ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Ա.Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

ԵՐՐՈՐԴ ՄԱՍ

ՇԱՐՔԵՐ. ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2009

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ՀՏԴ 51 (07)
ԳՄԴ 22.11 g7
Ղ 249

Հրատարակության է երաշխավորել ԵՊՀ
մաթեմատիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

Հեղինակները հայտնում են իրենց խորին շնորհակալությունը պրոֆեսորներ Մ.Գ. Գրիգորյանին և Ա.Ա.Կիտբալյանին օգտակար դիտողությունների և խորհուրդների համար:

**ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ Ա.Գ., ՍԱՐԳՍՅԱՆ Ա.Ս.**

Ղ 249 Մաթեմատիկական անալիզ. դասախոսություններ, երրորդ մաս. Շարքեր, բազմապատիկ ինտեգրալներ: – Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2009 թ., 130 էջ:

Ձեռնարկում շարադրված են մաթեմատիկական անալիզի հետևյալ կարևոր բաժինները՝ թվային և ֆունկցիոնալ շարքեր, բազմապատիկ ինտեգրալներ՝ կորագիծ, կրկնակի, եռակի, մակերևութային: Այն հանդիսանում է Ա.Գ.Ղալումյանի «Մաթեմատիկական անալիզ», 1-ին մաս և Ա.Գ.Ղալումյան, Ա.Ս.Սարգսյանի, «Մաթեմատիկական անալիզ», 2-րդ մաս ձեռնարկների շարունակությունը, պահպանված են նախորդների նշանակումները:

Ձեռնարկը նախատեսված է ԵՊՀ-ի, նրա Իջևանի մասնաճյուղի, ինչպես նաև այլ ԲՈՒՀ-երի բնագիտական ֆակուլտետների ուսանողների համար:



ԳՄԴ 22.11 g7

ISBN 978-5-8084-1188-3

# I ԹՎԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

## 1. ՇԱՐՔԻ ԳՈՒՄԱՐ, ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ. ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ:

*Սահմանում 1:* Դիցուք տրված է $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ թվային հաջորդականությունը:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

սիմվոլը կոչվում է (թվային) շարք: Նկատենք, որ ուղղակիորեն, որպես անվերջ քանակով թվերի գումար (1)-ը հասկանալ չի լինի:

$a_n$-ը կոչվում է շարքի $n$-րդ կամ ընդհանուր անդամ, իսկ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ կոչվում է մասնակի գումարների հաջորդականություն:

*Սահմանում 2:* (1) շարքի գումար ($S$) ասելով հասկանում ենք մասնակի գումարների հաջորդականության վերջավոր սահմանը, երբ $n$-ը ձգտում է անվերջի: Այսինքն՝ $S = \lim_{n\to\infty} S_n$: Այդ դեպքում ասում ենք, որ (1) շարքը զուգամետ է և շարքին վերագրում ենք նրա գումարը՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$: Հակառակ դեպքում, երբ նշված սահմանը գոյություն չունի, կամ անվերջ է, շարքը կոչվում է տարամետ:

Օրինակ 1: Տրված է $\sum_{n=1}^{\infty} C$ շարքը, որտեղ $C$-ն հաստատուն է: Քանի որ $S_n = \sum_{k=1}^{n} C = n \cdot C$, ապա շարքը տարամետ է, երբ $C \neq 0$ և զուգամետ է, երբ $C = 0$ և այս դեպքում, պարզ է, որ $S = 0$:

Օրինակ 2: Դիցուք տրված է անվերջ, $q$ հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$: Ապացուցենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $0 < |q| < 1$ (անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա) և հաշվենք այդ շարքի գումարը: Երբ

$q=1$, ապա $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը հաստատուն հաջորդականություն է՝ $\forall n : a_n = a_1 \neq 0$ և, ուրեմն շարքը տարամետ է (տես օրինակ 1): Եթե $q \neq 1$, ապա $S_n = \dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$: Այն դեպքում, երբ $|q|>1$ շարքը տարամետ է, քանի որ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$: Շարքը տարամետ է նաև երբ $q=-1$, քանի որ $\nexists \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$: Իսկ եթե $0<|q|<1$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, ուրեմն շարքը զուգամետ է և $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$:

***Թեորեմ 1*** (զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը):
Որպեսզի (1) շարքը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է, որ նրա ընդհանուր անդամը լինի անվերջ փոքր՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

***Ապացույց:*** Տրված է, որ (1) շարքը զուգամետ է, այսինքն զուգամետ է նրա մասնակի գումարների $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \ (n=1,2,\ldots)$ հաջորդականությունը՝ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ :Բայց՝

$a_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$: ■

**Օրինակ 3:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ շարքը տարամետ է, քանի որ նրա ընդհանուր անդամը անվերջ փոքր չէ $\left(\nexists \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\right)$:

***Դիտողություն 1:*** Թեորեմ 1-ը հակադարձելի չէ, այսինքն ընդհանուր անդամի անվերջ փոքր լինելուց չի հետևում շարքի զուգամիտությունը (օրինակները տես ստորև):

***Թեորեմ 2:*** Եթե $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը զուգամետ են, իսկ $\alpha$-ն և $\beta$-ն հաստատուններ են, ապա զուգամետ է նաև

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n\right)$$

շարքը և՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha\cdot a_n+\beta\cdot b_n)=\alpha\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\cdot\sum_{n=1}^{\infty}b_n \ :$$

Թեորեմի ապացույցը անմիջապես հետևում է շարքի գումարի սահմանումից և հաջորդականության սահմանի համապատասխան հատկություններից [1]:

*Սահմանում 3:* Տրված ( $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ) (1) շարքի միջոցով կազմված

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{2}$$

շարքը կոչվում է (1) շարքի $n$-մնացորդ շարք, կամ պարզապես (1)-ի «պոչ»:

*Թեորեմ 3:* (1) և (2) շարքերը միաժամանակ զուգամետ են, կամ՝ տարամետ: Ընդ որում, (1) շարքի զուգամիտությունից հետևում է, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k=0$ («պոչը» անվերջ փոքր է): ■

*Ապացուցում:* (1) շարքի $m$-մասնակի գումարը նշանակենք $A_m=\sum_{k=1}^{m}a_k \ (m\in \mathbb{N})$, իսկ (2) շարքինը՝ $B_m^{(n)}=\sum_{k=n+1}^{n+m}a_k$ :

Պարզ է, որ $A_{n+m}=A_n+B_m^{(n)}$: Եթե (1)-ը զուգամետ է

$$(\exists \lim_{k\to\infty}A_k=A\in\mathbb{R}),$$

ապա $\exists \lim\limits_{m\to\infty}B_m^{(n)}=\lim\limits_{m\to\infty}A_{n+m}-\lim\limits_{m\to\infty}A_n=A-A_n=B^{(n)}$ ($B^{(n)}$-ը (2) շարքի գումարն է): ԵՒ հակառակը, եթե զուգամետ է (2)-ը

$$(\exists \lim_{m\to\infty}B_m^{(n)}=B^{(n)}\in\mathbb{R}),\ \text{ապա}$$

$\exists \lim\limits_{m\to\infty}A_{n+m}=A_n+\lim\limits_{m\to\infty}B_m^{(n)}=A_n+B^{(n)}=A$: Քանի, որ (1)-ի զուգամիտությունից հետևում է, որ $A-A_n=B^{(n)}$, ապա՝ $\lim\limits_{n\to\infty}B^{(n)}=A-A=0$: ■

*Դիտողություն 2:* Այս թեորեմից հետևում է, որ շարքի զուգամիտության վրա նրա ցանկացած վերջավոր թվով անդամները չեն ազդում (համեմատեք առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալների համար համապատասխան փաստի հետ [2]): Ուրեմն շարքի զուգամիտության պայմանները կարելի է ձևակերպել սկսած ինչ-որ համարից:

*Դիտողություն 3:* Թվային $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի և $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ անիսկական ինտեգրալի միջև կա մեծ նմանություն, այն կայանում է հետևյալում՝

$$a_n \leftrightarrow f(x),\ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \leftrightarrow\ F(A) = \int_1^{A} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \leftrightarrow\ \lim_{A\to+\infty} F(A) = I = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx:$$

Այդ պատճառով շարքերի զուգամիտության շատ հայտանիշներ նման են 1-ին սեռի անիսկական ինտեգրալների զուգամիտության համապատասխան հայտանիշներին, և անգամ որոշ պայմանների դեպքում, կա անմիջական կապ շարքերի և անիսկական ինտեգրալների զումիտության միջև (տես ստորև ինտեգրալային հայտանիշը):

## 2. ՈՉ ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ՇԱՐՔԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

***Թեորեմ 1:*** Դիցուք տրված է

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

ոչ բացասական անդամներով շարքը $(a_n \geq 0)$: Որպեսզի այն լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա մասնակի գումարների $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\ (n = 1, 2, \ldots)$ հաջորդականությունը լինի սահմանափակ վերևից:

*Ապացուցում:* Նախ նկատենք, որ $A_n$-ը սահմանափակ է ներքևից, $A_n \geq 0$: Քանի որ $\forall n$ : $A_n - A_{n-1} = a_n \geq 0$, ապա՝ $A_n \geq A_{n-1}$: Այսինքն $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չնվազող է: Ինչպես հայտնի է [1] մոնոտոն չնվազող հաջորդականությունը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն սահմանափակ է վերևից, հակառակ դեպքում $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$: Ընդ որում, եթե $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից, ապա

$$\lim_{n\to\infty} A_n = sup\{A_n, n\in \mathbb{N}\} = A\in \mathbb{R} : \blacksquare$$

*Դիտողություն 1:* Որպեսզի պարզենք տվյալ (1) շարքի զուգամիտությունը՝ հաճախ հարմար է լինում այն համեմատել մեկ այլ՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2)$$

շարքի զուգամիտության հետ: Որպես այդպիսի (2) շարք մեծ մասամբ հարմար է $b_n = \frac{1}{n^p}$ անդամներով շարքը: Ինչպես և անիսկական ինտեգրալների դեպքում ( $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$) այսպիսի տեսքի շարքը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $p>1$: Այս փաստի ապացույցը հենվում է նշված ինտեգրալի հատկության վրա (ստորև տես ինտեգրալային հայտանիշը):

Այժմ համեմատենք (1), (2) շարքերը զուգամիտության (տարամիտության) առումով:

### *Բաղդատման հայտանիշներ*

*Հայտանիշ 1:* Դիցուք տրված են (1), (2) ոչ բացասական անդամներով շարքերը և $\forall n \; : \; 0\le a_n \le b_n$: Այս դեպքում, (2) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (1)-ի զուգամիտությունը, կամ, որ նույնն է՝ (1)-ի տարամիտությունից հետևում է (2)-ի տարամիտությունը:

*Ապացուցում:* Դիցուք՝

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \; A = \lim_{n\to\infty} A_n, \; B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \; B = \lim_{n\to\infty} B_n :$$

Եթե (2)-ը զուգամետ է, ապա՝ $\exists sup\{B_n; n\in \mathbb{N}\} = B\in \mathbb{R}$ և, ուրեմն՝ $\forall n \; : \; B_n \le B$:

Քանի որ՝ $\forall n \; : \; 0\le a_n \le b_n \Rightarrow A_n \le B_n \le B$, ապա՝ $\forall n \; : \; A_n \le B$: Այստեղից հետևում է (1) շարքի զուգամիտությունը (տես թ.1):

Եթե (1)-ը տարամետ է, ապա (2)-ը չի կարող է լինել զուգամետ (հակառակ դեպքում, ըստ ապացուցածի, (1)-ը կլինի զուգամետ): ■

**Օրինակ 1:** Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(n^3)}{n^2+1}$ շարքի զուգամիտությունը:

Պարզ է, որ $0 \le \frac{\sin^4(n^3)}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2}$, իսկ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ շարքը զուգամետ է: Ուրեմն, ըստ հայտանիշ1-ի զուգամետ է սկզբնական շարքը:

Օրինակ 2: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n)}{n}$ շարքի զուգամիտությունը: Քանի որ $\frac{ln(n)}{n} \ge \frac{1}{n}$ $(n \ge 3)$, և $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ շարքը տարամետ է, ապա ըստ հայտանիշ (1)-ի քննարկվող շարքը տարամետ է:

*Հայտանիշ 2:* Դիցուք տրված են (1), (2) դրական անդամներով շարքերը և՝ $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ ($a_n$-ը համարժեք է $b_n$-ին, այսինքն՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$): Այս պայմանների առկայությամբ (1) և (2) շարքերը միաժամանակ զուգամետ են կամ՝ տարամետ:

*Ապացույց:* Դիցուք (2)-ը զուգամետ է: Քանի որ $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$, ապա $\exists N, \forall n \ge N$ : $\frac{a_n}{b_n} < 2 \Rightarrow a_n < 2b_n$: Այստեղից, ըստ հայտանիշ (1)-ի ստանում ենք շարք (1)-ի զուգամիտոըթյունը (տես նաև 1. դիտ. 2):

Այժմ, դիցուք (2)-ը տարամետ է: Քանի որ $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$, ապա $\exists N, \forall n \ge N$ : $\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{2} \Rightarrow a_n > \frac{1}{2}b_n$: Այստեղից, ըստ հայտանիշ (1)-ի ստանում ենք շարք (1)-ի տարամիտությունը: ■

*Դիտողություն 2:* Հայտանիշ 2-ում, $a_n$-ը համարժեք է $b_n$-ին պայմանը կարելի է փոխարինել հետևյալ պայմանով՝ $a_n$-ը նույն կարգի անվերջ փոքր է, ինչ $b_n$-ը, այսինքն՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = C \in \mathbb{R}, C > 0$: Բայց դա նույնն է, ինչ՝ $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} C \cdot b_n$ :

Օրինակ 3: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln\left(1+sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{(n^2+1)^p}$ շարքի զուգամիտությունը: Քանի որ $ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}x$, $sinx\underset{x\to 0}{\sim}x$ և $n^2+1=n^2\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}n^2$,

ապա $\dfrac{ln\left(1+sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\left(n^2+1\right)^p}\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{sin\frac{1}{n}}{n^{2p}}\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^{2p+1}}$: Ըստ հայտանիշ 2.-ի ստա-

նում ենք, որ շարք $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ -ը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $2p+1>1$ ( $p>0$ ):

Այն դեպքերում, երբ $\forall p\in\mathbb{R}$ թվի համար $a_n$ -ը նույն կարգի ան-վերջ փոքր չէ ինչ $\frac{1}{n^p}$ -ն, օգտակար են հետևյալ հայտանիշները:

*Հայտանիշ 3:* Դիցուք տրված են (1), (2) դրական անդամներով շարքերը, և՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$: Այդ դեպքում (2)-ի զուգամիտությունից հետևում է (1)-ի զուգամիտությունը:

Ապացույցը հենվում է այն փաստի վրա, որ

$$\exists N,\ \forall n\geq N\ :\ \frac{a_n}{b_n}<1:$$

*Հայտանիշ 4:* Դիցուք տրված են (1), (2) դրական անդամներով շարքերը, և՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$: Այդ դեպքում (2)-ի տարամիտությունից հետևում է (1)-ի տարամիտությունը:

Ապացույցը բխում է հետևյալից՝ $\exists N,\ \forall n\geq N\ :\ \frac{a_n}{b_n}>1$:

Օրինակ 4: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}n^p\cdot e^{-\sqrt{n}}$ շարքի զուգամիտությունը: Դի-տարկենք զուգամետ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ շարքը: Պարզ է, որ $(n^p\cdot e^{-\sqrt{n}}):\frac{1}{n^2}=n^{p+2}\cdot e^{-\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\to}0$: Ուրեմն, ըստ հայտանիշ 3.-ի յուրա-քանչյուր $p\in\mathbb{R}$ -ի համար $\sum_{n=1}^{\infty}n^p\cdot e^{-\sqrt{n}}$ շարքը զուգամետ է:

Օրինակ 5: Պարզել $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)\cdot\sqrt{n}}$ շարքի զուգամիտությունը: Դիտարկենք տարամետ շարք $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$ $(\lambda<1)$: Պարզ է, որ

$(\frac{1}{ln(n+1)\cdot\sqrt{n}}):\frac{1}{n^{\lambda}}=\frac{n^{\lambda-0,5}}{ln(n+1)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$, եթե $\lambda>0,5$ $(0,5<\lambda<1)$:

Ուրեմն, ըստ հայտանիշ 4-ի $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)\cdot\sqrt{n}}$ շարքը տարամետ է:

***Թեորեմ 2*** (Դ՝Ալամբերի* հայտանիշը):
Դիցուք տրված է դրական անդամներով
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ (3) շարքը և՝ $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$:
Այդ դեպքում, եթե՝
1. $D<1$, ապա (3) շարքը զուգամետ է,
2. $D>1$ ($D$-ն կարող է լինել $+\infty$ ),ապա (3)-ը տարամետ է:
3. $D=1$, ապա ոչինչ պնդել չենք կարող (կան և զուգամետ և տարամետ շարքերի օրինակներ):

***Ապացույց:*** Եթե $D<1$, ապա որևէ $q\in(D;1)$ թվի համար կունենանք՝ $\exists N,\forall n\geq N$ : $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<q<1$:

Այստեղից՝ $\frac{a_{N+1}}{a_N}<q,\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q,...,\frac{a_n}{a_{n-1}}<q$ $(n>N)$:

Բազմապատկելով այս $n-N$ թվով անհավասարությունները, կստանանք՝ $\frac{a_n}{a_N}<q^{n-N}$: Ուրեմն՝ $a_n<\frac{a_N}{q^N}\cdot q^n$ $(n>N)$: Քանի որ $\frac{a_N}{q^N}\cdot\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}q^n$ շարքը զուգամետ է $(0<q<1)$, ապա զուգամետ է նաև շարք (3)-ը (տես1., դիտ. 2):

Եթե $D>1$, ապա $\exists N,\forall n\geq N$ : $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, ուրեմն

---

* *Դ՝Ալամբեր Ժան Լեռոն* (1717-1783 )-ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

$a_{n+1} > a_n > 0 \ (n \geq N)$: Այստեղից հետևում է, որ $a_n$ հաջորդականությունը մոնոտոն աճող է, և, ուրեմն՝ $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$: Որտեղից հետևում է (3) շարքի տարամիտությունը:

Ցույց տալու համար, որ $D=1$ դեպքում ոչինչ պնդել չի լինի, բերենք երկու օրինակ:

Օրինակ 6: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{1}{n^2}$: Այս շարքը զուգամետ է, և պարզ է, որ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$:

Օրինակ 7: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{1}{n}$: Այս շարքը տարամետ է, բայց էլի՝ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$: ■

***Թեորեմ 2*** (Կոշիի հայտանիշը):

Դիցուք տրված է ոչ բացասական անդամներով $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0)$ (4) շարքը և $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$: Այդ դեպքում, եթե՝

1. $K < 1$, ապա (4) շարքը զուգամետ է,
2. $K > 1$ ($K$-ն կարող է լինել $+\infty$ ),ապա (4)-ը տարամետ է:
3. $K = 1$, ապա ոչինչ պնդել չենք կարող (կան և զուգամետ և տարամետ շարքերի օրինակներ):

***Ապացույց:*** Եթե $K < 1$, ապա որևէ $q \in (K;1)$ թվի համար կունենանք՝ $\exists N, \forall n \geq N \ : 0 \leq \sqrt[n]{a_n} < q < 1$: Այստեղից $a_n < q^n, n \geq N$: Քանի որ $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ շարքը զուգամետ է $(0 < q < 1)$, ապա զուգամետ է նաև (4) շարքը:

Եթե $K > 1$, ապա $\exists N, \forall n \geq N \ : \sqrt[n]{a_n} > 1$, ուրեմն $a_n > 1 \ (n \geq N)$: Այստեղից հետևում է, որ $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$, որտեղից հետևում է (4) շարքի տարամիտությունը:

Ցույց տալու համար, որ $K = 1$ դեպքում ոչինչ պնդել չի լինի կարելի է քննարկել նախորդ երկու օրինակները, որոնցից յուրաքանչյուրում, ինչպես հեշտ է համոզվել, $K = 1$ ( պետք է վերհիշել, որ՝ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$): ■

*Դիտողություն 3*. Հնարավոր է, որ՝ $\nexists \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, այդ դեպքում Կոշիի հայտանիշում $K$-ի դերում հանդես է գալիս այդ արժատի վերին սահմանը՝ $K=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$ (տես [3]):

*Դիտողություն 4*. Հայտնի է, որ եթե $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$, ապա $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=D$ (տես [3],[12]): Այնպես, որ, եթե Դ՚Ալամբերի հայտանիշը բացահայտում է զուգամիտությունը, ապա նույնը կարելի է ասել Կոշիի հայտանիշի մասին: Բայց կարող է լինել այնպես, որ՝ $\nexists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, բայց՝ $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\neq 1$: Այս իմաստով Կոշիի հայտանիշը ավելի «ուժեղ է»: Ասածը մեկնաբանենք հետևյալ օրինակի միջոցով:

**Օրինակ 8:** Դիտարկենք

$$1+a+a\cdot b+a^2\cdot b+a^2\cdot b^2+\ldots+a^{n-1}\cdot b^{n-1}+a^n\cdot b^{n-1}+a^n\cdot b^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$$

շարքը, $0<a<1<b, a\cdot b<1$, օրինակ՝ $a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$: Պարզ է, որ $\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}}=b\xrightarrow[n\to\infty]{}b>1$, իսկ $\frac{c_{2n}}{c_{2n-1}}=a\xrightarrow[n\to\infty]{}a<1$: Այսպիսով, այստեղ Դ՚Ալամբերի հայտանիշը անօգուտ է:

Բայց $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=a\cdot b<1$, ուրեմն, ըստ Կոշիի հայտանիշի, շարք $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$-ը զուգամետ է:

*Թեորեմ 3* (Մակլորան-Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը):

Դիցուք $f\in C[1;+\infty)$, $f$-ը մոնոտոն չաճող է և՝ ոչ բացասական: Դիտարկենք

$$\int_{1}^{+\infty}f(x)\,dx \tag{5}$$

անիսկական ինտեգրալը և հետևյալ շարքը

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n = f(n)) : \tag{6}$$

Նշված պայմանների առկայությամբ (5) անիսկական ինտեգրալը և (6) շարքը միաժամանակ զուգամետ են, կամ տարամետ:

***Ապացույց:*** Դիցուք $F(A) = \int_1^A f(t)\,dt$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ : Եթե $k \le t \le k+1$, ապա, շնորհիվ $f$ ֆունկցիայի մոնոտոն չաճող լինելու, ստանում ենք $a_{k+1} = f(k+1) \le f(t) \le f(k) = a_k$ $(k = 1,2,\dots,n)$: Ինտեգրելով այս անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\int_k^{k+1} a_{k+1}\,dt \le \int_k^{k+1} f(t)\,dt \le \int_k^{k+1} a_k\,dt ,$$

կամ $a_{k+1} \le \int_k^{k+1} f(t)\,dt \le a_k$, $k = 1,\dots,n$ : Գումարելով ստացված անհավասարությունները, կստանանք՝

$$a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1} \le \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt + \dots + \int_n^{n+1} f(t)\,dt \le$$

$$\le a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{, կամ՝}$$

$$S_{n+1} - a_1 \le F(n+1) \le S_n : \tag{7}$$

Դիցուք (5)-ը զուգամետ է, այսինքն

$$\exists \lim_{A\to\infty} F(A) = \sup\{F(A)\} = I \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \forall A \ge 1 \ : \ F(A) \le I : \tag{8}$$

(7), (8)-ից հետևում է, որ

$$\forall n \ : \ S_{n+1} \le a_1 + F(n+1) \le a_1 + I \ \Rightarrow \ S_{n+1} \le a_1 + I :$$

Այսինքն $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից և, ուրեմն (6) շարքը զուգամետ է:

Այն, որ (5)-ի տարամիտությունից հետևում է (6)-ի տարամիտությունը համարժեք է նրան, որ (6)-ի զուգամիտությունից հետևում է (5)-ի զուգամիտությունը: Դիցուք (6)-ը զուգամետ է, այսինքն՝

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \sup\{S_n\} = S \in \boldsymbol{R} \ \Rightarrow \ \forall n \ : \ S_n \le S : \tag{9}$$

Պարզ է, որ $\forall A \ge 1, \exists\, n \ : \ A \le n+1$: Հաշվի առնելով (7)-ը և (9)-ը ստանում ենք՝

$$\forall A \geq 1 \ : \ F(A) \leq F(n+1) \leq S_n \leq S \ \Rightarrow \ F(A) \leq S:$$

Այսինքն, $F(A)$-ն սահմանափակ է վերևից, հետևաբար (5)-ը զուգամետ է: ■

*Դիտողություն 5.* Պարզ է, որ թեորեմը ճնում է ուժի մեջ, եթե շարքի մեջ գումարը սկսվի ինչ-որ $n_0$ ($n_0>1$) համարից (այդ դեպքում ինտեգրալի ստորին սահմանը $n_0$-ն է):

**Օրինակ 9:** Պարզել $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ շարքի զուգամիտությունը կախված $p$ պարամետրից: Պարզ է, որ $p \leq 0$ դեպքում շարքը տարամետ է, քանի որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} \neq 0$:

Դիցուք $p>0$ և $f(x)=\frac{1}{x^p}$: Այս ֆունկցիան բավարարում է թեորեմ 3-ի պայմաններին և, քանի որ $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $p>1$, ապա նույնը կարելի է ասել $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ շարքի մասին:

**Օրինակ 10:** Պարզել $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot \ln^p(n)}$ շարքի զուգամիտությունը:

Եթե $p \leq 0$, ապա $\frac{1}{n\cdot \ln^p(n)} \geq \frac{1}{n}$, $n \geq 3$, ուրեմն շարքը տարամետ է:

Եթե $p>0$, ապա $f(x)=\frac{1}{x\cdot \ln^p(x)}$, $x \geq 2$ ֆունկցիան բավարարում է թեորեմ 3-ի պայմաններին, իսկ

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot \ln^p(x)}=\int\limits_2^{+\infty}\frac{d\ln(x)}{\ln^p(x)}=\int\limits_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^p} \ \ (t=\ln x)$$

ինտեգրալը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $p>1$, ուրեմն նույնը կարելի է ասել շարքի մասին:

## 3. ՆՇԱՆԱՓՈԽ ՇԱՐՔԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

Եթե շարքի անդամները (ինչ-որ համարից սկսած) ոչ դրական են, ապա բազմապատկելով շարքի անդամները -1-ով (դա չի ազդի զուգամիտության վրա), կստանանք ոչ բացասական անդամներով շարք, որն արդեն ուսումնասիրված է նախորդ բաժնում: Ուրեմն հետաքրքիրն այն դեպքն է, երբ շարքի անդամների մեջ կան անթիվ բազմությամբ թե դրական, թե բացասական անդամներ:

Դիցուք տրված է

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

շարքը և՝ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ (n = 1,2,...)$:

***Թեորեմ1 (զուգամիտության սկզբունքը):***

Որպեսզի (1) շարքը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն բավարարի հետևյալ (Կոշիի) պայմանին՝

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_\varepsilon \ , \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \ : \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon : \tag{2}$$

***Ապացուցում:*** Շարքի զուգամիտությունը համարժեք է $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականության զուգամիտությանը, որն իր հերթին համարժեք է Կոշիի պայմանի տեղի ունենալուն (ֆունդամենտալությանը): Այսինքն՝ $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_\varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \ : \ \left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon$: Քանի որ $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$ , ապա ստանում ենք (2)-ը: ■

***Սահմանում1:*** (1) շարքը կոչվում է **բացարձակ զուգամետ**, եթե զուգամետ է

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{3}$$

շարքը:

***Թեորեմ 2:*** Բացարձակ զուգամետ շարքը զուգամետ է, այսինքն, (3) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (1)-ի զուգամիտությունը:

***Ապացուցում:*** (3) շարքի զուգամիտությունից հետևում է, որ այն բավարարում է Կոշիի (2) պայմանին, այսինքն՝

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n\ge n_\varepsilon,\forall p\in\mathbb{N}\ :\ \sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\varepsilon:$$

Քանի որ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|<\varepsilon$, ապա ստանում ենք, որ (1) շարքը նույնպես բավարարում է Կոշիի (2) պայմանին և, ուրեմն (1)-ը զուգամետ է: ■

Օրինակ1: Պարզել $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3(n!)}{n^2+n+5}$ շարքի զուգամիտությունը:

Քանի որ $\left|\frac{\sin^3(n!)}{n^2+n+5}\right|\le\frac{1}{n^2}$ և $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ շարքը զուգամետ է, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3(n!)}{n^2+n+5}$ շարքը բացարձակ զուգամետ է:

*Դիտողություն 1*: Թեորեմ 2-ը հակադարձելի չէ, այսինքն $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը կարող է լինել զուգամետ, բայց $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ շարքը՝ տարամետ: Այդպիսի շարքը կոչվում է ոչ բացարձակ, կամ պայմանական զուգամետ: Պայմանական զուգամետ շարքերի օրինակներ կբերենք ստորև:

*Սահմանում 2:* Շարքը կոչվում է նշանահաջորդող, եթե նրա անդամների նշանները մեկ ընդ մեջ փոփոխվում են:

*Թեորեմ 3* (Լայբնիցի հայտանիշը):
Եթե տրված է նշանահաջորդող

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot c_n\quad (c_n\ge 0)\tag{4}$$

շարքը, որտեղ $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չաճող է և $\lim_{n\to\infty}c_n=0$, ապա (4) շարքը զուգամետ է:

*Ապացուցում:* Եթե $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\ (n=1,2,\ldots)$, ապա՝

$$S_{2m}=(c_1-c_2)+(c_3-c_4)+\ldots+(c_{2m-1}-c_{2m}):\tag{5}$$

Հաշվի առնելով այն, որ (5)-ում փակագծերից յուրաքանչյուրը ոչ բացասական է ($\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չաճող է) ստանում ենք՝ $S_{2m+2}-S_{2m}=c_{2m+1}-c_{2m+2}\geq 0 \Rightarrow S_{2m+2}\geq S_{2m}$: Այսինքն, $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չնվազող է: Ունենք նաև՝

$$S_{2m}=c_1-(c_2-c_3)-\ldots-(c_{2m-2}-c_{2m-1})-c_{2m}\leq c_1 \Rightarrow S_{2m}\leq c_1: \quad (6)$$

Ուրեմն $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը նաև սահմանափակ է վերևից: Այսպիսով ստացանք, որ $\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}=S\in\mathbb{R}$: Մնում է ցույց տալ, որ $S_{2m+1}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} S$: Քանի որ $\lim\limits_{m\to\infty} c_{2m+1}=0$ ($\{c_{2m+1}\}_{m=1}^{\infty}$-ը հանդիսանում է $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ անվերջ փոքր հաջորդականության ենթահաջորդականություն), ապա՝

$$S_{2m+1}=S_{2m}+c_{2m+1}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} S \Rightarrow \exists\lim_{n\to\infty} S_n=S: \blacksquare$$

Լայբնիցի թեորեմի պայմաններին բավարարող շարքը ընդունված է անվանել լայբնիցյան շարք:

*Դիտողություն 1*: Նախ նկատենք, որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot c_n$ $(c_n\geq 0)$ շարքը, երբ $c_n$-ը բավարարում է թեորեմի պայմաններին, նույնպես զուգամետ է ( (4) շարքի անդամները բազմապատկված են -1-ով): Այդ շարքը նույնպես կոչվում է լայբնիցյան:

*Դիտողություն 2*: Թեորեմի ապացուցման ընթացքում (տես (6)) ստացված $S_{2m}\leq c_1$ անհավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ $m$-ը ձգտում է անվերջի, կստանանք՝ $S\leq c_1$: Պարզ է, որ ընդհանուր տեսքի լայբնիցյան շարքերի համար (տես դիտողություն1) ճիշտ է $|S|\leq c_1$ անհավասարությունը: Ուրեմն, լայբնիցյան շարքի համար ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը՝

$$|S_n-S|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\right|\leq|a_{n+1}| \quad \left(a_n=(-1)^{n-1}c_n, c_n\geq 0\right): \quad (7)$$

Ստացված (7) գնահատականը օգտակար է, օրինակ, լայբնիցյան շարքի գումարը ցանկացած, նախապես տրված ճշտությամբ, մոտավոր հաշվելու համար:

***Աբելի ձևափոխությունը:***

Դիցուք տրված են $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականություններ

$\left(A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,\ B_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \beta_i\right)$ $(n \in \mathbb{N})$: ճիշտ է հետևյալ բանաձևը:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \beta_k = \beta_n \cdot A_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_{k+1} - \beta_k) \cdot A_k}, \qquad (8)$$

((8)-ը մասերով ինտեգրման բանաձևի նմանակն է դիսկրետ դեպքում):

*Ապացուցում:* Քանի, որ

$\alpha_1 = A_1, \alpha_2 = A_2 - A_1, \ldots, \alpha_n = A_n - A_{n-1}$, ապա՝

$$S_n = A_1 \cdot \beta_1 + (A_2 - A_1) \cdot \beta_2 + (A_3 - A_2) \cdot \beta_3 + \ldots + (A_n - A_{n-1}) \cdot \beta_n = A_1 \cdot (\beta_1 - \beta_2) +$$

$$+ A_2 \cdot (\beta_2 - \beta_3) + \ldots + A_{n-1} \cdot (\beta_{n-1} - \beta_n) + A_n \cdot \beta_n = A_n \cdot \beta_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \cdot (\beta_{k+1} - \beta_k):$$

■

(8)-ից ստացվում է $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \beta_k$ գումարի համար հետևյալ գնահատականը՝

*Աբելի լեմմա.*

Դիցուք $A_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$-ն սահմանափակ է

$$(\exists L \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : |A_n| \le L),$$

իսկ $\beta_n$-ը մոնոտոն չաճող է (չնվազող է): Այդ դեպքում ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \beta_k\right| \le L(|\beta_1| + 2|\beta_n|): \qquad (9)$$

Իրոք, քանի որ $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն է, այսինքն՝ $\forall k = 1, 2, \ldots, n-1$-ի համար $\beta_{k+1} - \beta_k$ տարբերությունները ունեն միևնույն նշանը, ապա (8)-ից ստանում ենք՝

$$|S_n| = \left|\beta_n \cdot A_n - \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_{k+1} - \beta_k) \cdot A_k\right| \le |A_n| \cdot |\beta_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |A_k| \cdot |\beta_{k+1} - \beta_k| \le$$

$$\le L(|\beta_n| + \left|\sum_{k=1}^{n-1} (\beta_{k+1} - \beta_k)\right|) \le L(|\beta_n| + |\beta_n - \beta_1|) \le L(2|\beta_n| + |\beta_1|):$$

*Դիտողություն 3.* Աբելի լեմմայում գումարը կարող է սկսվել մեկից մեծ բնական թվից:

***Թեորեմ 4 (Աբելի հայտանիշը):***
Դիցուք տրված է շարք,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n , \tag{10}$$

որտեղ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, իսկ $b_n$-ը մոնոտոն է և սահմանափակ ($\exists\, C>0$, $\forall n\in N$ : $|b_n|\le C$): Այս պայմանների առկայությամբ (10) շարքը զուգամետ է:

*Ապացույց:* Դիցուք $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\cdot b_k$ : Օգտվենք շարքի զուգամիտության Կոշիի սկզբունքից (տես 3, թեորեմ1): Քանի որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, ապա՝

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\, n_\varepsilon,\ \forall n\ge n_\varepsilon,\ \forall m\in N\ :\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right|<\frac{\varepsilon}{3C}:$$

Օգտվելով նաև Աբելի լեմմայից (տես (9)), ստանում ենք՝

$$|S_{n+m}-S_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\cdot b_k\right|\le\frac{\varepsilon}{3C}\left(|b_{n+1}|+2|b_{n+m}|\right)$$

$$\le\frac{\varepsilon}{3C}3C=\varepsilon\Rightarrow|S_{n+m}-S_n|<\varepsilon\ (n\ge n_\varepsilon,\ m\in N),$$

որն էլ նշանակում է, որ (10) շարքը զուգամետ է: ■

***Թեորեմ 5 (Դիրիխլեի հայտանիշը):***

Դիցուք տրված է (10) շարքը, որի $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ $(n=1,2,\ldots)$ մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ է ($\exists\, L$, $\forall n$ : $|A_n|\le L$), իսկ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$-ը մոնոտոն չաճող է և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$: Այս պայմանների առկայությամբ շարք (10)-ը զուգամետ է:

*Ապացույց:* Թեորեմի պայմաններից հետևում է,որ $b_n\ge 0$:

(9)-ից, ստանում ենք՝ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k\cdot b_k\right|\le L\left(b_{n+1}+2b_{n+m}\right)\le 3Lb_{n+1}$:

Քանի որ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, ապա՝ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon$ : $b_n \le \frac{\varepsilon}{3L}$: Այսպի-սով՝ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \cdot b_k\right| \le \varepsilon \; (n \ge n_\varepsilon)$: ■

**Խնդիր1:** Ապացուցել, որ եթե

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(ka), \; B_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(ka), \quad \alpha \ne 2\pi m (m \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{ապա՝ } |A_n| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}, \quad |B_n| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}:$$

**Ցուցում.** բազմապատկել $A_n$-ը և $B_n$-ը $2\sin\frac{\alpha}{2}$-ով:

**Օրինակ 1:** Ապացուցենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ շարքը զուգամիտ է:

Կիրառենք Դիրիխլեի հայտանիշը, վերցնելով որպես $a_n = \sin(n)$ $\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k)\right| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}\right.$, տես խնդիր1), իսկ՝ $b_n = \frac{1}{n}$ (այն մո-նոտոն նվազելով ձգտում է զրոյի):

**Օրինակ 2:** Ապացուցենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sin(n)}{n}$ շարքը զուգամետ է:

Կիրառենք Աբելի հայտանիշը. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ շարքը զուգամետ է, իսկ $e^{-\frac{1}{n}}$-ը մոնոտոն աճող է և սահմանափակ ($0 < e^{-\frac{1}{n}} < 1$):

## 4. ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք տրված է շարք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

և $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(n_0 = 0, n_k \in \mathbf{N}, k = 1,2,\ldots)$ ոչ բացասական ամբողջ թվերի մոնոտոն աճող հաջորդականություն: Կազմենք նոր շարք

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k , \tag{2}$$

որտեղ $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k} \quad (k = 1,2,\ldots)$: Այսինքն (2) շարքը առաջանում է նույն շարք (1)-ից, երբ առանց փոխելու գումարման հերթականությունը շարքի անդամները ինչ-որ քանակությամբ ներառվում են փակագծերի մեջ

$$\left(a_1 + \ldots + a_{n_1}\right) + \left(a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}\right) + \ldots + \left(a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}\right) + \ldots : \tag{2'}$$

Ներմուծենք նշանակումներ՝

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k , B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \left(n \in N\right), \ \lim_{n\to\infty} A_n = A :$$

*Թեորեմ 1* (**Շարքի զուգորդական հատկությունը**):

Եթե զուգամետ է (1) շարքը, ապա զուգամետ է նաև (2)-ը և այն ունի նույն գումարը ինչ (1)-ը:

*Ապացուցում:* Պարզ է, որ՝

$$B_m = \sum_{k=1}^{m} b_k = \sum_{k=1}^{m} \left(a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}\right) = a_1 + \ldots + a_{n_m} = A_{n_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} A:$$

($A_{n_m}$ -ը $A_n$ զուգամետ հաջորդականության ենթահաջորդականությունն է) ■

*Դիտողություն1:* Այս թեորեմը հակադարձելի չէ: Այսինքն (2) (փակագծերով շարքը) կարող է լինել զուգամետ, իսկ (1) շարքը՝ տարամետ: Իրոք, դիտարկենք հետևյալ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \ldots$ տարամետ շարքը: Այդ շարքի օգնությամբ կազմենք նոր $(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots = 0$, ակնհայտորեն զուգամետ շարքը:

**Խնդիր 1**: Ապացուցել, որ եթե տրված է զուգամետ (2՝) տեսքի շարք $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}\right)$ և, յուրաքանչյուր փակագծի միջի անդամները ունեն միևնույն նշանը (մի փակագծից մյուսին անցնելիս շարքի անդամների նշանները կարող են փոփոխվել), ապա առանց փակագծերի $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը ևս կլինի զուգամետ և կունենա նույն գումարը ինչ նախնական (փակագծերով) շարքը (տես օրինակ [3]):

*Սահմանում 1:* Դիցուք տրված է (1) ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ) շարքը և ունենք փոխմիարժեք արտապատկերում՝ $n_k : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$: Կազմենք նոր շարք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k}, \tag{3}$$

որը նույնն է ինչ (1)-ը, միայն փոխված է գումարման հերթականությունը: (3)շարքը կանվանենք (1)-ի տեղափոխված շարք:

*Թեորեմ 2* (**բացարձակ զուգամետ շարքի տեղափոխական հատկությունը**):

Եթե (1) շարքը բացարձակ զուգամետ է, այսինքն զուգամետ է

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{4}$$

շարքը, ապա զուգամետ է նաև տեղափոխված (2) շարքը և այն ունի նույն գումարը ինչ (1)-ը:

*Ապացույց:* Դիցուք՝

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ B_m = \sum_{k=1}^{m} a_{n_k},\ A_n^* = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A^* \in \mathbf{R}:$$

Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ (1)-ի անդամները ոչ բացասական են ($a_n \geq 0$):

Այս դեպքում $A_n = A_n^* \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A^* = A = sup\{A_n\}$, $(A_n \leq A)$ և, եթե $max\{n_k;\ k = 1,...,m\} = p_m$, ապա

$$B_m \leq \sum_{k=1}^{p_m} a_k = A_{p_m} \leq A = \lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k :$$

Դա նշանակում է, որ մոնոտոն չնվազող $B_m$ հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից և, ուրեմն ունի սահման՝ $\lim_{m\to\infty} B_m = B \leq A$: Մյուս կողմից (1)-ը հանդիսանում է (2)-ի տեղափոխված շարք, ուրեմն նաև՝ $A \leq B$: Այսպիսով ստանում ենք, որ տեղափոխված շարքի գումարը չի փոխվում՝ $A = B$:

Այժմ դիտարկենք ընդհանուր դեպքը, երբ (1) շարքը ունի անվերջ քանակությամբ դրական և բացասական անդամներ: (1)-ի հերթականությամբ հանդիպող դրական անդամները նշանակենք

$p_1, p_2, \dots p_n, \dots$, իսկ բացասական անդամների բացարձակ արժեքները՝ $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$: Այսպիսով առաջանում են երկու դրական անդամներով շարքեր

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k , \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k , \tag{6}$$

Ներմուծենք նշանակումներ՝

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k ,\ Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k \ \ (n = 1, 2, \dots):$$

Այդ դեպքում՝ $A_n = P_m - Q_k, A_n^* = P_m + Q_k \ (n = m + k)$: Ուրեմն՝

$$P_m = \frac{1}{2}(A_n^* + A_n),\ Q_k = \frac{1}{2}(A_n^* - A_n), \tag{7}$$

որտեղից հետևում է (5), (6) դրական անդամներով շարքերի զուգամիտությունը:

Եթե այժմ (1) շարքից անցնենք նրա տեղափոխված (3) շարքին, ապա դա կնշանակի (5) և (6) շարքերից անցնել նրանց որոշակի տեղափոխված շարքերին: Համաձայն վերը ապացուցածի, դրանից չի խախտվի (5), (6) շարքերի զուգամիտությունը և չի փոխվի նրանց գումարը և, ուրեմն նույնը կարելի է ասել նաև (1)-ի տեղափոխված (3) շարքի մասին: ■

Պայմանական զուգամետ շարքերը օժտված չեն տեղափոխական հատկությամբ: Ճիշտ է հետևյալ թեորեմը:

***Ռիմանի թեորեմը:***

Եթե տրված է պայմանական զուգամետ շարք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ապա

1° ինչպիսի $B$ թիվ էլ վերցնենք, կգտնվի (1)-ի այնպիսի տեղափոխված շարք, որ նրա գումարը հավասար լինի $B$-ի,

2° գոյություն ունի տեղափոխված շարք, որի գումարն է $+\infty \ (-\infty, \infty)$:

3° գոյություն ունի նաև տեղափոխված շարք, որի մասնակի գումարների հաջորդականությունը չունի ոչ վերջավոր ոչ էլ անվերջ սահման:

*Ապացուցում:* Այստեղ կօգտագործենք թեորեմ 2-ի նշանակումները: Ունենք՝ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^* = +\infty$, ուրեմն, համաձայն (7)-ի $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} Q_n = +\infty$:

Այստեղից հետևում է, որ ցանկացած ոչ բացասական $n$ ամբողջ թվի համար

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} p_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} q_k = +\infty: \tag{8}$$

Նախ ապացուցենք $1^\circ$-ը: Ըստ (8)-ի կարող ենք ընտրել (5) շարքի առաջին (փոքրագույն) $n_1$ քանակով անդամներ, որ $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} > B$: Այնուհետև կարող ենք ընտրել փոքրագույն $n_2$ քանակով (6) շարքի $q_1, q_2, \ldots, q_{n_2}$ անդամներ այնպես, որ առաջին անգամ տեղի ունենա $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} - \left(q_1 + q_2 + \ldots + q_{n_2}\right) < B$ անհավասարությունը: Նույն սկզբունքով $\exists n_3$ այնպիսին, որ,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} - \left(q_1 + q_2 + \ldots + q_{n_2}\right) + \left(p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \ldots + p_{n_3}\right) > B,$$

$\exists n_4$ այնպիսին, որ՝

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} - \left(q_1 + q_2 + \ldots + q_{n_2}\right) + \left(p_{n_1+1} + p_{n_1+2} + \ldots + p_{n_3}\right) -$$
$$-\left(q_{n_2+1} + q_{n_2+2} + \ldots + q_{n_4}\right) < B:$$

Այս պրոցեսը անվերջ շարունակենք ամեն անգամ գումարելով (հանելով) մինիմալ քանակով $p_k$ $(q_k)$-եր այնպես, որ ստացված $S_n$ գումարի և $B$-ի տարբերության մոդուլը չգերազանցի վերջին ($n$-րդ) գումարելիին: Այսպիսով, տեղափոխված շարքի $S_n$ մասնակի գումարը բացարձակ մեծությամբ տարբերվում է $B$-ից իր $n$-րդ անդամով ($(n = 1, 2, \ldots)$), որն անվերջ փոքր է, քանի որ (1) շարքը զուգամետ է: Ուրեմն, ստացված շարքի գումարը $B$-ն է: Հաշվի առնելով խնդիր 1.-ը, և վերացնելով փակագծերը, կստանանք (1)-ի տեղափոխված շարքը,որի գումարը նույնպես $B$-ն է:

Այժմ ցույց տանք, որ գոյություն ունի (1)-ի այնպիսի տեղափոխություն, որի գումարը $+\infty$-ն է: Պարզ է, որ $\exists n_1$ այնպիսին որ՝ $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n_1} > 1$: Ստացվածին գումարենք մեկ բացասական անդամ $\left(p_1+p_2+\ldots+p_{n_1}\right)+\left(-q_1\right)$ (դա հարկավոր է միայն նրա համար որ ստացվի տեղափոխական շարք): Այնուհետ, $\exists n_2$ այնպիսին որ՝

$$\left(p_1+p_2+\ldots+p_{n_1}\right)+\left(-q_1\right)+\left(p_{n_1+1}+p_{n_1+2}+\ldots+p_{n_2}\right)>2:$$

$k$-րդ քայլին կունենանք՝

$$\left(p_1+p_2+\ldots+p_{n_1}\right)+\left(-q_1\right)+\ldots+\left(p_{n_{k-1}+1}+\ldots+p_{n_k}\right)>k\ (k=1,2,\ldots):$$

Պարզ է, որ ստացված տեղափոխված շարքի գումարն է $+\infty$: Նույն կերպ ապացուցվում են թեորեմի մյուս պնդումները, դա թողնենք ընթերցողին ինքնուրույն աշխատանքի համար: ■

Օրինակ 1: Դիտարկենք պայմանական զուգամետ $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\ln 2$ շարքը (տես ստորև 4. (7)): Կազմենք հետևյալ տեղափոխված շարքը՝

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots: \tag{9}$$

Եթե $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$-ը (9) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունն է, ապա՝

$$S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2(2k-1)}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\ln 2}{2}=S:$$

Հաշվի առնելով այն, որ (9) շարքի $a_n$ ընդհանուր անդամը անվերջ փոքր է, ստանում ենք՝

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{3n}+a_{3n+1})=S,\ \lim_{n\to\infty}S_{3n+2}=\lim_{n\to\infty}(S_{3n+1}+a_{3n+2})=S:$$

Ուրեմն՝ $\lim_{n\to\infty}S_n=S=\frac{1}{2}\cdot\ln 2$: Այսպիսով, այս տեղափոխությունը երկու անգամ փոքրացրեց շարքի գումարը:

## II ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՇԱՐՔԵՐ

### 1.ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

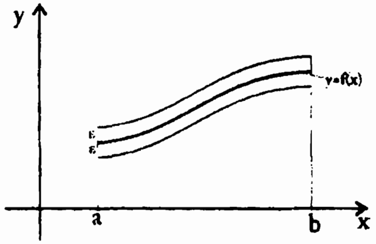
*Սահմանում 1:* Դիցուք տրված է $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x),...$ ֆունկցիաների հաջորդականություն (ֆունկցիոնալ հաջորդականություն), որոշված միևնույն $X$ բազմության վրա և ցանկացած $x_0 \in X$-ի համար $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ թվային հաջորդականությունը զուգամիտում է վերջավոր թվի: Այսպիսով ծնվում է ֆունկցիա (սահմանային ֆունկցիա), որոշված $X$-ում՝ $\forall x \in X\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$: Դա նշանակում է՝

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon(x) \in N,\ \forall n \ge n_\varepsilon(x)\ :\ r_n(x) < \varepsilon,$$

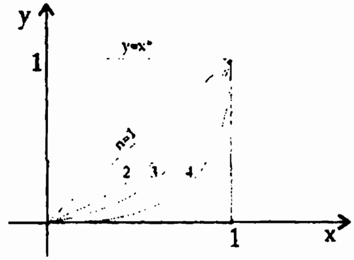
$$(r_n(x) = |f_n(x) - f(x)|):$$

Այս փաստը կոչվում է **կետ առ կետ** զուգամիտություն: Իսկ եթե բոլոր $x$-երի համար գտնվում է ընդհանուր համար, ապա ասում են, որ առկա է **հավասարաչափ** զուգամիտություն $X$ բազմության վրա: Այսինքն՝

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in N,\ \forall n \ge n_\varepsilon,\ \forall x \in X : r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon : \quad (1)$$




*Նկ.1*




*Նկ. 2*

Հավասարաչափ զուգամիտությունը ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն: Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ և $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը տեղաշարժենք $\varepsilon$ չափով վերև և ներքև, նրանցով սահմանափակված պատկերը անվանենք գրաֆիկի $\varepsilon$ շերտ: Այն, որ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուզամիտում է $f(x)$-ին նշանակում է, որ ինչ-որ համարից սկսած հաջորդականության բոլոր անդամների գրաֆիկները հայտնվում են այդ $\varepsilon$ շերտում (տես նկ.1):

Փորձելով կիրառել այս մեկնաբանությունը $f_n(x)=x^n$, $x\in[0;1]$ ֆունկցիոնալ հաջորդականության նկատմամբ (տես նկ.2), անմիջապես ստանում ենք, որ այն ոչ հավասարաչափ է զուգամետ է $[0;1]$ ում, քանի որ սահմանային ֆունկցիան խզվող է

$$f(x)=\begin{cases}0, 0\le x<1\\ 1, x=1\end{cases}$$

(տես նաև ստորև օրինակ 5):

Բերենք հավասարաչափ և ոչ հավասարաչափ զուգամիտության որոշ հայտանիշներ:

***Թեորեմ 1:*** Որպեսզի $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը լինի հավասարաչափ զուգամետ $X$-ում անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա Կոշիի պայմանը՝

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\, n_\varepsilon\in N,\ \forall n\ge n_\varepsilon,\ \forall p\in N,$$

$$\forall x\in X\ :\ |f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon: \qquad (2)$$

***Ապացուցում: Անհրաժեշտությունը:*** Տրված է, որ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $X$-ում: Ուրեմն՝ $\forall\varepsilon>0\,\exists\, n_\varepsilon\in N,\ \forall n\ge n_\varepsilon,\ \forall x\in X\ :\ |f_n(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow\forall p\in N\ :\ |f_{n+p}(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$: Այստեղից ստանում ենք՝

$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\le|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, այսինքն տեղի ունի Կոշիի պայմանը:

***Բավարարությունը:*** Տրված է, որ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը բավարարում է Կոշիի պայմանին: Վերցնենք կամայական $x_0\in X$ և օգտվենք (2)-ից: Դա կնշանակի, որ $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ թվային հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է և, ուրեմն՝ զուգամետ [1]: Այսպիսով $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$-ը կետ առ կետ զուգամիտում է սահմանային $f(x)$ ֆունկցիային: Այժմ (տես (2))

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon \ \left(n\geq n_\varepsilon, p\in \boldsymbol{N}, x\in X\right)$$

պայմանի մեջ անցնենք սահմանի, երբ $p$-ն ձգտում է անվերջի, կստանանք՝

$$\left|f(x)-f_n(x)\right|\leq\varepsilon \ \left(n\geq n_\varepsilon, x\in X\right):$$

Ուրեմն, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային: ■

***Թեորեմ 2:*** Որպեսզի $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը լինի հավասարաչափ զուգամետ $X$-ում անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝

$$\sup_X r_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0: \tag{3}$$

***Ապացուցում: Անհրաժեշտություն:*** Տրված է, որ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $X$-ում: Այսինքն, ճշմարիտ է (1)-ը, որտեղից հետևում է, որ $\sup\limits_X r_n(x)\leq\varepsilon \ \left(n\geq n_\varepsilon\right)$, ուրեմն՝ $\sup\limits_X r_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$:

***Բավարարություն:*** Տրված է, որ $\sup\limits_X r_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$:

Այսինքն $\forall\varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon\in\boldsymbol{N}$, $\forall n\geq n_\varepsilon$ : $\sup\limits_X r_n(x)<\varepsilon$, որտեղից՝

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon\in\boldsymbol{N}, \forall n\geq n_\varepsilon, \forall x\in X \ : r_n(x)\leq\sup_X r_n(x)<\varepsilon:$$

Ուրեմն $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆուկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $X$-ում: ■

Միշտ չէ, որ հնարավոր է, կամ հարմար է օգտվել թեորեմ 2-ից: Երբեմն ավելի հարմար են այլ հայտանիշներ:

***Թեորեմ 3: (հավասարաչափ զուգամիտության բավարար պայմանը)***

Որպեսզի $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը լինի հավասարաչափ զուգամետ $X$-ում բավարար է որ գոյություն ունենա այնպիսի թվային $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ անվերջ փոքր հաջորդականություն որ՝

$$\forall n\in\boldsymbol{N}, \forall x\in X \ : r_n(x)\leq c_n \ \left(c_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\right):$$

*Ապացուցում:* Քանի որ $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ապա՝

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n\geq n_\varepsilon \ : \ c_n<\varepsilon:$$

Այստեղից, ստանում ենք՝

$$\forall x\in X, \forall n\geq n_\varepsilon \ : \ r_n(x)\leq c_n\leq\varepsilon \Rightarrow r_n(x)\leq\varepsilon \, (n\geq n_\varepsilon),$$

որն էլ նշանակում է $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$-ի հավասարաչափ զուգամիտությունը $X$-ում: ■

***Թեորեմ 4 (ոչ հավասարաչափ զուգամիտության բավարար պայմանը):***

Որպեսզի $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $X$-ում կետ առ կետ զուգամետ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը լինի ոչ հավասարաչափ զուգամետ $X$-ում բավարար է, որ $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n\in X \ : \ r_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \ (\alpha>0)$ ($\alpha$-ն կարող է լինել և $+\infty$):

*Ապացուցում:* Այն, որ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $X$-ում նշանակում է՝

$$\exists\,\varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N} \ \exists\, n\geq N, \exists\, x\in X \ : \ r_n(x)\geq\varepsilon: \qquad (4)$$

Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ

$$\exists N_1\in\mathbb{N}, \forall n\geq N_1 \ : \ r_n(x_n)>\frac{\alpha}{2}=\varepsilon$$

(եթե $\alpha=+\infty$, ապա որպես $\varepsilon$ կարելի վերցնել ցանկացած դրական թիվ): Վերցնենք $\forall N$ և ընտրենք $n>max\{N,N_1\}$: Այդ դեպքում՝ $r_n(x_n)>\varepsilon$ և մենք հանգում ենք (4)-ին: ■

Քննարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Դիցուք $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $x\in[0;1]$: Ակնհայտ է, որ սահմանային ֆունկցիան՝ $f(x)\equiv 0$: Գտնենք կրիտիկական կետերը

$$r_n(x)=f_n(x), \ r_n'(x)=f_n'(x)=n\cdot x^{n-1}-2n\cdot x^{2n-1}=$$

$$=n\cdot x^{n-1}\cdot(1-2x^n)=0, \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}:$$

Քանի որ $f_n(0)=f_n(1)=0, f_n(\frac{1}{\sqrt[n]{2}})=\frac{1}{4}$, ապա $\sup\limits_{[0;1]} r_n(x)=\frac{1}{4}\not\to 0$: Ուրեմն, այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $[0;1]$-ում:

Օրինակ 2: Դիցուք $f_n(x)=\dfrac{\sin(xn!)}{\sqrt{n}}$, $x\in\mathbf{R}$: Ակնհայտ է, որ սահմանային ֆունկցիան՝ $f(x)\equiv 0$ և $r_n(x)\equiv f_n(x)$: Ըստ թեորեմ 3.-ի այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $\mathbf{R}$-ում, քանի որ $\forall n, \forall x\in\mathbf{R}$ : $r_n(x)=\dfrac{|\sin(xn!)|}{\sqrt{n}}\le\dfrac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$:

Օրինակ 3: $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx}$, $x\ge\delta>0$: սահմանային ֆունկցիան է $f(x)\equiv 1$: Ուրեմն $r_n(x)=\left|\dfrac{nx}{1+nx}-1\right|=\dfrac{1}{1+nx}\le\dfrac{1}{1+n\cdot\delta}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$: Ըստ թեորեմ 3.-ի այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $[\delta;+\infty)$-ում:

Օրինակ 4: $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx}, x>0$ $\left(f(x)\equiv 0, r_n(x)\equiv\dfrac{1}{1+nx}\right)$: Այստեղ նախորդ գնահատականը չի անցնի, քանի որ $x$-ը որքան ասես մոտ կարող է լինել զրոյին: Օգտվենք թեորեմ 4.-ից, վերցնելով որպես $x_n$ զրոյի ձգտող հաջորդականություն, օրինակ $x_n=\dfrac{1}{n}$: $r_n(x_n)=\dfrac{1}{2}\underset{n\to\infty}{\not\to}0$: Այսպիսով, այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $(0;+\infty)$-ում:

Օրինակ 5: $f_n(x)=x^n$, $x\in[0;1]$: սահմանային ֆունկցիան է $f(x)=0$ $(x\in[0;1))$, $f(1)=1$: Այն խզվող է:

Յավասարաչափ զուգամիտության սահմանումից պարզ է, որ եթե առկա է հավասարաչափ զուգամիտություն ինչ-որ $X$ միջակայքում, ապա դա այդպես է ցանկացած $X_1$ $(X_1\subset X)$ միջակայքում: Ուրեմն, եթե ինչ-որ միջակայքում չկա հավասարաչափ զուգամիտություն, ապա դա չկա նաև ավելի լայնի վրա: Ցույց տանք, որ տվյալ դեպքում չկա հավասարաչափ զուգամիտություն $[0;1)$-ում: Իրոք, դիցուք $x_n=1-\dfrac{1}{n}$:

Այդ դեպքում՝ $r_n(x_n)=f_n(x_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{e}>0$: Հետևաբար դիտարկվող հաջորդականությունը ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $[0;1]$-ում: Նկատենք, որ տվյալ դեպքում $f_n$ ֆունկցիաները անընդհատ են $\left(\forall n\in N: f_n\in C[0;1]\right)$, բայց սահմանային ֆունկցիան՝ $f$-ը՝ խզվող:

*Սահմանում 2:* Դիցուք տրված է $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականություն, որոշված $X$ միջակայքում:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{5}$$

շարքը կոչվում է **ֆունկցիոնալ շարք**, որոշված $X$ միջակայքում:

Եթե $\forall x\in X$, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$-ը որպես թվային շարք զուգամետ է, այսինքն շարքի $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ $(n=1,2...)$ մասնակի գումարների ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը զուգամետ է (գոյություն ունի վերջավոր սահման $\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$), ապա կասենք, որ (5) շարքը կետ առ կետ զոգամետ է $X$-ում, իսկ $S(x)$-ը կանվանենք ֆունկցիոնալ շարքի գումար: Իսկ եթե $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ է զուգամետ $X$-ում, ապա կասենք, որ (5) ֆունկցիոնալ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $X$-ում:

*Դիտողություն 1:* Ճշմարիտ է նաև հակառակը՝ յուրաքանչյուր $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(x\in X)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությանը կարելի է համապատասխանեցնել հետևյալ ֆունկցիոնալ շարքը՝

$f_1(x)+(f_2(x)-f_1(x))+...+\left(f_n(x)-f_{n-1}(x)\right)+...$, որի մասնակի գումարների հաջորդականությունն է՝

$$S_n(x)\equiv f_n(x)\ \ (x\in X, n\in N)\ :$$

Այդ պատճառով ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների և ֆունկցիոնալ շարքերի հատկությունների, մասնավորապես հավասարաչափ զուգագամիտության հայտանիշների միջև կա մեծ նմանություն:

*Դիտողություն 2:* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը և $\int_a^{+\infty} f(x,\xi)d\xi$ պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալը, զուգամիտության իմաստով չափազանց նման են իրար: Այդ պատճառով ֆունկցիոնալ շարքերը գրեթե օժտված են բոլոր այն հատկություններով, ինչ պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալները:

*Դիտողություն 3:* Եթե $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը կետ առ կետ զուգամետ է $X$ -ում, ապա այդպիսին է նաև $n$-մնացորդ շարքը ($\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$) և նրա գումարն է՝ $S(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$: Ուրեմն $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ շարքի հավասարափափ զուգամիտությունը, ըստ սահմանման, համարժեք է $r_n(x)=\left|S(x)-S_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|$ ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ զրոյի ձգտելուն:

Բերենք ֆունկցիոնալ շարքերի հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշներ:

*Թեորեմ 5:* Որպեսզի (5) ֆունկցիոնալ շարքը լինի հավասարաչափ զուգամետ $X$ միջակայքում անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա Կոշիի պայմանը՝

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n_\varepsilon\in \mathbb{N},\forall n\geq n_\varepsilon,\forall x\in X,\forall p\in \mathbb{N}\quad:\quad\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon: \qquad (6)$$

Թեորեմի ապացույցը անմիջապես հետևում է թեորեմ 1.-ից, եթե որպես ֆունկցիոնալ հաջորդականություն դիտարկենք

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\ \ (n=1,2,...)$$

մասնակի գումարների հաջորդականությունը:

*Թեորեմ 6 (Վայերշտրասի մաժորանտ հայտանիշը):*

Եթե գոյություն ունի այնպիսի $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ թվային հաջորդականություն, որ շարք $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ -ը զուգամետ է և՝

$$\forall n, \forall x \in X \ : \ |u_n(x)| \le c_n \ \ (c_n \ge 0),$$

ապա (5) ֆունկցիոնալ շարքը կլինի հավասարաչափ զուգամետ $X$ միջակայքում ($c_n$-ը կոչվում է $u_n(x)$-ի մաժորանտ):

***Ապացուցում:*** Քանի որ շարք $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$-ը զուգամետ է,ապա նրա համար ճշմարիտ է Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը՝

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_\varepsilon, \ \forall p \in \mathbb{N} \ : \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| < \varepsilon :$$

Այստեղից և թեորեմի պայմաններից ստանում ենք՝

$$\forall n \ge n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} \ , \forall x \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon :$$

Ուրեմն՝ $\quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| < \varepsilon \ \ (n \ge n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}, x \in X)$

Որն էլ նշանակում է (5) ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը $X$ միջակայքում: ■

***Դիտողություն 4:*** Կարող է $u_n(x)$-ը չունենա մաժորանտ, բայց շարքը լինի հավասարաչափ զուգամետ, օրինակ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ $(x \in [\delta; \pi - \delta], \delta \in (0; \pi))$ (տես ստորև օրինակ 8.)

Օրինակ 6: Դիտարկենք հետևյալ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^n \cdot n!)}{n^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ շարքը: Ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը՝ $\left| \frac{\cos(x^n \cdot n!)}{n^2+1} \right| \le \frac{1}{n^2}$ :

Իսկ շարք $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ զուգամետ է: Ուրեմն, ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի, դիտարկվող ֆունկցիոնալ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $\mathbb{R}$-ում:

***Թեորեմ 7:*** Որպեսզի (5) ֆունկցիոնալ շարքը լինի հավասարաչափ զուգամետ $X$ միջակայքում անհրաժեշտ է, որ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ ձգտի զրոյի:

*Ապացուցում:* Տրված է, որ (5) ֆունկցիոնալ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $X$ միջակայքում և, ուրեմն նրա համար տեղի ունի Կոշիի պայմանը (տես (6)): Վերցնելով (6)-ում մասնավորապես $p=1$, կստանանք՝

$$\forall \varepsilon>0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_\varepsilon, \forall x\in X \quad : \quad \left|u_{n+1}(x)\right| < \varepsilon :$$

Այստեղից հետևում է, որ $u_n(x)$-ը հավասարաչափ ձգտում է զրոյի $X$-ում: ■

***Դիտողություն 5:*** Թեորեմից հետևում է, որ եթե $\left\{u_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$-ը հավասարաչափ չի ձգտում զրոյի $X$-ում, ապա (5) ֆունկցիոնալ շարքը հասարաչափ զուգամետ չէ $X$-ում:

**Օրինակ 7:** Դիտարկենք $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ $(u_n(x)=\dfrac{x^n}{n!})$ շարքը (ստորև կտեսնենք, որ այս շարքի գումարն է՝ $e^x$): Այն կետ առ կետ զուգամետ է թվային ուղղի վրա ($\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\dfrac{|x|}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0<1$): Քանի որ $\dfrac{x^n}{n!}$-ը ոչ հավասարաչափ է ձգտում զրոյի $(x_n=n!, u_n(x_n)=(n!)^{n-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty)$, ուստի նշված շարքը ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $\mathbb{R}$-ում:

***Թեորեմ 8 (Աբելի հայտանիշը):***

**Եթե** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$-շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $X$-ում, իսկ $\left\{v_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը $\forall x\,(x\in X)$-ի համար, ըստ $n$-ի մոնոտոն է և՝ հավասարաչափ սահմանափակ՝

$$\exists C\ge 0, \forall n\in \mathbb{N}, \forall x\in X : \left|v_n(x)\right| \le C ,$$

ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\cdot v_n(x)$ շարքը հասարաչափ զուգամետ է $X$-ում:

*Ապացուցում:* Քանի որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - շարքը հավասարաչափ զագամետ է $X$-ում, ապա՝

$$\forall \varepsilon>0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n\ge n_\varepsilon, \forall x\in X, \forall p\in \mathbb{N} \quad : \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3C} :$$

Օգտվելով թվային շարքերի համար Աբելի լեմմայից (տես I, 3, (9)), կստանանք՝

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\cdot v_n(x)\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|\cdot(\left|v_{n+1}(x)\right|+2\left|v_{n+p}(x)\right|)<$$

$$<\frac{\varepsilon}{3C}(C+2C)=\varepsilon:$$

Ուրեմն՝(տես թեորեմ 5) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\cdot v_n(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $X$ -ում: ■

*Թեորեմ 9 (Դիրիխլեի հայտանիշը):*

Եթե $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$-շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է՝

$$\exists C\ge 0, \forall n\in N, \forall x\in X \quad : \quad \left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\le C,$$

իսկ $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չաճելով կամ չնվազելով հավասարաչափ ձգտում է զրոյի $X$ -ում, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\cdot v_n(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $X$ -ում:

Թեորեմի ապացույցը, ըստ էության չի տարբերվում թվային շարքերի համար Դիրիխլեի հայտանիշի ապացույցից, միայն պետք է հաշվի առնել այստեղ առկա լրացուցիչ պայմանները, օրինակ՝ $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$-ի հավասարաչափ զրոյի ձգտելը: Այդ դեպքում թեորեմ 5.-ի պայմանները տեղի կունենան:

**Օրինակ 8:** Դիտարկենք $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot coskx$, $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\cdot sinkx$ $(x\in[\delta;\pi-\delta],\ \delta\in(0;\pi))$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$-ն ու $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$-ն անվերջ փոքր, մոնոտոն չաճող թվային հաջորդականություններ են: Քանի որ $\left|\sum_{k=1}^{n}coskx\right|\le\frac{1}{sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{sin\frac{\delta}{2}}$, $\left|\sum_{k=1}^{n}sinkx\right|\le\frac{1}{sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{sin\frac{\delta}{2}}$, ապա ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի դիտարկվող շարքերը հավասարաչափ զուգամետ են նշված միջակայքում:

Օրինակ 9: Դիտարկենք

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{x}{k}} \cdot a_k \cdot cos(kx), \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{x}{k}} \cdot b_k \cdot sin(kx)$$

շարքերը $(x \in [\delta;\pi-\delta],\ \delta \in (0;\pi))$, որտեղ $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ու $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունները բավարարում են նախորդ օրինակի պայմաններին: Քանի որ $e^{-\frac{x}{k}}$ հաջորդականությունը ըստ $k$-ի մոնոտոն աճող է և հավասարաչափ սահմանափակ՝ $e^{-\frac{x}{k}} < 1$, $x \in [\delta;\pi-\delta]$, ապա, ըստ Աբելի հայտանիշի դիտարկվող շարքերը հավասարաչափ զուգամետ են $x \in [\delta;\pi-\delta]$-ում:

## 2. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Մենք արդեն գիտենք, որ եթե ֆունկցիոնալ հաջորդականության անդամները անընդհատ են, ապա պարտադիր չէ, որ սահմանային ֆունկցիան ևս լինի անընդհատ (տես II,1,օրինակ 5): Նույն իրավիճակն է նաև ֆունցիոնալ շարքերի համար:

Օրինակ 1: Դիտարկենք հետևյալ շարքը $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$ $(x \in [0;1])$:

Նրա անդամները $x \in (0;1]$ դեպքում կազմում են անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա $q = \frac{1}{x^2+1}$ $(0 < q < 1)$ հայտարարով:

Շարքի գումարն է՝ $S(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2+1}} = 1, x \in (0;1]$, իսկ $S(0) = 0$: Շարքի անդամները անընդհատ են, բայց նրա գումարը՝ խզվող: Հեշտ է տեսնել, որ շարքը ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $[0;1]$-ում: Իրոք՝

$$r_n(x) = |S(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^k} = \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^n},$$

իսկ $r_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{e}>0$ (տես II, 1, թեորեմ 4):

Այս օրինակները ցույց են տալիս հավասարաչափ զուգամիտության կարևորությունը:

Ճշմարիտ են հետևյալ թեորեմները ֆունկցիոնալ շարքերի մասին: (Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների մասին համապատասխան թեորեմները կարելի է ապացուցել նույն կերպ, կամ կարելի է բերել ֆունկցիոնալ շարքերի):

***Թեորեմ 1(սահմանային անցման մասին):***

Դիցուք տրված է $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը, որը որոշված է և հավասարաչափ զուգամետ է $X$-ում: Եթե $\forall k\ :\ u_k\in C(X)$, ապա շարքի գումարը՝ $S\in C(X)$: Այսինքն, անընդհատ ֆունկցիաներից կազմված հավասարաչափ զուգամետ շարքի գումարը ևս անընդհատ ֆունկցիա է:

*Ապացուցում:* Վերցնենք կամայական $x_0\in X$ և ապացուցենք, որ $S$-ը անընդհատ է $x_0$-ում: Շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունից հետևում է՝

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n_\varepsilon\in N,\forall n\ge n_\varepsilon,\forall x\in X\ :\ r_n(x)=\left|S(x)-S_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}:$$

Ունենք՝

$$\left|S(x)-S(x_0)\right|=$$
$$=\left|(S(x)-S_{n_\varepsilon}(x))+(S_{n_\varepsilon}(x)-S_{n_\varepsilon}(x_0))+(S_{n_\varepsilon}(x_0)-S(x_0))\right|\le$$
$$\le\left|S(x)-S_{n_\varepsilon}(x)\right|+\left|S(x_0)-S_{n_\varepsilon}(x_0)\right|+\left|S_{n_\varepsilon}(x)-S_{n_\varepsilon}(x_0)\right|<$$
$$<\frac{2\varepsilon}{3}+\left|S_{n_\varepsilon}(x)-S_{n_\varepsilon}(x_0)\right|:$$

Քանի որ $S_{n_\varepsilon}(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիաների վերջավոր գումար է, ուրեմն այն անընդհատ է $x_0$-ում: Այսինքն՝

$$\exists\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x\in X,|x-x_0|<\delta\ :\ \left|S_{n_\varepsilon}(x)-S_{n_\varepsilon}(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}:$$

Որտեղից՝ $\left|S(x)-S(x_0)\right|<\varepsilon\ \ (|x-x_0|<\delta)$:

Այսպիսով՝ $S$-ը անընդհատ է կամայական կետում, ուրեմն $S \in C(X)$: ■

*Դիտողություն 1:* Թեորեմ 1.-ի պայմանները թույլ են տալիս անցնել սահմանի շարքի գումարի նշանի տակ: Իրոք՝

$$\underline{\lim_{x \to x_0} S(x)} = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x)} : \qquad (1)$$

***Թեորեմ 2 (շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրման մասին):***

Դիցուք տրված է $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը, որը որոշված է և հավասարաչափ զուգամետ է $[a;b]$-ում և՝ $\forall k \in N$ : $u_k \in C[a;b]$ (ըստ թեորեմ1-ի, $S \in C[a;b]$): Այդ դեպքում $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$-շարքը զուգամետ է և, տրված ֆունկցիոնալ շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել, այսինքն՝

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx : \qquad (2)$$

*Ապացույց:* Քանի որ $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $[a;b]$-ում, ապա՝

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in N, \; \forall n \ge n_\varepsilon, \; \forall x \in [a;b] \; : \; |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

որտեղ՝ $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \; (\Rightarrow r_n \in C[a;b])$:

Ուրեմն՝ $S(x) = S_n(x) + r_n(x) \Rightarrow \int_a^b S(x)dx = \int_a^b S_n(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx \quad (n \ge n_\varepsilon):$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$\left| \int_a^b S(x)dx - \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx \right| \le \int_a^b |r_n(x)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \quad (n \ge n_\varepsilon):$$

Դա նշանակում է, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$-շարքը զուգամետ է և, նրա գումարն է՝ $\int_a^b S(x)\,dx$-ը: ■

***Թեորեմ 3 (շարքի անդամ առ անդամ ածանցելու մասին):***

Դիցուք $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=S(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը կետ առ կետ զուգամետ է $[a;b]$-ում և՝ $\forall k\in \mathbb{N}\ :\ u_k\in C^1[a;b]$: Ենթադրենք նաև որ $\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)=S^*(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $[a;b]$-ում:

Այդ դեպքում՝ $\forall x\in X$, $\exists\, S'(x)$ և այն ստացվում է, անդամ առ անդամ ածանցելով $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ շարքը՝

$$S'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}: \tag{3}$$

***Ապացուցում:*** Թեորեմ 1-ի համաձայն

$$S^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x): \tag{4}$$

շարքի գումարը $S^*(x)$-ը անընդհատ է $[a;b]$-ում:

Վերցնենք կամայական $x\in[a;b]$ և օգտվելով թեորեմ 2.-ից, ինտեգրենք (4)-ը ($S^*(t)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)$, $t\in[a;b]$) $a$-ից $x$ սահմաններում, կստանանք՝

$$\int_a^x S^*(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n(x)-u_n(a)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}u_n(x)-\sum_{i=1}^{\infty}u_n(a)=S(x)-S(a): \tag{5}$$

(5)-ի ձախ մասը, $S^*(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, ունի ածանցյալ $\exists \frac{d}{dx}\int\limits_a^x S^*(t)dt = S^*(x)$, ուրեմն (5)-ի աջ մասը

և ունի ածանցյալ, հավասար $S'(x)$-ի: Այսպիսով՝ $S^*(x) \equiv S'(x)$, այսինքն ստացանք (3)-ը: ■

*Դիտողություն 2:* Թեորեմ 3.-ի պայմանները կարելի է «թուլացնել», օրինակ բավական է պահանջել, որ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ շարքը

լինի զուգամետ $[a;b]$-ի որևէ կետում: Թեորեմի մնացած պայմաններից հետևում է այդ շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը $[a;b]$-ում:

Ինքնուրույն լուծելու համար առաջարկենք հետևյալ օրինակները:

Օրինակ 2: Ապացուցել, որ շարք $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $\left(u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}\right)$-ը

հավասարաչափ զուգամետ է $\mathbb{R}$-ում, իսկ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ շարքը զուգամետ է կետ առ կետ, բայց ոչ հավասարաչափ $\mathbb{R}$-ում:

Օրինակ 3: Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_{n-1}(x)] \quad \left(u_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2}\right)$$

շարքի գումարը՝ $S(x) \equiv 0$ $[0;1]$-ում (այն անընդհատ ֆունկցիա է), բայց շարքը ոչ հավասարաչափ է զուգամետ $[0;1]$-ում: Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ թեորեմ 1.-ում հավասարաչափ զուգամիտության պայմանը բավարար է, բայց ոչ անհրաժեշտ շարքի գումարի անընդհատության համար:

Օրինակ 4: Ապացուցել, որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $[0;1]$-ում (կիրառել հավասարաչափ զուգամիտության Աբելի հայտանիշը): Անցնելով սահմանի շարքի գումարի նշանի տակ, երբ $x \to 1-0$-ի (տես թեորեմ 1), ցույց տալ, որ

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{ln2}{2}:$$

## 3. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

Ֆունկցիոնալ շարքի կարևոր մասնավոր դեպք է հանդիսանում աստիճանային շարքը

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n : \qquad (1)$$

Այն, $x - x_0 = t$ նշանակումով բերվում է $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ տեսքի: Ուստի, բավական է ուսումնասիրել այդ տեսքի աստիճանային շարքը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : \qquad (2)$$

Այն $x$ կետերի բազմությունը, որտեղ զուգամետ է (2) շարքը կոչվում է նրա զուգամիտության տիրույթ ($X$): Պարզ է, որ $0 \in X$: Գոյություն ունեն աստիճանային շարքեր, որոնք զուգամետ են միայն զրո կետում, օրինակ $\sum_{n=0}^{\infty} n^{n+1} x^n$ շարքը:Եթե $x \neq 0$, ապա այդ շարքի $n$-րդ անդամը չի ձգտում զրոյի: Կան շարքեր, որոնց զուգամիտության տիրույթը $R$-ն է: Օրինակ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$: Երբ $x \neq 0$, ապա ըստ Դ'Ալամբերի հայտանիշի շարքը բացարձակ զուգամետ է ցանկացած կետում:

Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթի կառուցվածքի մասին շատ բան է ասում հետևյալ լեմման:

*Աբելի լեմմա:*

Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ աստիճանային շարքը զուգամետ է $x_0 \neq 0$ կետում, ապա այն բացարձակ զուգամետ է ցանկացած $|x| < |x_0|$ պայմանին բավարարող $x$ կետում:

*Ապացուցում:* Քանի որ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ շարքը զուգամետ է, ապա $a_n x_0^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, որտեղից հետևում է այդ հաջորդականության սահմանափակությունը՝ $\exists\, C > 0, \forall n$ : $|a_n x_0^n| \leq C$ : Այժմ դիտարկենք

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը ($|x|<|x_0|$):

Ունենք՝ $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le C \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ ($\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$): Եվ, քանի որ

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ շարքը զուգամետ է, ապա այստեղից ստանում ենք $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

շարքի բացարձակ զուգամիտությունը: ■

*Հետևանք 1:* Այս լեմմաից ստացվում է, որ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը «խոռոչներ» ունենալ չի կարող՝ եթե շարքը զրոյից տարբեր կետում զուգամետ է, ապա այն զուգամետ է զրոյի նկատմամբ համաչափ միջակայքում (ծայրակետերում այդ համաչափությունը կարող է խախտվել):

*Հետևանք 2:* Աբելի լեմմայից հետևում է նաև, որ եթե զուգամիտության տիրույթը մի կետանի չէ, ապա այն պարունակում է դրական թվեր:

***Թեորեմ 1(զուգամիտության տիրույթի մասին):***

Դիցուք $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքի զուգամիտության ($X$) տիրույթը պարունակում է զրոյից տարբեր $x'$ կետեր և $X' = \{|x'|\}$ այդպիսի կետերի բացարձակ արժեքների բազմությունն է:

1. Եթե $X'$-ը սահմանափակ չէ վերևից, ապա շարքը զուգամետ է ամենուր ($X = \mathbb{R}$):

2. Եթե $X'$-ը սահմանափակ է վերևից և, ուրեմն $\exists \, supX' = R > 0$ $(R \in \mathbb{R})$, ապա ցանկացած, $|x| < R$ պայմանին բավարարող $x$ կետում շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ $|x| > R$ պայմանին բավարարող $x$ կետում՝ տարամետ:

*Ապացուցում:* Նախ, եթե $X'$-ը սահմանափակ չէ վերևից, ապա $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists \, |x'| \in X'$ : $|x| < |x'|$: Այստեղից, ըստ Աբելի լեմմայի $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը բացարձակ զուգամետ է, ուրեմն $X = \mathbb{R}$:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $X'$-ը սահմանափակ է վերևից և դիցուք՝ $\exists \, supX' = R > 0$ $(R \in \mathbb{R})$: Վերցնենք $\forall x, |x| < R$: $R$-ի սահմանումից հետևում է, որ $\exists \, |x_0'| \in X'$ : $|x| < |x_0'| \le R$: Ըստ

Աբելի լեմմայի, $x$ կետում շարքը բացարձակ զուգամետ է:

Դիցուք, այժմ $x$ կետը այնպիսին է, որ՝ $|x| > R$: Այստեղից հետևում է, որ $|x| \notin X'$, այսինքն $x$ կետում շարքը տարամետ է: ■

$R = supX'$ կոչվում է զուգամիտության շառավիղ: Երբ $X'$-ը անսահմանափակ է վերևից, ապա (ըստ սահմանման)՝ $R = +\infty$: Ըստ թեորեմի, դա նշանակում է, որ (2) շարքը զուգամետ է ամենուր՝ $X = \mathbb{R}$: Այն դեպքում երբ զուգամիտության տիրույթը բաղկացած է միայն մեկ կետից (զրոյից), ապա, ըստ սահմանման՝ $R = 0$:

*Դիտողություն 1:* Այն դեպքում, երբ աստիճանային շարքի $R$ զուգամիտության շառավիղը դրական թիվ է, ապա այդ շարքի զուգամիտության տիրույթն է $\langle -R; R \rangle$ միջակայքը (այն կարող է լինել բաց, փակ, կիսաբաց): Ծայրակետերում զուգամիտության հարցը, ընդհանրապես ասած, յուրաքանչյուր կոնկրետ օրինակում ունի հատուկ քննարկման կարիք:

Ստացված արդյունքը ցույց է տալիս զուգամիտության շառավղի գտնելու կարևորությունը: Այս հարցի պատասխանը պատկանում է Կոշիին և Հադամարին[*]: Ձևակերպենք համապատասխան թեորեմը առանց ապացույցի (ապացույցը տես [3]):

***Թեորեմ 2:*** Եթե $l = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, ապա՝

$$\boxed{R = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & l > 0, (l \in \mathbb{R}) \\ 0, & l = +\infty \\ +\infty, & l = 0 \end{cases}} \tag{3}$$

(3)-ը կոչվում է Կոշի-Հադամարի բանաձև:

*Դիտողություն 2:* Եթե գոյություն ունի վերջավոր կամ անվերջ սահման՝ $d = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, ապա գոյություն ունի նաև $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = d$:

Ուրեմն՝ $R = d = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$:

---

[*] Հադամար Ժակ ( 1865-1963)-ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

Օրինակ 1: Գտնել $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\left(a_n = \left(\frac{\left(3+(-1)^n 2\right)^n}{5^n+1}\right)^n\right)$ շարքի զուգամիտության տիրույթը: Օգտվենք (3) բանաձևից:

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left(3+(-1)^n 2\right)^n}{5^n+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{5^{2k}}{5^{2k}+1} = 1:$$

Ուրեմն՝ $R=1$: Այժմ ուսումնասիրենք $(-1;1)$ միջակայքի ծայրակետերում շարքի զուգամիտության հարցը: Երբ $n=2k$, ունենք՝

$$\left|a_{2k}\cdot(\pm 1)^{2k}\right| = \left(\frac{5^{2k}}{5^{2k}+1}\right)^{2k} = \left(1+5^{-2k}\right)^{-2k} =$$

$$= \left(\left(1+5^{-2k}\right)^{5^{2k}}\right)^{-2k\cdot 5^{-2k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1 \neq 0:$$

Այսպիսով, տվյալ շարքի զուգամիտության տիրույթն է $(-1;1)$ բաց միջակայքը:

Օրինակ 2: Գտնել $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\left(a_n = \frac{n!}{(2n)!}\right)$ շարքի զուգամիտության տիրույթը: Ունենք՝ $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty = R$: Այսպիսով, շարքի զուգամիտության տիրույթն է $\mathbb{R}$-ը:

Ուսումնասիրենք աստիճանային շարքերի հատկությունները:

***Թեորեմ 3:*** Դիցուք (2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$ շարքի զուգամիտության շառավիղը՝ $R$-ը դրական թիվ է: Այդ դեպքում, ցանկացած $r$ $(0<r<R)$ թվի համար (2) աստիճանային շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $[-r;r]$ հատվածում:

Եթե $R=+\infty$, ապա այդ աստիճանային շարքը հավասարաչափ զուգամետ է ցանկացած $[-r;r]$ $(r>0)$ հատվածում:

*Ապացուցում:* Քանի որ $x=r$ կետում շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա, հաշվի առնելով $\left|a_n x^n\right| \leq |a_n| r^n$ $\left(x\in[-r;r]\right)$ գնահատականը և օգտվելով շարքի հավասարաչափ զուգամիտության Վայերշտրասի հայտանիշից (տես II,1, թ. 6), կստանանք (2) շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը $[-r;r]$-ում: ■

*Դիտողություն 3:* Թեորեմի պնդումը, ընդհանրապես ասած ճիշտ չէ $(-R;R)$-ում: Իրոք՝ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ շարքի զուգամիտության շառավիղը հավասար է մեկի, բայց այն հավասարաչափ զուգամետ չէ $(-1;1)$-ում, քանի որ $r_{n-1}(x)=\sum_{k=n}^{\infty} x^k=\frac{x^n}{1-x}$-ը չի ձգտում հավասարաչափ զրոյի $(-1;1)$-ում՝

$$\left|r_{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|=n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty \quad (\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{e})$$

(տես II, թ.4.):

***Թեորեմ 4:*** Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=S(x)$ շարքի զուգամիտության շառավիղը՝ $R$-ը դրական թիվ է, ապա շարքի գումարը $S(x)$-ը անընդհատ է $(-R;R)$-ում: Իսկ, եթե $R=+\infty$, ապա $S(x)$-ը անընդհատ է $\mathbb{R}$-ում:

*Ապացույց:* Եթե $R$-ը դրական թիվ է, ապա՝ $\forall x\in(-R;R)\ \exists r\in(0;R)\ :\ x\in[-r;r]$: Քանի որ աստիճանային շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $[-r;r]$-ում և, շարքի անդամները անընդհատ են այնտեղ, ապա շարքի գումարը ևս կլինի անընդհատ $[-r;r]$-ում (տես II, 2, թ1), ուրեմն նաև $x$ կետում: Եթե $R=+\infty$, ապա որպես $r$ կարելի է վերցնել ցանկացած դրական թիվ: ■

***Թեորեմ 5:*** Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=S(x)$ շարքի զուգամիտության շառավիղը՝ $R$-ը դրական թիվ է և $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$) շարքը զուգամետ է թեկուզ ոչ բացարձակ, ապա տվյալ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $[0;R]$ ($[-R;0]$)-ում:

*Ապացույց:* Դիցուք, որոշակիության համար զուգամետ է

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ շարքը: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը ձևափոխենք հետևյալ կերպ՝ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n$ և օգտվենք հավասարաչափ զուգամիտության Աբելի հայտանիշից: Շարք $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ զուգամետ է (հավասարաչափ), իսկ $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ հաջորդականությունը մոնոտոն չաճող է, և՝ հավասարաչափ սահմանափակ՝ $\left|\frac{x}{R}\right|^n \le 1$: ■

***Թեորեմ 6 (Աբելի):***

Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ աստիճանային շարքը զուգամետ է նաև $x = R$ կետում, ապա շարքի գումարը անընդհատ է այդ կետում (իհարկե ձախից) $\lim_{x \to R-0} S(x) = \lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$:

Թեորեմի ապացույցը անմիջապես հետևում է նախորդ թեորեմից և ֆունկցիոնալ շարքի համապատասխան հատկությունից (տես 2, թ.1):

***Թեորեմ 7:*** Եթե երկու $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ և $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S(x)$ աստիճանային շարքերը ունեն միևնույն գումարը, զրո պարունակող ինչ-որ միջակայքում, ապա նրանց գործակիցները այդտեղ նույնաբար համընկնում են:

***Ապացուցում:*** Նշված միջակայքում ունենք՝

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

Վերցնելով այս նույնության մեջ $x = 0$, կստանանք՝ $a_0 = b_0$: Հաշվի առնելով ստացվածը, բաժանելով $x$-ի վրա և անցնելով սահմանի երբ $x$-ը ձգտում է զրոյի, կստանանք՝ $a_1 = b_1$: Պրոցեսը այդպես շարունակելով կստանանք թեորեմի պնդումը: ■

Խնդիր 1: Օգտվելով թեորեմ 7.-ից ապացուցել, որ եթե զույգ (կենտ) ֆունկցիան է վերլուծվում $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ տեսքի աստիճանային շարքի, ապա նրա վերլուծության մեջ մասնակցում են $x$-ի միայն զույգ (կենտ) աստիճաններ:

***Թեորեմ 8 (աստիճանային շարքի ինտեգրման մասին):***

Դիցուք $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ աստաճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը՝ $R > 0$ (այն կարող է լինել և անվերջ): Այդ դեպքում շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել՝

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < R): \quad (4)$$

Ընդ որում, եթե $(-R; R)$ միջակայքի ծայրակետերից որևէ մեկում $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը զուգամետ է, ապա (4)-ը ճշմարիտ է նաև այդ կետում:

Թեորեմի ապացույցն անմիջապես հետևում է թեորեմներ 3, 5-ից և ֆունկցիոնալ շարքի համապատասխան հատկությունից:

***Թեորեմ 9 (աստիճանային շարքի ածանցման մասին):***

Դիցուք $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ աստաճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը՝ $R > 0$: Այն կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել $(-R; R)$-ում՝

$$S'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}: \quad (5)$$

Ընդ որում, եթե $(-R; R)$ միջակայքի ծայրակետերից որևէ մեկում ածանցված շարքը զուգամետ է, ապա (5)-ը ճշմարիտ է նաև այդ կետում:

Թեորեմի ապացույցն անմիջապես հետևում է թեորեմներ 3, 5-ից և ֆունկցիոնալ շարքի համապատասխան հատկությունից (հաշվի առնենք նաև այն, որ $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, ուրեմն ըստ Կոշի-Ադամարի բանաձևի (5)-ի զուգամիտության շառավիղը նույնպես $R$ է):

Այսպիսով, ապացուցված է հետևյալ պնդումը:

*Թեորեմ 10:* Եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը՝ $R > 0$, ապա այն կարելի է ցանկացած անգամ անդամ առ անդամ ինտեգրել (ածանցել) $(-R; R)$-ում, ընդ որում, դրանից չի փոխվում զուգամիտության շառավիղը:

## 4. ԹԵՅԼՈՐԻ ՇԱՐՔԵՐ

*Սահմանում 1:* Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $X$ միջակայքում և անվերջ դիֆերենցելի է $x_0 \in X$ կետում ( $f$-ը ունի ցանկացած կարգի ածանցյալ $x_0$-ում): Այդ դեպքում իմաստ ունի դիտարկել հետևյալ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ $(x, x_0 \in X)$ աստիճանային շարքը: Այն կոչվում է $f$ ֆունկցիայի **Թեյլորի շարք**:

Հարց է առաջանում՝ ինչպիսի՞ն լինի $f$ ֆունկցիան, որ այն վերլուծվի իր Թեյլորի շարքի: Նկատենք (տես [1]), որ վերը նշված պայմանների առկայությամբ $f$ ֆունկցիան ներկայացվում է Թեյլորի բանաձևով՝ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x, x_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, որտեղ $r_n(x, x_0)$-ն Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամն է:

Նկատենք նաև, որ Թեյլորի բազմանդամը

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

հանդիսանում է Թեյլորի շարքի $n$-րդ մասնակի գումարը:

*Թեորեմ 1:* Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $X$ միջակայքում և անվերջ դիֆերենցելի է $x_0 \in X$ կետում: Որպեսզի $f$ ֆունկցիան $x \in X$ կետում վերլուծվի իր Թեյլորի շարքի անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամը լինի անվերջ փոքր՝ $\lim_{n \to \infty} r_n(x, x_0) = 0$:

*Ապացույց:* $f$ ֆունկցիայի վերլուծվելը իր Թեյլորի շարքի համարժեք է նրան, որ $f(x) - P_n(x, x_0) = r_n(x, x_0) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$: ■

*Թեորեմ 2:* Որպեսզի $f$ ֆունկցիան, որը որոշված է $X$ միջակայքում և անվերջ դիֆերենցելի է այդ միջակայքի յուրաքանչյուր $x\in X$ կետում վերլուծվի իր Թեյլորի շարքի, բավարար է, որ նրա ածանցյալները $X$ միջակայքում լինեն հավասարաչափ սահմանափակ՝ $\exists C>0, \forall n\in N, \forall x\in X \ : \ \left|f^{(n)}(x)\right|\le C$:

*Ապացույց:* Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամը ներկայացնենք Լագրանժի տեսքով՝

$$r_n(x,x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ \left(\xi\in(x_0;x)\right):$$

Հաշվի առնելով նաև թեորեմի պայմանները, կստանանք՝

$$\left|r_n(x,x_0)\right|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}\le C\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0:$$

Որտեղից, ըստ թեորեմ 1-ի, $f$ ֆունկցիան վերլուծվում է իր Թեյլորի շարքի: ■

Այժմ զբաղվենք տարրական ֆունկցիաների Թեյլորի շարքի վերլուծության հարցերով: Ընդ որում, կդիտարկենք մասնավոր, բայց կարևոր $x_0=0$ դեպքը (Մակլորանի շարք) և հիմք կընդունենք համապատասխան վերլուծությունները ըստ Մակլորանի բանաձևի [1]:

1° $f(x)=e^x, x\in R$: Վերցնենք կամայական $x\in R$ և ընտրենք $a>0$ այնպես, որ՝ $|x|\le a$: Հաշվի առնելով, որ $\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x\le e^a\ (n=0,1,...)$, թեորեմ 2.-ից ստանում ենք, որ $f(x)=e^x$ ֆունկցիան վերլուծվում է հետևյալ Մակլորանի շարքի ցանկացած $[-a;a]$ միջակայքում և, ուրեմն $R$-ում՝

$$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (x\in R)} \qquad (1)$$

2° $f(x)=sinx, (x\in R)$: Քանի որ այս ֆունկցիայի ցանկացած կարգի ածանցյալը հավասար է կամ $\pm sinx$, կամ $\pm cosx$, ապա այն սահմանափակ է, ուրեմն, ըստ թեորեմ 2.-ի (տես նաև [1]), $f(x)=sinx$ ֆունկցիան վերլուծվում է հետևյալ Մակլորանի շարքի $R$-ում՝

$$\boxed{\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ (x\in\mathbb{R})}: \qquad (2)$$

3° $f(x)=\cos x,\ (x\in\mathbb{R})$: Օգտվելով նախորդ բաժնի թեորեմ 9.-ից, ածանցենք (2)-ը, կստանանք՝

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}:$$

Այսպիսով՝

$$\boxed{\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ (x\in\mathbb{R})}: \qquad (3)$$

4° $f(x)=\dfrac{1}{1-x}\ (|x|<1)$: Ըստ անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևի, ունենք՝

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ (x\in(-1;1))}: \qquad (4)$$

(4)-ից, փոխարինելով $x$-ը- $x$-ով ստանում ենք՝

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\ (x\in(-1;1))}: \qquad (5)$$

Ինտեգրելով (5)-ը (տես նախորդ բաժնի թեորեմ 8-ը), ստանում ենք՝

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\ (x\in(-1;1)):$$

Հաշվի առնելով այն, որ գրված շարքը զուգամետ է նաև $x=1$ կետում (Լայբնիցյան շարք է) և օգտվելով նախորդ բաժնի թեորեմ 6.-ից, կստանանք՝

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\ (x\in(-1;1])}: \qquad (6)$$

Մասնավորապես, վերցնելով $x=1$, ստանում ենք՝

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2}: \qquad (7)$$

5° $f(x)=arctgx\left(x\in(-1;1)\right)$: (5)-ի մեջ $x$-ը փոխարինենք $x^2$-ով, կստանանք՝

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\ \left(|x|<1\right): \tag{8}$$

Ինտեգրելով (8)-ը, կստանանք՝ $arctgx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$: Եվ, քանի որ այս շարքը զուգամետ է նաև $x=\pm 1$ կետում, ապա՝

$$\boxed{arctgx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ \left(x\in[-1;1]\right)}: \tag{9}$$

(9) – ում ինտեգրման հաստատունը բացակայում է, քանի որ (9) - ի ձախ մասը և աջ մասի շարքի գումարը $x=0$ կետում հավասար են զրոյի:

Մասնավորապես, վերցնելով (9)-ում $x=1$, ստանում ենք՝

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}}: \tag{10}$$

6° $f(x)=(1+x)^{\alpha}\ \left(|x|<1\right)$ (երկանդամային վերլուծություն, $\alpha$-ն կամայական թիվ է): Այս դեպքում, Մակլորանի բանաձևը ընդունում է հետևյալ տեսքը (տես [1])՝

$$f(x)=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x), \tag{11}$$

որտեղ մնացորդային անդամը հարմար է ներկայացնել Կոշիի տեսքով՝

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta\cdot x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}\ \left(0<\theta<1\right): \tag{12}$$

(11)-ին համապատասխան Մակլորանի շարքն է՝

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, \tag{13}$$

որտեղ՝ $a_n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ \left(n\in N\right),\ a_0=1$:

(13) շարքի զուգամիտության շառավիղը՝

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!\cdot|\alpha-n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-\alpha}=1:$$

Քանի որ $f^{(n+1)}(x)=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$, ապա ձևափոխելուց հետո, (12)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$r_n(x)=\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n\cdot\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\ (|x|<1): \quad (14)$$

(14)-ի առաջին $\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-1-n+1)}{n!}x^n$ արտադրիչը հանդիսանում է (13) զուգամետ շարքի $n$-րդ անդամը, ($\alpha$-ն փոխարինված է $\alpha-1$-ով), ուրեմն, այն անվերջ փոքր է:

Քանի որ՝ $1-|x|\le|1+\theta x|\le 1+|x|$, ապա $\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}$ արտադրիչը սահմանափակ է, այն բացարձակ մեծությամբ փոփոխվում է $|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}$, $|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$ արտահայտությունների միջև:

Պարզ է, որ $x>-1$ պայմանից հետևում է՝ $1+\theta\cdot x>1-\theta>0$ և, ուրեմն՝ $0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$: Ուստի՝ $0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1$:

Այսպիսով $r_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $(|x|<1)$ և, ուրեմն $f(x)=(1+x)^\alpha$-ը վերլուծվում է (13) Մակլորանի շարքի՝

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\ (|x|<1): \quad (15)$$

**Խնդիր:** Օգտվելով (15) վերլուծությունից (վերցնել $\alpha=-0,5$ և $x$-ը փոխարինել $-x^2$-ով),ստանալ վերլուծություն $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ֆունկցիայի համար: Ինտեգրելով ստացվածը, ստանալ $f(x)=arcsinx$ ֆունկցիայի վերլուծությունը Մակլորանի շարքի:

## III ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔԵՐ

### 1. ՖՈՒՐԻԵԻ* ՇԱՐՔ, ՖՈՒՐԻԵԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐ

***Սահմանում 1:*** $[a;b]$ հատվածում որոշված և քառակուսով (թեկուզ անիսկական իմաստով) ինտեգրելի $f$ և $g$ ֆունկցիաները կոչվում են օրթոգոնալ $(f \perp g)$, եթե՝

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = 0 \tag{1}$$

(այստեղ պետք է հաշվի առնել այն, որ՝ $2|f(x)\cdot g(x)| \le f^2(x)+g^2(x)$ անհավասարությունից հետևում է (1) ինտեգրալի բացարձակ զուգամիտությունը):

***Սահմանում 2:*** $[a;b]$ հատվածի վրա տրված $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիաների համակարգը կոչվում է օրթոգոնալ եթե՝

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \lambda_n\cdot\delta_{mn} \quad \left(\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \lambda_n > 0\right), \tag{2}$$

որտեղ $\delta_{mn}=0$, եթե $m \ne n$ և $\delta_{mm}=1$: Այն կոչվում է Կրոնեկերի* սիմվոլ:

***Սահմանում 3:*** $[a;b]$ հատվածի վրա տրված քառակուսով ինտեգրելի $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ֆունկցիաների համակարգը կոչվում է օրթոնորմալ եթե՝

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \delta_{mn}$$

Նկատենք, որ օրթոգոնալ համակարգը ծնում է $\left\{\dfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ օրթոնորմալ համակարգ:

---

* Ֆուրիե Ժան Բատիստ Ժոզեֆ (1768-1830)-ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

* Կրոնեկեր Լեոպոլդ (1823-1891)-գերմանացի մաթեմատիկոս:

Օրթոնորմալ համակարգի դասական օրինակ է հանդիսանում $[-\pi;\pi]$ հատվածի վրա տրված եռանկյունաչափական համակարգը՝

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cosx}{\sqrt{\pi}}, \frac{sinx}{\sqrt{\pi}}, \frac{cos2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{sin2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \qquad (3)$$

(ստուգել ինքնուրույն, որ՝

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \int_{-\pi}^{\pi} cos^2(nx)dx = \pi, \int_{-\pi}^{\pi} sin^2(kx)dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin(kx)\cdot sin(mx)dx = 0 \ (k \neq m),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)\cdot cos(mx)dx = 0 \ (k \neq m), \int_{-\pi}^{\pi} cos(kx)\cdot sin(mx)dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot cos(mx)dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot sin(mx)dx = 0 \ ):$$

Դիցուք $f$ ֆունկցիան վերլուծվում է ըստ $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ օրթոգոնալ համակարգի հավասարաչափ զուգամետ շարքի (Ֆուրիեի ընդհանրացված շարք)՝

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots : \qquad (4)$$

Բազմապատկելով այդ հավասարության երկու մասերը $\varphi_k(x)$-ով $(k = 1, 2, \dots)$ և ինտեգրելով (շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը թույլ է տալիս այն անդամ առ անդամ ինտեգրել), կստանանք՝ $\int_a^b f(x)\cdot\varphi_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\lambda_n\delta_{nk} = c_k\lambda_k$ :

Այսպիսով՝

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k}\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx : \qquad (5)$$

(5)-ով որոշված գործակիցները կոչվում են $f$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներ:

Մասնավորապես, եթե $f$ ֆունկցիան վերլուծվում է ըստ եռանկյունաչափական համակարգի հավասարաչափ զուգամետ շարքի (Ֆուրիեի շարք)՝

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx),\qquad(6)$$

ապա Ֆուրիեի գործակիցներն են՝

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot cos(nx)dx\ \ (n=0,1,...),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot sin(nx)dx\ \ (n=1,2,...):\qquad(7)$$

Այստեղ հաշվի առանք, որ՝

$$\lambda_0=\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi,\ c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx:$$

## 2. ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐԸ, ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ

Այսուհետ, առանց ամեն անգամ հատուկ շեշտելու, կենթադրենք, որ $f$ ֆունկցիան որոշված է ամբողջ առանցքի վրա, ունի $2\pi$ պարբերություն և ինտեգրելի է $[-\pi;\pi]$ հատվածում, թեկուզ անիսկական իմաստով (վերջին դեպքում կհամարենք, որ $f$-ը բացարձակ ինտեգրելի է): Այդ դեպքում (7)-ով որոշվող Ֆուրիեի գործակիցները իմաստ ունեն, քանի որ, օրինակ՝ $|f(x)\cdot\cos(nx)|\le|f(x)|$: Այս ֆունկցիային համապատասխանեցնենք նրա Ֆուրիեի շարքը՝

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos(nx)+b_n sin(nx):\qquad(8)$$

Այժմ, ձևակերպենք հետևյալ խնդիրը: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի $f$ ֆունկցիան, որպեսզի նրա Ֆուրիեի շարքը լինի զուգամետ և շարքի գումարն էլ հավասարվի $f(x)$-ին: Որպեսզի ուսումնասիրենք (8) շարքի վարքը որոշակի $x=x_0$ կետում, կազմենք այդ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը՝

$$S_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k cos(kx_0)+b_k sin(kx_0))\ \ (n\in N)$$

և՝ $a_k,b_k$ գործակիցների փոխարեն գրենք նրանց (7) ինտեգրալային արտահայտությունները, կստանանք՝

$$S_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\,du+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)(cos(kx_0)cos(ku)+sin(kx_0)sin(ku))du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}cos(k(u-x_0)))du:$$

Հաշվենք $A=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}cos(kt)\ \ (t=u-x_0)$: Ունենք՝

$$2\sin\frac{t}{2}\cdot A=2\sin\frac{t}{2}\cdot(\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt)=$$

$$=\sin\frac{t}{2}+\sin\frac{3t}{2}-\sin\frac{t}{2}+\sin\frac{5t}{2}-...+$$

$$+\sin\frac{(2n+1)t}{2}-\sin\frac{(2n-1)t}{2}=\sin\frac{(2n+1)t}{2}:$$

Որտեղ՝

$$A=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}cos(kt)=\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\quad(t\neq 2\pi\mathrm{m}): \tag{9}$$

(9)-ից հետևում է, որ

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)D_n(u-x_0)du, \tag{10}$$

որտեղ՝ $D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}cos(kt)$ և, $t\neq 2\pi m\ (m\in Z)$ դեպքում ունենք՝

$$D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}cos(kt)=\frac{sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2sin\frac{t}{2}}: \tag{11}$$

$D_n(t)$-ն կոչվում է Դիրիխլեի կորիզ, իսկ (10) ինտեգրալը՝ Դիրիխլեի ինտեգրալ: Պարզ է, որ Դիրիխլեի կորիզը որոշված է ամբողջ առանցքի վրա, անընդհատ է, զույգ է և ունի $2\pi$ պարբերություն:

(10)-ինտեգրալում կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝

$u - x_0 = t$, կստանանք՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt : \tag{10'}$$

Նկատենք, որ եթե ունենք ամբողջ առանցքի վրա որոշված, $2\pi$ պարբերությամբ $g(x)$ ֆունկցիա, որը ինտեգրելի է $[-\pi;\pi]$ հատվածում (թեկուզ անիսկական իմաստով), ապա՝

$$\forall x_0 \in \mathbf{R} : \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} g(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt :$$

Իրոք՝ $\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} g(t)dt = \int_{x_0-\pi}^{-\pi} g(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt + \int_{\pi}^{x_0+\pi} g(t)dt$ : Վերջին ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $t = \tau + 2\pi$ և հաշվի առնենք, որ $g(x)$ ֆունկցիան ունի $2\pi$ պարբերություն, կստանանք՝ $\int_{\pi}^{x_0+\pi} g(t)dt = \int_{-\pi}^{x_0-\pi} g(\tau+2\pi)d\tau = -\int_{x_0-\pi}^{-\pi} g(t)dt$ : Այսպիսով, ստանում ենք՝ $\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} g(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$ : Ուրեմն, (10′)-ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt : \tag{12}$$

(12)-ը բաժանենք երկու մասի, առաջինում $t$-ն փոխարինենք $-t$-ով, կստանանք՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+t)D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+t)D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t))D_n(t)dt :$$

Այսպիսով՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x_0+t) + f(x_0-t))D_n(t)dt : \tag{13}$$

Դիտարկենք մասնավոր դեպք, երբ $f(x)\equiv 1$: Այդ դեպքում՝ $S_n(x_0)=1 \quad (n\geq 1)$ և, ուրեմն (13)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $1=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2D_n(t)\,dt$: Որտեղից, կամայական $S_0$ ($S_0$-ն $S_n(x_0)$-ի հիպոտետիկ սահմանն է) թվի համար ունենք՝

$$S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2S_0\cdot D_n(t)\,dt: \qquad (14)$$

Հանելով (13)-ից (14)-ը, կստանանք

$$S_n(x_0)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0\right]\cdot D_n(t)\,dt: \qquad (15)$$

Այսպիսով, խնդիրը հանգել է հետևյալին՝ ինչպիսի՞ն լինի $S_0$-ն և $f$-ը, որպեսզի (15)-ի ձախ մասը (ուրեմն նաև աջ մասը) ձգտի զրոյի, երբ $n$-ը ձգտում է անվերջի: Այս խնդիրը լուծելու համար նախապես հարկավոր է հետևյալ լեմման:

## 3. ԼՈԿԱԼԻԶԱՑԻԱՅԻ (ՏԵՂԱՅՆԱՑՄԱՆ) ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

***Ռիմանի լեմմա:*** Դիցուք $g$ ֆունկցիան սովորական իմաստով ինտեգրելի է ($g\in R[a;b]$), կամ անիսկական իմաստով բացարձակ ինտեգրելի է $[a;b]$-ում: Այդ դեպքում՝

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(x)\cos(px)\,dx=\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(x)\cdot\sin(px)\,dx=0: \qquad (16)$$

***Ապացույց:*** Նախ ենթադրենք, որ $g\in R[a;b]$: Դիտարկենք $[a;b]$ հատվածի որևէ տրոհում $T=\{x_k\}_{k=0}^n$ և, դիցուք՝ $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} g$, $m_k=\inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} g$, $\omega_k=M_k-m_k$: Ունենք՝

$$\int_a^b g(x)\cos(px)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[g(x)-m_k\right]\cdot\cos(px)\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^n m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}\cos(px)\,dx=A_p+B_p: \qquad (17)$$

Բայց, քանի որ $g \in R[a;b]$, ապա՝

$$\left|A_p\right| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [M_k - m_k]\cdot\left|cos(px)\right|dx \le \sum_{k=1}^{n}\omega_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx = \sum_{k=1}^{n}\omega_k \Delta x_k \underset{\lambda\to 0}{\to} 0$$

($\lambda$-ն տրոհման տրամագիծն է): Ուրեմն (տես [2])՝

$$\forall\varepsilon>0\ \exists T=\{x_k\}_{k=0}^{n}\ :\ \sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2}\ \Rightarrow\ \left|A_p\right|<\frac{\varepsilon}{2}:$$

Այժմ, հաստատագրելով այդ տրոհումը (այդ դեպքում $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ -ն որոշակի թիվ է), կստանանք՝

$$\left|B_p\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} m_k\right|\cdot\left|\frac{sin(px)}{p}\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} m_k\right|\cdot\frac{2}{|p|}\underset{p\to\infty}{\to}0:$$

Ուրեմն՝ $\exists\ \delta>0\ \forall p\left(|p|>\delta\right)\ :\ \left|B_p\right|<\frac{\varepsilon}{2}$: Այսպիսով՝

$$\left|\int_a^b g(x)cos(px)dx\right|<\varepsilon\ \left(|p|>\delta\right)\ \Rightarrow \lim_{p\to\infty}\int_a^b g(x)cos(px)dx=0:$$

Մյուս ինտեգրալի զրոյի ձգտելը ապացուցվում է նույն կերպ:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $g$ -ն բացարձակ ինտեգրելի է $[a;b]$-ում և $b$-ն միակ եզակի կետն է: Ըստ սահմանման՝

$\int_a^b |g(x)|dx = \lim\limits_{\eta\to+0}\int_a^{b-\eta}|g(x)|dx$, որն էլ համարժեք է հետևյալին՝

$$\lim_{\eta\to+0}\int_{b-\eta}^{b}|g(x)|dx=0:$$

Ընդ որում, $\int\limits_a^{b-\eta} g(x)dx$ Ռիմանի ինտեգրալի համար ճշմարիտ է վերը ապացուցվածը՝

$$\int_a^{b-\eta} g(x)\cdot cos(px)dx\underset{p\to\infty}{\to}0\Rightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0,\forall\rho\left(|p|>\delta\right):\ \left|\int_a^{b-\eta} g(x)\cdot cos(px)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}:$$

Ըստ թեորեմի պայմանի՝

$$\exists\gamma>0,\ \forall\eta\in(0;\gamma)\ :\ \int_{b-\eta}^{b}|g(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}:$$

Այսպիսով՝

$$\left|\int_a^b g(x)\cdot cos(px)dx\right|\le\left|\int_a^{b-\eta}g(x)\cdot cos(px)dx\right|+\int_{b-\eta}^{b}|g(x)|dx<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\left(\eta\in(0;\gamma),|p|>\delta\right):$$

Ուրեմն՝ $\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b g(x)cos(px)dx=0$: Մյուս ինտեգրալի զրոյի ձգտելը ապացուցվում է նույն կերպ: ■

*Հետևանք 1:* $f$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները ձգտում են զրոյի՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot cos(nx)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot sin(nx)dx=0$$

***Հետևանք 2 (լոկալիզացիայի (տեղայնացման) սկզբունքը):***

$f$ ֆունկցիայի $x_0$ կետում Ֆուրիեի շարքի զուգամիտությունը և շարքի գումարը կախված են միայն $x_0$ կետի որքան ասես փոքր շրջակայքում այդ ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից:

Իրոք, $S_n(x_0)=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_n(t)dt$ ինտեգրալը տրոհենք երկու ինտեգրալների

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{h}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_n(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_h^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_n(t)dt, \qquad (18)$$

որտեղ $h$-ը որքան ասես փոքր դրական թիվ է ($h\in(0;\pi)$): Այստեղ երկրորդ ինտեգրալն է՝

$$\frac{1}{\pi}\int_h^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))D_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_h^{\pi}g(t)\cdot sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\ ,$$

որտեղ՝ $g(t)=\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2sin\frac{t}{2}}\left(t\in[h;\pi]\right)$:

Քանի որ $\dfrac{1}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left(t\in[h;\pi]\right)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա $g(t)$ ֆունկցիան բավարարում է Ռիմանի լեմմայի պայմաններին, ուստի՝

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_h^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\cdot D_n(t)dt=0:$$

Այսպիսով, $S_n(x_0)$-ի սահմանի գոյությունը և արժեքը կախված է միայն (18)-ի առաջին ինտեգրալից, որն իր հերթին կախված է $f$ ֆունկցիայի արժեքներից $[x_0-h;x_0+h]$ միջակայքում:

### 4. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

*Դինիի* հայտանիշը:*

Դիցուք գոյություն ունի h $\left(h\in(0;\pi)\right)$ այնպիսին, որ զուգամետ է $\displaystyle\int_0^h\frac{\left|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0\right|}{t}dt$ ինտեգրալը: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամետ է $x_0$ կետում և շարքի գումարը հավասար է $S_0$-ի:

*Ապացուցում:* (15) ինտեգրալը ձևափոխենք հետևյալ կերպ

$$S_n(x_0)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0\right]\cdot D_n(t)dt=A(n)+B(n),$$

որտեղ

$$A(n)=\frac{1}{\pi}\int_0^h\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{t}\cdot\frac{t}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cdot sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt,$$

* Դինի Ուլիսսե (1845-1918)-իտալացի մաթեմատիկոս:

իսկ՝ $B(n)=\frac{1}{\pi}\int_{h}^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cdot sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt$:

Պարզ է, որ $\frac{t}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}(t\in[h;\pi])$ ֆունկցիան սահմանափակ է

($\lim_{t\to+0}\frac{t}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}=1$), իսկ $f(x_0+t)+f(x_0+t)-2S_0$ ֆունկցիան ըստ պայմանի բացարձակ ինտեգրելի է: Ուրեմն, ըստ Ռիմանի լեմմայի՝ $\lim_{n\to\infty}A(n)=0$: Երկրորդ ինտեգրալում, Ռիմանի լեմմայի $g(t)$-ի դերում է $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ ֆունկցիան: Այսպիսով, ունենք նաև՝

$\lim_{n\to\infty}B(n)=0$: Որտեղից հետևում է՝ $\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=S_0$ : ■

***Սահմանում 1:*** Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $x_0$-կետի ինչ-որ $U_\delta(x_0)$ շրջակայքում և $x_0$-ում ունի միակողմանի սահմաններ՝ $\exists f(x_0\pm0)$: Կասենք, որ $f$ ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի* պայմանին $x_0$ կետում, եթե՝ $\exists L>0, \exists\gamma\in(0;\delta), \forall h\in(0;\gamma)$ ճիշտ են $\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}\right|<L$ և $\left|\frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{h}\right|<L$ պայմանները:

***Սահմանում 2:*** Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $x_0$-կետի ինչ-որ $U_\delta(x_0)$ շրջակայքում և $x_0$-ում ունի միակողմանի սահմաններ՝ $\exists f(x_0\pm0)$: Կասենք, որ $f$-ը $x_0$-ում ունի աջակողմյան (ձախակողմյան) ածանցյալ, եթե՝

$$\exists\lim_{h\to+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}=f'_+(x_0)\in\mathbb{R}$$

---

* Լիպշից Ռուդոլֆ. (1832-1903 )-գերմանացի մաթեմատիկոս:

$$(\exists \lim_{h\to+0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h} = f'_-(x_0) \in \mathbf{R}):$$

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ $f$ ֆունկցիայի միակողմանի ածանցյալների գոյությունից հետևում է Լիպշիցի պայմանը ):

*Լիպշիցի հայտանիշը:*

Եթե $f$ ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի պայմանին $x_0$ կետում, ապա այդ կետում $f$-ի Ֆուրիեի շարքը զուգամետ է և նրա գումարը հավասար է $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = S_0$:

*Ապացուցում:* Քանի որ՝ $\exists h>0, \forall t \in (0;h)$ :

$$\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0|}{t} =$$

$$= \frac{|[f(x_0+t)-f(x_0+0)]+[f(x_0-t)-f(x_0-0)]|}{t} \le$$

$$\frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{|t|} + \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{|-t|} \le 2L,$$

ապա այստեղից հետևում է Դինիի հայտանիշի պայմանը: ■

*Սահմանում 3:* Կասենք, որ $f$ ֆունկցիան, որոշված $[a;b]$ հատվածում, **կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է**, եթե գոյություն ունի $[a;b]$ հատվածի այնպիսի $T=\{t_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհում, որ յուրաքանչյուր բաց $(t_{k-1};t_k)$ միջակայքում $f$-ը դիֆերենցելի է, իսկ ծայրակետերում գոյություն ունեն միակողմանի սահմաններ և՝ ածանցյալներ $f'_\pm(x_k)$: Հասկանալի է, որ a կետում կա միայն աջակողմյան, իսկ $b$-ում՝ միայն ձախակողմյան ածանցյալներ:

***Հիմնական թեորեմ (Ֆուրիեի շարքի վերլուծելու մասին):***

Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է ամբողջ առանցքի վրա, ունի $2\pi$ պարբերություն և ինտեգրելի է $[-\pi;\pi]$ հատվածում թեկուզ անիսկական իմաստով (վերջին դեպքում կհամարենք, որ $f$-ը բացարձակ ինտեգրելի է): Կենթադրենք նաև, որ $f$ ֆունկցիան կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է $[-\pi;\pi]$ հատվածում:

Այս պայմանների առկայությամբ $f$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամետ է յուրաքանչյուր $x_0$ կետում և շարքի գումարը հավասար է՝ $S_0 = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ ($S_0 = f(x_0)$, եթե $x_0$-ն անընդհատության կետ է):

*Ապացուցում:* Թեորեմի պայմաններից հետևում է Լիպշիցի պայմանը $x_0$ կետում (տես խնդիր 1): Պարզ է, որ այն կետերում, որտեղ ֆունկցիան դիֆերենցելի է նույնպես տեղի ունի Լիպշիցի պայմանը: Այստեղից հետևում է թեորեմի պնդումը: ■

Խնդիր 2: Ապացուցել որ զույգ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը պարունակում է միայն կոսինուսներ՝

$$b_n = 0 \, (n=1,2,\ldots), \; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot \cos(nx)dx \; (n=0,1,\ldots), \qquad (19)$$

իսկ կենտ ֆունկցիայի դեպքում՝ միայն սինուսներ՝

$$a_n = 0 \; (n=0,1,\ldots), \; b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sin(nx)dx \; (n=1,2,\ldots): \qquad (20)$$

## 5. ՈՉ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԵՊՔԸ

Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $[-\pi;\pi]$ հատվածում և այդտեղ կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է: Ներմուծենք $f^*(x)$ օժանդակ ֆունկցիան հետևյալ կերպ՝

$$f^*(x) = f(x)\,(x\in(-\pi;\pi]),\; f^*(-\pi) = f(\pi):$$

Այնուհետև, այդ ֆունկցիան պարբերական ($2\pi$ պարբերությամբ) կերպ շարունակենք ամբողջ առանցքի վրա: Ստացված պարբերական $f^*(x)$ ֆունկցիան բավարարում է նախորդ բաժնի հիմնական թեորեմի բոլոր պայմաններին, ուստի նրա Ֆուրիեի շարքը զուգամետ է ամենուրեք, մասնավորապես $(-\pi;\pi)$ բաց միջակայքում, որտեղ $f^*(x) \equiv f(x)$:

Ծայրակետում ($x_0 = \pi$) Ֆուրիեի շարքի գումարը կլինի $\dfrac{f^*(\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2}$:

Բայց՝ $f^*(\pi+0)=f^*(-\pi+0)=f(-\pi+0), f^*(\pi-0)=f(\pi-0)$:
Նույն արդյունքն է ստացվում $x_0=-\pi$ ծայրակետում: Այսպիսով, $-\pi, \pi$ ծայրակետերում Ֆուրիեի շարքի գումարը կլինի՝ $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$:

## 6. ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՄԻՋԱԿԱՅՔԻ ԴԵՊՔԸ

Դիցուք $f$ ֆունկցիան որոշված է $[-l;l]$ հատվածում և այդտեղ կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է: Կատարենք փոփոխականի $y=\dfrac{\pi}{l}x$ ($x=\dfrac{l}{\pi}y$) փոխարինում:

Պարզ է, որ $g(y)=f\left(\dfrac{l}{\pi}y\right)$ բարդ ֆունկցիան որոշված է $[-\pi;\pi]$ հատվածում և այդտեղ կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է: Կրկնելով նախորդ բաժնի դատողությունները, օրինակ, անընդհատության $y$ կետում կունենանք՝

$$g(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos(ny)+b_n sin(ny),$$

որտեղ

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)\cdot cos(ny)dy \quad (n=0,1,...),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)\cdot sin(ny)dy \quad (n=1,2,...):$$

Անցնելով նորից $x$ փոփոխականի և ինտեգրալներում կատարելով $y=\dfrac{\pi}{l}x$ փոփոխականի փոխարինում, կստանանք $f$ ֆունկցիայի $x=\dfrac{l}{\pi}y$ անընդհատության կետում՝

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+b_n sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \qquad (21)$$

որտեղ՝

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,\; b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx: \quad (22)$$

Ընդ որում, ընդհանուր դեպքում $x_0\in(-l;l)$ կետերում Ֆուրիեի շարքի գումարն է $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, իսկ $x=\pm l$ ծայրակետերում՝ $\frac{f(l-0)+f(l+0)}{2}$:

Զույգ ֆունկցիայի դեպքում ունենք (տես 4. խնդ. 2)

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx\;(n=0,1,...),$$

$$b_n=0\,(n=1,2,...): \quad (23)$$

Իսկ կենտ ֆունկցիայի դեպքում՝

$$a_n=0\,(n=0,1,...),$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx\;(n=1,2,...): \quad (24)$$

Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1: Վերլուծել $f(x)=|\sin(\pi x)|$ ֆունկցիան Ֆուրիեի շարքի:

Հաշվի առնելով, որ այս ֆունկցիան պարբերական է (հիմնական պարբերությունն է՝ $T=1$) և զույգ է, կունենանք (տես (21),(23), $l=\frac{1}{2}$)՝

$$a_0=4\int_0^{0.5}\sin(\pi x)dx=-\frac{4}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^{0.5}=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=4\int_0^{0.5}\sin(\pi x)\cdot\cos(2\pi nx)dx=2\int_0^{0.5}\sin(\pi(2n+1)x)dx-$$

$$-2\int_0^{0.5}\sin(\pi(2n-1)x)dx=-\frac{2}{(2n+1)\pi}\cos((2n+1)\pi x)\Big|_0^{0.5}+$$

$$+\frac{2}{(2n-1)\pi}\cos((2n-1)\pi x)\Big|_0^{0.5}=-\frac{4}{(4n^2-1)\pi}:$$

Այսպիսով՝ $\left|\sin(\pi x)\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi nx)}{4n^2-1}\ (x\in\mathbb{R})$:

**Օրինակ 2:** Վերլուծել $f(x) = \arcsin(\sin(\pi x))$ ֆունկցիան Ֆուրիեի շարքի: Պարզ է, որ $f\in C(\mathbb{R})$: Քանի որ այս ֆունկցիան պարբերական է (հիմնական պարբերությունն է՝ $T = 2$) և կենտ է, ապա հարմար է նախ այն դիտարկել $[-1;1]$ հատվածի վրա ($l = 1$)՝

$$a_n = 0\ (n = 0,1,\ldots),\ b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(\pi nx)dx\ (n = 1,2,\ldots):$$

Երբ $x\in[0;0,5]$, ապա $f(x) = \pi x$, իսկ երբ $x\in[0,5;1]$, ապա $f(x) = \pi(1-x)$:

Ուրեմն՝ $b_n = 2\pi\int_0^{0,5}x\sin(\pi nx)dx + 2\pi\int_{0,5}^1(1-x)\sin(\pi nx)dx$: Կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը, ստանում ենք՝

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{\pi n}{2}:$$

Այստեղից՝ $b_{2k} = 0\ (k = 1,2,\ldots), b_{2k+1} = \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2}\ (k = 0,1,\ldots)$:

Այսպիսով՝

$$\boxed{\arcsin(\sin(\pi x)) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(\pi(2k+1)x)}{(2k+1)^2}\ (x\in\mathbb{R})}:$$

Մասնավորապես, տեղադրելով այստեղ $x = 0,5$ ստանում ենք հետևյալ թվային շարքի գումարը՝ $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$:

**Օրինակ 3:** Վերլուծել $f(x) = x\ (x\in[0;l])$ ֆունկցիան Ֆուրիեի շարքի միայն ըստ կոսինուսների: Դրա համար հարկավոր է նախ շարունակել այս ֆունկցիան զույգ կերպ $[-l;0]$ միջակայքում և այնուհետև՝ պարբերաբար ($2l$ պարբերությամբ) $(-\infty;+\infty)$ միջակայքում (ստացված ֆունկցիան ամենուր աընդհատ է): Այսպիսով՝

$$b_n = 0\left(n = 1,2,\ldots\right), a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x dx = l\,,\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\int_0^l x\cdot d\sin\frac{\pi nx}{l} = \frac{2}{\pi n}x\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^l - \frac{2}{\pi n}\int_0^l \sin\frac{\pi nx}{l}dx =$$

$$= \frac{2l}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^l = \frac{2l\left(\left(-1\right)^n - 1\right)}{\pi^2 n^2}\left(n = 1,2,\ldots\right):$$

Ի վերջո՝ $a_{2k} = 0, a_{2k+1} = -\frac{4l}{\pi^2\left(2k+1\right)^2}\left(k = 0,2,\ldots\right)$: Ուրեմն՝

$$\boxed{x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}\cdot\cos\frac{\pi\left(2k+1\right)x}{l}\quad \left(x\in\left[0;l\right]\right)}:$$

Օրինակ 4: Վերլուծել $f\left(x\right) = \cos\left(\pi x\right)$ ֆունկցիան Ֆուրիեի շարքի $\left(0;1\right)$ միջակայքում միայն ըստ $\sin\left(\pi nx\right)$-ի: Շարունակելով տրված ֆունկցիան $\left(-1;0\right)$ միջակայքում կենտ կերպ, կստանանք՝

$$a_n = 0\left(n = 0,1,\ldots\right),\ b_n = 2\int_0^1 \cos\left(\pi x\right)\sin\left(\pi nx\right)dx\ \left(n = 1,2,\ldots\right):$$

Ձևափոխելով՝ $b_n = \int_0^1\left[\sin\left(\pi\left(n+1\right)x\right) + \sin\left(\pi\left(n-1\right)x\right)\right]dx$ և հաշվելով ինտեգրալները, ստանում ենք՝

$$b_n = \frac{1}{\pi\left(n+1\right)}\left(1 - \left(-1\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{\pi\left(n-1\right)}\left(1 - \left(-1\right)^{n-1}\right):$$

Հետևաբար՝ $b_{2k-1} = 0, b_{2k} = \frac{8k}{\pi\left(4k^2 - 1\right)}\left(k = 1,2,\ldots\right)$:

Այսպիսով՝ $\boxed{\cos\left(\pi x\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2 - 1}\sin\left(2\pi kx\right)\ \left(x\in\left(0;1\right)\right)}$:

## 7. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄԸ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ

Միևնույն $[a;b]$ հատվածում որոշված $f$ և $g$ ֆունկցիաների իրար մոտ լինելը (այն, որ մեկը մյուսի մոտարկումն է) կարելի է հասկանալ տարբեր կերպ: $f$ և $g$ ֆունկցիաների հավասարաչափ մոտիկությունը որոշվում է $\sup\limits_{[a;b]}|f(x)-g(x)|$ մեծությամբ(ենթադրվում է, որ այդ ֆունկցիաները սահմանափակ են $[a;b]$-ում): Միջին քառակուսային մոտիկությունը, կամ միջին քառակուսային շեղումը որոշվում է $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx$ մեծությամբ (եթե, իհարկե է գրված ինտեգրալը իմաստ ունի): Ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

***Թեորեմ 1(Վայերշտրասի):***

Եթե $f \in C[-\pi;\pi]$ և $f(-\pi)=f(\pi)$, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $T(x)$ եռանկյունաչափական բազմանդամ՝ $T(x)=A_0+\sum\limits_{k=1}^{n}(A_k cos(kx)+B_k sin(kx))$ այնպիսին, որ

$$\forall x\in[-\pi;\pi] \; : \; |f(x)-T(x)|<\varepsilon \text{ պայմանը:}$$

Թեորեմի ապացույցը տես, օրինակ, [3] ում:

## 8. ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՇԵՂՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ: ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՓԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԼՐԻՎՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք տրված է $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ $[a;b]$-ում քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգը: Ենթադրենք $f$-ը այդ միջակայքում որոշված, նույնպես քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիա է, և $n$-ը հաստատագրված բնական թիվ է: Դնենք մեր առջև հետևյալ խնդիրը: Գտնել այնպիսի հաստատուն $\gamma_k$ $(k=0,1...,n)$ գործակիցներ, որ՝

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\gamma_k\varphi_k(x) \tag{25}$$

ֆունկցիան միջին քառակուսային շեղման իմաստով իրականացնի $f$ ֆունկցիային լավագույն մոտարկումը, այսինքն՝

$$\Delta_n = \int_a^b \left[ f(x) - \sigma_n(x) \right]^2 dx$$

միջին քառակուսային շեղումը լինի ամենափոքրը: Տեղադրելով $\sigma_n(x)$-ի արտահայտությունը, բացելով փակագիծը և հաշվի առնելով (5)-ը, կստանանք՝

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \int_a^b f(x)\cdot\varphi_k(x)dx + \sum_{k=0}^{n} \gamma_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x)dx +$$

$$+2\sum_{k<m} \gamma_k\gamma_m \int_a^b \varphi_k(x)\cdot\varphi_m(x)dx:$$

Կամ՝

$$\Delta_n = \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k \gamma_k + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \gamma_k^2 = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k^2 +$$

$$+\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\gamma_k - c_k\right)^2:$$

Այժմ պարզ է, որ $\Delta_n$-ը ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը, երբ $\gamma_k = c_k \left(k = 1,2,\ldots,n\right)$: Այսպիսով (25) տեսքի բոլոր հնարավոր գումարներից ըստ $\left\{\varphi_k(x)\right\}_{k=0}^{\infty}$ համակարգի Ֆուրիեի շարքի $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)$ մասնակի գումարն է հաղորդում $\Delta_n$-ին փոքրագույն արժեք, այսինքն՝ միջին քառակուսային շեղման իմաստով լավագույնն է մոտարկում $f$ ֆունկցիային: Ընդ որում, $\Delta_n$-ի փոքրագույն արժեքն է՝

$$\Delta_n = \int_a^b \left[ f(x) - S_n(x) \right]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k^2 \quad \left(\Delta_n \geq 0\right): \qquad (26)$$

(26)-ը կոչվում է Բեսսելի* նույնություն: Դրանից ստացվում է

---

* Բեսսել Ֆրիդրիխ Վիլհելմ (1784-1846)-գերմանացի աստղաֆիզիկոս:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \quad (n=0,1,\ldots):$$

Այստեղից հետևում է $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k^2$ դրական անդամներով շարքի զուգամիտությունը, ինչպես նաև

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \tag{27}$$

անհավասարությունը, որը կոչվում է Բեսսելի անհավասարություն:

(26)-ից հետևում է, որ $\Delta_n$-ը մոնոտոն նվազող է ($n$-ի աճման հետ (26)-ում ավելանում են նոր բացասական անդամներ):

Հարց է առաջանում՝ արդյո՞ք $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ հաջորդականությունը անվերջ փոքր է: Եթե դա տեղի ունի, ապա ասում են, որ $S_n(x)$-ը զուգամիտում է $f(x)$-ին միջին քառակուսային իմաստով, (դա չի նշանակում, որ $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ սովորական իմաստով): Բեսսելի (26) նույնությունից հետևում է, որ $\Delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ ճիշտ է հետևյալ պայմանը՝

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k^2 = \int_a^b f^2(x)dx \ : \tag{28}$$

(28) հավասարությունը կոչվում է Պարսեվալ*–Լյապունովի*, կամ փակության հավասարում:

***Սահմանում 4:*** $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ $[a;b]$ հատվածի վրա քառակուսով ինտեգրելի օրթոգոնալ համակարգը կոչվում է փակ, եթե $[a;b]$ հատվածի վրա քառակուսով ինտեգրելի յուրաքանչյուր $f$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի փակության հավասարումը:

Եռանկյունաչափական համակարգի դեպքում (26)-ը (Բեսսելի նույնությունը) ընդունում է հետևյալ տեսքը:

---

* Պարսեվալ Մ. – ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:
* Լյապունով Ալեքսեյ Անդրևիչ (1911-1973) – ռուս մաթեմատիկոս:

$$\Delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - (2\pi\frac{a_0^2}{4} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2))։$$

Իսկ Բեսսելի անհավասարությունը (տես (27)) կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx։$$

***Թեորեմ 2:*** Եռանկյունաչափական համակարգը փակ է: Այսինքն, $[-\pi;\pi]$ հատվածի վրա ցանկացած քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիայի համար ճշմարիտ է $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n = 0$, կամ որ նույնն է, ճշմարիտ է փակության

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \tag{29}$$

հավասարումը:

***Ապացույց:*** Թեորեմը կապացուցենք այն մասնավոր դեպքում, երբ $f \in C[-\pi;\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$։ Ընդհանուր դեպքը տես [3]-ում։ Ըստ Վայերշտրասի թեորեմի (տես 7., թ. 1), կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի եռանկյունաչափական

$$S_{n_\varepsilon}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n_\varepsilon}(a_k \cdot cos(kx) + b_k \cdot sin(kx))$$

բազմանդամ, որ՝

$$\left|f(x) - S_{n_\varepsilon}(x)\right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}։$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$\Delta_{n_\varepsilon} = \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - S_{n_\varepsilon}(x)\right]^2 dx < \frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} dx = \varepsilon։$$

Քանի որ $\Delta_{n_\varepsilon}$-ը մոնոտոն չաճող է, ապա՝

$$\forall n \ge n_\varepsilon \ : \ \Delta_n \le \Delta_{n_\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\Delta_n = 0 : \blacksquare$$

Այժմ ընդհանրացնենք փակության հավասարումը: Դիցուք $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$-ը $[a;b]$ հատվածի վրա քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիաների օրթոգոնալ փակ համակարգ է: Ուրեմն, եթե $f$-ը և $g$-ն այդ հատվածի վրա քառակուսով ինտեգրելի են, ապա նրանց համար ճշմարիտ է փակության հավասարումը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n c_n^2 = \int_a^b f^2(x)dx\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n d_n^2 = \int_a^b g^2(x)dx\,, \tag{30}$$

որտեղ $c_n$-ը և $d_n$-ը համապատասխանաբար $f$ և $g$ ֆունկցիաների Ֆուրիեի գործակիցներն են:

Քանի որ $\left(f(x)+g(x)\right)^2 \le 2\left(f^2(x)+g^2(x)\right)$, ապա $f+g$ ֆունկցիայի համար ևս ճշմարիտ է (30)-ը:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\left(c_n+d_n\right)^2 = \int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)^2dx:$$

Հաշվի առնելով (30)-ը, ստանում ենք փակության ընդհանրացված հավասարումը՝

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\cdot c_n\cdot d_n = \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx: \tag{31}$$

Քանի որ $\lambda_n d_n = \int_a^b g(x)dx$, ապա (31)-ից կստանանք՝

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b c_n\cdot\varphi_n(x)\cdot g(x)dx = \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \tag{32}$$

Քանի որ եռանկյունաչափական համակարգը փակ է $[-\pi;\pi]$ հատվածի վրա, ապա (32)-ը ճշմարիտ է և այն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cdot g(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_n cos(nx)+b_n sin(nx)\right)\cdot g(x)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot g(x)dx: \tag{32`}$$

***Թեորեմ 3 (Ֆուրիեի շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրման մասին):***

Դիցուք $f$ ֆունկցիան բացարձակ ինտեգրելի է $[-\pi;\pi]$ հատվածի վրա և նրա Ֆուրիեի շարքն է՝

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx):$$

Այդ դեպքում՝

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta \left(a_n cos(nx) + b_n sin(nx)\right)dx$$

$$(-\pi \le \alpha \le \beta \le \pi): \qquad (33)$$

Նկատենք, որ $f$ ֆունկցիան կարող է և չվերլուծվել իր Ֆուրիեի շարքի:

*Ապացույց:* Քննարկենք մասնավոր դեպք, երբ $f$ ֆունկցիան քառակուսով է ինտեգրելի (ընդհանուր դեպքը տես [3], [11]): Օգտվենք (32`)-ից, ընտրելով $g$ ֆունկցիան նույնաբար հավասար 1-ի $[\alpha;\beta]$-ում և հավասար զրոյի այդ հատվածից դուրս: Կստանանք (33)-ը: ■

*Սահմանում 5:* $[a;b]$ հատվածում անընդհատ $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգը կոչվում է լրիվ, եթե այդ հատվածում չկա նույնաբար զրոյից տարբեր անընդհատ ֆունկցիա, որն օրթոգոնալ է $\varphi_n(x)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրին: Այսինքն, եթե անընդհատ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներից յուրաքանչյուրը հավասար է զրոյի, ապա այդ ֆունկցիան նույնաբար զրո է:

Այլ կերպ, լրիվությունը նշանակում է, որ, եթե երկու անընդհատ ֆունկցիաները ունեն միևնույն Ֆուրիեի գործակիցներ, ապա այդ ֆունկցիաները նույնաբար հավասար են:

*Թեորեմ 4:* Եռանկյունաչափական համակարգը լրիվ է:

*Ապացույց:* Ըստ թեորեմի պայմանների $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի: Կիրառենք (33)-ը, վերցնելով $\alpha = 0, \beta = x$ $(x \in [-\pi;\pi])$, կստանանք՝

$$\int_0^x f(t)dt \equiv 0 \ (x \in [-\pi;\pi]):$$

Ածանցելով ստացվածը, կունենանք՝ $f(x) \equiv 0$: ■

Քննարկենք վերը շարադրածը մեկնաբանող մի քանի օրինակներ:

Օրինակ 5: Վերլուծել $f(x) = x$ $(x \in (-\pi;\pi))$ ֆունկցիան Ֆուրիեի շարքի: Քանի որ $f(x) = x$ ֆունկցիան կենտ է, ապա $a_n = 0 (n = 0, 1, ...)$, իսկ $x \cdot sin(nx)$-ը զույգ է, և ուրեմն՝

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot \sin(nx)dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x\cdot d\cos(nx) = -\frac{2}{\pi n}x\cdot\cos(nx)\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi n^2}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}:$$

Ուրեմն՝ $\boxed{x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)\ (-\pi<x<\pi)}$: (34)

Օրինակ 6: Օգտվելով նախորդ վերլուծությունից ստանալ $x^2, x^3$ $(x\in(-\pi;\pi))$ ֆունկցիաների վերլուծությունը Ֆուրիեի շարքի: Անդամ առ անդամ ինտեգրելով ստացված շարքը (տես թեորեմ 3), կստանանք՝ $f(x)=x^2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos(nx)+\frac{a_0}{2}$ $(-\pi\le x\le\pi)$, որտեղ $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3}$ (նկատենք, որ նշված վերլուծությունը ճշմարիտ է նաև $\pm\pi$ ծայրակետերում, քանի որ $f(-\pi+0)=f(\pi-0)=\pi^2$): Ուրեմն՝

$$\boxed{x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos(nx)\ (-\pi\le x\le\pi)}: \quad (35)$$

Վերցնելով այստեղ $x=0$, կստանանք $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}}$:

Իսկ $x=\pi$ արժեքի դեպքում (35)-ից ստանում ենք՝ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$: Ինտեգրելով (35)-ը, կստանանք

$x^3=\pi^2x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{12}{n^3}\sin(nx)\,(-\pi<x<\pi)$ (ակնհայտ է, որ ինտեգրման հաստատունը այստեղ հավասար է զրոյի):

Օգտվելով (34) վերլուծությունից, կստանանք՝

$$\boxed{x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{12}{n^3}\sin(nx)\,(-\pi<x<\pi)}: \quad (36)$$

Այսպես շարունակելով, կարելի ստանալ ցանկացած $x^n\ (n=4,5,...)$ տեսքի ֆունկցիայի վերլուծությունը Ֆուրիեի շարքի:

# IV ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

## 1. ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Դիցուք տրված է պարամետրական տեսքով

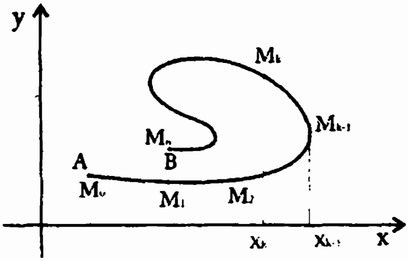
$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ (x, y \in C[\alpha;\beta])$$

անընդհատ, պարզ (իքն իրեն չհատող) $\cup AB$ կորը, որի ծայրակետերն են՝ $A(x(\alpha), y(\alpha))$, $B(x(\beta), y(\beta))$ (տես նկ. 3) և այդ կորի վրա որոշված է $z = f(x, y)$ ֆունկցիա:

Դիտարկենք $[\alpha;\beta]$ հատվածի որևէ տրոհում $T = \{t_k\}_{k=0}^{n}$: Այն կառաջացնի (փոխմիարժեքորեն) $\cup AB$ կորի որոշակի տրոհում

$$M_k(x(t_k), y(t_k)),\ k = 0, 1, \dots, n\ (M_0 = A, M_n = B):$$

Յուրաքանչյուր $\cup M_{k-1}M_k$ աղեղից վերցնենք պատահական $M_k'$ կետ և կազմենք $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(M_k') \cdot |\cup M_{k-1}, M_k|$ ինտեգրալային գումարը ($|\cup M_{k-1}, M_k|$-ով նշանակված է $\cup M_{k-1}M_k$ աղեղի երկարությունը):




*Նկ. 3*

***Սահմանում 1:*** Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման՝ $\lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma$, $\left(\lambda_T = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta t_k\right)$, որը կախված չէ ոչ տրոհումներից և ոչ էլ $M_k'$ կետերի ընտրությունից (տես Ռիմանի ինտեգրալի սահմանումները [2]) ապա այն կոչվում է **առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալ** և գրվում է՝ $\int\limits_{(A,B)} f ds$ $\left(\lim\limits_{\lambda_T \to \infty} \sigma = \int\limits_{(A,B)} f ds\right)$:

*Թեորեմ 1:* Դիցուք տրված է պարամետրական տեսքով $x=x(t)$ , $y=y(t)$ ( $x,y\in C'[\alpha;\beta]$ $(\alpha<\beta)$), պարզ $\cup AB$ կորը ( $A(x(\alpha),y(\alpha))$, $B(x(\beta),y(\beta))$ և նրա վրա որոշված $z=f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիա: Այս պայմանների առկայությամբ

$$\exists \int_{(A,B)} fds=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt: \qquad (1)$$

*Ապացույց:* Նախ դիտարկենք $\cup AB$ կորի պարամետրական ներկայացումը, երբ պարամետրի դերում $\cup AM$ աղեղի երկարությունն է՝ $s=|\cup AM|$ ( $M$ -ը $\cup AB$ կորի պատահական կետ է, $M(x(s),y(s))$): Պարզ է, որ $s\in[0;S]$ , $S=|\cup AB|$: Դիտարկենք $[0;S]$ հատվածի որևէ $T=\{s_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհում: Այն առաջացնում է $\cup AB$ կորի տրոհում $M_k(x(s_k),y(s_k))$ $(s_k=|\cup A,M_k|)$, ընդ որում $M'_k\ (x(s'_k),y(s'_k))$ , $(s'_k\in[s_{k-1};s_k])$ : Այդ դեպքում

$$|\cup M_{k-1},M_k|=|\cup A,M_k|-|\cup A,M_{k-1}|=s_k-s_{k-1}=\Delta s_k$$

և, ուրեմն՝

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(M'_k)\cdot|\cup M_{k-1},M_k|=\sum_{k=1}^{n} f(x(s'_k),y(s'_k))\cdot\Delta s_k$$

$$\underset{\lambda_T\to 0}{\longrightarrow}\int_{0}^{S} f(x(s),y(s))ds:$$

Այսպիսով, երբ պարամետրը $s$ - ն է ունենք՝

$$\int_{(A,B)} fds=\int_{0}^{S} f(x(s),y(s))ds: \qquad (2)$$

Անցնենք ընդհանուր դեպքին, երբ կորը տրված է $x=x(t)$, $y=y(t)$ ( $x,y\in C'[\alpha;\beta]$ ), պարամետրական տեսքով: Կորի նույն $M(x(s),y(s))$ կետը բնորոշվում է նաև պարամետրի $t$ արժեքով: Գտնենք կապը այդ երկու պարամետրերի միջև՝ $s=s(t)$, պարզ է, որ $x(s(t))=x(t)$, $y(s(t))=y(t)$ (այստեղ, օրինակ $x(s(t))$ բարդ ֆունկցիան, պարզության համար նորից նշանակված է $x(t)$):

Օգտվելով կորի երկարության բանաձևից (տես [2]), ունենք՝ $s(t)=|\cup AM|=\int\limits_{\alpha}^{t}\sqrt{x'(\tau)^2+y'(\tau)^2}\,d\tau$: Այստեղից, հաշվի առնելով որ նշված արմատը անընդհատ ֆունկցիա է $[\alpha;\beta]$ հատվածում, կստանանք՝

$$\exists\, s'(t)=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}: \qquad (3)$$

Պարզ է, որ $s=s(t)$ ֆունկցիան ստեղծում է փոխմիարժեք համապատասխանություն $[\alpha;\beta]$ և $[0;S]$ հատվածների միջև: (2)-ի մեջ անցնելով նոր՝ $t$ $(s=s(t))$ փոփոխականի, կստանանք (1)-ը: ■

*Դիտողություն 1:* (3)-ից հետևում է, որ երբ $t=s$, ապա $x'(t)^2+y'(t)^2=1$: Եթե $\cup AB$ կորով շարժվելիս ($A$-ից դեպի $B$) շոշափողը, որպես ճառագայթ ուղղենք շարժման ուղղությամբ, ապա հեշտ է նկատել, որ այն կազմում է ($\alpha$) սուր անկյուն $x$ առանցքի դրական ուղղության հետ, երբ $x(s)$-ը աճող է և՝ բութ անկյուն հակառակ դեպքում: Ուրեմն $x'(s)$-ը և $cos\alpha$-ն ունեն միևնույն նշանը: Մյուս կողմից $tg\alpha=y'(x)=\dfrac{y'(s)}{x'(s)}$, ուրեմն

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{cos^2\alpha}=\frac{x'(s)^2+y'(s)^2}{x'(s)^2}=\frac{1}{x'(s)^2}:$$

Այսպիսով՝

$$cos\alpha=x'(s)\ ,\ sina=cos\alpha\cdot tg\alpha=x'(s)\cdot\frac{y'(s)}{x'(s)}=y'(s): \qquad (4)$$

*Դիտողություն 2:* Եթե $\cup AB$ պարզ կորը տրված է եռաչափ տարածության մեջ

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\ (\,x,y,z\in C^1[\alpha;\beta]\,(\alpha<\beta))$$

տեսքով, ապա առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալը սահմանվում է նույն կերպ և, եթե նրա վրա որոշված է $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիա, ապա նախորդի նման ապացուցվում է, որ

$$\exists \int\limits_{(AB)} f\,ds=\int\limits_{a}^{b} f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt:$$

Օրինակ 1: Հաշվել $I=\int\limits_{(l)} x\cdot y\,ds$, որտեղ $(l)$-ը

$$r=r(\varphi)=cos(\varphi)\ ,\ \ \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right],$$

բևեռային համակարգում տրված կոր է՝

$$x=r(\varphi)\cdot cos(\varphi),\, y=r(\varphi)\cdot sin(\varphi):$$

Այս դեպքում, ինչպես հայտնի է (տես [2])՝

$$x'(\varphi)^2+y'(\varphi)^2=r(\varphi)^2+r'(\varphi)^2=cos^2(\varphi)+sin^2(\varphi)=1:$$

Ուրեմն՝

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2(\varphi)\cdot sin(2\varphi)\ d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+cos(2\varphi)\right)\cdot sin(2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+cos(2\varphi)\right)dcos(2\varphi)=$$

$$=\frac{1}{8}(-cos(2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}sin(4\varphi)\,d\varphi)=\frac{1}{4}-\frac{1}{64}cos(4\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}:$$

Դիցուք տրված է պարամետրական տեսքով $x=x(t),\ y=y(t)$ ( $x,y\in C[\alpha;\beta]$ ) անընդհատ, պարզ (իքն իրեն չհատող) $\cup AB$ կորը, որտեղ $A,B$-ն կորի ծայրակետերն են ($A(x(\alpha),y(\alpha)),\ B(x(\beta),y(\beta))$) և նրա վրա որոշված $P(x,y)$ ֆունկցիա: Դիտարկենք $[\alpha;\beta]$ հատվածի որևէ տրոհում $T=\{t_k\}_{k=0}^{n}$ $\left(\lambda_T=max\Delta t_k\right)$: Այն կառաջացնի (փոխմիարժեքորեն) $\cup AB$ կորի որոշակի տրոհում

$$M_k\left(x(t_k),y(t_k)\right),\ k=0,1,...,n\ \ (A=M_0,M_1,...,M_n=B):$$

Յուրաքանչյուր $\cup M_{k-1}M_k$ աղեղից վերցնենք պատահական $M'_k\left(x(\tau_k),y(\tau_k)\right)$ $\left(\tau_k\in[t_{k-1};t_k],k=1,...,n\right)$ կետ և կազմենք $\sigma_x=\sum\limits_{k=1}^{n}P(M'_k)\cdot\Delta x_k$ ինտեգրալային գումարը:

*Սահմանում 2:* Եթե գոյություն ունի, անկախ տրոհումներից և $M_k'$ կետերի ընտրությունից, վերջավոր սահման՝ $\lim\limits_{\lambda_r \to 0} \sigma_x$, ապա այն անվանում են **երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալ** և գրում՝ $\int\limits_{(A,B)} Pdx$:

Ակնհայտ է, որ առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ուղղությունից ( $\int\limits_{(AB)} fds = \int\limits_{(BA)} fds$ ), իսկ երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալը կախված է՝ $\int\limits_{(AB)} Pdx = -\int\limits_{(BA)} Pdx$, քանի որ, երբ փոխվում է ինտեգրման ուղղությունը, բոլոր $\Delta x_k$-երը փոխում են իրենց նշանը:

*Սահմանում 3:* Ինչպես և նախորդ սահմանման մեջ, եթե $\cup AB$ կորի վրա որոշված է $Q(x,y)$ ֆունկցիա, ապա, ըստ սահմանման $\int\limits_{(AB)} Qdy = \lim\limits_{\lambda_r \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} Q(M_k') \cdot \Delta y_k$: Եթե $\cup AB$ կորի վրա որոշված են $P(x,y), Q(x,y)$ ֆունկցիաներ, ապա, ըստ սահմանման $\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(AB)} Pdx + \int\limits_{(AB)} Qdy$, եթե աջ մասում գրված ինտեգրալները գոյություն ունեն:

***Թեորեմ 2:*** Դիցուք տրված է պարամետրական տեսքով $x = x(t), y = y(t)$ ( $x, y \in C^1[a;b]$ ), $\cup AB$ պարզ կորը ( $A(x(\alpha), y(\alpha))$, $B(x(\beta), y(\beta))$ և նրա վրա որոշված $P(x,y), Q(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիաներ: Այս պայմանների առկայությամբ

$$\exists \int\limits_{(A,B)} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b} (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t))dt : \qquad (5)$$

*Ապացուցում:* Պարզության համար դիտարկենք այն դեպքը, երբ $Q(x,y) \equiv 0$:

Կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք՝

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\tau_k^*) \cdot \Delta t_k, \ (\tau_k^* \in (t_{k-1}; t_k)):$$

Այսպիսով՝ $\sigma_x = \sum_{k=1}^{n} P\left(x(\tau_k), y(\tau_k)\right) \cdot x'\left(\tau_k^*\right) \cdot \Delta t_k$: Եթե նշանակենք՝ $\sigma_x^* = \sum_{k=1}^{n} P\left(x(\tau_k), y(\tau_k)\right) \cdot x'(\tau_k) \cdot \Delta t_k$, ապա պարզ է, որ $\lim_{\lambda_T \to 0} \sigma_x^* = I$, որտեղ $I = \int_a^b P\left(x(t), y(t)\right) \cdot x'(t) dt$:

Քանի որ՝ $\sigma_x - I = \left(\sigma_x - \sigma_x^*\right) + \left(\sigma_x^* - I\right)$, ապա մնում է ապացուցել, որ $\lim_{\lambda_T \to 0} \left(\sigma_x - \sigma_x^*\right) = 0$:

Քանի որ $P\left(x(t), y(t)\right) \in C[\alpha; \beta]$, ապա այդ ֆունկցիան սահմանափակ է՝ $\exists\ M > 0, \forall t \in [\alpha; \beta] \quad : \quad \left|P\left(x(t), y(t)\right)\right| \leq M$:

Հաշվի առնելով, որ $x'(t) \in C[\alpha; \beta]$, ապա այն հավասարաչափ անընդհատ է՝

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0, \forall t, \tau \in [\alpha; \beta], |t - \tau| < \delta\ :\ \left|x'(t) - x'(\tau)\right| < \dfrac{\varepsilon}{M(\beta - \alpha)}$:

Եթե ընտրենք $T = \{t_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհումը այնպես, որ $\lambda_T < \delta$, ապա $\Delta t_k < \delta\ (k = 1, \ldots, n) \Rightarrow \left|\tau_k - \tau_k^*\right| < \delta$ և, ուրեմն՝

$$\left|x'(\tau_k) - x'\left(\tau_k^*\right)\right| < \frac{\varepsilon}{M(\beta - \alpha)}:$$

Այսպիսով՝

$$\left|\sigma_x - \sigma_x^*\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} P\left(x(\tau_k), y(\tau_k)\right) \cdot \left[x'\left(\tau_k^*\right) - x'(\tau_k)\right] \cdot \Delta t_k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left|P\left(x(\tau_k), y(\tau_k)\right)\right| \cdot \left|x'\left(\tau_k^*\right) - x'(\tau_k)\right| \cdot \Delta t_k \leq$$

$$\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M \cdot (\beta - \alpha)} \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\lambda_T \to 0} \left(\sigma_x - \sigma_x^*\right) = 0: \ \blacksquare$$

***Դիտողություն 1:*** Եռաչափ դեպքում, երբ $\cup AB$ պարզ կորը տրված է պարամետրական տեսքով

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \ \left(x, y, z \in C^1[\alpha; \beta]\right)$$

և այդ կորի վրա տրված են $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիաներ, ապա նույն կերպ սահմանվում է $\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz$ երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալը և, այն կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(P\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot x'(t)+$$

$$+Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot y'(t)+R\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot z'(t))dt:$$

***Դիտողություն 2(երկու սեռի կորագիծ ինտեգրալների միջև եղած կապը):***

Դիտողություն1-ում նշված պայմանների առկայությամբ ճիշտ է հետևյալ բանաձևը

$$\boxed{\int\limits_{(AB)} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{(AB)}(P\cdot cos\alpha+Q\cdot cos\beta+R\cdot cos\gamma)ds}, \quad (6)$$

որտեղ $\alpha,\beta,\gamma$-ն $A$-ից $B$ շարժվելիս շոշափողի կազմած անկյուններն են համապատասխանաբար $x,y,z$ առանցքների դրական ուղղությունների հետ:

Պարզության համար դիտարկենք հարթ կորի դեպքը ($R\equiv0$): $\cup AB$ կորը ներկայացնենք պարամետրական տեսքով, երբ պարամետրի դերում աղեղի երկարությունն է (s)՝

$$x=x(s),\ y=y(s)\ \ (s\in[0;S],S=|\cup AB|):$$

Այդ դեպքում՝

$$x'(s)=cos\alpha, y'(s)=sin\alpha=cos\beta \text{ (տես բ.1, դիտ.1):}$$

Դիցուք $T_{[0;S]}=\{s_k\}_{k=0}^{n}$ $[0;S]$ հատվածի որևէ տրոհում է: Այդ դեպքում $\int\limits_{(AB)} Pdx$ ինտեգրալին համապատասխան ինտեգրալային գումարը ունի հետևյալ տեսքը (տես թեորեմ 2-ի ապացույցը)

$$\sigma_x=\sum_{k=1}^{n}P\left(x(s_k),y(s_k)\right)\cdot x'\left(s_k^*\right)\cdot\Delta s_k\underset{\lambda_T\to0}{\longrightarrow}\int\limits_{(AB)} Pdx\ (s_k,s_k^*\in[0;S]):$$

Քանի որ նաև՝

$$\sigma_x=\sum_{k=1}^{n}P\left(x(s_k),y(s_k)\right)\cdot cos\alpha\big|_{s_k^*}\Delta s_k\underset{\lambda_T\to0}{\longrightarrow}\int\limits_{(AB)} P(x,y)\cdot cos\alpha ds,$$

ապա՝

$$\int\limits_{(AB)} Pdx = \int\limits_{(AB)} P\cdot cos\alpha\cdot ds:$$

Ընդհանուր դեպքը ապացուցվում է նույն կերպ:

*Դիտողություն 3:* Եթե առաջին և երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալները տարածվում են անընդհատ պարզ փակ $(l)$ կորով, ապա բաժանելով այն կորի որևէ կետով երկու պարզ կորերի, կունենանք (ըստ սահմանման), որ ամբողջ համապատասխան կորագիծ ինտեգրալը հավասար է առանձին կորերով ինտեգրալների գումարին: Կիրառելով նախորդ տեսությունը և հաշվի առնելով Ռիմանի ինտեգրալի ադիտիվ հատկությունը ինտեգրման տիրույթի նկատմամբ, կստանանք, որ վերը շարադրվածը (տես (1), (5), (6) բանաձևերը) ճշմարիտ է նաև այս դեպքում: Փակ կորով ինտեգրալի համար ընդունված է հետևյալ գրառումը՝ $\oint$, օրինակ՝ $\oint\limits_{(l)} Pdx$:

Որպես երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի կիրառություն դիտարկենք հետևյալ խնդիրը: $\vec{F}(F_x,F_y,F_z)$ ուժային դաշտում նյութական կետը տեղափոխվում է $M_1(x_1,y_1,z_1)$ կետից $M_2(x_2,y_2,z_2)$ կետը որևէ $(l)=\cup(M_1M_2)$ անընդհատ պարզ կորով: Պահանջվում է հաշվել կատարված աշխատանքը՝ $A$-ն: Ֆիզիկայից հայտնի է, որ այդ աշխատանքը կարելի հաշվել հետևյալ կերպ

$$A = \int\limits_{(M_1M_2)} F\cdot cos\theta\cdot ds,$$

որտեղ $\theta$-ն կորի շոշափողի և $\vec{F}$ վեկտորի միջև եղած անկյունն է, $F=|\vec{F}|$: $M_1$-ից $M_2$-ը շարժվելիս շոշափողով ուղղված միավոր վեկտորն է՝ $\vec{l}(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$, որտեղ $\alpha,\beta,\gamma$-ն $\vec{l}$-ի համապատասխանաբար $x,y,z$ առանցքների դրական ուղղությունների հետ կազմած անկյուններն են:

Եթե $\lambda,\mu,\nu$-ն $\vec{F}$ վեկտորի համապատասխանաբար $x,y,z$ առանցքների դրական ուղղությունների հետ կազմած անկյուններն են, ապա $(\vec{F}_1,\vec{l}) = cos\theta = cos\alpha\cdot cos\lambda + cos\beta\cdot cos\mu + cos\gamma\cdot cos\nu$, որտեղ $\vec{F}_1$-ը $\vec{F}$ վեկտորին համուղղված միավոր վեկտորն է:

Ուրեմն՝

$$A=\int\limits_{(M_1M_2)}\left[(F\cdot cos\lambda)\cdot cos\alpha+(F\cdot cos\mu)\cdot cos\beta+(F\cdot cos\nu)\cdot cos\gamma\right]ds=$$

$$=\int\limits_{(M_1M_2)}\left[F_x\cdot cos\alpha+F_y\cdot cos\beta+F_z\cdot cos\gamma\right]\cdot ds=\int\limits_{(M_1M_2)}F_xdx+F_ydy+F_zdz:$$

*Դիտողություն 4:* Երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալը երբեմն կախված չէ այն բանից թե տվյալ երկու կետերը ինչպիսի անընդհատ կորով են միացված իրար (ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից): Դիտարկենք հետևյալ օրինակը:

Օրինակ 1: Դիցուք $A(0,0)$ և $B(1,1)$ կետերը նախ միացված են $(l_1)$ : $y=x$ ուղղով, իսկ հետո՝ $(l_2)$ : $y=x^2$ պարաբոլով: Հաշվենք հետևյալ ինտեգրալները

ա) $I_1=\int\limits_{(l_1)}xdx+xdy$, բ) $I_2=\int\limits_{(l_2)}xdx+xdy$:

Ունենք՝

$$I_1=\int_0^1(x+x)dx=x^2\Big|_0^1=1,\ I_2=\int_0^1(x+x\cdot 2x)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$$

և, ուրեմն $I_1\neq I_2$ : Այժմ, փոխելով միայն ընդ ինտեգրալ արտահայտությունը, հաշվենք հետևյալ ինտեգրալները՝

ա) $I_3=\int\limits_{(l_1)}xdx+ydy$, բ) $I_4=\int\limits_{(l_2)}xdx+ydy$: Ունենք՝

$$I_3=\int_0^1(x+x)dx=x^2\Big|_0^1=1,\ I_4=\int_0^1(x+x^2\cdot 2x)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{2}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

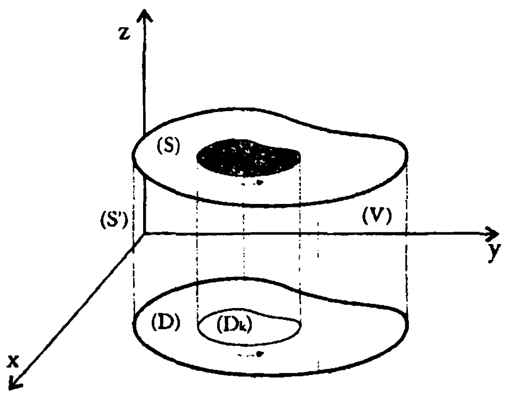
և, ուրեմն $I_3=I_4$: Հետագայում կհամոզվենք, որ $\int\limits_{(AB)}xdx+ydy$ ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից (այսինքն, ոչ միայն $(l_1)$ և $(l_2)$ կորերով են ինտեգրալները իրար հավասար):

Այն հարցին, թե ի՞նչ պայմանների դեպքում է 2-րդ սեռի կորագիծ ինտեգրալը անկախ ինտեգրման ճանապարհից կանդրադառնանք ավելի ուշ:

# 2. ԿՐԿՆԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

## 2.1. ԿՐԿՆԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

*Սահմանում 1:* Դիցուք՝ $f:(D)\to \boldsymbol{R}$ $\left((D)\subset \boldsymbol{R}^2\right)$, $f$ ֆունկցիան անընդհատ է և ոչ բացասական: Ենթադրենք, որ $(D)$-ն տիրույթ է [2], սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ $(\Gamma)$ եզրով: $(S)=\left\{(x,y,f(x,y))\ ;\ (x,y)\in(D)\right\}$ կոչվում է $f$ ֆունկցիայի գրաֆիկ, կամ անընդհատ մակերևույթ, տրված $z=f(x,y)$ բացահայտ տեսքով: Նշանակենք $(S^*)$-ով այն գլանային մակերևույթը, որի ծնիչները զուգահեռ են $z$ առանցքին, իսկ ուղղորդ կոր է հանդիսանում $(D)$ տիրույթի $(\Gamma)$ եզրը: Այսպիսով առաջանում է $(V)$ մարմին, սահմանափակված ներքևից $(D)$-ով, վերևից $(S)$-ով, իսկ եզրերից՝ $(S^*)$-ով (տես նկ. 4 ):




*Նկ. 4*

Տրոհենք $(D)$-ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով վերջավոր թվով մասերի $(D_1),\dots,(D_n)$, և նշանակենք՝ $\lambda=maxD_k$ (տրոհման տրամագիծ): Վերցնենք կամայական $M_k(x_k,y_k)\in(D_k)$, $k=1,\dots,n$ և կազմենք գումար՝ $\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot D_k$ ($D_k$-ն $(D_k)$-ի մակերեսն է: Ըստ սահմանմաՆ, $(V)$ մարմնի ծավալն է $V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot D_k$ $(f(M_k)\cdot D_k$-ն $(D_k)$ հիմքով $f(M_k)$ բարձրությամբ գլանի ծավալն է):

***Սահմանում 2:*** Դիցուք տրված է ֆունկցիա $f:(\overline{D})\to \boldsymbol{R}$ $((D)\subset \boldsymbol{R}^2)$ և $(D)$-ն տիրույթ է, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ $(\Gamma)$ եզրով ($(\overline{D})$-ն $(D)$-ի փակումն է՝ $(\overline{D})=(D)U(\Gamma)$ [2]): Տրոհենք $(D)$-ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով վերջավոր թվով մասերի $(D_1),...,(D_n)$: Քանի որ $(D_k)$ տիրույթների եզրերը կտոր առ ողորկ են (այդ կորերը բոլոր կետերում, բացառությամբ վերջավոր թվով կետերի ունեն շոշափողներ), ապա նրանք քառակուսելի են, այսինքն ունենք մակերես՝ $D_k$ (տես [3]):

Վերցնենք կամայական $M_k(x_k,y_k)\in(\overline{D}_k)$, $k=1,...,n$ և կազմենք գումար $\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot D_k$: Այն կոչվում է ինտեգրալային գումար: Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot D_k=I$ (սահմանը հասկացվում է Ռիմանի ինտեգրալի սահմանումների պես), որը կախված չէ ոչ տրոհումներից և ոչ էլ $M_k$ կետերի ընտրությունից, ապա այդ սահմանը կանվանենք կրկնակի ինտեգրալ՝ $I=\iint\limits_{(D)} fdxdy$: Այսպիսով, նախորդ սահմանման համաձայն $(V)$ մարմնի ծավալը կլինի՝

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot D_k=\iint\limits_{(D)} fdxdy:$$

Ինչպես և Ռիմանի ինտեգրալի դեպքում, կրկնակի ինտեգրալների համար ևս կառուցվում է տեսություն, հենված Դարբուի գումարների հատկությունների վրա [2]: Սակայն, կարճ լինելու համար, բավարարվենք ինտեգրալի երկրաչափական մեկնաբանությունով՝ կնկնակի ինտեգրալը, որպես ծավալ:

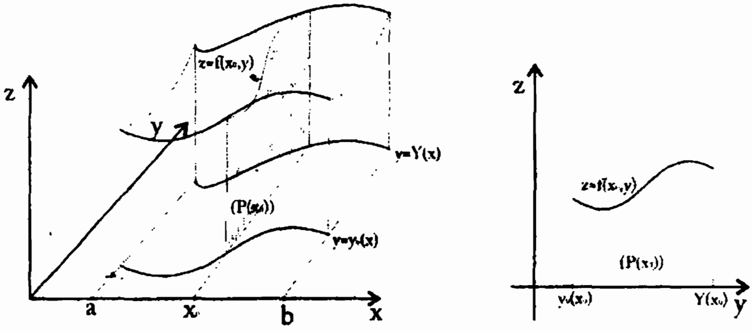
***Թեորեմ1:*** Դիցուք $f\in C(\overline{D})$, $f(x,y)\geq 0$, $(D)$-ն սեղանակերպ է, սահմանափակված $x=a, x=b$ ուղիղներով և

$$y=y_0(x),\ y=Y(x)\ \ \left(y_0,Y\in C[a;b],\ y_0(x)\le Y(x)\right)$$

ֆունկցիաների գրաֆիկներով: Այս պայմանների առկայությամբ գոյություն ունի $I=\iint\limits_{(D)} fdxdy$ կրնակի ինտեգրալը և՝

$$\boxed{\iint\limits_{(D)} fdxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x,y)dy}: \tag{1}$$

***Ապացուցում:*** $\iint\limits_{(D)} f\,dxdy=V=\int\limits_a^b P(x)dx$, որտեղ $P(x_0)$-ն $x_0$ կետում $\left(x_0\in[a;b]\right)$ $x$ առանցքին ողղահայաց $\left(P(x_0)\right)$ հատույթի մակերեսն է: $\left(P(x_0)\right)$-ն իրենից ներկայացնում է սեղանակերպ, սահմանափակված $y=y_0(x_0),\ y=Y(x_0),\ z=0$ ուղիղներով և $z=f(x_0,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկով (տես նկ. 5):

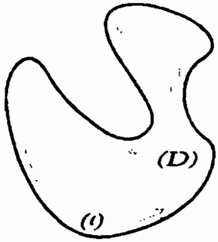



*Նկ. 5*

Ուրեմն՝ $P(x_0)=\int\limits_{y_0(x_0)}^{Y(x_0)} f(x_0,y)dy$: Այստեղից հետևում է (1)-ը: ■

***Դիտողություն 1:*** Կրկնակի ինտեգրալը օժտված է այն նույն հատկություններով ինչ Ռիմանի ինտեգրալը: Օրինակ, թեորեմ 1-ի պայմանների առկայությամբ ճշմարիտ է միջինի մասին թեորեմը՝ $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy=f(\xi,\eta)\cdot D$, որտեղ $(\xi,\eta)$-ն $\left(\overline{D}\right)$-ին պատկանող որոշակի կետ է:

*Սահմանում 3:* Դիցուք $(l)$-ը անընդհատ, պարզ, փակ կոր է: Այդ կորի շրջանցման դրական ուղղություն կանվանենք այն ուղղությունը, որով շարժվելիս նրանով սահմանափակված տիրույթի մոտակա մասը երևում է ձախից: Եթե կորը շրջանագիծ է, կամ շրջանագծին «մոտ», ապա դրական ուղղությունը համընկնում է ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղության հետ, իսկ ընդհանուր դեպքում այդպես սահմանել դրական ուղղություն չի լինի (տես նկ.6):




*Նկ. 6*

Ոչ դրական ուղղությունը կանվանենք՝ բացասական:

Ստորև ենթադրվում է, որ $(D)$ տիրույթը միակապ է (տես [2],[3]) և այնպիսին, որ այն տրոհվում է վերջավոր թվով սեղանակերպերի ինչպես ըստ $x$, այնպես էլ ըստ $y$ առանցքների:

### 2.2. ԿՐԿՆԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԿԱՊԸ ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԵՏ

***Թեորեմ 1 (Գրինի* բանաձևը):***

Դիցուք $P, P'_y, Q, Q'_x \in C(\overline{D})$, $(\Gamma)$-ն $(D)$-ի եզրն է:

Ճշմարիտ է հետևյալ (Գրինի) բանաձևը՝

$$\boxed{\oint\limits_{(\Gamma)} Pdx + Qdy = \iint\limits_{(D)} \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy}, \qquad (2)$$

որտեղ $(\Gamma)$-ն շրջանցվում է դրական ուղղությամբ:

*Ապացուցում:* Նախ դիտարկենք մասնավոր դեպք՝ $Q \equiv 0$ և, $(D)$-ն սեղանակերպ է, սահմանափակված $x = a, x = b$ ուղիղներով և

---

* Գրին Ջորջ (1793-1841)-անգլիացի մաթեմատիկոս

$y=Y(x), y=y_0(x)$ $(Y(x)\geq y_0(x))$ անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկներով։

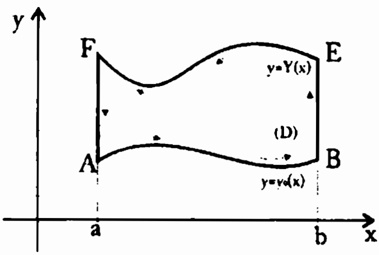
Ըստ կրկնակի ինտեգրալի հաշվման (1) բանաձևի, ունենք (տես նկ. 7)։

$$\iint\limits_{(D)} P'_y dxdy=\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} P'_y dy=\int\limits_a^b P(x,Y(x))dx-\int\limits_a^b P(x,y_0(x))dx=$$

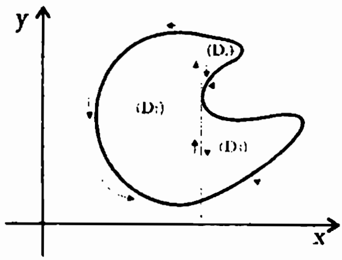
$$=-\int\limits_{(AB)} Pdx-\int\limits_{(BE)} Pdx-\int\limits_{(EF)} Pdx-\int\limits_{(FA)} Pdx=-\oint\limits_{(\Gamma)} Pdx$$

Այստեղ հաշվի առանք, որ $\int\limits_{(BE)} Pdx=\int\limits_{(FA)} Pdx=0$։ Այսպիսով՝

$$\iint\limits_{(D)} P'_y dxdy = -\oint\limits_{(\Gamma)} Pdx \tag{3}$$




Նկ. 7




Նկ. 8

Ընդհանուր դեպքում, երբ $(D)$-ն տրոհվում է վերջավոր $(n)$ թվով վերը նշված սեղանակերպերի և, ուրեմն՝

$$\iint\limits_{(D)} P'_y dxdy=\sum_k^n \iint\limits_{(D_k)} P'_y dxdy\ :$$

(3)-ը ապացուցվում է օգտվելով նախորդից (տրոհման գծերով ինտեգրալները ոչնչացնում են իրար (տես նկ. 8))։

Երբ $P\equiv 0$ և $(D)$-ն սեղանակերպ է, սահմանափակված $y=c, y=d$ ուղիղներով և $x=x_0(y), x=X(y)$ $(x_0(y)\leq X(y))$ անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկներով, ապա՝

$$\iint\limits_{(D)} Q'_x dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_0(y)}^{X(y)} Q'_x dx = \oint\limits_{(\Gamma)} Qdy\text{։} \tag{4}$$

Դատողությունները նույնն են ինչ նախորդ դեպքում։

Պարզ է նաև, որ երբ $(D)$-ն տրոհվում է վերջավոր թվով նշված սեղանակերպերի, ապա ստացված (4) բանաձևը մնում է ուժի մեջ:

Երբ $(D)$-ն տրոհվում է վերջավոր թվով ինչպես առաջին, այնպես էլ երկրորդ տեսակի սեղանակերպերի, ապա ճշմարիտ են (3)-ն ու (4)-ը միաժամանակ և, գումարելով իրար, կստանանք (2)-ը: ■

*Դիտողություն 1:* Կրկնակի ինտեգրալի սահմանումից հետևում է, որ $\iint\limits_{(D)} dxdy = D$ ( $D$ -ն $(D)$ տիրույթի մակերեսն է): Եթե (2)-ի մեջ վերցնենք $P \equiv 0, Q \equiv x$ , կստանանք

$$\boxed{D = \oint\limits_{(\Gamma)} xdy}: \tag{5}$$

Իսկ եթե՝ $Q \equiv 0,\ P \equiv y$ , ապա՝

$$\boxed{D = -\oint\limits_{(\Gamma)} ydx}: \tag{6}$$

(5)-ից և (6)-ից հետևում է նաև մակերես հաշվելու հետևյալ բանաձևը

$$\boxed{D = \frac{1}{2}\oint\limits_{(\Gamma)} xdy - ydx}: \tag{7}$$

### 2.3. ԵՐԿՐՈՐԴ ՍԵՌԻ ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՃԱՆԱՊԱՐՀԻՑ ԱՆԿԱԽՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

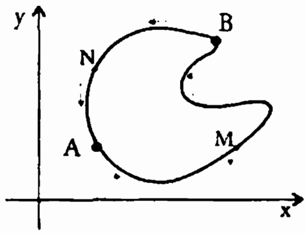
Դիցուք $P,Q \in C(D)$, որտեղ $(D)$-ն տիրույթ է: $A$ -ն և $B$ -ն $(D)$-ին պատկանող կամայական կետեր են, իսկ $(l)$ -ը կամայական անընդհատ, պարզ կոր է, որը միացնում է այդ կետերը և, պարունակվում է $(D)$-ում:

***Սահմանում 1:*** Եթե $I = \int\limits_{(l)} Pdx + Qdy$ ինտեգրալը կախված չէ $(l)$ կորի ընտրությունից, այլ կախված է միայն $A$ , $B$ կետերից, ապա ասում ենք, որ $I = \int\limits_{(l)} Pdx + Qdy$ ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից:

Այժմ պարզենք, թե ի՞նչ պայմանների դեպքում $I=\int\limits_{(l)}Pdx+Qdy$ ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից:

***Թեորեմ 1:*** Որպեսզի $I=\int\limits_{(l)}Pdx+Qdy$ ինտեգրալը լինի անկախ ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ $(D)$-ում պարունակվող յուրաքանչյուր անընդհատ, պարզ փակ $(l)$ կորով ինտեգրալը հավասար լինի զրոյի:

***Ապացույց: Անհրաժեշտություն:*** Տրված է, որ $I=\int\limits_{(l)}Pdx+Qdy$ ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից: Վերցնենք կամայական անընդհատ, պարզ փակ $(l)$ կոր, պարունակվող $(D)$-ում: Այդ $(l)$ կորի վրա ընտրենք պատահական երկու կետ $A$ և $B$, որոնց միջև ընտրենք նաև ինչ-որ $M,N$ կետեր (տես նկ.9):




***Նկ. 9***

Ունենք՝

$$\oint\limits_{(l)}Pdx+Qdy=\oint\limits_{(AMBNA)}Pdx+Qdy=\oint\limits_{(AMB)}Pdx+Qdy+\oint\limits_{(BNA)}Pdx+Qdy=$$

$$=\oint\limits_{(AMB)}Pdx+Qdy-\oint\limits_{(ANB)}Pdx+Qdy=0:$$

Այսինքն՝ $\oint\limits_{(l)}Pdx+Qdy=0$:

***Բավարարություն:*** Հայտնի է, որ նշված ինտեգրալը $(D)$-ում պարունակվող կամայական անընդհատ, պարզ, փակ կորով հավասար է զրոյի: Վերցնենք $(D)$-ին պատկանող կամայական երկու $A$ և $B$ կետ և միացնենք նրանք $(D)$-ում պարունակվող երկու կամայական անընդհատ պարզ $(AMB)$ և $(ANB)$ կորերով: Ունենք՝

$$0=\oint_{(AMBNA)} Pdx+Qdy=\oint_{(AMB)} Pdx+Qdy+\oint_{(BNA)} Pdx+Qdy=$$

$$=\oint_{(AMB)} Pdx+Qdy-\oint_{(ANB)} Pdx+Qdy:$$

Որտեղից՝

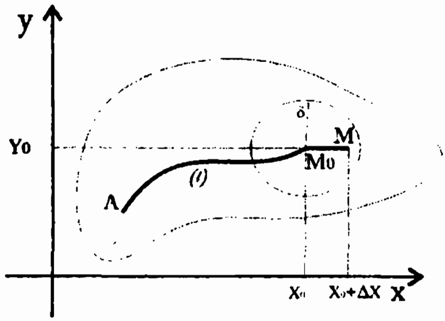
$$\oint_{(AMB)} Pdx+Qdy=\int_{(ANB)} Pdx+Qdy:$$

Այսինքն ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից: ■

***Սահմանում 2:*** Դիցուք $P,Q\in C(D)$, որտեղ $(D)$-ն տիրույթ է: Կասենք, որ $Pdx+Qdy$-ը ճշգրիտ դիֆերենցիալ է $(D)$-ում, եթե գոյություն ունի $(D)$-ում $U(x,y)$ դիֆերենցելի ֆունկցիա, այնպիսին, որ՝ $dU(x,y)\equiv P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ $((x,y)\in(D))$: Քանի որ, մյուս կողմից՝ $dU(x,y)\equiv U'_x(x,y)dx+U'_y(x,y)dy$, և $dx,dy$ աճերը իրարից անկախ են (կարելի է վերցնել $dx\neq 0, dy=0$ և՝ հակառակը), ապա ստացված $P(x,y)dx+Q(x,y)dy\equiv U'_x(x,y)dx+U'_y(x,y)dy$ նույնությունը համարժեք է հետևյալ համակարգին՝

$$U'_x(x,y)\equiv P(x,y) \text{ և } U'_y(x,y)\equiv Q(x,y): \tag{1}$$

***Թեորեմ 2:*** Որպեսզի $I=\int_{(l)} Pdx+Qdy$ ինտեգրալը անկախ լինի ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ $Pdx+Qdy$ արտահայտությունը լինի $(D)$-ում ճշգրիտ դիֆերենցիալ:




*Նկ. 10*

*Ապացուցում: Անհրաժեշտություն:* Տրված է, որ $I=\int\limits_{(l)}Pdx+Qdy$ ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից: Ընտրենք կամայական կետ $A(a_1,a_2)\in(D)$ և այն հաստատագրենք: Վերցնենք փոփոխական կետ $M(x,y)\in(D)$ (տես նկ.10):

$A$ և $M$ կետերը միացնենք $(D)$-ում պարունակվող որևէ անընդհատ պարզ $(l)$ կորով,: Դիտարկենք $\int\limits_{(l)}Pdx+Qdy$ ինտեգրալը, որը, ըստ պայմանի, կախված է միայն $A$ և $M$ կետերից և, քանի որ $A$-ն հաստատագրված է, ապա այդ ինտեգրալը կախված է միայն $M(x,y)$ կետից, այսինքն՝ $(x,y)$-ից: Այսպիսով ծնվում է ֆունկցիա $U(x,y)=\int\limits_{(AM)}Pdx+Qdy$, որոշված $(D)$-ում: Ապացուցենք, որ այն դիֆերենցելի է $(D)$-ում և՝

$$dU(x,y)\equiv P(x,y)dx+Q(x,y)dy\quad ((x,y)\in(D)):$$

Վերցնենք կամայական $M_0(x_0,y_0)\in(D)$ և այն միացնենք $A(a_1,a_2)$ կետին $(D)$-ում պարունակվող որևէ անընդհատ, պարզ $(l)$ կորով,: Քանի որ $(D)$-ն բաց բազմություն է, ապա $M_0(x_0,y_0)$-ն $(D)$-ի ներքին կետ է, այսինքն՝ $\exists\, U_\delta(M_0)\subset(D)$: Տանք $x_0$-ին $\Delta x$ $(|\Delta x|<\delta)$ աճ, թողնելով $y_0$ հաստատագրված, կստանանք $M(x_0+\Delta x,y_0)$ $(M\in(D))$ կետը: Միացնենք $M_0$ և $M$ կետերը ուղիղ գծով, կստացվի $(l_1)=[M_0,M]$ հատվածը և նշանակենք $(l_2)=(l)\cup(l_1)$: Ունենք՝

$$U(M)=\int\limits_{(l_2)}Pdx+Qdy=\int\limits_{(l)}Pdx+Qdy+\int\limits_{(l_1)}Pdx+Qdy=$$

$$=U(M_0)+\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}P(x,y_0)dx, \qquad (2)$$

որտեղից՝

$$\Delta_x U(M_0)=U(x_0+\Delta x,y_0)-U(x_0,y_0)=\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}P(x,y_0)dx=$$

$$=P(x_0+\theta\cdot\Delta x,y_0)\cdot\Delta x\ (0\le\theta\le 1), \qquad (3)$$

(այստեղ կիրառեցինք միջինի մասին թեորեմը): Հաշվի առնելով նաև $P(x,y)$-ի անընդհատությունը $M_0$ կետում,կստանանք՝

$$\frac{\Delta_x U(M_0)}{\Delta x}=P(x_0+\theta\cdot\Delta x, y_0)\underset{\Delta x\to 0}{\to}P(x_0,y_0):$$

Քանի որ $M_0(x_0,y_0)$-ն $(D)$-ի կամայական կետ է, ստանում ենք՝

$$U'_x(M)\equiv P(M),\ (M\in(D)):$$

Նույն կերպ ապացուցվում է նաև՝

$$U'_y(M)\equiv Q(M),\ (M\in(D)):$$

Քանի, որ $P(M),Q(M)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $(D)$-ում, ապա վերջին երկու հավասարություններից հետևում է նաև $U'_x,U'_y$ ֆունկցիաների անընդհատությունը, որը նշանակում է $U(M)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը $(D)$-ում: Ստացանք նաև՝

$$dU(x,y)\equiv P(x,y)dx+Q(x,y)dy\quad ((x,y)\in(D)): \qquad (4)$$

***Բավարարություն:*** Տրված է, որ գոյություն ունի $(D)$-ում $U(M)$ դիֆերենցելի ֆունկցիա, այնպիսին, որ՝

$$dU(x,y)\equiv P(x,y)dx+Q(x,y)dy\quad ((x,y)\in(D))$$

և, ուրեմն $U$-ն հանդիսանում է (1) համակարգի լուծում: Պետք է ցույց տալ, որ $I=\int\limits_{(l)}Pdx+Qdy$ ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից:

Դիցուք $A$-ն և $B$-ն կամայական կետեր են, պատկանող $(D)$-ին, իսկ $(l)$-ը այդ կետերը միացնող և $(D)$-ում պարունակվող կամայական անընդհատ, պարզ կոր է: Դիցուք $(l)$ պարզ կորը տրված է $x=x(t),\ y=y(t)\ (x,y\in C^1[\alpha;\beta])$ պարամետրական տեսքով ($A(x(\alpha),y(\alpha)), B(x(\beta),y(\beta))$): Հաշվի առնելով (1)-ը ունենք՝

$$I=\int\limits_{(l)}Pdx+Qdy=\int\limits_a^b(P(x(t),y(t))\cdot x'(t)+Q(x(t),y(t))\cdot y'(t))dt=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta(U'_x(x(t),y(t))\cdot x'(t)+U'_y(x(t),y(t))\cdot y'(t))dt=\int\limits_\alpha^\beta(U(x(t),y(t)))'dt=$$

$$=U(x(\beta),y(\beta))-U(x(\alpha),y(\alpha))=U(B)-U(A)=U\Big|_A^B:$$

Այսպիսով, թեորեմի պայմանների առկայությամբ տեղի ունի Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը՝

$$\boxed{\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy = U\Big|_A^B}:\qquad (5)$$

Ստացվածը հենց նշանակում է ինտեգրալի անկախությունը ինտեգրման ճանապարհից: ■

***Թեորեմ 3:*** Դիցուք $P, P'_y, Q, Q'_x \in C(D)$, որտեղ $(D)$-ն միակապ տիրույթ է (տես [2],[3]): Որպեսզի $I = \int\limits_{(l)} Pdx + Qdy$ ինտեգրալը անկախ լինի ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ $(D)$-ում տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝

$$\boxed{P'_y(x,y) \equiv Q'_x(x,y)}:\qquad (6)$$

***Ապացուցում: Անհրաժեշտություն:***

Տրված է, որ $I = \int\limits_{(l)} Pdx + Qdy$ ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից և, ուրեմն ճշմարիտ է (տես (1))՝

$$U'_x(x,y) \equiv P(x,y) \text{ և } U'_y(x,y) \equiv Q(x,y)\ :\qquad (7)$$

Հաշվի առնելով այն, որ $P(x,y)$-ը ունի անընդհատ ածանցյալ $P'_y(x,y)$, (7)-ից ստանում ենք, որ $U(x,y)$-ը ունի անընդհատ խառը ածանցյալ՝

$$U''_{xy}(x,y) \equiv P'_y(x,y):\qquad (8)$$

Նույն կերպ դատելով, (7) –ից ստանում ենք, որ $U(x,y)$-ն ունի անընդհատ խառը ածանցյալ՝

$$U''_{yx}(x,y) \equiv Q'_x(x,y):\qquad (9)$$

Քանի որ խառը ածանցյալները անընդհատության կետերում հավասար են իրար, ապա (8)-ից և (9)-ից, ստանում ենք (7)-ը:

***Բավարարություն:*** Տրված է (6)-ը: Վերցնենք $(D)$-ում պարունակվող կամայական անընդհատ, պարզ, փակ $(l)$ կոր, նրանով սահմանափակվում է որոշակի $(D_l)$ տիրույթ: Հաշվի առնելով (6)-ը, Գրինի բանաձևից (տես 2.բ. 2.) ստանում ենք՝

$$\oint\limits_{(l)} Pdx+Qdy=\iint\limits_{(D_l)}\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy=0:$$

Այստեղից, ըստ թեորեմ 1-ի ստանում ենք $I=\int\limits_{(l)} Pdx+Qdy$ ինտեգրալի անկախությունը ինտեգրման ճանապարհից: ■

## 2.4. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄ ԿՐԿՆԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՄԵՋ

Դիցուք $x,y$ հարթության վրա տրված է $(D)$ տիրույթ, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ $(\Gamma)$ եզրով և՝ $(u,v)$ հարթության վրա $(\Delta)$ տիրույթ, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ $(\gamma)$ եզրով: Ենթադրենք, որ այս երկու տիրույթների միջև

$$x=x(u,v),\, y=y(u,v)\quad \left(x,y\in C^1\left(\overline{\Delta}\right)\right) \tag{1}$$

ֆունկցիաները ստեղծում են փոխմիարժեք համապատասխանություն: Այս դեպքում, անբացահայտ ֆունկցիաների տեսությունից (տես [2],[3]) հայտնի է, որ

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=1, \tag{2}$$

որտեղ, օրինակ $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x'_u(u,v) & y'_u(u,v)\\ x'_v(u,v) & y'_v(u,v)\end{vmatrix}=I(u,v)$ (Յակոբիի որոշիչ կամ յակոբիան): (2)-ից հետևում է, որ այս որոշիչները զրոյից տարբեր են և, քանի որ անընդհատ են, ապա նրանք ունեն որոշակի նշան: Այստեղից հետևում է, որ $\left(\overline{\Delta}\right)$-ի ներքին կետին համապատասխանում է $\left(\overline{D}\right)$-ի ներքին կետ և հակառակը: Ուրեմն $(\Delta)$-ի $(\gamma)$ եզրին համապատասխանում է $(D)$-ի $(\Gamma)$ եզրը: Եթե $(\Delta)$-ում ունենք $u=u(t),v=v(t)\quad \left(u,v\in C^1[\alpha;\beta]\right)$ հավասարումներով տրված պարզ $(\gamma_1)$ կոր, այնպիսին, որ $u'(t)^2+v'(t)^2>0$, ապա

$$x=x(u(t),v(t))=x(t),\, y=y(u(t),v(t))=y(t)\ \left(t\in[\alpha;\beta]\right)$$

հավասարումներով որոշված $(\Gamma_1)$ կորը պարունակվում է $(D)$-ում:

ընդ որում $x(t), y(t)$ ֆունկցիաները ունեն անընդհատ ածանցյալներ

$$x'(t)=x'_u(u(t),v(t))\cdot u'(t)+x'_v(u(t),v(t))\cdot v'(t),$$

$y'(t)=y'_u(u(t),v(t))\cdot u'(t)+y'_v(u(t),v(t))\cdot v'(t)$, որոնք միաժամանակ զրո լինել չեն կարող, քանի որ հակառակ դեպքում, հաշվի առնելով, որ $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=I(u,v)\neq 0$ կստանանք, որ $u'(t)=v'(t)=0$, որը հակասում է վերը նշված պայմանին:

Եթե $(\Delta)$-ում $(u,v)$ կետը շրջանցում է $(\gamma_1)$ $((\gamma_1)\subset(\Delta))$ անընդհատ, պարզ փակ կորը դրական ուղղությամբ, ապա համապատասխան $(x,y)$ կետը $(\gamma_1)$-ի պատկեր հանդիսացող անընդհատ, պարզ փակ $(\Gamma_1)$ $((\Gamma_1)\subset(D))$ կորը կշրջանցի դրական կամ բացասական ուղղությամբ: Առաջին դեպքում կասենք որ (1) ձևափոխությունները պահպանում են կողմնորոշումը, երկրորդ դեպքում՝ փոխում են այն:

Հաշվենք $(D)$ տիրույթի մակերեսը արտահայտված $(u,v)$ փոփոխականներով, լրացուցիչ ենթադրելով, որ $y(u,v)$-ն ունի անընդհատ խառը ածանցյալներ: Դիցուք $(\gamma)$-ն որոշված է $u=u(t), v=v(t)$ $(u,v\in C'[\alpha;\beta])$ հավասարումներով, որտեղ $[\alpha;\beta]$ հատվածը ընտրված է այնպես, որ, երբ $t$-ն շարժվում է $\alpha$-ից $\beta$, համապատասխան $(x(t),y(t))$ կետը շրջանցում է $(\Gamma)$-ն դրական ուղղությամբ: Ունենք (տես 2.2 (5))՝

$$D=\oint_{(\Gamma)} xdy=$$

$$=\int_\alpha^\beta x(u(t),v(t))(y'_u(u(t),v(t))\cdot u'(t)+y'_v(u(t),v(t))\cdot v'(t))dt=$$

$$=\pm\oint_{(l)} x\cdot\frac{\partial y}{\partial u}du+x\cdot\frac{\partial y}{\partial v}dv \tag{3}$$

(3)-ի աջ մասի նշանը ճշտելու համար հաշվենք այդտեղ գրված ինտեգրալը, բերելով այն Ռիմանի ինտեգրալի, երբ $(\gamma)$ կորը տրված է $u=u(t), v=v(t)$ տեսքով: Ըստ Գրինի բանաձևի

$$\oint_{(\gamma)} x\cdot\frac{\partial y}{\partial u}du+x\cdot\frac{\partial y}{\partial v}dv=\iint_{(\Delta)}\left(\frac{\partial(x\cdot y_v')}{\partial u}-\frac{\partial(x\cdot y_u')}{\partial v}\right)dudv=$$

$$=\iint_{(\Delta)}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+x\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}-x\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\right)dudv=\iint_{(\Delta)}I(u,v)dudv, \quad (4)$$

որտեղ ձախ մասի ինտեգրալը շրջանցվում է դրական ուղղությամբ: (3), (4)-ից հետևում է, որ $D=\pm\iint_{(D)}J(u,v)dudv$: Քանի որ մակերեսը դրական է, ապա պարզ է, որ

$$\boxed{D=\iint_{(\Delta)}\left|J(u,v)\right|dudv}: \quad (5)$$

Ընդ որում, այս բանաձևի ստացման ընթացքում պարզ դարձավ, որ $I(u,v)$ յակոբիանի դրական նշանը համապատասխանում է կողմնորոշման պահպանմանը, բացասական նշանը՝ կողմնորոշման փոփոխմանը:

Կիրառելով (5)-ում միջինի մասին թեորեմը, կստանանք՝ $D=\left|I(u^*,v^*)\right|\cdot\Delta$, որտեղ՝ $(u^*,v^*)\in(\overline{\Delta})$: Վերցնենք կամայական $M_0\in(\Delta_1)$ $((\Delta_1)\subset(\Delta))$ և $(\Delta_1)$-ի տրամագիծը՝ ($(\Delta_1)$-ին պատկանող ցանկացած երկու կետերի միջև եղած հեռավորություններից մեծագույնը ) $\mu=diam(\Delta_l)$ ձգտեցնենք զրոյի, այնպես որ պահպանվի $M_0\in(\Delta_1)$ պայմանը: Դիցուք $(\Delta_1)$-ի պատկերը $(D_l)$-ն է, իսկ՝ $\lambda=diam(D_l)$: Շնորհիվ $x=x(u,v), y=y(u,v)$ ֆունկցիաների անընդհատության՝ $\lim\limits_{\mu\to 0}\lambda=0$: Քանի որ անընդհատ է նաև $|I(u,v)|$ ֆունկցիան, ուստի՝ $|I(M_0)|=\lim\limits_{\mu\to 0}\frac{D_l}{\Delta_l}$: Այսինքն յակոբիանի բացարձակ արժեքը ցույց է տալիս, թե որքանով է աղավաղվում (լայնանում, կամ սեղմվում) մակերեսը փոփոխականների փոխարինման դեպքում:

Այժմ վերհիշենք մեկ փոփոխականի դեպքը՝

$$f\in C[a;b] \quad (a<b):$$

Եթե $\forall x \in (a;b)$ $\exists f'(x)$ և այն դրական է (ֆունկցիան մոնոտոն աճող է), ապա, երբ $x$-ը փոփոխվում է $a$-ից $b$, $f(x)$-ը փոփոխվում է $f(a)$-ից $f(b)$, այսինքն պահպանվում է կողմնորոշումը ($f'(x) < 0$ դեպքում կողմնորոշումը փոխվում է): Մյուս կողմից, ըստ Լագրանժի թեորեմի

$$d = f'(\xi)\cdot\Delta \quad (d = f(b) - f(a), \Delta = b - a, \xi \in (a;b)):$$

Եթե վերցնենք կամայական $x_0 \in (a;b)$ և $\Delta$-ն ձգտեցնենք զրոյի, այնպես որ պահպանվի $x_0 \in (a;b)$ պայմանը, ապա $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{d}{\Delta}$:

Այս դատողությունները ցույց են տալիս, թե որքան խորն է աճանցյալի և յակոբիանի նմանությունը:

*Դիտողություն 1:* (5) բանաձևը ճշմարիտ է նաև այն դեպքում, երբ փոխմիարժեք լինելու պայմանը խախտված է վերջավոր թվով անընդհատ, պարզ կորերի վրա (տես [3]):

Օրինակ 1: Դիտարկենք $R$ շառավղով $O(0,0)$ կենտրոնով շրջան բևեռային համակարգում՝

$$x = r\cdot cos\varphi,\ y = r\cdot sin\varphi \quad (0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi):$$

Նշված ֆունկցիաները արտապատկերում են $[0;R]\times[0;2\pi]$ ուղղանկյունը $R$ շառավղով $O(0,0)$ կենտրոնով շրջանի վրա: Փոխմիարժեքության պայմանը խախտված է հետևյալ կորերի վրա՝ $r = 0$ հատվածը արտապատկերվում է $O(0,0)$ կետի, իսկ $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$, հատվածները արտապատկերվում են միևնույն $[O;A]$ $(A(R;0))$ հատվածի վրա: Ինչպես արդեն նշվեց, (5)-ը ճշմարիտ է նաև այս դեպքում: Դեշտ է համոզվել, որ տվյալ դեպքում յակոբիանը՝ $I \equiv r$:

***Թեորեմ 1 (փոփոխականների փոխարինումը կրկնակի ինտեգրալում):***

Դիցուք $(x, y)$ հարթության մեջ տրված է $(D)$ տիրույթ, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ $(\Gamma)$ եզրով և՝ $(u, v)$ հարթության մեջ $(\Delta)$ տիրույթ, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ $(\gamma)$ եզրով: Այս երկու տիրույթների միջև $x = x(u,v), y = y(u,v)$ $(x, y \in C'(\overline{\Delta}))$ ֆունկցիաները ստեղծում են փոխմիարժեք համապատասխանություն: Ենթադրենք, որ $(\overline{D})$-ի վրա որոշված է անընդհատ ֆունկցիա՝ $f \in C(\overline{D})$: Այդ դեպքում ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\boxed{\iint_{(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint_{(\Delta)} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\cdot\left|I(u,v)\right|dudv}: \qquad (6)$$

***Ապացուցում:*** Տրոհենք $(D)$-ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով մասերի $(D_k), k=1,...,n$: Այն կառաջացնի $(\Delta)$ տիրույթի համապատասխան տրոհում $(\Delta_k), k=1,...,n$: Ընդ որում $D_k = \iint_{(\Delta_k)} \left|I(u,v)\right|dudv = \left|I(u_k^*,v_k^*)\right|\cdot\Delta_k \quad ((u_k^*,v_k^*)\in(\overline{\Delta}_k))$: Վերցնենք կամայական $(u_k,v_k)\in(\overline{\Delta}_k)$ և կազմենք գումար

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(u_k,v_k),y(u_k,v_k)\right)\cdot D_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(x(u_k,v_k),y(u_k,v_k)\right)\cdot\left|I(u_k^*,v_k^*)\right|\Delta_k:$$

Նշանակենք՝ $\sigma^* = \sum_{k=1}^{n} f\left(x(u_k,v_k),y(u_k,v_k)\right)\cdot\left|I(u_k,v_k)\right|\Delta_k$:

Եթե՝ $\mu = max(diam(\Delta_k)), \lambda = max(diam(D_k))$, ապա ակնհայտ է, որ $\lim\limits_{\mu\to 0}\lambda = 0$: Պարզ է նաև, որ՝

$$\lim_{\mu\to 0}\sigma^* = J = \iint_{(\Delta)} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\cdot\left|I(u,v)\right|dudv, \quad \lim_{\mu\to 0}(\sigma-\sigma^*)=0$$

(վերջին պնդումը ապացուցվում է նույն կերպ, ինչ համապատասխան փաստը, օրինակ, երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի դեպքում): Այստեղից հետևում է, որ $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = J$: ■

Օրինակ 2: Հաշվել $J = \iint\limits_{0\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1)dxdy$: Կատարենք փոփոխականների փոխարինում՝

$$x = a\cdot r\cdot cos\varphi, y = b\cdot r\cdot sin\varphi \quad (0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi):$$

Հեշտ է համոզվել, որ $I(r,\varphi) = abr$: Այսպիսով, ունենք՝

$$J = ab\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \left(r^2+1\right)\cdot r dr = 2\pi\cdot ab\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi ab}{2}:$$

## 3. ԵՌԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

### 3.1. ԵՌԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՇՎՈՒՄԸ:

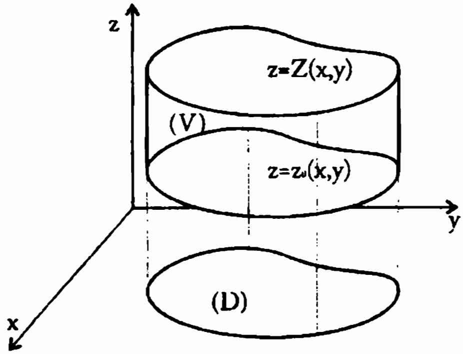
***Սահմանում 1:*** Դիցուք տրված է $(V)$ մարմինը, սահմանափակված $z = z_0(x,y), z = Z(x,y)$ $(z_0, Z \in C(\overline{D}), z_0(x,y) \le Z(x,y))$ մակերևույթներով և գլանային մակերևույթով, որի ուղղորդ կորն է $(D)$-ի կտոր առ կտոր ողորկ $(\Gamma)$ եզրը, իսկ ծնիչները զուգահեռ են $z$ առանցքին: Ենթադրենք նաև, որ այդ մարմնի վրա որոշված է անընդհատ ֆունկցիա $f \in C(\overline{V})$ (տես նկ. 11): Տրոհենք մարմինը կտոր առ կտոր ողորկ $(S_k)$ մակերևույթներով $(V_k)$ $(k = 1,...,n)$ մասերի: Այն պայմանից, որ $(V_k)$-ի $(S_k)$ եզրը կտոր առ կտոր ողորկ է, այսինքն, բացառությամբ վերջավոր թվով $(S_k)$-ին պատկանող անընդհատ կորերի, մնացած կետերում կա շոշափող հարթություն (տես ստորև 4.1, սահմանում 3), հետևում է, որ $(V_k)$-ն խորանարդելի է, այսինքն ունի ծավալ[3]: Վերցնենք յուրաքանչյուր մասից պատահական $M_k$ կետ $(M_k \in (\overline{V_k}))$ և կազմենք գումար $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot V_k$, որտեղ $V_k$-ն $(V_k)$-ի ծավալն է: Նշանակենք $\lambda = \max diam(V_k)$, որտեղ $diam(V_k)$-ն $(V_k)$-ին պատկանող ցանկացած երկու կետերի միջև եղած հեռավորություններից մեծագույնն է:

Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման (անկախ տրոհումների և $M_k$ կետերի ընտրությունից)՝

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = I = \iiint\limits_{(V)} f dxdydz,$$

ապա այն կոչվում է **եռակի ինտեգրալ**:

Ելնելով կրկնակի ինտեգրալի հետ նմանությունից, առանց ապացուցելու (այն դժվար չէ բերել) ձևակերպենք հետևյալը:




*Նկ. 11*

***Թեորեմ 1:*** Վերը նշված պայմանների առկայությամբ գոյություն ունի եռակի ( $I$ ) ինտեգրալը և այն կարելի հաշվել հետևյալ կերպ՝

$$\boxed{I = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)dz}: \qquad (16)$$

Եթե $(D)$-ն, իր հերթին

$$x = a, x = b, y = y_0(x), y = Y(x) \ \left(y_0, Y \in C[a;b], y_0(x) \le Y(x)\right)$$

կորերով սահմանափակված սեղանակերպ է, ապա՝

$$\boxed{I = \iiint\limits_{(V)} f dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)} f(x,y,z)dz}: \qquad (17)$$

## 3.2. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄԸ ԵՌԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՈՒՄ

***Թեորեմ 2:*** Դիցուք $x, y, z$ տարածության մեջ ունենք $(V)$ մարմին, կտոր առ կտոր ողորկ $(S)$ եզրով և, $\xi, \eta, \zeta$ տարածության մեջ՝ $(\Omega)$ մարմին, կտոր առ կտոր ողորկ $(\Sigma)$ եզրով: Տրված են նաև $x = x(\xi,\eta,\zeta), y = y(\xi,\eta,\zeta), z = z(\xi,\eta,\zeta)$ $\left(x, y, z \in C'\left(\overline{\Omega}\right)\right)$ ֆունկցիաներ, որոնք ստեղծում են փոխմիարժեք համապատասխանություն $(V)$ և $(\Omega)$ մարմինների միջև:

Դիցուք տրված է $f(x,y,z)$ ($f \in C(\overline{V})$) ֆունկցիա: Այս պայմանների առկայությամբ ճշմարիտ է փոփոխականների փոխարինման հետևյալ բանաձևը՝

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$\boxed{= \iiint\limits_{(\Omega)} f\big(x(\xi,\eta,\zeta),y(\xi,\eta,\zeta),z(\xi,\eta,\zeta)\big)\left|I(\xi,\eta,\zeta)\right|d\xi d\eta d\zeta}, \qquad (1)$$

որտեղ $I$ յակոբիանը որոշվում է հետևյալ կերպ՝

$$I(\xi,\eta,\zeta) = \begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi & z'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta & z'_\eta \\ x'_\zeta & y'_\zeta & z'_\zeta \end{vmatrix}:$$

Թեորեմի ապացույցը, ըստ էության նույնն է, ինչ կրկնակի ինտեգրալի դեպքում:

Օրինակ 1: Հաշվել $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z$ մակերևույթով սահմանափակված մարմնի $V$ ծավալը: Նախ նկատենք, որ ծավալ հաշվելու համար (1)-ի մեջ հարկավոր է վերցնել $f \equiv 1$: Այնուհետև նկատենք, որ մակերևույթի հավասարումից, որտեղ $x$-ը և $y$-ը մասնակցում են քառակուսի աստիճանով, հետևում է, որ մարմինն ունի համաչափություն $(y,z),(z,x)$ հարթությունների նկատմամբ և, $z \geq 0$: Ուրեմն, բավական է մարմնի ծավալի քառորդը հաշվել, վերցնելով՝ $x \geq 0, y \geq 0$ :Բնական է անցնել գնդային համակարգին

$$x = r\cdot sin\theta\cdot cos\varphi,\ y = r\cdot sin\theta\cdot sin\varphi,\ z = r\cdot cos\theta \ \ (0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}):$$

Հեշտ է համոզվել, որ գնդային համակարգում, յակոբիանը՝ $I = r^2\cdot sin\theta$: Մակերևույթի հավասարումից, ստանում ենք՝ $r^4 = a^3 r\cdot cos\theta \ \Rightarrow\ r = a\cdot\sqrt[3]{cos\theta}$ :

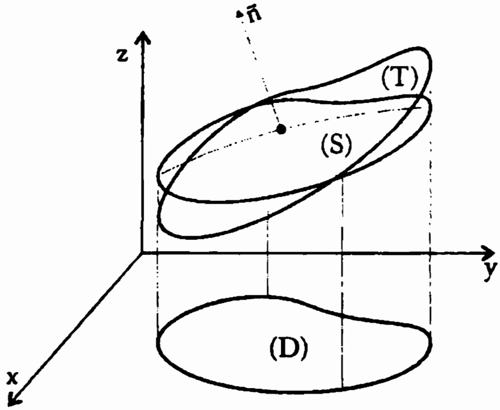
Այսպիսով՝

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta d\theta \int_0^{a\cdot\sqrt[3]{cos\theta}} r^2 dr = \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\theta\cdot cos\theta d\theta = \frac{\pi a^3}{3} sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{3}:$$

# 4. ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

## 4.1. ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹ, ՇՈՇԱՓՈՂ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ, ՆՈՐՄԱԼ, ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԿՈՂՄ, ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱԿԵՐԵՍ

***Սահմանում 1:*** Դիցուք $(D)$-ն տիրույթ է, ընկած $x, y$ հարթության մեջ, և տրված է $z = f(x,y)$ ֆունկցիա $\left(f \in C\left(\overline{D}\right)\right)$: $(S) = \{(x, y, f(x,y))\ ;\ (x,y) \in (D)\}$ եռաչափ տարածության ենթաբազմությունը կոչվում է **մակերևույթ**, տրված $z = f(x,y)$ բացահայտ տեսքով (տես նկ.12): Պարզ է, որ՝ $\left(\overline{S}\right) = \left\{(x, y, f(x,y))\ ;\ (x,y) \in \left(\overline{D}\right)\right\}$:




*Նկ. 12*

***Սահմանում 2:*** Դիցուք $(\Delta)$-ն տիրույթ է, ընկած $u, v$ հարթության մեջ, և այդ տիրույթում տրված են

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$$

ֆունկցիաներ ($x, y, z \in C^1\left(\overline{\Delta}\right)$):

$$(S) = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\ :\ (u,v) \in (\Delta)\} \quad ((S) \subset \boldsymbol{R}^3)$$

բազմությունը կոչվում է **անընդհատ մակերևույթ**, տրված պարամետրական տեսքով՝ $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$, $u$-ն և $v$-ն կոչվում են պարամետրեր:

Պարզ է որ՝ $(\overline{S})=\{(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) : (u,v)\in(\overline{\Delta})\}$: $(S)$ մակերևույթը կոչվում է պարզ (ինքն իրեն չհատող), եթե պարամետրի տարբեր արժեքներին համապատասխանում են $(S)$ մակերևույթի տարբեր կետեր: Մակերևույթը կոչվում է պարզ փակ, եթե պարզ լինելու պայմանը խախտված է ինչ որ պարզ փակ, կտոր առ կտոր ողորկ կորի վրա: Երբ մակերևույթը տրված է բացահայտ տեսքով, ապա դա նույնն է, ինչ այն տրված լինի $x=x, y=y, z=f(x,y)$ պարամետրական տեսքով ($x,y$ փոփոխականները պարամետրերի դերում են): Ակնհայտ է, որ բացահայտ տեսքով տրված մակարևույթը պարզ է:

***Սահմանում 3:*** Դիցուք $(S)$ մակերևույթը տրված է $z=f(x,y)$ $\left(f\in C(\overline{D})\right)$ բացահայտ տեսքով (տես սահմանում 1), $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $(A_0(x_0,y_0)\in(D), z_0=f(x_0,y_0))$ մակերևույթի կետ է: Կասենք, որ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ կետով անցնող հարթությունը $(S)$ մակերևույթի շոշափողն է (**շոշափող հարթություն** է) այդ կետում, եթե ինչպիսի $M\in(S)$ $(M(x,y,f(x,y)),(x,y)\in(D))$ կետ էլ վերցնենք, $\overrightarrow{M_0M}$ վեկտորի կազմած անկյունը այդ հարթության հետ ձգտում է զրոյի, երբ $M$ կետը, մնալով մակերևույթի վրա, ձգտում է $M_0$-ի:

***Սահմանում 4:*** $M_0(x_0,y_0,z_0)$ կետում շոշափող հարթությանը ուղղահայաց վեկտորը կոչվում է մակերևույթի նորմալ այդ կետում:

***Թեորեմ 1:*** Եթե $(S)$ մակերևույթը տրված է $z=f(x,y)$ ($f\in C(D)$, $(D)$-ն տիրույթ է) բացահայտ տեսքով և, $f$-ը դիֆերենցելի է $A_0(x_0,y_0)\in(D)$ կետում, ապա $M_0(x_0,y_0,z_0)\in(S)$ $(z_0=f(A_0))$ կետում $(S)$ մակերևույթը ունի շոշափող հարթություն, որի հավասարումն է՝

$$\boxed{z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0)\ \left(p=f'_x(A_0),q=f'_y(A_0)\right)}: \qquad (1)$$

***Ապացույց:*** Պարզ է, որ $\vec{n}(p,q,-1)$ վեկտորը ուղղահայաց է (1) հավասարումով որոշվող հարթությանը: Եթե նշանակենք՝ $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$,

$\Delta f(A_0)=f(A)-f(A_0)$ $(A(x,y)\in(D), M(x,y,f(x,y)\in(S))$, ապա՝ $\overrightarrow{M_0M}=(\Delta x,\Delta y,\Delta f(A_0))$: Դիցուք $\overrightarrow{M_0M}$ վեկտորը կազմում է $\varphi$ անկյուն $\vec{n}(p,q,-1)$ վեկտորի հետ: Ակնհայտ է, որ $\overrightarrow{M_0M}$ վեկտորի (1) հարթության հետ կազմած անկյան զրոյի ձգտելը համարժեք է նրան, որ $\varphi$-ն ձգտի $90^{\circ}$-ի, որն էլ, իր հերթին համարժեք է $cos\varphi$-ի զրոյի ձգտելուն: Ուստի, հաշվենք $cos\varphi$-ն և, այն գնահատենք, հաշվի առնելով $f$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը $A_0(x_0,y_0)\in(D)$ կետում՝

$$\Delta f(A_0)=p\cdot\Delta x+q\cdot\Delta y+o(\rho)\quad\left(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right): \qquad (2)$$

Ունենք՝

$$|cos\varphi|=\frac{|p\cdot\Delta x+q\cdot\Delta y-\Delta f(A_0)|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta f^2(A_0)}\cdot\sqrt{p^2+q^2+1}}\le$$

$$\le\frac{|o(\rho)|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{|o(\rho)|}{\rho}\underset{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}{\longrightarrow}0:$$

Ստացվածը նշանակում է, որ (1)-ը շոշափող հարթություն է: ■

Նույն կերպ սահմանվում է շոշափող հարթությունը, երբ այն տրված է պարամետրական տեսքով՝

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)\quad (x,y,z\in C^1(\overline{\Delta})):$$

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցը $\begin{bmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{bmatrix}$ (բոլոր ածանցյալները վերցրած են $(u,v)$ կետում), որի միջոցով կազմենք հետևյալ մինորները (Յակոբիի որոշիչները, կամ կարճ, յակոբիանները)՝

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}=y'_u\cdot z'_v-y'_v\cdot z'_u,\quad B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}=z'_u\cdot x'_v-z'_v\cdot x'_u,$$

$$C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}=x'_u\cdot y'_v-x'_v\cdot y'_u: \qquad (3)$$

**Խնդիր 1:** Ապացուցել, որ եթե

$$A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)>0\quad((u,v)\in(\Delta)), \qquad (4)$$

այսինքն $A(u,v), B(u,v), C(u,v)$ յակոբիանները միաժամանակ զրո չեն ($\Delta$)-ում, ապա

$$\forall N_0\left(x(M_0),y(M_0),z(M_0)\right)\in(S)\ \ (M_0(u_0,v_0)\in(\Delta))$$

կետում գոյություն ունի շոշափող հարթություն, որը պարամետրական տեսքով գրվում է հետևյալ կերպ՝

$$\begin{cases} x-x_0=x'_u\cdot(u-u_0)+x'_v\cdot(v-v_0) & (5)\\ y-y_0=y'_u\cdot(u-u_0)+y'_v\cdot(v-v_0) & (6)\\ z-z_0\ =z'_u\cdot(u-u_0)+\ z'_v\cdot(v-v_0), & (7)\end{cases}$$

այստեղ բոլոր մասնակի ածանցյալները վերցված են $M_0(u_0,v_0)$ կետում:

**Խնդիր 2:** Դիցուք ճշմարիտ է (4)-ը և, որոշակիության համար $M_0(u_0,v_0)$ կետում $C=x'_u\cdot y'_v-x'_v\cdot y'_u\neq 0$: Քանի որ $C$-ն (5), (6) համակարգի գլխավոր որոշիչն է, ապա այս համակարգը միարժեքորեն լուծվում է $u-u_0, v-v_0$-ի նկատմամբ: Լուծեք այդ համակարգը և ապացուցեք, որ (5-7) հավասարումներով որոշվող շոշափող հարթության հավասարումը բացահայտ տեսքով կլինի՝

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0: \tag{8}$$

(8)-ից հետևում է, որ այս շոշափող հարթությանը ուղղահայաց վեկտորը $N_0$ կետում (շոշափող հարթության նորմալը) կլինի՝ $\vec{n}(A,B,C)$: Եվ, եթե $\alpha,\beta,\gamma$-ով նշանակենք $\vec{n}(A,B,C)$ նորմալի համապատասխանաբար $x,y,z$ առանցքների դրական ուղղությունների հետ կազմած անկյունները, ապա նրանց կոսինուսները (ուղղորդ կոսինուսները) կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{9}$$

ընդ որում (9)-ում պետք է վերցնել ամենուր կամ միայն դրական նշանը կամ՝ միայն բացասականը: Այս դեպքում կասենք, որ կետից կետ նորմալի ուղղությունը փոփոխվում է անընդհատորեն:

Պարզ հաշիվը ցույց է տալիս, որ այն մասնավոր դեպքում, երբ մակերևույթը տրված է $z=f(x,y)$ $(f\in C(D))$ բացահայտ տեսքով, ապա համարելով, որ $x=u, y=v$, ստանում ենք (տես նաև (1)-ը)

$A = -p, B = -q, C = 1$: Ուրեմն նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են՝

$$\cos\alpha = \mp\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ \cos\beta = \mp\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \qquad (10)$$

ընդ որում ընտրվում է ամենուր կամ վերևի նշանը, կամ՝ ներքևի:

*Սահմանում 5:* Մակերևույթը, ինչպես էլ այն տրված լինի, կոչվում է ողորկ, եթե նրա յուրաքանչյուր կետում կա շոշափող հարթություն (կա նորմալ): Եթե նշված պայմանը խախտվում է վերջավոր թվով անընդհատ կորերի վրա, ապա մակերևույթը կոչվում է կտոր առ կտոր ողորկ:

*Սահմանում 6:* Մակերևույթը կոչվում է **երկկողմանի**, եթե նրա վրա ինչպիսի անընդհատ, փակ, պարզ կոր էլ վերցնենք և այդ կորի կամայական $N_0$ կետում ընտրենք նորմալի որոշակի ուղղություն, ապա երբ շրջանցում ենք այդ կորը կետից կետ փոփոխելով նորմալի ուղղությունը անընդհատորեն և վերադառնում ենք նույն $N_0$ սկզբնակետը, նորմալի ուղղությունը համընկնում է նախնականի հետ:

Իսկ եթե մակերևույթի վրա գոյություն ունի այնպիսի պարզ փակ կոր և կորին պատկանող այնպիսի կետ, որ երբ այդ կետում ընտրում ենք նորմալի որոշակի ուղղություն և, վերը ասածի պես այդ կորով վերադառնում ենք նույն կետը պարզվում է, որ նորմալի ուղղությունը փոխվել է $180^\circ$-ով, ապա այդպիսի մակերևույթը կոչվում է **միակողմանի**:

Միակողմանի մակերևույթի օրինակ է Մյոբիուսի* թերթը (տես [3]): Այդ թերթը այնպիսին է, որ երբ սկսում ենք այն ներկել, շարժվելով մակերևույթով ապա, ի վերջո թերթը ներկվում է ամբողջովին:

Այսուհետ կդիտարկենք միայն երկկողմանի մակերևույթներ:

*Սահմանում 7:* Երկկողմանի մակերերևույթի կողմ ասելով հասկանում ենք մակերևույթի այն կետերի բազմությունը, որոնց վերագրված են նորմալի ուղղությունները այնպես, որ կետից կետ անցնելիս նրանք փոխվում են անընդհատորեն: Կողմը ընտրելու համար բավական է որևէ կետում ընտրել (9)-ը (կամ (10)) բանաձևերում նորմալի ուղղորդ կոսինուսների նշանը (այդ նույն նշանը պետք է պահպանել բոլոր մնացած կետերում):

Եթե մակերևույթը տրված է բացահայտ տեսքով և որևէ կետում

---

* Մյոբիուս Ավգուստ Ֆերդինանդ (1790-1868)-գերմանացի երկրաչափ:

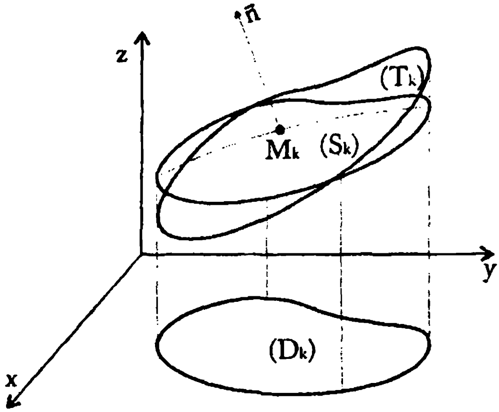
ընտրել ենք $cos\gamma$-ի դրական նշանը (նորմալը կազմում է սուր անկյուն $z$ առանցքի դրական ուղղության հետ), ապա այդպես ընտրված մակերևույթի կողմը կանվանենք վերին: Երբ նորմալը կազմում է բութ անկյուն $z$ առանցքի դրական ուղղության հետ (ընտրել ենք $cos\gamma$-ի բացասական նշանը), ապա մակերևույթի այդ կողմը կանվանենք ստորին:

Եթե մակերևույթը փակ է (այն սահմանափակում է ինչ-որ մարմին) և, երբ որևէ կետում նորմալը ուղղված է դեպի այդ մարմինը (ուղղված է ներս), ապա մակերևույթի համապատասխան կողմը կանվանենք ներքին: Իսկ, եթե նորմալը ուղղված է դեպի դուրս, ապա այդ կողմը կանվանենք արտաքին:

*Սահմանում 8:* Եթե ընտրված է ողորկ պարզ մակերևույթի կողմը, և՝ նրա վրա վերցված է անընդհատ, փակ պարզ կոր, ապա այդ կորի շրջանցման դրական ուղղությունը կորոշենք հետևյալ կերպ՝ եթե դիտորդը դասավորվի այնպես, որ կողմին համապատասխան նորմալը ուղղվի ոտքերից դեպի գլուխ, ապա կորը այդ ուղղությամբ շրջանցելիս նրանով սահմանափակված մակերևույթի մոտակա մասը դիտորդին երևա ձախից (հակառակ դեպքում՝ բացասական): Այդպես է սահմանվում մակերևույթի կողմնորոշումը:

*Սահմանում 9:* Դիցուք տրված է $(S)$ մակերևույթը բացահայտ տեսքով՝ $z=f(x,y)$ $(f\in C^1(\overline{D}))$, $(D)$-ն $(\Gamma)$ կտոր առ կտոր ողորկ եզրով տիրույթ է: Տրոհենք $(D)$-ն կտոր առ կտոր ողորկ $\Gamma_k$ $(k=1,\dots,n)$ կորերով $(D_k)$ մասերի: Դիտարկենք $\Gamma_k$ ուղղորդ կորերով և $z$ առանցքին զուգահեռ ծնիչներով առաջացած $(S_k^*)$ $(k=1,\dots,n)$ գլանային մակերևույթները, որոնք կառաջացնեն $(S)$ մակերևույթի տրոհում $(S_k)$ $(k=1,\dots,n)$ մասերի: Յուրաքանչյուր $(S_k)$ մասում ընտրենք կամայական $M_k$ կետ և այդ կետում տանենք շոշափող հարթություն: $(S_k^*)$ $(k=1,\dots,n)$ գլանային մակերևույթները այդ շոշափող հարթություններից կանջատեն $(T_k)$ հարթ պատկերներ ($T_k$ մակերեսով):

$(S)$ մակերևույթի տրամագիծ $(diam(S))$ է կոչվում այդ մակերևույթի ցանկացած երկու կետերի միջև եղած հեռավորություններից մեծագույնը, իսկ $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n} diam(S_k)$ կոչվում է $(S)$ մակերևույթի տրոհման տրամագիծ: $(S)$ մակերևույթի մակերես ասելով հասկանանք $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} T_k$ (տես նկ.13):




Նկ. 13

***Թեորեմ 2:*** Եթե տրված է $(S)$ մակերևույթը բացահայտ տեսքով՝ $z = f(x,y)$ $\left(f \in C^1\left(\overline{D}\right)\right.$, $(D)$-ն տիրույթ է), որը ունի կտոր առ կտոր ողորկ $(\Gamma)$ եզր, ապա $(S)$-ը-քառակուսելի է և (տես (1))՝

$$S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot dxdy \tag{11}$$

***Ապացուցում:*** Քանի որ $(D_k)$-ն $(T_k)$-ի պրոյեկցիան է $x,y$ հարթության վրա, իսկ $\gamma_k$-ն հանդիսանում է $x,y$ հարթության և $M_k$ կետում տարված շոշափող հարթության կազմած անկյունը ($\gamma_k$-ն նաև նորմալի և $z$ առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած անկյունն է), ապա $D_k = T_k \cdot |\cos\gamma_k|$ (տես նկ. 13): Պարզ է նաև, որ $\mu = \max\limits_{1\le k\le n} diam(D_k) \to 0$, երբ $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} diam(S_k) \to 0$ : Ուրեմն՝

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} T_k = \lim_{\mu\to 0}\sum_{k=1}^{n} \frac{D_k}{|\cos\gamma_k|} = \lim_{m\to 0}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot D_k =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \cdot dxdy : \blacksquare$$

*Դիտողություն 1:* Եթե $(S)$ մակերևույթը տրված է պարամետրական տեսքով

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)\ \ (x, y, z \in C^1(\overline{D}),\ \ A^2 + B^2 + C^2 > 0)$$

(տես (3)), ապա նույն կերպ սահմանվում է այդ մակերևույթի մակերեսը և, կարելի է ապացուցել, որ

$$S = \iint\limits_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot dudv : \qquad (12)$$

Եթե ներմուծենք նշանակումներ (գաուսյան գործակիցներ)

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2,\ G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2,$$

$$F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v,$$

ապա՝ (տես, օրինակ [3]), $A^2 + B^2 + C^2 = E \cdot G - F^2$:

Անցումը գաուսյան գործակիցներին հաճախ հարմար է հաշվարկ անելիս: Կիրառելով (12)-ում միջինի մասին թեորեմը (տես 2. 1, դիտ. 1), կստանանք՝

$$S = \sqrt{E \cdot G - F^2}\Big|_{M'} \cdot \Delta \quad \left(M' \in (\overline{\Delta})\right) : \qquad (13)$$

## 4.2. ԱՌԱՋԻՆ ՍԵՌԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

*Սահմանում 1:* Դիցուք տրված է պարզ $(S)$ մակերևույթը պարամետրական տեսքով

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)\ \ (x, y, z \in C^1(\overline{\Delta}))$$

և նրա վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիա $f(x,y,z)$ $\left(f \in C(\overline{S})\right)$:

Ենթադրվում է, որ $(\Delta)$-ի $(\gamma)$ եզրը կտոր առ կտոր ողորկ է: Տրոհենք $(\Delta)$-ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով $(\Delta_k)$ $(k = 1,\dots,n)$ մասերի, այն կառաջացնի $(S)$ մակերևույթի տրոհում՝

$$(S_k) = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : (u,v) \in (\Delta_k)\}\ \ (k = 1,\dots,n) :$$

Ընտրենք յուրաքանչյուր $(\overline{S}_k)$ մասից պատահական $M_k \in (\overline{S}_k)$ կետ և կազմենք գումար $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot S_k$, որտեղ $S_k$-ն $(S_k)$ մակերևույթի մակերեսն է (տես նկ. 13): Եթե $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} diam(S_k)$, ապա առաջին սեռի մակերևութային ինտեգրալ ասելով հասկանում ենք հետևյալ վերջավոր սահմանը (անկախ տրոհումներից և $M_k \in (\overline{S_k})$ կետերի ընտրությունից)՝

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot S_k = \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,ds :$$

*Թեորեմ 1:* Վերը նշված պայմանների առկայությամբ, առաջին սեռի մակերևութային $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,ds$ ինտեգրալը գոյություն ունի և այն բերվում է հետևյալ կրկնակի ինտեգրալի՝

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)\,ds = I = \iint\limits_{(D)} f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{E\cdot G - F^2}\,du\,dv : \quad (1)$$

*Ապացույց:* Ըստ 4.1, (13)-ի՝

$$S_k = \sqrt{E\cdot G - F^2}\Big|_{M'_k}\cdot\Delta_k \quad \left(M'_k \in (\overline{\Delta_k})\right)$$

և, ուրեմն՝ $$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot S_k = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot\sqrt{E\cdot G - F^2}\Big|_{M'_k}\cdot\Delta_k : \quad (2)$$

Կազմենք նոր գումար՝

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot\sqrt{E\cdot G - F^2}\Big|_{M_k}\cdot\Delta_k : \quad (3)$$

Նկատենք, որ $\lambda' = \max\limits_{1\le k\le n} diam(\Delta_k) \to 0$, երբ

$$\lambda = \max_{1\le k\le n} diam(S_k) \to 0 :$$

Նույն մեթոդով, ինչ երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալը Ռիմանի ինտեգրալի բերման դեպքում, ապացուցվում է, որ $\sigma - \sigma^* \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0$: Քանի որ

$$\lim_{\lambda'\to 0}\sigma^* = I = \iint\limits_{(\Delta)} f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{E\cdot G - F^2}\,du\,dv,$$

ապա $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = I$ : ■

*Դիտողություն 1:* Եթե մակերևույթը տրված է
$$z = z(x,y) \quad (z \in C^{I}(\overline{D}))$$
բացահայտ տեսքով, ապա (1) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը (տես (1))՝
$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(D)} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy:$$

Օրինակ 1: Ստանանք $R$ շառավղով $\underline{h}$ բարձրությամբ գնդային սեգմենտի մակերեսի բանաձևը՝ $\boxed{S = 2\pi \cdot R \cdot h}$: Գնդի կենտրոնը տեղադրենք սկզբնակետում և օգտվենք կոորդինատային գնդային համարգից՝ $x = R \cdot sin\theta \cdot cos\varphi,$
$$y = R \cdot sin\theta \cdot sin\varphi, z = R \cdot cos\theta\,(\,0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \theta_0)\ :$$

Այստեղ $\theta_0$-ն $z$ առանցքի դրական ուղղության և $\vec{R}$ շառավիղ վեկտորի հետ կազմած անկյունն է, որը համապատասխանում է գնդային սեգմենտի $h$ բարձրությանը
$$(h = R - R \cdot cos(\theta_0) = R(1 - cos(\theta_0))):$$

Այսինքն, այս դեպքում պարամետրերն են՝ $u = \theta, v = \varphi$: Ուրեմն՝
$$E = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2 = R^2(cos^2\theta \cdot cos^2\varphi + cos^2\theta \cdot sin^2\varphi + sin^2\theta) = R^2,$$
$$G = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = R^2(sin^2\theta \cdot sin^2\theta + sin^2\theta \cdot cos^2\varphi) = R^2 \cdot sin^2\theta,$$
$$F = x_\theta' \cdot x_\varphi' + y_\theta' \cdot y_\varphi' + z_\theta' \cdot z_\varphi' =$$
$$= R^2(-cos\theta \cdot sin\theta \cdot cos\varphi \cdot sin\varphi + cos\theta \cdot sin\theta \cdot cos\varphi \cdot sin\varphi) = 0:$$

Մակերես ստանալու համար պետք է (1) բանաձևում վերցնել $f(x,y,z) \equiv 1$: Կստանանք՝
$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \sqrt{R^4 \cdot sin^2\theta}\, d\theta =$$
$$= 2\pi \cdot R^2 \int_0^{\theta_0} sin\theta \cdot d\theta = -2\pi \cdot R^2 cos\theta\Big|_0^{\theta_0} = 2\pi \cdot R^2(1 - cos\theta_0) = 2\pi \cdot R \cdot h:$$

## 4.3. ԵՐԿՐՈՐԴ ՍԵՌԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

***Սահմանում 1:*** Դիցուք տրված է $(S)$ մակերևույթը $z = z(x, y)$ բացահայտ տեսքով ($(z \in C^1(\overline{D}), (D)$-ն տիրույթ է), կտոր առ կտոր ողորկ եզրով և, ենթադրենք $(S)$-ի վրա որոշված է անընդհատ ֆունկցիա $f(x, y, z)$ $(f \in C(\overline{S}))$ : Ընտրենք $(S)$-ի արտաքին կողմը (նորմալը կազմում է սուր անկյուն $z$ առանցքի դրական ուղղության հետ), տրոհենք $(S)$-ը կտոր առ կտոր ողորկ կորերով $(S_k)$ $(k = 1, \dots, n)$ մասերի, ընտրենք յուրաքանչյուր $(\overline{S}_k)$ մասից պատահական $M_k \in (\overline{S}_k)$ կետ և կազմենք գումար $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot D_k$, որտեղ $D_k$-ն $(D_k)$-ի մակերեսն է, իսկ $(D_k)$-ն $(S_k)$-ի պրոյեկցիան է $xy$ հարթության վրա (տես նկ. 13):

Երկրորդ սեռի մակերևութային ինտեգրալ (տարածված մակերևույթի արտաքին կողմով) ասելով հասկանում ենք վերջավոր սահման (անկախ $(\overline{S}_k)$ տրոհումների և $M_k \in (\overline{S}_k)$ կետերի ընտրությունից)՝

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot D_k = \iint_{(S)} f\,dxdy, \text{ որտեղ } \lambda = \max_{1 \le k \le n} diam(S_k):$$

Ներքին կողմով տարածված երկրորդ սեռի մակերևութային ինտեգրալը սահմանվում է նույն կերպ, միայն բոլոր $D_k$ մակերեսները վերցվում են բացասական նշանով: Այսինքն, երբ փոխվում է մակերևույթի կողմը, ապա փոխվում է նաև ինտեգրալի նշանը:

***Թեորեմ 1:*** Վերը նշված պայմանների առկայությամբ գոյություն ունի երկրորդ սեռի մակերևութային ինտեգրալը և այն կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևի օգնությամբ՝

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dxdy = \pm \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y))\, dxdy, \tag{4}$$

Ընդ որում, դրական նշանը համապատասխանում է մակերևույթի վերին կողմին, իսկ բացասականը՝ ստորին կողմին:

*Ապացուցում:* Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $f(x,y,z(x,y))$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է $(\overline{D})$-ում: Պարզ է, որ $\lambda' = \max_k D_k \to 0$, երբ $\lambda = \max_{1\le k\le n} diam(S_k) \to 0$: Մնում է օգտվել երկրորդ սեռի մակերևութային և կրկնակի ինտեգրալների սահմանումներից: ■

*Դիտողություն 1:* Պարզ է որ՝ $\pm D_k = T_k \cdot cos\gamma_k$, քանի որ այս բանաձևի ձախ մասում դրական նշանը համապատասխանում է մակերևույթի վերին կողմին ($\gamma_k$-ն սուր անկյուն է, ուրեմն՝ $cos\gamma_k > 0$), իսկ բացասականը նշանը՝ ստորին կողմին ($\gamma_k$-ն բութ անկյուն է, ուրեմն՝ $cos\gamma_k < 0$ ): Անցնելով սահմանի ինտեգրալային գումարի մեջ, կստանանք՝

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot(\pm D_k) = \lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot T_k \cdot cos\gamma_k =$$

$$= \iint_{(S)} f(x,y,z)\cdot cos\gamma\, ds:$$

Այսպիսով, ստանում ենք երկու սեռի մակերևութային ինտեգրալների միջև հետևյալ կապը (անկախ կողմի ընտրությունից, քանի որ մի կողմից մյուսին անցնելիս $\gamma$-ն փոխարինվում է $\pi+\gamma$-ով, ուստի $cos\gamma$-ն փոխում է իր նշանը):

$$\boxed{\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy = \iint_{(S)} f(x,y,z)\cdot cos\gamma ds} \qquad (5)$$

*Սահմանում 2:* Դիցուք տրված է պարզ $(S)$ երկկողմանի մակերևույթ պարամետրական տեսքով՝

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)\ \ (x,y,z \in C^1(\overline{\Delta})),$$

ընտրված է մակերևույթի որոշակի կողմը և, նրա վրա որոշված է անընդհատ ֆունկցիա $f(x,y,z) \in C(\overline{S})$:

Ենթադրենք, որ $(S)$-ի եզրը կտոր առ կտոր ողորկ է: $(S)$-ը տրոհենք կտոր առ կտոր կորերով $(S_k)$ $(k=1,\dots,n)$ մասերի, ընտրենք յուրաքանչյուր $(\overline{S}_k)$ մասից պատահական $M_k \in (\overline{S}_k)$ կետ և կազմենք գումար $\sigma=\sum_{k=1}^{n} f\left(M_k\right)\cdot\left(\pm D_k\right)$: Ընդ որում դրական նշան է ընտրվում այն դեպքում, երբ $\left(\overline{S_k}\right)$ -ի եզրի շրջանցման դրական ուղղությանը համապատասխանում է $\left(\overline{D_k}\right)$ -ի եզրի շրջանցման դրական ուղղությունը (պահպանվում է կողմնորոշումը), իսկ եթե կողմնորոշումը փոխվում է, ապա ինտեգրալային գումարում ընտրվում է $-D_k$ -ն: Երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալ ասելով հասկանում ենք վերջավոր սահման (անկախ տրոհումներից և $M_k\in\left(\overline{S_k}\right)$ կետերի ընտրությունից )՝

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(M_k\right)\cdot\left(\pm D_k\right)=\iint_{(S)} f\left(x,y,z\right)dxdy,$$

որտեղ $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n} diam\left(S_k\right)$:

***Թեորեմ 2:*** Վերը նշած պայմանների առկայությամբ գոյություն ունի երկրորդ սեռի մակերևութային ինտեգրալը և այն կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևի օգնությամբ՝

$$\iint_{(S)} f\left(x,y,z\right)dxdy=\iint_{(D)} f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right),z\left(u,v\right)\right)\cdot\left(\pm C\right)dudv=$$

$$=\iint_{(S)} f\left(x,y,z\right)\cdot\cos\gamma ds, \qquad (6)$$

որտեղ $C$-ի նշանի ընտրությունը որոշվում է մակերևույթի կողմի ընտրությամբ, ընդ որում բավական է որևէ հարմար կետում ընտրել նշանը (այն կպահպանվի բոլոր այլ կետերում):

***Ապացույց:*** Քանի որ $\cos\gamma=\pm\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, ապա

$$\iint_{(S)} f\left(x,y,z\right)dxdy=\iint_{(S)} f\left(x,y,z\right)\cdot\cos\gamma ds=$$

$$=\iint_{(\Delta)} f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right),z\left(u,v\right)\right)\cdot\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv=$$

$$=\iint_{(\Delta)} f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right),z\left(u,v\right)\right)\cdot\left(\pm C\right)dudv: \blacksquare$$

*Դիտողություն 2:* Եթե վերը նշված մակերևույթի վրա որոշված են $P,Q,R\in C(\overline{\Delta})$ ֆունկցիաներ, ապա նման կերպ սահմանվում են $\iint\limits_{(S)}Pdzdx$, $\iint\limits_{(S)}Qdydz$, $\iint\limits_{(S)}Rdxdy$ ինտեգրալները և, նրանց գումարի համար կունենանք՝

$$\iint\limits_{(S)}Pdzdx+Qdydz+Rdxdy=$$

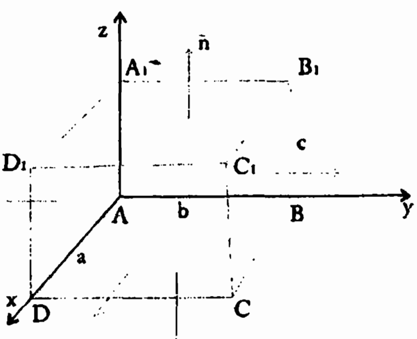
$$=\iint\limits_{(S)}(P\cdot cos\alpha+Q\cdot cos\beta+R\cdot cos\gamma)\,ds\,, \qquad (7)$$

որտեղ $\alpha,\beta,\gamma$-ն $S$ մակերևույթի կողմին համապատասխան, նորմալի կազմած անկյուններն են համապատասխանաբար $x,y,z$ առանցքների դրական ուղղությունների հետ:

Օրինակ 1: Հաշվել $I=\iint\limits_{(S)}Pdzdx+Qdydz+Rdxdy$, որտեղ $(S)$-ը $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյունանիստի արտաքին կողմն է (տես նկ. 14),

$$\mathrm{A}(0,0,0),\ \mathrm{B}(0,b,0),\ \mathrm{C}(a,b,0),\ \mathrm{D}(a,0,0),$$

$$A_1(0,0,c),\ B_1(0,b,c),\ C_1(a,b,c),\ D_1(a,0,c) \text{ և, } P,Q,R\in C(\overline{S}):$$




*Նկ 14*

Տրոհենք ինտեգրալը 6 ինտեգրալների ըստ ուղղանկյունանիստի նիստերի և, հաշվի առնենք յուրաքանչյուր նիստին համապատասխան նորմալի ուղղությունը, օրինակ վերին $A_1B_1C_1D_1$ նիստի համար $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 0^\circ$, ստորին $ABCD$-ի համար՝ $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 180^\circ$, $ADD_1A_1$ նիստի համար՝

$$\alpha = 90^\circ,\ \beta = 180^\circ,\ \gamma = 90^\circ \text{ և այլն:}$$

Ըստ (7)-ի ունենք՝

$$I = \iint\limits_{(AA_1B_1B)} (P(a,y,z) - P(0,y,z))dydz +$$

$$+ \iint\limits_{(AA_1D_1D)} (Q(x,b,z) - Q(x,0,z))dzdx +$$

$$+ \iint\limits_{(ABCD)} (R(x,y,c) - R(x,y,0))dxdy :$$

### 4.4. ԵՐԿՐՈՐԴ ՍԵՌԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԿԱՊԸ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԵԶՐՈՎ ՏԱՐԱԾՎԱԾ ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԵՏ

Գրինի բանաձևի ընդհանրացումը հարթ մակերևույթի (տիրույթի) դեպքից տարածական մակերևույթի դեպքը, կոչվում է **Ստոքսի*** **բանաձև**:

***Թեորեմ 1:*** Դիցուք տրված է պարզ $(S)$ երկկողմանի մակերևույթ պարամետրական տեսքով՝

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)\ \ (x,y,z \in C^2(\overline{\Delta}))$$

$(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$ և նրա վրա որոշված $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ ֆունկցիաներ $(P, P'_y, P'_z, Q, Q'_x, Q'_z, R, R'_x, R'_y \in C(\overline{S}))$:

Այս պայմանների առկայությամբ ճշմարիտ է հետևյալ (Ստոքսի) բանաձևը

$$\oint\limits_{(\Gamma)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds =$$

$$= \iint\limits_{(S)} [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) \cdot \cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}) \cdot \cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \cdot \cos\gamma\,] \, ds \qquad (1)$$

---

* Ստոքս Ջորջ Գաբրիել (1793-1841)-անգլիացի ֆիզիկոս:

(ձախ մասում գրված ինտեգրալը վերցված է $(S)$ մակերևույթի $(\Gamma)$ եզրի շրջանցման դրական ուղղությամբ, որն իր հերթին որոշվում է մակերևույթի կողմի (նորմալի)) ընտրությամբ:

*Ապացուցում:* Նախ դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $Q \equiv R \equiv 0$: Այսինքն, ապացուցենք, որ՝

$$\oint_{(\Gamma)} Pdx = \iint_{(S)} P'_z dzdx - P'_y dxdy = \iint_{(S)} (P'_z \cdot \cos\beta - P'_y \cdot \cos\gamma)\, ds : \quad (2)$$

Նախապես ապացուցենք, որ՝

$$\oint_{(\Gamma)} Pdx = \oint_{(\gamma)} P \cdot (x'_u du + x'_v dv), \qquad (3)$$

որտեղ $(\gamma)$-ն $(\Delta)$-ի եզրն է: Դիցուք $(\gamma)$ պարզ, փակ կորը որոշված է՝ $u = u(t), v = v(t)\,(u, v \in C^1([\alpha;\beta])$ պարամետրական տեսքով: Այդ դեպքում $(\Gamma)$-ն տրվում է

$$x = x(u(t), v(t)),\ y = y(u(t), v(t)),\ z = z(u(t), v(t)) \ (t \in [\alpha;\beta])$$

տեսքով:

Պարզության համար կենթադրենք նաև, որ պահպանվում է կողմնորոշումը, այսինքն $(\gamma)$-ի շրջանցման դրական ուղղությանը համապատասխանում է $(\Gamma)$-ի շրջանցման դրական ուղղությունը:

Ունենք՝

$$\oint_{(\gamma)} Pdx = \int_\alpha^\beta P\big(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t))\big) \cdot \frac{dx(u(t),v(t))}{dt} =$$

$$= \int_\alpha^\beta P\big(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t))\big) \cdot$$

$$\cdot (x'_u(u(t),v(t)) \cdot u'_t(t) + x'_v(u(t),v(t)) \cdot v'_t(t))\, dt =$$

$$= \oint_{(\Delta)} P(x'_u du + x'_v dv):$$

(3)-ի աջ մասի նկատմամբ կիրառենք Գրինի բանաձևը, կստանանք՝

$$\oint_{(\gamma)} P\cdot\left(x_u' du + x_v' dv\right) = \oint_{(\gamma)} \left(P\cdot x_u'\right)du + (P\cdot x_v')dv =$$

$$= \iint_{(\Delta)} \left[\left(P\cdot x_v'\right)_u' - \left(P\cdot x_u'\right)_v'\right] du dv =$$

$$= \iint_{(\Delta)} (P_u'\cdot x_v' + P\cdot x_{uv}'' - P_v'\cdot x_u' - P\cdot x_{uv}'') du dv = \iint_{(\Delta)} (P_u'\cdot x_v' - P_v'\cdot x_u') du dv :$$

Քանի որ $P = P\left(x(u,v), y(u,v)\right)$, ապա կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը, կստանանք՝

$$\oint_{(\gamma)} P\cdot\left(x_u' du + x_v' dv\right) =$$

$$= \iint_{(S)} \left[\left(P_x'\cdot x_u' + P_y'\cdot y_u'\right)\cdot x_v' - \left(\left(P_x'\cdot x_v' + P_y'\cdot y_v'\right)\cdot x_u'\right)\right] du dv =$$

$$= \iint_{(\Delta)} [P_y'\cdot\left(x_v'\cdot y_u' - x_u'\cdot y_v'\right) + P_z'\cdot\left(x_v'\cdot z_u' - z_u'\cdot y_v'\right)] du dv =$$

$$= \iint_{(D)} \left(B\cdot P_z' - C\cdot P_y'\right) du dv = \iint_{(S)} P_z' dz dx - P_y' dx dy : \qquad (4)$$

Ապացույցը բերեցինք այն դեպքում, երբ կողմնորոշումը պահպանվում է, հակառակ դեպքում, նույն ձևափոխություններում երկու անգամ կփոխվի ինտեգրալի նշանը (մեկը՝ (3)-ում, մյուսը՝ (4)-ում), արդյունքում նորից կստանանք (2)-ը:

Եթե $P \equiv R \equiv 0$, ապա նույն կերպ դատելով, կստանանք՝

$$\oint_{(\Gamma)} Q dy = \iint_{(S)} Q_x' dx dy - Q_z' dy dz = \iint_{(S)} (Q_x'\cdot \cos\gamma - Q_z'\cdot\cos\alpha)\, ds : \qquad (5)$$

Իսկ, եթե $P \equiv Q \equiv 0$, ապա՝

$$\oint_{(\Gamma)} R dz = \iint_{(S)} R_y' dy dz - R_x' dz dx = \iint_{(S)} (R_y'\cdot\cos\alpha - R_x'\cdot\cos\beta)\, ds : \qquad (6)$$

Գումարելով (2), (5) և (6)-ը, կստանանք (1)-ը: ■

*Դիտողություն 1:* Թեորեմի $x, y, z \in C^2\left(\overline{\Delta}\right)$ պայմանները հարկավոր են միայն ապացույցը հեշտացնելու համար: Իրականում բավական է, որ $x, y, z \in C^1\left(\overline{\Delta}\right)$:

*Սահմանում 1:* Դիցուք եռաչափ տարածության ինչ-որ $(V)$ մարմնում որոշված է վեկտորական

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=\left\{F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z)\right\}$$

դաշտ: $\vec{\nabla}\times\vec{F}=rot\vec{F}$ $(\vec{\nabla}(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}))$ վեկտորական արտադրյալը կանվանենք $\vec{F}$ վեկտորի ռոտոր (տարամիտություն)

$$rot\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\cdot\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+$$

$$+\vec{k}\cdot\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right): \qquad (7)$$

Դիտարկենք $(V)$-ում պարունակվող, կտոր առ կտոր ողորկ եզրով պարզ $(S)$ երկկողմանի մակերևույթ, տրված պարամետրական տեսքով $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ $\left(x,y,z\in C^1(\overline{\Delta})\right)$: Դիցուք $F_x,F_y,F_z\in C^1\left(\overline{V}\right)$: Այս պայմանների առկայությամբ կիրառելի է Ստոքսի բանաձևը, եթե՝ $P\equiv F_x,Q\equiv F_y,R\equiv F_z$: Արդյունքում կստանանք՝

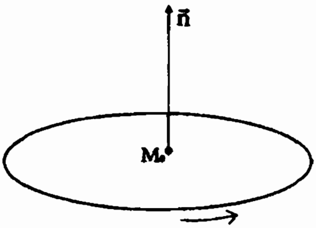
$$\oint\limits_{(\Gamma)}F_xdx+F_ydy+F_zdz=\iint\limits_{(S)}\begin{vmatrix}cos\alpha & cos\beta & cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}ds=\iint\limits_{(S)}\vec{n}\times rot\vec{F}\cdot ds\cdot \qquad (8)$$

որտեղ $\vec{n}$-ը միավոր նորմալն է, համապատասխան $(S)$ մակերևույթի կողմի ընտրությանը, $\vec{n}\times rot\vec{F}$-ը նշված երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալն է:

(8)-ի ձախ մասը կարճ գրվում է $\oint\limits_{(\Gamma)}\vec{F}\cdot d\vec{l}$ տեսքով և կոչվում է $\vec{F}$ վեկտորի ոլորապտույտ (ցիրկուլյացիա ) $(\Gamma)$ եզրով: Այսպիսով, (8)-ը (Ստոքսի բանաձևը) ընդունում է հետևյալ պարզ տեսքը

$$\boxed{\oint\limits_{(\Gamma)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint\limits_{(S)} rot_n\vec{F}ds}: \qquad (9)$$

(9)-ից հետևում է, որ $rot\vec{F}$-ի սահմանումը կախված չէ կոորդինատային համակարգի ընտրությունից: Իրոք, դիցուք $M_0$-ն $(V)$-ի կամայական կետ է և, $\vec{n}$-կամայական միավոր վեկտոր է (վեկտորը տրված է, եթե հայտնի է նրա պրոեկցիան կամայական ուղղությամբ): Դիտարկենք $\vec{n}$-ին ուղղահայաց հարթ պատկերներ, որոնք պարունակում են $M_0$-ն և որոնց մակերեսը ձգտում է զրոյի (օրինակ $M_0$ կենտրոնով, $r$ շառավղով շրջան, որի մակերեսը $S$-ը ձգտում է զրոյի, երբ $r$-ը ձգտում է զրոյի ) (տես նկ. 15):



Նկ.15

(9)-ի աջ մասում կիրառենք միջինի մասին թեորեմը, կստանանք՝

$$\oint\limits_{(G)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint\limits_{(S)} rot_n\vec{F}ds = rot\vec{F}\Big|_{M_*}\cdot S\ \left(M_*\in\left(\bar{S}\right)\right):$$

($rot\vec{F}$-ը անընդհատ է, անընդհատ են նրա կոորդինատները): Այստեղից կստանանք՝

$$rot_n\vec{F}\Big|_{M_0} = \lim_{diamS\to 0} rot_n\vec{F}\Big|_{M_*} = \lim_{diamS\to 0}\frac{\oint\limits_{(\Delta)}\vec{F}\times d\vec{l}}{S}: \qquad (10)$$

Այսպիսով ռոտորը կախված չէ կոորդինատային համակարգի ընտրությունից:

Ստոքսի բանաձևը կիրառվում է տարածական ինտեգրալի ճանապարհից անկախության հարցում: Նախ սահմանենք տարածական միակապություն:

*Սահմանում 2:* $(V)$ մարմինը ($(V)\subset R^3$) կոչվում է **տարածական միակապ**, եթե $(V)$-ում պարունակվող ինչպիսի $(l)$ պարզ, փակ, կտոր առ կտոր ողորկ կոր էլ ընտրենք, նրա վրա կարելի է «ձգել» այնպիսի $(S)$ պարզ, կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթ, որ՝ $(S)\subset(V)$ ($(S)$-ի եզրը $(l)$-ն է):

*Սահմանում 3:* Դիցուք տրված են $(V)$ եռաչափ տիրույթում (մարմնում) երեք անընդհատ ֆունկցիաներ $P, Q, R \in C(V)$ և, վերցրել ենք կամայական երկու կետ $A, B \in (V)$: Կասենք, որ $I = \int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$ ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից, եթե $(V)$-ում պարունակվող ինչպիսի երկու $(l_1), (l_2)$ պարզ, անընդհատ կորով էլ միացնենք այդ կետերը, ճշմարիտ է

$$\boxed{\int\limits_{(l_1)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(l_2)} Pdx + Qdy + Rdz}$$

հավասարությունը:

Բերենք նշված ինտեգրալի ինտեգրման ճանապարհից անկախության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

*Թեորեմ* 2: Որպեսզի ինտեգրալը անկախ լինի ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ $(S)$-ում պարունակվող ինչպիսի պարզ, փակ, անընդհատ կոր էլ վերցնենք, ինտեգրալը այդ կորով հավասար լինի զրոյի:

Ապացույցը նույնն է, ինչ երկչափ դեպքում:

*Թեորեմ* 3: Որպեսզի ինտեգրալը անկախ լինի ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ գտնվի $(V)$-ում այնպիսի դիֆերենցելի ֆունկցիա $U(x, y, z)$, որի դիֆերենցիալն է՝

$$dU(x, y, z) \equiv P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz:$$

Ապացույցը նույնն է, ինչ երկչափ դեպքում:

*Թեորեմ* 4: Դիցուք $P, Q, R \in C^1(V)$ և $(V)$-ն տարածական միակապ է: Որպեսզի ինտեգրալը անկախ լինի ինտեգրման ճանապարհից անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial R}{\partial y}}:$$

Անհրաժեշտությունը ապացուցվում է այնպես, ինչպես երկչափ դեպքում:

*Բավարարություն:* Օգտվենք թեորեմ 1.-ից: Վերցնենք $(V)$-ում պարունակվող, կամայական պարզ, փակ, անընդհատ կոր և «ձգենք» այդ կորի վրա $(S)$ մակերևույթ ($(S)\subset(V)$): Օգտվելով Ստոքսի բանաձևից և թեորեմի պայմաններից, կստանանք, որ այդ փակ կորով ինտեգրալը հավասար է զրոյի: ■

## 4.5. ԵՌԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԿԱՊԸ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԵՏ

***Թեորեմ 1:*** Դիցուք տրված է $(V)$ մարմին, սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ $(S)$ պարզ փակ մակերևույթով (եզրով) և $(\overline{V})$-ի վրա որոշված

$$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z) \quad (P,P'_x,Q,Q'_y,R,R'_z\in C(\overline{V}))$$

ֆունկցիաներ: Այդ դեպքում ճշմարիտ է հետևյալ՝ Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևը

$$\boxed{\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_{(S)}(P\cdot cos\alpha+Q\cdot cos\beta+R\cdot cos\gamma)ds}, \quad (1)$$

որտեղ $\alpha,\beta,\gamma$-ն $\vec{n}$ արտաքին նորմալի կազմած անկյուններն են համապատասխանաբար $x,y,z$ դրական կիսառանցքների հետ:

*Ապացուցում:* Նախ, ենթադրենք, որ $P\equiv Q\equiv 0$ և $(V)$ մարմինը, սահմանափակված է $z=z_0(x,y),z=Z(x,y)$ $(z_0,Z\in C(\overline{D}))$ մակերևույթներով և $(S^*)$ գլանային մակերևույթով, որի ուղղորդ կորն է $(D)$-ի կտոր առ կտոր ողորկ $(\Gamma)$ եզրը, իսկ ծնիչները զուգահեռ են $z$ առանցքին (տես նկ.11 և 3.1-ի թ. 1-ը): Ունենք՝

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dz=\iint\limits_{(D)}dxdy\int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz=\iint\limits_{(D)}R(x,y,Z(x,y))dxdy\ -$$

$$-\iint\limits_{(D)}R(x,y,z_0(x,y))dxdy=\iint\limits_{(S)}Rdxdy+(-\iint\limits_{(S)}Rdxdy)+\iint\limits_{(S^*)}Rdxdy:$$

Այստեղ առաջին ինտեգրալը տարածված է արտաքին, երկրորդ ինտեգրալը իր նշանով՝ ստորին կողմով, երրորդը՝ կողմնային մակերևույթով, այն զրո է: Այսպիսով՝

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial R}{\partial z}dz=\iint\limits_{(S)}R\cdot cos\gamma\, ds: \tag{2}$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ մարմինը տրոհվում է գլանային մակերևույթներով վերջավոր թվով վերը նշված մարմինների, յուրաքանչյուր մարմնի համար կիրառելով ստացված բանաձևը և իրար գումարելով, կստանանք բանաձևի ընդհանրացումը:

Դիտարկելով այլ $(Q\equiv R\equiv 0,\ \ R\equiv P\equiv 0)$ մասնավոր դեպքերը և նման կերպ դատելով, կստանանք հետևյալ բանաձևերը՝

$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial P}{\partial x}dz=\iint\limits_{(S)}P\cdot cos\alpha\, ds, \tag{3}$$

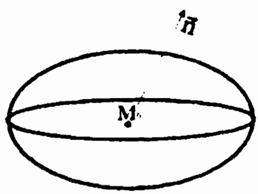
$$\iiint\limits_{(V)}\frac{\partial Q}{\partial y}dz=\iint\limits_{(S)}Q\cdot cos\beta\, ds: \tag{4}$$

Գումարելով իրար (2)-(4)-ը,կստանանք (1)-ը: ■

Տանք Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևի ֆիզիկական մեկնաբանությունը: Դիցուք ունենք $(V)$ մարմնում որոշված $\vec{F}\left(F_x,F_y,F_z\right)$ $(F_x,F_y,F_z\in C'\left(\overline{V}\right))$ ուժային դաշտ: Այդ վեկտորի դիվերգենցիա $div\vec{F}$ ասելով հասկանանք հետևյալ սկալյար մեծությունը՝ $div\vec{F}=\dfrac{\partial F_x}{\partial x}+\dfrac{\partial F_y}{\partial y}+\dfrac{\partial F_z}{\partial z}=\overline{\nabla}\cdot\vec{F}$: Այդ դեպքում (1) բանաձևը կընդունի հետևյալ պարզ տեսքը՝

$$\boxed{\iiint\limits_{(V)}div\vec{F}dv=\iint\limits_{S}F_n ds}:$$

$\iint\limits_{S}F_n ds$-ը կոչվում է $\vec{F}$ վեկտորի հոսք $(S)$ մակերևույթով:




Նկ. 15

Ցույց տանք, որ դիվերգենցիան կախված չէ կոորդինատային համակարգի ընտրությունից: Իրոք, դիցուք $M_0$ – ն $(V)$-ի կամայական կետ է: $(V)$-ի տրամագիծը $d = diam(V)$ ձգտեցնենք զրոյի, պահպանելով $M_0$ – ն $(V)$-ում, օրինակ՝ վերցնենք $M_0$ կենտրոնով գունդ և նրա շառավիղը ձգտեցնենք զրոյի (տես նկ. 15):

Կիրառելով միջինի մասին թեորեմը եռակի ինտեգրալում (այն նույնպես ճիշտ է), կստանանք՝

$$div\vec{F}\Big|_{M^*} \cdot V = \iint\limits_{S} F_n ds \;\; (M^* \in (\overline{V})) \Rightarrow$$

$$\boxed{div\vec{F}\Big|_{M_0} = \lim_{d \to 0} \frac{\iint\limits_{(S)} F_n ds}{V}} : \qquad (5)$$

## ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ


1. *Ա.Գ. Ղազումյան,* Մաթ. անալիզ, 1-ին մաս, Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հաշիվ, ԵՊՀ –ի հրատ., - 2002թ.:
2. *Ա.Գ. Ղազումյան, Ա.Ա.Սարգսյան,* Մաթ. անալիզ, 2-րդ մաս, Ինտեգրալ և դիֆերենցիալ հաշիվ, ԵՊՀ –ի հրատ., - 2008թ.:
3. *Г.М. Фихтенгольц,* Курс дифференциального и интегрального исчисления., М., Физ-мат. лит., Т.1, 2000, Т.2 2003, Т.3, 2005.
4. *Л.Д. Кудрявцев,* Математический анализ, М., Наука, 1968.
5. *В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов,* Математический анализ, Изд. Моск.Университета,1987.
6. *С.М. Никольский,* Курс математического анализа, т.1,2, М., Наука, 1983.
7. *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин,* Элементы теории функций и Функционального анализа. М., Наука, 1976.
8. *Зорич,* Мат. анализ.,Ч. 1,2, М.,Наука, 1984.
9. *Ու. Ռուդին,* Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները, Լույս, Ե. 1975:
10. *Ա.Ա.Հակոբյան,* Ֆուրիեի շարքեր և ձևափոխություններ, ԵՊՀ-ի հրատ. 1983:
11. *Б.П.Демидович,* Сборник задач и упражнений по мат. анализу, Изд.Моск., Университета, М., 1997.

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Ա.Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

## ԵՐՐՈՐԴ ՄԱՍ

## ՇԱՐՔԵՐ. ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Տեխ. խմբագիր՝ Վ.Զ. Բդոյան
Համակարգչային ձևավորող՝ Ա.Գ.Ղալումյան

Ստորագրված է տպագրության 22.10.2009 թ.:
Չափսը՝ 60x84 $^{1}/_{16}$ : Թուղթը՝ օֆսեթ: Հրատ. 6.8 մամուլ,
տպագր. 8.1 մամուլ= 7.6 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 200: Պատվեր՝ 134:

ԵՊՀ հրատարակչություն, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: