Д. ГИЛБАРГ
Н. ТРУДИНГЕР

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Перевод с английского языка *Л.П. Купцова*
Под редакцией *А.К. Гущина*

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ,
1989

ББК 22.161.6
Г47
УДК 517.956

David Gilbarg Neil S. Trudinger
Elliptic Partial
Differential Equations
of Second Order
Second Edition
Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo 1983

Гилбарг Д., Трудингер М. **Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка**: Пер. с англ. / Под. ред. А.К. Гущина. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 464 с. ISBN 5-02-013938-6

Посвящается изложению теории квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, в основном задачи Дирихле в ограниченных областях.

Состоит из двух частей: линейные уравнения и квазилинейные уравнения.

Включается большой разнородный материал, значительная часть которого в монографии излагается впервые: современное изложение неравенства Харнака, оценки Морри и Джона – Ниренберга, теоремы Лере – Шаудера, значительная часть результатов о квазилинейных уравнениях.

Для специалистов в области дифференциальных уравнений. Доступна аспирантам и студентам старших курсов, специализирующимся в данной области.

Ил. 2. Библиогр. 364 назв.

Г $\dfrac{1602070000-137}{053(02)-89}$ 12-89

ISBN 5-02-013938-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ 7

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ 8

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ 9

Глава 1. **Введение** 11

Часть I. **ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ** 21

Глава 2. **Уравнение Лапласа** 21

2.1. Неравенства для средних значений 22
2.2. Принцип максимума и минимума 23
2.3. Неравенство Харнака 24
2.4. Представление Грина 24
2.5. Интеграл Пуассона 27
2.6. Теоремы о сходимости 29
2.7. Внутренние оценки производных 30
2.8. Задача Дирихле; метод субгармонических функций 30
2.9. Емкость 35
Задачи 36

Глава 3. **Классический принцип максимума** 38

3.1. Слабый принцип максимума 39
3.2. Сильный принцип максимума 41
3.3. Априорные оценки 43
3.4. Оценки градиента решения уравнения Пуассона 44
3.5. Неравенство Харнака 48
3.6. Операторы в дивергентной форме 52
Примечания 53
Задачи 54

Глава 4. **Уравнение Пуассона и ньютонов потенциал** 57

4.1. Непрерывность по Гёльдеру 57
4.2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона 59
4.3. Оценки Гёльдера вторых производных 61
4.4. Оценки вблизи границы 68
4.5. Оценки Гёльдера первых производных 71
Примечания 73
Задачи 73

Глава 5. **Банаховы и гильбертовы пространства** 75

5.1. Принцип сжимающих отображений 76
5.2. Метод продолжения по параметру 76
5.3. Альтернатива Фредгольма 77
5.4. Сопряженные пространства и сопряженные операторы 81
5.5. Гильбертовы пространства 82
5.6. Теорема о проекции 82
5.7. Теорема представления Рисса 83
5.8. Теорема Лакса – Мильграма 84
5.9. Альтернатива Фредгольма в гильбертовых пространствах 85
5.10. Слабая компактность 86
Примечания 87
Задачи 87

Глава 6. **Классические решения; метод Шаудера** 88

6.1. Внутренние оценки Шаудера 90
6.2. Граничные и глобальные оценки 95
6.3. Задача Дирихле 101
6.4. Внутренняя регулярность и регулярность вблизи границы 110
6.5. Другой метод 113
6.6. Неравномерно эллиптические уравнения 117
6.7. Другие граничные условия; задача с косой производной 121
6.8. Приложение 1. Интерполяционные неравенства 130
6.9. Приложение 2. Леммы о продолжении 136
Примечания 138
Задачи 142

Глава 7. **Пространства Соболева** 143

7.1. Пространства L^p 144
7.2. Осреднение и аппроксимация гладкими функциями 146
7.3. Слабые производные 148
7.4. Цепное правило 150
7.5. Пространства $W^{k,p}$ 152
7.6. Теоремы о плотности 153
7.7. Теоремы вложения 154
7.8. Оценки потенциалов и теоремы вложения 156
7.9. Оценки Морри и Джона – Ниренберга 161
7.10. Теоремы о компактности 163
7.11. Разностные отношения 164
7.12. Продолжение и интерполяция 165
Примечания 168
Задачи 169

Глава 8. **Обобщенные решения и их регулярность** 170

8.1. Слабый принцип максимума 172
8.2. Разрешимость задачи Дирихле 174
8.3. Дифференцируемость слабых решений 176
8.4. Глобальная регулярность 179
8.5. Глобальная ограниченность слабых решений 181
8.6. Локальные свойства слабых решений 186
8.7. Сильный принцип максимума 190
8.8. Неравенство Харнака 190
8.9. Непрерывность по Гёльдеру 191
8.10. Локальные оценки вблизи границы 193
8.11. Оценки Гёльдера первых производных 199
8.12. Задача на собственные значения 202
Примечания 204
Задачи 206

Глава 9. **Сильные решения** . . . 207

9.1. Принцип максимума для сильных решений . . . 208
9.2. Оценки в L^p; предварительный анализ . . . 213
9.3. Интерполяционная теорема Марцинкевича . . . 214
9.4. Неравенство Кальдерона – Зигмунда . . . 216
9.5. Оценки в L^p . . . 220
9.6. Задача Дирихле . . . 225
9.7. Локальный принцип максимума . . . 228
9.8. Оценки Гёльдера и неравенство Харнака . . . 230
9.9. Локальные оценки вблизи границы . . . 233
9.10. Граничные оценки Гёльдера градиента . . . 235
Примечания . . . 237
Задачи . . . 238

Часть II. **КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ** . . . 240

Глава 10. **Принципы максимума и сравнения** . . . 240

10.1. Принцип сравнения . . . 243
10.2. Принципы максимума . . . 245
10.3. Контрпример . . . 247
10.4. Принципы сравнения для операторов в дивергентной форме . . . 248
10.5. Принципы максимума для операторов в дивергентной форме . . . 250
Примечания . . . 255
Задачи . . . 255

Глава 11. **Топологические теоремы о неподвижной точке и их применения** . . . 257

11.1. Теорема Шаудера о неподвижной точке . . . 257
11.2. Теорема Лере – Шаудера; специальный случай . . . 258
11.3. Применение . . . 260
11.4. Теорема Лере – Шаудера о неподвижной точке . . . 263
11.5. Вариационные задачи . . . 265
Примечания . . . 269

Глава 12. **Уравнения с двумя переменными** . . . 269

12.1. Квазиконформные отображения . . . 270
12.2. Оценки Гёльдера градиента решения для линейных уравнений . . . 275
12.3. Задача Дирихле для равномерно эллиптических уравнений . . . 279
12.4. Неравномерно эллиптические уравнения . . . 284
Примечания . . . 290
Задачи . . . 292

Глава 13. **Оценки Гёльдера градиента** . . . 293

13.1. Уравнения в дивергентной форме . . . 294
13.2. Уравнения с двумя переменными . . . 297
13.3. Уравнения общего вида; внутренняя оценка . . . 298
13.4. Уравнения общего вида; граничная оценка . . . 302
13.5. Применение к задаче Дирихле . . . 304
Примечания . . . 305
Задача . . . 305

Глава 14. **Граничные оценки градиента** . . . 306

14.1. Общие области . . . 307
14.2. Выпуклые области . . . 309
14.3. Условия на кривизны границы . . . 313
14.4. Результаты о несуществовании . . . 318
14.5. Оценки модуля непрерывности . . . 323
14.6. Приложение: граничные кривизны и функция расстояния . . . 324
Примечания . . . 327
Задачи . . . 327

Глава 15. **Глобальные и внутренние оценки градиента** 328

15.1. Принцип максимума для градиента 329
15.2. Общий случай 331
15.3. Внутренние оценки градиента. 337
15.4. Уравнения в дивергентной форме 341
15.5. Избранные теоремы существования. 347
15.6. Теоремы существования для непрерывных граничных данных 350
Примечания. 351
Задачи 352

Глава 16. **Уравнения типа уравнения со средней кривизной** 353

16.1. Гиперповерхности в $\mathbf{R}^{n+1}$ 353
16.2. Внутренние оценки градиента. 363
16.3. Применение к задаче Дирихле 367
16.4. Уравнения с двумя независимыми переменными. 369
16.5. Квазиконформные отображения. 372
16.6. Графики с квазиконформным гауссовым отображением 380
16.7. Приложения к уравнениям типа уравнений со средней кривизной . . . 385
16.8. Дополнение: эллиптические параметрические функционалы. 389
Примечания. 391
Задачи 393

Глава 17. **Вполне нелинейные уравнения** 394

17.1. Принципы максимума и сравнения 397
17.2. Метод непрерывного продолжения по параметру 399
17.3. Уравнения с двумя переменными 403
17.4. Оценки Гёльдера вторых производных. 406
17.5. Задача Дирихле для равномерно эллиптических уравнений 413
17.6. Оценки вторых производных для уравнений типа уравнения Монжа–Ампера 418
17.7. Задача Дирихле для уравнений типа уравнения Монжа – Ампера. . . . 421
17.8. Глобальные оценки Гёльдера вторых производных 424
17.9. Нелинейные граничные задачи 430
Примечания. 433
Задачи 436

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ. 438

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 455

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ 463

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В этом издании мы осуществили небольшую переработку и, учитывая новые достижения в линейной и нелинейной теории, включили в книгу новый материал, составивший две главы. Мы благодарны многочисленным читателям первого издания, замечания которых мы учли тем или иным способом в настоящей книге. Мы благодарны также Пей Хсу и Л.Ф. Там за их помощь при чтении корректур и особенно Гарри Либерману за его отдельные замечания.

Июль 1983 г.

Дэвид Гилбарг
Стэнфорд

Нейл С. Трудингер
Канберра

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга представляет собою независимое изложение некоторых разделов теории квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, в основном задачи Дирихле в ограниченных областях. Она появилась в результате обработки лекций для аспирантов, которые читали авторы в Стэнфордском университете, и содержит материал, значительно дополняющий эти лекции. Включив подготовительные главы с такими темами, как теория потенциала и функциональный анализ, мы попытались сделать книгу доступной широкому кругу читателей. Кроме того, мы надеемся, что читатели этой книги получат правильное представление о множестве различных технических приемов, которые развивались при изучении эллиптических уравнений и стали частью анализа.

В этой работе в течение нескольких последних лет нам помогали многие ученые. В частности, мы благодарны М.Л. Саймону за ценные дискуссии и за его работу над разделами 15.4–15.8; И.М. Кроссу, А.С. Гью, Дж. Нэшу, П. Трудингер и Б. Тюркингтону – за полезные замечания и уточениния; Г. Вильямсу – за помощь в написании раздела 10.5; А.С. Гью – за помощь в написании раздела 10.6. Кроме того, мы благодарны за безупречную перепечатку рукописи, осуществленную объединенными усилиями Изольды Филд из Стэнфорда и Анны Залуски из Канберры. Исследования авторов, связанные с этой книгой, были частично поддержаны Национальным научным фондом.

Август 1977 г.

Дэвид Гилбарг
Стэнфорд

Нейл С. Трудингер
Канберра

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $n \geqslant 2$, с точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ – множество действительных чисел); $|x| = (\Sigma x_i^2)^{1/2}$; если $b = (b_1, \ldots, b_n)$ есть n-мерный вектор, то $|b| = (\Sigma b_i^2)^{1/2}$

$\mathbf{R}_+^n$ – полупространство в $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}_+^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_n > 0\}$.

∂S – граница множества S; $\bar{S}$ – замыкание S, $\bar{S} = S \cup \partial S$. $S - S' = \{x \in S \mid x \notin S'\}$

$S' \subset\subset S$ – замыкание множества S' компактно и вложено в S; множество S' *строго вложено* в S

Ω – открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, не обязательно ограниченное; если такое множество связно, то оно называется *областью*; $|\Omega|$ – объем Ω.

$B(y)$ – шар в $\mathbf{R}^n$ с центром y; $B_r(y)$ – открытый шар радиуса r с центром y.

ω_n – объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$, $\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$.

$D_i u = \partial u/\partial x_i$, $D_{ij} u = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$;

$Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$ – градиент функции u;

$D^2 u = [D_{ij} u]$ – матрица Гессе, элементами которой являются вторые производные $D_{ij} u$. $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где β_i – целые неотрицательные числа, – мультииндекс; $|\beta| = \Sigma \beta_i$; $D^\beta u = \dfrac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}$.

$C^0(\Omega)$ ($C^0(\bar{\Omega})$) – множество функций, непрерывных в Ω (в $\bar{\Omega}$).

$C^k(\Omega)$ – множество функций, имеющих все производные порядка $\leqslant k$, которые непрерывны в Ω (k – целое неотрицательное число или $k = \infty$).

$C^k(\bar{\Omega})$ – множество функций из $C^k(\Omega)$, все производные которых порядка $\leqslant k$ имеют непрерывное продолжение на $\bar{\Omega}$.

$\operatorname{supp} u$ – *носитель* функции u, замыкание множеств, на котором $u \neq 0$;

$C_0^k(\Omega)$ – множество функций, принадлежащих $C^k(\Omega)$ и имеющих компактный носитель, вложенный в Ω.

$C = C(*, \ldots, *)$ – постоянная (константа), зависящая от величин, указанных в скобках. В тексте одна и та же буква C будет как правило использоваться для обозначения различных постоянных, зависящих от одинаковых аргументов.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

Краткое содержание

Основной целью этой книги является систематическое изложение общей теории квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка и используемой при этом линейной теории. Это означает, что мы будем иметь дело с проблемой разрешимости граничных задач (и прежде всего задачи Дирихле) и с соответствующими общими свойствами решений линейных,

$$Lu \equiv a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u = f(x), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

и квазилинейных,

$$Qu \equiv a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du) = 0, \tag{1.2}$$

уравнений. Здесь $Du = (D_1u, \ldots, D_nu)$, $D_iu = \partial u/\partial x_i$, $D_{ij}u = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$ и т.д. и используется обычное соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Эллиптичность этих уравнений означает, что матрица коэффициентов $[a^{ij}]$ является положительно определенной в области изменения соответствующих аргументов. Мы говорим, что уравнение *равномерно эллиптично,* если отношение γ максимального собственного значения к минимальному собственному значению матрицы $[a^{ij}]$ ограничено. Мы будем иметь дело как с равномерно, так и с неравномерно эллиптическими уравнениями.

Классическим примером линейного эллиптического уравнения является, разумеется, уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \Sigma D_{ii}u = 0$$

и его неоднородный вариант – уравнение Пуассона $\Delta u = f$. Вероятно, наиболее известным примером квазилинейного эллиптического уравнения является уравнение минимальных поверхностей

$$\Sigma D_i(D_iu/(1 + |Du|^2)^{1/2}) = 0,$$

появляющееся в задаче минимизации площади. Это уравнение является неравномерно эллиптическим с $\gamma = 1 + |Du|^2$. Свойства дифференциальных операторов приведенных примеров объясняют многое в теории общих классов уравнений, рассматриваемых в этой книге.

Необходимая линейная теория развита в гл. 2–9 (и в части гл. 12). Хотя этот материал интересен сам по себе, особое внимание здесь уделено тем аспектам теории, которые необходимы для изучения нелинейных задач. Поэтому теория делает акцент на слабые условия о коэффициентах и не затрагивает многих важных классических и современных результатов о линейных эллиптических уравнениях.

Поскольку в конечном счете нас интересуют классические решения уравнения (1.2), нам в определенный момент потребуется в качестве основы теория классических решений достаточно широкого класса линейных уравнений. Для этого в гл. 6 излагается теория Шаудера, которая по существу является полной теорией уравнений вида (1.1) с коэффициентами, непрерывными по Гёльдеру. В то время как для таких уравнений имеется развитая теория разрешимости и гладкости классических решений, соответствующие результаты для уравнений только с непрерывными коэффициентами могут не иметь места.

Естественной стартовой точкой для изучения классических решений является теория уравнений Лапласа и Пуассона. Она изложена в гл. 2 и 4. Имея в виду дальнейшие обобщения, изучение задачи Дирихле для гармонических функций с непрерывными граничными значениями осуществляется с помощью метода Перрона и субгармонических функций. При этом в доказательствах делается особое ударение на принцип максимума и концепцию барьеров, используемую при изучении граничного поведения решений, которые легко распространяются на более общие решения в последующих главах. В гл. 4 мы выводим, исследуя ньютонов потенциал, основные оценки Гёльдера для уравнения Пуассона. Основной результат этой главы (см. теоремы 4.6, 4.8) утверждает, что все функции u, принадлежащие $C^2(\Omega)$ и являющиеся в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ решениями уравнения Пуассона $\Delta u = f$, удовлетворяют на любом множестве $\Omega' \subset\subset \Omega$ равномерной оценке вида

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')} \leqslant C(\sup_{\Omega}|u| + \|f\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})}) \tag{1.3}$$

с постоянной C, зависящей только от α $(0 < \alpha < 1)$, размерности n и от $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ (обозначения см. в разделе 4.1). Эта оценка, носящая внутренний характер, так как $\Omega' \subset\subset \Omega$, и называемая потому *внутренней оценкой,* может быть усилена до *глобальной оценки,* т.е. до оценки во всей области Ω, для решений, имеющих достаточно гладкие граничные значения, в случае, когда граница $\partial\Omega$ области Ω также достаточно гладкая. В гл. 4 оценки вплоть до границы доказываются только для плоской и сферической границ; этого достаточно для дальнейших применений.

Кульминация теории классических решений линейных эллиптических уравнений второго порядка достигается в теории Шаудера, которая в модифицированном и обобщенном виде представлена в гл. 6. По существу, эта теория распространяет результаты теории потенциала на класс уравнений вида (1.1) с коэффициентами, непрерывными по Гёльдеру. Это осуществляется с помощью простого, но фундаментального способа рассматривать уравнение локально как возмущение уравнения с постоянными коэффициентами, получающегося замораживанием старших коэффициентов в выделенной точке. Кропотливые вычисления, опирающиеся на упомянутые выше оценки для уравнения Пуассона, приводят к неравенству, аналогичному неравенству (1.3), для произвольного решения уравнения (1.1), принадлежащего пространству $C^{2,\alpha}$, причем теперь постоянная C зависит также от норм Гёльдера коэффициентов уравнения и, дополнительно, от минимума и максимума собственных значений матрицы коэффициентов $[a^{ij}]$ в области Ω. Эти результаты представлены в виде внутренних оценок на языке весовых внутренних норм (теорема 6.2), а для достаточно гладких граничных значений — в виде глобальных оценок в терминах глобальных норм (теорема 6.6). Здесь мы знакомимся с важной и постоянно используемой концепцией *априорных* оценок, а именно: оценка (через заданные значения) имеет место для всех *возможных* решений класса задач, даже если рассматриваемые условия не гарантируют существования таких решений. Большая часть книги посвящена получению априорных оценок для решений различных задач. (Мы пользуемся правом замены латинского выражения *a priori* единым словом *apriori* (априорный), которое мы и будем использовать повсюду).

Роль подобных априорных оценок демонстрируется в гл. 6 в различных применениях, в том числе: для доказательства разрешимости задачи Дирихле с помощью метода продолжения по параметру (теорема 6.8); для доказательства гладкости более высокого порядка решений из C^2 (теоремы 6.17, 6.18) при выполнении подходящих условий гладкости. В обоих этих случаях априорные оценки обеспечивают для определенных классов решений необходимые свойства компактности, из которых достаточно просто и выводятся эти результаты.

Обращаем внимание на многочисленные дополнительные факты, изложенные в гл. 6, которые не являются необходимыми для дальнейшей разработки теории, но которые расширяют сферу применимости основной теории Шаудера. В разделе 6.5 устанавливается, что доказательство разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1.1) для достаточно широкого класса областей в случае непрерывных граничных значений может быть целиком осуществлено с помощью внутренних оценок, благодаря чему упрощается структура теории. В разделе 6.6 теория разрешимости задачи Дирихле распространяется на некоторый класс неравномерно эллиптических уравнений. Здесь мы увидим, как соотношения между геометрическими свойствами границы и вырождением на границе эллиптичности определяют непрерывное принятие граничных значений. Методы доказательств основаны на барьерной технике. Некоторые результаты предвосхищают аналогичные (но более тонкие) результаты для линейных уравнений, рассматриваемых во второй части книги. В разделе 6.7 теория уравнения (1.1) распространяется на регулярные задачи с косой производной. Метод по существу является экстраполяцией к таким же граничным условиям для уравнения Пуассона, рассмотренного ранее, и использует теорию Шаудера (без привлечения барьерной техники).

В предыдущих рассмотрениях, особенно в теории существования и в доказательствах с помощью барьеров, важную роль играет принцип максимума для оператора L (с коэффициентом $c \leqslant 0$). Принцип максимума — характерная особенность эллиптических уравнений второго порядка, упрощающая построение теории и усиливающая ее результаты. Основные факты о принципе максимума, а также примеры применения методов сравнения изложены в гл. 3. Из принципа максимума следуют самые первые и простейшие априорные оценки общей теории. Небезынтересно отметить, что все оценки гл. 4 и 6 могут быть получены с помощью только методов сравнения, опирающихся на принцип максимума, без какого бы то ни было упоминания ньютонова потенциала или интегралов.

Другой и более общий подход к изучению линейных задач, не использующий теорию потенциала, может быть развит с помощью методов гильбертова пространства, использующих *обобщенные* или *слабые* решения, как в гл. 8. Для пояснения рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка L', главная часть которого имеет *дивергентную форму*:

$$L'u \equiv D_i(a^{ij}(x)D_ju + b^i(x)u) + c^i(x)D_iu + d(x)u.$$

Если коэффициенты являются достаточно гладкими функциями, то, очевидно, этот оператор входит в класс операторов, рассматриваемых в гл. 6. В случае же, когда коэффициенты уравнения принадлежат более широкому классу функций и когда решение является лишь слабо дифференцируемой функцией (в смысле гл. 7), можно определить слабые или обобщенные решения уравнения $L'u = g$, принадлежащие соответствующим классам функций. Например, если коэффициенты a^{ij}, b^i, c ограничены и измеримы в Ω и если функция g интегрируема в Ω, то функция u называется слабым или обобщенным решением в Ω уравнения $L'u = g$, если она принадлежит $W^{1,2}(\Omega)$ (определения см. в гл. 7) и если выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega [(a^{ij}D_ju + b^iu)D_iv - (c^iD_iu + du)v]\,dx = -\int_\Omega gv\,dx \tag{1.4}$$

для всех функций $v \in C_0^1(\Omega)$, называемых *пробными функциями.* Ясно, что если коэффициенты уравнения и функция g достаточно гладкие и если слабое или обобщенное решение u принадлежит $C^2(\Omega)$, то функция u является, очевидно, также и классическим решением в Ω.

Можно говорить также о слабом решении *и обобщенной задачи Дирихле*

$$L'u = g \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega,$$

с граничной функцией $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, понимая под решением u такое слабое решение уравнения, что $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Если предположить, что минимальное собственное значение матрицы $[a^{ij}]$ отделено от нуля в Ω, в слабом смысле выполняется неравенство

$$D_ib^i + d \leqslant 0, \tag{1.5}$$

а функция g принадлежит $L^2(\Omega)$, то мы, согласно утверждению теоремы 8.3, получим, что обобщенная задача Дирихле имеет единственное решение u в классе $W^{1,2}(\Omega)$. Условие (1.5) является аналогом условия $c \leqslant 0$ для уравнения (1.1), обеспечивающим справедливость принципа максимума для функций, удовлетворяющих неравенству $L'u \geqslant 0$ ($L'u \leqslant 0$) в слабом смысле (теорема 8.1), и, следовательно, единственность решения обобщенной задачи Дирихле. Существование решения в этом случае следует из альтернативы Фредгольма для оператора L' (теорема 8.6), доказываемой с помощью теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Большая часть гл. 3 посвящена теории регулярности слабых решений. Из дополнительной гладкости коэффициентов в тождестве (1.4) следует, что решения оказываются принадлежащими пространствам $W^{k,2}$ (теоремы 8.8, 8.10). С помощью теорем вложения Соболева из гл. 7 доказывается, что достаточно высокая гладкость коэффициентов уравнения приводит к тому, что слабые решения оказываются в действительности классическими решениями. Глобальная регулярность этих решений доказывается с помощью распространения внутренней регулярности до границы при условии, что граничные данные являются достаточно гладкими (теоремы 8.13, 8.14).

Теория регулярности слабых решений и соответствующие поточечные оценки являются основой нелинейной теории. Эти результаты служат отправной точкой доказательств методом последовательного улучшения гладкости*), типичным для нелинейной теории. Идея, кратко, состоит в том, чтобы начинать со слабых решений квазилинейного уравнения, рассматривая их как слабые решения *линейного* уравнений, получающегося при подстановке решений в коэффициенты уравнения, а затем доказывать большую гладкость этих решений. Начиная вновь с полученных (более гладких) решений и повторяя процесс, можно постепенно увеличивать степень гладкости решения до тех пор, пока не будет доказано, что исходное слабое решение является достаточно гладким. Такова суть доказательств регулярности для классических вариационных задач и – в неявном виде – в нелинейной теории, рассматриваемой здесь.

Оценки Гёльдера слабых решений, столь необходимые для нелинейной теории, получаются в гл. 6 из неравенств Харнака, доказываемых итерационным методом Мозера (теоремы 8.17, 8.18, 8.20 и 8.24). Эти результаты обобщают фундаментальные априорные оценки Гёльдера, полученные Де Джорджи и являющиеся первым существенным достижением в теории квазилинейных уравнений с числом переменных, большим двух. Доказательства используют интегральные оценки слабых решений u и получаются с помощью соответствующего выбора пробных функций v в тождестве (1.4). Выбор пробных функций является основным техническим приемом для получения оценок, используемым постоянно в этой книге.

В это издание книги мы включили в гл. 8 новый материал о критерии Винера регулярности граничных точек, о собственных значениях и собственных функциях и об оценках Гёльдера первых производных решений линейных уравнений дивергентного вида.

Часть I этого издания книги мы завершаем новой главой 9, посвященной изучению сильных решений линейных эллиптических уравнений. Сильным решением называется решение, имеющее вторые производные – по крайней мере, в слабом смысле – и удовлетворяющее уравнению (1.1) почти всюду. В этой главе переплетаются два направления. Во-первых, доказывается принцип максимума Александрова и соответствующая априорная оценка (теорема 9.1) для решений, принадлежащих соболевскому пространству $W^{2,n}(\Omega)$, посредством чего на неклассические реше-

*) В тексте – the "bootstrap" arguments. – *Примеч. пер.*

ния переносится ряд основных результатов гл. 3. Далее в этой главе полученные результаты используются для получения различных поточечных оценок, включая недавние оценки Гёльдера и Харнака, принадлежащие Крылову и Сафонову (теоремы 9.20, 9.22; следствия с 9.24, 9.25). Во-вторых, в этой главе развивается L^p-теория линейных эллиптических уравнений второго порядка, аналогичная теории Шаудера, изложенной в гл. 6. Основная оценка для решений уравнения Пуассона – неравенство Кальдерона – Зигмунда (теорема 9.9) – получается из интерполяционной теоремы Марцинкевича без применения методов преобразования Фурье. Внутренние и глобальные оценки в пространствах Соболева $W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, установлены в теоремах 9.11, 9.13 и применяются к задаче Дирихле для сильных решений в теореме 9.15 и в следствии 9.18.

Часть II этой книги посвящена в основном задаче Дирихле и соответствующим оценкам для решений квазилинейных уравнений. Частично результаты касаются общего оператора (1.2), а частично – операторов в дивергентной форме

$$Qu \equiv \operatorname{div} A(x, u, Du) + B(x, u, Du), \tag{1.6}$$

где $A(x, z, p)$ и $B(x, z, p)$ – векторная и соответственно скалярная функции, определенные на $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. В гл. 10 принцип максимума и принципы сравнения (аналогичные результатам гл. 3) распространяются на решения и субрешения квазилинейных уравнений. В частности, получены априорные оценки для решений неравенства $Qu \geqslant 0$ (уравнения $Qu = 0$), где Q – оператор в дивергентной форме, удовлетворяющий определенным структурным условиям, более общим, чем условие эллиптичности (теорема 10.9).

В гл. 11 излагаются основные результаты, используемые в последующих главах при изучении задачи Дирихле. Мы рассматриваем в основном классические решения, а уравнения могут быть как равномерно эллиптическими, так и неравномерно эллиптическими. При весьма общих условиях любое глобально гладкое решение u граничной задачи для уравнения $Qu = 0$ в области Ω с гладкой границей может быть получено как неподвижная точка ($u = Tu$) компактного оператора T, действующего из $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ в $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ с произвольным $\alpha \in (0, 1)$. В приложениях функция Tu, где $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, является единственным решением *линейной* задачи, получающейся при подстановке функции u в коэффициенты оператора Q. Из теоремы Лере – Шаудера о неподвижной точке (доказанной в гл. 11) следует существование решения граничной задачи при условии, что справедлива априорная оценка в $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ для решений некоторого непрерывного семейства уравнений $u = T(u; \sigma)$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, где $T(u; 1) = Tu$ (теоремы 11.4, 11.7). Гл. 13–15 посвящены получению таких оценок для достаточно широкого класса задач Дирихле.

Общая процедура получения требуемой априорной оценки для возможных решений u является четырехшаговым процессом, состоящим из последовательных оценок величин $\sup\limits_{\Omega}|u|$, $\sup\limits_{\partial\Omega}|Du|$, $\sup\limits_{\Omega}|Du|$ и $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}$ для некоторого $\alpha > 0$. Каждая из этих оценок использует предыдущую, а конечная оценка для $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}$ используется в доказательстве существования решения, основанном на теореме Лере – Шаудера.

Как уже отмечалось, оценка для $\sup_{\Omega} |u|$ обсуждается в гл. 10. В последующих главах эта оценка или имеется в условиях, или следует из свойств решений уравнений.

Уравнения с двумя независимыми переменными (гл. 12) занимают в теории особое место. Это обусловлено, в частности, существованием сильных методов, созданных для таких уравнений, а также наличием результатов, присущих только этим уравнениям и не имеющих аналогов для уравнений с числом переменных, большим двух. К уравнениям с двумя независимыми переменными применимы метод квазиконформных отображений и методы, использующие дивергентную структуру уравнений (гл. 11). Они сравнительно просто приводят к требуемым априорным оценкам в $C^{1,\alpha}$, из которых легко вытекает разрешимость задачи Дирихле.

Особого внимания заслуживает следующий факт: решения равномерно эллиптических линейных уравнений с двумя независимыми переменными удовлетворяют априорной оценке в $C^{1,\alpha}$ с постоянными, зависящими только от постоянной эллиптичности и верхних граней модулей коэффициентов, без каких бы то ни было предположений о гладкости (теорема 12.4). Для уравнений с числом переменных, большим двух, такая оценка в $C^{1,\alpha}$ и даже оценка градиента при столь общих условиях неизвестны. Другой специфической особенностью двумерной теории является существование априорной оценки в C^1 – оценки вида $|Du| \leqslant K$ – для решения u *произвольного* эллиптического уравнения

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0 \tag{1.7}$$

в предположении, что функция u непрерывна на замыкании ограниченной выпуклой области Ω и принимает граничное значение φ на $\partial\Omega$, причем функция φ удовлетворяет условию ограниченности наклона (или условию трех точек) с постоянной K. Элементарное доказательство этого классического результата, обычно получаемого с помощью теоремы Радо о седловых поверхностях, дано в лемме 12.6. При наличии оценки градиента, выполняющейся для всех решений u общего квазилинейного уравнения (1.7) с коэффициентами $a = a(x, y, u, u_x, u_y)$ и т.д., таких, что $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, задача Дирихле с функцией φ сводится к задаче Дирихле для равномерно эллиптического уравнения, рассмотренной в теореме 12.5. В теореме 12.7 мы получаем решение общей задачи Дирихле для уравнения (1.7) в предположении, что коэффициенты локально непрерывны по Гёльдеру, а граничные значения удовлетворяют условию ограниченности наклона (без дополнительных требований о гладкости этих значений).

В гл. 13, 14 и 15 получаются оценки градиента, участвующие в процедуре доказательства существования, описанной выше. В гл. 13 доказываются фундаментальные результаты Ладыженской и Уральцевой об оценке Гёльдера производных решений эллиптических квазилинейных уравнений. В гл. 14 мы занимаемся оценкой градиента решений эллиптического квазилинейного уравнения на границе. После рассмотрения общих и выпуклых областей мы приводим обзор теории Серрина, которая связывает условия на обобщенную кривизну границы с разрешимостью задачи Дирихле. В частности, из результатов гл. 11, 13 и 14 выводится критерий Дженкинса и Серрина разрешимости задачи Дирихле для уравнения минимальных поверхностей, а именно: эта задача разрешима для гладкой области при производных гладких граничных данных тогда и только тогда, когда средняя кривизна границы (относительно внутренней нормали) неотрицательна в любой точке (теорема 14.14).

Глобальные и внутренние оценки градиента решения квазилинейного уравнения доказаны в гл. 15. Используя усовершенствование классической техники Бернштейна, мы получаем оценки $\sup_{\Omega} |Du|$ через $\sup_{\partial\Omega} |Du|$ для класса уравнений, содержащего равномерно эллиптические уравнения, удовлетворяющие естественным условиям роста, и уравнения, имеющие такие же структурные свойства, как и уравнение поверхностей с заданной средней кривизной (теорема 15.2). Вариант нашего метода приводит к внутренним оценкам градиента для более узкого класса уравнений (теорема 15.3). Мы также рассматриваем равномерно эллиптические и неравномерно эллиптические уравнения дивергентной формы (теоремы 15.6, 15.7 и 15.8). В этих случаях с помощью соответствующего выбора пробных функций получаются оценки градиента решений при других условиях на коэффициенты, отличных от условий общего случая. Гл. 15 мы завершаем серией теорем существования, иллюстрирующих широту охвата теории. Все эти теоремы получаются с помощью различных комбинаций априорных оценок из гл. 10, 14 и 15 и разумного выбора соответствующих семейств задач, к которым применима теорема 11.8.

В гл. 16 изучается уравнение поверхностей с заданной средней кривизной, для решений которого получается внутренняя оценка градиента (теорема 16.5), а с ее помощью доказываются теоремы существования решения задачи Дирихле для непрерывных граничных значений (теоремы 16.8, 16.10). Мы рассматриваем также семейство уравнений с двумя переменными, в определенном смысле столь же аналогичных уравнений поверхностей с заданной средней кривизной, как равномерно эллиптические уравнения из гл. 12 аналогичны уравнению Лапласа. Для них с помощью обобщения понятия квазиконформного отображения получаются внутренние оценки первых и вторых производных. Оценки вторых производных обеспечивают хорошо известную оценку Хайнца для решений уравнения минимальных поверхностей (теорема 16.20) и, кроме того, влекут обобщение знаменитого результата Бернштейна, гласящего, что целые решения уравнения минимальных поверхностей с двумя независимыми переменными являются линейными функциями (следствие 16.19). Возможно, наиболее примечательной особенностью теорем 16.5 и 16.20 является метод. Взамен рассмотрений в области Ω мы работаем на поверхности S, являющейся графиком решения u, и используем различные соотношения между тангенциальной составляющей градиента, оператором Лапласа на S и средней кривизной поверхности S.

В это издание книги мы добавили новую гл. 17. В ней рассмотрены вполне нелинейные эллиптические уравнения и изложены результаты недавних работ об уравнениях Монжа – Ампера и об уравнениях типа уравнения Беллмана – Пуччи. Это уравнения общего вида

$$F[u] \equiv F(x, u, Du, D^2u) = 0, \tag{1.8}$$

включающие линейные и квазилинейные уравнения вида (1.1) и (1.2) в качестве специальных случаев. Функция F определена для $(x, z, p, r) \in \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n \times n}$, где $\mathbf{R}^{n \times n}$ – линейное пространство вещественных симметрических матриц порядка $n \times n$. Метод продолжения по параметру (теорема 17.8) сводит изучение разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1.8) к доказательству оценок в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ с некоторым $\alpha > 0$, т.е. для вполне нелинейных уравнений дополнительно к оценкам первых производных, требующимся для изучения квазилинейного случая, нужны еще и оценки вторых производных. Такие оценки получаются для уравнений с двумя независимыми переменными (теоремы 17.9, 17.10), для равномерно эллиптических уравнений (теоремы 17.14, 17.15) и для уравнений типа уравнения Монжа – Ампера (теоремы 17.19, 17.20, 17.26). Из них, в частности, следуют недавние результаты о разрешимости задачи Дирихле для равномерно эллиптических уравнений, полученные Эвансом, Крыловым и Лионсом (теоремы 17.17, 17.18), и для уравнеий типа уравнения Монжа – Ампера, полученные Крыловым, Каффарелли, Ниренбергом и Спруком (теорема 17.23).

Мы завершим этот обзор некоторыми замечаниями читателю. Материал не имеет строгого логического порядка. Так, теория уравнения Пуассона (гл. 4) должна, естественно, следовать за уравнением Лапласа (гл. 2). Но, учитывая элементарность утверждений о принципе максимума (гл. 3) и возможность пораньше познакомить читателя с некоторыми общими задачами для уравнений с переменными коэффициентами, мы поместили соответствующий материал сразу после гл. 2. В действительности общий принцип максимума не используется до теории разрешимости гл. 6. Основной материал по функциональному анализу (гл. 5) для теории Шаудера необходим в более слабом виде: достаточно знать принцип сжимающих отображений и основные факты теории банаховых пространств, исключая доказательство альтернативы в теореме 6.15. Для изучения нелинейных задач во второй части достаточно знать результаты разделов 1–3 гл. 6. В зависимости от интересов читателя изучение линейной теории можно начать прямо с L^2-теории, излагаемой в гл. 8; для этого достаточно знакомство с предварительным материалом по функциональному анализу (гл. 5) и с теорией слабо дифференцируемых функций (гл. 7). Неравенство Харнака и оценки Гёльдера из гл. 8 не используются до гл. 13.

Теория квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными (гл. 12) по существу не использует гл. 7–11, ее можно изучать сразу после гл. 6, ознакомившись лишь с теоремой Шаудера о неподвижной точке (теорема 11.1). Метод квазиконформных отображений вновь встречается в гл. 16, остальные главы не используют гл. 12. После ознакомления с основами нелинейной теории в гл. 11 читатель может непосредственно приступить к изучению n-мерной теории, излагаемой в гл. 13–17. Гл. 16 в целом не использует гл. 13–15. Гл. 6 и 9 достаточно подготавливают к усвоению большей части результатов гл. 17.

Дополнительные замечания

Кроме основ вещественного анализа и линейной алгебры в этой книге не используются другие сведения, и материал книги в целом является автономным. Возможно, многие предварительные сведения из теории потенциала и функционального анализа, равно как и теория пространств Соболева и теоремы о неподвижной точке, могут быть знакомы многим читателям. Но, думается, доказательство теоремы Лере – Шаудера, не использующее понятие топологической степени (теорема 11.6), не столь широко известно. Ряд хорошо известных вспомогательных результатов, таких как интерполяционные неравенства и леммы о продолжении гл. 6, приведены в книге ради полноты изложения.

Имеются большие пересечения с материалом книг Ладыженской и Уральцевой [147] и Морри [208]. От первой из них наша книга отличается используемой аналитической техникой, а также тем, что в нелинейной теории больше внимания обращено на неравномерно эллиптические уравнения. От второй наша книга отличается тем, что непосредственно не посвящена вариационным задачам и методам. Настоящая книга содержит также результаты, полученные после публикации названных двух книг. С другой стороны, наша книга более ограничена содержанием. Среди тем, не рассмотренных в книге, укажем на системы уравнений, полулинейные уравнения, теорию монотонных операторов и разделы, использующие геометрическую теорию меры.

В изложении материала, нередко весьма технического, мы не всегда стремились к максимально возможной общности. В частности, это замечание касается используемых модулей непрерывности, оценок, интегральных условий и т.п. Мы ограничили себя рассмотрением условий, описываемых степенными функциями: условие Гёльдера – а не условие Дини, пространства L^p – а не пространства Орлича, структурные условия в терминах степеней $|p|$ – а не в терминах более общих функций от $|p|$ и т.д. Модифицируя доказательства, читатель самостоятельно может получить соответствующие обобщения.

Исторические сведения и библиографические ссылки приводятся, как правило, в примечаниях в конце глав. Примечания не претендуют на полноту, а являются скорее дополнениями к тексту, поясняющими его. Более обстоятельный обзор литературы до 1968 г. имеется в книге Миранды [195]. С целью дополнения текста в конце каждой главы приводятся задачи. Надеемся, что они будут полезными упражнениями для читателя.

ЧАСТЬ I

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА 2

УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, а u – функция из $C^2(\Omega)$. Лапласиан от функции u, обозначаемый через Δu, определяется равенством

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}u = \operatorname{div} Du. \tag{2.1}$$

Функция u называется *гармонической* (*субгармонической, супергармонической*) в Ω, если в Ω выполняется соотношение

$$\Delta u = 0 \quad (\Delta u \geqslant 0, \quad \Delta u \leqslant 0). \tag{2.2}$$

Настоящая глава посвящена изложению некоторых основных свойств гармонических, субгармонических и супергармонических функций, которые используются при изучении разрешимости классической задачи Дирихле для *уравнения Лапласа* $\Delta u = 0$. Как отмечалось в гл. 1, уравнение Лапласа и его неоднородная форма – уравнение Пуассона – являются основной моделью линейных эллиптических уравнений.

Отправной точкой исследования является хорошо известная теорема о дивергенции в $\mathbf{R}^n$. Пусть Ω_0 – ограниченная область с границей $\partial\Omega_0$ класса C^1 и пусть ν – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega_0$. Для произвольного векторного поля w класса $C^1(\overline{\Omega}_0)$ справедливо равенство

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div} w\,dx = \int_{\partial\Omega_0} w\cdot\nu\,ds, \tag{2.3}$$

ds – $(n-1)$-мерный элемент площади на $\partial\Omega_0$*). В частности если u – функция класса $C^2(\overline{\Omega}_0)$, то, полагая в (2.3) $w = Du$, получаем равенство

$$\int_{\Omega_0} \Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega_0} Du\cdot\nu\,ds = \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds \tag{2.4}$$

(более общую формулировку теоремы о дивергенции см. в [122]).

*) Обычно формула (2.3) называется формулой Гаусса – Остроградского. – *Примеч. пер.*

2.1. Неравенства для средних значений

Первое утверждение, являющееся следствием тождества (2.4), содержит в себе хорошо известное свойство среднего для гармонических, субгармонических и супергармонических функций.

Теорема 2.1. *Пусть $u \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет соотношению $\Delta u = 0$ ($\Delta u \geqslant 0$, $\Delta u \leqslant 0$) в Ω. Тогда для любого шара $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ справедливы равенства (неравенства)*

$$u(y) = (\leqslant, \geqslant) \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u\,ds, \tag{2.5}$$

$$u(y) = (\leqslant, \geqslant) \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B u\,dx. \tag{2.6}$$

Для случая гармонической функции теорема 2.1 утверждает, что значение этой функции в центре шара B равно ее интегральному среднему как по сфере ∂B, так и по самому шару B. Эти утверждения, известные как *теоремы о среднем*, полностью характеризуют гармонические функции (см. теорему 2.7).

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\rho \in (0, R)$. Применим тождество (2.4) к шару $B_\rho = B_\rho(y)$. Получим

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_{B_\rho} \Delta u\,dx = (\geqslant, \leqslant) 0.$$

Вводя радиальную и угловые координаты: $r = |x - y|$, $\omega = (x - y)/r$, и представляя $u(x) = u(y + r\omega)$, имеем

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y + \rho\omega)\,ds = \rho^{n-1} \int_{|\omega|=1} \frac{\partial u}{\partial r}(y + \rho\omega)\,d\omega =$$

$$= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|\omega|=1} u(y + \rho\omega)\,d\omega = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u\,ds] = (\geqslant, \leqslant) 0.$$

Следовательно, для любого $\rho \in (0, R)$

$$\rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u\,ds = (\geqslant, \leqslant) R^{1-n} \int_{\partial B_R} u\,ds,$$

а так как

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{1-n} \int_{\partial B_\rho} u\,ds = n\omega_n \cdot u(y),$$

то получаем соотношение (2.5). Соотношение (2.6) немедленно получается из (2.5), если последнее записать в виде

$$n \cdot \omega_n \rho^{n-1} u(y) = (\leqslant, \geqslant) \int_{\partial B_\rho} u\,ds, \quad \rho \leqslant R,$$

и проинтегрировать по ρ от 0 до R. □

2.2. Принцип максимума и минимума

Теорема 2.1 позволяет получить *сильный принцип максимума* для субгармонических функций и *сильный принцип минимума* для супергармонических функций.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть* $\Delta u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* Ω. *Предположим, что существует такая точка* $y \in \Omega$, *что* $u(y) = \sup\limits_{\Omega} u$ $(\inf\limits_{\Omega} u)$. *Тогда функция* u *является постоянной. В частности отличная от постоянной гармоническая функция не может иметь внутренних точек максимума и минимума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Delta u \geqslant 0$ в Ω, $M = \sup\limits_{\Omega} u$. Определим $\Omega_M = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$. По предположению Ω_M не пусто. Кроме того, так как функция u непрерывна, то множество Ω_M является замкнутым в Ω. Пусть z – произвольная точка Ω_M. Применим неравенство (2.6) к субгармонической в шаре $B = B_R(z) \subset\subset \Omega$ функции $u - M$. Получим

$$0 = u(z) - M \leqslant \frac{1}{\omega_n R^n} \int\limits_B (u - M)\,dx \leqslant 0,$$

т.е. $u = M$ в $B_R(z)$. Следовательно, Ω_M является также и открытым в Ω. Таким образом, $\Omega_M = \Omega$.

Утверждение теоремы для супергармонических функций получается из доказанного утверждения заменой u на $-u$. □

Сильные принципы максимума и минимума немедленно приводят к глобальным оценкам, а именно к следующим *слабым принципам максимума и минимума.*

Т е о р е м а 2.3. *Пусть область* Ω *ограничена,* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *и* $\Delta u \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *в* Ω. *Тогда*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u). \tag{2.7}$$

В частности, для гармонической функции u

$$\inf_{\partial\Omega} u \leqslant u(x) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u, \quad x \in \Omega.$$

Из теоремы 2.3 следует теорема единственности решения классической задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона в ограниченной области.

Т е о р е м а 2.4. *Пусть функции* u, $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *удовлетворяют равенствам* $\Delta u = \Delta v$ *в* Ω *и* $u = v$ *на* $\partial\Omega$. *Тогда* $u = v$ *в* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $u - v$ через w. Тогда $\Delta w = 0$ в Ω и $w = 0$ на $\partial\Omega$. А в силу теоремы 2.3 $w = 0$ на Ω. □

Отметим также, что из теоремы 2.3 вытекает следующее утверждение: если функции u и v, гармоническая и субгармоническая соответственно, совпадают на границе $\partial\Omega$, то $v \leqslant u$ в Ω. Отсюда и название "субгармоническая функция".

Соответствующее замечание справедливо и для супергармонических функций. Далее в этой главе это свойство субгармонических и супергармонических функций класса $C^2(\Omega)$ берется за основу при распространении понятий суб- и супергармоничности на более широкий класс функций.

Другой метод доказательства теорем 2.2, 2.3 и 2.4 приводится в следующей главе, в которой устанавливаются принципы максимума для общих эллиптических уравнений (см. также задачу 2.1).

2.3. Неравенство Харнака

Еще одним следствием теоремы 2.1 является следующее неравенство Харнака для гармонических функций.

Теорема 2.5. *Пусть u – неотрицательная гармоническая функция в Ω. Тогда для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$ существует такая постоянная C, зависящая только от n, Ω' и Ω, что*

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant C \inf_{\Omega'} u. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $y \in \Omega, B_{4R}(y) \subset \Omega$. Тогда для любых двух точек $x_1, x_2 \in B_R(y)$ имеют место соотношения (2.6)

$$u(x_1) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_1)} u\,dx \leqslant \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u\,dx,$$

$$u(x_2) = \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u\,dx \geqslant \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{2R}(y)} u\,dx.$$

Отсюда получаем

$$\sup_{B_R(y)} u \leqslant 3^n \inf_{B_R(y)} u. \tag{2.9}$$

Пусть теперь $\Omega' \subset\subset \Omega$. Выберем точки $x_1, x_2 \in \bar{\Omega}'$ так, чтобы $u(x_1) = \sup_{\Omega'} u$, $u(x_2) = \inf_{\Omega'} u$. Пусть $\Gamma \subset \bar{\Omega}'$ – замкнутая дуга, соединяющая x_1 и x_2. Возьмем такое положительное число R, что $4R < \operatorname{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$. В силу теоремы Гейне – Бореля дуга Γ может быть покрыта конечным числом N (зависящим только от Ω' и Ω) шаров радиуса R *). Применяя оценку (2.9) в каждом шаре и комбинируя их, получаем неравенство $u(x_1) \leqslant 3^{nN} u(x_2)$. Тем самым получена оценка (2.8) с постоянной $C = 3^{nN}$. □

Заметим, что постоянная в (2.8) инвариантна относительно преобразований подобия и ортогональных преобразований. Неравенство Харнака для слабых решений однородных эллиптических уравнений будет доказано в гл. 8.

2.4. Представление Грина

Прежде чем перейти к изучению вопроса о существовании решений, получим некоторые следствия теоремы о дивергенции, а именно тождества Грина.

Пусть Ω – область, к которой применима теорема о дивергенции, и пусть u и v – функции из $C^2(\bar{\Omega})$. Подставляя $w = v \cdot Du$ в тождество (2.3), по-

---

*) Чтобы добиться независимости числа N от рассматриваемой функции u, достаточно взять $R < \frac{1}{4} \operatorname{dist}(\bar{\Omega}', \partial\Omega)$ и выбрать конечное покрытие шарами радиуса R множества $\bar{\Omega}'$. – *Примеч. ред.*

лучим *первое тождество Грина*

$$\int_\Omega v \cdot \Delta u dx + \int_\Omega Du \cdot Dv\, dx = \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} ds. \tag{2.10}$$

Меняя в (2.10) функции u и v местами и вычитая получающееся тождество из (2.10), получаем *второе тождество Грина*

$$\int_\Omega (v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) ds. \tag{2.11}$$

Уравнение Лапласа имеет радиально-симметричное решение r^{2-n} для $n > 2$ и $\log r$ для $n = 2$, где r – расстояние до фиксированной точки. Фиксируем точку $y \in \Omega$ и введем нормированное *фундаментальное решение* уравнения Лапласа

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n} |x-y|^{2-n}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \log|x-y|, & n = 2. \end{cases} \tag{2.12}$$

Простые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} D_i\Gamma(x-y) &= \frac{1}{n\omega_n} (x_i - y_i) \cdot |x-y|^{-n}, \\ D_{ij}\Gamma(x-y) &= \frac{1}{n\omega_n} \{|x-y|^2 \delta_{ij} - n(x_i-y_i)(x_j-y_j)\} \cdot |x-y|^{-n-2}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Очевидно, что функция Γ гармонична при $x \neq y$. Для дальнейших целей мы отметим следующие оценки производных:

$$\begin{aligned} |D_i\Gamma(x-y)| &\leqslant \frac{1}{n\omega_n} |x-y|^{1-n}, \\ |D_{ij}\Gamma(x-y)| &\leqslant \frac{1}{\omega_n} |x-y|^{-n}, \\ |D^\beta\Gamma(x-y)| &\leqslant C|x-y|^{2-n-|\beta|}, \quad C = C(n, |\beta|). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Особенность в точке $x = y$ не позволяет использовать функцию Γ вместо v во втором тождестве Грина (2.11). Однако эту трудность можно обойти, заменив Ω на $\Omega - \bar{B}_\rho$, где $B_\rho = B_\rho(y)$ – шар достаточно малого радиуса ρ. Формула (2.11) тогда принимает вид

$$\int_{\Omega - B_\rho} \Gamma \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \right) ds + \int_{\partial B_\rho} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} \right) ds. \tag{2.15}$$

Далее,

$$\int_{\partial B_\rho} \Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \Gamma(\rho) \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \leqslant n\omega_n \rho^{n-1} \Gamma(\rho) \sup_{B_\rho} |Du| \to 0$$

при $\rho \to 0$

и

$$\int_{\partial B_\rho} u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} ds = -\Gamma'(\rho) \cdot \int_{\partial B_\rho} u ds =$$

(заметим, что ν есть *внешняя* нормаль к $\Omega - B_\rho$)

$$= -\frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \cdot \int_{\partial B_\rho} u \cdot ds \to -u(y) \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Отсюда, устремляя в (2.15) ρ к нулю, получаем формулу

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} (x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds + \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u dx,$$

$$y \in \Omega, \tag{2.16}$$

дающую представление произвольной функции $u \in C^2(\overline{\Omega})$ через Δu и значения u и $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ на $\partial\Omega$. Будем называть ее *представлением Грина*. Для интегрируемой функции f интеграл $\int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(x) dx$ называется *ньютоновым потенциалом* с плотностью f. Если u имеет компактный носитель в $\mathbf{R}^n$, то из (2.16) следует часто используемая формула

$$u(y) = \int \Gamma(x-y) \Delta u(x) dx. \tag{2.17}$$

Для гармонической функции u мы имеем также представление

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} (x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds, \quad y \in \Omega. \tag{2.18}$$

Так как в этом равенстве подынтегральные функции являются бесконечно дифференцируемыми и, более того, аналитическими по y, то из представления (2.18) следует, что u также аналитична в Ω. Таким образом, гармонические функции аналитичны всюду в своей области определения и, следовательно, однозначно определяются своими значениями на любом открытом подмножестве области определения.

Предположим теперь, что функция $h \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $\Delta h = 0$ в Ω. Тогда, используя второе тождество Грина (2.11), получаем

$$-\int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h}{\partial \nu} - h \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds = \int_{\Omega} h \Delta u dx. \tag{2.19}$$

Обозначая $G = \Gamma + h$ и складывая (2.16) и (2.19), получаем более общее представление Грина

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial \nu} - G \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds + \int_{\Omega} G \Delta u dx. \tag{2.20}$$

Если дополнительно $G = 0$ на $\partial\Omega$, то

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \nu} ds + \int_{\Omega} G \Delta u dx. \tag{2.21}$$

Такая функция $G = G(x, y)$ называется *функцией Грина* (задачи Дирихле) для области Ω. Иногда ее также называют *функцией Грина первого рода* для Ω. Из теоремы 2.4 следует единственность функции Грина. Существование функции Грина влечет возможность представления формулой (2.21) любой гармонической функции из $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ через ее граничные значения.

2.5. Интеграл Пуассона

В случае, когда Ω есть шар, функция Грина может быть построена методом отражения. Это приводит к хорошо известному интегральному представлению Пуассона гармонической функции в шаре. А именно, пусть $B_R = B_R(0)$ и пусть для $x \in B_R$, $x \neq 0$,

$$\bar{x} = \frac{R^2}{|x|^2} \cdot x \tag{2.22}$$

есть точка, получаемая инверсией точки x относительно ∂B_R; если $x = 0$, то положим $\bar{x} = \infty$. Тогда, как легко видеть, функция Грина для B_R задается равенствами

$$G(x, y) = \begin{cases} \Gamma(|x - y|) - \Gamma\left(\dfrac{|y|}{R}\, |x - \bar{y}|\right), & y \neq 0, \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R), & y = 0 \end{cases} = \tag{2.23}$$

$$= \Gamma\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2\, x \cdot y}\right) - \Gamma\left(\sqrt{\left(\frac{|x| \cdot |y|}{R}\right)^2 + R^2 - 2\, x \cdot y}\right)$$

для всех $x, y \in B_R$, $x \neq y$.

Функция G, определенная формулой (2.23), обладает следующими свойствами:

$$G(x, y) = G(y, x), \quad G(x, y) \leqslant 0 \ \text{ для } \ x, y \in \bar{B}_R. \tag{2.24}$$

Кроме того, непосредственное вычисление показывает, что для $x \in \partial B_R$ нормальная производная G задается формулой

$$\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{\partial G}{\partial |x|} = \frac{R^2 - |y|^2}{n \omega_n R}\, |x - y|^{-n} \geqslant 0. \tag{2.25}$$

Следовательно, если функция $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\bar{B}_R)$ гармонична, то в силу (2.21) справедлива *интегральная формула Пуассона*

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n \omega_n R} \cdot \int_{\partial B_R} \frac{u\, ds_x}{|x - y|^n}\,. \tag{2.26}$$

Правая часть этой формулы называется *интегралом Пуассона* функции u. С помощью аппроксимации можно показать, что интегральная формула Пуассона остается верной и для $u \in C^2(B_R) \cap C(\bar{B}_R)$. Заметим, что при $y = 0$ получаем теорему о среднем для гармонической функции. И вообще, все предыдущие теоремы этой главы могут быть получены как следствия представления (2.21) с $\Omega = B_R(0)$.

Для доказательства существования решения классической задачи Дирихле в шаре нам потребуется обратное утверждение, которое мы сейчас и докажем.

Теорема 2.6. *Пусть $B = B_R(0)$ и φ – непрерывная на ∂B функция. Тогда функция u, определенная равенствами*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \displaystyle\int_{\partial B} \dfrac{\varphi(y)ds_y}{|x-y|^n} & \text{для } x \in B, \\ \varphi(x) \quad \text{для } x \in \partial B, \end{cases} \tag{2.27}$$

принадлежит $C^2(B) \cap C(\bar{B})$ и удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ в B.

Доказательство. Гармоничность в B определенной равенствами (2.27) функции u, очевидно, следует из того, что G, а потому и $\dfrac{\partial G}{\partial \nu}$, гармоничны по x; это можно проверить непосредственным вычислением. Для доказательства непрерывности u вплоть до границы ∂B мы применим формулу Пуассона (2.26) к специальному случаю $u = 1$. Получим тождество

$$\int_{\partial B} K(x,y)ds_y = 1 \quad \text{для всех } x \in B, \tag{2.28}$$

где K – *ядро Пуассона,*

$$K(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R\,|x-y|^n}, \quad x \in B, \quad y \in \partial B. \tag{2.29}$$

Разумеется, интеграл в (2.28) может быть вычислен непосредственно, однако эти вычисления довольно громоздки. Пусть теперь $x_0 \in \partial B$, а ϵ – произвольное положительное число. Выберем $\delta > 0$ так, что $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$ для $|x - x_0| < \delta$; пусть $|\varphi| \leqslant M$ на ∂B. Тогда если $|x - x_0| < \delta/2$, то из (2.27) и (2.28) имеем

$$|u(x) - u(x_0)| = \left| \int_{\partial B} K(x,y)(\varphi(y) - \varphi(x_0))ds_y \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|y-x_0| \leqslant \delta} K(x,y)|\varphi(y) - \varphi(x_0)|\,ds_y +$$

$$+ \int_{|y-x_0| > \delta} K(x,y)|\varphi(y) - \varphi(x_0)|\,ds_y \leqslant$$

$$\leqslant \epsilon + \frac{2M(R^2 - |x|^2)\cdot R^{n-2}}{(\delta/2)^n}.$$

Отсюда следует, что если взять расстояние $|x - x_0|$ достаточно малым, то $|u(x) - u(x_0)| < 2\epsilon$. Следовательно, u непрерывна в точке x_0. Итак, $u \in C^0(\bar{B})$, что и требовалось доказать. □

Подчеркнем, что приведенные рассуждения локальны, т.е. если φ только ограничена и интегрируема по ∂B и непрерывна в точке x_0, то $u(x) \to \varphi(x_0)$ при $x \to x_0$.

2.6. Теоремы о сходимости

В этом разделе мы отметим некоторые непосредственные следствия интегральной формулы Пуассона. Три следующие теоремы не будут, однако, нужны для дальнейших рассмотрений.

Прежде всего мы покажем, что гармонические функции могут быть охарактеризованы их свойством среднего.

Теорема 2.7. *Непрерывная в области Ω функция и гармонична в этой области тогда и только тогда, когда для любого шара $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ выполняется свойство среднего*

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \cdot \int_{\partial B} u\,ds.$$

Доказательство. По теореме 2.6 для любого шара $B \subset\subset \Omega$ существует такая гармоническая в B функция h, что $h = u$ на ∂B. Разность $w = u - h$ является функцией, удовлетворяющей свойству среднего для любого лежащего в B шара. Следовательно, к функции w применимы принцип максимума и результаты о единственности – теоремы 2.2, 2.3 и 2.4, поскольку их обоснование использует только свойство среднего. Поэтому $w = 0$ в B, и, следовательно, функция u обязана быть гармонической в Ω. □

Немедленным следствием предыдущей теоремы является следующее утверждение.

Теорема 2.8. *Предел равномерно сходящейся последовательности гармонических функций является гармонической функцией.*

Из теоремы 2.8 следует, что если $\{u_n\}$ – последовательность гармонических в ограниченной области Ω функций с непрерывными граничными значениями $\{\varphi_n\}$, которые сходятся равномерно на $\partial\Omega$ к функции φ, то последовательность $\{u_n\}$ сходится равномерно (в силу принципа максимума) к гармонической в Ω функции, принимающей граничные значения φ на $\partial\Omega$. С помощью неравенства Харнака – теорема 2.5 – мы можем также получить из теоремы 2.8 *теорему Харнака о сходимости.*

Теорема 2.9. *Пусть $\{u_n\}$ – монотонно неубывающая последовательность гармонических в области Ω функций. Предположим, что для некоторой точки $y \in \Omega$ последовательность $\{u_n(y)\}$ ограничена. Тогда последовательность $\{u_n\}$ равномерно на любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$ сходится к гармонической функции.*

Доказательство. Последовательность $\{u_n(y)\}$ сходится, т.е. для любого $\epsilon > 0$ существует номер N такой, что $0 \leqslant u_m(y) - u_n(y) < \epsilon$ для всех $m \geqslant n > N$. Но тогда в силу теоремы 2.5 $\sup_{\Omega'} |u_m(x) - u_n(x)| \leqslant C\epsilon$ с некоторой постоянной C, зависящей от Ω' и Ω. Следовательно, последовательность $\{u_n\}$ сходится равномерно, и согласно теореме 2.8 ее предел является гармонической функцией. □

2.7. Внутренние оценки производных

Непосредственным дифференцированием интеграла Пуассона можно получить внутренние оценки производных гармонических функций. Такие же оценки следуют также и из свойства среднего. Пусть функция u гармонична в Ω и $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$. Так как градиент Du также является гармонической функцией в Ω, то по свойству среднего и теореме о дивергенции мы можем записать

$$Du(y) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_B Du\,dx = \frac{1}{\omega_n R^n} \cdot \int_{\partial B} u\nu\,ds,$$

$$|Du(y)| \leqslant \frac{n}{R} \sup_{\partial B} |u|,$$

и, следовательно,

$$|Du(y)| \leqslant \frac{n}{d_y} \sup_{\Omega} |u|, \tag{2.31}$$

где $d_y = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$.

Последовательным применением оценки (2.31) к набору равноотстоящих друг от друга вложенных шаров получаются оценки для производных высших порядков.

Т е о р е м а 2.10. *Пусть u – гармоническая функция в Ω и пусть Ω' – произвольное компактное подмножество в Ω. Тогда для любого мультииндекса α*

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leqslant \left(\frac{n\,|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|, \tag{2.32}$$

где $d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Непосредственным следствием оценки (2.32) является равностепенная непрерывность на компактных подмножествах рассматриваемой области производных любого ограниченного множества гармонических функций. По теореме Арцела из этого следует, что любое ограниченное множество гармонических функций является *нормальным семейством.* Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.11. *Любая ограниченная последовательность гармонических в области Ω функций содержит подпоследовательность, сходящуюся равномерно на компактных подмножествах Ω к гармонической функции.*

Отметим, что теорема о сходимости – теорема 2.8 – может быть получена непосредственно из теоремы 2.11.

2.8. Задача Дирихле; метод субгармонических функций

Теперь мы можем перейти к изучению вопроса о существовании решений классической задачи Дирихле в произвольной ограниченной области. Метод, используемый нами, является развитием *метода Перрона* *субгармонических функций* [234], который существенно опирается на принцип максимума и разрешимость задачи Дирихле для шара. Этот метод имеет ряд привлекательных особенностей: он элементарен, отделяет собственно задачу существования от изучения граничного поведения решений и очевидным образом обобщается на более общие классы эллиптических уравнений второго порядка. Имеются другие хорошо известные методы получения теорем существования, такие как метод интегральных уравнений, использованный, например, в книгах [122], [74], вариационный метод или метод гильбертова пространства, который мы опишем далее в гл. 8.*)

Определение субгармонических и супергармонических функций класса $C^2(\Omega)$ следующим образом обобщается на непрерывные функции. Непрерывная в области Ω функция u называется *субгармонической* (*супергармонической*) в Ω, если для любого шара $B \subset\subset \Omega$ и любой функции h, гармонической в B и удовлетворяющей неравенству $u \leqslant h$ ($u \geqslant h$) на ∂B, имеет место неравенство $u \leqslant h$ ($u \geqslant h$) в B. Легко устанавливаются следующие свойства непрерывных субгармонических функций:

(i) Для непрерывной субгармонической в области Ω функции u справедлив сильный принцип максимума, а если функция v супергармонична в ограниченной области Ω и $v \geqslant u$ на $\partial\Omega$**), то либо $v > u$ всюду в Ω, либо $v \equiv u$.

Чтобы доказать последнее утверждение, предположим противное. Тогда в некоторой точке $x_0 \in \Omega$ $(u - v)(x_0) = \sup\limits_{\Omega}(u - v) = M \geqslant 0$, и можно считать, что существует такой шар $B = B(x_0)$, что $u - v \not\equiv M$ на ∂B. Пусть $\bar{u}$, $\bar{v}$ — гармонические функции, равные u, v на ∂B (теорема 2.6). Тогда

$$M \geqslant \sup_{\partial B}(\bar{u} - \bar{v}) \geqslant (\bar{u} - \bar{v})(x_0) \geqslant (u - v)(x_0) = M,$$

и, следовательно, в этой формуле знаки неравенств можно заменить на знаки равенства. В силу сильного принципа максимума для гармонических функций (теорема 2.2) $\bar{u} - \bar{v} \equiv M$ в B, а тогда $u - v \equiv M$ и на ∂B, что противоречит выбору шара B.

---

*) Впервые строгое доказательство существования решения задачи Дирихле, а также задач Неймана и Робена без специальных требований (типа выпуклости) на структуру рассматриваемой области было получено В.А. Стекловым в работах 1896 – 1902 гг.; см. его книгу: Основные задачи математической физики. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983. При этом был применен весьма оригинальный метод исследования, опирающийся на теорию потенциала и своеобразные теоремы вложения.

Основанное на методе интегральных уравнений доказательство теоремы существования имеется также в учебниках: В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981; П е т р о в с к и й И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. В последнем приводится и изложение метода Перрона. Опирающийся на понятие обобщенного решения метод изучения разрешимости основных краевых задач (вариационный метод) содержится, например, в учебнике М и х а й л о в а В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983; см. также монографию Л а д ы ж е н с к о й О.А. и У р а л ь ц е в о й Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – *Примеч. ред.*

**) Предполагается, что супергармоническая функция v и субгармоническая функция u непрерывны в $\bar{\Omega}$. – *Примеч. ред.*

(ii) Пусть функция u субгармонична в Ω и B — шар, лежащий строго внутри Ω. Обозначим через $\bar{u}$ гармоническую в B функцию, которая задается интегралом Пуассона по значениям u на ∂B, удовлетворяющую равенству $\bar{u} = u$ на ∂B. Определим в Ω *гармоническую срезку* u относительно B *) равенством

$$U(x) = \begin{cases} \bar{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in \Omega - B. \end{cases} \tag{2.33}$$

Функция U будет субгармонической в Ω.

Действительно, пусть $B' \subset\subset \Omega$ — произвольный шар в Ω и пусть h — гармоническая в B' функция, удовлетворяющая неравенству $h \geqslant U$ на $\partial B'$. Так как $u \leqslant U$ в B', то $u \leqslant h$ в B' и, следовательно, $U \leqslant h$ в $B' - B$. Но U гармонична в B. Поэтому в силу принципа максимума $U \leqslant h$ в $B \cap B'$. Следовательно, $U \leqslant h$ в B', т.е. U субгармонична в Ω.

(iii) Пусть функции $u_1, u_2, \ldots, u_N$ субгармоничны в Ω. Тогда функция $u(x) = \max\{u_1(x), u_2(x), \ldots, u_N(x)\}$ также субгармонична в Ω.

Это свойство является тривиальным следствием определения субгармоничности. Соответствующие результаты для супергармонических функций получаются заменой в свойствах (i), (ii) и (iii) функции u на $-u$.

Пусть теперь Ω — ограниченная область, а φ — ограниченная функция на $\partial\Omega$. Непрерывная в $\bar{\Omega}$ субгармоническая функция u называется *субфункцией* относительно φ, если она удовлетворяет неравенству $u \leqslant \varphi$ на $\partial\Omega$. Аналогично непрерывная в $\bar{\Omega}$ супергармоническая функция u называется *суперфункцией* относительно φ, если $u \geqslant \varphi$ на $\partial\Omega$.

В силу принципа максимума каждая субфункция меньше или равна любой суперфункции. Субфункциями (суперфункциями) являются, в частности, постоянные функции, значения которых не больше $\inf_{\partial\Omega} \varphi$ (не меньше $\sup_{\partial\Omega} \varphi$). Обозначим через S_φ множество всех субфункций для φ.

Основной результат метода Перрона содержится в следующей теореме.

Т е о р е м а 2.12. *Функция* $u(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$ *гармонична в* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу принципа максимума любая функция $v \in S_\varphi$ удовлетворяет неравенству $v \leqslant \sup \varphi$; следовательно, функция u определена всюду на $\bar{\Omega}$. Пусть y — произвольная фиксированная точка Ω. По определению функции u существует такая последовательность $\{v_n\} \subset S_\varphi$, что $v_n(y) \to u(y)$. Заменяя v_n на $\max(v_n, \inf \varphi)$, мы можем считать, что последовательность $\{v_n\}$ ограничена. Выберем теперь R так, чтобы шар $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$, и обозначим через V_n гармоническую срезку функции v_n относительно B; см. формулу (2.33). Тогда $V_n \in S_\varphi$, $V_n(y) \to u(y)$, и в силу теоремы 2.11 последовательность $\{V_n\}$ содержит подпоследовательность $\{V_{n_k}\}$, сходящуюся равномерно в любом шаре $B_\rho(y)$ с радиусом $\rho < R$ к гармонической в B функции v. Ясно, что $v \leqslant u$ в B и что $v(y) = u(y)$. Покажем теперь, что на самом деле $v = u$ в B. Пред-

---

*) В оригинале: "harmonic lifting". — *Примеч. пер.*

положим, что $v(z) < u(z)$ в некоторой точке $z \in B$. Тогда существует такая функция $\bar{u} \in S_\varphi$, что $v(z) < \bar{u}(z)$. Полагая $w_k = \max(\bar{u}, V_{n_k})$ и взяв гармоническую срезку W_k этой функции, см. формулу (2.33), мы, как и ранее, получим подпоследовательность последовательности $\{W_k\}$, сходящуюся к гармонической функции w, удовлетворяющей неравенствам $v \leqslant w \leqslant u$ в B, причем $v(y) = w(y) = u(y)$. Но тогда в силу принципа максимума должно выполняться равенство $v = w$ в B, что противоречит выбору $\bar{u}$. Таким образом, функция u гармонична в Ω. □

Мы конструктивно построили гармоническую функцию, которую естественно считать решением (она называется *решением Перрона*) классической задачи Дирихле: $\Delta u = 0$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$. В самом деле, если задача Дирихле разрешима, то ее решение совпадает с решением Перрона. Действительно, пусть w есть предполагаемое решение. Тогда, очевидно, $w \in S_\varphi$, а в силу принципа максимума $w \geqslant u$ для всех $u \in S_\varphi$. Заметим, что в доказательстве теоремы 2.12 можно вместо теоремы о компактности (теорема 2.11) воспользоваться теоремой Харнака о сходимости, теорема 2.9. (См. задачу 2.10.)

В методе Перрона изучение граничного поведения решения существенно отделено от вопроса о его существовании. Непрерывное достижение решением Перрона заданных граничных значений определяется геометрическими свойствами границы рассматриваемой области и изучается с помощью *барьерных* функций.

Пусть ξ — точка $\partial\Omega$. Функция $w = w_\xi$, принадлежащая $C^0(\bar{\Omega})$, называется *барьером* в точке ξ для Ω, если

(i) w супергармонична в Ω,

(ii) $w > 0$ в $\bar{\Omega} - \xi$; $w(\xi) = 0$.

Более общее определение барьера требует, что супергармоническая функция w является лишь непрерывной и положительной в области Ω и удовлетворяет условию $w(x) \to 0$ при $x \to \xi$. Результаты этого раздела в том же самом виде справедливы и для таких слабых барьеров (см., например, [330, с. 168]).

Важной особенностью концепции, основанной на построении барьеров, является тот факт, что он опирается лишь на локальные свойства границы $\partial\Omega$. А именно, пусть определена функция w, являющаяся *локальным барьером* в точке $\xi \in \partial\Omega$, т.е. существует такая окрестность N точки ξ, что функция w удовлетворяет данному выше определению в $\Omega \cap N$. Тогда барьер в точке ξ для Ω может быть построен следующим образом. Пусть B есть шар, удовлетворяющий условиям $\xi \in B \subset\subset N$, и пусть $m = \inf\limits_{N - B} w > 0$. Функция

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} \min(m, w(x)), & x \in \bar{\Omega} \cap B, \\ m, & x \in \bar{\Omega} - B \end{cases}$$

будет барьером в точке ξ для Ω. В этом можно убедиться, проверив выполнение свойств (i) и (ii). В самом деле, функция $\bar{w}$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и является супергармонической в Ω в силу свойства (iii) субагармонических функций; свойство (ii) очевидно.

Граничную точку будем называть *регулярной* (для уравнения Лапласа), если в этой точке существует барьер.

Связь между существованием барьера и граничным поведением решения описывается следующим утверждением.

Лемма 2.13. *Пусть u – гармоническая в Ω функция, определенная в теореме 2.12. Тогда если ξ – регулярная точка границы области Ω, а функция φ непрерывна в ξ, то $u(x) \to \varphi(\xi)$ при $x \to \xi$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\epsilon > 0$ и пусть $M = \sup |\varphi|$. Так как ξ – регулярная граничная точка, то существует барьер w в точке ξ, и благодаря непрерывности φ существуют такие постоянные δ и k, что $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \epsilon$ при $|x - \xi| < \delta$, $kw(x) \geqslant 2M$ при $|x - \xi| \geqslant \delta$. Функции $\varphi(\xi) + \epsilon + kw$ и $\varphi(\xi) - \epsilon - kw$ являются соответственно суперфункцией и субфункцией для φ. Следовательно, согласно определению u и в силу того, что каждая суперфункция превосходит каждую субфункцию, имеем для $x \in \Omega$

$$\varphi(\xi) - \epsilon - kw(x) \leqslant u(x) \leqslant \varphi(\xi) + \epsilon + kw(x),$$

или

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leqslant \epsilon + kw(x).$$

Отсюда, поскольку $w(x) \to 0$ при $x \to \xi$, получаем, что $u(x) \to \varphi(\xi)$ при $x \to \xi$. □

Из доказанного утверждения непосредственно получаем следующую теорему.

Теорема 2.14. *Классическая задача Дирихле в ограниченной области разрешима для любых непрерывных граничных значений тогда и только тогда, когда все граничные точки области регулярны.*

Доказательство. Если граничная функция φ непрерывна и граница $\partial\Omega$ состоит из регулярных точек, то в силу предыдущей леммы определенная в теореме 2.12 гармоническая функция является решением соответствующей задачи Дирихле. Обратно, пусть задача Дирихле разрешима для всех непрерывных граничных значений и пусть ξ – произвольная точка границы $\partial\Omega$. Тогда гармоническая функция, являющаяся решением задачи Дирихле в Ω с непрерывной граничной функцией $\varphi = |x - \xi|$, будет, очевидно, барьером в точке ξ. Следовательно, точка ξ является регулярной. □

Остается неисследованным важный вопрос: у каких областей все граничные точки регулярны? Примечательно, что общие достаточные условия могут быть даны в терминах локальных геометрических свойств границы. Мы укажем ниже некоторые из таких условий.

При $n = 2$ рассмотрим ограниченную область Ω. Пусть z_0 – ее граничная точка. Пусть r, θ – полярные координаты на плоскости с началом координат в точке z_0. Предположим, что существует такая окрестность N точки z_0, что в ней выделяется однозначная ветвь функции θ, определенная в $\Omega \cap N$ или на компоненте $\Omega \cap N$, содержащей точку z_0 на своей границе. Легко видеть, что функция

$$w = -\mathrm{Re}\frac{1}{\log(z - z_0)} = -\frac{\log r}{\log^2 r + \theta^2}$$

является (слабым) локальным барьером в точке z_0, и, следовательно, точка z_0 является регулярной точкой. В частности, z_0 – регулярная точка границы, если она является концевой точкой простой дуги, лежащей вне Ω. Таким образом, задача Дирихле на плоскости всегда разрешима для непрерывных граничных значений в (ограниченной) области, всех граничных точек которой можно извне коснуться концом простой дуги. Более общо, тот же барьер показывает, что краевая задача разрешима, если любая компонента дополнения области содержит более одной точки. Примерами таких областей являются области, ограниченные конечным числом простых замкнутых кривых. Другой пример – единичный круг с разрезом вдоль некоторой дуги; в этом случае граничные значения могут быть заданы на обоих берегах разреза.

Для бо́льших размерностей ситуация существенно отлична от рассмотренной, и задача Дирихле может быть неразрешимой в столь общем случае. В примере, приведенном Лебегом, построена замкнутая поверхность в пространстве трех измерений, имеющая достаточно острый шип, направленный внутрь области: острие этого шипа является нерегулярной точкой границы области, ограниченной этой поверхностью (см., например, [140]).

Простым достаточным условием разрешимости в ограниченной области Ω является *условие внешней сферы*:

для каждой точки $\xi \in \partial\Omega$ существует шар $B = B_R(y)$, удовлетворяющий условию $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \xi$.

Если это условие выполнено, то функция w, определенная равенствами

$$w(x) = \begin{cases} R^{2-n} - |x-y|^{2-n} & \text{для } n \geqslant 3, \\ \log \dfrac{|x-y|}{R} & \text{для } n = 2, \end{cases} \tag{2.34}$$

является барьером в точке ξ. В частности, у области с границей класса C^2 регулярными являются все граничные точки (см. задачу 2.11).

2.9. Емкость

Физическое понятие *емкости* дает другие средства характеризации регулярных и исключительных точек границы. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ с гладкой границей $\partial\Omega$ и пусть u – гармоническая функция (обычно называемая *потенциалом проводимости*), определенная на дополнении к $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющая краевым условиям: $u = 1$ на $\partial\Omega$ и $u = 0$ на бесконечности. Легко устанавливается существование u как (единственного) предела гармонических функций u', определенных в расширяющейся последовательности ограниченных областей, имеющих $\partial\Omega$ в качестве внутренней границы (на которой $u' = 1$) и с внешними границами (на которых $u' = 0$), стремящимися к бесконечности. Если через Σ обозначить $\partial\Omega$ или любую замкнутую поверхность, охватывающую Ω, то величина

$$\operatorname{cap}\Omega = -\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = \int_{\mathbf{R}^n - \Omega} |Du|^2 dx, \tag{2.35}$$

где ν — внешняя нормаль, определяет емкость Ω. В электростатике $\operatorname{cap}\Omega$ с точностью до числового множителя совпадает с полным электрическим зарядом, размещенным на $\partial\Omega$ и имеющим потенциал, равный 1 на $\partial\Omega$.

Емкость может быть определена также для областей с негладкими границами и для любых компактных множеств как (единственный) предел емкостей последовательности приближающих их вложенных друг в друга ограниченных областей с гладкими границами. Эквивалентное определение емкости может быть дано также и без аппроксимирующих областей (см., например, [154]). В частности, справедлива следующая вариационная характеристика:

$$\operatorname{cap}\Omega = \inf_{v \in K} \int |Dv|^2 dx, \tag{2.36}$$

где

$$K = \{ v \in C_0^1(\mathbf{R}^n) \mid v = 1 \text{ на } \Omega \}.$$

Для описания регулярной точки x_0 границы $\partial\Omega$ рассмотрим для произвольного фиксированного $\lambda \in (0, 1)$ емкость

$$c_j = \operatorname{cap}\{x \in \Omega \mid |x - x_0| \leqslant \lambda^j\}.$$

Критерий Винера утверждает, что точка x_0 границы области Ω является регулярной тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \cdot \lambda^{-j(n-2)} \tag{2.37}$$

расходится.

Для ознакомления с понятием емкости и с доказательством критерия Винера мы отсылаем читателя к монографиям [122], [154]. В гл. 8 критерий регулярности будет доказан для общих эллиптических операторов дивергентного вида.

Задачи

2.1. Выведите слабый принцип максимума для субгармонических функций класса $C^2(\Omega)$ из необходимых условий локального максимума.

2.2. Докажите, что если $\Delta u = 0$ в Ω и $u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ на открытом гладком куске границы $\partial\Omega$, то функция u тождественно равна нулю.

2.3. Пусть G — функция Грина для ограниченной области Ω. Докажите, что:

а) $G(x,y) = G(y,x)$ для всех $x, y \in \Omega$, $x \neq y$;

б) $G(x,y) < 0$ для всех $x, y \in \Omega$, $x \neq y$;

в) $\int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy \to 0$ при $x \to \partial\Omega$, если функция f ограничена и интегрируема по Ω.

2.4. (*Принцип симметрии Шварца.*) Пусть Ω^+ — подобласть полупространства $x_n > 0$, имеющая частью границы открытый кусок T гиперплоскости $x_n = 0$. Предположим, что функция u гармонична в Ω^+, непрерывна в $\Omega^+ \cup T$ и что $u = 0$ на T. Покажите, что функция U, определенная равенствами

$$U(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) & \text{при } x_n \geqslant 0, \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{при } x_n < 0, \end{cases}$$

гармонична в области $\Omega^+ \cup T \cup \Omega^-$, где Ω^- – область, получающаяся отражением области Ω^+ относительно плоскости $x_n = 0$ (т.е. $\Omega^- = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid (x_n, \ldots, -x_n) \in \Omega^+ \}$).

2.5. Постройте функцию Грина для шарового слоя, ограниченного двумя концентрическими сферами в $\mathbf{R}^n$.

2.6. Пусть u – неотрицательная гармоническая функция в шаре $B_R(0)$. Выведите из интегральной формулы Пуассона следующий вариант *неравенства Харнака*:

$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} \cdot u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} \cdot u(0),$$

2.7. Покажите, что непрерывная в Ω функция u субгармонична в Ω тогда и только тогда, когда она локально удовлетворяет неравенству для средних значений, т.е. если для любой точки $y \in \Omega$ существует такое число $\delta = \delta(y) > 0$, что

$$u(y) \leqslant \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u\,ds \quad \text{для всех} \quad R \leqslant \delta.$$

2.8. Интегрируемая функция u в области Ω называется *слабо гармонической* (*субгармонической*, *супергармонической*) в Ω, если

$$\int_\Omega u \cdot \Delta\varphi\,dx = 0 \qquad (\geqslant 0, \ \leqslant 0)$$

для всех функций $\varphi \geqslant 0$ из $C^2(\Omega)$, имеющих компактный носитель в Ω. Покажите, что слабо гармоническая (субгармоническая, супергармоническая) функция класса $C^0(\Omega)$ является гармонической (субгармонической, супергармонической).

2.9. Покажите, что для функции u класса $C^2(\Omega)$ эквивалентны следующие три условия: (i) $\Delta u \geqslant 0$ в Ω; (ii) u является субгармонической в Ω; (iii) u является слабо субгармонической в Ω.

2.10. Докажите теорему 2.12, используя вместо теоремы 2.11 теорему 2.9.

2.11. Покажите, что область Ω с границей $\partial\Omega$ класса C^2 удовлетворяет условию внешней сферы.

2.12. Покажите, что задача Дирихле разрешима для любой области Ω, удовлетворяющей следующему *условию внешнего конуса*;

для любой точки $\xi \in \partial\Omega$ существует конечный прямой круговой конус K с вершиной в точке ξ, удовлетворяющий условию $\bar{K} \cap \bar{\Omega} = \xi$. Покажите, что в произвольной точке $\xi \in \partial\Omega$ (считаем ее началом координат) соответствующий локальный барьер может быть взят в виде $w = r^\lambda f(\theta)$, где θ – полярный угол.

2.13. Пусть функция u гармонична в $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе оценки (2.31), докажите внутреннюю оценку градиента

$$|Du(x_0)| \leqslant \frac{n}{d_0}\,[\sup_\Omega u - u(x_0)], \qquad d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega).$$

Покажите, что если $u \geqslant 0$ в Ω, то

$$|Du(x_0)| \leqslant \frac{n}{d_0} \cdot u(x_0).$$

2.14. а) Докажите *теорему Лиувилля*: определенная на всем $\mathbf{R}^n$ гармоническая ограниченная сверху функция является постоянной.

б) Докажите, что при $n = 2$ теорема Лиувилля из пункта а) справедлива и для *субгармонических* функций.

в) Покажите, что при $n > 2$ определенная на всем $\mathbf{R}^n$ ограниченная субгармоническая функция может не быть постоянной.

2.15. Пусть $u \in C^2(\bar{\Omega})$ и $u = 0$ на $\partial\Omega \in C^1$. Докажите следующее интерполяционное неравенство: для любого $\epsilon > 0$

$$\int_\Omega |Du|^2 dx \leqslant \epsilon \int_\Omega (\Delta u)^2 dx + \frac{1}{4\epsilon} \int_\Omega u^2 dx.$$

2.16. Докажите теорему 2.12 с помощью построения в каждом шаре $B \subset\subset \Omega$ монотонно неубывающей последовательности гармонических функций, являющихся сужением субфункций на B, которая сходится равномерно к u на плотном множестве точек из B. В качестве следствия покажите, что теоремы 2.12 и 2.14 могут быть доказаны без использования сильного принципа максимума.

2.17. Покажите, что объемный интеграл в (2.35) сходится, и докажите эквивалентность определений емкости (2.35) и (2.36).

2.18. Пусть функция u гармонична на (открытом, связном) множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ и пусть $B_c(x_0) \subset\subset \Omega$. Покажите, что если $a \leqslant b \leqslant c$, где $b^2 = ac$, то

$$\int_{|\omega|=1} u(x_0 + a\omega) \cdot u(x_0 + c\omega)\, d\omega = \int_{|\omega|=1} u^2(x_0 + b\omega)\, d\omega.$$

Выведите отсюда, что если u постоянна в некоторой окрестности, то она тождественно равна постоянной (см. [73]).

ГЛАВА 3

КЛАССИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Целью этой главы является обобщение классического принципа максимума, установленного в гл. 2 для оператора Лапласа, на линейные эллиптические операторы вида

$$Lu = a^{ij}(x) D_{ij} u + b^i(x) D_i u + c(x) u, \qquad a^{ij} = a^{ji}, \tag{3.1}$$

точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ лежит в области Ω пространства $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Будем предполагать, если нет особых оговорок, что функция u принадлежит $C^2(\Omega)$. Здесь и всюду далее считаем, что по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n. Через L будем всюду обозначать оператор, определенный равенством (3.1).

Примем следующие определения.

Оператор L называется *эллиптическим* в точке $x \in \Omega$, если матрица старших коэффициентов $[a^{ij}(x)]$ положительна; это означает, что наименьшее собственное число матрицы $[a^{ij}(x)]$ (обозначим его через $\lambda(x)$) положительно. Если $\Lambda(x)$ есть наибольшее собственное число матрицы $[a^{ij}(x)]$, то справедливы неравенства

$$0 < \lambda(x) |\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda(x) |\xi|^2 \tag{3.2}$$

для всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n - \{0\}$. Если $\lambda > 0$ в Ω, то оператор L называется эллиптическим в Ω. Если же $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$, где λ_0 – постоянная, то оператор L называется *строго эллиптическим* в Ω. Оператор L будем называть *равномерно эллиптическим* в Ω, если отношение Λ/λ ограничено в Ω. Так, оператор $D_{11} + x_1 D_{22}$ эллиптичен, но неравномерно эллиптичен в полуплоскости $x_1 > 0$; этот же оператор равномерно эллиптичен в полосе вида $(\alpha, \beta) \times \mathbf{R}$, где $0 < \alpha < \beta < \infty$.

Большая часть результатов, относящихся к эллиптическим операторам вида (3.1), требует дополнительных условий, ограничивающих влияние подчиненных слагаемых вида $b^i D_i u$ по сравнению с главной частью $a^{ij} D_{ij} u$.

Всюду в этой главе мы будем предполагать выполненным условие

$$|b^i(x)|/\lambda(x) \leqslant \text{const} < \infty, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad x \in \Omega. \tag{3.3}$$

Рассматривая вместо L оператор $L' = \lambda^{-1} L$, мы можем считать $\lambda = 1$, а b^i – ограниченными функциями. Если, дополнительно, оператор L равномерно эллиптичен, то мы можем также считать, что и коэффициенты a^{ij} ограничены. Заметим, что если коэффициенты a^{ij}, b^i эллиптического оператора L непрерывны в Ω, то в любой подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$ он равномерно эллиптичен и выполнено условие (3.3). На коэффициент c также будем накладывать некоторые ограничения, однако они будут различного характера и поэтому будут указываться в соответствующих условиях.

Принцип максимума является важной характерной чертой эллиптических уравнений второго порядка, отличающей их от уравнений высокого порядка и от систем уравнений. Помимо других многочисленных применений принцип максимума используется для получения поточечных оценок, что приводит к созданию более развитой теории, нежели это было бы доступно иным способом. Большинство результатов этой главы основывается исключительно на эллиптичности оператора L, а не на каких-то других специальных свойствах его коэффициентов (таких, как гладкость). Именно такая общность делает возможным использование принципа максимума для получения априорных оценок, особенно в нелинейных задачах.

3.1. Слабый принцип максимума

Для многих приложений достаточно следующего *слабого принципа максимума.*

Теорема 3.1. *Пусть L – эллиптический оператор в ограниченной области Ω. Предположим, что $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ и что*

$$Lu \geqslant 0 \quad (Lu \leqslant 0) \text{ в } \Omega, \quad c = 0 \text{ в } \Omega, \tag{3.4}$$

тогда максимум (минимум) функции u в $\bar{\Omega}$ достигается на $\partial\Omega$, т.е.

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \qquad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u). \tag{3.5}$$

Утверждение остается в силе, если предполагать только локальную ограниченность в Ω отношений $|b^i|/\lambda$; например, достаточно, чтобы $a^{ij}, b^i \in C^0(\Omega)$. Если же не предполагать непрерывность u в $\bar{\Omega}$, то вместо (3.5) справедливо равенство

$$\sup_{\Omega} u = \limsup_{x \to \partial\Omega} u(x) \qquad (\inf_{\Omega} u = \liminf_{x \to \partial\Omega} u). \tag{3.6}$$

Доказательство. Легко видеть, что если $Lu > 0$ в Ω, то справедлив сильный принцип максимума, означающий, что функция u не может иметь внутренний максимум в $\bar{\Omega}$. В каждой точке внутреннего максимума x_0 справедливы соотношения: $Du(x_0) = 0$ и матрица $D^2u(x_0) = [D_{ij}u(x_0)]$ неположительна. Однако, поскольку в силу эллиптичности оператора L матрица $[a^{ij}(x_0)]$ положительна, то $Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0) \leqslant 0$, а это противоречит неравенству $Lu > 0$. (Отметим, что проведенные рассуждения используют только полуопределенность матрицы $[a^{ij}]$.)

В силу условия (3.3) имеем $|b^i|/\lambda \leqslant b_0 = \text{const}$. Так как $a^{11} \geqslant \lambda$, то существует такая достаточно большая постоянная γ, что

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a^{11} + \gamma b^1) e^{\gamma x_1} \geqslant \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0) e^{\gamma x_1} > 0.$$

Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ в Ω выполняется неравенство $L(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) > 0$. Поэтому в силу доказанного ранее

$$\sup_{\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \epsilon e^{\gamma x_1}).$$

Устремляя $\epsilon \to 0$, получим равенство $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$, что и утверждалось в теореме. □

Замечание. Из доказательства видно, что утверждение теоремы справедливо при следующих более слабых предположениях: матрица $[a^{ij}]$ неотрицательна и для некоторого k отношение $|b^k|/a^{kk}$ локально ограничено.

Для удобства введем следующую терминологию, связанную с принципом максимума. Функцию u, удовлетворяющую равенству $Lu = 0$ (неравенству $Lu \geqslant 0$, неравенству $Lu \leqslant 0$) в Ω, будем называть *решением* (*субрешением, суперрешением*) уравнения $Lu = 0$ в Ω. В случае, когда оператор L является лапласианом, введенные понятия переходят соответственно в понятия гармонической, субгармонической и супергармонической функции.

Рассмотрим теперь более общий случай: $c \leqslant 0$ в Ω. Обозначим через Ω^+ подмножество Ω, на котором $u > 0$. Ясно, что если $Lu \geqslant 0$ в Ω, то $L_0 u = a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u \geqslant -cu \geqslant 0$ в Ω^+. Поэтому максимум u на $\bar{\Omega}^+$ должен достигаться на $\partial\bar{\Omega}^+$, и следовательно, на $\partial\Omega$. Полагая тогда $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \min(u, 0)$, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 3.2. *Пусть оператор L эллиптичен в ограниченной области Ω. Предположим, что $u \in C^0(\Omega)$ и в Ω выполняются неравенства*

$$Lu \geqslant 0 \quad (Lu \leqslant 0), \quad c \leqslant 0, \tag{3.7}$$

тогда

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u \geqslant \inf_{\partial\Omega} u). \tag{3.8}$$

Если $Lu = 0$ в Ω, то

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|. \tag{3.9}$$

Из существования положительных собственных значений k задачи $\Delta u + ku = 0$ в Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$ следует, что для операторов с положительным коэффициентом c это утверждение, вообще говоря, неверно.

Непосредственным и важным применением слабого принципа максимума является вывод теорем единственности и теорем о непрерывной зависимости решений от их граничных значений. Из следствия 3.2 автоматически следуют теоремы единственности решения классической задачи Дирихле для оператора L и принцип сравнения, являющиеся типичной формой применения этого следствия.

Теорема 3.3. *Пусть оператор L эллиптичен в Ω и пусть $c \leqslant 0$ в Ω. Предположим, что функции u и v, принадлежащие $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, удовлетворяют равенствам $Lu = Lv$ в Ω и $u = v$ на $\partial\Omega$. Тогда $u = v$ в Ω. Если $Lu \geqslant Lv$ в Ω и $u \leqslant v$ на $\partial\Omega$, то $u \leqslant v$ в Ω.*

3.2. Сильный принцип максимума

Несмотря на то, что для большинства приложений достаточно слабого принципа максимума, нередко возникает необходимость иметь и его сильную форму, исключающую существование нетривиального внутреннего максимума. Мы получим такой результат для локально равномерно эллиптических операторов с помощью следующей часто используемой леммы о граничных точках.

Будем говорить, что область Ω удовлетворяет *условию внутренней сферы* в точке $x_0 \in \partial\Omega$, если существует шар $B \subset \Omega$ такой, что $x_0 \in \partial B$ (это означает, что дополнение Ω удовлетворяет условию внешней сферы в точке x_0).

Лемма 3.4. *Предположим, что оператор L равномерно эллиптичен, $c = 0$ и $Lu \geqslant 0$ в Ω. Пусть x_0 – такая точка границы $\partial\Omega$, что:*

(i) *функция u непрерывна в точке x_0;*

(ii) *$u(x_0) > u(x)$ для всех $x \in \Omega$;*

(iii) *граница $\partial\Omega$ удовлетворяет условию внутренней сферы в точке x_0.*

Тогда если в точке x_0 существует производная функции u по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$, то она удовлетворяет строгому неравенству

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0. \tag{3.10}$$

Если $c \leqslant 0$ и функция c/λ ограничена, то та же самая оценка имеет место в предположении, что $u(x_0) \geqslant 0$, а если $u(x_0) = 0$, то она справедлива независимо от знака c.

Доказательство. Так как Ω удовлетворяет условию внутренней сферы в точке x_0, то существует такой шар $B = B_R(y) \subsetneq \Omega$, что $x_0 \in \partial B$. Для $0 < \rho < R$ введем вспомогательную функцию v равенством $v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$, где $r = |x - y| > \rho$, а α – положительная постоянная, которую мы выберем позднее. При $c \leqslant 0$ имеем

$$Lv(x) = e^{-\alpha r^2}\left[4\alpha^2 a^{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha(a^{ii} + b^i(x_i - y_i))\right] + cv \geqslant$$
$$\geqslant e^{-\alpha r^2}\left[4\alpha^2 \lambda(x) r^2 - 2\alpha(a^{ij} + |b| r) + c\right],$$
$$b = (b^1, b^2, \ldots, b^n).$$

По предположению функции a^{ij}/λ, $|b|/\lambda$ и c/λ ограничены. Следовательно, взяв число α достаточно большим, мы можем добиться выполнения неравенства $Lv \geqslant 0$ в шаровом слое $A = B_R(y) - B_\rho(y)$. Так как $u - u(x_0) < 0$ на $\partial B_\rho(y)$, то существует такая постоянная $\epsilon > 0$, что $u - u(x_0) + \epsilon v \leqslant 0$ на $\partial B_\rho(y)$. Это же неравенство выполняется и на $\partial B_R(y)$, где $v = 0$. Тем самым, мы имеем $L(u - u(x_0) + \epsilon v) \geqslant -cu(x_0) \geqslant \geqslant 0$ в A и $u - u(x_0) + \epsilon v \leqslant 0$ на ∂A. В силу слабого принципа максимума (следствие 3.2) $u - u(x_0) + \epsilon v \leqslant 0$ всюду в A. Вычисляя нормальную производную в точке x_0, мы получаем неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geqslant -\epsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\epsilon v'(R) > 0.$$

Если $u(x_0) = 0$, то c может иметь произвольный знак, ибо предыдущие рассуждения остаются справедливыми в случае, если оператор L заменить в них на оператор $L - c^+$. □

В более общей ситуации, вне зависимости от того, существует нормальная производная функции u или нет, мы получаем

$$\liminf_{x \to x_0} \frac{u(x_0) - u(x)}{|x - x_0|} > 0 \tag{3.11}$$

при условии, что угол между вектором $x_0 - x$ и нормалью в точке x_0 меньше $\pi/2 - \delta$ с некоторым фиксированным $\delta > 0$.

Хотя условие внутренней сферы может быть несколько ослаблено, все-таки утверждать справедливость неравенства (3.11) без соответствующих условий гладкости $\partial\Omega$ в точке x_0 нельзя. Например, пусть $L = \Delta$ и $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ – область в правой полуплоскости, в которой $u = \mathrm{Re}(z/\log z) < 0$. Простые вычисления показывают, что $\partial\Omega \in C^1$ вблизи точки $z = 0$ и $u_x(0,0) = 0$, т.е. оценка (3.11) не имеет места.

Теперь мы можем доказать следующий сильный принцип максимума Э. Хопфа [324].

Теорема 3.5. *Пусть оператор L равномерно эллиптичен, $c = 0$ и $Lu \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ в области Ω (не обязательно ограниченной). Тогда если функция u достигает своего максимума (минимума) во внутренней точке Ω, то она является постоянной. Если же $c \leqslant 0$, а функция c/λ ограничена, то отличная от постоянной функция u не может достигать неотрицательного максимума (неположительного минимума) внутри Ω.*

Утверждение остается справедливым, если оператор L только локально равномерно эллиптичен, а функции $|b^i|/\lambda$, c/λ локально ограничены.

Доказательство. Предположим противное: пусть функция u не является постоянной и достигает своего максимума $M \geqslant 0$ внутри Ω. Тогда множество Ω^-, на котором $u < M$, таково, что $\Omega^- \subset \Omega$ и $\partial\Omega^- \cap \Omega \neq \phi$. Пусть x_0 – точка из Ω^-, расположенная ближе к $\partial\Omega^-$, чем к $\partial\Omega$. Рассмотрим наибольший шар $B \subset \Omega^-$ с центром в точке x_0. Тогда $u(y) = M$ для некоторой точки $y \in \partial B$, причем $u < M$ в B. Из предыдущей леммы следует, что $Du(y) \neq 0$, а это в точке внутреннего максимума невозможно. □

Если $c < 0$ в некоторой точке, то постоянная, которой, как утверждает теорема, является решение, равна, очевидно, нулю. Кроме того, если $u = 0$ во внутренней точке максимума (минимума), то из доказательства теоремы следует, что $u \equiv 0$ независимо от знака c.

Сильный принцип максимума может быть доказан непосредственно, без использования теоремы 3.1 и леммы 3.4 (см., например, [195]).

Следствиями леммы 3.4 и теоремы 3.5 являются теоремы единственности и для других типов граничных условий. В частности, получаем следующую теорему единственности для классической задачи Неймана.

Теорема 3.6. *Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega)$ – решение уравнения $Lu = 0$ в ограниченной области Ω с равномерно эллиптическим оператором L, $c \leqslant 0$, функция c/λ ограничена и пусть область Ω удовлетворяет условию внутренней сферы в каждой точке границы $\partial\Omega$. Тогда если нормальная производная определена всюду на $\partial\Omega$ и $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ на $\partial\Omega$, то u постоянно в Ω. Если, кроме того, $c < 0$ в некоторой точке Ω, то $u \equiv 0$.*

Доказательство. Если $u \neq \text{const}$, то мы можем утверждать, что одна из функций u или $-u$ достигает неотрицательного максимума M в некоторой точке x_0 границы $\partial\Omega$ и ее значения в Ω меньше M (благодаря сильному принципу максимума). Применяя к этой точке x_0 лемму 3.4, заключаем, что $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \neq 0$, что противоречит условию теоремы. □

Результат теоремы 3.6 может быть обобщен на задачи со смешанными краевыми условиями и на задачи с косой производной (см. задачу 3.1). Если граница $\partial\Omega$ имеет углы или ребра, на которых производные u не определены, то в приведенном выше виде результаты могут не иметь места даже в случае, если решение u непрерывно в $\bar\Omega$ (см. задачу 3.8 а)).

3.3. Априорные оценки

Принцип максимума позволяет получать также простые поточечные оценки решений неоднородного уравнения $Lu = f$ в ограниченной области. Отметим, что при этом используются только эллиптичность оператора и ограниченность коэффициентов. Эти оценки важны при изучении нелинейных задач.

Теорема 3.7. *Пусть $Lu \geqslant f$ $(Lu = f)$ в ограниченной области Ω, оператор L эллиптичен в Ω, $c \leqslant 0$ и $u \in C^0(\bar\Omega) \cap C^2(\Omega)$. Тогда*

$$\sup_\Omega u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \sup_\Omega |f^-|/\lambda \tag{3.12}$$

$$\left(\sup_\Omega |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_\Omega |f|/\lambda\right),$$

где постоянная C зависит только от диаметра $\operatorname{diam}\Omega$ области Ω и постоянной $\beta = \sup|b|/\lambda$. В частности, если Ω лежит между двумя параллельными плоскостями, удаленными друг от друга на расстояние d, то оценка (3.12) *имеет место с постоянной $C = e^{(\beta+1)d} - 1$.*

Доказательство. Пусть область Ω лежит в полосе $0 < x_1 < d$. Положим $L_0 = a^{ij}D_{ij} + b^iD_i$. Для $\alpha \geqslant \beta + 1$ имеем:

$$L_0 e^{\alpha x_1} = (\alpha^2 a^{11} + \alpha b^1) e^{\alpha x_1} \geqslant \lambda(\alpha^2 - \alpha\beta) e^{\alpha x_1} \geqslant \lambda.$$

Пусть $v = \sup\limits_{\partial\Omega} u^+ + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup\limits_\Omega |f^-|/\lambda$. Тогда, так как $Lv = L_0 v + cv \leqslant$ $\leqslant -\lambda \sup\limits_\Omega(|f^-|/\lambda)$, то $L(v - u) \leqslant -\lambda(\sup\limits_\Omega |f^-|/\lambda + f/\lambda) \leqslant 0$ в Ω и $v - u \geqslant$ $\geqslant 0$ на $\partial\Omega$. Итак, для случая $Lu \geqslant f$ мы получаем требуемый результат:

$$\sup_\Omega u \leqslant \sup_\Omega v \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \sup_\Omega |f^-|/\lambda$$

с постоянной $C = e^{\alpha d} - 1$ и $\alpha \geqslant \beta + 1$. Заменяя u на $-u$, мы получаем требуемое утверждение и в случае $Lu = f$. □

В гл. 8 и 9 теорема 3.7 будет усилена: будут установлены аналогичные оценки $\sup u$ через интегральные нормы f.

Если условие $c \leqslant 0$ не выполняется, то можно получить аналогичные (3.12) априорные оценки, предполагая, что область Ω лежит между двумя достаточно близкими параллельными плоскостями.

Следствие 3.8. *Пусть $Lu = f$ в ограниченной области Ω, оператор L эллиптичен, а $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Пусть C – постоянная из теоремы 3.7. Предположим, что*

$$C_1 = 1 - C \sup_\Omega c^+/\lambda > 0. \tag{3.13}$$

Тогда

$$\sup_\Omega |u| \leqslant 1/C_1 \cdot (\sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_\Omega |f|/\lambda). \tag{3.14}$$

Замечание. Так как в качестве постоянной C в оценке (3.12) можно взять число $C = e^{(\beta+1)d} - 1$, где d – ширина полосы, содержащей Ω, то в предположении ограниченности сверху величин $|\boldsymbol{b}|/\lambda$ и c/λ условие (3.13) будет выполнено, если только область Ω будет достаточно узкой. Если $c^+ \equiv 0$ (т.е. если $c \leqslant 0$), то $C_1 = 1$ и оценка (3.14) совпадает с оценкой (3.12).

Доказательство следствия 3.8. Представим выражение $Lu = (L_0 + c)u = f$ в виде $(L_0 + c^-)u = f' \equiv f + (c^- - c)u = f - c^+ u$. Оценка (3.12) дает

$$\sup_\Omega |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_\Omega |f'|/\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + C(\sup_\Omega |f|/\lambda + \sup_\Omega |u| \cdot \sup_\Omega c^+/\lambda).$$

Из этого неравенства и условия (3.13) следует оценка (3.14). □

Из следствия 3.8 немедленно вытекает единственность решения задачи Дирихле в достаточно малой области (в предположении, как обычно, ограниченности сверху величин $|b|/\lambda$ и c/λ).

3.4. Оценки градиента решения уравнения Пуассона

При дополнительных условиях на уравнение с помощью принципа максимума можно получать и оценки производных решения. Для иллюстрации этого метода мы получим такие оценки для решений уравнения Пуассона. Далее эти результаты использоваться не будут. Пусть $\Delta u = f$ в кубе $Q = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid |x_i| < d, i = 1, \ldots, n\}$, $u \in C^2(Q) \cap C^0(\bar{Q})$ и функция f ограничена в Q. Используя принцип сравнения, докажем оценку

$$|D_i u(0)| \leqslant \frac{n}{d} \sup_{\partial Q} |u| + \frac{d}{2} \sup_Q |f|, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.15}$$

В полукубе $Q' = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid |x_i| < d, i = 1, \ldots, n-1, 0 < x_n < d\}$

рассмотрим функцию

$$\varphi(x', x_n) = \frac{1}{2}\ [u(x', x_n) - u(x', -x_n)],$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x = (x', x_n)$. Ясно, что

$$\varphi(x', 0) = 0, \quad \sup_{\partial Q'} |\varphi| \leqslant M = \sup_{\partial Q} |u| \quad \text{и} \quad |\Delta\varphi| \leqslant N = \sup_{Q} |f| \quad \text{в} \quad Q'.$$

Рассмотрим также функцию

$$\psi(x', x_n) = \frac{M}{d^2}\,[|x'|^2 + x_n(nd - (n-1)x_n)] + N\frac{x_n}{2}(d - x_n).$$

Отметим, что $\psi(x', x_n) \geqslant 0$ при $x_n = 0$ и $\psi \geqslant M$ на остальной части $\partial Q'$. Кроме того, $\Delta\psi = -N$. Поэтому $\Delta(\psi \pm \varphi) \leqslant 0$ в Q' и $\psi \pm \varphi \geqslant 0$ на $\partial Q'$, из чего в силу принципа максимума следует оценка $|\varphi(x', x_n)| \leqslant \psi(x', x_n)$ в Q'. В выражениях для φ и ψ положим $x' = 0$, разделим их на x_n и устремим x_n к нулю. Получим

$$|D_n u(0)| = \lim_{x_n \to 0} \left| \frac{\varphi(0, x_n)}{x_n} \right| \leqslant \frac{n}{d} M + \frac{d}{2} N,$$

что и является требуемой оценкой (3.15) при $i = n$. Так же устанавливается справедливость этого результата при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Если $f = 0$, то из (3.15) следует независимое доказательство оценки градиента (2.31) для гармонических функций.

Из (3.15) следует, что в произвольной области Ω ограниченное решение u уравнения $\Delta u = f$ удовлетворяет оценке

$$\sup_{\Omega} d_x |Du(x)| \leqslant C(\sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} d_x^2 |f(x)|), \tag{3.16}$$

где $d_x = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ и $C = C(n)$. Если $x \in \Omega$ и Q есть куб с центром в точке x с длиной ребра $d = d_x/\sqrt{n}$, то из (3.15) следует неравенство

$$d_x |Du(x)| \leqslant C(\sup_{\partial Q} |u| + d^2 \sup_{Q} |f|) \leqslant C(\sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} d_y^2 |f(y)|).$$

(Здесь мы используем одну и ту же букву C для обозначения различных постоянных, зависящих только от n.)

В тех же предположениях, применяя аналогичные рассуждения, мы теперь получим оценку модулей непрерывности градиента решений уравнения Пуассона.

Пусть опять функция $u \in C^2(Q) \cap C^0(\bar{Q})$ является решением уравнения $\Delta u = f$ в кубе Q; положим $M = \sup_{Q} |u|$, $N = \sup_{Q} |f|$.

Пусть Q' – область в $\mathbf{R}^{n+1}$, заданная формулой

$$Q' = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z) \mid |x_i| < d/2,\ i = 1, \ldots, n-1,\ 0 < y,\ z < d/4\};$$

определим в Q' функцию

$$\varphi(x', y, z) =$$
$$= \frac{1}{4}\,[u(x', y+z) - u(x', y-z) - u(x', -y+z) + u(x', -y-z)].$$

Рассмотрим эллиптический оператор

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

от $n+1$ переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z$. Видно, что $|L\varphi| \leqslant N$ в Q'. Далее в Q' имеем:

(i) $\varphi(x', 0, z) = \varphi(x', y, 0) = 0$;

(ii) $|\varphi| \leqslant M$ при $|x_i| = d/2$, $i = 1, \ldots, n-1$;

(iii) $|\varphi(x', d/4, z)| \leqslant \mu z$ и $|\varphi(x', y, d/4)| \leqslant \mu y$, где μ – такая постоянная, что $|Du| \leqslant \mu$ в Q'; выражение постоянной μ через M и N получается из оценки (3.16). В качестве функции сравнения возьмем определенную в Q' функцию

$$\psi(x', y, z) = \frac{4M|x'|^2}{d^2} + \frac{4\mu}{d} yz + kyz\log\frac{2d}{y+z}, \tag{3.17}$$

где k – положительная постоянная, которую мы выберем позднее. Отметим, что $|\varphi| \leqslant \psi$ на $\partial Q'$. Так как

$$L\psi = \frac{8(n-1)}{d^2} M + k\left(-1 + \frac{yz}{(y+z)^2}\right) \leqslant \frac{8(n-1)M}{d^2} - \frac{3}{4}k,$$

то $L\psi \leqslant -N$ при $k \geqslant \frac{4}{3}(N + 8(n-1)M/d^2)$. С такой постоянной k функция

$$\psi(x', y, z) = \frac{4M|x'|^2}{d^2} + yz\left(\frac{4\mu}{d} + k\log\frac{2d}{y+z}\right)$$

удовлетворяет условиям $L(\psi \pm \varphi) \leqslant 0$ в Q' и $\psi \pm \varphi \geqslant 0$ на $\partial Q'$. Поэтому $|\varphi| \leqslant \psi$ в Q'.

Положим в этом неравенстве $x' = 0$, разделим его на z и устремим z к нулю. Получим

$$\frac{1}{2}|u_y(0, y) - u_y(0, -y)| = \lim_{z\to 0}\frac{|\varphi(0, y, z)|}{z} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\mu}{d} y + ky\log\frac{2d}{y}. \tag{3.18}$$

С помощью несложной модификации проведенных выше рассуждений аналогичная оценка может быть получена для $|D_i u(0, x_n) - D_i u(0, -x_n)|$

(где $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$). Пусть

$$\varphi(\hat{x}, y, z) =$$
$$= \frac{1}{4}\,[u(\hat{x}, y, z) - u(\hat{x}, -y, z) + u(\hat{x}, y, -z) + u(\hat{x}, -y, -z)],$$

где $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_{n-2})$. В области

$$Q' = \{(x_1, \ldots, x_{n-2}, y, z) \mid |x_i| < d/2,\ i = 1, \ldots, n-2,$$
$$0 < y,\ \ z < d/2\}$$

выберем функцию сравнения, аналогичную (3.17), вида

$$\psi(\hat{x}, y, z) = \frac{4M|\hat{x}|^2}{d^2} + yz\left(\frac{4\mu}{d} + \bar{k}\log\frac{2d}{y+z}\right),$$

где μ и $\bar{k}$ – такие постоянные, что $|Du| \leqslant \mu$ в Q' и $\bar{k} \geqslant \frac{2}{3}\,[N + 8(n-2)M/d^2]$.

Несложно проверить, что $\Delta(\psi \pm \varphi) \leqslant 0$ в Q' и $\psi \pm \varphi \geqslant 0$ на $\partial Q'$, а отсюда следует, что $|\varphi| \leqslant \psi$ в Q'. Если, как и выше, мы положим в этом неравенстве $\hat{x} = 0$, а затем поделим на y и устремим y к нулю, то получим оценку

$$\frac{1}{2}\,|D_{n-1}u(0, z) - D_{n-1}u(0, -z)| =$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{|\varphi(0, y, z)|}{y} \leqslant \frac{4\mu}{d}\,z + \bar{k}z\log\frac{2d}{z}\,. \tag{3.19}$$

Ясно, что тот же самый результат получается, если D_{n-1} заменить на D_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Отметим, что в отличие от предыдущего случая доказательство оценки (3.19) не требует введения оператора в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Если теперь $\Delta u = f$ в области Ω пространства $\mathbf{R}^n$, то мы можем получить из (3.18) и (3.19) оценку для $|Du(x) - Du(y)|$, где x и y – две произвольные точки области Ω. Пусть $d_x = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $d_y = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$, а $d_{x,y} = \min(d_x, d_y)$. Считаем, что $d_x \leqslant d_y$, т.е. $d_x = d_{x,y}$. Предположим сначала, что $|x - y| \leqslant d = d_x/(2\sqrt{n})$, и рассмотрим отрезок, соединяющий точки x и y. Возьмем середину этого отрезка в качестве начала координат и выберем систему координат так, чтобы точки x и y находились на оси x_n: в новых координатах $x = (0, x_n)$, $y = (0, -x_n)$. Куб $Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid |x_i| < d,\ i = 1, \ldots, n\}$ лежит в Ω на расстоянии от $\partial\Omega$, меньшем $d_x/2$. Поэтому мы можем использовать (3.16), (3.18) и (3.19) непосредственно в Q. Получаем оценку

$$d^2\,\frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|} \leqslant C(\sup_Q |u| + d^2\sup_Q |f|)\log\frac{2d}{|x-y|}$$

с некоторой постоянной $C = C(n)$. Следовательно,

$$d_{x,y}^2 \frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|} \leqslant C(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega d_x^2 |f(x)|) \log \frac{d_{x,y}}{|x-y|}.$$

Если x, y – такие точки области Ω, что $|x - y| > d$, то из (3.16) имеем

$$d_{x,y}^2 \frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|} \leqslant C(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega d_x^2 |f(x)|).$$

Комбинируя полученные неравенства, приходим к оценке

$$d_{x,y}^2 \frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|} \leqslant C(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega d_x^2 |f(x)|) \left(\left| \log \frac{d_{x,y}}{|x-y|} \right| + 1 \right),$$

в которой постоянная C зависит только от n.

Полученные результаты объединим в следующей теореме.

Теорема 3.9. *Пусть функция $u \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет в области Ω уравнению Пуассона $\Delta u = f$. Тогда*

$$\sup_\Omega d_x |Du(x)| \leqslant C(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega d_x^2 |f(x)|)$$

и для всех x, y из Ω, $x \neq y$,

$$d_{x,y}^2 \frac{|Du(x) - Du(y)|}{|x-y|} \leqslant$$

$$\leqslant C(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega d_x^2 |f(x)|) \left(\left| \log \frac{d_{x,y}}{|x-y|} \right| + 1 \right), \qquad (3.20)$$

где $C = C(n)$. Здесь $d_x = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $d_{x,y} = \min(d_x, d_y)$.

Несмотря на элементарный характер доказательства, эта теорема является по существу точной, оценка (3.20) не может быть улучшена без дополнительных условий о непрерывности функции f. Теорема 3.9 остается справедливой и для слабых, в смысле гл. 8, решений, в предположении ограниченности правой части f (см. задачу 8.4).

Усиление установленных выше результатов на случай непрерывных по Гёльдеру функций f будет осуществлено другими методами в гл. 4, в которой для этого с успехом используется метод сравнения (см. [41], [42]).

3.5. Неравенство Харнака

Из принципа максимума получается элементарное доказательство общего неравенства Харнака для равномерно эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными. Обозначая через $D_\rho = D_\rho(0)$ открытый круг радиуса ρ с центром в начале координат, мы докажем этот результат в следующем виде.

Теорема 3.10. *Пусть $u \in C^2(D_R)$ – неотрицательное решение уравнения*

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$$

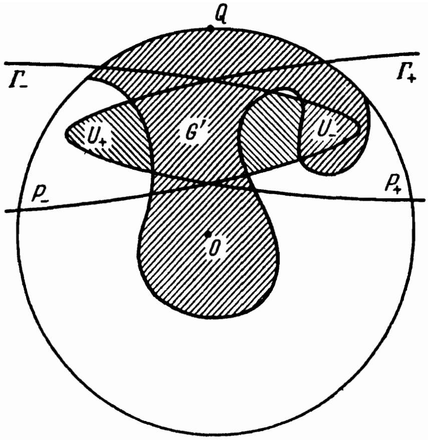

Рис. 1

в круге D_R. Предположим, что оператор L равномерно эллиптичен в D_R. Тогда для всех точек $z = (x, y) \in D_{R/4}$ справедливо неравенство

$$Ku(0) \leqslant u(z) \leqslant K^{-1} u(0), \tag{3.21}$$

в котором положительная постоянная K зависит только от величины $\mu = \sup\limits_{D_R} \Lambda/\lambda$, называемой модулем эллиптичности оператора.

Доказательство. Отметим сначала, что так как уравнение $Lu = 0$ и модуль μ инвариантны при подобных преобразованиях, то достаточно доказать теорему в круге $D = D_1$. Так как $u \geqslant 0$ в D, то из сильного принципа максимума (теорема 3.5) следует, что или $u \equiv 0$, или $u > 0$ в D, так что достаточно рассмотреть последний случай. Рассмотрим множество G тех точек из D, в которых $u > u(0)/2$, и пусть $G' \subset G$ – его связная компонента, содержащая 0. Из принципа максимума следует, что множество $\partial G' \cap \partial D$ непусто, и следовательно, не ограничивая общности, можем считать, что точка $Q = (0, 1)$ лежит на $\partial G'$. Определим функции v_+ и v_- равенствами $v_\pm(x, y) = \pm x + 3/4 - k(y - 1/2)^2$, в которых k – положительная постоянная. Параболы $\Gamma_\pm$: $v_\pm = 0$ имеют вершины $(\mp 3/4, 1/2)$, лежащие в D, и общую ось $y = 1/2$. Если постоянная k достаточно большая (достаточно взять $k \geqslant 3$), то области $P_\pm$, состоящие из точек области D, в которых $v_\pm > 0$, имеют пересечение $P_+ \cap P_-$, ограниченное дугами Γ_+, Γ_- и лежащее в верхней половине D (рис. 1). Функции $v_\pm$ удовлетворяют в $P_\pm$ неравенствам $0 < v_\pm < 7/4$. Вводя функции $E_\pm = \exp(\alpha v_\pm)$, где α – положительная постоянная, которую мы выберем позднее, непосредственно вычисляем, что

$$LE_\pm = E_\pm \left\{ \alpha^2 \left[a \mp 4bk\left(y - \frac{1}{2}\right) + 4ck\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \right] - 2\alpha kc \right\},$$

и поэтому $LE_\pm \geqslant E_\pm(\alpha^2\lambda - 2\alpha k\Lambda) \geqslant 0$ в D, если $\alpha \geqslant 2k\mu$. Выберем число α

удовлетворяющим этому условию. Тогда функции

$$w_{\pm} = (E_{\pm} - 1)/(e^{7\alpha/4} - 1) \tag{3.22}$$

будут удовлетворять соотношениям:

$$Lw_{\pm} \geqslant 0 \text{ в } D; \; w_{\pm} = 0 \text{ на } \Gamma_{\pm}; \; 0 < w_{\pm} < 1 \text{ в } P_{\pm}.$$

Пусть теперь z – произвольная точка пересечения $P_+ \cap P_-$. Тогда: или

(i) $u \geqslant u(0)/2$ и $z \in \overline{G}$;

или

(ii) точка z лежит в компоненте U_+ множества $P_+ - \overline{G}$ такой, что $\partial U_+ \subset \subset \Gamma_+ \cup \partial G$;

или

(iii) точка z лежит в компоненте U_- множества $P_- - \overline{G}$ такой, что $\partial U_- \subset \Gamma_- \cup \partial G$ (см. рис. 1).

Имеют место только эти варианты, так как или $P_+ \cap P_- \subset G'$, или $\partial G'$ разделяет $P_+ \cup P_-$. (Здесь существенным образом используется двумерность.)

В случаях (ii) и (iii) имеем:

$$u - \frac{1}{2} u(0) w_{\pm} = \frac{1}{2} u(0) \cdot (1 - w_{\pm}) > 0 \text{ на } \partial G \cap \partial U_{\pm};$$

$$u - \frac{1}{2} u(0) w_{\pm} = u > 0 \text{ на } \Gamma_{\pm} \cap \partial U_{\pm}.$$

Тем самым $u - \frac{1}{2} u(0) \cdot w_{\pm} > 0$ на $\partial U_{\pm}$. Так как $L\left(u - \frac{1}{2} u(0) w_{\pm}\right) \leqslant 0$, то мы заключаем, что

$$u(z) > \frac{1}{2} u(0) \cdot \min(w_+(z), w_-(z)) \quad \forall z \in P_+ \cap P_-.$$

В частности, на сегменте $y = 1/2$, $|x| \leqslant 1/2$ имеем:

$$u(x, 1/2) > K_1 u(0) \quad \forall x \in [-1/2, 1/2], \tag{3.23}$$

где

$$K_1 = \frac{1}{2} (e^{\alpha/4} - 1)/(e^{7\alpha/4} - 1) =$$

$$= \frac{1}{2} \inf_{|x| \leqslant 1/2} [w_+(x, 1/2), w_-(x, 1/2)].$$

Рассмотрим теперь другие функции сравнения, аналогичные (3.22). Пусть $v = y + 1 - 6x^2$. Рассмотрим область

$$P = \{(x, y) \in D \mid v(x, y) > 0, \quad y < 1/2\}.$$

Область P ограничена сегментом $y = 1/2$, $|x| \leqslant 1/2$ и дугой Γ параболы $v = 0$ с вершиной $(0, -1)$, проходящей через точки $(\pm 1/2, 1/2)$. Как и ранее, при подходящем выборе числа $\beta > 0$, зависящего только от μ, функция

$$w = (e^{\beta v} - 1)/(e^{3\beta/2} - 1)$$

будет обладать свойствами:

$$Lw \geqslant 0 \text{ в } D; \; w = 0 \text{ на } \Gamma; \; 0 < w < 1 \text{ в } P.$$

Из неравенства (3.23) имеем: $u - K_1 u(0) w > 0$ на ∂P, а так как $L(u - K_1 u(0) w) \leqslant 0$, то из принципа максимума следует, что

$$u(z) > K_1 u(0) w(z) \quad \forall z \in P.$$

Так как $D_{1/3} \subset P$, то, полагая $K_2 = \inf\limits_{D_{1/3}} w$, получаем, неравенство

$$u(z) > K_1 K_2 u(0) = Ku(0) \quad \forall z \in D_{1/3}. \tag{3.24}$$

Ясно, что постоянная K зависит только от μ.

Если же $z \in D_{1/4}$, то круг $D_{3/4}(z)$ лежит в D и неравенство (3.24), примененное в круге $D_{1/4}(z)$, дает

$$u(0) > Ku(z) \quad \forall z \in D_{1/4}.$$

Комбинируя это неравенство с (3.24), получаем

$$Ku(0) < u(z) < K^{-1} u(0) \quad \forall z \in D_{1/4}. \; \square$$

Из (3.21) непосредственно следует, что

$$\sup_{D_{R/4}} u \leqslant \kappa \inf_{D_{R/4}} u, \tag{3.25}$$

где $\kappa = 1/K^2$. Применяя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 2.5, можно получить неравенство Харнака для произвольных областей пространства $\mathbf{R}^2$ в следующем виде.

Следствие 3.11. *Пусть в области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ выполнены условия теоремы 3.10. Тогда для любой подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$ существует постоянная κ, зависящая только от Ω, Ω' и μ, такая, что справедливо неравенство*

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant \kappa \inf_{\Omega'} u. \tag{3.26}$$

В случае единичного круга D приведенное доказательство теоремы 3.10 распространяется (с небольшими изменениями) и на более общее строго эллиптическое уравнение

$$Lu = a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u + cu = 0, \quad c \leqslant 0, \quad i, j = 1, 2, \tag{3.27}$$

с ограниченными коэффициентами; утверждение остается тем же самым, но постоянная K будет зависеть не только от μ, но и от величин, оценивающих в D коэффициенты. Аналогичный результат справедлив и для круга D_R радиуса R, но постоянная K будет зависеть, кроме того, и от R (см. задачу 3.4).

Неравенство Харнака (3.21) приводит к следующей теореме Лиувилля.

Следствие 3.12. *Если определенное на всей плоскости решение и равномерно эллиптического в* $\mathbf{R}^2$ *уравнения* $Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$ *ограничено снизу (сверху), то и постоянно.*

Доказательство. Мы можем считать, что $\inf u = 0$ и, следовательно, для любого $\epsilon > 0$ найдется точка z_0 такая, что $u(z_0) < \epsilon$. Возьмем произвольное $R > 0$ и применим в круге $D_{2R}(z_0)$ неравенство (3.21). Получим неравенство $u(z) < K\epsilon$ для всех $z \in D_R(z_0)$. Так как постоянная K не зависит от R, то отсюда следует, что $u(z) < K\epsilon$, каково бы ни было $z \in \mathbf{R}^2$. Устремляя $\epsilon \to 0$, мы получаем, что $u(z) = 0$ для произвольной точки $z \in \mathbf{R}^2$. $\square$

Доказательство обобщений неравенства Харнака (теорема 3.10) и следствия 3.12 на случай бо́льших размерностей дано в гл. 9. Другие виды неравенства Харнака для уравнений дивергентного вида и их приложения приведены в гл. 8 и 13.

3.6. Операторы в дивергентной форме

Мы завершим эту главу кратким обзором результатов для операторов в дивергентной форме. Во многих ситуациях их рассматривать более естественно, чем операторы вида (3.1). Простейшие операторы дивергентной формы имеют вид

$$Lu = D_j(a^{ij}D_iu). \tag{3.28}$$

Далее нужно будет рассматривать и более общие операторы, у которых дивергентную форму имеет главная часть. Оператор L называется эллиптическим в Ω, если матрица $[a^{ij}(x)]$ его старших коэффициентов положительна при всех $x \in \Omega$.

Очевидно, что результаты о принципе максимума применимы также и к оператору (3.28), если коэффициенты a^{ij} достаточно гладкие. Однако если это не так или, как это бывает в нелинейных задачах, нежелательно делать предположения о гладкости коэффициентов (типа предположения ограниченности их производных), то существенно алгебраические методы предыдущей части этой главы неприменимы и должны быть заменены на интегральные методы, более естественные для оператора L, имеющего дивергентную структуру.

Равенство $Lu = 0$ (неравенство $Lu \geqslant 0$ или $Lu \leqslant 0$), которому удовлетворяет решение (субрешение или суперрешение), может быть определено для более широкого класса коэффициентов a^{ij} и функций u, нежели те, которые формально допускаются в (3.28). Так, в случае измеримых и ограниченных коэффициентов a^{ij} и $u \in C^1(\Omega)$ будем говорить, что функция u удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению $Lu = 0$ (неравенству $Lu \geqslant 0$ или $Lu \leqslant 0$) в области Ω, если

$$\int_\Omega a^{ij}(x) D_iuD_j\varphi dx = 0 \tag{3.29}$$

$$\left(\int_\Omega a^{ij}(x) D_iu \cdot D_j\varphi dx \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \int_\Omega a^{ij}(x)D_iu\cdot D_j\varphi\, dx \geqslant 0\right)$$

для всех неотрицательных функций $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Если $a^{ij} \in C^1(\Omega)$ и $u \in C^2(\Omega)$, то в силу теоремы о дивергенции это определение, как легко видеть, эквивалентно уравнению $Lu = 0$ (неравенству $Lu \geqslant 0$ или $Lu \leqslant 0$) в обычном смысле. В дальнейших главах обобщенные решения будут определены как функции из более широких и более подходящих функциональных пространств.

Слабый принцип максимума является непосредственным следствием (3.29). Действительно, пусть функция u удовлетворяет соотношению

$$\int_\Omega a^{ij} D_i u \cdot D_j \varphi dx \leqslant 0 \text{ для всех } \varphi \in C_0^1(\Omega),\ \varphi \geqslant 0, \tag{3.30}$$

и пусть, вопреки доказываемому утверждению, выполняется неравенство $\sup_\Omega u > \sup_{\partial\Omega} u = u_0$. Тогда существуют постоянная $c > 0$ и подобласть $\Omega' \subset\subset \Omega$ такие, что $v = u - u_0 - c > 0$ в Ω' и $v = 0$ на $\partial\Omega'$. Соотношение (3.30) остается справедливым, если функцию u заменить на функцию v и взять φ равной v в Ω' и равной нулю в остальных точках Ω. (Так определенная функция φ, вообще говоря, не принадлежит $C_0^1(\Omega)$, но соотношение (3.30) с такой функцией φ справедливо, в чем можно убедиться, аппроксимируя φ функциями из $C_0^1(\Omega)$). Тогда

$$\int_{\Omega'} a^{ij} D_i v D_j v dx \leqslant 0$$

и, в силу положительности матрицы $[a^{ij}]$, $Dv = 0$ в Ω'. Так как $v = 0$ на $\partial\Omega'$, то получаем равенство $v = 0$ в Ω', что противоречит определению v. Это противоречие доказывает слабый принцип максимума.

Сильный и более общий принципы максимума для операторов дивергентного вида будут установлены в дальнейших главах. Дополнительно к уже отмеченным различиям в методах изучения этих двух классов операторов отметим, что и результаты, касающиеся принципа максимума, имеют различный вид для операторов (3.1) и (3.28), коль скоро накладываются слабые условия на гладкость коэффициентов. Например, утверждение леммы 3.4 для равномерно эллиптического оператора дивергентного вида (3.28) неверно, даже если все коэффициенты оператора имеют произвольную гладкость внутри рассматриваемой области и непрерывны вплоть до ее границы (см. задачу 3.9).

Примечания

Лемма о граничной точке (лемма 3.4) доказана в этой главе методом Е. Хопфа [328]; независимое доказательство, отличающееся только выбором функции сравнений, было дано О.А. Олейник [226]. Результат леммы остается справедливым при тех же самых предположениях о коэффициентах, если граница $\partial\Omega$ имеет нормаль, непрерывную по Дини [114]. Дальнейшее обобщение на класс областей, содержащий липшицевы области, приводит к доказательству единственности решения задачи Неймана для таких областей [212]. В общем случае для сильно и равномерно эллиптических уравнений дивергентного вида лемма 3.4 неверна, даже если коэффициенты непрерывны в граничной точке (см. задачу 3.9), однако утверждение леммы справедливо, если коэффициенты непрерывны по Гёльдеру в некоторой окрестности (Финн – Гилбарг [307]).

Результаты, аналогичные результату леммы 3.4, для областей, удовлетворяющих вместо условия внутренней сферы условию внутреннего конуса, были получены Оддсоном [225] и Миллером [190], [192]. Ими установлены оценка (3.11) и более точные результаты, в которых величина $|x - x_0|$ заменяется на $|x - x_0|^{\mu}$, причем показатель μ зависит только от раствора конуса и от постоянной эллиптичности (здесь вектор $x - x_0$ лежит внутри фиксированного подконуса конуса с вершиной x_0, существование которого предположено). Эти по существу неулучшаемые результаты основаны на изучении экстремальных эллиптических операторов Пуччи [243].

Принцип максимума в такой же общности, как и в теореме 3.5, был впервые доказан Э. Хопфом [324]. О первых результатах при более сильных предположениях см. ссылки в [241, с. 156], где, кроме того, рассмотрены и различные обобщения принципа максимума. Некоторые из этих результатов будут рассмотрены в гл. 8 и 9.

Раздел 3.4 основан на идеях Брандта [41], [42], который показал, что многие факты линейной теории классических решений эллиптических и параболических уравнений второго порядка, включая и оценки гл. 4 и 6, могут быть получены методом сравнения, использующим принцип максимума. Как и в разделе 3.4, этот метод требует построения соответствующей (в общем случае – не очевидной) функции сравнения, которая используется для оценок разностных отношений, а затем и производных.

Неравенство Харнака (теорема 3.10) и некоторые его обобщения доказал Серрин [261]. Это доказательство было, по-видимому, первым доказательством неравенства Харнака, основанном на принципе максимума. Очень похожий результат совершенно другими (весьма тонкими) методами получили Берс и Ниренберг [31].

Теорема Лиувилля (следствие 3.12) связана с геометрической теоремой Бернштейна о поверхностях неположительной кривизны (см. [327]), которая утверждает, что целое решение u любого эллиптического уравнения $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$, удовлетворяющее условию $u = o(r)$ при $r \to \infty$, должно быть постоянно. Примечательным при этом является тот факт, что от уравнения требуется только поточечная эллиптичность. При столь общем условии утверждение следствия 3.12, как показывает контрпример, не имеет места. Результат Бернштейна также основан на принципе максимума, однако рассуждения качественно другие и носят геометрический характер.

Задачи

3.1. Пусть оператор L удовлетворяет условиям теоремы 3.6 в ограниченной области Ω и пусть $Lu = 0$ в Ω.

а) Пусть $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ (S_1 – непусто) и пусть выполнено условие внутренней сферы в каждой точке S_2. Предположим, что функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup S_2) \cap C^0(\bar{\Omega})$ удовлетворяет *смешанному* краевому условию

$$u = 0 \quad \text{на} \quad S_1, \quad \Sigma\beta_i D_i u = 0 \quad \text{на} \quad S_2,$$

в котором вектор $\beta(x) = (\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x))$ имеет в каждой точке $x \in S_2$ ненулевую нормальную (к внутренней сфере) компоненту. Тогда $u \equiv 0$.

б) Пусть граница $\partial\Omega$ удовлетворяет условию внутренней сферы и пусть функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ удовлетворяет *регулярному граничному условию с косой производной*:

$$\alpha(x)u + \Sigma\beta_i(x)D_iu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

в котором $\alpha(\beta\nu) > 0$, ν – внешняя нормаль. Тогда $u \equiv 0$.

3.2. а) Если оператор L эллиптичен, в области Ω выполняется неравенство $Lu \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) и $c < 0$, то функция u не может достигать внутри Ω положительного максимума (отрицательного минимума). (Не налагается никаких ограничений на коэффициенты b^i.)

б) Если оператор L эллиптичен, коэффициент $c < 0$ в ограниченной области Ω и функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ удовлетворяет в Ω уравнению $Lu = f$, то

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |f/c|.$$

3.3. Пусть оператор L равномерно эллиптичен и функция u удовлетворяет уравнению $Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$ в области $r > r_0$. Докажите, что если функция u ограничена с одной стороны, то она имеет предел (возможно, бесконечный) при $r \to \infty$ (см. [67]). (Примените неравенство Харнака в кольцевой области, расширяющейся к бесконечности.) Используйте этот результат для доказательства теоремы Лиувилля (следствие 3.12).

3.4. Пусть u – неотрицательное решение уравнения

$$Lu \equiv a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu + cu = 0, \quad c \leqslant 0, \quad i, j = 1, 2,$$

коэффициенты которого удовлетворяют неравенствам

$$\Lambda/\lambda \leqslant \mu, \quad |b^i/\lambda|, \quad |c/\lambda| \leqslant \nu \quad (\mu, \nu = \text{const}).$$

Докажите неравенство Харнака (3.21) с постоянной $K = K(\mu, \nu)$ и следствие 3.11 с постоянной $k = k(\mu, \nu, \Omega, \Omega')$.

3.5. Предположим, что условия задачи 3.4 выполняются для оператора L в проколотом круге D_0: $0 < r < r_0$ и пусть $Lu = 0$ в D_0. Докажите, что если решение u ограничено с одной стороны, то оно имеет предел (возможно, бесконечный) при $r \to 0$ (ср. [67]).

3.6. Пусть функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ – решение уравнения

$$Lu \equiv a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu + cu = f, \quad c \leqslant 0,$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ класса C^1, удовлетворяющей условию внешней сферы в точке $x_0 \in \partial\Omega$, $\bar{B}_R(y) \cap \bar{\Omega} = x_0$, и пусть λ, Λ – положительные постоянные такие, что

$$a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in R^n,$$
$$|a^{ij}|, \quad |b^i|, \quad |c| \leqslant \Lambda.$$

Покажите, что если $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ и $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, то функция u удовлетворяет в точке x_0 условию Липшица:

$$|u(x) - u(x_0)| \leqslant K|x - x_0|, \quad x \in \Omega,$$

с постоянной $K = K(\lambda, \Lambda, R, \operatorname{diam}\Omega, \sup_{\Omega}|f|, |\varphi|_{2;\Omega})$.

Выведите отсюда, что если $u \in C^1(\Omega)$ и граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, то градиент u на границе $\partial\Omega$ оценивается постоянной K (ср. [140], с. 343). Покажите, что если c меняет знак, то справедлив тот же самый результат с постоянной K, зависящей дополнительно от $\sup_{\Omega}|u|$.

3.7. а) Пусть оператор L из предыдущей задачи имеет непрерывные по Гёльдеру в начале координат коэффициенты a^{ij}:

$$|a^{ij}(x) - a^{ij}(0)| \leqslant K|x|^{\alpha}, \ \alpha > 0, \ \text{при} \ |x| < r_0$$

с некоторой постоянной K. Предположим, что $Lu \geqslant 0$ и $c \equiv 0$ в проколотом шаре

$0 < r < r_0$ и что

$$u = \begin{cases} o(\log r), & \text{если} \quad n = 2, \\ o(r^{2-n}), & \text{если} \quad n > 2 \end{cases}$$

при $r \to 0$. Докажите, что справедливо неравенство

$$\limsup_{x \to 0} u(x) \leqslant \sup_{|x| = r_0} u(x), \tag{3.31}$$

причем равенство здесь может быть только при $u = \text{const}$.

б) Докажите, что при $n > 2$ справедлив тот же, что и в пункте а), результат, если коэффициенты a^{ij} непрерывны в точке $x = 0$, а $u = O(r^{2-n+\delta})$ при $r \to 0$ для некоторого $\delta > 0$ (ср. [67]).

3.8. Рассмотрим уравнение

$$L_n u \equiv a^{ij} D_{ij} u = 0, \quad a^{ij} = \delta^{ij} + g(r)\frac{x_i x_j}{r^2}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.32}$$

Докажите, что уравнение $L_n u = 0$ имеет радиально симметричное решение $u = u(r)$, удовлетворяющее обыкновенному дифференциальному уравнению вида $\dfrac{u''}{u'} = \dfrac{1-n}{r(1+g)}$.

а) Покажите, что при $n = 2$ и $g(r) = -2/(2 + \log r)$ уравнение (3.32) равномерно эллиптично в круге D: $0 \leqslant r \leqslant r_0 = e^{-3}$, имеет непрерывные в начале координат коэффициенты и имеет ограниченное решение $a + b/\log r$ в проколотом круге $D - \{0\}$. Проверьте, что это решение не удовлетворяет неравенству (3.31).

б) Покажите, что если $n > 2$ и $g(r) = -[1 + (n-1)\log r]^{-1}$, то уравнение (3.32) равномерно эллиптично при $0 \leqslant r \leqslant r_0 = e^{-1}$ и имеет непрерывные в начале координат коэффициенты. Покажите, что соответствующее решение $u = u(r)$ удовлетворяет условию $u = o(r^{2-n})$ при $r \to 0$, но не удовлетворяет неравенству (3.31).

в) Для $n > 2$ постройте функцию $g(r)$ такую, чтобы уравнение (3.32) было равномерно эллиптическим и имело ограниченное решение $u = u(r)$, непрерывное в точке $r = 0$, которое, однако, не удовлетворяло бы неравенству (3.31).

3.9. Пусть $w = z \cdot \exp\left[-\left(\log \dfrac{1}{|z|}\right)^{1/2}\right]$. Рассматривая соотношение $w_{\bar z} = v(z) w_z$, где

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

покажите, что функция

$$u = \operatorname{Re} w = x \cdot \exp\left(-\left(\log\frac{1}{r}\right)^{1/2}\right)$$

удовлетворяет равномерно эллиптическому уравнению дивергентного вида

$$(au_x + bu_y)_x + (bu_x + cu_y)_y = 0,$$

в котором коэффициенты $a \to 1, b \to 0, c \to 1$ при $(x, y) \to (0, 0)$ и регулярны при $0 < r < 1$.

Отметим, что $u(0,0) = 0$, $u(x,y) > 0$ при $x > 0$ и $u_x(0,0) = 0$. Сравните с леммой 3.4.

3.10. Пусть L – оператор из задачи 3.6, но на знак коэффициента c не накладывается условий. Предположим, что существует такая функция v, что $v > 0$ и $Lv \leqslant 0$ в Ω. Покажите, что если $Lu \geqslant 0$, то функция $w = u/v$ не может иметь неотрицательный максимум внутри Ω, кроме случая, когда она постоянна.

ГЛАВА 4

УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА И НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ

В гл. 2 мы ввели фундаментальное решение Г уравнения Лапласа

$$\Gamma(x-y)=\Gamma(|x-y|)=\begin{cases}\dfrac{1}{n(2-n)\,\omega_n}\,|x-y|^{2-n}, & \text{если } n>2,\\[2mm] \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y|, & \text{если } n=2.\end{cases}\tag{4.1}$$

Пусть функция f интегрируема по области Ω. *Ньютоновым потенциалом с плотностью* f называется функция w, определенная на $\mathbf{R}^n$ равенством

$$w(x)=\int_{\Omega}\Gamma(x-y)f(y)\,dy.\tag{4.2}$$

Формула Грина (2.16) показывает, что любая функция из $C^2(\bar\Omega)$ в области с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ может быть представлена в виде суммы гармонической функции и ньютонова потенциала от ее лапласиана. Поэтому неудивительно, что изучение *уравнения Пуассона* $\Delta u=f$ в значительной степени может быть осуществлено с помощью изучения ньютонова потенциала f. Настоящая глава посвящена прежде всего оценкам производных ньютонова потенциала. Эти оценки не только позволяют получать теоремы разрешимости классической задачи Дирихле для уравнения Пуассона, но и образуют основу шаудеровского и опирающегося на теорию потенциалов подходов к изучению линейных эллиптических уравнений, рассмотренных в гл. 6.

4.1. Непрерывность по Гёльдеру

Если функция f из (4.2) принадлежит $C_0^\infty(\Omega)$, то, записывая

$$w(x)=\int_{\Omega}\Gamma(x-y)f(y)\,dy=\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(x-y)f(y)\,dy=$$
$$=\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(z)f(x-z)\,dz,$$

мы видим, что и функция w будет принадлежать $C^\infty(\bar\Omega)$. Если, с другой строны, функцию f предполагать только непрерывной, то ньютонов потенциал w может не быть дважды дифференцируемым. Классом функций, полезным и удобным при изучении ньютонова потенциала, является класс непрерывных по Гёльдеру функций, который мы сейчас введем.

Пусть x_0 — точка $\mathbf{R}^n$ и функция f определена на ограниченном множестве D, содержащем x_0. При $0<\alpha<1$ будем говорить, что функция f *непрерывна по Гёльдеру с показателем* α *в точке* x_0, если конечна величина

$$[f]_{\alpha,x_0}=\sup_{D-\{x_0\}}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha}.\tag{4.3}$$

Величину $[f]_{\alpha;\,x_0}$ будем называть *коэффициентом Гёльдера (с показате-*

лем α) функции f в точке x_0 относительно множества D. Ясно, что если функция f непрерывна по Гёльдеру в точке x_0, то функция f непрерывна в точке x_0. Будем говорить, что функция f *непрерывна по Липшицу* в точке x_0, если конечна величина (4.3) с $\alpha = 1$.

Пример. Определенная в шаре $B_1(0)$ равенством $f(x) = |x|^\beta$ функция f непрерывна с показателем β в точке $x = 0$, если $0 < \beta < 1$, и непрерывна по Липшицу, если $\beta = 1$.

Понятие непрерывности по Гёльдеру естественным образом распространяется на все множество D (не обязательно ограниченное). Назовем функцию f *равномерно непрерывной по Гёльдеру на* D *с показателем* α, если величина

$$[f]_{\alpha;D} = \sup_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(x)|}{|x-y|^\alpha}, \quad 0<\alpha\leqslant 1, \tag{4.4}$$

конечна, и *локально непрерывной по Гёльдеру на* D *с показателем* α, если f равномерно непрерывна с показателем α на всех компактных подмножествах множества D. Эти два понятия совпадают, если D есть компакт. Подчеркнем, что локальная непрерывность по Гёльдеру есть более сильное свойство, нежели поточечная непрерывность по Гёльдеру на компактных подмножествах. Кроме того, ограниченная в D локально непрерывная по Гёльдеру функция f будет поточечно непрерывной по Гёльдеру на всем D.

Непрерывность по Гёльдеру оказывается качественной характеристикой непрерывности, хорошо приспособленной для изучения дифференциальных уравнений с частными производными. В определенном смысле ее можно рассматривать как дробное дифференцирование. Она приводит к естественному обобщению понятий хорошо известных пространств дифференцируемых функций.

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и k – неотрицательное целое число. *Пространство Гёльдера* $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ $(C^{k,\alpha}(\Omega))$ определяется как подпространство $C^k(\bar\Omega)$ $(C^k(\Omega))$, состоящее из функций, все k-е производные которых равномерно непрерывны по Гёльдеру (локально непрерывны по Гёльдеру) с показателем α на Ω. Для простоты будем писать

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = C^\alpha(\Omega), \qquad C^{0,\alpha}(\bar\Omega) = C^\alpha(\bar\Omega);$$

при этом всегда будем считать, если нет специальных оговорок, что $0 < \alpha < 1$.

Полагая, при $\alpha = 0$,

$$C^{k,0}(\Omega) = C^k(\Omega), \qquad C^{k,0}(\bar\Omega) = C^k(\bar\Omega),$$

мы можем считать пространства $C^k(\Omega)$ $(C^k(\bar\Omega))$ включенными в шкалу пространств $C^{k,\alpha}(\Omega)$ $(C^{k,\alpha}(\bar\Omega))$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Обозначим также через $C_0^{k,\alpha}(\Omega)$ пространство функций, принадлежащих пространству $C^{k,\alpha}(\Omega)$ и имеющих компактный носитель в Ω.

Положим

$$\begin{aligned} &[u]_{k,0;\Omega} = |D^k u|_{0;\Omega} = \sup_{|\beta|=k} \sup_{\Omega} |D^\beta u|, \quad k = 0,1,2,\ldots, \\ &[u]_{k,\alpha;\Omega} = [D^k u]_{\alpha;\Omega} = \sup_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{\alpha;\Omega}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

С помощью этих полунорм мы можем определить в пространствах $C^k(\bar\Omega)$ и $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ соответственно нормы

$$\|u\|_{C^k(\bar\Omega)} = |u|_{k;\Omega} = |u|_{k,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k}[u]_{j,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k}|D^j u|_{0;\Omega},$$
$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar\Omega)} = |u|_{k,\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + [u]_{k,\alpha;\Omega} = |u|_{k;\Omega} + [D^k u]_{\alpha;\Omega}. \tag{4.6}$$

Иногда, и главным образом в этой главе, нам будут полезны безразмерные нормы в $C^k(\bar\Omega)$ и $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$. Если Ω ограничено и $d = \operatorname{diam}\Omega$, то положим

$$\|u\|'_{C^k(\bar\Omega)} = |u|'_{k;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} d^j[u]_{j,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} d^j|D^j u|_{0;\Omega},$$
$$\|u\|'_{C^{k,\alpha}(\bar\Omega)} = |u|'_{k,\alpha;\Omega} = |u|'_{k;\Omega} + d^{k+\alpha}[u]_{k,\alpha;\Omega} = |u|'_{k;\Omega} + d^{k+\alpha}[D^k u]_{\alpha;\Omega}. \tag{4.6$'$}$$

Пространства $C^k(\bar\Omega)$ и $C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$, снабженные этими нормами, являются банаховыми пространствами (см. гл. 5).

Отметим здесь, что произведение непрерывных по Гёльдеру функций является также непрерывной по Гёльдеру функцией. Действительно, если $u \in C^\alpha(\bar\Omega)$ и $v \in C^\beta(\bar\Omega)$, то $uv \in C^\gamma(\Omega)$, где $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ и

$$\|uv\|_{C^\gamma(\bar\Omega)} \leqslant \max(1, d^{\alpha+\beta-2\gamma}) \cdot \|u\|_{C^\alpha(\bar\Omega)} \cdot \|v\|_{C^\beta(\bar\Omega)},$$
$$\|uv\|'_{C^\gamma(\bar\Omega)} \leqslant \|u\|'_{C^\alpha(\bar\Omega)} \cdot \|v\|'_{C^\beta(\bar\Omega)}. \tag{4.7}$$

Для областей Ω, рассматриваемых в этой работе, справедливо (теоретико-множественное) вложение $C^{k',\alpha'}(\bar\Omega) \subset C^{k,\alpha}(\bar\Omega)$, если только $k + \alpha < k' + \alpha'$. Подчеркнем, что такое вложение в общем случае может не иметь места. Рассмотрим, например, область $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \leqslant |x|^{1/2}, x^2 + y^2 < 1\}$, и пусть функция $u(x, y)$ равна $(\operatorname{sgn} x) \cdot y^\beta$ с некоторым β, $1 < \beta < 2$, для $y > 0$ и равна нулю для $y \leqslant 0$. Ясно, что $u \in C^1(\bar\Omega)$. Однако легко проверить, что $u \notin C^\alpha(\bar\Omega)$ при $1 > \alpha > \beta/2$, и, следовательно, $C^1(\bar\Omega) \not\subset C^\alpha(\bar\Omega)$.

4.2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона

Мы покажем, что в ограниченной области Ω классическая задача Дирихле для уравнения Пуассона с ограниченной и непрерывной по Гёльдеру правой частью f разрешима при тех же самых условиях на границу, при которых разрешима задача Дирихле для уравнения Лапласа (теорема 2.14). Прежде всего, приведем некоторые результаты о дифференцируемости ньютонова потенциала в ограниченной области.

В дальнейшем оператор D всегда действует по переменной x.

Лемма 4.1. *Пусть функция f ограничена и интегрируема в Ω и пусть w – ньютонов потенциал с плотностью f. Тогда $w \in C^1(\mathbf{R}^n)$ и для всех $x \in \Omega$*

$$D_i w(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x - y) f(y)\, dy, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.8}$$

Доказательство. В силу оценки (2.14) для $D\Gamma$ функция

$$v(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x-y) f(y)\,dy$$

определена для всех $x \in \mathbf{R}^n$. Чтобы доказать, что $v = D_i w$, зафиксируем функцию η из $C^1(\mathbf{R})$, удовлетворяющую условиям

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1,\ 0 \leqslant \eta' \leqslant 2,\ \ \eta(t) = 0 \ \text{ для } \ t \leqslant 1, \quad \eta(t) = 1 \ \text{ для } \ t \geqslant 2,$$

и определим для $\epsilon > 0$ функцию

$$w_\epsilon(x) = \int_\Omega \Gamma\eta_\epsilon f(y)\,dy, \quad \Gamma = \Gamma(x-y), \quad \eta_\epsilon = \eta(|x-y|/\epsilon).$$

Ясно, что $w_\epsilon(x) \in C^1(\mathbf{R}^n)$ и

$$v(x) - D_i w_\epsilon(x) = \int_{|x-y| \leqslant 2\epsilon} D_i\{(1-\eta_\epsilon)\Gamma\} f(y)\,dy,$$

так что

$$|v(x) - D_i w_\epsilon(x)| \leqslant \sup|f| \cdot \int_{|x-y| \leqslant 2\epsilon} \left(|D_i\Gamma| + \frac{2}{\epsilon}|\Gamma|\right) dy \leqslant$$

$$\leqslant \sup|f| \cdot \begin{cases} \dfrac{2n\epsilon}{n-2} & \text{для } \ n > 2, \\ 4\epsilon(1 + |\log 2\epsilon|) & \text{для } \ n = 2. \end{cases}$$

Следовательно, w_ϵ и $D_i w_\epsilon$ сходятся при $\epsilon \to 0$ к w и v соответственно равномерно на компактных подмножествах $\mathbf{R}^n$. Поэтому $w \in C^1(\mathbf{R}^n)$ и $D_i w = v$. □

Лемма 4.2. *Пусть f ограничена и локально непрерывна по Гёльдеру (с показателем $\alpha \leqslant 1$) на Ω и пусть w – ньютонов потенциал с плотностью f. Тогда $w \in C^2(\Omega)$, $\Delta w = f$ в Ω и для всех $x \in \Omega$*

$$D_{ij}w(x) = \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y) - f(x))\,dy -$$
$$- f(x) \int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)\,ds_y, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{4.9}$$

Здесь Ω_0 – любая содержащая Ω область, для которой применима теорема о дивергенции, а функция f продолжается нулем вне Ω.

Доказательство. В силу оценки (2.14) для $D^2\Gamma$ и поточечной непрерывности по Гёльдеру функции f на Ω функция

$$u(x) = \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(f(y) - f(x))\,dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma\nu_j(y)\,ds_y$$

определена для всех $x \in \Omega$. Пусть $v = D_i w$. Для $\epsilon > 0$ определим

$$v_\epsilon(x) = \int_\Omega D_i\Gamma\eta_\epsilon f(y)\,dy,$$

где η_ϵ – функция, введенная в доказательстве предыдущей леммы. Ясно, что $v_\epsilon(x) \in C^1(\Omega)$. Дифференцируя и считая число ϵ достаточно малым,

получаем

$$D_j v_\epsilon(x) = \int_\Omega D_j(D_i \Gamma \eta_\epsilon) f(y)\, dy =$$

$$= \int_\Omega D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)(f(y) - f(x))\, dy + f(x) \int_{\Omega_0} D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)\, dy =$$

$$= \int_{\Omega_0} D_j(D_i\Gamma\eta_\epsilon)(f(y) - f(x))\, dy - f(x) \int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma\eta_\epsilon\, \nu_j(y)\, ds_y,$$

откуда при условии $2\epsilon < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ имеем

$$|u(x)| - D_j v_\epsilon(x)| = \Big| \int_{|x-y| \leqslant 2\epsilon} D_j\{(1-\eta_\epsilon) D_i\Gamma\}\ (f(y) - f(x))\, dy \Big| \leqslant$$

$$\leqslant [f]_{\alpha,x} \int_{|x-y| \leqslant 2\epsilon} \left(|D_{ij}\Gamma| + \frac{2}{\epsilon}\ |D_i\Gamma| \right) |x-y|^\alpha dy \leqslant$$

$$\leqslant (n/\alpha + 4)\ [f]_{\alpha; x} (2\epsilon)^\alpha.$$

Поэтому $D_j v_\epsilon$ равномерно на компактных подмножествах Ω сходится к u при $\epsilon \to 0$. А так как v_ϵ сходится равномерно к $v = D_i w$ на Ω, то получаем, что $w \in C^2(\Omega)$ и $u = D_{ij} w$. Наконец, полагая в (4.9) $\Omega_0 = B_R(x)$, для достаточно больших R имеем

$$\Delta w(x) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} f(x) \int_{|x-y| = R} \nu_i(y)\, \nu_i(y)\, ds_y = f(x).$$

Таким образом, лемма 4.2 доказана. □

Из лемм 4.1 и 4.2 и теоремы 2.14 мы можем теперь вывести следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.3. *Пусть Ω – ограниченная область. Предположим, что все точки границы $\partial\Omega$ регулярны (по отношению к оператору Лапласа). Тогда если функция f ограничена и локально непрерывна по Гёльдеру в Ω, то классическая задача Дирихле $\Delta u = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, однозначно разрешима для любой непрерывной граничной функции φ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через w ньютонов потенциал с плотностью f и положим $v = u - w$. Тогда задача $\Delta u = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, эквивалентна задаче $\Delta v = 0$ в Ω, $v = \varphi - w$ на $\partial\Omega$, однозначная разрешимость которой имеет место в силу теоремы 2.14. □

В случае, когда Ω есть шар, $\Omega = B = B_R(0)$, теорема 4.3 следует из интегральной формулы Пуассона (теорема 2.6) и лемм 4.1 и 4.2. Кроме того, в этом случае мы имеем явную формулу для решения

$$u(x) = \int_{\partial B} K(x,y)\, \varphi(y)\, ds_y + \int_B G(x,y) f(y)\, dy, \tag{4.10}$$

где K – ядро Пуассона (2.29), а G – функция Грина (2.23).

4.3. Оценки Гёльдера вторых производных

Следующая лемма дает основную для излагаемой далее теории оценку.

Л е м м а 4.4. *Пусть $B_1 = B_R(x_0)$, $B_2 = B_{2R}(x_0)$ – концентрические шары в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что $f \in C^\alpha(\bar{B}_2)$, $0 < \alpha < 1$, и пусть w – ньютонов* *потенциал с плотностью f на B_2. Тогда $w \in C^{2,\alpha}(\bar{B}_1)$ и*

$$|D^2 w|'_{0,\alpha;B_1} \leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2}, \tag{4.11}$$

т.е.

$$|D^2 w|_{0;B_1} + R^\alpha [D^2 w]_{\alpha;B_1} \leqslant C(|f|_{0;B_2} + R^\alpha [f]_{\alpha;B_2})$$

с постоянной $C = C(n, \alpha)$.

Доказательство. Для произвольной точки $x \in B_1$ по формуле (4.9) имеем

$$D_{ij}w(x) = \int_{B_2} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))\,dy - f(x)\int_{\partial B_2} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)\,ds_y.$$

В силу (2.14) отсюда получаем

$$|D_{ij}w(x)| \leqslant \frac{|f(x)|}{n\omega_n} R^{1-n} \int_{\partial B_2} ds_y + \frac{[f]_{\alpha;x}}{\omega_n}\int_{B_2} |x-y|^{\alpha-n}dy \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n-1}|f(x)| + \frac{n}{\alpha}(3R)^\alpha [f]_{\alpha;x} \leqslant$$

$$\leqslant C_1(|f(x)| + R^\alpha [f]_{\alpha;x}), \tag{4.12}$$

где $C_1 = C_1(n, \alpha)$.

Далее, для произвольной другой точки $\bar{x} \in B_1$ мы снова имеем в силу (4.9).

$$D_{ij}w(\bar{x}) = \int_{B_2} D_{ij}\Gamma(\bar{x}-y)(f(y)-f(\bar{x}))\,dy - f(\bar{x})\int_{\partial B_2} D_i\Gamma(\bar{x}-y)\nu_j(y)\,ds_y.$$

Обозначая $\delta = |x-\bar{x}|$, $\xi = (x+\bar{x})/2$, получаем

$$D_{ij}w(\bar{x}) - D_{ij}w(x) =$$

$$= f(x)I_1 + (f(x)-f(\bar{x}))I_2 + I_3 + I_4 + (f(x)-f(\bar{x}))I_5 + I_6,$$

где интегралы I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 и I_6 задаются равенствами

$$I_1 = \int_{\partial B_2} (D_i\Gamma(x-y) - D_i\Gamma(\bar{x}-y)\nu_j(y)\,ds_y,$$

$$I_2 = \int_{\partial B_2} D_i\Gamma(\bar{x}-y)\nu_j(y)\,ds_y,$$

$$I_3 = \int_{B_\delta(\xi)} D_{ij}\Gamma(x-y)(f(x)-f(y)\,dy,$$

$$I_4 = \int_{B_\delta(\xi)} D_{ij}\Gamma(\bar{x}-y)(f(y)-f(\bar{x}))\,dy,$$

$$I_5 = \int_{B_2 - B_\delta(\xi)} D_{ij}\Gamma(x-y)\,dy,$$

$$I_6 = \int_{B_2 - B_\delta(\xi)} (D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(\bar{x}-y)(f(\bar{x})-f(y))\,dy.$$

Эти интегралы оцениваются следующим образом:

$$|I_1| \leqslant |x-\bar{x}| \int_{\partial B_2} |DD_i\Gamma(\hat{x}-y)|\,ds_y \leqslant$$

(где $\hat{x}$ — некоторая точка, лежащая между x и $\bar{x}$)

$$\leqslant n^2 \cdot 2^{n-1} |x - \bar{x}| / R \leqslant$$

(так как $|\hat{x} - y| \geqslant R$ для $y \in \partial B_2$)

$$\leqslant n^2 \cdot 2^{n-\alpha} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{\alpha},$$

так как $\delta = |x - \bar{x}| < 2R$.

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{n\omega_n} R^{1-n} \int_{\partial B_2} ds_y = 2^{n-1};$$

$$|I_3| \leqslant \int_{B_\delta(\xi)} |D_{ij}\Gamma(x-y)| \cdot |f(x) - f(y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\omega_n} [f]_{\alpha;\,x} \int_{B_{3\delta/2}(x)} |x-y|^{\alpha-n} dy = \frac{n}{\alpha}\left(\frac{3\delta}{2}\right)^{\alpha} [f]_{\alpha;\,x};$$

$$|I_4| \leqslant \frac{n}{\alpha}\left(\frac{3\delta}{2}\right)^{\alpha} [f]_{\alpha;\,\bar{x}},$$

так же, как и при оценке I_3.

С помощью интегрирования по частям получаем оценку

$$|I_5| = \left| \int_{\partial(B_2 - B_\delta(\xi))} D_i\Gamma(x-y)\, \nu_j(y)\, ds_y \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{\partial B_2} D_i\Gamma(x-y)\, \nu_j(y)\, ds_y \right| + \left| \int_{\partial B_\delta(\xi)} D_i\Gamma(x-y)\, \nu_j(y)\, ds_y \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n-1} + \frac{1}{n\omega_n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{1-n} \int_{\partial B_\delta(\xi)} ds_y = 2^n;$$

$$|I_6| \leqslant |x - \bar{x}| \int_{B_2 - B_\delta(\xi)} |DD_{ij}\Gamma(\hat{x} - y)| \cdot |f(\bar{x}) - f(y)|\, dy \leqslant$$

(где $\hat{x}$ — некоторая точка, лежащая между x и $\bar{x}$)

$$\leqslant c\delta \int_{|y-x| \geqslant \delta} \frac{|f(\bar{x}) - f(y)|}{|\hat{x} - y|^{n+1}} dy \leqslant$$

(где $c = n(n+5)/\omega_n$)

$$\leqslant c\delta [f]_{\alpha;\,\bar{x}} \int_{|y-\xi| \geqslant \delta} \frac{|\bar{x} - y|^{\alpha}}{|\hat{x} - y|^{n+1}} dy \leqslant$$

(так как $|\bar{x} - y| \leqslant \frac{3}{2} |\xi - y| \leqslant 3 |\hat{x} - y|$)

$$\leqslant c\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha} 2^{n+1} \delta [f]_{\alpha;\,\bar{x}} \int_{|y-\xi| \geqslant \delta} |\xi - y|^{\alpha-n-1} dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c'}{1-\alpha} \cdot 2^{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha} \delta^{\alpha} [f]_{\alpha;\,\bar{x}}, \quad c' = n^2(n+5).$$

Объединяя эти оценки, имеем

$$| D_{ij} w(\bar{x}) - D_{ij} w(x)| \leqslant$$
$$\leqslant C_2(R^{-\alpha}|f(x)| + [f]_{\alpha;\, x} + [f]_{\alpha;\, \bar{x}})\, |x - \bar{x}|^{\alpha}, \tag{4.13}$$

где постоянная C_2 зависит только от n и α. □

Доказываемая оценка следует теперь из (4.12) и (4.13).

Замечание. Если Ω_1 и Ω_2 — такие области, что $\Omega_1 \subset B_1, \Omega_2 \supset B_2$, функция $f \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}_2)$ и w — ньютонов потенциал с плотностью f на Ω_2, то справедлива оценка (4.11) леммы 4.4, в которой B_1 и B_2 заменены соответственно на Ω_1 и Ω_2, т.е.

$$| D^2 w |'_{0,\alpha;\, \Omega_1} \leqslant C\, |f|'_{0,\alpha;\, \Omega_2}.$$

Из леммы 4.4 немедленно вытекают оценки Гёльдера решений уравнения Пуассона.

Теорема 4.5. *Пусть функция $u \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ удовлетворяет в $\mathbf{R}^n$ уравнению Пуассона $\Delta u = f$ с правой частью $f \in C_0^{\alpha}(\mathbf{R}^n)$. Тогда $u \in C_0^{2,\alpha}(\mathbf{R}^n)$ и для любого шара $B = B_R(x_0)$, содержащего носитель функции u, справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &| D^2 u |'_{0,\alpha;\, B} \leqslant C\, |f|'_{0,\alpha;\, B}, \quad C = C(n, \alpha), \\ &| u |'_{1;\, B} \leqslant CR^2 |f|_{0;\, B}, \quad C = C(n). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Доказательство. В силу представления (2.17)

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(x - y) \cdot f(y)\, dy, \tag{4.15}$$

так что оценки для Du и $D^2 u$ следуют соответственно из лемм 4.1 и 4.4 и того факта, что функция f имеет компактный носитель, лежащий в B. Оценка для $|u|_{0;\, B}$ получается одновременно с оценкой для Du. □

Освободиться от условия компактности носителя функции u, а это нужно для получения следующих внутренних оценок норм Гёльдера решений уравнения Пуассона, можно различными способами (см. также задачу 4.4).

Теорема 4.6. *Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ и пусть функция $u \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет в Ω уравнению Пуассона $\Delta u = f$ с правой частью $f \in C^{\alpha}(\Omega)$. Тогда $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ и для любых двух концентрических шаров $B_1 = B_R(x_0)$ и $B_2 = B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega$ имеет место оценка*

$$| u |'_{2,\alpha;\, B_1} \leqslant C(| u |_{0;\, B_2} + R^2\, |f|'_{0,\alpha;\, B_2}) \tag{4.16}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha)$.

Доказательство. В силу представления Грина (2.16) или в силу леммы 4.2 мы можем записать для $x \in B_2$, что $u(x) = v(x) + w(x)$, где v — гармоническая в B_2 функция, w — ньютонов потенциал с плотностью f в B_2. Согласно теореме 2.10 и леммам 4.1 и 4.4 имеем

$$R\, | Dw |_{0;\, B_1} + R^2 | D^2 w |'_{0,\alpha;\, B_1} \leqslant CR^2 |f|'_{0,\alpha;\, B_2},$$
$$R\, | Dv |_{0;\, B_1} + R^2 | D^2 v |'_{0,\alpha;\, B_1} \leqslant C\, | v |_{0;\, B_2} \leqslant C(| u |_{0;\, B_2} + R^2 |f|_{0;\, B_2}).$$

Последнее неравенство для $v = u - w$ очевидно при $n > 2$. При $n = 2$, записывая $u(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2)$, мы можем рассматривать u как решение уравнения Пуассона в шаре пространства $\mathbf{R}^3$, и это неравенство получается тем же способом. Требуемая оценка решения u получается комбинированием этих неравенств. □

Непосредственным следствием внутренней оценки (4.16) является равностепенная непрерывность на компактных подмножествах вторых производных любого ограниченного семейства решений уравнения Пуассона $\Delta u = f$. Отсюда с помощью теоремы Арцела получается обобщение теоремы о компактности (теоремы 2.11) на решения уравнения Пуассона.

Следствие 4.7. *Любая ограниченная последовательность решений в области Ω уравнения Пуассона $\Delta u = f$ с правой частью $f \in C^\alpha(\Omega)$ содержит подпоследовательность, сходящуюся равномерно на компактных подмножествах Ω к решению того же уравнения.*

Иногда предпочтительнее работать с другой (но эквивалентной) формой внутренней оценки (4.16), с оценкой в терминах внутренних норм, используемых далее. Для $x, y \in \Omega$, Ω — любое открытое подмножество $\mathbf{R}^n$, будем писать $d_x = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $d_{x,y} = \min(d_x, d_y)$. Определим для функций классов $C^k(\Omega)$, и $C^{k,\alpha}(\Omega)$ следующие величины, аналогичные глобальным полунормам и нормам (4.5) и (4.6):

$$
\begin{aligned}
&[u]^*_{k,0;\Omega} = [u]^*_{k;\Omega} = \sup_{\substack{x\in\Omega\\ |\beta|=K}} d_x^k |D^\beta u(x)|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;\\
&|u|^*_{k;\Omega} = |u|^*_{k,0;\Omega} = \sum_{j=0}^{k} [u]^*_{j;\Omega};\\
&[u]^*_{k,\alpha;\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ |\beta|=K}} d_{x,y}^{k+\alpha} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad 0<\alpha\leqslant 1;\\
&|u|^*_{k,\alpha;\Omega} = |u|^*_{k;\Omega} + [u]^*_{k,\alpha;\Omega}.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

В этих обозначениях

$$[u]^*_{0;\Omega} = |u|^*_{0;\Omega} = |u|_{0;\Omega}.$$

Заметим, что величины $|u|^*_{k;\Omega}$ и $|u|^*_{k,\alpha;\Omega}$ являются нормами на подпространствах функций из $C^k(\Omega)$ и $C^{k,\alpha}(\Omega)$ соответственно, для которых эти величины конечны. Если множество Ω ограничено и $d = \operatorname{diam}\Omega$, то, очевидно, эти внутренние нормы и глобальные нормы (4.6) связаны неравенствами

$$|u|^*_{k,\alpha;\Omega} \leqslant \max(1, d^{k+\alpha})\,|u|_{k,\alpha;\Omega}. \tag{4.17$'$}$$

Если $\Omega' \subset\subset \Omega$ и $\sigma = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, то

$$\min(1, \sigma^{k+\alpha})\,|u|_{k,\alpha;\Omega'} \leqslant |u|^*_{k,\alpha;\Omega}. \tag{4.17$''$}$$

Здесь удобно ввести норму

$$|f|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega} = \sup_{x\in\Omega} d_x^k |f(x)| + \sup_{x,y\in\Omega} d_{x,y}^{k+\alpha} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \tag{4.18}$$

являющуюся частным случаем некоторых норм, которые будут определены далее.

Из теоремы 4.6 мы можем теперь для случая произвольных областей получить внутреннюю оценку, которая, как будет показано в гл. 6, в весьма похожем виде переносится на общие эллиптические уравнения.

Т е о р е м а 4.8. *Пусть функция $u \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет на открытом множестве Ω пространства $\mathbf{R}^n$ уравнению Пуассона $\Delta u = f$ с правой частью $f \in C^\alpha(\Omega)$. Тогда*

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}), \tag{4.19}$$

где $C = C(n, \alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если одна из величин $|u|_{0;\Omega}$ или $|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}$ бесконечна, то оценка (4.19) тривиальна. Если они конечны, то для $x \in \in \Omega$, $R = \dfrac{1}{3} d_x$, $B_1 = B_R(x)$, $B_2 = B_{2R}(x)$ мы имеем для каждой первой производной Du и каждой второй производной D^2u оценку

$$d_x |Du(x)| + d_x^2 |D^2u(x)| \leqslant (3R)|Du|_{0;B_1} + (3R)^2 |D^2u|_{0;B_1} \leqslant$$
$$\leqslant C(|u|_{0;B_2} + R^2 |f|'_{0,\alpha;B_2}) \leqslant$$

(в силу (4.16))

$$\leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}), \text{ откуда}$$
$$|u|^*_{2;\Omega} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}). \tag{4.20}$$

Для получения оценки $[u]^*_{2,\alpha;\Omega}$ возьмем точки $x, y \in \Omega$; считаем, что $d_x \leqslant d_y$. Тогда

$$d^{2+\alpha}_{x,y} \frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant (3R)^{2+\alpha}[D^2u]_{\alpha;B_1} +$$
$$+ 3^\alpha(3R)^2 (|D^2u(x)| + |D^2u(y)|) \leqslant$$
$$\leqslant C(|u|_{0;B_2} + R^2|f|'_{0,\alpha;B_2}) + 6[u]^*_{2;\Omega} \leqslant$$

(в силу (4.16))

$$\leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}) \text{ в силу (4.20)}.$$

Из полученных оценок следует (4.19). □

Из доказанного утверждения следует существование оценок на компактных подмножествах для Du, D^2u и оценок коэффициентов Гёльдера для D^2u через величины, оценивающие правую часть в (4.19). Такие оценки являются основой результатов о компактности семейств решений уравнения Пуассона. В частности, следствие 4.7 также немедленно вытекает из теоремы 4.8, если заметить, что из нее следует равностепенная непрерывность решений и их первых и вторых производных на компактных подмножествах.

С помощью результата о компактности, следствие 4.7, мы можем теперь получить теорему существования для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ с неограниченной правой частью f.

Т е о р е м а 4.9. *Пусть B – шар в $\mathbf{R}^n$, а f – такая функция из $C^\alpha(B)$, что с некоторым β, $0 < \beta < 1$, выполняется неравенство $\sup\limits_{x \in B} d_x^{2-\beta}|f(x)| \leqslant \leqslant N < \infty$. Тогда существует единственная функция $u \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$,* *удовлетворяющая уравнению $\Delta u = f$ в B и условию $u = 0$ на ∂B. При этом решение u удовлетворяет оценке*

$$\sup_{x \in B} d_x^{-\beta} |u(x)| \leqslant CN \tag{4.21}$$

с зависящей только от β постоянной C.

Доказательство. Оценка (4.21) следует из рассуждений, основанных на построении несложных барьеров. А именно, пусть $B = B_R(x_0)$, $r = |x - x_0|$ и пусть $w(x) = (R^2 - r^2)^\beta$. Непосредственным вычислением получаем для $r < R$

$$\Delta w(x) = -2\beta(R^2 - r^2)^{\beta-2}[n(R^2 - r^2) + 2(1-\beta)r^2] \leqslant$$
$$\leqslant -4\beta(1-\beta)R^2(R^2 - r^2)^{\beta-2} \leqslant -\beta(1-\beta)R^\beta(R-r)^{\beta-2}.$$

Предположим теперь, что $\Delta u = f$ в B и $u = 0$ на ∂B. Так как $d_x = R - r$, то по условию $|f(x)| \leqslant N d_x^{\beta-2} = N(R-r)^{\beta-2} \leqslant -C_0 N \Delta w$, где $C_0 = [\beta(1-\beta)R^\beta]^{-1}$. Отсюда $\Delta(C_0 N w \pm u) \leqslant 0$ в B и $C_0 N w \pm u = 0$ на ∂B. Следовательно, в силу принципа максимума

$$|u(x)| \leqslant C_0 N w(x) \leqslant C N d_x^\beta \quad \text{для} \quad x \in B, \tag{4.22}$$

т.е. справедлива оценка (4.21) с постоянной $C = 2/\beta(1-\beta)$.

Наконец, чтобы показать существование решения, положим

$$f_m = \begin{cases} m, & \text{если} \quad f \geqslant m, \\ f, & \text{если} \quad |f| \leqslant m, \\ -m, & \text{если} \quad f \leqslant -m, \end{cases}$$

и пусть $\{B_k\}$ – такая последовательность концентрических шаров, исчерпывающих B, что $|f| \leqslant k$ в B_k. Обозначим через u_m, $m = 1, 2, \ldots$, решение задачи $\Delta u_m = f_m$ в B, $u_m = 0$ на ∂B.

В силу (4.21)

$$\sup_{x \in B} d_x^{-\beta} |u_m(x)| \leqslant C \sup_{x \in B} d_x^{2-\beta} |f_m(x)| \leqslant CN,$$

так что последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена и для $m \geqslant k$ выполняется равенство $\Delta u_m = f$ в B_k. Поэтому в силу следствия 4.7, последовательно примененного к последовательности шаров B_k, некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ сходится в B к функции u из $C^2(B)$, удовлетворяющей уравнению $\Delta u = f$ в B. Отсюда следует, что $|u(x)| \leqslant CNd_x^\beta$, и поэтому $u = 0$ на ∂B. □

Несложно построить пример, показывающий, что при $\beta \leqslant 0$ теорема 4.9 неверна. Отметим, что эта теорема может быть доказана для более широкого класса областей, отличных от шаров (см. задачу 4.6). Более того, для произвольных областей с регулярными граничными точками классическая задача Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ разрешима для неограниченной правой части f, удовлетворяющей некоторым условиям интегрируемости (см. задачу 4.3).

Теорема 4.8 будет использована в гл. 6 для получения внутренних оценок Гёльдера для решений линейных эллиптических уравнений. Для получения же глобальных оценок, которые требуются для исследования разрешимости, нужен вариант теоремы 4.8, применимый к пересечению области Ω с полупространством.

Вначале получим соответствующее обобщение оценки Гёльдера для ньютонова потенциала (лемма 4.4). Далее через $\mathbf{R}^n_+$ будем обозначать полупространство $x_n > 0$ и через T – гиперплоскость $x_n = 0$; $B_2 = B_{2R}(x_0)$ и $B_1 = B_R(x_0)$ – шары с центром в точке $x_0 \in \overline{\mathbf{R}^n_+}$ и положим $B_2^+ = B_2 \cap \mathbf{R}^n_+$, $B_1^+ = B_1 \cap \mathbf{R}^n_+$.

Л е м м а 4.10. *Пусть функция $f \in C^\alpha(\overline{B_2^+})$ и пусть w – ньютонов потенциал с плотностью f в B_2^+. Тогда $w \in C^{2,\alpha}(\overline{B_1^+})$ и*

$$|D^2 w|'_{0,\alpha;B_1^+} \leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}, \tag{4.23}$$

где $C = C(n, \alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что B_2 пересекает T, так как в противном случае результат содержится, очевидно, в лемме 4.4. Представление (4.9) верно для $D_{ij}w$ с $\Omega_0 = B_2^+$. Если один из индексов i или j отличен от n, то часть интеграла по границе

$$\int_{\partial B_2^+} D_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)\,ds_y \left(= \int_{\partial B_2^+} D_j\Gamma(x-y)\nu_i(y)\,ds_y\right),$$

которая соответствует интегрированию по $\partial B_2^+ \cap T$, равна нулю, так как там ν_i или ν_j равны 0. Оценка $D_{ij}w$ (i или j не равны n) леммы 4.4 тогда получается точно так же, как и выше, с заменой B_2 на B_2^+, $B_\delta(\xi)$ на $B_\delta(\xi) \cap B_2^+$ и ∂B_2 – на $\partial B_2^+ - T$. Наконец, так как оценки для $D_{kk}w$ установлены, $k = 1, \ldots, n-1$, то производная $D_{nn}w$ может быть оценена из уравнения $\Delta w = f$. □

Т е о р е м а 4.11. *Пусть функция $u \in C^2(B_2^+) \cap C^0(\overline{B_2^+})$ удовлетворяет в B_2^+ уравнению $\Delta u = f$ с правой частью $f \in C^\alpha(\overline{B_2^+})$ и пусть $u = 0$ на T. Тогда $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B_1^+})$ и*

$$|u|'_{2,\alpha;B_1^+} \leqslant C(|u|_{0;B_2^+} + R^2|f|'_{0,\alpha;B_2^+}), \tag{4.24}$$

где $C = C(n, \alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x^* = (x', -x_n)$. Определим функцию $f^*(x)$ равенствами

$$f^*(x) = f^*(x', x_n) = \begin{cases} f(x', x_n), & \text{если } x_n \geqslant 0, \\ f(x', -x_n), & \text{если } x_n \leqslant 0. \end{cases}$$

Предположим, что B_2 пересекается с T; иначе (4.24) следует из теоремы 4.6. Обозначим $B_2^- = \{x \in \mathbf{R}^n | x^* \in B_2^+\}$ и $D = B_2^+ \cup B_2^- \cup (B_2 \cap T)$. Тогда $f^* \in C^\alpha(\overline{D})$ и $|f^*|'_{0,\alpha;D} \leqslant 2|f|'_{0,\alpha;B_2^+}$. Теперь, полагая

$$w(x) = \int_{B_2^+} [\Gamma(x-y) - \Gamma(x^*-y)] f(y)\,dy =$$

$$= \int_{B_2^+} [\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y^*)] f(y)\,dy, \tag{4.25}$$

имеем $w(x',0)=0$ (см. задачу (2.3с)) и $\Delta w = f$ в B_2^+. Заметив, что

$$\int_{B_2^+} \Gamma(x-y^*) f(y)\,dy = \int_{B_2^-} \Gamma(x-y) f^*(y)\,dy,$$

получаем

$$w(x) = 2\int_{B_2^+} \Gamma(x-y) f(y)\,dy - \int_D \Gamma(x-y) f^*(y)\,dy.$$

Положим $w^*(x) = \int_D \Gamma(x-y) f^*(y)\,dy$. В силу замечания, следующего за леммой 4.4 (в котором мы положим $\Omega_1 = B_1^+, \Omega_2 = D$), имеем

$$|D^2 w^*|'_{0,\alpha;B_1^+} \leqslant C|f^*|'_{0,\alpha;D} \leqslant 2C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}.$$

Объединяя полученное неравенство с леммой 4.10, получаем

$$|D^2 w|'_{0,\alpha;B_1^+} \leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}. \tag{4.26}$$

Положим теперь $v = u - w$. Тогда $\Delta v = 0$ в B_2^+ и $v = 0$ на T. Отражением функцию v можно продолжить в B_2 (см. задачу 2.4) так, что полученная функция будет гармонична в B_2. Тогда оценка (4.24) следует из внутренней оценки производной для гармонической функции, теоремы 2.10. □

Замечание. Если дополнительно к условиям теоремы 4.11 функция u имеет компактный носитель в $B_2^+ \cup T$, то мы получаем из (4.26) более простую оценку (обобщение (4.14)) вида

$$|D^2 u|'_{0,\alpha;B_2^+} \leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}. \tag{4.27}$$

В этом случае имеем представление

$$u(x) = w(x) = \int_{B_2^+} [\Gamma(x-y) - \Gamma(x^*-y)]\, f(y)\,dy. \tag{4.28}$$

Полезно иметь аналог теоремы 4.8, в котором дается оценка вплоть до плоского куска границы. Для его получения введем некоторые частично внутренние нормы и полунормы, аналогичные (4.17) и (4.18). Пусть Ω – открытое подмножество $\mathbf{R}^n_+$, а T – лежащий на гиперплоскости $x_n = 0$ открытый кусок его границы. Для $x, y \in \Omega$ будем писать

$$\bar d_x = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega - T), \qquad \bar d_{x,y} = \min(\bar d_x, \bar d_y).$$

Введем следующие величины:

$$[u]^*_{k,0;\Omega\cup T} = [u]^*_{k;\Omega\cup T} = \sup_{\substack{x\in\Omega\\ |\beta|=k}} \bar d_x^{\,k} |D^\beta u(x)|, \quad k = 0,1,2,\dots;$$

$$|u|^*_{k;\Omega\cup T} = |u|^*_{k,0;\Omega\cup T} = \sum_{j=0}^{k} [u]^*_{j;\Omega\cup T};$$

$$[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ |\beta|=k}} \bar d_{x,y}^{\,k+\alpha} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad 0<\alpha\leqslant 1; \tag{4.29}$$

$$|u|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T} = |u|^*_{k;\Omega\cup T} + [u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T};$$

$$|u|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T} = \sup_{x\in\Omega} \bar d_x^{\,k} |u(x)| + \sup_{x,y\in\Omega} \bar d_{x,y}^{\,k+\alpha} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Используя эти обозначения, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 4.12. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbf{R}^n_+$, а T – лежащий на гиперплоскости $x_n = 0$ кусок его границы, и пусть функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup T)$ удовлетворяет в Ω уравнению $\Delta u = f$ с правой частью $f \in C^\alpha(\Omega \cup T)$ и граничному условию $u = 0$ на T. Тогда*

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}), \tag{4.30}$$

где $C = C(n,\alpha)$.

Этот результат следует из теоремы 4.11 точно так же, как теорема 4.8 следует из теоремы 4.6; поэтому доказательство мы опускаем.

Теоремы 4.11 и 4.12 дают результаты о регулярности решений уравнения Пуассона вплоть до плоского куска границы. Справедлив более общий результат: если Ω – ограниченная область, функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ удовлетворяет в Ω уравнению $\Delta u = f$ с правой частью $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ и если граница $\partial\Omega$ и граничные значения u достаточно гладкие, то $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Этот результат – по существу, теорема Келлога [121] – будет попутно установлен в гл. 6 при рассмотрении линейных эллиптических уравнений. Тем не менее получим его сейчас для случая, когда Ω есть шар; в этой ситуации он непосредственно следует из теоремы 4.11.

Теорема 4.13. *Пусть B – шар в $\mathbf{R}^n$, а функция $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ удовлетворяет в B уравнению $\Delta u = f$ с правой частью $f \in C^\alpha(\overline{B})$ и $u = 0$ на ∂B. Тогда $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$.*

Доказательство. Параллельным переносом можно добиться того, что граница ∂B пройдет через начало координат. Преобразование инверсии $x \mapsto x^* = x/|x|^2$ является гомеоморфным гладким отображением $\mathbf{R}^n - \{0\}$ на себя, которое отображает шар B на полупространство B^*. Кроме того, если $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$, то *преобразование Кельвина* функции u, определяемое равенством

$$v(x) = |x|^{2-n} u(x/|x|^2), \tag{4.31}$$

принадлежит $C^2(B^*) \cap C^0(\overline{B^*})$ и удовлетворяет (см. задачу 4.7) соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta_{x^*} v(x^*) &= |x^*|^{-n-2} \Delta_x u(x), \quad x^* \in B^*, \ x \in B, \\ &= |x^*|^{-n-2} f(x^*/|x^*|^2), \quad x^* \in B^*. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Следовательно, к преобразованию Кельвина v применима теорема 4.11, а так как с помощью параллельного переноса любая точка границы ∂B может быть сделана началом координат, то получаем, что $u \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$. □

Следствие 4.14. *Пусть $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ и $f \in C^\alpha(\overline{B})$. Тогда задача Дирихле $\Delta u = f$ в B, $u = \varphi$ на ∂B однозначно разрешима и решение u принадлежит $C^{2,\alpha}(\overline{B})$.*

Доказательство. Обозначая $v = u - \varphi$, сведем рассматриваемую задачу к задаче $\Delta v = f - \Delta\varphi$ в B, $v = 0$ на ∂B, для которой по теореме 4.3 существует решение $v \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$, а по теореме 4.13 $v \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$. □

Из доказательства теоремы 4.13 видно, что справедливо следующее обобщение леммы 4.4: если $f \in C^\alpha(\overline{B})$, то ньютонов потенциал с плотностью f на B принадлежит $C^{2,\alpha}(\overline{B})$.

4.5. Оценки Гёльдера первых производных

Нередко возникает потребность рассматривать уравнение Пуассона, в котором правая часть является дивергенцией некоторого векторного поля

$$\Delta u = \operatorname{div} \boldsymbol{f} = D_i f^i, \quad \boldsymbol{f} = (f^1, f^2, \ldots, f^n). \tag{4.33}$$

Соответствующие оценки решений могут быть сведены к аналогичным оценкам, установленным в предыдущем разделе, но при этом можно получить и некоторые обобщения, которые будут полезны далее.

Если $\boldsymbol{f} \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, то, конечно, справедливы установленные ранее оценки ньютонова потенциала с плотностью $\operatorname{div}\boldsymbol{f}$ и решений уравнения (4.33), в которых функция f всюду заменяется на $\operatorname{div}\boldsymbol{f}$. Если граница $\partial\Omega$ является достаточно гладкой, то

$$\int_\Omega \Gamma(x-y)\operatorname{div}\boldsymbol{f}(y)\,dy = \int_\Omega D\Gamma(x-y)\cdot\boldsymbol{f}(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\Gamma(x-y)\boldsymbol{f}\bar{\nu}\,ds_y,$$

и поэтому ньютонов потенциал с плотностью $\operatorname{div}\boldsymbol{f}$ в Ω является суммой гармонической функции и функции, заданной равенством

$$w(x) = D\int_\Omega \Gamma(x-y)\boldsymbol{f}(y)\,dy = D_j\int_\Omega \Gamma(x-y)f^j(y)\,dy. \tag{4.34}$$

Это выражение совпадает с ньютоновым потенциалом, если вектор $\boldsymbol{f}$ имеет компактный носитель в Ω. Мы видим, что w определяется при $\boldsymbol{f}$, только интегрируемой в Ω; в этом случае за определение обобщенного ньютонова потенциала с плотностью $\operatorname{div}\boldsymbol{f}$ в Ω можно взять соотношение (4.34). Если, кроме того, вектор $\boldsymbol{f}$ непрерывен по Гёльдеру, то первые производные w в Ω (по лемме 4.2) задаются равенствами

$$D_i w(x) = \int_\Omega D_{ij}\Gamma(x-y)(f^j(y)-f^j(x))\,dy -$$

$$- f^j(x)\int_{\partial\Omega} D_i\Gamma(x-y)\,\nu_j\,ds_y \tag{4.35}$$

и могут быть оценены, как в лемме 4.4. Таким образом, используя обозначения леммы 4.4, можем записать, что

$$|Dw|'_{0,\alpha;B_1} \leqslant C|\boldsymbol{f}|'_{0,\alpha;B_2}, \qquad C = C(n,\alpha). \tag{4.36}$$

Поэтому можно утверждать справедливость внутренних оценок в $C^{1,\alpha}$.

Т е о р е м а 4.15. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ и пусть функция u удовлетворяет уравнению Пуассона* (4.33) *с правой частью $\boldsymbol{f} \in C^\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда для любых двух концентрических шаров $B_1 = B_R(x_0)$ и $B_2 = B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega$ имеет место оценка вида*

$$|u|'_{1,\alpha;B_1} \leqslant C(|u|_{0;B_2} + R|\boldsymbol{f}|'_{0,\alpha;B_2}), \qquad C = C(n,\alpha). \tag{4.37}$$

Доказательство этого утверждения – такое же, как и доказательство теоремы 4.6, если в нем оценку (4.11) заменить оценкой (4.36).

Аналогично можно получить и оценки вплоть до границы. Если B_1 и B_2 такие же, как и в лемме 4.10, то потенциал (4.34) имеет первые производные, определяемые формулами (4.35) с $\Omega = B_2^+$, и справедлива оценка

$$|Dw|'_{0,\alpha;B_1^+} \leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}, \qquad C = C(n,\alpha). \tag{4.38}$$

Чтобы получить аналог теоремы 4.11 для норм в $C^{1,\alpha}$ решений уравнения (4.33), обращающихся в нуль на гиперплоскости $x_n = 0$, используем, как и в теореме 4.11, метод отражения. Пусть

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - \Gamma(x-y^*) = \Gamma(x-y) - \Gamma(x^*-y)$$

– функция Грина в полупространстве $\mathbf{R}^n_+$; рассмотрим функцию

$$v(x) = -\int_{B_2^+} D_y G(x,y)\cdot f(y)\,dy =$$

$$= \int_{B_2^+} D_y\Gamma(x-y)\cdot f(y)\,dy + \int_{B_2^+} D_y\Gamma(x^*-y)\cdot f(y)\,dy. \tag{4.39}$$

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим через v_i слагаемые v, определенные равенствами

$$v_i(x) = \int_{B_2^+} D_i\Gamma(x-y)f^i(y)\,dy + \int_{B_2^+} D_{y_i}\Gamma(x^*-y)f^i(y)\,dy.$$

Видно, что v и v_i обращаются в нуль на $T = B_2 \cap \{x_n = 0\}$. Предположим теперь, что $f \in C^\alpha(\overline{B_2^+})$, и продолжим f нечетным образом через плоскость $x_n = 0$. Продолженную функцию обозначим снова через f. Тогда для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ мы получаем, как и в доказательстве теоремы 4.11, равенства

$$v_i(x) = D_i\left[2\int_{B_2^+}\Gamma(x-y)f^i(y)\,dy - \int_{B_2^+\cup B_2^-}\Gamma(x-y)f^i(y)\,dy\right]. \tag{4.40}$$

А при $i = n$, поскольку

$$\int_{B_2^+} D_{y_n}\Gamma(x^*-y)f^n(y)\,dy = \int_{B_2^-} D_n\Gamma(x-y)f^n(y)\,dy,$$

получаем

$$v_n(x) = D_n \int_{B_2^+\cup B_2^-}\Gamma(x-y)f^n(y)\,dy. \tag{4.41}$$

Теперь из оценок (4.36) и (4.38), примененных к (4.40) и (4.41), следует

$$|Dv|'_{0,\alpha;B_1^+} \leqslant C|f|'_{0,\alpha;B_2^+}, \qquad C = C(n,\alpha). \tag{4.42}$$

Т е о р е м а 4.16. *Пусть функция* $u \in C^0(\overline{B_2^+})$ *удовлетворяет уравнению Пуассона* (4.33) *с правой частью* $f \in C^\alpha(\overline{B_2^+})$ *и пусть* $u = 0$ *на* $B_2 \cap \{x_n = 0\}$. *Тогда*

$$|u|'_{1,\alpha;B_1^+} \leqslant C(|u|_{0;B_2^+} + R|f|'_{0,\alpha;B_2^+}), \qquad C = C(n,\alpha). \tag{4.43}$$

Доказательство получается из (4.42) с помощью рассуждений, аналогичных заключительным рассуждениям доказательства теоремы 4.11.

Можно получить и аналоги теорем 4.3, 4.13 и следствия 4.14 для решений уравнения (4.33). Предоставляем это сделать читателю.

Предыдущие результаты могут быть обобщены на уравнения вида

$$\Delta u = g + \operatorname{div} f, \tag{4.44}$$

где f непрерывна по Гёльдеру, а g ограничена и интегрируема. Подчеркнем, что первые производные ньютонова потенциала удовлетворяют оценкам Гёльдера с произвольным показателем $\alpha < 1$ (см. задачу 4.8 а), а также теорему 3.9). Из этих оценок для ньютонова потенциала следует, что аналогичные (4.37) и (4.34) оценки в $C^{1,\alpha}$ решений уравнения (4.44) имеют вид

$$|u|'_{1,\alpha;B_1} \leqslant C(|u|_{0;B_2} + R^2|g|_{0;B_2} + R|f|'_{0,\alpha;B_2}), \tag{4.45}$$

$$|u|'_{1,\alpha;B_1^+} \leqslant C(|u|_{0;B_2^+} + R^2|g|_{0;B_2} + R|f|'_{0,\alpha;B_2^+}), \tag{4.46}$$

где $C = C(n, \alpha)$.

Замечание. Если $g \in L^p(\Omega)$, где $p = n/(1-\alpha)$, то слагаемые, содержащие g в правой части в (4.45), (4.46), могут быть заменены на $R^{1+\alpha}\|g\|_p$ (см. задачу 4.8 в)).

Примечания

Содержащиеся в этой главе оценки Гёльдера в основном получены Корном [128]. *)

В лемме 4.2 непрерывность по Гёльдеру может быть заменена условием Дини; а именно, ньютонов потенциал с плотностью f является решением класса C^2 уравнения $\Delta u = f$, если

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varphi(|x-y|), \tag{4.47}$$

где $\int\limits_{0+} \varphi(r) r^{-1} dr < \infty$ (см. задачу 4.2). Однако если f только непрерывна, то ньютонов потенциал может не быть дважды дифференцируемым (см. задачу 4.9).

Весовые внутренние нормы и полунормы (4.17), (4.29) мы использовали, следуя Дуглису и Ниренбергу [92]. Основной целью использования частично внутренних норм и полунорм (4.29) является упрощение процедуры получения граничных оценок с помощью непосредственной имитации вывода внутренних оценок (см., например, теорему 4.12 и лемму 6.4).

Задачи

4.1. а) Докажите (4.7).

б) Докажите, что если $f \in C^\alpha(\mathbf{R}^n)$ и $g \in C^\beta(\Omega)$, то $f \circ g \in C^{\alpha\beta}(\Omega)$.

4.2. Докажите лемму 4.2 в предположении, что функция f непрерывна по Дини в Ω (т.е. f удовлетворяет (4.47)).

4.3. Покажите, что теорема 4.3 остается справедливой, если вместо ограниченности f потребовать, чтобы $f \in L^p(\Omega)$ с некоторым $p > n/2$ (см. лемму 7.12)).

4.4. Выведите теорему 4.6 из теоремы 4.5, используя формулу представления (2.17) для $v(x) = u(x)\eta(|x - x_0|/R)$, где η – срезающая функция такая, что $\eta \in C^2(\mathbf{R})$, $\eta(r) = 1$ для $r \leqslant 3/2$, $\eta(r) = 0$ для $r \geqslant 2$.

---

*) Утверждение леммы 4.2 о том, что ньютонов потенциал с плотностью $f \in C^\alpha(\Omega)$ является классическим решением в Ω уравнения Пуассона $\Delta w = f$, было впервые доказано Гёльдером в его диссертации "Beitrage zur Pothentialtheorie", Inauguraldissertation, Stuttgart, 1882. – *Примеч. ред.*

4.5. Докажите следующее обобщение на случай уравнения Пуассона формул (2.6) для шаровых средних от решений уравнения Лапласа: пусть функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ удовлетворяет соотношению $\Delta u = f (\Delta u \geqslant f,\ \Delta u \leqslant f)$ в Ω. Тогда для любого шара $B = B_R(y) \subset \Omega$

$$u(y) = (\leqslant, \geqslant)\left\{\frac{1}{|B|}\int_B u\,dx - \frac{1}{n\omega_n}\int_B f(x)\theta(r,R)\,dx\right\}, \qquad r = |x-y|,$$

где

$$\theta(r,R) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-2}(r^{2-n} - R^{2-n}) - (R^2 - r^2)/2R^n, & n > 2\\ \log\dfrac{R}{r} - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right), & n = 2.\end{cases}$$

4.6. Докажите теорему 4.9 для случая ограниченной области Ω с границей $\partial\Omega$ класса C^2. (Используйте лемму 14.16 и функцию сравнения $d^\beta\eta$, где η – подходящая срезающая функция и d – функция, значения которой равны расстоянию до границы.)

4.7. Пусть $\Delta u = f$ в $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Покажите, что преобразование Кельвина функции u, определенное равенством

$$v(x) = |x|^{2-n}u(x/|x|^2),$$

удовлетворяет уравнению $\Delta v(x) = |x|^{n-2}f(x/|x|^2)$ при $x/|x|^2 \in \Omega$.

4.8. Пусть w – ньютонов потенциал с плотностью f в $B = B_R(x_0)$.

а) Покажите, что если $f \in L^\infty(B)$, то $Dw \in C^\alpha(\mathbf{R}^n)$ для любого $\alpha \in (0, 1)$ и

$$[Dw]_{\alpha;B} \leqslant C(n,\alpha)\cdot R^{1-\alpha}\cdot\|f\|_{\infty;B}.$$

б) Покажите, что если $f \in L^p(B)$, где $p = n/(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, то $Dw \in C^\alpha(\mathbf{R}^n)$ и $[Dw]_{\alpha;B} \leqslant C(n,\alpha)\|f\|_{p;B}$.

4.9. а) Пусть мультииндекс α, $|\alpha| = 2$, и однородный гармонический полином P степени 2 таковы, что $D^\alpha P \neq 0$ (например, $P = x_1x_2$, $D_{12}P = 1$). Возьмем функцию $\eta \in C_0^\infty(\{x \mid |x| < 2\})$, удовлетворяющую условию: $\eta = 1$ при $|x| < 1$. Пусть $t_k = 2^k$ и пусть $c_k \to 0$ при $k \to \infty$, причем ряд Σc_k расходится. Определим функцию

$$f(x) = \sum_0^\infty c_k\Delta(\eta P)(t_kx).$$

Покажите, что функция f непрерывна, однако в любой окрестности начала координат уравнение $\Delta u = f$ не имеет решений класса C^2.

б) Возьмем мультииндекс α, $|\alpha| = 3$, и однородный гармонический полином Q степени 3 такие, что $D^\alpha Q \neq 0$. Пусть величины η, t_k и c_k такие же, как и в части а). Определим функцию

$$u(x) = \sum_0^\infty c_k\eta(t_kx)Q(x) = \sum_0^\infty c_k(\eta Q)(t_kx)/t_k^3.$$

Тогда

$$\Delta u = g(x) = \sum_0^\infty c_k\Delta(\eta Q)(t_kx)/t_k.$$

Покажите, что $g \in C^1$, но, какую бы окрестность начала координат мы ни взяли, функция u не принадлежит $C^{2,1}$ в этой окрестности. (Это означает, что лемма 4.4 неверна при $\alpha = 1$.)

4.10. Пусть функция $u \in C_0^2(B)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = f$ в шаре $B = B_R(x_0)$. Покажите, что:

а) $|u|_0 \leqslant \dfrac{R^2}{2n}|f|_0$;

б) $|D_iu|_0 \leqslant R|f|_0, \qquad i = 1, \ldots, n.$

(Следовательно постоянную C во втором неравенстве из (4.14) можно взять равной 3: $|u|'_{1;B} \leqslant 3R^2|f|_{0;B}$.)

ГЛАВА 5

БАНАХОВЫ И ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе излагаются сведения из функционального анализа, которые будут использоваться в гл. 6 и 8 при изучении вопроса о существовании решений линейных эллиптических уравнений. Этот материал может быть хорошо знаком читателю, уже владеющему основами функционального анализа, но мы предполагаем лишь некоторое знакомство с элементами линейной алгебры и теорией метрических пространств. Подчеркнем, что все используемые в этой книге линейные пространства рассматриваются над полем вещественных чисел. Материал этой главы переносится без значительных изменений на случай, когда поле вещественных чисел заменяется полем комплексных чисел.

Пусть $\mathscr{V}$ – линейное пространство над $\mathbf{R}$. *Норма* на $\mathscr{V}$ есть отображение p: $\mathscr{V} \to \mathbf{R}$ (далее мы пишем: $p(x) = \|x\| = \|x\|_{\mathscr{V}}$, $x \in \mathscr{V}$), удовлетворяющее аксиомам:

(i) $\|x\| \geqslant 0$ для всех $x \in \mathscr{V}$, $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ для всех $\alpha \in \mathbf{R}$, $x \in \mathscr{V}$;

(iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in \mathscr{V}$ (неравенство треугольника).

Линейное пространство $\mathscr{V}$, снабженное нормой, называется *линейным нормированным пространством*. Линейное нормированное пространство $\mathscr{V}$ является метрическим пространством с метрикой ρ, задаваемой равенством

$$\rho(x,y) = \|x - y\|, \qquad x,y \in \mathscr{V}.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\} \subset \mathscr{V}$ сходится к элементу $x \in \mathscr{V}$, если $\|x_n - x\| \to 0$. Последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью Коши, если $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $m, n \to \infty$. Если $\mathscr{V}$ – полное пространство, т.е. любая последовательность Коши сходится к элементу $\mathscr{V}$, то $\mathscr{V}$ называется *банаховым пространством*.

Примеры.

(i) Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ является банаховым пространством с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

(ii) Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *пространство Гёльдера* $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ является банаховым пространством с одной из эквивалентных норм (4.6) или (4.6)$'$, введенных в гл. 4 (см. задачи 5.1 и 5.2).

(iii) Пространства Соболева $W^{k,p}(\Omega)$ и $W_0^{k,p}(\Omega)$ (см. гл. 7).

Теоремы существования для дифференциальных уравнений с частными производными часто сводятся к разрешимости уравнений в соответствующих функциональных пространствах. В шаудеровской теории линейных эллиптических уравнений мы будем использовать две основные теоремы существования для операторных уравнений в банаховых пространствах, а именно принцип сжимающих отображений и альтернативу Фредгольма.

5.1. Принцип сжимающих отображений

Отображение T линейного нормированного пространства $\mathscr{V}$ в себя называется *сжимающим* отображением, если существует такое число $\theta < 1$, что

$$\| Tx - Ty \| \leqslant \theta \, \| x - y \| \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathscr{V}. \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. *Сжимающее отображение T банахова пространства $\mathscr{B}$ имеет единственную неподвижную точку, т.е. существует единственное решение $x \in \mathscr{B}$ уравнения $Tx = x$.*

Доказательство. (*Метод последовательных приближений.*) Пусть $x_0 \in \mathscr{B}$. Определим последовательность $\{ x_n \} \subset \mathscr{B}$ равенствами $x_n = T^n x_0$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда в силу неравенства треугольника и сжимаемости отображения T имеем для $n \geqslant m$

$$\| x_n - x_m \| = \Big\| \sum_{j = m+1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \Big\| \leqslant \sum_{j = m+1}^{n} \| x_j - x_{j-1} \| =$$

$$= \sum_{j = m+1}^{n} \| T^{j-1} x_1 - T^{j-1} x_0 \| \leqslant \sum_{j = m+1}^{n} \theta^{j-1} \| x_1 - x_0 \| \leqslant$$

(в силу (5.1))

$$\leqslant \frac{\| x_1 - x_0 \| \cdot \theta^m}{1 - \theta} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{ x_n \}$ является последовательностью Коши; а так как пространство $\mathscr{B}$ полно, то она сходится к элементу $x \in \mathscr{B}$. Ясно, что T является непрерывным преобразованием; поэтому

$$Tx = \lim_{n \to \infty} Tx_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x,$$

т.е. x — неподвижная точка $\mathscr{B}$. Единственность x следует непосредственно из (5.1). □

В утверждении теоремы 5.1 пространство $\mathscr{B}$ может быть, очевидно, заменено на любое его замкнутое подмножество.

5.2. Метод продолжения по параметру

Пусть $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$ — линейные нормированные пространства. Линейное отображение T: $\mathscr{V}_1 \to \mathscr{V}_2$ называется *ограниченным*, если конечна величина

$$\| T \| = \sup_{\substack{x \in \mathscr{V}_1 \\ x \neq 0}} \frac{\| Tx \|_{\mathscr{V}_2}}{\| x \|_{\mathscr{V}_1}}. \tag{5.2}$$

Легко показать, что линейное отображение T ограничено тогда и только тогда, когда оно непрерывно. Обратимость линейного ограниченного отображения может быть иногда выведена из обратимости другого отображения благодаря следующему факту, известному в приложениях как *метод непрерывного продолжения по параметру.*

Т е о р е м а 5.2. *Пусть $\mathscr{B}$ – банахово пространство, $\mathscr{V}$ – линейное нормированное пространство и пусть L_0, L_1 – ограниченные линейные операторы из $\mathscr{B}$ в $\mathscr{V}$. Для каждого $t \in [0, 1]$ положим*

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1$$

и предположим, что существует такая постоянная C, что для всех $t \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\|x\|_{\mathscr{B}} \leqslant C\|L_t x\|_{\mathscr{V}}. \tag{5.3}$$

Тогда для того чтобы оператор L_1 отображал $\mathscr{B}$ на $\mathscr{V}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор L_0 отображал $\mathscr{B}$ на $\mathscr{V}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для некоторого $s \in [0, 1]$ отображение L_s является отображением на. В силу (5.3) оператор L_s осуществляет взаимно однозначное отображение $\mathscr{B}$ на $\mathscr{V}$; следовательно, существует обратный оператор L_s^{-1}: $\mathscr{V} \to \mathscr{B}$. Для всех $t \in [0, 1]$ и $y \in \mathscr{V}$ уравнение $L_t x = y$ эквивалентно уравнению

$$L_s x = y + (L_s - L_t)x = y + (t-s)L_0 x - (t-s)L_1 x,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно уравнению

$$x = L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x.$$

Отображение T пространства $\mathscr{B}$ в себя, заданное формулой $Tx = L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$, является, очевидно, сжимающим отображением, если

$$|s-t| < \delta = [C(\|L_0\| + \|L_1\|)]^{-1},$$

а следовательно, для всех $t \in [0, 1]$, удовлетворяющих неравенству $|s - t| < \delta$, отображение L_t является отображением на $\mathscr{V}$. Разбивая отрезок $[0, 1]$ на отрезки длины меньше δ, получаем, что отображение L_t является отображением на $\mathscr{V}$ для всех $t \in [0, 1]$, если только оно является отображением на $\mathscr{V}$ для некоторого конкретного значения $t \in [0, 1]$, например для $t = 0$ или для $t = 1$. □

5.3. Альтернатива Фредгольма

Пусть $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$ – линейные нормированные пространства. Отображение T: $\mathscr{V}_1 \to \mathscr{V}_2$ называется *компактным* (или *вполне непрерывным*), если T отображает ограниченные множества в $\mathscr{V}_1$ в относительно компактные множества в $\mathscr{V}_2$ или, эквивалентно, если T отображает любую ограниченную последовательность элементов пространства $\mathscr{V}_1$ в последовательность элементов пространства $\mathscr{V}_2$, которая содержит сходящуюся подпоследовательность. Можно показать, что компактное линейное отображение является непрерывным, однако обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, за исключением случая конечномерного пространства $\mathscr{V}_2$.

Альтернатива Фредгольма (или теория Рисса – Шаудера) относится к теории компактных линейных операторов, отображающих пространство $\mathscr{V}$ в себя, и является обобщением теории линейных отображений конечномерных пространств.

Теорема 5.3. *Пусть T – компактное линейное отображение линейного нормированного пространства $\mathscr{V}$ в себя. Тогда или*

(i) *однородное уравнение $x - Tx = 0$ имеет нетривиальное решение $x \in \in \mathscr{V}$, или*

(ii) *для каждого $y \in \mathscr{V}$ уравнение $x - Tx = y$ имеет единственное решение $x \in \mathscr{V}$. Кроме того, оператор $(I - T)^{-1}$, существование которого утверждается в случае* (ii), *является ограниченным.*

Доказательство теоремы 5.3 использует следующий простой результат Рисса.

Лемма 5.4. *Пусть $\mathscr{V}$ – линейное нормированное пространство и $\mathscr{M}$ – замкнутое подпространство $\mathscr{V}$, не совпадающее с $\mathscr{V}$. Тогда для любого $\theta < 1$ существует элемент $x_\theta \in \mathscr{V}$, удовлетворяющий условиям $\| x_\theta \| = 1$ и $\operatorname{dist}(x_\theta, \mathscr{M}) \geqslant \theta$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathscr{V} - \mathscr{M}$. Так как $\mathscr{M}$ замкнуто, то $\operatorname{dist}(x, \mathscr{M}) = \inf\limits_{y \in \mathscr{M}} \| x - y \| = d > 0$. Поэтому существует такой элемент $y_\theta \in \mathscr{M}$, что $\| x - y_\theta \| \leqslant d/\theta$. Полагая $x_\theta = (x - y_\theta)/\| x - y_\theta \|$, имеем $\| x_\theta \| = 1$ и для любого $y \in \mathscr{M}$

$$\| x_\theta - y \| = (\| x - y_\theta - \| y_\theta - x \| \cdot y \|)/\| y_\theta - x \| \geqslant d/\| y_\theta - x \| \geqslant \theta. \ \square$$

Ясно, что если $\mathscr{V} = \mathbf{R}^n$, то можно взять $\theta = 1$, выбирая элемент x_θ ортогональным к $\mathscr{M}$. Это же можно сделать в любом гильбертовом пространстве. Однако в общем случае взять θ равным 1 нельзя: лемма 5.4 утверждает существование лишь "почти ортогонального" к $\mathscr{M}$ элемента.

Доказательство теоремы 5.3. Удобно разбить доказательство на четыре этапа.

1) *Пусть $S = I - T$, где I – тождественное отображение, и пусть $\mathscr{N} = S^{-1}(0) = \{ x \in \mathscr{V} \mid Sx = 0 \}$ – нуль-пространство S (ядро S). Тогда существует такая постоянная K, что*

$$\operatorname{dist}(x, \mathscr{N}) \leqslant K \| Sx \| \quad \text{для всех } x \in \mathscr{V}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Тогда существует последовательность $\{ x_n \} \subset \mathscr{V}$, удовлетворяющая условиям $\| S x_n \| = 1$ и $d_n = \operatorname{dist}(x, \mathscr{N}) \to \infty$. Выберем последовательность $\{ y_n \} \subset \mathscr{N}$ так, чтобы $d_n \leqslant \| x_n - y_n \| \leqslant 2 d_n$. Тогда для $z_n = (x_n - y_n)/\| x_n - y_n \|$ имеем $\| z_n \| = 1$ и $\| S z_n \| \leqslant d_n^{-1} \to 0$, так что последовательность $\{ S x_n \}$ сходится к 0. А так как отображение T компактно, то переходя, если в этом есть необходимость, к подпоследовательности и обозначая ее также через x_n, мы можем считать, что последовательность $\{ T z_n \}$ сходится к элементу $y_0 \in \mathscr{V}$. Тогда мы имеем, поскольку $z_n = (S + T) z_n$, что и последовательность $\{ z_n \}$ также сходится к y_0, а следовательно, $y_0 \in \mathscr{N}$. Однако это приводит к противоречию, так как

$$\operatorname{dist}(z_n, \mathscr{N}) = \inf_{y \in \mathscr{N}} \| z_n - y \| =$$

$$= \| x_n - y_n \|^{-1} \cdot \inf_{y \in \mathscr{N}} \| x_n - y_n - \| x_n - y_n \| y \| =$$

$$= \| x_n - y_n \|^{-1} \cdot \operatorname{dist}(x_n, \mathscr{N}) \geqslant 1/2. \ \square$$

2) *Пусть* $\mathcal{R} = S(\mathcal{V})$ – *область значений* S. *Тогда* $\mathcal{R}$ – *замкнутое подпространство* $\mathcal{V}$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – такая последовательность в $\mathcal{V}$, что последовательность их образов $\{Sx_n\}$ сходится к элементу $y \in \mathcal{V}$. Чтобы показать замкнутость $\mathcal{R}$, мы должны показать, что $y = Sx$ для некоторого элемента $x \in \mathcal{V}$. В силу предыдущего результата последовательность $\{d_n\}$, где $d_n = \mathrm{dist}(x_n, \mathcal{N})$, ограничена. Выбирая $y_n \in \mathcal{N}$, как и ранее, и полагая $w_n = x_n - y_n$, мы имеем, что последовательность $\{w_n\}$ ограничена, в то время как последовательность $\{Sw_n\}$ сходится к y. Так как T компактно, то переходя, если в этом есть необходимость, к подпоследовательности и обозначая ее также через $\{w_n\}$, мы можем считать, что последовательность $\{Tw_n\}$ сходится к элементу $w_0 \in \mathcal{V}$. Тогда сама последовательность $\{w_n\}$ сходится к элементу $y + w_0$, а в силу непрерывности S получаем равенство $S(y + w_0) = y$. Следовательно, $\mathcal{R}$ замкнуто. □

3) *Если* $\mathcal{N} = \{0\}$, *то* $\mathcal{R} = \mathcal{V}$. *То есть если случай* (i) *теоремы* 5.3 *не имеет места, то имеет место случай* (ii).

Доказательство. В силу предыдущих утверждений множества $\mathcal{R}_j$, определенные равенствами $\mathcal{R}_j = S^j(\mathcal{V})$, $j = 1, 2, \ldots$, образуют невозрастающую последовательность замкнутых подпространств $\mathcal{V}$. Предположим, что никакие два из этих пространств не совпадают. Тогда каждое является собственным подпространством своего предыдущего и не совпадает с ним. Следовательно, по лемме 5.4 существует такая последовательность $\{y_n\} \subset \mathcal{V}$, что $y_n \in \mathcal{R}_n$, $\|y_n\| = 1$ и $\mathrm{dist}(y_n, \mathcal{R}_{n+1}) \geqslant 1/2$. Это значит, что если $n > m$, то

$$Ty_m - Ty_n = y_m + (-y_n - Sy_m + Sy_n) = y_m - y$$

с некоторым $y \in \mathcal{R}_{m+1}$. Отсюда следует, что $\|Ty_m - Ty_n\| \geqslant 1/2$, а это противоречит компактности T.

Поэтому существует такое целое число k, что $\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_k$ для всех $j \geqslant k$. До этого момента мы не пользовались условием $\mathcal{N} = \{0\}$. Пусть теперь y – произвольный элемент $\mathcal{V}$. Тогда $S^k y \in \mathcal{R}_k = \mathcal{R}_{k+1}$ и $S^k y = S^{k+1}x$ при некотором $x \in \mathcal{V}$. Следовательно, $S^k(y - Sx) = 0$ и поэтому $y = Sx$, так как $S^{-k}(0) = S^{-1}(0) = 0$. Итак, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_j = \mathcal{V}$ для всех j. □

4) *Если* $\mathcal{R} = \mathcal{V}$, *то* $\mathcal{N} = \{0\}$. *Следовательно, имеет место либо случай* (i), *либо случай* (ii).

Доказательство. Определим неубывающую последовательность замкнутых подпространств $\{\mathcal{N}_j\}$, полагая $\mathcal{N}_j = S^{-j}(0)$. Замкнутость $\mathcal{N}_j$ следует из непрерывности S. Используя результат леммы 5.4 и рассуждая подобно тому, как это мы делали на третьем этапе, получаем, что $\mathcal{N}_j = \mathcal{N}_l$ для всех j, не меньших некоторого целого l. Тогда если $\mathcal{R} = \mathcal{V}$, то любой элемент $y \in \mathcal{N}_l$ представляется в виде $y = S^l x$ с некоторым $x \in \mathcal{V}$. Следовательно, $S^{2l}x = 0$, так что $x \in \mathcal{N}_{2l} = \mathcal{N}_l$. Отсюда $y = S^l x = 0$. Утверждение 4) доказано. □

Ограниченность оператора $S^{-1} = (I - T)^{-1}$ в случае (ii) следует из $\mathcal{N} = \{0\}$ и утверждения 1). Заметим, что доказательство можно несколько упростить, полагая на этапах 1) и 2) $\mathcal{N} = \{0\}$ и заметив, что этап 4) не зависит от предыдущих.

Таким образом, теорема 5.3 полностью доказана. □

Из теоремы 5.3 и леммы 5.4 вытекают некоторые утверждения о структуре спектра компактных линейных операторов *). Число λ называется *собственным значением* оператора T, если существует ненулевой элемент $x \in \mathscr{V}$ (он называется *собственным вектором*), удовлетворяющий равенству $Tx = \lambda x$. Ясно, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, должны быть линейно независимыми. Размерность нуль-пространства оператора $S_\lambda = \lambda I - T$ называется *кратностью* собственного значения λ. Если число $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$, не является собственным значением T, то из теоремы 5.3 следует, что резольвента $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ определена на всем $\mathscr{V}$ и является ограниченным линейным отображением $\mathscr{V}$ на себя. Из леммы 5.4 мы можем вывести следующий результат.

Теорема 5.5. *Множество собственных значений компактного линейного отображения линейного нормированного пространства в себя является не более чем счетным и не имеет предельных точек, исключая, быть может, точку $\lambda = 0$. При этом каждое ненулевое собственное значение имеет конечную кратность.*

Доказательство. Предположим, что существуют последовательность не обязательно различных собственных значений $\{\lambda_n\}$ такая, что $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, и линейно независимая последовательность соответствующих собственных векторов $\{x_n\}$. Пусть $\mathscr{M}_n$ — замкнутое подпространство, натянутое на $\{x_1, \ldots, x_n\}$. По лемме 5.4 существует такая последовательность $\{y_n\}$, что $y_n \in \mathscr{M}_n$, $\|y_n\| = 1$ и $\operatorname{dist}(y_n, \mathscr{M}_{n-1}) \geqslant 1/2$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Если $n \geqslant m$, то

$$\lambda_n^{-1} Ty_n - \lambda_m^{-1} Ty_m =$$
$$= y_n + (-y_m - \lambda_n^{-1} S_{\lambda_n} y_n + \lambda_m^{-1} S_{\lambda_m} y_m) = y_n - z,$$

где $z \in \mathscr{M}_{n-1}$. Так как $y_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$, то

$$y_n - \lambda_n^{-1} Ty_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j (1 - \lambda_n^{-1}\lambda_j) x_j \in \mathscr{M}_{n-1},$$

и аналогично $S_{\lambda_m} y_m \in \mathscr{M}_m$. Поэтому имеем неравенство

$$\|\lambda_n^{-1} Ty_n - \lambda_m^{-1} Ty_m\| \geqslant 1/2,$$

*) О спектре линейного оператора естественнее говорить в банаховом пространстве над полем комплексных чисел. В полном пространстве обычно формулируется и теорема Фредгольма. Доказанная в этом разделе теорема 5.3 может быть получена и как простое следствие теоремы Фредгольма в банаховом пространстве.

Отметим, что используемое здесь определение компактности оператора T (см. начало этого раздела) требует, чтобы для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ последовательность образов $\{Tx_n\}$ содержала сходящуюся (именно сходящуюся, а не фундаментальную!) подпоследовательность. В частности, если T — компактный оператор в банаховом пространстве $\mathscr{B}$, $\mathscr{V} \subset \mathscr{B}$ и $T\mathscr{V} \subset \mathscr{V}$, то сужение T на $\mathscr{V}$ может не быть в принятом определении компактным оператором в $\mathscr{V}$; для таких операторов, как легко видеть, утверждение теоремы 5.3 неверно. Для того чтобы в этой ситуации можно было гарантировать справедливость альтернативы Фредгольма, достаточно дополнительно потребовать, чтобы $T\overline{\mathscr{V}} \subset \mathscr{V}$. — *Примеч. ред.*

которое в силу предположения $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ противоречит компактности оператора T. Следовательно, сделанное в начале доказательства предположение ошибочно, а это влечет справедливость теоремы. □

5.4. Сопряженные пространства и сопряженные операторы

Для полноты мы приведем некоторые результаты, которые далее будут доказаны в случае гильбертовых пространств; только в этой ситуации они и будут использоваться. Пусть $\mathscr{V}$ — линейное нормированное пространство. Функционал на $\mathscr{V}$ есть отображение $\mathscr{V}$ в $\mathbf{R}$. Пространство всех линейных ограниченных функционалов на $\mathscr{V}$ называется *сопряженным пространством* к $\mathscr{V}$ и обозначается через $\mathscr{V}^*$. Несложно проверить, что $\mathscr{V}^*$ есть банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\mathscr{V}^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \tag{5.5}$$

Пример. Сопряженное к $\mathbf{R}^n$ пространство изоморфно самому $\mathbf{R}^n$.

Сопряженное к $\mathscr{V}^*$ пространство, обозначаемое $\mathscr{V}^{**}$, называется *вторым сопряженным* к $\mathscr{V}$. Ясно, что отображение J: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}^{**}$, определяемое равенством $Jx(f) = f(x)$ для всех $f \in \mathscr{V}^*$, является сохраняющим норму линейным взаимно однозначным отображением $\mathscr{V}$ на $J\mathscr{V} \subset \mathscr{V}^{**}$. Если $J\mathscr{V} = \mathscr{V}^{**}$, то пространство $\mathscr{V}$ называется *рефлексивным*. Рефлексивные банаховы пространства имеют ряд свойств, делающих их более удобными, нежели общие банаховы пространства, для приложений в теории дифференциальных уравнений. Пространства Соболева $W^{k,p}(\Omega)$, рассматриваемые в гл. 7, рефлексивны при $p > 1$, а пространства Гёльдера $C^{k,\alpha}(\Omega)$, рассмотренные в гл. 4, нерефлексивны.

Пусть T — ограниченное линейное отображение из банахова пространства $\mathscr{B}_1$ в банахово пространство $\mathscr{B}_2$. *Сопряженный* к T оператор, обозначаемый T^*, — это линейное ограниченное отображение из $\mathscr{B}_2^*$ в $\mathscr{B}_1^*$, определяемое равенством

$$(T^*g)(x) = g(Tx) \quad \text{для всех } g \in \mathscr{B}_2^* \text{ и } x \in \mathscr{B}_1^*. \tag{5.6}$$

Обозначим через $\mathscr{N}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{N}^*$, $\mathscr{R}^*$ нуль-пространства и области значений операторов T и T^* соответственно. При условии замкнутости $\mathscr{R}$ справедливы следующие соотношения:

$$\mathscr{R} = \mathscr{N}^{*\perp} = \{ y \in \mathscr{B}_2 \mid g(y) = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in \mathscr{N}^* \},$$

$$\mathscr{R}^* = \mathscr{N}^{\perp} = \{ f \in \mathscr{B}_1^* \mid f(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathscr{N} \}.$$

Кроме того, из компактности оператора T следует компактность T^*. Последние два результата доказаны, например, в [107]. *) Отсюда видно, что в случае (i) альтернативы Фредгольма в банаховом пространстве $\mathscr{B}$ для существования решения $x \in \mathscr{B}$ уравнения $x - Tx = y$ необходимо и доста-

*) Там же имеется и доказательство замкнутости области значений действующего в банаховом пространстве оператора $I - T$, где T — компактный оператор. — *Примеч. ред.*

точно, чтобы $g(y)=0$ для всех $g \in B^*$, удовлетворяющих равенству $T^*g = g$. Этот последний результат будет непосредственно установлен в случае гильбертовых пространств.

5.5. Гильбертовы пространства

Мы изложим здесь теорию гильбертовых пространств, которая потребуется в гл. 8 для исследования линейных эллиптических уравнений. *Скалярное* (или *внутреннее*) *произведение* на линейном пространстве $\mathscr{V}$ есть отображение q: $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathbf{R}$ (далее мы пишем $q(x, y) = (x, y)$ или $(x, y)_{\mathscr{V}}$, $x, y \in \mathscr{V}$), удовлетворяющее аксиомам:

(i) $(x,y) = (y,x)$ для всех $x, y \in \mathscr{V}$;

(ii) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $x_1, x_2, y \in \mathscr{V}$;

(iii) $(x,x) > 0$ для всех $x \neq 0$, $x \in \mathscr{V}$.

Линейное пространство $\mathscr{V}$, снабженное скалярным произведением, называется *пространством со скалярным произведением* или *предгильбертовым пространством*. Обозначая $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ для $x \in \mathscr{V}$, мы имеем следующие неравенства:

неравенство Шварца *)

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|; \tag{5.7}$$

неравенство треугольника

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|; \tag{5.8}$$

и *равенство параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{5.9}$$

В частности, пространство $\mathscr{V}$ со скалярным произведением является нормированным линейным пространством. *Гильбертово пространство* определяется как полное пространство со скалярным произведением.**)

Примеры. (i) Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_i x_i y_i, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n).$$

(ii) Пространства Соболева $W^{k,2}(\Omega)$ (см. гл. 7).

5.6. Теорема о проекции

Два элемента x и y пространства со скалярным произведением называются *ортогональными* (или *перпендикулярными*), если $(x, y) = 0$. Пусть $\mathscr{M}$ – подмножество пространства со скалярным произведением. Через $\mathscr{M}^\perp$ будем обозначать множество элементов пространства, ортогональных всем элементам из $\mathscr{M}$. Следующая теорема утверждает существова-

*) Неравенство (5.7) часто называется неравенством Коши – Буняковского. – *Примеч. ред.*

**) Имеется в виду полнота по метрике, порожденной скалярным произведением. – *Примеч. пер.*

ние ортогональной проекции любого элемента гильбертова пространства на замкнутое подпространство.

Теорема 5.6. *Пусть $\mathcal{M}$ – замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ имеет место представление $x = y + z$, где $y \in \mathcal{M}$, а $z \in \mathcal{M}^{\perp}$.*

Доказательство. Если $x \in \mathcal{M}$, то положим $y = x$, $z = 0$. Далее мы можем предполагать, что $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$, а $x \notin \mathcal{M}$. Определим

$$d = \operatorname{dist}(x, \mathcal{M}) = \inf_{y \in \mathcal{M}} \| x - y \| > 0,$$

и пусть $\{ y_n \} \subset \mathcal{M}$ – *минимизирующая последовательность*, т.е. такая последовательность, что $\| x - y_n \| \to d$ при $n \to \infty$. Используя равенство параллелограмма, получаем

$$4 \left\| x - \frac{1}{2}(y_m + y_n) \right\|^2 + \| y_m - y_n \|^2 = 2(\| x - y_m \|^2 + \| x - y_n \|^2).$$

Отсюда, так как $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in \mathcal{M}$, следует, что $\| y_m - y_n \| \to 0$, при m, $n \to \infty$, т.е. последовательность $\{ y_n \}$ сходится (напомним, что $\mathcal{H}$ – полное пространство). Так как $\mathcal{M}$ замкнуто, то $y = \lim_{n \to \infty} y_n \in \mathcal{M}$ и $\| x - y \| = d$.

Представим теперь элемент x в виде $x = y + z$, где $z = x - y$. Чтобы завершить доказательство, мы должны показать, что $z \in \mathcal{M}^{\perp}$. Для любых $y' \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathbf{R}$ мы имеем $y + \alpha y' \in \mathcal{M}$, и поэтому

$$d^2 \leqslant \| x - y - \alpha y' \|^2 = (z - \alpha y', z - \alpha y') = \| z \|^2 - 2\alpha(y', z) + \alpha^2 \| y' \|^2.$$

А так как $\| z \| = d$, то получаем, что для всех $\alpha > 0$ справедливо неравенство $|(y', z)| \leqslant \frac{\alpha}{2} \| y' \|^2$, так что $(y', z) = 0$ для всех $y' \in \mathcal{M}$. Следовательно, $z \in \mathcal{M}^{\perp}$. □

Элемент y называется *ортогональной проекцией* x на $\mathcal{M}$.*) Теорема 5.6 также показывает, что любое отличное от $\mathcal{H}$ замкнутое подпространство ортогонально некоторому (ненулевому) элементу пространства $\mathcal{H}$.

5.7. Теорема представления Рисса

Теорема представления Рисса дает чрезвычайно полезное описание ограниченных линейных функционалов на гильбертовом пространстве через скалярное произведение.

Теорема 5.7. *Для любого ограниченного линейного функционала F на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ существует единственный элемент $f \in \mathcal{H}$ такой, что $F(x) = (x, f)$ для всех $x \in \mathcal{H}$; при этом $\| F \| = \| f \|$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N} = \{ x \mid F(x) = 0 \}$ есть нуль-пространство функционала F. Если $\mathcal{N} = \mathcal{H}$, то доказываемое представление справедливо с $f = 0$. Пусть $\mathcal{N} \neq \mathcal{H}$. Тогда, так как $\mathcal{N}$ – замкнутое подпространство $\mathcal{H}$, по теореме 5.6 существует такой элемент $z \in \mathcal{H}$, $z \neq 0$, что $(x, z) = 0$ для

*) Очевидно, что представление $x = y + z$, $y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{M}^{\perp}$, существование которого утверждает теорема 5.6, единственно. – *Примеч. ред.*

всех $x \in \mathcal{N}$. Следовательно, $F(z) \neq 0$, и кроме того, для всех $x \in \mathcal{H}$

$$F\left(x - \frac{F(x)}{F(z)} z\right) = F(x) - \frac{F(x)}{F(z)} F(z) = 0.$$

Поэтому $x - \dfrac{F(x)}{F(z)} z \in \mathcal{N}$. Это означает, что $\left(x - \dfrac{F(x)}{F(z)} z,\ z\right) = 0$, т.е. $(x, z) = \dfrac{F(x)}{F(z)} \| z \|^2$, а следовательно, $F(x) = (f, x)$, где $f = zF(z)/\| z \|^2$.

Единственность элемента f доказывается несложно, и мы оставляем доказательство этого утверждения читателю. Чтобы показать, что $\| F \| = \| f \|$, мы, во-первых, заметим, что по неравенству Шварца

$$\| F \| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, f)|}{\| x \|} \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{\| x \| \cdot \| f \|}{\| x \|} = \| f \|,$$

а во-вторых, что

$$\| f \|^2 = (f, f) = F(f) \leqslant \| F \| \cdot \| f \|,$$

и следовательно, $\| f \| \leqslant \| F \|$. Таким образом, $\| F \| = \| f \|$. □

Теорема 5.7 показывает, что пространство сопряженное гильбертову пространству, может быть отождествлено с ним самим и, следовательно, гильбертовы пространства рефлексивны.

5.8. Теорема Лакса – Мильграма

Теорема представления Рисса достаточна для рассмотрения линейных эллиптических уравнений, появляющихся из вариационных задач, т.е. являющихся уравнениями Эйлера – Лагранжа некоторых кратных интегралов. Для исследования общих уравнений дивергентной формы нам потребуется некоторое обобщение теоремы 5.7, данное Лаксом и Мильграмом. Билинейная форма B на гильбертовом протранстве $\mathcal{H}$ называется *ограниченной*, если существует такая постоянная K, что

$$| B(x, y) | \leqslant K \| x \| \cdot \| y \| \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{H}. \tag{5.10}$$

Определенная на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ билинейная форма B называется *коэрцитивной*, если существует такое число $\nu > 0$, что

$$B(x, x) \geqslant \nu \| x \|^2 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{H}. \tag{5.11}$$

В частности, ограниченной и коэрцитивной билинейной формой является само скалярное произведение.

Теорема 5.8. *Пусть B – ограниченная коэрцитивная билинейная форма на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда для любого ограниченного линейного функционала $F \in \mathcal{H}^*$ существует единственный элемент $f \in \mathcal{H}$ такой, что*

$$B(x, f) = F(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathcal{H}.$$

Доказательство. В силу теоремы 5.7 существует линейное отображение $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, определенное равенством $B(x, f) = (x, Tf)$ для всех

$x \in \mathcal{H}$. Кроме того, в силу (5.10) $\| Tf \| \leqslant K \| f \|$, т.е. оператор T ограничен. А из (5.11) получаем

$$\nu \| f \|^2 \leqslant B(f,f) = (f, Tf) \leqslant \| f \| \cdot \| Tf \|.$$

Следовательно,

$$\nu \| f \| \leqslant \| Tf \| \leqslant K \| f \| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{H}.$$

Полученная оценка означает, что отображение T является взаимно однозначным, его область значений замкнута (см. задачу 5.3), и обратное отображение T^{-1} ограничено. Предположим, что T не является отображением на все $\mathcal{H}$. Тогда существует такой элемент $z \neq 0$, что $(z, Tf) = 0$ для всех $f \in \mathcal{H}$. Выбирая $f = z$, получим равенство $(z, Tz) = B(z, z)$, из которого в силу (5.11) следует, что $z = 0$. Таким образом, ограниченное линейное отображение T^{-1} определено на всем $\mathcal{H}$. Тогда $F(x) = (x, g) = B(x, T^{-1} g)$ для всех $x \in \mathcal{H}$ и некоторого единственного элемента $g \in \mathcal{H}$. Тем самым установлено утверждаемое теоремой представление с $f = T^{-1} g$. □

5.9. Альтернатива Фредгольма в гильбертовых пространствах

Теоремы 5.3 и 5.5, в частности, применимы к компактным операторам в гильбертовых пространствах. Сейчас мы для случая гильбертовых пространств докажем сформулированные выше в банаховых пространствах утверждения о сопряженных операторах. Теорема 5.7 позволяет смотреть на сопряженное отображение несколько иначе. Если T – ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то сопряженный к нему оператор T^* является ограниченным линейным оператором в $\mathcal{H}$, определяемым следующим равенством:

$$(T^* y, x) = (y, Tx) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{H}. \tag{5.12}$$

Ясно, что $\| T^* \| = \| T \|$, где $\| T \| \doteq \sup\limits_{x \neq 0} \| Tx \| / \| x \|$.

Лемма 5.9. *Если T – компактный оператор, то T^* – также компактный оператор.*

Доказательство. Пусть $\{ x_n \}$ – последовательность элементов $\mathcal{H}$, удовлетворяющих неравенству $\| x_n \| \leqslant M$. Тогда

$$\| T^* x_n \|^2 = (T^* x_n, T^* x_n) = (x_n, TT^* x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \| x_n \| \cdot \| TT^* x_n \| \leqslant M \cdot \| T \| \cdot \| T^* x_n \|,$$

т.е. $\| T^* x_n \| \leqslant M \| T \|$, что означает ограниченность последовательности $\{ T^* x_n \}$. Следовательно, поскольку оператор T компактный, выбирая, если в этом есть необходимость, подпоследовательность и обозначая ее также через $\{ x_n \}$, мы можем считать, что последовательность $\{ TT^* x_n \}$ сходится. Но тогда

$$\| T^*(x_n - x_m) \|^2 = (T^*(x_n - x_m),\ T^*(x_n - x_m)) =$$
$$= (x_n - x_m,\ TT^*(x_n - x_m)) \leqslant 2M \| TT^*(x_n - x_m) \| \to 0$$

при $m, n \to \infty$.

Так как $\mathcal{H}$ – полное пространство, то последовательность $\{ T^* x_n \}$ сходится и, следовательно, T^* – компактный оператор. □

Л е м м а 5.10. *Замыкание области значений оператора T является ортогональным дополнением нуль-пространства оператора T^*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{R}$ – область значений оператора T, $\mathcal{N}^*$ – нуль-пространство оператора T^*. Если $y = Tx$, то мы имеем $(y, f) = (Tx, f) = (x, T^*f) = 0$ для всех $f \in \mathcal{N}^*$, т.е. $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}^{*\perp}$, а так как $\mathcal{N}^{*\perp}$ замкнуто, то и $\overline{\mathcal{R}} \subset \mathcal{N}^{*\perp}$. Предположим теперь, что $y \notin \overline{\mathcal{R}}$. По теореме о проекции (теорема 5.7) $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in \overline{\mathcal{R}}$, $y_2 \in \overline{\mathcal{R}}^{\perp} - \{0\}$. А так как $(y_2, Tx) = (T^*y_2, x) = 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$, что означает $y_2 \in \mathcal{N}^*$, и $(y_2, y) = (y_2, y_1) + (y_2, y_2) = \| y_2 \|^2$, то $y \notin \mathcal{N}^{*\perp}$. □

Подчеркнем, что утверждение леммы 5.10 справедливо независимо от того, компактен оператор T или нет. Объединяя леммы 5.9 и 5.10 с теоремами 5.3 и 5.5, можно доказать альтернативу Фредгольма для компактных операторов в гильбертовых пространствах в следующем виде.

Т е о р е м а 5.11. *Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, а T – компактное отображение $\mathcal{H}$ в себя. Тогда существует такое не более чем счетное множество $\Lambda \subset \mathbf{R}$, не имеющее отличных от нуля предельных точек, что если $\lambda \neq 0$ и $\lambda \notin \Lambda$, то уравнения*

$$\lambda x - Tx = y, \quad \lambda x - T^*x = y \tag{5.13}$$

имеют единственные решения $x \in \mathcal{H}$ для всех $y \in \mathcal{H}$ и обратные операторы $(\lambda I - T)^{-1}$ и $(\lambda I - T^*)^{-1}$ ограничены. Если $\lambda \in \Lambda$, *) *то нуль-пространства операторов $\lambda I - T$ и $\lambda I - T^*$ имеют положительные конечные размерности и уравнения (5.13) разрешимы тогда и только тогда, когда элемент y ортогонален нуль-пространству оператора $\lambda I - T^*$ в первом случае, и нуль-пространству оператора $\lambda I - T$ – во втором.*

5.10. Слабая компактность

Пусть $\mathcal{V}$ – нормированное линейное пространство. Последовательность $\{x_n\}$ называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in \mathcal{V}$, если $f(x_n) \to f(x)$ для всех f, принадлежащих сопряженному пространству $\mathcal{V}^*$. В силу теоремы представления Рисса (теорема 5.7) последовательность $\{x_n\}$ элементов гильбертова пространства $\mathcal{H}$ слабо сходится к $x \in \mathcal{H}$, если $(x_n, y) \to (x, y)$ для всех $y \in \mathcal{H}$. Следующий результат часто используется при изучении дифференциальных уравнений методом гильбертовых пространств.

Т е о р е м а 5.12. *Любая ограниченная последовательность элементов гильбертова пространства содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно, и предположим, что последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ удовлетворяет условию $\| x_n \| \leqslant M$. Пусть $\{y_m\}$ – плотное подмножество в $\mathcal{H}$. С помощью канторовского диагонального процесса мы получаем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ нашей исходной последовательности, удовлетворяющую условию $(x_{n_k}, y_m) \to \alpha_m \in \mathbf{R}$ при $k \to \infty$. Отображение $f: \{y_m\} \to \mathbf{R}$, определенное равенством $f(y_m) = \alpha_m$, можно расширить до линейного ограниченного

*) Имеется в виду: $\lambda \neq 0$. – *Примеч. ред.*

функционала f на $\mathcal{H}$ и, следовательно, по теореме представления Рисса существует элемент $x \in \mathcal{H}$, удовлетворяющий условию $(x_{n_k}, y) \to f(y) = (x, y)$ при $k \to \infty$, для всех $y \in \mathcal{H}$. Следовательно, последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится слабо к x.

Чтобы обобщить результат на произвольное гильбертово пространство $\mathcal{H}$, обозначим через $\mathcal{H}_0$ замыкание линейной оболочки последовательности $\{x_n\}$. Тогда в силу наших предыдуших рассуждений существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \subset \mathcal{H}_0$ и элемент $x \in \mathcal{H}_0$, удовлетворяющие условию $(x_{n_k}, y) \to (x, y)$ для всех $y \in \mathcal{H}_0$. По теореме 5.5 для произвольного $y \in \mathcal{H}$ имеем равенство $y = y_0 + y_1$, где $y_0 \in \mathcal{H}_0$, $y_1 \in \mathcal{H}_0^{\perp}$. Следовательно, $(x_{n_k}, y) = (x_{n_k}, y_0) \to (x, y_0) = (x, y)$ для всех $y \in \mathcal{H}$, поэтому $\{x_{n_k}\}$ слабо сходится к x, что и требовалось доказать. □

Первая часть доказательства теоремы 5.12 автоматически переносится на рефлексивное банахово пространство с сепарабельным сопряженным пространством (см. задачу 5.4). Результат справедлив также для любых рефлексивных банаховых пространств.

Примечания

Материал этой главы является стандартным и может быть найден в книгах по функциональному анализу, таких как [75], [359], [107].

Задачи

5.1. Докажите, что пространства Гёльдера $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, введенные в гл. 4, являются банаховыми пространствами с одной из эквивалентных норм (4.6) или (4.6)$'$.

5.2. Докажите, что внутреннее пространство Гёльдера $C_*^{k,\alpha}(\Omega)$, определенное соотношением

$$C_*^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^{k,\alpha}(\Omega) \mid |u|_{k,\alpha;\Omega}^* < \infty\},$$

является банаховым пространством с внутренней нормой, определенной равенством (4.17).

5.3. Пусть $\mathcal{B}$ – банахово пространство, а T – ограниченное линейное отображение $\mathcal{B}$ в себя, удовлетворяющее неравенству

$$\|x\| \leqslant K \|Tx\| \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{B}$$

с некоторой постоянной $K \in \mathbf{R}$. Докажите, что область значений отображения T замкнута.

5.4. Докажите, что любая ограниченная последовательность в сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

ГЛАВА 6

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ; МЕТОД ШАУДЕРА

В этой главе развивается теория линейных эллиптических уравнений второго порядка, которая является, по существу, развитием теории потенциала. Она основана на том фундаментальном наблюдении, что уравнения с непрерывными по Гёльдеру коэффициентами можно локально рассматривать как возмущения уравнений с постоянными коэффициентами. Из этого факта Шаудер [346, 347] смог построить глобальную теорию, развитие которой излагается здесь. Основой для такого метода являются априорные оценки решений, являющиеся обобщениями оценок теории потенциала на случай уравнений с коэффициентами, непрерывными по Гёльдеру. Эти оценки обеспечивают возможность получения результатов о компактности, существенных для теории существования и регулярности, и, поскольку они применимы и к классическим решениям при относительно слабых предположениях о коэффициентах, они играют важную роль в последующей нелинейной теории.

Всюду в этой главе мы будем рассматривать уравнение вида

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u = f(x), \quad a^{ij} = a^{ji}, \tag{6.1}$$

и будем записывать его в виде $Lu = f$, коэффициенты и правая часть f которого определены на открытом множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, и, если не оговорено противное, будем предполагать, что оператор L – *строго эллиптический*, т.е. выполнено неравенство

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbf{R}^n \tag{6.2}$$

с некоторой положительной постоянной λ.

Уравнения с постоянными коэффициентами. Прежде чем рассматривать уравнения (6.1) с переменными коэффициентами, мы установим нужные для этого вспомогательные утверждения, обобщающие относящиеся к уравнению Пуассона теоремы 4.8 и 4.12 на случай эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. Дающая эти обобщения следующая лемма использует внутреннюю и частично внутреннюю нормы, определенные формулами (4.17), (4.18) и (4.29).

Здесь и всюду далее в этой главе все показатели Гёльдера, если не оговорено противное, считаются принадлежащими интервалу (0, 1).

Лемма 6.1. *Пусть* $[A^{ij}]$ *– постоянная матрица такая, что*

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant A^{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2$$

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^n$$

с некоторыми положительными постоянными λ, Λ. *Рассмотрим уравнение*

$$L_0u = A^{ij}D_{ij}u = f(x), \quad A^{ij} = A^{ji}. \tag{6.3}$$

а) *Пусть функция* $u \in C^2(\Omega)$ *удовлетворяет на открытом множестве* Ω *пространства* $\mathbf{R}^n$ *уравнению* $L_0u = f$ *с правой частью* $f \in C^\alpha(\Omega)$. *Тогда спра-*

ведлива оценка

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}) \tag{6.4}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

б) *Пусть* Ω *– открытое подмножество* $\mathbf{R}^n_+$ *с границей, содержащей плоский кусок* T, *расположенный на гиперплоскости* $x_n = 0$. *Пусть функция* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup T)$ *удовлетворяет в* Ω *уравнению* $L_0 u = f$ *с правой частью* $f \in C^\alpha(\Omega \cup T)$ *и* $u = 0$ *на* T. *Тогда справедлива оценка*

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}) \tag{6.5}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

Доказательство. Пусть P — матрица с постоянными коэффициентами, определяющая невырожденное линейное преобразование $y = xP$ пространства $\mathbf{R}^n$ на себя. Полагая $\tilde{u}(xP) = u(x)$, несложно проверить, что $A^{ij} D_{ij} u(x) = \tilde{A}^{ij} \tilde{D}_{ij} \tilde{u}(y)$, где $\tilde{A} = P^{\mathrm{t}} A P$ (P^{t} — матрица, получающаяся из матрицы P транспонированием). Существует такая ортогональная матрица P, что матрица $\tilde{A}$ будет диагональной матрицей; ее диагональными элементами будут собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A. Если, далее, $Q = PD$, где D – диагональная матрица $[\lambda_i^{-1/2} \delta_{ij}]$, то преобразование $y = xQ$ переведет уравнение $L_0 u = f$ в уравнение Пуассона $\Delta \tilde{u}(y) = \tilde{f}(y)$, где $\tilde{u}(y) = \tilde{u}(xQ) \equiv u(x)$, $\tilde{f}(y) = f(x)$. При этом, осуществляя, если потребуется, поворот, можно добиться, чтобы полупространство $x_n > 0$ переходило в полупространство $y_n > 0$.

Так как ортогональная матрица P сохраняет длины, то $\Lambda^{-1/2}|x| \leqslant |xQ| \leqslant \lambda^{-1/2}|x|$. Отсюда следует, что если при преобразовании $y = xQ$ имеем $\Omega \to \tilde{\Omega}$, $v(x) \to \tilde{v}(y)$, то нормы (4.17), (4.18), вычисленные для v и $\tilde{v}$ на Ω и $\tilde{\Omega}$ соответственно, удовлетворяют неравенствам

$$c^{-1}|v|^*_{k,\alpha;\Omega} \leqslant |\tilde{v}|^*_{k,\alpha;\tilde{\Omega}} \leqslant c\,|v|^*_{k,\alpha;\Omega}; \tag{6.6}$$

$$c^{-1}|v|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega} \leqslant |\tilde{v}|^{(k)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}} \leqslant c\,|v|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega}; \quad k = 0, 1, \ldots; \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1;$$

с постоянной $c = c(k, n, \lambda, \Lambda)$.

Аналогично можно проверить, что если Ω – открытое подмножество $\mathbf{R}^n_+$ с границей $\partial\Omega$, содержащей лежащий на гиперплоскости $x_n = 0$ плоский кусок T, и если Ω при преобразовании $y = xQ$ отображается на множество $\tilde{\Omega}$ в $\mathbf{R}^n_+$ с границей, содержащей плоский кусок $\tilde{T}$, являющийся образом T при этом преобразовании, то нормы (4.29) в Ω и $\tilde{\Omega}$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} c^{-1}|v|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T} \leqslant |\tilde{v}|^*_{k,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} \leqslant c\,|v|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T}, \\ c^{-1}|v|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T} \leqslant |\tilde{v}|^{(k)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}\cup\tilde{T}} \leqslant c\,|v|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T} \end{gathered} \tag{6.7}$$

с постоянной $c = c(k, n, \lambda, \Lambda)$.

Теперь приступим к доказательству утверждения а) леммы. Применим теорему 4.8 в $\tilde{\Omega}$ и неравенства (6.6). Получим

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C|\tilde{u}|^*_{2,\alpha;\tilde{\Omega}} \leqslant C(|\tilde{u}|_{0;\tilde{\Omega}} + |\tilde{f}|^{(2)}_{0,\alpha;\tilde{\Omega}}) \leqslant$$

$$\leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}),$$

а это и утверждалось в (6.4). (Здесь мы использовали одну и ту же букву C для обозначения разных постоянных, зависящих только от n, α, λ, Λ.)

Утверждение б) леммы доказывается аналогично, с помощью теоремы 4.12 и неравенств (6.7). □

Из леммы 6.1 непосредственно получаются обобщения оценок для шаров из теорем 4.6 и 4.11 для уравнения Пуассона на более широкий класс уравнений (6.3) с постоянными коэффициентами. Получающиеся при этом постоянные будут зависеть, помимо величин n и α, еще и от постоянных λ и Λ.

6.1. Внутренние оценки Шаудера

Нашим первым объектом при изучении уравнения $Lu = f$ будут внутренние оценки Шаудера. Эти оценки играют далее важную роль при изучении вопросов о существовании решения и о его регулярности. Их доказательство использует результаты, аналогичные полученным ранее в (6.4) для решений уравнения $L_0 u = f$.

Отметим, что для получения оценки внутренней нормы $|u|^*_{2,\alpha;\Omega}$ решения уравнения $Lu = f$ в Ω достаточно оценить только норму $|u|_{0;\Omega}$ и полунорму $[u]^*_{2,\alpha;\Omega}$ (эти величины определены в (4.17)). Это вытекает из следующих *интерполяционных неравенств.*

Пусть функция $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, Ω – открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такая постоянная $C = C(\epsilon)$, что справедливы неравенства

$$[u]^*_{j,\beta;\Omega} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \epsilon[u]^*_{2,\alpha;\Omega}, \tag{6.8}$$

$$j = 0, 1, 2;\ \ 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1,$$

$$j + \beta < 2 + \alpha;$$

$$|u|^*_{j,\beta;\Omega} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \epsilon[u]^*_{2,\alpha;\Omega}. \tag{6.9}$$

Доказательство этого утверждения содержится в приложении 1 к этой главе – см. лемму 6.32.

Для получения точных оценок Шаудера, имея также в виду их дальнейшие применения, введем следующие новые внутренние полунормы и нормы в пространствах $C^k(\Omega)$, $C^{k,\alpha}(\Omega)$. Для вещественного числа σ

и неотрицательного целого k определим величины

$$[f]^{(\sigma)}_{k,0;\Omega} = [f]^{(\sigma)}_{k;\Omega} = \sup_{\substack{x\in\Omega\\ |\beta|=k}} d_x^{k+\sigma}\,|D^\beta f(x)|;$$
$$[f]^{(\sigma)}_{k,\alpha;\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ |\beta|=k}} d_{x,y}^{k+\alpha+\sigma}\,\frac{|D^\beta f(x)-D^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1; \tag{6.10}$$
$$|f|^{(\sigma)}_{k;\Omega} = \sum_{j=0}^{k}[f]^{(\sigma)}_{j;\Omega};$$
$$|f|^{(\sigma)}_{k,\alpha;\Omega} = |f|^{(\sigma)}_{k;\Omega} + [f]^{(\sigma)}_{k,\alpha;\Omega}.$$

При $\sigma = 0$ введенные величины совпадают с величинами, введенными в (4.17): $[\cdot]^{(0)} = [\cdot]^*$ и $|\cdot|^{(0)} = |\cdot|^*$. Легко проверить, что

$$|fg|^{(\sigma+\tau)}_{0;\alpha;\Omega} \leqslant |f|^{(\sigma)}_{0,\alpha;\Omega}\cdot|g|^{(\tau)}_{0,\alpha;\Omega}\quad \text{для } \sigma+\tau\geqslant 0. \tag{6.11}$$

Основные *внутренние оценки Шаудера* содержатся в следующей теореме.

Теорема 6.2. *Пусть Ω – открытое подмножество $\mathbf{R}^n$ и пусть функция $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$ является ограниченным решением в Ω уравнения*

$$Lu = a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu + cu = f,$$

с правой частью $f\in C^\alpha(\Omega)$. Пусть, далее, существуют положительные постоянные λ, Λ такие, что справедливы неравенства

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2\quad \forall x\in\Omega,\quad \xi\in\mathbf{R}^n, \tag{6.12}$$

и

$$|a^{ij}|^{(0)}_{0,\alpha;\Omega},\quad |b^i|^{(1)}_{0,\alpha;\Omega},\quad |c|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}\leqslant\Lambda. \tag{6.13}$$

Тогда справедлива оценка

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}) \tag{6.14}$$

с постоянной $C = C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)$.

Доказательство. В силу (6.9) достаточно установить оценку вида (6.14) для $[u]^*_{2,\alpha;\Omega}$, а последнюю достаточно доказать для компактных подмножеств Ω. Действительно, пусть $\{\Omega_i\}$ – последовательность открытых подмножеств множества Ω таких, что $\Omega_i\subset\Omega_{i+1}\subset\subset\Omega$ и $\cup\,\Omega_i=\Omega$. Для каждого i величина $[u]^*_{2,\alpha;\Omega_i}$ конечна. Если неравенство (6.14) выполнено во всех Ω_i, то мы можем считать, что для любой пары точек $x,y\in\Omega$, для всех достаточно больших i и для каждой из вторых производных выполнены неравенства

$$(d^{(i)}_{x,y})^{2+\alpha}\cdot\frac{|D^2u(x)-D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant[u]^*_{2,\alpha;\Omega_i}\leqslant$$
$$\leqslant C(|u|_{0;\Omega_i} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega_i})\leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}),$$

где $d_{x,y}^{(i)} = \min\ [\operatorname{dist}(x, \partial\Omega_i), \operatorname{dist}(y, \partial\Omega_i)]$. Устремляя $i \to \infty$, мы получим неравенство

$$d_{x,y}^{2+\alpha} \cdot \frac{|D^2 u(x) - D^2 u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2)}) \quad \forall x, y \in \Omega,$$

из которого следует такая же оценка для $[u]_{2,\alpha;\Omega}^*$. Таким образом, достаточно доказать утверждение теоремы для случая, когда величина $[u]_{2,\alpha;\Omega}^*$ конечна.

Условимся, как и прежде, одну и ту же букву C использовать для обозначения разных постоянных, зависящих от n, α, λ, Λ.

Пусть x_0, y_0 – произвольные точки из Ω. Предположим, что $d_{x_0} = d_{x_0, y_0} = \min\ (d_{x_0}, d_{y_0})$. Пусть $\mu \leqslant 1/2$ – положительная постоянная (она будет указана далее) и пусть $d = \mu d_{x_0}$, $B = B_d(x_0)$. Перепишем уравнение $Lu = f$ в виде

$$a^{ij}(x_0) D_{ij}u = (a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x)) D_{ij}u - b^i D_i u - cu + f \equiv F(x), \tag{6.15}$$

и рассмотрим его как уравнение с постоянными коэффициентами $a^{ij}(x_0)$ в B. Применяя к решению этого уравнения лемму 6.1 а), мы получаем, что если $y_0 \in B_{d/2}(x_0)$, то для каждой из вторых производных $D^2 u$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{d}{2}\right)^{2+\alpha} \cdot \frac{|D^2 u(x_0) - D^2 u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leqslant C(|u|_{0;B} + |F|_{0,\alpha;B}^{(2)}),$$

и тем самым

$$d_{x_0}^{2+\alpha} \cdot \frac{|D^2 u(x_0) - D^2 u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leqslant \frac{C}{\mu^{2+\alpha}}(|u|_{0;B} + |F|_{0,\alpha;B}^{(2)}).$$

Если $|x_0 - y_0| \geqslant d/2$, то

$$d_{x_0}^{2+\alpha} \cdot \frac{|D^2 u(x_0) - D^2 u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{\mu}\right)^\alpha [d_{x_0}^2 |D^2 u(x_0)| + d_{y_0}^2 |D^2 u(y_0)|] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\mu^\alpha} [u]_{2;\Omega}^*.$$

Объединяя полученные неравенства, получаем оценку

$$d_{x_0}^{2+\alpha} \frac{|D^2 u(x_0) - D^2 u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leqslant \frac{C}{\mu^{2+\alpha}} (|u|_{0;\Omega} + |F|_{0;\alpha;B}^{(2)}) +$$

$$+ \frac{4}{\mu^\alpha} [u]_{2;\Omega}^*. \tag{6.16}$$

Оценим теперь $|F|^{(2)}_{0,\alpha;B}$ через $|u|_{0;\Omega}$ и $[u]^*_{2,\alpha;\Omega}$. Имеем

$$|F|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant \sum_{i,j} |(a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x)) D_{ij}u|^{(2)}_{0,\alpha;B} +$$

$$+ \sum_i |b^i D_i u|^{(2)}_{0,\alpha;B} + |cu|^{(2)}_{0;\alpha;B} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;B}. \tag{6.17}$$

Далее нам потребуется следующее неравенство. Заметив, что для всех $x \in B$ справедливо неравенство $d_x = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > (1-\mu)d_{x_0} \geqslant \frac{1}{2}d_{x_0}$, мы можем для произвольной функции $g \in C^\alpha(\Omega)$ записать

$$|g|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant d^2 |g|_{0;B} + d^{2+\alpha}[g]_{\alpha;B} \leqslant \frac{\mu^2}{(1-\mu)^2}[g]^{(2)}_{0;\Omega} +$$

$$+ \frac{\mu^{2+\alpha}}{(1-\mu)^{2+\alpha}}[g]^{(2)}_{0,\alpha;\Omega} \leqslant 4\mu^2 [g]^{(2)}_{0;\Omega} + 8\mu^{2+\alpha}[g]^{(2)}_{0,\alpha;\Omega} \leqslant$$

$$\leqslant 8\mu^2 |g|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}. \tag{6.18}$$

Обозначая $(a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x))D_{ij}u$ для краткости через $(a(x_0) - a(x))D^2u$, из (6.11) и (6.18) получаем оценки

$$|(a(x_0) - a(x))D^2 u|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant |a(x_0) - a(x)|^{(0)}_{0,\alpha;B} \cdot |D^2 u|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant$$

$$\leqslant |a(x_0) - a(x)|^{(0)}_{0,\alpha;B}(4\mu^2 [u]^*_{2;\Omega} + 8\mu^{2+\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega}).$$

Так как

$$|a(x_0) - a(x)|^{(0)}_{0,\alpha;B} \leqslant \sup_{x\in B} |a(x_0) - a(x)| + d^\alpha [a]_{\alpha;B} \leqslant$$

$$\leqslant 2d^\alpha [a]_{\alpha;B} \leqslant 2^{1+\alpha}\mu^\alpha [a]^*_{0;\alpha;\Omega} \leqslant 4\Lambda\mu^\alpha,$$

то мы приходим к следующей оценке старших членов в (6.17):

$$\sum_{ij} |(a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x)) D_{ij}u|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant 32n^2\Lambda\mu^{2+\alpha}([u]^*_{2;\Omega} +$$

$$+ \mu^\alpha [u]^*_{2,\alpha;\Omega}) \leqslant 32n^2\Lambda\mu^{2+\alpha}(C(\mu)|u|_{0;\Omega} + 2\mu^\alpha [u]^*_{2,\alpha;\Omega}). \tag{6.19}$$

Последнее неравенство здесь получается с помощью интерполяционного неравенства (6.8), в котором берется $\epsilon = \mu^\alpha$.

Обозначая $b^i \cdot D_i u$ для произвольного i кратко через $b \cdot Du$, из (6.18) и (6.13) получаем неравенство

$$|b\,Du|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant 8\mu^2 |b \cdot Du|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega} \leqslant 8\mu^2 |b|^{(1)}_{0,\alpha;\Omega} |Du|^{(1)}_{0,\alpha;\Omega} \leqslant$$

$$\leqslant 8\mu^2\Lambda |u|^*_{1,\alpha;\Omega} \leqslant 8\mu^2\Lambda(C(\mu)|u|_{0;\Omega} + \mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega}).$$

Здесь при доказательстве последнего неравенства используется интерполяционное неравенство (6.9) с $\epsilon = \mu^{2\alpha}$. Тогда имеем

$$|b^i D_i u|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant 8n\Lambda\mu^2 (C(\mu)|u|_{0;\Omega} + \mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega}). \tag{6.20}$$

Аналогично из (6.18), (6.11) и (6.9) получаем

$$|cu|^{(2)}_{0;\alpha;B} \leqslant 8\mu^2 |c|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega} \cdot |u|^{(0)}_{0,\alpha;\Omega} \leqslant 8\Lambda\mu^2(C(\mu)|u|_{0;\Omega} +$$

$$+ \mu^{2\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega}). \tag{6.21}$$

Наконец,

$$|f|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant 8\mu^2 |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}. \tag{6.22}$$

Обозначая через C постоянные, зависящие от n, α, λ, Λ, а через $C(\mu)$ – постоянные, зависящие также и от μ, и объединяя неравенства (6.19) – (6.22), получаем оценку

$$|F|^{(2)}_{0,\alpha;B} \leqslant C\mu^{2+2\alpha}[u]^*_{2,\alpha;\Omega} + C(\mu)(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

Подставляя ее в правые части неравенства (6.16) и используя (6.8) с постоянной $\epsilon = \mu^{2\alpha}$ для оценки $[u]^*_{2;\Omega}$, из (6.16) получаем оценку

$$d^{2+\alpha}_{x_0,y_0} \cdot \frac{|D^2u(x_0) - D^2u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} \leqslant C\mu^\alpha [u]^*_{2,\alpha;\Omega} +$$

$$+ C(\mu)(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

Так как правая часть доказанного неравенства не зависит от x_0, y_0, то из него следует оценка верхней грани по всем $x_0, y_0 \in \Omega$. Следовательно,

$$[u]^*_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C\mu^\alpha [u]^*_{2,\alpha;\Omega} + C(\mu)(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

Выбирая теперь число $\mu = \mu_0$ так, чтобы $C\mu_0^\alpha \leqslant 1/2$, мы придем к требуемой оценке

$$[u]^*_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}). \ \square$$

Полученная форма внутренних оценок решений уравнения $Lu = f$ позволяет рассматривать уравнения, в которых коэффициенты и правая часть могут быть неограниченными функциями, лишь бы выполнялось условие (6.13). В типичных приложениях внутренних оценок при получении результатов о сходимости решений достаточно установить равностепенную непрерывность семейств решений и их производных до второго порядка на компактных подмножествах. Для этой цели обычно используется следующее утверждение.

Следствие 6.3. *Пусть функция $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ удовлетворяет в ограниченной области Ω уравнению $Lu = f$ с правой частью $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$. Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (6.2), *а его коэффициенты принадле-*

жат $C^\alpha(\bar\Omega)$. *Тогда если* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *и* $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) \geqslant d$, *то существует постоянная* C *такая, что справедливо неравенство*

$$d\,|Du|_{0;\Omega'} + d^2\,|D^2u|_{0;\Omega'} + d^{2+\alpha}\,[D^2u]_{\alpha;\Omega'} \leqslant \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}), \tag{6.23}$$

причем постоянная C *зависит только от постоянной эллиптичности* λ *и от норм коэффициентов оператора* L, *вычисленных в* $C^\alpha(\bar\Omega)$ (*равно как и от* n, α *и диаметра* Ω).

З а м е ч а н и е. Непосредственным следствием этого результата является следующее утверждение: равномерно ограниченное семейство решений эллиптического уравнения $Lu = f$, коэффициенты и правая часть которого локально непрерывны по Гёльдеру, вместе с семействами их первых и вторых производных равностепенно непрерывно на каждом компактном подмножестве. Этот результат справедлив и для решений произвольного *семейства* таких уравнений с операторами, постоянные эллиптичности λ которых отделены от нуля равномерно на компактных подмножествах $\Omega' \subset\subset \Omega$, а коэффициенты и правые части имеют равномерно ограниченные нормы в пространстве $C^\alpha(\bar\Omega')$.

6.2. Граничные и глобальные оценки

Для распространения полученных выше внутренних оценок на всю область необходимо иметь оценки, справедливые вблизи границы. Такие оценки можно получить, предполагая, что граничные значения решения и сама граница является достаточно гладкими. Во многих отношениях доказательство таких граничных оценок близко к доказательству внутренних оценок.

Глобальные оценки, которые являются основной целью этого раздела, будут установлены для *областей класса* $C^{2,\alpha}$.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что ограниченная облась Ω в $\mathbf{R}^n$ и ее граница $\partial\Omega$ *принадлежат классу* $C^{k,\alpha}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, если для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существуют шар $B = B(x_0)$ и взаимно однозначное отображение ψ этого шара B на $D \subset \mathbf{R}^n$ такие, что:

(i) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbf{R}^n_+$;

(ii) $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbf{R}^n_+$;

(iii) $\psi \in C^{k,\alpha}(B)$, $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$.

Будем говорить, что область Ω имеет кусок границы $T \subset \partial\Omega$ класса $C^{k,\alpha}$, если в каждой точке $x_0 \in T$ существует шар $B = B(x_0)$ такой, что $B \cap \partial\Omega \subset T$ и выполняются приведенные выше условия. При этом мы будем говорить, что диффеоморфизм ψ *выпрямляет границу* вблизи точки x_0.

Отметим, в частности, что область Ω принадлежит $C^{k,\alpha}$, если каждая точка границы $\partial\Omega$ имеет окрестность, в которой $\partial\Omega$ является графиком функции класса $C^{k,\alpha}$ от $(n-1)$ координат из координат $x_1, \dots, x_n$. Если $k \geqslant 1$, то верно и обратное утверждение.

Из определения следует, что область класса $C^{k,\alpha}$ является также областью класса $C^{j+\beta}$, если $j + \beta < k + \alpha$, $0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 1$.

Функцию φ, определенную на куске T границы области $\partial\Omega$ класса $C^{k,\alpha}$, будем называть *функцией класса* $C^{k,\alpha}(T)$, если $\varphi \circ \psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D \cap \partial\mathbf{R}_+^n)$ для каждой точки $x_0 \in T$. Важно отметить, что если $\partial\Omega$ принадлежит $C^{k,\alpha}$ $(k \geqslant 1)$, то функция $\varphi \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ может быть продолжена на $\overline{\Omega}$ функцией класса $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Обратно, функция из $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ имеет граничные значения класса $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ (см. лемму 6.38). Поэтому несущественно, будем ли мы в дальнейшем рассматривать функцию φ из $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ или из $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Граничную норму в $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ можно определить различными способами. Например, если $\varphi \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ и Φ есть продолжение φ на $\overline{\Omega}$, то можно определить

$$\|\varphi\|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)} = \inf_{\Phi} \|\Phi\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

где нижняя грань берется по множеству всех продолжений Φ функции φ на $\overline{\Omega}$. Снабженное такой нормой пространство $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ является банаховым пространством. В этой книге мы не будем использовать граничные нормы функций, заданных на неплоских границах, а вместо этого будем, как правило, рассматривать граничную функцию как сужение глобально определенной функции с присущей ей нормой.

Для получения граничных оценок решений уравнения $Lu = f$ в областях, граница которых имеет кусок класса $C^{2,\alpha}$ $(\alpha > 0)$, мы сначала установим такую оценку для областей, граница которых имеет плоский кусок. Для этого нам потребуются следующие интерполяционные неравенства, аналогичные неравенствам (6.8) и (6.9), формулировки которых используют частично внутренние нормы и полунормы, определенные равенствами (4.29).

Пусть Ω – открытое подмножество пространства $\mathbf{R}_+^n$, граница которого содержит плоский кусок T, расположенный на плоскости $x_n = 0$, и пусть $u \in C^{k,\alpha}(\Omega \cup T)$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует постоянная $C(\epsilon)$ такая, что справедливы неравенства

$$[u]^*_{j,\beta;\Omega\cup T} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \epsilon[u]^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}, \tag{6.24}$$

$$j = 0,1,2;\quad 0 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 1;\quad j + \beta < 2 + \alpha;$$

$$|u|^*_{j,\beta;\Omega\cup T} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \epsilon[u]^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}. \tag{6.25}$$

Эти неравенства доказаны в приложении 1 к этой главе – см. лемму 6.34. Теперь мы можем утверждать следующую локальную граничную оценку.

Лемма 6.4. *Пусть Ω – открытое подмножество пространства $\mathbf{R}_+^n$, граница которого имеет плоский кусок T, расположенный на гиперплоскости $x_n = 0$. Предположим, что функция $u \in C^{2,\alpha}(\Omega \cup T)$ является ограниченным решением в Ω уравнения $Lu = f$, удовлетворяющим граничному условию $u = 0$ на T. Наряду с* (6.2) *предположим, что*

$$|a^{ij}|^{(0)}_{0,\alpha;\Omega\cup T},\ |b^i|^{(1)}_{0,\alpha;\Omega\cup T},\ |c|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T} \leqslant \Lambda;$$

$$|f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T} < \infty. \tag{6.26}$$

Тогда имеет место оценка

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega\cup T}) \tag{6.27}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

Доказательство идентично доказательству теоремы 6.2, если в нем заменить d_x на $\bar{d}_x$ и вместо леммы 6.1а) и неравенств (6.8), (6.9) воспользоваться леммой 6.1б) и неравенствами (6.24), (6.25). □

Эта лемма дает оценки первых и вторых производных решения и коэффициентов Гёльдера его вторых производных на любом подмножестве Ω' множества Ω, для которого $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega - T) > 0$. В частности, граница $\partial\Omega'$ может содержать произвольный плоский кусок, лежащий в T и удаленный на положительное расстояние от $\partial\Omega - T$.

Для обобщения результата предыдущей леммы на области с неплоским граничным куском нам потребуются нормы и полунормы, обобщающие (4.29). Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, граница которого содержит кусок T класса $C^{k,\alpha}$. Для $x, y \in \Omega$ положим

$$\bar{d}_x = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega - T), \quad \bar{d}_{x,y} = \min(\bar{d}_x, \bar{d}_y),$$

а для функций $u \in C^{k,\alpha}(\Omega \cup T)$ определим следующие величины:

$$[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T} = [u]^*_{k,\Omega\cup T} = \sup_{\substack{x\in\Omega\\|\beta|=k}} \bar{d}^{\,k}_x |D^\beta u|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\|\beta|=k}} \bar{d}^{\,k+\alpha}_{x,y} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1;$$

$$|u|^*_{k,0;\Omega\cup T} = |u|^*_{k;\Omega\cup T} = \sum_{j=0}^{k} [u]^*_{j;\Omega\cup T}; \tag{6.28}$$

$$|u|^*_{k,\alpha;\Omega\cup T} = |u|^*_{k;\Omega\cup T} + [u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T};$$

$$|u|^{(k)}_{0,\alpha;\Omega\cup T} = \sup_{x\in\Omega} \bar{d}^{\,k}_x |u(x)| + \sup_{x,y\in\Omega} \bar{d}^{\,k+\alpha}_{x,y} \cdot \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Если $T = \phi$ и $\Omega \cup T = \Omega$, то эти величины совпадают с внутренними полунормами и нормами, введенными ранее в (4.17) и (4.18).

Пусть Ω — ограниченная область, граница которой содержит кусок T класса $C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Пусть $\Omega \subset\subset D$, где D — область, которая диффеоморфизмом ψ класса $C^{k,\alpha}$ отображается на D'. Пусть $\psi(\Omega) = \Omega'$ и $\psi(T) = T'$. Определим в Ω' и T' величины (6.28). Если $x' = \psi(x)$, $y' = \psi(y)$, то, очевидно,

$$K^{-1}|x-y| \leqslant |x'-y'| \leqslant K|x-y| \tag{6.29}$$

для всех точек $x, y \in \Omega$, где постоянная K зависит от ψ и Ω. Положив $u(x) \mapsto \tilde{u}(x')$ при преобразовании $x \mapsto x'$ и используя неравенства (6.29),

получаем

$$K^{-1}\,|u(x)|_{j,\beta;\Omega} \leqslant |\widetilde{u}(x')|_{j,\beta;\Omega'} \leqslant K\,|u(x)|_{j,\beta;\Omega};$$

$$K^{-1}\,|u(x)|^{*}_{j,\beta;\Omega\cup T} \leqslant |\widetilde{u}(x')|^{*}_{j,\beta;\Omega'\cup T'} \leqslant K\,|u(x)|^{*}_{j,\beta;\Omega\cup T}; \tag{6.30}$$

$$K^{-1}\,|u(x)|^{(\sigma)}_{0,\beta;\Omega\cup T} \leqslant |\widetilde{u}(x')|^{(\sigma)}_{0,\beta;\Omega'\cup T'} \leqslant K\,|u(x)|^{(\sigma)}_{0,\beta;\Omega\cup T}.$$

В этих неравенствах через K обозначены постоянные, зависящие от отображения ψ и области Ω.

Лемма 6.4 вместе с неравенствами (6.30) может быть теперь использована для получения локальной граничной оценки в общем случае, когда граница содержит неплоские куски. При этом удобно пользоваться глобальными нормами (4.6).

Лемма 6.5. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{2,\alpha}$ и пусть функция $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ является решением задачи $Lu = f$ в Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$ с правой частью $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Предположим, что коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям* (6.2) *и выполнены неравенства*

$$|a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega},\ |b^i|_{0,\alpha;\Omega},\ |c|_{0,\alpha;\Omega} \leqslant \Lambda. \tag{6.31}$$

Тогда при некотором $\delta > 0$ для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ в шаре $B = B_\delta(x_0)$ справедлива оценка

$$|u|_{2,\alpha;\,B\cap\Omega} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \tag{6.32}$$

с постоянной $C = C(n,\alpha,\lambda,\Lambda,\Omega)$.

Доказательство. В силу определения области класса $C^{2,\alpha}$ для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существует окрестность N этой точки и существует диффеоморфизм класса $C^{2,\alpha}$, выпрямляющий границу в N. Пусть $B_\rho(x_0) \subset\subset N$. Положим $B' = B_\rho(x_0) \cap \Omega$, $D' = \psi(B')$, $T = B_\rho(x_0) \cap \cap\, \partial\Omega \subset \partial B'$ и $T' = \psi(T) \subset \partial D'$ (T' – плоский кусок границы $\partial D'$). При преобразовании $y = \psi(x) = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$ пусть $\widetilde{u}(y) = u(x)$, $\widetilde{L}\widetilde{u}(y) = Lu(x)$, где

$$\widetilde{L}\widetilde{u} \equiv \widetilde{a}^{ij} D_{ij}\widetilde{u} + \widetilde{b}^i D_i\widetilde{u} + \widetilde{c}\,\widetilde{u} = \widetilde{f}(y),$$

а

$$\widetilde{a}^{ij}(y) = \frac{\partial\psi_i}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial\psi_j}{\partial x_s}\cdot a^{rs}(x),$$

$$\widetilde{b}^i(y) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_r\partial x_s}\cdot a^{rs}(x) + \frac{\partial\psi_i}{\partial x_r}\cdot b^r(x),$$

$$\widetilde{c}(y) = c(x),\quad \widetilde{f}(y) = f(x).$$

Отметим, что в D' выполняется неравенство

$$\widetilde{\lambda}|\xi|^2 \leqslant \widetilde{a}^{ij}\xi_i\xi_j \quad \forall\,\xi \in \mathbf{R}^n,$$

где

$$\tilde{\lambda} = \lambda/K \tag{6.33}$$

с зависящей только от преобразования ψ на B' положительной постоянной K. В силу (6.30) также имеем (с выбранной в (6.33) постоянной)

$$|\tilde{a}^{ij}|_{0,\alpha;D'},\ |\tilde{b}^i|_{0,\alpha;D'},\ |\tilde{c}|_{0,\alpha;D'} \leqslant \Lambda' = K\Lambda; \tag{6.34}$$

$$|\tilde{f}|_{0,\alpha;D'} < \infty.$$

Тем самым для уравнения $\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f}$ в области D', граница которой содержит плоский кусок T', выполнены условия леммы 6.4. Следовательно, справедлива оценка

$$|\tilde{u}|^*_{2,\alpha;D'\cup T'} \leqslant C(|\tilde{u}|_{0;D'} + |\tilde{f}|^{(2)}_{0,\alpha;D'\cup T'})$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda})$. Из (6.30) следует, что

$$|u|^*_{2,\alpha;B'\cup T} \leqslant C(|u|_{0,B'} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;B'\cup T}) \leqslant$$

$$\leqslant C(|u|_{0;B'} + |f|_{0,\alpha;B'}) \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

с постоянной C, зависящей теперь от n, α, λ, Λ и B'. Полагая $B'' = B_{\rho/2}(x_0) \cap \cap\, \Omega$ и замечая, что

$$\min(1, (\rho/2)^{2+\alpha})\ |u|_{2,\alpha;B''} \leqslant |u|^*_{2,\alpha;B'\cup T},$$

получаем оценку

$$|u|_{2,\alpha;B''} \leqslant C\ (|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}). \tag{6.35}$$

В полученных оценках радиус ρ зависит, вообще говоря, от точки $x_0 \in \partial\Omega$ Рассмотрим теперь совокупность шаров $B_{\rho/4}(x)$ для всех $x \in \partial\Omega$. Конечное подмножество $B_{\rho_i/4}(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, этой совокупности покрывает границу $\partial\Omega$. Пусть $\delta = \min \rho_i/4$ – наименьший из радиусов входящих в это конечное покрытие шаров. Мы утверждаем, что для этого δ справедливо утверждение леммы. Действительно, путь C_i – постоянная в (6.35), соответствующая точке x_i, и пусть $C = \max C_i$. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \partial\Omega$ и шар $B_\delta(x_0)$. Для некоторого i будет выполнено соотношение $x_0 \in B_{\rho_i/4}(x_i)$ и, следовательно, $B = B_\delta(x_0) \subset B_{\rho_i/2}(x_i) = B_i$. Из (6.35) получаем требуемую оценку

$$|u|_{2,\alpha;B\cap\Omega} \leqslant |u|_{2,\alpha;B_i\cap\Omega} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

с постоянной C, зависящей от n, α, λ, Λ и Ω. □

Подчеркнем, что в лемме 6.5 зависимость постоянной C от области Ω описывается через постоянную K из (6.30), (6.33) и (6.34), а постоянная K, в свою очередь, зависит только от нормы в пространстве $C^{2,\alpha}$ преобразования ψ, которое определяет локальное представление границы $\partial\Omega$. Если эти нормы преобразований ψ могут быть оценены равномерно по границе (что всегда имеет место для областей класса $C^{2,\alpha}$), то в формулировке оценки (6.32) зависимость от Ω можно заменить на зависимость от K, а область Ω может быть даже неограниченной.

Основным результатом этого раздела является следующая априорная глобальная оценка в областях класса $C^{2,\alpha}$ решений с граничными значениями из $C^{2,\alpha}$.

Теорема 6.6. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{2,\alpha}$, а функция $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ является решением в Ω уравнения $Lu = f$, правая часть f которого принадлежит $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$, а коэффициенты удовлетворяют неравенствам*

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \lambda |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \ \xi \in \mathbf{R}^n,$$

$$|a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega}, \quad |b^i|_{0,\alpha;\Omega}, \quad |c|_{0,\alpha;\Omega} \leqslant \Lambda$$

с положительными постоянными λ и Λ. Пусть $\varphi(x) \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ и предположим, что $u = \varphi$ на $\partial\Omega$. Тогда справедлива оценка

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \tag{6.36}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая $u = 0$ на $\partial\Omega$, $\varphi = 0$. Действительно, если мы введем функцию $v = u - \varphi$, то $v = 0$ на $\partial\Omega$ и $Lv = f - L\varphi \equiv f' \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. Оценка (6.36) для функции v, удовлетворяющей нулевому граничному условию, имеет вид

$$|v|_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(|v|_{0;\Omega} + |f'|_{0,\alpha;\Omega}).$$

Так как $|L\varphi|_{0,\alpha;\Omega} \leqslant C|\varphi|_{2,\alpha;\Omega}$, то мы можем записать, что

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leqslant |v|_{2,\alpha;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}),$$

а это и утверждается в теореме.

Далее будем считать, что $u = 0$ на $\partial\Omega$.

Пусть $x \in \Omega$. Рассмотрим две возможности:

(i) $x \in B_0 = B_{2\sigma}(x_0) \cap \Omega$ для некоторой точки $x_0 \in \partial\Omega$, причем $\delta = 2\sigma$ – радиус из леммы 6.5;

(ii) $x \in \Omega_\sigma = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \sigma\}$.

В случае (i) из леммы 6.5 следует, что

$$|Du(x)| + |D^2u(x)| \leqslant C(|u|_0 + |f|_{0,\alpha}) \tag{6.37}$$

(здесь и далее, поскольку это не вызывает недоразумений, мы опускаем букву Ω). В случае (ii) мы получаем такое же неравенство, но с другой постоянной C, в силу следствия 6.3; в (6.23) следует взять $d = \sigma$. Выбирая наибольшую из двух постоянных, мы получаем оценку (6.37) для любой точки x из Ω. Тем самым получается оценка и для $|u|_2$.

Пусть теперь x, y – различные точки из Ω. Рассмотрим три возможности:

(i) $x, y \in B_0$ для некоторого x_0;

(ii) $x, y \in \Omega_\sigma$;

(iii) хотя бы одна из точек x или y лежит в $\Omega \setminus \Omega_\delta$, но ни для какой точки $x_0 \in \partial\Omega$ обе точки x и y не лежат в одном шаре B_0.

Этими случаями исчерпываются все возможности.

Рассмотрим отношение $|D^2u(x) - D^2u(y)|/|x-y|^\alpha$.

В случае (i) к требуемому неравенству

$$\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant C_1(|u|_0 + |f|_{0,\alpha})$$

приводит лемма 6.5.

В случае (ii) получаем такое же неравенство, но с другой постоянной C_2, из следствия 6.3.

В случае (iii) $\operatorname{dist}(x,y) > \sigma$ и поэтому

$$\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant \sigma^{-\alpha}(|D^2u(x)| + |D^2u(y)|) \leqslant C_3(|u|_0 + |f|_{0,\alpha})$$

в силу (6.37). Полагая $C = \max(C_1, C_2, C_3)$ и беря точную верхнюю грань по всем $x, y \in \Omega$, мы получаем $[D^2u]_\alpha \leqslant C(|u|_0 + |f|_{0,\alpha})$. Объединяя этот результат с вытекающей из (6.37) оценкой $|u|_2$, получаем $|u|_{2,\alpha} \leqslant C(|u|_0 + |f|_{0,\alpha})$, что и доказывает теорему. □

З а м е ч а н и е. Типичным является применение теоремы 6.6 к множеству решений уравнения или семейства уравнений, каждое решение которых удовлетворяет равномерной оценке (6.36). Ограниченность в $C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ множества решений влечет его предкомпактность в $C^2(\bar\Omega)$ (см. лемму 6.36).

Несложная модификация доказательства теоремы 6.6 приводит к следующей локальной оценке в области, имеющей кусок границы класса $C^{2,\alpha}$.

С л е д с т в и е 6.7. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область, имеющая кусок границы $T \subset \partial\Omega$ класса $C^{2,\alpha}$, и пусть $u \in C^{2,\alpha}(\Omega \cup T)$ – решение уравнения $Lu = f$ в Ω, удовлетворяющее условию $u = \varphi$ на T, где L, f и φ удовлетворяют условиям теоремы* 6.6. *Тогда для каждой $x_0 \in T$ и шара $B = B_\rho(x_0)$ радиуса $\rho < \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega \setminus T)$ имеет место оценка*

$$|u|_{2,\alpha,B\cap\Omega} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \qquad (6.38)$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, B \cap \Omega)$.

Непосредственным развитием установленных в этом и предыдущем разделах оценок являются аналогичные оценки производных более высокого порядка решений уравнений, коэффициенты и правые части которых являются функциями класса $C^{k,\alpha}$, где $k > 0$ (см. задачи 6.1, 6.2).

6.3. Задача Дирихле

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения $Lu = f$ в ограниченной области Ω пространства $\mathbf{R}^n$. Используемая здесь процедура ее решения для уравнения с переменными коэффициентами состоит в сведении с помощью *метода продолжения по параметру* к случаю постоянных коэффициентов. Коротко говоря, применяемый здесь метод отправляется от решения задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = f$, затем уравнения $\Delta u = f$ и $Lu = f$ непрерывно соединяются семейством эллиптических уравнений.

Рассмотрим сначала задачу Дирихле для достаточно гладких областей и граничных данных. В этой ситуации связь между разрешимостью уравнения Пуассона и уравнения $Lu = f$, в котором $c \leqslant 0$, описывается следующей теоремой.

Теорема 6.8. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{2,\alpha}$ и пусть L – сильно эллиптический оператор в Ω с коэффициентами из $C^\alpha(\bar{\Omega})$, причем $c \leqslant 0$. Тогда если задача Дирихле для уравнения Пуассона ($\Delta u = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$) имеет решение из $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ для любой функции $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ и любой функции $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, то задача*

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega \tag{6.39}$$

также имеет (единственное) решение из $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ для всех таких функций f и φ.

Доказательство. В силу условий теоремы мы можем считать, что коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\lambda |\xi|^2 \leqslant a^{ij}\xi_i\xi_j \quad \forall x \in \Omega, \ \xi \in \mathbf{R}^n, \\ &|a^{ij}|_{0,\alpha}, \quad |b^i|_{0,\alpha}, \quad |c|_{0,\alpha} \leqslant \Lambda \end{aligned} \tag{6.40}$$

с положительными постоянными λ, Λ. (В написанных нормах мы для краткости опускаем индекс Ω.) Так как задача (6.39) эквивалентна задаче $Lv = f - L\varphi = f'$ в Ω, $v = 0$ на $\partial\Omega$, то достаточно ограничиться рассмотрением случая нулевых граничных значений.

Рассмотрим семейство уравнений

$$L_t u \equiv tLu + (1 - t)\Delta u = f, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{6.41}$$

Заметим, что $L_0 = \Delta$, $L_1 = L$ и что коэффициенты оператора L_t удовлетворяют (6.40) с постоянными

$$\lambda_t = \min(1, \lambda), \quad \Lambda_t = \max(1, \Lambda).$$

Оператор L_t можно рассматривать как линейный ограниченный оператор из банахова пространства $B_1 = \{u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) | \ u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ в банахово пространство $B_2 = C^\alpha(\bar{\Omega})$. Однозначная разрешимость задачи Дирихле $L_t u = f$ в Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$ для всех $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ эквивалентна взаимной однозначности отображения L_t на $C^\alpha(\bar{\Omega})$. Обозначим через u_t решение этой задачи. В силу теоремы 3.7 справедлива оценка

$$|u_t|_0 \leqslant C \sup_{\Omega} |f| \leqslant C|f|_{0,\alpha},$$

в которой постоянная C зависит только от λ, Λ и диаметра области Ω. Следовательно, из (6.36) следует, что

$$|u_t|_{2,\alpha} \leqslant C|f|_{0,\alpha}, \tag{6.42}$$

т.е.

$$\|u\|_{B_1} \leqslant C\|L_t u\|_{B_2},$$

где постоянная C не зависит от t. Так как по условию оператор $L_0 = \Delta$ отображает B_1 на все B_2, то применим метод продолжения по параметру (теорема 5.2), откуда и следует утверждение теоремы. □

Одним из условий теоремы 6.8 является условие разрешимости в пространстве $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ задачи Дирихле для уравнения Пуассона в случае, когда область Ω и граничные данные принадлежат классу $C^{2,\alpha}$. В действительности это условие не является ограничением: факт соответствующей разрешимости задачи Дирихле – теорема Келлога – может быть установлен непосредственно методами теории потенциала. Однако мы здесь не будем ни предполагать, ни доказывать его, а получим его позднее из общей эллиптической теории. В специальном случае, когда Ω есть шар, теорема Келлога была нами доказана в следствии 4.14. Таким образом, для случая, когда область является шаром, мы доказали следующую теорему существования.

Следствие 6.9. *Пусть в теореме 6.8 область Ω является шаром B и пусть оператор L удовлетворяет условиям теоремы 6.8. Тогда если $f \in C^\alpha(\bar{B})$ и $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$, то задача Дирихле $Lu = f$ в B, $u = \varphi$ на ∂B, имеет (единственное) решение $u \in C^{2,\alpha}(\bar{B})$.*

Условия на граничные данные можно ослабить в рамках следующего обобщения, которое будет использовано далее.

Лемма 6.10. *Пусть T – кусок границы (возможно, пустой) шара $B \subset \mathbf{R}^n$ и пусть $\varphi \in C^0(\partial B) \cap C^{2,\alpha}(T)$. Тогда если оператор L удовлетворяет в шаре B условиям теоремы 6.8 и $f \in C^\alpha(\bar{B})$, то задача Дирихле $Lu = f$ в B, $u = \varphi$ на ∂B, имеет (единственное) решение $u \in C^{2,\alpha}(B \cup T) \cap$ $\cap\, C^0(\bar{B})$.*

Доказательство. Пусть x_0 – произвольная точка T, если T непусто. Мы можем предполагать, что граничная функция φ непрерывно продолжена по радиусу и продолженная функция (обозначим ее также через φ) принадлежит $C^0(B') \cap C^{2,\alpha}(\bar{G})$, где B' – шар, содержащий $\bar{B}$, а $G = B_\rho(x_0) \subset\subset B'$ (см. замечание 2 после леммы 6.38). Пусть $\{\varphi_k\}$ – последовательность достаточно гладких в B' (например, из класса C^3) функций таких, что

$$|\varphi_k|_{2,\alpha;G} \leqslant C|\varphi|_{2,\alpha;G} \quad \text{и} \quad |\varphi_k - \varphi|_{0;B} \to 0 \text{ при } k \to \infty \tag{6.43}$$

с постоянной C, не зависящей от k. (По поводу существования такой аппроксимации см. обсуждение после леммы 7.1.) Для каждого k обозначим через u_k соответствующее решение задачи Дирихле $Lu = f$ в B, $u = \varphi_k$ на ∂B. В силу следствия 6.9 функции $\{u_k\}$ существуют и принадлежат $C^{2,\alpha}(\bar{B})$. Из принципа максимума следует, что последовательность $\{u_k\}$ равномерно сходится к функции $u \in C^0(\bar{B})$ такой, что $u = \varphi$ на $\partial\bar{B}$. Компактность семейства $\{u_k\}$ обеспечивается следствием 6.3, гарантирующим также, что последовательность $\{u_k\}$ сходится к решению уравнения $Lu = f$ на компактных подмножествах B и, следовательно, предельная функция u будет решением класса $C^0(B)$ уравнения в B. Кроме того, в силу следствия 6.7 в области $D = B_{\rho/2}(x_0) \cap B$ функции u_k удовлетворяют оценке

$$|u_k|_{2,\alpha;D} \leqslant C(|u_k|_{0;B} + |\varphi_k|_{2,\alpha;G} + |f|_{0,\alpha;B}).$$

Из (6.43) и теоремы Арцела следует, что функция u удовлетворяет такой же оценке (с заменой φ_k на φ) в D, и, в частности, что $u \in C^{2,\alpha}(\bar{D})$. Таким образом, функция $u \in C^{2,\alpha}(B \cup T)$, и лемма доказана. □

Специально отметим, что из этой леммы следует существование решения задачи Дирихле в шаре, если граничные значения просто непрерывны. Решение в этом случае будет принадлежать $C^0(\bar{B}) \cap C^{2,\alpha}(B)$.

Теперь мы можем перенести на рассматриваемую ситуацию изложенный в гл. II метод Перрона субгармонических функций, а полученные там для гармонических функций результаты распространить на задачу Дирихле для уравнения $Lu = f$. Функцию u класса $C^0(\Omega)$ будем называть *субрешением* (*суперрешением*) уравнения $Lu = f$ в области Ω, если для любого шара $B \subset\subset \Omega$ и любого решения v, такого, что $Lv = f$ в B, из неравенства $u \leqslant v (u \geqslant v)$, выполняющегося на ∂B, следует неравенство $u \leqslant v (u \geqslant v)$ во всем шаре B. Если мы предположим, что оператор L удовлетворяет условиям сильного принципа максимума и задача Дирихле для уравнения $Lu = f$ разрешима в шарах для непрерывных граничных функций, то субрешения и субгармонические функции обладают многими одинаковыми свойствами. Мы сформулируем эти свойства без доказательств. Доказательства этих утверждений по существу те же, что и для субгармонических функций. Если функция f и коэффициенты оператора L принадлежат $C^\alpha(\Omega)$ и $c \leqslant 0$, то в этих доказательствах следует теоремы 2.2 и 2.6 заменить теоремой 3.5 и леммой 6.10 соответственно.

(i) Функция $u \in C^2(\Omega)$ является субрешением тогда и только тогда, когда $Lu \geqslant f$.

(ii) Если функция u является субрешением в ограниченной области Ω, а функция v является суперрешением в Ω, причем на $\partial\Omega$ выполняется неравенство $v \geqslant u$, то либо $v > u$ всюду в Ω, либо $v \equiv u$.

(iii) Пусть функция u является субрешением в Ω и B – такой шар, что $\overline{B} \subset \Omega$. Обозначим через $\overline{u}$ решение уравнения $Lu = f$ в B, удовлетворяющее условию $\overline{u} = u$ на ∂B. Тогда функция U, определенная равенством

$$U(x) = \begin{cases} \overline{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in \Omega - B, \end{cases}$$

является субрешением в Ω.

(iv) Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_N$ – субрешения в области Ω. Тогда функция $u(x) = \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$ является также субрешением в Ω.

Аналогичные (i), (ii) и (iv) свойства имеют место, очевидно, и для суперрешений.

Пусть Ω – ограниченная область, а φ – ограниченная функция на $\partial\Omega$. Функцию $u \in C^0(\overline{\Omega})$ будем называть *субфункцией* (*суперфункцией*) относительно φ, если u является субрешением (суперрешением) в Ω и выполняется неравенство $u \leqslant \varphi$ $(u \geqslant \varphi)$ на $\partial\Omega$. В силу свойства (ii) каждая субфункция не превосходит произвольную суперфункцию. Обозначим через S_φ множество субфункций в Ω относительно φ. Предположим, что S_φ непусто и ограничено сверху. Такова ситуация, например, в случае, когда оператор L строго эллиптичен в Ω и его коэффициенты и функция f ограничены. Действительно, если Ω лежит в полосе $0 < x_1 < d$, то функции

$$\begin{aligned} v^+ &= \sup|\varphi| + (e^{\gamma d} - e^{\gamma x_1}) \frac{\sup|f|}{\lambda}, \\ v^- &= -\sup|\varphi| - (e^{\gamma d} - e^{\gamma x_1}) \frac{\sup|f|}{\lambda} \end{aligned} \tag{6.44}$$

являются соответственно суперфункцией и субфункцией, если постоянная γ

достаточно велика (см. теорему 3.7). Суперфункция v^+ ограничивает сверху функции из S_φ, а существование субфункции v^- гарантирует непустоту S_φ.

Мы можем теперь сформулировать основной результат о существовании решения, получаемого процессом Перрона, для уравнения $Lu = f$ в предположении, что f и коэффициенты оператора L принадлежат $C^\alpha(\Omega)$ и что $c \leqslant 0$.

Теорема 6.11. *Если функция* $u(x) = \sup\limits_{v \in S_\varphi} v(x)$ *ограничена, то она принадлежит* $C^{2,\alpha}(\Omega)$ *и является решением уравнения* $Lu = f$ *в области* Ω.

Доказательство этой теоремы лишь незначительно отличается от доказательства теоремы 2.12, и мы оставляем его читателю. При этом обратим внимание на то, что используемая в доказательстве компактность решений обеспечивается внутренней оценкой следствия 6.3, а подходящая форма принципа максимума дается теоремой 3.5.

Перейдем теперь к описанию условий, гарантирующих непрерывное принятие построенным в теореме 6.11 решением граничного значения φ. Как и в случае гармонических функций, эта задача может быть решена на основе барьерной концепции, которую мы изложим в случае уравнения $Lu=f$ с $c \leqslant 0$ в ограниченной области. Пусть φ — определенная и ограниченная на $\partial\Omega$ функция, непрерывная в точке $x_0 \in \partial\Omega$. Последовательность функций $\{w_i^+(x)\}$ ($\{w_i^-(x)\}$) из $C^0(\overline{\Omega})$ называется *верхним* (*нижним*) *барьером* в Ω для L, f и φ в точке x_0, если:

(i) $w_i^+(w_i^-)$ является суперфункцией (субфункцией) относительно φ и Ω;

(ii) $w_i^\pm(x_0) \to \varphi(x_0)$ при $i \to \infty$.

Если оба — верхний и нижний — барьера существуют в точке, мы будем, для краткости, говорить просто о *барьере* в точке.

Основное свойство барьеров дано в следующей лемме.

Лемма 6.12. *Пусть функция* φ *ограничена на* $\partial\Omega$ *и непрерывна в точке* x_0, *а* u *— определенное в теореме* 6.11 *решение в* Ω *уравнения* $Lu=f$. *Тогда если в точке* x_0 *существует барьер, то* $u(x) \to u(x_0)$ *при* $x \to x_0$.

Доказательство. Из определения u и из того, что любая субфункция не превосходит любую суперфункцию, мы имеем для всех i $w_i^-(x) \leqslant u(x) \leqslant \leqslant w_i^+(x)$ в Ω. Для произвольного $\epsilon > 0$ и для всех достаточно больших i из условия (ii) следуют неравенства $\lim\limits_{x \to x_0} w_i^-(x) > \varphi(x_0) - \epsilon$, $\lim\limits_{x \to x_0} w_i^+(x) < \varphi(x_0) + \epsilon$. Отсюда $\limsup\limits_{x \to x_0} |u(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$, и, следовательно, $u(x) \to \varphi(x_0)$ при $x \to x_0$. □

Мы расширим концепцию барьеров с помощью следующих замечаний.

Замечание 1. Во многих интересных случаях специальная структура уравнения упрощает определение барьера. Например, в случае $c \equiv 0$, $f \equiv 0$ ситуация аналогична ситуации для уравнения Лапласа, для которого барьер в точке x_0 определяется просто как суперрешение $w \in C^0(\overline{\Omega})$, обладающее свойством: $w > 0$ на $\partial\Omega - x_0$. Покажем это. Возьмем произвольное $\epsilon > 0$; тогда в силу ограниченности и непрерывности в точке x_0 функции φ существует такая положительная постоянная k_ϵ, что функции

$$w_\epsilon^+ \equiv \varphi(x_0) + \epsilon + k_\epsilon w, \quad w_\epsilon^- \equiv \varphi(x_0) - \epsilon - k_\epsilon w$$

будут соответственно суперфункцией и субфункцией в Ω по отношению к φ, причем, очевидно, $w_\epsilon^\pm(x_0) \to \varphi(x_0)$ при $\epsilon \to 0$. Таким образом, семейства $w_\epsilon^\pm(x)$ определяют барьер.

Рассмотрим другой класс уравнений. Предположим, что функция f и коэффициенты оператора L ограничены в Ω. В этом случае одна функция $w \in C^0(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ определяет барьер в точке x_0, если она удовлетворяет условиям:

а) $Lw \leqslant -1$ в Ω;

б) $w > 0$ на $\partial\Omega - x_0$, $w(x_0) = 0$.

Действительно, для $\epsilon > 0$ найдем, как и ранее, положительную постоянную k_ϵ такую, что

$$\varphi(x_0) + \epsilon + k_\epsilon w(x) \geqslant \varphi(x), \quad \varphi(x_0) - \epsilon - k_\epsilon w(x) \leqslant \varphi(x) \text{ на } \partial\Omega.$$

Если теперь мы возьмем $k'_\epsilon = \max(k_\epsilon, \sup\limits_\Omega |f - c\varphi(x_0)|)$, то функции

$$w_\epsilon^+ \equiv \varphi(x_0) + \epsilon + k'_\epsilon w, \quad w_\epsilon^- \equiv \varphi(x_0) - \epsilon - k'_\epsilon w$$

будут соответственно суперфункцией и субфункцией и определят барьер в точке x_0. Действительно, $w_\epsilon^+ \geqslant \varphi$, $w_\epsilon^- \leqslant \varphi$ на $\partial\Omega$ и, так как $Lw \leqslant -1$, то

$$L[\varphi(x_0) + \epsilon + k'_\epsilon w] \leqslant c(\varphi(x_0) + \epsilon) - k'_\epsilon \leqslant c\varphi(x_0) - k'_\epsilon \leqslant f.$$

Аналогично $L[\varphi(x_0) - \epsilon - k'_\epsilon w] \geqslant f$. Поэтому семейства функций $w_\epsilon^\pm$ определяют барьер относительно φ в точке x_0.

В случае, когда, как и в рассмотренных примерах, барьер в точке x_0 строится с помощью фиксированного зависящего только от L и области суперрешения w уравнения $Lu = 0$, мы будем говорить, что функция w *определяет барьер* в точке x_0.

З а м е ч а н и е 2. Введенное определение барьера нередко трудно использовать в приложениях, так как при этом требуется построение глобальных суб- и суперрешений, определенных во всей области Ω. Поэтому возникает потребность в построении *локальных барьеров*, позволяющих получать нужные результаты. Пусть $M^+(M^-)$ — верхняя (нижняя) грань множества значений решения в Ω, поведение которого изучается вблизи точки $x_0 \in \partial\Omega$. Последовательность функций $\{w_i^+(x)\}$ $(\{w_i^-(x)\})$ будем называть *локальным верхним* (*нижним*) *барьером* относительно L, f, φ и $M^+(M^-)$ в точке x_0, если существует окрестность $\mathcal{N}$ точки x_0 такая, что:

(i) $w_i^+(w_i^-)$ является супер(суб)решением в $\mathcal{N} \cap \Omega$;

(ii) $w_i^+ \geqslant \varphi$ $(w_i^- \leqslant \varphi)$ на $\mathcal{N} \cap \partial\Omega$;

(iii) $w_i^+ \geqslant M^+$ $(w_i^- \leqslant M^-)$ на $\Omega \cap \partial\mathcal{N}$;

(iv) $w_i^\pm(x_0) \to \varphi(x_0)$ при $i \to \infty$.

(В частности, если $\bar\Omega \subset \mathcal{N}$, то функции $w_i^\pm$ определяют барьер в точке x_0 в введенном ранее глобальном смысле; в этом случае условие (iii) может быть опущено.) Непосредственно видно, что если решение u, существование которого установлено в теореме 6.11, удовлетворяет в Ω неравенству $|u| \leqslant M$, то лемма 6.12 остается справедливой в предположении, что существует локальный барьер в точке x_0 относительно граней $\pm M$.

Локальные барьеры будут играть далее в этой книге важную роль при изучении граничного поведения решений.

Замечание 3. Так же, как и в лемме 6.12, показывается, что барьер определяет вблизи границы модуль непрерывности решения, непрерывно принимающего свое граничное значение. Тем самым в рассмотренных в замечании 1 случаях справедливо следующее утверждение: если u — ограниченное решение уравнения $Lu = f$ такое, что $u(x) \to \varphi(x_0)$ при $x \to x_0$, то для произвольного $\epsilon > 0$ существует положительная постоянная k_ϵ такая, что в Ω выполняется неравенство $|u(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \epsilon + k_\epsilon w(x)$. Если функция w определяет локальный барьер в точке x_0, то такое же неравенство выполняется в фиксированной окрестности точки x_0 (не зависящей от ϵ).

Для уравнения $Lu = f$, как и для уравнения Лапласа, существование барьеров и методы их построения тесно связаны с локальными свойствами границы. Проиллюстрируем сказанное примером, интересным для дальнейших приложений. Пусть L — заданный в ограниченной области Ω строго эллиптический оператор с коэффициентом $c \leqslant 0$ и пусть функция f и коэффициенты оператора L ограничены в Ω. Предположим, что область Ω удовлетворяет условию внешней сферы в точке $x_0 \in \partial\Omega$, т.е. найдется шар $B = B_R(y)$ такой, что выполняется соотношение $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = x_0$. Покажем, что при некоторых положительных постоянных τ и σ функция

$$w(x) = \tau(R^{-\sigma} - r^{-\sigma}), \quad r = |x - y|, \tag{6.45}$$

удовлетворяет в Ω неравенству $Lw \leqslant -1$, а следовательно, w определяет барьер в точке x_0. Полагая для простоты $y = 0$, из (6.40) и из неравенства $c \leqslant 0$ мы получаем в точках $x \in \Omega$

$$L(R^{-\sigma} - r^{-\sigma}) \leqslant \sigma r^{-\sigma-4}\{-(\sigma+2)a^{ij}x_i x_j + r^2(\Sigma a^{ii} + b^i x_i)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sigma r^{-\sigma-2}\{-(\sigma+2)\lambda + (\Sigma a^{ii} + b^i x_i)\}.$$

Так как область Ω и коэффициенты оператора L ограничены, то правая часть полученного неравенства при достаточно большом значении σ будет отрицательна и, более того, будет строго меньше отрицательной постоянной. Поэтому, как и утверждалось, для достаточно больших τ и σ будет выполняться неравенство $Lw \leqslant -1$.

Таким образом, если уравнение $Lu = f$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, а ограниченная область Ω удовлетворяет в каждой точке $x_0 \in \partial\Omega$ условию внешней сферы (это имеет место, например, для любой области класса C^2), то для каждой граничной точки существует барьер и применима поэтому лемма 6.12, если только заданные граничные значения являются непрерывной функцией. Объединяя этот результат с теоремой 6.11, мы получаем следующую общую теорему существования.

Теорема 6.13. *Пусть оператор L строго эллиптичен в ограниченной области Ω, коэффициент $c \leqslant 0$ и пусть функция f и коэффициенты оператора L ограничены и принадлежат $C^\alpha(\Omega)$. Предположим также, что область Ω удовлетворяет условию внешней сферы в любой граничной точке. Тогда* *если функция φ непрерывна на $\partial\Omega$, то задача Дирихле*

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega,$$

имеет (единственное) решение и, принадлежащее $C^0(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Эта теорема может быть обобщена на более широкий класс областей. В частности, при тех же самых условиях на L и f можно доказать утверждение теоремы для областей, удовлетворяющих условию внешнего конуса (см. задачу 6.3).

Если требования теоремы несколько усилить, например, если предположить, что функция f и коэффициенты оператора L принадлежат $C^\alpha(\bar{\Omega})$, то можно доказать, что классы областей, для которых задача Дирихле разрешима при произвольных непрерывных граничных значениях для оператора Лапласа и для оператора L, совпадают (см. примечания).

Вернемся теперь к вопросу о глобальной регулярности построенных выше решений для достаточно гладких граничных данных. Мы видели, что при выполнении условий теоремы 6.8 решение задачи Дирихле для уравнения $Lu = f$ принадлежит $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, если только справедлив соответствующий результат (теорема Келлога) для уравнения Лапласа.

Сейчас мы докажем теорему о регулярности непосредствено из результатов этого раздела.

Теорема 6.14. *Пусть оператор L строго эллиптичен в ограниченной области Ω, коэффициент $c \leqslant 0$ и пусть функция f и коэффициенты оператора L принадлежат $C^\alpha(\bar{\Omega})$. Предположим, что Ω – область класса $C^{2,\alpha}$ и что функция $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Тогда задача Дирихле*

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega,$$

имеет (единственное) решение, принадлежащее $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 6.13, то решение u задачи Дирихле существует. Из теоремы 6.13 мы знаем, что $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$, так что остается только показать, что для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ и для некоторой окрестности D этой точки $u \in C^{2,\alpha}(D \cap \bar{\Omega})$. Так как Ω есть область класса $C^{2,\alpha}$, то существует такая окрестность N точки x_0, которая при диффеоморфизме $y = \psi(x)$ класса $C^{2,\alpha}$ отображается в окрестность $\tilde{N}$ таким образом, что $\psi(N \cap \bar{\Omega})$ содержит замыкание шара B, а содержащая точку x_0 часть T пересечения $N \cap \partial\Omega$ отображается этим преобразованием в часть $\tilde{T}$ границы шара B. При этом отображении уравнение $Lu(x) = f(x)$ переходит в уравнение $\tilde{L}\tilde{u}(y) = \tilde{f}(y)$, определенное в шаре B. Так как отображение принадлежит классу $C^{2,\alpha}$, то $\varphi \mapsto \tilde{\varphi} \in C^{2,\alpha}(B)$, а функция $\tilde{f}$ и оператор $\tilde{L}$ удовлетворяют в B тем же условиям, которым в Ω удовлетворяли функция f и оператор L. Это значит, что оператор $\tilde{L}$ строго эллиптичен в B, коэффициент $\tilde{c} \leqslant 0$, функция $\tilde{f}$ и коэффициенты оператора $\tilde{L}$ принадлежат $C^\alpha(\bar{B})$ (см. лемму 6.5). Рассмотрим решение v задачи Дирихле: $\tilde{L}v = \tilde{f}$ в B, $v = \tilde{u}$ на ∂B. Так как $\tilde{u} = \tilde{\varphi}$ на $\tilde{T} \subset \partial B$, то $\tilde{u} \in C^0(\partial B) \cap C^{2,\alpha}(\tilde{T})$ на ∂B. Следовательно, в силу единственности задачи Дирихле и леммы 6.10 решение $\tilde{u} = v \in C^0(\bar{B}) \cap C^{2,\alpha}(B \cup \tilde{T})$. Возвращаясь в Ω, обозначим $D' = \psi^{-1}(B)$. Получим, что

$u \in C^{2,\alpha}(D' \cup T)$, а так как x_0 – произвольная точка $\partial\Omega$, то мы заключаем, что $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. □

Полученный результат может быть обобщен на случай более слабых требований о регулярности коэффициентов, области и граничных значений (см. примечания).

Если оператор L не удовлетворяет условию $c \leqslant 0$, то, как показывают несложные примеры, задача Дирихле для уравнения $Lu = f$ может, вообще говоря, не иметь решения. Однако можно утверждать справедливость альтернативы Фредгольма, которую мы сформулируем в следующем виде.

Теорема 6.15. *Пусть оператор $L \equiv a^{ij}D_{ij} + b^iD_i + c$ строго эллиптичен, его коэффициенты принадлежат $C^\alpha(\bar{\Omega})$ и пусть область Ω является областью класса $C^{2,\alpha}$. Тогда или*

а) однородная задача $Lu = 0$ в Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$, имеет только тривиальное решение в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ и в этом случае неоднородная задача $Lu = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, имеет единственное решение класса $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ для произвольных $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, или

б) однородная задача имеет нетривиальные решения, которые образуют конечномерное подпространство пространства $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. При сделанных предположениях относительно функций f и φ неоднородная задача $Lu = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, эквивалентна задаче $Lv = f - L\varphi$ в Ω, $v = 0$ на $\partial\Omega$. Будем рассматривать далее задачу Дирихле с нулевым краевым условием: $u = 0$ на $\partial\Omega$, и поэтому достаточно рассматривать оператор L на линейном пространстве $B = \{u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \mid u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$. Пусть σ – какая-то постоянная удовлетворяющая неравенству $\sigma \geqslant \sup_{\Omega} c$. Пусть $L_\sigma \equiv L - \sigma$. В силу теоремы 6.14 отображение $L_\sigma: B \to C^\alpha(\bar{\Omega})$ обратимо. Кроме того, в силу оценок (6.36) и теоремы 3.7 обратное отображение L_σ^{-1} является компактным отображением пространства $C^\alpha(\bar{\Omega})$ в пространство $C^2(\bar{\Omega})$ и потому является компактным отображением и как отображение $C^\alpha(\bar{\Omega})$ в $C^\alpha(\bar{\Omega})$. Рассмотрим уравнение

$$u + \sigma L_\sigma^{-1}u = L_\sigma^{-1}f, \quad f \in C^\alpha(\bar{\Omega}), \tag{6.46}$$

в котором оператор $L_\sigma^{-1}: C^\alpha(\bar{\Omega}) \to C^\alpha(\bar{\Omega})$ является компактным.

По теореме 5.3 о компактных операторах в банаховых пространствах имеет место альтернатива Фредгольма, и уравнение (6.46) имеет решение u из $C^\alpha(\bar{\Omega})$, если только однородное уравнение $u + \sigma L_\sigma^{-1}u = 0$ имеет лишь тривиальное решение $u = 0$. Если же последнее условие не выполняется, то нуль-пространство оператора $I + \sigma L_\sigma^{-1}$ (I – тождественный оператор) является конечномерным подпространством пространства $C^\alpha(\bar{\Omega})$ (теорема 5.5).

Для того чтобы перенести эти утверждения на задачу Дирихле для уравнения $Lu = f$, прежде всего заметим, что, так как оператор L_σ^{-1} отображает $C^\alpha(\Omega)$ в B, любое решение $u \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ уравнения (6.46) принадлежит также и B. Следовательно, действуя на (6.46) оператором L_σ, мы получим

$$Lu = L_\sigma(u + \sigma L_\sigma^{-1}u) = f, \quad u \in B. \tag{6.47}$$

Ясно, что имеется взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (6.46) и решениями краевой задачи (6.47). Отсюда следует утверждение теоремы. □

Важность установленной альтернативы для задачи Дирихле состоит в том, что вопрос о существовании сводится к изучению вопроса о единственности. Отметим, что в силу леммы 6.18 (которая будет доказана в следующем разделе) решения уравнения $Lu = f$ из класса $C^2(\bar{\Omega})$ принадлежат $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ и поэтому нуль-пространство оператора L в $C^2(\bar{\Omega})$ также конечномерно. Отметим также, что из теоремы 5.5 следует, что множество Σ вещественных чисел σ, для которых однородная задача $Lu - \sigma u = 0$ в Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$, имеет нетривиальные решения, является не более чем счетным и дискретным. Кроме того (по теореме 5.3), если $\sigma \notin \Sigma$, то любое решение задачи Дирихле $L_\sigma u = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, удовлетворяет оценке $|u|_{2,\alpha} \leqslant C(|\varphi|_{2,\alpha} + |f|_{0,\alpha})$ с постоянной C, не зависящей от u, f и φ.

6.4. Внутренняя регулярность и регулярность вблизи границы

В предыдущих разделах правая часть f и коэффициенты оператора L предполагались функциями класса C^α. Соответствующее решение u уравнения $Lu = f$ оказывалось принадлежащим классу $C^{2,\alpha}$. Теперь мы перейдем к изучению гладкости более высокого порядка и изучим ее зависимость от гладкости правой части f и коэффициентов оператора L. Глобальная регулярность решений будет зависеть также и от гладкости границы и граничных значений.

Сначала покажем, что любое решение уравнения $Lu = f$ класса C^2 является решением класса $C^{2,\alpha}$, если правая часть f и коэффициенты оператора L принадлежат C^α.

Лемма 6.16. *Пусть u – принадлежащее $C^2(\Omega)$ решение на открытом множестве Ω уравнения $Lu = f$ с коэффициентами и правой частью из $C^\alpha(\Omega)$. Тогда $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $u \in C^{2,\alpha}(B)$ для произвольного шара $B \subset\subset \Omega$. Пусть B – такой шар; рассмотрим в B задачу Дирихле

$$L_0 v = a^{ij}D_{ij}v + b^i D_i v = f' \equiv f - cu \quad \text{в} \quad B, \quad v = u \quad \text{на} \quad \partial B. \tag{6.48}$$

Так как $u \in C^2(\bar{B})$, то $f' \in C^\alpha(\bar{B})$. Кроме того, коэффициенты оператора L_0 также принадлежат $C^\alpha(\bar{B})$. Следовательно, в силу леммы 6.10 существует решение v задачи (6.48), и оно принадлежит $C^{2,\alpha}(B) \cap C^0(\bar{B})$. В силу единственности решения u и v задачи (6.48) совпадают в B, т.е. $u \in C^2(B)$. □

Подчеркнем, что в предыдущем утверждении и в следующих за ним результатах этого раздела не делается предположения относительно знака коэффициента c.

Из приведенной выше леммы и внутренних оценок Шаудера следует теорема о внутренней регулярности решений.

Теорема 6.17. *Пусть u – принадлежащее $C^2(\Omega)$ решение на открытом множестве Ω уравнения $Lu = f$ с коэффициентами и правой частью из $C^{k,\alpha}(\Omega)$. Тогда $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$. Если правая часть f и коэффициенты оператора L принадлежат $C^\infty(\Omega)$, то и $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы, соответствующее случаю $k = 0$, доказано в лемме 6.16. Докажем его теперь для $k = 1$. Пусть v — функция на Ω. Обозначим через e_l $(l = 1, 2, \ldots, n)$ (единичный) направляющий вектор оси x_l. Определим разностное отношение v в точке x в направлении e_l равенством

$$\Delta^h v(x) = \Delta_l^h v(x) = \frac{v(x + h e_l) - v(x)}{h}.$$

Беря разностное отношение обеих частей уравнения

$$Lu = a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u + cu = f,$$

получим

$$L(\Delta^h u) = a^{ij} D_{ij} \Delta^h u + b^i D_i \Delta^h u + c \Delta^h u = F_h(x) \equiv$$
$$\equiv \Delta^h f - (\Delta^h a^{ij}) D_{ij} \bar{u} - (\Delta^h b^i) D_i \bar{u} - (\Delta^h c) \bar{u}, \quad \bar{u} = u(x + h e_l). \tag{6.49}$$

Все разностные отношения в этом уравнении вычисляются в точке $x \in \Omega$ в направлении e_l для некоторого $l = 1, \ldots, n$. Так как $f \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ и

$$\Delta^h f(x) = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + th e_l) dt = \int_0^1 D_l f(x + th e_l) dt,$$

то видим, что $\Delta^h f \in C^\alpha(\Omega')$ на любом подмножестве $\Omega' \subset\subset \Omega$, для которого $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. В частности, если B и B' — такие шары в Ω, что $B' \subset B \subset\subset \Omega$ и $\operatorname{dist}(B', \partial B) = h_0 > 0$, то $\Delta^h f \in C^\alpha(\bar{B}')$ для $0 < |h| < h_0$. При этом справедлива равномерная оценка $|\Delta^h f|_{0,\alpha; B'} \leqslant \text{const}$, с независящей от h постоянной. Аналогичные оценки справедливы для разностных отношений $\Delta^h a^{ij}$, $\Delta^h b^i$, $\Delta^h c$, которые также принадлежат $C^\alpha(\bar{B}')$. Так как $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ (лемма 6.16), то $F_h \in C^\alpha(B')$ для $|h| < h_0$ и, кроме того, $|F_h|_{0,\alpha; B'} \leqslant \text{const}$ для всех h. Используя оценку $\sup\limits_{B'} |\Delta^h u| \leqslant \sup\limits_{B} |Du|$ и внутренние оценки следствия 6.3, получаем, что множество функций $\Delta^h u$ и их первых и вторых производных $D_i \Delta^h u$, $D_{ij} \Delta^h u$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ ограничено и равностепенно непрерывно в произвольном шаре $B'' \subset\subset B$. Следовательно, любая последовательность функций из этих множеств содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на B''. Так как $\Delta_l^h u \to D_l u$ при $h \to 0$, то мы можем заключить, что $D_{ij} \Delta_l^h u \to D_{ijl} u$ при $h \to 0$ и что $u \in C^{3,\alpha}(B'')$. А так как B'' является произвольным шаром, лежащим вместе со своим замыканием в Ω, то $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$. Тем самым мы доказали теорему для $k = 1$.

Для доказательства теоремы в случае $k > 1$ воспользуемся индукцией по k. Вместе с условиями теоремы на L и f предположим, что $u \in C^{k+1,\alpha}(\Omega)$. Докажем, что $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$. Так как функция f и коэффициенты оператора L принадлежат $C^{k,\alpha}(\Omega)$, то уравнение $Lu = f$ можно продифференцировать $k - 1$ раз. Получим уравнение вида $L\hat{u} = \hat{f}$, где $\hat{u} = D^\beta u$, β — мультииндекс, $|\beta| = k - 1$, а функция $\hat{f}$ равна сумме $D^\beta f$ и конечного числа произведений производных коэффициентов уравнения порядка не больше $k-1$ и производных u порядков не больше k. Ясно, что функция $\hat{f} \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Рассуждая так же, как и в случае $k = 1$, устанавливаем, что $\hat{u} \in C^{3,\alpha}(\Omega)$, и поэтому $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$, что и утверждалось в теореме. Доказательство последнего утверждения теоремы о бесконечной дифференцируемости решений очевидно. □

В случае, когда правая часть f и коэффициенты оператора L являются вещественными аналитическими функциями, любое решение уравнения $Lu = f$ будет вещественной аналитической функцией. Доказательство этого утверждения можно найти в [326].

Для того чтобы можно было утверждать справедливость аналогичных результатов о регулярности решений вплоть до границы, очевидно, необходимо требовать, чтобы сама граница и граничные значения решений были достаточно гладкими. Прежде чем перейдем к получению таких результатов, мы докажем аналог леммы 6.16.

Лемма 6.18. *Пусть граница области Ω содержит кусок T класса $C^{2,\alpha}$, а функция φ принадлежит $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Предположим также, что функция u из $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ удовлетворяет условию $u = \varphi$ на T и уравнению $Lu = f$ в Ω, причем правая часть f и коэффициенты строго эллиптического оператора L принадлежат $C^\alpha(\bar{\Omega})$. Тогда $u \in C^{2,\alpha}(\Omega \cup T)$.*

Доказательство. Так как кусок T границы $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{2,\alpha}$, то для каждой точки $x_0 \in T$ можно найти граничную окрестность $T' \subset\subset T$ и лежащую в Ω область D класса $C^{2,\alpha}$ такие, что $x_0 \in T' \subset \subset \partial D$. Кроме того, область D может быть выбрана столь малой, что к ней применимо следствие 3.8, а тогда задача Дирихле для уравнения $Lu = f$ в D имеет не более одного решения, принадлежащего $C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$.

Далее доказательство весьма близко к доказательству леммы 6.10. Так как $u \in C^0(\partial D) \cap C^{2,\alpha}(T')$, то мы можем так продолжить граничные значения u с границы ∂D на D, что продолженная функция v будет принадлежать $C^0(D') \cap C^{2,\alpha}(\bar{B})$, где $D \subset\subset D'$, а $B = B_\rho(x_0) \subset\subset D'$ (по поводу построения такой функции v см. замечание 1 после леммы 6.38). Пусть $\{v_k\}$ – последовательность функций из $C^3(D')$ такая, что $|v_k - v|_{0;D} \to 0$ при $k \to \infty$ и $|v_k|_{2,\alpha;B} \leqslant C|v|_{2,\alpha;B}$ для всех k. При каждом k в силу альтернативы Фредгольма (теорема 6.15) задача Дирихле $Lu = f$ в D, $u = v_k$ на ∂D, имеет единственное решение u_k и оно принадлежит $C^{2,\alpha}(\bar{D})$. Из следствий 6.3 и 3.8 вытекает, что последовательность $\{u_k\}$ сходится к решению u в D, а в силу следствия 6.7 это решение $u \in C^{2,\alpha}(B' \cap \bar{D})$, где $B' = B_{\rho/2}(x_0)$. Так как x_0 – произвольная точка на T, то отсюда следует, что $u \in C^{2,\alpha}(\Omega \cup T)$. □

Если коэффициент $c \leqslant 0$, то предыдущий результат содержится по существу в доказательстве теоремы 6.14. Однако здесь мы не делаем ограничений на знак коэффициента c, и поэтому пришлось соответствующим образом изменить доказательство теоремы 6.14. Другое доказательство, основанное на иных идеях, можно найти в работах, указанных в примечаниях.

Результат леммы 6.18 остается справедливым, если и в ее условиях, и в утверждении принадлежность $C^{2,\alpha}$ заменить на принадлежность $C^{1,\alpha}$. Соответствующие результаты хорошо известны и в более общем случае (см. [68]).

Используя результат леммы 6.18, мы можем доказать теперь следующую глобальную теорему о разрешимости.

Теорема 6.19. *Пусть Ω – область класса $C^{k+2,\alpha}$ $(k \geqslant 0)$, а $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Предположим, что функция $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ в Ω и граничному условию $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, причем правая часть f и коэффициенты строго эллиптического оператора L принадлежат $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Тогда $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$.*

Доказательство. Для $k = 0$ утверждение теоремы следует из леммы 6.18. Докажем его для $k = 1$. Пусть x_0 – произвольная граничная точка области Ω. Рассмотрим диффеоморфизм ψ класса $C^{3,\alpha}$, выпрямляющий границу вблизи точки x_0. С помощью этого отображения мы сводим задачу к случаю уравнения $Lu = f$ в области G, граница которой имеет лежащий в гиперплоскости $x_n = 0$ кусок T, в то время как другие условия остаются неизменными. Рассматривая разность $u - \varphi$ вместо u и замечая, что $L\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar{G})$, мы можем далее считать, что $\varphi = 0$.

Как и в доказательстве теоремы 6.17, возьмем разностное отношение для уравнения $Lu = f$ в направлении e_l для каждого $l = 1, \ldots, n-1$. Получим уравнения вида (6.49), которым удовлетворяют разностные отношения $\Delta^h u$. Если $0 < |h| < h_0$, то это уравнение выполняется на множестве $G' = \{x \in G \mid \operatorname{dist}(x, \partial G - T) > h_0\}$, содержащем плоский кусок $T' \subset T$. Из предположений о правой части f и об операторе L, из равенства $u = 0$ на T и из условия $u \in C^{2,\alpha}(\bar{G})$ следует, что выполнены условия леммы 6.4 для уравнения (6.49) и его решения $\Delta^h u$. Из леммы 6.4 следует, что семейства функций $\Delta^h u$, $D_i\Delta^h u$, $D_{ij}\Delta^h u$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ ограничены и равностепенно непрерывны на компактных подмножествах $G' \cup T'$. Так как $\Delta_l^h u \to D_l u$ при $h \to 0$, то мы можем заключить, что $D_{ij}\Delta_l^h u \to D_{ijl}u$ для $i, j = 1, \ldots, n$ и $l = 1, \ldots, n-1$ и, кроме того, $D_l u \in C^{2,\alpha}(G' \cup T')$ для $l = 1, \ldots, n-1$. Остается только показать, что $D_n u \in C^{2,\alpha}(G' \cup T)$. А это следует из равенства $D_{nn}u = (1/a^{nn})(f - (L - a^{nn}D_{nn})u)$ и из предыдущих результатов, поскольку правая часть принадлежит $C^{1,\alpha}(G' \cup T)$. Так как x_0 – произвольная точка границы $\partial\Omega$, то мы в итоге получаем, что $u \in C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Доказательство теоремы для $k > 1$ осуществляется индукцией по k подобно тому, как это делалось в теореме 6.17, с помощью рассмотрения уравнения, которому удовлетворяет произвольная производная порядка $k - 1$, и тем самым доказательство сводится к случаю $k = 1$, рассмотренному выше. □

Из предыдущих рассуждений, локальных по существу, следует, что утверждение о регулярности остается справедливым для любого куска границы T класса $C^{k+2,\alpha}$ в предположении, что решение непрерывно вплоть до T и имеет граничные значения на T класса $C^{k+2,\alpha}$.

6.5. Другой метод

Анализ доказательства теоремы 6.13 показывает, что эта теорема существования устанавливается с помощью процесса Перрона из утверждения о разрешимости задачи Дирихле в шарах при произвольных непрерывных граничных значениях. Доказательство последнего результата (содержащегося в лемме 6.10) существенно опирается на граничные оценки шаудеровской теории. Однако, как мы увидим позже, возможно такое построение теории разрешимости задачи Дирихле с непрерывными граничными значениями, которое использует только внутренние оценки Шаудера и никак не использует граничные оценки.

В этом разделе изложение будет основываться на следующем обобщении внутренних оценок теоремы 6.2. В их формулировках мы будем использовать полунормы и нормы, определенные в (6.10).

Л е м м а 6.20. *Пусть функция $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ на открытом множестве Ω пространства $\mathbf{R}^n$, а коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям* (6.12) *и* (6.13). *Предположим, что $|u|^{(-\beta)}_{0;\Omega} < \infty$ и $|f|^{(2-\beta)}_{0,\alpha;B} < \infty$ для некоторого $\beta \in \mathbf{R}$. Тогда справедлива оценка*

$$|u|^{(-\beta)}_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(|u|^{(-\beta)}_{0;\Omega} + |f|^{(2-\beta)}_{0,\alpha;\Omega}) \tag{6.50}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \beta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x – произвольная точка области Ω, d_x – расстояние от точки x до $\partial\Omega$ и $d = d_x/2$. Тогда в силу неравенства (6.14), примененного к шару $B = B_d(x)$, имеем

$$d^{1-\beta}|Du(x)| + d^{2-\beta}|D^2u(x)| \leqslant Cd^{-\beta}(|u|_{0;B} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;B}) \leqslant$$
$$\leqslant C\Bigg[\sup_{y\in B} d_y^{-\beta}|u(y)| + \sup_{y\in B} d_y^{2-\beta}|f(y)| +$$
$$+ \sup_{y\in B} d_{x,y}^{2+\alpha-\beta}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\Bigg] \leqslant C(|u|^{(-\beta)}_{0;\Omega} + |f|^{(2-\beta)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

Следовательно,

$$|u|^{(-\beta)}_{2;\Omega} \leqslant C(|u|^{(-\beta)}_{0;\Omega} + |f|^{(2-\beta)}_{0,\alpha;\Omega}). \tag{6.51}$$

Для оценки $[u]^{(-\beta)}_{2,\alpha;\Omega}$ возьмем две различные точки x и y из Ω такие, что $d_x \leqslant d_y$, и пусть, как и выше, $B = B_d(x)$. Рассматривая два случая $|x-y| \leqslant d/2$ и $|x-y| > d/2$, для любой второй производной D^2u имеем

$$d_{x,y}^{2+\alpha-\beta}\frac{|D^2u(x)-D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant Cd^{-\beta}(|u|_{0;B} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;B}) +$$
$$+ d_x^{2+\alpha-\beta}\frac{|D^2u(x)|+|D^2u(y)|}{(d/2)^\alpha} \leqslant C(|u|^{(-\beta)}_{0;\Omega} + |f|^{(2-\beta)}_{0,\alpha;\Omega}) + 8[u]^{(-\beta)}_{2;\Omega}.$$

Беря точную верхнюю грань по x, y и применяя (6.51), получаем

$$[u]^{(-\beta)}_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(|u|^{(-\beta)}_{0;\Omega} + |f|^{(2-\beta)}_{0,\alpha;\Omega}).$$

Объединяя это неравенство с неравенством (6.51), мы приходим к требуемой оценке (6.50). □

Отметим, что при $\beta = 0$ полученный результат дает оценку (6.14). При $\beta > 0$ требование конечности величины $|u|^{(-\beta)}_{0;\Omega}$ приводит очевидно к условию $u = 0$ на $\partial\Omega$.

В этом разделе мы будем строить решение задачи Дирихле для уравнения $Lu = f$ в шаре, используя метод непрерывного продолжения по параметру. Для этого потребуется априорная оценка решений в случае неограниченной правой части. Аналогичный результат для уравнения Пуассона содержится в теореме 4.9.

Л е м м а 6.21. *Пусть в шаре $B = B_R(x_0)$ оператор L строго эллиптичен (удовлетворяет (6.2)), его коэффициенты ограничены величиной Λ, а коэффициент $c \leqslant 0$. Предположим, что функция u из $C^0(\bar{B}) \cap C^2(B)$ является решением в B уравнения $Lu = f$ и равна нулю на ∂B. Тогда для любого $\beta \in (0, 1)$ справедливо неравенство*

$$\sup_{x \in B} d_x^{-\beta} |u(x)| \leqslant C \sup_{x \in B} d_x^{2-\beta} |f(x)| \tag{6.52}$$

с постоянной $C = C(\beta, n, R, \lambda, \Lambda)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть число β зафиксировано. Предположим, что $\sup_{x \in B} d_x^{2-\beta} |f(x)| = N < \infty$. Требуемая оценка (6.52) может быть получена с помощью осуществляющей оценку u функции сравнения. Для простоты считаем, что $x_0 = 0$, и положим $w_1(x) = (R^2 - r^2)^\beta$, $r = |x|$. Тогда

$$\begin{aligned} Lw_1(x) &= \beta(R^2 - r^2)^{\beta-2} [4(\beta - 1)a^{ij}x_i x_j - \\ &-2(R^2 - r^2)(\Sigma a^{ii} + b^i x_i) + (c/\beta)(R^2 - r^2)^2] \leqslant \\ &\leqslant -\beta(R^2 - r^2)^{\beta-2} [4(1 - \beta)\lambda r^2 + 2(R^2 - r^2)(n\lambda - \sqrt{n}\Lambda r)]. \end{aligned}$$

Ясно, что для некоторого R_0, $0 \leqslant R_0 < R$, при $R_0 \leqslant r \leqslant R$ выражение в квадратных скобках будет положительным. Поэтому

$$\begin{aligned} Lw_1(x) &\leqslant -c_1(R - r)^{\beta-2} \quad \text{для} \quad R_0 \leqslant r < R, \\ Lw_1(x) &\leqslant c_2(R - r)^{\beta-2} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant r < R_0, \end{aligned}$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные, зависящие только от β, n, R, λ и Λ (при $R_0 = 0$ второе неравенство, разумеется, излишне).

Пусть теперь $w_2(x) = e^{\alpha R} - e^{\alpha x_1}$, где $\alpha \geqslant 1 + \sup_B |b|/\lambda$. Как и в теореме 3.7, получаем, что в B выполнено неравенство $Lw_2(x) \leqslant -\lambda e^{-\alpha R}$ и поэтому

$$\begin{aligned} Lw_2(x) &\leqslant -c_3(R - r)^{\beta-2} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant r < R_0, \\ Lw_2(x) &\leqslant 0 \quad \text{для} \quad R_0 \leqslant r < R, \end{aligned}$$

где $c_3 = \lambda e^{-\alpha R}(R - R_0)^{2-\beta}$. По предположению $|f(x)| \leqslant N d_x^{\beta-2}$ и $d_x = R - r$. Тогда

$$L(\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2) \leqslant -(R - r)^{\beta-2} \leqslant -|f(x)|/N \quad \text{при} \quad 0 \leqslant |x| < R,$$

где $\gamma_1 = 1/c_1$ и $\gamma_2 = (1 + c_2/c_1)/c_3$ – положительные постоянные. Полагая $w = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$, видим, что $w(x) \geqslant 0$ на ∂B, $w(x) = 0$ в точке $x = (R, 0, \ldots, 0)$ и $L(Nw \pm u) \leqslant 0$ на B, $Nw \pm u \geqslant 0$ на ∂B. Из принципа максимума (следствие 3.2) получаем

$$|u(x)| \leqslant Nw(x) \quad \text{в} \quad B. \tag{6.53}$$

Рассмотрим теперь произвольную точку $x \in B$. Без ограничения общности можно считать, что точка x лежит на оси x_1. Тогда из (6.53) следует неравенство $|u(x)| \leqslant CN(R-r)^\beta = CNd_x^\beta$ с некоторой постоянной $C = C(\beta, n, R, \lambda, \Lambda)$. $\square$

Полученный результат может быть обобщен на случай более общих областей, например на области класса C^2 (см. задачу 6.5).

С помощью результатов двух последних лемм мы можем теперь доказать обобщение теоремы 4.9 на уравнения $Lu = f$. Подчеркнем, что проводимое доказательство не использует граничных оценок.

Теорема 6.22. *Пусть B – шар в $\mathbf{R}^n$, а функция $f \in C^\alpha(B)$ такова, что $|f|_{0,\alpha;B}^{(2-\beta)} < \infty$ для некоторого $\beta \in (0, 1)$. Пусть оператор L строго эллиптичен в B, его коэффициенты удовлетворяют условиям* (6.2) *и* (6.31) *и* $c \leqslant 0$. *Тогда существует (единственное) решение $u \in C^0(\bar B) \cap C^{2,\alpha}(B)$ задачи Дирихле $Lu = f$ в B, $u = 0$ на ∂B. Кроме того, $|u|_{0;B}^{(-\beta)} < \infty$ и, следовательно, функция u удовлетворяет в B неравенству* (6.50).

Доказательство. Доказательство основано на методе продолжения по параметру. Как и в теореме 6.8, рассмотрим семейство уравнений

$$L_t u \equiv tLu + (1-t)\Delta u = f, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

и заметим, что коэффициенты оператора L_t также удовлетворяют (6.2) и (6.31) в B с постоянными $\lambda_t = \min(1, \lambda)$, $\Lambda_t = \max(1, \Lambda)$, заменяющими λ и Λ соответственно. В силу (6.11) имеем

$$|a^{ij}D_{ij}u|_{0,\alpha}^{(2-\beta)}, \quad |b^iD_iu|_{0,\alpha}^{(2-\beta)}, \quad |cu|_{0,\alpha}^{(2-\beta)} \leqslant C|u|_{2,\alpha}^{(-\beta)},$$

и следовательно, для каждого t оператор L_t является линейным ограниченным оператором из банахова пространства $\mathcal{B}_1 = \{u \in C^{2,\alpha}(B) \mid |u|_{2,\alpha;B}^{(-\beta)} < \infty\}$ в банахово пространство $\mathcal{B}_2 = \{f \in C^\alpha(B) \mid |f|_{0,\alpha;B}^{(2-\beta)} < \infty\}$. Однозначная разрешимость задачи Дирихле $L_t u = f$ в B, $u = \varphi$ на ∂B, для всех $f \in \mathcal{B}_2$ эквивалентна тому, что отображение $u \mapsto L_t u$ является отображением $\mathcal{B}_1$ на $\mathcal{B}_2$ и обратимо.

Пусть u_t – решение этой задачи для некоторого $t \in [0, 1]$. Из (6.52) тогда имеем оценку $|u_t|_0^{(-\beta)} \leqslant C|f|_0^{(2-\beta)} \leqslant C|f|_{0,\alpha}^{(2-\beta)}$. А из (6.50) следует, что $|u_t|_{2,\alpha}^{(-\beta)} \leqslant C|f|_{0,\alpha}^{(2-\beta)}$, или, что эквивалентно, $\|u\|_{\mathcal{B}_1} \leqslant C\|L_t u\|_{\mathcal{B}_2}$, где постоянная C не зависит от t. В силу теоремы 4.9 оператор $L_0 = \Delta$ отображает $\mathcal{B}_1$ на все $\mathcal{B}_2$. Следовательно, можно применить метод непрерывного продолжения по параметру (теорема 5.2), откуда и следует требуемое утверждение. $\square$

Полученная теорема может быть обобщена на случай произвольных непрерывных граничных значений.

Следствие 6.23. *При выполнении условий теоремы* 6.22 *задача Дирихле $Lu = f$ в B, $u = \varphi$ на ∂B, для любой $\varphi \in C^0(\bar B)$ имеет (единственное) решение $u \in C^0(\bar B) \cap C^{2,\alpha}(B)$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$ – последовательность функций из $C^3(\bar B)$, равномерно сходящаяся к φ на $\bar B$. В силу теоремы 6.22 задача Дирихле $Lv_k = f - L\varphi_k$ в B, $v_k = 0$ на ∂B, однозначно разрешима для каждого k и определяет решение $u_k = v_k + \varphi_k$ задачи $Lu_k = f$ в B, $u_k = \varphi_k$ на ∂B, с неоднородными краевыми условиями. Обычным способом из принципа максимума получаем, что последовательность $\{u_k\}$ равномерно на $\bar B$ сходится к функции $u \in C^0(\overline{B})$ такой, что $u = \varphi$ на ∂B. Из компактности, следующей из внутренних оценок (следствие 6.3), вытекает, что $Lu = f$ в B и, следовательно, функция u является искомым решением. □

Опираясь на эту теорему существования для шаров, мы можем, как и ранее, осуществить процесс Перрона в более общих областях и получить, в частности, теорему 6.13.

6.6. Неравномерно эллиптические уравнения

Теоремы существования, установленные в предыдущих разделах для произвольных гладких ограниченных областей, были получены в предположении равномерной эллиптичности дифференциального оператора L. Когда уравнение перестает быть равномерно эллиптическим, условия разрешимости являются более ограничительными; в общем случае они содержат ограничения на геометрию рассматриваемой области или устанавливают связь между ней и дифференциальным оператором.

Для иллюстрации рассмотрим пример, в котором задача Дирихле неразрешима. Рассмотрим решение $u(x, y)$ уравнения

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0 \tag{6.54}$$

в прямоугольнике R, $0 < x < \pi$, $0 < y < Y$, такое, что $u \in C^0(\overline{R}) \cap C^2(R)$ и u удовлетворяет граничным условиям $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, $0 \leqslant y \leqslant Y$. Любое такое решение $u(x, y)$ раскладывается в ряд Фурье вида $\Sigma f_n(y) \sin nx$, в котором коэффициенты $f_n(y)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению $y^2 f_n'' - n^2 f_n = 0$. Это уравнение имеет фундаментальную систему решений y^{β_n}, y^{γ_n}, где $\beta_n = (1 + \sqrt{1 + 4n^2})/2 < 0$, $\gamma_n = (1 - \sqrt{1 + 4n^2})/2 < 0$. Так как решение $u(x, y)$ ограничено вплоть до $y = 0$, то $f_n(y) = \text{const} \cdot y^{\beta_n}$, и поэтому $f_n(0) = 0$. Следовательно, непрерывные на $\overline{R}$ решения, принимающие заданные граничные условия, обращаются в нуль при $y = 0$; поэтому произвольные граничные значения при $y = 0$ задавать нельзя.

Основные моменты доказательства теоремы 6.13 можно распространить на неравномерно эллиптические уравнения при соответствующих условиях на коэффициенты и область. Прежде всего отметим, что если правая часть f и коэффициенты оператора L в уравнении $Lu = f$, в котором $c \leqslant 0$, локально непрерывны по Гёльдеру в области Ω, а множество субфункций задачи Дирихле относительно заданной граничной функции φ непусто и ограничено сверху, то процесс Перрона определяет в Ω ограниченное решение уравнения $Lu = f$ (теорема 6.11). В частности, такова ситуация в случае, когда функции $|b|/\lambda$, f/λ, где $\lambda = \lambda(x)$ – наименьшее собственное значение матрицы старших коэффициентов $A(x) = [a^{ij}(x)]$, и область Ω ограничены (см. теорему 3.7). Далее мы предполагаем выполненными эти условия.

Чтобы выяснить, когда $u(x) \to \varphi(x_0)$ в точке $x_0 \in \partial\Omega$ непрерывности граничной функции φ, предположим, как и в обсуждении перед теоремой 6.13, что область Ω удовлетворяет условию внешней сферы в точке x_0, и пусть $B = B_R(y)$ – такой шар, что $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = x_0$. Вместо предположения равномерной эллиптичности вблизи точки x_0 оператора L мы предположим, что выполняется другое (менее ограничительное) предположение: $|A(x) \cdot (x - y)| \geqslant \delta > 0$ для всех точек x из пересечения $\mathcal{N} \cap \Omega$ области Ω с некоторой окрестностью $\mathcal{N}$ точки x_0. (В частности, для непрерывной в точке x_0 матрицы $A(x)$ это условие будет выполнено, если $A(x_0) \cdot (x_0 - y) \neq 0$, т.е. если радиус-вектор $x_0 - y$ шара B (нормаль к $\partial\Omega$) не принадлежит ядру отображения $A(x_0)$. Тогда, несмотря на то, что минимальное собственное значение $\lambda(x)$ и может стремиться к нулю при $x \to x_0$, для всех $x \in \mathcal{N} \cap \Omega$ имеет место неравенство $a^{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) \geqslant \lambda'|x - y|^2$, где λ' – некоторая положительная постоянная). Предположим также, что все коэффициенты оператора L ограничены. Теперь применимы основанные на построении барьеров рассуждения из доказательства теоремы 6.13: при соответствующем выборе постоянных τ и σ функция $w(x) = \tau(R^{-\sigma} - r^{-\sigma})$ (см. (6.45)) является локальным барьером в точке x_0, и следовательно, $u(x) \to \varphi(x_0)$. Отметим, что в рассмотренном выше примере краевой задачи для уравнения (6.54) нормаль в каждой точке граничного отрезка $y = 0$, $0 < x < \pi$ принадлежит ядру матрицы старших коэффициентов $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, и заменяющее равномерную эллиптичность условие не выполняется.

Пусть теперь $[a^{ij}(x)]$ – произвольная положительная матрица. Предположим, что функции $|b|/\lambda$, c/λ, f/λ ограничены. Деля уравнение на минимальное собственное значение λ, мы можем без ограничения общности считать, что оператор L строго эллиптичен в Ω и $\lambda = 1$. В этой ситуации стремление $u(x)$ к $\varphi(x_0)$ можно гарантировать, если потребовать, чтобы область Ω удовлетворяла *строгому условию внешней плоскости* в точке x_0. Под последним мы будем понимать существование такой гиперплоскости, что в некоторой окрестности точки x_0 ее пересечение с $\overline{\Omega}$ состоит из одной точки x_0. Это условие выполнено, например, в случае, когда $\partial\Omega$ строго выпукла вблизи x_0. Чтобы доказать, что $u(x) \to \varphi(x_0)$, будем считать, что точка x_0 совпадает с началом координат (это не ограничивает общности), и предположим, что нормаль к имеющейся внешней плоскости в x_0 имеет направление оси x_1, причем $x_1 > 0$ для точек Ω из окрестности x_0. В этом случае существует такая полоса $0 < x_1 < d$, что ее пересечение D с областью Ω вблизи точки x_0 таково, что $x_1 > 0$ для точек из $\overline{D} - x_0$. Как и в доказательстве теоремы 3.7, можно проверить, что функция $w(x) = e^{\gamma d}(1 - e^{-\gamma x_1})$ удовлетворяет в D неравенству $Lw \leqslant \lambda$, если $\gamma \geqslant 1 + \sup\limits_D \dfrac{|b|}{\lambda}$. А поскольку мы взяли $\lambda = 1$, то $Lw \leqslant -1$. Отсюда следует, аналогично замечанию 1 после леммы 6.12, что для некоторой постоянной $k = k(\epsilon)$ функции

$$w_\epsilon^+ \equiv \varphi(x_0) + \epsilon + kw, \qquad w_\epsilon^- \equiv \varphi(x_0) - \epsilon - kw$$

определяют локальный барьер в точке x_0 относительно верхней и нижней граней функции u на Ω.

Заметим, что в случае, когда граничная функция φ постоянна вблизи точки x_0, утверждение $u(x) \to \varphi(x_0)$ выполняется, даже если Ω удовлетворяет нестрогому условию внешней плоскости в точке x_0. В связи с этим отметим, что в граничной задаче, рассмотренной для уравнения (6.54), интеравал границы $y = 0$, $0 < x < \pi$ выпукл, но не строго выпукл, а граничная задача разрешима только для граничной функции, равной на интервале нулю.

Предыдущие замечания непосредственно позволяют получить следующее простое обобщение теоремы 6.13 на неравномерно эллиптические уравнения.

Теорема 6.24. *Пусть оператор L строго эллиптичен (удовлетворяет (6.2)) в ограниченной области Ω, его коэффициенты a^{ij}, b^i, c, и функция f принадлежат $C^\alpha(\Omega)$, b^i, c, f ограничены и $c \leqslant 0$. Предположим также, что область Ω удовлетворяет условию внешней сферы, а в тех точках границы, в которых какой-либо из коэффициентов a^{ij} неограничен, дополнительно строгому условию внешней плоскости. Тогда для любой непрерывной на $\partial\Omega$ функции φ задача Дирихле $Lu = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, имеет (единственное) решение $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.*

Из проведенных выше рассуждений понятно, как можно модифицировать различными способами получаемый результат (см., например, задачу 6.4). В случае, когда уравнение однородно, а оператор L не содержит младших членов, справедливо следующее утверждение.

Следствие 6.24′. *Пусть коэффициенты a^{ij} эллиптического уравнения $a^{ij}D_{ij}u = 0$ принадлежат $C^\alpha(\Omega)$, а область Ω ограничена и строго выпукла. Тогда задача Дирихле $a^{ij}D_{ij}u = 0$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, разрешима в $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$ для произвольной непрерывной граничной функции φ.*

Хотя этот результат является прямым следствием теоремы 6.24, его доказательство может быть получено непосредственно, если заметить, что в силу строгой выпуклости области Ω и в силу специального вида уравнения линейная функция определяет барьер в каждой граничной точке.

Другие общие достаточные условия существования барьеров дает тщательное изучение связи между коэффициентами оператора L и локальными свойствами кривизны границы области. Пусть функция f и коэффициенты оператора L, у которого $c \leqslant 0$, ограничены в области Ω класса C^2. Минимальное собственное значение матрицы старших коэффициентов $[a^{ij}(x)]$ может обращаться в нуль в точках $\partial\Omega$. Попытаемся найти условия, достаточные для существования локального барьера в точке $x_0 \in \partial\Omega$ относительно непрерывной граничной функции φ и граней $\pm M$.

Пусть B — шар с центром в точке x_0, а $G = B \cap \Omega$; шар B будет выбран далее. Пусть $\psi \in C^2(\bar{G})$ — фиксированная функция такая, что $\psi(x) > 0$ на $\bar{G} - x_0$ и $\psi(x_0) = 0$. Для произвольного $\epsilon > 0$ и соответствующей постоянной $k = k(\epsilon)$ выполняются неравенства

$$\epsilon + k\psi(x) \geqslant |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \quad \text{на} \quad \partial\Omega \cap B,$$

$$\epsilon + k\psi(x) \geqslant M \quad \text{на} \quad \partial B \cap \Omega.$$

Введем теперь функцию, значения которой равны расстоянию до границы, $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, $x \in \partial\Omega$ (см. приложение к гл. 14); она является функцией класса C^2 в некоторой окрестности $\mathcal{N} = \{x \in \Omega \mid d(x) < d_0\}$. Можно считать, что $G \subset \mathcal{N}$. Найдем условия, при которых функции $w^\pm(x)$ вида

$$w^+ = \varphi(x_0) + \epsilon + k\psi + Kd, \qquad w^- = \varphi(x_0) - \epsilon - k\psi - Kd,$$

где $K = K(\epsilon)$ – некоторая положительная постоянная, определяют барьеры в точке x_0 в G. Так будет, если в G выполняются неравенства $Lw^+ \leqslant f$ и $Lw^- \geqslant f$. В частности, функции $w^\pm$ определяют барьеры, если в G с некоторой постоянной K выполняется неравенство

$$K(a^{ij}D_{ij}d + b^iD_id) \leqslant -k\,|L\psi| - |f - c\varphi(x_0)|. \tag{6.55}$$

Таким образом, получено достаточное условие существования барьера, проверяемое с помощью данного уравнения и области.

Для более конкретной реализации условия (6.55) предположим, что коэффициенты $a^{ij}(x)$ непрерывны в точке x_0. Выберем систему координат так, чтобы точка x_0 являлась началом координат, а ось x_n совпадала с внутренней нормалью Dd в точке x_0. Вращая координатные оси вокруг оси x_n (пусть это вращение осуществляется матрицей поворота $\boldsymbol{P}$), можно добиться того, что новые оси совпадают с главными направлениями поверхности $\partial\Omega$ в точке x_0. В этом случае гессиан $[D_{ij}d(x_0)]$ будет диагональной матрицей:

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}[D_{ij}d(x_0)]\boldsymbol{P} = \operatorname{diag}(-k_1, -k_2, \ldots, -k_{n-1}, 0),$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ – главные кривизны поверхности $\partial\Omega$ в точке x_0, вычисленные в направлении внутренней нормали в точке x_0 (см. приложения к гл. 14). Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – соответствующие диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}[a^{ij}(x_0)]\boldsymbol{P}$, то

$$(a^{ij}D_{ij}d)_{x=x_0} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_ik_i. \tag{6.56}$$

Поэтому если

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_ik_i > \sup_{\Omega} |b|, \tag{6.57}$$

то из непрерывности следует, что в $G = B \cap \Omega$, где B – некоторый шар с центром x_0, выполняется неравенство (6.55), коль скоро величина K достаточно велика. Если, кроме того, в точке x_0 непрерывны коэффициенты b^i и если b_ν – нормальная составляющая вектора $b(x_0) = (b^1(x_0), \ldots, b^n(x_0))$ по направлению внутренней нормали, то условие (6.55) выполняется в некоторой области G в случае, когда

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_ik_i - b_\nu > 0. \tag{6.58}$$

При перечисленных условиях неравенства (6.57) и (6.58) являются, следовательно, достаточными условиями существования локального барьера в точке x_0. При $b(x_0) = 0$ неравенство (6.58) принимает следующий простой вид:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_ik_i > 0,$$

в котором участвуют только старшие коэффициенты уравнения, главные кривизны и главные направления границы.

Нетрудно освободиться от требования непрерывности коэффициентов на границе и сформулировать соответствующим образом аналоги условий (6.57) и (6.58).

Предыдущие рассуждения применимы даже в случае, когда граница $\partial\Omega$ не является границей класса C^2, если предположить, что существует область $\tilde{\Omega}$ класса C^2 такая, что $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega}$ и существует некоторый шар B, содержащий точку x_0 такой, что $B \cap \Omega \subset B \cap \tilde{\Omega}$. Описанные выше условия существования барьера в точке остаются справедливыми, если в них функцию расстояния $d(x)$ заменить на функцию $\tilde{d}(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\tilde{\Omega})$.

Предыдущие замечания и их уточнения, сделанные в этом разделе и касающиеся условия внешней сферы, показывают, что барьер существует на следующих множествах граничных точек области класса C^2:

множество $\Sigma_1 = \{x_0 \in \partial\Omega \mid$ выполнено неравенство (6.58)$\}$

и (6.59)

множество $\Sigma_2 = \{x_0 \in \partial\Omega \mid a^{ij}\nu_i(x_0)\nu_j(x_0) \neq 0$, где $\nu(x_0)$ – нормаль к $\partial\Omega\}$,

в предположении, что в точках этих множеств коэффициенты a^{ij}, b^i непрерывны.

Эти результаты вместе с результатом теоремы 6.11 приводят к следующей теореме.

Теорема 6.25. *Пусть оператор L (см. (6.1)) эллиптичен в области Ω класса C^2, $c \leqslant 0$ в Ω, а a^{ij}, b^i/λ, c, f/λ принадлежат $C^\alpha(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Предположим, что $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial\Omega$. Тогда задача $Lu = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, имеет единственное решение и для произвольной граничной функции $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ и это решение принадлежит $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.*

Заметим, что при некоторых условиях на L и $\partial\Omega$ решение однозначно определяется значениями φ на $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, даже если $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \neq \partial\Omega$; это имеет место, например, в случае, описанном в примере (6.54). Принцип максимума для такой граничной задачи приведен в задаче 6.10.

6.7. Другие граничные условия; задача с косой производной

До сих пор мы рассматривали только граничные условия Дирихле. Сейчас мы изложим аналог теории Шаудера для регулярных задач с косой производной.

Уравнение Пуассона

При обобщении шаудеровской теории на другие линейные граничные задачи отправной точкой является теория уравнения Пуассона в полупространстве $\mathbf{R}^n_+ = \{x \mid x_n > 0\}$ с граничным условием для косой производной вида

$$Nu \equiv au + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u = \varphi \text{ при } x_n = 0, \tag{6.60}$$

с постоянными коэффициентами a, b_i. Запишем граничный оператор N в эквивалентной форме

$$Nu \equiv au + \boldsymbol{b} \cdot Du = au + b_t D_t u + b_n D_n u,$$

где $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) = (b_t, b_n)$ и $D = (D_1, \ldots, D_n) = (D_t, D_n)$; вектор $D_t u$ является касательной составляющей градиента u. Всюду далее предполагаем, что задача с косой производной *регулярна,* т.е. выполняется условие $b_n \neq 0$, и будем сначала считать, что

$$b_n > 0, \quad |\boldsymbol{b}| = (|b_t|^2 + b_n^2)^{1/2} = 1. \tag{6.61}$$

Последнее нормировочное условие позволяет записать, что

$$Nu = au + D_s u,$$

где $D_s u = \dfrac{\partial u}{\partial s}$ – производная по направлению вектора $\boldsymbol{b}$.

Рассмотрим сначала однородное граничное условие: $Nu = 0$ при $x_n = 0$. Построим функцию Грина в $\mathbf{R}_+^n$ для рассматриваемой задачи. Пусть Γ – фундаментальное решение (4.1) уравнения Лапласа. При $n \geqslant 3$ и $a \leqslant 0$ возьмем

$$G(x, y) = \Gamma(x - y) - \Gamma(x - y^*) - 2b_n \int_0^\infty e^{as} D_n \Gamma(x - y^* + \boldsymbol{b}s)\, ds, \tag{6.62}$$

где $x, y \in \mathbf{R}_+^n$, $D_n = \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, а $y^* = (y_1, \ldots, y_{n-1}, -y_n) = (y', -y_n)$.

Ясно, что функция G гармонична по x и y при $x \neq y$. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$NG(x, y) = 0 \quad \text{при} \quad x_n = 0. \tag{6.63}$$

(Здесь N – оператор, действующий на функцию G как на функцию переменных x при фиксированном y.) Таким образом, функция G обладает нужными свойствами функции Грина задачи с граничным условием (6.63).

Выбор функции G вида (6.62) объясняется следующими соображениями. Если $G(x, y) = \Gamma(x - y) + h(x, y)$ – искомая функция Грина, удовлетворяющая условию (6.63), то функция NG будет гармонической по x (для $x \neq y$) и будет равна нулю при $x_n = 0$. Из принципа симметрии Шварца (задача 2.4) следует, что функция NG без сингулярности

$$a\Gamma(x - y) + b_t D_t \Gamma(x - y) + b_n D_n \Gamma(x - y) -$$
$$- a\Gamma(x - y^*) - b_t D_t \Gamma(x - y^*) + b_n D_n \Gamma(x - y^*)$$

регулярна в $\mathbf{R}^n$; здесь мы воспользовались тем, что $D_i \Gamma(x^* - y^*) = D_i \Gamma(x - y)$ для $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ и $D_n \Gamma(x^* - y^*) = -D_n \Gamma(x - y)$. Поэтому, учитывая стремление функции NG к нулю на бесконечности, в силу теоремы Лиувилля получаем

$$D_s h + ah = -a\Gamma(x - y^*) - b_t D_t \Gamma(x - y^*) + b_n D_n \Gamma(x - y^*) =$$
$$= -a\Gamma(x - y^*) - D_s \Gamma(x - y^*) + 2b_n D_n \Gamma(x - y^*),$$

откуда

$$D_s[e^{as} h(x + \boldsymbol{b} \cdot s, y)] = -[a\Gamma(x - y^* + \boldsymbol{b} \cdot s) +$$
$$+ D_s \Gamma(x - y^* + \boldsymbol{b} \cdot s)]\, e^{as} + 2b_n D_n \Gamma(x - y^* + \boldsymbol{b} \cdot s) \cdot e^{as}.$$

Интегрируя последнее равенство по s от 0 до ∞ и пользуясь интегрированием по частям, получим

$$h(x,y) = -\Gamma(x-y^*) - 2b_n \int_0^\infty e^{as} D_n \Gamma(x-y^*+b\cdot s)ds.$$

Это выражение для h и приводит нас к равенству (6.62), имеющему место и при $b_n = 0$.

Для получения оценок, аналогичных оценкам гл. 4 для ньютонова потенциала и для решений уравнений Пуассона, более детально ознакомимся со свойствами функции $G(x, y)$.

Полагая $\xi = (x-y^*)/|x-y^*|$, имеем

$$G(x,y) = \Gamma(x-y) - \Gamma(x-y^*) + \theta(x,y),$$

где (напомним, что $a \leqslant 0$)

$$\theta(x,y) = -2b_n \int_0^\infty e^{as} D_n \Gamma(x-y^*+b\cdot s)ds =$$

$$= -|x-y^*|^{2-n}\left[\frac{2b_n}{n\omega_n}\int_0^\infty e^{a|x-y^*|s}\frac{(\xi_n+b_n\cdot s)ds}{(1+2(\xi\cdot b)s+s^2)^{n/2}}\right] =$$

$$= |x-y^*|^{2-n} g(\xi, |x-y^*|).$$

Видно, что функция g -- регулярная функция своих аргументов, так как (в силу (6.61)) выполняется неравенство $\xi b > -|b_t| > -1$ для всех $x,\ y \in \mathbf{R}^n_+$ и, следовательно, знаменатель подынтегрального выражения всюду не меньше положительного числа. Функция $\theta(x, y) = \theta(x - y^*)$ удовлетворяет соотношениям

$$D_{x_i}\theta(x,y) = -D_{y_i}\theta(x,y), \quad i = 1,\dots,n-1;$$

$$D_{x_n}\theta(x,y) = D_{y_n}\theta(x,y); \tag{6.64}$$

$$|D^\beta\theta(x,y)| \leqslant C|x-y^*|^{2-n-|\beta|}, \quad C = C(n, |\beta|, b_n).$$

Этих соотношений будет достаточно для перенесения на интеграл $\int\theta(x,\ y)f(y)dy$ утверждения леммы 4.10, дающей оценку ньютонова потенциала. При $|b| \neq 1$ в предыдущем рассуждении нужно заменить a на $a/|b|$, а b_n на $b_n/|b|$. Отметим, что поскольку $a \leqslant 0$, постоянную C в неравенстве из (6.64) можно взять не зависящей от a.

Теорема 6.26. *Пусть $B_1 = B_R(x_0)$, $B_2 = B_{2R}(x_0)$ – шары с центром в точке $x_0 \in \mathbf{R}^n_+$, $B_1^+ = B_1 \cap \mathbf{R}^n_+$, $B_2^+ = B_2 \cap \mathbf{R}^n_+$, а $T = B_2 \cap \{x_n = 0\}$. Предположим, что функция $u \in C^2(B_2^+) \cap C^1(B_2^+ \cup T)$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = f$ в B_2^+ с правой частью $f \in C^\alpha(\bar{B}_2^+)$ и граничному условию (6.60) $Nu = \varphi$ на T, в котором $a \leqslant 0$, $b_n > 0$ и $\varphi \in C^{1,\alpha}(T)$. Тогда $u \in$ $\in C^{2,\alpha}(\bar{B}_1^+)$ и*

$$|u|'_{2,\alpha;B_1^+} \leqslant C(|u|_{0;B_2^+} + R|\varphi|'_{1,\alpha;T} + R^2|f|'_{0,\alpha;B_2^+}) \tag{6.65}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, b_n/|b|)$.

(Здесь через $|\cdot|'$ обозначается весовая норма, определенная формулами (4.6)', в которых $d = R$.)

Доказательство. Предположим, что T непусто; в противном случае утверждение, очевидно, содержится в теореме 4.6. Предположим сначала, что $\varphi = 0$, $|b| = 1$ и $n > 2$. Рассмотрим функцию

$$w(x) = \int_{B_2^+} G(x,y) f(y)\,dy = w_1(x) + w_2(x),$$

где

$$w_1(x) = \int_{B_2^+} [\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y^*)]\, f(y)\,dy,$$

$$w_2(x) = \int_{B_2^+} \theta(x,y) f(y)\,dy.$$

В силу (4.26) функция w_1 удовлетворяет оценке

$$|D^2 w_1|'_{0,\alpha; B_1^+} \leqslant C|f|'_{0,\alpha; B_2^+}, \qquad C = C(n,\alpha). \tag{6.66}$$

Оценка функции w_2 по существу такая же, как и оценка для ньютонова потенциала в лемме 4.10. Пусть функция $f(x)$ продолжена четным образом: $f(x', -x_n) = f(x', x_n)$. Тогда для вторых производных функции w_2 имеет место оценка, аналогичная оценке (4.9). А именно, для $x \in B_2^+$ и $i, j = 1, \ldots, n$ имеем

$$D_{ij} w_2(x) = \int_{B_2^+} D_{ij}\theta(x-y^*)[f(y^*) - f(x)]\,dy -$$
$$- f(x) \int_{\partial B_2^+} D_i \theta(x-y^*) \nu_j(y)\,ds_y,$$

где $\overline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичная внешняя нормаль к ∂B_2^+. В силу (6.64) на рассматриваемый случай без существенных изменений переносятся рассуждения из доказательств лемм 4.4 и 4.10. В результате получается оценка

$$|D^2 w_2|'_{0,\alpha; B_1^+} \leqslant C|f|'_{0,\alpha; B_2^+}, \qquad C = C(n, \alpha, b_n).$$

Объединяя это неравенство с (6.66), получаем

$$|D^2 w|'_{0,\alpha; B_1^+} \leqslant C|f|'_{0,\alpha; B_2^+}, \qquad C = C(n,\alpha,b_n). \tag{6.67}$$

Если $|b| \neq 1$, то в этой оценке величину b_n надо заменить на $b_n/|b|$.

Для получения оценки для u введем срезающую функцию $\eta \in C_0^2(B_2)$ такую, что $\eta(x) = 1$ для $|x - x_0| \leqslant (3/2) \cdot R$ и $|D^\beta \eta| \leqslant C/R^{|\beta|}$ при $|\beta| \leqslant 2$. Тогда

$$u(x)\eta(x) = \int_{B_2^+} G(x,y) \cdot \Delta[u(y)\eta(y)]\,dy, \qquad x \in B_2^+.$$

Если $x \in B_1^+$, то $|x - y| > R/2$, и поэтому $D\eta \neq 0$. В этом случае

$$u(x) = \int_{B_2^+} (\eta G f + u \cdot \Delta\eta)\,dy + 2\int_{B_2^+} G \cdot Du \cdot D\eta\,dy =$$
$$= \int_{B_2^+} (\eta G f + u \cdot \Delta\eta)\,dy - 2\int_{B_2^+} u(DG \cdot D\eta + G \cdot \Delta\eta)\,dy.$$

Требуемая оценка (6.65) при $\varphi = 0$ следует теперь из (6.67), оценки

$|D^\beta\eta| \leqslant C/R^{|\beta|}$ и оценки $|D^\beta G(x,y)| \leqslant C|x-y|^{2-n-|\beta|} \leqslant CR^{2-n-|\beta|}$, вытекающей из (2.14) и (6.64). В последней оценке производная может быть взята по обеим переменным x и y.

Освободимся теперь от ограничения $\varphi = 0$. Для этого построим функцию $\psi \in C^{2,\alpha}(\overline{B_2^+})$, удовлетворяющую условию $N\psi = \varphi$ на T. Можно считать, что функция φ так продолжена вне T на всю плоскость $x_n = 0$, что продолженная функция (обозначим ее также через φ) принадлежит $C_0^{1,\alpha}(\mathbf{R}^{n-1})$ при $x_n = 0$ (см. лемму 6.38). Взяв неотрицательную функцию $\eta \in C_0^2(\mathbf{R}^{n-1})$ такую, что $\int \eta(y')\,dy' = 1$, $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, определим

$$\psi(x) = \psi(x', x_n) = b_n^{-1} x_n \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi(x' - x_n y')\eta(y')\,dy'. \tag{6.68}$$

Легко убедиться, что $\psi(x', 0) = 0$, $D_n\psi(x', 0) = b_n^{-1}\varphi(x')$, и поэтому

$$N\psi = \varphi \quad \text{при} \quad x_n = 0. \tag{6.69}$$

Из соотношений

$$b_n D_{ij}\psi(x) = \int D_i\varphi(x' - x_n y')D_j\eta(y')\,dy', \qquad i, j \neq n;$$
$$b_n D_{in}\psi(x) = -\int y' \cdot D\varphi(x' - x_n y')D_i\eta(y')\,dy', \qquad i \neq n;$$
$$b_n D_{nn}\psi(x) = \int y' \cdot D\varphi(x' - x_n y') \cdot [(n-2)\eta(y') + y' \cdot D\eta(y')]\,dy'$$

следует, что $\psi \in C^{2,\alpha}(\mathbf{R}_+^n)$. Отметим также, что

$$b_n |\psi|'_{2,\alpha;B_2^+} \leqslant C(R|\varphi|_{0;T} + R^2|D\varphi|_{0;T} + R^{2+\alpha}[D\varphi]_{\alpha;T}) = $$
$$= CR|\varphi|'_{1,\alpha;T}, \tag{6.70}$$

где постоянная C зависит только от n и выбора η. Теперь мы можем осуществить редукцию рассматриваемого случая к случаю $\varphi = 0$. Полагая $v = u - \psi$, находим, что $\Delta v = f - \Delta\psi \in C^\alpha(\overline{B_2^+})$ и в силу (6.69) имеет место равенство $Nv = 0$ на T. Из (6.70) и доказанной оценки для v мы получаем (6.65). □

Заметим, что в общем случае при $b_n \to 0$ постоянная C из неравенства (6.65) неограниченно возрастает.

Следующая оценка является следствием предыдущей теоремы и формулируется без доказательства. Доказательство ее аналогично доказательству теоремы 4.8.

Л е м м а 6.27. *Пусть Ω – открытое ограниченное множество в $\mathbf{R}_+^n$, граница которого содержит плоский кусок T, расположенный на гиперплоскости $x_n = 0$. Пусть функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup T)$ удовлетворяет в Ω уравнению $\Delta u = f$ с правой частью $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ и граничному условию* (6.60) *$Nu = \varphi$ на T, в котором $a \leqslant 0$, $b_n > 0$ и $\varphi \in C^{1,\alpha}(T)$. Тогда имеет место оценка*

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega \cup T} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha;T} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, b_n/|b|, \operatorname{diam}\Omega)$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 6.1, можно доказать следующее утверждение для задачи с косой производной.

Л е м м а 6.28. *Пусть выполнены условия леммы 6.27 и пусть функция u удовлетворяет уравнению $L_0 u = f$ (вместо уравнения $\Delta u = f$), где L_0 – оператор с постоянными коэффициентами, определенный в лемме* 6.1. *Тогда справедлива оценка*

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha;T} + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \tag{6.71}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, b_n/|\boldsymbol{b}|, \operatorname{diam}\Omega)$.

Переменные коэффициенты

Рассмотрим теперь уравнения с переменными коэффициентами и соответствующую задачу с косой производной в областях с криволинейными границами. Обобщения оценок шаудеровской теории на эти граничные условия получаются с помощью идей, изложенных в разделах 6.1 и 6.2. Докажем сначала аналог леммы 6.4.

Л е м м а 6.29. *Пусть Ω – открытое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n_+$, граница которого содержит плоский кусок T, лежащий на гиперплоскости $x_n = 0$. Пусть функция $u \in C^{2,\alpha}(\Omega \cup T)$ является решением в Ω уравнения $Lu = f$ (уравнение* (6.1)), *удовлетворяющим граничному условию*

$$N(x')u \equiv \gamma(x')u + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x')D_i u = \varphi(x'), \qquad x' \in T, \tag{6.72}$$

в котором $|\beta_n| \geqslant \kappa > 0$, κ – некоторая постоянная. Предположим, что оператор L удовлетворяет (6.2) *и выполнены условия*

$$f \in C^\alpha(\overline{\Omega}),\quad \varphi \in C^{1,\alpha}(\overline{T}),\quad a^{ij}, b^i, c \in C^\alpha(\overline{\Omega}),$$
$$\gamma, \beta_i \in C^{1,\alpha}(\overline{T}),$$

причем

$$|a^{ij}, b^i, c|_{0,\alpha;\Omega},\quad |\gamma, \beta_i|_{1,\alpha;T} \leqslant \Lambda, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$|u|^*_{2,\alpha;\Omega\cup T} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha;T} + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \tag{6.73}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \kappa, \operatorname{diam}\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что без ограничения общности можно считать, что $\gamma \leqslant 0$ и $\beta_n > 0$. Действительно, если положить $v = u \cdot e^{kx_n}$, где $k \geqslant \sup|\gamma|/\kappa$, то граничное условие (6.72) перейдет в условие $N'v = (\gamma - k\beta_n)v + \Sigma\beta_i D_i v = \varphi$ на T с $\beta_n(1 - k\beta_n) \leqslant 0$. В то же время уравнение $Lu = f$ преобразуется в уравнение $L'v = f'$, для которого выполнены те же самые условия. Требуемая оценка (6.73), очевидно, эквивалентна аналогичной оценке для v.

Техника "замораживания" коэффициентов, использованная при доказательстве теоремы 6.2 и леммы 6.4, применима и в рассматриваемом случае. Но при этом она нуждается в некоторых поправках, порождаемых граничным условием (6.72). Пусть x_0, y_0 – произвольные точки из Ω. Предположим, что $\bar{d}_{x_0} = \min(\bar{d}_{x_0}, \bar{d}_{y_0})$, где $\bar{d}_x = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega - T)$. Пусть $\mu \leqslant 1/4$ – положительная постоянная (ее мы выберем позднее) и пусть $d = \mu\bar{d}_{x_0}$, $B_d = B_d(x_0)$. Если $B_d \cap T \neq \phi$, то через x_0' обозначим проекцию точки x_0 на T. Как и в теореме 6.2, запишем уравнение $Lu = f$ в виде (6.15), а граничное условие (6.72) – в виде

$$N(x_0')u = [N(x_0') - N(x')]u(x') + \varphi(x') \equiv \Phi(x'), \quad x' \in T. \tag{6.74}$$

Рассмотрим теперь в $B_d \cap \Omega$ задачу с косой производной, , порождаемую уравнением (6.15) и граничным условием (6.74), и будем рассматривать ее как задачу с постоянными коэффициентами. (При $B_d \cap T = \phi$ условие (6.74) отбрасывается.) В этом случае применимы рассуждения, аналогичные рассуждениям доказательства теоремы 6.2 и рассуждениям, приведенным в лемме 6.4, с заменой леммы 6.1 на лемму 6.28. На этом пути вместо (6.16) мы получим неравенство

$$\begin{aligned}\bar{d}_{x_0}^{2+\alpha} \frac{|D^2u(x_0) - D^2u(y_0)|}{|x_0 - y_0|^\alpha} &\leqslant \frac{C}{\mu^{2+\alpha}}(|u|_{0;\Omega} + \\ + |\Phi|_{1,\alpha;B\cap T} + |F|_{0,\alpha;B\cap\Omega}) &+ \frac{4}{\mu^\alpha}[u]^*_{2;\Omega\cup T}.\end{aligned} \tag{6.75}$$

Оценка слагаемых справа, кроме слагаемого $|\Phi|_{1,\alpha;B\cap T}$, аналогична оценкам, осуществляемым в теореме 6.2. Для оценки слагаемого $|\Phi|_{1,\alpha;B\cap T}$ заметим, что

$$|[N(x_0') - N(x')]u(x')|_{1,\alpha;B\cap T} \leqslant$$

$$\leqslant C\mu^{2+\alpha}(C(\mu)\cdot|u|_{0;\Omega} + \mu^\alpha[u]^*_{2,\alpha;\Omega\cup T}).$$

Детали доказательств – такие же, как и при выводе (6.19) и мы не будем их здесь излагать. Объединяя последнюю оценку с оценкой других слагаемых в (6.75), мы придем к требуемой оценке (6.73). □

Результат предыдущей леммы может быть обобщен на области с неплоской границей. Повторяя рассуждения доказательств леммы 6.5 и теоремы 6.6, мы получим следующую глобальную оценку решений задачи с косой производной.

Теорема 6.30. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{2,\alpha}$ и пусть функция $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ является решением в Ω уравнения $Lu = f$ и удовлетворяет граничному условию*

$$N(x)u \equiv \gamma(x)u + \sum_{i=1}^n \beta_i(x)D_iu = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

в котором нормальная компонента β_ν вектора $\bar{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ отлична от нуля, причем

$$|\beta_\nu| \geqslant \kappa > 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (\kappa \text{ – постоянная}). \tag{6.76}$$

Предположим, что оператор L удовлетворяет условию (6.2), $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $a^{ij}, b^i, c \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ *и* $\gamma, \beta_i \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, *причем*

$$|a^{ij}, b^i, c|_{0,\alpha;\Omega}, \quad |\gamma, \beta_i|_{1,\alpha;\Omega} \leqslant \Lambda,$$

$$i, j = 1, \ldots, n.$$

Тогда справедлива оценка

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \qquad (6.77)$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \kappa, \Omega)$.

Замечания. 1. Условие (6.76) означает, что направление дифференцирования в $\overline{\beta} \cdot Du$ нигде не является касательным к $\partial\Omega$. Это условие существенно в проведенных рассуждениях.

2. В формулировке теоремы удобно предполагать, и это не ограничивает общность, что функции φ, γ и β_i определены глобально (и вне $\partial\Omega$), так что нормы $|\cdot|_{1,\alpha;\Omega}$ определены для этих функций. В теореме 6.26 и в леммах 6.27 – 6.29, в которых имелся плоский кусок границы T, глобальное продолжение φ (и γ, β_i в лемме 6.29) не использовалось, поскольку нормы $|\cdot|_{1,\alpha;T}$ определяются естественно.

3. Тот факт, что в оценку (6.77) входит $|\varphi|_{1,\alpha}$, не является неожиданным, ибо в выражение Nu входят первые производные функции u из $C^{2,\alpha}$. Этот факт определенным образом контрастирует с глобальной оценкой (6.36) для задачи Дирихле, в которой требуется, чтобы $\varphi \in C^{2,\alpha}$.

До сих пор мы занимались только оценками решений задачи с косой производной. Фактическое решение задачи для уравнения $Lu = f$ может быть методом непрерывного продолжения по параметру (как в теореме 6.8) сведено к исследованию аналогичной задачи для уравнения Пуассона, однако теперь необходимо осуществлять непрерывное продолжение пары операторов – дифференциального оператора L и граничного оператора N. Однозначная разрешимость задачи с косой производной при соответствующих ограничениях на операторы L и N доказывается в следующей теореме.

Теорема 6.31. *Пусть оператор L строго эллиптичен в области Ω класса $C^{2,\alpha}$, его коэффициенты принадлежат $C^\alpha(\overline{\Omega})$, а $c \leqslant 0$. Пусть $Nu \equiv \equiv \gamma u + \overline{\beta} \cdot Du$ – граничный оператор, заданный на $\partial\Omega$, такой, что $\gamma \cdot (\overline{\beta} \cdot \overline{\nu}) > > 0$ на $\partial\Omega$, $\overline{\nu}$ – внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$. Предположим также, что $\gamma, \overline{\beta} \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$. Тогда для всех $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ и $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ задача с косой производной*

$$Lu = f \ \text{ в } \ \Omega, \qquad Nu = \varphi \ \text{ на } \ \partial\Omega \qquad (6.78)$$

имеет единственное решение из $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $\gamma > 0$ и $\overline{\beta} \cdot \overline{\nu} > 0$ на $\partial\Omega$ и что функции φ и β продолжены на всю область и принадлежат пространству $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Рассмотрим семейство задач

$$\begin{aligned} &L_t u \equiv tLu + (1-t)\Delta u = f \ \text{ в } \ \Omega, \\ &N_t u \equiv tNu + (1-t)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + u\right) = \varphi \ \text{ на } \ \partial\Omega \end{aligned} \qquad (6.79)$$

с параметром t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Ясно, что $L_1 = L$, $L_0 = \Delta$, $N_1 = N$, $N_0 = \dfrac{\partial}{\partial \nu} +$

+ тождественный оператор и что с некоторыми положительными постоянными λ, Λ выполняются неравенства

$$a_t^{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \lambda_t |\xi|^2 = \min(1,\lambda)\cdot|\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega, \ \xi \in \mathbf{R}^n$$

и

$$|a_t^{ij}, b_t^i, c_t|_{0,\alpha} \leqslant \Lambda_t = \max(1,\Lambda)$$

(через a_t^{ij}, b_t^i, c_t обозначены коэффициенты оператора L_t). Тогда как $\overline{\beta}\cdot\overline{\nu} \geqslant \beta' > 0$ и $\gamma \geqslant \gamma' > 0$, где β', γ' – положительные постоянные, то

$$\gamma_t = (1-t) + t_\gamma \geqslant \min(1,\gamma') > 0,$$

$$\overline{\beta}_t\cdot\overline{\nu} = (1-t) + t\overline{\beta}\cdot\overline{\nu} \geqslant \min(1,\beta') > 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

а величина $|\overline{\beta}|_{1,\alpha}$ будет ограничена постоянной, не зависящей от t.

Рассмотрим произвольное решение $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи (6.79) (для некоторого значения t). Норма $|u|_{2,\alpha}$ удовлетворяют неравенству (6.77) с постоянной C, не за зависящей от t. Если мы сумеем оценить $|u|_0$ через нормы φ и f, то сможем получить оценку

$$|u|_{2,\alpha} \leqslant C(|\varphi|_{1,\alpha} + |f|_{0,\alpha}), \tag{6.80}$$

справедливую для всех решений задачи (6.79) из $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Для получения оценки нормы $|u|_0$ сделаем замену $v = u/\omega$, где ω – фиксированная функция класса $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ (не зависящая от t), удовлетворяющая условиям:

(i) $\omega \geqslant \overline{\omega} > 0$;

(ii) $L_t\omega \leqslant \overline{c} < 0$;

(iii) $\gamma_t + \overline{\beta}_t\cdot D\omega/\omega \geqslant \overline{\gamma} > 0$ на $\partial\Omega$, где $\overline{\omega}$, $\overline{c}$, $\overline{\gamma}$ – постоянные. Такая функция ω может быть взята в виде $\omega(x) = c_1 - c_2 e^{\mu x_1}$, если величина μ достаточно велика, а c_1, c_2 – подходящие положительные постоянные. При замене $v = u/\omega$ рассматриваемая задача (6.79) преобразуется в задачу

$$\widetilde{L}_t v = \widetilde{f} = f/\omega \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \widetilde{N}_t v = \widetilde{\varphi} = \varphi/\omega \qquad \text{на} \ \partial\Omega.$$

Коэффициент при v в выражении $\widetilde{L}_t v$ равен $L_t\omega/\omega$ и удовлетворяет неравенству $L_t\omega/\omega \leqslant \overline{c}/\omega < 0$. Коэффициент $\widetilde{\gamma}_t$ в выражении $\widetilde{N}_t v$ удовлетворяет неравенству $\widetilde{\gamma}_t = \gamma_t + \overline{\beta}_t\cdot D\omega/\omega \geqslant \overline{\gamma} > 0$. Если наибольшее значение функции $|v(x)|$ достигается в точке $x_0 \in \Omega$, то $\sup\limits_\Omega |v| = |v(x_0)| \leqslant$ $\leqslant |f(x_0)/\overline{c}| \leqslant \sup\limits_\Omega |f|/|\overline{c}|$ и, следовательно, $|u|_0 \leqslant \sup\limits_\Omega \omega\cdot\sup\limits_\Omega |v| \leqslant C|f|_0$, где постоянная C не зависит от t. С другой стороны, если $\sup\limits_\Omega |v| = |v(x_0)|$ и точка $x_0 \in \partial\Omega$, то или

$$\sup_\Omega |v| = v(x_0) \leqslant \overline{\gamma}^{-1}(\widetilde{\varphi} - \overline{\beta}_t\cdot Dv)_{x=x_0} \leqslant \widetilde{\varphi}(x_0)/\overline{\gamma},$$

или

$$\sup_\Omega |v| = -v(x_0) \leqslant \overline{\gamma}^{-1}(-\widetilde{\varphi} + \overline{\beta}_t\cdot Dv)_{x=x_0} \leqslant -\widetilde{\varphi}(x_0)/\overline{\gamma}$$

– в обоих случаях имеет место неравенство $|u|_0 \leqslant C \sup\limits_{\partial\Omega} |\varphi|$. Оценка (6.80) получается тогда из (6.77).

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям из доказательства теоремы 6.8. Пусть $\mathcal{B}_1 = C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\mathcal{B}_2 = C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ – банаховы пространства. Норму в $\mathcal{B}_2$ введем равенством $\|(f,\varphi)\|_{\mathcal{B}_2} = |f|_{0,\alpha;\Omega} + |\varphi|_{1,\alpha;\partial\Omega}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_t = (L_t, N_t)$: $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$. Разрешимость задачи (6.79) при произвольных функциях $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ следует из того, что отображение $\mathcal{L}_t$ является взаимно однозначным отображением $\mathcal{B}_1$ на $\mathcal{B}_2$. Обозначим через u_t решение этой задачи для заданных f и φ. Это решение единственно (см. задачу 3.1). Из (6.80) следует оценка $|u_t|_{2,\alpha} \leqslant C(|f|_{0,\alpha} + |\varphi|_{1,\alpha})$, или, что эквивалентно,

$$\|u\|_{\mathcal{B}_1} \leqslant C \|\mathcal{L}_t u\|_{\mathcal{B}_2}, \tag{6.81}$$

причем постоянная C не зависит от t. Тот факт, что оператор $\mathcal{L}_0$ обратим, является следствием разрешимости в $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ третьей граничной задачи

$$\Delta u = f \text{ в } \Omega, \qquad u + \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi \text{ на } \partial\Omega.$$

(Этот результат можно найти в литературе по теории потенциала; см., например, [74].) Используя этот результат, с помощью (6.81) и метода непрерывного продолжения по параметру (теорема 5.2) мы получаем доказательство утверждения теоремы. □

Если в условиях предыдущей теоремы не выполняется или условие $\gamma > 0$, или условие $c \leqslant 0$, то единственности решения может не быть, но так же, как в теореме 6.25, справедлива альтернатива Фредгольма. Ее доказательство аналогично доказательству в теореме 6.25. Непосредственным следствием этой альтернативы является разрешимость задачи при выполнении условий $c \leqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, причем или $c \not\equiv 0$, или $\gamma \not\equiv 0$, так как при выполнении этих условий имеет место единственность.

6.8. Приложение 1. Интерполяционные неравенства

В этом разделе мы докажем интерполяционные неравенства, использованные в гл. 6. Начнем с неравенств для внутренних норм и полунорм.

Лемма 6.32. *Пусть $j + \beta < k + \alpha$, $j, k = 1, 2, \ldots$ и $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что функция $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует положительная постоянная $C = C(\epsilon, k, j)$ такая, что справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} &[u]^*_{j,\beta;\Omega} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha;\Omega}, \\ &|u|^*_{j,\beta;\Omega} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha;\Omega}. \end{aligned} \tag{6.82}$$

Доказательство. Мы докажем оценки (6.82) для используемых в этой книге случаев $j, k = 1, 2, 3$. Непосредственное развитие используемых при этом идей и применение индукции позволяет доказать неравенства (6.82) при произвольных j, k.

Предположим, что правая часть в неравенстве (6.82) конечна. В противном случае неравенство справедливо. Будем для краткости опускать значок Ω, помня о том, что он должен быть. Рассмотрим несколько случаев:

(i) $j = 1$, $k = 2$; $\alpha = \beta = 0$. Мы хотим показать, что

$$[u]_1^* \leqslant C(\epsilon)\,|u|_0 + \epsilon[u]_2^*, \tag{6.83}$$

каково бы ни было $\epsilon > 0$. Пусть x – произвольная точка из Ω, d_x – расстояние от x до $\partial\Omega$, $\mu \leqslant 1/2$ – положительная постоянная (ее выбор осуществим позднее). Пусть $d = \mu d_x$ и $B = B_d(x)$ – шар с центром x. Возьмем любое $i = 1, 2, \ldots, n$ и обозначим через x' и x'' концевые точки отрезка длины $2d$, параллельного оси x_i, серединой которого является точка x. На этом отрезке существует точка $\bar{x}$ такая что $|D_i u(\bar{x})| = \dfrac{|u(x') - u(x'')|}{2d} \leqslant$ $\leqslant \dfrac{1}{d}|u|_0$ и $|D_i u(x)| = |D_i u(\bar{x}) + \int\limits_{\bar{x}}^{x} D_{ii} u\, dx_i| \leqslant \dfrac{1}{d}|u|_0 + d \cdot \sup\limits_B |D_{ii} u| \leqslant$ $\leqslant \dfrac{1}{d}|u|_0 + d \cdot \sup\limits_{y \in B} d_y^{-2} \cdot \sup\limits_{y \in B} d_y^2 |D_{ii} u(y)|$. Так как для всех $y \in B$ справедливы неравенства $d_y > d_x - d = (1 - \mu)d_x \geqslant d_x/2$, то $d_x |D_i u(x)| \leqslant$ $\leqslant \mu^{-1}|u|_0 + 4\mu \sup\limits_{y \in \Omega} d_y^2 |D_{ii} u(y)| \leqslant \mu^{-1}|u|_0 + 4\mu[u]_2^*$. Следовательно, $[u]_1^* = \sup\limits_{\substack{x \in \Omega \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} d_x |D_i u(x)| \leqslant \mu^{-1}|u|_0 + 4\mu[u]_2^*$. Если взять число μ такое, что $\mu \leqslant \epsilon/4$, то мы получим неравенство (6.82) с постоянной $C = \mu^{-1}$.

(ii) $j \leqslant k$; $\beta = 0$, $\alpha > 0$. Поступаем аналогичным образом. Пусть $x \in \Omega$, $0 < \mu \leqslant 1/2$, $d = \mu d_x$, $B = B_d(x)$ и пусть x' и x'' – концевые точки отрезка длины $2d$, параллельного оси x_l, серединой которого является точка x. На этом отрезке существует точка $\bar{x}$ такая, что

$$|D_{il} u(\bar{x})| = \frac{|D_i u(x') - D_i u(x'')|}{2d} \leqslant \frac{1}{d} \sup_B |D_i u| \tag{6.84}$$

и

$$|D_{il} u(x)| \leqslant |D_{il} u(\bar{x})| + |D_{il} u(x) - D_{il} u(\bar{x})| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{d} \sup_{y \in B} d_y^{-1} \cdot \sup_{y \in B} d_y |D_i u(y)| +$$
$$+ d^\alpha \cdot \sup_{y \in B} d_{x,y}^{-2-\alpha} \cdot \sup_{y \in B} d_{x,y}^{2+\alpha} \cdot \frac{|D_{il} u(x) - D_{il} u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Так как для всех $y \in B$ справедливы неравенства $d_y > d_x/2$, $d_{x,y} > d/2$, получаем, что $d_x^2 |D_{il} u(x)| \leqslant \dfrac{2}{\mu}[u]_1^* + 2^{2+\alpha}\mu^\alpha [u]_{2,\alpha}^*$. Беря верхнюю грань по i, l и по $x \in \Omega$ и выбирая число μ такое, что $8\mu^\alpha \leqslant \epsilon$, мы получаем неравенство

$$[u]_2^* \leqslant C(\epsilon)[u]_1^* + \epsilon[u]_{2,\alpha}^* \tag{6.85}$$

с постоянной $C = 2/\mu$.

9*

Если в неравенстве (6.84) заменить $D_i u$ на u и осуществить очевидные изменения рассуждений, то получим (6.82) для $j = k = 1$, $\beta = 0$, $\alpha > 0$:

$$[u]_1^* \leqslant C(\epsilon)\,|u|_0 + \epsilon [u]_{1,\alpha}^*. \tag{6.86}$$

Объединив (6.85) и (6.83), соответствующим образом подобрав значение ϵ в каждом из этих неравенств, мы приходим к неравенству (6.82) для $k = 2$, $j = 1, 2$.

(iii) $j < k$; $\beta > 0$, $\alpha = 0$. Пусть $x, y \in \Omega$, $d_x \leqslant d_y$, $d_x = d_{x,y}$. Пусть μ, d и B определены, как и ранее. Неравенство (6.82) для случая $j = 0$ будем доказывать, отправляясь от интерполяционного неравенства

$$[u]_{0,\beta}^* \leqslant C(\epsilon)\,|u|_0 + \epsilon [u]_1^*,$$

в котором $0 < \beta < 1$, а число $\epsilon > 0$ может быть произвольным.

Если $y \in B$, то из теоремы о среднем при $0 < \beta \leqslant 1$ следует, что

$$d_x^\beta \, \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \leqslant \mu^{1-\beta} d_x \, |Du|_{0;B} \leqslant 2\mu^{1-\beta} [u]_1^*;$$

если же $y \notin B$, то

$$d_x^\beta \, \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \leqslant 2\mu^{-\beta} |u|_0. \tag{6.87}$$

Объединяя эти неравенства, получаем, что при $0 < \beta \leqslant 1$

$$[u]_{0,\beta}^* = \sup_{x,y \in \Omega} d_{x,y}^\beta \, \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu^{-\beta} |u|_0 + 2\mu^{1-\beta} [u]_1^*. \tag{6.88}$$

Отсюда при $\beta < 1$, взяв $2\mu^{1-\beta} \leqslant \epsilon$, получаем неравенство (6.82). Применив к правой части (6.88) неравенство (6.83) и подобрав соответствующее значение μ, получаем неравенство (6.82) для $j = 0$, $k = 2$, $\alpha = 0$, $0 < \beta \leqslant 1$. Для случая $j = 1$, $k = 2$ доказательство проводится по той же схеме, если заменить u на $D_i u$. Однако при этом появляется следующее отличие: вместо (6.87) появится неравенство

$$d_x^{1+\beta} \cdot \frac{|D_i u(x) - D_i u(y)|}{|x - y|^\beta} \leqslant \mu^{-\beta} [d_x \, |D_i u(x)| + d_y \cdot |D_i u(y)|] \leqslant$$
$$\leqslant 2\mu^{-\beta} [u]_1^*.$$

Утверждение вновь последует из (6.83).

(iv) $j \geqslant k$; $\alpha, \beta > 0$. Достаточно взять $j = k$ и, следовательно $\alpha > \beta$. Применяя предыдущие обозначения, для $y \in B$ имеем $d_x^\beta \, \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \leqslant$ $\leqslant \mu^{\alpha-\beta} \cdot d_x^\alpha \, \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$, а если $y \notin B$, то $d_x^\beta \, \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} \leqslant$ $\leqslant 2\mu^{-\beta} |u|_0$. Объединим эти неравенства и возьмем верхнюю грань по $x, y \in \Omega$. Мы придем к неравенству (6.82) при $j = k = 0$ с постоянными $\epsilon = \mu^{\alpha-\beta}$ и $C = 2/\mu^\beta$.

Оставшиеся для $j = k = 1,2$ случаи исследуются аналогично, с помощью результатов случая (ii).

Интерполяционные неравенства (6.82) для полунорм непосредственно приводят к неравенствам для норм вида

$$|u|^*_{j,\beta;\Omega} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha;\Omega}. \quad \square$$

Из леммы 6.32 вытекает следующий результат о компактности.

Л е м м а 6.33. *Пусть Ω – открытое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$ и пусть S – ограниченное подмножество банахова пространства*

$$C^{k,\alpha}_* = \{u \in C^{k,\alpha}(\Omega) \mid |u|^*_{k,\alpha,\infty} < \infty\},$$

$$k = 0, 1, \ldots; \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Предположим также, что функции из S равностепенно непрерывны на $\overline{\Omega}$. Тогда при $k + \alpha > j + \beta$ множество S предкомпактно в $C^{j,\beta}_*(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как множество S равностепенно непрерывно на $\overline{\Omega}$ и ограничено в $C^{k,\alpha}_*$, то оно содержит последовательность функций $\{u_m\}$, равномерно на $\overline{\Omega}$ сходящуюся к функции $u \in C^{k,\alpha}_*$. Из условий леммы следует, что $|u_m|^*_{k,\alpha} \leqslant M$ (величина M не зависит от m). Из (6.82) следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует положительная постоянная $C = C(\epsilon)$ такая, что $|u_m - u|^*_{j,\beta} \leqslant C|u_m - u|_0 + \epsilon|u_m - u|^*_{k,\alpha}$. Если N столь велико, что $|u_m - u|_0 \leqslant \epsilon/C$ при всех $m > N$, то $|u_m - u|^*_{j,\beta} \leqslant \epsilon(1 + 2M)$ для $m > N$. Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ сходится к u в $C^{j,\beta}_*$, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Обобщим результат леммы 6.32 на чисто внутренние нормы и полунормы в областях, границы которых содержат плоский кусок.

Л е м м а 6.34. *Пусть Ω – открытое подмножество в $\mathbf{R}^n_+$, граница которого содержит плоский кусок T, лежащий на гиперплоскости $x_n = 0$. Пусть $u \in C^{k,\alpha}(\Omega \cup T)$ и пусть $j + \beta < k + \alpha$, где j, $k = 1, 2, \ldots$ и $0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 1$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует положительная постоянная $C = C(\epsilon, j, k)$ такая, что выполняются неравенства*

$$\begin{aligned}
&[u]^*_{j,\beta;\Omega\cup T} = C|u|_{0;\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T},\\
&|u|^*_{j,\beta;\Omega\cup T} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \epsilon[u]^*_{k,\alpha;\Omega\cup T}.
\end{aligned} \tag{6.89}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова предполагаем, что правые части неравенств конечны. Доказательство неравенств (6.89) мало чем отличается от доказательства леммы 6.32, и мы отметим лишь те места, в которых доказательства отличаются. Для краткости далее индекс $\Omega \cup T$ опускаем, помня о том, что он всегда присутствует.

Рассмотрим сначала случаи $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant 2$, $\beta = 0$, $\alpha \geqslant 0$, начиная с неравенства

$$[u]^*_2 \leqslant C(\epsilon)|u|_0 + \epsilon[u]^*_{2,\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{6.90}$$

Пусть x – произвольная точка в Ω, $\bar{d}_x$ – расстояние от x до $\partial\Omega - T$, $d = \mu\bar{d}_x$, $\mu \leqslant 1/4$ – положительная постоянная (ее выбор осуществим далее).

Если $\operatorname{dist}(x, T) \geqslant d$, то шар $B_d(x)$ вложен в Ω, и такие же, как и при доказательстве леммы 6.32, рассуждения приводят к неравенству

$$\bar{d}_x^2 \,|D_{il}u(x)| \leqslant C(\epsilon)[u]_1^* + \epsilon[u]_{2,\alpha}^*,$$

если только число $\mu = \mu(\epsilon)$ взято достаточно малым.

Если $\operatorname{dist}(x, T) < d$, то рассмотрим шар $B = B_d(x_0) \subset \Omega$ с центром x_0, лежащим на луче, выходящем из точки x и перпендикулярном к T, таким, что $\operatorname{dist}(x, x_0) = d$. Пусть x' и x'' – концевые точки диаметра шара B, параллельного оси x_l. На этом диаметре существует точка $\bar{x}$ такая, что

$$|D_{il}u(\bar{x})| = \frac{|D_iu(x') - D_iu(x'')|}{2d} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{d} \sup_B |D_iu| \leqslant \frac{2}{\mu} \bar{d}_x^{-2} \sup_{y \in B} \bar{d}_y |D_iu(y)| \leqslant \frac{2}{\mu} \bar{d}_x^{-2} [u]_1^*,$$

так как для всех $y \in B$ справедливо неравенство $\bar{d}_y > \bar{d}_x/2$. Далее

$$|D_{il}u(x)| \leqslant |D_{il}u(\bar{x})| + |D_{il}u(x)| - D_{il}u(\bar{x}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\mu} \bar{d}_x^{-2} [u]_1^* + 2d^\alpha \sup_{y \in B} d_{x,y}^{-2-\alpha} \sup_{y \in B} \bar{d}_{x,y}^{2+\alpha} \frac{|D_{il}u(x) - D_{il}u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Следовательно,

$$\bar{d}_x^2 \,|D_{il}u(x)| \leqslant \frac{2}{\mu} [u]_1^* + 16\mu^\alpha [u]_{2,\alpha}^* \leqslant C[u]_1^* + \epsilon[u]_{2,\alpha}^*,$$

коль скоро $16\mu^\alpha \leqslant \epsilon$ и $C = 2/\mu$. Возьмем число μ столь малым, чтобы выполнялись оба неравенства, как в случае $\operatorname{dist}(x, T) \geqslant d$, так и в случае $\operatorname{dist}(x, T) < d$. Взяв далее точную верхнюю грань по $x \in \Omega$ и по $i, l = 1, \ldots, n$, мы получим неравенство (6.90). Если в предыдущих рассуждениях D_iu заменить на u и сделать соответствующие изменения, то получим (6.90) для $j = k = 1$.

Доказательство неравенства (6.89) в случае $j = 1$, $k = 2$, $\alpha = \beta = 0$ проводится так же, как и доказательство леммы 6.32, с изменениями, которые намечены при доказательстве неравенства (6.90). Вместе с предыдущим случаем это дает нам оценку (6.89) для $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant 2$, $\beta = 0$, $\alpha \geqslant 0$.

Доказательство неравенства (6.89) при $\beta > 0$ аналогично доказательству случаев (iii) и (iv) из леммы 6.32. При этом возникнет отличие в случае $\beta > 0$, $\alpha = 0$, для которого потребуется теорема о среднем в усеченном шаре $B_d(x) \cap \Omega$ с центром x таким, что $\operatorname{dist}(x, T) < d$. □

Мы завершим это приложение доказательством глобального интерполяционного неравенства в гладких областях.

Л е м м а 6.35. *Предположим, что* $j + \beta < k + \alpha$, *где* $j = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots$ *и* $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$. *Пусть* Ω *– область в* $\mathbf{R}^n$ *класса* $C^{k,\alpha}$. *Предположим, что функция* $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. *Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *существует положительная постоянная* $C = C(\epsilon, j, k, \Omega)$ *такая, что справедливо неравенство*

$$|u|_{j,\beta;\Omega} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \epsilon|u|_{k,\alpha,\Omega}. \tag{6.91}$$

Доказательство. Доказательство основано на сведении к результату леммы 6.34 с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям доказательства леммы 6.5. Как и там, возьмем шар $B_\rho(x_0)$ с центром $x_0 \in \partial\Omega$, и пусть ψ – диффеоморфизм класса $C^{k,\alpha}$, выпрямляющий границу в окрестности точки x_0, содержащей $B' = B_\rho(x_0) \cap \Omega$ и $T = B_\rho(x_0) \cap \cap\, \partial\Omega$. Пусть $\psi(B') = D' \subset \mathbf{R}^n_+$, $\psi(T) = T' \subset \partial\mathbf{R}^n_+$. Так как T' является плоским куском границы $\partial D'$, то, применяя интерполяционное неравенство (6.89) в области D' к функции $\tilde{u} = u \circ \psi^{-1}$, получаем неравенство

$$|\tilde{u}|^*_{j,\beta;D'\cup T'} \leqslant C(\epsilon)|\tilde{u}|_{0,D'} + \epsilon|\tilde{u}|^*_{k,\alpha;D'\cup T'}.$$

Из (6.30) следует, что

$$|u|^*_{j,\beta;B'\cup T'} \leqslant C(\epsilon)|u|_{0;B'} + \epsilon|u|^*_{k,\alpha;B'\cup T}$$

(в этом неравенстве через $C(\epsilon)$ обозначена другая, нежели выше, функция ϵ). Полагая $B'' = B_{\rho/2}(x_0) \cap \Omega$, где (4.17)$'$ и (4.17)$''$ получаем

$$|u|_{j,\beta;B''} \leqslant C(\epsilon)|u|_{0;B'} + \epsilon|u|_{k,\alpha;B'} \leqslant C(\epsilon)|u|_{0;\Omega} + \epsilon|u|_{k,\alpha;\Omega}. \tag{6.92}$$

Пусть $B_{\rho_i/4}(x_i)$, $x_i \in \partial\Omega$, $i = 1, \ldots, N$, – конечный набор шаров, покрывающих границу $\partial\Omega$, таких, что выполняется на каждом из множеств $B_i'' = B_{\rho_i/2}(x_i) \cap \Omega$ неравенство (6.90) с постоянной $C_i(\epsilon)$. Пусть $\delta = = \min \rho_i/4$ и $C = C(\epsilon) = \max C_i(\epsilon)$. Тогда для произвольной точки $x_0 \in \partial\Omega$ шар $B = B_\delta(x_0)$ вложен в шар $B_{\rho_i/2}(x_i)$ с некоторым i, и поэтому справедливо неравенство

$$|u|_{j,\beta;B\cap\Omega} \leqslant C|u|_{0;\Omega} + \epsilon|u|_{k,\alpha;\Omega}. \tag{6.93}$$

Завершающие доказательство рассуждения такие же, как и в доказательстве теоремы 6.6. Мы предоставляем осуществить их читателю. □

Глобальное интерполяционное неравенство (6.91) справедливо для более широкого класса областей, например, для областей класса $C^{0,1}$ (см. задачу 6.7). Однако, как показывает пример на стр. 59, для справедливости вложения $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset C^{j,\beta}(\bar{\Omega})$ при $j + \beta < k + \alpha$ необходима определенная регулярность области; в произвольной области глобальное интерполяционное неравенство не имеет места.

Из леммы 6.35 вытекает утверждение о компактности.

Лемма 6.36. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 1$, и пусть S – ограниченное в $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ множество. Тогда S предкомпактно в $C^{j,\beta}(\bar{\Omega})$ при $k + \alpha < j + \beta$.*

Доказательство сформулированного утверждения по существу такое же, как и доказательство утверждения леммы 6.33, и мы его опускаем. Результат справедлив, очевидно, и для областей, в которых справедливо глобальное интерполяционное неравенство (6.9), в частности, для областей класса $C^{0,1}$.

6.9. Приложение 2. Леммы о продолжении

В этом разделе доказываются некоторые утверждения, использовавшиеся ранее в этой главе и необходимые для дальнейшего, относящиеся к продолжению заданных в области функций на большие области и заданных на границе области функций на область.

Будем использовать разбиение единицы. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbf{R}^n$, покрытое счетной совокупностью $\{\Omega_i\}$ открытых множеств Ω_i. Счетное число функций $\{\eta_i\}$ называется *локально конечным разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{\Omega_i\}$, если:

(i) $\eta_i \in C_0^\infty(\Omega_j)$ для некоторого $j = j(i)$;

(ii) $\eta_i \geqslant 0$, $\sum\limits_i \eta_i = 1$ в Ω;

(iii) для каждой точки множества Ω существует окрестность, в которой только конечное число из функций η_i не равны нулю. Доказательство существования такого разбиения единицы можно найти в литературе (например, в [107]; см. также задачу 6.8). Используемая далее конструкция разбиения единицы сравнительно проста.

Л е м м а 6.37. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 1$, и пусть Ω' – открытое множество, содержащее Ω. Предположим, что $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Тогда существует функция $w \in C_0^{k,\alpha}(\Omega')$ такая, что $w = u$ в Ω и выполняется неравенство*

$$|w|_{k,\alpha;\Omega'} \leqslant C|u|_{k,\alpha;\Omega} \tag{6.94}$$

с постоянной $C = C(k, \Omega, \Omega')$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y = \psi(x)$ – диффеоморфизм класса $C^{k,\alpha}$, выпрямляющий границу $\partial\Omega$ вблизи точки $x_0 \in \partial\Omega$, и пусть $\psi(x_0) \in G$, G и $G^+ = G \cap \mathbf{R}^n_+$ – соответственно шар и полушар, получающиеся после выпрямления границы. Полагая $\tilde{u}(y) = u \circ \psi^{-1}(y)$, $y = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) = (y', y_n)$, определим продолжение функции $\tilde{u}(y)$ на $y_n < 0$ равенством

$$\tilde{u}(y', y_n) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i \tilde{u}(y', -y_n/i), \quad y_n < 0,$$

в котором $c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}$ – постоянные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i(-1/i)^m = 1, \quad m = 0, 1, \ldots, k.$$

Несложно проверить, что так продолженная функция $\tilde{u}$ непрерывна вместе со всеми производными до порядка k в области G и что $\tilde{u} \in C^{k,\alpha}(G)$. Таким образом, для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существует шар $B = B(x_0)$ такой, что $w = \tilde{u} \circ \psi \in C^{k,\alpha}(\overline{B})$ и $w = u$ в $B \cap \Omega$. Следовательно, функция w является продолжением функции u в область $\Omega \cup B$, причем w является функцией класса $C^{k,\alpha}$. В силу (6.30) выполняется неравенство (6.94), в котором Ω' надо заменить на $\Omega \cup B$.

Рассмотрим теперь конечное покрытие границы $\partial\Omega$ шарами B_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, и пусть w_i – соответствующее шару B_i продолжение класса $C^{k,\alpha}$, построенное выше (шар B надо заменить на B_i). Мы можем считать, что радиусы шаров B_i столь малы, что объединение этих шаров с областью Ω вложено в Ω'. Пусть $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ – открытое подмножество области Ω такое, что совокупность $\Omega_0, B_1, B_2, \ldots, B_N$ является открытым покрытием области Ω. Пусть $\{\eta_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, – разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Положим $w = u \cdot \eta_0 + \sum w_i \eta_i$, считая, что $w_i \eta_i = 0$ там, где $\eta_i = 0$. Как видно из предыдущих рассуждений, функция w является продолжением функции u на Ω' и имеет требуемые свойства. □

Следующий результат касается продолжения граничной функции в область с сохранением класса регулярности.

Лемма 6.38. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 1$, и пусть Ω' – открытое множество, содержащее $\overline{\Omega}$. Предположим, что функция $\varphi \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$. Тогда существует функция $\Phi \in C_0^{k,\alpha}(\Omega')$ такая, что $\Phi = \varphi$ на $\partial\Omega$.*

Доказательство. Для произвольной точки $x_0 \in \partial\Omega$ рассмотрим отображение ψ и шар G, определенные аналогично тому, как это делалось в доказательстве предыдущей леммы. Ясно, что $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(G \cap \partial\mathbf{R}^n_+)$. Определим в G функцию $\widetilde{\Phi}(y', y_n) = \widetilde{\varphi}(y')$ и положим $\Phi(x) = \widetilde{\Phi} \circ \psi(x)$ для $x \in \psi^{-1}(G)$. Ясно, что $\Phi \in C^{k,\alpha}(\overline{B})$, где $B = B(x_0)$ – некоторый шар, и что $\Phi = \varphi$ на $B \cap \partial\Omega$. Пусть теперь $\{B_i\}$ – конечное покрытие границы $\partial\Omega$ шарами, такими, как шар B, и пусть Φ_i – соответствующие продолжения класса $C^{k,\alpha}$, определенные в шарах B_i. Доказательство утверждения леммы теперь завершается точно так же, как и в предыдущей лемме, с помощью соответствующего разбиения единицы. □

Замечания. 1) Если функция $\varphi \in C^0(\partial\Omega) \cap C^{k,\alpha}(T)$, где $T \subset \partial\Omega$, то методами, аналогичными использованным выше, можно показать существование продолжения $\Phi \in C^0(\Omega') \cap C^{k,\alpha}(G)$, где G – открытое множество, содержащее T. Несложная модификация этих методов позволяет показать, что если Ω – произвольная область, граница которой содержит кусок T класса $C^{k,\alpha}$, и если функция φ принадлежит $C^{k,\alpha}(T)$, то существует такое продолжение Φ класса $C^{k,\alpha}(G)$ функции φ на содержащее T открытое множество G, что $\Phi = \varphi$ на T. Для доказательства этого утверждения используется счетное покрытие шарами куска T. Если $\varphi \in C^0(\partial\Omega) \cap C^{k,\alpha}(T)$, то продолжение Φ можно осуществить так, что $\Phi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^{k,\alpha}(G)$.

2) Конструкция продолжающей функции нередко – например, для областей, достаточно простых с геометрической точки зрения – может быть осуществлена более простыми методами. Пусть, например, $B = B_R(x_0)$ – шар в $\mathbf{R}^n$ и $\varphi \in C^0(\partial\Omega) \cap C^{k,\alpha}(T)$, $T \subset \partial B$. Продолжение функции φ на все $\mathbf{R}^n$ можно получить по формуле $\Phi(x) = \Phi(x_0 + r\omega) = \varphi(R\omega)\eta(r)$, где $r = |x - x_0|$, $\omega = (x - x_0)/r$, а $\eta(r)$ – такая бесконечно дифференцируемая функция, что $\eta(r) = 0$ при $0 \leqslant r \leqslant R/4$ и $\eta(r) = 1$ при $r \geqslant R/2$. Ясно, что функция $\Phi(x)$ совпадает с функцией φ на ∂B, принадлежит $C^0(\mathbf{R}^n)$ и классу $C^{k,\alpha}$ в конической области, ограниченной лучами, выходящими из точки x_0 и проходящими через точки T.

Примечания

Априорные оценки и теоремы существования, изложенные в разделах 1 – 3, являются современным вариантом результатов исследований Шаудера [346], [347]. Приблизительно в то же самое время Каччиополи [117] доказал, за исключением некоторых деталей, аналогичные утверждения, которые затем были усовершенствованы Мирандой [195]. Сходные идеи имеются в работе [326] Хопфа, который первым доказал теоремы о внутренней регулярности, изложенные в разделе 4. Проблема существования и общие свойства решений по существу для того же самого класса задач были ранее изучены Жиро [95–97], использовавшим для этого метод интегральных уравнений, связанный с представлением решений в виде поверхностных потенциалов. Дальнейшие усовершенствования этих методов, позволившие усилить получаемые результаты, были даны Мирандой [195]. Хёрмандер [333], используя метод Фурье, обобщил шаудеровские оценки на уравнения произвольного порядка.

Формулировки внутренних оценок раздела 1, использующие внутренние нормы, и метод дифференцирования следуют Дуглису и Ниренбергу [92], распространившим также внутренние оценки на эллиптические системы. Если сначала, с помощью теоремы 4.6, получить оценки для шаров и преобразовать их в оценку 6.14 для внутренней нормы в $C^{2,\alpha}$, то можно в некоторой степени упростить доказательство теоремы 6.2. См., например, доказательство теоремы 9.11.

Вывод глобальных оценок, изложенных в разделе 6.2, и основанное на этих оценках доказательство теоремы 6.8 осуществляются в предположении, что граничные данные принадлежат $C^{2,\alpha}$. При более слабых условиях доказательство теорем существования решений, скажем, из $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, не следует из теории Шаудера в ее обычной форме. Подобная теорема существования выводится из результатов о регулярности, полученных Видманом [52]. Гилбарг и Хёрмандер [68] обобщили глобальную шаудеровскую теорию, ослабив требования на регулярность коэффициентов, области и граничных значений. Эти результаты, применимые также и к исследованию регулярности высокого порядка, сформулируем в следующем виде.

Пусть $0 \leqslant k < a = k + \alpha \leqslant k + 1$, $H_a(\Omega)$ – пространство Гёльдера функций с конечной нормой $|u|_{a,\Omega} = |u|_{k,\alpha;\,\Omega}$ (т.е. $H_a(\Omega) = C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$). Пусть $\Omega_\delta = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$. Для $a + b \geqslant 0$ введем множество $H_a^{(b)}(\Omega)$, состоящее из определенных в Ω функций, принадлежащих $H_a(\Omega_\delta)$ для всех $\delta > 0$ и имеющих конечную норму

$$|u|_{a,\Omega}^{(b)} = |u|_a^{(b)} = \sup_{\delta > 0} \delta^{a+b} |u|_{a,\Omega_\delta}.$$

При $a \geqslant b > 0$ и нецелом b имеет место вложение $H_a^{(-b)} \subset H_b^{(-b)} = H_b$; верхний и нижний индексы у нормы $|u|_a^{(-b)}$ описывают глобальную и внутреннюю регулярность функции u соответственно. Определим также $H_a^{(b-0)}(\Omega)$ как множество функций из $H_a^{(b)}(\Omega)$ таких, что $\delta^{a+b}|u|_{a,\Omega_\delta} \to 0$ при $\delta \to 0$. Пусть Ω – ограниченная область класса C^γ с некоторым $\gamma \geqslant 1$, a, b – нецелые числа такие, что $0 < b \leqslant a$, $a > 2$, $b \leqslant \gamma$. Рассмотрим на Ω эллиптический дифференциальный оператор второго порядка

$$P = \sum_{|\beta| \leqslant 2} p_\beta(x) D^\beta,$$

удовлетворяющий условиям

$$p_\beta \in H_{a-2}^{(2-b)}(\Omega), \quad \text{если} \quad |\beta| \leqslant 2,$$

$$p_\beta \in C^0(\overline{\Omega}), \quad \text{если} \quad |\beta| = 2,$$

$$p_\beta = H_{a-2}^{(2-|\beta|-0)}(\Omega), \quad \text{если} \quad |\beta| > b,$$

(таким образом младшие коэффициенты могут быть неограниченными при $b < 2$). Тогда если функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ является решением задачи

$$Pu = f \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega, \tag{6.95}$$

где $f \in H_{a-2}^{(2-b)}(\Omega)$ и $\varphi \in H_b(\partial\Omega)$, то $u \in H_a^{(-b)}(\Omega)$ и выполняется неравенство

$$|u|_a^{(-b)} \leqslant C(|u|_0 + |\varphi|_{b, \partial\Omega} + |f|_{a-2}^{(2-b)}),$$

с постоянной C, зависящей от Ω, a, b, норм коэффициентов и минимального собственного значения матрицы старших коэффициентов оператора P. При $p_0 \leqslant 0$ задача Дирихле (6.95) имеет в $H_a^{(-b)}$ единственное решение, а в общем случае справедлива теорема типа Фредгольма. Случай, когда $2 + \alpha \leqslant a = b \leqslant \gamma$, рассмотрен в этой главе. Если Ω – липшицева область, то аналогичные результаты верны для значений $b < 1$, зависящих от условия внешнего конуса, имеющего место на границе. При этом достаточно, чтобы $p_\beta \in H_{a-2}^{(0)}$ для $|\beta| = 2$, так что старшие коэффициенты не обязаны быть непрерывными вплоть до границы.

Условия, при которых граничная точка, регулярная для оператора Лапласа Δ, является регулярной граничной точкой для эллиптического оператора L, и наоборот, изучались многими авторами. Эквивалентность понятий регулярности граничной точки для Δ и для L была доказана: для строго эллиптического оператора L, удовлетворяющего условиям теоремы 6.13 и условию, что вблизи границы коэффициенты оператора непрерывны по Липшицу [362] или непрерывны по Дини [131], [221]; для некоторых классов операторов с разрывными коэффициентами [12]; для вырожденных эллиптических операторов [222]. Важную роль в этих исследованиях играют понятия емкости и критерий Винера (раздел 2.9). Если коэффициенты оператора L только непрерывны, то утверждение об эквивалентности понятий регулярной точки для Δ и для L в общем случае не справедливо (см. пример в задаче 3.8а) и [193]). Но для уравнений дивергентного вида это утверждение об эквивалентности справедливо, даже если коэффициенты только ограничены и измеримы [179] (см. также гл. 8). О других результатах, относящихся к регулярности граничных точек, см. [220], [181], [153], [191–192].

Хопф [326] дал непосредственное доказательство результата о внутренней регулярности (лемма 6.16), не использующее теорему существования. Его метод, основанный на идее Корна [129] возмущения уравнения с постоянными коэффициентами, приводит к обобщению результатов из [325] о регулярности решений вариационных задач и предвосхищает важные аспекты теории Шаудера. Простое прямое доказательство леммы 6.16 (и более общих результатов), основанное на регуляризации и внутренних оценках, имеется в [2, с. 723].

О других методах см. доказательство леммы 9.16, а также [208], раздел 5.6.

Простое доказательство регулярности решения вплоть до границы (лемма 6.18) может быть осуществлено следующим образом. Достаточно доказать, что $u \in C^{\alpha}(\Omega \cup T)$, после чего применить такие же рассуждения, как и при доказательстве леммы 6.16. Рассматривая вместо u разность $u - \varphi$, можно считать, что $\varphi \equiv 0$. Пусть $\Omega' \subset \Omega$, $(\partial\Omega' \cap \partial\Omega) = T' \subset\subset T$, и пусть $\delta = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega - T) < 1$. Для любого $x' \in \Omega'$ предположим, что $d = \operatorname{dist}(x', \partial\Omega) = |x' - x_0| \leqslant \delta$, $x_0 \in \partial\Omega$. Тогда в силу результата задачи 3.6 имеем $|u(x)| \leqslant C|x - x_0|$ для $x \in \Omega$, и поэтому $|u(x)| \leqslant Cd$ для всех $x \in B_d(x')$. Беря в (6.23) области $\Omega' = B_{d/2}(x')$ и $\Omega = B_d(x')$, получаем, что для всех $x \in B_{d/2}(x')$

$$d \cdot |Du(x)| \leqslant C(\sup_{B_d} |u| + d^2 |f|_{0,\alpha;B_d}),$$

и поэтому

$$|Du(x')| \leqslant C(1 + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \leqslant C,$$

где постоянная C зависит только от δ и от данных задачи. Если $d > \delta$, то это же самое неравенство имеет место с постоянной C, зависящей теперь от δ^{-1}. Таким образом, получается оценка $|Du|$ в Ω', откуда следует, что $u \in C^{0,1}(\Omega \cup T)$.

В разделе 6.5 изложены в модифицированном виде идеи Михаэля [201], показавшего, что в общем случае вопрос о существовании решений с непрерывными граничными значениями может быть изучен с использованием только внутренних оценок. Его результаты применимы к некоторым классам уравнений с неограниченными вблизи границы коэффициентами (см. задачи 6.5 и 6.6).

В разделе 6.6 рассмотрены некоторые классы неравномерно эллиптических операторов, у которых допускается вырождение на границе. Теория эллиптических операторов, вырождающихся внутри области, основывается на других методах, существенно отличающихся от методов этой главы. Соответствующие результаты читатель может найти в литературе по гипоэллиптичности – см., например, [332], [227], [124].

Некоторые аспекты изложенной в разделе 6.7 шаудеровской теории задачи с косой производной отличаются от известных ее вариантов. Например, Фиоренца [310] основывал свой подход на представлении решений краевой задачи (6.60) для уравнения Пуассона в полупространстве в виде поверхностных потенциалов, к которым применял некоторые результаты Жиро [97]. В случае переменных коэффициентов установленные им оценки шаудеровского типа демонстрируют точную зависимость от границ изменения коэффициентов и их постоянных Гёльдера. Эта зависимость использована в [147], гл. 10, Фиоренцой [311] и Уральцевой [298] при изучении квазилинейных уравнений с нелинейными граничными условиями. Обобщение шаудеровской теории на другие типы граничных задач для уравнения высокого порядка и для систем было осуществлено Агмоном, Дуглисом и Ниренбергом [2–3]. Их метод основан на явном интегральном представлении решений задач для случая уравнений и систем с постоянными коэффициентами в полупространстве с помощью ядер Пуассона, соответствующих заданным граничным условиям. Хотя детали их изложения отличаются от изложенных здесь, можно в определенном смысле считать, что методы, использованные в разделе 6.7, являются специальным случаем этих рассмотрений. См. также Булиган [49]. Исследование нерегулярной задачи с косой производной, в которой производная по направлению в граничном условии может становиться тангенциальной (т.е. в (6.76) возможно равенство $\beta_\nu = 0$), значительно труднее исследования регулярного случая. Получающиеся при этом результаты носят другой характер – см., например, [331], [94], [276] и [57–58].

Изучение внешних граничных задач может быть без труда проведено с помощью результатов этой главы. Мейерс и Серрин [187] рассмотрели краевую задачу для уравнения $Lu = f$ в области Ω, содержащей внешность некоторого шара, в предположении, что коэффициент $c \leqslant 0$, а коэффициенты оператора L и функция f непрерывны по Гёльдеру на ограниченных подмножествах в Ω. При некоторых общих условиях на поведение коэффициентов на бесконечности они установили существование решения в Ω, как предела последовательности решений, строящихся для расширяющейся последовательности областей. В частности, они получили следующий результат: если на бесконечности $f = 0$, $b^i = 0$, $a^{ij} \to a_0^{ij}$ и матрица $[a_0^{ij}]$ имеет ранг, не меньший 3, то существует единственное решение в Ω задачи Дирихле (и других задач), обращающееся в нуль на бесконечности. При выполнении перечисленных выше условий в случае $n > 3$ оператор L может быть неравномерно эллиптическим на бесконечности, но краевая задача будет все-таки корректно поставлена. Обобщение теории Шаудера для аналогичных областей при $n \geqslant 3$, включая оценки Гёльдера на бесконечности и соответствующие исследования внешних задач Дирихле и Неймана, было дано Осколковым [228]. При $n \geqslant 3$ внешняя задача Неймана для класса квазилинейных уравнений изучалась в [308].

Интерполяционные неравенства, доказанные в приложении 1, довольно просто выводятся из общего свойства выпуклости гёльдеровских норм:

$$|u|_{k,\alpha} \leqslant C(|u|_{k_1,\alpha_1})^t \cdot (|u|_{k_2,\alpha_2})^{1-t},$$

где

$$0 < t < 1, \quad k + \alpha = t(k_1 + \alpha_1) + (1 - t)(k_2 + \alpha_2),$$

причем в этом неравенстве нормы могут быть как внутренними, так и глобальными. Доказательство этого неравенства см. у Хёрмандера [333].

Задачи

6.1. а) Пусть функция $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$, $k \geqslant 0$, является решением уравнения $Lu = f$ в ограниченном открытом множестве $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Предположим, что коэффициенты оператора L удовлетворяют условию (6.2) и выполнены неравенства $|a^{ij}, b^i, c|_{k,\alpha;\Omega} \leqslant \Lambda$. Докажите, что если $\Omega' \subset\subset \Omega$, то справедливо неравенство

$$|u|_{k+2,\alpha;\Omega'} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{k,\alpha;\Omega})$$

с постоянной $C = C(n, k, \alpha, \lambda, \Lambda, d)$, где $d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

б) Предположим, что $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$, $k \geqslant 0$, и что выполнены условия теоремы 6.2 с заменой условия (6.13) на условие

$$|a^{ij}|^{(0)}_{k,\alpha}, \quad |b^i|^{(1)}_{k,\alpha}, \quad |c|^{(2)}_{k,\alpha} \leqslant \Lambda.$$

Докажите внутреннюю оценку

$$|u|^*_{k+2,\alpha} \leqslant C(|u|_0 + |f|^{(2)}_{k,\alpha})$$

с постоянной $C = C(n, k, \alpha, \lambda, \Lambda)$.

6.2. Пусть выполнены условия теоремы 6.6, Ω – область класса $C^{k+2,\alpha}$, $k \geqslant 0$. Пусть

$$u \in C^{k+2,\alpha}(\bar\Omega), \quad \varphi \in C^{k+2,\alpha}(\bar\Omega), \quad f \in C^{k,\alpha}(\bar\Omega),$$
$$|a^{ij}, b^i, c|_{k,\alpha;\Omega} \leqslant \Lambda.$$

Докажите глобальную оценку

$$|u|_{k+2,\alpha} \leqslant C(|u|_0 + |\varphi|_{k+2,\alpha} + |f|_{k,\alpha})$$

с постоянной $C = C(n, k, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

6.3. Докажите утверждение теоремы 6.13 для ограниченной области Ω, удовлетворяющей условию внешнего конуса. Покажите, что для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существует локальный барьер вида $r^\mu f(\theta)$, где $r = |x - x_0|$, а θ – угол между вектором $x - x_0$ и осью внешнего конуса (см. [190], [192]).

6.4. Докажите следующее обобщение следствия 6.24′. Пусть Ω – ограниченная строго выпуклая область в $\mathbf{R}^n$ и пусть уравнение

$$Lu \equiv a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu = 0$$

эллиптично в Ω, а коэффициенты оператора L принадлежат $C^\alpha(\Omega)$. Пусть $\bar\nu = \bar\nu(x_0)$ – направленная из Ω единичная нормаль к опорной плоскости границы $\partial\Omega$ в точке $x_0 \in \partial\Omega$. Предположим, что для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существует такой шар $B(x_0)$, что в $B(x_0) \cap \Omega$ выполняется неравенство $b \cdot \bar\nu > 0$. Тогда для произвольной непрерывной граничной функции задача Дирихле для уравнения $Lu = 0$ имеет единственное решение из $C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^0(\bar\Omega)$.

6.5. а) Докажите утверждение леммы 6.21, в котором шар B заменен на область Ω класса C^2 (см. задачу 4.6).

б) Обобщите результат пункта а) на случай, когда коэффициенты b^i удовлетворяют условию $\sup\limits_\Omega d_x^{1-\gamma}|b^i(x)| < \infty$ с некоторым $\gamma \in (0, 1)$, а $c \leqslant 0$.

6.6. а) Используя задачу 6.5, постройте барьер и докажите разрешимость задачи Дирихле $Lu = f$ $(c \leqslant 0)$ в Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$, если L – строго эллиптический оператор в области класса C^2, при следующих предположениях: коэффициенты a^{ij} ограничены; a^{ij}, b^i, c, $f \in C^\alpha(\Omega)$, $\sup\limits_\Omega d_x^{1-\beta}|b^i(x)| < \infty$ и $\sup\limits_\Omega d_x^{2-\beta}|f(x)| < \infty$ для некоторого $\beta \in (0, 1)$.

б) При дополнительном предположении $\sup\limits_\Omega d_x^{2-\beta}|c(x)| < \infty$ обобщите утверждение пункта а) на случай неоднородного краевого условия: $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, функция φ непрерывна.

6.7. Докажите глобальное интерполяционное неравенство (6.91) для случая, когда Ω – область класса $C^{0,1}$ (липшицева область). Этот результат можно получить, следуя схеме рассуждений.

(i) Докажите, что существует такая зависящая только от Ω постоянная K, что произвольная пара точек x, y из Ω может быть соединена лежащей в Ω дугой $\gamma(x, y)$, длина которой $|\gamma(x, y)|$ не превосходит $K|x - y|$.

(ii) Покажите, что существуют такие зависящие только от Ω постоянные ρ_0 и M, что если $y \in \Omega$ и $\operatorname{dist}(y, \partial\Omega) < \rho_0$, то для всех $\rho < \rho_0$ имеется точка $x \in B_\rho(y)$ такая, что $B_{\rho/M^2}(x) \subset \Omega$.

(iii) Используя результаты пунктов (i) и (ii) и модифицируя доказательство леммы 6.34, докажите (6.91).

6.8. Пусть $\{\Omega_i\}$ – счетное открытое покрытие открытого множества $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Если выполнено одно из условий:

или а) множество Ω ограничено и $\bar{\Omega} \subset \cup \Omega_i$,

или б) множества Ω_i ограничены и $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$,

то существует разбиение единицы $\{\eta_i\}$такое, что $\eta_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$.

6.9. а) Используя разбиение единицы и определение областей класса $C^{k,\alpha}$ из раздела 6.2, покажите, что любая такая область Ω при $k \geqslant 1$ может быть определена с помощью функции $F \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ следующим образом: $F > 0$ в Ω, $F = 0$ на $\partial\Omega$ и $\operatorname{grad} F \neq$ $\neq 0$ на $\partial\Omega$.

б) Используя результат пункта а) и аппроксимацию гладкими функциями, покажите, что любая область Ω класса $C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 1$, определенная неравенством $F > 0$, может быть исчерпана бесконечно гладкими областями Ω_ν, определяемыми неравенствми $F_\nu > 0$ такими, что $|F_\nu|_{k,\alpha;\,\Omega_\nu} \leqslant C|F|_{k,\alpha;\,\Omega}$ и $\partial\Omega_\nu \to \partial\Omega$ при $\nu \to \infty$, где C – постоянная, не зависящая от ν.

6.10. Пусть оператор L эллиптичен в области Ω класса C^2, $c \leqslant 0$ и a^{ij}, $b^i \in C^0(\bar{\Omega})$. Пусть $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \partial\Omega$, где Σ_1 и Σ_2 определены в (6.59). Предположим, что функция $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\bar{\Omega} - \Sigma)$ удовлетворяет в Ω неравенству $Lu \geqslant 0$. Докажите что если на $\partial\Omega - \Sigma$ или $c < 0$, или $a^{ii} > 0$ для некоторого i, то

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\Sigma} u^+.$$

(Предположите, что максимум достигается на $\partial\Omega - \Sigma$, и, используя функцию расстояния до плоского куска границы вблизи точки максимума, рассмотрите здесь дифференциальное уравнение. См. [227].)

6.11. При выполнении условий теоремы 6.30, в которой вместо $|\beta_i|_{1,\alpha} \leqslant \Lambda$ предполагается, что $|\beta_i|_{0,\alpha} \leqslant \Lambda$, докажите оценку

$$|u|_{2,\alpha} \leqslant C(|u|_0 + |\varphi|_{1,\alpha} + |f|_{0,\alpha} + |Du|_0\,[D\beta]_\alpha)$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, k, \Omega)$.

ГЛАВА 7

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

Для того чтобы показать возможные применения излагаемой в этой главе теории, мы сейчас рассмотрим отличный от использованного в гл. 4 подход к изучению разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона. По теореме о дивергенции (формула (2.3)) решение u уравнения $\Delta u = f$ класса $C^2(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega Du \cdot D\varphi\, dx = -\int_\Omega f \cdot \varphi\, dx \tag{7.1}$$

для всех $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Билинейная форма

$$(u, \varphi) = \int_\Omega Du \cdot D\varphi \, dx \tag{7.2}$$

является скалярным произведением в $C_0^1(\Omega)$ и пополнение пространства $C_0^1(\Omega)$ по метрике, порождаемой скалярным произведением (7.2), является, следовательно, гильбертовым пространством, которое мы будем обозначать через $W_0^{1,2}(\Omega)$. Кроме этого, для подходящей функции f линейный функционал F, определенный на пространстве $C_0^1(\Omega)$ равенством $F(\varphi) = -\int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$, может быть продолжен как ограниченный линейный функционал на $W_0^{1,2}(\Omega)$. Тогда по теореме представления Рисса (теорема 5.8) существует элемент $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, который удовлетворяет равенству $(u, \varphi) = (F, \varphi)$ для всех $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Таким образом, мы получаем совсем простое доказательство существования *обобщенного решения* задачи Дирихле $\Delta u = f$ в Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$. Вопрос о существовании классического решения сводится к вопросу о регулярности обобщенного решения при достаточно гладких граничных условиях. В следующей главе при изучении эллиптических уравнений в дивергентной форме будет использована (точно так же, как только что была использована теорема представления Рисса) теорема Лакса – Мильграма (теорема 5.8) и будут установлены, исходя из интегрального тождества, утверждения о регулярности решения. Но прежде чем мы сможем это сделать, нужно будет изучить класс соболевских пространств $W^{k,p}(\Omega)$ и $W_0^{k,p}(\Omega)$, в который входит и пространство $W_0^{1,2}(\Omega)$. Некоторые из устанавливаемых в этой главе неравенств будут также необходимы в части II при построении теории квазилинейных уравнений.

7.1. Пространства L^p

Всюду в этой главе через Ω мы обозначаем ограниченную область в $\mathbf{R}^n$. Измеримой функцией на Ω мы называем класс эквивалентных измеримых функций, отличающихся друг от друга только на подмножестве меры нуль. Всякое точечное свойство приписывается измеримой функции, если оно имеет место в обычном смысле для некоторой функции в этом классе эквивалентности. Точной верхней и точной нижней гранями измеримой функции мы называем ее существенные точную врехнюю и точную нижнюю грани.

Для $p \geqslant 1$ пространство $L^p(\Omega)$ – классическое банахово пространство, состоящее из измеримых на Ω функций, p-я степень которых интегрируема по Ω. Норма в $L^p(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{p,\,\Omega} = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}. \tag{7.3}$$

Для векторной или матричной функции u мы будем использовать аналогичные понятия. Через $|u|$ обозначается обычная евклидова норма. Для $p = \infty$ пространство $L^\infty(\Omega)$ – банахово пространство функций, ограниченных на Ω, с нормой

$$\|u\|_{\infty;\,\Omega} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_\Omega |u|. \tag{7.4}$$

В дальнейшем мы будем использовать запись $\|u\|_p$ вместо $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ в случаях, когда такая запись не вызывает неясности.

Для осуществления интегральных оценок нам будут необходимы следующие неравенства.

Неравенство Юнга

$$a \cdot b \leqslant a^p/p + b^q/q, \tag{7.5}$$

имеющее место для положительных чисел a, b, p, q, где числа p, q связаны равенством $1/p + 1/q = 1$. При $p = q = 2$ неравенство (7.5) является известным неравенством Коши. Заменяя в (7.5) число a на число $\epsilon^{1/p}a$, а число b – на число $\epsilon^{-1/p}b$, где ϵ – произвольное положительное число, мы получаем интерполяционное неравенство

$$ab \leqslant \epsilon \cdot a^p/p + \epsilon^{-q/p}b^q/q \leqslant \epsilon \cdot a^p + \epsilon^{-q/p}b^q. \tag{7.6}$$

Неравенство Гёльдера

$$\int_\Omega u \cdot v\, dx \leqslant \|u\|_p \cdot \|v\|_q, \tag{7.7}$$

имеющее место для функций $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$. Это неравенство следует из неравенства Юнга. При $p = q = 2$ неравенство Гёльдера является хорошо известным неравенством Шварца.

Выражение (7.3) определяет норму в $L^p(\Omega)$. Этот факт является следствием неравенства Гёльдера. Отметим некоторые другие простые следствия неравенства Гёльдера:

$$|\Omega|^{-1/p}\|u\|_p \leqslant |\Omega|^{-1/q}\|u\|_q \quad \text{для } u \in L^q(\Omega), \quad p \leqslant q; \tag{7.8}$$

$$\|u\|_q \leqslant \|u\|_p^\lambda\, \|u\|_r^{1-\lambda} \quad \text{для} \quad u \in L^r(\Omega), \tag{7.9}$$

где $p \leqslant q \leqslant r$ и $1/q = \lambda/p + (1-\lambda)/r$.

Объединяя неравенства (7.6) и (7.9), мы приходим к интерполяционному неравенству для L^p-норм, а именно

$$\|u\|_q \leqslant \epsilon\, \|u\|_r + \epsilon^{-\mu}\|u\|_p, \tag{7.10}$$

где

$$\mu = (1/p - 1/q)/(1/q - 1/r).$$

Мы будем также по мере надобности пользоваться обобщенным неравенством Гёльдера для m функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$, принадлежащих L^{p_1}, $L^{p_2}, \ldots, L^{p_m}$ соответственно, где $1/p_1 + 1/p_2 + \ldots + 1/p_m = 1$. Оно имеет вид

$$\int_\Omega u_1 u_2 \ldots u_m\, dx \leqslant \|u_1\|_{p_1} \ldots \|u\|_{p_m} \tag{7.11}$$

и получается из случая $m = 2$ по индукции.

Интересно рассмотреть L^p-норму как функцию p. Пусть

$$\Phi_p(u) = \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p} \tag{7.12}$$

для $p > 0$. В силу неравенства (7.8) $\Phi_p(u)$ – неубывающая функция от p при фиксированной функции u. Неравенство (7.9) означает, что $\Phi_p(u)$ –

логарифмически выпуклая функция аргумента $1/p$. Отметим, что $\Phi_p(u) = |\Omega|^{-1/p}\| u \|_p$ при $p \geq 1$. Несмотря на то, что функционал $\Phi_p(u)$ не является нормой для $p < 1$, он, однако, будет полезен в дальнейшем (см. гл. 8).

Отметим здесь также хорошо известные функционально-аналитические свойства пространств L^p (см., например, Ройден [249]). Пространство $L^p(\Omega)$ сепарабельно при $p < \infty$. Пространство $C^0(\overline{\Omega})$ образует в $L^p(\Omega)$ плотное подпространство. Сопряженное пространство к $L^p(\Omega)$ изоморфно пространству $L^q(\Omega)$, где $1/p + 1/q = 1$ и $p < \infty$. Следовательно, пространство $L^p(\Omega)$ рефлексивно при $1 < p < \infty$. Показатель $q = p/(p-1)$, определяемый из равенства $1/p + 1/q = 1$, называется *сопряженным по Гёльдеру показателем* для показателя p. Мы будем часто обозначать его через p'. Наконец, пространство $L^2(\Omega)$ – *гильбертово пространство* со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_\Omega u \cdot v \, dx.$$

7.2. Осреднение и аппроксимация гладкими функциями

Пространства $C^{k,\alpha}(\Omega)$, введенные в гл. 4, являются локальными пространствами. Локальные аналоги пространств L^p мы вводим как линейные прстранства измеримых функций, локально интегрируемых в p-й степени по Ω, и обозначаем через $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Пространства $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ не нормируемы, но в них можно ввести топологию. А именно, будем говорить, что последовательность $\{u_m\}$ сходится к u в смысле $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, если последовательность $\{u_m\}$ сходится к u в метрике пространства $L^p(\Omega')$ для каждой области $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Пусть ρ – неотрицательная функция из $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, обращающаяся в нуль вне единичного шара $B_1(0)$ и удовлетворяющая условию $\int \rho dx = 1$. Такую функцию нередко называют *сглаживающей*. Типичный пример такой функции – функция

$$\rho(x) = \begin{cases} c \ \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{для } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{для } |x| > 1, \end{cases}$$

где число c определяется из условия $\int \rho dx = 1$, график которой имеет колоколообразную форму. Для функции $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и числа $h > 0$ определим *осреднение* u_h с помощью свертки по формуле

$$u_h(x) = h^{-n} \int_\Omega \rho\left(\frac{x - y}{h}\right) u(y) \, dy. \tag{7.13}$$

Ясно, что u_h принадлежит $C^\infty(\Omega')$ в любой области $\Omega' \subset\subset \Omega$, если только $h < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Если же $u \in L^1(\Omega)$ и область Ω ограничена, то при любом $h > 0$ функция u_h принадлежит $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

При $h \to 0$ функция $y \mapsto h^{-n}\rho\left(\dfrac{x-y}{h}\right)$ стремится к дельта-функции Дирака, сосредоточенной в точке x. Важной особенностью осреднений u_h, которую мы сейчас слегка наметили, является тот смысл, в котором u_h аппроксимируют u при $h \to 0$. Грубо говоря, если функция u принадлежит локальному пространству, то осреднения u_h аппроксимируют u в естественной топологии этого пространства.

Л е м м а 7.1. *Пусть $u \in C^0(\Omega)$. Тогда осреднения u_h сходятся к функции u равномерно в любой области $\Omega' \subset\subset \Omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$u_h(x) = h^{-n} \int_{|x-y| \leqslant h} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y)\, dy =$$

$$\left(\text{замена } z = \frac{x-y}{h} \right) = \int_{|z| \leqslant 1} \rho(z)\, u(x - hz)\, dz;$$

следовательно, если $\Omega' \subset\subset \Omega$ и $2h < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, то

$$\sup_{\Omega'} |u - u_h| \leqslant \sup_{x \in \Omega'} \int \rho(z)\, |u(x) - u(x - hz)|\, dz \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in \Omega'} \sup_{|z| \leqslant 1} |u(x) - u(x - hz)|.$$

Так как u равномерно непрерывна на множестве $B_h(\Omega') = \{x \mid \operatorname{dist}(x, \Omega') < h\}$, то u_h стремится к u равномерно в Ω'. □

Сходимость, о которой говорится в лемме 7.1, будет равномерной по всей области Ω, если функция u непрерывна вплоть до границы $\partial\Omega$ и равна на ней нулю. Более того, если $u \in C^0(\overline{\Omega})$ и существует функция $\tilde{u}$ такая, что $\tilde{u} = u$ в Ω и $\tilde{u} \in C^0(\tilde{\Omega})$ для некоторой области $\tilde{\Omega} \supset\supset \Omega$, то осреднение $\tilde{u}_h$ функции $\tilde{u}$ в области $\tilde{\Omega}$ при $h \to 0$ сходится к u равномерно в Ω.

Процесс осреднения может быть применен также для аппроксимации непрерывных по Гёльдеру функций. В частности, если $u \in C^\alpha(\Omega)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то

$$[u_h]_{\alpha;\, \Omega'} \leqslant [u]_{\alpha;\, \Omega''}, \tag{7.14}$$

где $\Omega'' = B_h(\Omega')$ и, следовательно, осреднения u_h при $h \to 0$ стремятся к u в смысле метрики $C^{\alpha'}(\Omega')$ при любых $\alpha' < \alpha$ и $\Omega' \subset\subset \Omega$. Используя лемму 6.37 и лемму 7.3 из следующего раздела, можно получить результаты об аппроксимации функций из $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ (см. раздел 6.3).

Обратимся теперь к вопросу об аппроксимации функций из пространств $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Л е м м а 7.2. *Пусть $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(L^p(\Omega))$, $p < \infty$. Тогда осреднения u_h при $h \to 0$ сходятся к u в смысле $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(L^p(\Omega))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя неравенство Гёльдера, мы получаем из (7.13), что

$$|u_h(x)|^p \leqslant \int_{|z| \leqslant 1} \rho(z)\, |u(x - hz)|^p dz;$$

поэтому если $\Omega' \subset\subset \Omega$ и $2h < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, то

$$\int_{\Omega'} |u_h|^p dx \leqslant \int_{\Omega'} \int_{|z| \leqslant 1} \rho(z)\, |u(x - hz)|^p dz dx =$$

$$= \int_{|z| \leqslant 1} \rho(z) \left(\int_{\Omega'} |u(x - hz)|^p dx \right) dz \leqslant \int_{B_h(\Omega')} |u|^p dx,$$

где $B_h(\Omega') = \{ x \mid \operatorname{dist}(x, \Omega') < h \}$. Следовательно,

$$\| u_h \|_{L^p(\Omega')} \leqslant \| u \|_{L^p(\Omega'')}, \qquad \Omega'' = B_h(\Omega'). \tag{7.15}$$

Доказательство теперь можно завершить с помощью аппроксимации, опираясь на лемму 7.1. Пусть $\epsilon > 0$ и w – такая непрерывная в Ω функция, что $\| u - w \|_{L^p(\Omega'')} < \epsilon$, где $\Omega'' = B_{h'}(\Omega')$ и $2h' < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. В силу леммы 7.1 для достаточно малых h справедливо неравенство $\| w - w_h \|_{L^p(\Omega')} \leqslant \epsilon$. Применяя оценку (7.15) к разности $u - w$, мы получаем неравенство

$$\| u - u_h \|_{L^p(\Omega')} \leqslant \| u - w \|_{L^p(\Omega')} + \| w - w_h \|_{L^p(\Omega')} +$$

$$+ \| u_h - w_h \|_{L^p(\Omega')} \leqslant 2\epsilon + \| u - w \|_{L^p(\Omega'')} \leqslant 3\epsilon$$

для достаточно малых $h \leqslant h'$. Следовательно, осреднения u_h сходятся к функции u в $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Утверждение для функции $u \in L^p(\Omega)$ получается из установленного результата, если продолжить функцию нулем вне Ω и применить этот результат в $L^p_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$. □

7.3. Слабые производные

Пусть функция u локально интегрируема на Ω, а α – произвольный мультииндекс. Локально интегрируемая функция v называется α-й *слабой производной* функции u, если для всех функций $\varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ выполняется равенство

$$\int_\Omega \varphi v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \cdot D^\alpha \varphi \, dx. \tag{7.16}$$

В этом случае мы пишем $v = D^\alpha u$. Подчеркнем, что призводная $D^\alpha u$ определена с точностью до значений на множестве меры нуль. Поточечные соотношения, включающие в себя слабые производные, будем всегда понимать выполняющимися почти всюду. Функцию, имеющую все слабые производные первого порядка, будем называть *слабо дифференцируемой*. Функцию, имеющую все слабые производные до порядка k включительно, будем называть *k раз слабо дифференцируемой*. Линейное пространство k раз слабо дифференцируемых функций будем обозначать через $W^k(\Omega)$. Ясно, что $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$. Понятие слабой дифференцируемости является обобщением понятия классической дифференцируемости, что легко устанавливается с помощью интегрирования по частям (формула (7.16)).

Перейдем к рассмотрению основных свойств слабо дифференцируемых функций. Первая лемма описывает связь слабых производных и осреднений.

Л е м м а 7.3. *Пусть $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, а α – мультииндекс. Предположим, что существует $D^\alpha u$. Тогда при выполнении условия* $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > h$ *справедливо равенство*

$$D^\alpha u_h(x) = (D^\alpha u)_h(x). \tag{7.17}$$

Доказательство. Дифференцируя под знаком интеграла и используя (7.16), получаем

$$D^\alpha u_h(x) = h^{-n} \int_\Omega \left(D_x^\alpha \rho\left(\frac{x-y}{h}\right)\right) u(y)\,dy =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} h^{-n} \int_\Omega \left(D_y^\alpha \rho\left(\frac{x-y}{h}\right)\right) u(y)\,dy =$$

$$= h^{-n} \int_\Omega \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) D^\alpha u(y)\,dy = (D^\alpha u)_h(x). \square$$

Из лемм 7.1, 7.3 и определения (7.16) автоматически следует основная теорема об аппроксимации слабых производных, доказательство которой мы оставляем читателю.

Теорема 7.4. *Локально интегрируемая функция v является α-й слабой производной локально интегрируемой функции u, $v = D^\alpha u$, тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{u_m\}$ функций из $C^\infty(\Omega)$, сходящаяся к u в $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, производные которых $D^\alpha u_m$ сходятся к v в $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Это эквивалентное описание слабых производных можно использовать как их определение. Производные, получающиеся при таком определении, обычно называют *сильными производными.* Теорема 7.4 утверждает, что понятия слабых и сильных производных совпадают. Благодаря теореме 7.4 многие результаты классического дифференциального исчисления могут быть с помощью аппроксимаций перенесены на слабые производные. В частности, справедлива *формула дифференцирования произведения* двух функций

$$D(uv) = u \cdot (Dv) + (Du) \cdot v \tag{7.18}$$

для всех $u, v \in W^1(\Omega)$ таких; что $uv, u \cdot Dv + (Du) \cdot v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (см. задачу 7.4). Аналогично, если функция ψ отображает область Ω на область $\tilde\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\psi \in C^1(\Omega)$, $\psi^{-1} \in C^1(\tilde\Omega)$ и если $u \in W^1(\Omega)$, то $v = u \circ \psi^{-1} \in W^1(\tilde\Omega)$ и применима обычная формула замены переменных, т.е.

$$D_i u(x) = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} D_{y_j} v(y) \tag{7.19}$$

для почти всех $x \in \Omega$, $y \in \tilde\Omega$, $y = \psi(x)$ (см. задачу 7.5).

Важно отметить, что локально равномерно непрерывная по Липшицу функция слабо дифференцируема, т.е. $C^{0,1}(\Omega) \subset W^1(\Omega)$. Это утверждение следует из того, что функции из пространства $C^{0,1}(\Omega)$ абсолютно непрерывны на каждом прямолинейном отрезке, лежащем в Ω. Следовательно, их частные производные (существующие почти всюду) удовлетворяют соотношению (7.1), а поэтому почти всюду совпадают со слабыми производными. С помощью осреднений можно в действительности доказать больше: функция слабо дифференцируема тогда и только тогда, когда она эквивалентна абсолютно непрерывной на почти всех лежащих в Ω и параллельных координатным осям отрезкам функции, частные производные которой локально интегрируемы (см. задачу 7.8). Основные свойства слабого дифференцирования, о которых говорится в этом и следующем разделах, могут быть также выведены и из этого свойства.

7.4. Цепное правило

Пополним основные правила слабого дифференцирования следующим простым цепным правилом.

Лемма 7.5. *Пусть* $f \in C^1(\mathbf{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbf{R})$ *и* $u \in W^1(\Omega)$. *Тогда композиция* $f \circ u \in W^1(\Omega)$ *и* $D(f \circ u) = f'(u) \cdot Du$.

Доказательство. Пусть $u_m \in C^1(\Omega)$, $m = 1, 2, \ldots$, а последовательности $\{u_m\}$, $\{Du_m\}$ сходятся в $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ к u, Du соответственно. Тогда для $\Omega' \subset\subset \Omega$ имеем

$$\int_{\Omega'} |f(u_m) - f(u)|\, dx \leqslant \sup|f'| \int_{\Omega'} |u_m - u|\, dx \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

$$\int_{\Omega'} |f'(u_m) Du_m - f'(u) Du|\, dx \leqslant \sup|f'| \cdot \int_{\Omega'} |Du_m - Du|\, dx +$$

$$+ \int_{\Omega'} |f'(u_m) - f'(u)|\,|Du|\, dx.$$

Некоторая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, которую мы обозначим также через $\{u_m\}$, сходится почти всюду в Ω' к u, а так как функция f' непрерывна, то и последовательность $\{f'(u_m)\}$ сходится к $f'(u)$ почти всюду в Ω'. Поэтому последний интеграл стремится к нулю в силу теоремы о мажорированной сходимости. Следовательно, последовательности $\{f(u_m)\}$, $\{f'(u_m) Du_m\}$ сходятся к $f(u)$, $f'(u)Du$ соответственно, а это и означает, что $Df(u) = f'(u) \cdot Du$. □

Определим положительную и отрицательную части функции u следующими равенствами:

$$u^+ = \max\{u, 0\}, \qquad u^- = \min\{u, 0\}.$$

Ясно, что $u = u^+ + u^-$ и $|u| = u^+ - u^-$. Из леммы 7.5 можно получить следующее правило дифференцирования этих функций.

Лемма 7.6. *Пусть* $u \in W^1(\Omega)$. *Тогда* $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$ *и*

$$Du^+ = \begin{cases} Du, & \text{если } u > 0, \\ 0, & \text{если } u \leqslant 0, \end{cases} \qquad Du^- = \begin{cases} 0, & \text{если } u \geqslant 0, \\ Du, & \text{если } u < 0, \end{cases}$$

$$D|u| = \begin{cases} Du, & \text{если } u > 0, \\ 0, & \text{если } u = 0, \\ -Du, & \text{если } u < 0. \end{cases} \tag{7.20}$$

Доказательство. Для $\epsilon > 0$ определим функцию

$$f_\epsilon(u) = \begin{cases} (u^2 + \epsilon^2)^{1/2} - \epsilon, & \text{если } u > 0, \\ 0, & \text{если } u \leqslant 0. \end{cases}$$

Применяя к ней лемму 7.5, имеем

$$\int_\Omega f_\epsilon(u) \cdot D\varphi dx = - \int_{u>0} \varphi \cdot \frac{u \cdot Du}{(u^2 + \epsilon^2)^{1/2}} dx$$

для всех $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Устремляя $\epsilon \to 0$, получаем

$$\int_\Omega u^+ D\varphi dx = - \int_{u>0} \varphi \cdot Du dx,$$

что и доказывает (7.20) для u^+. Остальные утверждения следуют из равенств $u^- = -(-u)^+$ и $|u| = u^+ - u^-$. □

Лемма 7.7. *Пусть $u \in W^1(\Omega)$. Тогда $Du = 0$ почти всюду на любом множестве, на котором функция u постоянна.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать постоянное значение функции равным нулю. Тогда результат сразу следует из (7.20), так как $Du = Du^+ + Du^-$. □

Функцию, непрерывную и имеющую кусочно непрерывные первые производные, будем называть кучочно-гладкой. Следующее цепное правило обобщает леммы 7.5 и 7.6.

Теорема 7.8. *Пусть функция f — кусочно-гладкая на $\mathbf{R}$ и $f' \in L^\infty(\mathbf{R})$. Тогда если $u \in W^1(\Omega)$, то $f \circ u \in W^1(\Omega)$. Кроме того, если L — множество точек излома функции f, то справедливо равенство*

$$D(f \circ u) = \begin{cases} f'(u) Du, & \text{если } u \notin L, \\ 0, & \text{если } u \in L. \end{cases} \tag{7.21}$$

Доказательство. Используя индукцию, можно свести доказательство теоремы к рассмотрению случая одного излома. Без ограничения общности можно считать, что эта угловая точка расположена в начале координат. Пусть функции $f_1, f_2 \in C^1(\mathbf{R})$ удовлетворяют условиям f_1', $f_2' \in L^\infty(\mathbf{R})$, $f_1(u) = f(u)$ для $u \geqslant 0$ и $f_2(u) = f(u)$ для $u \leqslant 0$. Тогда, так как $f(u) = f_1(u^+) + f_2(u^-)$, то утверждение теоремы следует из лемм 7.5 и 7.6. □

Объединяя лемму 7.7 и теорему 7.8, мы видим, что если h — функция на $\mathbf{R}$, принимающая конечное число значений, такая, что $h(u) = f'(u)$ для $u \notin L$, то $Df(u) = h(u) \cdot Du$. Цепное правило в этом виде обобщается на непрерывные по Липшицу функции f и функции $u \in W^1(\Omega)$, для которых $h(u) \cdot Du \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Доказательство этого утверждения требует больших сведений из теории меры, нежели мы используем; однако оно является следствием характеризации слабо дифференцируемых функций, данной в задаче 7.8.

7.5. Пространства $W^{k,p}$

Пространства $W^{k,p}(\Omega)$ являются банаховыми пространствами, аналогичными в некотором смысле банаховым пространствам $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. В $W^{k,p}(\Omega)$ понятие непрерывной дифференцируемости заменено на слабую дифференцируемость, а непрерывность по Гёльдеру – на интегрируемость в p-й степени. При $p \geqslant 1$ и неотрицательном целом k мы положим

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \in W^k(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ для всех } |\alpha| \leqslant k \}.$$

Ясно, что $W^{k,p}(\Omega)$ является линейным пространством. Норма в $W^{k,p}(\Omega)$ определяется равенством

$$\| u \|_{k,p;\Omega} = \| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha u|^p dx \Big)^{1/p}. \tag{7.22}$$

Мы будем также использовать обозначение $\| u \|_{k,p}$ вместо $\| u \|_{k,p;\Omega}$ там, где это не будет вызывать неясности. Норму, эквивалентную норме $\| u \|_{k,p}$, можно ввести равенством

$$\| u \|'_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \| D^\alpha u \|_p. \tag{7.23}$$

Проверку того, что пространство $W^{k,p}(\Omega)$ является банаховым пространством с нормой (7.22), мы оставляем читателю (задача 7.10).

Банахово пространство $W_0^{k,p}(\Omega)$ является замыканием $C_0^k(\Omega)$ в метрике $W^{k,p}(\Omega)$. Пространства $W^{k,p}(\Omega)$ и $W_0^{k,p}(\Omega)$ не совпадают для ограниченных Ω. В случае $p = 2$ пространства $W^{k,2}(\Omega)$ и $W_0^{k,2}(\Omega)$ являются гильбертовыми пространствами со скалярным произведением

$$(u, v)_k = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant k} D^\alpha u \cdot D^\alpha v dx. \tag{7.24}$$

Их мы будем обозначать через $H^k(\Omega)$ и $H_0^k(\Omega)$ соответственно.

Ряд функционально-аналитических свойств пространств $W^{k,p}(\Omega)$ и $W_0^{k,p}(\Omega)$ являются следствием их естественного вложения в произведение N_k экземпляров пространств $L^p(\Omega)$, где N_k – число мультииндексов, удовлетворяющих условию $|\alpha| \leqslant k$. Поскольку конечные произведения и замкнутые подпространства сепарабельного (рефлексивного) банахова пространства являются снова сепарабельными (рефлексивными) пространствами (см. [75]), мы получим, что пространства $W^{k,p}(\Omega)$ и $W^{k,p}(\Omega)$ сепарабельны при $1 \leqslant p < \infty$ (рефлексивны при $1 < p < \infty$).

Цепное правило (теорема 7.8) также переносится на пространства $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$. Действительно, в качестве следствия теоремы 7.8 и определений пространств $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ непосредственно получаем, что пространство $W^1(\Omega)$ в формулировке теоремы 7.8 можно заменить на пространство $W^{1,p}(\Omega)$, а если дополнительно $f(0) = 0$, то и на $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Локальные пространства $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ определяются как пространства функций, принадлежащих $W^{k,p}(\Omega')$ для всех $\Omega' \subset\subset \Omega$. Теорема 7.4 показывает, что функции из пространства $W^{1,p}(\Omega)$, имеющие компактные носители, на самом деле принадлежат пространству $W_0^{1,p}(\Omega)$. Более того, функции из $W^{1,p}(\Omega)$, непрерывно обращающиеся в нуль на $\partial\Omega$, принадлежат на самом деле пространству $W_0^{1,p}(\Omega)$, поскольку их можно приблизить функциями с компактными носителями.

Пространства Соболева с $p = \infty$ и пространства Липшица совпадают. В частности, $W_{\text{loc}}^{k,\infty}(\Omega) = C^{k-1,1}(\Omega)$ для любой области Ω и $W^{k,\infty}(\Omega) = C^{k-1,1}(\Omega)$ для области Ω с достаточно гладкой (например, липшицевой) границей $\partial\Omega$ (см. задачу 7.7).

7.6. Теоремы о плотности

Из лемм 7.2 и 7.3 следует, что если функция u принадлежит пространству $W^{k,p}(\Omega)$, то для всех мультииндексов α, удовлетворяющих неравенству $|\alpha| \leqslant k$, производные $D^\alpha u_h$ стремятся при $h \to 0$ к производной $D^\alpha u$ в смысле $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$. Используя этот факт, докажем общий результат об аппроксимации.

Теорема 7.9. *Подпространство* $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *плотно в* $W^{k,p}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть Ω_j, $j = 1, 2, \ldots,$ — подобласти области Ω, удовлетворяющие соотношениям $\Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1} \subset\subset \Omega$ и $\cup\Omega_j = \Omega$, и пусть $\{\psi_j\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ — разбиение единицы (см. задачу 6.8), подчиненное покрытию $\{\Omega_{j+1} - \Omega_{j-1}\}$; Ω_0 и Ω_{-1} определяем как пустые множества. Тогда для произвольной $u \in W^{k,p}(\Omega)$ и произвольного $\epsilon > 0$ мы можем выбрать числа h_j, $j = 1, 2, \ldots,$ удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{gathered} h_j \leqslant \operatorname{dist}(\Omega_j, \partial\Omega_{j+1}), \quad j \geqslant 1, \\ \|(\psi_j u)_{h_j} - \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leqslant \epsilon/2^j. \end{gathered} \tag{7.25}$$

Обозначая $v_j = (\psi_j u)_{h_j}$, из (7.25) получаем, что только конечное число v_j не обращаются в нуль на произвольном подмножестве $\Omega' \subset\subset \Omega$. Следовательно, функция $v = \Sigma v_j$ принадлежит пространству $C^\infty(\Omega)$. Кроме того,

$$\|u - v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leqslant \Sigma \|v_j - \psi_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leqslant \epsilon.$$

Этим завершается доказательство. □

Теорема 7.9 показывает, что пространство $W^{k,p}(\Omega)$ можно определить как пополнение пространства $C^\infty(\Omega)$ по норме (7.22). Во многих случаях такое определение предпочтительнее.

В формулировке теоремы 7.9 в случае произвольной области Ω заменить $C^\infty(\Omega)$ на $C^\infty(\bar\Omega)$ нельзя. Однако $C^\infty(\bar\Omega)$ плотно в $W^{k,p}(\Omega)$ для широкого класса областей Ω. В этот класс входят, например, области класса C^1 (см. задачу 7.11). Справедлив следующий более общий факт: если область Ω удовлетворяет *условию сегмента* (это означает, что существуют локально конечное открытое покрытие $\{\mathcal{U}_i\}$ границы $\partial\Omega$ и соответствующие векторы y^i такие, что $x + ty^i \in \Omega$ для всех $x \in \bar\Omega \cap \mathcal{U}_i$ и $t \in (0,1)$), то пространство $C^\infty(\bar\Omega)$ плотно в $W^{k,p}(\Omega)$ (см. [4]).

7.7. Теоремы вложения

Этот и следующий разделы посвящены изучению связи между значениями в точках и интегральными свойствами слабо дифференцируемых функций и их производных. Один из простейших результатов такого типа имеет вид: слабо дифференцируемая функция одной переменной обязательно абсолютно непрерывна. В этом разделе мы докажем хорошо известные *неравенства Соболева* для функций из $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Теорема 7.10.

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{np/(n-p)}(\Omega) & \text{при } p < n, \\ C^0(\bar{\Omega}) & \text{при } p > n. \end{cases}$$

Более того, существует постоянная $C = C(n, p)$ такая, что для любой функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\| u \|_{np/(n-p)} \leqslant C \| Du \|_p \text{ при } p < n, \\ &\sup_\Omega |u| \leqslant C |\Omega|^{1/n - 1/p} \| Du \|_p \text{ при } p > n. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Доказательство. Сначала докажем оценки (7.26) для функций из $C_0^1(\Omega)$. Пусть $p = 1$. Так как для любой функции u из $C_0^1(\Omega)$ и для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, выполняется неравенство $|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{x_i} |D_i u| \, dx_i$, то

$$|u(x)|^{n/(n-1)} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| \, dx_i \right)^{1/(n-1)}. \tag{7.27}$$

Неравенство (7.27) последовательно проинтегрируем по каждой переменной x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем после каждого интегрирования применим обобщенное неравенство Гёльдера (7.11) с показателями $p_1 = \ldots p_n = n - 1$ и $m = n - 1$. Получим неравенство

$$\begin{aligned} \| u \|_{n/(n-1)} &\leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \int_\Omega |D_i u| \, dx \right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |D_i u| \, dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \| Du \|_1. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Тем самым доказано неравенство (7.26) для случая $p = 1$. Чтобы доказать это неравенство для остальных значений p, заменим u в неравенстве (7.28) некоторой степенью $|u|^\gamma$. При $\gamma > 1$ в силу неравенства Гёльдера получим оценки

$$\begin{aligned} \| |u|^\gamma \|_{n/(n-1)} &\leqslant \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \int_\Omega |u|^{\gamma - 1} |Du| \, dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \| |u|^{\gamma - 1} \|_{p'} \cdot \| Du \|_p. \end{aligned}$$

Для $p < n$ мы возьмем число γ удовлетворяющим равенству $\gamma n/(n-1) = (\gamma - 1)p' = (\gamma-1)p/(p-1)$, т.е. $\gamma = (n-1)p/n-p$. Получим требуемое неравенство

$$\| u \|_{np/(n-p)} \leqslant (\gamma/\sqrt{n}) \cdot \| Du \|_p .$$

В случае $p > n$ требуемая оценка получается немедленно, если объединить неравенства (7.34) с $q = \infty$ и $\mu = 1/n$ и (7.37) из следующего раздела. Здесь мы дадим другое доказательство, которое опирается на уже доказанную оценку в случае $p = 1$. Введем (при $p > n$) функцию $\tilde{u} = \sqrt{n}\, |u| / \| Du \|_p$ и предположим, что $|\Omega| = 1$. Тогда получаем $\| \tilde{u}^\gamma \|_{n'} \leqslant \gamma \| \tilde{u}^{\gamma-1} \|_{p'}$, $n' = n/(n-1)$, $p' = p/(p-1)$, т.е.

$$\| \tilde{u} \|_{\gamma n'} \leqslant \gamma^{1/\gamma} \| \tilde{u} \|^{1-1/\gamma}_{p'(\gamma-1)} \leqslant \gamma^{1/\gamma} \| \tilde{u} \|^{1-1/\gamma}_{\gamma p'},$$

так как $|\Omega| = 1$. Теперь подставим вместо γ значения δ^ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, где $\delta = n'/p' > 1$. Получаем

$$\| \tilde{u} \|_{n'\delta^\nu} \leqslant \delta^{\nu\delta^{-\nu}} \| \tilde{u} \|^{1-\delta^{-\nu}}_{n'\delta^{\nu-1}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Итерируя эти неравенства начиная с $\nu = 1$ и используя оценку (7.28), придем к неравенству $\| \tilde{u} \|_{n'\delta^\nu} \leqslant \delta^{\Sigma \nu \delta^{-\nu}} \equiv \chi$ для любого целого ν. При $\nu \to \infty$ в силу утверждения задачи 7.1 получаем $\sup\limits_\Omega \tilde{u} \leqslant \chi$, и поэтому $\sup\limits_\Omega |u| \leqslant (\chi/\sqrt{n}) \cdot \| Du \|_p$. Чтобы освободиться от ограничения $|\Omega| = 1$, сделаем преобразование переменных вида $y_i = |\Omega|^{1/n} x_i$. Мы получим тогда

$$\sup_\Omega u \leqslant (\chi/\sqrt{n}) \cdot |\Omega|^{1/n - 1/p} \| Du \|_p,$$

что и требовалось установить.

Для перенесения оценок (7.2) на произвольные функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ возьмем последовательность $\{u_m\}$ функций из $C_0^1(\Omega)$, стремящуюся к u в метрике $W^{1,p}(\Omega)$. Применяя оценки (7.26) к разности $u_{m_1} - u_{m_2}$, мы получим, что последовательность $\{u_m\}$ является последовательностью Коши в $L^{np/(n-p)}(\Omega)$ при $p < n$ и в $C^0(\bar{\Omega})$ при $p > n$. Следовательно, предельная функция u также лежит в $L^{np/(n-p)}(\Omega)$ при $p < n$ и соответственно в $C^0(\bar{\Omega})$ при $p > n$ и удовлетворяет оценке (7.26). □

Замечание. Наилучшая постоянная C в оценке (7.26) для случая $p < n$ была вычислена Родемичем [248] (см. также [33], [278]), который показал, что

$$C = \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left(\frac{n!\,\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n/p)\,\Gamma(n+1-n/p)} \right)^{1/n} \gamma^{1-1/p}, \quad \gamma = n(p-1)/(n-p).$$

При $p = 1$ это число равно хорошо известной постоянной $n^{-1}(\omega_n)^{-1/n}$.

Будем говорить, что банахово пространство $\mathcal{B}_1$ *непрерывно вложено* в банахово пространство $\mathcal{B}_2$, и писать $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$, если существует ограниченное линейное взаимно однозначное отображение $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$. Теорема 7.10 может быть записана в виде:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \to L^{np/(n-p)}(\Omega), \quad \text{если} \quad p < n,$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \to C^0(\bar{\Omega}), \quad \text{если} \quad p > n.$$

Применив утверждение теоремы 7.10 k раз, мы придем к ее обобщению на случай пространств $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Следствие 7.11.

$$W_0^{k,p}(\Omega) \begin{cases} \nearrow L^{np/(n-kp)}(\Omega) & \textit{для } kp < n, \\ \searrow C^m(\bar{\Omega}) & \textit{для } 0 \leqslant m < k - n/p. \end{cases}$$

Второй случай есть следствие первого, как и случай $p > n$ теоремы 7.10.

Оценки (7.26) и их обобщения на пространство $W_0^{k,p}(\Omega)$ показывают, в частности, что на $W_0^{k,p}(\Omega)$ можно определить эквивалентную (7.22) норму равенством

$$\| u \|_{W_0^{k,p}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = k} | D^\alpha u |^p dx \Big)^{1/p}. \tag{7.29}$$

В следствии 7.11 пространство $W_0^{k,p}(\Omega)$ в общем случае нельзя заменить на $W^{k,p}(\Omega)$. Однако эта замена может быть обоснована для широкого класса областей. В этот класс областей входят, например, области с границами, непрерывными по Липшицу (см. теорему 7.26). Более общо: если область Ω удовлетворяет *равномерному условию внутреннего конуса* (это значит, что существует фиксированный конус K_Ω такой, что каждая точка $x \in \Omega$ является вершиной конгруэнтного конусу K_Ω конуса $K_\Omega(x) \subset \bar{\Omega}$), то имеют место вложения

$$W^{k,p}(\Omega) \begin{cases} \nearrow L^{np/(n-kp)}(\Omega) & \textit{для } kp < n, \\ \searrow C_B^m(\Omega) & \textit{для } 0 \leqslant m < k - n/p, \end{cases} \tag{7.30}$$

где $C_B^m(\Omega) = \{ u \in C^m(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^\infty(\Omega) \text{ для всех } |\alpha| \leqslant m \}$.

7.8. Оценки потенциалов и теоремы вложения

Теоремы вложения предыдущего раздела могут быть получены другим способом с помощью оценок некоторых потенциалов. Пусть $\mu \in (0, 1]$. Определим оператор V_μ на пространстве $L^1(\Omega)$ с помощью потенциала Рисса

$$(V_\mu f)(x) = \int_\Omega | x - y |^{n(\mu - 1)} f(y)\, dy. \tag{7.31}$$

Оператор V_μ определен для всех $f \in L^1(\Omega)$ и отображает пространство $L^1(\Omega)$ в себя. Этот факт вытекает из следующей далее леммы. Но прежде заметим, что если в (7.31) взять $f \equiv 1$, то получим

$$V_\mu 1 \leqslant \mu^{-1} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^\mu. \qquad (7.32)$$

Ибо если выбрать $R > 0$ такое, что $|\Omega| = |B_R(x)| = \omega_n R^n$, то

$$\int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)} dy \leqslant \int_{B_R(x)} |x-y|^{n(\mu-1)} dy =$$

$$= \mu^{-1} \omega_n R^{n\mu} = \mu^{-1} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^\mu.$$

Л е м м а 7.12. *Оператор V_μ непрерывно отображает пространство $L^p(\Omega)$ в пространство $L^q(\Omega)$ при любом q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, удовлетворяющем неравенствам*

$$0 \leqslant \delta = \delta(p, q) = p^{-1} - q^{-1} < \mu. \qquad (7.33)$$

Более того, для любой функции $f \in L^p(\Omega)$

$$\| V_\mu f \|_q \leqslant \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta} \right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p. \qquad (7.34)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем число $r \geqslant 1$ такое, что $r^{-1} = 1 + q^{-1} - p^{-1} = 1 - \delta$. Тогда $h(x-y) = |x-y|^{n(\mu-1)} \in L^r(\Omega)$, и в силу (7.32) получаем $\| h \|_r \leqslant \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta} \right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta}$. Оценку (7.34) можно теперь получить, приспосабливая обычное доказательство неравенство Юнга для сверток в $\mathbf{R}^n$. Записывая $h|f| = h^{r/q} h^{r(1-1/p)} |f|^{p/q} |f|^{p\delta}$, мы можем оценить с помощью неравенства Гёльдера (7.11)

$$|V_\mu f(x)| \leqslant \{ \int_\Omega h^r(x-y) |f(y)|^p dy \}^{1/q} \times$$

$$\times \{ \int_\Omega h^r(x-y)\, dy \}^{1-1/p} \cdot \{ \int_\Omega |f(y)|^p dy \}^\delta,$$

так что

$$\| V_\mu f(x) \|_q \leqslant \sup_\Omega \{ \int_\Omega h^r(x-y)\, dy \}^{1/r} \cdot \|f\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta} \right)^{1-\delta} \omega_n^{1-\mu} |\Omega|^{\mu-\delta} \|f\|_p. \quad \square$$

Отметим, что лемма 7.12 может быть усилена в том смысле, что оператор V_μ преобразует пространство $L^p(\Omega)$ в пространство $L^q(\Omega)$ непрерывно, если выполнены неравенства $p > 1$ и $\delta \leqslant \mu$. Доказательство этого факта осуществляется с помощью неравенств Харди и Литтлвуда (см. [319]). Однако для наших целей достаточно приведенного утверждения. Заметим, что при $p > \mu^{-1}$ оператор V_μ непрерывно отображает $L^p(\Omega)$ в $L^\infty(\Omega)$. Рассмотрим теперь промежуточный случай $p = \mu^{-1}$.

Лемма 7.13. *Пусть $f \in L^p(\Omega)$ и $g = V_{1/p}f$. Тогда существуют такие постоянные C_1 и C_2, зависящие только от n и p, что справедливо неравенство*

$$\int_\Omega \exp\left(\left[\frac{g}{C_1 \|f\|_p}\right]^{p'}\right)dx \leqslant C_2 |\Omega|, \qquad p' = p/(p-1). \tag{7.35}$$

Доказательство. Из леммы 7.12 для произвольного $q \geqslant p$ следует, что $\|g\|_q \leqslant q^{1-1/p+1/q}\omega_n^{1-1/p}|\Omega|^{1/q}\|f\|_p$, так что $\int_\Omega |g|^q dx \leqslant$ $\leqslant q^{1+q/p'}\omega_n^{q/p'}|\Omega|\cdot\|f\|_p^q$, и поэтому при $q \geqslant p-1$ $\int_\Omega |g|^{p'q}dx \leqslant$ $\leqslant p'q(\omega_n p'q\|f\|_p^{p'})^q|\Omega|$. Следовательно,

$$\int_\Omega \sum_{k=N_0}^{N} \frac{1}{k!}\left(\frac{|g|}{C_1\|f\|_p}\right)^{p'k} dx \leqslant$$

$$\leqslant p'|\Omega| \sum \left(\frac{p'\omega_n}{C_1^{p'}}\right)^k \frac{k^k}{(k-1)!}, \quad N_0 = [p].$$

Требуемая оценка (7.35) получается в силу теоремы о монотонной сходимости и (7.8), так как ряд в правой части сходится при $c_1^{p'} > e\omega_n p'$. □

Следующие леммы полезны для уяснения связи между слабыми производными и потенциалами, введенными выше.

Лемма 7.14. *Пусть $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$. Тогда*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n}\int_\Omega \frac{(x_i-y_i)D_iu(y)}{|x-y|^n}dy \quad \textit{почти всюду в } \Omega. \tag{7.36}$$

Доказательство. Предположим, что $u \in C_0^1(\Omega)$. Продолжим функцию u нулем вне Ω. Тогда для любого вектора ω такого, что $|\omega| = 1$, имеем $u(x) = -\int_0^\infty D_r u(x + r\omega)\,dr$. Интегрируя по ω, получаем

$$u(x) = -\frac{1}{n\omega_n}\int_0^\infty \int_{|\omega|=1} D_r u(x + r\omega)\,dr\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}\int_\Omega \frac{(x_i-y_i)D_iu(y)}{|x-y|^n}dy.$$

Теперь утверждение леммы следует из леммы 7.12 и того факта, что пространство $C_0^1(\Omega)$ плотно в $W_0^{1,1}(\Omega)$. □

Отметим, что из формулы (7.36) с помощью формулы интегрирования по частям (7.16) получается представление ньютоновым потенциалом функций класса $C_0^2(\Omega)$ – равенство (2.17). Мы также получаем для $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ оценку

$$|u| \leqslant \frac{1}{n\omega_n} V_{1/n} |Du|. \tag{7.37}$$

Объединяя результаты леммы 7.12 и неравенство (7.37), мы получаем вложение $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ для $p^{-1} - q^{-1} < n^{-1}$, которое почти совпадает с утверждением теоремы 7.10. Для целей этой книги достаточна и эта более слабая форма соответствующих вложений. К тому же, объединяя лемму 7.13 и неравенство (7.37), мы получим уточнение этого утверждения в случае $p = n$, выражающееся следующей теоремой.

Теорема 7.15. *Пусть $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$. Тогда существуют такие постоянные C_1 и C_2, зависящие только от n, что*

$$\int_\Omega \exp\left(\left[\frac{|u|}{C_1 \|Du\|_n}\right]^{\frac{n}{n-1}}\right) dx \leqslant C_2 |\Omega|. \tag{7.38}$$

Замечание. Оценка (7.37) легко обобщается на слабые производные высокого порядка. Для $u \in W_0^{k,1}(\Omega)$ она имеет вид

$$|u| \leqslant \frac{1}{(k-1)!\, n\,\omega_n} V_{k/n} |D^k u|. \tag{7.39}$$

С ее помощью и с помощью леммы 7.13 можно получить обобщение теоремы 7.15. А именно существуют такие постоянные C_1 и C_2, зависящие только от n и k, что если $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ с $n = kp$, то

$$\int_\Omega \exp\left(\left[\frac{|u|}{C_1 \|D^k u\|_p}\right]^{\frac{p}{p-1}}\right) dx \leqslant C_2 |\Omega|. \tag{7.40}$$

В случае $p > n$ теоремы вложения Соболева могут быть уточнены следующим образом.

Лемма 7.16. *Пусть область Ω выпукла и $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Тогда*

$$|u(x) - u_S| \leqslant \frac{d^n}{n|S|} \int_\Omega |x-y|^{1-n} |Du(y)|\, dy \quad \textit{почти всюду в } (\Omega), \tag{7.41}$$

где

$$u_S = \frac{1}{|S|}\int_S u(x)\,dx, \qquad d = \operatorname{diam}\Omega,$$

а S – произвольное измеримое подмножество Ω.

Доказательство. В силу теоремы 7.9 достаточно доказать утверждение теоремы для функций u из $C^1(\Omega)$. В этом случае для произвольных точек $x, y \in \Omega$ мы можем записать, что

$$u(x) - u(y) = -\int\limits_0^{|x-y|} D_r u(x + r\omega)\,dr, \qquad \omega = \frac{y-x}{|y-x|}.$$

Интегрируя это соотношение по $y \in S$, получаем

$$|S| \cdot (u(x) - u_S) = -\int\limits_S dy \int\limits_0^{|x-y|} D_r u(x + r\omega)\,dr.$$

Ввводя функцию

$$V(x) = \begin{cases} |D_r u(x)|, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega, \end{cases}$$

имеем

$$|u(x) - u_S| \leqslant \frac{1}{|S|} \int\limits_{|x-y| \leqslant d} dy \int\limits_0^\infty V(x + r\omega)\,dr =$$

$$= \frac{1}{|S|} \int\limits_0^\infty \int\limits_{|\omega|=1} \int\limits_0^d V(x + ry)\rho^{n-1}\,d\rho\,d\omega\,dr =$$

$$= \frac{d^n}{n|S|} \int\limits_0^\infty \int\limits_{|\omega|=1} V(x + r\omega)\,d\omega\,dr = \frac{d^n}{n|S|} \int\limits_\Omega |x - y|^{1-n} |D_r u(y)|\,dy. \square$$

Мы можем теперь доказать теорему вложения Морри.

Т е о р е м а 7.17. *Пусть $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и $p > n$. Тогда $u \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, где $\gamma = 1 - n/p$. Более того, для любого шара $B = B_R$*

$$\operatorname*{osc}_{\Omega \cap B_R} u \leqslant CR^\gamma \| Du \|_p, \tag{7.42}$$

где $C = C(n, p)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Объединяя оценки (7.41) и (7.34) для случая, когда $S = \Omega = B$, $q = \infty$ и $\mu = n^{-1}$, получаем:

$$|u(x) - u_B| \leqslant C(n,p)R^\gamma \| Du \|_p \quad \text{почти всюду в } \Omega \cap B.$$

Отсюда следует требуемый результат, так как $|u(x) - u(y)| \leqslant$ $\leqslant |u(x) - u_B| + |u(y) - u_B| \leqslant 2C(n,p)R^\gamma \| Du \|_p$ почти всюду в $\Omega \cap B$. $\square$

Объединяя результаты теорем 7.10 и 7.17, получаем оценку для $u \in$ $\in W_0^{1,p}(\Omega)$ в случае $p > n$:

$$|u|_{0,\gamma} \leqslant C[1 + (\operatorname{diam}\Omega)^\gamma] \cdot \| Du \|_p. \tag{7.43}$$

Запишем результаты теорем 7.10, 7.15 и 7.17 в виде следующей диаграммы:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \begin{cases} \nearrow L^{np/(n-p)}(\Omega), & \text{если } p < n, \\ \longrightarrow L^\varphi(\Omega), & \text{если } \varphi = \exp(|t|^{n/(n-1)}) - 1, \ p = n, \\ \searrow C^\lambda(\overline{\Omega}), & \text{если } \lambda = 1 - n/p, \ p > n. \end{cases}$$

Здесь через $L^\varphi(\Omega)$ обозначено пространство Орлича, порождаемое функцией φ (более точное определение пространства $L^\varphi(\Omega)$ см. в [283]).

В этой книге для получения большинства априорных оценок будет достаточно более слабых форм неравенств Соболева, известных как *неравенства Пуанкаре.* Из лемм 7.12 и 7.14 мы имеем для $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leqslant \leqslant p < \infty$,

$$\| u \|_p \leqslant \left(\frac{1}{\omega_n} | \Omega | \right)^{1/n} \| Du \|_p, \tag{7.44}$$

а в силу лемм 7.12 и 7.16 для $u \in W^{1,p}(\Omega)$ в выпуклой области Ω

$$\| u - u_S \|_p \leqslant \left(\frac{\omega_n}{|S|} \right)^{1-1/n} d^n \| Du \|_p, \quad d = \operatorname{diam} \Omega. \tag{7.45}$$

7.9. Оценки Морри и Джона – Ниренберга

Перейдем теперь к рассмотрению потенциальных операторов V_μ на другом классе пространств и докажем результаты, принадлежащие Морри (теорема 7.19) и Джону и Ниренбергу (теорема 7.21). А именно, интегрируемую функцию f будем называть функцией класса $M^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, если существует такая постоянная K, что

$$\int_{\Omega \cap B_R} |f| \, dx \leqslant K \cdot R^{n(1-1/p)} \tag{7.46}$$

для любого шара B_R. Норму $\| f \|_{M^p(\Omega)}$ определим как наименьшую постоянную K, с которой выполяется неравенство (7.46). Легко видеть, что

$$L^p(\Omega) \subset M^p(\Omega), \quad L^1(\Omega) = M^1(\Omega), \quad L^\infty(\Omega) = M^\infty(\Omega).$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда $p \geqslant \mu^{-1}$.

Лемма 7.18. *Пусть $f \in M^p(\Omega)$ и $\delta = p^{-1} < \mu$. Тогда*

$$| V_\mu f(x) | \leqslant \frac{1-\delta}{\mu-\delta} (\operatorname{diam} \Omega)^{n(\mu-\delta)} \| f \|_{M^p(\Omega)} \text{ почти всюду в } \Omega. \tag{7.47}$$

Доказательство. Продолжим функцию f нулем вне Ω и определим $\nu(\rho) = \int_{B_\rho(x)} |f(y)| \, dy$. Тогда ($\rho = |x-y|$, $d = \operatorname{diam}\Omega$)

$$| V_\mu f(x) | \leqslant \int_\Omega \rho^{n(\mu-1)} |f(y)| \, dy = \int_0^d \rho^{n(\mu-1)} \nu'(\rho) \, d\rho =$$

$$= d^{n(\mu-1)} \nu(d) + n(1-\mu) \int_0^d \rho^{n(\mu-1)-1} \nu(\rho) \, d\rho \leqslant \frac{1-\delta}{\mu-\delta} d^{n(\mu-\delta)} K$$

в силу (7.46). □

Следующая теорема обобщает теорему 7.17.

Теорема 7.19. *Пусть $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Предположим, что существуют положительные постоянные K и α $(\alpha \leqslant 1)$ такие, что*

$$\int_{B_R} | Du | \, dx \leqslant K R^{n-1+\alpha} \quad \text{для всех шаров } B_R \subset \Omega. \tag{7.48}$$

Тогда $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ *и для любого шара* $B_R \subset \Omega$

$$\operatorname*{osc}_{B_R} u \leqslant CKR^{\alpha}, \tag{7.49}$$

где $C = C(n, \alpha)$. *Если* $\Omega = \tilde{\Omega} \cap \mathbf{R}^n_+ = \{x \in \tilde{\Omega} \mid x_n > 0\}$, $\tilde{\Omega}$ – *некоторая область* $\mathbf{R}^n$ *и неравенство* (7.48) *выполнено для всех шаров* $B_R \subset \tilde{\Omega}$, *то* $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \cap \tilde{\Omega})$ *и неравенство* (7.49) *выполнено для всех шаров* $B_R \subset \tilde{\Omega}$.

Теорема 7.19 получается в результате объединения утверждения леммы 7.16 ($S = \Omega$) и леммы 7.18.

В качестве следствия леммы 7.18 имеем следующее утверждение.

Лемма 7.20. *Пусть* $f \in M^p(\Omega)$ $(p > 1)$ *и* $g = V_\mu f$, $\mu = p^{-1}$. *Тогда существуют постоянные* C_1 *и* C_2, *зависящие только от* n *и* p, *такие, что справедливо неравенство*

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{|g|}{C_1 K}\right) dx \leqslant C_2 (\operatorname{diam} \Omega)^n, \tag{7.50}$$

где $K = \|f\|_{M^p(\Omega)}$.

Доказательство. Представив при $q \geqslant 1$ величину $|x - y|^{n(\mu - 1)}$ в виде

$$|x - y|^{n(\mu-1)} = |x - y|^{(\mu/q - 1)n/q} |x - y|^{n(1 - 1/q)(\mu/q + \mu - 1)}$$

и воспользовавшись неравенством Гёльдера, получаем неравенство

$$|g(x)| \leqslant (V_{\mu/q} |f|)^{1/q} (V_{\mu + \mu/q} |f|)^{1 - 1/q}.$$

В силу леммы 7.18

$$V_{\mu + \mu/q} |f| \leqslant \frac{(1 - \mu)q}{\mu} \cdot d^{n/(pq)} K \leqslant (p - 1) q \cdot d^{n/(pq)} K, \quad d = \operatorname{diam} \Omega.$$

Также, в силу леммы 7.12,

$$\int_\Omega V_{\mu/q} |f| \, dx \leqslant pq \omega_n^{(1 - 1/(pq))} |\Omega|^{1/(pq)} \|f\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant pq \omega_n K d^{n(1 - 1/p - 1/(pq))}.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega |g|^q dx \leqslant p(p - 1)^{q - 1} \omega_n q^n d^n K^q \leqslant$$
$$\leqslant p' \omega_n \{(p - 1) q K\}^q \cdot d^n, \quad p' = p/(p - 1).$$

Отсюда

$$\int_\Omega \sum_{m=0}^{N} \frac{|g|^m}{m! (C_1 K)^m} dx \leqslant p' \omega_n d^n \sum_{m=0}^{N} \left(\frac{p - 1}{C_1}\right)^m \frac{m^m}{m!} \leqslant C_2 \cdot d^n,$$

если $(p - 1)e < C_1$. Устремляя $N \to \infty$, получаем (7.50). □

Объединяя результаты леммы 7.16 и 7.20, имеем следующее утверждение

Теорема 7.21. *Пусть* Ω – *выпуклая область и* $u \in W^{1,1}(\Omega)$. *Предположим, что существует такая* K, *что для любого шара* B_R *справедливо* *неравенство*

$$\int\limits_{\Omega \cap B_R} |Du|\,dx \leqslant KR^{n-1}. \tag{7.51}$$

Тогда существуют такие зависящие только от n положительные постоянные σ_0 и C, что

$$\int\limits_{\Omega} \exp\left(\frac{\sigma}{K}|u - u_\Omega|\right)dx \leqslant C\cdot(\operatorname{diam}\Omega)^n, \tag{7.52}$$

где $\sigma = \sigma_0 \cdot |\Omega| \cdot (\operatorname{diam}\Omega)^{-n}$.

7.10. Теоремы о компактности

Пусть банахово пространство $\mathscr{B}_1$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathscr{B}_2$. Будем говорить, что $\mathscr{B}_1$ *компактно вложено* в $\mathscr{B}_2$, если оператор вложения $I: \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ компактен, т.е. если образ любого ограниченного в $\mathscr{B}_1$ множества является предкомпактным множеством в $\mathscr{B}_2$.

Сейчас мы для пространств $W_0^{1,p}(\Omega)$ докажем теорему о компактности Кондрашова.

Теорема 7.22. *Пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ компактно вложено:*

(i) *в пространство $L^q(\Omega)$ при любом $q < np/(n-p)$, если $p < n$,*

и

(ii) *в пространство $C^0(\overline{\Omega})$, если $p > n$.*

Доказательство. Утверждение (ii) является следствием теоремы Морри (теорема 7.17) и теоремы Арцела о равностепенно непрерывных семействах функций. Остановимся на утверждении (i) и докажем сначала его для случая $q = 1$. Пусть A – ограниченное множество в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Без ограничения общности можно считать, что $A \subset C_0^1(\Omega)$ и что $\|u\|_{1,p;\Omega} \leqslant 1$ для всех $u \in A$. Для $h > 0$ определим множество $A_h = \{u_h \mid u \in A\}$ из осреднений u_h функций u (см. формулу (7.13)). Покажем, что множество A_h является предкомпактным в $L^1(\Omega)$. Для $u \in A$ имеем

$$|u_h(x)| \leqslant \int\limits_{|z|\leqslant 1} \rho(z)\,|u(x-hz)|\,dz \leqslant h^{-n}\sup\rho\,\|u\|_1$$

и

$$|Du_h(x)| \leqslant h^{-1}\int\limits_{|z|\leqslant 1} |D\rho(z)|\cdot|u(x-hz)|\,dz \leqslant h^{-n-1}\sup|D\rho|\cdot\|u\|_1.$$

Поэтому множество A_h является ограниченным равностепенно непрерывным подмножеством $C^0(\overline{\Omega})$ и в силу теоремы Арцела будет предкомпактным в $C^0(\overline{\Omega})$. Следовательно, оно также предкомпактно в $L^1(\Omega)$. Для $u \in A$ справедлива следующая оценка:

$$|u(x) - u_h(x)| \leqslant \int\limits_{|z|\leqslant 1} \rho(z)\cdot|u(x) - u(x-hz)|\,dz \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|z|\leqslant 1} \rho(z) \int\limits_0^{h|z|} |D_r u(x - r\omega)|\,dr\,dz, \qquad \omega = z/|z|.$$

Интегрируя ее по x, получаем оценку

$$\int_\Omega |u(x) - u_h(x)|\, dx \leqslant h \int_\Omega |Du|\, dx \leqslant h \cdot |\Omega|^{1-1/p}.$$

Следовательно, u_h равномерно (по u из A) близко к u в $L^1(\Omega)$. А так как, как мы показали выше, при каждом $h > 0$ множество A_h вполне ограничено в $L^1(\Omega)$, то отсюда вытекает полная ограниченность множества A. Тем самым в случае $q = 1$ утверждение установлено.

Для распространения результата на случай произвольного $q < np/(n-p)$ оценим в силу (7.9) и теоремы 7.10

$$\|u\|_q \leqslant \|u\|_1^\lambda \|u\|_{np/(n-p)}^{1-\lambda} \leqslant \|u\|_1^\lambda (C\|Du\|_p)^{1-\lambda},$$

где $\lambda + (1-\lambda)(1/p - 1/n) = 1/q$. Таким образом, и при $q > 1$ ограниченное в $W_0^{1,p}(\Omega)$ множество является предкомпактным в $L^q(\Omega)$. Теорема доказана. □

Несложное обобщение теоремы 7.22 показывает, что вложения

$$W_0^{k,p}(\Omega) \begin{array}{l} \nearrow L^q(\Omega) \quad \text{для} \quad kp < n, \quad q < n/(n-kp), \\ \searrow C^m(\Omega) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant m < k - n/p \end{array}$$

компактны и что для некоторых классов областей Ω пространство $W_0^{k,p}(\Omega)$ можно заменить на $W^{k,p}(\Omega)$; см. теорему 7.26, задачу 7.14.

7.11. Разностные отношения

В дифференциальных уравнениях с частными производными слабая или классическая дифференцируемость функций часто может быть получена непосредственно из рассмотрения разностных отношений. Пусть функция u определена в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Обозначим через e_i единичный координатный вектор i-й оси. Как и в гл. 6, мы определим разностное отношение в направлении вектора e_i формулой

$$\Delta^h u(x) = \Delta_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \qquad h \neq 0. \tag{7.53}$$

Следующие фундаментальные леммы посвящены разностным отношениям функций из пространств Соболева.

Лемма 7.23. *Пусть $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Тогда для любой $\Omega' \subset\subset \Omega$ при $h < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ разность $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$ и имеет место оценка*

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leqslant \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Тогда

$$\Delta^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h D_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, \; x + \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, d\xi.$$

По неравенству Гёльдера

$$|\Delta^h u(x)|^p \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h |D_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, \ldots, x_n)|^p d\xi,$$

и следовательно,

$$\int_{\Omega'} |\Delta^h u(x)|^p dx \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h \int_{B_h(\Omega')} |D_i u|^p dx\, d\xi \leqslant \int_\Omega |D_i u|^p dx.$$

Обобщение результата на произвольные функции из $W^{1,p}(\Omega)$ получается с помощью аппроксимации и теоремы 7.9. □

Лемма 7.24. *Пусть $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Предположим, что существует постоянная K такая, что $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$ и $\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leqslant K$ для всех $h > 0$ и $\Omega' \subset\subset \Omega$, удовлетворяющих условию $h < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Тогда слабая производная $D_i u$ существует и удовлетворяет неравенству*

$$\|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K.$$

Доказательство. В силу слабой компактности ограниченных множеств в $L^p(\Omega')$ (задача 5.4) существуют стремящаяся к нулю последовательность чисел $\{h_m\}$, функция $v \in L^p(\Omega)$, $\|v\|_p \leqslant K$ такие, что для всех $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ выполняется соотношение

$$\int_\Omega \varphi \cdot \Delta^{h_m} u\, dx \to \int_\Omega \varphi \cdot v\, dx.$$

Если $h_m < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega)$, то

$$\int_\Omega \varphi \cdot \Delta^{h_m} u\, dx = -\int_\Omega u \cdot \Delta^{-h_m}\varphi\, dx \to -\int_\Omega u \cdot D_i\varphi\, dx.$$

Следовательно, $\int_\Omega \varphi \cdot v\, dx = -\int_\Omega u \cdot D_i\varphi\, dx$, откуда $v = D_i u$. □

7.12. Продолжение и интерполяция

При некоторых условиях на область Ω функции из соболевских пространств $W^{k,p}(\Omega)$ могут быть продолжены на все пространство $\mathbf{R}^n$ так, что продолженные функции будут принадлежать $W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$. Мы начинаем этот раздел с фундаментального результата о продолжении, аналогичного результату леммы 6.37. Он будет применен к обобщению ранее доказанных теорем вложения и для получения интерполяционных неравенств для норм соболевских пространств.

Теорема 7.25. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{k-1,1}$, $k \geqslant 1$. Тогда:*

(i) *$C^\infty(\bar\Omega)$ плотно в $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;*

(ii) *для любого открытого множества $\Omega' \supset\supset \Omega$ существует ограниченный линейный оператор продолжения E, действующий из $W^{k,p}(\Omega)$ в $W_0^{k,p}(\Omega')$, такой, что $Eu = u$ в области Ω и для всех $u \in W^{k,p}(\Omega)$*

$$\|Eu\|_{k,p;\Omega'} \leqslant C\|u\|_{k,p;\Omega}, \tag{7.54}$$

где $C = C(k, \Omega, \Omega')$.

Доказательство. Отметим, что в силу лемм 6.37 и 7.4 утверждения (i) и (ii) эквивалентны. Сначала рассмотрим результат о плотности, сформулированный в (i), для полупространства $\mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_n > 0\}$. Легко проверить, что функция $v_h(x)$, заданная формулой

$$v_h(x) = u_h(x + 2he_n) = h^{-n} \int_{y_n > 0} u(y)\rho\left(\frac{x + 2he_n - y}{h}\right)dy, \quad h > 0, \tag{7.55}$$

сходится при $h \to 0$ к функции u в метрике $W^{k,p}(\mathbf{R}^n_+)$. Соответствующее продолжение $E_0 u$ функции u на все пространство $\mathbf{R}^n$ можно определить так же, как в лемме 6.37, а именно:

$$E_0 u(x) = \begin{cases} u(x), & \text{для } x_n > 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} c_i u(x', -x_n/i), & \text{для } x_n < 0, \end{cases} \tag{7.5}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — постоянные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(-1/i)^m = 1, \qquad m = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Если $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n_+) \cap W^{k,p}(\mathbf{R}^n_+)$, то $E_0 u \in C^{k-1,1}(\mathbf{R}^n) \cap W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$ и, кроме того,

$$\| E_0 u \|_{k,p;\,\mathbf{R}^n} \leqslant C \| u \|_{k,p;\,\mathbf{R}^n_+}, \tag{7.57}$$

где $C = C(k)$. Отсюда следует, что оператор E_0 отображает $W^{k,p}(\mathbf{R}^n_+)$ в $W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$, причем выполняется неравенство (7.57) для всех $u \in W^{k,p}(\mathbf{R}^n_+)$.

Рассмотрим теперь случай, когда Ω — область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{k-1,1}$. Согласно результатам, доказанным в разделе 6.2, существует конечное число открытых множеств $\Omega_j \subset \Omega'$, $j = 1, 2, \ldots, N$, которые покрывают границу $\partial\Omega$, а соответствующие им преобразования ψ_j области Ω_j на единичный шар $B = B_1(0) \subset \mathbf{R}^n$ таковы, что выполняются условия:

(i) $\psi_j(\Omega_j \cap \Omega) = B^+ = B \cap \mathbf{R}^n_+$;

(ii) $\psi_j(\Omega_j \cap \partial\Omega) = B \cap \partial\mathbf{R}^n_+$;

(iii) $\psi_j \in C^{k-1,1}(\Omega_j)$, $\quad \psi_j^{-1} \in C^{k-1,1}(B)$.

Пусть Ω_0 — подобласть Ω, $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ такая, что объединение $\{\Omega_j\}$, $j = 0, 1, \ldots, N$, является конечным покрытием области Ω. Пусть η_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, — разбиение единицы, соответствующее этому покрытию. Тогда $(\eta_j u) \circ \psi_j^{-1} \in W^{k,p}(\mathbf{R}^n_+)$ (задача 7.5), и следовательно, $E_0[(\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}] \in W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$. Отсюда $E_0[(\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}] \circ \psi_j \in W^{k,p}_0(\Omega_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, так как $\operatorname{supp} \eta_j \subset \Omega_j$. Тем самым отображение E, определенное для функций $u \in W^{k,p}(\Omega)$ формулой $Eu = u\eta_0 + \sum\limits_{j=1}^{N} E_0[(\eta_j u) \circ \psi_j^{-1}] \circ \psi_j$, удовлетворяет следующим условиям: $Eu \in W^{k,p}_0(\Omega')$, $Eu = u$ на Ω и $\| Eu \|_{k,p;\,\Omega} \leqslant C \| u \|_{k,p;\,\Omega}$, где $C = C(k, N, \psi_j, \eta_j) = C(k, \Omega, \Omega')$. Кроме того, $(Eu)_h \to u$ в $W^{k,p}(\Omega)$ при $h \to 0$. □

Объединяя результат теоремы 7.25 для случая $k = 1$ с предыдущими результатами о вложениях (теоремы 7.10, 7.12 и 7.22), мы получаем соответствующие теоремы для соболевских пространств $W^{1,p}(\Omega)$ в областях Ω с границей, удовлетворяющей условию Липшица. Итерируя эти результаты, мы получаем следующую общую теорему вложения для пространств $W^{k,p}(\Omega)$.

Теорема 7.26. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{0,1}$. Тогда:*

(i) *если $kp < n$, то пространство $W^{k,p}(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $L^{p^*}(\Omega)$, $p^* = np/(n-kp)$, и компактно вложено в $L^q(\Omega)$ для любого $q < p^*$;*

(ii) *если $0 \leqslant m < k - n/p < m+1$, то пространство $W^{k,p}(\Omega)$ непрерывно вложено в $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha = k - n/p - m$, и компактно вложено в $C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$ для любого $\beta < \alpha$.*

Обратимся теперь к выводу интерполяционных неравенств. Сначала рассмотрим случай пространств $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Теорема 7.27. *Пусть $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ и любого мультииндекса β, $0 < |\beta| < k$, справедливо неравенство*

$$\|D^\beta u\|_{p;\,\Omega} \leqslant \epsilon \|u\|_{k,\,p;\,\Omega} + C\epsilon^{|\beta|/(|\beta|-k)}\|u\|_{p;\,\Omega}, \tag{7.59}$$

где $C = C(k)$.

Доказательство. Мы докажем неравенство (7.59) для случая $|\beta| = 1$, $k = 2$, который будет в необходим в гл. 9. Соответствующая индукция приводит к требуемому результату в случае произвольных β, k.

Пусть $u \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$. Рассмотрим интервал (a, b) длины ϵ, $b - a = \epsilon$. Для $x' \in (a, a+\epsilon/3)$ и $x'' \in (b - \epsilon/3, b)$ по теореме о среднем мы можем записать

$$|u'(x)| = \left|\frac{u(x') - u(x'')}{x' - x''}\right| \leqslant \frac{3}{\epsilon}\,(|u(x')| + |u(x'')|),$$

где $\overline{x}$ – некоторая точка из (a, b). Поэтому для любого $x \in (a, b)$ справедливо неравенство $|u'(x)| \leqslant \frac{3}{\epsilon}\,(|u(x')| + |u(x'')|) + \int_a^b |u''(y)|\,dy$. Интегрируя его по $x' \in (a, a+\epsilon/3)$ и $x'' \in (b-\epsilon/3, b)$, получаем неравенство $|u'(x)| \leqslant \int_a^b |u''(y)|\,dy + \frac{18}{\epsilon^2}\int_a^b |u(y)|\,dy$. Отсюда в силу неравенства Гёльдера имеем

$$|u'(x)|^p \leqslant 2^{p-1}\left\{\epsilon^{p-1}\int_a^b |u''(y)|^p dy + \frac{(18)^p}{\epsilon^{p+1}}\int_a^b |u(y)|^p dy\right\}.$$

Интегрируя это неравенство по интервалу (a, b), получаем

$$\int_a^b |u'(x)|^p dx \leqslant 2^{p-1}\left\{\epsilon^p \int_a^b |u''(y)|^p dy + \frac{18^p}{\epsilon^p}\int_a^b |u(y)|^p dy\right\}.$$

Разделим числовую прямую $\mathbf{R}$ на интервалы длины ϵ, для каждого из них запишем полученное выше неравенство и сложим их. Получим следующее неравенство:

$$\int |u'(x)|^p dx \leqslant 2^{p-1}\left\{\epsilon^p \int |u''(y)|^p dy + \left(\frac{18}{\epsilon}\right)^p \int |u(y)|^p dy\right\}. \tag{7.60}$$

Это и есть требуемое неравенство в одномерном случае. Для его обобщения на многомерный случай зафиксируем i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и применим неравенство (7.60) к функции $u \in C_0^2(\Omega)$, рассматриваемой как функция одной переменной x_i. Последовательным интегрированием по оставшимся переменным мы придем к неравенству

$$\int |D_i u(x)|^p dx \leqslant 2^{p-1} \{ \epsilon^p \int |D_{ii} u|^p dx + (18/\epsilon)^p \int |u|^p dx \} .$$

Итак, $\| D_i u \|_p \leqslant \epsilon \| D_{ii} u \|_p + \dfrac{C}{\epsilon} \| u \|_p$ с постоянной $C = 36.$ □

Объединяя результаты теорем 7.25 и 7.27, мы приходим к интерполяционным неравенствам для соболевских пространств.

Теорема 7.28. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{1,1}$, а $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Тогда для любых $\epsilon > 0$, $0 < |\beta| < k$ выполняется неравенство*

$$\| D^\beta u \|_{p;\,\Omega} \leqslant \epsilon \| u \|_{k,p;\,\Omega} + C \epsilon^{|\beta|/(|\beta| - k)} \| u \|_{p;\,\Omega}, \tag{7.61}$$

где $C = C(k, \Omega)$.

Другие источники интерполяционных неравенств указаны в задачах 2.15, 7.18 и 7.19. Отметим, что результаты о плотности, продолжении, вложении и интерполяции (теоремы 7.25, 7.26 и 7.28) имеют место при менее ограничительных условиях на область Ω (см. [4]).

Примечания

Родственный материал о соболевских пространствах читатель может найти в книгах [4], [313], [208] и [214].*) Следуя традиции, мы называем рассматриваемые в этой главе пространства слабо дифференцируемых функций соболевскими пространствами, хотя различные понятия пространств слабо дифференцируемых функций использовались и до работы Соболева [267] (см. по этому поводу [204] и [208]). Методы осреднения или регуляризации функций появились у Фридрихса [314]. Теорема о плотности (теорема 7.9) установлена Мейерсом и Серрином [188]. Неравенства Соболева (теорема 7.10) были по существу доказаны Соболевым [267], [268]; для случая $p < n$ мы следовали доказательству Ниренберга [217]. Оценки Гёльдера (теоремы 7.17 и 7.19) были получены Морри [204]. Теорема 7.21 доказана Джоном и Ниренбергом [85]; наше доказательство взято из [283], где имеется также оценка теоремы 7.15. Результат о компактности (теорема 7.22) принадлежит в случае $p = 2$ Реллиху [246], а в общем случае – Кондрашову [125].

---

*) См. также работу: Соболев С.Л. О некоторых оценках, относящихся к семействам функций, имеющих производные, интегрируемые с квадратом // ДАН СССР. – 1936. – Т. 1. – С. 267–270, и книги: Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969; Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975; [147]; Мазья В.Г. Пространства Соболева. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985, в которых можно найти и изложение истории этого вопроса. – *Примеч. ред.*

Задачи

7.1. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. Если функция u измерима на Ω и такова, что $|u|^p \in L^1(\Omega)$, то можно определить функционал

$$\Phi_p(u) = \left[|\Omega|^{-1} \int_\Omega |u|^p dx\right]^{1/p}, \quad p \in \mathbf{R}.$$

Покажите, что

(i) $\lim\limits_{p \to +\infty} \Phi_p(u) = \sup\limits_\Omega |u|$;

(ii) $\lim\limits_{p \to -\infty} \Phi_p(u) = \inf\limits_\Omega |u|$;

(iii) $\lim\limits_{p \to 0} \Phi_p(u) = \exp\left[\dfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \log |u|\, dx\right]$.

7.2. Покажите, что функция u слабо дифференцируема в области Ω тогда и только тогда, когда она слабо дифференцируема в окрестности любой точки Ω.

7.3. Пусть α, β – мультииндексы и u – локально интегрируемая в области Ω функция. Покажите, что если какие-либо две из трех слабых производных $D^{\alpha+\beta}u$, $D^\alpha(D^\beta u)$, $D^\beta(D^\alpha u)$ существуют, то существуют все три и они совпадают в Ω почти всюду.

7.4. Выведите формулу дифференцирования произведения (7.18). (Указание: рассмотрите сначала случай $u \in W^1(\Omega)$, $v \in C^1(\Omega)$.)

7.5. Выведите формулу (7.19) и покажите, что она остается справедливой и в предположении, что $\psi \in C^{0,1}(\Omega)$, $\psi^{-1} \in C^{0,1}(\tilde{\Omega})$.

7.6. Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, содержащая начало координат. Покажите, что функция γ, определенная равенством $\gamma = |x|^{-\alpha}$, принадлежит $W^k(\Omega)$ при $k + \alpha < n$.

7.7. Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$. Покажите, что функция u принадлежит $C^{0,1}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда она слабо дифференцируема и имеет локально ограниченные слабые производные.

7.8. Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$. Покажите, что функция u слабо дифференцируема в Ω тогда и только тогда, когда она эквивалентна функции $\bar{u}$, которая абсолютно непрерывна на почти всех отрезках в Ω, параллельных координатным осям, а ее частные производные (которые существуют почти всюду в Ω) локально интегрируемы в Ω (см. [208, с. 66]). Выведите из этого свойства формулу дифференцирования произведения и цепное правило для слабого дифференцирования.

7.9. Покажите, что нормы (7.22) и (7.23) являются эквивалентными нормами в $W^{k,p}(\Omega)$.

7.10. Докажите, что пространство $W^{k,p}(\Omega)$ полно по каждой из норм (7.22) и (7.23).

7.11. Пусть Ω – область, граница которой локально может быть представлена как график непрерывной по Липшицу функции. Покажите, что пространство $C^\infty(\bar{\Omega})$ плотно в пространстве $W^{k,p}(\Omega)$ при $1 \leqslant p < \infty$, $k \geqslant 1$, и сравните этот результат с результатом о плотности (теорема 7.25).

7.12. Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{0,1}$. Для произвольной функции $u \in W^{1,p}(\Omega)$, где $1 \leqslant p < n$, докажите неравенство Соболева – Пуанкаре

$$\| u - u_\Omega \|_{np/(n-p);\,\Omega} \leqslant C \| Du \|_{p;\,\Omega}$$

(постоянная C не зависит от u) с помощью рассуждений методом от противного, основываясь на теореме о компактности 7.26.

7.13. Выведите из теоремы 7.19 соответствующий глобальный результат. А именно: пусть $u \in W^1(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Предположим, что существуют положительные постоянные K, α $(\alpha < 1)$ такие, что $\int_{B_R} |Du|\, dx \leqslant K \cdot R^{n-1+\alpha}$ для всех шаров $B_R \subset \mathbf{R}^n$. Тогда $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $[u]_{\alpha;\,\Omega} \leqslant CK$, где $C = C(n, \alpha, \Omega)$.

7.14. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, в которой имеет место вложение $W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^*}(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. Покажите, что вложение $W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ компактно для любого $q < p^*$.

7.15. Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$. *Полной вариацией* функции $u \in L^1(\Omega)$ называется величина

$$\int_\Omega |Du|\,dx = \sup\{\int_\Omega u\cdot \operatorname{div} \mathbf{v}\,dx \mid \mathbf{v}\in C_0^1(\Omega),\ \ |\mathbf{v}|\leqslant 1\}.$$

Покажите, что пространство $BV(\Omega)$ функций, имеющих конечную полную вариацию, является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_1 + \int_\Omega |Du|\,dx.$$

Покажите, что $W^{1,1}(\Omega)$ является его замкнутым подпространством.

7.16. Пусть $u \in BV(\Omega)$. С помощью осреднений, модифицируя соответствующим образом доказательство теоремы 7.9, покажите, что существует последовательность функции $\{u_m\} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$ такая, что $u_m \to u$ в $L^1(\Omega)$ и $\int_\Omega |Du_m|\,dx \to$ $\to \int_\Omega |Du|\,dx$.

7.17. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, для которой имеет место вложение Соболева $W^{1,1}(\Omega) \to L^{n/(n-1)}(\Omega)$. Покажите, что тогда имеет место вложение $BV(\Omega) \to L^{n/(n-1)}(\Omega)$ и, кроме того, для всех $q < n\,(n-1)$ вложение $BV(\Omega) \to$ $\to L^q(\Omega)$ компактно.

7.18. Выведите теорему 7.27 при $p \geqslant 2$ из первой формулы Грина (2.10) (см. задачу 2.15).

7.19. Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{0,1}$. Докажите интерполяционное неравенство (7.61) в более слабой форме:

$$\|D^\beta u\|_{p;\,\Omega} \leqslant \epsilon\,\|u\|_{k,\,p;\,\Omega} + C(\epsilon)\,\|u\|_{p;\,\Omega}$$

(постоянная $C(\epsilon)$ не зависит от u) с помощью рассуждений методом от противного, основываясь на результате о компактности (теорема 7.2).

7.20. Используя осреднения, покажите, что локально интегрируемые решения уравнения Лапласа (в смысле, данном в задаче 2.8) являются гладкими, и потому для таких решений справедливы внутренние оценки гл. 4.

7.21. Используя неравенство Морри (7.42), докажите, что функции из пространства Соболева $W^{1,p}(\Omega)$ при $p > n$ дифференцируемы в классическом смысле почти всюду в Ω.

ГЛАВА 8

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ РЕГУЛЯРНОСТЬ

В этой главе при относительно слабых условиях на гладкость коэффициентов изучаются линейные эллиптические операторы, старшая часть которых имеет дивергентную форму. Рассматриваются операторы L вида

$$Lu = D_i(a^{ij}(x)\,D_j u + b^i(x)\,u) + c^i(x)\,D_i u + d(x)\,u, \tag{8.1}$$

коэффициенты a^{ij}, b^i, c^i, d $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ которых предполагаются измеримыми функциями в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Оператор общего вида (3.1) можно записать в виде (8.1) в том случае, если его старшие коэффициенты a^{ij} дифференцируемы. Подход, основанный на методе гильбертова пространства, развиваемый в этой главе, можно рассматривать как новый, отличный от проведенного в гл. 6, вариант исследования проблемы разрешимости. С другой стороны, если в (8.1) коэффициенты a^{ij} и b^i дифференцируемы и $u \in C^2(\Omega)$, то оператор L можно записать в общем виде (3.1), так что результаты, полученные в гл. 6, могут быть применены к такому уравнению. Однако дивергентная форма имеет то преимущество, что позволяет определить оператор L на значительно более широком классе функций, нежели класс $C^2(\Omega)$. Действительно, пусть функция u дифференцируема в слабом смысле, а функции $a^{ij}D_j u + b^i u$, $c^i D_i u + du$, $i = 1, \ldots, n$, локально интегрируемы. Будем говорить, что функция u в *слабом* или *обобщенном* смысле удовлетворяет уравнению $Lu = 0$ (неравенствам $Lu \geqslant 0, Lu \leqslant 0$) в Ω, если

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(u, v) = \int_\Omega \{(a^{ij}D_j u + b^i u) D_i v - (c^i D_i u + du) v\} \, dx = 0 \\ (\mathcal{L}(u, v) \leqslant 0, \quad \mathcal{L}(u, v) \geqslant 0)\end{gathered} \tag{8.2}$$

для всех неотрицательных функций $v \in C_0^1(\Omega)$.

В случае, когда коэффициенты оператора L локально интегрируемы, с помощью теоремы о дивергенции (2.3) можно установить, что если функция u из $C^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению $Lu = 0$ (неравенствам $\geqslant 0, \leqslant 0$) в классическом смысле, то она удовлетворяет этим соотношениям и в обобщенном смысле. Кроме того, если коэффициенты a^{ij}, b^i имеют локально интегрируемые призводные, то принадлежащее $C^2(\Omega)$ обобщенное решение u является также и классическим решением.

Пусть f^i, g, $i = 1, \ldots, n$, – локально интегрируемые функции в Ω. Тогда слабо дифференцируемая функция u будет называться *слабым* или *обобщенным* решением неоднородного уравнения

$$Lu = g + D_i f^i \tag{8.3}$$

в Ω, если

$$\mathcal{L}(u, v) = F(v) \equiv \int_\Omega (f^i D_i v - gv) \, dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega). \tag{8.4}$$

Несложно проверить, что классические решения уравнения (8.3) являются также и обобщенными решениями и что приналежащее $C^2(\Omega)$ обобщенное решение является также и классическим решением, если коэффициенты оператора L и правая часть являются достаточно гладкими функциями.

Нашей целью является изучение обобщенной задачи Дирихле для уравнения (8.3). Естественная постановка этой задачи зависит от коэффициентов оператора L. Мы будем всюду преполагать, что оператор L строго эллиптичен в Ω..Это значит, что существует положительное число λ такое, что

$$a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant \lambda |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \ \xi \in \mathbf{R}^n. \tag{8.5}$$

Мы также всюду предполагаем (если нет специальных оговорок), что коэффициенты оператора L ограничены, т.е. существуют такие постоянные Λ и $\nu \geqslant 0$, что для всех $x \in \Omega$

$$\sum |a^{ij}(x)|^2 \leqslant \Lambda^2, \quad \lambda^{-2} \sum (|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2) + \lambda^{-1} |d(x)| \leqslant \nu^2. \tag{8.6}$$

Отметим, что аналогичная теория может быть развита и при более слабых требованиях [288]. Функция u, принадлежащая пространству Соболева

$W^{1,2}(\Omega)$, называется решением *обобщенной задачи Дирихле* $Lu = g + D_i f^i$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, где $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, если она является обобщенным решением уравнения (8.3) и $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Функции $v \in C_0^1(\Omega)$, участвующие в формулах (8.2) и (8.4), называют также *пробными функциями*. Заметим, что в силу условия (8.6) с помощью неравенства Шварца можно получить оценку

$$|\mathcal{L}(u, v)| \leqslant \int_\Omega \{|a^{ij}D_iuD_jv| + |b^iu \cdot D_iv| + |c^iv \cdot D_iu| + |duv|\}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C\,\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \cdot \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{8.7}$$

Следовательно, для фиксированного $u \in W^{1,2}(\Omega)$ отображение $v \mapsto \mathcal{L}(u, v)$ является ограниченным линейным функционалом на $W^{1,2}(\Omega)$. Поэтому из справедливости соотношения (8.2) для функций $v \in C_0^1(\Omega)$ следует его справедливость для всех $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Оценка (8.7) важна также и для рассмотрения проблемы существования решений уравнения (8.3), так как она показывает, что оператор L определяет формулой (8.2) ограниченную билинейную форму на каждом из гильбертовых пространств $W^{1,2}(\Omega)$ и $W_0^{1,2}(\Omega)$. Для фиксированного элемента $u \in W^{1,2}(\Omega)$ его образ Lu можно определить как элемент сопряженного к $W_0^{1,2}(\Omega)$ пространства, отправляясь от равенства $Lu(v) = \mathcal{L}(u, v)$. В силу теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала пространство $W_0^{1,2}(\Omega)$ можно отождествить с его сопряженным пространством, и поэтому оператор L порождает отображение $W^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$. Мы покажем, что исследование разрешимости задачи Дирихле для уравнения (8.3) непосредственно связано с изучением обратимости этого отображения.

Подход к изучению линейной задачи Дирихле, описанный выше, не является единственным важным вкладом этой главы. Поточечные оценки, получаемые в разделах 8.6, 8.9 и 8.10, служат основой для последующего построения теории квазилинейных уравнений, осуществляемой во второй части книги. Имея в виду только эти приложения, читатель может ограничиться рассмотрением субрешений и суперрешений уравнения (8.3), принадлежащих пространству $C^1(\bar{\Omega})$, и при этом считать, что в уравнении (8.1) коэффициенты b^i, c^i, d равны нулю, что означает, т.е. $\nu = 0$ в (8.6).

8.1. Слабый принцип максимума

Классический слабый принцип максимума — теорема 3.1 — допускает естественное обобщение на операторы дивергентного вида. Чтобы сформулировать его, введем для функций из соболевского пространства $W^{1,2}(\Omega)$ понятие неравенства на границе $\partial\Omega$. Будем говорить, что функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$, если ее положительная часть $u^+ = \max\{u, 0\}$ принадлежит $W_0^{1,2}(\Omega)$. Если функция u непрерывна в окрестности Ω, то она удовлетворяет неравенству $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$ тогда и только тогда, когда это неравенство выполняется в классическом смысле. К введенному понятию неравенства на границе $\partial\Omega$ легко сводятся и другие типы неравенств. Например, $u \geqslant 0$ на $\partial\Omega$, если $-u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$; функции

u, v из $W^{1,2}(\Omega)$ удовлетворяют неравенству $u \leqslant v$ на $\partial\Omega$, если $u - v \leqslant 0$ на $\partial\Omega$;

$$\sup_{\partial\Omega} u = \inf\{k \mid u \leqslant k \text{ на } \partial\Omega,\ k \in \mathbf{R}\},$$

$$\inf_{\partial\Omega} u = -\sup_{\partial\Omega}(-u).$$

При получении классического слабого принципа максимума (следствие 3.2) мы требовали, чтобы коэффициент при в (3.1) был неположителен. Соответствующая этому коэффициенту величина в (8.1) имеет вид $D_i b^i + d$. В рассматриваемой ситуации $D_i b^i$ не являются функциями. Тем не менее неположительность величины $D_i b^i + d$ можно интерпретировать в обобщенном смысле: справедливо неравенство

$$\int_\Omega (dv - b^i D_i v)\, dx \leqslant 0 \tag{8.8}$$

для произвольной неотрицательной функции v из $C_0^1(\Omega)$. Поскольку функции b^i и d ограничены, неравенство (8.8) по непрерывности распространяется на все неотрицательные функции v из $W_0^{1,1}(\Omega)$.

При выполнении этого условия имеет место следующий слабый принцип максимума.

Теорема 8.1. *Пусть функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $Lu \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ в Ω. Тогда*

$$\sup_\Omega u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \left(\inf_\Omega u \geqslant \inf_{\partial\Omega} u^-\right). \tag{8.9}$$

Доказательство. Если функция u принадлежит $W^{1,2}(\Omega)$, а функция v принадлежит $W_0^{1,2}(\Omega)$, то $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$ и $Duv = vDu + u\,Dv$ (задача 7.4). Это позволяет нам записать неравенство $\mathcal{L}(u, v) \leqslant 0$ в виде

$$\int_\Omega \{a^{ij} D_j u \cdot D_i v - (b^i + c^i)\, v D_i u\}\, dx \leqslant \int_\Omega \{duv - b^i D_i(uv)\}\, dx \leqslant 0$$

для всех $v \geqslant 0$ таких, что $uv \geqslant 0$ (в последнем неравенстве использовано (8.8)), откуда, в силу ограничений (8.6) на коэффициенты уравнения, имеем

$$\int_\Omega a^{ij} D_j u \cdot D_i v\, dx \leqslant 2\lambda\nu \int_\Omega v \cdot |Du|\, dx \tag{8.10}$$

для всех $v \geqslant 0$ таких, что $uv \geqslant 0$. В частном случае, когда $b^i + c^i = 0$, доказательство требуемого утверждения получается немедленно, если взять $v = \max\{u - l, 0\}$, где $l = \sup_{\partial\Omega} u^+$. В общем случае возьмем число k, удовлетворяющее неравенствам $l \leqslant k < \sup_\Omega u$, и положим $v = (u - k)^+$. (Если такого числа k не существует, то доказываемое утверждение справедливо.)

В силу цепного правила (теорема 7.8) имеем: $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ и

$$Dv = \begin{cases} Du, & \text{для } u > k \quad (\text{т.е. для } v \neq 0), \\ 0, & \text{для } u \leqslant k \quad (\text{т.е. для } v = 0). \end{cases}$$

Поэтому из (8.10) получаем

$$\int_\Omega a^{ij}D_jv\cdot D_iv\,dx \leqslant 2\lambda\nu \int_\Gamma v\cdot|Dv|\,dx, \quad \Gamma = \operatorname{supp} Dv \subset \operatorname{supp} v,$$

и следовательно, в силу строгой эллиптичности оператора L, (см. (8.5)) получаем

$$\int_\Omega |Dv|^2 dx \leqslant 2\nu \int_\Gamma v\,|Dv|\,dx \leqslant 2\nu\,\|v\|_{2,\Gamma}\cdot\|Dv\|_2,$$

так что $\|Dv\|_{2,\Omega} \leqslant 2\nu\|v\|_{2,\Gamma}$. Применяя теперь неравенство Соболева (теорема 7.10) при $n \geqslant 3$, получим $\|v\|_{2n/(n-2)} \leqslant C\|v\|_{2,\Gamma} \leqslant \leqslant C|\operatorname{supp} Dv|^{1/n}\cdot\|v\|_{2n/(n-2)}$, где $C = C(n, \nu)$, и поэтому $|\operatorname{supp} Dv| \geqslant \geqslant C^{-n}$. При $n = 2$ неравенство такого же вида с постоянной $C = C(n, \nu)$ также получается из неравенства Соболева, если вместо $2n/(n-2)$ в предыдущих оценках взять произвольное число, большее 2.

Так как постоянная в этих неравенствах на зависит от k, то они останутся справедливыми и тогда, когда k устремим к $\sup\limits_\Omega u$. Таким образом, функция u достигает своего наибольшего значения на множестве положительной меры, а на нем, в силу леммы 7.7, $Du = 0$. Получили противоречие с последним неравенством. Следовательно, $\sup\limits_\Omega u \leqslant l$. □

Непосредственным следствием теоремы 8.1 является единственность решения обобщенной задачи Дирихле для уравнения 8.3.

Следствие 8.2. *Пусть функция $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ удовлетворяет в Ω уравнению $Lu = 0$. Тогда $u = 0$ в Ω.*

Об условиях, заменяющих неравенство (8.8), см. задачу 8.1; см. также [292].

8.2. Разрешимость задачи Дирихле

Главная цель этого раздела – доказательство следующего результата о существовании решения.

Теорема 8.3. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5), (8.6) *и* (8.8). *Тогда для любых $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ и $g, f^i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, обобщенная задача Дирихле*

$$Lu = g + D_i f^i \ \text{ в } \ \Omega, \quad u = \varphi \ \text{ на } \ \partial\Omega,$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Теорема 8.3 может быть получена из альтернативы Фредгольма для оператора L. Сначала сведем задачу Дирихле к случаю нулевых граничных условий. Полагая $w = u - \varphi$, из (8.5) получим $Lw = Lu - L\varphi = g - c^iD_i\varphi - d\varphi + D_i(f - a^{ij}D_j\varphi - b^i\varphi) = \hat g + D_i\hat f^i$, а из условий, наложенных на L и φ, вытекает, что $\hat g, \hat f \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, и $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Следовательно, достаточно доказать теорему 8.3 только для случая $\varphi \equiv 0$.

Обозначим $H = W_0^{1,2}(\Omega)$, $\mathbf{g} = (g, f^1, \dots, f^n)$ и $F(v) = -\int\limits_\Omega (gv - - f^iD_iv)dx$ для $v \in H$. Так как $|F(v)| \leqslant \|\mathbf{g}\|_2\cdot\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$, то $F \in H^*$.

Если бы билинейная форма $\mathcal{L}$, определенная формулой (8.2), будучи ограниченной, была бы еще и коэрцитивной на H, то однозначная разрешимость задачи Дирихле для оператора L немедленно следовала бы из теоремы 5.8. В рассматриваемом случае коэрцитивность может не иметь места. Вместо неравенства коэрцитивности воспользуемся следующим неравенством.

Лемма 8.4. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5) *и* (8.6). *Тогда*

$$\mathcal{L}(u, v) \geqslant \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx - \lambda \nu^2 \int_\Omega u^2 dx. \tag{8.11}$$

Доказательство. Имеем:

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_\Omega (a^{ij} D_i u D_j u + (b^i - c^i) u \cdot D_i u - du^2)\, dx \geqslant$$

(в силу неравенства Шварца)

$$\geqslant \int_\Omega \left(\lambda |Du|^2 - \frac{\lambda}{2} |Du|^2 - \lambda \nu^2 u^2 \right) dx =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx - \lambda \nu^2 \int_\Omega u^2 dx. \square$$

Определим теперь для $\sigma \in \mathbf{R}$ оператор L_σ формулой $L_\sigma u = Lu - \sigma u$. Из леммы 8.4 вытекает, что соответствующая оператору L_σ форма $\mathcal{L}_\sigma$ будет коэрцитивной, если либо число σ достаточно велико, либо объем $|\Omega|$ достаточно мал. Определим далее оператор вложения I: $H \to H^*$ равенством

$$Iu(v) = \int_\Omega uv dx, \quad v \in H. \tag{8.12}$$

Лемма 8.5. *Отображение I компактно.*

Доказательство. Мы можем представить $I = I_1 \cdot I_2$, где $I_2 : H \to L^2(\Omega)$ – естественное вложение, а отображение $I_1 : L^2(\Omega) \to H^*$ определено формулой (8.12). В силу теоремы о компактности (теорема 7.22) оператор I_2 компактен (и в случае $p = n = 2$), а так как оператор I_1 непрерывен, то и I будет компактным. $\square$

Выберем далее число σ_0 так, чтобы форма $\mathcal{L}_{\sigma_0}$ была ограниченной и коэрцитивной на гильбертовом пространстве H. Уравнение $Lu = F$ для $u \in H$, $F \in H^*$ эквивалентно уравнению $L_{\sigma_0} u + \sigma_0 Iu = F$. По теореме 5.8 оператор $L_{\sigma_0}^{-1}$ задает непрерывное взаимно однозначное отображение H^* на H. Поэтому, применяя его к написанному выше уравнению, мы получаем эквивалентное уравнение

$$u + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} Iu = L_{\sigma_0}^{-1} F. \tag{8.13}$$

Отображение $T = -\sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} I$ в силу леммы 8.5 компактно, и следовательно, по альтернативе Фредгольма (теорема 5.3) существование функции $u \in H$, удовлетворяющей уравнению (8.13), является следствием единственности в H тривиального решения уравнения $Lu = 0$. Утверждение теоремы 8.3 тогда следует из теоремы единственности, следствие 8.2. $\square$

Теорема 5.1 позволяет дать описание спектральных свойств оператора L. Для этого определим *формально сопряженный* для L оператор L^* формулой

$$L^*u = D_i(a^{ji}D_j u - c^i u) - b^i D_i u + du. \tag{8.14}$$

Так как $\mathcal{L}^*(u, v) = \mathcal{L}(v, u)$ для $u, v \in H = W_0^{1,2}(\Omega)$, то L^* также сопряжен оператору L в гильбертовом пространстве H. Заменяя в предыдущем рассуждении L на L^*, мы видим, что уравнение $L_\sigma u = F$ эквивалентно уравнению $u + (\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1}Iu = L_{\sigma_0}^{-1}F$ и что сопряженный оператор T_σ^* компактного отображения $T_\sigma = (\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1}I$ дается формулой $T_\sigma^* = (\sigma_0 - \sigma) \times (L_{\sigma_0}^*)^{-1}I$. Теперь мы можем использовать теорему 5.1 и получим следующий результат.

Теорема 8.6. *Пусть оператор* L *удовлетворяет условиям* (8.5) *и* (8.6). *Тогда существует не более чем счетное дискретное множество $\Sigma \subset \mathbf{R}$ такое, что если $\sigma \notin \Sigma$, то задачи Дирихле $L_\sigma u = g + D_i f^i$, $L_\sigma^* u = g + D_i f^i$, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, однозначно разрешимы для произвольных $g, f^i \in L^2(\Omega)$ и $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Если $\sigma \in \Sigma$, то подпространства решений однородных задач $L_\sigma u = 0$ и $L_\sigma^* u = 0$, $u = 0$ на $\partial\Omega$, имеют положительные конечные размерности и задача $L_\sigma u = g + D_i f^i$, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int_\Omega \{(g - c^i D_i\varphi - d\varphi - \sigma\varphi)v - (f^i - a^{ij}D_j u - b^i\varphi)D_i v\}\,dx = 0 \tag{8.15}$$

для всех v, удовлетворяющих условиям $L_\sigma^* v = 0$ в Ω, $v = 0$ на $\partial\Omega$. Кроме того, если выполнено условие (8.8), *то $\Sigma \subset (-\infty, 0)$.*

Оператор G_σ: $H^* \to H$, определяемый равенством $G_\sigma = L_\sigma^{-1}$ при $\sigma \notin \Sigma$, называется *оператором Грина* для задачи Дирихле для L_σ. В силу теоремы 5.3 оператор G_σ является ограниченным линейным оператором, определенным на H^*, и поэтому справедлива следующая априорная оценка.

Следствие 8.7. *Пусть функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ является решением уравнения $L_\sigma u = g + D_i f^i$ в Ω, удовлетворяет краевому условию $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, и пусть $\sigma \notin \Sigma$. Тогда существует постоянная C, зависящая только от L, σ и Ω, такая, что*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant C(\|g\|_2 + \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}). \tag{8.16}$$

Из теоремы 8.6 следует, что утверждение теоремы 8.3 остается справедливым, если в условии (8.8) заменить b^i на $-c^i$.

8.3. Дифференцируемость слабых решений

Оставшаяся часть этой главы будет посвящена в основном изучению регулярности решений. В этом разделе мы рассмотрим вопрос о существовании слабых производных более высокого порядка у слабых решений уравнения (8.3). С помощью результатов о дифференцируемости, получаемых здесь, мы докажем теоремы существования решений для классической задачи Дирихле на основе теоремы 8.3. В последующих разделах мы изучим такие поточечные свойства слабых решений, как принцип максимума и непрерывность по Гёльдеру. Наш первый результат о регулярности относится к выяснению условий, при которых слабые решения уравнения $Lu = f$ будут дважды слабо дифференцируемы.

Теорема 8.8. *Пусть функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ является слабым решением уравнения $Lu = f$ в Ω, оператор L строго эллиптичен в Ω, его коэффициенты a^{ij}, b^i, $i, j = 1, \ldots, n$, равномерно непрерывны в Ω по Липшицу, а коэффициенты c^i, d, $i = 1, \ldots, n$, существенно ограничены в Ω. Пусть правая часть f принадлежит $L^2(\Omega)$. Тогда для любой подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$ решение u приналежит $W^{2,2}(\Omega')$ и справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leqslant C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \tag{8.17}$$

с постоянной $C = C(n, \lambda, K, d')$, где λ – постоянная из условия (8.5),

$$K = \max\ \{\|a^{ij}, b^i\|_{C^{0,1}(\bar\Omega)},\ \|c^i, d\|_{L^\infty(\Omega)}\},$$

и $d' = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Кроме того, функция u удовлетворяет уравнению

$$Lu = a^{ij}D_{ij}u + (D_j a^{ij} + b^i + c^i) D_i u + (D_i b^i + d) u = f \tag{8.18}$$

почти всюду в Ω.

Доказательство. Из интегрального тождества (8.4) мы имеем

$$\int_\Omega a^{ij} D_j u D_i v\, dx = \int_\Omega gv dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega), \tag{8.19}$$

где через $g \in L^2(\Omega)$ обозначена функция

$$g = (b^i + c^i) D_i u + (D_i b^i + d) u - f. \tag{8.20}$$

Для $2|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} v, \partial\Omega)$ заменим функцию v ее разностным отношением $\Delta^{-h} v = \Delta_k^{-h} v$ для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Получим

$$\int_\Omega \Delta^h(a^{ij}D_j u) D_i v\, dx = -\int_\Omega a^{ij} D_j u \cdot D_i \Delta^{-h} v\, dx = -\int_\Omega g \Delta^{-h} v\, dx.$$

Так как

$$\Delta^h(a^{ij}D_j u)(x) = a^{ij}(x + h e_k) \Delta^h D_j u(x) + \Delta^h a^{ij}(x) D_j u(x),$$

то

$$\int_\Omega a^{ij}(x + h e_k) D_j \Delta^h u \cdot D_i v\, dx =$$

$$= -\int_\Omega (\bar g \cdot Dv + g \cdot \Delta^{-h} v)\, dx,$$

где $\bar g = (\bar g^1, \ldots, \bar g^n)$ и $\bar g^i = \Delta^h a^{ij} D_j u$. Используя (8.20) и лемму 7 23, мы можем оценить

$$\int_\Omega a^{ij}(x + h e_k) D_j \Delta^h u \cdot D_i v\, dx \leqslant (\|\bar g\|_2 + \|g\|_2) \cdot \|Dv\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant (C(n) K \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2)\ \|Dv\|_2.$$

Далее, возьмем функцию $\eta \in C_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую неравенствам $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, и положим $v = \eta^2 \Delta^h u$. Используя неравенство Шварца и (8.5),

получаем

$$\lambda \int\limits_\Omega |\eta D\Delta^h u|^2 dx \leqslant \int\limits_\Omega \eta^2 a^{ij}(x+he_k)\,\Delta^h D_i u\cdot \Delta^h D_j u\,dx =$$
$$= \int\limits_\Omega a^{ij}(x+h\,e_k)\,D_j\Delta^h u(D_i v - 2\Delta^h u\,\eta D_i\,\eta)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant (C(n)K\,\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2)\cdot(\|\eta D\Delta^h u\|_2 + 2\,\|\Delta^h u D\eta\|_2) +$$
$$+ C(n)K\,\|\eta D\Delta^h u\|_2\cdot\|\Delta^h u\cdot D\eta\|_2.$$

Отсюда в силу леммы 7.23 и с помощью неравенства Юнга (7.6) получаем, что

$$\|\eta\Delta^h Du\|_2 \leqslant C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2 + \|\Delta^h u\cdot D\eta\|_2) \leqslant$$
$$\leqslant C(1+\sup_\Omega|D\eta|)(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2)$$

с постоянной $C = C(n, \lambda, K)$. В качестве функции η можно выбрать такую срезающую функцию, что $\eta = 1$ на $\Omega' \subset\subset \Omega$ и $|D\eta| \leqslant 2/d'$, где $d' = \operatorname{dist}(\partial\Omega, \Omega')$. В силу леммы 7.24 получаем тогда, что $Du \in W^{1,2}(\Omega')$ для любой подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$, т.е. $u \in W^2(\Omega)$ и справедлива оценка (8.17). Наконец, мы имеем $Lu \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ и, очевидно, $Lu = f$ почти всюду в Ω в силу интегрального тождества (8.4). □

Отметим (см. задачу 8.2), что в оценке (8.17) величина $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ может быть заменена на $\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Следующий общий результат о существовании решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения вида

$$Lu \equiv a^{ij}(x)\,D_{ij}u + b^i(x)\,D_i u + c(x)\,u = f \tag{8.21}$$

может быть теперь получен из теорем 8.3 и 8.8.

Теорема 8.9. *Пусть оператор L строго эллиптичен в Ω и имеет коэффициенты $a^{ij} \in C^{0,1}(\bar\Omega)$, b^i, $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \leqslant 0$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\Omega)$ и любой функции $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ существует единственная функция $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ такая, что $Lu = f$ в Ω и $u - \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$.*

Если граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая и если $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$; то теорема 8.9 остается справедливой и при условии непрерывности в $\bar\Omega$ коэффициентов a^{ij} (см. теорему 9.15). Однако для разрывных коэффициентов утверждение неверно: условие $a^{ij} \in C^0(\bar\Omega)$, как показывает следующий пример, нельзя заменить более слабым условием: $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Уравнение

$$\Delta u + b\,\frac{x_i x_j}{|x|^2}D_{ij}u = 0, \quad b = -1 + \frac{n-1}{1-\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{8.22}$$

имеет при $n > 2(2-\lambda) > 2$ два решения $u_1(x) = 1$ и $u_2(x) = |x|^\lambda$, принадлежащие $W^{2,2}(B)$ и совпадающие на ∂B, B – единичный шар $B_1(0)$.

Дифференцируемость более высокого порядка слабых решений может быть легко установлена такими же рассуждениями, как и при доказательстве теоремы 8.8. Наложим более жесткие ограничения на гладкость коэффициентов:

$$a^{ij}, b^i \in C^{1,1}(\bar\Omega), \qquad c^i, d \in C^{0,1}(\bar\Omega)$$

и пусть $f \in W^{1,2}(\Omega)$. Тогда, заменяя v на $D_k v$ для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, в тождестве (8.19) и применяя интегрирование по частям, получаем

$$\int_\Omega a^{ij} D_{jk} u \cdot D_i v dx = \int_\Omega D_k \hat{g} v dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega), \tag{8.23}$$

а так как $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$, то $D_k \hat{g} \in L^2_{loc}(\Omega)$. Следовательно, $D_k u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$.

С помощью индукции доказывается следующее обобщение теоремы 8.8.

Т е о р е м а 8.10. *Пусть функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ – слабое решение уравнения $Lu = f$ в Ω, оператор L строго эллиптичен в Ω, коэффициенты a^{ij}, b^i принадлежат $C^{k,1}(\bar{\Omega})$, коэффициенты c^i, d* принадлежат $C^{k-1,1}(\bar{\Omega})$, *а функция f принадлежит $W^{k,2}(\Omega)$, $k \geqslant 1$. Тогда для любой подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$ решение u принадлежит $W^{k+2,2}(\Omega')$ и справедлива оценка*

$$\| u \|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leqslant C(\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} + \| f \|_{W^{k,2}(\Omega)}) \tag{8.24}$$

с постоянной $C = C(n, \lambda, K, d', k)$, где

$$K = \max \{ \| a^{ij}, b^i \|_{C^{k,1}(\bar{\Omega})}, \quad \| c^i, d \|_{C^{k-1,1}(\bar{\Omega})} \}.$$

По теореме вложения Соболева (следствие 7.11) из теоремы 8.10 вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е 8.11. *Пусть функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ является слабым решением строго эллиптического уравнения $Lu = f$ в Ω и пусть функции a^{ij}, b^i, c^i, d, f принадлежат $C^\infty(\Omega)$. Тогда функция u также принадлежит $C^\infty(\Omega)$.*

8.4. Глобальная регулярность

В предположении определенной гладкости границы результаты предыдущего раздела о внутренней гладкости решений могут быть распространены на всю область Ω. Сначала докажем такой глобальный аналог теоремы 8.8.

Т е о р е м а 8.12. *Пусть выполнены условия теоремы 8.8 и пусть, дополнительно, граница $\partial\Omega$ является границей класса C^2 и существует функция $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$ такая, что $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Тогда $u \in W^{2,2}(\Omega)$ и справедлива оценка*

$$\| u \|_{W^{2,2}(\Omega)} \leqslant \tag{8.25}$$

$$\leqslant C(\| u \|_{L^2(\Omega)} + \| f \|_{L^2(\Omega)} + \| \varphi \|_{W^{2,2}(\Omega)})$$

с постоянной $C = C(n, \lambda, K, \partial\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменяя u на $u - \varphi$, мы без ограничения общности можем считать, что $\varphi \equiv 0$, т.е. $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. В силу леммы 8.4 справедлива оценка

$$\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant C(\| u \|_2 + \| f \|_2) \tag{8.26}$$

с постоянной $C = C(n, \lambda, K)$. Так как $\partial\Omega \in C^2$, то для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ существует шар $B = B(x_0)$ и существует взаимно однозначное отображение ψ этого шара на открытое множество $D \subset \mathbf{R}^n$ такое, что

$$\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbf{R}^n_+ = \{ x \in \mathbf{R}^n | x_n > 0 \}, \quad \psi\{B \cap \partial\Omega\} \subset \partial\mathbf{R}^n_+$$

и $\psi \in C^2(B)$, $\psi^{-1} \in C^2(D)$. Пусть $B_R(x_0) \subset\subset B$. Обозначим

$$B^+ = B_R(x_0) \cap \Omega,$$

$$D' = \psi(B_R(x_0)), \quad D^+ = \psi(B^+).$$

При отображении ψ уравнение преобразуется в уравнение $Lu = f$ такого же вида в области B^+ (см. с. 98). Постоянные λ, K для преобразованного уравнения оценивается величинами, зависящими от отображения ψ и от значений λ, K для исходного уравнения. Кроме того, так как $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, то решение $v = u \circ \psi^{-1}$ преобразованного уравнения принадлежит $W^{1,2}(D^+)$ и удовлетворяет условию $\eta v \in W_0^{1,2}(D^+)$ для всех $\eta \in C_0^1(D')$. Поэтому мы будем считать, что функция $u \in W^{1,2}(D^+)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ в D^+ и $\eta u \in W_0^{1,2}(D^+)$ для любой функции $\eta \in C_0^1(D')$. Тогда при $|h| < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\eta, \partial D')$ и для $1 \leqslant k \leqslant n-1$ имеем $\eta^2 \Delta_k^h u \in W_0^{1,2}(D^+)$. Поэтому применимы рассуждения доказательства теоремы 8.8. В результате получим, что $D_{ij}u \in L^2(\psi(B_\rho \cap \Omega))$ для любого $\rho < R$, если только i или j отличны от n. Осталось оценить вторую производную $D_{nn}u$. Она может быть оценена непосредственно из уравнения (8.18). Возвращаясь в исходную область Ω с помощью отображения $\psi^{-1} \in C^2$, мы получим, что $u \in W^{2,2}(B_\rho \cap \Omega)$. А так как x_0 – произвольная точка границы $\partial\Omega$, а $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ в силу теоремы 8.8, то получаем, что $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Наконец, взяв конечное число точек $x^{(i)} \in \partial\Omega$ таких, что шары $B_\rho(x^{(i)})$ покрывают границу $\partial\Omega$, мы придем к оценке (8.25), используя (8.17) и (8.26). □

Заметим, что из условий $u \in W^{2,2}(D^+)$, $\eta u \in W_0^{1,2}(D^+)$, где $\eta \in C_0^1(D')$, следует, что также и $\eta D_k u \in W_0^{1,2}(D^+)$, если только $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Действительно, в силу леммы 7.23 мы имеем $\eta\Delta_k^h u \in W_0^{1,2}(D^+)$ и $\|\eta\Delta_k^h u\|_{W^{1,2}(D^+)} \leqslant \leqslant \|\eta\|_{C^1(D^+)} \cdot \|u\|_{W^{2,2}(D^+)}$, если только h достаточно мало. Отсюда по теореме 5.12 следует, что существует последовательность $\{\eta\Delta_k^{h_j} u\}$, слабо сходящаяся в гильбертовом пространстве $W_0^{1,2}(D^+)$. Предел этой последовательности является, очевидно, функцией $\eta D_k u$. Далее глобальная регулярность решений уравнения $Lu = f$ доказывается точно так же, как теорема 8.10 доказывалась на основе теоремы 8.8. Итак, справедливо следующее обобщение теорем 8.10 и 8.11.

Т е о р е м а 8.13. *Предположим, дополнительно к условиям теоремы 8.10, что $\partial\Omega \in C^{k+2}$ и что существует функция $\varphi \in W^{k+2,2}(\Omega)$ такая, что $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Тогда $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ и справедлива оценка*

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leqslant C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{k+2,2}(\Omega)}) \tag{8.27}$$

с постоянной $C = C(n, \lambda, K, k, \partial\Omega)$. Если функции a^{ij}, b^i, c^i, d, f и φ принадлежат $C^\infty(\bar{\Omega})$ и если граница $\partial\Omega$ принадлежит классу C^∞, то решение u также принадлежит $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Объединяя теоремы 8.3 и 8.13, мы получаем теоремы существования решений для классической задачи Дирихле для уравнения (8.21). Ранее она была установлена в гл. 6 (см. теоремы 6.14 и 6.19).

Теорема 8.14. *Пусть оператор L, заданный формулой (8.21), строго эллиптичен в Ω и имеет бесконечно дифференцируемые в $\bar{\Omega}$ коэффициенты, причем в Ω коэффициент c неположителен. Пусть $\partial\Omega \in C^\infty$. Тогда существует единственное решение $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ задачи Дирихле $Lu = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, при любых $f, \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$.*

С помощью аппроксимации из теоремы 8.14 могут быть получены теоремы существования, установленные в гл. 6. При этом, разумеется, потребуется, чтобы априорные оценки гл. 6 гарантировали сходимость аппроксимирующих решений.

8.5. Глобальная ограниченность слабых решений

В этом разделе мы получим результаты о глобальной ограниченности тех решений уравнения (8.3) из $W^{1,2}(\Omega)$, которые ограничены на $\partial\Omega$. Будет использована интересная техника, основанная на специальном выборе пробных функций. Используемые при этом построения применимы не только к линейным, но и к *нелинейным операторам определенной структуры*. Запишем уравнение (8.3) в виде

$$D_iA^i(x, u, Du) + B(x, u, Du) = 0, \tag{8.28}$$

где

$$\begin{aligned} A^i(x, z, p) &= a^{ij}(x)p_j + b^i(x)z - f^i(x), \\ B(x, z, p) &= c^i(x)p_i + d(x)z - g(x), \end{aligned} \tag{8.29}$$

а $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Слабо дифференцируемая функция u называется слабым субрешением (суперрешением, решением) уравнения (8.28) в Ω, если функции $A^i(x, u, Du)$ и $B(x, u, Du)$ локально интегрируемы и если

$$\int_\Omega (D_iv \cdot A^i(x, u, Du) - vB(x, u, Du))\,dx \leqslant 0 \quad (\geqslant 0, = 0) \tag{8.30}$$

для всех $v \geqslant 0$, принадлежащих $C_0^1(\Omega)$.

Обозначая $\boldsymbol{b} = (b^1, \dots, b^n)$, $\boldsymbol{c} = (c^1, \dots, c^n)$, $\boldsymbol{f} = (f^1, \dots, f^n)$ и используя условие (8.5), с помощью неравенства Шварца получаем оценку

$$\begin{aligned} p_iA^i(x, z, p) &\geqslant \frac{\lambda}{2}|p|^2 - \frac{1}{\lambda}(|\boldsymbol{b}z|^2 + |\boldsymbol{f}|^2), \\ |B(x, z, p)| &\leqslant |\boldsymbol{c}| \cdot |p| + |dz| + |g|. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Неравенства вида (8.31), которым удовлетворяют величины $A(x, z, p)$ и $B(x, z, p)$ из уравнения (8.3), будем называть структурными неравенствами. Упростим вид структурных неравенств. Пусть

$$\bar{z} = |z| + k, \quad \bar{b} = \lambda^{-2}(|\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 + k^{-2}|\boldsymbol{f}|^2) + \lambda^{-1}(|d| + k^{-1}|g|), \tag{8.32}$$

где k — некоторое положительное число. Тогда для любого ϵ, $0 < \epsilon < 1$, выполняются неравенства

$$p_i A^i(x, z, p) \geqslant \frac{\lambda}{2}(|p|^2 - \bar{b}\bar{z}^2), \quad |\bar{z} B(x, z, p)| \leqslant \tag{8.33}$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{2}\left(\epsilon |p|^2 + \frac{\bar{b}}{\epsilon}\bar{z}^2\right).$$

Эти неравенства более удобны в дальнейших приложениях. Докажем следующую теорему.

Теорема 8.15. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5) *и* (8.6). *Предположим, что $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$, где $q > n$. Тогда если функция u из $W^{1,2}(\Omega)$ является субрешением (суперрешением) уравнения* (8.3) *в Ω, удовлетворяющим неравенству $u \leqslant 0$ ($u \geqslant 0$) на границе $\partial\Omega$, то справедливо неравенство*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant C(\|u^+\|_2 + k) \quad (\sup_{\Omega}(-u) \leqslant C(\|u^-\|_2 + k)), \tag{8.34}$$

где $k = \lambda^{-1}(\|f\|_q + \|g\|_{q/2})$ и $C = C(n, \nu, q, |\Omega|)$.

Доказательство. Предположим, что функция u — субрешение (8.3). Для $\beta \geqslant 1$ и $N > k$ определим функцию $H \in C^1[k, \infty)$, полагая $H(z) = z^\beta - k^\beta$ для $z \in [k, N]$ и взяв H линейной при $z \geqslant N$. Обозначив $w = \bar{u}^+ = u^+ + k$, подствим функцию

$$v = G(w) = \int_k^w |H'(s)|^2 ds \tag{8.35}$$

в интегральное тождество (8.30). В силу цепного правила (теорема 7.8) функцию v можно подставить в качестве пробной функции в (8.30). После подстановки, используя неравенства (8.33), получаем

$$\int_\Omega |Dw|^2 G'(w) dz \leqslant \int_\Omega (\bar{b} G'(w) w^2 + \frac{2}{\lambda} G(w) |B(x, u, Du)|) dx \leqslant$$

$$\leqslant \epsilon \int_\Omega G'(w) |Dw|^2 dx + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \int_\Omega \bar{b} \cdot G'(w) w^2 dx,$$

ибо $G(s) \leqslant sG'(s)$ и $Du = Dw$ при $v = G(w) > 0$. Взяв $\epsilon = 1/2$, получим неравенство $\int_\Omega G'(w)|Dw|^2 dx \leqslant 6 \int_\Omega \bar{b} \cdot G'(w) w^2 dx$, откуда в силу (8.35) следует, что $\int_\Omega |DH(w)|^2 dx \leqslant 6 \int_\Omega \bar{b} |H'(w) w|^2 dx$. Так как $H(w) \in W_0^{1,2}(\Omega)$, то мы можем применить неравенство Соболева (7.26) и неравенство Гёльдера. Получим

$$\|H(w)\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)} \leqslant C\left(\int_\Omega \bar{b}(H'(w)w)^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C \|\bar{b}\|_{q/2}^{1/2} \cdot \|H'(w) w\|_{2q/(q-2)}.$$

Здесь обозначено: $\hat{n} = n$ при $n > 2$, $\hat{2}$ — любое число, удовлетворяющее неравенствам $2 < \hat{2} < q$. В полученном неравенстве постоянная C зависит только от n при $n > 2$ и зависит от $\hat{2}$ и $|\Omega|$ при $n = 2$.

Если f и g равны нулю, то (см. (8.32)) в структурных неравенствах (8.33) и в полученном неравенстве можно взять $k = 0$. Если же $\|f\|_q + \|g\|_{q/2} > 0$, то, выбирая число $k > 0$ равным $\lambda^{-1}(\|f\|_q + \|g\|_{q/2})$ (так, как это указано в формулировке теоремы), мы получим, что величина $\|\bar{b}\|_{q/2}$ может быть оценена величиной, зависящей только от n, ν и $|\Omega|$. Итак, выбирая число k так, как указано в утверждении теоремы, мы получаем неравенство

$$\|H(w)\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)} \leqslant C\|wH'(w)\|_{2q/(q-2)} \tag{8.36}$$

с постоянной $C = C(n, \nu, |\Omega|)$.

Устремим здесь $N \to \infty$. Функция $H(z)$ станет равной $z^\beta - k^\beta$ на $[k, \infty)$. Из неравенства (8.36) получим: при любом $\beta \geqslant 1$ из условия $w \in L^{2\beta q/(q-2)}(\Omega)$ следует условие $w \in L^{2\beta\hat{n}/(\hat{n}-2)}(\Omega)$. Введем числа

$$q^* = 2q/(q-2), \quad \chi = \hat{n}(q-2)/q(\hat{n}-2) > 1,$$

и перепишем неравенство (8.36) в виде

$$\|w\|_{\beta\chi q^*} \leqslant (C\beta)^{1/\beta}\|w\|_{\beta q^*}. \tag{8.37}$$

Требуемый результат получается с помощью итераций неравенства (8.37). По индукции получаем, что $w \in \bigcap\limits_{1 \leqslant p < \infty} L^p(\Omega)$. Пусть $\beta = \chi^m$, $m = 0, 1, \dots$ Тогда

$$\|w\|_{\chi^N q^*} \leqslant \prod_{m=0}^{N-1} (C\chi^m)^{\chi^{-m}} \|w\|_{q^*} \leqslant$$

$$\leqslant C^\sigma \chi^\tau \|w\|_{q^*} \leqslant C\|w\|_{q^*}, \quad \sigma = \sum_{m=0}^{N-1} \chi^{-m}, \quad \tau = \sum_{m=0}^{N-1} m\chi^{-m},$$

с постоянной $C = C(n, \nu, q, |\Omega|)$. Устремляя $N \to \infty$, получаем неравенство $\sup\limits_\Omega w \leqslant C\|w\|_{q^*}$. Отсюда с помощью интерполяционного неравенства следует неравенство $\sup\limits_\Omega w \leqslant C\|w\|_2$. Осталось вспомнить, что $w = u^+ + k$. Для суперрешений соответствующее утверждение следует из доказанного, если заменить u на $-u$. □

Техника итераций L^p-норм, использованная выше, была предложена Мозером [209]. Доказательство теоремы 8.15 можно усовершенствовать, если другим способом выбирать пробные функции (см. [147] или [273]).

Пусть в утверждении теоремы 8.5 условие $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$ заменено более общим условием $u \leqslant l$ на $\partial\Omega$, где l – некоторая постоянная. Тогда, так как $L(u - l) = Lu - Ll = Lu - l(D_i b^i + d)$, то можно использовать утверждение теоремы 8.5 для функции $u - l$. При этом в качестве постоянной k надо будет взять величину $\bar{k} = k + \lambda^{-1}|l|(\|b\|_q + \|d\|_{q/2})$. Таким образом, субрешение (суперрешение) u уравнения (8.3) удовлетворяет неравенству

$$\sup_\Omega u \leqslant C(\|u\|_2 + \bar{k} + |l|) \quad (\sup_\Omega(-u) \leqslant C(\|u\|_2 + \bar{k} + |l|)), \tag{8.38}$$

где, как и ранее, $k = \lambda^{-1}(\|f\|_q + \|g\|_{q/2})$ и $C = C(n, \nu, q, |\Omega|)$. В частности, если u – решение, то неравенство (8.38) имеет место для $|u|$.

Получим оценку для $\sup\limits_{\Omega} u$, не зависящую от $\| u \|_2$. Такого типа *априорная оценка* обобщает слабый принцип максимума (см. теорему 8.1). В силу оценки (8.16) норма $\| u \|_2$ может быть оценена величиной, не зависящей от u, если u – решение уравнения (8.3) с оператором L, осуществляющим взаимно однозначное отображение. Последнее имеет место, например, в случае, когда выполнено (8.8). Аналогичная оценка может быть получена для субрешений с помощью слабого принципа максимума и теоремы существования (теорема 8.3). Если функция u является субрешением уравнения (8.3) и если выполнено (8.8), то существует функция v, являющаяся решением обобщенной задачи Дирихле $Lv = g + D_i f^i$ в Ω, $v = u$ на $\partial\Omega$. В силу теоремы 8.1 $u \leqslant v$ в Ω и тогда $\| u^+ \|_2 \leqslant \| v \|_2$. Поэтому для субрешений уравнения (8.3) справедливо неравенство $\sup\limits_{\Omega} u \leqslant \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} u^+ + Ck$ с постоянной C, не зависящей от u.

Покажем, что этот результат может быть получен на основании структурных неравенств (8.31), без привлечения теорем существования для линейных уравнений, причем постоянная C будет зависеть от тех же величин, что и постоянная из неравенства (8.34).

Т е о р е м а 8.16. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5), (8.6) *и* (8.8). *Предположим, что $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ для некоторого $q > n$. Тогда если функция и является субрешением (суперрешением) уравнения* (8.3), *принадлежащим $W^{1,2}(\Omega)$, то*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + Ck \quad \left(\sup_{\Omega}(-u) \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^- + Ck\right), \tag{8.39}$$

где $k = \lambda^{-1}(\| f \|_q + \| g \|_{q/2})$ и $C = C(n, \nu, q, |\Omega|)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что функция u – субрешение уравнения (8.3). В силу условия (8.8) величина $l = \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$ является суперрешением. Не ограничивая общности, можно считать, что $l = 0$. Поступая так же, как в доказательстве теоремы 8.1, получаем

$$\int_{\Omega} (a^{ij} D_j u D_i v - (b^i + c^i) v D_i u)\, dx \leqslant \int_{\Omega} (f^i D_i v - gv)\, dx \tag{8.40}$$

для всех неотрицательных функций v из $W_0^{1,2}(\Omega)$ таких, что $uv \leqslant 0$. Для интегрального неравенства (8.40) выполнены структурные неравенства (8.31), если в них положить $b^i = d = 0$, а вектор $\boldsymbol{c}$ заменить на $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$. Пусть $k > 0$ и $M = \sup\limits_{\Omega} u^+$. Подставим в (8.40) пробную функцию $v = \dfrac{u^+}{M + k - u^+} \in \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Используя (8.31), получим

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \frac{|Du^+|^2}{(M + k - u^+)}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M + k} \int_{\Omega} \left(\frac{|\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}| u^+ |Du^+|}{M + k - u^+} + \frac{u^+ |g|}{M + k - u^+} + \frac{(M + k)|f|^2}{2\lambda(M + k - u^+)^2} \right) dx.$$

Отсюда, в силу определения k, получаем

$$\int_\Omega \frac{|Du^+|^2}{(M+k-u^+)^2}dx \leqslant C + \frac{2}{\lambda}\int_\Omega \frac{|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cdot|Du^+|}{(M+k-u^+)}dx, \quad C = C(|\Omega|).$$

Положим теперь $w = \log \dfrac{M+k}{M+k-u^+}$. Применив неравенство Шварца, получим

$$\int_\Omega |Dw|^2 dx \leqslant C(1 + \lambda^{-2}\int_\Omega |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2 dx) \leqslant C(\nu, |\Omega|),$$

а отсюда по неравенству Соболева (7.26) следует, что

$$\|w\|_2 \leqslant C(n, \nu, |\Omega|). \tag{8.41}$$

Покажем, что функция w является субрешением уравнения (8.3). Беря функцию $\eta \in C_0^1(\Omega)$ такую, что $\eta \geqslant 0$, $\eta u \geqslant 0$ в Ω, подставим в (8.40) пробную функцию $v = \dfrac{\eta}{M+k-u^+}$. Тогда

$$\int_\Omega (a^{ij}D_jwD_i\eta + \eta a^{ij}D_iwD_jw - (b^i+c^i)\eta D_iw)dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega \left(-\frac{\eta g}{M+k-u^+} + \frac{(D_i\eta + \eta\cdot D_iw)f^i}{M+k-u^+}\right)dx.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega (a^{ij}D_jwD_i\eta - (b^i+c^i)\eta D_iw)dx + \lambda\int_\Omega \eta|Dw|^2dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega \left\{\left(\frac{|g|}{k} + \frac{|f|^2}{2\lambda k^2}\right)\eta + \frac{f^iD_i\eta}{M+k-u^+}\right\}dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \eta|Dw|^2dx,$$

и

$$\int_\Omega (a^{ij}D_jwD_i\eta - (b^i+c^i)\eta D_iw)dx \leqslant \int_\Omega (\hat{g}\eta + \hat{f}^iD_i\eta)dx, \tag{8.42}$$

где $\hat{g} = |g|/k + |f|^2/2\lambda k^2$, $\hat{f}^i = f^i/(M+k-u^+)$, и, очевидно, $\|\hat{g}\|_{q/2} \leqslant 2\lambda$, $\|\hat{f}\|_q \leqslant \lambda$. Итак, функция w является субрешением. Мы можем, следовательно, воспользоваться теоремой 8.15. Получим, учитывая неравенство (8.41), что $\sup_\Omega w \leqslant C(1 + \|w\|_2) \leqslant C$, где $C = C(n, \nu\ q, |\Omega|)$. Итак, $(M+k)/k \leqslant C$, а из этого неравенства следует требуемая оценка (8.39). Соответствующий результат для суперрешений получается из доказанного заменой u на $-u$. □

Теорему 8.16 можно рассматривать как обобщение классической априорной оценки, теорема 3.7. Отметим, что результат остается справедливым, если в условии (8.8) величины b^i заменить на величины $-c^i$ (см. теорему 9.7). Кроме того, из проведенного доказательства видно, что ограниченность коэффициентов b^i, c^i и d можно заменить условием $\overline{b} \in L^{q/2}(\Omega)$, $q > n$.

8.6. Локальные свойства слабых решений

Перейдем к изучению локального поведения решений. Пусть $a(x)$ – матрица $[a^{ij}(x)]$, $x \in \Omega$. Дополнительно к структурным неравенствам (8.31) и (8.33) введем условие вида

$$|A(x,z,p)| \leqslant |a| \cdot |p| + |bz| + |f|. \tag{8.43}$$

Поделив уравнение (8.3) на постоянную $\lambda/2$, мы можем считать, что в структурном неравенстве постоянная λ равна 2. Запишем все получившиеся неравенства:

$$\begin{aligned} &|A(x,z,p)| \leqslant |a|\,|p| + 2(\bar{b})^{1/2}\bar{z},\\ &p \cdot A(x,z,p) \geqslant |p|^2 - 2 \cdot \bar{b}\,\bar{z}^2,\\ &|\bar{z} \cdot B(x,z,p)| \leqslant \epsilon |p|^2 + \frac{1}{\epsilon}\bar{b}\,\bar{z}^2. \end{aligned} \tag{8.44}$$

Величины $\bar{z}$ и $\bar{b}$ определены в (8.32) с $\lambda = 2$, а число ϵ – любое из $(0, 1]$.

Для получения локальных результатов введем величину k:

$$k = k(R) = \lambda^{-1}(R^{\delta}\,\|f\|_q + R^{2\delta}\,\|g\|_{q/2}), \tag{8.45}$$

где $R > 0$ и $\delta = 1 - n/q$. Докажем локальный аналог теоремы 8.15.

Теорема 8.17. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5) *и* (8.6). *Предположим, что $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ для некоторого $q > n$. Тогда если функция u является субрешением (суперрешением) из $W^{1,2}(\Omega)$ уравнения* (8.3) *в Ω, то в любом шаре $B_{2R}(y) \subset \Omega$ для любого $p > 1$ справедливо неравенство*

$$\sup_{B_R(y)} u \leqslant C(R^{-n/p}\,\|u^+\|_{L^p(B_{2R}(y))} + k(R)) \tag{8.46}$$

$$\left(\sup_{B_R(y)}(-u) \leqslant C(R^{-n/p}\,\|u^-\|_{L^p(B_{2R}(y))} + k(R))\right)$$

с постоянной $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q, p)$.

Основным результатом, на котором основываются изучение локальных свойств решений и последующая нелинейная теория, является *слабое неравенство Харнака* для суперрешений.

Теорема 8.18. *Пусть оператор L удовлетворяет* (8.5) *и* (8.6). *Предположим, что $f^i \in L^q(\Omega)$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ с некоторым $q > n$. Тогда если функция u является суперрешением в Ω уравнения* (8.3), *принадлежащим $W^{1,2}(\Omega)$, и если функция u неотрицательна в шаре $B_{4R}(y) \subset \Omega$, то при $1 \leqslant p \leqslant n/(n-2)$ справедливо неравенство*

$$R^{-n/p}\,\|u\|_{L^p(B_{2R}(y))} \leqslant C(\inf_{B_R(y)} u + k(R)) \tag{8.47}$$

с постоянной $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q, p)$.

Далее центр – точка y – фиксируется. Шар $B_R(y)$ будем коротко обозначать через B_R для любого R.

В случае, когда u – ограниченное неотрицательное субрешение, можно доказывать теоремы 8.17 и 8.18 одновременно. Полное доказательство теоремы 8.17 может быть получено с помощью варьирования используемых пробных функций. Существо этого подхода было продемонстрировано ранее в доказательстве теоремы 8.15. Изменения, необходимые для проведения доказательства, предоставляем сделать читателю. Грубо говоря, схема одновременного доказательства получается объединением итерационной техники Мозера (см. [210]), описанной в предыдущем разделе, и теоремы Джона – Ниренберга (теорема 7.21), позволяющей перекинуть мост в решающем месте проводимых итераций. Пробные функции вновь берутся в виде степенных функций, но для доказательства теоремы 8.18 необходимо, чтобы показатели степеней принимали всевозможные, как положительные, так и отрицательные, значения. Перейдем к детальному доказательству теоремы 8.18.

Предположим, что $R = 1$. Общий случай сводится к этому случаю простой заменой координат $x \mapsto x/R$. Пусть $k > 0$, $\beta \neq 0$, функция $\eta \in C_0^1(B_4)$ неотрицательна. Возьмем пробную функцию в виде

$$v = \eta^2 \bar{u}^\beta \quad (\bar{u} = u + k). \tag{8.48}$$

В силу цепного правила и правила дифференцирования произведения имеем

$$Dv = 2\eta \cdot D\eta \cdot \bar{u}^\beta + \beta\eta^2 \bar{u}^{\beta - 1} Du, \tag{8.49}$$

причем функция v является допустимой для подстановки в (8.30) в качестве пробной функции. Подставляя в (8.30), получаем выражение

$$\beta \int_\Omega \eta^2 \bar{u}^{\beta - 1} Du \cdot A(x, u, Du)dx +$$

$$+ 2 \int_\Omega \eta \cdot D\eta \cdot A(x, u, Du)\bar{u}^\beta dx - \int_\Omega \eta^2 \bar{u}^\beta B(x, u, Du)dx. \tag{8.50}$$

Это выражение неположительно, если u – субрешение, и неотрицательно, если u – суперрешение. Используя структурные неравенства (8.44), для любого $\epsilon \in (0, 1]$ получаем

$$\eta^2 \bar{u}^{\beta - 1} Du \cdot A(x, u, Du) \geqslant \eta^2 \bar{u}^{\beta - 1} |Du|^2 - 2\bar{b}\eta^2 \bar{u}^{\beta + 1},$$

$$|\eta \cdot D\eta \cdot A(x, u, Du)\bar{u}^\beta)| \leqslant |a| \cdot \eta \cdot |D\eta| \cdot \bar{u}^\beta \cdot |Du| +$$

$$+ 2\bar{b}^{1/2}\eta |D\eta| \bar{u}^{\beta + 1} \leqslant \frac{\epsilon}{2}\eta^2 \bar{u}^{\beta - 1} |Du|^2 +$$

$$+\left(1 + \frac{|a|^2}{2\epsilon}\right)|D\eta|^2 \bar{u}^{\beta + 1} + \bar{b}\eta^2 \bar{u}^{\beta + 1}, \tag{8.51}$$

$$|\eta^2 \bar{u}^\beta B(x, u, Du)| \leqslant \epsilon\eta^2 \bar{u}^{\beta - 1} |Du|^2 + \frac{1}{\epsilon}\bar{b}\eta^2 \bar{u}^{\beta + 1}.$$

Далее мы полагаем, что $\beta > 0$, если u – субрешение, и $\beta < 0$, если u – суперрешение. Взяв $\epsilon = \min(1, |\beta|/4)$, из (8.50) и (8.51) получаем неравенство

$$\int_\Omega \eta^2 \bar{u}^{\beta - 1} |Du|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C(|\beta|) \int_\Omega (\bar{b}\eta^2 + (1 + |a|^2) |D\eta^2)\bar{u}^{\beta + 1} dx, \tag{8.52}$$

в котором постоянная $C(|\beta|)$ не превосходит величины, зависящей только от β_0, при $|\beta| \geqslant \beta_0 > 0$. Введем функцию w:

$$w = \begin{cases} \bar{u}^{(\beta+1)/2}, & \text{если } \beta \neq -1, \\ \log \bar{u}, & \text{если } \beta = -1. \end{cases}$$

Полагая $\gamma = \beta + 1$, неравенство (8.52) можно записать в виде

$$\int_\Omega |\eta Dw|^2 dx \leqslant \begin{cases} C(|\beta|)\gamma^2 \int_\Omega (\bar{b}\eta^2 + (1 + |a|^2)|D\eta|^2) w^2 dx, & \text{если } \beta \neq -1, \\ C \int_\Omega (\bar{b}\eta^2 + (1 + |a|^2)|D\eta|^2) dx, & \text{если } \beta = -1. \end{cases} \tag{8.53}$$

Итерационный процесс осуществляется на основе первого неравенства из (8.53). По неравенству Соболева (7.26) имеем

$$\|\eta w\|^2_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)} \leqslant C \int_\Omega (|\eta Dw|^2 + |wD\eta|^2) dx,$$

где $\hat{n} = n$ при $n > 2$, а $\hat{2}$ — любое число, удовлетворяющее неравенствам $2 < \hat{2} < q$ при $n = 2$. Постоянная в полученном неравенстве зависит только от $\hat{n}$. Используя неравенство Гёльдера (7.7) и затем неравенство (7.10), для любого $\epsilon > 0$ получаем

$$\int_\Omega \bar{b}(\eta w)^2 dx \leqslant \|\bar{b}\|_{q/2} \cdot \|\eta w\|^2_{2q/(q-2)} \leqslant$$

$$\leqslant \|\bar{b}\|_{q/2} \cdot (\epsilon \|\eta w\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)} + \epsilon^{-\sigma} \|\eta w\|_2)^2,$$

где $\sigma = \hat{n}/(q - \hat{n})$. Подставляя полученное неравенство в неравенство (8.53) и подбирая соответствующее ϵ, получим

$$\|\eta w\|_{2\hat{n}/(\hat{n}-2)} \leqslant C(1 + |\gamma|)^{\sigma+1} \|(\eta + |D\eta|)w\|_2, \tag{8.54}$$

где $C = C(\hat{n}, \Lambda, \nu, q, |\beta|)$. Эта постоянная ограничена величиной, зависящей от $\hat{n}$, Λ, ν, q, β_0 при $|\beta| \geqslant \beta_0 > 0$. Введем срезающую функцию η. Пусть числа r_1 и r_2 таковы, что $1 \leqslant r_1 < r_2 \leqslant 3$, и пусть $\eta \equiv 1$ в B_{r_1}, $\eta \equiv 0$ в $\Omega - B_{r_2}$, причем $|D\eta| \leqslant 2/(r_2 - r_1)$. Пусть $\chi = \hat{n}/(\hat{n} - 2)$. Из (8.54) вытекает, что

$$\|w\|_{L^{2\chi}(B_{r_1})} \leqslant \frac{C(1 + |\gamma|)^{\sigma+1}}{r_2 - r_1} \|w\|_{L^2(B_{r_2})}. \tag{8.55}$$

Для $r < 4$ и $p \neq 0$ введем функционал

$$\Phi(p, r) = \left(\int_{B_r} |\bar{u}|^p dx\right)^{1/p}. \tag{8.56}$$

Имеем (см. задачу 7.1):

$$\Phi(\infty, r) = \lim_{p \to +\infty} \Phi(p, r) = \sup_{B_r} \bar{u}$$

и

$$\Phi(-\infty, r) = \lim_{p \to -\infty} \Phi(p, r) = \inf_{B_r} \bar{u}.$$

Неравенство (8.55) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\Phi(\chi\gamma, r_1) \leqslant \left(\frac{C(1+|\gamma|)^{\sigma+1}}{r_2 - r_1}\right)^{2/|\gamma|} \Phi(\gamma, r_2), \text{ если } \gamma > 0, \\
&\Phi(\gamma, r_2) \leqslant \left(\frac{C(1+|\gamma|)^{\sigma+1}}{r_2 - r_1}\right)^{2/|\gamma|} \Phi(\chi\gamma, r_2), \text{ если } \gamma < 0.
\end{aligned} \tag{8.57}$$

Итерирование этих неравенств и приводит к требуемым оценкам. Например, если u – субрешение, то $\beta > 0$ и $\gamma > 1$. Беря $p > 1$, мы можем взять $\gamma = \gamma_m = \chi^m p$ и $r_m = 1 + 2^{-m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ В силу неравенства (8.57) получим

$$\Phi(\chi^m p, 1) \leqslant (C\chi)^{2(1+\sigma)\Sigma m\chi^{-m}} \Phi(p, r) = C\Phi(p, r),$$
$$C = C(\hat{n}, \Lambda, \nu, q, p).$$

Устремляя здесь $m \to \infty$, придем к неравенству

$$\sup_{B_1} \bar{u} \leqslant C \| \bar{u} \|_{L^p(B_2)}. \tag{8.58}$$

К оценке (8.46) мы придем, осуществив преобразование $x \mapsto x/R$.

Если u – суперрешение, то $\beta < 0$ и $\gamma < 1$. Мы можем поступить аналогичным способом и для любых p, p_0, удовлетворяющих неравенствам $0 < p_0 < p < \chi$, получить неравенства

$$\begin{aligned}
&\Phi(p, 2) \leqslant C\Phi(p_0, 3), \\
&\Phi(-p, 3) \leqslant C\Phi(-\infty, 1), \quad C = C(\hat{n}, \Lambda, q, p, p_0).
\end{aligned} \tag{8.59}$$

Утверждение теоремы 8.18 будет доказано, если мы докажем, что при некотором $p_0 > 0$ выполнено неравенство

$$\Phi(p_0, 3) \leqslant C\Phi(-p_0, 3). \tag{8.60}$$

Чтобы доказать это неравенство, воспользуемся вторым неравенством из (8.53). Пусть B_{2r} – произвольный шар радиуса $2r$, лежащий в $B_4 (= B_4(y))$. Возьмем срезающую функцию η так, что $\eta \equiv 1$ в B_r, $\eta \equiv 0$ в $\Omega - B_4$ и $|D\eta| \leqslant 2/r$. С помощью неравенства Гёльдера (7.7) из (8.53) следует, что

$$\int_{B_r} |Dw|\,dx \leqslant Cr^{n/2} \Big(\int_{B_r} |Dw|^2\,dx \Big)^{1/2} \leqslant Cr^{n-1}, \quad C = C(n, \Lambda, \nu). \tag{8.61}$$

Отсюда, по теореме 7.21, заключаем, что существует такая постоянная $p_0 > 0$, зависящая только от n, Λ и ν, что будет иметь место неравенство $\int_{B_3} \exp(p_0 |w - w_0|)dx \leqslant C(n, \Lambda, \nu)$, где $w_0 = |B_3|^{-1} \int_{B_3} w\,dx$. Отсюда получаем

$$\int_{B_3} e^{p_0 w} dx \cdot \int_{B_3} e^{-p_0 w} dx \leqslant Ce^{p_0 w_0} e^{-p_0 w_0} = C.$$

Подставив сюда выражение для функции w, мы приходим к оценке (8.60), что и доказывает теорему 8.18 при $R = 1$ и $k > 0$. Остается сделать преобразование $x \mapsto x/R$ и устремить $k \to 0$. □

Сильный принцип максимума для субрешений уравнения $Lu = 0$, неравенство Харнака для решений уравнения $Lu = 0$, локальная непрерывность по Гёльдеру решений уравнения (8.3) – все эти факты могут быть получены в качестве следствия слабого неравенства Харнака. Мы вскоре докажем эти интересные локальные утверждения.

8.7. Сильный принцип максимума

Теорема 8.19. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5), (8.6) *и* (8.8) *и пусть функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $Lu \geqslant 0$ в Ω. Тогда, если для некоторого шара $B \subset\subset \Omega$ справедливо неравенство*

$$\sup_B u = \sup_\Omega u \geqslant 0, \tag{8.62}$$

то функция u постоянна в Ω. Кроме того, если $u \not\equiv 0$, то в (8.8) *имеет место равенство.*

Доказательство. Обозначив $B_R(y)$ через B, не ограничивая общности, предполагаем, что $B_{4R}(y) \subset \Omega$. Пусть $M = \sup_\Omega u$. Применяя слабое неравенство Харнака (8.47) с $p=1$ к суперрешению $v = M - u$, получим неравенство $R^{-n} \int_{B_{2R}} (M-u)dx \leqslant C \inf_B (M-u) = 0$, из которого следует, что $u \equiv M$ в B_{2R}. Применяя далее рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве теоремы 2.2, мы получаем, что $u \equiv M$ в Ω. □

Теорема 8.19 показывает, что внутри области субрешение уравнения $Lu = 0$ не может иметь положительный максимум, понимаемый в некотором обобщенном смысле. Для непрерывного субрешения утверждение является сильным принципом максимума в классическом смысле. Сильный принцип минимума для суперрешений уравнения $Lu = 0$ получается из доказанного утверждения немедленно, с помощью замены u на $-u$. Прямым следствием доказанного утверждения является также и слабый принцип максимума (теорема 8.1) для субрешений класса $C^0(\Omega)$.

8.8. Неравенство Харнака

Объединяя результаты теорем 8.17 и 8.18, получаем неравенство Харнака.

Теорема 8.20. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5) *и* (8.6) *и пусть функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ неотрицательна в Ω и удовлетворяет в Ω уравнению $Lu = 0$. Тогда для любого шара $B_{4R}(y) \subset \Omega$ имеем*

$$\sup_{B_R(y)} u \leqslant C \inf_{B_R(y)} u \tag{8.63}$$

с постоянной $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R)$.

Представляет интерес характер зависимости постоянной C в неравенствах (8.54) и (8.61) от величины Λ. Можно показать, что постоянная C в неравенстве (8.63) может быть оценена сверху следующим образом:

$$C \leqslant C_0^{(\Lambda/\lambda + \nu R)}, \quad C_0 = C_0(n).$$

Если матрица $[a^{ij}]$ симметрична, то эта оценка может быть улучшена (см. задачу 8.3). С помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям в доказательстве теоремы 2.6, из теоремы 8.20 выводится неравенство Харнака следующего вида.

Следствие 8.21. *Пусть оператор L и функция u удовлетворяет условиям теоремы 8.20. Тогда для любой $\Omega' \subset\subset \Omega$ имеем*

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant C \inf_{\Omega'} u \tag{8.64}$$

с постоянной $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, \Omega', \Omega)$.

8.9. Непрерывность по Гёльдеру

Следующий результат является основным для теории квазилинейных уравнений второго порядка. Его открытие Де Джорджи [76] и Нэшем [224] для операторов вида $Lu = D_i(a^{ij} D_j u)$ существенно продвинуло вперед теорию квазилинейных уравнений с более чем двумя независимыми переменными.

Теорема 8.22. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5) *и* (8.6). *Предположим, что $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ для некоторого $q > n$. Если функция u является решением в Ω уравнения* (8.3), *принадлежащим $W^{1,2}(\Omega)$, то функция u является локально непрерывной по Гёльдеру в Ω, и для любого шара $B_0 = B_{R_0}(y) \subset \Omega$ и любого $R \leqslant R_0$ справедливо неравенство*

$$\operatorname*{osc}_{B_R(y)} u \leqslant CR^{\alpha}(R_0^{-\alpha} \operatorname*{osc}_{B_0} u + k) \tag{8.65}$$

с положительными постоянными $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, q, R_0)$ и $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda, \nu R_0, q)$ и постоянной $k = \lambda^{-1}(\|f\|_q + \|g\|_{q/2})$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $R \leqslant R_0/4$. Введем обозначения:

$$M_0 = \sup_{B_0} |u|, \quad M_4 = \sup_{B_{4R}} u, \quad m_4 = \inf_{B_{4R}} u, \quad M_1 = \sup_{B_R} u, \quad m_1 = \inf_{B_R} u.$$

Тогда

$$L(M_4 - u) = M_4(D_i b^i + d) - D_i f^i + g,$$
$$L(u - m_4) = -m_4(D_i b^i + d) + D_i f^i + g.$$

Следовательно, если взять

$$\bar{k}(R) = \lambda^{-1} R^{\delta}(\|f\|_q + M_0 \|b\|_q) + \lambda^{-1} R^{2\delta}(\|g\|_{q/2} + M_0 \|d\|_{q/2}),$$
$$\delta = 1 - n/q,$$

и применить слабое неравенство Харнака (8.47) с $p = 1$ к функциям $M_4 - u$ и $u - m_4$ в шаре B_{4R}, то мы получим неравенства

$$R^{-n} \int_{B_{2R}} (M_4 - u)\, dx \leqslant C(M_4 - M_1 + \bar{k}(R)),$$

$$R^{-n} \int_{B_{2R}} (u - m_4)\, dx \leqslant C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)).$$

Сложим эти два неравенства:

$$M_4 - m_4 \leqslant C(M_4 - m_4 + m_1 - M_1 + \bar{k}(R)).$$

Отсюда, обозначая $\omega(R) = \operatorname{osc}_{B_R} u = M_1 - m_1$, получаем $\omega(R) \leqslant \gamma\omega(4R) + \bar{k}(R)$, где $\gamma = 1 - C^{-1}$, $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R_0, q)$. Требуемый результат получается с помощью следующей простой леммы. □

Лемма 8.23. *Пусть функция ω неубывает на полуинтервале* $(0, R_0]$, *удовлетворяет при всех $R \leqslant R_0$ неравенству*

$$\omega(\tau R) \leqslant \gamma\omega(R) + \sigma(R), \tag{8.66}$$

где σ – неубывающая функция, а γ, τ – числа такие, что $0 < \gamma$, $\tau < 1$. Тогда для любого $\mu \in (0, 1)$ и всех $R \leqslant R_0$ справедливо неравенство

$$\omega(R) \leqslant C\left(\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha} \omega(R_0) + \sigma(R^{\mu} R_0^{1-\mu})\right) \tag{8.67}$$

с положительными постоянными $C = C(\gamma, \tau)$ и $\alpha = \alpha(\gamma, \tau, \mu)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $R_1 < R_0$. Тогда для любого $R \leqslant R_1$ имеем $\omega(\tau R) \leqslant \gamma\omega(R) + \sigma(R_1)$, так как σ – неубывающая функция. Проитерируем полученное неравенство: для любого натурального m получим, что

$$\omega(\tau^m R) \leqslant \gamma^m \omega(R_1) + \sigma(R_1) \sum_{i=0}^{m-1} \gamma^i <$$

$$< \gamma^m \omega(R_0) + \sigma(R_1)/(1 - \gamma).$$

Для произвольного $R \leqslant R_1$ мы можем найти число m так, что $\tau^m R_1 < R \leqslant \leqslant \tau^{m-1} R_1$. Следовательно,

$$\omega(R) \leqslant \omega(\tau^{m-1} R_1) \leqslant \gamma^{m-1}\omega(R_0) + \sigma(R_1)/(1 - \gamma) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\gamma}\left(\frac{R}{R_1}\right)^{\log\gamma/\log\tau} \omega(R_0) + \sigma(R_1)/(1 - \gamma).$$

Полагая здесь $R_1 = R_0^{1-\mu} R^{\mu}$, приходим к неравенству

$$\omega(R) \leqslant \frac{1}{\gamma}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{(1-\mu)(\log\gamma/\log\tau)} \omega(R_0) + \sigma(R_0^{1-\mu} R^{\mu})/(1 - \gamma). \ \square$$

Утверждение теоремы 8.22 получается при выборе такого значения μ, что $(1 - \mu)(\log\gamma/\log\tau) < \mu\delta$. Доказательство оценки (8.65), опирающееся на теорему 8.17, несколько проще проведенного выше доказательства (см. задачу 8.6).

Объединяя результаты теорем 8.17 и 8.22, мы получаем следующую внутреннюю оценку Гёльдера для слабых решений уравнения (8.3).

Теорема 8.24. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5) *и* (8.6). *Предположим, что $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, $q \in L^{q/2}(\Omega)$ для некоторого $q > n$. Тогда если функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ является решением уравнения* (8.3) *в Ω, то для любой области $\Omega' \subset\subset \Omega$ справедлива оценка*

$$\| u \|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega}')} \leqslant C(\| u \|_{L^2(\Omega)} + k) \tag{8.68}$$

с положительными постоянными $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, q, d')$, $d' = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda, \gamma d')$ *и с постоянной* $k = \lambda^{-1}(\|f\|_q + \|g\|_{q/2})$.

Доказательство. Оценка (8.68) получается, если в теореме 8.22 взять $R_0 = d'$ и воспользоваться результатами теоремы 8.17 для оценки $\sup|u|$. □

Замечание. Из проведенных доказательств видно, что постоянные C из неравенств (8.46), (8.47) и (8.63) не убывают по аргументу νR, постоянная C из (8.65) не убывает по R_0, постоянные α из (8.65) и (8.68) не убывают по аргументам νR_0 и $\nu d'$ соответственно. При $\nu = 0$ постоянные C из (8.46), (8.47) и (8.63) и постоянные α из (8.65) и (8.68) могут быть выбраны не зависящими от R, R_0 и от d', и потому не зависят от областей, входящих в утверждения теорем 8.17, 8.18, 8.20, 8.22 и 8.24.

8.10. Локальные оценки вблизи границы

Введенные нами ранее неравенства для функций из $W^{1,2}(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$ области Ω могут быть обобщены следующим образом. Пусть T — произвольное подмножество $\overline{\Omega}$ и пусть функция u принадлежит $W^{1,2}(\Omega)$. Будем говорить, что $u \leqslant 0$ на T в смысле $W^{1,2}(\Omega)$, если функция u^+ является пределом в $W^{1,2}(\Omega)$ последовательности функций, принадлежащих $C_0^1(\overline{\Omega} - T)$. Ясно, что для непрерывной на T функции u это определение выполнено, если $u \leqslant 0$ на T в обычном смысле. При $T = \partial\Omega$ введенное определение совпадает с определением из раздела 8.1. Определения других типов неравенств на T аналогичны определениям, данным выше. Докажем следующие обобщения теорем 8.17 и 8.18.

Теорема 8.25. *Пусть оператор* L *удовлетворяет* (8.5) *и* (8.6). *Предположим, что* $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ *для некоторого* $q > n$. *Тогда если функция* u *является субрешением в* Ω *уравнения* (8.3), *принадлежащим* $W^{1,2}(\Omega)$, *то для всех* $y \in \mathbf{R}^n$, $R > 0$ *и* $p > 1$ *выполняется неравенство*

$$\sup_{B_R(y)} u_M^+ \leqslant C(R^{-n/p}\|u_M^+\|_{L^p(B_{2R}(y))} + k(R)), \tag{8.69}$$

где

$$M = \sup_{\partial\Omega \cap B_{2R}} u^+, \qquad u_M^+ = \begin{cases} \sup\{u(x), M\}, & x \in \Omega, \\ M, & x \notin \Omega, \end{cases}$$

постоянная k *задана формулой* (8.45), *а* $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q, p)$.

Теорема 8.26. *Пусть оператор* L *удовлетворяет условиям* (8.5) *и* (8.6). *Предположим, что* $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ *для некоторого* $q > n$. *Тогда если функция* u *является суперрешением в* Ω *уравнения* (8.3), *принадлежащим* $W^{1,2}(\Omega)$ *и неотрицательным в* $\Omega \cap B_{4R}(y)$ *для некоторого шара* $B_{4R}(y) \subset \mathbf{R}^n$, *то для любого* p, *удовлетворяющего неравенствам* $1 \leqslant p < n/(n-2)$, *справедливо неравенство*

$$R^{-n/p}\|u_m^-\|_{L^p(B_{2R}(y))} \leqslant C(\inf_{B_R(y)} u_m^- + k(R)), \tag{8.70}$$

где

$$m = \inf_{\partial\Omega\,\cap\, B_{4R}} u, \quad u_m^-(x) = \begin{cases} \inf\{u(x), m\}, & x \in \Omega, \\ m, & x \notin \Omega, \end{cases}$$

а $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q, p)$.

Доказательство. Осуществим сведение доказательства теоремы к теоремам 8.17 и 8.18. Положим $\bar u = u_m^+ + k$ в случае, когда функция u является субрешением, и $\bar u = u_m^- + k$ в случае, когда функция u является суперрешением. В качестве пробной функции в интегральном тождестве (8.3) возьмем функцию

$$v = \eta^2 \cdot \begin{cases} \bar u^{\beta} - (M+k)^{\beta}, & \text{если } \beta > 0, \\ \bar u^{\beta} - (m+k)^{\beta}, & \text{если } \beta < 0. \end{cases} \tag{8.71}$$

Функцию $\eta \in C_0^1(B_{4R})$ выберем позже.

На носителе функции v справедливы структурные неравенства (8.44) с величинами $\bar z = \bar u$ и $p = Du$. Воспользовавшись тем, что $v \leqslant \eta^2 \bar u^{\beta}$, мы приходим к оценке вида (8.52) для функции $\bar u$. Требуемые оценки (8.69) и (8.70) получаются далее так же, как и в доказательстве теорем 8.17 и 8.18. □

Глобальный (вплоть до границы) результат о непрерывности не выводится из теоремы 8.26, если на область Ω не накладывать определенных условий. Будем говорить, что область Ω удовлетворяет *условию внешнего конуса* в точке $x_0 \in \partial\Omega$, если существует конечный правильный круговой конус $V = V_{x_0}$ с вершиной x_0 такой, что $(\bar\Omega \cap V_{x_0}) = x_0$. Условие внешнего конуса, очевидно, выполняется, если выполняется условие внешней сферы.

Справедливо следующее обобщение оценки Гёльдера (8.65).

Теорема 8.27. *Пусть оператор* L *удовлетворяет условиям* (8.5) *и* (8.6). *Предположим, что* $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ *для некоторого* $q > n$. *Тогда если функция u является решением в* Ω *уравнения* (8.3), *принадлежащим* $W^{1,2}(\Omega)$, *и если область* Ω *удовлетворяет условию внешнего конуса в точке* $x_0 \in \partial\Omega$, *то для любого* $0 < R \leqslant R_0$ *и любого шара* $B_0 = B_{R_0}(x_0)$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname*{osc}_{\Omega\,\cap\, B_R} u \leqslant C\{R^{\alpha}(R_0^{-\alpha} \sup_{\Omega\,\cap\, B_0} |u| + k) + \sigma(\sqrt{RR_0})\}, \tag{8.72}$$

где $\sigma(R) = \operatorname*{osc}_{\partial\Omega\,\cap\, B_R(x_0)} u$, *а* $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, q, R_0, V_{x_0})$ *и* $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda, \nu R_0, q, V_{x_0})$ – *положительные постоянные.*

Введем обозначения: $\Omega \cap B_R(x_0) = \Omega_R$, $\partial\Omega \cap B_R(x_0) = (\partial\Omega)_R$, R – произвольное положительное число. Точку $x_0 \in \partial\Omega$ фиксируем.

Доказательство. Следуем доказательству теоремы 8.22. Предположим сначала, что $R \leqslant \inf\{R_0/4, \text{высота } V_{x_0}\}$. Обозначим:

$$M_0 = \sup_{\Omega_{R_0}} |u|, \quad M_4 = \sup_{\Omega_{4R}} u, \quad m_4 = \inf_{\Omega_{4R}} u, \quad M_1 = \sup_{\Omega_R} u, \quad m_1 = \inf_{\Omega_R} u.$$

В каждой функции $M_4 - u$ и $u - m_4$ в шаре $B_{4R}(x_0)$ запишем оценку (8.70). Получим

$$(M_4 - M)\frac{|B_{2R}(x_0) - \Omega|}{R^n} \leqslant$$

$$\leqslant R^{-n} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} (M_4 - u)^-_{M_4 - M} dx \leqslant C(M_4 - M_1 + \bar{k}(R)),$$

$$(m - m_4)\frac{|B_{2R}(x_0) - \Omega|}{R^n} \leqslant$$

$$\leqslant R^{-n} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} (u - m_4)^-_{m - m_4} dx \leqslant C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)),$$

где $M = \sup\limits_{(\partial\Omega)_{4R}} u$, $m = \inf\limits_{(\partial\Omega)_{4R}} u$. Используя условие внешнего конуса, получаем

$$M_4 - M \leqslant C(M_4 - M_1 + \bar{k}(R)),$$
$$m - m_4 \leqslant C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)).$$

Сложим эти неравенства:

$$\operatorname*{osc}_{\Omega_R} u \leqslant \gamma \cdot \operatorname*{osc}_{\Omega_{4R}} u + \operatorname*{osc}_{(\partial\Omega)_{4R}} u,$$

где $\gamma = 1 - C^{-1}$, $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R_0, q, V_{x_0})$. Далее оценка (8.72) получается из леммы 8.23. □

Если выполнены условия теоремы 8.27 и $\sigma(R) \to 0$ при $R \to 0$, то из оценки (8.72) следует, что существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0)$. Следующий результат о глобальной непрерывности вытекает из теорем 8.22 и 8.27.

Следствие 8.28. *Дополнительно к условиям теоремы* 8.27 *предположим, что область* Ω *удовлетворяет условию внешнего конуса в каждой точке* x_0 *границы* $\partial\Omega$ *и что* $\operatorname*{osc}\limits_{\partial\Omega \cap B_R(x_0)} u \to 0$ *при* $R \to 0$ *для всех точек* $x_0 \in \partial\Omega$. *Тогда функция* u *равномерно непрерывна в* Ω.

Если область Ω удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то равномерная оценка Гёльдера может быть получена и из теоремы 8.27. Будем говорить, что область Ω удовлетворяет *равномерному условию внешнего конуса* на куске $T \subset \partial\Omega$, если область Ω удовлетворяет условию внешнего конуса в каждой точке $x_0 \in T$ и конусы V_{x_0} конгруэнтны некоторому фиксированному конусу V. При выполнении равномерного условия конуса справедливо следующее обобщение теоремы 8.24.

Теорема 8.29. *Пусть оператор* L *удовлетворяет условиям* (8.5) *и* (8.6) *и пусть* $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, *и* $g \in L^{q/2}(\Omega)$ *для некоторого* $q > n$. *Предположим, что область* Ω *удовлетворяет равномерному условию внешнего конуса на куске границы* T. *Тогда если функция* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *удовлетворяет в* Ω *уравнению* (8.3), *и если существуют постоянные* k,

$\alpha_0 > 0$ *такие, что*

$$\underset{\partial\Omega \cap B_R(x_0)}{\operatorname{osc}} u \leqslant KR^{\alpha_0} \qquad \forall x_0 \in T, \ \ R > 0,$$

то функция и принадлежит $C^\alpha(\Omega \cup T)$ с некоторым показателем $\alpha > 0$ и для произвольной подобласти $\Omega' \subset\subset (\Omega \cup T)$ выполняется неравенство

$$\| u \|_{C^\alpha(\Omega')} \leqslant C(\sup_\Omega | u | + K + k) \tag{8.73}$$

с постоянными $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda, \nu d', V, q, \alpha_0)$, $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu, d', V, q, \alpha_0)$, $d' = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega - T)$ и $k = \lambda^{-1}(\| f \|_q + \| g \|_{q/2})$. При $\Omega' = \Omega$ величину d' надо заменить на $\operatorname{diam}\Omega$.

Доказательство. Пусть $y \in \Omega'$, $\delta = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) < d'$. В силу теоремы 8.22 с $R_0 = \delta$ для произвольной точки $x \in B_\delta$ имеем

$$\frac{| u(x) - u(y) |}{| x - y |^\alpha} \leqslant C(\delta^{-\alpha} \sup_{B_\delta} | u | + k).$$

Возьмем теперь точку $x_0 \in \partial\Omega$ так, что $| x - y | = \delta$. Взяв в (8.72) $R = 2\delta$ и $R_0 = 2d'$, получаем

$$\delta^{-\alpha} \underset{B_\delta}{\operatorname{osc}} u \leqslant \delta^{-\alpha} \underset{\Omega_{2\delta}}{\operatorname{osc}} u \leqslant C(\sup_\Omega | u | + k + K),$$

если только $2\alpha \leqslant \alpha_0$. Следовательно, для любой точки $x \in B_\delta(y)$ выполняется неравенство (считаем, что $u(x_0) = 0$)

$$\frac{| u(x) - u(y) |}{| x - y |^\alpha} \leqslant C(\sup_\Omega | u | + k + K). \tag{8.74}$$

Вновь применяя оценку (8.72) с $R = 2 | x - y |$ и $R_0 = 2d'$, мы видим, что (8.74) выполняется при $d' \geqslant | x - y | \geqslant \delta$. □

В утверждении доказанной теоремы объединены отдельные оценки Гёльдера внутри области и на границе в единую оценку смешанного характера. Отметим следующий факт. Пусть $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ и $u - v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Тогда если $v \in C^0(\overline{\Omega})$, то $\underset{\partial\Omega \cap B_R(y)}{\operatorname{osc}} u \to 0$ при $R \to 0$ для всех $y \in \partial\Omega$. А если $v \in C^{\alpha_0}(\overline{\Omega})$, то $\underset{\partial\Omega \cap B_R(y)}{\operatorname{osc}} u \leqslant K \cdot R^{\alpha_0}$ для всех $y \in \partial\Omega$ и $R > 0$. Справедливо замечание, следующее за доказательством теоремы 8.24, касающееся постоянных C из неравенств (8.69) и (8.70) и постоянных α из неравенств (8.72) и (8.73). Из теоремы 8.3 и следствия 8.28 следует теорема существования для уравнения (8.3) для произвольных непрерывных граничных данных.

Теорема 8.30. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5), (8.6) *и* (8.8) *и пусть $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, и $g \in L^{q/2}(\Omega)$ для некоторого $q > n$. Предположим, что область Ω удовлетворяет условию внешнего конуса в каждой точке $\partial\Omega$. Если $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, то существует единственная функция $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая в Ω уравнению $Lu = g + D_i f^i$ и граничному условию $u = \varphi$ на $\partial\Omega$.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_m\}$ – последовательность функций из $C^1(\overline{\Omega})$, сходящаяся равномерно к φ на $\partial\Omega$. В силу теоремы 8.3 и следствия 8.28 существует последовательность $\{u_m\}$ функций из $W^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ такая, что $Lu_m = g + D_i f^i$ в Ω и $u_m = \varphi_m$ на $\partial\Omega$. По теореме 8.1 имеем

$$\sup_{\Omega} |u_{m_1} - u_{m_2}| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |\varphi_{m_1} - \varphi_{m_2}| \to 0 \quad \text{при } m_1, m_2 \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ равномерно сходится к функции $u \in C^0(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей равенству $u = \varphi$ на $\partial\Omega$. Кроме того, из неравенства (8.52) вытекает, что для произвольной области $\Omega' \subset\subset \Omega$ интеграл $\int_{\Omega'} |D(u_{m_1} - u_{m_2})|^2 dx$ стремится к нулю при $m_1, m_2 \to 0$. Поэтому функция u принадлежит $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и удовлетворяет в Ω уравнению (8.3). Единственность решения u следует из теоремы 8.1, примененной для областей $\Omega' \subset\subset \Omega$. □

Критерий Винера. Если в условии теоремы 8.30 опустить ограничения на область Ω, то, поступая, как и выше, можно доказать существование функции $u \in C^0(\Omega) \cap W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ такой, что $Lu = g + D_i f^i$ в Ω, причем $u(x) \to \varphi(x_0)$ при $x \to x_0 \in \partial\Omega$, если в точке x_0 область Ω удовлетворяет условию внешнего конуса. Каждая точка x_0 границы $\partial\Omega$, в которой $u(x) \to \varphi(x_0)$ при произвольном выборе заданных функций φ, g, f^i, называется *регулярной точкой* для оператора L. Используя методы работы [362] или работы [179], можно показать, что регулярные точки для оператора L совпадают с регулярными точками для оператора Лапласа (определение последних см. в гл. 2). Метод барьеров, развитый в гл. 6, может быть применен и в рассматриваемом случае. Отметим, что, как видно из доказательства теоремы 8.27, условие внешнего конуса можно заменить условием вида

$$\lim_{R \to 0} \inf \frac{|B_R(x_0) - \Omega|}{R^n} > 0. \tag{8.75}$$

Более того, развивая технику, описанную в этом разделе, можно доказать достаточность условия Винера (2.37) для регулярности граничной точки. Докажем сначала оценку, аналогичную слабому неравенству Харнака (теоремы 8.18 и 8.26), содержащую градиент суперрешения. Рассмотрим внутренний случай. Предположим, что выполнены условия теоремы 8.18. Тогда, как следует из доказательства 8.18, вместе с оценкой (8.47) мы можем получить и оценку вида

$$\Big(R^{2-n} \int_{B_{2R}} (\bar{u})^{-p} |Du|^2 dx\Big)^{1/(2-p)} \leqslant C\big(\inf_{B_R} u + k(R)\big),$$

где $1 < p < n/(n-2)$, а постоянная $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q, p)$. Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$R^{1-n} \int_{B_{2R}} |Du|\, dx \leqslant \Big(R^{-n} \int_{B_{2R}} (\bar{u})^{p}\, dx\Big)^{1/2}.$$

$$\Big(R^{2-n} \int_{B_{2R}} (\bar{u})^{-p} |Du|^2\, dx\Big)^{1/2} \leqslant C\big(\inf_{B_R} u + k(R)\big) \tag{8.76}$$

с постоянной $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q)$ для фиксированного значения p, например для $p = n/(n-1)$. Если дополнительно предположим, что выполнены условия теоремы 8.26, то, проводя доказательство, аналогичное ее доказательству, мы получим, что в (8.76) величину u можно заменить на u_m^-. Поэтому

$$R^{1-n} \int_{\Omega \cap B_{2R}} |Du_m^-|\, dx \leqslant C\big(\inf_{\Omega \cap B_R} u_m^- + k(R)\big) \tag{8.77}$$

с постоянной $C = C(n, \Lambda/\lambda, \nu R, q)$. Взяв далее срезающую функцию $\eta \in C_0^1(B_{2R})$ такую, что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ на B_R и $|D\eta| \leqslant 2/R$, подставим в качестве пробной функции в (8.30) функцию $v = \eta^2(m - u_m^-)$, заметив, что $m = \sup\limits_{B_{2R}} u_m^-$ при $B_{4R} \cap \partial\Omega \neq \phi$. Предположим далее, что последнее имеет место. Нормируя значение R к единице и используя условия (8.5) и (8.6), получим

$$\int_{B_2} \eta^2 |Du_m^-|^2\, dx \leqslant C(m+k) \int_{B_2} (\bar{u} + |D\bar{u}|)\, dx.$$

Пусть $w = \eta u_m^-$. С помощью (8.70) и (8.77) получаем неравенство

$$\int_{B_2} |Dw|^2\, dx \leqslant C(m+k) \int_{B_2} (\bar{u} + |D\bar{u}|)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C(m+k)\big(\inf_{B_1} u_m^- + k\big).$$

Следовательно, для произвольного R справедливо неравенство

$$R^{2-n} \int_{B_{2R}} |Dw|^2\, dx \leqslant C(m+k)\big(\inf_{B_R} u_m^- + k(R)\big). \tag{8.78}$$

Напомним, что емкость множества $B_R - \Omega$ определяется равенством

$$\operatorname{cap}(B_R - \Omega) = \inf_{v \in \mathscr{K}} \int |Dv|^2\, dx \tag{8.79}$$

(см. (2.36)), где $\mathscr{K} = \{v \in C_0^1(\mathbf{R}^n) \mid v = 1 \text{ на } B_R - \Omega\}$. Так как $u_m^- = m$ на $B_R - \Omega$ и пространство $C_0^1(B_{2R})$ плотно в $W_0^{1,2}(B_{2R})$ и так как $\operatorname{cap}(B_R - \Omega) \leqslant CR^{n-2}$, то из (8.78) следует, что

$$mR^{2-n} \operatorname{cap}(B_R - \Omega) \leqslant C \inf_{B_R} (u_m^- + k(R)). \tag{8.80}$$

Поэтому если u – решение уравнения (8.3) в Ω и если $y = x_0 \in \partial\Omega$, то, применяя обозначения из доказательства теоремы 8.27, можем записать

$$(M_4 - M)\chi(R) \leqslant C(M_4 - M_1 + \bar{k}(R)),$$
$$(m - m_4)\chi(R) \leqslant C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)),$$

где $\chi(R) = R^{2-n} \cdot \operatorname{cap}(B_R - \Omega)$. Складывая эти неравенства, приходим к оценке колебания вида

$$\operatorname*{osc}_{\Omega_R} u \leqslant \left(1 - \frac{\chi(R)}{C}\right) \operatorname*{osc}_{\Omega_{4R}} u + \frac{\chi(R)}{C} \operatorname*{osc}_{(\partial\Omega)_{4R}} u + \bar{k}(R). \tag{8.81}$$

Оставляем читателю для самостоятельной проверки следующий факт: если выполнено условие (2.37) с постоянной $\lambda = 1/4$, то с помощью итераций неравенства (8.81) подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 8.23 (задача 8.8), можно получить оценку модуля непрерывности функции u в точке x_0. Таким образом, мы можем утверждать справедливость следующего обобщения теоремы 8.30.

Теорема 8.31. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (8.5), (8.6) *и* (8.8) *и пусть* $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ *для некоторого* $q > n$. *Предположим, что выполнено условие Винера* (2.37) *в каждой точке* $\partial\Omega$. *Тогда для произвольной функции* $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ *существует единственная функция* $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, *удовлетворяющая в* Ω *уравнению* $Lu = g + D_i f^i$ *и равная* φ *на* $\partial\Omega$.

Наконец, в заключение этого раздела мы отметим, что результаты разделов 8.6–8.10 остаются в силе, если условия (8.6) на коэффициенты $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и d заменить на следующее: $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in L^q(\Omega)$, $d \in L^{q/2}(\Omega)$, $q > n$. Полагая $\bar{b} = \lambda^{-2}(|\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2) + \lambda^{-1}d$, $\nu^2 = \|\bar{b}\|_{q/2}$, мы должны тогда в оценках 8.17–8.29 заменить νR на νR^δ. В некоторых предыдущих локальных результатах можно ослабить условия, касающиеся и равномерной, и строгой эллиптичности оператора L (см. [285], [288], [299]).

8.11. Оценки Гёльдера первых производных

Если старшие коэффициенты уравнения (8.3) непрерывны по Гёльдеру, то исследование проблем существования и регулярности может быть осуществлено по примеру теории Шаудера, изложенной в гл. 6, и приводит к аналогичным результатам. Отправной точкой вновь является уравнение Пуассона вида

$$\Delta u = g + D_i f^i. \tag{8.82}$$

Если функции $g, \boldsymbol{f} \in L^\infty(\Omega)$ и если $\boldsymbol{f} \in C^\alpha(\Omega)$ с некоторым показателем $\alpha \in (0, 1)$, то нетрудно проверить, что ньютонов потенциал правой части, определенный формулой

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\, g(y)\, dy + \int_\Omega D_i\Gamma(x-y)\, f^i(y)\, dy,$$

является слабым решением уравнения (8.82), и следовательно, можно применить оценки раздела 4.5 к этому слабому решению уравнения (8.82) (см. задачу 7.20). В частности, отметим внутренние и граничные оценки (4.45) и (4.46). Из леммы 6.1 следует, что такие же оценки справедливы и для слабых решений уравнения

$$L_0 u \equiv A^{ij} D_{ij} u = g + D_i f^i,$$

где L_0 – эллиптический оператор с постоянными коэффициентами.

Применим технику возмущения, изложенную в разделе 6.10, к изучению уравнения

$$Lu = g + D_i f^i, \tag{8.83}$$

где L – оператор вида (8.1). Заморозим коэффициенты a^{ij} в произвольной точке x_0 и перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} a^{ij}(x_0) D_{ij}u &= D_i\{(a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x)) D_j u - b^i(x) u\} - \\ &- c^i(x) D_i u - d(x) u + g + D_i f^i = G(x) + D_i F^i(x), \end{aligned} \tag{8.84}$$

где

$$F^i(x) = (a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x)) D_j u - b^i(x) u + f^i(x),$$

$$G(x) = -c^i(x) D_i u - d(x) u + g(x).$$

Полученное уравнение для фиксированной точки x_0 имеет вид (8.82), если взять $f^i = F^i$ и $g = G$.

Предположим, что оператор L строго эллиптичен, удовлетворяет условию (8.5) и что a^{ij}, $b^i \in C^\alpha(\bar\Omega)$, c^i, d, $g \in L^\infty(\Omega)$ и $f \in C^\alpha(\bar\Omega)$. Пусть

$$\max_{i,j=1,\ldots,n} \{|a^{ij}, b^i|_{0,\alpha,\Omega},\ |c^i, d|_{0,\Omega}\} \leqslant K. \tag{8.85}$$

Докажем следующие внутренние и глобальные оценки.

Теорема 8.32. *Пусть функция $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ — слабое решение уравнения* (8.83) *в ограниченной области Ω. Тогда для любой подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$ справедливо неравенство*

$$|u|_{1,\alpha;\Omega'} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |g|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \tag{8.86}$$

с постоянной $C = C(n, \lambda, K, d')$, величина λ определена неравенством (8.5), *величина K — постоянная из* (8.85), *а $d' = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.*

Теорема 8.33. *Пусть функция $u \in C^{1,\alpha}(\bar\Omega)$ является слабым решением* (8.83) *в области Ω класса $C^{1,\alpha}$, удовлетворяет равенству $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, где $\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar\Omega)$. Тогда*

$$|u|_{1,\alpha} \leqslant C(|u|_0 + |\varphi|_{1,\alpha} + |g|_0 + |f|_{0,\alpha}) \tag{8.87}$$

с постоянной $C = C(n, \lambda, K, \partial\Omega)$. Постоянные λ и K определены выше (теорема 8.32).

Доказательство этих результатов по существу совпадает с доказательством утверждений теорем 6.1 и 6.6, но при этом надо для уравнения (8.84) использовать оценки (4.45) и (4.46). Отметим, что для доказательства оценки (8.87) с помощью граничной оценки (4.46) потребуется предварительное выпрямление границы. Так как условия, накладываемые на уравнение (8.83), инвариантны при преобразованиях класса $C^{1,\alpha}$, достаточно, чтобы область Ω принадлежала классу $C^{1,\alpha}$, и поэтому теорема 8.33 справедлива для областей и граничных значений из таких же классов. Зависимость постоянной C из (8.87) от границы $\partial\Omega$ проявляется в виде зависимости от $C^{1,\alpha}$–норм Гёльдера функций, осуществляющих выпрямление границы.

Глобальная оценка теоремы 8.33 непосредственно приводит к основной теореме существования для уравнения (8.83).

Теорема 8.34. *Пусть Ω — область класса $C^{1,\alpha}$ и L — оператор, удовлетворяющий условиям* (8.5), (8.6) *и* (8.85) *с постоянной $K < \infty$. Пусть*

$g \in L^\infty(\Omega)$, $f^i \in C^\alpha(\bar\Omega)$, $\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar\Omega)$. *Тогда обобщенная задача Дирихле*

$$Lu = g + D_i f^i \quad \text{в } \Omega, \quad u = \varphi \text{ на } \partial\Omega, \tag{8.88}$$

однозначно разрешима в $C^{1,\alpha}(\bar\Omega)$.

Доказательство. Применим метод аппроксимации. Пусть L_k последовательность операторов с достаточно гладкими (например, принадлежащими $C^2(\bar\Omega)$) коэффициентами a^{ij}, b_k^i, c_k^i, d_k такими, что $a_k^{ij} \to a^{ij}$, $b_k^i \to b^i$ равномерно в Ω и $c_k^i \to c^i$, $d_k \to d$ в L^1 при $k \to \infty$. Можно считать, что аппроксимирующие коэффициенты удовлетворяют условиям (8.5), (8.8) и (8.85). Пусть дополнительно $f_k^i, g_k, \varphi_k \in C^3(\bar\Omega)$ и пусть при $k \to \infty$: $f_k^i \to f^i$, причем $|f_k^i|_{0,\alpha} \leqslant C|f^i|_{0,\alpha}$; $\varphi_k \to \varphi$, причем $|\varphi_k|_{1,\alpha} \leqslant C|\varphi|_{1,\alpha}$; и $g_k \to g$ в $L^1(\Omega)$, причем $|g_k|_{0,\Omega} \leqslant C|g|_{0,\Omega}$. Наконец, пусть $\{\Omega_k\}$ – последовательность областей класса $C^{2,\alpha}$, исчерпывающих область Ω таких, что $\partial\Omega_k \to \partial\Omega$ и поверхности $\partial\Omega_k$ равномерно принадлежат $C^{1,\alpha}$ (см. задачу 6.9).

При выполнении этих условий гладкая аппроксимирующая задача Дирихле

$$L_k u = g_k + D_i f_k^i \quad \text{в } \Omega_k, \quad u = \varphi_k \text{ на } \partial\Omega_k, \tag{8.89}$$

имеет единственное решение из $C^{2,\alpha}(\bar\Omega_k)$, удовлетворяющее оценке (8.87). Так как в силу теоремы 8.16

$$|u_k|_0 \leqslant \sup_{\partial\Omega_k} |u_k| + C(|g_k|_0 + |f_k|_0),$$

то мы приходим к равномерной в $C^{1,\alpha}$ оценке вида

$$|u_k|_{1,\alpha;\Omega_k} \leqslant C(|\varphi_k|_{1,\alpha;\Omega_k} + |g_k|_{0;\Omega_k} + |f_k|_{0,\alpha;\Omega_k}) \leqslant$$

$$\leqslant C(|\varphi|_{1,\alpha,\Omega} + |g|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \tag{8.90}$$

с постоянной C, не зависящей от k. Устремляя $k \to \infty$ в интегральном тождестве, соответствующем уравнению (8.83), мы получим, что существует единственный предел u последовательности $\{u_k\}$, являющийся слабым решением уравнения (8.88). Это решение будет удовлетворять также неравенству (8.90). Построенное решение единственно и в более широком классе функций – в классе функций $W^{1,2}(\Omega)$, удовлетворяющих условию $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (см. теорему 8.1). □

Оценка (8.87), доказанная для слабых решений класса $C^{1,\alpha}$, может быть доказана и для решений класса $W^{1,2}(\Omega)$ при выполнении тех же самых условий. Пусть функции $u \in W^{1,2}(\Omega)$ является решением уравнения (8.83), выполнены условия теоремы 8.33, $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Тогда функция u ограничена (в силу теоремы 8.16) и существует достаточно большая положительная постоянная σ такая, что функция u совпадает с единственным решением v из $C^{1,\alpha}(\bar\Omega)$ обобщенной задачи Дирихле

$$(L - \sigma)v = g + D_i f^i - \sigma u \quad \text{в } \Omega, \quad v = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 8.35. *При выполнении условий теоремы* 8.33 *для функции* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *такой, что* $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *справедлива оценка* (8.87).

(Напомним, что в условиях теоремы 8.33 функция u является слабым решением уравнения 8.83.)

Локальная принадлежность $C^{1,\alpha}$ может быть установлена и с помощью аппроксимации решения u гладкими функциями. Справедливо следующее обобщение следствия 8.35, доказательство которого мы оставляем читателю.

С л е д с т в и е 8.36. *Пусть T – кусок (быть может, пустой) класса $C^{1,\alpha}$, лежащий на границе области Ω. Предположим, что функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ является слабым решением уравнения* (8.33), *обращающемся в нуль на T в смысле $W^{1,2}(\Omega)$. Тогда функция и принадлежит $C^{1,\alpha}(\Omega \cup T)$ и для произвольной $\Omega' \subset\subset (\Omega \cup T)$ имеет место оценка*

$$|u|_{1,\alpha;\Omega'} \leqslant C(|u|_{0;\Omega} + |g|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \tag{8.91}$$

с постоянной $C = C(n, \lambda, K, d', T)$. Постоянные λ и K – те же, что и в теореме 8.32. *Здесь* $d' = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega - T)$.

Если предположить, что $\varphi \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ и функция u равна φ на T в смысле $W^{1,2}(\Omega)$, то в правую часть оценки (8.91) следует вставить $|\varphi|_{1,\alpha;\Omega}$. Последнее очевидным образом следует из (8.91) с помощью замены u на $u - \varphi$.

З а м е ч а н и е. Результаты этого раздела остаются в силе, если предполагать, что $g \in L^p(\Omega)$, $p = n(1-\alpha)$. При этом норму $|g|_{0;\Omega}$ надо заменить нормой $\|g\|_{p;\Omega}$. Доказательства соответствующих результатов по существу те же самые, что и рассмотренные выше (см. замечание в конце раздела 4.5).

8.12. Задача на собственные значения

В силу теоремы 8.6 из теории Фредгольма следует, что эллиптический оператор вида (8.1) имеет не более чем счетное число собственных значений. В этом разделе мы дадим прямое доказательство того, что самосопряженный оператор имеет собственные значения, и рассмотрим их свойства. Представляет интерес дать здесь доказательство существования собственных значений несмотря на то, что этот факт следует и из результатов классического функционального анализа.

Предположим, что оператор L самосопряжен и имеет вид

$$Lu = D_i(a^{ij}D_ju + b^iu) - b^iD_iu + cu,$$

где $[a^{ij}]$ – симметричная матрица. Соответствующий квадратичный функционал на гильбертовом пространстве $H = W_0^{1,2}(\Omega)$ определяется формулой

$$\mathcal{L}(u, u) = \int_\Omega (a^{ij}D_iuD_ju + 2b^iuD_iu - cu^2)\,dx.$$

Отношение

$$J(u) = \mathcal{L}(u, u)/(u, u), \qquad u \not\equiv 0, \quad u \in H,$$

называется *отношением Релея* для оператора L. Рассмотрим вариационную задачу минимизации $J(u)$. В силу леммы 8.4 функционал $J(u)$ ограничен снизу. Следовательно, существует

$$\sigma = \inf_H J(u). \tag{8.92}$$

Мы утверждаем, что число σ является минимальным собственным значением оператора L на H, т.е. существует нетривиальная функция $u \in H$ такая, что

$$Lu + \sigma u = 0 \tag{8.93}$$

и число σ – наименьшее число, для которого это возможно. Чтобы доказать сформулированное утверждение, возьмем *минимизирующую последовательность* $\{u_m\} \subset H$ такую, что $\|u_m\| = 1$ и $J(u_m) \to \sigma$ при $m \to \infty$. В силу (8.5) и (8.6) получаем, что последовательность $\{u_m\}$ ограничена в H, и, так как вложение $H \to L^2(\Omega)$ компактно (теорема 7.22), существует подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, сходящяся в $L^2(\Omega)$ к функции u с нормой $\|u\|_2 = 1$. Обозначим эту подпоследовательность также через $\{u_m\}$. Так как функционал $Q(u) = \mathcal{L}(u, u)$ квадратичен, то для любых u_l, u_m имеем

$$Q\left(\frac{u_l - u_m}{2}\right) + Q\left(\frac{u_l + u_m}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(Q(u_l) + Q(u_m)\right),$$

т.е.

$$Q\left(\frac{u_l - u_m}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(Q(u_l) + Q(u_m)\right) - \sigma \left\| \frac{u_l + u_m}{2} \right\|_2^2 \to 0$$

при $l, m \to \infty$. Снова применяя лемму 8.4, получаем, что последовательность $\{u_m\}$ является последовательностью Коши в H. Следовательно, $u_m \to u$ в H и $Q(u) = \sigma$. Вывод уравнения Эйлера (8.83) осуществляется стандартным способом, если рассмотреть функцию $f(t) = J(u + tv)$ для $v \in H$ и вычислить производную $f'(0) = 2(\mathcal{L}(u, v) - \sigma(u, v)) = 0$.

Число σ, как легко видеть, является минимальным собственным значением, так как существование любого меньшего собственного значения противоречило бы равенству (8.92). Расположим собственные значения в неубывающем порядке $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ и обозначим соответствующие им собственные подпространства через $V_1, V_2, V_3, \ldots$ Последовательные собственные числа могут быть охарактеризованы следующим образом:

$$\sigma_m = \inf\{J(u) \mid u \neq 0,\ (u, v) = 0 \quad \forall v \in \{V_1, V_2, \ldots, V_{m-1}\}\}. \tag{8.94}$$

Разрешимость записанных здесь вариационных задач доказывается точно так же, как и в случае $m = 1$. Кроме того, процессом (8.94) будут выявлены все возможные собственные значения оператора L, а соответствующие им собственные функции будут образовывать плотное в H множество. Подведем итог.

Теорема 8.37. *Пусть L – самосопряженный оператор, удовлетворяющий условиям* (8.5) *и* (8.6). *Тогда существует счетное дискретное множество $\Sigma = \{\sigma_m\}$ собственных значений оператора L, заданных соотношениями* (8.94), *а соответствующие им собственные функции таковы, что их линейная оболочка совпадает с H.*

Решение задачи Дирихле для оператора L можно представить в виде разложения по собственным функциям (см. [140]). Полученные выше результаты о регулярности применимы и к собственным функциям. В частности, оказывается, что эти собственные функции принадлежат $L^\infty(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$ с некоторым показателем $\alpha > 0$ (см. теоремы 8.15 и 8.24) и принадлежат $C^\alpha(\bar{\Omega})$, если область Ω достаточно гладкая (теорема 8.29). Если коэффициенты оператора L бесконечно дифференцируемы, то такими же будут и собственные функции (следствие 8.11).

В заключение отметим одно специальное свойство минимального собственного значения σ_1.

Теорема 8.38. *Пусть L – самосопряженный оператор, удовлетворяющий условиям* (8.5) *и* (8.6). *Тогда минимальное собственное значение – простое, а соответствующая ему собственная функция не равна нулю и может быть взята положительной.*

Доказательство. Если функция u является собственной функцией, соответствующей собственному числу σ_1, то из равенства (8.92) следует, что функция $|u|$ также является собственной функцией для этого же собственного значения. Тогда в силу неравенства Харнака (теорема 8.21) функция $|u|$ будет положительна почти всюду в Ω. Следовательно, собственное число σ_1 имеет положительную собственную функцию. Точно так же доказывается, что собственная функция для σ_1 или положительна, или отрицательна. Но две такие функции не могут быть ортогональными друг другу. Это значит, что пространство V_1 одномерно и собственное число σ_1 – простое. □

Примечания

Метод гильбертова пространства или вариационный подход к задаче Дирихле для линейных эллиптических уравнений имеется уже в работах Гильберта [69] и Лебега [155] об уравнении Лапласа. В течение этого столетия он был развит многими исследователями, включая, в частности, Фридрихса [314], [315] и Гординга [71]. Для дальнейшего знакомства с этими вопросами читатель отсылается к книгам [1], [32] и [313]. Обобщенная задача Дирихле, рассмотренная нами в разделе 8.2, изучалась Ладыженской и Уральцевой [147] и Стампаккья [273], [274]. Этими авторами доказана альтернатива Фредгольма (теорема 8.6), однако их результаты по проблеме существования и единственности более слабые, нежели изложенные здесь, из-за наличия условий малости и коэрцитивности. Слабый принцип максимума (теорема 8.1), хотя и является непосредственным следствием слабого неравенства Харнака, появился в [282], а первая статья об этом принадлежит Чикко [338] (см. также [363]). В своем изложении мы следовали доказательству Трудингера [288], имеющему то преимущество, что оно легко переносится на неравномерно эллиптические уравнения. При справедливости альтернативы Фредгольма теорема существования (теорема 8.3) является непосредственным следствием слабого принципа максимума.

Теоремы о существовании у слабых решений слабых производных высокого порядка, изложенные в разделе 8.3 и 8.4, были доказаны различными авторами, в том числе: Фридрихсом [315], Браудером [43], Лаксом [141] и Ниренбергом [215], [216]; см. также [1], [32] и [313]. Глобальная оценка (теорема 8.15) получена в работах [147] и [273], [274]. Она является обобщением более раннего результата Стампаккья [270], [271]. Доказательство ее с помощью итерационной техники Мозера, осуществленное в этой книге, следует Серрину [262]. Априорная оценка (теорема 8.16) получена Трудингером [288].

Локальные поточечные оценки, описанные в конце гл. 8, появились из пионерской работы Де Джорджи [76], в которой доказан специальный случай теорем 8.17 и 8.22 для уравнения вида

$$Lu = D_i(a^{ij}(x)D_j u) = 0 \tag{8.95}$$

(см. также работу Нэша [224]). На линейные уравнения вида, рассмотренного в книге, результаты Де Джорджи были обобщены Морри [207], Стампаккья [272], а на квазилинейные уравнения дивергентного вида – Ладыженской и Уральцевой [145]. Интересное новое доказательство результата Де Джорджи дал Мозер [209]. Его доказательство обобщается на более широкий класс уравнений (см. [147]) и может быть применено для доказательства теорем 8.22 и 8.24 и для получения граничных оценок (теорема 8.29) (см. задачу 8.6). Неравенство Харнака для слабых решений уравнения (8.93) было доказано Мозером [210] и обобщено на квазилинейные уравнения дивергентного вида Серрином [262] и Трудингером [282]. Наш метод получения локальных оценок теорем 8.18 и 8.26 основан на слабом неравенстве Харнака, полученном в [282]. Отметим, что в случае уравнения с двумя независимыми переменными оценка Гёльдера и неравенство Харнака могут быть получены более простыми методами, см, [206], [31] и задачу 8.5. Точные результаты в этом случае см. в [235] и в [52]. Изложение теорем 8.25 – 8.30 в разделе 8.10 следует работе [282], в которой дано доказательство достаточности условия Винера, более простое, чем доказательство Гариепи и Цимер [60].

Методы и результаты разделов 8.1 и 8.2 могут быть перенесены на другие типы граничных задач. В частности, можно рассмотреть обобщенный вариант смешанной краевой задачи

$$\begin{aligned} &Lu = g + D_i f^i \ \text{ в } \Omega, \quad u = \varphi_1 \ \text{ на } \partial\Omega - \Gamma, \\ &Nu \equiv a^{ij}(x)\nu_i D_j u + b^i(x)\nu_i u + \sigma(x)u = \varphi_2 \ \text{ на } \Gamma, \end{aligned} \tag{8.96}$$

где Γ – открытый кусок класса C^1, лежащий на границе $\partial\Omega$, а $\bar{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$ на Γ. Для функций $\varphi_1 \in W^{1,2}(\Omega)$ и $\sigma, \varphi_2 \in L^2(\Gamma)$ функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ называется *обобщенным решением* граничной задачи (8.96), если $u - \varphi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma)$ и выполнено тождество

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_\Omega (f^i D_i v - gv)\,dx + \int_\Gamma (\varphi_2 - f^i \nu_i - \sigma u)v\,ds \tag{8.97}$$

для всех функций $v \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma)$. Здесь через $W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma)$ обозначено замыкание пространства $C_0^1(\Omega \cup \Gamma)$ по метрике $W^{1,2}(\Omega)$. В этом случае справедлив следующий слабый принцип максимума: если выполнены условия (8.5) и (8.6) и неравенство (ср. с (8.8))

$$\int_\Omega (dv - b^i D_i v)\,dx - \int_\Gamma \sigma v\,ds \leqslant 0 \quad \forall v \geqslant 0, \ \ v \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma) \tag{8.98}$$

для любой функции $v \geqslant 0, v \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma)$, то любая функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$, удовлетворяющая неравенству $\mathcal{L}(u, v) + \int\limits_\Gamma \sigma uv ds \leqslant 0$ для всех неотрицательных функций $v \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma)$, должна или удовлетворять неравенству $\sup\limits_\Omega u \leqslant \sup\limits_\Gamma u^+$ или быть положительной постоянной. Из этого утверждения следует единственность обобщенного решения задачи (8.96), если или $\Gamma \neq \partial\Omega$ и $\sigma + \nu_i b^i \not\equiv 0$ на Γ, или $L1 \neq 0$. При выполнении последних условий обобщенные решения задачи (8.96) могут отличаться только на постоянную.

Аналог теоремы существования (теорема 8.2) может быть получен также с помощью альтернативы Фредгольма. Принцип максимума для смешанных граничных задач рассматривался в работах [340] и [292]. В последней работе утверждения, сформулированные выше, доказаны для широкого класса неравномерно эллиптических уравнений.

Наконец, отметим, что непосредственно в рамках теории гильбертовых пространств с помощью метода Кампанато, использующего некоторые интегральные характеристики пространств Гёльдера, может быть построена теория Шаудера, которая благодаря этому становится независимой от теории потенциала, изложенной в гл. 4 (см. [111], [89]).

Задачи

8.1. Покажите, что если в слабом принципе максимума (теорема 8.1) предположить, что $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$, то условие (8.8) можно заменить условием

$$\int\limits_\Omega (dv + c^i D_i v)\,dx \leqslant 0 \quad \forall v \geqslant 0, \quad v \in C_0^1(\Omega) \tag{8.99}$$

или условием

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -c & -d \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{8.100}$$

выполняющимся почти всюду в Ω (см. теорему 10.7).

8.2. Пусть функция $u \in W^{1,2}(\Omega)$ является слабым решением уравнения $Lu = g + D_i f^i$ в Ω, причем оператор L удовлетворяет условиям (8.5) и (8.6), а $g, f^i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Покажите, что в любой подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$ справедливо неравенство

$$\| u \|_{W^{1,2}(\Omega')} \leqslant C(\| u \|_2 + \| f \|_2 + \| g \|_2) \tag{8.101}$$

с постоянной $C = C(n, \Lambda(\lambda, \nu, d'), \ d' = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

8.3. Покажите, что если матрица $a = [a^{ij}]$ симметрична, то постоянная C из неравенства Харнака (теорема 8.20) может быть оценена следующим образом:

$$C \leqslant C_0^{\sqrt{\Lambda/\lambda + \nu R}}, \quad C_0 = C(n).$$

8.4. Используя теорему 8.8 и осреднения (см. раздел 7.2), покажите, что теорема 3.9 справедлива для функций $u \in W^{1,2}(\Omega)$. С помощью функции

$$u(x, y) = |xy| \cdot \log(|x| + |y|),$$

рассматриваемой в области

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\} \subset \mathbf{R}^2,$$

продемонстрируйте точность теоремы 3.9.

8.5. а) Пусть u — функция из $C^1(B_R(0))$, $B_R(0) \subset \mathbf{R}^2$. При $0 < r < R$ обозначим: $\omega(r) = \operatorname*{osc}_{\partial B_r} u$, $D(r) = \int_{B_r} |Du|^2 dx$, где $B_r = B_r(0)$. Покажите, что если функция ω не убывает, то для $0 < r < R$

$$\omega(r) \leqslant \sqrt{\pi D(R)/\log(R/r)}.$$

б) Докажите неравенство Харнака для уравнения дивергентного вида с двумя независимыми переменными

$$Lu = D_i(a^{ij} D_j u) + b^i D_i u = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

удовлетворяющего условиям (8.5) и (8.6), по следующей схеме. Пусть решение u положительно в круге $B_R(0) \subset \mathbf{R}^2$. Покажите, что интеграл Дирихле функции $v = \log u$ оценивается в любом круге $B_r(0)$, $0 < r < R$, через Λ/λ, ν, r и R (см. случай $\beta = -1$ в доказательстве теоремы 8.18). Примените слабый принцип максимума (теорема 8.1) и пункт а) этой задачи для вывода оценки

$$C^{-1} \cdot u(0) \leqslant u(x) \leqslant C \cdot u(0),$$

где $|x| \leqslant R/2$ и $C = C(\lambda, \Lambda, R)$ (см. [31]).

8.6. а) Используя условия и обозначения теоремы 8.22, покажите, что функции

$$w_1 = \log \frac{M_4 - m_4 + \bar{k}(R)}{2(M_4 - u) + \bar{k}(R)}, \quad w_2 = \log \frac{M_4 - m_4 + \bar{k}(R)}{2(u - m_4) + \bar{k}(R)}$$

являются субрешениями в B_{4R} уравнения вида (8.3) (ср. с доказательством теоремы 8.16).

б) Применяя теорему 8.17 к функциям w_1, w_2, указанным в пункте а) этой задачи, используя неравенство Пуанкаре (7.45) и случай $\beta = -1$ в доказательстве теоремы 8.18, дайте другое доказательство оценки Гёльдера (теорема 8.22). Заметим, что одна из функций w_1 и w_2 не положительна на множестве S таком, что $|S| \geqslant (|B_{4R}|/2)$.

8.7. Пусть Ω — ограниченное измеримое множество в $\mathbf{R}^n$. Докажите, что

$$|\Omega|^{1-2/n} \leqslant \gamma(n) \cdot \operatorname{cap} \Omega,$$

где $\gamma(n)$ — постоянная из неравенства Соболева (7.26) для случая $p = 2$.

8.8. Докажите, что из оценки (8.81) следует существование модуля непрерывности в граничной точке x_0.

8.9. Используя теорему 8.16, покажите, что теорема существования и единственности (теорема 8.3) справедлива для неограниченных областей, имеющих конечную меру. (Заметим, что результаты о компактности (см. теорему 7.22) для таких областей не всегда имеют место.)

ГЛАВА 9

СИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

До сих пор в этой книге мы имели дело или со слабыми или с классическими решениями эллиптических уравнений второго порядка. Слабые решения дифференцируемы в слабом смысле лишь один раз, в то время как классические решения непрерывно дифференцируемы в обычном смысле не менее двух раз. Рассмотрение слабых решений было естественно при изучении оператора L, имеющего дивергентную форму, в то время как рассмотрение классических решений имеет смысл при изучении операторов с произвольными коэффициентами. В этой главе мы остановимся на рассмотрении промежуточной ситуации — на так называемых *сильных* решениях. Для операторов общего вида

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_i u + c(x)u \tag{9.1}$$

с коэффициентами a^{ij}, b^i, c, $i, j = 1, \ldots, n$, определенными в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, и для функции f, определенной в Ω, сильным решением уравнения

$$Lu = f \tag{9.2}$$

называется дважды слабо дифференцируемая функция, определенная на Ω, удовлетворяющая уравнению (9.2) почти всюду в Ω. Достижение таким решением заданных на Ω граничных значений в задаче Дирихле понимается в обобщенном смысле, как в гл. 8, или в классическом смысле, как в гл. 6, в которой рассматривались решения, непрерывные вплоть до границы. Ранее, с помощью теорем о регулярности из гл. 8, была доказана теорема существования (теорема 8.9) сильных решений, которые могут и не быть классическими. В этом случае граничные значения принимались в обобщенном смысле. Некоторые результаты раздела 8.10, в частности теорема 8.30, устанавливают условия, при которых граничные значения непрерывны.

Эту главу можно рассматривать как состоящую из двух частей. В первой части развивается теория решений из соболевских пространств $W^{2,p}(\Omega)$, $p > 1$, аналогичная шаудеровской теории в пространствах Гёльдера $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Эта теория известна под названием "L^p-теория". Используемые при этом оценки в L^p для теории эллиптических уравнений важны сами по себе. Вторая часть содержит результаты, аналогичные результатам гл. 3 и 8 нашей книги о принципах максимума и локальных свойствах решений. Поточечные оценки, получаемые в разделе 9.7, играют важную роль во второй части книги, в частности при изучении в гл. 17 вполне нелинейных уравнений. При этом естественным пространством для рассматриваемых решений оказывается соболевское пространство $W^{2,n}(\Omega)$. Объединение двух таких частей в одной главе облегчает создание весьма содержательной и интересной теории уравнений с решениями из $W^{2,n}(\Omega)$.

9.1. Принцип максимума для сильных решений

В этом разделе мы докажем обобщение классического принципа максимума гл. 3 на сильные решения — в частности, на решения, принадлежащие соболевскому пространству $W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Напомним, что оператор L вида (9.1) *эллиптичен* в области Ω, если матрица коэффициентов $\mathcal{A} = [a^{ij}]$ положительна всюду в Ω. Для оператора L через $\mathcal{D}$ будем обозначать определитель матрицы $\mathcal{A}$, а через $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^{1/n}$ — среднее геометрическое собственных значений матрицы $\mathcal{A}$. Справедливо неравенство

$$0 < \lambda \leqslant \mathcal{D}^* \leqslant \Lambda,$$

где, как и ранее, через λ и Λ обозначены минимальное и максимальное собственные значения матрицы $\mathcal{A}$. Потребуем выполнения следующих условий на коэффициенты оператора L и на правую часть f в уравнении (9.2):

$$|b|/\mathcal{D}^*, \quad f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega), \quad c \leqslant 0 \text{ в } \Omega. \tag{9.3}$$

Следующий слабый принцип максимума был получен А.Д. Александровым. Он является обобщением априорной оценки теоремы 3.7.

Теорема 9.1. *Пусть $Lu = f$ в ограниченной области Ω и пусть $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \| f/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Omega)}, \tag{9.4}$$

где C – постоянная, зависящая только от n, $\operatorname{diam}\Omega$ *и* $\| b/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Omega)}$.

Теорема вложения Соболева, в частности следствие 7.11, гарантирует, что функция, принадлежащая $W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, непрерывна в Ω. Если в условии теоремы 9.1 не предполагать, что функция u непрерывна в $\bar{\Omega}$, то утверждение теоремы остается в силе, если величину $\sup_{\partial\Omega} u^+$ заменить на $\lim\limits_{x\to\partial\Omega} \sup u^+$.

Доказательство. Доказательство теоремы 9.1 использует понятия контактного множества и нормального отображения. Некоторые его аспекты важны для дальнейшего. Если u – произвольная непрерывная на Ω функция, то *верхним контактным множеством* функции u (будем обозначать его через Γ^+ или через Γ^+_u) называется множество всех тех точек y из Ω, для которых график функции u, рассматриваемый как поверхность в $\mathbf{R}^{n+1}$, лежит не выше (некоторой) опорной плоскости, проведенной в точке y, т.е.

$$\Gamma^+ = \left\{ y \in \Omega \mid u(x) \leqslant u(y) + p\cdot(x-y) \ \begin{array}{l}\text{для всех } x \in \Omega \text{ и для некото-}\\ \text{рого } p = p(y) \in \mathbf{R}^n\end{array} \right\}. \tag{9.5}$$

Ясно, что функция u будет вогнутой в Ω тогда и только тогда, когда $\Gamma^+ = \Omega$. Если $u \in C^1(\Omega)$, то в качестве $p(y)$ в соотношении (9.5) нужно брать $p = Du(y)$, ибо в этом случае любая опорная плоскость должна быть плоскостью, касательной к графику u. Более того, если функция $u \in C^2(\Omega)$, то гессиан $D^2u = [D_{ij}u]$ неположителен на Γ^+. В общем случае множество Γ^+ замкнуто в Ω.

Для любой функции $u \in C^0(\Omega)$ нормальное отображение $\chi(y) = \chi_u(y)$ в точке $y \in \Omega$ определяется как множество "наклонов" опорных плоскостей, проведенных в точке y, лежащих не ниже графика u, т.е.

$$\chi(y) = \{ p \in \mathbf{R}^n \mid u(x) \leqslant u(y) + p\cdot(x-y) \text{ для всех } x \in \Omega \}. \tag{9.6}$$

Ясно, что множество $\chi(y)$ непусто тогда и только тогда, когда $y \in \Gamma^+$. Более того, если функция $u \in C^1(\Omega)$, то $\chi(y) = Du(y)$ на Γ^+, т.е. χ является потенциальным векторным полем – полем градиента функции u на Γ^+.

Рассмотрим полезный пример с недифференцируемой функцией u. В шаре $B_R(z)$ рассмотрим функцию u, графиком которой является конус с основанием Ω и вершиной (z, a), где a — некоторое положительное число, $a \in \mathbf{R}$, т.е.

$$u(x) = a(1 - |x - z|/R).$$

Тогда

$$\chi(y) = \begin{cases} -a(y-z)/R\,|y-z| & \text{для } y \neq z, \\ B_{a/R}(0) & \text{для } y = z. \end{cases} \tag{9.7}$$

Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Л е м м а 9.2. *Если $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, то справедливо неравенство*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u + \frac{d}{\omega_n^{1/n}} \left(\int_{\Gamma^+} |\det D^2 u|\, dx \right)^{1/n}, \tag{9.8}$$

где $d = \operatorname{diam} \Omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменой u на $u - \sup\limits_{\partial\Omega} u$ мы можем добиться того, что $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$. n-мерная мера Лебега нормального отображения Ω задается формулой

$$|\chi(\Omega)| = |\chi(\Gamma^+)| = |Du(\Gamma^+)| \leqslant \int_{\Gamma^+} |\det D^2 u|\, dx, \tag{9.9}$$

так как $D^2 u \leqslant 0$ на Γ^+. Формулу (9.9) можно получить как следствие формулы замены переменных, если для положительного ϵ рассмотреть отображение $\chi_\epsilon = \chi - \epsilon I$, матрица Якоби которого равна $D^2 u - \epsilon I$ и является строго отрицательной матрицей в окрестности Γ^+, а затем устремить ϵ к нулю. Более того, несложно показать, что отображение χ_ϵ взаимно однозначно на Γ^+, и поэтому имеет место равенство (9.9).

Теперь покажем, что функция u может быть оценена через $|\chi(\Omega)|$. Предположим, что функция u имеет положительный максимум в точке $y \in \Omega$. Пусть k — функция, график которой является конусом K с вершиной $(y, u(y))$ и основанием $\partial\Omega$. Тогда $\chi_k(\Omega) \subset \chi_u(\Omega)$, так как для каждой опорной к K плоскости существует параллельная ей плоскость, касающаяся графика u. Пусть $\tilde{k}$ — функция, графиком которой является конус $\tilde{K}$ с вершиной $(y, u(y))$ и основанием $B_d(y)$. Ясно, что $\chi_{\tilde{k}}(\Omega) \subset \chi_k(\Omega)$, и поэтому $|\chi_{\tilde{k}}(\Omega)| \leqslant |\chi_u(\Omega)|$. Тогда, используя (9.7) и (9.9), находим, что

$$\omega_n (u(y)/d)^n \leqslant \int_{\Gamma^+} |\det D^2 u|\, dx.$$

Следовательно,

$$u(y) \leqslant \frac{d}{\omega_n^{1/n}} \left(\int_{\Gamma^+} |\det D^2 u|\, dx \right)^{1/n},$$

что и требовалось доказать. □

Частный случай оценки (9.4) для $b = 0$ следует из леммы 9.2 с помощью матричного неравенства

$$\det A \cdot \det B \leqslant \left(\frac{\operatorname{trace} AB}{n}\right)^n, \tag{9.10}$$

в котором матрицы A, B симметричны и неотрицательны.

Полагая $A = -D^2 u$, $B = [a^{ij}]$, мы получаем на Γ^+ неравенство

$$|\det D^2 u| = \det(-D^2 u) \leqslant \frac{1}{\mathscr{D}}\left(-\frac{a^{ij}D_{ij}u}{n}\right)^n.$$

Сформулируем итоговую оценку, используемую в дальнейшем.

Лемма 9.3. *Для $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ выполняется неравенство*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u + \frac{d}{n\omega_n^{1/n}} \left\| \frac{a^{ij}D_{ij}u}{\mathscr{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+)}. \tag{9.11}$$

Полное доказательство оценки (9.4) следует из следующего обобщения лемм 9.2 и 9.3.

Лемма 9.4. *Пусть функция g неотрицательная и локально интегрируемая на $\mathbf{R}^n$. Тогда для любой функции $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ справедливы неравенства*

$$\int\limits_{B_{\widetilde{M}}(0)} g\,dx \leqslant \int\limits_{\Gamma^+} g(Du)\cdot|\det D^2 u|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Gamma^+} g(Du)\cdot\left(-\frac{a^{ij}D_{ij}u}{n\mathscr{D}^*}\right)^n dx, \tag{9.12}$$

где $\widetilde{M} = (\sup\limits_{\Omega} u - \sup\limits_{\partial\Omega} u)/d$, $d = \operatorname{diam}\Omega$.

Доказательство. Доказательство леммы 9.4 аналогично доказательствам лемм 9.2 и 9.3, соответствующим случаю $g \equiv 1$. Вместо (9.9) используется более общая формула

$$\int\limits_{\chi_u(\Omega)} g\,dx \leqslant \int\limits_{\Gamma^+} g(Du)\cdot|\det D^2 u|\,dx, \tag{9.13}$$

а так как $\chi_{\tilde{k}}(\Omega) \subset \chi_u(\Omega)$, то оценка (9.12) получается из (9.7) и (9.10). □

Предположим теперь, что функция $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ и выполняются неравенство $Lu \geqslant f$ в Ω и условие (9.3). В качестве функции g возьмем функцию

$$g(p) = (|p|^{n/(n-1)} + \mu^{n/(n-1)})^{1-n},$$

где μ — некоторое положительное число, которое мы выберем позже. Используя неравенство Гёльдера, мы в $\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ получим неравенство

$$-\frac{a^{ij}D_{ij}u}{n\mathscr{D}^*} \leqslant \frac{b^iD_iu - f}{n\mathscr{D}^*} \leqslant \frac{|b|\cdot|Du| + |f|}{n\mathscr{D}^*} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|b|^n + \mu^{-n}|f|^n)^{1/n}}{ng^{1/n}\mathscr{D}^*}.$$

Отсюда в силу (9.12)

$$\int\limits_{B_{\widetilde{M}}} g\,dx \leqslant \frac{1}{n^n} \int\limits_{\Gamma^+} (|\,b\,|^n + \mu^{-n}|\,f\,|^n)/\mathscr{D}\,dx.$$

Интеграл в левой части можно оценить снизу с помощью неравенства $g(p) \geqslant 2^{2-n}(|\,p\,|^n + \mu^n)^{-1}$. В итоге получим

$$\omega_n \log\left(\frac{\widetilde{M}^n}{\mu^n} + 1\right) \leqslant \frac{2^{n-2}}{n^n} \int\limits_{\Gamma^+} \frac{(|\,b\,|^n + \mu^{-n}|\,f\,|^n}{\mathscr{D}}\,dx.$$

Если $f \not\equiv 0$, то положив $\mu = \|\,f/\mathscr{D}^*\,\|_{L^n(\Gamma^+)}$, получим

$$\widetilde{M} \leqslant \left\{\exp\left[\frac{2^{n-2}}{n^n\omega_n} \int\limits_{\Gamma^+}\left(1 + \frac{|\,b\,|^n}{\mathscr{D}}\right)dx\right] - 1\right\}^{1/n} \left\|\frac{f}{\mathscr{D}^*}\right\|_{L^n(\Gamma^+)}. \tag{9.14}$$

Если же $f \equiv 0$, то, устремляя $\mu \to 0$, опять получим (9.14).

Итак, оценка (9.4) доказана для функции $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Ее обобщение на функции $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ можно получить с помощью аппроксимации. Предположим сначала, что оператор L равномерно эллиптичен в Ω, причем отношение $|\,b\,|/\lambda$ ограничено в Ω. Пусть $\{u_m\}$ – последовательность функций из $C^2(\Omega)$, сходящаяся в $W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ к функции u. Для произвольного $\epsilon > 0$ мы можем считать, что в области $\Omega_\epsilon \subset\subset \Omega$ последовательность $\{u_m\}$ сходится к функции u в $W^{2,n}(\Omega_\epsilon)$ и что выполнены неравенства $u_m \leqslant \epsilon + \sup\limits_{\partial\Omega} u$ на границе $\partial\Omega_\epsilon$. Поэтому, применяя неравенство (9.4) к функциям u_m (с Ω^+ вместо Ω), получим

$$\sup_{\Omega_\epsilon} u_m \leqslant \epsilon + \sup_{\partial\Omega} u^+ + (C/\lambda)\cdot\|\,a^{ij}D_{ij}(u_m - u) + b^iD_i(u_m - u)\|_{L^n(\Omega_\epsilon)} +$$
$$+ C\,\|\,f/\mathscr{D}^*\,\|_{L^n(\Omega_\epsilon)}.$$

Устремляя $m \to \infty$ и используя равномерную сходимость последовательности $\{u_m\}$ к функции u на $\partial\Omega_\epsilon$, получим неравенство

$$\sup_{\Omega_\epsilon} u \leqslant \epsilon + \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\,\|\,f/\mathscr{D}^*\,\|_{L^n(\Omega_\epsilon)}. \tag{9.15}$$

Отсюда следует неравенство (9.4), если устремить ϵ к нулю.

Освободимся от ограничений на L, использованных выше. Для этого при $\eta > 0$ рассмотрим операторы

$$L_\eta = \eta(\Lambda + |\,b\,|)\Delta + L.$$

Из (9.15) имеем

$$\sup_{\Omega_\epsilon} u \leqslant \epsilon + \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\left\{\left\|\frac{\eta(\Lambda + |\,b\,|)\Delta u}{\mathscr{D}^*_\eta}\right\|_{L^n(\Omega_\epsilon)} + \left\|\frac{f}{\mathscr{D}^*}\right\|_{L^n(\Omega_\epsilon)}\right\}.$$

Устремив $\eta \to 0$, на основании теоремы о мажорированной сходимости мы приходим к неравенству (9.15). Наконец, если устремить ϵ к нулю, мы придем к доказательству теоремы 9.1.

Отметим, что при $b = 0$ из оценки (9.14) не следует оценка (9.11). В действительности в (9.11) можно улучшить постоянную и можно получить резкое улучшение постоянной в (9.14) с помощью точного интегрирования функции g и оптимизации выбора μ (см. задачи 9.1 и 9.3). Зависимость от $\operatorname{diam} \Omega$ можно заменить на зависимость от $|\hat{\Omega}|$, где $\hat{\Omega}$ – выпуклая оболочка Ω (см. задачу 9.3).

При $f \equiv 0$ теорема 9.1 является обобщением слабого принципа максимума, теорема 3.1 и следствие 3.2. Следующий результат о единственности сильного решения задачи Дирихле обобщает теорему 3.3 и получается автоматически.

Теорема 9.5. *Пусть L – эллиптический оператор, заданный в Ω и удовлетворяющий* (9.3). *Предположим, что u и v – функции из $W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, удовлетворяющие условиям $Lu = Lv$ в Ω и $u = v$ на $\partial\Omega$. Тогда $u = v$ в Ω.*

Из слабого принципа максимума можно также вывести обобщение сильного принципа максимума (теорема 3.5). Как и в теореме 3.5, предположим, что оператор L равномерно эллиптичен в Ω и что функции $|b|/\lambda$, c/λ ограничены.

Теорема 9.6. *Если функция $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ удовлетворяет в Ω неравенству $Lu \geqslant 0$ и если $c = 0$ ($c \leqslant 0$), то функция u не может достигать максимума (неотрицательного максимума) в Ω, если только u не является постоянной.*

Доказательство. Если функция u дифференцируема, то мы можем следовать доказательству теоремы 3.5, в котором вместо следствия 3.2 надо воспользоваться теоремой 9.1. В общем случае достаточно сделать небольшое изменение доказательства теоремы 3.5. Если мы предположим, вопреки утверждению теоремы, что функция u не является постоянной в Ω и достигает своего максимума M в Ω, то будут существовать такие концентрические шары $B_\rho(y) \subset B_R(y) \subset \Omega$, что $u < M$ в $\bar{B}_\rho(y)$ и $u(x_0) = M$ в некоторой точке $x_0 \in B_R(y)$. Тогда, используя теорему 9.1 и вспомогательную функцию v из доказательства леммы 3.4, удовлетворяющую условию $v(x_0) = 0$, мы получим в шаровом слое $A = B_R(y) - \overline{B_\rho(y)}$ неравенство $M - u - \epsilon v > 0$ с некоторым $\epsilon > 0$. Но это неравенство не выполняется при $x = x_0$. □

9.2. Оценки в L^p; предварительный анализ

Основным методом получения оценок в L^p в этой главе является метод интерполяции. В этом разделе мы построим некоторый вспомогательный аппарат – процедуру разбиения куба, которая потребуется нам для оценок Гёльдера в разделе 9.7 и в следующем разделе для получения интерполяционной теоремы Марцинкевича.

Разбиение куба. Пусть K_0 – куб в $\mathbf{R}^n$, f – неотрицательная интегрируемая функция, определенная на K_0. Пусть t – положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\int_{K_0} f\,dx \leqslant t\,|K_0|.$$

Поделив пополам каждое ребро куба и проведя через них плоскости, параллельные граням куба K_0, разобьем куб K_0 на 2^n конгруэнтных непересекающихся подкубов. Те подкубы K, которые удовлетворяют неравенству

$$\int_K f dx \leqslant t \,|\, K \,|, \tag{9.16}$$

разобьем аналогичным образом. Процесс разбиения продолжаем до бесконечности. Пусть $\mathcal{S}$ – множество подкубов K, в которых выполнены неравенства

$$\int_K f dx > t \,|\, K \,|.$$

Для каждого $K \in \mathcal{S}$ через $\tilde{K}$ обозначим куб, разбиение которого содержит K. Так как $|\tilde{K}|/|K| = 2^n$, то для любого $K \in \mathcal{S}$ справедливо неравенство

$$t < \frac{1}{|K|} \int_K f dx \leqslant 2^n t. \tag{9.17}$$

Более того, введя $F = \bigcup_{K \in \mathcal{S}} K$ и $G = K_0 - F$, имеем

$$f \leqslant t \quad \text{почти всюду в } G. \tag{9.18}$$

Неравенство (9.18) является следствием теоремы Лебега о дифференцировании [275], так как каждая точка G лежит в убывающей последовательности вложенных друг в друга кубов, на которых выполняются неравенства (9.16) и диаметры которых стремятся к нулю.

Для получения в разделе 9.7 поточечных оценок нам потребуется множество

$$\tilde{F} = \bigcup_{K \in \mathcal{S}} \tilde{K}.$$

Ясно, в силу (9.16), что справедливо неравенство

$$\int_{\tilde{K}} f dx \leqslant t \,|\, \tilde{F} \,|. \tag{9.19}$$

В частности, если $f = \chi_\Gamma$, где χ_Γ – характеристическая функция лежащего в K_0 измеримого множества Γ, из (9.18) и (9.19) получаем, что

$$|\Gamma| = |\Gamma \cap \tilde{F}| \leqslant t \,|\tilde{F}|. \tag{9.20}$$

9.3. Интерполяционная теорема Марцинкевича

Пусть f – измеримая функция в (ограниченной или неограниченной) области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. *Функция распределения* $\mu = \mu_f$ функции f определяется при $t > 0$ равенством

$$\mu(t) = \mu_f(t) = |\{x \in \Omega \mid f(x) > t\}|. \tag{9.21}$$

Отметим, что функция μ невозрастает на $(0, \infty)$. Основные свойства функции распределения описываются в следующей лемме.

Л е м м а 9.7. *Для любого $p > 0$ и любой функции f такой, что $f \in L^p(\Omega)$, справедливы соотношения*:

$$\mu(t) \leqslant t^{-p} \int_\Omega |f|^p dx, \tag{9.22}$$

$$\int_\Omega |f|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(t) dt. \tag{9.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что

$$\mu(t) \cdot t^p \leqslant \int_{|f| \geqslant t} |f|^p dx \leqslant \int_\Omega |f|^p dx$$

для всех $t > 0$. Тем самым доказано (9.22).

Если $f \in L^1(\Omega)$, то по теореме Фубини имеем

$$\int_\Omega |f| dx = \int_\Omega \int_0^{|f(x)|} dt \cdot dx = \int_0^\infty \mu(t) dt.$$

Отсюда следует (9.23). □

Докажем интерполяционную теорему Марцинкевича в следующем частном случае.

Т е о р е м а 9.8. *Пусть T – линейное отображение $L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ в себя, $1 \leqslant q < r < \infty$. Предположим, что существуют такие постоянные T_1 и T_2, что*

$$\mu_{Tf}(t) \leqslant (T_1 \| f \|_q / t)^q, \quad \mu_{Tf}(t) \leqslant (T_2 \| f \|_r / t)^r \tag{9.24}$$

для всех $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ и $t > 0$. Тогда для любого p из интервала (q, r) отображение T продолжается до ограниченного линейного отображения из $L^p(\Omega)$ в себя и для всех $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\| Tf \|_p \leqslant C T_1^\alpha T_2^{1-\alpha} \| f \|_p, \tag{9.25}$$

в котором $1/p = \alpha/q + (1-\alpha)/r$, а постоянная C зависит только от p, q и r.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ и $s > 0$ запишем $f = f_1 + f_2$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| > s, \\ 0, & \text{если } |f(x)| \leqslant s, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |f(x)| > s, \\ f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant s. \end{cases}$$

Тогда $|Tf| \leqslant |Tf_1| + |Tf_2|$, и поэтому

$$\mu(t) = \mu_{Tf}(t) \leqslant \mu_{Tf_1}(t/2) + \mu_{Tf_2}(t/2) \leqslant$$
$$\leqslant (2T_1/t)^q \int_\Omega |f_1|^q dx + (2T_2/t)^r \int_\Omega |f_2|^r dx.$$

Отсюда по лемме 9.7 получаем

$$\int_\Omega |Tf|^p dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(t) dt \leqslant p(2T_1)^q \int_0^\infty t^{p-1-q} \Big(\int_{|f| > s} |f|^q dx \Big) dt +$$
$$+ p(2T_2)^r \int_0^\infty t^{p-1-r} \Big(\int_{|f| \leqslant s} |f|^r dx \Big) dt.$$

Полученные неравенства справедливы при произвольном s. В частности, можно взять s, зависящее от t. Беря $s = t/A$, или $t = As$, где A — положительное число, получаем неравенство

$$\int_\Omega |Tf|^p dx \leqslant p(2T_1)^q A^{p-q} \int_0^\infty s^{p-1-q}\Big(\int_{|f|>s} |f|^q dx\Big) ds +$$

$$+ p(2T_2)^r A^{p-r} \int_0^\infty s^{p-1-r}\Big(\int_{|f|\leqslant s} |f|^r dx\Big) ds.$$

Так как

$$\int_0^\infty s^{p-1-q}\Big(\int_{|f|>s} |f|^q dx\Big) ds =$$

$$= \int_\Omega |f|^q \Big(\int_0^{|f|} s^{p-1-q} ds\Big) dx = \frac{1}{p-q} \int_\Omega |f|^p dx$$

и

$$\int_0^\infty s^{p-1-r}\Big(\int_{|f|\leqslant s} |f|^r dx\Big) ds =$$

$$= \int_\Omega |f|^r \Big(\int_{|f|}^\infty s^{p-1-r} ds\Big) dx = \frac{1}{r-p} \int_\Omega |f|^p dx,$$

то

$$\int_\Omega |Tf|^p dx \leqslant \left\{ \frac{p}{p-q} (2T_1)^q A^{p-q} + \frac{p}{r-p} (2T_2)^r A^{p-r} \right\} \int_\Omega |f|^p dx$$

для любого положительного числа A. Выбирая значение A такое, чтобы выражение в скобках было минимальным, т.е., полагая $A = 2T_1^{q/(r-p)} T_2^{r/(r-q)}$, получаем неравенство

$$\| Tf \|_p \leqslant 2 \left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p} \right)^{1/p} T_1^\alpha T_2^{1-\alpha} \| f \|_p,$$

а это и есть доказываемое неравенство (9.25) с постоянной

$$C = 2 \left(\frac{p(r-q)}{(p-q)(r-p)} \right)^{1/p}. \ \square$$

9.4. Неравенство Кальдерона – Зигмунда

В этом разделе мы доказываем основные оценки в L^p для решений уравнения Пуассона, продолжая изучение ньютонова потенциала, начатого в гл. 4. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, f — функция, принадлежащая $L^p(\Omega)$ с некоторым $p \geqslant 1$. Напомним, что ньютонов потенциал функции f есть функция $w = Nf$, определяемая сверткой

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) dy, \tag{9.26}$$

где Г – фундаментальное решение уравнения Лапласа (см. (4.1)). Следующий результат, который является специальным случаем неравенства Кальдерона – Зигмунда, является аналогом в L^p оценки Гёльдера из леммы 4.4.

Теорема 9.9. *Пусть $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, и пусть w – ньютонов потенциал f. Тогда $w \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta w = f$ почти всюду в Ω и справедливо неравенство*

$$\| D^2 f \|_p \leqslant C \| f \|_p \tag{9.27}$$

с постоянной C, зависящей только от n и p. Более того, при $p = 2$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbf{R}^n} | D^2 w |^2 dx = \int_{\Omega} f^2 dx. \tag{9.28}$$

Доказательство. (i) Рассмотрим сначала случай $p = 2$. Если $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, то $w \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, и по лемме 4.2 справедливо равенство $\Delta w = f$. Поэтому для произвольного шара B_R, содержащего носитель функции f, имеем

$$\int_{B_R} (\Delta w)^2 dx = \int_{B_R} f^2 dx.$$

Дважды применив первую формулу Грина (2.10), получим

$$\int_{B_R} | D^2 w |^2 dx = \int_{B_R} \Sigma (D_{ij} w)^2 dx =$$

$$= \int_{B_R} f^2 dx + \int_{\partial B_R} Dw \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} Dw \cdot dx.$$

Так как (см. (2.14)) при $R \to \infty$

$$Dw = O(R^{1-n}), \quad D^2 w = O(R^{-n})$$

равномерно на ∂B_R, то из полученного равенства следует равенство (9.28).

Для доказательства равенства (9.28) для произвольной функции $f \in L^2(\Omega)$ заметим, что в силу леммы 7.12 при $1 \leqslant p < \infty$ отображение N является ограниченным отображением L^p в себя. Во всей полноте утверждение теоремы 9.8 при $p = 2$ получается с помощью аппроксимации. Действительно, взяв последовательность функций $\{f_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$, сходящуюся к f в $L^2(\Omega)$, получим последовательность ньютоновых потенциалов $\{Nf_n\}$, сходящуюся к w в $W^{2,2}(\Omega)$.

(ii) Определим для фиксированных i, j линейный оператор $T: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ равенством $Tf = D_{ij} w$. По лемме 9.7 из (9.28) получаем для всех $t > 0$ и всех $f \in L^2(\Omega)$ неравенства

$$\mu(t) = \mu_{Tf}(t) \leqslant (\| f \|_2 / t)^2. \tag{9.29}$$

Докажем дополнительно, что для всех $t > 0$ и всех $f \in L^2(\Omega)$

$$\mu(t) \leqslant C \| f \|_1 / t. \tag{9.30}$$

Это неравенство позволяет применить интерполяционную теорему Марцинкевича.

Для доказательства оценки (9.30) продолжим функцию f нулем вне Ω, зафиксируем $t > 0$ и такой куб $K_0 \supset \Omega$, что

$$\int_{K_0} f dx \leqslant t \, |K_0|.$$

Куб K_0 разобьем так, как это было описано в разделе 9.2, и выделим последовательность параллельных подкубов $\{K_l\}_{l=1}^{\infty}$ таких, что

$$t < \frac{1}{|K_l|} \cdot \int_{K_l} |f| \, dx \leqslant 2^n t \qquad (9.31)$$

и $|f| \leqslant t$ почти всюду на $G = K_0 \bigcup_l K_l$.

Функция f теперь разбивается на "хорошую" часть – функцию g, определенную формулой

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } \; x \in G \\ \dfrac{1}{|K_l|} \displaystyle\int_{K_l} f dx & \text{для } \; x \in K_l, \; l = 6, 2, \ldots, \end{cases}$$

и на "плохую" часть – функцию $b = f - g$. Ясно, что

$$|g| \leqslant 2^n t \text{ почти всюду}, \quad b(x) = 0 \text{ для } x \in G;$$

$$\int_{K_l} b \, dx = 0 \quad \text{для} \quad l = 1, 2, \ldots$$

Так как отображение T линейно ($Tf = Tg + Tb$), то

$$\mu_{Tf}(t) \leqslant \mu_{Tg}(t/2) + \mu_{Tb}(t/2).$$

(iii) *Оценка* Tg. В силу (9.29)

$$\mu_{Tg}(t/2) \leqslant (4/t^2) \cdot \int g^2 dx \leqslant (2^{n+2}/t) \cdot \int |g| \, dx \leqslant (2^{n+2}/t) \cdot \int |f| \, dx.$$

(iv) *Оценка* Tb. *Введя*

$$b_l = b\chi_{K_l} = \begin{cases} b & \text{на } K_l, \\ 0 & \text{в остальной части,} \end{cases}$$

имеем

$$Tb = \sum_{l=1}^{\infty} Tb_l.$$

Фиксируем некоторое l и возьмем сходящуюся к b_l в $L^2(\Omega)$ последовательность функций $\{b_{lm}\} \subset C_0^{\infty}(K_l)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{K_l} b_{lm} \, dx = \int_{K_l} b_l dx = 0.$$

Тогда для $x \notin K_l$ имеем

$$Tb_{lm}(x) = \int_{K_l} D_{ij}\Gamma(x-y)\, b_{lm}(y)\, dy =$$

$$= \int_{K_l} \{D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(x-\overline{y})\}\, b_{lm}(y)\, dy,$$

где $\overline{y} = \overline{y}_l$ – центр K_l. Обозначая через $\delta = \delta_l$ диаметр куба K_l, получаем (оценивая аналогично тому, как оценивался интеграл I_6 в доказательстве леммы 4.4)

$$|Tb_{lm}(x)| \leqslant C(n)\,\delta\,[\operatorname{dist}(x, K_l)]^{-n-1} \int_{K_l} |b_{lm}(y)|\, dy.$$

Полагая $B_l = B_\delta(\overline{y})$ и интегрируя по $K_0 \setminus B_l$, имеем

$$\int_{K_0 - B_l} |Tb_{lm}(y)|\, dx \leqslant C(n)\,\delta \int_{|x| \geqslant \delta/2} \frac{dx}{|x|^{n+1}} \int_{K_l} |b_{lm}(y)|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C(n) \int_{K_l} |b_{lm}(y)|\, dy.$$

Устремляя $m \to \infty$, обозначая $F^* = \bigcup\limits_l B_l$, $G^* = K_0 - F^*$, и суммируя по l, получаем неравенство

$$\int_{G^*} |Tb|\, dx \leqslant C(n) \int |b|\, dx \leqslant C(n) \int |f|\, dx,$$

откуда, по лемме 9.7,

$$|\{x \in G^* \mid |Tb| > t/2\}| \leqslant C\, \|f\|_1 / t.$$

Однако в силу (9.31)

$$|F^*| \leqslant \omega_n \cdot n^{n/2} \cdot |F| \leqslant C\, \|f\|_1 / t.$$

Таким образом, неравенство (9.30) доказано.

(v) Для завершения доказательства теоремы 9.9 заметим, что в силу (9.29) и (9.30) выполнены условия интерполяционной теоремы Марцинкевича (теорема 9.8) с $q = 1$, $r = 2$. Поэтому для всех $1 < p \leqslant 2$ и всех $f \in L^2(\Omega)$

$$\|Tf\|_p \leqslant C(n, p)\, \|f\|_p. \tag{9.32}$$

На случай $p > 2$ неравенство (9.32) переносится в силу двойственности. Действительно, если $f, g \in C_0^\infty(\Omega)$, то

$$\int_\Omega (Tf) g\, dx = \int_\Omega w D_{ij} g\, dx = \int_\Omega \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) D_{ij} g(x)\, dx dy =$$

$$= \int_\Omega f Tg\, dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|Tg\|_{p'}$$

и в силу (9.32) для $p' < 2$

$$\| Tf \|_p = \sup \{ \int_\Omega (Tf) g dx \mid \| g \|_{p'} = 1 \} \leqslant C(n, p') \| f \|_p .$$

Таким образом, (9.32) выполняется при всех $1 < p < \infty$. Для функций из L^p утверждение получается, как и в случае $p = 2$, с помощью аппроксимации. □

Отметим, что оператор T может быть ограниченным на пространстве $L^p(\Omega)$ даже для неограниченной области Ω. В этом случае утверждение теоремы 9.9 справедливо при $n \geqslant 3$. О других методах доказательства неравенства (9.27) см. примечание к этой главе.

Из теоремы 9.9 непосредственно следуют оценки в L^p решений уравнения Пуассона.

Следствие 9.10. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Тогда*

$$\| D^2 u \|_p \leqslant C \| \Delta u \|_p \tag{9.33}$$

с постоянной $C = C(n, p)$. При $p = 2$ справедливо равенство

$$\| D^2 u \|_2 = \| \Delta u \|_2 . \tag{9.34}$$

9.5. Оценки в L^p

В этом разделе мы получим внутренние и глобальные оценки вторых производных решений эллиптических уравнений вида (9.2). Используемая при этом техника возмущения операторов с постоянными коэффициентами аналогична той, которая была применена для получения шаудеровских оценок в разделах 6.1 и 6.2. Сначала рассмотрим внутренние оценки. Следующая теорема аналогична теореме 6.1.

Теорема 9.11. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbf{R}^n$, а функция $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, является сильным решением уравнения $Lu = f$ в Ω, причем коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям*

$$a^{ij} \in C^0(\Omega), \quad b^i,\ c \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^p(\Omega);$$

$$a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant \lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n; \tag{9.35}$$

$$|a^{ij}|, \quad |b^i|, \quad |c| \leqslant \Lambda,$$

где λ, Λ – положительные постоянные, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда в любой области $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\| u \|_{2,p;\Omega'} \leqslant C (\| u \|_{p;\Omega} + \| f \|_{p;\Omega}) \tag{9.36}$$

с постоянной C, зависящей от n, p, λ, Λ, Ω', Ω и от модулей непрерывности коэффициентов a^{ij} в области Ω.

Доказательство. Для фиксированной точки $x_0 \in \Omega'$ обозначим через L_0 оператор с постоянными коэффициентами вида

$$L_0 u = a^{ij}(x_0) D_{ij} u.$$

Применяя, как и в доказательстве леммы 6.1, линейное преобразование Q, мы для любой функции $v \in W_0^{2,p}(\Omega)$ в силу следствия 9.10 получаем оценку

$$\| D^2 v \|_{p;\Omega} \leqslant (C/\lambda) \cdot \| L_0 v \|_{p;\Omega} \tag{9.37}$$

с такой же, как в (9.33), постоянной $C = C(n, p)$. Таким образом, если функция v имеет носитель, лежащий в шаре $B_R = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$, то, поскольку

$$L_0 v = (a^{ij}(x_0) - a^{ij}) D_{ij} v + a^{ij} D_{ij} v,$$

в силу (9.37) имеем

$$\| D^2 v \|_p \leqslant (C/\lambda) \cdot \left(\sup_{B_R} | a - a(x_0) | \cdot \| D^2 v \|_p + \| a^{ij} D_{ij} v \|_p \right),$$

где $a = [a^{ij}]$. Так как матрица a равномерно непрерывна в Ω', то существует положительное число δ такое, что $| a - a(x_0) | \leqslant \lambda/(2C)$ при $| x - x_0 | < \delta$, и поэтому при $R \leqslant \delta$ справедлива оценка $\| D^2 v \|_p \leqslant \leqslant C \| a^{ij} D_{ij} v \|_p$ с постоянной $C = C(n, p, \lambda)$.

Пусть $\sigma \in (0, 1)$. Введем срезающую функцию $\eta \in C_0^2(B_R)$, удовлетворяющую соотношениям: $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ в $B_{\sigma R}$, $\eta = 0$ для $| x | \geqslant \sigma' R$, $\sigma' = (1 + \sigma)/2$, $| D\eta | \leqslant 4/[(1 - \sigma)R]$, $| D^2 \eta | \leqslant 16/[(1 - \sigma)^2 R^2]$. Тогда если функция $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$ удовлетворяет в Ω уравнению $Lu = f$ и если $v = \eta u$, то $\| D^2 u \|_{p;B_{\sigma R}} \leqslant C \| \eta a^{ij} D_{ij} u + 2 a^{ij} D_i u D_j u + u a^{ij} D_{ij} \eta \|_{p;B_R} \leqslant$

$$\leqslant C\left(\| f \|_{p,B_R} + \frac{1}{(1-\sigma)R} \| Du \|_{p;B_{\sigma' R}} + \frac{1}{(1-\sigma)^2 R^2} \| u \|_{p;B_R} \right) \text{ при}$$

$R \leqslant \delta < 1$ с постоянной $C = C(n, p, \lambda, \Lambda)$.

Введем весовые полунормы

$$\Phi_k = \sup_{0 < \sigma < 1} (1 - \sigma)^k R^k \| D^k u \|_{p;B_{\sigma R}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Полученное неравенство запишем в виде

$$\Phi_2 \leqslant C(R^2 \| f \|_{p;B_R} + \Phi_1 + \Phi_0). \tag{9.38}$$

Мы утверждаем, что полунормы Φ_k удовлетворяют интерполяционному неравенству

$$\Phi_1 \leqslant \epsilon \Phi_2 + (C/\epsilon) \cdot \Phi_0 \tag{9.39}$$

с произвольным $\epsilon > 0$ и постоянной $C = C(n)$. Так как неравенство (9.39) инвариантно при растяжении координат, достаточно доказать его для случая $R = 1$.

Пусть $\gamma > 0$. Фиксируем $\sigma = \sigma_\gamma$ такое, что

$$\Phi_1 \leqslant (1-\sigma_\gamma)\ \|Du\|_{p;B_\sigma} + \gamma \leqslant$$

(в силу теоремы 7.28)

$$\leqslant \epsilon(1-\sigma)^2\ \|D^2u\|_{p;B_\sigma} + (C/\epsilon)\cdot\|u\|_{p;B_\sigma} + \gamma.$$

Устремляя $\gamma \to 0$, придем к (9.39).

Подставим теперь (9.39) в (9.38). Получим $\Phi_2 \leqslant C\,(R^2\ \|f\|_{p;\,B_R} + \Phi_0)$, т.е.

$$\|D^2u\|_{p;B_{\sigma R}} \leqslant \frac{C}{(1-\sigma)^2R^2}(R^2\ \|f\|_{p;B_R} + \|u\|_{p;B_R}), \tag{9.40}$$

где $C = C(n, p, \lambda, \Lambda)$ и $0 < \sigma < 1$.

Если взять $\sigma = 1/2$ и покрыть Ω' конечным числом шаров радиуса $R/2$ с $R = \min\{\delta, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)\}$, то придем к требуемой оценке (9.36). $\square$

Чтобы распространить утверждение теоремы 9.11 вплоть до границы $\partial\Omega$, рассмотрим сначала случай плоского куска границы. Пусть

$$\Omega^+ = \Omega \cap \mathbf{R}^n_+ = \{x \in \Omega \mid x_n > 0\},$$

$$(\partial\Omega)^+ = (\partial\Omega) \cap \mathbf{R}^n_+ = \{x \in \partial\Omega \mid x_n > 0\}.$$

Справедливо следующее обобщение следствия 9.10.

Лемма 9.12. *Пусть функция* $u \in W_0^{1,1}(\Omega^+)$, $1 < p < \infty$, *удовлетворяет уравнению* $\Delta u = f$ *в слабом смысле в* Ω^+ *и равна нулю вблизи* $(\partial\Omega)^+$. *Пусть правая часть* f *принадлежит* $L^p(\Omega^+)$. *Тогда* $u \in W^{2,p}(\Omega^+) \cap W^{1,p}_0(\Omega^+)$ *и*

$$\|D^2u\|_{p;\Omega^+} \leqslant C\,\|f\|_{p;\Omega^+} \tag{9.41}$$

с постоянной $C = C(n, p)$.

Доказательство. Продолжим функции u и f на все полупространство $\mathbf{R}^n_+$, полагая их равными нулю в $\mathbf{R}^n_+ - \Omega$, а затем — на все пространство $\mathbf{R}^n$ с помощью нечетного продолжения через плоскость $x_n = 0$, т.е. положив

$$u(x', x_n) = -u(x', -x_n), \qquad f(x', x_n) = -f(x', -x_n)$$

для $x_n < 0$. Здесь $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Можно показать, что продолженная функция в слабом смысле удовлетворяет в $\mathbf{R}^n$ уравнению $\Delta u = f$. Действительно, возьмем произвольную пробную функцию $\varphi \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$ и любое $\epsilon > 0$; пусть η — такая принадлежащая $C^1(\mathbf{R})$ четная функция, что $\eta(t) = 0$ для $|t| \leqslant \epsilon$, $\eta(t) = 1$ для $|t| \geqslant 2\epsilon$ и $|\eta'| \leqslant 2/\epsilon$. Тогда

$$-\int \eta f\varphi\,dx = \int Du\cdot D(\eta\varphi)\,dx = \int \eta Du\cdot D\varphi\,dx + \int \varphi\eta' D_n u\,dx.$$

Далее,

$$|\int \varphi\eta' D_n u dx| = |\int\limits_{0<x_n<2\epsilon} (\varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n))\eta' D_n u dx| \leqslant$$

$$\leqslant 8 \max |D\varphi| \cdot \int\limits_{0<x_n<2\epsilon} |D_n u|\, dx \to 0$$

при $\epsilon \to 0$. Устремляя $\epsilon \to 0$, получаем равенство $-\int f\varphi dx = \int Du \cdot D\varphi dx$, означающее, что функция $u \in W^{1,1}(\mathbf{R}^n)$ является слабым решением уравнения $\Delta u = f$.

Так как функция u имеет компактный носитель в $\mathbf{R}^n$, то осреднение u_h принадлежит $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению $\Delta u_h = f_h$ в $\mathbf{R}^n$. Следовательно, в силу леммы 7.2 и следствия 9.10 $u_h \to u$ в $W^{2,p}(\mathbf{R}^n)$ при $h \to 0$ и, более того, функция u удовлетворяет оценке (9.33). Отсюда следует оценка (9.42) с постоянной, вдвое большей постоянной из оценки (9.33). Так как $u_h(x', 0) = 0$, то мы получили также, что $u \in W_0^{1,p}(\Omega^+)$. □

При получении глобальной (вплоть до границы) оценки мы потребуем, чтобы граничные значения принимались в смысле $W^{1,p}(\Omega)$. Пусть T – кусок границы $\partial\Omega$ и $u \in W^{1,p}(\Omega)$, будем говорить, что функция u равна нулю на T в смысле $W^{1,p}(\Omega)$, если она является пределом в $W^{1,p}(\Omega)$ последовательности функций из $C^1(\Omega)$, равных нулю вблизи T. При $p = 2$ это определение совпадает с определением из раздела 8.10, а когда функция u непрерывна на T, из данного определения следует, что функция u обращается на T в нуль в обычном поточечном смысле.

С помощью результата леммы 9.12 мы получим теперь локальную граничную оценку.

Т е о р е м а 9.13. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, на границе которой расположен кусок T класса $C^{1,1}$. Пусть функция $u \in W^{2,p}(\Omega)$ является сильным решением уравнения $Lu = f$ в Ω, равным нулю на T в смысле $W^{1,p}(\Omega)$, и пусть оператор L удовлетворяет условиям (9.35), причем $a^{ij} \in C^0(\Omega \cup T)$. Тогда для любой области $\Omega' \subset\subset (\Omega \cup T)$*

$$\|u\|_{2,p;\Omega'} \leqslant C(\|u\|_{p;\Omega} + \|f\|_{p;\Omega}), \tag{9.42}$$

где постоянная C зависит от n, p, λ, Λ, T, Ω' и модулей непрерывности коэффициентов a^{ij} в Ω'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $T \in C^{1,1}$, то для каждой точки $x_0 \in T$ существуют окрестность $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{x_0}$ и диффеоморфизм $\psi = \psi_{x_0}$ из $\mathcal{N}$ на единичный шар $B = B_1(0) \subset \mathbf{R}^n$ такие, что

$$\psi(\mathcal{N} \cap \Omega) \subset \mathbf{R}_+^n, \quad \psi(\mathcal{N} \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbf{R}_+^n,$$

$$\psi \in C^{1,1}(\mathcal{N}), \quad \psi^{-1} \in C^{1,1}(B).$$

Как и в лемме 6.5, записывая $y = \psi(x) = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$, $\widetilde{u}(y) = u(x)$, $x \in \mathcal{N}$, $y \in B$, получаем уравнение

$$\widetilde{L}\widetilde{u} = \widetilde{a}^{ij} D_{ij}\widetilde{u} + \widetilde{b}^i D_i \widetilde{u} + \widetilde{c}\widetilde{u} = \widetilde{f}$$

в области B^+. Здесь:

$$\widetilde{a}^{ij}(y) = \frac{\partial\psi_i}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial\psi_j}{\partial x_s} \cdot a^{rs}(x),$$

$$\widetilde{b}^i(y) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_r\partial x_s} \cdot a^{rs}(x) + \frac{\partial\psi_i}{\partial x_r} \cdot b^r(x),$$

$$\widetilde{c}(y) = c(x), \quad \widetilde{f}(y) = f(x).$$

Ясно, что оператор $\widetilde{L}$ удовлетворяет условиям, аналогичным условиям (9.35), с постоянными $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{\Lambda}$, зависящими от λ, Λ и ψ. Более того, $\widetilde{u} \in W^{2,p}(B^+)$ и $\widetilde{u} = 0$ на $B \cap \partial\mathbf{R}^n_+$ в смысле $W^{1,p}(B^+)$. Далее поступаем так же, как и в доказательстве теоремы 9.11, заменив шар $B_R(x_0)$ на полушар $B^+_R(0) \subset \subset B$ и используя лемму 9.12 вместо следствия 9.10. Получим оценку

$$\| D^2 u \|_{p;\, B^+_{\sigma R}} \leqslant \frac{C}{(1-\sigma)^2 R^2} \{ R^2 \| \widetilde{f} \|_{p;\, B^+_R} + \| u \|_{p;\, B^+_R} \},$$

при $R \leqslant \delta \leqslant 1$ с постоянной C, зависящей от n, p, λ, Λ и ψ, причем постоянная δ зависит от модулей непрерывности a^{ij} в точке x_0, а также от ψ. Взяв $\sigma = 1/2$ и область $\widetilde{\mathcal{N}} = \widetilde{\mathcal{N}}_{x_0} = \psi^{-1}(B_{\delta/2})$, и, возвращаясь к исходным координатам, получим

$$\| D^2 u \|_{p;\widetilde{\mathcal{N}}} \leqslant C(\| u \|_{p;\mathcal{N}} + \| f \|_{p;\mathcal{N}})$$

с постоянной $C = C(n, p, \lambda, \Lambda, \delta, \psi)$. Покрывая $\Omega' \cap T$ конечным числом таких окрестностей $\widetilde{\mathcal{N}}$ и используя внутреннюю оценку (9.36), мы придем к требуемой оценке (9.42). □

Если в теореме 9.13 кусок T совпадает с $\partial\Omega$, то мы можем взять $\Omega' = \Omega$ и получим глобальную оценку в $W^{2,p}(\Omega)$. На самом деле справедливо более сильное утверждение.

Т е о р е м а 9.14. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{1,1}$. Предположим, что оператор L удовлетворяет условиям* (9.35), *причем $a^{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда если $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$, $1 < p < \infty$, то*

$$\| u \|_{2,\, p;\, \Omega} \leqslant C \cdot \| Lu - \sigma u \|_{p;\, \Omega} \tag{9.43}$$

для всех $\sigma \geqslant \sigma_0$, где C и σ_0 – положительные постоянные, зависящие только от n, p, λ, Λ, Ω и модулей непрерывности коэффициентов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{n+1}(x, t)$ область $\Omega_0 = \Omega \times \times (-1, 1)$ и оператор L_0, определенный формулой $L_0 v = Lv + D_{tt} v$ для $v \in W^{2,p}(\Omega_0)$. Если функция $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, то функция v, определенная равенством $v(x, t) = u(x) \cdot \cos(\sigma^{1/2} t)$, принадлежит $W^{2,p}(\Omega_0)$ и равна нулю на $\partial\Omega \times (-1, 1)$ в смысле $W^{1,p}(\Omega_0)$. Кроме того, $L_0 v = \cos(\sigma^{1/2} t) \cdot (Lu - \sigma u)$. Поэтому в силу теоремы 9.13, примененной в $\Omega' = \Omega \times (-\epsilon, \epsilon)$, где $0 < \epsilon \leqslant 1/2$, получаем

$$\| D_{tt} v \|_{p;\, \Omega'} \leqslant C(\| Lu - \sigma u \|_{p;\, \Omega} + \| u \|_{p;\, \Omega})$$

с постоянной C, зависящей от величин, перечисленных в формулировке теоремы. Взяв теперь $\epsilon = \pi/(3\sigma^{1/2})$, приходим к неравенству

$$\|D_{tt}v\|_{p;\,\Omega'} = \sigma\|v\|_{p;\,\Omega'} \geqslant \sigma\cos(\sigma^{1/2}\epsilon)\cdot(2\epsilon)^{1/p}\|u\|_{p,\,\Omega} \geqslant$$

$$\geqslant 1/2\cdot(2\pi/3)^{1/p}\cdot\sigma^{1-1/(2p)}\|u\|_{p;\,\Omega},$$

поэтому для достаточно больших значений σ будет справедливо неравенство

$$\|u\|_{p;\,\Omega} \leqslant C\,\|Lu - \sigma u\|_{p;\,\Omega}. \tag{9.44}$$

Отсюда в силу теоремы 9.13 получаем (9.43). □

Заметим, что при $p \geqslant n$ теорема 9.14 непосредственно следует из теорем 9.1 и 9.13. В методе гильбертова пространства, рассмотренном в гл. 8, аналогом теоремы 9.14 является лемма 8.4. Случай $p = 2$ в действительности можно рассмотреть на основе леммы 8.4. Отметим также, что, используя в доказательствах теорем 9.12, 9.13 и 9.14 теорему вложения Соболева (см., в частности, следствие 7.1), можно ослабить условия на младшие члены оператора L: $b^i \in L^q(\Omega)$, $c \in L^r(\Omega)$, где $q > n$ при $p \leqslant n$ и $q = n$ при $p > n$; $r > n/2$ при $p \leqslant n/2$ и $r = p$ при $p > n/2$.

9.6. Задача Дирихле

Основным утверждением этого раздела является следующая теорема существования и единственности сильных решений задачи Дирихле.

Теорема 9.15. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{1,1}$. Пусть оператор L строго эллиптичен в Ω, $a^{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in L^\infty$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $c \leqslant 0$. Тогда если $f \in L^p(\Omega)$ и $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, где $1 < p < \infty$, то задача Дирихле $Lu = f$ в Ω, $u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, имеет единственное решение $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*

Доказательство. Существуют различные способы доказательства теоремы 9.15 на основе теорем существования, полученных в гл. 4, 6 и 8. Например, при $p \geqslant n$ она может быть получена как из теоремы 6.14 или из теоремы 8.14 с помощью соответствующей аппроксимации (задача 9.6), так и из утверждения для уравнения Пуассона с помощью метода продолжения по параметру (задача 9.7). Используемый здесь подход основан на теоремах существования в случае $p = 2$ теоремы 8.9 и теоремы 8.12, которые утверждают разрешимость рассмотренной задачи при сильных условиях на коэффициенты. Нам потребуется следующий результат о регулярности, являющийся уточнением теорем 9.11 и 9.13.

Лемма 9.16. *Дополнительно к условиям теоремы 9.13 предположим, что $f \in L^q(\Omega)$ при некотором $q \in (p, \infty)$. Тогда решение u принадлежит $W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega \cup T)$ и $u = 0$ на T в смысле $W^{1,q}(\Omega)$ и, следовательно, справедлива оценка (9.42), в которой величина p заменена на q.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай внутренних оценок, т.е. случай, когда T пусто. Как и в доказательстве теоремы 9.11, зафиксируем шар $B_R = B_R(x_0)$ и возьмем срезающую функцию η такую же, что и в доказательстве теоремы 9.11. Положим $v = \eta u$, $g = a^{ij}D_{ij}v$, так что

$$L_0 v = (a^{ij}(x_0) - a^{ij}(x))D_{ij}v + g.$$

Так как $Lu = f$, то из теоремы вложения Соболева следует, что $g \in L^r(\Omega)$, где $1/r = \max\{1/q, 1/p - 1/n\}$. С помощью линейного преобразования Q диагонализируем матрицу $[a^{ij}(x_0)]$. При этом оператор L_0 преобразуется в лапласиан и поэтому

$$\Delta \widetilde{v} = (\delta^{ij} - \widetilde{a}^{ij}(x))D_{ij}\widetilde{v} + \widetilde{g},$$

где $\widetilde{v}, \widetilde{a}^{ij}, \widetilde{g}$ – функции, получившиеся из функций v, a^{ij}, g соответственно при преобразовании Q. Вычислив ньютонов потенциал от левой и правой частей, получаем уравнение

$$\widetilde{v} = N[(\delta^{ij} - a^{ij}(x))D_{ij}\widetilde{v}] + N\widetilde{g}.$$

Следовательно, функция v удовлетворяет уравнению вида

$$v = Tv + h, \tag{9.45}$$

в котором T является линейным отображением $W^{2,p}(B_R)$ в себя при любом $p \in (1, \infty)$, ограниченным в силу неравенства Кальдерона–Зигмунда (теорема 9.9), а $h \in L^r(B_R)$. Если, как и в доказательстве теоремы 9.11, $R \leqslant \delta$, то будет выполнено неравенство $\| T \| \leqslant 1/2$. Тогда из принципа сжимающих отображений (теорема 5.1) следует, что уравнение (9.45) имеет единственное решение $v \in W^{2,p}(B_R)$ при любом $p \in [1, 2]$. Следовательно, функция ηu принадлежит $W^{2,r}(\Omega)$, и, так как x_0 – произвольная точка области Ω, получаем, что $u \in W^{2,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Если $r = q$, то утверждение доказано. В остальных случаях требуемая внутренняя гладкость получается с помощью теоремы вложения Соболева и повторения предыдущего доказательства. Гладкость решения вблизи границы устанавливается аналогично: в доказательстве теоремы 9.13 следует взять $x_0 \in T$ и шар $B_R(x_0)$ заменить на полушар $B_R^+(0)$. □

Доказательство единственности в теореме 9.15 следует из леммы 9.16. Если оператор L удовлетворяет условиям теоремы 9.15 и если функции $u, v \in W^{2,p}(\Omega)$ удовлетворяют условиям $Lu = Lv$ в Ω и $u - v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, то по лемме 9.16 $u - v \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ для всех $1 < q < \infty$. Используя единственность решения (теорема 9.5) и теорему вложения Соболева (теорема 7.10), получаем, что $u = v$. Из единственности получаем также априорную оценку, обобщающую теорему 9.14.

Л е м м а 9.17. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям теоремы* 9.15. *Тогда существует постоянная C (не зависящая от u) такая, что*

$$\| u \|_{2,p;\Omega} \leqslant C \| Lu \|_{p;\Omega} \tag{9.46}$$

для всех $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что (9.46) не верно. Это значит, что существует последовательность функций $\{v_m\}$, $v_m \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям $\| v_m \|_{p;\Omega} = 1$, $\| Lv_m \|_{p;\Omega} \to 0$. В силу априорной оценки (теорема 9.13) из компактности вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ и слабой компактности ограниченных множеств в $W^{2,p}(\Omega)$ (задача 5.5) следует, что существует подпоследовательность последовательности $\{v_m\}$, которую мы обозначим также через $\{v_m\}$, слабо сходящаяся к функции $v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, для которой $\| v \|_{p;\,\Omega} = 1$. Так как $\int_\Omega g D^\alpha v_m \to \int_\Omega g \cdot D^\alpha v$ для всех $|\alpha| \leqslant 2$ и всех $g \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$, то получаем, что $\int_\Omega g L v = 0$ для всех $g \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$.

Следовательно, $Lv = 0$ и в силу теоремы единственности $v = 0$, а это противоречит условию $\| v \|_p = 1$. □

Теперь мы можем доказать теорему 9.15. Прежде всего заметим, что если старшие коэффициенты a^{ij} принадлежат $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ и $p \geqslant 2$, то утверждение теоремы непосредственно следует из теорем 8.9 и 8.12 и леммы 9.16. В общем случае мы заменяем u на $u - \varphi$, чтобы получить нулевые граничные условия, равномерно аппроксимируем коэффициенты a^{ij} последовательностями $\{a_m^{ij}\} \subset C^{0,1}(\bar{\Omega})$, а в случае $p < 2$ и функцию f – последовательностью $\{f_m\} \subset L^2(\Omega)$ в метрике $L^p(\Omega)$. Обозначим через $\{u_m\}$ последовательность решений соответствующих задач Дирихле. Из леммы 9.17 вытекает, что последовательность $\{u_m\}$ ограничена в $W^{2,p}(\Omega)$. Следовательно, снова в силу результата задачи 5.5 некоторая ее подпоследовательность будет слабо сходиться в $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ к функции u, удовлетворяющей в Ω уравнению $Lu = f$. Последний факт устанавливается рассуждениями, аналогичными рассуждениям из доказательства леммы 9.17. □

Теорема 9.15 может быть получена также и из альтернативы Фредгольма, следующей из замечания 9.14 (задача 9.9). При $p > n/2$ мы получаем теорему существования для непрерывных граничных значений.

Следствие 9.18. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{1,1}$ и пусть оператор L строго эллиптичен в Ω, коэффициенты $a^{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$, b^i, $c \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $c \leqslant 0$. Тогда если $f \in L^p(\Omega)$, $p > n/2$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, то задача Дирихле $Lu = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, имеет единственное решение $u \in W_{\mathrm{loc}}^{2,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.*

Доказательство. Единственность решения следует из теоремы 9.5 и леммы 9.6 (в действительности она, очевидно, имеет место для любой Ω и любого $p > 1$). Чтобы доказать существование решения, возьмем последовательность $\{\varphi_m\} \subset W^{2,p}(\Omega)$, сходящуюся равномерно на $\partial\Omega$ к функции φ. Пусть $u_m \in W^{2,p}(\Omega)$ – решение задачи Дирихле $Lu_m = f$ в Ω, $u_m = \varphi_m$ на $\partial\Omega$. Это решение существует в силу теоремы 9.15. Разность $u_l - u_m$ удовлетворяет соотношениям

$$L(u_l - u_m) = 0 \text{ в } \Omega, \quad u_l - u_m = \varphi_l - \varphi_m \text{ на } \partial\Omega.$$

Отсюда в силу теорем 9.1 и 9.11 следует, что последовательность $\{u_m\}$ сходится в $C^0(\bar{\Omega}) \cap W_{\mathrm{loc}}^{2,p}(\Omega)$ к решению u задачи Дирихле $Lu = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$. □

Используя технику барьеров, аналогичную технике гл. 6, можно обобщить следствие 9.18 на более широкий класс областей. Результат такого типа мы получим в разделе 9.7 в связи с установлением непрерывности вплоть до границы.

В заключение этого раздела мы сформулируем теорему о гладкости более высокого порядка, обобщающую теоремы 6.17 и 6.19 для классических решений. Доказательство может быть получено с помощью разностных отношений подобно тому, как это осуществлялось в указанных теоремах; можно применить также рассуждения, аналогичные рассуждениям доказательства леммы 9.16. Детали доказательства оставляем рассмотреть читателю (задача 9.10).

Теорема 9.19. *Пусть функция u из $W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ является решением в Ω эллиптического уравнения $Lu = f$, коэффициенты которого принадлежат $C^{k-1,1}(\Omega)$ $(C^{k-1,\alpha}(\Omega))$, а правая часть f принадлежит $W^{k,q}_{\text{loc}}(\Omega)$ $(C^{k-1,\alpha}(\Omega))$, причем $1 < p,\ q < \infty,\ k \geqslant 1,\ 0 < \alpha < 1$.*

Тогда функция u принадлежит $W^{k+2,q}_{\text{loc}}(\Omega)$ $(C^{k+1,\alpha}(\Omega))$. Более того, если Ω принадлежит классу $C^{k+1,1}$ $(C^{k+1,\alpha})$, а оператор L строго эллиптичен в Ω и его коэффициенты принадлежат $C^{k-1,1}(\bar\Omega)$, $(C^{k-1,\alpha}(\bar\Omega))$, а правая часть f принадлежит $W^{k,q}(\Omega)$ $(C^{k-1,\alpha}(\bar\Omega))$, то u принадлежит $W^{k+2,q}(\Omega)$ $(C^{k+1,\alpha}(\bar{\bar\Omega}))$.

9.7. Локальный принцип максимума

В этом, и в следующих разделах мы сконцентрируем винмание на локальных поточечных оценках для решений уравнений с операторами общего вида (9.1) и получим результаты, аналогичные соответствующим результатам для операторов дивергентного вида (см. разделы 8.6 – 8.10). До конца этой главы будем предполагать, что оператор L, определенный формулой (9.1), строго эллиптичен и имеет ограниченные коэффициенты в области Ω. В соответствии с этим мы зафиксируем постоянные γ и ν так, чтобы в области Ω выполнялись неравенства

$$\Lambda/\lambda \leqslant \gamma, \quad (|b|/\lambda)^2, \quad |c|/\lambda \leqslant \nu. \tag{9.47}$$

В этом разделе мы докажем следующий аналог оценки для субрешений из теоремы 8.17.

Теорема 9.20. *Пусть функция u принадлежит $W^{2,n}(\Omega)$ и пусть $Lu \geqslant f$, где $f \in L^n(\Omega)$. Тогда для любого шара $B = B_{2R}(y) \subset \Omega$ и любого $p > 0$ справедлива оценка*

$$\sup_{B_R(y)} u \leqslant C\left\{\left(\frac{1}{|B|}\int_B (u^+)^p dx\right)^{1/p} + \frac{R}{\lambda}\|f\|_{L^n(B)}\right\} \tag{9.48}$$

с постоянной $C = C(n, \gamma, \nu R^2, p)$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $B = B_1(0)$. Общий случай сводится к этому с помощью замены независимых переменных $x \mapsto (x - y)/2R$. Предположим сначала, что $u \in C^2(\Omega) \cap W^{2,n}(\Omega)$. Возьмем $\beta \geqslant 1$ и определим срезающую функцию η равенством

$$\eta(x) = (1 - |x|^2)^\beta. \tag{9.49}$$

Дифференцируя, получаем

$$D_i\eta = -2\beta x_i(1 - |x|^2)^{\beta-1},$$

$$D_{ij}\eta = -2\beta\delta_{ij}(1 - |x|^2)^{\beta-1} + 4\beta(\beta-1)x_ix_j(1 - |x|^2)^{\beta-2}.$$

Для функции $v = \eta u$ имеем

$$a^{ij}D_{ij}v = \eta a^{ij}D_{ij}u + 2a^{ij}D_i\eta D_j u + ua^{ij}D_{ij}\eta \geqslant$$
$$\geqslant \eta(f - b^iD_iu - cu) + 2a^{ij}D_i\eta D_ju + ua^{ij}D_{ij}\eta.$$

Пусть $\Gamma^+ = \Gamma_v^+$ — верхнее контактное множество функции v в шаре B. Очевидно, что $u > 0$ на Γ^+. Кроме того, в силу вогнутости функции v на Γ^+ мы можем на Γ^+ оценить

$$|Du| = \frac{1}{\eta}|Dv - uD\eta| \leqslant \frac{1}{\eta}(|Dv| + u|D\eta|) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\eta}\left(\frac{v}{1-|x|} + u\cdot|D\eta|\right) \leqslant 2(1+\beta)\cdot\eta^{-1/\beta}u.$$

Таким образом, на Γ^+ выполнено неравенство

$$-a^{ij}D_{ij}v \leqslant \{(16\beta^2 + 2\eta\beta)\Lambda\eta^{-2/\beta} + 2\beta|b|\eta^{-1/\beta} + c\}v + \eta f \leqslant$$
$$\leqslant C\lambda\eta^{-2\beta}v + f$$

с постоянной $C = C(n, \beta, \gamma, \nu)$. Далее, применяя лемму 9.3, для $\beta \geqslant 2$ получаем

$$\sup_B v \leqslant C(\|\eta^{-2/\beta}v^+\|_{n;B} + (1/\lambda)\|f\|_{n;B}) \leqslant$$
$$\leqslant C\{|\sup v^+|^{1-2/\beta}\|(u^+)^{2/\beta}\|_{n;B} + (1/\lambda)\cdot\|f\|_{n;B}\}.$$

Полагая $\beta = 2n/p$ (при условии, что $p \leqslant n$) и используя неравенство Юнга (7.6) вида $(\sup v^+)^{1-2/\beta} \leqslant \epsilon \sup v^+ + \epsilon^{1-\beta/2}$, где $\epsilon > 0$, приходим к неравенству

$$\sup_B v \leqslant C\{(\int_B (u^+)^p dx)^{1/p} + (1/\lambda)\cdot\|f\|_{n;B}\},$$

из которого и следует оценка (9.48). Обобщение на случай $u \in W^{2,n}(\Omega)$ получается непосредственно из рассмотренного случая с помощью аппроксимации. Осуществить это обобщение мы предоставляем читателю. □

С помощью замены u на $-u$ утверждение теоремы 9.20 автоматически переносится на суперрешения и решения уравнения $Lu = f$.

Следствие 9.21. *Пусть $u \in W^{2,n}(\Omega)$. Предположим, что $Lu \leqslant f (= f)$ в Ω и $f \in L^n(\Omega)$. Тогда для любого шара $B = B_{2R}(y) \subset \Omega$ и любого $p > 0$ справедлива оценка*

$$\sup_{B_R(y)} (-u) \leqslant C\left\{\left(\frac{1}{|B|}\int_B (u^-)^p dx\right)^{1/p} + \frac{R}{\lambda}\|f\|_{L^n(B)}\right\}$$
$$\left(\sup_{B_R(y)} |u| \leqslant C\left\{\left(\frac{1}{|B|}\int_B |u|^p dx\right)^{1/p} + \frac{R}{\lambda}\|f\|_{L^n(B)}\right\}\right) \tag{9.50}$$

с постоянной $C = C(n, \gamma, \nu R^2, p)$.

Отметим, что оценка (9.48) с $p = 1$ дает обобщение неравенства для среднего значения неотрицательных субгармонических функций. А именно, если $Lu \geqslant 0$ и $u \geqslant 0$ в $B_R(y)$, то

$$u(y) \leqslant (C/R^n) \cdot \int\limits_{B_R(y)} u\,dx \tag{9.51}$$

с постоянной $C = C(n, \gamma, \nu R^2)$.

Теорема 9.20 остается справедливой и при более общих условиях на коэффициенты (см. примечания).

9.8. Оценки Гёльдера и неравенство Харнака

В этом разделе мы опишем метод получения оценок Гёльдера и неравенства Харнака, принадлежащий Крылову и Сафонову [138], [139]. Эти оценки являются аналогами для равномерно эллиптических операторов общего вида оценок Де Джорджи, Нэша и Мозера для операторов дивергентного вида. Для последующего изучения в гл. 17 вполне нелинейных эллиптических уравнений важную роль играет слабое неравенство Харнака для неотрицательных суперрешений. Из него также легко выводятся оценки Гёльдера и неравенство Харнака.

Теорема 9.22. *Пусть функция $u \in W^{2,n}(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $Lu \leqslant f$ в Ω, где $f \in L^n(\Omega)$. Пусть функция и неотрицательна в шаре $B = B_{2R}(y) \subset \Omega$. Тогда*

$$\left(\frac{1}{|B_R|} \int\limits_{B_R} u^p dx\right)^{1/p} \leqslant C\left(\inf_{B_R} u + \frac{R}{\lambda} \|f\|_{L^n(B)}\right), \tag{9.52}$$

где p и C – положительные постоянные, зависящие только от n, γ и νR^2.

Доказательство. Предположим сначала, что $B = B_1(0)$ и $\lambda \equiv 1$ (последнее достигается с помощью замены L, f на L/λ, f/λ соответственно). Полагая

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u + \epsilon + \|f\|_{n;B}, \\ w &= -\log \bar{u}, \quad v = \eta w, \quad g = f/\bar{u}, \end{aligned} \tag{9.53}$$

где $\epsilon > 0$, а функция η задана равенством (9.49), с помощью неравенства Шварца получим

$$\begin{aligned} -a^{ij}D_{ij}v &= -\eta a^{ij}D_{ij}w - 2a^{ij}D_i\eta D_j w - w a^{ij}D_{ij}\eta \leqslant \\ &\leqslant \eta(-a^{ij}D_i w D_j w + b^i D_i w + |c| + g) - 2a^{ij}D_i\eta D_j w - w a^{ij}D_{ij}\eta \leqslant \\ &\leqslant \frac{2}{\eta} a^{ij}D_i\eta \cdot D_j\eta - w a^{ij}D_{ij}\eta + (|b|^2 + |c| + g). \end{aligned}$$

Так как

$$a^{ij}D_{ij}\eta = -2\beta a^{ii}(1 - |x|^2)^{\beta-1} + 4\beta(\beta-1)a^{ij}x_i x_j(1 - |x|^2)^{\beta-2},$$

то $a^{ij}D_{ij}\eta \geqslant 0$, если $2(\beta - 1)a^{ij}x_i x_j + a^{ii}|x|^2 \geqslant a^{ii}$, и, в частности, если $2\beta|x|^2 \geqslant n\Lambda$. Следовательно, если $0 < \alpha < 1$, а показатель β выбран так, что $\beta \geqslant n\gamma/(2\alpha)$, то $a^{ij}D_{ij}\eta \geqslant 0$ для всех $|x| \geqslant \alpha$. Отсюда получаем, что на множестве $B^+ = \{x \in B \mid w(x) > 0\}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
-a^{ij}D_{ij}v &\leqslant 4\beta^2(1-|x|^2)^{\beta-2}|x|^2 + \\
&+ v\chi(B_\alpha)\cdot\sup_{B_\alpha}(-a^{ij}D_{ij}\eta/\eta) + (|b|^2+|c|+g) \leqslant \\
&\leqslant 4\beta^2\Lambda + |b|^2 + |c| + g + \frac{2n\beta\Lambda}{1-\alpha^2}\cdot v\cdot\chi(B_\alpha).
\end{aligned}$$

Применяя лемму 9.3 и замечая, что $\|g\|_{n;\,B} \leqslant 1$, приходим к оценке для функции v. А именно,

$$\sup_B v \leqslant C(1 + \|v^+\|_{n;B_\alpha}) \tag{9.54}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, \gamma, \nu)$.

Чтобы можно было воспользоваться процедурой разбиения куба, описанной в гл. 9.2, с этого момента заменим в рассуждениях шары на кубы. Для любой точки $y \in \mathbf{R}^n$ и для $R > 0$ через $K_R(y)$ будем обозначать открытый куб с центром в точке y и с ребрами длины $2R$, параллельными координатным осям. Если $\alpha < 1/\sqrt{n}$, то $K_\alpha = K_\alpha(0) \subset\subset B$ и из (9.54) следует, что

$$\sup_B v \leqslant C(1 + \|v^+\|_{n;K_\alpha}) \leqslant C(1 + |K_\alpha^+|^{1/n}\sup_B v^+),$$

где $K_\alpha^+ = \{x \in K_\alpha \mid v > 0\}$. Поэтому если $|K_\alpha^+|/|K_\alpha| \leqslant \theta = [2(2\alpha)^n C]^{-1}$, то $\sup\limits_B v \leqslant 2C$, где $C = C(n, \alpha, \gamma, \nu)$ — постоянная из (9.54). Возьмем теперь $\alpha = 1/(3n)$ и одновременно зафиксируем θ. С помощью преобразования $x \to \alpha(x - z)/r$ мы получаем для произвольного куба $K = K_r(z)$ такого, что $B_{3nr}(z) \subset B$ и

$$|K^+| \leqslant \theta|K|, \tag{9.55}$$

оценку

$$\sup_{K_{3r}(z)} w \leqslant C, \quad C = C(n, \gamma, \nu). \tag{9.56}$$

Доказательство теоремы 9.22 завершается теперь с помощью следующей леммы.

Лемма 9.23. *Пусть K_0 — куб в $\mathbf{R}^n$, $w \in L^1(K_0)$ и $\Gamma_k = \{x \in K \mid w(x) \leqslant k\}$, $k \in \mathbf{R}$. Предположим, что существуют такие положительные постоянные $\delta < 1$ и C, что*

$$\sup_{K_0 \cap K_{3r}(z)} (w - k) \leqslant C, \tag{9.57}$$

если только число k и куб $K = K_r(z) \subset K_0$ таковы, что

$$|\Gamma_k \cap K| \geqslant \delta|K|. \tag{9.58}$$

Тогда для всех k

$$\sup_{K_0}(w - k) \leqslant C\left(1 + \frac{\log(|\Gamma_k|/|K_0|)}{\log\delta}\right). \tag{9.59}$$

Доказательство. Сначала с помощью индукции докажем, что

$$\sup_{K_0} (w - k) \leqslant mC$$

для всех натуральных m и $k \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию $|\Gamma_k| \geqslant \delta^m |K_0|$. При $m = 1$ это утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо для некоторого $m \in \mathbf{N}$ и что $|\Gamma_k| \geqslant \delta^{m+1}|K_0|$. Определим множество $\widetilde{\Gamma}_k$ равенством

$$\widetilde{\Gamma}_k = \cup\{K_{3r}(z) \cap K_0 \mid |K_r(z) \cap \Gamma_k| \geqslant \delta |K_r(z)|\}.$$

Из процедуры разбиения куба, описанной в разделе 9.2, при $t = \delta$ из неравенства (9.20) получаем, что или $\widetilde{\Gamma}_k = K_0$, или $|\widetilde{\Gamma}_k| \geqslant (1/\delta) \cdot |\Gamma_k| \geqslant \delta^m |K_0|$. Следовательно, если заменить k на $k + C$, получаем $\sup\limits_{K_0}(w - k) \leqslant (m + 1)C$, а это гарантирует справедливость требуемого утверждения при $m + 1$. Оценка (9.59) получается с помощью выбора соответствующего значения m. □

Положим в лемме 9.23 $\delta = 1 - \theta$, $K_0 = K_\alpha(0)$, $\alpha = 1/(3n)$. Оценка (9.56) при этом останется справедливой, если w заменить на $w - k$. Пусть $\mu_t = |\{x \in K_0 \mid \bar{u}(x) > t\}|$ – функция распределения $\bar{u}$ на K_0. С помощью (9.53) и (9.59), полагая $t = e^{-k}$, получаем оценку

$$\mu_t \leqslant C(\inf_{K_0} \bar{u}/t)^\kappa, \quad t > 0, \tag{9.60}$$

где C и κ – положительные постоянные, зависящие только от n, γ и ν. Заменяя куб K_0 на вписанный шар $B_\alpha(0)$, $\alpha = 1/(3n)$, и используя лемму 9.7, получаем оценку

$$\int_{B_\alpha} (\bar{u})^p dx \leqslant C(\inf_{B_\alpha} \bar{u})^p \tag{9.61}$$

для $p < \kappa$, например для $p = \kappa/2$. Если, далее, устремить $\epsilon \to 0$, использовать покрытия для получения оценок (9.6) с произвольным $\alpha < 1$ (например, с $\alpha = 1/2$) и, наконец, использовать преобразование координат $x \mapsto (x - y)/(2R)$, то получим слабое неравенство Харнака в виде (9.52). □

Приспосабливая доказательство оценки Гёльдера для оператора дивергентного вида (теорема 8.22) (с небольшими модификациями, компенсирующими отсутствие значения $p = 1$ в слабом неравенстве Харнака (9.52)), из теоремы 9.22 можно получить оценку Гёльдера для операторов общего вида.

Следствие 9.24. *Пусть функция $u \in W^{2,n}(\Omega)$ удовлетворяет в Ω уравнению $Lu = f$. Тогда для любого шара $B_0 = B_{R_0}(y) \subset \Omega$ и любого $R \leqslant R_0$ справедливо неравенство*

$$\operatorname*{osc}_{B_R(y)} u \leqslant C(R/R_0)^\alpha (\operatorname*{osc}_{B_0} u + \bar{k}R_0), \tag{9.62}$$

где $C = C(n, \gamma, \nu R_0^2)$, $\alpha = \alpha(n, \gamma, \nu R_0^2)$ – положительные постоянные, а $\bar{k} = \|f - cu\|_{n;B_0}$.

Объединяя теорему 9.22 с оценкой субрешения (теорема 9.20), мы получаем неравенство Харнака.

Следствие 9.25. *Пусть функция* $u \in W^{2,n}(\Omega)$ *удовлетворяет в* Ω *уравнению* $Lu = 0$ *и неотрицательна. Тогда для произвольного шара* $B_{2R}(y) \subset \Omega$ *имеем*

$$\sup_{B_R(y)} u \leqslant C \inf_{B_R(y)} u \tag{9.63}$$

с постоянной $C = C(n, \gamma, \nu R^2)$.

9.9. Локальные оценки вблизи границы

Локальный принцип максимума (теорема 9.20) может быть следующим образом обобщен на случай шаров, пересекающихся с границей.

Теорема 9.26. *Пусть функция* $u \in W^{2,n}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *удовлетворяет неравенству* $Lu \geqslant f$ *в* Ω *и неравенству* $u \leqslant 0$ *на* $B \cap \partial\Omega$, *где* $f \in L^n(\Omega)$ *и* $B = B_{2R}(y)$ – *шар в* $\mathbf{R}^n$. *Тогда для любого* $p > 0$ *имеем*

$$\sup_{\Omega \cap B_R(y)} u \leqslant C\left\{\left(\frac{1}{|B|} \int_{B \cap \Omega} (u^+)^p dx\right)^{1/p} + \frac{R}{\lambda} \|f\|_{L^n(B \cap \Omega)}\right\} \tag{9.64}$$

с постоянной $C = C(n, \gamma, \nu R^2, p)$.

Доказательство. Достаточно доказать оценку (9.64) для функции $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, удовлетворяющей неравенству $u \leqslant 0$ на $B \cap \partial\Omega$. Продолжим функцию u на весь шар B, положив $u = 0$ в $B - \Omega$. Хотя функция u после продолжения и не обязана принадлежать пространству $C^2(B)$, но рассуждения из доказательства теоремы 9.20 могут быть применены, так как множество Γ^+ – верхнее контактное множество функции v – лежит в $B \cap \Omega$, а функция v принадлежит $C^2(\Gamma^+)$, и потому можно использовать лемму 9.3. □

Отметим здесь следующий факт, использованный при доказательстве теоремы 9.26: если функция u удовлетворяет условиям леммы 9.3, то по непрерывности оценка (9.11) будет справедлива и в случае, когда множество Γ^+ заменяется на верхнее контактное множество функции u относительно любой большей области $\tilde{\Omega}$ (на которую функция u продолжается нулем), а число d заменяется на $\operatorname{diam} \tilde{\Omega}$.

Слабое неравенство Харнака (теорема 9.22) справедливо вблизи границы и имеет следующий вид.

Теорема 9.27 *Пусть функция* $u \in W^{2,n}(\Omega)$ *удовлетворяет в* Ω *неравенству* $Lu \leqslant f$ *и неотрицательна в* $B \cap \Omega$, $B = B_{2R}(y)$ – *шар в* $\mathbf{R}^n$. *Положим* $m = \inf_{B \cap \partial\Omega} u$ *и*

$$u_m^-(x) = \begin{cases} \inf\{u(x), m\} & \text{для } x \in B \cap \Omega, \\ m & \text{для } x \in B - \Omega. \end{cases}$$

Тогда

$$\left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} (u_m^-)^p dx\right)^{1/p} \leqslant C\left(\inf_{\Omega \cap B_R} u + \frac{R}{\lambda} \|f\|_{L^n(B \cap \Omega)}\right), \tag{9.65}$$

где p *и* C – *положительные постоянные, зависящие только от* n, γ *и* νR^2.

Если предположить, что функция и принадлежит только $W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, то неравенство (9.65) *выполняется с* $m = \liminf\limits_{x \to B\, \partial\Omega} u$.

Доказательство. Приспособим доказательство теоремы 9.22, заменив $\bar{u}$ на u_m^-. Оценка (9.56) в этом случае получается, если w заменить на $w - k$ при $k \geqslant -\log m$, и мы получаем оценку (9.60) при $0 < t \leqslant m$. Если $t > m$, то $u_t = 0$. Следовательно, так же, как и ранее, получается (9.65). Последнее утверждение теоремы 9.27 является следствием замечания к теореме 9.1. □

В качестве следствия теоремы 9.27 получаются оценки глобального и граничного модулей непрерывности решений. Сформулируем результаты, аналогичные результатам для операторов дивергентного вида, изложенным в теоремах 8.27 и 8,29.

Следствие 9.28. *Пусть функция* $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *удовлетворяет уравнению* $Lu = f$ *в* Ω, *где* $f \in L^n(\Omega)$. *Предположим, что область* Ω *удовлетворяет условию внешнего конуса в точке* $y \in \partial\Omega$. *Тогда для любого* $0 < R < R_0$ *и любого шара* $B_0 = B_{R_0}(y)$ *имеем*

$$\operatorname*{osc}_{\Omega \cap B_R} u \leqslant C\{(R/R_0)^\alpha (\operatorname*{osc}_{\Omega \cap B_0} u + \bar{k}R_0) + \sigma(\sqrt{RR_0})\}, \tag{9.66}$$

где $C = C(n, \gamma, \nu R_0^2, V_y)$, $\alpha = \alpha(n, \gamma, \nu R_0^2, V_y)$ – *положительные постоянные,* V_y – *внешний конус с вершиной в точке* y *и*

$$\sigma(r) = \operatorname*{osc}_{\partial\Omega \cap B_r} u = \limsup_{x \to \partial\Omega \cap B_r} u - \liminf_{x \to \partial\Omega \cap B_r} u$$

для $0 < r \leqslant R_0$.

Следствие 9.29. *Пусть функция* $u \in W^{2,n}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *удовлетворяет в* Ω *уравнению* $Lu = f$ *и* $u = \varphi$ *на* $\partial\Omega$, *причем* $f \in L^n(\Omega)$ *и* $\varphi \in C^\beta(\bar{\Omega})$ *для некоторого* $\beta > 0$. *Предположим, что граница* $\partial\Omega$ *удовлетворяет равномерному условию внешнего конуса.*

Тогда функция и принадлежит $C^\alpha(\bar{\Omega})$ *и справедлива оценка*

$$|u|_{\alpha;\Omega} \leqslant C, \tag{9.67}$$

где α *и* C – *положительные постоянные, зависящие от* n, γ, ν, β, Ω, $|\varphi|_{\beta;\Omega}$ *и* $|u|_{0;\Omega}$.

Отметим здесь, что оценка модулей непрерывности вплоть до границы может быть получена с помощью построения барьеров подобно тому, как это осуществлено в разделе 6.3. Более того, вместо барьеров при решении задачи Дирихле методом Перрона может быть использована теорема 9.28. Чтобы показать это, предположим, что оператор удовлетворяет условиям теоремы 6.11. Пусть $u \in C^2(\Omega)$ – решение Перрона задачи Дирихле $Lu = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, существование которого доказано в теореме 6.11. В силу следствия 9.28 мы получаем оценку модуля непрерывности решения u в точке $y \in \partial\Omega$, если область Ω удовлетворяет условию внешнего конуса, через модуль непрерывности функции φ в точке y. Если область Ω удовлетворяет условию внешнего конуса в каждой точке $\partial\Omega$, то решение u принадлежит $C^0(\bar{\Omega})$ и равно φ на $\partial\Omega$, т.е. является решением рассматриваемой задачи Дирихле.

Таким образом, в теореме существования (теорема 6.13) можно заменить условие внешней сферы на условие внешнего конуса. Последнему условию удовлетворяют, например, липшицевы области (см. также задачу 6.3). Используя результаты раздела 9.5, в частности, следствие 9.18, мы можем обобщить теорему 6.13 на случай, когда коэффициенты предполагаются непрерывными.

Т е о р е м а 9.30. *Пусть оператор L строго эллиптичен в ограниченной области Ω, а его коэффициенты удовлетворяют условиям: $a^{ij} \in C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, b^i, $c \in L^\infty(\Omega)$ и $c \leqslant 0$. Пусть область Ω удовлетворяет условию внешнего конуса в любой граничной точке. Тогда если $f \in L^p(\Omega)$, $p \geqslant n$, то задача Дирихле $Lu = f$ в Ω, $u = \varphi$ на $\partial\Omega$, имеет единственное решение $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы доказать теорему 9.30 достаточно, в силу замечаний к предыдущей теореме, доказать существование решения из $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, аналогичного решения Перрона. Для этого можно применить процедуру Перрона, описанную для супергармонических функций в гл. 2, и использовать сильный принцип максимума (теорема 9.6), разрешимость задачи Дирихле для шара с непрерывными граничными данными (следствие 9.18) и внутренние оценки (теорема 9.11) вместе со свойством слабой относительной компактности ограниченных множеств в $W^{2,p}(\Omega')$, $\Omega' \subset\subset \Omega$. Детали доказательства оставляем читателю. □

9.10. Граничные оценки Гёльдера градиента

Интересные и важные оценки Гёльдера для следа градиента решения на границе могут быть получены из внутренних (или слабых) неравенств Харнака. Этот результат был доказан Крыловым [135] в связи с его исследованиями вполне нелинейных уравнений, которым будет посвящен раздел 17.8. Для этих приложений достаточно ограничиться рассмотрением плоского куска, лежащего на границе, на котором решение обращается в нуль. Будем рассматривать операторы вида

$$Lu = a^{ij}D_{ij}u,$$

удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности (9.47). Для более общего случая соответствующие результаты получаются очевидным способом.

Т е о р е м а 9.31. *Пусть функция $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(B^+) \cap C^0(\overline{B}^+)$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ в полушаре $B^+ = B_{R_0}(0) \cap \mathbf{R}^n_+$, функция f принадлежит $L^\infty(B^+)$ и $u = 0$ на $T = B_{R_0} \cap \partial\mathbf{R}^n_+$. Тогда для любого $R \leqslant R_0$ имеем*

$$\operatorname*{osc}_{B_R^+} \frac{u}{x_n} \leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \left(\operatorname*{osc}_{B^+} \frac{u}{x_n} + R_0 \sup_{B^+} \frac{|f|}{\lambda}\right), \tag{9.68}$$

где α и C – положительные постоянные, зависящие только от n и γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что функция $v = u/x_n$ ограничена в B^+ (локальная ограниченность этой функции может быть получена с помощью барьеров, построенных в разделе 6.3). Предположим сначала, что $u \geqslant 0$ в B^+ и докажем следующее утверждение: существует число

$\delta = \delta(n, \gamma) > 0$ такое, что

$$\inf_{\substack{|x'| \leqslant R \\ x_n = \delta R}} v \leqslant 2\Big(\inf_{B_{R/2,\delta}} v + (R/\lambda) \cdot \sup_{B^+} |f| \Big) \tag{9.69}$$

для любого $R \leqslant R_0$, где $B_{R.\delta} = \{x \mid |x'| < R,\ 0 < x_n < \delta R\}$. Чтобы доказать неравенство (9.69), нормируем функцию v так, чтобы $\lambda = R = 1$ и $\inf\limits_{|x'| < R} v(x', \delta R) = 1$. Рассмотрим в $B_{1,\delta}$ барьер

$$w(x) = (1 - |x'|^2 + (1 + \sup|f|) \cdot (x_n - \delta)/\sqrt{\delta})x_n.$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что справедливо неравенство $Lw \geqslant f$ для достаточно малого $\delta = \delta(n, \gamma)$ и неравенство $w \leqslant u$ на $\partial B_{1,\delta}$. Отсюда в силу принципа максимума (теорема 9.1) вытекает неравенство $w \leqslant u$ в $B_{1,\delta}$. Таким образом, на $B_{1/2,\delta}$ для достаточно малого δ справедливо неравенство

$$v \geqslant 1 - |x'|^2 + (1 + \sup|f|) \cdot (x_n - \delta)/\sqrt{\delta} \geqslant 1/2 - \sup|f|.$$

Убирая нормировку, мы приходим к требуемому неравенству (9.69). Пусть $B^*_{R/2,\delta} = \{x \mid |x'| < R,\ \delta R/2 < x_n < 3\delta R/2\}$. Так как $2u/(3\delta R) \leqslant v \leqslant 2u/(\delta R)$ в $B^*_{R/2,\delta}$, то в силу неравенства Харнака (следствие 9.25) получаем неравенство

$$\sup_{B^*_{R/2,\delta}} v \leqslant C\Big(\inf_{B^*_{R/2,\delta}} v + R \sup|f/\lambda| \Big) \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\inf_{\substack{|x'| < R \\ x_n = R}} v + R \sup|f/\lambda| \Big) \leqslant$$

(в силу (9.69))

$$\leqslant C\Big(\inf_{B_{R/2,\delta}} v + R \sup|f/\lambda| \Big). \tag{9.70}$$

Предположим теперь, что $u \geqslant 0$. Обозначим $M = \sup\limits_{B_{2R,\delta}} v$, $m = \inf\limits_{B_{2R,\delta}} v$.

Применяя неравенство (9.70) к функциям $M - v$ и $v - m$ и складывая получившиеся неравенства, приходим к оценке колебания решения вида

$$\operatorname*{osc}_{B_{R/2,\delta}} v \leqslant \sigma\Big(\operatorname*{osc}_{B_{2R,\delta}} v + CR \sup|f/\lambda| \Big),$$

где постоянные $C > 0$ и $\sigma < 1$ зависят только от n и γ. Отсюда с помощью леммы 8.23 получается неравенство (9.68). □

Теорема 9.31 в действительности показывает, что градиент Du решения существует на T и непрерывен на T по Гёльдеру, причем справедлива оценка

$$\operatorname*{osc}_{|x'| < R} Du(x', 0) \leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\alpha}\left(\operatorname*{osc}_{B^+} \frac{u}{x_n} + \frac{R}{\lambda} \sup_{B^+} |f|\right). \tag{9.71}$$

Более того, слагаемое $\operatorname*{osc}_{B^+}(u/x_n)$ в правой части неравенства (9.68) и в правой части неравенства (9.71) может быть заменено на $\operatorname*{osc}_{B^+}(u/R_0)$ или на $\sup_{B^+}|Du|$. Глобальные оценки (оценки вплоть до границы) могут быть получены из теоремы 9.31 с помощью соответствующих внутренних оценок, которые обычно и имеют место для нелинейных уравнений (см. задачу 13.1 и раздел 17.8).

Примечания

Принципы максимума и теоремы единственности для сильных решений в том виде, в каком они сформулированы в теоремах 9.1, 9.5 и 9.6, были получены Александровым [6], [7]. Важный результат, пересекающийся с результатом леммы 9.3, доказан Бакельманом [20]. Детальный анализ постоянной C из оценки (9.4) имеется в работах [8], [9]. Во всех этих работах можно заменить норму в L^n на норму в L^p, где $p < n$ [10]. Пример (8.22) показывает, что теорема единственности (теорема 9.5) для $u, v \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, где $p < n$ может не иметь места. Другие варианты принципа максимума (теорема 9.1) были даны Бони [40] и Пуччи [244].

Неравенство Кальдерона – Зигмунда было получено Кальдероном и Зигмундом [109], и мы в целом воспроизвели их оригинальное доказательство, следуя изложению Стейна [275], использовавшего процедуру разбиения куба (одномерный вариант этого разбиения принадлежит Риссу [247]) и интерполяционную теорему Марцинкевича [181]. Наше доказательство отличается от доказательств, изложенных в [109] и [275], тем, что мы не используем преобразование Фурье для получения оценок в L^2. Оператор T, появляющийся в доказательстве теоремы 9.9, является специальным случаем *сингулярных интегральных операторов,* которые были главным объектом изучения в [109] и в [275]. Другие доказательства неравенства Кальдерона – Зигмунда имеются в монографиях [32], [208]. В более позднем доказательстве этого неравенства, также основанном на интерполяции, используется пространство BMO функций ограниченного среднего колебания (см. [113], [302]).

Оценки в L^p для решений эллиптических уравнений второго порядка, изложенные в разделе 9.4, были получены Кошелевым [130] и Греко [72]. Они обобщались на уравнения высокого порядка и на системы различными авторами, в том числе Слободецким [266], Браудером [45] и Агмоном, Дуглисом и Ниренбергом [2], [3]. Теорема существования (теорема 9.15) имеется у Чикко [341], [342]. Наше доказательство отличается от его доказательства. П.Л. Лионс [166] предложил другие методы изучения задачи Дирихле. Доказательство гладкости, осуществленное в лемме 9.16, следует работе Морри [208], рассматривавшему также и теорию в L^p.

Поточечные оценки разделов 9.6, 9.7 и 9.8 происходят из фундаментальной работы Крылова и Сафонова (см. [138], [139], [260]), получивших оценки Гёльдера и неравенства Харнака, изложенные в следствиях 9.24 и 9.25, для случая $c \leqslant 0$. В действительности в [138], [139] изучена более общая ситуация *параболических* уравнений. Наше изложение в разделе 9.7

следует [293] и основано на их идеях. Локальный принцип максимума (теорема 9.20) был доказан в [293] при более общих условиях на коэффициенты: $\Lambda/\mathcal{D}^*, b/\mathcal{D}^* \in L^q(\Omega)$, $q > n$; $c/\mathcal{D}^*, f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$. Оценки раздела 9.7 могут быть обобщены на случай, когда $b/\lambda \in L^{2n}(\Omega)$, $c/\lambda, f/\lambda \in L^n(\Omega)$, хотя для доказательств в этих случаях существенным является условие равномерной эллиптичности. Обобщения на квазилинейные уравнения рассматривались в [293], [150] и [182] (см. также гл. 15).

В это издание мы включили доказательство оценки Гёльдера градиента, принадлежащее Крылову [135], учитывая упрощения, осуществленные Каффарелли. Оригинальное доказательство Крылова было дано в английском втором издании нашей книги в виде задачи.

Задачи

9.1. Докажите, что в оценках (9.8) и (9.11) величину d можно заменить на $d/2$. Докажите точность получаемой оценки, рассмотрев пример сферического конуса (см. [8], [9]).

9.2. Явно интегрируя функцию g и оптимизируя выбор μ в доказательстве теоремы 9.1, получите уточнение оценки (9.14) (см. [8], [9]).

9.3. Получите оценку (9.11) в виде

$$\sup_\Omega u \leqslant \sup_\Omega u^+ + C(n)\,|\hat{\Omega}|^{1/n}\,\|a^{ij}D_{ij}u/\mathcal{D}^*\|_{L^n(\Gamma^+)}, \tag{9.72}$$

где $\hat{\Omega}$ – выпуклая оболочка Ω.

9.4. Докажите следующий более общий вариант интерполяционной теоремы Марцинкевича:

Теорема 9.32. *Пусть T – линейное отображение из $L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ в $L^{\bar q}(\Omega) \cap L^{\bar r}(\Omega)$, $1 \leqslant q < r < \infty$, $1 \leqslant \bar q < \bar r < \infty$. Предположим, что существуют постоянные T_1 и T_2 такие, что*

$$\mu_{Tf}(t) \leqslant (T_1\|f\|_q/t)^{\bar q}, \qquad \mu_{Tf}(t) \leqslant (T_2\|f\|_r/t)^{\bar r} \tag{9.73}$$

для всех $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ и всех $t > 0$. Тогда отображение T можно доопределить так, что оно станет линейным ограниченным отображением из $L^p(\Omega)$ в $L^{\bar p}(\Omega)$ для любых $p, \bar p$, удовлетворяющих равенствам

$$1/p = \sigma/q + (1-\sigma)/r, \quad 1/\bar p = \sigma/\bar q + (1-\sigma)/\bar r$$

при некотором $\sigma = (0, 1)$.

9.5. Покажите, используя интерполяционную теорему Марцинкевича, что потенциальный оператор V_μ (см. обозначение в разделе 7.5) непрерывно отображает $L^p(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ при $p > 1$ и $\delta = \mu$.

9.6. Используя лемму 9.12, покажите, что если Ω – область класса $C^{1,1}$, то подпространство

$$\{u \in C^2(\bar\Omega) \mid u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$$

плотно в $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ для $1 < p < \infty$.

9.7. Докажите теорему 9.15, опираясь или на теорему 6.14, или на теорему 8.14, с помощью метода аппроксимации.

9.8. Докажите теорему 9.15 для специального случая уравнения Пуассона с помощью теоремы представления Рисса и метода непрерывного продолжения (теорема 5.2).

9.9. Отправляясь от следствия 9.14, докажите альтернативу Фредгольма для операторов вида (9.1) в пространствах Соболева $W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, и затем докажите теорему 9.15.

9.10. Докажите теорему 9.19.

9.11. Предположим, что оператор L удовлетворяет в сферическом слое $A = B_R(y) - B_\rho(y) \subset \mathbf{R}^n$ условиям теоремы 9.22. Докажите, что если функция $u \in W^{2,n}(A)$ удовлетворяет в A неравенствам $Lu \leqslant f$ и $u \geqslant 0$, а функция f принадлежит $L^n(A)$, то для любого $\rho < r < R$

$$\inf_{B_r - B_\rho} \geqslant K\left(\inf_{\partial B_\rho} u + R \, \| f \|_{n;A} \right), \tag{9.74}$$

где K – положительная постоянная, зависящая только от n, ρ/R, r/R, γ и νR^2. С помощью этого результата выведите теорему 9.22 из теоремы 9.20.

9.12. Используя оператор

$$Lu = \Lambda \Delta u + (\lambda - \Lambda) \frac{x_i x_j}{|x|^2} D_{ij} u$$

и функцию

$$u(x) = |x|^{1-(n-1)\gamma}, \qquad \gamma = \Lambda/\lambda,$$

доопределив ее соответствующим образом в нуле, покажите, что показатель p в слабом неравенстве Харнака (теорема 9.22) должен удовлетворять неравенству

$$p < n/((n-1)\gamma - 1).$$

ЧАСТЬ II

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА 10

ПРИНЦИПЫ МАКСИМУМА И СРАВНЕНИЯ

В этой главе выводятся различные формы принципов максимума и сравнения для квазилинейных уравнений, обобщающих соответствующие результаты гл. 3. Мы будем рассматривать квазилинейный оператор Q второго порядка вида

$$Qu = a^{ij}(x, u, Du) D_{ij}u + b(x, u, Du),$$
$$a^{ij} = a^{ji}, \tag{10.1}$$

где точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит области Ω пространства $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$; если нет специальных оговорок, то будем предполагать, что функция u принадлежит $C^2(\Omega)$. Коэффициенты оператора Q – функции $a^{ij}(x, z, p)$, $i, j = 1, \ldots, n$, и $b(x, z, p)$ – предполагаются определенными при всех значениях (x, z, p), принадлежащих множеству $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Два оператора вида (10.1) будем называть *эквивалентными*, если один из них получается из другого умножением на фиксированную положительную функцию, определенную в $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Уравнения $Qu = 0$, соответствующие эквивалентным операторам Q, мы будем также называть эквивалентными.

Введем следующие определения.

Пусть $\mathcal{U}$ – подмножество $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Оператор Q называется *эллиптическим на множестве* $\mathcal{U}$, если матрица коэффициентов $[a^{ij}(x, z, p)]$ положительно определена для всех $(x, z, p) \in \mathcal{U}$. Это значит, что если $\lambda(x, z, p)$, $\Lambda(x, z, p)$ – соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы $[a^{ij}(x, z, p)]$, то выполняются неравенства

$$0 < \lambda(x, z, p) \, |\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x, z, p) \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda(x, z, p) \cdot |\xi|^2 \tag{10.2}$$

для всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ и всех $(x, z, p) \in \mathcal{U}$. Если, кроме того, отношение Λ/λ ограничено в $\mathcal{U}$, то мы будем говорить, что оператор *Q равномерно эллиптичен в* $\mathcal{U}$. Если оператор Q эллиптичен (равномерно эллиптичен) на всем множестве $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, то будем просто говорить, что оператор *Q эллиптичен (равномерно эллиптичен) в области* Ω. Пусть функция $u \in C^1(\Omega)$. Будем говорить, что оператор *Q эллиптичен на функции u*, если матрица $[a^{ij}(x, u(x), Du(x))]$ положительно определена для всех $x \in \Omega$.

Важную роль в дальнейшем будет играть скалярная функция $\mathcal{E}$, определяемая равенством

$$\mathcal{E}(x, z, p) = a^{ij}(x, z, p) p_i p_j. \tag{10.3}$$

Если оператор Q эллиптичен в $\mathcal{U}$, то из (10.2) следует, что

$$0 < \lambda(x, z, p) \cdot |p|^2 \leqslant \mathcal{E}(x, z, p) \leqslant \Lambda(x, z, p) \cdot |p|^2 \tag{10.4}$$

для всех $(x, z, p) \in \mathcal{U}$.

Оператор Q является оператором *в дивергентной форме,* если существуют дифференцируемая вектор-функция $A(x, z, p) = (A^1(x, z, p), \ldots$ $\ldots, A^n(x, z, p))$ и скалярная функция $B(x, z, p)$ такие, что

$$Qu = \operatorname{div} A(x, u, Du) + B(x, u, Du), \quad u \in C^2(\Omega). \tag{10.5}$$

Оператор в дивергентной форме можно записать в виде (10.1), где

$$a^{ij}(x, z, p) = \frac{1}{2}\ (D_{p_i} A^j(x, z, p) + D_{p_j} A^i(x, z, p)).$$

В отличие от линейного оператора квазилинейный оператор с гладкими коэффициентами может и не приводиться к дивергентному виду.

Оператор Q называется *вариационным,* если он является оператором Эйлера – Лагранжа, соответствующим кратному интегралу $\int_\Omega F(x, u, Du)\,dx$ с дифференцируемой скалярной функцией F, т.е. если оператор Q имеет дивергентный вид (10.5), в котором

$$A^i(x, z, p) = D_{p_i} F(x, z, p), \quad B(x, z, p) = -D_z F(x, z, p). \tag{10.6}$$

Эллиптичность оператора Q эквивалентна строгой выпуклости функции F по переменным p.

Примеры

(i) $Qu = \Delta u + (\alpha - 2)\, \dfrac{D_i u \cdot D_j u}{1 + |Du|^2} \cdot D_{ij} u, \quad \alpha \geqslant 1.$

В этом случае

$$\lambda(x, z, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \geqslant 2, \\ \dfrac{1 + (\alpha - 1)|p|^2}{1 + |p|^2}, & \text{если } \alpha \leqslant 2, \end{cases}$$

$$\Lambda(x, z, p) = \begin{cases} \dfrac{1 + (\alpha - 1)|p|^2}{1 + |p|^2}, & \text{если } \alpha \geqslant 2, \\ 1, & \text{если } \alpha \leqslant 2 \end{cases}$$

и

$$\mathcal{E}(x, z, p) = |p|^2 (1 + (\alpha - 1)|p|^2)/(1 + |p|^2).$$

Таким образом, рассматриваемый оператор Q эллиптичен при всех $\alpha \geqslant 1$ и равномерно эллиптичен, если $\alpha > 1$. Записывая этот оператор в виде

$$Qu = (1 + |Du|^2)^{1 - \alpha/2} \operatorname{div} (1 + |Du|^2)^{\alpha/2 - 1} Du,$$

видим, что он эквивалентен оператору дивергентного вида; кроме того, оператор Q эквивалентен вариационному оператору, связанному с интегралом $\int_\Omega (1+|Du|^2)^{\alpha/2}\,dx$. Уравнение $Qu=0$ совпадает с уравнением Лапласа при $\alpha=2$, и с уравнением минимальных поверхностей при $\alpha=1$. При $\alpha\neq 1$ и $\alpha\neq 2$ рассматриваемое уравнение появляется в теории трещин пластин и моделировании горения.

(ii) $Qu=\Delta u+\beta D_iu\cdot D_ju\cdot D_{ij}u, \quad \beta\geqslant 0.$

В этом случае

$$\lambda(x,z,p)=1,\quad \Lambda(x,z,p)=1+\beta|p|^2,\quad \mathcal{E}(x,z,p)=|p|^2(1+\beta|p|^2).$$

Рассматриваемый оператор Q эллиптичен при всех $\beta\geqslant 0$. Он равномерно эллиптичен лишь при $\beta=0$ (в этом случае оператор Q является оператором Лапласа). При $\beta>0$ оператор Q эквивалентен вариационному оператору, порожденному интегралом $\int_\Omega \exp\left(\frac{\beta}{2}|Du|^2\right)dx$. Заметим, что при $\beta\geqslant 1$ минимальное и максимальное собственные значения рассматриваемого оператора Q пропорциональны соответствующим собственным значениям матрицы старших коэффициентов оператора из предыдущего примера с $\alpha=1$. Однако теоремы существования для этих операторов имеют различный характер, что является в значительной степени следствием различности порядков роста их функций $\mathcal{E}$.

(iii) *Уравнение поверхностей с заданной средней кривизной.*

Пусть функция $u\in C^2(\Omega)$. Предположим, что график функции u в $\mathbf{R}^{n+1}$ имеет среднюю кривизну $H(x)$ в точке $(x,u(x))$, $x\in\Omega$ (средняя кривизна вычисляется относительно нормали к поверхности, направленной в сторону возрастания x_{n+1}). Тогда (см. приложение к гл. 14) функция u удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{M}u=(1+|Du|^2)\Delta u-D_iu\cdot D_ju\cdot D_{ij}u=nH(1+|Du|^2)^{3/2}. \tag{10.7}$$

В этом случае

$$\lambda(x,z,p)=1,\quad \Lambda(x,z,p)=1+|p|^2,\quad \mathcal{E}(x,z,p)=|p|^2.$$

Оператор $\mathfrak{M}$ в (10.7) эквивалентен оператору Q из примера (i) с $\alpha=1$.

(iv) *Уравнение газовой динамики.* Стационарный безвихревой поток идеальной сжимаемой жидкости описывается уравнением неразрывности $\operatorname{div}(\rho Du)=0$, где u – потенциал скоростей, а плотность жидкости ρ связана со скоростью соотношением вида $\rho=\rho(Du)$ (соотношение плотность – скорость). Для совершенного газа эта связь имеет вид

$$\rho=\left(1-\frac{\gamma-1}{2}|Du|^2\right)^{1/(\gamma-1)},$$

где постоянная γ равна отношению удельных теплоемкостей газа, $\gamma>1$. В этом случае уравнение, которому удовлетворяет потенциал скоростей u, имеет вид

$$\Delta u - \frac{D_i u \cdot D_j u}{1 - \dfrac{\gamma - 1}{2} |Du|^2} \cdot D_{ij} u = 0. \tag{10.8}$$

Минимальное и максимальное собственные значения матрицы старших коэффициентов этого уравнения соответственно равны

$$\lambda = \frac{1 - \dfrac{\gamma + 1}{2} \; |Du|^2}{1 - \dfrac{\gamma - 1}{2} \; |Du|^2} \quad \text{и} \quad \Lambda = 1.$$

Уравнение эллиптично, если поток дозвуковой, т.е. когда $|Du| < [2/(\gamma + 1)]^{1/2}$ и гиперболично, когда $[2/(\gamma + 1)]^{1/2} < |Du| < [2/(\gamma - 1)]^{1/2}$. Отметим, что уравнение (10.8) при $\gamma = -1$ совпадает с уравнением минимальных поверхностей.

(v) *Уравнение капиллярности.* Профиль установившейся поверхности жидкости с постоянным поверхностным натяжением в равномерном поле тяжести подчиняется уравнению капиллярности

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\right) = \kappa u, \tag{10.9}$$

или, что эквивалентно, уравнению

$$\mathfrak{M} u = \kappa u (1 + |Du|^2)^{3/2} \;,$$

где $\mathfrak{M}$ – оператор, определенный в формуле (10.7); здесь u – высота жидкости над невозмущенной поверхностью, κ – постоянная, положительная или отрицательная в зависимости от того, внутрь или наружу действует гравитационное поле. При отсутствии гравитации это уравнение совпадает с уравнением (10.7) поверхностей постоянной средней кривизны с постоянной функцией H. Функция $\mathcal{E}$ и собственные значения λ, Λ – те же самые, что и для уравнения (10.7). Естественное физическое граничное условие для функции u, удовлетворяющей уравнению (10.9) в области с фиксированной твердой границей, имеет вид

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial \nu}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = \cos \gamma,$$

где величина γ – так называемый *угол контакта*, т.е. угол между поверхностью жидкости и твердой границей, занимаемый жидкостью.

10.1 Принцип сравнения

Пусть L – линейный оператор, удовлетворяющий условиям слабого принципа максимума (следствие 3.2), а функции $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ удовлетворяют неравенствам $Lu \geqslant Lv$ в Ω и $u \leqslant v$ на $\partial\Omega$. Тогда в силу следствия 3.2 неравенство $u \leqslant v$ выполняется в Ω. Аналог этого принципа сравнения для квазилинейных операторов имеет следующий вид.

Теорема 10.1. *Пусть функции $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ удовлетворяют неравенствам $Qu \geqslant Qv$ в Ω, и $u \leqslant v$ на $\partial\Omega$, и пусть выполнены условия:*

(i) *оператор Q локально равномерно эллиптичен на функции u или на функции v;*

(ii) *коэффициенты a^{ij} не зависят от z;*

(iii) *коэффициент b является неубывающей функцией аргумента z в каждой точке $(x, p) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$;*

(iv) *коэффициенты a^{ij} и b являются непрерывно дифференцируемыми функциями переменных p в $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.*

Тогда в Ω справедливо неравенство $u \leqslant v$.

Кроме того, если $Qu > Qv$ в Ω и $u \leqslant v$ на $\partial\Omega$ и если выполняются условия (i), (ii), (iii) *(не требуется выполнение условия* (iv)*), то в Ω имеет место строгое неравенство $u < v$.*

Доказательство. Предположим, что оператор Q эллиптичен на функции u. Так как

$$Qu - Qv = a^{ij}(x, Du)D_{ij}(u - v) + (a^{ij}(x, Du) -$$
$$- a^{ij}(x, Dv))\, D_{ij}v + b(x, u, Du) - b(x, u, Dv) +$$
$$+ b(x, u, Dv) - b(x, v, Dv) \geqslant 0,$$

то, записывая

$$w = u - v, \quad a^{ij}(x) = a^{ij}(x, Du),$$
$$[a^{ij}(x, Du) - a^{ij}(x, Dv)\,]\, D_{ij}v +$$
$$+ b(x, u, Du) - b(x, u, Dw) = b^i(x)\, D_i w,$$

получаем неравенство

$$Lw = a^{ij}(x) D_{ij} w + b^i D_i w \geqslant 0$$

на $\Omega^+ = \{x \in \Omega | \;\; w(x) > 0\}$ и неравенство $w \leqslant 0$ на $\partial\Omega$. Заметим, что существование локально ограниченных функций b^i следует из условия (iv) и теоремы о среднем. Таким образом, используя условия (i) и (iv) и теорему 3.1, получаем, что $w \leqslant 0$ в Ω. Если $Qu > Qv$ в Ω, то функция w в Ω не может иметь неотрицательный максимум (см. доказательство теоремы 3.1). Поэтому $w < 0$ в Ω. Если оператор Q эллиптичен на функции v, то требуемый результат следует из принципа максимума для суперрешений. □

Из теоремы 10.1 непосредственно следует теорема единственности решения задачи Дирихле для квазилинейных уравнений.

Теорема 10.2. *Пусть функции $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ удовлетворяют равенствам $Qu = Qv$ в Ω и $u = v$ на $\partial\Omega$. Предположим также, что выполнены условия* (i)–(iv) *теоремы* 10.1. *Тогда $u \equiv v$ в Ω.*

Может показаться, что условие (ii) в формулировках теорем 10.1 и 10.2 не является необходимым. Однако это не так: далее мы покажем, что в случае, когда старшие коэффициенты зависят от z, утверждения теорем 10.1 и 10.2 могут не иметь места. Принцип сравнения (теорема 10.1) будет полезен при получении оценок градиента в гл. 13.

Если вместо следствия 3.2 воспользоваться принципом максимума для сильных решений (теорема 9.1), можно показать, что утверждения теорем 10.1 и 10.2 остаются в силе для функций $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

10.2. Принципы максимума

С помощью теоремы 10.1 докажем следующее обобщение на квазилинейные уравнения априорной оценки, данной в теореме 3.7, иллюстрирующее также важность функции $\mathcal{E}$.

Теорема 10.3. *Пусть оператор Q эллиптичен в Ω и пусть существуют такие неотрицательные постоянные μ_1 и μ_2, что*

$$b(x, z, p) \operatorname{sign} z \,/\, \mathcal{E}(x, z, p) \leqslant (\mu_1 \, |p| + |\mu_2|)/|p|^2 \tag{10.10}$$

для всех $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Тогда если функция $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ удовлетворяет в Ω неравенству $Qu \geqslant 0$ (равенству $Qu = 0$), то

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\mu_2 \qquad (\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + C\mu_2) \tag{10.11}$$

с постоянной $C = C(\mu_1, \operatorname{diam} \Omega)$.

Доказательство. Пусть функция $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ удовлетворяет в Ω неравенству $Qu \geqslant 0$. Определим оператор $\bar{Q}$ равенством

$$\bar{Q}v = a^{ij}(x, u, Dv) D_{ij}v + b(x, u, Dv).$$

В качестве функции сравнения возьмем такую же функцию v, как и в доказательстве теоремы 3.7. А именно, для $\mu_2 > 0$ положим

$$v(x) = \sup_{\partial\Omega} u^+ + \mu_2 (\mathrm{e}^{\alpha d} - \mathrm{e}^{\alpha x_1}),$$

где d — ширина полосы, содержащей область Ω, $0 < x_1 < d$ и $\alpha \geqslant \mu_1 + 1$. Тогда в $\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ справедливо неравенство

$$\bar{Q} v = -\mu_2 \alpha^2 a^{11}(x, u, Dv) \, \mathrm{e}^{\alpha x_1} + b(x, u, Dv) \leqslant$$

$$\leqslant -(\mathrm{e}^{-\alpha x_1}/\mu_2) \cdot \mathcal{E}(x, u, Du)(1 - \mu_1/\alpha - \mathrm{e}^{-\alpha x_1}/\alpha^2),$$

что, в силу (10.10), меньше 0, а $0 \leqslant \bar{Q}u$. Таким образом, $Qv < \bar{Q}u$. Следовательно, по теореме 10.1 в Ω будет иметь место неравенство $u \leqslant v$. Устремив μ_2 к нулю, получаем соответствующий результат для $\mu_2 = 0$. □

Для равномерно эллиптических операторов условие (10.10) эквивалентно условию вида

$$b(x, z, p) \cdot \operatorname{sign} z / \lambda(x, z, p) \leqslant \mu_1 |p| + \mu_2 \tag{10.12}$$

для всех $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Примером неравномерно эллиптического оператора, удовлетворяющего условию (10.10) и не удовлетворяющего условию (10.12), является оператор

$$Qu = \Delta u + D_i u \cdot D_j u \cdot D_{ij} u + (1 + |Du|^2).$$

Из доказательства теоремы 10.3 видно, что для ее справедливости нужны только следующие условия:

(i) $\mathscr{E} > 0$ в $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$;

(ii) оператор Q эллиптичен на функции u;

(iii) существует фиксированный вектор $p_0 \in \mathbf{R}^n$ такой, что выполнено условие (10.10) во всех точках (x, z, tp_0), где $(x, z, t) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Другие варианты принципа максимума приведены в задачах 10.1 и 10.2.

Условие (10.12) может быть обобщено, но в несколько ином виде, на неравномерно эллиптические операторы с помощью принципа максимума Александрова (теорема 9.1). Следуя обозначениям гл. 9, введем

$$\mathscr{D} = \det\,[a^{ij}(x, z, p)], \qquad \mathscr{D}^* = \mathscr{D}^{1/n}.$$

Теорема 10.4. *Пусть оператор Q эллиптичен в Ω. Предположим, что существуют такие неотрицательные постоянные μ_1 и μ_2, что*

$$b(x, z, p) \cdot \operatorname{sign} z/\mathscr{D}^* \leqslant \mu_1 |p| + \mu_2 \quad \forall (x, z, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n. \tag{10.13}$$

Тогда если функция $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ удовлетворяет в Ω неравенству $Qu \geqslant 0$ (равенству $Qu = 0$), то справедливо неравенство

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\mu_2 \quad \left(\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + C\mu_2\right) \tag{10.14}$$

с постоянной $C = C(\mu_1, \operatorname{diam}\Omega)$.

Доказательство. В подобласти $\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant Qu = a^{ij} D_{ij} u + b \operatorname{sign} u \leqslant$$
$$\leqslant a^{ij} D_{ij} u + [\mu_1 (\operatorname{sign} D_i u) D_i u + \mu_2]\, \mathscr{D}^*.$$

Отсюда с помощью теоремы 9.1 получается оценка (10.14) для $\sup_{\Omega} u$. Оценка (10.14) для $\sup_{\Omega} |u|$ получается, если воспользоваться заменой u на $-u$.□

Теорема 10.4 в действительности неявно имеется в доказательстве теоремы 9.1. Более того, с помощью леммы 9.4 получается следующий результат.

Теорема 10.5. *Пусть оператор Q эллиптичен в ограниченной области Ω. Предположим, что существуют такие неотрицательные функции $g \in L^n_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ и $h \in L^n(\Omega)$, что*

$$b(x, z, p) \cdot \operatorname{sign} z/(n\mathscr{D}^*) \leqslant h(x)/g(p) \tag{10.15}$$

для всех $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ и

$$\int_{\Omega} h^n dx < \int_{\mathbf{R}^n} g^n dp = g_\infty. \tag{10.16}$$

Тогда если функция $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ удовлетворяет в Ω неравенству $Qu \geqslant 0$ (равенству $Qu = 0$), то справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \cdot \operatorname{diam}\Omega \\ \left(\sup_{\Omega} |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + C \cdot \operatorname{diam}\Omega\right)\end{gathered} \tag{10.17}$$

с постоянной C, зависящей от g и h.

Допускается, как и в случае теоремы 9.1, что величина g_∞ может равняться бесконечности; в этом случае условие (10.16) становится излишним. Если функция g положительна, а функция G определена равенством

$$G^{-1}(t) = \int_{B_t(0)} g^n dp, \quad G\colon\ (0, g_\infty) \to (0, \infty),$$

то постоянная C в (10.17) вычисляется по формуле

$$C = G\left(\int_\Omega h^n dx\right).$$

В заключение этого раздела применим теорему 10.5 к уравнению поверхностей с заданной средней кривизной (10.7). В этом случае $\mathscr{D} = (1 + |p|^2)^{n-1}$ и мы можем взять

$$g(p) = (1 + |p|^2)^{-(n+2)/(2n)}.$$

Вычисления показывают, что

$$g_\infty = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{dp}{(1 + |p|^2)^{n/2+1}} = \omega_n.$$

Следовательно, справедлива следующая оценка.

Следствие 10.6. *Пусть функция* $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *является решением уравнения поверхностей с заданной средней кривизной* (10.7) *в ограниченной области* Ω. *Тогда если*

$$H_0 = \int |H(x)|^n dx < \omega_n, \tag{10.18}$$

то

$$\sup_\Omega |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |u| + C \cdot \operatorname{diam} \Omega, \tag{10.19}$$

где $C = C(n, H_0)$.

Отметим, наконец, что оценки этого раздела остаются справедливыми для субрешений и решений, принадлежащих $C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

10.3. Контрпример

С помощью примера покажем, что теоремы 10.1 и 10.2 не могут быть, вообще говоря, обобщены на случай, когда старшие коэффициенты a^{ij} зависят от u. Рассмотрим оператор вида

$$Qu = \Delta u + g(r, u)\,\frac{x_i x_j}{r^2} D_{ij} u, \quad r = |x|, \tag{10.20}$$

в сферическом слое $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n \mid 1 < |x| < 2\}$. Если функция u зависит только от r, $u = u(r)$, то уравнение $Qu = 0$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$u'' + u'\left(\frac{n-1}{r(1+g)}\right) = 0.$$

Пусть v и w — полиномы, удовлетворяющие условиям:

(i) $v(1) = w(1)$, $v(2) = w(2)$;

(ii) $v', w' > 0$ на $[1, 2]$;

(iii) $v'(1) < w'(1), \quad v'(2) > w'(2)$;

(iv) $v'', w'' < 0$ на $[1, 2]$;

(v) $\dfrac{w''(1)}{w'(1)} = \dfrac{v''(1)}{v'(1)}, \quad \dfrac{w''(2)}{w'(2)} = \dfrac{v''(2)}{v'(2)}$.

Для $1 \leqslant r \leqslant 2, \quad v \leqslant u \leqslant w$ определим

$$f(r, u) = \frac{u - v}{w - v}\left(\frac{v''}{v'} - \frac{w''}{w'}\right) - \frac{v''}{v'},$$

$$g(r, u) = -1 + \frac{n-1}{rf(r, u)}.$$

Полагая $v(x) = v(|x|)$, $w(x) = w(|x|)$, можно убедиться, что $Qv = Qw = 0$ в Ω и $v = w$ на $\partial\Omega$. Оператор Q эллиптичен на обеих функциях v и w. Кроме того, продолжая функцию f соответствующим образом в полосу $[1, 2] \times \mathbf{R}$, мы можем получить равномерно эллиптический в Ω оператор Q с коэффициентами из $C^\infty(\bar\Omega \times \mathbf{R})$.

10.4. Принципы сравнения для операторов в дивергентной форме

В случае, когда оператор Q имеет дивергентную форму (10.5), можно получить следующие интересные варианты теоремы 10.1. Напомним некоторые определения гл. 8. В случае, когда коэффициенты $A^i(x, u, Du)$ и $B(x, u, Du)$ локально интегрируемые в Ω, слабо дифференцируемая в Ω функция u удовлетворяет в Ω неравенству $Qu \geqslant 0$ (равенству $Qu = 0$, неравенству $Qu \leqslant 0$), если

$$Q(u, \varphi) = \int_\Omega (A(x, u, Du) \cdot D\varphi - B(x, u, Du)\varphi)\, dx \leqslant 0 \tag{10.21}$$

$$(Q(u, \varphi) = 0, \quad Q(u, \varphi) \geqslant 0)$$

для всех неотрицательных функций $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. В следующей теореме даны три различных варианта принципа сравнения.

Теорема 10.7. *Пусть оператор Q эллиптичен в Ω, если коэффициенты A и B непрерывно дифференцируемы по z и p в $\bar\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, функция B при фиксированных $(x, p) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$ не убывает по z и пусть выполняется одно из следующих условий:*

(i) *вектор-функция A не зависит от z*;

(ii) *функция B не зависит от p*;

(iii) $(n+1) \times (n+1)$*-матрица*

$$\begin{bmatrix} D_{p_j}A^i(x, z, p) & -D_{p_j}B(x, z, p) \\ D_zA^i(x, z, p) & -D_zB(x, z, p) \end{bmatrix}$$

— неотрицательно определенная в $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Тогда если функции u и v из $C^1(\bar\Omega)$ удовлетворяют неравенствам $Qu \geqslant 0$ в Ω, $Qv \leqslant 0$ в Ω и $u \leqslant v$ на $\partial\Omega$, то $u \leqslant v$ в Ω.

Доказательство. Определим

$$w = u - v,$$

$$u_t = tu + (1-t)v, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$a^{ij}(x) = \int_0^1 D_{p_j} A^i(x, u_t, Du_t)\,dt,$$

$$b^i(x) = \int_0^1 D_z A^i(x, u_t, Du_t)\,dt,$$

$$c^i(x) = \int_0^1 D_{p_i} B(x, u_t, Du_t)\,dt,$$

$$d(x) = \int_0^1 D_z B(x, u_t, Du_t)\,dt.$$

Тогда

$$0 \geqslant Q(u, \varphi) - Q(v, \varphi) = \int_\Omega \{ (A(x, u, Du) - A(x, v, Dv)) \cdot D\varphi -$$

$$- (B(x, u, Du) - B(x, v, Dv)) \cdot \varphi \}\, dx =$$

$$= \int_\Omega \{ (a^{ij}(x) D_j w + b^i(x) w) D_i \varphi - (c^i(x) D_i w + d(x) w) \varphi \}\, dx \tag{10.22}$$

для всех неотрицательных $\varphi \in C_0^1(\Omega)$. Следовательно, $Lw \geqslant 0$, если оператор L — оператор вида

$$Lw = D_i(a^{ij} D_j w + b^i w) + c^i D_i w + dw.$$

Поскольку $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, то в силу наложенных условий существуют положительные постоянные λ, Λ такие, что

$$a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant \lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n, \quad x \in \Omega,$$

$$|a^{ij}|, |b^i|, |c^i|, |d| \leqslant \Lambda \quad \text{в} \quad \Omega, \quad d \leqslant 0 \text{ в } \Omega.$$

Это значит, что оператор L строго эллиптичен в Ω и имеет ограниченные коэффициенты. Утверждение теоремы 10.7 можно теперь получить непосредственно из результатов гл. 8. В частности, если выполнено условие (i), то $b^i = 0$ в Ω, и поэтому в силу слабого принципа максимума (теорема 8.1) в Ω выполняется неравенство $w \leqslant 0$. Заключительная часть доказательства теоремы 10.7 непосредственно следует из задачи 8.1. Несмотря на это, мы осуществим полное доказательство здесь. Если выполнено условие (ii), то $c^i = 0$ в Ω. Заметим, что это условие на оператор L эквивалентно условию на сопряженный оператор L^*. Для $\epsilon > 0$ определим

$$\varphi = \frac{w^+}{w^+ + \epsilon} \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Подставляя в (10.22), получаем

$$\lambda \int_\Omega \left| D \log\left(1 + \frac{w^+}{\epsilon}\right)\right|^2 dx \leqslant \int_\Omega \frac{a^{ij}(x) D_i w^+ \cdot D_j w^+}{(w^+ + \epsilon)^2} dx \leqslant$$

$$\leqslant \Lambda \int_\Omega \frac{w^+}{w^+ + \epsilon} \left| D \log\left(1 + \frac{w^+}{\epsilon}\right)\right| dx \leqslant \Lambda \int_\Omega \left| D \log\left(1 + \frac{w^+}{\epsilon}\right)\right| dx.$$

Отсюда с помощью неравенства Юнга (7.6) следует неравенство

$$\int_\Omega |D \log(1 + w^+/\epsilon)|^2 \, dx \leqslant (\Lambda/\lambda)^2 \cdot |\Omega|.$$

Применяя теперь неравенство Пуанкаре (7.44), приходим к неравенству

$$\int_\Omega |\log(1 + w^+/\epsilon)|^2 dx \leqslant C(n, \lambda, \Lambda, |\Omega|).$$

Устремляя $\epsilon \to 0$, видим, что функция w^+ должна тождественно равняться нулю в Ω. Это и означает, что $w \leqslant 0$ в Ω.

Наконец, если выполнено условие (iii), то, положив $\varphi = w^+$ в Ω, после подстановки в (10.22) получим, что

$$a^{ij} D_i w^+ D_j w^+ + (b^i - c^i) w^+ D_i w^+ - d(w^+)^2 = 0$$

в Ω, так что в силу неравенства Юнга (7.6)

$$|Dw^+|^2 \leqslant n(2\Lambda/\lambda)^2 \, |w^+|^2 \text{ в } \Omega.$$

Отсюда при любом $\epsilon > 0$

$$\left| D \log\left(1 + \frac{w^+}{\epsilon}\right)\right| \leqslant \frac{2\sqrt{n}\,\Lambda}{\lambda} \, \frac{w^+}{w^+ + \epsilon} \leqslant \frac{2\sqrt{n}\,\Lambda}{\lambda},$$

и, поскольку $w^+ = 0$ на $\partial\Omega$, то

$$\left| \log\left(1 + \frac{w^+}{\epsilon}\right)\right| \leqslant \frac{2\sqrt{n}\,\Lambda}{\lambda} \cdot \operatorname{diam} \Omega.$$

Вновь устремляя $\epsilon \to 0$, получаем, как и ранее, что $w^+ = 0$ в Ω, и потому $w \leqslant 0$ в Ω. □

Заметим, что при выполнении условия (i) теоремы 10.7 достаточно предполагать, что $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ и что производные коэффициентов принадлежат $C^0(\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$. В этом легко убедиться, применяя результат теоремы 10.7 в подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$. Аналогичное обобщение справедливо и в других случаях, если коэффициенты удовлетворяют подходящему равномерному структурному условию.

10.5. Принципы максимума для операторов в дивергентной форме

Если оператор Q имеет дивергентную форму, то можно установить принципы максимума при других условиях, отличных от условий теорем 10.3 и 10.4. Будем считать, что функции A и B в (10.5) удовлетворяют следующим структурным условиям:

при всех $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ и некотором $\alpha \geqslant 1$

$$p \cdot A(x, z, p) \geqslant |p|^{\alpha} - |a_1 z|^{\alpha} - a_2^{\alpha} \tag{10.23}$$

и

$$B(x, z, p) \cdot \operatorname{sign} z \leqslant \begin{cases} b_0 |p|^{\alpha - 1} + |b_1 z|^{\alpha - 1} + b_2^{\alpha - 1}, & \text{если } \alpha > 1, \\ b_0, & \text{если } \alpha = 1; \end{cases}$$

здесь a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 – неотрицательные постоянные. Первое неравенство в (10.23) можно рассматривать как условие слабой эллиптичности (см. задачу 10.3). Развиваемый далее метод аналогичен методу получения глобальных оценок слабых решений линейного эллиптического уравнения, изложенному в гл. 8.

Л е м м а 10.8. *Пусть функция $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ удовлетворяет в Ω неравенству $Qu \geqslant 0$, а оператор Q удовлетворяет структурным условиям* (10.23). *Тогда справедливо неравенство*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant C \{ \|u^+\|_{\alpha} + (a_1 + b_1) \sup_{\partial\Omega} u^+ + a_2 + b_2 \} + \sup_{\partial\Omega} u^+ \tag{10.24}$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, a_1, b_0, b_1, |\Omega|)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что функция $u \in C^1(\overline{\Omega})$ и что $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$, так что $\sup_{\partial\Omega} u^+ = 0$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.15, но при этом следует учесть, что в рассматриваемом случае функция u с самого начала предполагается ограниченной и поэтому нет необходимости в качестве пробных функций брать усеченные степенные функции.

Обозначив

$$k = a_2 + b_2, \quad \bar{z} = |z| + k, \quad \bar{b} = a_1^{\alpha} + b_0^{\alpha} + b_1^{\alpha - 1} + 1,$$

из неравенств (10.23) с помощью неравенства Юнга получаем

$$\begin{gathered} p \cdot A(x, z, p) \geqslant |p|^{\alpha} - \bar{b}\,|\bar{z}|^{\alpha}, \\ \bar{z}\, B(x, z, p) \cdot \operatorname{sign} z = \begin{cases} \mu |p|^{\alpha} + (\mu^{1-\alpha} + 1) \bar{b}\, \bar{z}^{\alpha}, & \text{если } \alpha > 1, \\ \bar{b}\bar{z}, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases} \end{gathered} \tag{10.25}$$

где $\mu > 0$. Следовательно, подставляя в интегральное неравенство (10.21) функцию $\varphi = w^{\beta} - k^{\beta}$, где $w = \bar{u}^+ = u^+ + k$, $\beta \geqslant 1$, и полагая $\mu = \beta/2$, получаем неравенство

$$\int_{\Omega} w^{\beta - 1} |Dw|^{\alpha} dx \leqslant C\bar{b} \int_{\Omega} w^{\alpha + \beta - 1} dx$$

с постоянной $C = C(\beta)$. В силу неравенства Соболева (7.26) существует число $s > \alpha$ такое, что

$$\|w^r - k^r\|_s \leqslant Cr \left(\int_{\Omega} w^{\beta - 1} |Dw|^{\alpha} dx \right)^{1/\alpha},$$

где $r = (\alpha + \beta - 1)/\alpha$ и $C = C(n, s, |\Omega|)$. Следовательно,

$$\|w\|_{rs} \leqslant (Cr)^{1/r} (\bar{b})^{1/\alpha r} \|w\|_{r\alpha}$$

для всех $r \geqslant 1$. Отсюда с помощью итераций, описанных в доказательстве теоремы 8.15, получается оценка (10.24), в которой нет последнего слагаемого, ибо $\sup\limits_{\partial\Omega} u^+ = 0$. Желая освободиться от сделанного сначала предположения о функции u, достаточно заменить функцию u на функцию $u - L$, где $L = \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$, и аппроксимировать область Ω областями $\Omega' \subset\subset \Omega$. □

Используя лемму 10.8, можно теперь получить априорные оценки для субрешений и решений уравнения $Qu = 0$ следующего вида.

Теорема 10.9. *Пусть функция $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ удовлетворяет в Ω неравенству $Qu \geqslant 0$ (равенству $Qu = 0$). Предположим, что оператор Q удовлетворяет структурным условиям* (10.23) *с постоянными $\alpha > 1$, $b_1 = 0$ и одна из постоянных b_0 или a_1 равно нулю. Тогда справедливо неравенство*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant C(a_2 + b_2 + a_1 \sup_{\partial\Omega} u^+) + \sup_{\partial\Omega} u^+ \tag{10.26}$$

$$\left(\sup_{\Omega} |u| \leqslant C(a_2 + b_2 + a_1 \sup_{\partial\Omega} |u|) + \sup_{\partial\Omega} |u| \right)$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, a_1, b_0, |\Omega|)$.

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 10.8, мы можем предположить сначала, что $u \in C^1(\bar{\Omega})$ и что $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$. Мы также предположим, что $k > 0$. Два случая, $b_0 = 0$ и $a_1 = 0$, рассмотрим отдельно.

(i) Пусть $b_0 = 0$. Тогда, подставив функцию

$$\varphi = 1/k^{\alpha-1} - 1/w^{\alpha-1}, \quad w = \bar{u}^+,$$

в интегральное неравенство (10.21), получим неравенство

$$(\alpha - 1) \int_{\Omega} \left| \frac{Dw}{w} \right|^{\alpha} dx \leqslant \alpha \bar{b}\, |\Omega|,$$

которое можно записать в виде

$$\int_{\Omega} \left| D \log \frac{w}{k} \right|^{\alpha} dx \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1} \bar{b}\, |\Omega|.$$

В силу неравенства Пуанкаре (7.44) отсюда следует неравенство $\int_{\Omega} \left| \log \frac{w}{k} \right|^{\alpha} dx \leqslant C\bar{b}$ с постоянной $C = C(n, \alpha, |\Omega|)$. Пусть $M = \sup\limits_{\Omega} w$. Имеем (см. доказательство леммы 10.8)

$$\left(\frac{M}{k}\right)^{\alpha} \leqslant C \int_{\Omega} \left(\frac{w}{k}\right)^{\alpha} dx \leqslant C \left(\frac{M}{k}\right)^{\alpha} \left(\log \frac{M}{k}\right)^{-\alpha} \int_{\Omega} \left(1 + \left|\log \frac{w}{k}\right|^{\alpha}\right) dx,$$

так что

$$\left| \log \frac{M}{k} \right|^{\alpha} \leqslant C \int_{\Omega} \left(1 + \left| \log \frac{w}{k} \right|^{\alpha}\right) dx \leqslant C.$$

Следовательно, $M \leqslant Ck$, где $C = C(n, \alpha, a_1, |\Omega|)$.

(ii) Пусть $a_1 = 0$. Доказательство в этом случае аналогично доказательству теоремы 8.16. Снова обозначим $M = \sup\limits_{\Omega} w$. Подставив функцию

$\varphi = 1/|M - w + k|^{\alpha-1} - 1/M^{\alpha-1}$ в неравенство (10.21), получаем неравенство

$$(\alpha - 1)\int_\Omega \left|\frac{Dw}{M - w + k}\right|^\alpha dx \leqslant$$

$$\leqslant b_0 \int_\Omega \left|\frac{Dw}{M - w + k}\right|^{\alpha-1} dx + \{(a_2/k)^\alpha + (b_2/k)^{\alpha-1}\} \cdot |\Omega|.$$

Отсюда, с помощью неравенства Юнга (7.5), приходим к неравенству

$$\int_\Omega \left|D \log \frac{M}{M - w + k}\right|^\alpha dx \leqslant C\bar{b}\ |\Omega|,$$

где $C = C(\alpha)$, из которого с помощью неравенства Пуанкаре (7.44) получаем

$$\int_\Omega \left|\log \frac{M}{M - w + k}\right|^\alpha dx \leqslant C\bar{b}, \tag{10.27}$$

где $C = C(n, \alpha, |\Omega|)$. Возьмем далее $\varphi = \eta/(M - w + k)^{\alpha-1}$, где $\eta \geqslant 0$, $\operatorname{supp} \eta \subset \operatorname{supp} u^+$ и $\eta \in C_0^1(\Omega)$, и подставим в (10.21). Воспользовавшись структурными условиями (10.23), получаем

$$\int_\Omega \frac{A \cdot D\eta}{(M - w + k)^{\alpha-1}} dx \leqslant \int_\Omega \left\{ b_0 \left|\frac{Dw}{M - w + k}\right|^{\alpha-1} + \right.$$

$$\left. + \alpha\left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha + \left(\frac{b_2}{k}\right)^{\alpha-1} \right\} \eta dx \leqslant \int_\Omega \left\{ b_0 \left|D \log \frac{M}{M - w + k}\right|^{\alpha-1} + \alpha \right\} \eta\, dx.$$

Таким образом, функция $\bar{w} = \log[M/(M - w + k)]$ удовлетворяет неравенству $\bar{Q}\bar{w} \geqslant 0$ в $\Omega^+ = \{x \in \Omega |\ u(x) > 0\}$, причем для оператора $\bar{Q}$ выполняются структурные условия (10.23) с постоянными $a_1 = b_1 = 0$ и a_2, $b_2 \leqslant \alpha$.

Отсюда в силу леммы 10.8 следует, что

$$\sup_\Omega \bar{w} \leqslant C(\|\bar{w}\|_\alpha + 1) \leqslant C(n, \alpha, b_0, |\Omega|)$$

(см. (10.27)). Поэтому $M \leqslant Ck$. Если устремить k к нулю, то получим результат для $k = 0$. В силу остальных условий: $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$, как и при доказательстве леммы 10.8, получаем оценку (10.26) для обоих случаев. □

Косвенным результатом теории существования для уравнения поверхностей с заданной средней кривизной, изложенной в гл. 16, является следующий факт: утверждение теоремы 10.9 не имеет места для случая $\alpha = 1$. В следующей оценке, справедливой и для $\alpha = 1$, требуется, чтобы структурные постоянные a_1, b_0 и b_1 были достаточно малы.

Теорема 10.10. *Пусть функция $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ удовлетворяет в Ω неравенству $Qu \geqslant 0$ (равенству $Qu = 0$), а оператор Q удовлетворяет структурным условиям* (10.23). *Тогда существует положительная постоянная $C_0 = C_0(\alpha, n)$ такая, что если*

$$(a_1^\alpha + b_0^\alpha + b_1^{\alpha-1})\,|\Omega|^{\alpha/n} < C_0, \tag{10.28}$$

то справедлива оценка

$$\sup_{\Omega} u \leqslant C\{(a_1 + b_1)\sup_{\partial\Omega} u^+ + a_2 + b_2\} + \sup_{\partial\Omega} u^+ \tag{10.29}$$

$$\left(\sup_{\Omega}|u| \leqslant C\{(a_1+b_1)\sup_{\partial\Omega}|u| + a_2 + b_2\} + \sup_{\partial\Omega}|u|\right)$$

с постоянной $C = C(n, \alpha, a_1, b_0, b_1, |\Omega|)$.

Доказательство. В силу леммы 10.8 достаточно получить оценку $\|u^+\|_\alpha$. Как и в предыдущих доказательствах, мы сначала предположим, что $u \in C^1(\bar{\Omega})$ и что $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$. Подставляя фукнцию $\varphi = u^+ = v$ в интегральное неравенство (10.21), мы получаем с помощью (10.23) неравенство

$$\int_\Omega |Dv|^\alpha dx \leqslant \int_\Omega \{(a_1^\alpha + b_1^{\alpha-1})v^\alpha + b_0 v|Dv|^{\alpha-1} + a_2^\alpha + b_2^{\alpha-1}v\}dx,$$

а это в силу (7.6), в свою очередь, не превосходит

$$\int_\Omega \left\{\left(a_1^\alpha + b_1^{\alpha-1} + \frac{b_0^\alpha}{\alpha\epsilon^{\alpha-1}}\right)v^\alpha + (1 - 1/\alpha)\epsilon|Dv|^\alpha + a_2^\alpha + b_2^{\alpha-1}v\right\}dx$$

каково бы ни было $\epsilon > 0$. Если $\alpha \neq 1$, то возьмем $\epsilon = \alpha^{1/(1-\alpha)}$ и воспользуемся неравенством Пуанкаре (7.44). Получим неравенство при $\alpha \geqslant 1$:

$$\int_\Omega v^\alpha dx \leqslant C(n,\alpha)|\Omega|^{\alpha/n}\int_\Omega \{(a_1^\alpha + b_1^{\alpha-1} + b_0^\alpha)v^\alpha + a_2^\alpha + b_2^{\alpha-1}v\}dx.$$

Следовательно, если $C(n, \alpha)|\Omega|^{\alpha/n}(a_1^\alpha + b_1^{\alpha-1} + b_0^\alpha) < 1$, то $\int_\Omega v^\alpha dx \leqslant$ $\leqslant C(a_2^\alpha + b_2^\alpha)$. Отсюда следует требуемая оценка (10.29). □

Заметим, что при $\alpha = 1$ постоянные b_1 и b_2 не войдут в неравенства (10.28) и (10.29). Используя точный вид неравенства Пуанкаре (7.44)

$$\int_\Omega |v|dx \leqslant (1/n)\cdot(|\Omega|/\omega_n)^{1/n}\int_\Omega |Dv|dx, \qquad v \in W_0^{1,1}(\Omega), \tag{10.30}$$

мы можем в этом случае (при $\alpha = 1$) взять $C_0 = C_0(1, n) = n\omega_n^{1/n}$. Записав уравнение поверхностей с заданной средней кривизной (10.7) в дивергентном виде

$$\operatorname{div}\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} = n\cdot H, \tag{10.31}$$

несложно убедиться, что оно удовлетворяет структурным условиям (10.23) с постоянными $\alpha = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b_2 = n\cdot\sup_\Omega |H|$. Поэтому если функция H удовлетворяет неравенству

$$H_0 = \sup_\Omega |H| < (\omega_n/|\Omega|)^{1/n}, \tag{10.32}$$

то для произвольного субрешения (решения) уравнения (10.31), принадлежащего $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, справедлива оценка

$$\sup_\Omega u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u + C(n, |\Omega|, H_0)$$
$$\left(\sup_\Omega |u| \leqslant \sup_{\partial\Omega}|u| + C(n, |\Omega|, H_0)\right). \tag{10.33}$$