Ա. Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

ԵՐԵՎԱՆ – 2002

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

ԵՐԵՎԱՆ – 2002

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1 g 73
Ղ-249

Խմբագիր՝ ֆ.մ.գ.դ.-ր, պրոֆեսոր Ս.Գ.Գրիգորյան

Ղալումյան Ա.Գ.
Ղ-249 Մաթեմատիկական անալիզ (դասախոսություններ): Առաջին մաս: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հաշիվ: Երևանի պետ. համալս. հրատ.: Եր., 2002, 78 էջ:

Ձեռնարկում շարադրված է մաթեմատիկական անալիզի հիմնական բաժիններից մեկը մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հաշիվը: Նախատեսված է ԵՊՀ-ի և նրա Իջևանի մասնաճյուղի բնագիտական ֆակուլտետների ուսանողների համար:

Ղ $\dfrac{1602000000}{704(02)}$ 2002 ԳՄԴ 22.1 g 73

ISBN 5-8084-0437-1

1. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐ

Մաթեմատիկայում կան սահմանվող և չսահմանվող հասկացություններ:

Բազմությունը չսահմանվող հասկացություն է: Ասում են, որ A բազմությունը տրված է, եթե հայտնի է, թե ինչից (ինչ տարրերից) է այն բաղկացած:

$a \in A$ գրությունը նշանակում է, որ a տարրը պատկանում է A բազմությանը: $a \notin A$ նշանակում է, որ a-ն չի պատկանում A-ին: Դատարկ ($\varnothing$) կոչվում է տարրերից զուրկ բազմությունը: Բազմությունները հավասար են, եթե բաղկացած են միևնույն տարրերից:

Տանք որոշ, հետագայում օգտագործվող սիմվոլների բացատրությունը:

$\forall$ սիմվոլը նշանակում է կամայական,ցանկացած: $\exists$ սիմվոլը նշանակում է գոյություն ունի: $A \Rightarrow B$ գրությունը նշանակում է՝ A պայմանից հետևում է B պայմանը: $A \Leftrightarrow B$ (A պայմանը համարժեք է B-ին) նշանակում է՝ $A \Rightarrow B$ և $B \Rightarrow A$:

Ասում են, որ A բազմությունը B բազմության ենթաբազմությունն է ($A \subset B$ կամ $B \supset A$), եթե A–ի յուրաքանչյուր տարր պատկանում է B–ին ($a \in A \Rightarrow a \in B$):

Դատարկ բազմությունը ցանկացած A բազմության ենթաբազմությունն է, քանի որ, լինելով տարրերից զուրկ, այն չունի այնպիսի տարր, որը չպատկանի այդ A բազմությանը:

Ակնհայտ է որ՝ $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ և $B \subset A$:

A և B բազմությունների միավորում ($A \cup B$) է կոչվում այն բազմությունը, որի տարրերը պատկանում են A-ին կամ B-ին ($a \in A \cup B \Rightarrow a \in A$ կամ $a \in B$):

Ակնհայտ է, որ՝ $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$: A և B բազմությունների հատում ($A \cap B$) է կոչվում դրանց ընդհանուր տարրերի բազմությունը ($a \in A \cap B \Rightarrow a \in A$ և $a \in B$):

Ակնհայտ է, որ $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$: A և B բազմությունների տարբերություն (A-ն առանց B-ի) կոչվում է B–ին չպատկանող A-ի բոլոր տարրերի բազմությունը, և գրվում է՝ $A \setminus B$:

($a \in A \setminus B \Leftrightarrow a \in A$ և $a \notin B$):

Օրինակ. Եթե $A = \{1,2,3\}$ և $B = \{2, 4\}$, ապա՝ $A \cup B = \{1,2,3,4\}$,

$A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1, 3\}$

Վարժություններ: Ապացուցել, որ ճշմարիտ են հետևյալ հավասարությունները:

1) $A \cup A = A$, 2) $A \cap A = A$, 3) $A \cup \varnothing = A$, 4) $A \cap \varnothing = \varnothing$,

5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$,

6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$,

7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

8) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

10) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$:

2. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՆՐԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ (ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԸ)

Տանք իրական թվերի բազմության աքսիոմային սահմանումը: Իրական թվերի բազմություն է կոչվում հետևյալ հատկություններով (աքսիոմներով) օժտված (R) բազմությունը:

I. ԿԱՐԳԱՎՈՐՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ԱՔՍԻՈՄԸ

Ցանկացած a և b թվերի համար ճշմարիտ է հետևյալ երեք առնչություններից միայն մեկը՝ $a<b$ (a-ն փոքր է b -ից), $a>b$ (a-ն մեծ է b-ից), $a=b$ (a–ն հավասար է b-ին):

Ընդ որում՝ $a<b$ և $b<c \Rightarrow a<c$, $a<b \Leftrightarrow b>a$, $a \le b \Leftrightarrow a<b$ կամ $a=b$:

Նույն կերպ սահմանվում է ≥ 0 առնչությունը:

$<, >, \le, \ge 0$ առնչությունները կոչվում են անհավասարություններ:

II. ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԸ

Ցանկացած (a, b) թվերի կարգավորված զույգին համապատաս–խանեցվում է միակ $a+b$ թիվը, որը կոչվում է a և b թվերի գումար: Ընդ որում, ճշմարիտ են հետևյալ հատկությունները:

1. $\forall a, b \in R : a+b=b+a$ (: սիմվոլը նշանակում է տեղի ունի,

ճշմարիտ է):

2. $\forall$ a, b, c $\in$ R : $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$:

3. Գոյություն ունի թիվ, որը անվանվում է զրո (0), այնպես, որ՝ $\forall a \in R : a+0=a$:

4. $\forall a \in R \quad \exists (-a) \in R$ (a–ի հակադիրը), այնպես որ՝ $a+(-a)=0$:

Ըստ սահմանման՝ $a-b=a+(-b)$: Եթե $a>0$, ապա a թիվը կոչվում է դրական, իսկ եթե $a<0$, ապա a-ն կոչվում է բացասական:

5. Եթե $a<b$ և c-ն կամայական թիվ է, ապա՝ $a+c<b+c$:

III. ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԱՔՍԻՈՄՆԵՐԸ

Յանկացած (a, b) կարգավորված զույգին համապատասխանեցվում է միակ $a \cdot b$ թիվը և կոչվում է a և b թվերի արտադրյալ, եթե ճշմարիտ են հետևյալ հատկությունները:

1. $\forall a, b \in R : a \cdot b = b \cdot a$:

2. $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a\,b\,c$:

3. Գոյություն ունի թիվ, որը կոչվում է միավոր (1), այնպես որ $\forall a \in R \quad a1 = a$:

4. Յանկացած $a \neq 0$ թվի համար գոյություն ունի նրա հակադարձ թիվը $(\frac{1}{a})$ այնպիսին, որ՝ $a\frac{1}{a}=1$:

5. Եթե՝ $a<b$ և $c>0$, ապա՝ $ac<bc$, իսկ եթե՝ $a<b$ և $c<0$, ապա $ac>bc$:

Ըստ սահմանման, եթե $b \neq 0$, ապա $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$: Ըստ սահմանման՝ $1+1=2$, $2+1=3$, 1, 2, 3, թվերը կոչվում են բնական թվեր: Բնական թվերի բազմությունը նշանակում են N:

Դիցուք՝ $a \in R$, և $n \in N$: Ըստ սահմանման $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n}$, $\sqrt[n]{a} = b$ նշանակում է, որ $b^n = a$: Երբ n -ը զույգ է, ենթադրվում է որ $a \geq 0$ և $b \geq 0$:

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ բազմությունը կոչվում է ամբողջ թվերի բազմություն, իսկ նրա տարրերը՝ ամբողջ թվեր:

$Q = \left\{\frac{m}{n} \quad m \in Z, n \in N\right\}$ բազմությունը կոչվում է ռացիոնալ թվերի բազմություն, իսկ նրա տարրերը՝ ռացիոնալ թվեր:

$I = R \setminus Q$ բազմությունը կոչվում է իռացիոնալ (ոչ ռացիոնալ) թվերի բազմություն, իսկ նրա տարրերը իռացիոնալ թվեր:

IV. ԲԱՇԽԱԿԱՆ ԱՔՍԻՈՄԸ

$\forall$ a, b, c $\in$ R   a (b + c) = ab + ac:

Յուրաքանչյուր a թվի համար սահմանվում է նրա բացարձակ արժեքը | a | հետևյալ կերպ՝

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Պարզ է, որ՝ $|a| \geq 0$, $|a| = |-a|$, $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$:

Սահմանենք միջակայքեր՝ $[a; b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$, $(a; b) = \{x \in R : a < x < b\}$, $[a; b) = \{x \in R \ \ a \leq x < b\}$, $(a; b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$, $[a; +\infty) = \{x \in R : x \geq a\}$, $(-\infty; a] = \{x \in R : x \leq a\}$, $(-\infty; +\infty) = R$:

V. ԱՐՔԻՄԵԴԻ* ԱՔՍԻՈՄԸ

Յուրաքանչյուր a թվի համար գոյություն ունի այնպիսի ամբողջ n թիվ որ՝ $n > a$:

VI. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅԱՆ ԱՔՍԻՈՄԸ

Դիցուք՝ A և B թվային ոչ դատարկ բազմությունները այնպիսին են, որ՝ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$: $a \leq b$: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի c թիվ, որ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$: $a \leq c \leq b$:

Նկատենք, որ c թիվը կարող է միակը չլինել :

Օրինակ 1: Դիցուք՝ $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, 7, 10\}$: Այս դեպքում վերը նշված c–ի դերում կլինի յուրաքանչյուր թիվ ընկած 2-ի և 5-ի միջև:

Օրինակ 2: Դիցուք՝ $A = \{a \in R:\ a^2 < 2,\ a \geq 0\}$, $B = \{a \in R : a^2 > 2$ և $a \geq 0\}$: Այս դեպքում $c = \sqrt{2}$ և c-ն միակն է:

Վարժություններ: 1. Ապացուցել, որ զրոն և թվի հակադիրը միակն են:

2. Ապացուցել, որ միավորը և զրոյից տարբեր թվի հակադարձը միակն են:

3. Ապացուցել, որ $\forall a \in R : (-a)(-a) = a$:

4. Ապացուցել, որ եթե $a<b$ և $c<d$, ապա՝ $a+c<b+d$:

5. Ապացուցել, որ $1>0$:

6. Ապացուցել, որ $a \cdot 0 = 0$:

---

* Արքիմեդ (287-212 մթա.), հույն մաթեմատիկոս, մեխանիկ:

7. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ ցանկացած $a_1, a_2, \ldots a_n$ թվերի ($n \geq 2$) և b թվի համար ճշմարիտ է՝

$(a_1+a_2+\ldots+a_n)b = a_1b+a_2b+\ldots+a_nb$:

8. Ապացուցել, որ $\forall\ a, b \in R$ $|ab| = |a|\,|b|$, $|a \pm b| \leq |a| + |b|$, $|a - b| \geq |a| - |b|$, $||a| - |b|| \leq |a - b|$:

3. ՖՈՒՆԿՑԻԱ: ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Սահմանում 1: Դիցուք A-ն և B-ն կամայական ոչ դատարկ բազմություններ են: Կասենք, որ տրված է ֆունկցիա կամ արտապատկերում A-ն B-ի մեջ, եթե A-ի յուրաքանչյուր x տարրին ինչ-որ օրենքով համապատասխանության մեջ է դրվում մեկ որոշակի $y \in B$: Գրում են $f : A \to B$ կամ $y = f(x)$, x-ը կոչվում է նախապատկեր, y-ը պատկեր կամ արժեք: A բազմությունը կոչվում է f ֆունկցիայի որոշման տիրույթ ($D_f = A$): Ասում են, որ f-ը որոշված է C բազմության վրա, եթե $C \subset A$: $E_f = \{f(x) : x \in A\}$-ը կոչվում է f ֆունկցիայի արժեքների բազմություն:

Օրինակ 1: Դիցուք A-ն տվյալ պահին, տվյալ պուրակում եղած բոլոր ծառերի բազմությունն է, իսկ B = R: Յուրաքանչյուր ծառին համապատասխանեցնենք նրա բարձրությունը: Այսպիսով՝ ունենք որոշակի ֆունկցիա $f\ \ A \to B$ E_f – ը որոշակի դրական թվերի վերջավոր բազմություն է:

Սահմանում 2: Եթե $f\ \ A \to B$ և $E_f = B$, ապա ասում են, որ f-ը արտապատկերում է A-ն B-ի վրա, կամ սյուրյեկտիվ է: Եթե $f : A \to B$ այնպիսին, որ $\forall\ x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$, ապա f-ը կոչվում է փոխմիարժեք, կամ ինյեկտիվ ֆունկցիա:

Սահմանում 3: Սյուրյեկտիվ և ինյեկտիվ ֆունկցիան կոչվում է բիյեկտիվ կամ բիյեկցիա:

Սահմանում 4: A և B բազմությունները կոչվում են համարժեք (A~B), եթե գոյություն ունի բիյեկտիվ ֆունկցիա f: A→B:

Օրինակ 2: Դիցուք՝ $A = (-\infty; 0]$, $B = R$, $f(x) = x^2$: Ունենք՝ $f\ \ A \to B$: Այս ֆունկցիան ինյեկտիվ է, բայց ոչ սյուրյեկտիվ $\left(E_f = [0; +\infty)\right)$:

Օրինակ 3: Դիցուք՝ $A = (-\infty; 0]$, $B = [0; +\infty)$, $f(x) = x^2$: Սա բիյեկցիա է: Այսպիսով՝ $(-\infty; 0] \sim [0; +\infty)$:

Օրինակ 4: Դիցուք՝ $A = R$, $B = R$, $f(x) = x^2$: Այս արտապատկե-

րումը ոչ ինյեկտիվ է, ոչ էլ՝ սյուրյեկտիվ
$(E_f = [0;+\infty)$, $f(-1) = f(1) = 1)$:

Օրինակ 5: Դիցուք՝ A = R, B = [0; ∞), $f(x) = x^2$: Սա սյուրյեկցիա է, բայց ոչ՝ ինյեկցիա:

Սահմանում 5: Դիցուք տրված է բիյեկցիա՝ f : A → B: Յանկացած $y \in B$ տարրին համապատասխանեցնենք այն $x \in A$ տարրը, որ f(x)=y: Այդ x-ը միակն է շնորհիվ նրա, որ f-ը փոխմիարժեք է: Այսպիսով առաջանում է բիյեկտիվ ֆունկցիա, որի որոշման տիրույթը B-ն է, իսկ արժեքների բազմությունը՝ A-ն: Այն կոչվում է *հակադարձ ֆունկցիա* և գրվում է f^{-1} (f^{-1} B → A):

Ըստ սահմանման՝ $f^{-1}(f(x)) = x$ և $f(f^{-1}(y)) = y$:

Օրինակ 6: A = (-∞; 0], B = [0, +∞), $f(x) = x^2$:

Յակադարձ ֆունկցիան կլինի $x=-\sqrt{y}$ Այսինքն՝ $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$, $f^{-1} : [0;+\infty)\to(-\infty;0]$:

Խնդիր1: Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր (a; b) միջակայք համարժեք է R-ին:

Ապացուցում: Նախ ապացուցենք, որ (-1; 1) ~ R:

Իրոք $f(x) = \mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ բիյեկցիա է $(f: (-1;1) \to R)$, ⇒ (-1;1)~R:

Իսկ՝ $g(x)=\dfrac{(b-a)x+a+b}{2}$ ֆունկցիան նույնպես բիյեկցիա է $(g: (-1;1) \to (a;b))$, ⇒ (-1;1)~(a;b): Այսպիսով՝ (a; b)~(−1 ;1)~R ⇒ (a ; b) ~ R: ■ (■ – նշանակում է ապացուցման ավարտը)

4. ԹՎԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵԶՐԵՐԸ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ E- ն ոչ դատարկ թվային բազմություն է: E-ն կոչվում է սահմանափակ վերևից, եթե՝ $\exists\, a \in R, \forall\, x \in E \quad x \le a$: Այդ a թիվը կոչվում է E բազմության վերին եզր: Պարզ է, որ եթե a-ն E- ի վերին եզրն է, ապա a-ից մեծ յուրաքանչյուր թիվ նույնպես E-ի վերին եզր է: Ուրեմն, վերին եզրերի բազմությունը անսահմանափակ է վերևից:

Սահմանում 2: Վերևից սահմանափակ E բազմության բոլոր վերին եզրերից ամենափոքրը կոչվում է E-ի *ճշգրիտ վերին եզր*: Այն նշանակում են՝ sup E (supremum լատինական բառի հապավումն է):

Այն, որ $\alpha = \sup E$ նույնն է ինչ՝ 1. $\forall x \in E \quad x \le \alpha$, 2. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in E \quad x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$ (α – ից փոքր վերին եզր չկա):

Սահմանում 3. Դիցուք՝ E-ն ոչ դատարկ թվային բազմություն է: E-ն կոչվում է սահմանափակ ներքևից, եթե $\exists b \in R, \forall x \in E \quad x \ge b$: Այդ b թիվը կոչվում է E-ի ստորին եզր: Ստորին եզրերի բազմությունը անսահմանափակ է ներքևից (b-ից փոքր յուրաքանչյուր թիվ E-ի ստորին եզր է):

Սահմանում 4: Ներքևից սահմանափակ E բազմության բոլոր ստորին եզրերից ամենամեծը կոչվում է E-ի *ճշգրիտ ստորին եզր.* Այն նշանակում են inf E (infimum լատինական բառի հապավումն է): Այն որ $\beta = \inf E$, նույնն է ինչ՝

1. $\forall x \in E \quad x \ge \beta$, 2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in E \quad x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$ (β – ից մեծ ստորին եզր չկա):

Սահմանում 5: Թվային բազմությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե այն սահմանափակ է վերևից և ներքևից:

Թեորեմ 1: Դիցուք՝ E-ն ոչ դատարկ թվային բազմություն է: Եթե E-ն սահմանափակ է վերևից, (ներքևից), ապա գոյություն ունի E-ի ճշգրիտ վերին (ստորին) եզր և այն միակն է:

Ապացուցում: Դիցուք E-ն սահմանափակ է վերևից: Ուրեմն՝ $\exists a \in R, \forall x \in E \quad x \le a$: E բազմության բոլոր վերին եզրերի բազմությունը նշանակենք E' ($a \in E'$): Ակնհայտ է, որ $\forall x \in E, \forall y \in E' \quad x \le y$: Ըստ իրական թվերի բազմության անընդհատության աքսիոմի (տե՛ս. 2. VI.) $\exists c \in R$ այնպիսին, որ $\forall x \in E, \forall y \in E' : x \le c \le y$: Քանի որ $\forall x \in E : x \le c$, ապա c-ն վերին եզր է: Քանի որ $\forall y \in E' \quad c \le y$, ապա c-ն E բազմության վերին եզրերից ամենափոքրն է: Ուրեմն՝ $c = \sup E$: Քանի որ բազմության ամենափոքրը միակն է, ապա sup E-ն միակն է:

Ճշգրիտ ստորին եզրի գոյությունը ապացուցվում է նման ձևով: ■

Ըստ սահմանման, եթե E-ն անսահմանափակ է վերևից (ներքևից), ապա

$\sup E = +\infty$ ($\inf E = -\infty$) :

Վարժություններ:

1) Ապացուցել, որ եթե թվային բազմությունն ունի մեծագույն (փոքրագույն) տարր, ապա այն կլինի այդ բազմության ճշգրիտ վերին (ստորին) եզրը:

2) Դիցուք $E = (-\infty ; b)$: Ապացուցել, որ $\inf E = -\infty$, $\sup E = b$:

3) Դիցուք $E = (a ; +\infty)$: Ապացուցել, որ $\inf E = a$, $\sup E = +\infty$:

4) Դիցուք $E = (a ; b)$: Ապացուցել, որ $\inf E = a$, $\sup E = b$:

5) Ապացուցել, որ E թվային բազմության սահմանափակությունը համարժեք է հետևյալ պայմանին՝ $\exists C > 0, \forall x \in E \quad |x| \le C$:

5.ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

5.1.ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆ

Սահմանում 1: Դիցուք տրված է ֆունկցիա $f \quad N \to R$: Այսինքն ցանկացած n բնական թվին համապատասխանեցված է մեկ որոշակի իրական x_n թիվ: Այս x_n համարակալված թվերի բազմությունը կոչվում է *հաջորդականություն* ($\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$), իսկ x_n –ը՝ հաջորդականության n-րդ անդամ: Հաջորդականության արժեքների բազմությունը գրվում է՝ $\{x_n\}$: Այն կարող է լինել վերջավոր, իսկ ինքը հաջորդականությունը անվերջ է, քանի որ N-ը անվերջ է:

Օրինակ 1: Դիցուք՝ $x_n = C$, $n = 1, 2, \ldots$: Այսինքն՝ $x_1 = C$, $x_2 = C$, ..., $x_n = C$,

Այս հաջորդականության արժեքների $\{ x_n \}$ բազմությունը բաղկացած է մեկ՝ C կետից:

Սահմանում 2: Դիցուք տրված է $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը և ինչ-որ a թիվ Կասենք, որ այդ հաջորդականության սահմանը a թիվն է, կամ x_n-ը ձգտում է (զուգամիտում է) a-ին, եթե՝ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in N \ \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon$ (այստեղ և հետագայում, առանց հատուկ նշելու, հասկանում ենք, որ հաջորդականությունները համարակալված են բնական թվերով ($n \in N$)):

Գրվում է՝ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, կամ $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$: Պարզ է որ՝ $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$: $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ միջակայքը կոչվում է a թվի ε շրջակայք: Այսպիսով $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ ունի հետևյալ երկրաչափական մեկնաբանությունը՝ a թվի յուրաքանչյուր $U_\varepsilon(a)$ շրջակայքի համար գոյություն ունի, ինչ- որ համար (n_ε), որ դրանից մեծ համար ($n \geq n_\varepsilon$) ունեցող բոլոր x_n անդամները կհայտնվեն այդ շրջակայքում: Այլ կերպ ասած, a թվի յուրաքանչյուր շրջակայքից դուրս կարող են լինել միայն վերջավոր թվով հաջորդականության անդամներ:

Սահմանում 3: Հաջորդականությունը կոչվում է *զուգամետ*, եթե կա թիվ, որին այն ձգտում է: Հակառակ դեպքում հաջորդականությունը կոչվում է *տարամետ*:

Օրինակ 1: $x_n = C$, $n = 1, 2,$ (հաստատուն հաջորդականություն): Ապացուցենք, որ այն զուգամետ է և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$: Իրոք՝

$\forall\varepsilon>0$, $\forall$ n, $x_n = C \in U_\varepsilon(C)$ Այս դեպքում, որպես n_ε կարելի է վերցնել կամայական բնական թիվ, օրինակ $n_\varepsilon = 1$:

Օրինակ 2: $x_n=(-1)^n, (n=1,2,\ldots)$, $x_{2k}=1(\ k=1,2,\ldots)$,
$x_{2k-1}=-1(k=1,2\ldots)$:

Ցույց տանք, որ այս հաջորդականությունը տարամետ է, այսինքն ոչ մի (a) թվի այն չի ձգտում: Դրա համար բավական է գտնել կամայական a կետի այնպիսի շրջակայք, որից դուրս կգտնվեն այս հաջորդականության անթիվ թվով անդամներ: Քանի որ –1 և 1 թվերի միջև հեռավորությունը հավասար է 2-ի, ապա $U_1(a) = (a-1;\ a+1)$ շրջակայքից դուրս կհայտնվի այդ թվերից գոնե մեկը, ուստի և անվերջ թվով անդամներ կգտնվեն $U_1(a)$-ից դուրս: Օրինակ, եթե $-1\in U_1(a)$, ապա բոլոր զույգ համար ունեցող հաջորդականության անդամները հայտնվում են այդ շրջակայքից դուրս:

Օրինակ 3: Դիցուք` $x_n = \dfrac{n}{(n+1)^n}$, $n=1,2,\ldots$: Ապացուցենք, որ

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$: Այսինքն` $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon\ \forall n\ge n_\varepsilon:\ \dfrac{n}{(n+1)^n}<\varepsilon$: **(1)**

Բայց $\forall n\ge 2:\ \dfrac{n}{(n+1)^n}<\dfrac{n}{n^n}=\dfrac{1}{n^{n-1}}\le\dfrac{1}{n}$: **(2)**

Պարզենք, թե n՞ր n_ε համարից սկսած ճշմարիտ է $1/n<\varepsilon$ անհավասարությունը:

$\dfrac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\dfrac{1}{\varepsilon}$: Ըստ Արքիմեդի աքսիոմի (տե՛ս 2. V)`

$\exists\ n_\varepsilon\in N:\ n_\varepsilon>\max\left\{\dfrac{1}{\varepsilon},1\right\}$: (3)

Վերցնենք $\forall n\ge n_\varepsilon>\dfrac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\dfrac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\dfrac{1}{n}<\varepsilon$: **(4)**

(2)-ից և (4)-ից հետևում է (1)-ը :

5.2. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐ ԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ՄԵԾ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Սահմանում 1: Հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե այն ձգտում է զրոյի:

Սահմանում 2: Կասենք, որ`

ա) $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, եթե $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_\varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon \quad |x_n| > \varepsilon$

բ) $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, եթե $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_\varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon : \; x_n > \varepsilon$,

գ) $x_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$, եթե $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_\varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon \quad x_n < -\varepsilon$

Նկատենք, որ եթե $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, կամ $x_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$, ապա $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$:

Հակառակը ճիշտ չէ: Օրինակ, եթե $x_n = (-1)^n n$, ապա $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, բայց $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \not\to \pm\infty$:

Սահմանում 3: Հաջորդականությունը կոչվում է ***անվերջ մեծ***, եթե այն ձգտում է ∞-ի:

Թեորեմ 1: Անվերջ փոքրի հակադարձը անվերջ մեծ է, իսկ անվերջ մեծի հակադարձը՝ անվերջ փոքր:

Ապացույց: Դիցուք $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0, x_n \ne 0$: Դա նշանակում է, որ

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \; n_\varepsilon \; \forall n \ge n_\varepsilon \; : 0 < |x_n| < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} > \varepsilon \; (n \ge n_\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} \infty :$$

Թեորեմի մյուս մասը ապացուցվում է նույն կերպ: ■

Թեորեմ 2 Անվերջ փոքրերի գումարը (տարբերությունը) անվերջ փոքր է:

Ապացույց Դիցուք՝ $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0, \; b_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$: Դա նշանակում է, որ

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_1 \; \forall n \ge n_1 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \; \exists \; n_2 \; \forall n \ge n_2 : \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Նշանակենք $\max\{n_1, n_2\} = n_3$, $\forall n \ge n_3 : \; |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ և $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$:

Ուրեմն՝ $\forall n \ge n_\varepsilon : |x_n \pm y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$$\Rightarrow x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0: \; ■$$

Սահմանում 4 Կասենք, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, եթե սահմանափակ է $\{x_n\}$թվային բազմությունը:

Այսինքն՝ $\exists C>0 \quad \forall n : |x_n| \leq C$:

Թեորեմ 3: Անվերջ փոքրի և սահմանափակի արտադրյալը անվերջ փոքր է:

Ապացույց. Դիցուք $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը անվերջ փոքր է, իսկ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը՝ սահմանափակ: Այսինքն՝

$\exists C>0 \quad \forall n \quad |y_n| \leq C$: $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n \geq n_\varepsilon : \; |x_n| < \dfrac{\varepsilon}{C}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon \;\Rightarrow\; x_n y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$: ■

5.3. ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Թեորեմ 1: Հաջորդականության սահմանը միակն է:

Ապացույց: Դիցուք տրված $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ունի տարբեր սահմաններ և $x_n \underset{n\to\infty}{\to} b$ $(a<b)$: $\dfrac{b-a}{2} = \varepsilon$ դրական թվի համար $\exists n_1 \; \forall n \geq n_1 : x_n \in U_\varepsilon(a)$, $\exists n_2 \; \forall n \geq n_2 : x_n \in U_\varepsilon(b)$:

Եթե $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, ապա $\forall n \geq n_3 \quad x_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$

Բայց՝ $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը: ■

Թեորեմ 2. Զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

Ապացույց: Դիցուք՝ $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \in R$: Այստեղից ստանում ենք $1>0$ թվի համար $\exists n_1 \; \forall n \geq n_1 : \; a-1 < x_n < a+1$:

Նշանակենք $M = \max\{x_1, x_2, ..., x_{n_1-1}, a+1\}$,

$m = \min\{x_1, x_2, ..., x_{n_1-1}, a-1\}$: Կստանանք՝ $\forall n : \; m \leq x_n \leq M$: ■

Դիտողություն. Թեորեմ 2-ը հակադարձելի չէ:

Օրինակ. $x_n = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, բայց՝ տարամետ:

Լեմմ. Որպեսզի $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝ $x_n = a + \alpha_n$, $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$:

Ապացուցում: Այն, որ $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \;\forall\, n \ge n_\varepsilon$:
$|x_n - a| < \varepsilon$: Դա, իր հերթին համարժեք է նրան, որ $x_n - a = \alpha_n$ հաջորդականությունը ծգտի զրոյի: ■

Թեորեմ 3: Դիցուք $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ և $y_n \underset{n\to\infty}{\to} b$ Այդ դեպքում՝

1. $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$, 2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$,

3. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b} \; (y_n \ne 0, b \ne 0)$:

Ապացուցում: Ըստ լեմմի՝ $x_n = a + \alpha_n$, $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ և $y_n = b + \beta_n$, $\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$: Ուրեմն՝ $x_n \pm y_n = a \pm b + \gamma_n$, որտեղ $\gamma_n = \alpha_n \pm \beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (տես. 5.2, թեորեմ 2) :

Այստեղից, ըստ լեմմի ստանում ենք $x_n \pm y_n \underset{n\to\infty}{\to} a \pm b$:

$x_n y_n = ab + \gamma_n$ որտեղ $\gamma_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ Քանի որ $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ զուգամետ է, ուրեմն այն նաև սահմանափակ է, ուստի՝ $\alpha_n\beta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (տես .5.2, թեորեմ 3): Հետևաբար՝ $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ ($a\beta_n$ և $b\alpha_n$ հաջորդականությունները նույնպես անվերջ փոքր են):

Այստեղից, ըստ լեմմի՝ $x_n y_n \underset{n\to\infty}{\to} ab$:

Այժմ ապացուցենք, որ՝ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, $b \ne 0$: $y_n \underset{n\to\infty}{\to} b \ne 0$

$\Rightarrow \exists\, n_1 \;\; \forall n \ge n_1 \quad |y_n - b| < \dfrac{|b|}{2} \Rightarrow |b| - |y_n| \le |y_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$

$\Rightarrow |y_n| \ge |b| - |y_n - b| > |b| - \dfrac{|b|}{2} = \dfrac{|b|}{2}$:

Այսպիսով՝ $\forall\, n \ge n_1$: $|\,y_n\,| > \dfrac{|b|}{2} \Rightarrow \forall n \ge n_1 \quad \dfrac{1}{|y_n|} < \dfrac{2}{|b|}$

$\Rightarrow \left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

Բայց $\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{\alpha_n b-\beta_n a}{y_n b}=\frac{1}{y_n}\gamma_n$,

որտեղ $\gamma_n=\alpha_n-\frac{a}{b}\beta_n$, $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \frac{1}{y_n}\cdot\gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$:

Այստեղից, ըստ լեմմի՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$: ■

Թեորեմ 4: Դիցուք $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $a<b$ Այդ դեպքում $\exists\, n_1\ \forall\, n\ge n_1$: $x_n<b$:

Ապացույց. $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow \exists\, n_1\ \forall\, n\ge n_1$: $|x_n-a|<b-a$ $(b-a>0)$ $\Rightarrow x_n<a+(b-a)\Rightarrow x_n<b$: ■

Թեորեմ 5 (սահմանային անցում անհավասարության մեջ). Դիցուք՝ $\forall n\in N$ $x_n \le y_n$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} b$: Այդ դեպքում $a\le b$: Այսինքն՝ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$:

Ապացույց. Կատարենք հակասող ենթադրություն՝ $a>b$ $\Rightarrow$ $y_n-x_n \underset{n\to\infty}{\to} b-a<0$: Համաձայն նախորդ թեորեմի $\exists\, n_1\ \forall\, n\ge n_1$: $y_n-x_n<0$: Ստացվածը հակասում է թեորեմի պայմանին: ■

Դիտողություն: Եթե $x_n<y_n$, ապա $a\le b$, բայց ոչ անպայման՝ $a<b$: Օրինակ: $\forall\, n\in N$: $-\frac{1}{n}<0$, բայց $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$:

Թեորեմ 6 («ոստիկանների» կանոնը). Եթե տրված են երեք հաջորդականություններ՝ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, այնպիսիք, որ

$\forall n\in N$ $y_n\le x_n\le z_n$, ընդ որում $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$, ապա $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$:

Ապացույց. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\, n_1\ \forall\, n\ge n_1$ $y_n>a-\varepsilon$, $\exists n_2\ \forall n\ge n_\varepsilon$ $z_n<a+\varepsilon$: Եթե $n_3=\max\{n_1,n_2\}$, ապա $\forall\, n\ge n_3$ $a-\varepsilon<y_n\le x_n\le z_n<a+\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ $(n\ge n_3)$: Ուրեմն՝ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$: ■

5.4. ՄՈՆՈՏՈՆ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԸ, e ԹԻՎԸ: ՆԵՐԴՐՎԱԾ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Սահմանում 1: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը կոչվում է մոնոտոն չնվազող (չաճող), եթե՝ $a_n \le a_{n+1}$ ($a_n \ge a_{n+1}$), $n = 1, 2, \ldots$:

Սահմանում 2. Եթե հաջորդականությունը մոնոտոն չնվազող է կամ մոնոտոն չաճող, ապա այն կոչվում է մոնոտոն:

Սահմանում 3. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը կոչվում է մոնոտոն աճող, եթե $a_n < a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ Իսկ, եթե՝ $a_n > a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, ապա հաջորդականությունը կոչվում է մոնոտոն նվազող:

Թեորեմ 1: Մոնոտոն չնվազող (չաճող) և վերևից (ներքևից) սահմանափակ հաջորդականությունը զուգամետ է, ընդ որում՝

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}\right):$$

Ապացույց. Որոշակիության համար դիտարկենք մոնոտոն չնվազող հաջորդականության դեպքը: Քանի որ $\{a_n\}$ բազմությունը վերևից սահմանափակ է, ապա՝ $\exists \sup\{a_n\} = \alpha \Rightarrow \forall n \in N \;\; a_n \le \alpha$ և $\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_\varepsilon$ այնպիսին, որ $a_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$: Շնորհիվ մոնոտոնության՝ $\forall n \ge n_\varepsilon : a_n \ge a_{n_\varepsilon} > \alpha - \varepsilon$: Այսինքն՝ $\forall n \ge n_\varepsilon : \alpha - \varepsilon < a_n \le \alpha < \alpha + \varepsilon$ $\Rightarrow \forall n \ge n_\varepsilon \quad \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ ■

Դիտարկենք հետևյալ հաջորդականությունը $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Թեորեմ 2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է և սահմանափակ վերևից:

Ապացույց: Ըստ Նյուտոնի* երկանդամի բանաձևի՝

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!}\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} + \ldots +$$

---

* Նյուտոն Իսահակ (1643-1727) – անգլիացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

$$+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n^n}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right): \quad (1)$$

Քանի որ $1-\frac{s}{(n+1)}>1-\frac{s}{n}$ $(s=1,2,\ldots,n-1)$, ապա x_{n+1}-ի վերլուծության բոլոր գումարելիները մեծ են x_n-ի համապատասխան գումարելիներից: Բացի այդ x_{n+1}-ը պարունակում է դրական լրացուցիչ գումարելի (վերջինը): Այսպիսով՝ $\forall\ n\in N$ $x_{n+1}>x_n$. Այսինքն $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է:

(1)-ից հետևում է, որ՝ $x_n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\ldots+\frac{1}{n!}$: Նկատի ունենանք, որ $k!=2\cdot3\cdots k\geq 2^{k-1}$ $(k\geq 2)$: Ուրեմն՝

$$x_n\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}<1+2=3\ (n\geq 2):$$

Այսինքն $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից: ■

Հետևանք: Համաձայն թեորեմ 1–ի $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{նշ}}{=} e$:

Ընդ որում թեորեմ 2-ի ապացույցից հետևում է, որ $2<x_n<3$ $\Rightarrow e\in[2,3]$:

Կարելի է ապացուցել, որ e թիվը իռացիոնալ է և՝ $e\approx 2{,}718\ldots$:

Սահմանում 4. Դիցուք տրված է հատվածների հաջորդականություն $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$: Այսինքն՝ յուրաքանչյուր բնական թվին համապատասխանեցված է մեկ որոշակի $[a_n;b_n]$ հատված: Այս հաջորդականությունը կոչվում է ներդրված, եթե $\forall n$ $[a_{n+1};b_{n+1}]\subset[a_n;b_n]$: Դա նշանակում է, որ $\forall n: a_{n+1}\geq a_n$ և $b_{n+1}\leq b_n$:

Այսինքն՝ $\{a_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չնվազող է, իսկ $\{b_n\}_{n=1}^{n=\infty}$-ը՝ մոնոտոն չաճող:

Թեորեմ 3 (*ներդրված հատվածների հաջորդականության մասին*)։ Դիցուք $\{[a_n; b_n]\}_{n=1}^{n=\infty}$-ը ներդրված հատվածների հաջորդականություն է, այնպիսին, որ $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$։ Այդ դեպքում՝ գոյություն ունի միակ c թիվ, որը պատկանում է $[a_n; b_n]$ հատվածներից յուրաքանչյուրին և՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$։

Ապացույց. Ըստ թեորեմի պայմանների $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չնվազող է, իսկ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը՝ մոնոտոն չաճող։ Ընդ *որում* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը նաև սահմանափակ է վերևից, քանի որ՝ $\forall n \ a_n \le b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b_1 \Rightarrow a_n \le b_1$։ Նույն կերպ ստացվում է, որ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից՝ $\forall n \ b_n \ge a_1$։ Ըստ թեորեմ 1-ի $\exists$ a, b $\in$ R, այնպիսիք որ՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\} = b$։ Քանի որ $\forall n \ a_n \le b_n$, ապա $a \le b$։ Այսպիսով ունենք՝ $\forall n \ a_n \le a \le b \le b_n$։ Այսինքն՝ a և b թվերը պատկանում են $[a_n; b_n]$ հատվածներից յուրաքանչյուրին։ Այժմ ապացուցենք միակությունը, այսինքն, եթե որևէ երկու α և β թվեր պատկանում են $[a_n; b_n]$ հատվածներից յուրաքանչյուրին, ապա նրանք համընկնում են։ Դիցուք՝ որոշակիության համար $\alpha \le \beta$։ Ունենք $\forall n \in N \ a_n \le \alpha \le \beta \le b_n \Rightarrow 0 \le \beta - \alpha \le b_n - a_n$։ Այս անհավասարությունների մեջ անցնենք սահմանի (0-ն և $\beta-\alpha$-ն դիտում ենք որպես հաստատուն հաջորդականություններ), երբ $n\to\infty$։ Կստանանք՝ $0 \le \beta-\alpha \le 0 \Rightarrow \beta - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$։ Մասնավորապես՝ a=b =c։ ■

5.5. ԵՆԹԱՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ՎԵՐԻՆ ԵՎ ՍՏՈՐԻՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ

Սահմանում 1: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն է կոչվում $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը, որտեղ $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$-ը մոնոտոն աճող բնական թվերի հաջորդականություն է՝ $n_1 < n_2 \ldots < < n_k < \ldots$։

Օրինակ1: $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ և $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունները $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության ենթահաջորդականություններն են, իսկ

$a_1, a_2, a_5, a_3, \ldots$ հաջորդականությունը այդ հաջորդականության ենթահաջորդականությունը չէ:

Թեորեմ 1: Որպեսզի հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա յուրաքանչյուր ենթահաջորդականություն լինի զուգամետ և ձգտի միևնույն սահմանի:

Ապացուցում. Անհրաժեշտություն. Դիցուք՝ $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \in R$ և $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$-ը $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության կամայական ենթահաջորդականությունն է: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \ \forall \ n \ge n_\varepsilon : \ |a_n - a| < \varepsilon:$

Քանի որ $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$-ն մոնոտոն աճող է, ապա $n_1 \ge 1$, $n_2 > n_1 \Rightarrow n_2 \ge 2$,

$n_k \ge k$, $k = 1, 2$, $\Rightarrow n_k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty \Rightarrow \ \exists \ k_1 \ \forall \ k \ge k_1 \quad n_k > n_\varepsilon$

$\Rightarrow \ |x_{n_k} - a| < \varepsilon \ (k \ge k_1) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a:$

Բավարարություն. $\exists \ a \in R$ այնպիսին, որ յուրաքանչյուր ենթահաջորդականություն ձգտում է a-ի: Քանի որ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը հինքն իր ենթահաջորդականությունն է, ապա $\exists \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a:$ ■

Սահմանում 2. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության որևէ $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականության սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության մասնակի սահման:

Օրինակ 2. Դիցուք՝

$a_n = (-1)^n$, $n = 1,2\ldots \Rightarrow a_{2k} = 1 \underset{k\to\infty}{\to} 1$, $a_{2k-1} = -1 \underset{k\to\infty}{\to} -1:$

Ուրեմն այս հաջորդականության համար 1-ը և -1-ը մասնակի սահմաններ են: Համաձայն նախորդ թեորեմի $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը տարամետ է:

Թեորեմ 2 (Բոլցանո[*] - Վայերշտրասի[**]). Յուրաքանչյուր սահմանափակ հաջորդականություն ունի զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Ապացուցում: $\{x_n\}_1^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, այսինքն գոյություն ունեն a և b թվեր, այնպիսիք, որ $\forall \ n \in N$: $a < x_n < b$:

---

[*] Բոլցանո Բերնարդ, չեխ մաթեմատիկոս,փիլիսոփա (1781-1848):

[**] Վայերշտրաս Կարլ Թեոդոր Վիլհելմ (1815-1897), գերմանացի մաթեմատիկոս:

Տրոհենք [a; b] հատվածը երկու հավասար մասի՝ $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ և $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$: Ակնհայտ է, որ այս հատվածներից գոնե մեկում կա $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության անթիվ թվով անդամներ: Ընտրենք հենց այդ կեսը: Եթե այդ երկու հատվածներն էլ պարունակում են հաջորդականության անթիվ թվով անդամներ, ապա միևնույն է, թե նրանցից որը ընտրենք: Այդպես ընտրված հատվածը նշանակենք $[a_1; b_1]$ և ընտրենք նրան պատկանող որևէ անդամ՝ x_{n_1}. Այնուհետև $[a_1; b_1]$ հատվածը նորից կիսենք և նույն սկզբունքով ընտրենք նրա կեսը՝ $[a_2; b_2]$ հատվածը: $[a_2; b_2]$-ի մեջ ընկած հաջորդականության անթիվ թվով անդամներից ընտրենք մի որևէ x_{n_2} անդամ այնպիսին, որ $n_2 > n_1$: Կիսելու պրոցեսը անվերջ շարունակենք: k-րդ քայլին առաջացած $[a_k; b_k]$ հատվածից ընտրենք x_{n_k}-ն այնպես, որ՝ $n_k>n_{k-1}$: Այսպիսով առաջանում է $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականություն $\left(x_{n_k} \in [a_k;b_k]\, k=1,2...\right)$: Առաջանում է նաև $\{[a_k;b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ ներդրված հատվածների հաջորդականություն, այնպիսին, որ՝

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \underset{k\to\infty}{\to} 0:$$

Ըստ հայտնի հատկության (տե՛ս. 5.4, թ.3) $\exists$ միակ c թիվ, որը պատկանում է $[a_k;b_k]$ $(k=1,2...)$ հատվածներից յուրաքանչյուրին, ընդ որում՝ $c=\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, $\forall k\ a_k \le x_{n_k} \le b_k$: Օգտվելով 5.3-ի թ.6-ից ստանում ենք $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} c$: ■

Հետևանք: Թեորեմ 2-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր սահմանափակ հաջորդականություն ունի մասնակի սահման:

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ վերևից (ներքևից)սահմանափակ հաջորդականության համար գոյություն ունի մասնակի սահմաններից ամենամեծը (ամենափոքրը):

Խնդիր 2: Ապացուցել, որ եթե հաջորդականությունը անսահմանափակ է վերևից (ներքևից), ապա $+\infty$-ը ($-\infty$-ը) մասնակի սահման է:

Սահմանում 3: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության մասնակի սահմաններից ամենամեծը կոչվում է վերին սահման $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$, իսկ մասնակի սահմաններից ամենափոքրը կոչվում է ստորին սահման $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$: Այն դեպքում, երբ $+\infty$ $(-\infty)$-ը մասնակի սահման է, ապա ըստ սահմանման՝ $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty$):

Այժմ թեորեմ 1-ը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ:

Թեորեմ 1: Որպեսզի հաջորդականությունը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա վերին և ստորին սահմանները լինեն վերջավոր և իրար հավասար:

5.6. ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ. ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Սահմանում 1: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը կոչվում է ***ֆունդամենտալ***, եթե այն բավարարում է հետևյալ (Կոշիի*) պայմանին:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall m \geq n_\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$: (1)

Դիտողություն: Վերջին անհավասարության մեջ m-ի և n համարների տեղերը կարելի է փոխել, ուրեմն կարևոր չէ թե m, n թվերից որն է մեծ: Ենթադրենք

$m > n \Rightarrow m - n = p \in N$: Այդ դեպքում Կոշիի պայմանը կարելի է ձևակերպել հետևյալ համարժեք ձևով՝

$\forall \varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon\ \forall p \in N: \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$: (2)

Թեորեմ *1:* Որպեսզի $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունդամենտալ:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն. Տրված է, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը զուգամետ է, այսինքն՝ $\exists a \in R, \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon\ \ |x_n - a| < \varepsilon$ $(\forall m \geq n_\varepsilon : |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow \forall n, m \geq n_\varepsilon : \ |x_m - x_n| = |(x_m - a)-(x_n - a)| \leq$

$\leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon \ (m, n \geq n_\varepsilon)$: Ուրեմն $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է:

Բավարարություն. Տրված է, որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը ֆունդամենտալ է:

---

* Կոշի Օգյուստեն Լուի (1789-1057), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

$$\Rightarrow 1>0\ \exists n_1\ \ \forall n\geq n_1: \left|x_n - x_{n_1}\right|<1$$

$$\Rightarrow \forall n\geq n_1\quad \left|x_n\right|=\left|x_n - x_{n_1}+x_{n_1}\right|\leq\left|x_n - x_{n_1}\right|+\left|x_{n_1}\right|<1+\left|x_{n_1}\right|:$$

Այսպիսով՝ x_n, $n=n_1,n_1+1,\ldots$ ենթահաջորդականությունը սահմանափակ է: Ըստ Բոլցանո–Վայերշտրասի թեորեմի, գոյություն ունի այդ հաջորդականության զուգամետ ենթահաջորդականություն $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ (այն նաև $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության ենթահաջորդականությունն է): Այսինքն՝ $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$: Դա նշանակում է որ՝

$$\forall\varepsilon>0\ \exists k_\varepsilon\ \forall k\geq k_\varepsilon\quad \left|x_{n_k}-a\right|<\varepsilon/2: \tag{1}$$

Քանի որ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, ապա $\exists n_\varepsilon\ \forall m,n\geq n_\varepsilon: |x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$: Քանի որ $n_k \underset{k\to\infty}{\to}\infty$ $(n_k\geq k)$, ապա $\exists k'$

$$\forall k\geq k': n_k>n_\varepsilon \Rightarrow \left|x_{n_k}-x_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ (n\geq n_\varepsilon,\ k\geq k'): \tag{2}$$

Դիցուք՝ $p=\max\left\{k',k_\varepsilon\right\}$: Ապա (1) – ից և (2)-ից ստանում ենք՝

$\forall n\geq n_\varepsilon$:

$$\left|x_n-a\right|=\left|\left(x_n-x_{n_p}\right)+\left(x_{n_p}-a\right)\right|\leq\left|x_{n_p}-x_n\right|+\left|x_{n_p}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}=a: \blacksquare$$

Վարժություններ. 1. Ապացուցել, որ՝

$x_n=\dfrac{\sin 1!}{1.2}+\dfrac{\sin 2!}{2.3}+\ldots+\dfrac{\sin n!}{n.(n+1)}$ (n=1,2...) հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է:

2. Ապացուցել, որ $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ (n=1,2...) հաջորդականությունը տարամետ է (ֆունդամենտալ չէ):

Խնդիրներ. 1. Ապացուցել, որ՝ $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Leftrightarrow b^{x_n}\underset{n\to\infty}{\to} b^a$ $(b>0)$:

2. Ապացուցել, որ՝

$x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Leftrightarrow \log_b x_n\to\log_b a$ $(x_n>0, a>0, b>0, b\neq 1)$:

Ցուցում. Օգտվել հաջորդականության սահմանի սահմանումից:

5.7. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ԱՆՎԵՐՋ ՏԱՍՆՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐԻ ՏԵՍՔՈՎ: ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԱՆՀԱՇՎԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ

Սահմանում 1: Թվի ամբողջ մաս՝ [a] կոչվում է այն ամենամեծ ամբողջ թիվը, որը չի գերազանցում այդ a թվին :

Օրինակ, [1,5]=1, [–1,5]=-2:

Դիցուք $a \geq 0$ և $[\,a\,] = \alpha_0 \geq 0$: $[\alpha_0; \alpha_0 + 1]$ հատվածը տրոհենք տաս հավասար մասի և նրանցից կընտրենք այն, որը պարունակում է a-ն: Այն դեպքում, երբ a-ն միաժամանակ պատկանում է տրոհված հատվածներից երկուսին (a-ն տրոհված հատվածների ընդհանուր ծայրակետ է), ապա կընտրենք այն հատվածը, որի համար a-ն ձախ ծայրակետ է: Այսպիսով, գոյություն ունի այդ պայմաններին բավարարող միակ միջակայքը՝ $[\alpha_0,\alpha_1; \alpha_0,\alpha_1 + 10^{-1}]$, այնպիսին որ $a \in [\alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1})$: Առաջացած հատվածը նորից տրոհենք տաս հավասար մասի և նույն սկզբունքով ընտրենք միակ միջակայքը (միակ α_2 թվանիշը), որը պարունակում է a-ն: Շարունակելով այս պրոցեսը կստանանք ներդրված հատվածների հաջորդականություն $[a_n ; a'_n]$, n= 0,1,2,..., որտեղ՝, $a_0 = \alpha_0$, $a'_0 = \alpha_0 + 0{,}1$, $a_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$,

$a'_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots\alpha_n + 10^{-n}$, $\alpha_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, k=1,2,...: Այդ հատվածների երկարությունների հաջորդականությունը՝ $10^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$: Այդ պատճառով նշված հատվածներից յուրաքանչյուրին պատկանող a կետը միակն է և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n = a$: Այսպես առաջացած $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ սիմվոլը կոչվում է անվերջ տասնորդական կոտորակ:

Դիտողություն 1: Այս տասնորդական կոտորակի 9 թվանշանը անվերջ կրկնվել չի կարող (9-ը պարբերություն չէ): Ապացուցելու համար ենթադրենք հակառակը՝ $\exists\, n_1$, որ՝ $\alpha = \alpha_0,\alpha_1 \quad \alpha_{n_1} 99\ldots9\ldots$, որտեղ $\alpha_{n_1} \neq 9$, երբ $n_1 \neq 0$: Այդ դեպքում՝ $a \in [\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{n_1}\, 99\ldots 9; \quad \alpha_0,\alpha_1 \quad \alpha_{n_1} + 10^{-n}]$ ($n \geq n_1$): Այստեղից հետևում է, որ a-ն համընկնում է այդ հատվածների աջ ծայրակետի հետ (դա $\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_{n_1-1}(\alpha_{n_1} + 1)$ կետն է, երբ $n_1 \neq 1$ և α_0+1 կետն է, երբ $n_1 = 1$), որը հակասում է հատվածների ընտրության սկզբունքին:

Ինը պարբերություն չունեցող տասնորդական կոտորակը կոչվում է *թույլատրելի:* Այսպիսով յուրաքանչյուր ոչ բացասական թվին համապատասխանության մեջ է դրվում միակ թույլատրելի տասնորդդական կոտորակը, ընդ որում ստացված համապատասխանությունը փոխմիարժեք է:

Եթե $a< 0$, ապա $a > 0$ և ուրեմն,$-a$ -ին համապատասխանեցվում է $\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \quad \alpha_n$ բերված տասնորդական կոտորակը: Մնում է a-ին համապատասխանեցնել $-\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots$ կոտորակը: Այսպիսով առաջանում է փոխմիարժեք համապատասխանություն բոլոր իրական թվերի և բոլոր թույլատրելի տասնորդական կոտորակների բազմությունների միջև a իրական թվի և նրան համապատասխան տասնորդական կոտորակի միջև ընդունված է դնել հավասարության նշան՝ $a=\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots$:

Դիտողություն 2. Յուրաքանչյուր a իրական թվի համար գոյություն ունի իրեն զուգամետ իրարից տարբեր ռացիոնալ թվերի հաջորդականություն: Իրոք, a թիվը ներկայացնենք բերված անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ $a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots\alpha_n$ Այդ դեպքում՝ $a'_n = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + 10^{-n}$ $(n=1,2,\ldots)$ ռացիոնալ թվերի հաջորդականությունը զուգամիտում է a-ին և, ըստ այդ հաջորդականության կառուցման $\{a'_n\}$բազմությունը անվերջ է:

Սահմանում 2. A բազմությունը կոչվում է ***հաշվելի***, եթե այն համարժեք է բնական թվերի բազմությանը ($A\sim N$): Այսինքն՝ գոյություն ունի բիյեկցիա՝ $f \quad A \to N$: Դա նշանակում է որ A բազմության բոլոր իրարից տարբեր տարրերը կարելի է համարակալել՝ օգտագործելով բոլոր իրարից տարբեր բնական թվերը:

Թեորեմ 1: Ռացիոնալ թվերի բազմությունը հաշվելի է:

Ապացույց. Նախ դիտարկենք դրական ռացիոնալ թվերի դեպքը՝ $r = \frac{m}{n}, m,n\in N$: Այդ թվի բարձրություն անվանենք՝ $h=m+n$ թիվը: Այժմ համարակալենք տարբեր դրական ռացիոնալ թվերը ըստ իրենց բարձրության աճման՝դասավորելով միևնույն բարձրություն ունեցող թվերը ըստ աճման: Այսպիսով դրական ռացիոնալ թվերը կհամարակալվեն հետևյալ կերպ՝

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\frac{1}{5},\frac{5}{1},\frac{1}{6},\frac{2}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{5}{2},\frac{6}{1},\frac{1}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{3},\frac{7}{1},\ldots:$$

Այդ թվերը նշանակենք՝ $r_1,r_2,r_3,\ldots$: Այժմ բոլոր ռացիոնալ թվերը համարակալենք հետևյալ կերպ՝ $0, r_1,-r_1,r_2,-r_2,r_3,-r_3,\ldots$ ■

Թեորեմ 2. Իրական թվերի բազմությունը անհաշվելի է:

Ապացույց. Դիցուք հակառակը՝ R-ը հաշվելի է, այսինքն՝ իրական թվերը, ուրեմն նաև նրանց համապատասխան թույլատրելի տասնորդական կոտորակները, կարելի է համարակալել՝

$x_1 = \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \ldots\alpha_n^{(1)}$

$x_2 = \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_n^{(2)} \dots$
$x_m = \alpha_0^{(m)}, \alpha_2^{(m)} \alpha_2^{(m)} \quad \alpha_n^{(m)}$
....

Ընտրենք α_n թվանիշերը, n = 1, 2 այնպես, որ $\alpha_n \neq \alpha_n^{(n)}$ և $\alpha_n \neq 9$: Այդ դեպքում 0, α_1 α_2 α_n թիվը չի համընկնում x_m (m=1,2,3,...) թվերից և ոչ մեկի հետ: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը: ■

Թեորեմ 3. Յուրաքանչյուր (a ; b) միջակայք համարժեք է (-∞ ; ∞) միջակայքին:

Ապացուցում: Տե՛ս 3.-ի խնդ.1-ը :

Հետևանք: Յուրաքանչյուր միջակայք անհաշվելի է:

Թեորեմ 4. Յուրաքանչյուր միջակայք պարունակում է անվերջ քանակությամբ ռացիոնալ թվեր:

Ապացուցում. Վերցնենք $(a;b)$ միջակայքի որևէ c կետ, և այն ներկայացնենք բերված անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ $c = c_0,c_1...c_n...$: Այդ դեպքում՝ $c'_n = c_0,c_1...c_n + 10^{-n}$ $(n = 1,2,...)$ անվերջ թվով ռացիոնալ թվերի հաջորդականությունը (տե՛ս 5.7, դիտ. 2.) ձգտում է c–ին: Ուրեմն, ինչ-որ համարից սկսած այդ հաջորդականության բոլոր անդամները կհայտնվեն (a;b) միջակայքի մեջ: ■

Թեորեմ 5. Յուրաքանչյուր միջակայք ունի անվերջ քանակությամբ իռացիոնալ թվեր:

Ապացուցում. Ենթադրենք հակառակը՝ միջակայքը պարունակում է վերջավոր քանակությամբ իռացիոնալ թվեր: Այստեղից հետևում է, որ միջակայքը հաշվելի է (տե՛ս թ.4 և խնդ.4.): Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը: ■

Խնդիրներ. 1.Ապացուցել, որ ամբողջ թվերի բազմությունը հաշվելի է:

2.Ապացուցել, որ հաշվելի բազմության անվերջ ենթաբազմությունը հաշվելի է:

3. Ապացուցել, որ վերջավոր կամ հաշվելի քանակությամբ հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի է:

4. Ապացուցել,որ հաշվելի և վերջավոր բազմությունների տարբերությունը հաշվելի է:

5. Ապացուցել,որ յուրաքանչյուր անվերջ բազմություն ունի հաշվելի ենթաբազմություն:

6. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ

Սահմանում 1: a–ն ($a\in R$) կոչվում է $E\subset R$ բազմության սահմանային կետ, եթե a–ի յուրաքանչյուր շրջակայքում կա իրենից տարբեր, E-ին պատկանող կետ:

Լեմմ: Եթե a-ն E-ի սահմանային կետն է, ապա գոյություն ունի $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ՝ $x_n\in E\setminus\{a\}$ $(n = 1, 2,\ldots)$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

Ապացուցում : Ըստ սահմանման՝ $\forall\, n\in N\ \exists\, x_n\in U_{\frac{1}{n}}(a)$, $x_n\in E\setminus\{a\}$

$$\Rightarrow 0<|x_n-a|<\frac{1}{n}\ \Rightarrow a-\frac{1}{n}<x_n<a+\frac{1}{n}\ \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a,\ x_n\neq a$$

(տե՛ս 5.3-ի թ.6-ը («ոստիկանների» կանոնը)): ■

Սահմանում 2: Դիցուք $f\ \ E\to R$ ($E\subset R$) և a -ն E-ի սահմանային կետ է: Կասենք որ, ***f(x)-ի սահմանը a կետում հավասար է K թվին*** և կգրենք $\lim\limits_{x\to a} f(x)=K$ $\left(f(x)\xrightarrow[x\to a]{} K\right)$, եթե՝

1^0. (***հաջորդականության լեզվով***, կամ ***ըստ Հայնեի***[*])

$\forall x_n\in E,\ x_n\neq a,\ x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} a: f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} K$:

2^0. (***(ε, δ) լեզվով***, կամ ***ըստ Կոշիի***)

$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0\ \forall x\in E\ \ 0<|x-a|<\delta: |f(x)-K|<\varepsilon$:

Թեորեմ 1: 1° և 2° սահմանումները իրար համարժեք են:

Ապացուցում: Նախ ցույց տանք որ 1° ⇒ 2°: Դիցուք 2° սխալ է: Այսինքն՝ $\exists\,\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \ \exists\, x\in E\ \ 0<|x-a|<\delta\ \ \ |f(x)-K|\geq\varepsilon$:

Այստեղից ստանում ենք՝ $\forall n\in N\ \exists\, x_n\in E\ \ 0<|x_n-a|<\frac{1}{n}$, $|f(x_n)-K|\geq\varepsilon$:

Դա նշանակում է, որ՝ $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} a, x_n\neq a$, բայց՝ $f(x_n)\ \underset{n\to\infty}{\not\to}\ K$:

Ստացվածը հակասում է 1°-ն:

Այժմ ցույց տանք, որ 2° ⇒ 1°: Դիտարկենք $\forall\ x_n\in E$, $x_n\neq a$, $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} a\ \Rightarrow\exists\, n_1\ \forall\, n\geq n_1: 0<|x_n-a|<\delta$: $1^\circ\Rightarrow |f(x_n)-K|<\varepsilon$: $(n\geq n_1)$:

Այստեղից հետևում է 2°-ը: ■

---

[*] Հայնե Հենրիխ Էդուարդ (1821 – 1881), գերմանացի մաթեմատիկոս :

Դիտողություն : Պարզ է, թե հաջորդականության լեզվով ինչպես կարելի է տալ ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը, երբ $x \to \infty$ $(+\infty, -\infty)$, կամ $K = \infty$ $(+\infty, -\infty)$ Բերենք ε – δ լեզվով այդպիսի սահմանումների օրինակներ:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = K \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in E\ x < -\delta:\ |f(x) - K| < \varepsilon$:

2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in E\ |x| > \delta : f(x) > \varepsilon$:

7 ՄԻԱԿՈՂՄԱՆԻ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ

Սահմանում 1: x_0 թվի «ծակած» δ շրջակայք է կոչվում $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ *շրջակայքը առանց* x_0*-ի*`

$$\overset{0}{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta):$$

Սահմանում 2: $+\infty$ $(-\infty)$ – ի δ $(\delta > 0)$ շրջակայք է կոչվում $(\delta; +\infty)$ $((-\infty; -\delta))$ միջա-կայքը: <a; b>-ն դա $(a; b)$ միջակայքի ընդհանուր գրելաձևն է, այն կարող է և պարունակել a,b ծայրակետերը (կամ նրանցից որևէ մեկը):

Սահմանում 3: Դիցուք՝ f: $\langle a; b\rangle \to R$, կասենք, որ այդ ֆունկցիայի *աջակողմյան (ձախակողմյան) սահմանը* x_0 $(x_0 \in (a; b))$ կետում հավասար է K-ի և կգրենք

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = K\ \left(f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = K\right),\text{ եթե } \forall \varepsilon > 0$$

$$\exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ (U_\delta(x_0) \subset (a; b))\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta)\ (x \in (x_0 - \delta; x_0))$$

$|f(x) - K| < \varepsilon$:

<a; b> *միջակայքի ծայրակետերում* իմաստ ունեն միայն $f(a + 0), f(b - 0)$ միակողմանի սահմանները:

Թեորեմ: Որպեսզի ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման միջակայքի ներքին կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում գոյություն ունենան միակող-մանի սահմանները և լինեն իրար հավասար:

Ապացուցում. Անհրաժեշտություն. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = K \in R$ $(x_0 \in (a; b))$:

Այսինքն՝ $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta\ (\varepsilon) > 0\ \ (U_\delta(x_0) \subset (a; b))\ \forall x \in U_\delta(x_0)$ $((x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)) : |f(x) - K| < \varepsilon$:

Ուրեմն՝ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta\ (\varepsilon) > 0\ \left(U_\delta(x_0) \subset (a;b)\right)\ \forall x,\ x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$ $|f(x) - K| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = K$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = K\right)$:

Բավարարություն: $\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ և՝ $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = K$:

Ուրեմն՝ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1(\varepsilon) > 0\ \left(U_{\delta_1}(x_0) \subset (a;b)\right)\ \forall x \in (x_0 - \delta_1;\ x_0)$ $|f(x) - K| < \varepsilon$,

$\exists\ \delta_2\ (\varepsilon) > 0\ \left(U_{\delta_2}(x_0) \subset (a;b)\right)\ \forall x \in (x_0\ ;\ x_0 + \delta_2)$ $|f(x) - K| < \varepsilon$:

Նշանակենք $\min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta > 0$ և վերցնենք $\forall x$, $0 < |x - x_0| < \delta$:

Հնարավոր է երկու դեպք՝ 1. $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow x_0 < x < x_0 + \delta_2$ $\Rightarrow |f(x) - K| < \varepsilon$,

2. $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow x_0 - \delta_1 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - K| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = K$: ■

Դիտողություն: Թեորեմը մնում է ուժի մեջ, երբ ֆունկցիան որոշված է x_0-ի «ծակած» δ շրջակայքում $\left(\overset{0}{U}_\delta(x_0) \subset (a;b)\right)$

Օրինակ: $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, $x \neq 0$, $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{x}{x} = 1$, $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} \left(-\dfrac{x}{x}\right) = -1$:

Հետևաբար, ֆունկցիան չունի սահման $x = 0$ կետում:

8. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Քանի որ ֆունկցիայի սահմանը բերվում է հաջորդականության սահմանի, ապա ֆունկցիայի սահմանը օժտված է բոլոր այն հատկություններով, ինչ հաջորդականության սահմանը:

Թեորեմ: Եթե գոյություն ունեն $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ և $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, ապա՝

1. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$,

3. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ $(g(x)\neq 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0)$:

Ապացուցենք օրինակ 3-ը: Ունենք, որ՝ $\forall\ x_n\to x_0\quad x_n\neq x_0$, $f(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, $g(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B\neq 0$: Այստեղից, ստանում ենք՝

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)}=\frac{A}{B}: \quad \blacksquare$$

Դիտողություն: Թեորեմը ճշմարիտ է նաև այն դեպքում, երբ $x_0=\infty,+\infty,-\infty$:

9. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐԵՐԻ ԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ՄԵԾԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ

Սահմանում 1: Դիցուք f(x) ֆունկցիան որոշված է a-ի «ծակած» շրջակայքում: f(x)–ը կոչվում է անվերջ փոքր (անվերջ մեծ) a կետում, եթե՝

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0 \quad (\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty)$:

Սահմանում 2: a կետում անվերջ փոքր (անվերջ մեծ) f(x), g(x) ֆունկցիաները կոչվում են միևնույն կարգի անվերջ փոքր (անվերջ մեծ), եթե $g(x)\neq 0$ և

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C\in R,\ C\neq 0$: (1)

Սահմանում 3: Եթե (1)-ի մեջ C=1, ապա f(x) և g(x) ֆունկցիաները կոչվում են իրար համարժեք և գրվում է՝ $f(x)\underset{x\to a}{\sim} g(x)$

(՝ $f(x)\underset{x\to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow g(x)\underset{x\to a}{\sim} f(x)$):

Օրինակ 1: $x+x^2\underset{x\to 0}{\sim} x$: Իրոք՝ $\dfrac{x+x^2}{x}=1+x\underset{x\to 0}{\to}1$:

Սահմանում 4: f(x) ֆունկցիան անվանում են ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան g(x)-ը, x-ը a-ին ձգտելիս, եթե f-ը և g-ն այնպիսի անվերջ փոքրեր են, որ $g(x)\neq 0$ և $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$: Այդ դեպքում գրում են՝ $f(x)= o(g(x)),\ x\to a$:

Օրինակ 2: $x^2 = o(x),\ x\to 0$:

Թեորեմ: Արտադրյալի սահմանը հաշվելիս, արտադրիչը կարելի է փոխարինել համարժեք ֆունկցիայով (դրանից չի փոխվի ոչ սահմանի գոյությունը, ոչ էլ սահմանի արժեքը):

Ապացույց: Դիցուք $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = A$, ընդ որում՝ $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)\ (f(x)\neq 0,\ h(x)\neq 0)$:

Պետք է ապացուցել, որ $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x)g(x) = A$:

Իրոք՝ $\lim\limits_{x\to a} h(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]\cdot\left[\dfrac{h(x)}{f(x)}\right] = A\cdot 1 = A$: Եթե այժմ ենթադրենք, որ $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, բայց $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x)g(x) = A$, ապա $f(x)g(x) = [h(x)g(x)]\cdot\left[\dfrac{f(x)}{h(x)}\right] \underset{x\to a}{\to} A\cdot 1 = A$: Ստացված հակասությունը նշանակում է, որ՝ $\nexists \lim\limits_{x\to a} h(x)g(x)$: ■

10. ՄՈՆՈՏՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ $f: E\to R\ (E\subset R)$: f-ը կոչվում է մոնոտոն աճող (նվազող), եթե $\forall x_1, x_2 \in E,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ (f(x_1) > f(x_2))$:

Սահմանում 2: f ֆունկցիան կոչվում է մոնոտոն չնվազող (չաճող), եթե $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)\ \ (f(x_1) \ge f(x_2))$:

Սահմանում 3: Ֆունկցիան կոչվում է մոնոտոն, եթե այն մոնոտոն չնվազող է կամ մոնոտոն չաճող:

Թեորեմ 1: Եթե f(x) ֆունկցիան մոնոտոն չնվազող է (չաճող է) (a;b) միջակայքում և $x_0\in(a;b)$, ապա՝

$$\exists f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \sup_{(a;x_0)} f,\quad \exists f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \inf_{(x_0;b)} f$$

$$\left(\exists f(x_0-0) = \inf_{(a;x_0)} f \quad \exists f(x_0+0) = \sup_{(x_0;b)} f\right):$$

Ապացույց: Քննարկենք մոնոտոն չնվազող ֆունկցիայի դեպքը: Ցույց տանք, որ $f(x_0-0) = \sup\limits_{(a;x_0)} f$ (մյուս պնդումները ապացուցվում են նույն կերպ):

$\{f(x);\ x \in (a;\ x_o)\}$ բազմությունը սահմանափակ է վերևից՝ $\forall x\in(a;x_o)\ f(x) \le f(x_o) \Rightarrow \exists \sup\limits_{(a;x_0)} f = \alpha \Rightarrow \forall x \in (a;x_o) : f(x) \le \alpha$,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in (a;x_o)\ \ f(x_\varepsilon) > \alpha - \varepsilon$: Նշանակենք $\delta = x_o - x_\varepsilon > 0$: $\forall x \in (x_o-\delta;\ x_o) = (x_\varepsilon;\ x_o) : f(x) \ge f(x_\varepsilon) > \alpha-\varepsilon \Rightarrow f(x) > \alpha-\varepsilon$:

Այսպիսով՝ $\forall x\in(x_o-\delta;\ x_o) : \alpha-\varepsilon< f(x)\le\alpha<\alpha+\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\alpha$: ■

Դիտողություն: Մոնոտոն չնվազող (չաճող) ֆունկցիայի համար

$$\exists f(a+0)=\inf_{(a;b)} f,\ \exists f(b-0)=\sup_{(a;b)} f\ \left(f(a+0)=\sup_{(a;b)} f,\ \exists f(b-0)=\inf_{(a;b)} f\right):$$

Ընդ որում նշված ճշգրիտ եզրերը կարող են լինել անվերջ: Օրինակ, $\sup\limits_{(a;b)} f = +\infty$, եթե $f(x)$-ը մոնոտոն չնվազող է և վերևից անսահմանափակ:

11 ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՍԱՀՄԱՆԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԿՈՇԻԻ ՊԱՅՄԱՆԸ

Սահմանում: Դիցուք $f(x)$-ը որոշված է x_o թվի $\overset{0}{U}_\gamma(x_0)$ «ծակած» շրջակայքում, կասենք, որ այդ ֆունկցիան բավարարում է Կոշիի պայմանին x_o կետում, եթե $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta\ (\varepsilon) > 0\ (\delta<\gamma)$ $\forall x', x''\ 0<|x'-x_o|<\delta,\ 0 < |x''-x_o| < \delta : |f(x')-f(x'')| < \varepsilon$:

Թեորեմ 1: Որպեսզի $f(x)$-ը ունենա վերջավոր սահման $x = x_o$ կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f(x)$-ը բավարարի Կոշիի պայմանին այդ կետում:

Ապացույց. Անհրաժեշտություն. Դիցուք՝ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = K \in R$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$

$$(\delta<\gamma)\ \forall x,\ 0 < |x-x_o|<\delta : |f(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall x', x''\ |x' - x_o|<\delta,$$

$$|x''- x_o| < \delta\quad |f(x') - K| < \frac{\varepsilon}{2},\ |f(x'') - K| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Այստեղից՝ $|f(x') - f(x'')| = |[f(x') - K] + [K - f(x'')]| \le |f(x') - K| +$ $+|f(x'')-K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$:

Բավարարություն. Ունենք՝ $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ (\delta<\gamma)\ \ \forall\ x', x''$, $0 < |x'-x_o| <\delta$, $0 < |x''-x_o| < \delta$: $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$:

Վերցնենք $\forall\, x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$, $x_n \in \overset{0}{U}_\gamma(x_0) \Rightarrow \delta > 0\ (\delta<\gamma)\ \exists\ n_1\ \ \forall\ n \ge n_1$: $0 < |x_n-x_o| < \delta$,

$\forall\ m \ge n_1\ \ 0 < |x_m-x_o| < \delta \Rightarrow\ |f(x_n)-f(x_m)| < \varepsilon$:

Այսինքն՝ $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, ուրեմն՝ այն զուգամետ է : Ուրեմն $\exists\ K \in R$: $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} K$:

Մնում է ցույց տալ, որ կամայական այլ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($y_n \in \overset{0}{U}_\gamma(x_0)$) հաջորդականության համար, որը ձգտում է x_o-ի: $f(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} K$: Դիցուք՝ $f(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} M$: Կազմենք նոր հաջորդականություն՝ $z_n = x_k$, երբ $n=2k-1$ և $z_n=y_k$, երբ $n=2k$:

Ակնհայտ է, որ $z_n \underset{n\to\infty}{\to} x_o \Rightarrow \{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$-ը զուգամետ է:

Դիցուք՝ $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\to} N$: Բայց՝ $N = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)= \lim\limits_{k\to\infty} f(z_{2k-1}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) =K$ և $N = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{k\to\infty} f(z_{2k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = M$: Այստեղից ստանում ենք՝ $M = K$: ■

Դիտողություն. Կոշիի պայմանը, երբ օրինակ $x_o= +\infty$ կայանում է հետևյալում՝ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall\ x', x'' \in D_f$, $x' >\delta$, $x'' > \delta$: $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$: Այս պայմանը և համարժեք է $+\infty$-ում վերջավոր սահմանի գոյությանը (համ. 5.6 (1)):

12. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿԵՏՈՒՄ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $<a; b>$ միջակայքում և $x_o \in (a\ \ b)$: $f(x)$-ը կոչվում է անընդհատ x_o կետում, եթե $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_o)$:

Եթե $f(x)$ որոշված է նաև միջակայքի a (b) ծայրակետում, ապա $f(x)$-ը անընդհատ է a-ում (b-ում), եթե $\exists\ f(a+0) = f(a)$ ($\exists\ f(b-0) =f(b)$):

Օգտվելով ֆունկցիայի սահմանի հատկություններից, ստանում ենք անընդհատ ֆունկցիաների հետևյալ հատկությունները:

Թեորեմ 1: Եթե f(x) և g(x) ֆունկցիաները որոշված են $<a; b>$ միջակայքում, անընդհատ են x_o կետում ($x_o \in <a; b>$), ապա x_o–ում անընդհատ են նաև $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ և $\frac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x_o) \neq 0)$ ֆունկցիաները:

Ապացուցենք, օրինակ վերջինը:

$$\text{Ունենք՝ } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}: \blacksquare$$

Թեորեմ 2: Եթե f(x)-ը անընդհատ է $<a ; b>$ միջակայքի ներքին x_o կետում և $f(x_o) > 0$ $(f(x_o) < 0)$, ապա f(x)-ը պահպանում է այդ կետում իր ունեցած նշանը x_o-ի որոշ շրջակայքում: Այսինքն՝

$$\exists\ U_\delta(x_0)\subset(a;b)\ \forall x\in U_\delta(x_0)\quad f(x)>0\quad (f(x)<0):$$

Ապացուցում: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0 \Rightarrow \varepsilon = f(x_o) > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$

$(U_\delta(x_0)\subset(a;b))\ \forall x\in U_\delta(x_o)\quad |f(x)-f(x_o)| < f(x_o) \Rightarrow f(x) > f(x_o)-f(x_o) = 0$:

$f(x_o) < 0$ դեպքը, ըստ էության չի տարբերվում նախորդից: ■

Սահմանում. Դիցուք $f : A \to B$, $g : C \to D$ $(D \subset A)$ (A-ն, B-ն, C-ն և D-ն միջակայքեր են): $\forall t\in D$, $g(t) \in D \subset A \Rightarrow g(t) \in A$: Ուրեմն իմաստ ունի $h(t)= f(g(t)) \in B$: Ընկեց ֆունկցիա՝ $h\quad C \to B$: Այն կոչվում է *բարդ ֆունկցիա*՝ $h(t) = f(g(t))$:

Թեորեմ 3 (բարդ ֆունկցիայի անընդհատության մասին):

Դիցուք՝ f(x)-ը անընդհատ է X միջակայքի ներքին x_o կետում, իսկ $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան անընդհատ է T միջակայքի t_o ներքին կետում և՝ $\varphi(t_o) = x_o$: Այդ դեպքում $f(\varphi(t))$ բարդ ֆունկցիան որոշված է t_o-ի որոշ շրջակայքում և անընդհատ է t_o կետում:

Ապացուցում. f(x)–ի անընդհատությունից x_o կետում հետևում է, որ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ U_\gamma(x_o) \subset X\quad \forall x\in U_\gamma(x_o)\quad |f(x)-f(x_o)| < \varepsilon\quad x = \varphi(t)$-ն անընդհատ է $t_o \in T$ կետում $\Rightarrow \gamma > 0\ \exists\ \delta > 0,\ U_\delta(t_o) \subset T,\ \forall t \in U_\delta(t_o)$: $x = \varphi(t) \in U_\gamma(x_o) \subset X \Rightarrow f(\varphi(t))$ բարդ ֆունկցիան որոշված է $U_\delta(t_o)$-ում և անընդհատ է t_o-ում: ■

Խնդիր 1 (հակադարձ ֆունկցիայի անընդհատության մասին): Դիցուք $f: [a; b] \to R$, $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է [a; b] հատվածի յուրաքանչյուր կետում և մոնոտոն աճող (նվազող) է: Ապացուցել, որ $\exists x = f^{-1}(y)$ հակադարձ ֆունկցիան՝ $f^{-1}: [c; d] \to [a; b]$, $c=f(a)$, $d=f(b)$ $(c=f(b),\ d=f(a))$: Այդ ֆունկցիան նույնպես մոնոտոն աճող (նվազող) է և անընդհատ է [c ; d] – ի յուրաքանչյուր կետում:

Խնդիր 2. Դիցուք f: (a; b) $\to$ R, y=f(x)-ը անընդհատ է (a; b)-ի յուրաքանչյուր կետում և մոնոտոն աճող (նվազող) է: Գոյություն ունեն (վերջավոր կամ անվերջ) c=f(a+0), d=f(b-0) (c=f(b-0), d=f(a+0)): Ապացուցել, որ $\exists x = f^{-1}(y)$ հակադարձ ֆունկցիա՝ $f^{-1}: (c; d) \to (a; b)$: Այդ ֆունկցիան նույնպես մոնոտոն աճող (նվազող) է և անընդհատ է (c; d) – ի յուրաքանչյուր կետում: Այն դեպքում, երբ $a = -\infty$, ապա $c = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $(d = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x))$, իսկ երբ $b = +\infty$, ապա

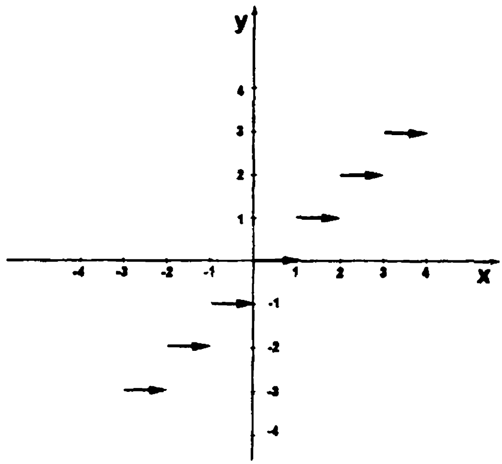
$$d = \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad (c = \lim_{x\to+\infty} f(x)):$$

13. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԽԶՈՒՄՆԵՐԸ, ԽԶՈՒՄՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ f(x)-ը որոշված է X միջակայքում: $x_0 \in X$ կոչվում է *խզման կետ,* եթե այն անընդհատության կետ չէ: Դա նշանակում է, որ կամ այդ կետում գոյություն չունի վերջավոր սահման, կամ սահմանը գոյություն ունի, բայց այն հավասար չէ ֆունկցիայի արժեքին այդ կետում: Խզման կետերը լինում են առաջին և երկրորդ սեռի: x_0 խզման կետը կոչվում է *առաջին սեռի խզման կետ*, եթե $\exists\, f(x_0 - 0)$ և $\exists\, f(x_0+0)$: Մասնավորապես, եթե $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, ապա x_0 խզման կետը կոչվում է *վերացնելի խզման կետ.* Եթե x_0-ն առաջին սեռի խզման կետ չէ, ապա այն կոչվում է *երկրորդ սեռի խզման կետ:* Մասնավորապես, եթե $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, ապա x_0–ն երկրորդ սեռի խզման կետ է

Օրինակներ. 1) f(x) = [x] (x-ի ամբողջ մասը): Ըստ ամբողջ մասի սահմանման՝

$f(x)=n-1,\ x\in[n-1;n)$ և $f(x)=n,\ x\in[n;n+1)$ $(n\in Z)$: Ուրեմն՝ $f(n-0)=n-1$, $f(n+0)=n$: Այսպիսով, այս ֆունկցիայի համար յուրաքանչյուր ամբողջ թիվ հանդիսանում է առաջին սեռի խզման կետ (տե՛ս Նկ.1):



Նկ.1

$$2^\circ \ f(x)=\frac{(x^2-1)}{(x-1)}, \ x\neq 1, \ f(1)=A:$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq f(1)$, եթե $A\neq 1$: Այս դեպքում x=1–ը առաջին սեռի վերացնելի խզման կետ է: Երբ A=1, ապա x=1-ը անընդհատության կետ է:

$$3^\circ. \ f(x) = \sin\frac{1}{x}, \ x\neq 0, \quad f(0)=A: \ \nexists \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}:$$

Իրոք՝ $x_n = (\frac{\pi}{2}+\pi n)^{-1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, բայց $f(x_n)=\sin(\frac{\pi}{2}+\pi n) = (-1)^n$ հաջորդականությունը տարամետ է: Օգտվելով սահմանումից ըստ Հայնեի, ստանում ենք՝ $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$: Ուրեմն՝ x = 0–ն երկրորդ սեռի խզման կետ է:

14. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Սահմանում: Տարրական են կոչվում y=c հաստատուն, $y=x^{\alpha}$ $(x>0, \alpha\neq 0)$ աստիճանային, $y=a^x$ $(a>0)$ ցուցչային, $y=\log_a x$

($a>0$, $a\neq 1$) լոգարիթմական, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$, $y=\operatorname{ctg}x$ եռանկյունաչափական, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$ հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները և այն բոլոր ֆունկցիաները, որոնք ստացվում են վերը նշված ֆունկցիաների թվաբանական գործողություններից և այդ ֆունկցիաների վերջավոր թվով վերադրումից (բարդ ֆունկցիաներից):

Թեորեմ 1: Բոլոր տարրական ֆունկցիաները անընդհատ են իրենց որոշման (գոյության) տիրույթի բոլոր կետերում (այսինքն, այն կետերում, որտեղ իմաստ ունի գրված արտահայտությունը):

Ապացուցում: Այն, որ հաստատունը անընդհատ է՝ $\forall x_0\in R$ կետում ակնհայտ է: Ապացուցենք, որ $y=x^{\alpha}\,(\alpha\neq 0)$ ֆունկցիան անընդհատ է կամայական $x_0>0$ կետում: Այսինքն՝ $\lim\limits_{x\to x_0} x^{\alpha}=x_0^{\alpha}$, որը հաջորդականության լեզվով նշանակում է՝ $x_n>0$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$

$$\Rightarrow x_n^{\alpha} \underset{n\to\infty}{\to} x_0^{\alpha} \quad (x_n^{\alpha} \underset{n\to\infty}{\to} x_0^{\alpha} \Leftrightarrow \ln x_n^{\alpha} \underset{n\to\infty}{\to} \ln x_0^{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\cdot\ln x_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha\cdot\ln x_0$$

$$\Leftrightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0,$$ տե՛ս 5.6, խնդ. 2):

$a^x\,(a>0)$ ցուցչային և $\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) լոգարիթմական ֆունկցիաների անընդհատությունը անմիջապես հետևում է 5.6-ի խնդ.1, 2–ից:

Այժմ ապացուցենք $\cos x$–ի անընդհատությունը կամայական x_0 կետում: Այսինքն՝ $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$: Դա նշանակում է, որ՝

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(\varepsilon,x_0)>0, \forall x\ \ |x-x_0|<\delta \quad |\cos x-\cos x_0|<\varepsilon:$$

Բայց՝ $|\cos x-\cos x_0|=$

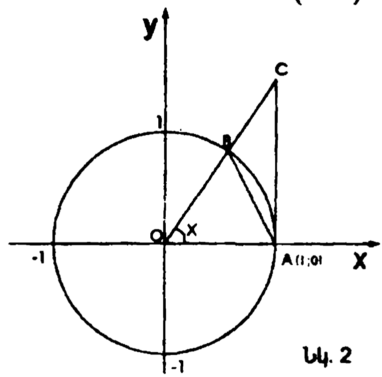
$$=2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\leq 2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leq|x-x_0|<\delta=\varepsilon$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք $|\sin x|\leq|x|$ $(x\in(-\infty;+\infty))$ անհավասարությունից, որը կապացուցենք ստորև (տե՛ս 15.(4)): Նկատենք, որ գտնված δ–ն կախված է միայն ε–ից (այն x_0–ից կախված չէ): $y=\sin x$ ֆունկցիայի անընդհատությունը ապացուցվում է նմանակերպ:

$\operatorname{tg}x$ և $\operatorname{ctg}x$ ֆունկցիաների անընդհատությունը իրենց որոշման տիրույթի կետերում հետևում է 12.–ի թ.1–ից: Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների անընդհատությունը հետևում է 12.–ի խնդ.1, 2– ից:

15. ՈՐՈՇ ՆՇԱՆԱՎՈՐ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐ

1. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ Նախ, ենթադրենք՝ $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ (տե՛ս նկ. 2):



Նկ. 2

Համեմատենք ΔAOB– ն սեկտոր AOB ($\text{ս}.AOB$) –ի հետ: Պարզ է, որ $\Delta AOB\subset \text{ս}AOB$: Ուրեմն, մակերեսների համար ստանում ենք՝

$$\Rightarrow S_{\Delta AOB}<S_{\text{ս}AOB}\Rightarrow \frac{OA\cdot OB\sin x}{2}<\frac{OA^2}{2}x\Rightarrow \sin x<x$$

$$\Rightarrow 0<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad (1):$$

Մյուս կողմից՝ $S_{\text{ս}AOB}<S_{\Delta AOC}\Rightarrow \frac{x}{2}<\frac{OA\cdot AC}{2}(AC=\mathrm{tg}x)$:

Ուրեմն՝ $x<\mathrm{tg}x\Rightarrow \frac{\sin x}{x}>\cos x$:

Այսպիսով՝ $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\quad\left(x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right)$: (2)

Այժմ, ենթադրենք $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\Rightarrow -x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ և, ուրեմն $(-x)$-ի համար ճշմարիտ է (2)-ը՝ $\cos(-x)<\frac{\sin(-x)}{-x}<1$: Քանի որ cosx–ը զույգ է, իսկ sinx–ը՝ կենտ, ապա նորից ստանում ենք (2)–ը: Այսպիսով՝

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right): \tag{3}$$

Քանի որ $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, ապա ըստ հայտնի «ոստիկան-ների» կանոնի ստանում ենք՝ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

Դիտողություն: (3) –ից հետևում է, որ՝ $|\sin x| \le |x|$ $\left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$: Ապացուցենք, որ այդ անհավասարությունը ճշմարիտ է նաև $|x| \ge \frac{\pi}{2}$ դեպքում: Իրոք՝ $|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \le |x| \Rightarrow |\sin x| < |x|$: Այսպիսով՝

$$|\sin x| \le |x| \quad (x \in (-\infty;+\infty)): \tag{4}$$

2. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$ Նախ ապացուցենք, որ՝ $\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$: Դա նշանակում է, որ՝ $\forall x_n > 0, x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$: Պարզ է, որ՝ $p_n = \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$: Հետևաբար ինչ որ N համարից սկսած՝ $p_n > 1$: Կարելի է համարել, որ՝ N=1 (հաջորդականության առաջին վերջավոր թվով անդամներ սահմանի վրա չեն ազդում): Եթե $m_n = [p_n]$ $(m_n \in N)$, ապա՝ $m_n \le p_n < m_n + 1$:

Ուրեմն՝ $y_n = \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n} < \left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} < \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n+1} = z_n$:

Մնում է ապացուցել, որ՝ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$:

Նկատենք, որ՝ $y_n = \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{m_n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{-1}$

$\left(1+\frac{1}{m_n+1}\right)^{-1} \underset{n\to\infty}{\to} 1$ $\left(m_n > p_n - 1 \Rightarrow m_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty\right)$ և

$z_n = \left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \cdot \left(1+\frac{1}{m_n}\right)$, $1+\frac{1}{m_n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$

Խնդիրը հանգեց նրան, որ՝ $\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e, k_n \in N, \quad k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$:

Քանի որ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$, ապա՝ $\forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall n \ge N: \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$:

$$k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \exists n_0, \forall n \ge n_0 : k_n > N \Rightarrow \left|\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} - e\right| < \varepsilon\ (n \ge n_0)$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e:$$

Այսպիսով ապացուցվեց, որ $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$: Այն, որ $\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ապացուցվում է նման կերպ:

3. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e}$, $a > 0, a \ne 1$:

Իրոք՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_a e \cdot \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$
$$= \log_a e \cdot \ln e = \log_a e:$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք $\ln x$ ֆունկցիայի անընդհատությունից $x = e$ կետում:

Երբ՝ a=e, ունենք՝ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$:

4. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$, $a > 0$:

Քանի, որ a^x ֆունկցիան անընդհատ է $x = 0$ կետում, ապա՝ $y = a^x - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \ (x = \log_a(1+y))$:

Այսպիսով՝ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$:

Մասնավորապես՝ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$։

5. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha}$

$$y(x)=(1+x)^\alpha-1\ \left((1+x)^\alpha=1+y(x)\Rightarrow \alpha\cdot\ln(1+x)=\ln(1+y(x))\right)$$

ֆունկցիան անընդհատ է $x=0$ կետում: Նույն կետում անընդհատ է նաև $\ln(1+y(x))$ բարդ ֆունկցիան (տե՛ս 12. բ.3): Ուրեմն՝ $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=0$:

Այսպիսով՝ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{\ln(1+y(x))}\cdot\frac{\alpha\cdot\ln(1+x)}{x}=\alpha$:

Ստացված սահմաններից հետևում է՝ $\boxed{\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x}$,

$\boxed{\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}x}$, $\boxed{a^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x\ln a}$, $\boxed{(1+x)^\alpha-1\underset{x\to 0}{\sim}\alpha x}$։

Քննարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1. Հաշվել՝ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{2}$:

Սահմանը հաշվելիս, արտադրիչը փոխարինել ենք համարժեք ֆունկցիայով (տե՛ս 9. բ.1): Նկատենք, որ գումարելին, ընդհանրապես ասած, չի կարելի փոխարինել համարժեք ֆունկցիայով: Եթե քննարկվող օրինակում, cosx-ը փոխարինենք իրեն համարժեք 1-ով, ապա կստանանք սխալ արդյունք՝ 0: Ստացանք, որ՝ $\boxed{1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}}$։

Օրինակ 2. Հաշվել՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi^{\sin 3x}-1}{\ln(\cos 5x)}\cdot\left((1+x)^{\frac{1}{3}}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\ln\pi}{\ln(1+(\cos 5x-1))}\cdot\frac{x}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\ln\pi}{-2\sin^2\frac{5}{2}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2\ \ln\pi}{-2\cdot 25x^2}=-\frac{2}{25}\cdot\ln\pi:$$

Օրինակ 3. Հաշվել՝ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\operatorname{ctg}x^2}$ Այստեղ առկա է 1^∞ տեսքի անորոշությունը: Ընդհանրապես, երբ պետք է հաշվել $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$, որտեղ՝ $f(x)\neq 1$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1, \lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, ապա նպատակահարմար է կատարել հետևյալ ձևափոխությունը՝

$[f(x)]^{g(x)} = \{ [1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}} \}^{g(x)(f(x)-1)}$ և օգտվել $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e$ սահմանից: Եթե $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = A \in R$, ապա հեշտ է ապացուցել, որ՝ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^A$: Տվյալ դեպքում՝

$$\lim_{x\to 0} ctgx^2 \cdot (\cos 3x - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9x^2}{2}\cdot \cos x^2}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-9x^2}{2x^2} = -4{,}5:$$

Ուրեմն՝

$$\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{ctgx^2} = e^{-4.5}:$$

16. ՀԱՏՎԱԾԻ ՎՐԱ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Սահմանում 1: Ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ E բազմության վրա, եթե այն անընդհատ է E բազմության յուրաքանչյուր կետում: Այդ փաստը գրի է առնվում հետևյալ կերպ՝ $f\in C(E)$ (C տառը լատիներեն continuum (անընդհատ) բառի առաջին տառն է):

Թեորեմ 1 (Վայերշտրասի առաջին թեորեմը): Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է: $f\in C[a;b] \Rightarrow$ f-ը սահմանափակ է:

Ապացուցում. Դիցուք ճիշտ է հակառակը՝ f ֆունկցիան անսահմանափակ է: Ենթադրենք այն անսահմանափակ է,օրինակ, վերևից: $\Rightarrow \forall n\in N\ \exists x_n\in[a;b] : f(x_n)>n$: Ըստ Բոլցանո–Վայերշտրասի թեորեմի $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ սահմանափակ հաջորդականությունը ($x_n\in[a;b]$) ունի $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ զուգամետ ենթահաջորդականություն՝ $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, $x_0\in[a;b]$: $f\in C[a;b]$ $\Rightarrow$ f-ը անընդհատ է x_0 կետում, այսինքն՝ $f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$: Մյուս կողմից՝ $f(x_{n_k})>n_k\geq k \Rightarrow f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը (այն դեպքում, երբ f-ը անսահմանափակ է ներքևից, ապացույցը ստացվում է նման կերպ): ■

Հետևանք 1. Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը ունի ճշգրիտ եզրեր:

Թեորեմ 2 (Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմը) :

Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան հասնում է իր ճշգրիտ վերին և ստորին եզրերին, այսինքն՝ $\exists\ x_1,\ x_2 \in [a;b]$ $f(x_1)=\sup\limits_{[a;b]} f$, $f(x_2)=\inf\limits_{[a;b]} f$ (ունի մեծագույն ($f(x_1)$) և փոքրագույն ($f(x_2)$) արժեքներ:

Ապացուցում. Դիցուք $\sup\limits_{[a;b]} f = M$, $\inf\limits_{[a;b]} f = m$: Պետք է ապացուցել, որ M-ը և m -ը արժեքներ են: Ենթադրենք M–ը արժեք չէ, այսինքն՝ $\forall x\in[a;\ b]$ $f(x) < M$: Դիցուք՝ $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$: Ակնհայտ է, որ՝ $g\in C[a;\ b]$ և $\forall x \in [a;\ b]$ $g(x)> 0$: Ըստ թեորեմ 1-ի g(x)-ը սահմանափակ է $\Rightarrow \exists\ K\in R\ \forall x\in[a;b]$ $0 < g(x) \le K$: $\Rightarrow K>0,\ \dfrac{1}{M-f(x)} \le K$

$$\Rightarrow [M-f(x)]\,K \ge 1 \Rightarrow M-f(x)\ge\frac{1}{K} \Rightarrow f(x) \le M-\frac{1}{K}:$$

Ստացվեց, որ f–ի արժեքների բազմությունը ունի M-ից փոքր վերին եզր, դա հակասում է նրան, որ M= sup f: Նույն կերպ ապացուցվում է, որ m–ը արժեք է: ■

Թեորեմ 3. (Բոլցանո-Կոշիի թեորեմը ֆունկցիայի զրոների մասին): Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան, որը ծայրակետերում ունի տարբեր նշանի արժեքներ, գոնե մեկ ներքին կետում հավասարվում է զրոյի: Այսինքն

$$f\in C[a;b],\ f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists c\in(a;b) : f(c) = 0:$$

Ապացուցում: Դիցուք $f(a) < 0$, $f(b) > 0$: Կիսենք [a ; b] հատվածը: Հնարավոր է երկու դեպք՝

1. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$: Այս դեպքում թեորեմի ապացուցումը ավարտված է ($c=\dfrac{a+b}{2}$):

2. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\ne 0$: Այս դեպքում գոյություն ունի [a; b]-ի այն $[a_1;\ b_1]$ կեսը, որ՝ $f(a_1) < 0$, $f(b_1) >0$ (եթե $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$, ապա $[a_1;\ b_1] = [\dfrac{a+b}{2};\ b]$ իսկ, եթե $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$, ապա՝ $[a_1;\ b_1] = [\ a\ ;\ \dfrac{a+b}{2}]$):

Կիսելու պրոցեսը շարունակենք. հնարավոր է երկու դեպք՝

1. Ինչ-որ քայլում կիսված հատվածի միջնակետում ֆունկցիան դառնում է զրո, և թեորեմի ապացուցումը ավարտվում է:

2. Ոչ մի քայլում կիսված հատվածների միջնակետերում f(x)-ը զրո չի դառնում: Այս դեպքում առաջանում է ներդրված $[a_k; b_k]$ հատվածների հաջորդականություն այնպիսին, որ՝

$f(a_k)<0$, $f(b_k)>0$, $k=1,2,\ldots$: Ընդ որում՝ $b_k-a_k = \dfrac{b-a}{2^k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$: Ըստ ներդրված հատվածների հաջորդականության հայտնի հատկության (տե՛ս 5.4,թ.3)՝ $\exists\, c\in [a_k; b_k]$ $(k = 1, 2,\ldots)$, $c = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$:

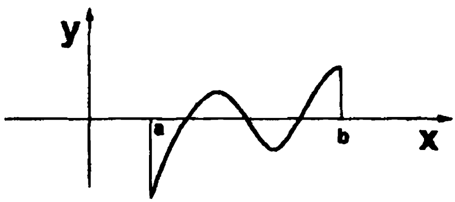
$f\in C[a;b] \Rightarrow$ f(x)-ը անընդհատ է c կետում,

$$\forall k, f(a_k)<0 \Rightarrow f(c)=\lim_{k\to\infty} f(a_k)\le 0: \quad (1)$$

$$\forall k,\ f(b_k)>0 \Rightarrow f(c)=\lim_{k\to\infty} f(b_k) \ge 0 \quad (2)$$

(1)-ից և (2)-ից հետևում է, որ $f(c) = 0$: ■

Թեորեմը ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն (տե՛ս Նկ. 2) :



Նկ.2

Դիտողություն. Թեորեմի ապացուցումը ցույց է տալիս, թե ինչպես ցանկացած ճշտությամբ կարելի է գտնել f(x)-ի զրոները:

Թեորեմ 4 (Բոլցանո–Վայերշտրասի թեորեմը միջանկյալ արժեքների մասին): Եթե հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան ծայրակետերում ունի տարբեր արժեքներ, ապա նրանց միջև ընկած ցանկացած թիվ նույնպես արժեք է:

Այսինքն՝ $f \in C[a ; b]$, $f(a)< f(b)$ $(f (a) > f (b)) \Rightarrow \forall M \in(f(a);f(b))$ $(M\in (f(b); f(a)))$ $\exists c\in (a;b)$ $f(c)=M$:

Ապացուցում: Դիցուք $f(a) < M < f(b)$: Դիտարկենք օժանդակ ֆունկցիա՝ $g(x)=M-f(x)$, $g\in C[a;b]$, $g(a)=M-f(a) > 0$, $g(b)=M-f(b)<0$:

Ըստ թեորեմ 3-ի՝ $\exists\, c\in (a; b)$: $g(c) = 0 \Rightarrow M - f(c)=0 \Rightarrow f(c) = M$: ■

Հետևանք (տե՛ս. թ. 1–4): Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը հատված է (հատվածը կարող է բաղկացած լինել մեկ կետից):

Ապացուցում: Դիցուք $f\in C[a; b]$ և E_f-ը նրա արժեքների բազմությունն է: Ըստ թեորեմ 1-ի՝ $\exists \sup\limits_{[a;b]} f=M$, $\exists \inf\limits_{[a;b]} f=m$: Ապացուցենք, որ $E_f=[m;M]$: Ըստ թեորեմ 2-ի, m-ը և M-ը արժեքներ են՝ $\exists\ x_1, x_2 \in [a;b]$, $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$ Եթե $m=M$, ապա $\forall x\in[a;b]: m\le f(x)\le m \Rightarrow f(x)\equiv m \Rightarrow E_f=\{m\}=[m;m]$, և թեորեմը ապացուցված է: Այժմ ենթադրենք $m<M$ և, որոշակիության համար՝ $x_1<x_2$: Պարզ է, որ $f\in C[x_1;x_2]$ և՝ $f(x_1)<f(x_2)$: Ըստ թ.4. -ի՝ $\forall K$, $m<K<M$ $\exists\ c\in(x_1;x_2): f(c)=K \Rightarrow K\in E_f$: Այսպիսով՝ $[m;M]\subset E_f$: Մյուս կողմից՝ $\forall y\in E_f$, $\exists x\in[a;b]$, $f(x)=y$, $m\le f(x)\le M \Rightarrow y\in[m;M] \Rightarrow E_f\subset[m;M]$, ուրեմն՝ $E_f=[m;M]$:

■

17. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆ

Սահմանում: Դիցուք f(x)-ը որոշված է X միջակայքի վրա: Կասենք, որ f(x) ֆունկցիան *հավասարաչափ անընդհատ* է X-ի վրա եթե՝ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon>0\ \forall\ x_1,x_2\in X$, $|x_1-x_2|<\delta$: $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$: Պարզ է, որ հավասարաչափ անընդհատությունից հետևում է անընդհատությունը X-ի յուրաքանչյուր կետում (կետ առ կետ անընդհատությունը): Կետ առ կետ անընդհատության պայմանը տարբերվում է հավասարաչափ անընդհատությունից նրանով, որ δ-ն, ընդհանրապես ասած, կախված է նաև կետից՝ $\delta=\delta(\varepsilon,x)$: Այդ պատճառով կետ առ կետ անընդհատությունից, ընդհանրապես ասած, չի բխում հավասարաչափ անընդհատությունը:

Ոչ հավասարաչափ անընդհատությունը X-ի վրա նշանակում է՝ $\exists\ \varepsilon>0\quad \forall\ \delta>0\quad \exists\ x_1, x_2\in X$, $|x_1-x_2|<\delta$ $\quad |f(x)-f(x_2)|\ge\varepsilon$: Ոչ հավասարաչափ անընդհատության համար բավարար է հետևյալ պայմանը՝

$\exists\ x'_n, x''_n\in X\quad x'_n-x''_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ և $|f(x'_n)-f(x''_n)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} K$ (K-ն դրական թիվ է կամ $+\infty$):

Իրոք, վերցնենք $\varepsilon=\dfrac{K}{2}>0$, երբ $K>0$ ($\varepsilon=1$, երբ $K=+\infty$), $\exists n_1$ այնպիսին, որ $\forall\ n\ge n_1: |f(x'_n)-f(x''_n)|>\varepsilon$ և $\forall\delta>0\ \exists\ n_2$ այնպիսին, որ $\forall n\ge n_2\ |x'_n-x''_n|<\delta$: Եթե $n_3=\max(n_1;n_2)$, ապա $\forall n\ge n_3: |x'_n-x''_n|<\delta$ և $|f(x'_n)-f(x''_n)|\ge\varepsilon \Rightarrow$ f(x)-ը ոչ հավասարաչափ անընդհատ է X-ի վրա:

Օրինակներ.

1. $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0;+\infty)$: Ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը՝

$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2} \le \sqrt{x_1-x_2}$ $(x_1 \ge x_2 \ge 0)$: Իրոք, այդ գնահատականը համարժեք է հետևյալ անհավասարությանը՝

$$x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2} \le x_1-x_2 \Leftrightarrow x_2 \le \sqrt{x_1x_2} \Leftrightarrow \sqrt{x_2} \le \sqrt{x_1} \Leftrightarrow x_2 \le x_1$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta(\varepsilon)>0 \; \forall x_1, x_2, x_1-x_2 < \delta \; (x_1 \ge x_2)$:

$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2} \le \sqrt{x_1-x_2} < \sqrt{\delta} \le \varepsilon \;\Rightarrow\; \sqrt{x_1}-\sqrt{x_2} < \varepsilon$ $(0<\delta \le \varepsilon^2)$: Ուրեմն $f(x)=\sqrt{x}$ -ը հավասարաչափ անընդհատ է $[0;+\infty]$-ի վրա:

2. $f(x)=\ln x$, $x \in (0;1]$, $f \in C(0;1]$: Նկատենք, որ $f(+0)=-\infty$: Օգտվենք ոչ հավասարաչափ անընդհատության բավարար պայմանից: Ընտրենք հետևյալ երկու հաջորդականությունները՝

$$x'_n=\frac{e}{n},\; x''_n=\frac{1}{n}:$$

Ունենք՝

$$|x'_n-x''_n|=\frac{e}{n}-\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0,\; |f(x'_n)-f(x''_n)|=\ln\frac{e}{n}-\ln\frac{1}{n}=\ln e=1 \underset{n\to\infty}{\to} 1:$$

$\Rightarrow$ $f(x)=\ln x$-ը ոչ հավասարաչափ անընդհատ է $(0;1]$-ի վրա (այն հատված չէ):

Կանտորի թեորեմը:* Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է: $f \in C[a;b] \Rightarrow f$-ը հավասարաչափ անընդհատ է:

Ապացույց: Կատարենք հակասող ենթադրություն՝ f-ը ոչ հավասարաչափ անընդհատ է: Այսինքն՝ $\exists \varepsilon>0 \; \forall \delta>0 \; \exists \; x', x'' \in [a;b]$, $|x'-x''|<\delta$: $|f(x')-f(x'')| \ge \varepsilon$: $\Rightarrow$ $\delta_n=\frac{1}{n}>0$, $\exists \; x'_n, x''_n \in [a;b]$, $|x'_n-x''_n|<\frac{1}{n}$: $|f(x'_n)-f(x''_n)| \ge \varepsilon$ $(n=1,2...)$:

$\{x'_n\}$-ը սահմանափակ է $(x'_n \in [a;b], n=1,2...)$: Ըստ Բոլցանո–Վայերշտրասի թեորեմի գոյություն ունի զուգամետ ենթահաջորդականություն՝ $\{x'_{n_k}\}$:

Դիցուք՝

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k}=c \in [a;b]: |x'_n-x''_n|<\frac{1}{n} \Rightarrow x'_{n_k}-\frac{1}{n_k}<x''_{n_k}<x'_{n_k}+\frac{1}{n_k}:$$

Քանի որ $n_k \to \infty$, ապա՝ $\lim_{k\to\infty}(x'_{n_k} \pm \frac{1}{n_k})=c$

$\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} x''_{n_k}=c: f \in C[a;b] \Rightarrow f$-ը անընդհատ է c կետում:

* Կանտոր Գեորգ (1845-1918), գերմանացի մաթեմատիկոս:

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(c)$: Ստացվածը հակասում է $\left|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\right| \geq \varepsilon$ (k=1,2...) պայմանին: ■

18. ԱԾԱՆՑՅԱԼ

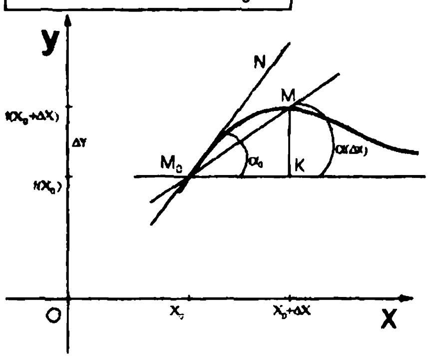
18.1. ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ԻՄԱՍՏԸ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ y=f(x) ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում, x_0-ն X միջակայքի ներքին կետ է, Δx-ը (անկախ փոփոխականի աճը) այնպիսին է, որ $x_0+\Delta x\in X$, $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ (ֆունկցիայի աճը x_0 կետում): Եթե $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, ապա այդ սահմանը կոչվում է f(x) ֆունկցիայի *ածանցյալ* x_0 կետում, իսկ ֆունկցիան կոչվում է *ածանցելի* այդ կետում: Ածանցյալը x_0 կետում նշանակում են՝ $f'(x_0)$, կամ՝ $\dfrac{df}{dx}(x_0)$: Այսպիսով՝

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}:$$

Ածանցյալը կարելի է սահմանել հետևյալ համարժեք ձևով՝

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \quad (x - x_0 = \Delta x):$$



Նկ 3.

Սահմանում 2: $M_o(x_o,y_o)$ և $M(x_o+\Delta x,\ y_o+\Delta y)$ $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կետերը միացնող ուղիղը կոչվում է հատող: Դիցուք $\alpha(\Delta x)$-ը M_oM ուղղի OX առանցքի հետ կազմած անկյունն է (տես նկ.3): Եթե $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x)=\alpha_o$, ապա կասենք, որ գոյություն ունի հատողների սահմանային դիրք, երբ M-ը մնալով գրաֆիկի վրա ձգտում է M_o-ին: Հատողների այդ սահմանային դիրքը կոչվում է M_o կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի *շոշափող:*

Թեորեմ: M_o կետում շոշափող գոյություն ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ x_o կետում $y=f(x)$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ վերջավոր կամ անվերջ: Ընդ որում անվերջ ածանցյալի դեպքում շոշափողը զուգահեռ է Y առանցքին:

Ապացույց: Տանենք M_oK-ն զուգահեռ X-ին, $<MM_oK = \alpha(\Delta x)$: Շոշափողի գոյությունը համարժեք է նրան, որ $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = \alpha_o$:

Այն իր հերթին, երբ $\alpha_o \neq \frac{\pi}{2}$ համարժեք է նրան, որ

$\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0} tg(\alpha(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$: Եթե $f'(x_o)=\infty$ ($\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$), ապա

$\alpha_o=\frac{\pi}{2}$: ∎

Դիտողություն: Եթե $f'(x_0)\neq\infty$, ապա շոշափողի անկյունային գործակիցը՝ $tg\alpha_0=f'(x_0)$:

Դրանում է կայանում ածանցյալի երկրաչափական իմաստը: $M_o(x_o,y_o)$ կետում շոշափողի հավասարումն է՝ $\boxed{y= f'(x_o)(x-x_o) + y_o}$ $(f(x_o)=y_o)$:

Այժմ տանք ածանցյալի ֆիզիկական մեկնաբանությունը: Դիցուք մարմինը (նյութական կետը) կատարում է ուղղագիծ շարժում: Այն բնորոշվում է ժամանակի t պահին անցած $x = x(t)$ ճանապարհով: t_0-ից՝ մինչև $t_0+\Delta t$ ժամանակի ընթացքում մարմինը կանցնի $\Delta x=x(t_o+\Delta t)-x(t_o)$ ճանապարհ: Այդ դեպքում $\frac{\Delta x}{\Delta t}$-ն ունի միջին արագության իմաստ: Իսկ $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$-ն կոչվում է t_o պահին մարմնի *ակնթարթային արագություն:*

18.2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆ. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

Սահմանում: Դիցուք y=f(x) որոշված է x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում: Այդ ֆունկցիան կոչվում է *դիֆերենցելի* x_0 կետում, եթե՝

$$\boxed{\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0} \qquad (1)$$

որտեղ A -ն հաստատուն է, $o(\Delta x)$-ը ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան Δx-ը, երբ $\Delta x\to 0$: Այսինքն՝ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$:

Թեորեմ: Որպեսզի y=f(x) ֆունկցիան, որոշված x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում լինի դիֆերենցելի x_0 կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ածանցելի x_0 կետում, այսինքն f(x)-ը ունենա վերջավոր ածանցյալ $f'(x_0)$:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Տրված է, որ y=f(x) ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, այսինքն տեղի ունի (1)-ը:

$$(1)\ \Rightarrow\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\underset{\Delta x\to 0}{\to}A\Rightarrow\exists f'(x_0)=A:$$

Բավարարություն: Հայտնի է, որ y=f(x) ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ x_0 կետում

$$\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha(\Delta x)\underset{\Delta x\to 0}{\to}0\quad\Rightarrow\quad\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\Delta x\alpha(\Delta x):$$

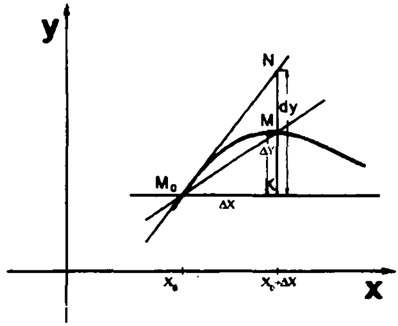
Բայց՝ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=0$: Այսպիսով՝ ճիշտ է (1)-ը, ուրեմն f(x)-ը դիֆերենցելի է x_0 կետում: ■

Դիտողություն: Դիֆերենցիելության (1) պայմանը կարելի է գրել հետևյալ համարժեք տեսքով՝

$$\boxed{\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,\quad \Delta x\to 0}, \qquad (2)$$

որտեղ $\alpha(\Delta x)\underset{\Delta x\to 0}{\to}0$ և հետագայի համար նպատակահարմար է ընդունել, որ $\alpha(0)=0$:

Սահմանում: Դիցուք y=f(x)-ը որոշված է x_0-ի շրջակայքում և դիֆերենցելի է x_0 կետում: $dy=df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$-ը կոչվում է y=f(x) ֆունկցիայի *դիֆերենցիալ* x_0 կետում: Ընդ որում, անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալ ասելով հասկանում ենք նրա աճը՝ $dx=\Delta x$: Այսպիսով, դիֆերենցիալը՝ $\boxed{dy=df(x)=f'(x)dx}$: Ինչպես տեսնում ենք, դիֆերենցիալը կախված է x-ից և Δx-ից: Դիֆերենցելիության (1) պայմանը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝ $\boxed{\Delta f(x_0)=df(x_0)+o(dx),\ dx\to 0}$: Նկար 4-ից երևում է դիֆերենցիալի երկրաչափական իմաստը՝ dy=KN (Δy=KM, M_0N–ը շոշափողն է)։



Նկ.4

Օրինակ: $f(x)=x^2$,

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-(x_0)^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2:$$

Որտեղ՝ $2x_0=A=f'(x_0)$, $(\Delta x)^2=o(\Delta x)$ $\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\Delta x \underset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow} 0\right)$։

18.3. ՈՐՈՇ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԸ

Ածանցյալները հաշվելիս կօգտվենք նշանավոր սահմաններից (տե՛ս 15.), 9.-ի թ.1-ից և տարրական ֆունկցիաների անընդհատությունից:

1. $y=x^\alpha \quad (\alpha\neq 0)$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^\alpha\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1\right]}{\Delta x}=\lim\frac{\alpha x^\alpha\Delta x}{x\Delta x}=\alpha x^{\alpha-1}:$$

Այսպիսով՝ $\boxed{\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}}$, մասնավորապես՝ $x'=1$:

2. $y=a^x\ (a>0)$, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a:$

Այսպիսով՝ $\boxed{(a^x)'=a^x\ln a}$, մասնավորապես՝ $\boxed{(e^x)'=e^x}$:

3. y=sinx

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos\frac{x+\Delta x}{2}\right]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x :$$

Այսպիսով՝ $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$:

Նույն կերպ ապացուցվում է, որ $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$:

18.4. ԱԾԱՆՑՄԱՆ ԿԱՆՈՆՆԵՐԸ

Լեմմ: Եթե ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և ածանցելի է այդ միջակայքի ինչ-որ x կետում, ապա այդ կետում այն անընդհատ է:

Ապացուցում. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x = y'(x)0 = 0:$

Այսինքն՝ $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(y(x+\Delta x) - y(x)) = 0:$

Ստացվեց, որ y(x)-ը անընդհատ է x կետում: ■

Թեորեմ 1: Դիցուք U(x), V(x) ֆունկցիաները որոշված են x կետի ինչ-որ շրջակայքում և՝ ∃ U'(x) , ∃ V'(x): Այդ դեպքում x կետում գոյություն ունեն U(x) և V(x) ֆունկցիաների գումարի, տարբերության, արտադրյալի և քանորդի ածանցյալները և՝

1) (U±V)' = U'± V',

2) (U.V)'=U'V+V'U,

3) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{(U'V - UV')}{V^2}$ (V(x)≠0):

Ապացուցում: Ապացուցենք (1)-ը:

Δ(U±V)(x)=U(x+Δx)±V(x+Δx)-(U(x)±V(x))=ΔU(x)±ΔV(x)

$$\Rightarrow \frac{\Delta(U \pm V)(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} U'(x) \pm V'(x):$$

(2)-ը և (3)-ը ապացուցվում են նման կերպ: Ապացուցենք, օրինակ (3)-ը: Նկատենք, որ

ΔU(x)=U(x+Δx)–U(x) ⇒ U(x+Δx)=ΔU(x)+U(x):

Ստանում ենք՝

$$\frac{\Delta\left(\frac{U}{V}\right)(x)}{\Delta x}=\left(\frac{U(x+\Delta x)}{V(x+\Delta x)}-\frac{U(x)}{V(x)}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x}=$$

$$=\frac{(U(x)+\Delta U(x))V(x)-(V(x)+\Delta V(x))U(x)}{\Delta x\ V(x)V(x+\Delta x)}=$$

$$=\frac{V(x)\cdot\frac{\Delta U(x)}{\Delta x}-U(x)\cdot\frac{\Delta V(x)}{\Delta x}}{\Delta x V(x)V(x+\Delta x)}\underset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow}\frac{U'(x)V(x)-V'(x)U(x)}{V^2(x)}: \quad \blacksquare$$

Հետողություն: 2)-ից հետևում է՝ $(C\cdot U(x))'=C\cdot U'(x)$, որտեղ C-ն հաստատուն է

18.5. ՄԻԱԿՈՂՄԱՆԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ: ԲԱՐԴ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՈՒՄԸ

Սահմանում: Դիցուք y=f(x) ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և x_0-ն այդ միջակայքի ներքին կետ է: Եթե $\exists \lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_+(x_0)$ ($\exists \lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'_-(x_0)$), ապա այն անվանում են աջակողմյան (ձախակողմյան) ածանցյալ x_0 կետում: Այդ ածանցյալները կոչվում են միակողմանի

Թեորեմ 1: Որպեսզի y = f(x) ֆունկիան ունենա ածանցյալ X միջակայքի ներքին x_0 կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա այդ կետում ունենա միակողմանի ածանցյալներ՝ $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ և $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$:

Թեորեմի ապացույցը անմիջապես հետևում է 7.-ի, թ.1-ից:

Թեորեմ 2: Դիցուք՝ y=f(x) ֆունկցիան դիֆերենցելի է (a;b) միջակայքի x_0 կետում, իսկ x=g(t) ֆունկցիան դիֆերենցելի է (α,β) միջակայքի t_0 $(x_0=g(t_0))$ կետում: Այդ դեպքում y=f(g(t)) բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է t_0 կետում և՝ $(f(g(t)))'|_{t=t_0}=f'(x_0)g'(t_0)$:

Ապացուցում: t_0-ին տանք բավականաչափ փոքր $\Delta t\neq 0$ աճ: x=g(t) ֆունկցիան կստանա Δx աճ (այն կարող է և զրո լինել), որի շնորհիվ y=f(x) ֆունկցիան կստանա Δy աճ: Ըստ դիֆերենցելիության պայմանի՝ $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, $\Delta x\to 0$ $(\alpha(0)=0)$: (1)

Նկատենք, որ $\Delta f(g(t_0)) = f(g(t_0+\Delta t)) - f(g(t_0)) = f(g(t_0)+\Delta x) - f(x_0) =$
$= f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta y$:

$$(1) \Rightarrow \frac{\Delta f(g(t_0))}{\Delta t} = \frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} f'(x_0)g'(t_0) = f'(g(t_0))g'(t_0):$$

Հաշվի առանք, որ՝ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x = 0$ ($x = g(t)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից t_0 կետում հետևում է նրա անընդհատությունը այդ կետում): ■

Օրինակ: $(\cos^2 3x)' = 2\cos 3x(\cos 3x)' = -2\cos 3x(\sin 3x)\,3 = -3\sin 6x$:

18.6. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼԻ ՏԵՍՔԻ ԱՆՓՈՓՈԽԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ (ԻՆՎԱՐԻԱՆՏՈՒԹՅՈՒՆԸ)

Նախորդ թեորեմի պայմանների առկայությամբ՝
$dy = df(g(t)) = f'(g(t))g'(t)dt = f'(x)dx$

Ստացվեց, որ դիֆերենցիալի տեսքը կախված չէ նրանից, թե արդյոք x-ը անկախ փոփոխական է, թե այն իր հերթին կախված է այլ փոփոխականից: Բայց խոսքը միայն տեսքի մասին է: Իրոք՝ անկախ փոփոխականի դեպքում $dx = \Delta x$, իսկ երբ x-ը կախյալ փոփոխական է, ապա՝ $dx = g'(t)dt \neq \Delta x$ (հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $x = g(t)$ ֆունկցիան գծային է):

18.7. ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼԸ

Թեորեմ 1: Դիցուք՝ $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ x_0-ի որոշ շրջակայքում և այդտեղ $f(x)$-ը մոնոտոն է (աճող կամ նվազող): Եթե $\exists\ \frac{dy}{dx} = f'(x_0) \neq 0$, ապա $y = f(x)$ ֆունկցիայի $x = f^{-1}(y)$ հակադարձ ֆունկցիան ունի ածանցյալ $y_0 = f(x_0)$ կետում և

$$\frac{dx}{dy}(y_0) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x_0)}: \qquad (1)$$

Ապացույց: Դիտարկենք $y = f(x)$ ֆունկցիան վերը նշված շրջակայքում: Թեորեմի պայմանների դեպքում գոյություն ունի $x = f^{-1}(y)$ հակադարձ ֆունկցիան y_0-ի որոշ շրջակայքում, անընդհատ է այդտեղ (տե՛ս 12-ի խնդ. 1) և նույնպես մոնոտոն (եթե $f(x)$-ը աճող (նվազող) է, ապա $f^{-1}(y)$-ը նույնպես աճող (նվազող) է): Այստեղից ստանում ենք, որ՝ $\Delta y \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0 \Leftrightarrow \Delta x \underset{\Delta y \to 0}{\to} 0$: Ընդ որում, եթե $\Delta x \neq 0$, ապա և $\Delta y \neq 0$ և հակառակը: Հետևաբար՝

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow (1): \blacksquare$$

Օրինակներ: 1. $y=\sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$: Այս ֆունկցիան մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Ուրեմն՝ գոյություն ունի նրա հակադարձը՝ $x=\arcsin y$, որը որոշված է $[-1;1]$ հատվածի վրա, իսկ արժեքների բազմությունն է $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$-ը: Այն նույնպես մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Քանի որ $y'=\cos x \neq 0$, երբ $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ապա, ըստ թեորեմի՝ $x=\arcsin y$ $(y \in (-1;1))$ հակադարձ ֆունկցիան ունի ածանցյալ և՝

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\arcsin y}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}:$$

Այսպիսով՝

$$\boxed{(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad (t \in (-1;1))}:$$

2. $y=\cos x$, $x \in [0;\pi]$: Այս ֆունկցիան մոնոտոն նվազող է և անընդհատ: Նրա հակադարձը՝ $x=\arccos y$ (որոշման տիրույթն է՝ $[-1;1]$-ը, արժեքների բազմությունը՝ $[0;\pi]$-ն) նույնպես մոնոտոն նվազող է և անընդհատ: Քանի որ $y'=-\sin x \neq 0$, երբ $x \in (0;\pi)$, ապա՝ $x=\arccos y$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ և՝

$$(\arccos y)' = \frac{1}{(\cos x)'} = \frac{-1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}:$$

Այսպիսով՝ $\boxed{(\arccos t)' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$, $t \in (-1;1)$:

3. $y=\mathrm{tg}x$, $x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$: Այս ֆունկցիան մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Նրա հակադարձ՝ $x=\mathrm{arctg}y$ ֆունկցիան (որոշման տիրույթն է

$(-\infty;+\infty)$-ը, արժեքների բազմությունը՝ $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$-ն) մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Քանի որ $y'=\frac{1}{\cos^2 x}\neq 0$, ապա x=arctgy-ը ունի ածանցյալ

և՝ $$(\text{arctg}y)'=\frac{1}{(\text{tg}x)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{1}{1+\text{tg}^2 x}=\frac{1}{1+y^2}:$$

Այսպիսով՝ $\boxed{(\text{arctg}t)'=\frac{1}{1+t^2}}$, $t\in(-\infty;+\infty)$:

4. y=ctgx, $x\in(0;\ \pi)$: Այս ֆունկցիան մոնոտոն նվազող է և անընդհատ: Նրա հակադարձ x=arcctgy ֆունկցիան (որոշման տիրույթն է $(-\infty;+\infty)$-ը, արժեքների բազմությունը՝ $(0;\pi)$-ն) նույնպես մոնոտոն նվազող է և անընդհատ: Քանի որ՝ $y'=-\frac{1}{\sin^2 x}\neq 0$, ապա՝

$$(\text{arcctg}y)'=\frac{1}{(\text{ctg}x)'}=-\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}}=-\frac{1}{1+\text{ctg}^2 y}:$$

Այսպիսով՝ $\boxed{(\text{arcctg}t)'=-\frac{1}{1+t^2}}$, $t\in(-\infty;+\infty)$:

5. $y=e^x$, $x\in(-\infty;\infty)$: Ֆունկցիան մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Այս ֆունկցիայի հակադարձը՝ x=lny որոշված է $(0,+\infty)$, իսկ արժեքների բազմությունն է $(-\infty;+\infty)$ միջակայքը: x=lny ֆունկցիան նույնպես մոնոտոն աճող է և անընդհատ: Ընդ որում՝ $(\ln y)'=\frac{1}{(e^x)'}=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{y}$: Այսպիսով՝ $\boxed{(\ln t)'=\frac{1}{t}\quad (t>0)}$:

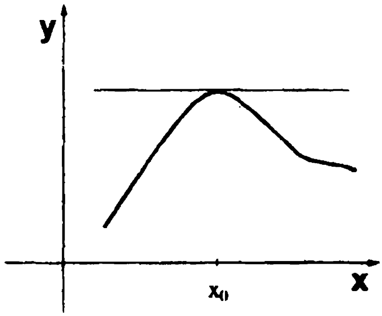
Ընդհանուր դեպքում՝ $y=\log_a x$ (a>0, $a\neq 1$, x>0), քանի որ $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}=\log_a e\cdot\ln x$, ապա՝ $\boxed{(\log_a x)'=\log_a e\cdot\frac{1}{x}}$:

19. ՄԻՋԱԿԱՅՔՈՒՄ ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Սահմանում: X միջայքում որոշված ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի (ածանցելի) այդ միջակայքում, եթե այն ունի ածանցյալ X միջակայքի յուրաքանչյուր կետում:

Ֆերմայի ***թեորեմը:*** Դիցուք՝ $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում, և ընդունում է իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը X միջակայքի ներքին x_0 կետում: Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, ապա $f'(x_0)=0$:

Թեորեմը ունի հետևյալ երկրաչափական մեկնաբանությունը՝ (տե՛ս նկ. 5.): Եթե վերը նշված x_0 աբսցիս ունեցող կետում գրաֆիկը ունի շոշափող, ապա այն զուգահեռ է X առանցքին:



Նկ. 5

Ապացույց: Դիցուք՝ $\max\limits_X f = f(x_0)$:

Ունենք՝ $f'(x_0)=f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to+0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$,

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \le 0, \quad \Delta x>0 \quad \Rightarrow \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} \le 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0)\le 0:$$

Մյուս կողմից՝ $f'(x_0)=f'_-(x_0)= \lim\limits_{\Delta x\to-0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \ge 0 \;\; (\Delta f(x_0)\le 0,\ \Delta x<0)$:

Ստացվեց, որ նաև՝ $f'(x_0)\ge 0$: Ուրեմն՝ $f'(x_0)=0$: ■

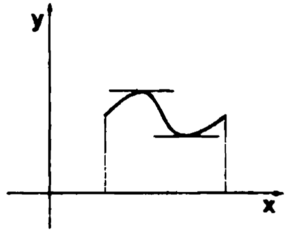
Ռոլլի*** ***թեորեմը:*** Դիցուք՝ [a;b] հատվածի վրա անընդհատ f(x) ֆունկցիան դիֆերենցելի է (a;b) միջակայքում և f(a)=f(b): Այդ դեպքում գոյություն ունի ներքին c կետ ($c\in(a;b)$), այնպիսին, որ $f'(c)=0$:

Թեորեմը ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն (տե՛ս նկ. 6)՝ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կան ներքին կետեր, որտեղ տարված շոշափողը զուգահեռ է X-ին:

---

* Ֆերմա Պիեր (1601–1665), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

** Ռոլլ Միշել (1652 – 1719), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:



Նկ 6.

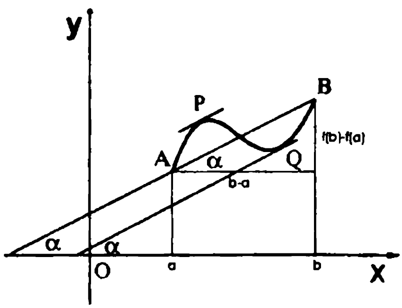
Ապացուցում: Ըստ Վայերշտրասի թեորեմի f(x)-ը ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ՝ $M=\max_x f$, $m=\min_x f$: Հնարավոր է երկու դեպք՝

1. M=m: Այս դեպքում՝ $\forall x\in[a;b]$ $m\le f(x)\le m$: Այսինքն՝ $f(x)\equiv m$ հաստատուն է: Ուրեմն յուրաքանչյուր կետում ածանցյալը հավասար է զրոյի:

2. M>m: Քանի որ f(a)=f(b), ապա մեծագույն, փոքրագույն արժեքներից գոնե մեկը կընդունվի միջակայքի ներքին c կետում: Այդ դեպքում ըստ Ֆերմայի թեորեմի $f'(c)=0$: ■

Լագրանժի[*] *թեորեմը.* Եթե $f\in C[a;b]$ և f(x) դիֆերենցելի է (a;b) միջակայքում, ապա գոյություն ունի ներքին c կետ ($c\in(a;b)$), այնպիսին որ $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$:

Թեորեմի երկրաչափական իմաստը երևում է նկար 7-ից: Ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա կան ներքին կետեր (P, Q), որտեղ տարված շոշափողները զուգահեռ են AB-ին (A(a; f(a)), B(b; f(b))):



Նկ. 7

Ապացուցում: Դիտարկենք օժանդակ ֆունկցիա՝ $g(x)=f(x)-\lambda x$:

---

[*] Լագրանժ Ժոզեֆ Լուի (1736 – 1813), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, մեխանիկ:

Յաստատուն λ-ն ընտրենք՝ ելնելով $g(a)=g(b)$ պայմանից: Կստանանք՝

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \operatorname{tg}\alpha \text{ (տե՛ս նկ. 7)}:$$

Ակնհայտ է, որ $g(x)$-ը բավարարում է Ռոլլի թեորեմի պայմաններին, ընդ որում $\forall x\in(a;b)$, $g'(x)=f'(x)-\lambda$:

Ուստի, ըստ այդ թեորեմի՝ $\exists\, c\in(a;b)$ այնպիսին, որ

$$g'(c)=f'(c)-\lambda=0:$$

Այսինքն՝ $$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}: \blacksquare$$

Կոշիի թեորեմը: Եթե $f,g\in C[a;b]$, $\forall x\in(a;b)\ \exists\, f'(x)$, $\exists\, g'(x)\neq 0$, ապա $\exists\, c\in(a;b)$ այնպիսին, որ

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}:$$

Նկատենք, որ թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $g(a)\neq g(b)$, հակառակ դեպքում ըստ Ռոլլի թեորեմի, ինչ որ ներքին t կետում $g'(t)=0$: Կոշիի թեորեմը Լագրանժի թեորեմի ընդհանրացումն է (երբ $g(x)\equiv x$ Կոշիի թեորեմը վերածվում է Լագրանժի թեորեմի):

Ապացույց: Դիտարկենք օժանդակ ֆունկցիա $F(x)=f(x)-\lambda g(x)$: Յաստատուն λ-ն ընտրենք այնպես, որ $F(a)=F(b)$ $\left(\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right)$:

Պարզ է, որ $F(x)$-ը բավարարում է Ռոլլի թեորեմի պայմաններին: Ուրեմն $\exists\, c\in(a;b)$, այնպիսին, որ՝ $F'(c)=0$: Այսինքն $f'(c)-\lambda g'(c)=0$: Ուրեմն՝ $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$: $\blacksquare$

Յետևանք 1 (ֆունկցիայի հաստատունության մասին): Եթե $f\in C[a;b]$ և $\forall x\in(a;b)\ \exists\, f'(x)=0$, ապա $f(x)$-ը հաստատուն է:

Ապացույց: Պետք է ապացուցել, որ $\forall x_1,x_2\in[a;b]$ $(x_1<x_2)$: $f(x_1)=f(x_2)$:

Կիրառենք Լագրանժի թեորեմը, դիտարկելով $f(x)$-ը $[x_1;x_2]$ հատվածի վրա: Ըստ այդ թեորեմի $\exists\, c\in(x_1,x_2)$ այնպիսին, որ $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$: Բայց՝ $f'(c)=0$, ուրեմն՝ $f(x_1)=f(x_2)$: $\blacksquare$

Դիտողություն 1: Ակնհայտ է, որ ճշմարիտ է նաև հակադարձը, քանի որ հաստատունի ածանցյալը զրո է:

Յետևանք 2 (ֆունկցիայի մոնոտոնության մասին): Եթե $f\in C[a;b]$ և $\forall x\in(a;b)$ $f'(x)>0$ (<0), ապա $f(x)$-ը մոնոտոն աճող (նվազող) է:

Ապացուցում: Ենթադրենք $f'(x)>0$: Վերցնենք $\forall x_1,x_2\in[a;b]$, $x_1< x_2$ և կիրառենք Լագրանժի թեորեմը, դիտարկելով $f(x)$-ը $[x_1; x_2]$-ի վրա: Ըստ այդ թեորեմի $\exists\, c\in(x_1,x_2)$ այնպիսին, որ

$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)>0\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$: ■

Խնդիր: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և դիֆերենցելի է $(a;\ b)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ $f(x)$-ի մոնոտոն աճող (նվազող) լինելու համար անհրաժեշտ է, որ $\forall x\in(a;b)$ $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ պայմանը:

20. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐԸ

Սահմանում: Դիցուք՝ $f(x)$-ը որոշված է X միջակայքում և x_o-ն այդ միջակայքի ներքին կետ է: Եթե գոյություն ունի x_o կետի շրջակայք՝ $U_\delta(x_o)=(x_0-\delta;x_0+\delta)\subset X$, այնպիսին որ՝ $\forall x\in(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ $f(x)\leq f(x_0)$ $(f(x)\geq f(x_o))$, ապա x_0-ն կոչվում է *մաքսիմումի (մինիմումի) կետ:* Եթե $\exists U_\delta(x_o)\subset X$, այնպիսին, որ $\forall x\in U_\delta(x_o)$ $(x\neq x_o)$: $f(x)<f(x_0)$ $((f(x)> f(x_0))$, ապա x_o անվանում են խիստ մաքսիմումի (մինիմումի) կետ: Մաքսիմումի (խիստ մաքսիմումի) կամ մինիմումի (խիստ մինիմումի) կետը կոչվում է *էքստրեմումի* (խիստ էքստրեմումի) *կետ.*

Թեորեմ 1 (էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը): Դիցուք $f(x)$-ը որոշված է X միջակայքում, և նրա ներքին x_0 կետը էքստրեմումի կետ է: Այդ դեպքում, կամ $\nexists$ $f'(x_0)$ կամ $f'(x_0)=0$: Միջակայքի այն ներքին կետը, որտեղ կա՛մ ածանցյալ չկա, կամ էլ այն հավասար է զրոյի, կոչվում է *կրիտիկական կետ.* Այսպիսով, ըստ թեորեմ 1-ի էքստրեմումի կետ կարող է լինել միայն կրիտիկական կետը:

Ապացուցում : Ըստ թեորեմի պայմանի $\exists$ $U_\delta(x_o)\subset X$ այնպիսին, որ $f(x)$-ը այդ շրջակայքում ընդունում է իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը նրա x_o ներքին կետում: Ուստի, եթե այդ կետում կա ածանցյալ, ապա ըստ Ֆերմայի թեորեմի՝ $f'(x_0)=0$: ■

Թեորեմ 2 (էքստրեմումի բավարար պայմանները):

Դիցուք՝ $f(x)$-ը որոշված է X միջակայքում, անընդհատ է միջակայքի ներքին x_0 կետում և $f'(x)$-ը «x_o կետով անցնելիս» փոխում է իր նշանը՝ պլյուսից մինուս (մինուսից պլյուս): Այսինքն՝ $\exists$ $U_\delta(x_0)\subset X$ այնպիսին, որ $\forall$ $x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ $\exists$ $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ և $\forall x\in(x_0;\ x_0+\delta)$ $\exists$ $f'(x) < 0$ $(f'(x)> 0)$: Այդ դեպքում x_0-ն խիստ մաքսիմումի (խիստ մինիմումի) կետ է:

Ապացուցում: Դիցուք՝ որոշակիության համար, $f'(x)$-ը «x_0 կետով անցնելիս» փոխում է նշանը պլյուսից մինուս: Թեորեմի պայման-

Ներից հետևում է (տե՛ս. 19, հետ. 2), որ f(x)-ը $(x_0-\delta;x_0]$ միջակայքում մոնոտոն աճող է, իսկ $[x_0;x_0+\delta)$ միջակայքում՝ մոնոտոն նվազող: Այսպիսով՝ $\forall x\in(x_0-\delta;x_0)$ $f(x)<f(x_0)$ և $\forall x\in(x_0;x_0+\delta)$: $f(x)<f(x_0)$: Ուրեմն x_0-ն մաքսիմումի կետ է: ■

21. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ f(x) ֆունկցիան որոշված է x_0-ի շրջակայքում և ունի այդ շրջակայքի յուրաքանչյուր կետում ածանցյալ $f'(x)=g(x)$: Եթե g(x) ֆունկցիան իր հերթին ունի ածանցյալ x_0 կետում, ապա $g'(x_0)$-ն կոչվում է f(x)-ի երկրորդ կարգի *ածանցյալ* x_0 կետում: $f''(x_0)=g'(x_0)=(f'(x))'|_{x=x_0}$ n կարգի ածանցյալը սահմանվում է ինդուկտիվ եղանակով: Եթե $\exists\, f^{(k)}(x)$ k=1,...,n-1 և $\exists\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$, ապա $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$:

Օրինակ 1: Հաշվել f(x)=cosx-ի ածանցյալները: $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-(\sin x)'=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$, $f^{IV}(x)=\cos x$...:

Այսպիսով՝ $(\cos x)^{(2n)}=(-1)^n\cos x$ (n=1,2...), իսկ $(\cos x)^{(2n+1)}=$ $=(-1)^{n+1}\sin x$ (n=0,1,2...):

2. f(x) = sinx: Նույն կերպ ստացվում է՝ $\sin^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin x$ (n=1,2,...) $\sin^{(2n+1)}(x)=(-1)^n\cos x$ (n=0,1,...):

Սահմանում 2: Դիցուք՝ f(x)-ը որոշված է և երկու անգամ դիֆերենցելի (a; b) միջակայքում: Այսինքն, այդ միջակայքում դիֆերենցելի են f(x)-ը և f'(x)-ը: Այդ դեպքում f(x) ֆունկցիայի x կետում երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ է կոչվում՝ $d^2f(x)=f''(x)dx^2$: Եթե f(x) ֆունկցիան n անգամ դիֆերենցելի է (a; b) միջակայքում, այսինքն դիֆերենցելի են $f(x)$-ը, $f'(x)$-ը, $,f^{(n-1)}(x)$-ը, ապա ասելով n կարգի դիֆերենցիալ x կետում հասկանում ենք՝ $\boxed{d^nf(x)=f^{(n)}(x)dx^n}$:

Վարժություն: Դիցուք՝ f(x)-ը և g(x)-ը n-անգամ դիֆերենցելի են X միջակայքի x կետում:

Հաշվի առնելով արտադրյալի ածանցման կանոնը ինդուկցիայի եղանակով, ապացուցել արտադրյալի ածանցման Լայբնիցի կանոնը՝

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f(x)^{(k)}\cdot g(x)^{(n-k)},\ \text{որտեղ}\ C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$f^{(0)}(x=f(x)$:

Որպես օրինակ հաշվել $(x^2\sin x)^{(100)}$:

Սահմանում 3: Կասենք, որ $f \in C^n < a,b >$, եթե $f^k(x) \in C < a;b >$, $k = 0,1,\ldots,n$:

22. ԼՈՊԻՏԱԼԻ* ԿԱՆՈՆՆԵՐԸ

Լոպիտալի կանոնները վերաբերվում են $\frac{0}{0}$ և $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություններին:

Թեորեմ 1: Եթե f(x) և g(x) ֆունկցիաները որոշված a կետի շրջակայքում ($g(x) \neq 0$), ունեն ածանցյալ a կետում, $g'(a) \neq 0$ և $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, ապա $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$:

Ապացուցում: f(x)-ը, g(x)-ը ունեն ածանցյալ a կետում, ուրեմն՝ այդ կետում նրանք անընդհատ են: Այսինքն՝ $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $g(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$:

Ուրեմն՝

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\left[\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]^{-1} = \frac{f'(a)}{g'(a)}: \blacksquare$$

Թեորեմ 2: Դիցուք՝ f(x) և g(x) ֆունկցիաները որոշված են a կետի «ծակված» $\overset{0}{U}_\delta(a)$ շրջակայքում $\forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$ $\exists$ f'(x) և g'(x) ($g'(x) \neq 0$), $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$ և $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ (K-ն կարող է լինել և անվերջ):

Այս պայմանների դեպքում՝ $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K$:

Ապացուցում. Ապացուցենք, որ $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$: Վերցնենք $\forall x \in (a, a+\delta)$ և դիտարկենք f(t) և g(t) ֆունկցիաները (a; x) միջակայ-

---

* Լոպիտալ Գիյոմ Ֆրանսուա Անտուան (1661 – 1704), ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

քում: Ներմուծենք օժանդակ ֆունկցիաներ որոշված $[a;x]$ հատվածի վրա:

$$\tilde f(t)=f(t),\ t\in(a;x],\ \tilde f(a)=0,\ \text{և}\ \ \tilde g(t)=g(t),\ t\in(a;x],\ \tilde g(a)=0:$$

Ակնհայտ է, որ $\tilde f,\tilde g\in C[a;x]$, քանի որ

$$\lim_{t\to a+0}\tilde f(t)=\lim_{t\to a+0}f(t)=0=\tilde f(a)$$

$$\text{և}\ \lim_{t\to a+0}\tilde g(t)=\lim_{t\to a+0}g(t)=0=\tilde g(a):$$

Պարզ է նաև, որ

$\forall t\in(a;x)\ \exists\ \tilde f'(t)=f'(t)\ \exists\ \tilde g'(t)=g'(t)\neq 0$: Ըստ Կոշիի թեորեմի

$\exists c_x\in(a;x)$ այնպիսին որ՝ $\dfrac{\tilde f(x)-\tilde f(a)}{\tilde g(x)-\tilde g(a)}=\dfrac{\tilde f'(c_x)}{\tilde g'(c_x)}$:

Այսինքն՝ $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\quad (c_x\in(a;x)):\qquad (1)$$

Ըստ թեորեմի պայմանի՝ $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=K,\ K\in R$ ($K=\infty$ դեպքը կքննարկենք առանձին):

Դա նշանակում է՝ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \gamma>0\ (\gamma<\delta)\ \forall x\in(a;\gamma)\ \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\varepsilon$:

Օգտվենք (1)-ից և հաշվի առնենք, որ $x\in(a;\gamma)\Rightarrow c_x\in(a;\gamma)$:

Կստանանք՝ $\forall x\in(a;\gamma)\quad \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-K\right|=\left|\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}-K\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$: Դիցուք՝ այժմ $K=\infty$, այսինքն՝ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \gamma\in(a;\delta)$

$\forall x\in(a;\gamma)\quad \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right|>\varepsilon$:

Ունենք՝ $\forall x\in(a;\gamma)\quad \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=\left|\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\right|>\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$:

Այն որ՝ $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$ ապացուցվում է նմանապես: ■

Լոպիտալի կանոններին վերաբերվող հաջորդ թեորեմները, ապացուցվում են ըստ էության նման ձևով: Բերենք միայն ձևակերպումները:

Թեորեմ 3: Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են և դիֆերենցելի $(a;+\infty)$ $((-\infty;a))$ միջակայքում, $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ և $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f'(x)/g'(x))=K$: Այդ դեպքում՝ $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)/g(x))=K$:

Թեորեմ $2'$: Նույնն է ինչ թեորեմ 2.- ը, միայն $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ պայմանը պետք է փոխարինել $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ պայմանով:

Թեորեմ $3'$: Նույն է ինչ թեորեմ 3-ը, միայն $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$ պայմանը պետք է փոխարինվի $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\infty$ պայմանով:

Դիտողություն: Այն դեպքում, երբ a-ն ֆունկցիայի որոշման տիրույթի (միջակայքի) ծայրակետ է, ապա Լոպիտալի կանոնները մնում են ուժի մեջ, միայն թե խոսքը համապատասխան միակողմանի սահմանների մասին է:

Օրինակ: Հաշվել հետևյալ սահմանը $K=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}$: Քանի որ $\ln\sin x-\ln x=\ln\frac{\sin x}{x}\underset{x\to+0}{\to}0$, ապա ունենք $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություն:

Օգտվելով թ.2-ից, կստանանք $K=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to+0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=$

$=\lim\limits_{x\to+0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$ (սահմանը հաշվելիս, $\sin^2 x$-ը փոխարինեցինք նրան համարժեք x^2-ով և երկու անգամ կիրառեցինք Լոպիտալի համապատասխան կանոնը:

23. ԹԵՅԼՈՐԻ* ԲԱՆԱՁԵՎԸ

Երբ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում և այդ կետում ունի ածանցյալ, ապա ֆունկցիան դիֆերենցելի է, այսինքն նրա աճը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0,$$

որտեղ $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-y_0$, $y_0=f(x_0)$: Ուրեմն գոյություն

---

* Թեյլոր Բրուկ (1685 – 1731), անգլիացի մաթեմատիկոս:

ունի գծային ֆունկցիա $P_1(x)=y_0+A(x-x_0)$, այնպիսին, որ՝ f(x) = $P_1(x)+o(x-x_0)$, $x\to x_0$: Ընդ որում $P_1(x_0)=y_0=f(x_0)$, $P_1'(x_0)=A=f'(x_0)$:

Դիցուք f(x) ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և ∃ $f^{(n)}(x_0)$ ($x_0\in X$, $n\in N$): Մեր առջև դնենք ավելի ընդհանուր խնդիր՝ գտնել այնպիսի $P_n(x;x_0)$ բազմանդամ, որ $f(x)=P_n(x;x_0)+o\left((x-x_0)^n\right)$, $x\to x_0$, և $P_n^{(k)}(x_0;x_0)=f^{(k)}(x_0)$ ($k=0,1,...,n$, $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$):

Սահմանում 1: $P_n(x;x_0)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$ բազմանդամը կոչվում է f(x)-ի Թեյլորի բազմանդամ, եթե՝ $P_n^{(k)}(x_0;x_0)=f^{(k)}(x_0)$ ($k=0,1,...,n$, $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$): (1)

Գտնենք a_k գործակիցները: Ըստ (1)-ի՝ $P_n^{(0)}(x_0;x_0)=f^{(0)}(x_0)$ $\Rightarrow a_0=f(x_0)$: Ունենք՝ $P_n'(x;x_0)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)$: Ըստ (1)-ի՝ $P^{(1)}(x_0;x_0)=f^{(1)}(x_0)$: Ուրեմն՝ $a_1=\dfrac{f'(x_0)}{1!}$: Ունենք նաև՝ $P_n''(x;x_0)=2!a_2+3!a_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$:

$P_n''(x_0;x_0)=f''(x_0)$ $\Rightarrow a_2=\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}$: Ինդուկցիայի եղանակով դժվար չէ ապացուցել, որ՝ $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ ($k=0,1,...,n$):

Այսպիսով՝ f(x)-ի Թեյլորի բազմանդամը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$P_n(x;x_0)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

կամ՝ $P_n(x;x_0)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Սահմանում 2: $\boxed{f(x)=P_n(x;x_0)+r_n(x;x_0)}$ (2)

առնչությունը կոչվում է Թեյլորի բանաձև, որտեղ $P_n(x;x_0)$ Թեյլորի բազմանդամն է, իսկ $r_n(x;x_0)=f(x)-P_n(x;x_0)$ կոչվում է մնացորդային անդամ:

Սահմանում 3: Ասում են, որ $r_n(x;x_0)$ ***մնացորդային անդամը ունի***

Պեանոյի տեսքը, եթե՝

$$\boxed{r_n(x;x_0)=0\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0}: \qquad (3)$$

Թեորեմ: Դիցուք՝ f(x) ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և $\exists f^{(n)}(x_0)$, $x_0\in X$: Դա նշանակում է, որ f(x)-ը n-1 անգամ դիֆերենցելի է x_0-ի շրջակայքում և $\exists\ f^{(n)}(x_0)$: Եթե x_0-ն ծայրակետ է, ապա շրջակայքը միակողմանի է:

Այս պայմանների դեպքում f(x) ֆունկցիայի Թեյլորի վերլուծության $r_n(x;x_0)$ մնացորդային անդամը ունի հետևյալ հատկությունը՝

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=0$$

Այսինքն, այն ունի Պեանոյի տեսքը՝ $r_n(x;x_0)=0\left((x-x_0)^n\right)$, $x\to x_0$:

Ապացույց: Քանի որ $r_n(x;x_0)=f(x)-P_n(x;x_0)$, ապա $r_n(x;x_0)$-ն n–1 անգամ դիֆերենցելի է x_0-ի շրջակայքում, ընդ որում՝

$$\lim_{x\to x_0} r_n^{(k)}(x;x_0)=\lim_{x\to x_0}\left[f^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x;x_0)\right]=f^{(k)}(x_0)-P_n^{(k)}(x_0;x_0)=0$$

$(k=0,1,\ldots,n-1)$:

Կիրառենք n–1 անգամ Լոպիտալի կանոնը (տե՛ս. 22, թ.2)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x;x_0)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x;x_0)}{n!(x-x_0)}:$$

Այժմ կիրառենք 22-ի թ.1-ը: Կստանանք՝

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{f^{(n)}(x_0)-P_n(x_0;x_0)}{n!}=0: \ \blacksquare$$

Մնացորդային անդամի Պեանոյի տեսքը միշտ չէ որ հարմար է, ստանանք մնացորդային անդամի այլ տեսքեր:

Դիցուք՝ f(x)-ը որոշված է $[x_0;x_0+\delta]$ միջակայքում, $f\in C^n[x_0;x_0+\delta]$ և $\forall x\in(x_0;x_0+\delta)\ \exists\ f^{(n+1)}(x)$: Վերցնենք $\forall x\in[x_0;x_0+\delta]$ և այն հաստատագրենք: Դիտարկենք օժանդակ ֆունկցիա՝

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

$z\in[x_0;x]$:

Պարզ է, որ $\varphi\in C[x_0;x]$, $\forall z\in(x;x_0)$ $\exists\varphi'(z)$ ընդ որում՝

* Պեանո Ջուզեպպե (1858 – 1932), իտալացի մաթեմատիկոս:

$$\varphi'(z)=-f'(z)+f'(z)-\frac{f''(z)}{1!}(x-z)+\frac{f''(z)}{1!}(x-z)-\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}}{n!}(x-z)^n=-\frac{f^{(n+1)}}{n!}(x-z)^n$$

Ներմուծենք նաև որևէ այլ օժանդակ ֆունկցիա՝ $\psi\in C[x_0;x]$ այնպիսին որ, $\forall z\in(x_0;\ x)$ $\exists\psi'(z)\neq0$: Կիրառենք Կոշիի թեորեմը $\varphi(z)$ և $\psi(z)$ ֆունկցիաների նկատմամբ.

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}\quad (x_0<c<x):$$

Քանի որ $\varphi(x)=0,\varphi(x_0)=r_n(x;x_0)$ և $\varphi'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$,

ապա $r_n(x;x_0)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}}{n!}(x-c)^n$:

Դիցուք $\psi(z)=(x-z)^p$ $p>0$: Այդ դեպքում $\psi'(z)=-p(x-z)^{p-1}\neq0$, $x_0<z<x$: Պարզ է, որ $\psi(z)$-ը բավարարում է Կոշիի թեորեմի բոլոր պայմաններին: Ուրեմն՝

$$r_n(x;x_0)=\frac{(x-x_0)^p}{p(x-c)^{p-1}}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n:$$ Քանի որ $c=x_0+\theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$, ապա՝ $x-c=(x-x_0)(1-\theta)$: Ուրեմն՝

$$r_n(x;x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{pn!}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1:\qquad (4)$$

Վերցնելով (4)-ի մեջ p=n+1 կստանանք ***մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքը***՝

$$\boxed{r_n(x;x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}:\qquad (5)$$

Եթե (4)-ի մեջ վերցնենք p=1, ապա կստանանք ***մնացորդային անդամի Կոշիի տեսքը***՝

$$\boxed{r_n(x;x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}}:\qquad (6)$$

Նկատենք, որ մնացորդային անդամի Լագրանժի (2) տեսքը հաճախ հարմար է մոտավոր հաշիվ կատարելիս:

24. ՈՐՈՇ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԹԵՅԼՈՐԻ (ՄԱԿԼՈՐԵՆԻ*) ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

Թեյլորի բանաձևը, երբ $x_0=0$ կոչվում է Մակլորենի բանաձև՝

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x;0)} \tag{1}$$

Վերլուծենք որոշ տարրական ֆունկցիաներ՝ ըստ Մակլորենի բանաձևի:

1^0 $f(x)=e^x$: $f^{(k)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(k)}(0)=1$: Այստեղից հետևում է, որ $f(x)=e^x$-ի համար (1)-ը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\boxed{e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\ O(x^n),\ x\to 0} \tag{2}$$

(2)-ի մեջ մնացորդային անդամը՝ $r_n(x;0)$-ն գրված է Պեանոյի տեսքով: Այդպես կվարվենք և հետագայում:

2^0 $f(x)=\sin x$: $f(0)=0$, $f'(x)=\cos x$, $f'(0)=1$, $f''(x)=-\sin$, $f''(0)=0$, $f'''(x)=-\cos x$, $f'''(0)=-1$ և այլն:

Այսպիսով՝ $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$, $k=0,1,\ldots$:

Ուրեմն՝ $$\boxed{\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ O(x^{2n+1}),\ x\to 0} \tag{3}$$

(3)-ի մեջ $O(x^{2n+1})$-ի փոխարեն կարելի է գրել՝ $O(x^{2n+2})$, քանի որ x-ի զույգ աստիճանները բացակայում են:

3^0 $f(x)=\sin x$: Հեշտ է պարզել որ՝

$f^{(2k)}(0)=(-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0)=0$, $k=0,1,\ldots$:

Ուրեմն՝ $$\boxed{\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n}),\ x\to 0} \tag{4}$$

(4)-ի մեջ $o(x^{2n})$–ի փոխարեն կարելի է գրել՝ $o(x^{2n+1})$:

4^0 $f(x)=(1+x)^\alpha$ $f(0)=1$, $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f'(0)=\alpha$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f''(0)=\alpha(\alpha-1)$:

---

* Մակլորեն Կոլին՝ (1698 – 1746), շոտլանդացի մաթեմատիկոս:

Այսպիսով՝ $f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1), k=1,2,...$:

Ուրեմն՝
$$\boxed{(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^{k}+o(x^{n}),\ x\to 0} \quad (5)$$

(երկանդամային վերլուծություն):

Նկատենք,որ երբ $\alpha=n$, ապա (4)-ը վերածվում է Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի, $o(x^n)=0$:

Եթե (5)-ի մեջ վերցնենք $\alpha=-1$ և x-ը փոխարինենք –x-ով, կստանանք՝

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum_{k=1}^{n}x^{k}+o(x^{n}),\ x\to 0}: \quad (6)$$

5°$f(x)=\ln(1+x)$:

$f(0)=0,\ f'(x)=(1+x)^{-1}, f'(0)=1\ f''(x)=-(1+x)^{-2},\ f''(0)=-1,$

$f'''(x)=1\cdot 2(1+x)^{-3}, f'''(0)=2!,\ f^{(4)}(x)=-3!(1+x)^{-4}, f^{(4)}(0)=-3!,...$:

Այսպիսով՝ $f^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}(k-1)!,\ k=1,2,...$:

Ուրեմն՝ $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}x^{k}+o(x^{n}),\ x\to 0$

կամ՝

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{k}}{k}+o(x^{n}), x\to 0}: \quad (7)$$

Վարժություն 1: Հաշվել cos59°-ը 10^{-6}-ի ճշտությամբ:

Դիտարկենք f(x)=cosx: Վերցնենք՝ $x_0=\frac{\pi}{3}, \Delta x=-\frac{\pi}{180}$ (ռադիան):

Հաշվի առնենք, որ $\forall k, \forall x, \left|f^{(k)}(x)\right|\le 1$ և օգտվենք մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքից:

Կստանանք՝ $\left|r_n(x;x_0)\right|\le\frac{|\Delta x|^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{\pi^{n+1}}{180(n+1)!}$:

Երբ n=2, ապա $|r_2(x;x_0)|<10^{-6}$, $|r_3(x;x_0)|<10^{-7}$:

Հետևաբար, օգտվելով (1)–ից՝

$\cos x=\cos x_0-\frac{\sin x_0}{1!}\Delta x-\frac{\cos x_0}{2!}\Delta x^{2}+r_2(x;x_0)$, ստանում ենք

Ըշված ճշտությամբ՝ $\cos 59^\circ \approx \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \dfrac{\pi}{180} - \dfrac{\cos 60^\circ}{2}\left(\dfrac{\pi}{180}\right)^2$

Որտեղից՝ $\cos 59^\circ \approx 0{,}515038$:

Վարժություն 2. Թեյլորի բանաձևի օգնությամբ հաշվել $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$: Սահմանը հաշվելիս, հարմար է օգտվել մնացորդային անդամի Պեանոյի տեսքից, ընդ որում հայտարարի x-ի մեկ աստիճանը ցույց է տալիս, որ համարիչը նույնպես պետք է վերլուծել ըստ Մակլորենի բանաձևի մինչև x -ի առաջին աստիճան: Ունենք՝

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} =$$

$$= e \cdot e^{-\frac{x}{2} + o(x)} = e \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right): \qquad (8)$$

(8)-ը ստանալիս հաշվի առանք, որ՝ $o\left(-\dfrac{x}{2} + o(x)\right) = o(x)$:

Ուրեմն՝ $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e\left(1 - \dfrac{x}{2} + o(x) - 1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} e\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{o(x)}{x}\right) = -\dfrac{e}{2}$

25. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ածանցյալի օգնությամբ մենք արդեն գիտենք, թե ինչպես գտնել մոնոտոնության, հաստատունության միջակայքերը: Ածանցյալների օգնությամբ մենք նաև լուծում ենք էքստրեմումներ գտնելու խնդիրը: Ածանցյալների օգնությամբ կարելի է նաև պարզել ֆունկցիայի այլ հատկությունները:

25.1 ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՈՒՌՈՒՑԻԿՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԳՈԳԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆ. ՇՐՋՄԱՆ ԿԵՏԵՐ

Դիցուք՝ $f : (a; b) \to R$ և x_1, x_2 -ը կամայական կետեր են (a; b)-ից

$(a<x_1<x_2<b)$: $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ կետերով տանենք ուղիղ:

Նրա հավասարումն է՝ $y=l(x)$,

որտեղ՝ $l(x)=\dfrac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}$ $(l(x_1)=f(x_1),\, l(x_2)=f(x_2))$:

Սահմանում 1: f ֆունկցիան կոչվում է *ուռուցիկ* (ուռուցիկ դեպի վար) (a;b) միջակայքի վրա, եթե $\forall x_1, x_2$ $a<x_1<x_2<b$ և $\forall x\in(x_1;x_2)$: $l(x)\geq f(x)$:

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ [AB] հատվածի յուրաքանչյուր $(x;l(x))$ կետ գտնվում է գրաֆիկի $(x;f(x))$ կետից ոչ ներքև:

Եթե ուռուցիկության պայմանի մեջ առկա է անհավասարության խիստ նշանը $(l(x)>f(x))$, ապա ֆունկցիան կոչվում է խիստ ուռուցիկ:

Սահմանում 2: f ֆունկցիան կոչվում է *գոգավոր* (ուռուցիկ դեպի վեր) (a; b)-ի վրա, եթե $\forall x_1, x_2$ $a<x_1<x_2<b$ և $\forall x\in(x_1;x_2)$: $l(x)\leq f(x)$: Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ [AB] հատվածի յուրաքանչյուր $(x;l(x))$ կետ գտնվում է գրաֆիկի $(x;f(x))$ կետից ոչ վերև: Եթե ուռուցիկության պայմանի մեջ առկա է անհավասարության խիստ նշանը $(l(x)<f(x))$, ապա ֆունկցիան կոչվում է խիստ գոգավոր:

Թեորեմ 1 (խիստ ուռուցիկության (գոգավորության) բավարար պայմանները). Եթե f ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է (a; b) միջակայքում և $\forall x\in(a;b)$ $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$, ապա f-ը խիստ ուռուցիկ է (գոգավոր է) (a; b)-ի վրա:

Ապացույց: Եթե՝ $a<x_1<x<x_2<b$, ապա՝

$$l(x)-f(x)=\frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)-f(x)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=$$

$$=\frac{[f(x_2)-f(x)](x-x_1)+[f(x_1)-f(x)](x_2-x)}{x_2-x_1}:$$

Կիրառելով Լագրանժի թեորեմը՝ կստանանք

$$l(x)-f(x)=\frac{f'(\eta)(x_2-x)(x-x_1)-f'(\xi)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1},$$

որտեղ $x_1<\xi<x<\eta<x_2$:

Նորից կիրառենք Լագրանժի թեորեմը՝

$$l(x)-f(x)=\frac{f''(\zeta)(x_2-x)(x-x_1)(\eta-\xi)}{x_2-x_1},\quad \xi<\zeta<\eta:$$

Եթե $\forall x \in (a;b)$: $f''(x)>0$, ապա մասնավորապես $f''(\zeta)>0$ և, ուրեմն՝ $l(x)>f(x)$, այսինքն՝ f ֆունկցիան ուռուցիկ է: Իսկ եթե $\forall x \in (a;b)$ $f''(x)<0 \Rightarrow f''(\zeta)<0$, ապա ստանում ենք, որ $l(x)<f(x)$ և, ուրեմն՝ f ֆունկցիան գոգավոր է: ■

Սահմանում 3: Դիցուք f $(a;b) \to R$ և f-ը անընդհատ է x_0 կետում ($x_0 \in (a;b)$) Այդ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի *շրջման կետ*, եթե այն հանդիսանում է խիստ ուռուցիկության և խիստ գոգավորության միջակայքերի ընդհանուր ծայրակետ: Այս դեպքում (x_0; $f(x_0)$) կետը կոչվում է գրաֆիկի շրջման կետ:

Օրինակ: $f(x)=x^3$, $f''(x)=6x$: Ակնհայտ է, որ այս դեպքում ($-\infty$; 0) միջակայքում ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է, իսկ (0;$+\infty$)-ում՝ խիստ գոգավոր: Ուրեմն՝ x=0 կետը հանդիսանում է ֆունկցիայի շրջման կետ:

Թեորեմ 2 (շրջման կետ լինելու անհրաժեշտ պայմանը):

Եթե $f \in C^2(a;b)$ $(f, f', f'' \in C(a;b))$ և $x_0 \in (a;b)$ շրջման կետ է, ապա $f''(x_0)=0$

Ապացույց: Եթե $f''(x_0)>0$ $(f''(x_0)<0)$, ապա շնորհիվ $f''(x)$-ի անընդհատության x_0 կետում $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ x_0-ի ինչ-որ $U_\delta(x_0)$ շրջակայքում: Ուրեմն՝ f-ը կլինի ուռուցիկ (գոգավոր) այդ շրջակայքում, որը հակասում է x_0-ի շրջման կետ լինելուն: ■

Թեորեմ 3 (շրջման կետի բավարար պայմանները): Եթե f ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է x_0-ի ինչ-որ շրջակայքում բացառությամբ գուցե այդ $x_0 \in (a;b)$ կետը, որտեղ ֆունկցիան անընդհատ է և այդ կետով անցնելիս f''-ը փոխում է իր նշանը ($\exists\, U_\delta(x_0) \subset (a;b)$), այնպես որ $\forall x \in (x_0-\delta; x_0)$, $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$, իսկ $\forall x \in (x_0; x_0+\delta)$ $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$, ապա x_0-ն կլինի շրջման կետ:

Ապացույց: Թեորեմ 1-ից հետևում է որ ($x_0-\delta$; x_0) միջակայքում ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է (գոգավոր է) և (x_0; $x_0+\delta$)-ում՝ խիստ գոգավոր (ուռուցիկ): Ուրեմն՝ x_0-ն շրջման կետ է: ■

26. ԱՍԻՄՊՏՈՏՆԵՐ

Սահմանում 1: Դիցուք $f: (a;+\infty) \to R$ $(f: (-\infty; a) \to R)$ Եթե $\exists$ k, $b \in R$ այնպիսիք, որ

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0 \quad \left(\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+b)]\right)=0:$$

$y=kx+b$ ուղիղը կոչվում է f ֆունկցիայի ասիմպտոտ, երբ $x\to+\infty$ (երբ $x\to-\infty$):

Ասիմպտոտի գոյությունը, երբ $x\to+\infty$ (երբ $x\to-\infty$) նշանակում է որ բավականաչափ մեծ (փոքր) x-ի համար f ֆունկցիայի գրաֆիկը մոտ է որոշակի ուղիղ գծի: $y=kx+b$ տեսքի ասիմպտոտը կոչվում է թեք ասիմպտոտ: Երբ $k=0$, ապա $y=b$ ուղիղը կոչվում է հորիզոնական ասիմպտոտ:

Դիցուք f ֆունկցիան ունի ասիմպտոտ, երբ $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$ դեպքը ուսումնասիրվում է նմանապես): Ուրեմն՝

$$f(x)=kx+b+\alpha(x) \quad \left(\alpha(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0\right): \qquad (1)$$

Բաժանենք (1)-ի երկու կողմը x-ի վրա և անցնենք սահմանի, երբ $x\to+\infty$:

$$\text{Կստանանք՝ } \exists \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k: \qquad (2)$$

Այսպիսով՝ (2)-ը անհրաժեշտ պայման է թեք ասիմպտոտի գոյության համար: Իսկ, եթե նաև՝ $\exists \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$, (3) ապա դա բավարար է թեք ասիմպտոտի գոյության համար:

Սահմանում 2: Դիցուք՝ $f\ \ D\to R$ ($D\subset R$) և x_0-ն D-ի սահմանային կետ է: Եթե այդ կետում միակողմանի սահմաններից գոնե մեկը անվերջ է, ապա $x=x_0$ ուղիղը կոչվում է f ֆունկցիայի ուղղաձիգ ասիմպտոտ:

Օրինակ: Գտնել $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x+4}}$ ֆունկցիայի ասիմպտոտները: Այս ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է՝ $D_f=(-\infty;-4)\cup[0;+\infty)$: Քանի որ $\lim_{x\to-4-0}f(x)=+\infty$, ապա $x=4$ ուղիղը ուղղաձիգ ասիպտոտ է:

Այժմ գտնենք ֆունկցիայի թեք ասիմպտոտը $x\to+\infty$-ի ձգտելիս, երբ $x\in[0;+\infty)$, ապա $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}$: Ըստ (2)-ի

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+4/x}}=1:$$

Ըստ (3)-ի $b=\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+4}}\right)=$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}\right)} = -4\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)} = -2:$$

Այսպիսով՝ $y = x - 2$ ուղիղը թեք ասիմպտոտ է, երբ $x \to +\infty$ -ի:

Որոնենք ֆունկցիայի ասիմպտոտը $x \to -\infty$-ի ձգտելիս: Երբ $x \in (-\infty; -4)$, ապա՝ $f(x) = -\frac{x\sqrt{-x}}{\sqrt{-4-x}}$:

Ունենք՝ $k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-4-x}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}} = -1$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{-x\sqrt{-x}}{\sqrt{-4-x}}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{\sqrt{-4-x}-\sqrt{-x}}{\sqrt{-4-x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{\sqrt{-4-x}\left(\sqrt{-4-x}+\sqrt{-x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)} = 2:$$

Այսպիսով՝ $y = 2 - x$ ուղիղը հանդիսանում է այս ֆունկցիայի թեք ասիմտոտ $x \to -\infty$-ի ձգտելիս :

27 ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳՐԱՖԻԿԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄ

Ֆունկցիայի գրաֆիկ կառուցելու համար նպատակահարմար է հետևյալ սխեման:

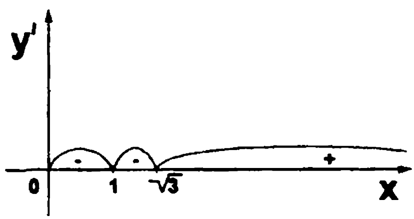
1. Գտնել որոշման տիրույթը, պարզել զույգությունը, կենտությունը, պարբերականությունը, (դրանց առկայությունը թույլ կտա կառուցել գրաֆիկը՝ նախ որոշման տիրույթի մի մասում և հետո համապատասխան ձևով այն շարունակել):
2. Գտնել ֆունկցիայի ասիմպտոտները:
3. Ածանցյալների օգնությամբ գտնել ֆունկցիայի մոնոտոնության, ուռուցիկության, գոգավորության միջակայքերը, էքստրեմումները, շրջման կետերը:
4. Գտնել ֆունկցիայի գրաֆիկի հատման կետերը առանցքների հետ:

Օրինակ: Կառուցել $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$: Ֆունկցիան կենտ է՝ $y(-x)=-y(x)$: Ուրեմն գրաֆիկը համաչափ է (0; 0) կետի նկատմամբ: Նախ կառուցենք այս ֆունկցիայի գրաֆիկը $[0;+\infty)$ միջակայքում: Քանի որ՝ $y(1-0)=-\infty$, $y(1+0)=+\infty$: Դա նշանակում է, որ x=1 ուղիղը ուղղաձիգ ասիմպտոտ է: Այժմ որոնենք թեք ասիմպտոտ $x\to+\infty$-ի ձգտելիս: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0$:

Բայց՝ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-x^{-2}}}=+\infty$: Ուստի ֆունկցիան թեք ասիմպտոտներ չունի:

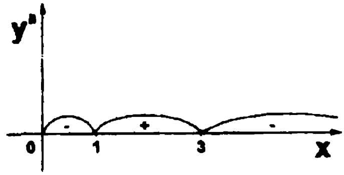
Հաշվենք առաջին կարգի ածանցյալը՝ $y'(x)=\frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{4/3}}$: Այն ցույց է տալիս, որ (տե՛ս Նկ. 8) ֆունկցիան մոնոտոն նվազող է $[0;1)$ և $(1;\sqrt{3}]$ միջակայքերում, մոնոտոն աճող է $[\sqrt{3};+\infty)$ միջակայքում, $x=\sqrt{3}$-ը ($y(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx1,38$) մինիմումի կետ է:



Նկ. 8

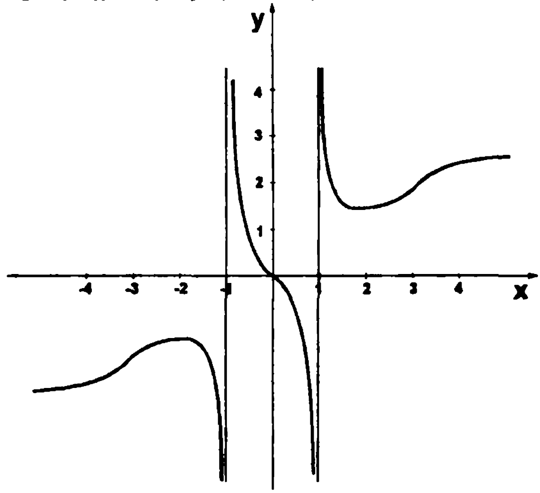
Երկրորդ կարգի ածանցյալը կլինի $y''(x)=\frac{2}{9}\frac{x(9-x^2)}{(x^2-1)^{7/3}}$:

Այստեղից հետևում է (տե՛ս Նկ. 9), որ ֆունկցիան գոգավոր է $(0;1)$, $(3;+\infty)$ միջակայքերում, ուռուցիկ է $(1;3)$ միջակայքում, $x=3$-ը ($y(3)=1,5$) շրջման կետ է:



Նկ. 9

Այժմ կառուցենք գրաֆիկը (տե՛ս Նկ. 10)



Նկ. 10

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Գտնել տվյալ A բազմության ճշգրիտ եզրերը՝ sup A և inf A, եթե

ա) A= $\{-1/n;\ n\in N\}$, բ) A=$\{1/n;\ n\in N\}$,

գ) A= $\{1+1/\sqrt{n}\ ;\ n\in N\}$, դ) A= $\{1-1/n^2;\ n\in N\}$,

ե) A=$(-\infty,\ a)$, զ) A=$(a;+\infty)$:

2. Ապացուցել, որ եթե $A \supset B$ և A-ն սահմանափակ է վերևից, ապա B-ն նույնպես սահմանափակ է վերևից և $\sup B \le \sup A$:

3. Ապացուցել որ եթե $A \supset B$ և B-ն սահմանափակ է ներքևից, ապա A-ն նույնպես սահմանափակ է ներքևից և $\inf A \ge \inf B$:

4. Ապացուցել, ելնելով սահմանի սահմանումից, որ ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=0,\ \lim_{n\to\infty}q^n=0\ \left(|q|<1\right),\ \lim_{n\to\infty}5^{-\sqrt{n}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+10^{-n^3}\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\lg\left(10+3^{-n}\right)=1,\ \ \lim_{n\to\infty}\ln\left(e^2+n^{-2}\right)=2\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(e-e^{-\sqrt{n}}\right)=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1,\ \lim_{n\to\infty}2^{-1/\sqrt{n}}=1,\ \lim_{n\to\infty}3^{\sqrt{n}}=+\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(n^3+1\right)=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}(-1)^n\lg\left(1+\sqrt[4]{n}\right)=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\cos\pi n\cdot\left(1+\sqrt[5]{n}\right)=\infty$$

5. Օգտվելով սահմանի հատկություններից ապացուցել, որ ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+n+1}=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\cos n}{n+\sqrt{n}+3}=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3^n+n!}{10^n+\sqrt{n}+1}=0\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+\sqrt[n]{n}+1}{\lg n+n!+2^n}=0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+4^n}{n!+\ln n+1}=+\infty\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}+2^n+1}{3^n+\lg(n+1)}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=1:$$

6. Գտնել տվյալ հաջորդականության վերին և ստորին սահմանները:

ա) $x_n=(2n-1)\sin\frac{1}{n}+(-1)^n$, բ) $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1}\cdot\cos\pi n$

գ) $x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}+2(-1)^n$ դ) $x_n=\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\cdot\sin\frac{\pi n}{2}$

ե) $x_n=\sqrt{2n+1}\left(2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)+5\cos\frac{\pi n}{2}$, զ) $x_n=\left(n^2+n+1\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}+4\cos\pi n$

7. Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության $\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ և $\{x_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ ենթահաջորդականությունները ձգտում են միևնույն (a) սահմանին, ապա՝ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$:

8. Ապացուցել, որ $\sin n$ $(\cos n)$ հաջորդականությունը չունի սահման (տարամետ է):

9. Ապացուցել, որ՝ $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$, $\lg 3$, $\lg 5$ թվերը իռացիոնալ են:

10. Ապացուցել, որ ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի գումարը (տարբերությունը) իռացիոնալ է:

11. Ի՞նչ կարելի է ասել ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի արտադրյալի մասին:

12. Ելնելով ֆունկցիայի սահմանի սահմանումից ըստ Կոշիի, ապացուցել, որ ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

ա) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^{-3}=\infty$, բ) $\lim\limits_{x\to2+0}\pi^{\sqrt[3]{x-2}}=1$, գ) $\lim\limits_{x\to1-0}e^{\sqrt{1-x}}=1$,

դ) $\lim\limits_{x\to2-0}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)=+\infty$, ե) $\lim\limits_{x\to\infty}\lg\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=-\infty$,

զ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2$, է) $\lim\limits_{x\to1+0}\lg\left(\sqrt{3+x}-2\right)=-\infty$,

ը) $\lim\limits_{x\to4-0}\pi^{\sqrt[3]{\frac{1}{4-x}}}=+\infty$, թ) $\lim\limits_{x\to2-0}\lg(2-x)=-\infty$, ժ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)=+\infty$,

ի) $\lim\limits_{x\to\infty}5^{x^2}=+\infty$, լ) $\lim\limits_{x\to2-0}\pi^{\frac{1}{x-2}}=0$, խ) $\lim\limits_{x\to2+0}\pi^{\frac{1}{x-2}}=+\infty$,

ծ) $\lim\limits_{x\to1+0}\lg\left(\sqrt{x+8}-3\right)=+\infty$:

13. Ելնելով ֆունկցիայի սահմանի սահմանումից ըստ Հայնեի, ապացուցել որ գոյություն չունի հետևյալ սահմանը:

ա) $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$, բ) $\lim\limits_{x\to0}\cos^2\frac{1}{x}$, գ) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x^2$, դ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\sqrt{x}$,

ե) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin\sqrt[4]{-x}$, զ) $\lim\limits_{x\to1-0}\cos\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, ը) $\lim\limits_{x\to2+0}\sin^3\frac{1}{\sqrt{x-2}}$:

14. Օգտվելով անընդհատության սահմանումից, ապացուցել, որ ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

ա) $f(x)=\sqrt{2x}$ ֆունկցիան անընդհատ է $x=0.5$ կետում,

բ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիան անընդհատ է յուրաքանչյուր $x_0\in R$ կետում,

գ) $f(x)=\sin\pi i$ ֆունկցիան անընդհատ է $x=0.5$ կետում,

դ) $f(x)=\ln(1+3x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $x=\frac{1}{3}$ կետում:

15. Պարզել, թե պարամետրերի ի՞նչ արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կլինի՝ ա) անընդհատ x=0 կետում, բ) կունենա ածանցյալ x=0 կետում, եթե՝

1) $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ ax+b, & x\le 0 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ ax+b, & x\le 0 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} a+b\,\mathrm{arctg}\,2x, & x\ge 0 \\ c\pi^{x}+d & x<0 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} a+b\arcsin 3x, & x\ge 0 \\ c\ln(1+2x)+d, & x<0 \end{cases}$ a

5) $f(x)=\begin{cases} a+b\sqrt[4]{1+2x}, & x>0 \\ c\arccos 2x & x\le 0 \end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}e^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ ax+b, & x\ge 0 \end{cases}$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ ԱՇՈՏ ԳՐԻԳՈՐԻ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ
(դասախոսություններ)

Առաջին մաս

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

Հրատ. խմբագիր Ս.Գ.Յավրյան
Տեխ խմբագիր՝ Վ.Զ.Բդոյան
Համակարգչային շարվածք՝ Ա.Գ.Ղալումյան

Պատվեր 174 Տպաքանակ 200

Երևանի պետական համալսարանի հրատարակչություն
Երևան, Ալ.Մանուկյան 1

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ.Մանուկյան 1