В.Н. Андреев А.Я. Иоффе

ЭТИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
Москва 1987

ББК 22.172
А 65

АНДРЕЕВ Вячеслав Николаевич — доктор технических наук, профессор, занимается вопросами оптимизации технологических процессов и системами автоматизированного проектирования. Автор ряда научно-популярных статей в журналах «Химня и жизнь», «Авиация и космонавтика» и др.

ИОФФЕ Анатолий Яковлевич — доктор технических наук, профессор, специалист по прикладной математике и теории вероятностей. Автор ряда иаучио-популярных книг по теории вероятностей.

Рецензент: Б. В. Гнеденко — академик АН УССР.

Андреев В. Н., Иоффе А. Я.

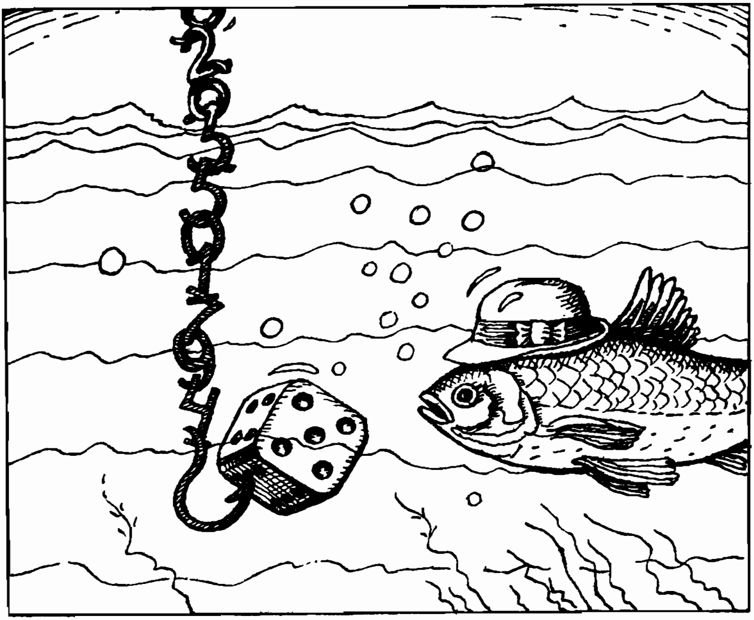
А65 Эти замечательные цепи.— М.: Знание, 1987.— 176 с., ил.

35 к.

Что может быть общего между капризами моды, работой водителя такси, проведением аварийно-спасательных работ, определением строения сложной молекулы или, скажем, ответом на вопрос: когда менять свой личный автомобиль? Как это на первый взгляд ни странно, в основе математического описания всех этих процессов лежат так называемые марковские цепи — одна из разновидностей случайных процессов.

О том, что такое марковские цепи, их замечательных свойствах, применении в самых различных областях человеческой деятельности можно узнать из этой живо и увлекательно написанной книги, рассчитанной на широкого читателя.

А $\frac{1702060000-068}{073(02)-87}$ 16—87 ББК 22.172



ВВЕДЕНИЕ

1. О чем эта книга?

Если судить по названию, речь в этой книге пойдет о цепях. Но чем же эти цепи замечательны? И стоит ли писать о них книгу?

Цепи известны человечеству давным-давно. Можно только догадываться, в каком веке (конечно, до нашей эры) они появились. Образуя прочную и гибкую связь, цепи применялись для приведения в движение валов механизмов, грузов, крепления якорей, удержания мостов над реками и ущельями... И сейчас цепи, иногда сильно измененные по сравнению со своими древними предшественниками, находят самое разнообразное применение в технике, машинах и механизмах.

Какие же признаки являются для всех цепей общими, что их объединяет? Прежде всего в отличие от каната или ремня цепь состоит из отдельных участков, т. е. дискретна. Второй ее особенностью является взаимосвязанность звеньев, причем в обычной цепи каждое звено непосредственно связано не со всеми остальными, а лишь с соседними. О цепях, истории их возникновения, свойствах, областях применения можно написать целую книгу. Такая книга будет содержательной, интересной и найдет своего читателя, но это будет уже другая книга.

Мы же хотим рассказать здесь о математических цепях! Это понятие впервые было введено выдающимся русским ученым-математиком А. А. Марковым.

Вообще говоря, под математической цепью можно понимать любую последовательность чисел или других математических объектов (например, символов, векторов, множеств и т. д.), между которыми существует какая-то взаимосвязь. А. А. Марков под цепью понимал последовательность случайных чисел, вероятности появления которых взаимосвязаны. Точнее, вероятность значения каждого последующего числа связана с предыдущим. Таким образом, здесь, как и в механической цепи, есть звенья-числа и связь между ними, только она не механическая, а математическая — вероятностная. В дальнейшем такие математические цепи были названы в науке марковскими. Конечно, то, что сейчас было сказано, нуждается в уточнениях и разъяснениях. Это и будет сделано нами в дальнейшем. Но стоит ли в популярной форме рассказывать читателям о математических цепях? Мы не случайно назвали их замечательными. Дело в том, что наряду с другими видами математических моделей (а марковские цепи — это тоже математическая модель), таких, например, как дифференциальные уравнения, нормальный закон распределения случайных величин и т. д., обладающих поразительной универсальностью и применяемых поэтому в самых различных областях науки и техники, марковские цепи занимают вполне достойное место. Они не только дают возможность математически моделировать самые разнообразные явления в природе и технике, но и послужили основой для создания новых наук: теории надежности, теории массового обслуживания и др. Кроме того, марковские цепи дали начало новому большому разделу теории вероятностей — теории случайных процессов. Но есть и другие причины появления этой книги.

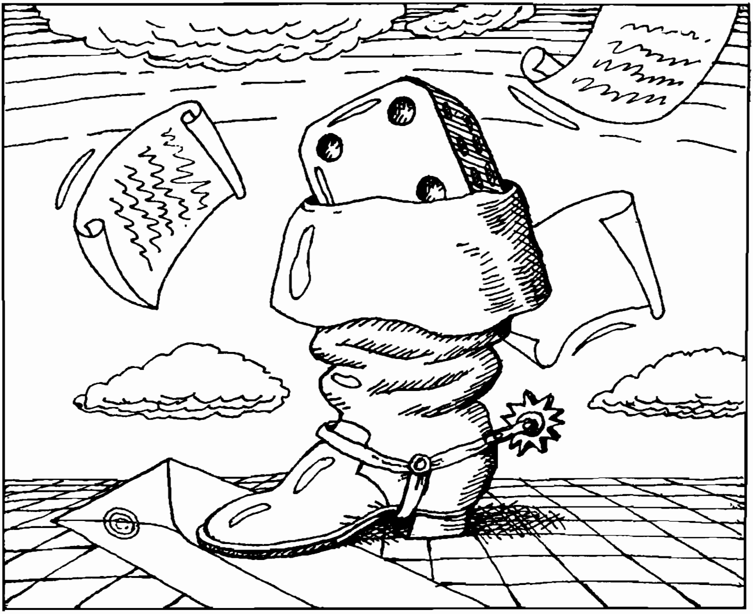
Надо сказать, что теории вероятностей как разделу математики повезло в смысле популяризации. Некоторые ученые считают, что даже несколько чрезмерно. Написано уже довольно много хороших (и не очень) научно-популярных книг, посвященных тем или иным ее сторонам и применению в других науках, обыденной жизни и т. д.

К сожалению, ни в одной из книг никак не затрагивается такой важный раздел или даже ветвь теории вероятностей, как теория случайных процессов вообще и теория марковских цепей в частности. Между тем в важности этих теорий вряд ли стоит кого-либо убеждать. Но может быть, эти вопросы настолько всем ясны, что их не стоит и популяризировать? Или, наоборот, настолько сложны, что их невозможно описать популярно? Ответим сначала на последний вопрос. По нашему мнению (да и не только по нашему), практически любые вопросы современной науки могут быть изложены просто и наглядно. Это подтверждается и лучшими образцами научно-популярных книг. Тут все зависит от умения и искусства автора.

Ответ же на первый вопрос мы получили «эмпирически», опросив разные группы испытуемых, среди которых были студенты-выпускники технических вузов, преподаватели (но не кибернетики, конечно), ученые-нематематики. Результаты опроса не нуждаются в комментариях, а еще более убеждают в том, что такая книга нужна.

Итак, еще одна научно-популярная книга по математике! Всякий, кто когда-либо пытался написать такую книгу, поймет муки авторов. Ведь существует много разных точек зрения. Одни считают, например, дурным тоном применять какие-либо формулы и сложные подробности. Другие придерживаются противоположной точки зрения. Авторы занимают в этом вопросе компромиссную позицию. Более всего нам, например, импонирует стиль книги Дж. Вильямса «Совершенный стратег» *, с помощью которой можно получить первоначальные сведения по теории игр. Примерно такую же цель, только по отношению к теории марковских цепей, преследовали и мы. Насколько это удачно получилось, судить читателю.

* Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег.— М.: Сов. радио, 1960.



2. Немного истории

У некоторых наук, как и у людей, непростая судьба. Родившись в результате каких-то практических потребностей, они проходят «детский» и «юношеский» возраст. От них многого ждут и разочаровываются, когда надежды не оправдываются. Потом, когда интерес к ним вроде бы потерян, наука как бы обретает «второе дыхание» и снова изумляет человечество множеством важнейших и интереснейших открытий. Так было, например, с биологией, физикой, кибернетикой. Такая же интересная история и у теории вероятностей. К сожалению, по этому поводу пока еще не очень много написано. Известно, однако, что корни этой науки уходят далеко в глубь веков. В древнейших государствах — Китае, Индии, Египте, Греции уже использовались некоторые элементы вероятностных рассуждений для переписи населения и даже определения численности войска неприятеля.

Но все-таки начало теории вероятностей как науки приписывают середине XVII в. Из исторических романов мы помним: это время королей и мушкетеров, прекрасных дам и благородных кавалеров. Как это ни парадоксально, с именем одного из них, причем реального исторического лица, связано начало теории вероятностей.

Следует сразу же оговориться, что основоположником теории вероятностей считают великого ученого — математика, физика и философа Б. Паскаля (1623—1662). Но полагают, что впервые он занялся теорией вероятностей под влиянием вопросов, поставленных перед ним одним из придворных французского двора — шевалье де Мере (1607—1648). Блестящий кавалер, умный и развитый человек, де Мере увлекался философией, искусством и... был азартным игроком! Но игра, оказывается, тоже была для него поводом для довольно глубоких размышлений. Де Мере предложил Б. Паскалю два знаменитых вопроса, первый из которых он попытался решить сам.

Вопросы были такие:

1. Сколько раз надо бросать две игральные кости, чтобы случаев выпадения сразу двух шестерок было больше половины от общего числа бросаний?

2. Как справедливо разделить поставленные на кон двумя игроками деньги, если они по каким-либо причинам прекратили игру преждевременно?

Эти задачи обсуждались в переписке двух великих ученых Б. Паскаля и П. Ферма (1601—1665) и послужили поводом для первоначального введения такого важного понятия, как «математическое ожидание», и попыток формулирования основных теорем сложения и произведения вероятностей. Вскоре для теории вероятностей были определены важные практические приложения: страхование, демография и т. д. Настоящую научную основу теории вероятностей заложил великий математик Якоб Бернулли (1654—1705). Открытый им знаменитый закон больших чисел дал возможность установить связь между вероятностью какого-либо случайного события и частотой его появления, наблюдаемой непосредственно из опыта. Дальнейшие успехи теории вероятностей связаны прежде всего с именами ученых А. Муавра (1667—1754), П. Лапласа (1749—1827), К. Гаусса (1777—1855), С. Пуассона (1781—1840) и др.

Благодаря работам этих и других ученых началось бурное развитие теории вероятностей и не менее бурное ее применение к решению самых различных практических задач. Вот здесь-то и произошло неожиданное! Оказалось, что, несмотря на несомненные успехи и достижения в относительно простых случаях, тем не менее даже сравнительно небольшое усложнение ситуаций и приближение их к реальным условиям не давало возможности получать верные решения. Иногда теории вероятностей еще не хватало «образованности», т. е. просто не были разработаны многие важные для практики теоретические основы. Однако чаще всего к тем явлениям, к которым ее пытались применить, она была (и, кстати, остается по сей день) просто неприменима. Так, были попытки использовать ее в судебных делах, политике, моральных вопросах и даже в богословии. Здесь будет уместным привести слова великого поэта и мыслителя Гёте, сказанные как будто бы специально по этому поводу: «Я чту математику как возвышеннейшую и полезнейшую науку, но не терплю, когда ею злоупотребляют, используя в тех областях знания, к которым она никакого касательства не имеет, отчего эта благородная наука сразу же становится бессмыслицей. Словно существует лишь то, что поддается математическому доказательству! Какая ерунда! Вдруг кто-нибудь усомнился бы в любви своей девушки, потому что она не могла бы математически таковую доказать. Приданое, возможно, и поддается математическому доказательству, но не любовь» *.

Неправильное применение теории вероятностей не могло не привести к обратному результату — разочарованию и скептицизму. Период бурного расцвета сменился своеобразным кризисом. К теории вероятностей начинают относиться как к чему-то сомнительному, не внушающему доверия, науке, пригодной лишь для решения каких-то развлекательных задач. И вот здесь, как это часто бывает в романах и пьесах, на сцене науки в самый критический момент появляется спаситель!

Именно к этому критическому времени, т. е. началу и середине XIX в., относятся работы целой плеяды отечественных ученых-математиков петербургской математической школы. Русские, а затем и советские ученые-математики создали логические и математические основы теории вероятностей, открыли ряд ее новых направлений, позволивших решить много важнейших теоретических проблем не только в математике, но и в других науках, а также в технике.

В создании русской школы теории вероятностей большую роль сыграл выдающийся математик В. Я. Буняков-

---

* Эккерман И. Разговоры с Гёте.— М.: Худ. лит., 1981.— С. 188.

ский (1804—1889), написавший первый русский учебник по теории вероятностей и разработавший ее терминологию в современном виде. Достойным продолжателем работ В. Я. Буняковского стал великий русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894). Этот, по выражению французского математика Ш. Эрмита, «один из величайших геометров всех времен...» обогатил мировую науку многими математическими открытиями, но наиболее значительными были его исследования в области теории вероятностей. Именно П. Л. Чебышев и его ближайшие ученики А. А. Марков и А. М. Ляпунов своими трудами преодолели тот «теоретический кризис», о котором говорилось выше, и помогли теории вероятностей стать точной и практической математической наукой. Особенно необходимо отметить важность введения понятия «случайная величина». Дело в том, что до определенного времени, на протяжении почти полутора столетий, теория вероятностей имела дело только со случайными событиями, оставаясь при этом по отношению к случайности как бы на «качественном» уровне. Во многих же практически важных задачах требовалось оценить меру случайности «количественно». Например, необходимость этого всегда возникает при оценке погрешностей измерений, прогнозировании случайных явлений и др. Введение понятия «случайная величина» существенно расширило круг задач, которые могли решаться методами теории вероятностей, а также существенно увеличило ее теоретический арсенал.

Другим не менее важным событием этого времени явилось начало изучения зависимых случайных событий и величин, с которого начинается, по существу, новая ветвь теории вероятностей — теория случайных процессов. Впервые в мире изучением зависимых случайных величин, как уже говорилось, величин, «связанных в цепи», начал заниматься ученик П. Л. Чебышева — выдающийся русский математик академик А. А. Марков. О нем самом, его работах, примерах решения различных задач мы и расскажем в нашей книге. Чтобы показать важность начала изучения зависимых случайных величин, попробуем образно сравнить этот процесс с механикой. Если раньше теория вероятностей занималась лишь «статикой», то А. А. Марков открыл начала «динамики» случайных величин. Важно отметить, что и в дальнейшем теория случайных процессов развивалась весьма плодотворно, в первую очередь благодаря усилиям и достижениям советских ученых

А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина, Е. Е. Слуцкого, Б. В. Гнеденко и многих других. Большой вклад внесли в начало развития случайных процессов А. Эйнштейн (1879—1955), М. Смолуховский (1872—1917) и Н. Винер (1895—1964). Новое научное направление, связанное с моделированием случайных процессов с помощью стохастических дифференциальных уравнений, было открыто трудами С. Н. Бернштейна (1880—1968). В более поздние годы на основе фундаментальных достижений теории случайных процессов начали бурно развиваться такие новые и практически важные науки, как теория массового обслуживания и теория надежности.

«Цепи Маркова», «марковские процессы», свойство «марковости»... Так кто же он, чье имя не сходит с многих страниц отечественных и иностранных книг, диссертаций и статей?

Надо прямо сказать, что, несмотря на большую научную известность, некоторые подробности жизни этого замечательного ученого мало знакомы широкому кругу читателей. А они небезынтересны, и о них стоит рассказать.

3. Теперь об А. А. Маркове...

Если бы заслуги ученого оценивали только по степени упоминания о нем в других трудах, по-видимому, академик Андрей Андреевич Марков был бы на одном из первых в мире мест по знаменитости. Его фамилия встречается на многих тысячах страниц статей, монографий, учебников и другой научной литературы. Чем же можно объяснить такую известность и популярность?

Можно, конечно, рассказать об этом выдающемся ученом традиционно, как это принято,— родился... поступил... окончил.., но меньше всего нам хотелось бы так писать об А. А. Маркове. Потому что человек он был необыкновенный!

Ученый

Как уже говорилось, А. А. Марков (1856—1922) принадлежал к широко известной в мире петербургской школе математиков. Характерными чертами петербургской школы математиков всегда были: фундаментальность, научная строгость и оригинальность исследований и их тесная связь с практикой, жизнью.

В научном творчестве А. А. Маркова можно выделить два крупных направления: исследования по теории чисел и труды по теории вероятностей, ставшие с конца 90-х годов прошлого века главными в его иаучной деятельности и принесшие ему мировую славу. Особое место здесь занимают исследования, посвященные новому разделу теории вероятностей — «вероятностям событий, связанных в цепи», этим ставшим знаменитыми марковским цепям, которые впоследствии получили огромное распространение и явились основой новых наук. Существует мнение, что постановка вопроса о взаимосвязанных в вероятностном смысле событиях — цепях была вызвана практическими запросами статистиков и экономистов. В этом смысле А. А. Марков, конечно, следовал лучшим традициям петербургской школы. Одна из его работ была непосредственно связана, например, с расчетом криволинейных участков железнодорожных путей.

Впервые вопрос о зависимых случайных величинах был поставлен в статье «Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга», опубликованной в 1906 г. В ней А. А. Марков доказывает, что одно из важнейших положений теории вероятностей — предельная теорема Чебышева — справедливо и для зависимых случайных величин. Но это было только началом. В дальнейших своих работах выдающийся математик, по существу, закладывает основы теории марковских цепей. Так, им уже тогда были сформулированы понятия простых и сложных, однородных н неоднородных цепей, рассмотрены возможиости их применения, например, в лингвистике. Читая труды А. А. Маркова, нельзя не восхищаться своеобразной красотой и даже изяществом их изложения. Четкость и лаконичность, строгость и выразительность, логичность и завершенность — таковы их характерные черты. В научных суждениях — объективность и принципиальность. Нельзя не привести здесь одну цитату из его статьи по теории вероятностей: «Теорема, которую доказывает Чебышев в упомянутом мемуаре, давно считается верной, но установлена она при помощи крайне нестрогих приемов. Я не говорю доказана, так как нестрогих доказательств не признаю, если не усматриваю возможности сделать их строгими» *.

А. А. Марков не терпел в науке многословия и неопре-

* Марков А. А. Избр. труды.— М.: Изд. АН СССР, 1951.— С. 233.

деленности н недоброжелательно относился к большой общности исследований. Однако при всей своей внешней строгости А. А. Марков уважительно относился к работам своих коллег. Интересна здесь история «двух соревнований». Одно из них негласно существовало между учениками П. Л. Чебышева А. А. Марковым и А. М. Ляпуновым. Так, сначала А. А. Марков, продолжая и развивая труды своего великого учителя, доказал методом, предложенным П. Л. Чебышевым (методом моментов), одну из важнейших теорем теории вероятностей. Год же спустя А. М. Ляпунов разработал другой, более общий метод доказательства. По этому поводу А. А. Марков дружески шутил, что А. М. Ляпунов сделал ему «большую пакость». Это творческое соревнование продолжалось и в дальнейшем и сопровождалось успехами обоих ученых.

Другое подобное соревнование проходило у А. А. Маркова с видным нидерландским ученым Т. Стилтьесом. Здесь интересно то, что доказательства неравенств Чебышева у обоих математиков совпали в мельчайших деталях. Однако оказалось, что пришли они к этому независимо друг от друга. В дальнейшем между ними завязалось дружеское «творческое соревнование», в котором русский и нидерландский математики поочередно получали новые решения вопросов, связанные с различными точками зрения на проблемы.

За свою жизнь А. А. Маркову как ученому удалось внести значительный вклад в развитие математики. Самым главным здесь является то, что содержание работ А. А. Маркова открыло новые научные направления, которые были успешно развиты другими отечественными и зарубежными учеными.

Большое место в жизни А. А. Маркова занимала педагогическая работа. Расскажем теперь и о ней.

Педагог

Первым учеником (точнее, ученицей) А. А. Маркова была его будущая жеиа М. И. Вальватьева. Ситуация, которая при этом сложилась, знакома нам по многим произведениям. К юной гимназистке — дочери обеспеченных родителей был в качестве домашнего учителя приглашен юноша — сын управляющего имением. Дальше, как и бывает в романах, учитель предложил «руку и сердце» своей прилежной ученице, но получил отказ ее родителей, по-видимому, посчитавших брак неравным. Но юноша был настойчив, и свадьба все-таки состоялась, но только через восемь лет, когда он стал уже известным ученым и преподавателем Петербургского университета. Это, конечно, не более чем забавный эпизод из жизни ученого. А. А. Марков начал работать педагогом сразу после блестящего окончания университета. Интересно, что ему выпала честь читать в университете курс теории вероятностей вслед за самим П. Л. Чебышевым.

Как педагог А. А. Марков был яркой и незаурядной личностью. Он придерживался определенных, им самим выработанных методических принципов, являвшихся в большой степени продолжением его научных взглядов. Всяческие отвлечения иа лекциях он считал ненужными и вредными. По мнению А. А. Маркова, весь излагаемый материал должен быть полным, доказательства точными и строгими, с обязательным доведением любых математических выкладок «до числа». Лекции читались им простым и ясным языком. Они «всегда имели деловой характер, никаких отступлений в сторону, ие имеющих отношения к предмету, никаких вводных фраз, ничего показного; случалось, что лекция начиналась, если надо, раньше, чем А. А. Марков доходил до доски» *. Его отличали большое мужество и требовательность к себе. Даже будучи больным, когда он приходил на лекции под руку с сопровождающим, он читал лекцию безупречно. Его сын, впоследствии тоже известный математик, вспоминает: «Как одии из слушателей я могу засвидетельствовать, что они (лекции) читались безукоризненно, несмотря на то что лектор едва держался на ногах **.

Прославленный ученый академик А. А. Марков много внимания уделял школьному образованию. Он активно участвовал в работе комиссии по улучшению преподавания математики в средней школе и со свойственной ему энергией и принципиальностью протестовал против различных непродуманных экспериментов с учащимися. В течение целого учебного года А. А. Марков вел занятия по математике в одной из сельских средних школ безвозмездно. И здесь, в средней школе, он проявлял свой особый методический подход. Так, главное внимание Андрей

---

* Марков А. А. (сын). Биография А. А. Маркова//Избр. труды А. А. Маркова.— С. 612.

** Там же.

Андреевич уделял пониманию сути дела в ущерб требуемой в те времена внешней тщательности записей в тетрадях и на доске. Основной упор он делал на решение задач. Не считаясь с личным временем, А. А. Марков ввел для неуспевающих, а также для заинтересованных ребят дополнительные занятия по воскресеньям и во время каникул.

Эти замечательные традиции развиваются и сейчас советскими учеными-педагогами.

Человек-гражданин

Жизнь и творческая деятельность А. А. Маркова проходили в сложное и трудное для России и всего мира время. Это было время трех русских революций, наступлений и поражений реакции, первой мировой войны, величайшего в истории социального переворота и становления Советской власти. Мог ли ученый остаться в стороне от всех этих исторических потрясений? Да, мог. К началу всех этих событий А. А. Марков был уже известным математиком, академиком с мировым именем и мог бы остаться в стороне от общественной деятельности. Но тогда это не был бы А. А. Марков. Он всегда оставался гражданином, патриотом своей Родины, яростным борцом против всякой несправедливости и реакции. «Это был человек открытый, прямой и смелый, никогда не изменявший своим убеждениям, всю жизнь яростно боровшийся со всем, что считал глупым и вредным. Его гражданское мужество было очень стойким: он не считался ни с лицами, против которых выступал, ни с последствиями, которые его выступления могли иметь для него самого...» * — так вспоминает о А. А. Маркове его сын, таким представляем мы его на основании исторических фактов. Все эти качества формировались у А. А. Маркова с детства на почве лучших традиций передовой русской интеллигенции. В гимназии Андрюша Марков, кроме любимой математики, увлекался статьями Чернышевского, Добролюбова, Писарева и даже осмелился как-то интерпретнровать «Евгения Онегина» с позиции Писарева, за что удостоился гневной реплики педагога: «Вы начитались борзопнсцев, отрицающих чувство прекрасного» **. Вообще, школьный период жизни

* и ** Здесь и далее цит. по кн.: Марков А. А. Избр. труды.— М.: Изд. АН СССР, 1951.— с. 604, 601.

проходил для будущего академика с немалыми трудностями. Его творческая живая натура находилась в постоянном конфликте с отупляющими и казенными методами, муштрой и рутиной, зубрежкой бесконечных, не имеющих никакого смысла правил. За то, что однажды Андрюша, не дождавшись окончания длинной и нудной молитвы, стал укладывать книги в портфель, его едва не исключили из выпускного класса. Директор заявил при этом отцу, что он не потерпит в гимназии «атеистов и нигилистов». Инцидент удалось замять с большим трудом. Но конечно, все годы школьной учебы любимым его предметом была математика. Интересно, что любовь к математике и способности были у Марковых фамильной чертой. Талантливым математиком был рано скончавшийся брат Андрея Андреевича, видным математиком стал впоследствии его сын. Маленький Андрюша не довольствовался школьным материалом, занимался математикой и самостоятельно, сверх программы. Однажды ему даже показалось, что им открыт новый способ решения дифференциальных уравнений. Идею метода он изложил в письмах известным русским ученым-математикам того времени: В. Я. Буняковскому, Е. И. Золотареву и А. Н. Коркину. Последние ответили гимназисту, что его открытие уже известно в науке, но пожелали ему дальнейших успехов в математике. Ученые не забыли одаренного юношу и внимательно следили за его учебой уже в Петербургском университете, всячески поощряли и развивали его выдающиеся математические способности. Такая помощь и поддержка знаменитых математиков во главе с П. Л. Чебышевым позволила А. А. Маркову в полной мере раскрыть свое дарование, блестяще защитить магистерскую и докторскую диссертации и пройти за десять лет все ступени роста ученого — от выпускника университета до академика.

Будучи бескомпромиссным и предельно честным в науке, А. А. Марков проявил эти качества и как общественный деятель, патриот своей Родины. В марте 1902 г. к тому времени уже всемирно известный писатель А. М. Горький на общем собрании Академии наук был избран почетным академиком. Царь потребовал признать эти выборы недействительными (кассировать) под предлогом того, что Горький находится под надзором полиции. Но не просто отменить, а сделать это якобы от имени ученых-академиков. В апреле 1902 г. возмущенный таким произволом А. А. Марков обращается в академию с письмом, в котором во всеуслышание заявляет, что отмена результатов выборов была незаконной, так как заявление о кассации сделано не от имени собрания академиков, а мотив кассации не обоснован. Послушный царю Президиум попытался замять дело. В знак протеста А. А. Марков подает в отставку, отказывается от старых и получения каких-либо новых царских наград и орденов. Позднее, уже в 1905 г., он пишет новое прошение, в котором говорится: «...подобные объявления (по-видимому, имеется в виду ответ Президиума.— *Прим. авт.*) могут иметь силу только там, где царит неограниченный произвол, и падают сами собой с устранением последнего» *.

Напуганное ростом революционного движения, в 1905 г. царское правительство попыталось «демократизировать» систему правления путем созыва Государственной думы. Из истории известно, что эта затея обернулась печально для ее творцов. Одна за другой государственные думы выходили из повиновения и распускались. 3 июня 1907 г. царское правительство распустило неугодную ему II Государственную думу и издало очередной закон о новых выборах уже в III Государственную думу. Но какова же была цена этим «демократическим» вывертам, если согласно своему же манифесту от 17 октября 1905 г. царское правительство должно было издавать новые законы только с санкции Думы?

А. А. Марков не остается равнодушным и в этом случае. Он обращается в Президиум академии со следующим заявлением: «Ввиду того, что созыв III Государственной думы соединен с нарушением закона, а потому она будет не собранием народных представителей, а каким-то незаконным сборищем, честь имею покорнейше просить Правление не вносить мое имя в списки избирателей» **.

Издавна центрами революционного брожения были русские университеты. В 1908 г. специальным циркуляром Министерства просвещения на профессоров были возложены, по существу, функции надзора за студентами. Академик А. А. Марков реагирует на эти требования так: «...я решительно отказываюсь быть в университете агентом правительства, хотя и оставляю за собой право продолжить чтение курса теории вероятностей» ***.

---

* Здесь и далее цит. по кн.: Марков А. А. Избр. труды.— М.: Изд. АН СССР, 1951.— С. 606.

** Там же.— С. 607.

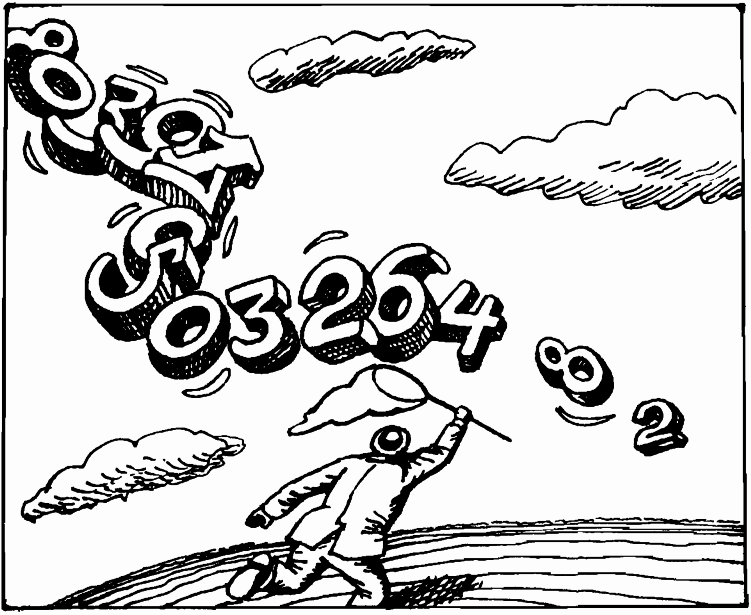
*** Там же.— С. 608.

Интересны факты биографии выдающегося ученого, касающиеся его отношения к церкви и религии. В 1912 г., осуждая «богохульные» произведения Л. Н. Толстого, «святейший» Синод отлучил великого писателя от церкви. В знак солидарности обратился в Синод с просьбой об отлучении и А. А. Марков. Нельзя не привести отрывок из его обращения в Синод: «Надеюсь, что достаточным основанием для отлучения может служить ссылка на мою книгу «Исчисление вероятностей», где ясно выражено мое отрицательное отношение к сказаниям, лежащим в основе еврейской и христианской религии... Если приведенной выдержки недостаточно, то покорнейше прошу принять во внимание, что я не усматриваю существенной разницы между иконами и идолами, которые, конечно, не боги, а их изображения, и не сочувствую всем религиям, которые, подобно православию, поддерживаются огнем и мечом и сами служат им» *. Не правда ли, как современно и убедительно звучат эти строки и сейчас!

История с отлучением наделала много шума в церковных кругах. Уж слишком известной и авторитетной была личность академика. Церковное начальство сначала хотело замять скандал и послало к А. А. Маркову с «дипломатической миссией» протоиерея Орнатского. Академик отказался принять этого представителя церкви, заявив, что он смог бы обсуждать с протоиереем только вопросы, связанные с математикой. Но на этом церковь не успокоилась. Было решено доказать, что атеизм Маркова объясняется его «нечистым» происхождением и дурным воспитанием. Поэтому назначили церковное расследование, чтобы проверить, не сектант ли Марков или его родители, был ли он крещен, кем были его ближайшие родственники и т. д. Здесь церковников ожидал полный конфуз! Оказалось, что дед академика был сельским дьяконом. Атеизм Маркова — это проявление его гражданственности, тех принципов, которыми он руководствовался в науке и жизни.

---

* Здесь и далее цит. по кн.: Марков А. А. Избр. труды.— М.: Изд. АН СССР, 1951.— С. 609.



ГЛАВА 1

ЧТО ТАКОЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ?

1.1. Тише едешь, дальше будешь!!

Есть такая детская игра «тише едешь, дальше будешь». Существует много ее разновидностей, но смысл всех примерно одинаков: каждый играющий должен быстрее других добраться от пункта *А* до пункта *Б*, изображенных на карте (рис. 1). Весь путь при этом разбивается на отдельные этапы — отрезки. Перемещение на то или иное количество отрезков определяется результатом бросания игральной кости в виде кубика. Для большего интереса в игру вносятся различные условия. Например: при попадании в пункт 2 играющий пропускает очередной ход — «попадает в яму», при попадании в пункт 7 необходимо «поехать в объезд» или даже вернуться на несколько отрезков назад и т. д. Благодаря таким «превратностям судьбы», игрок, у которого все время выпадают счастливые пятерки и шестерки, может даже оказаться позади менее удачливого на первый взгляд товарища по игре.

Отсюда и название «тише едешь, дальше будешь». Как и во всякой игре, в ней заключена некоторая житейская мудрость. Часто бывает, что тот, кто излишне торопится, проигрывает более медлительному, но действующему разумно и осмотрительно. Но вернемся к игре.

Каждое бросание кубика игроком есть своеобразное испытание везения. В теории вероятностей это так и называется испытанием (или опытом). Обратите внимание, что в общежитейском толковании это понятие имеет несколько иной смысл. В результате каждого испытания происходит случайное событие, заключающееся здесь в выпадении определенной грани кубика и связанном с этим перемещении на определенное число отрезков. Положение фишки каждого игрока на трассе мы будем называть состоянием.

Итак, наша игра представляет последовательность испытаний, приводящих к случайным событиям и смене состояний. Представим это графически. По вертикальной оси (оси ординат) будем откладывать номер пункта (состояние), в котором находятся фишки играющих, а по горизонтальной — номер каждого очередного бросания кубика. Изобразим теперь на графике точки, в которых находились фишки двух игроков во время игры. Если соединить их прямыми линиями, то получится наглядное представление о траекториях движения игроков к финишу. Заметим, что попадание в каждое очередное состояние зависит не только от числа выпавших очков на кубике, но и от того, в каком предшествующем состоянии мы находились. Ведь если мы были в пункте 5 и на кубике выпала единичка, то мы попадаем в пункт 6, из которого согласно

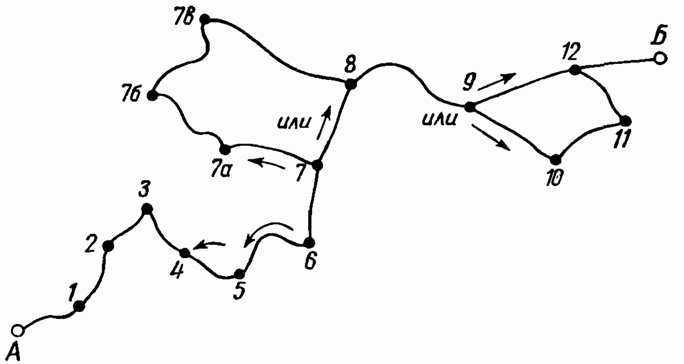


Рис. 1

условию мы, допустим, должны вернуться назад на два этапа.

Таким образом, анализируя нашу игру с точки зрения математики, мы можем сделать вполне определенные выводы:

во время игры происходит последовательная, прерывистая (дискретная), случайная смена состояний;

вероятность попадания в каждое очередное состояние является величиной зависимой (в нашем примере она зависит только от предыдущего состояния и не связана с тем, как мы в него попали, т. е. не зависит от предыстории).

Здесь нам придется сделать некоторые разъяснения и для этого обратиться к другой весьма распространенной игре — картам. Только мы будем заниматься не собственно игрой, а воспользуемся картами лишь потому, что это хорошо известный всем объект, очень удобный для демонстрации некоторых важных понятий теории вероятностей. Не случайно поэтому, что именно с таких игр, как кости и карты, началась история этой интереснейшей науки, и практически любой учебник по теории вероятностей начинается с примеров, в которых используются либо игральные кости, либо карты.

То, что карты иногда играли очень существенную роль в судьбе человека, нашло свое отражение во многих художественных произведениях. Достаточно вспомнить хотя бы знаменитую «Пиковую даму»! Карты часто выступали в роли таинственной силы, обогащавшей одного и разорявшей другого. Карты представали и в виде оракула, предсказывающего судьбу и помогавшего как-то определить правильную линию поведения. Вот еще один пример, где карты решают судьбу человека:

«— Господа, я вас прошу не трогаться с места! — сказал Вулич, приставя дуло пистолета ко лбу. Все будто окаменели. — Господин Печорин,— прибавил он,— возьмите карту и бросьте вверх.

Я взял со стола, как теперь помню, червонного туза и бросил кверху; дыхание у всех остановилось, все глаза, выражая страх и какое-то неопределенное любопытство, бегали от пистолета к роковому тузу, который, трепеща на воздухе, опускался медленно: в ту же минуту, как он коснулся стола, Вулич спустил курок... осечка!» *.

---

* Лермонтов М. Ю. Герой нашего времени//Полн. собр. соч.— Т. 4.— М.— Л.: ОГИЗ.— С. 243.

Теперь ситуация комическая, имеющая уже прямое отношение к нашей теме, поведанная великим юмористом М. Твеном. Один из его рассказов так и называется «Наука или удача!». В нем описывается забавное происшествие, случившееся в небольшом городе штата Кентукки, где в те времена азартные игры находились под строгим запретом. Компания молодых людей была застигнута за игрой в карты и предстала перед судом. Наказание неизбежно, если бы не находчивость адвоката. Он нашел множество свидетелей, которые привели неопровержимые доказательства того, что обвиняемые играли не в азартную, а в научную игру. Эти доводы были настолько убедительны, что суд зашел в тупик. И снова остроумный выход нашел защитник. Он предложил выбрать по шесть присяжных — сторонников различных точек зрения и провести эксперимент. Присяжные «дулись» в карты всю ночь. И вот каким было решение, которое они объявили утром: «...практическая проверка указанных теорий выяснила, показала и обнаружила с очевидностью, что за всю ночь сторонники удачи не имели ни одного козыря и не выиграли ни одного кона, в то время как противная сторона многократно и систематически демонстрировала и то и другое. В пользу нашего решения свидетельствует и тот факт, что сторонники теории удачи проигрались до последнего цента, и их деньги перешли к представителям противной стороны...» * Поскольку под сторонниками удачи понималась группа, считающая игру в карты азартной, а не научной игрой, то процесс адвокатом был с блеском выигран!

Мы используем карты тоже с научной целью. Давайте проделаем такой опыт: будем доставать по одной карте из колоды, определять ее масть и класть обратно. Для чистоты эксперимента после каждого опыта карты надо, конечно, хорошо перемешать. Очевидно, появление карты определенной масти будет случайным, т. е. точно непредсказуемым событием. Для таких условий при достаточно большом числе опытов теория вероятностей может довольно точно предсказать результат количественно. Одной из количественных характеристик, в частности, будет вероятность появления карты данной масти (событие A). Эту вероятность $P(A)$ можно подсчитать как отношение числа случаев $M(A)$, благоприятствующих событию A, к их общему числу N. В колоде из 52 карт имеется 13 карт одной

---

* Твен М. Собр. соч.— Т. 10.— М.: Худ. лит., 1961.— С. 232—234.

масти, поэтому в нашем примере $M(A)=13$, а $N=52$, т. е.

$$P(A)=\frac{13}{52}=0{,}25.$$

Введем теперь событие B, заключающееся в появлении карты той же масти при вторичном ее извлечении из колоды. Очевидно, если после каждого опыта очередную карту класть в колоду и хорошо перемешивать, вероятность события B не будет зависеть от предшествующего опыта, т. е. $P(A)=P(B)=0{,}25$.

Теперь изменим условия опыта — вытащив карту определенной масти, отложим ее в сторону. Воспроизведем далее событие B. Теперь его вероятность уже будет зависеть от того, карта какой масти была извлечена первой. Если была вытащеиа карта той же масти,

$$P(B)=\frac{12}{51}<0{,}25,$$

а если другой, то

$$P(B)=\frac{13}{51}>0{,}25.$$

Это означает, что в данном случае вероятности событий зависят друг от друга, и такие опыты (испытания) в теории вероятностей называются зависимыми. При этом вероятность события B будет называться условной по отношению к событию A. Кроме того, так же, как и в предыдущем примере, мы можем заметить и здесь последовательную (дискретную) смену состояний. Только состоянием теперь уже будет количество в колоде карт той или иной масти после каждого извлечения карты. Конечно, получается, что и в этом случае вероятность перехода в каждое последующее состояние непосредственно связана с предшествующим состоянием.

Игра есть игра. Но обычно она придумывается так, чтобы отобразить какое-то реальное явление и, возможно, чему-то научить. Правда, насчет карт, пожалуй, этого не скажешь, но зато игра «тише едешь, дальше будешь» очень хорошо подходит к автотуристам. Каждую весну и осень птицы в наших краях летят сначала на север, а потом на юг. Автотуристы «мигрируют» в противоположном направлении. Умудренные опытом путешественники знают такой закон дороги: как бы ни мчались отдельные любители быстрой езды, какие бы они ни делали хитроумные (иа их взгляд) и опасные (с точки зрения других) выкрутасы, все равно скорость всех постепенно выравнивается, и выехавшие в одно время останавливаются на ночлег примерно в одном месте.

Изобразим на графике, аналогичном приведенному выше, пройденный путь автотуристов, путешествующих, например, из Ленинграда в Крым по одному маршруту (рис. 2). Отложим по оси ординат состояния, отображающие в данном случае пройденный за день путь в километрах, а по оси абсцисс — время. Допустим сначала, что ездовой день у всех одинаков (в таких поездках рекомендуется ехать не более 7—8 ч), крупных поломок в пути ие происходило и длительных непредвиденных остаиовок по другим причинам не было. Предположим также, что все водители ночью хорошо отдыхают и на них не сказывается усталость предыдущего дня. Пренебрежем также и износом автомобилей за столь короткий срок их эксплуатации. При таких предположениях все траектории движения будут проходить на графике очень близко, как бы сплетаться в одну веревочку. На каждом контрольном пункте можно определить средний для всех машин пройденный за день путь и провести по этим точкам среднюю линию, отобра-

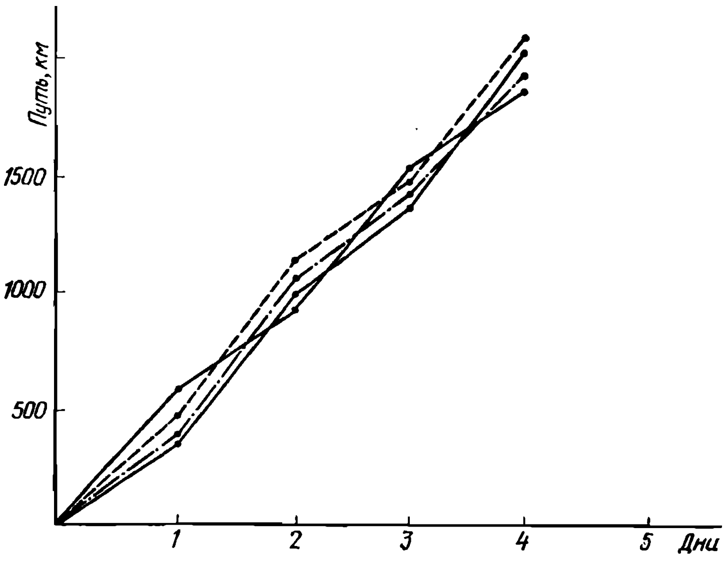


Рис. 2

жающую какую-либо закономерность. Например, на первом этапе из-за неблагоприятных дорожных условий или каких-то иных причин все машины прошли меньший путь, чем иа втором, и т. д. Очевидно, и в данном случае справедливыми будут выводы, которые мы сделали выше при анализе игры «тише едешь, дальше будешь».

Учтём теперь возможность случайных мелких и крупных поломок в пути. Будем при этом считать, что служба технической помощи на дороге функционирует безукоризненно, все поломки немедленно устраняются, и каждый автотурист обязательно доедет до конца пути. Будем фиксировать состояние машины в момент поломки. Очевидно, временно́й интервал между остановками будет случайным. Что же общего и в чем разница рассмотренных выше процессов? Общими здесь будут два факта: случайная смена состояний и вероятностная связь между предшествующим и последующим состояниями. Очевидно, как и раньше, мы наблюдаем зависимость между случайной сменой состояний и временем. Такая зависимость называется случайным процессом. Заметим сразу же, что смена состояний может происходить и при изменении какой-то другой величины. Например, в первых двух случаях мы имели дело с иомером этапа, могут быть и какие-либо другие параметры. Если смена состояний наступает через строго определенные фиксированные промежутки времени, то такой процесс называют случайным процессом с дискретным временем, или случайной последовательностью. Это мы наблюдали и в игре «тише едешь, дальше будешь», и в картах, и даже при первом абсолютно надежном варианте автотуризма. В другом же, более близком к реальности варианте, когда смена состояний происходит в случайные моменты времени, можно полагать, что случайный процесс протекает при непрерывном времени.

Теперь вспомним еще одио важное обстоятельство. Обратите внимание, что во всех рассмотренных примерах вероятность появления каждого последующего состояния зависит только от предыдущего. В самом деле, успех или неуспех в «тише едешь, дальше будешь», как говорилось, прямо связан с предшествующим пунктом на маршруте; карточное состояние зависит от наличия в колоде того или иного количества карт определенной масти; каждая последующая точка остановки автотуриста на ночлег, конечно, зависит от местонахождения предшествующего утреннего старта. Случайные процессы, обладающие таким свойством, были названы в науке марковскими. Иногда бывает, что новым понятиям или явлениям присваивается имя какого-то ученого не потому, что он их открыл, а лишь в честь признания его больших заслуг перед наукой. Так было, например, с пуассоновскими или гауссовскими процессами, которые получили свое название не при жизни ученых, а гораздо позже. В данном же случае действительно впервые в мире именно академик А. А. Марков обратил внимание на закономерности зависимых в вероятностном смысле величин, названных им цепями. В статье «Распространение предельных теорем исчисления вероятностей (так называлась тогда теория вероятностей.— *Прим. авт.*) на сумму величин, связанных в цепь» он пишет: «...я показал, что известный закон больших чисел, установленный Чебышевым для независимых величин, распространяется и на многие случаи зависимых величин. Из всех случаев особенного внимания заслуживают случаи величин, связанных в цепь таким образом, что когда значения одной из них становятся известными, следующие за ней оказываются независимыми от предшествующих ей...» *. Более точно с позиций современной терминологии можно сказать, что А. А. Марков заложил основы теории случайных процессов с дискретными состояниями и временем, т. е. собственно марковских цепей. Но марковскими называют сейчас и другие виды случайных процессов. Главным общим свойством таких процессов является наличие вероятностной связи, зависимости между состояниями. Иногда считают, что марковским более точно следует называть случайный процесс, у которого вероятность каждого последующего состояния связана только с предыдущим: марковские процессы без последействия. Говорят, что у таких процессов «будущее определяется только через настоящее». Но можно легко представить случайные процессы, у которых на вероятность наступления последующего состояния могут влиять не одно, а два, три или более предыдущих состояний. Такие процессы тоже рассматривались А. А. Марковым. Он даже предложил называть их сложной цепью. Оказывается, и в этом случае путем введения некоторых допущений можно условно привести математическую модель к случаю простой марковской цепи. Для этого надо включить в понятие предыдущего состояния другие, более ранние, от которых зави-

* Марков А. А. Избр. труды.— С. 365.

сят будущие. Как это делается, мы покажем читателю на конкретных примерах.

Для марковского процесса с непрерывным временем существует интересная закоиомерность. Время между наступлениями того или иного события является случайным, но подчиненным определенному закону. Вот он, этот закон называемый показательным:

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}. \qquad (1.1)$$

Давайте разберемся в его смысле. Допустим, что в какой-то момент времени t у водителя произошла поломка машины. Формула (1.1) дает возможность ответить на вопрос: произойдет ли за промежуток времени Δt следующая поломка. Возьмем предельные случаи: пусть $t=0$, тогда

$$F(0)= 1-e^{-\lambda 0}=1-1=0.$$

Действительно, маловероятно, чтобы сразу же вслед за первой произошла следующая поломка. Заметим только, что маловероятно — это не значит невозможно. Часто эти понятия путают. Событие возможно, если его вероятность близка (или даже равна) нулю! Только не наоборот — вероятность невозможного события, конечно же, равна иулю. Если же t очень велико ($t\to\infty$), то $F(t)\to 1$, т. е. при очень большом промежутке времени поломка произойдет обязательно. Остается разъяснить теперь смысл символа λ. Из формулы (1.1) видно, что чем больше λ, тем вероятнее поломка в течение одного и того же промежутка времени. Таким образом, λ характеризует как бы скорость наступления события, в данном случае поломки. Поэтому λ называют интенсивностью отказов. Интересно, что если попытаться определить среднюю величину промежутка времени между последовательными поломками, то он будет в точности равен $1/\lambda$. Более того, и колебания случайной величины промежутка времени относительно среднего значения равны $1/\lambda$. Вот как просто все получается. Действительно, замечательным свойством марковских случайных процессов является возможность простого и наглядного моделирования реальных явлений и получения важных для практики результатов. Не случайно, как уже говорилось, теория марковских процессов явилась основой таких новых и важных для практики наук, как теория надежности, теория массового обслуживания.

А что будет, если временны́е отрезки между переходами из состояния в состояние не подчиняются показательному закону, хотя марковское свойство сохраняется? Так чаще всего и бывает, ведь реальные явления в жизни далеко не всегда подчиняются удобным для нас законам. Оказывается, и такие явления можно моделировать с помощью теории марковских случайных процессов, но теперь их называют уже полумарковскими. Картину полумарковского процесса можно наглядно представить снова с помощью той же игры «тише едешь, дальше будешь» следующим образом. Раньше, чтобы узнать, на сколько шагов нам можно переместиться в игре, мы бросали кубик один раз. Это и был своеобразный розыгрыш состояння. Теперь же в полумарковском процессе после розыгрыша состояиия надо бросить кубик еще раз, чтобы определить, сколько же времени мы пробудем в этом состоянии. Это будет теперь розыгрышем времени пребывания в состоянии. Конечно, в случае полумарковского процесса математический аппарат усложняется, но зато моделируется более широкий класс явлений. Вспомним еще одно важное обстоятельство. Все приведенные выше примеры относились к марковским случайным процессам, с прерывистыми (дискретными) состояниями. Но всегда ли это так? Конечно, нет. Если вернуться к нашему примеру с автотуристами, то изменение скорости каждого автомобиля будет случайной, непрерывно изменяющейся величиной. Изобразим на рис. 3 зависимость скорости нескольких автомобилей от времени на отрезке пути, где нет ограничений в скорости. Очевидно, для каждого водителя (автомобиля) она окажется разной из-за отклонений в регулировке спидометра, искусства водителя, дорожных условий и т. д., хотя и будет колебаться около какого-то среднего значения, например 90 км/ч. Каждый отдельно взятый график скорости какого-то автомобиля — как бы отдельное волокно из пряди — называется реализацией случайного процесса.

Случайным процессам с непрерывными состояниями также может быть присуще марковское свойство. Оно помогает существенно упростить математический аппарат и решать сложные теоретические и практические задачи. Но это уже выходит за рамки нашего рассказа.

Теперь настало время подвести некоторые итоги. Мы только что очень сжато рассмотрели различные типы случайных процессов. Напомним, что начали мы с их простейшего случая — марковских цепей. Далее приводились примеры, когда разный вид принимали либо само значение случайной функции (в данном случае состояния), либо аргумента (времени или номера этапа). Все возможные комбинации можно представить теперь в виде табл. 1.1:

Таблица 1.1

Виды случайных процессов

Вариант	Вид функции	Вид аргумента	Название случайного процесса
1	Дискретная	Дискретный	Дискретная случайная последовательность — марковская цепь
2	Дискретная	Непрерывный	Дискретный случайный процесс
3	Непрерывная	Дискретный	Непрерывная случайная последовательность
4	Непрерывная	Непрерывный	Непрерывный случайный процесс
5	Непрерывная + дискретная	Непрерывный	Смешанный случайный процесс

Читатель легко заметит, что нами были проиллюстрированы далеко не все виды случайных процессов, представленных в таблице. При рассмотрении вариантов мы применили несколько формальный подход, заключающийся в переборе всех возможных вариантов. Но оказывается,

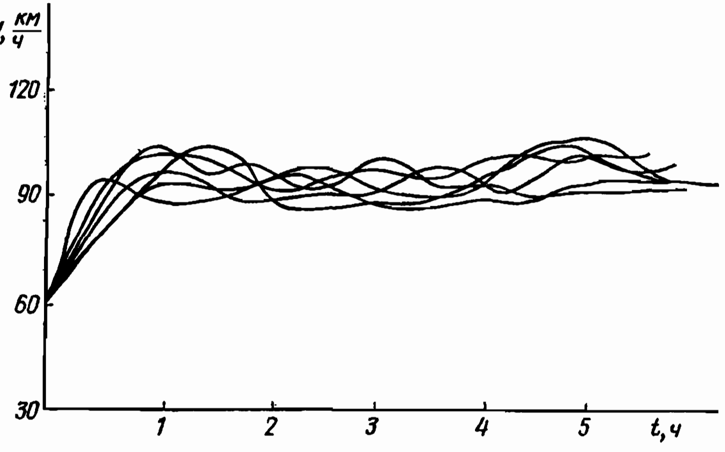


Рис. 3

все эти варианты применяются в настоящее время при математическом моделировании тех или иных явлений в науке и технике. Отметим здесь еще одно важное обстоятельство. Выше мы ограничивались лишь анализом случайных процессов. Чрезвычайно важной задачей является всегда не только констатация каких-то фактов, но и возможность активного воздействия на процесс с целью управления им для получения максимального эффекта. Но разве можно управлять случайными событиями и в целом случайностью? Да, оказывается, можно, и подобные процессы так и называются — управляемыми! Для иллюстрации приведем очень простой и снова игровой пример.

Все мы играли в детстве в игру «горячо-холодно». Заключается она в том, что водящему завязывают глаза, выводят на середину комнаты, несколько раз вращают для полной потери ориентировки и потом заставляют найти кого-нибудь из играющих, находящихся у стен комнаты. После каждого шага водящего присутствующие оживленно комментируют правильность его действий и корректируют направление, подавая команды-подсказки «горячо-холодно». Каждый шаг водящий делает в случайном на-

правлении, но случайность здесь какая-то неполная, частично управляемая. Теперь уже читатель легко заметит, что весь процесс игры может быть описан с помощью дискретной марковской цепи, так как каждый шаг, т е. изменение состояния (под состоянием здесь следует понимать координаты водящего), определяется только настоящим состоянием и никак не связан с какой-либо предысторией. Марковские управляемые случайные процессы необычайно широко применяются в настоящее время в технике, и мы, конечно, расскажем об этом более подробно на конкретных примерах.

В заключение надо сказать, что само понятие «случайный процесс» появилось в науке сравнительно недавно. Если считать, что возраст теории вероятностей составляет сейчас примерно три с половиной столетия, то теории случайных процессов всего лишь полвека! Появление и исследование случайных процессов было вызвано необходимостью описания процессов, в которых случайные величины изменяются во времени — динамикой случайных величин. С помощью таких моделей было решено множество важных научных и практических задач.

1.2. Мы держим пари с Джимом Смайли и... выигрываем!

Помните великолепный рассказ Марка Твена «Знаменитая скачущая лягушка из Калавераса»? Героем его был отчаянный спорщик Джим Смайли: «...чудак он был порядочный: вечно держал пари по поводу всего, что ни попадается на глаза, лишь бы нашелся охотник поспорить с ним, а если не находился, он сам держал против... Идут конские скачки — он, в конце концов, либо загребет хорошие денежки, либо проиграется в пух и прах, собаки дерутся — он держит пари, кошки дерутся — он держит пари, петухи дерутся — он держит пари, да чего там, сядут две птицы на забор — он и тут держит пари... Стоит ему увидеть, что жук ползет куда-нибудь,— он сейчас же держит пари: скоро ли жук доползет до места, куда бы тот ни полз; и если вы примете пари, он за этим жуком пойдет хоть в Мексику, а уж непременно дознается, куда он полз и сколько времени пробыл в дороге...» *

Чаще всего Джим все пари выигрывал: кобылка, ко-

* Твен М. Собр. соч.— Т. 10.— С. 30—38.

торая так и называлась — «тише едешь, дальше будешь», всегда приходила к финишу первой, невзрачный бульдог, который обладал особой хваткой и побеждал во всех собачьих драках, и наконец... специально дрессированная лягушка, которая по команде ловила мух и прыгала в длину дальше всех лягушек в Калаверасе. Проигрывал Джим редко, да и то из-за всяких нечестных уловок его противников. Сначала он проиграл, потому что противник его бульдога не имел задних ног, в которые бульдог обыкновенно вцеплялся мертвой хваткой и побеждал. Потом потерпел сокрушительное поражение его любимый Даниэл Уэбстер (именно так называл Джим лягушку-чемпиона). Это произошло, когда некий проходимец всыпал в рот Уэбстеру пригоршню дроби, лишившую лягушку обычной прыгучести.

Но ведь побеждал Джим Смайли не случайно. Судя по рассказу, он обладал терпением, наблюдательностью и вниманием, что позволяло ему предвидеть результаты многих случайных явлений. Мы так подробно на этом остановились, потому что хотим использовать забавных персонажей М. Твена для дальнейшего рассказа о цепях Маркова.

Представьте себе, что мы оказались с Джимом Смайли на берегу пруда или озера:

— Держу пари три против одного,— говорит Джим,— что лягушка, которая сидит на кочке, сейчас перепрыгнет на лист кувшинки!

Действительно, вскоре после этих слов лягушка оказалась на плавающем листе.

— А сейчас,— продолжает он,— скорее всего ей захочется нырнуть в воду.

— Нет,— возражаю я,— даю пять против одного, что лягушка вернется на кочку.

И представьте себе... снова прав Джим!

Конечно, и дальше он выигрывал раз за разом. Ведь на его стороне хорошее знание повадок лягушек, внимание и наблюдательность. По-видимому, он долго следил за ними и примерно представляет, как часто прыгает лягушка в том или ином направлении. Но нам может помочь теория марковских цепей. Давайте попробуем честно, без надувательства с ее помощью выиграть пари у самого Джима Смайли!

Прежде чем применять какую-либо теорию, надо оговорить границы ее применения, или, иначе говоря, внести допущения, устанавливающие связь между математической моделью и реальностью.

Во-первых, так как мы применяем теорию вероятностей, должна быть уверенность, что количественные характеристики случайных событий наблюдаются при достаточно большом числе опытов и незначительно колеблются около какого-то среднего значения (обладают статистической устойчивостью). В дальнейшем мы без нужды не будем это снова оговаривать, так как вся теория вероятностей может применяться только при этом условии.

Во-вторых, будем считать, что наша лягушка совершает свои прыжки (меняет состояние) строго через определенные промежутки времени, например через одну минуту.

Так как предсказать точно поведение лягушки невозможно, то с учетом всех наших допущений мы имеем дело со случайным процессом с дискретными состояниями и временем. Состояния будут здесь такими:

К — лягушка сидит на кочке;
Л — лягушка находится на листе;
В — лягушка плавает в воде.

Попадания в любые состояния представляют случайные события, которые мы будем обозначать теми же буквами.

Теперь запасемся терпением и понаблюдаем за лягушками, чтобы получить некоторую необходимую исходную статистическую информацию.

После наблюдения оказалось, что примерно четвертую часть прыжков лягушка совершает с кочки в воду и такую же часть — с кочки на лист, а вот оставшуюся половину заменяет «солнечными ваннами» на кочке. Из воды лягушка половину прыжков совершает на лист, а половину — на кочку. В воде она более минуты не задерживается. И наконец, после минутного пребывания на листе лягушка в $^1/_3$ случаев прыгает в воду, а в $^2/_3$ — на кочку.

Запишем результаты наших наблюдений. Все вероятности, которые мы получили, являются условными, так как каждое из них связано с определенным состоянием. Так, если лягушка была на кочке, то вероятность того, что она там и останется $P(\text{К}/\text{К})=0{,}5$. Условная вероятность прыжка с кочки на лист $P(\text{Л}/\text{К})=0{,}25$ и, наконец, с кочки в воду — $P(\text{В}/\text{К})=0{,}25$. Если лягушка находится в воде, то условные вероятности будут такие:

P(К/В) = 0,5; P(Л/В) = 0,5; P(В/В) = 0, а если на листе, то P(К/Л) = 0,67; P(В/Л) = 0,33; P(Л/Л) = 0.

Поскольку вероятность перехода в каждое последующее состояние зависит от предыдущего, то наблюдаемую нами последовательность прыжков лягушки мы можем трактовать как дискретную марковскую цепь. Эту цепь можно считать математической моделью процесса передвижения лягушки.

Более компактно и наглядно результаты наших наблюдений записываются в виде таблицы, или матрицы:

$$\Pi_{[3]} = \begin{array}{r} \\ \text{К} \\ \text{В} \\ \text{Л} \end{array} \left[\begin{array}{lll} \text{К} & \text{В} & \text{Л} \\ 0{,}50 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}50 & 0 & 0{,}50 \\ 0{,}67 & 0{,}33 & 0 \end{array} \right]. \qquad (1.2)$$

Такая матрица обычно обозначается буквой П и называется матрицей перехода, а цифры, стоящие на пересечении столбцов и строк, есть не что иное, как вероятности перехода в состояния — переходные вероятности. Посмотрим на нее более внимательно. Если просуммировать любую ее строку, мы получаем обязательно единицу. Кроме того, на пересечениях столбцов и строк стоят положительные числа (или нули).

Оказывается, такие свойства матрицы объясняются вовсе не авторскими ухищрениями. Во-первых, неотрицательность элементов вытекает из того, что все элементы матрицы — вероятности, которые могут изменяться только от нуля до единицы.

Второе свойство объяснить несколько труднее, но мы попытаемся это сделать.

В начале рассказа мы предположили, что с нашей героиней могут произойти только три события, соответствующие переходам в состояния К, В, Л. Таким образом, за время нашего наблюдения должно произойти обязательно какое-либо из них. Говорят, что в этом случае события образуют полную группу. Кроме того, мы должны полагать, что с лягушкой не могут одновременно случиться любые два из упомянутых событий. Такие события называют попарно несовместными.

В теории вероятностей строго доказывается, что сумма вероятностей полной группы попарно несовместных событий равна единице, то есть применительно к нашему случаю

$$P(\text{К}/\text{К})+P(\text{К}/\text{В})+P(\text{К}/\text{Л})=1;$$
$$P(\text{В}/\text{В})+P(\text{В}/\text{К})+P(\text{В}/\text{Л})=1;$$
$$P(\text{Л}/\text{Л})+P(\text{Л}/\text{В})+P(\text{Л}/\text{К})=1,$$

или в общем виде

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ij}=1, \text{ где } n=3,\ i,\ j=\text{К, В, Л}.$$

Матрицы, обладающие совокупностью указанных выше свойств, называют стохастическими. Итак, переходная матрица в данном случае является стохастической.

Стохастическая матрица — очень интересный математический объект. Поразительными являются возможности ее применения для описания самых различных процессов и явлений. С ее помощью, например, моделируется работа автоматических устройств и, более того, стохастическая матрица описывает работу так называемого вероятностного автомата, в свою очередь являющегося абстрактной моделью реальных технических устройств управления в условиях, когда на систему оказывают влияние случайные воздействия.

Запись информации о поведении лягушки в виде матрицы, безусловно, очень удобна и наглядна. Кроме того, она позволяет легко производить различные преобразования и выкладки, на основании которых вычисляются многие важные характеристики случайного процесса. Особенно существенным это оказывается при использовании ЭВМ, где разработаны специальные стандартные процедуры вычислений с помощью матриц.

Еще более наглядно все передвижения нашей попрыгуньи можно представить с помощью графов. Графы — сравнительно новое математическое понятие, поэтому трудно удержаться от соблазна хотя бы немного рассказать о них читателю. Интересна также их история.

Не зря говорят: «Новое — это хорошо забытое старое». Действительно, первым ученым, опубликовавшим научную работу по теории графов, считают великого Леонарда Эйлера. В 1736 г., будучи двадцатилетним юношей, он задумался над интересной задачей: можно ли прогуляться по Кенигсбергу (ныне Калининград) так, чтобы, начав с любого места, вернуться в него, пройдя по каждому из семи мостов города не более одного раза? (рис. 4).

Как истинный математик Эйлер сразу же предельно схематизировал задачу. Поскольку по условию не имеет значения путь, пройденный по суше, то и левый и правый берега реки Прегель, а также острова он условно представил в виде точек. Соединяющие их мосты соответственно изобразил линиями (рис. 4, *б*). Это и есть граф! С его помощью Эйлер все-таки решил задачу. Ответ оказался отрицательным. Но кроме того, великий математик теоретически доказал, что подобный маршрут возможен, если каждая вершина графа (*a*, *b*, *c*,) будет иметь четное число соединяющих линий (ребер). Кстати, для этого надо было бы в Кенигсберге построить еще три моста!

Самым важным оказывается то, что с помощью графов можно наглядно и точно изобразить практически любые связи между объектами различной природы. Долгое время графы, правда, под другими названиями встречались в математических головоломках и развлечениях, пока ровно два века спустя венгерский математик Д. Кёниг не опубликовал первую монографию, в которой графы рассматривались как новые математические объекты. Здесь же были заложены и основы их теории. Можно считать, что с тех пор графы родились вторично и, более того, начали свое триумфальное шествие в самых различных науках, особенно в кибернетике, электротехнике, радиотехнике и т. д.

Но можно ли применить графы в нашем случае? Да, оказывается, дважды. Во-первых, в виде графа можно представить все возможные варианты событий, которые могут произойти с лягушкой не только при первом, но и при последующих прыжках. Точки — вершины графа — тогда будут обозначать соответствующие события, а линии — связи между ними. На каждой линии — ребре графа — можно указать соответствующую данному событию

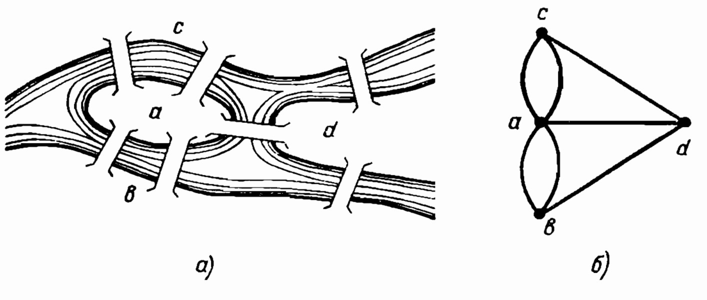


Рис. 4

вероятность (вес ребра). Такой граф называют взвешенным. В теории вероятностей он носит название дерева событий или дерева возможных исходов. Граф, отображающий один из вариантов развития событий, при условии, если лягушка начала свои прыжки с кочки, изображен на рис. 5. Кроме наглядности, такой граф позволяет легко подсчитывать вероятности возможных исходов после нескольких этапов процесса. При этом используются основные теоремы теории вероятностей.

Другая, более удобная форма графа представлена на рис. 6. Здесь вершины обозначают уже не события, а состояния системы (местоположение лягушки). Вершины графа соединяются стрелками, указывающими направления возможных переходов из состояния в состояние. Возле каждой линии, называемой в этом случае уже дугой, указывается соответствующая вероятность перехода. Это ориентированный взвешенный граф (или орграф). В теории марковских цепей он носит название графа перехо-

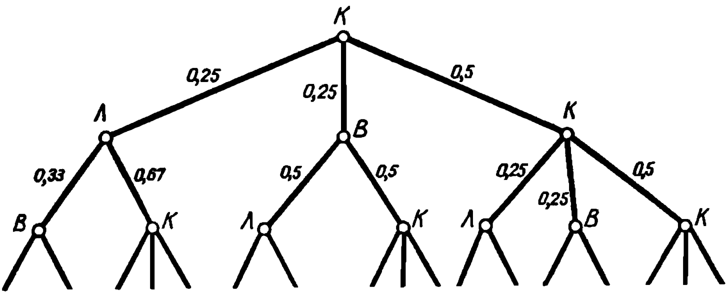


Рис. 5

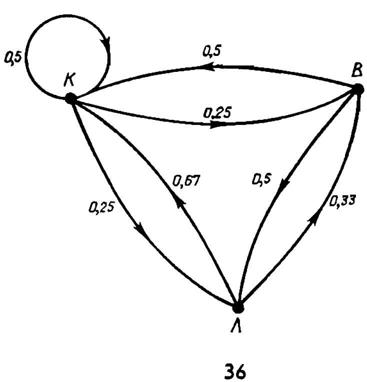


Рис. 6

дов. Заметим, что если возможным является переход в прежнее состояние, то дуга графа образует у данной вершины (состояния) петлю.

Подумаем теперь еще об одном важном факте. Мы считали, что прыжки лягушки представляют последовательность зависимых испытаний, в которых вероятности переходов связаны только с предшествующими состояниями. Это означает, что, образно говоря, лягушка каждый раз перед очередным прыжком с помощью какого-то датчика случайных чисел (например, монеты) решает, куда ей прыгнуть дальше. Говорят, что в этом случае мы имеем дело с процессом без последействия, или простой цепью Маркова.

Можно предположить, что каким-то образом мы, подобно Джиму Смайли, путем специальных тренировок приучили лягушку к более сложным действиям. Например, если она оказалась в данный момент на листе, а перед этим была на кочке, то дальше, вероятнее всего, ей захочется нырнуть в воду. Или, наоборот, поплавав две минуты (то есть два шага в цепи испытаний), ей скорее всего захочется на сушу, причем даже не на лист, а именно на кочку, где уютнее и теплее. Таким образом, мы предполагаем, что наша лягушка «помнит» свой предшествующий путь. Можно, конечно, ввести большее число предшествующих состояний и заставить бедную лягушку помнить еще более отдаленные события, например, как она вообще оказалась в этом месте озера, и в зависимости от этого принимать решения. То есть вероятная зависимость может быть простой, когда поведение рассматриваемого нами объекта полностью определяется предыдущим состоянием, или сложной, когда учитываются какие-то более ранние состояния (предыстория). По этому признаку цепи Маркова называют простыми или сложными.

Зададим себе теперь такой вопрос: будут ли все время постоянными значения вероятностей перехода из состояния в состояние? По-видимому, в данном случае нет. Ведь поведение лягушки (и ее «настроение») может зависеть от погоды, времени года и т. д. Так вот, цепи Маркова, в которых эта зависимость учитывается, называют неоднородными. Чаще всего полагают, что на рассматриваемом отрезке времени переходные вероятности не зависят от номера испытания, и такие цепи носят название однородных. В дальнейшем мы будем предполагать, что все наши примеры, за исключением специально оговариваемых случаев, моделируются с помощью простых однородных марковских цепей.

После наведения некоторого математического порядка пора вернуться к нашему примеру. Ведь мы обещали с помощью математики выиграть пари у самого Джима Смайли. Информация о наиболее вероятном поведении лягушки, конечно, нам поможет, но это еще далеко не все. Пока речь шла об очень простых вещах, для которых, может быть, и не надо было городить огород в виде матриц и графов. Сейчас можно только сказать, что с помощью матрицы удобно и наглядно описан случайный процесс. При наличии переходной матрицы спорить с Джимом на старых условиях стало уже менее интересно. Игра идет примерно вничью и даже с некоторым перевесом в нашу сторону, потому что мы имеем перед глазами надежные статистические данные, а наш противник по старой привычке иногда полагается на интуицию. Кроме того, мы знаем еще один маленький секрет, о котором расскажем несколько позже.

Но сейчас пока о другом:

— А что, Джим, можете ли вы сказать, где будет та лягушка, ну, например, ровно через пять минут?

— Конечно,— спокойно отвечает Джим,— ставлю сорок долларов против пяти, что она будет сидеть на том большом листе.

— Хорошо,— отвечаю я и после некоторого раздумья добавляю: — Но, по-моему, через пять минут она будет на кочке!

Внимательно следим за лягушкой и временем. Через пять минут лягушка... где вы думаете? Конечно... на кочке!

— Это ничего не значит,— говорит Смайли,— ровно ничего. Давайте посмотрим, где она будет еще через три минуты...

Не стоит дальше продолжать этот вымышленный диалог. Выигрываю чаще всего я! Но как мне это удается? Как?

Для этого, конечно, одной переходной матрицы уже недостаточно. Ведь она описывает поведение лягушки только на одном шаге (испытании). А что будет на следующем, третьем, четвертом, пятом и т. д.? Но давайте по порядку: узнаем сначала, где будет находиться лягушка после первой минуты. Кажется, это можно очень просто определить, если посмотреть на матрицу.

Да, это было бы очень легко сделать, если бы было известно, с какого состояния наша лягушка начинает свой путь,— так называемое начальное состояние. Если же оно нам точно неизвестно, им можно как-то задаться.

Существуют два способа задания начального состояния: детерминированный (неслучайный) и случайный. Первый очень прост и, конечно, неточен. Из каких-либо соображений (условий задачи, некоторых требований и т. д.) выбирается одно начальное состояние.

Например, начальным состоянием у нас может быть K, и тогда возможные результаты первого испытания будут определяться этой же строкой (посмотрите на матрицу: если начальное состояние K, то через минуту лягушка с вероятностью 0,5 будет сидеть на кочке, а с равными вероятностями 0,25 может оказаться на листе или в воде). Если же мы зададим другое начальное состояние, то наш прогноз, конечно, сильно изменится. Поэтому желательно было бы внести бо́льшую определенность в выбор начальных условий. Такую возможность предоставляет нам второй способ. Он более точен, но зато и более трудоемок. Здесь надо, предварительно понаблюдав за лягушкой, установить вероятности ее появления в том или ином «стартовом» состоянии.

Допустим, что нам удалось установить, как часто лягушка начинает свое путешествие с той или иной точки. Оказалось, что начальные вероятности образуют набор: $^1/_3$, $^1/_3$, $^1/_3$. Легко догадаться, что и в этом случае события несовместны и образуют полную группу. Соответственно сумма вероятностей должна равняться единице. Очевидно, если одна из вероятностей будет равна единице, то остальные — нулю, и случайный способ задания начальных вероятностей переходит в детерминированный. Так, например, если бы мы все время заставали ее на кочке, то начальные вероятности были бы равны 1, 0, 0, а если в воде, то 0, 1, 0.

В современной математике (векторной алгебре) такой упорядоченный набор величин или чисел называется вектором, а сами величины или числа — компонентами вектора. Различают вектор-строку (компоненты записываются в виде одной строки) и вектор-столбец (компоненты записываются в виде одного столбца). Условимся в дальнейшем при обозначении вектора-строки набор его компонентов заключать в угловые скобки $< \ >$, а вектора-столбца — в прямые [ ]. Например, вектор-строку начальных вероятностей можно записать так:

$$P^{(0)}_{<3>} = <P^{(0)}_1,\ P^{(0)}_2,\ P^{(0)}_3>.$$

Обычно понятием вектора пользуется механика; скорость, ускорение, сила — все это достаточно наглядно, понятно и может быть легко представлено графически. Как же можно истолковать понятие вектора в случае, когда речь идет о вероятностях?

Принципиально здесь разницы нет. Просто по осям координат в механике (или электротехнике) откладывались соответствующие физические величины, описывающие движеиие в пространстве, которое нас окружает в обычном его представлении, в то время как в рассматриваемом случае вектор описывает движение в абстрактном, воображаемом пространстве — пространстве вероятностей. Если компонентов у вектора всего три (пространство трехмерно), то его можно легко представить графически. Ну а если их больше? Тогда, конечно, графически представить его ие удается, хотя это никого не смущает, ведь в математике часто приходится иметь дело с абстрактными образами. К таким относится и многомерное пространство, широко применяемое сейчас в самых различных науках.

Итак, мы знаем теперь, как задаются в нашем случае начальные условия. Это очень важно. Считается, что марковская цепь задана, если известны вектор начальных вероятностей и матрица перехода. Все это у нас есть. Значит, можно применять теорию и с ее помощью решать более сложные задачи.

К одной из таких задач относится, в частности, та, с помощью которой мы хотели наголову разгромить самого Джима Смайли.

Напомним, что речь идет о предсказании состояния лягушки через какое-то заданное время (число шагов). Мы говорили о пяти шагах, но, конечно, их может быть любое количество.

Пользуясь основными теоремами теории вероятностей, а также правилами векторной алгебры, можно легко показать, что вероятности положения лягушки (состояния системы) после первого этапа (в данном случае минуты) определяются как произведение вектора начальных вероятностей на матрицу перехода, то есть

$$P^{(1)}_{<k>} = P^{(0)}_{<k>} \cdot \Pi. \qquad (1.3)$$

Произведение вектора на матрицу (но не наоборот) есть вектор. Проделав необходимые вычисления, получим:

$$P^{(1)}_{<3>} = P^{(0)}_{<3>} \cdot \Pi = \langle \frac{5}{9}, \frac{7}{36}, \frac{1}{4} \rangle .$$

Это означает, что после первого шага (или этапа) наша лягушка с вероятностью $^5/_9$ окажется на кочке, $^7/_{36}$ — в воде, $^1/_4$ — на листе. Но ведь это только после первого шага, а после второго?

Очевидно, можно считать, что вектор вероятностей состояний после первого этапа является одновременно и начальным для второго. Тогда, для того чтобы получить данные о вероятностях состояний после второго прыжка, нужно снова умножить вектор $P^{(1)}_{\langle 3 \rangle}$ на матрицу перехода.

Конечно, все эти рассуждения остаются справедливыми для любого последующего этапа, в том числе и для интересующего нас пятого или в общем случае для какого-то n-го.

Итак, можно сразу написать, что вероятности положения лягушки после пятой минуты (этапа или шага процесса) будут равны

$$P^{(5)}_{<3>} = P^{(4)}_{<3>} \cdot \Pi,$$

а для n-го:

$$P^{(n)}_{\langle k \rangle} = P^{(n-1)}_{\langle k \rangle} \cdot \Pi. \qquad (1.4)$$

Выражение (1.4) занимает очень важное место в теории цепей Маркова и называется уравнением Колмогорова — Чепмена по именам математиков, получивших их независимо друг от друга. Эти уравнения относятся к классу так называемых рекуррентных соотношений, позволяющих вычислить вероятности состояний марковского случайного процесса на любом шаге при наличии информации о предшествующих состояниях.

Те же самые вероятности, оказывается, можно вычислить и другим путем, если кроме знакомой уже нам матрицы перехода на одном шаге ввести новое понятие — матрицы перехода через n шагов. Обозначим ее $\Pi^{(n)}$ и покажем, что она легко получается, если возвести в n-ю степень матрицу Π.

В самом деле, если подставить (1.2) в (1.3), то найдем:

$$P^{(2)}_{\langle k \rangle} = P^{(0)}_{\langle k \rangle} \cdot \Pi \cdot \Pi = P^{(0)}_{\langle k \rangle} \cdot \Pi^2. \qquad (1.5)$$

Очевидно, в общем случае

$$P_{\langle k \rangle}^{(n)} = P_{\langle k \rangle}^{(0)} \cdot \Pi^n. \tag{1.6}$$

Итак, мы получили вероятностную картину процесса при любом числе переходов. Это дает нам возможность побеждать в лягушачьем (или каком-либо другом аналогичном) пари не только Джима Смайли, но и всякого другого подобного спорщика.

Если же говорить серьезно, рекуррентные уравнения Колмогорова — Чепмена применяются для решения многих важных задач современной науки и техники. Это мы еще неоднократно продемонстрируем на страницах нашей книги. Но ведь мы еще не закончили знакомства с цепями.

Пока нам известно, что цепи Маркова могут быть простыми и сложными, однородными и неоднородными. Узнали мы также о том, как можно определить состояние системы через какое-то заданное количество шагов.

С этим багажом — дальше, в путь!

1.3. Блуждающая шайба

«...После сильнейшего броска Третьяк парирует шайбу, она попадает к Фетисову, который в одно касание переправляет ее Крутову, тот — к Макарову и... вратарь канадцев бессилен! Гооо...ол!!!» Ликующе кричит комментатор, ревут трибуны и, подобно сетке в воротах, сладостно трепещут сердца болельщиков...

Популярности этой стремительной и динамичной игры могут позавидовать многие виды спорта. Хоккей — это смелость, филигранное мастерство, мгновенная смена событий, зачастую невероятные и непредсказуемые повороты сюжета. Нам даже кажется, что возросший в последнее время интерес к «старшему брату» — футболу в значительной степени объясняется его хоккеизацией: быстротой и красотой комбинаций, точностью передач и ударов по воротам. Во время хоккейной игры болельщики, как завороженные, напряженно следят за стремительными перемещениями игроков и шайбы. Если воспроизвести все отрезки траектории шайбы во время игры, например, путем фотографирования ее светящегося следа, то получится довольно замысловатая картина (рис. 7). Что она вам напоминает?

Ответ, конечно, будет сильно зависеть от воображения:

кто-то увидит в ней рисунок своего двухлетнего сына, другой — картину художника-абстракциониста «Осеннее утро»; третий — что-то еще... Но все-таки тот, кто знаком с физикой хотя бы в пределах программы средней школы, узнает здесь широко известное броуновское движение!

И действительно, даже знаменитый Н. Винер, сделавший огромный вклад в создание математической теории броуновского движения, сравнивал его с игрой в пушбол. В этой игре команды ударами рук пытаются загнать в ворота огромный мяч. Говорят, всякое сравнение хромает. Наше сравнение броуновского движения с траекторией полета шайбы в хоккее, возможно, «хромает на обе ноги», потому что в броуновском движении молекулы беспорядочно толкают частицу в разные стороны. Когда в какой-то случайный момент окажется, что силы молекул «игроков» одной «молекулярной команды» совпадут и превысят сумму сил другой, то частица переместится в каком-то определенном направлении. Это, конечно, больше похоже на пушбол, чем на хоккей или футбол, где перемещение мяча или шайбы все-таки более осмысленно и целенаправленно. Но мы сейчас заговорили о хоккее и футболе (кстати, здесь может фигурировать любая коллективная игра с мячом) не для того, чтобы начать создавать их математическую модель. Просто на примерах, которые наглядны и понятны многим, легче продолжить наше знакомство с марковскими цепями. Правда, для этого нам потребуется предельно упростить реальную картину игры,

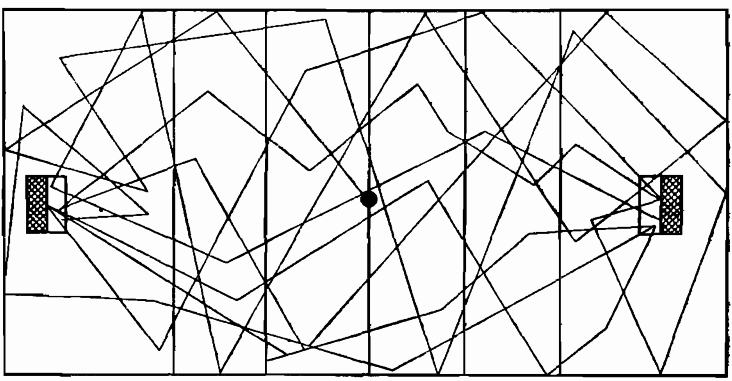


Рис. 7

хотя для некоторых болельщиков такие упрощения, возможно, покажутся кощунственными.

Изображенные нами события в приведенном выше фрагменте игры вполне реальны, но, конечно, возможны и другие варианты. Во-первых, на пути шайбы мог оказаться игрок команды противников, и тогда все пошло бы по-другому. Во-вторых, часто шайба передается от игрока к игроку не мгновенно, а после длительного движения — ведения или обводки. В-третьих... но давайте оставим все эти нюансы на долю спортивных журналистов и комментаторов. Поскольку мы хотим рассмотреть некоторую идеальную схему, то нам придется ввести ряд допущений.

Будем полагать, что шайба передается от игрока к игроку мгновенно при их неподвижном положении. Такое допущение возможно потому, что шайба обычно перемещается гораздо быстрее игрока. Кроме того, в игре часто бывают статичные моменты, когда игроки занимают выгодные позиции и передают шайбу друг другу. При ведении шайбы можно считать, что игрок тоже передает ее на некоторое расстояние, но только самому себе. В этом случае можно предположить, что на каком-то определенном расстоянии все время оказывается игрок своей же команды, то есть мы снова приходим к нашей схеме.

Кроме того, примем, что игроки расположены примерно на одинаковых расстояниях друг от друга. На первый взгляд это кажется очень грубым предположением, но напомним, что речь идет только об идеализированной схеме, а вся траектория может быть разбита на некоторые примерно равные отрезки, и отсутствие игрока в каких-то точках может быть истолковано в виде определенного события.

И наконец, еще одно условие. Для нашей модели совершенно не нужно рассматривать реальную зигзагообразную траекторию. Ее можно представить в виде прямой линии с точками, в которых случайно оказались те или иные игроки. Итак, вместо красочного, динамичного и увлекательного зрелища унылая прямая с точками (рис. 8)!

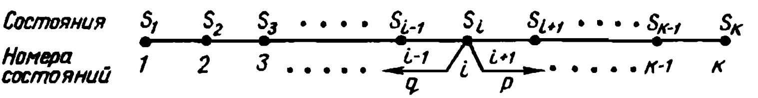


Рис. 8

Но так бывает часто. Потрясающее по красоте зрелище старта ракеты, стремительный полет реактивного лайнера — все это тоже схематизируется при создании математических моделей в сравнительно простых изображениях.

И вот, шайба в игре! Условимся говорить, что она находится в состоянии i, если в данный момент шайба оказалась у i-го игрока. Реальный игрок, как уже говорилось, продолжая игру, может избирать «ход» из множества вариантов. Нашему же «теоретическому» мы предоставляем только две возможности: передать шайбу $i+1$-му игроку либо отдать ее обратно $i-1$-му. Очевидно, первый вариант он изберет, если $i+1$-м оказался свой игрок, а второй — при неблагоприятной ситуации. Иногда, правда, в игре мы наблюдаем обратную картину, но это может быть связано либо с ошибкой, либо с какой-нибудь тактической хитростью. Допустим, что при попадании шайбы к любому игроку он с вероятностью p передает ее дальше и с вероятностью $q=1-p$ отдает обратно. Полет шайбы мимо нашей условной точки (игрока) мы исключаем, полагая, что игроки-«теоретики» достаточно умелы и внимательны.

Согласно условиям нашей идеализированной схемы вероятность перехода из одного (например, i-го) состояния в другое ($i+1$) не зависит от того, каким образом там оказалась шайба, то есть от предыстории процесса.

Итак, при учете всех сделанных допущений математическая модель игры представляет простую однородную цепь Маркова, которая, как мы уже знаем, полностью характеризуется матрицей перехода Π и вектором начальных вероятностей.

Идеализированная схема, которую мы с таким трудом получили, широко известна в науке под названием случайных блужданий. Несмотря на кажущуюся условность, к такой схеме, оказывается, можно свести множество реальных явлений. Но пожалуй, наиболее важным приложением схемы случайных блужданий является молекулярная физика, точнее говоря, броуновское движение! Вот и снова мы пришли к нему. Это очень хорошо демонстрирует универсальность математических моделей.

От шайбы до молекулы! Более того, при популярном рассказе о броуновском движении физики обычно начинают с образного примера пьяницы, пытающегося добраться кратчайшим путем из центра до края квадратной площади. Строго подсчитывается, сколько в среднем ему потребуется времени, чтобы выбраться с площади. Но почему пьяница? Зачем используется такой непривлекательный образ? Главным для ученых здесь оказывается случайность шагов по траектории и отсутствие всякой связи каждого последующего шага с предшествующими. Но ведь теперь-то мы знаем, что это можно представить в виде простой марковской цепи, хотя в принципе могут быть использованы и другие вероятностные модели. Но для нас схема случайных блужданий имеет сейчас чисто познавательное значение. Оказывается, с ее помощью очень удобно демонстрировать все виды марковских цепей. Для этого надо, в частности, оговорить условия поведения блуждающего объекта в граничных точках 1 и k.

Вот здесь привлечение «хоккейной модели» позволяет сделать это в простой и наглядной форме, так как в крайних точках, конечно, будут располагаться ворота. Если в соседних с крайними точках 2 и $k-1$ случайно окажутся защитники своей команды, то, естественно, при попадании шайбы к ним она будет отражена обратно. «Чужие» нападающие, конечно же, будут стремиться поразить ворота. В случае броска по воротам вратарь может отбить шайбу, поймать или пропустить ее в ворота. Кроме того, довольно часто (гораздо чаще, чем хотелось бы болельщикам) шайба либо ударяется в штангу, либо пролетает мимо ворот и отскакивает от борта снова в поле.

Но в нашей схеме не требуется излишней детализации событий, и мы можем их, как говорят, укрупнить. Так, для нас оказывается безразличным, поймал ли вратарь шайбу или пропустил ее в ворота. С точки зрения теории более важным будет тот факт, что по правилам и в том и в другом случае произойдет остановка игры и начнется новый процесс случайных блужданий, но уже с другими начальными условиями. Большой условностью, конечно, будет еще одно укрупнение событий, заключающееся в том, что отражение шайбы вратарем, штангой или бортом после промаха представляет для нашей схемы одно и то же событие. Правда, несколько позже мы попытаемся учесть некоторое различие в этих фактах. Итак, рассмотрим основные варианты случайных блужданий с учетом рассмотренных граничных условий.

1. После броска из точек 2 или $k-1$ шайба может быть поймана или пропущена вратарем. Поскольку в этих случаях согласно правилам игра (случайный процесс) останавливается, то граничные состояния S_1 и S_k называ-

ются поглощающими, а сам процесс случайного блуждания — процессом с поглощением.

В общем случае число поглощающих состояний может быть любым. В нашем примере они соответствуют всякой остановке игры (нарушение правил, вылет шайбы за пределы площадки и т. д.). Поскольку при попадании в поглощающее состояние процесс случайного блуждания прекращается, то, очевидно, вероятность перехода из него в любое другое состояние будет равна нулю. А так как согласно определению и выход из поглощающего состояния невозможен, то вероятность пребывания системы в нем (то есть перехода «из него в него») будет равна единице. Математически это условие для поглощающих состояний записывается так:

$$P_{ij}=\begin{cases}1 \text{ при } j=i;\\ 0 \text{ при } j\neq i,\end{cases}$$

где i и j — номера каких-либо состояний. Из этих равенств вытекает очень простое правило: если какое-то состояние поглощающее, то в i-й строке матрицы перехода диагональный элемент P_{ii} равен единице, а все остальные — нулю.

Тогда для самого простого варианта — случайных блужданий с двумя крайними поглощающими состояниями — матрица перехода, описывающая возможные состояния системы (в данном случае игры), будет иметь вид:

$$\Pi_{[k]}=\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{k-1} \\ S_k \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (1.7)$$

В углах матрицы стоят единицы, то есть $P_{11}=1$ и $P_{kk}=1$. Очевидно, что из S_1 и S_k переходы в другие состояния невозможны, так как $P_{12}=P_{13}=\ldots P_{k,\,k-1}=0$.

2. Но вот другой случай. После броска по воротам из точек 2 или $k-1$ шайба отскакивает обратно и оказывается снова в тех же точках. Математически это означает, что переходные вероятности P_{12} и $P_{k,\,k-1}$ равняются единице. Очевидно, что при этом невозможными будут переходы из точек 2 и $k-1$ в любые другие состояния и соответствующие переходные вероятности будут равными нулю.

Такой процесс называется случайным блужданием с отражением (или с полным отражением), а соответствующая ему матрица перехода имеет вид:

$$\Pi_{[k]} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{k-1} \\ S_k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_{k-1} & S_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{array} \right] \end{array}. \quad (1.8)$$

3. Допустим, что мы хотим иметь более точную модель, учитывающую как мастерство нападающих, так и умение вратарей. Тогда в модель надо ввести вероятность еще двух событий: отражение шайбы и гол (или накрытие шайбы вратарем). Иными словами, мы будем полагать, что шайба с некоторой одинаковой вероятностью r попадает к вратарям, т. е. ловится ими или пропускается в ворота, а с вероятностью $1-r=s$ вратари отбивают ее на соседние с граничными точками S_2 и S_{k-1}. Поскольку в этом случае вероятности переходов из крайних точек в смежные с ними не равны единице, то процесс может быть назван случайным блужданием с частичным отражением. Описывающая его матрица, конечно, видоизменится. Теперь угловыми ее элементами будут вероятности r и соответственно $P_{12}=P_{k-1,\,k}=s$, так как $r+s=1$.

$$\Pi_{[k]} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{k-1} \\ S_k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_{k-1} & S_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} r & s & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s & r \end{array} \right] \end{array}. \quad (1.9)$$

Конечно, этот третий случай является самым общим из всех рассмотренных, и из него легко можно получить первые два. Действительно, при $P_{11}=P_{kk}=1$ и $P_{12}=P_{13}= =\ldots=P_{1k}=0$ $(P_{k1}=P_{k2}=\ldots=P_{k,\,k-1}=0)$ мы получаем блуждание с поглощением (матрица 1.7.), а при $P_{12}= =P_{k,\,k-1}=1$ и $P_{11}=P_{22}=\ldots=P_{kk}=0$ — блуждание с полным отражением. Если бы мы захотели приблизиться к реальности, то нужно было бы применять иные, более сложные варианты случайного блуждания, учитывающие, например, различный характер отражения в граничных точках (гол в ворота «синих», попадание в штангу «красных» и т. д.), возможности остановки процесса, т. е. поглощения, не только в граничных, но и во внутренних точках. В хоккее таких случаев предостаточно (любое нарушение правил, падение игрока, окончание времени игры и т. д.).

Для того чтобы познакомиться еще с некоторыми очень важными понятиями теории, упростим нашу модель до предела и рассмотрим случайное блуждание объекта (мы даже боимся назвать его шайбой, настолько это далеко от действительности), который имеет всего три состояния ($k=3$). Итак, блуждающий объект (шайба, лягушка, молекула, элементарная частица) может находиться либо в граничных, либо в одной-единственной внутренней точке.

В случае блуждания с полным поглощением в граничных точках матрица перехода примет уже знакомый нам вид:

$$\Pi_{[3]}=\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}. \tag{1.10}$$

Этой матрице можно придать иную, более упорядоченную форму. Перенумеруем для этого состояния. Крайние, поглощающие, назовем S_1 и S_2, а среднее — S_3 (рис. 9). Теперь матрица (1.10) примет иной вид:

$$\Pi_{[3]}=\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline q & p & 0 \end{array}\right] \end{array}. \tag{1.11}$$

Выделим тонкими линиями часть матрицы (блок, подматрицу), соответствующую поглощающим состояниям S_1 и S_2. Тогда даже в этом простейшем случае видно, что блоки матрицы образуют определенные классы состояний. Так, верхний левый угол (блок) соответствует поглощаю-

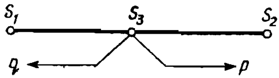


Рис. 9

щим состояниям. Вообще принадлежность того или иного состояния к какому-либо классу оценивается возможностью перехода системы из класса в класс и внутри данного класса. Так, очевидно, что если система в результате случайных блужданий оказалась в левом верхнем блоке, то она уже никогда его не покинет, ведь переходные вероятности $P_{12}=P_{13}=0$. Такой класс состояний называется возвратным (или существенным). Другой, так называемый невозвратный, класс, включающий здесь только одно состояние S_3, характерен тем, что система, покинув его, уже никогда в него не вернется, отсюда и название — невозвратный. Важным свойством этого класса состояний, которое мы продемонстрируем несколько позже, является возможность внутренних переходов из состояния в состояние.

Преобразование матрицы, которое мы проделали на очень простом примере, называется приведением ее к каноническому виду. Это преобразование нужно, конечно, не ради красоты. С помощью канонической формы сравнительно легко определяются некоторые очень важные характеристики марковских цепей. Рассмотрим поэтому ее несколько подробнее на более общем примере — переходной матрице с шестью состояниями:

$$\Pi_{[6]}= \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{array}\right] \end{array}. \qquad (1.12)$$

Разобьем снова и эту матрицу на блоки (подматрицы). Здесь это легко получается, так как мы заранее умышленно перенумеровали состояния. В реальных задачах это тоже, конечно, не составит труда.

Как и ранее, в матрице можно выделить два больших класса: $S_5 \div S_6$ и $S_1 \div S_4$.

Состояния S_5 и S_6 образуют невозвратный класс, так как, выйдя из него, то есть попав в состояния $S_1 \div S_4$, система уже в него не вернется (соответствующие переходные вероятности равны нулю). Класс, к которому принадлежат состояния $S_1 \div S_4$, возвратный, но его тоже можно разбить на два подкласса: первый из них объединяет состояния S_1 и S_2, а второй — S_3 и S_4. Эти подклассы между собой не сообщаются, они как бы изолированы. Обозначив отдельные блоки какими-либо символами, мы можем получить простую и наглядную запись рассматриваемого процесса:

$$\Pi_{[3]} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ R_1 & R_2 & Q \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

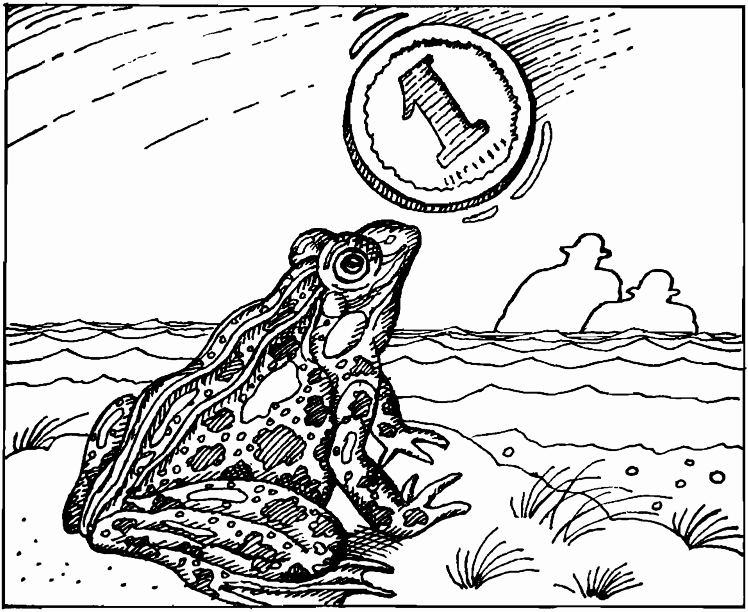
В канонической форме подматрицы $S_1 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$ и $S_2 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$ описывают переходы между состояниями 1-го и 2-го возвратных подклассов.

Подматрицы $R_1 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix}$ и $R_2 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix}$ отвечают переходам из невозвратного класса в 1-й и 2-й возвратные подклассы. Соответственно подматрица $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 \end{bmatrix}$ описывает поведение системы до выхода из невозвратного класса и, наконец, символом $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ обозначены так называемые нуль-матрицы, то есть матрицы, содержащие только нулевые элементы.

Сколько в цепи Маркова может быть изолированных подклассов (блоков)? Да сколько угодно. Число таких подклассов может равняться любому положительному целому числу — 1, 2, 3...

Если множество состояний цепи Маркова удается разбить на невозвратный класс и один или множество возвратных подклассов, то такая цепь называется разложимой. Неразложимая цепь Маркова содержит только возвратные подклассы (число их по-прежнему может быть любым), а невозвратный класс в ней вообще отсутствует.

Итак, этот параграф начался довольно динамично, а закончился скучноватыми определениями, на первый взгляд не связанными с реальными явлениями в природе и технике. Ниже мы покажем эту связь на примере нашего вымышленного диалога с литературным героем М. Твена, а дальше и на более конкретных и близких нам примерах.



1.4. Охота на... чемпиона! (Поглощающие цепи Маркова)

Конец рассказа М. Твена о знаменитой лягушке из Калавераса, как известно, печален. Проиграл герой — чем-то симпатичный Джим Смайли, погибла знаменитая лягушка-чемпион. Но, как следует из повествования, к счастью, Джим обладал завидным оптимизмом,и вряд ли его могли сломить такие неудачи. Поэтому мы вправе предположить, что после безвременной кончины Уэбстера старый спорщик мог заняться поиском новых «перспективных молодых спортсменов».

Следуя нашему сюжету, представим снова, что Джим и нам предложил принять участие в отлове будущего чемпиона.

И вот мы снова на берегу уже знакомого озера, вернее, на противоположных сторонах заросшего кувшинками небольшого заливчика. Знаток здешних мест выбрал его для охоты.

Ну что ж, будем ждать удачи! Это произойдет, когда какой-нибудь очередной «претендент в чемпионы» попадет в зону нашего «радиуса действий». Итак, мы притаились в ожидании... но не тут-то было! Ведь мы забыли о том, кто наш напарник!

— Послушай, парень,— кричит Джим.— Ставлю сорок против двух, что вон та будущая знаменитость, которая греется на солнышке возле цветка кувшинки прямо против тебя, через пять минут окажется у кого-то из нас в мешке!

Пари, конечно, можно снова выиграть, ведь нам известно, как определить состояние, в котором будет лягушка через пять минут. Поскольку речь идет о том, что она будет кем-то поймана, то эти состояния должны быть поглощающими. Кстати, если представить, что на наших местах в воде находились бы цапли или щуки, то этот термин, применяемый в теории марковских цепей в несколько иносказательном смысле, приобрел бы свое прямое, «гастрономическое» значение.

Да, можно было бы принять условия Джима и выиграть снова, но все-таки интереснее их усложнить, ну, например, так:

— А сколько лягушек нам надо поймать, Джим?

— Я думаю, что для хорошего выбора будет достаточно по дюжине,— отвечает он,— через час с небольшим мы это дело закончим.

— Нет,— с явно провокационной целью говорю я.— Думаю, что мы не управимся и за полтора!

— Тогда предлагаю на тех же условиях другое пари,— не унимается Джим.— Через час с четвертью мы закончим охоту, будем сидеть дома и отбирать из нашей добычи самых лучших спортсменов.

Конечно, пари должно быть честным и мы должны проявлять все свое усердие и ловкость, чтобы как можно раньше выполнить общее задание. Тем не менее и здесь выиграть пари помогут нам марковские цепи.

Из-за влияния самых различных случайных причин и трудно прогнозируемого поведения лягушек время на их поимку будет колебаться в некоторых пределах. Нам даже кажется, что Джим назначил час с четвертью, просто умножив шесть минут на двенадцать!

Теория позволит нам определить это время тоже в среднем, но более точно и обоснованно. Прежде чем рассказать, как это делается, немного упростим задачу. Допустим сначала, что ловлей лягушек занимается один Джим, а мы наблюдаем за ним издалека. Будем также считать, что охотник выбрал очень удачное место за кустом, рядом с которым плавает лист кувшинки.

Составим снова матрицу перехода, похожую на ранее рассмотренную. Надо только учесть изменившиеся условия. Ведь раньше наши лягушки безмятежно меняли свое состояние, теперь же после их прыжков на лист Джим, конечно, не промахнется. Поэтому состояние Л будет теперь поглощающим и вероятность перехода «лист — лист» будет $P(\text{Л}/\text{Л}) = 1$ и соответственно $P(\text{К}/\text{Л}) = 0$ и $P(\text{В}/\text{Л}) = 0$. Для того чтобы получить матрицу перехода поглощающей цепи сразу в канонической форме, перенумеруем состояния, присвоив поглощающему первый номер:

Л — лягушка находится на листе (1),
К — лягушка сидит на кочке (2),
В — лягушка плавает в воде (3).

Тогда переходные вероятности поглощающей цепи будут равны: $P_{11} = 1$, $P_{12} = 0$, $P_{13} = 0$, $P_{21} = P_{23} = 0{,}25$, $P_{22} = 0{,}5$, $P_{31} = P_{32} = 0{,}5$, $P_{33} = 0$. Объединим эти вероятности в матрицу перехода, представив ее сразу в уже знакомой нам канонической форме:

$$\Pi_{[3]} = \begin{array}{c} \\ \text{Л} \\ \text{К} \\ \text{В} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Л} & \text{К} & \text{В} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}. \qquad (1.14)$$

Так же, как и ранее (см. матрицу 1.13), блоки канонической формы соответствуют определенным классам. Так, блок E состоит из единственного элемента и представляет класс поглощающих состояний. Блок Q описывает возможные переходы системы в невозвратном классе, блок R отвечает переходам системы из невозвратного класса в поглощающее состояние.

Каноническая форма матрицы позволяет сравнительно легко подсчитать средние значения попадания системы в то или иное состояние до перехода ее в поглощающее. Для нашего случая это означает подсчет среднего количества прыжков, которое сможет сделать лягушка до ее пленения. Конечно, это число зависит и от начального состояния системы, поэтому мы снова должны оперировать с матрицей, в которой учитываются начальные условия. Эта матрица имеет большое значение в теории марковских цепей и заслуженно называется фундаментальной. Для определения ее элементов используются блоки канонической формы в виде очень простого на вид соотношения

$$N=(E-Q)^{-1}. \qquad (1.15)$$

Мы говорим простым на вид потому, что здесь E и Q — матрицы, а символ (-1) означает операцию обращения *. Займемся теперь несложными подсчетами. Определим сначала разность $E-Q$. В данном случае согласно (1.15) мы должны вместо $E=[1]$ использовать единичную матрицу такой же размерности, как и Q. Тогда имеем согласно правилам вычитания матриц:

$$E-Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}25\\ 0{,}5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}5 & -0{,}25\\ -0{,}5 & 1\end{bmatrix}.$$

Выполнив операцию обращения, получим

$$(E-Q)^{-1}=\begin{bmatrix}2{,}67 & 0{,}67\\ 1{,}33 & 1{,}33\end{bmatrix}.$$

Каждый элемент этой матрицы есть не что иное, как среднее число попаданий системы в каждое из невозвратных состояний до поглощения. Поясним сказанное с помощью нашего примера. Фундаментальная матрица у нас имеет вид:

$$N=\begin{array}{c} S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{bmatrix}2{,}67 & 0{,}67\\ 1{,}33 & 1{,}33\end{bmatrix}.$$

Это означает, что

если прыжки лягушки начались с кочки (состояние S_2), то она до попадания в мешок успеет в среднем 2,67 раза побывать на кочке и 0,67 раза в воде;

если в начальный момент времени лягушка находилась в воде (состояние S_3), то опять-таки в среднем одинаковое число раз (1,33) до поимки она побывает на кочке и в воде.

Для того чтобы подсчитать суммарное среднее число пребываний лягушки в том или ином состоянии, надо просто сложить соответствующие элементы строк матрицы. В теории матриц это означает, что фундаментальную матрицу надо справа умножить на единичный вектор.

---

* Две матрицы называются обратными, если их произведение равно единичной матрице $A \cdot A^{-1}=1$.

Тогда для нашего примера будем иметь:

$$M=(E-Q)^{-1}\cdot 1=\begin{bmatrix}2{,}67 & 0{,}67\\ 1{,}33 & 1{,}33\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3{,}34\\ 2{,}66\end{bmatrix}. \qquad (1.16)$$

Теперь мы можем легко ответить на поставленный в начале этого параграфа вопрос и сравнить наши данные с прогнозом Джима. Если в начальный момент лягушка сидит на кочке (невозвратное состояние S_2), то среднее число шагов до пленения будет равно 3,34; если же лягушка начинает свой путь с воды (невозвратное состояние S_3), то ей в среднем удастся сделать всего 2,66 прыжка. Тут мы должны иапомнить, что речь идет, конечно, о средних значениях, ведь количество прыжков должно быть целым числом.

Таким образом, получив фундаментальную матрицу и найдя ее элементы, мы всегда сможем определить, как общее среднее число шагов до попадания в поглощающее состояние, так и распределение этого среднего числа между отдельными невозвратными состояниями.

Вернемся к первоначальным условиям нашего примера. Помните, ведь сначала мы расположились с Джимом на противоположных берегах заливчика и участвовали в охоте вдвоем. В этом случае цепь имела два поглощающих состояния. Пусть теперь появляются новые варианты пари: кто поймает лягушку раньше или кто наловит их больше. На языке теории это означает ответы на вопросы: в какое поглощающее состояние система попадет раньше и в каком из поглощающих состояний процесс будет останавливаться чаще, а в каких реже? Оказывается, ответы на эти вопросы можно получить с помощью все той же фундаментальной матрицы M.

Поскольку эти вероятности, конечно, будут зависеть от того, какое из состояний является начальным (да и самих поглощающих состояний несколько), то соответствующий набор вариантов снова образует матрицу, столбцами которой являются поглощающие состояния, а строками — невозвратные. Эта матрица снова определяется внешне очень просто:

$$B=N\cdot R. \qquad (1.17)$$

Здесь B и есть матрица вероятностей перехода от невозвратных состояний к поглощающим.

Может быть, сначала все это кажется не очень понятным, но мы покажем сейчас все снова на примере. Только для того, чтобы избежать сложных вычислений, затемняющих суть дела, перейдем к еще более простому случаю, когда число состояний и соответственно размерность матриц невелики. Пожалуй, проще всего придумать такие условия, чтобы поглощающих и невозвратных состояний было по два.

Так будет, если между двумя «охотниками» лягушка сможет прыгнуть только два раза (рис. 10). Допустим, что слева находится Джим, а справа — я. Каноническая форма матрицы перехода для этого случая будет выглядеть так:

$$\Pi_{[4]} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline q & 0 & 0 & p \\ 0 & p & q & 0 \end{array}\right]. \tag{1.18}$$

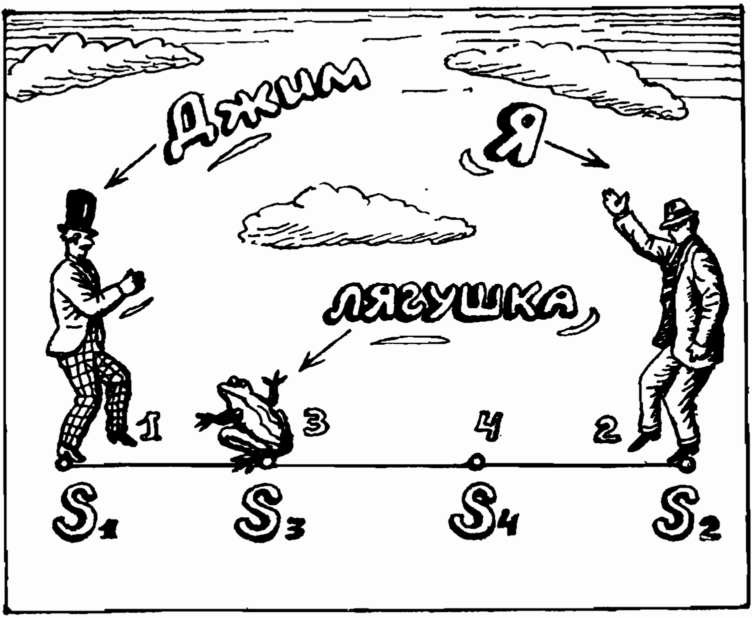


Рис. 10

p — это вероятность того, что лягушка из точки (с кочки или листа) прыгнет вправо, т. е. навстречу мне. В свою очередь, $q=1-p$ — это вероятность ее прыжка навстречу Джиму. Пусть $p=0{,}7$, а $q=1-p=0{,}3$. Тогда после вычислений, которые мы пропускаем, получается такая матрица:

$$B=\begin{array}{c} \\ S_3 \\ S_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} S_1 & S_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}38 & 0{,}62 \\ 0{,}11 & 0{,}89 \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (1.19)$$

Из этой матрицы следует, что если лягушка в начальный момент находится в точке S_3, то вероятность того, что ее поймает Джим (процесс поглотится в S_1), будет равна 0,38, а я — 0,62. Отметим здесь один любопытный и даже кажущийся парадоксальным факт: хотя лягушка находится и рядом с Джимом, буквально рукой подать, гораздо больше шансов поймать ее у меня.

Объясняется же это тем, что $p>q$, иначе говоря, различие вероятностей перемещения вправо и влево влияет на конечный результат блуждания сильнее, чем начальное расстояние до поглощающих состояний. Эта закономерность подтверждает хорошо известное всем игровое правило: сильный игрок может позволить себе роскошь давать фору (иногда даже значительную), и все равно его шансы на выигрыш будут выше, чем у более слабого противника. Правда, здесь нужно уметь правильно оценить допустимую степень приближения противника к «левой точке», т. е. к поглощающему состоянию, дающему ему победу, но это уже вопрос интуиции или разумного риска.

Теперь рассмотрим другой вариант начальных условий: лягушка начинает прыжки из точки S_4. Из матрицы (1.19) хорошо видно, что в таком случае лягушка практически наверняка (с вероятностью 0,89) будет поймана мною. Вероятность ее пленения Джимом мала и составляет всего 0,11.

Итак, с помощью фундаментальной матрицы можно прогнозировать результаты процессов, моделируемых в виде схемы случайных блужданий с двумя поглощающими состояниями. Конечно, если бы речь шла только об итогах различных пари или придуманной нами лягушачьей охоты, то вряд ли стоило обращать на это столь большое внимание. Однако уже говорилось, что модели случайных блужданий в самых различных вариантах находят себе применение во многих областях науки, техники и даже общественной жизни. Эти примеры будут рассмотрены в дальнейшем, где нам и потребуется математический аппарат, который здесь демонстрировался.

Посмотрим в заключение все-таки более внимательно на полученные нами результаты. Ведь в конце концов выяснилось, что вероятность окончания процесса случайных блужданий в том или ином поглощающем состоянии зависит, по существу, от двух причин: начальных условий и соотношения вероятностей движения из той или иной точки влево или вправо. Для такого случая употребляется понятие вероятностного уклона. Действительно, это как бы наклон поверхности, на которой происходит процесс случайных блужданий. Кроме того, как уже говорилось, на итог процесса оказывает влияние и начальное удаление точки старта от правого или левого конца. Можно строго доказать, что степень этого влияния ослабевает с ростом превышения вероятности p над q. Оказывается, что при $p=2q$ расположение стартовой точки практически не сказывается на вероятности поглощения в том или ином состоянии. Эту интересную закономерность марковской модели случайного блуждания с поглощением часто иллюстрируют задачей о разорении игрока.

Допустим, что два соперника (A и B) играют на деньги в некоторую игру, состоящую из ряда партий. Вероятность выигрыша игрока A в каждой партии равна p при ставке 1 руб. Пусть общий начальный капитал равен K руб., из которых игрок A имеет в начале игры S руб., а его противник $K-S$ руб. Математической моделью этой игры будет только что рассмотренное случайное блуждание с двумя поглощающими состояниями. Поглощение в правом граничном состоянии означает, что A выиграл всю сумму, поглощение в левом граничном состоянии — что он разорился. Если силы противников равны и $p=q$, т. е. уклона нет, вероятности разорения игроков будут пропорциональны долям их начальных капиталов (расстояниям от стартовых точек до краев). Если же игрок A более искусен, т. е. $p>q$, то картина меняется. В частности, при $p=2q$ он может начинать игру при любом капитале противника, имея в наличии всего лишь 1 руб. для старта, все равно у него будет больше шансов разорить противника, чем проиграть самому. Это значит, что, имея двойное превосходство над противником в силе игры, можно давать ему практически любую фору!

Правда, не всегда ясно, как определить эту степень превосходства и особенно столь точно количественно, но это уже опять интуиция или риск!

1.5. Как беспорядок сам собой превратился в порядок (Эргодические цепи Маркова)

Недавно со мной произошел интересный случай. Захожу как-то в один книжный магазин. Делаю я это довольно регулярно, обычно в конце каждого месяца. Бегло взглянув на полки,— нет ли чего-нибудь новенького,— начал рыться в стопках, выложенных на прилавке,— это мое любимое занятие. Порядки в этом магазине довольно строгие, поэтому каждую просмотренную книгу я аккуратно кладу сверху в ту же стопку, откуда она была взята.

— Я знаю, что вы интересуетесь математикой,— говорит вдруг симпатичная девушка-продавщица,— не могли бы вы помочь мне разгадать одну загадку? Когда в конце дня я убираю с прилавка стопки книг, неизменно оказывается, что в большинстве из них книги лежат примерно в том же порядке, как они были положены утром! Разве это не удивительно? Ведь книги в течение дня просматривают сотни покупателей, и я прошу их только класть просмотренную книгу сверху в ту же стопку. Как же они оказываются на своих местах, ведь покупатели берут их или снизу, или из середины совершенно случайно?

Да, это и в самом деле любопытно! Но не действуют ли здесь снова законы теории вероятностей и, в частности, марковские цепи?

Магазин этот большой, и покупателей в день проходит много. Поскольку покупателя может заинтересовать любая книга в стопке, то мы можем полагать, что выбор той или иной книги является событием случайным. Можно также предположить, что в отделе, о котором идет речь (математика, физика, но не художественная литература), покупатели — народ степенный, солидный, и случаи, когда книги из стопки берет сразу несколько человек или один по нескольку экземпляров, полностью исключены. Поэтому наблюдаемая нами последовательность испытаний является более или менее упорядоченной. Но какие это испытания? Конечно, зависимые!

И вот почему. Допустим, что в начале рабочего дня книги были выложены в определенном порядке. Обозначим их для краткости номерами 1, 2, 3... Очевидно, это расположение книг можно считать начальным состоянием системы. Кстати говоря, наша любознательная продавщица сказала, что этот порядок у нее произволен, случаен. Поэтому мы имеем дело и со случайным вариантом задания начального состояния. Первому покупателю могла понравиться книга с каким-то промежуточным номером k. Как и было условлено, после просмотра он должен положить ее сверху. Теперь эта стопка перешла в другое состояние, характеризующееся в данном случае иным порядком книг, т. е. k, 1, 2, 3...

Вероятность перехода в следующее состояние зависит от того, в каком порядке теперь лежат книги, т. е. только от предшествующего состояния. Значит, случайный процесс выбора книг покупателями представляет собой простую марковскую цепь, в которой состоянием является тот или иной порядок расположения книг после их просмотра. Этот порядок может менять и один покупатель.

Время между сменами состояний будет, конечно, тоже случайным, поэтому правильным было бы назвать этот случайный процесс марковским процессом с дискретными состояниями и непрерывным временем. Однако здесь нам важны некоторые другие, не связанные со временем свойства этого процесса. Поэтому для простоты дальнейших рассуждений мы примем время между приходами очередных покупателей постоянным и равным Δt.

Сколько же здесь может быть состояний? Это можно определить очень просто, и не привлекая теории вероятностей, а пользуясь хорошо известными правилами определения числа возможных перестановок из m предметов. В данном случае оно равно $m!$

Особенностью наших перестановок является то, что выбранная книга должна ставиться каждый раз на первое место, число книг при этом не меняется.

Рассмотрим простой случай, когда число книг равно всего лишь трем. Тогда количество возможных состояний будет равно: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Присвоим им соответствующие номера — S_1: 1, 2, 3; S_2: 2, 1, 3; S_3: 3, 1, 2; S_4: 3, 2, 1; S_5: 1, 3, 2; S_6: 2, 3, 1.

Допустим, что на основании долгих наблюдений мы подсчитали вероятности выбора покупателями той или иной книги. Более того, оказалось, что они на протяжении долгого периода времени остаются неизменными, т. е. марковская цепь обладает свойством однородности.

Давайте составим теперь матрицу перехода, только для наглядности сначала представим процесс изменения состояний в виде графа (рис. 11). Как и раньше, граф получился ориентированным и взвешенным. Число вершин в нем равно числу состояний. Из каждой вершины исходят, включая петлю, три дуги. Это означает, что только в трех клетках строк матрицы будут значащие цифры. Итак, пользуясь принятой нами нумерацией состояний и имеющимися данными о переходных вероятностях, представим ее в следующем виде:

$$\Pi_{[6]}=\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}. \qquad (1.20)$$

Посмотрим на нее более внимательно с учетом уже известных нам понятий. Как и ранее, она стохастическая: сумма чисел по строкам равняется единице и все элементы неотрицательны. Наличие нулей в некоторых ее клетках означает, что не все переходы между состояниями возможны за один шаг. Впрочем, это мы уже видели на графе. Ведь не все вершины его соединяются дугами.

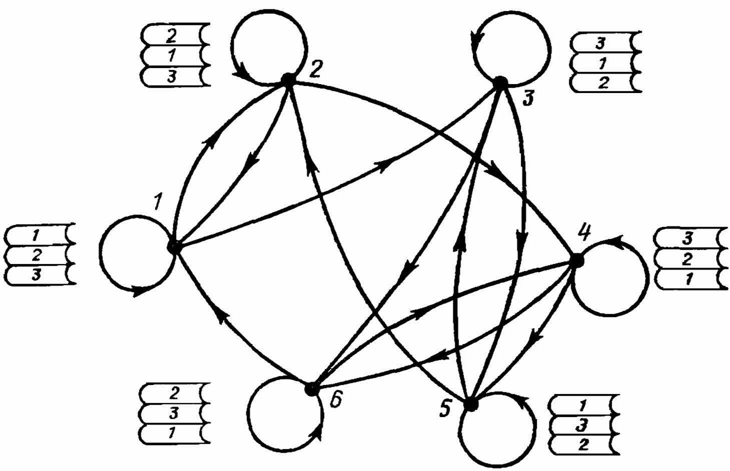


Рис. 11

Кроме того, ни в одной из клеток нет единиц, то есть поглощающие состояния отсутствуют.

Таким образом, если исключить случаи покупки книг из стопки, моменты закрытия магазина и другие перерывы в торговле, можно считать, что мы имеем дело со случайным процессом, при котором система переходит из состояния в состояние внутри какого-то множества, не выходя за его пределы. Но как же так? Ведь только что говорилось, что некоторые переходы в системе невозможны, переходные вероятности равны нулю! Да, но речь шла только об одном шаге или этапе процесса.

Теперь давайте проверим, что получится после нескольких шагов. Как это сделать, мы уже знаем: надо использовать уравнения Колмогорова — Чепмена или просто матрицу перехода через n шагов, получающуюся из матрицы П последовательным возведением ее в соответствующую степень. Конечно, мы проделаем эти утомительные выкладки без читателя.

И... оказывается, что уже на втором шаге в матрице нет элементов, равных нулю! Это значит, что после второго шага мы можем попасть в любое состояние! Такое множество состояний, внутри которого возможны любые переходы, но из которого нельзя выйти, называется эргодическим. Марковская цепь, состояния которой образуют эргодическое множество, относится к классу эргодических цепей.

Иногда получается, что при такой эргодической цепи можно попасть в некоторые состояния только через определенное число шагов, называемое циклом. Подобные цепи называют циклическими. Если в эргодической цепи при любом числе шагов не обнаруживается свойство цикличности, то такие цепи именуют регулярными. Это, в свою очередь, означает, что в регулярной цепи на любом шаге возможны любые переходы. А как это можно доказать? Сравнительно несложно: при любом номере n шага (матрица $П^{n}_{[6]}$) переходные вероятности в матрице должны отличаться от нуля.

После этих, несомненно, полезных, но, возможно, кажущихся скучноватыми определений вернемся к вопросу, заданному нашей продавщицей. Почему же все-таки книги оказываются на своих местах? Что это — чистая случайность или какая-то закономерность, связанная с определенным типом марковской цепи? Ответ на вопрос будет таким: это свойство регулярных марковских цепей.

Проиллюстрируем его на нашем примере. Допустим, что мы хотим узнать, как будет выглядеть переходная матрица через какое-то большое число шагов. Мы уже говорили, что получается с нею через два шага. Теперь посмотрим, что будет, если число шагов возрастет хотя бы до четырех:

$$\Pi^4_{[6]}=\begin{bmatrix} 0{,}2730 & 0{,}2123 & 0{,}1431 & 0{,}0906 & 0{,}1508 & 0{,}1302 \\ 0{,}2691 & 0{,}2123 & 0{,}1430 & 0{,}0906 & 0{,}1547 & 0{,}1303 \\ 0{,}2754 & 0{,}2116 & 0{,}1432 & 0{,}0910 & 0{,}1488 & 0{,}1300 \\ 0{,}2791 & 0{,}2134 & 0{,}1462 & 0{,}0924 & 0{,}1506 & 0{,}1313 \\ 0{,}2691 & 0{,}2122 & 0{,}1431 & 0{,}0906 & 0{,}1548 & 0{,}1302 \\ 0{,}2752 & 0{,}2116 & 0{,}1432 & 0{,}0910 & 0{,}1496 & 0{,}1304 \end{bmatrix}.$$

Оказывается, с нашей матрицей происходят очень интересные превращения. С увеличением числа шагов ее элементы, то есть переходные вероятности, стремятся к некоторым предельным значениям, не зависящим от номера строки. В пределе при $n\to\infty$ она будет иметь одинаковые, совпадающие по значениям строки. Но ведь эти строки и есть не что иное, как вероятный порядок расположения книг в стопке! Вот и ответ на поставленный вопрос.

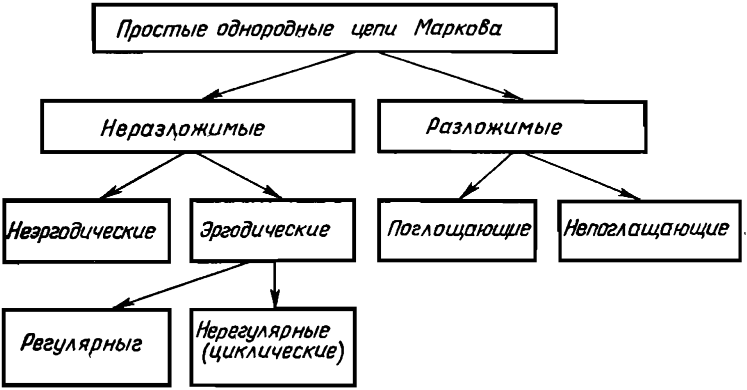
Это замечательное свойство регулярной марковской цепи строго доказывается в теории. Значения переходных вероятностей, к которым мы приходим при большом, практически неограниченном числе шагов, называются предельными, или финальными.

Не менее интересным является и другое. Оказывается, вероятности состояний в момент, достаточно удаленный от начала процесса, практически не зависят не только от числа шагов, но и от начального состояния.

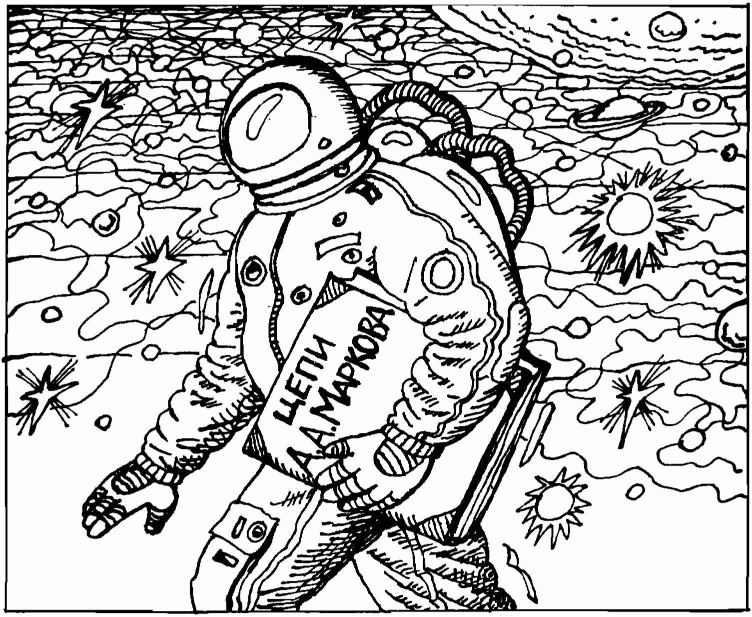
Значит, действительно можно выкладывать книги в произвольном порядке. Все равно рано или поздно этот «беспорядок» сам собой превратится в «порядок». Не правда ли, заманчивое правило для некоторых лентяев? Остается только придумать, как его можно успешно использовать.

Итак, читатель, на этом мы решили закончить начальное знакомство с марковскими цепями. В первой главе мы попытались ответить в основном на два вопроса: что такое марковские цепи? Какие они бывают?

Примеры случайных процессов, сводящихся к марковским цепям, мы рассмотрели не только в первом параграфе, но и в других. Более того, подобные и близкие к практике ситуации, в которых можно применять этот математический аппарат, будут разбираться нами и далее. Для упорядочения сведений о типах марковских цепей мы приводим следующую схему.



Прн ответах на первый и второй вопросы всегда в неявной форме приходится затрагивать и третий — как и где применяются марковские цепи? В форме, более близкой к жизни и практической деятельности, этот вопрос освещается в дальнейших главах книги. Следует только иметь в виду, что мы не преследуем учебно-методические цели и все примеры приводятся в основном для популяризации этого интересного математического аппарата. Для тех, кто захочет воспользоваться этими методами практически, мы рекомендуем более серьезные труды, указанные в библиографии.



ГЛАВА 2
МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ... ПОВСЮДУ

2.1. Космонавтика и... цепи

Наше поколение уже привыкло к техническим чудесам. Многое нас не удивляет, над многим мы просто не задумываемся. Но ведь даже обычная космическая стыковка — это техническое чудо!

В самом деле, представьте себе, что в космическом пространстве со скоростью около 7 км/с (более 25 000 км/ч) мчатся два тела, массы которых сравнимы с железнодорожными вагонами. Этим «вагонам» надо встретиться в определенной точке пространства, очень аккуратно приблизиться друг к другу и в конце концов жестко соединиться. Но не просто соединиться, а еще сделать это так, чтобы экипаж мог «через тамбур» перейти из одного «вагона» в другой. Добавим к этому, что должны автоматически с высокой герметичностью соединиться все многочисленные электрические, пневматические и гидравлические разъемы, по которым с одного корабля на другой подаются электроэнергия, топливо, сжатые газы и т. д. Для полноты картины добавим еще некоторые факты. Относительная поступательная скорость стыкуемых кораблей во время их касания должна быть достаточно мала. Если эта скорость превысит максимальную величину (примерно 0,5 м/с), то корабли получат толчок, от которого могут выйти из строя приборы, разрушатся антенны, раскинутые, как крылья, солнечные батареи и другие элементы конструкции. Если же скорость, наоборот, будет очень малой (менее 0,1 м/с), то стыковка может не произойти, так как не сработают замки стыковочного устройства.

Сопоставьте эти цифры — 7000 м/с и 0,1 м/с. С какой же точностью и насколько гибко должны работать системы управления кораблями? Точно так же должны выдерживаться и другие параметры относительного движения. Ведь космические корабли представляют собой свободно перемещающиеся тела, обладающие в пространстве шестью степенями свободы. Стыковаться же они должны в строго определенном положении, причем на отклонения их осей накладываются очень строгие ограничения (угол рассогласования продольных осей не должен превышать 3—5°). Мы часто говорим: «Точно, как в аптеке!», но ведь можно с полным правом сказать: «Точно, как в космосе!»

Нетерпеливый читатель может спросить нас: постойте, постойте... а причем же здесь цепи Маркова? Где же здесь последовательность зависимых испытаний и т. д.?

Представим себе, что на орбите происходит сборка крупного космического объекта, состоящего из нескольких отдельных блоков. Очевидно, само событие космической стыковки может состояться лишь при условии выведения собираемых блоков на орбиту. Таким образом, вероятность этого события является условной, зависящей от результатов предшествующего испытания, заключающегося в запуске космических кораблей. Перед дальнейшим анализом процесса космической сборки с позиций теории марковских цепей сделаем одно небольшое отступление.

Дело в том, что в процессе стыковки и сборки выгодно делать так, чтобы один корабль летал с постоянной скоростью и сохранил при этом неизменное положение, а другой совершал маневр. Один корабль (обладающий большей массой) назовем пассивным блоком (ПБ), а другой, естественно,— активным (АБ). Если при этом происходит сборка крупного космического объекта, состоящего из многих блоков, то мы будем после каждого присоединения очередного блока рассматривать в качестве пассивного собираемый объект, а в качестве активного — очередной блок. Будем полагать также, что после выведения корабли сблизились настолько, что вот-вот произойдет их касание. Все предшествующие события, которые могли произойти на этапе сближения, мы включим в операцию выведения.

Результаты успешных полетов космических кораблей дают возможность судить о весьма высокой надежности систем управления и стыковочных устройств космических кораблей. Однако теория требует рассмотрения всех вариантов возможных исходов или всевозможных событий при каком-либо испытании. Учитывая это, предположим, что при стыковке могут произойти следующие события:

событие B_1 — стыковка произошла успешно (так в большинстве случаев и бывает);

событие B_2 — стыковка не произошла, но состояние систем кораблей таково, что можно предложить повторные попытки («ничего страшного, попробуем еще раз!»);

событие B_3 — при стыковке произошел отказ или поломка элементов АБ. Этот отказ устранить не удастся. Придется, к сожалению, запускать новый АБ или основательно ремонтировать прежний;

событие B_4 — теперь что-то отказало в системах ПБ. Отказ этот также устранить не удастся. Придется менять или ремонтировать ПБ;

событие B_5 — теперь повреждены как АБ, так и ПБ, и возникает необходимость в ремонте или замене обоих блоков.

Нам, конечно, следует помнить, что вероятности событий $B_1 - B_5$ условны, так как они могут состояться лишь при условии успешного запуска и предварительного сближения блоков.

Ранее мы говорили, что марковскими цепями хорошо могут описываться те или иные случайные состояния различных систем. Здесь под системой понимается совокупность стыкуемых кораблей (АБ и ПБ) либо находящихся на орбитах, либо подготовленных к выводу на нее. Наступление событий $B_1 - B_5$ может приводить нашу систему в следующие состояния:

A_1 — вывод блоков и их стыковка осуществлены успешно, и цель рассматриваемой космической операции достигнута;

A_2 — оба блока выведены на орбиту, но не состыкованы;

A_3 — на орбите (в исправном состоянии) находится лишь ПБ;

A_4 — на орбите лишь АБ;

A_5 — на орбите нет ни одного исправного блока.

Очевидно, состояние A_5 будет в данном случае начальным, а состояние A_1, если придерживаться общепринятой в теории марковских цепей терминологии, поглощающим.

Если количество стыковок или предшествующих «земных» экспериментов по определению вероятностей отдельных событий B_1—B_5 достаточно велико, то на основе статистических данных можно определить вероятности переходов из состояния в состояние и построить матрицу переходных вероятностей аналогично тому, как мы это делали в главе 1. Далее, используя приведенные выше математические преобразования, можно получить фундаментальную форму (см. (1.15).

Раньше мы уже говорили, что каждый элемент матрицы (1.15) выражает среднее число попаданий системы в соответствующее состояние до наступления поглощения, если процесс начался в каком-то произвольном состоянии. К примеру, возьмем элемент с индексом 2,3. Он равен среднему числу наступлений состояния A_3 до окончания процесса в поглощающем состоянии, если начальным было состояние A_2. Тогда, если считать, что мы начинаем стыковку кораблей из начального состояния A_5, то в последней строке фундаментальной матрицы находятся числа, выражающие собой средние значения попаданий системы в эти состояния до полного успеха операции. Для нас это чрезвычайно важно. Ведь с каждым состоянием связаны те или иные затраты ресурсов (и времени). Так, например, затраты на изготовление и ремонт АБ будут пропорциональны среднему числу попаданий системы в состояния A_3 и A_5 до того, как наступит состояние A_1. Рассуждая аналогично по отношению к затратам на ПБ, можно также найти затраты на их замену и ремонт.

Математические ожидания (т. е. средние значения) потребного расхода блоков $M_{АБ}$ и $M_{ПБ}$ для успешного выполнения операции мы получим с помощью фундаментальной матрицы. Для наглядности зададимся какими-то гипотетическими числовыми значениями вероятностей случайных событий при стыковке r_i.

Пусть, например, $r_1=0,9$, $r_2=0,05$, $r_3=0,03$, $r_4=0,01$,

$r_5=0{,}01$, $p=0{,}8$. Путем несложных расчетов получаем $M_{\text{АБ}}=1{,}38$, $M_{\text{ПБ}}=1{,}36$.

Таким образом, оказывается, для успешного космического строительства надо в среднем иметь не по одному блоку АБ и ПБ, а 1,4 АБ и 1,4 ПБ. Конечно, эти цифры надо округлить до целых.

При сборке космического объекта не из двух, а из большего числа блоков математическая модель принципиально не изменится. Возрастет только размерность матриц, усложнятся и вычисления. Таким образом, теория марковских цепей (да и вообще теория вероятностей) не только рекомендует «на всякий случай» иметь некоторые резервы, но даже указывает их величину.

Но кроме того, здесь можно получить еще и другие интересные результаты.

Во-первых, если известно, сколько раз в среднем мы побываем в том или ином состоянии до попадания в поглощающее, то, очевидно, можно определить среднее время, необходимое для выполнения всей операции. Конечно, для этого надо знать затраты времени, связанные с тем или иным состоянием (на повторный запуск, ремонт блоков и т. д.). Но, кроме времени, переход из состояния в состояние наверняка будет связан и с другими затратами. Например, при повторных стыковках надо дополнительно израсходовать топливо, электроэнергию и другие запасы. С помощью приведенного выше математического аппарата можно рассчитать и их. Не вдаваясь в математические тонкости, рассмотрим один наглядный пример.

Допустим, мы решили определить резервный запас топлива для повторных стыковок, чтобы выполнить операцию успешно. Очевидно, если его увеличивать, то возрастет возможность повторения стыковок, т. е. вероятность r_2. При этом, конечно, уменьшатся средние потребности в запасах резервных блоков. Результаты такого расчета показаны на рис. 12.

По оси ординат на рисунке отложено среднее число требующихся резервных блоков $M_{\text{РБ}}$, а по оси абсцисс K — количество возможных повторных стыковок (т. е. фактически запас топлива, обеспечивающий данное число повторений). Как видно из графика на рис. 12, количество резервных блоков сначала резко уменьшается, но затем после определенной величины запаса (в данном случае обеспечивающего 3—4 стыковки) остается практически постоянным. Это означает, что дальше увеличивать запасы нецелесообразно и рациональным будет иметь бортовой запас топлива, обеспечивающий 3—4 стыковки. Аналогичные рассуждения можно провести по отношению и к другим затратам. Можно, например, установить на стыкуемых блоках более надежные стыковочные узлы или их дублировать. В этом случае вероятность успешной стыковки r_1 повысится, но потребуются и некоторые дополнительные расходы, увеличение массы блока и т. д. Можно попытаться путем каких-либо конструктивных мероприятий расширить диапазон допустимых скоростей при стыковке или повысить точность работы системы управления кораблями, уменьшив тем самым вероятность неприятных событий B_3, B_4 и B_5. Это тоже, с одной стороны, уменьшит количество резервных блоков, но, с другой — приведет к каким-то дополнительным затратам. Эффективность всех наших действий легко оценить с помощью приведенного выше математического аппарата.

В самом деле, получается, что с увеличением вероятности r_1 успешного исхода операции уменьшается количество резервных блоков, но, с другой — возрастают какие-то другие затраты, связанные с общим повышением надежности систем стыковки. Это, в свою очередь, означает, что существуют оптимальные значения бортовых запасов, конструктивных и других параметров систем и т. д.

На рис. 13 изображена зависимость стоимости проведения операции космической сборки объекта из нескольких блоков в функции от бортовых запасов топлива. Отчетливо видно существование оптимальных запасов топлива, отвечающих минимальной стоимости всей операции.

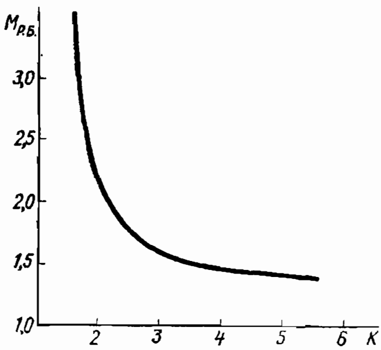


Рис. 12

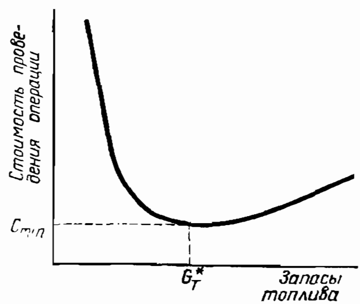


Рис. 13

Здесь надо оговориться, что все приведенные выше рассуждения носят, конечно, условный характер, и практически всегда ученые и конструкторы космических кораблей стремятся к максимально достижимому для современного состояния науки и техники уровню надежности систем стыковки. Но и при этом оценка эффективности принимаемых решений все-таки необходима.

Но не пора ли обратить внимание читателя на другие, не менее практически важные примеры? Для этого нам надо перенести свой взгляд с космических высот на нашу повседневную жизнь и поговорить о таком интересном и несколько загадочном явлении, как мода.

2.2. Это... уже не модно!

Вот уж что, действительно, загадочно, так это мода! Ее законы просто непостижимы! Почему вчера были модны мини, сегодня — макси и миди, а послезавтра — снова мини и т. д..? Почему мода на что-то проходит, затем снова возвращается с известной периодичностью? Что будут носить через 5, 10, ... лет? Можно ли ответить на эти вопросы?

Непонятно и, действительно, загадочно! По-видимому, здесь действует много различных случайных причин.

Капризы моды наносят сокрушительные удары по нашим личным бюджетам. Модники и модницы чрезвычайно инициативны и настойчивы. Переделываются, продаются или просто выбрасываются вещи еще годные, часто удобные и практичные. Приобретаются другие, иногда уступающие первым по комфорту и качеству, но зато... модные!

Теперь представьте, как трудно приходится предприятиям, выпускающим предметы обихода, подверженные капризам моды! Ведь для того чтобы выпускать продукцию, пользующуюся спросом, надо все время следовать за зигзагами, а еще точнее, спиралями моды. Кроме того, эти модные изделия надо выпускать в достаточном количестве, иначе возникнет столь нежелательный дефицит. Поэтому все должно делаться с помощью станков-автоматов, автоматических участков и линий. «Ахиллесовой пятой» станков-автоматов и автоматических линий является узкая специализация. Значит, каждый раз при смене моды все производство переналаживать? Когда это лучше сделать? Подождать, когда выпускаемые изделия выйдут из моды? Но это значит, что некоторое время предприятие будет работать в убыток, а потребитель не получит очень нужных и, главное, модных товаров!

Давайте попробуем помочь легкой промышленности и одновременно любителям моды, применив снова марковские цепи.

Но можно ли это сделать? Ведь мода-то — явление неопределенное! Обратите внимание на термины «случайность» и «неопределенность». Различие между этими понятиями очень наглядно демонстрируется как раз на примере моды на короткие или длинные юбки в книге Е. С. Вентцель *. Под «случайным» там понимается явление, к которому могут быть применены методы теории вероятностей. Для этого явление должно обладать свойством статистической устойчивости. Это, в свою очередь, означает, что должны быть более или менее стабильны его средние значения, а также степень рассеивания относительно этих средних характеристик. Это тоже неопределен-

* См.: Вентцель Е. С. Исследование операций.— М.: Наука, 1980.

ность, но «хорошая» или, как ее называет Е. С. Вентцель, «доброкачественная».

Другую неопределенность, не обладающую такими хорошими свойствами, называют даже «дурной»! Кстати, в истории науки много примеров, когда ученые очень нелестно отзывались о некоторых математических объектах, не укладывающихся в рамки «хороших» теорий. Так было в свое время с непрерывными, но недифференцируемыми функциями. Известный французский математик Ш. Эрмит назвал их даже «математическими монстрами». Впоследствии такие функции легли в основу теоретического обоснования важнейших физических законов. Об этом еще пойдет разговор далее.

Но пока длина юбок и другие причуды моды никакой статистической закономерности подчиняться не желают, чем ставят в затруднительное положение не только промышленность, но и нас, пытающихся и здесь продемонстрировать большие возможности марковских цепей.

Мы все-таки рискнем привести такой пример, и вот почему: во-первых, эта книга — не руководство к действию, а популярный рассказ о марковских цепях. Во-вторых, сейчас делаются попытки как-то приблизительно оценить вероятность будущего покупательского интереса (например, с помощью экспертов, изучения общественного мнения, анализа конъюнктуры, тенденций в развитии, успехов других предприятий и фирм и т. д.). В-третьих, получение приближенной информации на основе исходных данных, взятых в некотором реальном диапазоне, может помочь выбрать компромиссное решение.

Итак, после всех довольно длительных вынужденных оговорок перейдем все-таки к нашему примеру *.

...Обувная фабрика «Золушка», до последнего времени выпускавшая переставшие быть модными хрустальные башмачки, завтра начинает производить новый фасон женских туфель на высоком (низком) каблуке с заостренным (тупым) носком. Мы специально приводим здесь разные варианты, потому что не знаем, что будет модным в тот момент, когда читатель (читательница) раскроет эту книгу. Поскольку полной уверенности в успехе у нас нет, предположим, что в результате наступления одного из двух

* Примеры разделов 2.2, 2.4 и 2.5 в переработанном виде взяты авторами из книги: Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы.— М.: Сов. радио, 1964.

несовместных событий, заключающихся в выпуске удачной (событие B_1) и неудачной (событие B_2) моделей, предприятие может оказаться в одном из двух состояний:

A_1 — туфельки всем понравились и продаются нарасхват;

A_2 — туфельки не нравятся и уныло пылятся на прилавках магазинов.

Для того чтобы не отставать от моды, фабрика должна все время совершенствовать продукцию, т. е. через некоторое время (допустим, месяц) выпускать, например, те же туфли, но с новой красивой пряжкой. Мы не знаем заранее, на том ли месте мы пришили пряжку и понравятся туфли модницам или нет. Тогда снова могут произойти события B_1 или B_2, в результате которых «Золушка» может либо остаться в состоянии A_1, либо перейти в состояние A_2. Естественно предположить, что вероятности переходов в то или иное состояние будут зависеть только от того, что было перед тем, т. е. в процессе выпуска фабрикой разных моделей (или фасонов) мы будем иметь дело с последовательностью зависимых испытаний или марковской цепью.

Предположим, что пряжка пришита красиво и наши туфли снова пользуются успехом, т. е. «Золушка» спустя месяц с вероятностью 0,5 остается в благоприятном состоянии A_1. Очевидно, вероятность перехода в состояние A_2 будет также равна 0,5.

Если пряжка, по мнению большинства модниц, пришита некрасиво, то в состояние A_1 мы попадем, конечно, с меньшей вероятностью, например 0,3. В то же время вероятность остаться в неблагоприятном состоянии будет уже 0,7. Тогда переходная матрица имеет вид:

$$\Pi_{[2]} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{bmatrix}. \qquad (2.1)$$

Мы рассуждаем о вероятностях попадания в то или иное состояние, но совершенно очевидно, что попадания в эти состояния будут определять и доходы предприятия от реализованной продукции. Для этого экономисту фабрики необходимо подсчитать, какие доходы (или, наоборот, убытки) связаны с переходом из одного состояния в другое, и в результате расчетов построить так называемую матрицу доходов:

$$U_{[2]} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}. \qquad (2.2)$$

Числа в матрице (2.2) — ее элементы — означают какие-то условные суммы доходов и расходов, связанные с тем или иным состоянием. Например, если в результате добавления красивой пряжки наши туфли нравятся покупателю, то фабрика будет иметь доход в 8 условных единиц (у. е.), если пряжка не понравилась, то всего лишь 2 у. е., и т. д.

Теперь мы должны учесть, что «Золушкой» руководит энергичный и инициативный директор, который не собирается действовать стихийно, а хочет активно и целеустремленно добиваться производственных успехов.

В нашем случае, например, выпуску нового фасона может предшествовать реклама в газете, по телевидению, выставка-продажа и т. д. Реклама, конечно, требует определенных расходов, но зато возрастает вероятность перехода события B_1 в состояние A_1. С другой стороны, наш энергичный директор может организовать, например, в отраслевом институте проведение предварительных исследований на тему о том, «где лучше пришивать красивую пряжку», что также направлено на повышение вероятности случайного события B_1. Конечно, и в этом случае возникнут дополнительные затраты, которые, однако, должны окупиться успешной реализацией продукции.

Действия директора по повышению эффективности производства и объявлению «войны» случайностям чем-то напоминают боевые действия и, наверное, поэтому называются в теории управления стратегиями. Все варианты ситуации, которые возникают при использовании тех или иных стратегий, могут быть сведены в табл. 2.1.

Дальше остается только выбрать правильную (оптимальную) последовательность действий, пока не наступит время радикально менять модель (например, перейти на

Таблица 2.1

Состояния i	Стратегии k	Вероятности перехода		Доходы	
		P_{i1}^k	P_{i2}^k	u_{i1}^k	u_{i2}^k
1. Удачные туфли	1. Без рекламы	0,5	0,5	8	2
	2. С рекламой	0,9	0,1	4	4
2. Неудачные туфли	1. Исследования не проводятся	0,3	0,7	3	—5
	2. Исследования проводятся	0,7	0,3	1	—20

выпуск сапог с отворотамн). Совокупность, последовательность действнй или набор стратегий в теорни управления называют иногда политикой. Остается только добавить, что в данном случае мы, конечно, имеем дело с технической политикой. Попробуем помочь директору определить правильную техническую политику, конечно, в рамках поставленной задачи. В реальных условиях на нее может влнять множество и других случайных и неслучайных факторов, как объективных, так и субъективных.

Предположнм, что «Золушка» собирается выпускать полюбившийся многим фасон в течение одного года, а ее энергичный директор будет менять стратегию не реже, но и не чаще одного раза в квартал. Тогда, очевидно, оптимальным будет такой набор стратегий, который обеспечит максимум суммы среднего годового дохода с учетом всех возможных вариантов случайных событий, которые могут произойти в течение года.

Попробуем определить эту велнчину. Надо только учесть, что, поскольку мы в самом начале можем оказаться в одном из двух состояний, то этим состояниям будут соответствовать и два значения суммы среднего дохода, которые мы обозначим через $v_1(n)$ н $v_2(n)$, где n — количество шагов (этапов) до окончания процесса. В нашей задаче $n=4$. Среднее значение годового дохода $v_i(n)$ можно представнть в виде суммы

$$v_i(n)=q_i+v_i(n-1),\ i=1,2, \tag{2.3}$$

составленной из q_i — величины среднего ожидаемого дохода на одном этапе (шаге) процесса, если последний начался в i-м (первом или втором) состоянии (так называемый непосредственно ожидаемый доход), и $v_i(n-1)$ — величины полного среднего ожидаемого дохода в течение оставшихся $n-1$ этапов (шагов) процесса. При определении q_i и $v_i(n-1)$ следует, конечно, учесть шансы наступлення того или иного случайного события. В частности, для того чтобы подсчитать q_1 и q_2, надо просуммировать произведения выигрышей на соответствующие вероятности перехода. Все подсчеты проведем пока для первой стратегии (без рекламы н исследований):

$$q_1=0{,}5\cdot 8+0{,}5\cdot 2=5,$$
$$q_2=0{,}3\cdot 3=0{,}7\cdot(-5)=-2{,}6.$$

Теперь подсчитаем величину ожидаемого дохода $v_i(n-1)$. При этом удобнее начать с последнего этапа, так как очевидно, что при снятии модели с производства доход от нее на последующих этапах будет равен нулю, в каком бы состоянии мы ни находились. Таким образом,

$$v_1(0)=v_2(0)=0.$$

Также понятно, что за один квартал (шаг) до смены модели величина полного ожидаемого дохода будет равна непосредственно ожидаемому доходу, т. е.

$$v_1(1)=q_1=5,$$
$$v_2(1)=q_2=-2{,}6.$$

Для того чтобы определить полный ожидаемый доход за два квартала (шага) до смены модели, надо учесть, что система может оказаться в одном из двух состояний. При этом величины ожидаемых доходов $v_i(n-1)$ определяются для нашего конкретного примера следующим образом:

$$v_1(2)=0{,}5\cdot 5+0{,}5\cdot(-2{,}6)=1{,}2,$$
$$v_2(2)=0{,}3\cdot 5+0{,}7\cdot(-2{,}6)=-0{,}32.$$

Тогда полный суммарный доход за два квартала до смены модели будет равен:

$$v_1(2)=5+1{,}2=6{,}2,$$
$$v_2(2)=-2{,}6-0{,}32=-2{,}92.$$

Мы говорили, что все расчеты были нами приведены для первой стратегии. Очевидно, для определения оптимального набора стратегий надо подсчитать все возможные значения полного дохода, в том числе и для других стратегий. Не проводя здесь аналогичных вычислений, дадим график результатов расчетов, выполненных в соответствии с нашими условиями (рис. 14).

На графике рис. 14 по горизонтальной оси (оси абсцисс) отложены номера кварталов n, остающихся до предполагаемой смены модели, а по вертикальной (оси ординат) — средние значения полных ожидаемых доходов $v_i(n)$ в условных единицах. Поскольку процесс может начаться в любом из двух начальных состояний $i=1,2$ и анализируются две возможные стратегии $k=1,2$, то на графике мы видим всего четыре линии, отображающие результаты соответствующих расчетов. В верхней части гра-

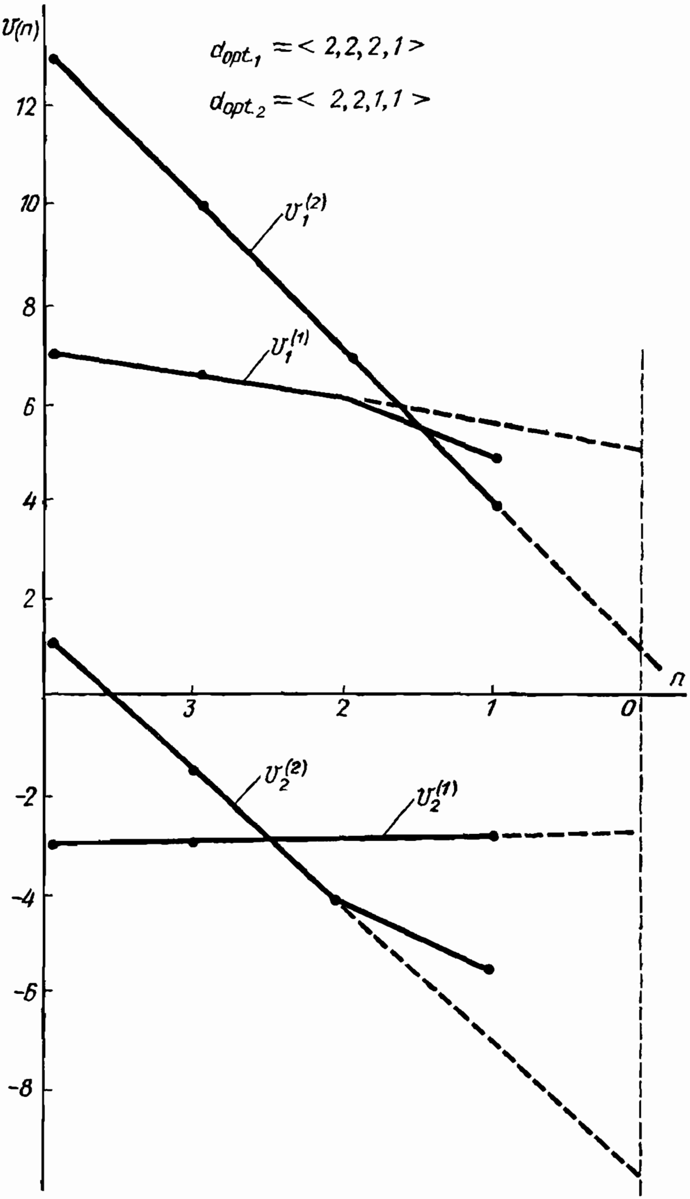


Рис. 14

фика показаны зависимости ожидаемых доходов при начале процесса из первого состояния (удачная модель), в нижней — при втором состоянии (неудачная модель).

Глядя на этот график, можно сделать интересные и важные выводы. Прежде всего заметим, что оптимальная стратегия на каждом шаге должна выбираться по максимальному значению полного дохода. Но ведь мы рассматриваем в данном случае только один шаг. А будет ли эта стратегия оптимальна и для многошагового процесса? Благодаря тому что на каждом шаге учитывается и максимизируется не только непосредственно ожидаемый, но и предшествующий доход, на поставленный вопрос можно ответить утвердительно. В данной задаче используется известный принцип оптимальности Беллмана, согласно которому оптимальное управление в многошаговом процессе должно быть на каждом шаге оптимальным для всего процесса в целом. Остается только добавить, что здесь под управлением мы подразумеваем выбор той или иной стратегии из множества имеющихся в распоряжении директора.

Давайте поможем директору «Золушки» выбрать оптимальную стратегию на каждом этапе, пользуясь графиком на рис. 14. Очевидно, если мы начали с состояния 1, то оптимальный набор стратегий будет иметь вид $d_1 = \langle 2, 2, 2, 1 \rangle$, а если начальным было состояние 2, то $d_2 = \langle 2, 2, 1, 1 \rangle$.

Это означает, что если «Золушка» начала с удачной модели, то первые три квартала выгодно применять вторую стратегию, т. е. рекламировать туфли и проводить исследования на тему о пряжке. За один квартал до перехода на новую модель фабрике надо переключиться на первую стратегию, т. е. выпускать туфли без рекламы и исследований. Освободившиеся средства можно использовать на рекламу какого-нибудь другого изделия, например сапог-скороходов. Если же в начале года фабрика выпускала неудачную модель, то использование рекламы и исследований оказывается выгодным только на протяжении первых двух кварталов. Затем директору надо будет дать указание о прекращении рекламы и исследований, а высвободившиеся средства направить на подготовку производства к выпуску новой модели.

Таким образом, и при удачной и неудачной модели оказывается все-таки выгодным начинать производство, обеспеченное как рекламой, так и исследованиями. Кроме того, из графика видно, насколько возрастает ожидаемый доход при выпуске удачной модели (почти 13,0 у. е. вместо 1,2 у. е.).

Вот теперь все ясно! С помощью марковских цепей «Золушка» наверняка перевыполнит план, а ваша семейная коллекция туфелек обогатится еще одним экземпляром.

Обратите внимание, что в приведенной выше математической модели нас не интересовали вопросы: почему на фабрике получается то удачная, то неудачная продукция и можно ли этими событиями управлять (т. е., по существу, управлять качеством)? О том, как ответить на эти вопросы с помощью марковских цепей, мы расскажем в следующем параграфе, названном несколько интригующе.

2.3. «Следствие ведут знатоки»

Детективы любят все или почти все. Запутанные интриги, неожиданные повороты сюжета и... наконец, торжествует справедливость, преступник пойман с поличным! Удалось это сделать Шерлоку Холмсу, комиссару Мегрэ или... следователю Знаменскому по незначительной детали (свежей замазке на оконном стекле, брошенному окурку или обрывку газеты) путем скрупулезного анализа, прозорливости и интуиции.

Если бы ученые и инженеры-машиностроители владели искусством детективного жанра, они могли бы рассказать о своей работе такие захватывающие истории, что прославленные сыщики побледнели бы от зависти. Часто на производстве поиски «преступников», из-за которых со станков сходит негодная продукция, напоминают самую настоящую работу криминалистов. Вот пример. На одном заводе установили новейший станок с числовым программным управлением (ЧПУ). Станок был налажен и выпускал сначала хорошие детали. Однако через некоторое время он стал почему-то «капризничать» и выдавать брак. Начались поиски «виновника». Пересмотрели систему управления, инструмент, приспособления, заготовки. Все в порядке, но брак продолжает идти. В чем же дело?

Виновником или, вернее, виновницей оказалась форточка, возле которой стоял станок: при открытой форточке нарушался температурный режим станка, и это сказывалось на качестве деталей. Итак, «преступник» найден!

В другом случае «виновницей» брака оказалась соринка диаметром 2 микрона, попавшая в гидросистему робота. Его движения стали неточными, неуверенными, и из-под штампа, на который робот подавал заготовки, пошли бракованные детали.

Таких сюжетов можно рассказать немало. Вся история производства — это непрерывная цепь поисков, открытий и устранения причин брака. Сделано здесь много. Удалось выявить большое число «преступников» и, выражаясь языком криминалистов, составить на них досье.

Это: неправильная установка деталей на станке, неточности самого станка, упругие перемещения его частей и обрабатываемой детали под действием сил резания, неравномерный нагрев, износ инструмента в процессе работы и т. д. Казалось бы, если причины выявлены, то остается их устранить и выпускать только хорошую продукцию. В значительной степени это получается, но все же далеко не полностью по ряду причин.

Во-первых, многие из перечисленных выше факторов из-за сложности происходящих при этом явлений полностью просто не устранимы.

Во-вторых, часто причины неточности работы станков взаимосвязаны между собой и выделить их отдельно бывает довольно трудно.

Кроме того, оказалось, что по мере устранения причин, которые хорошо известны, появились другие, имеющие неопределенный характер. К ним, в частности, относятся отклонения размеров и качества поверхности заготовок, которые устанавливаются на станок перед обработкой, разная твердость материала и качество инструмента.

Эти причины случайны, и учесть их заранее совершенно невозможно. Интересно, что отклонения в размерах и неровности поверхности заготовок являются следствием неточности их изготовления на предшествующих операциях. Таким образом, здесь брак как бы передается по «наследству» от операции к операции. Существует даже такой термин — «технологическая наследственность».

Случайный характер факторов, действующих при обработке деталей, и работу самого станка необходимо как-то учитывать. Особенно важным это становится при решении проблем создания гибкого автоматизированного производства (ГАП) и внедрения безлюдной технологии. Если раньше все погрешности и неточности исправлялись рабочим, то в станке-автомате это сделать уже некому. Для учета и коррекции различных случайных неучтенных факторов в современных станках предусматриваются соответствующие устройства, как правило, основанные на применении ЭВМ. При этом все управление производственным процессом разделяется на ряд автономных, но взаимосвязанных в едином комплексе задач, образующих сложную иерархическую систему. На каждом уровне такой системы в соответствии с объемом и характером решаемых задач применяются как разные технические средства в виде мини- или микро-ЭВМ, так и различное программное обеспечение, основанное на разных типах математических моделей. Ниже мы покажем несколько примеров, основанных на применении марковских цепей. Начнем с самого основного элемента любого производства — станка!

Если под испытанием (в вероятностном смысле) понимать операцию по изготовлению какой-либо детали, то различные варианты ее исхода могут рассматриваться в виде последовательности зависимых испытаний, образующих марковскую цепь. С другой стороны, можно дать и иную трактовку задачи.

При анализе технологических процессов механической обработки станок, инструмент, деталь и приспособление, с помощью которого она закрепляется, часто рассматриваются как единая система «станок — приспособление — инструмент — деталь». Так вот, в результате воздействия различных случайных (и неслучайных) факторов в такой системе будет происходить смена состояний, которая может описываться марковской цепью.

Предположим в дальнейшем, что к работе над каждой последующей деталью мы будем приступать только после того, как предшествующая обработана успешно, т. е. она полностью соответствует заданным техническим условиям (ТУ). Тогда можно представить, что в системе «станок — деталь» в процессе технологической операции могут произойти следующие случайные события:

B_1 — деталь с вероятностью r_1 обработана в соответствии с ТУ;

B_2 — деталь после обработки не соответствует ТУ, но этот брак можно исправить. Припишем этому событию вероятность r_2;

B_3 — деталь с вероятностью r_3 после обработки безнадежно испорчена;

C_1 — после операции станок (инструмент) с вероятностью ρ_1 остался в исправном состоянии;

C_2 — в результате операции станок (инструмент) с вероятностью ρ_2 стал неисправен.

Очевидно, что первые три и последние два события образуют полные группы:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 1, \ \rho_1 + \rho_2 = 1.$$

Ради упрощения здесь перечислены, конечно, лишь основные, простейшие варианты событий. В реальных условиях могут быть, конечно, более сложные ситуации, однако и они легко сводятся к случаям, перечисленным выше.

В результате наступления указанных событий система «станок — деталь» оказывается в одном из следующих шести состояний (рис. 15).

Согласно принятой выше классификации поглощающими будут состояния A_1 и A_2, так как и в том и в другом состоянии цель операции достигнута. Правда, здесь может вызвать возражение возможность попадания в состояние A_2, т. е. получения обработанной детали на неисправном станке. Но во-первых, поломка станка может произойти в самом конце обработки деталей, а, во-вторых, оборудование может считаться неисправным условно, например, при достижении предельно допустимого износа инструмента.

Следует сделать еще одно замечание. В данной модели состояния с необработанной и обработанной, но с исправимым браком, деталью считаются одинаковыми, хотя это и не совсем верно. Очевидно, в качестве исходного в данном примере должно фигурировать состояние A_6.

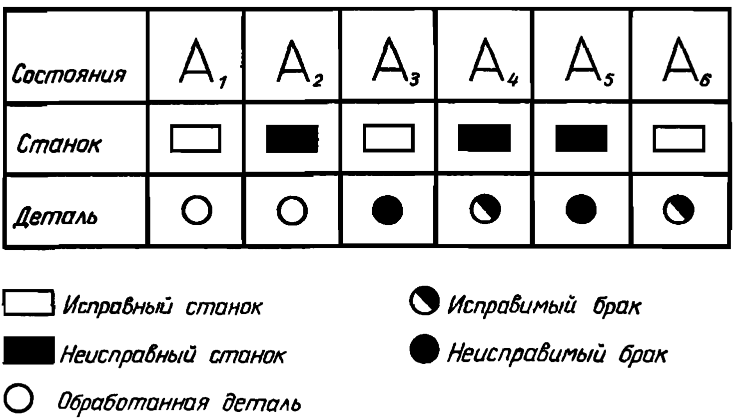


Рис. 15

Переходные вероятности определяются здесь очень просто.

Так как состояния A_1 и A_2 поглощающие, то $P_{11}=1$ и $P_{22}=1$, а вероятности перехода из первого и второго во все последующие состояния равны нулю. При попадании в состояния A_3 — A_5 необходимо будет повторить операцию (с заменой детали, ремонтом станка или с заменой и ремонтом одновременно), т. е. вернуться в исходное состояние A_6. Поэтому соответствующие переходные вероятности P_{36}, P_{46} и P_{56} будут равны единице.

Поскольку события B_1 — B_3 и C_1 — C_2 совместны, то вероятности перехода из исходного во все последующие состояния определяются как произведения вероятностей соответствующих событий. Проще всего найти эти произведения в помощью дерева событий, изображенного на рис. 16. Например, из начального состояния A_6 в поглощающее A_1 мы перейдем при одновремеином наступлении событий B_1 и C_1. Следовательио, полная вероятность общего события будет равна произведению частных событий:

$$P_{61}=r_1\rho_1.$$

Рассуждая аналогично, получим

$$P_{62}=r_1\rho_2,\ P_{63}=r_3\rho_1,\ P_{64}=r_2\rho_2,$$
$$P_{65}=r_3\rho_2,\ P_{66}=r_2\rho_1.$$

Если предположить, что в каждом испытании (операции) переходные вероятности не изменяются, то процесс может быть описан простой однородной цепью Маркова. Граф, наглядно отображающий возможные переходы в системе,

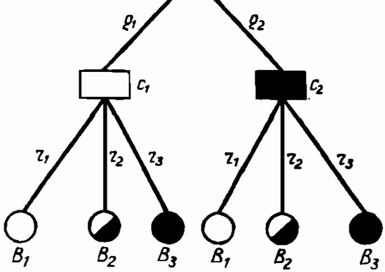


Рис. 16

изображен на рис. 17. Переходные вероятности обозначим здесь и далее для краткости символами P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и P_6.

Теперь матрицу перехода можно представить, как и ранее, в канонической и фундаментальной формах. Но прежде всего следовало бы ответить на вопрос: что же можно при этом практически получить?

Во-первых, обратим внимание на то, что попадание в какое-либо состояние сопровождается определенными расходами материальных ресурсов и времени. Например, попадания в состояния A_3 — A_5 влекут за собой расходы, связанные с ремонтом станка, заменой инструмента и т. д. При получении детали, не соответствующей ТУ или полностью бракованной, также надо платить за израсходованные электроэнергию, материалы, потерю времени станочником. Одним словом, одновременно с матрицей перехода нужно составить матрицу расходов (или ущерба). Она будет иметь такой же вид, как и матрица перехода,

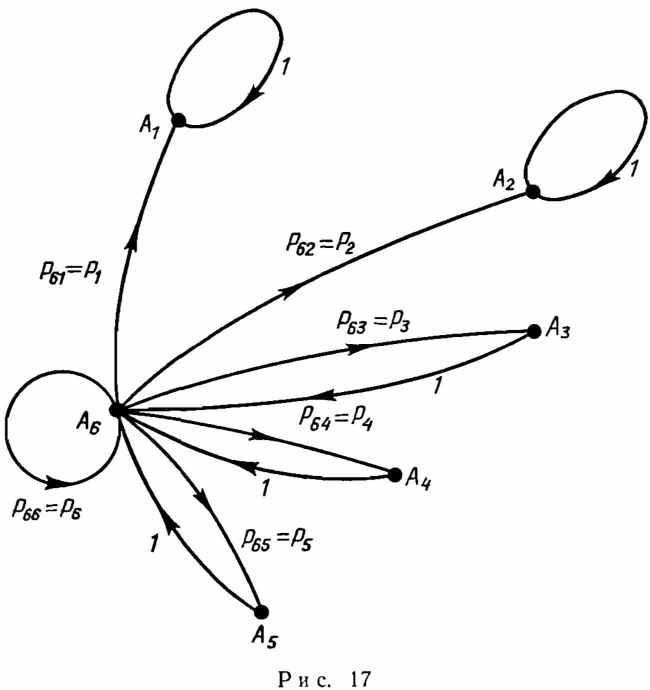


Рис. 17

но ее элементы — это затраты, сопутствующие переходам в определенные состояния (см. рис. 17). Мы не будем утомлять читателя очевидными выкладками, а укажем лишь, что в состояниях, связанных с исправимым браком, надо учитывать потери электроэнергии, времени и т. д., а в случаях неисправимого брака — стоимость испорченной заготовки.

Вот теперь, пользуясь уже известными нам формулами теории марковских цепей, можно определить общие затраты труда и времени на всю операцию с учетом ее возможных случайных исходов. Это очень важный результат. Кроме того, зная среднее количество попаданий системы в состояния, связанные с ремонтом станка, сменой инструмента или испорченной заготовкой, можно прогнозировать профилактические мероприятия по ремонту оборудования, планировать расход инструмента, запасных частей, материала и т. д.

Итак, марковские цепи помогли нам составить математическую модель для определения оптимальных режимов работы станка, но, конечно, в таком сложном организме, как современный завод, их возможности далеко не исчерпаны.

И вот еще одна типичная ситуация.

Каждая остановка станка при смене износившегося инструмента или его поломке — это потери времени. Своевременный профилактический уход позволил бы снизить вероятность получения брака и время вынужденных простоев, что, в свою очередь, дает возможность повысить производительность. Но ведь при каждой остановке станка для осмотра, предупредительного ремонта и замены инструмента мы тоже прекращаем выпуск продукции. Что же выгоднее: чаще или реже делать профилактику? Осмотреть станок бегло, за короткое время, или более тщательно, но длительнее? Снова требуется какое-то разумное оптимальное решение. Решение, которое в условиях предприятия может дать выигрыш многих и многих миллионов рублей.

Давайте рассмотрим задачу оптимальной профилактики более подробно. Заметим только, что она типична для многих видов техники, о чем мы еще расскажем, но сейчас пока мы в цехе завода.

Допустим, что мы хотим определить оптимальную последовательность и длительность профилактики какого-то отдельного станка. Будем считать, что в течение наблюдаемого нами периода времени он может находиться в трех состояниях: A_1 — нормальная работа, A_2 — аварийный ремонт, A_3 — профилактический ремонт. Обслуживать станок мы будем по следующей схеме. Пусть в момент времени t_0 начал работать какой-то новый элемент технологической системы (например, инструмент или деталь станка). Если за планируемый нами отрезок времени T этот элемент не откажет, при $t=T$ он заменяется на новый (профилактическая замена). При преждевременном отказе элемента станок останавливают и начинают незапланированный (аварийный) ремонт. При любом виде ремонта отказавший элемент заменяют новым, равноценным по качеству. Конечно, полного равенства при этом добиться не удастся. Всегда имеются какие-то различия, приводящие к разбросу времени безотказной работы. Кроме того, на этот разброс будут влиять и другие причины: колебания механических свойств обрабатываемых деталей, режимов работы станка и т. д. Короче говоря, время безотказной работы будет величиной случайной, подчиняющейся какому-то закону распределения вероятностей $F(t)$. Случайными будут, конечно, и отрезки времени, в течение которых происходит тот или иной вид ремонта — аварийный $t_а$ и профилактический $t_{пр}$. Из-за неопределенности (случайности) действующих причин мы имеем дело со случайным процессом. Изобразим одну из его реализаций графически (рис. 18). Здесь отрезок $0 - t_1$ соответствует состоянию нормальной работы. В момент t_1 происходит отказ элемента, и система скачком переходит в состояние A_2 — аварийный ремонт. В интервале $t_1 - t_2$ элемент восстанавливается, и с момента t_2 снова начинается состояние нормальной работы. Далее временной участок

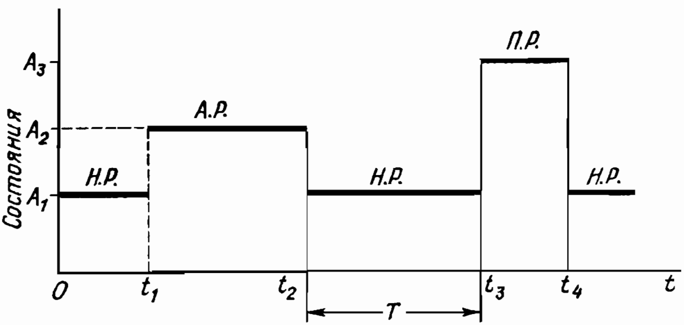


Рис. 18

$(t_2 - t_3) = T$ оканчивается благоприятно. Элемент отрабатывает положенное ему время, и в момент времени t_3 начинается профилактический ремонт, который длится до момента t_4. Затем снова наступает режим нормальной работы и т. д.

Рассмотрим теперь вероятностную картину процесса. Очевидно, при сделанных нами предположениях после перехода системы в какое-то состояние переход в последующие будет зависеть только от текущего состояния и никак не связан с предыдущим, т. е. процесс обладает марковским свойством. Но марковский ли это процесс? По-видимому, нет, так как времена пребывания в состояниях $A_1 - A_3$ случайны и не обязательно подчинены показательному закону. Исключение составляет переход из состояния A_1 в состояние A_3, который происходит всегда через определенное время, равное T. Такие процессы мы раньше назвали полумарковскими. Матрица перехода в этом случае будет иметь вид:

$$\Pi_{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - F(t) & F(t) \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.4)$$

На диагонали матрицы находятся нули. Это значит, что переходы внутри одних и тех же состояний невозможны. Единицы в первом столбце следуют из принятой нами схемы профилактики. Считается, что после того или иного вида ремонта начнется нормальная работа.

Для оценки правильности наших действий мы, как и в предыдущем случае, должны определить их «цену», т. е. снова составить матрицу расходов. Здесь надо только уточнить задачу. Если мы собираемся минимизировать материальные затраты на обслуживание, то элементами матрицы будут убытки (штрафы), связанные с пребыванием системы в том или ином состоянии. Например, при переходе из состояния A_1 в A_2 — аварийная поломка элемента системы — штраф пусть будет равен $C_а$. Если мы переходим к планомерному профилактическому обновлению системы, то расходы будут меньшими, обозначим их $C_{пр}$ ($C_{пр} < C_а$). Сказанное можно записать не в виде матрицы, как это было раньше, а несколько проще:

$$U_{ij} = \begin{cases} C_а, \text{ если } A_1 \to A_2; \\ C_{пр}, \text{ если } A_1 \to A_3; \\ 0 \text{ — во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Если в задаче ставится цель оценки эффективности профилактики по максимуму дохода от работы оборудования, то надо учитывать доход за счет нормальной работы станка и штрафы при его ремонте. Это можно записать так:

$$U_{ij}=\begin{cases} C_{\text{а}}, \text{ если } A_1\to A_2; \\ C_{\text{пр}}, \text{ если } A_1\to A_3; \\ C_{\text{нр}}\, t, \text{ если } A_1, \end{cases}$$

где $C_{\text{нр}}$ — доход в единицу времени нормальной работы.

Выше, когда разбирался случай выбора оптимальной стратегии на обувной фабрике «Золушка», мы умышленно умолчали о возможных типах стратегий. Нам не хотелось, во-первых, сразу слишком усложнять пример излишней информацией, а во-вторых, этого не требовалось и по смыслу задачи.

Здесь будет уместным поговорить о возможных типах стратегий. Конечно, их может быть очень много, ведь на каждом этапе требуется перебирать как разные варианты и длительности периода T между очередными профилактиками, так и технологии ремонтных работ, что скажется на длительности проведения и качестве ремонта. Но сначала введем еще одно важное понятие, относящееся к управляемым марковским процессам. Раньше мы говорили о марковском свойстве применительно к вероятностной связи между состояниями. Такую же связь можно рассматривать и между стратегиями, т. е. каждый раз определять, зависит ли наше поведение, заключающееся в выборе способа управления процессом на последующем шаге, от более ранних состояний или определяется только на основании информации о состоянии на данном этапе. Если такой зависимости нет, то стратегия называется марковской. Значит, марковская стратегия предполагает управление каждым последующим шагом только на основании данных о предыдущем. Образно говоря, марковская стратегия напоминает поведение капризного и легкомысленного человека, который поступает так или иначе, не анализируя предшествующего хода событий, а думая только о том, как ему живется сейчас, в данную минуту. Это, конечно, не значит, что такая стратегия и на самом деле «легкомысленная». Ведь речь идет только о математической модели, которая всегда обладает определенной абстракцией. Можно, конечно, изучать и более «глубокомысленные» стратегии, но это лишь сильно усложнит наш математический аппарат.

Кроме марковского свойства, во всем многообразии стратегий можно выделить еще некоторые типичные, позволяющие ввести даже классификацию.

Можно предположить, во-первых, что выбранные действия по управлению процессом остаются постоянными на время всего наблюдаемого периода. В нашем примере это означает, что остаются неизменными время T между профилактиками и технология проведения ремонтных работ в течение всего периода, на который планируется работа станка. Такая стратегия называется стационарной (ее другое название — жесткая). Можно себе представить, что мы выбираем стратегию более гибко, учитывая какие-либо обстоятельства, и меняем ее в зависимости от номера шага (этапа) процесса или просто от времени. Такие стратегии называются неоднородными, только в первом случае она неоднородна по номеру шага, а во втором — по времени. Неоднородные стратегии можно назвать гибкими, или адаптивными. Они могут учитывать какую-либо новую информацию или изменения, появляющиеся во время процесса. Конкретно в нашем случае эти стратегии могут учитывать степень изношенности инструмента, деталей станка, приспособлений или какие-либо производственные причины, например ритм работы соседних участков автоматической линии, скорость движения конвейера на сборке и т. д.

Вот теперь мы подготовили весь математический аппарат, необходимый для определения оптимальной стратегии профилактики. Дальше задача может решаться методом, аналогичным описанному в предыдущем разделе. В зависимости от постановки задачи по минимуму полных средних расходов или максимуму доходов находят наивыгоднейшие значения срока профилактики или варианты технологии ремонта.

Но и этим примером не исчерпываются, конечно, возможности применения марковских цепей в цехе. Закончим наш рассказ еще одной важной задачей. Всегда после окончания обработки детали нужно проконтролировать ее качество, т. е. соответствие заданным техническим условиям. А что это значит? Тот, кто имел дело с рабочими чертежами, по которым на заводе изготавливают детали, знает, что весь чертеж буквально испещрен разными пометками. Здесь и допуски на точность размеров, форму поверхности, ее шероховатость, твердость и т. д. Попробуйте проверить все эти допуски у каждой детали, выходящей из станка, если иногда современные станки-автоматы буквально «выстреливают» детали по нескольку десятков штук в минуту! Конечно, это не под силу даже самому сноровистому и опытному контролеру. Для ускорения контроля вводят разные автоматические устройства, но даже и с их помощью не удается полностью решить задачу. На помощь приходит теория вероятностей. Здесь она имеет благодатную область применения, ведь выпуск большого количества деталей примерно в одинаковых условиях — это огромное число, масса событий, как правило, обладающих статистической однородностью. Пользуясь методами теории вероятностей, не проверяя все детали подряд, а только контролируя сравнительно небольшую их партию, так называемую выборку, можно быть уверенным в качестве продукции. При этом все однотипные детали, изготавливаемые в одинаковых условиях, считают генеральной совокупностью, а контроль называют выборочным. И снова возникает ситуация, в которой надо искать какие-то наивыгоднейшие, оптимальные решения. В самом деле, при увеличении числа проверяемых деталей (объема выборки) увеличиваются и время контроля, и затрачиваемые на это средства. Но с другой стороны, при малых выборках возрастает вероятность пропуска дефектных изделий, что опять-таки в конечном итоге приведет к материальному ущербу. Тогда возникает такая идея: сделать контроль переменным. Это означает, что при нормальном ходе производства делать контроль по малым выборкам, а при повышении числа дефектных изделий усилить контроль, увеличив выборку. После проведения каких-либо мероприятий, направленных на устранение причин брака, можно вернуться к прежнему методу контроля. При такой формулировке задачи мы снова имеем последовательность случайных событий, в результате которых рассматриваемая система переходит в разные состояния. Здесь их всего два: A_1 — контроль при большой выборке и A_2 — контроль при малой выборке. Очевидно, переход в каждое последующее состояние зависит только от предыдущего. Таким образом, мы снова приходим к марковскому случайному процессу и даже, точнее, к марковской дискретной простой цепи, ведь выборочный контроль будет производиться в определенные промежутки времени по мере накопления очередной партии деталей.

Изобразим одну реализацию процесса графически (рис. 19). На рис. 19 контроль на первом шаге ведется по большой выборке, потом в течение трех шагов по малой, далее снова по большой и т. д. Переход из состояния в состояние, очевидно, будет зависеть от вероятности приемки или отбраковки партии при данном большом или малом объеме выборки и числа обнаруженных в них дефектных изделий. С вероятностью P_{11} контроль продолжится в условиях большой выборки, а P_{22} — малой. Очевидно, $P_{11} = 1 - P_{12}$ и $P_{22} = 1 - P_{21}$.

Матрица перехода в этом случае будет иметь очень простой вид:

$$\Pi_{[2]} = \begin{bmatrix} 1 - P_{12} & P_{12} \\ P_{21} & 1 - P_{21} \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Легко убедиться, что данная цепь обладает свойством эргодичности. Использование этого свойства дает возможность ответить на некоторые практически важные вопросы.

1. Сколько раз в среднем в течение наблюдаемого периода мы попадем в то или иное состояние? Если при этом будет известно время, затрачиваемое на контроль по каждой выборке, то можно в среднем подсчитать общее время, затрачиваемое на контроль деталей.

2. Какова степень уверенности в том, что мы выпустим годную продукцию, или каково среднее значение числа дефектных изделий во всей партии?

И наконец, если мы будем иметь математические соотношения, позволяющие получить ответ на заданные выше вопросы, то можно снова ставить задачу об определении оптимальных стратегий, направленных на уменьшение затрат на контроль при определенных гарантиях выпуска высококачественной продукции или, наоборот, повышения качества продукции при сохранении времени контроля.

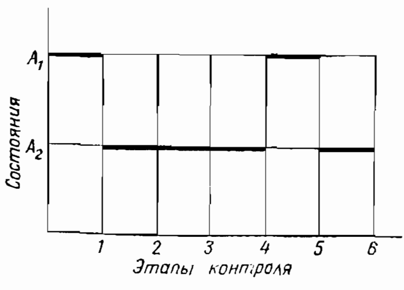


Рис. 19

Можно, конечно, ставить и решать задачу и о нахождении оптимальной стратегии по двум противоречивым критериям, но это уже несколько уводит от темы нашего рассказа.

Ответ на первый вопрос получается довольно простым. Ведь здесь мы имеем процесс того же вида, что был у нас в примере с книгами, т. е. обладающий свойством эргодичности. Для такого процесса легко находятся предельные (финальные) вероятности, которые, по существу, и являются вероятностями того или иного вида контроля в течение наблюдаемого периода времени. Предельные вероятности большой (α_1) или малой (α_2) выборки находятся из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \alpha_1 P_{11} + \alpha_2 P_{12}; \\ &\alpha_2 = \alpha_1 P_{21} + \alpha_2 P_{22}; \\ &\alpha_1 + \alpha_2 = 1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Решая их относительно α_1 и α_2, получим:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{1 - P_{22}}{1 + P_{12} - P_{22}}; \\ &\alpha_2 = \frac{P_{12}}{1 + P_{12} - P_{22}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Среднее число дефектных изделий, которое можно ожидать, если партия контролируется выборкой n_i $(i = 1,2)$, равно

$$\begin{aligned} &m(n_1) = x \cdot P_{12}; \\ &m(n_2) = x \cdot P_{22}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

где x — число дефектных изделий.

Тогда, если учесть вероятность, с которой встретится та или иная партия, общее среднее число дефектных изделий будет

$$M(x) = x \cdot P_{12} \cdot \alpha_1 + x \cdot P_{22} \cdot \alpha_2. \tag{2.9}$$

Теперь надо выбрать метод оптимизации и решать задачу, добиваясь максимальной эффективности технологического процесса.

2.4. Роботы и ритмы

Наш рассказ о применении в машиностроении математических моделей, основанных на марковских цепях, будет неполным, если не коснуться еще одной важной задачи, связанной с проблемами создания гибких автоматизированных производств — ГАПов.

ГАПы отличаются от прежних производственных систем прежде всего возможностью быстро переналаживаться на новый объект труда. Такое их качество становится буквально неоценимым в наше время, когда жизнь требует непрерывной смены образцов выпускаемой продукции. И это диктуется не только требованиями моды, но и необходимостью изготовления все более и более совершенных машин, позволяющих непрерывно повышать эффективность работы. Подсчитано, что сейчас и у нас в стране, и за рубежом более трех четвертей продукции промышленности изготавливается малыми и средними партиями. По-видимому, это соотношение сохранится и в ближайшем будущем. Каждая автоматическая линия требует больших затрат, и конечно, ее выгодно устанавливать в тех случаях, когда необходимо длительное время выпускать какой-то один вид продукции. Изготовление же небольших, быстро сменяющихся партий требует большого числа рабочих сравнительно высокой квалификации. Страдает здесь и качество, и производительность труда. Совместить два противоречивых требования — гибкость и производительность — и позволяет ГАП.

ГАП — это комплекс, включающий высокопроизводительные автоматические станки, роботы, которые перемещают и устанавливают детали на станках, и транспортеры для доставки материалов и удаления изготовленных деталей. Самым главным здесь является, как уже говорилось, возможность быстрой переналадки всего процесса на выпуск новой продукции с помощью программ, вводимых ЭВМ. На станках это обеспечивается за счет большого набора (иногда до нескольких сотен штук) различного инструмента, обрабатывающего самые замысловатые поверхности по программе, задаваемой ЭВМ. Роботы, обладая значительно большим, чем прежние устройства автоматических линий, числом степеней свободы, выполняют опять-таки по командам ЭВМ весьма сложные и разнообразные операции.

Как и всякий новый вид техники, ГАПы породили множество новых и сложных научных проблем. К одной из них и, пожалуй, главной, относится, конечно, проблема обеспечения непрерывной, слаженной и синхронной работы всех звеньев производства.

Скажем сразу, что проблема эта не нова и решалась она еще при создании прежнего «обычного» автоматизированного производства. Ведь время обработки разных деталей на разных станках различно, всегда нужно было учитывать и возможные отказы смежных звеньев производственных цепочек. Однако все эти проблемы резко усилились, усложнились, «возросли в степени» при разработке и первом же использовании ГАПов. Во-вторых, свойство гибкости повлекло за собой необходимость использования гораздо более сложных элементов (станков, роботов, ЭВМ и т. д.) — этакой своеобразной платы за гибкость. При этом, конечно, значительно дороже стали стоить и различные простои производства. Во-вторых, эффективность ГАПов проявляется только при их практически непрерывной (не менее 20 ч) работы в сутки. При этом значительную часть времени оборудование работает без людей, что, конечно, предъявляет особые требования к обеспечению бесперебойной работы.

Как известно, надежная непрерывная работа производственного участка может обеспечиваться различными способами или их комбинацией. К ним относятся и создание более надежных механизмов и систем, их резервирование, введение устройств заблаговременного предупреждения об отказах (систем самодиагностирования) и, конечно, наличие соответствующих запасов. При обосновании их величины могут быть снова использованы марковские цепи.

Представим, например, что на одном из участков гибкой производственной системы имеется робот Роберт, обязанностью которого является установка нагретых заготовок на штамповочный пресс.

Раньше эту тяжелую и небезопасную работу делали люди. Мы назвали робота человеческим именем. На самом деле их называют пока очень неблагозвучно: ПРЦ-23, ПТП-37 или что-нибудь подобное. Это очень напоминает нам героев одного из рассказов С. Лема. Там пришельцы с другой планеты носят такие же «звучные» имена: ПВГДРК и НГТРСК. Не правда ли, похоже? Человеку свойственно одушевлять предметы и машины, с которыми он длительное время работает: автомобили, тракторы и т. д. Вот и роботов сейчас на заводах иногда любовно называют неофициальными именами: Роберт Иванович, Робик, Роботничек и т. д.

Как уже говорилось, эффективная работа всех линий и участков ГАПа достигается лишь при синхронных и слаженных действиях всех элементов. Поэтому наш Роберт должен успевать за ритмом работы пресса и сразу же после каждого его очередного удара устанавливать следующую заготовку. Если бы все элемеиты линии до участка, где трудится Роберт, были абсолютно надежны, то он брал бы каждую очередную подходящую к нему иа транспортере заготовку и ставил бы ее под пресс. Удар — и готовая деталь пошла дальше по линии. Но, к сожалению, пока так идеально механизмы не работают. Может что-то отказать и до и после Роберта, не говоря уже о том, что и его собственный «организм», увы, также часто ненадежен. Кроме того, надо учитывать, что даже при безотказной работе станки надо иногда останавливать для наладки и смены иниструмента. Значит, необходимы какие-то устройства, компенсирующие случайные остановки процесса. Поэтому, как уже говорилось, необходимы бункеры-накопители, в которых содержится некоторый запас заготовок, обеспечивающий бесперебойную работу всей линии при остановке одного из ее элементов. Тогда возникает вопрос: каким должен быть запас заготовок, чтобы обеспечить бесперебойную работу линии? Если сделать запас слишком большим, то ритмичность работы гарантирована, но чрезмерно загромождаются рабочие площади, расходуется лишний металл на изготовление бункеров. При малых же запасах велика опасность потерь рабочего времени из-за простоев линии. Таким образом, мы имеем дело с задачей определения рациональных запасов.

Сначала следует договориться, что понимать в данном случае под состоянием системы. В систему входят станок, расположенный до бункера, сам бункер с заготовками, робот и пресс. Нам нет необходимости включать в систему все эти элементы, а нужно лишь учесть их влияние путем введения соответствующих вероятностей. Тогда под состоянием можно понимать количество заготовок в бункере:

A_0 — бункер пуст;

A_1 — в бункере имеется только одна заготовка;

. . . .

Ak — в бункере имеется k заготовок и т. д.

Шагом (этапом) процесса можно будет считать весь цикл, который проходит деталь на данном участке: изготовление заготовки, подача в бункер, ее захват и перемещение роботом к прессу, установка и, наконец, штамповка. Очевидно, что система будет менять свое состояние за один шаг. Если пренебречь на рассматриваемом отрезке времени износом оборудования, то вероятность перехода системы в каждое последующее состояние будет зависеть только от предыдущего, то есть можно считать, что процесс может быть смоделирован с помощью дискретной марковской цепи.

Из смысла задачи ясно, что в системе возможны любые переходы из одного состояния в другое и она является эргодической. Можно без труда доказать это и математически, возведением в степень переходной матрицы, имеющей в данном случае характерную симметричную трехдиагональную ленточную форму:

$$\Pi_{[k]}=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & P_{32} & P_{33} & P_{34} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & P_{k-1,\,k} & P_{kk} \end{bmatrix}.$$

Свойство эргодичности позволяет составить уже знакомую нам систему алгебраических уравнений, из которых сравнительно легко определяются предельные (финальные) вероятности наличия того или иного числа заготовок, находящихся в бункере. Очевидно, они должны быть связаны с вероятностями работы звеньев рассматриваемого производственного участка. Эти уравнения в данном случае имеют уже знакомый вид:

$$\begin{aligned} &P(1)=P(1)P_{11}+P(2)P_{21}; \\ &P(2)=P(1)P_{12}+P(2)P_{22}+P(3)P_{32}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &P(1)+P(2)+\ldots+P(k)=1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь $P(k)$ — значения предельных вероятностей, соответствующих наличию k заготовок в бункере; P_{11}, P_{12}, P_{ij}, P_{kk} — переходные вероятности. Определяются они в данном случае следующим образом.

За один шаг (этап) процесса в системе могут произойти три несовместных события: $B(+1)$ — увеличение числа заготовок в бункере на единицу; $B(-1)$ — такое же уменьшение числа заготовок и $B(0)$ — соответствующее неизменному числу заготовок.

Обозначим вероятность подачи заготовки с соседнего участка в бункер r_1, а ее извлечение роботом из бункера — r_2.

Очевидно, вероятности обратных событий будут $1-r_1$ и $1-r_2$. Увеличение числа заготовок в бункере на единицу (событие $B(+1)$) произойдет, если будет подана заготовка с соседнего участка или робот почему-либо не выполнит своей функции и не извлечет очередную заготовку. Как известно, в теории вероятностей это называется произведением событий. Тогда вероятность события $B(+1)$ будет равна

$$P[B(+1)]=r_1(1-r_2). \tag{2.12}$$

Рассуждая аналогично, можно вычислить вероятность события $B(-1)$, т. е. уменьшения числа заготовок в бункере на единицу:

$$P[B(-1)]=r_2(1-r_1). \tag{2.13}$$

Вероятность третьего события $B(0)$ — неизменного числа заготовок вычисляется несколько сложнее. Здесь надо уже применить теоремы и о сумме и о произведении событий. Ведь если число заготовок в бункере остается неизменным, то одновременно должны произойти события $B(+1)$ или $B(-1)$ и, наоборот, отсутствовать оба этих события.

Тогда вероятность того, что число заготовок в бункере остается неизменным, будет равна

$$P[B(0)]=r_1\cdot r_2+(1-r_1)(1-r_2).$$

Очевидно, что вероятности поступления или убытия заготовок и будут переходными вероятностями марковской цепи для состояний с разными номерами $i\neq j$. Исключение составляют лишь крайние состояния A_0 — бункер пуст и A_k — бункер полон. Эти переходные вероятности определяются также на основании теорем алгебры событий. Так, состояние A_0 наступит, если одновременно произойдут два события $B(0)$ и $B(-1)$, то есть число заготовок в бункере было неизменно (и он был пуст) или имеющаяся в нем одна заготовка была извлечена роботом. Тогда переходная вероятность будет равна

$$P(A_0)=P_{11}=P[B(0)]+P[B(-1)].$$

Аналогично $P(A_k)=P_{kk}=P[B(0)]+P[B(+1)]$.

Очевидно, нарушение в синхронности работы участка будет в том случае, если произойдут одновременно три события: «бункер пуст», «предшествующий участок не подал заготовку», «робот не извлек очередную заготовку». Эта вероятность подсчитывается снова как произведение вероятностей соответствующих событий:

$$P(0)=r_2(1-r_1)\cdot P(k).$$

Величина $P(k)$ есть не что иное, как предельная вероятность того, что в бункере имеется k заготовок. Она определяется из системы линейных уравнений (2.11). Пользуясь выражениями, полученными для $P(k)$, можно показать, что при $P[B(+1)] > P[B(-1)]$ наибольшую вероятность имеет состояние A_0 (бункер пуст), а при $P[B(+1)]=$ $=2P[B(-1)]$ — состояние A_k (бункер полон). То есть полностью надежную работу участка обеспечивает всего лишь двукратный запас производительности участка, подающего заготовки.

Интересно, что при равных вероятностях подачи и извлечения заготовок

$$P[B(+1)]=P[B(-1)],$$

вероятности нахождения любого числа заготовок одинаковы и равны, то есть

$$P(1)=P(2)=\ldots=1/k.$$

Необходимая емкость бункера легко определяется. При этом надо, исходя из общих экономических целесообразных требований к надежности элементов всей гибкой производственной системы, задаться рациональным значением $P(0)$ — вероятности безотказной работы данного участка, а также значениями вероятностей r_1 и r_2.

2.5. Оптимизация и... такси

Наш век — это век оптимизации! Можно ли его так называть? Ведь задача отыскания наилучшего или оптимального решения какой-то задачи для человека не нова.

Сейчас мы часто с удивлением убеждаемся, что даже самые первые орудия охоты и труда люди стремились делать и делали по возможности рационально. А если посмотреть внимательно на грандиозные сооружения, дошедшие до нас из глубины веков? Сколько здесь самых настоящих оптимальных решений, решений, рожденных опытом, интуицией строителей, не знавших сложных математических методов и ЭВМ.

Но почему же все-таки проблема оптимальности так важна сейчас, в наше время?

Сложность и колоссальные размеры некоторых современных проектов ведут к большим потерям в случае ошибочных (неверных) решений. С другой стороны, все более жесткие требования к срокам разработки, диктуемые темпами научно-технического прогресса, увеличивают вероятность ошибок. Более того, оказывается, что некоторые проекты (например, космические) вообще не могут быть реализованы при неоптимальных решениях. Лозунг «Эффективность и качество» является не чем иным, как призывом к оптимизации всех видов трудовой деятельности.

Но оптимизируем мы свои решения не только на работе. Разве не выбираются нами наилучшие или даже оптимальные варианты при поездке на работу, при покупке новой вещи и т. д.

Ранее мы показали, как марковские цепи могут быть применены для выбора оптимальных решений в космических задачах, на заводе или при смене модели на обувной фабрике. Но вот еще один интересный пример!

Все мы пользуемся услугами такси. Согласно известному «закону бутерброда» свободных машин с зеленым огоньком всегда проходит много, когда мы не спешим, и их обычно нет, когда мы куда-нибудь опаздываем.

Качество нашего обслуживания, конечно, во многом зависит от правильных действий водителей такси. Чаще всего их ругают, хотя это далеко не всегда справедливо,— ведь работа водителя проходит в довольно сложных условиях.

Сотни перекрестков, светофоров, тысячи пешеходов, часто буквально «выпархивающих» из-под колес транспорта,— в этих условиях шофер должен принимать за рабочий день тысячи решений в быстро меняющейся дорожной обстановке, и каждое из них должно быть только правильным, иначе как минимум — свисток сотрудника ГАИ и как максимум — авария! А пассажиры — пожилые и юные, вежливые и капризные, иногда не знающие толком, куда им ехать. Но кроме всего этого, как всякому работнику сферы обслуживания шоферу требуется выполнить финансовый план, значит, ему надо принимать решения не только правильные с точки зрения безопасности, но и эффективные в смысле критерия максимума доходов.

А что, если попробовать и здесь помочь шоферу выбрать правильную стратегию с помощью марковских цепей? Мы, конечно, не рассчитываем, что в каждой машине, кроме обычного счетчика и рации, сразу будут установлены компьютеры, но, может быть, это через некоторое время сделают.

Итак, допустим, что по просьбе руководителя одного из таксопарков мы очутились в машине образцового водителя Олега Васильева. Назовем его для краткости О. В. Для дальнейшего рассказа нам надо конкретизировать обстановку. Предположим, что эксперимент проводится в крупном городе *А*, имеющем поблизости небольшой микрорайон *Б* и удаленный пригородный поселок *В* (рис. 20). В городе и микрорайоне водитель может пользоваться радио-

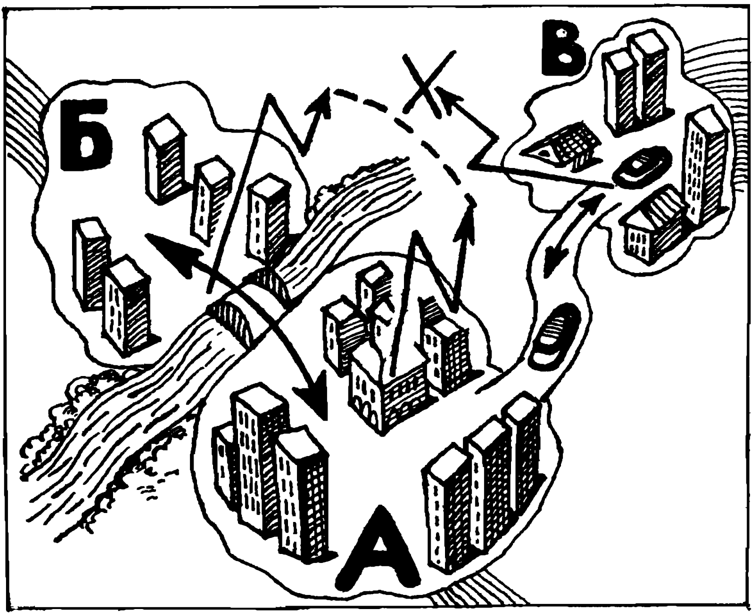


Рис. 20

связью с диспетчером, а в поселке B — нет. Так как водитель О. В. образцовый, то он выполняет свои обязанности не формально, а инициативно, все время стараясь выбрать оптимальное решение. Допустим, что в распоряжении О. В. после каждой очередной поездки имеются три стратегии:

1) медленно ездить по улицам A, $Б$, B, ожидая случайного пассажира;

2) ехать на ближайшую стоянку и ждать в очереди;

3) остановиться и ждать вызова по радио.

Конечно, О. В. и другие водители применяют и иные стратегии или их комбинации. Например, можно медленно ехать к ближайшей стоянке, ожидая пассажиров, или во время поездки с очередным пассажиром связаться по радио с диспетчером и т. д. При этом математическая модель принципиально не изменится, а лишь усложнится. Поэтому ограничимся сделанными выше предположениями. Совершенно очевидно, что каждая встреча очередного пассажира с нашей машиной и соответственно выбор маршрута поездки будут для нас событиями случайными. В качестве состояний здесь надо принять местонахождение О. В. в каком-то из трех пунктов A, $Б$, B. Обозначим эти состояния соответственно 1, 2, 3. Вероятность каждой последующей поездки и переход в соответствующее состояние зависят только от того, в каком состоянии мы в данный момент находимся. Таким образом, мы опять имеем дело с дискретной марковской цепью.

Какая это цепь? Если исключить моменты начала и конца работы, обеденные перерывы, заправку и т. д., то очевидно, что в течение рабочего дня возможны любые состояния.

Поэтому данная марковская цепь обладает свойством эргодичности. Более того, поскольку переходы из состояния в состояние никак не связаны с какими-то определенными промежутками времени (т. е. цепь не является циклической), то в этом случае цепь регулярна.

Конечно, переход из состояния в состояние сопровождается для О. В. определенными доходами в виде платы за поездку или расходами при бесцельных поездках и ожидании пассажира на стоянке. Кроме того, величина этих доходов будет зависеть и от выбора стратегии, так как каждой стратегии соответствуют свои вероятности переходов, зависящие от плотности распределения пассажиров.

Выберем для определенности какие-либо значения переходных вероятностей P_{ij}^k и соответствующих доходов

u_{ij}^k в условных единицах для различных состояний и стратегий. Эти исходные данные сведем в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Состояния i	Стратегии k	Вероятности переходов P			Доход			Непосредственно ожидаемый доход q_i^k
		$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
1 (А)	1	0,5	0,25	0,25	10	4	8	8
	2	0,0625	0,75	0,1875	8	2	4	2,75
	3	0,25	0,125	0,625	4	6	4	4,25
2 (Б)	1	0,25	0,25	0,5	10	2	8	7
	2	0,125	0,75	0,125	6	4	2	4
	3	0,75	0,0625	0,1875	4	0	8	4,5
3 (В)	1	0,5	0	0,5	14	0	18	16
	2	0,0625	0,875	0,0625	8	16	8	15

Для каждого состояния и соответствующих стратегий можно заранее подсчитать значения непосредственно ожидаемых доходов q_i^k, например:

$$q_1^1 = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}25 \cdot 4 + 0{,}25 \cdot 8 = 8;$$
$$q_1^2 = 0{,}0625 \cdot 8 + 0{,}75 \cdot 2 + 0{,}1875 \cdot 4 = 2{,}75 \text{ и т. д.}$$

Обратите внимание на то, что числа, стоящие в столбцах под общим названием «Вероятности переходов», не образуют переходную матрицу. Ведь каждой стратегии в данном случае будет соответствовать своя переходная матрица. Для ее составления необходимо выбрать из таблицы значения, соответствующие данной стратегии. Так, например, для стратегии 1 (медленная езда по улицам в ожидании случайного пассажира) матрица будет иметь вид:

$$\Pi_{[3]}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}. \qquad (2.14)$$

Итак, все исходные данные у нас есть. Теперь попытаемся помочь нашему образцовому водителю выбрать оптимальную стратегию. Поставленная нами задача облегчается тем, что аналогичные ситуации уже рассматривались выше (задача о моде). Напомним, что там мы выбирали стратегию, которая обращала в максимум выражение

$$v_i(n) = q_i + \bar{v}_i(n-1), \ i = 1, \ 2, \qquad (2.15)$$

где q_i — непосредственно ожидаемый доход;
$\bar{v}_i(n-1)$ — доход на предшествующих шагах процесса.

Процедура оптимизации заключалась в определении максимума выражения (2.15) на каждом шаге (этапе). Такой подход был назван рекуррентным, так как использовалось выражение, связывающее каждый последующий шаг с предыдущим. Оказывается, при большом числе шагов этот метод не эффективен из-за огромного объема вычислений, так как оптимизацию нужно проводить отдельно на каждом шаге. Кроме того, при рекуррентном методе мы использовали первое из найденных решений, не пытаясь его уточнить.

Итак, с одной стороны, много расчетов, а с другой — не очень высокая точность.

Свойство эргодичности процесса позволяет применить более рациональный при большом числе шагов метод, называемый итерационным. Само название говорит о том, что в данном случае производится последовательное уточнение решения путем повторных расчетов (итераций). При этих уточнениях находится решение, обеспечивающее в среднем максимум дохода при большом числе шагов. Оно уже не будет зависеть от того, на каком шаге производится оценка оптимальной стратегии, то есть является справедливым для всего процесса независимо от номера шага. Важным достоинством метода является, кроме того, и то, что он дает возможность определить момент прекращения дальнейших уточнений.

Но почему этот метод можно применять в данном примере и нельзя было использовать в других случаях? Дело в том, что свойство эргодичности марковской цепи обусловливает при большом числе шагов стационарную форму матрицы перехода. При этом, как уже говорилось, она будет составлена из одинаковых строк. Поскольку матрица доходов также состоит из постоянных, не зависящих от n величин, то можно предположить, что с ростом n общая величина доходов будет возрастать линейно. В самом деле, даже в предыдущих примерах было видно, что при определенных значениях n точки, соответствующие суммарному доходу, лежат на прямых (см. рис. 14).

Представим графически линейную зависимость суммарного дохода от числа шагов — $v_i(n)$ (рис. 21). На графике рис. 21 прямая $v_1(n)$ показывает зависимость суммарного дохода водителя, если начальным было состояние *1* (пассажир сел в машину в городе). Прямая $v_2(n)$ соответствует начальному состоянию *2*, то есть посадке в пригородном поселке.

Обе прямые $v_i(n)$ могут быть описаны линейными уравнениями

$$v_i(n) = n \cdot g + v_i(0). \tag{2.16}$$

Здесь g — угловой коэффициент прямой $v_i(n)$; $v_i(0)$ — отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат при $n=0$, т. е. в конце процесса.

Легко заметить, что при линейном представлении зависимости $v_i(n)$ величина непосредственно ожидаемого дохода q_i заменяется g. Отличие здесь лишь в том, что g является величиной, постоянной для всего процесса, в то время как q_i меняется на каждом шаге. То есть при большом числе шагов $q_i \to g$.

Величина $v_i(0)$ показывает, на сколько в среднем отличается доход, когда процесс заканчивается в том или ином состоянии. В теории марковских цепей $v_i(0)$ называют весом, так как разность $v_1(0) - v_2(0)$ при двух состояниях показывает средний выигрыш от того, в каком состоянии мы находимся в конце процесса (независимо от выбранной стратегии).

Таким образом, подводя итоги наших общих рассуждений, можно сказать, что свойство эргодичности позволяет нам считать справедливым приближенное равенство

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} v_i(n-1) \approx ng + v_i(0). \tag{2.17}$$

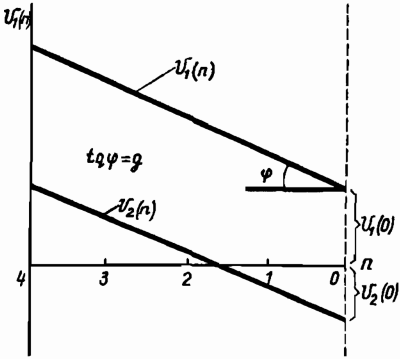


Рис. 21

На этом предположении и основан итерационный метод. Суть его сводится к тому, что при разных стратегиях путем последовательных приближений определяются значения сумм

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(ng+v_i).$$

Таким образом, если ранее искалась стратегия, обеспечивающая на каждом шаге максимум суммы непосредственно ожидаемого дохода и дохода на предшествующих шагах, то здесь находится стратегия, обеспечивающая максимум суммы средней прибыли и относительного веса сразу для всего процесса. Более понятным становится метод при рассмотрении конкретного примера. Используем для этого данные, приведенные в таблице 2.2.

Начнем процедуру итераций с предположения, что

$$v_1(0)=v_2(0)=v_3(0).$$

Тогда, очевидно, оптимальным будет решение, максимизирующее непосредственно ожидаемый доход, т. е.

$$d_{\langle 3\rangle}=\langle 1,\ 1,\ 1\rangle$$

Это означает, что, где бы мы ни находились после окончания поездки, выгоднее будет медленно ездить по улицам, ожидая случайного пассажира. Значения непосредственно ожидаемого дохода, равные в данном случае угловым коэффициентам прямых $v_i(n)$, будут соответственно

$$q_1^1=g_1=8;\ q_2^1=g_2=7;\ q_3^1=g_3=16.$$

Произведем теперь первое уточнение (итерацию) для первого этапа $n=1$. Для нашего случая с учетом данных табл. 2.2 система уравнений 2.17 будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
g+v_1&=8+0{,}5v_1+0{,}25v_2+0{,}25v_3;\\
g+v_2&=7+0{,}25v_1+0{,}25v_2+0{,}5v_3;\\
g+v_3&=16+0{,}5v_1+0\cdot v_2+0{,}5v_3.
\end{aligned}$$

В этой системе трех уравнений четыре неизвестных. Для ее решения необходимо задаться одним из них. Положим, например, v_3 равным нулю. Тогда $v_1=1{,}33$, $v_2=7{,}47$, $v_3=0$, $g=9{,}2$.

Теперь вычислим значения сумм $q_i^k+\sum\limits_{j=1}^{N}P_{ij}^k v_j$ для всех состояний и стратегий, пользуясь найденными значениями v_i. Например, для первого состояния и первой стратегии

$$q_1^1+P_{11}^1 v_1+P_{12}^1 v_2+P_{13}^1 v_3=8+0{,}5\cdot 1{,}33+0{,}25\cdot 7{,}47+ + 0{,}25\cdot 0=10{,}53,$$

для первого состояния и второй стратегии

$$q_1^2+P_{11}^2 v_1+P_{12}^2 v_2+P_{13}^2 v_3=2{,}75+0{,}06\cdot 1{,}33+0{,}75\cdot 7{,}47+ +0{,}18\cdot 0=8{,}43.$$

Остальные вычисления сведем в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Состояния i	Стратегии k	Критерий $q_i^k+\sum\limits_{j=1}^{N} P_{ij}^k v_j$
1	1	$\boxed{10.53}$
	2	8,43
	3	5,52
2	1	9,20
	2	$\boxed{9.77}$
	3	5,97
3	1	16,67
	2	$\boxed{21{,}62}$

Судя по данным таблицы, оптимальным решением будет теперь

$$d_{\langle 3\rangle}=\langle 1,\ 2,\ 2\rangle,$$

т. е. на основании уточнения более выгодным оказывается при попадании в состояние *1* (городская поездка) следовать первой стратегии. В случае если в результате очередной поездки мы попали в микрорайон или поселок, выгоднее ехать на стоянку и там ожидать пассажиров. Матрица перехода и вектор непосредственно ожидаемого дохода теперь будут иметь вид:

$$\Pi_{[3]}=\begin{vmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}125 & 0{,}75 & 0{,}125 \\ 0{,}0625 & 0{,}875 & 0{,}0625 \end{vmatrix},\quad d_{\langle 3\rangle}=\langle 8,\ 4,\ 15\rangle.$$

Определим снова значения весов:

$$g+v_1=8+0{,}5v_1+0{,}25v_2+0{,}25v_3;$$
$$g+v_2=4+0{,}125v_1+0{,}75v_2+0{,}125v_3;$$
$$g+v_3=15+0{,}0625v_{=}+0{,}875v_2+0{,}0625v_3.$$

Принимая снова $v_3=0$, получим:

$$v_1=-3{,}88,\ v_2=12{,}85,\ v_3=0,\ g=13{,}15.$$

Обратите внимание, что наше упорство в уточнениях достойно вознаграждено. Ведь средняя величина дохода за одну поездку увеличилась с 9,2 до 13,15 ед. Поэтому, несмотря на опасение наскучить читателю, есть смысл делать дальнейшие уточнения (итерации). Все вычисления сведем в табл. 2.4, которая при новых значениях весов v_i и дохода g будет выглядеть так:

Таблица 2.4

Состояния i	Стратегии k	Критерий $q_i^k+\sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j$
1	1	9,27
	2	$\boxed{12{,}14}$
	3	5,54
2	1	9,87
	2	$\boxed{13{,}34}$
	3	4,41
3	1	15,41
	2	$\boxed{24{,}42}$

Значит, снова получается, что оптимальной во всех состояниях будет стратегия *2*, и вектор решений имеет вид $d_{\langle 3\rangle}=\langle 2,\ 2,\ 2\rangle$.

Полученное решение совпадает с предыдущим, поэтому уточнение можно прекратить. Значит, можно с уверенностью посоветовать О. В. и другим водителям ехать на стоянку и ждать там пассажира. Максимальное значение среднего дохода составит при этом 13,34 ед. за рейс.

Обратите внимание на то, что оно почти в 1,5 раза больше первоначального, полученного при условии принятия во всех состояниях стратегии *1* (езда по улицам в ожидании случайного пассажира). Не правда ли, неплохое вознаграждение за настойчивость, проявленную при поисках оптимального решения! Интересно отметить, что при стратегии *2* непосредственно ожидаемый доход минимален. Это значит, что если водитель такси будет руководствоваться соображениями только сиюминутной выгоды (как это часто бывает), то он проявит недальновидность. Опыт-

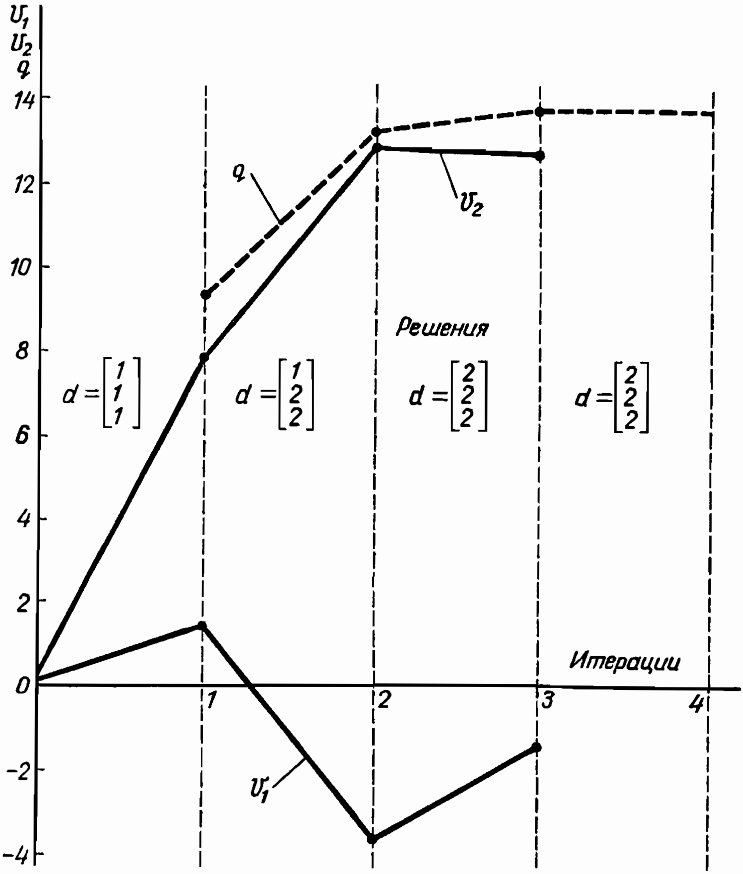
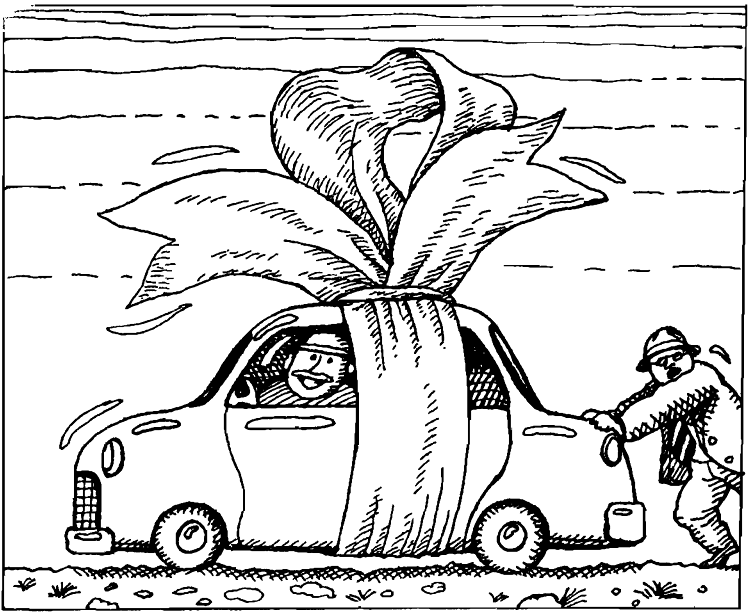


Рис. 22

ные и разумные водители, к которым, конечно, относится и О. В., будут учитывать не только эффект, полученный при данном рейсе, но и вероятность появления последующих пассажиров.

Процесс последовательного поиска оптимального решения можно для наглядности представить графически (рис. 22). На графике видно, что уже после первого уточнения значение среднего ожидаемого дохода q увеличилось с 9,2 до 13,5! Кроме того, из графика видно, что рост значения углового коэффициента g, а также и изменение компонентов вектора оптимального решения заканчиваются уже после второй итерации.

Итак, задача оказания помощи таксопарку в определении оптимальной стратегии водителей решена. Будем надеяться, что теперь мы при необходимости с помощью такси быстро попадем в нужное нам место. Но в приведенных выше рассуждениях оптимальность решения оценивалась по критерию максимума доходов таксопарка. С нашей же «пассажирской» точки зрения оптимальное решение, возможно, будет и другим. Но тогда надо решать задачу оптимизации уже по двум критериям, а это совсем другая задача, выходящая за рамки нашей книги.



2.6. Стратегия замены, или Стоит ли менять автомобиль!

Мы живем во время поразительно быстрого развития науки и техники. На этот счет существует много образных и интересных сравнений. Американский ученый К. Боулдинг, например, пишет: «Сегодняшний мир так же отличается от мира, в котором я появился на свет, как тот мир отличался от мира Юлия Цезаря» *. Другие ученые утверждают, что последние 100 лет принесли миру больше изменений, чем 1000 лет Римской империи или 100 000 лет каменного века. Третьи подсчитали, что если всего в истории развития человечества было 800 поколений, то 650 из них провели свою жизнь в пещерах, 6,5 знают печать, 4 определяют время при помощи часов, 2 пользуются электродвигателем и... только одно, ныне живущее на Земле,

* Цит. по: Тоффлер О. Столкновение с будущим (отрывки из книги)/Пер. с англ. В. Воронина//Иностр. литература.— 1972.— № 3.— С. 299.

знает телевидение, космос, ЭВМ, ядерную энергетику, лазеры и ракеты.

В быстро меняющемся мире также быстро меняются и предметы, которые нас окружают. Они появляются на свет, приносят нам пользу, стареют и заменяются другими, новыми. Стареют наши вещи двояко: материально, изнашиваясь при пользовании, и морально, уступая место другим, более совершенным.

Можно, конечно, быть бережливым и пользоваться старой вещью долго. Но будет ли это на самом деле бережливость, ведь беречь — не значит не тратить! Например, долго эксплуатируя старый автомобиль, вы все свободное время и ... деньги потратите на приобретение запасных частей, бесконечный ремонт, не получая взамен удовольствия от поездок. Правда, некоторые автолюбители, начиная с известного Адама Козлевича, считают, что в непрерывном устранении неполадок как раз и заключается вся прелесть владения машиной. Однако козлевичей все-таки меньшинство. Большинство предпочитает по прошествии некоторого времени расстаться с привычным, но старым автомобилем и с волнением и трепетом сесть за руль сверкающего лаком и никелем нового.

А когда это лучше сделать? Через год после покупки? Через три года? А может быть, через пять лет?

Такие же вопросы можно ставить и в отношении других наших вещей. Но особенно важно уметь дать правильный ответ на этот вопрос, если он поставлен в государственном масштабе.

В самом деле, когда лучше заменить станок, участок автоматической линии, переоборудовать весь завод? Эти вопросы возникают постоянно, и от их правильного решения зависят подчас экономические показатели деятельности предприятия или даже отрасли промышленности.

Конечно, новый станок стоит дорого, но он производительнее старого. Для установки нового станка надо затратить время и средства, иногда даже остановить автоматическую линию или цех. Но эксплуатация старого оборудования также требует бо́льших расходов. А раз есть «за» и «против», то существует и наиболее правильное, оптимальное решение (стратегия) о сроках замены, обеспечивающее максимальную выгоду. Если же речь идет о многих решениях на протяжении всего времени эксплуатации оборудования, то мы опять имеем дело с проблемой определения оптимальной технической политики в обновлении оборудования. Эта проблема решается в настоящее время разными математическими методами. Одним из них, например, является метод динамического программирования. О нем мы уже говорили выше при определении технической политики директора фабрики «Золушка».

Надо только оговориться, что сам по себе метод динамического программирования не требует привлечения аппарата марковских цепей и задачи о замене могут решаться с его помощью и в детерминированной постановке. Однако использование марковских цепей дает возможность более правильно, с учетом элементов случайности определить состояние, в которое попадает система на том или ином шаге процесса.

Теперь после общих рассуждений настало время рассмотреть конкретные примеры. Однако, прежде чем окунуться в заводскую обстановку, давайте попробуем представить себе, что перед автолюбителем А. К. открывается заманчивая перспектива на каком-то этапе существования его «Антилопы» (или «Москвича») поменять ее (его) на новую машину. Конечно, А. К. все время трогательно ухаживает за «Антилопой», делает мелкий ремонт и т. д., но два раза в год он с помощью автоконсилиума, включающего его соседей по гаражу и друзей, определяет техническое состояние машины и решает, что же делать дальше.

Вопрос абсолютно ясен, если «Антилопа» изношена полностью и у А. К. есть возможность приобрести новую машину. Ну а если «Антилопа», по мнению автоконсилиума, еще может послужить и продавать ее рано? Тут есть над чем подумать!

Для принятия решения мы рекомендуем А. К. воспользоваться теорией марковских цепей. Но подходит ли она в данном случае? Да, подходит, потому что каждое последующее состояние «Антилопы» (т. е. будет ли она эксплуатироваться дальше или будет продана) зависит от предшествующего — состояния в момент осмотра. Таким образом, мы опять имеем дело с последовательностью зависимых испытаний. Случайным событием будет при этом попадание в то или иное состояние.

Здесь надо только условиться о том, что будет в дальнейшем пониматься под «состоянием». Очень просто было бы определять состояние по принципу «годен — негоден», но тогда мы не использовали бы полностью возможности марковских цепей. Лучше всего приписать «Антилопе» определенный «возраст» и оценивать ее состояние (i)

по принадлежности к этому «возрасту». Тогда при периодических осмотрах i может иметь значение, скажем, от 1 до 20, а общее число состояний будет 20. Можно считать, например, что О. Бендер застал «Антилопу» в «возрасте» 20 (только не лет, а периодов между осмотрами). Конечно, в этом почтенном возрасте ее нужно было бы поскорее заменить, что вскоре и выяснилось при довольно печальных обстоятельствах:

«... «Антилопы» не было. На дороге валялась безобразная груда обломков: поршни, подушки, рессоры. Медные кишочки блестели под луной...» *

Учтем также, что А. К. был, мягко говоря, небогат и заменить любимую «Антилопу» на другую машину он не мог. Допустим, что каждый раз, принимая решение о замене, он имеет возможность сделать выбор из машин любого «возраста» от 1 до 20. Таким образом, первой стратегией А. К. может быть решение продолжать ездить на «Антилопе» до следующего осмотра ($k=1$). Все остальные стратегии ($k>1$) заключаются в замене машины. Отличаются они друг от друга разным «возрастом» заменяемой машины. Если считать, что «возраст» определяется только целыми числами, то оставшееся число стратегий будет 20. Таким образом, общее число принимаемых при каждом осмотре решений составляет 21^{20}! Это очень сложная задача для А. К. и его друзей. С нею трудно справиться даже с помощью современных ЭВМ.

Конечно, можно все сильно упростить, не детализируя так подробно «возраст» автомашин, но с помощью марковских цепей задача решается и в прежней постановке. Для этого автоконсилиуму надо знать:

C_i — покупную цену машины i-го возраста, которую А. К. хочет приобрести;

T_i — выручку от продажи «Антилопы» в i-м возрасте;

$C_{\text{экс.}i}$ — расходы, связанные с эксплуатацией машины i-го возраста в течение полугодия;

P_i — вероятность того, что «Антилопа» или другая машина возраста i «доживет» до возраста $i+1$ (т. е. не выйдет из строя до следующего осмотра).

В случае если с «Антилопой», находящейся в любом возрасте, произойдет то же, что и в романе И. Ильфа и Е. Петрова, то она сразу попадет в состояние 20. Очевид-

---

* Ильф И., Петров Е. Золотой теленок.— М.: Худ. лит., 1976.— С. 228.

но, что при поломке исключаются последовательные переходы из состояния в состояние и $P_{20,\,i}=0$.

Выберем для определенности какие-либо условные исходные данные и изобразим их графически (рис. 23). На левой оси ординат отложим стоимость машины в условных единицах C_i, а также расходы, связанные с ее эксплуатацией $C_{\text{экс.}\,i}$. На правой оси ординат будем отсчитывать вероятность выживания в i-м возрасте $P_i(n)$, а ось абсцисс будет временно́й. На ней будут откладываться годы или условные периоды эксплуатации. Кривых на рисунке получилось довольно много. Давайте в них разберемся.

Кривая $P_i(n)$ показывает, что вероятность выживания машины или любого механизма с увеличением возраста уменьшается. Пожалуй, эта зависимость очевидна и не требует особых комментариев.

Кривые зависимостей стоимости машины и ее эксплуатационных расходов изображены, конечно, условно. Действительно, со временем по мере износа стоимость машины падает и одновременно растут затраты на ее эксплуатацию. На графике видно, например, что после условного «возраста» 17 периодов стоимость эксплуатации становится больше стоимости самой машины. Здесь же на графи-

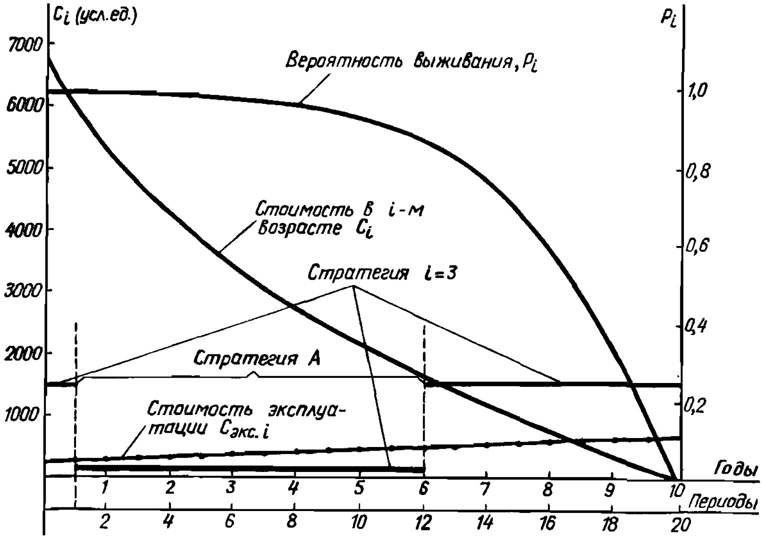


Рис. 23

ке приводятся данные расчетов по оптимальной стратегии замены машины, но о них мы скажем несколько позже.

Отыскание оптимального срока замены машины может производиться с помощью теории марковских цепей уже известными нам способами. Применяя рекуррентный метод, нужно на основании данных рис. 23 составить переходную матрицу и матрицу доходов, подсчитать среднюю величину ожидаемых доходов на каждом шаге, суммируя непосредственно ожидаемый доход и доход, полученный в течение предшествующих шагов (формула (2.3). При этом на каждом шаге перебираются все стратегии и отыскивается решение, дающее максимум полного среднего ожидаемого дохода. Конечно, задача в этом случае получается довольно трудоемкой, и по-видимому, все-таки проще воспользоваться итерационным методом, подробно описанным в задаче о водителе такси. Система уравнений для определения средней прибыли g и относительных весов в случае, когда мы собираемся эксплуатировать машину дальше (первая стратегия, $k=1$), выглядит следующим образом:

$$g+v_i=-C_{\text{экс.}\,i}+P_i v_{i+1}+(1-P_i)\,v_{20}. \qquad (2.18)$$

Если предполагается замена «Антилопы» машиной возраста $k-2$ (последующие стратегии), то

$$g+v_i=T_i-C_{k-2}-C_{\text{экс.}\,k-2}+P_{k-2}v_{k-1}+(1-P_{k-2})\cdot v_{20} \quad (2.18\text{а})$$

Здесь индексы $k-2$ показывают, что величины стоимости, эксплуатационных расходов, вероятности выживания машины до следующего осмотра относятся к приобретаемой машине соответствующего возраста.

Как в первом, так и в остальных случаях решение задачи начинается с составления матрицы перехода. Ее элементы определяются несколько необычно.

Так, для первой стратегии ($k=1$) $P_{ij}^1=P_i$ для $j=i+1$, т. е. берется просто вероятность выживания на последующий период. Очевидно, для «возраста» машины $j=20$ $P_{ij}^1=1-P_i$, а для всех остальных значений j $P_{ij}^1=0$.

При других стратегиях ($k>1$) переходная вероятность равна вероятности выживания машины ($k-2$)-го возраста, т. е.

$$P_{ij}^{k>1}=P_{k-2} \text{ для } j=k-1.$$

Очевидно, для $j=20$ $P_{ij}^{k>1}=1-P_{k-2}$ и $P_{ij}^{k>1}=0$ для всех других j.

На основании формул, приведенных в задаче о водителе такси, пользуясь исходными данными, помещенными на рис. 23, мы получили такие результаты. Оказывается, А. К. выгодно эксплуатировать «Антилопу» в течение 1—12 периодов (стратегия A). Зато сразу же после консилиума машину надо менять на «трехлетку» ($i=3$). Жирная линия на графике соответствует минимуму расходов автолюбителя.

Оставим, наконец, в покое А. К. и его «Антилопу» и обратимся к вещам более серьезным и важным.

Задача об определении оптимальных сроков замены любого оборудования ставится и решается примерно так же. При этом, конечно, надо учесть, что отказ станка в середине периода приводит к большим потерям за счет нарушения синхронности и слаженности производственного процесса. Особенно велики эти потери будут на заводах, выпускающих массовую продукцию. Один час простоя главного конвейера крупного автомобильного или тракторного завода — это более сотни невыпущенных «Жигулей» или по меньшей мере десяток мощных тракторов «Кировец»! Вот насколько важен вопрос о надежности работы всего огромного станочного парка. Это может быть обеспечено лишь постоянным контролем, ремонтом и своевременной заменой. Конечно, ритмичность производства достигается и другими способами. Например, можно «на всякий случай» иметь заранее накопленную партию (задел) деталей. Такая задача уже решалась нами выше, когда речь шла о применении марковских цепей на производстве.

Можно также, определив наиболее вероятное «узкое» место, установить резервное оборудование. Но и в этом случае мы имеем определенные потери за счет простоя этого оборудования. Значит, и в этих способах есть что-то «за» и что-то «против». И опять следует отыскивать оптимальную стратегию.

2.7 А вдруг... что-нибудь случится!

«...Кристофер Робин... тщательно прицелился в шарик и выстрелил.

— Ой-ой-ой! — воскликнул Пух (голосом Евг. Леонова).

— Разве я не попал? — спросил Кристофер Робин.
— Не то чтобы совсем не попал,— сказал Пух,— но только не попал в шарик!..»

После первой неудачи эта спасательная операция заканчивается благополучно. Кристофер. Робин, наконец, попадает в шарик, и Винни-Пух плавио опускается на землю.

Рассмотрим это приключение главного героя книги А. Милна с позиций теории марковских цепей, предполагая, конечно, как и ранее, что цепь статистически однородна. Это значит, что мы много раз наблюдали за стрельбой К. Робина и хорошо знаем вероятность попадания в шарик. Конечно, вряд ли герой книги станет много раз стрелять в бедного Пуха, чтобы мы также хорошо вычислили и другую вероятность. Но здесь можно предположить, что Винни-Пух был ровно в 2 раза больше шарика и находился от него на определенном расстоянии. Тогда можно довольно просто вычислить и эту вероятность.

Итак, в результате выстрела Кристофера Робина, который происходит с вероятностью p, могли случиться следующие события:

B_1 — попадание в шарик с вероятностью r_1. Далее по замыслу автора происходит плавный спуск Винни-Пуха, и цель операции достигнута;

B_2 — попадание в Винни-Пуха. Согласно цитируемой книге в этом случае ничего страшного не происходит, и выстрел может быть повторен. Припишем этому событию вероятность r_2;

B_3 — промах, который происходит с вероятностью r_3.

Очевидно, эти события образуют полную группу, и сумма их вероятностей равна единице.

В результате событий B_1 — B_3 система «Пух — шарик — Кристофер Робин с ружьем» может находиться в одном из следующих состояний:

состояние A_1 — операция проведена успешно, Винни-Пух спасен;

состояние A_2 — полная неудача;

состояние A_3 — в этом состоянии оказывается главный герой в случае промаха Кристофера Робина. Кроме того, это состояние является и начальным.

Пользуясь методами, изложенными выше, читатель без труда составит переходную матрицу. Она в данном случае имеет вид:

$$\Pi_{[3]}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ pr_1 & pr_2 & pr_3+q \end{bmatrix}. \qquad (2.19)$$

С ее помощью можно определить, сколько в среднем потребуется Кристоферу Робину зарядов, чтобы спасти Винни-Пуха, или сколько времени тот будет подвергаться пчелиным укусам. Можно также выяснить, с какой вероятностью операция спасения закончится успешно, если мы заранее знали, сколько зарядов имел К. Робин и т. д. Но вряд ли стоит этим заниматься. Мы привели здесь этот шуточный пример только потому, что аналогичной математической моделью могут описываться и другие спасательные операции: в космосе, на море, в горах и т. д.

Например, в случае спасения космонавтов на орбите под r_1 можно понимать вероятность успешной стыковки, как это и делалось в разделе 2.1, под r_2 — возможность ее повторения, а под r_3 — повреждение при стыковке аварийно-спасательного корабля. Конечно, вероятности r_4 и r_5 здесь надо исключить, так как в этом случае операция спасения становится бессмысленной.

Нетрудно убедиться, что с помощью переходной матрицы можно легко определить необходимое количество резервных средств для успешного осуществления аварийно-спасательной операции и затраченное в среднем время на ее проведение. Это, в свою очередь, дает возможность примерно оценить необходимое количество аварийных средств на борту терпящего бедствие космического корабля или наметить соответствующий план действий.

Аналогично можно рассуждать и в случае морской операции, когда происходит спасение экипажа корабля, например, потерявшего управление в сильный шторм. Ведь кораблю-спасателю надо подойти поближе к гибнущему судну, каким-то образом с ним соединиться и отбуксировать его в безопасное место.

С некоторыми изменениями такая спасательная операция также может быть описана с помощью модели, основанной на теории марковских цепей. Но здесь авторов можно справедливо упрекнуть в некоторой нестрогости (некорректности) рассуждений.

В самом деле, ведь вероятностные методы, в том числе, конечно, и методы теории марковских цепей, можно применять лишь при наличии статистической устойчивости явлений. То есть при многократном повторении опытов должны проявляться какие-то устойчивые в среднем закономерности. Каждая спасательная операция — это сравнительно редкое, уникальное явление, сопровождающееся всякий раз какими-то новыми условиями, при которых вряд ли можно ожидать проявления таких закономерностей. Но с другой стороны, ведь могут быть известны, рассчитаны аналитически и проверены экспериментально вероятности отдельных частных событий, которые возможно произойдут в процессе операции спасения, например, вероятность попадания в шарик, успешной стыковки, удачного заброса буксирного троса и т. д. Тогда применение описанной выше математической модели вполне оправдано.

Этим примером мы хотели показать, что аппарат марковских цепей может применяться и при неоднородных статистических процессах. Надо лишь, чтобы статистически однородными были этапы этих процессов. Конечно, получаемые при этом результаты будут сопровождаться теми или иными погрешностями. Но ведь и любая математическая модель отражает то или иное физическое явление только с определенной точностью.

Итак, теория марковских цепей может помочь, если... что-нибудь случилось!

Но оказывается, более широкую известность и практическое применение находят марковские цепи, когда ученые и конструкторы решают вопрос: как сделать так, чтобы ничего не случилось!

Этой проблемой занимается сравнительно молодая и быстро развивающаяся отрасль науки, называемая теорией надежности. В ней исследуются закономерности изменения качеств машин и систем в течение их эксплуатации и разрабатываются методы, позволяющие сохранить эти качества в течение определенного времени.

Как и всякая молодая наука, теория надежности включила в свой арсенал и новые, и уже хорошо известные математические и физические методы. В ней широко используются математика, физика, химия, механика, динамика и прочность машин, теория автоматического регулирования, кибернетические методы и многие другие научные дисциплины. Но не будет преувеличением сказать, что математической основой науки о надежности являются теория вероятностей и математическая статистика. В связи с этим, конечно, можно предположить, что в теории надежности широко используются и марковские цепи.

Расскажем, как это делается.

Раньше уже говорилось о том, что марковскими цепями хорошо описывается поведение той или иной системы при действии каких-либо случайных причин. Большинство современных технических устройств представляют собой более или менее сложные системы. Поэтому изучение процесса поведения таких систем с помощью теории марковских цепей дает возможность исследовать их надежность. Учет различных случайных причин позволяет прогнозировать, «предвидеть» поведение системы в будущем. И оказывается, что такие технические прогнозы с большой точностью сбываются.

Здесь следует оговориться, что исследования и расчеты надежности могут быть основаны не только на теории марковских цепей, но и на других вероятностных методах.

Итак, представим себе, что перед нами поставлена задача исследования надежности какого-то технического устройства. Конечно, технические устройства и системы сильно отличаются друг от друга по степени их сложности, что соответственно относится и к математическому аппарату, но принципиальные методы, о которых мы говорим, будут аналогичными и для систем стыковки космических аппаратов, и для телевизора или стиральной машины.

Поэтому выберем пример попроще. Допустим, можно попытаться исследовать с помощью марковских цепей надежность обычной настольной лампы.

Представим себе, что настольная лампа — это система, состоящая из двух элементов: собственно электрической лампы и выключателя. Изобразим нашу систему на рисунке (рис. 24). Во время работы с ее элементами могут произойти следующие случайные события:

B_1 — перегорание лампы;

B_2 — отказ (неисправность) выключателя;

B_3 — событие, заключающееся в том, что в течение некоторого времени, например одних суток, выключатель будет отремонтирован;

B_4 — событие, заключающееся в том, что в течение того же времени будет заменена лампа.

Конечно, обычно, после того как наступят события B_1 или B_2, мы стараемся немедленно устранить неисправность. Но оказывается, при таком условии уже нельзя применять марковские цепи в том виде, как это делалось раньше, ведь мы уже не можем предполагать, что смена состояний происходит через строго определенные интервалы времени. Интервалы здесь тоже являются случайными величинами. В этом случае марковский процесс называют непрерывным, точнее, он будет называться так: марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Кроме того, появляются и другие особенности в математической формулировке и методах решения задачи. Об этом мы скажем чуть-чуть позже, а пока рассмотрим идеализированную модель.

Допустим, что из состояния в состояние наша система может переходить через интервал Δt, равный одним суткам. Обозначим $P_в$ и $P_л$ соответственно вероятности безотказной работы выключателя и лампы в течение одних суток, $r_в$ и $r_л$ — вероятности того, что выключатель и лампа, если они выйдут из строя, будут отремонтированы в течение того же временнóго интервала.

Читатель уже легко определит, что при наступлении событий B_1, B_2, B_3 и B_4 система может оказаться в четырех состояниях:

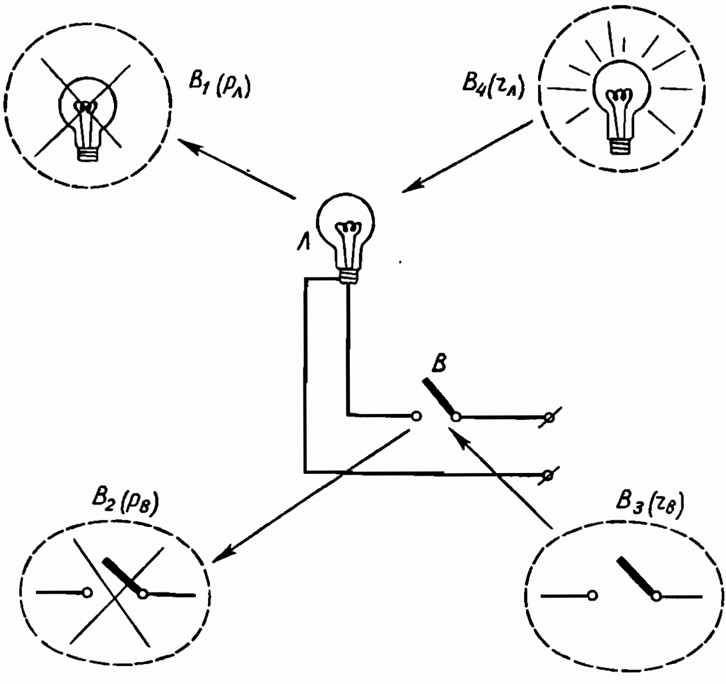


Рис. 24

A_1 — исправны лампа и выключатель;
A_2 — неисправна лампа, исправен выключатель;
A_3 — исправна лампа, неисправен выключатель;
A_4 — оба элемента системы вышли из строя.

Переходные вероятности определятся, как и ранее, на основании теоремы умножения и сложения вероятностей. Мы предлагаем читателю сделать это самостоятельно, а для контроля приведем сразу переходную матрицу:

$$\Pi_{[4]}=\begin{bmatrix} P_{\text{в}}\cdot P_{\text{л}} & P_{\text{в}}\cdot(1-P_{\text{л}}) & (1-P_{\text{в}})\cdot P_{\text{л}} & (1-P_{\text{в}})\cdot(1-P_{\text{л}}) \\ P_{\text{в}}\cdot r_{\text{л}} & P_{\text{в}}\cdot(1-r_{\text{л}}) & (1-P_{\text{в}})r_{\text{л}} & (1-P_{\text{в}})\cdot(1-r_{\text{л}}) \\ P_{\text{л}}\cdot r_{\text{в}} & r_{\text{в}}\cdot(1-P_{\text{л}}) & P_{\text{л}}\cdot(1-r_{\text{в}}) & (1-P_{\text{л}})\cdot(1-r_{\text{в}}) \\ r_{\text{л}}\cdot r_{\text{в}} & r_{\text{в}}\cdot(1-r_{\text{л}}) & r_{\text{л}}\cdot(1-r_{\text{в}}) & (1-r_{\text{л}})\cdot(1-r_{\text{в}}) \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Этой матрице соответствует граф состояний, изображенный на рис. 25. С каким же видом цепи мы здесь имеем дело?

Во-первых, по-видимому, в такой идеализированной модели можно допустить, что вероятности событий B_1, B_2, B_3 и B_4 зависят от исхода только предыдущего испытания и остаются постоянными на протяжении достаточно долгого срока службы лампы. Тогда можно считать, что здесь мы имеем дело с простой однородной цепью Маркова.

Во-вторых, из смысла самой задачи следует, что в системе нет состояний, попав в которые, уже нельзя было из них уйти (возвратных состояний). Конечно, при этом надо ввести дополнительные условия, что у нас имеется достаточный запас лампочек, а выключатель еще не предельно изношен и может быть отремонтирован. Все это означает,

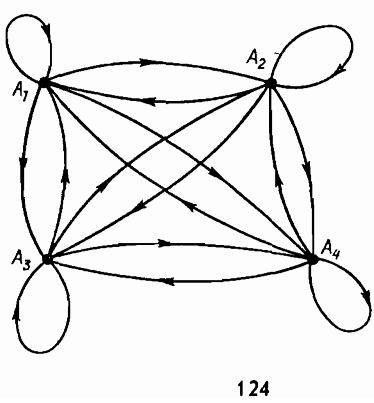


Рис. 25

что здесь нет состояний, из которых уже нельзя вернуться в прежние, и цепь Маркова в данном случае неразложима. Следуя принятой выше схеме классификации, надо выяснить, обладает ли данная цепь свойствами эргодичности и регулярности.

Первое свойство устанавливается очень просто. В матрице отсутствуют нулевые элементы, и, следовательно, за один шаг можно перейти из любого одного состояния в любое другое. Одновременно можно утверждать, что данная цепь является и регулярной, так как при любом числе шагов в матрице не будет нулевых элементов.

Итак, простейшей моделью исследования надежности системы может быть простая однородная эргодическая цепь Маркова. Однако легко заметить, что эта модель слишком грубая и приближенная, ведь было введено много допущений, которые вряд ли будут выполняться на самом деле. Действительно, временно́й интервал Δt, равный одним суткам, был выбран произвольно, ремонт выключателя или замена лампы, т. е. процесс восстановления системы, может начинаться немедленно (ведь не будем же мы сидеть в темноте), и в течение суток возможна многократная смена состояний. Наконец, сами переходные вероятности зависят от длительности временно́го интервала, причем эта зависимость может иметь довольно сложный характер. Поэтому для вероятностного исследования надежности реальных систем (и не только таких простейших, но и более сложных) прибегают к следующему приему.

Будем неограниченно уменьшать интервал Δt, в течение которого мы осуществляем контроль за состоянием элементов системы (в терминах теории пределов это означает, что $\Delta t \to 0$). Фактически при этом получается, что мы контролируем состояние элементов системы непрерывно. Отказ любого элемента системы (перегорание лампы, поломка выключателя) в этом случае может произойти в любой момент времени t. Тогда задача исследования будет состоять в определении зависимости вероятностей всех четырех состояний от времени. Обозначим их через $P_i(t)$ ($i=1, 2, 3, 4$ ...). Допустим, $P_1(t)$ — это вероятность того, что к моменту t лампа и выключатель исправны; P_2 — перегорела лампа; P_3 — испортился выключатель и т. д. При малых Δt можно предположить, что $P_i(t)$ будут зависеть от t линейно, а элементами матрицы, содержащими слагаемые, пропорциональные 2-й и более высоким степеням Δt, можно пренебречь. Поэтому матрица перехода упростится, часть ее элементов станет равной нулю, другие ненулевые элементы будут включать слагаемые, линейные относительно Δt. В конечном итоге алгебраические уравнения Колмогорова — Чепмена превратятся в систему дифференциальных уравнений Колмогорова — Чепмена.

Мы не будем утомлять читателя выводом этих уравнений, тем более, что это весьма наглядно и популярно сделано в книге Е. С. Вентцель *.

Здесь мы ограничимся лишь анализом зависимостей $P_i(t)$, которые можно получить, решив систему дифференциальных уравнений. Примерный вид зависимостей $P_i(t)$ показан на рис. 26.

Обратите внимание, что, начиная с некоторого сравнительно небольшого отрезка времени t, кривые идут практически параллельно оси абсцисс. Это означает, что $P_i(t)$ уже не зависят от времени. Результат не будет неожиданным, если вспомнить свойства регулярной цепи (глава 1): при большом числе шагов переходные вероятности

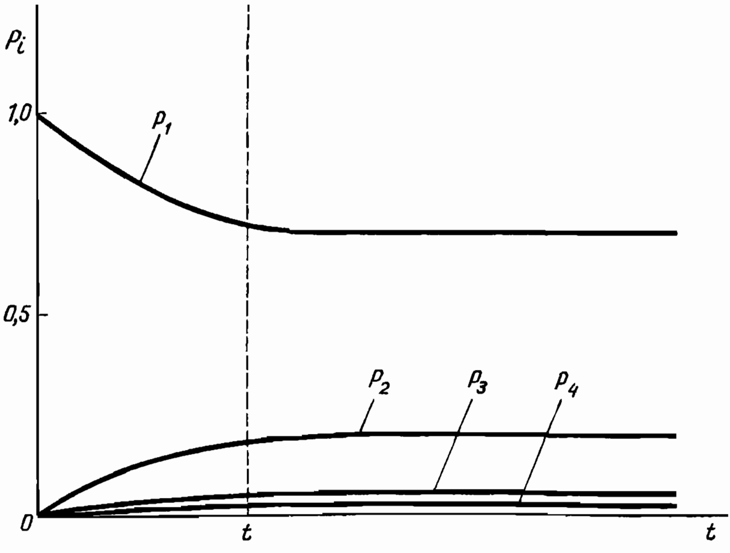


Рис. 26

* См.: Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология.— М.: Наука, 1980.

стремятся к некоторым предельным (финальным) значениям. Учитывая такой ход зависимостей $P_i(t)$, можно будет весь процесс разбить на две области: в одной переходные вероятности сильно зависят от времени, а в другой слабо. Первая область называется областью нестационарных режимов. При исследовании надежности систем в этом временно́м интервале надо решать систему дифференциальных уравнений. Другая область, где $P_i(t)=\mathrm{const}$, называется областью стационарных режимов. Здесь полагают, при $P_i(t)=\mathrm{const}$ $\frac{dP_i}{dt}=0$. Это дает возможность снова от дифференциальных уравнений перейти к сравнительно простым алгебраическим. Решение последних позволяет получить предельные (финальные) значения переходных вероятностей P_i.

Что же они означают? Обратимся снова к графику на рис. 26. По графику можно легко определить, что $P_1=0{,}7$, $P_2=0{,}2$, $P_3=0{,}07$, $P_4=0{,}03$. Отсюда следует, что в среднем (на протяжении длительного срока службы настольной лампы) 70 % времени все ее элементы будут исправно работать, в 20 % случаев отказа надо будет заменить электролампочку, 7 раз из 100 включений придется ремонтировать выключатель и только в 3 случаях будут неисправны оба элемента.

Получены очень важные результаты, особенно если учесть, что речь может идти не о настольной лампе, а о современных сложных технических системах. Ведь с помощью этих данных можно «заглянуть в будущее»: прогнозируя поведение системы, заранее спланировать ремонт или замену вышедших из строя элементов, повысить надежность путем дублирования или, как говорят, резервирования наиболее слабых агрегатов или элементов системы и т. д. Но кроме того, при создании системы можно путем конструктивных и технологических мероприятий добиваться повышения иадежности. Конечно, это потребует определенных затрат (надежность имеет цену!). Если общие затраты на создание системы ограничены (а так чаще всего и бывает), возникает задача рационального, или, точнее, оптимального, распределения средств для повышения надежности элементов системы. Их надо распределить так, чтобы либо вообще ничего не случалось, либо что-то случалось, но по возможности реже и с минимальным ущербом.

Рассказ о только что рассмотренном случае применения марковских цепей мы начали с шутливо аварийной ситуации. Затем было показано, как математический аппарат марковских цепей может быть применен при анализе надежности. Но здесь нельзя не упомянуть и о том, что аналогичные рассуждения и методы широко используются в другой науке — теории массового обслуживания.

Как правильно организовать работу городского транспорта, технологический процесс на огромном заводе, бытовое обслуживание населения, работу телефонной сети и т. д.? Все эти и множество других проблем и задач, касающихся рациональной организации функционирования больших систем, решает теория массового обслуживания. Но уже в который раз приходится говорить: «Нельзя объять необъятное», ведь тогда надо было бы подробно рассказать о теории марковских случайных процессов. Мы же здесь говорим только о марковских цепях.

2.8. ЭВМ помогает марковским цепям, цепи Маркова помогают ЭВМ

Наш современный язык изобилует сокращениями, аббревиатурами. Среди них есть понятные, известные всем, есть и малоизвестные, употребление которых в устной или письменной речи приходится расшифровывать.

Сокращение, стоящее в заголовке этого раздела, пояснять не нужно. Оно известно сейчас каждому. Разве кто-нибудь не знает, что такое ЭВМ? ЭВМ управляют движением ракет, космических кораблей, подводных лодок, роботов, воздушных лайнеров. ЭВМ задают режимы работы электростанций, станков, автоматических линий и целых заводов. Без расчетов на ЭВМ не обходится практически ни одно научное исследование, проект или техническая разработка.

Можно сказать, что происходит (или уже произошла) «эвеэмизация» нашей жизни. Вычислительные машины так резко повлияли на ход научно-технического прогресса и вообще на развитие цивилизации, что некоторые ученые справедливо сравнивают создание ЭВМ с наиболее величайшими открытиями человечества. Говорят, всякое сравнение хромает, поэтому не будем дальше доказывать огромное значение ЭВМ для нашего века, тем более, что оно очевидно. Нам хотелось бы остановиться очень коротко на связи ЭВМ с темой нашей книги. Для этого надо ответить на два вопроса, связанных с названием этого раздела.

Итак, как же ЭВМ помогает марковским цепям? Ответ здесь довольно прост. Трудолюбивый и внимательный читатель, который захотел бы вместе с авторами книги произвести вычисления в различных случаях применения марковских цепей, конечно, столкнулся бы с немалыми трудностями при возведении матриц в степени или при их обращении. Действительно, возведение даже самой простой матрицы размером 2×2 в квадрат требует 12 арифметических действий, 3×3 — уже 45, 4×4 — 112 и т. д. Обращение матриц, необходимое для получения фундаментальной формы, является еще более трудоемкой операцией. Кроме того, при расчетах над матрицами надо производить и другие действия — перемножать, складывать или вычитать. Конечно, в случае матриц малой размерности такие вычисления хотя и трудны, но выполнимы. Однако размерность матрицы ведь определяется числом состояний исследуемой системы. Это число, как мы видели, определяется требуемой точностью математической модели и степенью ее близости к реальному явлению (адекватностью). Значит, если мы хотим сделать модель точнее, надо вводить большое число состояний, что приведет к катастрофически быстрому росту объема вычислений. Вот здесь-то и приходит на помощь ЭВМ! Современные вычислительные машины умеют с молниеносной быстротой «расправляться» с матрицами высоких порядков, производят операции их обращения, возведения в степень и т. д. Более того, при составлении алгоритмов не надо даже разрабатывать подробно программу действий машины, так как современные ЭВМ снабжены стандартными блоками обработки матриц. В алгоритмах достаточно указать символ (код) обращения к конкретной стандартной программе. Дальше машина сделает все самостоятельно. Конечно, такие возможности ЭВМ существенно расширяют границы применения марковских цепей при решении различных задач. Так ЭВМ помогает марковским цепям!

Ответ на второй вопрос менее очевиден и требует некоторых специальных знаний. Сначала следует напомнить, что сейчас ЭВМ широко используются для поиска оптимальных решений. В этой области прикладной математики к настоящему времени разработано много методов и алгоритмов, приспособленных для решения самых разнообразных задач. Даже беглое перечисление этих методов заняло бы несколько страниц книги. Этим мы здесь заниматься не будем. Хотелось бы только отметить, что все методы оптимизации отличаются между собой по принципу отыскания оптимального решения. Этот принцип (или правило) позволяет наилучшим образом преодолеть трудности решения задачи, связанные с характером оптимизируемой функции, видом и числом ограничивающих условий, требуемой точностью отыскания оптимальных параметров или их числом.

Часто говорят об огромном, поражающем воображение быстродействии работы ЭВМ. При этом получается, что ученому или инженеру как будто бы не надо особенно заботиться о рациональных алгоритмах, обеспечивающих быстрое и экономное получение оптимального решения. Это, конечно, не так. Чем более быстродействующей является машина, тем более дорогой оказывается каждая минута ее работы. Кроме того, непрерывно возрастает степень загрузки ЭВМ в связи с увеличением количества и сложности решаемых задач. Поэтому проблема разработки экономных, рациональных алгоритмов остается весьма актуальной.

Одним из способов быстрого определения оптимальных решений является использование понятия «градиент функции». Упрощенно это понятие можно представить таким наглядным примером.

Рассмотрим ровную наклонную доску. Угол ее наклона будет определяться производной по одной координате (продольной оси доски). Теперь, не изменяя первоначального угла наклона, повернем доску относительно ее продольной оси еще на некоторый угол. Теперь доска будет иметь уже два угла наклона или две производные. Вектор, компонентами которого будут эти две производные, и будет в данном случае градиентом. Если при отыскании максимума какой-то поверхности двигаться так, чтобы углы наклона были все время максимальны, то, очевидно, мы быстрее всего достигнем вершины. Это то же самое, что подниматься в гору самым тяжелым, но и самым кратчайшим путем. Метод градиента прост, нагляден и на первый взгляд весьма эффективен. И действительно, это так, если функция описывает поверхность с простым рельефом типа, например, многим известной Ключевской сопки. Дело осложняется, если рельеф не прост и склоны нашей воображаемой горы изрезаны глубокими оврагами (альпинисты называют их кулуарами), имеют длинные впадины со слабым возрастанием высоты и т. д. Тогда метод градиента оказывается неэффективным. Процесс поиска оптимальных параметров напоминает движение человека с завязанными глазами, который долго и осторожно ощупывает все неровности и очень медленно продвигается к цели. Малоэффективен метод градиента и при наличии большого числа ограничений. Представьте теперь, что двигаться в гору надо по ущельям, в которых мы то и дело натыкаемся на непреодолимые отвесные скалы и стены. Аналогично и ЭВМ мучительно долго, «тяжело дыша», ищет путь в «математических гималаях» и находит его или ценой огромных затрат времени, или... вообще запутывается и прекращает поиск.

При большом числе переменных выгодным оказывается применение алгоритмов, основанных на методе случайного поиска. Идея случайного поиска очень проста. Допустим, что отыскиваются оптимальные значения параметров x_1^* и x_2^*, обеспечивающие минимальное значение функции $F(x_1, x_2)$ (рис. 27). Будем на первом шаге случайно задавать Δx_1 и Δx_2 и вычислять каждый раз значение $F_i(x_1 + \Delta x_1;\ x_2 + \Delta x_2)$. При каком-то сочетании x_1, x_2 значение функции F_i окажется меньшим, чем первоначальное значение F_0, т. е.

$$\Delta F(x_1 + \Delta x_1;\ x_2 + \Delta x_2) = F_0(x_1;\ x_2) - F_i(x_1 + \Delta x_1; x_2 + \Delta x_2) > 0.$$

Разумным, конечно, будет сделать шаг в этом направлении. Переместимся в пространстве координат в этом направлении и зададим новые значения Δx_1 и Δx_2 того же знака, ведь мы уверены, что идем правильно. Далее здесь

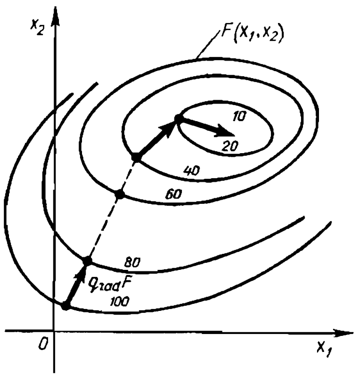


Рис. 27

могут сложиться такие ситуации (состояния) после очередного шага:

состояние 1: $\Delta F > 0$,

состояние 2: $\Delta F < 0$.

В первом случае шаг можно признать удачным и продолжать движение дальше, а во втором — надо что-то предпринимать, ведь состояние 2 нас мало устраивает ($\Delta F = 0$ означает, что мы находимся в точке экстремума). В этом случае опять случайным образом задаются Δx_1 и Δx_2 и ищется благоприятное направление движения.

Все то, что говорилось, можно коротко записать так:

$$\Delta X_{i+1} = \langle \Delta x_1, \ \Delta x_2 \rangle_{i+1} = \begin{cases} \varkappa & \text{при } \Delta F < 0, \\ \Delta x_i & \text{при } \Delta F > 0, \end{cases}$$

где ΔX_{i+1} — направление на $i+1$ шаге поиска; Δx_i — смещение на i-м шаге; $\varkappa$ — шаг в случайном направлении.

Итак, весь процесс поиска — это последовательность случайных событий, переводящих систему в то или иное состояние (здесь всегда два), причем попадание в каждое последующее состояние непосредственно связано с предшествующим.

Таким образом, процесс случайного поиска представляет дискретную простую марковскую цепь с матрицей перехода:

$$\Pi_{[2]} = \begin{bmatrix} P_1 & 1 - P_1 \\ 1 - P_2 & P_2 \end{bmatrix}. \qquad (2.21)$$

Здесь P_1 — вероятность события, заключающегося в нахождении Δx_1, Δx_2, обеспечивающих условие $\Delta F > 0$; P_2 — вероятность того, что при движении в направлении Δx_1 и Δx_2 $\Delta F < 0$.

Цепь имеет два состояния: «удача», когда делается следующий шаг в том же направлении, и «неудача», когда мы вынуждены «топтаться на месте», случайно отыскивая правильное направление. Не правда ли, получается что-то напоминающее игру в жмурки?

Граф, наглядно представляющий такой алгоритм, показан на рис. 28.

Легко догадаться, что эффективность алгоритма будет зависеть от величин P_1 и P_2. Если P_1 велико, а P_2 не очень мало, то мы быстро будем у цели, так как ненужные точки будут отсеиваться достаточно эффективно. Оказывается, такой алгоритм хорошо подходит для функций достаточно «гладких», близких к линейным. Поэтому он и назван алгоритмом с линейной тактикой. А как же быть, если оптимизируемые функции «плохие», негладкие? Здесь рекомендуется другой, более эффективный в этом случае алгоритм — с нелинейной тактикой. Отличается он тем, что при удачном шаге ($\Delta F > 0$) вместо дальнейшего движения в этом направлении производится снова случайный шаг. Если при этом шаге мы получили плохой результат ($\Delta F < 0$), то без всяких колебаний производится возврат в прежнюю («бывшую удачную») точку. Символически алгоритм записывается так:

$$\Delta X_{i+1} = \langle \Delta x_1;\ \Delta x_2 \rangle_{i+1} = \begin{cases} \varkappa \text{ при } \Delta F > 0, \\ F(\Delta x_1) \text{ при } \Delta F < 0. \end{cases}$$

Матрица перехода выглядит также по-иному:

$$\Pi_{[2]} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Соответствующий матрице граф состояний изображен на рис. 29.

Обратите внимание, что для этих двух алгоритмов используются два различных типа марковских цепей. Так, в первом алгоритме мы имеем дело с эргодической цепью, во втором — с поглощающей.

На первый взгляд алгоритм с линейной тактикой кажется более логичным и рациональным. В самом деле, если случайно обнаружено верное направление, то надо как будто бы поскорее по нему и двигаться к цели. Но это справедливо только при условии, что случайно выбранное направление будет правильным. На рис. 30 показано, что выбранное случайно на первом шаге направление не является удачным и на последующих шагах его надо корректировать. Но это получилось даже на «хорошей» функции.

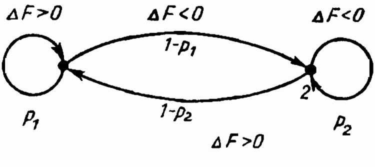


Рис. 28

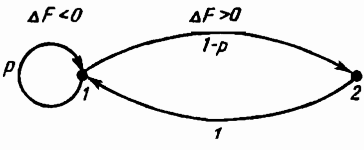


Рис. 29

В случае же сложных нелинейных зависимостей картина может быть еще более неблагоприятной.

Алгоритм случайного поиска с линейной тактикой можно сравнить с ночным спуском по каменистому склону, когда вероятность правильного выбора общего направления велика и случайные шаги делаются только для обхода каких-то камней. При использовании же алгоритма с нелинейной тактикой подсказывающей правильное направление информации нет, и двигаться приходится на ощупь, вслепую.

Мы подробно остановились только на двух простейших алгоритмах случайного поиска, математическая модель которых описывается марковскими цепями. На самом же деле их разработано довольно много. Большое число алгоритмов основано, например, на принципе самообучения, использующем целесообразное изменение вероятностных свойств алгоритма, т. е. в разумное управление вероятностью. Алгоритм начинает работу в условиях равновероятностного поиска. Затем по мере накопления информации о свойствах оптимизируемой функции переходные вероятности изменяются, обеспечивая более эффективный поиск. В этом случае мы имеем дело уже с управляемыми марковскими цепями, случайными процессами, в которых имеется неслучайное (детерминированное) управление. О них уже шла речь выше.

Внимательный читатель, по-видимому, заметил, что, в сущности, здесь нет ничего нового. Ведь во всех ранее

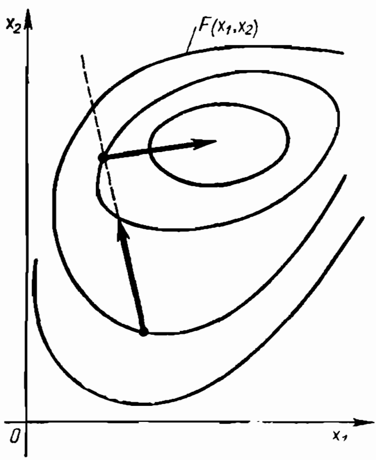


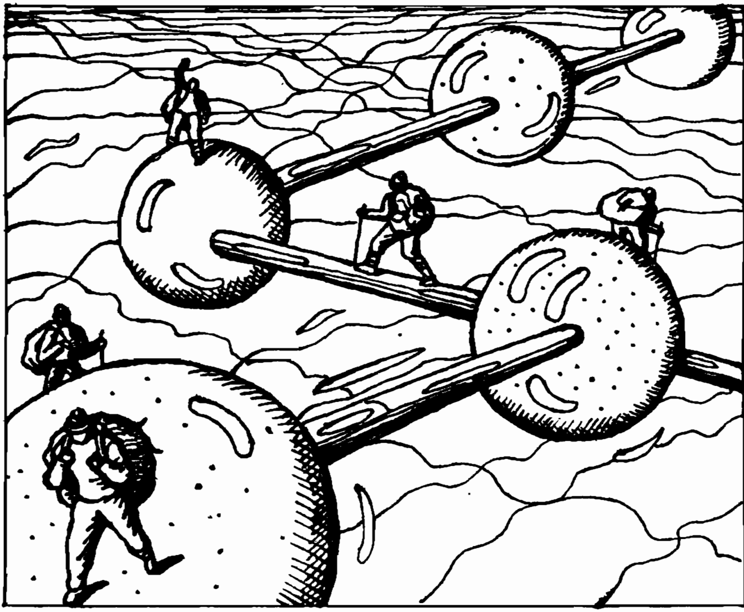
Рис. 30

рассматриваемых задачах с доходами мы пытались в той или иной форме управлять величинами вероятностей путем выбора соответствующей стратегии поведения. Совершенно верно. И там и здесь в случайном поиске используются управляемые марковские цепи. Есть ли граница между полностью детерминированным и частично управляемым случайным процессом? Да, есть. Процесс остается случайным, если мы меняем лишь его вероятностные характеристики, оставляя саму суть, т. е. случайность событий. Так, в алгоритмах случайного поиска меняются лишь вероятностные свойства матриц перехода, но не предопределяется судьба каждого шага.

Про алгоритмы случайного поиска можно рассказать еще много интересного, но в нашу задачу входило лишь ответить на вопрос: как марковские цепи помогают ЭВМ. Мы считаем эту задачу выполненной. Читателей, которых заинтересуют проблемы случайного поиска, мы отсылаем к научно-популярным и научным трудам одного из ведущих советских ученых в этой области профессора Л. А. Растригина *.

---

* См.: Растригин Л. А. Статистические методы поиска.— М.: Наука, 1968; Растригин Л. А. Этот случайный, случайный, случайный мир.— М.: Молодая гвардия, 1969.



ГЛАВА 3

МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ В ХИМИИ И ФИЗИКЕ

3.1. Пешком... по молекуле

Иногда долго думаешь над какой-либо задачей, и вдруг... осенило! Не правда ли, очень просто? Такие события происходят с каждым из нас довольно часто. Многим великим открытиям приписывают случайное происхождение. Рассказывают, например, как шотландец Д. Данлоп изобрел резиновые шины: для того чтобы его сыну было приятнее ездить на велосипеде, он приспособил к колесам кусок резинового поливального шланга.

Такие примеры можно было бы продолжить, но нам здесь хочется отметить, что, несмотря на отдельные элементы случайности, научно-технический прогресс и появление связанных с ним открытий и изобретений — процесс закономерный, потому что все озарения — это результат длительной и напряженной работы мысли при решении какой-то исторически обусловленной и общественно необходимой задачи.

Мы специально начали эту главу с открытия, связанного с резиновыми шинами. С возрастанием потребности в резине началась, по существу, новая глава в истории химии — получение и изучение строения высокомолекулярных соединений. Резиновые шины оказались очень удобной «обувью» для автомобилей. Замечательные свойства резины — упругость, эластичность, долговечность стали нужны повсюду. Сначала потребность в каучуке удовлетворялась за счет плантаций гевеи, но очень скоро этих естественных ресурсов стало не хватать. Тогда начались поиски искусственных материалов, способных заменить натуральный каучук. Эти поиски были успешно завершены. Во многих странах удалось найти способы получения искусственного синтетического каучука. В нашей стране промышленное получение такого каучука было осуществлено на основе работ С. В. Лебедева и других ученых.

Однако высокомолекулярные соединения — это не только каучук. Разнообразные технические полимеры, нуклеиновые кислоты и белки, целлюлоза и т. д. — все это высокомолекулярные соединения! Не случайно химики утверждают, что открытие строения макромолекул не менее важно для человечества, чем познание законов движения планет.

В разгадке секретов строения веществ есть определенное разделение труда. Так, если химия занимается свойствами веществ в основном на молекулярном уровне, то далее простираются владения физиков. Конечно, граница эта чисто условна, и для понимания строения молекул, их поведения в процессе реакции нужны знания, полученные физиками в царстве атома. Но основными объектами, с которыми работают химики, являются все-таки молекулы.

Для того чтобы понять строение и состав макромолекул, существует очень много методов. Но как правило, они косвенные. В связи с этим возникает вопрос: а нельзя ли как-то рассчитать строение и состав макромолекул, используя математику, математические методы?

Оказывается, можно. Причем одним из таких методов, позволяющих определить структуру и состав полимера, являются все те же марковские цепи. Применение математических методов позволяет исключить множество побочных факторов, искажающих реальную картину даже при очень точных и чистых опытах. Кроме того, математика дает возможность точно определить пути воздействия на исходные продукты реакции с целью получения полимера нужной структуры и состава. Это, в свою очередь, означает, что можно определить оптимальные условия синтеза веществ с необходимым комплексом свойств.

Марковские цепи? Но где же здесь последовательность зависимых испытаний? Какой смысл вкладывается в понятие случайного события? Что означает в данном случае термин «состояние»? Попробуем ответить на эти вопросы и для этого призовем свое воображение.

Представим себе, что нам удалось каким-то образом уменьшиться до молекулярных размеров. Конечно, трудно оценить все последствия такой трансформации, но для нас здесь важно одно — это дает возможность узнать строение интересующих нас молекул.

Рассмотрим сначала одну заранее намеченную молекулу. Надо только условиться, с какой макромолекулой мы хотим иметь дело. Химики различают, как известно, много видов молекул, например звездообразные, гребнеобразные, сетчатые и т. д. (рис. 31). Конечно, для наглядности их вид сильно упрощен. В действительности все значительно сложнее, но даже такие схематические образы дают возможность ответить на многие вопросы.

Считают, что макромолекулы могут иметь линейное и разветвленное строение. Разветвления, в свою очередь, могут иметь в принципе бесконечное число комбинаций. Начнем с простейшего, линейного вида.

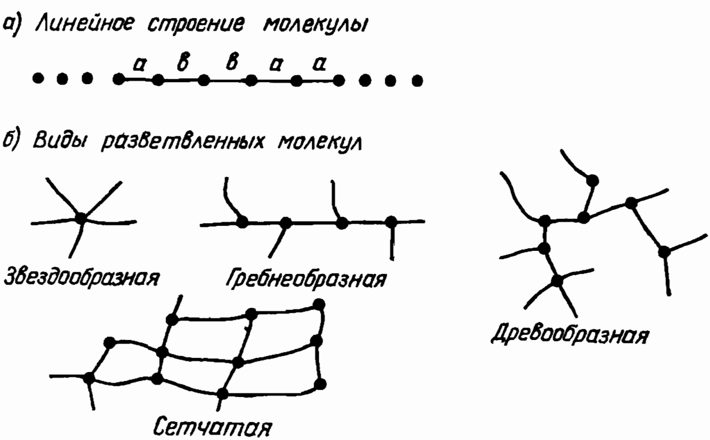


Рис. 31

Линейная макромолекула может быть представлена в виде длинной цепи, состоящей из разных участков (звеньев) (см. рис. 31). Как правило, число вариантов этих участков невелико. Для того чтобы знать строение молекулы, надо определить количество звеньев различного типа и порядок их расположения. Это можно сделать, двигаясь вдоль молекулы и подсчитывая, сколько раз нам попадется тот или иной участок... Наша «прогулка» напоминает движение по горной тропинке. Идя по ней, мы проходим лес, луг, карабкаемся по каменной осыпи, взбираемся на ледник и т. д. Если мы идем по данному маршруту в первый раз, то встреча с каждым новым участком будет для нас событием случайным. В результате этих событий мы оказываемся в том или ином состоянии, т. е. попадаем на определенный участок. Взаимосвязаны ли в данном случае события? В горном походе, конечно, взаимосвязаны. Если мы поднимаемся вверх по тропинке, то наиболее вероятной последовательностью состояний будет трава — осыпь — ледник, а если спускаемся вниз, то наоборот. Но может быть, эта связь является не случайной, а детерминированной? Тот, кто бывал в горах, знает, что иногда совершенно случайно среди камня и льда вдруг попадаются лужайки с травой и красивыми альпийскими цветами.

Оказывается, вероятностная связь между участками присуща и макромолекулам. Дело в том, что при образовании макромолекул из исходных продуктов-мономеров каждое последующее звено охотнее (или неохотнее) присоединяется к предыдущему. Называют это явление концевым эффектом. Поэтому вероятность нашей встречи с очередным участком (звеном) будет зависеть от того, на каком из них мы в данный момент находимся. Кроме того, эта вероятность может даже зависеть и от типа предшествующих звеньев. Но тогда процесс перемещения вдоль молекулы описывается не простой, а сложной цепью Маркова? Да, действительно это так. Строение макромолекулы может описываться и простыми и сложными марковскими цепями. Остановимся на более простом варианте.

Допустим, что молекула, по которой мы «шагаем», состоит из двух типов участков (звеньев): a и b (бинарная молекула). Тогда если нам заранее известны вероятности перехода с участка на участок P_{aa}, P_{ab}, P_{ba} и P_{bb}, то полное вероятностное описание одного этапа нашей «прогулки» может быть представлено в виде переходной матрицы

$$\Pi_{[2]} = \begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} \\ P_{ba} & P_{bb} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

где P_{aa} — вероятность перехода на участок A, если мы находились до сих пор на участке A; P_{ab} — вероятность перехода на участок B, если мы до сих пор были на A, и т. д.

Внимательный читатель заметит здесь неточность в наших рассуждениях. Ведь молекула имеет начало и конец, поэтому этот факт должен как-то учитываться. Действительно, правильным будет ввести состояния, учитывающие конечные размеры цепи, например D, и соответствующие вероятности перехода P_{ad}, P_{bd}. После окончания «прогулки» процесс исследования молекулы заканчивается, поэтому состояние D будет поглощающим, на основании чего $P_{dd}=1$, $P_{da}=0$, $P_{db}=0$. Начало нашего пути, т. е. вероятность того, что сначала нам встретится звено A или B, обозначим $P_a^{(0)}$ и $P_b^{(0)}$.

Состояния A и B будут невозвратными, так как из любого из них можно попасть в любое другое и уйти вообще, но нельзя вернуться назад.

Теперь можно написать «правильную» матрицу следующим образом:

$$\Pi_{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ P_{ad} & P_{aa} & P_{ab} \\ P_{bd} & P_{ba} & P_{bb} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

С матрицами такого вида мы уже имели дело. С ее помощью можно определить, сколько раз в среднем мы попадем в то или иное состояние (звено) до момента перехода в поглощающее, которое в данном случае соответствует окончанию нашей «прогулки» по молекуле.

Если мы знаем, когда и сколько раз вообще нам встретится по пути то или иное звено в данной молекуле, и просуммируем эти значения на все молекулы в полимере, то задача будет решена, т. е. определены состав и строение полимера.

Но не будем торопиться. Во-первых, поскольку общее количество участков (звеньев) в полимере очень велико, то наша «прогулка» будет продолжаться очень долго, настолько долго, что мы можем забыть, с какого звена мы начали наше путешествие. Это, конечно, шутка, а говоря серьезно, получается следующее. Если уменьшать вероятности переходов в поглощающее состояние, т. е. принять условие, что $P_{ad} \to 0$ и $P_{bd} \to 0$, то, оказывается, среднее число наступлений состояний A и B не будет зависеть от начальных вероятностей. Как указывалось в главе 1, такими свойствами обладает регулярная марковская цепь. Для регулярного процесса матрица (3.1) оказывается также правильной и для определения состава полимера не нужно определять вероятности перехода в поглощающее состояние P_{ad} и P_{bd}. Это, конечно, очень хорошо, так как количество исходных данных, которые необходимо предварительно определить с помощью опытов, уменьшается. Кроме того, при исключении поглощающих состояний матрица, имеющая вид (3.1), уже не будет иметь невозвратных состояний, ведь мы можем вернуться в любое из состояний при нашем «бесконечно долгом» путешествии по молекуле. Кроме того, оказывается, сочетания состояний могут через определенное число шагов и не повторяться, т. е. нет так называемой цикличности. Как уже говорилось, замечательным свойством регулярных цепей является то, что через сравнительно небольшое число шагов матрица (3.1) приобретает стационарный вид, когда ее строки одинаковы, т. е. в них стоят одни и те же числа, например *

$$\Pi_{[2]} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}. \qquad (3.3)$$

Числа α_1 и α_2 характеризуют состав макромолекулы. Для его определения надо решить очень простую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2; \\ \alpha_1 = P_{aa}\alpha_1 + P_{ab}\alpha_2; \\ \alpha_2 = P_{ba}\alpha_1 + P_{bb}\alpha_2. \end{cases}$$

Таким образом, допущение о бесконечно длинной молекуле и регулярности процесса принесло нам большую пользу.

Однако, как это часто бывает, тут возникает опасность вместе с водой выплеснуть и ребенка. Оказывается, для стационарного случая мы можем определить только среднее количество звеньев типа A и B в молекуле, иначе говоря, выяснить лишь состав полимера. При этом остается неизвестной его структура, т. е. порядок расположения звеньев, а вот это уже плохо, так как нам надо знать и то и другое. Однако и здесь можно найти выход.

* Аналогичную задачу мы уже решили ранее.

Ранее мы делили цепь на участки A и B, соответствующие мономерам, входящим в макромолекулу. Давайте разделим ее на более крупные участки, включающие сразу два, три или более звеньев. Участки, включающие по два звена типа AA, BB, AB, BA, называются диадами, а по три — триадами и т. д., причем диады первых двух типов будут симметричными (AA, BB), а остальные — несимметричными. Примем теперь за состояние попадание на такой более крупный участок. Далее, пользуясь переходной и фундаментальной матрицами, определим среднее количество встреч с тем или иным участком. Это будет означать, что у нас имеются данные уже о микроструктуре цепи. Но можно пойти и дальше. Ведь никто не запрещает нам всю цепь разбить на еще более крупные участки — блоки. Такие блоки могут, например, иметь вид $AABBB$ $ABBBB$ или в сокращенной записи $A^2B^3AB^4$. При этом, естественно, макромолекулу разбивают не как попало. Например, вся цепь представляется в виде блоков определенного вида. Блоки AB^nA или BA^nB называют кластерами, а A^n или B^n — туплетами. Очевидно, туплеты входят в состав кластеров. Примеры кластеров и туплетов легко найти, гуляя по горной тропинке. Так, если мы поднялись достаточно высоко, то типичным кластером будет последовательность: каменная осыпь — ледник — ледник... ледник — каменная осыпь. Если же мы находимся в долине между хребтами, то каменная осыпь — альпийский луг — снова луг... затем снова каменная осыпь и т. д.

Вот теперь уже все в порядке! Ведь если мы узнали, сколько и каких блоков входит в цепь, мы определим полностью состав и структуру макромолекулы и полимера в целом.

Можно ли на этом закончить наше путешествие по молекуле? Нет, еще немного терпения, читатель!

Мы рассматривали линейный сополимер, у которого исходные мономеры были представлены симметричными молекулами. В этом случае нас не интересовал вопрос, какими концами они скрепляются при полимеризации. Однако существует довольно большой класс соединений, имеющих исходные звенья несимметричной структуры, у которых надо различать «голову» и «хвост» (рис. 32). При этом свойства макромолекул и в целом сополимера будут существенно зависеть от того, сколько звеньев сцепилось «хвост к хвосту», «голова к голове» и т. д. Мало того, имеет значение и расположение таких «хвостатых» и «головастых» участков вдоль цепи. Но теперь-то мы уже знаем, как поступать! Надо просто принять за состояния все варианты случаев «голова — хвост», «хвост — голова» и т. д., и дальше все пойдет как по-писаному.

Итак, мы преодолели еще одну трудность. Теперь как будто бы все позади. Но это только как будто бы, а на самом деле трудностей здесь не счесть.

Во-первых, оказывается, что марковские цепи далеко не всемогущи, и образование многих даже линейных макромолекул не может быть описано только с их помощью. Еще больше трудностей ждет нас при математическом описании макромолекул разветвленного строения. Но об этом дальше. Кроме того, мы предположили, что переходим с участка на участок по сравнительно ровной дороге. На самом же деле молекулы представляют в основном спутанные клубки, и наша тропинка будет иметь крутые повороты, спуски, подъемы и даже петли в различных плоскостях, часто пересекающих самих себя.

С точки зрения нашего движения по молекуле, эти обстоятельства на первый взгляд сказываться не должны. Ведь мы просто можем не замечать неровностей рельефа, как не замечает их букашка, ползущая по спутанной траве. Все это верно, но дело в том, что на вероятности присоединения молекул мономера при образовании полимерной цепи будет сказываться пространственное расположение звеньев. Это вызывает трудности при экспериментальном определении переходных вероятностей и уменьшает возможности применения марковских цепей для расчета состава и структуры полимеров.

С другой стороны, различное пространственное расположение звеньев в макромолекуле, естественно, сказывается на физических свойствах полимеров. Некоторые из этих свойств могут быть рассчитаны с помощью методов так называемой ротамерной физики. Возможности применения марковских цепей для расчета физических свойств

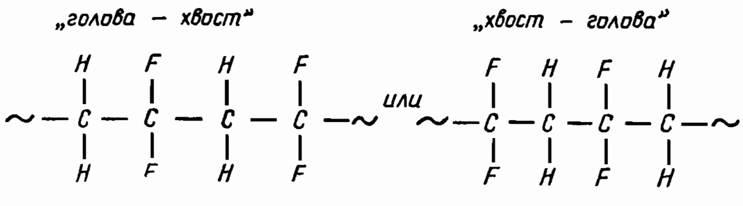


Рис. 32

полимеров высказаны советским ученым членом-корреспондентом АН СССР М. В. Волькенштейном и прекрасно описаны в его научно-популярной книге, к которой отсылаем нашего читателя *.

3.2. Нечто физическое, демоническое и... статистическое

Демонам почему-то везет! Они — герои многих сказок, легенд, произведений литературы и искусства. Но есть один особенно популярный среди физиков — это демон Максвелла. Демон Максвелла кочует по страницам научной литературы уже более века. Авторы одного из произведений, написанного в жанре юмористическом и фантастическом одновременно, даже поместили демонов Максвелла у входа в НИИ, поручив им обязанности вахтеров.

А началось все с того, что в 1871 г. Максвелл, занимаясь проблемами статистической термодинамики, сформулировал знаменитый парадокс, названный впоследствии очень образно демоном Максвелла.

Суть его, коротко, сводится к следующему. Представим себе изолированный сосуд, наполненный газом и разделенный герметичной перегородкой на две полости *А* и *В*. В перегородке имеется отверстие, которое можно закрывать и открывать. Делает это некое существо (демон), обладающее сверхъестественной способностью различать беспорядочно движущиеся молекулы газа по скорости и пропускать из *А* в *В* быстрые молекулы, а обратно — медленные. Парадокс заключается в том, что через некоторое время без вмешательства извне (т. е. как будто бы без подвода энергии) в изолированной системе должна сама по себе увеличиться ее упорядоченность или, как говорят, уменьшиться энтропия. Уменьшается же она потому, что в объеме *А* будет больше быстрых молекул (т. е. выше температура), а в объеме *В* — наоборот, больше медленных (ниже температура). Это противоречит законам физики, согласно которым энтропия изолированной системы всегда должна возрастать (второе начало термодинамики). В дальнейшем было показано, что парадокс разрешается довольно просто. Ведь для работы демона по классификации молекул нужна энергия. При этом энтропия объекта,

---

* См.: Волькенштейн М. В. Перекрестки науки.— М.: Наука, 1972.

который будет поставлять эту энергию, возрастет. Увеличится и суммарная энтропия всей системы.

Демон, о котором мы сейчас рассказали, потребуется нам для рассказа о возможности применения марковских цепей при математическом описании одного весьма сложного физического процесса, называемого диффузией. Изучение процесса диффузии имеет большое научное и практическое значение. Дыхание и питание живых организмов, обменные процессы в растениях, сохранение чистоты окружающей среды — все это основано на явлении диффузии. Получение многих веществ в химии, новых сплавов в металлургии, коррозия и средства защиты от нее, упрочнение поверхностей деталей в машиностроении, крашение и дубление кожи, изготовление многих продуктов питания — вот далеко не полный перечень технических приложений явления диффузии. Для изучения явления диффузии сделано многое, и тем не менее здесь очень нужна математическая модель, дающая возможность количественной оценки характеристик процесса.

Воспользуемся для ее построения марковскими цепями. Вот тут-то нам и потребуется демон Максвелла! Только ему мы поручим другие обязанности. В течение «демонического» рабочего дня он должен заниматься такой работой: ловить без разбора любую подвернувшуюся ему под руку молекулу в одной из полостей и переправлять ее в другую. А еще лучше, если мы сделаем в перегородке два отверстия и посадим около них двух демонов (рис. 33). Одного из них, скажем, демона АВ, попросим ловить молекулы в полости A и переправлять их в полость B, другому, ВА, поручим противоположные функции — заниматься

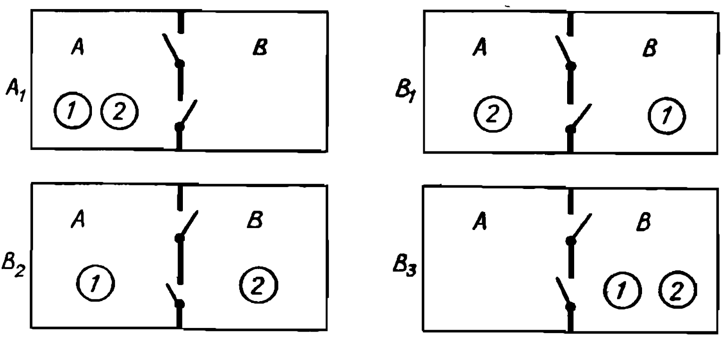


Рис. 33

ловлей молекул в полости B и перемещать их в полость A. Конечно, с точки зрения здравого смысла мы поручаем нашим демонам совершенно никчемное занятие, но ведь такая же картина будет наблюдаться в реальной действительности, если сосуд окажется разделенным полупроницаемой мембраной. Тогда некоторые молекулы, имеющие в определенный момент времени необходимый запас энергии, могут проникнуть через препятствие как из A в B, так и обратно. Для определенности можно представить, что в начальный момент времени в полости A находится n молекул газа, а в полости B их нет. Требуется определить, сколько в среднем пройдет времени до того момента, когда в полостях A и B молекулы будут распределены поровну, что, в свою очередь, соответствует окончанию процесса диффузии. По-видимому, не надо доказывать практическую важность постановки такой задачи.

Мысленно пронумеруем все молекулы от 1 до n. Случайных событий здесь может быть два: попадание и непопадание молекулы j-го номера «под руку» демона. Под состоянием будем понимать наличие совокупности (набора) молекул определенных номеров в полости. Тогда если рассматриваются только две молекулы, все состояния можно описать следующим образом (см. рис. 33):

A_1 — $\langle 1,1 \rangle$ все молекулы в полости A;
B_1 — $\langle 0,1 \rangle$ молекула № 1 перешла в полость B;
B_2 — $\langle 1,0 \rangle$ молекула № 2 перешла в полость B;
B_3 — $\langle 0,0 \rangle$ все молекулы находятся в полости B.

Для n молекул получается всего 2^n состояний, причем все они отличаются друг от друга одним элементом (одной координатой). Вероятность перехода из какого-то конкретно выбранного состояния в остальные $n-1$ будет равна $^1/n$. Работа демонов по наведению порядка в сосуде может быть представлена в виде последовательности зависимых испытаний, т. е. марковской цепи.

Итак, рассмотрим случай с двумя молекулами. Поскольку в цепи могут совершаться любые переходы и из множества состояний $A_1 - B_3$ уйти нельзя, то такая цепь, как указывалось выше, будет относиться к классу эргодических. Обратим внимание читателя на одно интересное обстоятельство. Если проанализировать работу демонов, то окажется, что переходы из состояния в состояние (если они разные), могут происходить за любое число шагов. Выполнить же переход «с возвратом», т. е., например, из $\langle 1,0 \rangle$ снова в $\langle 1,0 \rangle$, можно только за четное число шагов (циклов). Это означает, что цепь является еще и циклической. И еще одно. Переход из $\langle 1,1 \rangle$ в $\langle 0,1 \rangle$ возможен за один шаг, но ведь и из $\langle 0,1 \rangle$ обратно в $\langle 1,1 \rangle$ тоже. Значит, матрица переходных вероятностей должна быть симметричной и процесс может протекать в обоих направлениях, т. е. является обратимым. Составить переходную матрицу для двух молекул не составит труда, она имеет следующий вид:

$$\Pi_{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Как видно, она действительно симметрична.

Кроме того, как и в случае «бесконечно длинной прогулки» по молекуле, данный процесс стационарен, и неподвижные векторы * матрицы (3.4) будут равны $(^1/_2)^n$ или при $n=2$ $\langle ^1/_4, ^1/_4, ^1/_4, ^1/_4 \rangle$. Это означает, что среднее число шагов, которое потребуется для возвращения в любое из состояний, равно четырем.

Но все-таки мы пока не ответили на вопрос: сколько в среднем пройдет времени, пока демонам удастся распределить молекулы поровну? По-видимому, это можно было бы узнать, понаблюдав за их работой. Однако не стоит заниматься такими наблюдениями, во-первых, конечно, потому, что демоны — существа мифические; кроме того, следить за перемещениями молекул чрезвычайно сложно, да и просто не нужно, так как нашей целью ведь и является составление математической модели, заменяющей трудоемкие и сложные эксперименты.

В теории марковских цепей есть такое понятие, как «время первого достижения» (ВПД). Это время, за которое изучаемый процесс, находясь в каком-то состоянии A_i, впервые попадет в другое заранее выбранное состояние A_j.

Если за A_i принять начальное состояние A_1 (все молекулы в полости A), а за A_j — состояние B_1 (молекула № 1 перешла в полость B), то произведение среднего числа шагов, за которое система перейдет из состояния A_1 в B_1, на соответствующее значение времени каждого шага и будет ответом на поставленный выше вопрос. Время, необходи-

* Под неподвижным вектором переходной матрицы понимается вектор предельных вероятностей эргодической регулярной цепи Маркова.

мое на каждый шаг, находится путем вычислений или опытов, рассказ о которых выходит за рамки нашей книги. Мы займемся здесь определением среднего числа шагов до достижения данного состояния. Это число можно определить двумя способами. Во-первых, с помощью матрицы, которую называют «матрица средних времен достижения». Мы поставили название матрицы в кавычки, потому что на самом деле по ней определяется не время, а именно количество шагов до перехода в какое-то определенное состояние. Эта матрица имеет довольно сложный вид. Не будем здесь ее приводить. Заинтересованный читатель легко разыщет соответствующие формулы в трудах по теории марковских цепей *.

Существует и другой способ — он использует фундаментальную матрицу поглощающих цепей. В самом деле, когда речь шла о поглощающих цепях, с помощью фундаментальной матрицы определялось количество шагов, за которое процесс переходит из начального в поглощающее состояние. Но ведь можно любые состояния эргодической цепи выбрать в качестве начального и поглощающего. Пусть начальным будет состояние A_1, а поглощающим — B_1. Тогда переходная матрица приобретет вид:

$$\Pi_{[4]}= \begin{array}{c} \\ B_1 \\ A_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & A_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{array}\right] \end{array}. \tag{3.5}$$

Дальше поступают так, как описывалось раньше, т. е. переходную матрицу представляют в канонической форме, а затем переходят к фундаментальной матрице. С помощью этой матрицы уже можно ответить на поставленный вопрос.

Значит, задача решена? Да, решена, но ведь речь шла всего о каких-то двух молекулах. На самом же деле, если заниматься реальными процессами, их число огромно! Но тогда количество состояний и переходные матрицы будут гигантскими, не поддающимися ни математическому описанию, ни расчету. Оказывается, и здесь можно найти выход из положения. Посмотрим внимательнее на наши состояния A_1, B_1, B_2, B_3.

---

* См.: Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова.— М.: Наука, 1970.

Ясно, что состояния B_1 и B_2 с точки зрения практического интереса равноправны. Нам, конечно, безразлично, какой номер молекулы попадет под руку демону. Важно то, что и в том и в другом случае в полостях A и B находится по одной молекуле. Поэтому состояния B_1 и B_2 можно объединить, или, как говорят в теории марковских цепей, укрупнить. Тогда мы будем иметь дело уже не с четырьмя, а с тремя состояниями. Этот прием можно распространить и на большее число молекул. Получающуюся при этом «новую» марковскую цепь можно называть «макроскопической» (в отличие от исходной — микроскопической). Но справедливы ли все предыдущие рассуждения для этой новой укрупненной цепи? Теоретически доказывается, что новая цепь будет обладать почти всеми теми же свойствами. Во всяком случае она не потеряет свойств эргодичности, обратимости и цикличности. Макроскопической цепи также будет свойственна стационарность, но компоненты неподвижного вектора будут уже иными, учитывающими «укрупненность» состояний. Несколько усложнится и процедура определения времени первого достижения. Все усложняется, но не безнадежно! К тому же вполне согласуется с возможностями современных ЭВМ.

Рассмотрим в заключение еще один интересный вопрос. Если процесс обратим, то мы вправе предположить, что в макроскопической цепи возможны любые укрупненные состояния. Это означает, что если начало процесса соответствует наличию всех молекул в полости A и их полному отсутствию в полости B, то это состояние может наступить снова после достижения равновесного (т. е. равного распределения молекул по полостям) состояния. Вопрос заключается в том, одинаковы ли времена достижения равновесного и крайне неравновесного состояний? Иными словами, равно ли время равного распределения молекул между полостями A и B времени обратного перехода всех молекул в полость A? Большинство из нас ответит: конечно, нет! Время равного распределения молекул будет меньше! Это ясно из физики процесса.

И математически путем расчетов получается, что среднее время перехода от равномерного распределения молекул к их сосредоточению в одной полости немного больше.

Снова хорошее подтверждение правильности теории!

Теперь еще об одном часто встречающемся физическом явлении, при изучении которого широко используются марковские цепи.

3.3. Лавины, атомы и молекулы

Однажды тихим летним вечером в одном из живописнейших ущелий около Алма-Аты послышался нарастающий гул. Вслед за ним по ущелью со скоростью железнодорожного экспресса прокатился, сметая все на своем пути, гигантский вал грязи и камней. Это был трагически знаменитый алма-атинский сель 1973 г. Трудно сказать, что ожидало бы прекрасный южный город, если бы заблаговременно не была построена огромная стометровая плотина.

Снежные горные лавины и сели! Кто не слышал об этих грозных и коварных явлениях природы, нередко сопровождавшихся человеческими жертвами и разрушениями? Лавины обычно начинаются с малых, незаметных на первый взгляд движений, в которые с нарастающей скоростью вовлекается все большее и большее число частиц какой-то системы. Лавинообразные процессы встречаются в природе не только в горах. Любой взрыв — это лавина, это образование все новых и новых частиц в результате физических и химических превращений вещества. Радиоактивный распад, импульс лазера, кристаллизация, образование трещин в металлах, вспышка в двигателе внутреннего сгорания — все это лавинообразные процессы. Что же у них общего? Скорость протекания? Но могут быть и медленные лавинообразные превращения (например, та же кристаллизация). Так что же? Общим здесь является процесс последовательного случайного превращения частиц (элементов) системы. Одни частицы, родившись, могут образовывать все новые и новые, другие — исчезнуть, «погибнуть». Изобразим такой процесс на рис. 34. Не правда ли, он напоминает какое-то растение, имеющее корень и много ветвей? Поэтому такие процессы и называют ветвящимися.

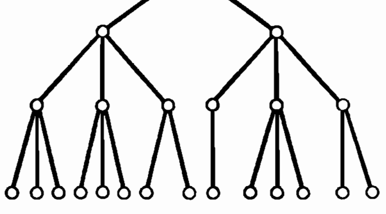


Рис. 34

Конечно, «гибель» или «рождение» частиц являются для всего процесса зависимыми случайными событиями.

Говорят, что научное изучение ветвящихся случайных процессов началось с загадки английских пэров. В середине прошлого века английская королева Елизавета, обнаружившая заметное уменьшение потомков старинных родовитых фамилий, обратилась к известному ученому-естествоиспытателю и математику Ф. Гальтону с просьбой выяснить причину столь печального явления. Гальтон основательно разобрался в генеалогических древах именитых пэров и сформулировал задачу определения вероятностных характеристик ветвящихся процессов. Впоследствии эту задачу удалось решить ученику Гальтона — Ватсону *. С тех пор описание какой-либо системы с помощью ветвящегося процесса стало называться моделью Гальтона — Ватсона. Оказалось, что моделью Гальтона — Ватсона очень хорошо описывается механизм цепных реакций, лежащих в основе многих физических и химических процессов. За создание теории цепных реакций выдающемуся советскому ученому-химику Н. Н. Семенову в 1956 г. была присуждена Нобелевская премия.

Цепные реакции! Нужно ли доказывать значение изучения их закономерностей для понимания многих явлений природы? Цепные реакции непрерывно происходят на Солнце, в недрах других гигантских звезд и в атомных реакторах, лежат в основе явления фотосинтеза, обеспечивают получение многих ценных химических продуктов и т. д. Но нам важно подчеркнуть здесь другое. В любом ветвящемся случайном процессе каждое последующее состояние зависит только от предыдущего, и их последовательная смена образует марковскую цепь.

Давайте разберемся в этом немного подробнее, для чего рассмотрим сравнительно простой абстрактный пример.

Предположим, что мы имеем дело с превращениями частиц только одного вида и эти превращения происходят через равные промежутки в моменты времени $t=1, 2, 3...$ Допустим, что в начальный момент ($t=0$) мы наблюдаем какую-то одну частицу. Под действием различных причин

* По этой задаче оказывается, что фамилия, которую носит только один мужчина, довольно быстро, с вероятностью примерно 0,89, исчезает через какое-то время. Однако если эту фамилию носят несколько, допустим m человек, то эта вероятность будет уже существенно меньше $(0,89)^m$.

в последующие моменты времени с нею могут произойти следующие изменения (события):

B_0 — частица погибла; припишем этому событию вероятность r_0;

B_1 — частица осталась неизменной (вероятность r_1);

B_2 — частица разделилась на две одинаковые части (r_2);

B_3 — на три ... и т. д.

Если общее число таких событий будет n и события несовместны, то сумма их вероятностей будет равна единице, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = 1.$$

В последующие моменты времени могут происходить такие же изменения.

Под состоянием системы в этом случае понимают количество частиц, имеющееся в каждый данный момент времени в системе, например, A_0 — частиц в системе нет, A_1 — имеется одна частица, A_2 — две и т. д. Совершенно очевидно, что каждое состояние непосредственно зависит от предыдущего. Следовательно, мы здесь имеем дело с марковской цепью в ее наиболее типичном виде. Поэтому с описанием ветвящегося случайного процесса при рождении и гибели каких-либо частиц можно встретиться практически в любой книге по теории марковских цепей. Какую же информацию можно получить с их помощью?

Прежде всего интересно было бы узнать, какое количество частиц будет в системе через определенные промежутки времени, т. е. вероятность того или иного состояния.

Кроме того, важно уметь предсказать и судьбу всего процесса. Ведь он может, начавшись, либо продолжаться бесконечно долго, либо прекратиться (выродиться). Интересными будут также сведения о скорости его протекания и о судьбе его отдельных ветвей.

Если мы рассматриваем превращения разных частиц, то, конечно, нас будет интересовать, сколько и каких частиц имеется на каждый данный момент времени и т. д. Ответы на все эти вопросы имеют большое практическое значение. Например, изучая ветвящийся процесс при некоторых химических реакциях (например, гелеобразовании), химики получают сведения о структуре макромолекул и, следовательно, о свойствах тех полимеров, которые при этом образуются. Теперь остается показать, как можно получить такие важные результаты с помощью теории марковских цепей.

К сожалению, нам не удастся проиллюстрировать это со всей полнотой, так как тогда необходимо было бы привлечь новый для нас и довольно сложный математический аппарат. Дело в том, что, во-первых, практически ценные результаты можно получить, имея дело с большим количеством состояний, что сопровождается, естественно, увеличением размерности переходных матриц. Пользоваться предложенными выше методами, основанными иа преобразованиях матриц, особенно при большом числе шагов, становится трудно даже с помощью современных ЭВМ. Приходится вводить специальные математические функции, упрощающие процесс вычислений.

Во-вторых, многие ветвящиеся процессы протекают очень быстро, и разбиение их даже на малые дискретные участки приводит к большим погрешиостям — так интенсивно меняются характеристики процесса на протяжении этих промежутков. Поэтому считают процесс непрерывным и полагают, что время от одного перехода до другого является величиной случайной, имеющей определенные вероятностные характеристики. При этом мы снова имеем дело с математической моделью в виде диффереициальных уравнений Колмогорова — Чепмена, о которых уже говорилось выше. Поэтому мы можем попытаться здесь ответить на поставленные вопросы только с помощью простых примеров.

Ограничимся случаем, когда с частицей могут произойти события B_0, B_1и B_2. Кроме того, будем полагать, что иас интересуют четыре состояния процесса A_0, A_1, A_2, A_3.

Следуя уже установившейся последовательности наших рассуждений, определим сначала, с какими типами состояний и каким видом цепи мы будем иметь дело. Поскольку в состоянии A_0 частиц нет, то оно будет поглощающим. Во всех остальных состояниях возможны взаимные переходы. Кроме того, из множества состояний A_1, A_2, A_3 можно и уйти, но только в A_0. Таким образом, совокупность состояний A_1, A_2, A_3 образует невозвратное множество. Будем предполагать (так в большинстве случаев и бывает), что в течение времени $t=1, 2, 3, \ldots, k$ вероятности переходов постоянны. Все сказанное означает, что в данном случае мы имеем дело с однородной простой поглощающей цепью Маркова. С такими цепями мы уже встречались неоднократно. Напомним читателю, что в этом случае с помощью фундаментальной матрицы легко определялись такие важные характеристики процесса, как среднее число шагов до попадания в поглощающее состояние, среднее количество попаданий в каждое из невозвратных состояний и т. д. А что это дает в данном случае?

Во-первых, если известно среднее число шагов до попадания в поглощающее состояние и время, затрачиваемое на каждый шаг, то легко определяется среднее время, в течение которого процесс должен прекратиться. Если это время очень велико, то можно предположить, что процесс будет длиться бесконечно ($t \to \infty$), т. е. поглощения вообще не будет.

Во-вторых, среднее количество попаданий в каждое из невозвратных состояний дает информацню о том, какое количество частиц будет в системе до поглощения. Если же необходимо проследить само протекание процесса, то для этого не надо даже пользоваться и фундаментальной матрицей — достаточно использовать уравнения Колмогорова — Чепмена, позволяющие с помощью вектора начальных состояний и матрицы перехода находить вероятности всевозможных состояний, характеризующие в данном случае количество тех или иных частиц на определенном шаге процесса. В нашем случае вектор-строка начальных вероятностей будет иметь вид:

$$P^{(0)}_{\langle 4\rangle} \cdot \langle 0,\ 1,\ 0,\ 0\rangle .$$

Допустим, что нам известны переходные вероятности, образующие матрицу перехода,

$$\Pi_{[4]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Тогда после первого шага ($t=1$) будем иметь:

$$P^{(1)}_{\langle 4\rangle} = P^{(0)}_{\langle 4\rangle}\,\Pi_{\langle 4\rangle} = \langle {}^{1}/_{16},\ {}^{1}/_{8},\ {}^{5}/_{16},\ {}^{1}/_{2}\rangle .$$

Это значит, что вероятность того, что процесс прекратится, равна ${}^{1}/_{16}$, что мы будем иметь только одну частицу — ${}^{1}/_{8}$, две — $^{5}/_{16}$, три — $^{1}/_{2}$. Точно так же с использованием формул главы 1 подсчитываются соответствующие вероятности и на последующих шагах.

Рассмотренный выше пример более всего подходит к различным физическим процессам (радиоактивный распад и др.). В химии же чрезвычайно важным является выявление структуры молекул. Выше мы уже рассматривали интерпретацию анализа состава молекулы в виде марковского процесса. Там это делалось путем условной прогулки вдоль линейной молекулы. В ветвящемся процессе больше напрашивается (или более подходит) аналогия с лазаньем по деревьям, вызывая приятные (или неприятные) воспоминания нашего детства. Во время этого лазанья встреча с каждой ветвью или сучком будет событием случайным, которое можно прогнозировать с помощью марковских цепей.

Но действительно ли макромолекулы, образованные в ходе описанных выше процессов, имеют древовидное строение, не слишком ли упрощается здесь задача? Конечно, на самом деле молекулы полимеров имеют сложное разветвленное строение и, как правило, мало напоминают дерево. Это обстоятельство сильно затрудняет описание их структуры и не позволяет в чистом виде использовать марковские цепи. Но на помощь нам снова приходит теория графов. Некоторые ее элементы уже были нами использованы (например, при построении дерева событий, графическом представлении переходов и т. д.).

В теории графов есть формальные приемы, позволяющие получать из любой разветвленной структуры более простые и, что самое главное, сравнительно легко поддающиеся математическому описанию элементы. Важно отметить, что эти элементы статистически подобны исходной структуре, т. е. реальная физическая картина при таких преобразованиях не искажается. Например, молекулы, изображенные на рис. 31, могут быть представлены в ви-

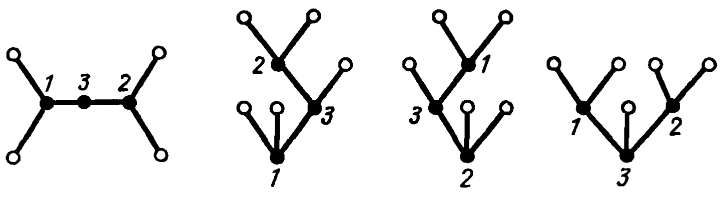
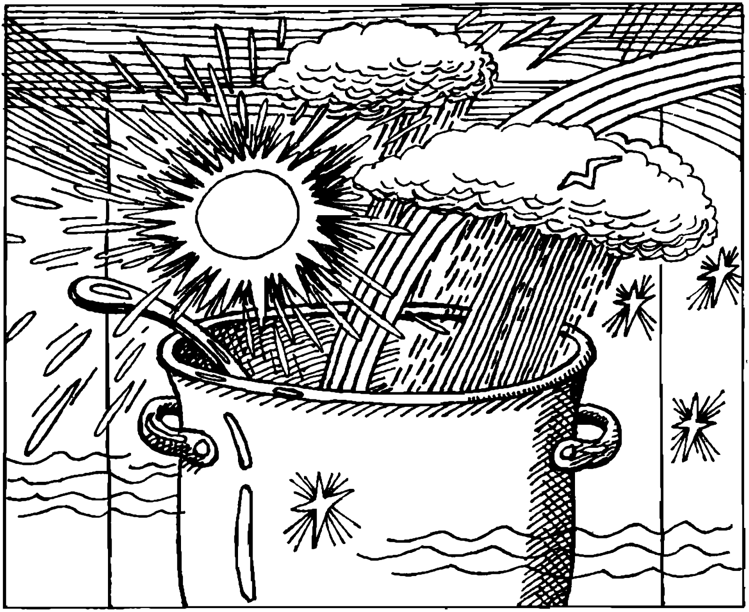


Рис. 35

де совокупности графов, каждый из которых является, как говорят в теории графов, корневым деревом (рис. 35). Интересно отметить, что эту совокупность называют кланом, что напоминает нам название старинных родовитых семей в Шотландии и Англии. Так вот, оказывается, молекулярно-массовое распределение молекул (т. е. вероятность получения молекул определенной массы) соответствует распределению корневых деревьев в клане, образованном из исходной структуры. Кроме того, вероятность того, что мономер определенного типа входит в состав молекулы заданной структуры, соответствует вероятности того, что какое-то звено данного мономера является корнем дерева. Наконец, так же, как и в приведенном выше примере с частицами, для каждого корневого дерева из клана можно сравнительно легко определить вероятности числа потомков (функциональных групп или звеньев) в любом последующем поколении. Это же, в свою очередь, дает полную картиıу структуры полимеров. Вряд ли стоит доказывать важность получения таких результатов.

Остается 1олько удивляться, иасколько универсальным иногда оказывается созданный гением человека математический аппарат. Лавины в горах, радиоактивный распад, фотосинтез, образование новых полимерных веществ... А ведь это еще далеко не все!



3.4. Что происходит на «кухне погоды»!

Кому из нас не приходилось сетовать на капризы погоды, неожиданные перемены которой почти всегда приносят нам неприятности и огорчения. Может быть, именно поэтому человек уже в детские годы осознает свою зависимость от сил природы и в первую очередь от тех из них, что хозяйничают на так называемой «кухне погоды», управляя явлениями в окружающей иас атмосфере.

Известно, что от погоды часто зависит наше настроение, и не только настроение, но и самочувствие. Погода интересует всех — домохозяек и государственных деятелей, работников промышленности, сельского хозяйства и транспорта, военных и спортсменов, курортников и туристов. Каждый вечер мы с большим интересом, а то и с волнением прислушиваемся к сообщениям дикторов радио и телевидения нли специалистов Гидрометеоцентра, рассказывающих нам о предполагаемой погоде на завтра и в ближайшие дни. Наука, которая изучает закономерности атмосферных явлений и разрабатывает методы (физические, физико-химические, математические, биологические и др.)

анализа и предсказания (прогноза) погодных условий как на ближайшее будущее (краткосрочные или оперативные прогнозы), так и на более продолжительный период (долгосрочные прогнозы), называется метеорологией.

Процессы в окружающей нас атмосфере характеризуются исключительной сложностью, и поэтому они с трудом поддаются математическому описанию. Кроме того, эти процессы носят случайный характер и, следовательно, в принципе непредсказуемы. Нельзя, в частности, достоверно утверждать, что завтра будет ясная солнечная погода, а можно лишь говорить о большей или меньшей вероятности наступления этого события. Вот почему в ежевечерней сводке погоды, которую все мы очень внимательно слушаем, говорится, например, о том, что «...завтра вероятность дождя в Москве и ее окрестностях мала...», или, наоборот, нас предупреждают о том, что «... завтра велика вероятность того, что над столицей прольются ливневые дожди, местами переходящие в грозу...», тогда мы накануне готовим плащи, зонты или отменяем ранее планировавшийся выезд на лоно природы.

Но как определить вероятности той или иной погоды завтра или в другой последующий день, от чего, от каких факторов эти вероятности зависят?

Ответить на эти вопросы не так-то просто: для этого надо построить математическую модель процессов, происходящих в атмосфере, причем такую модель, которая учитывала бы все (или почти все) факторы, влияющие на протекание этих процессов, и не только построить, но и, заложив в модель исходные данные о состоянии атмосферы и гидрометеорологических условиях сегодня и в предыдущие дни, получить, естественно, с помощью ЭВМ решение, в котором содержались бы сведения о погоде в последующие дни (завтра, послезавтра, через неделю и т. д.). Этот путь очень сложен, он требует объединения усилий крупных научных коллективов и больших затрат машинного времени.

Другой путь прогнозирования метеообстановки состоит в использовании марковского свойства процесса изменения погоды.

Ввиду большого практического значения этого свойства рассмотрим его подробнее на следующем гипотетическом примере.

Допустим, что мы оказались в бескрайних просторах Северного Ледовитого океана на небольшом островке, на котором располагается одна из советских полярных метеостанций. Погода на этом островке, особенно в летнее время, не отличается постоянством: здесь никогда не бывает двух дней подряд с одинаковой погодой. Многолетние наблюдения, проводившиеся коллективом метеостанции, показали, что если сегодня ясный, безоблачный день, то в 75 случаях из 100 завтра будет пасмурно, а в оставшихся 25 пойдет дождь. После пасмурного дня в среднем одинаково часто наступает ясный или дождливый день, а вот после дождя шансы наступления пасмурной погоды в 2 раза выше, чем ясной.

Воспользуемся аппаратом теории цепей Маркова для анализа процесса изменения погоды в районе метеостанции. По условию примера метеообстановка на острове может находиться в одном из следующих состояний:

S_1 — ясно (Я);
S_2 — пасмурно (П);
S_3 — идет дождь (Д).

Если допустить, что вероятность погоды в любой день определяется только вчерашней погодой и не зависит от погоды в предшествующие дни (позавчера и ранее), то процесс изменения погоды описывается простой однородной цепью Маркова. Переходные вероятности этой цепи даны в условии примера:

$$P(S_1/S_1)=P_{11}=0;\quad P(S_2/S_1)=P_{21}=0{,}75;\quad P(S_3/S_1)=P_{31}=0{,}25;$$

$$P(S_1/S_2)=P_{12}=0{,}5;\quad P(S_2/S_2)=P_{22}=0;\quad P(S_3/S_2)=P_{32}=0{,}5;$$

$$P(S_1/S_3)=P_{13}=0{,}33;\quad P(S_2/S_3)=P_{23}=0{,}67;$$
$$P(S_3/S_3)=P_{33}=0.$$

Таким образом, матрица перехода в нашем примере будет иметь вид:

$$\Pi_{[3]}=\begin{bmatrix} 0 & 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}33 & 0{,}67 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.6)$$

Дерево событий для одного из вариантов, когда исходное состояние ясно, и графы перехода изображены на рис. 36 и 37 соответственно.

Если обратиться к классификации цепей Маркова, приведенной нами ранее, то легко прийти к выводу, что цепь с матрицей перехода (3.6) является неразложимой и эргодической.

Возводя матрицу в степень, можно легко убедиться в ее регулярности. Регулярность цепи здесь означает следующее: какова бы ни была погода на острове сегодня, есть шанс, что она будет такой же не позднее послезавтра. Так, например, если сегодня ясно, то вероятность ясной погоды послезавтра равняется 0,46, а через два дня на третий — 0,21. Если же сегодня пасмурно, то вероятность пасмурной погоды послезавтра равна 0,71, а через два дня — 0,21.

Нам известно, что одна из особенностей регулярной цепи Маркова состоит в существовании предельных, или финальных, вероятностей, не зависящих от начального распределения вероятностей состояний. Вычислительный прием, позволяющий отыскать предельные вероятности, был нами рассмотрен ранее в главе 1. Он состоит в возведении матрицы перехода в такую достаточно высокую степень, что строки полученной в результате этой операции новой матрицы оказываются практически (в пределах требуемой точности вычислений) одинаковыми.

В нашем примере

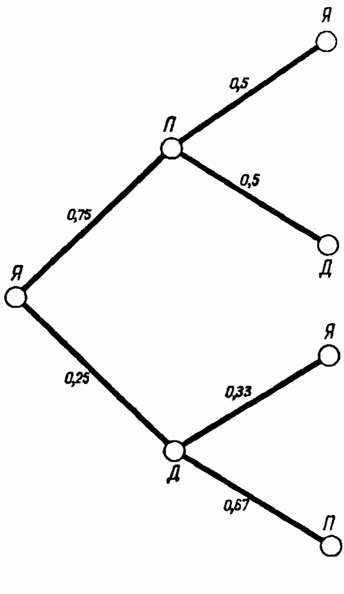


Рис. 36

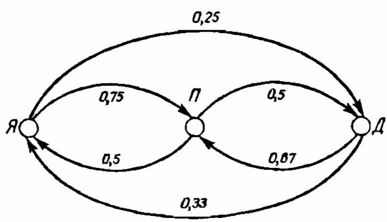


Рис. 37

$$\Pi^2_{[3]} = \begin{bmatrix} 0,46 & 0,17 & 0,37 \\ 0,16 & 0,71 & 0,13 \\ 0,34 & 0,25 & 0,41 \end{bmatrix}.$$

$$\Pi^4_{[3]} = \begin{bmatrix} 0,36 & 0,29 & 0,35 \\ 0,23 & 0,56 & 0,22 \\ 0,34 & 0,34 & 0,32 \end{bmatrix}.$$

$$\Pi^8_{[3]} = \Pi^4_{[3]} \cdot \Pi^4_{[3]} = \begin{bmatrix} 0,32 & 0,42 & 0,26 \\ 0,32 & 0,42 & 0,26 \\ 0,32 & 0,42 & 0,26 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что строки матрицы Π^8 с точностью до второго десятичного знака после запятой совпадают. Следовательно, элементы этих строк и равны предельным вероятностям:

$$P_1 = 0,32, \ P_2 = 0,42, \ P_3 = 0,26.$$

Что означает полученный результат? А вот что: каким бы ни был сегодняшний день (ясным, пасмурным или дождливым), вероятности ясной, пасмурной или дождливой погоды в день, достаточно удаленный от сегодняшнего (допустим, через две недели или тем более через месяц) равняются 0,32, 0,42 и 0,26 соответственно.

Рассмотренная выше модель, конечно, далека от совершенства, и ее нужно считать лишь первым и весьма грубым приближением для описания реально происходящих атмосферных явлений и процессов, что обусловливают ту или иную погоду на островке. Прежде всего следует сказать, что в ней учтены далеко не все состояния или градации погоды: к примеру, пасмурный день бывает туманным или облачным, дождь может моросить, а может вылиться в настоящую грозу и т. д. Поэтому в более совершенной модели число возможных состояний погоды будет больше трех, в соответствии с этим возрастет и размерность матрицы перехода.

Но не это, пожалуй, самое главное. У читателя может возникнуть вопрос: почему погода в предыдущий день, т. е. вчера, оказывает влияние на вероятность погоды сегодня, а погода позавчера и в другие предшествующие дни на эти же вероятности совершенно не влияет? Вопрос закономерный, и на него надо ответить так: переходные вероятности, конечно, зависят от погодных условий не только вчера, но и в другие предыдущие дни, причем по мере увеличеиия «срока давности» эта зависимость ослабевает. В только что рассмотренной наиболее упрощенной, а следовательно, и наиболее грубой модели этой зависимостью мы просто пренебрегли.

Если же попытаться ее учесть, то основное требование к простой цепи Маркова не будет выполняться и в качестве математической модели процесса изменения погоды мы вынуждены будем принять сложную цепь Маркова.

Как уже говорилось выше, теория сложных цепей разработана пока еще недостаточно и не доведена до серьезных практических приложений. Поэтому воспользуемся приемом, основанном на переходе от сложной цепи к так называемой расширенной цепи Маркова.

Сущность этого приема заключается в том, что ценой увеличения числа состояний, а следовательно, и размерности матрицы перехода мы заменяем сложную цепь Маркова полностью адекватиой, т. е. эквивалентной, или соответствующей ей простой цепью. Полученную путем такой замены простую цепь Маркова (ее называют расширенной цепью) легко проанализировать уже известными нам методами, изложенными в главе 1.

Построим расширенную цепь Маркова в нашем примере с погодой на островке в Северном Ледовитом океане. Предположим, что вероятности различной погоды завтра определяются не только сегодняшней, но и вчерашней погодой. Тогда состояниями можно считать всевозможные комбинации погоды в течение двух соседних суток. Ниже следует перечисление этих комбинаций — всего их 9, причем условимся, что первая буква в обозначении комбинации относится к погоде в предыдущие, а вторая — в последующие сутки (к примеру, комбинация ЯД указывает на тот факт, что вчера было ясно, а сегодня идет дождь, или сегодня ясно, а завтра пойдет дождь):

S_1 — ясно, ясно (ЯЯ);
S_2 — ясно, пасмурно (ЯП);
S_3 — ясно, дождь, (ЯД);
S_4 — пасмурно, ясно (ПЯ);
S_5 — пасмурно, пасмурно (ПП);
S_6 — пасмурно, дождь (ПД);
S_7 — дождь, ясно (ДЯ);
S_8 — дождь, пасмурно (ДП);
S_9 — дождь, дождь (ДД).

Найдем переходные вероятности для расширенной цепи Маркова, полученной путем преобразования матрицы перехода (3.6) простой однородной цепи, которую мы, таким образом, примем в качестве исходной.

Для примера определим переходную вероятность

$$P(S_7/S_3) = P(\text{ДЯ}/\text{ЯД}),$$

но прежде чем это сделать, поясним механизм перехода от состояния S_3(ЯД) к состоянию S_7(ДЯ).

Предположим, что 10 июля (даты мы выбрали произвольно) было ясно, а 11 июля шел дождь (состояние S_3, или ЯД). Состояние S_7(ДЯ) означает, что дождливая погода 11 июля сменится на ясную 12 июля. Но по исходной матрице перехода (3.6) видно, что вероятность такой смены погоды равняется 0,33, поэтому

$$P(S_7/S_3) = P(\text{ДЯ}/\text{ЯД}) = 0{,}33.$$

Из этого же примера вытекает, что нельзя перейти от состояния ЯД к состояниям ЯП или ПЯ, так как 11 июля не может одновременно идти дождь (ЯД) и быть ясно (ЯП) или пасмурно (ПЯ). Соответствующие переходные вероятности

$$P(S_2/S_3) = P(\text{ЯП}/\text{ЯД})$$
$$P(S_4/S_3) = P(\text{ПЯ}/\text{ЯД})$$

будут поэтому равны нулю как вероятности невозможных событий.

Путем аналогичных рассуждений можно найти все остальные переходные вероятности и составить матрицу перехода расширенной цепи Маркова. Предоставляем читателю возможность проверить, что эта матрица будет иметь вид:

$$\Pi_{[9]} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}33 & 0{,}67 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}33 & 0{,}67 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}33 & 0{,}67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}33 & 0{,}67 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.7)}$$

Полученную матрицу можно упростить, если обратить внимание иа то, что в 1-м, 5-м и 9-м столбцах все элементы равны нулю и, следовательно, состояния ЯЯ, ПП, ДД невозможны (этого и следовало ожидать, так как по условию примера погода не может быть одинаковой два дня подряд).

Поэтому число возможных состояний можно уменьшить с 9 до 6, и тогда расширенная матрица перехода может быть легко получена из матрицы (3.7) путем вычеркивания строк и столбцов, соответствующих трем невозможным состояниям, о которых шла речь выше:

$$\Pi_{[6]}= \begin{array}{c} \\ \text{ЯП} \\ \text{ЯД} \\ \text{ПЯ} \\ \text{ПД} \\ \text{ДЯ} \\ \text{ДП} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{ЯП} & \text{ЯД} & \text{ПЯ} & \text{ПД} & \text{ДЯ} & \text{ДП} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}33 & 0{,}67 \\ 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}33 & 0{,}67 \\ 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (3.8)$$

Итак, мы перешли от сложной цепи Маркова с тремя возможными состояниями к эквивалентной ей расширенной, но простой цепи Маркова с шестью состояниями. Увеличение числа состояний, а следовательно, и размерности матрицы перехода — это и есть та цена, которую приходится платить за упрощение модели, заключающееся в замене сложной цепи Маркова простой. Однако внимательный читатель, вероятно, уже заметил, что расширение цепи Маркова в данном примере не вызывалось необходимостью, поскольку исходная цепь Маркова была не сложной, а простой. Поэтому рассмотренный пример является искусствениым, он лишь призван продемонстрировать техиику перехода от матрицы простой цепи к матрице расширенной цепи Маркова.

В матрице перехода расширенной цепи Маркова, эквивалентной сложной исходной цепи, переходные вероятности должны определяться не только сегодняшней, но и вчерашией погодой.

Рассмотрим, к примеру, переходные вероятности P(ПЯ/ЯП) и P(ПЯ/ДП). Первая из иих — вероятность того, что завтра будет ясно, если сегодня пасмурно, а вчера было ясно, а вторая — что завтра будет ясно, если сегодня пасмурно, а вчера шел дождь. В переходных матрицах (3.7) и (3.8) (а они соответствуют исходной простой цепи Маркова) обе эти вероятности равнялись 0,5, т. е. не зависели от погоды вчера. В расширенной матрице перехода для сложной цепи эти переходные вероятности должны отличаться друг от друга, например:

$$P(\text{ПЯ}/\text{ЯП}) = 0{,}6,\ P(\text{ПЯ}/\text{ДП}) = 0{,}2.$$

То же самое следует сказать о других переходных вероятностях в одних и тех же столбцах расширенной матрицы (3.8) — они также должны иметь различные значения. Поэтому для сложной исходной цепи Маркова матрица перехода расширенной цепи может иметь, например, следующий вид:

$$\Pi_{[6]} = \begin{array}{c} \\ \text{ЯП} \\ \text{ЯД} \\ \text{ПЯ} \\ \text{ПД} \\ \text{ДЯ} \\ \text{ДП} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{ЯП} & \text{ЯД} & \text{ПЯ} & \text{ПД} & \text{ДЯ} & \text{ДП} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}35 & 0{,}65 \\ 0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}70 & 0{,}30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} . \quad (3.9)$$

Найдем расширенную матрицу перехода через двое суток и попытаемся с ее помощью осуществить прогноз вероятностей различной погоды на послезавтра, если известна погода сегодня и вчера.

Из теории цепей Маркова мы знаем, что для этого необходимо матрицу (3.9) возвести в квадрат:

$$\Pi^2_{[6]} = \begin{array}{c} \\ \text{ЯП} \\ \text{ЯД} \\ \text{ПЯ} \\ \text{ПД} \\ \text{ДЯ} \\ \text{ДП} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{ЯП} & \text{ЯД} & \text{ПЯ} & \text{ПД} & \text{ДЯ} & \text{ДП} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}15 & 0 & 0 & 0{,}22 & 0{,}18 \\ \boxed{0{,}24} & \boxed{0{,}11} & \boxed{0{,}13} & \boxed{0{,}52} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0{,}45 & 0{,}30 & 0{,}09 & 0{,}16 \\ 0{,}39 & 0{,}16 & 0{,}09 & 0{,}36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}42 & 0{,}28 & 0{,}11 & 0{,}19 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0 & 0 & 0{,}44 & 0{,}36 \end{bmatrix} \end{array} .$$

Как и раньше, предположим, что 10 июля (вчера) было ясно, а 11 июля (сегодня) — дождливо (исходное состояние ЯД, ему соответствует 2-я строка матрицы $\Pi^2_{[6]}$, выделенная рамкой).

Ясной погоде 13 июля (послезавтра) отвечают состояния ПЯ и ДЯ. Следовательно,

$$P(\text{Я}) = P(\text{ПЯ}/\text{ЯД}) + P(\text{ДЯ}/\text{ЯД}) = 0{,}13 + 0{,}00 = 0{,}13.$$

Пасмурной погоде 13 июля отвечают состояния ЯП и ДП. Поэтому

$$P(\text{П}) = P(\text{ЯП}/\text{ЯД}) + P(\text{ДП}/\text{ЯД}) = 0{,}24 + 0{,}00 = 0{,}24.$$

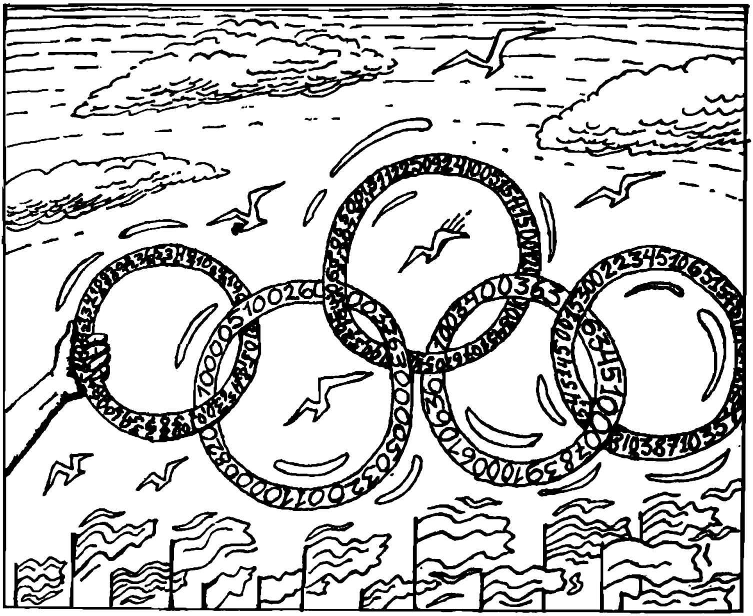
Наконец, дождливой погоде послезавтра, 13 июля, отвечают состояния ЯД и ПД, на основании чего

$$P(\text{Д}) = P(\text{ЯД}/\text{ЯД}) + P(\text{ПД}/\text{ЯД}) = 0{,}11 + 0{,}52 = 0{,}63.$$

Таким образом, в итоге наблюдений погоды в течение двух дней — 10 и 11 июля можно сделать вывод, что послезавтра, 13 июля, на северном островке наиболее вероятна дождливая погода.

Так «эти замечательные цепи» приходят на помощь метеорологам, которые используют их для анализа метеорологических явлений, а также совершенствования и повышения качества прогнозов погоды.

Конечно, на практике все обстоит гораздо сложнее. Для повышения надежности прогноза приходится учитывать не только сегодняшнюю и вчерашнюю погоду, но и погоду в другие предшествующие дни — позавчера, три дня назад и т. д. Не так-то просто определить и сами переходные вероятности. Для этой цели приходится разрабатывать весьма хитроумные и тонкие методы экспериментирования и расчета. Но, как говорится, «игра стоит свеч»: ведь каждый оправдавшийся прогноз — это дополнительная продукция и промышленности, и сельского хозяйства, и сотни, а то и тысячи тонн своевременно доставленных грузов, и предотвращенные поломки, аварии и другие неприятные происшествия, и, наконец, неомраченное превратностями погоды наше настроение в летний воскресный день, и еще многое, многое другое.



ГЛАВА 4
И В СПОРТЕ... ТОЖЕ!

4.1. Спорт и математика

Спорт прочно вошел в нашу жизнь. Почти у каждого из нас есть любимые виды спорта, любимые команды и отдельные спортсмены.

Привлекающие к себе внимание миллионов зрителей и болельщиков крупные спортивные соревнования (всесоюзные чемпионаты, первенства Мира и Европы, не говоря уже об Олимпийских играх) требуют участия в их подготовке и проведении многотысячных коллективов самых различных специалистов — архитекторов и строителей, тренеров и спортивных судей, врачей и психологов, работников торговли и транспорта, поваров и гидов-переводчиков, инженеров и математиков! Да, и математиков!

Совсем недавно, каких-нибудь 20—30 лет назад, на чемпионатах и олимпиадах в распоряжении организаторов соревнований, судейского аппарата, информаторов были обычные секундомеры, мерные линейки, рулетки, простейшие информационные табло, пищущие машиики и множительные аппараты, а вычисления (например, при подсчете суммы баллов у фигуристов или конькобежцев) выполнялись, как правило, вручную или в лучшем случае иа механических вычислительных машинках из разряда тех, что теперь очень редко можно увидеть. Трудно поверить, что еще несколько лет назад самым совершенным прибором в арсенале судей был... секундомер, позволявший определять временны́е промежутки с точностью до 0,1 с. Затем появился более точный «судья» — фотофиниш, связанный с алфавитно-цифровым информационным табло. Стало возможным фиксировать результаты, показанные спортсменами, с точностью до 0,01 и даже 0,001 с (например, в соревноваииях по санному спорту).

Это, конечно, повлияло на накал спортивной борьбы, сделало соревнования более увлекательными, зрелищными, хотя для отдельных спортсменов прогресс в развитии спортивной измерительной техники не раз оборачивался подлинной трагедией. (Вспомним, к примеру, драматический исход лыжной гонки на 15 км в Лейк-Плэсиде, когда выдающийся финский лыжник Ю. Мието отстал от победителя гонки шведа Т. Вассберга всего на... 0,01 с.)

Повышение точности измерений спортивных результатов было бы невозможно, если бы эти результаты не обрабатывались на ЭВМ, образующих «электронный мозг» системы управления крупным спортивным соревнованием. Уже на Олимпийских играх в Токио и Мехико вычислительная техника взяла на себя обработку результатов, показанных спортсменами в отдельных видах соревнований, и управление многочисленными информационными табло. В 1972 г. на Олимпиаде в Мюнхене машины подводили итоги соревнований и снабжали спортсменов, судей и зрителей необходимой информацией. На следующей Олимпиаде в Монреале на АСУ был уже возложен комплекс задач — она печатала протоколы соревнований, выдавала всевозможные справки, отвечала на запросы корреспондентов, спортивных специалистов и зрителей и даже... предсказывала (прогнозировала) победителей предстоящих спортивных баталий и их предполагаемые результаты. Наконец, на последних Олимпийских играх в Москве АСУ «Олимпиада-80» с успехом справилась с возложенными на нее обязанностями по информационному обеспечению всех соревнований, а также по управлению многочисленными подразделениями и службами, слаженная работа которых обеспечила ровное и бесперебойное дыхание Олимпийских игр — этого гигантского и захватывающего спортивного праздника — на протяжении всех 14 дней.

Но сердцевиной, мозгом любой АСУ, как мы уже упоминали, являются электронные вычислительные машины. На крупных спортивных соревнованиях эти машины, объединенные в вычислительные системы (комплексы), решают и будут решать не только чисто вычислительные, но и сложные логические задачи, возникающие при управлении соревнованиями, а также задачи хранения, поиска и быстрой, оперативной выдачи больших массивов информации. Так, например, на Олимпиаде-80 в кладовых электронной памяти ЭВМ хранились данные о всех без исключения участниках соревнований: их личные рекорды, вес, рост, семейное положение и даже увлечения (хобби).

По запросу любого тренера или журналиста эти данные выдавались на табло со скоростью 60 тыс. знаков в секунду даже лучшие телетайписты или машинистки не в состоянии печатать более 400—600 знаков в минуту).

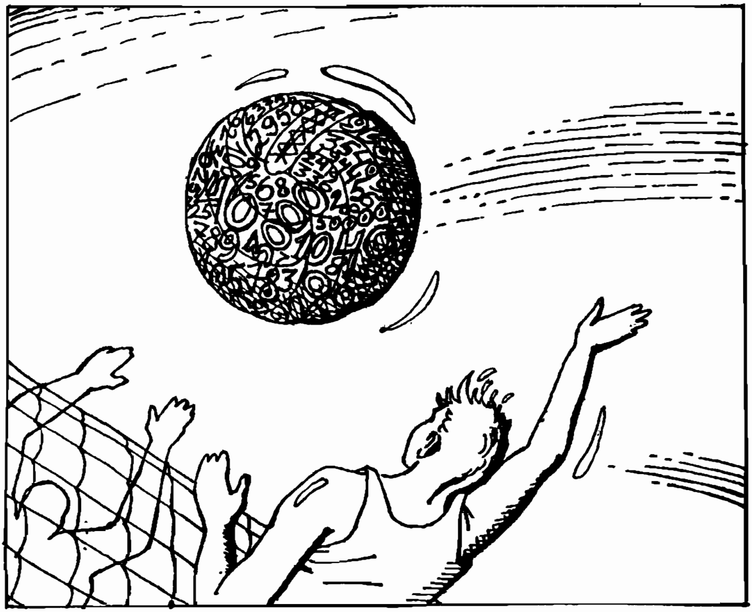
Сколько языков знают участники, организаторы и гости Олимпиады? В какой-то ячейке памяти ЭВМ хранится и этот ответ. Однако об одном языке (вернее, группе языков) электронная машина, видимо из скромности, умолчит.

Читатель уже догадался, что речь пойдет о так называемых машинных или алгоритмических языках — основном средстве общения ЭВМ с человеком и друг с другом. Как и любые другие языки, алгоритмические (их еще называют языками программирования) имеют строго формализованные грамматику, семантику и синтаксис — словом, все атрибуты обычных языков. На эти языки должны быть переведены все вычислительные, логические, информационно-поисковые и другие задачи, которые более двух недель без сна и отдыха «перемалывали» несколько десятков ЭВМ, входивших в состав АСУ «Олимпиада-80».

Настоящие болельщики очень любят еще до начала состязаний предсказывать их возможный исход, строить различные предположения, прогнозы о победителях, о результатах, которые будут ими показаны. Не скупятся на прогнозы и спортивные журналисты, комментаторы и даже спортивные специалисты и тренеры, хотя последние более осторожны в своих предположениях, предпочитая уходить от прямого ответа с помощью ставшей уже дежурной фразы: «Победит сильнейший».

Попытаемся выяснить, не сможет ли математика помочь спортивному болельщику, который незадолго до начала крупных соревнований решил участвовать в спортивном конкурсе, объявленном областной газетой? По традиции первый вопрос конкурса — предсказать победителя соревнований. Попробуем на конкретных примерах продемонстрировать такие идеи и методы, опираясь на которые болельщик сам, а еще лучше в содружестве с математиком сможет построить сравнительно несложные модели предстоящих соревнований и с их помощью получить некоторые основания для прогноза, повысив, таким образом, свои шансы на победу в конкурсе.

Но вот вопрос — какие виды спорта выбрать, на примере каких спортивных игр продемонстрировать возможности математических методов и моделей в этой сфере человеческой культуры?



4.2. Играем в волейбол. Кто выиграет очко!

Кто из читателей этой книги не играет (или не играл в юношеские годы) в волейбол, что в переводе с английского (а молва приписывает изобретение этой игры гражданам города Холнок, США, штат Массачусетс) означает «прием мяча на лету». Какая это великолепная игра! Она изобилует сложнейшими и хитроумными ударами, акробатическими бросками, непробиваемыми двойными, тройными блоками, пушечной подачей, воспитывает силу, ловкость, отвагу, точный глазомер и другие качества, столь необходимые нам не только в спорте, но и в жизни. Добавим к этому, что в волейбол можно играть в любом возрасте и практически в любом месте (во дворе и на пляже, в доме отдыха или турпоходе, на палубе океанского лайнера). По данным Федерации волейбола СССР, конечно, весьма ориентировочным, в Советском Союзе играют в волейбол около 8 млн. человек. Учет же волейбольных болельщиков федерация не ведет, но, думается, что число их превышает эту цифру.

Так давайте поможем любителям волейбола и попытаемся построить, а затем и проанализировать математическую модель этой увлекательной и очень полезной игры.

В доме отдыха моряков «Океан» только что закончился послеобеденный тихий час и на волейбольной площадке началась очередная встреча постоянных соперников — команд «Альбатрос» и «Буревестник» (для краткости назовем их командами А и Б). Правила игры в волейбол общеизвестны, поэтому напомним лишь те фрагменты из них, что понадобятся в дальнейшем для построения модели.

Игра состоит из нескольких партий, общее число их не превышает пяти, а выигравшей считается команда, победившая в трех партиях. Поэтому каждая из соперничающих команд может выиграть так: 3 : 0, 3 : 1, 3 : 2. Для победы в партии команде необходимо набрать 15 очков, но обязательно с разницей не менее 2 очков, так что при счете 14 : 14 победу принесет не 15-е, а 16-е очко, при счете 15 : 15 — 17-е очко и т. д. Сообразительный читатель уже догадался, что при таких правилах теоретическая продолжительность партии не ограничена. Практически же партия даже при игре примерно равных противников заканчивается за конечный промежуток времени победой одной из команд. Однако иногда игра все же затягивается, и тогда вступают в силу ограничения, предусмотренные не правилами игры, а, например, распорядком дня.

Как же выиграть очко, допустим, команде А? Для этого при своей подаче команде надо так послать мяч на поле противника, чтобы противник ошибся и мяч либо коснулся площадки на его стороне, либо, снова перелетев через сетку, коснулся земли на стороне А, но за пределами ее площадки. Выигрыш же мяча при чужой подаче не принесет стороне А очков, а означает лишь перемену (или потерю) подачи. Поэтому для выигрыша очка каждая из команд должна обязательно выиграть две подачи подряд.

Другие выдержки из правил игры, касающиеся, например, состава команд, приема мяча, перемещения игроков во время игры, мы рассматривать не будем, так как они не имеют непосредственного отношения к теме нашего разговора.

Таким образом, игру в волейбол можно разбить на три стадии:

— выигрыш очка (предварнтельная стадия);
— выигрыш партии (промежуточная стадия);
— выигрыш игры (заключительная стадия).

Предположим, что в команде А имеются сильные нападающие, поэтому при подаче противника «Альбатрос» в среднем чаще отбирает подачу, чем проигрывает очко. Один весьма дотошный болельщик (отдыхающие в «Океане» дали ему прозвище Статистик за ненстребимую любовь к подсчету благоприятных и неблагоприятных шаисов в самых различных жизненных ситуациях, в том числе и на спортивной площадке) длительное время вел наблюдение за игрой постоянных соперников, тщательно фиксировал их удачи и промахи и вскоре объявил, что команда А отбирает в среднем 60 % всех подач «Буревестника» и, следовательно, в 40 % своих подач команда Б завоевывает очко.

Кроме того, оказалось, что большинство волейболистов команды А овладело искусством знаменитой «планирующей» подачи, при которой мяч неожиданно для принимающих меняет свое направление. Благодаря этому команда А, будучи нападающей стороной, также имеет преимущество и, по данным Статистика, в 70 % всех своих подач добивается успеха (получает очко), а в 30 % теряет подачу.

Полученные Статистиком частоты успехов и неудач команд при различных вариантах подачи (а при длительном наблюдении эти частоты близки к соответствующим вероятностям) удобно представить в виде табл. 4.1.

В общем случае после перехода к буквенным обозначениям мы получим табл. 4.2.

Таблица 4.1

Подача команды	Выигрыш подачи командой	
	А	Б
А	0,70	0,30
Б	0,60	0,40

Таблица 4.2

Подача команды	Выигрыш подачи командой	
	А	Б
А	$p_А$	$q_А$
Б	$q_Б$	$p_Б$

Через $p_А$ и $p_Б$ в этой таблице обозначены вероятности успеха (выигрыша очка), а через $q_А = 1 - p_А$, $q_Б = 1 - p_Б$ — вероятности неуспеха (потери подачи) команд А и Б при своей подаче соответственно.

Из приведенных таблиц видно, что вероятности успеха противников на предварительной стадии игры, т. е. при розыгрыше очка, зависят только от того, какая команда подает мяч, иными словами, от того, чем закончился розыгрыш предыдущей подачи. Результаты же предшествующих подач (по существу, счет в игре) при сделанных нами предположениях на вероятности $p_А$ и $p_Б$ не влияют. «Ура! — воскликнул наш Статистик,— раз так, то математической моделью игры в волейбол на предварительной стадии розыгрыша очка является простая однородная цепь Маркова!».

Выясним, какой вид имеет матрица перехода этой цепи. Для этого представим предварительную стадию в виде последовательности (цепи) испытаний, в каждом из которых может наступить один из следующих исходов:

S_1 — команда А выиграла очко, а с ним и право на подачу;

S_2 — очко, а с ним и право на подачу выиграла команда Б;

S_3 — команда А отобрала подачу у Б;

S_4 — команда Б отобрала подачу у А.

Среди отдыхающих в «Океане» оказался ученый — специалист по теории систем и вопросам управления большими системами, будем называть его Кибернетик. Взглянув на перечень исходов, Кибернетик отметил, что с позиций его науки речь здесь идет о некой спортивной системе, которая в любой момент, предшествующий подаче, может находиться в одном из четырех состояний — S_1, S_2, S_3, S_4. В абстрактном виде этот процесс нами уже анализировался, когда речь шла о случайных блужданиях. Функционирование такой системы состоит в переходе из состояния в состояние; моменты перехода, начальные и конечные состояния определяет судья. Команда А в каждом испытании стремится выиграть очко, что равносильно попаданию в S_1.

Некоторые вероятности перехода из состояния в состояние были ранее определены Статистиком (см. табл. 4.1 и 4.2). Для определения недостающих вероятностей давайте вспомним, что в состояниях S_1 и S_2 предварительная стадия заканчивается, так как одна из команд выигрывает очко. На основании этого можно написать равенства:

$$P_{11}=1,\ P_{1j}=0 \text{ для } j=2,\ 3,\ 4;$$
$$P_{22}=1,\ P_{2j}=0 \text{ для } j=1,\ 3,\ 4.$$

Другие переходные вероятности определяются следующим образом:

$$P_{31}=p_{\text{А}},\ P_{32}=P_{33}=0,\ P_{34}=q_{\text{А}}$$
$$P_{41}=0,\ P_{42}=p_{\text{Б}},\ P_{43}=q_{\text{Б}},\ \ P_{44}=0.$$

Теперь в нашем распоряжении имеются все необходимые данные для составления матрицы переходных вероятностей:

$$\Pi_{[4]}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_{\text{А}} & 0 & 0 & q_{\text{А}} \\ 0 & p_{\text{Б}} & q_{\text{Б}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Этой матрице соответствует поглощающая цепь Маркова с двумя поглощающими состояниями — S_1 и S_2. При попадании в эти состояния одна из соперничающих команд выигрывает очко, а ведь выигрыш очка и есть конечная цель игры на предварительной стадии. Другие два состояния — S_3 и S_4 согласно нашей классификации будут невозвратными.

При анализе игры не только на предварительной, но и на последующих стадиях весьма полезной является подсказанная Кибернетиком модель случайного блуждания по отрезку с четырьмя возможными состояниями, показанная на рис. 38. Крайние точки отрезка обозначают поглощающие состояния: по-прежнему при попадании в S_1 очко выигрывает А, а при попадании в S_2 — Б. Попадание в промежуточные состояния S_3 и S_4 означает выигрыш подачи командами А и Б соответственно.

Читателю предоставляется возможность убедиться в том, что процесс случайного блуждания точки по такому отрезку описывается только что полученной матрицей перехода и, следовательно, подобное блуждание можно рассматривать как модель игры в волейбол на предварительной стадии.

Моделью игры на следующей промежуточной стадии игры, когда цель каждой из команд — выиграть не очко, а всю партию, будет простая однородная цепь Маркова с матрицей перехода

$$\Pi_{[2]} = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix}.$$

Из теории цепей Маркова мы знаем, что цепь, имеющая такую переходную матрицу, называется эргодической.

Едва лишь Кибернетик огласил полученные выводы, как Статистик, набивший руку на молниеносных вычислениях, составил табл. 4.3, в которой приведены значения вероятностей α (в числителе) и β (в знаменателе) в зависимости от вероятностей $p_А$ и $p_Б$.

Таблица 4.3

$p_Б$ \ $p_А$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,1	0,52/0,52	0,81/0,27	0,91/0,18	0,96/0,14	0,99/0,11
0,3	0,27/0,81	0,59/0,59	0,78/0,46	0,89/0,38	0,97/0,52
0,5	0,18/0,91	0,48/0,78	0,67/0,67	0,82/0,59	0,95/0,53
0,7	0,14/0,96	0,38/0,89	0,32/0,97	0,77/0,77	0,93/0,72
0,9	0,11/0,99	0,32/0,97	0,53/0,95	0,72/0,93	0,91/0,91

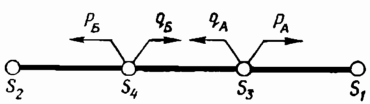


Рис. 38

Какую же полезную информацию смогут извлечь из этой таблицы сами игроки, тренеры и, наконец, болельщики? Прежде всего бросается в глаза, что, когда силы команд А и Б в защите и нападении примерно равны ($p_А = p_Б$), подающая команда имеет вдвое больше шансов выиграть очко, чем принимающая. Если обе команды (при сохраняющемся равенстве сил) лучше играют в нападении, чем в защите (например, $p_А = p_Б = 0{,}9$), то преимущество подающей команды становится подавляющим. Из табл. 4.3 видно, что в этом случае $\alpha = \beta = 0{,}91$, т. е. у подающей команды в 9 раз больше шансов выиграть очко, чем у принимающей подачу. Если же обе команды придерживаются оборонительной тактики и примерно одинаково искусны в защите (к примеру, $p_А = p_Б = 0{,}1$), то влияние фактора подачи существенно ослабевает (из той же таблицы видно, что шансы подающей и принимающей команд в этом случае оказываются примерно равными).

При встрече разных по классу игры команд шансы на выигрыш очка более сильной командой значительно возрастают. К примеру, если $p_А = 0{,}9$, а $p_Б = 0{,}1$, то $\alpha = 0{,}99$, а $\beta = 0{,}11$, т. е., получив подачу, команда А практически наверняка выиграет очередное очко, но и при подаче противника ее шансы выиграть очередное очко в 9 раз предпочтительнее (вот почему мастера очень часто выигрывают у команд любителей с сухим счетом).

Волейбольные баталии в доме отдыха «Океан», к неудовольствию администрации, затягивались подчас до глубоких сумерек, что нарушало распорядок дня. Неоднократно на волейбольной площадке появлялся сам директор дома отдыха и своей властью прекращал игру, угрожая в случае неповиновения всевозможными санкциями.

В связи с этим у Кибернетика возникла идея: а нельзя ли заранее определить время, которое затрачивают команды на выигрыш очка, выигрыш партии и в конце концов на выигрыш всей игры? Ведь зная продолжительность игры, можно будет предложить администрации «Океана» увеличить время на спортивно-массовые мероприятия таким образом, чтобы его хватило даже самым заядлым любителям волейбола.

Большинство отдыхающих сперва сочло эту идею нелепой и абсурдной. «Разве можно предсказать,— спрашивали оппоненты,— сколько раз мяч перелетит через сетку, сколько неудачных подач сделают игроки, сколько раз пушечный удар лучшего нападающего, например, команды Б пробьет блок и достигнет цели?» Но Кибернетика эти возражения не смущали — он хорошо знал, что реакция на любую новую идею проходит через несколько стадий: от «не может быть» и «какой абсурд»! до «в этом что-то есть» и «какой дурак этого не знает»!

«Конечно,— отвечал Кибернетик,— все характеристики игры, о которых вы говорите, носят случайный характер, заранее, до игры их точные значения указать нельзя. Именно по этой причине игра почти никогда не кончается вовремя и порою затягивается до самого отбоя. Тем более важно научиться определять среднюю продолжительность игры на всех ее стадиях (в том числе и на предварительной, которую мы сейчас рассматриваем) с тем, чтобы можно было внести изменения в распорядок дня».

Оказывается, что и здесь может прийти на помощь теория цепей Маркова.

В главе 1 мы написали и прокомментировали формулу (1.16) для вектора M математических ожиданий полного числа переходов через невозвратные состояния (включая начальное состояние) до попадания в одно из поглощающих состояний. Напомним, как выглядит эта формула:

$$M = N \cdot I = (E - Q)^{-1} \cdot I,$$

где N — фундаментальная матрица; I — единичный вектор-столбец, размерность которого совпадает с числом невозвратных состояний.

Читатель, знакомый с основами матричной алгебры, без труда сообразит, что составляющие вектора M равны сумме элементов соответствующей строки матрицы N.

В нашей задаче мы имеем всего два невозвратных состояния S_3 и S_4 (мяч подает либо одна, либо другая команда), а матрица N была получена ранее. Поэтому

$$M = \begin{bmatrix} m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1 - q_А q_Б} & \dfrac{q_А}{1 - q_А q_Б} \\ \dfrac{q_Б}{1 - q_А q_Б} & \dfrac{1}{1 - q_А q_Б} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

и, следовательно,

$$m_3 = \frac{1 + q_А}{1 - q_А q_Б}, \quad m_4 = \frac{1 + q_Б}{1 - q_А q_Б}. \tag{4.2}$$

Предположим, что $p_А = p_Б = 0{,}25$, а $q_А = q_Б = 0{,}75$ (обе команды одинаково сильны в защите). Тогда после подстановки этих значений в формулы (4.2) будем иметь:

$$m_3 = m_4 = \frac{1 + 0{,}74}{1 - (0{,}75)^2} = 4.$$

Полученный результат означает, что какая бы команда ни подавала, подача на предварительной стадии в среднем будет трижды теряться и лишь четвертая окажется результативной, т. е. завершится выигрышем очка.

Предположим, что нам также известна средняя продолжительность игры t_1 от момента подачи до свистка судьи, фиксирующего выигрыш мяча той или другой командой. (Статистик, обработав данные хронометража большого числа партий, нашел, что $t_1 = 15$ с.) Тогда для изменения счета, т. е. выигрыша очка, одной из команд потребуется $4 \times 15 = 60\text{с} = 1$ мин, а для выигрыша партии со счетом 15 : 10 (здесь мы вторглись в следующую, промежуточную стадию игры) понадобится в среднем 25 мин.

Статистик отличился и на этот раз — «поколдовал» некоторое время над микрокалькулятором и представил болельщикам табл. 4. 4 значений m_3 (в числителе) и m_4 (в знаменателе) в зависимости от вероятностей $p_А$, $p_Б$.

Таблица 4.4

$p_Б \diagdown p_А$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,1	10,0/1,0	4,6/5,1	2,7/3,5	1,8/2,6	1,2/2,1
0,3	5,1/4,6	3,3/3,3	2,3/2,6	1,7/2,2	1,2/1,8
0,5	3,5/2,7	2,6/2,3	2,0/2,0	1,5/1,8	1,2/1,6
0,7	2,6/1,8	2,2/1,7	1,8/1,5	1,4/1,4	1,1/1,3
0,9	2,1/1,2	1,8/1,2	1,6/1,2	1,3/1,1	1,1/1,1

Напомним, что числа в табл. 4.4, так же как и результат в только что рассмотренном примере, характеризуют лишь среднюю продолжительность игры на предварительной стадии. Фактически же это время может отклоняться от среднего как в большую, так и в меньшую сторону. Характеристикой такого отклонения является дисперсия полного числа переходов через невозвратные состояния до попадания в поглощающее состояние. Однако формулу для дисперсии мы приводить не будем — она имеет настолько сложный вид, что даже многоопытный Статистик не согласился выполнять по ней расчеты.

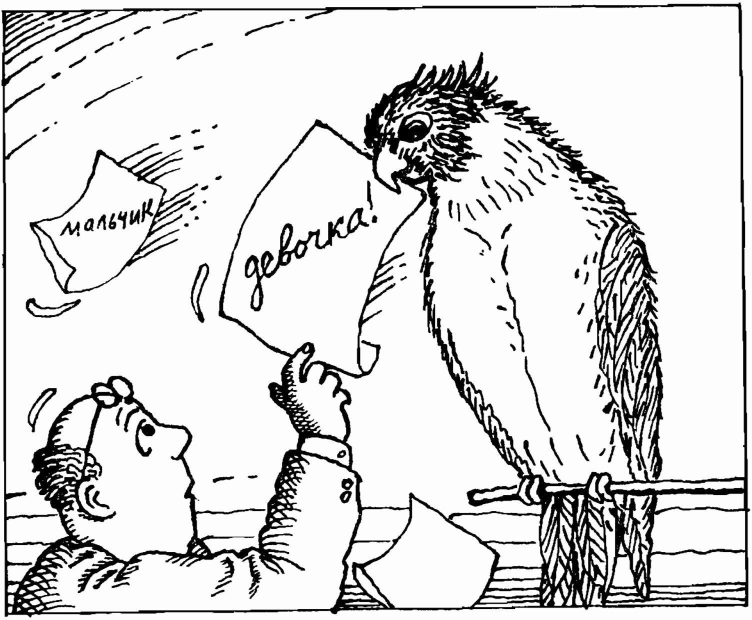
Покажем на примере, каким образом определить среднюю продолжительность партии в том случае, когда силы команд неравны. Пусть $p_А = 0,7$, $p_Б = 0,5$. По табл. 4.4 находим: $m_3 = 1,53$, $m_4 = 1,76$. Следовательно, для победы с тем же счетом 15 : 10 команде А понадобится в среднем $15 \times (15 \times 1,53 + 10 \times 1,76) = 608$ с, или 10,14 мин.

Если внимательнее проанализировать, из чего складывается продолжительность партии, то можно заметить, что полученный результат относится лишь к случаю, когда жребий отдал первую подачу команде А. Если же право первой подачи в партии принадлежало проигравшей команде, т. е. Б, то формулу для подсчета средней продолжительности партии надо несколько видоизменить, так как при том же счете победители сделают на одну подачу меньше, а побежденные — одну дополнительную подачу, и следовательно, партия в среднем будет длиться $15 \times (14 \times 1,53 + 11 \times 1,76) = 612$ с, или 10,20 мин.

Сводка формул для подсчета средней продолжительности партии приведена в табл. 4.5.

Таблица 4.5

	Выигрыш А со счетом $k:l$ $(k > l+1)$	Выигрыш Б со счетом $l:k$ $(l > k+1)$
1-я подача у команды А	$t_1(km_3 = lm_4)$	$t_1[(l-1)m_4 + (k+1)m_3]$
1-я подача у команды Б	$t_1[(k-1)m_3 + (l+1)m_4]$	$t_1(lm_4 + km_3)$



ГЛАВА 5

МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ... ЕЩЕ... И ЕЩЕ!!!

Переворачивая страницы этой книги, некоторые читатели будут, возможно, разочарованы. В самом деле, в ней ничего не говорится о применении теории цепей Маркова в сельском хозяйстве, медицине, психологии, военном деле и во многих других областях науки и человеческой деятельности. Но справедливо ли будет упрекать в этом авторов?

Думается, что нет, не справедливо. Ведь авторы вынесли на суд читателей не энциклопедию и не справочник, а научно-популярную книгу, призванную заинтересовать читателя и, если понадобится, помочь ему применить теорию замечательных цепей в избранной им профессии. В действительности область приложений этой теории настолько широка и разнообразна, что нет никакой возможности охватить все приложения достаточно полно, да еще в рамках одной книги. Для тех же читателей, которые продолжают питать на этот счет сомнения, приведем несколько примеров. Надеемся, что они эти сомнения рассеют.

5.1. Согласные, гласные, или... Перевод без переводчика

Одной из первых научных дисциплин, в которой теория марковских цепей нашла серьезное практическое применение, была лингвистика, в частности текстология. Сам А. А. Марков применил созданную им теорию к анализу текстов «Евгения Онегина» и «Детских годов Багрова внука».

Вот пример из текстологии, который привел в своей кииге «Перекрестки науки» член-корреспондент АН СССР М. В. Волькенштейн:

«В русском языке 32 буквы, из них 9 гласных. Следовательно, вероятность появления в данном месте текста гласной буквы равна $9:32=0{,}28$. Это в среднем. Но, вообще-то говоря, эта вероятность зависит от того, какой была предшествующая буква — гласной или согласной». Далее автор анализирует первую строку стихотворения П. Г. Антокольского «Физик». В ней из 94 букв 33 — гласные, следовательно, оценка вероятности (частота) появления гласной $33:94=0{,}35$, что близко к 0,28. Однако пары букв: ГГ (гласная-гласная), ГС (гласная-согласная), СГ (согласная-гласная) и СС (согласная-согласная встречаются в данном тексте соответственно 2, 32, 32 и 26 раз. Переходные частоты, следовательно, будут равны:

$$P^*(\text{Г}/\text{Г})={}^{2}/_{34}=0{,}06;\ P^*(\text{Г}/\text{С})={}^{32}/_{56}=0{,}57;$$
$$P^*(\text{С}/\text{Г})={}^{32}/_{34}=0{,}94;\ P^*(\text{С}/\text{С})={}^{24}/_{56}=0{,}43.$$

Если приближенно приравнять вероятности перехода соответствующим частотам, то получим переходную матрицу

$$\Pi_{[2]}=\begin{array}{c} \\ \text{Г} \\ \text{С} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Г} & \text{С} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}06 & 0{,}94 \\ 0{,}57 & 0{,}43 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Конечно, по мере увеличения объема анализируемого текста точность определения переходных вероятностей будет возрастать. Заслугой А. А. Маркова является обоснование им того факта, что математической моделью чередования букв в тексте служит простая однородная цепь Маркова.

В наши дни идеи А. А. Маркова находят практическое применение в автоматизированных системах машинного перевода.

5.2. Будет ли ваш сын... врачом, артистом, токарем...?

Рассмотрим другой пример, указывающий на возможность применения теории цепей Маркова к проблемам социологии. Предположим, что в некотором городе каждый взрослый житель имеет одну из трех групп профессий (будем полагать, что в каждой группе объединены родственные или близкие профессии). Пусть в городе, о котором идет речь, дети отцов, имеющих профессии S_1, S_2 и S_3, сохраняют их с вероятностями 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно, а если не сохраняют, то одинаково часто выбирают любую из двух других профессий. При сделанных предположениях изменение профессионального состава населення города при смене поколений будет описываться простой однородной цепью Маркова с матрицей перехода

$$\Pi_{[3]} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}70 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}60 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Располагая подобной матрнцей (а для получения ее необходимо проведение предварительных социологических исследований), можно, например, найти распределение жителей между профессиональными группами в следующем поколении (если известно это распределение сегодня) или во времени, достаточно от нас удаленном.

А вот другой пример, указывающий на возможности нспользования теории цепей Маркова для анализа миграционных процессов.

Допустим, что в некотором городе α % жителей ежегодно переселяется в пригороды, а β % жителей пригорода переезжает в город. На языке социологии и демографии между городом и его пригородами происходит миграция населения, идет миграционный процесс. Если полагать, что общее число жителей города и его пригородов на какой-то период стабилизировалось, то процесс миграции можно рассматривать как марковский с матрицей перехода

$$\Pi_{[2]} = \begin{array}{c} \\ \text{Г} \\ \text{П} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Г} & \text{П} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-\dfrac{\alpha}{100} & \dfrac{\alpha}{100} \\ \dfrac{\beta}{100} & 1-\dfrac{\beta}{100} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Располагая подобной матрицей, можно прогнозировать изменение населения города и его пригородов как в ближайшие годы, так и в более отдаленной перспективе, а это очень важно для составления научно обоснованных планов социально-экономического развития.

Так эти замечательные цепи становятся инструментом в руках социологов, экономистов, партийных и государственных руководителей, помогая им прогнозировать и планировать наше будущее.

5.3. Мальчик или девочка?

Успехи науки в наше время фантастичны. Более того, они часто опережают даже самые смелые гипотезы и прогнозы. Тем не менее у природы остается еще немало вечных загадок. С одной из них люди сталкиваются постоянно. Кто родится: мальчик или девочка? Сколько связано с этим вопросом надежд и разочарований, легенд и примет, гаданий и ... серьезных научных исследований.

Попробуем и здесь, не углубляясь в специальные вопросы биологии, показать возможности применения теории марковских цепей. Надо сразу сказать, что вообще демографические явления — благодатная область приложения теории вероятностей. Более того, изучение и анализ соотношения полов, а также другие демографические исследования были примерами первых и весьма успешных ее практических приложений. Еще в середине XVII в. Д. Граунт и У. Петти приближенно определили соотношение полов рождавшихся детей. А еще раньше, в древнейшие времена, в Китае, Иране, Римской империи на основании переписей населения была подмечена устойчивость соотношения мальчиков и девочек для той или иной страны.

Но впервые обстоятельно и научно соотношение полов было исследовано П. Лапласом, который, обработав данные сорокалетних наблюдений, получил отношения рождений мальчиков и девочек для Парижа (25 : 24) и всей Франции (21 : 20). Ученый не удовлетворился этими данными, а попытался найти им объяснение на основе изучения огромного материала, содержащего данные о материальном положении родителей, социально-политической обстановке в стране и других факторах. Вопреки утверждениям церковников, истолковавших полученные Лапласом результаты как «волю господню», «расплату за грехи» и т. д., ученый показал, что на соотношение полов рождающихся детей влияют не божественные, а объективные, социальные, «земные» причины.

Более того, Лаплас попросил известного ученого-исследователя К. Гумбольдта получить аналогичные данные во время его путешествий по Южной Америке. Результаты К. Гумбольдта позволили Лапласу сделать вывод о том, что отношение рождений мальчиков и девочек во всем мире примерно одно и то же. Это дает основание считать его общим законом для всего человечества. Естественно, что подобные исследования проводились и в дальнейшем. На основе многих наблюдений установлено, что соотношение полов не остается постоянным, а колеблется в некоторых пределах. Эти колебания объясняются сложными социальными процессами: войнами и их последствиями, революциями, степенью развития той или иной страны и всего мира и т. д. Есть предположения, что определенную роль играют здесь и природные явления: климатические изменения, солнечная и даже вулканическая активность и т. д. Но вернемся теперь непосредственно к нашей теме.

Очень распространенной является такая бытовая ситуация. В семье ждут прибавления. Волнуются все: мама и папа, дедушки и бабушки, друзья и знакомые. Сын или дочь? Хорошо, если мнения совпадают, гораздо хуже, если нет. Но ситуация еще более усложняется, если всеми запланирован определенный вариант. А если родится «не то»? Вот один забавный эпизод: на первенстве мира и Европы 1983 г. по хоккею одному из итальянских игроков сообщили, что у него родилась вторая дочь. Хоккеист же очень хотел сына. Его расстройство было настолько сильным, что заметно отразилось на игре.

Чаще, конечно, и «не то» становится любимым, таков уж закон природы. Но все-таки как же быть, если целеустремленные родители непременно хотят иметь желаемое — сына или дочь?

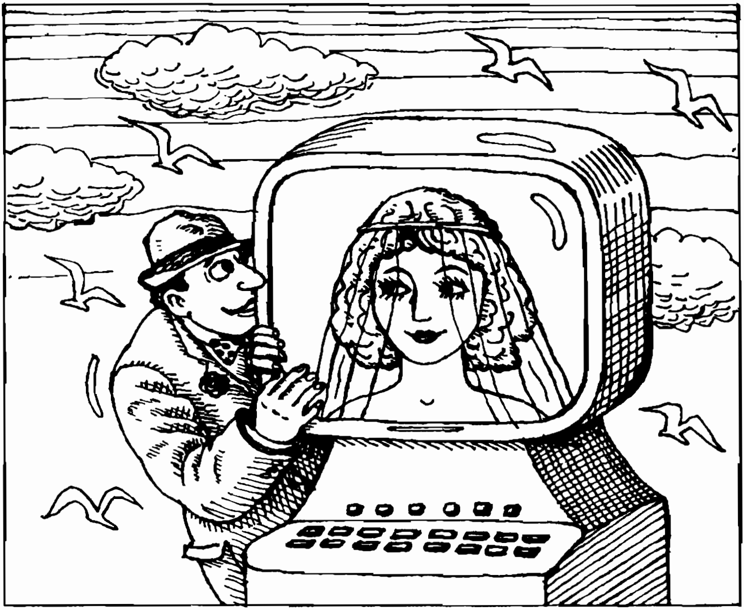
Попытаемся смоделировать математически эту ситуацию. Если родители не желают делать перерывов в рождении детей, то ясно, что, во-первых, процесс их появления будет представлять последовательность случайных событий, происходящих примерно через одинаковые промежутки времени. Можно также предположить, что родители принимают решение о рождении каждого последующего ребенка на основании того, кто появился перед этим на свет: сын или дочь, и не учитывают (хотя бы до определенного момента), сколько в семье уже имеется детей. При этих предположениях процесс представляет собой дискретную марковскую цепь всего с двумя состояниями: С — сын, Д — дочь.

Вероятности перехода в отличие от наших прежних примеров заранее довольно хорошо известны. Правда, как уже говорилось, они подвержены некоторым колебаниям, но их можно считать постоянными на протяжении некоторого довольно длительного периода. Допустим, что по демографическим данным вероятность рождения мальчика равна 0,516. Если далее предположить, что семья хочет ограничиться только одним сыном, то состояние С окажется поглощающим и матрица перехода будет иметь очень простой вид:

$$\Pi_{[2]}=\begin{array}{c} \\ \text{С} \\ \text{Д} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{С} & \text{Д} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}516 & 0{,}484 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Что же можно порекомендовать родителям на основании анализа матрицы? Вспомним, что из нее легко можно получить фундаментальную форму, каждый элемент которой является не чем иным, как средним числом попаданий в то или иное состояние до окончания процесса, т. е. достижения поглощающего состояния. Применительно к нашему случаю это будет означать ответ на вопрос: сколько (примерно) семья будет иметь детей до тех пор, пока не появится долгожданный мальчик. Элементарные выкладки показывают, что при взятом нами соотношении 0,516 это число будет равно 1,74, округляя которое до целого, будем иметь 2. Значит, если родители непременно хотят, чтобы у них в семье был мальчик, им придется примириться с тем, что у них в семье могут быть еще две девочки.

Мы продемонстрировали здесь, конечно, очень простой пример, имеющий иллюстративный характер. Но очевидно, что эта же самая модель может найти важное практическое применение, например, в сельском хозяйстве, когда речь идет о таких массовых явлениях, как разведение животных и птиц. Большое значение там будет иметь оптимальное управление этим процессом с целью достижения максимальной эффективности ведения хозяйства.



5.4. Мы выбираем, нас выбирают...

Всю жизнь мы что-нибудь выбираем: лучшую игрушку, удобное место в автобусе, красивые туфли или сумочку, машину, телевизор, профессию и, наконец... спутника(цу) жизни. Не выбираем мы гораздо реже, чем выбираем. Говорят... только родителей не выбирают! Проблема выбора сложна даже в мелочах. Классическим примером трудностей выбора стал знаменитый буриданов осел, так и умерший от голода, но не выбравший из двух охапок сена лучшей. Выбор еще более усложняется, если цена ошибки высока, объектов много (глаза разбегаются), а время ограничено. Таких примеров из жизни можно привести довольно много. Мы начнем с очень интересного.

С некоторой натяжкой можно считать, что проблема оптимального выбора встает при создании любой молодой семьи. Правда, здесь часто бывает, что по тем или иным причинам не очень велико число возможных вариантов, но сейчас этой беде пытаются помогать разными способами и мероприятиями, среди которых молодежные кафе, вечера и поезда дружбы и всемогущие ЭВМ. Сейчас их называют даже электронными свахами.

...Деловито помигивая лампочками и, как нам даже кажется, улыбаясь, ЭВМ «пережевывает» введенную в нее информацию в виде сведений о невестах и женихах, их взаимных пожеланиях и требованиях и спустя некоторое время сухо отстукивает рациональные варианты будущих счастливых семей. На этом, конечно, дело не заканчивается. Составляющие вариантов должны познакомиться и подтвердить или опровергнуть машинный прогноз.

Мы затронули очень интересную тему, и если бы ей была посвящена вся книга, может быть, она имела бы большой успех. Но мы поставим здесь гораздо более скромную задачу и лишь попробуем продемонстрировать еще один возможный случай применения марковских цепей.

Попытаемся с помощью математики дать один полезный совет. Воспользоваться им очень легко, даже не обращаясь к ЭВМ. Сделаем только небольшую оговорку. Из чувства уважения к прекрасному полу мы в дальнейшем обращаемся к девушкам, хотя, разумеется, наши рекомендации полностью универсальны.

Внимание, невесты! Для того чтобы наилучшим образом выбрать жениха, надо их общее число (предполагается, что оно заранее известно) разделить на три, вычесть из полученного результата единицу, а потом, закончив на этом дальнейшее рассмотрение кандидатур, выбрать первого, который будет лучше ранее отвергнутых.

Поясним сказанное еще раз с помощью математических символов: если M — общее число претендентов, то наиболее разумным будет выбрать женихом того, который встретится после $M/3-1$ претендентов и будет нравиться больше их всех!

Здесь мы, конечно, предвидим, что у наших читателей появилось немало недоуменных вопросов: во-первых, откуда будет известно это загадочное число — M, во-вторых, как получается такое простое правило и т. д.?

Но оказалось, что авторы не очень хорошо знают женскую психологию. При пробном чтении рукописи некоторые представительницы прекрасного пола, необъяснимым образом определив все, что надо, прежде всего стали подсчитывать, оптимален ли их выбор.

Конечно, число M никому точно не известно и им надо как-то задаться, может быть, из опыта предшествующих поколений или своих подруг или в конце концов интуитивно. Кстати, оно в среднем уже подсчитано учеными-социологами, занимающимися проблемами семьи и брака.

На второй и последующие вопросы ответить сразу непросто. Пока скажем только, что приведенная рекомендация взята нами не с потолка, а является одним из результатов теории марковских цепей, в которых при определенных допущениях ставится и решается задача, подобная только что описанной. В одном очень солидном учебнике она так и называется: «Задача о стратегии разборчивой невесты».

Но вот еще один пример.

В наше время очень популярен туризм. Раньше у всех это слово ассоциировалось с рюкзаками, палатками, кострами и т. д. У некоторых пока так все и осталось.

Группа туристов плывет, или, как говорят, сплавляется, на плоту по горной реке. Еще при подготовке к походу руководитель группы Бывалый наметил на карте примерные места ночевок. И вот после бурного в прямом и переносном смыслах дня, когда плот преодолел многочисленные пороги, начался более или менее спокойный участок реки. На нем и предполагается ночевка. Но на первом намеченном месте уже дымит чей-то костер, а наша компания любит уединение. На втором вроде бы совсем удобном неудобный подход к берегу из-за сваленных деревьев, на третьем — сыровато и т. д. Где же все-таки остановиться? Мимо проходят вроде бы подходящие места, но все с какими-то неудобствами. Тогда после некоторого раздумья Бывалый, пользуясь своим правом руководителя, решительно указывает на берег и говорит: — Вот здесь!

Члены группы еще колеблются, но Бывалый поясняет, что это место он выбрал научно обоснованно, разделив общее количество предполагаемых мест стоянки на три, вычтя из результата единицу и остановившись на первом же месте, которое лучше, чем все просмотренные. Уже на привале он снисходительно добавляет, что это правило оптимального выбора он знает по тем лекциям, которые слушал еще в университете. Кажется, там речь шла о марковских цепях, припоминает он.

Читатель, по-видимому, заметил, что в рассмотренных примерах много общего. Действительно, во всех случаях речь шла о правильных оптимальных действиях при выборе. Оказывается, теория здесь может помочь при условии, что число объектов известно и достаточно велико. Кроме того, надо, чтобы была известна цена правильных или неправильных действий. Конечно, этим условиям, строго говоря, не удовлетворит ни один из примеров, особенно первый. Поэтому правилом выбора жениха надо пользоваться с некоторой осторожностью, учитывая стремление авторов закончить книгу как можно более интригующе и интересно.

Если же говорить серьезно, то приведенным выше правилом, действительно, можно пользоваться при выборе предмета наилучшего качества из какого-то известного их набора. Нам кажется, что читатель без труда найдет такие случаи в жизни или на производстве.

ЛИТЕРАТУРА

Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова.— М.: Наука, 1970.

Кордонский Х. Б. Приложение теории вероятностей в инженерном деле.— М.— Л.: Госфизматиздат, 1963.

Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей.— М.: Наука, 1973.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1985.

Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы.— М.: Сов. радио, 1964.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научно-популярное издание

Вячеслав Николаевич Андреев

Анатолий Яковлевич Иоффе

ЭТИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

Главный отраслевой редактор Л. А. Ерлыкин
Редактор Г. Г. Карвовский
Мл. редактор Т. Г. Мантелеева
Художник Г. Ш. Басыров
Худож. редактор М. А. Гусева
Техн. редактор И. Е. Жаворонкова
Корректор С. П. Ткаченко

ИБ № 8604

Сдано в набор 13.01.87 Подписано к печати 03.07.87. Т — 00555. Формат бумаги $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага тип. № 1. Гарнитура «Литературная». Печать высокая. Усл. печ. л. 10,08. Усл кр.-отт 10,40. Уч.-изд. л. 10,44. Тираж 70 000 экз. Заказ 7—236. Цена 35 коп Издательство «Знание». 101835, ГСП, Москва, Центр, проезд Серова, д. 4. Индекс заказа 877720. Головное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкнига», 252057, Киев, ул. Довженко, 3.