

А. А. КИРИЛЛОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1978

517.2
К 43
УДК 517.5

Элементы теории представлений.
А. А. Кириллов. Главная редакция
физико-математической литературы из-
дательства «Наука», М., 1978.

Книга написана на основе курса лекций и семинаров по теории представлений, которые автор вел в Московском государственном университете. Она представляет собой компактное изложение на современном уровне основ теории представлений.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов и научных работников в области математики и физики, интересующихся не только практическими применениями теории представлений, но и самой теорией.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	5
Часть первая. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ	7
§ 1. Множества, категории, топология	7
1.1. Множества (7). 1.2. Категории и функторы (9). 1.3. Элементы топологии (13).	
§ 2. Группы и однородные пространства	19
2.1. Группы преобразований и абстрактные группы (19). 2.2. Однородные пространства (23). 2.3. Основные типы групп (25). 2.4. Расширения групп (26). 2.5. Когомологии групп (29). 2.6. Топологические группы и однородные пространства (31).	
§ 3. Кольца и модули	34
3.1. Кольца (34). 3.2. Тела (37). 3.3. Модули над кольцами (38). 3.4. Линейные пространства (40). 3.5. Алгебры (42).	
§ 4. Элементы функционального анализа	45
4.1. Линейные топологические пространства (45). 4.2. Банаховы алгебры (54). 4.3. C^* -алгебры (59). 4.4. Коммутативные операторные алгебры (62). 4.5. Непрерывные суммы гильбертовых пространств и алгебры Неймана (68).	
§ 5. Анализ на многообразиях	74
5.1. Многообразия (74). 5.2. Векторные поля (81). 5.3. Дифференциальные формы (87). 5.4. Расслоения (90).	
§ 6. Группы Ли и алгебры Ли	97
6.1. Группы Ли (97). 6.2. Алгебры Ли (100). 6.3. Связь между группами Ли и алгебрами Ли (109). 6.4. Экспоненциальное отображение (116).	
Часть вторая. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ	122
§ 7. Представления групп	122
7.1. Линейные представления (122). 7.2. Представления топологических групп в линейных топологических пространствах (125). 7.3. Унитарные представления (127).	
§ 8. Разложение представлений	130
8.1. Разложение конечных представлений (130). 8.2. Неприводимые представления (133). 8.3. Вполне приводимые представления (136). 8.4. Разложение унитарных представлений (140).	
§ 9. Инвариантное интегрирование	145
9.1. Усреднения и инвариантные меры (145). 9.2. Применения к компактным группам (150). 9.3. Применения к некомпактным группам (155).	

§ 10. Групповые алгебры	156
10.1. Групповое кольцо конечной группы (156). 10.2. Групповые алгебры топологических групп (159). 10.3. Применение групповых C^* -алгебр (162). 10.4. Групповые алгебры групп Ли (165). 10.5. Представления групп Ли и их групповых алгебр (171).	
§ 11. Характеры	175
11.1. Характеры конечномерных представлений (175). 11.2. Характеры бесконечномерных представлений (179). 11.3. Инфинитезимальные характеры (182).	
§ 12. Преобразование Фурье и двойственность	185
12.1. Коммутативные группы (186). 12.2. Компактные группы (193). 12.3. Кольцевые группы и двойственность для конечных групп (198). 12.4. Другие результаты (200).	
§ 13. Индуцированные представления	202
13.1. Индуцированные представления конечных групп (203). 13.2. Унитарные индуцированные представления локально-компактных групп (208). 13.3. Представления расширенных групп (217). 13.4. Индуцированные представления групп Ли и их обобщения (220). 13.5. Сплетающие операторы и двойственность (227). 13.6. Характеры индуцированных представлений (231).	
§ 14. Проективные представления	238
14.1. Проективные группы и проективные представления (238). 14.2. Теория Шура (243). 14.3. Проективные представления групп Ли (246).	
§ 15. Метод орбит	249
15.1. Коприсоединенное представление групп Ли (250). 15.2. Однородные симплектические многообразия (254). 15.3. Конструкция неприводимого унитарного представления по орбите (259). 15.4. Метод орбит и квантование гамильтоновых механических систем (266). 15.5. Функторные свойства соответствия между орбитами и представлениями (274). 15.6. Универсальная формула для характеров и меры Планшереля (276). 15.7. Инфинитезимальные характеры и орбиты (282).	
Часть третья. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ	285
§ 16. Конечные группы	285
16.1. Гармонический анализ на трехмерном кубе (285). 16.2. Представления симметрической группы (288). 16.3. Представления группы $SL(2, F_q)$ (292). 16.4. Векторные поля на сферах (295).	
§ 17. Компактные группы	297
17.1. Гармонический анализ на сфере (297). 17.2. Представления классических компактных групп Ли (301). 17.3. Спинорные представления ортогональной группы (303).	
§ 18. Группы Ли и алгебры Ли	306
18.1. Представления простой трехмерной алгебры Ли (306). 18.2. Алгебра Вейля и разложение тензорных произведений (308). 18.3. Структура обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, C)$ (310). 18.4. Спинорные представления симплектической группы (314). 18.5. Представления треугольных матричных групп (316).	
§ 19. Примеры диких групп Ли	319
Краткий исторический очерк и литературные указания	324
Цитированная литература	329
Алфавитный указатель терминов	339

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга предназначена тем, кто хочет познакомиться не только с конкретными приложениями теории представлений, но и с самой этой теорией. Поскольку теория представлений тесно связана почти со всеми областями математики, знакомство с ней предполагает (и влечет) познания и в других областях. Первая часть книги (§§ 1—6) в краткой форме напоминает необходимые для дальнейшего сведения из других областей математики — в основном те, которые не входят в обязательные программы младших курсов университетов. Читатель, полагающий, что он обладает этими сведениями, может начинать сразу со второй части.

Прочие читатели не должны рассматривать первую часть как учебник по математике в целом. Ее цель — показать начинающему, чего он не знает. Ликвидировать это незнание лучше с помощью более подробных учебников, ссылки на которые приводятся в тексте и в списке литературы.

Вторая часть (§§ 7—15) содержит основные понятия и методы теории представлений. В третьей части (§§ 16—19) общие конструкции и теоремы второй части иллюстрируются конкретными примерами.

Исторический очерк, помещенный в конце книги, отражает взгляд автора на развитие теории представлений и не претендует на роль учебного пособия по истории математики. В заключительной части этого очерка описывается современное состояние теории представлений и указывается соответствующая журнальная литература.

Особенностью книги, позволившей сильно сократить ее объем, является большое число задач. Хотя все задачи и указания к ним напечатаны мелким шрифтом, их не следует пропускать, так как они существенно используются в основном тексте. В частности, в форме циклов связанных между собой задач изложено большинство доказательств. Почти все задачи снабжены указаниями, которые, как правило, позволяют без труда восстановить решение. Полезно, однако, попытаться решить задачу самостоятельно и лишь в случае неудачи воспользоваться указанием к ней.

Отметим некоторые особенности в выборе материала. Очень мало говорится в книге о теории конечномерных представлений полупростых групп и алгебр Ли. Дело в том, что на русском языке имеется уже достаточное число хороших изложений этой области теории представлений (см. [40], [45], [27]), и автору не хотелось повторять их.

Совсем не отражена в книге роль теории представлений групп в теории специальных функций. Хорошим введением в эту область может служить монография [12].

В задачу автора не входило также описание многочисленных приложений теории представлений в теоретической физике. В настоящее время имеется обширная литература, посвященная этим приложениям (см., например, [4], [31], [36], [50]).

Сравнительно много места уделено методу орбит, который еще не успел войти в учебную литературу, а по своей простоте и наглядности, несомненно, относится к основам теории представлений. Некоторая незавершенность § 15, посвященного методу орбит, объясняется состоянием науки в этой области. Многие важные теоремы доказаны лишь в частных случаях или существуют в виде гипотез.

В этом направлении работают сейчас многие математики и у нас, и за рубежом. За время, прошедшее со времени выхода первого издания книги, опубликовано много важных работ о связи между орбитами и представлениями. К сожалению, я не смог ко второму изданию соответственно переработать книгу и ограничился лишь некоторым расширением исторического очерка и библиографии.

А. Кириллов

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. МНОЖЕСТВА, КАТЕГОРИИ, ТОПОЛОГИЯ

1.1. Множества.

Для чтения этой книги вполне достаточно знакомства с элементами теории множеств в объеме университетского курса. (См., например, первые главы учебников А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [32], Г. Е. Шилова [57].) Более глубокие сведения (включая точное определение понятия множества) можно найти в книгах А. Френкеля и И. Бар-Хиллела [48], П. Козна [33].

Для удобства читателя приведем здесь используемые обозначения и напомним некоторые определения.

$\emptyset$ — пустое множество;

$x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X ;

$x \notin X$ — элемент x не принадлежит множеству X ;

$X \subset Y$ — множество X содержится в множестве Y (и, быть может, совпадает с ним);

$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ — объединение системы множеств X_α , занумерованных элементами множества A ; если A конечно, употребляется также обозначение вида $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$;

$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ — пересечение системы множеств X_α ;

$X \setminus Y$ — дополнение к множеству Y в множестве X ;

$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — произведение множеств X_α , т. е. совокупность наборов $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где $x_\alpha \in X_\alpha$;

$$\left. \begin{array}{l} f: X \rightarrow Y \\ \text{или} \\ X \xrightarrow{f} Y \end{array} \right\} \text{— отображение } f \text{ множества } X \text{ в множество } Y;$$

$$\left. \begin{array}{l} f: x \mapsto y \\ \text{или} \\ x \xrightarrow{f} y \end{array} \right\} \text{— отображение } f \text{ переводит элемент } x \text{ в элемент } y;$$

X^Y — совокупность всех отображений множества Y в множество X ;

$\text{card } X$ — мощность множества X ; для конечных X употребляется также обозначение $|X|$;

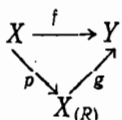
$\{x; A\}$ — совокупность тех x , для которых выполняется условие A .

Говорят, что в множестве X задано *бинарное отношение*, если выделено некоторое подмножество R в $X \times X$. Вместо $(x, y) \in R$ пишут также xRy и говорят: *x и y находятся в отношении R или x и y связаны отношением R* . Обратное отношение R^{-1} определяется как совокупность пар (x, y) , для которых $(y, x) \in R$. *Произведением $R_1 \cdot R_2$ называется совокупность тех пар (x, y) , для которых найдется такой элемент z , что $(x, z) \in R_1, (z, y) \in R_2$* .

Отношение R называют *рефлексивным*, если R содержит диагональ $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$, *симметричным*, если $R = R^{-1}$, *транзитивным*, если $R \cdot R \subset R$. Отношение, обладающее всеми перечисленными свойствами, называется *отношением эквивалентности*. В этом случае вместо $(x, y) \in R$ говорят: « x и y R -эквивалентны» (или просто эквивалентны, если ясно, о каком отношении идет речь).

Совокупность элементов, эквивалентных данному $x \in X$, называется *классом эквивалентности*, содержащим x . Множество $X_{(R)}$ классов эквивалентности называется *фактор-множеством* множества X по отношению R . Поставив в соответствие каждому $x \in X$ содержащий его класс, получаем *каноническое отображение* $p: X \rightarrow X_{(R)}$.

Ясно, что отображение $f: X \rightarrow Y$ можно включить в коммутативную диаграмму¹⁾



если и только если f постоянно на каждом классе эквивалентности. В этом случае g определяется по f однозначно и называется *фактор-отображением*.

Отношением порядка на множестве X называется транзитивное бинарное отношение R , антисимметричное в следующем смысле: $R \cap R^{-1} \subset \Delta$. Для отношения порядка R вместо $(x, y) \in R$ обычно пишут $x > y$.

Множество, снабженное отношением порядка, называется *упорядоченным* (иногда его называют *частично упорядоченным*). Упорядоченное множество называется *линейно упорядоченным*, если $R \cup R^{-1} = X \times X$ (т. е. если любые два элемента сравнимы). Следующие утверждения равносильны:

¹⁾ См. сноску на стр. 11.

1 (аксиома выбора Цермело). Произведение любого семейства непустых множеств непусто.

2 (лемма Цорна). Если в упорядоченном множестве X всякое линейно упорядоченное подмножество Y ограничено (т. е. существует такой элемент $x \in X$, что $x > y$ для всех $y \in Y$), то в множестве X есть хотя бы один максимальный элемент (т. е. такой элемент x_0 , что $x > x_0$ влечет $x = x_0$; максимальность x_0 не означает таким образом, что $x_0 > x$ для всех $x \in X$).

Лемма Цорна является обобщением известного принципа математической индукции и заменяет этот принцип в тех случаях, когда мы имеем дело с несчетными множествами.

*Направленным множеством*¹⁾ называют множество A с заданным на нем отношением порядка R , удовлетворяющим дополнительному условию:

для любых $\alpha, \beta \in A$ найдется $\gamma \in A$, обладающий свойством: $\alpha < \gamma, \beta < \gamma$.

Обычно соотношение $\alpha < \beta$ читается как « β следует за α ».

Если (A, R) — направленное множество, X — произвольное множество, то отображение A в X называется *сетью* или *направленностью* в X . Ясно, что это понятие является обобщением понятия последовательности в X (к которому оно сводится, когда A — множество натуральных чисел с обычным отношением порядка).

В математике, как правило, рассматриваются множества, снабженные той или иной *структурой* (например, упорядоченные множества, группы, топологические пространства и т. п.). Этому выражению можно придать точный смысл.

Назовем *башней множеств* над X всякое множество, которое получается из X и вспомогательных множеств $S, T, \dots$ перечисленными выше элементарными операциями (см. стр. 7). Задать *структуру* на X — это значит фиксировать элемент некоторой башни множеств над X . (Для приведенных выше примеров структур соответствующие башни имеют вид $(2)^{X \times X}, X^{X \times X}, (2)^{(2)^X}$, где (2) — вспомогательное множество из двух элементов.)

1.2. Категории и функторы.

Язык теории категорий, который используется в этой книге, настолько прост и естествен, что не доставит затруднений даже незнакомому с ним читателю. Приведем здесь лишь некоторые основные определения. Дальнейшие сведения можно получить, например, из книг А. Гротендика [21, гл. I] или из приложения Д. Буксбаума к книге [29]. См. также Добавление «Язык категорий» к запискам лекций Ю. И. Манина по алгебраической геометрии (изд-во МГУ, 1970), из которого мы приведем первую фразу:

¹⁾ В терминологии Бурбаки — множеством, *фильтрующимся вправо*.

«Язык категорий воплощает «социологический» подход к математическому объекту: группа или пространство рассматривается не как множество с внутренне присущей ему структурой, но как член сообщества себе подобных».

Говорят, что задана категория K , если

- 1) задан класс $\text{Ob } K$ объектов категории K ;
- 2) для каждой пары A, B объектов K задано множество $\text{Mog}(A, B)$ морфизмов объекта A в объект B ;
- 3) для каждой тройки A, B, C объектов K определен закон композиции, т. е. отображение

$$\text{Mog}(A, B) \times \text{Mog}(B, C) \rightarrow \text{Mog}(A, C).$$

Композиция морфизмов $f \in \text{Mog}(A, B)$ и $g \in \text{Mog}(B, C)$ обозначается $g \circ f$ и обладает свойствами:

- а) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ для любых $f \in \text{Mog}(C, D)$, $g \in \text{Mog}(B, C)$, $h \in \text{Mog}(A, B)$;
- б) для каждого $A \in \text{Ob } K$ существует такой элемент $1_A \in \text{Mog}(A, A)$, что $1_A \circ f = f$, $g \circ 1_A = g$ для любых $f \in \text{Mog}(B, A)$, $g \in \text{Mog}(A, B)$.

Примером может служить категория M , для которой $\text{Ob } M$ — класс всех множеств, а $\text{Mog}(A, B) = B^A$. Многие из рассматриваемых ниже категорий являются *подкатегориями* M , т. е. объекты этих категорий являются множествами, морфизмы — отображениями множеств, а композиции морфизмов — композициями отображений¹⁾.

Если морфизм $f \in \text{Mog}(A, B)$ допускает *обратный* морфизм f^{-1} (т. е. такой, что $f \circ f^{-1} = 1_B$, $f^{-1} \circ f = 1_A$), то он называется *изоморфизмом*, а объекты A и B — *изоморфными*.

Для каждой категории K можно определить *дуальную* категорию K° . По определению $\text{Ob } K^\circ = \text{Ob } K$, $\text{Mog}(A, B)^\circ = \text{Mog}(B, A)$. Композиция f и g в K° определяется как композиция g и f в K .

Объект X называется *универсальным отталкивающим* (соответственно *универсальным притягивающим*) объектом категории K , если для всякого $Y \in \text{Ob } K$ множество $\text{Mog}(X, Y)$ (соответственно $\text{Mog}(Y, X)$) состоит ровно из одного элемента. Из этого определения следует, что если в категории K есть несколько универсальных объектов, то все они канонически изоморфны.

Ясно, что при переходе к дуальной категории универсальный отталкивающий объект становится универсальным притягивающим и обратно.

¹⁾ Читателю, возможно, захочется иметь пример категории, не обладающей этим свойством. Таковыми являются, например, категория формальных групп или категории диаграмм, частным случаем которых является рассматриваемая ниже категория K_A .

Понятие универсального объекта позволяет с единой точки зрения рассмотреть очень многие конструкции, употребляемые в математике. В частности, мы увидим ниже, что тензорные произведения, обертывающие алгебры, индуцированные представления и когомологии групп могут быть определены как универсальные объекты в соответствующих категориях.

В качестве примера дадим здесь определения суммы и произведения объектов произвольной категории.

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство объектов категории K . Рассмотрим новую категорию K_A . Объектами K_A являются наборы $(Y, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$, где Y — объект из K , а $f_\alpha \in \text{Mog}(X_\alpha, Y)$.

Морфизмом из $(Y, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$ в $(Z, \{g_\alpha\}_{\alpha \in A})$ назовем такой морфизм $h: Y \rightarrow Z$, что для любого $\alpha \in A$ коммутативна диаграмма¹⁾

$$\begin{array}{ccc} & X_\alpha & \\ f_\alpha \swarrow & & \searrow g_\alpha \\ Y & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

Предположим, что в категории K_A существует универсальный отталкивающий объект $\{X, i_\alpha\}$ (все такие объекты, как отмечалось выше, канонически эквивалентны). Тогда объект X назовем *суммой* семейства $\{X_\alpha\}$, а морфизм i_α — *каноническим вложением* слагаемого X_α в сумму X .

Определение *произведения* P семейства $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и *канонических проекций* $p_\alpha \in \text{Mog}(P, X_\alpha)$ получается из определения суммы с помощью *обращения стрелок*, т. е. замены K_A на $(K_A)^\circ$.

Задача 1. Докажите, что в категории M для любого семейства объектов существуют сумма и произведение.

У к а з а н и е. Рассмотрите операции дизъюнктного объединения и обычного произведения множеств.

Небольшое изменение определения суммы и произведения семейства объектов приводит к понятиям индуктивного и проективного предела. Пусть множество индексов A — направленное множество и, если $\alpha < \beta$, то задан морфизм $f_{\alpha\beta} \in \text{Mog}(X_\alpha, X_\beta)$ так, что $f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta}$ для каждой тройки $\alpha < \beta < \gamma$. Рассмотрим категорию, объектами которой являются такие наборы

¹⁾ Диаграмма, составленная из объектов и морфизмов категории K , называется *коммутативной*, если композиция морфизмов вдоль пути по стрелкам диаграммы зависит только от начала и конца пути. В нашем примере это значит, что $h \circ f_\alpha = g_\alpha$.

$(Y, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A})$, $f_\alpha \in \text{Мог}(X_\alpha, Y)$, что для всех $\alpha < \beta$ коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} & X_\beta \\ & \searrow i_\alpha \quad \swarrow i_\beta & \\ & Y & \end{array}$$

Морфизмы $(Y, \{f_\alpha\})$ в $(Z, \{g_\alpha\})$ — это такие морфизмы $h \in \text{Мог}(Y, Z)$, что для всех $\alpha \in A$ коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & X_\alpha & \\ f_\alpha \swarrow & & \searrow g_\alpha \\ Y & \xrightarrow{h} & Z \end{array}$$

Универсальный отталкивающий объект в этой категории называется *индуктивным пределом* семейства $\{X_\alpha\}$. Определение *проективного предела* получается обращением стрелок.

Задача 2. Пусть A — натуральный ряд с отношением порядка: $m < n \Leftrightarrow m$ делит n ; каждое X_n — множество целых чисел; отображение f_{mn} — умножение на n/m . Докажите, что индуктивный предел семейства $\{X_m\}$ естественно отождествляется с множеством рациональных чисел, а отображение f_m — с делением на m .

Пусть K_1 и K_2 — две категории. Если каждому объекту X из K_1 поставлен в соответствие объект $F(X)$ из K_2 , а каждому морфизму $f \in \text{Мог}(X, Y)$ — морфизм

$$F(f) \in \text{Мог}(F(X), F(Y)),$$

так что справедливы равенства

$$F(1_X) = 1_{F(X)}, \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$

то говорят, что задан *ковариантный функтор* из K_1 в K_2 . Понятие *контравариантного функтора* получается, если последнее условие заменить на $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ (что эквивалентно замене одной из категорий K_1, K_2 на дуальную категорию).

Ковариантные функторы из K_1 в K_2 сами образуют категорию, в которой морфизмами F в G служат так называемые *функторные морфизмы*, которые каждому объекту X из K_1 ставят в соответствие морфизм $\varphi(X): F(X) \rightarrow G(X)$, так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & G(Y) \end{array}$$

коммутативна для любого $f \in \text{Мог}(X, Y)$.

Аналогично определяется категория контравариантных функторов.

Можно определить также функторы от нескольких переменных, ковариантные по одним переменным и контравариантные по другим.

Задача 3. Покажите, что для любой категории K отображение $(X, Y) \rightarrow \text{Мог}(X, Y)$ можно достроить до функтора из $K \times K$ в M , контравариантного по первому аргументу и ковариантного по второму.

Указание. Для $f \in \text{Мог}(X_1, X)$, $g \in \text{Мог}(Y, Y_1)$, $\varphi \in \text{Мог}(X, Y)$ положить $F(f, g): \varphi \mapsto g \circ \varphi \circ f$.

Ковариантный функтор F из категории K в M называется *представимым*, если он изоморфен функтору $\text{Мог}(X, \cdot)$, возникающему из *бифунктора*¹⁾ Мог при фиксировании подходящим образом первого аргумента. Объект X называется *представляющим объектом* для функтора F .

Аналогично, контравариантный функтор F имеет представляющий объект Y , если F изоморфен $\text{Мог}(\cdot, Y)$.

Многие важные функторы являются представимыми или становятся таковыми при подходящей модификации категории.

1.3. Элементы топологии.

Приводимые в этом пункте сведения из топологии являются, по существу, лишь списком обозначений, понятий и основных фактов. Познакомиться с основами топологии можно по книге [32, гл. II]. Более подробное изложение имеется в книге Дж. Л. Келли [30].

Топологическое пространство — это множество X , в котором выделена система подмножеств τ , обладающая свойствами:

- 1) пустое множество и все X принадлежат τ ;
- 2) пересечение конечного числа элементов τ принадлежит τ ;
- 3) объединение любого семейства элементов τ принадлежит τ .

Система τ называется *топологией* на X .

Подсистема $\tau' \subset \tau$ называется *базой топологии* τ , если каждый элемент τ является объединением некоторого семейства элементов τ' . Всякая система подмножеств X , удовлетворяющая первым двум из перечисленных выше требований, является базой некоторой топологии.

Множества, принадлежащие топологии τ , называются *открытыми* относительно этой топологии. Окрестностью точки $x \in X$ называется любое открытое подмножество, содержащее x . Множества, дополнительные к открытым, называются *замкнутыми*. Для каждого $Y \subset X$ существует наименьшее замкнутое множество, содержащее Y . Оно называется *замыканием* Y . Говорят, что подмножество Y плотно в X , если замыкание Y совпадает

¹⁾ Т. е. функтора от двух переменных.

с X . Множества, которые получаются из открытых и замкнутых операциями счетного объединения, счетного пересечения и перехода к дополнению, называются *борелевскими*.

В топологическом пространстве X можно определить общее понятие *предела* следующим образом. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — направленность в X (т. е. семейство точек X , занумерованное элементами направленного множества A ; см. п. 1.1). Точка x называется *пределом* направленности $\{x_\alpha\}$, если для любой окрестности U точки x найдется такой элемент $\alpha \in A$, что $x_\beta \in U$ для всех $\beta > \alpha$. Этот факт обозначается $x_\alpha \xrightarrow{A} x$ или $\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x$.

Указание на множество A часто опускается.

Отображение одного топологического пространства в другое называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт, и *борелевским*, если этот прообраз является борелевским множеством.

Задача 1. Докажите, что отображение f непрерывно, если и только если из $x_\alpha \xrightarrow{A} x$ следует $f(x_\alpha) \xrightarrow{A} f(x)$ (т. е. f перестановочно с операцией перехода к пределу).

В пространствах со счетной базой в утверждении задачи 1 достаточно вместо общих направленностей рассматривать обычные последовательности.

Топологические пространства и непрерывные отображения образуют категорию T , в которой определены сумма и произведение любого семейства объектов.

Задача 2. Покажите, что произведением семейства топологических пространств $\{X_\alpha, \tau_\alpha\}_{\alpha \in A}$ является множество $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ с топологией τ , базу которой составляют множества вида $\prod_{\alpha \in A_1} U_\alpha \times \prod_{\alpha \in A \setminus A_1} X_\alpha$, где A_1 — конечное подмножество A , $U_\alpha \in \tau_\alpha$.

У к а з а н и е. Рассмотрите сначала произведение двух пространств.

Всякое подмножество Y топологического пространства (X, τ) само будет топологическим пространством, если открытыми подмножествами Y назвать пересечения Y с открытыми подмножествами X . Подмножество Y с такой топологией называется *подпространством* X .

Пусть R — отношение эквивалентности на X ; фактор-множество $X_{(R)}$ будет топологическим пространством, если открытыми множествами назвать те подмножества $X_{(R)}$, у которых прообразы в X открыты. Множество $X_{(R)}$ с такой топологией называется *фактор-пространством* пространства X .

Топологическое пространство называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Задача 3. Произведение любого семейства компактных пространств и образ компактного пространства при непрерывном отображении — компактные пространства.

Топологическое пространство называется *отделимым*, или *хаусдорфовым*, если любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности, и *полутототделимым*, или T_0 -*пространством*, если одна из точек имеет окрестность, не содержащую другой точки. Компактное хаусдорфово пространство называется *компактом*.

В хаусдорфовых пространствах всякая направленность может иметь только один предел. Это свойство является причиной того, что большинство топологических пространств, используемых в самой математике и ее приложениях, хаусдорфовы.

Имеются, однако, важные классы топологических пространств, для которых отделимость, как правило, не имеет места. Это, во-первых, фактор-пространства (например, пространства орбит групп преобразований — см. ниже § 2, которые в наиболее интересных случаях оказываются T_0 -пространствами, но не отделимыми) и, во-вторых, пространства алгебраической геометрии с топологией Зариского (в которой замкнутыми множествами являются множества совместных решений систем алгебраических уравнений).

Топологическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить в виде суммы двух непустых подмножеств, которые одновременно открыты и замкнуты.

Задача 4. Всякое непрерывное отображение связного пространства в *дискретное* пространство (т. е. такое, где все подмножества открыты) постоянно.

Указание. Докажите, что прообраз каждой точки пуст либо совпадает со всем пространством.

Важный класс топологических пространств получается следующей конструкцией.

Говорят, что на множестве X определено *расстояние* (или *метрика*), если задана неотрицательная функция ρ на $X \times X$, обладающая свойствами:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0$, если и только если $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Множество X с расстоянием на нем называется *метрическим пространством*. Всякое метрическое пространство можно рассматривать как топологическое, если в качестве базы открытых множеств взять совокупность открытых шаров, т. е. множеств вида $Ш_r(x) = \{y; \rho(x, y) < r\}$, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$.

Разумеется, разные метрические пространства могут приводить к изоморфным топологическим пространствам. Кроме того, существуют топологические пространства, которые вообще не получают этой конструкцией; их называют *неметризуемыми*.

Для пространств со счетной базой метризуемость равносильна каждому из следующих условий:

а) любые два замкнутые непересекающиеся множества обладают непересекающимися окрестностями¹⁾;

б) любая непрерывная вещественная функция, определенная на замкнутом подмножестве, продолжается до непрерывной функции на всем пространстве.

Для метрических пространств можно ввести два важных понятия: равномерной непрерывности и полноты. Анализ этих понятий приводит к следующему определению.

Множество X называется *равномерным пространством*, если на X задана система σ рефлексивных симметричных бинарных отношений, обладающая свойствами:

а) пересечение двух отношений из R содержит некоторое отношение из R ,

б) каждое отношение из R содержит квадрат некоторого отношения из R .

Если $R \in \sigma$, то вместо $(x, y) \in R$ говорят: x и y R -близки.

Отображение f равномерного пространства (X, σ) в равномерное пространство (X', σ') называется *равномерно непрерывным*, если для каждого $R' \in \sigma'$ найдется $R \in \sigma$ такое, что из R -близости x и y следует R' -близость $f(x)$ и $f(y)$.

Каждому метрическому пространству (X, ρ) соответствует равномерное пространство (X, σ) , в котором система σ состоит из множеств вида $R_r = \{(x, y); \rho(x, y) < r\}$, $r \in \mathbb{R}$. Каждому равномерному пространству (X, σ) соответствует топологическое пространство (X, τ) , в котором базу открытых множеств составляют множества вида $R_x = \{y; (x, y) \in R\}$, $R \in \sigma$, $x \in X$.

Задача 5. Докажите, что в категории равномерных пространств определены произведения любого семейства объектов и что операция произведения перестановочна с описанным выше функтором из категории равномерных пространств в категорию топологических пространств.

Направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в равномерном пространстве (X, σ) называется *фундаментальной*, если для любого $R \in \sigma$ найдется такой индекс $\alpha \in A$, что x_β и x_γ будут R -близки для всех β и γ следующих за α .

Равномерное пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная направленность имеет предел. Каждое равномерное пространство X можно *пополнить*, т. е. вложить в виде плотного подмножества в некоторое полное пространство $\bar{X}$. Для хаусдорфовых пространств это вложение $i: X \rightarrow \bar{X}$ можно определить как универсальный объект в категории равномерно

¹⁾ Окрестностью множества X называется любое открытое множество $U \supset X$.

непрерывных отображений в полные пространства. Тем самым, в этом случае пополнение определено однозначно с точностью до изоморфизма.

Задача 6. Пусть X — полное хаусдорфово пространство, Y — подпространство в X . Докажите, что пополнение Y совпадает с его замыканием в X .

Мощным средством изучения категории T топологических пространств и связанных с ней категорий является построение и исследование функторов из них в другие категории.

Пусть ΓT — категория топологических пространств, морфизмами которой служат гомотопические классы непрерывных отображений. (Два отображения f_0 и f_1 из X в Y принадлежат одному *гомотопическому классу*, или *гомотопны*, если существует такое семейство отображений $f_t: X \rightarrow Y$, $t \in [0, 1]$, что отображение

$$X \times [0, 1] \rightarrow Y: (x, t) \mapsto f_t(x)$$

непрерывно.)

Большинство используемых функторов имеет вид $F = F_1 \circ G$, где G — естественный функтор из T в ΓT , ставящий в соответствие каждому объекту его самого, и каждому морфизму его гомотопический класс.

Пример 1. $\pi_n(X, x)$ — n -я *гомотопическая группа* пространства X относительно точки $x \in X$. Это — ковариантный функтор из категории T_1 пространств с отмеченной точкой (морфизмы — непрерывные отображения, переводящие отмеченную точку в отмеченную) в категорию множеств при $n = 0$, групп при $n = 1$ и абелевых групп при $n > 1$.

Обычное определение гомотопических групп можно сформулировать так. Пусть G_1 — естественный функтор из T_1 в ΓT_1 (в категорию пространств с отмеченной точкой с морфизмами — гомотопическими классами отображений, переводящих отмеченную точку в отмеченную). Тогда $\pi_n = F_n \circ G_1$, где $F_n = \text{Mog}(S^n, \cdot)$, а через S^n обозначена n -мерная сфера (с отмеченной точкой).

Группа $\pi_1(X)$ называется *фундаментальной группой* пространства X . Если эта группа тривиальна, пространство называется *односвязным*.

Пример 2. $H^n(X, \Pi)$ — n -мерная *группа когомологий* пространства X с коэффициентами в группе Π . Существует много разных определений этого функтора (симплициальные, клеточные, сингулярные, чеховские, де-рамовские и др. когомологии). Для «достаточно хороших» пространств (в частности, для гладких компактных многообразий; см. § 5) все эти определения эквивалентны между собой. Мы приведем здесь определение, использующее понятие представимого функтора. Пусть $K(\Pi, n)$ —

топологическое пространство, обладающее свойствами

$$\pi_m(K(\Pi, n), \cdot) = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \Pi & \text{при } m = n. \end{cases}$$

(Можно показать, что такое пространство существует и что все такие пространства являются изоморфными объектами определенной выше категории GT_1 .)

Тогда $H^n(\cdot, \Pi) = F_{\Pi}^n \circ G$, где G — естественный функтор из T в GT_1 , а $F_{\Pi}^n = \text{Мог}(\cdot, K(\Pi, n))$.

Задача 7. Если пространство X стягивается по себе в точку, то $H^n(X, \Pi) = 0$ при $n \geq 1$.

Указание. Объект X изоморфен точке в категории GT_1 .

Пространства $K(\Pi, n)$ устроены довольно сложно. За исключением некоторых пространств $K(\Pi, 1)$, все они бесконечномерны.

Задача 8. Докажите, что в качестве $K(\mathbb{Z}, 1)$, где $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел, можно взять обычную окружность S^1 .

Приведем еще одно определение, более удобное для практических вычислений.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — покрытие пространства X открытыми множествами. Назовем n -мерной *коцепью* покрытия $\mathcal{U}$ с коэффициентами в Π функцию c из $A \times A \times \dots \times A$ ($n+1$ сомножитель) в Π , обладающую свойствами:

1) область определения c состоит из наборов $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, для которых пересечение $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n}$ непусто.

2) функция c кососимметрична, т. е. меняет знак при перестановке двух аргументов.

Совокупность всех n -мерных коцепей образует группу $C^n(\mathcal{U}, \Pi)$. Введем *кограничный оператор* d , действующий из $C^n(\mathcal{U}, \Pi)$ в $C^{n+1}(\mathcal{U}, \Pi)$ по правилу:

$$dc(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i c(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{n+1})$$

(знак $\hat{}$ означает, что соответствующий аргумент опущен).

Коцепь dc называется *кограницей* цепи c . Совокупность всех n -мерных кограниц обозначим $B^n(\mathcal{U}, \Pi)$. Если $dc = 0$, то коцепь c называется *коциклом*. Совокупность n -мерных коциклов обозначим $Z^n(\mathcal{U}, \Pi)$.

Оператор d , как легко проверить, обладает свойством $d^2 = 0$. Поэтому

$$B^n(\mathcal{U}, \Pi) \subset Z^n(\mathcal{U}, \Pi).$$

Фактор-группу

$$H^n(\mathcal{U}, \Pi) = Z^n(\mathcal{U}, \Pi) / B^n(\mathcal{U}, \Pi)$$

назовем n -мерной группой когомологий (по Чеху) покрытия $\mathcal{U}$. Группа $H^n(X, \Pi)$ может быть определена как индуктивный предел групп $H^n(\mathcal{U}, \Pi)$ по направленному множеству всех покрытий. Фактически вычисление предела часто заменяет следующая

Теорема Лере. Если покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ таково, что все множества U_α и их пересечения имеют тривиальные когомологии в размерностях $n \geq 1$, то

$$H^n(X, \Pi) = H^n(\mathcal{U}, \Pi).$$

Задача 9 (Д. А. Каждан). Выведите из теоремы Лере следующую теорему Хелли:

Если в $\mathbb{R}^n$ задано $n+2$ выпуклых множеств и любые $n+1$ из них имеют общую точку, то все $n+2$ множества имеют общую точку.

Указание. Используйте задачу 7 и тот факт, что $H^n(X, \mathbb{Z}) = 0$ для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$.

Следствие. Условие выпуклости в теореме Хелли можно заменить более слабым: все множества и их пересечения имеют тривиальные когомологии в размерностях $n \geq 1$.

Задача 10. Докажите, что

$$H^k(S^n, \Pi) = \begin{cases} \Pi & \text{при } k=0 \text{ и } n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Указание. Рассмотрите покрытие сферы $n+2$ открытыми полусферами

Подробнее о функторах π_n , $H^n(\cdot, \Pi)$ и других можно прочитать в книгах [3], [43], [52], [53].

§ 2. ГРУППЫ И ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Группы преобразований и абстрактные группы. Группой преобразований называется совокупность G преобразований (т. е. отображений в себя) некоторого множества X , обладающая свойствами:

- 1) если $g_1 \in G$ и $g_2 \in G$, то $g_1 g_2 \in G$,
- 2) если $g \in G$, то g^{-1} существует и принадлежит G .

Примерами групп преобразований могут служить группа G_1 всех взаимно однозначных отображений X в себя и группа G_0 , состоящая из одного тождественного преобразования. Ясно, что всякая группа G преобразований X заключена между этими двумя: $G_0 \subset G \subset G_1$.

Задача 1. Перечислить все группы преобразований множества из трех элементов.

Пусть множество X наделено какой-нибудь структурой. Совокупность G таких преобразований g , что g и g^{-1} сохраняют структуру, образует, очевидно, группу. Эта группа называется группой автоморфизмов данной структуры.

Примеры. Группа гомеоморфизмов топологического пространства, группа изометрических преобразований метрического пространства, группа обратимых линейных операторов.

На самом деле описанный способ построения групп преобразований носит универсальный характер: каждая группа преобразований является группой автоморфизмов подходящим образом выбранной структуры.

Часто бывает удобно забыть о том, что элементы группы G являются преобразованиями некоторого множества и помнить только закон умножения этих элементов.

Возникающее при этом понятие называют *абстрактной группой* (в отличие от группы преобразований) или просто группой. Более точно: *группой* называется множество G , на котором задан закон умножения (т. е. отображение $G \times G \rightarrow G$; мы будем обозначать $g_1 \circ g_2$ или просто $g_1 g_2$ результат умножения g_1 на g_2), так что имеют место:

1) *ассоциативность*: $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$;

2) *существование единицы*: в группе G есть такой элемент e , что $e \circ g = g \circ e = g$ для всех $g \in G$ ¹⁾;

3) *существование обратного элемента*: для любого $g \in G$ существует такой $g^{-1} \in G$, что $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

Группа G называется *коммутативной* или *абелевой*, если кроме перечисленных условий имеет место

4) *коммутативность*: $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ для любых $g_1, g_2 \in G$.

В коммутативных группах групповую операцию часто называют сложением, вместо $g_1 \circ g_2$ пишут $g_1 + g_2$, а единичный элемент обозначают 0.

Очевидно, что всякая группа преобразований является группой в смысле данного выше определения. При этом такие, например, группы, как:

а) группа изометрических преобразований правильного треугольника,

б) группа всех перестановок множества из трех элементов,

в) группа обратимых матриц второго порядка с коэффициентами из поля вычетов по модулю 2,

г) группа дробно-линейных преобразований расширенной плоскости, порожденная преобразованиями $z \mapsto z^{-1}$ и $z \mapsto 1 - z$, являются разными группами преобразований, но одинаковы (изоморфны) как абстрактные группы. Каждая из них состоит из шести элементов, умножающихся по одному и тому же закону (проверьте!).

Отображение φ группы G в группу H называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$ для любых g_1, g_2 из G . Группы и гомоморфизмы групп образуют *категорию групп*.

В случае, когда группа H коммутативна, гомоморфизмы из G в H сами образуют коммутативную группу относительно операции $(\varphi_1 + \varphi_2)(g) = \varphi_1(g) + \varphi_2(g)$. Эта группа обозначается $\text{Hom}(G, H)$.

¹⁾ Вместо e часто пишут 1.

Задача 2. Найти группу $\text{Hom}(G, H)$, где G и H — одна из следующих групп:

- группа $\mathbb{Z}$ целых чисел с операцией сложения;
- группа $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ вычетов по модулю n с операцией сложения¹⁾;
- группа $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с операцией сложения;
- группа $\mathbb{Q}^*$ ненулевых рациональных чисел с операцией умножения.

Указание. Ответ дается следующей таблицей, где (m, n) означает наибольший общий делитель чисел m и n , а $\oplus$ — прямую сумму в категории абелевых групп:

$G \backslash H$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^*$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^*$
$\mathbb{Z}_n$	0	$\mathbb{Z}_{(m, n)}$	0	$\mathbb{Z}_{(n, 2)}$
$\mathbb{Q}$	0	0	$\mathbb{Q}$	0
$\mathbb{Q}^*$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$	$\mathbb{Z}_{(m, 2)} \oplus \mathbb{Z}_m \oplus \dots$	$\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \dots$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \dots$

Пусть задан гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$; тогда

$\ker \varphi = \{g \in G: \varphi(g) = e\}$ — ядро гомоморфизма φ ,

$\text{im } \varphi = \{\varphi(g): g \in G\}$ — образ гомоморфизма φ .

Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\dots \rightarrow G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1} \rightarrow \dots$$

называется *точной*, если образ каждого гомоморфизма совпадает с ядром следующего гомоморфизма. Например, точность последовательностей (где 1 означает группу из одного элемента)

$$1 \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} H, \quad G \xrightarrow{\varphi} H \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} H \rightarrow 1$$

означает, что φ является *мономорфизмом* (т. е. $\ker \varphi = 1$), *эпиморфизмом* (т. е. $\text{im } \varphi = H$) и *изоморфизмом* соответственно.

Пусть g_0 — фиксированный элемент группы G . Отображение $g \mapsto g_0^{-1} g g_0$ является *автоморфизмом* (т. е. изоморфизмом на себя) группы G . Такие автоморфизмы называют *внутренними*.

¹⁾ Эту группу обозначают иногда $\mathbb{Z}_n$, но это обозначение стало сейчас стандартным для группы целых n -адических чисел (см. п. 2.6).

Часто используется обозначение g^a вместо $g_0^{-1}gg_0$. Гомоморфизм φ абстрактной группы в группу преобразований называется *реализацией*, или *представлением* этой группы. Представление называется *точным*, если φ — мономорфизм.

Множество X называется *левым G -пространством*, если задана реализация группы G преобразованиями множества X . В этом случае говорят также, что группа G *действует слева* на X и результат действия элемента $g \in G$ на элемент $x \in X$ записывают gx . При этом справедливо равенство $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$.

Часто возникает ситуация, когда элементу $g \in G$ ставится в соответствие преобразование $\varphi(g)$ множества X так, что $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_2)\varphi(g_1)$. В этом случае φ называют *антипредставлением* G , а множество X — *правым G -пространством*. Говорят также, что G *действует справа* на X , и элемент $\varphi(g)x$ обозначают через xg . При этом справедливо равенство $(xg_1)g_2 = x(g_1g_2)$.

Пример 1. Относительно группы $G = GL(n, K)$ обратимых матриц n -го порядка над полем K совокупность векторов-столбцов образует левое G -пространство, а совокупность векторов-строк — правое G -пространство.

Пример 2. Для любой категории множество $\text{Mog}(A, B)$ является левым G_1 -пространством относительно $G_1 = \text{Aut } A$ и правым G_2 -пространством относительно $G_2 = \text{Aut } B$ (через $\text{Aut } A$ мы обозначим группу автоморфизмов объекта A , т. е. множество обратимых элементов из $\text{Mog}(A, A)$).

Левые и правые G -пространства образуют категории, морфизмами которых являются так называемые *G -отображения*, т. е. отображения, перестановочные с действием группы. Эти две категории канонически изоморфны, так как каждое левое G -пространство X превращается в правое, если положить по определению $xg = g^{-1}x$.

Пусть X и Y — два G -пространства. *Произведением над G* пространств X и Y называется фактор-множество $X \times_G Y$ произведения $X \times Y$ по отношению эквивалентности, определяемому действием G на $X \times Y$. Например, в случае, когда X — правое, а Y — левое G -пространство, пары (x, y) и (x', y') эквивалентны, если и только если $x' = xg$, $y' = g^{-1}y$ для некоторого $g \in G$.

Важный частный случай этой конструкции получается, если в качестве пространства Y взять группу G_1 , содержащую G , с очевидной структурой левого G -пространства. В этом случае произведение $X \times_G G_1$ наделяется естественной структурой правого G_1 -пространства.

Соответствие $X \mapsto X \times_O G_1$ порождает, как легко проверить, функтор из категории K_O всех G -пространств в категорию K_{O_1} всех G_1 -пространств. Некоторое интуитивное представление об этом функторе читатель может получить, разобрав следующий пример. Пусть G_1 — группа вращений трехмерного пространства вокруг неподвижной точки O , G — подгруппа поворотов вокруг оси l , проходящей через O . X — двумерная плоскость, ортогональная к l с естественным действием G на ней. Тогда $X \times_O G_1$ как G_1 -пространство изоморфно совокупности всех касательных векторов к сфере с центром в O .

Этот же функтор можно получить другим естественным способом.

Задача 3. Пусть X — объект категории K_O . Рассмотрим функтор F из K_{O_1} в категорию множеств:

$$F(Y) = \text{Мог}(X, \tilde{Y}),$$

где $\tilde{Y}$ — это Y , рассматриваемое как объект из K_O (всякое G_1 -пространство является тем самым и G -пространством). Докажите, что этот функтор представим, и представляющим объектом является $X \times_O G_1$. Другими словами,

$$\text{Мог}(X, \tilde{Y}) = \text{Мог}(X \times_O G_1, Y)$$

(как функторы от Y).

2.2. Однородные пространства. Говорят, что группа G *транзитивно действует* на X или что G -пространство X *однородно*, если любая точка из X переводится в любую другую преобразованиями из группы G . Каждое G -пространство является объединением однородных пространств. В самом деле, G -орбита точки $x \in X$ (т. е. совокупность точек вида gx , $g \in G$) является однородным G -пространством, а все множество является объединением орбит его точек.

Все однородные G -пространства могут быть в некотором смысле описаны. Зафиксируем точку $x \in X$. Совокупность G_x тех элементов из G , которые оставляют x на месте, образует подгруппу в G . Эта подгруппа называется *стационарной подгруппой* или *стабилизатором* точки x . Пусть $g \in G$. Совокупность элементов вида gh , $h \in G_x$, называется *левым смежным классом* группы G по подгруппе G_x и обозначается gG_x . Нетрудно проверить, что gG_x состоит из всех элементов группы G , переводящих точку x в точку gx . Таким образом, всякое однородное левое G -пространство изоморфно пространству левых смежных классов по некоторой подгруппе. Обратно, если H — подгруппа G , то совокупность G/H левых смежных классов в G по H является однородным G -пространством относительно естественного действия G :

$$g: g_1H \mapsto gg_1H.$$

Задача 1. Однородные пространства G/H_1 и G/H_2 изоморфны (как объекты категории K_G ; см. п. 2.1) тогда и только тогда, когда подгруппы H_1 и H_2 сопряжены, т. е. переводятся друг в друга внутренним автоморфизмом группы G .

Все сказанное здесь дословно переносится на правые G -пространства и *правые смежные классы*. Пространство правых смежных классов G по H мы будем обозначать $H \setminus G$.

Подгруппа H называется *инвариантной* (или *нормальной*, или *нормальным делителем*) в G , если все сопряженные с ней подгруппы совпадают с H . В этом случае каждый правый класс смежности является левым и обратно. Однородное пространство G/H само становится группой относительно операции $g_1H \circ g_2H = g_1g_2H$. Геометрически это значит, что произведение xu получается из y тем преобразованием, которым x получается из начальной точки. Корректность этого определения обеспечивается тем, что стационарные подгруппы всех точек совпадают (поэтому преобразование определяется результатом его действия на одну точку). Получаемая так группа называется *фактор-группой* G по H .

В дальнейшем нам часто будет нужно знать общий вид G -отображения G -пространства X в себя или в другое G -пространство Y . Решим сейчас этот вопрос для однородных G -пространств. Пусть $X = G/H$, $Y = G/K$ и $\varphi: X \rightarrow Y$ есть G -отображение. Предположим, что φ переводит класс $H \in X$ в класс $gK \in Y$. Тогда $\varphi(g_1H) = g_1\varphi(H) = g_1gK$, т. е. отображение φ полностью определено элементом $g \in G$. Однако этот элемент не произволен. В самом деле, если $h \in H$, то $hH = H$. Поэтому $\varphi(hH) = \varphi(H)$, т. е. $hgK = gK$ для всех $h \in H$, откуда следует, что $H^g = g^{-1}Hg \subset K$. Обратно, если элемент $g \in G$ обладает этим свойством, отображение $\varphi: g_1H \rightarrow g_1gK$ будет корректно определенным G -отображением. Элементы g и g' порождают одно и то же G -отображение φ , если и только если $g^{-1}g' \in K$.

Рассмотрим подробнее случай, когда $X = Y$, а отображение φ — автоморфизм. В этом случае $K = H$ и $H^g = H$, так как φ^{-1} , как и φ , является автоморфизмом. Совокупность элементов $g \in G$, обладающих свойством $H^g = H$, называется *нормализатором* подгруппы H в G и обозначается $N_G(H)$ (или просто $N(H)$, если ясно, о какой группе G идет речь). Группа всех автоморфизмов G -пространства $X = G/H$ изоморфна, следовательно, фактор-группе $N(H)/H$.

Пусть H и K — две подгруппы в G и $g \in G$. Множество всех элементов вида $h g k$, $h \in H$, $k \in K$ обозначается $H g K$ и называется *двойным смежным классом* группы G по подгруппам H и K . Совокупность этих двойных классов обозначается $H \setminus G/K$,

Мы предоставим читателю убедиться, что множество $H \setminus G/K$ изоморфно:

- а) множеству K -орбит в $X = H \setminus G$,
- б) множеству H -орбит в $Y = G/K$,
- в) множеству G -орбит в $X \times Y$,
- г) множеству $X \times_g Y$.

2.3. Основные типы групп. Наиболее просты для изучения коммутативные группы. Все такие группы с конечным числом образующих легко классифицировать.

Задача 1. Всякая группа с одной образующей (такие группы называются *циклическими*) изоморфна либо группе $\mathbb{Z}$ целых чисел либо группе $\mathbb{Z}_m$ вычетов по модулю m .

Индукцией по числу образующих легко доказать, что всякая абелева группа G с конечным числом образующих изоморфна сумме циклических групп. Для произвольной абелевой группы это неверно, как видно из примера $G = \mathbb{Q}$ (аддитивная группа рациональных чисел).

Задача 2. Пусть M — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель чисел m и n . Докажите, что группы $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{Z}_M \oplus \mathbb{Z}_d$ изоморфны.

Из утверждения задачи 2 легко вывести, что каждая абелева группа с конечным числом образующих изоморфна ровно одной группе вида

$$\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z},$$

где каждое из чисел m_i , $i = 1, 2, \dots, k-1$, является делителем числа m_{i+1} .

Некоммутативные группы можно классифицировать по степени их некоммутативности. Для двух подмножеств X и Y в группе G мы обозначим через $[X, Y]$ совокупность элементов вида $xux^{-1}y^{-1}$, $x \in X$, $y \in Y$. Рассмотрим две последовательности подгрупп:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots,$$

$$G = G^0 \supset G^1 \supset G^2 \supset \dots \supset G^n \supset \dots,$$

где G_n — подгруппа, порожденная множеством $[G_{n-1}, G_{n-1}]$ (она называется n -й производной группой группы G), а G^n — подгруппа, порожденная множеством $[G, G^{n-1}]$.

Для коммутативной группы эти последовательности тривиальны: $G_n = G^n = 1$ при $n \geq 1$. Группа G называется *разрешимой* (соответственно *нильпотентной*) группой класса k , если первая (соответственно вторая) последовательность обрывается, т. е. $G_n = 1$ (соответственно $G^n = 1$), начиная с $n = k$.

Задача 3. Докажите, что G — разрешимая группа класса k , если и только если существуют:

абелева инвариантная подгруппа $A_0 \subset G$,

абелева инвариантная подгруппа A_1 в $G_1 = G/A_0$,

абелева инвариантная подгруппа A_2 в $G_2 = G_1/A_1$,

и т. д., и эта цепочка обрывается на k -м шаге, т. е. $G_k = 1$.

Указание. В качестве A_0 можно взять $(k-1)$ -ю производную группу и применить индукцию по k .

Пусть X — подмножество в группе G . Совокупность элементов группы G , перестановочных со всеми элементами из X , называется *централизатором* X в G и обозначается $C_G(X)$. Централизатор самой группы называется *центром* этой группы.

Задача 4. Докажите, что G — нильпотентная группа класса k , если и только если:

G имеет нетривиальный центр C_0 ,

фактор-группа $G_1 = G/C_0$ имеет нетривиальный центр C_1 ,

фактор-группа $G_2 = G_1/C_1$ имеет нетривиальный центр C_2 ,

и т. д. и эта цепочка обрывается на k -м шаге, т. е. $G_k = 1$.

Указание. C_0 содержит G^{k-1} .

Группа, не имеющая нетривиальных (т. е. отличных от всей группы и от единичной подгруппы) инвариантных подгрупп, называется *простой*.

Классификация простых конечных групп — одна из самых основных и самых трудных задач теории групп.

Так, лишь недавно была доказана известная гипотеза Бернсайда о том, что не существует простых групп нечетного порядка. В последние годы в этом направлении имеется заметный прогресс, связанный с использованием теории бесконечных групп (групп Ли и алгебраических групп).

2.4. Расширения групп. Пусть группа G не проста, т. е. содержит нетривиальную нормальную подгруппу G_0 . Тогда имеет место точная последовательность:

$$1 \rightarrow G_0 \rightarrow G \rightarrow G_1 \rightarrow 1,$$

называемая *расширением* группы G_1 с помощью группы G_0 .

Изучение G во многом сводится к изучению двух «меньших» групп: подгруппы G_0 и фактор-группы $G_1 = G/G_0$.

Отметим, что группа G , вообще говоря, не восстанавливается по G_0 и G_1 . В самом деле, каждый элемент $g \in G$ задает внутренний автоморфизм группы G , который переводит G_0 в себя. Мы получаем, таким образом, гомоморфизм G в группу $\text{Aut } G_0$ автоморфизмов G_0 . Элементы G_0 переходят при этом в подгруппу $\text{Int } G_0$ внутренних автоморфизмов. Поэтому определен гомоморфизм G/G_0 в группу $\text{Aut } G_0/\text{Int } G_0$. Чтобы восстановить G , нужно, следовательно, знать гомоморфизм $\varphi: G_1 \rightarrow \text{Aut } G_0/\text{Int } G_0$.

Предположим, что этот гомоморфизм нам известен, и попробуем построить группу G . Заметим, что группу G можно отожд-

дествить (как множество) с прямым произведением групп G_1 и G_0 . В самом деле, если в каждом классе $g_1 \in G_1$ выбрать представителя $\alpha(g_1) \in G$, то всякий элемент $g \in G$ можно однозначно записать в виде $g = \alpha(g_1)g_0$, $g_1 \in G_1$, $g_0 \in G_0$, что и дает искомую «нумерацию» элементов G парами (g_1, g_0) . В дальнейшем нам будет удобно считать, что представителем класса G_0 является единичный элемент. Тогда в выбранных координатах элементы подгруппы G_0 имеют вид (e, g_0) и справедливо равенство

$$(g_1, g_0)(e, g'_0) = (g_1, g_0g'_0).$$

Далее, отображение

$$(e, g_0) \mapsto (g_1, e)(e, g_0)(g_1, e)^{-1}$$

является автоморфизмом G_0 , который мы обозначим $\psi(g_1)$. Заметим, что образ $\psi(g_1)$ в $\text{Aut } G_0 / \text{Int } G_0$ нам известен и равен $\varphi(g_1)$. Зная не только φ , но и ψ , мы можем вычислить произведение элемента вида (e, g_0) слева на любой элемент G :

$$\begin{aligned} (e, g_0)(g_1, g'_0) &= (e, g_0)(g_1, e)(e, g'_0) = \\ &= (g_1, e)(e, \psi(g_1)^{-1}g'_0)(e, g'_0) = (g_1, [\psi(g_1)^{-1}g'_0]g'_0). \end{aligned}$$

Произведение двух элементов вида (g_1, e) должно иметь вид

$$(g_1, e)(g'_1, e) = (g_1g'_1, \chi(g_1, g'_1)),$$

где $\chi: G_1 \times G_1 \rightarrow G_0$ — некоторое отображение.

Зная ψ и χ , можно вычислить произведение любых двух элементов G по формуле

$$(g_1, g_0)(g'_1, g'_0) = (g_1g'_1, \chi(g_1, g'_1)[\psi(g'_1)^{-1}g'_0]g'_0). \quad (1)$$

Можно без труда проверить, что функции $\psi: G_1 \rightarrow \text{Aut } G_0$ и $\chi: G_1 \times G_1 \rightarrow G_0$ связаны тождествами:

$$a) \quad \psi(g_1)\psi(g_2) = \psi(g_1g_2)I(\chi(g_1, g_2)),$$

где $I(g)$ — внутренний автоморфизм G_0 , соответствующий элементу g ($I(g): g_0 \mapsto gg_0g^{-1}$),

$$б) \quad \chi(g_1g_2, g_3)\psi(g_3)^{-1}\chi(g_1, g_2) = \chi(g_1, g_2g_3)\chi(g_2, g_3),$$

вытекающими из ассоциативности умножения в G . Обратно, любые функции ψ и χ , удовлетворяющие условиям а) и б), определяют по формуле (1) групповой закон на множестве $G_1 \times G_0$.

Расширения, построенные по функциям ψ , χ и ψ' , χ' , эквивалентны, т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & G_0 & \rightarrow & G & \rightarrow & G_1 \rightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow \varepsilon & & \parallel \\ 1 & \rightarrow & G_0 & \rightarrow & G' & \rightarrow & G_1 \rightarrow 1 \end{array}$$

если и только если существует такое отображение $\xi: G_1 \rightarrow G_0$, что:

$$\text{в) } \psi'(g_1) = \psi(g_1) I(\xi(g_1)^{-1}),$$

$$\text{г) } \chi'(g_1, g_2) = \xi(g_1 g_2) \chi(g_1, g_2) [\psi(g_2^{-1}) [\xi(g_1)^{-1}]] \xi(g_2)^{-1}.$$

Отображение ε имеет в этом случае вид

$$\varepsilon: (g_1, g_0) \mapsto (g_1, \xi(g_1) g_0).$$

Может, однако, случиться, что функций ψ и χ , удовлетворяющих условиям а) и б), не существует. В самом деле, автоморфизмы $\psi(g_1)\psi(g_2)$ и $\psi(g_1 g_2)$ лежат в одном и том же смежном классе $\varphi(g_1 g_2) \in \text{Aut } G_0 / \text{Int } G_0$ и, следовательно, отличаются на внутренний автоморфизм.

Таким образом, равенство а) выполняется и определяет функцию $\chi(g_1, g_2)$ с точностью до элемента центра группы G_0 (так как именно этот центр является ядром гомоморфизма $I: G_0 \rightarrow \text{Int } G_0$). Применяя I к обеим частям равенства б), легко проверить, что эти две части отличаются на некоторый элемент $\omega(g_1, g_2, g_3) \in C(G_0)$.

Используя ту свободу, которая у нас осталась для определения $\chi(g_1, g_2)$, можно изменить ω на элемент вида

$$\beta(g_1 g_2, g_3) \beta(g_1, g_2) \beta(g_2, g_3)^{-1} \beta(g_1, g_2 g_3)^{-1}, \quad (2)$$

где β — некоторое отображение $G_1 \times G_1$ в $C(G_0)$.

С другой стороны, можно показать, что в качестве ω может возникнуть любое отображение $G_1 \times G_1 \times G_1$ в $C(G_0)$, обладающее свойством

$$\begin{aligned} \omega(g_1, g_2, g_3)^{-1} \omega(g_1, g_2, g_3 g_4) \omega(g_1, g_2 g_3, g_4)^{-1} = \\ = \omega(g_2, g_3, g_4) \omega(g_1 g_2, g_3, g_4)^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

и, вообще говоря, не представимое в приведенной выше форме (2) через отображение β .

Итак, по данным G_1 , G_0 и $\varphi: G_1 \rightarrow \text{Aut } G_0 / \text{Int } G_0$ группа G строится не всегда. Препятствием к построению G служит не-

которое отображение ω , удовлетворяющее (3), по модулю отображений вида (2)¹⁾.

Ситуация сильно упрощается, если можно отображение $\psi: G_1 \rightarrow \text{Aut } G_0$ выбрать гомоморфизмом. Расширения, для которых такой выбор ψ возможен, называются *центральными*. В этом случае из а) вытекает, что $I(\chi(g_1, g_2)) \equiv e$ и, следовательно, значения функции χ принадлежат центру группы G_0 . Поэтому препятствие ω автоматически имеет вид (2) и, значит, искомые функции χ существуют. Кроме того, при фиксированной функции ψ совокупность функций χ , удовлетворяющих условию б), образует абелеву группу относительно естественного умножения. Совокупность функций, эквивалентных тривиальной функции $\chi(g_1, g_2) \equiv e$ в смысле условия г), образует подгруппу.

Тем самым множество классов эквивалентных расширений получает структуру абелевой группы, что очень упрощает его изучение.

Единичным элементом в группе классов расширений является расширение, связанное с функцией $\chi(g_1, g_2) \equiv e$. В этом случае группа G_1 вкладывается в G в виде подгруппы, расширение называют *разложимым*, а группу G — *полупрямым произведением* G_1 и G_0 .

Пример 1. Группа E_n движений n -мерного евклидова пространства является полупрямым произведением подгруппы вращений и подгруппы параллельных переносов.

Пример 2. Группа $GL(n, K)$ всех невырожденных матриц порядка n с элементами из поля K является разложимым расширением K^* (мультипликативной группы поля K) с помощью группы $SL(n, K)$ унимодулярных матриц.

Пример 3. Группа Π_{mn} является полупрямым произведением групп Π_m и Π_n , если и только если m и n взаимно просты.

Хорошим упражнением, помогающим овладеть описанными здесь понятиями, является

Задача 1. Описать все расширения вида

$$1 \rightarrow \Pi_m \rightarrow G \rightarrow \Pi_n \rightarrow 1.$$

2.5. Когомологии групп.

Как мы видели, задача о расширении групп сводится к рассмотрению функций от одного, двух или трех элементов группы, удовлетворяющих некоторым специальным соотношениям. К таким же функциям и соотношениям сводятся и многие другие вопросы из теории представлений, алгебраической геометрии и топологии. Анализ возникающей ситуации привел к возникновению понятия когомологии группы, которое позволило объединить в одну схему многие родственные теории. Мы приведем здесь лишь основные

¹⁾ Формулировку этого утверждения в терминах когомологий групп см. в задаче 2 п. 2.5.

определения, отсылая за подробностями к книге С. Маклейна [37]. В ней доступно и достаточно полно изложены основы гомологической алгебры, частью которой является теория когомологий групп.

Пусть группа G действует на абелевой группе M . Функция $c(g_0, \dots, g_n)$ на $G \times \dots \times G$ со значениями в M называется n -мерной коцепью, если

$$c(gg_0, \dots, gg_n) = gc(g_0, \dots, g_n)$$

для всех $g, g_i \in G$. Совокупность всех n -мерных коцепей образует группу $C^n(G, M)$. Введем оператор d , действующий из $C^n(G, M)$ в $C^{n+1}(G, M)$ по формуле

$$dc(g_0, \dots, g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i c(g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_{n+1});$$

здесь знак $\hat{}$ означает, что соответствующий аргумент опущен. Коцепь c называется кограницей коцепи b , если $c = db$, и коциклом, если $dc = 0$. Легко проверяется следующее фундаментальное свойство оператора d : $d \circ d = 0$. Поэтому группа $Z^n(G, M)$ всех n -мерных коциклов содержит подгруппу $B^n(G, M)$ всех кограниц $(n+1)$ -мерных коцепей. Фактор-группа

$$H^n(G, M) = Z^n(G, M) / B^n(G, M)$$

называется n -мерной группой когомологий группы G с коэффициентами в M . Если M — кольцо или алгебра, то $H^*(G, M) = \bigoplus_n H^n(G, M)$ также можно превратить в (градуированное) кольцо или алгебру.

Для практических вычислений удобно вместо коцепи $c(g_0, \dots, g_n)$ рассматривать функцию

$$\tilde{c}(h_1, \dots, h_n) = c(e, h_1, h_1 h_2, \dots, h_1 h_2 \dots h_n),$$

которая однозначно определяет исходную коцепь.

Задача 1. Докажите тождество

$$\begin{aligned} d\tilde{c}(h_1, \dots, h_{n+1}) &= h_1 \tilde{c}(h_2, \dots, h_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \tilde{c}(h_1, \dots, h_{i-1}, h_i h_{i+1}, h_{i+2}, \dots, h_{n+1}) + (-1)^{n+1} \tilde{c}(h_1, \dots, h_n). \end{aligned}$$

В частности, для $n=0, 1, 2, 3$ оператор d в терминах функций $\bar{c}$ имеет такой вид:

$$\bar{d}c(h) = h\bar{c} - \bar{c},$$

$$\bar{d}c(h_1, h_2) = h_1\bar{c}(h_2) - \bar{c}(h_1h_2) + \bar{c}(h_1),$$

$$\bar{d}c(h_1, h_2, h_3) = h_1\bar{c}(h_2, h_3) - c(h_1h_2, h_3) + c(h_1, h_2h_3) - c(h_1, h_2),$$

$$\begin{aligned} \bar{d}c(h_1, h_2, h_3, h_4) = \\ = h_1\bar{c}(h_2, h_3, h_4) - \bar{c}(h_1h_2, h_3, h_4) + \bar{c}(h_1, h_2h_3, h_4) - \\ - \bar{c}(h_1, h_2, h_3h_4) + \bar{c}(h_1, h_2, h_3). \end{aligned}$$

Задача 2. Докажите, что полученные выше результаты о расширениях групп можно сформулировать так:

Препятствием к построению расширения служит некоторый элемент из $H^3(G_1, C(G_0))$.

Классы эквивалентности центральных расширений нумеруются элементами $H^2(G_1, C(G_0))$.

Самым действенным средством изучения когомологий групп является рассмотрение $H^n(G, M)$ как бифунктора, контравариантного по G и ковариантного по M .

Существует также связь между когомологиями групп и когомологиями топологических пространств. В простейшем случае, когда G тривиально действует на M , эта связь имеет вид

$$H^n(G, M) = H^n(K(G, 1), M).$$

2.6. Топологические группы и однородные пространства. *Топологической группой* называется множество G , которое является одновременно группой и топологическим пространством, причем групповая и топологическая структуры связаны условием:

отображение $G \times G \rightarrow G: (x, y) \mapsto xy^{-1}$ непрерывно.

Это требование равносильно совокупности следующих трех более удобных для проверки условий:

1. Отображение $(x, y) \mapsto xy$ непрерывно по x и по y .
2. Отображение $x \mapsto x^{-1}$ непрерывно в точке $x=e$.
3. Отображение $(x, y) \mapsto xy$ непрерывно по совокупности переменных в точке (e, e) .

Всякую абстрактную группу можно рассматривать как топологическую, если снабдить ее дискретной топологией (все подмножества открыты).

Более интересные примеры получаются, если рассмотреть группы непрерывных преобразований топологических пространств, сохраняющих ту или иную дополнительную структуру. Так получаются, например, группа невырожденных матриц,

группа конформных преобразований круга, группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве и другие.

Топологические группы образуют категорию, в которой морфизмами являются непрерывные гомоморфизмы. (Иногда рассматривают более узкий класс морфизмов, добавляя требование замкнутости или открытости отображений.)

Множество X называется (левым) топологическим G -пространством, если оно является (левым) G -пространством в обычном смысле (см. п. 2.1) и, кроме того, снабжено такой топологией, что отображение

$$G \times X \rightarrow X: (g, x) \mapsto gx$$

непрерывно. Если пространство X отделимо, то стационарная подгруппа каждой точки будет замкнутой подгруппой в G . Обратно, если H — замкнутая подгруппа отделимой группы G , то пространство G/H левых смежных классов, снабженное фактортопологией, будет отделимым однородным топологическим G -пространством. Если X — любое другое топологическое G -пространство с той же стационарной подгруппой, то естественное отображение $\varphi: G/H \rightarrow X$ взаимно однозначно и непрерывно. Если G и X локально компактны¹⁾, то φ — гомеоморфизм.

Таким образом, для локально компактных групп и пространств имеется однозначное соответствие между однородными топологическими G -пространствами и классами сопряженности замкнутых подгрупп.

В качестве примера связи топологических и групповых свойств приведем следующий факт.

Задача 1. Пусть G — связная топологическая группа, Γ — ее дискретный нормальный делитель. Тогда Γ лежит в центре G .

Указание. Рассмотрите отображение G в $\Gamma: g \mapsto g\gamma g^{-1}$, где $\gamma \in \Gamma$.

Каждая топологическая группа может быть двумя способами превращена в равномерное пространство. А именно, можно считать точки x и y V -близкими, где V — окрестность единичного элемента, если $xy^{-1} \in V$ (1-й способ) или $x^{-1}y \in V$ (2-й способ). При первом способе операция правого сдвига будет равномерно непрерывной, а операция левого сдвига и переход к обратному элементу, вообще говоря, нет. Для второго способа равномерно непрерывными будут левые сдвиги и, вообще говоря, не будут правые сдвиги и переход к обратному элементу.

Естественно рассмотреть пополнения этих двух равномерных пространств и попытаться ввести на них структуру топо-

¹⁾ Локально компактным называется такое топологическое пространство, в котором каждая точка имеет окрестность с компактным замыканием.

логической группы. Очевидно, это возможно, только если выполнено следующее условие:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для всякой фундаментальной направленности } \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \\ \text{направленность } \{x_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in A} \text{ также фундаментальна.} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Оказывается, что при выполнении этого условия оба пополнения действительно будут топологическими группами, и эти две группы изоморфны.

В частности, условие (1) выполнено во всех коммутативных группах.

Пример 1. Пусть $\mathbf{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел, топология в которой задается обычной метрикой:

$$\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|.$$

Тогда пополнение $\mathbf{Q}$ изоморфно $\mathbf{R}$.

Пример 2. В той же группе $\mathbf{Q}$ зададим метрику по-другому. Пусть p — простое число. Каждое рациональное число записывается в виде $x = p^k m/n$, где целые числа m и n взаимно просты с p . Положим $\rho_p(x, y) = p^{-k}$, если $x - y = p^k m/n$.

Пополнение $\mathbf{Q}$ по этой метрике называется группой *p-адических чисел* и обозначается $\mathbf{Q}_p$. (На самом деле $\mathbf{Q}_p$ будет даже полем; см. § 3.)

Пополнение подгруппы $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ по этой метрике (совпадающее, конечно, с замыканием $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Q}_p$) называется группой *целых p-адических чисел* и обозначается $\mathbf{Z}_p$.

Задача 2. Докажите, что группа $\mathbf{Z}_p$ компактна и гомеоморфна канторову совершенному множеству.

Указание. Проверьте, что каждый элемент $\mathbf{Z}_p$ может быть однозначно записан в виде суммы ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$, где $0 \leq a_k \leq p-1$, и что сходимость в $\mathbf{Z}_p$ совпадает с покомпонентной сходимостью последовательностей $\{a_k\}$.

Еще один важный пример, в котором применима конструкция пополнения, строится так. Пусть G — бесконечная группа. Возьмем в качестве базиса окрестностей единицы всевозможные подгруппы конечного индекса в G . Предположим, что возникающая таким образом топология отделима. Условие (1) в этом случае выполняется, и пополнение $\hat{G}$ группы G оказывается компактной топологической группой. Такие группы называются *проконечными*. (Они являются проективными пределами конечных групп.)

Задача 3. Если $G = \mathbf{Z}$, то $\hat{G} = \prod_p \mathbf{Z}_p$.

У к а з а н и е. Если последовательность $\{n_k\}$ фундаментальна в рассматриваемой топологии, то она фундаментальна в любой из метрик ρ_p , введенных выше, и обратно. Отсюда получается вложение $\hat{G}$ в $\prod_p \mathbb{Z}_p$. Тот факт, что это вложение — эпиморфизм, вытекает из так называемой «китайской теоремы об остатках»: *существует целое число, имеющее заданные вычеты по любому конечному числу взаимно простых модулей.*

Задача 4. Докажите, что группа $\hat{G}$ из предыдущей задачи может быть получена также как проективный предел семейства групп Π_n , у которых индексы упорядочены отношением делимости (ср. задачу 2 из п. 1.2).

Доказательство приведенных в этом пункте фактов и дальнейшие сведения о топологических группах можно найти в книгах Л. С. Понтрягина [39] и Н. Бурбаки [6, гл. III].

§ 3. КОЛЬЦА И МОДУЛИ

Доказательство фактов, приводимых в этом параграфе, и дополнительные сведения можно найти в учебнике С. Ленга [35] или в трактате Н. Бурбаки [7].

3.1. Кольца. *Кольцом* называется множество K с двумя операциями: сложением, относительно которого K является абелевой группой, и умножением, связанным со сложением законом дистрибутивности:

$$x(y + z) = xy + xz, \quad (x + y)z = xz + yz.$$

Обычно рассматривают *ассоциативные* кольца, удовлетворяющие условию $(xy)z = x(yz)$. В этой книге слово «кольцо» будет всегда означать «ассоциативное кольцо».

Кольцо K называется *коммутативным*, если $xy = yx$ для всех $x, y \in K$.

Подгруппа $K' \subset K$ называется *подкольцом* (соответственно *левым, правым или двусторонним идеалом*), если $xy \in K'$ для любых $x \in K', y \in K'$ (соответственно для $x \in K, y \in K'$; $x \in K', y \in K$; один из элементов x, y лежит в K').

Если K' — двусторонний идеал, то фактор-группа K/K' естественно снабжается умножением (произведением классов $x + K'$ и $y + K'$ служит класс $xy + K'$). Возникающее таким образом кольцо называется *фактор-кольцом*.

Приведем несколько примеров колец, которые нам будут часто встречаться:

Кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Кольцо Π_n вычетов по модулю n (фактор-кольцо $\mathbb{Z}$ по идеалу, образованному числами, кратными n).

Кольцо $K[t]$ многочленов от переменной t с коэффициентами из некоторого кольца K .

Кольцо $\text{Mat}_n(K)$ матриц n -го порядка с коэффициентами из некоторого кольца K .

Задача 1. Пусть K — конечное кольцо из p элементов, где p — простое число. Докажите, что либо K изоморфно кольцу вычетов по модулю p , либо произведение любых двух элементов из K равно нулю.

Единицей кольца называется такой элемент, умножение на который (с любой стороны) является тождественным преобразованием.

Всякое кольцо K можно вложить в кольцо K_1 с единицей 1, так что K_1 порождается 1 и K . Кольцо K_1 определено этим свойством с точностью до изоморфизма.

Операция перехода от K к K_1 называется *присоединением единицы*.

Задача 2. Докажите, что если в кольце K уже была единица, то кольцо K_1 изоморфно прямой сумме $K \oplus \mathbb{Z}$.

Указание. Пусть e — единица в K . Каждый элемент K_1 можно записать в виде $n(1 - e) + x$, где $x \in K$, $n \in \mathbb{Z}$.

Важной характеристикой кольца K является его *радикал* $R(K)$. В кольце K с единицей радикал $R(K)$ может быть определен любым из следующих эквивалентных способов:

1) $R(K)$ есть пересечение всех максимальных левых идеалов в K , отличных от K ;

2) $R(K)$ есть пересечение всех максимальных правых идеалов в K , отличных от K ;

3) $R(K)$ состоит из таких элементов $x \in K$, что элементы $1 + axb$ обратимы при любых $a, b \in K$.

Можно показать, что $R(K)$ — двусторонний идеал в K . В любом кольце можно определить радикал формулой

$$R(K) = R(K_1),$$

где K_1 — кольцо, получаемое из K присоединением единицы (на самом деле $R(K_1)$ всегда содержится в K).

Кольцо K называется *полупростым*, если $R(K) = \{0\}$, и *радикальным*, если $R(K) = K$.

Задача 3. Кольцо $K/R(K)$ полупросто.

Задача 4. Кольцо $\text{Mat}_n(K)$, где K — поле, полупросто.

Задача 5. Подкольцо $T_n(K) \subset \text{Mat}_n(K)$, состоящее из верхних треугольных матриц (т. е. таких матриц $\|a_{ij}\|$, что $a_{ij} = 0$ при $i > j$), имеет в качестве радикала кольцо $ST_n(K)$ строго треугольных матриц (т. е. таких матриц $\|a_{ij}\|$, что $a_{ij} = 0$ для $i \geq j$).

Пусть A — абелева группа. Кольцо K называется *A -градуированным*, если как группа оно является прямой суммой групп K^a , $a \in A$, причем $K^a \cdot K^b \subset K^{a+b}$ (т. е. произведение элемента из K^a на элемент из K^b принадлежит K^{a+b}); $\mathbb{Z}$ -градуированные кольца называются просто *градуированными*.

Если в кольце K задано возрастающее (соответственно убывающее) семейство подгрупп K_i так, что $K_i K_j \subset K_{i+j}$, то говорят,

что в кольце K задана *возрастающая* (соответственно *убывающая*) *фильтрация*.

Существует естественный функтор из категории колец с фильтрацией (морфизмами служат гомоморфизмы колец, сохраняющие фильтрацию) в категорию градуированных колец (морфизмами являются гомоморфизмы колец, сохраняющие градуировку). Этот функтор обозначается gr и строится следующим образом. Пусть для определенности $\{K_i\}$ — возрастающая фильтрация. Положим

$$\text{gr}^i K = K_i / K_{i-1}$$

и

$$\text{gr} K = \bigoplus_i \text{gr}^i K \text{ (прямая сумма абелевых групп).}$$

Структура градуированного кольца в $\text{gr} K$ будет полностью определена, если мы укажем способ умножения элемента $x \in \text{gr}^i K$ на элемент $y \in \text{gr}^j K$. Пусть $\tilde{x}$ — представитель класса x в K_i , $\tilde{y}$ — представитель класса y в K_j . Тогда $x\tilde{y}$ — это класс в $\text{gr}^{i+j} K$, содержащий элемент $\tilde{x}\tilde{y} \in K_{i+j}$.

Несложную проверку корректности этого определения мы предоставим читателю.

Задача 6. Пусть $K = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, K_i — подкольцо чисел, кратных m^i , где m — некоторое фиксированное число. Докажите, что $\text{gr} K$ изоморфно кольцу $\mathbb{Z}_m[i]$ с естественной градуировкой по степеням i .

Топологическим кольцом называется кольцо K , снабженное такой топологией, что K является топологической группой относительно сложения, и операция умножения непрерывна по совокупности переменных. Всякое топологическое кольцо допускает пополнение. Наиболее важный пример применения этой конструкции — так называемое I -адическое пополнение. Пусть I — двусторонний идеал в K . Примем за базис окрестностей нуля совокупность $\{I^n\}$ степеней идеала I . Если $\bigcap_n I^n = \{0\}$, то эта топология отделима. Она называется *I -адической топологией*, а пополнение K по этой топологии — *I -адическим пополнением*.

Пример. Если $K = \mathbb{Z}$ и $I = m\mathbb{Z}$, то I -адическое пополнение — это так называемое кольцо $\mathbb{Z}_m$ целых m -адических чисел.

Задача 7. Пусть $p_1, \dots, p_k$ — простые делители m . Докажите, что кольцо целых m -адических чисел изоморфно прямой сумме колец целых p -адических чисел для $p = p_1, \dots, p_k$: $\mathbb{Z}_m = \bigoplus_i \mathbb{Z}_{p_i}$.

Задача 8. Докажите, что в десятичной системе счисления существует ровно четыре «бесконечнозначных числа»

$$\dots 0\,000\,000, \quad \dots 2\,890\,625, \quad \dots 7\,109\,376 \quad \text{и} \quad \dots 0\,000\,001,$$

обладающих свойством: если последние k цифр числа N те же, что и у одного из этих четырех чисел, то любая степень числа N оканчивается теми же k цифрами.

У к а з а н и е. Используйте результат задачи 7: $\mathbf{Z}_{10} = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_5$ и тот факт, что в кольце целых p -адических чисел нет делителей нуля.

3.2. Тела. *Телом* (топологическим телом) называется множество K , в котором определены все четыре арифметических действия так, что:

1) относительно сложения и умножения K является (топологическим) кольцом,

2) функция $x \mapsto x^{-1}$ определена (и непрерывна) всюду, кроме точки 0.

Тело с коммутативным умножением называется *полем*. Известно, что всякое конечное тело коммутативно. Мы предполагаем, что читателю хорошо известны:

поле $\mathbf{Q}$ рациональных чисел,

поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел,

поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел.

Кроме этих основных полей, мы определим здесь и будем использовать в этой книге:

тело $\mathbf{H}$ кватернионов,

поле $\mathbf{Q}_p$ p -адических чисел,

поле $\mathbf{F}_q$, состоящее из конечного числа q элементов,

поле $\mathbf{K}_q$ формальных степенных рядов с коэффициентами из $\mathbf{F}_q$.

Тело $\mathbf{H}$ удобнее всего определить как тело комплексных матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$ или вещественных матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

Поле $\mathbf{Q}_p$ получается из алгебраического расширения $\mathbf{Q}'$ поля $\mathbf{Q}$ (такие поля называются *числовыми*) пополнением по p -адической топологии, где p — некоторый простой идеал в кольце $\mathbf{Z}'$ целых чисел поля $\mathbf{Q}'$. Это же поле можно получить алгебраическим расширением поля $\mathbf{Q}_p$ p -адических чисел, где p — единственное простое число, принадлежащее идеалу p .

Поле $\mathbf{F}_q$ полностью определяется числом q , которое должно быть степенью простого числа: $q = p^n$. В случае, когда $n = 1$ и $q = p$ — это поле $\mathbf{C}_p$ вычетов по модулю p . В общем случае $\mathbf{F}_q$ является алгебраическим расширением поля вычетов и может быть реализовано матрицами n -го порядка с элементами из $\mathbf{C}_p$.

Например F_4 состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с коэффициентами из $\mathbb{C}_2$.

Поле K_q образовано формальными степенными рядами вида $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k x^k$, $a_k \in F_q$, с обычными арифметическими операциями.

Подробнее о перечисленных телах можно прочитать, например, в книге З. И. Боровича и И. Р. Шафаревича [5].

Известно, что телами $\mathbb{Q}_p$, K_q , $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ исчерпываются все локально-компактные неметризуемые тела. Доказательство этого факта см., например, в книге Л. С. Понтрягина [39].

Для теории представлений важную роль играет то обстоятельство, что аддитивные группы всех перечисленных тел двойственны самим себе по Понтрягину (см. § 12).

3.3. Модули над кольцами. Абелева группа M называется *левым модулем* над кольцом K или, короче, *левым K -модулем*, если определена операция умножения элементов из K слева на элементы из M , так что выполняются естественные условия:

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$$

для $\lambda, \mu \in K$ и $x, y \in M$.

Если кольцо K содержит единицу 1, то обычно требуют также выполнения равенства $1 \cdot x = x$.

Аналогично определяют *правые* и *двусторонние K -модули*. Если кольцо K коммутативно, то каждый левый K -модуль естественно снабжается структурой правого и двустороннего K -модуля.

Подгруппа $N \subset M$, инвариантная относительно умножения на элементы из K , называется *подмодулем*. Фактор-группа M/N в этом случае также является K -модулем и называется *фактор-модулем*. Совокупность всех левых (соответственно правых, двусторонних) K -модулей образует категорию, морфизмами которой являются гомоморфизмы групп, перестановочные с умножением слева (соответственно справа или с обеих сторон) на элементы из K . Будем называть эти морфизмы *линейными отображениями* или *K -отображениями*, а совокупность K -отображений из M в N обозначать $\text{Hom}_K(M, N)$. Вместо $\text{Hom}_K(M, M)$ пишут также $\text{End}_K M$. Индекс K часто опускают, если нет угрозы путаницы. В категории K -модулей существуют суммы, произведения, проективные и индуктивные пределы любого семейства объектов.

Для конечного семейства K -модулей $M_1, \dots, M_n$ операции суммы и произведения приводят к одному и тому же модулю M , состоящему из наборов $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in M_i$. Мы предоставим читателю ввести на M естественную структуру K -модуля и по-

строить отображения $i_k: M_k \rightarrow M$ и $p_k: M \rightarrow M_k$, так что $(M, \{i_k\})$ будет суммой, а $(M, \{p_k\})$ — произведением модулей $M_1, \dots, M_n$.

Отметим, что кольцо K можно рассматривать как левый, правый или двусторонний модуль над самим собой. Прямая сумма n таких модулей называется *свободным K -модулем ранга n* .

Задача 1. Пусть K — кольцо с единицей и M — свободный правый K -модуль ранга n . Тогда кольцо $\text{End}_K M$ изоморфно $\text{Mat}_n(K)$.

Указание. Рассмотрите сначала случай $n = 1$.

K -модуль M (левый, правый или двусторонний) называется *простым*, если он не имеет подмодулей, отличных от $\{0\}$ и M .

Задача 2. Докажите, что элемент $x \in K$ принадлежит $R(K)$, если и только если $xM = \{0\}$ для любого простого левого модуля M .

Указание. Если m — элемент простого левого модуля M , то совокупность тех $x \in K$, для которых $xm = 0$, является максимальным левым идеалом в K .

Теорема Жордана — Гёльдера. Если в модуле M есть такое возрастающее семейство подмодулей $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M$, что все фактор-модули $N_i = M_i/M_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, просты, то классы эквивалентности модулей $N_1, \dots, N_n$ определены однозначно (с точностью до перестановки) классом эквивалентности модуля M и не зависят от выбора семейства $\{M_i\}$.

Доказательство этого факта легко выводится из леммы Шура (см. ниже § 7).

Пусть M — правый K -модуль, а N — левый K -модуль. Тогда можно определить *тензорное произведение над K* модулей M и N , обозначаемое $M \otimes_K N$. Для этого рассмотрим абелеву группу $M \square N$, порожденную символами вида $m \square n$, где $m \in M$, $n \in N$. Обозначим $M \circ N$ подгруппу в $M \square N$, порожденную элементами вида:

$$\text{а) } (m_1 + m_2) \square n - m_1 \square n - m_2 \square n,$$

$$\text{б) } m \square (n_1 + n_2) - m \square n_1 - m \square n_2,$$

$$\text{в) } m\lambda \square n - m \square \lambda n,$$

где $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$, $\lambda \in K$.

Положим $M \otimes_K N = M \square N / M \circ N$. Образ элемента $m \square n \in M \square N$ в $M \otimes_K N$ обычно обозначается $m \otimes n$ или просто $m \otimes n$.

Отметим, что тензорное произведение двух K -модулей является абелевой группой, не несущей никакой естественной структуры K -модуля. Однако если модуль M (соответственно N) снабжен структурой левого (соответственно правого) L -модуля, то эта структура переносится на тензорное произведение.

В частности, если K — коммутативное кольцо, то M и N — двусторонние K -модули и поэтому $M \otimes_K N$ — двусторонний K -модуль.

Пример. Всякую группу можно рассматривать как $\mathbf{Z}$ -модуль, полагая $nx = x + x + \dots + x$ (n слагаемых) для $n > 0$ и $nx = -(-nx)$ для $n < 0$.

Задача 3. Вычислить тензорное произведение групп $\mathbf{C}_m$ и $\mathbf{C}_n$ как $\mathbf{Z}$ -модулей.

Ответ. $\mathbf{C}_{(m,n)}$, где (m, n) — наименьший общий делитель чисел m и n .

Определение тензорного произведения можно дать также, используя понятие универсального объекта. Пусть для простоты кольцо K коммутативно и $M_1, \dots, M_n$ — набор K -модулей. Рассмотрим категорию, объектами которой являются полилинейные (т. е. линейные по каждому аргументу) отображения $M_1 \times \dots \times M_n$ (произведение множеств) в какой-нибудь K -модуль M (свой для каждого объекта). Морфизмами являются коммутативные диаграммы

$$M_1 \times \dots \times M_n \begin{array}{c} \nearrow \varphi \quad M \\ \searrow \psi \quad M' \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \psi \\ \downarrow \psi \end{array}$$

где φ и φ' — полилинейные отображения, а ψ — линейное отображение M в M' . Универсальный отталкивающий объект в этой категории называется *тензорным произведением над K модулей $M_1, \dots, M_n$* .

Задача 4. Проверьте, что это определение (при $n = 2$) эквивалентно данному выше.

Указание. Рассмотрите полилинейное отображение $M_1 \times M_2$ в $M_1 \otimes_K M_2$:

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 \otimes x_2.$$

Пусть K — коммутативное кольцо и M — некоторый K -модуль. Множество $M^* = \text{Hom}_K(M, K)$ естественно снабжается структурой K -модуля и называется *дуальным модулем* к модулю M .

Отображение $M \mapsto M^*$ является контравариантным функтором в категории K -модулей.

Задача 5. Пусть M и N — свободные K -модули конечного ранга. Проверьте, что существуют естественные изоморфизмы:

$$(M^*)^* \approx M, \quad \text{Hom}_K(M, N) \approx \text{Hom}_K(N^*, M^*) = M^* \otimes_K N,$$

$$\left(M \otimes_K N \right)^* \approx M^* \otimes_K N^*.$$

3.4. Линейные пространства. Если K — поле, то K -модуль M называется *линейным* или *векторным пространством* над K , а элементы M называются *векторами*.

Иногда употребляют также термин «левое (правое) линейное пространство над K » вместо «левый (правый) K -модуль», в случае, когда K — некоммутативное тело.

Всякий модуль M над телом K свободен, другими словами, всякое линейное пространство имеет базис.

Можно показать также, что все базисы пространства M имеют одну и ту же мощность, которая называется *размерностью* M и обозначается $\dim_K M$ или просто $\dim M$, если ясно, о каком K идет речь.

Если M и N — линейные пространства над K , то элементы пространства $\text{Hom}_K(M, N)$ называются *линейными операторами* из M в N . Пусть $\{x_\alpha\}$, $\{y_\beta\}$ — базисы в M и N соответственно. Каждый линейный оператор A из M в N однозначно определяет матрицу $\|a_{\alpha\beta}\|$:

$$Ax_\alpha = \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} x_\beta. \quad (1)$$

Обратно, любая матрица $\|a_{\alpha\beta}\|$, в которой каждая строка содержит лишь конечное число ненулевых элементов, определяет по формуле (1) линейный оператор из M в N .

Задача 1. Докажите, что $\dim \text{Hom}_K(M, N) = \dim M \dim N$, если оба сомножителя в правой части конечны.

Пусть A — оператор в конечномерном пространстве M над полем K . Следом A называется элемент $\text{tr } A \in K$, который является образом A при композиции отображений

$$\text{Hom}_K(M, M) \xrightarrow{\varphi} M^* \otimes M \xrightarrow{\psi} K,$$

где φ — естественный изоморфизм, а ψ — линейный оператор, соответствующий билинейному отображению $M^* \times M$ в K : $(t^*, m) \mapsto t^*(m)$.

Задача 2. Докажите, что $\text{tr } A$ равен сумме диагональных элементов матрицы оператора A в любом базисе.

Задача 3. Если $A: M \rightarrow N$ и $B: N \rightarrow M$ — линейные операторы в конечномерных пространствах, то $\text{tr } AB = \text{tr } BA$.

Операции прямой суммы и тензорного произведения двух пространств приводят к понятиям *прямой суммы* и *тензорного произведения* двух операторов. Пусть $A_1 \in \text{Hom}_K(M_1, N_1)$, $A_2 \in \text{Hom}_K(M_2, N_2)$. Тогда $A_1 \oplus A_2$ означает оператор из $M_1 \oplus M_2$ в $N_1 \oplus N_2$, заданный формулой

$$A_1 \oplus A_2: (x_1, x_2) \mapsto (A_1 x_1, A_2 x_2),$$

а $A_1 \otimes A_2$ — оператор из $M_1 \otimes M_2$ в $N_1 \otimes N_2$, заданный формулой

$$A_1 \otimes A_2: x_1 \otimes x_2 \mapsto A_1 x_1 \otimes A_2 x_2.$$

Можно проверить, что в подходящих базисах матрица оператора $A_1 \oplus A_2$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a^{(1)} & 0 \\ 0 & a^{(2)} \end{pmatrix},$$

где $\|a^{(1)}\|$ и $\|a^{(2)}\|$ — матрицы операторов A_1 и A_2 . Матрица оператора $A_1 \otimes A_2$ в подходящем базисе обладает свойством $a_{\alpha\gamma; \beta\delta} = a_{\alpha\beta}^{(1)} \cdot a_{\gamma\delta}^{(2)}$ и может быть записана в виде блочных матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)}a^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(1)}a^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)}a^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(1)}a^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)}a^{(1)} & \dots & a_{1m}^{(2)}a^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(2)}a^{(1)} & \dots & a_{mm}^{(2)}a^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Докажите в конечномерном случае равенства

$$\operatorname{tr}(A_1 \oplus A_2) = \operatorname{tr} A_1 + \operatorname{tr} A_2, \quad \operatorname{tr}(A_1 \otimes A_2) = \operatorname{tr} A_1 \cdot \operatorname{tr} A_2.$$

3.5. Алгебры. Если в множестве A заданы структуры кольца и линейного пространства над полем K , причем произведение линейно зависит от сомножителей, то говорят, что A — *алгебра над K* или, короче, *K -алгебра*.

Совокупность всех K -алгебр образует категорию, морфизмами которой являются гомоморфизмы алгебр (т. е. линейные гомоморфизмы колец). Кроме суммы и произведения любого семейства объектов, в категории K -алгебр существует тензорное произведение конечного числа объектов.

Если $A_1, \dots, A_n$ K -алгебры, то их *тензорное произведение* — это линейное пространство $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ (произведение над K), снабженное законом умножения:

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes \dots \otimes y_n) = x_1 y_1 \otimes \dots \otimes x_n y_n.$$

Задача 1. Если каждая из алгебр $A_1, \dots, A_n$ изоморфна алгебре $K[t]$, то их тензорное произведение изоморфно алгебре $K[t_1, \dots, t_n]$ многочленов от n переменных с коэффициентами из K .

Задача 2. Докажите соотношения

$$C \otimes_R C = C \oplus C, \quad C \otimes_R H = \operatorname{Mat}_2(C), \quad H \otimes_R H = \operatorname{Mat}_4(R).$$

Задача 3. Если A — любая K -алгебра, то

$$A \otimes_K \operatorname{Mat}_n(K) = \operatorname{Mat}_n(A).$$

Следствие. $\operatorname{Mat}_n(K) \otimes_K \operatorname{Mat}_m(K) = \operatorname{Mat}_{mn}(K).$

Рассмотрим категорию K -алгебр с n отмеченными образующими (морфизмами служат гомоморфизмы алгебр, переводящие образующие в соответствующие образующие). В этой категории есть универсальный отталкивающий объект — так называемая *свободная алгебра с n образующими $\mathcal{F}(n, K)$* .

Задача 4. Пусть $t_1, \dots, t_n$ — образующие $\mathcal{F}(n, K)$. Докажите, что базис в линейном пространстве $\mathcal{F}(n, K)$ образован всевозможными «словами» $t_{i_1} \dots t_{i_k}$, включая «пустое слово», которое мы обозначим 1.

Очевидно, что $\mathcal{F}(n, K)$ становится градуированной алгеброй, если обозначить $\mathcal{F}^l(n, K)$ подпространство, порожденное всеми «словами» длины l .

Алгебра $\mathcal{F}(n, K)$ имеет другую полезную интерпретацию. Обозначим $\mathcal{F}^l(n, K)$ через V . Тогда $\mathcal{F}^l(n, K)$ естественно отождествляется с тензорным произведением $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ (l сомножителей). Поэтому алгебру $\mathcal{F}(n, K)$ называют также *тензорной алгеброй* над V и обозначают $T(V) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} T^l(V)$. Элементы $T^l(V)$ называют *контравариантными тензорами* ранга l над V .

Пусть V^* — дуальное к V пространство. Элементы пространства $T(V) \otimes T(V^*)$ называются *смешанными тензорами*. Более точно, *смешанным тензором ранга (k, l)* (или *k -контравариантным и l -ковариантным тензором*) называется элемент $T^k(V) \otimes T^l(V^*)$. Результат задачи 5 из п. 3.3 показывает, что это равносильно классическому определению тензора ранга (k, l) как полилинейной функции от k векторов из V^* и l векторов из V .

Назовем тензор из $T^k(V)$ *симметрическим* (соответственно *кососимметрическим*), если определяемая им полилинейная функция на V^* не меняется (соответственно меняет знак) при перестановке любых двух аргументов.

Совокупность симметрических (соответственно кососимметрических) тензоров обозначается $S(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(V)$ (соответственно $\bigwedge(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k(V)$).

Задача 5. Пусть I (соответственно J) — двусторонний идеал в $T(V)$, порожденный элементами вида $xu - ux$, $x, u \in V$ (соответственно элементами вида x^2 , $x \in V$). Докажите, что

$$T(V) = S(V) \oplus I = \bigwedge(V) \oplus J$$

(прямая сумма линейных пространств).

Результат этой задачи позволяет отождествить $S(V)$ с $T(V)/I$, а $\bigwedge(V)$ — с $T(V)/J$ и тем самым ввести в $S(V)$ и $\bigwedge(V)$ структуру алгебры над K . Алгебра $S(V)$ называется *симметрической алгеброй* над V . Она коммутативна и изоморфна алгебре многочленов от n переменных ($n = \dim V$). Алгебра $\bigwedge(V)$ называется *внешней алгеброй* или *алгеброй Грассмана* над V .

Операция умножения в $\bigwedge(V)$ обычно обозначается символом $x \wedge y$ и называется *внешним произведением*.

Задача 6. Докажите, что $\dim \wedge^k(V) = C_n^k$, где $n = \dim V$, а $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

Указание. Если $x_1, \dots, x_n$ — базис в V , то базис в $\wedge^k(V)$ составляют элементы $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$, $i_1 < \dots < i_k$.

Пусть Q — квадратичная форма над V (т. е. $Q(x) = B(x, x)$, где B — некоторая билинейная форма). Алгеброй Клиффорда называется фактор-алгебра $C(V, Q) = T(V)/J_Q$, где J_Q — двусторонний идеал, порожденный элементами вида $x^2 - Q(x) \cdot 1$, $x \in V$.

Структура клиффордовых алгебр и их модулей используется в теории представлений и в алгебраической топологии. Следующие задачи дают описание этих алгебр в важном частном случае, когда $K = \mathbf{R}$.

В подходящей системе координат форма Q имеет вид $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$, $p + q \leq n = \dim V$.

Обозначим соответствующую алгебру $C(V, Q)$ через $C(p, q, r)$, где $r = n - p - q$.

Задача 7. Докажите, что радикал алгебры $C(p, q, r)$ порождается (как идеал) базисными элементами $x_{p+q+1}, \dots, x_n$ и что фактор-алгебра $C(p, q, r)$ по ее радикалу изоморфна $C(p, q, 0)$.

Задача 8. Докажите изоморфизмы

$$C(1, 1, 0) \otimes C(p, q, r) = C(p+1, q+1, r).$$

$$C(2, 0, 0) \otimes C(p, q, r) = C(q+2, p, r).$$

$$C(0, 2, 0) \otimes C(p, q, r) = C(q, p+2, r).$$

Указание. Пусть x_1, x_2 и $y_1, \dots, y_n$ — канонические базисы в V_1 и V_2 . Рассмотрите в $C(V_1, Q_1) \otimes C(V_2, Q_2)$ совокупность элементов

$$x_1 \otimes 1, \quad x_2 \otimes 1, \quad x_1 x_2 \otimes y_1, \dots, x_1 x_2 \otimes y_n.$$

Задача 9. Докажите соотношения

$$C(2, 0, 0) = C(1, 1, 0) = \text{Mat}_2(\mathbf{R}),$$

$$C(0, 2, 0) = \mathbf{H}, \quad C(1, 0, 0) = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}, \quad C(0, 1, 0) = \mathbf{C}.$$

Таким образом, для невырожденных форм Q алгебры Клиффорда оказываются матричными алгебрами над $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$ или суммами таких алгебр. Этот факт является иллюстрацией следующего общего результата.

Теорема 1. Всякая полупростая конечномерная алгебра A является прямой суммой простых алгебр (т. е. алгебр, не имеющих двусторонних идеалов, отличных от нуля и всей алгебры). Всякая простая конечномерная K -алгебра изоморфна $\text{Mat}_n(D)$, где D — конечномерное тело над K .

Справедлива также

Теорема 2. Всякий конечномерный модуль над полупростой алгеброй A является прямой суммой простых подмодулей.

Имеется лишь конечное число (для простой алгебры — один) классов эквивалентности простых A -модулей.

Интересная бесконечномерная алгебра возникает, если вместо квадратичной формы Q взять билинейную кососимметрическую форму B и рассмотреть фактор-алгебру $T(V)$ по идеалу, порожденному элементами вида

$$x \otimes y - y \otimes x - B(x, y) \cdot 1, \quad x, y \in V.$$

Как известно, в подходящем базисе $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_k$ форма B приводится к виду

$$B(p_i, q_j) = \delta_{ij},$$

$$B(p_i, p_j) = B(q_i, q_j) = B(p_i, r_j) = B(q_i, r_j) = B(r_i, r_j) = 0.$$

Соответствующую алгебру мы обозначим $R_{n, k}(K)$.

Задача 10. Докажите соотношение

$$R_{n_1, k_1}(K) \underset{K}{\otimes} R_{n_2, k_2}(K) = R_{n_1+n_2, k_1+k_2}(K).$$

§ 4. ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

4.1. Линейные топологические пространства. Линейное пространство L над топологическим полем K называется *линейным топологическим пространством (ЛТП)*, если:

1) L — топологическая группа относительно операции сложения,

2) отображение $K \times L \rightarrow L: (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ непрерывно по совокупности переменных.

Линейные топологические пространства над полем K образуют категорию, морфизмами которой являются линейные непрерывные отображения. В этой категории определены суммы, произведения, проективные и индуктивные пределы.

Напомним, что для конечного числа пространств операции суммы и произведения совпадают в следующем смысле.

Задача 1. Пусть $\{L_k\}$, $k=1, \dots, n$, — конечное семейство ЛТП, (L, i_k) — их сумма и (M, p_k) — их произведение. Докажите, что существует такой изоморфизм $\tau: L \rightarrow M$, что $p_k \circ \tau \circ i_l = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq l, \\ 1, & \text{если } k = l. \end{cases}$

Указание. Проверьте, что в качестве L и M можно взять совокупность всех наборов $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in L_i$, с естественной структурой ЛТП.

Классический функциональный анализ (линейный) — это изучение категорий ЛТП над полями $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$.

Почти все встречающиеся в приложениях ЛТП являются *локально выпуклыми пространствами (ЛВП)*. Это значит, что в них существует базис окрестностей нуля, состоящий из выпуклых множеств. Локально выпуклые пространства обладают

целым рядом важных свойств, главное из которых — существование достаточно богатого множества линейных непрерывных функционалов. Если L — ЛВП и x — ненулевой вектор из L , то существует такой линейный непрерывный функционал f на L , что $f(x) \neq 0$.

Таким образом, любое ЛВП может быть погружено в координатное пространство K^α , где α — достаточно высокая мощность.

Топологию в ЛВП удобно задавать с помощью набора преднорм. Вещественная функция p на ЛТП называется *преднормой* (употребляется также термин *полунорма*), если она удовлетворяет условиям:

- 1) $p(x) \geq 0$,
- 2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
- 3) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Если, кроме того, выполняется условие

- 4) $p(x) = 0$, только если $x = 0$,

то p называется *нормой*. Часто для нормы вектора x используется обозначение $\|x\|$.

Задача 2. Направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в ЛВП сходится к x тогда и только тогда, когда для любой непрерывной преднормы p числовая направленность $\{p(x_\alpha - x)\}_{\alpha \in A}$ сходится к нулю.

Указание. Пусть U — выпуклая окрестность нуля в L . Функционалом Минковского этой окрестности называется функция

$$p_U(x) = \inf_{x \in \lambda U} \{|\lambda|\}.$$

Докажите, что p_U — непрерывная преднорма на L .

Семейство преднорм $\{p_\beta\}_{\beta \in B}$ называется *определяющим*, если условие задачи 2 достаточно проверить только для преднорм из этого семейства. ЛВП L называется *нормируемым* (счетно нормируемым), если существует конечное (счетное) определяющее семейство преднорм. (Конечное семейство преднорм можно заменить одной преднормой — их суммой.)

Любое семейство преднорм $\{p_\beta\}_{\beta \in B}$ в линейном пространстве L является определяющим семейством для некоторой топологии, превращающей L в ЛВП.

Как правило, мы будем рассматривать полные отделимые пространства. Каждому ЛВП L канонически ставится в соответствие полное отделимое ЛВП $\hat{L}$, которое получается из L факторизацией по подпространству L_0 — пересечению всех окрестностей нуля и последующим пополнением L/L_0 .

Полное отделимое нормируемое ЛВП называется *банаховым* пространством.

Банахово пространство L называется *гильбертовым*, если его норма удовлетворяет «условию параллелограмма»:

$$p(x+y)^2 + p(x-y)^2 = 2p(x)^2 + 2p(y)^2. \quad (1)$$

Задача 3. Выведите из (1), что выражение

$$(x, y) = \frac{1}{4} [p(x+y)^2 - p(x-y)^2 + ip(x-iy)^2 - ip(x+iy)^2] \quad (2)$$

линейно по x , антилинейно по y , непрерывно по совокупности переменных и обладает свойством $(x, x) = p(x)^2$.

Указание. Рассмотрите случаи $\dim L = 2$ и $\dim L = 3$.

Пример 1. Пусть $C[-1, 1]$ — совокупность непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$. Положим

$$p_\alpha(f) = \left[\int_{-1}^1 |f(x)|^\alpha dx \right]^{1/\alpha}, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

$$p_\infty(f) = \max |f(x)|.$$

Задача 4. Покажите, что p_α — норма при $1 \leq \alpha \leq \infty$.

Указание. Воспользуйтесь неравенством $(1+y)^\alpha \geq 1+y^\alpha$ при $y \geq 0, \alpha \geq 1$.

Зададим в $C[-1, 1]$ топологию τ_α , принимая в качестве базиса окрестностей нуля множества $p_\alpha(f) \leq \varepsilon, \varepsilon > 0$.

Задача 5. Докажите, что пространство $C[-1, 1]$ полно в топологии τ_α , $0 < \alpha < \infty$.

Указание. Докажите, что последовательность $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ фундаментальна и не имеет предела в $C[-1, 1]$.

Полношение $C[-1, 1]$ в топологии τ_α мы обозначим $L^\alpha[-1, 1]$.

Задача 6. Докажите, что $L^2(-1, 1)$ — гильбертово пространство.

Задача 7. Докажите, что при $0 < \alpha < 1$ на пространстве $L^\alpha[-1, 1]$ нет непрерывных линейных функционалов, отличных от нуля.

Указание. Всякую функцию $f \in C[-1, 1]$ можно представить в виде суммы $2N-1$ функций $f_1, \dots, f_{2N-1}$, удовлетворяющих условиям

$$|f_i| \leq |f|, \quad f_i = 0 \quad \text{вне отрезка} \quad \left[-1 + \frac{i-1}{N}, -1 + \frac{i+1}{N} \right].$$

Воспользуйтесь тем, что непрерывный функционал F на L^α должен удовлетворять неравенству

$$|F(f)| \leq C \left(\int_{-1}^1 |f|^\alpha dx \right)^{1/\alpha}$$

и, следовательно,

$$|F(f)| \leq C \sum_{i=1}^{2N-1} \left(\int_{-1}^1 |f_i|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \leq CM(2N-1)(2/N)^{1/\alpha}.$$

Наиболее важные примеры ЛТП строятся с помощью понятия меры. Приведем здесь начальные сведения из теории меры и интегрирования, отсылая за подробностями к цитированным выше учебникам [32] и [57]. Дальнейшие сведения можно найти в книгах [49], [8].

Пусть X — некоторое множество и B — система его подмножеств, замкнутая относительно операций счетного объединения, пересечения и перехода к дополнению. Такая система называется σ -алгеброй. Говорят, что на (X, B) (или просто на X , если нет сомнений в выборе B) задана *мера* μ , если каждому подмножеству $E \in B$ поставлено в соответствие число $\mu(E)$ так, что

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) \text{ при } E_1 \cap E_2 = \emptyset.$$

Подмножество $E \in B$ называют *измеримым* и $\mu(E)$ — его *мерой*. Меру μ называют *счетно-аддитивной*, если

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \text{ при } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ для } i \neq j$$

(предполагается, что ряд в правой части абсолютно сходится).

Часто предполагается дополнительно, что мера μ принимает только вещественные неотрицательные значения. Мы будем называть такие меры *положительными*. *Вариацией* счетно-аддитивной меры μ называется положительная мера $|\mu|$, определенная формулой

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(E_k)|,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям E в счетную сумму непересекающихся измеримых подмножеств E_k .

Всякая мера μ имеет вид $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$, где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ — положительные меры. Эти меры можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sqrt{2}|\mu| \geq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \geq |\mu|.$$

Мера μ называется *полной*, если из

$$E_1 \in B, E_2 \in B, E_1 \subset E \subset E_2 \text{ и } |\mu|(E_2 \setminus E_1) = 0$$

следует, что $E \in B$. Всякая счетно-аддитивная мера продолжается до полной меры.

Если некоторое соотношение выполняется для всех точек $x \in X \setminus E$ и $|\mu|(E) = 0$, то говорят, что это соотношение верно *почти всюду* на X по мере μ .

Пусть пространство X является объединением семейства попарно непересекающихся подмножеств $X_\alpha, \alpha \in A$. Если на каждом X_α задана мера μ_α , то можно определить так называемую *локально-конечную меру* $\mu = \sum_{\alpha} \mu_\alpha$.

По определению, подмножество E считается μ -измеримым, если его пересечение с X_α μ_α -измеримо для всех α . Мерой E называется сумма ряда $\sum_{\alpha} \mu_\alpha(E \cap X_\alpha)$, в случае, если абсолютно сходится ряд $\sum_{\alpha} |\mu_\alpha|(E \cap X_\alpha)$.

В противном случае полагают $\mu(E) = \infty$. Если семейство $\{X_\alpha\}$ счетно, меру μ называют *σ -конечной*.

Иногда локально-конечные меры называют просто мерами, а меры в принятом здесь смысле — конечными мерами.

Комплексная функция f на X называется *измеримой* (говорят также μ -измеримой или B -измеримой), если для любого открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ измеримо множество $f^{-1}(U) \subset X$. Назовем функцию f *простой*, если она измерима, и принимает лишь счетное множество значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$.

Пусть μ — положительная (не обязательно конечная) мера. Если ряд

$$\sum_k \lambda_k \mu(f^{-1}\{\lambda_k\})$$

абсолютно сходится, то его сумму называют *интегралом* f по мере μ и обозначают $\int_X f(x) d\mu(x)$ (или кратко $\int f d\mu$).

Неотрицательная измеримая функция f называется μ -интегрируемой, если ограничены сверху все интегралы вида $\int_X g(x) d\mu(x)$, где g — простая функция, не превосходящая f . Точная верхняя грань таких интегралов называется интегралом от f по мере μ . Комплексная измеримая функция f называется *интегрируемой* по мере μ (не обязательно положительной), если функция $|f|$ интегрируема по мере $|\mu|$. Интеграл $\int_X f(x) d\mu(x)$ определяется в этом

случае однозначно из условия линейности по f и по μ , считая, что для положительных f и μ он совпадает с интегралом, определенным выше.

Совокупность всех μ -интегрируемых функций образует линейное пространство L с преднормой

$$\|f\| = \int_X |f(x)| d|\mu|(x).$$

Очевидно, что пересечение L_0 всех окрестностей нуля состоит из функций, равных нулю почти всюду. Известно, что фактор-пространство L/L_0 полно относительно соответствующей нормы. Оно обозначается $L^1(X, \mu)$.

Аналогично определяется пространство $L^p(X, \mu)$, состоящее из классов функций f , для которых конечен интеграл от $|f|^p$ по мере μ . Для $1 \leq p < \infty$ это — банахово пространство с нормой

$$\|f\| = \left| \int_X |f(x)|^p d|\mu|(x) \right|^{1/p}.$$

Пространство $L^\infty(X, \mu)$ определяется как банахово пространство, получаемое факторизацией пространства L всех ограниченных μ -измеримых функций на X с нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ по замкнутому подпространству функций, равных нулю почти всюду.

Говорят, что мера μ_1 *абсолютно непрерывна* по мере μ_2 (обозначение: $\mu_1 < \mu_2$), если всякое μ_2 -измеримое множество μ_1 -измеримо, и из $|\mu_2|(E) = 0$ следует $\mu_1(E) = 0$. В этом случае существует такая μ_2 -измеримая функция ρ , что для любой μ_1 -интегрируемой функции f справедливо равенство

$$\int_X f(x) d\mu_1(x) = \int_X f(x) \rho(x) d\mu_2(x). \quad (3)$$

Функция $\rho(x)$ определена однозначно почти всюду по мере μ_2 . Она называется *производной* меры μ_1 по мере μ_2 и обозначается $d\mu_1/d\mu_2$. Если μ_1 конечна, то функция $d\mu_1/d\mu_2$ интегрируема по мере μ_2 .

Обратно, каждая μ_2 -измеримая (соответственно интегрируемая) функция ρ определяет некоторую меру (соответственно конечную меру) μ_1 по формуле (3). Эту меру обозначают $\rho\mu_2$.

Если каждая из мер μ_1, μ_2 абсолютно непрерывна по другой, то эти меры называются *эквивалентными* (обозначение: $\mu_1 \sim \mu_2$).

Отметим, что всякая σ -конечная мера эквивалентна конечной. Для эквивалентных мер пространства $L^p(X, \mu_1)$ и $L^p(X, \mu_2)$ естественно изоморфны:

умножение на $|d\mu_1/d\mu_2|^{1/p}$ переводит второе пространство в первое. Меры μ_1 и μ_2 называют *дизъюнктивными*, если из $\mu_1 > \mu$ и $\mu_2 > \mu$ следует $\mu = 0$.

Пусть X — локально компактное пространство и $K(X)$ — пространство непрерывных функций с компактным носителем. Зададим топологию в $K(X)$, считая, что направленность $\{f_\alpha\}$ сходится к f , если и только если все f_α и f равны нулю вне некоторого компакта $K \subset X$, и f_α равномерно сходится к f на X . Известно, что всякий непрерывный линейный функционал на $K(X)$ имеет вид

$$F_\mu(f) = \int_X f(x) d\mu(x), \quad (4)$$

где μ — некоторая мера, определенная на всех борелевских множествах в X и обладающая свойством:

для любого измеримого множества E конечной меры и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт K и такое открытое множество U , что $K \subset E \subset U$ и $|\mu|(U \setminus K) < \varepsilon$.

Такие меры называются *регулярными*. Обратно, каждая регулярная мера на X определяет линейный непрерывный функционал на $K(X)$ по формуле (4). *Носителем* регулярной меры μ называют замкнутое множество $\text{supp } \mu$, дополнительное к объединению всех открытых множеств нулевой меры.

Для каждого ЛТП L через L' обозначается *топологически сопряженное* к L пространство, состоящее из всех линейных непрерывных функционалов на L . Очевидно, что L' — подпространство в алгебраическом сопряженном пространстве $L^* = \text{Hom}_K(L, K)$. В конечномерном случае L' и L^* совпадают (если L отделимо). Множество $F \subset L$ называется *ограниченным*, если для любой окрестности нуля U найдется такое число $\lambda \in K$, что $E \subset \lambda U$. Если L — ЛВП, то это условие равносильно *слабой ограниченности*, т. е. ограниченности $f(E)$ для любого $f \in L'$.

Пространство L' несколькими естественными способами может быть снабжено локально-выпуклой топологией.

Слабая топология соответствует поточечной сходимости: направленность $\{f_\alpha\}$ сходится к f , если для всякого $x \in L$ числовая направленность $f_\alpha(x)$ сходится к $f(x)$. *Сильная топология* соответствует равномерной сходимости на ограниченных множествах.

Если L — банахово пространство с нормой p , то L' , снабженное сильной топологией, — тоже банахово пространство с нормой

$$p'(f) = \sup_{p(x) \leq 1} |f(x)|.$$

Пусть A — непрерывный линейный оператор из L_1 в L_2 . Сопряженный оператор $A': L'_2 \rightarrow L'_1$, определенный формулой

$$[A'f](x) = f(Ax), \quad x \in L_1, \quad f \in L'_2,$$

непрерывен, если снабдить оба пространства L'_1 и L'_2 сильной или слабой топологией.

В пространстве $\mathfrak{B}(L_1, L_2)$ всех непрерывных линейных операторов из L_1 в L_2 наиболее часто рассматриваются следующие три топологии:

направленность A_α сходится к A

1) *слабо*, если для всех $x \in L_1$ и $f \in L_2'$ числовая направленность $\{f(A_\alpha x)\}$ сходится к $f(Ax)$;

2) *сильно*, если для всех $x \in L_1$ векторная направленность $A_\alpha(x)$ сходится к Ax в L_2 ;

3) *равномерно*, если для любого ограниченного множества $E \subset L$ направленность $\{A_\alpha(x)\}$ сходится к Ax равномерно для всех $x \in E$.

Отметим некоторую несогласованность этих (общепринятых) определений с введенными выше (также общепринятыми) топологиями в L' . Каждый функционал $f \in L'$ можно рассматривать как оператор из L в K . При этом равномерная операторная топология соответствует сильной топологии в L' , а слабая и сильная операторные топологии (которые в этом случае совпадают) соответствуют слабой топологии в L' .

Пример 2. Пространство, сильно сопряженное к $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, естественно изоморфно $L^q(X, \mu)$, где $1/q + 1/p = 1$. А именно, всякий непрерывный функционал на $L^p(X, \mu)$ имеет вид

$$F_g(f) = \int_X f(x) g(x) d\mu(x),$$

где $g \in L^q(X, \mu)$, причем норма функционала F_g совпадает с нормой функции g в $L^q(X, \mu)$.

Приведем здесь без доказательства несколько свойств ЛВП, которые мы используем в дальнейшем.

1. *Всякое слабо ограниченное и слабо замкнутое множество слабо компактно.*

2 (теорема Хана — Банаха). Пусть K — выпуклое замкнутое множество, содержащее окрестность начала координат. Для любой точки $x \notin K$ существует такой линейный функционал f , что $f(y) \leq 1$ для всех $y \in K$ и $f(x) > 1$.

3 (теорема Крейна — Мильмана). *Всякое компактное выпуклое множество является замыканием выпуклой оболочки своих крайних точек.* (Точка выпуклого множества K называется *крайней*, если она не является серединой отрезка, целиком лежащего в K .)

4 (теорема Шоке). Пусть K — компактное выпуклое множество. Для каждой точки $x \in K$ существует такая мера μ на множестве E крайних точек, что

$$f(x) = \int_E f(y) d\mu(y)$$

для любого линейного непрерывного функционала f .

5 (теорема Шаудера — Тихонова). *Всякое непрерывное отображение компактного выпуклого множества K в себя имеет неподвижную точку.*

6 (теорема Банаха — Штейнгауза). *Если L_1 и L_2 — банаховы пространства и семейство операторов $S \subset \mathfrak{B}(L_1, L_2)$ ограничено на каждом векторе $x \in L_1$, то оно равномерно ограничено, т. е. $\|A\| \leq C$ для всех $A \in S$.*

Доказательства этих фактов можно найти в книгах [22], [25], [47].

Мы будем также предполагать известной элементарную теорию гильбертовых пространств: теорема об ортогональном дополнении, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля, существование ортонормированного базиса, изоморфизм пространств одинаковой размерности в смысле мощности базиса. Все эти сведения можно найти в учебниках [32] и [57].

Пусть L_1 и L_2 — нормированные пространства с нормами p_1 и p_2 .

В тензорном произведении $L_1 \otimes L_2$ априори нет какой-либо выделенной нормы. Однако можно указать естественный класс норм (так называемые *кросснормы*), обладающих свойствами:

$$1) \quad p(x_1 \otimes x_2) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2), \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2,$$

$$2) \quad p'(f_1 \otimes f_2) = p'_1(f_1) \cdot p'_2(f_2), \quad f_1 \in L'_1, \quad f_2 \in L'_2.$$

(Очевидно, что каждый элемент из $L'_1 \otimes L'_2$ задает линейный функционал на $L_1 \otimes L_2$.)

Оказывается, что среди кросснорм есть наибольшая $p_1 \hat{\otimes} p_2$:

$$(p_1 \hat{\otimes} p_2)(z) = \inf \sum_i p_1(x_i) \cdot p_2(y_i),$$

где нижняя грань берется по всем представлениям z в виде $\sum_i x_i \otimes y_i$, и наименьшая $p_1 \otimes p_2$:

$$(p_1 \otimes p_2)(z) = \sup |f(z)|,$$

где верхняя грань берется по всем f вида $f_1 \otimes f_2$, $f_i \in L'_i$ и $p'_i(f_i) \leq 1$, $i = 1, 2$.

Пополнение $L_1 \otimes L_2$ по этим нормам мы обозначим $L_1 \hat{\otimes} L_2$ и $L_1 \otimes L_2$ соответственно.

Рассмотрим специальный случай $L_1 = L$, $L_2 = L'$. Пространство $L_1 \otimes L_2$ в этом случае отождествляется с пространством линейных операторов конечного ранга в L : элементу $x \otimes f$, $x \in L$, $f \in L'$ соответствует оператор

$$y \mapsto f(y)x.$$

Задача 8. Докажите, что норма $p \otimes p'$ совпадает с обычной нормой оператора.

В этом случае $L \otimes L'$ совпадает с замыканием по норме пространства операторов конечного ранга. Все такие операторы *вполне непрерывны* (в другой терминологии — *компактны*), т. е. переводят ограниченное множество в относительно компактное (т. е. множество с компактным замыканием). Если L — гильбертово пространство, то верно и обратное: *всякий вполне непрерывный оператор в L является пределом по норме операторов конечного ранга*.

Тождественное отображение $L \otimes L'$ в себя продолжается до непрерывного отображения $\alpha: L \hat{\otimes} L' \rightarrow L \otimes L'$. Операторы, лежащие в образе α , получили название *ядерных*.

Легко видеть, что отображение $\text{tr}: L \otimes L' \rightarrow K$ продолжается до отображения $L \hat{\otimes} L' \rightarrow K$. Если $\text{Ker } \alpha = 0$, то мы получаем отсюда определение следа для ядерных операторов. Как выяснилось недавно (см. работы Р. Энflo или их изложение в УМН **28**, 6 (1973) или: *Seminaire Bourbaki*, Exр. 433) $\text{Ker } \alpha$ может быть ненулевым. Однако $\text{Ker } \alpha = 0$ для «классических» пространств L^p , l^p , C и др.

В гильбертовом пространстве ядерными являются те операторы A , для которых в любом ортонормированном базисе $\{x_\alpha\}$ сходится ряд $\sum_\alpha (Ax_\alpha, x_\alpha)$. Сумма этого ряда не зависит от выбора базиса и совпадает со следом A .

Определение произведений $L_1 \hat{\otimes} L_2$ и $L_1 \otimes L_2$ можно перенести на любые ЛВП.

Пусть топология в ЛВП L_1 задается семейством полунорм p_α , $\alpha \in A$, а топология в ЛВП L_2 — семейством полунорм p_β , $\beta \in B$. Тогда в $L_1 \otimes L_2$ можно определить две локально-выпуклые топологии. Одна определяется семейством полунорм $p_\alpha \hat{\otimes} q_\beta$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$, а другая — семейством полунорм $p_\alpha \otimes q_\beta$, $\alpha \in A$, $\beta \in B$. Пополнения $L_1 \otimes L_2$ по этим топологиям обозначаются $L_1 \hat{\otimes} L_2$ и $L_1 \otimes L_2$ и называются соответственно *проективным* и *слабым* тензорным произведением L_1 и L_2 .

Важный класс *ядерных* пространств M характеризуется свойством: для любого ЛВП L тензорные произведения $L \hat{\otimes} M$ и $L \otimes M$ совпадают.

Ядерные пространства обладают целым рядом замечательных свойств, сближающих их с конечномерными пространствами. Так, всякое ограниченное замкнутое множество в ядерном пространстве компактно, сильная и слабая сходимости

в ядерном пространстве совпадают, всякий непрерывный оператор в ядерное пространство или из него задается ядром. Всякое подпространство ядерного пространства, проективный предел и счетный индуктивный предел ядерных пространств являются ядерными пространствами.

Наиболее часто встречаются счетно нормированные ядерные пространства. Пусть V — ЛВП со счетным набором преднорм $\{p_k\}$. Без ограничения общности можно считать, что $p_k \leq p_{k+1}$ (иначе можно было бы заменить $\{p_k\}$ эквивалентным семейством преднорм $\tilde{p}_k = \sup_{i \leq k} p_i$). Оказывается, для ядерности V необхо-

димо и достаточно, чтобы для всякого индекса k существовал такой индекс $j(k)$, чтобы тождественное отображение из $(V, p_{j(k)})$ в (V, p_k) являлось ядерным оператором.

Примером может служить пространство $S(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на прямой, определяемое набором норм

$$p_k(f) = \sup_x \sum_{l=0}^k |x^l f^{(m)}(x)|.$$

Подробнее обо всех этих результатах см. в книгах [14], [56].

Отметим, что если L_1 и L_2 — гильбертовы пространства, то среди кросснорм на $L_1 \otimes L_2$ есть единственная норма, порождаемая скалярным произведением. Пополнение $L_1 \otimes L_2$ по этой норме называется *гильбертовым тензорным произведением* пространств L_1 и L_2 .

В частном случае, когда $L_1 = L$, $L_2 = L'$, гильбертово произведение L и L' отождествляется с так называемым пространством операторов Гильберта — Шмидта. Можно показать, что оператор A является оператором Гильберта — Шмидта тогда и только тогда, когда AA^* — ядерный оператор. Норма оператора A в пространстве операторов Гильберта — Шмидта может быть задана формулой

$$\|A\|^2 = \text{tr}(AA^*).$$

4.2. Банаховы алгебры.

Теория банаховых алгебр (в первоначальной терминологии — нормированных колец) была создана в начале сороковых годов И. М. Гельфандом и оказалась одним из самых мощных инструментов в приложениях к теории функций, теории операторов, теории представлений групп и другим областям математики.

Мы приведем здесь те сведения о банаховых алгебрах, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Систематическое изложение можно найти в книгах [9], [19], [38], [24].

Алгебра $\mathfrak{A}$ над полем $\mathbb{C}$ называется *банаховой алгеброй*, если $\mathfrak{A}$ — одновременно топологическое кольцо и банахово пространство.

Будем считать, что норма, заданная в банаховой алгебре, удовлетворяет условию

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (1)$$

Задача 1. Всякая норма, в которой произведение непрерывно, пропорциональна норме, удовлетворяющей условию (1).

Указание. Используя принцип равномерной ограниченности (см. п. 4.1), докажите неравенство $\|xy\| \leq C \|x\| \cdot \|y\|$.

Кроме того, будем считать, что рассматриваемые алгебры содержат единицу 1, и $\|1\| = 1$. Общий случай сводится к этому с помощью операции «присоединения единицы» (ср. п. 3.1).

Отметим, что эта операция в категории алгебр над $\mathbb{C}$ отличается от той же операции в категории колец. В нашем случае новая алгебра $\mathfrak{A}_1$ состоит из элементов вида $\lambda \cdot 1 + x$, где $x \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, а 1 — присоединяемая единица. В качестве нормы в $\mathfrak{A}_1$ можно взять выражение $\|\lambda \cdot 1 + x\| = |\lambda| + \|x\|$.

Спектром элемента $x \in \mathfrak{A}$ называется множество $\text{Sp } x$ тех комплексных чисел λ , для которых элемент $x - \lambda \cdot 1$ не имеет обратного в $\mathfrak{A}$.

Задача 2. Докажите, что $\text{Sp } x$ содержится в круге с центром в точке и радиусом $\|x\|$.

Указание. Если $|\lambda| > \|x\|$, то в качестве $(x - \lambda \cdot 1)^{-1}$ можно взять сумму ряда $-\sum_{n=0}^{\infty} x^n \lambda^{-n-1}$.

Функция $R_x(\lambda) = (x - \lambda \cdot 1)^{-1}$, определенная в дополнении к $\text{Sp } x$ и принимающая значения в алгебре $\mathfrak{A}$, называется *резольвентой* элемента x .

Задача 3. Докажите, что $\text{Sp } x$ — замкнутое множество, и что $R_x(\lambda)$ — аналитическая функция от λ в дополнении к $\text{Sp } x$.

Указание. Докажите, что сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_x(\lambda_0)^{n+1}$, сходящегося в круге $|\lambda - \lambda_0| < \|R_x(\lambda_0)\|^{-1}$, является резольвентой элемента x .

Задача 4. Докажите, что $\text{Sp } x$ — непустое компактное подмножество в $\mathbb{C}$.

Указание. Если $\text{Sp } x = \emptyset$, то $R_x(\lambda)$ определена и ограничена на всей комплексной плоскости. Примените теорему Лиувилля к числовым функциям $f(R_x(\lambda))$, $f \in \mathfrak{A}$.

Следствие (теорема Гельфанда — Мазура). Всякое банахово поле над $\mathbb{C}$ совпадает с $\mathbb{C}$.

В самом деле, если это поле содержит элемент $x \notin \mathbb{C}$, то $\text{Sp } x = \emptyset$.

Величина $\rho(x) = \sup_{\lambda \in \text{Sp } x} |\lambda|$ называется *спектральным радиусом* элемента x .

Задача 5. Докажите, что $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n}$.

Указание. Рассмотрите разложение $R_\lambda(x)$ в ряд Тейлора в точке $\lambda = \infty$.

Замечание. Может показаться удивительным, что величина $\rho(x)$, однозначно определенная алгебраической структурой $\mathfrak{A}$, выражается через норму, выбираемую с большим произволом. Однако, по теореме Банаха (см. п. 4.1) две нормы, определяющие одну и ту же топологию в $\mathfrak{A}$, связаны соотношением

$$0 < c_1 \leq \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leq c_2 < \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|x^n\|_1}{\|x^n\|_2} \right)^{1/n} = 1.$$

Задача 6. Докажите, что если $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ — гомоморфизм банаховых алгебр и $\varphi(1) = 1$, то

$$\rho(\varphi(x)) \leq \rho(x).$$

Указание. Обратимые элементы переходят в обратимые.

Для любого полинома $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ с комплексными коэффициентами и любого $x \in \mathfrak{A}$ можно определить элемент $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathfrak{A}$.

Оказывается, соответствие $P \mapsto P(x)$ можно продолжить на более широкий класс функций.

Пусть $\mathcal{O}(\text{Sp } x)$ — алгебра аналитических функций, определенных в некоторой окрестности (своей для каждой функции) множества $\text{Sp } x \subset \mathbb{C}$, с топологией равномерной сходимости на компактах.

Тогда существует непрерывный гомоморфизм $f \mapsto f(x)$ алгебры $\mathcal{O}(\text{Sp } x)$ в $\mathfrak{A}$, продолжающий описанный выше гомоморфизм алгебры полиномов. Элемент $f(x)$ можно задать формулой

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_C f(\lambda) R_x(\lambda) d\lambda,$$

где C — любой замкнутый контур, лежащий в области определения f и заключающий внутри себя множество $\text{Sp } x$.

Аналогично, хотя технически более сложно, можно определить $f(x_1, \dots, x_n)$, где $\{x_i\}$ — набор попарно перестановочных элементов $\mathfrak{A}$, а f — аналитическая функция n комплексных переменных, определенная в окрестности некоторого множества $\text{Sp}(x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{C}^n$, называемого совместным спектром набора $\{x_i\}$. Точное определение его будет дано ниже.

Наиболее важным и наиболее изученным классом банаховых алгебр являются коммутативные банаховы алгебры.

С каждой такой алгеброй $\mathfrak{A}$ связано множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ ее максимальных идеалов, отличных от $\mathfrak{A}$.

Это же множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ можно определить как совокупность всех ненулевых *характеров* $\mathfrak{A}$, т. е. непрерывных гомоморфизмов $\mathfrak{A}$ на $\mathbb{C}$. В самом деле, если $\chi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ — характер, то $\chi^{-1}(0)$ — максимальный идеал в $\mathfrak{A}$. Обратно, если J — максимальный идеал в $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}/J$ — банахово поле над $\mathbb{C}$ и, по теореме Гельфанда — Мазура, $\mathfrak{A}/J = \mathbb{C}$. Поэтому каноническая проекция $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}/J$ задает характер $\mathfrak{A}$.

Интерпретация точек $\chi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ как характеров $\mathfrak{A}$ позволяет поставить в соответствие каждому элементу $x \in \mathfrak{A}$ функцию $\hat{x}$ на $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$;

$$\hat{x}(\chi) = \chi(x). \quad (2)$$

Функция $\hat{x}$ называется *преобразованием Гельфанда* элемента x .

Множество $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ снабжается слабой топологией, в которой функции $\hat{x}$, $x \in \mathfrak{A}$ непрерывны.

Задача 7. Докажите, что $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ — компакт.

Указание. $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ является ограниченным и слабо замкнутым подмножеством в банаховом пространстве $\mathfrak{A}'$, сопряженном к $\mathfrak{A}$.

Задача 8. Докажите, что множество значений, принимаемых функцией $\hat{x}$, совпадает со спектром элемента x .

Указание. Всякий необратимый элемент по лемме Цорна содержится в некотором максимальном идеале.

Следствие 1. Для всякого $x \in \mathfrak{A}$ имеет место равенство

$$\rho(x) = \sup_{\chi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})} |\hat{x}(\chi)|.$$

Следствие 2. Преобразование Гельфанда является непрерывным гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ в алгебру $C(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}))$ всех непрерывных функций на $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$.

Результат задачи 8 подсказывает следующее определение.

Совместным спектром элементов $x_1, \dots, x_n$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется образ $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ в $\mathbb{C}^n$ при отображении

$$\chi \mapsto (\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)).$$

Пример 1. Пусть $\mathfrak{A} = C(X)$ — алгебра непрерывных функций на компакте X .

Задача 9. Всякий замкнутый идеал $J \subset C(X)$ состоит из всех функций, обращающихся в нуль на некотором замкнутом подмножестве $Y \subset X$.

Таким образом, максимальные идеалы $\mathfrak{A}$ соответствуют точкам X . Пространство $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ совпадает с X , а преобразование Гельфанда является тождественным.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{A} = l^1$ — пространство суммируемых последовательностей $x = (x_0, x_1, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$,

обычным сложением и произведением, задаваемым формулой

$$(xy)_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}.$$

Задача 10. Пространство $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ гомеоморфно кругу $|z| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}$. Докажите, что преобразование Гельфанда имеет вид

$$\hat{x}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^i.$$

Пример 3. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра матриц вида $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ с обычными операциями и нормой. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{A}$ имеет единственный характер: $\chi: \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mapsto \lambda$. Пространство $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ состоит из одной точки, а преобразование Гельфанда задается характером χ .

Задача 11. Докажите, что радикал алгебры $\mathcal{A}$ (см. п. 3.1) состоит из всех элементов x , для которых $\rho(x) = 0$, т. е. $\text{Sp } x = \{0\}$ и $\hat{x} = 0$.

Следствие. Если $\mathcal{A}$ — полупростая алгебра, то она изоморфна¹⁾ подалгебре в $\mathcal{C}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$.

В самом деле, преобразование Гельфанда в этом случае будет вложением. Мы увидим ниже, что в важном частном случае C^* -алгебр это вложение оказывается изоморфизмом.

Говорят, что в банаховой алгебре $\mathcal{A}$ задана *инволюция*, если каждому $x \in \mathcal{A}$ поставлен в соответствие элемент $x^* \in \mathcal{A}$ так, что:

- 1) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$ (черточка означает комплексное сопряжение),
- 2) $(xy)^* = y^* x^*$,
- 3) $(x^*)^* = x$,
- 4) соответствие $x \mapsto x^*$ непрерывно.

Элемент $x \in \mathcal{A}$ называется *эрмитовым*, если $x^* = x$, *нормальным*, если $x^* x = x x^*$ и *унитарным*, если $x^* x = x x^* = 1$.

Банаховы алгебры с инволюцией образуют категорию, морфизмами которой служат непрерывные гомоморфизмы алгебр, перестановочные с инволюцией.

Примером банаховой алгебры с инволюцией служит алгебра $\mathcal{B}(H)$ всех непрерывных операторов в гильбертовом пространстве H , если в качестве нормы взять обычную норму оператора, а в качестве инволюции — переход к сопряженному оператору.

Морфизм ϕ алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}(H)$ обычно называют *операторным представлением* алгебры $\mathcal{A}$. Когда нужно подчеркнуть, что речь идет о морфизме в категории алгебр

¹⁾ Изоморфна как алгебра, но, вообще говоря, не как банахова алгебра.

с инволюцией, употребляют термин * — *представление* или *симметричное представление*.

Представление φ называется *точным*, если $\ker \varphi = 0$, т. е. φ — мономорфизм. Представления φ_i в пространствах $H_i, i = 1, 2$, называются *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм $\tau: H_1 \rightarrow H_2$, что для любого $x \in \mathfrak{A}$ имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\varphi_1(x)} & H_1 \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ H_2 & \xrightarrow{\varphi_2(x)} & H_2 \end{array}$$

4.3. C^* -алгебры.

Вопрос о существовании точных представлений для алгебр с инволюцией был решен И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком. Это решение естественно выделяет специальный класс банаховых алгебр — так называемых C^* -алгебр.

Алгебра $\mathfrak{A}$ с инволюцией называется C^* -алгеброй¹⁾ если выполняется условие

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \text{для любого } x \in \mathfrak{A}.$$

Очевидно, что алгебра $\mathfrak{B}(H)$ является C^* -алгеброй.

Теорема 1 (Гельфанд — Наймарк). 1) *Всякая C^* -алгебра допускает точное операторное представление.* 2) *Для всякой банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ с инволюцией существует такая C^* -алгебра $C^*(\mathfrak{A})$ и такой морфизм $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow C^*(\mathfrak{A})$, что всякое операторное представление φ_1 алгебры $\mathfrak{A}$ имеет вид $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \varphi$, где φ_2 — представление $C^*(\mathfrak{A})$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, приведем некоторые важные свойства C^* -алгебр.

Задача 1. Если x — эрмитов элемент в C^* -алгебре $\mathfrak{A}$, то $\rho(x) = \|x\|$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ и результатом задачи 5 из п. 4.2.

Задача 2. Если $\varphi: \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$ — морфизм C^* -алгебр, то $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$.

Указание. Воспользуйтесь результатами задачи 6 из п. 4.2.

Следствие. Во всякой C^* -алгебре норма определена однозначно.

Задача 3. Если a — эрмитов, а u — унитарный элементы C^* -алгебры $\mathfrak{A}$, то $\operatorname{Sp} a \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{Sp} u \subset \mathbb{T}$ (единичная окружность в $\mathbb{C}$).

Указание. Так как всякий нормальный (в частности, эрмитов или унитарный) оператор вместе со всеми функциями от него содержится в коммутативной C^* -подалгебре $\mathfrak{A}$, можно считать, что сама $\mathfrak{A}$ коммутативна. Для унитарного элемента утверждение задачи вытекает из задачи 8 из п. 4.2.

¹⁾ Употребляют также термины: *вполне регулярная алгебра*, *звездная алгебра* (algèbre stellaire).

В случае эрмитова элемента a воспользуйтесь тем, что элемент

$$e^{ita} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ita)^k}{k!} \text{ унитарен для всех } t \in \mathbb{R}.$$

Следствие. Преобразование Гельфанда для коммутативной C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ является изометричным вложением $\mathfrak{A}$ в $C(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}))$.

В самом деле, изометричность вытекает из результата задачи 1, а перестановочность с инволюцией — из того, что эрмитовы элементы переходят в вещественные функции.

На самом деле имеет место

Теорема 2 (Гельфанд). Преобразование Гельфанда для коммутативной C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ является изоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $C(\mathfrak{M}(\mathfrak{A}))$.

Задача 4. Пусть $\mathfrak{A}$ — замкнутая C^* -подалгебра в алгебре $C(X)$ непрерывных функций на компакте X , a — эрмитов элемент в $\mathfrak{A}$ и f — непрерывная функция на $\text{Sp } x \subset \mathbb{R}$. Тогда $f(a) \in \mathfrak{A}$.

Указание. Всякая непрерывная функция f на компакте $\text{Sp } a \subset \mathbb{R}$ равномерно аппроксимируется кусочно-линейной функцией. Кусочно-линейная функция получается линейными операциями и суперпозициями из функции $x \mapsto |x|$. Наконец, функция $x \mapsto |x|$ на отрезке $[-N, N]$ представляется равномерно сходящимся рядом:

$$|x| = N \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x^2}{N^2}\right)} = N - N \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \left(1 - \frac{x^2}{N^2}\right)^k.$$

Из результата задачи 4 следует, в частности, что если алгебра $\mathfrak{A}$ разделяет точки x и y ¹⁾, то существует функция $a \in \mathfrak{A}$, равная единице в некоторой окрестности x , нулю в некоторой окрестности y и заключенная между 0 и 1 в остальных точках. Если алгебра $\mathfrak{A}$ разделяет любые две точки, то для любой точки x и любой ее окрестности U существует функция $a \in \mathfrak{A}$, равная 1 в точке x и 0 вне U .

Отсюда без труда выводится следующая важная

Теорема 3 (Стоун — Вейерштрасс). Если $\mathfrak{A}$ — замкнутая C^* -подалгебра с единицей в алгебре $C(X)$, и если элементы $\mathfrak{A}$ разделяют точки компакта X , то $\mathfrak{A} = C(X)$.

Теорема 2 вытекает из теоремы 3 и определений спектра и преобразования Гельфанда.

Отметим важное для дальнейших рассуждений

Следствие. Если a — эрмитов элемент в C^* -алгебре $\mathfrak{A}$ и $\text{Sp } a \subset \mathbb{R}^+$ (положительная полуось), то существует единственный элемент $b \in \mathfrak{A}$ со свойствами: $\text{Sp } b \subset \mathbb{R}^+$ и $b^2 = a$.

Другими словами, существует единственный положительный квадратный корень из положительного элемента.

¹⁾ Говорят, что алгебра $\mathfrak{A}$ разделяет точки x и y , если в $\mathfrak{A}$ есть функция, принимающая в этих точках различные значения.

Вернемся к теореме 1. Оба утверждения этой теоремы доказываются явными построениями, в которых основную роль играет понятие положительного функционала.

Функционал $f \in \mathfrak{A}'$ называется *положительным*, если $f(x^*x) \geq 0$ для всех $x \in \mathfrak{A}$.

Задача 5. Докажите, что всякий положительный функционал удовлетворяет неравенствам

$$а) |f(x)|^2 \leq f(x^*x) \cdot f(1),$$

$$б) |f(x)| \leq \|x\| \cdot f(1).$$

Указание. Для вывода а) примените неравенство Коши — Буняковского $|(x, y)|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ к скалярному произведению

$$(x, y) = f(y^*x). \quad (1)$$

Неравенство б) следует из а) и того факта, что $\text{Sp}(\|x^*x\| \cdot 1 - x^*x) \subset \mathbb{R}^+$ и, следовательно, $\|x^*x\| f(1) - f(x^*x) \geq 0$.

Если φ — представление алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве H и ξ — вектор из H , то $f_\xi(x) = (\varphi(x)\xi, \xi)$ — положительный функционал, и всякий положительный функционал может быть получен таким образом. В самом деле, зададим в $\mathfrak{A}$ скалярное произведение формулой (1). Пусть H_f — соответствующее гильбертово пространство. Преобразование $y \mapsto xy$ алгебры $\mathfrak{A}$ продолжается до оператора $\varphi(x)$ в H_f . Гомоморфизм

$$\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(H_f)$$

перестановочен с инволюцией, так как

$$(\varphi(x)y, z) = f(z^*xy) = (y, \varphi(x^*)z).$$

Мы получили представление алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве H_f . Если в качестве ξ взять образ $1 \in \mathfrak{A}$ в H_f , то $f_\xi(x) = (\varphi(x)\xi, \xi) = f(x)$.

Существование точного представления C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ вытекает из следующего факта.

Лемма. Для каждого $x \neq 0$ из C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ существует такой положительный функционал f , что $f(x) \neq 0$.

В самом деле, прямая сумма представлений, построенных, как описано выше, по всем положительным функционалам, имеет в этом случае нулевое ядро.

Для доказательства леммы обозначим через P совокупность всех эрмитовых элементов в $\mathfrak{A}$, спектр которых принадлежит $\mathbb{R}^+$.

Задача 6. Докажите, что: 1) P — замкнутый выпуклый конус, 2) 1 — внутренняя точка P , 3) $P \cap -P = \{0\}$.

Указание. Воспользуйтесь следствием из теоремы Гельфанда.

Рассмотрим теперь выпуклое множество K , состоящее из всех точек вида $1 - y$, $y \in P$. Если $\|x\| > 1$, то $x^*x \notin K$. По теореме Хана — Банаха существует функционал $f \in \mathfrak{A}'$,

обладающий свойствами

$$f(y) \leq 1 \text{ для всех } y \in K \text{ и } f(x^*x) > 1.$$

Первое свойство означает, что $f(1-y) \leq 1$ для любого $y \in P$, откуда следует, что f — положительный функционал. Лемма доказана.

Для доказательства второго утверждения теорема Гельфанда — Наймарка положим для $x \in \mathfrak{A}$

$$\|x\|_1 = \sup \sqrt{f(x^*x)},$$

где верхняя грань берется по всем положительным функционалам, удовлетворяющим условию $f(1) = 1$.

Задача 7. Докажите, что алгебра $C^*(\mathfrak{A})$ получается из $\mathfrak{A}$ факторизацией по идеалу тех x , для которых $\|x\|_1 = 0$, и последующим пополнением по этой норме.

Указание. Пусть $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ — морфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в любую C^* -алгебру $\mathfrak{B}$. Докажите, используя метод решения задачи 2, что $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|_1$.

Пример 1. Если $\mathfrak{A}$ является C^* -алгеброй, то $C^*(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная алгебра с инволюцией. Назовем максимальный идеал $\chi \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ *симметричным*, если $\chi^*(\chi) = \overline{\chi(\chi)}$ для любого $\chi \in \mathfrak{A}$. Совокупность симметричных максимальных идеалов образует компактное подмножество $X_0 \subset X = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$.

Задача 8. Докажите, что $C^*(\mathfrak{A})$ изоморфна $C(X_0)$, а морфизм $\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow C^*(\mathfrak{A})$ получается композицией преобразования Гельфанда и ограничения на X_0 .

Указание. Каждый симметричный идеал определяет характер χ , который является $*$ -представлением $\mathfrak{A}$ в $\mathbb{C}$. Поэтому χ имеет вид $\chi_0 \circ \varphi$, где χ_0 — некоторый характер $C^*(\mathfrak{A})$.

4.4. Коммутативные операторные алгебры. Применим приведенные выше сведения о банаховых алгебрах к изучению алгебр операторов в гильбертовом пространстве.

Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная алгебра операторов в гильбертовом пространстве H . Будем предполагать, что $\mathfrak{A}$ *симметрична*, т. е. вместе с каждым оператором A содержит сопряженный оператор A^* . Если $\mathfrak{A}$ замкнута по норме, то $\mathfrak{A}$ — коммутативная C^* -алгебра. Будем считать, что $\mathfrak{A}$ содержит единичный оператор I . Тогда в силу результатов п. 4.3 она изоморфна алгебре $C(X)$ непрерывных функций на компакте $X = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$. Назовем две такие алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ в пространствах H_1 и H_2 *пространственно изоморфными*, если существует такой изометрический изоморфизм $\tau: H_1 \rightarrow H_2$, что отображение $a \mapsto \tau a \tau^{-1}$ является изоморфизмом $\mathfrak{A}_1$ на $\mathfrak{A}_2$. Мы дадим для каждого компакта X классификацию с точностью до пространственного изоморфизма всех операторных алгебр, которые как C^* -алгебры изоморфны $C(X)$.

Удобнее, однако, рассмотреть более общую задачу — описание всех представлений данной C^* -алгебры $\mathfrak{A} = C(X)$ с точностью до эквивалентности. Ясно, что получаемая при этом классификация точных представлений решает первоначальную задачу о пространственной классификации алгебр, изоморфных $C(X)$.

Прежде чем решать эту задачу в общем виде, рассмотрим частный случай, когда X состоит из конечного числа точек $x_1, \dots, x_k$, а пространство H конечномерно.

Алгебра $C(X)$ изоморфна в этом случае прямой сумме k экземпляров поля $\mathbb{C}$.

Пусть e_i — функция на X , равная 1 в x_i и 0 в остальных точках. Так как $e_i^* = e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^k e_i = 1$, то при всяком представлении алгебры $\mathfrak{A}$ элементы e_i переходят в такие операторы E_i , что $E_i^* = E_i^2 = E_i$, $E_i E_j = 0$ при $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^k E_i = 1$.

Задача 1. Докажите, что операторы E_i являются операторами ортогонального проектирования на попарно ортогональные подпространства $H_i \subset H$ такие, что $\bigoplus_{i=1}^k H_i = H$.

Очевидно, что числа $n_i = \dim H_i$ являются инвариантами представления и что для любого набора $(n_1, \dots, n_k)$ целых неотрицательных чисел существует единственное (с точностью до эквивалентности) представление алгебры с данными значениями этих инвариантов.

Таким образом, в конечномерном случае для классификации представлений алгебры $\mathfrak{A}$ нужно задать на множестве $X = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ функцию кратности $n(x)$, принимающую целые неотрицательные значения. Точные представления соответствуют всюду положительным функциям кратности.

Чтобы описать положение в бесконечномерном случае, нам понадобятся понятия из теории меры (ср. п. 4.1). Пусть μ — положительная регулярная мера на X . Оператор умножения на непрерывную функцию a в $C(X)$ можно продолжить до непрерывного оператора в $L^2(X, \mu)$, который мы обозначим $\varphi_\mu(a)$. Очевидно, соответствие $a \mapsto \varphi_\mu(a)$ является $*$ -представлением алгебры $C(X)$ в пространстве $L^2(X, \mu)$.

Если меры μ и ν эквивалентны, то оператор умножения на $(d\mu/d\nu)^{1/2}$ устанавливает эквивалентность представлений φ_μ и φ_ν .

Обратно, пусть представления φ_μ и φ_ν эквивалентны и оператор $\tau: L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \nu)$ устанавливает их эквивалентность. Положим $f_0 \equiv 1$ и $\alpha = \tau(f_0)$. Для любой непрерывной

функции f имеем

$$\tau(f) = \tau\varphi_\mu(f) f_0 = \varphi_\nu(f) \tau f_0 = \varphi_\nu(f) \alpha = f\alpha.$$

Изометричность τ влечет равенство $d\mu = |\alpha|^2 d\nu$. Таким образом, мера μ абсолютно непрерывна по мере ν и $d\mu/d\nu = |\alpha|^2$. Аналогично, рассмотрение оператора $\tau^{-1}: L^2(X, \nu) \rightarrow L^2(X, \mu)$ приводит нас к выводу, что ν абсолютно непрерывна по μ . Значит, меры μ и ν эквивалентны.

Аналогичным рассуждением можно установить следующий полезный факт.

Задача 2. Всякий непрерывный оператор в $L_2(X, \mu)$, перестановочный с операторами из $\varphi_\mu(\mathfrak{A})$ является оператором умножения на некоторую функцию из $L^\infty(X, \mu)$.

В частности, отсюда следует, что все такие операторы попарно перестановочны.

Представление φ алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве H назовем *циклическим*, если в H есть такой вектор ξ , что пространство векторов вида $\varphi(a)\xi$, $a \in \mathfrak{A}$ плотно в H . Вектор ξ в этом случае называется *циклическим вектором* или *источником*.

Ясно, что все построенные выше представления φ_μ в пространствах $L_2(X, \mu)$ — циклические с источником $f_0(x) \equiv 1$.

Задача 3. Покажите, что в конечномерном случае циклическими будут только те представления, для которых все инварианты n_i равны 0 или 1.

Таким образом, построенные выше представления φ_μ заведомо не исчерпывают всех представлений алгебры $\mathfrak{A}$. Мы покажем, однако, что всякое циклическое представление φ эквивалентно одному из представлений φ_μ . В самом деле, пусть H — пространство, в котором действует φ , и ξ — источник в H . Определим непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{A} = C(X)$, полагая

$$F(a) = (\varphi(a)\xi, \xi).$$

Как отмечалось выше, F имеет вид

$$F(a) = \int_X a(x) d\mu(x),$$

где μ — некоторая счетно-аддитивная мера на X . Функционал F принимает неотрицательные значения на неотрицательных функциях, ибо если $a \geq 0$, то $a = a_1^2$, где a_1 — вещественная функция, и

$$(\varphi(a)\xi, \xi) = (\varphi(a_1^2)\xi, \xi) = (\varphi(a_1)\xi, \varphi(a_1)\xi) \geq 0.$$

Поэтому мера μ положительна. Наконец, отображение $C(X)$ в H по формуле $a \mapsto \varphi(a)\xi$ продолжается до унитарного оператора $\tau: L^2(X, \mu) \rightarrow H$, устанавливающего эквивалентность φ_μ и φ .

Задача 4. Пусть φ — представление C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве H . Существует такое разложение H в прямую сумму подпространств H_α , $\alpha \in A$, инвариантных относительно $\varphi(\mathfrak{A})$, что ограничение операторов представления на каждое H_α является циклическим представлением.

Указание. Примените лемму Цорна к семейству подпространств в H , допускающих искомое разложение в сумму циклических подпространств.

Заметим, что разложение представления φ алгебры $\mathfrak{A}$ в сумму циклических представлений $\varphi_\alpha = \varphi|_{H_\alpha}$, так же как и возникающий набор мер μ_α на $X = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, не однозначны.

В случае, когда число слагаемых не более, чем счетно (например, если пространство H сепарабельно), мы покажем, что существует такое разложение φ в сумму циклических представлений $\varphi_i = \varphi|_{H_i}$, $i = 1, 2, \dots$, для которого мера μ_{k+1} абсолютно непрерывна по мере μ_k , $k = 1, 2, \dots$.

Меры μ_k в этом случае определены исходным представлением φ с точностью до эквивалентности. Мера μ_1 называется *базисной мерой* представления φ .

Таким образом, характеристикой представления φ служит «убывающий» набор классов мер на пространстве X . Этот объект можно описать еще и по-другому. Пусть ρ_k — производная меры μ_k по μ_1 . Определим на X функцию кратности n , полагая значение $n(x)$ равным верхней грани тех k , для которых $\rho_k(x) > 0$. Очевидно, что функция кратности измерима, определена однозначно почти всюду по мере μ_1 и позволяет восстановить все меры μ_k с точностью до эквивалентности.

Пусть μ — любая счетно-аддитивная мера на X и n — любая μ -измеримая функция, принимающая значения $1, 2, \dots, \infty$. Положим $H_1 = L^2(X, \mu)$ и обозначим через H_n подпространство в H_1 , состоящее из функций, равных нулю вне множества X_k ,

где $n(x) \geq k$. В прямой сумме $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_k$ зададим представление $\varphi_{\mu, n}$ алгебры $\mathfrak{A} = C(X)$, взяв в качестве $\varphi_{\mu, n}(a)$ оператор умножения на функцию a .

Задача 5. Докажите, что мера μ является базисной мерой, а функция n — функцией кратности для представления $\varphi_{\mu, n}$. Представление $\varphi_{\mu, n}$ точно, если и только если $\text{supp } \mu = X$.

Теорема 1. Всякое представление φ C^* -алгебры $\mathfrak{A}$, представимое в виде не более, чем счетной суммы циклических представлений, эквивалентно представлению вида $\varphi_{\mu, n}$. Представления $\varphi_{\mu, m}$ и $\varphi_{\nu, n}$ эквивалентны, если и только если меры μ и ν эквивалентны, а функции m и n совпадают почти всюду.

Доказательство этого утверждения разобьем на ряд задач. (Другой способ вывода этой теоремы можно найти в книге Ж. Диксмье [24].)

Пусть φ — представление C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве H . Каждому вектору $\xi \in H$ поставим в соответствие подпространство $H_\xi \subset H$, которое получается замыканием множества векторов вида $\varphi(a)\xi$, $a \in \mathfrak{A}$. Ограничение операторов из $\varphi(\mathfrak{A})$ на H_ξ является циклическим представлением. Обозначим его через φ_ξ , а соответствующую меру на $X = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ — через μ_ξ . Введем упорядочение в H , полагая $\xi > \eta$, если $\mu_\xi > \mu_\eta$.

Задача 6. Если $\eta \in H_\xi$, то $\eta < \xi$.

Указание. Воспользуйтесь естественным вложением H_η в H_ξ .

Задача 7. Пусть $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_{\xi_k}$ — разложение H в счетную сумму циклических подпространств. Докажите, что вектор $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \|\xi_k\|} \xi_k$

является максимальным элементом в H .

Указание. Пусть $\eta \in H$ и η_k — проекция η на H_{ξ_k} . Тогда $\mu_\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{\eta_k}$.

Задача 8. Множество максимальных векторов всюду плотно в H .

Указание. Пусть $\xi \in H$ — максимальный вектор. Проверьте, что множество максимальных векторов плотно в H_ξ и что каждый вектор вида $\xi + \eta$, где $\eta \in H_\xi^\perp$, максимален.

Задача 9. Пусть существует счетное разложение $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_{\eta_k}$. По-

кажите, что существует такое разложение $H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_{\xi_k}$, что $\xi_k > \xi_{k+1}$ для всех k .

Указание. Пусть $\{\xi_i\}$ — последовательность, в которой каждый из векторов η_i встречается бесконечное число раз. Определим ξ_k индуктивно, так, чтобы выполнялись условия:

$$1) \quad \xi_{k+1} \text{ — максимальный вектор в } \left(\bigoplus_{i=1}^k H_{\xi_i} \right)^\perp,$$

$$2) \quad \rho \left(\xi_{k+1}, \bigoplus_{i=1}^{k+1} H_{\xi_i} \right) \leq \frac{1}{k+1}.$$

Первое утверждение теоремы 1 вытекает из решения задачи 9. Второе можно вывести из следующего утверждения.

Задача 10. Всякий оператор из $L^2(X, \mu)$ в $L^2(X, \nu)$, перестановочный с умножением на непрерывные функции, является оператором умножения на некоторую измеримую функцию α , удовлетворяющую условию $|\alpha|^2 \nu < \mu$.

В частности, если меры μ и ν дизъюнкты, то такой оператор равен нулю.

Указание. См. рассуждение, предшествующее задаче 2.

Другой способ доказательства единственности заключается в том, чтобы дать определение базисной меры μ и функции

кратности n (или соответствующего убывающего набора мер μ_i) в инвариантных терминах. Оказывается, это возможно.

Задача 11. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ — конечный набор векторов из пространства H представления φ и η — максимальный вектор из $\left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} H_{\xi_i}\right)^\perp$.

Докажите, что $\mu_\eta > \mu_k$ и что существует такой набор $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ и такой максимальный вектор $\eta \in \left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} H_{\xi_i}\right)^\perp$, что $\mu_\eta \sim \mu_k$.

Указание. Воспользуйтесь уже доказанной частью теоремы 1, сводящей задачу к случаю $\varphi = \varphi_{\mu, n}$.

Отметим аналогию полученной характеристики мер μ_k с минимальной характеристикой собственных чисел эрмитовых матриц.

Задача 12 (принцип Куранта). Пусть A — эрмитов оператор в конечномерном гильбертовом пространстве H , $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ — его собственные значения. Тогда

$$\lambda_k = \min_{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}} \max_{\eta \in (\xi_1, \dots, \xi_{k-1})^\perp} \frac{(A\eta, \eta)}{(\eta, \eta)}.$$

(Аналогичное утверждение справедливо и в бесконечномерном случае, если A — компактный эрмитов оператор.)

Покажем, как из теоремы 1 выводится классическая спектральная теорема.

Пусть X — компакт, H — гильбертово пространство. Если каждому борелевскому множеству $E \subset X$ поставлен в соответствие проекционный оператор $P(E)$ в пространстве H так, что

$$1) P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i), \text{ если } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ при } i \neq j,$$

$$2) P(\emptyset) = 0, P(X) = 1,$$

то говорят, что на X задана проекционная мера P . Каждой непрерывной функции f на X можно поставить в соответствие оператор

$$\int_X f(x) dP(x),$$

где интеграл определяется как предел (по норме) римановых интегральных сумм $\sum f(x_k) P(\Delta_k)$.

Теорема 2. Пусть A — нормальный (в частности, эрмитов или унитарный) оператор в гильбертовом пространстве H . Существует единственная проекционная мера P на спектре оператора A такая, что

1) операторы $P(E)$ перестановочны с любым оператором, перестановочным с A и A^* ,

2) имеет место равенство

$$A = \int x dP(x).$$

Для доказательства рассмотрим C^* -алгебру $\mathfrak{A}$, порожденную оператором A . Очевидно, что $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ отождествляется со спектром A , так как каждый характер алгебры $\mathfrak{A}$ определяется своим значением на A . По теореме 1 мы можем считать, что H — пространство одного из представлений $\varphi_{\mu, n}$ алгебры $\mathfrak{A}$. В этом случае в качестве $P(E)$ можно взять оператор умножения на характеристическую функцию множества E .

4.5. Непрерывные суммы гильбертовых пространств и алгебры Неймана. Операция прямой суммы гильбертовых пространств допускает дальнейшее обобщение.

Пусть задано семейство $\{H_x\}_{x \in X}$ гильбертовых пространств, и на множестве X определена некоторая мера μ . Естественно попытаться определить новое пространство $H = \int_X H_x d\mu(x)$, эле-

ментами которого были бы функции f на X , принимающие в точке $x \in X$ значения в H_x , а скалярное произведение задавалось бы формулой

$$(f_1, f_2) = \int_X (f_1(x), f_2(x))_{H_x} d\mu(x). \quad (1)$$

Затруднение состоит в том, что подынтегральная функция в (1) может оказаться неизмеримой. В случае, когда все пространства H_x сепарабельны, можно ввести подходящее определение *измеримых* вектор-функций $f(x)$, обеспечивающее измеримость числовых функций $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$.

Например, если все пространства H_x совпадают с одним сепарабельным пространством H , то можно назвать измеримой такую вектор-функцию $f(x)$, что для некоторого (а значит, и для любого) базиса $\{e_k\}$ в H измеримы числовые функции $x \mapsto (f(x), e_k)$.

Более общий случай — когда все пространства H_x являются подпространствами одного сепарабельного пространства H , причем ортогональный проектор P_x на H_x является измеримой операторной функцией, т. е. для любого базиса $\{e_k\}$ в H измеримы числовые функции $x \mapsto (P_x e_k, e_j)$.

Наконец, можно считать априори измеримыми все вектор-функции из некоторого счетного семейства Γ , обладающего свойствами:

- 1) функции $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ измеримы для любых $f_1, f_2 \in \Gamma$,
- 2) для почти всех $x \in X$ векторы $f(x)$, $f \in \Gamma$ порождают H_x .

Тогда вектор-функция $f(x)$ называется измеримой, если измеримо ее скалярное произведение с любой вектор-функцией из Γ .

Хотя последний способ и кажется более общим, по существу, он эквивалентен предыдущему (и даже его частному случаю, когда H_x является подпространством, натянутым на первые $n(x)$ базисных векторов в H ; здесь $n(x)$ — измеримая функция на X , принимающая значения $1, 2, \dots, \infty$).

Если уже выбрано подходящее понятие измеримой вектор-функции, то *непрерывную сумму* $H = \int_X H_x d\mu(x)$ мы определим как совокупность классов эквивалентности измеримых вектор-функций f с суммируемым квадратом нормы.

Оператор A в пространстве $H = \int_X H_x d\mu(x)$ называется *разложимым*, если существует такое семейство $\{A(x)\}$ операторов в пространствах H_x , что

$$(Af)(x) = A(x)f(x) \quad \text{почти всюду на } X. \quad (2)$$

Семейство операторов $\{A(x)\}$ называется *измеримым*, если для любой измеримой вектор-функции $f(x)$ измерима вектор-функция $x \mapsto A(x)f(x)$. Если числовая функция $a(x) = \|A(x)\|$ принадлежит $L^\infty(X, \mu)$, то семейство $\{A(x)\}$ определяет по формуле (2) разложимый оператор A с нормой $\|A\|_H = \|a\|_{L^\infty(X, \mu)}$.

Частным случаем разложимых операторов являются *диагональные* операторы, для которых все $A(x)$ скалярны: $A(x) = a(x) \cdot 1$.

Очевидно, что разложимые операторы образуют подалгебру $\mathcal{R}$ в $\mathcal{B}(H)$, а диагональные операторы — коммутативную подалгебру $\mathcal{D}$ в $\mathcal{R}$.

Если X — компакт и μ — регулярная мера на X , то мы будем обозначать через $\mathcal{D}_0$ подалгебру $\mathcal{D}$, состоящую из *непрерывно диагональных* операторов (для которых $a(x)$ — непрерывная функция). Будем предполагать, что $\text{supp } \mu = X$.

Пусть H — произвольное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{R}$ — подалгебра в $\mathcal{B}(H)$, $\mathcal{D}$ — коммутативная подалгебра в $\mathcal{R}$ и $\mathcal{D}_0$ — подалгебра в $\mathcal{D}$.

Теорема 1. *Подалгебры $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_0$ могут играть роль подалгебры разложимых, диагональных и непрерывно диагональных операторов для некоторой реализации H в виде непрерывной суммы гильбертовых пространств, если и только если выполнены условия:*

1) $\mathcal{R}$ — замкнута в сильной (или, что то же, в слабой) операторной топологии;

2) $\mathcal{D}$ совпадает с центром $\mathcal{R}$;

3) $\mathcal{D}_0$ замкнута по норме и плотна в $\mathcal{D}$ относительно сильной (или, что то же, слабой) топологии.

Для доказательства удобно воспользоваться понятием алгебры Неймана.

Симметричная алгебра $\mathfrak{A}$ операторов в гильбертовом пространстве H называется *алгеброй Неймана*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- 1) $\mathfrak{A}$ содержит 1 и слабо замкнута,
- 2) $\mathfrak{A}$ содержит 1 и сильно замкнута,
- 3) $\mathfrak{A}$ совпадает со своим бикоммутантом.

Напомним, что *коммутантом* алгебры $\mathfrak{A}$ называется совокупность $\mathfrak{A}'$ всех операторов, перестановочных с операторами из $\mathfrak{A}$; *бикоммутант* — это коммутант коммутанта¹⁾. Очевидно, что условие 3) влечет 1), а условие 1) влечет 2). Покажем, что из 2) следует 3).

Достаточно проверить, что если $\mathfrak{A}$ содержит единицу, то $\mathfrak{A}'' = (\mathfrak{A}')'$ совпадает с сильным замыканием $\mathfrak{A}$. Пусть $A \in \mathfrak{A}''$ и $\xi_1, \dots, \xi_n$ — любой конечный набор векторов из H . Нам нужно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой оператор $A_0 \in \mathfrak{A}$, что $\|A_0 \xi_i - A \xi_i\| < \varepsilon$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим сначала случай $n = 1$.

Пусть E — замкнутое подпространство в H , порожденное векторами вида $A_0 \xi$, $A_0 \in \mathfrak{A}$. Оператор P ортогонального проектирования на E лежит в $\mathfrak{A}'$ (так как E инвариантно относительно $\mathfrak{A}$). Поэтому P перестановочен с оператором $A \in \mathfrak{A}''$. Значит, $A\xi = AP\xi = PA\xi \in E$, что и требовалось. Общий случай сводится к разобранному следующим приемом. Рассмотрим в $\tilde{H} = H \otimes C^n = H \oplus \dots \oplus H$ (n слагаемых) алгебру $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \otimes 1_{C^n}$.

Задача 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — симметричная алгебра операторов в гильбертовом пространстве H_1 . Если H_2 — любое другое гильбертово пространство, то для алгебр операторов в гильбертовом тензорном произведении $H_1 \otimes H_2$ имеют место следующие соотношения:

$$(\mathfrak{A} \otimes 1_{H_2})' \supset \mathfrak{A}' \otimes \mathfrak{B}(H_2), \quad (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}(H_2))' = \mathfrak{A}' \otimes 1_{H_2}.$$

Указание. Воспользуйтесь матричной записью тензорного произведения операторов (см. п. 3.4).

Таким образом, в нашем случае $(\tilde{\mathfrak{A}})'' = \mathfrak{A}'' \otimes 1_{C^n}$. Применяя к вектору $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \tilde{H}$ уже доказанную часть утверждения, мы получаем доказательство в общем случае.

Задача 2. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра Неймана, то ее центр $Z(\mathfrak{A})$ совпадает с центром $Z(\mathfrak{A}')$ алгебры $\mathfrak{A}'$ и с пересечением $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$.

¹⁾ Обычно коммутант алгебры $\mathfrak{A}'$ обозначают $\mathfrak{A}''$. Мы выбрали символ $\mathfrak{A}'$, чтобы избежать путаницы с обозначением топологического сопряженного пространства к $\mathfrak{A}$.

Таким образом, условия теоремы 1 можно сформулировать так: $\mathcal{D}_0$ — произвольная коммутативная C^* -алгебра операторов, $\mathcal{R} = \mathcal{D}_0^I$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0^{II}$.

Докажем необходимость этих условий. Замкнутость $\mathcal{D}_0$ по норме очевидна, так как норма оператора умножения на непрерывную функцию $a(x)$ в $L^2(X, \mu)$ равна максимуму модуля a на $\text{supp } \mu = X$.

Пусть $A \in \mathcal{D}_0^I$. Покажем, что A — разложимый оператор. Так как A перестановочен с умножениями на все непрерывные функции, он перестановочен и с их слабыми пределами, в частности, с умножениями на ограниченные измеримые функции. Пусть

$$H = \int_X H_x d\mu(x)$$

и H_k — подмножество в X на некотором $\dim H_x = k$.

Оператор A перестановочен с умножением на характеристические функции множеств H_k . Это позволяет свести задачу к случаю, когда $X = H_k$.

В этом случае все пространства H_x можно отождествить с фиксированным пространством L , а пространство H — с гильбертовым тензорным произведением $L \otimes L^2(X, \mu)$. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис в L . Мы должны доказать, что существуют такие измеримые функции $a_{ij}(x)$, что оператор A действует по формуле

$$A: e_i \otimes f(x) \mapsto \sum_j e_j \otimes a_{ij}(x) f(x). \quad (1)$$

Определим $a_{ij}(x)$ из соотношения

$$A(e_i \otimes 1) = \sum_j e_j \otimes a_{ij}(x). \quad (2)$$

(Заметим, что всякий вектор из $L \otimes L^2(X, \mu)$ имеет вид правой части равенства (2).)

Тогда равенство (1) вытекает из (2) и перестановочности A с умножением на $f(x)$. Таким образом, $\mathcal{R} \supset \mathcal{D}_0^I$ и, следовательно, $\mathcal{R} = \mathcal{D}_0^I$.

Пусть теперь $A \in \mathcal{D}_0^{II} = \mathcal{R}^I$. Так как $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_0^I$, то $\mathcal{D}_0^{II} \subset \mathcal{D}_0^I = \mathcal{R}$. Поэтому A разложим и, следовательно, задается набором функций $\{a_{ij}(x)\}$. Оператор $A \in \mathcal{R}^I$ должен быть перестановочен с разложимым оператором B_{kl} , задаваемым набором $b_{ij}(x) =$

$$= \begin{cases} 1 & \text{при } i=k, j=l, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что $a_{ij}(x) = 0$ почти всюду при $i \neq j$ и что $a_{ii}(x) = a_{jj}(x)$ почти всюду при любых i и j . Это значит, что A — диагональный оператор, т. е. $\mathcal{D}_0^{II} = \mathcal{D}$.

Для доказательства второй части теоремы достаточно применить к алгебре $\mathcal{D}_0$ теорему 1 из п. 4.4 и заметить, что пространство представления $\Phi_{\mu, n}$ является непрерывной суммой $\int_X H_x d\mu(x)$, где $X = \mathfrak{M}(\mathcal{D}_0)$ и $\dim H_x = n(x)$.

Теорема доказана.

Алгебра Неймана $\mathfrak{A}$ называется *алгеброй типа I*, если она изоморфна (как C^* -алгебра) алгебре всех разложимых операторов в некоторой непрерывной сумме гильбертовых пространств $\int_X H_x d\mu(x)$. Эту алгебру обозначают $\int_X \mathfrak{B}(H_x) d\mu(x)$ и называют *непрерывным произведением алгебр $\mathfrak{B}(H_x)$* .

Алгебра $\mathfrak{A}$ типа I называется *однородной степени n* , если $\dim H_x = n$. Другими словами, однородная алгебра типа I и степени n изоморфна алгебре всех измеримых существенно ограниченных функций на некотором пространстве X с мерой μ , принимающих значения в алгебре $\mathfrak{B}(H)$ всех ограниченных операторов в n -мерном гильбертовом пространстве H .

Задача 3. Если X состоит из конечного или счетного множества точек положительной меры, то алгебра $\mathfrak{A} = \int_X \mathfrak{B}(H_x) d\mu(x)$ изоморфна произведению (в категории C^* -алгебр) семейства алгебр $\mathfrak{B}(H_x)$, $x \in X$.

Указание. Пусть ρ_x означает сопоставление каждой операторной функции ее значения в точке $x \in X$. Проверьте, что набор $\{\rho_x\}$ является семейством канонических проекций $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}(H_x)$.

Задача 4. Докажите, что каждая алгебра типа I изоморфна произведению однородных алгебр.

Указание. Пусть $X = \bigcup_k X_k$ — разбиение X на множества уровня функции $n(x) = \dim H_x$. Докажите, что $\mathfrak{A}$ является произведением алгебр $\mathfrak{A}_k = \int_{X_k} \mathfrak{B}(H_x) d\mu(x)$.

В дальнейшем нам будет нужна классификация алгебр типа I с точностью до пространственного изоморфизма (ср. п. 4.4).

Пусть $\{H_x\}$ и $\{L_x\}$ — два измеримых семейства сепарабельных гильбертовых пространств на пространстве X с мерой μ . В пространстве $V = \int_X H_x \otimes L_x d\mu(x)$ рассмотрим алгебру всех разложимых операторов вида $A = \{A_x \otimes 1\}$, $A_x \in \mathfrak{B}(H_x)$. Эту алгебру

мы обозначим $\int_X \mathfrak{B}(H_x) \otimes 1 \, d\mu(x)$. Ясно, что она изоморфна непрерывному произведению $\int_X \mathfrak{B}(H_x) \, d\mu(x)$.

Теорема 2. *Всякая алгебра Неймана $\mathfrak{A}$, изоморфная как C^* -алгебра непрерывному произведению $\int_X \mathfrak{B}(H_x) \, d\mu(x)$, пространственно изоморфна алгебре $\int_X \mathfrak{B}(H_x) \otimes 1 \, d\mu(x)$ в пространстве $\int_X H_x \otimes L_x \, d\mu(x)$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что достаточно рассмотреть случай однородной алгебры степени n . В самом деле, пусть $\mathfrak{A} = \prod_k \mathfrak{A}_k$ — разложение $\mathfrak{A}$ в произведение однородных компонент и E_k — элемент $\mathfrak{A}$, определенный условиями

$$p_j(E_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Тогда $\{E_k\}$ — семейство ортогональных идемпотентов (ср. п. 8.3), задающее разложение V в гильбертову сумму подпространств $V_k = E_k V$, так что ограничение $\mathfrak{A}$ на V_k изоморфно $\mathfrak{A}_k$.

Итак, мы можем предположить, что $\mathfrak{A}$ однородна степени n и изоморфна алгебре операторных функций на X со значениями в $\mathfrak{B}(H)$, $\dim H = n$.

Применяя теорему 1 к подалгебре $C(X) \subset \mathfrak{A}$, выступающей в роли $\mathcal{D}_0$, можно считать, что пространство V , в котором действует $\mathfrak{A}$, имеет вид $V = \int_X V_x \, d\nu(x)$.

Задача 5. Докажите, что мера ν эквивалентна мере μ , фигурирующей в условии теоремы 2.

Указание. Алгебры $L^\infty(X, \mu)$ и $L^\infty(X, \nu)$ обе изоморфны $\mathcal{D}_0^{**}$.

В дальнейшем будем считать, что $\nu = \mu$. Выберем базис $\{\xi_i\}$ в H и обозначим через E_{ik} элемент $\mathfrak{A}$, соответствующий постоянной функции на X , значение которой — оператор e_{ik} , переводящий ξ_i в ξ_k , а остальные векторы базиса — в нуль.

Из соотношений

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}, \quad \sum_i E_{ii} = 1$$

следует, что для почти всех $x \in X$ существует такое разложение $V_x = \bigoplus_k V_x^k$, что операторы $(E_{ii})_x$ являются проекторами на подпространства V_x^i , $(E_{jk})_x$ задает изоморфизм V_x^j на V_x^k . Пусть

L_x — гильбертово пространство, изоморфное каждому из пространств V_x^i , $i=1, 2, \dots, n$. Тогда V_x отождествляется с $H_x \otimes L_x$, а оператор $(E_{ik})_x$ — с оператором $e_{ik} \otimes 1$.

Отсюда без труда выводится утверждение теоремы.

Задача 6. Докажите, что

$$\left(\int_X \mathfrak{B}(H_x) \otimes 1 \, d\mu(x) \right)^1 = \int_X 1 \otimes \mathfrak{B}(L_x) \, d\mu(x).$$

Следствие. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра типа I, то $\mathfrak{A}^1$ — также типа I.

Алгебра Неймана называется *фактором*, если ее центр состоит из скалярных операторов. Предыдущие результаты можно сформулировать так. Всякий фактор типа I изоморфен как C^* -алгебра алгебре $\mathfrak{B}(H)$ всех ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве H и пространственно изоморфен алгебре $\mathfrak{B}(H) \otimes 1$ в некотором пространстве вида $H \otimes L$; всякая алгебра Неймана типа I пространственно изоморфна непрерывному произведению факторов типа I.

Дальнейшие сведения из теории алгебр Неймана читатель может найти в книгах [24] и [38].

§ 5. АНАЛИЗ НА МНОГООБРАЗИЯХ

5.1. Многообразия. Многообразиями называются такие множества, которые локально устроены как евклидовы пространства. Это свойство многообразий позволяет вводить на них локальные системы координат и использовать аппарат математического анализа. Точное определение многообразия таково.

Топологическое пространство M называется *многообразием*, если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность U , гомеоморфная открытому множеству в $\mathbb{R}^n$. Число n называется *размерностью* многообразия M в точке x .

Корректность определения размерности вытекает из известной теоремы топологии:

Непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ не может быть гомеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^m$ при $m \neq n$.

Задача 1. Докажите, что связное многообразие имеет во всех точках одинаковую размерность.

Локальной системой координат, или, короче, *картой*, на многообразии M называется открытое множество $U \subset M$ вместе с фиксированным гомеоморфизмом α этого множества на открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Координаты точки $\alpha(x) \in \mathbb{R}^n$ называются *локальными координатами* точки $x \in U$.

Набор карт, в совокупности покрывающих все многообразие M , называется *атласом*.

Пример 1. Географическая широта и долгота на поверхности сферы. Здесь M — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, U — область, получаемая выбрасыванием из сферы меридиана $y = 0$, $x \leq 0$. Гомеоморфизм α связывает точки $(x, y, z) \in M$ и $(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2$ по формулам

$$x = \cos \varphi \cos \psi, \quad y = \sin \varphi \cos \psi, \quad z = \sin \psi,$$

так что область U переходит в открытый прямоугольник

$$|\varphi| < \pi, \quad |\psi| < \pi/2 \text{ в } \mathbb{R}^2.$$

Пример 2. Стереографическая проекция сферы на плоскость. Здесь U получается выбрасыванием из M точки $(0, 0, 1)$. Гомеоморфизм α устанавливает соответствие между $(x, y, z) \in M$ и $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ по формулам

$$u = \frac{2x}{1-z}, \quad v = \frac{2y}{1-z}.$$

Пример 3. Рассмотрим в качестве M поверхность куба в $\mathbb{R}^3$, заданного неравенствами $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$. Определим на M атлас из восьми карт, взяв в качестве U_i звезду i -й вершины, т. е. объединение этой вершины, выходящих из нее трех (открытых) ребер и прилегающих к ней трех (открытых) граней. В качестве гомеоморфизма α_i возьмем проекцию U_i на плоскость, перпендикулярную к главной диагонали, проходящей через i -ю вершину. Очевидно, $\alpha_i(U_i)$ будет внутренностью правильного шестиугольника в $\mathbb{R}^2$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что все рассматриваемые многообразия хаусдорфовы и имеют счетную базу открытых множеств.

Примером неотделимого многообразия может служить пространство, получаемое из двух экземпляров прямой линии склеиванием вдоль открытой полупрямой. Этот пример можно обобщить, взяв несколько «обычных» многообразий одинаковой размерности и склеив их вдоль некоторых открытых множеств.

Многообразием без счетной базы является так называемая *прямая Александрова*. Пусть T — совокупность всех счетных трансфинитов (т. е. классов эквивалентности вполне упорядоченных счетных множеств). В произведении $T \times [0, 1) = A$ можно определить лексикографический порядок: $(t_1, x_1) < (t_2, x_2)$, если $t_1 < t_2$, или $t_1 = t_2$ и $x_1 < x_2$. Базис топологии в A образуют интервалы

$$I(b, c) = \{a \in A; b < a < c\} \quad \text{и} \quad I(b) = \{a \in A; a > b\}.$$

Говорят, что отображение φ открытого множества $U \in \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ принадлежит классу C^k , $k = 0, 1, 2, \dots, \infty, \omega$, если координаты точки $\varphi(x)$ как функций от координат точки x имеют k непрерывных производных (соответственно непрерывны при $k = 0$, бесконечно дифференцируемы при $k = \infty$ и аналитичны при $k = \omega$).

Пусть (U, α) и (V, β) — две карты многообразия M . Говорят, что эти карты k -гладко связаны, если отображения $\alpha \circ \beta^{-1}$ и $\beta \circ \alpha^{-1}$ принадлежат классу C^k .

Мы считаем, что условия определения выполнены, если $U \cap V = \emptyset$, т. е. две непересекающиеся карты k -гладко связаны для любого k .

Многообразие M называется *гладким многообразием класса C^k* , если на нем задан атлас A , состоящий из k -гладко связанных карт. *Допустимой* картой на M называется любая карта, k -гладко связанная со всеми картами из A .

Задача 2. Докажите, что две карты на сфере в примерах 1 и 2 ω -гладко связаны между собой.

Задача 3. Докажите, что карты U_i и U_j на поверхности куба в примере 3 k -гладко связаны между собой, где

$$k = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-я и } j\text{-я вершины являются концами одного ребра,} \\ \omega & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если M и N — многообразия класса C^k , то имеет смысл говорить о l -гладкости отображений из M в N при $l \leq k$. А именно, через $C^l(M, N)$ мы обозначим совокупность таких отображений $\varphi: M \rightarrow N$, что для любых допустимых карт (U, α) на M и (V, β) на N отображение $\beta \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ принадлежит классу C^l .

В частности, $C^l(M, \mathbb{R})$ или просто $C^l(M)$ — это совокупность l -гладких вещественных функций на M ; $C^l(\mathbb{R}, M)$ — совокупность l -гладких кривых на M .

Взаимно однозначное отображение $\varphi: M \rightarrow N$ называется *диффеоморфизмом*, если φ и φ^{-1} — гладкие отображения. В этом случае говорят, что M и N *диффеоморфны*.

Известно, что на любом многообразии размерности меньше 7 можно единственным образом ввести структуру гладкого многообразия. (Напоминаем, что все рассматриваемые многообразия имеют счетную базу. Известно, что на прямой Александрова C^ω -структура вводится неоднозначно.) На семимерной сфере S^7 гладкость вводится не единственным способом, а среди восьмимерных многообразий есть такие, которые не допускают вообще введения гладкости.

Приведем несколько примеров гладких многообразий. Достаточно просто установить, что C^ω -многообразиями являются числовые пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, задаваемая уравнением $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$, и тор $T^n \subset \mathbb{C}^n$, задаваемый уравнениями $|z_i| = 1, i = 1, \dots, n$. Если M и N — гладкие многообразия, то произведение $M \times N$ также является гладким многообразием, если в качестве атласа на $M \times N$ взять совокупность карт вида $(U \times V, \alpha \times \beta)$, где (U, α) и (V, β) — допустимые карты на M и N . Многообразие $M \times N$ является произведением M и N

в категории гладких многообразий (морфизмы — гладкие отображения).

Пример 4. Вещественное проективное пространство $\mathbf{RP}^n$ — это совокупность всех прямых, проходящих через начало координат в $\mathbf{R}^{n+1}$. Базу открытых множеств в $\mathbf{RP}^n$ составляют совокупности прямых, имеющих непустое пересечение с некоторым открытым множеством в $\mathbf{R}^{n+1}$. Покажем, что $\mathbf{RP}^n$ можно сделать C^ω -многообразием. Прямая из $\mathbf{RP}^n$ определяется направляющим вектором $(a_1, \dots, a_{n+1})$, где числа a_i не все равны нулю и определены с точностью до общего множителя. Обозначим U_i совокупность прямых, для которых $a_i \neq 0$ и определим гомеоморфизм $\alpha_i: U_i \rightarrow \mathbf{R}^n$, переводящий прямую с направляющим вектором $(a_1, \dots, a_{n+1})$ в точку

$$\left(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_i} \right) \in \mathbf{R}^n.$$

Задача 4. Проверьте, что набор $\{(U_i, \alpha_i)\}$ является атласом из ω -гладко связанных карт на $\mathbf{RP}^n$.

Более общим является

Пример 5. Пусть $\mathbf{G}_{n,k}^R$ — множество k -мерных подпространств в n -мерном вещественном пространстве. Элемент $\mathbf{G}_{n,k}^R$ порождается системой из k линейно независимых векторов

$$\xi_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^n), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

т. е. определяется матрицей $\Xi = \|\xi_i^j\|$ порядка $k \times n$ и ранга k . Очевидно, что матрицы Ξ и Ξ' определяют один и тот же элемент $\mathbf{G}_{n,k}^R$, если $\Xi' = C\Xi$, где C — невырожденная матрица порядка $k \times k$.

Пусть $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ — подмножество в $\{1, 2, \dots, n\}$. Обозначим U_J подмножество в $\mathbf{G}_{n,k}^R$, элементы которого определяются матрицами Ξ с условием $\det \|\xi_j^m\|_{j \in J} \neq 0$. Заменяя Ξ на $\Xi' = C\Xi$, мы можем добиться выполнения равенства

$$\tilde{\xi}_j^m = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq r, \\ 1 & \text{при } m = r. \end{cases}$$

Остальные матричные элементы $\tilde{\xi}_j^i$, $j \notin J$ задают отображение U_J в $\mathbf{R}^{k(n-k)}$, которое мы обозначим α_J .

Задача 5. Докажите, что набор $\{(U_J, \alpha_J)\}$ является атласом из ω -гладко связанных карт на $\mathbf{G}_{n,k}^R$.

Задача 6. Докажите, что $\mathbf{G}_{n,k}^R$ и $\mathbf{G}_{n,n-k}^R$ диффеоморфны.

Многообразия $G_{n,k}^{\mathbb{R}}$ называют вещественными грассмано-выми многообразиями. Точно так же можно определить комплексные грассмановы многообразия $G_{n,k}^{\mathbb{C}}$.

Важный класс многообразий получается следующим образом. Пусть $f_1, \dots, f_m$ — набор k -гладких функций, определенных в некоторой области $U \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим M множество всех решений системы

$$f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0.$$

Нам понадобится следующий факт из анализа, вытекающий из теоремы о неявной функции.

Теорема 1. Пусть в окрестности множества M ранг матрицы $F(x) = \|\partial f_i(x)/\partial x_j\|$ принимает постоянное значение r . Тогда на M однозначно вводится такая структура k -гладкого $(n-r)$ -мерного многообразия, что:

- 1) ограничения на M функций из $C^k(U)$ принадлежат $C^k(M)$;
- 2) в качестве допустимой карты в окрестности точки $x \in M$ можно взять проекцию этой окрестности на любую $(n-r)$ -мерную плоскость, трансверсальную к строкам матрицы $F(x)$ (т. е. не содержащую никакой ненулевой линейной комбинации строк $F(x)$).

Пример 6. Пусть $\text{Mat}_n(K)$ — совокупность всех матриц порядка n с элементами из K . В нужных нам примерах K будет полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, либо телом кватернионов $\mathbb{H}$. Если $A \in \text{Mat}_n(K)$, то A' — транспонированная матрица с элементами $a'_{ij} = a_{ji}$, A^* — сопряженная матрица с элементами $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$ (черта означает комплексное или кватернионное сопряжение).

Через $GL(n, K)$ обозначается открытое подмножество в $\text{Mat}_n(K)$, задаваемое условием $\det A \neq 0$ ¹⁾.

Пусть $A \in \text{Mat}_n(K)$. Рассмотрим в $GL(n, K)$ подмножества, задаваемые уравнениями

$$X^{-1}AX = A, \quad (1)$$

$$X'AX = A, \quad (2)$$

$$X^*AX = A. \quad (3)$$

Каждое из этих матричных уравнений эквивалентно системе из n^2 обычных уравнений относительно n^2 неизвестных — матричных элементов x_{ij} матрицы X .

¹⁾ В случае $K = \mathbb{H}$ для определения $\det A$ можно воспользоваться вложением $\mathbb{H}$ в $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$ или в $\text{Mat}_4(\mathbb{R})$ (см. п. 3.2).

Задача 7. Докажите, что следующие отображения $GL(n, K)$ в $\text{Mat}_n K$, имеют постоянный ранг

$$X \mapsto X^{-1}AX - A,$$

$$X \mapsto X'AX - A,$$

$$X \mapsto X^*AX - A.$$

Указание. Докажите, что если $C \in GL(n, K)$, то отображения $X \rightarrow CX$ и $X \rightarrow XC$ являются диффеоморфизмами $\text{Mat}_n(K)$. Воспользуйтесь далее тем, что ранг отображения не меняется при композиции этого отображения с диффеоморфизмами.

Из утверждения задачи 7 и теоремы 1 вытекает, что подмножества, задаваемые уравнениями (1), (2), (3) — гладкие многообразия. Отметим частные случаи этой конструкции.

Пусть 1_n — единичная матрица порядка n .

Уравнение (2) при $A = 1_n$ задает совокупность $O(n, K)$ ортогональных матриц ($K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Уравнение (3) при $A = 1_n$, $K = \mathbf{C}$ задает совокупность $U(n)$ унитарных матриц. Если A — кососимметрическая матрица порядка $2n$ вида $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$, то уравнение (2) определяет совокупность $Sp(2n, K)$ симплектических матриц ($K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$).

Задача 8. Докажите, что если $K = \mathbf{R}$ и $A = \begin{pmatrix} 1_n & 1_n \\ -1_n & 1_n \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2n}(\mathbf{R})$, то уравнение (2) определяет множество $O(2n, \mathbf{R}) \cap Sp(2n, \mathbf{R})$, гомеоморфное $U(n)$.

Указание. Рассмотрите отображение $\text{Mat}_n(\mathbf{C})$ в $\text{Mat}_{2n}(\mathbf{R})$ по формуле

$$X + iY \mapsto \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}, \quad X, Y \in \text{Mat}_n(\mathbf{R}).$$

Если $A = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$, то уравнение (2) при $K = \mathbf{R}$ определяет совокупность $O(p, q)$ псевдоортогональных матриц типа (p, q) . Для той же матрицы A уравнение (3) при $K = \mathbf{C}$ задает совокупность $U(p, q)$ псевдоунитарных матриц типа (p, q) , а для $K = \mathbf{H}$ — совокупность $Sp(p, q)$ псевдосимплектических матриц типа (p, q) .

Назовем две карты $(U, \alpha), (V, \beta)$ на многообразии M *положительно связанными*, если отображение $\alpha\beta^{-1}$ имеет положительный якобиан во всей области определения. Атлас называется *положительным*, если он состоит из положительно связанных карт. Два положительных атласа *эквивалентны*, если их объединение — положительный атлас.

Задача 9. Докажите, что для любого связного многообразия M число классов эквивалентности положительных атласов равно 0 либо 2.

В первом случае многообразие M называется *неориентируемым*, во втором — *ориентируемым*, а выбор одного из двух классов положительных атласов называется *ориентацией* M .

Задача 10. При каких n и k ориентируемо многообразие $G_{n,k}^R$?

Ответ. При четном n (если $0 < k < n$).

Структуру k -гладкого многообразия на топологическом пространстве M можно задать еще и другим способом — указав для каждого открытого подмножества $U \subset X$ кольцо $C^k(U)$ k -гладких функций на U . Очевидно, что соответствие $U \rightarrow C^k(U)$ задает контравариантный функтор из категории открытых множеств (морфизмами служат вложения) в категорию колец. Такие функторы называются *предпучками* (точнее, *предпучками колец*; аналогично определяются *предпучки групп, алгебр, множеств* и т. д.).

Предпучок F называется *пучком*, если для любого открытого множества $U \subset X$ и любого его покрытия открытыми подмножествами U_α , $\alpha \in A$, имеет место точная последовательность:

$$0 \rightarrow F(U) \xrightarrow{i} \prod_{\alpha \in A} F(U_\alpha) \xrightarrow{j} \prod_{\alpha, \beta \in A} F(U_\alpha \cap U_\beta), \quad (4)$$

где морфизм i соответствует вложениям U_α в U , а морфизм j является разностью морфизмов, соответствующих вложениям $U_\alpha \cap U_\beta$ в U_α и в U_β .

Наглядный смысл точности этой последовательности виден на примере предпучка $U \mapsto C^k(U)$ (который является пучком). А именно, точность в первом члене означает, что каждая гладкая функция на U полностью определяется своими ограничениями на U_α , $\alpha \in A$; точность во втором члене означает, что если в каждом U_α задана гладкая функция f_α так, что на пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ функции f_α и f_β совпадают, то все f_α получаются ограничениями из одной гладкой функции f на U .

Топологическое пространство X с заданным на нем пучком колец $\mathcal{O}$ называется *окольцованным пространством*, а пучок $\mathcal{O}$ — *структурным пучком*.

Определение гладкого многообразия теперь можно сформулировать так.

Многообразие класса C^n — это окольцованное пространство $(X, \mathcal{O})$, локально-изоморфное открытому шару в $\mathbb{R}^n$, снабженному пучком k -гладких функций.

Если в этом определении заменить $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{C}^n$, а пучок k -гладких функций на пучок голоморфных (т. е. комплексно аналитических) функций, мы получим определение *комплексного многообразия*.

Отметим, что в общую схему окольцованного пространства укладывается и классическое понятие *алгебраического многообразия* над полем K (локальной моделью служит подмножество в K^n , задаваемое системой алгебраиче-

ских уравнений, снабженное пучком всюду определенных рациональных функций и топологией Зариского) и современный его вариант — понятие схемы над полем K (локальная модель — множество простых идеалов некоторой K -алгебры).

Рассмотрим окольцованное пространство $(X, \mathcal{O})$, локально-изоморфное окрестности нуля в пространстве $L = \mathbf{R}^k \oplus \mathbf{C}^l$, снабженной пучком функций, бесконечно дифференцируемых по вещественным координатам в $\mathbf{R}^k$ и голоморфных по комплексным координатам в $\mathbf{C}^l$.

Мы будем называть такое пространство $(X, \mathcal{O})$ смешанным многообразием типа (k, l) , если существует такое гладкое k -мерное вещественное многообразие Y и такое отображение $p: X \rightarrow Y$, что каждый «слой» $p^{-1}(y)$, $y \in Y$ является l -мерным комплексным многообразием, и структурный пучок $\mathcal{O}$ на X состоит из гладких функций, голоморфных вдоль каждого слоя.

Задача 11. Докажите, что пространство Y и проекция p определяются по $(X, \mathcal{O})$ однозначно.

Указание. Пусть $\bar{\mathcal{O}}$ — пучок функций, комплексно сопряженных к функциям из $\mathcal{O}$, A — алгебра $\mathcal{O}(X) \cap \bar{\mathcal{O}}(X)$. Тогда $Y = \mathcal{M}(A)$ и p — естественное отображение X в Y , сопоставляющее точке $x \in X$ идеал $p(x) \subset A$ всех функций, равных нулю в x .

Задача 12. Пусть $(X, \mathcal{O})$ — окольцованное пространство, возникающее из $L = \mathbf{R}^k \oplus \mathbf{C}^l$ факторизацией по дискретной группе Γ параллельных переносов в L . Докажите, что $(X, \mathcal{O})$ будет смешанным многообразием тогда и только тогда, когда дискретна проекция Γ_0 группы Γ в группу параллельных переносов $\mathbf{R}^k$.

Указание. Пусть $A = \mathcal{O}(X) \cap \bar{\mathcal{O}}(X)$. Проверьте, что A изоморфна алгебре гладких функций на $\mathbf{R}^k$, инвариантных относительно Γ_0 .

5.2. Векторные поля. Одно из основных понятий в теории гладких многообразий — это понятие касательного вектора. Интуитивный смысл этого понятия — скорость точки, движущейся по многообразию. Точное определение можно сформулировать так. Назовем *гладкой кривой* в многообразии M всякое гладкое отображение $\mathbf{R}$ в M . Параметр в $\mathbf{R}$ будем обозначать буквой t , а точку многообразия — буквой x . Гладкая кривая $x(t)$ задается в окрестности точки $x_0 = x(t_0)$ набором из $n = \dim M$ гладких функций $x^i(t)$ (локальных координат точки $x(t)$ в некоторой карте, содержащей точку x_0). Будем говорить, что кривая $x(t)$ выходит из точки x_0 , если $x(0) = x_0$. Назовем две гладкие кривые $x(t)$ и $y(t)$, выходящие из точки x_0 , эквивалентными, если $|x^i(t) - y^i(t)| = o(t)$ при $t \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Несложно проверить, что это определение эквивалентности не зависит от выбора карты, содержащей точку x_0 .

Касательным вектором к многообразию в точке x_0 называется класс эквивалентности гладких кривых, выходящих из точки x_0 .

Выражение « X есть касательный вектор к кривой $x(t)$ при $t=0$ » или запись $X=x'(0)$ означают, что кривая $x(t)$ принадлежит классу X .

Выберем какую-нибудь карту (U, α) , для которой точка x_0 является началом координат и предположим для простоты, что $\alpha(U) = \mathbb{R}^n$. Совокупность гладких кривых в U является линейным пространством относительно операций покомпонентного сложения и умножения на число:

$$(x + y)^i(t) = x^i(t) + y^i(t), \quad (\lambda x)^i(t) = \lambda x^i(t).$$

Задача 1. Проверьте, что эти операции сохраняют отношение эквивалентности, определенное выше, и тем самым задают структуру линейного пространства (над $\mathbb{R}$) в множестве $T_x M$ всех касательных векторов к многообразию M в точке x .

Задача 2. Докажите, что размерность пространства $T_x M$ равна размерности многообразия M в точке x .

Принятое нами определение касательного вектора согласуется с интуитивным представлением о скорости, но неудобно в некоторых других отношениях. Например, определение суммы двух касательных векторов и произведения вектора на число требует привлечения локальных координат.

Мы приведем сейчас другое определение, не использующее совсем локальных координат. Для этого заметим, что каждая гладкая кривая $x(t)$, выходящая из точек x_0 , определяет непрерывный функционал F на пространстве $C^\infty(M)$ по формуле

$$F(f) = \left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0}. \quad (1)$$

Задача 3. Покажите, что два функционала такого вида совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие кривые эквивалентны.

Таким образом, каждому касательному вектору X соответствует функционал F , который обычно называют *производной вдоль вектора X* .

Задача 4. Докажите, что функционал F на $C^\infty(M)$ представим в виде (1) для некоторой кривой $x(t)$, выходящей из x_0 , тогда и только тогда, когда для любых функций f_1 и f_2 из $C^\infty(M)$ справедливо равенство

$$F(f_1 f_2) = F(f_1) f_2(x_0) + f_1(x_0) F(f_2). \quad (2)$$

Эти результаты показывают, что наше определение касательного вектора равносильно следующему:

Касательным вектором к многообразию M в точке x_0 называется линейный функционал на $C^\infty(M)$, удовлетворяющий условию (2).

В смысле этого определения структура линейного пространства в множестве касательных векторов вводится очевидным способом, так как функционалы можно складывать и умножать на числа,

Для практических вычислений с касательными векторами полезно ввести координаты в пространстве $T_x M$.

Пусть (U, α) — какая-нибудь карта на M . Для любой точки $x \in U$ можно определить n касательных векторов $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$, определяя соответствующие функционалы как частные производные по локальным координатам в точке x .

Задача 5. Докажите, что для любой точки $x \in U$ векторы $\partial/\partial x^i$, $i = 1, \dots, n$, образуют базис в пространстве $T_x M$.

Координаты вектора $\xi \in T_x M$ зависят, таким образом, от выбора карты. Если U и V — две карты, покрывающие точку x , то в пространстве $T_x M$ возникает два базиса $\{\partial/\partial x^i\}$, $\{\partial/\partial y^j\}$, где $\{x^i\}$, $\{y^j\}$ — локальные координаты в этих картах.

Матрица перехода от одного базиса к другому имеет, очевидно, вид $a_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$, так как $\frac{\partial f}{\partial y^j} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$. Этот закон преобразования иногда кладут в основу определения касательного вектора.

Согласно этому определению касательным вектором на многообразии M в точке x называется сопоставление каждой карте $U \ni x$ набора чисел $\{\xi^i(U)\}$ так, что если $\{x^i\}$ — локальные координаты в U , а $\{y^j\}$ — локальные координаты в V , то

$$\xi^i(U) = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \xi^j(V). \quad (3)$$

Пусть теперь M и N — два гладких многообразия и $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Множество гладких кривых, выходящих из точки $x \in M$, переводится отображением f в множество гладких кривых, выходящих из точки $y = f(x) \in N$. Без труда проверяется, что эквивалентные кривые переходят в эквивалентные. Мы получаем, таким образом, отображение $f_*(x): T_x M \rightarrow T_y N$.

Задача 6. Докажите, что f_* — линейное отображение и вычислите его матрицу относительно базисов $\{\partial/\partial x^i\}$ в $T_x M$ и $\{\partial/\partial y^j\}$ в $T_y N$.

Задача 7. Если M, N, L — три гладких многообразия и $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow L$ — два гладких отображения, то

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Это — так называемое *цепное правило* для вычисления частных производных сложных функций. Записывая каждое отображение матрицей относительно естественных базисов, мы приходим к обычной форме цепного правила:

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^k} = \sum_j \frac{\partial z^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^k}.$$

Отображение $f_*(x): T_x M \rightarrow T_y N$ называется *производным* от отображения $f: M \rightarrow N$ в точке x . Рассмотрим специальный случай, когда $N = \mathbb{R}$. Так как на $\mathbb{R}$ имеется стандартная координата, то все пространства $T_y \mathbb{R}$ естественно отождествляются с $\mathbb{R}$. Таким образом, производное отображение f_* задает линейный функционал на $T_x M$. Этот функционал обозначается df и называется *дифференциалом* функции f .

Если в каждой точке многообразия M задан вектор, касательный к многообразию, то говорят, что на M задано *векторное поле*. В локальной системе координат векторное поле может быть записано в виде

$$\xi = \sum_i \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Векторное поле ξ называется *гладким*, если его координаты $\xi^i(x)$ — гладкие функции. Очевидно, это определение гладкости векторного поля не зависит от выбора карты.

Так же как векторы возникают при рассмотрении гладких кривых, векторные поля связаны с отображениями многообразия на себя. Пусть $\varphi_t: M \rightarrow M$ — однопараметрическое семейство гладких преобразований многообразия M . Потребуем, чтобы φ_t гладко зависело от параметра t (т. е. чтобы отображение $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$ по формуле $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ было гладким) и чтобы при $t = 0$ мы имели тождественное отображение $\varphi_0(x) \equiv x$. Тогда каждой точке $x \in M$ отвечает выходящая из этой точки гладкая кривая $x(t) = \varphi_t(x)$ и, стало быть, касательный вектор $x'(0)$.

Мы получили векторное поле, которое называется *производным* семейства φ_t .

Возникает вопрос, всякое ли векторное поле является производным для некоторого семейства преобразований. Ответ на этот вопрос положительный. Для компактных многообразий можно доказать более сильное утверждение.

Теорема 1. Каждое гладкое векторное поле ξ на компактном многообразии M является производным для некоторой одномерной группы $\{\varphi_t\}$ преобразований M .

Для доказательства рассмотрим дифференциальное уравнение на M :

$$x'(t) = \xi(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

которое в локальной системе координат записывается в виде системы

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x^1, \dots, x^n), \quad x^i(0) = x_0^i. \quad (4')$$

Известная теорема из теории обыкновенных дифференциальных уравнений гарантирует существование и непрерывную за-

висимость от начальных данных решения $x(t, x_0)$ уравнения (4) для некоторой окрестности любой точки $x_0 \in M$ и некоторого интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ изменения t (зависящего от x_0).

Ввиду компактности M существует такой интервал $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ изменения t , в котором определены решения $x(t, x_0)$ при любом положении начальной точки x_0 .

Задача 8. Докажите, что преобразования $\varphi_t: x_0 \rightarrow x(t, x_0)$ удовлетворяют соотношению

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$$

для достаточно малых t и s .

Указание. Проверьте, что кривые $x_1(t) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ и $x_2(t) = \varphi_{t+s}(x)$ удовлетворяют (4) при $x_0 = \varphi_s(x)$.

Преобразования φ_t для $|t| \geq \varepsilon_0$ определяются из группового закона. Теорема доказана.

Для некомпактных многообразий M утверждение теоремы 1 неверно.

Задача 9. Докажите, что векторному полю $\xi = (1 + x^2) d/dx$ на прямой не соответствует никакая группа преобразований.

Указание. Покажите, что при отображении $x \mapsto y = \operatorname{arctg} x$ прямая переходит в интервал $(-\pi/2, \pi/2)$, а поле ξ — в поле $\eta = d/dy$.

Однако справедливо более слабое утверждение.

Задача 10. Пусть ξ — векторное поле на многообразии M . Докажите, что существует такая гладкая функция a на $M \times \mathbb{R}$, что:

1) уравнение

$$x'(t) = a(x, t) \xi(x), \quad x(0) = x_0, \quad (5)$$

имеет решение для всех $x_0 \in M$ и всех $t \in \mathbb{R}$;

2) для каждой точки $x \in M$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $a(x, t) \equiv 1$ при $|t| < \varepsilon$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что M имеет счетную базу и, следовательно, является объединением счетного множества компактов.

Очевидно, что поле ξ является производным для семейства преобразований $\varphi_t: x_0 \mapsto x(t, x_0)$, где $x(t, x_0)$ — решение уравнения (5).

Как и для векторов, можно дать второе определение векторных полей, не использующее локальных координат. Для этого мы заметим, что каждое гладкое векторное поле ξ на M определяет линейный оператор в $C^\infty(M)$, который ставит в соответствие функции f и точке $x \in M$ производную f вдоль вектора $\xi(x)$. Этот оператор мы будем обозначать той же буквой, что и само векторное поле.

Из равенства (2) вытекает, что операторы, соответствующие векторным полям, обладают свойством

$$\xi(f_1 f_2) = \xi f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot \xi f_2. \quad (6)$$

Задача 11. Докажите, что всякий оператор в $C^\infty(M)$, удовлетворяющий (4), соответствует гладкому векторному полю.

Таким образом, мы получаем эквивалентное определение векторного поля как оператора в $C^\infty(M)$.

Векторные поля, кроме обычных операций линейного пространства (сложения и умножения на число), допускают еще одну важную операцию — коммутирование.

Коммутатором векторных полей ξ и η называется векторное поле $[\xi, \eta]$, определенное формулой

$$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi. \quad (7)$$

Задача 12. Проверьте, что оператор (7) действительно соответствует векторному полю.

Указание. Воспользуйтесь результатами задачи 11.

Задача 13. Пусть в некоторой карте

$$\xi = \sum_i \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \eta = \sum_i \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Найдите выражение поля $[\xi, \eta]$ в той же карте.

Ответ. $[\xi, \eta] = \sum_i \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, где

$$\xi^i(x) = \sum_j \left(\xi^j(x) \frac{\partial \eta^i(x)}{\partial x^j} - \eta^j(x) \frac{\partial \xi^i(x)}{\partial x^j} \right).$$

Производная функции f вдоль векторного поля ξ и коммутатор векторных полей ξ и η являются частными случаями так называемого *оператора Ли* L_ξ , соответствующего векторному полю ξ .

Пусть F — функтор из категории многообразий (морфизмами являются гладкие гомеоморфизмы, называемые обычно диффеоморфизмами) в категорию линейных топологических пространств. Если ξ — векторное поле на многообразии M , и $\{\varphi_t\}$ — некоторое семейство диффеоморфизмов M , для которого ξ — производное поле, то в пространстве $F(M)$ возникает семейство линейных преобразований $F(\varphi_t)$. Вектор $\hat{f} \in F(M)$ называется *дифференцируемым вдоль поля ξ* , если вектор-функция $t \mapsto F(\varphi_t)\hat{f}$ дифференцируема при $t=0$ и производная $\frac{d}{dt}(F(\varphi_t)\hat{f}) \Big|_{t=0} = L_\xi \hat{f}$ не зависит от выбора семейства $\{\varphi_t\}$, для которого ξ является производным полем.

Пример. Пусть F_0 — контравариантный функтор, заданный формулами: $F_0(M) = C^k(M)$, $k > 0$, $F_0(\varphi) : f \mapsto f \circ \varphi$.

Тогда $L_\xi f = \xi f$.

Задача 14. Пусть F_1 — контравариантный функтор, который ставит в соответствие многообразию M пространство $\text{Vect } M$ всех гладких векторных полей на M , а диффеоморфизму φ — преобразование $F_1(\varphi) : \eta \mapsto \varphi_*^{-1} \eta \circ \varphi$ (т. е. $[F_1(\varphi)\eta](x) = \varphi_*(x)^{-1} \eta(\varphi(x))$).

Докажите, что $L_\xi \eta = [\xi, \eta]$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь тождеством

$$F_0(\varphi) \eta F_0(\varphi^{-1}) = F_1(\varphi)(\eta)$$

и вытекающим из него равенством

$$L_{\xi}(\eta f) = L_{L_{\xi}\eta} f + \eta(L_{\xi}f). \quad (8)$$

5.3. Дифференциальные формы. *Тензорным полем* на многообразии M называется функция, которая каждой точке $x \in M$ ставит в соответствие некоторый тензор над пространством $T_x M$, касательным к M в точке x .

Частными случаями тензорных полей являются функции (тензорные поля ранга 0) и векторные поля (контравариантные тензорные поля ранга 1).

Если U — локальная система координат на M , то во всех касательных пространствах $T_x M$, $x \in U$, можно одновременно выбрать базис $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$, а во всех пространствах $T_x^* M$ — дуальный базис $dx^1, \dots, dx^n$.

Значение ковектора dx^i на векторе $\partial/\partial x^j$ равно символу Кронекера

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Каждое смешанное тензорное поле ранга (k, l) может быть разложено по базисным полям

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l}.$$

Тензорное поле называется *гладким*, если коэффициенты в его разложении по базисным полям — гладкие функции. Очевидно, это свойство поля не зависит от выбора (допустимой) системы координат.

Кососимметрические ковариантные тензорные поля называются *дифференциальными формами*. Дифференциальные формы образуют некоммутативную алгебру относительно внешнего умножения. Кроме того, в пространстве дифференциальных форм определен так называемый *оператор внешнего дифференцирования*, или *дифференциал* d , обладающий свойствами:

$$\text{а) } d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2;$$

$$\text{б) } d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2, \quad (1)$$

если ω_1 — форма степени k ;

в) на формах степени 0 (т. е. функциях) оператор d совпадает с обычным дифференциалом (см. п. 5.2);

$$\text{г) } d^2 = 0.$$

Перечисленные свойства однозначно определяют оператор d , так как для каждой формы ω , имеющей в локальной системе

координат вид

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1, \dots, i_k} d(a_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (\text{так как } d(dx^i) = 0). \end{aligned}$$

Задача 1. Докажите, что соответствие $\omega \mapsto d\omega$, определенное последним равенством, не зависит от выбора системы координат и обладает свойствами (1).

Очевидно, что оператор d повышает на единицу степень дифференциальной формы. Если ξ — векторное поле на M , то можно определить оператор $\iota(\xi)$, понижающий на единицу степень дифференциальной формы, следующим образом.

Если ω — форма степени k , то $\iota(\xi)\omega$ — форма степени $k-1$, принимающая на векторах $\xi_1, \dots, \xi_{k-1}$ из $T_x M$ значение $k[\omega(x)](\xi(x), \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$.

Задача 2. Докажите, что $\iota(\xi)$ — единственный оператор в пространстве дифференциальных форм на M , обладающий свойствами:

$$\text{а) } \iota(\xi)(\omega_1 + \omega_2) = \iota(\xi)\omega_1 + \iota(\xi)\omega_2;$$

$$\text{б) } \iota(\xi)(\omega_1 \wedge \omega_2) = \iota(\xi)\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \iota(\xi)\omega_2, \quad (2)$$

если ω_1 — форма степени k ;

в) если ω — форма степени 1, то $\iota(\xi)\omega = \omega(\xi)$;

г) если ω — форма степени 0, то $\iota(\xi)\omega = 0$.

Задача 3. Докажите, что операторы $\iota(\xi)$ и d связаны с оператором Ли L_ξ тождеством

$$L_\xi = d \circ \iota(\xi) + \iota(\xi) \circ d. \quad (3)$$

Важным свойством оператора d является его перестановочность с гладкими отображениями.

Задача 4. Пусть $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение. Для каждой дифференциальной формы ω на N определим форму $f^*\omega$ на M равенством

$$[(f^*\omega)(x)](\xi_1, \dots, \xi_k) = [\omega(f(x))](f_*(x)\xi_1, \dots, f_*(x)\xi_k).$$

Докажите, что $d \circ f^* = f^* \circ d$.

Указание. Докажите, что f^* перестановочно с внешним умножением и воспользуйтесь формулами (1), сводящими задачу к случаю $k=0$ или $k=1$, $\omega = dx$.

Утверждение задачи 4 можно вывести также из следующего явного выражения для дифференциала $d\omega$ формы ω степени k :

$$\begin{aligned} (k+1)d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k) + \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_k). \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь $\xi_0, \dots, \xi_k$ — любые гладкие векторные поля, а символ $\wedge$ означает, что соответствующий аргумент должен быть опущен.

Докажем равенство (4) индукцией по степени формы. Перепишем левую часть в виде $[i(\xi_0)d\omega](\xi_1, \dots, \xi_k)$ и воспользуемся тождеством (3). Получим

$$(L_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) - d[i(\xi_0)\omega](\xi_1, \dots, \xi_k). \quad (5)$$

Используя тождество

$$L_{\xi_0}[\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)] = (L_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) + \sum_{i=1}^k \omega(\xi_1, \dots, L_{\xi_0}\xi_i, \dots, \xi_k)$$

и предположение индукции, легко преобразовать выражение (5) так, чтобы оно совпало с правой частью искомого равенства (4). Остается проверить справедливость формы (4) при $k=0$, что тривиально.

Форма ω называется *замкнутой*, если $d\omega=0$, и *точной*, если $\omega=d\omega'$ для некоторой формы ω' .

Задача 5. Замкнутые формы относительно внешнего умножения образуют кольцо, в котором совокупность точных форм является двусторонним идеалом.

Соответствующее фактор-кольцо обозначается $H^*(M, \mathbf{R})$ (или $H^*(M, \mathbf{C})$, если рассматриваются формы с комплексными коэффициентами) и называется *кольцом когомологий де Рама* многообразия M . Оно естественно градуировано (степенями форм):

$$H^*(M, \mathbf{R}) = \sum_{k=0}^{\dim M} H^k(M, \mathbf{R}).$$

Теорема де Рама. Группы $H^k(M, K)$, $K=\mathbf{R}, \mathbf{C}$, совпадают с группами когомологий многообразия M с коэффициентами в K (см. п. 1.3).

Большая роль, которую играют дифференциальные формы в анализе, объясняется тем, что они естественно возникают при попытке перенести на многообразия операцию интегрирования. В самом деле, пусть ω — дифференциальная форма степени k на M , и N — некоторое k -мерное подмногообразие в M . Предположим, что существует такое гладкое отображение φ некоторой области $D \subset \mathbf{R}^k$ в многообразии M , что $\varphi(D)=N$. Тогда форма $\varphi^*(\omega)$ имеет вид $a(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$. Классическая формула замены переменных показывает, что величина

$$I = \int_D \dots \int a(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k$$

определена с точностью до знака многообразием N и формой ω (т. е. не зависит от выбора параметризующего отображения φ).

Чтобы определить однозначно и знак I , нужно фиксировать ориентацию N (см. п. 5.1).

Величина I называется *интегралом формы ω по ориентированному многообразию N* и обозначается $\int_N \omega$.

В общем случае, когда N не покрывается одной картой, поступают так. Пусть N — ориентированное многообразие и $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ — положительный атлас, принадлежащий отмеченному классу.

Задача 6 (теорема о разбиении единицы).

Если $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — открытое покрытие многообразия M класса C^k , то существует семейство функций $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ класса C^l , $l = \min(k, \infty)$, обладающих свойствами:

- 1) $f_\alpha = 0$ вне U_α ;
- 2) $0 \leq f_\alpha \leq 1$ на M ;
- 3) $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha = 1$ на M .

Следствие. Форма ω на M является суммой таких форм ω_α , что $\omega_\alpha = 0$ вне U_α .

Положим по определению

$$\int_N \omega = \sum_{\alpha \in A} \int_{U_\alpha} \omega_\alpha.$$

Можно проверить, что эта величина не зависит от выбора покрытия U_α и разбиения ω в сумму ω_α .

Многообразием с краем называется множество M , каждая точка которого имеет окрестность, диффеоморфную окрестности нуля либо в $\mathbb{R}^n$ либо в $\mathbb{R}_+^n$ (полупространство, задаваемое условием $x^n \geq 0$). Множество точек второго типа называется *краем многообразия M* и обозначается ∂M .

Если многообразие с краем M ориентируемо, то его край ∂M также ориентируем и при подходящем выборе ориентаций имеет место формула

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

для любой дифференциальной формы степени $n-1$.

Доказательство этой формулы и другие дополнительные сведения можно найти в книгах [46], [42].

5.4. Расслоения.

Большинство линейных пространств, составляющих поле приложения функционального анализа, можно рассматривать с единой точки зрения — как пространства сечений векторных расслоений над гладкими многообразиями. Таковы, например, пространства функций, векторных полей, дифференциальных форм и др.

В этом пункте мы познакомим читателя с основными определениями и фактами теории векторных расслоений, отсылая за подробностями к книге Д. Хьюзмоллера [53].

Мы приводим также определение когомологий с коэффициентами в пучке и обобщенную теорему Дольбо.

Доказательство этой теоремы и дополнительную информацию из теории пучков читатель может найти в монографии Р. Годмана [20].

Векторным расслоением над гладким многообразием M называется пара $\mathcal{E} = (E, p)$, где E — некоторое многообразие, а p — отображение E в M , обладающее свойствами:

1) прообраз $p^{-1}(x)$ каждой точки $x \in M$ снабжен структурой линейного пространства над K , $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$;

2) каждая точка $x \in M$ обладает такой окрестностью U , что $p^{-1}(U)$ допускает диффеоморфизм ϕ на $U \times K^n$, перестановочный с проекцией на U и линейный на каждом слое $p^{-1}(x)$.

Многообразие E называется *пространством расслоения*, пространство K^n — *слоем*, многообразие M — *базой*, а отображение p — *проекцией* расслоения.

Совокупность всех расслоений со слоем K^n над M образует категорию, морфизмами которой являются коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\phi} & E_2 \\ & \searrow p_1 \quad \swarrow p_2 & \\ & M & \end{array}$$

где ϕ — некоторый диффеоморфизм, линейный на каждом слое.

Примером расслоения может служить прямое произведение $M \times K^n$ с естественной проекцией на первый сомножитель. Это расслоение и все ему эквивалентные называются *тривиальными*.

Каждое расслоение можно «склеить» из тривиальных следующим образом. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — покрытие M открытыми множествами. Зададим в пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ гладкие операторные функции $g_{\alpha\beta}$ со значениями в $\text{Aut } K^n$, удовлетворяющие условиям:

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &\equiv 1 \text{ в } U_\alpha, \quad g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} \equiv 1 \text{ в } U_\alpha \cap U_\beta, \\ g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} &\equiv 1 \text{ в } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и называемые *переходными функциями* (или *функциями перехода*). Пусть $\tilde{E}$ — объединение многообразий $U_\alpha \times K^n$. Назовем точки $(x_\alpha, y_\alpha) \in U_\alpha \times K^n$ и $(x_\beta, y_\beta) \in U_\beta \times K^n$ эквивалентными, если $x_\alpha = x_\beta$ и $y_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta) y_\beta$. (Тот факт, что это действительно отношение эквивалентности, равносильно условиям (1) на $g_{\alpha\beta}$.) Обозначим через E фактор-множество по этому отношению эквивалентности и через p — проекцию E на M [фактор-

отображение естественной проекции $\tilde{E}$ на M , переводящее (x_α, y_α) в x_α].

Задача 1. Докажите, что $\mathcal{E} = (E, p)$ является векторным расслоением над M и что всякое расслоение над M эквивалентно расслоению такого типа.

Указание. Рассмотрите покрытие M такими множествами U_α , для которых по условию 2) существует диффеоморфизм $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times K^n$, и положите $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

Примером практической реализации этой конструкции (для $M = S^1$, $K^n = \mathbf{R}^1$) является изготовление «листа Мёбиуса» из двух полосок бумаги (рис. 1).

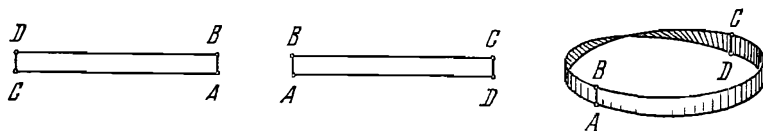


Рис. 1.

Задача 2. Пусть $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow \text{Aut } K^n$ — любые гладкие операторные функции. Докажите, что расслоения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, определяемые функциями перехода $g_{\alpha\beta}$ и $g'_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1} \circ g_{\alpha\beta} \circ f_\beta$, эквивалентны.

Указание. Искомая эквивалентность $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ является фактор-отображением отображения $\tilde{\varphi}: \tilde{E}_1 \rightarrow \tilde{E}_2$ по формуле $\tilde{\varphi}(x_\alpha, y_\alpha) = (x_\alpha, f_\alpha(x_\alpha) y_\alpha)$.

Сечением расслоения $\mathcal{E}$ над открытым множеством $U \subset M$ называется такое гладкое отображение $s: U \rightarrow E$, что $p \circ s = 1$. (Иногда сечением называют также образ U при отображении s .)

Совокупность всех сечений $\mathcal{E}$ над U обозначают как $\Gamma(\mathcal{E}, U)$. Если $\mathcal{E}$ — тривиальное расслоение, то $\Gamma(\mathcal{E}, U)$ естественно отождествляется с совокупностью гладких вектор-функций на U со значениями в K^n .

В общем случае, когда расслоение $\mathcal{E}$ задано покрытием $\{U_\alpha\}$ и переходными функциями $g_{\alpha\beta}$, сечение s задается набором гладких вектор-функций

$$s_\alpha: U \cap U_\alpha \rightarrow K^n,$$

называемых *компонентами* s и удовлетворяющих условиям

$$s_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) s_\beta(x), \quad x \in U \cap U_\alpha \cap U_\beta.$$

Отметим, что $\Gamma(\mathcal{E}, U)$ является модулем над кольцом $\mathcal{O}(U)$ гладких (числовых) функций на U : сечение $\tilde{f} \cdot s$ имеет компоненты $(\tilde{f} \cdot s)_\alpha = \tilde{f} \cdot s_\alpha$.

Задача 3. Докажите, что расслоение $\mathcal{E}$ со слоем K^n тривиально тогда и только тогда, когда существует n сечений $s_1, \dots, s_n$ из $\Gamma(\mathcal{E}, M)$, линейно независимых в каждой точке $x \in M$.

У к а з а н и е. Необходимость условия очевидна, достаточность вытекает из отображения $M \times K^n$ в E по формуле

$$(x, (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \mapsto (\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n)(x).$$

Пусть TM — совокупность всех касательных векторов к многообразию M (т. е. $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$; см. п. 5.2).

Поставив вектору $\xi \in T_x M$ в соответствие точку $x \in M$, получим проекцию $p: TM \rightarrow M$.

Задача 4. Докажите, что $\tau(M) = (TM, p)$ — векторное расслоение над M со слоем $\mathbb{R}^n$, $n = \dim M$, и что $\Gamma(\tau(M), M)$ естественно отождествляется с пространством гладких векторных полей на M .

У к а з а н и е. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — атлас на M . Рассмотрите расслоение, определяемое покрытием $\{U_\alpha\}$ и функциями перехода $g_{\alpha\beta} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_*$.

Расслоение $\tau(M)$ называется *касательным расслоением* многообразия M . Аналогично определяется *кокасательное расслоение* $\tau^*(M)$ и *тензорные расслоения* $\tau^{k,l}(M)$, сечениями которых являются поля смешанных тензоров ранга (k, l) на M .

Для векторных расслоений над M определены операции *прямой суммы* и *тензорного произведения*, сводящиеся к прямому сложению и тензорному умножению переходных функций. Например, расслоение $\tau^{k,l}(M)$ эквивалентно тензорному произведению k экземпляров $\tau(M)$ и l экземпляров $\tau^*(M)$.

Эти операции переносятся на классы эквивалентности расслоений.

Пусть $\mathcal{H}(M)$ — совокупность классов эквивалентности комплексных векторных расслоений над M . Рассмотрим категорию таких отображений множества $\mathcal{H}(M)$ в коммутативные кольца, которые переводят прямую сумму и тензорное произведение классов расслоений в сумму и произведение элементов кольца. В этой категории существует универсальный отталкивающий объект $K(M)$. Соответствие $M \mapsto K(M)$ оказывается контравариантным функтором из категории многообразий в категорию коммутативных колец. Это — так называемый K -функтор (или KO -функтор, если рассматриваются вещественные расслоения, играющий большую роль в топологических приложениях).

Пусть M — комплексное многообразие. Среди комплексных векторных расслоений над M можно выделить класс *голоморфных расслоений*, у которых пространство расслоения — комплексное многообразие, а диффеоморфизмы $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ — голоморфные отображения. Ясно, что расслоение $\mathcal{E}$ голоморфно тогда и только тогда, когда его можно построить с помощью голоморфных функций перехода.

Для голоморфных расслоений естественно рассматривать *голоморфные сечения* над открытыми множествами $U \subset M$ (т. е. голоморфные отображения $s: U \rightarrow E$, обладающие свойством $p \circ s = 1$). Такие сечения задаются набором голоморфных отображений $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условиям (3). Если

$\mathcal{E}$ — голоморфное расслоение, то символом $\Gamma(\mathcal{E}, U)$ мы будем обозначать совокупность голоморфных сечений $\mathcal{E}$ над U . Соответствие $U \mapsto \Gamma(\mathcal{E}, U)$, как и в вещественном случае, определяет пучок модулей над структурным пучком $\mathcal{Q}$ многообразия M .

Приведем в качестве примера описание всех одномерных голоморфных расслоений над сферой Римана $\mathbf{CP}^1$.

Задача 5. Всякое одномерное голоморфное расслоение $\mathcal{E}$ над $\mathbf{C}$ тривиально.

Указание. Тривиальность $\mathcal{E}$ равносильна существованию сечения $s \in \Gamma(\mathcal{E}, \mathbf{C})$, всюду отличного от нуля. Доказательство последнего (далеко не тривиального) утверждения можно найти в [13].

Сфера Римана $\mathbf{CP}^1$ покрывается двумя окрестностями U_1, U_2 , изоморфными $\mathbf{C}$, канонические параметры которых связаны соотношением $z_1 \cdot z_2 = 1$. В силу задачи 5 всякое расслоение $\mathcal{E}$ над $\mathbf{CP}^1$ задается функцией перехода $g(z)$, голоморфной и отличной от нуля в $U_1 \cap U_2 = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Задача 6. Всякая голоморфная и всюду отличная от нуля в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ функция $g(z)$ имеет вид

$$g_1(z) \cdot z^k \cdot g_2(z^{-1}),$$

где g_1 и g_2 — голоморфные и всюду отличные от нуля функции на $\mathbf{C}$.

В силу задач 5 и 6 каждое голоморфное расслоение $\mathcal{E}$ над $\mathbf{CP}^1$ эквивалентно одному из расслоений $\mathcal{E}_k$, заданных переходной функцией $g(z) = z^k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Задача 7. Докажите, что $\tau(\mathbf{CP}^1) \approx \mathcal{E}_2$, $\tau^*(\mathbf{CP}^1) \approx \mathcal{E}_{-2}$.

Указание. Векторные поля на $\mathbf{C}$ имеют вид $a(z) \frac{d}{dz}$, а ковекторные поля — $b(z) dz$, где a и b — целые функции.

Очевидно, что тензорное произведение расслоений $\mathcal{E}_k$ и $\mathcal{E}_l$ эквивалентно расслоению $\mathcal{E}_{k+l}$. Поэтому классы эквивалентности одномерных голоморфных расслоений над $\mathbf{CP}^1$ относительно тензорного произведения образуют циклическую группу.

Тот факт, что эта группа изоморфна $\mathbf{Z}$ (т. е. все $\mathcal{E}_k$ попарно не эквивалентны), вытекает из следующего утверждения.

Задача 8. Докажите, что

$$\dim_{\mathbf{C}} \Gamma(\mathcal{E}_k, \mathbf{CP}^1) = \begin{cases} k+1 & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

Пусть теперь M — смешанное многообразие. Среди комплексных векторных расслоений над M можно выделить класс *частично голоморфных расслоений* и их *частично голоморфных сечений* так, что соответствие $U \mapsto \Gamma(\mathcal{E}, U)$ было бы пучком модулей над структурным пучком смешанного многообразия M .

В терминах переходных функций и компонент сечения это означает, что

$$g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Aut } \mathbb{C}^n, \quad s_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n.$$

В подходящих координатах $x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_l$ функции $g_{\alpha\beta}$ и s_α будут гладкими функциями от вещественных переменных x_i и голоморфными функциями от комплексных переменных z_j .

Данное определение сводится к обычному определению расслоения в случае $l=0$ и к определению голоморфного расслоения в случае $k=0$.

Пусть F — пучок абелевых групп на многообразии M и $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — покрытие M открытыми множествами. Определим n -мерную коцепь покрытия $\mathcal{U}$ с коэффициентами в F как отображение c , переводящее набор индексов $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в элемент $c(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in F(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n})$ и кососимметричное (т. е. меняющее знак при перестановке любых двух аргументов). Совокупность n -мерных коцепей обозначается $C^n(\mathcal{U}, F)$.

Кограничный оператор $d: C^n(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^{n+1}(\mathcal{U}, F)$ определяется формулой

$$dc(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i F(\varphi_i) c(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{n+1}),$$

где φ_i — вложение $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_{n+1}}$ в $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap \hat{U}_{\alpha_i} \cap \dots \cap U_{\alpha_{n+1}}$.

Если F — *постоянный пучок* (т. е. $F(U) \equiv \Pi$ при $U \neq \emptyset$ и $F(\varphi) \equiv 1$ для любого вложения $U \subset V$), то данное определение совпадает с определением коцепей и кограничного оператора в п. 1.3. Данные там определения кограниц, коциклов и когомологий переносятся без изменений на случай общих пучков.

Теорема Лере также справедлива для произвольных пучков и служит одним из основных инструментов для вычисления когомологий.

Другой способ вычисления, основанный на рассмотрении групп $H^k(M, F)$ как функторов из категории пучков на M в категорию групп, мы проиллюстрируем на специальном примере — пучка частично голоморфных сечений расслоения над смешанным многообразием.

Пусть $\mathcal{S}$ — частично голоморфное расслоение над смешанным многообразием типа (k, l) . Напомним, что локально многообразие M устроено как прямое произведение окрестности нуля в $\mathbb{R}^k$ на окрестность нуля в $\mathbb{C}^l$. Обозначим $h(M)$ комплексное l -мерное расслоение над M , слоем которого является касательное пространство к «комплексной части» многообразия M , и положим

$$\lambda^r(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \otimes \wedge^r \bar{h}^*(M),$$

где черта означает комплексное сопряжение, $*$ — переход к дуальному пространству, а $\wedge^r$ — r -ю внешнюю степень. Сечения расслоения $\lambda^r(\mathcal{E})$ называются *дифференциальными формами типа $(0, r)$ на M со значениями в расслоении $\mathcal{E}$* . В локальных координатах они имеют вид

$$s = \sum_{i_1, \dots, i_r} s_{i_1 \dots i_r} d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_r},$$

где $s_{i_1 \dots i_r}$ — гладкие функции от переменных $x_1, \dots, x_k, u_1, v_1, \dots, u_l, v_l$ ($z_j = u_j + iv_j$).

Можно определить кограничный оператор

$$\bar{\partial}_r: \Gamma(\lambda^r(\mathcal{E}), M) \rightarrow \Gamma(\lambda^{r+1}(\mathcal{E}), M),$$

действующий в локальных координатах по формуле:

$$\bar{\partial}_r s = \sum_{i_1, \dots, i_r} \bar{\partial} s_{i_1 \dots i_r} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_r},$$

где $\bar{\partial} s = \sum_{j=1}^l \frac{\partial s}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$, а $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} + i \frac{\partial}{\partial v_j}$.

Обобщенная теорема Дольбо. *Имеет место изоморфизм*

$$H^r(M, \Gamma_{\mathcal{E}}) = \ker \bar{\partial}_r / \text{im } \bar{\partial}_{r-1},$$

где $\Gamma_{\mathcal{E}}$ — пучок частично голоморфных сечений расслоения $\mathcal{E}$.

Задача 9. Докажите, что пространство $H^0(M, \Gamma)$ совпадает с пространством частично голоморфных сечений расслоения $\mathcal{E}$.

Указание. Условие $\bar{\partial} f / \bar{\partial} \bar{z} = 0$ равносильно условиям Коши — Римана, обеспечивающим голоморфность f по z .

Задача 10. Вычислить $H^r(\mathbb{CP}^1, \Gamma_{\mathcal{E}_k})$ (см. задачи 6—8).

Указание. Так как $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{CP}^1 = 1$ и $H^0(\mathbb{CP}^1, \Gamma_{\mathcal{E}_k}) = \Gamma(\mathcal{E}_k, \mathbb{CP}^1)$ (см. задачу 9), то достаточно рассмотреть случай $r = 1$. Полагая $z = \rho e^{i\varphi}$ и разлагая в ряд Фурье по φ , свести задачу к следующей.

Выяснить, для каких гладких функций $b(\rho)$ на $(0, \infty)$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$1) \quad b(\rho) = O(\rho^{l-m-1}) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0,$$

$$2) \quad b(\rho) = O(\rho^{k-2-l-k-2-m-1}) \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty$$

существует решение $a(\rho)$ уравнения

$$a' - \frac{m-1}{\rho} a = b,$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$3) \quad a(\rho) = O(\rho^{l-m-1}) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0,$$

$$4) \quad a(\rho) = O(\rho^{k-1-k-m+1-1}) \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty.$$

Отв ет.

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{CP}^1, \Gamma_{\mathcal{G}_k}) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \geq 0, \\ -(k+1) & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

§ 6. ГРУППЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ ЛИ

6.1. Группы Ли. Множество G называется *группой Ли*, если оно является топологической группой и гладким многообразием, причем отображение $G \times G \xrightarrow{\varphi} G$, заданное формулой $\varphi(x, y) = xy^{-1}$, является гладким.

Мы не уточняем понятие гладкости, входящей в это определение, так как по теореме Глисона — Монтгомери — Циппина (дающей положительное решение пятой проблемы Гильберта) на всякой группе Ли класса C^0 можно ввести структуру многообразия класса C^ω , совместимую с групповой структурой.

Замечание. Гладкость отображения φ в определении равносильна гладкости двух отображений:

$$G \times G \xrightarrow{\psi} G: \psi(x, y) = xy$$

и

$$G \xrightarrow{e} G: e(x) = x^{-1}.$$

Примеры групп Ли.

1. Вещественная прямая $\mathbb{R}$ с операцией сложения.
2. Окружность T с операцией умножения (предполагается, что T — единичная окружность на комплексной плоскости $\mathbb{C}$).
3. Совокупность $GL(n, \mathbb{R})$ всех невырожденных матриц порядка n (рассматриваемая как область в $\mathbb{R}^{n^2}$) с операцией матричного умножения. В частном случае $n=1$ мы получаем $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ с операцией умножения.
4. Если G_1 и G_2 — группы Ли, то их произведение $G_1 \times G_2$ — также группа Ли. В частности, группами Ли являются $\mathbb{R}^n$ и T^n .
5. Группа аффинных преобразований прямой линии, снабженная естественной топологией, является группой Ли.

В самом деле, каждое аффинное преобразование g имеет вид $g(x) = ax + b$, где $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

Координаты (a, b) позволяют отождествить многообразие группы с областью в $\mathbb{R}^2$, которая получается выбрасыванием прямой $a=0$. В этих координатах отображение φ , фигурирующее в определении группы Ли, задается формулами

$$\varphi(a_1, b_1; a_2, b_2) = (a_1 a_2^{-1}; b_1 - b_2 a_1 a_2^{-1}).$$

6. Группа $\mathbb{H}^*$ отличных от нуля кватернионов (см. п. 3.2) с операцией умножения.

7. Многообразия в пространствах матриц, определенные в п. 5.1, являются группами Ли относительно операции матричного умножения.

В самом деле, легко проверить, что уравнения (1), (2), (3) из 5.1 определяют группы, т. е. если матрицы x и y удовлетворяют этим уравнениям, то матрицы x^{-1} и xy также являются решениями. Проверим, что отображение $(x, y) \mapsto z = xy^{-1}$ является гладким.

По теореме из анализа, приведенной в п. 5.1, в качестве локальных координат в окрестностях точек x , y и $z = xy^{-1}$ можно выбрать некоторый набор матричных элементов (свой в каждой из окрестностей). Остальные матричные элементы будут тогда гладкими функциями от выбранных. Координаты точки z , очевидно, гладко выражаются через матричные элементы матриц x и y^{-1} , которые в свою очередь гладко выражаются через координаты точек x и y . (Мы используем тот факт, что в области невырожденных матриц матричные элементы y^{-1} гладко зависят от матричных элементов y .)

Задача 1. Докажите, что на трехмерной сфере S^3 можно ввести структуру группы Ли.

Указание. Используйте реализацию S^3 в виде совокупности кватернионов единичной нормы.

Задача 2. Докажите, что на двумерной сфере S^2 нельзя определить структуру группы Ли.

Указание. Воспользуйтесь следующей леммой из топологии: *всякое непрерывное отображение двумерной сферы в себя, гомотопное тождественному, имеет неподвижную точку.*

Среди всех построенных нами примеров есть две одномерные группы Ли: $\mathbf{R}$ и $\mathbf{T}$.

Оказывается, что других одномерных групп Ли не бывает.

Задача 3. Всякая одномерная группа Ли G изоморфна $\mathbf{R}$ или $\mathbf{T}$.

Указание. Пусть сначала группа G диффеоморфна $\mathbf{R}$ и $x \in G$ — единственный элемент. Докажите, что для каждого рационального числа $r = m/n$ существует единственный элемент $y \in G$, обладающий свойством $y^n = x^m$. (Воспользуйтесь тем, что произведение двух элементов G монотонно зависит от каждого сомножителя.) Обозначим этот элемент x^r . Докажите, что отображение $\mathbf{Q} \rightarrow G: r \mapsto x^r$ продолжается до искомого изоморфизма $\mathbf{R} \rightarrow G$.

В случае, когда G диффеоморфна $\mathbf{T}$, докажите, что для каждого целого $m > 0$ существует вложение $\mathbf{C}_m \rightarrow G$ и что эти вложения можно выбрать так, что возникающее отображение $\bigcup_m \mathbf{C}_m = \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \rightarrow G$ продолжается до искомого изоморфизма $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow G$.

Этот результат имеет очень широкие применения, так как в каждой группе Ли содержатся одномерные подгруппы. Утверждение задачи 3 позволяет выбирать на этих подгруппах *канонический параметр*, наиболее естественно связанный с законом умножения в группе.

Задача 4. Укажите общий вид гомоморфизма G_1 в G_2 , где каждая из групп G_i совпадает с $\mathbf{R}$ или $\mathbf{T}$.

Ответ: а) $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}: x \mapsto ax, \quad a \in \mathbf{R};$

б) $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}: x \mapsto e^{i\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbf{R};$

в) $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}: z \mapsto 0;$

г) $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}: z \mapsto z^n, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Пусть G — группа Ли. Назовем связной компонентой единицы в G совокупность G^0 тех элементов $g \in G$, которые можно соединить с единицей непрерывной кривой.

Задача 5. Докажите, что G^0 — связная, открытая и замкнутая подгруппа в G и что G^0 однозначно определяется этими свойствами.

Если G — связная, но не односвязная группа Ли, то можно построить так называемую односвязную накрывающую $\tilde{G}$ группы G . По определению, $\tilde{G}$ состоит из классов эквивалентности непрерывных отображений φ отрезка $[0, 1]$ в G , удовлетворяющих условию $\varphi(0) = e$.

Отображения φ_1 и φ_2 считаются эквивалентными, если существует такое семейство отображений $\varphi_t: [0, 1] \rightarrow G$, что $\varphi_t(0) \equiv e$, $\varphi_t(1) \equiv \varphi_0(1)$, и отображение

$$[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G: (t, x) \mapsto \varphi_t(x)$$

непрерывно.

Класс отображения φ обозначим $[\varphi]$. В множестве отображений φ введем топологию равномерной сходимости, а в $\tilde{G}$ — соответствующую фактор-топологию.

Определим проекцию $p: \tilde{G} \rightarrow G$, полагая $p([\varphi]) = \varphi(1)$.

Задача 6. Докажите, что отображение p локально является гомеоморфизмом.

Определим закон умножения в $\tilde{G}$, полагая $[\varphi_1] \cdot [\varphi_2] = [\varphi]$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(2x), & \text{если } x \leq 1/2, \\ \varphi_1(1)\varphi_2(2x-1), & \text{если } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Задача 7. Проверьте, что этот закон задает на $\tilde{G}$ структуру группы Ли и что проекция p является гомоморфизмом $\tilde{G}$ на G .

У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

Задача 8. Докажите, что группа $\tilde{G}$ связна и односвязна.

Мы увидим ниже, что группа $\tilde{G}$ однозначно определяется свойствами, перечисленными в задачах 6, 7 и 8. (См. теорему о монодромии в п. 6.3.) Предоставим читателю сформулировать определение односвязной накрывающей, как универсального объекта в подходящей категории.

В заключение этого пункта мы приведем без доказательства еще два важных свойства групп Ли.

Теорема 1. *Всякая замкнутая подгруппа группы Ли сама является группой Ли.*

Теорема 2. *Если G — группа Ли, а H — ее замкнутая подгруппа, то G/H — гладкое многообразие, на котором группа G действует гладкими преобразованиями. (В частности, если H — инвариантная подгруппа, то G/H — группа Ли.)*

Доказательство этих теорем и другие сведения о группах Ли можно найти в книгах [39], [51], [55].

Теория Глисона — Монтоммери — Циппина на русском языке изложена в статье: В. М. Глушков, Структура локально-бикompактных групп и пятая проблема Гильберта, УМН XII, 2 (1957), 3—41.

6.2. Алгебры Ли. Понятие алгебры Ли (старое название — *инфинитезимальная группа Ли*) возникло при изучении групп Ли, но позднее стало объектом самостоятельной теории. Мы изложим здесь некоторые сведения из этой теории.

Алгеброй Ли над полем K называется линейное пространство L над K , снабженное дополнительной операцией, которая обозначается $[x, y]$, называется *коммутированием* и удовлетворяет условиям:

- 1) билинейность;
- 2) антисимметричность: $[x, x] = 0$ для всех $x \in L$;
- 3) тождество Якоби:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

для всех $x, y, z \in L$.

Задача 1. Докажите, что из первых двух свойств вытекает равенство $[x, y] = -[y, x]$ для всех $x, y \in L$.

Чтобы определить структуру алгебры Ли на пространстве L , достаточно знать попарные коммутаторы базисных векторов $x_1, \dots, x_n$, т. е. коэффициенты c_{ij}^k в выражениях

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k.$$

Эти коэффициенты называются *структурными константами* алгебры L . Согласно утверждению задачи 1 имеет место равенство $c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0$, так что достаточно знать $\frac{n^2(n-1)}{2}$ структурных констант c_{ij}^k , у которых $i < j$.

Задача 2. Докажите, что если элементы x, y, z линейно зависимы, то тождество Якоби следует из первых двух условий.

Значит, чтобы набор чисел $\{c_{ij}^k\}_{i < j}$ был совокупностью структурных констант некоторой алгебры Ли, достаточно проверить $n(n-1)(n-2)/6$ равенств — тождеств Якоби для троек x_i, x_j, x_k при $i < j < k$. Заметим, что тождество Якоби — это векторное равенство, равносильное n обычным равенствам, так что многообразие всех наборов структурных констант задается $n^2(n-1)(n-2)/6$ квадратными уравнениями от $n^2(n-1)/2$ независимых переменных.

Пример. Пространство $\mathbf{R}^3$ с векторным умножением в качестве коммутатора является алгеброй Ли над $\mathbf{R}$. В самом деле, свойства 1) и 2) очевидны, а тождество Якоби достаточно проверить для случая, когда x, y, z образуют ортонормированный базис с положительной ориентацией. В этом случае $[x, y] = z$, $[y, z] = x$, $[z, x] = y$, и тождество Якоби выполняется.

Еще более простой пример — любое линейное пространство с нулевым коммутатором. Такая алгебра Ли называется *коммутативной* или *абелевой*.

Большой запас примеров строится следующим образом.

Задача 3. Пусть A — ассоциативная алгебра над K ; положим для $x, y \in A$

$$[x, y] = xy - yx.$$

Докажите, что пространство A с такой операцией коммутирования является алгеброй Ли.

Задача 4. Дифференцированием алгебры A над K (не обязательно ассоциативной) называется линейное отображение $D: A \rightarrow A$, обладающее свойством

$$D(xy) = D(x)y + xD(y).$$

Докажите, что пространство всех дифференцирований алгебры A является алгеброй Ли над K относительно операции

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1.$$

Следствие. Совокупность $\text{Vect } M$ гладких векторных полей на многообразии M является алгеброй Ли над $\mathbb{R}$ относительно операции коммутирования.

В этом случае роль алгебры A играет $C^\infty(M)$.

Алгебры Ли над полем K образуют категорию, морфизмами которой являются гомоморфизмы алгебр Ли, т. е. линейные отображения $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$, обладающие свойством

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

для всех $x, y \in L_1$.

Гомоморфизм L_1 в L_2 называют также *представлением* L_1 в L_2 . В частности, если L_2 — алгебра Ли линейных операторов в некотором линейном пространстве H (относительно операции $[A, B] = AB - BA$), то говорят, что φ — *линейное представление* L_1 в пространстве H . Слово «линейное» при этом часто опускается.

Имеет место

Теорема Адо. Каждая конечномерная алгебра Ли имеет точное конечномерное линейное представление.

Эта важная теорема позволяет сводить доказательства теорем об алгебрах Ли к случаю матричных алгебр Ли.

Центром алгебры Ли L называется совокупность таких элементов $x \in L$, что $[x, y] = 0$ для всех $y \in L$.

Задача 5. Пусть L — алгебра Ли. Для каждого $x \in L$ обозначим $\text{ad } x$ оператор в L , заданный формулой

$$\text{ad } x(y) = [x, y].$$

Докажите, что $\text{ad } x$ является дифференцированием алгебры Ли, что соответствие $x \mapsto \text{ad } x$ является представлением алгебры Ли L в пространстве L (так называемое *регулярное представление*) и что ядро этого представления совпадает с центром L .

Пример. Пусть $L = \mathbb{R}^3$ — алгебра Ли, рассмотренная выше. В этом случае регулярное представление имеет вид

$$\text{ad}(ax + by + cz) = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, алгебра Ли L изоморфна алгебре Ли всех кососимметрических матриц третьего порядка.

Перечислим алгебры Ли малых размерностей над $\mathbb{R}$.

I. $\dim L = 1$. Существует единственная одномерная алгебра Ли — это прямая $\mathbb{R}$ с нулевым коммутатором.

II. $\dim L = 2$. Пусть x, y — базис в L . Если $[x, y] = 0$, то коммутатор любых двух элементов равен 0. Если же $[x, y] = z \neq 0$, то коммутатор любых двух векторов пропорционален z . В частности, существует такой вектор t , что $[t, z] = z$.

Итак, существуют две неизоморфные алгебры Ли размерности 2.

III. $\dim L = 3$. Рассмотрим пространство $L_1 \subset L$, порожденное всеми коммутаторами.

Если $\dim L_1 = 0$, то все коммутаторы равны 0.

Если $\dim L_1 = 1$, то $[x, y] = B(x, y)z$, где z — фиксированный вектор, а $B(x, y)$ — кососимметрическая билинейная форма в L . Возможны два случая:

1) $B(x, z) = 0$ для всех $x \in L$; тогда в L можно выбрать базис x, y, z с коммутационными соотношениями $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$.

2) Существует такой вектор $x \in L$, что $B(x, z) = 1$; в этом случае существует базис x, y, z с коммутационными соотношениями $[x, y] = [y, z] = 0$, $[x, z] = z$.

Пусть $\dim L_1 = 2$. Заметим, что подпространство L_1 само является алгеброй Ли, так как L_1 содержит все коммутаторы. Но мы уже знаем, что есть ровно две двумерные алгебры Ли с коммутационными соотношениями $[x, y] = 0$ и $[x, y] = y$ соответственно. Пусть z — вектор, дополняющий x и y до базиса в L . Оператор $\text{ad } z$ является дифференцированием алгебры L_1 .

В случае $[x, y] = y$ отсюда следует, что оператор $\text{ad } z$ имеет вид $x \mapsto ay$, $y \mapsto by$, что противоречит условию $\dim L_1 = 2$.

В случае $[x, y] = 0$ нет никаких ограничений: $\text{ad } z$ может быть произвольной матрицей A второго порядка. Отметим, однако, что из условия $\dim L_1 = 2$ следует невырожденность A .

Задача 6. Докажите, что матрицы A и B определяют изоморфные алгебры Ли тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица C и отличное от нуля число c , такие, что

$$cA = CBC^{-1}, \quad (1)$$

Итак, в случае $\dim L_1 = 2$ мы получили целое семейство алгебр Ли, параметризованное невырожденными матрицами второго порядка с точностью до эквивалентности, задаваемой формулой (1).

Наконец, в случае $\dim L_1 = 3$, т. е. $L_1 = L$, приведем без доказательства окончательный ответ (вытекающий из теории полупростых алгебр Ли — см. об этом ниже). Существуют две неизоморфные трехмерные алгебры Ли, для которых $L_1 = L$. Их коммутационные соотношения имеют вид

$$[x, y] = z \quad [y, z] = x, \quad [z, x] = y$$

и

$$[x, y] = 2y, \quad [x, z] = -2z, \quad [y, z] = x.$$

Первая алгебра — это уже знакомая нам алгебра Ли кососимметрических матриц порядка 3. Вторая, как легко проверить, изоморфна алгебре Ли матриц второго порядка, со следом нуль:

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Классификацию алгебр Ли размерности 4 в принципе можно получить такими же кустарными рассуждениями, но необходимые выкладки и окончательный ответ слишком громоздки, чтобы приводить их здесь.

Вместо этого мы введем некоторые общие понятия, облегчающие классификацию алгебр Ли любой размерности.

Подпространство M в алгебре Ли L называется *подалгеброй* (соответственно *идеалом*), если $[M, M] \subset M$ (соответственно $[L, M] \subset M$). (Здесь и в дальнейшем запись $[L, M]$ означает линейную оболочку векторов вида $[x, y]$, $x \in L$, $y \in M$.) Если M — идеал в L , то фактор-пространство L/M естественно снабжается структурой алгебры Ли, которая называется *фактор-алгеброй* алгебры L по идеалу M .

В каждой алгебре Ли L можно определить две последовательности подпространств:

$$L_1 = [L, L], \quad L_2 = [L, L_1], \quad \dots, \quad L_{n+1} = [L, L_n], \quad \dots,$$

$$L^1 = [L, L], \quad L^2 = [L^1, L^1], \quad \dots, \quad L^{n+1} = [L^n, L^n], \quad \dots$$

Очевидно, что имеют место включения:

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \supset & L_2 & \supset & L_3 & \supset & \dots \supset L_n \supset \dots \\ \parallel & & \cup & & \cup & & \cup \\ L^1 & \supset & L^2 & \supset & L^3 & \supset & \dots \supset L^n \supset \dots \end{array}$$

Задача 7. Докажите, что все подпространства L^n и L_n являются идеалами в L , и что фактор-алгебры L_n/L_{n+1} и L^n/L^{n+1} коммутативны.

Если $\dim L < \infty$, то последовательности $\{L_n\}$ и $\{L^n\}$ стабилизируются: начиная с некоторого n $L_n = L_{n+1} = \dots = L_\infty$ и $L^n = L^{n+1} = \dots = L^\infty$.

Алгебра Ли называется *разрешимой* (соответственно *нильпотентной*), если $L^\infty = \{0\}$ (соответственно $L_\infty = \{0\}$).

Наименьшее число n , для которого $L^n = \{0\}$ (соответственно $L_n = \{0\}$), называется *рангом разрешимости* (соответственно *нильпотентности*) алгебры L .

Примером разрешимой (соответственно нильпотентной) алгебры Ли может служить алгебра $T(n, K)$ (соответственно $T_0(n, K)$) матриц n -го порядка с коэффициентами из K , удовлетворяющими условию $a_{ij} = 0$ при $i > j$ (соответственно при $i \geq j$).

Одно из самых важных свойств разрешимых алгебр Ли выражает

Теорема Ли. Пусть ρ — конечномерное представление разрешимой алгебры Ли L в пространстве V над алгебраически замкнутым полем K . Тогда представление ρ эквивалентно тривиальному, т. е. такому, что все матрицы $\rho(x)$, $x \in L$, содержатся в $T(n, K)$.

Доказательство вытекает из следующих задач.

Задача 8. Если $A_1, \dots, A_n$ — попарно коммутирующие операторы в пространстве V над алгебраически замкнутым полем, то существует вектор $\xi \in V$, собственный для всех операторов A_k .

Указание. Для одного оператора A_1 такой вектор существует, так как уравнение $\det(A - \lambda \cdot 1) = 0$ имеет хотя бы один корень λ_1 .

Докажите, что пространство V_1 всех решений уравнения

$$A_1 \xi = \lambda_1 \xi$$

инвариантно относительно $A_2, \dots, A_n$, и примените индукцию.

Задача 9. В предположениях теоремы Ли докажите, что все операторы $\rho(x)$, $x \in L$, имеют общий собственный вектор.

Указание. Используйте метод решения задачи 8 и индукцию по рангу разрешимости L .

Теорема Ли выводится из результата задачи 9 индукцией по размерности V .

Следствие. Если L — разрешимая алгебра Ли, то подалгебра $[L, L]$ нильпотентна.

Название «разрешимая алгебра» происходит от разрешимых групп Ли, которые названы так из-за их связи с дифференциальными уравнениями, разрешимыми в квадратурах (так же, как конечные разрешимые группы связаны с алгебраическими уравнениями, разрешимыми в радикалах). См. по этому поводу книгу И. Капланского [28].

Название «нильпотентная алгебра Ли» оправдывается следующим обстоятельством.

Теорема Энгеля. Алгебра Ли нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого $x \in L$ оператор $\text{ad } x$ нильпотентен (т. е. $(\text{ad } x)^n = 0$ для некоторого n).

Классы нильпотентных и разрешимых алгебр Ли допускают и другое определение. Рассмотрим возрастающие цепочки идеалов, построенные по правилу:

$$M_0 = M^0 = \{0\},$$

M_{n+1} — максимальный из идеалов J , содержащих M_n и таких, что фактор-алгебра J/M_n коммутативна;

M^{n+1} — такой идеал, содержащий M^n , что фактор-алгебра M^{n+1}/M^n является центром в алгебре Ли L/M^n .

Очевидно, что имеют место включения

$$\begin{array}{ccccccc} M^1 & \subset & M^2 & \subset & \dots & \subset & M^n \subsetneq, \\ \cap & & \cap & & & & \cap \\ M_1 & \subset & M_2 & \subset & \dots & \subset & M_n \subsetneq. \end{array}$$

Если $\dim L < \infty$, то, начиная с некоторого n , $M^n = M^{n+1} = \dots = M^\infty$ и $M_n = M_{n+1} = \dots = M_\infty$.

Задача 10. Докажите, что алгебра L разрешима (соответственно нильпотентна) тогда и только тогда, когда $M_\infty = L$ (соответственно $M^\infty = L$).

Алгебра Ли называется *простой* (соответственно *полупростой*), если она не содержит нетривиальных идеалов (соответственно нетривиальных коммутативных идеалов).

Задача 11. Докажите, что в каждой конечномерной алгебре Ли L есть такой разрешимый идеал R , что фактор-алгебра $S = L/R$ полупроста.

Указание. Рассмотрите максимальный разрешимый идеал (т. е. разрешимый идеал, не содержащийся ни в каком большем разрешимом идеале).

На самом деле справедливо более сильное утверждение.

Теорема (Э. Картан — Леви — Мальцев). Все разрешимые идеалы алгебры L содержатся в одном разрешимом идеале R (так называемом радикале алгебры L). Существует такая полупростая подалгебра $S \subset L$, что $L = S \oplus R$ (прямая сумма линейных пространств). Любые две подалгебры S с этим свойством переводятся друг в друга автоморфизмом алгебры L , сохраняющим R .

Таким образом, изучение общих алгебр Ли в значительной степени сводится к изучению разрешимых и полупростых алгебр.

Разрешимые алгебры Ли, хотя и имеют, казалось бы, более простую структуру, до сих пор не поддаются классификации.

Известно, что эта задача содержит в качестве частного случая задачу об одновременном приведении к каноническому виду k матриц, которая не решена даже при $k = 2$.

Полезным средством изучения алгебр Ли является *билинейная форма Киллинга*

$$B(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y). \quad (2)$$

Задача 12. Докажите, что форма Киллинга инвариантна относительно всех автоморфизмов алгебры Ли.

Задача 13. Докажите, что форма Киллинга тождественно равна нулю, если и только если алгебра Ли нильпотентна.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Энгеля.

Задача 14 (критерий Картана). Форма Киллинга невырождена, если и только если алгебра Ли полупроста.

Указание. Если J — идеал в алгебре Ли L , то форма Киллинга алгебры Ли J совпадает с ограничением на J формы Киллинга алгебры L . Отсюда вытекает одно из утверждений задачи, а доказательство второго сводится к случаю простой алгебры. Воспользуйтесь теперь тем, что ядро формы Киллинга — идеал в алгебре Ли.

Для полупростых алгебр Ли получена полная классификация.

Известно, что всякая полупростая алгебра Ли является прямой суммой простых идеалов.

Над полем $\mathbb{C}$ существует четыре бесконечные серии и пять «особых» простых алгебр Ли. Над полем $\mathbb{R}$ имеется 12 бесконечных серий и 23 «особые» простые алгебры.

Замечательно, что все алгебры, входящие в бесконечные серии (они называются *классическими простыми алгебрами*), могут быть реализованы как алгебры матриц с элементами из $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, удовлетворяющих простым алгебраическим условиям.

Пусть 1_n означает единичную матрицу порядка n . Положим $J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$, $I_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$.

Классические комплексные простые алгебры — это:

1) A_n — алгебра всех комплексных матриц $(n+1)$ -го порядка со следом 0; $n=1, 2, \dots$;

2) B_n — алгебра кососимметрических комплексных матриц порядка $2n+1$; $n=2, 3, \dots$ (B_1 изоморфна A_1);

3) C_n — алгебра канонических комплексных матриц порядка $2n$ (т. е. матриц, удовлетворяющих уравнению $X'J_{2n} + J_{2n}X = 0$); $n=3, 4, \dots$ ($C_1 \approx A_1 \approx B_1$, $C_2 \approx B_2$);

4) D_n — алгебра кососимметрических комплексных матриц порядка $2n$; $n=4, 5, \dots$, (D_1 коммутативна, $D_2 \approx A_1 \oplus A_1$, $D_3 \approx A_3$).

Все они являются также простыми алгебрами над полем $\mathbb{R}$. Остальные вещественные классические алгебры остаются простыми при комплексификации (т. е. тензорном умножении на $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$) и называются *абсолютно простыми*. Абсолютно простая вещественная алгебра L называется *вещественной формой* простой комплексной алгебры $L_{\mathbb{C}}$, если $L_{\mathbb{C}} = L \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Вещественными формами алгебры A_n являются:

а) алгебра вещественных матриц порядка $n+1$ со следом 0;

б) алгебра комплексных матриц порядка $n+1$, удовлетво-

ряющих условиям $\operatorname{tr} X = 0$ и $X^* I_{p,q} + I_{p,q} X = 0$, где $p + q = n + 1$, $p \geq q$.

в) (при нечетном n) алгебра кватернионных матриц порядка $(n + 1)/2$, удовлетворяющих условию $\operatorname{tr}(X + X^*) = 0$.

Вещественные формы алгебры B_n — это алгебры вещественных матриц порядка $2n + 1$, удовлетворяющих условию $X' I_{p,q} + I_{p,q} X = 0$, где $p + q = 2n + 1$, $p > q$.

Вещественные формы алгебры C_n :

а) алгебра вещественных канонических матриц порядка $2n$;

б) алгебра кватернионных матриц порядка n , удовлетворяющих условию $X' I_{p,q} + I_{p,q} X = 0$, где $p + q = n$, $p \geq q$.

Вещественные формы алгебры D_n :

а) алгебры вещественных матриц порядка $2n$, удовлетворяющих условию $X' I_{p,q} + I_{p,q} X = 0$, где $p + q = 2n$, $p \geq q$;

б) (при четном n) алгебра кватернионных матриц порядка n , удовлетворяющих условию $X^* J_{2n} + J_{2n} X = 0$.

Многие факты теории полупростых алгебр Ли были вначале установлены для классических алгебр и лишь позднее был разработан аппарат, пригодный для изучения любых полупростых алгебр Ли.

Структура полупростых алгебр Ли оказалась связанной с очень красивым геометрическим объектом — системой корней в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Мы приведем здесь некоторые определения и основные факты, касающиеся этой связи.

Конечный набор Σ векторов в $\mathbb{R}^n$ называется *системой корней*, если

$$1) \quad \frac{2(x, y)}{(x, x)} \in \mathbb{Z} \quad \text{для любых } x, y \in \Sigma,$$

$$2) \quad y - \frac{2(x, y)}{(x, x)} x \in \Sigma \quad \text{для любых } x, y \in \Sigma.$$

Здесь (x, y) означает стандартное скалярное произведение в

$$\mathbb{R}^n: (x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Геометрически эти условия означают, что

1) углы между векторами из Σ могут быть только $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi$, а отношение квадратов длин двух не параллельных и не перпендикулярных векторов равно 1, 2 или 3, в зависимости от угла между ними;

2) система векторов Σ инвариантна относительно преобразований $\sigma(x)$: $y \mapsto y - \frac{2(x, y)}{(x, x)} x$, которые являются отражениями в гиперплоскостях, ортогональных векторам $x \in \Sigma$.

Конечная группа W , порожденная отражениями $\sigma(x)$, $x \in \Sigma$, называется *группой Вейля* системы Σ . Назовем вектор $x \in \mathbb{R}^n$ *регулярным*, если он не ортогонален ни одному вектору из Σ . Совокупность регулярных векторов распадается на $|W|$ связанных компонент, называемых *камерами Вейля*. Фиксируем некоторую камеру Вейля S . Это — выпуклый конус, ограниченный кусками гиперплоскостей $(x, x_i) = 0$, $x_i \in \Pi$, где Π — некоторая подсистема Σ ,

называемая *системой простых корней*. Каждый корень $x \in \Sigma$ является целочисленной комбинацией простых корней x_i с коэффициентами одного знака, так что $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, где Σ_+ (Σ_-) — совокупность положительных (отрицательных) корней, имеющих положительные (отрицательные) коэффициенты.

Назовем систему Σ *невырожденной*, если Σ порождает все пространство $\mathbb{R}^n$, и *приведенной*, если из $x \in \Sigma$ следует $2x \notin \Sigma$.

Можно показать, что невырожденная приведенная система корней Σ полностью определяется подсистемой простых корней Π и что множество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ является системой простых корней, если и только если Π обладает свойствами:

1) $\frac{2(x, y)}{(x, x)}$ — неположительное целое число для любых $x, y \in \Pi$;

2) Π образует базис в $\mathbb{R}^n$.

Удобно задавать системы Π в виде *диаграмм Дынкина* по следующему правилу: вершины диаграммы соответствуют элементам Π ; вершины a_i и a_j соединяются простой (соответственно двойной, тройной) чертой, если соответствующие векторы образуют угол 120° (соответственно 135° , 150°); двойные и тройные черты снабжаются стрелкой, указывающей на меньший корень.

Каждой полупростой комплексной алгебре Ли L соответствует некоторая невырожденная приведенная система корней.

Простым алгебрам Ли отвечают при этом неразложимые системы корней (т. е. непрямые в виде объединения двух ортогональных подмножеств).

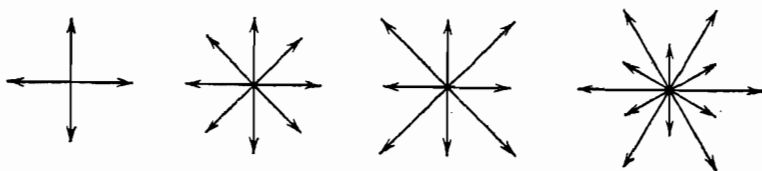


Рис. 2.

Задача 15. Все двумерные невырожденные приведенные системы корней исчерпываются приведенными на рис. 2.

Указание. Воспользуйтесь тем, что двумерные схемы Дынкина исчерпываются приведенными на рис. 3.



Рис. 3.

Эти системы соответствуют классическим алгебрам $A_1 \oplus A_1$, A_2 , B_2 и особой алгебре G_2 .

Соответствие, о котором идет речь, строится следующим образом.

Пусть L — алгебра Ли и $x \in L$. Рассмотрим многочлен от λ :

$$\det(\operatorname{ad} x - \lambda \cdot 1) = \sum_{l=0}^{\dim L} p_l(x) \lambda^l.$$

Коэффициенты $p_l(x)$ этого многочлена являются, очевидно, полиномиальными функциями на L .

Рангом алгебры L (обозначается $\text{rg } L$) называется наименьшее из чисел l , для которых коэффициент $p_l(x)$ не равен тождественно нулю. Те элементы $x \in L$, для которых $p_{\text{rg } L}(x) \neq 0$, называются *регулярными*.

Задача 16. Докажите, что ранг алгебр A_n, B_n, C_n, D_n равен n .

Указание. Воспользуйтесь тем, что регулярные элементы образуют плотное открытое подмножество в L , инвариантное относительно всех автоморфизмов L .

Картановской подалгеброй алгебры L называется максимальная разрешимая подалгебра, содержащая регулярный элемент. Размерность картановской подалгебры равна рангу L .

В полупростых алгебрах Ли картановские подалгебры коммутативны и совпадают с централизаторами своих регулярных элементов.

Если H — картановская подалгебра в комплексной полупростой алгебре Ли L , то все операторы $\text{ad } x, x \in H$, можно одновременно привести к диагональному виду. Таким образом, в подходящем базисе x_α выполняются соотношения

$$[x, x_\alpha] = \lambda_\alpha(x) x_\alpha, \quad x \in H.$$

Собственные значения $\lambda_\alpha(x)$ являются, очевидно, линейными функционалами на H . Так как форма Киллинга на L невырождена, можно найти такие элементы $\mu_\alpha \in L$, что

$$\lambda_\alpha(x) = B(\mu_\alpha, x).$$

Пусть R — вещественное подпространство в L , порожденное всеми μ_α .

Можно показать, что R является l -мерным подпространством в H , и ограничение формы B на R положительно определено. Пусть Σ — совокупность ненулевых векторов μ_α (число их равно $\dim L - \text{rg } L$). Тогда Σ является невырожденной приведенной системой корней в R .

Структура алгебры Ли L полностью определяется следующими соотношениями:

$$[x_\alpha, x_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha + \beta \in \Sigma, \\ B(x_\alpha, x_{-\alpha}) \mu_\alpha, & \text{если } \alpha + \beta = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(Константы $N_{\alpha\beta}$ при подходящей нормировке x_α могут быть сделаны целыми и восстанавливаются по системе корней.)

Подробное изложение теории алгебр Ли и, в частности, классификация полупростых алгебр Ли имеется в книгах [23], [45].

6.3. Связь между группами Ли и алгебрами Ли. Существует много способов строить алгебру Ли по группе Ли. Мы приведем здесь четыре способа.

Первый способ основан на исследовании функции $\psi(x, y)$, задающей закон умножения в группе Ли G в окрестности единицы группы. Выберем любую карту, для которой единица группы служит началом координат. Тогда функция ψ обладает свойствами $\psi(x, 0) = \psi(0, x) = x$. Следовательно, разложение этой функции в ряд Тейлора имеет вид

$$\psi(x, y) = x + y + B(x, y) + \dots, \quad (1)$$

где $B(x, y)$ — билинейная вектор-форма от векторов x и y , а многоточие означает члены порядка ≥ 3 .

Определим теперь коммутатор в $\mathbf{R}^n$, $n = \dim G$, формулой

$$[x, y] = B(x, y) - B(y, x). \quad (2)$$

Покажем, что выполняется тождество Якоби. Воспользуемся равенством $\psi(\psi(x, y), z) = \psi(x, \psi(y, z))$ (ассоциативность группового умножения). Разлагая обе части этого равенства в ряд Тейлора и сравнивая члены, линейные по каждому из векторов x, y, z , получаем

$$B(B(x, y), z) = B(x, B(y, z)). \quad (3)$$

С другой стороны, подставляя в первый член тождества Якоби выражение (2) для коммутатора, получаем

$$[[x, y], z] =$$

$$= B(B(x, y), z) - B(z, B(x, y)) + B(z, B(y, x)) - B(B(y, x), z),$$

что в силу (3) равно

$$B(x, B(y, z)) - B(z, B(x, y)) + B(z, B(y, x)) - B(y, B(x, z)).$$

Если в этом выражении циклически переставить x, y, z и сложить все полученные величины, то, очевидно, произойдет взаимное уничтожение всех членов, что и требовалось.

Задача 1. Покажите, что выбор другой карты приводит к изоморфной алгебре Ли, причем матрица оператора, устанавливающего изоморфизм, имеет вид $a_j^i = \partial x^i / \partial y^j$, где $\{x^i\}, \{y^j\}$ — координаты в выбранных картах.

Второй способ вносит структуру алгебры Ли в касательное пространство $T_e G$ к группе G в точке e . Это пространство в дальнейшем мы будем обозначать $\mathfrak{g}$. Пусть $x(t), y(t)$ — две гладкие кривые, выходящие из точки e . Рассмотрим кривую

$$z(t) = x(\tau) * y(\tau) * x(\tau)^{-1} * y(\tau)^{-1},$$

где $\tau = \operatorname{sgn} t \cdot \sqrt{|t|}$.

Задача 2. Докажите, что кривая $z(t)$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}, G)$ и тем самым имеет касательный вектор $z'(t)$. Положим

$$[x'(0), y'(0)] = z'(0), \quad (4)$$

где $x'(0), y'(0)$ — касательные векторы к кривым $x(t)$ и $y(t)$ соответственно. Относительно операции (4) пространство $\mathfrak{g}$ становится алгеброй Ли.

Указание. Воспользуйтесь разложением (1) и вытекающей из него формулой

$$x^{-1} = -x + B(x, x) + \dots, \quad (5)$$

где многоточие означает члены порядка ≥ 3 . Покажите, что если $x(t) = ta + o(t)$, $y(t) = tb + o(t)$, то $z(t) = tB(a, b) - tB(b, a) + o(t)$ (отсюда видно, что полученная по этому способу алгебра Ли изоморфна построенной выше).

Третий способ также вводит структуру алгебры Ли в пространство $\mathfrak{g}$. Он основан на так называемом *присоединенном представлении* группы G в пространстве $\mathfrak{g}$.

Обозначим $A(g)$ диффеоморфизм G , заданный формулой

$$A(g): h \mapsto ghg^{-1}, \quad h, g \in G. \quad (6)$$

Очевидно, что $A(g)$ — автоморфизм группы G (напомним, что автоморфизмы такого вида называют внутренними). Точка e является неподвижной для всех автоморфизмов $A(g)$.

Рассмотрим производное отображение $A(g)_*(e): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, которое обычно обозначается $\text{Ad } g$. В силу цепного правила (см. п. 5.2) отображение $g \mapsto \text{Ad } g$ является гомоморфизмом G в группу $\text{Aut } \mathfrak{g}$ линейных обратимых преобразований пространства $\mathfrak{g}$. Этот гомоморфизм и называется *присоединенным представлением*. Так как присоединенное представление является гладким отображением G в $\text{Aut } \mathfrak{g}$, мы можем рассмотреть производное отображение $\text{Ad}_*(e): \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}$. (Очевидно, что $\text{End } \mathfrak{g}$ является касательным пространством к $\text{Aut } \mathfrak{g}$, так как $\text{Aut } \mathfrak{g}$ — открытое множество в линейном пространстве $\text{End } \mathfrak{g}$.)

Отображение $\text{Ad}_*(e)$ обозначается ad и сопоставляет каждому элементу $X \in \mathfrak{g}$ линейное преобразование $\text{ad } X$ пространства $\mathfrak{g}$. Положим

$$[X, Y] = \text{ad } X \, Y. \quad (7)$$

Задача 3. Докажите, что операция, определенная формулой (7), превращает $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли и что полученная алгебра Ли совпадает с алгеброй, построенной по предыдущему способу.

Указание. Рассмотрите отображение $\alpha: G \times G \rightarrow G$, заданное формулой $\alpha(x, y) = yxy^{-1}$. Производное отображение $\alpha_*(e, e): \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ совпадает с коммутатором, определенным формулой (7). Утверждение задачи вытекает из явного вида разложения в ряд Тейлора (до членов второго порядка) функции α . Этот явный вид легко получить из формулы (1). (Ср. также задачу 11 из п. 5.2.)

Пример 1. Пусть $G = GL(n, \mathbb{R})$ — группа всех невырожденных вещественных матриц порядка n . Пространство $\mathfrak{g}$ в этом случае совпадает с пространством $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ всех вещественных матриц порядка n (матрице $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ соответствует класс эквивалентных кривых вида $x(t) = 1_n + tA + o(t)$). Присоединенное представление имеет вид

$$\text{Ad } x: A \mapsto xAx^{-1}, \quad x \in G, \quad A \in \mathfrak{g}. \quad (8)$$

Чтобы вычислить оператор ad , положим $x(t) = 1_n + tB$.

Тогда

$$x(t)Ax(t)^{-1} = (1_n + tB)A(1_n - tB + o(t)) = A + t(BA - AB) + o(t),$$

откуда $\text{ad } BA = BA - AB$, т. е.

$$[B, A] = BA - AB. \quad (9)$$

Четвертый способ заключается в построении алгебры Ли из дифференциальных операторов на группе. Напомним, что пространство $\text{Vect } G$ гладких векторных полей на группе Ли G является (бесконечномерной) алгеброй Ли (см. задачу 4 из п. 6.2 и следствие). Обозначим через $\mathfrak{g}_L$ подпространство

в $\text{Vect } G$, состоящее из векторных полей, инвариантных относительно левых сдвигов на G .

Задача 5. Докажите, что $\mathfrak{g}_L$ — подалгебра в $\text{Vect } G$, изоморфная алгебрам Ли, построенным выше.

Указание. Докажите, что векторное поле $X \in \text{Vect } G$ левоинвариантно тогда и только тогда, когда для всех $g \in G$ выполняется равенство $L(g)X = XL(g)$, где через $L(g)$ обозначен оператор в $C^\infty(G)$, действующий по формуле $[L(g)f](h) = f(g^{-1}h)$.

Для доказательства второго утверждения задачи проверьте, что отображение, ставящее в соответствие векторному полю его значение в точке e , является изоморфизмом подпространства $\mathfrak{g}_L \subset \text{Vect } G$ на $\mathfrak{g} = T_e G$. Тот факт, что это отображение является изоморфизмом алгебр Ли, можно вынести из следующего утверждения, представляющего самостоятельный интерес.

Задача 5. Докажите, что каждое левоинвариантное векторное поле на G является производным векторным полем (см. п. 5.2) для некоторого семейства правых сдвигов на G .

Итак, мы сопоставили каждой группе Ли G определенную алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Покажем, что каждому гладкому гомоморфизму $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ одной группы Ли в другую соответствует гомоморфизм соответствующих алгебр Ли. В самом деле, в качестве отображения $\mathfrak{g}_1$ в $\mathfrak{g}_2$ мы можем взять производное отображение $\varphi_*(e)$.

Из второго способа построения алгебры Ли по группе Ли непосредственно вытекает, что $\varphi_*(e)$ — гомоморфизм алгебр Ли.

Коротко полученный результат можно выразить так: построен функтор из категории групп Ли в категорию алгебр Ли.

Заметим, что при построении алгебры Ли по группе Ли мы использовали лишь знание закона умножения в сколь угодно малой окрестности единицы. Это подсказывает введение нового понятия.

Локальной группой Ли называется пара (V, ψ) , где V — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат, а ψ — гладкое отображение $V \times V$ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\psi(x, \psi(y, z)) = \psi(\psi(x, y), z)$,
- 2) $\psi(0, x) = \psi(x, 0) = x$,
- 3) существует такое гладкое отображение $e: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $\psi(x, e(x)) = \psi(e(x), x) = 0$. (Все равенства предполагаются выполненными в той области, где определены все выражения, входящие в равенство.)

Из каждой группы Ли G можно изготовить бесконечное множество локальных групп Ли следующим образом. Пусть (U, α) — карта на G , содержащая единицу в качестве начала координат. Возьмем такую окрестность единицы $V \subset U$, чтобы выполнялись включения $V \cdot V \subset U$ и $V^{-1} \subset U$. (Здесь, как обычно, $V \cdot V$ означает множество всех произведений xy , $x \in V$, $y \in V$, а V^{-1} — множество элементов вида x^{-1} , $x \in V$.) Существование

такой окрестности вытекает из непрерывности отображений $(x, y) \mapsto xy$ и $x \mapsto x^{-1}$.

Отождествляя V с областью $\alpha(V) \subset \mathbb{R}^n$ с помощью отображения α и полагая $\psi(x, y) = xy$, $e(x) = x^{-1}$, мы получим, очевидно, локальную группу Ли.

Две локальные группы Ли (V_1, ψ_1) и (V_2, ψ_2) называются *изоморфными*, если существуют такие окрестности нуля $V'_1 \subset V_1$ и $V'_2 \subset V_2$ и такой диффеоморфизм $\alpha: V'_1 \rightarrow V'_2$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V'_1 \times V'_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathbb{R}^n \supset V'_1 \\ \alpha \times \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ V'_2 \times V'_2 & \xrightarrow{\psi_2} & \mathbb{R}^n \supset V'_2 \end{array}$$

коммутативна (т. е. $\alpha(\psi_1(x, y)) = \psi_2(\alpha(x), \alpha(y))$, там, где обе части равенства определены).

Ясно, что все локальные группы, получаемые описанным выше образом из одной группы Ли G , изоморфны между собой.

Возможно, однако, что локальные группы, построенные по двум группам Ли, G_1 и G_2 , изоморфны, в то время как сами группы не изоморфны. В этом случае группы G_1 и G_2 называют *локально изоморфными*.

Пример 2. Пусть $G_1 = \mathbb{R}$, $G_2 = \mathbb{T}$. В качестве $V_1 \subset G_1$ возьмем интервал $(-\pi, \pi)$, а в качестве $V_2 \subset G_2$ — дополнение к точке $-1 \in \mathbb{T}$. Отображение $\alpha(x) = e^{ix}$ устанавливает диффеоморфизм между V_1 и V_2 , перестановочный с умножением. Таким образом, G_1 и G_2 локально изоморфны.

Теорема 1. *Каждая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой локальной группы Ли. Локальные группы Ли изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие алгебры Ли.*

Доказательство этой теоремы мы приведем в следующем пункте.

Чтобы описать связь между группами Ли и локальными группами Ли, нам понадобится следующий факт.

Теорема о монодромии. *Пусть G — связная односвязная группа Ли, H — любая группа Ли. Тогда всякий локальный гомоморфизм G в H (т. е. гомоморфизм соответствующих локальных групп) однозначно продолжается до глобального гомоморфизма G в H .*

Кроме того, воспользуемся известной теоремой Э. Картана, утверждающей, что *каждая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли*,

Теорема 2. *Каждой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ соответствует единственная связная односвязная группа Ли G , для которой $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли. Все связные группы Ли, обладающие этим свойством, имеют вид G/D , где D — дискретный нормальный делитель, лежащий в центре группы G .*

Доказательство. Пусть G_0 — какая-нибудь группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (существующая по теореме Э. Картана). Будем считать G_0 связной, так как в противном случае мы могли бы рассмотреть вместо G_0 связную компоненту единицы, что не влияет на алгебру Ли (и даже на соответствующую локальную группу).

Обозначим через G односвязную накрывающую группы G_0 (см. п. 6.1).

Проекция $p: G \rightarrow G_0$ является гомоморфизмом групп Ли, а $D = p^{-1}(e)$ — дискретный нормальный делитель в G .

Согласно результату задачи 1 из п. 2.6 D принадлежит центру группы G .

Итак, всякая связная группа Ли G_0 , имеющая $\mathfrak{g}$ своей алгеброй Ли, представима в виде G/D , где G — односвязная группа Ли с той же алгеброй Ли. Если G_1 и G_2 — две односвязные группы Ли с одной и той же алгеброй Ли, то в силу теоремы 1 они локально изоморфны. По теореме о монодромии локальный изоморфизм α продолжается до глобального гомоморфизма $\alpha_1: G_1 \rightarrow G_2$, а обратное отображение α^{-1} — до глобального гомоморфизма $\alpha_2: G_2 \rightarrow G_1$. Отображения $\alpha_1\alpha_2$ и $\alpha_2\alpha_1$ совпадают с тождественным отображением в окрестности единицы. Так как G_1 и G_2 связны, эти отображения тождественны всюду. Значит, G_1 и G_2 изоморфны. Теорема доказана.

Задача 6. Докажите, что группы G/D_1 и G/D_2 , где G — односвязная группа Ли, а D_1 и D_2 — дискретные нормальные делители, изоморфны тогда и только тогда, когда существует автоморфизм группы G , переводящий D_1 в D_2 .

Указание. Воспользоваться теоремой о монодромии.

Воспользуемся полученными результатами, чтобы перечислить все связные группы Ли размерности ≤ 3 . Соответствующие алгебры Ли мы описали в п. 6.2. Укажем соответствующие односвязные группы:

I. $\dim G = 1$, $G = \mathbb{R}$.

II. $\dim G = 2$

а) $G = \mathbb{R}^2$ с операцией сложения;

б) G — группа аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию (в координатах a, b примера 5 из п. 6.1 эта группа задается условием $a > 0$).

III. $\dim G = 3$

а) $\dim [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, $G = \mathbb{R}^3$ с операцией сложения;

- б) $\dim [g, g] = 1$, $[g, [g, g]] = \{0\}$, G — группа Ли треугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R};$$

- в) $\dim [g, g] = \dim [g, [g, g]] = 1$, G — произведение $\mathbb{R}$ и группы из примера II б);

- г) $\dim [g, g] = 2$.

Пусть A — невырожденная матрица, определяющая алгебру g в силу задачи 6 из п. 6.2.

Положим $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$. В качестве G можно взять пространство $\mathbb{R}^3$ с законом умножения

$$(x, y, z)(x', y', z') = \\ = (x + a(z)x' + b(z)y', \quad y + c(z)x' + d(z)y', \quad z + z').$$

- д) $[g, g] = g$, $g = \mathbb{R}^3$, с векторным произведением в качестве коммутатора, G — группа $SU(2)$ унитарных матриц второго порядка с определителем 1 (изоморфна группе кватернионов нормы 1 — см. пример 6 из п. 6.1);

- е) $g = [g, g]$ — алгебра вещественных матриц со следом нуль, G — односвязная накрывающая группы $SL(2, \mathbb{R})$ вещественных матриц второго порядка с определителем 1. (Можно показать, что эту группу нельзя реализовать в виде подгруппы $GL(n, \mathbb{C})$ ни при каком конечном n .)

Нам остается перечислить все дискретные нормальные делители указанных групп с точностью до эквивалентности в смысле задачи 6. При этом полезно помнить о том, что эти нормальные делители принадлежат центру группы.

Задача 7. Докажите, что центры групп, перечисленных выше, имеют такой вид:

I. $Z(G) = G$.

II. а) $Z(G) = G$, б) $Z(G) = \{e\}$.

III. а) $Z(G) = G$, б) $Z(G) = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad \text{в) } Z(G) = \mathbb{R} \times \{e\},$

г) $Z(G) = \begin{cases} \{e\}, & \text{если } A \sim \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \\ \left\{ \left(0, 0, \frac{2\pi n}{a} \right) \right\}, & n \in \mathbb{Z}, \text{ если } A \sim \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*, \end{cases}$

- д) $Z(G) = \{1, -1\}$, е) $Z(G) = p^{-1}(\{1, -1\})$, где $p: G \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ — естественная проекция.

Предоставляем читателю довести до конца классификацию групп Ли размерности ≤ 3 . В частности, на этом пути получается простое доказательство теоремы 1 из п. 6.1 о классификации одномерных групп Ли (правда, в предположении априорной гладкости группы).

Доказательство теорем, приведенных в этом пункте, см. в книгах [39], [55].

6.4. Экспоненциальное отображение. Большую роль в изучении групп Ли играют *однопараметрические подгруппы*, т. е. такие подгруппы, которые являются одномерными группами Ли. Параметр t можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства

$$x(0) = e, \quad x(t)x(s) = x(t+s). \quad (1)$$

Так как $x(t)$ — гладкая кривая, определен касательный вектор

$$X = x'(0) \in \mathfrak{g}. \quad (2)$$

Теорема 1. Для каждого вектора $X \in \mathfrak{g}$ существует единственная гладкая кривая $x(t)$, удовлетворяющая условиям (1) и (2).

Условимся о следующих обозначениях. Если ξ — касательный вектор к группе G в точке g_0 , то $g\xi$ (соответственно ξg) означает касательный вектор к G в точке gg_0 (соответственно в точке g_0g), который получается из ξ отображением $L(g)_*(g_0)$ (соответственно $R(g)_*(g_0)$), где $L(g)$ (соответственно $R(g)$) — левый (соответственно правый) сдвиг на элемент g .

Задача 1. Докажите тождество

$$g\xi g^{-1} = \text{Ad } g \xi, \quad g \in G, \quad \xi \in \mathfrak{g}. \quad (3)$$

Указание. См. третий способ построения алгебры Ли по группе Ли в п. 6.2.

Задача 2. Докажите, что из (1) вытекают тождества:

$$x(t)x'(0) = x'(t), \quad x'(0)x(t) = x'(t). \quad (4)$$

Указание. Переписать условия задачи в виде

$$L(x(t))x(s) = x(t+s) \quad \text{или} \quad R(x(t))x(s) = x(s+t).$$

Пусть теперь X — фиксированный элемент $\mathfrak{G}$. Рассмотрим векторные поля на G , заданные формулами

$$\xi_X(g) = gX, \quad \eta_X(g) = Xg.$$

Задача 3. Докажите, что векторное поле на G левоинвариантно (соответственно правоинвариантно) тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\xi_X(g)$ [соответственно, $\eta_X(g)$] для некоторого $X \in \mathfrak{g}$.

Указание. Записать условие лево(право)инвариантности поля $\xi(g)$ ($\eta(g)$) в виде

$$g\xi(h) = \xi(gh), \quad \eta(h)g = \eta(hg)$$

и доказать тождества

$$g_1(g_2\xi) = (g_1g_2)\xi, \quad (\eta g_1)g_2 = \eta(g_1g_2).$$

Теперь мы в состоянии доказать теорему 1. Из равенств (4) вытекает, что кривая $x(t)$, удовлетворяющая условиям (1) и (2), в каждой своей точке касается векторного поля $\xi_X(g)$ (а также поля $\eta_X(g)$, так как эти поля совпадают на кривой $x(t)$ — ср. задачу 1). Существование локальной одномерной группы с касательным вектором X следует теперь из теоремы о существовании и единственности решения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ср. п. 5.2).

Задача 4. Покажите, что всякая локальная одномерная подгруппа в группе Ли G продолжается до подгруппы Ли.

Указание. Пусть $x(t)$ определена при $|t| < a$ и удовлетворяет условию (1) при $|t| + |s| < a$.

Положим для любого $t \in \mathbf{R}$ $x(t) = x(t/N)^N$, где число N выбирается настолько большим, что $|t/N| < a$. Докажите, что $x(t)$ на самом деле не зависит от выбора N и что (1) выполняется для всех t и s .

Пусть теперь G — группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Определим экспоненциальное отображение $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ следующим образом:

$$\exp X = x(1), \quad (5)$$

где $x(t)$ — однопараметрическая группа, соответствующая вектору X по теореме 1. (Это отображение называют также *каноническим*.)

Одно из самых важных свойств экспоненциального отображения — его функториальность, которая выражается коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\varphi_*(e)} & \mathfrak{g}_2 \end{array}$$

Доказательство этого факта непосредственно следует из определения экспоненциального отображения.

Следствие 1. Конечномерные представления локальной группы Ли однозначно соответствуют представлениям ее алгебр Ли.

Следствие 2. Для связной односвязной группы Ли конечномерные представления взаимно однозначно соответствуют представлениям алгебры Ли.

(Это вытекает из теоремы о монодромии — см. п. 6.3.)

Рассмотрим подробнее случай, когда $G = GL(n, \mathbf{R})$ — группы невырожденных вещественных матриц n -го порядка. Алгебра $\mathfrak{g}$ совпадает в этом случае с пространством $\text{Mat}_n(\mathbf{R})$ (см. пример 1 из п. 6.3).

Задача 5. Докажите, что решением дифференциального уравнения

$$x'(t) = Xx(t)$$

с начальным условием $x(0) = 1$ является функция

$$x(t) = e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}. \quad (6)$$

Указание. Ср. п. 4.2.

Следствие. Для матричных групп экспоненциальное отображение имеет вид

$$\exp X = e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Задача 6. Докажите равенства

$$1) \exp \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda & \frac{e^\lambda}{2!} & \dots & \frac{e^\lambda}{n!} \\ 0 & e^\lambda & e^\lambda & \dots & \frac{e^\lambda}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^\lambda \end{pmatrix},$$

$$2) \exp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = e^{\frac{a+d}{2}} \left[\operatorname{ch} \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\operatorname{sh} \rho}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \right],$$

$$\text{где } \rho = \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc},$$

$$3) \exp \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} = \cos r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ + \frac{\sin r}{r} \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1 - \cos r}{r^2} \begin{pmatrix} b^2 & -bc & ab \\ -bc & c^2 & -ac \\ ab & -ac & a^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема о зависимости решения от начальных данных и коэффициентов системы) вытекает, что $\exp$ — гладкое отображение. Покажем, что отображение $\exp_*(0): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ является тождественным.

В самом деле, однопараметрические подгруппы, отвечающие векторам X и tX , связаны, очевидно, равенством

$$x_{tX}(s) = x_X(ts).$$

Отсюда $\exp tX = x_{tX}(1) = x_X(t)$, т. е. отображение $\exp$ переводит

кривую $\{tX\} \subset \mathfrak{g}$ в кривую $x_X(t) \subset G$. Переходя к производному отображению, мы имеем

$$\exp_*(0) : X \mapsto X,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. В некоторой окрестности U начальной точки $X=0$ отображение $\exp$ является диффеоморфизмом.

Мы будем обозначать символом $\ln$ отображение $\exp^{-1}$, определенное, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности единицы группы. Локальная система координат $(\exp U, \ln)$ называется *канонической*.

Группа Ли G называется *экспоненциальной*, если каноническая система координат покрывает всю группу G . Класс экспоненциальных групп содержит все связные односвязные нильпотентные группы и содержится в классе разрешимых групп.

Задача 7. Докажите, что в канонических координатах закон умножения имеет вид

$$\varphi(x, y) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots, \quad (7)$$

где многоточие означает члены порядка ≥ 3 .

Указание. Воспользуйтесь формулой (5) из п. 6.3 и тем фактом, что $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

Формула (7) показывает, что закон умножения в группе с точностью до второго порядка может быть восстановлен по закону коммутирования в алгебре Ли. Оказывается, что и все следующие члены разложения $\varphi(x, y)$ в ряд Тейлора могут быть выражены через операцию коммутирования. Мы сформулируем здесь лишь окончательный ответ. Доказательство можно прочитать в книгах [23] или [45].

Теорема 2 (формула Кэмпбелла — Хаусдорфа — Дынкина). Закон умножения в канонических координатах имеет вид

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{\substack{k_i + l_i \geq 1 \\ k_i \geq 0, l_i \geq 0}} \frac{[x^{k_1} y^{l_1} \dots x^{k_m} y^{l_m}]}{k_1! l_1! \dots k_m! l_m!}, \quad (8)$$

где символ $[x_1 x_2 \dots x_n]$ означает $\frac{1}{n} [\dots [[x_1, x_2], x_3], \dots, x_n]$.

Замечание 1. Формула (8) получается из формального ряда для функции $\ln(e^x e^y)$ от некоммутирующих переменных x, y , если заменить каждый одночлен D выражением $[D]$.

Замечание 2. Ряд (8) неудобен для вычислений, поскольку он содержит много неприведенных подобных членов,

Не имея практического значения, этот ряд играет важную роль в теории, так как доказывает теорему 1 п. 6.3.

Во многих вопросах теории групп Ли важно знать не саму функцию $\psi(x, y)$, а только ее производную по одному из переменных в начале координат. Для этой производной можно указать следующее явное выражение:

Теорема 3. Положим $L_x(y) = R_y(x) = \psi(x, y)$. Тогда

$$(L_{\exp x})_*(0) = b(-\operatorname{ad} X), \quad (R_{\exp x})_*(0) = b(\operatorname{ad} X), \quad (9)$$

где $b(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$ (здесь B_k — числа Бернулли).

Утверждение теоремы легко выводится из следующей формулы, представляющей и самостоятельный интерес:

Задача 8. Докажите равенство

$$\exp(X + tY) \exp(-X) = \exp(t\alpha(\operatorname{ad} X)Y + o(t)), \quad (10)$$

где

$$\alpha(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}.$$

Указание. В силу теоремы Адо (см. п. 6.2) достаточно рассмотреть случай матричной алгебры.

Следствие 1. Отображение $\exp$ является гомеоморфизмом в окрестности точки X , если и только если собственные значения оператора $\operatorname{ad} X$ отличны от $\pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \pm 6\pi i, \dots$

Следствие 2. Левоинвариантная (соответственно правоинвариантная) мера на группе G имеет в канонических координатах вид

$$\rho_l(X) dX \quad (\text{соответственно } \rho_r(X) dX),$$

где dX — обычная евклидова мера в $\mathfrak{g}$, а функции ρ_l и ρ_r задаются формулами

$$\rho_l(X) = \det[\alpha(-\operatorname{ad} X)], \quad \rho_r(X) = \det[\alpha(\operatorname{ad} X)] \quad (11)$$

(функция α — та же, что и в задаче 8).

Следствие 3. Для существования двусторонне инвариантной меры на группе G необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\operatorname{tr} \operatorname{ad} X = 0 \quad \text{для всех } X \in \mathfrak{g}. \quad (12)$$

В самом деле, $\rho_r(X)/\rho_l(X) = \det(e^{\operatorname{ad} X}) = e^{\operatorname{tr} \operatorname{ad} X}$,

Другой вывод формулы 10 можно получить, рассматривая функцию

$$\varphi(s, t) = \exp(-sc_t) \frac{\partial}{\partial t} \exp sc_t,$$

где c_t — некоторая кривая в $\mathfrak{g}$.

Задача 9. Докажите равенство

$$\frac{\partial}{\partial s} \varphi(s, t) = \exp(-sc_t) \left(\frac{d}{dt} c_t \right) \exp(sc_t). \quad (13)$$

Полагая затем $c_t = X + tY$ и интегрируя соотношение (13) по s от 0 до 1, получаем равенство (10).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

§ 7. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

7.1. Линейные представления. Мы уже говорили выше, что термин «представление» в широком смысле означает гомоморфизм группы G в группу преобразований некоторого множества X^1). Представление T называется *линейным*, если X — линейное пространство, а преобразования $T(g)$ — линейные операторы.

Если X — произвольное G -пространство, то в линейном пространстве $L(X)$ функций на X возникает линейное представление T :

$$[T(g)f](x) = \begin{cases} f(xg) & \text{для правого } G\text{-пространства,} \\ f(g^{-1}x) & \text{для левого } G\text{-пространства.} \end{cases}$$

Это соображение позволяет использовать линейные представления для изучения общих представлений.

Примером такого рода применений может служить спектральная теория динамических систем.

Общей динамической системой называется пространство X , снабженное мерой μ и группой преобразований G , сохраняющих меру μ (или, по крайней мере, ее класс эквивалентности). Важнейшим примером является случай, когда X — фазовое пространство механической системы, μ — мера Лиувилля, а G — динамическая группа, описывающая эволюцию системы. Предметом спектральной теории динамических систем является изучение и описание различных свойств такой системы в терминах унитарного представления T , возникающего в $L^2(X, \mu)$.

Близкий к линейным класс представлений составляют так называемые *проективные* представления T , для которых X — проективное пространство, а $T(g)$ — проективные преобразования. Так как проективное пространство X — это совокупность прямых в линейном пространстве L , а проективные преобразования X индуцируются линейными преобразованиями L , мы можем рассматривать проективное представление как отображение $T: G \rightarrow \text{Aut } L$, обладающее свойством

$$T(g_1 g_2) = c(g_1, g_2) T(g_1) T(g_2),$$

¹⁾ Более общее определение представления (как пучка на некоторой топологии Гротендика) предложил А. Ю. Геронимус; см. [78].

где c — некоторая числовая функция на $G \times G$. В частности, всякое линейное представление G в L порождает проективное представление.

Важной областью применения теории проективных представлений является квантовая механика. Как известно, роль фазового пространства в квантовой механике играет проективное пространство $P(H)$, состоящее из комплексных прямых в комплексном бесконечномерном гильбертовом пространстве. Допустимые преобразования $P(H)$ — это проективные преобразования, соответствующие унитарным и антиунитарным операторам в H .

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать только линейные представления и для краткости будем называть их просто представлениями.

Совокупность представлений группы G в линейных пространствах над полем (телом) K образует категорию $\Pi(G, K)$. Морфизмами этой категории служат *сплетающие операторы*, т. е. операторы, перестановочные с действием группы. Изоморфные объекты в $\Pi(G, K)$ называют *эквивалентными представлениями*.

Совокупность сплетающих операторов для представлений T_1 и T_2 , действующих в пространствах V_1 и V_2 , обозначается $\mathcal{C}(T_1, T_2)$ или $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$. Вместо $\mathcal{C}(T, T) = \text{Hom}_G(V, V)$ будем писать $\mathcal{C}(T)$ или $\text{End}_G V$. Размерность пространства $\mathcal{C}(T_1, T_2)$ обозначается $c(T_1, T_2)$ и называется *числом сплетения*. Если $c(T_1, T_2) = c(T_2, T_1) = 0$, то представления T_1 и T_2 называются *дизъюнктными*.

Пример. Пусть $G = \mathbf{R}$, представление T_∞ действует в пространстве P_∞ всех полиномов от x по формуле

$$[T(t)f](x) = f(x+t),$$

а представление T_k задается той же формулой в пространстве P_k полиномов степени не выше k , $k = 0, 1, 2, \dots$

Задача 1. Докажите, что $c(T_\infty, T_k) = 0$, $c(T_k, T_\infty) = k + 1$.

Указание. $\mathcal{C}(T_k, T_\infty)$ порождается операторами $1, d/dx, \dots, d^k/dx^k$.

Задача 2. Если представления T и S конечномерны, то $c(T, S) = c(S, T)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что для конечномерной матрицы ранг по строкам совпадает с рангом по столбцам.

Пусть T — представление группы G в пространстве V . Соответствие $g \mapsto T(g^{-1})^*$, где $*$ означает переход к сопряженному оператору в двойственном пространстве V^* , является представлением G в V^* . Это представление называется *сопряженным* или *контраградиентным* к представлению T . Будем обозначать его T^* .

Чтобы это обозначение не привело к недоразумению, отметим, что оператор $T^*(g)$ по определению T^* равен $T(g^{-1})^*$, а не $T(g)^*$.

Если в пространстве V представления T есть подпространство V_1 , инвариантное относительно всех операторов $T(g)$,

$g \in G$, то говорят, что представление T *приводимо*. Ограничение $T(g)$ на V_1 определяет представление T_1 группы G в пространстве V_1 . Оно называется *подпредставлением* T . В факторпространстве $V_2 = V/V_1$ также естественно возникает представление G . Оно называется *фактор-представлением* T .

Если инвариантное подпространство $V_1 \subset V$ имеет инвариантное дополнение (которое естественно отождествляется с V_2), то представление T называют *разложимым* и пишут $T = T_1 + T_2$.

Задача 3. Докажите, что представление $T_1 + T_2$ является суммой T_1 и T_2 в категории $\Pi(G, K)$.

Представление T , не имеющее нетривиальных подпредставлений, называется *алгебраически неприводимым*.

Примером приводимого, но не разложимого представления может служить приведенное выше представление T_k группы $\mathbf{R}$ в пространстве P_k при $k > 0$.

Представления, для которых каждое инвариантное подпространство имеет инвариантное дополнение, называются *вполне приводимыми*.

В категории $\Pi(G, K)$ определена операция *тензорного произведения*. Если T_i — представление в линейном пространстве V_i над K , $i = 1, 2$, то представление $T_1 \otimes T_2$ действует в $V_1 \otimes V_2$ по формуле

$$(T_1 \otimes T_2)(g) : \xi_1 \otimes \xi_2 \mapsto T_1(g)\xi_1 \otimes T_2(g)\xi_2.$$

Задача 4. Докажите, что операции суммы и тензорного произведения совместимы с отношением эквивалентности и, следовательно, переносятся на множество классов эквивалентных представлений.

Задача 5. Докажите равенства

$$c(T_1 + T_2, T_3) = c(T_1, T_3) + c(T_2, T_3),$$

$$c(T_1, T_2 + T_3) = c(T_1, T_2) + c(T_1, T_3),$$

$$c(T_1 \otimes T_2, T_3) = c(T_1, T_2^* \otimes T_3), \text{ если } \dim T_2 < \infty.$$

Указание. Пространство $\mathcal{C}(T_1, T_2)$ можно интерпретировать как подпространство G -инвариантных элементов в пространстве $\text{Hom}(V_1, V_2)$, на котором G действует по формуле

$$g : A \mapsto T_2(g) A T_1(g)^{-1}.$$

Для любой подкатегории $\Pi' \subset \Pi(G, K)$, замкнутой относительно операции сложения представлений, можно определить *группу Гротендика* $\Gamma(\Pi')$.

По определению, $\Gamma(\Pi')$ — это абелева группа, порожденная классами эквивалентности $[T]$ представлений T из $\text{Об } \Pi'$ со следующими соотношениями:

$[T] = [T_1] + [T_2]$, если T_1 — подпредставление T , а T_2 — соответствующее фактор-представление.

Если категория Π' замкнута относительно тензорного умножения, $\Gamma(\Pi')$ будет коммутативным кольцом относительно операции

$$[T_1] \cdot [T_2] = [T_1 \otimes T_2].$$

Если Π' замкнута относительно операции k -й внешней степени, $k = 2, 3, \dots$, то на $\Gamma(\Pi')$ можно ввести структуру λ -кольца. Эта структура задается гомоморфизмом λ_t аддитивной группы кольца в мультипликативную группу степенных рядов вида $1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$, где a_k — элементы кольца. В случае кольца Гротендика гомоморфизм λ_t имеет вид

$$\lambda_t([T]) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} [\wedge^k T] t^k.$$

Отображение $G \mapsto \Gamma(\Pi(G, K))$ является контравариантным функтором из категории групп в категорию λ -колец. Подробнее об этом функторе и его приложениях см. в книге Д. Хьюзмоллера [53].

Если K — подполе L , то определены естественные функторы из $\Pi(G, K)$ в $\Pi(G, L)$ и обратно, называемые *заменой скаляров*. Первый функтор состоит в переходе от пространства V над K к пространству $V_L = V \otimes_K L$ над L . Второй означает, что пространство V над L рассматривается как пространство над K ; в этом случае оно обозначается V_K . Наиболее важный пример получается, когда $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$. Соответствующие функторы называют обычно *комплексификацией* и *овеществлением*.

7.2. Представления топологических групп в линейных топологических пространствах. В случае, когда G — топологическая группа, а V — линейное топологическое пространство, будем предполагать, как правило, не оговаривая этого, что рассматриваемое представление T непрерывно, т. е. отображение $(g, \xi) \mapsto T(g)\xi$ непрерывно по совокупности переменных.

Для многих целей достаточно более слабого условия раздельной непрерывности этого отображения (что означает непрерывность гомоморфизма T группы G в группу $\text{Aut } V$, снабженную сильной операторной топологией).

Задача 1. Если G локально-компактна, а V — банахово пространство, то раздельная непрерывность представления T равносильна его непрерывности.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Банаха — Штейнгауза из п. 4.1.

Термин «сплетающий оператор» для непрерывных представлений топологических групп будет всегда означать «непрерывный сплетающий оператор», а «число сплетения» — размерность пространства таких операторов.

Непрерывные представления топологической группы G в топологических пространствах над полем K образуют категорию $ТП(G, K)$.

Если в пространстве V представления T есть замкнутое подпространство V_1 , инвариантное относительно операторов $T(g)$, $g \in G$, то ограничение T_1 представления T на V_1 называют (*топологическим*) *подпредставлением* T , а представление T_2 , возникающее в фактор-пространстве $V_2 = V/V_1$ — (*топологическим*) *фактор-представлением* T .

Представление T называется *топологически неприводимым*, если оно не имеет нетривиальных подпредставлений, и *вполне неприводимым*, если любой оператор является слабым пределом некоторой направленности, состоящей из линейных комбинаций операторов $T(g)$, $g \in G$.

Говорят, что представление T (*топологически*) *разложимо*, если в пространстве V есть такие замкнутые инвариантные подпространства V_1, V_2 , что V изоморфно прямой сумме $V_1 \oplus V_2$. В этом случае пишут $T = T_1 + T_2$, где T_i — ограничение T на V_i .

Задача 2. Представление $T_1 + T_2$ является суммой T_1 и T_2 в категории $ТП(G, K)$.

Операция тензорного произведения может быть разумно определена только в некоторых подкатегориях $ТП(G, K)$. Так, для представлений в банаховых пространствах естественно воспользоваться операцией $\hat{\otimes}$, а для унитарных представлений в гильбертовых пространствах — операцией гильбертова произведения (см. п. 4.1).

И. М. Гельфанд предложил следующее понятие *тензорной неприводимости* представления.

Представление T группы G в пространстве V тензорно неприводимо, если для любого тривиального представления S группы G в ядерном пространстве W всякое замкнутое G -инвариантное подпространство в $V \hat{\otimes} W$ имеет вид $V \hat{\otimes} W_1$, где W_1 — подпространство в W .

О категориях $ТП(G, K)$ для некомпактных групп G известно очень мало. Например, для $G = \mathbb{Z}$ и $K = \mathbb{C}$ классификация представлений равносильна классификации линейных непрерывных операторов в линейных топологических пространствах с точностью до подобия. Эта классическая проблема функционального анализа еще очень далека от решения. Неизвестна даже классификация топологически неприводимых представлений. Вопрос о существовании бесконечномерных неприводимых представлений был поставлен С. Банахом около сорока лет назад и лишь недавно решен (положительно) П. Энфло.

В конечномерном случае задача о классификации представлений группы Z решается теоремой о приведении матрицы к жордановой нормальной форме. Для группы $Z + Z$ эта задача приводит к проблеме одновременного приведения к каноническому виду пары коммутирующих матриц.

Как показали И. М. Гельфанд и В. А. Пономарев, эта задача содержит в качестве подзадачи классификацию любых конечных наборов матриц (см.: Функц. анализ 3, 4 (1969), 81—82).

7.3. Унитарные представления. Представление T в пространстве V называется *унитарным*, если V — гильбертово пространство, а $T(g)$ — унитарные операторы для всех $g \in G$. Унитарные представления составляют наиболее важный и наиболее изученный класс представлений. Причина этого двоякая. Во-первых, унитарные представления естественно возникают в различных приложениях (динамические системы, квантовая механика, теория поля). Во-вторых, унитарные представления обладают рядом замечательных свойств, сильно облегчающих их изучение. Некоторые из этих свойств приведем здесь. Другие будут описаны в следующих параграфах.

Задача 1. Всякое унитарное представление вполне приводимо.

Указание. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству инвариантно.

Мы увидим ниже, что изучение унитарных представлений в значительной мере сводится к изучению топологически неприводимых представлений.

Множество классов эквивалентности унитарных неприводимых представлений группы G обозначают $\hat{G}$ и называют *дуальным (двойственным) объектом* к группе G . Если группа G коммутативна, то все ее неприводимые унитарные представления одномерны. В этом случае операция тензорного произведения определяет в $\hat{G}$ структуру коммутативной группы. Единичным элементом служит единичное представление, обратным элементом — комплексно сопряженное представление.

В множестве $\hat{G}$ можно ввести *топологию* следующим образом. Пусть T — неприводимое представление группы G в пространстве H . Каждому компактному множеству $K \subset G$, конечному набору векторов $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$ и числу $\varepsilon > 0$ поставим в соответствие подмножество $U(K, \xi_1, \dots, \xi_n, \varepsilon)$ в $\hat{G}$. По определению, оно состоит из классов $[S]$ тех неприводимых представлений S , в пространстве которых существуют такие векторы $\eta_1, \dots, \eta_n$, что

$$|(T(g)\xi_i, \xi_j) - (S(g)\eta_i, \eta_j)| < \varepsilon \quad \text{для } g \in K, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Совокупность подмножеств $U(K, \xi_1, \dots, \xi_n, \varepsilon)$ принимается за базис окрестностей точки $[T] \in \hat{G}$.

Существует еще один способ определения топологии в $\hat{G}$. Пусть $\tilde{G}$ — совокупность классов эквивалентности любых (не обязательно неприводимых) унитарных представлений группы G . Каждому подмножеству $\mathcal{P} \subset \tilde{G}$ поставим в соответствие некоторое пространство $V(\mathcal{P})$ функций на G . По определению, $V(\mathcal{P})$ содержит все непрерывные ограниченные функции на G , которые можно приблизить равномерно на каждом компакте матричными элементами представлений классов $[S] \in \mathcal{P}$.

(Матричным элементом представления S в пространстве V называется функция вида $g \mapsto \langle \eta, S(g)\xi \rangle$, где $\xi \in V$, $\eta \in V'$.)

Говорят, что подмножество $\mathcal{P}_1$ слабо содержится в $\mathcal{P}_2$, если $V(\mathcal{P}_1) \subset V(\mathcal{P}_2)$, и что $\mathcal{P}_1$ слабо эквивалентно $\mathcal{P}_2$, если $V(\mathcal{P}_1) = V(\mathcal{P}_2)$.

Теорема 1. Пусть T — неприводимое унитарное представление локально-компактной группы G и $[T]$ — его класс эквивалентности. Точка $[T]$ входит в замыкание множества $\mathcal{P} \subset \hat{G}$ тогда и только тогда, когда $[T]$ слабо содержится в $\mathcal{P}$.

Одно из утверждений теоремы достаточно очевидно. Другое мы обсудим в § 10.

Унитарные неприводимые представления обладают многими специальными свойствами, которые удобно формулировать с помощью понятия k -неприводимости.

Пусть L_k — гильбертово пространство размерности k , S_k — тривиальное представление группы G в пространстве L_k . Будем говорить, что представление T группы G в пространстве H k -неприводимо, если всякое замкнутое подпространство в $H \otimes L_k$, инвариантное относительно $T \otimes S_k$, имеет вид $H \otimes L_k^0$, где L_k^0 — подпространство в L_k .

Рассмотрим несколько подробнее это понятие при разных k .

Очевидно, что 1-неприводимость совпадает с топологической неприводимостью.

Задача 2. Докажите, что k -неприводимость для конечного k равносильна следующему условию: для любых линейно независимых векторов $\xi_1, \dots, \xi_k \in H$, любых векторов $\eta_1, \dots, \eta_k \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ существует

такой оператор A вида $A = \sum_{i=1}^N c_i T(g_i)$, что

$$\|A\xi_i - \eta_i\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Указание. Рассмотрите в $H \otimes L_k \approx H \oplus \dots \oplus H$ наименьшее замкнутое инвариантное подпространство, содержащее вектор $(x_1, \dots, x_k)$.

Следствие. Если представление T k -неприводимо для всех конечных k , то оно вполне неприводимо.

Задача 3. Докажите, что ∞ -неприводимость T равносильна условию: для любого набора линейно независимых векторов $\{\xi_i\}$ с условием

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 < \infty, \text{ любого набора векторов } \{\eta_i\} \text{ с условием } \sum_{i=1}^{\infty} \|\eta_i\|^2 < \infty \text{ и}$$

любого $\varepsilon > 0$ найдется такой оператор A вида $A = \sum_{i=1}^N c_i T(g_i)$, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|A\xi_i - \eta_i\|^2 < \varepsilon.$$

Представление T называется *операторно неприводимым*, если всякий замкнутый оператор, перестановочный с операторами $T(g)$, $g \in G$, должен быть скалярным. (Напомним, что линейный оператор A , определенный на подпространстве $D(A) \subset H$, называется *замкнутым*, если его график $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in H \oplus H; x \in D(A)\}$ — замкнутое подпространство в $H \oplus H$.)

Задача 4. Докажите, что 2-неприводимость унитарного представления T равносильна его операторной неприводимости.

Указание. Перестановочность A с $T(g)$ равносильна инвариантности $\Gamma(A)$ относительно $(T+T)(g) = (T \otimes S_2)(g)$.

Теорема 2. Для унитарного представления T все свойства k -неприводимости, $k = 1, 2, \dots, \infty$, эквивалентны между собой и эквивалентны условию $\mathcal{C}(T) = \mathbb{C} \cdot 1$.

Доказательство. Ясно, что k -неприводимость влечет l -неприводимость при $k \geq l$. Покажем, что из 1-неприводимости T следует равенство $\mathcal{C}(T) = \mathbb{C} \cdot 1$, а из него следует ∞ -неприводимость T .

Пусть T — топологически неприводимо и $A \in \mathcal{C}(T)$. Тогда $A + A^*$ и $i(A - A^*)$ — эрмитовы и также принадлежат $\mathcal{C}(T)$. Спектральные разложения этих операторов инвариантны относительно представления T . Поэтому каждый проектор, входящий в эти разложения, равен 0 или 1. Отсюда вытекает (см. теорему 2 из § 4 п. 5), что операторы $A + A^*$ и $i(A - A^*)$ скалярны. Значит, скалярен и A .

Пусть теперь $\mathcal{C}(T) = \mathbb{C} \cdot 1$. Пространство $H \otimes L_{\infty}$ естественно отождествляется с $H \oplus \dots \oplus H \oplus \dots$ (счетное множество слагаемых). Пусть P_i — проектор на i -е слагаемое. Каждый оператор $A \in \mathcal{C}(T \otimes L_{\infty})$ можно записать в виде бесконечной матрицы $\|A_{ij}\|$, где $A_{ij} = P_i A P_j$. Очевидно, что $A_{ij} \in \mathcal{C}(T)$ и, следовательно, $A_{ij} = a_{ij} \cdot 1$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Поэтому $\mathcal{C}(T \otimes L_{\infty}) = 1 \otimes \mathfrak{B}(L_{\infty})$.

Если W — инвариантное подпространство в $H \otimes L_{\infty}$, то ортогональный проектор на W лежит в $\mathcal{C}(T \otimes L_{\infty})$ и, следовательно, имеет вид $1 \otimes P$, где P — проектор в L_{∞} . Значит, $W = H \otimes P L_{\infty}$, что и доказывает ∞ -неприводимость T .

Задача 5. Всякое унитарное топологически неприводимое представление тензорно неприводимо (см. п. 7.2).

Указание. Пусть T — топологически неприводимое унитарное представление G в гильбертовом пространстве H , W — ядерное пространство с тривиальным действием G и V — замкнутое G -инвариантное подпространство в $H \otimes W$. Воспользуйтесь тем, что в силу ядерности W существует антилинейный изоморфизм $\varphi: H \otimes W \rightarrow \text{Hom}(H, W)$, перестановочный с действием G . Докажите, что $\varphi(V) = \text{Hom}(H, W_1)$, где W_1 — подпространство в W .

§ 8. РАЗЛОЖЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Задача о разложении представлений группы G на возможно более простые компоненты — одна из основных задач теории представлений.

Частными случаями общей теории разложения представлений являются многие классические разделы анализа, теории функций и математической физики. Примерами могут служить: спектральная теория унитарных операторов (разложение унитарных представлений группы $\mathbb{Z}$),

теория приведения матриц к нормальной форме (разложение конечномерных представлений группы $\mathbb{Z}$),

теория рядов Фурье (разложение регулярного представления группы $\mathbb{T}$),

преобразование Фурье (разложение регулярного представления группы $\mathbb{R}$),

закон сложения моментов в квантовой механике [разложение тензорного произведения двух неприводимых представлений группы $\text{SO}(3)$].

8.1. Разложение конечных представлений. Каждое представление T либо неразложимо либо является суммой двух представлений: $T = T_1 + T_2$. К представлениям T_1 и T_2 применима та же альтернатива. В общем случае этот процесс может продолжаться неограниченно. Назовем представление T группы G в пространстве V *конечным* (соответственно *топологически конечным*), если любое строго монотонное по включению семейство G -инвариантных подпространств (соответственно замкнутых G -инвариантных подпространств) в V конечно.

Всякое конечномерное представление является конечным. Обратное, разумеется, неверно, так как неприводимые представления всегда конечны, но не обязательно конечномерны.

Задача 1. Всякое (топологически) конечное представление является конечной суммой (топологически) неразложимых конечных представлений.

Задача 2. Пусть представление T в пространстве V (топологически) конечно. Докажите, что существует такой строго монотонный конечный набор (замкнутых) инвариантных подпространств

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V,$$

что представления T_i , $i = 1, \dots, n$, возникающие в V_i/V_{i-1} , (топологически) неприводимы.

Наборы $\{V_i\}$, удовлетворяющие условиям задачи 2, будем называть допустимыми. Для конечных представлений справедлива

Теорема 1 (Жордан — Гёльдер). *Длина допустимого набора и классы эквивалентности представлений T_i (с точностью до порядка) определяются классом эквивалентности конечного представления T .*

Доказательство проведем индукцией по длине допустимых наборов. Пусть для всех представлений, обладающих допустимым набором длины $n-1$, теорема доказана и пусть $\{V_i\}$, $0 \leq i \leq n-1$ — допустимый набор для представления T в пространстве V . Рассмотрим любой другой допустимый набор:

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{m-1} \subset W_m = V,$$

и положим $W'_i = W_i \cap V_{n-1}$. Последовательность $\{W'_i\}$, $0 \leq i \leq m$, обладает очевидно всеми свойствами допустимого набора, кроме строгой монотонности.

Задача 3. Докажите, что существует такой индекс $j \in [1, m]$, что $W'_{j-1} = W'_j$, и семейство $\{W'_i\}$, $i \neq j$, строго монотонно.

Указание. Пусть W''_i — образ W_i в V/V_{n-1} . Поскольку V/V_{n-1} неприводимо, то для некоторого $j \in [1, m]$ справедливы соотношения

$$W''_0 = W''_1 = \dots = W''_{j-1} = \{0\}, \quad W''_j = W''_{j+1} = \dots = W''_m = V/V_{n-1}.$$

Проверьте, что W'_i/W'_{i-1} изоморфно W_i/W_{i-1} при $i \neq j$, а $W'_j/W'_{j-1} = \{0\}$.

По предположению индукции классы представлений, возникающих в W'_i/W'_{i-1} при $i \in [1, m]$, $i \neq j$, — те же, что и у представлений $T_1, \dots, T_{n-1}$. В частности, отсюда следует, что $m = n$. Кроме того представление, возникающее в W_j/W_{j-1} , очевидно, эквивалентно T_n .

Для доказательства теоремы остается проверить ее справедливость при $n = 1$, что тривиально.

Следствие. *Группа Гротендика категории конечных представлений является свободной абелевой группой, порожденной классами эквивалентности неприводимых представлений.*

Для топологически конечных представлений теорема Жордана — Гёльдера уже не обязана выполняться.

Приведем пример. Пусть H — гильбертово пространство с базисом $\{e_i\}$, $1 \leq i < \infty$. Обозначим через G_N группу обратимых операторов в H , обладающих свойством: $(Ae_i, e_j) = (e_i, e_j)$, если $i > N$ или $j > N$. Пусть $G_\infty = \bigcup_{N=1}^{\infty} G_N$. Введем оператор $\Lambda: e_k \mapsto \lambda_k e_k$, где $\{\lambda_k\}$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

В пространстве $V = H \oplus H$ рассмотрим группу G операторов, задаваемых матрицами вида

$$g = \begin{pmatrix} A & \Lambda^{-1}B - A\Lambda^{-1} \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где $A, B \in G_\infty$.

Пусть V_1 — совокупность векторов вида $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, а V'_1 — совокупность векторов вида $\begin{pmatrix} y \\ \Lambda y \end{pmatrix}$, $x \in H$. Можно проверить, что $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 = V$ и $\{0\} = V'_0 \subset V'_1 \subset V'_2 = V$ — два допустимых набора, приводящих к разным наборам топологически неприводимых представлений

$$T_1(g) = A, \quad T_2(g) = B; \quad T'_1(g) = \Lambda^{-1}B\Lambda, \quad T'_2(g) = \Lambda A \Lambda^{-1}.$$

Приведенное выше доказательство не переносится на топологический случай, потому что образ замкнутого подпространства при непрерывном отображении не обязан быть замкнутым.

В нашем примере образ V'_1 в V/V_1 не замкнут (он изоморфен образу оператора Λ). Можно показать также, что длина допустимого набора также не является инвариантом в топологическом случае. Соответствующий пример основан на том, что в гильбертовом пространстве H можно указать три таких замкнутых подпространства V_1, V_2 и W , что $V_1 \subset V_2$, $W \cap V_2 = 0$ и $(W \cup V_1)^\perp = 0$.

Результат задачи 2 сводит изучение конечных представлений к изучению неприводимых представлений и некоторых дополнительных соотношений между ними. Характер возникающих соотношений выясним для случая $n = 2$.

Пусть T — приводимое представление группы G в пространстве V .

Посмотрим, насколько определяется представление T своим подпредставлением и соответствующим фактор-представлением. Пусть V_1 — инвариантное подпространство и V_2 — некоторое дополнительное к нему подпространство.

В топологическом случае мы должны предположить, что V_1 — замкнутое дополнительное подпространство, т. е. что существует такое замкнутое подпространство V_2 , что V изоморфно $V_1 \oplus V_2$ (сумма в категории линейных топологических пространств).

В гильбертовом пространстве V всякое замкнутое подпространство V_1 дополняемо — достаточно положить $V_2 = V_1^\perp$.

В банаховых пространствах это уже не так. Например, в пространстве $C(T)$ подпространство H непрерывных функций, допускающих аналитическое продолжение внутрь круга, не имеет дополнения.

Обозначим через $T_1(g)$ ограничение $T(g)$ на V_1 , через $T_2(g)$ ограничение $T(g)$ на V_2 с последующим проектированием на V_2 параллельно V_1 , и через $T_{12}(g)$ — ограничение $T(g)$ на V_2 с последующим проектированием на V_1 параллельно V_2 .

Оператор $T(g)$ запишется тогда в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} T_1(g) & T_{12}(g) \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Очевидно, T_1 — подпредставление, а T_2 — фактор-представление T . Отображение $g \mapsto T_{12}(g) \in \text{Hom}(V_2, V_1)$ не является представлением. Оно удовлетворяет следующему тождеству, вытекающему из правила умножения матриц вида (1):

$$T_{12}(g_1 g_2) = T_{12}(g_1) T_2(g_2) + T_1(g_1) T_{12}(g_2). \quad (2)$$

Положим $Z(g) = T_{12}(g) T_2(g)^{-1}$.

Задача 4. Докажите, что тождество (2) равносильно утверждению, что $Z(g)$ — одномерный коцикл на группе со значением в пространстве $\text{Hom}(V_2, V_1)$, на котором G действует по правилу $g: A \mapsto T_1(g) A T_2(g)^{-1}$.

Построенный коцикл зависит не только от исходного представления T в пространстве V , но и от выбора дополнительного пространства V_2 .

Задача 5. Докажите, что изменение выбора V_2 приводит к замене $Z(g)$ на любой когомологичный коцикл.

Таким образом, представление T определяет некоторый класс когомологий $h \in H^1(G, \text{Hom}(V_2, V_1))$ и само определяется (с точностью до эквивалентности) этим классом. Будем обозначать класс эквивалентности представления T символом $[T_1, h, T_2]$. В частности, $[T_1, 0, T_2] = [T_1 + T_2]$.

Итак, дополнительная информация, которая нужна для восстановления неразложимого представления T по подпредставлению T_1 и фактор-представлению T_2 — это некоторый ненулевой класс одномерных когомологий группы G .

Общий случай (когда имеется n неприводимых представлений T_i) может быть исследован повторным применением описанного приема. Интересно было бы получить прямой способ восстановления T по (упорядоченному) набору неприводимых компонент $\{T_i\}$, о которых говорится в задаче 2.

Другая нерешенная задача — перенесение описанной здесь конструкции одномерных когомологий на топологический случай. Для замкнутых дополняемых подпространств соответствующая теория построена (см., например, статью К. Мура [113]).

Общий случай значительно сложнее. В качестве подзадачи он содержит теорию расширений банаховых пространств, которая еще очень мало разработана.

8.2. Неприводимые представления. Следующее простое, но важное свойство алгебраически неприводимых представлений играет большую роль в теории представлений.

Теорема 1 (лемма Шура). Если представления T_1, T_2 алгебраически неприводимы, то каждый сплетающий оператор $A \in \mathcal{C}(T_1, T_2)$ либо равен нулю, либо обратим.

Доказательство сразу вытекает из того, что $\ker A \subset V_1$ и $\operatorname{im} A \subset V_2$ — инвариантные подпространства и, следовательно, либо равны $\{0\}$ либо совпадают со всем пространством.

Следствие 1. Два алгебраически неприводимых представления либо эквивалентны либо дизъюнкты.

Следствие 2. Если T — алгебраически неприводимое представление в линейном пространстве над полем K , то совокупность $\mathcal{C}(T)$ сплетающих операторов является телом над полем K .

В следующих важных для приложений случаях это утверждение допускает уточнение.

Теорема 2. Пусть размерность неприводимого представления T в пространстве над полем K не более, чем счетна. Тогда, если $K = \mathbb{C}$, то $\mathcal{C}(T) \approx \mathbb{C}$; если $K = \mathbb{R}$, то $\mathcal{C}(T)$ изоморфно либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, либо $\mathbb{H}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{C}(T)$. Рассмотрим выражение $p(A)$, где p — многочлен с коэффициентами из K . Если все операторы $p(A)$ отличны от нуля при $p \neq 0$, то тело $\mathcal{C}(T)$ содержит подкольцо $K[A]$, изоморфное кольцу многочленов, и, следовательно, поле $K(A)$, изоморфное полю рациональных функций.

Задача 1. Докажите, что поле $K(A)$ имеет над K континуальную размерность.

Указание. Все элементы вида $(A - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in K$, линейно независимы над K .

Задача 2. Если x — ненулевой вектор из V , то отображение $A \mapsto Ax$ является вложением $\mathcal{C}(T)$ в V .

Результаты задач 1 и 2 показывают, что сделанное нами предположение $p(A) \neq 0$ для $p \neq 0$ противоречит счетности размерности V .

Значит, каждый элемент $A \in \mathcal{C}(T)$ удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению $p(A) = 0$. Напомним теперь, что всякий многочлен над полем $\mathbb{C}$ разлагается на линейные множители, а над полем $\mathbb{R}$ — на линейные и квадратичные множители.

В случае $K = \mathbb{C}$ отсюда сразу следует, что $\mathcal{C}(T) = \mathbb{C} \cdot 1$. В случае $K = \mathbb{R}$ можно лишь утверждать, что всякий элемент $A \in \mathcal{C}(T)$ порождает подполе в $\mathcal{C}(T)$, изоморфное $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Задача 3. Докажите, что любые k элементов $A_1, \dots, A_k$ тела $\mathcal{C}(T)$ порождают подтело D размерности $\leq 2^k$.

Указание. Пространство, порожденное всеми одночленами вида $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_l}$, $i_1 < \dots < i_l$, инвариантно относительно умножения на образующие, так как $A_i^2 = a_i A_i + b_i 1$ и $A_i A_j + A_j A_i = (A_i + A_j)^2 - A_i^2 - A_j^2 = = a_{ij} A_i + \beta_{ij} A_j + \gamma_{ij} 1$.

Задача 4. Докажите, что любые два элемента $A, B \in \mathcal{G}(T)$ порождают подтело $D \subset \mathcal{G}(T)$, изоморфное либо $\mathbf{R}$, либо $\mathbf{C}$, либо $\mathbf{H}$.

Указание. Достаточно рассмотреть случай, когда D содержит в качестве подполя $\mathbf{C}$ и не совпадает с $\mathbf{C}$. Из результата предыдущей задачи следует, что $\dim_{\mathbf{C}} D = 2$. Рассмотрите преобразование $I: D \rightarrow D: x \mapsto x i x^{-1}$, где i — мнимая единица в $\mathbf{C}$. Приводя I к диагональному виду, докажите, что $D = \mathbf{C} + j\mathbf{C}$, где j — элемент, обладающий свойствами: $j^2 = -1$, $j i = -i j$.

Задача 5. Докажите, что любые три элемента $A, B, C \in \mathcal{G}(T)$ порождают подтело D , изоморфное либо $\mathbf{R}$, либо $\mathbf{C}$, либо $\mathbf{H}$.

Указание. Достаточно доказать, что невозможен случай, когда D является двумерным левым пространством над $\mathbf{H}$ с базисом $1, l$, где $l^2 = -1$.

Задача 6. Всякое конечномерное тело над $\mathbf{R}$ изоморфно $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 5 и примените индукцию по размерности.

Теорема 2 вытекает, очевидно, из задач 3 и 6.

Следствие. Для неприводимого представления T число сплетения $s(T)$ равно 1, если $K = \mathbf{C}$, и принимает значения 1, 2, 4, если $K = \mathbf{R}$.

Вещественное представление T называют представлением вещественного, комплексного или кватернионного типа в зависимости от вида тела $\mathcal{G}(T)$.

Ясно, что представление комплексного (соответственно кватернионного) типа получается из комплексного (соответственно кватернионного) представления с помощью сужения поля скаляров. Ниже мы дадим для компактных групп критерии принадлежности представления одному из этих типов.

Оказывается, что тип представления характеризуется его поведением при расширении поля скаляров от $\mathbf{R}$ до $\mathbf{C}$.

Теорема 3. Пусть $T_{\mathbf{C}}$ означает комплексификацию вещественного представления T . Если T — неприводимое представление вещественного, комплексного или кватернионного типа, то $T_{\mathbf{C}}$ — неприводимо, является суммой двух неэквивалентных неприводимых представлений или суммой двух эквивалентных неприводимых представлений соответственно.

Следствие. Если T — неприводимое вещественное представление вещественного, комплексного или кватернионного типа, то алгебра $\mathcal{G}(T_{\mathbf{C}})$ изоморфна $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ или $\text{Mat}_2(\mathbf{C})$ соответственно.

Это следствие можно вывести также из следующего общего утверждения.

Задача 7. Докажите, что $\mathcal{G}(T_{\mathbf{C}}) = \mathcal{G}(T) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

Указание. Пространство $V_{\mathbf{C}}$ представления $T_{\mathbf{C}}$ можно реализовать в виде прямой суммы $V \oplus V$, где V — пространство представления T . Тогда алгебра $\mathcal{G}(T_{\mathbf{C}})$ будет реализована как подалгебра в $\text{Mat}_2(\mathcal{G}(T))$, состоящая из элементов, перестановочных с оператором $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, задающим умножение на i в $V_{\mathbf{C}}$.

Доказательство теоремы 3 вытекает из рассмотрения вещественных инвариантных подпространств в $V_{\mathbb{C}} \approx V \oplus V$.

По лемме Шура всякое такое подпространство W переходит в нуль либо во все пространство при проекции на каждое слагаемое. Поэтому W может быть одного из следующих типов:

$$1) W = \{0\} \oplus \{0\},$$

$$2) W = \{0\} \oplus V,$$

$$3) W = V \oplus \{0\},$$

$$4) W = V \oplus V,$$

5) $W = \{(x, Ax), x \in V\}$, где A — ненулевой элемент $\mathcal{C}(T)$.
Последнее пространство естественно назвать графиком оператора A .

Задача 8. Нетривиальные комплексные инвариантные пространства W в $V_{\mathbb{C}}$ — это графики операторов $A \in \mathcal{C}(T)$, обладающих свойством $A^2 = -1$.

Указание. Пространство W будет комплексным подпространством в $V_{\mathbb{C}}$, если и только если оно переводится в себя оператором $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, задающим умножение на i в $V_{\mathbb{C}}$.

Если $\mathcal{C}(T) = \mathbb{R}$, то таких операторов нет, и пространство $V_{\mathbb{C}}$ неприводимо.

Если $\mathcal{C}(T) = \mathbb{C}$, то имеется ровно два таких оператора A (соответствующих элементам $\pm i \in \mathbb{C}$). Значит, существует ровно два нетривиальных инвариантных подпространства, в которых, следовательно, реализуются неэквивалентные неприводимые представления (ср. следующий п. 8.3).

Если же $\mathcal{C}(T) = \mathbb{H}$, то имеется бесконечное множество операторов A , обладающих нужным свойством. Все они переводятся друг в друга внутренними автоморфизмами $\mathbb{H}$. Таким образом, в этом случае $V_{\mathbb{C}}$ является суммой двух подпространств, в которых реализуются эквивалентные представления.

8.3. Вполне приводимые представления. Пусть задано разложение пространства V , в котором действует представление T ,

в прямую сумму инвариантных подпространств V_i : $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$.

Обозначим P_i проектор на V_i параллельно остальным V_j .

Задача 1. Операторы P_i обладают свойствами:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } P_i^2 &= P_i, \\ \text{б) } P_i P_j &= P_j P_i = 0 \text{ при } i \neq j, \\ \text{в) } \sum_{i=1}^n P_i &= 1, \\ \text{г) } P_i &\in \mathcal{C}(T). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Верно и обратное (см. задачу 2).

Задача 2. Всякий набор операторов в пространстве V , обладающий свойствами (1), задает разложение V в прямую сумму инвариантных подпространств $V_i = P_i V$.

Указание. Свойство а) означает, что P_i — оператор проектирования на подпространство $V_i = P_i V$ параллельно подпространству $W_i = (1 - P_i) V$. Свойство б) означает, что пространства V_i линейно независимы. Свойство в) значит, что сумма всех V_i совпадает с V . Наконец, свойство г) равносильно инвариантности V_i .

Элементы кольца, обладающие свойством $x^2 = x$, называются *идемпотентами*. Два идемпотента x и y называются *ортогональными*, если $xy = yx = 0$. Результаты задач 1 и 2 показывают, что вопрос о разложении пространства V в сумму инвариантных подпространств эквивалентен вопросу о разложении единицы в кольце $\mathcal{C}(T)$ в сумму ортогональных идемпотентов.

В множестве идемпотентов можно ввести отношение порядка, полагая $x < y$, если $xy = yx = x$.

Задача 3. Пусть P и Q — два идемпотента в кольце линейных операторов в пространстве V . Докажите, что соотношение $P < Q$ равносильно включению $PV \subset QV$.

Следствие. Разложения пространства V представления T в сумму неприводимых подпространств соответствуют разложениям единицы в $\mathcal{C}(T)$ в сумму минимальных идемпотентов.

Пусть представление T вполне приводимо и конечно. Тогда оно является суммой конечного числа неприводимых представлений: $T = \sum_{i=1}^n T_i$. По теореме Жордана — Гельдера (см. п. 8.1) классы представлений T_i определены однозначно.

Однако те подпространства V_i , в которых действуют эти представления, вообще говоря, можно выбирать по-разному.

Для описания возникающей здесь ситуации полезно ввести следующее определение.

Представление T называется *примарным*, если его нельзя представить в виде суммы двух дизъюнктивных представлений.

Задача 4. Докажите, что конечное вполне приводимое представление T примарно, если и только если все его неприводимые компоненты эквивалентны.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Жордана — Гельдера, леммой Шура и аддитивностью числа сплетения.

Задача 5. Докажите, что конечное вполне приводимое представление примарно, если и только если оно имеет вид $T = U \otimes S$, где U — неприводимое, а S — тривиальное (т. е. $S(g) \equiv 1$) представление.

Указание. Воспользуйтесь изоморфизмом $V \otimes_K K^n = V \oplus \dots \oplus V$ (n слагаемых) и результатом задачи 1.

Теорема 1. Пусть T — вполне приводимое конечное представление в пространстве V . Тогда существует единственное разложение V в сумму инвариантных подпространств V_i , для которого представления $T_i = T|_{V_i}$ примарны и попарно дизъюнктивны.

Каждое инвариантное подпространство $W \subset V$ обладает свойством $W = \bigoplus_i W \cap V_i$.

Доказательство существования просто. Если T не примарно, то оно является суммой двух дизъюнктивных слагаемых T_1 и T_2 . К T_1 и T_2 снова применима эта альтернатива. Продолжая этот процесс, приходим к разложению T в сумму примарных попарно дизъюнктивных представлений $T = \sum_{i=1}^n T_i$.

Пусть V_i — пространство, в котором действует T_i , и P_i — оператор проектирования на V_i параллельно сумме остальных V_j .

Задача 6. Операторы P_j принадлежат центру алгебры $\mathcal{C}(T)$.

Указание. Если $A \in \mathcal{C}(T)$, то $P_i A P_i \in \mathcal{C}(T_i, T_i)$. Из попарной дизъюнктивности T_i следует, что $P_i A P_i = 0$ при $i \neq j$. Значит,

$$A = \left(\sum_i P_i \right) \cdot A \cdot \left(\sum_i P_i \right) = \sum_{i,j} P_j A P_i = \sum_i P_i A P_i.$$

Поэтому $A P_i = P_i A P_i$ и $P_i A = P_i A P_i$.

Результат задачи 6 допускает обращение в следующем смысле. Пусть $C(\mathcal{C}(T))$ — центр алгебры $\mathcal{C}(T)$.

Задача 7. Если проектор P принадлежит $C(\mathcal{C}(T))$, то пространства $W_1 = P V$ и $W_2 = (I - P) V$ инвариантны, а возникающие в них представления $S_1 = T|_{W_1}$ и $S_2 = T|_{W_2}$ дизъюнктивны.

Указание. Инвариантность W_1 и W_2 равносильна условию $P \in \mathcal{C}(T)$. Дизъюнктивность S_1 и S_2 следует из соотношений $\mathcal{C}(S_1, S_2) = (I - P) \mathcal{C}(T) P$, $\mathcal{C}(S_2, S_1) = P \mathcal{C}(T) (I - P)$.

Из результатов задач 6 и 7 вытекает, что имеется взаимно однозначное соответствие между разложениями представления T в сумму дизъюнктивных подпредставлений и разложениями единицы в $C(\mathcal{C}(T))$ в сумму ортогональных идемпотентов.

Разложение T на примарные дизъюнктивные представления соответствует, очевидно, разложению единицы в $C(\mathcal{C}(T))$ на минимальные идемпотенты.

Задача 8. Докажите, что в коммутативном кольце разложение единицы в сумму минимальных идемпотентов однозначно (если оно существует).

Указание. Если x и y — два перестановочных идемпотента, то xy — также идемпотент, причем $xy < x$ и $xy < y$.

Докажем последнее утверждение теоремы 1. Пусть W — инвариантное подпространство в V . Обозначим P проектор на W параллельно инвариантному дополнению (которое существует, так как T вполне приводимо). Тогда $P \in \mathcal{C}(T)$. Кроме того,

$$P = P \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n P P_i.$$

Так как $P_i \in C(\mathcal{C}(T))$, операторы P и P_i перестановочны. Поэтому операторы $P P_i$ являются проекторами на подпростран-

ства $PP_iV = W \cap V_i$. Значит,

$$W = PV = \left(\sum_{i=1}^n PP_i \right) V = \bigoplus_{i=1}^n (W \cap V_i),$$

и теорема доказана.

Разложение примарного приводимого представления на неприводимые компоненты всегда неоднозначно. В самом деле, пусть примарное представление T имеет вид $U \otimes S$, где U — неприводимое представление в пространстве W' , а S — тривиальное представление в пространстве W'' (см. задачу 5).

Всякое разложение W'' в сумму одномерных подпространств, W''_i , $i=1, 2, \dots, \dim W''$, задает разложение пространства $V = W' \otimes W''$ в сумму неприводимых подпространств $V_i = W' \otimes W''_i$. Если T — приводимо, то $\dim W'' > 1$, и такое разложение неоднозначно.

Задача 9. Если $\mathcal{C}(U) = K$, то всякое инвариантное подпространство в V имеет вид $W' \otimes W''_0$, где W''_0 — некоторое подпространство в W'' .

Указание. Воспользуйтесь изоморфизмом $\mathcal{C}(T) = \text{Mat}_n(\mathcal{C}(U))$, где $n = \dim W''$.

Приведем полезное достаточное условие полной приводимости представления.

Теорема 2. Если пространство V представления T порождается своими неприводимыми подпространствами, то T вполне приводимо.

Доказательство. Пусть W — инвариантное подпространство V . Назовем допустимым всякий набор $\{V_\alpha\}$, $\alpha \in A$, инвариантных неприводимых подпространств, обладающий свойством: если $x_\alpha \in V_\alpha$, $y \in W$ и $y = \sum_\alpha x_\alpha$, то все x_α равны нулю. По лемме Цорна существует максимальный допустимый набор $\{V_\alpha\}$. Тогда $W' = \sum_{\alpha \in A} V_\alpha$ — инвариантное дополнение к W . В самом деле, всякое неприводимое подпространство V_0 целиком лежит в сумме $W + W'$ либо не пересекается с ней. Вторая возможность противоречит максимальнойности набора $\{V_\alpha\}$.

В заключение покажем, как из результатов этого пункта выводится классическая

Теорема 3 (Бернсайд). Если T — неприводимое представление группы G в конечномерном линейном пространстве V над алгебраически замкнутым полем K , то линейная оболочка операторов $T(g)$, $g \in G$, совпадает с пространством $\text{End } V$ всех линейных операторов в V .

Доказательство. Рассмотрим представление $\tilde{T}$ группы G в пространстве $\text{End } V$:

$$\tilde{T}(g): A \mapsto T(g)A.$$

Отождествляя $\text{End } V$ с $V \otimes V^*$ (ср. п. 3.3), мы видим, что представление $\tilde{T}(g)$ является тензорным произведением представления T в V и n -мерного тривиального представления в V^* , $n = \dim V$. По теореме 2 $\tilde{T}$ вполне приводимо. Так как поле K алгебраически замкнуто, тело $\mathcal{C}(T)$ совпадает с K . В силу результата задачи 9, всякое инвариантное подпространство в $\text{End } V$ имеет вид $W = V \otimes V_1$, где V_1 — некоторое подпространство в V^* . Выберем базис в V так, чтобы V_1 порождалось первыми k координатами. Тогда W реализуется в виде подпространства в $\text{Mat}_n(K) \approx \text{End } V$, состоящего из матриц, у которых отличны от нуля лишь первые k столбцов.

Для доказательства теоремы остается заметить, что линейная оболочка операторов $T(g)$, $g \in G$, является инвариантным подпространством в $\text{End } V$ и не содержится ни в одном из подпространств W описанного типа при $k < n$.

Следствие. Конечная группа порядка N не может иметь неприводимых представлений размерности $> \sqrt{N}$ над алгебраически замкнутым полем.

Мы увидим ниже, что этот результат допускает существенное уточнение (см. § 10).

8.4. Разложение унитарных представлений. Всякое унитарное представление вполне приводимо. Поэтому для конечных унитарных представлений справедливы результаты предыдущего пункта.

Оказывается, что в унитарном случае можно построить теорию разложения и для бесконечных представлений. При этом вместо разложения в прямую сумму используется разложение в непрерывную сумму (интеграл) гильбертовых пространств. Необходимость в таких разложениях возникает уже в самых простых случаях.

Рассмотрим, например, представление T группы $\mathbf{R}$ в пространстве $H = L^2(\mathbf{R})$, заданное формулой

$$[T(t)f](x) = e^{itx}f(x).$$

Пусть E — любое измеримое подмножество $\mathbf{R}$. Очевидно, что подпространство $H(E) \subset H$, состоящее из функций, равных нулю вне E , инвариантно относительно операторов представления.

Задача 1. Всякое замкнутое инвариантное подпространство в H имеет вид $H(E)$.

Указание. Всякий оператор из $\mathcal{C}(T)$ является оператором умножения на некоторую функцию от x (ср. задачу 10 из п. 4.4).

Следствие. Представление T не имеет неприводимых подпредставлений.

В самом деле, всякое подпространство $H(E)$ либо сводится к нулю (если E имеет нулевую меру), либо имеет нетривиальные инвариантные подпространства (если мера E положительна).

Пусть X — пространство с мерой μ и каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие гильбертово пространство H_x и унитарное представление T_x группы G в H_x . Будем говорить, что унитарное представление T группы G является *непрерывной суммой* (или *интегралом*) представлений T_x по мере μ и писать $T = \int_X T_x d\mu(x)$, если:

1) пространство H представления T является непрерывной суммой пространств H_x по мере μ (см. п. 4.5);

2) все операторы $T(g)$ разложимы и имеют вид

$$[T(g)f](x) = T_x(g)f(x).$$

Очевидно, что приведенное выше представление T группы $\mathbf{R}$ в $L^2(\mathbf{R})$ является непрерывной суммой одномерных представлений

$$T_x(t) = e^{itx}.$$

Естественно возникает вопрос о разложении любого представления T в непрерывную сумму более простых (например, неприводимых или примарных) представлений. По теореме 1 из п. 4.5 разложение пространства H представления T в непрерывную сумму $\int_X H_x d\mu(x)$ задается коммутативной C^* -подалгеброй $\mathcal{D}_0$ непрерывно диагональных операторов. Пространство X совпадает с $\mathcal{M}(\mathcal{D}_0)$, а мера μ — с базисной мерой тождественного представления $\mathcal{D}_0$ в H . Ясно, что операторы представления T будут разложимы тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{D}_0$ содержится в $\mathcal{C}(T)$.

Однако это условие, вообще говоря, недостаточно. Дело в том, что соотношения

$$T_x(g_1 g_2) = T_x(g_1) T_x(g_2)$$

при фиксированных g_1 и g_2 могут нарушаться на множестве нулевой меры, зависящем от g_1 и g_2 .

Кроме того, соответствие $g \mapsto T_x(g)$, вообще говоря, не обязано быть непрерывным. При некоторых дополнительных условиях на группу G и пространство H эти трудности можно преодолеть.

Теорема 1. Пусть группа G локально компактна и имеет счетную базу, а пространство H сепарабельно. Тогда любая коммутативная C^* -подалгебра $\mathcal{D}_0$ в $\mathcal{C}(T)$ задает разложение

представления T в непрерывную сумму

$$T = \int_X T_x d\mu(x),$$

где $X = \mathfrak{M}(\mathcal{D}_0)$, а μ — базисная мера тождественного представления $\mathcal{D}_0$.

Доказательство проведем здесь только для случая счетной дискретной группы. Общий случай будет разобран ниже (см. § 10), когда будет введено понятие группового кольца.

Поскольку все операторы $T(g)$, $g \in G$, разложимы, для каждого $g \in G$ существует такое измеримое семейство операторов $T_x(g)$, что

$$[T(g)f](x) = T_x(g)f(x). \quad (1)$$

При фиксированных g, g_1, g_2 почти всюду по x выполняются соотношения

$$T_x(g)^* = T_x(g^{-1}), \quad T_x(g_1 g_2) = T_x(g_1) T_x(g_2). \quad (2)$$

Так как группа G счетна, то, изменяя операторы $T_x(g)$ на множестве нулевой меры, мы можем добиться выполнения равенств (2) при всех $x \in X$, не нарушая равенств (1).

Так как G дискретна, соответствие $g \mapsto T_x(g)$ непрерывно и в силу (2) задает унитарное представление G в пространстве H_x .

Теорема 2. Пусть унитарное представление T сепарабельной группы G в сепарабельном гильбертовом пространстве H является непрерывной суммой представлений T_x , $x \in X$, по мере μ . Для того чтобы почти все представления T_x были неприводимы, необходимо и достаточно, чтобы алгебра $\mathcal{D}$ диагональных операторов была максимальной коммутативной подалгеброй в $\mathcal{E}(T)$.

Доказательство. Пусть алгебра $\mathcal{D}$ не максимальна и оператор A принадлежит $\mathcal{D}^1 \cap \mathcal{E}(T)$. Поскольку $\mathcal{D}^1 = \mathcal{A}$ состоит из разложимых операторов, оператор A имеет вид

$$[Af](x) = A_x f(x).$$

Пусть $g_1, \dots, g_n, \dots$ — счетное всюду плотное подмножество в G . Тогда почти всюду на X справедливы равенства $T_x(g_i)A_x = A_x T_x(g_i)$. Следовательно, $A_x \in \mathcal{E}(T_x)$ для почти всех x .

Поскольку $A \notin \mathcal{D}$, на некотором множестве E положительной меры A_x — не скалярный оператор. Значит, представления T_x приводимы для $x \in E$.

Обратно, пусть представления T_x приводимы на множестве E положительной меры. Тогда $\mathcal{E}(T_x) \neq \mathbb{C} \cdot 1$ для $x \in E$. Предпо-

ложим, что нам удалось для каждого $x \in E$ выбрать оператор $A_x \in \mathcal{C}(T_x) \setminus \mathbb{C} \cdot 1$ так, чтобы семейство $\{A_x\}$ было измеримо. Тогда оператор A , определяемый этим семейством, принадлежал бы $\mathcal{D}^1 \cap \mathcal{C}(T)$ и не принадлежал $\mathcal{D}$, что и доказывало бы не-максимальность $\mathcal{D}$.

Возможность измеримого выбора A_x вытекает из следующей общей теоремы Лузина — Янкова. Если X и Y — полные сепарабельные метрические пространства, Y — компакт и Z — борелевское подмножество в $X \times Y$, проекция которого на X совпадает с X , то существует отображение $f: X \rightarrow Y$, которое измеримо относительно любой полной регулярной меры на X и график которого лежит в Z .

Доказательство этого факта мы опускаем (оно приведено в приложении III к книге М. А. Наймарка [38]).

Следствие. *Всякое унитарное представление T локально-компактной группы G со счетной базой в сепарабельном пространстве H может быть разложено в непрерывную сумму неприводимых представлений: $T = \int_X T_x d\mu(x)$.*

Можно выделить некоторый класс представлений, поведение которых при разложении сохраняет основные черты конечного случая (ср. п. 8.3).

Будем говорить, что представление T :

- 1) имеет *простой спектр*, если алгебра $\mathcal{C}(T)$ коммутативна,
- 2) имеет *однородный спектр кратности n* (или однородно степени n), если оно эквивалентно тензорному произведению представления с простым спектром и n -мерного тривиального представления.
- 3) принадлежит *типу I*, если оно является суммой однородных представлений.

Задача 2. Для того чтобы представление T принадлежало типу I (соответственно было однородно степени n), необходимо и достаточно, чтобы алгебра $\mathcal{C}(T)$ принадлежала типу I (соответственно была однородной степени n).

Указание. Воспользуйтесь теоремой I и результатами п. 4.5.

Таким образом, всякое представление типа I имеет вид $T = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \otimes S_k$, где U_k — представления с простым спектром, а S_k — тривиальное k -мерное представление. Группу G назовем *ручной*, если все ее унитарные представления принадлежат типу I, и *дикий* — в противном случае.

По мнению автора, эта терминология, заимствованная из геометрической топологии (ручные и дикие узлы), хорошо отражает природу этих групп и их представлений. Мы увидим ниже, что ручные группы обладают многими хорошими свойствами — единственностью разложения представлений, наличием

характеров, полуотделимостью дуального пространства, — которых лишены дикie группы.

Задача 3. Докажите, что для ручной группы G всякое примарное представление кратно неприводимому.

Указание. Для примарного представления центр алгебры $\mathcal{C}(T)$ состоит из скалярных операторов. Поэтому $\mathcal{C}(T)$ — фактор типа I.

Можно показать, что это свойство является характеристическим для ручных групп — каждая дикая группа обладает примарными представлениями, не кратными неприводимому.

Для ручных групп теория разложения может быть доведена до конца в следующем смысле.

Теорема 3. Пусть G — локально компактная ручная группа со счетной базой и T — ее унитарное представление в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда:

1) существует такая совокупность μ_k попарно дизъюнктивных борелевских мер на пространстве $\hat{G}$, дуальном к G , что представление T записывается в виде

$$T = \sum_{k=1}^{k=\infty} U_k \otimes S_k,$$

где S_k — тривиальное k -мерное представление, а U_k — представление с простым спектром, которое может быть записано в виде непрерывной суммы

$$U_k = \int_{\hat{G}} T_\lambda d\mu_k(\lambda).$$

(Представление T_λ принадлежит классу $\lambda \in \hat{G}$.)

2) Меры μ_k определены представлением T с точностью до эквивалентности.

3) Любой набор $\{\mu_k\}$ попарно дизъюнктивных борелевских мер возникает описанным образом из некоторого представления T .

Этот же результат можно сформулировать в терминах разложения на примарные представления.

Каждое представление T может быть записано в виде

$$T = \int_{\hat{G}} W_\lambda d\mu(\lambda),$$

где W_λ — примарное представление вида $T_\lambda \otimes S_\lambda$, T_λ принадлежит классу $\lambda \in \hat{G}$, а S_λ — тривиальное представление размерности $n(\lambda)$. Мера μ определяется представлением T с точностью до эквивалентности, а измеримая функция $n(\lambda)$ — почти всюду по мере μ .

Переход от одной формулировки к другой совершается в точности так же, как в п. 4.4.

Разложение унитарного представления T на примарные представления может быть построено для любой локально компак-

ной группы со счетной базой. Для этого достаточно взять в качестве алгебры $\mathcal{D}$ диагональных операторов центр алгебры $\mathcal{V}(T)$. Однако дальнейшее разложение неоднозначно не только в смысле выбора подпространств разложения (или, что то же, алгебры диагональных операторов), но и в смысле самих неприводимых компонент. См. по этому поводу § 19 в третьей части книги.

Класс ручных групп достаточно широк.

Задача 4. Докажите, что всякая коммутативная группа — ручная.

Указание. Если T — представление коммутативной группы, то алгебра $\mathcal{V}(T)^1$ коммутативна. Значит, $\mathcal{V}(T)$ принадлежит типу I.

Мы увидим ниже, что все компактные группы, связанные полупростые группы, экспоненциальные группы Ли (в частности, нильпотентные группы) — ручные. Известно также (см. статью [84]), что всякая линейная алгебраическая группа (т. е. подгруппа в $GL(n, \mathbf{R})$, выделяемая алгебраическими уравнениями) — ручная.

Наоборот, дискретные группы, как правило, дикие. А именно, счетная дискретная группа является ручной, если только она содержит коммутативную подгруппу конечного индекса (см. статью [128]).

Среди разрешимых групп Ли встречаются и ручные, и дикие. Критерий, различающий эти случаи, мы приведем в § 15.

§ 9. ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

9.1. Усреднения и инвариантные меры. Одним из мощных средств изучения топологических групп и их представлений являются операции инвариантного усреднения. Пусть L — какое-нибудь линейное топологическое пространство, состоящее из функций на G -пространстве X и инвариантное относительно сдвигов. *Инвариантным средним* называется положительный¹⁾ линейный функционал на L , инвариантный относительно группы G . Наиболее важен случай, когда X — топологическая группа, а G — группа левых, правых или двусторонних сдвигов на X . Соответствующие средние также называются *левыми*, *правыми* или *двусторонними*.

Группа G называется *усреднимой* или *аменабельной*, если существует инвариантное левое среднее на пространстве $B(G)$ всех непрерывных ограниченных функций на G с нормой $\|f\| = \sup_G |f(x)|$. В этом случае на подпространстве $B(G)$, состоящем из равномерно непрерывных справа функций, существует двустороннее среднее.

¹⁾ То есть принимающий неотрицательные значения на неотрицательных функциях.

Критерий Неймана. *Группа G не является усреднимой, если и только если существуют такие функции $f_1, \dots, f_N \in B(G)$ и такие элементы $g_1, \dots, g_N \in G$, что*

$$\sum_{i=1}^N [f_i(g) - f_i(g_i g)] \geq 1 \quad \text{для всех } g \in G.$$

Известно, что все разрешимые группы усреднимы. Примером неусреднимой группы могут служить свободная группа с двумя образующими или любая некомпактная полупростая группа Ли.

В последнее время теория усреднимых групп сильно продвинута. Оказалось, что для локально компактных групп усреднимость эквивалентна многим другим важным свойствам: существованию неподвижной точки для любого аффинного действия группы на выпуклом компакте, существованию двустороннего среднего на $B(G)$, так называемому R -свойству: тривиальное представление слабо содержится в регулярном, и др.

Рассмотрение инвариантного среднего на $C_0(G)$ приводит к важному понятию меры Хаара.

В случае, когда G компактна, пространство $C_0(G)$ совпадает с $C(G)$, и инвариантное среднее должно иметь вид

$$I(f) = \int_G f(x) d\mu(x), \quad (1)$$

где μ — некоторая регулярная борелевская мера (см. п. 4.3).

Если G локально-компактна и обладает счетной базой, то пространство $C_0(G)$ является объединением счетного множества пространств вида $C(K)$, где K — компакт в G . В этом случае инвариантное среднее (если оно существует) также можно записать в виде (1), где μ — некоторая σ -конечная мера.

Теорема 1 (Хаар). *На любой локально компактной группе со счетной базой существует ненулевая левоинвариантная σ -конечная регулярная борелевская мера. Она определена однозначно с точностью до числового множителя.*

Эту меру называют *левой мерой Хаара*. Аналогично определяется *правая мера Хаара*.

Мы будем обозначать левую меру Хаара символом $d_l g$, а правую — $d_r g$, опуская индексы l и r в тех случаях, когда существует двусторонне инвариантная мера.

Можно так обобщить понятие меры (отбросив условие σ -конечности), что будет справедлива

Теорема 2 (А. Вейль). *Для того чтобы на полной топологической группе G существовала ненулевая левоинвариантная регулярная борелевская мера, необходимо и достаточно, чтобы группа G была локально компактна. Если это условие выполнено, левоинвариантная мера определена однозначно с точностью до числового множителя.*

Для конкретных групп обычно не представляет труда явно указать левоинвариантную меру (ср. п. 6.4). Поэтому основную ценность представляет утверждение о единственности. Приведем здесь несколько полезных формул, которые являются следствием этой единственности.

Задача 1. Пусть G — локально-компактная группа. Существует такой непрерывный гомоморфизм Δ_G группы G в группу положительных чисел (по умножению), что справедливы равенства

$$d_r(xy) = \Delta_G(x) d_r y, \quad d_l(xy) = \Delta_G(y)^{-1} d_l x, \quad (2)$$

$$d_r x = \text{const} \cdot \Delta_G(x) d_l x, \quad d_l(x) = \text{const} \cdot \Delta_G(x)^{-1} d_r x, \quad (3)$$

$$d_r(x^{-1}) = \Delta_G(x)^{-1} d_r x = \text{const} \cdot d_l x, \quad d_l(x^{-1}) = \Delta_G(x) d_l x. \quad (4)$$

Указание. Левая часть первого из равенств (2) правоинвариантна. Поэтому существует такое число $\Delta_G(x)$, что это равенство справедливо. Очевидно, что $x \mapsto \Delta_G(x)$ — гомоморфизм. Его непрерывность следует из формулы $\Delta_G(x) = \int_G f(x^{-1}y) d_r y$, где f — финитная непрерывная функция на G с условием $\int_G f(y) d_r y = 1$. Остальные соотношения выводятся аналогично.

Следствие. Класс эквивалентности левой меры Хаара двусторонне инвариантен.

Функцию Δ_G называют иногда *модулем* группы G . Если $\Delta_G \equiv 1$, то говорят, что группа G *унимодулярна*. В этом случае существует двусторонне инвариантная мера.

Задача 2. Докажите, что если группа G компактна, то мера Хаара конечна и двусторонне инвариантна.

Указание. В группе положительных чисел по умножению нет компактных подгрупп, отличных от $\{1\}$.

Во многих вопросах теории представлений удобнее иметь дело с унимодулярными группами.

Для каждой локально компактной группы G определим группы G_0 и G_1 следующим образом:

G_0 — ядро гомоморфизма Δ_G ;

G_1 — полупрямое произведение G и $\mathbf{R}$, ассоциированное с отображением $\Delta_G: G \rightarrow \text{Aut } \mathbf{R}$.

Задача 3. Докажите, что группы G_0 и G_1 — унимодулярны.

Приведем некоторые сведения о мерах на G -пространствах.

Теорема Глима¹⁾. Для метрически полных сепарабельных G -пространств X следующие свойства эквивалентны:

¹⁾ См.: Glimm J., Locally compact transformation groups, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 124—138.

1. Каждая G -орбита в X локально замкнута (т. е. является пересечением открытого и замкнутого множества).

2. Фактор-пространство X/G полуотделимо (т. е. удовлетворяет аксиоме T_0).

3. Существует счетное семейство G -инвариантных борелевских множеств в X , разделяющих любые две G -орбиты.

4. Каждая G -эргодическая борелевская мера на X сосредоточена на одной из орбит. (Напомним, что мера называется G -эргодической, если всякое G -инвариантное измеримое множество либо само имеет меру нуль, либо его дополнение имеет меру нуль.)

Если X — однородное G -пространство и G — локально компактная группа, то на X существует единственная с точностью до эквивалентности квазиинвариантная мера (т. е. мера, переходящая в эквивалентную при всех сдвигах). В случае, когда X имеет счетную базу, такая мера μ эквивалентна конечной и может быть определена равенством

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_G f(p(g)) dv(g),$$

где p — естественная проекция G на X , а v — конечная мера на G , эквивалентная мере Хаара.

Пусть для определенности $X = G/H$ — левое G -пространство, и s — такое борелевское отображение X в G , что $p \circ s = 1$ (для групп Ли такое отображение можно выбрать почти всюду гладким). Тогда каждый элемент из G однозначно записывается в виде

$$g = s(x)h, \quad x \in X, \quad h \in H, \quad (5)$$

и тем самым G отождествляется с $X \times H$.

Оказывается, что мера Хаара на G переходит при этом в меру, эквивалентную произведению квазиинвариантной меры на X и меры Хаара на H . Поэтому имеет место равенство

$$d_r g = \rho(x, h) d\mu(x) d_r h.$$

Действуя на обе части этого равенства правым сдвигом на элементы H , видим, что плотность $\rho(x, h)$ не зависит от h . Заменяя μ эквивалентной мерой, можно добиться, чтобы в качестве ρ выступала любая положительная функция от x .

Естественно выбрать ρ так, чтобы соответствующая мера μ наиболее просто преобразовывалась при сдвигах G -пространства X . Оказывается, что для этого нужно положить $\rho(x) = \Delta_G(s(x))$. Соответствующую меру обозначим μ_s (она зависит от выбора отображения s).

Задача 4. Докажите, что справедливы равенства

$$d_l g = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} d\mu_s(x) d_l h, \quad (6)$$

$$\frac{d\mu_s(gx)}{d\mu_s(x)} = \frac{\Delta_G(h(g, x))}{\Delta_H(h(g, x))}, \quad (7)$$

где $h(g, x)$ определяется из соотношения

$$gs(x) = s(gx) h(g, x). \quad (8)$$

Задача 5. Мера μ_s определяется с точностью до числового множителя соотношениями (7) и (8).

Задача 6. На пространстве $X = G/H$ существует G -инвариантная мера тогда и только тогда, когда

$$\Delta_G(h) = \Delta_H(h) \quad \text{для всех } h \in H. \quad (9)$$

Задача 7. Если условие (9) выполняется, то мера μ_s G -инвариантна и не зависит от выбора отображения s

Разумеется, все приведенные результаты переносятся и на правое G -пространство $Y = H \setminus G$. Приведем здесь соответствующие формулы:

$$g = hs(y), \quad h \in H, \quad y \in Y, \quad (5')$$

$$d_r g = \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} dv_s(y) d_r h, \quad (6')$$

$$\frac{dv_s(yg)}{dv_s(y)} = \frac{\Delta_H(h(y, g))}{\Delta_G(h(y, g))}, \quad (7')$$

где $h(y, g)$ определяется из соотношения

$$s(y)g = h(y, g)s(yg). \quad (8')$$

Иногда в группе G можно указать подгруппу K , дополнительную к H в том смысле, что почти каждый элемент G можно однозначно записать в виде

$$g = k \cdot h, \quad k \in K, \quad h \in H.$$

В этом случае естественно отождествить $X = G/H$ с K и в качестве отображения s взять вложение K в G . Несложная проверка показывает, что мера μ_s будет тогда левой мерой Хаара на K (так как $h(k_1, k_2) = e$). Формула (6) приобретает в этом случае вид

$$d_l g = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} d_l k d_l h. \quad (10)$$

Если G унимодулярна, это равенство можно переписать так:

$$dg = d_l k \cdot d_r h. \quad (11)$$

Доказательство теоремы Вейля и дальнейшие сведения об интегрировании на группах можно найти в книгах [8], [10]. Подробное изложение теории усредненных групп имеется в книге: Гринлиф Ф., Инвариантные средние на топологических группах, М., «Мир», 1973.

9.2. Применения к компактным группам. Пусть G — компактная группа и dg — мера Хаара на G , нормированная условием $\int_G dg = 1$.

Рассмотрим представление T группы G в полном локально выпуклом топологическом пространстве V . Через V_0 обозначим подпространство в V , состоящее из всех G -инвариантных векторов.

Теорема 1. Оператор

$$P = \int_G T(g) dg \quad (1)$$

перестановочен с операторами представления и является оператором проектирования на V_0 .

Прежде чем доказывать эту теорему, нужно объяснить, что означает интеграл (1).

Пусть X — пространство с мерой, f — функция на X со значениями в локально выпуклом пространстве L . Будем называть f слабо интегрируемой, если для любого $\chi \in L'$ скалярная функция $x \mapsto \langle \chi, f(x) \rangle$ интегрируется по мере μ . Слабым интегралом функции f по мере μ называется элемент пространства $(L')^*$ (алгебраически дуального к L'), обозначаемый $\int_X f(x) d\mu(x)$ и определяемый равенством

$$\left\langle \chi, \int_X f(x) d\mu(x) \right\rangle = \int_X \langle \chi, f(x) \rangle d\mu(x) \quad \text{для всех } \chi \in L'. \quad (2)$$

Можно показать, что $\int_X f(x) d\mu(x)$ принадлежит замкнутой выпуклой оболочке множества значений функции f на X (или на любом подмножестве полной меры в X). Мы считаем здесь пространство L вложенным в $(L')^*$: каждый элемент L можно рассматривать как линейный функционал на L' .

В частности, если X — компакт, а f — непрерывная функция, то интеграл $\int_X f(x) d\mu(x)$ является элементом L . Выражение (1) можно рассматривать как интеграл от функции на G со значениями в пространстве $\text{End } V$.

Задача 1. Докажите для любого $\xi \in V$ равенство

$$P\xi = \int_G T(g) \xi dg.$$

У к а з а н и е. Докажите равенство $\langle \chi, P\xi \rangle = \left\langle \chi, \int_G T(g) \xi dg \right\rangle$ для любого $\chi \in V'$, сравнив обе части с выражением $\int_G \langle \chi, T(g) \xi \rangle dg$.

Отсюда следует, в частности, что $P(\xi) = \xi$ для любого $\xi \in V_0$.

Задача 2. Если A — ограниченный оператор в V , то

$$AP = \int_G AT(g) dg, \quad PA = \int_G T(g) A dg.$$

У к а з а н и е. Для любых $\xi \in V$ и $\chi \in V'$

$$\langle \chi, AP\xi \rangle = \left\langle \chi, A \int_G T(g) \xi dg \right\rangle = \int_G \langle \chi, AT(g) \xi \rangle dg.$$

Утверждение теоремы 1 вытекает теперь из следующих соотношений:

$$T(g)P = \int_G T(g)T(g_1)dg_1 = \int_G T(gg_1)dg_1 = \int_G T(g_2)dg_2 = P,$$

$$PT(g) = \int_G T(g_1)T(g)dg_1 = \int_G T(g_1g)dg_1 = \int_G T(g_2)dg_2 = P.$$

Итак, усреднение по группе дает нам универсальный способ построения инвариантов группы: для любого вектора $\xi \in V$ вектор $P\xi = \int_G T(g)\xi dg$ является инвариантом и все инварианты получаются таким способом.

Выведем из этого результата несколько важных следствий, которые составляют основу теории представлений компактных групп.

Прежде всего покажем, что изучение любого представления в сильной степени сводится к изучению унитарных представлений. Пусть T — представление в линейном топологическом пространстве V . Если χ — линейный непрерывный функционал на V , то выражение

$$(\xi, \eta)_\chi = \int_G \langle \chi, T(g)\xi \rangle \overline{\langle \chi, T(g)\eta \rangle} dg \quad (3)$$

линейно по ξ , антилинейно по η , непрерывно по совокупности ξ и η и обладает свойством $(\xi, \xi)_\chi \geq 0$. Таким образом, на V возникает структура предгильбертова пространства (см. п. 4.1). Пусть H_χ — соответствующее гильбертово пространство и φ_χ — естественное отображение V в H_χ . В пространстве H_χ действует представление T_χ , которое получается факторизацией и продол-

жением по непрерывности из представления T . Из равенства $(T(g)\xi, T(g)\eta)_\chi = (\xi, \eta)_\chi$ следует, что T_χ унитарно.

Итак, для каждого функционала $\chi \in V'$ мы построили унитарное представление T_χ и сплетающий оператор $\varphi_\chi \in \mathcal{C}(V, H_\chi)$. Если пространство V локально выпукло, то пересечение ядер φ_χ для всех $\chi \in V'$ состоит из одного нуля. В этом случае исчерпывающая информация о представлении V может быть получена путем изучения унитарных представлений T_χ .

Задача 3. Пусть T топологически неприводимо и $\chi \neq 0$. Докажите, что φ_χ является непрерывным вложением V в H_χ , и представление T_χ также топологически неприводимо.

Задача 4. Всякое конечномерное представление компактной группы эквивалентно унитарному.

Пусть теперь T — унитарное представление компактной группы G в гильбертовом пространстве H .

Для любых $\xi, \eta \in H$ мы обозначим функцию $g \mapsto (T(g)\xi, \eta)$ через $t_{\xi, \eta}(g)$ и будем называть ее матричным элементом представления T . (Если ξ и η — элементы ортонормированного базиса в H , то $t_{\xi, \eta}(g)$ — соответствующий коэффициент матрицы оператора $T(g)$.)

Теорема 2. *Всякое топологически неприводимое унитарное представление T компактной группы G конечномерно. Его матричные элементы удовлетворяют условиям*

$$\int_G t_{\xi_1, \eta_1}(g) \overline{t_{\xi_2, \eta_2}(g)} dg = \frac{1}{\dim T} (\xi_1, \xi_2) \overline{(\eta_1, \eta_2)}. \quad (4)$$

Если T_1 и T_2 — два неэквивалентных неприводимых представления, то любой матричный элемент представления T_1 ортогонален в $L^2(G, dg)$ любому матричному элементу представления T_2 .

Доказательство. Левая часть равенства (4) линейна и непрерывна по ξ_1 . Поэтому она имеет вид (ξ_1, ξ) , где ξ — некоторый вектор из H , зависящий от ξ_2, η_1 и η_2 . При фиксированных η_1 и η_2 вектор ξ зависит от ξ_2 линейно и непрерывно. Поэтому $\xi = A\xi_2$, где A — некоторый оператор в H , зависящий от η_1 и η_2 . Равенство

$$t_{T(g)\xi, \eta}(g_1) = t_{\xi, \eta}(g_1 g)$$

показывает, что оператор A обладает свойством

$$(T(g)\xi_1, AT(g)\xi_2) = (\xi_1, A\xi_2)$$

для всех $g \in G$. Поэтому $A \in \mathcal{C}(T)$ и по теореме 1 из п. 7.3 $A = \lambda \cdot 1$. Разумеется, число λ зависит от η_1 и η_2 . Рассуждая аналогично, получаем, что зависимость λ от η_1 и η_2 имеет вид

$\lambda = c \overline{(\eta_1, \eta_2)}$. Итак, мы доказали равенство

$$\int_G t_{\xi_1, \eta_1}(g) \overline{t_{\xi_2, \eta_2}(g)} dg = c(\xi_1, \xi_2) \overline{(\eta_1, \eta_2)}, \quad (5)$$

где положительная константа c зависит только от представления T . Пусть теперь $e_1, \dots, e_n$ — любой ортонормированный набор векторов из H . Тогда

$$\sum_{i=1}^n |(T(g)\xi, e_i)|^2 \leq \|T(g)\xi\|^2 = \|\xi\|^2.$$

Поэтому для всех g

$$\sum_{i=1}^n |t_{\xi, e_i}(g)|^2 \leq \|\xi\|^2.$$

Интегрируя это неравенство по группе G и используя (5), получаем неравенство $cn\|\xi\|^2 \leq \|\xi\|^2$, т. е. $c \leq 1/n$. Отсюда, очевидно, вытекает конечномерность T . Если $\dim T = n$ и $e_1, \dots, e_n$ — базис в H , то рассмотренное выше неравенство превращается в равенство, и мы получаем $c = 1/n = 1/\dim T$. Доказательство последнего утверждения теоремы вполне аналогично доказательству соотношения (5). Единственное изменение состоит в том, что вместо равенства $\mathcal{C}(T) = C \cdot 1$ нужно воспользоваться равенством $\mathcal{C}(T_1, T_2) = 0$. Теорема доказана.

Соединяя полученный результат с результатом задачи 3, видим, что утверждение о конечномерности справедливо не только для унитарных неприводимых представлений, но и для любых топологически неприводимых представлений в пространствах, обладающих хотя бы одним ненулевым линейным непрерывным функционалом.

Следствие 1. *Всякое топологически неприводимое представление компактной группы в локально выпуклом пространстве конечномерно и эквивалентно унитарному.*

Следствие 2. *Для компактной группы G дуальное пространство $\hat{G}$ дискретно.*

Пусть топологическая группа G непрерывно действует на абелевой топологической группе M . Через $H_c^k(G, M)$ обозначим группу непрерывных k -мерных когомологий G с коэффициентами в M , т. е. фактор-группу группы $Z_c^k(G, M)$ непрерывных коциклов по подгруппе $B_c^k(G, M)$ кограниц непрерывных коцепей.

Отметим, что последняя группа может не совпадать с группой непрерывных кограниц — разрывный коцикл может иметь непрерывную кограницу.

Теорема 3. *Пусть G — компактная группа, V — линейное пространство, в котором G действует по некоторому представлению T , и V^G — совокупность G -инвариантных элементов в V .*

Тогда

$$H_c^k(G, V) = \begin{cases} 0 & \text{при } k > 0, \\ V^G & \text{при } k = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}^k$ — совокупность всех непрерывных функций на $G \times \dots \times G$ (k сомножителей) со значениями в V . Определим действие G в $\mathcal{F}^k$ по формуле

$$g: f(g_1, \dots, g_k) \mapsto T(g)f(g^{-1}g_1, \dots, g^{-1}g_k).$$

Очевидно, что совокупность G -инвариантных элементов в $\mathcal{F}^k$ совпадает с пространством $C_c^{k-1}(G, V)$ непрерывных $(k-1)$ -мерных коцепей группы G с коэффициентами в V . Оператор d естественно продолжается с $C_c^{k-1}(G, V)$ на $\mathcal{F}^k$, так что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}^1 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathcal{F}^k & \rightarrow & \mathcal{F}^{k+1} \rightarrow \mathcal{F}^{k+2} \rightarrow \dots \\ \uparrow i_1 & & & & \uparrow i_k & & \uparrow i_{k+1} \quad \uparrow i_{k+2} \\ C_c^0(G, V) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & C_c^{k-1}(G, V) & \rightarrow & C_c^k(G, V) \rightarrow C_c^{k+1}(G, V) \rightarrow \dots \end{array} \quad (6)$$

коммутативна. Здесь вертикальные стрелки i_k означают вложения.

Задача 5. Докажите, что верхняя строчка диаграммы (6) является точной последовательностью во всех членах, начиная с $k=2$.

Указание. Пусть $f \in \mathcal{F}^k$. Условие $df=0$ можно переписать в виде

$$(-1)^{k+1} f(g_0, g_1, \dots, g_{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i f(g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_k),$$

откуда $f=dh$, где $h(g_1, \dots, g_{k-1}) = (-1)^{k+1} f(g_1, \dots, g_k)$.

По теореме 1 диаграмму (6) можно дополнить проектированиями p_k пространства $\mathcal{F}^k$ на $C_c^{k-1}(G, V)$ так, что она останется коммутативной.

Покажем, что отсюда вытекает точность нижней строки начиная с $k=2$. В самом деле, если $z \in C_c^k(G, V)$ и $dz=0$, то $i_{k+2}dz=0$ и, значит, $di_{k+1}z=0$. Поэтому, $i_{k+1}z=dw$ для некоторого $w \in \mathcal{F}^k$. Тогда $dp_k w = p_{k+1} dw = p_{k+1} i_{k+1} z = z$. Случай $k=1$ разбирается аналогично и приводит к равенству $H^0(G, V) = V^G$.

Следствие 1. Если представление компактной группы приводимо и инвариантное подпространство дополняемо, то это представление разложимо.

Следствие 2. Всякое топологическое расширение компактной группы с помощью линейного пространства расщепимо.

Отметим, что доказательство теоремы 3 использовало, по существу, не компактность G , а лишь следствие этой компакт-

ности, выражаемое теоремой 1. Ниже мы увидим, что этот факт имеет место для конечномерных представлений полупростых групп. Отсюда будет вытекать справедливость следствий 1 и 2 для конечномерных представлений полупростых групп.

9.3. Применения к некомпактным группам. Часть результатов предыдущего пункта может быть перенесена на более общий случай.

Так, «унитаризация» представления T (т. е. построение пространств H_χ , представлений T_χ и сплетающих операторов Φ_χ) может быть проведена для любого ограниченного представления T усреднимой группы G . Для этого в качестве $(\xi, \eta)_\chi$ нужно взять инвариантное среднее ограниченной функции $g \mapsto \langle \chi, T(g)\xi \rangle \overline{\langle \chi, T(g)\eta \rangle}$.

Задача 1. Всякое ограниченное представление T усреднимой группы G в гильбертовом пространстве H эквивалентно унитарному.

Указание. Пусть A — инвариантное среднее от операторной функции $g \mapsto T(g)T(g)^*$. Докажите, что A — положительно определенный обратимый оператор и что $T_1(g) = A^{1/2}T(g)A^{-1/2}$ — унитарное представление.

Соотношения ортогональности матричных элементов (см. теорему 2 из п. 9.2) также допускают обобщение. Пусть G — локально компактная унимодулярная группа и T — ее унитарное неприводимое представление. Назовем T *квадратично интегрируемым*, если все его матричные элементы принадлежат $L^2(G, dg)$. (Несложно проверить, что T обладает этим свойством, если хотя бы один ненулевой матричный элемент лежит в $L^2(G, dg)$.)

Задача 2. Докажите, что для квадратично интегрируемых представлений справедливы соотношения

$$\int_G t_{\xi_1, \eta_1}(g) \overline{t_{\xi_2, \eta_2}(g)} dg = c(\xi_1, \xi_2) \overline{(\eta_1, \eta_2)}, \quad (1)$$

$$\int_G t_{\xi_1, \eta_1}(g) \overline{s_{\xi_2, \eta_2}(g)} dg = 0, \quad (2)$$

если T и S не эквивалентны.

Следствие. Сепарабельная локально компактная группа имеет не более счетного множества попарно не эквивалентных квадратично интегрируемых представлений.

Отметим, что константа c в равенстве (1) в компактном случае равна отношению объема группы (в смысле меры Хаара) к размерности представления. В некомпактном случае обе эти величины бесконечны, а их отношение c остается конечным. Величину c^{-1} называют формальной размерностью представления T . Для вещественных и p -адических полупростых групп Ли, обладающих квадратично интегрируемыми представлениями, можно так нормировать меру Хаара, чтобы все формальные размер-

ности оказались целыми. Аналогичное утверждение верно и для полупростых p -адических групп [156]. Для разрешимых групп этот факт не имеет места. К. Мур построил пример разрешимой группы Ли, для которой формальные размерности квадратично интегрируемых представлений пробегают множество вида $|m + \lambda n|$, где m и n — целые, а λ — иррациональное вещественное число (см. [220]).

Наиболее существенное применение инвариантного интегрирования в некомпактном случае состоит в конструкции для каждой локально-компактной группы достаточно большого запаса унитарных представлений. Мы скажем об этом подробнее в § 13, а здесь ограничимся следующим утверждением.

Теорема 1 (Гельфанд — Райков). *Всякая локально-компактная группа G обладает полной системой неприводимых унитарных представлений (т. е. для каждого элемента $g \neq e$ существует такое неприводимое унитарное представление T , что $T(g) \neq 1$).*

В полном объеме эта теорема будет доказана в § 10. Для сепарабельных групп она вытекает из разложения на неприводимые компоненты регулярного представления G , действующего в $L^2(G, d_1g)$ по формуле

$$[T(g)f](g_1) = f(g^{-1}g_1)$$

(см. теоремы 1 и 2 в п. 8.4).

§ 10. ГРУППОВЫЕ АЛГЕБРЫ

10.1. Групповое кольцо конечной группы. Пусть G — конечная группа. Обозначим $\mathbf{Z}[G]$ совокупность всех формальных линейных комбинаций элементов G с целыми коэффициентами. В $\mathbf{Z}[G]$ естественно определяются операции сложения и умножения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_i n_i g_i + \sum_i m_i g_i &= \sum_i (n_i + m_i) g_i, \\ \sum_i n_i g_i \cdot \sum_j m_j g_j &= \sum_{i,j} n_i m_j g_i g_j. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Возникающее таким образом кольцо называется *групповым кольцом* группы G . Ясно, что каждое линейное представление T группы G продолжается до представления ее группового кольца, если положить

$$T\left(\sum_i n_i g_i\right) = \sum_i n_i T(g_i). \quad (2)$$

Обратно, каждое невырожденное представление группового кольца (т. е. представление, при котором единица кольца пере-

ходит в единичный оператор) получается по формуле 2 из представления G .

Таким образом, теория представлений для группы G вполне эквивалентна теории $\mathbf{Z}[G]$ -модулей. Если нас интересуют представления G в линейных пространствах над полем K , естественно определить *групповую алгебру* $K[G]$ группы G над полем K , полагая $K[G] = \mathbf{Z}[G] \otimes K$. Элементы $K[G]$ можно рассматривать

либо как формальные линейные комбинации элементов G с коэффициентами из K , либо как функции на G со значениями в K . При второй интерпретации сложение в $K[G]$ является обычным сложением функций, а умножение задается формулой

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{g_1 g_2 = g} f_1(g_1) f_2(g_2) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g). \quad (3)$$

Функция $f_1 * f_2$ называется *сверткой* функций f_1 и f_2 .

Очевидно, что категория $\Pi(G, K)$ представлений G в линейных пространствах над полем K эквивалентна категории $K[G]$ -модулей.

Основные свойства представлений конечных групп выражает Теорема Машке. *Если характеристика поля K не делит порядка группы G , то алгебра $K[G]$ полупроста.*

Доказательство. В пространстве $K[G]$ можно определить инвариантное среднее, полагая

$$I(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

Поэтому для представлений группы G над полем K справедливы теоремы 1 и 3 из п. 9.2. В частности, всякое конечномерное представление группы G (а следовательно, и алгебры $K[G]$) является суммой неприводимых. Отсюда и из результата задачи 2 из п. 3.3 следует, что радикал $K[G]$ содержится в ядре любого конечномерного представления. Но представление $K[G]$ в самой алгебре $K[G]$ (левыми сдвигами) имеет нулевое ядро. Поэтому $K[G]$ полупроста.

Следствие. Алгебра $K[G]$ изоморфна произведению конечного числа алгебр вида $\text{Mat}_m(D)$, где D — конечномерное тело над K .

Это следует из общей теории конечномерных полупростых алгебр (см. п. 3.4). Для алгебраически замкнутого поля K справедливы более точный результат.

Теорема 2 (Бернсайда). Пусть G — конечная группа, k — число классов сопряженных элементов в G и K — алгебраически замкнутое поле. Тогда существует ровно k классов эквивалентности неприводимых представлений G . Их размерности

$n_i, i = 1, \dots, k$, связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^k n_i^2 = |G|. \quad (4)$$

Алгебра $K[G]$ изоморфна произведению $\prod_{i=1}^k \text{Mat}_{n_i}(K)$.

Доказательство. Пусть $T_1, \dots, T_r$ — полный набор парно не эквивалентных неприводимых представлений G . Продолжим представления T_i до представлений алгебры $K[G]$, т. е. положим

$$T_i(f) = \sum_{g \in G} f(g) T_i(g).$$

Задача 1. Отображение $f \mapsto \{T_i(f)\}_{1 \leq i \leq r}$ является эпиморфизмом $K[G]$ на алгебру $\prod_{i=1}^k \text{End } V_i$, где V_i — пространство представления T_i .

Указание. Воспользуйтесь соотношениями ортогональности (см. п. 9.2, теорема 2) для матричных элементов представлений T_i . Справедливость их вытекает из равенств $\mathcal{C}(T_i) = K$.

Покажем, что отображение задачи 1 является на самом деле изоморфизмом.

В самом деле, ядро этого отображения совпадает с радикалом $K[G]$ (см. задачу 2 из п. 3 § 3) и, следовательно, состоит из одного нуля.

Так как алгебра $\text{End } V_i$ изоморфна $\text{Mat}_{n_i}(K)$, мы доказали последнее утверждение теоремы.

Равенство (4) вытекает из сравнения размерностей $K[G]$ и $\prod_{i=1}^r \text{End } V_i$.

Остается доказать, что $r = k$.

Задача 2. Докажите, что функция $f \in K[G]$ принадлежит центру $K[G]$, если и только если она постоянна на каждом классе сопряженных элементов в G .

Таким образом, размерность центра алгебры $K[G]$ совпадает с числом k классов сопряженных элементов группы G .

С другой стороны, центр алгебры $\prod_{i=1}^r \text{Mat}_{n_i}(K)$, очевидно имеет размерность r (он состоит из наборов скалярных матриц).

Теорема 2 полностью доказана.

Структура групповых алгебр $K[G]$ для не алгебраически замкнутого поля достаточно хорошо изучена в случае, когда характеристика поля не делит порядок группы. Существенно сложнее изучение алгебр $K[G]$ для тех полей, которые не удовлетворяют этому условию, а также кольца $\mathbb{Z}[G]$ и его аналогов $R[G]$, где R — кольцо целых элементов некоторого числового поля.

С основными методами и результатами этой области теории представлений и их применениями к теориям конечных групп можно ознакомиться по книгам [34], [41].

10.2. Групповые алгебры топологических групп. Естественная попытка обобщить понятие групповой алгебры $K[G]$ на бесконечные группы приводит к нескольким не эквивалентным определениям.

Прежде всего, как и в конечном случае, можно рассматривать формальные линейные комбинации конечного числа элементов группы G с коэффициентами из K . Возникающая алгебра, которую мы по-прежнему обозначаем $K[G]$, является самым простым и непосредственным (но вовсе не самым удобным и полезным) обобщением понятия групповой алгебры.

Мы приведем для случая $K = \mathbb{C}$ некоторые более часто используемые варианты определения.

1. Алгебра $l^1(G)$ состоит из комплексных функций на G , удовлетворяющих условию

$$\|f\| = \sum_{g \in G} |f(g)| < \infty.$$

Закон умножения задается формулой

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g).$$

Задача 1. Докажите, что $l^1(G)$ — банахова алгебра с инволюцией относительно операции

$$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}.$$

Этот вариант определения, как и $K[G]$, имеет смысл для любой группы G . Недостатком его можно считать то, что возникающий объект отражает только алгебраическую структуру группы G и никак не связан с ее топологией.

2. Алгебра $M(G)$ состоит из комплексных борелевских мер на G . Норма в $M(G)$ имеет вид

$$\|\mu\| = |\mu|(G),$$

а операция свертки, играющая роль умножения, определяется формулой

$$\int_G f(g) d(\mu_1 * \mu_2)(g) = \int_G \int_G f(g_1 g_2) d\mu_1(g_1) d\mu_2(g_2)$$

для любой измеримой ограниченной функции f .

Задача 2. Докажите, что $M(G)$ является банаховой алгеброй с инволюцией $\mu \mapsto \mu^*$, определяемой равенством

$$\int_G f(g) d\mu^*(g) = \int_G \overline{f(g^{-1})} d\mu(g).$$

Через $M_0(G)$ обозначим подалгебру в $M(G)$, состоящую из регулярных борелевских мер с компактным носителем.

Задача 3. Докажите, что алгебра $L^1(G)$ изоморфна подалгебре в $M(G)$, состоящей из мер, сосредоточенных на счетном подмножестве.

3. Для локально компактной группы G можно определить структуру алгебры в пространстве $L^1(G, d_1g)$, где d_1g — левая мера Хаара. Свертка двух функций из $L^1(G, d_1g)$ задается формулой

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g) d_1h,$$

а инволюция имеет вид

$$f^*(g) = \Delta_G(g) \overline{f(g^{-1})}.$$

Задача 4. Докажите, что меры, абсолютно непрерывные относительно меры Хаара, образуют двусторонний идеал I в $M(G)$ и отображение

$$f \mapsto f(g) d_1g$$

является изоморфизмом алгебр $L^1(G, d_1g)$ и I .

Указание. Воспользуйтесь результатами § 9 п. 1.

4. Алгебра $C^*(G)$ (так называемая C^* -алгебра группы G) определяется как $C^*(L^1(G, d_1g))$ (см. п. 4.3). Она получается из алгебры $L^1(G, d_1g)$ пополнением по норме

$$\|f\|_1 = \sup_T \|T(f)\|,$$

где верхняя грань берется по всем $*$ -представлениям алгебры $L^1(G, d_1g)$ (и последующим присоединением единицы, если группа G не дискретна).

Рассмотрим теперь связь между представлениями группы G и представлениями ее групповых алгебр. Очевидно, что любое представление T группы G в линейном пространстве над полем K продолжается до представления $K[G]$ и всякое невырожденное представление $K[G]$ получается таким способом. Поэтому, как и для конечных групп, категория $\Pi(G, K)$ эквивалентна категории невырожденных $K[G]$ -модулей. Однако ввиду бóльшей сложности структуры $K[G]$ этот факт не играет такой роли, как в конечном случае.

Если представление T непрерывно и действует в полном локально выпуклом пространстве, то T можно продолжить до представления алгебры $M_0(G)$, полагая

$$T(\mu) = \int_G T(g) d\mu(g).$$

См. п. 9.2 по поводу определения операторных интегралов. Мы пользуемся тем фактом, что для локально выпуклого пространства V пространство $\text{End } V$ непрерывных операторов в V локально выпукло в сильной топологии и отображение $g \mapsto T(g)$ группы G в $\text{End } V$ непрерывно.

Если T — равномерно ограниченное представление группы G в рефлексивном банаховом пространстве V , то T продолжается до представления алгебры $M(G)$ следующим образом. Если $\xi \in V$ и $\chi \in V'$, то функция $g \mapsto \langle \chi, T(g)\xi \rangle$ непрерывна и ограничена. Поэтому существует интеграл

$$I_\mu(\xi, \chi) = \int_G \langle \chi, T(g)\xi \rangle d\mu(g). \quad (1)$$

Ясно, что $|I_\mu(\xi, \chi)| \leq C \cdot \|\xi\| \cdot \|\chi\| \cdot \|\mu\|$, где $C = \sup_{g \in G} \|T(g)\|$. Отсюда и из билинейности $I_\mu(\xi, \chi)$ легко выводится, что

$$I_\mu(\xi, \chi) = \langle \chi, T(\mu)\xi \rangle, \quad (2)$$

где $T(\mu)$ — некоторый линейный оператор в V с нормой $\leq C \|\mu\|$.

Задача 5. Докажите, что соответствие $\mu \mapsto T(\mu)$ является представлением (а если T унитарно, то $*$ -представлением) алгебры $M(G)$ в пространстве V .

Указание. Докажите равенства

$$I_{\mu_1 * \mu_2}(\xi, \chi) = I_{\mu_1}(T(\mu_2)\xi, \chi), \quad I_{\mu*}(\xi, \chi) = \overline{I_\mu(\chi, \xi)}.$$

Таким образом, всякое унитарное представление группы G порождает по формулам (1), (2) $*$ -представление алгебры $L^1(G, d_1g)$. Это представление продолжается до представления алгебры $C^*(G)$, которое мы также обозначим T . Алгебры $L^1(G, d_1g)$ и $C^*(G)$, в отличие от $K[G]$, $l^1(G)$ и $M(G)$, не содержат группы G . Поэтому возникает вопрос, восстанавливается ли исходное представление группы G по представлению групповой алгебры, и каждое ли представление групповой алгебры соответствует представлению группы?

Условимся называть невырожденным такое $*$ -представление алгебры $L^1(G, d_1g)$ или $C^*(G)$, в гильбертовом пространстве H , для которого векторы вида $T(f)\xi$, $f \in L^1(G, d_1g)$, $\xi \in H$ плотны в H .

Теорема 1. Представления T алгебры $L^1(G, d_1g)$ (или $C^*(G)$) порождается унитарным представлением группы G тогда и только тогда, когда оно невырождено. Если это условие выполнено, представление группы восстанавливается однозначно по порожденному им представлению групповой алгебры.

Доказательство. Пусть T — унитарное представление группы G в пространстве H и $\xi \in H$. Так как соответствие $g \mapsto T(g)\xi$ непрерывно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность единицы U_ε , что $\|T(g)\xi - \xi\| < \varepsilon$ для $g \in U_\varepsilon$. Если f — функция на группе с носителем в U_ε , удовлетворяющая

условию $\int_G f(g) d_l g = 1$, то $\|T(f)\xi - \xi\| < \varepsilon$, что и доказывает невырожденность T .

Предположим теперь, что T невырождено. Пусть $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$ — базис окрестностей точки $g \in G$. Рассмотрим семейство $\{f_\alpha\}$, $\alpha \in A$, функций на G , обладающих свойствами:

$$1) \quad f_\alpha(g) \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_G f_\alpha(g) d_l g = 1,$$

$$2) \quad f_\alpha(g) = 0 \quad \text{вне} \quad U_\alpha.$$

Множество A упорядочим, полагая $\alpha > \beta$, если $U_\alpha \subset U_\beta$. Покажем, что для всякого $\xi \in H$ существует предел $\lim_{\alpha \in A} T(f_\alpha)\xi$.

Поскольку $\|T(f_\alpha)\| \leq \|f_\alpha\| = 1$, достаточно доказать это для всюду плотного подмножества H_0 векторов вида $\xi = T(f)\eta$, где f — непрерывная функция на G с компактным носителем, а η — некоторый вектор из H . Из равномерной непрерывности f вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого α , выполняется соотношение $\|f_\alpha * f - L_g f\| < \varepsilon$. Здесь через $L_g f$ мы обозначим левый сдвиг функции f на g^{-1} : $L_g f(g_1) = f(g^{-1}g_1)$. Значит, направленность $T(f_\alpha)\xi = T(f_\alpha * f)\eta$ сходится к вектору $T(L_g f)\eta$. Определим оператор $T(g)$ сначала на H_0 по формуле

$$T(g)T(f)\eta = T(L_g f)\eta.$$

Из сказанного выше следует, что $\|T(g)\| \leq 1$ и, следовательно, оператор $T(g)$ продолжается по непрерывности на все пространство H .

Задача 6. Докажите, что построенные таким образом операторы $T(g)$ обладают свойствами:

$$1) \quad T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2), \quad 2) \quad T(g^{-1}) = T(g)^*, \quad 3) \quad T(e) = 1.$$

Указание. Если $\{U_\alpha\}$ — базис окрестностей g_1 , а $\{V_\alpha\}$ — базис окрестностей g_2 , то $\{U_\alpha V_\alpha\}$ — базис окрестностей $g_1 g_2$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что описанная здесь операция построения представления группы по невырожденному представлению алгебры обратна к операции, задаваемой формулой (1). Мы представим это читателю.

10.3. Применение групповых C^* -алгебр. Если G — сепарабельная локально-компактная группа, то пространство $L^1(G, d_l g)$ сепарабельно. Поэтому сепарабельна и алгебра $C^*(G)$. Это позволяет доказать теорему о разложении представлений, которую мы сформулировали в п. 8.4.

Пусть T — унитарное представление G в сепарабельном пространстве $H = \int_x H_x d\mu(x)$, и все операторы $T(g)$, $g \in G$ разложимы. Тогда разложимы и операторы $T(a)$, $a \in C^*(G)$. Пусть $\mathfrak{A}$ — счетное плотное подмножество в $C^*(G)$. Мы можем, очевидно, считать, что $\mathfrak{A}$ — алгебра над полем $\mathbf{Q}(i)$ комплексных рациональных чисел (добавляя, если нужно, к $\mathfrak{A}$ все многочлены с рациональными коэффициентами от элементов $\mathfrak{A}$).

Операторы $T(a)$, $a \in \mathfrak{A}$ разложимы и имеют вид

$$[T(a)f](x) = T_x(a)f(x).$$

Каждое из следующих соотношений (где $a, a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in \mathbf{Q}(i)$) выполняется почти всюду на X :

$$\begin{aligned} T_x(a_1 + a_2) &= T_x(a_1) + T_x(a_2), \\ T_x(a_1 a_2) &= T_x(a_1) T_x(a_2), \\ T_x(\lambda a) &= \lambda T_x(a), \\ T_x(a^*) &= T_x(a)^*. \end{aligned} \tag{1}$$

Поэтому, изменяя операторы $T_x(a)$ на множестве меры нуль, мы можем считать, что (1) выполняется всюду. Тогда соответствие $a \mapsto T_x(a)$ продолжается при каждом x по непрерывности до $*$ -представления T_x алгебры $C^*(G)$.

Задача 1. Докажите, что почти все представления T_x алгебры $C^*(G)$ невырождены.

Указание. Используйте невырожденность представления T и сепарабельность H .

Изменяя еще раз операторы $T_x(a)$ на множестве меры нуль, мы можем считать все представления T_x невырожденными. Тогда по теореме 1 из п. 10.2 они порождаются унитарными представлениями группы G в H_x , которые также обозначим T_x .

Задача 2. Докажите, что представление T группы G является непрерывной суммой представлений T_x по мере μ на X .

Указание. Равенства $[T(g)f](x) = T_x(g)f(x)$ достаточно проверить для векторов f вида $f = T(a)f_1$, где $a \in \mathfrak{A}$.

Для несепарабельных групп утверждения о разложимости представления в непрерывную сумму и о разложимости каждого из операторов представления, по-видимому, не эквивалентны.

Однако для любых локально компактных групп справедлива **Теорема 1 (Гельфанд — Райков).** *Всякое унитарное представление T локально компактной группы G может быть разложено в непрерывную сумму неприводимых представлений.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать T циклическим представлением. Пусть ξ — его источник. Тогда ξ будет источником и для соответствующего представления

алгебры $C^*(G)$. Положим $\varphi_\xi(a) = (T(a)\xi, \xi)$. Это — положительный функционал на $C^*(G)$. Совокупность всех положительных функционалов на $C^*(G)$, удовлетворяющих условию $\varphi(1) = \|\xi\|^2$, образует компактное выпуклое множество K в $C^*(G)'$. По теореме Шоке (см. п. 4.1) функционал φ_ξ можно записать в виде

$$\varphi_\xi(a) = \int_X \varphi_x(a) d\mu(x),$$

где X — множество крайних точек компакта K , а μ — некоторая борелевская мера на X . Пусть T_x — представление $C^*(G)$, соответствующее функционалу φ_x , и H_x — пространство представления T_x .

Задача 3. Докажите, что представление T алгебры $C^*(G)$ является непрерывной суммой представлений T_x по мере μ .

Указание. Пусть ξ_x — источник в H_x . Искомый изоморфизм между пространством H представления T и $\int_X H_x d\mu(x)$ сопоставляет вектору $T(a)\xi \in H$ вектор-функцию $\xi(x) = T_x(a)\xi_x$ (ξ_x — источник в H_x).

Каждый из функционалов φ_x либо соответствует невырожденному представлению $C^*(G)$, либо имеет вид $\varphi_0(\lambda \cdot 1 + a) = \lambda \|\xi\|^2$, где a принадлежит замыканию $L^1(G, d_l g)$ в $C^*(G)$. Легко сообразить, что точка φ_0 имеет нулевую меру μ (в противном случае было бы вырождено представление T алгебры $C^*(G)$).

В силу теоремы 1 п. 10.2 представление T_x алгебры $C^*(G)$ порождается некоторым представлением (которое мы обозначим также T_x) группы G .

Задача 4. Докажите, что представление T группы G является непрерывной суммой представлений T_x по мере μ .

Указание. Равенство $[T(g)f](x) = T_x(g)f(x)$ достаточно проверить на плотном подмножестве в H , состоящем из векторов вида $T(a)f$, где a — непрерывная функция на G с компактным носителем.

Перейдем теперь к применениям, связанным с топологией множества $\hat{G}$. Для всякой C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ можно ввести топологию в множество $\hat{\mathfrak{A}}$ классов эквивалентности неприводимых *-представлений $\mathfrak{A}$.

Два способа введения топологии в $\hat{\mathfrak{A}}$ вполне аналогичны описанным в § 7 способам введения топологии в пространстве $\hat{G}$. Согласно первому способу окрестность точки $[T] \in \hat{\mathfrak{A}}$ определяется числом $\varepsilon > 0$, конечным набором векторов $\xi_1, \dots, \xi_n$ из пространства представления T и конечным набором $a_1, \dots, a_m$ элементов $\mathfrak{A}$. Эта окрестность состоит из классов эквивалентности тех представлений S , в пространствах которых суще-

ствуют такие векторы $\eta_1, \dots, \eta_n$, что

$$|(T(a_i)\xi_k, \xi_l) - (S(a_i)\eta_k, \eta_l)| < \varepsilon$$

для всех $i \in [1, m]$, $k \in [1, n]$, $l \in [1, n]$.

Второй способ основан на понятии «слабо содержится». Каждому (в том числе и приводимому) представлению T алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве H сопоставим замкнутое подпространство $V(T) \subset \mathfrak{X}'$, порожденное функционалами вида $a \mapsto (T(a)\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in H$. Будем говорить, что представление T *слабо содержится* в семействе представлений $\mathcal{P}$, если $V(T)$ содержится в замыкании подпространства, порожденного всеми $V(S)$, $S \in \mathcal{P}$. Точка $[T] \in \hat{\mathfrak{A}}$ входит в замыкание множества $X \subset \hat{\mathfrak{A}}$, если представление T слабо содержится в семействе всех представлений, классы которых принадлежат X .

Отметим, что эквивалентное определение получится, если заменить пространство $V(T)$ конусом $V_+(T)$ положительных функционалов, содержащихся в $V(T)$.

Третье определение основано на том, что в множестве всех простых двусторонних идеалов любой алгебры можно ввести так называемую *топологию Джекобсона*. Замыкание множества идеалов M в этой топологии состоит из всех идеалов J , содержащих идеал $J_M = \bigcap_{J \in M} J$.

Напомним, что идеал J называется *простым*, если из соотношения $J \supset J_1 J_2$ следует $J \supset J_1$ или $J \supset J_2$. Если $\mathfrak{A}$ — C^* -алгебра и T — ее неприводимое представление, то ядро этого представления является простым двусторонним идеалом в $\mathfrak{A}$.

Оказывается, что все три способа приводят к эквивалентным топологиям в множестве $\hat{\mathfrak{A}}$. В случае, когда $\mathfrak{A} = C^*(G)$ и G не дискретна, множество $\hat{\mathfrak{A}}$ естественно отождествляется с $\hat{G} \cup [T_0]$, где T_0 — вырожденное представление $C^*(G)$, аннулирующее $L^1(G, d_1 g)$ (см. п. 10.2, теорема 1).

Это отождествление задает гомеоморфизм множества всех невырожденных представлений $\mathfrak{A}$ на множество $\hat{G}$.

Доказательство всех приведенных выше утверждений можно найти в книге [24].

10.4. Групповые алгебры групп Ли. В случае, когда G — группа Ли, в алгебре $L^1(G, d_1 g)$ можно выделять различные подалгебры, накладывая на функции f требования гладкости (вплоть до аналитичности) и быстрого убывания на бесконечности (вплоть до финитности). Если группа G компактна, то существует наиболее узкая из таких алгебр, а именно, алгебра, порожденная матричными элементами неприводимых представлений. Для некомпактных групп наиболее часто используется

алгебра $C_0^\infty(G)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций.

С другой стороны, для групп Ли можно определить алгебру более широкую, чем $M_0(G)$. Пусть $C^\infty(G)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на G с топологией равномерной сходимости на компактах. Известно, что $C^\infty(G)$ — счетно нормированное ядерное пространство, и что топологическое тензорное произведение $C^\infty(G) \hat{\otimes} C^\infty(G)$ естественно отождествляется с $C^\infty(G \times G)$. Пространство $R(G)$, сопряженное к $C^\infty(G)$, состоит из обобщенных функций с компактным носителем.

Для каждого $\chi \in R(G)$ существует наименьший компакт K , обладающий свойством $\langle \chi, \varphi \rangle = 0$ для всех $\varphi \in C^\infty(G)$, равных нулю вместе со всеми производными на K . Этот компакт K называется носителем χ и обозначается $\text{supp } \chi$. Пространство $M_0(G)$ вкладывается в $R(G)$: каждой мере μ соответствует функционал $\varphi \mapsto \int_G \varphi(g) d\mu(g)$.

Задача 1. Проверьте, что символ $\text{supp } \mu$ обозначает одно и то же множество, независимо от того, рассматривается ли μ как элемент $M_0(G)$ или как элемент $R(G)$.

Определим теперь *свертку* в $R(G)$, полагая $\langle \chi_1 * \chi_2, \varphi \rangle = \langle \chi_1, \psi \rangle$, где $\psi(g) = \langle \chi_2, L_g^{-1} \varphi \rangle$, а оператор L_g имеет вид $[L_g \varphi](g_1) = \varphi(g^{-1}g_1)$.

Задача 2. Докажите, что на подпространстве $M_0(G) \subset R(G)$ операция свертки совпадает с введенной в п. 10.2.

Задача 3. Докажите соотношение

$$\text{supp } (\chi_1 * \chi_2) \subset \text{supp } \chi_1 \cdot \text{supp } \chi_2.$$

У к а з а н и е. Если функция φ обращается в нуль со всеми производными на множестве $\text{supp } \chi_1 \cdot \text{supp } \chi_2$, то функция $\psi(g) = \langle \chi_2, L_g^{-1} \varphi \rangle$ обращается в нуль со всеми производными на множестве $\text{supp } \chi_1$.

Следствием этого утверждения является тот факт, что совокупность $R(G, K)$ обобщенных функций на G с компактными носителями, принадлежащими подгруппе K , является подалгеброй в $R(G)$. Структура алгебр $R(G, K)$ еще мало исследована, за исключением случая $K = \{e\}$ (см. ниже).

Особый интерес представляет случай, когда G — полупростая группа Ли, а K — ее максимальная компактная подгруппа. Многие глубокие результаты, полученные в последние годы в теории представлений полупростых групп, тесно связаны с алгебраической структурой алгебры $R(G, K)$.

Алгебра $R(G, \{e\})$ полностью определяется по сколь угодно малой окрестности единицы в группе G . Поэтому она может быть восстановлена по алгебре Ли $\mathfrak{g}$ этой группы (см. § 6).

Обозначим $U(\mathfrak{g})$ так называемую *обертывающую алгебру* для алгебры $\mathfrak{g}$. По определению, $U(\mathfrak{g})$ является фактор-алгеброй тензорной алгебры $T(\mathfrak{g})$ (см. п. 3.5), по двустороннему идеалу J , порожденному элементами вида

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1)$$

Задача 4. Докажите, что естественное вложение $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ является универсальным объектом в категории всех отображений ψ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в ассоциативные алгебры, обладающих свойством

$$\psi([X, Y]) = \psi(X)\psi(Y) - \psi(Y)\psi(X). \quad (2)$$

(Морфизмами этой категории являются коммутативные диаграммы вида

$$\left(\begin{array}{ccc} & & A_1 \\ & \nearrow \psi_1 & \downarrow \alpha \\ \mathfrak{g} & & A_2 \\ & \searrow \psi_2 & \\ & & \end{array} \right), \text{ где } \alpha - \text{гомоморфизм } A_1 \text{ в } A_2.$$

Теорема 1 (Л. Шварц). Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G . Алгебра $R(G, \{e\})$ изоморфна $U(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Реализуем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ левоинвариантными векторными полями на G и рассмотрим отображение $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow R(G)$, определенное формулой

$$\langle \psi(X), f \rangle = (Xf)(e). \quad (3)$$

Ясно, что $\psi(X)$ принадлежит $R(G, \{e\})$.

Задача 5. Докажите, что отображение ψ обладает свойством (2) из задачи 4.

Указание. Проверьте, что $\langle \psi(X) * \psi(Y), f \rangle = (XYf)(e)$, и воспользуйтесь четвертым определением коммутатора $[X, Y]$ в п. 6.3.

В силу задачи 4 существует гомоморфизм $\bar{\psi}$ алгебры $U(\mathfrak{g})$ в $R(G, \{e\})$, продолжающий отображение ψ . Легко установить, что этот гомоморфизм $\bar{\psi}$ переводит элемент $X_1 \otimes \dots \otimes X_n \bmod J \in U(\mathfrak{g})$ в обобщенную функцию

$$f \mapsto (X_1 \dots X_n f)(e).$$

Покажем, что $\bar{\psi}$ является изоморфизмом. Для этого введем фильтрацию в $U(\mathfrak{g})$ и $R(G, \{e\})$ и покажем, что $\bar{\psi}$ сохраняет фильтрацию и порождает изоморфизм соответствующих градуированных алгебр $\text{gr } U(\mathfrak{g})$ и $\text{gr } R(G, \{e\})$. Отсюда без труда выводится, что $\ker \bar{\psi} = 0$ и $\text{im } \bar{\psi} = R(G, \{e\})$, т. е. $\bar{\psi}$ — изоморфизм.

Фильтрация в $U(\mathfrak{g})$ возникает из градуировки в $T(\mathfrak{g})$.

$$U_k(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{l=0}^k T^l(\mathfrak{g}) \bmod J.$$

Задача 6. Докажите, что алгебра $\text{gr } U(\mathfrak{g})$ изоморфна симметрической алгебре $S(\mathfrak{g})$ (см. п. 3.5).

Фильтрацию в $R(G, \{e\})$ определим следующим образом. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — базис в $\mathfrak{g}$. Введем в окрестности единицы группы G соответствующую каноническую систему координат (см. п. 6.4): точка $\exp(x_1 X_1 + \dots + x_n X_n)$ имеет координаты $x_1, \dots, x_n$.

Всякий элемент $\chi \in R(G, \{e\})$ имеет вид

$$f \mapsto \sum c_{k_1, \dots, k_n} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(0) \quad (4)$$

(конечная сумма). Обозначим $R_k(G, \{e\})$ подпространство в $R(G, \{e\})$, состоящее из таких элементов χ , для которых в записи формулы (4) коэффициенты $c_{k_1, \dots, k_n}$ равны нулю при $k_1 + \dots + k_n > k$.

Задача 7. Докажите, что $\{R_k(G, \{e\})\}$ — фильтрация в $R(G, \{e\})$ и что алгебра $\text{gr } R(G, \{e\})$ изоморфна алгебре $\mathbb{C} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right]$.

Указание. Поставим в соответствие каждому элементу $\chi \in R_k(G, \{e\})$, имеющему вид (4), выражение

$$[\chi] = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} c_{k_1, \dots, k_n} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Докажите, что $[\chi_1 * \chi_2] = [\chi_1][\chi_2]$.

Фильтрации в $U(\mathfrak{g})$ и $R(G, \{e\})$ обладают свойством: $\bar{\psi}(U_k(\mathfrak{g})) \subset R_k(G, \{e\})$. В самом деле, для $k=1$ это очевидно, а для остальных k это следует из того, что $\bar{\psi}$ — гомоморфизм. Поэтому $\bar{\psi}$ порождает гомоморфизм $\text{gr } \bar{\psi}: \text{gr } U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gr } R(G, \{e\})$. Из определения канонической системы координат легко вывести, что

$$\bar{\psi}(X_k) : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(0).$$

Поэтому $\text{gr } \bar{\psi}(X_k) = \partial/\partial x_k$ и, следовательно, $\text{gr } \bar{\psi}$ — изоморфизм. Теорема доказана.

Алгебраическая структура $U(\mathfrak{g})$ играет большую роль в теории представлений соответствующей группы.

Много информации об этой структуре можно получить из сравнения $U(\mathfrak{g})$ с коммутативной алгеброй $\text{gr } U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. Для каждого подпространства $L \subset U(\mathfrak{g})$ мы обозначим через $\text{gr } L$ подпространство в $\text{gr } U(\mathfrak{g})$, порожденное элементами вида $\text{gr}^k X$, $X \in L \cap U_k(\mathfrak{g})$ (см. п. 3.1).

Ясно, что если L — подалгебра в $U(\mathfrak{g})$, то $\text{gr } L$ — подалгебра в $\text{gr } U(\mathfrak{g})$.

Мы применим этот метод для описания центра $Z(\mathfrak{g})$ алгебры $U(\mathfrak{g})$.

Продолжим присоединенное представление Ad группы G в $\mathfrak{g}$ (см. п. 6.3) до представления $\widetilde{\text{Ad}}$ в пространстве $U(\mathfrak{g})$. (Это продолжение однозначно определяется из условия, что $\widetilde{\text{Ad}} g$ — автоморфизм алгебры $U(\mathfrak{g})$.)

Теорема 2. (И. М. Гельфанд). Пусть G — связная группа Ли. Тогда подпространство $\text{gr } Z(\mathfrak{g}) \subset \text{gr } U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ совпадает с подпространством G -инвариантных элементов в $S(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Рассмотрим линейное отображение $\sigma: S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$, называемое *симметризацией*, и переводящее $X_1 \dots X_k \in S^k(\mathfrak{g})$ в

$$\frac{1}{k!} \sum_s X_{s(1)} \dots X_{s(k)} \in U(\mathfrak{g})$$

(сумма по всем перестановкам s индексов $1, 2, \dots, k$).

Утверждение теоремы выведем из следующего факта, который имеет и другие приложения.

Задача 8. Отображение σ перестановочно с действием группы G и является изоморфизмом линейных пространств $S(\mathfrak{g})$ и $U(\mathfrak{g})$.

Указание. Пространство $S(\mathfrak{g})$ порождается элементами вида X^k , $X \in \mathfrak{g}$. Второе утверждение вытекает из задачи 6.

Покажем теперь, что для связной группы Ли совокупность G -инвариантных элементов в $U(\mathfrak{g})$ совпадает с $Z(\mathfrak{g})$. В самом деле, поскольку G порождается любой окрестностью единицы, для G -инвариантности элемента достаточно его инвариантности относительно одномерных подгрупп $\exp tX$, $X \in \mathfrak{g}$. А это в свою очередь равносильно аннулированию этого элемента всеми операторами соответствующего представления алгебры Ли.

Задача 9. Представление $\widetilde{\text{ad}}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $U(\mathfrak{g})$, соответствующее представлению $\widetilde{\text{Ad}}$ группы G , имеет вид

$$\widetilde{\text{ad}} X: Y \mapsto XY - YX, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad Y \in U(\mathfrak{g}). \quad (5)$$

Указание. Воспользуйтесь тем, что $\widetilde{\text{ad}} X$ — дифференцирование алгебры $U(\mathfrak{g})$.

Условие $(\widetilde{\text{ad}} X)Y = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$, равносильно, как легко видеть, условию $Y \in Z(\mathfrak{g})$.

Теорема Гельфанда вытекает из задач 8, 9 и легко проверяемого тождества

$$\text{gr}^k(\sigma(X)) = X \quad \text{для} \quad X \in S^k(\mathfrak{g}).$$

Очень интересным и еще мало изученным объектом является тело отношений $D(\mathfrak{g})$ алгебры $U(\mathfrak{g})$ (так называемое тело Ли). Так как алгебра $U(\mathfrak{g})$ некоммутативна, само определение $D(\mathfrak{g})$ не очевидно.

Чтобы сформулировать это определение, нам понадобятся некоторые приготовления.

Задача 10. Докажите, что в алгебре $U(\mathfrak{g})$ нет делителей нуля: если $X \neq 0$ и $Y \neq 0$, то $XY \neq 0$.

Указание. Воспользуйтесь аналогичным свойством алгебры $\text{gr } U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$.

Задача 11. Всякая строго возрастающая последовательность левых (правых) идеалов в $U(\mathfrak{g})$ конечна.

Указание. Докажите, что для каждого идеала $I \subset U(\mathfrak{g})$ множество $\text{gr } I$ является идеалом в $\text{gr } U(\mathfrak{g})$. Алгебра $\text{gr } U(\mathfrak{g})$ изоморфна алгебре многочленов от $n = \dim \mathfrak{g}$ переменных и для нее, как хорошо известно, всякая строго возрастающая цепочка идеалов имеет конечную длину.

Задача 12. Любые два элемента $X \neq 0$, $Y \neq 0$ из $U(\mathfrak{g})$ имеют ненулевое общее левое (правое) кратное.

Указание. Рассмотрите цепочку $\{J_k\}$, где J_k — левый идеал, порожденный элементами $X, XY, \dots, XY^k$, и воспользуйтесь задачами 10 и 11.

Теперь мы в состоянии определить тело Ли $D(\mathfrak{g})$. Рассмотрим совокупность всех выражений вида XY^{-1} и $Y^{-1}X$, где $X, Y \in U(\mathfrak{g})$ и $Y \neq 0$. Будем называть их правыми и левыми дробями соответственно. Будем говорить, что левая дробь $Y_1^{-1}X_1$ эквивалентна правой дроби $X_2Y_2^{-1}$, если $X_1Y_2 = Y_1X_2$. Две левые (правые) дроби назовем эквивалентными, если они эквивалентны одной и той же правой (левой) дроби.

Предоставим читателю убедиться в том, что введенное отношение эквивалентности симметрично, рефлексивно и транзитивно.

Определим тело Ли $D(\mathfrak{g})$ как множество классов эквивалентных дробей. Из результата задачи 12 вытекает, что в каждом таком классе есть и правые и левые дроби.

Операции в $D(\mathfrak{g})$ определяются следующим образом.

Пусть $X_1Y_1^{-1}$ и $X_2Y_2^{-1}$ — представители классов a_1 и a_2 из $D(\mathfrak{g})$. Элементы Y_1 и Y_2 имеют ненулевое общее левое кратное: $Z = Z_1Y_1 = Z_2Y_2$. Очевидно, дробь $X_1Y_1^{-1}$ эквивалентна $X_1Z_1Z^{-1}$, а дробь $X_2Y_2^{-1}$ эквивалентна $X_2Z_2Z^{-1}$. Определим сумму $a_1 + a_2$ как класс эквивалентности дроби $(X_1Z_1 + X_2Z_2)Z^{-1}$, и отношение $a_1a_2^{-1}$ как класс эквивалентности дроби $X_1Z_1(X_2Z_2)^{-1}$. Остальные арифметические операции выражаются через введенные: $a_1a_2 = a_1(a_2^{-1})^{-1}$, $a_1 - a_2 = a_1 + (-1)a_2$. Проверка корректности этих определений несложна, и мы ее опустим.

Существует гипотеза о том, что для любой алгебраической группы G тело $D(\mathfrak{g})$ изоморфно телу отношений $D_{n,k}$ алгебры $R_{n,k}$, описанной в п. 3.5. Это значит, что образующие алгебры $\mathfrak{g}$ связаны взаимно однозначным бирациональным преобразованием с каноническими образующими $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_k$ алгебры $R_{n,k}$. Числа n и k имеют простую интерпре-

тацию на языке теории представлений: типичное неприводимое представление группы G зависит от k параметров и реализуется в пространстве функций от n переменных.

Доказательство сформулированной выше гипотезы для некоторых частных случаев и другие сведения о теле Ли можно прочитать в статьях И. М. Гельфанда и автора [73], [74].

Для разрешимых комплексных алгебр Ли справедливость гипотезы была независимо установлена Мак Коннелом [218] и Джозефом [187]. Исследование тела частных обертывающих алгебры и их факторалгебр в последние годы существенно продвинулось. С современным состоянием этого вопроса можно познакомиться по обзору Вальтера Борхо [148].

10.5. Представления групп Ли и их групповых алгебр. Каждое представление T группы Ли G в полном локально выпуклом пространстве V продолжается до представления алгебры $M_0(G)$.

Если V — банахово пространство и T — локально ограниченное представление (т. е. нормы операторов $T(g)$ ограничены на каждом компакте в G), то представление группы G однозначно восстанавливается по представлению подалгебры $C_0^\infty(G) \subset M_0(G)$. Эти утверждения получаются без труда из теоремы 1 п. 1 и ее доказательства.

Если представление T конечномерно, то отображение $g \mapsto T(g)$ является аналитической операторной функцией на G (см. п. 6.4). Поэтому представление T может быть продолжено до представления алгебры $R(G)$ по формуле

$$\langle \eta, T(\chi) \xi \rangle = \langle \chi, t_{\xi, \eta} \rangle, \quad (1)$$

где $t_{\xi, \eta}(g) = \langle \eta, T(g) \xi \rangle$ — матричный элемент представления T , соответствующий векторам $\xi \in V$ и $\eta \in V^*$.

Для бесконечномерных представлений ситуация сложнее. Матричные элементы таких представлений непрерывны (по определению представления), но не обязательно гладки. Например, для регулярного представления T группы $\mathbf{R}$, действующего в пространстве $L^2(\mathbf{R}, dx)$ по формуле

$$[T(s)\xi](x) = \xi(x+s),$$

матричный элемент $t_{\xi, \eta}$ имеет вид

$$t_{\xi, \eta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x+s) \overline{\eta(x)} dx,$$

где ξ, η — любые функции из $L^2(\mathbf{R}, dx)$.

Задача 1. Докажите, что $t_{\xi, \eta}$ может быть любой кусочно-линейной непрерывной финитной функцией.

Указание. Рассмотрите случай, когда функции ξ и η кусочно-постоянны и финитны.

На этом же примере видно, что определение оператора $T(\chi)$ по формуле (1) имеет смысл в более узком пространстве, для векторов которого соответствующие матричные элементы принадлежат $C^\infty(G)$.

Пространством Гординга представления T группы Ли G , действующего в полном локально выпуклом пространстве V , называется подпространство $V^\infty \subset V$, состоящее из таких векторов $\xi \in V$, что матричный элемент $l_{\xi, \eta}(g) = \langle \eta, T(g)\xi \rangle$ принадлежит $C^\infty(G)$ для любого $\eta \in V'$.

Задача 2. Докажите, что пространство Гординга изоморфно $\text{Hom}_G(V', C^\infty(G))$, если определить действие G в V' согласно представлению T' , сопряженному к T , а в $C^\infty(G)$ — с помощью левых сдвигов $L(g)$.

Указание. Каждому $\xi \in V^\infty$ соответствует отображение $\eta \mapsto l_{\xi, \eta}$ пространства V' в $C^\infty(G)$.

Так как пространство $C^\infty(G)$ ядерно, можно отождествить $\text{Hom}(V', C^\infty(G))$ с топологическим тензорным произведением $V \hat{\otimes} C^\infty(G)$, а пространство $\text{Hom}_G(V', C^\infty(G))$ — с $V_G \hat{\otimes} C^\infty(G)$. Таким образом, можно рассматривать пространство Гординга V^∞ как подпространство G -инвариантных элементов в пространстве $V \hat{\otimes} C^\infty(G)$ бесконечно дифференцируемых V -значных функций на G . Определим в V^∞ топологию, наследуемую из $V \hat{\otimes} C^\infty(G)$. Другими словами, будем считать, что направленность ξ_α сходится к ξ , если направленность вектор-функций $g \mapsto T(g)\xi_\alpha$ сходится к вектор-функции $g \mapsto T(g)\xi$ вместе со всеми производными равномерно на каждом компакте в G .

Каждое представление T группы Ли G в полном локально выпуклом пространстве V порождает представление алгебры $R(G)$ в пространстве Гординга V^∞ по формуле (1). Обозначим это представление T^∞ . Ограничение его на $R(G, \{e\}) = U(g)$ является представлением алгебры $U(g)$.

В приведенном выше примере пространство Гординга состоит из тех бесконечно дифференцируемых функций на прямой, у которых все производные принадлежат $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

Теорема 1 (Гельфанд — Гординг). Для любого представления T группы Ли G в полном локально выпуклом пространстве V пространство Гординга V^∞ плотно в V .

Доказательство основано на очень полезном и часто используемом приеме *сглаживания*. Назовем *сглаживающим оператором* в пространстве V всякий оператор вида

$$T(\varphi) = \int_G \varphi(g) T(g) dg,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $\varphi \geq 0$ и $\int_G \varphi(g) dg = 1$.

Покажем, что всякий сглаживающий оператор переводит пространство V в V^∞ . Это вытекает из следующего факта, имеющего многочисленные приложения.

Задача 3. Пусть ψ — обобщенная функция на группе G (т. е. линейный непрерывный функционал на пространстве C_0^∞) и $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Тогда функция

$$\psi * \varphi(g) = \langle \psi, L(g)\varphi \rangle$$

принадлежит $C^\infty(G)$.

Указание. Докажите тождество

$$R(g)(\psi * \varphi) = \psi * R(g)\varphi, \quad (2)$$

где $[R(g)\varphi](g_1) = \varphi(g_1g)$, и выведите из него, что исследуемая функция $\psi * \varphi$ дифференцируема, и ее производная вдоль левоинвариантного поля X задается равенством $X(\psi * \varphi) = \psi * X\varphi$ (см. п. 6.3, задача 5).

Для завершения доказательства теоремы 1 остается заметить, что множество «сглаженных» векторов вида $T(\varphi)\xi$ плотно в V . В самом деле, если U — любая выпуклая окрестность точки ξ в V , то из непрерывности T следует, что $T(g)\xi \in U$ для всех g из некоторой окрестности W единицы в группе G . Тогда $T(\varphi)\xi \in U$, если φ равна нулю вне W , $\varphi \geq 0$ и $\int_G \varphi(g) dg = 1$.

Следствие. Если V конечномерно, то $V^\infty = V$.

Задача 4. Докажите, что $(V^\infty)^\infty = V^\infty$.

Указание. Воспользуйтесь изоморфизмом

$$C^\infty(G) \hat{\otimes} C^\infty(G) \approx C^\infty(G \times G)$$

и вытекающим из него изоморфизмом

$$C^\infty(G) \hat{\otimes} C^\infty(G) \approx C^\infty(G).$$

Задача 5. Пусть T_1 и T_2 — два представления группы G в полных локально выпуклых пространствах V_1 и V_2 . Докажите, что если $A \in \mathcal{C}(T_1, T_2)$, то $AV_1^\infty \subset V_2^\infty$.

Указание. Воспользуйтесь соотношением $t_{A\xi}^{(2)} = t_{\xi, A'\eta}^{(1)}$ для $\xi \in V_1$; $\eta \in V_2'$.

Отметим, что теорема 1 может быть выведена из задачи 5 и того, что $C_0^\infty(G)$ содержится в пространстве Гординга левого регулярного представления G .

Иногда вместо пространства Гординга V^∞ рассматривают более узкое пространство V^ω *аналитических векторов* в пространстве V .

По определению, вектор $\xi \in V$ принадлежит V^ω , если вектор-функция $g \mapsto T(g)\xi$ аналитична на G . Для представлений в банаховых пространствах можно доказать, что V^ω плотно в V . Доказательство, как и в случае пространства Гординга, осно-

вано на технике сглаживающих операторов $T(\varphi)$, где φ — аналитическая функция на G , «почти сосредоточенная» в малой окрестности единицы. Существование таких функций можно получить из теории параболических уравнений (рассматривая фундаментальное решение уравнения теплопроводности на G).

Представление T связной группы G однозначно восстанавливается по представлению T^0 ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V^0 . В самом деле, по представлению алгебры Ли $\mathfrak{g}$ восстанавливается представление обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Зная это представление, можно вычислить все производные аналитической функции $g \mapsto T(g)\xi$ в точке e и, следовательно, восстановить эту функцию. Полученное представление G в V^0 продолжается по непрерывности до искомого представления T в V .

Пусть теперь задано представление T^0 алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в некотором плотном подпространстве $V^0 \subset V$. Возникает естественный вопрос: когда существует такое представление T группы G в пространстве V , что $V^0 \subset V^\infty(T)$ и T^0 совпадает с ограничением T^∞ на V^0 ?

Этот вопрос нетривиален уже для $G = \mathbb{R}$. Ответ в этом случае (для банахова пространства V) дается известной теоремой И. М. Гельфанда о структуре производящего оператора для сильно непрерывной однопараметрической группы. Недавно С. Г. Крейн и А. М. Шихватов [105] перенесли этот результат на произвольные группы Ли. Приведем здесь окончательную формулировку в удобных для нас терминах.

Теорема 2. *Представление T^0 алгебры $\mathfrak{g}$ в плотном подпространстве V^0 банахова пространства V имеет вид $T^\infty|_{V^0}$ для некоторого представления T соответствующей локальной группы Ли G , оставляющего V^0 инвариантным, если и только если выполняются условия:*

- 1) *каждый из операторов $T^0(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, допускает замыкание;*
- 2) *существуют такие положительные константы C и ε , что резольвенты всех операторов $T^0(X)$, где X пробегает ограниченную окрестность нуля в $\mathfrak{g}$, определены вне полосы $|\operatorname{Re} \lambda| \leq \varepsilon$ и удовлетворяют условию $\|R_\lambda(T^0(X))^n\| \leq \frac{C}{||\operatorname{Re} \lambda| - \varepsilon|^n}$ для $n = 1, 2, \dots$;*

- 3) *пространство V^0 инвариантно относительно резольвент $R_\lambda(T^0(X))$, $X \in \mathfrak{g}$.*

Первые два условия этой теоремы являются естественным обобщением условий Гельфанда, которым удовлетворяет генератор A однопараметрической группы операторов.

Отметим, что третье условие в одномерном случае выполняется автоматически, если в качестве V^0 взято пересечение областей определения замыканий операторов A^n .

Для случая, когда V — гильбертово пространство, а T — унитарное представление, известен более точный результат.

Теорема 3 (Э. Нелсон). *Для того чтобы представление T^0 алгебры $\mathfrak{g}$ связной односвязной группы Ли G , заданное в некотором плотном подпространстве H^0 гильбертова пространства H , порождалось унитарным представлением T группы G в пространстве H , необходимо и достаточно, чтобы операторы*

$$iT^0(X_1), \dots, iT^0(X_n) \text{ и } \Delta = \sum_{k=1}^n [T^0(X_k)]^2,$$

где $X_1, \dots, X_n$ — базис в $\mathfrak{g}$, допускали самосопряженное замыкание.

Доказательство и много интересных примеров можно найти в статье Э. Нелсона [117].

Другое полезное условие интегрируемости представления T^0 получено в работе: M. Flato, J. Simon, H. Snellman, D. Sternheimer, Ann. Sci. École Norm. Sup. 5 (1972), 423.

Если операторы $iT^0(X_1), \dots, iT^0(X_n)$ кососимметричны на некотором плотном инвариантном подпространстве $H^0 \subset H$, состоящем из аналитических векторов для этих операторов, то представление T^0 однозначно продолжается до унитарного представления соответствующей связной односвязной группы Ли G в пространстве H .

§ 11. ХАРАКТЕРЫ

11.1. Характеры конечномерных представлений. *Характером конечномерного представления T группы G называется функция*

$$\chi_T(g) = \text{tr } T(g).$$

Из этого определения и свойств следа оператора (см. § 3 п. 3) вытекает, что функция χ_T постоянна на каждом классе сопряженных элементов в G и зависит только от класса эквивалентности представления T . Если T_1 — подпредставление T , а T_2 — соответствующее фактор-представление, то $\chi_T = \chi_{T_1} + \chi_{T_2}$. Кроме того, как легко проверить (ср. п. 3.3), имеет место равенство

$$\chi_{T_1 \otimes T_2} = \chi_{T_1} \chi_{T_2}.$$

Таким образом, соответствие $T \rightarrow \chi_T$ задает гомоморфизм кольца Гротендика $\Gamma(G)$ (см. п. 7.1) в кольцо функций на G , постоянных на классах сопряженных элементов.

Теорема 1. *Неприводимое представление T группы G в конечномерном линейном пространстве определяется с точностью до эквивалентности своим характером χ_T .*

Доказательство. Рассмотрим пространство $V(T)$ функций на G , порожденное матричными элементами представле-

ния T . Очевидно, что представление S группы G в пространстве $V(T)$ с помощью левых сдвигов является суммой $n = \dim T$ неприводимых представлений, эквивалентных T . По теореме Жордана — Гёльдера (см. п. 8.1) всякое неприводимое подпредставление S эквивалентно T . Значит, для восстановления T достаточно выбрать любое неприводимое подпространство в пространстве V , порожденном сдвигами функции χ_T . (Можно показать, что V на самом деле совпадает с $V(T)$, но для наших целей достаточно очевидного включения $V \subset V(T)$.) Теорема доказана.

Для унитарных представлений компактных групп справедлива Теорема 2. *Характеры унитарных неприводимых представлений компактной группы G образуют ортонормированный базис в пространстве $H \subset L^2(G, dg)$, состоящем из функций, постоянных на классах сопряженных элементов в G .*

Доказательство. Соотношения

$$(\chi_{T_1}, \chi_{T_2}) = 0 \quad \text{для неэквивалентных } T_1 \text{ и } T_2 \quad (1)$$

и

$$(\chi_T, \chi_T) = 1 \quad (2)$$

сразу следуют из соотношений ортогональности, доказанных в п. 9.2. Остается проверить, что если $f \in H$ и $(f, \chi_T) = 0$ для всех неприводимых представлений T , то $f = 0$.

Задача 1. Если $f \in H$, то для любого неприводимого представления T справедливо равенство $T(f) = \frac{(f, \chi_T)}{\dim T} \cdot 1$.

Указание. Докажите, что $T(f) \in \mathcal{C}(T)$ и что $\text{tr } T(f) = (f, \chi_T)$.

Таким образом, если $f \in H$ и $(f, \chi_T) = 0$ для всех неприводимых представлений T , то операторы $T(f) = 0$ равны нулю для всех унитарных представлений T , поскольку каждое унитарное представление является непрерывной суммой неприводимых¹⁾. Применяя это утверждение к регулярному представлению G в $L^2(G, dg)$, видим, что $f = 0$. Теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть S — конечномерное представление компактной группы G . Разложение этого представления на неприводимые компоненты имеет вид

$$S = \sum_{[T] \in \hat{G}} (\chi_S, \chi_T) T. \quad (3)$$

Задача 2. Докажите, что для неприводимых представлений компактной группы G в вещественных линейных пространствах сохраняются равенства (1), а равенство (2) принимает вид

$$(\chi_T, \chi_T) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(T). \quad (2')$$

Указание. Воспользуйтесь теоремой 3 из п. 8.2.

¹⁾ Для компактных групп достаточно рассматривать дискретные суммы.

Теория характеров является одним из самых действенных средств изучения категорий $\Pi(G, K)$ и связей между этими категориями для разных полей и колец K . Прекрасным введением в эту область теории представлений является книга Ж. П. Серра [41].

Ограничимся здесь двумя результатами, имеющими много приложений.

Пусть T — неприводимое унитарное представление компактной группы G . Тогда, как мы видели в п. 8.2, возможны следующие три случая:

1) $\chi_T \neq \bar{\chi}_T$; представление T не эквивалентно представлению $\bar{T}$; вещественное представление T_R неприводимо и принадлежит комплексному типу;

2) $\chi_T = \bar{\chi}_T$; представление T эквивалентно $\bar{T}$ и эквивалентно некоторому вещественному представлению вещественного типа;

3) $\chi_T = \bar{\chi}_T$ представление T эквивалентно $\bar{T}$, но не эквивалентно никакому вещественному представлению; представление T_R принадлежит кватернионному типу.

Теорема 3 (критерий Шура). *Перечисленные выше случаи различаются величиной $\int_G \chi_T(g^2) dg$, которая принимает значения 0, +1, -1 соответственно. (Мера Хаара dg считается нормированной так, что $\int_G dg = 1$.)*

Доказательство основано на следующем полезном тождестве:

$$\chi(g^2) = \chi_{S^2T}(g) - \chi_{\wedge^2 T}(g), \quad (4)$$

где S^2T — симметрическая, а $\wedge^2 T$ — внешняя степень представления T . В самом деле, если $\mu_1, \dots, \mu_n$ — собственные числа оператора $T(g)$, то оператор $S^2T(g)$ имеет собственные числа $\mu_i \mu_j$, $i \leq j$, а оператор $\wedge^2 T$ — собственные числа $\mu_i \mu_j$, $i < j$. Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} S^2T(g) - \operatorname{tr} \wedge^2 T(g) &= \sum_{i \leq j} \mu_i \mu_j - \sum_{i < j} \mu_i \mu_j = \\ &= \sum_i \mu_i^2 = \operatorname{tr} T(g)^2 = \chi(g^2). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что по формуле (3) величина $\chi_T(g) dg$ равна кратности вхождения единичного представления в разложение представления T .

Значит, $\int_G \chi_T(g^2) dg$ есть разность между числом независимых инвариантных векторов в S^2V и в $\wedge^2 V$, где V — пространство

представления T . Но

$$S^2V \oplus \wedge^2 V = V \otimes V = \text{Hom}(V, V^*).$$

Число независимых инвариантов в последнем пространстве — это число сплетения $c(T, \bar{T})$. По лемме Шура оно равно нулю в первом случае (когда T не эквивалентно $\bar{T}$) и единице во втором и в третьем (когда $T \sim \bar{T}$). Для доказательства теоремы осталось проверить, что инвариантный элемент $A \in \mathcal{C}(T, \bar{T})$ (определенный по лемме Шура однозначно с точностью до числового множителя) лежит в S^2V , если T эквивалентно вещественному представлению, и в $\wedge^2 V$ в противном случае. Пусть T вещественно и, следовательно, ортогонально. Тогда в S^2V есть инвариантный элемент $\sum_i v_i \otimes v_i$, где $\{v_i\}$ — ортонормированный базис в V . Обратно, если в S^2V есть инвариантный элемент, то в подходящем базисе он имеет вид $\sum v_i \otimes v_i$ (так как в комплексном пространстве всякая невырожденная квадратичная форма приводится к сумме квадратов). Следовательно, образ группы G при представлении T содержится в группе $O(n, \mathbb{C})$, $n = \dim V$. Известно, что каждая максимальная компактная подгруппа $O(n, \mathbb{C})$ сопряжена с $O(n, \mathbb{R})$. Поэтому представление T эквивалентно вещественному.

Возможны и другие способы завершения доказательства теоремы.

Задача 3. Докажите, что в случае (3) инвариантным элементом в $\wedge^2 V$ является образ кватерниона $k \in \mathbb{H}$ при естественном отождествлении $\mathbb{H}$ с $\mathcal{C}(T_{\mathbb{R}})$.

Задача 4. Докажите теорему 3, применяя к представлениям T и $\bar{T}$ описанный в § 9 способ построения сплетающих операторов.

Второй результат относится к теории представлений конечных групп.

Теорема 4. Если T — неприводимое унитарное представление конечной группы G , то $\dim T$ является делителем числа $|G|$.

Доказательство. Из соотношений ортогональности для матричных элементов (см. п. 9.2) следует, что

$$\chi_T * \chi_T = \frac{|G|}{\dim T} \chi_T. \quad (5)$$

Итерируя это соотношение n раз, приходим к равенству

$$\chi_T * \dots * \chi_T(e) = \frac{|G|^n}{(\dim T)^{n-1}}. \quad (6)$$

Воспользуемся теперь понятием и простейшими свойствами целых алгебраических чисел. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *целым*

алгебраическим, если оно удовлетворяет уравнению вида

$$\lambda^n + a_1\lambda + \dots + a_n = 0, \quad (7)$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. Докажите, что целые алгебраические числа образуют подкольцо в $\mathbb{C}$.

Указание. Воспользуйтесь формулами Виета и покажите, что если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\mu_1, \dots, \mu_m$ — наборы корней двух уравнений вида (7), то $\{\lambda_i \pm \mu_j\}$ и $\{\lambda_i \mu_j\}$ — также наборы корней некоторых уравнений вида (7).

Задача 6. Докажите, что рациональное число является целым алгебраическим, только если оно целое.

Указание. Предположите, что $\lambda = p/q$ — несократимая дробь, и умножьте левую часть равенства (7) на q^n . Докажите, что при этом получится целое число, не делящееся на q .

Задача 7. Докажите, что характер представления конечной группы G принимает целое алгебраическое значение в любой точке $g \in G$.

Указание. Если $g \in G$, то $g^N = e$ для некоторого целого N . Поэтому собственные значения оператора $T(g)$ удовлетворяют уравнению $\lambda^N - 1 = 0$.

Утверждение теоремы вытекает из следующего факта.

Задача 8. Докажите, что обе части равенства (6) — целые числа.

Указание. Перепишите левую часть в виде

$$\sum_{g_1 g_2 \dots g_{n+1} = e} \chi_T(g_1) \dots \chi_T(g_{n+1})$$

и воспользуйтесь результатами задач 5—7.

Другое доказательство теоремы 4, также использующее понятие целого алгебраического числа, можно получить, сравнивая два базиса в центре алгебры $\mathbb{C}[G]$: один базис состоит из характеров неприводимых представлений, другой — из характеристических функций классов сопряженных элементов (см., например, [41]).

Результат теоремы 4 допускает следующее уточнение.

Задача 9. Пусть Z — центр группы G . Тогда размерность любого неприводимого представления T группы G является делителем числа $|G|/|Z|$.

Указание (Тэйт). Докажите, что представление $T \times \dots \times T$ группы $G \times \dots \times G$ (n сомножителей) неприводимо и тривиально на подгруппе в $Z \times \dots \times Z$, состоящей из таких элементов $(z_1, \dots, z_n)$, что $\prod_{i=1}^n z_i = e$.

Описанное свойство размерностей в сочетании с равенствами из п. 10.1 позволяют для многих конкретных групп «предсказать» размерности неприводимых представлений до их фактического построения.

11.2. Характеры бесконечномерных представлений. Определение характера, данное в п. 11.1, непригодно для бесконечномерных представлений, так как операторы $T(g)$ практически никогда не бывают ядерными и, следовательно, не имеют

разумного следа. Однако часто можно определить характер бесконечномерного представления как обобщенную функцию на группе G . Это определение принадлежит И. М. Гельфанду и может быть сформулировано так:

Пусть $D_T(G)$ — некоторая подалгебра в групповой алгебре $M(G)$ группы G , обладающая свойствами:

1) пространство $D_T(G)$ инвариантно относительно правых и левых сдвигов на G ;

2) представление T группы G порождает представление $\tilde{T}$ алгебры $D_T(G)$ и однозначно восстанавливается по этому представлению $\tilde{T}$;

3) операторы $\tilde{T}(a)$, $a \in D_T(G)$ ядерны (т. е. принадлежат $V' \hat{\otimes} V$) и отображение $\tilde{T}: D_T(G) \rightarrow V' \hat{\otimes} V$ непрерывно.

Назовем *характером представления T* линейный функционал $\chi \in D_T(G)'$, определенный равенством

$$\langle \chi, a \rangle = \text{tr } \tilde{T}(a). \quad (1)$$

Если G — группа Ли, а $D_T(G) = C_0^\infty(G)$, то характер χ является обобщенной функцией на G в обычном смысле этого слова.

Для конечномерного представления T можно взять в качестве $D_T(G)$ подалгебру $M_0(G)$ (или всю алгебру $M(G)$, если T ограничено). В этом случае характер χ имеет вид

$$\langle \chi, \mu \rangle = \int_G \chi_T(g) d\mu(g), \quad (2)$$

где χ_T — обычный характер представления T , определенный в п. 11.1.

Для полупростых групп Ли Хариш-Чандра установил следующий замечательный факт (см. [132]):

Если T — неприводимое унитарное представление G , то характер T определен на подалгебре $C_0^\infty(G)$ и имеет вид

$$\langle \chi, f \rangle = \int_G \chi_T(g) f(g) dg, \quad (3)$$

где χ_T — измеримая локально суммируемая функция на G .

Отметим, что для конкретных представлений T обычно нетрудно явно вычислить функцию χ_T . Мы сделаем это в § 13 для широкого класса представлений. Главная трудность заключается в том, чтобы доказать теорему, не зная явного вида представлений.

Для нильпотентных групп Ли характеры неприводимых унитарных представлений также определены на $C_0^\infty(G)$, но могут

быть обобщенными функциями более сложной природы (например, содержать δ -функцию по некоторым переменным).

Еще более сложны характеры неприводимых унитарных представлений разрешимых групп Ли. Как правило, их область определения существенно уже, чем $C_0^\infty(G)$. В этом случае для существования следа у оператора $T(f)$ недостаточно гладкости и финитности f , а требуются еще дополнительные условия, выделяющие в $C_0^\infty(G)$ подпространство бесконечной коразмерности. Подробнее об этом мы скажем в §§ 12 и 15.

Наконец, возможен и такой случай (даже для групп Ли), когда оператор $\tilde{T}(a)$ является ядерным лишь для тех элементов групповой алгебры, которые принадлежат ядру представления $\tilde{T}$.

Теорема 1. Пусть G — локально компактная группа. Для того чтобы для каждого неприводимого представления T в пространстве H характер T был определен на некотором подпространстве $D_T(G) \subset C^*(G)$, обладающем свойством $\tilde{T}(D_T(G)) \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы G была ручной.

Таким образом, ручные группы естественно выделяются из всех локально компактных групп с точки зрения теории характеров.

Утверждение теоремы 1 вытекает из следующей теоремы для C^* -алгебр.

Теорема 2 (Диксмье — Глимм — Сакаи). Следующие свойства C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ эквивалентны:

- 1) При всяком неприводимом $*$ -представлении T алгебры $\mathfrak{A}$ ее образ $T(\mathfrak{A})$ содержит хотя бы один вполне непрерывный оператор.
- 2) При всяком неприводимом $*$ -представлении T алгебры $\mathfrak{A}$ ее образ $T(\mathfrak{A})$ содержит все вполне непрерывные операторы.
- 3) Всякое $*$ -представление $\mathfrak{A}$ принадлежит типу I.

Доказательство этой теоремы для сепарабельных C^* -алгебр $\mathfrak{A}$ можно найти в книге Диксмье [24]. Там же указаны статьи Сакаи, в которых разобран несепарабельный случай.

Введенные характеры сохраняют многие свойства обычных характеров конечномерных представлений. Так, они инвариантны относительно внутренних автоморфизмов G : $\langle \chi, L_g R_g f \rangle = \text{tr } T(L_g R_g f) = \text{tr } [T(g) T(f) T(g^{-1})] = \text{tr } T(f) = \langle \chi, f \rangle$. (Это свойство сводится к постоянству на классах сопряженных элементов в случае, когда χ — обычная функция.)

Теорема 3. Неприводимое представление T с точностью до эквивалентности определяется своим характером.

Доказательство. Совокупность элементов $a \in C^*(G)$, для которых $a^*a \in D_T(G)$, образует предгильбертово пространство

относительно скалярного произведения $(a, b)_\chi = \langle \chi, b^*a \rangle$. Пусть H_χ — соответствующее гильбертово пространство. Соответствие $a \rightarrow \tilde{T}(a)$ задает изоморфизм H_χ на пространство операторов Гильберта — Шмидта в пространстве H представления T , при котором левые и правые сдвиги на $g \in G$ переходят в операторы умножения слева и справа на $T(g)$. Поэтому представление G в H_χ левыми сдвигами эквивалентно $(\dim T) \cdot T$.

Таким образом, в любом неприводимом подпространстве H_χ возникает представление, эквивалентное T .

Для ручных групп теоремы 1 и 3 сводят классификацию неприводимых унитарных представлений группы к отысканию всех ее характеров. Мы увидим в следующем пункте, что для групп Ли характеры удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений. Это позволяет во многих важных случаях дать для них явные формулы.

Некоторое затруднение при работе с характерами доставляет то обстоятельство, что область определения характера заранее не известна и, в частности, не ясно, содержит ли она хотя бы одну «настоящую» функцию на группе. (Напомним, что C^* -алгебра группы G получается пополнением $L'(G, d_l g)$ по некоторой норме. Вычисление этой нормы требует знания достаточно большого запаса представлений G . Поэтому структура добавляемых «идеальных элементов» априори не известна.) Во всех изученных примерах пересечение $D_T(G) \cap L'(G, d_l g)$ плотно в $D_T(G)$, однако соответствующая общая теорема не доказана.

11.3. Инфинитезимальные характеры. Для неприводимых представлений групп Ли можно дать еще один вариант определения характера, который имеет смысл для бесконечномерных представлений.

Пусть G — связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $U(\mathfrak{g})$ — обертывающая алгебра и $Z(\mathfrak{g})$ — ее центр.

Задача 1. Докажите, что $Z(\mathfrak{g})$ лежит в центре $R(G)$ (при естественном вложении $U(\mathfrak{g}) \approx R(G, \{e\})$ в $R(G)$; см. п. 10.4).

Указание. Плотное множество в $R(G)$ образуют линейные комбинации дельта-функций δ_g (по определению $\langle \delta_g, f \rangle = f(g)$ для $f \in C^\infty(G)$). Утверждение задачи вытекает из того, что связная группа порождается канонической окрестностью единицы и из следующего ниже тождества.

Задача 2. Пусть $X \in U(\mathfrak{g})$, $Y \in \mathfrak{g}$; тогда

$$\delta_{\exp Y} * X * \delta_{\exp(-Y)} = e^{\widetilde{\text{ad}} Y} X = \widetilde{\text{Ad}}(\exp Y) X,$$

где $\widetilde{\text{Ad}}$ (соответственно $\widetilde{\text{ad}}$) — представление G (соответственно $\mathfrak{g}$) автоморфизмами (соответственно дифференцированиями) $U(\mathfrak{g})$, продолжающее присоединенное (соответственно регулярное) представление.

Указание. Разобрать сначала случай $X \in \mathfrak{g}$.

Если T — конечномерное неприводимое представление связной группы Ли G , то по лемме Шура элементы центра $R(G)$ переходят в скалярные операторы. В частности, для $z \in Z(\mathfrak{g})$

$$T(z) = \lambda_T(z) \cdot 1. \quad (1)$$

Очевидно, что соответствие $z \mapsto \lambda(z)$ является гомоморфизмом алгебры $Z(\mathfrak{g})$ в поле $\mathbb{C}$. Этот гомоморфизм называется *инфинитезимальным характером* представления T . Выясним связь его с обычным характером.

Задача 3. Докажите тождество

$$\lambda_T(z) = \frac{\langle z, \chi_T \rangle}{\dim T}. \quad (2)$$

Указание. Подставьте в левую часть (1) определение $T(z)$ (см. п. 10.5) и возьмите след от обеих частей.

Таким образом, инфинитезимальный характер λ_T можно найти, если известен обычный характер χ_T .

Вопрос о том, верно ли обратное утверждение, более сложен и ответ на него зависит от рассматриваемой группы.

Задача 4. Пусть T — конечномерное неприводимое представление группы G и λ_T — его инфинитезимальный характер. Докажите, что любой матричный элемент $t_{\xi, \eta}$ представления T удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$z * t_{\xi, \eta} = \lambda_T(z) t_{\xi, \eta}, \quad z \in Z(\mathfrak{g}). \quad (3)$$

Указание. Воспользуйтесь тождеством

$$T(z * \delta_g) = T(z) T(\delta_g) = \lambda_T(z) T(g).$$

Для восстановления характера χ_T по инфинитезимальному характеру λ_T нужно, следовательно, решить систему уравнений (3) в классе функций, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов. Для полупростых групп Ли возникающая задача может быть решена до конца (она сводится к решению системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; см. [62]). Общий случай практически сводится к полупростому. Дело в том, что всякая неприводимая линейная группа либо полупроста либо является произведением полупростой подгруппы и одномерного центра. Таким образом, если T — точное неприводимое представление группы G , то его характер χ_T (а следовательно, и само представление) определяется инфинитезимальным характером λ_T .

Заметим, что предположение о точности T в этом утверждении существенно. Например, группа аффинных преобразований прямой $x \rightarrow ax + b$ имеет серию одномерных представлений $T_\rho(a, b) = a^\rho$, которые не определяются инфинитезимальным характером, поскольку для этой группы $Z(\mathfrak{g})$ состоит из одних скаляров.

Перейдем к бесконечномерному случаю. Пусть T — неприводимое представление G в полном локально выпуклом пространстве V и T^∞ — соответствующее представление $R(G)$ в подпространстве Гординга $V^\infty \subset V$. Тогда операторы $T^\infty(z)$, $z \in Z(\mathfrak{g})$ перестановочны со всеми операторами представления T . Вообще говоря, отсюда еще нельзя сделать вывод об их скалярности. Стандартный способ обхода этой трудности состоит в том, что рассматриваются только такие представления, для которых имеет место (1). Такие представления называют *простыми*.

Теорема 1. *Всякое неприводимое унитарное представление T группы Ли G является простым и, следовательно, обладает инфинитезимальным характером λ_T .*

Доказательство. Воспользуемся тем, что представление T 2-неприводимо (см. п. 7.3) и, следовательно, всякий замкнутый оператор, перестановочный с операторами представления, должен быть скаляром. Пусть $z \in Z(\mathfrak{g})$. Представим z в виде суммы однородных компонент: $z = \sum z_k$, $z_k \in \sigma(S^k(\mathfrak{g}))$. (См. п. 10.4.) Из теоремы 2 и задачи 8 в п. 10.4 вытекает, что каждая компонента z_k также лежит в $Z(\mathfrak{g})$. Покажем, что оператор $T^\infty(z_k)$ допускает замыкание. В самом деле, операторы $T^\infty(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, обладают свойством $T^\infty(X) \subset T^\infty(-X)^*$ (см. п. 10.5). Поэтому $T^\infty(z_k) \subset (-1)^k T^\infty(z_k)^*$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Так же, как и в конечномерном случае, доказывается, что матричные элементы представления T удовлетворяют системе уравнений (3). Пусть представление T имеет обобщенный характер (в смысле, указанном в п. 11.2), определенный на некотором подпространстве $D(G) \subset C_0^\infty(G)$. Покажем, что этот характер χ также удовлетворяет системе уравнений

$$z * \chi = \lambda_T(z) \chi, \quad z \in Z(\mathfrak{g}). \quad (4)$$

По определению, это значит, что для любой функции $f \in D(G)$ должно выполняться равенство

$$\langle z * \chi, f \rangle = \lambda_T(z) \langle \chi, f \rangle,$$

т. е.

$$\langle z, \operatorname{tr} T(g) T(f) \rangle = \lambda_T(z) \operatorname{tr} T(f),$$

что следует из ядерности $T(f)$ и соотношений (3) для матричных элементов представления T .

Этот результат открывает возможность находить обобщенные характеры неприводимых унитарных представлений как решения системы дифференциальных уравнений (4) в классе обобщенных функций на G , инвариантных относительно внутренних автоморфизмов G .

Для комплексных полупростых групп Ли этот метод приводит к полной классификации широкого класса простых представлений, включающего все унитарные представления и представления в банаховых пространствах.

К сожалению, выделение из этого класса унитарных представлений представляет значительные трудности и до сих пор не доведено до конца.

Подробнее об этом направлении теории представлений можно прочитать в работах [62], [90], [114].

Теория инфинитезимальных характеров существенно зависит от структуры алгебры $Z(\mathfrak{g})$. Мы видели в п. 10.4, что алгебра $\text{gr } Z(\mathfrak{g})$ совпадает с алгеброй $S(\mathfrak{g})^G$ инвариантных элементов алгебры $S(\mathfrak{g})$. Во всех известных примерах алгебра $Z(\mathfrak{g})$ оказывается изоморфной $\text{gr } Z(\mathfrak{g})$. В частности, это доказано для полупростых и разрешимых групп Ли.

Истолкование этого факта с точки зрения метода орбит мы дадим в § 15¹⁾.

Очень интересной задачей является построение и исследование *обобщенных инфинитезимальных характеров*, связанных с телом Ли $D(\mathfrak{g})$ (см. п. 10.4). Пусть X — элемент центра $D(\mathfrak{g})$. Этот элемент можно записать в виде PQ^{-1} ; $P, Q \in U(\mathfrak{g})$.

Если T — неприводимое унитарное представление группы G , а T^∞ — соответствующее представление $U(\mathfrak{g})$, то операторы $T^\infty(P)$ и $T^\infty(Q)$ отличаются лишь скалярным множителем: $T^\infty(P) = \lambda T^\infty(G)$.

Можно показать, что число λ зависит только от X (а не от выбора записи $X = PQ^{-1}$) и мы обозначим его $\lambda(X)$. Соответствие $X \mapsto \lambda(X)$ задает отображение центра тела $D(\mathfrak{g})$ в расширенную комплексную плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ и обладает свойствами

$$\lambda(X + Y) = \lambda(X) + \lambda(Y), \quad \lambda(XY) = \lambda(X)\lambda(Y)$$

в тех случаях, когда написанные равенства имеют смысл. Это и есть обобщенный инфинитезимальный характер представления T .

§ 12. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Одно из направлений теории представлений групп — так называемый гармонический анализ — состоит в изучении пространств функций на группах и однородных пространствах в терминах возникающих в них представлений. Большую роль играет здесь обобщенное преобразование Фурье. Как известно, классическое преобразование Фурье на вещественной прямой переводит сдвиги в умножение на функции и тем самым доставляет спектральное разложение любого оператора, перестановочного со сдвигами (например, дифференциального оператора с постоянными коэффициентами). Обобщенное преобразование Фурье призвано играть ту же роль для любой группы. Это

¹⁾ Недавно М. Дюфло с помощью метода орбит доказал этот факт в общем случае; см. [88].

преобразование определяется так. Пусть G — топологическая группа, а $\hat{G}$ — множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений G . Выберем для каждого класса $\lambda \in \hat{G}$ представление T_λ , принадлежащее этому классу и действующее в гильбертовом пространстве H_λ .

Представление T_λ продолжается до представления группового кольца $M(G)$ в том же пространстве H_λ . Преобразованием Фурье элемента $\mu \in M(G)$ назовем операторную функцию $\check{\mu}$ на $\hat{G}$, принимающую в точке $\lambda \in \hat{G}$ значение в $\text{End } H_\lambda$ по формуле

$$\check{\mu}(\lambda) = \int_{\hat{G}} T_\lambda(g) d\mu(g). \quad (1)$$

В частности, если группа G локально компактна и $f \in L^1(G, d_1g)$, будем писать

$$\check{f}(\lambda) = \int_{\hat{G}} f(g) T_\lambda(g) d_1g. \quad (2)$$

Если G — группа Ли, то понятие преобразования Фурье можно обобщить на элементы кольца $R(G)$, полагая

$$\check{x}(\lambda) = T_\lambda^\infty(x) \in \text{End } H_\lambda^\infty. \quad (3)$$

Очевидно, что определенное так преобразование переводит левый (правый) сдвиг на g в оператор умножения слева (справа) на операторную функцию $\lambda \mapsto T_\lambda(g)$. Мы увидим ниже, что в самой общей ситуации сохраняются многие привычные свойства классического преобразования Фурье. Для некоторых классов групп (коммутативных, компактных, конечных) преобразование Фурье обладает специальными свойствами и изучено более подробно. Мы рассмотрим отдельно эти классы групп, а затем перейдем к общему случаю.

12.1. Коммутативные группы. Основная особенность коммутативных групп с точки зрения гармонического анализа состоит в том, что дуальное пространство $\hat{G}$ само является топологической группой. Дело в том, что у коммутативной группы G все унитарные неприводимые представления одномерны (см. теорему 2 из п. 7.3 или п. 4.4). Поэтому тензорное произведение двух неприводимых представлений снова неприводимо. Каждое такое представление можно рассматривать как обычную числовую функцию на G , удовлетворяющую условиям

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2), \quad |f(g)| = 1. \quad (1)$$

Операция тензорного умножения сводится к обычному умножению функций. Ясно, что $\hat{G}$ является группой относительно

этой операции. Единицей в $\hat{G}$ является тривиальное представление $\hat{f}_0(g) \equiv 1$, а обратным элементом к $\hat{f}$ служит комплексно сопряженное представление $\bar{\hat{f}}$. Топология, определенная в п. 7.3, в этом случае сводится к топологии равномерной сходимости на компактах.

Задача 1. Проверьте, что $\hat{G}$ является топологической группой, и что если G локально компактна (соответственно дискретна, компактна), то $\hat{G}$ локально компактна (соответственно компактна, дискретна).

Возникающая таким образом группа $\hat{G}$ называется *двойственной по Понтрягину к группе G* , или *дуальной группой*, или *группой характеров группы G* . (Отметим, что одномерные представления совпадают со своими характерами.)

По группе $\hat{G}$ мы можем снова построить двойственную группу $(\hat{G})^\wedge = \hat{\hat{G}}$ и т. д. Имеется естественное отображение G в $\hat{\hat{G}}$, которое каждому элементу $g \in G$ ставит в соответствие характер (т. е. одномерное представление) группы $\hat{G}$, принимающей в точке $\chi \in \hat{G}$ значение $\chi(g)$.

Для наиболее важных примеров, когда $G = \mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{T}$, двойственные группы (без топологии) были фактически вычислены в § 6 (см. задачу 4 из п. 6.1).

Задача 2. Докажите, что имеют место следующие изоморфизмы топологических групп:

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}, \quad \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{Z}, \quad \hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}, \quad \hat{\mathbf{C}}_n = \mathbf{C}_n.$$

Соответствующие преобразования Фурье уже давно используются в различных областях математики и ее приложений. Если $G = \mathbf{R}$, преобразование Фурье имеет вид

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt,$$

т. е. совпадает с классическим преобразованием Фурье.

Для $G = \mathbf{T}$ получаем

$$\tilde{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

где φ — канонический параметр (угол) на окружности $\mathbf{T}$. Таким образом, в этом случае преобразование Фурье функции f ставит в соответствие набор коэффициентов ее ряда Фурье.

Для $G = \mathbf{Z}$ общая формула приобретает вид

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^n, \quad z \in \mathbf{T},$$

т. е. последовательности $\{f(n)\}$ ставит в соответствие ее *производящую функцию*.

Наконец для $G = \mathbb{Z}_n$ преобразование Фурье принимает вид

$$\tilde{f}(k) = \sum_{l=0}^{n-1} f(l) e^{2\pi k l i / n}, \quad k, l \in \mathbb{Z}_n.$$

Во всех приведенных примерах группа $\hat{\hat{G}}$ изоморфна G , причем этот изоморфизм можно определить так, что преобразования Фурье от G к $\hat{G}$ и от $\hat{G}$ к $\hat{\hat{G}} \approx G$ будут обратны друг другу. Этот факт — проявление общего принципа двойственности, который формулируется следующим образом.

Теорема 1 (Л. С. Понтрягин). *Для любой локально-компактной коммутативной группы G каноническое отображение G в $\hat{\hat{G}}$ является изоморфизмом топологических групп. Можно так нормировать меры Хаара на G и $\hat{G}$, что преобразования Фурье от G к $\hat{G}$ и от $\hat{G}$ к $\hat{\hat{G}} = G$ будут связаны соотношениями*

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \int_G f(g) \chi(g) dg, \\ f(g) &= \int_{\hat{G}} \tilde{f}(\chi) \overline{\chi(g)} d\chi, \\ \int_G |f(g)|^2 dg &= \int_{\hat{G}} |\tilde{f}(\chi)|^2 d\chi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если группа G компактна, и мера dg нормирована так, что $\int_G dg = 1$, то группа $\hat{G}$ дискретна, и каждая ее точка имеет единичную меру. Обратно, если G дискретна, и каждая точка имеет единичную меру, то $\hat{G}$ компактна и $\int_{\hat{G}} d\chi = 1$.

Существуют два типа доказательств этой теоремы. Первый основан на изучении структуры локально компактных коммутативных групп. Оказывается, любая локально компактная группа получается операциями суммы, произведения, проективного и индуктивного пределов из «элементарных» групп $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$ и $\mathbb{Z}_n$. Для элементарных групп справедливость теоремы проверяется непосредственно. Затем доказывается, что операции суммы, произведения, индуктивного и проективного предела при переходе к двойственной группе заменяются операциями произведения, суммы, проективного и индуктивного предела соответ-

ственно. Подробное изложение можно найти в книге Л. С. Понтрягина [39] и в книге А. Вейля [10].

Другой тип доказательства основан на теории банаховых алгебр. Он не требует никаких сведений о структуре группы, но и не дает информации об этой структуре. Доказательство этого типа было впервые предложено Д. А. Райковым. Варианты его изложены в книгах [9], [19], [38].

Изложим здесь основные детали этого доказательства. Начнем с того, что если G не дискретна, то по теореме 1 п. 10.2 множество $\hat{G}$ получается из $\mathfrak{M}(C^*(G))$ — спектра алгебры $C^*(G)$ — выбрасыванием одной точки, соответствующей вырожденному представлению $C^*(G)$. Для дискретной группы G множество $\hat{G}$ совпадает с $\mathfrak{M}(C^*(G))$. Преобразование Фурье на группе G совпадает, очевидно, с преобразованием Гельфанда C^* -алгебры $C^*(G)$.

По теореме Гельфанда из п. 4.3 образом $C^*(G)$ при этом преобразовании служит $C(\mathfrak{M}(C^*(G)))$. Поэтому образ $L^1(G, dg)$ при преобразовании Фурье плотен в множестве $C_1(\hat{G})$ всех непрерывных функций на $\hat{G}$, стремящихся к нулю на бесконечности.

Рассмотрим теперь совокупность преобразований Фурье функций из $L^1(G, dg) \cap C(G)$. На пространстве таких функций можно определить линейный функционал

$$F(\tilde{f}) = f(e). \quad (3)$$

Этот функционал инвариантен относительно сдвигов на $\hat{G}$, так как сдвиг функции $\tilde{f}$ на $\chi \in \hat{G}$ равносильен умножению f на χ , что не меняет значения $f(e)$. Если бы мы знали заранее, что область определения F содержит пространство $C_0(\hat{G})$ финитных непрерывных функций на $\hat{G}$, то функционал F можно было бы записать в виде

$$F(\varphi) = \int_{\hat{G}} \varphi(\chi) d\chi, \quad \varphi \in C_0(\hat{G}), \quad (4)$$

где $d\chi$ — мера на $\hat{G}$. Из инвариантности F вытекает, что $d\chi$ — мера Хаара на $\hat{G}$. Рассматривая в качестве f свертку функций f_1 и f_2^* , мы получили бы из (3) и (4) равенство

$$(f_1 * f_2^*)(e) = \int_{\hat{G}} (f_1 * f_2^*)^\sim(\chi) d\chi,$$

которое (по определению свертки, преобразования Фурье и инволюции) можно переписать в виде

$$\int_{\hat{G}} f_1(g) \overline{f_2(g)} dg = \int_{\hat{G}} \tilde{f}_1(\chi) \overline{\tilde{f}_2(\chi)} d\chi.$$

Таким образом, преобразование Фурье продолжается до изоморфизма гильбертовых пространств $L^2(G, dg)$ и $L^2(\hat{G}, d\chi)$. Это доказывает последнее из равенств (2) в условии теоремы.

Рассматривая в качестве f_2 в равенстве (5) δ -образную последовательность и предполагая f_1 непрерывной, а $\tilde{f}_1$ — суммируемой, мы приходим ко второму из равенств (2).

Задача 3. Выведите из полученных свойств преобразования Фурье утверждение теоремы об изоморфизме топологических групп G и $\hat{\hat{G}}$.

Указание. Докажите последовательно, что каноническое отображение G в $\hat{\hat{G}}$ является вложением, что топология G совпадает с топологией, индуцируемой на G ее вложением в $\hat{\hat{G}}$, что G плотна в $\hat{\hat{G}}$ и, наконец, что G замкнута в $\hat{\hat{G}}$.

К сожалению, до сих пор не существует прямого доказательства того, что функционал F определен и непрерывен на $C_0(\hat{G})$. Поэтому обычно используется следующий обходный путь доказательства равенства (4).

Задача 4. Докажите, что если f_1 и f_2 принадлежат $L^1(G) \cap L^2(G)$, то $f_1 * f_2$ — непрерывная функция на G .

Указание. Проверьте, что

$$|(f_1 * f_2)(x)| \leq \|f_1\|_{L^2(G)} \|f_2\|_{L^2(G)},$$

и воспользуйтесь тем, что непрерывные функции плотны в $L^1(G) \cap L^2(G)$.

Задача 5. Если $\varphi \in C^*(G)$, $f \in L^2(G)$, то $\varphi * f \in L^2(G)$, причем $\|\varphi * f\|_{L^2(G)} \leq \|\varphi\|_{C^*(G)} \|f\|_{L^2(G)}$.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 2 из п. 4.3.

Пусть $A(G)$ — совокупность линейных комбинаций функций вида $f_1 * f_2$, $f_i \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Тогда из сказанного выше вытекает, что для $f \in A(G)$ соответствие

$$\varphi \rightarrow (\varphi * f)(e)$$

является непрерывным функционалом на $C^*(G)$. Поэтому для каждого $f \in A(G)$ существует такая мера μ_f на $\hat{G}$, что

$$(\varphi * f)(e) = \int_{\hat{G}} \tilde{\varphi}(\chi) d\mu_f(\chi) \quad (6)$$

для всех $\varphi \in L^1(G)$.

Задача 6. Докажите равенство

$$\tilde{f} \mu_h = \tilde{h} \mu_f$$

для любых $f, h \in A(G)$.

Указание. Воспользуйтесь равенствами

$$\varphi * (f * h) = (\varphi * f) * h = (\varphi * h) * f.$$

Задача 7. Докажите, что существует такая мера μ из $\hat{G}$, что

$$\mu_f = \tilde{f}\mu$$

для всех $f \in A(G)$.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 6 и плотностью образа $A(G)$ в $C_0(\hat{G})$ при преобразовании Фурье.

Задача 8. Докажите, что мера μ в условии задачи 7 является мерой Хаара на $\hat{G}$.

Указание. Воспользуйтесь равенством

$$[(\varphi \cdot \chi) * (f \cdot \tilde{\chi})](e) = (\varphi * f)(e).$$

Таким образом, мы приходим к соотношению

$$(\varphi * f)(e) = \int_{\hat{G}} (\varphi * f)^{\sim} d\chi, \quad \varphi \in C^*(G), \quad f \in A(G),$$

которое заменяет (и уточняет) недостающее нам равенство (4).

Изучению преобразования Фурье на локально компактных коммутативных группах посвящено много работ. Достаточно подробное изложение этой части гармонического анализа содержится в книге Э. Хьюитта и К. Росса [54]. Приведем здесь несколько наиболее важных фактов.

Прежде всего следует отметить функториальные свойства отображения $G \rightarrow \hat{G}$. Каждому морфизму $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ соответствует двойственный морфизм $\hat{\varphi}: \hat{G}_2 \rightarrow \hat{G}_1$, переводящий $\chi \in \hat{G}_2$ в $\chi \circ \varphi$.

Теорема 2. Если G_0 — замкнутая подгруппа в локально компактной коммутативной группе G , а G_1 — соответствующая фактор-группа, то $\hat{G}_1$ совпадает с подгруппой $G_0^\perp \subset \hat{G}$, состоящей из характеров, тривиальных на G_0 , а $\hat{G}_0$ — с соответствующей фактор-группой.

Таким образом, точной последовательности

$$1 \rightarrow G_0 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G_1 \rightarrow 1$$

соответствует точная последовательность

$$1 \leftarrow \hat{G}_0 \xleftarrow{\hat{i}} \hat{G} \xleftarrow{\hat{p}} \hat{G}_1 \leftarrow 1.$$

Пусть меры Хаара dg , dg_0 , dg_1 на G , G_0 и G_1 нормированы так, что выполняется условие $dg = dg_0 \circ dg_1$.

Рассмотрим линейный функционал F на $G_0(G)$, сопоставляющий функции f ее интеграл по подгруппе $G_0 \subset G$:

$$F(f) = \int_{G_0} f(g_0) dg_0.$$

Очевидно, что этот функционал инвариантен относительно сдвигов на элементы G_0 и относительно умножения на характеры группы G , тривиальные на G_0 . Будем рассматривать F как функционал от $\tilde{f} \in C(\hat{G})$. Тогда он будет инвариантен относительно умножения на характеры группы $\hat{G}$, соответствующие элементам G_0 (т. е. тривиальные на $\hat{G}_1 = G_0^\perp$), и относительно сдвигов на элементы $\chi_1 \in \hat{G}_1$.

Задача 9. Докажите, что F может быть записан в виде

$$F(\tilde{f}) = \int_{\hat{G}_1} \tilde{f}(\chi_1) d\chi_1,$$

где $d\chi_1$ — мера Хаара на $\hat{G}_1 = G_0^\perp$, соответствующая мере $d\hat{g}_1$ на G_1 .

Указание. Применить формулу обращения к функции φ на $\hat{G}_1$, определенной равенством

$$\varphi(gG_0) = \int_{G_0} \tilde{f}(gg_0) dg_0.$$

Следствие. Если преобразование Фурье на $\mathbb{R}$ задано формулой $\tilde{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx$, то для любого $a > 0$ справедливо равенство (формула Пуассона):

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(ka) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}\left(\frac{2\pi k}{a}\right).$$

Из многочисленных результатов о действии преобразования Фурье на тот или иной класс функций на группе мы отметим следующий факт.

Теорема 3. Ограничение преобразования Фурье на $L^1(G) \cap L^p(G)$, $1 < p < 2$, продолжается до линейного оператора с нормой ≤ 1 , отображающего $L^p(G)$ в $L^q(\hat{G})$, где $q = \frac{p}{p-1}$.

Доказательство этой теоремы (и других аналогичных утверждений) основано на красивой идее интерполяции. А именно, доказывается, что логарифм нормы в $L^p(\hat{G})$ функции $\tilde{f}$, где $\tilde{f} \in L^1(G) \cap L^p(G)$, является выпуклой функцией от $1/p$ на отрезке $1/2 \leq 1/p \leq 1$.

Имеется много результатов, уточняющих и обобщающих следующий принцип:

свойства гладкости и быстрого убывания на бесконечности переходят друг в друга при преобразовании Фурье.

Для случая $G = \mathbf{R}^n$ одна из точных формулировок такова. Положим для $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$\|f\|_{k,l} = \int_{\mathbf{R}^n} |(1 + \|x\|^{2k} + \Delta^l) f|^2 dx,$$

где $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Замыкание $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ по норме $\|\cdot\|_{k,l}$ состоит, грубо говоря, из функций, имеющих $2l$ производных, убывающих на бесконечности как $\frac{1}{\|x\|^{2k-n-2}}$. Пополнение $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ по всей совокупности норм $\|\cdot\|_{k,l}$ совпадает с пространством Шварца $S(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 4. *Преобразование Фурье переводит пространство Шварца в себя, причем*

$$\|\tilde{f}\|_{k,l} = \|f\|_{l,k}.$$

Доказательство сразу вытекает из следующего утверждения.

Задача 10. Пусть координаты $x_1, \dots, x_n$ в $G = \mathbf{R}^n$ и $y_1, \dots, y_n$ в $\hat{G} \approx \mathbf{R}^n$ выбраны так, что

$$\langle \chi, g \rangle = e^{i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)}.$$

Докажите, что операторы умножения на x_k и дифференцирования по x_k переходят при преобразовании Фурье в операторы $i \frac{\partial}{\partial y_k}$ и умножения на $-i y_k$ соответственно.

Отметим, что аналог пространств C^∞ , C_0^∞ и S можно определить для любой локально компактной группы. Это определение основано на том, что всякая локально компактная группа является проективным пределом групп Ли.

Более точно, в любой окрестности единицы $e \in G$ существует такой компактный нормальный делитель K , что факторгруппа G/K является группой Ли. В качестве пространств $C^\infty(G)$ и $C_0^\infty(G)$ берется индуктивный предел пространств $C^\infty(G/K)$ и $C_0^\infty(G/K)$ соответственно. Подробности можно найти в статье Г. И. Каца [92] и в работе Ф. Брюа [68]. Определение $S(G)$ более сложно. Для полупростых групп Ли см. [133].

12.2. Компактные группы. Пусть G — некоммутативная компактная группа. Множество $\hat{G}$ в этом случае дискретно. Преобразование Фурье каждой функции f на G ставит в соответствие операторную функцию $\tilde{f}$ на $\hat{G}$. Так как все неприводимые представления группы G конечномерны, можно считать, что $\tilde{f}$

принимает в точке $\lambda \in \hat{G}$ значение $\tilde{f}(\lambda) \in \text{Mat}_{n(\lambda)}(\mathbb{C})$, где $n(\lambda)$ — размерность представления T_λ класса λ . Возникает естественный вопрос, каков образ при преобразовании Фурье того или иного класса функций на G (или какого-либо варианта групповой алгебры)?

Наиболее просто формулируется ответ для пространства $L^2(G, dg)$.

Обозначим через $L^2(\hat{G})$ совокупность всех матричных функций на $\hat{G}$, удовлетворяющих условиям:

$$1) \quad \varphi(\lambda) \in \text{Mat}_{n(\lambda)}(\mathbb{C}) \quad \text{для всех } \lambda \in \hat{G},$$

$$2) \quad \sum_{\lambda \in \hat{G}} n(\lambda) \text{tr} [\varphi(\lambda)^* \varphi(\lambda)] < \infty.$$

Очевидно, что $L^2(\hat{G})$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} n(\lambda) \text{tr} [\varphi_1(\lambda) \varphi_2(\lambda)^*].$$

Теорема 1. *Преобразование Фурье продолжается до изометрического отображения пространства $L^2(G, dg)$ на пространство $L^2(\hat{G})$.*

Доказательство немедленно вытекает из соотношений ортогональности для матричных элементов неприводимых представлений компактной группы (см. п. 9.2).

Несложно также описать образ C^* -алгебры группы G . Напомним, что по определению алгебры $C^*(G)$ отображение $f \rightarrow \tilde{f}(\lambda)$ при каждом $\lambda \in \hat{G}$ продолжается до $*$ -представления $C^*(G)$, образом которого является полное матричное кольцо $\text{Mat}_{n(\lambda)}(\mathbb{C})$. Кроме того, возникающее отображение $C^*(G)$ в $\prod_{\lambda \in \hat{G}} \text{Mat}_{n(\lambda)}(\mathbb{C})$ является изометрическим вложением $C^*(G)$ в C^* -алгебру ограниченных матричных функций на $\hat{G}$.

Теорема 2. *Образ $C^*(G)$ в $\prod_{\lambda \in \hat{G}} \text{Mat}_{n(\lambda)}(\mathbb{C})$ состоит из всех ограниченных матричных функций φ на $\hat{G}$, удовлетворяющих следующему условию:*

существует такая константа $c = c(\varphi)$, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\|\varphi(\lambda) - c \cdot 1\| < \varepsilon$$

выполняется для всех $\lambda \in \hat{G}$, кроме, быть может, конечного числа.

Другими словами, образ $C^*(G)$ порождается функцией $e(\lambda) = 1_{n(\lambda)}$ и функциями, стремящимися к нулю на бесконечности.

Доказательство. Пусть $C^*(\hat{G})$ — алгебра ограниченных матричных функций, удовлетворяющих условию теоремы 2.

Задача 1. Докажите, что $C^*(\hat{G})$ является C^* -алгеброй относительно нормы

$$\|\varphi\| = \sup_{\lambda \in \hat{G}} \|\varphi(\lambda)\|$$

и поточечных операций сложения, умножения и нивольции.

Так как алгебра $C^*(G)$ порождается функциями из $C(G)$ и присоединенной единицей e , достаточно доказать, что образы $C(G)$ и e лежат в $C^*(\hat{G})$ и порождают там плотное подмножество. Образом e служит функция $e(\lambda) = 1_{n(\lambda)}$. Она, очевидно, принадлежит $C^*(\hat{G})$ (достаточно положить $c(e) = 1$). Пространство $C(G)$ содержится в $L^2(G)$. По теореме 1 образ $\tilde{f}$ любой функции $f \in L^2(G)$ лежит в $L^2(\hat{G})$ и, следовательно, удовлетворяет условию теоремы 2, если положить $c(\tilde{f}) = 0$.

Остается проверить плотность образа $C^*(G)$ в $C^*(\hat{G})$.

Задача 2. Пусть χ_λ — характер представления T_λ класса λ и λ^* — класс представления T_λ^* . Докажите, что

$$\hat{\chi}_\lambda(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \neq \lambda^*, \\ n(\lambda)^{-1} \cdot 1_{n(\lambda)}, & \text{если } \mu = \lambda^* \end{cases}$$

Задача 3. Образ $L^1(G)$ в $C^*(\hat{G})$ содержит все функции, отличные от нуля лишь в конечном числе точек.

Указание. Достаточно рассмотреть случай одной точки.

Нужное нам утверждение о плотности очевидно вытекает из задачи 3. Теорема доказана.

Относительно других свойств преобразования Фурье, связанных с пространствами $L^p(G, dg)$, пространством Шварца $S(G)$ и др., мы отсылаем читателя к цитированной в п. 12.1 книге Хьюитта и Росса [54]. Отметим только, что соответствующая теория разработана гораздо меньше, чем в коммутативном случае.

Для некоммутативных групп G множество $\hat{G}$ уже не является группой: операция тензорного произведения, вообще говоря, выводит из класса неприводимых представлений. Тем не менее, на $\hat{G}$ можно определить некоторую дополнительную структуру, по которой можно восстановить исходную группу G .

Пусть $\Pi(G)$ — категория всех конечномерных представлений компактной группы G . Кроме обычных категорных операций,

в $\Pi(G)$ определено тензорное произведение любых двух объектов и инволюция, которая ставит в соответствие представлению $T \in \text{Ob } \Pi(G)$ сопряженное представление T^* .

Категорию $\Pi(G)$ вместе с операциями тензорного произведения и инволюции мы и будем считать дуальным объектом к группе G . В случае, когда G коммутативна, дуальный объект в этом смысле полностью восстанавливается по групповой структуре на $\hat{G}$. В общем случае, кроме множества $\hat{G}$, для восстановления $\Pi(G)$ надо задать инволюцию $\tau: [T] \rightarrow [T^*]$ на $\hat{G}$ и для каждого $\lambda, \mu \in \hat{G}$ изоморфизм пространства

$$L(T_\mu) \otimes L(T_\nu) \approx L(T_\mu \otimes T_\nu)$$

на прямую сумму вида

$$\oplus N_{\lambda, \mu}^\nu L(T_\nu),$$

где через $L(T)$ обозначено пространство представления T , а $N_{\lambda, \mu}^\nu$ — кратность вхождения неприводимой компоненты T_ν в разложение произведения $T_\lambda \otimes T_\mu$.

Покажем теперь, как по дуальному объекту восстановить исходную группу G .

Назовем *представлением категории* $\Pi(G)$ ненулевую функцию φ на $\text{Ob } \Pi(G)$, принимающую в точке $T \in \text{Ob } \Pi(G)$ значение из $\text{Epd } L(T)$ и удовлетворяющую условиям:

- 1) $A\varphi(T_1) = \varphi(T_2)A$ для всех $A = \mathcal{C}(T_1, T_2)$,
- 2) $\varphi(T_1 \otimes T_2) = \varphi(T_1) \otimes \varphi(T_2)$.

Задача 4. Докажите, что всякое представление φ категории $\Pi(G)$ обладает также свойствами:

- 3) $\varphi(T_1 + T_2) = \varphi(T_1) \oplus \varphi(T_2)$,
- 4) $\varphi(T^*) = [\varphi(T)^*]^{-1}$.

Указание. Для вывода 3) подставить в равенство 1) вместо A проектор из $L(T_1 + T_2) \approx L(T_1) \oplus L(T_2)$ на $L(T_1)$ параллельно $L(T_2)$. Для вывода 4) воспользоваться изоморфизмом $L(T)^* \otimes L(T) \approx \text{End } L(T)$.

Совокупность $\Gamma(\Pi(G))$ всех представлений категории $\Pi(G)$ можно снабдить операцией умножения ($\varphi_1 \varphi_2(T) = \varphi_1(T) \cdot \varphi_2(T)$) и топологией ($\varphi_\alpha \rightarrow \varphi$, если $\varphi_\alpha(T) \rightarrow \varphi(T)$ для всех $T \in \text{Ob } \Pi(G)$).

Задача 5. Докажите, что относительно введенных операций множество $\Gamma(\Pi(G))$ является компактной топологической группой.

Указание. Докажите, что $\Gamma(\Pi(G))$ — замкнутая подгруппа в компактной группе всех функций на $\text{Ob } \Pi(G)$, принимающих в точке T значение в группе унитарных операторов в пространстве $L(T)$. (Напомним, что всякое конечномерное представление группы G унитарно.)

Теорема 1 (Таннака). Пусть G — компактная группа и φ_g — представление категории $\Pi(G)$, заданное формулой

$$\varphi_g(T) = T(g).$$

Тогда отображение $g \rightarrow \varphi_g$ является изоморфизмом топологических групп G и $\Gamma(\Pi(G))$.

Доказательство. Покажем, что если $T \in \text{Ob } \Pi(G)$ и вектор $\xi \in L(T)$ инвариантен относительно операторов $T(g)$, $g \in G$, то этот вектор инвариантен и относительно оператора $\varphi(T)$, $\varphi \in \Gamma(\Pi(G))$. В самом деле, пусть T_0 — тривиальное одномерное представление G . Оператор A вложения $L(T_0)$ в подпространство, порожденное вектором $\xi \in L(T)$, очевидно, принадлежит $\mathcal{C}(T_0, T)$. Поэтому из условия 1) в определении представления категории $\Pi(G)$ вытекает, что $\varphi(T)\xi = \varphi(T)A\xi_0 = A\varphi(T_0)\xi_0$, где $\xi_0 \in L(T_0)$.

Задача 6. Докажите, что $\varphi(T_0) = 1$.

Указание. Воспользуйтесь условием 2) и соотношением $T_0 \otimes T_0 \approx T_0$.

Таким образом, $\varphi(T)\xi = A\xi_0 = \xi$, и наше утверждение доказано.

Предположим теперь, что образ G в $\Gamma(\Pi(G))$ не совпадает со всей этой группой. Это значит, что для некоторого $T \in \text{Ob } \Pi(G)$ и некоторого $\varphi \in \Gamma(\Pi(G))$ оператор $\varphi(T)$ не принадлежит группе $T(G)$. Тогда существует такая непрерывная функция f на $\text{End } L(T)$, которая равна нулю на множестве $T(G)$ и отлична от нуля в точке $\varphi(T)$. Приближая эту функцию многочленом равномерно на компактном множестве $T(G) \cup \{\varphi(T)\}$ и усредняя затем этот многочлен по группе G , естественно действующей на $\text{End } L(T)$, приходим к следующему выводу.

Существует многочлен P на $\text{End}(L)T$, инвариантный относительно группы G и не инвариантный относительно группы $\Gamma(\Pi(G))$.

Пусть N — степень многочлена P и S — представление группы G в конечномерном пространстве всех многочленов степени $\leq N$ на $\text{End } L(T)$. Тогда вектор $P \in L(S)$ является противоречащим примером к доказанному выше утверждению.

Итак, образ G совпадает с $\Gamma(\Pi(G))$. Очевидно, кроме того, что отображение G в $\Gamma(\Pi(G))$ непрерывно. Так как G — компакт, отсюда следует гомеоморфизм G и $\Gamma(\Pi(G))$. Теорема доказана.

Отметим, что компактность группы G в этом доказательстве можно было заменить алгебраичностью группы $T(G)$ для достаточно большого запаса представлений $T^{(1)}$.

Естественно поставить вопрос о том, какие категории могут возникнуть в качестве дуального объекта к компактной группе G .

¹⁾ См.: А. Л. Розенберг, Теоремы двойственности для групп и алгебр Ли, УМН XXVI, 6 (1971), 253—254.

Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2 (М. Г. Крейн). Пусть Π — некоторая категория конечномерных линейных пространств, снабженных операциями тензорного произведения и инволюции. Для того чтобы эта категория была дуальным объектом к некоторой компактной группе G , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Существует ровно один (с точностью до изоморфизма) объект $L_0 \in \Pi$, обладающий свойством

$$L_0 \otimes L \approx L \quad \text{для всех } L \in \text{Ob } \Pi.$$

2. Каждый объект $L \in \text{Ob } \Pi$ разлагается в сумму минимальных объектов.

3. Если L_1 и L_2 — два минимальных объекта, то пространство $\text{Hom}(L_1, L_2)$ либо одномерно (если L_1 и L_2 изоморфны), либо состоит из одного нуля.

Если эти условия выполнены, то $\Pi = \Pi(G)$, где G — группа всех представлений категории Π .

Предоставляем читателю доказательство теоремы 2, а также проверку эквивалентности этой теоремы и классической теоремы двойственности М. Г. Крейна, формулируемой в терминах блок-алгебр (см. [38], § 32, п. 4).

12.3. Кольцевые группы и двойственность для конечных групп.

При сравнении двойственности Таннаки — Крейна для компактных групп с двойственностью Понтрягина для локально компактных коммутативных групп бросается в глаза следующее основное отличие. В то время как объект, двойственный по Понтрягину к локально компактной коммутативной группе G , — это также локально компактная коммутативная группа, объектом, двойственным по Таннаке — Крейну к компактной группе G служит некоторая категория линейных пространств (или блок-алгебра). Напрашивается задача об определении такого понятия, которое включало бы в качестве частного случая и группы и дуальные объекты к ним, и для которого имела бы смысл операция перехода к дуальному объекту той же природы.

Искомое понятие было действительно найдено, и с его помощью построена законченная теория двойственности, включающая результаты Понтрягина и Таннаки — Крейна для конечных групп. Возможные обобщения этой теории на бесконечные группы мы обсудим в следующем пункте.

Пусть L — линейное пространство над полем K . Будем говорить, что на L задана структура коалгебры над K , если задано K -линейное отображение

$$m: L \rightarrow L \otimes_K L$$

(коумножение), для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & L \otimes_K L & & & \\
 & \nearrow m & & \searrow m \otimes 1 & \\
 L & & L \otimes_K L \otimes_K L & & \\
 & \searrow m & \nearrow 1 \otimes m & & \\
 & L \otimes_K L & & &
 \end{array}$$

Коалгебра (L, m) называется коммутативной, если $m(x)$ принадлежит $S^2(L)$ — симметрической части произведения $L \otimes L$.

Задача 1. Пусть $m^*: L^* \otimes_K L^* \rightarrow L^*$ — отображение, сопряженное к m .

Докажите, что (L, m) является (коммутативной) коалгеброй над K , если и только если L^* является ассоциативной (и коммутативной) K -алгеброй относительно операции $x \cdot y = m^*(x \otimes y)$, $x, y \in L^*$.

Линейное пространство L над K называется *кольцевой группой* (другие названия — *алгебра Хопфа*, *бигэбра*), если на нем определены структуры алгебры и коалгебры, причем коумножение $m: A \rightarrow A \otimes A$ является гомоморфизмом алгебр, а умножение определяет гомоморфизм коалгебр: $A \otimes A \rightarrow A$.

Пример 1. Пусть G — конечная группа. В пространстве $\mathbb{C}[G]$ определим умножение

$$f_1 f_2(g) = f_1(g) f_2(g)$$

и коумножение:

$$m(f)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2).$$

Без труда проверяется, что относительно этих операций $\mathbb{C}[G]$ является кольцевой группой.

Отметим, что соответствующая алгебра коммутативна, а коалгебра коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативна группа G .

Пример 2. В том же пространстве $\mathbb{C}[G]$ определим умножение как свертку:

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g),$$

а коумножение — формулой

$$m(f)(g_1, g_2) = \begin{cases} f(g_1), & \text{если } g_1 = g_2, \\ 0, & \text{если } g_1 \neq g_2. \end{cases}$$

Здесь также легко проверить, что эти операции превращают $\mathbb{C}[G]$ в кольцевую группу. В этом примере коалгебра коммутативна, а коммутативность алгебры равносильна коммутативности группы G .

Можно показать, что структура кольцевой группы в этом примере определяет некоторую блок-алгебру в смысле М. Г. Крейна и сама однозначно определяется по этой блок-алгебре.

Пусть L — кольцевая группа над K . Двойственной к L кольцевой группой называется пространство $L^* = \text{Hom}_K(L, K)$, снабженное операциями умножения и коумножения, сопряженными к операциям коумножения и умножения в L .

Задача 2. Проверьте, что кольцевые группы из примеров 1 и 2 двойственны друг другу.

Будем говорить, что кольцевая группа соответствует обычной группе G , если она получается из G конструкцией примера 1, и что кольцевая группа двойственна к обычной группе G , если она получается конструкцией примера 2. Легко указать пример кольцевой группы, не принадлежащей ни одному из этих типов. Достаточно взять сумму (в категории кольцевых групп) двух кольцевых групп, одна из которых соответствует обычной некоммутативной группе, а другая двойственна к обычной некоммутативной группе.

Более интересные примеры можно построить, рассматривая расширения кольцевых групп.

Изучение таких расширений начато Г. И. Кацем (см. [94], [95]).

Задача 3. Покажите, что существует такое расширение кольцевой группы L_1 , соответствующей обычной группе $\mathbf{C}_2$ с помощью кольцевой группы L_2 , соответствующей обычной коммутативной группе $\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2$, которое не соответствует никакой обычной группе.

12.4. Другие результаты. Преобразование Фурье для групп более общих, чем коммутативные или компактные, изучено еще недостаточно. Один из немногих общих результатов здесь — аналог формулы Планшереля для унимодулярных локально компактных групп. Для комплексных полупростых групп Ли этот результат был получен М. А. Наймарком (так называемый «континуальный аналог леммы Шура»). Сформулируем здесь эту теорему только для ручных групп.

Общую формулировку и доказательство можно найти в работах И. Сигала [122] и Ф. Маутнера [111].

Теорема 1. Пусть G — локально компактная унимодулярная ручная группа со счетной базой.

Существует такая мера μ (так называемая мера Планшереля) на пространстве $\hat{G}$, что

$$\int_G |\hat{f}(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}} \text{tr} [\hat{f}(\lambda) \hat{f}(\lambda)^*] d\mu(\lambda)$$

для всех $\hat{f} \in L^1(G, dg) \cap L^2(G, dg)$.

Преобразование Фурье продолжается до изометрического отображения $L^2(G, dg)$ на пространство $L^2(\hat{G}, \mu)$ квадратично μ -интегрируемых операторных функций на $\hat{G}$, принимающих в точке $\lambda \in \hat{G}$ значения из пространства операторов Гильберта — Шмидта в H_λ .

Доказательство можно вывести из общей теоремы о разложении унитарных представлений ручных групп (см. п. 8.4, теорема 3), примененной к представлению T группы $G \times G$ в пространстве $L^2(G, dg)$ по формуле

$$[T(g_1, g_2)f](g) = f(g_1^{-1}gg_2). \quad (1)$$

Для этого нужно воспользоваться следующими утверждениями

Задача 1. Докажите, что если G — ручная группа, то всякое неприводимое представление группы $G \times G$ имеет вид

$$T(g_1, g_2) = T_1(g_1) \otimes T_2(g_2),$$

где T_1 и T_2 — неприводимые представления группы G .

Указание. Воспользоваться свойствами примарных представлений ручных групп (см. задачу 3 в п. 8.4).

Задача 2. Докажите, что представление T , заданное формулой (1), имеет простой спектр.

Указание. Докажите, что если A (соответственно B) — алгебра Неймана, порожденная левыми (соответственно правыми) сдвигами в $L^2(G, dg)$, то $A = B!$.

Таким образом, имеет место разложение вида

$$T = \int_{\hat{G}} \int_{\hat{G}} (T_\lambda \times T_\mu) d\nu(\lambda, \mu). \quad (2)$$

Задача 3. Покажите, что мера ν в формуле (2) сосредоточена на подмножестве Δ пространства $\hat{G} \times \hat{G}$, состоящем из представлений вида $T_\lambda \times T_\lambda$.

Указание. Пусть C — алгебра Неймана, порожденная левыми и правыми сдвигами в $L^2(G, dg)$. Докажите, что центр Z алгебры C совпадает с $A \cap B$ (см. указание к задаче 2).

Рассмотрим антилинейный автоморфизм ε пространства $L^2(G, dg)$, переводящий функцию $f(g)$ в функцию $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$. Утверждение задачи вытекает из следующего факта: для любого оператора $z \in Z$ справедливо равенство $\varepsilon \cdot z \cdot \varepsilon = z^*$.

Доказательство этого факта можно получить, приближая оператор z операторами $L(\varphi_n) = \int_G \varphi_n(g) L(g) dg$, $\varphi_n \in L^1(G, dg)$, и применяя обе части доказываемого равенства к вектору вида $f = f_1 * f_2$, $f_i \in L^1(G, dg) \cap L^2(G, dg)$.

Другой вывод формулы Планшереля основан на понятии следа на C^* -алгебре. Его можно прочитать в книге Диксмье [24].

Очень интересной и трудной является задача об описании C^* -алгебры группы G в случае, когда эта группа некомпактна и некоммутативна. Для некоторых классов групп можно реали-

зовать алгебру $C^*(G)$ в виде подалгебры в алгебре $C^*(\hat{G})$ всех операторных функций на $\hat{G}$, значения которых в точке $\lambda \in \hat{G}$ — вполне непрерывные операторы в соответствующем пространстве H_λ .

Случай $G = SL(2, \mathbb{C})$ полностью разобран в статье Фелла [129]. Там же дается много полезных сведений о структуре C^* -алгебр операторных функций.

Принцип двойственности, основанный на понятии кольцевой группы, обобщен в работах Г. И. Каца [93]. Однако окончательная формулировка здесь гораздо более громоздка и менее естественна. Модернизированное изложение этого круга вопросов содержится в [127] и [135]. Новый подход к описанию $C^*(G)$ для $G = AH(1, \mathbb{R})$ предложен в [190].

Ряд интересных и трудных вопросов возникает при изучении топологии пространства $\hat{G}$. Мы уже отмечали выше, что для локально компактных групп полуотделимость пространства $\hat{G}$ равносильна тому, что G — ручная группа (доказательство см. в цитированной выше книге Диксмье [24]).

Так называемое R -свойство означает вхождение единичного представления T_0 в носитель меры Планшереля μ на $\hat{G}$. Как отмечалось в п. 9.1, это свойство для локально компактных групп равносильно усреднимости (аменабельности) G .

Недавно Д. А. Каждан обнаружил интересную связь между алгебраическими свойствами группы G и топологическим строением окрестности точки $T_0 \in \hat{G}$.

Теорема 2 (Д. А. Каждан). *Если G — счетная дискретная группа и точка $T_0 \in \hat{G}$ изолирована, то G имеет конечное число образующих, и ее фактор-группа по коммутанту конечна.*

Доказательство основано на следующем замечании.

Задача 4. Если T_0 — изолированная точка в $\hat{G}$ и семейство $\mathcal{S}$ представлений G слабо содержит T_0 , то T_0 является подпредставлением одного из представлений $S \in \mathcal{S}$.

Теорема Каждана позволила получить новую существенную информацию о структуре дискретных подгрупп в полупростых группах Ли. Подробное изложение этих результатов дано в семинаре Бурбаки [83].

§ 13. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Конструкция индуцированного представления играет очень большую роль в теории представлений. Достаточно сказать, что представления групп преобразований в пространствах функций, векторных и тензорных полей, дифференциальных операторов и многих других объектов являются примерами индуцированных представлений.

Для многих групп все или почти все неприводимые унитарные представления *мономиальны*, т. е. индуцированы одномерным представлением некоторой подгруппы.

Наконец, сама операция индуцирования, которая является функтором из категории представлений подгруппы в категорию

представлений группы, стала в последние годы объектом детального и плодотворного исследования

13.1. Индуцированные представления конечных групп. Мы начнем с выяснения алгебраической основы понятия индуцированного представления и ограничимся в этом пункте конечномерными представлениями конечных групп.

Пусть X — однородное правое G -пространство. В пространстве $L(X)$ функций на X действует представление T группы G :

$$[T(g)f](x) = f(xg). \quad (1)$$

Фиксируем точку $x_0 \in X$, и пусть H — стационарная подгруппа этой точки. Каждой функции $f \in L(X)$ можно поставить в соответствие функцию F на группе G :

$$F(g) = f(x_0g). \quad (2)$$

Задача 1. Докажите, что формула (2) устанавливает изоморфизм между пространством $L(X)$ и пространством $L(G, H)$ функций на G , постоянных на правых классах смежности по H . Представление T при этом изоморфизме переходит в представление, задаваемое формулой

$$[T(g)F](g_1) = F(g_1g). \quad (3)$$

Отметим, что мы получили таким образом подпредставление правого регулярного представления G , соответствующее инвариантному подпространству $L(G, H)$.

Представления описанного типа иногда называют *квазирегулярными*. Понятие индуцированного представления получается обобщением этой конструкции следующим образом.

Пусть U — представление подгруппы H в конечномерном пространстве V . Обозначим через $L(G, H, U)$ пространство вектор-функций F на G со значениями в V , удовлетворяющих условию

$$F(hg) = U(h)F(g), \quad h \in H. \quad (4)$$

Задача 2. Докажите, что пространство $L(G, H, U)$ инвариантно относительно правых сдвигов на G , и что формула (3) задает представление G в $L(G, H, U)$.

Получаемое таким образом представление называется *индуцированным* (более точно — *представлением группы G , индуцированным представлением U подгруппы H*) и обозначается $\text{Ind}(G, H, U)$ или просто $\text{Ind } U$, если ясно, о какой группе и подгруппе идет речь. Когда явный вид U неизвестен или не важен, говорят о представлении, *индуцированном с подгруппы H* .

Если в качестве индуцирующего представления U взять тривиальное одномерное представление U_0 подгруппы H , то в качестве $\text{Ind } U$ мы получим квазирегулярное представление в пространстве $L(X)$, $X = H \backslash G$. В частности, регулярное представление группы G можно записать как $\text{Ind}(G, \{e\}, U_0)$.

Индукцированное представление можно, как и квазирегулярное, реализовать в пространстве (вектор-) функций на однородном пространстве $X = H \setminus G$. Для этого заметим, что функция $F \in L(G, H, U)$ полностью определяется, если известны ее значения хотя бы в одной точке из каждого класса смежности Hg . Пусть из каждого такого класса выбрано по представителю. Другими словами, задано такое отображение $s: X \rightarrow G$, что $p \circ s = 1$, где p — естественная проекция G на $H \setminus G = X$.

Задача 3. Каждый элемент $g \in G$ однозначно записывается в виде $g = hs(x)$, где $h \in H$, $x \in X$.

Указание. Положить $x = x_0g$.

Поставим в соответствие каждой функции $F \in L(G, H, U)$ вектор-функцию f на X со значениями в V :

$$f(x) = F(s(x)). \quad (5)$$

Задача 4. Докажите, что соответствие (5) является изоморфизмом между $L(G, H, U)$ и пространством $L(X, V)$ всех вектор-функций на X со значениями в V . Представление T переходит при этом изоморфизме в представление, задаваемое формулой

$$[T(g)f](x) = A(g, x)f(xg), \quad (6)$$

где функция $A(g, x)$ определяется равенствами

$$A(g, x) = U(h), \quad (7)$$

$$s(x)g = hs(xg). \quad (8)$$

Указание. Воспользуйтесь разложением из задачи 3, примененным к элементу $s(x)g \in G$.

Таким образом, операторы индуцированного представления представляют собой суперпозицию сдвига и умножения на операторную функцию.

Можно показать, что это свойство является характеристическим для индуцированных представлений.

Задача 5. Докажите, что всякое представление вида (6) эквивалентно представлению, индуцированному с подгруппы H .

Указание. Докажите, что функция $A(g, x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$A(g_1, x)A(g_2, xg_1) = A(g_1g_2, x), \quad (9)$$

общее решение которого имеет вид

$$A(g, x) = B(x)^{-1}U(h)B(xg),$$

где B — некоторая операторная функция на X со значениями в $\text{Aut } V$, U — представление H в V , а $h \in H$ определяется из равенства (8).

Отметим, что функцию A , удовлетворяющую условию (9), можно интерпретировать как одномерный коцикл группы G с коэффициентами в $\text{Aut } V$, а задачу 5 — как утверждение о том, что каждый коцикл гомологичен коциклу вида (7).

Следующие простые, но важные свойства индуцированных представлений мы сформулируем в виде задач.

Задача 6. Докажите, что если $U_1 \sim U_2$, то $\text{Ind } U_1 \sim \text{Ind } U_2$. (Таким образом, операция индуцирования определена и для классов эквивалентности представлений.)

Указание. Если $C \in \mathcal{C}(U_1, U_2)$, то отображение $F \mapsto CF$ действует из $L(G, H, U_1)$ в $L(G, H, U_2)$ и принадлежит $\mathcal{C}(\text{Ind } U_1, \text{Ind } U_2)$.

Задача 7. Докажите эквивалентность

$$\text{Ind}(U_1 + U_2) \sim \text{Ind } U_1 + \text{Ind } U_2.$$

Следствие. Если $\text{Ind } U$ неприводимо, то U также неприводимо.

Задача 8 (теорема о сквозном индуцировании). Если H — подгруппа в G , а K — подгруппа в H , то для любого представления U подгруппы K имеет место эквивалентность

$$\text{Ind}(G, H, \text{Ind}(H, K, U)) \sim \text{Ind}(G, K, U)$$

или, символически,

$$\text{Ind}_H^G \text{Ind}_K^H = \text{Ind}_K^G,$$

где через Ind_H^G обозначена операция перехода от U к $\text{Ind}(G, H, U)$. (Отметим, что эта операция является ковариантным функтором из категории представлений H в категорию представлений G .)

Указание. Пусть V — пространство представления U . Рассмотрите отображение $L(G, K, V)$ в $L(G, H, L(H, K, V))$ по формуле

$$f \mapsto F, \text{ где } F(g, h) = f(hg).$$

Задача 9 (формула Фробениуса). Докажите, что характер индуцированного представления можно вычислить по формуле

$$\chi_{\text{Ind } U}(g) = \sum_{x \in X} \chi'_U(s(x)^{-1}gs(x)), \quad (10)$$

где характер χ_U представления U в правой части равенства считается продолженным нулевыми значениями с подгруппы H на всю группу G .

Указание. Воспользуйтесь формулами (6) — (8).

Следствие. Если H — нормальный делитель в G , то характер любого представления, индуцированного с H , обращается в нуль вне H .

Следующее соотношение является основой для большинства вычислений, связанных с индуцированными представлениями конечных групп.

Теорема 1 (двойственность Фробениуса). Пусть T — представление группы G , U — представление подгруппы H . Тогда

$$c(T, \text{Ind } U) = c(T|_H, U). \quad (11)$$

(Здесь через $T|_H$ обозначено ограничение представления T на подгруппу H .)

Доказательство этой теоремы можно легко вывести из формулы Фробениуса (10) и равенства 3 из п. 11.1.

Другой способ состоит в установлении изоморфизма между пространствами $\mathcal{C}(T, \text{Ind } U)$ и $\mathcal{C}(T|_H, U)$. Пусть представление T действует в пространстве W , а U — в пространстве V . Тогда с каждым оператором $A \in \text{Hom}(W, L(G, H, V))$ можно сопоставить оператор $B \in \text{Hom}(W, V)$ по формуле

$$B(w) = [A(w)](x_0), \quad w \in W. \quad (12)$$

Задача 10. Докажите, что соответствие, задаваемое равенством (12), устанавливает изоморфизм между $\mathcal{C}(T, \text{Ind } U) \subset \text{Hom}(W, L(G, H, V))$ и $\mathcal{C}(T|_H, U) \subset \text{Hom}(W, V)$.

Отметим частные случаи двойственности Фробениуса, часто используемые в приложениях:

Следствие 1. Если T — неприводимое представление G , а U — неприводимое представление H , то T входит в разложение $\text{Ind } U$ с той же кратностью, с какой U входит в разложение $T|_H$.

Следствие 2. Неприводимая компонента T столько раз входит в разложение квазирегулярного представления, соответствующего подгруппе H , сколько в пространстве W представления T имеется линейно независимых инвариантов подгруппы H .

Пример. Рассмотрим представление T группы $G \times G$ в пространстве $L(G)$ по формуле

$$[T(g_1, g_2)f](g) = f(g_1^{-1}gg_2).$$

Очевидно, что это — квазирегулярное представление, соответствующее диагональной подгруппе $\Delta \in G \times G$, состоящей из пар вида (g, g) . Каждое неприводимое представление $G \times G$ имеет вид $T_1 \times T_2$: $(g_1, g_2) \rightarrow T_1(g_1) \otimes T_2(g_2)$, где T_1 и T_2 — неприводимые представления G . Согласно следствию 2 теоремы 1, представление $T_1 \times T_2$ входит в разложение T столько раз, сколько имеется Δ -инвариантных векторов для представления $T_1 \times T_2$. Ограничение $T_1 \times T_2$ на Δ является, как легко понять, тензорным произведением $T_1 \otimes T_2$ представлений T_1 и T_2 группы G .

Согласно задаче 5 из п. 7.1 искомое число равно $c(T_1, T_2^*)$, т. е. единице, если $T_1 \sim T_2^*$, и нулю в противном случае. Таким образом, представление T имеет простой спектр, и его неприводимые компоненты имеют вид $T_k \times T_k^*$, где T_k пробегает множество $\hat{G}$. Двойственность Фробениуса является характеристическим свойством индуцированного представления и позволяет определить это представление в категорных терминах.

Обозначим $\Pi(G, K)$ категорию конечномерных линейных представлений над полем K конечной группы G .

Пусть задана подгруппа $H \subset G$ и ее K -представление U . Рассмотрим контравариантный функтор F из $\Pi(G, K)$ в категорию линейных пространств над полем K :

$$F(T) = \mathcal{C}(T|_H, U).$$

По теореме 1 этот функтор можно записать в виде

$$F(T) = \mathcal{C}(T, \text{Ind } U).$$

Таким образом, функтор F представим и индуцированное представление $\text{Ind } U$ — объект, представляющий этот функтор.

Отметим, что в бесконечномерном случае функтор F , как правило, оказывается непредставимым. Поэтому попытки перенести на этот случай теорему двойственности Фробениуса приводят к расширению первоначально выбранной категории представлений. Мы обсудим этот вопрос подробнее в следующих пунктах.

Можно дать еще одно определение индуцированного представления в категорных терминах. А именно, индуцированное представление $\text{Ind } U$ оказывается универсальным объектом в следующей категории.

Для данного представления U подгруппы H в пространстве V рассмотрим всевозможные отображения $\varphi: V \rightarrow L$, где L — пространство представления группы G и φ перестановочно с действием подгруппы H . Такие отображения образуют категорию, если определить морфизм φ в φ' как коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & L \\ & \searrow \varphi' & \downarrow \varepsilon \\ & & L' \end{array},$$

где ε — отображение, перестановочное с действием группы G .

Задача 11. Докажите, что в описанной выше категории универсальным отталкивающим объектом является отображение φ_0 пространства V в пространство $L(G, H, U)$ индуцированного представления $\text{Ind } U$ по формуле

$$(\varphi_0(v))(g) = \begin{cases} U(g)v, & \text{если } g \in H, \\ 0, & \text{если } g \notin H. \end{cases}$$

Указание. Если $\varphi: V \rightarrow L$ — любой объект нашей категории, то иско-
мое отображение

$$\varepsilon: L(G, H, U) \rightarrow L$$

задается формулой

$$\varepsilon(F) \rightarrow \sum_{H \setminus G} T(g^{-1}) \varphi(F(g))$$

(выражение в правой части постоянно на правых классах смежности в G по H).

Наконец, приведем явную конструкцию пространства индуцированного представления как модуля над групповой алгеброй $K[G]$. Пусть U — представление подгруппы H в пространстве V . Тогда V является левым $K[H]$ -модулем. Рассмотрим тензорное произведение $K[G] \otimes_{K[H]} V$, где $K[G]$ рассматривается как левый $K[G]$ -модуль и правый $K[H]$ -модуль. Это произведение будет тогда левым $K[G]$ -модулем,

Задача 12. Докажите, что $K[G]$ -модуль $K[G] \otimes_{K[H]} V$ соответствует индуцированному представлению $\text{Ind}(G, H, U)$.

Указание. Проверьте, что отображение $\varphi: V \rightarrow K[G] \otimes_{K[H]} V$, определенное равенством $\varphi(v) = 1 \otimes v$, является универсальным объектом, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Другой способ состоит в установлении явного изоморфизма между $K[G] \otimes_{K[H]} V$ и $L(G, H, U)$. Этот изоморфизм ставит в соответствие функции $F \in L(G, H, U)$ элемент

$$\sum_{H \setminus G} \delta_{g-1} \otimes F(g) \in K[G] \otimes_{K[H]} V.$$

Обратное отображение переводит элемент $\delta_g \otimes v$ из $K[G] \otimes_{K[H]} V$ в функцию

$$F(g_1) = \begin{cases} U(g_1 g) v, & \text{если } g_1 g \in H, \\ 0, & \text{если } g_1 g \notin H. \end{cases}$$

Последние два определения индуцированного представления с помощью «обращения стрелок» приводят к определению дуального понятия, так называемого *коиндуцированного* представления (другое название — *продуцированный модуль*). Можно показать, однако, что в случае, когда алгебра $K[G]$ — полупроста, операция коиндуцирования совпадает с операцией индуцирования.

13.2. Унитарные индуцированные представления локально-компактных групп. Конструкция индуцированного представления, описанная в п. 13.1 для конечных групп, переносится на локально компактные группы с сохранением многих (хотя и не всех) основных свойств. Детальное изучение этой конструкции было проведено в работах Г. Макки, и мы будем называть получаемые таким образом представления индуцированными в смысле Макки.

Как и в конечном случае, возможны две реализации индуцированного представления: 1) в пространстве вектор-функций на всей группе G , преобразующихся по заданному представлению при левых сдвигах на элементы подгруппы H ; 2) в пространстве вектор-функций на правом однородном пространстве $X = H \setminus G$. Переход от одной реализации к другой для бесконечномерных представлений далеко не так очевиден, как в конечном случае. Тем не менее, из критерия индуцированности, который мы приведем в конце этого пункта, вытекает эквивалентность обоих подходов.

Рассмотрим сначала первую реализацию. Пусть G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа и U_0 — некоторое (не обязательно унитарное) представление подгруппы H

в гильбертовом пространстве V . Введем подобно тому, как мы делали в п. 13.1, пространство $L(G, H, U_0)$ измеримых вектор-функций F на G со значениями в V , удовлетворяющих условию

$$F(hg) = U_0(h) F(g), \quad h \in H, \quad g \in G. \quad (1)$$

Очевидно, что это пространство инвариантно относительно правых сдвигов на G .

Поставим вопрос, когда в $L(G, H, U_0)$ можно ввести G -инвариантное скалярное произведение вида

$$(F_1, F_2) = \int_G (F_1(g), F_2(g))_V d\mu(g), \quad (2)$$

где μ — некоторая мера на группе G .

Задача 1. Проверьте, что для меры μ вида $\rho(g) d_r g$ условие G -инвариантности скалярного произведения (2) сводится к следующему: величина

$$\int_H \|U_0(h)\xi\|_V^2 \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} \rho(hg) d_r h \text{ не зависит от } g \text{ для всех } \xi \in V.$$

Будем рассматривать представления U_0 специального вида:

$$U_0(h) = \left[\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \right]^{1/2} U(h), \quad (3)$$

где U — унитарное представление H . Тогда условие задачи 1 превращается в соотношение: величина $\int_H \rho(hg) d_r h$ не зависит от g .

Задача 2. Докажите, что на группе G существует такая непрерывная неотрицательная функция ρ , что

$$\int_H \rho(hg) d_r h = 1, \quad (4)$$

и $\text{supp } \rho$ имеет компактное пересечение с каждым классом смежности Hg .

Указание. Подробное решение приведено в монографии Бурбаки [8, гл. VII, § 2, п. 4].

Пусть s — измеримое отображение X в G , обладающее свойством $s(Hg) \subseteq Hg$, и ν_s — соответствующая мера на X (см. п. 9.1).

Задача 3. Если U_0 — представление вида (3), а ρ — функция на G , удовлетворяющая условиям задачи 2, то для любой функции $F \in L(G, H, U_0)$ справедливо равенство

$$\int_G \|F(g)\|_V^2 \rho(g) d_r g = \int_X \|F(s(x))\|_V^2 d\nu_s(x). \quad (5)$$

Указание. Воспользуйтесь формулой (6') из п. 9.1.

Следствие. Левая часть равенства (5) не зависит от выбора функции ρ , а правая — от выбора отображения s .

Дадим теперь определение индуцированного представления. Пусть U — унитарное представление H в пространстве V . Определим представление U_0 , связанное с U равенством (3), и введем в $L(G, H, U_0)$ норму, квадрат которой дается формулой (5). Полученное таким образом гильбертово пространство обозначим $L^2(G, H, U)$. Унитарное представление T , действующее в $L^2(G, H, U)$ по формуле

$$[T(g)F](g_1) = F(g_1g), \quad (6)$$

назовем *индуцированным в смысле Макки представлением U* и обозначим его, как и в п. 13.1, $\text{Ind}(G, H, U)$ или просто $\text{Ind } U$.

Напомним, что для топологических групп слово «представление» мы всегда понимаем как «непрерывное представление». Предоставим читателю проверить, что $\text{Ind } U$ будет непрерывно, если непрерывно U . Для этого проще всего воспользоваться задачей 1 из п. 7.2 и следующим фактом.

Задача 4. Докажите, что плотное множество в $L^2(G, H, U)$ образуют функции вида

$$F(g) = \int_H U_0(h) \varphi(h^{-1}g) d_1 h,$$

где φ — непрерывная вектор-функция на G с компактным носителем.

Приведем теперь другую реализацию этого представления. Фиксируем измеримое отображение $s: X \rightarrow G$, обладающее свойством $s(Hg) \in Hg$. Каждой функции $F \in L^2(G, H, U)$ поставим в соответствие функцию $\hat{f}(x) = F(s(x))$. Очевидно, что F однозначно восстанавливается по $\hat{f}$.

Из равенства (5) следует, что отображение $F \rightarrow \hat{f}$ задает изоморфизм $L^2(G, H, U)$ на пространство $L^2(X, \nu_s, V)$ вектор-функций на X со значениями в V , с суммируемым квадратом нормы по мере ν_s .

Задача 5. Докажите, что индуцированное представление (6) переходит при указанном выше изоморфизме в представление

$$[T(g)\hat{f}](x) = A(g, x)\hat{f}(xg), \quad (7)$$

где операторная функция $A(g, x)$ задается равенством

$$A(g, x) = U_0(h), \quad (8)$$

в котором элемент $h \in H$ определяется из соотношения

$$s(x)g = hs(xg). \quad (9)$$

Указание. Воспользуйтесь явным выражением F через $\hat{f}$:

$$F(hs(x)) = U_0(h)\hat{f}(x), \quad h \in H, \quad x \in X.$$

Полученная реализация подсказывает следующее обобщение конструкции индуцированного представления. Пусть X — пра-

вое G -пространство, на котором есть квазинвариантная мера μ . Рассмотрим семейство операторов $T(g)$, $g \in G$, задаваемое формулой (7) в пространстве $L^2(X, \mu, V)$, где V — некоторое гильбертово пространство, а $A(g, x)$ — функция на $G \times X$ со значениями в $\text{End } V$.

Для того чтобы выполнялось равенство $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$, необходимо и достаточно, чтобы при любых g_1 и g_2 из G выполнялось равенство

$$A(g_1, x) A(g_2, x g_1) = A(g_1 g_2, x) \quad (10)$$

для почти всех $x \in X$ по мере μ . Операторы $T(g)$ будут унитарными, если при каждом $g \in G$ для почти всех $x \in X$ операторы

$$B(g, x) = \left[\frac{d\mu(xg)}{d\mu(x)} \right]^{-1/2} A(g, x)$$

будут унитарны в пространстве V .

Задача 6. Докажите, что операторная функция $B(g, x)$ так же, как и $A(g, x)$, удовлетворяет условию (10).

Указание. Воспользуйтесь тождеством

$$\frac{d\mu(xg_1 g_2)}{d\mu(xg_1)} \frac{d\mu(xg_1)}{d\mu(x)} = \frac{d\mu(xg_1 g_2)}{d\mu(x)}.$$

Мы видим, что функция $B(g, x)$ является одномерным коциклом группы G с коэффициентами в группе Γ измеримых унитарных операторных функций на X (точнее, классов функций, совпадающих почти всюду по мере μ).

Задача 7. Докажите, что если коциклы B_1 и B_2 когомологичны, т. е.

$$B_1(g, x) = C(x)^{-1} B_2(g, x) C(xg)$$

для некоторого $C \in \Gamma$, то соответствующие представления T_1 и T_2 унитарно эквивалентны.

Указание. Искомая эквивалентность осуществляется унитарным оператором C в $L^2(X, \mu, V)$, действующим по формуле

$$(Cf)(x) = C(x) f(xg).$$

Таким образом, мы приходим к вопросу о структуре когомологий $H^1(G, \Gamma)$.

Если действие группы G на X удовлетворяет условиям теоремы Глима (см. п. 9.1), то изучение когомологий $H^1(G, \Gamma)$ может быть сведено к аналогичной задаче для случая, когда $X = H \setminus G$ — однородное пространство.

Оказывается, на однородном пространстве $X = H \setminus G$ всякий коцикл когомологичен коциклу специального вида, задаваемому формулами (8) и (9) и, следовательно, задается унитарным представлением подгруппы H . Это утверждение, по существу, равносильно следующему: всякое представление вида (7) на

однородном пространстве $X = H \setminus G$ индуцировано в смысле Макки с подгруппы H . Справедливость последнего вытекает из приводимого ниже критерия индуцированности.

Если мера μ на X эргодична относительно G (см. п. 9.1), но не сосредоточена ни на какой орбите этой группы в X , то классы когомологий $H^1(G, \Gamma)$ можно интерпретировать как классы унитарных представлений так называемой «виртуальной подгруппы» группы G .

Изучение виртуальных подгрупп было начато Г. Макки (см. его обзор [109]). Интересно, что виртуальные подгруппы коммутативной группы могут обладать неприводимыми представлениями размерности > 1 . См. по этому поводу статью автора: «Динамические системы, факторы и представления групп», УМН 22, вып. 5 (1967), 67—80. Дальнейшие результаты получены в работе Р. С. Исмагилова [91].

Перечислим некоторые свойства операции индуцирования в смысле Макки. Так же, как и в конечном случае, проверяется, что эта операция переносится на классы эквивалентных представлений, сохраняет разложение в сумму (в том числе и в непрерывную) и удовлетворяет принципу «сквозного индуцирования» (см. задачи 6—8 из п. 13.1).

Двойственность Фробениуса в той форме, как она сформулирована в следствии 1 к теореме 1 из п. 13.1, сохраняется для компактных групп и, вообще говоря, не имеет места для локально компактных групп. Отложим более подробное обсуждение этого вопроса до п. 13.5.

Во многих случаях важно знать, когда данное представление T группы G индуцировано в смысле Макки с замкнутой подгруппы H . Для того чтобы сформулировать критерий индуцированности, мы введем понятие «представления G -пространства». По определению, унитарным представлением правого G -пространства X в гильбертовом пространстве L называется пара (T, P) , где T — унитарное представление группы G в L , а P — невырожденное $*$ -представление алгебры $C_0(X)$ финитных непрерывных функций на X (с обычным умножением и комплексным сопряжением в качестве инволюции), причем T и P связаны соотношением

$$T(g) P(f) T(g^{-1}) = P(R(g)f), \quad (11)$$

где

$$[R(g)f](x) = f(xg). \quad (12)$$

Теорема 1 (критерий индуцированности). Для того чтобы унитарное представление T группы G было индуцировано в смысле Макки с замкнутой подгруппы $H \subseteq G$, необходимо и достаточно, чтобы оно продолжалось до унитарного представления однородного пространства $X = H \setminus G$.

Прежде чем доказывать теорему, приведем еще две эквивалентные формулировки.

1. Представление P алгебры $C_0(X)$ можно заменить так называемой проекционной мерой Δ , которая ставит в соответствие каждому борелевскому подмножеству $E \subset X$ ортогональный проектор $\Delta(E)$ и обладает свойствами:

$$\Delta(E_1 \cap E_2) = \Delta(E_1) \Delta(E_2),$$

$$\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta(E_k), \quad \text{если } E_k \cap E_j = \emptyset \quad \text{для } i \neq j,$$

$$P(f) = \int_X f(x) \Delta(dx) \quad \text{для } f \in C_0(X).$$

Условие (11) в терминах меры Δ означает, что

$$T(g)^{-1} \Delta(E) T(g) = \Delta(Eg). \quad (13)$$

Такая проекционная мера называется *системой импримитивности* относительно T . Таким образом, *критерием индуцированности представления T с подгруппы H является существование системы импримитивности на $X = H \setminus G$ относительно T* . Именно в такой форме этот критерий был впервые получен Г. Макки.

2. Вместо унитарного представления (T, P) G -пространства X можно рассматривать $*$ -представление Φ некоторой вспомогательной алгебры $\mathfrak{A}$ (аналога групповой алгебры). Эта алгебра строится так:

Пусть $C_0(X \times G)$ — линейное топологическое пространство финитных непрерывных функций $\alpha(x, g)$, $x \in X$, $g \in G$. (Сходимость в этом пространстве означает равномерную сходимость с дополнительным условием, что носители всех рассматриваемых функций содержатся в одном компакте $K \subset X \times G$.)

Задача 8. Пусть задано представление (T, P) пространства X . Существует единственное непрерывное линейное отображение $\Phi: C_0(X \times G) \rightarrow \text{Енд } V$, которое на функциях вида $\alpha(x, g) = u(x) v(g)$ задается формулой

$$\Phi(\alpha) = P(u) T(v),$$

где $T(v) = \int_G v(g) T(g) d_r g.$

Указание. Искомое отображение можно задать формулой

$$\Phi(\alpha) = \int_G P(\alpha(\cdot, g)) T(g) d_r g, \quad (14)$$

где $\alpha(\cdot, g)$ означает элемент $C_0(X)$, который получается из $\alpha \in C_0(X \times G)$ при фиксировании второго аргумента.

Задача 9. Определите в $C_0(X \times G)$ умножение и инволюцию так, чтобы соответствие $\alpha \mapsto \Phi(\alpha)$ было $*$ -представлением полученной алгебры с инволюцией.

$$\text{О т в е т. } (\alpha_1 * \alpha_2)(x, g) = \int_G \alpha_1(x, g_1^{-1}) \alpha_2(xg_1^{-1}, g_1g) d_1g_1,$$

$$\alpha^*(x, g) = \overline{\alpha(xg, g^{-1})} \Delta_G(g)^{-1}. \quad (15)$$

Возникающую таким образом алгебру обозначим $\mathfrak{A}$.

Будем говорить, что $*$ -представление Φ алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве L *согласовано* с представлением T группы G в том же пространстве, если выполняется соотношение

$$T(g_1)\Phi(f)T(g_2) = \Phi(\tilde{f}), \quad (16)$$

$$\text{где } \tilde{f}(x, g) = f(xg_1, g_1^{-1}gg_2^{-1})\Delta_G(g_1)^{-1}.$$

Ясно, что если представление T индуцировано в смысле Макки с подгруппы H , то представление Φ алгебры $\mathfrak{A}$, заданное формулой (14), согласовано с T .

Задача 10. Докажите, что всякое $*$ -представление Φ алгебры $\mathfrak{A}$, согласованное с T , имеет вид (14), где P — некоторое $*$ -представление алгебры $C_0(X)$, образующее вместе с T унитарное представление G -пространства X .

Указание. Воспользуйтесь методом восстановления представления группы по представлению групповой алгебры, описанным в п. 10.2.

Таким образом, *критерием индуцированности представления T группы G является существование $*$ -представления Φ алгебры $\mathfrak{A}$, согласованного с T .*

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Необходимость условия теоремы вполне очевидна. В самом деле, если представление $T = \text{Ind } U$ реализовано в форме (7), то, ставя в соответствие каждой функции $f \in C_0(X)$ оператор умножения на эту функцию в пространстве $L^2(X, \nu, V)$, мы получим требуемое представление P алгебры $C_0(X)$.

Доказательство достаточности более сложно. Сначала укажем способ восстановления индуцирующего представления U по индуцированному представлению $T = \text{Ind } U$. Мы увидим далее, что этот способ применим к любому представлению T , удовлетворяющему условию теоремы 1, и приводит к некоторому представлению U подгруппы H . Наконец, проверим, что U унитарно и что T эквивалентно $\text{Ind } U$, чем и завершится доказательство.

Итак, пусть T удовлетворяет условию теоремы 1. Построим, как описано выше, представление Φ вспомогательной алгебры $\mathfrak{A} \approx C_0(X \times G)$. Это представление является суммой циклических подпредставлений. Так как функтор Ind перестановочен с операцией суммы, достаточно проверить теорему для каждого

слагаемого. Поэтому предположим, что Φ — циклическое представление, действующее в пространстве L , и ξ — его источник. Предположим, что $T = \text{Ind } U$. Тогда $L = L^2(G, H, U)$ и вектор $\xi \in L$ — это вектор-функция на G со значениями в пространстве V представления U . Рассмотрим произвольную финитную функцию β на $G \times G$. Интеграл $\int_H \beta(hg_1, g_2) d_r h$ зависит только от g_2 и от класса смежности Hg_1 . Положим

$$\alpha(Hg_1, g_2) = \int_H \beta(hg_1, g_2) d_r h.$$

Тогда $\alpha \in C_0(X \times G)$. Вычислим величину $(\Phi(\alpha)\xi, \xi)$. Используя формулы (5), (6) и (14), получим

$$\begin{aligned} (\Phi(\alpha)\xi, \xi) &= \int_G ([\Phi(\alpha)\xi](g_1), \xi(g_1))_V \rho(g_1) d_r g_1 = \\ &= \int_G \int_G \alpha(Hg_1, g_2) (\xi(g_1g_2), \xi(g_1))_V \rho(g_1) d_r g_1 d_r g_2 = \\ &= \int_H \int_G \int_G \beta(hg_1, g_2) (\xi(g_1g_2), \xi(g_1))_V \rho(g_1) d_r h d_r g_1 d_r g_2. \end{aligned}$$

Делая замену $g_1 \mapsto h^{-1}g_1$ и используя соотношения (1), (3), (4) и формулу (4) из п. 9.1, можно переписать полученный интеграл в виде

$$\iint \beta(g_1, g_2) (\xi(g_1g_2), \xi(g_1))_V d_r g_1 d_r g_2.$$

Возьмем в качестве β функцию вида

$$\beta(g_1, g_2) = \theta_1(g_1g_2) \overline{\theta_2(g_1)} \Delta_G(g_1).$$

Тогда наш интеграл можно записать как $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)_V$, где $\hat{\theta}$ — элемент V , задаваемый формулой

$$\hat{\theta} = \int \theta(g) \xi(g) d_r g.$$

Задача 11. Докажите, что векторы вида $\hat{\theta}$, где $\theta \in C_0(G)$, всюду плотны в V .

Указание. Используйте тот факт, что ξ — источник в L .

Задача 12. Докажите соотношение

$$(L(h)\theta)^\wedge = [\Delta_H(h) \Delta_G(h)]^{1/2} U(h) \hat{\theta},$$

где $[L(h)\theta](g) = \theta(h^{-1}g)$.

Указание. Воспользуйтесь формулами (1) и (3).

Результаты задач 11 и 12 позволяют восстановить представление U (с точностью до эквивалентности) по представлению Φ .

А именно, пространство V является пополнением $C_0(G)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(\theta_1, \theta_2) = (\Phi(\alpha)\xi, \xi), \quad (17)$$

где

$$\alpha(Hg_1, g_2) = \int_H \overline{\theta_2(hg_1)} \theta_1(hg_1g_2) \Delta_G(hg_1) d_r h.$$

Представление U действует в этом пространстве по формуле

$$[U(h)\theta](g) = \Delta_H(h)^{-1/2} \Delta_G(h)^{-1/2} \theta(h^{-1}g). \quad (18)$$

Пусть теперь T — представление группы G , удовлетворяющее условию теоремы, и Φ — соответствующее *-представление алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве L . Определим в $C_0(G)$ скалярное произведение по формуле (17) и представление U подгруппы H по формуле (18).

Задача 13. Докажите, что скалярное произведение (17) инвариантно относительно операторов $U(h)$, $h \in H$, заданных формулой (18).

Указание. Сделайте замену переменных в соответствующем интеграле.

Более сложно доказать, что скалярное произведение (17) положительно определено. Чтобы это установить, покажем, что исходное представление T эквивалентно представлению $\text{Ind } U$. (Мы допускаем здесь некоторую вольность, обозначая через $\text{Ind } U$ представление, получаемое индуцированием в смысле Макки из представления U , о котором мы еще не знаем, что оно унитарно.)

Пространство M представления $\text{Ind } U$ состоит из вектор-функций F на группе G со значениями в $C_0(G)$, т. е. из функций на $G \times G$. Эти функции удовлетворяют условию

$$F(hg_1, g_2) = \Delta_G(h)^{-1} F(g_1, h^{-1}g_2). \quad (19)$$

Определим в M скалярное произведение равенством

$$(F_1, F_2) = \int (F_1(g, \cdot), F_2(g, \cdot))_{C_0(G)} \rho(g) d_r g. \quad (20)$$

Формулы (19) и (20) являются, очевидно, специализациями общих формул (1) и (5), определяющих пространство и операторы индуцированного представления.

Пусть L_0 — плотное в L подмножество векторов вида $\Phi(\alpha)\xi$, $\alpha \in C_0(X \times G)$. Определим отображение τ пространства L_0 в M , переводящее вектор $\Phi(\alpha)\xi$ в функцию

$$F(g_1, g_2) = \alpha(Hg_1, g_1^{-1}g_2) \Delta_G(g_1)^{-1}. \quad (21)$$

Задача 14. Докажите, что отображение τ , заданное равенством (21) изометрично и перестановочно с действием группы G .

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулами (16) и (17).

За д а ч а 15. Докажите, что скалярное произведение (17) положительно определено.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатами задач 11 и 14.

Доказательство теоремы закончено.

13.3. Представления расширений групп. Мы покажем в этом пункте, что с помощью критерия индуцированности из п. 13.2 можно получить существенную информацию о неприводимых унитарных представлениях расширений групп.

Пусть G — локально компактная группа, обладающая замкнутым нормальным делителем N .

Группа G действует на N и, следовательно, на дуальном пространстве $\hat{N}$. Будем для определенности считать $\hat{N}$ правым G -пространством, на котором G действует по следующему правилу:

если $n \mapsto U(n)$ — представление класса $\lambda \in \hat{N}$, то представление класса λg имеет вид $n \mapsto U(gng^{-1})$.

Предположим, что N — ручная группа. Тогда каждое унитарное представление T группы G продолжается до представления G -пространства $\hat{N}$.

В самом деле, ограничение представления T на N можно записать в виде непрерывной суммы вида

$$T|_N = \int_{\hat{N}} W_\lambda d\mu(\lambda), \quad (1)$$

где W_λ — примерное представление вида $U_\lambda \otimes S_\lambda$, U_λ принадлежит классу λ , а S_λ — тривиальное представление размерности $n(\lambda)$ (см. теорему 3 из п. 8.4). Пусть

$$L = \int_{\hat{N}} L_\lambda d\mu(\lambda) \quad (2)$$

— соответствующее разложение пространства L представления T . Каждой измеримой ограниченной функции f на $\hat{N}$ мы поставим в соответствие диагональный оператор $P(f)$:

$$(P(f)\xi)(\lambda) = f(\lambda)\xi(\lambda). \quad (3)$$

Отметим, что корректность этого определения (т. е. независимость оператора $P(f)$ от выбора разложений (1) и (2)), следует из теоремы 3, п. 8.4.

За д а ч а 1. Докажите, что $(T P)$ — представление G -пространства $\hat{N}$, т. е. выполняется условие (11) из п. 13.2.

У к а з а н и е. Докажите требуемое соотношение сначала для случая, когда f — характеристическая функция некоторого измеримого подмножества $S \subset \hat{N}$.

Задача 2. Докажите, что мера μ квазиинвариантна относительно G .

Указание. Воспользуйтесь утверждением о единственности в теореме 3 из п. 8.4 и тем фактом, что представления $T|_N$ и $T(g)T|_N T(g)^{-1}$ унитарно эквивалентны.

Задача 3. Докажите, что если представление T неприводимо, то мера μ должна быть G -эргодична.

Указание. Если S — измеримое G -инвариантное подмножество в $\tilde{N}$, то его характеристической функции χ_S соответствует проекционный оператор $P(\chi_S)$, перестановочный с представлением T . Поэтому $P(\chi_S)$ равен 0 или 1 и, следовательно, $\chi_S = 0$ или $\chi_S = 1$ почти всюду.

Если кроме того действие G на $\tilde{N}$ удовлетворяет условиям теоремы Глимма из п. 9.1, то мера μ сосредоточена на одной из G -орбит в $\tilde{N}$.

Пусть X — эта орбита.

Операторы $P(f)$ в (3) зависят только от ограничения f на X . Мы получаем таким образом представление однородного G -пространства X . Согласно критерию индуцированности из п. 13.2, представление T индуцировано с подгруппы H — стабилизатора некоторой точки $x \in X$.

Посмотрим теперь, что можно сказать об индуцирующем представлении U . Оно должно быть неприводимо, так как в противном случае было бы приводимо и T .

Далее, подгруппа H содержит нормальный делитель N : представления $n \mapsto U_x(n)$ и $n \mapsto U_x(n_1 n n_1^{-1})$, очевидно, эквивалентны, если $n_1 \in N$.

Задача 4. Докажите, что ограничение индуцирующего представления U на N кратно U_x .

Указание. Воспользуйтесь способом восстановления U по $\text{Ind } U$, описанном в доказательстве теоремы 1 п. 13.2 и реализацией (1) ограничения T на N .

Описанный здесь прием сводит задачу о классификации унитарных неприводимых представлений группы G к описанию неприводимых представлений меньшей группы H , ограничение которых на N кратно заданному неприводимому представлению этого нормального делителя. Последняя задача, как мы увидим ниже (см. § 14), равносильна классификации проективных представлений фактор-группы H/N . Эти соображения принимают особенно простую форму, когда нормальный делитель N коммутативен. В этом случае пространство $\hat{N}$ — это двойственная по Понтрягину группа к N .

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 1 (Г. Макки). Если N — замкнутый коммутативный нормальный делитель в локально компактной группе G и действие группы G на $\hat{N}$ удовлетворяет условиям теоремы Глимма (из п. 9.1), то всякое неприводимое представление T группы G имеет вид $\text{Ind}(G, H, U)$, где H — стационарная под-

группа некоторой точки $\chi \in \hat{N}$, а ограничение U на N скалярно и кратно характеру χ .

В качестве иллюстрации применения теоремы 1 докажем следующий факт.

Теорема 2. Если G — конечная нильпотентная группа или связная нильпотентная группа Ли, то всякое унитарное неприводимое представление T группы G мономимально, т. е. индуцировано одномерным представлением некоторой подгруппы.

Доказательство вытекает из следующей леммы:

Лемма. Если представление T неоднмерно, то оно индуцировано с некоторой собственной подгруппы того же типа.

Утверждение, сформулированное в теореме, следует из леммы, так как строго убывающая цепочка конечных групп или связных нильпотентных групп Ли обрывается на конечном шаге. (Во втором случае это следует из аналогичного утверждения для алгебр Ли.)

Докажем лемму. Прежде всего заметим, что представление T мы можем предполагать точным в случае конечной группы и локально точным (т. е. с дискретным ядром) в случае группы Ли. В противном случае представление T порождало бы представление фактор-группы G/N , где N — ядро T . Эта фактор-группа имеет меньший порядок, если G конечна, и меньшую размерность, если G — группа Ли. Поэтому мы могли бы воспользоваться индукцией по порядку группы или по ее размерности.

Итак, пусть T — точное (соответственно локально точное) представление конечной группы (соответственно группы Ли).

Задача 5. Докажите, что центр Z группы G является циклической группой (соответственно имеет размерность 1).

Указание. Центр G переходит при неприводимом представлении T в подгруппу скалярных операторов.

Пусть $\tilde{N}$ — центр фактор-группы G/Z и N — прообраз $\tilde{N}$ при проекции $G \rightarrow G/Z$.

Тогда N — коммутативный нормальный делитель в G .

Задача 6. Докажите, что если G — связная линейная нильпотентная группа, действующая в пространстве V , то стационарная подгруппа любого вектора $\xi \in V$ связна.

Указание. Воспользуйтесь тем, что группа G экспоненциальна (см. п. 6.4). Выведите из теоремы Энгеля (см. п. 6.2), что для всякого X из алгебры Ли группы G уравнение $\exp tX \xi = \xi$ либо выполняется тождественно по t , либо имеет лишь конечное число корней.

Тот факт, что действие G на N удовлетворяет условиям теоремы Глима, в конечном случае тривиален, а в случае группы Ли легко проверяется. Мы не останавливаемся на этом, так как действие G на $\hat{N}$ будет подробнее обсуждаться в § 15.

Для завершения доказательства леммы остается применить теорему 1 к группе G и нормальному делителю N и заметить,

что соответствующая G -орбита в $\hat{N}$ не может сводиться к одной точке. В самом деле, в противном случае ограничение T на N было бы скалярным, что в силу точности (соответственно локальной точности) T влекло бы включение $N \subset Z$. Лемма доказана.

Группы, все неприводимые представления которых мономиальны, называются *мономиальными* или *M -группами*. Мы доказали, таким образом, что *все конечные нильпотентные группы и все связные нильпотентные группы Ли мономиальны*.

Задача 7. Все конечные M -группы разрешимы.

Указание. Пусть G — неразрешимая M -группа наименьшего порядка. Докажите, что все ее фактор-группы разрешимы. Пусть S — пересечение ядер всех гомоморфизмов G в разрешимые группы. Докажите, что S содержится в любом нормальном делителе группы G и что $[S, S] = S$. Пусть T — неприводимое унитарное представление G минимальной размерности, нетривиальное на S . Предположим, что $T = \text{Ind}(G, H, \chi)$, где χ — некоторый характер подгруппы H . Пусть χ_0 — единичный характер. Докажите, что $T_0 = \text{Ind}(G, H, \chi_0)$ тривиально на S . Выведите отсюда, что $S \subset H$. Далее, из соотношения $[S, S] = S$ следует $\chi|_S \equiv 1$ и, значит, T тривиально на S . Полученное противоречие доказывает, что неразрешимых M -групп не существует.

Аналогичный результат справедлив и для групп Ли: *всякая связная мономиальная группа Ли разрешима*.

Читателю, желающему поупражняться в применении теоремы 1, будет полезно

Задача 8. Описать все неприводимые унитарные представления группы G аффинных преобразований прямой (т. е. одномерного линейного пространства) над топологическим полем K при условии, что аддитивная группа этого поля двойственна самой себе по Понтрягину.

Ответ. Серия одномерных представлений, соответствующих характеристам мультипликативной группы K^* поля K , и одно бесконечномерное представление, действующее в пространстве $L^2(K^*, d^*x)$ по формуле

$$[T(a, b)f](x) = \chi(bx)f(ax).$$

Здесь d^*x означает меру Хаара на K^* , a и b — параметры в группе G , соответствующие записи аффинного преобразования в виде $x \mapsto ax + b$, χ — любой нетривиальный аддитивный характер поля K .

13.4. Индуцированные представления групп Ли и их обобщения. Всякая группа Ли локально компактна, поэтому для групп Ли справедливы результаты п. 13.2 и 13.3. С другой стороны, конструкция индуцированного представления для групп Ли допускает интересные и важные обобщения, связанные с «выходом в комплексную область».

Прежде чем говорить об этих обобщениях, покажем, что пространство представления T группы Ли G , индуцированного с замкнутой подгруппы H , можно рассматривать как пространство сечений некоторого векторного расслоения над гладким многообразием $H \setminus G$.

(Связь между индуцированными представлениями и расслоениями не является привилегией групп Ли. При надлежащем обобщении понятия расслоения она может быть установлена для любых групп.)

Задача 1. Пусть G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа и x — точка однородного пространства $X = H \backslash G$. Докажите, что в некоторой окрестности W точки x можно определить гладкое отображение $s: W \rightarrow G$, обладающее свойством $xs(y) = y$ для всех $y \in W$.

Указание. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G , $\mathfrak{h}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе H , и $\mathfrak{p}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$, дополнительное к $\mathfrak{h}$. Докажите, что отображение $\tau: \mathfrak{p} \rightarrow X$, заданное формулой

$$\tau(P) = x \exp P,$$

имеет невырожденное производное отображение в точке $P=0$. Поэтому в некоторой окрестности точки x существует гладкое обратное отображение τ^{-1} , которое можно взять в качестве искомого s .

Рассмотрим покрытие многообразия X окрестностями W_i , в которых существуют отображения $s_i: W_i \rightarrow G$, удовлетворяющие условию задачи. На пересечении $W_i \cap W_j$ определено отображение $y \rightarrow s_i(y)s_j(y)^{-1}$, принимающее значение в группе H . Обозначим его s_{ij} . Если U — конечномерное представление H в пространстве V , то покрытие $\{W_i\}$ вместе с набором функций $y \rightarrow U(s_{ij}(y))$ определяет векторное расслоение над X , которое мы обозначим E_U .

Задача 2. Докажите, что класс эквивалентности расслоения E_U определяется классом эквивалентности представления U и, в частности, не зависит от выбора исходных отображений $s_i: W_i \rightarrow G$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 2 из п. 5.4.

Расслоение E_U можно получить еще и другим способом. А именно, применим конструкцию «произведения над группой» из п. 2.1 и положим $E'_U = G \times_H V$. (Группа H действует на G левыми сдвигами, а на V — согласно представлению U .)

Задача 3. Докажите, что E'_U — векторное расслоение над $X = H \backslash G$, эквивалентное расслоению E_U .

Указание. Рассмотрите отображение $W_i \times V$ в $G \times V$ по формуле $(y, v) \rightarrow (s_i(y), v)$ и соответствующее фактор-отображение $W_i \times V$ в $G \times_H V$.

Этот способ построения расслоения E_U позволяет определить действие на нем группы G . В самом деле, группа G является правым G -пространством, причем действие G справа перестановочно с действием группы H слева. Поэтому множество $E_U = G \times_H V$ является правым G -пространством.

Задача 4. Докажите, что действие G на E_U перестановочно с проекцией на базу и линейно на слоях.

Расслоения с таким действием группы G назовем G -расслоениями. Ясно, что в пространстве $\Gamma(E)$ сечений любого G -расслоения E над X возникает линейное представление T группы G :

$$[T(g)s](x) = s(xg), \quad x \in X, \quad g \in G, \quad s \in \Gamma(E). \quad (1)$$

Задача 5. Докажите, что всякое G -расслоение над однородным многообразием $X = H \setminus G$ эквивалентно расслоению вида E_U .

Указание. Пусть x_0 — точка X , для которой H является стабилизатором. В качестве U можно взять представление H в слое над x_0 , возникающее из (1).

Пусть $C^\infty(G, H, U)$ — пространство всех гладких функций на G со значениями в U , удовлетворяющих условию

$$F(hg) = U(h)F(g), \quad h \in H, \quad g \in G. \quad (2)$$

Очевидно, что это пространство инвариантно относительно правых сдвигов на G и, следовательно, в нем возникает представление T группы G

$$(T(g)F)(g_1) = F(g_1g). \quad (3)$$

Задача 6. Докажите, что представление (3) в $C^\infty(G, H, U)$ эквивалентно представлению (1) в пространстве $\Gamma(E_U)$ гладких сечений расслоения E_U .

Указание. Пусть s — сечение расслоения E_U . Поставим в соответствие этому сечению функцию f_s на G , принимающую в точке $g \in G$ такое значение $v \in U$, что класс эквивалентности пары (g, v) совпадает со значением сечения s в точке $Hg \in H \setminus G$. Докажите, что построенное таким образом отображение $s \rightarrow f_s$ задает искомым изоморфизм $\Gamma(E_U)$ на $C^\infty(G, H, U)$.

Таким образом, пространство представления, индуцированного с подгруппы H , — это гильбертово пространство, получаемое из пространства гладких сечений некоторого векторного расслоения над многообразием $X = H \setminus G$ при введении в него G -инвариантного скалярного произведения.

Задача 7. Если представление U конечномерно, а X компактно, то пространство Гординга представления $T = \text{Ind}(G, H, U)$ совпадает с пространством $\Gamma(E_U)$ (определение U_0 см. в п. 13.2, формула (3)).

Указание. Тот факт, что $\Gamma(E_U)$ содержится в пространстве Гординга представления T , легко выводится из задачи 2 в п. 10.5. Для доказательства обратного включения воспользуйтесь тем, что обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ действует в пространстве Гординга представления T , а также тем, что обобщенная функция на многообразии X , все производные которой принадлежат пространству $L^2(X)$, является обычной бесконечно дифференцируемой функцией. Отметим, что эта часть утверждения задачи верна и без предположения о компактности $H \setminus G$.

Если подгруппа H связна, то пространство $\Gamma(E_U)$, изоморфное $C^\infty(G, H, U)$, можно также определить как пространство решений некоторой системы дифференциальных уравнений на группе G .

В самом деле, пусть S — представление H в пространстве $C^\infty(G, V)$, заданное равенством

$$[S(h)f](g) = U(h)f(h^{-1}g). \quad (4)$$

Ясно, что $C^\infty(G, H, U)$ совпадает с множеством инвариантных элементов для представления S . Пусть S_* — соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{h}$ группы H .

Задача 8. Докажите, что пространство $C^\infty(G, H, U)$ совпадает с пространством решений системы уравнений

$$S_*(X)f = 0, \quad X \in \mathfrak{h}, \quad (5)$$

в $C^\infty(G, V)$.

Указание. Связная группа H порождается любой окрестностью единицы, в том числе и той, которая покрывается экспоненциальным отображением (см. п. 6.4).

Используя явный вид (4) операторов S , можно записать уравнения (5) в виде

$$L_X f + U_*(X)f = 0, \quad X \in \mathfrak{h}, \quad (6)$$

где L_X — оператор Ли левого сдвига на группе G , соответствующий элементу $X \in \mathfrak{g}$, а U_* — представление алгебры $\mathfrak{h}$ в пространстве V , отвечающее представлению U группы H .

Записанные в форме (6) условия допускают «выход в комплексную область» в следующем смысле. Представление $X \mapsto L_X$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в виде дифференциальных операторов на G продолжается по линейности до представления комплексной оболочки $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$. Пусть ρ — представление комплексной подалгебры $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ в конечномерном пространстве V . Тогда система уравнений

$$L_X f + \rho(X)f = 0, \quad X \in \mathfrak{n}, \quad (7)$$

определяет в $C^\infty(G, V)$ некоторое подпространство, которое мы обозначим $L(G, \mathfrak{n}, \rho)$.

Ясно, что если $\mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{n}}$, т. е. является комплексной оболочкой вещественной подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, отвечающей замкнутой связной подгруппе $H \subset G$, а представление ρ соответствует представлению U подгруппы H , то $L(G, \mathfrak{n}, \rho)$ совпадает с $L(G, H, U)$.

Для иллюстрации положения в случае, когда $\mathfrak{n} \neq \bar{\mathfrak{n}}$, рассмотрим простейший пример. Пусть $G = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathbb{C}^2$, а в качестве $\mathfrak{n}$ взята одномерная комплексная подалгебра, натянутая на вектор $X + iY$, где X и Y — базисные векторы в $\mathfrak{g}$.

В качестве ρ возьмем одномерное представление $\mathfrak{n}$, принимающее на векторе $X + iY$ значение $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда условие (7) принимает в подходящих координатах вид

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda f = 0.$$

Полагая $z = x + iy$ и вводя формальные производные $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, мы можем переписать это условие так:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda}{2} f,$$

откуда $f = e^{-\lambda \bar{z}/2} \varphi$, где φ — любая аналитическая функция от z . (Напомним, что уравнение $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ равносильно условиям Коши — Римана для аналитичности функции φ .) Таким образом, пространство $C^\infty(G, \mathfrak{n}, \rho)$ в этом случае изоморфно пространству всех аналитических функций от z .

Оказывается, общий случай при некоторых дополнительных предположениях является в определенном смысле суперпозицией двух уже рассмотренных: пространство $C^\infty(G, \mathfrak{n}, \rho)$ оказывается изоморфным пространству частично голоморфных сечений некоторого G -расслоения над смешанным многообразием (см. п. 5.4 по поводу определения этих понятий).

Дополнительные условия состоят в следующем.

Пересечение $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p}$ является комплексной подалгеброй в $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, совпадающей, как легко видеть, с комплексной оболочкой $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ вещественной алгебры $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}$.

Предположим, что

- 1) в группе G задана замкнутая подгруппа H (не обязательно связная), для которой $\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли;
- 2) операторы присоединенного представления $\text{Ad } h$, $h \in H$, продолженные на $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ по линейности, сохраняют подалгебру $\mathfrak{n}$;
- 3) существует такая замкнутая подгруппа M в G , что $H \subset M$ и $\mathfrak{n} + \mathfrak{p} = \mathfrak{m}_\mathbb{C}$ (здесь $\mathfrak{m}$ — алгебра Ли группы M , а $\mathfrak{m}_\mathbb{C}$ — комплексная оболочка $\mathfrak{m}$).

Пусть задано представление U группы H в конечномерном пространстве V . Предположим, что соответствующее представление U_* алгебры $\mathfrak{h}$ продолжается до голоморфного представления ρ подалгебры $\mathfrak{n}$. Через $C^\infty(G, \mathfrak{n}, H, \rho, U)$ обозначим пространство решений системы (7), обладающих свойством

$$f(hg) = U(h)f(g), \quad h \in H. \quad (8)$$

Отметим, что если группа H связна, условие (8) вытекает из (7).

Теорема 1. Если выполнены сформулированные выше условия, то пространство $X = H \backslash G$ является смешанным многообразием типа (k, l) , $k = \dim G - \dim M$, $l = \frac{1}{2}(\dim M - \dim H)$.

Можно так определить частично голоморфное G -расслоение $\mathcal{E}_{U, \rho}$ (эквивалентное $\mathcal{E}_U = G \times_U V$ в категории гладких G -расслоений), что представление группы G , возникающее в пространстве

частично голоморфных сечений $\mathcal{E}_{U, \rho}$, будет эквивалентно представлению этой группы правыми сдвигами в пространстве $L(G, \mathfrak{n}, H, \rho, U)$.

Доказательство. Введем сначала на X структуру смешанного многообразия. Для этого положим $Y = M \setminus G$ и обозначим p естественную проекцию X на Y , ставящую в соответствие каждому классу $Hg \in X$ содержащий его класс $Mg \in Y$. Каждый слой проекции p (т. е. подмножество $p^{-1}(y)$ в X) отождествляется с однородным пространством $Z = H \setminus M$. А именно, если фиксировать элемент g , переводящий начальную точку x_0 в точку $x \in p^{-1}(y)$, то можно определить действие группы M на $p^{-1}(y)$ по формуле

$$x * m = x_0 m g = x g^{-1} m g.$$

Стационарной подгруппой точки x будет, очевидно, H .

Получаемое таким образом отождествление $p^{-1}(y)$ и $Z = H \setminus M$ зависит от выбора элемента $g \in G$. Другой выбор этого элемента эквивалентен автоморфизму пространства Z с помощью некоторого сдвига из H .

Теперь введем на пространстве Z комплексную структуру. Для этого воспользуемся тем, что пространство Z локально совпадает с комплексным однородным пространством $N \setminus M_c$, где N и M_c — комплексные группы Ли, соответствующие алгебрам Ли $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}_c$. В самом деле, пусть $\tilde{N}$ и $\tilde{M}_c$ — локальные группы Ли. Тогда фактор-пространство $\tilde{N} \setminus \tilde{M}_c$ — комплексное однородное многообразие. Если $\mathfrak{a}$ — подпространство в $\mathfrak{m}_c$, дополнительное к $\mathfrak{n}$, то каждый элемент m из $\tilde{M}_c$ однозначно записывается в виде

$$m = n \exp A, \quad n \in \tilde{N}, \quad A \in \mathfrak{a}. \quad (9)$$

Соответствие $\tilde{N}m \rightarrow A$ задает, по определению, карту на $\tilde{N} \setminus \tilde{M}_c$, отображающую $\tilde{N} \setminus \tilde{M}_c$ в окрестность нуля в комплексном линейном пространстве $\mathfrak{a}$. Заметим теперь, что пространство $\mathfrak{m}_c$ порождается подпространством $\mathfrak{n}$ и вещественным подпространством $\mathfrak{m}$. Отсюда следует, что $\tilde{M}$ -орбита (где $\tilde{M}$ — локальная группа Ли, соответствующая $\mathfrak{m}$) начальной точки в $\tilde{N} \setminus \tilde{M}_c$ открыта. Кроме того, пересечение $\tilde{M} \cap \tilde{N}$, очевидно, является локальной группой, соответствующей алгебре $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{h}$. Мы получаем, таким образом, взаимно однозначное соответствие между окрестностями начальных точек в $\tilde{N} \setminus \tilde{M}_c$ и в $Z = H \setminus M$. Это позволяет определить комплексную карту, покрывающую точку $z_0 \in Z$: образом точки $z = Hm \in Z$ служит элемент $A \in \mathfrak{a}$, определяемый равенством (9).

Задача 9. Докажите, что карты, получающиеся из построенной выше сдвигами на элементы из M , образуют атлас, определяющий на Z структуру комплексного многообразия, на котором M действует голоморфными преобразованиями.

Указание. Воспользуйтесь голоморфностью экспоненциального отображения.

Теперь можно построить атлас на всем многообразии X . Для этого мы фиксируем подпространство $b \subset g$, дополнительное к m . Тогда в некоторой окрестности единицы каждый элемент $g \in G$ однозначно записывается в форме

$$g = m \exp B, \quad m \in M, \quad B \in b. \quad (10)$$

Разлагая затем m по формуле (9), поставим в соответствие каждому элементу g из окрестности единицы пару (A, B) , $A \in a$, $B \in b$.

Задача 10. Докажите, что элементы A и B зависят только от класса смежности $Hg \in X$, что соответствие $Hg \rightarrow (A, B)$ определяет карту, покрывающую начальную точку многообразия X , и что карты, получаемые из этой сдвигами из G , образуют атлас, задающий на X структуру смешанного многообразия.

Докажем остальные утверждения теоремы. Пусть $\bar{\rho}$ — представление локальной группы $\tilde{N}$, соответствующее представлению ρ алгебры $\mathfrak{n}$. Тогда $\mathcal{E}_\rho = \tilde{M}_c \times_{\tilde{N}} V$ будет голоморфным $\tilde{M}_c$ -расслоением над $\tilde{N} \setminus \tilde{M}_c$.

Без труда проверяется, что в категории гладких расслоений $\mathcal{E}_\rho$ эквивалентно ограничению расслоения $\mathcal{E}_U = G \times_M V$ на соответствующую окрестность W точки z_0 в Z .

Определим структуру частично голоморфного расслоения на $\mathcal{E}_U$ с помощью отождествления его ограничений на подмногожества вида Wg с голоморфными расслоениями, которые получаются из $\mathcal{E}_\rho$ сдвигом на g . Тогда последнее утверждение теоремы будет очевидным следствием этого определения.

Представления группы G в пространствах (частично) голоморфных сечений (частично) голоморфных G -расслоений получили название *голоморфно индуцированных*.

Естественно попытаться ввести в пространство таких представлений G -инвариантное скалярное произведение и получить таким образом унитарное представление группы G . В ряде случаев это действительно возможно. Например, если «комплексная часть» Z базы X компактна или эквивалентна ограниченной области в C^n , то гильбертово пространство, порождаемое $L(G, \mathfrak{n}, H, \rho, U)$, оказывается замкнутым подпространством в $L^2(G, H, U)$ — пространстве представления, индуцированного в смысле Макки.

Очень интересен и почти не изучен вопрос об интерпретации пространств $L(G, \pi, \rho)$ и возникающих в них представлений в случае, когда не выполняются условия теоремы 1 (например, когда $\pi + \bar{\pi}$ — не подалгебра или когда группы M или H не замкнуты).

Укажем теперь дальнейшее обобщение понятия голоморфно индуцированного представления. Напомним (см. п. 5.4), что пространство частично голоморфных сечений G -расслоения $\mathcal{E}$ над X можно рассматривать как пространство нульмерных когомологий некоторого пучка на X . Это наводит на мысль о рассмотрении высших когомологий такого пучка и возникающих в них представлений. В последние годы в этом направлении получено много существенных результатов. Одна из важных и пока не решенных задач здесь — доказательство гипотезы Ленглендса о том, что любое неприводимое представление вещественной полупростой группы Ли G , входящее в дискретную часть разложения регулярного представления, реализуется в пространстве L^2 -когомологий подходящего пучка на пространстве $X = G/H$ где H — компактная картановская подгруппа в G .

Подробнее об этом направлении теории представлений см. в работах [66], [115], [101], [106], [119], [134], [240], [162], [241].

13.5. Сплетающие операторы и двойственность. Задача о вычислении числа сплетения двух индуцированных представлений играет большую роль в теории представлений. К ней сводятся задачи о разложении ограничения индуцированного представления на подгруппу и тензорного произведения индуцированных представлений.

Для конечных групп эта задача может быть сведена к решению простых функциональных уравнений на двойных классах смежности. Пусть G — конечная группа, H_1 и H_2 — две ее подгруппы, U_1 и U_2 — представления этих подгрупп в пространствах V_1 и V_2 соответственно. Предположим, что характеристика основного поля не делит порядок группы G .

Рассмотрим операторные функции $K(g)$ на G со значениями в $\text{Hom}(V_2, V_1)$, обладающие свойством

$$K(h_1 g_1 h_2) = U_1(h_1) K(g) U_2(h_2). \quad (1)$$

Каждой такой функции можно поставить в соответствие оператор C_K , действующий по формуле

$$[C_K f](g_1) = \sum_{g_2 \in G} K(g_1 g_2^{-1}) f(g_2). \quad (2)$$

Задача 1. Докажите, что если $f \in L(G, H_2, V_2)$, то $C_K f \in L(G, H_1, V_1)$, и что соответствие $K \rightarrow C_K$ является изоморфизмом между пространством всех операторных функций со свойством (1) и пространством сплетающих операторов для представлений $\text{Ind } U_2$ и $\text{Ind } U_1$.

Указание. Пусть P — оператор в пространстве V_2^G всех V_2 -значных функций на G , действующий по формуле

$$[Pf](g) = \sum_{h \in H_2} U_2(h) f(h^{-1}g).$$

Докажите, что P отображает V_2^G на $L(G, H_2, V_2)$ и что всякий оператор из V_2^G в V_1^G , перестановочный с правыми сдвигами на G , имеет вид (2).

Условие (1), очевидно, можно проверять отдельно на каждом двойном классе смежности $H_1 g H_2$. Особенно простой вид оно принимает в случае, когда U_1 и U_2 — тривиальные одномерные представления. В этом случае оно дает следующий результат.

Число сплетения двух квазирегулярных представлений групп G , соответствующих подгруппам H_1 и H_2 , равно числу точек в пространстве $H_1 \setminus G/H_2$. Напомним (см. п. 2.1), что последнее число совпадает с числом H_2 -орбит в $X_1 = G/H_1$, H_1 -орбит в $X_2 = G/H_2$ и G -орбит в $X_1 \times X_2$.

Для операторов в бесконечномерных пространствах представление в виде интегрального оператора не всегда возможно. Поэтому подсчет числа сплетения двух бесконечномерных индуцированных представлений является существенно более сложной задачей. Однако для случая групп Ли можно предложить некоторый аналог описанного выше метода. А именно, если подгруппы H_1 и H_2 таковы, что $X_1 = G/H_1$ и $X_2 = G/H_2$ — компактные многообразия, а индуцирующие представления U_1 и U_2 конечномерны, то пространства Гординга представлений $\text{Ind } U_1$ и $\text{Ind } U_2$ оказываются ядерными пространствами (см. задачу 7 из п. 13.4). Для таких пространств справедлива теорема о ядре (см. п. 4.1).

Поэтому каждый сплетающий оператор может быть записан в виде

$$C_K f(g_1) = \int_G K(g_1 g_2^{-1}) f(g_2) d_r g_2, \quad (2')$$

где $K(g)$ — обобщенная функция на группе G со значениями в $\text{Hom}(V_2, V_1)$, удовлетворяющая условию (1).

Таким образом, вопрос о числе сплетения сводится к отысканию обобщенных функций на гладком многообразии X , преобразующихся заданным образом под действием некоторой группы Ли G . Эта очень интересная и трудная задача анализа до сих пор в полном объеме не решена.

Пусть многообразие X компактно, а группа G имеет в X лишь конечное число орбит $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$, причем объединение $X_k = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i$ является замкнутым подмногообразием в X при $k = 1, 2, \dots, n$. (Именно такой случай возникает, например, в задаче о классификации неприводимых представлений комплексных полупростых групп Ли.)

Тогда в пространстве $C^\infty(X)$ можно ввести убывающую фильтрацию, полагая $C_k^\infty(X) = \{f, \text{supp } f \subseteq X \setminus X_k\}$.

В пространстве обобщенных функций возникает тогда возрастающая фильтрация, инвариантная относительно действия группы.

Переходя к соответствующему градуированному пространству, мы сводим нашу задачу к следующей: описать обобщенные вектор-функции на многообразии X , преобразующиеся данным образом под действием группы Ли G и сосредоточенные на G -орбите $\Omega \subset X$. Можно предложить следующую конструкцию таких обобщенных функций. Пусть H — стационарная подгруппа точки $x_0 \in \Omega$. Предположим, что существует такая обобщенная вектор-функция F_0 с носителем в точке x_0 , что

$$F_0(xh) = \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)} F_0(x) \quad \text{для } h \in H. \quad (3)$$

Тогда для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(X)$ вектор-функция Φ на G , определенная равенством

$$\Phi(g) = \langle F_0, T(g)\varphi \rangle,$$

где $[T(g)\varphi](x) = \varphi(xg)$, обладает свойством

$$\Phi(hg) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \Phi(g).$$

Мы можем тогда определить обобщенную функцию F

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_G \rho(g) U(g^{-1}) \Phi(g) d_r g, \quad (4)$$

где ρ — любая гладкая функция на G , обладающая свойством $\int_H \rho(hg) d_r h \equiv 1$. Так же как в п. 13.2 (см. задачу 3 и следствие), можно убедиться, что построенная обобщенная функция F не зависит от выбора функции ρ и обладает свойством

$$F(xg) = U(g)^{-1} F(x). \quad (5)$$

Задача 2. Докажите, что всякая обобщенная вектор-функция на X с носителем на Ω , обладающая свойством (5), получается описанной выше конструкцией из некоторой обобщенной функции F_0 с носителем в точке x_0 , обладающей свойством (3). Если потребовать дополнительно, чтобы функция F_0 зависела только от значения основной функции и ее производных по направлениям, трансверсальным к $\Omega \subset X$, то соответствие между F_0 и F будет взаимно однозначным.

Указание. Воспользуйтесь тем, что всякая обобщенная функция аппроксимируется обобщенной функцией с конечным носителем.

Решение задачи можно также получить из результатов Ф. Брюа в [67].

Отметим, что отыскание обобщенных функций, преобразующихся заданным образом, необходимо, но, вообще говоря, не достаточно для решения задачи о числе сплетения. Дело в том, что операторы, соответствующие найденным функциям по формуле (2'), действуют из пространства Гординга одного представления в пространство, сопряженное к пространству Гординга

другого представления. Они не всегда могут быть продолжены до ограниченного оператора, действующего из одного гильбертова пространства в другое. Вопрос о том, когда такое продолжение возможно (а также о том, когда получаемое продолжение будет положительным оператором), довольно сложен. Именно в этот вопрос упирается проблема выделения унитарных неприводимых представлений комплексных полупростых групп Ли из имеющейся классификации всех абсолютно неприводимых представлений в [90].

Обсудим теперь возможные обобщения двойственности Фробениуса. Как мы уже отмечали в п. 13.2, эта двойственность не имеет места в бесконечномерном случае.

Интересные варианты аналогов двойственности Фробениуса были предложены Г. Макки [109], К. Муром [112], И. М. Гельфандом и И. И. Пятачким-Шапиро (см. [16]). В последнее время простую и общую формулировку обобщенной двойственности Фробениуса нашел Г. И. Ольшанский [118].

Теорема 1 (Г. И. Ольшанский). Пусть G — локально компактная группа, H — такая ее замкнутая подгруппа, что фактор-пространство $X = H \setminus G$ компактно и обладает G -инвариантной мерой μ . Пусть T — унитарное неприводимое представление группы G , а U — конечномерное унитарное представление подгруппы H . Тогда

$$c(T, \text{Ind } U) = c(T^\infty|_H, U), \quad (6)$$

где $T^\infty|_H$ означает представление H в пространстве Гординга представления T .

Отметим, что в этой теореме используется понятие пространства Гординга для любой локально компактной группы (ср. замечание в конце п. 12.1).

Приведем здесь доказательство теоремы для случая, когда G — группа Ли. Пусть $A \subseteq \mathcal{C}(T, \text{Ind } U)$. Тогда в силу задачи 5 из п. 10.5 оператор A переводит пространство Гординга L^∞ представления T в пространство Гординга представления $\text{Ind } U$. Последнее в силу задачи 7 из п. 13.4 совпадает с $C^\infty(G, H, U)$. Поэтому для каждого вектора ξ из L^∞ можно определить вектор $A\xi(e)$ из пространства представления U . Имеем

$$AT(h)\xi(e) = (\text{Ind } U)(h)A\xi(e) = A\xi(h) = U(h)A\xi(e)$$

для $h \in H$. Поэтому соответствие $\xi \mapsto A\xi(e)$ является оператором из $\mathcal{C}(T^\infty|_H, U)$. Ясно, что построенное отображение $\mathcal{C}(T, \text{Ind } U)$ в $\mathcal{C}(T^\infty|_H, U)$ линейно и имеет нулевое ядро.

Покажем теперь, что всякий оператор $B \in \mathcal{C}(T^\infty|_H, U)$ получается таким образом.

Для этого положим для вектора $\xi \in L^\infty$

$$\tilde{A}\xi(g) = B(T(g)\xi).$$

Определенный таким образом оператор переводит ξ в функцию $\tilde{A}\xi$ на группе G , удовлетворяющую условию

$$\tilde{A}\xi(hg) = U(h)\tilde{A}\xi(g).$$

Так как соответствие $g \rightarrow T(g)\xi$ гладко (см. задачу 2 из п. 10.5), функция $\tilde{A}\xi$ принадлежит $C^\infty(G, H, U)$. В силу компактности $X = H \setminus G$ последнее пространство непрерывно вложено в пространство $L^2(G, H, U)$ представления $\text{Ind } U$.

Мы построили, таким образом, оператор $\tilde{A} \in \mathcal{C}(T^\infty, \text{Ind } U)$. Покажем, что он продолжается до оператора $A \in \mathcal{C}(T, \text{Ind } U)$.

Задача 3. Докажите, что оператор $\tilde{A}$ допускает замыкание.

Указание. Нужно проверить, что из условий $\xi_n \rightarrow 0$ в L , $\xi_n \in L^\infty$, $\tilde{A}\xi_n \rightarrow f$ в $L^2(G, H, U)$ следует, что $f = 0$. Воспользуйтесь методом сглаживания (см. п. 10.5) и соотношением

$$\tilde{A}T(\varphi) = (\text{Ind } U)(\varphi)\tilde{A} \quad \text{для } \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Задача 4. Пусть $\bar{A}$ — замыкание $\tilde{A}$. Докажите, что $\bar{A}$ — ограниченный оператор.

Указание. Воспользуйтесь методом доказательства теоремы 2 в п. 7.3.

Итак, мы построили оператор $\bar{A} \in \mathcal{C}(T, \text{Ind } U)$. Легко видеть, что соответствующий ему оператор из $\mathcal{C}(T^\infty|_H, U)$ совпадает с исходным оператором B .

13.6. Характеры индуцированных представлений. Основной результат этого параграфа — формула (5), выражающая обобщенный характер индуцированного представления $T = \text{Ind } U$ через обобщенный характер представления U .

Эта формула является аналогом формулы Фробениуса (см. задачу 9 из п. 13.1) и превращается в нее, когда G — конечная группа.

Напомним, что формула Фробениуса имеет вид

$$\chi_T(g) = \sum_{x \in H \setminus G} \tilde{\chi}_U(s(x)gs(x)^{-1}),$$

где $\tilde{\chi}_U$ — функция на G , совпадающая с χ_U на H и равная нулю вне H .

Пусть теперь G — локально компактная группа, H — ее замкнутая подгруппа, $X = H \setminus G$ — правое однородное G -пространство. Фиксируем борелевское отображение $s: X \rightarrow G$, обладающее свойством $s(x) \in x$ для всех $x \in X$. Тогда каждый элемент $g \in G$ однозначно записывается в виде

$$g = hs(x), \quad h \in H, \quad x \in X \quad (1)$$

и существует такая борелевская мера ν_s на X , что

$$d_l g = d_l h d\nu_s(x) \quad (2)$$

(см. формулы 5' и 6' из п. 9.1).

Если χ — обобщенная функция на подгруппе H , то мы обозначим χ^x обобщенную функцию на группе G , определенную равенством

$$\langle \chi^x, \varphi \rangle = \langle \chi, \varphi_x \rangle, \quad (3)$$

где $\varphi_x(h) = \varphi(s(x)^{-1}hs(x))$.

Теорема 1. Пусть U — унитарное представление подгруппы H в сепарабельном пространстве V , и U_0 — представление, связанное с U равенством

$$U_0(h) = \left[\frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)} \right]^{1/2} U(h). \quad (4)$$

Тогда:

1) если характер χ_T представления $T = \text{Ind}(G, H, U)$ определен на функции $\varphi \in C_0(G)$, то для почти всех $x \in X$ обобщенные функции $\chi_{U_0}^x$ определены на φ и имеет место равенство

$$\langle \chi_T, \varphi \rangle = \int_X \langle \chi_{U_0}^x, \varphi \rangle d\nu_s(x); \quad (5)$$

2) если функция $\varphi \in C_0(G)$ положительно определена, входит в область определения характеров $\chi_{U_0}^x$ для почти всех $x \in X$ и сходится интеграл в правой части равенства (5), то φ входит в область определения характера χ_T .

Доказательство. Посмотрим сначала, как влияет на величины, входящие в формулировку теоремы, изменение выбора отображения s . При замене $s(x)$ на $s'(x) = h(x)s(x)$ функция φ_x подвергается преобразованию, порождаемому в $C_0(H)$ внутренним автоморфизмом $h \rightarrow h(x)^{-1}hh(x)$. Этот автоморфизм умножает меру $d_l h$ на $\Delta_H(h(x))^{-1}$. Поэтому характер $\chi_{U_0}^x$ при переходе от s к s' умножается на $\Delta_H(h(x))$. Мера $\nu_{s'}$, как легко видеть, связана с мерой ν_s равенством $d\nu_{s'}(x) = d\nu_s(x)\Delta_H(h(x)^{-1})$. Значит, величина, стоящая под интегралом в правой части формулы (5), не зависит от выбора s .

Воспользуемся явной формулой для представления T , приведенной в п. 13.2:

$$[T(g)f](x) = U_0(h)f(y), \quad (6)$$

где $h \in H$ и $y \in X$ определяются из равенства

$$s(x)g = hs(y). \quad (7)$$

Отсюда легко находится выражение для оператора $T(\varphi) = \int_G \varphi(g) T(g) d_I g$, как интегрального оператора в $L^2(X, V)$ с операторным ядром.

Задача 1. Докажите, что оператор $T(\varphi)$ имеет вид

$$T(\varphi)f(x) = \int_X K_\varphi(x, y) f(y) dv_s(y), \quad (8)$$

где

$$K_\varphi(x, y) = \int_H \varphi(s(x)^{-1}hs(y)) U_0(h) d_I h. \quad (9)$$

Указание. Воспользуйтесь формулами (2), (6) и (7).

До сих пор отображение s мы предполагали только борелевским. Потребуем теперь, чтобы на некотором открытом подмножестве $X_0 \subset X$ полной меры [т. е. $v_s(X \setminus X_0) = 0$] отображение s было непрерывно.

Мы не будем останавливаться здесь на доказательстве возможности такого выбора, так как это доказательство довольно громоздко, а само утверждение во всех нужных в дальнейшем примерах достаточно очевидно.

Утверждение теоремы 1 вытекает из равенств (8), (9) и одного свойства интегральных операторов с непрерывным ядром, которое мы сформулируем в виде отдельной теоремы.

Пусть X — локально компактное топологическое пространство с борелевской мерой μ , $K(x, y)$ — измеримая операторная функция на $X \times X$, значения которой — линейные операторы в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве V . Рассмотрим интегральный оператор $\mathcal{K}$ в пространстве $L^2(X, \mu, V)$ квадратично интегрируемых V -значных функций на X :

$$[\mathcal{K}f](x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y). \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть операторная функция $K(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных в слабой операторной топологии. Для того чтобы оператор $\mathcal{K}$, задаваемый формулой (10), имел след, необходимо, а для положительно определенных операторов и достаточно, чтобы существовал след $\text{tr } K(x, x)$ для почти всех $x \in X$ и сходился интеграл

$$\int_X \text{tr } K(x, x) d\mu(x). \quad (11)$$

Если след $\mathcal{K}$ существует, то он совпадает со значением интеграла (11).

Доказательство теоремы 2 мы проведем в несколько этапов. Сначала рассмотрим случай, когда $\dim V = 1$, т. е. $K(x, y)$ — числовая непрерывная функция. В этом случае утверждение теоремы превращается в хорошо известную формулу для следа ядерного интегрального оператора с непрерывным ядром. Напомним схему вывода этой формулы. По определению ядерного оператора, функция $K(x, y)$ как элемент пространства $L^2(X \times X)$ имеет вид

$$K(x, y) = \sum_i \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\psi_i(y)}, \quad (12)$$

где φ_i и ψ_i — функции единичной нормы в $L^2(X)$, и $\sum_i |\lambda_i| < \infty$. След оператора $\mathcal{K}$ с ядром $K(x, y)$ равен, как легко видеть, выражению

$$\sum_i \lambda_i (\varphi_i, \psi_i)_{L^2(X)}. \quad (13)$$

Если бы ряд (12) сходил на диагонали $\Delta_X \subset X \times X$ по норме $L'(\Delta_X, \mu)$, то выражение (13) совпадало бы с требуемой величиной (11). Однако нам известно лишь, что ряд (12) сходится в среднем на $X \times X$. Чтобы обойти возникающую здесь трудность, обычно применяется техника сглаживания. А именно, строится направленное семейство операторов S_α , $\alpha \in A$, обладающих свойствами:

- 1) нормы операторов S_α ограничены в совокупности;
- 2) $\lim_{\alpha \in A} S_\alpha = 1$ в сильной операторной топологии пространства $L^2(X, \mu)$;
- 3) каждый оператор S_α непрерывно отображает $L^2(X, \mu)$ в $C_0(X)$.

Не будем здесь приводить явной конструкции такого семейства. Заметим только, что если X — многообразие, а мера μ в локальной карте совпадает с обычной мерой Лебега, то в качестве S_α можно взять оператор, который в пределах данной карты совпадает со сверткой с подходящей положительной непрерывной функцией φ_α .

Задача 2. Докажите, что если $\mathcal{K}$ — ядерный оператор, то операторы $\mathcal{K}_\alpha = S_\alpha \mathcal{K} S_\alpha^*$ также ядерны и $\lim_{\alpha \in A} \operatorname{tr} \mathcal{K}_\alpha = \operatorname{tr} \mathcal{K}$.

Указание. Воспользуйтесь разложением (12) оператора $\mathcal{K}$ в сумму операторов ранга 1.

Задача 3. Докажите, что оператор $\mathcal{K}_\alpha$ является интегральным оператором с непрерывным ядром $K_\alpha(x, y)$ и что $\operatorname{tr} \mathcal{K}_\alpha = \int_X K_\alpha(x, x) d\mu(x)$.

Указание. Воспользуйтесь разложением (12) и свойством 3) операторов S_α .

Задача 4. Докажите, что если $\mathcal{K}$ — ядерный интегральный оператор с непрерывным ядром $K(x, y)$, равным нулю вне некоторого компакта, то

$$\operatorname{tr} \mathcal{K} = \int_X K(x, x) d\mu(x).$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и тем, что $K_\alpha(x, y)$ равномерно сходится к $K(x, y)$.

Задача 5. Пусть $\mathcal{K}$ — ядерный интегральный оператор с непрерывным ядром $K(x, y)$.

Докажите, что для любой функции $\varphi \in C_0(X)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_X \varphi(x) K(x, x) d\mu(x) \right| \leq \|\mathcal{K}\|_1 \cdot \|\varphi\|_C(X),$$

где $\|\mathcal{K}\|_1$ означает ядерную норму оператора $\mathcal{K}$.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 4 и неравенством $\|P_\varphi \mathcal{K}\|_1 \leq \|P_\varphi\| \|\mathcal{K}\|_1$, где P_φ — оператор умножения на φ в $L^2(X, \mu)$.

Первое утверждение теоремы в случае $\dim V = 1$ вытекает, очевидно, из задачи 5. Второе утверждение легко выводится из следующего факта.

Задача 6. Если $\mathcal{K}$ — положительный оператор с непрерывным ядром $K(x, y)$, равным нулю вне некоторого компакта, то $\mathcal{K}$ — ядерный оператор и

$$\|\mathcal{K}\|_1 = \operatorname{tr} \mathcal{K} = \int_K K(x, x) d\mu(x).$$

Указание. Из условий задачи следует, что $K(x, x) \geq 0$ и $|K(x, y)|^2 \leq K(x, x) K(y, y)$. Далее, если λ_i — собственные значения оператора K , а φ_i — соответствующие нормированные собственные функции, то для любого N оператор с ядром

$$K(x, y) - \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}$$

положителен. Выведите отсюда, что ряд $\sum \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}$ сходится равномерно и что $\sum \lambda_i < \infty$.

Перейдем к случаю $\dim V > 1$.

Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в пространстве V_n и P_n — оператор проектирования на e_n . Тогда, если $\mathcal{K}$ — ядерный оператор, то этим свойством обладают и операторы $\mathcal{K}_n = P_n \mathcal{K} P_n$, причем $\operatorname{tr} \mathcal{K} = \sum_n \operatorname{tr} \mathcal{K}_n$.

Оператор $\mathcal{K}_n$ можно рассматривать как интегральный оператор в $L^2(X, \mu)$ с ядром

$$K_n(x, y) = (K(x, y) e_n, e_n)_V.$$

По условию теоремы это ядро непрерывно. Поэтому

$$\operatorname{tr} \mathcal{K}_n = \int_X K_n(x, x) d\mu(x)$$

и

$$\operatorname{tr} \mathcal{K} = \sum_n \int_X K_n(x, x) d\mu(x).$$

Покажем, что в последнем выражении можно переставить знаки суммы и интеграла. Для этого достаточно проверить, что ряд $\sum_n K_n(x, x)$ сходится абсолютно в $L_1(X, \mu)$. Это в свою очередь равносильно условию

$$\left| \sum_n \int_X K_n(x, x) \varphi_n(x) d\mu(x) \right| < \infty$$

для любого семейства функций $\varphi_n \in L^\infty(X, \mu)$, ограниченных по модулю в совокупности. Последнее же равносильно ядерности оператора $\Phi \mathcal{K}$, где Φ — оператор в $L^2(X, \mu, V)$, задаваемый формулой

$$\Phi f(x) = \sum_n \varphi_n(x) P_n f(x).$$

Так как

$$\|\Phi\| = \sup_n \|\varphi_n\|_{L^\infty(X, \mu)} < \infty,$$

оператор $\Phi \mathcal{K}$ действительно ядерный и наше утверждение доказано. Итак, мы доказали равенство

$$\operatorname{tr} \mathcal{K} = \int_X \sum_n (K(x, x) e_n, e_n)_V d\mu(x). \quad (14)$$

Покажем сейчас, что операторы $K(x, x)$ ядерны для почти всех x и, следовательно, равенство (14) превращается в искомое равенство (5). Рассмотрим пространство

$$L^1(X, \mu, V \hat{\otimes} V')$$

μ -измеримых операторных функций K на X со значениями в пространстве $V \hat{\otimes} V'$ ядерных операторов в пространстве V и с нормой

$$\|K\| = \int_X \|K(x)\|_1 d\mu(x).$$

Билинейное отображение

$$L^2(X, \mu, V) \times L^2(X, \mu, V')$$

в

$$L^1(X, \mu, V \hat{\otimes} V'),$$

задаваемое формулой $(\varphi, \psi) \rightarrow \varphi(x) \otimes \psi(x)$, непрерывно и, следовательно, продолжается до отображения пространства

$$L^2(X, \mu, V) \hat{\otimes} L^2(X, \mu, V').$$

Последнее изоморфно, очевидно, пространству ядерных операторов в $L^2(X, \mu, V)$. Поэтому каждому ядерному оператору $\mathcal{K}$ соответствует функция

$$K_0(x) \in L^1(X, \mu, V \hat{\otimes} V'),$$

так что $\text{tr } \mathcal{K} = \int_X \text{tr } K_0(x) d\mu(x)$.

Задача 7. Пусть $A(x)$ — непрерывная ограниченная операторная функция на X , значения которой — операторы в пространстве V . Обозначим $\mathcal{A}$ оператор в $L^2(X, \mu, V)$, действующий по формуле

$$(\mathcal{A}f)(x) = A(x)f(x).$$

Докажите, что

$$\text{tr } \mathcal{A}\mathcal{K} = \int_X \text{tr } A(x) K_0(x) d\mu(x).$$

Указание. Рассмотрите сначала случай, когда $\mathcal{K}$ имеет конечный ранг.

Задача 8. Докажите, что $K_0(x)$ совпадает с $K(x, x)$ почти всюду.

Указание. В противном случае для некоторых e_m и e_n и некоторого подмножества U положительной меры в X выполнялось бы неравенство

$$(K_0(x)e_n, e_m) \neq (K(x, x)e_n, e_m) \text{ для } x \in U.$$

Это противоречит утверждению задачи 8.

Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Остается доказать последнее утверждение теоремы для случая $\dim V > 1$. Оно вытекает из того, что положительный оператор $\mathcal{K}$ имеет след тогда и только тогда, когда имеют след все операторы $\mathcal{K}_n = P_n \mathcal{K} P_n$, и $\sum_n \text{tr } \mathcal{K}_n < \infty$.

Следствие. Характер χ_T представления $T = \text{Ind}(G, H, U)$ сосредоточен на замыкании множества $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$. В частности, если H — нормальный делитель, то χ_T сосредоточен на H .

В самом деле, носитель обобщенной функции $\chi_{U_0}^g(y) = \chi_{U_0}(x y x^{-1})$ содержится в $s(x)^{-1} H s(x)$, а носитель χ_T содержится в замыкании объединения носителей $\chi_{U_0}^g$, $x \in X$.

Множество $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$ имеет простой геометрический смысл — это совокупность элементов $g \in G$, имеющих неподвижную точку в X .

Это наводит на мысль, что значение характера χ_T в точке g (в тех случаях, когда вообще имеет смысл говорить об этом значении, т. е. когда обобщенная функция χ_T является мерой,

задаваемой непрерывной плотностью относительно меры Хаара) связано со структурой неподвижных точек преобразования g . Приведем здесь один из результатов такого рода.

Задача 9. Пусть G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа и U — конечномерное унитарное представление группы H . Предположим, что в группе G есть такое открытое подмножество G_0 , что все элементы $g \in G_0$ имеют лишь конечное число невырожденных неподвижных точек в X . (Невырожденность означает, что для производного отображения g_* в касательном пространстве к неподвижной точке единица не является собственным числом.) Докажите, что тогда ограничение характера χ_T представления $T = \text{Ind}(G, H, U)$ на G_0 является мерой, плотность которой по отношению к $d_l g$ задается формулой

$$\rho_T(g) = \sum \frac{\chi_U(s(x_i) g s(x_i)^{-1})}{|\det(g_*(x_i)^{1/2} - g_*(x_i)^{1/2})|}, \quad (15)$$

где суммирование ведется по всем неподвижным точкам x_i преобразования g .

Указание. Пусть $g_0 \in G_0$ и x_0 — неподвижная точка для преобразования g_0 . Докажите, что отображение $X \times H$ в G по формуле $(x, h) \mapsto s(x)^{-1} h s(x)$ является диффеоморфизмом в окрестности точки (x_0, h_0) , и что мера $d\nu_s(x) d_l h$ переходит при этом диффеоморфизме в такую меру $d\lambda(g)$, производная которой по мере $d_l g$ равна в точке g_0 величине $|\det(1 - (g_0)_*)|$.

Воспользуйтесь также формулами (4), (5) и соотношением $\frac{\Delta_G(h_0)}{\Delta_K(h_0)} = |\det(g_0)_*|$.

Отметим связь формулы (15) с выражением, предложенным М. Атьей и Р. Боттом в [58] для следов операторов в пространствах сечений гладких расслоений. В работе Атьи и Ботта рассматриваются операторы $T = D \cdot S$, где S — оператор сдвига в гладком расслоении, а D — псевдодифференциальный оператор. В случае, когда сдвиг имеет на базе лишь конечное число невырожденных неподвижных точек, показано, что линейный функционал $f(D) = \text{tr}(DS)$ продолжается единственным образом (по непрерывности в подходящей топологии) с подпространства ядерных интегральных операторов с гладким ядром на пространство всех псевдодифференциальных операторов. В случае, когда D — дифференциальный оператор (в частности, оператор умножения на функцию), авторы приводят явную формулу, выражающую след оператора T через коэффициенты оператора D в неподвижных точках для S . Можно проверить, что формула Атьи — Ботта, как и формула (15), совпадает с выражением, которое получается, если записать оператор T в виде интегрального оператора с обобщенным ядром и затем чисто формально вычислить след по формуле (11).

§ 14. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

14.1. Проективные группы и проективные представления. Рассмотрим n -мерное линейное пространство V над полем K . Группа всех его линейных обратимых преобразований изоморфна группе $GL(n, K)$ невырожденных матриц n -го порядка с элементами из K .

Пусть $P(V)$ — соответствующее проективное пространство, т. е. совокупность всех одномерных подпространств в V . Группа

$GL(n, K)$ действует на $P(V)$ не эффективно¹⁾: скалярные матрицы (и только они) задают тождественное преобразование $P(V)$.

Поэтому группа всех проективных преобразований (т. е. автоморфизмов $P(V)$) изоморфна группе $PGL(n, K) = GL(n, K)/C$, где C — совокупность скалярных матриц.

Группа $PGL(n, K)$ имеет еще и другую важную реализацию.

Задача 1. Пусть $\text{Mat}_n(K)$ — полная матричная алгебра порядка n над полем K . Докажите, что каждый автоморфизм $\text{Mat}_n(K)$ имеет вид

$$X \mapsto AXA^{-1}. \quad (1)$$

Указание. Пусть $P_i, i = 1, \dots, n$, — диагональная матрица, у которой i -й элемент равен 1, а остальные — нули.

Воспользуйтесь соотношениями $P_i P_j = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ P_i & \text{при } i = j, \end{cases}$ и докажите, что образы P_i при любом автоморфизме являются операторами проектирования на одномерные подпространства.

Следствие. Группа автоморфизмов алгебры $\text{Mat}_n(K)$ изоморфна $PGL(n, K)$.

В самом деле, преобразование (1) является тождественным тогда и только тогда, когда A — скалярная матрица.

Рассмотрим теперь комплексное гильбертово пространство H и соответствующее проективное пространство $P(H)$ (совокупность одномерных подпространств H).

В $P(H)$ можно ввести расстояние:

$$\rho(h_1, h_2) = \|P_1 - P_2\|, \quad (2)$$

где P_i — оператор ортогонального проектирования на одномерное подпространство $h_i, i = 1, 2$.

Задача 2. Пусть ξ_i — единичный вектор в подпространстве $h_i, i = 1, 2$. Докажите, что

$$\rho(h_1, h_2)^2 = 1 - |(\xi_1, \xi_2)|^2.$$

Следствие. Условие $\rho(h_1, h_2) = 1$ равносильно ортогональности h_1 и h_2 .

Задача 3. Докажите, что всякое изометрическое преобразование $P(H)$ имеет вид

$$h \mapsto Uh, \quad (3)$$

где $h \in P(H)$, а U — унитарный или антиунитарный оператор в H .

Указание. Пусть $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — ортонормированный базис в H и h_α — одномерное подпространство, порожденное вектором ξ_α . Для любого изометрического преобразования S пространства $P(H)$ существует такое преобразование S_0 вида (3), что SS_0^{-1} сохраняет на месте все точки $h_\alpha, \alpha \in A$. Выведите отсюда и из задачи 2, что для любого подмножества $A_0 \subset A$ преобразование SS_0^{-1} переводит в себя совокупность $P_{A_0}(H)$ тех подпространств

¹⁾ Действие группы G на множестве X называется *эффективным*, если каждому $g \neq e$ соответствует нетождественное преобразование X .

$h \in P(A)$, которые порождаются векторами вида $\xi = \sum_{\alpha \in A_0} c_\alpha \xi_\alpha$. Покажите, что преобразование SS_0^{-1} либо имеет вид (3), где U — диагональный унитарный оператор в базисе $\{\xi_\alpha\}$, либо является произведением такого преобразования и комплексного сопряжения (в том же базисе).

Итак, группа $P\tilde{U}(H)$ всех изометрических преобразований $P(H)$ изоморфна фактор-группе $\tilde{U}(H)/C$, где $\tilde{U}(H)$ — группа всех унитарных и антиунитарных операторов в H , а C — ее центр, состоящий из скалярных унитарных операторов.

Группа $\tilde{U}(H)$ является топологической группой относительно сильной операторной топологии (которая на $\tilde{U}(H)$ совпадает со слабой). Очевидно, C — замкнутая подгруппа в $\tilde{U}(H)$. Поэтому фактор-группа $P\tilde{U}(H) = \tilde{U}(H)/C$, снабженная фактор-топологией, будет отделимой топологической группой.

Задача 4. Докажите, что связной компонентой единицы в $P\tilde{U}(H)$ является группа $P\tilde{U}(H) = \tilde{U}(H)/C$, где $\tilde{U}(H)$ — группа унитарных операторов в H .

Указание. Воспользуйтесь связностью группы $\tilde{U}(H)$ в сильной топологии, которая легко выводится из спектральной теоремы для унитарных операторов.

Так же, как и в конечномерном случае, можно привести реализацию $P\tilde{U}(H)$ как группы автоморфизмов операторной алгебры.

Задача 5. Обозначим $\mathfrak{B}(H)$ C^* -алгебру всех ограниченных операторов в H . Докажите, что всякий автоморфизм $\mathfrak{B}(H)$ имеет вид

$$X \mapsto UXU^{-1}, \quad (4)$$

где $U \in \tilde{U}(H)$.

Указание. Воспользуйтесь методом решения задачи 1, учитывая дополнительно самосопряженность операторов P_i и их образов при автоморфизме.

Следствие. Группа всех автоморфизмов $\mathfrak{B}(H)$ изоморфна $P\tilde{U}(H)$.

Проективным представлением группы G , как уже говорилось в п. 7.1, называется гомоморфизм G в группу $PGL(n, K)$. Выбирая для каждого элемента из $PGL(n, K)$ проектирующийся в него элемент из $GL(n, K)$, видим, что всякое проективное представление может быть задано как отображение $T: G \rightarrow GL(n, K)$, обладающее свойством

$$T(g_1)T(g_2) = c(g_1, g_2)T(g_1g_2), \quad (5)$$

где $c(g_1, g_2)$ — функция на $G \times G$ со значениями в $K^* = K \setminus \{0\}$.

Изменение выбора представителей $T(g)$ приводит к умножению функции $c(g_1, g_2)$ на любую функцию вида

$$c_0(g_1, g_2) = \frac{b(g_1)b(g_2)}{b(g_1g_2)}. \quad (6)$$

Кроме того, функция $c(g_1, g_2)$ не произвольна. Она обязана удовлетворять тождеству

$$c(g_1, g_2)c(g_1g_2, g_3) = c(g_1, g_2g_3)c(g_2, g_3), \quad (7)$$

которое следует из сравнения операторов $T(g_1g_2)T(g_3)$ и $T(g_1)T(g_2g_3)$.

Вспоминая определения п. 2.5, видим, что проективное представление T однозначно определяет некоторый элемент h_T группы $H^2(G, K^*)$ двумерных когомологий G со значениями в K^* .

Любой коцикл $c(g_1, g_2)$, принадлежащий классу h_T , называется *мультипликатором* проективного представления T . Мультипликаторы, принадлежащие нулевому классу, т. е. имеющие вид (6), называются тривиальными. Ясно, что проективное представление с тривиальным мультипликатором эквивалентно линейному представлению (т. е. представлению с мультипликатором, тождественно равным 1).

Проективным унитарным представлением группы G называется гомоморфизм этой группы в группу $P\tilde{U}(H)$.

Если G — топологическая группа, то этот гомоморфизм предполагается непрерывным.

Из результата задачи 4 следует, что для связных групп G проективное унитарное представление является гомоморфизмом G в $PU(H)$.

Свойства проективных групп, описанные в задачах 1 и 5, являются основой возникновения проективных и проективных унитарных представлений группы G в различных задачах, связанных с этой группой. Объясним здесь подробнее, как проективные представления (соответственно унитарные проективные представления) возникают при изучении линейных (соответственно унитарных) представлений расширений групп. Другие ситуации, приводящие к проективным представлениям, будут разобраны в пп. 17.2 и 18.2.

Напомним, что в п. 13.3 мы свели задачу о классификации представлений расширений групп к следующей задаче. Пусть задана группа H , ее инвариантная подгруппа N и представление U подгруппы N , обладающее свойством: для любого $h \in H$ представления $U(n)$ и $U_h(n) = U(hnh^{-1})$ эквивалентны. Требуется описать все неприводимые представления T группы H , ограничение которых на N кратно U . Мы покажем сейчас, что последняя задача равносильна классификации проективных представлений фактор-группы $K = H/N$.

Для каждого класса $k \in K$ выберем представителя $\sigma(k) \in H$. Тогда каждый элемент $h \in H$ можно будет однозначно записать в виде

$$h = \sigma(k)n, \quad k \in K, \quad n \in N. \quad (7')$$

Пространство V , в котором действует искомое представление T , удобно записать в виде гильбертова произведения $V_1 \otimes V_2$ так, чтобы операторы $T(n)$, $n \in N$, приняли вид

$$T(n) = 1_{V_1} \otimes U(n). \quad (8)$$

Отметим, что возможность записи операторов $T(n)$, $n \in N$, в форме (8) равносильна утверждению, что представление $T|_N$ кратно U .

Далее, так как для любого $k \in K$ представления

$$U(n) \quad \text{и} \quad U_k(n) = U(\sigma(k)n\sigma(k)^{-1})$$

эквивалентны, существуют такие операторы $W(k)$ в пространстве V_2 , что

$$U(\sigma(k)n\sigma(k)^{-1}) = W(k)U(n)W(k)^{-1}. \quad (9)$$

Сравним операторы $T(\sigma(k))$ и $1_{V_1} \otimes W(k)$ по их действию на операторы $T(n)$, $n \in N$. Из соотношений (8) и (9) несложно вывести, что оператор $T(\sigma(k))(1_{V_1} \otimes W(k)^{-1})$ перестановочен со всеми операторами $T(n)$, $n \in N$. Так как U неприводимо, отсюда следует, что этот оператор имеет вид $S(k) \otimes 1_{V_2}$ (см. задачу 1 из п. 4.5 для унитарного случая и теорему 2 из п. 8.2 для случая конечномерного линейного представления). Итак, искомое представление T должно иметь вид

$$T(h) = S(k) \otimes W(k)U(n), \quad (10)$$

где $k \in K$ и $n \in N$ определяются из равенства (7').

Посмотрим теперь, что можно сказать об операторах $S(k)$ и $W(k)$. Условие (9) определяет оператор $W(k)$ с точностью до скалярного множителя. Поэтому и операторы $S(k)$ определены лишь с точностью до скалярного множителя. Мы получаем, таким образом, отображение K в группу проективных преобразований. Покажем, что это отображение является гомоморфизмом. Это вытекает из следующего простого факта.

Задача 6. Равенство $A \otimes B = A_1 \otimes B_1$ возможно лишь, если $A = \lambda A_1$, $B = \lambda^{-1} B_1$ для некоторого скаляра λ .

Указание. Сравните матричные элементы обоих операторов.

В самом деле, так как $\sigma(k_1)\sigma(k_2)$ сравнимо с $\sigma(k_1k_2)$ по модулю N , оператор $T(\sigma(k_1)\sigma(k_2))$ имеет вид

$$S(k_1k_2) \otimes W(k_1k_2)U(n)$$

для некоторого $n \in N$. С другой стороны, этот оператор равен произведению $T(\sigma(k_1))$ и $T(\sigma(k_2))$, т. е.

$$S(k_1)S(k_2) \otimes W(k_1)W(k_2).$$

Поэтому в силу задачи 6

$$S(k_1)S(k_2) = \lambda(k_1, k_2)S(k_1, k_2). \quad (11)$$

Значит, S — проективное представление с мультипликатором $\lambda(k_1 k_2)$, определяемым соотношением

$$W(k_1)W(k_2) = \lambda(k_1, k_2)^{-1} W(k_1 k_2) U(n), \quad (12)$$

где $n \in N$ задается равенством

$$\sigma(k_1)\sigma(k_2) = \sigma(k_1 k_2)n. \quad (13)$$

Итогом приведенных здесь рассуждений является

Теорема 1. *Формула (10) устанавливает взаимно однозначное соответствие между представлениями T группы H , ограничение которых на N кратно неприводимому представлению U , и проективными представлениями S группы $K = H/N$ с мультипликатором (12). Представление T неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо соответствующее проективное представление S .*

14.2. Теория Шура. Проективные представления группы G можно строить следующим образом. Пусть

$$1 \rightarrow G_0 \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

— центральное расширение группы G с помощью коммутативной подгруппы G_0 . Рассмотрим линейное представление $\tilde{T}$ группы $\tilde{G}$ над полем K и предположим, что все операторы $\tilde{T}(g_0)$, $g_0 \in G_0$, скалярны.

Для каждого $g \in G$ выберем какой-нибудь прообраз $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Ясно, что, поставив в соответствие элементу $g \in G$ оператор $\tilde{T}(\tilde{g})$, мы получим проективное представление группы G .

Будем говорить, что проективное представление $\tilde{T}$, полученное описанной конструкцией, *линеаризуется группой $\tilde{G}$* или *получается из линейного представления $\tilde{G}$* .

Задача 1. Докажите, что всякое проективное представление T группы G линеаризуется некоторой группой $\tilde{G}$.

Указание. В качестве $\tilde{G}$ возьмите центральное расширение G с помощью K^* , соответствующее классу h_T (см. п. 2.5).

Оказывается, для конечной группы G существует *универсальное* центральное расширение $\tilde{G}$, линеаризующее все проективные представления группы G . А именно, имеет место

Теорема 1 (И. Шур). Пусть G — конечная группа, K — алгебраически замкнутое поле (любой характеристики). Существует такое центральное расширение $\tilde{G}$ группы G с помощью конечной абелевой группы G_0 , что всякое проективное представление группы G над полем K получается из линейного представления группы $\tilde{G}$, скалярного на G_0 .

Доказательство. Если не требовать конечности группы G_0 , то утверждение теоремы можно доказать без всяких ограничений на группу G и поле K следующим простым приемом. Рассмотрим группу $Z^2(G, K^*)$ всех двумерных коциклов на G со значениями в K^* . Каждой паре элементов g_1, g_2 из G соответствует гомоморфизм

$$\alpha_{(g_1, g_2)}: Z^2(G, K^*) \rightarrow K^*,$$

сопоставляющий коциклу c число $c(g_1, g_2)$.

Задача 2. Докажите, что соответствие $(g_1, g_2) \rightarrow \alpha_{(g_1, g_2)}$ является двумерным коциклом на G со значениями в группе M всех гомоморфизмов $Z^2(G, K^*)$ в K^* .

Построим теперь расширение G_1 группы G с помощью подгруппы M , соответствующее коциклу α из задачи 2. Напомним, что это расширение состоит из пар (g, m) , $g \in G$, $m \in M$, которые умножаются по закону

$$(g_1, m_1)(g_2, m_2) = (g_1 g_2, m_1 m_2 \alpha(g_1, g_2)). \quad (2)$$

Если T_1 — линейное представление группы G_1 , ограничение которого на подгруппу M скалярно и имеет вид

$$T_1(1, m) = m(c), \quad c \in Z^2(G, K^*), \quad (3)$$

то операторы $T(g) = T_1(g, 1)$ удовлетворяют условию (1). Верно и обратное: если операторы $T(g)$ удовлетворяют условию (1), то формула

$$T_1(g, m) = T(g) m(c) \quad (4)$$

определяет линейное представление группы G_1 .

Таким образом, все проективные представления группы G получаются из линейных представлений группы G_1 .

Группа M , участвующая в этой конструкции, излишне велика. В частности, она может быть бесконечна, даже если группа G конечна. Покажем, что можно заменить M меньшей группой без ущерба для нужных нам свойств этой группы. В самом деле, пусть $Z_1^2(G, K^*)$ — подгруппа в $Z^2(G, K^*)$, имеющая непустое пересечение с каждым классом когомологических коциклов. Другими словами, естественная проекция $Z_1^2(G, K^*)$ в $H^2(G, K^*)$ является эпиморфизмом. Для получения всех про-

ективных представлений группы G достаточно рассматривать только коциклы из $Z_1^2(G, K^*)$.

Пусть M_1 — подгруппа в M , которая является аннулятором $Z_1^2(G, K)$. Если проективное представление T соответствует коциклу $c \in Z_1^2(G, K^*)$, то линейное представление T_1 , определенное формулой (4), тривиально на подгруппе $M_1 \subset G_1$. Значит, оно порождает представление группы $\tilde{G} = G_1/M_1$.

Согласно сделанному предположению, каждое проективное представление группы G эквивалентно представлению с мультипликатором из $Z_1^2(G, K^*)$. Поэтому всякое проективное представление G получается из линейного представления группы $\tilde{G}$. Последняя группа является, очевидно, центральным расширением G с помощью группы $G_0 = M/M_1$.

Возникает вопрос о нахождении возможно меньшей подгруппы $Z_1^2(G, K)$, обладающей нужным нам свойством. Слишком маленькой эта группа быть не может, так как $H^2(G, K^*)$ является ее фактор-группой.

Оказывается, что в условиях теоремы (т. е. для конечной группы G) этот естественный предел достигается. А именно, существует такая подгруппа $Z_1^2(G, K^*)$ в $Z^2(G, K^*)$, которая изоморфно проектируется на $H^2(G, K^*)$.

Это утверждение легко выводится (см., например, [34], § 53) из теории расширений, описанной в п. 2.4, и следующего факта.

Задача 3. Пусть G — конечная группа. Докажите, что $H^2(G, K^*)$ — конечная группа, порядок которой не делит характеристику поля K и является делителем порядка G .

Указание. Пусть порядок G равен n и $c \in Z^2(G, K^*)$. Докажите, что $c(g_1, g_2)^n = \frac{b(g_1)b(g_2)}{b(g_1g_2)}$, где $b(g) = \prod_{g_1 \in G} c(g, g_1)$. Проверьте, далее, что

если элемент $h \in H^2(G, K^*)$ имеет порядок k , то представляющий его коцикл можно выбрать так, что $c(g_1, g_2)^k \equiv 1$. Наконец, если p — характеристика поля K , то в K^* однозначно извлекается корень p -й степени. Поэтому тем же свойством обладает и группа $H^2(G, K^*)$.

Описанная здесь связь между проективными представлениями группы G над полем K и группой $H^2(G, K^*)$ может оказаться полезной для вычисления последней группы.

Задача 4. Докажите, что $H^2(G, K^*) = 0$, если G — свободная группа.

Указание. Всякое проективное представление свободной группы эквивалентно линейному.

Задача 5. Докажите, что если группа $H^2(G, K^*)$ тривиальна, то группа $H^2(G \times G, K^*)$ изоморфна группе всех отображений $s: G \times G \rightarrow K^*$, мультипликативных по каждому аргументу и обладающих свойством

$$c(g_2, g_1) = c(g_1, g_2)^{-1}.$$

У к а з а н и е. Пусть T — проективное представление $G \times G$ над K . Положите

$$c_T(g_1, g_2) = T(g_1, 1) T(1, g_2) T(g_1, 1)^{-1} T(1, g_2)^{-1}.$$

Воспользуйтесь тем, что ограничения T на подгруппы $G \times 1$ и $1 \times G$ эквивалентны линейному представлению.

14.3. Проективные представления групп Ли. Теория Шура проективных представлений конечных групп может быть перенесена на топологические группы. Возникающее при этом понятие непрерывных или борелевских когомологий топологических групп исследовано в недавней работе К. Мура [113].

Разберем здесь лишь наиболее простой (и в то же время наиболее важный для приложений) случай, когда исследуемая группа G является связной группой Ли.

Пусть T — комплексное проективное представление G . Рассмотрим группу G_1 , элементами которой являются пары вида (g, A) , где $g \in G$ и A — один из линейных операторов, порождающих проективное преобразование $T(g)$. Закон умножения в G_1 определяется покомпонентно:

$$(g_1, A_1)(g_2, A_2) = (g_1 g_2, A_1 A_2).$$

Отображение $(g, A) \rightarrow g$ является, очевидно, эпиморфизмом G_1 на G , ядром которого является совокупность пар вида $(e, \lambda \cdot 1)$, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Мы получаем, таким образом, расширение

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow G_1 \rightarrow G \rightarrow 1. \quad (1)$$

Представление T получается из линейного представления $\tilde{G}$, которое паре (g, A) ставит в соответствие оператор A .

Аналогичное построение можно провести для унитарного проективного представления T (т. е. гомоморфизма в группу $PU(H)$).

В этом случае роль G_1 играет совокупность пар (g, U) , где U — унитарный оператор, задающий преобразование $T(g)$ проективного пространства $P(H)$. Мы приходим к расширению

$$1 \rightarrow \mathbf{T} \rightarrow G_1 \rightarrow G \rightarrow 1. \quad (2)$$

Представление T получается из линейного унитарного представления G_1 , переводящего (g, U) в U .

Покажем теперь, что возникающая группа G_1 снабжается структурой группы Ли, так что (1) и (2) становятся точными последовательностями в категории групп Ли. Разберем для определенности случай унитарного представления. Пусть $(g, U) \in G_1$. Выберем единичные векторы ξ и η в пространстве представления, для которых $(U\xi, \eta) \neq 0$.

Задача 1. Докажите, что существует такая окрестность $\mathcal{W}$ точки g , что $(V\xi, \eta) \neq 0$ для всех унитарных операторов V , определяющих проективное преобразование $T(g)$, $g \in \mathcal{W}$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь непрерывностью отображения

$$T: G \rightarrow PU(H).$$

Если h_1 и h_2 — подпространства в H , порожденные ξ и η , то в качестве W можно взять совокупность тех $g \in G$, для которых

$$\rho(T(g)h_1, h_2) < 1$$

(см. задачу 2 из п. 14.1).

Пусть W_1 — прообраз окрестности W в G_1 при естественной проекции G_1 на G .

Отображение $(g, U) \rightarrow (g, \frac{(U\xi, \eta)}{|(U\xi, \eta)|})$ взаимно однозначно отображает W_1 на $W \times T$. Перенесем на W_1 структуру многообразия, которая имеется на $W \times T$.

Задача 2. Докажите, что возникающий описанным образом атлас на G_1 состоит из непрерывно связанных карт и определяет на G_1 -структуру группы Ли.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь непрерывностью функции

$$g \rightarrow |(U(g)\xi, \eta)| = \rho(T(g)h_1, h_2)$$

и теоремой Глисона — Монтгомери — Циппина из п. 6.1.

Итак, группа G_1 — это группа Ли, которая является расширением группы G с помощью T .

Пусть $\tilde{G}$ — односвязная накрывающая группы G и $\tilde{G}_1$ — односвязная накрывающая группы G_1 .

Тогда имеет место коммутативная диаграмма с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \leftarrow & \tilde{G} & \leftarrow & \tilde{G}_1 & \leftarrow & \mathbf{R} \leftarrow 1 \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \leftarrow & G & \leftarrow & G_1 & \leftarrow & T & \leftarrow & 1, \end{array}$$

где вертикальные стрелки означают естественные проекции.

Как известно (см. п. 6.3), группа $\tilde{G}_1$ вполне определяется своей алгеброй Ли $\mathfrak{g}_1$, которая является расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью одномерной алгебры Ли $\mathbf{R}$.

Для расширений алгебр Ли можно построить теорию, аналогичную теории расширений групп, описанной в п. 2.4. Приведем здесь окончательный результат в нужной для нас форме. Пусть $Z^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ — совокупность билинейных кососимметричных вещественных функций c на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, обладающих свойством

$$c([X_1, X_2], X_3) + c([X_2, X_3], X_1) + c([X_3, X_1], X_2) = 0, \quad (3)$$

$B^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ — подпространство в $Z^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$, состоящее из функций вида

$$c(X_1, X_2) = \langle F, [X_1, X_2] \rangle, \quad F \in \mathfrak{g}^*. \quad (4)$$

Фактор-пространство $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = Z^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})/B^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ называется пространством двумерных когомологий алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в $\mathbf{R}$.

Теорема 1. *Имеется взаимно однозначное соответствие между элементами $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ и классами эквивалентных расширений алгебры $\mathfrak{g}$ с помощью $\mathbf{R}$.*

Более точно, классу $h \in H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$, содержащему элемент $c \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$, соответствует класс эквивалентных расширений, содержащий расширение, задаваемое формулой

$$[(X_1, t_1), (X_2, t_2)] = ([X_1, X_2], c(X_1, X_2)),$$

$$X_i \in \mathfrak{g}, \quad t_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2.$$

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является суммой полупростой подалгебры $\mathfrak{g}_1$ и разрешимого идеала $\mathfrak{g}_2$, то $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ изоморфно подпространству в $H^2(\mathfrak{g}_2, \mathbf{R})$, порождаемому теми коциклами $c \in Z^2(\mathfrak{g}_2, \mathbf{R})$, которые обладают свойством

$$c([X_1, Y], X_2) = c(X_1, [Y, X_2]), \quad X_i \in \mathfrak{g}_2, \quad Y \in \mathfrak{g}_1. \quad (5)$$

Следствие. *Всякое проективное представление связной односвязной полупростой группы Ли получается из линейного представления той же группы.*

В самом деле, из последнего утверждения теоремы 1 вытекает, что $H^2(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) = 0$ для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поэтому алгебра $\mathfrak{g}_1$ в этом случае является прямой суммой $\mathfrak{g}$ и $\mathbf{R}$, а группа G_1 — прямым произведением G и $\mathbf{R}$.

Полезным упражнением на овладение материалом этого пункта является

Задача 3. Пусть P — группа всех аффинных преобразований комплексного двумерного пространства, сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму.

Построить универсальное расширение G группы P , линеаризующее все проективные представления этой группы (ср. теорему 1 из п. 14.2).

Указание. Удобная реализация алгебры Ли $\mathfrak{p}$ группы P состоит из совокупности комплексных матриц третьего порядка, имеющих вид

$$X = \begin{pmatrix} a & b & u \\ c & -a & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с операцией коммутирования

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1.$$

Подалгебра $\mathfrak{p}_1$, определяемая условием $u = v = 0$, полупроста и соответствует подгруппе однородных преобразований (преобразований Лоренца). Идеал $\mathfrak{p}_2$, выделяемый условием $a = c = 0$, соответствует подгруппе трансляций. Всякая билинейная кососимметрическая форма c на $\mathfrak{p}_2$, удовлетворяющая условию (5), имеет вид

$$c(X_1, X_2) = \operatorname{Re} \lambda (u_1 v_2 - v_1 u_2), \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

Соответствующее универсальное расширение может быть реализовано комплексными матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -v & u & w \\ 0 & a & b & u \\ 0 & c & -a & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Группа G , соответствующая этой алгебре Ли, имеет простой геометрический смысл — это подгруппа в $Sp(4, \mathbb{C})$, оставляющая на месте один ненулевой вектор.

Задача 4. Найти универсальное расширение группы движений плоскости.

Указание. Докажите аналог теоремы 1 для случая, когда $\mathfrak{g}_1$ — алгебра Ли подгруппы вращений, а $\mathfrak{g}_2$ — алгебра Ли подгруппы параллельных переносов.

§ 15. МЕТОД ОРБИТ

Основу метода орбит составляет следующий «экспериментальный факт»: теория унитарных бесконечномерных представлений всякой группы Ли тесно связана с некоторым специальным конечномерным представлением этой группы. Это представление действует в дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ рассматриваемой группы G . Мы будем называть его *коприсоединенным* или, короче, *K -представлением*.

Орбиты группы Ли в пространстве K -представления являются симплектическими многообразиями. Они могут быть интерпретированы как фазовые пространства гамильтоновой механической системы, для которой данная группа Ли является группой симметрии. Мы дадим в п. 15.2 классификацию всех однородных симплектических многообразий с данной группой симметрий.

Оказывается, что унитарные неприводимые представления группы G связаны с орбитами этой группы в K -представлении. Конструкция представления по орбите излагается в п. 15.3.

Она является обобщением известной в квантовой механике процедуры квантования. Подробнее эта точка зрения изложена в п. 15.4.

Автор видит значение метода орбит не только в точных теоремах, которые уже получены этим методом, но и в большом количестве простых и наглядных эвристических правил, дающих решение основных вопросов теории представлений. Со временем эти правила будут доведены до уровня строгих теорем, но уже сейчас их польза несомненна.

В п. 15.5 мы покажем, как операции ограничения на подгруппу H и индуцирования с этой подгруппы могут быть описаны с помощью естественной проекции $p: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$, где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы H .

Обобщенные характеры неприводимых унитарных представлений, как мы увидим в п. 15.6, допускают простую запись

в виде интеграла по соответствующей орбите. Это позволяет во многих случаях написать явное выражение для меры Планшереля.

Наконец, в п. 15.7 показано, что инфинитезимальные характеры неприводимых унитарных представлений группы G могут быть вычислены как значения G -инвариантных многочленов на соответствующих орбитах.

15.1. Коприсоединенное представление группы Ли. Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли и $\mathfrak{g}^*$ — пространство, дуальное к $\mathfrak{g}$. Группа G действует в $\mathfrak{g}$ с помощью присоединенного представления Ad (см. п. 6.3) и в $\mathfrak{g}^*$ с помощью коприсоединенного представления, или, короче, K -представления.

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ реализована в виде алгебры левоинвариантных векторных полей на G , то естественно реализовать $\mathfrak{g}^*$ в виде пространства левоинвариантных дифференциальных форм первого порядка на G . K -представление группы G действует в пространстве 1-форм с помощью правых сдвигов.

Разберем подробнее один пример, полезный и при рассмотрении общего случая. Пусть $G = GL(n, \mathbb{C})$ — группа всех невырожденных комплексных матриц n -го порядка. Так как G является открытым подмножеством в линейном пространстве $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ всех матриц, мы можем отождествить касательное пространство к G в любой точке $g \in G$ с $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Тогда векторное поле на G будет просто матричной функцией.

Задача 1. Докажите, что всякое левоинвариантное векторное поле на G имеет вид

$$v_A(X) = XA, \quad A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}), \quad (1)$$

и что поле v_A под действием правого сдвига на $Y \in G$ переходит в поле $v_{Y^{-1}AY}$.

Указание. Проверьте, что поле $v(X)$ на G переходит под действием сдвига на Y_1 слева и на Y_2 справа в поле $v'(X) = Y_1 v(Y_1^{-1} X Y_2^{-1}) Y_2$.

Пространство, дуальное к $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$, удобно отождествить с $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ с помощью билинейной (над $\mathbb{R}$) формы

$$\langle X, Y \rangle = \text{Re tr } XY. \quad (2)$$

Тогда 1-формы на G также будут записываться в виде матричных функций.

Задача 2. Докажите, что всякая левоинвариантная 1-форма на G имеет вид

$$\omega_B(X) = BX^{-1}, \quad B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \quad (3)$$

и что форма ω_B переходит при правом сдвиге на $Y \in G$ в форму $\omega_{Y B Y^{-1}}$.

Таким образом, в рассматриваемом примере K -представление эквивалентно присоединенному представлению, а орбиты группы G в K -представлении — классы подобных матриц.

Пусть теперь G — произвольная группа Ли. Заменяя, если нужно, G на локально изоморфную ей группу, мы можем считать, что G — подгруппа в $GL(n, \mathbb{C})$ (см. п. 6.2).

Отметим, что при K -представлении элементы центра группы переходят в единичные операторы. Поэтому локально изоморфные группы переходят при K -представлении в изоморфные линейные группы.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G будет тогда подалгеброй в $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Пусть $\mathfrak{g}^\perp$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ относительно билинейной формы (2), V — какое-нибудь подпространство в $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$, дополнительное к $\mathfrak{g}^\perp$, и P — проектор на V параллельно $\mathfrak{g}^\perp$. Тогда можно отождествить $\mathfrak{g}^*$ с V так, что K -представление примет вид

$$K(g)X = P(gXg^{-1}), \quad X \in V, \quad g \in G. \quad (4)$$

Пример. Если G — подгруппа в $GL(n, \mathbb{C})$, состоящая из вещественных верхних треугольных матриц с единицами по главной диагонали, то в качестве V можно взять подпространство вещественных нижних треугольных матриц с нулями по главной диагонали. Действие оператора P состоит в этом случае в замене нулями всех элементов матрицы, стоящих на или выше главной диагонали.

Обозначим $\mathcal{O}(G)$ совокупность орбит группы Ли G в K -представлении, снабженную фактор-топологией естественной топологии в $\mathfrak{g}^*$. Как правило, топологическое пространство $\mathcal{O}(G)$ неотделимо. В рассматриваемых выше примерах оно полуотделимо. Можно привести примеры групп G (см. п. 19.2), для которых $\mathcal{O}(G)$ не будет даже полуотделимым.

Перейдем теперь к изучению орбит группы Ли G в K -представлении. Покажем сейчас, что на каждой такой орбите есть замкнутая невырожденная G -инвариантная 2-форма.

Нам понадобятся некоторые общие сведения о дифференциальных формах на однородных многообразиях.

Пусть $\bar{G}$ — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа и $M = H \backslash \bar{G}$ — однородное многообразие правых классов смежности в $\bar{G}$ по H . Обозначим p естественную проекцию $\bar{G}$ на M , которая точке g ставит в соответствие класс Hg . Производное отображение $p_*(e)$ является линейным оператором из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы $\bar{G}$ на касательное пространство к M в начальной точке H . Ясно, что ядро этого оператора совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$ подгруппы H . Тем самым касательное пространство $T_H M$ отождествляется с фактор-пространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Движение $g \in G$ переводит точку H в Hg . Производное отображение $g_*(H)$

является изоморфизмом $T_H M$ на $T_{Hg} M$, а дуальное к нему отображение $g^*(H)$ будет изоморфизмом $T_{Hg}^* M$ на $T_H^* M$. Используя эти изоморфизмы, мы можем задавать тензорные поля на M в виде функций на G со значениями в тензорной алгебре над $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. А именно, если Φ — тензорное поле типа (k, l) на M , то значение функции Φ в точке $g \in G$ — это тензор $\Phi(g)$ типа (k, l) над $T_H M$, принимающий на векторах $\xi_1, \dots, \xi_l$ и ковекторах $\eta_1, \dots, \eta_k$ значение

$$\Phi(Hg)(g_*(H)\xi_1, \dots, g_*(H)\xi_l, g^*(H)^{-1}\eta_1, \dots, g^*(H)^{-1}\eta_k). \quad (5)$$

Задача 3. Докажите, что функция Φ на G со значениями в $T^{k,l}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ соответствует тензорному полю типа (k, l) на M тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию

$$\Phi(hg) = \rho_{k,l}(h)\Phi(g), \quad (6)$$

где $\rho_{k,l}$ — естественное представление H в $T^{k,l}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, порождаемое присоединенным представлением H в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Указание. Воспользуйтесь формулой (5) для восстановления Φ по Φ и покажите, что корректность этого восстановления равносильна условию (6).

В частности, дифференциальные формы порядка l на M задаются функциями на G со значениями в

$$\wedge^l((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*) \approx \wedge^l(\mathfrak{h}^\perp),$$

удовлетворяющими условию

$$\Phi(hg) = \rho_l(h)\Phi(g), \quad (6')$$

где ρ_l — l -я внешняя степень естественного представления H в пространстве $\mathfrak{h}^\perp$.

Введенная форма записи удобна тем, что движения из группы G выглядят очень просто.

Задача 4. Докажите, что если тензорное поле Φ соответствует функции Φ , то поле, полученное из Φ сдвигом на $g \in G$, соответствует функции, полученной из Φ правым сдвигом на g .

Отметим, что описанная выше связь между тензорными полями и функциями является частным случаем записи сечений G -расслоения на $H \setminus G$ в виде вектор-функций на G , преобразующихся заданным образом при левых сдвигах на H (см. п. 13.4).

Следствие. *G -инвариантные дифференциальные формы на $M = H \setminus G$ однозначно соответствуют H -инвариантным элементам в $\wedge(\mathfrak{h}^\perp)$.*

В самом деле, из задачи 4 вытекает, что G -инвариантной форме соответствует постоянная функция на G со значением в $\wedge(\mathfrak{h}^\perp)$, а из условия (6) следует, что значение этой функции является H -инвариантным элементом.

Задача 5. Пусть инвариантной k -форме Φ на $M = H \setminus G$ соответствует внешняя форма $\varphi \in \wedge^k(\mathfrak{h}^\perp)$. Тогда дифференциалу $d\Phi$ соответствует форма $d\varphi \in \wedge^{k+1}(\mathfrak{h}^\perp)$, задаваемая формулой

$$d\varphi(X_1, \dots, X_{k+1}) = \frac{1}{k+1} \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \varphi([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots). \quad (7)$$

Указание. Воспользуйтесь формулой (3) из п. 5.3, соотношением

$$L_{\xi} \iota(\eta) - \iota(\eta) L_{\xi} = \iota([\xi, \eta])$$

и тем, что если форма Φ G -инвариантна, а векторное поле ξ соответствует элементу X из алгебры Ли группы G , то $L_{\xi}\Phi = 0$. Ср. также формулу (4) из п. 5.3.

Вернемся к рассмотрению орбит группы Ли G в K -представлении.

Пусть Ω — одна из таких орбит, F — произвольная точка из Ω и G_F — стабилизатор этой точки.

Задача 6. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_F$ группы G_F совпадает с ядром билинейной кососимметрической формы B_F на $\mathfrak{g}$, задаваемой формулой

$$B_F(X, Y) = \langle F, [X, Y] \rangle. \quad (8)$$

Указание. Ядро формы B_F , по определению, состоит из таких элементов $X \in \mathfrak{g}$, что $B_F(X, Y) = 0$ для всех Y из $\mathfrak{g}$.

Докажите соотношение

$$B_F(X, Y) = \left\langle \frac{d}{dt} K(\exp tX) F \Big|_{t=0}, Y \right\rangle \quad (9)$$

и выведите из него утверждение задачи.

Так как величина $B_F(X, Y)$ зависит только от образов X и Y в фактор-пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F$, мы получаем кососимметрическую билинейную форму на $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F$, которую обозначим $\tilde{B}_F$. Ядро формы $\tilde{B}_F$ является образом в $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F$ ядра формы B_F и в силу задачи 6 состоит из одного нуля. Значит, форма $\tilde{B}_F$ невырождена.

Задача 7. Докажите, что $\tilde{B}_F$ является G_F -инвариантным элементом в $\wedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F)^*$.

Указание. Воспользуйтесь определением G_F и соотношениями

$$\rho_2(g) \tilde{B}_F(X, Y) = \tilde{B}_F(Ad(g^{-1})X, Ad(g^{-1})Y) = \langle K(g)F, [X, Y] \rangle. \quad (10)$$

Из утверждений задачи 6 и следствия к задаче 4 вытекает, что на $\Omega = G_F \setminus G$ существует невырожденная G -инвариантная 2-форма B_Ω , которая соответствует G_F -инвариантному элементу $\tilde{B}_F$ в $\wedge^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F)^*$.

Наше построение формы B_Ω зависело от выбора точки F . Покажем сейчас, что сама форма B_Ω от этого выбора не зависит. Это вытекает из следующего явного выражения для B_Ω .

Задача 8. Пусть ξ_X означает векторное поле на Ω , соответствующее элементу $X \in \mathfrak{g}$. Тогда для любой точки $F' \in \Omega$ справедливо равенство

$$B_\Omega(F')(\xi_X(F'), \xi_Y(F')) = \langle F', [X, Y] \rangle. \quad (11)$$

Указание. Воспользуйтесь формулой (5) и тем, что при отождествлении $T_F\Omega$ с $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F$ вектор $\xi_X(F)$ переходит в $X \bmod \mathfrak{g}_F$.

Покажем теперь, что форма B_Ω замкнута. Подсчитывая дифференциал этой формы согласно формуле (7) из задачи 5, приходим к выражению

$$\begin{aligned} [B_F([X, Y], Z) + B_F([Y, Z], X) - B_F([X, Z], Y)] = \\ = \langle F, [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \rangle, \end{aligned}$$

которое равно нулю в силу тождества Якоби. Значит, $dB_\Omega = 0$, и форма B_Ω замкнута.

Подведем итог наших исследований.

Теорема 1. На каждой орбите Ω группы Ли G в ее K -представлении существует невырожденная замкнутая G -инвариантная 2-форма B_Ω , определяемая формулой (11).

Отметим геометрически наглядное следствие теоремы 1: Все G -орбиты в K -представлении имеют четную размерность.

В самом деле, невырожденная кососимметрическая форма может существовать только в четномерном пространстве. Существует другое «объяснение» наличия формы B_Ω на G -орбитах Ω . Оно связано с понятием локальной алгебры Ли. См. [157].

15.2. Однородные симплектические многообразия. Симплектическим многообразием называется гладкое вещественное многообразие M четной размерности, на котором задана замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма B .

Примером симплектического многообразия может служить пространство T^*N кокасательного расслоения над произвольным многообразием N . Форма B определяется на T^*N так.

Пусть $\tilde{U}$ — любая карта на N и $q_1, \dots, q_k$ — соответствующие локальные координаты. В каждом из пространств T_m^*N , $m \in \tilde{U}$, выберем координаты $p_1, \dots, p_k$, соответствующие базису $\partial/\partial q_1, \dots, \partial/\partial q_k$ в T_m^*N .

Тогда набор $(q_1, \dots, q_k; p_1, \dots, p_k)$ будет локальной системой координат в области $U \subset T^*N$, которая является прообразом $\tilde{U}$ относительно естественной проекции $p: T^*N \rightarrow N$. Зададим в U дифференциальную 1-форму σ_U , полагая

$$\sigma_U = \sum_{i=1}^k p_i dq_i. \quad (1)$$

Задача 1. Пусть $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ — две любые карты на N , U и V — соответствующие карты на T^*N . Докажите, что формы σ_U и σ_V совпадают на пересечении областей U и V .

Указание. Пусть $(q_1, \dots, q_k; p_1, \dots, p_k)$ — координаты в области U , $(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_k; \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k)$ — координаты в области V . Ясно, что $\tilde{q}_i$ являются функциями только от $q_1, \dots, q_k$, а $\tilde{p}_i$ линейно зависят от $p_1, \dots, p_k$. Докажите, что

$$\tilde{p}_i(q_1, \dots, q_k; p_1, \dots, p_k) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i} p_j$$

Таким образом, на многообразии T^*N определена единая 1-форма σ , ограничение которой на любую карту U совпадает с σ_U .

Положим $B = d\sigma$. Тогда B — замкнутая форма, так как $dB = d^2\sigma = 0$. Кроме того, форма B невырождена, так как в локальной системе координат U она имеет вид

$$B_U = \sum_{i=1}^k dp_i \wedge dq_i. \quad (2)$$

Наличие невырожденной 2-формы позволяет установить взаимно однозначное соответствие между векторными и ковекторными полями на симплектическом многообразии. А именно, каждому векторному полю ξ соответствует ковекторное поле (т. е. 1-форма) $\iota(\xi)B$ (определение операции $\iota(\xi)$ см. в п. 5.3).

Назовем векторное поле ξ на симплектическом многообразии M с формой B *гамильтоновым*, если

$$L_\xi B = 0. \quad (3)$$

Другими словами, поле ξ гамильтоново, если индуцируемое этим полем семейство преобразований сохраняет форму B .

Задача 2. Докажите, что векторное поле гамильтоново, если и только если соответствующая 1-форма $\iota(\xi)B$ замкнута.

Указание. Воспользуйтесь формулой (3) из п. 5.3.

Назовем поле ξ *строго гамильтоновым*, если соответствующая 1-форма $\iota(\xi)B$ точна, т. е.

$$\iota(\xi)B + dF = 0 \quad (4)$$

для некоторой функции F на M . Функция F называется производящей функцией поля ξ и определяется равенством (4) с точностью до постоянного слагаемого. Каждая вещественная функция F на M является производящей функцией строго гамильтонова поля на M , которое мы обозначим ξ_F .

Задача 3. Докажите, что коммутатор двух гамильтоновых векторных полей является строго гамильтоновым векторным полем.

У к а з а н и е. В качестве производящей функции поля $[\xi, \eta]$ можно взять $\iota(\xi)\iota(\eta)B = 2B(\xi, \eta)$. Воспользуйтесь указанием к задаче 6 из п. 15.1.

Пусть F и G — две гладкие вещественные функции на M . Тогда имеют место равенства

$$\xi_F G = 2B(\xi_F, \xi_G) = -\xi_G F. \quad (5)$$

В самом деле, $\xi_F G = +\langle dG, \xi_F \rangle = -(\iota(\xi_G)B)(\xi_F) = -2B(\xi_G, \xi_F) = -2B(\xi_F, \xi_G)$. Второе равенство доказывается аналогично.

Общее значение трех выражений, входящих в (5), называется *скобкой Пуассона* функций F и G и обозначается $\{F, G\}$.

Задача 4. Докажите, что если в некоторой локальной системе координат форма B имеет вид (2), то скобка Пуассона определяется равенством

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right). \quad (6)$$

На самом деле предположение задачи не является ограничением. В силу известной теоремы Дарбу всякая замкнутая невырожденная 2-форма в подходящей локальной системе координат имеет вид (2).

Заметим, что если группа одномерных когомологий $H^1(M, \mathbf{R})$ многообразия M тривиальна, то всякая замкнутая 1-форма точна и, следовательно, всякое гамильтоново векторное поле строго гамильтоново. В общем случае строго гамильтоновы поля образуют подпространство $H_0(M)$ в пространстве $H(M)$ всех гамильтоновых полей. Коразмерность $H_0(M)$ в $H(M)$ равна первому числу Бетти $b_1(M)$ многообразия M .

Пространство $C^\infty(M, \mathbf{R})$ гладких вещественных функций на M образует бесконечномерную алгебру Ли относительно скобки Пуассона. В самом деле, тождество Якоби

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \quad (7)$$

вытекает из следующих соображений.

Так как соответствие $F \rightarrow \xi_F$ определяется формой B , оно перестановочно со всеми преобразованиями, сохраняющими эту форму — такие преобразования называются *каноническими*. Но всякое гамильтоново поле η локально является производной некоторого семейства канонических преобразований. Поэтому имеет место равенство $\xi_{L\eta F} = L_\eta \xi_F$ или $\xi_{\eta F} = [\eta, \xi_F]$. Подставляя в качестве η поле ξ_G и применяя обе части полученного равенства к функции H , мы получаем искомое тождество (7).

Построенная здесь алгебра Ли является частным случаем так называемой локальной алгебры Ли. Определение и классификацию таких алгебр см. в [157].

Задача 5. Докажите, что отображение $F \mapsto \xi_F$ является гомоморфизмом алгебры Ли $C^\infty(C, \mathbf{R})$ на алгебру Ли $H_0(M)$.

Указание. Равенство

$$\xi_{[F, G]} = [\xi_F, \xi_G], \quad (8)$$

которое нужно доказать, после применения обеих его частей к любой функции $H \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ превращается в тождество (7).

Итак, имеет место точная последовательность алгебр Ли:

$$0 \rightarrow \mathbf{R} \xrightarrow{i} C^\infty(M, \mathbf{R}) \xrightarrow{j} H_0(M) \rightarrow 0, \quad (9)$$

где i — естественное вложение $\mathbf{R}$ в $C^\infty(M, \mathbf{R})$ в виде подпространства констант, а j переводит F в ξ_F .

Пусть теперь на многообразии M транзитивно действует группа Ли G , так что все преобразования этой группы являются каноническими (сохраняют форму В). Мы будем говорить тогда, что M — *однородное* симплектическое многообразие. Каждому элементу X из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G соответствует тогда гамильтоново поле ξ_X на M .

Если все поля ξ_X , $X \in \mathfrak{g}$, являются строго гамильтоновыми и производящие функции F_X этих полей можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$F_{[X, Y]} = \{F_X, F_Y\}, \quad (10)$$

то мы назовем M *строго однородным* симплектическим многообразием.

Другими словами, однородное симплектическое многообразие называется строго однородным, если имеет место коммутативная диаграмма алгебр Ли:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathbf{R} & \rightarrow & C^\infty(M, \mathbf{R}) & \rightarrow & H_0(M) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \\ & & \mathfrak{g} & & \rightarrow & H(M) & \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & H^1(M, \mathbf{R}) & \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & 0 & \end{array}$$

Примером строго однородного симплектического многообразия с группой движений G является любая орбита группы G в ее K -представлении.

В самом деле, мы видели в п. 15.1, что каждая такая орбита Ω является однородным симплектическим многообразием. Остается проверить, что Ω — строго однородное симплектическое многообразие. Это вытекает из следующего утверждения.

Задача 6. Пусть η_X — векторное поле на Ω , соответствующее элементу $X \in \mathfrak{g}$. Тогда в качестве производящей функции φ_X для этого поля можно взять ограничение на Ω линейной функции $F \mapsto \langle F, X \rangle$ на $\mathfrak{g}^*$. Имеет место тождество

$$\{\varphi_X, \varphi_Y\} = \varphi_{[X, Y]}.$$

Указание. Первое утверждение вытекает из определения формы B_Ω и производящей функции, второе — из равенств (5).

Оказывается, что орбитами в K -представлении, по существу, исчерпываются все строго однородные симплектические многообразия, группой движений которых является связная группа Ли G . В самом деле, пусть M — такое многообразие. Обозначим, как и выше, через F_X производящую функцию векторного поля ξ_X на M , соответствующего элементу X из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G , и предположим, что выполняются соотношения (10).

Рассмотрим отображение $\varphi: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$, определенное формулой

$$\langle \varphi(m), X \rangle = F_X(m). \quad (11)$$

Задача 7. Докажите, что отображение φ перестановочно с действием группы G .

Указание. Так как G связна, достаточно доказать перестановочность φ с элементами вида $\exp Y$, $Y \in \mathfrak{g}$. Для этого в свою очередь достаточно проверить, что производное отображение φ_* переводит векторное поле ξ_Y на M в векторное поле η_Y на $\mathfrak{g}^*$. Это следует из (10).

Задача 8. Докажите, что отображение φ является локально гомеоморфным отображением M на одну из G -орбит в $\mathfrak{g}^*$.

Указание. Тот факт, что $\varphi(M)$ является G -орбитой в $\mathfrak{g}^*$, вытекает из задачи 7. Среди полей ξ_X , $X \in \mathfrak{g}$, в любой точке $m \in M$ есть $k = \dim M$ независимых полей $\xi_{X_1}, \dots, \xi_{X_k}$. Их производящие функции $F_{X_1}, \dots, F_{X_k}$ имеют линейно независимые дифференциалы в этой точке. Поэтому отображение φ локально является гомеоморфизмом.

Итак, наше многообразие M является «накрытием» некоторой орбиты Ω группы G в $\mathfrak{g}^*$. Если орбита Ω односвязна, то она не допускает связных нетривиальных накрытий. В противном случае, как известно, накрытий имеется столько же, сколько есть подгрупп у фундаментальной группы $\pi_1(\Omega)$. Каждое такое накрытие получается факторизацией универсального (односвязного) накрытия $\tilde{\Omega}$ по соответствующей подгруппе $\Gamma \subset \pi_1(\Omega)$ (ср. п. 6.1).

Полученный результат позволяет описать в терминах орбит все однородные симплектические многообразия, группой движений которых является связная группа Ли G .

Если M — такое многообразие, то его универсальное покрывающее многообразие $\tilde{M}$ будет однородным симплектическим многообразием относительно группы $\tilde{G}$ — односвязной покрывающей группы G .

Всякое гамильтоново поле на $\tilde{M}$ будет строго гамильтоновым. Однако производящие функции полей ξ_X , $X \in \mathfrak{g}$, вообще говоря, удовлетворяют соотношению (10) лишь с точностью до постоянного слагаемого.

Рассмотрим алгебру Ли (относительно скобки Пуассона), порожденную всеми производящими функциями всех полей ξ_X , $X \in \mathfrak{g}$. Очевидно, эта алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ является расширением $\mathfrak{g}$ с помощью $\mathbf{R}$. Пусть G_1 — соответствующая односвязная группа Ли.

Задача 9. Докажите, что многообразие $\tilde{M}$ является строго однородным гамильтоновым многообразием относительно группы G_1 .

Указание. Определить действие G_1 на M так, чтобы элементы нормального делителя, соответствующего идеалу $\mathbf{R} \subset \mathfrak{g}_1$, переходили в тождественное преобразование.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Всякое однородное симплектическое многообразие, группой движений которого является связная группа Ли G , локально изоморфно орбите в K -представлении самой группы G или ее центрального расширения с помощью $\mathbf{R}$.*

15.3. Конструкция неприводимого унитарного представления по орбите. Все известные до сих пор способы построения неприводимых представлений групп состоят в применении (быть может, многократном) трех основных операций:

- 1) ограничения на подгруппу,
- 2) продолжения с подгруппы,
- 3) индуцирования с подгруппы (а также различных обобщений этой операции; см. п. 13.4).

С помощью этих операций из некоторого запаса «простейших» представлений получаются все остальные. По-видимому, для групп Ли (как и для конечных групп) в качестве «простейших» достаточно рассматривать одномерные представления, хотя это утверждение не доказано.

Рассмотрим здесь лишь тот случай, когда неприводимое представление группы G получается из одномерного за один шаг с помощью операции индуцирования или ее обобщений — голоморфного индуцирования или представления в когомологиях.

Как мы видели в п. 13.4, такое представление T задается набором $(\mathfrak{n}, H, \rho, U)$, где $\mathfrak{n}$ — комплексная подалгебра в $\mathfrak{g}_c$ — комплексной оболочке алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G , H — замкнутая подгруппа в G , алгебра Ли которой имеет вид $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}$, ρ — одномерное голоморфное представление $\mathfrak{n}$, задаваемое формулой

$$\rho(X) = 2\pi i \langle F, X \rangle, \quad F \in \mathfrak{g}^*, \quad (1)$$

U — унитарное одномерное представление H , которое в окрестности единицы имеет вид

$$U(\exp X) = e^{\rho(X)}. \quad (2)$$

Будем говорить, что *представлению* T *соответствует орбита* Ω группы G в $\mathfrak{g}^*$, проходящая через точку F .

Изучим возможность обратного перехода от орбиты к представлению.

Группу G будем предполагать связной и односвязной. Пусть Ω — одна из орбит группы G в $\mathfrak{g}^*$. Выберем на Ω произвольную точку F и обозначим через G_F ее стабилизатор в G и через $\mathfrak{g}_F$ алгебру Ли группы G_F . Как мы видели в п. 15.1, $\mathfrak{g}_F$ совпадает с ядром кососимметрической билинейной формы

$$B_F(X, Y) = \langle F, [X, Y] \rangle. \quad (3)$$

Назовем подалгебру $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ подчиненной функционалу $F \in \mathfrak{g}^*$, если форма B_F тождественно равна нулю на $\mathfrak{n}$. Это определение имеет смысл также и для комплексных подалгебр в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, если условиться, что форма B_F продолжается на $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ по линейности.

Задача 1. Докажите, что подалгебра $\mathfrak{n}$ подчинена F тогда и только тогда, когда отображение

$$X \rightarrow \langle F, X \rangle$$

является одномерным представлением алгебры Ли $\mathfrak{n}$.

Из утверждения задачи и из равенства (1) следует, что подалгебра $\mathfrak{n}$, входящая в определение представления T , подчинена F .

Задача 2. Докажите, что коразмерность в $\mathfrak{g}$ (соответственно комплексная коразмерность в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$) вещественной подалгебры $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ (соответственно комплексной подалгебры $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$), подчиненной функционалу $F \in \mathfrak{g}^*$, не меньше половины размерности G -орбиты Ω в $\mathfrak{g}^*$, проходящей через точку F .

Указание. Коразмерность максимального изотропного подпространства B_F в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ равна

$$\frac{1}{2} \operatorname{rang} B_F = \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_F) = \frac{1}{2} \dim \Omega.$$

Оказывается, что во всех известных случаях, когда подалгебра $\mathfrak{n}$ связана с неприводимым представлением T группы G , оценка задачи 2 достигается, т. е.

$$\operatorname{codim} \mathfrak{n} = \frac{1}{2} \dim \Omega, \quad (4)$$

и, кроме этого, подалгебра $\mathfrak{n}$ обладает следующим свойством (так называемое *условие Пуанкаре* — ср. стр. 275):

$$F + \mathfrak{n}^{\perp} \subseteq \Omega, \quad (5)$$

где $\mathfrak{n}^{\perp}$ означает аннулятор $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}^*$ (т. е. совокупность таких функционалов $F \in \mathfrak{g}^*$, продолжение которых на $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ обращается в нуль на $\mathfrak{n}$).

Геометрически условие (5) означает, что орбита Ω содержит вместе с точкой F линейное подмногообразие $p^{-1}(pF)$, где p — естественная проекция $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{n}^{\perp}$.

Назовем подалгебру $\mathfrak{n}$, подчиненную F , *допустимой*, если она обладает свойствами (4) и (5).

Задача 3. Докажите, что если для функционала $F \in \Omega$ существует вещественная (соответственно комплексная) допустимая подалгебра, то этим свойством обладают и все другие точки Ω .

Указание. Если $\mathfrak{n}$ — допустимая подалгебра для F , то $\text{Ad } g \mathfrak{n}$ — допустимая подалгебра для $K(g)F$.

Таким образом, наличие допустимых подалгебр для $F \in \mathfrak{g}^*$ является свойством орбиты Ω , содержащей F . Допустимые подалгебры не всегда существуют.

Пусть $Sp(2n+2, \mathbb{R})$ — симплектическая группа (см. п. 5.1) и $G = St(n, \mathbb{R})$ — подгруппа в ней, сохраняющая ненулевой вектор в $\mathbb{R}^{2n+2}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{st}(n, \mathbb{R})$ этой группы может быть реализована матрицами вида

$$X(A, \xi, c) = \begin{pmatrix} 0 & \xi' & c \\ 0 & A & J\xi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $A \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$, $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$, $c \in \mathbb{R}$, а J имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$.

Положим

$$F_\lambda(X(A, \xi, c)) = \lambda c, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда при $\lambda \neq 0$ не существует допустимой подалгебры в $\mathfrak{g}_c$, подчиненной F_λ . В самом деле, форма B_{F_λ} имеет вид

$$B_{F_\lambda}(X(A_1, \xi_1, c_1), X(A_2, \xi_2, c_2)) = 2\lambda \xi_1' J \xi_2 \quad (7)$$

и, следовательно, подпространство $\mathfrak{g}_{F_\lambda}$ задается условием $\xi = 0$.

Задача 4. Докажите, что всякое максимальное изотропное подпространство $\mathfrak{n}$ для B_{F_λ} в $\mathfrak{g}_c$ состоит из элементов вида

$$X(A, \xi, c), \quad A \in \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C}), \quad \xi \in V, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

где V — некоторое n -мерное подпространство в $\mathbb{C}^{2n}$, изотропное относительно формы с матрицей J .

Указание. Воспользуйтесь формулой (7).

Так как группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ и ее алгебра Ли $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ действуют неприводимо в $\mathbb{C}^{2n}$, ни одно из подпространств (8) не является подалгеброй.

Группа $St(n, \mathbb{R})$, фигурирующая в приведенном примере, является группой общего типа. Она имеет разрешимый нормальный делитель $N(n)$, называемый группой Гейзенберга или специальной nilпотентной группой, и дополнительную полупростую подгруппу, изоморфную $Sp(2n, \mathbb{R})$. Интересно отметить, что для простых групп серии A_n и всех разрешимых групп допустимые комплексные подалгебры всегда существуют.

Простую конструкцию допустимой подалгебры предложила Мишель Вернь¹⁾. Она основана на следующих фактах.

Задача 5. Пусть $s: 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ — такая цепочка линейных пространств, что $\dim V_k = k$. Предположим, что в V задана билинейная кососимметрическая форма B и B_k означает ограничение B на V_k . Тогда

$W(s, B) = \sum_{k=1}^n \ker B_k$ — максимальное изотропное подпространство в V для формы B .

Указание. Докажите по индукции, что $W(s, B) \cap V_k = W(s_k, B_k)$.

Задача 6. Докажите, что если V — алгебра Ли, подпространства V_k , $k = 1, 2, \dots, n$, являются идеалами в V , а форма B имеет вид (3), то $W(s, B)$ — подалгебра в V .

Приведем без доказательства следующий результат М. Вернь.

Теорема 1. Пусть G — связная вещественная разрешимая группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Для каждого функционала $F \in \mathfrak{g}^*$ можно указать допустимую комплексную подалгебру $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$, обладающую свойствами

- 1) $\mathfrak{n} = W(s, B_F)$ для некоторой цепочки s идеалов в $\mathfrak{g}$;
- 2) $\mathfrak{n}$ инвариантна относительно стабилизатора G_F точки F ;
- 3) $\mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$;
- 4) если τ — нильпотентный радикал $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{n} \cap \tau_\mathbb{C}$ — допустимая подалгебра, подчиненная функционалу $f = F|_\tau$;
- 5) если G — экспоненциальная группа, то $\mathfrak{n}$ является комплексной оболочкой некоторой вещественной допустимой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, имеющей вид $\mathfrak{h} = W(s_0, B_F)$, где s_0 — некоторая цепочка подалгебр в $\mathfrak{g}$.

Вернемся к задаче построения представления по орбите.

Будем предполагать, что для элемента F орбиты Ω существует подалгебра $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$, обладающая свойствами 2) и 3) из теоремы 1. Допустим также, что существуют такие замкнутые подгруппы H и M в G , что $G_F \subset H \subset M$, и имеют место соотношения

$$\mathfrak{n} \cap \bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{h}_\mathbb{C}, \quad \mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}_\mathbb{C}, \quad H = G_F H^0, \quad (9)$$

где $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ — алгебры Ли групп H и M соответственно, а H^0 — связная компонента единицы в группе H .

Для построения представления T согласно п. 13.4 мы должны иметь представление ρ алгебры $\mathfrak{n}$ и представление U группы H , связанные тождеством

$$U(\exp X) = e^{\rho(X)}, \quad X \in \mathfrak{h}. \quad (10)$$

В качестве ρ возьмем одномерное представление, задаваемое равенством (1). Тогда формула (10) определяет U в некоторой

¹⁾ С. г. Acad. Sci. Paris 270, 173—175, 704—707.

окрестности единицы группы H . Возникает вопрос о существовании и единственности продолжения U на всю группу H . Оказывается, решение этого вопроса зависит от топологических свойств орбиты Ω . Чтобы сформулировать точный результат, введем некоторые обозначения. Назовем *слоем, проходящим через исходную точку* F , совокупность S функционалов вида

$$F_1 = K(g)F, \quad g \in H.$$

Задача 7. Докажите, что для любых $g_1, g_2 \in G$ множества $K(g_1)S$ и $K(g_2)S$ либо не пересекаются, либо совпадают.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $gHg^{-1} = H$ для $g \in G_F$.

Мы получаем, таким образом, разбиение орбиты Ω на слои вида $K(g)S$. Обозначим через Y соответствующее фактор-пространство и через Γ — фундаментальную группу $\pi_1(Y)$.

Назовем орбиту Ω группы G в $\mathfrak{g}^*$ *целочисленной*, если форма B_Ω принадлежит целочисленному классу когомологий. (Это значит, что интеграл формы B_Ω по любому двумерному циклу в Ω равен целому числу.)

Теорема 2. Для того чтобы локальное представление, заданное равенством (10), продолжалось до одномерного унитарного представления группы H , необходимо, чтобы орбита Ω , проходящая через точку $F \in \mathfrak{g}^*$, была целочисленной.

Множество возможных продолжений, если оно не пусто, параметризуется характеристиками введенной выше группы Γ .

Доказательство. Используем хорошо известную связь между топологическими свойствами группы Ли G , ее замкнутой подгруппы K и однородного многообразия $X = G/K$. Если группа G связна и односвязна, то имеют место изоморфизмы

$$H^2(X, \mathbf{R}) \approx H^1(K^0, \mathbf{R}), \quad (11)$$

$$\pi_1(X) \approx \pi_0(K) = K/K^0. \quad (12)$$

На языке дифференциальных форм изоморфизм (11) можно описать так. Пусть p — естественная проекция G на X , и B — дифференциальная форма на X , принадлежащая классу $h \in H^2(X, \mathbf{R})$. Тогда форма p^*B на G имеет вид $p^*B = d\sigma$ (так как для односвязной группы Ли G всегда $H^2(G, \mathbf{R}) = 0$); 1-форма σ на G определена этим условием с точностью до слагаемого вида $d\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f} \in C^\infty(G)$. Можно проверить, что ограничение σ_0 формы σ на подгруппу K^0 является замкнутой формой. Класс когомологий этого ограничения и есть элемент группы $H^1(K^0, \mathbf{R})$, соответствующий исходному классу h .

Задача 8. Докажите, что в случае, когда $K = G_F$, $X = \Omega$, $B = B_\Omega$, в качестве σ_0 можно взять левоинвариантную 1-форму на G_F , соответствующую линейному функционалу $F|_{\mathfrak{g}_F}$.

Указание. Воспользуйтесь формулой (7) из п. 15.1.

Первое утверждение теоремы следует теперь из того, что изоморфизм (11) сохраняет целочисленность классов когомологий. В самом деле, утверждение задачи 8 показывает, что если локальное представление (10) допускает продолжение f на подгруппу G_F^0 , то форма σ_0 имеет вид

$$\sigma_0 = \frac{1}{2\pi i} d \ln f. \quad (13)$$

Поэтому интеграл формы σ_0 по любому одномерному циклу в G_F^0 равен целому числу (а именно, деленному на 2π приращению аргумента f при обходе по этому циклу). Обратно, если форма σ_0 принадлежит целочисленному классу, то функция f , определенная на G_F^0 равенством (13) и условием $f(e) = 1$, однозначна и является продолжением локального представления (10) на подгруппу G_F^0 .

Докажем второе утверждение теоремы. Так как представление связной группы Ли однозначно определяется соответствующим локальным представлением, любые два продолжения совпадают на H^0 . Следовательно, все продолжения получаются из одного умножением на характер группы H/H^0 . Введенное нами выше пространство «слоев» Y является однородным многообразием с группой движений G и стационарной подгруппой H . Изоморфизм (12) для случая $K = H$, $X = Y$ дает нам равенство $\pi_1(Y) = \pi_0(H) = H/H^0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если введенное выше множество $S = K(H)F$ односвязно, то теорема 2 допускает следующие полезные уточнения.

1. Целочисленность орбиты не только необходима, но и достаточна для существования продолжения локального представления (10) до одномерного представления H .

2. Группа Γ , фигурирующая во второй части теоремы, изоморфна фундаментальной группе орбиты Ω .

З а м е ч а н и е 2. Существует также дифференциально-геометрическое доказательство теоремы 2, основанное на истолковании формы B_Ω как формы кривизны для некоторой связности в линейном расслоении над Ω . Это доказательство можно найти в работе Б. Костанта [104] (см. также п. 15.4).

Нам остается исследовать, как зависит построенное нами представление от выбора точки F на орбите Ω и допустимой подалгебры $\mathfrak{n}$, подчиненной F .

За д а ч а 9. Докажите, что представления T_i , построенные по функционалам F_i , подалгебрам $\mathfrak{n}_i$, подгруппам H_i и одномерным представлениям ρ_i и U_i , $i = 1, 2$, эквивалентны, если

$$F_1 = K(g) F_2, \quad \mathfrak{n} = \text{Ad } g \mathfrak{n}_2, \quad H_1 = g H_2 g^{-1}, \\ \rho_1(X) = \rho_2(\text{Ad } g X), \quad U_1(h) = U_2(g^{-1} h g)$$

для некоторого $g \in G$.

Указание. Рассмотрите внутренний автоморфизм группы G , соответствующий элементу g .

Итак, выбор точки F не играет существенной роли.

По-видимому, выбор допустимой подалгебры также не влияет на класс эквивалентности получаемого представления. Это утверждение в полной общности не доказано, но и не опровергается известными в настоящее время примерами. В следующем пункте мы приведем «физические» соображения в его пользу¹⁾.

Не доказано также, что описанная конструкция всегда приводит к неприводимому представлению (хотя противоречащих примеров также пока нет).

Для специальных классов групп известны более точные результаты.

Теорема 3 (Л. Ауслендер — Б. Констант). Пусть G — связная односвязная разрешимая группа Ли. Тогда:

1. Группа G принадлежит типу I тогда и только тогда, когда пространство $\mathcal{O}(G)$ полуотделимо, и все формы $B_{\bar{\alpha}}$ точны.

2. Если G — типа I, то все неприводимые представления G получаются описанной выше конструкцией из орбит группы G в $\mathfrak{g}^*$. Каждой орбите Ω соответствует семейство неприводимых представлений, параметризуемое характерами группы $\pi_1(\Omega)$.

3. Представления, соответствующие разным орбитам или разным характерам фундаментальной группы орбиты, попарно не эквивалентны.

Отметим, что если группа G экспоненциальна, то все G -орбиты в $\mathfrak{g}^*$ гомеоморфны евклидову пространству. Поэтому из теоремы 3 вытекает, в частности, что экспоненциальные группы принадлежат типу I и что для этих групп имеется взаимно однозначное соответствие между множествами $\hat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$.

Если группа G компактна, связна и односвязна, то G -орбиты в $\mathfrak{g}^*$ односвязны. Условие целочисленности выделяет в $\mathcal{O}(G)$ счетное множество орбит. Имеет место

Теорема 4 (Борель — Вейль — Ботт). Все неприводимые представления компактной связной односвязной группы Ли G соответствуют целочисленным G -орбитам максимальной размерности в $\mathfrak{g}^{*2}$.

Отметим также, что представления основной и вырожденных серий некомпактных полупростых групп соответствуют целочисленным орбитам этих групп в K -представлении. Вопрос о неприводимости этих представлений до конца не решен.

¹⁾ Попытка довести его до уровня теоремы приводит к глубокому обобщению понятия преобразования Фурье. См., например: Л. Хёрмандер, Интеграл Фурье, I, Сб. переводов: «Математика», 16, 1 (1972).

²⁾ Мы приводим теорему в удобной для нас формулировке. Подробнее об этом см. в [99], [101].

Очень интересным является вопрос о связи топологий в множествах $\hat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$. Он решен лишь частично даже в случае экспоненциальных групп (а именно, известно, что отображение из $\mathcal{O}(G)$ в $\hat{G}$ непрерывно).

15.4. Метод орбит и квантование гамильтоновых механических систем. Основным объектом классической гамильтоновой механики является фазовое пространство, — гладкое симплектическое многообразие M . Обычно оно строится как кокасательное расслоение над конфигурационным пространством N (см. 15.2), хотя для гамильтонова формализма это не обязательно.

Физические величины — это вещественные функции на M , состояние системы — точка на M . Изменение системы со временем описывается строго гамильтоновым векторным полем, производящая функция которого называется *энергией системы* и обозначается H . Таким образом уравнение, описывающее изменение со временем величины F , имеет вид

$$\dot{F} = \{H, F\}. \quad (1)$$

Группа G является группой симметрии данной системы, если она действует на M каноническими преобразованиями.

В квантовой механике роль фазового пространства играет проективное пространство $P(V)$, где V — некоторое гильбертово пространство. Физические величины — это самосопряженные операторы в V . Значение величины A в состоянии, определяемом единичным вектором $\xi \in V$ — это случайная величина с функцией распределения $p(t) = (E_t \xi, \xi)$, где E_t — спектральная проекционная мера для оператора A . Таким образом, в состоянии, задаваемом вектором ξ , определенное значение a имеют только те величины A , для которых ξ является собственным вектором с собственным значением a .

Изменение системы со временем задается группой унитарных операторов в V , которая имеет вид

$$U(t) = e^{\frac{ith}{2\pi} H},$$

где h — постоянная Планка, а H — некоторый самосопряженный оператор, называемый оператором энергии. Изменение величины F со временем описывается уравнением

$$\dot{F} = \frac{ih}{2\pi} [H, F]. \quad (2)$$

Группа G является группой симметрии системы, если она действует в V унитарными преобразованиями.

Квантованием называют процесс построения по заданной классической системе соответствующей ей квантовой системы.

К сожалению, слово «соответствующей» не имеет здесь вполне определенного смысла. Так как классическая механика является в некотором смысле идеализацией квантовой механики, — она получается предельным переходом при $\hbar \rightarrow 0$, — то однозначной процедуры квантования, по-видимому, и не должно быть. Тем не менее, в «достаточно хороших» случаях (например, в нужной нам групповой ситуации) можно ожидать, что окончательный результат не зависит от выбранного способа квантования.

Большинство существующих способов квантования укладывается в следующую схему. Среди физических величин, связанных с системой, выделяется некоторая совокупность *первичных величин*, образующих алгебру Ли относительно скобок Пуассона. Предполагается, что при переходе к квантовой механике коммутационные соотношения между первичными величинами сохраняются в следующем смысле. Пусть $\hbar$ — постоянная Планка и $\hat{F}$ — квантовомеханический оператор, соответствующий первичной классической величине F . Тогда должно выполняться соотношение

$$\{\widehat{F_1}, \widehat{F_2}\} = \frac{i\hbar}{2\hbar} [\hat{F}_1, \hat{F}_2]. \quad (3)$$

Это значит, что соответствие $F \mapsto \frac{2\pi}{i\hbar} \hat{F}$ является операторным представлением алгебры Ли первичных величин. Обычно в число первичных величин включают константы и требуют, чтобы выполнялось соотношение

$$\hat{1} = 1 \quad (\text{единичный оператор}). \quad (4)$$

Для систем типа кокасательного пучка в качестве первичных величин берут совокупность линейных функций от координат $p_1, \dots, p_k$ и произвольных функций от $q_1, \dots, q_k$.

Остальные величины записывают в виде функций от первичных. Тогда их квантовые аналоги оказываются функциями от операторных (некоммутирующих) переменных. Иногда этим выражениям удается приписать определенный смысл. Тогда говорят, что соответствующую величину удастся проквантовать.

Для построения представления алгебры Ли первичных величин естественно воспользоваться тем фактом, что соответствие $F \mapsto \xi_F$ (см. п. 15.3) является представлением алгебры Ли $C^\infty(M)$ всех гладких функций на M (относительно скобки Пуассона). Поэтому, полагая $\hat{F} = \frac{i\hbar}{2\pi} \xi_F$, мы удовлетворим соотношениям (3). Чтобы выполнялось и соотношение (4), подправим определение $\hat{F}$, полагая

$$\hat{F} = \frac{i\hbar}{2\pi} \xi_F + F + \alpha(\xi_F), \quad (5)$$

где α — некоторая 1-форма. Теперь выполнено (4), но соотношение (3) может нарушиться.

Задача 1. Для того чтобы операторы $\hat{F}$, определенные формулой (5), удовлетворяли соотношениям (3), необходимо и достаточно равенство

$$d\alpha = \omega. \quad (6)$$

Указание. Используйте равенство

$$2d\alpha(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\alpha(\xi_2) - \xi_2\alpha(\xi_1) - \alpha([\xi_1, \xi_2]),$$

вытекающее из формулы (4) в п. 5.3.

Отметим, что в случае кокасательного пучка в качестве α можно взять форму $\sum_{j=1}^k p_j dq_j$. Формула (5) в этом случае приобретает вид:

$$\hat{F} = \frac{i\hbar}{2\pi} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) + F - \sum_{j=1}^k p_j \frac{\partial F}{\partial p_j}. \quad (5')$$

В частности,

$$\hat{p}_j = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad \hat{q}_j = -\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial}{\partial p_j} + q_j. \quad (7)$$

Оказывается, что в случае неточной формы ω обобщение описанной конструкции естественно приводит к некоторому одномерному расслоению E над M . Операторы $\hat{F}$ действуют в пространстве $\Gamma(E)$ сечений этого расслоения.

Для построения E введем покрытие M достаточно мелкими открытыми множествами U_j так, что все эти множества и их попарные пересечения связны и односвязны.

Так как ω — замкнутая форма, то в каждой окрестности U_j она имеет вид $d\alpha_j$, где α_j — некоторая 1-форма в U_j . На пересечении $U_j \cap U_k$ определены две 1-формы: α_j и α_k . Так как $d\alpha_j = \omega = d\alpha_k$, разность $\alpha_j - \alpha_k$ замкнута и, следовательно, имеет вид

$$\alpha_j - \alpha_k = da_{jk},$$

где a_{jk} — некоторая функция в $U_j \cap U_k$.

Положим

$$g_{jk} = e^{2\pi i a_{jk}/\hbar}.$$

Тогда операторы

$$\hat{F}_j = \frac{i\hbar}{2\pi} \xi_j + F + \alpha_j(\xi_j)$$

на пересечении $U_j \cap U_k$ обладают свойством

$$g_{jk} \circ \hat{F}_k = \hat{F}_j \circ g_{jk}. \quad (8)$$

Предположим, что функции g_{jk} удовлетворяют соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} g_{jj} &\equiv 1 \quad \text{в } U_j, \quad g_{jk}g_{kl} \equiv 1 \quad \text{в } U_j \cap U_k, \\ g_{jk}g_{kl}g_{lj} &\equiv 1 \quad \text{в } U_j \cap U_k \cap U_l. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Тогда их можно взять в качестве функций перехода для построения одномерного расслоения E над M (см. п. 5.4). Пространство этого расслоения получается склеиванием множеств $\tilde{U}_j = U_j \times \mathbb{C}$ по отношению эквивалентности:

$$\tilde{U}_j \ni (x_j, z_j) \sim (x_k, z_k) \in \tilde{U}_k \Leftrightarrow x_j = x_k, \quad z_j = g_{jk}(x_k) z_k.$$

Напомним, что сечение расслоения E задается набором функций φ_j в U_j , обладающих свойством

$$\varphi_j(x) = g_{jk}(x) \varphi_k(x) \quad \text{для } x \in U_j \cap U_k. \quad (10)$$

Совокупность гладких сечений E образует линейное пространство $\Gamma(E)$, а операторы

$$\hat{F}_E: \{\varphi_j\} \rightarrow \{\tilde{F}_j \varphi_j\} \quad (11)$$

в силу (8) задают представление алгебры Ли $C^\infty(M)$ в $\Gamma(E)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда выполняются условия (9) и сколько различных представлений можно построить описанным способом, исходя из данной формы ω .

Теорема 1. *Для того чтобы форме ω отвечало хотя бы одно расслоение E , необходимо и достаточно, чтобы интеграл формы ω по любому двумерному циклу был целым кратным числа $\hbar$.*

(Это утверждение является математическим выражением условий целочисленности, возникающих в квантовой механике.)

Доказательство. Рассмотрим функцию $c_{jkl} = a_{jk} + a_{kl} + a_{lj}$, определенную в $U_j \cap U_k \cap U_l$. Из определения функций a_{jk} вытекает, что $dc_{jkl} = 0$, т. е. c_{jkl} — постоянная величина. Так как все a_{jk} определены лишь с точностью до постоянных слагаемых, величины c_{jkl} определены с точностью до слагаемого вида $c_{jk} + c_{kl} + c_{lj}$. Мы получили так называемый двумерный коцикл Чеха на многообразии M (относительно покрытия $\{U_j\}$), определенный с точностью до коцикла, когомологичного нулю. Тем самым задан некоторый элемент группы когомологий $H^2(M, \mathbb{C})$. В алгебраической топологии доказывается, что это — тот самый элемент, который соответствует форме ω . Поэтому условие теоремы равносильно требованию, чтобы все величины c_{jkl} можно было сделать кратным $\hbar$. А это в свою очередь эквивалентно соотношениям (9). Теорема доказана.

Посмотрим теперь, какой произвол имеется в построении представлений в пространстве сечений $\Gamma(E)$ расслоения E , если уже известно, что такое расслоение существует.

Задача 2. Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных представлений и элементами группы когомологий $H^1(M, \mathbf{C}^*)$.

Указание. Наше построение зависело от выбора форм α_j и от выбора функций a_{jk} . Вместо форм α_j можно было взять формы $\alpha_j + \beta_j$, где β_j — любые замкнутые формы. Пусть $\beta_j = db_j$ и $h_j = e^{2\pi i b_j / h}$. При переходе от α_j к $\alpha_j + \beta_j$ функции перехода g_{jk} меняются на $g_{jk} h_j h_k^{-1}$. Это приводит к замене E на эквивалентное расслоение $\tilde{E}$, а представления $\hat{F}_E$ — на эквивалентное представление $\hat{F}_{\tilde{E}} = h \circ \hat{F}_E \circ h^{-1}$. (Изоморфизм $\Gamma(E)$ и $\Gamma(\tilde{E})$ устанавливается отображением $h: \{\varphi_j\} \rightarrow \{h_j \varphi_j\}$.) Произвол в выборе a_{jk} приводит к замене функций g_{jk} на $g_{jk} \cdot z_{jk}$, где z_{jk} — некоторые комплексные числа, отличные от нуля. Эти числа удовлетворяют условию $z_{jk} z_{kl} z_{lj} = 1$, вытекающему из (9). Кроме того, наборы $\{z_{jk}\}$ и $\{z'_{jk}\}$ определяют эквивалентные представления, если $z'_{jk} = z_{jk} \omega_j \omega_k^{-1}$.

Отметим, что группа $H^1(M, \mathbf{C}^*)$ изоморфна группе всех мультипликативных отображений фундаментальной группы $\pi_1(M)$ в группу $\mathbf{C}^*$ комплексных чисел, отличных от нуля.

В частности, если M односвязно, эта группа тривиальна.

До сих пор мы ничего не говорили о пространстве, в котором действуют операторы $\hat{F}$. Это пространство должно быть гильбертовым, а операторы $\hat{F}$ для вещественных величин F должны быть самосопряженными. Кроме того, нас интересуют элементарные системы, для которых семейство операторов $\hat{F}$ неприводимо. Пространство $\Gamma(E)$ всех сечений расслоения E слишком велико для того, чтобы получить неприводимое представление. Подсчет размерностей показывает, что неприводимые представления должны действовать в пространстве функций (или сечений расслоения) на многообразии вдвое меньшей размерности по сравнению с M .

В случае, когда $M = T^*N$, стандартное квантование использует пространство $V = L^2(N)$, в котором функции на M , зависящие только от проекции на N (т. е. функции от координат q_j), действуют обычным умножением, а функции на M , линейные по координатам p_j , действуют как векторные поля (т. е. дифференциальные операторы первого порядка).

Известно, что локально всякая замкнутая невырожденная 2-форма ω может быть в подходящих координатах записана в виде $\omega = \sum_j dp_j \wedge dq_j$. Однако в целом «разделение перемен-

ных» на « p » и « q » может не существовать. С геометрической точки зрения такое разделение переменных состоит в указании так называемого *лагранжева распределения*, т. е. в выделении для каждой точки $x \in M$ подпространства половинной размерности $L_x \subset T_x M$, на котором форма ω обращается в нуль. С аналитической точки зрения это означает выделение в каждой окрестности $U \subset M$ некоторой максимальной коммутативной подалгебры $P_0(U)$ в алгебре Ли $P(U)$ всех гладких функций на U (относительно скобки Пуассона). Связь между этими двумя подходами дает теорема Фробениуса. Она утверждает, что каждое лагранжево распределение, удовлетворяющее некоторым условиям интегрируемости, в подходящих локальных координатах имеет вид $x \mapsto \left\{ \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_k} \right\}$. Это значит, что векторы из L_x касательны к поверхностям уровня любой функции от координат $q_1, \dots, q_k$.

Итак, в общем случае заменой глобального разделения переменных на p_i и q_i служит задание некоторого интегрируемого лагранжева распределения L на M . Если такое распределение задано, мы можем в каждой окрестности $U \subset M$ рассмотреть алгебру $P_0(U)$ функций, аннулируемых векторами из L . Когда окрестность U достаточно мала, $P_0(U)$ будет максимальной коммутативной подалгеброй в $P(U)$. Обозначим $\Gamma_0(E, U)$ пространство тех сечений φ расслоения E над U , для которых

$$\hat{F}_E \varphi = F \varphi \quad \text{при} \quad F \in P_0(U), \quad (12)$$

и через $\Gamma_0(E)$ пространство тех сечений E над M , ограничения которых на любую окрестность U принадлежат $\Gamma_0(E, U)$.

Для читателя, знакомого с понятием аффинной связности в расслоении, заметим, что $\Gamma_0(E)$ может быть определено как пространство сечений, аннулируемых ковариантным дифференцированием вдоль любого вектора из L . В самом деле, оператор $\hat{F} - F$ обладает всеми свойствами ковариантной производной вдоль поля ξ_F .

Предположим, что для всех первичных величин F операторы $\hat{F}_E$ переводят пространство $\Gamma_0(E)$ в себя (это равносильно условию $\{F, P_0(U)\} \subset P_0(U)$ для любой окрестности U) и для вещественных F самосопряжены относительно некоторого скалярного произведения в $\Gamma_0(E)$.

Тогда в качестве V можно взять пополнение $\Gamma_0(E)$ по этому скалярному произведению.

Важное обобщение описанной конструкции получается, если «выйти в комплексную область» и задавать лагранжево распределение L так, что L_x — комплексное подпространство половинной размерности в комплексной оболочке пространства $T_x M$. Оказывается, что каждое интегрируемое комплексное лагранжево

распределение при дополнительном условии, что $L + \bar{L}$ — также интегрируемое распределение, локально имеет следующий вид. Существует такая локальная система координат

$$q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_r, z_1, \dots, z_{k-r},$$

где p_j, q_j — вещественны, а z_j — комплексны, что форма ω имеет вид

$$\omega = \sum_{j=1}^r dp_j \wedge dq_j + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{k-r} dz_j \wedge d\bar{z}_j,$$

а L порождается векторами

$$\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_r}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{k-r}}.$$

Алгебра $P_0(U)$ состоит в этом случае из функций от $q_1, \dots, q_r, z_1, \dots, z_{k-r}$, аналитических по переменным z_j . Пространство $\Gamma_0(E)$ можно интерпретировать как пространство сечений, постоянных вдоль некоторых вещественных направлений и аналитических вдоль некоторых комплексных направлений.

Возможно дальнейшее обобщение этой конструкции, связанное с переходом от $\Gamma_0(E)$ к пространствам высших когомологий пучка ростков сечений из $\Gamma_0(E)$. См. по этому поводу [101], [115], [134], [240], [241].

Напомним теперь, что для каждой формы ω на M , удовлетворяющей условиям целочисленности из теоремы 1, мы построили целое семейство представлений $\hat{F}_E$, нумеруемое элементами группы $H^1(M, \mathbb{C}^*)$. Если набор $\{\varphi_j\}$ задает сечение расслоения E , то набор $\{|\varphi_j|^2\}$ задает сечение некоторого другого расслоения E' над M (с переходными функциями $g'_{jk} = |g_{jk}|^2$).

Обычно скалярное произведение вводится в $\Gamma_0(E)$ так, что скалярный квадрат сечения $\{\varphi_j\}$ зависит только от сечения $\{|\varphi_j|^2\}$ расслоения E' .

Поэтому если искомое скалярное произведение существует для $\hat{F}_E$, то оно существует и для всех представлений, получаемых из $\hat{F}_E$ действием подгруппы $H^1(M, \mathbb{T})$. Есть основания полагать (для многих частных случаев это доказано), что на остальных расслоениях требуемого скалярного произведения не существует. Считая это доказанным, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Классическая система (M, ω) допускает квантование описанного типа, если и только если форма ω имеет интегралы, кратные $\hbar$, по любому двумерному циклу в M . Все такие квантования нумеруются элементами группы $H^1(M, \mathbb{T})$.*

Отметим, что группа $H^1(M, \mathbf{T})$ совпадает с группой характеров (т. е. мультипликативных отображений в окружность $\mathbf{T}$) фундаментальной группы $\pi_1(M)$ многообразия M .

Пусть G — группа Ли. Посмотрим, какие представления этой группы можно получить, исходя из G -элементарных классических систем, перечисленных в п. 15.2, с помощью квантования. Нас будут интересовать только такие квантования, для которых в число первичных величин входят производящие функции векторных полей, отвечающих элементам алгебры Ли $\mathfrak{g}$. При этом условии мы можем построить представление G по формуле

$$T(\exp X) = e^{-2\pi i \hat{X}/\hbar},$$

где $\exp$ — каноническое отображение алгебры Ли в группу (экспоненциал). Соотношение (3) и самосопряженность операторов $\hat{X}$ обеспечивают выполнение условия

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$$

и унитарность операторов $T(g)$ в некоторой окрестности единицы. Это «локальное» представление однозначно продолжается до представления группы G , если G односвязна. В противном случае может возникнуть многозначное представление, которое будет однозначным на односвязной накрывающей $\tilde{G}$ группы G .

Из сказанного в п. 15.2 вытекает, что все нужные нам классические системы — это целочисленные орбиты Ω в $\mathfrak{g}^*$.

Пусть Ω — такая орбита и E — расслоение над Ω . Чтобы построить пространство $\Gamma_0(E)$, инвариантное относительно G , мы должны выбрать G -инвариантное интегрируемое лагранжево распределение L на Ω .

Такие распределения допускают простое описание.

Задача 3. Пусть $\phi \in \Omega$ и $\dim \Omega = 2k$. Существует взаимно однозначное соответствие между вещественными (соответственно комплексными) интегрируемыми G -инвариантными лагранжевыми распределениями на Ω и подалгебрами коразмерности k в $\mathfrak{g}$ (соответственно в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$), подчиненными ϕ .

Указание. Искомое соответствие между распределениями L и подалгебрами $\mathfrak{h}$ устанавливается формулой

$$L_{\phi} = \rho(\mathfrak{h}),$$

где ρ — естественная проекция $\mathfrak{g}$ (соответственно $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$) на $T_{\phi}\Omega \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\phi}$ (соответственно на комплексную оболочку $T_{\phi}\Omega$), возникающая из действия G на Ω . Лагранжевость L равносильна подчиненности $\mathfrak{h}$ функционалу ϕ , а интегрируемость L равносильна утверждению, что $\mathfrak{h}$ — подалгебра.

Читатель уже заметил, по-видимому, аналогию описываемой здесь операции квантования и операции построения представления по орбите в предыдущем пункте.

Механическая интерпретация, описанная здесь, позволяет придать «физический смысл» конструкции представления по орбите, описанной в п. 15.3. Кроме того, она позволяет исполь-

зовать в теории представлений другие методы квантовой механики. Очень интересно было бы, например, получить прямое доказательство универсальной формы (Ф) для характеров неприводимых представлений (см. ниже п. 15.6) с помощью аппарата фейнмановских интегралов. В простейших примерах такое доказательство получено.

15.5. Функториальные свойства соответствия между орбитами и представлениями. Пусть G как обычно, — связная односвязная группа Ли и H — ее замкнутая подгруппа. Следующие две задачи играют большую роль в теории представлений.

а) Дано неприводимое унитарное представление T группы G . Указать разложение на неприводимые компоненты его ограничения на подгруппу H .

б) Дано неприводимое унитарное представление U подгруппы H . Указать разложение на неприводимые компоненты индуцированного представления $T = \text{Ind}(G, H, U)$.

Эти две задачи в некотором смысле двойственны друг другу. (Для конечных и компактных групп эта двойственность выражается теоремой Фробениуса — см. п. 13.5.) Отметим также, что частным случаем первой задачи является задача о разложении на неприводимые компоненты тензорного произведения двух неприводимых представлений группы G , а частным случаем второй — задача о разложении на неприводимые компоненты представлений, реализующихся в сечениях G -расслоений над однородными пространствами (в частности, представлений в функциях, векторных полях, дифференциальных формах и т. п.).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и $\mathfrak{h}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе H . Каждый функционал $F \in \mathfrak{g}^*$ можно ограничить на $\mathfrak{h}$. Мы получим, таким образом, каноническую проекцию $p: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$.

Естественно ожидать, что в тех случаях, когда между множествами $\hat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$ имеется достаточно хорошее соответствие, интересующие нас операции ограничения на подгруппу и индуцирования с подгруппы связаны с проекцией $p: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$. Точное описание этой связи известно пока лишь для нильпотентных групп. В этом случае имеет место

Теорема 1. Пусть G — связная односвязная нильпотентная группа Ли и H — ее связная замкнутая подгруппа. Тогда конструкция, описанная в п. 15.3, устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\hat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$, $\hat{H}$ и $\mathcal{O}(H)$.

Если неприводимое унитарное представление T группы G соответствует орбите $\Omega \in \mathcal{O}(G)$, то его ограничение на H разлагается в прямой интеграл неприводимых унитарных представлений подгруппы H , соответствующих тем орбитам $\omega \in \mathcal{O}(H)$, которые принадлежат $p(\Omega)$.

Если неприводимое унитарное представление U подгруппы H соответствует орбите $\omega \in \mathcal{O}(H)$, то индуцированное представление $T(G, H, U)$ разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений G , соответствующих тем орбитам $\Omega \in \mathcal{O}(G)$, которые имеют непустое пересечение с $p^{-1}(\omega)$.

Задача 1. Если подгруппа H является нормальным делителем в G , то последнее условие равносильно включению $\Omega \subset p^{-1}(\omega)$.

Указание. Множество $p^{-1}(\omega)$ в этом случае G -инвариантно.

Пусть представление U одномерно. Тогда соответствующая ему орбита ω состоит из одной точки $f \in \mathfrak{h}^*$. Из теоремы 1, примененной к этому специальному случаю, вытекает

Следствие¹⁾. Для того чтобы мономиальное представление $T(G, H, U)$ было неприводимо, необходимо и достаточно, чтобы множество $p^{-1}(f)$ содержалось целиком в одной G -орбите Ω .

Таким образом, для подалгебры $\mathfrak{h}$ и любого функционала $F \in p^{-1}(f)$ выполняется условие (5) из п. 15.3.

Наметим схему доказательства теоремы 1. (С деталями читатель может ознакомиться в [96].) Прежде всего, достаточно доказать теорему для случая, когда группа H имеет в G ко-размерность 1. Общий случай сводится к этому рассмотрением цепочки подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G,$$

размерности которых возрастают на единицу.

Далее, если $\dim G - \dim H = 1$, то H — нормальный делитель в G и группа G является полупрямым произведением H и некоторой подгруппы S , изоморфной $\mathbf{R}$. Мы обозначим через X_0 базисный элемент алгебры Ли $\mathfrak{s}$ группы S и через F_0 функционал из $\mathfrak{h}^\perp$, равный 1 на X_0 .

Задача 2. Пусть Ω — орбита группы G в $\mathfrak{g}^*$ и p — проекция $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{h}^*$. Тогда возможны два случая.

1) Множество $\omega = p(\Omega)$ является H -орбитой в $\mathfrak{h}^*$; прообраз $p^{-1}(\omega)$ является объединением семейства G -орбит $\Omega_t = \Omega + tF_0$, $t \in \mathbf{R}$;

2) множество $p(\Omega)$ является объединением семейства ω_t , $t \in \mathbf{R}$, H -орбит в $\mathfrak{h}^*$; прообразы $p^{-1}(\omega_t)$ целиком содержатся в Ω ; группа S действует в $\mathfrak{h}^*$ так, что $K(\exp \tau X_0) \omega_t = \omega_{t+\tau}$.

Указание. Докажите, что пересечение орбиты Ω с любой прямой вида $F + \mathfrak{h}^\perp$ либо состоит из одной точки, либо содержит эту прямую целиком. Это следует из того, что действие G в $\mathfrak{g}^*$ в канонических координатах записывается полиномиальными функциями.

Предположим теперь, что теорема 1 доказана для всех групп размерности $< n$. Пусть $\dim G = n$ и, следовательно, $\dim H = n - 1$.

¹⁾ Как показано в [120], это верно для всех экспоненциальных групп. Аналог теоремы 1 в этом случае получен в [178].

Задача 3. Пусть T — неприводимое представление группы G . Возможны два случая.

1. Ограничение U представления T на H является неприводимым представлением H . Представление $\text{Ind}(G, H, U)$ разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений T_t , $t \in \mathbb{R}$, каждое из которых совпадает с U на H .

2. Ограничение T на H распадается в прямой интеграл неприводимых представлений U_t , $t \in \mathbb{R}$, подгруппы H . Каждое из представлений $\text{Ind}(G, H, U_t)$ эквивалентно T . Группа S действует на U_t по формуле

$$U_t(\exp X_0 h \exp(-\tau X_0)) = U_{t+\tau}(h).$$

Указание. Воспользуйтесь индукцией и результатами п. 13.3.

Наконец, используя явный вид соответствия между орбитами и представлениями (с помощью конструкции п. 15.3), можно установить, что два случая, фигурирующие в условии задачи 2, в точности соответствуют двум случаям задачи 3. Это завершает доказательство.

Очень интересной задачей является выяснение фундаментальных свойств соответствия между орбитами и представлениями для других классов групп. В первую очередь естественно поставить этот вопрос для тех групп, для которых соответствие между $\hat{G}$ и $\mathcal{O}(G)$ известно (см. теоремы 3 и 4 из п. 15.3); интересный вариант теоремы 1 в этом случае получен в [242]. Как показывают простые примеры, теорема 1 при буквальном ее перенесении на другие группы перестает быть верной. Кажется правдоподобным, что характер соответствия между операциями ограничения и индуцирования представлений, с одной стороны, и проектирования или перехода к прообразу орбиты, с другой, зависит от топологических свойств орбиты Ω и ее разбиения на прообразы точек при проекции p .

15.6. Универсальная формула для характеров и меры Плانشереля. Одной из важных задач теории представлений групп является получение явных формул для обобщенных характеров неприводимых представлений (см. п. 11.2)

В настоящее время имеется очень много результатов, решающих эту задачу для конкретных групп и представлений или для целых классов их. Однако эти результаты внешне очень разнятся для разных типов групп. Метод орбит подсказывает единый подход к решению этой задачи для всех групп Ли. Идея этого подхода состоит в рассмотрении обобщенной функции I_Ω на группе Ли G , которая определяется по G -орбите Ω в $\mathfrak{g}^*$ следующим образом.

Пусть V — открытая область в G , покрываемая канонической системой координат и U — ее прообраз в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

В качестве U можно взять совокупность тех элементов $X \in \mathfrak{g}$, для которых чисто мнимые собственные значения опера-

тора $\text{ad } X$ (если таковые вообще имеются) по абсолютной величине не превосходят π .

В частности, для экспоненциальных групп ненулевые чисто мнимые собственные значения отсутствуют и мы можем положить $U = \mathfrak{g}$, $V = G$.

Отображение $\exp: U \rightarrow G$ является диффеоморфизмом и позволяет переносить основные и обобщенные функции с U на V и обратно. Известно, что для разрешимых, компактных и комплексных полупростых групп множество V имеет дополнение меры нуль в G .

Определим обобщенную функцию I_Ω на V формулой

$$\langle I_\Omega, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \left(\int_U \varphi(\exp X) e^{2\pi i \langle F, X \rangle} dX \right) d\beta_\Omega(F), \quad (1)$$

где dX — обычная мера Лебега на $\mathfrak{g}^*$, а β_Ω — мера на орбите Ω , задаваемая $2k$ -формой

$$\frac{1}{k!} B_\Omega \wedge \dots \wedge B_\Omega \quad (k \text{ сомножителей}). \quad (2)$$

Оказывается, что функция I_Ω тесно связана с обобщенным характером χ_Ω некоторого унитарного представления T группы G . Во многих случаях связь между I_Ω и χ_Ω может быть описана так: *существует функция $p_\Omega \in C^\infty(V)$, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов, принимающая значение 1 в единице группы, отличная от нуля на V и такая, что имеет место равенство*

$$\chi_\Omega = p_\Omega^{-1} I_\Omega. \quad (\Phi)$$

Эту формулу назовем *универсальной формулой для характера* или, кратко, формулой (Φ) .

Более точно, будем говорить, что для представления T с характером χ_Ω справедлива формула (Φ) , если выполняются два условия:

1) для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$, входящей в область определения характера χ_Ω , сходится интеграл

$$\int_{\Omega} \left(\int_U \varphi(\exp X) p_\Omega^{-1}(\exp X) e^{2\pi i \langle F, X \rangle} dX \right) d\beta_\Omega(F), \quad (3)$$

и его значение равно $\langle \chi_\Omega, \varphi \rangle = \text{tr } T(\varphi)$;

2) если для $\varphi \in C_0^\infty(G)$ сходится интеграл (3), и оператор $T(\varphi)$ положителен, то φ входит в область определения χ_Ω .

При выполнении этих условий мы будем говорить, что представление T соответствует орбите Ω , и обозначать его T_Ω .

Введенное таким образом соответствие между орбитами и представлениями, по-видимому, совпадает с соответствием, описанным в п. 15.3. Полного доказательства этого утверждения пока не получено.

Отметим, что формула (Ф) выясняет природу обобщенной функции χ_Ω , которая оказывается тесно связанной с геометрией орбиты Ω . Так, если Ω компактна, то χ_Ω — обычная гладкая функция (этот случай соответствует конечномерному представлению). Если Ω является цилиндром, т. е. содержит вместе со всякой точкой F линейное многообразие $F + L$, где L — подпространство в $\mathfrak{g}^*$, то χ_Ω содержит множители типа δ -функций.

В частности, если $L = \mathfrak{h}^\perp$ для некоторой подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, то χ_Ω сосредоточен на $\exp \mathfrak{h}$. Если орбита Ω является замкнутым подмногообразием в $\mathfrak{g}^*$, то интеграл (3) сходится для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$. В противном случае сходимость этого интеграла дает дополнительное необходимое условие для того, чтобы функция φ принадлежала области определения χ_Ω .

Часто это условие можно сформулировать так: преобразование Фурье функции $X \mapsto p_\Omega (\exp X)^{-1} \varphi (\exp X)$ обращается в нуль на множестве $\partial\Omega$ — границе Ω (совпадающей с краем замыкания Ω) — ср. [99], [190].

Формула (Ф) полезна также при изучении топологии множества $\hat{G}$ и при ее сравнении с топологией $\mathcal{O}(G)$.

Справедливость формулы (Ф) в настоящее время известна для достаточно широкого класса представлений. В частности, эта формула доказана для всех представлений компактных односвязных групп, экспоненциальных групп, группы вещественных матриц второго порядка, представлений основной серии некомпактных полупростых групп (см. [86], [87], [99], [100], [121]).

Оказалось, что для представлений, соответствующих орбитам максимальной размерности, в качестве функции p_Ω можно выбрать одну универсальную функцию

$$q(\exp X) = \det \mathcal{P}(\operatorname{ad} X), \quad (4)$$

где через $\mathcal{P}$ обозначена функция

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\operatorname{sh}(t/2)}{t/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2k}}{(2k+1)!}. \quad (5)$$

Очень интересной задачей является вывод формулы (Ф) из «физических» соображений, приведенных в п. 15.4. Можно надеяться, что метод квантования с помощью континуальных интегралов, предложенный Фейнманом, позволит дать единое доказательство перечисленных выше результатов, а также под-

скажет необходимые изменения в формуле (Ф) в тех случаях, когда она не верна (например, для представлений вырожденных серий некомпактных полупростых групп).

Перейдем к вычислению меры Планшереля для групп Ли. Напомним (см. п. 12.4), что формула Планшереля для унимодулярной группы G имеет вид

$$\int_G |\varphi(g)|^2 dg = \int_{\hat{G}} \text{tr} [T(\varphi) T(\varphi)^*] d\mu([T]), \quad (6)$$

где $[T]$ означает класс эквивалентности представления T .

Пусть $A(G)$ — подпространство в $C(G)$, порожденное функциями вида $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$, где

$$\varphi_i \in L^1(G, dg) \cap L^2(G, dg).$$

Задача 1. Докажите, что для любой функции $\varphi \in A(G)$ имеет место формула обращения:

$$\varphi(g) = \int_G \text{tr} [T_\lambda(\varphi) T_\lambda(g)^*] d\mu(\lambda). \quad (7)$$

Указание. Достаточно проверить это равенство для $g=e$. В этом случае оно принимает вид

$$\varphi(e) = \int_{\hat{G}} \text{tr} T_\varphi d\mu(\lambda) \quad (8)$$

и для функций вида $\varphi = \varphi_1 * \varphi_1^*$ вытекает из (6).

Равенство (8) можно рассматривать как разложение δ -функции на группе G по характерам неприводимых представлений.

В том случае, когда справедлива формула (Ф), это равенство приобретает простой и наглядный смысл: оно выражает разложение лебеговой меры на $\mathfrak{g}^*$ по каноническим мерам на орбитах.

В самом деле, предположим, что имеет место однозначное соответствие между орбитами и представлениями, и что для представлений, соответствующих орбитам максимальной размерности, в качестве функции p_Ω можно выбрать универсальную функцию (4). (Все эти предположения выполняются, например, для экспоненциальных групп.)

Если группа G унимодулярна, то мера Лебега dF на $\mathfrak{g}^*$ инвариантна относительно K -представления.

Предположим, что пространство орбит $\mathcal{O}(G)$ полуотделимо. Тогда мера dF однозначно записывается в виде

$$dF = \int_{\mathcal{O}(G)} \beta_\Omega d\mu(\Omega).$$

Переходя к преобразованию Фурье, получим равенство

$$\delta(X) = \int_{\mathcal{O}(G)} I_{\Omega}(\exp X) d\mu(\Omega). \quad (9)$$

Так как орбиты максимальной размерности заполняют множество полной меры в $\mathfrak{g}^*$, интегрирование в (9) можно вести лишь по множеству $\mathcal{O}_{\max}(G)$ орбит максимальной размерности. Наконец, используя формулу (Ф) и равенство $q(e) = 1$, приходим к соотношению

$$\delta(g) = \int_{\mathcal{O}_{\max}(G)} \chi_{\Omega}(g) d\mu(\Omega), \quad (10)$$

которое, очевидно, и дает искомое разложение (8).

В случае, когда топологическое пространство $\mathcal{O}(G)$ полуотделимо, подмножество $\mathcal{O}_{\max}(G)$ оказывается гладким многообразием. Локальную карту на $\mathcal{O}_{\max}(G)$ можно определить следующим образом.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ — система локальных координат (не обязательно линейных) на $\mathfrak{g}^*$.

Предположим, что уравнения

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_{2n} = 0 \quad (11)$$

определяют подмногообразие S в $\mathfrak{g}^*$, трансверсальное к орбитам максимальной размерности. Тогда в достаточно малой окрестности S пересекается ровно в одной точке с каждой орбитой, проходящей через эту окрестность. Мы можем, следовательно, отождествить некоторую область из $\mathcal{O}_{\max}(G)$ с окрестностью на S . Локальными координатами в этой окрестности могут служить ограничения на S функций $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Другой способ введения локальных координат на $\mathcal{O}_{\max}(G)$ состоит в рассмотрении G -инвариантных функций на $\mathfrak{g}^*$. Оба способа тесно связаны между собой. Фактически введение координат первым способом является одним из самых удобных путей явного построения G -инвариантных функций на $\mathfrak{g}^*$.

Пример. Пусть $G = GL(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g} \approx \mathfrak{g}^* = \text{Mat}_n \mathbb{C}$. Как мы видели в п. 15.1, G -орбиты в $\mathfrak{g}^*$ — это классы подобных матриц. В качестве многообразия S удобно взять совокупность матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \end{pmatrix},$$

а в качестве координат на S — параметры $p_1, \dots, p_n$.

Задача 2. Докажите, что каждая орбита из $\mathcal{O}_{\max}(G)$ пересекается с S ровно в одной точке. Параметры $p_1, \dots, p_n$ совпадают (с точностью до знака) с коэффициентами характеристического полинома любой матрицы из соответствующей орбиты.

Указание. Проверьте, что матрица A принадлежит орбите максимальной размерности тогда и только тогда, когда существует такой вектор ξ , что $\xi, A\xi, \dots, A^{n-1}\xi$ линейно независимы.

Нам понадобится также понятие пфаффиана кососимметрической матрицы A . Пусть V — $2n$ -мерное пространство с базисом $\xi_1, \dots, \xi_{2n}$ и $\tilde{A} = \sum_{k,j} a_{kj} \xi_k \wedge \xi_j$ — однородный элемент второй степени во внешней алгебре над V . Тогда n -я внешняя степень $\tilde{A}$ имеет вид

$$\tilde{A} \wedge \tilde{A} \wedge \dots \wedge \tilde{A} = c \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \dots \wedge \xi_{2n}, \quad (12)$$

поскольку пространство $\wedge^{2n} V$ одномерно. Коэффициент c в равенстве (12) является полиномом степени n от коэффициентов a_{kj} . Он называется *пфаффианом* матрицы A и обозначается $\text{Pf } A$.

Задача 3. Докажите тождество

$$(\text{Pf } A)^2 = \det A.$$

Указание. Воспользуйтесь тем, что каждый элемент $\tilde{A} \in \wedge^2 V$ в подходящем базисе имеет вид

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \wedge \xi_{n+k}.$$

Вернемся к вычислению меры Планшереля. Оказывается, что при сделанных выше предположениях и при описанном выборе координат $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ на $\mathcal{O}_{\max}(G)$ имеет место следующий результат.

Пусть $F(\lambda)$ — точка орбиты с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, лежащая на многообразии S . Значения скобок Пуассона функций $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ в точке $F(\lambda)$ образуют кососимметрическую матрицу Φ :

$$\Phi_{ij} = \{\varphi_i, \varphi_j\}(F(\lambda)). \quad (13)$$

Задача 4. Мера Планшереля для группы G задается формулой

$$\mu = \rho(\lambda, 0) \text{Pf } \Phi(\lambda) d\lambda_1 \wedge \dots \wedge d\lambda_k, \quad (14)$$

где $\rho(\lambda, \varphi)$ — плотность меры Лебега dF на $\mathfrak{g}^*$ в координатах λ, φ :

$$dF = \rho(\lambda, \varphi) d\lambda_1 \wedge \dots \wedge d\lambda_k \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{2n}. \quad (15)$$

Указание. Сравните в точке $F(\lambda)$ значения дифференциальных форм, задающих меры dF , $\beta_{\mathcal{O}}$ и μ .

Наиболее просто формула (14) выглядит, когда координаты $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ линейны, т. е. являются векторами из $\mathfrak{g}$.

В этом случае $\rho(\lambda, \varphi) = \text{const}$,

$$\Phi_{ij}(\lambda) = \langle F(\lambda), [\varphi_i, \varphi_j] \rangle = \sum_{m=1}^k \lambda_m c_{ij}^m,$$

где c_{ij}^m — структурные константы алгебры Ли. Искомая мера μ принимает вид

$$\mu = P(\lambda) d\lambda_1 \wedge \dots \wedge d\lambda_k, \quad (16)$$

где P — однородный полином степени n от $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, коэффициенты которого явно выражены через структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$.

Интересно отметить, что формальное применение формулы (16) к комплексным и компактным полупростым группам приводит к правильному выражению для меры Планшереля, если заменить интегрирование суммированием для тех параметров λ , которые подчинены условиям целочисленности.

Не менее интересен тот факт, что для вещественных полупростых групп эта процедура приводит к правильному ответу лишь для дискретной серии представлений.

15.7. Инфинитезимальные характеры и орбиты. Метод орбит позволяет в некоторых случаях явно вычислить инфинитезимальный характер неприводимого представления.

Напомним (см. п. 11.3), что инфинитезимальный характер представления T — это гомоморфизм λ_T центра $Z(\mathfrak{g})$ алгебры $U(\mathfrak{g})$ в поле комплексных чисел, связанный с представлением T формулой

$$T(X) = \lambda_T(X) \cdot 1. \quad (1)$$

Воспользуемся также теоремой 2 из п. 10.4, утверждающей изоморфизм линейных пространств $Z(\mathfrak{g})$ и $I(\mathfrak{g}) \subset S(\mathfrak{g})$ (пространства G -инвариантных элементов в $S(\mathfrak{g})$).

Каждой орбите Ω группы G в $\mathfrak{g}^*$ можно поставить в соответствие линейный функционал λ_Ω на $Z(\mathfrak{g})$ следующим образом. Алгебру $S(\mathfrak{g})$ можно отождествить с алгеброй $P(\mathfrak{g}^*)$ полиномиальных функций на $\mathfrak{g}^*$. А именно, каждому $X \in \mathfrak{g}$ мы поставим в соответствие линейную функцию на $\mathfrak{g}^*$:

$$F \mapsto 2\pi i \langle F, X \rangle$$

и продолжим это отображение по линейности и мультипликативности до изоморфизма $S(\mathfrak{g})$ на $P(\mathfrak{g}^*)$. Подпространство $I(\mathfrak{g})$ будет тогда реализовано полиномами, постоянными на орбитах. Определим λ_Ω как функционал, сопоставляющий инвариантному полиному его значение на орбите Ω .

Отметим, что априори этот функционал не является мультипликативным, так как про изоморфизм $Z(\mathfrak{g})$ и $I(\mathfrak{g})$ не известно, является ли он всегда изоморфизмом алгебр¹⁾.

¹⁾ Доказательство этого факта недавно получено М. Дюфло [88].

Мы будем говорить, что представление T соответствует орбите Ω , если

$$\lambda_T = \lambda_\Omega \quad (2)$$

(и, тем самым, λ_Ω — мультипликативный функционал).

Соответствие между орбитами и представлениями, получаемое таким образом, более грубо, чем соответствия, введенные выше. В самом деле, сейчас для нас важна не сама орбита, а совместное множество уровня G -инвариантных полиномов, в котором эта орбита содержится.

Для алгебраических групп Ли (т. е. для подгрупп в $GL(n, \mathbb{R})$ или в $GL(n, \mathbb{C})$, задаваемых алгебраическими уравнениями) можно доказать, что орбиты максимальной размерности «почти различаются» G -инвариантными рациональными функциями на $\mathfrak{g}^*$ (т. е. соответствующие множества уровня состоят из конечного числа орбит).

Для комплексных полупростых и нильпотентных групп верно более сильное утверждение: почти все совместные множества уровня G -инвариантных многочленов являются G -орбитами.

Таким образом, вообще говоря, орбита не определяется значениями, которые принимают на ней G -инвариантные многочлены. Это является геометрической иллюстрацией того факта, что неприводимое представление, вообще говоря, не определяется своим инфинитезимальным характером.

Справедливость формулы (2) тесно связана со справедливостью формулы (Ф) из п. 15.6. А именно, если для всех орбит максимальной размерности справедлива формула (Ф) с универсальной функцией q в качестве p_Ω , то изоморфизм между $Z(\mathfrak{g})$ и инвариантными полиномами на $\mathfrak{g}^*$ является изоморфизмом алгебр и допускает простое аналитическое истолкование. Рассмотрим преобразование, которое ставит в соответствие гладкой финитной функции φ на G функцию $\bar{\varphi}$ на $\mathfrak{g}^*$ по правилу

$$\bar{\varphi}(F) = \int_{\mathfrak{g}} q^{-1}(\exp X) \varphi(\exp X) e^{2\pi i \langle F, X \rangle} dX. \quad (3)$$

Оказывается, при таком преобразовании операторы Лапласа на G переходят в операторы умножения на G -инвариантные полиномы на $\mathfrak{g}^*$ с точностью до слагаемого, аннулирующего $K(G)$ -инвариантные функции.

Если представление T соответствует в смысле п. 15.6 орбите Ω , то его инфинитезимальный характер совпадает с λ_Ω .

Обратно, если операторы Лапласа на группе G обладают указанным выше свойством, то все λ_Ω — мультипликативные функционалы, и обе части формулы (Ф) удовлетворяют одной и той же системе дифференциальных уравнений.

Таким образом, каждая из формул (2) и (Ф) может быть использована для доказательства другой.

Для компактных групп формула (2) известна давно и послужила основой вывода формулы (Ф) (см. [99]).

Для экспоненциальных групп, наоборот, формула (2) была получена в [86] как следствие формулы (Ф).

Отметим некоторые нерешенные задачи, естественно возникающие при исследовании инфинитезимальных характеров методом орбит.

1. Обобщить понятие инфинитезимального характера и равенство (2) на центр тела Ли $D(\mathfrak{g})$, связанного с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (см. п. 10.4).

2. Дать чисто алгебраическое доказательство описанного выше свойства операторов Лапласа на группе Ли.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

§ 16. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

16.1. Гармонический анализ на трехмерном кубе. В математическом институте лежала модель куба. Один из сотрудников занумеровал грани куба цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Другой, придя в институт на следующий день, заменил каждое число на среднее арифметическое соседних чисел. Первый, заметив это, на другой день ответил тем же. Какие числа окажутся на гранях куба через месяц, если известно, что оба сотрудника ходят в институт через день?

Решение этой шуточной задачи является моделью применения теории представлений к различным задачам математики, механики и физики, обладающим той или иной симметрией.

Первый этап решения состоит в формулировке задачи на языке теории представлений. Пусть G — группа движений куба, V_r — пространство функций на множестве граней куба. В пространстве V_r определено естественное представление T группы G . Это — представление, индуцированное единичным представлением подгруппы H_r , сохраняющей на месте одну из граней (ср. п. 13.1).

Рассмотрим оператор L в пространстве V_r , переводящий функцию $f(x)$ в функцию

$$(Lf)(x) = \frac{1}{4} \sum f(y),$$

где суммирование ведется по четырем граням y , соседним с гранью x .

Оператор L перестановочен с действием G . (Продумайте это утверждение и убедитесь в его справедливости.) Поэтому к нему применимы общие теоремы о сплетающих операторах. Разложим представление T на неприводимые компоненты. Число сплетения $c(T, T)$ равно числу классов пар граней куба (см. п. 13.5). Таких классов, очевидно, три: совпадающие грани, смежные грани и противоположные грани. Отсюда вытекает, что T является суммой трех попарно не эквивалентных представлений T_1, T_2, T_3 .

Однако три инвариантных подпространства в V_r легко указать. Это — пространство V_1 констант, пространство V_2 четных функций с нулевой суммой значений и пространство V_3 нечетных функций. (Четность или нечетность означает, что функция принимает на противоположных гранях одинаковые или противоположные значения.) Оператор L кратен константе λ_i в каждом из V_i , $i = 1, 2, 3$. Очевидно, $\lambda_1 = 1$. В качестве представителя из V_2 можно взять функцию, равную 1 на одной паре противоположных граней, -1 на другой и 0 на третьей. Отсюда вытекает, что $\lambda_2 = -1/2$. Наконец, в качестве представителя из V_3 возьмем функцию, равную 1 на одной грани, -1 на противоположной и 0 на остальных. Отсюда $\lambda_3 = 0$.

Интересующий нас оператор L^{30} сводится к умножению на 1, $(-1/2)^{30}$, 0 в V_1 , V_2 и V_3 соответственно. Поэтому с довольно высокой точностью можно утверждать, что искомые числа все равны 3,5, так как вектор $\xi_1 = (3,5, 3,5, 3,5, 3,5, 3,5, 3,5)$ является проекцией вектора $\xi = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ на подпространство констант. Так как проекция ξ на V_2 имеет длину не больше, чем

$$\|\xi - \xi_1\| = \sqrt{17,5},$$

то возможная ошибка не превосходит

$$\frac{\sqrt{17,5}}{2^{30}} \approx 0,004.$$

Читатель может при желании повторить приведенные здесь рассуждения, заменив куб на октаэдр или додекаэдр. Собственные значения оператора L равны в первом случае 1, -1 , 0 а во втором 1, $-1/5$, $1/\sqrt{5}$, $-1/\sqrt{5}$.

Рассматривая другие однородные пространства для группы движений куба, можно построить полную систему представлений этой группы. Пусть

X_r — совокупность граней куба,

X_v — совокупность вершин куба,

X_d — совокупность больших диагоналей куба,

X_t — совокупность правильных тетраэдров, вписанных в куб,

X_c — совокупность центров куба.

Пространства функций на этих множествах мы обозначим V_r, V_v, V_d, V_t, V_c . Их размерности равны 6, 8, 4, 2, 1 соответственно. Мы предоставим читателю проверить, что таблица чисел сплетения для соответствующих представлений T_r, T_v, T_d ,

T_τ, T_π имеет вид

	T_Γ	T_ν	T_Δ	T_τ	T_π
T_Γ	3	2	1	1	1
T_ν	2	4	2	2	1
T_Δ	1	2	2	1	1
T_τ	1	2	1	2	1
T_π	1	1	1	1	1

Посмотрим, какие выводы можно сделать из этой таблицы. Прежде всего, из вида диагональных чисел следует, что T_π неприводимо (это, впрочем, ясно уже из того, что оно одномерно), T_Δ и T_τ являются суммами двух неприводимых компонент, T_Γ — суммой трех неприводимых компонент, а для T_ν имеются две возможности — либо сумма четырех попарно неэквивалентных представлений, либо сумма двух эквивалентных. Вторая возможность отпадает, так как в этом случае число сплетения $c(T_\nu, T_\pi)$ не могло бы равняться 1.

Далее, из таблицы видно, что T_π входит во все остальные представления с кратностью 1. Мы уже видели выше, что T_Γ является суммой представлений $T_1 \approx T_\pi, T_2$ и T_3 .

Пусть $T_\Delta = T_1 + T_4, T_\tau = T_1 + T_5$. Так как

$$c(T_\Delta, T_\Gamma) = c(T_\Delta, T_\tau) = c(T_\Gamma, T_\tau) = 1,$$

представления T_1, T_2, T_3, T_4 и T_5 попарно неэквивалентны. Из таблицы видно также, что T_ν содержит T_1, T_4, T_5 и одно из представлений T_2 и T_3 . Так как $\dim T_1 = 1, \dim T_2 = 2, \dim T_3 = 3, \dim T_4 = 3, \dim T_5 = 1$, то

$$T_\nu = T_1 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Так как в группе G пять классов сопряженных элементов (единичный элемент, поворот вокруг вершины, поворот вокруг середины ребра и два типа поворотов вокруг центра грани — на 90° и на 180°), то найденными пятью представлениями исчерпываются все представления G . Это видно также из равенства $|G| = \sum (\dim T_i)^2$, которое в нашем случае имеет вид

$24 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$. Укажем теперь те подпространства функций, в которых действуют неприводимые представления:

T_1 действует, очевидно, в пространстве констант.

T_2 , по определению, действует в пространстве четных функций с нулевой суммой значений на X_r .

T_3 , по определению, действует в пространстве нечетных функций на X_r , а также в некотором подпространстве $V' \subset V_B$.

T_4 , по определению, действует в пространстве функций с нулевой суммой значений на X_d , а также в некотором подпространстве $V'' \subset V_B$.

T_5 , по определению, действует в пространстве функций с нулевой суммой на T_r , а также в некотором подпространстве $V''' \subset V_B$.

Опишем пространства V' , V'' и V''' .

Пространство V''' одномерно и состоит из функций, принимающих противоположные значения на любых двух соседних вершинах. Пространство V'' трехмерно и состоит из четных функций с нулевой суммой значений на X_B . Наконец, V' трехмерно и состоит из нечетных функций на X_B , ортогональных V''' .

Все эти утверждения легко выводятся из рассмотрения явного вида сплетающих операторов.

16.2. Представления симметрической группы. *Симметрической группой* n -го порядка, или группой S_n называется группа всех автоморфизмов конечного множества X , состоящего из n элементов. Ясно, что порядок группы S_n равен числу всех перестановок из n символов, т. е. $n!$

Задача 1. Докажите, что группа S_n разрешима при $n \leq 4$.

Указание. Группы S_1 и S_2 коммутативны, S_3 является полупрямым произведением S_2 и Z_3 , а S_4 — полупрямым произведением S_3 и $Z_2 \times Z_2$.

Известно, что при $n \geq 5$ группа S_n не разрешима и содержит простой нормальный делитель A_n индекса 2. Этот нормальный делитель называется *знакопеременной группой* порядка n и определяется как ядро описываемого ниже гомоморфизма s группы S_n в группу из двух элементов.

Задача 2. Докажите, что функция

$$s(\sigma) = \prod_{i < j} \operatorname{sgn}(\sigma(i) - \sigma(j)), \quad \sigma \in S_n,$$

является гомоморфизмом S_n в мультипликативную группу $\{+1, -1\}$.

Указание. Рассмотрите многочлен от n переменных

$$P(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

и проверьте, что $P(\sigma(x)) = s(\sigma) P(x)$.

Элементы A_n называются обычно *четными* перестановками, а элементы $S_n \setminus A_n$ — *нечетными*.

Классификация неприводимых представлений группы S_n может быть получена тем же способом, который был выше использован при рассмотрении группы вращений куба. Для этого нужно построить достаточно богатый запас однородных пространств, на которых действует группа S_n .

Пусть α означает набор натуральных чисел $n_1, \dots, n_k$, обладающий свойствами

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k, \quad (1)$$

$$n_1 + \dots + n_k = n. \quad (2)$$

Для каждого набора α обозначим через X_α пространство, точкой которого является разбиение множества X на подмножества $X_1, \dots, X_k$, так что $|X_i| = n_i$. Очевидно, что группа S_n действует на X_α транзитивно.

Задача 3. Докажите, что $|X_\alpha| = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$.

Указание. Докажите, что стационарная подгруппа точки $x \in X_\alpha$ в S_n изоморфна $S_{n_1} \times \dots \times S_{n_k}$.

С каждым пространством X_α связано два представления группы S_n : представление T_α , индуцированное тривиальным одномерным представлением подгруппы $S_\alpha = S_{n_1} \times \dots \times S_{n_k}$ и представление T'_α , индуцированное нетривиальным одномерным представлением ε (см. задачу 2) той же подгруппы.

Классификация всех неприводимых представлений S_n может быть получена из рассмотрения таблицы чисел сплетения $c(T_\alpha, T'_\beta)$. Введем лексикографическое упорядочение наборов α , полагая, что $\alpha = (n_1, \dots, n_n)$ больше, чем $\beta = (m_1, \dots, m_l)$, если $n_1 > m_1$, или $n_1 = m_1$, но $n_2 > m_2$, или $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, но $n_3 > m_3$ и т. д.

Кроме того, определим для каждого набора $\alpha = (n_1, \dots, n_k)$ сопряженный набор $\alpha^* = (n_1^*, \dots, n_l^*)$, где n_i^* означает количество тех из чисел $n_1, \dots, n_k$, которые не меньше i .

Задача 4. Докажите, что набор α^* , так же как и α , удовлетворяет условиям (1) и (2) и что $(\alpha^*)^* = \alpha$.

Указание. Каждому набору $\alpha = (n_1, \dots, n_k)$ соответствует невозрастающая ступенчатая функция, которая на участке от i до $i+1$ равна n_i . Покажите, что набору α^* соответствует обратная функция. (См. также интерпретацию наборов α с помощью таблиц Юнга, описанную ниже.)

Теорема 1 (Дж. Нейман — Г. Вейль).

$$c(T_\alpha, T'_\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha > \beta^*, \\ 1, & \text{если } \alpha = \beta^*. \end{cases}$$

Задача 6. Проверьте, что длины столбцов таблицы Юнга образуют набор $\beta = (n_1^*, \dots, n_l^*)$, сопряженный к α .

Предположим теперь, что в клетках таблицы Юнга расставлены произвольным образом элементы исходного множества X (которое удобно считать отрезком натурального ряда от 1 до n).

Полученная фигура называется *диаграммой Юнга*. Каждой диаграмме Юнга соответствует пара (x, y) , $x \in X_\alpha$, $y \in X_\beta$. Точка x — это распределение элементов X по строчкам таблицы Юнга, а точка y — распределение по столбцам. Очевидно, что пара $(\sigma(x), \sigma(y))$ соответствует диаграмме Юнга, которая получается из исходной подстановкой σ . В частности, отсюда следует, что все пары $(\sigma(x), \sigma(y))$ при разных σ различны.

Фиксируем какую-нибудь диаграмму Юнга и пусть (x_0, y_0) — соответствующая ей пара. Положим

$$c_0(x, y) = \begin{cases} s(\sigma), & \text{если } x = \sigma(x_0); \quad y = \sigma(y_0), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет условию (3) и, следовательно, задает сплетающий оператор.

Так же, как и в случае $\alpha > \beta^*$, можно убедиться, что уравнение (3) не имеет других решений (кроме c_0 и пропорциональных ему). Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает, что у представлений T_α и $T_{\alpha'}^*$ есть ровно одна общая неприводимая компонента U_α и что все представления U_α попарно не эквивалентны. Классификация будет завершена, если мы проверим, что число найденных неприводимых представлений совпадает с числом классов сопряженных элементов в S_n .

Поставим в соответствие каждому набору $\alpha = (n_1, \dots, n_k)$ класс сопряженных элементов следующим образом. Пусть $X_1, \dots, X_k$ — разбиение из X_α и пусть $\sigma \in S_n$ — преобразование, циклически переставляющее элементы каждого из подмножеств X_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Задача 7. Докажите, что класс элемента σ зависит только от набора α , и что каждый класс сопряженных элементов может быть получен таким образом.

Указание. Для каждого $\sigma \in S_n$ рассмотрите разбиение X на орбиты подгруппы, порожденной σ .

Более внимательное рассмотрение сплетающего оператора $C \in \mathcal{C}(T_\alpha, T_{\alpha'}^*)$ приводит к явной формуле для характера представления U_α . Это выражение довольно громоздко и, по-видимому, не допускает существенного упрощения (как и всякая «общая» функция от двух наборов натуральных аргументов).

Мы приведем здесь лишь выражение для размерности представления U_α , соответствующего набору $\alpha = (n_1, \dots, n_k)$:

$$\dim U_\alpha = \frac{n! \prod_{i < j} (l_i - l_j)}{l_1! \dots l_k!},$$

где $l_i = n_i + k - i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

16.3. Представления группы $SL(2, F_q)$. Семейство групп $SL(2, F_q)$, где F_q — конечное поле (см. п. 3.2), — одно из наиболее изученных. Мы покажем здесь, как строится основная серия представлений этих групп.

Группа $G = SL(2, F_q)$ действует на двумерной плоскости над полем F_q . Если выбросить из этой плоскости начало координат, то на оставшемся множестве X группа G действует транзитивно. Стационарной подгруппой точки $(0, 1) \in X$ является треугольная подгруппа N , состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in F_q. \quad (1)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$|G| = |N| \cdot |X| = q(q^2 - 1). \quad (2)$$

Нашей целью будет изучение представления T группы G в пространстве V функций на X :

$$\left[T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f \right](u, v) = f(au + cv, bu + dv) \quad (3)$$

(другими словами, T индуцировано тривиальным представлением N).

Найдем пространство $\mathcal{C}(T)$ сплетающих операторов для представления T .

Как мы знаем (см. п. 13.5), для этого надо перечислить орбиты группы G в пространстве $X \times X$.

Задача 1. Докажите, что каждая G -орбита в $X \times X$ имеет вид

$$Q_\lambda: \{(x, y) \in X \times X: x = \lambda y, \lambda \in F_q^*\}$$

или вид

$$\tilde{O}_s: \{(x, y) \in X \times X: \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = s, s \in F_q^*\}.$$

Указание. Всякий вектор $x \in X$ под действием G может быть переведен в вектор $(0, 1)$. Вектор y либо пропорционален x с коэффициентом $\lambda \neq 0$, либо порождает вместе с x параллелограмм площади $s \neq 0$.

Следствие. $c(T, T) = 2(q - 1)$.

Обозначим через C_λ и $\tilde{C}_s$ сплетающие операторы, отвечающие перечисленным выше орбитам. Структура кольца $\mathcal{C}(T)$ определяется следующими соотношениями.

Задача 2. Проверьте равенства

$$C_{\lambda_1} C_{\lambda_2} = C_{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (4)$$

$$C_{\lambda} \tilde{C}_s = \tilde{C}_{s\lambda^{-1}}, \quad \tilde{C}_s C_{\lambda} = \tilde{C}_{\lambda s}, \quad (5)$$

$$\tilde{C}_s \tilde{C}_{s_2} = \sum_{s \neq 0} \tilde{C}_s + q C_{-s_1^{-1} s_2}. \quad (6)$$

Указание. Операторы C_{λ} действуют в пространстве V по формуле

$$C_{\lambda} f(x) = f(\lambda x), \quad (7)$$

а операторы $\tilde{C}_s$ — по формуле

$$[\tilde{C}_s f](x) = \sum_{\Delta(x, y) = s} f(y), \quad (8)$$

где $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$. Воспользуйтесь тем, что система уравнений относительно z

$$\begin{cases} \Delta(x, z) = s_1, \\ \Delta(z, y) = s_2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение, если $\Delta(x, y) \neq 0$, и q решений, если $\Delta(x, y) = 0$.

Очевидно, что операторы C_{λ} , $\lambda \in F_q^*$ образуют коммутативное подкольцо в $\mathcal{C}(T)$, изоморфное групповому кольцу мультипликативной группы поля. Рассмотрим соответствующее разложение пространства V (см. п. 8.3)

$$V = \sum_{\chi \in F_q^*} V_{\chi}. \quad (9)$$

Пространство V_{χ} состоит из функций на X , удовлетворяющих условию

$$f(\lambda x) = \chi(\lambda) f(x). \quad (10)$$

Задача 3. Докажите, что операторы $\tilde{C}_s$ переводят пространство V_{χ} в $V_{\chi^{-1}}$.

Указание. Воспользуйтесь формулами (5), (7) и (8).

Представления T_{χ} группы G , возникающие в подпространствах V_{χ} , называются представлениями основной серии. Нетрудно убедиться, что представление T_{χ} совпадает с $\text{Ind}(G, H, U_{\chi})$, где H — подгруппа треугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \in F_q^*, \quad b \in F_q,$$

а U_{χ} — одномерное представление H , задаваемое формулой

$$U_{\chi} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \chi(a),$$

Теорема 1. *Представление T_χ неприводимо, если $\chi \neq \chi^{-1}$, и является суммой двух неэквивалентных неприводимых компонент, если $\chi = \chi^{-1}$.*

Доказательство. Оба утверждения следуют из задачи 3. В самом деле, самый общий сплетающий оператор из $\mathcal{C}(T)$ имеет вид

$$C = \sum_{\lambda \in F_q^*} f(\lambda) C_\lambda + \sum_{s \in F_q^*} g(s) \tilde{C}_s.$$

Поэтому, если $\chi \neq \chi^{-1}$, все операторы из $\mathcal{C}(T_\chi)$ скалярны. Если же $\chi = \chi^{-1}$, то $\mathcal{C}(T_\chi)$ порождается операторами $C_1 = 1$ и $\tilde{C}_1$. Значит, в этом случае, $c(T_\chi) = 2$.

Изучим подробнее исключительный случай $\chi = \chi^{-1}$. Если q нечетно, существуют два исключительных характера:

$$\chi_0(x) \equiv 1 \quad \text{и} \quad \chi_e(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y^2, \\ -1, & \text{если } x \text{ — не квадрат.} \end{cases}$$

Пространство V_{χ_0} содержит инвариантное одномерное подпространство констант и дополнительное к нему подпространство функций с нулевой суммой значений.

Пространство V_{χ_e} является суммой двух неприводимых подпространств одинаковой размерности $(q+1)/2$.

Этот результат может быть получен без труда из равенств (6) и (10).

Если $q = 2^m$, то имеется лишь один исключительный характер $\chi_0 \equiv 1$. Соответствующее представление T_{χ_0} устроено так же, как и в случае нечетного q .

Интересно отметить, что в обоих случаях (четного и нечетного q) сумма квадратов размерностей найденных неприводимых представлений равна $q(q+1)(q+3)/2$.

(В нечетном случае это число возникает как сумма

$$\frac{q-3}{2}(q+1)^2 + 1 + q^2 + 2\left(\frac{q+1}{2}\right)^2,$$

а в четном случае — как сумма

$$\frac{q+2}{2}(q+1)^2 + 1 + q^2.)$$

Это число составляет примерно половину порядка группы. Поэтому группа G обладает еще одной серией неприводимых представлений, которые не встречаются в разложении T . Эти представления иногда называют *аналитическими*, так как в случае группы $SL(2, \mathbb{R})$ они реализуются в пространстве аналитических функций. Аналогичная реализация возможна и для ко-

нечного поля. Подробно она описана в книге [16] (для случая поля p -адических чисел). Другая реализация этой серии может быть получена с помощью вложения группы G в симплектическую группу $Sp(2, F_q)$ и рассмотрения спинорного представления последней группы (ср. п. 18.2). В зависимости от выбора двух возможных вариантов вложений G в $Sp(2, F_q)$ можно получить либо основную, либо аналитическую серию представлений G . Интересное обобщение понятия аналитического представления на случай $G = SL(n, F_q)$ дано в [77].

16.4. Векторные поля на сферах. Одно из самых ярких достижений последнего времени в топологии многообразий — это решение давно стоявшей задачи о векторных полях на сфере. Формулировка этой задачи такова.

Пусть S^{n-1} — единичная сфера в n -мерном вещественном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$.

(А) Каково максимальное число $\rho(n)$ гладких касательных векторных полей на S^{n-1} , линейно независимых в каждой точке?

Задача 1. Докажите, что $\rho(n)$ совпадает с максимальным числом вектор-функций ξ на S^{n-1} со значениями в $\mathbf{R}^n$, обладающих свойствами:

$$(\xi_i(x), x) = 0, \quad (\xi_i(x), \xi_j(x)) = \delta_{ij}. \quad (1)$$

Указание. Воспользуйтесь процессом ортогонализации.

Ответ на вопрос задачи (А) удобно сформулировать в виде трех свойств функции $\rho(n)$:

а) $\rho(n)$ зависит только от показателя, с которым входит число 2 в разложение n на простые множители;

б) $\rho(16n) = \rho(n) + 8$;

в) $\rho(2^k) = 2^k - 1$ при $k = 0, 1, 2, 3$.

Пользуясь этими свойствами, легко вычислить $\rho(n)$ для любого n . Например, $\rho(800) = \rho(32) = \rho(2) + 8 = 9$.

Мы покажем здесь, как с помощью теории представлений решается более легкая задача.

(Б) Каково максимальное число $\mu(n)$ линейных векторных полей на S^{n-1} , ортогональных в каждой точке? (Линейным мы называем векторное поле вида $\xi(x) = Ax$, $A \in \text{End } \mathbf{R}^n$.)

Задача 2. Докажите, что $\mu(n)$ совпадает с максимальным числом операторов A в $\mathbf{R}^n$, обладающих свойствами:

$$A'_i A_i = 1, \quad A_i A_j + A_j A_i = -2\delta_{ij}. \quad (2)$$

Указание. Докажите, что $(Ax, x) = 0$ для всех $x \in S^{n-1}$ тогда и только тогда, когда $A + A' = 0$.

Ясно, что $\mu(n) \leq \rho(n)$. Как мы увидим ниже, после вычисления $\mu(n)$, на самом деле $\mu(n) = \rho(n)$. Было бы очень интересно получить прямое доказательство этого равенства,

Одни из возможных здесь путей — доказать, что каждый набор вектор-функций, удовлетворяющих условиям (1), можно деформировать в набор линейных вектор-функций, обладающих тем же свойством.

Сформулируем задачу (5) на языке теории представлений. Пусть G_k — группа с образующими $a_1, \dots, a_k$, ε и соотношениями:

$$a_i^2 = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 1, \quad a_i a_j = a_j a_i \varepsilon \quad \text{при } i \neq j. \quad (3)$$

Задача 3. Докажите, что неравенство $k \leq \mu(n)$ равносильно существованию вещественного n -мерного представления T группы G_k , при котором элемент ε переходит в -1 .

Указание. Рассмотрите представление T группы G_k , которое на образующих имеет вид

$$T(a_i) = A_i, \quad T(\varepsilon) = -1.$$

Займемся изучением группы G_k и ее представлений.

Задача 4. Докажите следующие свойства группы G_k :

- а) G_k является центральным расширением $(\mathbb{Z}_2)^k$ с помощью $\mathbb{Z}_2$;
 - б) центр $C(G_k)$ имеет порядок 2 при четном k и порядок 4 при нечетном k ;
 - в) коммутант $[G_k, G_k]$ имеет порядок 2 при $k > 1$;
 - г) совокупность элементов, сопряженных с элементом $g \in G_k$, состоит либо из одного g (если $g \in C(G_k)$), либо из пары $g, \varepsilon g$ (если $g \notin C(G_k)$).
- Указание.** Воспользуйтесь тем, что каждый элемент $g \in G_k$ однозначно записывается в виде

$$g = a_{i_1} \dots a_{i_s} \quad \text{или} \quad g = \varepsilon a_{i_1} \dots a_{i_s}. \quad (4)$$

Результаты задачи 4 позволяют перечислить все неприводимые представления G_k . Число этих представлений равно числу классов сопряженных элементов, т. е. $|C(G_k)| + \frac{|G_k| - |C(G_k)|}{2}$.

Это выражение равно $2^k + 1$ при четном k и $2^k + 2$ при нечетном k . Заметим, что группа G_k имеет ровно 2^k одномерных представлений, при которых ε переходит в 1. Кроме того, по теореме Бернсайда, сумма квадратов размерностей всех представлений должна равняться $|G_k| = 2^{k+1}$. Отсюда следует, что при четном k имеется единственное неприводимое представление, при котором ε переходит в -1 ; размерность его равна $2^{k/2}$. При нечетном k имеется два таких представления размерности $2^{(k-1)/2}$ каждое.

Выясним тип этих представлений. Для этого согласно критерию Шура (см. п. 11.1, теорема 3) нужно вычислить знак величины $\sum_{g \in G_k} \chi(g^2)$, где χ — характер исследуемого представления.

Задача 5. Докажите, что $g^2 = 1$ или $g^2 = \varepsilon$ для любого $g \in G_k$. Более точно, если g имеет вид (4), то $g^2 = \varepsilon^{s(s+1)/2}$.

Таким образом, интересующая нас величина равна

$$2\chi(e)(1 - C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 + C_k^4 - \dots). \quad (5)$$

Задача 6. Докажите, что знак величины (5) дается таблицей

$k \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
знак	+	0	—	—	—	0	+	+

Указание. Величину, стоящую в скобках в (5), можно записать в виде $\operatorname{Re}(1+i)^k - \operatorname{Im}(1+i)^k = \operatorname{Re}(1+i)^{k+1}$.

Обозначим T_k вещественное представление группы G_k , переводящее e в -1 и имеющее минимальную возможную размерность.

Задача 7. Докажите, что размерность T_k равна

$$\begin{aligned} 2^{k/2}, & \quad \text{если } k = 8m \text{ или } 8m + 6, \\ 2^{(k+1)/2}, & \quad \text{если } k = 8m + 1, 8m + 3 \text{ или } 8m + 5, \\ 2^{(k+2)/2}, & \quad \text{если } k = 8m + 2 \text{ или } 8m + 4, \\ 2^{(k-1)/2}, & \quad \text{если } k = 8m + 7. \end{aligned}$$

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 6 и критерием Шура.

Для вычисления $\mu(n)$ остается заметить, что равенство $\mu(n) = k$ равносильно условию $\dim T_k = n$. Из этого соображения и результата задачи 7 легко выводится, что функция $\mu(n)$ обладает сформулированными выше свойствами а), б), в) и, следовательно, совпадает с $\rho(n)$.

Тот же результат можно было бы получить, если исследовать вместо группы G_k алгебру над $\mathbb{R}$, порожденную операторами A_i , удовлетворяющими условиям (2). Мы предоставим читателю довести до конца этот способ, используя результаты п. 3.5 об алгебрах Клиффорда над $\mathbb{R}$.

§ 17. КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

17.1. Гармонический анализ на сфере. Известно, что некоторое тело при освещении параллельными лучами в любом направлении отбрасывает тень одинаковой площади. Можно ли утверждать, что это тело имеет форму шара?

Оказывается, что при дополнительном предположении, что тело выпукло и центрально симметрично, ответ на этот вопрос положителен. Более точно, имеет место

Теорема 1. *Выпуклое центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^n$ однозначно определяется площадями своих проекций на всевозможные гиперплоскости.*

Доказательство этой теоремы использует гармонический анализ на сфере. Прежде чем излагать это доказательство, приведем другую формулировку той же теоремы.

Теорема 2. *Выпуклое центрально-симметричное тело в $\mathbb{R}^n$ однозначно определяется площадями своих сечений всевозможными гиперплоскостями.*

Эквивалентность теорем 1 и 2 вытекает из следующих соображений. Пусть K — центрально-симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Тогда мы можем определить норму в $\mathbb{R}^n$, для которой тело K является единичным шаром. Обратно, если в $\mathbb{R}^n$ задана норма, то единичный шар является выпуклым центрально-симметричным телом.

Назовем два тела K и K' двойственными, если соответствующие банаховы пространства V_K и $V_{K'}$ сопряжены друг другу относительно естественного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$. Другими словами, K двойственно K' , если равносильны условия

$$\sup_{y \in K'} (x, y) \leq 1 \text{ и } x \in K. \quad (1)$$

В этом случае равносильны также условия

$$\sup_{x \in K} (x, y) \leq 1 \text{ и } y \in K'. \quad (2)$$

Пусть $\mathbb{R}^{n-1}$ — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ и p — проекция $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^{n-1}$.

Задача 1. Докажите, что если тела K и K' двойственны друг другу в $\mathbb{R}^n$, то $\mathbb{R}^{n-1} \cap K$ и $p(K')$ двойственны в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Указание. Воспользуйтесь условиями (1) или (2).

Таким образом, задача о восстановлении тела по его проекциям равносильна задаче о восстановлении двойственного тела по его сечениям.

Перейдем к доказательству теоремы. Для наглядности ограничимся случаем $n=3$, предоставив читателю провести аналогичные рассуждения для общего случая.

Прежде всего мы сформулируем задачу на языке, удобном для применения теории представлений. Будем задавать выпуклое центрально-симметричное тело $K \subset \mathbb{R}^3$ с помощью функции f на единичной сфере $S \subset \mathbb{R}^3$ следующим образом. Если x — точка S и l_x — луч, проведенный из начала координат через эту точку, то положим

$$f(x) = \frac{1}{2} r_x^2, \quad (3)$$

где r_x — длина отрезка $l_x \cap K$.

Так как тело K центрально-симметрично, полученная функция f на S будет четной (т. е. она принимает одинаковые значения в противоположных точках сферы).

Площади сечений тела K всевозможными двумерными плоскостями очень просто выражаются через функцию f .

Задача 2. Если C — большой круг сферы S , высекаемый на S плоскостью P , то

$$\text{площадь } (K \cap P) = \int_C f(x) dx. \quad (4)$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой для площади в полярных координатах.

Итак, наша теорема может быть сформулирована в следующем виде.

Четная функция на сфере однозначно восстанавливается, если известны ее интегралы по всем большим кругам.

Рассмотрим пространство $L^2(S)$ функций на S с суммируемым квадратом по обычной мере (площади) и подпространство $L_+^2(S)$, состоящее из четных функций.

Вращения сферы переводят эти пространства в себя. Таким образом, возникает унитарное представление T группы $SO(3)$ в $L^2(S)$ и его подпредставление T_+ в $L_+^2(S)$.

Обозначим через J оператор в $L^2(S)$, действующий по формуле

$$Jf(x) = \int_{C_x} f(y) dy, \quad (5)$$

где C_x — большой круг с эпицентром в точке $x \in S$.

Точнее говоря, оператор J определяется формулой (5) на подпространстве $C(S)$ непрерывных функций и продолжается по непрерывности на все $L^2(S)$. Можно показать, однако, что равенство (5) справедливо почти всюду на S для любой $f \in L^2(S)$.

Нашей задачей является доказательство отсутствия ядра у оператора J (т. е. если $Jf = 0$, то $f = 0$).

Задача 3. Докажите, что оператор J является сплетающим для представлений T и T_+ .

У к а з а н и е. Воспользуйтесь инвариантностью элемента длины при вращениях сферы.

Из общей теории мы знаем, что пространство $L_+^2(S)$ представления T_+ является прямой суммой неприводимых конечномерных подпространств, в каждом из которых оператор J скалярен.

Мы найдем сейчас в явном виде эти подпространства и собственные значения оператора J в этих пространствах. Все они окажутся ненулевыми, что и докажет искомое утверждение.

Пусть P_n — пространство всех функций на S , которые являются ограничениями на S всевозможных однородных полиномов степени n в $\mathbb{R}^3$.

Задача 4. Докажите, что $P_n \subset P_{n+2}$ и что $\dim P_n = (n+1)(n+2)/2$.
Указание. Первое утверждение следует из равенства $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ на S . Второе легко доказывается по индукции.

Пусть H_n означает ортогональное дополнение к P_{n-2} в P_n .

Теорема 3. Разложения пространств $L^2(S)$ и $L_+^2(S)$ на неприводимые (относительно группы $SO(3)$) подпространства имеют вид

$$L^2(S) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n, \quad L_+^2(S) = \sum_{k=0}^{\infty} H_{2k}.$$

Доказательство. Прежде всего, ясно, что H_n — инвариантные подпространства и что алгебраическая сумма этих пространств совпадает с объединением пространств P_n . По теореме Стоуна — Вейерштрасса (см. п. 4.2) последнее пространство плотно в $C(S)$ и, следовательно, в $L^2(S)$. Поэтому гильбертова сумма H_n совпадает с $L^2(S)$. Ясно также, что $H_n \subset L_+^2(S)$ тогда и только тогда, когда n четно. Для доказательства теоремы остается проверить неприводимость H_n .

Задача 5. Докажите, что в H_n есть ровно одна (с точностью до множителя) функция, инвариантная относительно подгруппы вращений вокруг оси z .

Указание. Докажите, что в P_n имеется $[n/2] + 1$ линейно независимых функций, инвариантных относительно указанной подгруппы, а именно, z^n , $z^{n-2}(x^2 + y^2)$, ..., $z^{n-2[n/2]}(x^2 + y^2)^{[n/2]}$.

Задача 6. Докажите, что в каждом неприводимом подпространстве $V \subset L^2(S)$ есть хотя бы одна функция, инвариантная относительно вращений вокруг оси z .

Указание. Воспользуйтесь теоремой двойственности Фробениуса из п. 13.5.

Неприводимость H_n следует очевидно из утверждений задач 5 и 6.

Нам остается найти собственные значения оператора J в пространствах H_n . Для этого укажем явный вид той функции $L_n \in H_n$, которая не меняется при вращениях вокруг оси z .

Задача 7. Докажите, что в качестве L_n можно взять функцию

$$L_n(z) = \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n] \quad (6)$$

(так называемый n -й полином Лежандра).

Указание. Проверьте, что для функций S , зависящих только от координаты z , справедливо равенство

$$\int_S f(x) dx = 2\pi \int_{-1}^1 f(z) dz.$$

Убедитесь с помощью интегрирования по частям, что L_n ортогонально всем полиномам от z степени, меньшей n , относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^1 f_1(z) \overline{f_2(z)} dz.$$

Наконец, покажите, что L_n определяется этим свойством с точностью до постоянного множителя.

Пусть λ_n — собственное значение оператора J в H_n . Подставляя в формулу (5) полином L_n в качестве f и точку $(0, 0, 1)$ в качестве x , получаем

$$\lambda_n L_n(1) = 2\pi L_n(0).$$

Значения $L_n(1)$ и $L_n(0)$ легко вычисляются:

$$L_n(1) = \frac{d^n}{dz^n} [(z-1)^n (z+1)^n] \big|_{z=1} = n! (z+1)^n \big|_{z=1} = 2^n \cdot n!,$$

$$L_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ (2k)! C_{2k}^k, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Отсюда

$$\lambda_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 2\pi \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

17.2. Представления классических компактных групп Ли. Классические компактные группы Ли — это группы изометрических преобразований конечномерного гильбертова пространства V над $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$, т. е. группы $O(n)$, $U(n)$ и $Sp(n)$ (см. п. 5.1, где эти группы обозначены $O(n, 0)$, $U(n, 0)$ и $Sp(n, 0)$ соответственно).

Топологическое строение этих групп можно исследовать, опираясь на одно простое соображение.

Задача 1. Пусть G_n — одна из групп $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$. Докажите, что G_n транзитивно действует на единичной сфере S соответствующего пространства V , а стационарная подгруппа некоторой точки $s_0 \in S$ изоморфна G_{n-1} .

Мы предоставим читателю самостоятельно проверить следующие факты.

Задача 2. Докажите, что группы $U(n)$ и $Sp(n)$ связны, а $O(n)$ состоит из двух компонент, одной из которых является группа $SO(n)$. Фундаментальная группа $SO(n)$ изоморфна $\mathbf{Z}$ при $n=2$ и $\mathbf{Z}_2$ при $n>2$. Фундаментальная группа $U(n)$ изоморфна $\mathbf{Z}$. Группа $Sp(n)$ односвязна.

Покажем, что все неприводимые представления группы G_n реализуются в тензорах над пространством V .

Более точная формулировка этого утверждения такова. Пусть W означает комплексное линейное пространство, которое либо

является комплексификацией V (если V вещественно) либо совпадает с V (если V комплексно), либо получается из V ограничением поля скаляров (если V — кватернионное пространство). Обозначим через $T^{k,l}(W)$ пространство смешанных тензоров ранга (k, l) над W (см. п. 3.5) и через $\rho^{k,l}$ представление группы G_n , возникающее в $T^{k,l}(W)$.

Теорема 1. Среди неприводимых компонент представлений $\rho^{k,l}$ встречаются все неприводимые представления группы G_n .

Доказательство. Пусть $A^{k,l}(G)$ — подпространство в $C(G_n)$, порожденное всеми матричными элементами представления $\rho^{k,l}$ и $A(G) = \sum_{k,l} A^{k,l}(G)$.

Задача 3. Докажите, что $A(G)$ — подалгебра в $C(G_n)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $\rho^{k_1, l_1} \otimes \rho^{k_2, l_2} \approx \rho^{k_1+k_2, l_1+l_2}$, и докажите, что $A^{k_1, l_1} A^{k_2, l_2} \subset A^{k_1+k_2, l_1+l_2}$.

Задача 4. Докажите, что алгебра A инвариантна относительно комплексного сопряжения.

Указание. Воспользуйтесь соотношением $(\rho^{k,l})^* \approx \rho^{l,k}$ и выведите из него, что $\overline{A^{k,l}} = A^{l,k}$.

Заметим еще, что по самому определению пространства $A^{1,0}$ функции из этого пространства разделяют точки группы G_n . По теореме Стоуна—Вейерштрасса (см. п. 4.2) отсюда и из утверждений задач 3 и 4 следует, что алгебра $A(G)$ всюду плотна в $C(G_n)$. Пусть теперь ρ — любое неприводимое представление группы G_n . Если бы ρ не встречалось в разложении представлений $\rho^{k,l}$ на неприводимые компоненты, то, в силу соотношений ортогональности из п. 9.2, матричные элементы представления ρ были бы ортогональны всем функциям из $A(G_n)$. Но это невозможно, так как $A(G_n)$ плотно в $C(G_n)$ и, следовательно, в $L^2(G_n, dg)$. Теорема доказана.

Итак, для классификации всех неприводимых представлений группы G_n достаточно знать разложение на неприводимые компоненты представлений $\rho^{k,l}$. Эта довольно трудная задача была явно решена Г. Вейлем (см. [11]). Основной результат можно на современном языке сформулировать так.

Теорема 2 (Г. Вейль). Пусть ρ — представление группы G_n в пространстве $\mathcal{T} = \sum_{k,l} T^{k,l}(W)$. Алгебра $\mathcal{V}(\rho, \rho)$ сплетающих операторов для этого представления порождается:

- 1) операторами перестановок индексов (отдельно ковариантных и контравариантных),
- 2) операторами умножения на инвариантные тензоры,
- 3) операторами свертки (по одному ковариантному и одному контравариантному индексу).

Мы не будем здесь выводить из теоремы 2 полную классификацию неприводимых представлений G_n . Отметим, что эта классификация может быть получена многими другими способами (см. [27], [40] и [45]).

В качестве полезного упражнения предоставим читателю доказательство следующего частного случая общей классификационной теоремы.

Теорема 3. Пусть ρ_k — представление группы $U(n)$ в кососимметрических тензорах ранга k ($k=1, 2, \dots, n$). Докажите, что кольцо Гротендика группы $U(n)$ (см. определение этого кольца в п. 7.1) изоморфно

$$\mathbb{Z}[\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \rho_n, \rho_n^{-1}].$$

(Представление ρ_n одномерно, поэтому ρ_n^{-1} имеет смысл и совпадает с ρ_n^* .)

17.3. Спинорные представления ортогональной группы. Группы $SO(n, K)$ для $K=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ не являются односвязными. Известно, что при $n \geq 3$ их фундаментальные группы изоморфны $\mathbb{Z}_2$. Односвязная накрывающая группы $SO(n, K)$ обозначается $\text{Spin}(n, K)$ и называется спинорной группой. Таким образом, имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}(n, K) \rightarrow SO(n, K) \rightarrow 1. \quad (1)$$

Каждое линейное представление группы $SO(n, K)$ порождает представление $\text{Spin}(n, K)$. Однако у группы $\text{Spin}(n, K)$ есть и другие представления, которые не получаются таким способом. Эти представления можно рассматривать как двузначные (т. е. проективные с мультипликатором, принимающим значения ± 1) представления $SO(n, K)$.

Простейшее из таких представлений имеет размерность $2^{[n/2]}$. Оно неприводимо, если n нечетно, и является суммой двух неэквивалентных компонент одинаковой размерности, если n четно.

Опишем здесь явную конструкцию этого представления. Пусть C_k — комплексная алгебра Клиффорда с n образующими $e_1, \dots, e_k$ и соотношениями (ср. п. 3.5)

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad e_i^2 = 1. \quad (2)$$

Задача 1. Докажите, что

$$C_{2k} \approx \text{Mat}_{2k}(\mathbb{C}), \quad C_{2k+1} \approx \text{Mat}_{2k}(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_{2k}(\mathbb{C}).$$

Указание. Воспользуйтесь методом решения задачи 8 из п. 3.5 и докажите, что

$$C_{k+2} = C_k \otimes_{\mathbb{C}} C_2, \quad C_0 = \mathbb{C}, \quad C_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

Задача 2. Докажите, что центр алгебры C_{2k+1} порождается элементами 1 и $e = e_1 e_2 \dots e_{2k+1}$.

Указание. Рассмотрите коммутаторы одночлена $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ с образующими $e_1, \dots, e_n$.

Пусть теперь $A \in SO(n, \mathbb{C})$. Преобразование

$$e_i \rightarrow \sum_j a_{ij} e_j, \quad \|a_{ij}\| = A \quad (3)$$

не нарушает соотношений (2) и поэтому определяет автоморфизм $\varphi(A)$ алгебры C_n .

Задача 3. Докажите, что автоморфизмы $\varphi(A)$, $A \in SO(n, \mathbb{C})$ сохраняют элементы центра C_n .

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 2 и тем, что $\det A = 1$ для $A \in SO(n, \mathbb{C})$.

Из утверждения задачи 3 вытекает, что для $n = 2k + 1$ автоморфизм $\varphi(A)$ задается некоторым автоморфизмом матричной алгебры $\text{Mat}_{2k}(\mathbb{C})$.

Итак, мы можем при любом n рассматривать $\varphi(A)$ как автоморфизм полной матричной алгебры над $\mathbb{C}$ порядка $2^{[n/2]}$.

Как мы знаем (ср. п. 14.1), всякий автоморфизм $\text{Mat}_k(\mathbb{C})$ является внутренним. Таким образом,

$$\varphi(A)(X) = \rho(A) X \rho(A)^{-1} \quad (4)$$

для некоторой матрицы $\rho(A) \in \text{Mat}_{2^{[n/2]}(\mathbb{C})}$.

Ясно, что соответствие $A \mapsto \rho(A)$ является проективным представлением группы $SO(n, \mathbb{C})$. Это и есть нужное нам представление. Покажем сейчас, что это представление можно сделать двузначным, т. е. выбрать $\rho(A)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\rho(A_1) \rho(A_2) = \pm \rho(A_1 A_2).$$

Для этого воспользуемся результатами п. 14.3. Так как группа $SO(n, \mathbb{C})$ полупроста, представление ρ получается из линейного представления $\bar{\rho}$ накрывающей группы $\text{Spin}(n, \mathbb{C})$. Соответствующее представление $\bar{\rho}_*$ ($= \rho_*$) алгебры Ли легко вычисляется.

Задача 4. Пусть $A \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ — кососимметрическая комплексная матрица. Тогда

$$\rho_*(A) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} e_i e_j \quad (5)$$

Указание. Сравните действие обеих частей равенства (5) на образующие $e_1, \dots, e_n$.

Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ переходит при представлении ρ_* в подпространство $C_n^{(2)}$ однородных элементов степени 2 в C_n . При надлежащем выборе отождествления C_n

с матричной алгеброй это пространство содержится в $\mathfrak{so}(2^{[n/2]}, \mathbb{C})$. Соответствующая подгруппа в $SO(2^{[n/2]}, \mathbb{C})$ — это и есть $\text{Spin}(n, \mathbb{C})$.

Эту группу можно также охарактеризовать как связную компоненту подгруппы $\Gamma \subset SO(2^{[n/2]}, \mathbb{C})$, сохраняющей подпространство, порожденное $e_1, \dots, e_n$, при действии внутренними автоморфизмами.

Используя формулу (5), легко проверить, что замкнутая однопараметрическая подгруппа в $SO(n, \mathbb{C})$, соответствующая полному повороту в двумерной плоскости, переходит при представлении $\bar{\rho} = \exp \rho_*$ в незамкнутую кривую, соединяющую точки 1 и -1 . Значит, представление $\bar{\rho}$ двузначно на $SO(n, \mathbb{C})$.

Рассмотрим теперь вопрос о приводимости представления ρ .

Задача 5. Докажите, что централизатор подпространства $C_n^{(2)}$ в C_n порождается элементами 1 и $e_1 e_2 \dots e_n$.

Таким образом, для нечетного n представление ρ неприводимо, так как всякий оператор, перестановочный с операторами из образа алгебры Ли, принадлежит центру C_n и скалярен в каждом из двух эквивалентных подпространств алгебры $C_n = \text{Mat}_2^{[n/2]}(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_2^{[n/2]}(\mathbb{C})$.

В случае четного n элемент $e_1 e_2 \dots e_{2n}$ является нетривиальным сплетающим оператором для представления ρ . Поэтому ρ является суммой двух подпредставлений ρ_+ и ρ_- .

Задача 6. Докажите, что представления ρ_+ и ρ_- не эквивалентны и имеют одинаковую размерность.

Указание. Воспользуйтесь соотношением $c(\rho, \rho) = 2$ и равенством $(e_1 e_2 \dots e_{2n})^2 = (-1)^n$.

Задача 7. Докажите, что ограничение спинорного представления ρ группы $\text{Spin}(2n+1, \mathbb{C})$ на подгруппу $\text{Spin}(2n, \mathbb{C})$ эквивалентно $\rho_+ + \rho_-$, а ограничение каждого из представлений $\rho_{\pm}$ на $\text{Spin}(2n-1, \mathbb{C})$ неприводимо и эквивалентно спинорному представлению этой группы.

Указание. Вычислите соответствующее число сплетения и сравните структуры алгебр C_{2n+1} , C_{2n} и C_{2n-1} .

Аналогичные, но более громоздкие рассуждения можно провести для случая $K = \mathbb{R}$. Тип соответствующих алгебр Клиффорда зависит от вычета числа n по модулю 8. От этого же вычета зависят и свойства спинорных представлений.

Мы предоставим читателю доказать следующие утверждения.

Задача 8. Спинорное представление ρ группы $\text{Spin}(2k+1, \mathbb{R})$ принадлежит вещественному типу при $k \equiv 0, 3 \pmod{4}$ и кватернионному типу, если $k \equiv 1, 2 \pmod{4}$.

Полуспинорные представления ρ_+ и ρ_- группы $\text{Spin}(2k, \mathbb{R})$ комплексно сопряжены друг другу при $k \equiv 1 \pmod{2}$, вещественны при $k \equiv 0 \pmod{4}$ и принадлежат кватернионному типу при $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Эти два представления дуальны друг другу при нечетном k и самодуальны при четном k .

§ 18. ГРУППЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ ЛИ

18.1. Представления простой трехмерной алгебры Ли. Как мы уже отмечали в п. 6.2, существуют ровно две простые вещественные алгебры Ли размерности 3. Это алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ вещественных матриц второго порядка с нулевым следом и алгебра $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ вещественных кососимметрических матриц третьего порядка.

Мы получим в этом пункте классификацию всех конечномерных неприводимых представлений алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ над полем $\mathbb{C}$.

Каждое такое представление продолжается по линейности до представления комплексной оболочки соответствующей алгебры Ли.

Задача 1. Докажите, что комплексные оболочки алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ изоморфны.

Указание. Искомый изоморфизм $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b-c & -i(b+c) \\ c-b & 0 & 2ia \\ i(b+c) & -2ia & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, достаточно изучить неприводимые представления алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \approx \mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$.

Выберем в $\mathfrak{g}$ базис (над $\mathbb{C}$):

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коммутационные соотношения между базисными векторами имеют вид

$$[X_0, X_{\pm}] = \pm 2X_{\pm}, \quad [X_+, X_-] = X_0. \quad (1)$$

Пусть T — конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве V . Тогда оператор $T(X_0)$ имеет в V хотя бы один собственный вектор ξ с собственным значением λ :

$$T(X_0)\xi = \lambda\xi. \quad (2)$$

Мы будем называть такой вектор ξ *весовым вектором* веса λ .

Задача 2. Докажите, что если ξ — вектор веса λ , то $T(X_{\pm})\xi$ — либо нулевой вектор, либо вектор веса $\lambda \pm 2$.

Указание. Воспользуйтесь соотношениями (1).

Так как пространство V конечномерно, оно содержит весовой вектор ξ наибольшего веса λ (мы упорядочиваем веса по их вещественной части; как мы увидим вскоре, на самом деле все веса конечномерных представлений вещественны). Этот вектор удовлетворяет, кроме условия (2), еще и условию

$$T(X_+)\xi = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим последовательность векторов

$$\xi_0 = \xi, \quad \xi_1 = T(X_-)\xi_0, \quad \xi_2 = T(X_-)\xi_1, \dots$$

В силу задачи 2 все ненулевые векторы этой последовательности являются весовыми векторами с различными весами. Поэтому они линейно независимы. Это значит, что лишь конечное число членов последовательности отлично от нуля.

Пусть ξ_n — последний ненулевой вектор в этой последовательности.

Задача 3. Пространство, порожденное векторами $\xi_0, \dots, \xi_n$, инвариантно относительно операторов представления и неприводимо.

Указание. Пользуясь соотношением $T(X_-)\xi_k = \xi_{k+1}$, $T(X_0)\xi_k = (\lambda - 2k)\xi_k$, докажите по индукции, что

$$T(X_+)\xi_k = k(\lambda - k + 1)\xi_{k-1}.$$

Задача 4. Докажите, что параметр λ совпадает с числом n .

Указание. Воспользуйтесь равенством $\text{tr } T(X_0) = \text{tr } T(X_+X_- - X_-X_+) = \text{tr } [T(X_+), T(X_-)] = 0$.

Итак, доказана

Теорема 1. Существует ровно одно неприводимое представление T_n алгебры $\mathfrak{g}$ размерности $n+1$ для каждого целого неотрицательного n . В базисе из весовых векторов операторы представления имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} T(X_-)\xi_k &= \xi_{k+1}, \\ T(X_0)\xi_k &= (n - 2k)\xi_k, \\ T(X_+)\xi_k &= k(n - k + 1)\xi_{k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отметим полезное

Следствие. В каждом неприводимом представлении T есть ровно один (с точностью до множителя) вектор ξ , аннулируемый оператором $T(X_+)$. Этот вектор — весовой, и вес его равен $\dim T - 1$.

В силу результатов пп. 6.3 и 6.4 о связи между представлениями групп и алгебр теорема 1 дает также классификацию неприводимых конечномерных представлений групп Ли $SL(2, \mathbf{R})$, $\widetilde{SO}(3, \mathbf{R}) = SU(2)$ и аналитических представлений комплексной группы Ли $SL(2, \mathbf{C})$.

Задача 5. Пусть P_n — пространство однородных многочленов n -й степени от двух переменных p и q . Определим действие группы $SL(2, \mathbf{C})$ в P_n формулой

$$\left[T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f \right] (p, q) = f(ap + cq, bp + dq).$$

Докажите, что соответствующее представление T_* алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ эквивалентно T_n .

У к а з а н и е. Операторы представления $\mathfrak{g}$ задаются формулами:

$$T_*(X_+) = p \frac{\partial}{\partial q}, \quad T^*(X_0) = p \frac{\partial}{\partial p} - q \frac{\partial}{\partial q}, \quad T_*(X_-) = q \frac{\partial}{\partial p}.$$

Изоморфизм между V_n и P_n имеет вид

$$\xi_k \leftrightarrow n(n-1) \dots (n-k+1) p^{n-k} q^k,$$

где $\{\xi_k\}$ — определенный выше базис в V_n .

18.2. Алгебра Вейля и разложение тензорных произведений.
Алгеброй Вейля $A_n(K)$ называют алгебру с единицей над полем K , порожденную образующими

$$p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$$

и соотношениями

$$p_i p_j = p_j p_i, \quad q_i q_j = q_j q_i, \quad p_i q_j - q_j p_i = \delta_{ij} \cdot 1. \quad (1)$$

Эта алгебра является частным случаем определенной в п. 3.5 алгебры $R_{n,k}(K)$, а именно, $A_n(K) = R_{n,0}(K)$.

Покажем здесь, что вычисления с помощью алгебры $A_1(K)$ позволяют дать явные формулы для разложения на неприводимые компоненты тензорного произведения двух неприводимых представлений группы $SL(2, K)$. Каждый элемент алгебры $A_1(K)$ можно записать в виде (некоммутативного) многочлена от переменных p и q с коэффициентами из K . Эта запись неоднозначна. Например, элемент pq можно записать и в виде $qp + 1$ и в виде $(pq)^2 - qp^2q$ и т. д. Можно предложить три естественных способа сделать эту запись однозначной:

- а) левая запись: $f = \sum c_{kl} p^k q^l$,
- б) правая запись: $f = \sum c_{kl} q^l p^k$,
- в) симметрическая запись: $f = \sum c_{kl} \sigma(p^k q^l)$, где σ означает симметрическое произведение

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} x_{s(1)} \dots x_{s(n)}.$$

Каждый из этих способов отождествляет пространство (не алгебру!) A_1 с пространством $K[p, q]$ всех (коммутативных) многочленов от p, q с коэффициентами из K (для поля нулевой характеристики).

Переход от одной записи к другой задает автоморфизм пространства $K[p, q]$. Явный вид этих автоморфизмов дает

Теорема 1. *Переход от левой записи к симметрической и от симметрической к правой порождает в $K[p, q]$ автоморфизм*

$$e^{\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p \partial q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{i! 2^i} \frac{\partial^{2i}}{\partial p^i \partial q^i}.$$

Доказательство проводится по индукции, с использованием тождества

$$\sigma(p^k q^l) = \frac{k}{k+l} p \sigma(p^{k-1} q^l) + \frac{l}{k+l} q \sigma(p^k q^{l-1}). \quad (2)$$

Было бы интересно найти более короткое и прямое доказательство. (Полезно, например, использовать реализацию алгебры $A_1(\mathbb{R})$ в виде кольца дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами на вещественной прямой.)

Пусть матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ принадлежит $SL(2, K)$.

Тогда преобразование

$$\begin{cases} p \mapsto ap + bq, \\ q \mapsto cp + dq \end{cases} \quad (3)$$

сохраняет соотношения (1) и, следовательно, продолжается до автоморфизма $A_1(K)$. Кроме того, это преобразование естественно продолжается до автоморфизма $K[p, q]$.

Задача 1. Докажите, что изоморфизм σ между $K[p, q]$ и $A_1(K)$ перестановочен с действием группы $SL(2, K)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $K[p, q]$ порождается (как линейное пространство) элементами вида $(p + \lambda q)^k$ и проверьте тождество

$$\sigma((p + \lambda q)^k) = (p + \lambda q)^k \quad \text{в } A_1(K),$$

сравнив коэффициенты при одинаковых степенях λ . Ср. также задачу 8 из п. 10.4.

Как мы видели в п. 18.1, представление $SL(2, K)$ в пространстве $K[p, q]$ распадается в прямую сумму неприводимых конечномерных представлений. В этом разложении встречаются по одному разу все неприводимые конечномерные представления группы $SL(2, K)$. Неприводимые подпространства $\tilde{V}_n$ состоят из однородных полиномов степени n . Размерность $\tilde{V}_n$ равна $n + 1$. Пусть V_n — образ $\tilde{V}_n$ в $A_1(K)$ при отображении σ и T_n — представление $SL(2, K)$ в V_n .

Обозначим $V_n \cdot V_m$ подпространство в $A_1(K)$, порожденное произведениями xy , $x \in V_n$, $y \in V_m$.

Теорема 2. *Отображение произведения:*

$$x \otimes y \mapsto xy$$

продолжается по линейности до изоморфизма $V_n \otimes V_m$ на $V_n \cdot V_m$. Пространство $V_n \cdot V_m$ является прямой суммой подпространств вида V_{n+m-2k} , $k = 0, 1, \dots, \min(m, n)$.

Доказательство. Рассмотрим произведение элементов $p^n \in V_n$ и $q^m \in V_m$. В силу теоремы 1

$$\begin{aligned} p^n q^m &= \sum_i \frac{1}{2^{|I|}} \sigma \left(\frac{\partial^{2I}}{\partial p^I \partial q^I} p^n q^m \right) = \\ &= \sigma(p^n q^m) + \frac{nm}{2} \sigma(p^{n-1} q^{m-1}) + \frac{n(n-1)m(m-1)}{8} \sigma(p^{n-2} q^{m-2}) + \dots \end{aligned}$$

Но элемент $\sigma(p^{n-k} q^{m-k})$ принадлежит V_{n+m-2k} . Поэтому пространство $V_n V_m$ содержит все подпространства вида V_{n+m-2k} , $k=0, 1, \dots, \min(m, n)$. Сумма размерностей этих подпространств равна

$$\sum_{k=0}^{\min(m, n)} (n+m-2k+1) = (m+1)(n+1),$$

т. е. размерности $V_n \otimes V_m$. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 позволяют дать явное выражение для разложения тензорного произведения двух неприводимых представлений группы $SL(2, K)$. Необходимые для этого вычисления состоят в нахождении симметрической записи произведения двух элементов, записанных в симметрической форме.

Описанный здесь метод можно применить для изучения тензорных произведений неприводимых представлений симплектической группы $Sp(2n, K)$. Эта группа естественно действует как группа автоморфизмов алгебры Вейля $A_n(K)$. Пусть P_k — пространство однородных многочленов k -й степени от переменных $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ и $V_k = \sigma(P_k) \subset A_n(K)$. Можно проверить, что пространство V_k неприводимо и имеет место аналог теоремы 2.

Однако, в отличие от случая $n=1$, таким способом получаются далеко не все неприводимые представления группы $Sp(2n, K)$. Было бы очень интересно так обобщить предложенный здесь метод, чтобы он охватывал и другие представления этой группы.

18.3. Структура обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Мы дадим в этом пункте описание двусторонних идеалов обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ для алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Нам будет удобно использовать базис

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ -i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -i/2 & 0 \\ 0 & i/2 \end{pmatrix},$$

связанный с базисом X_+, X_-, X_0 , введенным в п. 18.1, соотношениями

$$X_+ = (X + iY), \quad -X_- = (X - iY), \quad X_0 = 2iZ.$$

Элементы X, Y, Z порождают $U(\mathfrak{g})$ и удовлетворяют соотношениям

$$XY - YX = Z, \quad YZ - ZY = X, \quad ZX - XZ = Y. \quad (1)$$

Напомним, что симметрическая запись устанавливает изоморфизм σ между пространством $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ всех многочленов от переменных X, Y, Z и пространством $U(\mathfrak{g})$, причем этот изоморфизм перестановочен с действием присоединенной группы (см. задачу 8 из п. 10.4).

В нашем случае присоединенная группа — это группа $SO(3, \mathbb{C})$, а присоединенное представление — хорошо известный гомоморфизм $SL(2, \mathbb{C})$ на $SO(3, \mathbb{C})$ (соответствующее отображение $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ на $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ описано в п. 18.1).

Задача 1. Докажите, что всякий многочлен $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$, инвариантный относительно $SO(3, \mathbb{C})$, имеет вид $f(R)$, где

$$R = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Указание. Группа $SO(3, \mathbb{C})$ транзитивно действует на сферах $X^2 + Y^2 + Z^2 = \text{const} \neq 0$.

В силу теоремы 2 из п. 10.4 отсюда следует, что центр $Z(\mathfrak{g})$ алгебры $U(\mathfrak{g})$ порождается элементом $\sigma(R)$.

Отметим, что ограничение σ на $\mathbb{C}[R]$ не является изоморфизмом алгебр $\mathbb{C}[R]$ и $Z(\mathfrak{g})$ (хотя эти алгебры изоморфны). Например, можно проверить, что

$$\sigma(R^2) = [\sigma(R)]^2 - \frac{1}{3} \sigma(R).$$

Для наших целей нужно знать явный вид инвариантных подпространств для группы $SO(3, \mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{C}[X, Y, Z]$.

Чтобы описать этот вид, введем пространство H_n однородных гармонических многочленов степени n , т. е. многочленов P , удовлетворяющих условию

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} = 0. \quad (2)$$

Задача 2. Докажите, что H_n инвариантно и неприводимо относительно группы $SO(3, \mathbb{C})$ и что соответствующее представление T алгебры Ли эквивалентно T_{2n} в обозначениях п. 18.1.

Указание. Докажите, что оператор Δ перестановочен с действием группы $SO(3, \mathbb{C})$ и что X_+^n — единственный с точностью до множителя элемент H_n , аннулируемый оператором

$$T(X_+) = -2X_+ \frac{\partial}{\partial X_0} + X_0 \frac{\partial}{\partial X_-}.$$

Задача 3. Докажите, что всякое неприводимое подпространство H в $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ имеет вид

$$H = f(R) H_n.$$

Указание. Используя явный вид однопараметрической подгруппы $S_t = e^{tT}(X_+)$, докажите, что всякий элемент $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$, инвариантный относительно S_t , является многочленом от X_+ и R . Воспользуйтесь также тем, что X_+ имеет вес 2, а R — вес 0.

Задача 4. Докажите, что всякое неприводимое относительно присоединенной группы подпространство в $U(\mathfrak{g})$ имеет вид

$$\sigma(f(R))\sigma(H_n) \quad (3)$$

для некоторого $f \in \mathbb{C}[R]$ и некоторого целого $n \geq 0$.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 3.

Пусть теперь I — двусторонний идеал в $U(\mathfrak{g})$. Тогда он инвариантен относительно операции коммутирования с элементами из $\mathfrak{g}$ и, следовательно, относительно действия присоединенной группы. Поэтому I является прямой суммой подпространств вида (3) и, следовательно, может быть записан в виде

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \sigma(H_n), \quad (4)$$

где I_n — некоторое подпространство в $Z(\mathfrak{g})$.

Так как I — идеал, ясно, что все I_n — идеалы в $Z(\mathfrak{g})$. Но в кольце многочленов от одной переменной всякий идеал — главный. Поэтому $I_n = f_n(\sigma(R))Z(\mathfrak{g})$ для некоторого многочлена f_n , определенного с точностью до постоянного множителя.

Итак, *всякий двусторонний идеал $I \subset U(\mathfrak{g})$ может быть охарактеризован набором многочленов f_n от одной переменной.*

Задача 5. Докажите, что $I_n \subset I_{n+1}$ и, следовательно, f_n делится на f_{n+1} .

Указание. Воспользуйтесь инвариантностью I относительно умножения на $\sigma(X_+)$ и тем фактом, что $X_+^n \in H_n$.

Покажем теперь, что отношение f_n/f_{n+1} также не произвольно. Для этого изучим подробнее пространство $\sigma(H_n)\sigma(H_1)$, порожденное произведениями элементов из $\sigma(H_n)$ на элементы из $\sigma(H_1)$. Из результатов п. 18.2 следует, что представление алгебры $\mathfrak{g}$ в $\sigma(H_n)\sigma(H_1)$ может содержать только компоненты T_{2n+2} , T_{2n} и T_{2n-2} .

Соответствующие представления в силу задачи 4 реализуются в пространствах $\sigma(f(R))\sigma(H_{n+1})$, $\sigma(g(R))\sigma(H_n)$ и $\sigma(h(R))\sigma(H_{n-1})$ соответственно. Рассмотрение старших членов немедленно дает, что многочлены f и g имеют нулевую степень (т. е. являются константами), а многочлен h — не выше первой степени.

Итак,

$$\sigma(H_n)\sigma(H_1) \subset \sigma(H_{n+1}) + \sigma(H_n) + (\alpha_n\sigma(R) + \beta_n)\sigma(H_{n-1}).$$

Найдем явный вид разложения элемента $X_+^n X_- \in \sigma(H_n)\sigma(H_1)$. Так как этот элемент имеет вес $2n-2$, то его компонента в $\sigma(H_{n+1})$ пропорциональна $(a dX_-)^2 X_+^{n+1}$, компонента в $\sigma(H_n)$ пропорциональна $a dX_- \cdot X_+^n$, а последняя компонента имеет вид $(\alpha_n\sigma(R) + \beta_n)X_+^{n-1}$.

Используя соотношения коммутации между X_+ , X_- и X_0 , легко подсчитать, что

$$(a dX_-)^2 X_+^{n+1} = -(n+1)[2X_+^n X_- - nX_+^{n-1}(X_0 + n)(X_0 + n - 1)],$$

$$(a dX_-) X_+^n = -nX_+^{n-1}(X_0 + n - 1),$$

$$(\alpha_n \sigma(R) + \beta_n) X_+^{n-1} = 4\alpha_n X_+^n X_- + X_+^{n-1} [\alpha_n X_0 (2 - X_0) + \beta_n].$$

Отсюда коэффициенты α_n и β_n находятся без труда и оказываются равными

$$\alpha_n = \frac{n}{4n-2}, \quad \beta_n = \frac{n^3 - n}{4n-2}.$$

Полученный результат имеет важное следствие.

Задача 6. Докажите, что идеал I_{n-1} содержит $[\sigma(R) + n^2 - 1] I_n$.

Указание. Если $f \in I_n$, то $f(\sigma(R)) X_+^n X_- \in I$ и, следовательно, $f(\sigma(R)) (\alpha_n \sigma(R) + \beta_n) \in I_{n-1}$.

Таким образом, если $\{f_n\}$ — набор многочленов, характеризующий идеал I , то отношение f_{n-1}/f_n является делителем одночлена $\sigma(R) + n^2 - 1$.

Задача 7. Докажите, что полученное условие не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы последовательность $\{f_n\}$ соответствовала некоторому идеалу $I \subset U(\mathfrak{g})$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что алгебра $U(\mathfrak{g})$ порождается пространством $\sigma(H_1)$.

Рассмотрим несколько подробнее наборы $\{f_n\}$, удовлетворяющие найденному нами условию.

Нормируем многочлены f_n условием, что старший коэффициент равен 1. Тогда ясно, что последовательность $\{f_n\}$ стабилизируется: начиная с некоторого N , будем иметь $f_N = f_{N+1} = f_{N+2} = \dots$. Обозначим в этом случае f_N через f_∞ . Чтобы восстановить всю последовательность $\{f_n\}$, достаточно, кроме f_∞ , задать подмножество S натурального ряда, состоящее из тех чисел n , для которых $f_n \neq f_{n-1}$. Тогда

$$f_n(x) = f_\infty(x) \prod_{\substack{k \in S \\ k \geq n}} [x + k(k+2)].$$

Интересно сравнить структуру идеалов в $U(\mathfrak{g})$ со структурой идеалов в $Z(\mathfrak{g})$. Каждый идеал $I \subset U(\mathfrak{g})$ в пересечении с $Z(\mathfrak{g})$ дает идеал I_0 , порождаемый многочленом

$$f_0(\sigma(R)) = f_\infty(\sigma(R)) \prod_{k \in S} [\sigma(R) + k(k+2)].$$

Если f_0 не имеет корней вида

$$-k(k+2), \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

то I однозначно определяется по I_0 , а именно, $I = I_0 U(\mathfrak{g})$. В противном случае имеется несколько идеалов $I \subset U(\mathfrak{g})$, имеющих данное пересечение I_0 с $Z(\mathfrak{g})$. Число таких идеалов равно 2^m , где m — число корней f_0 вида (3).

В частности, простым идеалам $Z(\mathfrak{g})$, для которых $f_0(x) = x - \lambda$, соответствует либо один идеал в $U(\mathfrak{g})$, либо два.

Очень интересно было бы получить аналогичное описание структуры идеалов для обертывающих алгебр других алгебр Ли. См. по этому поводу [139], [148], [149].

18.4. Спинорные представления симплектической группы. Пусть $A_n(\mathbf{R})$ — алгебра Вейля, определенная в п. 18.2. Относительно операции $[x, y] = xy - yx$ она является бесконечномерной вещественной алгеброй Ли. Обозначим через σ изоморфизм $\mathbf{R}[p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n]$ на $A_n(\mathbf{R})$, задаваемый симметрической записью (см. п. 18.2).

Задача 1. Докажите, что если x и y — два многочлена от $p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n$ степени k и l соответственно, то $[x, y]$ — многочлен степени $\leq k + l - 2$.

Отсюда следует, что совокупность многочленов степени ≤ 2 от образующих $p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n$ является подалгеброй в $A_n(\mathbf{R})$. Мы обозначим эту подалгебру $\mathfrak{st}(n, \mathbf{R})$. Ясно также, что многочлены степени ≤ 1 образуют нильпотентный идеал $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{st}(n, \mathbf{R})$, а константы составляют центр $\mathfrak{z}$ этого идеала. Обозначим через $\mathfrak{m}$ подпространство, порожденное образующими, и через $\mathfrak{a}$ — подпространство симметрических однородных многочленов второй степени от образующих. Тогда легко проверить, что

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}, \quad [\mathfrak{a}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{z}.$$

Пусть $\tilde{St}(n, \mathbf{R})$ — связная односвязная группа Ли, соответствующая алгебре $\mathfrak{st}(n, \mathbf{R})$ (ср. стр. 261). Обозначим через A , N и Z подгруппы, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{z}$. Группа N называется обычно *гейзенберговой группой*.

Задача 2. Докажите, что N изоморфна группе матриц порядка $n+2$ следующего вида:

$$g(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a — n -мерный вектор-строка, b — n -мерный вектор-столбец, 1_n — единичная матрица порядка n .

Указание. Проверьте изоморфизм соответствующих алгебр Ли.

Задача 3. Докажите, что алгебра $\mathfrak{a}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{sp}(2n, \mathbf{R})$ симплектической группы $Sp(2n, \mathbf{R})$, а группа A изоморфна односвязной накрывающей группы $\tilde{Sp}(2n, \mathbf{R})$.

Указание. Рассмотрите присоединенное представление $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{m}$. Докажите, что $\tilde{St}(n, \mathbf{R}) = A \cdot N$ (полупрямое произведение).

Группа N имеет серию унитарных неприводимых представлений U_λ , $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Эти представления действуют в $L^2(\mathbf{R}^n)$ по формуле

$$U_\lambda(g(a, b, c))f(x) = e^{i\lambda(bx+c)}f(x+a). \quad (1)$$

Здесь для краткости мы пишем x вместо $x_1, \dots, x_n$, bx вместо $\sum_{j=1}^n b_j x_j$ и т. д.

Соответствующее представление алгебры Ли имеет вид

$$p_j \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad q_j \mapsto i\lambda x_j, \quad 1 \mapsto i\lambda. \quad (2)$$

Представление (2) можно продолжить до представления $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ по формулам

$$p_j p_k \mapsto \frac{1}{i\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}, \quad q_j p_k \mapsto x_j \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad q_j q_k \mapsto i\lambda x_j x_k. \quad (3)$$

Задача 4. Докажите, что полученное таким образом представление соответствует некоторому унитарному представлению T_λ группы $\tilde{St}(n, \mathbf{R})$.

Указание. Воспользуйтесь критерием Нелсона из п. 10.5.

Ограничение представления T_λ на группу A мы обозначим S_λ и назовем спинорным представлением.

Задача 5. Докажите, что представления S_λ и S_μ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\lambda\mu > 0$.

Указание. Рассмотрите преобразование пространства $L^2(\mathbf{R}^n)$, соответствующее подобному растяжению $\mathbf{R}^n$. Неэквивалентность S_λ и S_μ при $\lambda\mu < 0$ вытекает из рассмотрения спектра оператора, соответствующего элементу q^2 .

Задача 6. Докажите, что спинорные представления S_λ приводимы и распадаются на две неприводимые компоненты, действующие в подпространствах четных и нечетных функций соответственно.

Указание. Докажите, что пространство $\mathscr{S}(S_\lambda)$ порождается единичным оператором и оператором отражения в начале координат.

Рассмотрим подробнее случай $n=1$. Группа $Sp(2, \mathbf{R})$ изоморфна $SL(2, \mathbf{R})$. Каждая матрица из $SL(2, \mathbf{R})$ однозначно записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Поэтому топологически группа $SL(2, \mathbf{R})$ эквивалентна $\mathbf{T} \times \mathbf{R}^2$. Ее универсальная накрывающая гомеоморфна $\mathbf{R}^3$, а фундаментальная группа изоморфна $\mathbf{Z}$.

Задача 6. Проверьте, что изоморфизм между $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ и алгеброй $\mathfrak{a}$, порожденной элементами p^2 , q^2 и $pq + qp$ в $A_1(\mathbf{R})$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2} [a(pq + qp) + bq^2 - cp^2].$$

Указание. Воспользуйтесь соотношениями

$$[p^2, q^2] = 2(pq + qp), [pq, p^2] = -2p^2, [pq, q^2] = 2q^2.$$

Мы покажем сейчас, что спинорное представление S_λ не является однозначным представлением $SL(2, \mathbf{R})$, но становится однозначным уже на двулистном накрытии этой группы. Для этого мы рассмотрим элемент $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, отвечающий замкнутой одномерной подгруппе $SO(2, \mathbf{R}) \subset SL(2, \mathbf{R})$.

В алгебре $\mathfrak{a}$ этому элементу соответствует выражение $\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, которое в представлении $S_{\pm 1}$ переходит в оператор $\mp i(x^2 + d^2/dx^2)$.

Для исследования этого оператора удобно перейти от реализации представления в пространстве $L^2(\mathbf{R})$ к другой реализации в пространстве $H^2(\mathbf{C})$ голоморфных функций на $\mathbf{C}$, квадратично интегрируемых по мере $e^{-|z|^2} dx dy$ (где $z = x + iy$).

Задача 7. Докажите, что операторы z и d/dz сопряжены друг другу в $H^2(\mathbf{C})$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что многочлены от z плотны в $H^2(\mathbf{C})$, и формулой

$$\iint_{\mathbf{C}} |z|^{2k} e^{-|z|^2} dx dy = \pi k!$$

Представления алгебры $\mathfrak{n}$ в $H^2(\mathbf{C})$ задаются формулой

$$p \mapsto \frac{i}{\sqrt{2}} \left(z + \frac{d}{dz} \right), \quad q \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(z - \frac{d}{dz} \right), \quad 1 \mapsto i\lambda,$$

а соответствующее представление $\mathfrak{a}$ имеет вид

$$p^2 \mapsto \frac{i}{2\lambda} \left(z + \frac{d}{dz} \right)^2, \quad (pq + qp) \mapsto z^2 - \frac{d^2}{dz^2}, \quad q^2 \mapsto -\frac{i\lambda}{2} \left(z - \frac{d}{dz} \right)^2.$$

В частности, при $\lambda = \pm 1$ интересующий нас элемент переходит в оператор $\pm i \left(z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2} \right)$. Отсюда без труда вычисляется, что

$$\left[S_{\pm 1} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} f \right] (z) = e^{\pm i\varphi/2} f(ze^{\pm i\varphi}).$$

Таким образом, единичный оператор получается при $\varphi = 4k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, что и доказывает наше утверждение.

18.5. Представления треугольных матричных групп. Пусть $T(n, \mathbf{R})$ означает группу всех невырожденных вещественных треугольных матриц n -го порядка, у которых все элементы, стоящие под главной диагональю, равны нулю, а элементы на главной диагонали положительны. Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{t}(n, \mathbf{R})$ состоит из всех треугольных матриц.

Задача 1. Докажите, что группа $T(n, \mathbf{R})$ разрешима и экспоненциальна, т. е. отображение

$$\exp: t(n, \mathbf{R}) \rightarrow T(n, \mathbf{R})$$

является гомеоморфизмом.

Таким образом, к группе $T(n, \mathbf{R})$ применима теорема из п. 15.3 об однозначном соответствии между унитарными неприводимыми представлениями и орбитами в K -представлении.

Дадим здесь описание всех орбит максимальной размерности и конструкцию соответствующих представлений.

Воспользуемся указанным в п. 15.1 приемом. Пространство $t(n, \mathbf{R})^*$ мы реализуем в виде нижних треугольных матриц, а K -представление зададим формулой

$$K(g): F \mapsto (gFg^{-1})_{\text{ниж}}, \quad (1)$$

где индекс «ниж» означает, что нас интересует только нижняя треугольная часть полученной матрицы, а все элементы, стоящие выше диагонали, нужно заменить нулями.

Структура орбит в K -представлении несколько различна для четного и нечетного n .

Рассмотрим для определенности случай $n = 2k$. Матрицу $g \in T(2k, \mathbf{R})$ удобно записывать в виде

$$g = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $A, B \in T(k, \mathbf{R})$, $C \in \text{Mat}_k(\mathbf{R})$, а элемент $F \in t(2k, \mathbf{R})^*$ — в виде

$$F = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & Y \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $X, Y \in t(k, \mathbf{R})^*$, $Z \in \text{Mat}(k, \mathbf{R})$.

При этом способе записи K -представление выглядит так:

$$K(A, B, C): (X, Y, Z) \mapsto \left([(AXA^{-1} + CZA^{-1})]_{\text{ниж}}, [B(Y - ZA^{-1}C)B^{-1}]_{\text{ниж}}, BZA^{-1} \right). \quad (4)$$

Посмотрим сначала, что можно сделать преобразованиями (4) с матрицей Z .

Пусть J — матрица с единицами по второй диагонали и с нулями на остальных местах, а J_ε — матрица, получаемая из J заменой нескольких единиц на -1 .

Лемма. Почти любую матрицу $Z \in \text{Mat}_k(\mathbf{R})$ (кроме подмножества меньшей размерности) можно записать в виде $Z = BJ_\varepsilon A^{-1}$, где $A, B \in T(k, \mathbf{R})$.

Чтобы доказать это утверждение, можно рассмотреть линейное матричное уравнение $ZA = BJ_\varepsilon$ с неизвестными A и B и исследовать его совместность.

Можно также воспользоваться следующими геометрическими соображениями. Рассмотрим так называемое *многообразие ориентированных флагов* X .

Точкой этого пространства является набор ориентированных пространств $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{k-1} \subset V_k = \mathbb{R}^k$ таких, что $\dim V_k = k$.

Название «многообразие флагов» происходит от того, что в случае $k=3$ удобно представлять себе пару $V_1 \subset V_2$ как древко с насаженным на него полотнищем.

Задача 2. Проверьте, что группа $GL(k, \mathbb{R})$ транзитивно действует на X , и что стационарной подгруппой некоторой точки является $T(k, \mathbb{R})$.

Указание. Пусть $x_0 \in X$ — флаг $R_1^1 \subset R_2^2 \subset \dots \subset R_k^k$ со стандартными ориентациями. Если $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k$ — любой другой флаг x , то можно выбрать базис $e_1, \dots, e_k$ в R_k^k так, что $e_1, \dots, e_j$ — положительно ориентированный базис в V_j для всех j от 1 до k . Тогда преобразование от $e_1, \dots, e_k$ к стандартному базису переводит x в x_0 .

Пространство $Y = T(k, \mathbb{R}) \backslash GL(k, \mathbb{R})/T(k, \mathbb{R})$, как мы знаем (ср. п. 2.2), отождествляется с множеством $GL(k, \mathbb{R})$ -орбит в пространстве пар флагов. Сделанное выше утверждение равносильно тому, что это пространство содержит всюду плотное открытое подмножество из 2^k точек, соответствующих матрицам J_e .

Задача 3. Докажите, что пространство Y конечно и состоит из $2^k \cdot k!$ точек.

Указание. В качестве представителей двусторонних смежных классов можно взять матрицы перестановок базисных элементов и матрицы, которые получаются из них заменой нескольких единиц на -1 .

Вернемся теперь к изучению орбит. Выбирая подходящим образом преобразование (4), мы можем привести матрицу Z к виду J_e . Дальнейшие преобразования будем делать так, чтобы этот вид сохранялся.

Задача 4. Докажите, что если $A, B \in T(k, \mathbb{R})$ и $AJ_eB^{-1} = J_e$, то A и B — диагональные матрицы, которые получаются друг из друга отражением во второй диагонали.

Указание. Если A — верхняя треугольная матрица, то $J_eAJ_e^{-1}$ — нижняя треугольная матрица.

Далее, рассматривая преобразования (4) при $A=B=1_k$ и $Z=J_e$, легко увидеть, что с помощью подходяще подобранной матрицы C можно сделать Y нулевой, а X — диагональной матрицей.

Таким образом, элемент F мы привели к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ J_e & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Задача 5. Докажите, что разные элементы канонического вида принадлежат разным орбитам.

Указание. Докажите, что преобразование вида (4), переводящее элемент канонического вида в другой элемент канонического вида, обладает свойствами $C=0$, A и B — диагональны.

Таким образом, орбиты элементов канонического вида нумеруются k вещественными числами и индексом ε .

Можно проверить (см. указание к задаче 4), что стационарные подгруппы элементов канонического вида имеют вид $g(A, JAJ^{-1}, 0)$, где A — диагональная матрица.

Поэтому соответствующие орбиты имеют размерность $k(2k+1) - k = 2k^2$. Мы не будем здесь доказывать (хотя это и можно сделать), что таким образом получаются все орбиты размерности $2k^2$ и что все остальные орбиты имеют меньшую размерность.

В качестве допустимой подалгебры для функционала F вида (5) можно взять алгебру $\mathfrak{h}$ матриц вида $g(A, JAJ^{-1}, C)$, где A — диагональная матрица. Соответствующая подгруппа состоит из матриц того же вида с положительными элементами на диагонали. Положим

$$\chi_{D, \varepsilon}(g(A, JAJ^{-1}, C)) = e^{2\pi i \operatorname{tr} J_\varepsilon C} \prod_{j=1}^k a_j^{2\pi i d_j}$$

и

$$T_{D, \varepsilon} = \operatorname{Ind}(T(n, \mathbf{R}), H, \chi_{D, \varepsilon}).$$

Это и есть основная серия представлений группы $T(n, \mathbf{R})$.

Интересен вопрос о прямом определении параметров D, ε по представлению T , соответствующему этим параметрам.

Оказывается, что элементы d матрицы D могут быть выражены через обобщенный инфинитезимальный характер представления T (см. п. 11.3). Параметр ε , по-видимому, может быть найден по виду спектра некоторых операторов, отвечающих элементам обертывающей алгебры алгебры Ли группы $T(2k, \mathbf{R})$.

Полезным упражнением является явное вычисление характеров представлений $T_{D, \varepsilon}$ как обобщенных функций на группе. Для подгруппы $T_0(n, \mathbf{R})$ треугольных матриц с единичной диагональю это вычисление проведено в [96].

§ 19. ПРИМЕРЫ ДИКИХ ГРУПП ЛИ

Простейший пример группы Ли, не принадлежащий типу I, можно построить следующим образом. Пусть α — иррациональное вещественное число. Рассмотрим группу G матриц вида

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z \\ 0 & e^{i\alpha t} & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad z, w \in \mathbf{C}. \quad (1)$$

Ясно, что это — группа Ли. Как топологическое пространство, G гомеоморфна $\mathbb{R}^5$. Как группа она является полупрямым произведением одномерной подгруппы $z = w = 0$ и четырехмерного коммутативного нормального делителя $t = 0$.

Рассмотрим K -представление этой группы. отождествляя пространство $\mathfrak{g}^*$ с пространством матриц вида

$$\begin{pmatrix} i\tau & 0 & 0 \\ 0 & ia\tau & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

получаем следующий явный вид действия G в $\mathfrak{g}^*$:

$$K(t, z, w): (a, b, \tau) \mapsto (ae^{-it}, be^{-iat}, \tau + \operatorname{Im}(az + bw)).$$

Таким образом, G -орбиты в $\mathfrak{g}^*$ — это двумерные цилиндры, образующей которых является ось τ , а направляющей — кривая, заданная параметрическими уравнениями

$$a = a_0 e^{it}, \quad b = b_0 e^{iat}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Ясно, что эта кривая расположена всюду плотно на поверхности тора

$$|a| = |a_0|, \quad |b| = |b_0|.$$

Разбиение $\mathfrak{g}^*$ на G -орбиты не удовлетворяет условиям п. 9.1, а соответствующее фактор-пространство $\mathcal{O}(G)$ не является полудоотделимым.

Задача 1. Докажите, что на группе G есть двусторонне инвариантная мера, которая в параметрах $t, x = z + iy, w = u + iv$ имеет вид

$$dg = dt \, dx \, dy \, du \, dv.$$

Рассмотрим регулярное представление T группы G . Оно действует в $L^2(G, dg)$ правыми сдвигами и в координатах t, z, w может быть записано формулой

$$[T(\tau, \xi, \eta) f](t, z, w) = f(t + \tau, z + e^{it}\xi, w + e^{iat}\eta). \quad (4)$$

Мы покажем сейчас, что это представление можно двумя различными способами разложить на неприводимые компоненты.

Первый способ. Сделаем преобразование Фурье по переменным z и w :

$$\tilde{f}(t, a, b) = \iiint f(t, z, w) e^{i \operatorname{Re}(a\bar{z} + b\bar{w})} dx \, dy \, du \, dv. \quad (5)$$

Задача 2. Проверьте, что под действием преобразования Фурье представление T переходит в представление T_1 , задаваемое равенством

$$[T_1(\tau, \xi, \eta) \tilde{f}](t, a, b) = e^{i \operatorname{Re}(e^{it}a\bar{\xi} + e^{iat}b\bar{\eta})} \tilde{f}(t + \tau, a, b). \quad (6)$$

Формула (6) показывает, что T_1 является непрерывной суммой представлений $U_{a,b}$, $a, b \in \mathbb{C}$, действующих в $L^2(\mathbb{R}, dt)$ по формуле

$$[U_{a,b}(\tau, \xi, \eta)\varphi](t) = e^{i \operatorname{Re}(e^{i\tau} a \xi + e^{i\tau} b \bar{\eta})} \varphi(t + \tau). \quad (7)$$

Задача 3. Докажите, что все представления $U_{a,b}$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$ неприводимы.

Указание. Проверьте, что всякий оператор, перестановочный с операторами $U_{a,b}(0, \xi, \eta)$, является оператором умножения на функцию.

Задача 4. Докажите, что представления $U_{a,b}$ и U_{a_1,b_1} эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такое вещественное число τ , что $a_1 = ae^{i\tau}$, $b_1 = a\bar{e}^{i\tau}$.

Указание. Проверьте, что сплетающий оператор для U_{a_1,b_1} и $U_{a,b}$ может быть только оператором сдвига по τ .

Второй способ. Сделаем замену переменных:

$$\hat{f}(t, z, w) = \varphi(t, e^{-it}z, e^{-iat}w)$$

и перейдем к преобразованию Фурье:

$$\tilde{\varphi}(s, a, b) = \iiint \varphi(t, z, w) e^{i \operatorname{Re}(ts + a\bar{z} + b\bar{w})} dt dx dy du dv. \quad (8)$$

Задача 5. Проверьте, что после такого преобразования представление T перейдет в представление T_2 , задаваемое равенством:

$$[T_2(\tau, \xi, \eta)\tilde{\varphi}](s, a, b) = e^{i \operatorname{Re}(\tau s + e^{i\tau} a \xi + e^{i\tau} b \bar{\eta})} \tilde{\varphi}(s, e^{i\tau} a, e^{i\tau} b). \quad (9)$$

Указание. Полезно рассмотреть отдельно преобразования $T_2(0, \xi, \eta)$ и $T_2(\tau, 0, 0)$.

Пусть $X_{r,\rho}$ — двумерная поверхность в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнениями $|a|=r$, $|b|=\rho$, где r и ρ — неотрицательные вещественные числа.

Представление T_2 естественно распадается в непрерывную сумму представлений $V_{r,\rho,s}$, действующих в $L^2(X_{r,\rho})$ по формуле

$$[V_{r,\rho,s}(\tau, \xi, \eta)\varphi](a, b) = e^{i \operatorname{Re}(\tau s + e^{i\tau} a \xi + e^{i\tau} b \bar{\eta})} \varphi(e^{i\tau} a, e^{i\tau} b). \quad (10)$$

Задача 6. Докажите, что представления $V_{r,\rho,s}$ неприводимы при всех r, ρ и s .

Указание. Воспользуйтесь тем, что всякая измеримая функция на $X_{r,\rho}$, инвариантная относительно $V_{r,\rho,s}(\tau, 0, 0)$, постоянна.

Задача 7. Докажите, что представления $V_{r,\rho,s}$ и $V_{r,\rho,s'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда разность $s - s'$ может быть записана в виде $m + an$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Указание. Сплетающий оператор — это оператор умножения на функцию вида $a^m b^n$.

Задача 8. Докажите, что ни одно из представлений $U_{a,b}$ не эквивалентно ни одному из представлений $V_{r,\rho,s}$.

Указание. Сравните оператор ограничения этих представлений на подгруппу $t=0$.

Таким образом, два построенные нами разложения существенно различны. Это показывает, что группа G не принадлежит типу I.

Более тонкий пример группы Ли не типа I, в котором не выполнено второе условие критерия Костанта — Ауслендера (см. п. 15.3, теорема 3), можно построить так.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли размерности 7 над $\mathbb{R}$ с базисом X, Y, U, V, S, T, R и следующими ненулевыми коммутаторами:

$$\begin{aligned} [S, X] &= Y, & [S, Y] &= -X, & [S, T] &= R. \\ [T, U] &= V, & [T, V] &= -U, \end{aligned}$$

Эту алгебру можно реализовать клеточно-диагональными матрицами 6-го порядка, с диагональными клетками

$$\begin{pmatrix} is & 0 & z \\ 0 & it & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & s & r \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $z = x + iy$, $w = u + iv$ и x, y, s, t, u, v, r — вещественные параметры (координаты относительно базиса X, Y, S, T, U, V, R).

Пусть G — связная односвязная группа Ли, соответствующая алгебре $\mathfrak{g}$.

Задача 9. Докажите, что орбиты Ω максимальной размерности в $\mathfrak{g}^*$ относительно G топологически эквивалентны $T^2 \times \mathbb{R}^2$ и что класс когомологий, определяемый канонической формой B_Ω , отличен от нуля.

Указание. Рассматривая X, Y, S, T, U, V, R как линейные функции на $\mathfrak{g}^*$, докажите, что уравнения

$$X^2 + Y^2 = r_1^2, \quad U^2 + V^2 = r_2^2, \quad R = r_3$$

при $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $r_3 \neq 0$ задают орбиту, и что на этой орбите

$$B_\Omega = d\varphi \wedge dS + d\psi \wedge dT + R d\varphi \wedge d\psi,$$

где φ и ψ — параметры на Ω , определяемые из равенств $X = r_1 \cos \varphi$, $Y = r_1 \sin \varphi$, $U = r_2 \cos \psi$, $V = r_2 \sin \psi$.

Тот факт, что группа G не принадлежит типу I, можно установить следующим образом. В G имеется коммутативный нормальный делитель, алгебра Ли которого натянута на векторы X, Y, U, V . Применяя к этому случаю рассуждения пп. 13.3 и 14.1, легко показать, что изучение представлений группы G можно свести к изучению представлений группы G_0 матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & m & r \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Задача 10. Докажите, что группа G_0 не принадлежит типу I.

Указание. Пусть H — подгруппа G_0 , выделяемая условием $m=0$. Для любых вещественных λ и φ определим характер $\chi_{\lambda, \varphi}$ группы H равенством:

$$\chi_{\lambda, \varphi}(n, r) = e^{i(\lambda r + n\varphi)}.$$

Докажите, что представления $T_{\lambda, \varphi} = \text{Ind}(G_0, H, \chi_{\lambda, \varphi})$ неприводимы и $T_{\lambda, \varphi} \sim T_{\lambda_1, \varphi_1}$ тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda_1$, а $\varphi = \varphi_1$ имеет вид $2\pi k + \lambda l$, где k и l — целые числа.

Выведите отсюда, что если λ несоизмеримо с π , то классы эквивалентности представлений $T_{\lambda, \varphi}$ и T_{λ, φ_1} не разделяются никаким открытым подмножеством в $\hat{G}$.

Очень интересно было бы применить метод орбит к изучению представлений диких групп Ли. Так, весьма правдоподобно, что роль орбит должны играть эргодические G -инвариантные меры в $\mathfrak{g}^*$, а формула (Ф) выражает относительный след оператора представления в смысле фон Неймана. Возможно также, что в терминах орбит можно описать разложение регулярного представления на факторы и дать явную формулу для обобщенной меры Планшереля в смысле И. Сигала (см. п. 12.4)¹⁾.

¹⁾ См. [227].

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Теория представлений групп существует как самостоятельная область уже около 80 лет.

Первый период ее развития (приблизительно 1890—1920 гг.) связан с именами Г. Фробениуса, И. Шура, В. Берисайда и Ф. Э. Молина. В работах этого периода рассматриваются только конечные группы и конечномерные представления.

Исходным толчком для возникновения теории представлений послужило придуманное Фробениусом по предложению Дедекинда обобщение понятия характера. Выражаясь современным языком, характер в смысле Фробениуса — это мультипликативный функционал на центре группового кольца. Вскоре было обнаружено, что этот характер можно определить также, как след матричного представления. Тем самым теория Фробениуса и существовавшая ранее теория характеров коммутативных групп включились в новую единую теорию представлений.

Крупным достижением было систематическое использование И. Шуром операции усреднения по группе и его знаменитая лемма о сплетающих операторах для неприводимых представлений. В работах Берисайда были получены в общем виде соотношения ортогональности и выяснена структура неприводимых матричных алгебр. Этот результат, а также теорема Ф. Э. Молина о полупростоте групповой алгебры связали теорию представлений конечных групп с теорией конечномерных алгебр. В одной из работ Шура была построена теория проективных представлений конечных групп.

Кроме перечисленных общих результатов в течение первого периода было накоплено много конкретных фактов о представлениях конкретных групп или некоторых специальных классов групп.

Второй период — это создание теории представлений компактных топологических групп. Наиболее важные общие результаты этого периода — теорема Хаара — фон Неймана о существовании конечной инвариантной меры и теорема Ф. Петера — Г. Вейля о полноте системы конечномерных представлений. В это же время Г. Вейль и Э. Картан построили теорию конечномерных представлений полупростых групп Ли. Эти результаты не только поражали своей красотой, но и нашли широкие применения в разных областях математики и физики (теория симметрических пространств, теория моментов в квантовой механике). Теория представлений групп становится прикладной наукой и ее популярность быстро возрастает.

Довольно скоро выяснилась потребность в рассмотрении некомпактных групп и их бесконечномерных представлений. Так, известная теорема Стоуна — фон Неймана о единственности оператора Шредингера, по существу, равносильна классификации бесконечномерных унитарных представлений простейшей nilпотентной группы (так называемой группы Гейзенберга). В работе Е. Вигнера [69] была сделана первая попытка построить теорию элементарных частиц на основе теории бесконечномерных представлений.

Систематическое изучение бесконечномерных представлений групп, составляющее основное содержание третьего периода, начинается в 40-е годы.

Началом этого периода естественно считать работу И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова (1943 г.) о полноте системы унитарных неприводимых представлений для локально компактных групп. В это же время Меррей и фон Нейман завершают свое фундаментальное исследование операторных алгебр [116]. Теория алгебр Неймана соединяется с теорией представлений групп в диссертации Г. М. Адельсона-Вельского (см. [1]), в работах Ф. Маутнера [110], [111], Р. Годмана [79], [80].

Первые классификационные теоремы для бесконечномерных представлений были получены в 1947 г. И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [75], [76] и В. Баргманом [60]. В 1950 г. появилась монография И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [18], в которой были построены бесконечномерные представления групп $SL(n, \mathbb{C})$, $SO(n, \mathbb{C})$ и $Sp(n, \mathbb{C})$ для произвольного n .

Эта работа получила широкую известность и с тех пор поток исследований по теории бесконечномерных представлений непрерывно возрастал.

Мы проследим здесь за некоторыми струями этого потока.

Общая теория. Одно из главных достижений — выделение класса тех групп, которые в этой книге названы ручными. Совпадение различных определений этого класса было доказано в последние 15—20 лет. Основные результаты принадлежат Г. Макки, Дж. Феллу, Ж. Диксмье и Дж. Глиму. Итог этой деятельности подведен в монографии Ж. Диксмье [24].

Хариш-Чандра доказал в [130], что все полупростые группы являются ручными. Более простое и красивое доказательство было найдено Р. Годманом [81]. Е. Такеноуши в [126] установил, что все экспоненциальные группы — ручные. Первый пример дикой группы Ли был, по-видимому, предложен Ф. Маутнером (неопубликовано). Позже этот пример неоднократно переоткрывался. Критерий для того, чтобы разрешимая группа Ли была ручной, нашли Л. Ауслендер и Б. Костант [59].

Для общих групп Ли такого критерия пока не найдено.

Индукцированные представления. Теория двойственности Фробениуса была перенесена на компактные группы А. Вейлем в книге [10].

Уже в работах Е. Вигнера [69] и И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [75], [76] упоминалось, что используемая ими конструкция является обобщением понятия индуцированного представления. Систематическое исследование этой конструкции для локально компактных групп было предпринято Г. Макки. Один из основных его результатов — критерий индуцированности, полученный в [107].

Пользуясь этим критерием, Макки указал удобный алгоритм для построения и исследования унитарных представлений расширений групп [108].

Понятие голоморфно индуцированного представления было по существу использовано Баргманом в [60] и явно введено И. М. Гельфандом и М. И. Граевым в [72]. Систематическое исследование индуцированных и голоморфно индуцированных представлений предпринял Р. Блаттнер [65]. Он ввел также понятие частично голоморфного представления и дал более простое доказательство критерия Макки.

В работе Р. Ботта [66] была построена реализация (конечномерных) неприводимых представлений полупростой компактной группы Ли G в пространствах когомологий пучка ростков голоморфных сечений некоторых G -расслоений с одномерным слоем. Р. П. Ленглендс в [106] высказал предположение, что аналогичная конструкция (с заменой обычных когомологий так называемыми L^2 -когомологиями) применима для построения представлений некомпактных полупростых групп. Более подробное описание этой конструкции см., например, в [101]¹⁾. Еще одно обобщение понятия индуцированного представления было предложено Г. Макки. Оно возникло из попытки перенести критерий индуцированности на неоднородные эргодические

¹⁾ Недавно вариант этой конструкции был успешно применен в теории представлений конечных групп (см. [162], [186]).

G -пространства. Подробнее об этом обобщении и возникшем здесь понятии виртуальной подгруппы можно прочитать в обзоре Г. Макки [109]. Некоторые дальнейшие результаты получены в [91].

Много работ было посвящено различным обобщениям теории двойственности Фробениуса на некомпактные группы (см., например, [109]). Наиболее удобным для такого обобщения оказался случай компактного фактор-пространства. Важная теорема такого рода была получена И. М. Гельфандом и И. И. Пятацким-Шапиро для полупростой группы G и ее дискретной подгруппы Γ . Интерес к этому случаю вызван тем, что теорема двойственности для пары (G, Γ) и вытекающая из нее формула следа позволяют применить теорию представлений в некоторых трудных вопросах современной теории чисел. Подробнее об этом круге вопросов можно прочитать в монографии [16].

Общая теорема двойственности для случая компактного фактор-пространства получена Г. И. Ольшанским в [118]. Интересная попытка сохранять теорию Фробениуса, пожертвовав унитарностью представления, предпринята К. Муром в [112].

Представления полупростых групп Ли. Основные черты теории бесконечномерных представлений комплексных полупростых групп были выяснены в монографии [18]. В частности, оказалось, что в этой теории основную роль играют так называемые параболические подгруппы. (Параболическая подгруппа P комплексной полупростой группы G может быть определена как связная комплексная подгруппа, обладающая одним из двух эквивалентных свойств: 1) фактор-пространство G/P компактно, 2) P содержит максимальную разрешимую подгруппу в G). Как доказано в работах М. А. Наймарка и Д. П. Желобенко [114], [90], все неприводимые (в том числе и неунитарные) представления комплексной полупростой группы G содержатся среди ее элементарных представлений (т. е. представлений, индуцированных одномерным представлением параболической подгруппы). Изучение категории элементарных представлений существенно облегчается тем, что пространства двойных смежных классов $P_1 \backslash G/P_2$ конечны для любой пары параболических подгрупп P_1 и P_2 . В частности, когда P_1 и P_2 совпадают с подгруппой Бореля B (т. е. максимальной разрешимой подгруппой в G), точки этого пространства отождествляются с элементами группы Вейля W группы G^1). В монографии [18] были вычислены характеры элементарных представлений и получена формула Планшереля для комплексных классических групп. Выяснилось также наличие у полупростых групп дополнительных серий представлений, не входящих в замыкание регулярного представления.

На общие комплексные полупростые группы эти результаты были перенесены в работах Хариш-Чандры [130], [131].

Классификация неприводимых представлений в банаховых пространствах была получена Ф. А. Березиным в [62] на основе проделанного им исследования операторов Лапласа на полупростых группах Ли. Отметим, что выделение из построенного класса представлений тех, которые являются унитарными, оказалось технически очень сложной задачей. Более простой вопрос о наличии G -инвариантной эрмитовой формы допускает простой ответ в терминах индуцирующего характера параболической подгруппы. Вопрос же о том, когда эта форма положительно определена, не решен окончательно до сих пор (ср. [82], [124], [140], [169], [212], [213]).

¹⁾ Этот важный результат был установлен Гельфандом и Наймарком для комплексных классических групп, а Хариш-Чандрой и Шевалле — для общего случая. В литературе он известен под именем «леммы Брюа» после выхода работы [67], в которой эта лемма использовалась при изучении сплетающих операторов.

Теория представлений вещественных полупростых групп содержит дополнительные трудности. В этом случае элементарных представлений оказывается недостаточно для построения полной системы, даже если воспользоваться понятием голоморфно индуцированных представлений. Впервые серия представлений, не являющихся элементарными, была получена И. М. Гельфандом и М. И. Граевым для группы $SU(2, 1)$. Она получила название «странной» серии. Только после появления гипотезы Ленглендса стало ясно, что эта серия естественно реализуется не в функциях (т.е. в нульмерных когомологиях), а в когомологиях высшей размерности.

Очень сильные результаты в теории представлений вещественных полупростых групп Ли получил Хариш-Чандра. Его работа [133], завершающая большой цикл исследований, содержит полную классификацию так называемых дискретных серий (т.е. представлений с квадратично интегрируемыми матричными элементами). В частности, показано, что дискретными сериями представлений обладают те и только те вещественные полупростые группы, в которых есть компактная картановская подгруппа.

Однако в работах Хариш-Чандры представления дискретных серий описываются лишь косвенным образом. А именно, указывается ограничение характера представления на регулярную часть компактной картановской подгруппы и доказывается, что существует только одно представление (с точностью до эквивалентности), обладающее характером с таким свойством.

Очень интересной нерешенной задачей остается нахождение явной реализации представлений дискретной серии. Один из наиболее перспективных подходов к этой задаче — упоминавшаяся выше конструкция представлений в пространствах L^2 -когомологий, предложенная Ленглендсом. Последние достижения на пути доказательства гипотезы Ленглендса принадлежат В. Шмиду [134], К. Окамото и М. Нарасимхану [115] и Р. Партасарати [119]. См. также [234], [240], [241].

Теория бесконечномерных представлений полупростых групп привела к новым существенным достижениям в классических вопросах конечномерной теории. И. М. Гельфанду и М. Л. Цетлину удалось получить явные формулы для конечномерных представлений линейной и ортогональной группы (см. приложение к книге [17]). Результаты Д. П. Желобенко в [89] дают надежду, что аналогичные формулы могут быть выписаны и для симплектической группы. Методы теории бесконечномерных представлений оказались полезными также в теории представлений алгебраических групп над конечными полями (см. [125], [77], [186]).

Метод орбит. Впервые метод орбит появился в работе автора [96], посвященной представлениям нильпотентных групп Ли. Там же была отмечена возможность обобщения этого метода на другие классы групп. Дальнейшее развитие было получено в работах П. Берна [64], Б. Костанта [103], [104], Л. Ауслендера и Б. Костанта [59], Л. Пуканского [120], [121], М. Дюфло [86], [88] и автора [97], [99], [100]. Метод орбит оказался также полезен в некоторых других вопросах в теории представлений алгебр Ли (см. [85], [86]), при изучении тела частных обертывающих алгебр для алгебр Ли (см. [74]), при изучении центра обертывающей алгебры (ср. [70] и [88]).

Связь метода орбит с механикой была замечена Б. Костантом в [103]. Классификация однородных симплектических многообразий независимо получена около пяти лет назад Б. Костантом, Ж.-М. Сурьо и автором. Изложение этой классификации опубликовано в [104], [44], [102].

Метод орбит породил новое направление в математической физике — так называемое геометрическое квантование (см., например, [163], [170]).

Часть вопросов, поставленных в первом издании книги, нашла свое решение в работах ее читателей (см. [168], [177], [178], [196], [242]).

В настоящее время третий период развития теории представлений в идейном отношении завершен (хотя многие трудные конкретные задачи еще ждут своего решения). Однако теорию представлений нельзя считать законченной

наукой. Уже сейчас можно указать направления, которые, по-видимому, составят основу следующего, четвертого этапа.

Это, во-первых, теории бесконечномерных представлений групп, встречающихся в современной теории чисел и алгебраической геометрии: алгебраических групп над локальными полями и кольцами аделей. Введением в эту область могут служить монография [16], изложение Р. Годмана известной работы Жаке и Ленглендса [26] об автоморфных формах на $GL(2)$ (Математика 18, 2; 18, 3 (1974)), а также книга С. Ленга [142]. См. также обзоры [147], [160].

Во-вторых — это теория представлений бесконечномерных групп Ли. Можно указать по крайней мере три типа таких групп, изучение которых представляет особый интерес и связано со многими приложениями.

1. Группы обратимых операторов в бесконечномерных линейных пространствах (например, группа $U(H)$) всех унитарных операторов в гильбертовом пространстве H или ее подгруппа $U_0(H)$, состоящая из операторов, сравнимых с единичным по модулю компактных операторов). См. по этому поводу [164], [181], [200].

2. Группы диффеоморфизмов гладких многообразий (например, группы канонических преобразований симплектических многообразий).

3. Непрерывные произведения конечномерных групп Ли, т. е. группы $C^\infty(M, G)$ гладких функций на многообразии M со значениями в группе Ли G .

Изучение унитарных представлений групп двух последних типов методом орбит начато в [201], [202]. Оказалось, что имеется удовлетворительное соответствие между неприводимыми унитарными представлениями *конечной функциональной размерности* (естественно реализующееся в пространствах функций конечного числа переменных) и *конечномерными орбитами* в K -представлении. Очень интересной нерешенной задачей является распространение этого соответствия на представления бесконечной функциональной размерности. Существование таких представлений по существу было обнаружено в некоторых работах по математической физике. Строгое изложение математических результатов можно найти в [150], [151], [154], [179], [183], [197], [198].

Еще одно недавно возникшее направление — теория представлений так называемых *супергрупп* и *супералгебр* Ли. Это направление возникло в связи с попыткой построить единую квантовую теорию поля, объединяющую фермионы и бозе-поля. В основе его лежит понятие *супермногообразия*, которое можно определить как окольцованное пространство, получаемое из гладкого n -мерного многообразия заменой модельного кольца $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ на некоммутативное Z_2 -градуированное кольцо $C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda(m)$, где $\Lambda(m)$ — грассманова алгебра с m образующими. Оказывается, на супермногообразиях можно построить дифференциальное и интегральное исчисления, с одной стороны, полностью аналогичные классическому анализу, а с другой стороны, обладающие рядом специальных, очень интересных свойств. (См. [173], [170].)

Интерес к супермногообразиям, супергруппам Ли (т. е. групповым объектам в категории супермногообразий), супералгебрам Ли и их представлениям в последние годы еще увеличился в связи с интересными применениями этой теории к проблеме классификации элементарных частиц (см., например, обзор: В. И. Огиевский, Л. Мезинчерук, Симметрия между бозонами и фермионами и суперполя, УФН 117, 4 (1975), 637—683).

Нет сомнений в том, что метод орбит займет существенное место в развитии этих новых разделов теории представлений.

Наконец, следует указать на связи, которые обнаружили у метода орбит с дифференциальной геометрией, — см. [157], [203].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

а) Учебники и монографии

1. Адельсон-Вельский Г. М., К вопросу о разложении представлений групп и колец, УМН 1, 3—4 (1946), 196—197.
2. Арифметические группы и автоморфные функции, М., «Мир», 1969.
3. Атья М. Ф., Лекции по К-теории, М., «Мир», 1967.
4. Боголюбов Н. Н., Лекции по теории симметрии элементарных частиц, М., Изд-во МГУ, 1966.
5. Боревиц З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, М., «Наука», 1964.
6. Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, М., «Физматгиз», 1958.
7. Бурбаки Н., Алгебра (части I, II, III), М., «Наука», 1962, 1965, 1966.
8. Бурбаки Н., Интегрирование (части I, II), М., «Наука», 1967, 1970.
9. Бурбаки Н., Спектральная теория, М., «Мир», 1972.
10. Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950.
11. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, М., ИЛ, 1947.
12. Вилейкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., «Наука», 1965.
13. Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, М., «Мир», 1969.
14. Гельфанд И. М., Вилейкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. (Обобщенные функции, вып. 4.), М., Физматгиз, 1961.
15. Гельфанд И. М., Граев М. И., Вилейкин Н. Я., Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. (Обобщенные функции, вып. 5.), М., Физматгиз, 1962.
16. Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и автоморфные функции. (Обобщенные функции, вып. 6.), М., «Наука», 1966.
17. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.
18. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, Труды МИАН, М., 1950.
19. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шиллов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, М., Физматгиз, 1960.
20. Годман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, М., ИЛ, 1961.
21. Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, М., ИЛ, 1961.
22. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, М., ИЛ, 1962.
23. Джекобсон Н., Алгебры Ли, М., «Мир», 1964.

24. Диксмье Ж., *C*-алгебры и их представления*, М., «Наука», 1974.
25. Дэй М. М., *Линейные нормированные пространства*, М., ИЛ, 1961.
26. Жакс Э., Ленглендс Р., *Автоморфные формы на $GL(2)$* , М., «Мир», 1973.
27. Желобенко Д. П., *Компактные группы Ли и их представления*, М., «Наука», 1970.
28. Капланский И., *Введение в дифференциальную алгебру*, М., ИЛ, 1959.
29. Картан А., Эйленберг С., *Гомологическая алгебра*, М., ИЛ, 1960.
30. Келли Дж. Л., *Общая топология*, М., «Наука», 1968.
31. Коккеде Я., *Теория кварков*, М., «Мир», 1971.
32. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, М., «Наука», 1976.
33. Коэн П., *Теория множеств и континуум-гипотеза*, М., «Мир», 1969.
34. Кэртис Ч., Райнер И., *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, М., «Наука», 1968.
35. Ленг С., *Алгебра*, М., «Мир», 1968.
36. Любарский Т. Я., *Теория групп и ее применение к физике*, М., Гостехиздат, 1957.
37. Маклейн С., *Гомология*, М., «Мир», 1966.
38. Наймарк М. А., *Нормированные кольца*, М., «Наука», 1968.
39. Понтрягин Л. С., *Непрерывные группы*, М., «Наука», 1973.
40. Серр Ж. П., *Группы Ли и алгебры Ли*, М., «Мир», 1969.
41. Серр Ж. П., *Линейные представления конечных групп*, М., «Мир», 1970.
42. Спивак М., *Математический анализ на многообразиях*, М., «Мир», 1968.
43. Стинрод Н., Эйленберг С., *Основания алгебраической топологии*, М., ИЛ, 1956.
44. Сурьо Ж. М. (Souriau J. M.), *Structure des systemes dynamiques*, Dunod Universite, Paris, 1970.
45. *Теория алгебр Ли, Топология групп Ли (Семинар «Софус Ли»)*, М., ИЛ, 1962.
46. Уитни Х., *Геометрическая теория интегрирования*, М., ИЛ, 1960.
47. Фелпс Р., *Лекции о теоремах Шоке*, М., «Мир», 1968.
48. Френкель А., Бар-Хиллел И., *Основания теории множеств*, М., «Мир», 1966.
49. Халмош П., *Теория меры*, М., ИЛ, 1953.
50. Хаммермеш М., *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, М., «Мир», 1964.
51. Хелгасон С., *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, М., «Мир», 1964.
52. Ху Сы-цзян, *Теория гомотопий*, М., «Мир», 1964.
53. Хьюзмоллер Д., *Расслоение пространства*, М., «Мир», 1970.
54. Хьюитт Э., Росс К., *Абстрактный гармонический анализ*, I, М., «Наука», 1976; II, М., «Мир», 1976.
55. Шевалле К., *Теория групп Ли*, I, М., ИЛ, 1948.
56. Шефер Х., *Топологические векторные пространства*, М., «Мир», 1971.
57. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Специальный курс*, М., Физматгиз, 1961.

в) Журнальные статьи

58. Атья М. Ф., Ботт Р. (Atiyah M. F., Bott R.), *A Lefschetz fixed point theorem for elliptic complexes*, I, Ann. Math. 86, 2 (1967), 374—407.
59. Ауслендер Л., Костант Б. (Auslander L., Kostant B.), *Quantization and unitary representations of solvable Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 692—695.

60. Баргманн В. (Bargmann V.), Irreducible unitary representations of the Lorents Group, *Ann. Math.* **48** (1947), 568—640.
61. Баргманн В. (Bargmann V.), On unitary ray representations of continuous groups, *Ann. Math.* **59**, 1 (1954), 1—46.
62. Березин Ф. А., Операторы Лапласа на полупростых группах Ли, Труды Моск. матем. о-ва **6** (1957), 371—463. Письмо в редакцию, Труды Моск. матем. о-ва **12** (1963), 453—466.
63. Березин Ф. А., Гельфанд И. М., Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях, Труды Моск. матем. о-ва **5** (1956), 311—352.
64. Бериа П. (Bernat P.), Sur les representations unitaires des groupes de Lie resolubles, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, Ser. 4 **82** (1965), 37—99.
65. Блаттнер (Blattner R.), On induced representations I, II, *Amer. Journ. Math.* **83** (1961), 1, 79—98, 3, 499—512.
66. Ботт Р. (Bott R.), Homogeneous vector bundles, *Ann. Math.* **66**, 2 (1957), 203—248.
67. Брюа Ф. (Bruhat F.), Sur les representations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. Math. France* **84** (1956), 97—205.
68. Брюа Ф. (Bruhat F.), Distributions sur un groupe localement compact..., *Bull. Soc. Math. France* **89**, 1 (1961), 43—75.
69. Вигнер Е. Р. (Wigner E. R.), On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz Group, *Ann. Math.* **40** (1939), 149—204.
70. Гельфанд И. М., Центр инфинитезимального группового кольца, Матем. сб. **26** (1950), 103—112.
71. Гельфанд И. М., Граев М. И., Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии I, Труды Моск. матем. о-ва **8** (1959).
72. Гельфанд И. М., Граев М. И., Унитарные представления вещественной унитарной группы (основные невырожденные серии), Изв. АН СССР, сер. матем. **17**, 3 (1953), 189—248.
73. Гельфанд И. М., Кириллов А. А. (Gelfand I. M., Kirillov A. A.), Sur les corps lies aux algebres enveloppantes des algebres de Lie, *Publ. Math. IHES* **31** (1966), 509—523.
74. Гельфанд И. М., Кириллов А. А., Структура тела Ли, связанного с полупростой расщепимой алгеброй Ли, Функци. анализ **3**, 1 (1968).
75. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Изв. АН СССР, сер. матем. **11**, 5 (1947), 411—504.
76. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления группы линейных преобразований прямой, ДАН СССР **55**, 7 (1947).
77. Гельфанд С. И., Представления полной линейной группы над конечным полем, Матем. сб. **83**, 1 (1970), 15—41.
78. Геронимус А. Ю., Топология Гротендика и теория представлений, Функци. анализ **5**, 3 (1971), 22—31.
79. Годман Р. (Godement R.), Les fonctions de type positif et la theorie des groupes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 1—84.
80. Годман Р. (Godement R.), Theorie des caracteres, I, Algebres unitaires, II, Definition et proprietes generales des caracteres, *Ann. Math.* **59**, 1 (1954), 47—85.
81. Годман Р., Теория сферических функций, I, Математика **5**, 5 (1961).
82. Гросс К. (Gross K. I.), The dual of a parabolic subgroup and a degenerate principal series of $Sp(n, \mathbb{C})$, *Amer. J. Math.* **93**, 2 (1971), 398—428.
83. Делярош К., Кириллов А. А. (Delaroche C., Kirillov A. A.), Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermes, *Seminaire Bourbaki*, 1968, Exp. 343, 1—22.

84. Диксмье Ж. (Dixmier J.), Sur les representations unitaires des groupes de Lie algebriques, *Ann. Inst. Fourier* 7 (1957), 315—328.
85. Диксмье Ж. (Dixmier J.), Sur les representations induites des algebres de Lie, *J. Math. Pures Appl.* 50, 1 (1971), 1—24.
86. Дюфло М. (Duflo M.), Caracteres des groupes et des algebres de Lie resolubles, *Ann. Sci., Ecole Norm. Sup., Ser. 4* 3, 1 (1970), 23—74.
87. Дюфло М., Представления основной серии полупростой группы Ли, *Функц. анализ* 4, 2 (1970), 38—42.
88. Дюфло М. (Duflo M.), Representations induites d'algebres de Lie, *C. R. Acad. Sci., Ser. A* 272 (1971), 1157—1158.
89. Желобенко Д. И., Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений, *УМН* 17, 1 (1962), 27—120.
90. Желобенко Д. П., Наймарк М. А., Описание вполне неприводимых представлений полупростой комплексной группы Ли, *Изв. АН СССР, сер. матем.* 34, 1 (1970), 57—85.
91. Исмаилов Р. С., О неприводимых циклах, связанных с динамической системой, *Функц. анализ* 3, 3 (1969), 92—93.
92. Кац Г. И. Обобщенные функции на локально компактной группе и разложение унитарных представлений, *Труды Моск. матем. о-ва* 10 (1961).
93. Кац Г. И., Кольцевые группы и принцип двойственности, *Труды Моск. матем. о-ва* 12 (1963), 259—301; 13 (1965), 84—113.
94. Кац Г. И., Расширения групп, являющиеся кольцевыми группами, *Матем. сб.* 76, 3 (1968), 473—496.
95. Кац Г. И., Конечные кольцевые группы, *Труды Моск. матем. о-ва* 15 (1966), 224—262.
96. Кириллов А. А., Унитарные представления нильпотентных групп Ли, *УМН* 17, 4 (1962), 57—101.
97. Кириллов А. А., О мере Планшереля для нильпотентных групп Ли, *Функц. анализ* 1, 4 (1967), 84—85.
98. Кириллов А. А., Метод орбит в теории унитарных представлений групп Ли, *Функц. анализ* 2, 1 (1968), 98—100.
99. Кириллов А. А., Характеры унитарных представлений групп Ли, *Функц. анализ* 2, 2 (1968), 40—55.
100. Кириллов А. А., Характеры унитарных представлений групп Ли. Редукционные теоремы, *Функц. анализ* 3, 1 (1969), 36—47.
101. Кириллов А. А., Конструкции унитарных неприводимых представлений групп Ли, *Вестник МГУ, Математика, Механика*, № 2 (1970).
102. Кириллов А. А., Лекции по теории представлений групп. IV. (Представления групп и механика), М., Изд-во МГУ, 1971.
103. Костант Б. (Kostant B.), Orbits, symplectic structures and representation theory, *Proc. of US-Japan Seminar on Differential Geometry (Kyoto, 1965)*, Tokyo, 1966.
104. Костант Б. (Kostant B.), Quantization and unitary representations, Part I. Prequantizations, *Springer Lecture Notes* 170 (1970), 87—208.
105. Крейн С. Г., Шихватов А. М., Линейные дифференциальные уравнения на группе Ли, *Функц. анализ* 4, 1 (1970), 52—61.
106. Ленглендс Р. П. (Langlands R. P.), Dimensions of spaces of automorphic forms, *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Providence (1966). (Русский перевод см. в сб. [2].)
107. Макки Г. В. (Mackey G. W.), Imprimitivity for representations of locally compact groups, I, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 35, 9 (1949).
108. Макки Г. В. (Mackey G. W.), Unitary representations of group extensions, I, *Acta Math.* 99, 3—4 (1958), 265—311.
109. Макки Г., Бесконечномерные представления групп, *Математика* 6, 6 (1962), 57—203.
110. Маутнер Ф. И. (Mautner F. I.), Unitary representations of locally compact groups, I, II, *Ann. Math.* 51 (1950), 1—25; 52 (1950).

111. Маутнер Ф. И. (Mautner F. I.), Note on the Fourier inversion formula on groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **78** (1955), 371—384.
112. Мур К. (Moore C. C.), On the Frobenius reciprocity theorem for locally compact groups, *Pacific. J. Math.* **12**, 1 (1962), 359—365.
113. Мур К. (Moore C. C.), Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **113**, 1 (1964), 40—86.
114. Наймарк М. А., Об описании всех унитарных представлений комплексных классических групп, *Матем. сб.* **35** (1954), 317—356; **37** (1955).
115. Нарасимхан М. С., Окамото К. (Nagasimhan M. S., Okamoto K.), An analogue of the Borel — Weil — Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type, *Ann. Math.* **91**, 3 (1970), 486—511.
116. Нейман Дж. фон (Neumann J. von), Collected works, III, On rings of operators, Princeton (1960).
117. Нелсон Э., Аналитические векторы, *Математика* **6**, 3 (1962), 89—131.
118. Ольшанский Г. И., О теореме двойственности Фробениуса, *Функц. анализ* **3**, 4 (1969), 49—58.
119. Партасарати Р. (Parthasarathy R.), Dirac operators and the discrete series, Preprint (Русский перевод: *Математика* **16**, 6 (1972)).
120. Пуканский Л. (Pukanszky L.), On the unitary representations of exponential groups, *J. Funct. Anal.* **2** (1968), 73—113.
121. Пуканский Л. (Pukanszky L.), Characters of algebraic solvable groups, *J. Funct. Anal.* **3** (1969), 435—494.
122. Сигал И. (Segal I. E.), An extension of Plancherel's formula for separable unimodular locally compact groups, *Ann. Math.* **52**, 2 (1950), 272—292.
123. Смородинский Я. А., Унитарная симметрия элементарных частиц, *УФН* **84**, 1 (1964), 3—28.
124. Стейн Э. (Stein E. M.), Analysis in matrix spaces and some new representations of $SL(n, \mathbb{C})$, *Ann. Math.* **86**, 3 (1967), 461—495.
125. Стейнберг Р. (Steinberg R.) A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field, *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1951), 274—282.
126. Такеноуши О. (Takenouchi), Sur la facteur-representation d'une groupe de Lie resoluble de type (E), *Math. Journ. Okayama Univ.* **7**, 2 (1957), 151—161.
127. Такесакн М. (Takesaki M.), Group algebras and duality, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77**, 4 (1971), 553—557.
128. Тома Э. (Thoma E.), Eine Charakterisierung diskreter Gruppen vom Typ. I, *Invent. Math.* **6** (1968), 190—196.
129. Фелл Дж. (Fell J. M. G.), The structure of algebras of operator fields, *Acta Math.* **106** (1961), 233—280.
130. Хариш — Чандра (Harish — Chandra), Representations of a semisimple Lie group on a Banach space, I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **75**, 2 (1953).
131. Хариш — Чандра (Harish — Chandra), The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **76**, 3 (1954), 485—528.
132. Хариш — Чандра (Harish — Chandra), Invariant eigen-distributions on a semisimple Lie group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **119**, 3 (1965).
133. Хариш — Чандра (Harish — Chandra), Discrete series for semisimple Lie groups, I, II, *Acta Math.* **113** (1965), 241—318; **116** (1966).
134. Шмид В. (Schmid W.), Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* **69**, 1 (1968), 56—59.
135. Эрнест Дж. (Ernest J.), Hopf — von Neumann algebras, *Proc. Conf. Functional Analysis*, London, Academic Press, 1967, 195—215.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

а) Книги

136. Берна П., Конз Н., Дюфло М. и др. (Bernat P., Conze N., Duflo M., et al.), Représentations des groupes de Lie résolubles, Paris, Dunod, 1972.
137. Борель А., Линейные алгебраические группы, М., «Мир», 1972.
138. Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, главы I—III, М., «Мир», 1976; главы IV—VI, М., «Мир», 1972.
139. Диксмье Ж., Обертывающие алгебры, М., «Мир», 1977.
140. Желобенко Д. П., Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., «Наука», 1974.
141. Капланский И., Алгебры Ли и локально компактные группы, М., «Мир», 1974.
142. Ленг С., $SL_2(\mathbb{R})$, М., «Мир», 1977.
143. Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., «Наука», 1976.
144. Уорнер Г. (Warner G.), Harmonic analysis on semisimple Lie groups, v. 1, 2, Springer, 1972.
145. Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., «Наука», 1972.
146. Штейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, М., «Мир», 1974.

б) Обзоры, труды конференций и семинаров

147. Бериштейн И. Н., Зелевинский А. В., Представления группы $GL(n, F)$, где F — локальное неархимедово поле, УМН 31, 3 (1976), 5—70.
148. Борхо В. (Borho W.), Recent advances in enveloping algebras of semisimple Lie algebras, Séminaire Bourbaki, 1976/77, 489.
149. Борхо В., Габриэль П., Рейтшлер Р. (Borho W., Gabriel P., Rentschler R.), Primideale in Einhüllenden auflösbaren Lie Algebren, Lect. Notes Math., 357, Springer, 1973.
150. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И., Представления группы $SL(2, \mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ — кольцо функций, УМН 28, 6 (1973), 83—128.
151. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И., Представления группы диффеоморфизмов, УМН 30, 6 (1975), 3—50.
152. Вулф Дж. (Wolf J. A'), Unitary representations of maximal parabolic subgroups of the classical groups, Memoirs Amer. Math. Soc. 8, 180 (1976).
153. Гарп де ля (Harpe de la), Classical Banach—Lie algebras and Banach—Lie groups of operators in Hilbert space, Lect. Notes Math., 285, Springer, 1972.
154. Гишарде А. (Guichardet A.), Représentations de $G^\times$ selon Gelfand et Delorme, Séminaire Bourbaki, 1975/76, 486.
155. Жерарден П. (Gerardin P.), Construction de series discretes p -adiques, Lect. Notes Math., 462, Springer, 1975.
156. Картье П. (Cartier P.), Les représentations des groupes réductifs p -adiques et leurs caracteres, Séminaire Bourbaki, 1975/76, 471.
157. Кириллов А. А., Локальные алгебры Ли, УМН 31, 4 (1976), 57—76; Поправка: УМН 32, 1 (1977), 268.
158. Ленглендс Р. П. (Langlands R. P.), On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lect. Notes Math., 544, Springer, 1976.
159. Липсман Р. Л. (Lipsman R. L.), Group representations, Lect. Notes Math., 388, Springer, 1974.
160. Манин Ю. И., Неархимедово интегрирование и p -адические функции Жак — Ленглендса, УМН 31, 1 (1976), 5—54.

161. Омор Х. (Omori H.), Infinite dimensional Lie transformation groups, Lect. Notes Math., 427, Springer, 1974.
162. Серр Ж.-П. (Serre J. P.), Représentations linéaires des groupes finis «algebriques» [d'après Deligne — Lusztig], Séminaire Bourbaki, 1975/76, 487.
163. Симмс Д. (Simms D. J.), Geometric quantization, Lect. Notes Phys., 26, Springer, 1976.
164. Стратила С., Войкулеску Д. (Stratila S., Voiculescu D.), Representations of AF -algebras and of the group $U(\infty)$, Lect. Notes Math., 486, Springer, 1975.
165. Conference on harmonic analysis. College Park, Maryland, Lect. Notes Math., 266, Springer, 1972.
166. Harmonic analysis on homogeneous spaces, Proc. Symp. Pure Math. 26 (1973).
167. Non-commutative harmonic analysis, Lect. Notes Math., 466, Springer, 1975.
168. Lie groups and their representations, Budapest, Acad. Kiado, 1975.
169. Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Lect. Notes Math., 497, Springer, 1976.
170. Differential geometrical methods in Mathematical physics (Bonn, 1975), Lect. Notes Math., 570, Springer, 1977.

б) Журнальные статьи

171. Анх Н. (Anh N.), Lie groups with square integrable representations, App. Math. 104, 3 (1976), 431—458.
172. Березин Ф. А., Кваитование, Изв. АН СССР, сер. матем. 38, 5, (1974), 1116—1175.
173. Березин Ф. А., Лейтес Д. А., Супермногообразия, ДАН СССР 22, 3 (1975), 505—508.
174. Бернштейн И. Н., Все редуцированные p -адические группы — ручные, Функц. анализ 8, 2 (1974), 91—93.
175. Борхо В. (Borho W.), Berechnung der Gelfand — Kirillov Dimension bei induzierten Darstellungen, Math. Ann. 225, 2 (1977), 177—194.
176. Борхо В., Янтцен Я. (Borho W., Jantzen J. C.), Über primitive Ideale in der Einhüllenden einer halbeinfachen Lie — Algebra, Invent. Math. 39, 1 (1971), 1—53.
177. Браун Я. (Brown I. D.), Dual topology of a nilpotent Lie group., App. Sci. Ecole Norm. Sup., Ser. 4 6, 3 (1973), 407—411.
178. Бусаяцкая И. К., О представлениях экспоненциальных групп Ли, Функц. анализ 7, 2 (1973), 79—80.
179. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И., Неприводимые представления группы G^x и когомологии, Функц. анализ 8, 2 (1974), 67—69.
180. Вершик А. М., Керов С. В., Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга, ДАН СССР 233, 6 (1977), 1024—1027.
181. Войкулеску Д. (Voiculescu D.), Représentations factorielles de type II de $U(\infty)$, J. Math. Pures Appl., Ser. 9 55, 1 (1976), 1—20.
182. Воллах Н. (Wallach N.), On the Enright — Varadarajan modules: a construction of the discrete series, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., Ser. 4 9, 1 (1976), 81—101.
183. Гвишиани А. Д., Каноническое представление группы $G = PSL(2, K)$ и представления группы G^x , Функц. анализ 8, 2 (1974), 71—70.
184. Гросс К., Кунце Р. (Gross K., Kunze R.), Bessel functions and representation theory, J. Funct. Anal. 22, 2 (1976), 73—105.
185. Делинь П. (Deligne P.), Support of supercuspidal character, C. R. Acad. Sci., Ser. A 283 (1976), 155—158.

186. Делинь П., Люстиг А. (Deligne P., Lusztig A.), Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. Math.* 103, 1 (1976), 103—161.
187. Джозеф А. (Joseph A.), Proof of the Gelfand — Kirillov conjecture for solvable Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 45, 1 (1974), 1—10.
188. Джозеф А. (Joseph A.), Symplectic structure in the enveloping algebra of a Lie algebra, *Bull. Soc. Math. France* 102, 1 (1974), 75—83.
189. Джозеф А. (Joseph A.), A wild automorphism of $U(SL_2)$, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 80, 1 (1976), 61—65.
190. До Нрок Зьеп, О структуре групповой C^* -алгебры группы аффинных преобразований прямой, *Функц. анализ* 9, 1 (1975), 63—64.
191. Дюфло М., Мур К. (Duflo M., Moore C. C.), On the regular representations of a nonunimodular locally compact group, *J. Funct. Anal.* 21, 2 (1976), 209—243.
192. Дюфло М., Райс М. (Duflo M., Rais M.), Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, Ser. 4 9, 1 (1977), 107—144.
193. Жакет Э., Шалайка Дж. (Jacquet H., Shalika J. A.), A non-vanishing theorem for zeta functions on GL_n , *Invent. Math.* 38, 1 (1976), 1—16.
194. Желобенко Д. П., Операторы дискретной симметрии для редуктивных групп Ли, *Изв. АН СССР, сер. матем.* 40, 5 (1976), 1055—1083.
195. Желобенко Д. П., Описание квазипростых неприводимых представлений групп $U(n, 1)$, $Spin(n, 1)$, *Изв. АН СССР, сер. матем.* 41, 1 (1977), 34—53.
196. Зайцев А. А., О нетривиальности пространства голоморфно индуцированного представления разрешимой группы Ли, *Функц. анализ* 11, 2 (1977), 78—79.
197. Исмагилов Р. С., Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов пространства R^n , $n \geq 2$, *Матем. сб.* 98, 1 (1975), 55—71.
198. Исмагилов Р. С., Об унитарных представлениях группы $C_0^\infty(X, G)$, $G = SU(2)$, *Матем. сб.* 100, 1 (1976), 117—131.
199. Кармона Ж. (Carmona J.), Les sous-algèbres de Gartan réelles et la frontière d'une orbite ouverte dans une variété de drapeaux, *Manuscripta Math.* 10, 1 (1973), 1—35.
200. Кириллов А. А., Представления бесконечномерной унитарной группы, *ДАН СССР* 212, 2 (1973), 288—290.
201. Кириллов А. А., Представления некоторых бесконечномерных групп Ли, *Вестн. МГУ, сер. матем.* 1 (1974), 75—83.
202. Кириллов А. А., Унитарные представления группы диффеоморфизмов и некоторых ее подгрупп, *Препринт ИПМ № 82, М., 1974.*
203. Кириллов А. А., Об инвариантных дифференциальных операторах на геометрических величинах, *Функц. анализ* 11, 2 (1977), 39—44.
204. Клеппнер А., Липсман Р. (Kleppner A., Lipsman R.), The Plancherel formula for group extensions. I, II, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, Ser. 4 5, 3 (1972), 459—516; 6, 1 (1972), 103—132.
205. Кнапп А. В. (Knapp A. W.), Weyl group of a cuspidal parabolic, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, Ser. 4 8, 2 (1975), 2459—2461, 275—294.
206. Кнапп А. В., Стейн И. М. (Knapp A. W., Stein E. M.), Singular integrals and the principal series. III, IV, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 71, 11 (1974), 4622—4624; 72, 6 (1975), 2459—2461.
207. Кнапп А. В., Цуккерман Г. (Knapp A. W., Zuckerman G.), Classification of irreducible tempered representations of semisimple Lie groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 73, 7 (1976), 2178—2180.
208. Костант Б. (Kostant B.), On the tensor product of a finite and an infinite dimensional representations, *J. Funct. Anal.* 20, 4 (1975), 257—285.

209. Костант Б., Тирао Дж. (Kostant B., Tiraó J.), On the structure of certain subalgebras of a universal enveloping algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.* **218** (1976), 133—154.
210. Кралевич Х. (Kraljević H.), On representations of the group $SU(n, 1)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **211**, 2 (1976), 433—448.
211. Лезнов А. И., Савельев В. Ф., Вопросы теории представлений полупростых групп Ли, В сб.: ЭЧАЯ 7, вып. 1 (1976).
212. Леповский Дж. (Lepowsky J.), Algebraic results on representations of semi-simple Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **176**, 1 (1973), 1—44.
213. Леповский Дж. (Lepowsky J.), A generalization of H. Weyl «unitary trick», *Trans. Amer. Math. Soc.* **216**, (1976), 229—236.
214. Леповский Дж. (Lepowsky J.), Linear factorisation of conical polynomials over certain nonassociative algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **216**, (1976), 237—248.
215. Люстиг Г. (Lusztig G.), On the finiteness of the number of unipotent classes, *Invent. Math.* **34**, 3 (1976), 201—213.
216. Люстиг Г. (Lusztig G.), On the Green polynomials of classical groups, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 3 **33**, 3 (1976), 443—475.
217. Люстиг Г. (Lusztig G.), Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius, *Invent. Math.* **38**, 2 (1976), 101—159.
218. Мак Коннелл Дж. (McConnell J. C.), Representations of solvable Lie algebras and the Gelfand—Kirillov conjecture, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 3 **29**, 3 (1974), 453—484.
219. Молчанов В. Ф., Сферические функции на гиперболоидах, *Матем. сб.* **99**, 2 (1976), 139—161.
220. Мур К., Вольф Дж. (Moore C. C., Wolf J. A.), Square integrable representations of nilpotent groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **185** (1973), 445—462.
221. Мур К., Розенберг Дж. (Moore C. C., Rosenberg J.), Groups with T_1 primitive ideal spaces, *J. Funct. Anal.* **22**, 3 (1976), 204—224.
222. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М., Геодезические потоки на симметрических пространствах нулевой кривизны и явные решения обобщенной модели Калоджеро для классического случая, *Функц. анализ* **10**, 3 (1976), 86—87.
223. Ольшанский Г. И., Сплетающие операторы и дополнительные серии в классе представлений полной линейной группы матриц над локально компактной алгеброй с делением, индуцированных с параболических подгрупп, *Матем. сб.* **93**, 2 (1974), 217—253.
224. Ольшанский Г. И., Классификация неприводимых представлений групп автоморфизмов деревьев Бруа—Титца, *Функц. анализ* **11**, 1 (1977), 32—42.
225. Онофри Э. (Onofri E.), Dynamical quantization of the Kepler Manifold, *J. Math. Phys.* **17**, 3 (1976).
226. Переломов А. М., Когерентные состояния для плоскости Лобачевского, *Функц. анализ* **7**, 3 (1973), 57—66.
227. Пуканский Л. (Pukanszky L.), Unitary representations of solvable Lie groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, Ser. 4 **4**, 4 (1972), 457—608.
228. Пуканский Л. (Pukanszky L.), The primitive ideal space of solvable Lie groups, *Invent. Math.* **22**, 2 (1973), 75—118.
229. Семенов-Тян-Шанский М. А., Гармонический анализ на римановых симметрических пространствах отрицательной кривизны и теория рассеяния, *Изв. АН СССР, сер. матем.* **40**, 3 (1976), 562—592.
230. Семенов-Тян-Шанский М. А., Об одном свойстве интегралов Кириллова, В сб.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 37, Л., «Наука», 1973.
231. Такахаши Р. (Takahashi R.), Fonctions spheriques dans les groupes $Sp(n, 1)$, *Lect. Notes Math.*, 404, Springer, 1974.

232. Фомин А. И., Неприводимые квазипростые представления группы $SL(3, \mathbb{R})$, Функц. анализ 9, 3 (1975), 67—74.
233. Фомин А. И., О характерах неприводимых представлений вещественных линейных полупростых групп Ли, Функц. анализ 10, 3 (1976), 95—96.
234. Харисш-Чандра (Harish-Chandra), Harmonic Analysis on real reductive groups: I. The theory of the constant term, J. Funct. Anal. 19, 2 (1975), 104—204; II. Wave-packets in the Schwartz spaces, Invent. Math. 36, 1 (1976), 1—55; III. The Maas-Selberg relations and the plancherel formula, Ann. Math. 104, 1 (1976), 117—201.
235. Хау Р. (Howe R. E.), On the principal series of GL_n over p-adic fields, Trans. Amer. Math. Soc. 177 (1973), 275—286.
236. Хау Р. (Howe R. E.), The Fourier transform and germs of characters (case of GL_n over p -adic field), Math. Ann. 208, 4, (1974), 305—322.
237. Хау Р. (Howe R. E.), On the character of Weil's representation, Trans. Amer. Math. Soc. 177 (1973), 287—298.
238. Шаповалов Н. Н., Об одной гипотезе Гельфанда — Кириллова, Функц. анализ 7, 2 (1973), 93—94.
239. Шаповалов Н. Н., Об одной теореме существования, Функц. анализ 10, 1 (1976), 62—66.
240. Шмид В. (Schmid W.), L^2 -cohomology and the discrete series, Ann. Math. 103, 2 (1976), 375—394.
241. Шмид В. (Schmid W.), Some properties of square-integrable representations of semisimple Lie groups, Ann. Math. 102, 3 (1975), 535—564.
242. Щепочкина И. М., О представлениях разрешимых групп Ли, Функц. анализ 11, 2 (1977), 93—94.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

- Автоморфизм группы 21
 - — внутренний 21
- Алгебра 42
 - баахова 55
 - — вполне регулярная, звездная 59
 - Вейля 308
 - внешняя, Грассмана 43
 - групповая 157
 - Клиффорда 44
 - Ли 100
 - — абелева 100
 - — абсолютно простая 106
 - — градуированная 327
 - — коммутативная 100
 - — локальная 256
 - — нильпотентная 104
 - — полупростая 105
 - — простая 105
 - — классическая, особая 106
 - — разрешимая 104
 - Неймана 70
 - — типа I 72, однородная 72
 - обертывающая 167
 - операторов симметричная 62
 - свободная 42
 - симметрическая 43
 - тензорная 43
 - Хопфа 199
- C*-алгебра 59
- Антипредставление 22
- Атлас 74, положительный 79
 - — эквивалентный 79
- База расслоения 91, топологии 13
- Базис 41
- Башня множеств 9
- Бигебра 199
- Бикоммутант (алгебры операторов) 70
- Бифунктор 13
- Вариация меры 48
- Вектор 40
 - аналитический 173
 - весовой 306
 - дифференцируемый вдоль поля 86
- Вектор касательный 81, 82, 83
 - циклический 64
- Вектор-функция измеримая 68
 - слабо интегрируемая 150
- Вложение каноническое (слагаемого в сумму) 11
- Гомоморфизм алгебр 42
 - — Ли 101
 - групп 20
- Группа 20, абелева 20, абстрактная 20, автоморфизмов (структуры) 19
 - аменабельная 145
 - Вейля 107
 - Гейзенберга 261, 314
 - гомотопическая 17
 - Гротендика 124
 - двойственная 187
 - дикая 143, дуальная 187
 - знакопеременная 288
 - когомологий группы 30
 - — непрерывных 153
 - — по де Раму 89, по Чеху 19
 - — топологического пространства 17
 - кольцевая 199
 - коммутативная 20
 - Ли 97
 - — инфинитезимальная 100, локальная 112, локально изоморфная 113, специальная нильпотентная 261, экспоненциальная 119
 - мономальная 220
 - нильпотентная 25
 - преобразований 19
 - проконечная 33
 - простая 26, разрешимая 25
 - ручная 143
 - симметрическая 288
 - топологическая 31
 - унимодулярная 147, усредняющая 145
 - фундаментальная 17
 - характеров 187
 - циклическая 25

- Двойственный (дуальный) объект 126
 Действие группы слева, справа 22,
 транзитивное 23, эффективное 238
 Делитель нормальный 24
 Диаграмма Дынкина 108
 — коммутативная 11
 — Юнга 291
 Диффеоморфизм 76
 Дифференциал (дифференциальной
 формы) 87
 — функции 83
 Единица группы 20, кольца 35
 Замена скаляров 125
 Замыкание 13
 Идеал в алгебре Ли 103
 — двусторонний, левый, правый 34
 — простой 165
 — симметричный 62
 Идемпотент 137, ортогональный 137
 Изоморфизм алгебр операторов прост-
 ранственный 62
 — групп 21
 — объектов категории 10
 Инволюция 58
 Интеграл вектор-функции слабый 150
 — формы 90, функции 49
 Источник 64
 Камера Вейля 107
 Карта 74, допустимая 76, гладко свя-
 занная 76, положительно связан-
 ная 79
 Категория 10, алгебр Ли 101, групп 20
 — дуальная 10
 — множеств 10, K -модулей 38, пред-
 ставлений 122, G -пространств 21
 Квантование 266
 Класс гомотопический 17
 — смежный левый, правый 23, двой-
 ной 24
 Коалгебра 198
 Кограница 18
 Кольцо 34,
 — ассоциативное 34, градуированное
 35
 — групповое 156
 — когомологий 89
 — коммутативное 34, радикальное
 35, полупростое 35, топологическое
 36
 λ -кольцо 125
 Коммутант 70
 Коммутатор векторных полей 86
 Коммутирование 100
 Компакт 15
 Комплексификация 125
 Константы структурные 100
 Координаты локальные 74, канониче-
 ские 119
 Коцепь 18, на группе 30
 Коцикл 18, на группе 30
 Край многообразия 90
 Кривая гладкая 81
 Критерий индуцированности 212, 213,
 214
 Кросснорма 52
 Линеаризация проективного представ-
 ления 243
 Матрица каноническая 106
 — оператора 40
 — ортогональная 79, псевдоортого-
 нальная, псевдосимплектическая,
 псевдоунитарная, симплектическая,
 унитарная 79
 Матричный элемент представления
 128, 152
 Мера 48, абсолютно непрерывная 49
 — базисная (представления) 65
 — дизъюнктивная 50, квазиинвариант-
 ная 148, σ -конечная 48, локально-
 конечная 48
 — Планшереля 200
 — полная, положительная 48, проек-
 ционная 67, регулярная 50, счет-
 но-аддитивная 48, эквивалентная
 49, эргодическая 147
 Метрика 15
 Многообразие 74, алгебраическое 80,
 гладкое 76.
 — грассманово 78
 — диффеоморфное 76
 — комплексное 80
 — неориентируемое, ориентируемое 79
 — с краем 90
 — симплектическое 254, однородное,
 строго однородное 257
 — смешанное 81
 — флагов 318
 Множество 7, борелевское 14, замкну-
 тое 13, измеримое 48
 — линейно упорядоченное 8
 — направленное 9
 — ограниченное 50
 — открытое 13
 — слабо ограниченное 50
 — упорядоченное, частично упорядо-
 ченное 8
 Модуль локально-компактной группы
 147

- Модуль над кольцом 38, дуальный 40, простой 38, свободный 39
 — продуцированный 208
 Мономорфизм 21
 Морфизм 10, обратный 10, функторный 12
 Мультипликатор (проективного представления) 241
- Направленность 9, фундаментальная 16
 Норма 46
 Нормализатор 24
 Носитель меры 50
- Образ (гомоморфизма) 21
 Обращение стрелок 11
 Объект, двойственный (дуальный) к топологической группе 127
 — категории 10, представляющий 13, универсальный 10
 Оператор внешнего дифференцирования 87
 — вполне непрерывный 53
 — Гильберта — Шмидта 54
 — диагональный 69
 — замкнутый 129
 — кограничный 18
 — компактный 53
 — Ли 86
 — линейный 41
 — непрерывно диагональный 69, разложимый 69
 — сопряженный 50
 — сплетающий 123
 — ядерный 53
 Орбита 23
 — в K -представлении 249, соответствующая представлению 260, целочисленная 263
 Ориентация 79
 Отношение бинарное 8
 — — обратное, рефлексивное, симметричное, транзитивное, порядка, эквивалентности 8
 Отображение борелевское 14
 — гомотопное 17
 — каоновическое алгебры Ли в группе Ли 117
 — множества на фактор-множестве 8
 — класса 76
 — линейное 38
 — непрерывное 14
 — производное 83
 — равномерно непрерывное 16
 — экспоненциальное 117
- Параметр каоновический 98
 Перестановка нечетная, четная 288
 Подалгебра алгебры Ли 103, допускаемая 260, картановская 109
 — — —, подчиненная функционалу 259
 Подгруппа виртуальная 212
 — инвариантная, нормальная 24
 — однопараметрическая 116
 — сопряженная 24
 — стационарная 23
 Подкатегория 10
 Подкольцо 34
 Подмодуль 38
 Подпредставление 124, топологическое 126
 Подпространство топологическое 14
 Поле 36
 — p -адических чисел 37
 — векторное 84
 — — гамильтоново 255
 — — гладкое 84, производное 84
 — — строго гамильтоново 255
 — конечное 37
 — тензорное 87, гладкое 87
 — формальных степенных рядов 37
 — числовое 37
 Полуорма 46
 Пополение 16, I -адическое 36
 Последовательность точная 21
 Почти всюду 48
 Предел 14,
 — индуктивный, проективный 12
 Предорма 46
 Предпочок 80
 Представление алгебры Ли 101, регулярное 101
 — — операторное, невырожденное 58, симметричное, точное 59, циклическое 64, эквивалентное 59
 — аналитическое группы $SL(2, F_q)$ 294
 — группы 22
 — — алгебраически неприводимое 124
 — — вполне неприводимое, приводимое 124
 — — дизъюнктивное 123
 — — индуцированное 203
 — — — в смысле Макки 210
 — — квадратично интегрируемое 155
 — — квазирегулярное 203
 — — коиндуцированное 208
 — — конечное 130
 — — контраградиентное 123
 — — Ли голоморфно индуцированное 226

- Представление группы Ли коприсоединенное 249
 — — — присоединенное 111
 — — — простое 183
 — — —, соответствующее орбите 277
 — — — линейное 122
 — — — мономиальное 202
 — — k -неприводимое 128, операторно неприводимое 129
 — — примарное 137
 — — проективное 122
 — — — унитарное 241
 — — разложимое 124
 — — сопряженное 123
 — — тензорно неприводимое 126
 — — топологически конечное 130
 — — — неприводимое 126
 — — точное 22
 — — унитарное 127
 — — — с однородным спектром, с простым спектром, типа I 143
 — — эквивалентное 123
 — категории 196
 — G -пространства унитарное 212
 — спинорное ортогональной группы 302
 — — симплектической группы 313
 — топологической группы непрерывное 125
- K -представление группы Ли 249
- *-представление банаховой алгебры невырожденное 161
 — — — с ниволуцией 59
 — — — согласованное с действием группы 241
- Преобразование Гельфанда 57
 — каноническое 256
 — Фурье 185
- Присоединение единицы 35, 55
- Проекция каноническая множества на фактор-множество 8
 — — произведения на сомножитель 11
 — расслоения 91
- Произведение внешнее 43
 — групп полупрямое 29
 — непрерывное алгебр операторов 72
 — объектов категории 11
 — G -пространств над группой G 22
 — симметрическое 308
 — тензорное алгебр 42
 — — гильбертово 54
 — — модулей 39, 40
 — — операторов 41
 — — представлений 124
 — — проективное 53
 — — расслоений 93
- Произведение тензорное слабое 53
- Производная вдоль вектора 82
 — меры 49
- Пространство банахово 47
 — векторное 40, гильбертово 47
 — Гординга 172
 — линейное 40
 — — топологическое (ЛТП) 45, локально-выпуклое (ЛВП) 45, нормируемое 46, сопряженное 50, счетно-нормируемое 46, ядерное 53
 — метрическое 15
 — окольцованное 80
 — равномерное, полное 16
 — расслоения 91
 — топологическое 13
 — — компактное 14, локально-компактное 32, неметризуемое 15, одностороннее 17, отделимое, полутотделимое, связное, хаусдорфово 15
 — G -пространство левое, правое 22, однородное 23, топологическое 32
- Прямая Александрова 75
- Пучок 80, постоянный 95, структурный 80
- Пфаффиан 281
- Радикал кольца 35
- Радиус спектральный 55
- Размерность линейного пространства 41, многообразия 74
- Ранг алгебры Ли 109, разрешимости, нильпотентности 103
- Распределение лагранжево 271
- Расслоение векторное 91, голоморфное 93, тривиальное 91, частично голоморфное 94
 — касательное, кокасательное 93
 — тензорное 93
 — G -расслоение 222
- Расстояние 15
- Расширение групп 26
 — — разложимое 29, универсальное 243, центральное 29, эквивалентное 28
- Резольвента 55
- Свертка 155, 159, 165
- Семейство операторов измеримое 69
 — полунорм определяющее 46
- Сеть 9
- Сечение расслоения 92, голоморфное 93, частично голоморфное 94
- Симметризация 169
- Система импринтивности 213

- Система корней 108
- Скобка Пуассона 256
- След оператора 41
- Слой расслоения 91
- Спектр 55, совместный 57
- Среднее инвариантное 145
- Стабилизатор 23
- Структура 10
- Сумма непрерывная гильбертовых пространств 69
 - — унитарных представлений 141
 - объектов категории 10
 - прямая операторов 41, расслоений 93
- Супералгебра, супермногообразие 328
- Сходимость операторов равномерная, сильная, слабая 51
 - функционалов сильная, слабая 50
- Тело 37, кватернионов 37
 - Ли 170
 - топологическое 37
- Тензор ковариантный, контравариантный, кососимметрический, симметрический, смешанный 43
- Тип представления 135
- Топология 13
 - I -адическая 36
 - Джекобсона 165
 - дуального объекта 127
 - Зарисского 15
 - пространства Гординга 171
 - сильная, слабая 50
- Условие Пукайского 260
- Фактор 74
- Фактор-алгебра алгебры Ли 103
- Фактор-группа 24
- Фактор-кольцо 34
- Фактор-множество 8
- Фактор-модуль 38
- Фактор-отображение 8
- Фактор-представление 124
- Фактор-пространство 14
- Фильтрация 36
- Форма вещественная (алгебры Ли) 106
 - дифференциальная 87, замкнутая, точная 89
 - — со значениями в расслоении 96
 - квадратичная 48
 - Киллинга 105
- Формула универсальная для характера 276, 277
- Функтор ковариантный, контравариантный 12
 - представимый 13
- Функционал Минковского 46, положительный 61
- Функция измеримая, простая 48, интегрируемая 49
 - кратности 65
 - перехода 91
- Характер группы 186
 - инфинитезимальный 183, обобщенный 185
 - коммутативной банаховой алгебры 57
 - представления 175, 180, алгебры Ли 101
- Центр группы 26
- Централизатор 26
- Число p -адическое 33
 - сплетения 123
 - целое алгебраическое 178
- Элемент алгебры Ли регулярный 108
 - банаховой алгебры нормальный, унитарный, эрмитов 58
- Энергия системы 266
- Эпиморфизм 21
- Ядро гомоморфизма 21