгого времени переход через бесконечность рациональной функции или функции, подобной рациональной, такой как тангенс $\operatorname{tg} x$, был единственным известным видом разрывной функции. Затем, как следствие формулы Фурье, появились скачки от ряда значений одной непрерывной функции к ряду таких же непрерывных значений другой функции. Насколько со

[2] Возможно, что тут неточно расшифровано несколько слов.

времен Римана возросла роль разрывности благодаря рассмотрению сечений в функциях! Я склонен думать, что представление, которое могли составить себе о способе существования функций в анализе до Эйлера и Лагранжа, много значило в том виде догмы физиков и натуралистов, которая базируется на знаменитых концепциях законов природы — на «чувстве непрерывности законов природы», таких как эволюционная теория Дарвина.

Но изучение функций анализа есть также и изучение законов природы. Что до меня, то я убежден, что все аналитические факты существуют вне нас и предстают перед нами совершенно с такой же необходимостью, как и свойства материи и явления реального мира. Вследствие этого я вижу в изучении функций — изучение объективной реальности, а в законах, относящихся к функциям, — отражение физических законов. . . С этой точки зрения я спрашиваю: если какое-то эхо современных математических работ достигнет дарвинистской школы, не привлечет ли оно самое серьезное внимание к догме непрерывности в законах природы, которая породила теорию наследственности (théorie ancêtrale) и которая, как мне кажется, скорее представляет собой априорную концепцию, чем дедукцию фактов» [I, 226, с. 203].

В связи с работами Дю Буа-Реймона в Comptes rendus появилась статья К. Жордана [II, 241], и так как, по мнению Эрмита, причиной появления этой работы и последовавшей за ней полемики были статьи Дю Буа-Реймона, а вопрос о представимости функций очень важен, Эрмит пожелал скорейшей публикации замечаний Реймона по поводу статьи Жордана. Эрмит просит Дю Буа-Реймона изложить результаты своих работ очень кратко, так как по правилам Comptes rendus там разрешается печатать заметки объемом от одной до четырех страниц.

«Этот трудный и деликатный предмет, — продолжал Эрмит, — в особенности, кажется мне, затрагивает самое понятие функций анализа, пуская в оборот условия, при которых могут быть осуществлены операции дифференцирования и интегрирования. Он чрезвычайно интересен, и Ваша заслуга, что Вы с успехом посвятили этому свою математическую карьеру. Но по своей чрезвычайной трудности и природе, которая граничит с метафизикой, он вызывает дискуссии и противодействие. Поэтому Ваша статья может вызвать ответ, и борьба, которая, возможно, начнется, если Вы не откажетесь от нее, будет интересовать всех математиков.

В недалеком будущем это, может быть, станет одной из отличительных черт нашей эпохи — внести в философские исследования элемент полного преобразования, преобразования необходимого, которое освободит их от неопределенности и туманности, за которые их так упрекают во Франции, по крайней мере, люди науки» [I, 226, с. 204].

В письме от 2 января 1882 г. Эрмит отвечает на вопрос о происхождении «автографических лекций» [I, 130], которые он перед этим послал своему корреспонденту. Эрмит заменял Бертрана в Политехнической школе, поскольку последний должен был уехать из Парижа на несколько недель. «Я испробовал на студентах Нормальной школы теорию однозначных (uniformes) функций и теперь решился дать наиболее легкие утверждения политехникам, которые не слишком строптивы (récalcitrants)» [I, 226, с.206].

Эрмита обеспокоило, что его слушатель (Andoyer), редактировавший эти лекции, не особенно заботился о том, чтобы записывать упоминавшиеся в лекциях имена. Он не упомянул имени Дарбу, хотя Эрмит все время говорил о множителях Дарбу, Штерна, по которому Эрмит доказывал расходимость ряда $\sum \frac{1}{(\log n)^{\omega}}$ для всякого значения $\omega$. Но Эрмит считал, что все равно ответственность за эти упущения лежит на нем самом. Кроме того, он указал одну ошибку, которая вкралась в текст «Лекций».

Эрмиту понравилось введенное Нейманом название «монотонная функция», но, заметил он, такое название годится только для Германии. По-французски «монотонный» — синоним скучного, утомительного. Поэтому студенты не преминули бы сказать, что, «определяя некоторое состояние функции, я определяю самого себя» [I, 226, с 206]. Заметим, что название «монотонная функция» используется в математическом анализе до сих пор.

Дю Буа-Реймон прислал Эрмиту свою книгу «Общая теория функций. Ч. I. Метафизика и теория основных понятий математики: величины, границы, аргументы и функции» [II, 183]. Эрмит представил ее Академии наук. Он высказал сожаление о том, что незнание немецкого языка делает чтение книги для него весьма трудным и что он должен будет прибегнуть к помощи переводчика. Но все же многое он понял. «Значит, Вы, сударь, — наблюдатель явлений ума геометров? Это было бы и мое направление; и моя философия, если бы я был способен на это, почти совпадала бы с историей науки.

Я рассказал бы, с различными ее приключениями, эволюцию, если можно так выразиться, понятий анализа, делая продолжительные остановки в тех местах, где общеизвестная истина с трудом освобождается от ошибки, и специально задерживаясь даже на полезной роли ошибок, как если бы существовало для науки благосклонное провидение, обращающее на пользу человека даже человеческую слабость» [I, 226, с. 207].

В письме от 15 апреля 1882 г. Эрмит удивляется, что Дю Буа-Реймон считает нужным доказывать существование у бесконечной десятичной дроби $0.\ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ldots$ определенного предела. «Я был за тысячу лье от того, чтобы верить или хотя бы предполагать, что тут имеется хоть какая-то тень трудности. Добавлю, что, слыша даже Ваш крик о помощи, я не вижу пропасти, которая у меня под ногами». Он предлагает Дю Буа-Реймону написать заметку по этому вопросу для Comptes rendus и показать на этом примере, что «рассуждают о понятиях, обозначенных словами и терминами, не обращаясь к их истинному значению. . . . Я думаю, что характерная черта математики нашего времени — эта потребность строгости, которая дает себя чувствовать во всех частях науки, и замечу, что это происходит в подходящий момент» [I, 226, с. 208].

В следующем письме Эрмит снова возвращается к доказательству существования предела десятичной дроби. «Короче, благодаря Вам я вижу, как колеблется на своем фундаменте, который угрожает рухнуть, все математическое здание, и как г. Ренан, который говорит, что не знает, кто он — материалист или спиритуалист, так и я сомневаюсь, объявить ли себя идеалистом или эмпириком» [I, 226, с. 209].

Эрмит сообщает своему корреспонденту кое-что о своей личной жизни. Он с нетерпением ожидает каникул, когда сможет наконец заняться настоящим делом — математическими исследованиями. Но и учебные занятия были для Эрмита творческим процессом: он рассказывал многое, не входившее в программу, в том числе результаты, только что найденные учеными разных стран. «Вы не поверите, до какой степени конец учебного года кажется нам трудным, а что касается меня, то до какой степени инерции я опустился. Я ожидаю с чрезвычайным нетерпением, что каникулы возродят меня и вернут к моему обычному состоянию, чувствуя стыд, что ничего больше не делаю и ни на что не годен» [I, 226, с. 210].

Он пишет о своих неприятностях: Бертран отказался публиковать заметку математика Вианна де Лима. Журнал «Пассан» (Le Passant) в двух номерах поместил статьи с нападками на Эрмита, его друга профессора Буке́ и большинство профессоров Факультета наук. «Вы, сударь, без сомнения, либерал и сторонник свободы печати. Увы, использование этой свободы при правительстве Республики меня глубоко отвращает. „Пассан“ продается во всех киосках, где продают газеты, он попадает в руки студентам, и мои воспитанники по Нормальной школе сообщили мне, что номер, касающийся меня, был послан также в провинцию, в лицеи. Но в то же время они выразили мне свое возмущение, и свидетельство их симпатии немного утешило меня. Однако верно и то, что для бесконечного множества читателей я — презренный профессор, справедливо обвиняемый студентами.

Вскоре Вы получите, в редакции одного из моих студентов, „Лекции“, которые были столь сурово оценены, и я позволю себе, с педагогической точки зрения, так же как и с точки зрения Анализа, обратиться к Вашему суду» [I, 226, с. 211]. Дю Буа-Реймон, видимо, предложил написать заметку в защиту Эрмита, и тот письменно благодарит его за сочувствие [I, 226, с. 212]. Но в этот момент Эрмит узнал о статье Линдемана, доказавшего невозможность квадратуры круга [II, 303, 304]: «Вы понимаете, как меня интересует прекрасное открытие г. Линдемана, который любезно пожелал сообщить мне о нем и написать о своем методе в письме, которое г. Бертран не задержал и которое появится в Отчете о следующем заседании. Для меня было чрезвычайным удовольствием узнать, что мои прежние исследования способствовали результату, который их намного превосходит и заполняет огромный пробел в Анализе. И разве это не доказывает блестящим образом, что Германцы и Кельты — одно и сражаются на полях науки одним и тем же оружием!» [I, 226, с. 212—213].

Это приятное известие ободрило Эрмита, расстроенного нападками в прессе. Но огорчения продолжались. 30 декабря 1882 г. Эрмит сообщает «что в Палате депутатов занимаются математическим анализом»: правительство запросило средства для создания второй кафедры исчисления бесконечно малых в Сорбонне, но его просьба была отклонена. С трибуны выступал бывший воспитанник Политехнической школы, доктор наук Леза́н, который заявил, что «в Сорбонне не преподают открытий и методов зарубежных ученых и что вторая кафедра не заполнит столь печальный пробел». Ту же тему развил, но в более длинной речи, богач Бишофсгейм, «благодетель астрономии», подаривший Парижской обсерватории зрительную трубу за 200 000 франков и основавший астрономическую обсерваторию в Ницце. Он утверждал, что на Факультете наук не преподают ни теории эллиптических функций (любимого предмета исследований и преподавания Эрмита!), ни кватернионов, ни методов Коши и Римана. «Палата ему, конечно, поверила. Г. Буке и я не решились протестовать, но я не мог не думать, что если вопросы политики, финансов, военные рассматриваются таким же образом, как преподавание математического анализа, то парламентарный режим готовит нам серьезные неприятности». Дальше он выразил надежду, что в Вюртемберге, в Германии, дела обстоят иначе [I, 226, с. 214]. «Если бы мой дорогой коллега Буке́ и я. . .объявили себя радикалами, свободными мыслителями или атеистами, хотя бы на словах, с трибуны нас провозгласили бы перед страной несравненными профессорами, „предметом зависти Европы" . . .Мы значим немного, сударь, а преподавание, как бы оно ни было важно, не является важным государственным интересом. Но политические страсти, которые по отношению к нам явились причиной несправедливости, которую не следует преувеличивать, могут и в более высоких вопросах иметь такие же последствия» [I, 226, с. 214—215].

Эрмит рассказывает о выступавшем в парламенте Лезане: «Г. Лезан, который был саперным капитаном, вышел из Политехнической школы, был депутатом, заставил сделать себя доктором наук (с довольно слабой диссертацией о кватернионах), который является членом Парижского математического общества, должен прекрасно знать, что в течение всех лет, что я преподаю в Сорбонне, я делился со слушателями моим восхищением перед Вейерштрассом, Риманом, Коши и другими. Но поскольку он радикал, а я слыву клерикалом, так как хожу к воскресной мессе, то г. Лезан заявляет в Палате, что „на Факультете наук не преподают никаких иностранных методов, в то время как профессора германских университетов вводят в свои лекции все научные открытия“» [I, 226, с. 215].

По-видимому, нападки на профессоров продолжались. Эрмит сообщает, что бюджетная комиссия не сможет посчитать его лодырем, поскольку кроме своего курса, идущего один семестр, Эрмит читает также дифференциальное исчисление вместо заболевшего коллеги и друга профессора Буке. У профессоров Коллеж де Франс, Политехнической школы и других вузов собираются забрать экзамены на степень бакалавра, передав их преподавателям средних учебных заведений, и в связи с этим «снять 20% со всех заработков, превышающих 6000 франков, чтобы облегчить бюджет». Этот проект не был одобрен в Палате.

В письмах нашел свое отражение вопрос о премии Академии наук 1883 г. Эрмит пишет 14 мая 1883 г.: «Через несколько недель Академия наук объявит в своем публичном годичном заседании о присуждении Большой премии по математическим наукам и наградит два прекрасных и важных мемуара, где вопрос о разложении числа на 5 квадратов изучен до конца и полностью решен. Вы знаете формулы, данные Эйзенштейном в 35-м томе Журнала Крелле для выражения этого числа с помощью символа Лежандра $(m/\mu)$. Они наконец доказаны, и усилия, которых стоило доказательство, — свидетельство глубины и мощи его гения. Один из награжденных мемуаров, который в некоторых отношениях превосходит другой, написан по-немецки, но г. Камилл Жордан прекрасно читает на вашем языке, и потому к этому сочинению не применили правило Академии, которое требует, чтобы мемуары, присланные на конкурс, были на французском или на латинском. Большие достоинства мемуара также сыграли свою роль в этом нарушении закона, и я с нетерпением ожидаю, когда будет известно, кто автор этой работы. Во всяком случае, по моему мнению, это счастье и честь для науки, что в Берлине награжден г. Альфан, а мы почти сразу вслед за этим должны будем наградить немца» [I, 226, с. 217].[3]

[3] Премию Парижской академии получили Г.-Дж.-Ст. Смит и Г. Минковский, мемуар которого был написал по-немецки (см. с. 64).

Эрмит неоднократно возвращается в письмах к вопросу о строгости в математике и в ее преподавании. «Я хотел бы ввести в моих лекциях строгость принципов, пример которой Вы дали; это было бы, безусловно, необходимо. Но другая необходимость, которую я живо ощущаю, это — быть простым, а доказательства вполне строгие — длинны, среди других и то, которое дает г. Липшиц для предела суммы прямоугольников, с помощью которого определяется площадь кривой. Что касается другой строгости, более абстрактной и тонкой природы, которая имеет своей целью обойтись без иррациональных величин, как этого хочет г. Кронекер, и допустить только целые числа и дроби, то она кажется мне пригодной для использования ангелами в раю, а не земными существами» [I, 226, с. 218—219].

В письме 14 мая 1885 г. Эрмит снова пишет о новых требованиях строгости: «Доказательство г. Кронекера совершенно иное, чем то, которым я обязан Вам, но оба мне полезны и показывают, в частности, каким образом добиться того, чтобы избежать предположения о существовании функции $f(x)$. Но я не знаю, какая сила инерции удерживает меня в том более счастливом времени, ныне далеком от нас золотом веке анализа, где никогда не составляло вопроса существование производной, так что, не без серьезного усилия и большого смущения, должен признаться, я склоняюсь перед требованиями жестокой необходимости настоящего времени относительно строгости. Я подчиняюсь этому, содрогаясь (en regimbant), но не могу решиться не считать очевидным, что если некоторая функция идет все время возрастая от $f(a)=A$ до $f(b)=B$, то всякое промежуточное значение между $A$ и $B$ будет задано с помощью $f(\xi)$, где $\xi$ — между $a$ и $b$. Пространно отвечая г. Кронекеру по поводу его интересного толкования иррациональных величин, я принял за основу своей аргументации, что было бы гораздо интереснее завоевать новые области анализа (conquerir de nouveaux), который дает нам для этого столько способов (de tant de manières), чем организовывать каким-то способом другой (анализ), заставляя нас видеть с другой точки зрения — с точки зрения самой чистой и самой полной абстракции — те понятия, которыми мы владеем.

Объясняясь с Вами по этому предмету, оставив всякую осторожность и всякую меру, я считаю, что это — погоня за тенью, в то время как брошена добыча, и что г. Кронекер сделал бы более полезное для анализа употребление своего гения, более почетное для своего имени, имеющего столько титулов, развив со всеми необходимыми подробностями то или другое из своих открытий, которые известны почитателям его таланта лишь в виде краткого изложения, сообщенного Берлинской академии и опубликованного в «Ежемесячных отчетах». Но что поделаешь? Spiritus flat ubi vult,[4] и я не могу спорить, что это будет успех, если с той точки зрения, которую хочет внушить г. Кронекер, доказательства важных утверждений об иррациональностях представятся с большей простотой и изяществом» [I, 226, с. 289—290]. И тут же Эрмит переходит к другому вопросу. Он боится, чтобы спор с Кронекером не был воспринят как французский национализм: «Может быть, Вас считают в Берлине французом? Меня в своей семье считают пруссаком, и я не перестаю отвечать, что война ничего не значит для моих чувств, которые датируются более чем двадцатью довоенными годами, и что я умру верным моим друзьям и пруссаком до глубины души, чем я заслужил презрение одной дамы, ярой патриотки» [I, 226, с. 290].

Но он старается разобраться в новых веяниях. 7 октября 1885 г. Эрмит пишет Дю Буа-Реймону: «Благодаря Вам пелена спала с моих глаз, и я понимаю, сколь верно Ваше утверждение, что существование функции еще далеко от того, чтобы повлечь за собой существование производной, в чем не убедишься, пока не построишь ее в действительности» [I, 226, с. 290].

Эрмита очень огорчило известие о разрыве между Вейерштрассом и Кронекером, вызванном, по-видимому, приглашением Вейерштрасса в жюри по присуждению премий короля Оскара II.[5] «Они — слава немецкой матема-

---

[4] Дух витает, где хочет (лат.).

[5] В письмах Вейерштрасса к С. Ковалевской [II, 70] по этому поводу сказано следующее: «Как тебе нравится, что после того, как он (Кронекер, — *Е. О.*) так возмущался перед Миттаг-Леффлером по поводу четвертого вопроса (а он наверняка знал, кто его поставил) и явно отказал ему, как и прочим, в праве иметь мнение по алгебраическим вопросам, он тотчас же поехал к Эрмиту, по-видимому, из боязни, что тот сможет ему навредить, если он когда-либо с ним разойдется. Так как Эрмит встретил его учтиво, он решил, что полностью привлек его на свою сторону» [II, 70, с. 261]. Здесь речь идет о вопросах на премию короля

тики. Я сожалею (конечно, между нами и на ухо), что бесконечно малый повод — шведская премия — послужил для г. Кронекера причиной этого значительного разрыва. Вы знаете, какое восхищение внушили мне открытия г. Вейерштрасса в теории однозначных аналитических функций одной переменной. В Сорбонне, так же как и в Политехнической школе, я сообщал его имя и его работы, а в Академии наук я сделал все от меня зависящее, чтобы подготовить избрание его иностранным членом. Вы знаете также, что у меня имеются некоторые поводы считать себя товарищем по оружию г. Кронекера, и совсем недавно, встретив нас в Лотарингии, знаменитый геометр говорил мне, что мы имеем головы, сделанные на один манер, и что мы должны обязательно иметь какого-нибудь общего предка.

. . .Поэтому мне очень больно видеть в раздоре тех, кого я люблю и уважаю как величайших аналитиков нашего времени. Всеми возможными уловками я старался заставить г. Кронекера понять, что он не должен принимать это так близко к сердцу, что это шведский король, пожелав ввести в комиссию по основанным им премиям немецкого геометра, выбрал г. Вейерштрасса. „Разве у меня не бывало, — сказал я ему, — и не один раз, а постоянно и непрерывно, что г. Бертрана предпочитали мне и пропускали передо мной?“ До меня он сделался членом Института и профессором Политехнической школы, Президентом Академии наук и т. д., и т. д. В комиссиях по премиям, когда предложенная тема была вопросом по теории чисел, именно г. Бертран был избран докладчиком, хоть он и не занимается арифметикой. Чтобы не быть несправедливым, по правде сказать, я не имел никаких заслуг, а лень и несказанное отвращение быть на виду препятствовали мне почувствовать какую-либо обиду.

Какое значение имеет для Кронекера, занимающего столь высокое положение, что сверх всяких отличий и

---

Оскара II, учрежденную в 1885 г. Из четырех вопросов два (I и IV) были предложены Вейерштрассом. Кронекер выступал против этих вопросов, обиженный тем, что его не пригласили быть членом комиссии по премиям. Об этом говорится и в других источниках [II, 70]. Однако истинная причина разрыва между немецкими математиками лежала глубже — в существе их понимания предмета математики.

всевозможных почестей его собрат г. Вейерштрасс получил мандат, который предполагает для него тяжелый труд, который ему навязан, которым он никогда не собирался бахвалиться, так как он и вообще этого не умеет. . . Как бы я желал, чтобы Вы смогли дунуть и развеять это облако, эту химеру самолюбия и объединить Ваших двух друзей, отношения которых важны для достоинства и чести науки. Как бы я был счастлив, если бы какое-то обстоятельство дало мне случай присоединиться к Вам и участвовать в деле примирения, которого я так горячо желаю!» [I, 226, с. 291—292].

Эрмит с волнением ожидал ответа на это письмо и был очень рад, узнав, что недоразумение благополучно разрешено и Кронекер с Вейерштрассом уже помирились. Дю Буа-Реймон подробно описал празднование 70-летия Вейерштрасса (31 октября 1885 г.), на котором большую речь в честь юбиляра произнес именно Кронекер. В связи с этим известием Эрмит вспоминает, что он присутствовал в 1877 г. на праздновании 100-летней годовщины Гаусса в Геттингене и никогда не забудет этого зрелища. Он высказывает сожаление, что во Франции не отмечают юбилейных дат знаменитых ученых.

Видимо, Дю Буа-Реймон написал, что и в Германии не очень-то помнят своих великих математиков, так как в письме от 29 января 1886 г. Эрмит говорит: «Очень жалею о том, что Германия забыла, какую блестящую славу принесли ей великие Геометры. В начале века мы имели Лагранжа, Лапласа, Фурье, Пуассона, Коши. Сегодня Вейерштрасс им равен. Несомненно, что именно он держит скипетр анализа, он достоин всех почетных титулов, самых больших, какими может располагать правительство. И в обстоятельствах столь торжественных, когда математическая Европа предлагает ему свидетельство своего восхищения, ваши министры его забывают! Отсюда, сударь, я делаю вывод, что надо работать, принимать тяготы и терпеть много неприятностей, не ожидая ничего иного, кроме удовлетворения от исполненного долга ученого. И кроме того, симпатия и уважение тех, кто работает рядом, — самое ценное и лучшее вознаграждение. Ордена — это пустое. Установив эти мудрые принципы, я хотел бы придерживаться их на практике, в особенности хотел бы заслужить то, что Вы мне приписываете с добротой, которой я весьма тронут, — чтобы находили ясным то, что я пишу. Через два месяца я надеюсь представить Вам новое издание моего курса в Сорбонне и с волнением ожидаю Вашего мнения — не совсем ли провалилась моя попытка отдать должное современной строгости» [I, 226, с. 294].

Летом 1886 г. Эрмит ездил на празднование годовщины Гейдельбергского университета и мечтал о длительных беседах с Дю Буа-Реймоном в Гейдельберге. Но им удалось обменяться лишь несколькими словами. Затем в переписке обсуждался вопрос о переводе книги Дю Буа-Реймона [II, 183] на французский язык [II, 186] и о заметке его для Comptes rendus, которую Бертран сильно сократил, видимо, не посоветовавшись ни с Эрмитом, ни с автором.

Последнее письмо Эрмита от 19 декабря 1888 г. очень кратко и официально. Он сообщает текст положения о Comptes rendus и о том, что секретари Академии имеют право сокращать заметки, присланные лицами, не являющимися членами Академии. Затем он добавляет, что «нет никого из моих друзей, кто не испытал бы несправедливости г. Бертрана» [I, 226, с. 310]. На этом переписка обрывается. В 1889 г. Дю Буа-Реймон скончался. Некролог о нем, написанный Эрмитом, был опубликован в т. 108 Comptes rendus за 1889 г. [I, 227].

В этой переписке имеется еще много интересного, в том числе и некоторые чисто математические вопросы.

# Глава 10

## 70-летний юбилей. Последние годы

19 октября 1892 г. комитет, созданный учениками и почитателями Эрмита, направил математикам разных стран приглашение принять участие в праздновании семидесятилетия прославленного главы французских математиков Шарля Эрмита. Празднование было назначено на 24 декабря (день рождения Эрмита). Вот содержание этого приглашения.

Милостивый государь, через несколько месяцев одному из самых выдающихся Геометров нашего столетия, г. Эрмиту, исполнится 70 лет. Вся его жизнь была посвящена науке. От самых ранних работ, обративших на юного школьника внимание Якоби, до его недавних мемуаров «О приложениях эллиптических функций» он непрестанно шел от открытия к открытию. Он считал себя полностью вознагражденным за свои открытия успехами двух излюбленных наук, Арифметики и Анализа, и не искал ни почестей, ни славы.

Но если он избегает шумной известности, то он не оттолкнет, без сомнения, искреннее свидетельство признательности и уважения. Вот почему группа учеников и почитателей г. Эрмита считает своим долгом обратиться к тем, кто ему близок или каким-либо образом испытал его влияние.

В самом деле, все мы ему многим обязаны. Не только его слово, его сочинения и его советы руководили нашими первыми шагами, но самая его жизнь служила нам великим примером. Она научила нас любить науку безответной любовью.

Да докажет ему наше соревнование в науке, что этот урок не был напрасным, и да осуществится одно из его самых заветных желаний, позволив ему надеяться, что другие соберут однажды урожай, столь щедро им посеянный.

Мы надеемся, Милостивый государь, что Вы питаете те же чувства и, как и мы, считаете, что самым лучшим средством доказать г. Эрмиту наше почтительное восхищение будет предложить ему по случаю его семидесятилетия медаль с его изображением, исполнение которой мы доверили одному из наиболее известных граверов нашего времени, вместе с адресом, под которым будут стоять подписи многочисленных друзей науки [III, 13, с. 57—58].

Под этим приглашением стояли подписи как французских (Г. Дарбу, А. Пуанкаре, К. Жордан), так и иностранных математиков (Э. Бельтрами, Л.-Ф. Фукс, Р. Липшиц, Дж.-Г. Дарвин, Н. В. Бугаев, С. Ли, Г. Миттаг-Леффлер, С. Ньюкомб, К. Стефанос, П. Мансьон и др.).

На приглашение откликнулись очень многие. В назначенный день в парадном зале Новой Сорбонны состоялось торжественное заседание, на котором Эрмиту была вручена бронзовая юбилейная медаль, изготовленная искусным скульптором Шапленом. Эрмит был изображен в профиль и, по свидетельству в [III, 13, т. I, с. 58], с удивительной достоверностью. На церемонии присутствовали: министр народного просвещения Дюпюи, вручивший Эрмиту медаль, полномочный посол Швеции и Норвегии, передавший Эрмиту орден Полярной звезды, ректоры, директора, профессора и преподаватели высших учебных заведений и лицеев Парижа, представители иностранных академий, декан факультета наук в Нанси Биша, декан Сорбонны Дарбу, члены секции геометрии Парижской академии наук Жордан, Пуанкаре, Аппель, Пикар, ученые других специальностей, среди них — Луи Пастер, многочисленные члены Института, все преподаватели Сорбонны, представители математических обществ разных стран, делегации воспитанников Нормальной и Политехнической школ и Факультета наук.

С приветствиями выступили: Г. Дарбу — от Факультета наук; А. Пуанкаре, рассказавший кратко об основных трудах Эрмита и о том, что он дал своим ученикам [III, 27]; К. Жордан — от имени всех, приславших адреса и телеграммы. Г. Шварц передал теплое приветствие от Берлинской академии наук, Биша поздравил юбиляра от имени Лотарингии, которая «гордится одним из своих прославленных сынов» [III, 13].

Растроганный Эрмит сердечно поблагодарил всех участников чествования. Министр произнес речь, где было сказано, в частности: «В Вас человек стóит ученого», — и вручил Эрмиту большой офицерский крест Почетного легиона.

Адреса и телеграммы прислали 7 организаций Германии, 4 — Австро-Венгрии, 3 — Бельгии, 5 — Италии, 4 — России, 3 — Швеции, 2 — Швейцарии, по одной — Дании, Голландии, Португалии, Румынии и др. В адресе от Научного общества Бельгии, одним из основателей ко-

*Медаль, изготовленная в честь 70-летия Эрмита*

торого являлся Эрмит, говорилось, в частности: «С 1851 по 1859 г. ученая Европа имела несчастье потерять четырех великих Геометров, прославивших предшествующий период: Гаусса, Коши, Якоби и Дирихле. Скипетр высшей Арифметики и Анализа по праву перешел из их рук в Ваши, и Вы сохранили его, несмотря на прекрасные открытия Ваших современников и учеников, труды которых заставили померкнуть блеск самых блестящих работ, за исключением Ваших» [III, 13, с. 64]. В 1892 г. Эрмит был избран председателем первой секции Научного общества Бельгии.

В последние годы огромная корреспонденция занимала Эрмита все больше и больше. Он никогда не любил светского общества и старался избегать налагаемых им обязанностей, которые обычно для человека науки оказываются напрасной тратой времени. Его внешняя активность проявлялась главным образом в беседах с далекими друзьями. Бо́льшую часть переписки занимала математика, но были и другие предметы: вопросы культуры, просвещения, политики, морали. Эрмит много читал. Одним из его любимых писателей был Виктор Гюго.

С грустью видел он, как умирают его старые друзья и коллеги. В 90-е годы скончались Л. Кронекер (1823—


*Та же медаль (оборотная сторона)*

1891), Э. Куммер (1810—1893), П. Л. Чебышев (1821—1894), Т. Стилтьес (1856—1894), А. Кели (1821—1895), К. Вейерштрасс (1815—1897), Дж. Сильвестер (1814—1897), Жозеф Бертран (1822—1900). Эрмит писал А. А. Маркову: «Память о Чебышеве, великом Геометре, которого потеряла Россия, дружеские отношения, которые восходят к началу нашей карьеры, мои горестные сожаления о его кончине приходят мне на ум, когда я смотрю на фотографическую репродукцию фрагмента из его вычислений, который Вы были столь добры мне прислать...» Затем Эрмит вспоминает незадолго до того скончавшегося Т. Стилтьеса и продолжает: «Увы, Милостивый государь, все мои друзья уходят, большинство из тех, с кем я разделял мои труды, покинуло меня, но вечная разлука не может помешать им быть со мною; я остаюсь верным своим воспоминаниям и навсегда сохраню память о Чебышеве и о Стилтьесе» (см. с. 238—239).

Как уже говорилось, в 1897 г. Эрмит прекратил преподавание в Сорбонне. Годы не погасили в нем интереса к науке. Его светлый ум до конца сохранил ясность и живость. Эрмит часто выражал надежду, что интенсивная математическая деятельность породит новые большие от-

*Шарль Эрмит*

крытия. Он предсказывал математике XX века прекрасное будущее.

Умер Эрмит в 1901 г. после непродолжительной болезни. Сообщение о его смерти глубоко опечалило всех знавших его лично и состоявших с ним в переписке. Математики всех стран откликнулись на известие о его кончине публикацией многочисленных некрологов и очерков. Академик Н. Я. Сонин сообщил печальную весть Петербургской академии наук [III, 35] (см. с. 165).

Вскоре Парижская академия наук вынесла решение об издании собрания сочинений Эрмита, так как его работы были рассеяны в большом числе научных журналов. Туда же была включена и часть писем Эрмита. Изданием руководил Э. Пикар. Сочинения Эрмита составили 4 тома [I, 234]. Кроме того, в 1905 г. была издана переписка Эрмита и Стилтьеса в двух томах [I, 225].

В предисловии к «Сочинениям» Эрмита Эмиль Пикар писал: «Время еще не пришло, и, к тому же, не мне выносить суждение о творчестве Эрмита. Некоторые части этого творчества сегодня в полном свете и сделали его имя знаменитым, другие явятся в будущем источником прекрасных открытий и еще умножат его репутацию. Однако можно все же выразить впечатление от этого суммарного изучения.

Наиболее важные работы Эрмита относятся к эллиптическим и абелевым функциям, к алгебраическим формам и к теории чисел. Но эти разные труды не изолированы, и испытываешь особое затруднение, пытаясь дать их классификацию, которая в математике, как и всюду, всегда недостаточна и проблематична.

Исследования по уравнению пятой степени — принадлежат они алгебре или теории эллиптических функций? Мемуар о преобразовании абелевых функций — к арифметике или к теории функций? Если, однако, оставаясь в обычных рамках, попытаться определить гений Эрмита, то можно сказать, что арифметические и алгебраические точки зрения доминируют в его творчестве. Именно в алгебре и в арифметике он особенно является изобретателем и творцом. Вместе с Кели и Сильвестером он основал теорию ковариантов алгебраических форм, превосходные исследования, которыми он ввел непрерывное в область разрывного, закрепили ему в теории чисел, этой королеве математики, почетное место рядом с двумя великими Геометрами, которых он любил и учеником которых любил себя называть: Гауссом и Дирихле» [III, 25, с. XI].

С тех пор прошло 80 лет. Но значение трудов Эрмита не уменьшилось. Напротив, как и предсказывал Пикар, многие его идеи и методы получили дальнейшее развитие и явились источником новых открытий.

# Заключение

Вернемся к Конгрессу математиков в Париже 1900 г., почетным президентом которого был единодушно избран Эрмит. Провожая XIX и встречая XX век, делегаты Конгресса подводили итоги математических исследований века минувшего, ставили задачи для наступившего XX века. И многое из того и другого было связано с именем Эрмита, деятельностью его самого или его учеников. В знаменитых проблемах Гильберта Эрмит фигурировал и «явно» и «неявно». «Явно» — в VII проблеме («Иррациональность и трансцендентность некоторых чисел») [III, 221, с. 85—86], перед формулировкой которой Гильберт сказал: «Арифметические теоремы г. Эрмита об экспоненциальной функции и их обобщение, принадлежащее г. Линдеману, конечно, будут предметом восхищения всех будущих поколений математиков. Это восхищение еще увеличивает наше стремление продолжить исследования в этом направлении» [II, 221, с. 85].

«Неявно» Эрмит присутствовал в проблеме II, связанной с трудами его ученика Пуанкаре, в рассуждении Гильберта о строгости («ошибка думать, что строгость — враг простоты»), в упоминаниях о «Геометрии чисел» Г. Минковского, исследования которого были непосредственным продолжением трудов Эрмита в области теории квадратичных форм, в упоминаниях о работах его учеников Бореля, Пикара, Дарбу. Проблема XI — о квадратичных формах с произвольными алгебраическими коэффициентами; проблема XIV — о доказательстве конечности некоторых систем функций, связанных с теориями квадратичных форм и инвариантов, непосредственно примыкали к работам Эрмита. То же можно сказать и о проблеме XIX (о функциях, способных быть определенными с помощью дифференциальных уравнений разного вида). В этот вопрос Эрмит также внес свой большой вклад. Занимался Эрмит и вопросами, связанными с другими проблемами Гильберга.

Но, кроме доклада Гильберта, на Конгрессе были и другие важные доклады и сообщения. Пуанкаре в своем докладе «О роли интуиции и логики в математике» [III, 28, с. 115—130], разделив математиков на две группы, «аналитиков» и «геометров», — в качестве примера провел сравнение двух крупнейших ученых: Бертрана и Эрмита, которые «уже вступили в бессмертие», хотя один из них скончался, а другой жив. Оба воспитывались в одинаковое время, примерно в одинаковых условиях и, однако, какая разница! «Не только в их сочинениях, но и в их преподавании, манере говорить, в самом облике. В памяти всех их учеников эти два лица запечатлелись неизгладимыми чертами; для большинства из нас, тех, которые слушали их лекции, это еще совсем недавнее воспоминание. Нам легко вызвать его в памяти. Во время лекции г. Бертран все время был в движении: то казалось, что он в схватке с каким-то внешним врагом, то он чертил рукой в воздухе изучаемые фигуры. Было ясно, что он видит и старается изобразить, для этой цели он призывал на помощь жесты. С Эрмитом все было наоборот. Его глаза, казалось, избегали встречи с людьми; он искал образ истины внутри себя» [III, 28, с. 117].

Пуанкаре характеризует «аналитиков» и «геометров», или «логиков» и «интуиционистов», и приводит примеры того и другого типа. Но Эрмит путает ему все карты. «Беседы с Эрмитом. Никогда он не прибегнет к помощи чувственного образа, и, однако, вскоре вы замечаете, что самые абстрактные вещи для него как бы живые существа. Он их не видит, но ощущает, что они не искусственное сборище и что они обладают, не знаю, каким, но внутренним единством. Но, скажете, вы, это опять интуиция. . .» [III, 28, с. 128].

Разрушив, таким образом, уже составленное Пуанкаре представление об «аналитике», Эрмит заставляет его прийти к заключению, что и «аналитики» и «логики» обладают интуицией, которая «позволяет им не только доказывать, но и творить. Это благодаря ей они одним взглядом могут увидеть общий план логического здания и без всякого участия чувств. . . Мы должны восхищаться ими („аналитиками с интуицией“, — *Е. О.*), но они так редко встречаются! . . . Г. Эрмит, например, которого я только что упоминал, не может быть причислен к геометрам, которые пользуются чувственной интуицией, но в то же время нельзя сказать, что он в полном смысле слова „логик“. Он не скрывает своего отвращения к чисто дедуктивным процессам, которые идут от общего к частному» [III, 28, с. 130].

Мы видим, что Пуанкаре не совсем верно понимал взгляды Эрмита, который сравнивал математику с естественными науками и большую роль отводил наблюдению фактов, но тем не менее сообщенные Пуанкаре сведения об Эрмите интересны.

Затем об Эрмите говорит Миттаг-Леффлер в докладе «Страница из жизни Вейерштрасса» [II, 176, с. 131—153]. Он вспоминает, как при первой встрече с Эрмитом в Париже, куда Миттаг-Леффлер приехал совершенствоваться в математике, Эрмит сразу же посоветовал ему ехать к Вейерштрассу, учеником которого он себя считал. «Эрмит был француз и патриот, я моментально понял, до какой степени он был математиком»,— говорил Миттаг-Леффлер. Он также был не совсем точен. Эрмит, действительно, был француз, но он был убежден в том, что наука интернациональна, и всеми силами старался содействовать объединению и дружеским связям ученых разных стран. Об этой стороне деятельности Эрмита говорит Вито Вольтерра в докладе «Бетти, Бриоски, Казорати, три итальянских аналитика и три способа рассматривать вопросы анализа» [II, 176, с. 43—51]. После весьма интересного сравнения характера творчества трех итальянских математиков Вольтерра упоминает об Эрмите в связи с вопросом о решении уравнения пятой степени: «При этом воспоминании наши мысли естественно обращаются к прославленному старцу, славе Франции и нашего века, которому мы посылаем привет вместе с чувствами уважения, восхищения и благодарности. Это приветствие, я уверен в этом, объединило в едином порыве сердца всех присутствующих здесь математиков.

Он завоевал бессмертную славу решением этой задачи (решение уравнений пятой степени, — *Е. О.*), и его имя сохранит свою славу в грядущих веках. Вокруг фигуры г. Эрмита, которая возвышается на первом плане, можно сгруппировать трех математиков: Бетти, Бриоски и Кронекера. Первый был первооткрывателем, который довольно далеко продвинул свои исследования, но не дойдя одного шага, не достиг цели. Бриоски, вскоре после открытия г. Эрмита, в то же время, что и Кронекер, внес такой свет в вопрос, что он оказался почти совершенно обновленным. В этом пункте проявились различия в характере научного пути Бетти и Бриоски, которые должны были играть столь важную роль во всей их научной жизни. Совершенно ясно видны стремление Бетти приступать к новым вопросам и способность Бриоски их совершенствовать. . .

Я закончу, объединяя имена Бетти и Бриоски, столь дорогие для Италии, с именем г. Эрмита, столь дорогим для Франции.

Мои мысли возвращаются к эпизоду, которым я начал: к путешествию 1858 г., памятного года, когда великие открытия, о которых мы только что говорили, только начинались, и который отмечен началом нежной дружбы между учеными, приехавшими из Италии, и тем, кого они хотели найти во Франции, дружбы, продолжавшейся 40 лет и постоянно укреплявшейся одинаковой любовью к Науке, той же верой в высокое назначение человечества. Пусть эта благородная дружба будет символом братских связей, которые объединяют обе страны!» [II, 176, с. 56—57].

Это лишь несколько примеров, взятых из сборника материалов Интернационального конгресса математиков. Об Эрмите, о его роли в науке и в создании и укреплении научных связей между учеными разных стран говорили многие участники этого конгресса, в значительной мере определившего направления математических исследований нашего, XX века.

# Приложение

## Письма Шарля Эрмита А. А. Маркову

### 1

Париж, 15 декабря 1885 г.

Милостивый государь,

спешу сообщить, что мой собрат г. Дарбу, которому я рассказал о прекрасной и важной работе по анализу, которую Вы мне адресовали,[1] счел ее, как и я, весьма интересной и предложил немедленно опубликовать в Annales de l'École normale supérieure. Вы знаете, как я восхищаюсь гением Вашего великого аналитика г. Чебышева. Теперь к моему восхищению им присоединяется моя симпатия к Вашему прекрасному таланту, и по этому случаю позволю себе предложить работу о некоторых приложениях эллиптических функций,[2] которая прибудет вместе с этим письмом. Выражая пожелание, чтобы Ваша математическая деятельность обратилась однажды к той теории эллиптических функций, которой я занимаюсь всю жизнь,[3] прошу принять выражение моего глубочайшего уважения и преданных чувств.

Ш. Эрмит.

---

[1] Марков А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и по теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л., 1948, с. 25—33, 377—378.

[2] См. [I, 104].

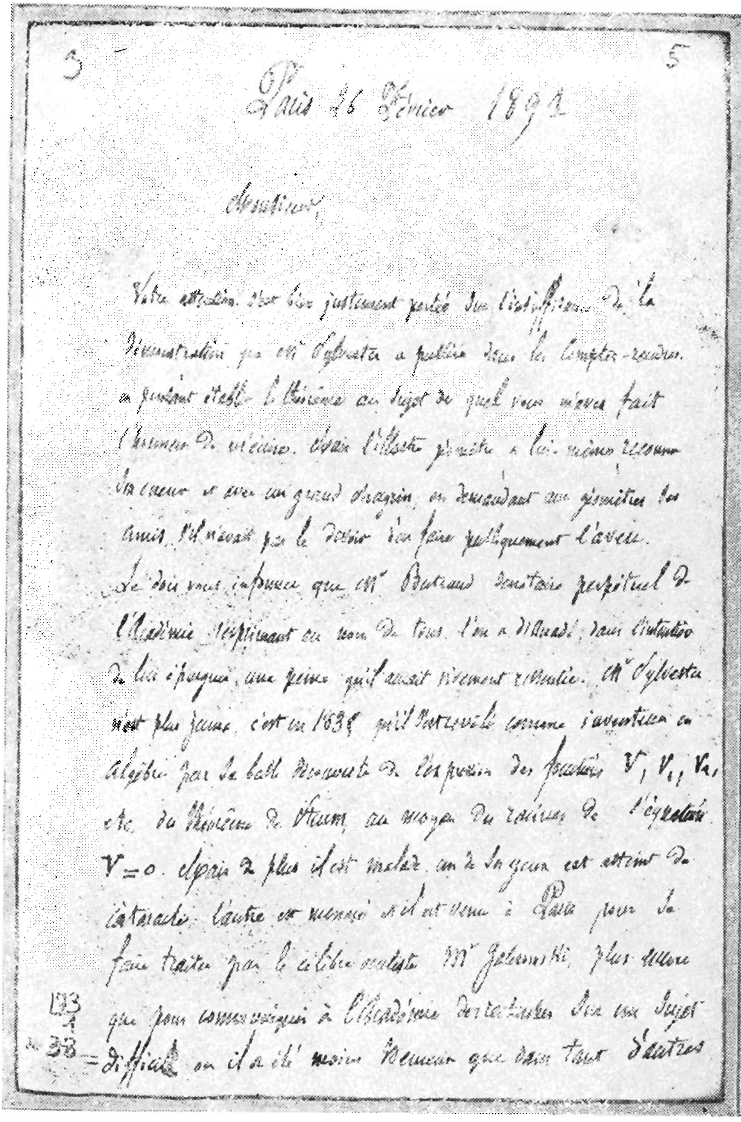
[3] Эрмит неоднократно выражал пожелание, чтобы русские математики занялись исследованиями по теории функций, в том числе и эллиптических. Об этом он писал Чебышеву, Коркину, Маркову.

### 2

Париж, 11 декабря 1889.

Милостивый государь,

Ваши исследования отличаются оригинальностью и глубиной, внушившими мне симпатию к Вашему прекрасному таланту, о чем я уже писал. Вновь свидетельствую свою симпатию в связи с сооб-


3 5

Paris 26 Février 1892

Monsieur,

Votre attention s'est bien justement portée sur l'insuffisance de la démonstration que M^r Sylvester a publiée dans les Comptes-rendus en prétendant établir le théorème au sujet duquel vous m'avez fait l'honneur de m'écrire. Mais l'illustre géomètre a lui-même reconnu son erreur et avec un grand chagrin, en demandant aux géomètres ses amis, s'il n'avait pas le devoir d'en faire publiquement l'aveu. Je dois vous informer que M^r Bertrand secrétaire perpétuel de l'Académie s'exprimant au nom de tous l'en a dissuadé, dans l'intention de lui épargner une peine qu'il aurait vivement ressentie. M^r Sylvester n'est plus jeune, c'est en 1839 qu'il s'est révélé comme inventeur en algèbre par la belle découverte de l'expression des fonctions $V, V_1, V_2$, etc. du théorème de Sturm, au moyen des racines de l'équation $V=0$. Mais de plus il est malade, un de ses yeux est atteint de cataracte, l'autre est menacé et il est venu à Paris pour se faire traiter par le célèbre oculiste M^r Galezowski, plus encore que pour communiquer à l'Académie des recherches sur un sujet

193/4/38 = difficile où il a été moins heureux que dans tant d'autres

*Автограф письма Эрмита к А. А. Маркову* щением, которое Вы оказали мне честь прислать[1] и о котором я доложу Академии, чтобы Ваши результаты могли быть опубликованы в отчете о ближайшем заседании.

Преобразования рядов $\sum\frac{1}{k^3}$ и $\sum\frac{1}{k^2}$ чрезвычайно интересны; так как

$$\frac{[1\cdot2\cdot3\ldots(k-1)]^3}{1\cdot2\cdot3\ldots(3k-2)}=\frac{2\pi(3k-1)}{27^3},$$

ясно, что Ваша первая формула, например, имеет быстроту сходимости геометрической прогрессии. Каким путем Вам удалось прийти к такому преобразованию, я не могу даже отдаленно предположить,[2] и секрет этого остается у Вас. Разрешите, милостивый государь, предложить Вам несколько заметок, сопровождающих это письмо, и примите выражение глубочайшего уважения и моих преданных чувств.

Ш. Эрмит.

---

[1] Markoff A. Sur les séries $\sum\frac{1}{k^2}$, $\sum\frac{1}{k^3}$. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. — C. R., 1889, t. 100, p. 934—935.

В этой статье Марков дает две формулы — для $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ — и находит приближенное значение суммы ряда обратных квадратов.

[2] В работе Маркова Mémoire sur la transformation des séries peu convergentes en séries très convergentes. (Mém. Acad. sci Pétersb., (7), 1890, t. 37, Nr. 9, p. 1—18) содержится формула для $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ в несколько иной форме, которую легко преобразовать к той, которая приведена в письме. Другая формула, для $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, имеется в курсе Маркова «Исчисление конечных разностей» (СПб., 1889—1890, с. 114—118).

3

Париж, 26 февраля 1891 г.

Милостивый государь,

Вы совершенно справедливо обратили внимание на недостаточность доказательства, опубликованного г. Сильвестером в Comptes rendus,[1] в намерении установить теорему, о чем Вы оказали мне честь написать.

Но прославленный геометр сам заметил свою ошибку[2] и с большим огорчением осведомлялся у своих друзей-математиков, должен ли он заявить об этом публично. Должен сказать, что г. Бертран, непременный секретарь Академии, от имени всех разубедил его, чтобы успокоить. Г. Сильвестер уже немолод. Еще в 1839 г. он стал известен благодаря своему прекрасному открытию выражения функций $V$, $V_1$, $V_2$, . . . из теоремы Штурма с помощью корней уравнения $V=0$.[3] Помимо всего прочего, он болен, один глаз у него не видит из-за катаракты, другому грозит то же самое. Он приехал в Париж, главным образом чтобы показаться знаменитому окулисту г. Галезовскому, а не для того, чтобы сообщить Академии свои исследования по трудному предмету, в котором он оказался менее счастлив, чем во стольких других.

Может быть, и Вы, милостивый государь, поступите так же, как мы в Париже, и по вышеуказанным мотивам постараетесь избавить столь заслуженного служителя науки от неприятностей, которые немного пользы принесут науке, а его здоровью могут сильно повредить.

Если разрешите, я воспользуюсь случаем, отвечая на письмо, сказать, как я был растроган, счастлив и польщен, узнав, что мой подарок был преподнесен во время годичного обеда Вам, милостивый государь, превосходные исследования которого являются предметом моего глубочайшего уважения, и Вашим собратьям по анализу в С.-Петербурге. Сообщив об этом дружеском свидетельстве Вашей симпатии, Вы доставили мне одно из тех тайных и глубоких удовлетворений, какие с лихвой вознаграждают за все труды и превосходят все, чего я мог ожидать. И к тому же Вы так великодушно говорите о Франции, моей б дной стране, униженной, искалеченной, позор которой исходит от тех, за кого она проливала свою кровь. Наши сердечные отношения с Россией, которые считают связанными с разными интересами, покоятся на основе более прочной, чем изменчивый интерес обстоятельств. Это хорошо показала Крымская война. Она не вызвала ненависти, от нее сохранились только чувства живой симпатии, которые не исчезнут, что бы ни произошло. Что могут сделать люди науки перед предстоящим ужасным будущим? Друзья упрекают меня, что я слишком много думаю об этом, и в том, что я пессимист. Поэтому я должен отвернуться от этого, закрыть глаза перед печальными предзнаменованиями и, забыв об остальном, принять то утешение, которое Вы мне даете.

Чтобы сохранить воспоминание об этом, а также желая выразить свою признательность Петербургскому университету, который почтил меня титулом почетного члена,[4] прошу Вас, милостивый государь, согласиться быть моим посредником и позвольте адресовать Вам для передачи университету несколько статей вместе с недавним изданием моего «Курса для Факультета наук».[5] Я присоединяю к этому также мою фотографию, предназначенную заменить ту, что послал после моего назначения (присвоения ему титула почетного члена, — *Е. О.*), единственную, какая сейчас имеется в моем распоряжении.[6]

Снова выражаю Вам и Вашим друзьям-математикам свою глубочайшую благодарность и заверяю в своем величайшем уважении и преданных чувствах.

Ш. Эрмит.

---

[1] Речь идет о заметках Сильвестера (S y l v e s t e r J.-J. Sur le rapport de la circonference au diamètre. — C. R., 1890, t. 111, p. 778—780; Preuve que $\pi$ ne peut pas être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers. — C. R., 1890, t. 111, p. 866—871). Замечание Маркова относилось, видимо, ко второй заметке. Ошибку Сильвестера заметил и Т. Стилтьес (см. [I, 225, т. 2, с. 120—124]).

[2] В письме без даты (январь 1891 г.) Эрмит сообщил Стилтьесу, что Сильвестер признал свою ошибку [I, 225, т. 2, с. 131].

[3] О функциях и теореме Штурма см. с. 77 наст. изд., а также: S t u r m C. Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques. — Bull. sci. mathém., phys. et chim., 1829, t. 11, p. 419—422.

[4] Эрмит был избран почетным членом Петербургского университета 3 февраля 1887 г.

[5] H e r m i t e Ch. Cours. Paris, 1891 [I, 168]. Экземпляр этого «Курса анализа» Эрмита, присланный в подарок Петербургскому университету, находится в библиотеке Ленинградского университета.

[6] Фотография хранится в упомянутом экземпляре «Курса анализа».

## 4

Париж, 2 марта 1891.

Милостивый государь,

когда г. Сильвестер сообщил Академии свои исследования по вопросу, которым я сам занимался с большим увлечением, мне очень захотелось снова вернуться к этому предмету,[1] вступить в полемику и использовать новые пути прославленного геометра[2] в вопросе столь же интересном, сколь и трудном. Но неотложная работа, требующая моих забот и внимания, к великому сожалению, не позволяет мне тратить время на что-либо иное, пока она не будет окончена. Чтобы исполнить свой долг, я вынужден отказаться сопутствовать Вашему движению вперед и присоединить свои силы к Вашим. Позднее надеюсь, что буду в состоянии предложить свое сотрудничество, но пока мне придется довольствоваться тем, чтобы быть посредником между Вами и Академией, если Вы захотите передать плоды своих трудов в наши Comptes rendus, где они будут приняты с энтузиазмом.

Несколько дней назад я имел смелость адресовать Вам посылку, предназначенную для университета. Теперь позволю себе предложить Вам принять экземпляр моего курса и статью о сферической функции второго рода [3] в сопровождении замечаний г. Стилтьеса [4] [II, 399], которые, по моему мнению, могут Вас заинтересовать.[5]

Еще раз приношу Вам, милостивый государь, извинения за то, что на время оставляю поле битвы за трансцендентность числа $\pi$, и уверения в моем глубочайшем уважении и лучших чувствах.

Ш. Эрмит.

---

[1] Видимо, Марков предложил Эрмиту предпринять совместные исследования по доказательству трансцендентности некоторых чисел.

[2] Может быть, Эрмит имеет в виду методы Вейерштрасса.

[3] См. [I, 167].

[4] В своей работе Эрмит изучает корни уравнения $Q^n(x)=0$, где $Q^n(x)$ — сферическая функция второго рода. Рассмотрев функцию

$$f(z)=(e^z-1)^n Q^n\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right),$$

Эрмит получает распределение корней уравнения $f(z)=0$ на плоскости $z$. Стилтьес возвращается к переменной $x$, чтобы исследовать распределение корней уравнения $Q^n(x)=0$ на плоскости $x$.

[5] Марков, в самом деле, интересовался вопросами такого рода. См., например: Markoff A. Sur l'équation de Lamé.—Mathem. Annal., 1896, Bd. 47, S. 598—603.

В ней Марков доказывает теорему Ф. Клейна (Klein F. Über den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung. — Mathem. Annal., 1892, Bd. 40, S. 125—129) методом своей прежней статьи «О целой функции

$$x^nF\left(\frac{-n-\Delta}{2},\ \frac{2k-n+1-\Delta}{2},\ 1-\Delta,\ \frac{1}{x}\right)\times$$
$$\times F\left(\frac{-n+\Delta}{2},\ \frac{2k-n+1+\Delta}{2},\ 1+\Delta,\ \frac{1}{x}\right)$$

и о функциях более общего характера» (Mém. Acad. sci. Pétersb., (7), 1893, t. 41, Nr. 2). Марков замечает, что его рассуждение может быть полезно также для доказательства теоремы Ляпунова из IV раздела его магистерской диссертации «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» (СПб., 1884).

5

Нанси (Мёрт-и-Мозель), 30 марта 1891.

Милостивый государь,

я надеюсь, что не пойду против Ваших намерений, передав Академии сообщение о Вашем письме. Друзья арифметики с живейшим интересом прочтут в Comptes rendus Ваши прекрасные исследования о комплексных числах, зависящих от $\sqrt[3]{A}$,[1] теоремы, к которым Вы пришли, и приложения к частному случаю $A=3$, которые весьма интересны и доставили мне огромное удовольствие. Эти вопросы[2] некогда сильно меня занимали, я отдал им много времени и сил, но другие предметы отвлекли меня от этого, и я увидел, что меня намного превзошли гг. Золотарев, Дедекинд и др.[3] Не могу передать, какое огорчение я испытываю, вспоминая Золотарева,[4] которого я видел в Париже, с которым подружился и талант которого внушал мне одновременно восхищение и глубокую симпатию. Нас связывали теория эллиптических функций и арифметика; его гений, если бы он жил, с блеском проявился бы в этих двух областях исследований, с творческой мощью и особенным характером ясности и простоты, которые поставили бы его в ряд величайших геометров.

Вы возместите науке эту столь печальную утрату, я верю в это, и был бы рад видеть, как расширится поле арифметики благодаря Вашим трудам в направлении, которое кажется мне наилучшим и живейшим образом меня привлекает.[5]

Принося свою искреннюю благодарность за доброту, с какой Вы любезно передали мои статьи университету, возобновляю уверения в своем глубочайшем уважении и преданных чувствах.

Ш. Эрмит.

---

[1] Markoff A. Sur une classe de nombres complexes. — C. R., 1891, t. 112, part I, p. 780—782. Следуя идеям своего учителя Золотарева, Марков изучает в этой статье целые алгебраические числа, зависящие от корня кубического из $A$, где $A$ — обычное целое число.

[2] Эрмит писал о вопросах теории целых алгебраических чисел еще в своих письмах к Якоби [I, 12]. Эти письма послужили отправной точкой для исследований Золотарева и совместных работ Коркина и Золотарева по теории квадратичных форм.

[3] Золотарев Е. И. Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению. СПб., 1874. См. также: И. Г. Башмакова. Обоснование теории делимости в трудах Золотарева. — Ист. матем. иссл., 1949, вып. 2, с. 231—351.

[4] Эрмит познакомился с Золотаревым в Париже летом 1876 г.

[5] См. с. 231, 232 наст. изд.

6

Париж, 13 апреля 1891.

Милостивый государь,

публикация в Comptes rendus Ваших прекрасных исследований о комплексных числах, зависящих от $\sqrt[3]{A}$, задержалась, и г. Бертран, непременный секретарь по математическим наукам, объяснил мне причину задержки. Ваша статья была представлена в прошлый понедельник на заседании Академии и только по забывчивости г. Бертело, которому в этот день была поручена корреспонденция, она не была отправлена в типографию. Я был очень удивлен и раздосадован, не получив верстки, я опасался, что Ваш текст затерялся, но г. Бертран показал мне его, объяснив те обстоятельства, о которых я Вас только что информировал. Публикация появится в следующем № Comptes rendus.

Пользуюсь случаем, чтобы сказать, что я получил Вашу телеграмму от 3 апреля с исправлением случая V в следующих выражениях: если $A \equiv 2, 4, 5, 7 \pmod 9$, то 3 есть куб делителя $1 \pm \sqrt[3]{A}$. Затем получил Ваше письмо от 5 апреля с другим исправлением, касающимся случая VI: если $A \equiv 2, 4, 5, 7 \pmod 9$, имеем $3 = \alpha^3$, где $\alpha$ — общий делитель 3 и $\sqrt[3]{A^2} - 1$.

Заверяю Вас, что эти изменения будут внесены в Ваш текст, как Вы того желаете, и еще раз должен выразить Вам свое огорчение, что занятия, которым приходится посвящать все свое время, лишают меня возможности вернуться к моим прежним исследованиям арифметических вопросов,[1] таких интересных, какими заняты Вы. Далекие воспоминания пробуждаются во мне при чтении Вашего письма и напоминают о том, сколько я потратил сил, безуспешно пытаясь сделать немного более практическим эффективное определение комплексных единиц, или же в образовании решетки моих приведенных квадратичных форм с переменными параметрами, на которую я возлагал надежды, которые не смог реализовать.[2]

Рассказ об этих напрасных надеждах и прекрасных снах, которым я предавался, завлек бы меня слишком далеко. Поэтому выражаю Вам свою надежду, что Вы окажетесь счастливее меня, милостивый государь, и заверяю в своем глубочайшем уважении и преданных чувствах.

Ш. Эрмит.

---

[1] См. письма Эрмита к Якоби [I, 12].
[2] См. [I, 12, 13, 14].

7

Париж, 13 мая 1891.

Милостивый государь,

разрешите информировать Вас о том, что добавление [1] к Вашему предыдущему сообщению об одном классе комплексных чисел было представлено Академии наук в последнем заседании и появится в ближайшем номере Comptes rendus.

Примите уверения в моем глубоком уважении и преданных чувствах.

Ш. Эрмит.

---

[1] M a r k o f f A. Sur une classe de nombres complexes. — C. R., 1891, t. 112, p. 1049—1050.

8

Париж, 21 мая 1891.

Милостивый государь,

Ваше последнее сообщение появится в ближайшем номере Comptes rendus.[1] Оно меня живейшим образом заинтересовало, напомнив об исследованиях и усилиях, не увенчавшихся успехом, в определении комплексных единиц с помощью приведения определенных квадратичных форм, зависящих от непрерывных параметров.[2] Один из моих учеников избрал этот столь трудный вопрос предметом диссертации.[3] Возможно, его работа, выполненная с величайшей тщательностью, могла бы Вас заинтересовать. Поэтому решаюсь послать Вам один экземпляр этой статьи.

В то же время благодарю Вас за любезное согласие передать Петербургскому университету в качестве подарка мой «Курс в Сорбонне».[4] Осмелюсь также просить Вас, если сочтете это удобным, передать Вашему прославленному ректору г. Никитину выражение моей почтительной благодарности за чрезвычайно благожелательное письмо, которым он меня почтил.

Желаю Вам, милостивый государь, смелости и удачи в предпринятых Вами столь трудных исследованиях и заверяю Вас в своих преданных чувствах.

Ш. Эрмит.

---

[1] M a r k o f f A. Sur une classe de nombres complexes. — C. R., 1891, t. 112, p. 1123—1124.
[2] См. прим. 2 к письму 6.
[3] Видимо, Леон Шарв.
[4] См. прим. 5 к письму 3.

Париж, 12 ноября 1891.

Милостивый государь,

прекрасное исследование, которое Вы оказали мне честь прислать[1] и предметом которого служит получение решений линейных дифференциальных уравнений, имеющих в качестве логарифмических производных рациональные функции, будет представлено Академии в ближайшем заседании в соответствии, по-видимому, с Вашими намерениями. Оно весьма заинтересовало гг. Пуанкаре, Пикара и Аппеля, но, по их мнению, может оказаться, что Ваш метод неявно содержится в работах г. Томе, и, возможно, что Вы получите какую-нибудь рекламацию приоритета от этого автора или от других, поскольку по этому разделу Анализа было опубликовано столько работ. По крайней мере, в частном случае, когда речь идет об одном дифференциальном уравнении, с Вами встречается г. Аппель, как Вы увидите из статьи, которую посылает Вам выдающийся геометр.[2] Поздравляя Вас с успехом Ваших усилий в этом важном вопросе, разрешите воспользоваться случаем и просить Вас напомнить обо мне г. Чебышеву и передать ему мою благодарность за подаренную статью его из Acta mathematica о двух теоремах относительно вероятностей.[3] Мне не подобает хвалить ее, поскольку я не занимаюсь исчислением вероятностей, но мне позволено, не вдаваясь в существо вопроса, которое мне недоступно, восхищаться его анализом. И не без живого удовольствия я обнаружил как бы аналитическую связь между нами, видя, что он пришел к полиномам

$$\psi_i(x) = e^{x^2} D_x^i e^{-x^2},$$

которыми я занимался в заметке о новом разложении в ряды функций (Comptes rendus, t. LVIII, p. 93, 266).[4]

Посылаю Вашему великому геометру мои наилучшие пожелания вместе с моими дружескими чувствами и, выражая Вам, милостивый государь, признательность за визит, которым Вы меня почтили, и сожаление, что он был так краток, прошу принять уверения в моем полнейшем уважении и преданных чувствах.

Ш. Эрмит.

---

[1] Markoff A. Sur les équations différentielles linéaires.— C. R., 1891, t. 113, p. 685—688. В ней рассматривается уравнение

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0,$$

где $X_0$, $X_1$, ..., $X_n$ — полиномы от $x$ с постоянными коэффициентами. Известен метод нахождения всех рациональных функций от $x$, удовлетворяющих этому уравнению, или доказательства, что $y$ не может быть рациональной функцией $x$. Метод основан на разложении $y$ на простейшие дроби. «Но мне неизвестно, — говорит Марков, — заметил ли кто-нибудь, что с помощью того же метода можно найти все функции $y$ от $x$, удовлетворяющие уравнению, логарифмические производные которых $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ — рациональные функции от $x$, или доказать, что $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ не может быть рациональной функцией от $x$». И Марков доказывает это утверждение.

2 Appell P. Sur les équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable. — C. R., 1891, t. 112, p. 34—37.

Он рассматривает уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} = uf(z).$$

Статья того же названия была напечатана также в Acta mathematica, 1890/1891, t. 14, p. 305—315.

3 Чебышев П. Л. О двух теоремах относительно теории вероятностей. — Acta mathem., 1890/1891, t. 14, p. 305—315; Полн. собр. соч. Т. 3. М., 1947, с. 229—239.

4 Эрмит рассмотрел полиномы, подобные полиномам Лежандра, разложения в ряды по этим полиномам [I, 57], причем упоминает статью Чебышева «О непрерывных дробях» (Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 103—126). См. также с. 99 наст. изд.

## 10

Париж, 29 ноября 1891.

Милостивый государь,

опасаясь, что Comptes rendus дойдут до Вас с опозданием, хочу немедленно ознакомить Вас с рекламацией приоритета, поступившей к нам из Германии, но от французского математика большого таланта, г. Пенлеве.[1] Вот текст этой статьи: «Г. Марков в недавней заметке указал средство находить интегралы $y$ линейного дифференциального уравнения с рациональными коэффициентами такими, чтобы $y'/y$ было рациональным. Я решил в более ранних заметках (см. Comptes rendus, 1887, janvier 1888) [2] более общую задачу, которую можно сформулировать следующим образом.

Если дано линейное уравнение $n$-го порядка с произвольными коэффициентами, рациональными, алгебраическими или даже трансцендентными, найти все такие интегралы, чтобы $y'/y$ было алгебраической функцией с $p$ значениями, где $p$ задано.

Для $p=1$ вычисления, к которым приводит мой метод, мало отличаются от вычислений г. Маркова. Рассматривая уравнение порядка $n-1$ от $y'/y=u$, я прихожу к теореме:

«Если дано линейное уравнение с произвольными коэффициентами, все интегралы $y$ находятся алгебраическим путем или их определение сводится к алгебраической зависимости от одной квадратуры такой, что

$$\frac{z'}{z}=h(x),$$

интеграл которой $z$ должен быть алгебраическим. Использованный метод позволяет сформулировать ту же теорему относительно отыскания алгебраических интегралов уравнения от $y'/y=U$».

Мне очень огорчительно, милостивый государь, узнать, что г. Чебышев пренебрег упоминанием о Ваших работах, которые непосредственно примыкают к его исследованиям и значение которых он должен был бы отметить. Но, конечно, у него не было злого умысла, это просто забывчивость с его стороны. Ваши статьи в высшей степени ясны, они привлекут внимание, и полная справедливость, которой Вам не придется долго ждать, вознаградит Вас за неприятность, менее редкую, может быть, чем Вы думаете. Исследование, которое Вы осуществили, произведения двух решений дифференциального уравнения гипергеометрического ряда в т. XXIX Mathematische Annalen,[3] превосходно, и я тем более могу это сказать, что относительно уравнения Ламе я, как и Вы, рассмотрел произведение двух решений.[4] И именно заметив, что это произведение есть целый полином, я получил общее решение этого уравнения, результат, который уже бесконечно превзойден с тех пор, как он стал известен.

Но в настоящий момент я занят эллиптическими функциями, им я отдаю все время и силы, какие имею, и, сообщив Вам о заметке г. Пенлеве, я должен извиниться, что не обращаюсь к источникам, которые в ней указаны, и, признаться, чувствую себя немного напуганным чрезвычайной общностью результатов, которые она содержит.[5] Я предпочитаю простые и точные вещи с примерами, которые проливают яркий свет на метод, как в Вашей последней статье.

Снова приношу уверения в своем глубоком уважении и искренней симпатии.

Ш. Эрмит.

---

[5] Painlevé P. Remarque sur une communication de M. Markoff, relative à des équations différentielles linéaires. — C. R., 1891, t. 113, p. 739.

[2] Пенлеве ссылается на свои статьи: Sur les équations inéaires simultanée avec dérivéese partielles. — C. R., 1887, t. 104, p. 1497; Sur les équations linéaires du troisième ordre. — C. R., 1887; t. 104, p. 1829; Sur les équations différentielles du I ordre. — C. R., 1888, t. 107, p. 221—224 и др. Изложения метода Маркова в них нет. О различных случаях интегрируемости уравнения $p_0 \frac{d^2y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0$, эквивалентного уравнению Риккати, см.: Vessiot E. Équation linéaire d'ordre $n$. — Encyclop. sci. mathém. T. II, v. 3, fasc. 1, Nr. 11, 1910, p. 125.

[3] Markoff A. Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique — (I). Mathem. Annal., 1887, Bd. 28, S. 586—593; (II) Mathem. Annal., 1888, Bd. 29, S. 247—258.

[4] См. работы Эрмита [I, 82, 113, 120] и с. 138 наст. изд.

[5] Пенлеве изучал вопрос об условиях, при которых решение уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0$$

с алгебраическими коэффициентами будет алгебраическим, используя теорию инвариантов. Метод Маркова был более прямым и доступным.

## 11

Париж, 9 декабря 1891.

Милостивый государь,

Ваше письмо пришло в момент, когда я собрался писать Вам, что новые исследования по линейным уравнениям, о которых Вы прислали сообщение [1] и которые относятся к работе г. Фабри,[2] появятся в следующем номере Comptes rendus. Я испытываю некоторое затруднение в связи с исправлениями,[3] касающимися Вашего письма от 6 ноября. Список опечаток, если его дать, был бы очень длинным. Не кажется ли Вам более удобным в новой заметке вернуться к этому вопросу, с новыми примерами Вашего метода, которые были бы рассмотрены со всей тщательностью?

Я занимаюсь уравнением [4]

$$2Az''' + 3A'z'' + A''z' = 4Bz' + 2B'z$$

не в том направлении, какое Вы имели в виду; моя цель — прийти к простой аналитической форме целого полинома, являющегося его решением, но до сих пор это мне не удалось, и другие вопросы отвлекают меня от этого трудного исследования.

Не сомневайтесь, что я сохраню только для себя одного то, что Вы сказали мне о г. Чебышеве, и будьте уверены, что никто об этом не узнает.

Присоединяя к Вашей мою полную симпатии и восхищения память о Золотареве, я возобновляю выражение глубочайшего уважения и преданных чувств.

Ш. Эрмит.

---

[1] M a r k o f f A. Sur la théorie des équations différentielles. — C. R., 1891, t. 113, p. 790—791. С помощью применения метода, изложенного в его статье (C. R., 1891, t. 113, p. 685—688), Марков дает более простое решение задачи из работы Фабри.

[2] F a b r y E. Réductibilité des équations différentielles linéaires. — C. R., 1888, t. 106, p. 732—734.

[3] Исправления к статье Маркова (C. R., 1891, t. 113, p. 685—688) напечатаны в том же томе (p. 1024—1025). Марков указывает, что, применяя свой метод, он рассмотрел не все возможные частные случаи, поэтому здесь более детально рассматривает еще один пример.

[4] Это уравнение под номером (2) содержится в статье Эрмита [I, 82]. В работе [I, 234, т. 3, с. 119] имеется подробный вывод уравнения. Марков использует аналогичное уравнение в статье «О нулях целой функции Эрмита и функций Ламе» (Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, II, 1896, т. 5, N 1, 2).

## 12

Париж, 22 декабря 1891.

Милостивый государь,

уведомляя Вас о получении Вашего письма от 14 декабря 1891 г., я должен сообщить Вам, что оно не могло быть представлено в прошлый понедельник, который был днем публичного годичного заседания Академии. Я представлю его в следующий понедельник с тем, чтобы оно вышло в Comptes rendus,[1] и возьму на себя смелость предложить Вам небольшое изменение текста, состоящее в добавлении к первым словам «Применяя общий метод» — следующих: «изложенный в предыдущей статье (C. R., t. 113, p. 681)»,[2] которые мне кажутся необходимыми.

В надежде, что маленькое изменение получит Ваше одобрение, прошу Вас, милостивый государь, принять уверение в моем глубоком уважении и преданных чувствах.

Ш. Эрмит.

---

[1] M a r k o f f A. Sur les équations différentielles linéaires. — C. R., 1891, t. 113, p. 1024—1025.

[2] У Эрмита вместо «p. 681» написано «p. 685».

## 13

Париж, 13 января 1892.

Милостивый государь,

имею честь уведомить Вас, что я только что держал корректуру новой заметки,[1] сообщение о которой Вы прислали в своем письме от 1/I 1892 и которая появится в ближайшем номере Comptes rendus. Пользуюсь случаем поблагодарить Вас за новогодние пожелания и прошу принять мои сердечные пожелания успеха в Ваших трудах и счастья. Примите, милостивый государь, уверения в глубоком уважении и преданных чувствах.

Ш. Эрмит.

---

[1] Markoff A. Sur la série hypergéométrique. — C. R., 1892, t. 114, p. 54—55.

## 14

Париж, 8 мая 1895.

Милостивый государь,

примите мою большую благодарность за чрезвычайно важное сообщение,[1] которым Вы меня почтили.

Память о Чебышеве, великом геометре, которого потеряла Россия, дружеские отношения, которые восходят к началу нашей карьеры, мои горестные сожаления о его кончине приходят мне на ум,[2] когда я смотрю на фотографическую репродукцию фрагмента его вычислений, который Вы были столь добры прислать мне. Доказательство, которого никто не мог открыть, его прекрасной теоремы о простых делителях чисел формы $n^2+1$ вполне достойно его; оно живо заинтересует друзей арифметики, которые примут его с признательностью, которая будет относиться и к Вам, когда прочтут его в Comptes rendus, так как я думаю, что выполню Ваше пожелание, представив заметку Академии в ближайший понедельник.

Научная жизнь Чебышева была прожита со славой и в полную меру его редких способностей, творческого дара, которым он обладал в столь высокой степени. Его глубокие оригинальные открытия оставят в анализе неизгладимый след, к вечной славе русской науки. Не могу удержаться, чтобы не перейти от него к Стилтьесу,[3] безвременно ушедшему во всем блеске своего таланта, после того как он только что дал превосходный мемуар о непрерывных алгебраических дробях. Я ыл в курсе его исследований. Мы были тесно связаны, и его последнее письмо[4] поведало мне о радости, какую он ощутил, узнав, что избран членом-корреспондентом С.-Петербургской академии. Это глубокое удовлетворение было его последней радостью и облегчением его страданий, когда дни его уже были сочтены и он чувствовал приближение смерти. Увы, милостивый государь, все мои друзья уходят, большинство тех, с кем я разделял мои труды, покинуло меня, но вечная разлука не может помешать им быть со мной, я остаюсь верным своим воспоминаниям и навсегда сохраню память о Чебышеве и Стилтьесе.

Статьи, которые Вы были столь добры прислать мне и за которые я Вас сердечно благодарю, показали мне большую аналогию в наших исследованиях; я вижу, что я гораздо ближе к вашим исследованиям, чем к тем, которыми занято большинство геометров нашего времени. Позвольте предложить Вам взамен несколько статей и воспользоваться случаем, чтобы заверить Вас в моем глубоком уважении и преданных чувствах.

Ш. Эрмит.

---

1 Марков послал Эрмиту письмо и фотокопию отрывка из рукописи Чебышева. Эта заметка незадолго до того скончавшегося П. Л. Чебышева (он умер 8 декабря 1894 г.) содержала набросок доказательства его теоремы о простых делителях чисел вида $1+4x^2$. Письмо Маркова напечатано в следующих изданиях: C. R., 1895, t. 120, p. 1032—1034; Изв. Акад. наук (5), 1895, т. 3, № 1, с. 55—58; А. А. Марков. Избр. тр. М., 1951, с. 135—141; П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 1. М., 1944, с. 309—310. См. с. 156 наст. изд.

2 См. с. 153—157 наст. изд.

3 См. с. 196—199 наст. изд.

4 В «Переписку Эрмита и Стилтьеса» (Correspondance d'Hermite et Stieltjes, t. I, II. Paris, 1905) это письмо не вошло. См. [II, 67].

## 15

Париж, 16 декабря 1895.

Милостивый государь,

известие, которое Вы с г. Сониным[1] были добры сообщить мне, — о моем избрании в почетные члены Петербургской академии наук,[2] — меня глубоко тронуло. Я принял его с радостью, как знак почета, который вознаграждает сверх меры мои математические труды, и с чувством самой искренней признательности прославленным ученым, которые пожелали дать мне столь высокое свидетельство их уважения. Но я не сомневаюсь, что Вы приняли большое участие в моем избрании, поэтому, мой дорогой собрат, я должен выразить Вам свою живейшую благодарность. Мне приятно сознавать, что г. Сонин со своей стороны не чинил препятствий и что вы оба содействовали избранию в члены-корреспонденты четырех моих собратьев по Институту,[3] один из которых мне особенно близок и дорог.[4] Мое удовольствие возрастает благодаря его радости, и мы оба навсегда сохраним благодарную память о Вас.

Примите, мой дорогой Собрат, уверение в этом, которое я посылаю от всего сердца вместе с выражением моего глубокого уважения и преданных чувств.

Ш. Эрмит.

---

[1] Сонин Н. Я. (1845—1915) — русский математик, академик. Основные труды его относятся к теории цилиндрических функций, числам и полиномам Бернулли, интегральному исчислению, обобщениям формулы суммирования Эйлера—Маклорена.

[2] Эрмит был избран почетным членом Петербургской академии наук 2 декабря 1895 г.

[3] В тот же день были избраны членами-корреспондентами французские ученые Э. Пикар, Г. Дарбу, А. Пуанкаре, К. Жордан.

[4] Наиболее близок и дорог Эрмиту, по-видимому, Пикар, муж его дочери и любимый ученик.

## 16

Париж, 28 января 1896.

Милостивый государь,

позвольте мне прибегнуть к Вашей обязательности и просить Вашей помощи и поддержки на благо важного научного интереса, которому Вы не откажете, я надеюсь, в Вашей симпатии. Acta mathematica в Стокгольме [1] переживают кризис, который в настоящий момент ставит под угрозу их существование. Шведский парламент выразил желание осуществить экономию бюджета, лишив журнал пособия, которое уже в прошлом году было урезано наполовину. Не только во Франции бюджетные комиссии безжалостны, а политические ассамблеи мало заботятся о математике, но в Швеции Г. Миттаг-Леффлер,[2] к счастью, имеет своего друга и защитника в лице председателя комиссии. Эта высокопоставленная особа высказала мнение, что исходящее из-за границы свидетельство, подписанное авторитетными учеными, о большом значении Acta и о достоинствах их основателя определенно решило бы благоприятный результат голосования в парламенте. Парижская академия наук в этих видах начала поспешно действовать. Секция геометрии взяла на себя инициативу обращения,[3] случай для которого представился в связи с 50-летием со дня рождения г. Миттаг-Леффлера, и циркуляра, адресованного геометрам с целью получить их поддержку. Мне поручено, милостивый государь и дорогой собрат, переслать Вам обращение и циркуляр и просить у Вас разрешения добавить Ваши имя и титул члена С.-Петербургской академии наук к именам и титулам членов Парижской академии наук и других геометров, которые заверили нас в своем сочувствии.

Время не терпит, поэтому я беру на себя смелость просить об ответе только в том случае, если он будет неблагоприятным, — путем отправления как можно быстрее простой почтовой открытки, и буду рассматривать как Ваше согласие, если не получу противоположного мнения.

Пользуюсь случаем, милостивый государь и дорогой собрат, чтобы вновь выразить Вам мое глубокое уважение и чувства искренней преданности.

Ш. Эрмит.

---

[1] Журнал Acta mathematica был основан Миттаг-Леффлером в 1882 г. Он был издателем и редактором журнала до своей кончины (1927 г.). Журнал издается до сих пор.
О Гёсте Миттаг-Леффлере (1846—1927) см.: Nörlund N.-E. G. Mittag-Leffler. — Acta mathem., 1927, t. 50, p. I—XV.

[3] Текст адреса, направленного Миттаг-Леффлеру в связи с выходом 20-го тома журнала Acta mathematica, приводится в указанном выше очерке Нёрлунда. Адрес подписали математики всего мира, среди 400 подписей — подписи Вейерштрасса, Л. Фукса, П. Дю Буа-Реймона, Лерха, Эрмита, Бертрана, Маркова, Сонина и др.

## 17

Париж, 10 октября 1896,
улица Сорбонны.

Милостивый государь и дорогой собрат,

посланный Вами пакет прибыл во время моего отсутствия. По приезде я поспешил известить Вас о получении и информировать, что экземпляр «Исчисления разностей»,[1] который Вы пожелали преподнести Академии, будет ей представлен в ближайшем заседании. Этот труд и сопровождающие его статьи об уравнении Ламе [2] и о новых приложениях непрерывных дробей [3] показались мне крайне интересными; они касаются многих вопросов, которые меня сильно занимали,[4] и я хочу изучить их со всем вниманием, какого требуют произведения Вашего прекрасного таланта. Но я не хочу откладывать свою благодарность. Позвольте мне воспользоваться случаем, чтобы выразить Вам, с каким глубоким чувством я воспринял слова его величества, вашего августейшего суверена, провозгласившего неизменную дружбу наших двух стран. Перед лицом чрезвычайных событий, свидетелями которых мы являемся, интересы науки бледнеют, но те, кто посвящает свои усилия одним и тем же вопросам и кого с давних пор сближает научное братство, разве не должны они присоединиться к чаяниям народов и тех, кто говорит от их имени, провозглашая: «Jungamus dextras!» [5]

С этим намерением, милостивый государь и дорогой собрат, приношу Вам новые уверения в глубоком уважении и преданности.

Ш. Эрмит.

---

[1] Марков А. А. Исчисление конечных разностей. СПб., 1880—1881; II изд. Одесса, 1911; Differenzrechnung. Leipzig, 1896.

[2] Markoff A. Sur l'équation de Lamé. Extrait d'une lettre adressée à M. Klein. — Mathem. Annal., 1896, Bd. 47, S. 598—603. См. также прим. 4 к письму 11.

[3] Markoff A. Nouvelles applications des fractions continues.— Mathem. Annal., 1896, Bd. 47, S. 579—597; Зап. Акад. наук, Физ.-мат. отд., (8), 1896, т. 3, № 5; Избр. соч. М., 1951, с. 120—145, 387—388.

См. прим. 4 к письму 10 и прим. 4 к письму 11.

[5] Пожмем друг другу руки (лат.).

18

Париж, 22 марта 1899.

Милостивый государь и дорогой собрат,

Вы оказали мне честь, задав вопрос, не хочу ли я присоединиться к желанию друзей Анализа, состоящему в том, чтобы почтить 200-летие рождения Эйлера воздвижением в С.-Петербурге монумента в его честь на средства международной подписки.[1]

Будучи одного мнения с Вами и Чебышевым, которому я об этом когда-то говорил, питая такое же восхищение бессмертным геометром, гигантским творением, с которым связано его имя, теми же столь ценными и столь редкими сейчас качествами ясности и простоты, какие свойственны его гению, которые придают науке ее красоту и заставляют полюбить ее, делая ее изучение легким, спешу сообщить Вам мое полное согласие вместе с обязательством внести 200 франков в проектируемую подписку.

Слава Эйлера озарила своим блеском С.-Петербургскую академию наук, ее сборники содержат большинство его трудов. Она не прекращала окружать его память неким божественным ореолом. Она заслужила уважение математического мира, опубликовав посмертные сочинения Принца геометров, которого она в течение 30 лет считала своим членом. Я присоединяюсь, с чувством глубокой признательности ко всему, чем я обязан Эйлеру, к тем решениям, какие примет С.-Петербургская академия наук, наследница столь славных воспоминаний, в обстоятельстве, о котором Вы оказали мне честь сообщить.

Позвольте мне, милостивый государь и дорогой собрат, воспользоваться этим случаем, чтобы сказать Вам еще о живейшем интересе, вызванном во мне Вашими последними исследованиями, чтобы просить Вас напомнить обо мне г. Сонину и заверить Вас в моем глубоком уважении и самой сердечной симпатии.

Ш. Эрмит.

---

[1] В 1907 г. исполнялось 200 лет со дня рождения Леонарда Эйлера. В связи с этим профессор Д. К. Бобылев по поручению Совета Института инженеров путей сообщения возбудил перед физико-математическим отделением Академии наук вопрос о сооружении памятника Эйлеру и организации для этой цели международной подписки. Отделение одобрило предложение Бобылева, и вопрос был передан на рассмотрение Общего собрания. На заседании Общего собрания 6 февраля 1899 г. академик Н. Я. Сонин выступил против сооружения памятника Эйлеру (на заседании Отделения он отсутствовал), мотивируя свои возражения тем, что труды Эйлера якобы уже забыты, «следы деятельности Эйлера почти заметены», его превзошли Лагранж и Гаусс, а потому для него достаточно бюста в конференц-зале Академии наук. Возражая А. А. Маркову, указавшему, что труды Эйлера до сих пор используются в преподавании, Сонин заявил, что этот факт свидетельствует лишь о сильной отсталости преподавания.

При голосовании предложения Бобылева голоса разделились поровну, а это означало, что предложение отклонено. Марков горячо отстаивал необходимость строительства памятника и обратился к Эрмиту, чтобы узнать его мнение по этому поводу. Сохранился черновик следующего письма Маркова (на французском языке):

«Милостивый государь,

в 1907 г. исполняется 200-я годовщина Эйлера. Почитатели его гения выдвинули идею организовать международную подписку, чтобы воздвигнуть в Петербурге памятник великому геометру. Это предложение вызвало разные возражения, лишь одно из которых кажется мне имеющим какое-то значение. Эйлер, говорят, родился в Базеле и провел 25 лет своей жизни в Берлине, поэтому не уместнее ли построить памятник в одном из этих городов, чем в Петербурге? Не собираясь отрицать полностью силу этого замечания, я, однако, напомню, что Эйлер провел в общей сложности (в два приема) более тридцати лет в С.-Петербурге, что здесь он умер и погребен, что все его потомство осталось в России и, наконец, что наибольшая часть его трудов напечатана в изданиях Петербургской академии наук, связи с которой он не прерывал даже во время своего пребывания в Берлине.

Я ограничусь лишь упоминанием другого замечания, на мой взгляд, лишенного всякого значения и какого бы то ни было основания: что в настоящее время труды Эйлера будто бы лишены всякого научного интереса.

Если мысль о строительстве памятника Эйлеру вызовет Ваше одобрение и если Вы полагаете, что именно С.-Петербургу должна принадлежать привилегия быть украшенным этим монументом, прошу Вас ответить мне на приглашение, с которым я имею честь к Вам обратиться. Ваш ответ, вместе с разрешением сообщить его Академии наук, окажет мне ценную помощь в усилиях, которые я предпринимаю, чтобы достичь желаемого решения. Должен сказать, что хотя мое желание — видеть памятник Эйлеру в С.-Петербурге, я был бы тем не менее в некоторой степени удовлетворен и в том случае, если бы знак памяти великому ученому был оказан в Берлине или Базеле.

Примите, милостивый государь, уверения в моих преданных чувствах. . .» (ЛО ААН, ф. 173, оп. 1, № 60, л. 28—28 об.).

Хотя в этом письме нет даты и не указано, кому оно предназначалось, но по содержанию видно, что это черновик письма, посланного Марковым, видимо, сразу же после заседания Общего собрания Академии наук 6 февраля 1899 г. Эрмиту. Письмо Эрмита от 22 марта 1899 г. является ответом на это (или почти такое же) письмо Маркова.

## Телеграмма[1]

Париж, 23 февраля 1892 г.

Я получил преисполнившее меня радостью свидетельство симпатии русских математиков и выражения их общих добрых чувств к Франции. Я шлю им свою живейшую благодарность и присоединяю к ней невыразимую признательность их великой нации и ее суверену, который протянул нам руку дружбы, и в душе присоединяюсь ко всем их надеждам, возлагая самые горячие надежды на триумф справедливости и законности благодаря союзу наших стран. [Сердечно обнимаю и целую Вас] и г. Коркина. Эрмит.

---

[1] По-видимому, эта телеграмма является ответом на поздравительную телеграмму по случаю заключения Военно-политического союза России и Франции (1891). Подписали телеграмму, как следует из ответа Эрмита, Марков и Коркин.

# Основные даты жизни и деятельности Шарля Эрмита

**1822 г., 24 декабря** — рождение Шарля Эрмита.
**1840—1842 гг.** — обучение в коллеже Луи-ле-Гран.
**1842—1843 гг.** — студент Политехнической школы в Париже.
**1842 г.** — публикация первых научных работ.
**1843 г., январь** — первые письма к К.-Г. Якоби.
**1843 г., август** — представление Ж. Лиувиллем первой статьи Эрмита в Парижскую академию наук.
**1843—1844 гг.** — знакомство с Александром и Жозефом Бертран.
**1845 г., ноябрь** — первая беседа с О. Коши.
**1847 г., июнь—июль** — получение степени бакалавра.
**1848 г., июль** — назначение на должность экзаменатора по приему экзаменов в Политехническую школу.
**1848 г.** — женитьба на Луизе Бертран.
**1848—1849 гг.** — временное чтение лекций в Коллеж де Франс.
**1852 г.** — знакомство с П. Л. Чебышевым.
**1856 г., 14 июля** — избрание членом Парижской академии наук.
**1857 г.** — избрание членом-корреспондентом Петербургской академии наук.
**1858 г.** — публикация статьи о решении уравнений пятой степени средствами теории эллиптических функций.
**1859 г.** — избрание членом-корреспондентом Берлинской академии наук.
**1862—1869 гг.** — лектор в Нормальной школе.
**1869—1897 гг.** — профессор Сорбонны.
**1869—1876 гг.** — профессор Политехнической школы.
**1873 г.** — доказательство трансцендентности числа $e$.
**1887 г.** — избрание почетным членом Петербургского университета.
**1889 г.** — вице-президент Парижской академии наук.
**1890 г.** — президент Парижской академии наук.
**1892 г.** — празднование 70-летия Эрмита.
**1895 г., декабрь** — избрание почетным членом Петербургской академии наук.
**1900 г.** — почетный президент Международного конгресса математиков в Париже.
**1901 г., 14 января** — кончина Шарля Эрмита.

# Литература

I


1. Lieu géométrique des pôles d'une section conique par rapport à une autre. — Nouv. Ann. mathém., 1842, t. 1, p. 263—264; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 1—2.
2. Considérations sur la résolution algébrique de l'équation du cinquième degré. — Nouv. Ann. mathém., 1842, t. 1, p. 329—336; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 3—9.
3. Extrait de deux lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi. — J. für Mathem., 1846, Bd. 32, S. 277—299; Jacobi C.-G.-J. Mathem. Werke. Bd. I. Berlin, 1846, S. 391—413; Gesammelte Werke. Bd. 2. Berlin, 1882, S. 87—114; Hermite Ch. Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 10—37.
4. Sur la division des fonctions abeliennes ou ultraelliptiques. — Mém. prés. à l'Acad. sci. Paris par divers savants, 1848, t. X, p. 563—574; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 38—48. (Présenté à l'Acad. des sciences, 10 juillet 1843).
5. Sur la théorie des transcendantes à différentielles algébriques. Extrait d'une lettre à M. Liouville. — C. R., 1844, t. 18, p. 1133—1148; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 49—63.
6. Principaux théorèmes de l'analyse des fonctions elliptiques. (Extrait des Mémoires de la Société roy. des sciences, lettres et arts de Nancy, 1845) — Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 64—70.
7. Note sur la théorie des fonctions elliptiques. — Cambr. and Dublin Mathem. J., 1848, v. 3, p. 54—56; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 71—73.
8. Sur la théorie des fonctions elliptiques. — C. R., 1849, t. 29, p. 594; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 74.
9. Rapport sur un mémoire présenté par M. Hermite et relatif aux fonctions à double période. — C. R., 1851, t. 32, p. 442—450; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 75—83.
10. Note sur la réduction des fonctions homogènes à coefficients entiers et à deux indéterminés. — J. für Mathem., 1848, Bd. 36, S. 357—364; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 84-93.
11. Sur la théorie des formes quadratiques ternaires. — J. für Mathem., 1850, Bd. 40, S. 173—177; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 94—99.
12. Lettres de M. Hermite à M. Jacobi sur différen s objets de la théo-

rie des nombres. — J. für Mathem., 1850, Bd. 40, S. 261—315; Jacobi C.-G.-J. Mathem. Werke. Bd. II. Berlin, 1851 S. 221—275; Hermite Ch. Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 100—163.
13. Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. — J. für Mathem., 1851, Bd. 41, S. 191—216; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 164—192.
14. Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies. — J. für Mathem., 1854, Bd. 47, S. 307—312; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 193—199.
15. Sur la théorie des formes quadratiques. — J. für Mathem., 1854, Bd. 47, S. 313—342, 343—368; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 200—233, 234—263 (Mémoires I et II).
16. Note de M. Hermite sur le théorème relatif aux nombres entiers. — J. de mathém., 1848, t. 13, p. 15; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 264.
17. Sur une question relative à la théorie des nombres. — J. de mathém., 1849, t. 14, p. 21—30; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 265—273.
18. Démonstration élémentaire d'une proposition relative aux diviseurs de $x^2+Ay^2$. — J. de mathém., 1849, t. 14, p. 451—452; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 274—275.
19. Sur les fonctions algébriques. — C. R., 1851, t. 32, p. 458—463; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 276—280.
20. Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées. — C. R., 1852, t. 35, p. 52—54; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 281—283.
21. Remarques sur le théorème de M. Sturm. — C. R., 1853, t. 36, p. 294—297; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 284—287.
22. Sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés. — C. R., 1853, t. 37, p. 133—134; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 288—289.
23. Remarques sur un mémoire de M. Cayley relatif aux déterminants gauches. — Cambr. and Dublin Mathem. J., 1854, v. 9, p. 63—67; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 290—295.
24. Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. — Cambr. and Dublin Mathem. J., 1854, v. 9, p. 172—217; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 296—349.
25. Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées.— J. für Mathem., 1856, Bd. 52, S. 1—38; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 350—396.
26. Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt. — J. für Mathem., 1856, Bd. 52, S. 39—51; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 397—414.
27. Sur le nombre limite d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt. — J. für Mathem., 1857, Bd. 53, S. 182—192; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 415—428.
28. Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynomes homogènes du second degré. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt. — J. für Mathem., 1857, Bd. 53, S. 271—274; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 429—433.

29. Sur les formes cubiques à deux indéterminées. — Quarterly J. of pure and appl. Mathem., 1857, v. 1, p. 20—22; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 434—436.
30. Lettre à M. Cayley sur les formes cubiques. — Quarterly J. of pure and appl. Mathem., 1857, v. 1, p. 88—89; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 437—439.
31. Extrait d'une lettre à Sylvester sur les solutions de l'équation $ax+by=n$. — Quarterly J. of pure and appl. Mathem., 1857, v. 1, p. 370—373; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 440—443.
32. Sur la théorie de la transformation des fonctions abeliennes. — C. R., 1855, t. 40, p. 249—254, 304—309, 365—369, 427—431, 485—489, 536—541, 704—707, 784—787; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 444—478.
33. Remarque sur un théorème de Cauchy. — C. R., 1855, t. 41, p. 181—183; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 479—481.
34. Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques. — C. R., 1858, t. 46, p. 171—175; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 482—486.
35. Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques. — J. de mathém., (II), 1858, t. 3, p. 26—36; Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. 487—496.
36. Sur la théorie des formes cubiques à trois indéterminées. — J. de mathém., (II), 1857, p. 3, p. 37—40; Oeuvres. T. II. Paris, 1905, p. 1—4.
37. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. — C. R., 1858, t. 46, p. 508—515; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 5—12.
38. Lettre de Ch. Hermite à M. Jules Tannery sur les fonctions modulaires. — In: Tannery J., Molk J. Traité sur la théorie des fonctions elliptiques. T. IV. Paris, 1902, p. 294—300; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 13—21.
39. Sur la résolution de l'équation du quatrième degré. — C. R., 1858, t. 46, p. 715—722; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 22—29.
40. Sur quelques théorèmes d'Algèbre et la résolution de l'équation du quatrième degré. — C. R., 1858, t. 46, p. 961—967; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 30—38.
41. Sur la théorie des équations modulaires. — C. R., 1859, t. 48 (I part), p. 940—947, 1079—1084, 1095—1102; t. 49 (II part), p. 16—24, 110—118, 141—144; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 38—82.
42. Sur l'abaissement de l'équation modulaire de huitième degré. Extrait d'une lettre adressée à M. Brioschi. — Annali di matem. pura ed appl., 1859, t. 2, p. 59—62; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 83—86.
43. Sur l'interpolation. — C. R., 1859, t. 48, p. 62—67; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 87—92.
44. Sur la réduction des formes cubiques à deux indéterminées. — C. R., 1859, t. 48, p. 351—357; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 93—99.
45. Extrait d'une lettre à M. Borchardt sur le résultat de trois formes quadratiques ternaires. — J. für Mathem., 1860, Bd. 57, S. 371—375; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 100—106.
46. Extrait de deux lettres à l'éditeur (M. Borchardt) sur l'invariant du dixhuitième ordre des formes du cinquième degré et sur le rôle

qu'il joue dans la résolution de l'équation du cinquième degré. — J. für Mathem., 1861, Bd. 59, S. 304—305; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 107—108.

47. Lettre adressée à M. Liouville sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'Arithmétique. — C. R., 1861, t. 53, p. 214—231; J. de mathém., (II), 1862, t. 7, p. 25—40; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 109—124.

48. Note sur théorie des fonctions elliptiques. — In: L a c r o i x S.-F. Calcul différentiel et calcul intégral. 6 éd. Paris, 1862; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 125—238.

49. Extrait d'une lettre à l'éditeur (M. Borchardt) sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques. — J. für Mathem., 1862, Bd. 60, S. 304—305; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 239—240.

50. Sur les théorèmes de M. Kronecker relatifs aux formes quadratiques. — C. R., 1862, t. 55, p. 11—18, 85—91; J. de mathém., (II), 1864, t. 9, p. 145—159; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 241—254.

51. Sur la théorie des formes quadratiques. — C. R., 1862, t. 55, p. 684—692; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 255—263.

52. Remarque sur le développement de cos am $x$. — C. R., 1863, t. 57, p. 613—618; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 264—270.

53. Sur quelques formules relatives au module dans la théorie des fonctions elliptiques. — C. R., 1863, t. 57, p. 993—1000; J. de mathém., (II), 1864, t. 9, p. 313—320; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 271—279.

54. Übersicht der Theorie der elliptischen Functionen. Berlin, 1863, S. 1—144.

55. Sur les fonctions de sept lettres. — C. R., 1863, t. 57, p. 750—757; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 280—288.

56. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Brioschi. — J. für Mathem., 1864, Bd. 63, S. 30—32; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 289—292.

57. Sur un nouveau développement en série des fonctions. — C. R., 1864, t. 58, p. 93—100, 266—273; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 293—308.

58. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Borchardt. — J. für Mathém., 1865, Bd. 64, S. 294—296; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 309—312.

59. Sur deux intégrales doubles. — Ann. sci. École norm. sup., (II), 1865, t. 2, p. 49—53; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 313—318.

60. Sur quelques développements en séries des fonctions de plusieurs variables. — C. R., 1865, t. 60, p. 370—377, 432—440, 461—466, 512—518; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 319—346.

61. Sur l'équation du cinquième degré. — C. R., 1865, t. 61, p. 877—882, 965—972, 1073—1081; 1866, t. 62, p. 65—72, 157—162, 245—253, 715—722, 919—924, 959—966, 1054—1059, 1161—1167, 1213—1215; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 347—424.

62. Sur les invariants des formes du cinquième degré. — In: S a l m o n G. Algèbre supérieure. II éd. Paris, 1890, p. 557—566; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 425—433.

63. Sur l'invariant gauche des formes du sixième degré. — In: S a l m o n G. Algèbre supérieure. II éd. Paris, 1890, p. 568; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 434.

64. Sur la théorie des polynomes homogènes du second degré. — Note 6 du «Programme détaillé d'un Cours d'Arithmétique ét d'Algèbre et de Géométrie analytique» par Gerono et Roguet. IV éd. Paris, 1856, p. 154—197; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 435—478.
65. Sur le rayon de courbure de courbes gauches. — Nouv. Ann. mathém., (II), 1866, t. 5, p. 297; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 479—480.
66. Sur l'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$. — Annali di matem. pura ed appl., (II), 1867, t. 1, p. 155—159; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 481—485.
67. Extrait d'une lettre à M. Brioschi. Sur le développement en séries des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.— Annali di matem. pura ed appl., (II), 1868, t. 2, p. 97—99; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 486—488.
68. Sur l'expression du module des transcendantes elliptiques en fonction du quotient des deux périodes. — Annali di matem. pura ed appl., (II), 1870, t. 3, p. 81—82; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 489—491.
69. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. — Annali di matem. pura ed appl., (II), 1870, t. 3, p. 83; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 492.
70. Sur la transcendance $E_n$. — Annali di matem. pura ed appl., (II), 1870, t. 3, p. 83; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 493.
71. Sur l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{\sin a dx}{1-2x\cos a+x^2}$. — Bull. sci. mathém., 1870, t. 1, p. 320—323; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 494—497.
72. Sur la construction géométrique de l'équation relative à l'addition des intégrales elliptiques de première espèce. — Bull. sci. mathém., 1871, t. 2, p. 21—23; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 498—500.
73. Sur l'élimination des fonctions arbitraires. — In: Hermite Ch. Cours d'analyse de l'École polytechnique. Paris, 1873, p. 215—229; Oeuvres. T. II. Paris, 1908, p. 501—515.
74. Sur l'élimination des fonctions arbitraires. — Report British Assoc., 1872, v. 42, p. 233—238.
75. Sur l'élimination des fonctions arbitraires. — Messenger of Mathem., 1872, v. 2, p. 29.
76. Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées (Mémoire inédit, 1852); Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 1—34.
77. Intégration des fonctions rationnelles. — Nouv. Ann. mathém., (II), 1872, t. 11, p. 145—148; Ann. École norm. sup., (I), 1872, p. 215—218; Cours d'analyse de l'École polytechn. Paris, 1873, p 261—270; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 35—54.
78. Cours d'analyse de l'École polytechnique. Paris, 1873, p. 1—456.
79. Intégration des fonctions transcendantes. — In: Cours d'analyse de l'École polytechn. Paris, 1873, p. 320—351; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 55—114.

80. Sur l'intégrale des fonctions circulaires. — Proc. Lond. Mathem. Soc., 1872, v. 4, p. 164—175.
81. Sur l'équation $x^3+y^3=z^3+u^3$. — Nouv. Ann. mathém., (II), 1872, t. 11, p. 5—7; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 115—117.
82. Sur l'équation de Lamé. — In: Hermite Ch. Cours d'analyse de l'École polytechn. Paris, 1872—1873, 32-e leçon; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 118—122.
83. On an application of the theory of unicursal curves. Extrait d'une lettre à Prof. Cayley. — Proc. Lond. Mathem. Soc., 1873, v. 4, p. 343—345; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 123—126.
84. Sur l'irrationalité de la base de logarithmes hyperboliques. — Report British Assoc., 1873, v. 43, p. 22—23; Oeuvres. T. III. Paris, p. 127—130.
85. Sur une équation transcendante. — Bull. sci. mathém. et astr., 1873, t. 4, p. 61—64; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 131—134.
86. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Paul Gordan sur l'expression $U \sin x+V \cos x+W$. — J. für Mathem., 1873, Bd. 76, S. 303—311; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 135—145.
87. Lettre de M. Hermite à M. P. Gordan. — Mathem. Annalen, 1876, Bd. 10, S. 287—288.
88. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur quelques approximations algébriques. — J. für Mathem., 1873, Bd. 76, S. 342—344; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 146—149.
89. Sur la fonction exponentielle. — C. R., 1873, t. 77, p. 18—24, 74—79, 226—233, 285—293; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 150—181.
90. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M ... sur l'intégrale $\int\limits_0^\pi \left(\frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2}\right)^m dx$. — Nouv. Corresp. mathém., 1874, t. 1, p. 33—35; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 182—184.
91. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Borchardt sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles mêmes. — J. für Mathem, 1874, Bd. 78, S. 325—328; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 185—189.
92. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur la réduction des formes quadratiques ternaires. — J. für Mathem., 1874, Bd. 79, S. 17—20; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 190—193.
93. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. L. Fuchs de Gottingue sur quelques équations différentielles linéaires. — J. für Mathem., 1875, Bd. 79, S. 324—338; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 194—210.
94. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur les nombres de Bernoulli. — J. für Mathem., 1876, Bd. 81, S. 93—95; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 211—214.
95. Lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur la fonction de Jacob Bernoulli. — J. für Mathem., 1875, Bd. 79, S. 339—344; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 215—221.
96. Sur le développement de $F(x)=\mathrm{sn}^a x\cdot\mathrm{cn}^b x\cdot\mathrm{dn}^c x$, où les exposants sont entiers. — Handlingar K. Svenska Vetenskaps Akad., Bihang III, 1875, Nr. 10, p. 3—10; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 222—231.

97. Sur un théorème d'Eisenstein. — Proc. Lond. Mathem. Soc., 1876, v. 7, p. 173—175; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 232—235.
98. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. L. Königsberger sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable. — J. für Mathem., 1876, Bd. 81, S. 220—228; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 236—245.
99. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Paul Mansion sur une formule de M. Delaunay. — Nouv. Corresp. mathém., 1876, t. 2, p. 54—55; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 246—247.
100. Sur l'aire d'un segment de courbe convexe. — Nouv. Corresp. mathém., 1876, t. 2, Question 95; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 248.
101. Sur un exemple de réduction d'intégrales abeliènnes aux fonctions elliptiques. — Ann. Soc. sci. Bruxelles. I Année. 1876, p. 1—16; Oeuvres. T. III. 1921, p. 249—261.
102. Note sur une formule de Jacobi. — Mém. Soc. roy. Liège, (II), 1879, t. 6, p. 1—7; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 262—265.
103. Sur une extension de la formule de Stirling. — Mathem. Annalen., 1877, Bd. 10, S. 581—590.
104. Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. — C. R., 1877, t. 85, p. 689—695, 728—732, 821—826, 870—875, 984—990, 1085—1091; 1878, t. 86, p. 271—277, 422—427, 622—628, 777—780, 850—854; 1879, t. 89, p. 1001—1005, 1092—1097; 1880, t. 90, p. 106—112, 201—208, 478—483, 643—649, 761—766; 1881, t. 93, p. 920—1098; 1882, t. 94, p. 186—192, 372—377, 477—482, 594—600, 753—759; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 266—418.
105. Études de M. Sylvester sur la théorie algébrique des formes. — C. R., 1877, t. 84, p. 974; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 419.
106. Recherches des coordonnées d'une cubique plane en fonction explicite d'un paramètre. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. L. Fuchs. — J. für Mathem., 1877, Bd. 82, S. 343—347; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 420—424.
107. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur la formule de Maclaurin. — J. für Mathem., 1878, Bd. 84, S. 64—69; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 425—431.
108. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur la formule d'interpolation de Lagrange. — J. für Mathem., 1878, Bd. 84, S. 70—79; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 432—443.
109. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Lindemann. Observations algébriques sur les courbes planes. — J. für Mathem., 1878, Bd. 84, S. 298—299; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 444—446.
110. Extrait d'une lettre à M. Gylden de Stockholm sur le pendule. — J. für Mathem., 1878, Bd. 85, S. 246—249; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 447—450.
111. Sur la théorie des fonctions sphériques. — C. R., 1878, t. 86, p. 1515—1518; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 451—454.
112. Sur l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1 - z} dz$. — Atti della Reale Accad. delle scienze di Torino, 1878, t. 14; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 455—474.

113. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Brioschi sur l'équation de Lamé. — Annali di matem. pura ed appl., (II), 1879, t. 9, p. 21—24; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 475—478.
114. Sur un théorème de Galois relatif aux équations solubles par radicaux. — In: Serret J.-A. Algèbre supérieure. T. II Paris, 1878, (V ed.), p. 677—680; Hermite Ch. Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 479—484.
115. Sur le contact des surfaces. — In: Hermite Ch. Cours d'analyse de l'École polytechnique. Paris, 1873, p. 139—149; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 485—495.
116. Sur les équations différentielles linéaires. — Bull. sci. mathém. et astr., (II), 1879, t. 3, p. 311—325; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 496—508.
117. Sur l'indice des fractions rationnelles. — Bull. Soc. mathém. France, 1879, t. 7, p. 128—131; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 509—512.
118. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur une extension donnée à la théorie des fractions continues par M. Tchébychef. — J. für Mathem., 1879, Bd. 88, S. 10—15; Oeuvres. T. III. Paris, 1912, p. 513—519.
119. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. H. Gylden sur la différentiation des fonctions elliptiques par rapport au module. — Astron. Nachrichten, 1880, Bd 96, Nr. 2301; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 1—7.
120. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. E. Heine sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé. — J. für Mathem., 1880, Bd. 89, S. 9—18; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 8—18.
121. Sur une proposition de la théorie des fonctions elliptiques. — C. R., 1880, t. 90, p. 1096—1097; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 19—21.
122. Sur la série de Fourier et autres représentations des fonctions d'une variable réelle. — C. R., 1880, t. 91, p. 1018—1019; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 22—24.
123. Sur une formule d'Euler. — J. de mathém., (III), 1880, t. 6, p. 5—18; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 25—38.
124. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. U. Dini sur une représentation analytique des fonctions au moyen des transcedantes elliptiques. — Annali di matem. (II), 1882, t. 10, p. 137—144; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 39—47.
125. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Mittag-Leffler sur quelques points de la théorie des fonctions. — J. für Mathem., 1881, Bd. 91, S. 53—78; Acta Soc. sci. Fennicae, 1883, t. 12, p. 67—94; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 48—75.
126. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Schwarz de Gottingue sur l'intégrale eulerienne de seconde espèce. — J. für Mathem., 1881, Bd. 90, S. 332—338; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 76—84.
127. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Gylden sur la détermination de l'intégrale $\int \frac{dn^4 u}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u}\, du$. — Astron. Nachrichten, 1881, Nr. 2402; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 85—86.
128. Extrait d'une lettre à M. E. Beltrami sur les fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$ de Jacobi. — Collectanea mathematica, in Memoriam Chellini. 1881; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 87—91.

129. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler par M. Ch. Hermite, de Paris, sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler dans la théorie des fonctions. — J. für Mathem., 1882, Bd. 92, S. 145—155; Acta Soc. sci. Fennicae, 1883, t. 12, p. 425—436; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 92—103.
130. Cours de M. Ch. Hermite, professée pendant la II semester 1881—1882. Rédigé par M. Andoyer, élève de l'École Normale supérieure. Paris, 1882. (Lithogr.).
131. Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce. — C. R., 1882, t. 94, p. 901—903; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 104—107.
132. Remarque sur une Note de M. Lipschitz relative à un point de la théorie des fonctions elliptiques. — C. R., 1883, t. 97, p. 1414—1415; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 111—113.
133. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler par M. Ch. Hermite sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques. — Acta mathem., 1882, t. 1, p. 368—370; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 108—110.
134. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Mittag-Leffler sur la fonction $\mathrm{sn}^a x$. — Acta Soc. sci. Fennicae, 1883, t. 12, p. 439—444; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 114—119.
135. Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques aux fonctions de première, de seconde et de troisième espèce. — Bull. sci. mathém., (II), 1883, t. 7, p. 36—42; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 120—126.
136. Sur quelques points de la théorie des nombres, par Ch. Hermite et R. Lipschitz. — Acta Mathem., 1883, t. 2, p. 299—304.; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917. p. 127—132.
137. Sur une formule relative à la theorie des fonctions d'une variable. — Amer. J. Mathem., 1884, v. 6, p. 60—62; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 133—134.
138. Extrait d'une lettre de Ch. Hermite à M. Carlo Veneziani. — Amer. J. Mathem., 1885, v. 6, p. 173—175; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 168—169.
139. Extrait d'une lettre de Ch. Hermite à M. Sylvester. — Amer. J. Mathem., 1884, v. 6, p. 173—175; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 136—137.
140. Sur quelques consequences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques. — Bull. Acad. sci. Pétersb., 1884, t. 29, p. 325—352; Mélanges mathém. et astr. Pétersb. (1881—1888), 1888, t. 6, p. 247—286; Acta mathem., 1884, t. 5, p. 297—330; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 138—168.
141. Extrait d'une lettre adressée à M. Gomes Teixeira sur les polynomes de Legendre. — J. de sciências mathem. e astr., 1885, t. 6, p. 81—84; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 169—171.
142. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite par M. Fuchs sur un développement en fraction continue et extrait d'une lettre à M. Fuchs par M. Hermite. — Acta mathem., 1884, t. 4, p. 89—92; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 172—174.
143. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Lipschitz sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elilptiques. — Acta mathem., 1884, t. 4, p. 193; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 175.

144. Discours prononcé aux obsèques de M. Bouquet (au nom de la Faculté des sciences, le 11 septembre 1885). — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 176—177.
145. Sur la théorie des fractions continues. — Bull. sci. mathém., 1885, t. 9, p. 11—13; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 178—180.
146. Réponse à une lettre adressée à M. Hermite par M. Obrastzoff de St.-Pétersbourg. — Bull. sci. mathém., 1885, t. 9, p. 135—136; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 181—183.
147. Note au sujet de la communication de M. Stieltjes sur une fonction uniforme. — C. R., 1885, t. 101, p. 119—120; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 184—187.
148. Sur les fonctions holomorphes. — J. de mathém., (IV), 1885, t. 1, p. 9; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 188—189.
149. Sur une application de la théorie des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. — Ann. École norm. sup., (III), 1885, t. 2, p. 303; Bull. Acad. sci. Pétersb., 1884, t. 29, col. 325—352; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 190—200.
150. Extrait d'une lettre adressée à M. le professeur Christal sur la réduction des intégrales hyperelliptiques. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1884, t. 12, p. 642—646; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 201—205.
151. Sur une identité trigonométrique. — Nouv. Ann. mathém., (III), 1885, t. 4, p. 57—59; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 206—208.
152. Extrait d'une lettre adressée à M. Fuchs sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques. — J. für Mathem., 1886, Bd. 99, S. 324—328; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 209—214.
153. Remarque sur les formes quadratiques de déterminant négatif. — Bull. sci. mathém., (II), 1886, t. 10, p. 23—30; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 215—222.
154. Sur quelques intégrales définies. — J. École polytechn., 1885, t. 27, cah. 44, p. 181—196.
155. Cours d'Analyse. Paris, 1887.
156. Remarque arithmétique sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques. — J. für Mathem., 1887, Bd. 100, S. 57—65; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 223—239.
157. Rosenhain. — C. R., 1887, t. 104, p. 891; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 240.
158. Extrait de deux lettres adressées à M. Craig. — Amer. J. Mathem., 1887, v. 9, p. 381—388; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 241—250.
159. Sur un mémoire de Laguerre concernant les équations algébriques. — Mém. Acad. pontificale des Nuovi Lincei, 1888, t. 3, p. 155—164; Lagrange J.-L. Oeuvres. T. 1. Paris, p. 461—469; Hermite Ch. Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 251—259.
160. Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch. Démonstration nouvelle d'une formule relative aux intégrales euleriennes de seconde espèce. — Sitzungsber. Böhmischen Gesellsch. Wissensch., (VII), 1888, Bd. 2, S. 365—366; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 260—261.
161. Remarque sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques. — Ann. Fac. des sci. Toulouse, 1888, t. 2, p. 1—12; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 262—273.

162. Extrait d'une lettre adressée à M. Matyas Lerch. Sur la transformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce. — Ann. Fac. sci. Toulouse, 1888, t. 2, p. 1—6; Mém. roy. Soc. Bohème, (VII), 1888, t. 2; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 274—279.
163. Discours prononcé par M. Hermite aux funérailles de M. Halphen, le 23 mai 1889. — C. R., 1889, t. 108, p. 1079—1080; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 280—282.
164. Discours prononcé devant le président de la République le 5 août, à l'inauguration de la nouvelle Sorbonne par M. Ch. Hermite, prof. à la Faculté des sciences, Membre de l'Institut. — Bull. sci. mathém., (II), 1890, t. 14, p. 6—36; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 283—313.
165. Sur les polynomes de Legendre. — Rendiconti Circolo matem. Palermo, 1890, t. 4, p. 146—152; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 314—320.
166. Extrait d'une lettre adressée à M. F. Caspary sur les polynomes de Legendre. — J. für Mathem., 1891, Bd. 107, S. 80—83; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 321—326.
167. Extrait d'une lettre adressée à M. Lerch sur les racines de la fonction sprhérique de seconde espèce. — Ann. Fac. sci. Toulouse, 1890, t. 4, p. 1—10; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 327—336.
168. Cours d'analyse. Paris, 1891.
169. Extrait d'une lettre adressée à M. S. Pincherle sur la transformation des fonctions elliptiques. — Rendiconti Circolo matem. Palermo, 1891, t. 5, p. 155—157; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 337—339.
170. Note sur M. Kronecker. — C. R., 1892, t. 114, p. 12—21; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 340—342.
171. Sur la transformation des fonctions numériques. — Mém. Acad. Tcheque de Prague, 1892; Ann. Fac. sci. Toulouse, 1892, t. 6, p. 1—13; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 343—354.
172. Notice sur les travaux de M. Kummer. — C. R., 1893, t. 116, p. 1163—1164; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 355—356.
173. Extrait d'une lettre à M. Pincherle sur la généralisation des fonctions continues algébriques. — Annali di matem., (II), 1893, t. 21, p. 289—308; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 357—377.
174. Sur une extension de la formule de Stirling. — Mathem. Annalen, 1893, Bd. 41, S. 581—590; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 378—388.
175. Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler sur les polynomes entiers à une variable. — Nyt Tidskrift för Mathematik, 1894, t. 5, p. 1—4; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 389—392.
176. Extrait de deux lettres à M. Ed. Weyr. Remarque sur les nombres de Bernoulli et les nombres d'Euler. — Bull. Soc. roy. sci. Bohème, II cl., 1894; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 393—396.
177. Extrait d'une lettre à M. Ed. Weyr sur la fonction eulerienne. — Časopis pro pest. mathem., 1894, t. 24, p. 65; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 397—398.
178. Extrait d'une lettre à M. Ed. Weyr sur une intégrale définie. — Časopis pro pešt, mathem., 1893, t. 23, p. 273—274; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 399-400.
179. Notice sur M. Cayley. — C. R., 1895, t. 120, p. 233—234; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 401—402.

180. Extrait d'une lettre de M. Hermite sur l'équation bicarrée.— Mathesis, (2), 1895, t. 5, p. 11—12; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 403—404.
181. Sur les nombres de Bernoulli. — Mathesis, (2), 1895, t. 5, Suppl. II, p. 1—7; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 405—411.
182. Extrait d'une lettre à M. K. Hensel sur la fonction log Г $(a)$. — J. für Mathem., 1895, Bd. 201—208; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 412—422.
183. Sur le logarithme de la fonction Gamma. — Amer. J. Mathem., 1895, v. 17, p. 111—116; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 423—430.
184. Extrait d'une lettre adressée à M. Fuchs sur une extension du théorème de Laurent. — J. für Mathem., 1896, Bd. 116, S. 85—89; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 431—436.
185. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Sonine, à St.-Pétersbourg, sur les polynomes de Bernoulli. — J. für Mathem., 1896, Bd. 116, S. 133—156; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 437—447.
186. Sur une formule de M. G. Fontené.—Bull. sci. mathém., (II), 1896, t. 20, p. 218—220; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 448—450.
187. Sur quelques propositions fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques. — Amer. J. Mathem. Soc., 1896, t. 1, p. 105—115; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 451—462.
188. Notice sur M. Weierstrass.—C. R., 1897, t. 124, p. 430—433; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 463—466.
189. Notice sur M. F. Brioschi.—C. R., 1897, t. 125, p. 1139—1141; Oeuvres. T. IV. Paris, p. 467—469.
190. Sur quelques développements en séries de la théorie des fonctions elliptiques. — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 470—487; О некоторых разложениях в ряды теории эллиптических функций. — Сообщ. ФМО Казань, (II), 1897, т. 6, с. 1—21.
191. Extrait d'une lettre adressée à M. Craig par M. Hermite.—Amer. J. Mathem., 1895, v. 17, p. 6—12; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 488—494.
192. Question Nr. 951.—Intermédiaire des mathématiciens, 1897, t. 4, p. 1; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 495.
193. Extrait de deux lettres de M. Hermite à M. Ed. Weyr. Remarque sur la définition du logarithme des quantités imaginaires. — Časopis pro pešt. mathem., 1892—1894, t. 22, p. 225—227; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 496—499.
194. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite adressée à L. Lindelöf. — Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar, 1899—1900, t. 42, p. 88—90; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 500—502.
195. Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite sur la série $\frac{1}{(\log 2)^n} + \frac{1}{(\log 3)^n} + \ldots + \frac{1}{(\log x)^n} + \ldots$ — Mathesis, 1881, t. 1, p. 37; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 503—504.
196. Sur l'intégrale $\int\limits_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\, dx$. — J. de scienc. mathem. e

astr. de Gomes Teixeira, 1880, t. 2, p. 65—67; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 505—507.

197. Sur les formules de M. Frenet. — J. de scienc. mathem. e astr. de Gomes Teixeira, 1878, t. 1; Oeuvres. T. IV, Paris, 1917, p. 508—511.

198. Sur l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. — J. de scienc. mathem. de Gomes Teixeira, 1894, t. 11; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 512—513.

199. De la sommation d'une série considérée par Abel.—Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 514—515; О суммировании одного ряда, рассмотренного Абелем. — Сообщ. ФМО, Казань, (II), 1898, т. 8, с. 107—108.

200. Extrait d'une lettre à M. Brioschi sur les équations différentielles linéaires du second degré. — Annali di matem., (II), 1881, t. 10, p. 101—103; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 516—518.

201. Lettre de M. Ch. Hermite adressée à M. V. Anissimov. — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 519—520; Письмо г. Ш. Эрмита к В. Анисимову. — Матем. сб., 1909, т. 21, с. 66—67.

202. Note sur la théorie des fonctions elliptiques. — In: Serret J.-A. Cours de calcul différentiel et intégral. T. 2. Paris, 1900, p.735—904.

203. Sur une formule de Jacobi concernant l'intégrale elliptique à module imaginaire. — Mitteilungen der Hamburger Mathem. Gesellschaft, 1891—1900, Bd. 3; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 521—522.

204. Question Nr. 8164. — Oeuvres. T. IV. Paris. 1917, p. 523.

205. Question Nr. 8560. — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 523.

206. Question Nr. 8510. — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 523.

207. Solution par l'auteur. (Question Nr. 8510). — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 523—525.

208. Question Nr. 8588. — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 525—527.

209. Question Nr. 8717. — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 527.

210. Solution par l'auteur. (Question Nr. 8717). — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 527—528.

211. Question Nr. 9072. — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 527.

212. Question Nr. 8863. — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 527.

213. Extraits de quelques lettres de M. Ch. Hermite à M. S. Pincherle. — Annali di matem,. (III), 1901, t. 5, p. 57—73; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 529—543.

214. Extrait d'une lettre à M. E. Jahnke. — Archiv der Mathem. und Phys., (III), 1901, Bd. 1, S. 20—21; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 544—545.

215. Sur une équation transcendante. — Archiv der Mathem. und Phys., (III), 1901, Bd. 1, S. 22—27; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 546—551.

216. Sulle fraczioni continue. — Le Matematiche pure ed appl., 1901, t. 1, p. 1—2; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 552—553.

217. Extrait d'une lettre à M. Lerch sur la fonction Γ $(x)$. — Bull. Intern. de Prague, 1895, p. 214—219; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 554—555.

218. Préface. — In: Valson C.-A. La vie et des travaux du baron Cauchy. T. I. Paris, 1868, p. 11; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 556.
219. Préface. — In: Appell P., Goursat Ed. Théorie des fonctions algébriques. II éd. T. I. Paris, 1929; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 557—562.
220. Préface à la traduction française des Oeuvres de B. Riemann. Paris, 1898, p. I—II; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 563—566.
221. Discours dans la séance publique de l'Académie des sciences en 1889. Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 567—575.
222. Discours dans la séance publique de l'Académie des sciences en 1890. Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 576—581.
223. Discours prononcé par Hermite à son jubilée (24 Décembre 1892). — Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 582—585.
224. Sur l'observation en mathématiques. Note inseré dans un mémoire de Chevreul. E. Chevreul. Distribution des connaissances humaines du ressort de la philosophie naturelle conforme à la manière, dont l'ésprit humain procède dans la recherche de l'inconnu en allant du concret à l'abstrait et revenant de l'abstrait au concret. — Mém. Acad. sci. Institut France, 1866, t. 35, p. 528—529; Oeuvres. T. IV. Paris, 1917, p. 586—587; Mathesis, (III), Année 1907, Gand—Paris, 1907, p. 145—146.
225. Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget, préface de E. Picard. T. I, II. Paris, 1905.
226. Briefe von Ch. Hermite an P. du Bois-Reymond aus den Jahren 1875—1888. Mitgeteilt von E. Lampe in Berlin. — Archiv der Mathem. und Phys., (III), 1916, Bd. 4, S. 193—220, 289—310.
227. Du Bois-Reymond. — C. R., 1889, t. 108, p. 887.
228. О Бриоски. Речь 27 декабря 1897 г. в заседании Парижской академии наук. Пер. с франц. А. В. Васильева. Казань, 1897.
229. О Вейерштрассе. Речь 1 марта 1897 г. в заседании Парижской академии наук. Пер. с франц. А. В. Васильева. Казань, 1897.
230. Письма Эрмита к П. Л. Чебышеву. — В кн.: Чебышев П. Л. Полн. собр. соч. Т. V. М., 1951, с. 424—436.
231. Письма Эрмита С. В. Ковалевской. Публикация П. Я. Полубариновой-Кочиной. — Тр. Инст. ист. естеств. и техн., 1957, т. 19, с. 650—690.
232. Курс анализа. Пер. В. М. Озерецкого с IV франц. изд. Под ред. Н. М. Гюнтера. Предисловие академика А. Н. Крылова. М.—Л., 1930.
233. Les lettres de Ch. Hermite à A.Markoff. — Revue d'hist. des sci., 1967, t. 20, p. 1—32. Рус. пер. см. с. 214—244 наст. изд.
234. Oeuvres. T. I—IV. Paris, 1905—1917.

## II

1. Актуальные проблемы аналитической теории чисел. Под ред. В. Г. Спринджука. Минск, 1974.
2. Анисимов В. А. Курс теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Варшава, 1906.

3. Ахиезер Н. И. Комментарии. — В кн.: Чебышев П. Л. Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 492—495.
4. Ахиезер Н. И. К спектральной теории уравнения Ламе. — Ист.-матем. иссл., 1978, вып. 23, с. 77—86.
5. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. II изд. М., 1970.
6. Башмакова И. Г. Обоснование теории делимости в трудах Е. И. Золотарева. — Ист.-матем. иссл., 1949, вып. 2, с. 233—351.
7. Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций. Ростов-на-Дону, 1962.
8. Белозеров С. Е. Пять знаменитых задач древности. История и современная теория. Ростов-на-Дону, 1975.
9. Бугаев Н. В. Числовые тождества, находящиеся в связи со свойствами символа $E$. — Матем. сб., 1866, т. 1, отд. 1, с. 1—162.
10. Бугаев Н. В. Учение о числовых производных. — Матем. сб., 1870, т. 5, отд. 1, с. 1—63; 1872—1873, т. 6, отд. 1, с. 133—180, 201—254, 309—360.
11. Буняковский В. Я. О некоторых случаях интегрируемости в конечном виде дифференциала

$$\frac{x+c_1}{x+c_2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}}$$

так же, как и других аналитических выражений. — Зап. Петерб. акад. наук, 1863, т. 3, прил. № 2.
12. Венков Б. А. К работе «О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм». — В кн.: Вороной Г. Ф. Собр. соч. Т. 2. Киев, 1952, с. 379—385.
13. Вороной Г. Ф. Новые приложения непрерывных параметров в теории положительных квадратичных форм. Собр. соч. Т. 2. Киев, 1952, с. 171—368.
14. Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. СПб., 1896; Полн. собр. соч. Т. 1. Киев, 1952, с. 197—391.
15. Вороной Г. Ф. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм. Полн. собр. соч. Т. 2. Киев, 1952, с. 171—238.
16. Галченкова Р. И., Лумисте Ю. Г., Ожигова Е. П., Погребысский И. Б. Фердинанд Миндинг. Под ред. И. Б. Погребысского. Л., 1970.
17. Гаусс К.-Ф. О связи между числом классов, на которые распадаются тройничные квадратичные формы второй степени, и их определителем. — В кн.: Труды по теории чисел. М., 1959, с. 839—866.
18. Гаусс К.-Ф. Отступление, содержащее исследования о тройничных формах. — В кн.: Труды по теории чисел. М., 1959, с. 367—412.
19. Гаусс К.-Ф. Труды по теории чисел. Под ред. И. М. Виноградова. Коммент. Б. Н. Делоне. Пер. В. Б. Демьянова. М., 1959.
20. Гельфонд А. О. Избранные труды. Под ред. Ю. В. Линника. М., 1973.

21. Гельфонд А. О. К седьмой проблеме Гильберта. — Избр. тр. М., 1973, с. 422—426.
22. Гельфонд А. О. О приближении трансцендентных чисел алгебраическими. — ДАН СССР, 1935, т. 2, с. 177—182.
23. Гельфонд А. О. О седьмой проблеме Гильберта. — ДАН СССР, 1934, т. 2; Избр. тр., М., 1973, с. 48—50.
24. Гельфонд А. О. О седьмой проблеме Гильберта. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1934, т. 7; Избр. тр. М., 1973, с. 51—56.
25. Гельфонд А. О. Теория трансцендентных чисел. — Изв. АН СССР, ОМЕН, 1938, с. 297—299.
26. Гельфонд А. О. Трансцендентные числа. — Тр. Всес. матем. съезда. Т. 1. Л., 1934.
27. Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа. М., 1952.
28. Головинский И. А. К предыстории интерполяционной задачи с кратными узлами. — Ист. и методол. естеств. наук, 1980, вып. XXV, с. 67—74.
29. Дальма А. Эварист Галуа, революционер и математик. Пер. с франц. Ю. С. Родман. Под ред. А. М. Яглома. М., 1960.
30. Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М., 1947.
31. Делоне Б. Н. Герман Минковский. — Успехи матем. наук, 1936, т. 2, с. 32—38.
32. Дьедонне Ж. О прогрессе математики. Пер. с франц. С. С. Петровой. — Ист.-матем. иссл., 1976, вып. 21, с. 9—21.
33. Жуковский Н. Е. Собрание сочинений. Т. 7. М., 1950, с. 165.
34. Золотарев Е. И. Об одном неопределенном уравнении третьей степени. СПб., 1869; Полн. собр. соч. Т. 1. Л., 1931, с. 1—62.
35. Золотарев Е. И. Полное собрание сочинений. Т. 1, 2. Л., 1931, 1932.
36. Иванов И. И. О некоторых вопросах, находящихся в связи со счетом простых чисел. СПб., 1901. (Докт. дисс.).
37. Иванов И. И. Представление чисел в форме $x^2+Ay^2$ (метод Hermite'а), — Зап. Об-ва студентов физ.-мат. факультета Петерб. унив. Вып. 2. СПб., 1885, с. 109—114.
38. Иванов И. И. Теория чисел. Литогр. курс. СПб., 1910.
39. Инфельд Л. Эварист Галуа. М., 1957.
40. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. Пер. с англ. А. М. Полосуева. Под ред. и с дополн. А. О. Гельфонда. М., 1961.
41. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. М., 1937.
42. Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. — В кн.: Ковалевская С. В. Научные работы. Под ред. и с коммент. П. Я. Полубариновой-Кочиной. М., 1948, с. 153—220.
43. Кузнецов В. М. Из истории создания общей теории автоморфных функций. — Ист. и методол. естеств. наук, 1966, вып. V, с. 185—191.
44. Кузьмин Р. О. Жизнь и научная деятельность Егора Ивановича Золотарева. — Успехи матем. наук, 1947, т. 2, вып. 6 (22), с. 21—51.

45. Кузьмин Р. О. Об одном новом классе трансцендентных чисел. — Изв. АН СССР, (7), ОФМН, 1930, 8 : 6, с. 585—597.
46. Лахтин Л. К. Решение алгебраического уравнения 6-й степени общего вида с помощью дифференциальной резольвенты 3-го порядка. — Матем. сб., 1905, т. 22, вып. 2, с. 181—218.
47. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. II изд. М.—Л., 1963.
48. Линник Ю. В. Теория чисел. — В кн.: Математика в СССР за 40 лет. М., 1959, с. 140—142.
49. Математика XIX в. Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М., 1978, с. 137—141.
50. Марков А. А. Доказательство трансцендентности чисел $e$ и $\pi$. (Невозможность квадратуры круга). По статьям Эрмита и Линдемана обработал А. Марков. СПб., 1883.
51. Марков А. А. О бинарных квадратичных формах положительного определителя. СПб., 1880. (Магист. дисс.); Успехи матем. наук., 1948, т. 3, вып. 5, с. 7—51.
52. Марков А. А. О неопределенных тройничных квадратичных формах. — Изв. АН, 1901, т. 14, с. 509—523; Избр. тр. М., 1951, с. 143—163.
53. Марков А. А. О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными. — Изв. АН, (5), 1902, т. 15, с. 97—108.
54. Марков А. А. О нулях целой функции Эрмита и функций Ламе. — Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, (2), 1896, т. 5, с. 74—80.
55. Марков А. А. О трех неопределенных тройничных квадратичных формах. — Изв. АН, (5), 1902, т. 17, с. 109—119.
56. Марков В. А. О положительных квадратичных формах. СПб., 1897.
57. Марков В. А. О числе классов положительных тройничных квадратичных форм данного определителя. — Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, (2), 1893, т. 4, с. 1—59.
58. Матвиевская Г. П. Постулат Бертрана в записных книжках Эйлера. — Ист.-матем. иссл., 1961, вып. 14, с. 285—288.
59. Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла Стилтьеса. — Ист.-матем. иссл., 1963, вып. 15, с. 171—224.
60. Миндинг Ф. Исследования об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными. Пер. с нем. Мюллера. СПб., 1862.
61. Мордухай-Болтовской Д. Д. А. Пуанкаре. Доклад, прочитанный в Обществе естествоиспытателей при Варшавском университете 22 сентября 1912 г. — Протоколы Об-ва естествоисп. Варш. ун-та, (1912) 1913, № 1—2, с. 27—80.
62. Налбандян М. Б. Теория эллиптических функций и ее приложения в трудах Е. И. Золотарева. — Ист.-матем. иссл., 1965, вып. 16, с. 191—206.
63. Новы Любош. К вопросу о возникновении систематических исследований по теории групп. — Ист.-матем. иссл., 1966, вып. 17, с. 31—56.
64. Ожигова Е. П. Александр Николаевич Коркин. Л., 1968.
65. Ожигова Е. П. Егор Иванович Золотарев. Л., 1966.
66. Ожигова Е. П. Развитие теории чисел в России. Л., 1972.

67. Ожигова Е. П. Переписка Стилтьеса с А. А. Марковым. — Вопр. ист. естеств. и техн., 1977, вып. 56—57, с. 43—46.
68. О квадратуре круга. С приложением истории вопроса, составленной Ф. Рудио. М.—Л., 1934.
69. Остроградский М. В. Об интегрировании рациональных дробей. — Bull. Acad. sci. Pétersb., Cl. phys.-mathém., 1844—1845; Полн. собр. соч. Т. 3. Киев, 1961, с. 180—214.
70. Письма Карла Вейерштрасса к С. В. Ковалевской. 1871—1891. Отв. ред. и составитель П. Я. Полубаринова-Кочина. М., 1973.
71. Покровский П. М. О преобразованиях ультраэллиптических интегралов и функций первого класса. — Матем. сб., 1891, т. 15, вып. 3, с. 397—572.
72. Полищук Е. М. Вито Вольтерра. Л., 1977.
73. Полищук Е. М. Эмиль Борель. Л., 1980.
74. Полубаринова-Кочина П. Я. Письма Ш. Эрмита к С. В. Ковалевской. — Тр. ИИЕТ, 1957, т. 19, с. 650—690.
75. Поссе К. А. Трансцендентность чисел $e$ и $\pi$. — Зап. Технол. ин-та. СПб., 1893, с. 1—12.
76. Пуанкаре А. Избранные труды. Под ред. Н. Н. Боголюбова, В. И. Арнольда, И. Б. Погребысского Т. 1.—3. М., 1971—1974.
77. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.—Л., 1947.
78. Рид К. Гильберт. М., 1977.
79. Риман Б. О числе простых чисел, не превосходящих данной величины (1859). — В кн.: Риман Б. Сочинения. М.—Л., 1948, с. 216—224.
80. Риман Б. Сочинения. М.—Л., 1948.
81. Русско-французские научные связи. Публ. А. Т. Григорьяна и А. П. Юшкевича при участии Т. Н. Кладо и Ю. Х. Копелевич. Л., 1968.
82. Проблемы Гильберта. Под общ. ред. П. С. Александрова. М., 1969.
83. Серре И.-А. Курс высшей алгебры. Пер. с франц. Ю. П. Россевича. Под ред. Л. А. Левенстерна. Ч. 1, 2. II русск. изд. М.—СПб.
84. Сонин Н. Я. О бернуллиевых полиномах и их приложениях. — Варш. унив. изв., 1888, № 3—4, с. 1—76.
85. Сонин Н. Я. Об одном определенном интеграле, содержащем числовую функцию $[x]$. — Варш. унив. изв., 1885, № 3, с. 1—24.
86. Сонин Н. Я. Об остаточных членах формул Эйлера и Стирлинга. — Тр. Варш. об-ва естествоисп., 1889, № 1, с. 2—4.
87. Сонин Н. Я. Об остатке формулы Тэлёра. — Варш. унив. изв., 1892, № 5, с. 1—17; Тр. Варш. об-ва естествоисп., 1892, т. 2, с. 1—17.
88. Сонин Н. Я. О прерывной функции $[x]$ и ее применениях. — Варш. унив. изв., 1891, № 7—8, с. 1—78.
89. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. — В кн.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел. Минск, 1974, с. 178—198.
90. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.

91. Стеклов В. А. Анри Пуанкаре. — Журн. Мин. нар. просв., нов. сер., 1913, ч. 43, II отд., с. 173—193.
92. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. IV изд. М.—Л., 1941.
93. Тяпкин А., Шибанов А. Пуанкаре. М., 1979.
94. Успенский Я. В. Арифметическое доказательство соотношений Кронекера между числами классов бинарных квадратичных форм. — Матем. сб., 1913, т. 29, вып. 1, с. 26—52.
95. Успенский Я. В. Некоторые приложения непрерывных параметров в теории чисел. Магист. дисс. СПб., 1910.
96. Фельдман Н. И., Шидловский А. Б. Развитие и современное состояние теории трансцендентных чисел. — Успехи матем. наук, 1967, т. 2, вып. 3, с. 3—81.
97. Чебышев П. Л. Заметка о некоторых рядах (1851). Полн. собр. соч. Т. 1. М.—Л., 1944, с. 229—236.
98. Чебышев П. Л. Извлечение из мемуара о непрерывных дробях (1855). Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 101—102.
99. Чебышев П. Л. Об интегрировании дифференциалов, содержащих квадратный корень из многочлена 3-й или 4-й степени (1857). Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 71—98.
100. Чебышев П. Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций. Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 147—236.
101. Чебышев П. Л. Об интерполировании. — Зап. Акад. наук, 1884, т. 4, прил. № 5; Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 357—374.
102. Чебышев П. Л. Об интерполировании величин равноотстоящих. — Зап. Акад. наук, 1875, т. 25, прил. № 5; Полн. собр. соч. Т. 3. М., 1947, с. 66—87.
103. Чебышев П. Л. Об интерполировании по способу наименьших квадратов (1859). Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 314—334.
104. Чебышев П. Л. Об одной формуле анализа (1855). Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 99—100.
105. Чебышев П. Л. Об одном арифметическом вопросе. — Зап. Акад. наук, 1865, т. 10, Прил. № 4; Полн. собр. соч. Т. 1. М.—Л., 1944, с. 237—275.
106. Чебышев П. Л. Об одном ряде, доставляющем предельные величины интегралов. — Зап. Акад. наук, 1883, т. 47, прил. № 4; Полн. собр. соч. Т. 3. М., 1947, с. 157—169.
107. Чебышев П. Л. Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины. — В кн.: Теория сравнений. СПб., 1849; Mém. prés. à l'Acad. sci. Pétersb., 1851, t. 6, p. 141—157; Полн. собр. соч. Т. 1. М.—Л., 1944, с. 173—190.
108. Чебышев П. Л. О квадратичных формах (1851). Полн. собр. соч. Т. 1. М.—Л., 1944, с. 208—228.
109. Чебышев П. Л. О квадратурах (1874). Полн. собр. соч. Т. 3. М. 1947, с. 49—62.
110. Чебышев. П Л. О непрерывных дробях. — Уч. зап. АН, 1855, т. 3, с. 636—664; J. de mathém., (2), 1858, t. 3, p. 289—323; Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 103—126.
111. Чебышев П. Л. О разложении функций одной переменной. — Bull. Cl. mathém.-phys. Acad. sci. Pétersb., (6), 1859,

t. 1, Nr. 15, p. 193—200; Полн. собр. соч. Т. 2. М. 1947, с. 335—341.
112. Чебышев П. Л. Разложение в ряды при помощи непрерывных дробей. (Письмо к Н. Д. Брашману). — J. de mathém., (2), 1865, t. 10, p. 153—158; Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 412—414.
113. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 1—5. М., 1944—1951.
114. Чебышев П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. — Mém. prés. Acad. sci. Pétersb. par. divers savants, 1854, t. 7, p. 539—568; Полн. собр. соч. Т. 2. М., 1947, с. 23—51.
115. Шидловский А. В. Об арифметических свойствах значений аналитических функций. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, CXXXII (Тр. Международной конференции по теории чисел. Москва, 14—18 сентября 1971 г.), М., 1973, с. 169—202.
116. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 1—3. М., 1956—1958.
117. Abel N.-H. Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichung von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen. — J. für Mathem., 1826, Bd. I, S. 65—84; Oeuvres compl. T. I. Christiania, 1881, p. 66—86.
118. Abel N.-H. Démonstration de l'impossibilité de la résolution des équations algébriques d'un degré supérieur au 4-ème. — Bull. mathém., phys. et chim., rédigé par MM. Sturm et Gaultier de Claubry (I section du Bull. de Ferussac), 1826, t. 6, p. 347—354; Oeuvres compl. T. I. Christiania, 1881, p. 87—96.
119. Abel N.-H. Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue des fonctions transcendantes. — Mém. prés. par divers savants à l'Acad. sci. Paris, 1841, т. VII, N 114; Oeuvres compl. T. I. Christiania, 1881, p. 145—211.
120. Abel N.-H. Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. — J. für Mathem., 1829, Bd. 4, S. 236—277, 309—348; Oeuvres compl. T. I. Christiania, 1881, p. 518—617.
121. Abel N.-H. Recherches sur les fonctions elliptiques. — J. für Mathem., 1827, Bd. 2, S. 101—181; Oeuvres compl. T. I. Christiania, 1881, p. 263—388.
122. Abel N.-H. Théorie des transcendantes elliptiques. — Oeuvres compl. T. II. Christiania, 1881, p. 87—188.
123. Abrégé histoire des mathématiques. 1700—1900. Directeur éd. J. Dieudonné. Avec la collaboration de P. Dugac, W.-J. et F. Ellison, J. Guerindon etc. T. I—II. Paris, 1978.
124. Appell P., Lacour E. Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications. Paris, 1897.
125. Appell P., Goursat E. Théorie des fonctions algébriques. T. I—II. Paris, 1913, 1929.
126. Appell P. Principes de la théorie des fonctions elliptiques. Paris, 1922.
127. Appell P. Henri Poincaré. Paris, 1925.
128. Arndt P.-F. Zur Theorie der binären kubischen Formen. — J. für Mathem., 1857, Bd. 53, S. 309—321.
129. Bachmann P. Arithmetik des quadratischer Formen. Leipzig, 1898.

130. Bachmann P. Untersuchungen über quadratische Formen. — J. für Mathem., 1873, Bd. 76, S. 331—341.
131. Bertrand J. «La vie d'Evariste Galois» par P. Dupuy. — J. des savants. Paris, 1899, juillet, p. 389—400.
132. Bertrand J. Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. T. I—II. Paris, 1864, 1870.
133. Bertrand J. Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction. — J. École polytechn., 1845, t. 18, cah. 30, p. 123—140.
134. Bessel F.-W. Untersuchungen über die Bahn der Olbers'schen Cometen. — Abhandl. Berlin. Acad. Wissensch., 1812—1813. Mathem. Kl. Berlin, 1816, S. 119—160.
135. Bessel F.-W. Analytische Auflösung der Keplerschen Aufgabe.—Abhandl. Berlin. Acad. Wissensch., 1816—1817. Mathem. Kl., Berlin, 1819, S. 49—55.
136. Borchardt K.-W. Développement sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes. — J. de mathém., 1847, t. 12, p 50—67.
137. Bouniakovski V. Démonstration de quelques propositions relatives à la fonctions numérique $E(x)$. — Bull. Acad. sci. Pétersb., 1883, t. 28, p. 257—267; t. 29, p. 250—272, 503—520.
138. Bouniakovski V. Démonstration d'un théorème relatif à la fonction $E(x)$. — C. R. Paris, 1882, t. 94, p. 1459—1491.
139. Bouniakovski V. Note sur quelques points de l'analyse indéterminée. — Bull. Acad. sci. Pétersb., (6), sci. mathém. et phys., 1848, t. 6, p. 196—208.
140. Bouniakovski V. Remarque à l'occasion du mémoire de M. Hermite. Sur une formule de M. Euler. — Bull. Acad. sci. Pétersb., 1880, t. 26, p. 188—190.
141. Brill A., Noether M. Die Entwicklung der Theorie des algebraischen Functionen in alterer und neuerer Zeit. — Jahresber. der Deutsche Mathem. Verein., 1892—1893, Bd. 3, S. 111—566.
142. Brioschi F. Équation différentielle Lamé—Hermite. — Bull. Acad. sci. Pétersb., 1894, t. 35, p. 449—455.
143. Brioschi F. Opere matematiche. T. I, II. Milano, 1901.
144. Brioschi F. Sul metodo di Kronecker per la risoluzione della equazione di quinto grado. — Atti Ist. Lombardo, 1858, t. 1, p. 275.
145. Briot Ch., Bouquet J.-C. Théorie des fonctions elliptiques. Paris, 1859; II éd., Paris, 1875.
146. Brocard H. Sur la frequence et la totalité des nombres premiers. — Nouv. Corresp. mathém., Paris, 1879—1880, p. 5—6.
147. Bryan G.-H. Joseph Bertrand. — Nature. London — New York, 1900, v. 61, avril, p. 614—616.
148. Broglie Louis de. La vie et l'oeuvre d'Emile Picard. Lecture faite en la séance annuelle de l'Académie des sciences 21 Décembre 1942. Paris, 1942.
149. Callot J.-P. Histoire de l'École Polytechnique, ses legendes, ses traditions, sa gloire. Paris, 1958.
150. Cantor G. Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen

algebraischen Zahlen. — J. für Mathem., 1874, Bd. 77, S. 258—262.
151. C a u c h y Au.-L. Applications diverses des principes établies dans les précedents mémoires. — C. R., 1845, t. 21, p. 1356—1369.
152. C a u c h y Au.-L. Application du calcul des résidus à l'intégration des équations différentielles linéaires et à coefficients constants. — In: Exercices de mathém. Paris, 1826, p. 202—204.
153. C a u c h y Au.-L. Application du calcul des résidus à l'intégration des équations différentielles linéaires et à coefficients variables. — In: Exercices de mathém. Paris, 1826, p. 262—264.
154. C a u c h y Au.-L. Cours d'analyse de l'École royale polytechniqne. T. I. Paris, 1821.
155. C a u c h y Au.-L. Mémoire sur la réductioн des fonctions transitives aux fonctions intransitives. — C. R., 1845, t. 21, p. 1199——1201.
156. Cauchy Au.-L. Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquerir, lorsqu'on y permute de toutes des manières possibles les quantités qu'elle renferme. — J. École polytechn., 1815, t. 10, cah. 17, p 1—28.
157. C a u c h y Au.-L. Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires. Paris, 1825; Bull. sci. mathém. et astron., 1874, t. 7, p. 265—304; 1875, t. 8, p. 43—55, 148—159.
158. C a u c h y Au.-L. Mémoire sur diverses propriétés remarquables des substitutions regulières et irregulières. — C. R., 1845, t. 21, p. 835—852, 895—902, 931—933, 972—987, 1025—1041.
159. C a u c h y Au.-L. Mémoire sur les fonctions de cinq ou six variables et specialement celles qui sont doublement transitives. — C. R., 1845, t. 21, p. 1401—1409.
160. C a u c h y Au.-L. Mémoire sur diverses propriétés des systèmes de substitutions et particulièrement de ceux qui sont permutables entre eux. — C. R., 1845, t. 21, p. 1238—1255.
161. C a u c h y Au.-L. Méthodes nouvelles pour la détermination des orbites des corps célèstes et, en particulier, des comètes. — C. R., 1846, t. 23, p. 887—892.
162. C a u c h y Au.-L. Méthode nouvelle pour la détermination des mouvements des corps célèstes. — C. R., 1851, t. 33, p. 709.
163. C a u c h y Au.-L. Note relative aux observations présentés à L'Académie par Mr. Liouville. — C. R., 1851, t. 32, p. 452—454.
164. C a u c h y Au.-L. Note sur l'application des nouvelles formules à l'astronomie. — C. R., 1844, t. 19, p. 1228; 1845, t. 20, p. 996—999.
165. C a u c h y Au.-L. Rapport sur un mémoire, présenté à L'Académie par M. Hermite et relatif aux fonctions à double période. — C. R., 1851, t. 32, p. 442—450; H e r m i t e Ch. Oeurves. T. I. Paris, 1905, p. 75—83.
166. C a u c h y Au.-L. Mémoire sur la détermination des orbites des planètes et comètes. — C. R., 1847, t. 25, p. 401—413, 475—478, 531—536.
167. C a u c h y Au.-L. Sur l'application de la nouvelle formule d'interpolation à la détermination des orbites que décrivent les corps célèstes. — C. R., 1846, t. 23, p. 956—959.

168. Cauchy Au.-L. Sur le nombre des valeurs égales ou inégales que peut acquerir une fonction de $n$ variables indépendantes, quand on permute ces variables entre elles d'une manière quelconque. — C. R., 1845, t. 21, p. 593—607, 668—679, 727—742, 779—797.
169. Cauchy Au.-L. Sur quelques formules relatives à la détermination du résidu intégral d'une fonction donnée. — In: Exercices mathém. T. I. Paris, 1826, p. 133—139.
170. Cauchy Au.-L. Note sur les formules relatives à la détermination des orbites que décrivent des corps célèstes. — C. R., 1846, t. 23, p. 1002—1014.
171. Cayley A. A memoir on the automorphic linear transformation of a bipartite quadratic function. — Phil. Trans., 1858, v. 148, p. 39—46.
172. Charve L. Note sur la réduction des formes quadratiques positives quaternaires. — Ann. École norm. sup., 1882, t. 11, p. 119—134.
173. Chauvin V. Histoire des lycées et collèges de Paris. Paris, 1866.
174. Christoffel E. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Berlin, 1910.
175. Clausen Th. Theorem. — Astron. Nachrichten, 1840, Bd. 17, S. 351—352.
176. Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiques, tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Procès-verbaux et communications, publiés par E. Duporcq, ingénieur des Télégraphes, secrétaire général du Congrès. Paris, 1902.
177. Cosserat E. Notice sur les travaux scientifiques de Thomas-Jean Stieltjes. — Ann. Fac. sci. Toulouse, 1895, t. 9, p. 3—64.
178. Darboux G. Éloge historique d'Henri Poincaré. — Mém. Acad. sci. Inst. France, (II), 1914, t. 52, p. LXXXI—CXLVIII.
179. Darboux G. Éloges académiques et discours. Paris, 1912.
180. Darboux G. Leçons sur la théorie des surfaces. T. I—III. Paris, 1889—1894.
181. Darboux G. Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et premier degré. — Bull. sci. mathém. et astron., (2), 1878, t. 2, p. 60—96.
182. Dickson L.-E. History of the theory of numbers. T. I—III. New York, 1934.
183. Du Bois-Reymond P. Die allgemeine Functionentheorie. I Th. Tübingen, 1882.
184. Du Bois-Reymond P. Grundlagen der Erkenntniss in der exacten Wissenschaften. Tübingen, 1890.
185. Du Bois-Reymond P. Sur les formules de représentation des fonctions. — C. R., 1881, t. 92, p. 915—918, 962—964.
186. Du Bois-Reymond P. Théorie générale des fonctions. Trad. par G. Milaud et A. Girot. Paris, 1887.
187. Du Bois-Reymond P. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen. — J. für Mathem., 1875, Bd. 79, S. 21—37.
188. Du Bois-Reymond P. Zur Geschichte der trigonometrische Reihen. Eine Entgegnung. Tübingen, 1880.

189. D u p u y P. La vie d'Evariste Galois. — Ann. École norm. sup., (3), 1896, t. 13, p. 197—266.
190. E i s e n s t e i n G. Mathematische Abhandlungen, besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Functionen. Mit einer Vorrede von Prof. Dr. Gauss. Berlin, 1847; Mathematische Werke. Bd. I, II. Reimprim. New York, 1975.
191. E i s e n s t e i n G. Beiträge zur der elliptischen Functionen. — J. für Mathem., 1845, Bd. 30, S. 185—214; 1846, Bd. 32, S. 59—70; 1847, Bd. 35, S. 137—274.
192. E n c y c l o p ä d i e der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Bd. I. Arithmetik und Algebra. Leipzig, 1898.
193. E n c y c l o p é d i e des sciences mathématiques. T. I, v. 1. Paris, 1908.
194. E n n e p e r A. Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Halle, 1890.
195. E u l e r J.-A. Lettre de J.-A. Euler à Condorcet. — Bull. sci. mathém. et astron., (2), 1879, t. 3, p. 227—228.
196. E u l e r L. Demonstratio theoremati Fermatiani omnem numerum sive integram, sive fractium esse summam quatuor paucioruMque quadratorum. — Novi Comment. Acad. Petropol., 1760, t. 5, p. 13—58. E 242.
197. E u l e r L. De motu corporis ad duo centra virium fixa attractio. — Novi Comment. Acad. sci. Petropol., 1767, t. 11, p. 152—184. E 328.
198. E u l e r L. Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angulorum multipliorum procedente quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimus. — Nova Acta Acad. sci. Petropol., (1777) 1798, t. 11, p. 94—113. E 703.
199. E u l e r L. Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile. — Novi Comment. Acad. sci. Petropolit., 1771, t. 15, p. 75—106. E 407.
200. F r i c k e R. Elliptische Functionen. — Encyclop. der mathem. Wissensch., II, B 3, S. 177—345; B 4, S. 351—466; B 7, S. 609—870.
201. F u c h s L. Gesammelte mathematische Werke. Hrsg. Fuchs und Schlesinger. I—III. Berlin, 1904—1909.
202. F u c h s L. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. — J. für Mathem., 1866, Bd. 66, S. 121—160; 1868, Bd. 68, S. 354—385.
203. F u s s N. Lettre de Fuss à Condorcet. — Bull. sci. mathém. et astron., (II), 1879, t. 3, p. 227—228.
204. G a l o i s E. Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations. — Bull. sci. mathém., astron., phys., chim., 1830, t. 13, cah. d'avril, p. 271.
205. G a l o i s E. Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations. — J. de mathém., 1846, t. XI, p. 395.
206. G a l o i s E. Écrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois. Éd. J.-R. Azra. Préface de J. Dieudonné. Paris, 1962.
207. G a l o i s E. Oeuvres mathématiques d'E. Galois, éd. par J. Liouville. — J. de mathém., 1846, t. XI, p. 381—444. Avertissement par J. Liouville, p. 381—384.
208. G a u s s C.-F. Anzeige. — Werke. Bd. II. Göttingen, 1863, S. 188—196.

209. G a u s s C.-F. Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae, 1801.
210. G a u s s C.-F. Recherches arithmétiques. Trad. par A.-G.-M. Poullet-Delisle. Paris, 1807.
211. G a u s s C.-F. Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. — Comment. Soc. Reg. sci. Götting. recent., (1814) 1816, v. 3, Nr. 18, Cl. mathem.; Werke. Bd. III. 1866, S. 163—196.
212. G a u s s C.-F. Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum methodo nova tractata. — Comment. Soc. Reg. sci. Götting. recent., 1813, v. 2; Werke. Bd. V. Göttingen, 1867, S. 1—22.
213. G a u s s C.-F. Werke. Bd. I—XII. Göttingen, 1863—1933.
214. G ö p e l A. Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis. — J. für Mathem., 1847, Bd. 35, S. 277—312.
215. G o u r s a t E. Cours d'analyse mathématique. Paris, t. I, 1927; t. II, V éd, 1929; t. III, IV éd., 1927.
216. G o r d a n P. Transcendenz von $e$ und $\pi$. — Mathem. Annal., 1893, Bd. 43, S. 222—224.
217. H a d a m a r d J. L'oeuvre mathématique de Poincaré. — Acta mathem., 1921, t. 38, p. 203—287.
218. H a l p h e n G.-H. Traité des fonctions elliptiques et leurs applications. T. I—III. Paris, 1886—1889.
219. H a n c o c k H. Development of the Minkovski Geometry of numbers. Berlin—New, York, 1939.
220. H e i n e E. Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin, 1861; II Aufl.: Bd. I, 1872, Bd. II, 1881.
221. H i l b e r t D. Sur les problèmes futures des mathématiques. Trad. par M. Laugel. — In: Compte rendu du deuxième Congrès intern. des mathématiciens. Paris, 1902, p. 115—130.
222. H i l b e r t D. Über die Transcendenz der Zahlen $e$ und $\pi$. — Mathem. Annal., 1893, Bd. 43, S. 216—219.
223. H i l b e r t D. Vorwort. — In: M i n k o w s k i H. Gesammelte Abhandlungen. Bd. I. Leipzig—Berlin, 1911, S. V—XXXI.
224. H u r w i t z A. Beweis der Transcendenz der Zahl $e$. — Mathem. Annal., 1893, Bd. 43, S. 220—221.
225. I v o r y J. On the attractions of an extensive class of spheroids. — Phil. Trans., 1812, part I, p. 46—82.
226. I v o r y J. On the figure requisite to maintain the equilibrium of a homogeneous fluid mass that revolves upon an axis. — Phil. Trans., 1824, part I, p. 80—150.
227. I v o r y J., J a c o b i C.-G. Sur le développement de $(1-2xz+z^2)^{-1/2}$. — J. de mathém., 1837, t. 2, p. 105—106.
228. J a c o b i C.-G. De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur. — J. für Mathem., 1834, Bd. 13, S. 55—78; Gesammelte Werke. Bd. II. Berlin, 1882, S. 23—50.
229. J a c o b i C.-G. Extrait d'une lettre à M. Hermite. — J. de mathém., 1846, t. XI, p. 97—103.
230. J a c o b i C.-G. Extrait d'une lettre à M. Liouville. — J. de mathém., 1846, t. XI, p. 341—342.

231. J a c o b i C.-G.-J. Gesammelte Werke. Bd. I—VII. Berlin, 1881—1891; Bd. Supplem. Berlin, 1882.
232. J a c o b i C.-G. Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Regiomonti, 1829.
233. J a c o b i C.-G.-J. Mathematische Werke. Berlin: Bd. I, 1846,; Bd. II, 1851; Bd. III, 1881.
234. J a c o b i C.-G.-J. Notiz über Göpel. — Gesammelte Werke. Bd. II. Berlin, 1882, S. 145—152.
235. J a c o b i C.-G.-J. Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie. — J. für Mathem., 1828, Bd. 3, S. 376—389; Gesammelte Werke. Bd. I. Berlin, 1881, S. 257.
236. J a c o b i C.-G.-J. Über die Reduction der quadratische Formen auf die kleinste Anzahl Glieder. — Monatsber. Berlin. Acad. Wissensch., 1848, November, S. 414—417; Gesammelte Werke. Bd. VI. Berlin, 1891, S. 380—384.
237. J a c o b i C.-G.-J. Über eine besondere Gattung algebraischer Funcctionen, die aus der Entwicklung der Function $(1-2xz+ +z^2)^{-1/2}$ entstehen. — J. für Mathem., 1826, Bd. 2, S. 223—226; Gesammelte Werke. Bd. VI. Berlin, 1891, S. 21—25.
238. J a c o b i C.-G.-J. Über die annähernde Bestimmung sehr entfernter Glieder in der Entwicklung der elliptischen Coordinaten. — Astron. Nachrichten, 1849, Bd. 28, S. 257—270.
239. J o r d a n C. Cours d'analyse de l'École polytechnique. T. I, II. Paris, 1823.
240. J o r d a n C. Mémoire sur la résolution algébrique des équations. — J. de mathém., 1867, t. 12, p. 109—157.
241. J o r d a n C. Sur la série de Fourier. — C. R., 1881, t. 92, p. 228—230.
242. K e l l e r O.-H. Geometrie der Zahlen. — Encyklop. mathem. Wissensch., II Aufl., Bd. I, H. 11, Teil III, 1959. Algebra und Zahlentheorie.
243. K l e i n F. Über den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung. — Mathem. Annal., 1892, Bd. 40, S. 125—129.
244. K l e i n F. Vorlesungen über die Theorie der Modulfunctionen. Hrsg. von R. Fricke. Bd. I, II. Berlin, 1902.
245. K o r k i n e A. Étude des multiplicateurs des équations différentielles du premier ordre. Pétersb., 1902.
246. K o r k i n e A. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. — Mathem. Annal., 1896, Bd. 48, S. 317—364.
247. K o r k i n e A. Sur un théorème de M. Tchébychef. — C. R., 1883, t. 96, p. 326—327.
248. K o r k i n e A., Z o l o t a r e f f G. Sur les formes quadratiques positives quaternaires. — Mathem. Annal., 1872, Bd. 5, S. 581—583; З о л о т а р е в Е. И. Полн. собр. соч. Т. I. Л., 1931, с. 66—68.
249. K o r k i n e A., Z o l o t a r e f f G. Sur les formes quadratiques. — Mathem. Annal., 1873, Bd. 6, S. 366—389; З о л о т а р е в Е. И. Полн. собр. соч. Т. I. Л., 1931, с. 109—137.
250. K o r k i n e A., Z o l o t a r e f f G. Sur les formes quadratiques positives. — Mathem. Annal., 1877, Bd. 11, S. 242—292;

Золотарев Е. И. Полн. собр. соч. Т. I. Л., 1931, с. 375—434.
251. Krazer A., Wirtinger W. Abelsche Functionen und allgemeine Thetafunctionen. — Encyclop. mathem. Wissensch., Bd. II, B 7, H. 4—5. Leipzig, 1915.
252. Kronecker L. Beweis der Puiseux'schen Satzes. — Sitzungsber. Berl. Acad. Wissensch., 1884, S. 543—548; Werke. Bd. IV. Berlin, 1930, S. 217—226.
253. Kronecker L. Paul du Bois-Reymond. — J. für Mathem., 1889, Bd. 104, S. 352—354; Werke. Bd. V. Berlin, 1930, S. 477—482.
254. Kronecker L. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Extrait d'une lettre à M. Hermite. — C. R., 1858, t. 46, part I, p. 1150—1152; Werke. Bd. IV. Berlin—Leipzig, 1929, S. 43—48.
255. Kronecker L. Über complexe Einheiten. — J. für Mathem., 1857, Bd. 53, S. 176—181; Werke. Bd. I. Berlin, 1895, S. 100—118.
256. Kronecker L. Über die Anzahl der verschiedenen Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. — J. für Mathem., 1860, Bd. 57, S. 248—255; Werke. Bd. IV. Leipzig—Berlin, S. 185—196.
257. Lacroix S.-F. Cours de mathématiques. T. I—X. Paris, 1797—1832.
258. Lacroix S.-F. Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral. I éd. Paris, 1797; V éd., 1837.
259. Lacroix S.-F. Traité élémentaire du calcul différentiel. Éd. VI. Paris, 1863.
260. Lagrange J.-L. Additions aux Éléments d'Algèbre d'Euler. — Oeuvres. T. 7. Paris, 1877, p. 45—56, 61—74.
261. Lagrange J.-L. Démonstration d'un théorème d'arithmétique. — Nouv. mém. Acad. sci. Berlin, 1772, p. 123—133; Oeuvres. T. 3. Paris, 1859, p. 189—201.
262. Lagrange J.-L. Méchanique analytique. III éd. publiée par J. Bertrand. Paris, 1853; Oeuvres. T. XI, XII. Paris, 1888, 1889.
263. Lagrange J.-L. Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries. — Mém. Acad. sci. Berlin, 1770, t. 24; Oeuvres. T. III. Paris, 1869, p. 5—73.
264. Lagrange J.-L. Solution d'un problème d'arithmétique. — Miscell. Taurinensia, 1766—1769, t. 4; Oeuvres. T. I. Paris, 1867, p. 669—731.
265. Lagrange J.-L. Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques. — Nouv. Mém. Acad. sci. Berlin, 1773—1775; Oeuvres. T. III. Paris, 1869, p. 619—660.
266. Lagrange J.-L. Sur la solution des équations numériques de tous degrés. Paris, 1798; III éd., 1826; Oeuvres. T. II. Paris, 1868, p. 539—580. Addition, p. 581—654.
267. Lagrange J.-L. Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré. — Mém. Acad. sci. Berlin, 1769, Bd. 23; Oeuvres. T. II. Paris, 1868, p. 377—535.
268. Lagrange J.-L. Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel. Paris, 1797; II éd., 1843.

269. Laguerre E.-N. Sur le calcul des systèmes linéaires. — J. École polytechn., 1867, t. 25, cah. 42, p. 215—264. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.
270. Lamé G. Leçons sur les fonctions du genre zéro et du genre un. — C. R., 1882, t. 95, p. 828—831.
271. Lamé G. Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothèrmes. T. I. Paris, 1857.
272. Lamé G. Mémoire sur les surfaces isothèrmes dans les corps solides homogènes en équilibre de température. — J. de mathém., 1837, t. 2, p. 147—183.
273. Lamé G. Sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres, et principalement dans le prisme triangulaire régulier. — J. École polytechn., 1833, t. 14, cah. 22, p. 194—251.
274. Lang S. Introduction to transcendental numbers. N. Y., 1965; Ленг С. Введение в теорию трансцендентных чисел. М., 1970.
275. Laplace P.-S. Mécanique célèste. Oeuvres. T. I—V. Paris, 1878—1882.
276. Laplace P.-S. Du développement en série des attractions des sphéroides quelconques. Oeuvres. T. X. Paris, 1893, p. 361—370.
277. Laplace P.-S. Théorie des attractions des sphéroïdes et la figure des planètes. — Hist. Acad. sci. Paris, (1782) 1785, p. 45, 113—196.
278. Lebon E. Gaston Darboux. Paris, 1913.
279. Lebon E. Henri Poincaré. Paris, 1912.
280. Lebon E. Paul Appell. Paris, 1910.
281. Legendre A.-M. Éléments de géométrie. Paris, 1794; 12 éd., 1823; Лежандр А. М. Основания геометрии и тригонометрии. СПб., 1837.
282. Legendre A.-M. Exercices du calcul intégral. T. I—III. Paris, 1811—1819.
283. Legendre A.-M. Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes. — Mém. prés. par divers savans, (1778) 1785, t. X, p. 411—434; Extrait, p. XIV—XV.
284. Legendre A.-M. Recherches sur la figure des planètes. — Hist. Acad. sci. Paris, Mém. mathém. et phys., (1784) 1787, p. 370—389.
285. Legendre A.-M. Théorie des nombres. III éd. T. I, II. Paris, 1830.
286. Legendre A.-M. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes. T. I. Paris, 1825, p. 539—556.
287. Legendre A.-M. Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes. T. I—III. Paris, 1825—1828.
288. Lejeune-Dirichlet P.-G. Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres.-J. für Mathem., 1839, Bd. 19, S. 324—369; J. für Mathem., 1840, Bd. 21, S. 1—12, 134—155; Werke. Bd. I. Berlin, 1889, S. 411—496.
289. Lejeune-Dirichlet P.-G. Sur la théorie des nombres. — J. de mathém., (I), 1840, p. 72—74; Werke. Bd. I. Berlin, 1889, S. 619—623.
290. Lejeune-Dirichlet P.-G. Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie. — Abhandl. K.

Preuss. Acad. Wissensch., 1849, S. 69—83; Werke. Bd. II. Berlin, S. 51—66.
291. L e j e u n e - D i r i c h l e t P.-G. Über die Reduction des positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. — Bericht über die Verhandl. K. Preuss. Acad. Wissensch., 1848, S. 285—288; Werke. Bd. II. Berlin, 1897, S. 23—48; J. für Mathem., 1850, Bd. 40, S. 209—227.
292. L e j e u n e - D i r i c h l e t P.-G. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen aus die Theorie der Zahlen. — Monatsber. Acad. Wissensch. Berlin, 1842, S. 93—95; Werke. Bd. I. Berlin, 1889, S. 633—638.
293. L e j e u n e - D i r i c h l e t P.-G. Vorlesungen über Zahlentheorie. Hrsg. von R. Dedekind. Braunschweig, 1863; II Aufl., 1871; III Aufl., 1879; IV Aufl., 1894.
294. L e j e u n e - D i r i c h l e t P.-G. Zur Theorie des complexen Einheiten. — Monatsber. Acad. Wissensch. Berlin, 1846, S. 103—107; Werke. Bd. I. Berlin, 1889, S. 639—644.
295. L e V e r r i e r U.-J.-J. Comparaison des observations de la nouvelle planète avec la théorie déduite des pérturbations d'Uranus. — C. R., 1846, t. 23, p. 741; Note. Ibid., p. 799—800.
296. L e V e r r i e r U.-J.-J. Développements sur plusieurs points de la théorie des perturbations des planètes. Paris. Nr. 1, 1841, p. 1—29; Nr. 2, 1842, p. 31—62; Nr. 3, 1842, p. 63—94.
297. L e V e r r i e r U.-J.-J. Mémoire sur la détermination des inégalités séculaires des planètes, présenté à l'Académie 14. Décembre 1840. — Connaissance des Temps, (1844) 1841, p. 28—110. Addition.
298. L e V e r r i e r U.-J.-J. Présentation des deux premiers feuilles du travail complet sur l'existence et la place d'une nouvelle planète, imprimé dans la Connaissance des Temps pour 1846. — C. R., 1846, t. 23, p. 799—800.
299. L e V e r r i e r U.-J.-J. Recherches sur les mouvement de la planète Herschel. — C. R., 1845, t. 21, p. 1050; 1846, t. 22, p. 907; t. 23, p. 428, 657.
300. L e V e r r i e r U.-J.-J. Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus. Détermination de sa masse,de son orbite, et de sa position actuelle. — C. R., 1846, t. 23, p. 657—659.
301. L i b r i G. Histoire des sciences mathématiques en Italie. T. I—IV. Paris, 1838.
302. L i n d e m a n n F. Von 70. Geburstag. — Jahresber. Deutsch. Mathem. Verein., 1923, Bd. 32, Abt. II, H. 1—8, S. 21—30.
303. L i n d e m a n n F. Sur le rapport de la circonference au diamètre. — C. R., 1882, t. 95, part. II, p. 72—74.
304. L i n d e m a n n F. Über die Zahl $\pi$. — Mathem. Annal., 1882, Bd. 20, S. 213—225.
305. L i o u v i l l e J. Avertissement. — J. de mathém., 1846, t. XI, p. 382—384.
306. L i o u v i l l e J. Leçons sur les fonctions doublement périodiques. — J. für Mathem., 1880, Bd. 88, S. 277—310.
307. L i o u v i l l e J. Note. — C. R., 1843, t. 17, p. 448—449.
308. L i o u v i l l e J. Note sur le développement de $(1-2xz+ +z^2)^{-1/2}$. — J. de mathém., 1837, t. 2, p. 135—139.

309. L i o u v i l l e J. Rapport sur un mémoire de Mr. Hermite relatif à la division des fonctions abeliennes ou ultraelliptiques. — C. R., 1843, t. 17, p. 295.
310. L i o u v i l l e J. Remarques de M. Liouville. — C. R., 1851, t. 32, part I, p. 450—452.
311. L i o u v i l l e J. Remarques à l'occasion d'une note de M. Chasles sur la construction géométrique des amplitudes dans les fonctions elliptiques. — C. R., 1844, t. 19, part II, p. 1261—1263.
312. L i o u v i l l e J. Sur les classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles. — J. de mathém., 1851, t. 16, p. 133—142.
313. L i o u v i l l e J. Sur l'irrationalité du nombre $e$. — J. de mathém., 1840, t. 5, p. 192—194.
314. L i o u v i l l e J. Sur la sommation des séries. — J. de mathém., 1837, t. 2, p. 107—108.
315. L i o u v i l l e J. Sur quelques fonctions numériques. — J. de mathém., (2), 1857, t. 2, p. 141—143, 245, 427.
316. M a h l e r K. Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithmics. — Mathem. Annal., 1967, Bd. 168, S. 200—227.
317. M a h l e r K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. — J. für Mathem., 1932, Bd. 166, S. 137—150.
318. M a l m s t e n C.-J. De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis. — J. für Mathem, 1849, Bd. 38, S. 1—39.
319. M a l m s t e n C.-J. Sur la formule

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1\cdot 2}\Delta u''_x - \ldots$$

— J. für Mathem., 1847, Bd. 35, S, 55—82.
320. M a r k o f f A. Démonstration d'un théorème de Tchébycheff. Lettre adressée à M. Hermite. — C. R., 1895, t. 120, p. 1032—1034. (Note présentée le 13 mai 1895); Ч е б ы ш е в П. Л. Полн. собр. соч. Т. 1. М.—Л., 1944, с. 309—310; М а р к о в. А. А. Избр. труды. М.—Л., 1951, с. 135—141.
321. M a r k o f f A. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. — Mathem. Annal., 1879, Bd. 15, S. 381—406; 1880, Bd. 17, S. 379—399.
322. M a r k o f f A. Sur les nombres dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire. — Mém. Acad. sci. Pétersb., (7), 1892, t. 38, Nr. 9.
323. M a r k o f f A. Sur les racines de certaines équations. — Mathem. Annal., 1886, Bd. 27, H. 1, S. 143—150.
324. M a r k o f f A. Sur une classe de nombres complexes. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. — C. R., 1891, t. 112, part I, p. 780—782; Supplém. — C. R., 1891, t. 112, p. 1049—1050, 1123—1124.
325. M e h l e r F. Über die Entwickelung einer Function von beliebig vielen Variabeln nach Laplace'schen Functionen höherer Ordnung. — J. für Mathem., 1865, Bd. 66, S. 161—176.

326. M e r t e n s F. Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. — J. für Mathem., 1874, Bd. 78, S. 46—62.
327. M e r t e n s F. Transcendenz der Zahlen $e$ und $\pi$. — Berichte Akad. Wissensch. Wien, 1896, Bd. 105, S. 839—855.
328. M i n k o w s k i H. Diophantische Approximationen. Eine Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig, 1907.
329. M i n k o w s k i H. Extrait d'une lettre à M. Ch. Hermite. — Bull. sci. mathém. et astr., (2), 1893, t. 17, p. 24—28; Gesammelte Abhandlungen. Bd. I. Leipzig—Berlin, 1911, S. 266—270.
330. M i n k o w s k i H. Geometrie der Zahlen. I Aufl. Leipzig, 1896; II Aufl. Leipzig—Berlin, 1910.
331. M i n k o w s k i H. Gesammelte Abhandlungen. Bd. I, II. Leipzig—Berlin, 1911.
332. M i n k o w s k i H. Quelques nouveaux théorèmes sur l'approximation des quantités à l'aide de nombres rationnels. — Bull. sci. mathém. et astr., (2), 1901, t. 25, p. 72—76; Gesam. Abhandl. Bd. I. Leipzig—Berlin, 1911, S. 353—356.
333. M i n k o w s k i H. Sur la réduction des formes quadratiques positives quaternaires. — C. R., 1883, t. 96, p. 1205—1210.
334. M i n k o w s k i H. Über die positiven quadratischen Formen und über Kettenbruchähnlichen Algorithme. — J. für Mathem., 1891, Bd. 107, S. 278—297; Gesam. Abhandl. Bd. I. Leipzig—Berlin, 1911, S. 243—260.
335. M i n k o w s k i H. Über positive quadratische Formen. — J. für Mathem., 1886, Bd. 99, S. 1—9; Gesam. Abhandl. Bd I. Leipzig—Berlin, 1911, S. 149—157.
336. M i n k o w s k i H. Généralisation de la théorie des fractions continues. Trad. par L. Laugel. — Ann. École Norm. sup., (3), 1896, t. 13, p. 41—60; Gesam. Abhandl. Bd. I. Leipzig—Berlin, 1911, S. 278—292.
337. M i t t a g - L e f f l e r G. Om integration av de Hermite'ska differentialeqvationerne av tredje och fjarde ordningen, vid vilka integralernas oänlighetestlen aro av ordningen ett. — Acta Soc. sci. Fennicae, 1883, t. 12, p. 409—424.
338. M i t t a g - L e f f l e r G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. — C. R., 1880, t. 90, p. 293—298.
339. M i t t a g - L e f f l e r G. Über die Integration der Hermiteschen Differentialgleichungen der dritten und vierten Ordnung sind. — Ann. di matem. pura ed appl., (2), 1882—1883, t. 11, fasc. 1, p. 65—80.
340. M i t t a g - L e f f l e r G. Une page de la vie de Weierstrass. — C. R. du deuxième Congrès intern. des mathématiciens. Paris. 1902, p. 131—153.
341. M i t t a g - L e f f l e r G. Weierstrass et Sonja Kowalevski. — Acta mathem., 1923, t. 39, p. 133—198.
342. N o e t h e r M. Charles Hermite. — Mathem. Annal., 1901, Bd. 55, H. 1, S. 337—385.
343. O e u v r e s de Paul Painlevé. T. I—III. Paris, 1973—1974.
344. P i c a r d E. Traité d'analyse. II éd. T. I—III. Paris, 1901—1909.
345. P i c a r d E. La vie et l'oeuvre de J. Tannery. — Mém. Acad. sci. Inst. France, (II), 1926, t. 58, p. I—XXXII.

346. P i c a r d E. La vie et l'oeuvre de G. Darboux. — Bull. sci. mathém. et astr., (2), 1917, t. 41, p. 97—107.
347. P i c a r d E. Sur l'application de la théorie des complexes linéaires dans la théorie des surfaces et des courbes gauches. Thèse. Paris, 1877.
348. P i c a r d E. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. — C. R., 1880, t. 90, p. 293—298.
349. P i c a r d E. Sur les fonctions entières. — C. R., 1879, t. 89, p. 662—665.
350. P i c a r d E. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. — C. R., 1880, t. 90, p. 128—131.
351. P i c a r d E. Sur une propriété des fonctions entières. — C. R., 1879, t. 90, p. 1024—1027.
352. P i c a r d E., S i m a r t. Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. T. I, II. Paris, 1897, 1906.
353. P i n e t G. Histoire de l'École polytechnique. Paris, 1887.
354. P o i n c a r é H. Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré, faite par lui même. — Acta mathem., 1921, t. 38, p. 3—135; Избр. тр. Т. 3. М., 1974, с. 579—663.
355. P o i n c a r é H. Discours au jubilée de M. Gaston Darboux. — Revue intern. enseign., 1912, t. 59, p. 99—102.
356. P o i n c a r é H. Discours prononcé aux funérailles de M. Tisserand. — Bull. astr., 1896, t. 12, p. 430—432.
357. P o i n c a r é H. Inauguration de la statue de F. Tisserand. — Annuaire Bureau Longitudes. Paris, 1900, p. 4—12.
358. P o i n c a r é H. Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. — J. École polytechn., 1878, cah. 45, p. 13—26.
359. P o i n c a r é H. Oeuvres. T. I—XI. Paris, 1916—1956.
360. P o i n c a r é H. Savants et écrivains. Paris, 1910.
361. P o i n c a r é H. Sur les fonctions fuchsiennes. — Acta mathem., 1882, t. 1, p. 193—294; Избр. тр. Т. 3. М., с. 63—144.
362. P o i n c a r é H. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Thèse. Paris, 1879.
363. P o i n c a r é H. Théorie des groupes fuchsiennes. — Acta mathem., 1882, t. 1, p. 1—62; Избр. тр. Т. 2. М., 1974, с. 9—62.
364. P o i s s o n S.-D. Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. — Mém. cl. sci. mathém. et phys. Inst. France. Année 1811. II part. Paris, 1814, p. 212—230.
365. P o n c e l e t V.-J. Application d'analyse à la géomètrie. T. I, II. Paris, 1862, 1864.
366. P o n c e l e t V.-J. Mécanique appliquée aux machines. Cours lithogr. Metz, 1826.
367. P o n c e l e t V.-J. Mécanique industrielle exposant les différentes méthodes pour déterminer et mésurer les forces motrices ainsi que le travail mécanique des forces. Bruxelles, 1839.
368. P o n c e l e t V.-J. Recherches sur le calcul des séries. — Mém. prés. par divers savants, sci. mathém. et phys., Paris, 1835, t. 6, p. 785—872.
369. P o n c e l e t V.-J. Sur la valeur approchée linéaire et rationnelle des radicaux de la forme $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$ etc. — J. für Mathem., 1835, Bd. 13, S. 277—291.

370. Poncelet V.-J. Traité des propriétés projectives des figures. II éd. T. I, II. Paris, 1864, 1866.
371. Poncelet V.-J. Une surface du 4-ème degré donnant une valeur approchée du radical. $\sqrt{x^2+y^2}$. — Nouv. Ann. mathém., 1848, t. 7, p. 39—40. (Resumé par Terquem).
372. Popken J. Transcendenz von $\pi$. — Mathem. Zeitschr., 1929, Bd. 29, S. 542—548.
373. Puiseux V.-A. Mémoire sur les racines des équations considérées comme fonctions d'un paramètre variable. — C. R., 1850, t. 31, part I, p. 171.
374. Puiseux V.-A. Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques. — J. de mathém., 1851, t. 16, p. 228—240.
375. Puiseux V.-A. Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques. — C. R., 1851, t. 32, p. 413—414; Rapport par Au. Cauchy. Ibid., p. 493—495.
376. Riemann B. Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. — Abhandl. K. Gesellschaft Wissensch., Göttingen, 1867, Bd. 13; Риман Б. Сочинения. М.—Л., 1947, с. 225—261.
377. Riemann B. Oeuvres complètes. Paris, 1898.
378. Rodrigues Olinde. Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes. — Corresp. l'École polytechn., 1816, t. 3, p. 361—385.
379. Rogel F. Darstellung der harmonischer Reihen durch Factorenfolgen. — Arch. Mathem.-Phys. (Hoppe), 1890, Bd. 9, S. 297—319.
380. Rosenhain J.-G. Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultraelliptiques de la première classe. — Mém. prés. par divers savants, (1846) 1851, t. XI, p. 361—468.
381. Rouché E. Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux. — J. École polytechn., 1886, t. 31, cah. 56, p. 213—277.
382. Rouché E. Note sur l'impossibilité de la quadrature du cercle. — Nouv. Ann. Mathém., (3), 1883, t. 2, p. 5—16.
383. Schneider Th. Transcendenz Untersuchungen periodischer Functionen. (I). — J. für Mathem., 1934, Bd. 172, S. 70—74.
384. Schneider Th. Einführung in die transcendenten Zahlen. Berlin, 1957.
385. Schohat J., Hille E., Walsh J.-L. A bibliography on orthogonal polynomials. — Bull. Nat. Res. Council, Nr. 103. Washington, 1940.
386. Seeber L.-Au. Untersuchungen über die Eigenschaften der positiiven ternären quadratischen Formen. Freiburg, 1831.
387. Seeber L.-Au. Versuch einer Erklärung des inneren Baues des festen Körper. — Ann. Phys. und Chem., 1824, Bd. 76, S. 229—248, 349—372.
388. Serret J.-A. Cours d'algèbre superieure. Paris, 1854.
389. Smith H.-J.-St. On the orders and genera of ternary quadratic forms. — Phil. Trans., 1867, v. 97, p. 255—298; Collect. mathem. papers. V. I. Oxford, 1894, p. 455—509; II ed., New York, 1965.
390. Smith H.-J.-St. On the orders and genera of quadratic forms containing more than three indeterminates. — Proc. Roy.

Soc. London, 1877, v. 16, p. 197—208; Collect. mathem. papers. V. I. Oxford, 1894, p. 510—523.
391. S m i t h H.-J.-St. The collected mathem. papers. Oxford, 1894. V. I, II.II ed. New-York, 1965.
392. S o h n k e L.-A. Aequationes modulaires pro transformatione functionum ellipticarum. — J. für Mathem., 1837, Bd. 16, S. 97—130.
393. S o m"o f f J. Note sur la rectification des courbes quelconques. — Bull. Acad. sci. Pétersb., 1870, t. 15, p. 257—261.
394. S o n i n e N. Sur les formes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling. — Ann. École norm., 1889, t. 6, p. 257—262.
395. S o n i n e N., H e r m i t e Ch. Sur les polynomes de Bernoulli. — J. für Mathem., 1896, Bd. 116, S. 156.
396. S t a u d t K.-G.-Ch. Beweis der Lehrsatzes der Bernoulli'schen Zahlen betreffend. — J. für Mathem., 1840, Bd. 21, S. 372—374.
397. S t a u d t K.-G.-Ch. De numeris Bernoulliana. Erlangen, 1845.
398. S t e r n A. Sur un théorème de M. Hermite, relatif à la fonction $[x]$. — Acta mathem., 1886, t. 8, p. 93—96.
399. S t i e l t j e s Th. Sur les racines de l'équation $X_n=0$. — Acta mathem., 1885, t. 9, p. 385—400.
400. S t u r m Ch. Abhandlung über die Auflösungen. — Ostwald's Classiker, 1904, Nr. 143.
401. S t u r m Ch. Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques. — Bull. sci. mathém., phys. et chim. (Bull. Ferussac, sec. I), 1829, t. XI, p. 419—425.
402. S t u r m Ch. Mémoire sur la résolution des équations numériques. — Mém. prés. par divers savants, sci. mathém. et phys. Paris, 1835, t. 6, p. 271—318.
403. S t u r m Ch. Rapport sur un mémoire de Mr. Wantzel, ayant pour titre «Théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques». — C. R., 1849, t. 28, p. 66.
404. S t u r m Ch. Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles. — J. de mathém., 1836, t. 1, p. 373—444.
405. S y l v e s t e r J.-J. On a theory of syzygetic relations of the rational functions comprizing an application of the theory of Sturm's functions and that of the greatest algebraical commor mesure. — Phil. Trans., 1854; Collect. mathem. papers. V. I Oxford, 1904, p. 603—619.
406. S y l v e s t e r J.-J. On rational derivation from equations of coexistence that to say a new and extended theory of elimination. — Phil. Magazine, 1839, v. 15, p. 428—435; Collect. mathem. papers. V. I. Oxford, 1904, p. 40—46.
407. S y l v e s t e r J.-J. On the expression for the quotients which appear in the application of Sturm's method to the discovery of the real roots of an equation. — British Assoc. Report, 1853, Part II, p. 1—3; Collect. mathem. papers. V. I. Oxford, 1904, p. 396—398.
408. S y l v e s t e r J.-J. On the real and imaginary roots of algebraic equations: a trilogy. — Phil. Trans., 1864, part II, p. 579—666; Collect. mathem. papers. V. II. 1908, p. 376—479.

409. Sylvester J.-J. On the principles of the calculus of forms. — Cambr. and Dublin Mathem J., 1852, v. 7, p. 52—97; Collect. mathem. papers. V. I. Oxford, 1904, p. 284—363.
410. Sylvester J.-J. On the relations of Sturm's auxiliary functions to the roots of the algebraic equation. — Plymuth British Assoc. Report, 1841, part II, p. 23—24; Collect. mathem. papers. V. I. Oxford, 1904, p. 59—60.
411. Tannery J. et Molk J. Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. T. I—IV. Paris, 1893—1902.
412. Terquem O. Préface. (К ст. Эрмита: Considérations sur la résolution de l'équation du cinquième degré). — Nouv. Ann. mathém., 1842, t. 1, p. 326—329.
413. Terquem O. Richard, professeur. — Nouv. Ann. mathém., 1849, t. 8, p. 448—451.
414. Thue A. Über Annäherung algebraischer Zahlen. — J. für Mathem., 1909, Bd. 135, S. 284—305.
415. Tisserand F. Traité de la mécanique célèste. T. I—IV. Paris, 1889—1896.
416. Tissot A. Sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes. — J. École polytechn., 1870, t. 26, cah. 43, p. 201—213.
417. Valson C.-A. La vie et les travaux du baron Cauchy, membre de l'Académie des sciences. T. I. Partie historique. Paris, 1868; T. II. Partie scientifique. Paris, 1868.
418. Voit. Paul du Bois-Reymond. Nekrolog. — Sitzungsber. Cl. Mathem.-Phys. K. Bayer. Akad. Wissensch., 1890, H. 1—2, S. 415—418.
419. Volterra V. Betti, Brioschi, Casorati — trois analystes italiens et trois manières envisager les questions d'analyse. — C. R. du deuxième Congrès intern. des mathématiciens. Paris, 1902, p. 43—57.
420. Wallisser R. Zur Transcendenz der Werte der Exponentialfunktion.— Monatsheft für Mathem. Wien, 1969, Bd. 73, S. 449—460.
421. Wantzel L. Recherches sur les moyens de reconnaitre si un problème de géométrie peut de résoudre avec la règle et le compas. — J. de mathém., 1837, t. 2, p. 366—372; Клейн Ф. Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии. С приложением мемуара Ванцеля «Исследование средств распознать, можно ли геометрическую задачу разрешить с помощью циркуля и линейки. Пер. студ. Н. Парфентьева. Под ред. проф. Д. М. Синцова. Казань, 1898, с. 81—89.
422. Weber H. Paul du Bois-Reymond. — Mathem. Annal., 1889, Bd. 35, S. 457—462.
423. Weierstrass K.-Th.-W. Einfacher Beweis eines Hermite'schen Satzes. (1882). — Mathem. Werke. Bd. III. Berlin, 1903, S. 249—250, Anmerkung (Knoblauch), S. 250.
424. Weierstrass K.-Th.-W. Sur les fonctions analytiques uniformes d'une variable. — Ann. École norm. sup., (2), 1879, t. 8, p. 111—150. (Trad. par E. Picard).
425. Weierstrass K.-Th.-W. Zu Hrn. Lindemann's Abhandlung «Über die Ludolphische Zahl». — Sitzungsber. Akad. Wissensch. Berlin., 1885, Bd. XLIX, S. 1067—1085.

426. Weierstrass K.-Th.-W. Zur Functionenlehre. — Monatsber. Preuss. Akad. Wissensch., (1880) 1881, August, S. 719—743.
427. [W. E. P.] François Felix Tisserand. — Nature, 1896, t. 54, p. 628.
428. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М., 1981.

## III

1. Appell P. Charles Hermite. — Rev. générale des sciences, 1901, t. 12, p. 109—110.
2. Borel F. Charles Hermite.—Annuaire des mathématiciens, 1901—1902, publié sous la direction de MM. C.-A. Laisant et Ad. Buhl. Paris, 1902, p. X—XXII.
3. Bryan G.-H. Charles Hermite. — Nature, 1901, v. 63, p. 350—351.
4. Capelli E. In commemorazione di Carlo Hermite. — Napoli Rendiconti, (III), 1901, t. 7, p. 53—54.
5. Darboux G. Notice historique sur Charles Hermite. Paris, 1905, p. 1—50; Éloges académiques et discours. Paris, 1912, p. 116—172.
6. Dini U. Commemorazione del socio straniere Carlo Hermite. — Rom. Accad. dei Lincei Rendiconti, 1901, t. 10, f. 1, p. 84—88.
7. Duran-Loriga J.-J. Charles Hermite. — Matem. pura ed appl., 1901, t. 1, p. 30—31.
8. Freudental H. Hermite Charles. — Dictionary of sci. biogr. Ed. Gillispie. N. Y., 1972, v. 6, p. 306—309.
9. Fuchs L. Charles Hermite. — J. für Mathem., 1901, Bd. 123, S. 174.
10. Jahnke E. Charles Hermite. — Arch. der Mathem. und Phys., (III), 1901, Bd. 1, S. 184—186.
11. Jordan C. Notice sur M. Ch. Hermite. — J. de mathém., (V), 1901, t. 7, p. 91—95; C. R., 1901, t. 132, p. 101—105; Amer. Mathem. Soc. Bull., (II), 1901, v. 7, p. 278—282; Boll. Bibliogr. Loria, 1901, t. 4, p. 16—20.
12. Joubert Ch. Notice sur les travaux scientifiques de M. Charles Hermite. — Rom. Accad. pontif. dei Lincei, 1901, t. 54, p. 99—102.
13. Jubilée de Mr. Hermite. Paris, 1893; Ann. Soc. sci. Bruxelles, 17 Année, 1897, Bruxelles—Paris, p. 55—64; Comptes rendus Circolo matem. Palermo, 1892, t. 6, p. 249—256; Revue des questions sci., (2), 1893, p. 2.
14. Krause M. Charles Hermite. — Abhandl. Gesellsch. Isis, 1901, p. 1—13.
15. Laisant C.-A. Une lettre de Mr. Ch. Hermite. — Nouv.
16. Ann. mathém., (IV), 1901, t. 1, p. 49—53.
Lampe E. Charles Hermite. Nachruf. — Naturwissensch. Rundschau, 1901, Bd. 16, S. 333—335, 348—350.
17. Lazzari G. Carlo Hermite. — Periodico di matem., (II), 1901, t. 3, p. 271—272.

18. L o r i a G. Elenco delle publicazioni di Ch. Hermite. — Boll. Bibliogr. Loria, 1901, t. 4, p. 20—31.
19. M a n s i o n P., J o r d a n C. Charles Hermite. — Revue des questions sci., publiée par la Soc. sci. Bruxelles, (II), 1901, t. 19, p. 353—396; Supplém., (II), t. 20, p. 348—349; Paris, 1901, p. 1—48; Mathesis. Supplem., (III), 1901.
20. M i t t a g - L e f f l e r G. Charles Hermite. — Acta mathem., 1901, t. 24, p. 395.
21. d' O v i d i o E. Carlo Hermite. Commemorazione. — Atti Accad. Torino, 1901, t. 36, p. 419—424.
22. P a i n l e v é P. Charles Hermite. — Nature, 2 fevrier 1901; Oeuvres. T. 2. Paris, 1974, p. 7—11.
23. P a s c a l E. Parole pronunziate in occasione della morte del socio straniero Carlo Hermite. — Lombard. Ist. Rendiconti, (II), 1901, t. 34, p. 171—175.
24. P i c a r d E. L'oeuvre scientifique de Charles Hermite. Discours prononcé 21 Mars 1901 à l'Université de Paris. — Ann. École norm. sup., (II), 1901, t. 18, p. 9—34; Acta mathem., 1901, t. 25, p. 87—111; Palermo Rendiconti, 1901, t. 15, p. 132—155.
25. P i c a r d E. L'oeuvre scientifique de Ch. Hermite. Préface. — In: H e r m i t e Ch. Oeuvres. T. I. Paris, 1905, p. I—XL.
26. P i n c h e r l e H. Parole pronunziate in commemorazione di Carlo Hermite. — Bologna Rendiconti, (II), 1901, t. 5, p. 49—50.
27. P o i n c a r é H. Charles Hermite. — In: Savants et écrivains. Paris, 1910, p. 97—101.
28. P o i n c a r é H. Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématique. — In: Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens. Paris, 1902, p. 115—130.
29. [W. B. C.] Charles Hermite. — Nature, New York, 1901, p. 280, 350—351.
30. Добровольский В. А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. Киев, 1974, с. 188—189, 347—348.
31. К л е й н Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М., 1937.
32. О ж и г о в а Е. П. Эрмит и петербургские математики. — Вопр. ист. естеств. и техн., 1967, вып. 22, с. 41—46.
33. П а м я т и Ш а р л я Э р м и т а. От редакции. — Вестн. опытн. физики и элем. матем., 1901, № 296, с. 175—179.
34. С и н ц о в Д. М. Формула Эрмита для приближенного вычисления сегмента кривой и ее видоизменение. — Изв. ФМО, Казань, (2), 1917, т. 22, № 3, с. 226—233.
35. С о н и н Н. Я. Шарль Эрмит. Некролог. — Изв. АН, 1901, т. 14, № 2, с. XVII—XVIII.
36. Т и м ч е н к о И. Шарль Эрмит. — Вестн. опытн. физики и элем. матем., 1901, № 293, с. 97—102.
37. Э р м и т Ш а р л ь. — БСЭ, III изд., 1978, т. 30, с. 704—705.
38. Э р м и т Ш а р л ь. — Биогр. словарь деятелей естеств. и техн. Т. 2. М., 1958, с. 414—415.
39. Ю ш к е в и ч А. П. История математики в России. М., 1968, с. 336—337.

# Именной указатель

# Оглавление