

Е.С.Вентцель Л.А.Овчаров

Теория случайных процессов и ее инженерные приложения

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

Рекомендовано
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений



Москва
«Высшая школа» 2000

УДК 519.21
~~ББК 22.171~~
В 296

Рецензент: директор Института проблем передачи информации РАН
академик *Н.А. Кузнецов*



1066069

3000874807

Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.

В 29 Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000. — 383 с.: ил.

ISBN 5-06-003831-9

В книге дается систематическое изложение основ теории случайных процессов по специальностям: кибернетика, прикладная математика, автоматизированные системы управления и переработки информации, автоматизация технологических процессов, транспорт и т. п. Она является логическим продолжением книги тех же авторов «Теория вероятностей и ее инженерные приложения».

Первое издание вышло в 1991 г.

Для студентов высших технических учебных заведений. Может быть полезна преподавателям, инженерам и научным работникам разных профилей, которые в своей практической деятельности сталкиваются с необходимостью ставить и решать задачи, связанные с анализом случайных процессов.

УДК 519.21
ББК 22.171

ISBN 5-06-003831-9

© ГУП издательство «Высшая школа»,
2000

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа» и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга представляет собой продолжение книги авторов «Теория вероятностей и ее инженерные приложения» (М.: Высшая школа, 2000) и является систематическим изложением основ теории случайных процессов под углом зрения их практических приложений в различных областях инженерной практики. Отбор материала, а также стиль его изложения проводится прежде всего исходя из этих приложений. Этому способствует разбор многочисленных задач и примеров, помещенных в книге и относящихся к различным областям инженерной деятельности: автоматизированные системы управления, автоматизация технологических процессов и производств, прикладная математика, вычислительная техника, транспорт, связь и т. п. Все инженерные приложения теории случайных процессов излагаются с одинаковых методических позиций, основанных на единой системе подходов. Это дает возможность показать, как с помощью одной и той же математической модели можно исследовать и решать различные задачи, встречающиеся в инженерных приложениях.

Книга написана на базе лекций, читанных авторами в различных вузах на протяжении последних десятилетий по специальностям «Прикладная математика», «Автоматизированные системы обработки информации и управления», «Автоматизация технологических процессов» и др. Она прежде всего предназначена для инженеров и научных работников разных специальностей, которые в своей практической деятельности сталкиваются с задачами, связанными с воздействием случайных процессов на различные технические устройства в динамике их функционирования. Общетеоретические разделы книги адресованы широкому кругу читателей, она также может быть использована и в учебном процессе студентами и преподавателями соответствующих специальностей вузов, и как пособие по самообразованию.

Математический аппарат, используемый в книге, в основном базируется на обычном вузовском курсе высшей математики и твердом знании основ теории вероятностей.

Так как настоящая книга является продолжением книги авторов «Теория вероятностей и ее инженерные

приложения» [6], то в ней используются ссылки на эту книгу, а сами ссылки помечаются звездочкой; например, п. 7.3* означает, что идет ссылка на пункт 7.3 книги [6]; (7.3.3)* означает, что идет ссылка на формулу (7.3.3) книги [6].

Как и в первой книге, основное внимание уделяется не тонкостям математического аппарата теории случайных процессов, а единству методического подхода, иллюстрируемого многочисленными приложениями. Наше глубокое убеждение, основанное на многолетнем опыте преподавания теории случайных процессов во вузах и применении этой теории в научных исследованиях, состоит в том, что именно такой подход к изучению теории случайных процессов более всего полезен тем, кто ставит перед собой целью решение конкретных инженерных задач. (Окончание решения задачи или примера отмечается в тексте знаком ►.)

Несмотря на такой подход к изложению содержания книги, авторы стремились к тому, чтобы это не влияло на корректность формулировок и должную строгость применяемого математического аппарата.

В книгу не вошли теория массового обслуживания, которая является разделом теории случайных процессов, статистическая обработка случайных процессов, оптимизация систем, находящихся под воздействием случайных процессов, и их инженерные приложения. Такой отбор материала в эту книгу объясняется тем, что авторы предполагают по каждому из этих разделов написать отдельное руководство, где, так же как и здесь, основное внимание будет уделено различным инженерным приложениям.

Авторы приносят глубокую благодарность академикам В.С. Пугачеву и Б.В. Гнеденко, академику РАН Н.А. Кузнецову, профессору А.Д. Вентцелю за ряд ценных предложений, а также М.А. Овчаровой, оказавшей большую помощь авторам при подготовке рукописи к изданию.

В настоящем втором издании исправлены отдельные ошибки и опечатки, допущенные в первом издании.

Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров

Так ранней утренней порой
Отрывок тучи громовой,
В лазурной тишине чернея,
Один, нигде пристать не смея,
Летит без цели и следа,
Бог весть откуда и куда!

М. Ю. Лермонтов «Демон»

ВВЕДЕНИЕ

Теорией случайных процессов называется математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений в динамике их развития.

Теория случайных процессов (в другой терминологии — теория случайных функций) представляет собой сравнительно новый раздел теории вероятностей, особенно бурно развивающийся в последние десятилетия в связи со все расширяющимся кругом его практических приложений.

При изучении явлений окружающего мира мы часто сталкиваемся с процессами, течение которых заранее предсказать в точности невозможно. Эта неопределенность (непредсказуемость) вызвана влиянием случайных факторов, воздействующих на ход процесса. Приведем несколько примеров таких процессов.

1. Напряжение в электросети, номинально постоянное и равное 220 В, фактически меняется во времени, колеблется вокруг номинала под влиянием таких случайных факторов, как количество и вид включенных в сеть приборов, моменты их включений и выключений и т. д.

2. Население города (или области) меняется с течением времени случайным образом (непредсказуемым) образом под влиянием таких факторов, как рождаемость, смертность, миграция и т. д.

3. Уровень воды в реке (или в водохранилище) меняется во времени случайным образом в зависимости от погоды, количества осадков, таяния снега, интенсивности оросительных мероприятий и т. д.

4. Частица, совершающая броуновское движение в поле зрения микроскопа, меняет свое положение случайным образом в результате соударений с молекулами жидкости.

5. Происходит полет космической ракеты, которую необходимо вывести в заданный момент в заданную точку пространства с заданными направлением и абсолютным значением вектора скорости. Фактическое движение ракеты не совпадает с расчетным из-за таких случайных факторов, как турбулентность атмосферы, неоднородность горючего, ошибки в отработке команд и т. д.

6. ЭВМ в ходе работы может случайным образом переходить из состояния в состояние, например:

s_1 — работает исправно;

s_2 — имеется неисправность, но она не обнаружена;

s_3 — неисправность обнаружена, ведется поиск ее источника;

s_4 — ремонтируется и т. д.

Переходы из состояния в состояние происходят под действием случайных факторов, таких как колебания напряжения в сети питания ЭВМ, выход из строя отдельных элементов, момент обнаружения неисправностей, время их устранения и т. д.

Строго говоря, в природе не существует совершенно не случайных, в точности детерминированных процессов, но есть процессы, на ход которых случайные факторы влияют так слабо, что при изучении явления ими можно пренебречь (пример: процесс обращения планет вокруг Солнца). Однако существуют и такие процессы, где случайность играет основную роль (пример: вышерассмотренный процесс броуновского движения частицы). Между двумя крайними случаями лежит целый спектр процессов, в которых случайность играет большую или меньшую роль. Учитывать (или не учитывать) случайность процесса зависит также и от того, какую практическую задачу мы решаем. Например, при составлении расписания движения самолетов между двумя пунктами можно считать их траектории прямолинейными, а движение — равномерным; те же допущения не подойдут, если решается задача конструирования автопилота для управления полетом самолета.

Случайный процесс, протекающий в любой физической системе S , представляет собой случайные переходы системы из состояния в состояние. Состояние системы может быть охарактеризовано с помощью каких-то численных переменных; в про-

стейшем случае — одной, а в более сложных — нескольких.

Вернемся к рассмотренным выше примерам. В примере 1 процесс описывается одной переменной (напряжением U), случайным образом меняющейся во времени, являющейся функцией времени $U(t)$. Аналогично, в примере 2 население N меняется случайным образом во времени: $N(t)$. Так же и в примере 3 случайный процесс характеризуется одной функцией $H(t)$, где H — уровень воды в реке. Все эти три функции являются *случайными функциями* времени t . Обратим внимание на то, что при фиксированном t каждая из них превращается в обычную случайную величину, хорошо известную по книге авторов [6]. В результате опыта (когда он уже произведен) случайная функция превращается в обычную неслучайную функцию. Например, если в ходе времени непрерывно измерять напряжение в сети, получится неслучайная функция $u(t)$, колеблющаяся вокруг номинала u_0 (рис. 0.1).

Несколько сложнее обстоит дело в примере 4: состояние частицы характеризуется уже не одной, а двумя случайными функциями $X(t)$ и $Y(t)$ — координатами частицы в поле зрения микроскопа. Такой

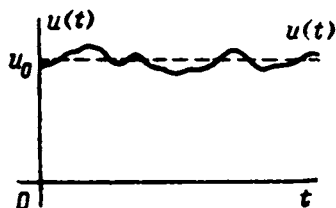


Рис. 0.1

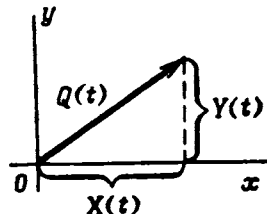


Рис. 0.2

случайный процесс называется *векторным*, он описывается переменным случайным вектором, составляющие которого $X(t)$, $Y(t)$ меняются с течением времени. Для фиксированного значения аргумента t случайный процесс превращается в систему двух случайных величин $X(t)$, $Y(t)$, изображаемую случайной точкой (случайным вектором $Q(t)$) на плоскости xOy (рис. 0.2). При изменении аргумента t точка $Q(t)$ будет перемещаться («блуждать») по плоскости xOy

так, как показано, например, на рис. 0.3 для моментов времени $t_1, t_2, t_3, \dots$

Еще сложнее обстоит дело с примером 5. Состояние ракеты в момент времени t характеризуется не только тремя координатами $X(t), Y(t), Z(t)$ центра массы ракеты, но и тремя составляющими ее скорости (не будем вводить для них специальных обозначений), тремя углами ориентации ракеты, угловыми скоростями движения вокруг центра массы, запасом топлива и т. п. Здесь перед нами — пример многомерного случайного процесса; блуждание точки, описывающей состояние системы в момент времени t , происходит в многомерном пространстве.

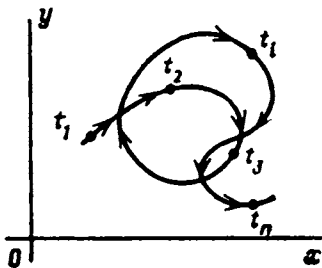


Рис. 0.3

Сложности, связанные с изучением таких процессов, с увеличением размерности растут в огромной степени.

В этой книге мы почти не будем касаться многомерных процессов.

Особое положение среди рассмотренных выше занимает пример 6. В этом примере состояние системы не характеризуется какой-либо численной величиной (или вектором), он описывается словами («качественно»), а случайный процесс сводится к «блужданию по состояниям». Разумеется, можно искусственно свести этот процесс к процессу случайного изменения одного параметра X , приписав ему (чисто условно) численное значение, равное номеру состояния: 1, 2, 3, ...; но искусственность такого приема сразу бросается в глаза: ведь состояния можно пронумеровать в произвольном порядке, и сведение процесса к такой численной форме вовсе не обязательно. В дальнейшем мы часто будем встречаться с такого типа случайными процессами (процессы с «качественными состояниями») и выработаем для них специальные приемы описания и анализа.

При фиксированном значении аргумента t случайное состояние системы превращается в некоторый аналог случайного события — одно из возможных состояний, в котором система может находиться в мо-

мент времени t . Как правило, множество таких состояний дискретно (конечно или счетно).

Теория случайных процессов имеет широкое поле инженерных приложений. По мере углубления и уточнения наших знаний об окружающем мире, по мере усложнения технических устройств все большее число процессов приходится рассматривать как случайные, учитывая не только их поведение «в среднем», но и случайные отклонения от этого среднего. Соответственно все большее значение приобретает теория случайных процессов. Для современного периода развития техники характерно широкое применение компьютеров (ЭВМ), автоматизированное управление производственными процессами, а также автоматизированные и автоматические системы управления. Работа любой такой системы связана со случайными вариациями протекающих в ней процессов, т. е. с возникновением в ней случайного процесса. Разумное проектирование таких систем и анализ их работы требуют от инженера знания основ теории случайных процессов.

В настоящее время практически нет таких областей инженерной деятельности, которые не были бы связаны со случайными процессами и необходимостью их изучения. Любое работающее техническое устройство находится под влиянием случайных факторов, в большей или меньшей степени влияющих на режим его работы.

Все без исключения метеорологические характеристики (температура, давление, влажность, скорость ветра, его направление и т. д.) представляют собой случайные процессы. Развитие и взаимодействие различных биологических популяций также носят черты случайных процессов.

Все виды хозяйственной деятельности человека тоже зависят от случайных факторов (погода, случайные колебания спроса и предложения, количество людей, которых можно вовлечь в производство и т. п.) и, значит, описываются с помощью тех либо других случайных процессов. Работа любой автоматизированной системы управления (АСУ) представляет собой случайный процесс, обусловленный случайными моментами поступления информации и запросов, случайными моментами возникновения отказов элементов

комплекса технических средств, ошибками операторов и т. п. Рост народонаселения, учет которого необходим при проектировании новых жилых массивов, также представляет собой случайный процесс.

Из этого не следует, что теория случайных процессов — единственный математический аппарат, пригодный для изучения таких явлений. Наряду с ним может применяться и обычный, «детерминистский» аппарат, в котором случайные факторы не учитываются. Но, пользуясь им, нельзя забывать, что он дает только приближенное, схематичное описание процесса, некоторое его «среднее» протекание, относительно которого возможны отклонения. При углубленном изучении процесса такие отклонения, как правило, приходится учитывать, для чего прибегают к аппарату теории случайных процессов.

До сих пор мы говорили только о случайных функциях времени t . В ряде задач практики встречаются случайные функции, зависящие не от времени, а от другого аргумента. Например, давление P газа в газопроводе может меняться случайным образом с изменением расстояния l до точки, где измеряется давление, от источника, питающего газопровод, и представляет собой случайную функцию аргумента l . Давление $P(l)$ с увеличением l имеет тенденцию уменьшаться (например, как показано на рис. 0.4). Под влиянием случайных факторов (за-

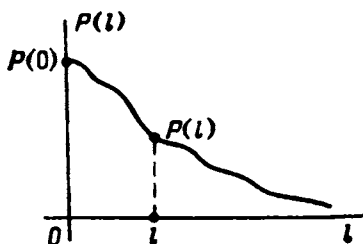


Рис. 0.4

сорение газопровода, неровности его внутренней поверхности, различный температурный режим на разных участках) давление будет меняться в зависимости от l случайным, нерегулярным образом. Другой пример: прочностные характеристики стержня представляют собой случайные функции абсциссы x сечения стержня.

Строго говоря, случайным процессом следовало бы называть только случайную функцию, зависящую от времени t ; понятие «случайной функции» шире, чем понятие «случайного процесса». Мы такого разделе-

ния проводить не будем. Для простоты во всех случаях будем пользоваться термином «случайный процесс» безотносительно к физической природе аргумента, обозначенного буквой t . В большинстве практических задач аргументом фигурирующих в них случайных функций является именно время.

В некоторых задачах практики могут встретиться случайные функции, зависящие не от одного, а от нескольких аргументов.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Определение случайного процесса.

Классификация случайных процессов

Понятие случайного процесса (с. п.) в общих чертах было уже освещено во Введении. Здесь мы уточним это понятие и дадим ему математическую формулировку. Ограничимся пока одномерными с. п., протекание которых сводится к одному числовому параметру $X(t)$, меняющемуся во времени случайным образом.

Понятие случайного процесса представляет собой обобщение понятия случайной величины (с. в.), которое уже известно из книги [6].

Напомним, как там определялась случайная величина (см. п. 3.1*). Под случайной величиной понимается величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение.

Далее дается формальное, теоретико-множественное определение с. в. как функции элементарного события ω , осуществляющегося в результате опыта и входящего в пространство элементарных событий $\Omega (\omega \in \Omega)$. При этом возможные значения x с. в. X принадлежат множеству $\Xi (x \in \Xi)$.

Дадим теперь определение случайного процесса. *Случайным процессом $X(t)$ называется процесс, значение которого при любом фиксированном $t = t_0$ является случайной величиной $X(t_0)$ ¹⁾.*

Случайная величина $X(t_0)$, в которую обращается с. п. при $t = t_0$, называется *сечением* случайного процесса, соответствующим данному значению аргумента t . В дальнейшем, говоря о сечении с. п., мы не всегда будем отмечать нулевым индексом то значение аргумента t , которому оно соответствует, а будем по

¹⁾ Для процесса с «качественными состояниями» роль случайной величины играет «случайное состояние системы», в которой протекает процесс, т. е. одно из множества возможных в момент t состояний.

мере надобности говорить об одном и том же выражении то как о случайном процессе (при переменном t), то как о случайной величине (при фиксированном t).

Аналогично тому, как мы записывали с. в. в виде функции элементарного события ω , появляющегося в результате опыта, можно и с. п. записать в виде функции двух аргументов — времени t и элементарного события ω :

$$X(t) = \varphi(t, \omega), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in T, \quad X(t) \in \mathcal{Z}, \quad (1.1.1)$$

где ω — элементарное событие, Ω — пространство элементарных событий, T — область (множество) значений аргумента t функции $X(t)$, $\mathcal{Z}$ — множество возможных значений случайного процесса $X(t)$.

Предположим, что опыт, в ходе которого с. п. протекает так или иначе, уже произведен, т. е. произошло элементарное событие $\omega \in \Omega$. Это значит, что с. п. уже не случаен, и зависимость его от t приняла вполне определенный вид: это уже обычная, неслучайная функция аргумента t . Мы будем ее называть *реализацией случайного процесса $X(t)$ в данном опыте*.

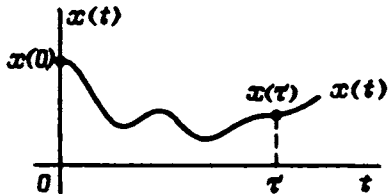


Рис. 1.1.1

Итак, *реализацией случайного процесса*

$X(t)$ называется неслучайная функция $x(t)$, в которую превращается случайный процесс $X(t)$ в результате опыта; другими словами, конкретный вид, принятый с. п. $X(t)$, который наблюдался на каком-то отрезке времени от 0 до τ (рис. 1.1.1)¹⁾.

Пользуясь формулой (1.1.1), можно записать реализацию как функцию φ от аргумента t , изменяющегося в пределах множества T , при фиксированном элементарном событии $\omega = \omega_0$:

$$x(t) = \varphi(t, \omega_0) \quad (t \in T). \quad (1.1.2)$$

¹⁾ Мы здесь сохраняем принятую в книге [6] систему обозначений, в которой случайные величины обозначаются, как правило, большими буквами, а неслучайные — малыми буквами латинского алфавита.

Реализации с. п. на каждом шагу встречаются на практике. Любая реализация случайного процесса $x(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}$ возможных значений случайного процесса $X(t)$: $x(t) \in \mathcal{E}$.

Например, записывая с помощью какого-то прибора напряжение U питания ЭВМ в зависимости от времени t на участке $(0, \tau)$, получим реализацию $u(t)$

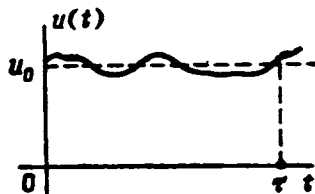


Рис. 1.1.2

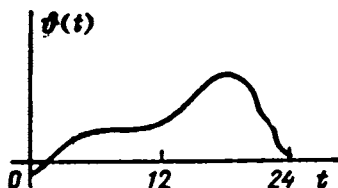


Рис. 1.1.3

с. п. $U(t)$ (см. рис. 1.1.2, где u_0 — номинальное напряжение питания). Записывая температуру воздуха Θ в зависимости от времени t в течение суток, получим реализацию $\phi(t)$ с. п. $\Theta(t)$ (рис. 1.1.3). Вообще, любая запись прибора-самописца представляет собой реализацию того или другого с. п.

Если произведен не один опыт, а несколько, в результате каждого из которых наблюдается какая-то реализация с. п. $x_i(t)$ (i — номер опыта), то получим несколько различных реализаций случайного процесса: $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_i(t)$, ... или *семейство реализаций* (рис. 1.1.4).

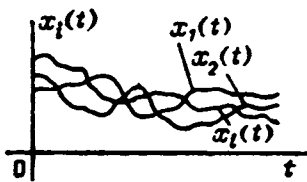


Рис. 1.1.4

Семейство реализаций случайного процесса — основной экспериментальный

материал, на основе которого можно получить характеристики с. п. — какие, мы увидим в дальнейшем. Семейство реализаций с. п. аналогично совокупности наблюдаемых значений с. в. X , с той разницей, что здесь наблюдаются не числовые значения, а функции.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих введенные понятия.

1) Производится n опытов, в каждом из которых непрерывно измеряется входное напряжение $U(t)$, подаваемое на ЭВМ, в течение времени τ ; напряжение $U(t)$ с номинальным значением u_0 фактически представляет собой случайный процесс. Для любого фиксированного момента времени $t = t_0$ напряжение представляет собой случайную величину $U(t_0)$ — сечение случайного процесса при $t = t_0$. Результат n опытов — семейство реализаций $u_1(t), u_2(t), \dots, u_i(t), \dots, u_n(t)$, показанное на рис. 1.1.5. Сечение $U(t_0)$ с. п. $U(t)$ при $t = t_0$ представляет собой случайную величину, наблюдаемые значения которой отмечены точками на вертикальной прямой, проведенной через точку t_0 : $u_1(t_0), \dots, u_i(t_0), \dots, u_n(t_0)$.

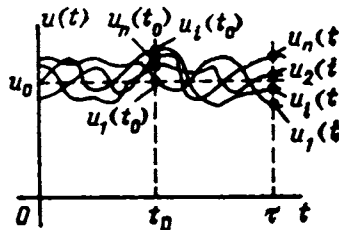


Рис. 1.1.5

2) Производится n опытов, в каждом из которых регистрируется число $X(t)$ отказов (сбоев) ЭВМ от начала работы до момента времени t . Наблюдения проводятся на участке времени от 0 до τ . Случайный процесс $X(t)$ принимает целочисленные значения 0, 1, 2, 3, ..., сохраняя их в промежутках между скачками, происходящими в моменты, когда происходит очередной отказ; его сечение $X(t)$ при любом фиксированном t — дискретная случайная величина, множество возможных значений которой $\Xi = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

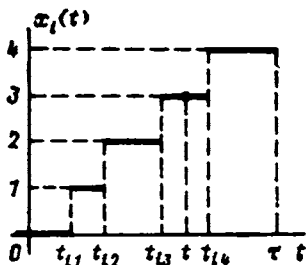


Рис. 1.1.6

Реализация $x_i(t)$ случайного процесса $X(t)$ в i -м опыте представляет собой неслучайную ступенчатую функцию, скачки которой единичной величины происходят в моменты времени $t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, \dots$ (рис. 1.1.6).

Реализации $x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t)$ различны между собой (моменты скачков в общем случае не совпадают); изобразить на одном графике семейство реализаций трудно (читателю предлагается

мысленно наложить друг на друга n ступенчатых кривых типа изображенной на рис. 1.1.6, различающихся моментами скачков, но не их величиной, всегда равной единице).

3) Производится n опытов, в каждом из которых измеряется температура воздуха $\Theta(h)$ на высоте h над данной точкой земной поверхности, в фиксированный момент времени суток t_0 (например, в 19 часов). В данном примере аргументом случайной функции $\Theta(h)$ является не время, а высота h ; но никакой принципиальной разницы с предыдущими примерами нет. Сечение функции $\Theta(h)$ при фиксированном h_0 представляет собой непрерывную случайную величину. На

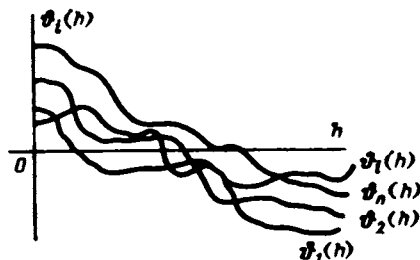


Рис. 1.1.7

рис. 1.1.7 представлено семейство реализаций случайной функции $\Theta(h)$: $\Theta_1(h), \Theta_2(h), \dots, \Theta_i(h), \dots, \Theta_n(h)$. Вообще, с возрастанием h температура имеет тенденцию понижаться, но бывает, что она и повышается (так называемые «инверсии»). ►

Теперь вернемся к самому понятию случайного процесса и дадим некоторые пояснения.

Мы уже знаем, что с. п. $X(t)$ представляет собой функцию, которая при любом t является случайной величиной (сечением случайного процесса). Понятие случайного процесса является обобщением понятия случайной величины на случай, когда условия опыта не постоянны, а меняются (в частности, время t «течет»). Случайная величина X соответствует случайному явлению как бы «в статике» (в неизменных условиях опыта), а случайный процесс $X(t)$ — «в динамике» (в изменяющихся условиях опыта). Каждое сечение с. п. $X(t)$ при заданном t есть с. в., а совокупность всех сечений при всевозможных t и есть с. п. $X(t)$. Значит, случайный процесс представляет собой

не что иное, как систему случайных величин — всех сечений этого процесса.

Сколько же существует сечений? В общем случае — бесконечное (несчетное) множество. Рассматривать в совокупности такую систему с. в. очень трудно, если не невозможно. Естественно как-то ограничить себя, чтобы сделать задачу обозримой. Мы знаем, что любую функцию $f(t)$ аргумента t (из встречающихся в реальной практике, а не в специально придуманных примерах) можно приближенно представить последовательностью ее значений в точках

$t_1, t_2, \dots, t_k: f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_k)$ (рис. 1.1.8). Чем

больше количество k точек $t_1, t_2, \dots, t_k$, тем точнее будет замена функции $f(t)$ последовательностью значений $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_k)$. Аналогично будет обстоять дело и со с. п. $X(t)$. Его можно приближенно

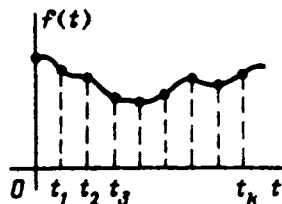
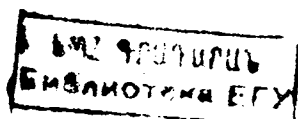


Рис. 1.1.8

заменить совокупностью (системой) случайных величин $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ — его сечений в точках $t_1, t_2, \dots, t_k$. Чем больше сечений будет рассматриваться, тем более подробное представление о случайном процессе мы получим. В пределе число сечений (число случайных величин в системе, или число составляющих случайного вектора) должно быть бесконечным. Изучение систем бесконечного (несчетного) числа случайных величин — задача непомерной трудности; на практике всегда приходится ее упрощать, заменяя более доступной. Примеры таких упрощений встретятся нам в дальнейшем. Нужно стараться при изучении интересующих нас свойств случайного процесса обойтись как можно меньшим числом сечений.

В теории случайных процессов принято классифицировать их по тем или другим признакам, учитывая плавность или скачкообразность реализации, фиксированность или случайность моментов, в которые могут происходить скачки и т. д., вид закона распределения отдельного сечения процесса или совокупности его сечений и т. д. Познакомимся с самой элементарной классификацией случайных процессов — «по времени» и «по состояниям».

7066069



Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots$, число которых *конечно* или *считаемо*. Множество T является дискретным.

Примеры процессов с дискретным временем: 1) процесс работы ЭВМ, которая может менять свои состояния в моменты $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots$, определяемые тактом работы машины; 2) процесс работы технического устройства, которое осматривается в моменты $t_1, t_2, \dots$ и переводится в результате осмотра из одной категории в другую; 3) процесс обстрела цели в моменты $t_1, t_2, \dots$, в ходе которого цель может менять свои состояния (не повреждена, частично выведена из строя, перестала функционировать, полностью разрушена и т. п.). Если рассматривается одномерный случайный процесс $X(t)$ с дискретным временем (моменты $t_1, t_2, \dots$), то его сечения в эти моменты образуют *последовательность случайных величин*: $X(t_1), X(t_2), \dots$. В качестве аргумента последовательности может быть выбран номер значения момента перехода: $X(1), X(2), \dots$.

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с непрерывным временем*, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент t наблюдаемого периода τ .

Для процесса с непрерывным временем множество T моментов, когда система меняет свое состояние, *несчитаемо* (они непрерывно заполняют рассматриваемый участок оси абсцисс). Примеры случайных процессов с непрерывным временем: 1) $X(t)$ — число отказов технического устройства от начала работы до момента t ; 2) броуновское движение частицы в поле зрения микроскопа; 3) число $N(t)$ заболевших в данном городе в ходе развития эпидемии к моменту t .

Одномерный случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с непрерывными состояниями*, если его сечение в любой момент t представляет собой не дискретную, а непрерывную (или смешанную) случайную величину и, значит, множество ее значений $\mathcal{E}$ *несчитаемо*. Аналогично, многомерный (векторный) случайный процесс называется *процессом с непрерывными состояниями*, если при любом t множество возможных значений случайного вектора, оп-

ределяющего состояние системы S , в которой протекает процесс, несчетно. Примеры с. п. с непрерывными состояниями: 1) напряжение $U(t)$ питания ЭВМ в момент t ; 2) давление газа $P(t)$ в заданном резервуаре в момент t ; 3) координаты частицы, совершающей броуновское движение $X(t)$, $Y(t)$, в момент t (двумерный случайный процесс с непрерывными состояниями); 4) параметры, характеризующие в момент t состояние космической ракеты, выводимой на орбиту (многомерный случайный процесс с непрерывными состояниями).

Случайный процесс, протекающий в системе S , называется *процессом с дискретными состояниями*, если в любой момент времени t множество его состояний $\mathcal{Z}$ конечно или счетно; другими словами, если его сечение в любой момент t характеризуется дискретной случайной величиной $X(t)$ (в многомерном случае — несколькими дискретными случайными величинами). Разумеется, все случайные процессы с «качественными» состояниями относятся к категории процессов с дискретными состояниями; сечение такого процесса представляет собой случайное событие — аналог дискретной случайной величины (см. Введение).

Таким образом, в зависимости от характера множества T значений аргумента t , в которые возможны переходы системы из состояния в состояние, а также множества $\mathcal{Z}$ самих состояний все случайные процессы можно разделить на четыре класса:

1а. Процессы с дискретными состояниями и дискретным временем.

1б. Процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

2а. Процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем.

2б. Процессы с непрерывными состояниями и непрерывным временем.

Примеры процессов разных типов

1а. Некто купил m билетов выигрышного займа, которые могут выигрывать и погашаться в заранее известные моменты тиражей $t_1, t_2, \dots$. Случайный процесс $X(t)$ — число билетов, выигравших до момента t .

1б. Техническое устройство состоит из n узлов, которые могут в ходе работы устройства отказывать

(выходить из строя). Случайный процесс $X(t)$ — число узлов, отказавших до момента t .

Еще пример процесса типа 1б: техническое устройство может под действием случайных факторов находиться в одном из состояний: s_1 — работает исправно; s_2 — работает с перебоями; s_3 — остановлено, ведется поиск неисправности; s_4 — ремонтируется; s_5 — окончательно вышло из строя, списано. Сечение такого процесса представляет собой, как для каждого процесса с «качественными состояниями», обобщенную случайную величину дискретного типа, «возможные значения» которой описываются не численно, а словесно.

2а. В определенные моменты времени $t_1, t_2, \dots$ регистрируется температура воздуха $\Theta(t)$ в заданной точке пространства. Последовательность значений этой величины — случайный процесс $\Theta(t)$ с непрерывными состояниями и дискретным временем.

2б. Процесс изменения напряжения $U(t)$ в электросети питания ЭВМ представляет собой случайный процесс с непрерывными состояниями и непрерывным временем.

Для различных типов случайных процессов разработаны различные методы их изучения и описания, с которыми мы познакомимся в дальнейшем.

В ряде задач случайные процессы бывает удобно выражать через простейшие (или «элементарные») случайные функции. *Элементарной случайной функцией* (э.с.ф.) будем называть такую функцию аргумента t , где зависимость от t представлена обычной, неслучайной функцией, в которую в качестве параметров входят одна или несколько обычных, не зависящих от t случайных величин.

Рассмотрим ряд примеров э.с.ф. Для каждого из них построим семейство реализаций, приписывая фигурирующей в примере случайной величине (или случайному вектору) ряд значений. В каждом из примеров э.с.ф. обозначена $Y(t)$, ее реализации — $y_1(t), y_2(t), \dots$

Пример 1. Э.с.ф. имеет вид

$$Y(t) = Xe^{-t} \quad (t > 0),$$

где X — непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(-1, 1)$.

Семейство реализаций э.с.ф. $Y(t)$ показано на рис. 1.1.9; каждая из них представляет собой показательную кривую с ординатами, пропорциональными ординатам кривой e^{-t} (жирная линия); отдельные реализации (тонкие линии) различаются между собой

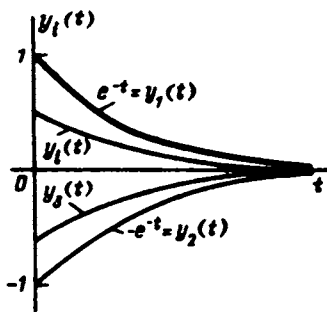


Рис. 1.1.9

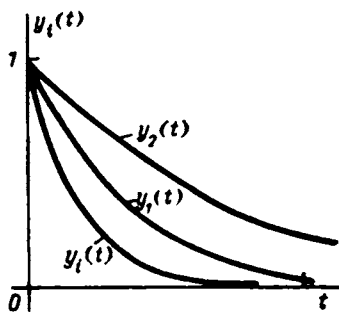


Рис. 1.1.10

масштабом по оси ординат. Когда с.в. X принимает отрицательное значение, соответствующая реализация лежит ниже оси абсцисс.

Пример 2. Э.с.ф. имеет вид

$$Y(t) = e^{-tX} \quad (t > 0), \quad (1.1.3)$$

где X — случайная величина, принимающая только положительные значения. Семейство реализаций э.с.ф. (1.1.3) показано на рис. 1.1.10. Каждая из этих реализаций представляет собой показательную кривую, проходящую через точку с координатами $(0, 1)$; различаются они между собой скоростью стремления к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Пример 3. $Y(t) = at + X$, где X — случайная величина, a — неслучайная величина. Каждая реализация (рис. 1.1.11) представляет собой прямую с угловым коэффициентом a , параллельную прямой $y = at$, различаются реализации начальными ординатами.

Пример 4. $Y(t) = X \cdot t + a$, где X — случайная величина, a — неслучайная величина. Каждая из реализаций — прямая линия, проходящая через точку $(0, a)$ (рис. 1.1.12). Реализации различаются угловыми коэффициентами.

Пример 5. $Y(t) = X \cos at$, где X — случайная величина, a — неслучайная величина. Семейство реализаций показано на рис. 1.1.13; каждая из них —

косинусоида, ординаты которой умножены на тот или другой случайный коэффициент. Реализации различаются между собой амплитудой, т. е. масштабом по оси ординат.

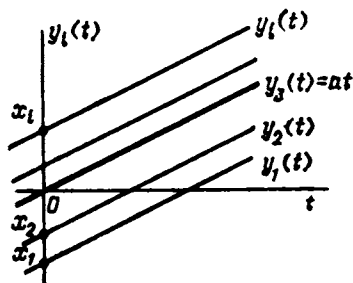


Рис. 1.1.11

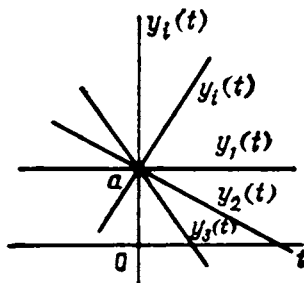


Рис. 1.1.12

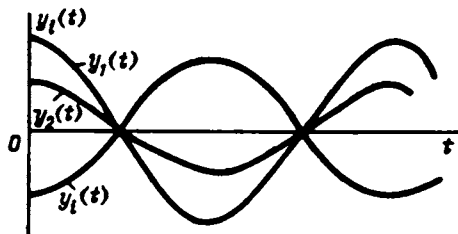


Рис. 1.1.13

Пример 6. $Y(t) = \cos Ut$, где U — случайная величина, принимающая положительные значения. Се-

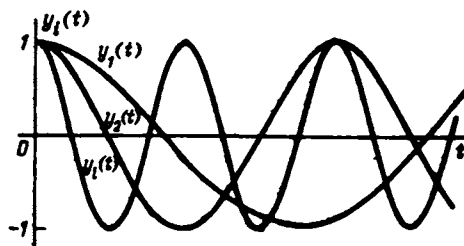


Рис. 1.1.14

мейство реализаций показано на рис. 1.1.14; каждая из них проходит через точку $(0, 1)$. Реализации различаются между собой по частоте.

Пример 7. $Y(t) = \cos(\omega t + X)$, где X — случайная фаза колебаний, распределенная равномерно в интервале $(-\pi; \pi)$. Семейство реализаций э. с. ф. показано на рис. 1.1.15.

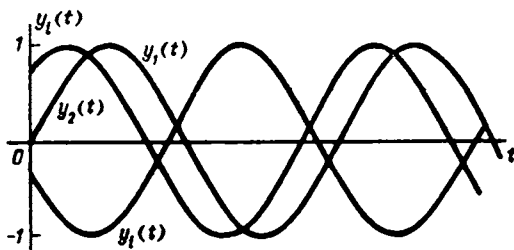


Рис. 1.1.15

Пример 8. $Y(t) = U \cos at + V \sin at$, где (U, V) — система случайных величин, a — неслучайная величина. Семейство реализаций представлено на рис. 1.1.16. Каждая реализация представляет собой

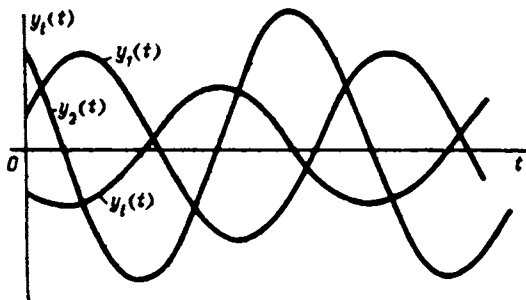


Рис. 1.1.16

гармоническое колебание на частоте a со случайной амплитудой и случайной фазой.

Пример 9. $Y(t) = a + Ut + Vt^2$, где (U, V) — система двух случайных величин, a — неслучайная величина. Семейство реализаций показано на рис. 1.1.17. Каждая реализация проходит через точку $(0, a)$. ►

В крайнем случае э. с. ф. может вырождаться в неслучайную функцию $y(t) = \phi(t)$ (рис. 1.1.18) (тогда

все ее реализации совпадают между собой и с функцией $\psi(t)$ или даже вообще превращаются в неслю-

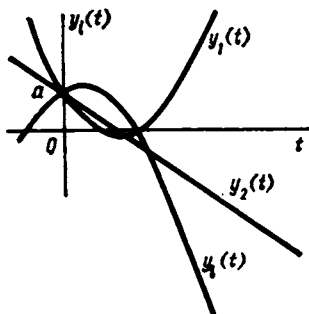


Рис. 1.1.17

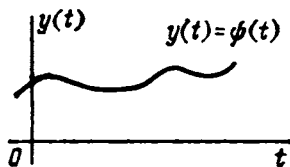


Рис. 1.1.18

чайную величину a : $y = a$; все реализации в этом случае совпадают с прямой a .

1.2. Законы распределения и основные характеристики случайных процессов

Мы знаем (см. гл. 3* в [6]), что полной, исчерпывающей характеристикой случайной величины является ее закон распределения. Для дискретной с.в. он может быть задан рядом распределения, для непрерывной с.в. — плотностью распределения (п.р.). Универсальной исчерпывающей характеристикой любой с.в. X — дискретной, непрерывной или смешанной — является ее функция распределения (ф.р.) $F(x) = P\{X < x\}$, т. е. вероятность того, что с.в. X примет значение, меньшее заданного x .

Пусть имеется с.п. $X(t)$. Мы знаем, что сечение с.п. $X(t)$ при любом фиксированном значении аргумента t представляет собой случайную величину, которая имеет закон распределения

$$F(t, x) = P\{X(t) < x\}. \quad (1.2.1)$$

Эта функция зависит от двух аргументов: во-первых, от значения t , для которого берется сечение; во-вторых, от значения x , меньше которого должна быть с.в. $X(t)$ (рис. 1.2.1). Функция (1.2.1) называется *одномерным законом распределения* с.п. $X(t)$.

Итак, перед нами функция двух аргументов (1.2.1). Является ли функция (1.2.1) полной, исчерпывающей характеристикой случайного процесса $X(t)$? Очевидно, нет. Эта функция характеризует только свойства одного отдельно взятого сечения с. п. $X(t)$, но не дает понятия о совместном распределении двух (или более) сечений с. п. В самом деле, можно представить себе два случайных процесса с одинаковым распределением в каждом сечении, но совершенно различных по своей структуре. Первый представлен совокупностью своих реализаций на рис. 1.2.2, второй — на рис. 1.2.3. Первый процесс имеет плавный характер, второй — более резкий, «нервный». Для первого процесса характерна более тесная зависимость между

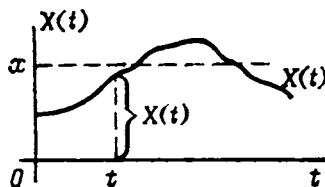


Рис. 1.2.1

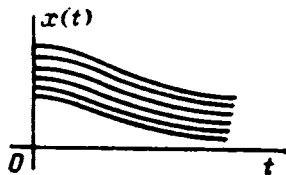


Рис. 1.2.2

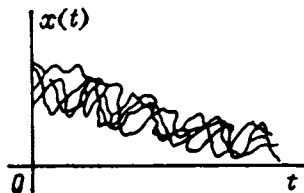


Рис. 1.2.3

сечениями с. п.; для второго эта зависимость затухает довольно быстро с увеличением расстояния между сечениями. Очевидно, одномерный закон распределения (1.2.1) не может служить полной, исчерпывающей характеристикой с. п. $X(t)$. Очевидно также, что более полной (но все еще не исчерпывающей) характеристикой будет *двумерный закон распределения*, представленный совместной функцией распределения двух сечений с. п., взятых соответственно для моментов t_1 и t_2 :

$$F(t_1, t_2, x_1, x_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}. \quad (1.2.2)$$

Это функция уже не двух, а четырех аргументов: двух моментов времени, для которых берутся сечения, и

двух значений x_1 и x_2 (рис. 1.2.4). Функция четырех аргументов — это уже неприятно! Однако и двумерный закон распределения (1.2.2) еще не является исчерпывающей характеристикой с. п. $X(t)$; еще более полной характеристикой будет трехмерный закон

$$F(t_1, t_2, t_3; x_1, x_2, x_3) = \\ = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, X(t_3) < x_3\}$$

и т. д.

Очевидно, теоретически можно неограниченно увеличивать число сечений и получать при этом все более полную характеристику с. п. Однако оперировать со

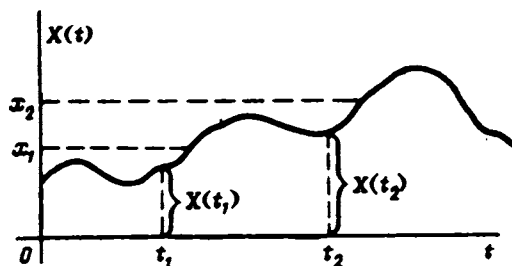


Рис. 1.2.4

столь громоздкими характеристиками, зависящими от многих аргументов, крайне неудобно; к тому же объем экспериментального материала, необходимого для их получения, с увеличением числа сечений растет чрезвычайно быстро. Поэтому на практике более чем двумерные законы распределения применяются крайне редко. В инженерных приложениях обычно ограничиваются одномерным, иногда — двумерным законом распределения с. п. Нередко этого оказывается и достаточно.

Во многих случаях инженерной практики протекающие в системах процессы можно (точно или приближенно) представлять как марковские (или «процессы без последствия», см. гл. 4, 5). Для таких процессов исчерпывающей характеристикой будет двумерный закон (1.2.2). Существует большой класс процессов — так называемые нормальные, или гауссовские случайные процессы — в которых двумерный закон распределения (1.2.2) будет также исчерпываю-

щей характеристикой. Но чаще всего при исследовании случайных процессов для практических целей вообще отказываются от законов распределения с. п., а пользуются его *основными характеристиками*, описывающими с. п. не полностью, а частично.

Мы знаем (см. гл. 8*), что многие задачи теории вероятностей можно решать, совсем не прибегая к законам распределения случайных величин, а пользуясь только их *числовыми характеристиками*, такими, как математическое ожидание (м. о.), дисперсия, ковариация, начальные и центральные моменты разных порядков и т. д. Аналогично обстоит дело и со случайными процессами, только для них основные характеристики будут уже не числами, а функциями и аргумента t , от которого зависит с. п. $X(t)$, или же двух (обычно не больше) значений этого аргумента.

Первой и важнейшей характеристикой с. п. $X(t)$ является его *математическое ожидание*, т. е. «средняя» функция, вокруг которой происходит разброс реализаций с. п. (см. жирную линию $m_x(t)$ на рис. 1.2.5,

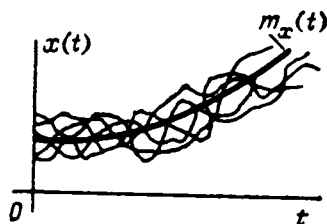


Рис. 1.2.5

где тонкими линиями даны реализации с. п.). Заметим, что эта функция, характеризующая «среднее» значение случайного процесса, является сама уже *нелучайной*. Обозначим ее $m_x(t)$. Итак, *математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ называется нелучайная функция $m_x(t)$, которая при любом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса*

$$m_x(t) = M[X(t)]^1. \quad (1.2.3)$$

Зная одномерный закон распределения с. п. $X(t)$, всегда можно найти $m_x(t)$ для любого сечения и установить его зависимость от t . Как находится математическое ожидание по закону распределения, мы уже знаем из книги [6] (см. гл. 4*): если с. в. X дискретна,

¹⁾ Будем исходить из допущения, что м. о. случайного процесса существует, не оговаривая это специально каждый раз.

ее м.о. находится как сумма произведений ее возможных значений на их вероятности:

$$m_x = \sum_i x_i p_i;$$

если она непрерывна и имеет плотность $f(x)$ — м.о. вычисляется как интеграл:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Математическое ожидание смешанной с.в. X находится как сумма произведений значений с.в., обладающих отличными от нуля вероятностями, на эти вероятности плюс интеграл, распространенный на участки непрерывности функции распределения $F(x)$ (см. (4.1.4)*).

Совершенно аналогично, зафиксировав t и переходя от случайного процесса к случайной величине (его сечению), можно вычислить м.о. этого процесса.

Например, если сечение с.п. $X(t)$ при данном t представляет собой дискретную с.в. с рядом распределения

$$X(t): \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_i(t) & \dots \\ \hline p_1(t) & p_2(t) & \dots & p_i(t) & \dots \end{array}, \quad (*)$$

то его м.о. может быть вычислено по формуле

$$m_x(t) = M[X(t)] = \sum_i x_i(t) p_i(t). \quad (1.2.4)$$

Здесь $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_i(t)$, ... — первое, второе, ..., i -е, ... значения, которые может принимать случайная величина $X(t)$ — сечение с.п. при данном t ; $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_i(t)$, ... — соответствующие вероятности: $p_1(t) = P\{X(t) = x_1(t)\}$, ..., $p_i(t) = P\{X(t) = x_i(t)\}$, ...

Очень часто встречается случай, когда значения с.в. $X(t)$ не зависят от t , а зависят от t только их вероятности; в этом случае ряд распределения имеет вид

$$X(t): \begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ \hline p_1(t) & p_2(t) & \dots & p_i(t) & \dots \end{array}. \quad (**)$$

В тех примерах случайных процессов с дискретными состояниями, которые мы приводили в п. 1.1, значения $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ не зависели от t и просто были целыми числами $0, 1, 2, \dots, i, \dots$.

Если сечение с.п. $X(t)$ при данном t представляет собой непрерывную с.в. с плотностью $f(t, x)$, его м.о. может быть вычислено по формуле

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(t, x) dx. \quad (1.2.5)$$

Для случая смешанной случайной величины $X(t)$ м.о., как обычно, вычисляется как сумма плюс интеграл (см. 4.1.4*); соответствующих формул здесь не будем выписывать, ввиду их сравнительной громоздкости. Размерность функции $m_x(t)$ равна размерности с.п. $X(t)$. На практике чаще всего математическое ожидание $m_x(t)$ с.п. вычисляется не по его одномерному закону распределения, а заменяется приближенной оценкой, которую можно найти по опытным данным (см. п. 11.6*).

Введем понятие центрированного случайного процесса; оно аналогично понятию центрированной с.в. (см. (4.2.6)*).

Центрированным случайным процессом $\overset{\circ}{X}(t)$ называется процесс, который получится, если из с.п. $X(t)$ вычесть его м.о.

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t). \quad (1.2.6)$$

Из определения (1.2.4), (1.2.5) математического ожидания с.п. следует, что м.о. центрированного с.п. $\overset{\circ}{X}(t)$ тождественно равно нулю, т.е.

$$M[\overset{\circ}{X}(t)] = M[X(t) - m_x(t)] = 0. \quad (1.2.7)$$

Реализации $\overset{\circ}{x}_i(t)$ центрированного с.п. $\overset{\circ}{X}(t)$ представляют собой отклонения с.п. $X(t)$ от его математического ожидания; эти отклонения имеют как положительные, так и отрицательные значения, а в среднем равны нулю (рис. 1.2.6).

Кроме м.о. в теории случайных процессов рассматриваются и другие их характеристики, аналогичные числовым характеристикам с.в. (с той разницей,

что они будут уже не числами, а функциями): начальные и центральные моменты.

Начальным моментом k -го порядка случайного процесса $X(t)$ называется м.о. k -й степени соответствующего сечения с. п.:

$$\alpha_k(t) = M[(X(t))^k], \quad (1.2.8)$$

а центральным моментом k -го порядка — м.о. k -й степени центрированного с. п.:

$$\mu_k(t) = M[(\overset{\circ}{X}(t))^k] = M[(X(t) - m_x(t))^k]. \quad (1.2.9)$$

Из начальных моментов, кроме математического ожидания (первого начального момента) чаще всего

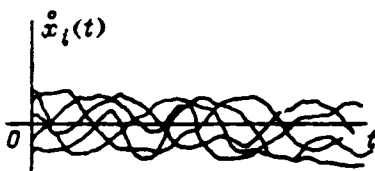


Рис. 1.2.6

применяется второй начальный момент: $M[(X(t))^2]$ (в иной записи: $M[X^2(t)]$); из центральных — второй центральный момент, иначе — *дисперсия случайного процесса*, которая при каждом t равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса:

$$D_x(t) = D[X(t)] = M[(\overset{\circ}{X}(t))^2]. \quad (1.2.10)$$

Вспомним, как выражается дисперсия с.в. через ее второй начальный момент (см. (4.2.17)*): $D[X] = M[X^2] - m_x^2$, т. е. *дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию ее квадрата минус квадрат математического ожидания*. Совершенно такое же соотношение связывает дисперсию с. п. с его вторым начальным моментом:

$$D_x(t) = D[X(t)] = M[X^2(t)] - m_x^2(t). \quad (1.2.11)$$

Следовательно, *дисперсией с. п. $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, которая при любом значении аргумента t равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса $X(t)$.*

Зная закон распределения любого сечения с.п. $X(t)$ (одномерный закон распределения), можно по известным правилам найти дисперсию с.п. $X(t)$.

Если сечение $X(t)$ представляет собой дискретную с.в. с рядом распределения (**), то дисперсия с.п. находится по формуле

$$D_x(t) = D[X(t)] = \sum_i (x_i - m_x(t))^2 p_i(t), \quad (1.2.12)$$

где i — номер возможного значения с.в. $X(t)$ при данном t , $p_i(t)$ — вероятность этого значения, или же, через второй начальный момент,

$$D_x(t) = D[X(t)] = \sum_i x_i^2 p_i(t) - m_x^2(t). \quad (1.2.13)$$

Если сечение $X(t)$ представляет собой непрерывную с.в. с плотностью $f(t, x)$, то дисперсия с.п. может быть вычислена по формуле

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(t, x) dx \quad (1.2.14)$$

или же через второй начальный момент¹⁾

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(t, x) dx - m_x^2(t). \quad (1.2.15)$$

Таким образом, как м.о., так и дисперсия с.п. $X(t)$ определяются его одномерным законом распределения.

Если м.о. $m_x(t)$ с.п. $X(t)$ представляет собой некоторую неслучайную «среднюю функцию», около которой варьируются реализации случайного процесса, то дисперсия с.п. $D_x(t)$ представляет собой неслучайную неотрицательную функцию, характеризующую степень разброса реализаций с.п. $X(t)$ около его м.о. $m_x(t)$, т.е. степень разброса реализаций централизованного случайного процесса $\tilde{X}(t)$.

Средним квадратическим отклонением (с.к.о.) $\sigma_x(t)$ с.п. $X(t)$ называется арифметическое значение

¹⁾ Случай смешанной с.в. $X(t)$, как и выше, опускаем ввиду сравнительной громоздкости соответствующих формул.

корня квадратного из дисперсии $D_x(t)$:

$$\sigma_x(t) = \sigma[X(t)] = \sqrt{D_x(t)}. \quad (1.2.16)$$

Размерность функции $\sigma_x(t)$ равна размерности с. п. $X(t)$.

Введенные нами характеристики с. п. $X(t)$: м.о. $m_x(t)$, дисперсия $D_x(t)$ и с. к. о. $\sigma_x(t)$ — являются весьма важными, но отнюдь не исчерпывающими, так как определяются только одномерным законом распределения. Например, у с. п. $X_1(t)$ и $X_2(t)$, изображенных на рис. 1.2.7 и 1.2.8, примерно одинаковые

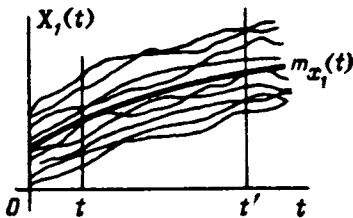


Рис. 1.2.7

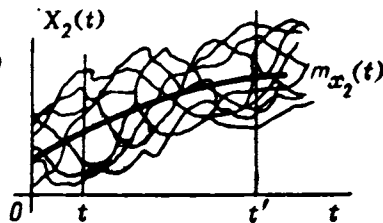


Рис. 1.2.8

м.о. и дисперсии: $m_{x_1}(t) \approx m_{x_2}(t)$, $D_{x_1}(t) \approx D_{x_2}(t)$. Однако внутренняя структура этих процессов резко различна. Случайный процесс $X_1(t)$ имеет плавно меняющиеся реализации, тогда как с. п. $X_2(t)$ имеет резко выраженную колебательную структуру. Для процесса $X_1(t)$ характерна большая предсказуемость реализаций: если реализация процесса $X_1(t)$ была в какой-то момент t больше его м.о. $m_{x_1}(t)$, то с большой вероятностью можно ожидать, что и ее продолжение будет лежать выше кривой $m_{x_1}(t)$. Другими словами, для с. п. $X_1(t)$ характерна сильная вероятностная зависимость между двумя его сечениями $X_1(t)$ и $X_1(t')$ (см. рис. 1.2.7).

Это утверждение не справедливо для с. п. $X_2(t)$, который характеризуется неправильными, беспорядочными колебаниями. Между его сечениями $X_2(t)$ и $X_2(t')$ (см. рис. 1.2.8) практически нет вероятностной зависимости при достаточном удалении сечений (эта вероятностная зависимость быстро уменьшается по мере увеличения разности $(t' - t)$).

Известно, что степень линейной зависимости (связи) между двумя случайными величинами X и Y оп-

ределяется их ковариацией:

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY] - m_x m_y. \quad (1.2.17)$$

Аналогичная характеристика вводится и для с. п.

Рассмотрим две с. в. — два сечения с. п. для моментов t и t' : $X(t)$ и $X(t')$. Для этих двух с. в. можно найти ковариацию (обозначим ее $K_x(t, t')$):

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M[\dot{X}(t) \dot{X}(t')] = \\ &= M[X(t) X(t')] - m_x(t) m_x(t'). \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Функция (1.2.18) называется *корреляционной функцией* с. п. $X(t)$. Повторим это определение словами: *корреляционной функцией с. п. $X(t)$ называется неслучайная функция $K_x(t, t')$ двух аргументов t и t' , которая при каждой паре значений аргументов t и t' равна ковариации соответствующих сечений случайного процесса: $X(t)$ и $X(t')$.*

Очевидно, что у с. п. $X_1(t)$ и $X_2(t)$, реализации которых изображены на рис. 1.2.7, 1.2.8, корреляционные функции различны; а именно: корреляционная функция $K_{x_1}(t, t')$ с. п. $X_1(t)$ убывает по мере увеличения разности $(t' - t)$ гораздо медленнее, чем корреляционная функция $K_{x_2}(t, t')$ с. п. $X_2(t)$.

Рассмотрим основные свойства корреляционной функции (к. ф.) $K_x(t, t')$ с. п. $X(t)$.

1. При равенстве аргументов $(t = t')$ к. ф. равна дисперсии с. п. Действительно (см. (1.2.10)),

$$K_x(t, t) = M[\dot{X}(t) \dot{X}(t)] = M[(\dot{X}(t))^2] = D_x(t). \quad (1.2.19)$$

2. Корреляционная функция $K_x(t, t')$ симметрична относительно своих аргументов:

$$K_x(t, t') = K_x(t', t). \quad (1.2.20)$$

Это свойство непосредственно вытекает из определения (1.2.18) и аналогично свойству симметричности ковариационной матрицы системы с. в. относительно главной диагонали (см. (7.8.17)*).

На рис. 1.2.9 показан вид поверхности, изображающей к. ф. $K_x(t, t')$. Поверхность $K_x(t, t')$ симметрична относительно вертикальной плоскости H ,

проходящей через биссектрису координатного угла tOt' .

Линия пересечения плоскости H с поверхностью $K_x(t, t')$ лежит не ниже плоскости tOt' , так как эта ее аппликата равна дисперсии с. п. $X(t)$: $D_x(t) = K_x(t, t)$. При $t \neq t'$ ковариация может быть как положительной, так и отрицательной, поэтому поверхность $K_x(t, t')$ может лежать как выше плоскости tOt' , так и ниже ее.

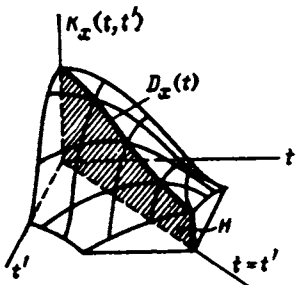


Рис. 1.2.9

3. Корреляционная функция $K_x(t, t')$ является положительно определенной, т. е.

$$\int_{(B)} \int_{(B)} a(t) a(t') K_x(t, t') dt dt' \geq 0, \quad (1.2.21)$$

где $a(t)$ — произвольная функция аргумента t , B — произвольное подмножество множества T , на котором определен с. п. $X(t)$. Это свойство аналогично свойству положительной определенности корреляционной матрицы $\|K_{ij}\|$ системы с. в. $(X_1, \dots, X_n)$ (см. 8.2.14*)

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K_{ij} \geq 0, \quad (1.2.22)$$

справедливому для любых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Последнее неравенство вытекает из условия, что дисперсия линейной функции случайных величин $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ не может быть отрицательной (см. (8.2.14)*):

$$D \left[\sum_{i=1}^n a_i X_i \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K_{ij} \geq 0.$$

При увеличении числа сечений n с. п. $X(t)$ корреляционная матрица $\|K_{ij}\|$ в пределе переходит в к. ф. $K_x(t, t')$, последовательности чисел a_i — в функцию $a(t)$, а двойная сумма (1.2.22) — в двойной интеграл.

Корреляционная функция $K_x(t, t')$ может быть как положительной, так и отрицательной, она характеризует не только степень тесноты линейной зависимости ме-

жду двумя сечениями $X(t)$ и $X(t')$ с.п., но и разброс этих сечений относительно м.о. $m_x(t)$. Тесноту линейной зависимости двух с.в. X и Y характеризует коэффициент корреляции: $r_{xy} = K_{xy}/(\sigma_x \sigma_y)$. Аналогичная характеристика вводится и для с.п. $X(t)$.

Нормированной корреляционной функцией (н.к.ф.) $r_x(t, t')$ случайного процесса $X(t)$ называется функция, полученная делением корреляционной функции $K_x(t, t')$ на произведение с.к.о. $\sigma_x(t)$, $\sigma_x(t')$:

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sigma_x(t) \sigma_x(t')} = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t) D_x(t')}}. \quad (1.2.23)$$

Свойства нормированной корреляционной функции $r_x(t, t')$ вытекают из ее определения.

1) При равенстве аргументов ($t=t'$) н.к.ф. равна единице:

$$r_x(t, t') = 1. \quad (1.2.24)$$

2) Нормированная корреляционная функция $r_x(t, t')$ симметрична относительно своих аргументов:

$$r_x(t, t') = r_x(t', t). \quad (1.2.25)$$

3) Нормированная корреляционная функция по модулю не превосходит единицу:

$$|r_x(t, t')| \leq 1. \quad (1.2.26)$$

$$4) \int \int_{(T)(T)} a(t) a(t') r_x(t, t') \sigma_x(t) \sigma_x(t') dt dt' \geq 0.$$

Чтобы найти к.ф. $K_x(t, t')$ с.п. $X(t)$ (и его н.к.ф. $r_x(t, t')$), недостаточно знать одномерный закон распределения с.п. $X(t)$; в общем случае требуется знание его двумерного закона распределения для двух сечений $X(t)$, $X(t')$. Если этот закон распределения известен, можно для любой пары значений t, t' найти корреляционный момент

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \mathbf{M}[\dot{X}(t) \dot{X}(t')] = \\ &= \mathbf{M}[(X(t) - m_x(t))(X(t') - m_x(t'))]. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Или выражая его через смешанный первый начальный момент:

$$K_x(t, t') = \mathbf{M}[X(t) X(t')] - m_x(t) m_x(t'). \quad (1.2.28)$$

Например, если известна совместная плотность распределения двух сечений с. п. $X(t): f(t, t', x, x')$, то формулы (1.2.27) и (1.2.28) примут вид

$$K_x(t, t') = \iint_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))(x' - m_x(t')) f(t, t', x, x') dx dx', \quad (1.2.29)$$

$$K_x(t, t') = \iint_{-\infty}^{\infty} x x' f(t, t', x, x') dx dx' - m_x(t) m_x(t'). \quad (1.2.30)$$

Сравнительно просто можно находить характеристики элементарных случайных функций (см. п. 1.1). Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Элементарная случайная функция (э. с. ф.) имеет вид

$$Y(t) = X e^{-t} \quad (t > 0),$$

где X — с. в., распределенная по нормальному закону с параметрами m и σ . Найти характеристики э. с. ф. $Y(t)$: м. о. $m_y(t)$, дисперсию $D_y(t)$, к. ф. $K_x(t, t')$, а также н. к. ф. $r_x(t, t')$ и п. р. $f(t, y)$.

Решение: Пользуясь правилами нахождения числовых характеристик линейных функций с. в. (см. п. 8.2*), находим:

$$m_y(t) = \mathbb{M}[X e^{-t}] = e^{-t} \mathbb{M}[X] = m e^{-t},$$

$$D_y(t) = (e^{-t})^2 \mathbb{D}[X] = \sigma^2 e^{-2t}.$$

Извлекая из $D_y(t)$ корень квадратный, находим с. к. о.:

$$\sigma_y(t) = \sigma e^{-t}.$$

Найдем к. ф. Центрированный с. п.

$$\hat{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = X e^{-t} - m e^{-t} = \hat{X} e^{-t},$$

откуда

$$K_y(t, t') = \mathbb{M}[\hat{Y}(t) \hat{Y}(t')] = \mathbb{M}[\hat{X} e^{-t} \hat{X} e^{-t'}] = \sigma^2 e^{-(t+t')}.$$

Деля к. ф. на $\sigma_y(t) \sigma_y(t')$, получим н. к. ф.

$$r_y(t, t') = K_y(t, t') / (\sigma_y(t) \sigma_y(t')) = \frac{\sigma^2 e^{-(t+t')}}{\sigma e^{-t} \sigma e^{-t'}} \equiv 1,$$

$$f(t, y) = [\sqrt{2\pi} \sigma_y(t)]^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - m_y(t)}{\sigma_y(t)} \right)^2 \right].$$

Пример 2. Э.с.ф. $Y(t)$ имеет вид

$$Y(t) = e^{-Xt} \quad (t > 0),$$

где X — с.в., распределенная по показательному закону с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0, \lambda > 0$). Найти характеристики э.с.ф.: $m_Y(t)$, $D_Y(t)$, $\sigma_Y(t)$, $K_Y(t, t')$, $r_Y(t, t')$.

Решение. Пользуясь правилами нахождения м.о. функции (см. (8.1.10)*), находим:

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-xt} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{t + \lambda} \quad (t > 0).$$

Рассмотрим произведение $Y(t) \cdot Y(t')$:

$$Y(t) \cdot Y(t') = e^{-Xt} e^{-Xt'} = e^{-X(t+t')} \quad (t > 0, t' > 0).$$

Следовательно,

$$M[Y(t)Y(t')] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x(t+t')} f(x) dx = \frac{\lambda}{t + t' + \lambda}.$$

откуда к.ф. будет равна

$$K_Y(t, t') = M[Y(t)Y(t')] - m_Y(t)m_Y(t') = \\ = \frac{\lambda t t'}{(t + t' + \lambda)(t + \lambda)(t' + \lambda)}.$$

Найдем дисперсию и с.к.о.

$$D_Y(t) = K_Y(t, t) = \frac{\lambda^2}{(2t + \lambda)(t + \lambda)^2} \quad (t > 0),$$

$$\sigma_Y(t) = \frac{t}{t + \lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{2t + \lambda}} \quad (t > 0).$$

Следовательно, н.к.ф.

$$r_Y(t, t') = \frac{K_Y(t, t')}{\sigma_Y(t)\sigma_Y(t')} = \frac{\sqrt{2t + \lambda} \cdot \sqrt{2t' + \lambda}}{t' + t + \lambda}. \quad (1.2.31)$$

Можно убедиться в том, что $r_Y(t, t) = 1$, $|r_Y(t, t')| < 1$ ($t > 0, t' > 0$).

Пример 3. Э.с.ф. имеет вид

$$Y(t) = aX + t,$$

где X — с.в., распределенная по нормальному закону с параметрами m, σ ; a — неслучайная величина. Найти характеристики э.с.ф. $Y(t)$.

Решение. $m_y(t) = aM[X] + t = am + t$, $\dot{Y}(t) = aX + t - am - t = a(X - m) = a\dot{X}$, $K_y(t, t') = M[\dot{Y}(t)\dot{Y}(t')] = M[a\dot{X} \cdot a\dot{X}] = a^2\sigma^2$, $D_y(t) = K_y(t, t) = a^2\sigma^2$, $\sigma_y(t) = |a|\sigma$, $r_y(t, t') = 1$.

Пример 4. Э.с.ф. $Y(t)$ имеет вид

$$Y(t) = Xt + a,$$

где X — с.в., распределенная по закону равномерной плотности на участке (α, β) , a — неслучайная величина. Найти характеристики э.с.ф. $Y(t)$.

Решение. $m_y(t) = M[Xt + a] = m_x t + a$, где $m_x = (\alpha + \beta)/2$. $\dot{Y}(t) = Xt + a - m_x t - a = \dot{X}t$, $K_y(t, t') = M[\dot{Y}(t)\dot{Y}(t')] = M[\dot{X}t\dot{X}t'] = D_x t t'$, где $D_x = (\alpha - \beta)^2/12$, $D_y(t) = K_y(t, t) = D_x t^2$, $\sigma_y(t) = t\sqrt{D_x}$, $r_y(t, t') = \frac{t t' D_x}{t\sqrt{D_x} t'\sqrt{D_x}} = 1$ ($t, t' > 0$).

Пример 5. Э.с.ф. $Y(t)$ имеет вид

$$Y(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t,$$

где U, V — некоррелированные с.в. с характеристиками $m_u = m_v = 0$, $\sigma_u = \sigma_v = \sigma$, ω — неслучайная величина. Найти характеристики э.с.ф. $Y(t)$.

Решение. $m_y(t) = m_u \cos \omega t + m_v \sin \omega t = 0$, $\dot{Y}(t) = -Y(t)$, $K_y(t, t') = M[(U \cos \omega t + V \sin \omega t)(U \cos \omega t' + V \sin \omega t')] = M[U^2 \cos \omega t \cos \omega t' + UV (\sin \omega t \cos \omega t' + \cos \omega t \sin \omega t') + V^2 \sin \omega t \sin \omega t']$.

По условию примера $M[U \cdot V] = K_{uv} = 0$, откуда $K_y(t, t') = M[U^2] \cos \omega t \cos \omega t' + M[V^2] \sin \omega t \sin \omega t' = \sigma^2 \cos \omega(t - t')$,

$D_y(t) = K_y(t, t) = \sigma^2 \cos \omega(t - t) = \sigma^2$, $\sigma_y(t) = \sigma$, $r_y(t, t') = K_y(t, t')/(\sigma_y(t) \sigma_y(t')) = \cos \omega(t - t')$. (1.2.32)

Пример 6. Э.с.ф. $Y(t)$ имеет вид

$$Y(t) = We^{-\omega t} \quad (t > 0),$$

где с.в. W имеет характеристики m_w и σ_w ; с.в. U распределена равномерно в интервале $(0, a)$ ($a > 0$); с.в.

W и U независимы. Найти характеристики э.с.ф. $Y(t)$.

Решение. Обозначим $e^{-Ut} = Z(t)$. Принимая во внимание, что с.в. U распределена в интервале $(0, a)$ с постоянной плотностью $1/a$, получим

$$\begin{aligned} m_z(t) &= M[Z(t)] = M[e^{-Ut}] = \frac{1}{a} \int_0^a e^{-ut} du = \\ &= (1 - e^{-at})/(at) \quad (t > 0), \\ m_y(t) &= M[W e^{-Ut}] = M[W] \cdot M[e^{-Ut}] = \\ &= m_w (1 - e^{-at})/(at) \quad (t > 0). \end{aligned}$$

Найдем к.ф.

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[(WZ(t) - m_w m_z(t))(WZ(t') - m_w m_z(t'))] = \\ &= M[W^2 Z(t) Z(t') - WZ(t') m_w m_z(t) - \\ &\quad - WZ(t) m_w m_z(t') + m_w^2 m_z(t) m_z(t')] = \\ &= (\sigma_w^2 + m_w^2) M[Z(t) Z(t')] - m_w^2 m_z(t) m_z(t'). \end{aligned}$$

По условию:

$$\begin{aligned} M[Z(t) Z(t')] &= M[e^{-Ut} \cdot e^{-Ut'}] = \\ &= M[e^{-U(t+t')}] = \frac{1 - e^{-a(t+t')}}{a(t+t')}. \end{aligned} \quad (1.2.33)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= (\sigma_w^2 + m_w^2) \frac{1 - e^{-a(t+t')}}{a(t+t')} - \\ &\quad - m_w^2 \frac{(1 - e^{-at})(1 - e^{-at'})}{a^2 t t'}, \end{aligned} \quad (1.2.34)$$

откуда

$$\begin{aligned} D_y(t) &= K_y(t, t) = (\sigma_w^2 + m_w^2) \frac{1 - e^{-2at}}{2at} - \\ &\quad - m_w^2 \frac{(1 - e^{-at})^2}{a^2 t^2} \quad (t > 0). \end{aligned}$$

Пример 7. Найти характеристики э.с.ф.

$$Y(t) = V \cos(\psi t - \Theta),$$

где V и Θ независимые с.в.; с.в. V имеет характеристики m_v и σ_v ; с.в. Θ распределена равномерно в интервале $(0, 2\pi)$; ψ — неслучайный параметр.

Решение. Представим э. с. ф. в виде

$$Y(t) = V \cos(\psi t - \Theta) = V \cos \Theta \cos \psi t + V \sin \Theta \sin \psi t.$$

Найдем числовые характеристики следующих функций случайной величины Θ , распределенной равномерно в интервале $(0, 2\pi)$:

$$M[\cos \Theta] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta = 0,$$

$$M[\sin \Theta] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta = 0,$$

$$\begin{aligned} D[\cos \Theta] = M[\cos^2 \Theta] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{2} = D[\sin \Theta]; \quad M[\sin \Theta \cos \Theta] = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание независимость с. в. V и Θ , получим:

$$m_y(t) = M[V \cos \Theta \cos \psi t + V \sin \Theta \sin \psi t] = 0, \quad (1.2.35)$$

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= M[(V \cos \Theta \cos \psi t + V \sin \Theta \sin \psi t) \times \\ &\quad \times (V \cos \Theta \cos \psi t' + V \sin \Theta \sin \psi t')] = \\ &= M[V^2] \{M[\cos^2 \Theta] \cos \psi t \cos \psi t' + \\ &\quad + M[\sin \Theta \cos \Theta] \sin \psi t \cos \psi t' + M[\cos \Theta \sin \Theta] \times \\ &\quad \times \cos \psi t \sin \psi t' + M[\sin^2 \Theta] \sin \psi t \sin \psi t'\} = \\ &= (\sigma_v^2 + m_v^2) \cos \psi(t - t')/2, \quad (1.2.36) \end{aligned}$$

$$D_y(t) = K_y(t, t) = (\sigma_v^2 + m_v^2)/2, \quad r_y(t, t') = \cos \psi(t - t'). \quad (1.2.37)$$

Если с. в. V подчинена закону Рэлея с параметром σ (см. (7.9.26)*), то $(\sigma_v^2 + m_v^2)/2 = \sigma^2$ (см. (7.9.27)* и (7.9.29)*) и $m_y(t) = 0$, $K_y(t, t') = \sigma^2 \cos \psi(t - t')$, $D_y(t) = \sigma^2$, $r_y(t, t') = \cos \psi(t - t')$.

Таким образом, э. с. ф. $Y(t) = V \cos(\psi t - \Theta)$ имеет постоянные м. о. и дисперсию (равные $m_y(t) = 0$, $D_y(t) = \frac{\sigma_v^2 + m_v^2}{2}$), а к. ф. зависит только от разности аргументов t и t' , т. е. от расстояния по времени

между сечениями с. п. Обратим особое внимание на то, что последнее утверждение не зависит от закона распределения с. в. V — амплитуды колебаний.

Случайный процесс $X(t)$, у которого м. о. постоянно ($m_x(t) = \text{const}$), а к. ф. зависит только от разности аргументов ($K_x(t, t') = K_x(t - t') = k_x(\tau)$, где $\tau = t' - t$), будем называть *стационарным*, точнее, *стационарным в широком смысле* (подробнее см. гл. 7).

Пример 8. Найти одномерный закон распределения э. с. ф.

$$Y(t) = Vt + a,$$

где V — случайная величина, распределенная нормально с параметрами m_v , σ_v .

Решение. Так как с. в. V распределена нормально, то для любого фиксированного момента времени t с. в. $Y(t)$ будет тоже распределена нормально (как линейная функция нормально распределенной с. в. V) с характеристиками $m_y(t) = m_v t + a$, $\sigma_y(t) = \sigma_v |t|$. Одномерный закон распределения э. с. ф. $Y(t)$ нормален и имеет вид

$$f(t, x) = \frac{1}{\sigma_v |t| \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_v t - a}{\sigma_v |t|} \right)^2 \right\}.$$

Пример 9. Найти одномерный закон распределения э. с. ф.

$$Y(t) = V \cos(\psi t - \Theta),$$

где с. в. V и Θ независимы; с. в. V распределена нормально с характеристиками m_v и σ_v , ψ — неслучайный параметр, с. в. Θ распределена равномерно в интервале $(0, 2\pi)$.

Решение. Для нахождения закона распределения сечения э. с. ф. $Y(t)$ воспользуемся интегральной формулой полной вероятности (см. (8.1.26)⁴). Рассмотрим гипотезу, состоящую в том, что с. в. Θ попадает на элементарный участок $(\theta, \theta + d\theta)$. Так как с. в. Θ распределена равномерно в интервале $(0, 2\pi)$, то вероятность этой гипотезы равна отношению длины элементарного участка $d\theta$ к длине всего участка 2π :

$$P\{\Theta \in (\theta, \theta + d\theta)\} \approx \frac{d\theta}{2\pi} \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

Для фиксированного момента времени t , в предположении, что указанная гипотеза имела место, с. в. $Y_{\Phi}(t) = V \cos(\psi t - \Theta)$ будет иметь нормальное распределение, так как является линейной функцией нормально распределенной с. в. с условными характеристиками

$$\begin{aligned} M[Y(t) | \Theta = \theta] &= m_v \cos(\psi t - \theta), \\ \sigma[Y(t) | \Theta = \theta] &= \sigma_v |\cos(\psi t - \theta)|, \end{aligned}$$

откуда

$$f_y(t, x | \Theta = \theta) = \frac{\exp \left\{ -\frac{(x - m_v \cos(\psi t - \theta))^2}{2\sigma_v^2 \cos^2(\psi t - \theta)} \right\}}{\sqrt{2\pi} \sigma_v |\cos(\psi t - \theta)|}.$$

Следовательно, безусловная одномерная плотность распределения э. с. ф. $Y(t)$ будет

$$f_y(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_y(t, x | \Theta = \theta) d\theta.$$

Отметим, что полученный закон распределения не является нормальным.

Пример 10. Найти одномерный и двумерный законы распределения э. с. ф.

$$Y(t) = X \cos(\psi t - \Theta).$$

Случайная величина X распределена по закону Рэлея с параметром σ (см. (7.9.26)*), ее п. р. будет

$$g(x) = \frac{x e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sigma^2} \quad (x > 0).$$

Случайная величина Θ распределена равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Случайные величины X и Θ независимы. Величина ψ неслучайна.

Решение. Запишем э. с. ф. $Y(t)$ в виде

$$Y(t) = X \cos \Theta \cos \psi t + X \sin \Theta \sin \psi t.$$

Обозначим $X \cos \Theta = V$, $X \sin \Theta = U$. Найдем закон распределения с. в. U , для чего рассмотрим гипотезу, состоящую в том, что с. в. X попала на элементарный участок dx , примыкающий к x : $X \in (x, x + dx)$. Вероятность этой гипотезы $P\{X \in (x, x + dx)\} \approx g(x) dx$. В предположении, что эта гипотеза имела место, найдем условную плотность распределения с. в. U :

$f_u(u|x)$. Нетрудно убедиться в том, что $f_u(u|x) = 1/(\pi\sqrt{x^2 - u^2})$ ($|u| < x$); это совпадает с плотностью распределения с. в. $x \sin \Theta$. Тогда безусловная п. р. будет определяться по интегральной формуле полной вероятности (см. (8.1.26)*)

$$\begin{aligned} f_u(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_u(u|x) g(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi\sqrt{x^2 - u^2}} \frac{x e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sigma^2} dx = \\ &= \left| \frac{x^2 - u^2 - y^2}{x dx - y dy} \right| = \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-(y^2 + u^2)/(2\sigma^2)\} y dy}{\pi y \sigma^2} = \\ &= \frac{2e^{-u^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}\sigma} dy = \frac{e^{-u^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi}\sigma}. \end{aligned}$$

так как последний интеграл равен 1/2 (как интеграл от нормальной п. р. с параметрами $m=0$ и σ , взятый по области положительного значения аргумента).

Следовательно, с. в. U распределена по нормальному закону с параметрами $m_u=0$, $\sigma_u=\sigma$. С помощью такого же приема можно показать, что с. в. V тоже распределена нормально с параметрами $m_v=0$, $\sigma_v=\sigma$. (Можно доказать, что совместное распределение величин U , V тоже нормально.)

Случайные величины V и U не коррелированы. Действительно, так как случайные величины X , Θ независимы, то

$$\begin{aligned} K_{uv} &= M[UV] = M[X \cos \Theta X \sin \Theta] = \\ &= M[X^2] M[\cos \Theta \sin \Theta]. \end{aligned}$$

Но в примере 7 было показано, что $M[\cos \Theta \sin \Theta] = 0$. Следовательно, $K_{uv} = 0$. Так как совместное распределение случайных величин U и V нормально и они не коррелированы, то они и независимы (см. п. 7.9*). При фиксированном значении t случайная величина $Y(t) = U \cos \psi t + V \sin \psi t$ представляет собой линейную функцию нормально распределенных независимых с. в., которая так же будет распределена нормально с параметрами $m_y(t) = M[U \cos \psi t] + M[V \sin \psi t] = 0$,

$$\begin{aligned} D_y(t) &= D[U \cos \psi t] + D[V \sin \psi t] = (\cos \psi t)^2 D[U] + \\ &+ (\sin \psi t)^2 D[V] = \cos^2 \psi t \sigma^2 + \sin^2 \psi t \sigma^2 = \sigma^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем выражение для одномерной плотности распределения э. с. ф. $Y(t)$:

$$f(t, y) = e^{-y^2/(2\sigma^2)} / (\sqrt{2\pi} \sigma).$$

Для нахождения двумерного закона распределения э. с. ф. $Y(t)$ достаточно найти к. ф. $K_y(t, t')$, которая в соответствии с формулой (1.2.36) будет равна

$$K_y(t, t') = \sigma^2 \cos \psi(t - t');$$

так как с. в. X , распределенная по закону Рэлея с параметром σ , имеет характеристики (см. (7.9.27), (7.9.30))

$$M[X] = \sigma \sqrt{\pi/2}, \quad D[X] = (4 - \pi) \sigma^2/2,$$

то

$$\{D[X] + (M[X])^2\}/2 = \sigma^2.$$

Нормированная корреляционная функция $r_y(t, t') = \cos \psi(t - t')$. Двумерный закон распределения э. с. ф. $Y(t)$ будет тоже нормальным:

$$(t, t', y, y') = \frac{1}{2\pi\sigma^2 |\sin \psi(t - t')|} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 \sin^2 \psi(t - t')} [y^2 - 2 \cos \psi(t - t') yy' + (y')^2] \right\}. \blacktriangleright$$

До сих пор в данном пункте мы рассматривали только характеристики одного (скалярного) с. п. $X(t)$. Рассмотрим теперь векторный с. п., у которого имеется k составляющих:

$$\vec{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)\}. \quad (1.2.38)$$

Пусть с. п. $X_i(t)$ имеет характеристики $m_i(t)$ и $K_i(t, t')$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Эти характеристики в какой-то степени описывают поведение только отдельного с. п. $X_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) и не определяют «взаимных характеристик», зависимости между составляющими векторного с. п. $\vec{X}(t)$. В качестве такой характеристики рассматривается *взаимная корреляционная функция* $R_{ij}(t, t')$ двух случайных (скалярных) процессов: $X_i(t)$ и $X_j(t')$:

$$R_{ij}(t, t') = M[\vec{X}_i(t) \vec{X}_j(t')]. \quad (1.2.39)$$

Таким образом, взаимной корреляционной функцией $R_{ij}(t, t')$ двух случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t')$ называется неслучайная функция двух аргументов t и t' , которая при каждой паре значений t, t' равна ковариации двух сечений случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t')$. Эти сечения на рис. 1.2.10 изображены условно точкой (1) и точкой (2).

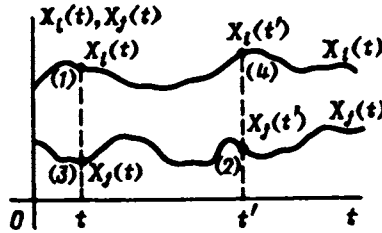


Рис. 1.2.10

Из определения следуют свойства взаимной корреляционной функции (в. к. ф.):

1. Взаимная корреляционная функция $R_{ij}(t, t') = M[\dot{X}_i(t) \dot{X}_j(t')]$ в общем случае не равна в. к. ф. $R_{ij}(t', t) = M[\dot{X}_i(t') \dot{X}_j(t)]$, так как ковариация между сечениями $X_i(t)$ и $X_j(t')$ (точки (1) и (2) на рис. 1.2.10) в общем случае не равна ковариации между сечениями $X_i(t')$ и $X_j(t)$ (точки (4) и (3) на рис. 1.2.10):

$$R_{ij}(t, t') \neq R_{ij}(t', t). \quad (1.2.40)$$

2. При одновременной перемене мест индексов и аргументов в. к. ф. не меняется:

$$R_{ij}(t, t') = R_{ji}(t', t).$$

Действительно,

$$R_{ij}(t, t') = M[\dot{X}_i(t) \dot{X}_j(t')] = M[\dot{X}_j(t') \dot{X}_i(t)] = R_{ji}(t', t). \quad (1.2.41)$$

3. При равенстве индексов $j = i$ в. к. ф. равна корреляционной функции с. п. $X_i(t)$:

$$R_{ii}(t, t') = M[\dot{X}_i(t) \dot{X}_i(t')] = K_i(t, t') \quad (1.2.42)$$

(см. точки (1) и (4) на рис. 1.2.10).

Нормированная взаимная корреляционная функция определяется по формуле

$$r_{ij}(t, t') = \frac{R_{ij}(t, t')}{\sigma_i(t) \sigma_j(t')}. \quad (1.2.43)$$

где $\sigma_i(t) = \sqrt{D_i(t)} = \sqrt{K_i(t, t)}$ — с. к. о. случайного процесса $X_i(t)$; $\sigma_j(t) = \sqrt{D_j(t)} = \sqrt{K_j(t, t)}$ — с. к. о. случайного процесса $X_j(t)$. Из свойств (1.2.41) — (1.2.43) вытекают свойства нормированной взаимной корреляционной функции

$$\begin{aligned} 1. \quad & r_{ij}(t, t') = r_{ji}(t', t). \\ 2. \quad & r_{ii}(t, t') = r_i(t, t'). \end{aligned} \quad (1.2.44)$$

Итак, в качестве характеристик векторного с. п. $\vec{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)\}$ рассматриваются:

1. Математическое ожидание векторного с. п. — неслучайный вектор, зависящий от t :

$$\vec{m}_x(t) = \{m_1(t), m_2(t), \dots, m_i(t), \dots, m_k(t)\}, \quad (1.2.45)$$

составляющие которого равны м. о. соответствующих с. п.

$$m_i(t) = M[X_i(t)] \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (1.2.46)$$

2. Квадратная матрица (размерности $k \times k$) взаимных корреляционных функций векторного с. п. $\vec{X}(t)$

$$\begin{aligned} \|R_{ij}(t, t')\| = \\ = \begin{bmatrix} R_{11}(t, t') & R_{12}(t, t') & \dots & R_{1j}(t, t') & \dots & R_{1k}(t, t') \\ R_{21}(t, t') & R_{22}(t, t') & \dots & R_{2j}(t, t') & \dots & R_{2k}(t, t') \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{i1}(t, t') & R_{i2}(t, t') & \dots & R_{ij}(t, t') & \dots & R_{ik}(t, t') \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1}(t, t') & R_{k2}(t, t') & \dots & R_{kj}(t, t') & \dots & R_{kk}(t, t') \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2.47)$$

Элемент этой матрицы — $R_{ij}(t, t')$ определяется формулой (1.2.39). В общем случае матрица (1.2.47) не симметрична, т. е. $R_{ij}(t, t') \neq R_{ji}(t, t')$. По главной диагонали матрицы (1.2.47) стоят k корреляционных функций соответствующих случайных процессов:

$$R_{ii}(t, t') = K_i(t, t') = M[\dot{X}_i(t) \dot{X}_i(t')]. \quad (1.2.48)$$

Случайные процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ называются *некоррелированными*, если их в. к. ф. $R_{ij}(t, t')$ равна нулю при любых значениях аргументов t, t' для $i \neq j$.

Векторный случайный процесс $\vec{X}(t)$ называется *процессом с некоррелированными составляющими*, если матрица в. к. ф. является диагональной, т. е. $R_{ij}(t, t') = 0$ при $i \neq j$.

ПОТОКИ СОБЫТИЙ, ИХ СВОЙСТВА И КЛАССИФИКАЦИЯ

2.1. Потоки событий

Одним из важных понятий теории случайных процессов является понятие потока событий.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на телефонной станции, поток автомашин, подъезжающих на заправочную станцию, поток заболеваний гриппом в зимний сезон, поток забитых шайб при игре в хоккей, поток заявок на ремонт, поступающих в ремонтную организацию, поток отказов (сбоев) ЭВМ в ходе ее работы, поток электронов, вылетающих с катода радиолампы, поток электрических импульсов, поступающих от мозга в мышцу для ее возбуждения, и т. п.

События, образующие поток, в общем случае могут быть и неоднородными, например если в потоке автомашин, прибывающих на заправку, различать легковые и грузовые.

Заметим, что термин «событие» в понятии *поток событий* совершенно отличен по смыслу от широко применяемого в теории вероятностей понятия *случайное событие* (см. гл. 1*), под которым разумеется «всякий факт, который в опыте со случайным исходом может произойти или не произойти». О событиях, образующих поток, так говорить нельзя. В частности, не имеет смысла говорить о вероятностях событий, образующих поток (например, о вероятности вызова на телефонной станции; ясно, что рано или поздно вызов придет, и не один).

С потоком событий можно связывать различные случайные события, например: $A = \{\text{в течение времени от } t_0 \text{ до } t_0 + \tau \text{ придет хотя бы один вызов на телефонную станцию}\}$ или $B = \{\text{в течение того же времени придет ровно два вызова на телефонную}$

станцию} и т. д. Вероятности таких событий можно вычислять.

«Поток событий» представляет собой в общем случае просто последовательность случайных точек Θ_1 ,

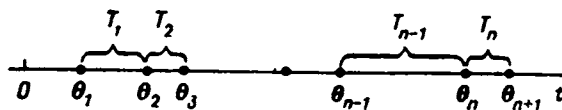


Рис. 2.1.1

$\Theta_2, \dots, \Theta_n, \dots$ на оси времени $0t$ (рис. 2.1.1) с разделяющими их случайными интервалами $T_1, T_2, \dots, \dots, T_{n-1}, T_n, \dots$, так что

$$T_1 = \Theta_2 - \Theta_1, \quad T_2 = \Theta_3 - \Theta_2, \quad \dots, \quad T_n = \Theta_{n+1} - \Theta_n.$$

Потоки событий различаются между собой по их внутренней структуре: по законам распределения интервалов $T_1, T_2, \dots$ между событиями, их взаимной зависимости или независимости и т. д.

С потоком однородных событий можно связать случайный процесс их накопления. Обозначим $X(t)$ число событий потока, появившихся до момента времени t . Каждая реализация $x_i(t)$ с.п. $X(t)$ представляет собой ступенчатую

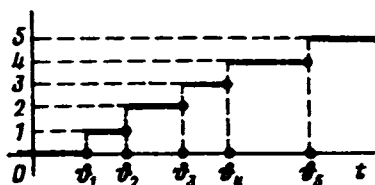


Рис. 2.1.2

ломаную линию, подсакивающую на единицу в момент появления очередного события и сохраняющую свое значение до появления следующего события в потоке (рис. 2.1.2); здесь моменты

появления событий уже не случайны и обозначены $\theta_1, \theta_2, \dots$. Для определенности будем считать, что в точках разрыва процесс $X(t)$ и его реализация $x_i(t)$ сохраняют значение, которое было у них слева от точки разрыва (про такую функцию говорят, что она непрерывна слева). На рис. 2.1.2 значения, принимаемые функцией $x_i(t)$ в точках разрыва, отмечены точками.

С первого взгляда наиболее простым представляется поток событий, в котором интервалы между

событиями строго одинаковы и равны определенной неслучайной величине τ (рис. 2.1.3). Такой поток событий называется *регулярным*. Примеры регулярных (вернее, практически регулярных) потоков представляют собой поток изменений минутной цифры на вокзальных электронных часах, поток изменений состояний ЭВМ, определяемый тактом ее работы, и т. п.

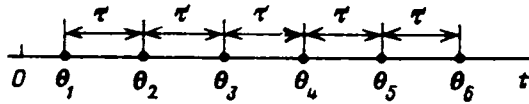


Рис. 2.1.3

Регулярный поток событий довольно редко встречается на практике; он представляет определенный интерес как предельный случай для других потоков (см. далее п. 2.3). Однако несмотря на свою видимую простоту, регулярный поток не имеет преимуществ при математическом анализе, так как намного уступает по простоте проведения расчетов другим типам потоков (в чем мы убедимся в дальнейшем).

В п. 5.2* в связи с законом Пуассона уже давалось понятие потока событий и формулировались некоторые их свойства. Напомним их.

1. **Ординарность.** Поток событий называется *ординарным*, если события в нем появляются поодиночке, а не «пачками» по 2, 3 и т. д. Дадим этому

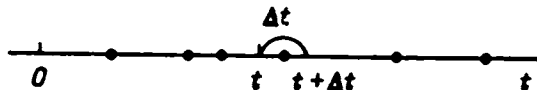


Рис. 2.1.4

свойству математическую формулировку. Рассмотрим элементарный участок Δt , примыкающий к точке t (рис. 2.1.4). Ординарность потока означает, что вероятность попадания на участок Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него ровно одного события, т. е. при $\Delta t \rightarrow 0$ эта вероятность представляет собой бесконечно малую высшего порядка. Обозначим $p_1(t, \Delta t)$ вероятность попадания на участок $(t, t + \Delta t)$

ровню одного события, $p_0(t, \Delta t)$ — вероятность непадания на него ни одного события, $p_{>1}(t, \Delta t)$ — вероятность попадания на него двух или более событий. Очевидно, для любого Δt (большого или малого)

$$p_0(t, \Delta t) + p_1(t, \Delta t) + p_{>1}(t, \Delta t) = 1, \quad (2.1.1)$$

как сумма вероятностей полной группы несовместных событий. Из этих вероятностей, очевидно, при малом Δt вероятность $p_0(t, \Delta t)$ самая большая. Для ординарного потока событий вероятность $p_{>1}(t, \Delta t)$ пренебрежимо мала по сравнению с другими слагаемыми:

$$p_{>1}(t, \Delta t) = o(p_1(t, \Delta t)). \quad (2.1.2)$$

В математике символом $o(x)$ обозначается бесконечно малая высшего порядка по сравнению с той, которая стоит в скобках, т. е. формула (2.1.2) означает, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{>1}(t, \Delta t)}{p_1(t, \Delta t)} = 0.$$

Для ординарного потока можно пренебречь возможностью совмещения на элементарном участке Δt двух или более событий, в частности, возможностью одновременного появления двух или более событий. Примерами ординарных потоков событий могут служить поток деталей, поступающих на конвейер для сборки, поток отказов технического устройства, поток автомашин, прибывающих на станцию техобслуживания. Примером неординарного потока может служить поток пассажиров, прибывающих в лифте на данный этаж. Мы будем в дальнейшем рассматривать лишь ординарные потоки событий.

Введем новое важное понятие — интенсивность потока. Рассмотрим ординарный поток событий. Обозначим $X(t, \Delta t)$ случайное число событий, попадающих на элементарный участок $(t, t + \Delta t)$ (рис. 2.1.4). Ряд распределения этой случайной величины имеет вид

$$X(t, \Delta t): \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & \dots \\ \hline p_0(t, \Delta t) & p_1(t, \Delta t) & \dots \end{array},$$

где в столбце с проставленными многоточиями стоят сверху значения 2, 3, ..., а внизу — соответствующие им вероятности (напомним, что они пренебрежимо

малы по сравнению с $p_1(t, \Delta t)$). Найдем математическое ожидание с.в. $X(t, \Delta t)$ (будем считать, что м.о. существует). Можно написать:

$$M[X(t, \Delta t)] = 0 \cdot p_0(t, \Delta t) + 1 \cdot p_1(t, \Delta t) + a p_{>1}(t, \Delta t),$$

где a — сколь угодно большая, но не стремящаяся к бесконечности при $\Delta t \rightarrow 0$ величина. Найдем предел отношения $M[X(t, \Delta t)]$ к длине участка Δt :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[X(t, \Delta t)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{p_1(t, \Delta t)}{\Delta t} + \frac{a p_{>1}(t, \Delta t)}{\Delta t} \right\}.$$

Так как при $\Delta t \rightarrow 0$ вероятность $p_{>1}(t, \Delta t)$ стремится к нулю быстрее, чем $p_1(t, \Delta t)$, вторым слагаемым под знаком предела можно пренебречь, откуда

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[X(t, \Delta t)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_1(t, \Delta t)}{\Delta t}. \quad (2.1.3)$$

Если этот предел существует (а в инженерных приложениях естественно предположить, что это именно так), то он называется *интенсивностью (плотностью)* ординарного потока событий в момент t ,

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[X(t, \Delta t)]}{\Delta t}. \quad (2.1.4)$$

Физический смысл интенсивности $\lambda(t)$ потока событий — это среднее число событий, приходящееся на единицу времени, для элементарного участка Δt , примыкающего к t .

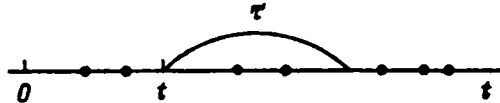


Рис. 2.1.5

Интенсивность потока событий $\lambda(t)$ может быть любой неотрицательной функцией времени: $\lambda(t) \geq 0$ и имеет размерность $\left[\frac{1}{\text{время}} \right]$.

Очевидно, среднее число событий ординарного потока, приходящееся на интервал времени τ , примыкающий к точке t (рис. 2.1.5), равно

$$M[X(t, \tau)] = \int_t^{t+\tau} \lambda(t) dt. \quad (2.1.5)$$

В частности, при постоянной интенсивности потока

$$M[X(t, \tau)] = \int_t^{t+\tau} \lambda dt = \lambda\tau. \quad (2.1.6)$$

2. Отсутствие последействия. Поток событий называется *поток без последействия*, если для любых неперекрывающихся участков времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ (рис. 2.1.6) числа событий $X_1 = X(t_1, \tau_1)$,

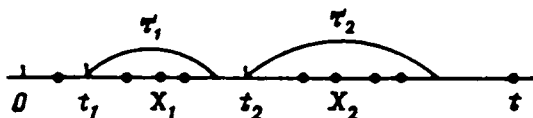


Рис. 2.1.6

$X_2 = X(t_2, \tau_2), \dots, X_n = X(t_n, \tau_n)$, попадающих на эти участки, представляют собой независимые случайные величины, т. е. вероятность попадания любого числа

событий на один из участков не зависит от того, сколько их попало на другие (см. п. 7.5*).

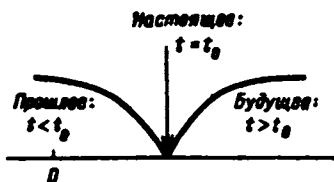


Рис. 2.1.7

Отсутствие последействия в потоке означает, что для любого момента времени t_0 будущие моменты наступления событий потока (при $t > t_0$)

не зависят от того, в какие моменты наступали события в прошлом (при $t < t_0$, см. рис. 2.1.7). В п. 5.2* было доказано, что если поток без последействия, ординарен и имеет постоянную интенсивность λ , то число событий $X(t, \tau)$, попадающих на участок времени длины τ (рис. 2.1.8), имеет распределение Пуассона с параметром $a = \lambda\tau$:

$$P\{X(t, \tau) = k\} = a^k e^{-a} / k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.1.7)$$

Можно доказать (см. [8]), что и при непостоянной интенсивности потока $\lambda(t)$ число событий $X(t, \tau)$, попадающих на участок времени τ , примыкающий к моменту t , также распределено по закону Пуассона (2.1.7), но в нем параметр a зависит не только от

длины участка τ , но и от того, где этот участок расположен:

$$a = a(t, \tau) = \int_t^{t+\tau} \lambda(t) dt, \quad (2.1.8)$$

так что распределение случайной величины $X(t, \tau)$ — числа событий на участке $(t, t + \tau)$ — имеет вид

$$P\{X(t, \tau) = k\} = a(t, \tau)^k e^{-a(t, \tau)} / k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.1.9)$$

Ординарный поток событий, в котором отсутствует последствие, называется *пуассоновским потоком*. Его связь с распределением Пуассона ясна из формул

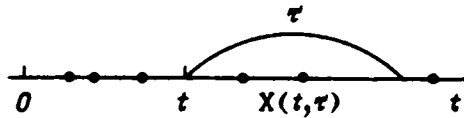


Рис. 2.1.8

(2.1.7), (2.1.9). В дальнейшем, имея дело с пуассоновскими потоками, мы часто будем встречаться с пуассоновскими распределениями тех или других с.в.

3. *Стационарность. Поток событий называется стационарным, если все его вероятностные характеристики не меняются со временем.* В частности, для стационарного потока событий вероятность попадания того или иного числа событий на участок длины τ

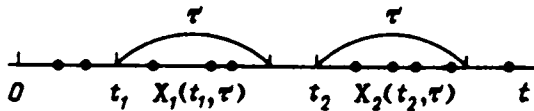


Рис. 2.1.9

зависит только от длины этого участка и не зависит от того, где именно на оси времени $0t$ этот участок расположен. Это значит, что числа событий $X_1(t_1, \tau)$ и $X_2(t_2, \tau)$, попадающих на два участка *одинаковой* длины τ (рис. 2.1.9), будут иметь одинаковое распределение. Отсюда следует, в частности, что для стационарного потока событий его интенсивность $\lambda(t)$ постоянна:

$$\lambda(t) = \lambda = \text{const.}$$

Поток событий, обладающий всеми тремя свойствами, т. е. ординарный, стационарный и без последствия, называется *простейшим* (или *стационарным пуассоновским*) *поток*ом. Для простейшего потока событий вероятность того, что на участке времени длины t наступит ровно k событий, определяется по формуле (2.1.7), где $a = \lambda t$, λ — интенсивность потока.

Простейшим этот поток назван потому, что исследование систем, находящихся под воздействием простейших потоков, проводится самым простым образом, в чем мы убедимся в дальнейшем (см. гл. 4 и 5).

Следующей ступенью сложности по сравнению с простейшим является *поток с ограниченным последствием*. Будем так называть поток, у которого случайные интервалы $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ (рис. 2.1.1) между соседними по времени событиями представляют собой независимые случайные величины. Иногда поток с ограниченным последствием называют рекуррентным; это связано с тем, что при его моделировании применяется рекуррентная (последовательная) процедура: сначала разыгрывается величина T_1 , затем T_2 и т. д.

Стационарный поток с ограниченным последствием называется *поток*ом Пальма. Для такого потока интервалы $T_1, T_2, \dots$ между событиями представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных с. в.

Докажем, что простейший (стационарный пуассоновский) поток является потоком Пальма. Найдем

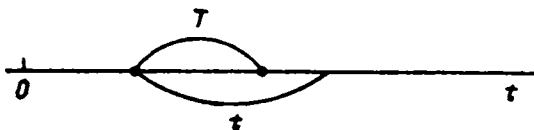


Рис. 2.1.10

закон распределения интервала времени T между любыми двумя соседними событиями (рис. 2.1.10). Найдем сначала функцию распределения $F(t)$ с. в. T . По определению (см. п. 3.2*)

$$F(t) = P\{T < t\}. \quad (2.1.10)$$

Для выполнения условия (2.1.10) надо, чтобы интервал T принял значение меньшее, чем t (как показано на рис. 2.1.10); а для этого нужно, чтобы на участке времени длиной t появилось хотя бы одно событие потока. Введем в рассмотрение событие $A = \{\text{хотя бы одно событие наступило на участке } t\}$. Найдем вероятность противоположного события: $\bar{A} = \{\text{ни одного события не наступило на участке } t\}$. Но мы знаем, что число событий $X(t)$, попадающих на интервал t (где бы он ни находился), распределен по закону Пуассона (2.1.7), т. е. $P\{X(t) = k\} = a^k e^{-a}/k!$, где $a = \lambda t$, т. е.

$$P\{X(t) = k\} = (\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.1.11)$$

Полагая в формуле (2.1.11) $k = 0$ и учитывая, что $0! = 1$, получим $P(\bar{A}) = P\{X(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$, откуда $F(t) = P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - e^{-\lambda t}$. Итак, ф.р. интервала T между соседними событиями в простейшем потоке равна

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (2.1.12)$$

Дифференцируя (2.1.12), найдем плотность распределения с. в.

$$f(t) = dF(t)/dt = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (2.1.13)$$

Это распределение нам уже известно из книги [6], оно называется *показательным* распределением (см. п. 6.2*). График плотности (2.1.13) дан на рис. 2.1.11. Мы убедились, что интервалы времени $T_1, T_2, \dots$ между соседними событиями простейшего потока распределены одинаково с плотностью (2.1.13). Независимость величин $T_1, T_2, \dots$ следует из отсутствия последовательности в простейшем потоке.

Таким образом, интервалы времени между соседними событиями простейшего потока распределены одинаково по показательному закону (2.1.13) и независимы между собой; значит, простейший поток представляет собой поток Пальма. Поток Пальма, отличный от простейшего, получится, если интервал между соседними событиями представляет собой неотрицательную случайную величину с отличным от показательного

распределением (например, представленном на рис. 2.1.12). Последствие в таком потоке имеется, потому что условный закон распределения оставшейся части времени до появления ближайшего следующего

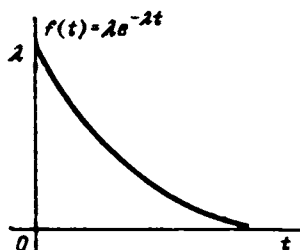


Рис. 2.1.11

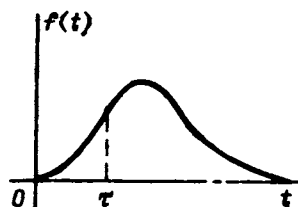


Рис. 2.1.12

события зависит от того, какое время τ уже прошло; в этом мы убедимся в дальнейшем.

2.2. Некоторые свойства потоков Пальма

Рассмотрим на оси $0t$ поток Пальма, у которого интервалы между соседними событиями представляют собой независимые, непрерывные с.в. $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$, распределенные одинаково с ф.р. $F(t)$ (и, значит, с п.р. $f(t) = F'(t)$).

Предположим, что на ось $0t$ случайным образом (никак не связанным с потоком событий) падает точка τ (рис. 2.2.1). Например, пассажир выходит на

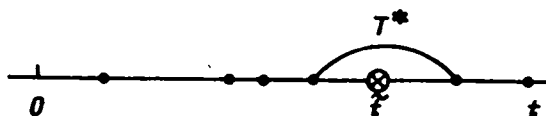


Рис. 2.2.1

автобусную остановку в момент времени τ , никак не связанный с расписанием, а моменты прихода автобусов на остановку образуют поток Пальма, где интервал T между соседними событиями — непрерывная случайная величина с ф.р. $F(t)$ и плотностью $f(t) = F'(t)$. Другой пример: работает какой-то элемент технического устройства (скажем, большая интегральная схема), при отказе элемент мгновенно заменяется

другим путем переключения. Поток отказов представляет собой поток Пальма; осмотр элемента и снятие его параметров производится в случайный момент $\bar{t}$, никак не связанный с потоком отказов. Еще пример: промежутки времени исправной работы ЭВМ, если наложить их на ось времени непосредственно друг за другом (исключая времена ликвидации неисправности или считая, что неисправность ликвидируется мгновенно с помощью программных средств), образуют поток Пальма; решение задачи на ЭВМ начинается в момент $\bar{t}$, никак не связанный с потоком (в литературе случайную точку, падающую на ось времени в неожиданный момент, иногда называют «инспектором»).

Решим следующую задачу: поток событий представляет собой поток Пальма; точка $\bar{t}$ случайно падает на какой-то интервал T^* между событиями потока (рис. 2.2.1). Требуется найти закон распределения интервала T^* .

С первого взгляда может показаться, что закон распределения интервала T^* — такой же, как и закон распределения любого другого интервала T в потоке Пальма. Но это не так: тот факт, что случайная точка $\bar{t}$ попала на интервал T^* , меняет его закон распределения.

Действительно, рассмотрим простейший пример. Пусть с. в. T дискретна и имеет только два возможных значения 1 и 9, которые она принимает с вероятностью $1/2$; ряд распределения с. в. T имеет вид

$$T: \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 9 \\ \hline 1/2 & 1/2 \\ \hline \end{array} \quad (2.2.1)$$

Найдем м. о. случайной величины T : $M[T] = 1 \cdot (1/2) + 9 \cdot (1/2) = 5$.

Теперь представим себе: известно, что случайная точка попала на какой-то интервал T^* . Так как участки длиной в единицу и в 9 единиц времени на оси $0t$ встречаются с одинаковой вероятностью, то при достаточно большом общем времени наблюдения (на отрезке оси $0t$) участки длиной 9 и 1 будут встречаться примерно одинаково часто. В общей протяженности оси участки длиной 9 будут занимать долю 0,9, а участки длиной 1 — долю 0,1. Точка $\bar{t}$ падает на ось $0t$ совершенно случайно, «не разбирая», где какой

участок. Значит, с вероятностью 0,9 интервал T^* , на который попала точка $\bar{t}$, будет иметь длину 9, а с вероятностью 0,1 — длину 1. Ряд распределения с.в. T^* будет иметь вид

$$T^*: \left| \begin{array}{c|c} 1 & 9 \\ \hline 0,1 & 0,9 \end{array} \right|. \quad (2.2.2)$$

Мы видим, что ряд распределения (2.2.2) существенно отличается от (2.2.1). В частности, м.о. случайной величины T^* будет: $M[T^*] = 1 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,9 = 8,2$; оно существенно отличается от м.о. величины T , равного 5.

Этот элементарный пример убеждает нас в том, что факт попадания случайной точки $\bar{t}$ на один из интервалов между событиями потока Пальма в общем случае меняет его закон распределения.

Решим поставленную задачу в общем виде. Пусть непрерывная с.в. T — интервал между соседними событиями потока Пальма имеет п.р. $f(t)$. Найдем п.р. $f_{t^*}(t)$ того интервала T^* , на который попала случайная точка $\bar{t}$. Найдем для этого интервала элемент вероятности: $f_{t^*}(t) dt \approx P\{T^* \in (t, t + dt)\}$. Эта вероятность приближенно равна отношению суммы длин всех интервалов между событиями, длина которых заключена в элементарном промежутке $(t, t + dt)$, к общей длине τ достаточно большого участка оси Ot .

Допустим, что на этом большом участке времени уложилось всего n интервалов между событиями. Математическое ожидание числа интервалов, длина которых лежит в пределах $(t, t + dt)$, равна $nf(t)dt$, а средняя суммарная длина всех таких интервалов приближенно равна $t \cdot nf(t)dt$. Средняя же общая длина всех n интервалов на большом участке τ оси

абсцисс равна $n \cdot m_t$, где $m_t = M[T] = \int_0^{\infty} tf(t) dt$. Разделив одно на другое, получим:

$$f_{t^*}(t) dt \approx \frac{nf(t) dt}{nm_t} = \frac{tf(t)}{m_t} dt.$$

Это равенство становится точным при $\tau \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Отсюда находим

$$f_{t^*}(t) = \frac{tf(t)}{m_t} \quad (t > 0). \quad (2.2.3)$$

Найдем числовые характеристики с. в. T^* :

$$\begin{aligned} M[T^*] &= \int_0^{\infty} t f_{t^*}(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{t^2 f(t)}{m_t} dt = \\ &= \frac{M[T^2]}{m_t} = m_t + \frac{D_t}{m_t}, \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

где D_t — дисперсия с. в. T . Так как м. о. неотрицательной с. в. T всегда больше нуля, а ее дисперсия неотрицательна, то

$$M[T^*] \geq M[T] = m_t, \quad (2.2.5)$$

т. е. факт попадания случайной точки $\bar{t}$ на интервал T^* увеличивает его среднюю длину по сравнению с априорной (до получения сведений о том, что точка $\bar{t}$ попала на интервал). Неравенство (2.2.5) превращается в равенство только тогда, когда $D_t = 0$, т. е. интервал T — неслучайная величина, а поток — регулярный.

Найдем дисперсию случайной величины T^* :

$$\begin{aligned} D[T^*] &= M[(T^*)^2] - (M[T^*])^2 = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^3 f(t)}{m_t} dt - \left(m_t + \frac{D_t}{m_t}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Интеграл в формуле (2.2.6) есть не что иное, как третий начальный момент $\alpha_3[T]$ с. в. T : $\alpha_3[T] = \int_0^{\infty} t^3 f(t) dt$ см. п. 4.2*).

Итак, дисперсия интервала T^* , на который попала случайная точка $\bar{t}$, равна:

$$D[T^*] = \frac{\alpha_3[T]}{m_t} - \left(m_t + \frac{D_t}{m_t}\right)^2 = \frac{\alpha_3[T]}{m_t} - \frac{(M[T^2])^2}{m_t^2}. \quad (2.2.7)$$

Рассмотрим более подробно интервал T^* , на который попала случайная точка $\bar{t}$ (рис. 2.2.2). Эта точка делит интервал T^* на два участка: Q — от ближайшего предыдущего события до точки $\bar{t}$ и R — от точки $\bar{t}$ до ближайшего последующего события. Найдем закон распределения и числовые характеристики системы случайных величин (Q, R) . Рассмотрим гипотезу,

состоящую в том, что с.в. T^* попала на элементарный участок $(t, t + dt)$. Вероятность этой гипотезы есть элемент вероятности: $P\{T^* \in (t, t + dt)\} \approx f_{t^*}(t) dt$.

Обозначим условную плотность распределения случайной величины Q при этой гипотезе $f_q(q|t)$. Так как точка $\bar{t}$ «бросается» на ось $0t$ совершенно случайно, безотносительно к событиям потока, то при

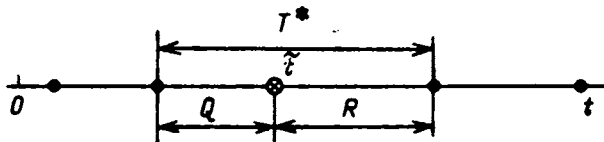


Рис. 2.2.2

этой гипотезе она будет иметь равномерное распределение на участке $(0, t)$:

$$f_q(q|t) = 1/t \quad \text{при} \quad 0 < q < t, \quad t > 0. \quad (2.2.8)$$

По интегральной формуле полной вероятности (см. (8.1.26)*) находим

$$f_q(q) = \int_0^{\infty} f_q(q|t) f_{t^*}(t) dt.$$

Но так как $f_q(q|t)$ отлична от нуля только при $q < t$, то

$$f_q(q) = \int_q^{\infty} f_{t^*}(t) dt/t \quad (q > 0).$$

Но по формуле (2.2.3) $f_{t^*}(t) = tf(t)/m_t$; следовательно,

$$f_q(q) = \int_q^{\infty} tf(t) dt/(tm_t) = \frac{1}{m_t} \int_q^{\infty} f(t) dt. \quad (2.2.9)$$

Интеграл в (2.2.9) представляет собой не что иное, как вероятность события $\{T > q\}$: $P\{T > q\} = 1 - F(q)$, так как с.в. T имеет ф.р. $F(t)$, откуда плотность распределения с.в. Q равна

$$f_q(q) = (1 - F(q))/m_t.$$

Поскольку вид п.р. не зависит от обозначения аргумента,

$$f_q(t) = \frac{1 - F(t)}{m_t}. \quad (2.2.10)$$

Рассуждая аналогично для случайной величины R , получим ту же плотность распределения

$$f_r(t) = \frac{1 - F(t)}{m_t}. \quad (2.2.11)$$

Найдем м.о. и дисперсии с.в. Q и R и их ковариацию. Из равенства

$$T^* = Q + R \quad (2.2.12)$$

(рис. 2.2.2) находим, что $M[T^*] = M[Q] + M[R]$, но с.в. Q и R распределены одинаково, следовательно, $M[Q] = M[R]$, откуда (см. (2.2.4))

$$M[Q] = M[R] = M[T^*]/2 = M[T^2]/(2m_t). \quad (2.2.13)$$

Для нахождения дисперсий $D[Q] = D[R]$ пользуемся формулой $D[Q] = M[Q^2] - (M[Q])^2$. Имеем:

$$M[Q^2] = \int_0^{\infty} t^2 f_q(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 \frac{1 - F(t)}{m_t} dt.$$

Представим $t^2 dt$ в виде $d\left(\frac{1}{3}t^3\right)$ и воспользуемся интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} M[Q^2] &= \frac{1}{3m_t} \int_0^{\infty} (1 - F(t)) d(t^3) = \\ &= \frac{1}{3m_t} \left\{ t^3 (1 - F(t)) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} t^3 F'(t) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{3m_t} \int_0^{\infty} t^3 f(t) dt = a_3[T]/(3m_t), \end{aligned}$$

так как $\lim_{t \rightarrow \infty} t^3 (1 - F(t)) = 0$, если существует третий начальный момент с.в. T . Значит,

$$D[Q] = D[R] = \frac{a_3[T]}{3m_t} - \frac{1}{4} \frac{(M[T^2])^2}{m_t^2}. \quad (2.2.14)$$

Что касается ковариации K_{qr} , то ее находим, используя формулу $D[Q + R] = D[Q] + D[R] + 2K_{qr}$, и учитывая, что $Q + R = T^*$, получим (см. (2.2.7) и (2.2.14))

$$\begin{aligned} K_{qr} &= \{D[Q + R] - D[Q] - D[R]\}/2 = D[T^*]/2 - D[Q] = \\ &= \left\{ \frac{a_3 [T]}{m_i} - \frac{(M[T^2])^2}{m_i^2} \right\} / 2 - \frac{a_3 [T]}{3m_i} + \frac{(M[T^2])^2}{4m_i^2} = \\ &= \frac{a_3 [T]}{6m_i} - \frac{(M[T^2])^2}{4m_i^2}. \quad (2.2.15) \end{aligned}$$

Найдем условный закон распределения с.в. R при условии, что с.в. Q приняла значение q . Условная функция распределения с.в. R при условии, что с.в. Q попала на элементарный интервал $(q, q + dq)$, будет:

$$\begin{aligned} F_r(r|q) &= \frac{P\{Q + R < q + r; q < Q < q + dq\}}{P\{q < Q < q + dq\}} = \\ &= \frac{\int_q^{q+r} uf(u) du dq m_i / u}{m_i (1 - F(q)) dq} = \frac{\int_q^{q+r} f(u) du}{1 - F(q)} = \frac{F(q + r) - F(q)}{1 - F(q)}. \end{aligned}$$

Следовательно, условную плотность распределения $f_r(r|q)$ найдем из выражения

$$f_r(r|q) = \frac{d}{dr} F_r(r|q) = \frac{f(q + r)}{1 - F(q)}. \quad (2.2.16)$$

Для получения выражения для условной плотности $f_q(q|r)$ достаточно поменять местами буквы r и q в выражении (2.2.16): $f_q(q|r) = f(r + q) / (1 - F(r))$.

Теперь осталось показать, что условные плотности в последних выражениях обладают необходимыми двумя свойствами:

1) $f_q(q|r) \geq 0$ (это следует из того, что $f(q + r) \geq 0$, $(1 - F(r)) \geq 0$).

$$\begin{aligned} 2) \int_0^{\infty} f_q(q|r) dq &= \frac{1}{1 - F(r)} \int_0^{\infty} f(q + r) dq = \\ &= \left(\frac{q + r = x}{dq = dx} \right) = \frac{1}{1 - F(r)} \int_r^{\infty} f(x) dx = 1. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно получить и для условной плотности $f_r(r|q)$.

Таким образом, условные законы распределения случайных величин Q и R определяются формулами (2.2.16).

С помощью аналогичного приема найдем условную плотность распределения $f_{t^*}(t|q)$ с. в. T^* при условии, что с. в. Q приняла определенное значение q :

$$f_{t^*, q}(t, q) = f_{t^*}(t) \cdot f_q(q|t) = f_q(q) \cdot f_{t^*}(t|q),$$

откуда

$$f_{t^*}(t|q) = f_{t^*}(t) \cdot f_q(q|t)/f_q(q).$$

Воспользуемся формулами (2.2.3), (2.2.8) и (2.2.10):

$$f_{t^*}(t|q) = \frac{tf(t)}{m_t} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{m_t}{1-F(q)} = \frac{f(t)}{1-F(q)} \quad \text{при } 0 < q < t. \quad (2.2.17)$$

Аналогично, имеем

$$f_{t^*}(t|r) = \frac{f(t)}{1-F(r)} \quad \text{при } 0 < r < t. \quad (2.2.18)$$

Напомним, что в формулах (2.2.16)–(2.2.18) функции $f(t)$ и $F(t)$ соответственно — плотность и функция распределения случайной величины T — интервала между событиями в потоке Пальма.

Применим выведенные формулы для распределений отрезков T^* , Q , R и их характеристик к случаю, когда поток событий — простейший с интенсивностью λ .

По формуле (2.2.3), учитывая, что $m_t = 1/\lambda$, находим плотность распределения с. в. T^* :

$$f_{t^*}(t) = t \cdot \lambda e^{-\lambda t} \cdot \lambda = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \quad (t > 0), \quad (2.2.19)$$

а это есть не что иное, как закон Эрланга 2-го порядка (см. (6.4.8)*), т. е. закон распределения суммы двух независимых с. в., распределенных по показательным законам с параметром λ . Отсюда

$$M[T^*] = 2M[T] = 2/\lambda, \quad D[T^*] = 2D[T] = 2/\lambda^2.$$

Это дает тот же результат, что формулы (2.2.4) и (2.2.7). Находим плотность $f_q(t)$ с. в. Q (такой же будет и плотность $f_r(t)$ с. в. R) по формуле (2.2.10):

$$f_q(t) = f_r(t) = [1 - (1 - e^{-\lambda t})] \cdot \lambda = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0); \quad (2.2.20)$$

следовательно, случайные величины Q и R распределены каждая по показательному закону с параметром λ . Их характеристики равны соответственно:

$$M[Q] = M[R] = 1/\lambda, \quad D[Q] = D[R] = 1/\lambda^2,$$

что согласуется с результатами расчетов по формулам (2.2.13), (2.2.14).

В силу отсутствия последействия случайные величины Q и R независимы (первая из них относится к прошлому, до момента времени t , вторая — к будущему). Покажем, что $f_q(q|r) = f_q(q) = \lambda e^{-\lambda q}$ ($q > 0$). По формуле (2.2.16) имеем

$$f_q(q|r) = f(q+r)/(1-F(r)) = \lambda e^{-\lambda q} \quad (q > 0).$$

Независимость с. в. Q и R подтверждается и тем, что по формуле (2.2.15) $K_{rr} = \frac{D[T^*]}{2} - D[Q] = \frac{2}{\lambda^2 \cdot 2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0$.

Решим более общую задачу: интервал T между последовательными событиями потока Пальма имеет распределение Эрланга k -го порядка с параметром λ (см. п. 6.4*):

$$f(t) = f^{(k)}(t) = \lambda (\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t} / (k-1)! \quad (t > 0). \quad (2.2.21)$$

Найдем п. р. и характеристики с. в. T^* , Q , R . По формуле (2.2.1) находим ($M[T] = k/\lambda = k\lambda^{-1}$):

$$f_{r^*}(t) = \frac{f^{(k)}(t)}{m_t} = \frac{t(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t} \lambda}{(k-1)! k \lambda^{-1}} = \frac{\lambda (\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \quad (2.2.22)$$

Таким образом, с. в. T^* тоже распределена по закону Эрланга, но уже $(k+1)$ -го порядка. Следовательно,

$$M[T^*] = (k+1)/\lambda, \quad D[T^*] = (k+1)/\lambda^2. \quad (2.2.23)$$

Функция распределения $F(t)$ с. в. T имеет вид (см. (6.4.10)*):

$$F(t) = F^{(k)}(t) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$$

или, пользуясь функцией $R(m, a) = \sum_{n=0}^m a^n e^{-a} / n!$:

$$F^{(k)}(t) = 1 - R(k-1, \lambda t). \quad (2.2.24)$$

По формуле (2.2.10) находим п.р. каждой из с.в. Q и R :

$$f_r^{(k)}(t) = f_q^{(k)}(t) = (1 - F^{(k)}(t))/m_t = \lambda R(k-1, \lambda t)/k. \quad (2.2.25)$$

При $k > 1$ это уже не закон Эрланга, а вероятностная смесь k законов Эрланга порядков $(1, 2, \dots, m, \dots, k)$ с вероятностями $1/k$ (см. п. 9.8*):

$$\begin{aligned} f_q^{(k)}(t) &= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \lambda P(m-1, \lambda t) = \\ &= \frac{1}{k} \left(\lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t} + \dots + \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \right). \end{aligned}$$

Математическое ожидание

$$M[Q] = M[R] = M[T^*]/2 = (k+1)/(2\lambda). \quad (2.2.26)$$

Чтобы найти $D[R] = D[Q]$ и K_{qr} по формулам (2.2.14), (2.2.15), нужно найти третий начальный момент $\alpha_3[T]$:

$$\begin{aligned} \alpha_3[T] &= \int_0^\infty t^3 \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} dt = \frac{(k+2)!}{\lambda^3 (k-1)!} = \\ &= k(k+1)(k+2)\lambda^{-3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} D[Q] = D[R] &= \frac{k(k+1)(k+2)\lambda^{-3}}{3k\lambda^{-1}} - \frac{[k(k+1)\lambda^{-2}]^2}{4(k\lambda^{-1})^2} = \\ &= \frac{(k+1)(k+5)}{12} \lambda^{-2}, \quad (2.2.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{qr} &= \frac{k(k+1)(k+2)\lambda^{-3}}{6k\lambda^{-1}} - \frac{(k(k+1)\lambda^{-2})^2}{4(k\lambda^{-1})^2} = \\ &= -\frac{k^2-1}{12} \lambda^{-2}, \quad (2.2.28) \end{aligned}$$

откуда коэффициент корреляции

$$r_{qr} = \frac{K_{qr}}{\sqrt{D[Q] D[R]}} = -\frac{k-1}{k+5}. \quad (2.2.29)$$

Из формулы (2.2.28) видно, что при $k > 1$ ковариация K_{qr} (и коэффициент корреляции r_{qr}) отрицательны. При $k \rightarrow \infty$ $r_{qr} \rightarrow -1$.

Пример 1. Интервал T между последовательными сбоями ЭВМ, устраняемыми практически мгновенно с помощью программных средств, имеет распределение Эрланга 3-го порядка с параметром $\lambda = 0,5$ (1/час). Для решения задачи требуется работа ЭВМ без сбоев в течение двух часов. Задачу начинают решать в произвольный момент t , никак не связанный с потоком сбоев. Найти вероятность события

$A = \{\text{задача будет решена с первого раза}\}.$

Решение. Событие A состоит в том, что с. в. R — время, оставшееся до очередного сбоя, примет значение, большее двух часов:

$$P(A) = P\{R > 2\} = \int_2^{\infty} f_r^{(k)}(t) dt. \quad (2.2.30)$$

По формуле (2.2.25) при $k = 3$ получим

$$\begin{aligned} f_r^{(k)}(t) &= f_r^{(3)}(t) = \\ &= \frac{\lambda}{k} R(k-1, \lambda t) = \frac{0,5}{3} \sum_{n=0}^2 \frac{(0,5t)^n}{n!} e^{-0,5t}. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Подставляя это выражение в формулу (2.2.30), получаем

$$P(A) = \int_2^{\infty} \frac{0,5}{3} \sum_{n=0}^2 \frac{(0,5t)^n}{n!} e^{-0,5t} dt. \quad (2.2.32)$$

В п. 6.4* было показано (см. (6.4.11)*), что

$$\int_a^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = R(n, a). \quad (2.2.33)$$

Сделаем в интеграле (2.2.32) замену переменных $0,5t = x$ и воспользуемся формулой (2.2.33):

$$P(A) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^2 \int_2^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = \frac{1}{3} [R(0, 1) + R(1, 1) + R(2, 1)].$$

Но

$$\begin{aligned} R(0, 1) &= e^{-1}, \quad R(1, 1) = e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1}, \\ R(2, 1) &= e^{-1} + e^{-1} + e^{-1}/2 = 5e^{-1}/2, \end{aligned}$$

откуда

$$P(A) = \frac{1}{3} [e^{-1} + 2e^{-1} + 5e^{-1}/2] = \frac{11}{6} e^{-1} \approx 0,675.$$

Пример 2. Для условий предыдущего примера найти вероятность решения задачи с первого раза, если с момента предыдущего сбоя в ЭВМ до момента начала решения задачи прошел 1 час.

Решение. В данном примере событие $A = \{\text{задача будет решена с первого раза}\}$ состоит в том, что с. в. R — время, оставшееся до очередного сбоя, примет значение, большее 2 часов, при условии, что с. в. Q — время от предыдущего сбоя до начала решения задачи, приняло значение $q = 1$ час. По формулам (2.2.16), (2.2.21) и (2.2.24) имеем

$$f_r(r|q) = \frac{f(q+r)}{1-F(q)} = \frac{\lambda [\lambda(r+q)]^{k-1} e^{-\lambda(r+q)}}{(k-1)! R(k-1, \lambda q)}.$$

В рассматриваемом случае $k=3$, $q=1$ (час), $\lambda = 0,5$ (1/час)

$$\begin{aligned} f_r(r|q=1) &= \frac{0,5^3 (r+1)^2 e^{-\lambda r} e^{-0,5}}{2(1+0,5+0,5^2/2) e^{-0,5}} \approx \\ &\approx 0,0385 (r+1)^2 e^{-\lambda r} \quad (r > 0). \end{aligned}$$

Искомая условная вероятность события A будет определяться по формуле

$$\begin{aligned} P(A|Q=1) &= \int_0^{\infty} f_r(r|q=1) dr = \\ &= 0,0385 \int_0^{\infty} (r+1)^2 e^{-0,5r} dr \approx 0,821. \end{aligned}$$

Замечание. Отметим, что условная вероятность $P(A|Q=q)$ может быть как больше вероятности $P(A)$, так и меньше ее:

$$P(A) \leq P(A|Q=q), \quad P(A|Q=q) \leq P(A).$$

Это зависит от того, какое значение q взять. Очевидно, что если $q=0$ (задачу начали решать на ЭВМ

сразу после очередного сбоя), то $P(A|Q=0)$ будет достигать своего максимального значения:

$$\begin{aligned} P(A|Q=0) &= \int_0^{\infty} \frac{f(r)}{1-F(0)} dr = \int_0^{\infty} f(r) dr = \\ &= 1 - \int_0^2 f(r) dr = 1 - F(2). \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае имеем (см. (2.2.24))

$$\begin{aligned} P(A|Q=0) &= 1 - F(2) = 1 - (1 - R(3-1; 0,5 \cdot 2)) = \\ &= R(2,1) \approx 0,920. \end{aligned}$$

Если взять $q = 20$ ч, то

$$f_r(r|q=20) \approx 0,00103 (r+20)^2 e^{-\lambda r} \quad (r > 0).$$

В этом случае

$$P(A|Q=20) = \int_0^{\infty} 0,00103 (r+20)^2 e^{-\lambda r} dr \approx 0,440.$$

Чем больше величина q , тем меньше будет условная вероятность $P(A|Q=q)$. ►

Потоки Пальма широко применяются в теории восстановления — разделе теории надежности технических устройств. В теории восстановления [13] рассматривается следующая вероятностная задача. Имеется неограниченное количество одинаковых по своим

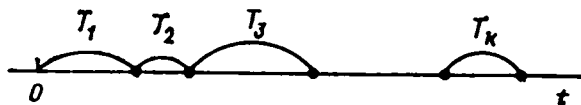


Рис. 2.2.3

характеристикам элементов. Первый элемент включается в работу в момент $t=0$ и работает случайное время T_1 , после чего выходит из строя (отказывает). В момент отказа первого элемента он мгновенно заменяется (восстанавливается) вторым, который работает случайное время T_2 , после чего заменяется (восстанавливается) третьим, работающим случайное время T_3 , и т. д. (рис. 2.2.3). Такой процесс восстановления элементов продолжается неограниченно, причем

каждый отказавший элемент немедленно заменяется новым.

Если случайные величины $T_1, T_2, \dots$ независимы и одинаково распределены, то поток отказов (он же поток восстановлений) представляет собой поток Пальма (начало координат $t=0$ не считается восстановлением). Образующийся при этом случайный процесс называется *простым процессом восстановления*. В теории восстановления [13] обычно рассматриваются следующие характеристики процесса:

1. Продолжительность времени от начала $t=0$ (момент включения первого элемента) до k -го отказа (восстановления)

$$T_{(k)} = \sum_{i=1}^k T_i.$$

2. Число восстановлений $X(t)$, имевших место на участке времени $(0, t)$.

3. Функция восстановления $\Lambda(t)$ — математическое ожидание случайного процесса $X(t)$:

$$\Lambda(t) = M[X(t)].$$

4. Плотность восстановления $\lambda(t)$, определяемая как

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M[X(t) - X(t + \Delta t)]}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \Lambda(t).$$

5. «Возраст» элемента Q , достигнутый им в произвольный момент времени $\bar{t}$, никак не связанный с потоком восстановлений (если процесс длился достаточно долгое время). Случайная величина Q , как мы показали, имеет плотность распределения (2.2.10).

6. «Остаточное время жизни» элемента R , остающееся ему в момент $\bar{t}$ до отказа (при том же предположении о достаточной длительности процесса восстановления); с. в. R имеет то же распределение, что и Q .

Как видно, все решенные выше задачи находят прямое инженерное приложение в теории восстановления.

Наиболее простой разновидностью потока Пальма является простейший (стационарный пуассоновский) поток. Мы уже знаем (см. (2.1.13)), что у такого потока плотность распределения интервала T между

соседними событиями представляет собой показательный закон $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ($t > 0$).

Легко показать, пользуясь формулой (2.2.10), что точно таково же распределение каждой из случайных величин Q и R :

$$f_q(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0), \quad f_r(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0).$$

Это и естественно: отсутствие последействия в простейшем потоке говорит о том, что распределение времени, оставшегося до ближайшего события потока, такое же, как и распределение времени между событиями потока; наличие очередного события в начале отсчета промежутка никак не влияет на оставшуюся его длину. По этой же причине (отсутствие последействия) случайные величины Q и R для простейшего потока независимы. Действительно, в простейшем потоке любая сколь угодно подробная информация о том, как вел себя поток в прошлом (до произвольного момента $\bar{t}$), не дает никаких сведений о том, как этот процесс должен протекать в будущем (после момента $\bar{t}$). Это — основная причина того, что различные инженерные задачи, связанные со случайными процессами, проще всего решаются, когда изменения состояния физической системы S , в которой протекает случайный процесс, происходят под действием простейших потоков событий. Несколько сложнее, но все же сравнительно просто решаются задачи исследования случайных процессов в том случае, когда фигурирующие в них потоки событий являются нестационарными пуассоновскими (с переменной интенсивностью $\lambda(t)$); самое важное свойство — отсутствие последействия — при этом сохраняется. Исследуя процесс на участке времени, следующем за моментом t_0 (будущее), мы можем учитывать только состояние системы в момент $t = t_0$ (настоящее) и не заботиться о том, как он протекал при $t < t_0$ (в прошлом).

2.3. Потоки Эрланга

Потоком Эрланга k -го порядка с параметром λ называется поток Пальма, у которого интервалы между событиями распределены по закону Эрланга k -го порядка ($k = 2, 3, \dots$). Поток Эрланга k -го порядка может быть получен из простейшего с помощью его

«просеивания» (или «разрежения»); при этом в простейшем потоке сохраняется каждое k -е событие, а все промежуточные отбрасываются. Например, если в простейшем потоке с интенсивностью λ сохранять каждое второе событие, а промежуточное — выбрасывать, то получится поток Эрланга 2-го порядка; на рис. 2.3.1

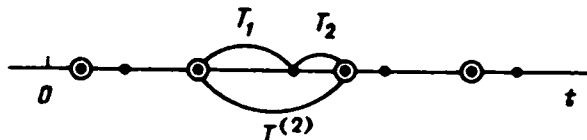


Рис. 2.3.1

показана процедура формирования этого потока из простейшего; кружками отмечены сохраняемые в потоке события, обычными точками — отбрасываемые. Очевидно, что интервал $T^{(2)}$ между двумя событиями в просеянном таким образом потоке есть сумма двух независимых с. в., имеющих показательное распределение с параметром λ , равным интенсивности исходного простейшего потока: $T^{(2)} = T_1 + T_2$. На рис. 2.3.2

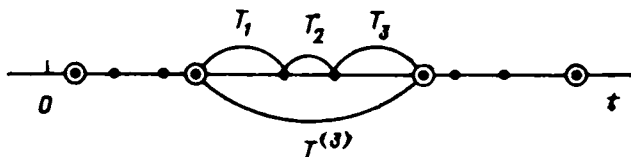


Рис. 2.3.2

показана схема преобразования простейшего потока в поток Эрланга 3-го порядка. Случайная величина $T^{(3)}$ — интервал между соседними событиями в потоке Эрланга 3-го порядка есть сумма трех независимых с. в., имеющих показательное распределение с параметром λ :

$$T^{(3)} = T_1 + T_2 + T_3.$$

Очевидно, для потока Эрланга k -го порядка, в котором из простейшего потока сохранено только каждое k -е событие, а промежуточные отброшены, интервал времени $T^{(k)}$ между соседними событиями можно

представить в виде суммы k независимых с. в., распределенных по показательному закону с параметром λ :

$$T^{(k)} = \sum_{i=1}^k T_i, \quad (2.3.1)$$

где T_i — с. в., имеющая показательное распределение с параметром λ .

Заметим, что простейший поток представляет собой поток Эрланга 1-го порядка ($k=1$). В книге [6] (п. 6.4*) было показано, что п. р. $f^{(k)}(t)$ с. в. $T^{(k)}$ имеет вид

$$f^{(k)}(t) = \lambda (\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t} / (k-1)! \quad (t > 0), \quad (2.3.2)$$

а это есть не что иное, как закон Эрланга k -го порядка с параметром λ . Пользуясь функцией $P(m, a) = = a^m e^{-a} / m!$, можно записать плотность (2.3.2) в виде $f^{(k)}(t) = \lambda P(k-1, \lambda t) \quad (t > 0, \quad k=1, 2, \dots), \quad (2.3.3)$

а ф. р. выразить через функцию $R(m, a) = \sum_{k=0}^m a^k e^{-a} / k!$:

$$F^{(k)}(t) = 1 - R(k-1, \lambda t) \quad (t > 0, \quad k=1, 2, \dots). \quad (2.3.4)$$

Таблицы значений функций $P(m, a)$ и $R(m, a)$ приведены в приложении [5].

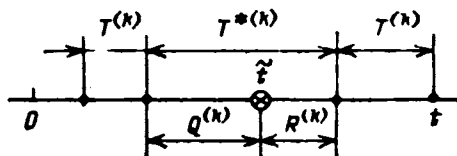


Рис. 2.3.3

Числовые характеристики с. в. $T^{(k)}$ (см. (2.3.1)) равны:

$$m_i^{(k)} = M[T^{(k)}] = kM[T_1] = \frac{k}{\lambda}, \quad (2.3.5)$$

$$D[T^{(k)}] = kD[T_1] = \frac{k}{\lambda^2}, \quad \sigma_i^{(k)} = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}.$$

Рассмотрим случайный момент $\bar{t}$ (никак не связанный с потоком) и найдем законы распределения случайных величин $T^{(k)}$, $Q^{(k)}$, $R^{(k)}$ (см. рис. 2.3.3), как мы

это делали в п. 2.2 для потока Пальма. По формулам (2.2.3) и (2.3.3) имеем

$$f_i^{(k)}(t) = \frac{t f_i^{(k)}(t)}{m_i^{(k)}} = \frac{t}{k/\lambda} \lambda P(k-1, \lambda t) = \lambda P(k, \lambda t), \quad (2.3.6)$$

а это есть не что иное, как закон Эрланга $(k+1)$ -го порядка (на единицу большего, чем порядок исходного эрланговского потока) с параметром λ . Следовательно (см. (2.3.5)),

$$M[T^{*(k)}] = (k+1)/\lambda, \quad D[T^{*(k)}] = (k+1)/\lambda^2. \quad (2.3.7)$$

По формулам (2.2.10) и (2.2.11) находим п.р. случайных величин $Q^{(k)}$ и $R^{(k)}$ (они, естественно, одинаковы):

$$f_q^{(k)}(t) = (1 - F^{(k)}(t))/m_t^{(k)},$$

где $F^{(k)}(t)$ — ф.р. закона Эрланга k -го порядка (см. (2.3.4)); отсюда

$$f_q^{(k)}(t) = [1 - (1 - R(k-1, \lambda t))] \cdot \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{k} R(k-1, \lambda t).$$

Такова же и плотность распределения с.в. R :

$$f_q^{(k)}(t) = f_r^{(k)}(t) = \lambda R(k-1, \lambda t)/k \quad (t > 0). \quad (2.3.8)$$

Заметим, что п.р. $f_q^{(k)}(t)$ представляет собой *вероятностную смесь* k законов Эрланга порядков $1, 2, \dots, m, \dots, k$ (см. п. 9.8*), взятых с равными вероятностями $1/k$. Действительно,

$$\begin{aligned} f_q^{(k)}(t) &= \frac{\lambda}{k} R(k-1, \lambda t) = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \frac{\lambda(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda t} = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k f^{(m)}(t), \end{aligned}$$

где $f^{(m)}(t) = \lambda(\lambda t)^{m-1} e^{-\lambda t} / (m-1)!$ — закон Эрланга m -го порядка с параметром λ ($m = 1, 2, \dots, k$). По формуле (2.2.13) находим м.о. каждой из величин $Q^{(k)}$ и $R^{(k)}$:

$$M[Q^{(k)}] = M[R^{(k)}] = M[T^{*(k)}]/2 = (k+1)/(2\lambda). \quad (2.3.9)$$

Пользуясь формулами (2.2.13) и (2.2.14), можно убедиться, что

$$D[Q^{(k)}] = D[R^{(k)}] = \frac{M[(T^{(k)})^2]}{3m_i^{(k)}} - \frac{M[(T^{(k)})^2]}{4(m_i^{(k)})^2} = \frac{(k+1)(k+5)}{12\lambda^2}. \quad (2.3.10)$$

По формуле (2.2.15) найдем ковариацию $K_{qr}^{(k)}$ случайных величин $Q^{(k)}$ и $R^{(k)}$:

$$K_{qr}^{(k)} = M[(T^{(k)})^3]/(6m_i^{(k)}) - (M[T^{(k)}])^2/(4m_i^{(k)})^2 = \frac{k+1}{2\lambda^2} \left[\frac{k+2}{3} - \frac{k+1}{2} \right] = \frac{1-k^2}{12\lambda^2}. \quad (2.3.11)$$

Заметим, что порядок потока Эрланга k представляет собой целочисленную величину ($k=1, 2, \dots$); поэтому ковариация $K_{qr}^{(k)}$ для $k > 1$ всегда отрицательна, а при $k=1$, когда поток Эрланга становится простейшим, она, естественно, обращается в нуль. Деля $K_{qr}^{(k)}$ на $\sigma_q^{(k)}\sigma_r^{(k)} = D[Q^{(k)}] = D[R^{(k)}]$, найдем коэффициент корреляции с. в. $Q^{(k)}$ и $R^{(k)}$:

$$r_{qr}^{(k)} = \frac{K_{qr}^{(k)}}{D[Q^{(k)}]} = \frac{(k+1)(1-k)}{12\lambda^2} \cdot \frac{12\lambda^2}{(k+1)(k+5)} = -\frac{k-1}{k+5}. \quad (2.3.12)$$

Отметим, что при увеличении порядка k потока Эрланга ($k \rightarrow \infty$) коэффициент корреляции $r_{qr}^{(k)}$ стремится к -1 ; это означает, что при неограниченном увеличении k связь между $Q^{(k)}$ и $R^{(k)}$ приближается к линейной функциональной с отрицательным коэффициентом.

Некоторое неудобство пользования потоками Эрланга k -го порядка связано с тем, что с увеличением k интенсивность потока уменьшается (за счет его «прореживания»). Действительно, интенсивность потока Эрланга k -го порядка, возникшего из простейшего потока с интенсивностью λ , равна

$$\lambda^{(k)} = 1/M[T^{(k)}] = \lambda/k. \quad (2.3.13)$$

Чтобы интенсивность потока Эрланга не уменьшалась с увеличением k , а оставалась неизменной и равной интенсивности исходного простейшего потока, бу-

дем сопровождать «прореживание» потока одновременным уменьшением масштаба по оси $0t$, уменьшая его в k раз при формировании потока Эрланга k -го порядка. Для этого достаточно интервал времени $T^{(k)}$ между соседними событиями потока Эрланга k -го порядка разделить на k . Полученный таким образом поток будем называть *нормированным потоком Эрланга k -го порядка*. В этом потоке интервал времени между двумя соседними событиями равен (см. (2.3.1))

$$\tilde{T}^{(k)} = T^{(k)}/k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k T_i, \quad (2.3.14)$$

откуда (см. (2.3.5))

$$M[\tilde{T}^{(k)}] = M[T^{(k)}]/k = 1/\lambda, \quad D[\tilde{T}^{(k)}] = 1/(k\lambda^2). \quad (2.3.15)$$

Плотность распределения $f^{(k)}(t)$ с.в. $T^{(k)}$ получим как плотность линейной функции от с.в. $T^{(k)}$ (см. (9.1.10)* и (9.5.22)*):

$$\begin{aligned} f^{(k)}(t) &= kf^{(k)}(t \cdot k) = \lambda k P(k-1, \lambda kt) = \\ &= \lambda_{(k)} P(k-1, \lambda_{(k)} t), \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

где $P(m, a)$ — распределение Пуассона с параметром a ,

$$\lambda_{(k)} = k\lambda. \quad (2.3.17)$$

Отсюда видно, что с.в. $T^{(k)}$ будет также распределена по закону Эрланга k -го порядка, но с параметром $\lambda_{(k)} = k\lambda$. Интенсивность $\tilde{\lambda}^{(k)}$ нормированного потока Эрланга k -го порядка не зависит от k и при любом k равна интенсивности исходного простейшего потока (для чего мы и проделывали нормирование):

$$\tilde{\lambda}^{(k)} = 1/M[\tilde{T}^{(k)}] = \lambda. \quad (2.3.18)$$

Посмотрим, как изменяется распределение интервала времени $T^{(k)}$ между соседними событиями нормированного потока Эрланга k -го порядка при увеличении k .

Во-первых, это распределение с увеличением k приближается к нормальному: величина $T^{(k)}$ получена

в результате суммирования k независимых случайных величин, распределенных по показательному закону с параметром λ и последующего деления на k (см. (2.3.14)):

$$\tilde{T}^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k T_i.$$

Из центральной предельной теоремы для одинаково распределенных слагаемых (см. п. 10.2*) известно, что при достаточно большом k сумма $\sum_{i=1}^k T_i$ будет распределена по закону, сколь угодно близкому к нормальному, а его линейная функция (2.3.14) — также приблизительно по нормальному закону; параметры этого закона равны: м.о. интервала $\tilde{T}^{(k)}$

$$m = M[\tilde{T}^{(k)}] = 1/\lambda \quad (2.3.19)$$

и с. к. о.

$$\sigma = \sqrt{D[\tilde{T}^{(k)}]} = \sqrt{1/(k\lambda^2)} = 1/(\sqrt{k}\lambda). \quad (2.3.20)$$

Математическое ожидание, как мы уже отмечали, при увеличении k не меняется; что касается среднего квадратического отклонения, то оно с увеличением k уменьшается обратно пропорционально $\sqrt{k}$.

Опыт расчетов показывает, что даже при умеренно больших значениях k (порядка $10 \div 20$) с достаточной для практики точностью можно считать закон распределения интервала между соседними событиями в нормированном потоке Эрланга нормальным с параметрами $m = 1/\lambda$, $\sigma = 1/(\sqrt{k}\lambda)$.

Во-вторых, одновременно с «нормализацией» закона распределения интервала при возрастании k его с. к. о. σ стремится к нулю, т. е. интервал становится все менее и менее случайным, приближаясь (сходясь по вероятности) к своему м. о. $1/\lambda$, а сам поток приближается к регулярному потоку с интервалом между событиями, равным $1/\lambda$.

Таким образом, с помощью нормированного потока Эрланга можно смоделировать потоки Пальма с различным последствием. При $k=1$ получаем простейший поток (в котором нет последствия),

при увеличении k ($k = 10 \div 20$) получаем поток Пальма, у которого интервалы между событиями распределены практически по нормальному закону. При очень больших значениях k (в пределе при $k \rightarrow \infty$) получаем регулярный поток, в котором имеется полная функциональная зависимость между событиями в потоке. Найдем законы распределения и числовые характеристики случайных величин $\tilde{T}^{(k)}$, $\tilde{Q}^{(k)}$, $\tilde{R}^{(k)}$ (см. рис. 2.3.4) в нормированном потоке Эрланга k -го порядка: применяя формулы (2.3.15), (2.3.16),

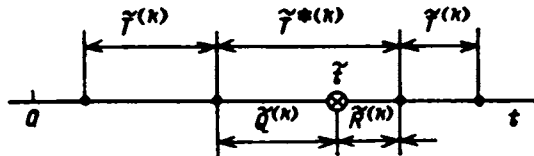


Рис. 2.3.4

(2.2.3), (2.2.4), (2.2.6), (2.2.10), (2.2.13), (2.2.14), (2.2.15), справедливые для любого потока Пальма, получим:

$$\tilde{f}_t^{(k)}(t) = k\lambda P(k, k\lambda t) = \lambda_{(k)} P(k, \lambda_{(k)} t),$$

$$M[\tilde{T}^{(k)}] = (k+1)/(\lambda k), \quad D[\tilde{T}^{(k)}] = (k+1)/(\lambda k)^2,$$

$$\tilde{f}_q(t) = \tilde{f}_r(t) = \lambda R(k-1, \lambda k t),$$

$$M[\tilde{Q}^{(k)}] = M[\tilde{R}^{(k)}] = \frac{k+1}{2\lambda k},$$

$$D[\tilde{Q}^{(k)}] = D[\tilde{R}^{(k)}] = \frac{(k+1)(k+5)}{12\lambda^2 k^3},$$

$$\tilde{K}_{qr}^{(k)} = \frac{1-k^2}{12\lambda^2 k^3}, \quad \tilde{r}_{qr}^{(k)} = -\frac{k-1}{k+5}. \quad (2.3.21)$$

В справедливости формул (2.3.21) читатель может убедиться самостоятельно.

Обратим внимание на то, что при $k \rightarrow \infty$ закон распределения случайных величин $\tilde{Q}^{(k)}$ и $\tilde{R}^{(k)}$ будет приближаться (сходиться по вероятности) к закону равномерной плотности на интервале $(0, \lambda^{-1})$ с м.о.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M[\tilde{Q}^{(k)}] = \lim_{k \rightarrow \infty} M[\tilde{R}^{(k)}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{2\lambda k} = \frac{1}{2\lambda}$$

и дисперсией

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} D[\tilde{Q}^{(k)}] &= \lim_{k \rightarrow \infty} M[\tilde{R}^{(k)}] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)(k+5)}{12\lambda^2 k^2} = \frac{1}{12\lambda^2}.\end{aligned}$$

При этом

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_{qr}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} -(k-1)/(k+5) = -1.$$

Получающиеся при таком предельном переходе с. в. $\tilde{Q} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{Q}^{(k)}$, $\tilde{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{R}^{(k)}$ будут одинаково распределены и связаны функциональной зависимостью $\tilde{Q} + \tilde{R} = 1/\lambda$. При таком предельном переходе с. в. $\tilde{T} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}^{(k)} = \tilde{T} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}^{(k)}$ становится с вероятностью единица равными неслучайной величине $1/\lambda$.

Определенный инженерный интерес представляет поток Пальма, у которого интервалы между событиями имеют гамма-распределение с параметрами $\lambda > 0$ и $k > 0$ (см. п. 6.4*):

$$f_{(k)}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)} \quad (t > 0),$$

где

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{k-1} dt$$

— гамма-функция.

Такой поток будем называть *гамма-поток* с параметрами λ и k . Параметры λ и k могут быть любыми неотрицательными числами.

В п. 6.4* было показано, что при целом положительном k гамма-распределение превращается в распределение Эрланга k -го порядка.

2.4. Предельные теоремы теории потоков

В книге [6] мы знакомили читателя с центральной предельной теоремой, которая утверждает, что если складывать достаточно большое число независимых с. в., то при определенных условиях их сумма будет распределена приблизительно нормально. Поэтому нормальный закон распределения довольно ши-

роко распространен в природе и часто встречается в инженерной практике.

При решении различных инженерных задач, а также в других областях человеческой деятельности часто пользуются допущением о том, что потоки событий, определяющие различные с. п., являются пуассоновскими. Делается такое допущение не только потому, что при этом упрощаются исследования, но и главным образом потому, что во многих случаях оно близко к истине. Дело в том, что пуассоновские потоки в определенном смысле являются предельными для различных потоков событий. Например, если поток получается в результате «сложения» (или взаимного наложения) достаточно большого числа потоков различной структуры, то суммарный поток в весьма широком диапазоне условий будет близок к пуассоновскому. Часто бывает, что техническое устройство состоит из многих элементов, работа каждого из которых безусловно необходима для работы всего устройства. В этом случае поток отказов технического устройства будет складываться из потоков отказов его отдельных элементов. Поэтому часто поток отказов технического устройства будет близок к пуассоновскому.

С другой стороны, если взять произвольный поток Пальма и разрезать его случайным образом («выбрасывать» из этого потока с определенной вероятностью каждое событие), то такой преобразованный поток будет также приближаться к пуассоновскому. Например, поток космических частиц, проходя через атмосферу Земли, разрежается, поэтому поток частиц у поверхности Земли будет близок к пуассоновскому.

В инженерных приложениях довольно часто имеет место как сложение потоков, так и их случайное разделение. По этой причине при решении различных прикладных задач широко используется допущение о том, что потоки событий являются пуассоновскими.

Предельная теорема для суммарного потока

Предельная теорема для суммарного потока определяет условия, при которых сумма независимых, ординарных, стационарных потоков событий сходится к пуассоновско-

му стационарному (простейшему) потоку¹⁾. При этом условия, налагаемые на суммируемые потоки, приблизительно аналогичны условиям, накладываемым на слагаемые в центральной предельной теореме: складываемые потоки должны оказывать приблизительно одинаковое влияние на суммарный поток. Другими словами, среди суммируемых потоков событий не должно быть потоков как с очень большой интенсивностью, так и с исчезающе малой интенсивностью. Надо отметить, что сходимость суммарного потока к пуассоновскому с увеличением числа складываемых потоков осуществляется довольно быстро. В инженерной практике можно рекомендовать считать сумму $5 \div 7$ потоков за пуассоновский поток, если интенсивности этих потоков имеют одинаковый порядок и потоки независимы.

Уточним понятие сложения потоков событий. Суммой двух потоков Π_1 и Π_2 будем называть поток $\Pi^{(2)}$,

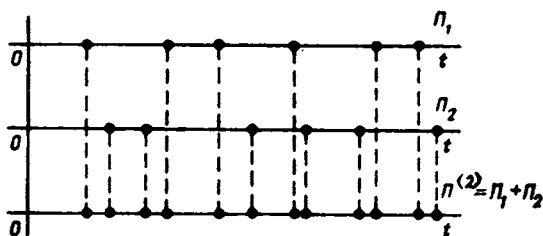


Рис. 2.4.1

в котором моменты появления событий состоят из моментов появления событий в потоках Π_1 и Π_2 (см. рис. 2.4.1).

Очевидно, что если складывают два стационарных потока событий Π_1 и Π_2 , то суммарный поток событий $\Pi^{(2)}$ тоже будет стационарным; его интенсивность будет равна сумме интенсивностей складываемых потоков:

$$\lambda^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (2.4.1)$$

Сумма любого числа стационарных потоков дает стационарный поток с интенсивностью, равной сумме интенсивностей слагаемых потоков.

¹⁾ Мы не приводим сравнительно сложное доказательство этой теоремы, имеющейся в [8].

Покажем, что при сложении ординарных потоков событий суммарный поток тоже будет ординарным. Например, при многорядном движении машин по шоссе суммарный поток автомашин, подходящих к данному пункту, будет ординарным. Другой пример: поток отказов сложного технического устройства, состоящего из нескольких элементов. Поток отказов каждого элемента ординарен, поэтому поток отказов всего технического устройства тоже будет ординарным.

На первый взгляд это может показаться не совсем верным, так как возможен одновременный отказ нескольких элементов (или одновременное пересечение какой-то условной линии несколькими автомашинами при многорядном их движении на шоссе). Однако вероятность такого события при сложении независимых ординарных стационарных потоков Пальма равна нулю, если интервалы времени между событиями представляют непрерывные случайные величины. Мы знаем (см. п. 3.2*), что вероятность каждого отдельного значения непрерывной с.в. равна нулю; равна нулю и вероятность точного совпадения значений, принятых двумя независимыми непрерывными случайными величинами, из чего следует ординарность суммарного потока событий.

Очевидно, что при сложении любого числа n независимых стационарных ординарных потоков будет получаться снова стационарный ординарный поток, интенсивность которого равна сумме интенсивностей складываемых потоков:

$$\lambda^{(n)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (2.4.2)$$

где λ_i — интенсивность i -го потока P_i .

Остановимся несколько подробнее на понятии «независимости потоков». Рассмотрим два участка времени τ_1 и τ_2 , примыкающих к моментам t_1 и t_2 (рис. 2.4.2). Обозначим $X_1(t_1, \tau_1)$ случайное число событий, попадающих на участок τ_1 ; $X_2(t_2, \tau_2)$ — случайное число событий, попадающих на участок τ_2 . Потоки P_1 и P_2 называются *независимыми*, если случайные величины $X_1(t_1, \tau_1)$ и $X_2(t_2, \tau_2)$ независимы при любых t_1, t_2, τ_1, τ_2 . Другими словами, два потока

независимы, если закон распределения числа событий, попадающих на любой участок времени в одном из потоков, не зависит от того, сколько событий попало на любой участок в другом потоке.

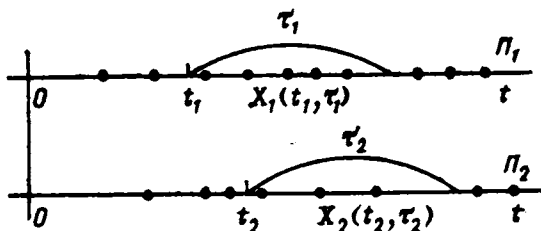


Рис. 2.4.2

Пример 1. Рассматривается сумма двух независимых потоков Эрланга 2-го порядка с одинаковыми параметрами λ .

Найти закон распределения и числовые характеристики интервала $T^{(2)}$ между соседними событиями суммарного потока.

Решение. На рис. 2.4.3 показана схема сложения потоков Π_1 и Π_2 . Событие в суммарном потоке

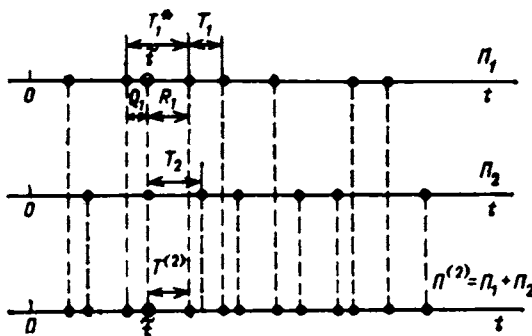


Рис. 2.4.3

$\Pi^{(2)} = \Pi_1 + \Pi_2$ может быть получено переносом его либо из потока Π_1 , либо из потока Π_2 ; вероятность каждой из этих гипотез равна $1/2$, ибо Π_1 и Π_2 одинаковы по своим вероятностным характеристикам.

Предположим, что какое-то событие суммарного потока, отмеченное кружком на рис. 2.4.3, совпадает

с событием потока Π_2 и появляется в момент $\tilde{t}$, никак не связанный с потоком Π_1 . Каков будет интервал времени $T^{(2)}$ между этим моментом и моментом прихода следующего события суммарного потока? Это зависит от того, какое событие придет раньше (см. рис. 2.4.3): очередное событие из того же потока Π_2 (до его прихода остается время T_2) или же событие из потока Π_1 (до его прихода остается время R_1). Очевидно, интервал $T^{(2)}$ равен минимальной из этих двух случайных величин:

$$T^{(2)} = \min \{T_2, R_1\}. \quad (2.4.3)$$

Если предположить, что начальная точка $\tilde{t}$ интервала $T^{(2)}$ есть момент прихода события из первого потока, получим равносильную (2.4.3) формулу

$$T^{(2)} = \min \{T_1, R_2\}, \quad (2.4.4)$$

ничем не отличающуюся от (2.4.3), так как величины $T_1(T_2)$, $R_1(R_2)$ распределены одинаково и независимы. Возьмем первую из этих формул (2.4.3) и найдем плотность распределения $f^{(2)}(t)$ случайной величины $T^{(2)}$. В книге [6] (см. (9.6.4)*) мы нашли ф. р. минимальной из двух независимых с. в.:

$$G(y) = F_1(y) + F_2(y) - F_1(y)F_2(y). \quad (2.4.5)$$

Отсюда

$$F^{(2)}(t) = F_2(t) + F_{r_1}(t) - F_2(t)F_{r_1}(t), \quad (2.4.6)$$

где $F^{(2)}(t)$ — ф. р. интервала между событиями в суммарном потоке; $F_2(t)$ — ф. р. интервала между событиями в потоке Π_2 ; $F_{r_1}(t)$ — ф. р. «остаточной части» R_1 , интервала в потоке Π_1 , на который попала точка $\tilde{t}$. В рассматриваемом примере функция распределения с. в. T_2 имеет вид (см. (2.3.4))

$$F_2(t) = 1 - R(1, \lambda), \quad (2.4.7)$$

где $R(n, \lambda) = \sum_{k=0}^n (\lambda)^k e^{-\lambda} / k!$ — функция, связанная с распределением Пуассона. Плотность распределения с. в. R_1 будет (см. (2.3.8))

$$f_{r_1}(t) = \frac{\lambda}{2} R(1, \lambda), \quad (2.4.8)$$

откуда

$$F_{r_1}(t) = \int_0^t f_{r_1}(t) dt = \frac{1}{2} [1 - R(0, \lambda t) + 1 - R(1, \lambda t)]. \quad (2.4.9)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F^{(2)}(t) &= 1 - R(1, \lambda t) + \frac{1}{2} [1 - R(0, \lambda t) + 1 - R(1, \lambda t)] - \\ &- [1 - R(1, \lambda t)] \cdot \frac{1}{2} [1 - R(0, \lambda t) + 1 - R(1, \lambda t)] = \\ &= 1 - \frac{e^{-2\lambda t}}{2} [2 + 3\lambda t + (\lambda t)^2], \quad (2.4.10) \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} f^{(2)}(t) &= \frac{dF^{(2)}(t)}{dt} = \frac{1}{4} 2\lambda e^{-2\lambda t} + \frac{1}{2} (2\lambda)^2 t e^{-2\lambda t} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(2\lambda)^3 t^2}{2} e^{-2\lambda t}. \quad (2.4.11) \end{aligned}$$

Таким образом, закон распределения интервала времени $T^{(2)}$ в потоке $\Pi^{(2)}$ будет представлять собой вероятностную смесь трех законов распределения:

$$f^{(2)}(t) = p_1 \varphi_1(t) + p_2 \varphi_2(t) + p_3 \varphi_3(t),$$

где $\varphi_1(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t}$ — показательный закон (закон Эрланга 1-го порядка) с параметром 2λ ; $\varphi_2(t) = (2\lambda)^2 t e^{-2\lambda t}$ — закон Эрланга 2-го порядка с параметром 2λ ; $\varphi_3(t) = \frac{(2\lambda)^3}{2} t^2 e^{-2\lambda t}$ — закон Эрланга 3-го порядка с параметром 2λ ;

$$p_1 = \frac{1}{4}, \quad p_2 = \frac{1}{2}, \quad p_3 = \frac{1}{4} \quad (p_1 + p_2 + p_3 = 1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M[T^{(2)}] &= \frac{1}{\lambda^{(2)}} = p_1 M[T_{(1)}] + p_2 M[T_{(2)}] + p_3 M[T_{(3)}] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2\lambda} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Этот результат можно было получить и проще. Из равенства (2.4.2) имеем

$$\lambda^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda.$$

Найдем второй начальный момент

$$M[(T^{(2)})^2] = p_1 M[T_{(1)}^2] + p_2 M[T_{(2)}^2] + p_3 M[T_3^2] = \frac{13}{8\lambda^2}.$$

откуда

$$D[T^{(2)}] = M[(T^{(2)})^2] - (M[T^{(2)}])^2 = \frac{5}{8\lambda^2}.$$

На рис. 2.4.4 показан график плотности $f^{(2)}(t)$ при $\lambda = 1/2$.

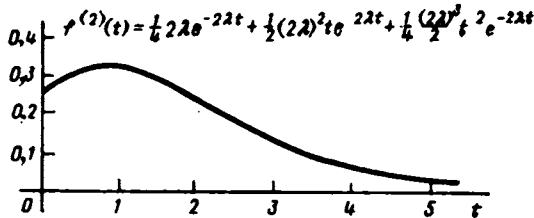


Рис. 2.4.4

Второй метод решения этой задачи может быть следующий (он нам пригодится в дальнейшем).

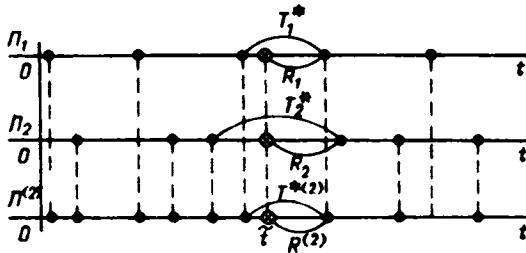


Рис. 2.4.5

Рассмотрим произвольную точку $\tilde{t}$ на оси времени, не совпадающую ни с одним событием в потоке $\Pi^{(2)}$ (см. рис. 2.4.5). Из этого рисунка следует, что

$$R^{(2)} = \min \{R_1, R_2\}.$$

Следовательно, $F_{r(2)}(t) = F_{r_1}(t) + F_{r_2}(t) - F_{r_1}(t)F_{r_2}(t)$,

но $F_{r_1}(t) = F_{r_2}(t) = \frac{1}{2} [1 - R(0, \lambda) + 1 - R(1, \lambda)]$,

откуда

$$F_{r(2)}(t) = 2F_{r_1}(t) - (F_{r_1}(t))^2 = 1 - e^{-2\lambda t} (t + \lambda t + (\lambda t)^2/4),$$

$$f_{r(2)}(t) = F'_{r(2)}(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t} \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot 2\lambda t + \frac{1}{8} \cdot \frac{(2\lambda t)^2}{2} \right] = \\ = \pi_1 f_1(t) + \pi_2 f_2(t) + \pi_3 f_3(t),$$

$$\text{где } f_{(1)}(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t}, \quad f_{(2)}(t) = (2\lambda)^2 t e^{-2\lambda t}, \quad f_3(t) = \\ = \frac{(2\lambda)^3 t^2}{2} e^{-2\lambda t}, \quad \pi_1 = 1/2, \quad \pi_2 = 3/8, \quad \pi_3 = 1/8 \quad (t > 0).$$

Следовательно, закон распределения случайной величины $R^{(2)}$ представляет собой вероятностную смесь законов распределения Эрланга 1-го, 2-го и 3-го порядков с параметром 2λ и с вероятностями π_1, π_2, π_3 . В соответствии с формулой (2.2.11) имеем

$$f_{r(2)}(t) = (1 - F^{(2)}(t))/M[T^{(2)}],$$

откуда

$$F^{(2)}(t) = 1 - M[T^{(2)}] \cdot f_{r(2)}(t),$$

$$f^{(2)}(t) = \frac{dF^{(2)}(t)}{dt} = -M[T^{(2)}] \cdot \frac{df_{r(2)}(t)}{dt} = \\ = \lambda M[T^{(2)}] 2\lambda e^{-2\lambda t} \left[\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2\lambda t}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(2\lambda t)^2}{2} \right].$$

Величина $M[T^{(2)}]$, очевидно, равна $1/\lambda$, так как интенсивность потока событий $\Pi^{(2)}$ равна

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda.$$

Следовательно,

$$f^{(2)}(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t} \left[\frac{1}{4} + \frac{1 \cdot 2\lambda t}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(2\lambda t)^2}{2} \right].$$

Можно убедиться в том, что эта формула совпадает с формулой (2.4.11).

Пример 2. Рассматривается сумма n независимых потоков Пальма $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$, у которых интервалы между событиями имеют функции распределения $F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)$ соответственно. Требуется найти закон распределения интервала времени $T^{(n)}$ между событиями в суммарном потоке $\Pi^{(n)} = \sum_{i=1}^n \Pi_i$.

Решение. Рассмотрим произвольную точку t , не совпадающую ни с одним из событий в суммарном потоке $\Pi^{(n)}$ (см. рис. 2.4.6). Очевидно, что остаток

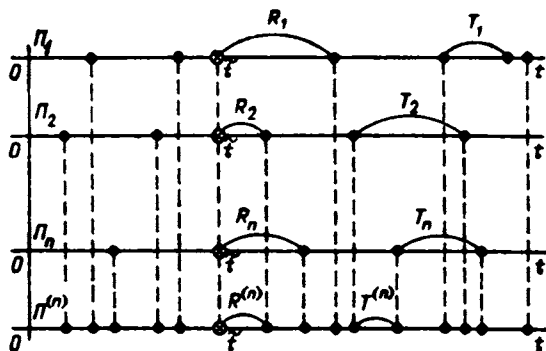


Рис. 2.4.6

времени $R^{(n)}$ в суммарном потоке $\Pi^{(n)}$ будет равен минимальному из остатков времени до наступления очередного события в суммируемых потоках:

$$R^{(n)} = \min \{R_1, R_2, \dots, R_n\}.$$

В предыдущем примере мы складывали два потока и получили формулу $R^{(2)} = \min \{R_1, R_2\}$. Так как потоки независимы, то и с.в. $R_1, R_2, \dots, R_n$ тоже независимы. В соответствии с формулой (2.2.11) имеем

$$f_{r_i}(t) = [1 - F_i(t)]/m_i,$$

где $m_i = M[T_i]$ — математическое ожидание интервала между событиями в потоке Π_i :

$$m_i = \int_0^{\infty} t \frac{dF_i(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} t f_i(t) dt.$$

Следовательно,

$$F_{r_i}(t) = \int_0^t f_{r_i}(t) dt = \frac{1}{m_i} \int_0^t [1 - F_i(t)] dt.$$

В книге [6] было показано, что ф.р. минимальной из n независимых с.в. определяется по формуле (см. (9.6.6)*)

$$F_{r^{(n)}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{r_i}(t)).$$

Чтобы доказать предельную теорему для суммарного потока, когда суммируются потоки Пальма, достаточно доказать (мы этого делать не будем) сходимость закона распределения случайной величины $R^{(n)}$ к показательному закону. Если суммируемые потоки имеют одинаковые вероятностные характеристики $F_{r_i}(t) = F_r(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то

$$F_{r^{(n)}}(t) = 1 - (1 - F_r(t))^n.$$

Зная функцию распределения $F_{r^{(n)}}(t)$, можно найти функцию распределения интервала времени $T^{(n)}$ между событиями в потоке $\Pi^{(n)}$ по формуле

$$F^{(n)}(t) = 1 - m^{(n)} f_{r^{(n)}}(t),$$

где

$$f_{r^{(n)}}(t) = \frac{dF_{r^{(n)}}(t)}{dt}, \quad m^{(n)} = \int_0^{\infty} t f^{(n)}(t) dt,$$

$$f^{(n)}(t) = \frac{dF^{(n)}(t)}{dt}.$$

Величина $m^{(n)}$ находится из следующего условия:

$$-m^{(n)} \int_0^{\infty} \frac{df_{r^{(n)}}(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} f^{(n)}(t) dt = 1,$$

откуда

$$m^{(n)} = - \left[\int_0^{\infty} \frac{df_{r^{(n)}}(t)}{dt} dt \right]^{-1}$$

Величину $m^{(n)}$ можно найти из другого условия:

$$\lambda^{(n)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}.$$

откуда

$$m^{(n)} = \frac{1}{\lambda^{(n)}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n 1/m_i}. \quad \blacktriangleright$$

В инженерной практике иногда имеют место условия, когда суммируемые стационарные ординарные потоки событий являются слабозависимыми. Моделирование суммы большого числа таких потоков, про-

веденное методом статистических испытаний, показало, что и в этом случае суммарный поток будет практически простейшим (стационарным пуассоновским).

Многочисленные исследования, проведенные методом статистических испытаний, показали, что все, что было сказано о стационарных ординарных потоках, справедливо и для нестационарных потоков. Если суммировать достаточно большое число ординарных независимых (или слабозависимых) потоков с примерно соизмеримыми интенсивностями, то суммарный поток событий будет близок к пуассоновскому с интенсивностью

$$\lambda^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t), \quad (2.4.12)$$

где $\lambda_i(t)$ — интенсивность потока Π_i .

Предельная теорема для суммарного потока дает теоретическое обоснование для широкого использования в инженерной практике предположения о том, что фигурирующие в задаче потоки событий являются пуассоновскими (стационарными или нестационарными):

— Поток автомашин, движущихся по шоссе, так как он состоит из отдельных машин, выезжающих на это шоссе в случайные моменты времени; этот поток будет нестационарен; его интенсивность зависит от времени суток, дня недели, месяца, года.

— Поток отказов технического устройства (ЭВМ, компрессора для перекачки газа, самолета, ракеты, корабля, атомного реактора и т. д.), так как любое техническое устройство состоит из многих элементов, порождающих суммарный поток отказов. В общем случае поток отказов технического устройства не стационарен; его интенсивность $\lambda(t)$ имеет вид, сходный с показанным на рис. 2.4.7. На участке от оси $(0, t_1)$ интенсивность отказов технического устройства $\lambda(t)$ уменьшается: новое техническое устройство «прирабатывается», в нем выявляются и устраняются

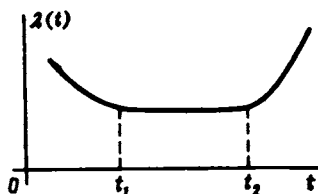


Рис. 2.4.7

различные дефекты, проходит период «обкатки». Затем на участке (t_1, t_2) наступает период «стабильной» работы технического устройства, когда можно считать, что $\lambda(t) = \text{const}$. Затем, по мере «старения» технического устройства (участок времени $t > t_2$), интенсивность отказов снова возрастает.

(Аналогичная картина имеет место и для различных биологических объектов: в «детстве» они болеют

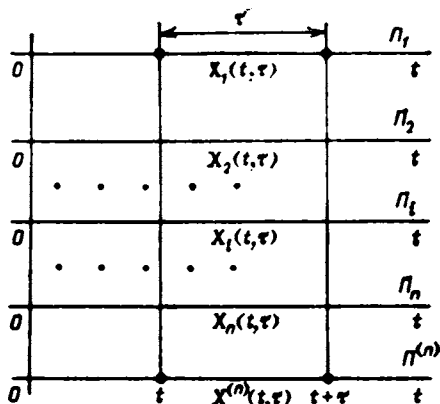


Рис. 2.4.8

(«выходят из строя») чаще, по мере взросления интенсивность заболеваний падает, а к «старости» интенсивность заболеваний снова возрастает).

— Поток самолетов, приземляющихся на аэродром с интенсивным движением самолетов, так как этот поток состоит из многих самолетов, прибывающих с различных пунктов назначения. Несмотря на то, что поток приземлений самолетов на аэродром стремятся сделать регулярным («самолеты должны приземляться строго по расписанию»), эта регулярность нарушается по различным независимым причинам. По этой же причине поток судов, заходящих в данный порт, тоже можно считать пуассоновским.

— Поток доз информации, поступающей для обработки в вычислительный центр, часто близок к пуассоновскому, так как порождается различными независимыми источниками, откуда эта информация поступает.

— Поток деталей, изготавливаемых в цехе со многими станками, также является приближенно пуассоновским.

Отметим особо, что складывая независимые пуассоновские потоки событий (стационарные или нестационарные), мы снова получим пуассоновский поток. Докажем это.

Рассмотрим n пуассоновских потоков и для каждого из них интервал времени τ , примыкающий к моменту времени t (рис. 2.4.8).

Так как все потоки пуассоновские, то число событий $X_i(t, \tau)$ в i -м потоке распределено по закону Пуассона с параметром

$$a_i(t, \tau) = \int_t^{t+\tau} \lambda_i(t) dt.$$

Очевидно, что при суммировании n потоков в суммарном потоке $P^{(n)}$ (рис. 2.4.8) число событий, попавших на участок τ , примыкающий к точке t , будет складываться из чисел событий, попадающих на тот же участок в складываемых потоках: $X^{(n)}(t, \tau) =$

$= \sum_{i=1}^n X_i(t, \tau)$, т. е. будет представлять собой сумму независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона. В пункте 9.4* было доказано, что сумма n независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона, тоже распределена по закону Пуассона с параметром

$$a^{(n)}(t, \tau) = \sum_{i=1}^n a_i(t, \tau) = \sum_{i=1}^n \int_t^{t+\tau} \lambda_i(t) dt = \int_t^{t+\tau} \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) dt.$$

Обозначим, как и прежде, интенсивность потока, получающегося в результате суммирования n потоком,

$$\lambda^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (2.4.13)$$

Отсюда

$$a^{(n)}(t, \tau) = \int_t^{t+\tau} \lambda^{(n)}(t) dt.$$

Таким образом, мы показали, что при суммировании n независимых пуассоновских потоков получаем

снова пуассоновский поток, интенсивность которого равна сумме интенсивностей складываемых потоков. Если складывать простейшие (стационарные пуассоновские) потоки, получим простейший поток.

Другими словами, пуассоновский поток обладает свойством устойчивости к операции суммирования: *сумма независимых пуассоновских потоков является также пуассоновским потоком*. Это свойство широко используется при решении различных прикладных инженерных задач, оно нам потребуется в дальнейшем.

Предельная теорема для редующих потоков

Потоки событий, встречающиеся в различных областях человеческой деятельности и в природе, иногда подвергаются операции «случайного разрежения»,

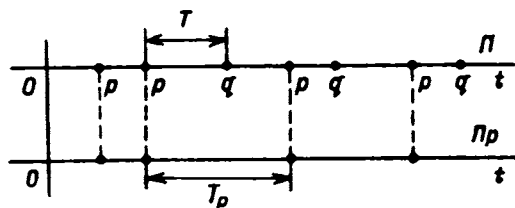


Рис. 2.4.9

когда некоторые события из потока отсеиваются. Например, поток готовых изделий получается в результате многократного контроля и выбраковки на различных операциях; поток космических частиц, достигающих Земли, редет за счет столкновения этих частиц с частицами атмосферы; поток самолетов, преодолевших систему противовоздушной обороны, редет за счет того, что некоторые из них оказываются сбитыми.

Обратим внимание на то, что в приведенных выше примерах разрежение потока проходит случайным образом, а не строго закономерно, как это делалось в п. 2.3 при получении потока Эрланга k -го порядка, когда в потоке оставалось лишь каждое k -е событие.

Рассмотрим такое случайное разрежение более подробно. Возьмем поток Пальма с произвольной плотностью распределения $f(t)$ интервала времени T между событиями (рис. 2.4.9) и применим к нему

следующее преобразование. Каждое событие исходного потока Π (независимо от других событий) остается в этом потоке с вероятностью q и исключается из него с вероятностью p . При этом рассматривается другой поток Π_p , составленный из событий, исключенных из потока Π .

Такую операцию случайного разрежения потока событий обозначим $R_p\{\Pi\}$:

$$\Pi_p = R_p\{\Pi\}. \quad (2.4.14)$$

Очевидно, что интервал времени T_p в разреженном потоке Π_p будет представлять собой сумму случайного числа случайных слагаемых:

$$T_p = \sum_{i=1}^Y T_i, \quad (2.4.15)$$

где $T_1, T_2, \dots$ — система независимых одинаково распределенных с. в., имеющих плотность распределения $f(t)$, а случайная величина Y имеет «геометрическое + 1» распределение (см. п. 5.3*):

$$P\{Y = k\} = pq^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots; \quad p + q = 1). \quad (2.4.16)$$

В п. 8.9* было показано, что в этом случае характеристическая функция с. в. T_p имеет вид

$$\phi_{T_p}(x) = \frac{p\phi_T(x)}{1 - q\phi_T(x)}, \quad (2.4.17)$$

где

$$\phi_T(x) = \int_0^{\infty} e^{-itx} f(t) dt \quad (2.4.18)$$

— характеристическая функция с. в. T — интервала времени в исходном потоке Π .

В п. 8.5* было показано, что $M[T_p] = M[T] \times M[Y]$. Но $M[T] = 1/\lambda$, $M[Y] = 1/p$, где λ — интенсивность исходного потока событий Π . Следовательно, интенсивность потока Π_p будет

$$\lambda_p = 1/M[T_p] = \lambda p, \quad (2.4.19)$$

где

$$M[T_p] = 1/(\lambda p). \quad (2.4.20)$$

Если подвергать исходный поток событий Π многократному R_p -преобразованию, то интенсивность результирующего потока будет стремиться к нулю. Поэтому введем новое преобразование $\tilde{R}_p$ потока Π , состоящее в том, что поток Π сначала подвергается преобразованию R_p , а затем «сжимается» так, чтобы интенсивность потока $\tilde{\Pi}_p$ была равна интенсивности исходного потока Π . Для этого достаточно случайную величину T_p умножить на величину p :

$$\tilde{T}_p = T_p \cdot p. \quad (2.4.21)$$

Легко убедиться в том, что

$$M[\tilde{T}_p] = M[T] = 1/\lambda. \quad (2.4.22)$$

В соответствии со свойствами характеристической функции, приведенными в п. 8.9*, характеристическая функция интервала времени $\tilde{T}_p$ в потоке $\tilde{\Pi}_p = \tilde{R}_p\{\Pi\}$ будет иметь вид

$$\phi_{\tilde{T}_p}(x) = p\phi(px)/[1 - q\phi(px)]. \quad (2.4.23)$$

После этих предварительных замечаний можно перейти к предельной теореме для редееющих потоков, которую можно сформулировать следующим образом. Если стационарный поток Пальма с интенсивностью λ подвергать последовательно независимым преобразованиям $\tilde{R}_{p_1}, \tilde{R}_{p_2}, \dots, \tilde{R}_{p_n}, \dots$, то при $n \rightarrow \infty$ результирующий поток будет простейшим с интенсивностью λ ¹⁾.

Для доказательства этой теоремы сначала покажем, что два последовательных преобразования $\tilde{R}_{p_1}$ и $\tilde{R}_{p_2}$ потока Π эквивалентны одному преобразованию $\tilde{R}_{p_1 p_2}$:

$$\tilde{R}_{p_1 p_2}\{\Pi\} = \tilde{R}_{p_2}\{\tilde{R}_{p_1}\{\Pi\}\}. \quad (2.4.24)$$

В соответствии с (2.4.23) преобразование $\tilde{R}_{p_1}$ дает характеристическую функцию с. в. $\tilde{T}_{p_1}$, имеющую вид $\tilde{R}_{p_1}(\phi(x)) = \phi_{\tilde{T}_{p_1}}(x) = p_1\phi(p_1x)/[1 - q_1\phi(p_1x)]$. (2.4.25)

¹⁾ Точнее, он будет сходиться по вероятности к простейшему потоку.

Следовательно, в результате двойного последовательного преобразования $\tilde{R}_{p_1}$ и $\tilde{R}_{p_2}$ получим характеристическую функцию интервала $\tilde{T}_{p_1 p_2}$ между событиями в виде

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{p_1}(\phi_{\tilde{T}_{p_1}}(x)) &= \tilde{R}_{p_2}\{\tilde{R}_{p_1}(\phi(x))\} = \\ &= p_2 \phi_{\tilde{T}_{p_1}}(p_2 x) / [1 - q_2 \phi_{\tilde{T}_{p_1}}(p_2 x)] = \\ &= p_1 p_2 \phi(p_1 p_2 x) / [1 - (1 - p_1 p_2) \phi(p_1 p_2 x)].\end{aligned}\quad (2.4.26)$$

В результате n последовательных преобразований $\tilde{R}_{p_1}, \tilde{R}_{p_2}, \dots, \tilde{R}_{p_n}$ получим выражение характеристической функции для интервала $T_{p^{(n)}}$ времени между событиями:

$$\phi^{(n)}(x) = \frac{p^{(n)} \phi(p^{(n)} x)}{1 - (1 - p^{(n)}) \phi(p^{(n)} x)}, \quad (2.4.27)$$

где

$$p^{(n)} = \prod_{i=1}^n p_i. \quad (2.4.28)$$

В книге [6] было показано, что при $0 < p_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots$)

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(x) = \frac{\lambda}{\lambda - ix}. \quad (2.4.29)$$

Выражение (2.4.29) представляет собой характеристическую функцию случайной величины, распределенной по показательному закону с параметром λ . Так как исходный поток был потоком Пальма и всякое $\tilde{R}_{p_n}$ -преобразование оставляет его потоком Пальма (интервалы между событиями остаются независимыми одинаково распределенными величинами), то предельный поток будет также потоком Пальма с показательно распределенными интервалами. А это и есть простейший поток.

Обратим внимание на то, что если R_p преобразование подвергать простейший поток с параметром λ , то получится тоже простейший поток с параметром λp . Действительно, подвергнем характеристическую функцию исходного интервала времени T между событиями (2.4.29) R_p преобразованию (см. (2.4.17)):

$$\phi_{T_p}(x) = \frac{p\lambda/(\lambda - ix)}{1 - (1 - p)\lambda/(\lambda - ix)} = \frac{\lambda p}{\lambda p - ix}. \quad (2.4.30)$$

Мы получили характеристическую функцию показательно распределенной случайной величины с параметром λp ; следовательно, полученный в результате R_p -преобразования поток будет простейшим с интенсивностью λp .

Пример 3. В бригаде k станочников, производящих однородные детали. Производительность в смену i -го станочника λ_i , вероятность того, что деталь, произведенная i -м станочником, не будет забракована, равна p_i . Найти вероятность того, что бригада за смену выполнит план — произведет не менее N незабракованных деталей. Найти м.о. и дисперсию числа X — незабракованных деталей и числа Y забракованных деталей, произведенных бригадой в смену.

Решение. Интенсивность производства незабракованных деталей i -м станочником в смену будет $\lambda_i p_i$. Следовательно, интенсивность λ_n производства незабракованных деталей бригадой в смену равна

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i.$$

В соответствии с предельными теоремами теории потоков можно с достаточной для практики точностью считать, что число X незабракованных деталей, произведенных бригадой в смену, будет распределено по закону Пуассона с параметром λ_n . Отсюда найдем вероятность выполнения бригадой плана за смену:

$$\begin{aligned} P\{X \geq N\} &= 1 - P\{X < N\} = \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n^n e^{-\lambda_n} / n! = 1 - R(N-1, \lambda_n), \end{aligned}$$

где $R(m, a) = \sum_{k=0}^m a^k e^{-a} / k!$ — функция, связанная с распределением Пуассона.

Далее, $M[X] = D[X] = \lambda_n$. По той же причине случайная величина Y распределена по закону Пуассона с параметром λ_s , поэтому $M[Y] = D[Y] = \lambda_s$, где λ_s — интенсивность производства забракованных деталей бригадой в смену:

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^k \lambda_i q_i = \lambda - \lambda_n \quad (q_i = 1 - p_i).$$

λ — общая интенсивность производства деталей (забракованных и незабракованных) бригадой в смену:

$$\lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i.$$

Например, если в бригаде 5 станочников с производительностью $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$, $\lambda_4 = 5$, $\lambda_5 = 4$ (деталей в смену), вероятность выпуска брака равна $q_1 = 0,1$; $q_2 = 0,2$; $q_3 = 0,3$; $q_4 = 0,2$; $q_5 = 0,25$, а план бригады равен $N = 14$ деталей, то получим следующий результат (см. приложение 2 в [5]):

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^5 \lambda_i q_i = 4 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,25 = 5 \text{ (деталей в смену);}$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^5 \lambda_i = 23 \text{ (детали в смену);}$$

$$\lambda_n = \lambda - \lambda_s = 18 \text{ (деталей в смену);}$$

$$P\{X \geq 14\} = 1 - R(13, 18) \approx 0,8574;$$

$$M[X] = D[X] = 18 \text{ (деталей в смену);}$$

$$\sigma[X] = 4,243; M[Y] = D[Y] = 5 \text{ (деталей в смену);}$$

$$\sigma[Y] \approx 2,236.$$

Обратим внимание на то, что хотя в смену в среднем производится 18 незабракованных деталей, что намного больше плана (14 деталей), тем не менее вероятность того, что план будет выполнен, равна только 0,8574. Это объясняется тем, что имеется большой разброс числа произведенных незабракованных деталей ($\sigma[X] = 4,243$).

Заметим, что если случайные величины X и Y распределены по закону Пуассона, то общее число деталей $Z = X + Y$, произведенных в смену, будет тоже распределено по закону Пуассона; при этом случайные величины X и Y будут независимы. Это было доказано в п. 9.8*. ►

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ. МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

3.1. Граф состояний. Классификация состояний. Вероятности состояний

Рассмотрим физическую систему S , в которой протекает случайный процесс с дискретными состояниями:

$$s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, \quad (3.1.1)$$

число которых конечно (или счетно). Состояния $s_1, s_2, \dots$ могут быть качественными (т. е. описываться словами) или же каждое из них характеризуется случайной величиной (либо случайным вектором).

Прежде всего рассмотрим множество состояний (3.1.1) с точки зрения его структуры — возможности системы S переходить из состояния s_i в данное состояние s_j непосредственно или через другие состояния. Для этого удобно пользоваться наглядной схемой, так называемым графом состояний. Здесь и далее мы будем отчасти пользоваться терминологией теории графов [17]. Имеется две основные разновидности графов: неориентированные и ориентированные. *Неориентированный граф* — совокупность точек (вершин графа) с соединяющими некоторые из них отрезками (ребрами графа). *Ориентированный граф* — это совокупность точек (вершин) с соединяющими некоторые из них ориентированными отрезками (стрелками). При изложении теории с.п. с дискретными состояниями мы будем пользоваться только ориентированными графами. Вершины графа будут соответствовать состояниям системы. Вершину будем изображать прямоугольником, в который вписано обозначение состояния; стрелка, ведущая из вершины s_i в вершину s_j , будет обозначать возможность перехода системы S из состояния s_i в состояние s_j непосредственно, минуя другие состояния. Стрелки графа могут изображаться не только

прямолинейными, но и криволинейными отрезками (рис. 3.1.1). Сам граф системы S будем обозначать буквой G .

Нередко при изложении теории случайных процессов кроме стрелок, связывающих различные состояния s_i, s_j ($i \neq j$), проставляют также обратные стрелки, возвращающие систему из состояния s_j в то же состояние s_i (рис. 3.1.2). Переход по стрелке, ведущей из состояния s_i в него же, означает *задержку*

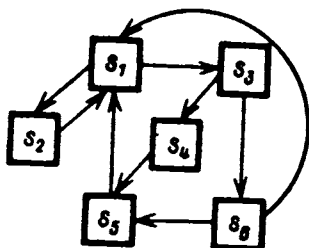


Рис. 3.1.1



Рис. 3.1.2

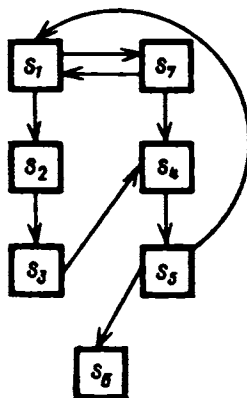


Рис. 3.1.3

системы в состоянии s_i . Мы «обратных стрелок» про- ставлять на графе не будем, так как все расчеты можно вести и без них.

Пример 1. Система S представляет собой тех- ническое устройство (ТУ), а его возможные состоя- ния: s_1 — ТУ работает исправно; s_2 — ТУ неисправно, но это не обнаружено; s_3 — неисправность обнару- жена, ведется поиск ее источника; s_4 — источник не- исправности найден, ведется ремонт ТУ; s_5 — про- водится послеремонтный осмотр (после этого осмотра, если ТУ восстановлено в прежнем виде, оно возвра- щается в состояние s_1 , если нет — признается негод- ным и списывается); s_6 — ТУ списано за негодностью; s_7 — ведется профилактический осмотр ТУ (если об- наружена неисправность, ТУ направляется в ремонт). Граф состояний ТУ показан на рис. 3.1.3. В даль- нейшем мы всегда будем считать (не оговаривая это

каждый раз отдельно), что переход («перескок») системы S из состояния s_i в другое состояние s_j осуществляется мгновенно и что в любой момент времени система может находиться только в одном из своих состояний. ►

Проведем некоторую необходимую для дальнейшего классификацию состояний. Состояние s_i называется *источником*, если система S может выйти из этого состояния, но попасть в него обратно уже не может, т. е. на графе G состояний в состояние s_i не ведет ни одна стрелка. На рис. 3.1.4 состояния s_1 и s_2 являются источниками.

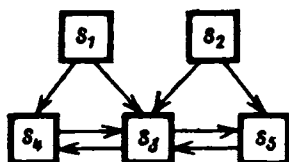


Рис. 3.1.4

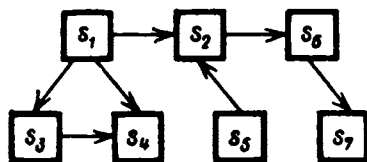


Рис. 3.1.5

Состояние s_i называется *концевым* (или *поглощающим*), если система S может попасть в это состояние, но выйти из него уже не может. Для графа состояний это означает, что из состояния s_i не ведет ни одна стрелка (для графа, изображенного на рис. 3.1.5, состояния s_4 и s_7 — поглощающие; для графа состояний ТУ, изображенного на рис. 3.1.3, состояние s_6 (ТУ списано) поглощающее; у графа, построенного на рис. 3.1.4, поглощающих состояний нет).

Если система S может непосредственно перейти из состояния s_i в состояние s_j , то состояние s_j называется *соседним по отношению к состоянию s_i* . Если система S может непосредственно перейти из состояния s_i в состояние s_j и из состояния s_j в состояние s_i , то состояния s_i, s_j называются *соседними*. Для графа состояний ТУ (рис. 3.1.3) состояние s_3 является соседним по отношению к состоянию s_2 , а состояния s_1, s_4 — нет, так как на графе нет стрелок, непосредственно связывающих эти состояния с состоянием s_2 . На этом же графе состояния s_1 и s_7 являются соседними.

Состояние s_i называется *транзитивным*, если система S может войти в это состояние и выйти из него, т. е. на графе состояний есть хотя бы одна стрелка, ведущая в s_i , и хотя бы одна стрелка, ведущая из s_i . На рис. 3.1.3 все состояния, кроме поглощающего s_6 , являются транзитивными; на рис. 3.1.5 все состояния, кроме источников s_1 , s_5 и поглощающих s_4 , s_7 , транзитивны.

Для полноты картины можно рассматривать также и «изолированные» состояния. Состояние s_i называется *изолированным*, если из него нельзя попасть ни в одно из других состояний и в него нельзя попасть ни из какого другого состояния. На графе состояний изолированное состояние s_i не связано стрелкой ни с

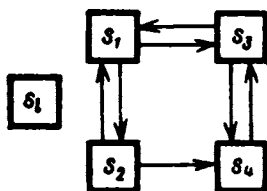


Рис. 3.1.6

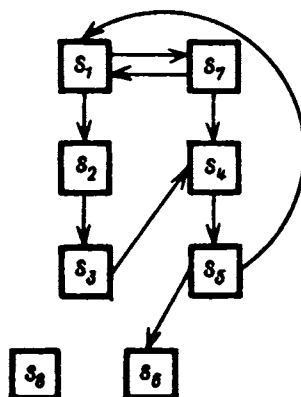


Рис. 3.1.7

каким другим (рис. 3.1.6). Прикладного значения изолированные состояния не имеют; с некоторой натяжкой их можно примысливать к другим. Например, если система S представляет собой ТУ, рассмотренное в примере 1, то можно к состояниям $s_1, \dots, s_7$, изображенным на графе, прибавить еще изолированное состояние: s_8 — ТУ находится на стенде постоянной выставки, предположив, что ТУ попадает в это состояние еще до начала эксплуатации (рис. 3.1.7).

В дальнейшем изолированные состояния будем рассматривать довольно редко.

Наряду с отдельными состояниями системы S в ряде задач практически бывает нужно рассматривать подмножества ее состояний (см. п. 2.1*).

Обозначим W множество всех состояний системы S (конечное или бесконечное, но счетное) и рассмотрим его подмножество $V \subset W$. Подмножество V

называется *замкнутым* (концевым), если система S , попав в одно (или находясь в одном) из состояний $s_i \in V$, не может выйти из этого подмножества состояний. Например, на рис. 3.1.5 подмножества состояний $V_1 = \{s_3, s_4\}$ и $V_2 = \{s_2, s_5, s_6, s_7\}$ являются

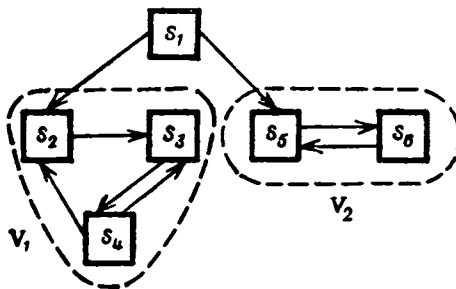


Рис. 3.1.8

концевыми. Концевое подмножество состояний может включать в себя поглощающее состояние, а может и не включать. На рис. 3.1.8 подмножества $V_1 = \{s_2, s_3, s_4\}$ и $V_2 = \{s_5, s_6\}$ являются концевыми, но ни одно из них не включает поглощающего состояния.

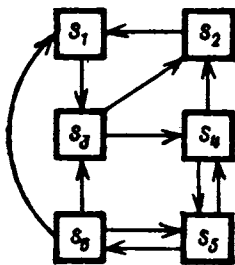


Рис. 3.1.9

Подмножество состояний $V \subset W$ называется *связным* или *эргодическим*, если из любого состояния, входящего в него, можно попасть в любое другое состояние, принадлежащее этому подмножеству. На рис. 3.1.8 оба концевых подмножества V_1 и V_2 являются эргодическими. Эргодическим может быть и все множество W состояний системы S

(см., например, рис. 3.1.1 и 3.1.9). В эргодическом множестве состояний нет ни источников, ни поглощающих состояний.

Подмножество состояний V называется *транзитивным*, если система S может войти в это подмножество и выйти из него, т. е. из любого состояния $s_i \in V$ можно (за то или другое число перескоков), выйти из этого подмножества.

Случайный процесс, протекающий в системе S , можно трактовать как процесс блуждания системы по множеству состояний W . Если подмножество $V \subset W$ является конечным, то, попав в него, система будет продолжать блуждание уже по этому подмножеству состояний V . Если все множество W эргодично, то блуждание будет происходить по всем его состояниям.

На практике очень часто встречаются системы, состояния которых образуют цепь (рис. 3.1.10), в которой каждое состояние s_i (кроме двух крайних s_0 и s_n) связано прямой и обратной связью с двумя соседними



Рис. 3.1.10

s_{i-1} , s_{i+1} , а каждое из двух крайних связано прямой и обратной связью только с одним соседним.

Такая схема случайного процесса называется *схемой гибели и размножения*, а сам процесс — *процессом гибели и размножения*.

Пример 2. Техническое устройство (ТУ) состоит из n одинаковых узлов. Каждый из узлов может в момент t быть исправным или неисправным; если узел неисправен, его ремонтируют. Состояния s_i системы S (ТУ) могут быть перенумерованы по числу неисправных узлов:

s_0 — в ТУ нет неисправных узлов;
 s_1 — в ТУ один неисправный узел (какой — неважно);

s_i — в ТУ i неисправных узлов ($0 < i < n$);

s_n — в ТУ все n узлов неисправны.

Состояния $s_0, \dots, s_n$ организованы по *схеме гибели и размножения* (рис. 3.1.10); стрелки, идущие слева направо, отвечают увеличению числа неисправных узлов; перемещения системы S по этим стрелкам происходят под влиянием отказов узлов, т. е. перехода какого-то узла из исправного состояния в неисправное; стрелки, идущие справа налево — под влиянием

ремонт (восстановлений) узлов. Считаем, что «перескок» системы S из состояния s_i не в соседнее с ним состояние s_{i-1} или s_{i+1} , а в какое-то другое из связанных с s_i состояний, практически невозможно (ниже, в гл. 4, мы увидим, что это связано с порядностью потоков отказов и восстановлений). Очень многие случайные процессы (в частности, процессы, протекающие в системах массового обслуживания [15], [8], [1]) организованы по схеме гибели и размножения. Специально процессы гибели и размножения будут рассмотрены в этой и в других главах данной книги. ►

Термин «процесс гибели и размножения» ведет начало от биологических задач, где такими процессами описывается изменение численности биологических популяций; стрелки, ведущие слева направо, соответствуют увеличению численности (размножению) популяции, а справа налево — гибели входящих в нее особей. Однако применение схемы гибели и размножения далеко выходит за пределы биологических задач.

Если на графе состояний системы S стрелки, ведущие справа налево, отсутствуют, то говорят о процессе «чистого размножения» (рис. 3.1.11, а), в противоположном случае — о процессе «чистой гибели»

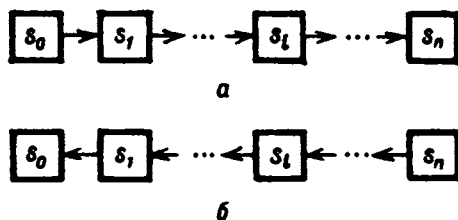


Рис. 3.1.11

(рис. 3.1.11, б). Меняя нумерацию состояний на обратную, можно каждую из этих схем свести к другой. «Процесс чистого размножения» получится в условиях примера 2, если предположить, что узлы, составляющие ТУ, не восстанавливаются после выхода из строя.

Процесс гибели и размножения может в некоторых случаях иметь не конечное число состояний: $s_0, s_1, \dots$

..., s_i , ..., s_n , а бесконечное (счетное): $s_0, s_1, \dots$, ..., s_i , ...; с примерами таких процессов мы встретимся в дальнейшем.

При анализе случайных процессов, протекающих в системах с дискретными состояниями, важную роль играют вероятности состояний.

Обозначим $S(t)$ состояние системы S в момент t . Вероятностью i -го состояния в момент t называется вероятность события, состоящего в том, что в момент t система S будет в состоянии s_i ; обозначим ее $p_i(t)$:

$$p_i(t) = P \{S(t) = s_i\}, \quad (3.1.2)$$

где $S(t)$ — случайное состояние системы S в момент t .

Очевидно, что для системы с дискретными состояниями $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots$ в любой момент t сумма вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_i p_i(t) = 1, \quad (3.1.3)$$

как сумма вероятностей полной группы несовместных событий.

В ряде задач практики нас интересует так называемый *установившийся* или *стационарный* режим работы системы, который в ней устанавливается, когда от начала процесса прошло достаточно большое время τ . Например, процесс изменения напряжения в сети питания технического устройства, пройдя сразу после включения через ряд колебаний, по прошествии времени устанавливается (см. рис. 3.1.12). Аналогично этому и в некоторых случайных процессах по прошествии достаточно большого времени τ устанавливается стационарный режим, во время которого состояния системы хотя и меняются случайным образом, но их вероятности $p_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) остаются постоянными. Обозначим эти постоянные вероятности p_i :

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t). \quad (3.1.4)$$

Вероятности p_i ($i = 1, 2, \dots$), если они существуют,

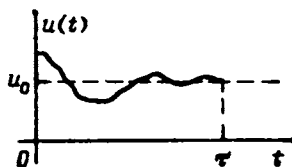


Рис. 3.1.12

называются *финальными (предельными)* вероятностями состояний. Финальную вероятность p_i можно истолковать как *среднюю долю времени*, которую в стационарном режиме проводит система S в состоянии s_i . В дальнейшем будет показано, при каких условиях финальные вероятности существуют и какими они могут быть для разных состояний и подмножеств состояний.

Введем очень важное для дальнейшего понятие марковского случайного процесса.

Случайный процесс, протекающий в системе S с дискретными состояниями $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots$, называется *марковским*, если для любого момента времени t_0 вероятность каждого из состояний системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и как она пришла в это состояние; т. е. не зависит от ее поведения в прошлом (при $t < t_0$).

В главе 2 мы уже упоминали об аналогичном свойстве некоторых потоков событий (отсутствии последствия). Не надо понимать марковское свойство случайного процесса как полную независимость «будущего» от «прошлого»; нет, в общем случае «будущее» зависит от «настоящего», т. е. вероятности $p_i(t)$ при $t > t_0$ зависят от того, в каком состоянии s_i находится система в настоящем (при $t = t_0$); само же это «настоящее» зависит от «прошлого», от того, как вела себя система S при $t < t_0$. Это можно сформулировать следующим образом: для марковского случайного процесса «будущее» зависит от «прошлого» только через «настоящее» (рис. 3.1.13). При фиксированном «настоящем» условные вероятности всех состояний системы в «будущем» не зависят от предыстории процесса, т. е. от того, когда и как система S к моменту t_0 пришла в состояние s_i .

«Настоящее» может быть задано не одним каким-то состоянием s_i , а целым подмножеством состояний $V \subset W$, где W — множество всех возможных состояний системы.

Подчеркнем также, что «настоящее» может быть задано не только одним состоянием системы S в мо-

мент t_0 ; в него при желании можно включить и те элементы из «прошлого», от которых, при заданном «настоящем», зависит будущее. Например, вероятности состояний в «будущем» могут зависеть не только от состояния s_i системы в настоящее, но и от того, из какого состояния s_j система перешла к моменту t_0 в состояние s_i ; в этом случае настоящее характеризуется не только состоянием s_i , в которое система перешла к моменту t_0 , но и состоянием s_j , из которого она перешла в s_i . Вводя в состав параметров, характеризующих настоящее состояние системы, те параметры из прошлого, от которых зависит будущее, можно, как говорится, «марковизировать» многие немарковские случайные процессы, но, как правило, это приводит к сильному усложнению математического аппарата. Простейшие примеры «марковизации» встретятся нам в дальнейшем (см. гл. 5).

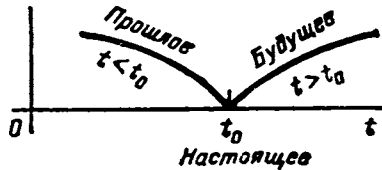


Рис. 3.1.13

3.2. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова)

Пусть имеется система S с дискретными состояниями $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n$. Предположим, что случайные переходы («перескоки») системы из состояния в состояние могут происходить только в определенные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots$. Эти моменты мы будем называть шагами процесса; $t_0 = 0$ — его началом. Сам процесс представляет собой случайное блуждание системы S по состояниям. После первого шага система может оказаться в одном (и только в одном) из своих возможных состояний: $s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \dots, s_i^{(1)}, \dots, s_n^{(1)}$; на втором шаге — $s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \dots, s_i^{(2)}, \dots, s_n^{(2)}$; на k -м шаге — $s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, \dots, s_i^{(k)}, \dots, s_n^{(k)}$ (число состояний в общем случае может быть бесконечным, но счетным; с такими примерами мы встретимся в дальнейшем. Здесь же для простоты ограничимся конечным числом n состояний).

Предположим, что граф состояний системы S имеет вид, представленный на рис. 3.2.1. Процесс блуждания системы S по состояниям можно представить как последовательность или «цепь» событий, состоящих в том, что в начальный момент $t_0 = 0$ система находится в одном из состояний (например, в состоянии $s_1^{(0)}$); в момент первого шага перешла из него скачком в состояние $s_5^{(1)}$, из которого на втором шаге перешла в $s_3^{(2)}$, на третьем шаге перешла в $s_2^{(3)}$ и т. д. «Траектория» системы, блуждающей по со-

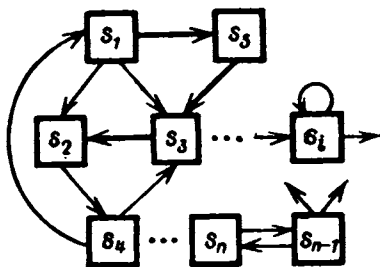


Рис. 3.2.1

стояниям s_1, s_5, s_3, s_2 , показана на рис. 3.2.1 жирными линиями. На каких-то шагах система может задерживаться в том или другом из своих состояний, $s_i^{(k)} = s_i^{(k+1)}$ (это показано «возвратной стрелкой» на рис. 3.2.1) или же вернуться в него после ряда шагов.

«Траектория» блуждания системы по графу состояний, изображенная на рис. 3.2.1 жирными линиями, представляет собой не что иное, как реализацию случайного процесса, полученную в результате одного опыта. При повторении опыта, естественно, реализации в общем случае не совпадают.

Пример 1. Рассматривается следующий процесс: система представляет собой техническое устройство (ТУ), которое осматривается в определенные моменты времени (скажем, через сутки), и ее состояние регистрируется в отчетной ведомости. Каждый осмотр с регистрацией представляет собой «шаг» процесса. Возможные состояния ТУ следующие:

- s_1 — полностью исправно;
- s_2 — частично неисправно, требует наладки;
- s_3 — обнаружена серьезная неисправность, требует ремонта;
- s_4 — признано непригодным, списано.

Допустим, что как наладка, так и ремонт продолжаются менее суток и после их выполнения ТУ возвращается в состояние s_1 (полностью исправно) или

списывается. Граф состояний ТУ имеет вид, изображенный на рис. 3.2.2. Очевидно, состояние s_4 на рис. 3.2.2 поглощающее. Если известно, что в начальный момент ТУ полностью исправно, то $P\{S(0) = s_1\} = 1$; в дальнейшем процесс протекает случайным образом: после каждого шага (осмотра, контроля) ТУ с какой-то вероятностью может оказаться в одном из своих состояний.

Реализация случайного процесса блуждания системы по состояниям может иметь, например, такой вид:

$$s_1^{(0)}, s_1^{(1)}, s_2^{(2)}, s_1^{(3)}, s_3^{(4)}, s_1^{(5)}, s_4^{(6)},$$

что означает, что ТУ в начальный момент исправно; при первом осмотре — также исправно; при втором — частично исправно, требует наладки;

при третьем исправно; при четвертом — обнаружена серьезная неисправность, требует ремонта; при пятом — снова исправно; при шестом — признано неисправным, списано (дальнейшее развитие процесса невозможно, так как он дошел до поглощающего состояния s_4). ►

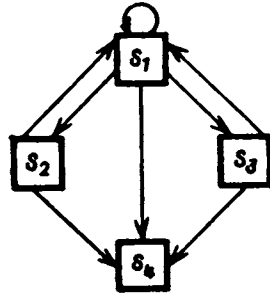


Рис. 3.2.2

Рассмотренный в примере процесс несколько идеализирован (предполагается, что в результате наладки или ремонта ТУ полностью восстанавливает свое состояние), но как иллюстративный он уместен.

Рассмотрим общий случай. Пусть происходит случайный процесс в системе S с дискретными состояниями $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n$, которые она может принимать в последовательности шагов с номерами $0, 1, 2, \dots, k, \dots$

Случайный процесс представляет собой последовательность событий вида $\{S(k) = s_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, 2, \dots$). Эта последовательность («цепь») событий подлежит нашему изучению. Наиболее важной ее характеристикой являются вероятности состояний системы

$$P\{S(k) = s_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.2.1)$$

где $P\{S(k)=s_i\}$ — вероятность того, что на k -м шаге система S будет находиться в состоянии s_i .

Распределение вероятностей (3.2.1) представляет собой не что иное, как одномерный закон распределения случайного процесса $S(t)$, протекающего в системе S с «качественными» дискретными состояниями и дискретным временем $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$

Процесс, протекающий в такой системе S , называется *марковским процессом с дискретными состояниями и дискретным временем* (или, короче, *марковской цепью*), если выполняется условие, сформулированное в п. 3.1: для любого фиксированного момента времени (любого шага k_0) условные вероятности состояний системы в будущем (при $k > k_0$) зависят только от состояния системы в настоящем (при $k = k_0$) и не зависят от того, когда (на каком шаге, при $k < k_0$) и откуда система пришла в это состояние. Марковская цепь представляет собой разновидность марковского процесса, в котором будущее зависит от прошлого только через настоящее¹⁾.

Понятие «настоящего» может быть сформулировано по-разному; например, «на k_0 -м шаге система находится в состоянии s_i », если вероятности состояний системы на последующих шагах зависят только от s_i , а не от предыдущих состояний системы. Если же эта вероятность зависит еще и от того, откуда (из какого состояния s_j) система пришла в состояние s_i , можно включить это состояние s_j в описание «настоящего».

Цепь, в которой условные вероятности состояний в будущем зависят только от состояния на данном, последнем, шаге и не зависят от предыдущих, иногда называют простой цепью Маркова, в отличие от такой, где будущее зависит от состояний системы не только в настоящем на данном шаге, но и от ее состояний на нескольких предыдущих шагах; такую цепь называют сложной цепью Маркова. Сам А. А. Марков рассматривал сложные цепи, построенные на материале буквенных последовательностей, взятых из текста пушкинского «Евгения Онегина».

¹⁾ Названия «марковская цепь», «марковский процесс» связаны с именем А. А. Маркова, который еще в начале 20-го века первым стал исследовать такие процессы.

Если в качестве системы, в которой происходит случайный процесс, рассмотреть букву, входящую в текст, которой могут быть: а, б, в, ..., щ, ъ, ы, ь, э, ю, я, «пробел», то сразу ясно, что вероятность последующей буквы быть той или другой зависит от того, какова была предыдущая (например, последовательности букв «яы» или «эь» в русском языке исключены); не так очевидно, но все же ясно, что эта вероятность зависит не только от предыдущей буквы, но и от других, ей предшествовавших (например, последовательность букв «тт» в русском языке если не исключена, то практически невозможна, тогда как последовательность «тт» встречается довольно часто). Мы в данном элементарном изложении будем рассматривать только простые цепи Маркова и вычислять для них вероятности состояний.

Из определения марковской цепи следует, что для нее вероятность перехода системы S в состояние s_j на $(k+1)$ -м шаге зависит только от того, в каком состоянии s_i находилась система на предыдущем k -м шаге и не зависит от того, как она вела себя до этого k -го шага.

Основной задачей исследования марковской цепи является нахождение *безусловных вероятностей* нахождения системы S на любом (k) -м шаге в состоянии s_i ; обозначим эту вероятность $p_i(k)$:

$$p_i(k) = P\{S(k) = s_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots). \quad (3.2.2)$$

Для нахождения этих вероятностей необходимо знать условные вероятности перехода системы S на k -м шаге в состояние s_j , если известно, что на предыдущем $(k-1)$ -м шаге она была в состоянии s_i . Обозначим эту вероятность

$$p_{ij}(k) = P\{S(k) = s_j | S(k-1) = s_i\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.2.3)$$

Вероятности $p_{ij}(k)$ называются переходными вероятностями марковской цепи на k -м шаге. Вероятность $p_{ii}(k)$ есть вероятность того, что на k -м шаге система *задержится* (останется) в состоянии s_i .

Переходные вероятности $p_{ij}(k)$ можно записать в виде квадратной таблицы (матрицы) размерности $n \times n$:

$$\|p_{ij}(k)\| = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \dots & p_{1j}(k) & \dots & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \dots & p_{2j}(k) & \dots & p_{2n}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1}(k) & p_{i2}(k) & \dots & p_{ij}(k) & \dots & p_{in}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & \dots & p_{nj}(k) & \dots & p_{nn}(k) \end{bmatrix} \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (3.2.4)$$

По главной диагонали матрицы (3.2.4) стоят вероятности задержки системы в данном состоянии s_j ($j = 1, \dots, n$) на k -м шаге.

$$p_{11}(k), p_{22}(k), \dots, p_{jj}(k), \dots, p_{nn}(k). \quad (3.2.5)$$

Так как на каждом шаге система S может находиться только в одном из взаимно исключающих состояний, то для любой i -й строки матрицы (3.2.4) сумма всех стоящих в ней вероятностей $p_{ij}(k)$ равна единице:

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}(k) = 1. \quad (3.2.6)$$

Матрица, обладающая таким свойством, называется *стохастической*. Естественно, что все элементы стохастической матрицы отвечают условию $0 \leq p_{ij}(k) \leq 1$. В силу условия (3.2.6) можно в матрице (3.2.4) не задавать вероятности задержки, а получать их как дополнения до единицы всех остальных членов строки:

$$p_{ii}(k) = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}(k) \quad (3.2.7)$$

(этим свойством мы будем широко пользоваться в дальнейшем). Чтобы найти безусловные вероятности $p_i(k)$, недостаточно знать матрицу переходных вероятностей (3.2.4); нужно еще знать начальное распределение вероятностей, т. е. вероятности состояний $p_i(0)$, соответствующие началу процесса — моменту $t_0 = 0$:

$$p_1(0), p_2(0), \dots, p_i(0), \dots, p_n(0), \quad (3.2.8)$$

в сумме образующие единицу:

$$\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1. \quad (3.2.9)$$

Если известно, что в начальный момент система S находится во вполне определенном состоянии s_i , то вероятность $p_i(0)$ этого состояния в формуле (3.2.9) равна единице, а все остальные — нулю:

$$\begin{aligned} p_i(0) = 1, \quad p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_{i-1}(0) = \\ = p_{i+1}(0) = \dots = p_n(0). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Цепь Маркова называется *однородной*, если переходные вероятности $p_{ij}(k)$ не зависят от номера шага k : $p_{ij}(k) = p_{ij}$. Матрица переходных вероятностей для однородной цепи Маркова имеет вид

$$\|p_{ij}\| = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.2.11)$$

При выводе формул для вероятностей состояний мы в целях простоты записи будем рассматривать только однородные цепи Маркова (в случае, когда цепь неоднородна, можно все переходные вероятности в формулах просто положить зависящими от номера шага k).

При нахождении вероятностей состояний марковской цепи на k -м шаге $p_i(k)$ ($k = 1, 2, \dots$) удобно бывает пользоваться так называемым *размеченным графом состояний системы* S , где возле каждой стрелки, ведущей из состояния s_i в состояние s_j , проставлена переходная вероятность p_{ij} ; вероятности задержки на размеченном графе не проставляются, а просто получаются дополнением до единицы суммы вероятностей, стоящих у всех стрелок, ведущих из данного состояния s_i . Образец такого размеченного графа состояний показан на рис. 3.2.3. Для этого графа состояний вероятности задержек равны:

$$\begin{aligned} p_{11} = 1 - p_{12}, \quad p_{22} = 1 - (p_{21} + p_{24}), \quad p_{33} = 1 - p_{31}, \\ p_{44} = 1 - (p_{43} + p_{45}), \quad p_{55} = 1 - p_{51} \end{aligned}$$

(на размеченном графе эти вероятности для простоты не проставляются).

Если состояние s_i является поглощающим (на графе из него не идет ни одной стрелки), то вероятность задержки в этом состоянии $p_{ii} = 1$. Теперь покажем, как найти для однородной цепи Маркова безусловную вероятность нахождения системы S на k -м шаге в состоянии s_j ($j = 1, 2, \dots, n$):

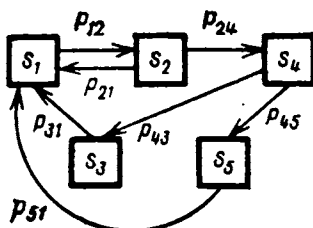


Рис. 3.2.3

будем, как найти для однородной цепи Маркова безусловную вероятность нахождения системы S на k -м шаге в состоянии s_j ($j = 1, 2, \dots, n$):

$$p_j(k) = P\{S(k) = s_j\}, \quad (3.2.12)$$

если задана матрица переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$ (или, что равнозначно, размеченный граф состояний) и начальное распределение вероятностей

меченный граф состояний) и начальное распределение вероятностей

$$p_i(0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n p_i(0) = 1. \quad (3.2.13)$$

Сделаем гипотезу, состоящую в том, что в начальный момент ($k=0$) система находилась в состоянии s_i . Вероятность этой гипотезы известна из (3.2.13) и равна $p_i(0) = P\{S(0) = s_i\}$. В предположении, что эта гипотеза имеет место, условная вероятность того, что система S на первом шаге будет в состоянии s_j , равна переходной вероятности $p_{ji} = P\{S(1) = s_j | S(0) = s_i\}$.

По формуле полной вероятности (см. (2.5.2)*) получим

$$\begin{aligned} p_j(1) &= \sum_{i=1}^n P\{S(1) = s_j | S(0) = s_i\} \cdot P\{S(0) = s_i\} = \\ &= \sum_{i=1}^n p_{ji} p_i(0) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Таким образом, мы нашли распределение вероятностей системы S на первом шаге. Теперь у нас есть все необходимое для того, чтобы найти распределение вероятностей на втором шаге, которое для цепи Маркова зависит только от распределения вероятностей на первом шаге и матрицы переходных вероятностей.

Опять сделаем гипотезу, состоящую в том, что на первом шаге система находится в состоянии s_i ; ве-

роятность этой гипотезы нам уже известна и равна $p_i(1) = P\{S(1) = s_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (см. (3.2.14)). При этой гипотезе условная вероятность того, что на втором шаге система S будет в состоянии s_j , равна

$$p_{ij} = P\{S(2) = s_j | S(1) = s_i\}.$$

По формуле полной вероятности находим

$$p_j(2) = \sum_{i=1}^n p_i(1) p_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.2.15)$$

Таким образом, мы выразили распределение вероятностей (3.2.15) на втором шаге через распределение вероятностей на первом шаге и матрицу $\|p_{ij}\|$. Переходя таким же способом от $k=2$ к $k=3$ и т. д., получим рекуррентную формулу¹⁾:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k-1) p_{ij} \quad (k = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.2.16)$$

Пример 2. В условиях примера 1 задана матрица переходных вероятностей

$$\|p_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.2.17)$$

Этой матрице соответствует размеченный граф состояний ТУ, изображенный на рис. 3.2.4. В начальный момент ($t_0 = 0$) ТУ находится в состоянии s_1 (исправно). Найти распределение вероятностей состояний ТУ для первых четырех шагов ($k = 1, 2, 3, 4$); убедиться, что вероятность поглощающего состояния $p_4(k)$ с увеличением k растет.

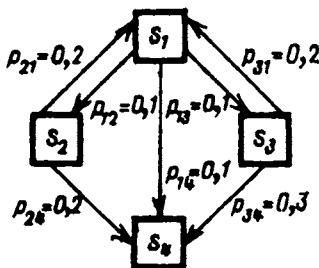


Рис. 3.2.4

Решение. Так как в начальный момент ($t_0 = 0$) ТУ заведомо находится в состоянии s_1 , то $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0$. По формуле (3.2.16), пола-

¹⁾ Рекуррентной называется всякая формула, выражающая каждый член последовательности через предыдущие члены этой последовательности.

гая в ней $k=1$, получим $p_1(1)=0,7$; $p_2(1)=0,1$; $p_3(1)=0,1$; $p_4(1)=0,1$. Снова применяя формулу (3.2.16), находим вероятности состояний на втором шаге: $p_1(2)=0,7 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0 = 0,53$; $p_2(2)=0,7 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 = 0,13$; $p_3(2)=0,7 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0 = 0,12$; $p_4(2)=1 - p_1(2) - p_2(2) - p_3(2) = 0,22$. Далее получим: $p_1(3)=0,53 \cdot 0,7 + 0,13 \cdot 0,2 + 0,12 \cdot 0,2 = 0,421$; $p_2(3)=0,53 \cdot 0,1 + 0,13 \cdot 0,6 = 0,131$; $p_3(3)=0,53 \cdot 0,1 + 0,12 \cdot 0,5 = 0,113$; $p_4(3)=1 - (p_1(3) + p_2(3) + p_3(3)) = 0,335$; $p_1(4)=0,421 \cdot 0,7 + 0,131 \cdot 0,2 + 0,113 \cdot 0,2 = 0,3435$; $p_2(4)=0,421 \cdot 0,1 + 0,131 \cdot 0,6 = 0,1207$; $p_3(4)=0,421 \cdot 0,1 + 0,113 \cdot 0,5 = 0,0986$; $p_4(4)=1 - (p_1(4) + p_2(4) + p_3(4)) = 0,4372$. Мы убедились в том, что с возрастанием k вероятность поглощающего состояния $p_4(k)$ растет, тогда как вероятность $p_1(k)$ состояния s_1 убывает. ►

Если рассматривается неоднородная цепь Маркова, то переходные вероятности будут зависеть от номера шага k (см. (3.2.3))

$$p_{ij}(k) = P\{S(k) = s_j | S(k-1) = s_i\} \\ (i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots).$$

Для нахождения распределения вероятностей состояний системы на k -м шаге нужно знать начальное распределение вероятностей $p_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и матриц переходных вероятностей $\|p_{ij}(1)\|$, $\|p_{ij}(2)\|$, ..., $\|p_{ij}(k)\|$. Однако рассуждения при выводе формул для вероятностей состояний $p_j(1)$, $p_j(2)$, ..., $p_j(k)$, ... ($j = 1, \dots, n$) остаются прежними. Поэтому

$$p_j(1) = \sum_{i=1}^n P\{S(1) = s_j | S(0) = s_i\} P\{S(0) = s_i\} = \\ = \sum_{i=1}^n p_{ij}(1) p_i(0) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3.2.18)$$

а рекуррентные формулы (3.2.16), определяющие распределение вероятностей на k -м шаге для неоднородной цепи Маркова, принимают вид

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k-1) p_{ij}(k) \\ (k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.2.19)$$

В инженерной практике сравнительно редко встречаются марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (марковские цепи); гораздо чаще переходы системы из состояния в состояние происходят не в строго определенных, а в случайные моменты времени (процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, о которых будет идти речь в гл. 4). Однако при моделировании таких процессов на ЭВМ иногда бывает удобно приближенно представлять их как марковские цепи. Как это делается, будет рассказано в п. 4.1.

3.3. Стационарный режим для цепи Маркова

При некоторых условиях в цепи Маркова с возрастанием k (номера шага) устанавливается стационарный режим, в котором система S продолжает блуждать по состояниям, но вероятности этих состояний уже от номера шага не зависят. Такие вероятности называются *предельными* (или *финальными*) вероятностями цепи Маркова.

Например, если рассматривать ЭВМ в двух состояниях: s_1 — исправна, s_2 — не исправна (размеченный граф ЭВМ показан на рис. 3.3.1), то имеет место следующая динамика изменения вероятностей (при начальных условиях $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = 0$: $p_1(1) = 0,7$; $p_1(2) = 0,61$; $p_1(3) = 0,583$; $p_1(4) = 0,5749$. Ниже мы покажем, что в этом случае $p_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} p_1(k) = 0,4/(0,4 + 0,3) = 0,5714$. Таким образом, в рассматриваемой системе стационарный режим наступит практически через четыре шага.

Можно убедиться в том, что в этом примере финальные вероятности не зависят от начальных условий.

Сформулируем условия существования стационарного режима для системы S с конечным числом состояний n , в которой протекает марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова):

1. Множество всех состояний W системы S должно быть эргодическим (см. п. 3.1).

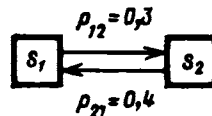


Рис. 3.3.1

2. Цепь Маркова должна быть однородной (см. (3.2.11)):

$$p_{ij}(k) = p_{ij}. \quad (3.3.1)$$

3. Цепь Маркова должна быть «достаточно хорошо перемешиваемой» (не должна быть «циклической»).

Цепи Маркова, отвечающие этим условиям, будем называть *эргодическими* цепями Маркова.

Поясним эти условия. Первое условие означает, что из любого состояния $s_i \in W$ можно перейти в любое другое состояние $s_j \in W$ и вернуться из состояния s_j в состояние s_i ($i, j = 1, 2, \dots, n$). При этом состояния s_i и s_j не обязательно должны быть соседними. Другими словами, при блуждании системы по своим состояниям она рано или поздно попадет в любое состояние $s_j \in W$, выйдет из него и вновь в него вернется.

Если все условия существования стационарного режима выполняются, то финальные вероятности не зависят от того, каково было состояние системы S в момент $t_0 = 0$ или каковым было распределение вероятностей в момент $t_0 = 0$.

Условия наличия стационарного режима можно представить наглядно в виде размеченного графа $G(S)$ системы S . Первое условие состоит в том, что размеченный граф $G(S)$ системы должен иметь все состояния и все группы состояний транзитивными. Второе условие: все переходные вероятности должны быть постоянными: $p_{ij}(k) = p_{ij}$. Третье условие состоит в том, что моменты попадания в отдельные состояния или в группы состояний не были бы равны определенным (не случайным) промежуткам времени, кратным величине шага. Другими словами, необходимо, чтобы моменты попадания в отдельные состояния или в группы состояний не образовывали циклов (периодов). Например, граф, изображенный на рис. 3.3.2, соответствует первым двум условиям, но третье условие не выполняется.

Если $p_1(0) = 1$, то при k нечетном $p_1(k) = 0$, $p_2(k) = 1$, а при k четном $p_1(k) = 1$, $p_2(k) = 0$. Матрица переходных вероятностей для графа, изображенного на рис. 3.3.2, имеет вид $\|p_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$. Таким

образом, в общем случае стационарного режима не будет.

В общем случае не будет стационарного режима и у системы, размеченный граф которой показан на

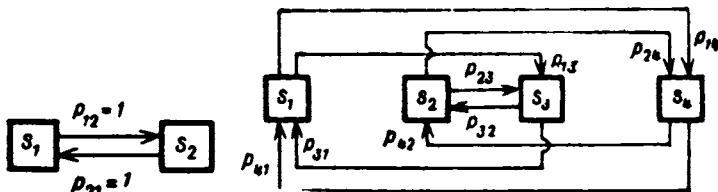


Рис. 3.3.2

Рис. 3.3.3

рис. 3.3.3, несмотря на то, что первые два условия выполняются. Действительно, если, например, $p_1(0) + p_2(0) = 1$, то при k нечетном система S будет находиться в подмножестве состояний $\{s_3, s_4\}$, а при k четном — в подмножестве состояний $\{s_1, s_2\}$:

$$\begin{aligned} p_1(k) + p_2(k) &= 0; & p_3(k) + p_4(k) &= 1 & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ p_1(k) + p_2(k) &= 1; & p_3(k) + p_4(k) &= 0 & \text{при } k \text{ четном.} \end{aligned}$$

Матрица переходных вероятностей, соответствующая графу, изображенному на рис. 3.3.2, имеет вид

$$\|p_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 0 & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

При этом выполняется условие: все переходные вероятности, указанные на размеченном графе (рис. 3.3.3), отличны от нуля и единицы. В дальнейшем при рассмотрении стационарных режимов предполагается, что третье условие выполняется.

Будем считать, что условия существования финальных вероятностей выполнены, и пределы

$$p_i = \lim_{k \rightarrow \infty} p_i(k) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.3.2)$$

существуют и не зависят от начальных условий. Покажем, как найти эти вероятности.

Если цепь Маркова однородна, т. е. $p_{ij}(k) = p_{ij}$, то для стационарного режима (достигаемого при $k \rightarrow \infty$)

вероятность p_j состояния s_j на $(k+1)$ -м шаге должна быть такой же, как на k -м:

$$p_j(k+1) = \sum_{i=1}^n p_i(k) p_{ij} = p_j,$$

где p_j уже не зависит от k ; отсюда

$$p_j = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}. \quad (3.3.3)$$

Сумма в правой части (3.3.3) распространяется на все значения номера состояния i , включая $i=j$, при этом p_{jj} — вероятность задержки системы в состоянии s_j . Разделим эту сумму на две части: в первой суммирование производится по всем значениям i кроме $i=j$; во второй стоит всего один член, отвечающий условию $i=j$. Тогда

$$p_j = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_i p_{ij} + p_j p_{jj},$$

откуда при любом j получаем для p_j линейное алгебраическое уравнение вида

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_i p_{ij} + p_j (p_{jj} - 1) = 0. \quad (3.3.4)$$

Придавая в формуле (3.3.4) индексу j значения $1, 2, \dots, n$, получим для n финальных вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_n$ систему n линейных однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_i p_{ij} + p_j (p_{jj} - 1) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3.3.5)$$

Как известно из алгебры, такая система уравнений имеет бесчисленное множество решений. В рассматриваемом случае решение становится единственным, если добавить к системе (3.3.5) нормировочное условие

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1, \quad (3.3.6)$$

взамен которого можно из системы (3.3.5) устранить любое, например первое; получим систему n уже неоднородных линейных уравнений с n неизвестными

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_i p_{ij} + p_j (p_{jj} - 1) = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (3.3.7)$$

В курсе линейной алгебры (см., например, [22]) доказывается, что такая система имеет единственное решение, т. е. однозначно определяет финальные вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$, дающие в сумме единицу.

При составлении системы линейных уравнений (3.3.7) для финальных вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_n$ удобно пользоваться понятием «потока вероятности». Назовем произведение $p_i p_{ij}$ *потоком вероятности*, переводящим систему S из состояния s_i в состояние s_j . Полная вероятность перехода системы S в состояние s_j откуда бы то ни было равна сумме всех потоков вероятности, переводящих системы в это состояние, т. е. вероятность прийти в состояние s_j откуда бы то ни было равна

$$\sum_{i=1}^n p_i p_{ij} \quad (i \neq j).$$

Аналогично, сумма всех потоков вероятности, выводящих систему из состояния s_i куда бы то ни было, равна

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_i p_{ji} = p_j \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_{ji}. \quad (3.3.8)$$

Очевидно, что в стационарном режиме вероятность войти в любое состояние должна быть равна вероятности из него выйти (иначе режим не был бы стационарным). Уравнения для финальных вероятностей можно записать, исходя из мнемонического правила: *для стационарного режима суммарный поток вероятности, переводящий систему S в состояние s_j из других состояний, равен суммарному потоку вероятности,*

выводящему систему из состояния s_j :

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_i p_{ij} = p_j \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (3.3.9)$$

Условие (3.3.9) назовем *балансовым условием* для состояния s_j . К этим n уравнениям (условиям) надо прибавить нормировочное условие

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (3.3.10)$$

отбросив зато любое (одно) из уравнений (3.3.9); полученная система n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение. Эту систему из $(n-1)$ уравнений вида (3.3.9) и одного уравнения (3.3.10) можно затем решать любым из известных методов. Опыт показывает, что при сколько-нибудь значительном числе n решать эту систему удобнее не в буквенном, а в численном виде, задаваясь численными значениями переходных вероятностей p_{ij} . Программы решения уравнений (3.3.9), (3.3.10) имеются в пакетах прикладных программ различных ЭВМ.

В инженерной практике для того, чтобы убедиться в существовании финальных вероятностей и даже

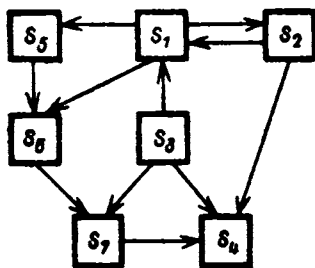


Рис. 3.3.4

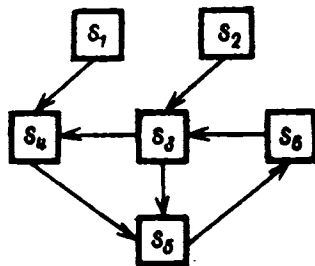


Рис. 3.3.5

предсказать, каковы они будут, нередко достаточно взглянуть на граф состояний. Например система, граф состояний которой изображен на рис. 3.3.4, имеет одно поглощающее состояние s_4 ; без специального доказательства ясно, что где бы ни находилась система S в начальный момент $t_0 = 0$, рано или поздно она

«скатится» в состояние s_4 и останется в нем; финальные вероятности будут:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_5 = p_6 = p_7 = 0, \quad p_4 = 1.$$

Равным образом, для цепи Маркова, граф состояний которой изображен на рис. 3.3.5 и содержит два источника s_1 и s_2 ; без специального доказательства ясно, что каково бы ни было начальное распределение вероятностей, система S рано или поздно выйдет из состояния s_1 (или s_2), если она в нем находилась, и начнет блуждать по подмножеству состояний $V = \{s_3, s_4, s_5, s_6\}$. В возможности сразу судить о существовании финальных вероятностей — одно из преимуществ графа состояний перед матрицей переходных вероятностей.

Пример 1. Рассматривается система S — станок с числовым программным управлением (ЧПУ), который может быть в следующих состояниях:

- s_1 — исправен и работает;
- s_2 — неисправен; неисправность не обнаружена;
- s_3 — неисправен, проводится средний ремонт;
- s_4 — не работает, находится на профилактике;
- s_5 — неисправен, проводится капитальный ремонт.

Размеченный граф состояний станка с ЧПУ показан на рис. 3.3.6. Составить уравнения и найти предельные вероятности состояний станка с ЧПУ.

Решение. Рассмотрим состояние s_5 на графе. В это состояние направлено две стрелки, следовательно, в левой части уравнения (3.3.9)' для $j = 5$ (состояние s_5) будет два слагаемых. Из этого состояния выходит одна стрелка, следовательно, в правой части уравнения (3.3.9) для $j = 5$ (состояние s_5) будет одно слагаемое. Таким образом, используя балансовое условие (3.3.9), получаем первое уравнение:

$$p_2 p_{25} + p_4 p_{45} = p_5 p_{51}.$$

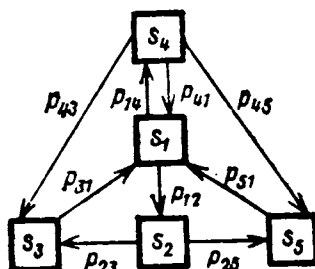


Рис. 3.3.6

Аналогично запишем еще три уравнения:

$$\begin{aligned} p_1 p_{12} &= p_2 (p_{23} + p_{25}), & p_2 p_{23} + p_4 p_{43} &= p_3 p_{31}, \\ p_1 p_{14} &= p_4 (p_{41} + p_{43} + p_{45}). \end{aligned}$$

В качестве пятого уравнения возьмем нормировочное условие

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1.$$

Перепишем полученную систему уравнений в таком виде:

- 1) $p_5 = (p_2 p_{25} + p_4 p_{45}) / p_{51},$
- 2) $p_2 = p_1 p_{12} / (p_{23} + p_{25}),$
- 3) $p_3 = (p_2 p_{23} + p_4 p_{43}) / p_{31},$
- 4) $p_4 = p_1 p_{14} / (p_{41} + p_{43} + p_{45}),$
- 5) $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1.$

Решим эту систему уравнений. Из 2) находим

$$p_2 = a_2 p_1, \text{ где } a_2 = p_{12} / (p_{23} + p_{25}).$$

Из 4) имеем

$$p_4 = a_4 p_1, \text{ где } a_4 = p_{14} / (p_{41} + p_{43} + p_{45}).$$

Из 3) найдем

$$p_3 = (a_2 p_{23} + a_4 p_{43}) p_1 / p_{31} = a_3 p_1,$$

где $a_3 = (a_2 p_{23} + a_4 p_{43}) / p_{31}$. Из 1) находим

$$p_5 = (a_2 p_{25} + a_4 p_{45}) p_1 / p_{51} = a_5 p_1,$$

где $a_5 = (a_2 p_{25} + a_4 p_{45}) / p_{51}$.

Подставляя соответствующие значения вероятностей, приведенные на графе $G(S)$ (рис. 3.3.7), получим:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0,1 / (0,6 + 0,1) = 1/7, \\ a_4 &= 0,1 / (0,7 + 0,1 + 0,1) = 1/9, \\ a_3 &= (0,6/7 + 0,1/9) / 0,8 = 61/504, \\ a_5 &= (0,1/9 + 0,1/7) / 0,1 = 16/63. \end{aligned}$$

В соответствии с равенством 5) имеем

$$p_1 + \frac{1}{7} p_1 + \frac{61}{504} p_1 + \frac{1}{9} p_1 + \frac{16}{63} p_1 = 1,$$

откуда

$$p_1 = \frac{504}{504 + 72 + 61 + 56 + 128} = \frac{504}{821} \approx 0,6139,$$

$$p_2 = a_2 p_1 = \frac{72}{821} \approx 0,0877, \quad p_3 = a_3 p_1 = \frac{61}{821} \approx 0,0743,$$

$$p_4 = a_4 p_1 = \frac{56}{821} \approx 0,0682, \quad p_5 = a_5 p_1 = \frac{128}{821} \approx 0,1559.$$

Заметим, что для решения этого примера нам потребовались только те вероятности, которые приведены на размеченном графе $G(S)$ (рис. 3.3.7) (нам не потребовались «вероятности задержки» p_{11} , p_{22} , p_{33} , p_{44} , p_{55}).

Пример 2. Система S представляет собой вычислительный центр (ВЦ), в котором имеется три ЭВМ. В определенные моменты времени, разделенные промежутком τ , все ЭВМ осматриваются, в результате чего каждая признается либо исправной и продолжает работать, либо признается неисправной и направляется в ремонт. Вероятность того, что исправная ЭВМ за время τ выйдет из строя, не зависит от того, какое время она уже работала (от «предыстории» процесса), и равна r . Вероятность того, что ремонтируемая ЭВМ за время τ будет приведена в исправность, не зависит от того, сколько времени уже продолжался ремонт и сколько ЭВМ ремонтируется, и равна q . Процессы выхода ЭВМ из строя и их восстановлений протекают независимо друг от друга. Построить размеченный граф состояний ВЦ, нумеруя их по числу неисправных ЭВМ:

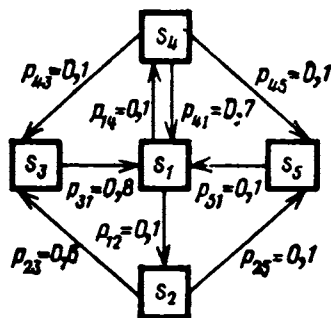


Рис. 3.3.7

- s_0 — все три ЭВМ исправны;
- s_1 — одна ЭВМ неисправна, остальные две работают;
- s_2 — две ЭВМ неисправны, одна работает;
- s_3 — все три ЭВМ неисправны.

Полагая $r = 0,2$; $q = 0,3$, построить размеченный граф состояний ВЦ и найти финальные вероятности.

Решение. Размеченный граф состояний имеет вид, показанный на рис. 3.3.8. Вычислим переходные вероятности p_{ij} .

Чтобы система перешла из состояния s_0 в состояние s_1 , нужно, чтобы одна из трех ЭВМ за время τ

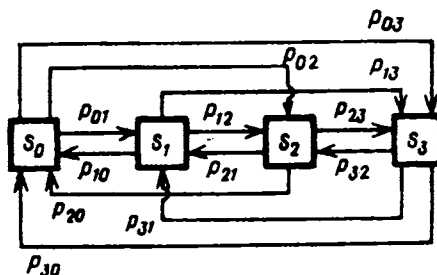


Рис. 3.3.8

вышла из строя. Эта вероятность, согласно биномиальному распределению (см. п. 5.1*), равна: $p_{01} = C_3^1 r (1-r)^2$. Аналогично находим

$$p_{02} = C_3^2 r^2 (1-r), \quad p_{03} = r^3, \quad p_{00} = (1-r)^3.$$

Можно убедиться в том, что

$$\sum_{i=0}^3 C_3^i r^i (1-r)^{3-i} = \sum_{i=0}^3 p_{0i} = 1.$$

Чтобы система из состояния s_1 перешла в состояние s_0 , нужно, чтобы неисправная ЭВМ за время τ была отремонтирована, а другие две исправные ЭВМ не вышли из строя: $p_{10} = q(1-r)^2$; аналогично находим:

$$p_{11} = q2r(1-r) + (1-q)(1-r)^2,$$

$$p_{12} = qr^2 + (1-q)2r(1-r),$$

$$p_{13} = (1-q)r^2 \quad \left(\sum_{i=0}^3 p_{1i} = 1 \right).$$

Рассуждая подобным образом, определяем:

$$p_{23} = (1-q)^2 r, \quad p_{22} = (1-q)^2 (1-r) + r2q(1-q),$$

$$p_{21} = q^2 r + (1-r)2q(1-q), \quad p_{20} = q^2 (1-r),$$

$$p_{33} = (1-q)^3, \quad p_{32} = C_3^2 q(1-q)^2,$$

$$p_{31} = C_3^1 q^2(1-q), \quad p_{30} = q^3.$$

При $r = 0,2$ и $q = 0,3$ имеем:

$$\begin{aligned} p_{01} &= 0,384; & p_{02} &= 0,096; & p_{03} &= 0,008; & p_{30} &= 0,512; \\ p_{10} &= 0,192; & p_{12} &= 0,236; & p_{13} &= 0,028; & p_{11} &= 0,544; \\ p_{23} &= 0,098; & p_{21} &= 0,354; & p_{20} &= 0,072; & p_{22} &= 0,476; \\ p_{32} &= 0,441; & p_{31} &= 0,189; & p_{30} &= 0,027; & p_{33} &= 0,343. \end{aligned}$$

Для рассматриваемого примера система уравнений (3.3.9) с учетом нормировочного условия (3.3.10) может быть записана в таком виде:

$$\begin{aligned} 0,488p_0 - 0,192p_1 - 0,072p_2 - 0,027p_3 &= 0; \\ -0,384p_0 + 0,456p_1 - 0,354p_2 - 0,189p_3 &= 0; \\ -0,096p_0 - 0,236p_1 + 0,524p_2 - 0,441p_3 &= 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 &= 1. \end{aligned}$$

Решая полученную систему линейных неоднородных уравнений одним из известных методов [22], получаем: $p_0 \approx 0,216$; $p_1 \approx 0,432$; $p_2 \approx 0,288$; $p_3 \approx 0,064$.

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

4.1. Описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения Колмогорова

Рассмотренные в гл. 3 марковские процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (марковские цепи) имеют сравнительно мало инженерных приложений, так как довольно редко на практике моменты возможных переходов системы S из состояния в состояние заранее известны и фиксированы. Гораздо типичнее случай, когда переходы системы из состояния в состояние (например, отказ какого-либо элемента, окончание его ремонта и т. п.) могут происходить не в фиксированные моменты $t_0, t_1, t_2, \dots$, а в случайные моменты. В этой главе мы будем рассматривать именно такие задачи.

Случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется *марковским*, если для любого момента времени t условные вероятности всех состояний системы S в будущем (при $t > t_0$) зависят только от того, в каком состоянии s_i находится система S в настоящем (при $t = t_0$), но не зависят от того, когда и каким образом она пришла в это состояние (т. е. каковы были состояния системы в прошлом (при $t < t_0$)). Другими словами, в марковском процессе *будущее зависит от прошлого только через настоящее* (см. аналогичное определение марковского случайного процесса в п. 3.1). На практике довольно редко встречаются марковские процессы в чистом виде, но довольно часто — процессы, которые с тем или иным приближением можно считать марковскими. Это допущение позволяет пользоваться сравнительно простым математическим аппаратом, к описанию которого мы и приступаем.

Нам будет удобно считать, что переходы («перескоки») системы S из состояния в состояние происходят под воздействием каких-то потоков событий (например, «поток отказов», «поток восстановлений» и т. д.); как только произошло первое после момента t_0 событие, переход из состояния в состояние осуществляется (последующие события потока не учитываются никак).

Теорию марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем мы будем излагать, предполагая, что переходы из состояния в состояние происходят под воздействием пуассоновских потоков событий (не обязательно стационарных).

Отсутствие последствия в пуассоновском потоке позволит нам при фиксированном настоящем (состояние s_i системы в момент t) не заботиться о том, когда и как система оказалась в этом состоянии.

Пусть на графе состояний системы S существует стрелка, ведущая из состояния s_i в одно из соседних состояний s_j (рис. 4.1.1).

Будем считать, что переход системы из состояния s_i в состояние s_j осуществляется под воздействием

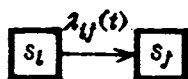


Рис. 4.1.1

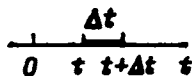


Рис. 4.1.2

пуассоновского потока событий с интенсивностью $\lambda_{ij}(t)$. Переход из s_i в s_j происходит в момент, когда наступает первое событие потока.

Рассмотрим на оси $0t$ элементарный участок времени Δt , примыкающий к t (рис. 4.1.2), и найдем вероятность того, что за время Δt система S перейдет из состояния s_i в состояние s_j (в предположении, что в момент времени t система S находилась в состоянии s_i). Эта вероятность, с точностью до бесконечно малых величин высших порядков, равна $\lambda_{ij}(t)\Delta t$ (см. п. 2.1); действительно, случайная величина $X(t, \Delta t)$, равная числу событий потока, попадающих на элементарный участок Δt , имеет математическое ожидание $\lambda_{ij}(t)\Delta t$ и с точностью до бесконечно малых высших порядков равна вероятности p_i попадания на

элементарный участок одного (а значит, и хотя бы одного) события (вероятностью попадания на участок $(t, t + \Delta t)$ более чем одного события пренебрегаем).

Итак, вероятность перехода системы S из состояния s_i , в котором она находилась в момент t , в состояние s_j за элементарный промежуток времени Δt , непосредственно примыкающий к t , приближенно равна $\lambda_{ij}(t)\Delta t$, где $\lambda_{ij}(t)$ — интенсивность пуассоновского потока событий, переводящего систему из s_i в s_j .

Можно доказать, что если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, — пуассоновские и независимые, то процесс, протекающий в системе S , будет марковским.

Если известны все интенсивности пуассоновских потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние, то можно составить дифференциальные уравнения для вероятностей состояний.

Рассмотрим систему S , имеющую n возможных состояний: $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_n$. Пусть для любой пары состояний s_i, s_j известна интенсивность $\lambda_{ij}(t)$ пуассоновского потока событий, переводящего систему S из любого состояния s_i в любое другое состояние s_j ($i \neq j$); будем полагать эту интенсивность равной нулю, если непосредственный переход из состояния s_i в состояние s_j невозможен. Обозначим $p_i(t)$ — вероятность того, что в момент t система находится в состоянии s_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Теперь придадим t приращение Δt и найдем вероятность $p_i(t + \Delta t)$ того, что в момент $t + \Delta t$ система будет находиться в состоянии s_i . Обозначим это событие A : $A = \{S(t + \Delta t) = s_i\}$.

Спросим себя, как это событие может произойти? Двумя способами: либо произойдет событие B , состоящее в том, что в момент t система уже была в состоянии s_i и за время Δt не вышла из этого состояния; либо произойдет событие C , состоящее в том, что в момент t система была в одном из соседних состояний s_j , из которых возможен переход в s_i ($\lambda_{ji}(t) \neq 0$), и за время Δt перешла из состояния s_j в s_i .

Очевидно, $A = B + C$. Найдем вероятности событий B и C . Согласно правилу умножения вероятностей

(см. п. 2.3*) вероятность события B равна вероятности $p_i(t)$ того, что система в момент t была в состоянии s_i , умноженной на условную вероятность того, что за время Δt она не выйдет из этого состояния, т. е. в суммарном потоке событий, выводящих систему из состояния s_i , не появится ни одного события. Так как суммарный поток событий, выводящий систему из состояния s_i , как и все его слагаемые — пуассоновский с интенсивностью, равной сумме интенсивностей слагаемых потоков:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \quad (i \neq j),$$

то условная вероятность того, что на участке времени Δt появится хотя бы одно событие, равна (приближенно)

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t \quad (i \neq j)^1),$$

а условная вероятность противоположного события равна $1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t$. Таким образом,

$$P(B) = p_i(t) \left[1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t \right]. \quad (4.1.1)$$

Найдем теперь вероятность события C . Представим его в виде суммы несовместных вариантов

$$C = \sum_l C_l, \quad (4.1.2)$$

где суммирование распространяется на все состояния s_l , из которых возможен непосредственный переход в s_i (т. е. для которых $\lambda_{li}(t) \neq 0$). События C_l , в силу ординарности потоков, можно считать несовместными. По правилу сложения вероятностей

$$P(C) = \sum_l P(C_l). \quad (4.1.3)$$

¹⁾ Здесь и далее для простоты мы будем приближенные равенства, становящиеся точными при $\Delta t \rightarrow 0$, писать просто как равенства, не оговаривая их приближенность.

По правилу умножения вероятностей

$$P(C_j) = p_j(t) \lambda_{ji}(t) \Delta t,$$

откуда

$$P(C) = \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ji}(t) \Delta t \quad (i \neq j), \quad (4.1.4)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B) + P(C) = \\ &= p_i(t) \left[1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t \right] + \sum_j p_j(t) \lambda_{ji}(t) \Delta t. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) \left[1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t \right] + \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ji}(t) \Delta t. \quad (4.1.5)$$

Вычитая из (4.1.5) $p_i(t)$, получим приращение функции на участке $(t, t + \Delta t)$:

$$p_i(t + \Delta t) - p_i(t) = \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ji}(t) \Delta t - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t p_i(t);$$

деля приращение функции на приращение аргумента Δt и устремляя Δt к нулю, получим в пределе производную функции $p_i(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} &= \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ji}(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Первая сумма в правой части формулы (4.1.6) распространяется на те значения j , для которых возможен непосредственный переход из состояния s_j в s_i (т. е. для которых $\lambda_{ji}(t) \neq 0$), а вторая — на те значения j , для которых возможен непосредственный переход из s_i в s_j (т. е. $\lambda_{ij}(t) \neq 0$).

Таким образом, мы получили для вероятностей $p_i(t)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.1.6) с переменными (в общем случае) коэффициентами. Эти уравнения называются *уравнениями Колмогорова* (по имени академика А. Н. Колмогорова, предложившего такой метод анализа марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем).

Систему дифференциальных уравнений (4.1.6) решают при начальных условиях, задающих вероятности состояний в начальный момент при $t = 0$

$$p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0), \quad (4.1.7)$$

причем для любого момента времени t выполняется нормировочное условие

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1 \quad (t \geq 0). \quad (4.1.8)$$

Это следует из того, что в любой момент t события

$$\{S(t) = s_1\}, \{S(t) = s_2\}, \dots, \{S(t) = s_n\}$$

образуют полную группу несовместных событий. Нормировочное условие (4.1.8) можно использовать вместо одного (любого) из дифференциальных уравнений (4.1.6).

При составлении системы дифференциальных уравнений (4.1.6) удобно пользоваться размеченным графом состояний системы, где возле каждой стрелки, ведущей из состояния s_i в состояние s_j , стоит интенсивность $\lambda_{ij}(t)$ пуассоновского потока событий, переводящего систему из состояния s_i в s_j . Если $\lambda_{ij}(t) = 0$, ни стрелка, ни соответствующая интенсивность на размеченном графе не ставятся.

Пример 1. Система S представляет собой техническое устройство (ТУ), которое может находиться в одном из двух состояний:

s_1 — ТУ исправно (работает);

s_2 — ТУ неисправно (находится в ремонте).

На ТУ, находящееся в состоянии s_1 , действует поток отказов с интенсивностью $\lambda(t)$, переводящий ТУ в состояние s_2 . На ТУ, находящееся в состоянии s_2 , действует поток восстановлений с интенсивностью $\mu(t)$ (рис. 4.1.3); оба потока — пуассоновские, независимые. Написать уравнение Колмогорова для вероятностей состояний и решить их, считая, что в начальный момент при $t = 0$ ТУ исправно.

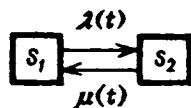


Рис. 4.1.3

Решение. Уравнения Колмогорова (4.1.6) для условий примера имеют вид

$$\begin{aligned} dp_1(t)/dt &= p_2(t) \mu(t) - p_1(t) \lambda(t), \\ dp_2(t)/dt &= p_1(t) \lambda(t) - p_2(t) \mu(t). \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Нормировочное условие: $p_1(t) + p_2(t) = 1$, откуда

$$p_2(t) = 1 - p_1(t). \quad (4.1.10)$$

Подставим выражение (4.1.10) вместо $p_2(t)$ в первое из уравнений (4.1.9) (второе отбросим). Получится одно дифференциальное уравнение с одной неизвестной функцией $p_1(t)$:

$$dp_1(t)/dt = [1 - p_1(t)] \mu(t) - p_1(t) \lambda(t)$$

или

$$dp_1(t)/dt + [\lambda(t) + \mu(t)] p_1(t) = \mu(t). \quad (4.1.11)$$

Решая это линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами известным в математике методом при начальном условии $p_1(0) = 1$, получим:

$$p_1(t) = e^{-\int_0^t [\lambda(\tau) + \mu(\tau)] d\tau} \left[\int_0^t \mu(\tau) e^{\int_0^\tau [\lambda(x) + \mu(x)] dx} d\tau + 1 \right]. \quad (4.1.12)$$

Заметим, что решение дифференциального уравнения в квадратурах, подобное (4.1.12), на практике обычно не имеет преимуществ перед непосредственным численным решением самого дифференциального уравнения на ЭВМ (ведь квадратуры тоже надо вычислять, что при произвольных зависимостях $\lambda(t)$, $\mu(t)$ не всегда просто).

Рассмотрим частный случай, когда интенсивности $\lambda(t)$, $\mu(t)$ не зависят от времени:

$$\lambda(t) = \lambda = \text{const}, \quad \mu(t) = \mu = \text{const}. \quad (4.1.13)$$

Не будем обращаться к общей формуле (4.1.12); проще будет решить линейное дифференциальное уравнение, в которое превратится уравнение (4.1.11) при $\lambda(t) = \lambda$, $\mu(t) = \mu$ при начальном условии $p_1(0) = 1$:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} + (\lambda + \mu) p_1(t) = \mu,$$

получим:

$$p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}, \quad (4.1.14)$$

откуда

$$p_2(t) = 1 - p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}). \quad (4.1.15)$$

Графики зависимостей $p_1(t)$ и $p_2(t)$ ($\mu > \lambda$) показаны на рис. 4.1.4. Отметим, что при $t \rightarrow \infty$ в системе устанавливается стационарный режим, для которого вероятности p_1 , p_2 уже не зависят от времени и равны (рис. 4.1.4):

$$p_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

$$p_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

(4.1.16)

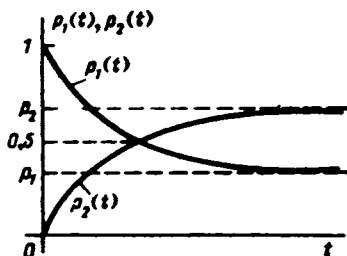


Рис. 4.1.4

В стационарном режиме ТУ будет менять свое состояние, переходя из s_1 в s_2 и обратно, но вероятности этих состояний уже не зависят от времени. Их можно истолковать, как среднее относительное время пребывания ТУ в соответствующих состояниях s_1 и s_2 . ►

При составлении уравнений Колмогорова по графу состояний удобно (аналогично тому, как мы делали в п. 3.3 для марковских цепей) ввести понятие «поток вероятности». Будем называть *поток вероятности*, переводящим систему из состояния s_i в состояние s_j , произведение вероятности $p_i(t)$ состояния s_i , из которого исходит стрелка, на интенсивность $\lambda_{ij}(t)$ потока событий, переводящего систему по этой стрелке.

Уравнения Колмогорова (4.1.6) составляются по следующему мнемоническому правилу: *производная вероятности любого состояния равна сумме потоков вероятности, переводящих систему в это состояние, минус сумма всех потоков вероятности, выводящих систему из этого состояния.*

Все интенсивности $\lambda_{ij}(t)$ в уравнении (4.1.6) можно записать в виде квадратной матрицы:

$$\|\lambda_S(t)\| = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{12}(t) & \dots & \lambda_{1j}(t) & \dots & \lambda_{1n}(t) \\ \lambda_{21}(t) & 0 & \dots & \lambda_{2j}(t) & \dots & \lambda_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i1}(t) & \lambda_{i2}(t) & \dots & \lambda_{ij}(t) & \dots & \lambda_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1}(t) & \lambda_{n2}(t) & \dots & \lambda_{nj}(t) & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1.17)$$

где $\lambda_{ii}(t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). По главной диагонали этой матрицы размерности $n \times n$ стоят нули, а на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит функция $\lambda_{ij}(t)$ — интенсивность пуассоновского потока событий, переводящего систему S из состояния s_i в состояние s_j .

Матрицу интенсивностей (4.1.17) удобно иллюстрировать с помощью размеченного графа состояний системы S , на котором указываются только те ребра между состояниями s_i и s_j , для которых соответствующие интенсивности не равны нулю,

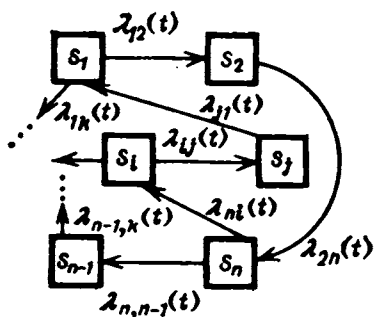


Рис. 4.1.5

а около каждого ребра проставляется соответствующая интенсивность потока событий (рис. 4.1.5). Между матрицей интенсивностей (4.1.17) и размеченным графом состояний системы $G(S)$ существует однозначное соответствие.

Зная размеченный граф состояний системы $G(S)$ (или матрицу интенсивностей $\|\lambda_S(t)\|$), можно, воспользовавшись mnemonic правилом, записать систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы (4.1.6).

Если все интенсивности потоков $\lambda_{ij}(t)$ не зависят от аргумента t ($\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}$), то марковский процесс называется *однородным*. Если хотя бы одна из интен-

сивностей в матрице (4.1.17) зависит от времени, то такой марковский процесс называется *неоднородным*. У однородного марковского случайного процесса коэффициенты в системе дифференциальных уравнений (4.1.6) являются постоянными.

Таким образом, для исследования марковского случайного процесса нужно знать: 1) матрицу интенсивностей $\|\lambda_{ij}(t)\|$ (4.1.17) (или размеченный граф состояний системы $G(S)$) и 2) начальные условия

$$p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0), \quad (4.1.18)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1, \quad p_i(0) \geq 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.1.19)$$

Пример 2. Размеченный граф состояний системы имеет вид, показанный на рис. 4.1.6.

Написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний и указать, при каких начальных условиях их нужно решать, если в начальный момент система S с вероятностью $1/2$ находится в состоянии s_1 и с вероятностью $1/2$ — в состоянии s_2 .

Решение. Уравнения Колмогорова имеют вид

$$\dot{p}_1(t) = p_2(t) \lambda_{21} - p_1(t) (\lambda_{12} + \lambda_{13}),$$

$$\dot{p}_2(t) = p_1(t) \lambda_{12} + p_4(t) \lambda_{42} - p_2(t) \lambda_{21},$$

$$\dot{p}_3(t) = p_1(t) \lambda_{13} + p_4(t) \lambda_{43} - p_3(t) (\lambda_{34} + \lambda_{35}), \quad (*)$$

$$\dot{p}_4(t) = p_3(t) \lambda_{34} + p_5(t) \lambda_{54} - p_4(t) (\lambda_{43} + \lambda_{42}),$$

$$\dot{p}_5(t) = p_3(t) \lambda_{35} - p_5(t) \lambda_{54},$$

где $\dot{p}_i(t) = dp_i(t)/dt$.

Любое из этих уравнений может быть отброшено, а соответствующая ему вероятность $p_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) выражена через остальные с помощью нормировочного условия:

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) + p_5(t) = 1. \quad (**)$$

Начальные условия, при которых надо будет решать систему дифференциальных уравнений, будут:

$$p_1(0) = p_2(0) = 0,5, \quad p_3(0) = p_4(0) = p_5(0) = 0. \quad (***)$$

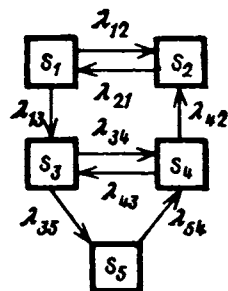


Рис. 4.1.6

Уравнения (*) как при постоянных, так и переменных интенсивностях λ_{ij} (совместно с нормировочным условием (**)), можно решать на ЭВМ при начальных условиях (***) любым из численных методов.

Пример 3. Техническая система S — вычислительный центр (ВЦ), состоящий из трех ЭВМ: I, II и III. Каждая из ЭВМ выходит из строя (отказывает) независимо от других. Поток отказов ЭВМ — пуассоновские с переменными интенсивностями, равными

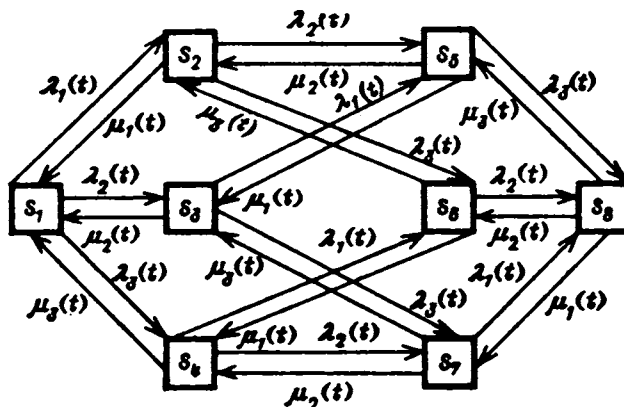


Рис. 4.1.7

$\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$. После отказа каждая ЭВМ восстанавливается; потоки восстановлений — пуассоновские с интенсивностями $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\mu_3(t)$; потоки восстановлений тоже независимы. Рассматриваются следующие состояния системы:

- s_1 — все ЭВМ исправны;
- s_2 — ЭВМ I отказала, ЭВМ II и ЭВМ III исправны;
- s_3 — ЭВМ II отказала, ЭВМ I и ЭВМ III исправны;
- s_4 — ЭВМ III отказала, ЭВМ I и ЭВМ II исправны;
- s_5 — ЭВМ I и ЭВМ II отказали, ЭВМ III исправна;
- s_6 — ЭВМ I и ЭВМ III отказали, ЭВМ II исправна;
- s_7 — ЭВМ II и ЭВМ III отказали, ЭВМ I исправна;
- s_8 — все ЭВМ отказали.

Построить размеченный граф состояний ВЦ. Составить уравнения Колмогорова для вероятностей состояний $p_1(t)$, ..., $p_8(t)$. Записать нормировочное условие, позволяющее указать, при каких начальных усло-

виях надо решать эту систему дифференциальных уравнений, если известно, что в начальный момент $t = 0$ все ЭВМ исправны.

Решение. Размеченный граф состояний системы S показан на рис. 4.1.7. По мнемоническому правилу составляем систему уравнений Колмогорова (4.1.6). Для сокращения записи обозначим: $p_i(t) = p_i$, $\lambda_i(t) = \lambda_i$, $\mu_i(t) = \mu_i$.

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{p}_1 &= \mu_1 p_2 + \mu_2 p_3 + \mu_3 p_4 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) p_1, \\ 2) \quad \dot{p}_2 &= \lambda_1 p_1 + \mu_2 p_5 + \mu_3 p_6 - (\mu_1 + \lambda_2 + \lambda_3) p_2, \\ 3) \quad \dot{p}_3 &= \lambda_2 p_1 + \mu_1 p_5 + \mu_3 p_7 - (\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_3) p_3, \\ 4) \quad \dot{p}_4 &= \lambda_3 p_1 + \mu_1 p_6 + \mu_2 p_7 - (\mu_3 + \lambda_1 + \lambda_2) p_4, \\ 5) \quad \dot{p}_5 &= \lambda_2 p_2 + \lambda_1 p_3 + \mu_3 p_8 - (\mu_2 + \mu_1 + \lambda_3) p_5, \\ 6) \quad \dot{p}_6 &= \lambda_3 p_2 + \lambda_1 p_4 + \mu_2 p_8 - (\mu_3 + \mu_1 + \lambda_2) p_6, \\ 7) \quad \dot{p}_7 &= \lambda_3 p_3 + \lambda_2 p_4 + \mu_1 p_8 - (\mu_2 + \mu_3 + \lambda_1) p_7, \\ 8) \quad \dot{p}_8 &= \lambda_3 p_5 + \lambda_2 p_6 + \lambda_1 p_7 - (\mu_3 + \mu_2 + \mu_1) p_8. \end{aligned} \quad (*)$$

К этим уравнениям можно прибавить нормировочное условие: для любого t

$$\sum_{i=1}^8 p_i(t) = 1.$$

Это условие дает возможность уменьшить число уравнений (*) на единицу. Начальные условия, при которых надо решать систему уравнений (*) при $t = 0$: $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = p_3(0) = \dots = p_8(0) = 0$. ►

Заметим, что марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем можно при достаточно малом промежутке времени Δt между шагами приближенно рассматривать как марковскую цепь, т. е. процесс с дискретными состояниями и дискретным временем, изменения состояний которого происходят в моменты $t = 0$; $t = \Delta t$, $t = 2\Delta t$, ... (например, определяемые тактом работы ЭВМ). Граф состояний системы остается тем же; необходимо найти переходные вероятности $p_{ij}(t, \Delta t)$ того, что за элементарный промежуток времени Δt , примыкающий к моменту t , система S , находящаяся в состоянии s_i , перейдет в состояние s_j .

Обозначим $\lambda_{ij}(t)$ интенсивность пуассоновского потока событий, переводящего систему из состояния

s_i в s_j . Найдем вероятность $p_{ij}(t, \Delta t)$ того, что система S , находясь в момент t в состоянии s_i , перейдет на участке $(t, t + \Delta t)$ в состояние s_j . Эта вероятность равна вероятности того, что на участке $(t, t + \Delta t)$ появится хотя бы одно событие в потоке с интенсивностью $\lambda_{ij}(t)$. Эту вероятность дополняет до единицы вероятность противоположного события:

$A = \{\text{в потоке не появится ни одного события}\}.$

Мы знаем, что с. в. $X(t, \Delta t)$ — число событий пуассоновского потока, попадающих на участок $(t, t + \Delta t)$, распределена по закону Пуассона с параметром

$$a(t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \lambda_{ij}(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$P(A) = e^{-a(t, \Delta t)} = e^{-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_{ij}(\tau) d\tau}$$

Это выражение при малом Δt приближенно равно

$$P(A) \approx 1 - \lambda_{ij}(t) \Delta t,$$

откуда

$$p_{ij}(t, \Delta t) \approx \lambda_{ij}(t) \Delta t;$$

это и будет переходной вероятностью для марковской цепи с шагом по времени Δt .

Таким образом, можно сформулировать следующее правило перехода от марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем к марковской цепи:

1. Задаться достаточно малым шагом Δt марковской цепи — настолько малым, чтобы за время Δt был практически невозможен переход системы не в соседнее состояние, а в одно из других, и чтобы ни в одном из пуассоновских потоков, действующих на систему, практически не могло за время Δt появиться более одного события.

2. Подсчитать для каждой пары состояний (s_i, s_j) , между которыми возможен переход $s_i \rightarrow s_j$, переходную вероятность $p_{ij}(t, \Delta t) = p_{ij}(k)$; составить матрицу этих переходных вероятностей (или, что равносильно, проставить их у стрелок размеченного графа состоя-

ний), а далее поступать так, как рекомендовано в п. 3.2, для марковских цепей, т. е. занумеровать шаги и найти все вероятности $p_j(k)$, где k — номер шага, $k = 1, 2, \dots$ по рекуррентным формулам (3.2.19). Такой прием часто применяется при моделировании случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем на ЭВМ.

Заметим, что если марковский случайный процесс не является однородным (интенсивности $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$), то на каждом шаге нужно составлять матрицу $\|p_{ij}(k)\|$.

Очевидно, чем меньше будет величина шага Δt , тем точнее будет решение, но тем больше будет затрачено машинного времени на решение задачи. Величину Δt можно брать зависимой от номера шага так, чтобы максимальное приращение вероятности $p_i(k)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) не превышало по модулю заданной величины ε , которой определяется точность вычислений, выбираемая из практических соображений, как точность каждого приближенного вычисления. Вычисления можно начинать при произвольном значении Δt ; если максимальное по модулю приращение вероятностей $p_i(t + \Delta t) - p_i(t)$ оказывается больше ε , размер шага Δt следует уменьшить, подбирая его пробами до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\max_i |p_i(t + \Delta t) - p_i(t)| < \varepsilon.$$

4.2. Однородные марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Стационарный режим, уравнения для предельных вероятностей состояний

Остановимся подробнее на исследовании однородных марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем, у которых элементы матрицы интенсивностей (4.1.17) не зависят от времени:

$$\lambda_{ij} = \text{const} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.2.1)$$

Другими словами, все потоки, переводящие систему S из одного состояния в другое, являются простейшими (стационарными пуассоновскими). Системы,

в которых происходит такой процесс, будем называть *простейшими системами*.

Для простейшей системы вероятности состояний определяются уравнениями Колмогорова с постоянными коэффициентами (см. (4.1.6)). Для решения этих уравнений в инженерной практике широко применяется преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа от функции $f(t)$ ($t \geq 0$; при $t < 0$ $f(t) = 0$) имеет вид [9]

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt. \quad (4.2.2)$$

Обратное преобразование Лапласа определяется по формуле

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{ts} F(s) ds = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (4.2.3)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Функция $f(t)$ называется *оригиналом*, а функция $F(x)$ — *изображением*. Переход от оригинала к изображению и обратно будем обозначать следующим образом:

$$f(t) \circ \longrightarrow \bullet F(x).$$

Перечислим основные свойства преобразования Лапласа, которые нам потребуются в дальнейшем.

1. Изображение производной функции $df(t)/dt$ равно изображению функции $F(x)$, умноженной на x , минус значение функции при $t = 0$:

$$\frac{df(t)}{dt} \circ \longrightarrow \bullet xF(x) - f(0). \quad (4.2.4)$$

2. Изображение постоянной a равно этой постоянной, деленной на x

$$a \circ \longrightarrow \bullet a/x. \quad (4.2.5)$$

3. Изображение суммы функций равно сумме изображений этих функций:

$$\sum_{i=1}^n f_i(t) \circ \longrightarrow \bullet \sum_{i=1}^n F_i(x). \quad (4.2.6)$$

4. Изображение произведения постоянной a на функцию $f(t)$ равно произведению постоянной a на изображение функции $F(x)$:

$$af(t) \circ \text{---} \bullet aF(x). \quad (4.2.7)$$

5. Если изображение функции имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{p_n(x)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)}, \quad (4.2.8)$$

где α_i — различные корни полинома $p_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$, то оригинал имеет вид

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha_i t}}{p'_n(\alpha_i)}. \quad (4.2.9)$$

где

$$p'_n(\alpha_k) = \frac{d}{dx} \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \Big|_{x=\alpha_k} = \sum_{h=1}^n \frac{\prod_{i=1}^n (\alpha_k - \alpha_i)}{\alpha_k - \alpha_h}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)} \bullet \text{---} \circ \sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha_i t}}{p'_n(\alpha_i)}. \quad (4.2.10)$$

6. Из соотношения (4.2.10) можно вывести еще два полезных соотношения:

$$\frac{1}{xp_n(x)} = \frac{1}{x \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)} \bullet \text{---} \circ \frac{1}{p_n(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha_i t}}{\alpha_i p'_n(\alpha_i)}. \quad (4.2.11)$$

Если $g(x) = x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \dots + \beta_1x + \beta_0$ и $m < n$, то

$$\frac{g(x)}{p_n(x)} = \frac{g(x)}{\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)} \bullet \text{---} \circ \sum_{i=1}^n \frac{g(\alpha_i)}{p'_n(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}.$$

7. Если существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow 0} xF(x) \quad (f(t) \circ \text{---} \bullet F(x)). \quad (4.2.12)$$

Применим преобразование Лапласа к решению системы уравнений Колмогорова (4.1.6). Обозначим изображение вероятности состояния $p_i(t)$ функцией $\pi_i(x)$:

$$p_i(t) \circ \text{---} \bullet \pi_i(x). \quad (4.2.13)$$

Тогда системе уравнений (4.1.6) для вероятностей состояний будет соответствовать система уравнений для их изображений:

$$x\pi_i(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji}\pi_j(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}\pi_i(x) + p_i(0) \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

откуда

$$\pi_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_{ji}\pi_j(x) + p_i(0)}{x + \lambda_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.2.14)$$

где

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}. \quad (4.2.15)$$

Таким образом, вместо системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (4.1.6) для вероятностей состояний мы получили систему однородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами для изображений вероятностей состояний (4.2.14). Эту систему нужно решать с учетом нормировочного условия:

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1 \quad (0 \leq p_i(t) \leq 1; \quad t \geq 0). \quad (4.2.16)$$

Следовательно, одно из уравнений (4.2.14) можно заменить на более простое:

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(x) = \frac{1}{x}, \quad (4.2.17)$$

которое является изображением нормировочного условия (4.2.16).

Пример 1. В автохозяйстве имеется n автомашин. Каждая из этих автомашин (независимо от других) может выходить из строя; интенсивность простейшего потока отказов автомашины равна λ . Отказавшая автомашина становится на стоянку и ожидает начала ремонта. Время ожидания начала ремонта автомашины распределено по показательному закону с параметром γ . Время ремонта автомашины распределено по показательному закону с параметром μ . Определить вероятности состояний автомашины, если в начальный момент она была исправна.

Решение. Состояния автомашины следующие:

- s_1 — автомашина исправна,
- s_2 — автомашина ожидает ремонта,
- s_3 — автомашина ремонтируется.

Размеченный граф состояний автомашины показан на рис. 4.2.1.

В соответствии с этим графом и мнемоническим правилом, сформулированным в п. 4.1, составим систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний

$$\dot{p}_1(t) = \mu p_3(t) - \lambda p_1(t),$$

$$\dot{p}_2(t) = \lambda p_1(t) - \gamma p_2(t),$$

$$\dot{p}_3(t) = \gamma p_2(t) - \mu p_3(t).$$

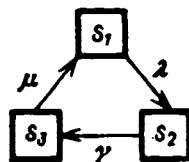


Рис. 4.2.1

Вместо первого дифференциального уравнения используем нормировочное условие

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1.$$

В рассматриваемом примере начальные условия следующие:

$$p_1(0) = 1, \quad p_2(0) = p_3(0) = 0.$$

Исходя из этого, можно выписать следующие уравнения для изображений:

$$x\pi_2(x) = \lambda\pi_1(x) - \gamma\pi_2(x), \quad x\pi_3(x) = \gamma\pi_2(x) - \mu\pi_3(x),$$

$$\pi_1(x) + \pi_2(x) + \pi_3(x) = 1/x.$$

Решая эту систему алгебраических уравнений, получим

$$\pi_2(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\lambda(x + \mu)}{x^2 + x(\lambda + \mu + \gamma) + \lambda\mu + \lambda\gamma + \gamma\mu},$$

$$\pi_3(x) = \frac{\gamma\pi_2(x)}{x + \mu} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\gamma\lambda}{x^2 + x(\lambda + \mu + \gamma) + \lambda\mu + \lambda\gamma + \gamma\mu}.$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + x(\lambda + \mu + \gamma) + \lambda\mu + \lambda\gamma + \gamma\mu = \\ &= x^2 + C_1x + C_0, \end{aligned}$$

где $\lambda + \mu + \gamma = C_1$, $\lambda\mu + \lambda\gamma + \gamma\mu = C_0$. Детерминант уравнения $p(x) = 0$ равен

$$D = C_0 - C_1^2/4.$$

Для положительных $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\gamma > 0$ детерминант D может быть как положительным или отрицательным, так и равным нулю. Например, при $\mu = \gamma = 1$ детерминант $D > 0$ при $0 < \lambda < 4$, $D = 0$ при $\lambda = 4$ и $D < 0$ при $\lambda > 4$.

Рассмотрим для простоты случай, когда детерминант $D < 0$. В этом случае существуют два различных отрицательных корня уравнения $p(x) = 0$:

$$p(x) = x^2 + C_1x + C_0 = (x - a_1)(x - a_2),$$

где

$$a_1 = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_0}}{2}, \quad a_2 = \frac{-C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_0}}{2},$$

$$a_1 \cdot a_2 = C_0, \quad a_1 + a_2 = -C_1.$$

С учетом принятых обозначений изображение $\pi_3(x)$ примет вид

$$\pi_3(x) = \gamma\lambda / (x \cdot p(x)).$$

По формуле (4.2.11) получим

$$\rho_3(t) = \frac{\gamma\lambda}{a_1 a_2} + \left(\frac{e^{a_1 t}}{a_1(a_1 - a_2)} + \frac{e^{a_2 t}}{a_2(a_2 - a_1)} \right) \gamma\lambda.$$

Далее,

$$\pi_2(x) = \frac{\lambda(x + \mu)}{xp(x)} = \frac{\lambda}{p(x)} + \frac{\lambda\mu}{xp(x)}.$$

Следовательно,

$$p_2(t) = \lambda \left(\frac{e^{a_1 t} - e^{a_2 t}}{a_1 - a_2} \right) + \frac{\lambda \mu}{a_1 a_2} + \\ + \lambda \mu \left(\frac{e^{a_1 t}}{a_1 (a_1 - a_2)} + \frac{e^{a_2 t}}{a_2 (a_2 - a_1)} \right).$$

Вероятность $p_1(t)$ найдем из нормировочного условия

$$p_1(t) = 1 - p_2(t) - p_3(t).$$

Графики функций $p_1(t)$, $p_2(t)$ и $p_3(t)$ для $\gamma = \mu = 1$, $\lambda = 5$ показаны на рис. 4.2.2.

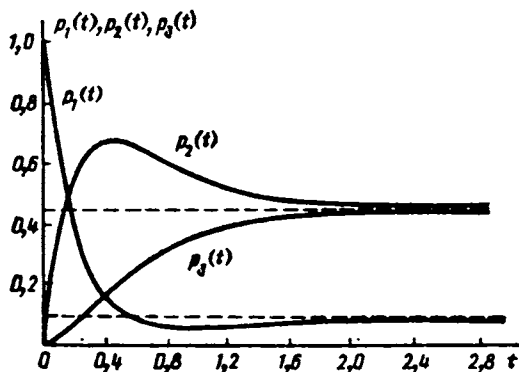


Рис. 4.2.2

На ЭВМ можно непосредственно строить графики функций $p_i(t)$.

Заметим, что при $t \rightarrow \infty$ функции $p_2(t)$ и $p_3(t)$ имеют одну и ту же асимптоту $\varphi(t) = 5/11$, а функция $p_1(t)$ имеет асимптоту $\psi(t) = 1/11$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_2(t) = p_2 = 5/11, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_3(t) = p_3 = 5/11,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1(t) = p_1 = 1/11 \quad (\text{см. рис. 4.2.2}). \blacktriangleright$$

Вернемся к анализу однородных марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем. Рассмотрим теперь процесс, протекающий в системе S , все множество состояний которой является эргодическим. Напомним, что множество состояний W всей системы S называется

эргодическим, если из любого состояния s_i можно перейти в любое другое состояние s_j . Другими словами, если число состояний системы S конечно и равно n (что вполне достаточно для инженерных приложений), то система, выйдя из состояния s_i , через некоторое время попадет в состояние s_j и затем через некоторое время снова вернется в состояние s_i . Следовательно, любое состояние s_i и любое подмножество состояний $V \subset W$ системы S являются транзитивными, т. е. для любой пары состояний s_i и s_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) найдется такое $\tau > 0$, при котором выполняется неравенство

$$p_{ij}(t_0, \tau) = P\{S(t_0 + \tau) = s_j | S(t_0) = s_i\} > 0. \quad (4.2.18)$$

Назовем *процесс*, протекающий в системе S , *эргодическим*, если существует предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} p_{ij}(t_0, \tau) = p_j = P\{S = s_j\} > 0 \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (4.2.19)$$

Для эргодического процесса по истечении достаточно большого промежутка времени τ вероятность того, что система S будет в состоянии s_j ($j = 1, 2, \dots, n$), не зависит от того, в каком состоянии s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) система была в начальный момент $t_0 = 0$ и не зависит от величины τ . Очевидно, что транзитивность процесса (существование «маршрута» между любыми двумя состояниями s_i и s_j системы S) является необходимым условием существования предела (4.2.19). Действительно, если процесс, протекающий в системе, не транзитивен, то рано или поздно система окажется в одном из замкнутых подмножеств состояний или в одном из конечных состояний, и тогда возврат из этих подмножеств состояний (или из конечных состояний) будет невозможен.

Чтобы процесс, протекающий в системе S , был эргодическим, нужно, чтобы процесс был не только транзитивным, но и *однородным*, т. е. чтобы вероятность перехода из состояния s_i в состояние s_j за время τ не зависела от того, в какой момент времени t_0 система находилась в состоянии s_i , а зависела лишь от величины τ :

$$p_{ij}(t_0, \tau) = p_{ij}(\tau). \quad (4.2.20)$$

Будем называть марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем *однородным*, если выполняется равенство (4.2.20).

Очевидно, чтобы марковский процесс был однородным, нужно, чтобы все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, были стационарными пуассоновскими (простейшими) потоками, т. е. система S была простейшей.

Теорема Маркова (мы здесь ее не доказываем) утверждает, что любой транзитивный однородный марковский процесс с конечным числом состояний n обладает эргодическим свойством:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} p_{ij}(t_0, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} p_{ij}(\tau) = p_j > 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.2.21)$$

Следовательно, по истечении достаточно большого времени τ функционирования системы S вероятность того, что она будет в состоянии s_j , не зависит от того, в каком состоянии s_i она находилась в начальный момент времени t_0 , а вероятность состояния s_j будет не зависящей от времени и является постоянной величиной p_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Режим функционирования системы S , когда вероятности состояний p_j ($j = 1, 2, \dots, n$) не зависят от времени, будем называть *стационарным режимом*, а вероятности (4.2.21) — *финальными (предельными) вероятностями*. Любой марковский процесс с конечным числом состояний, обладающий эргодическим свойством, имеет стационарный режим, который обязательно наступит после достаточно большого времени функционирования системы.

Таким образом, чтобы марковский процесс, протекающий в системе S с конечным числом состояний n , обладал эргодическим свойством, необходимо выполнение двух условий¹⁾:

1. Граф состояний системы S не должен иметь ни одного состояния и ни одного подмножества состояний без выхода и без входа (множество всех состояний W системы S должно быть эргодическим).

2. Все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, должны быть простейшими

¹⁾ Заметим, что эти условия примерно те же, что и для цепи Маркова (см. п. 3.3).

с постоянными интенсивностями (марковский процесс должен быть однородным).

Системы, в которых протекает эргодический марковский случайный процесс, будем называть *простейшими эргодическими системами*.

Время функционирования такой системы можно разбить условно на два интервала $(0, t_n)$, (t_n, ∞)

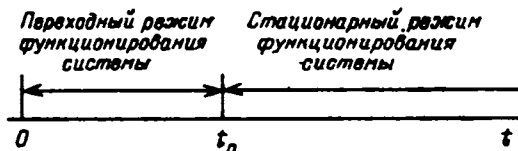


Рис. 4.2.3

(рис. 4.2.3). Участок времени $(0, t_n)$ называется *участком переходного режима функционирования системы*, а участок времени (t_n, ∞) — *участком стационарного режима функционирования системы*. Для любого момента времени $t \in (t_n, \infty)$ выполняется условие

$$|p_j(t) - p_j| < \varepsilon \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (4.2.22)$$

где величина ε выбирается достаточно малой. Чем меньше величина ε , тем больше в общем случае будет время t_n переходного режима функционирования системы.

Проанализируем подробнее стационарный режим функционирования системы **S**. Так как при стационарном режиме предельные вероятности постоянны (не зависят от времени), то их производные равны нулю:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \frac{dp_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.2.23)$$

Следовательно, для стационарного режима функционирования системы **S** дифференциальные уравнения Колмогорова превращаются в систему однородных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами (см. (4.1.24)):

$$0 = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} p_j - p_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

которую можно переписать в виде:

$$p_i \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ji} p_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.2.24)$$

Эту формулу можно интерпретировать следующим образом: *если простейшая эргодическая система находится в стационарном режиме, то сумма всех потоков вероятности, переводящих систему S из других состояний в состояние s_i , равна сумме всех потоков вероятности, переводящих систему S из состояния s_i в другие.* Другими словами, для любого состояния s_i сумма всех входящих потоков вероятности должна быть равна сумме всех исходящих потоков.

Уравнение (4.2.24) можно привести к более простому виду

$$p_i = \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_{ji} p_j}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.2.25)$$

где

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (4.2.26)$$

— интенсивность суммарного простейшего потока, переводящего систему из состояния s_i в другие.

Чтобы решить систему алгебраических уравнений (4.2.25), нужно одно (любое) из этих уравнений заменить нормировочным условием

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (4.2.27)$$

Пример 2. Определить, является ли система, рассмотренная в примере 1, простейшей эргодической системой. Если да, то найти предельные вероятности состояний этой системы при $\mu = \gamma = 1$, $\lambda = 5$.

Решение. Система, граф которой изображен на рис. 4.2.1, является простейшей эргодической, так как все потоки, переводящие систему из состояния в состояние, являются простейшими, а все состояния — транзитивными. Уравнения (4.2.25) для предельных вероятностей имеют вид

$$p_1 = \mu p_2 / \lambda, \quad p_2 = \lambda p_1 / \gamma, \quad p_3 = \gamma p_2 / \mu.$$

Заменяя последнее равенство на нормировочное условие $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$, получим систему уравнений

$$p_1 = \mu p_2 / \lambda, \quad p_2 = \lambda p_1 / \gamma, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

откуда

$$p_3 = \lambda p_1 / \mu.$$

Следовательно,

$$p_1 + \frac{\lambda}{\gamma} p_1 + \frac{\lambda}{\mu} p_1 = p_1 \frac{\gamma\mu + \lambda\mu + \lambda\gamma}{\gamma\mu} = 1,$$

откуда

$$p_1 = \frac{\gamma\mu}{\gamma\mu + \lambda\mu + \lambda\gamma} = \frac{1}{11}, \quad p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \frac{5}{11}, \\ p_3 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \frac{5}{11}.$$

Можно убедиться в том, что пределы вероятностей состояний (при $t \rightarrow \infty$), полученные в примере 1, равны полученным в этом примере финальным (предельным) вероятностям. Действительно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_3(t) = \lim_{x \rightarrow 0} x \pi_3(x) = p_3 = \frac{\lambda\gamma}{\lambda\mu + \lambda\gamma + \gamma\mu}. \quad \blacktriangleright$$

Предельная вероятность состояния p_i для марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем имеет смысл, аналогичный предельным вероятностям для однородной цепи Маркова:

$$p_i = \bar{i}_i / \bar{\tau}_i, \quad (4.2.28)$$

где $\bar{i}_i$ — математическое ожидание времени однократного пребывания системы S в состоянии s_i , $\bar{\tau}_i$ — математическое ожидание времени цикла блуждания системы S относительно состояния s_i .

Формулу (4.2.28) можно записать и в другом виде (см. 2.7.11)):

$$p_i = \frac{\bar{i}_i}{\bar{i}_i + \bar{\phi}_i}, \quad (4.2.29)$$

где $\bar{\phi}_i$ — математическое ожидание времени однократного пребывания системы S вне состояния s_i .

Следовательно, финальная вероятность p_i пребывания простейшей эргодической системы S в состоянии s_i равна отношению математического ожидания $\bar{i}_i$ времени однократного пребывания системы S в состоянии s_i к сумме этого математического ожидания и математического ожидания $\bar{\theta}_i$ времени однократного пребывания системы S вне состояния s_i .

Из равенства (4.2.29) следует, что

$$\bar{i}_i = \bar{\theta}_i p_i / (1 - p_i), \quad (4.2.30)$$

$$\bar{\theta}_i = \bar{i}_i (1 - p_i) / p_i. \quad (4.2.31)$$

Покажем, что для простейших систем математическое ожидание времени $\bar{i}_i$ однократного пребывания системы S в любом не конечном состоянии s_i распределено по показательному закону с параметром λ_i , определяемым по формуле (4.2.26). Действительно, параметр λ_i равен интенсивности суммарного потока событий, выводящего систему S из состояния s_i , а этот поток, как сумма простейших потоков, также простейший (см. п. 2.4). Следовательно, поток событий, переводящий систему S из не конечного состояния s_i , является простейшим с интенсивностью λ_i . В п. 2.2 было показано, что интервал времени (рис. 2.2.2) от любой точки на оси времени t до ближайшего события в простейшем потоке распределен по показательному закону с параметром, равным интенсивности этого потока, что доказывает наше утверждение. Следовательно,

$$\bar{i}_i = \frac{1}{\lambda_i}. \quad (4.2.32)$$

Специально отметим, что время однократного пребывания системы S в не конечном состоянии s_i распределено по показательному закону для любой простейшей системы: не эргодической или эргодической; эргодическая система может находиться как в стационарном, так и в переходном режиме. Но формулы (4.2.30) и (4.2.31) справедливы только для простейшей эргодической системы, находящейся в стационарном режиме.

Выше отмечалось, что время переходного режима t_n зависит от выбора начальных условий. Действительно, если в момент $t = 0$ вероятности

$p_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) уже равны предельным вероятностям ($p_i(0) = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)), то время переходного режима будет равно нулю; если эти вероятности далеки от предельных, переходный режим будет продолжительным.

Пример 3. Для условий примера 2 при $\gamma = \mu = 1$ ($\frac{1}{\text{сутки}}$), $\lambda = 5$ ($\frac{1}{\text{сутки}}$) найти величины $\bar{t}_i$, $\bar{\theta}_i$.

Решение. $\bar{t}_1 = 1/\lambda = 1/5$ (суток), $\bar{t}_2 = \bar{t}_3 = 1/\mu = 1$ (сутки),

$$\bar{\theta}_1 = \bar{t}_1(1 - p_1)/p_1 = 2 \text{ (суток)},$$

$$\bar{\theta}_2 = \bar{t}_2(1 - p_2)/p_2 = 6/5 \text{ (суток)},$$

$$\bar{\theta}_3 = \bar{t}_3(1 - p_3)/p_3 = 6/5 \text{ (суток)}.$$

Пример 4. Размеченный граф состояний ЭВМ показан на рис. 4.2.4. Возможные состояния ЭВМ следующие:

s_1 — исправна, решает задачу,

s_2 — исправна, не решает задачу,

s_3 — неисправна, факт неисправности не установлен,

s_4 — факт неисправности установлен: ведется поиск неисправности,

s_5 — ремонтируется,

s_6 — профилактический осмотр ЭВМ,

s_7 — профилактический ремонт.

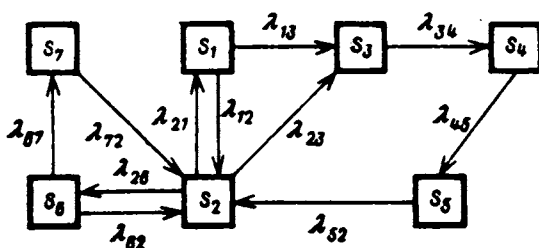


Рис. 4.2.4

Все потоки событий — простейшие. Найти предельные вероятности состояний ЭВМ и математическое ожидание $\bar{\theta}_1$ времени, в течение которого ЭВМ не решает

задачу, независимо от того, исправна она или нет, находится на профилактике или нет.

Решение. По формулам (4.2.25) находим предельные вероятности:

$$p_1 = \lambda_{21} p_2 / (\lambda_{12} + \lambda_{13}),$$

$$p_2 = (\lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3 + \lambda_{62} p_6 + \lambda_{72} p_7) / (\lambda_{25} + \lambda_{21} + \lambda_{23}),$$

$$p_3 = (\lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2) / \lambda_{34}, \quad p_4 = \lambda_{34} p_3 / \lambda_{45},$$

$$p_5 = \lambda_{45} p_4 / \lambda_{52}, \quad p_6 = \lambda_{25} p_2 / (\lambda_{52} + \lambda_{57}), \quad p_7 = \lambda_{57} p_6 / \lambda_{72}.$$

Выразим все вероятности p_i ($i = 2, 3, \dots$) через вероятность p_1 , а второе уравнение (как самое громоздкое) заменим на нормировочное условие:

$$p_2 = (\lambda_{12} + \lambda_{13}) p_1 / \lambda_{21} = a_2 p_1,$$

$$p_3 = (\lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2) / \lambda_{34} = (\lambda_{13} + \lambda_{23} a_2) p_1 / \lambda_{34} = a_3 p_1,$$

$$p_4 = \lambda_{34} a_3 p_1 / \lambda_{45} = a_4 p_1,$$

$$p_5 = \lambda_{45} a_4 p_1 / \lambda_{52} = \lambda_{45} a_4 p_1 / \lambda_{52} = a_5 p_1,$$

$$p_6 = \lambda_{25} p_2 / (\lambda_{52} + \lambda_{57}) = \lambda_{25} a_2 p_1 / (\lambda_{52} + \lambda_{57}) = a_6 p_1,$$

$$p_7 = \lambda_{57} a_6 p_1 / \lambda_{72} = a_7 p_1,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + a_2 p_1 + a_3 p_1 + a_4 p_1 + a_5 p_1 + a_6 p_1 + a_7 p_1 = 1,$$

откуда

$$p_1 = \frac{1}{1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}.$$

В соответствии с формулой (4.2.32) находим м.о. времени, в течение которого ЭВМ однократно решает задачу:

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_{12} + \lambda_{13}}.$$

По формуле (4.2.31) находим м.о. времени $\bar{\phi}_1$, в течение которого ЭВМ однократно не решает задачу:

$$\bar{\phi}_1 = \bar{t}_1 (1 - p_1).$$

Рассмотрим численный пример (все значения величин выражены в сутках):

— среднее время наработки ЭВМ на отказ равно 20 суткам: $1/\lambda_{13} = 1/\lambda_{23} = 20$,

- среднее время решения задачи равно 6 часам: $1/\lambda_{12} = 1/4$,
- среднее время простоя исправной ЭВМ равно 0,5 часа: $1/\lambda_{21} = 1/48$,
- среднее время установления факта неисправности ЭВМ равно 0,5 часа: $1/\lambda_{34} = 1/48$,
- среднее время поиска неисправности равно 1 часу: $1/\lambda_{45} = 1/24$,
- среднее время устранения неисправности равно 2 часам: $1/\lambda_{52} = 1/12$,
- профилактический осмотр проводится в среднем раз в 30 суток: $1/\lambda_{26} = 30$,
- профилактический осмотр в среднем длится 3 часа: $1/\lambda_{62} = 1/\lambda_{67} = 1/8$,
- профилактический ремонт длится в среднем 4 часа: $1/\lambda_{72} = 1/6$. Следовательно,

$$a_2 = (\lambda_{12} + \lambda_{13})/\lambda_{21} = 0,084375,$$

$$a_3 = (\lambda_{13} + \lambda_{23}a_2)/\lambda_{34} = 0,001130,$$

$$a_4 = \lambda_{34}a_3/\lambda_{45} = 0,002259,$$

$$a_5 = \lambda_{45}a_4/\lambda_{52} = 0,004518,$$

$$a_6 = \lambda_{26}a_2/(\lambda_{62} + \lambda_{67}) = 0,000176,$$

$$a_7 = \lambda_{67}a_6/\lambda_{72} = 0,000234.$$

Теперь найдем вероятности состояний

$$p_1 = 1 / \left(1 + \sum_{k=2}^7 a_k \right) = 0,915171,$$

$$p_2 = a_2 p_1 = 0,077218, \quad p_3 = a_3 p_1 = 0,001034,$$

$$p_4 = a_4 p_1 = 0,002067, \quad p_5 = a_5 p_1 = 0,004135,$$

$$p_6 = a_6 p_1 = 0,000161, \quad p_7 = a_7 p_1 = 0,000214.$$

Величина $\bar{t}_1$ — м. о. времени, в течение которого ЭВМ однократно решает задачу, равна

$$\bar{t}_1 = 1/(\lambda_{12} + \lambda_{13}) = 0,2469 \text{ (суток)} = 5,926 \text{ (часов)}.$$

Следовательно, величина $\bar{\phi}_1$ — м. о. времени, в течение которого ЭВМ однократно не решает задачу (при этом ЭВМ может быть либо исправной, либо неисправной, либо находится на профилактике), будет:

$$\bar{\phi}_1 = \bar{t}_1 (1 - p_1)/p_1 = 0,5493 \text{ (часа)} = 32,96 \text{ (минуты)}.$$

Заметим, что если бы ЭВМ была абсолютно надежной и не требовала проведения профилактического осмотра и ремонта, то размеченный граф состояний имел бы вид, показанный на рис. 4.2.5. В этом случае

$$p_1 = \lambda_{21}/(\lambda_{21} + \lambda_{12}) = 0,923077,$$

$$\bar{t}_1 = 1/\lambda_{12} = 0,25 \text{ (суток)} = 6 \text{ (часов)},$$

$$\bar{\theta}_1 = \bar{t}_2 = \bar{t}_1(1 - p_1)/p_1 = 1/\lambda_{21} =$$

$$= 0,02083 \text{ (суток)} = 0,5 \text{ (часа)}.$$

Мы видим, что вероятностные и временные характеристики работы ЭВМ изменились незначительно: вероятность p_1 возросла с 0,915171 до 0,923077, время $\bar{t}_1$ увеличилось с 5,926 (часа) до 6 (часов), а время $\bar{\theta}_1$ уменьшилось: было 0,5493 (часа), а стало 0,5 (часа). Это свидетельствует о том, что ЭВМ обладает достаточно хорошими эксплуатационными характеристиками. ►

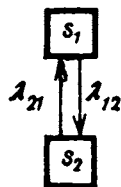


Рис. 4.2.5

Продолжим анализ однородных марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем с конечным числом состояний n . Можно показать, что для таких процессов при произвольном графе состояний, который не обладает свойством эргодичности, тоже существуют предельные вероятности состояний, но эти предельные вероятности будут зависеть от начальных условий.

В качестве иллюстрации рассмотрим простой пример. Пусть множество состояний W системы S состоит из трех непересекающихся подмножеств:

$$W = W_I + W_{II} + W_{III}.$$

При этом, если система S находится в подмножестве W_I , то она может перейти как в подмножество W_{II} , так и в подмножество W_{III} . Если система S находится в подмножестве W_{II} , то она из него выйти не может; аналогично и с подмножеством W_{III} : система S , попав в него, из него выйти не может. Все сказанное условно изображено на рис. 4.2.6.

Если в начальный момент времени $t = 0$ система находилась в подмножестве W_I , то по истечении достаточно большого времени t (теоретически при

$t \rightarrow \infty$) система S перейдет либо в подмножество W_{II} , либо в подмножество W_{III} :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) &= p_i = 0 & (s_i \in W_I), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) &= p_j \geq 0 & (s_j \in W_{II}), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) &= p_k \geq 0 & (s_k \in W_{III}).\end{aligned}$$

При этом

$$\sum_j p_j + \sum_k p_k = 1, \quad \sum_i p_i = 0.$$

Если система S в начальный момент времени $t = 0$ была в подмноестве W_{II} , то она так и останется в этом подмноестве

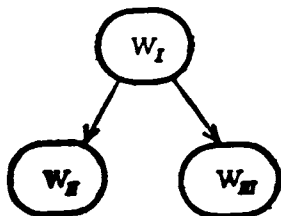


Рис. 4.2.6

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) &= p_i = 0 & (s_i \in W_I), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) &= p_j \geq 0 & (s_j \in W_{II}), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) &= p_k = 0 & (s_k \in W_{III}).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_j p_j = 1, \quad \sum_i p_i = 0, \quad \sum_k p_k = 0.$$

Аналогично, если система S в начальный момент времени $t = 0$ находилась в подмноестве W_{III} , то

$$\sum_i p_i = 0, \quad \sum_j p_j = 0, \quad \sum_k p_k = 1.$$

Будем считать, что подмноества W_{II} и W_{III} обладают свойством эргодичности: система S , попав в одно из подмноеств W_{II} (или W_{III}), будет все время блуждать по всем состояниям этого подмноества.

Естественно, что нас будет интересовать только случай, когда блуждания процесса начинаются из состояний подмноества W_I . Как в этом случае найти предельные вероятности? Можно, конечно, поступить так: составить систему дифференциальных уравнений для всех состояний системы $W = W_I + W_{II} + W_{III}$, решить эту систему и найти пределы полученных решений при $t \rightarrow \infty$. Но можно поступить гораздо проще.

Если найти вероятность P_{II} — попадания системы в подмножество состояний W_{II} и вероятность $P_{III} = 1 - P_{II}$ попадания системы в подмножество W_{III} , то можно ограничиться рассмотрением стационарных режимов, протекающих в подмножествах W_{II} и W_{III} . В предположении, что система S перешла из подмножества W_I в подмножество W_{II} , можно найти предельные вероятности состояний системы $S - p_i^{(II)}$. Тогда по формуле полной вероятности $p_i = p_i^{(II)} P_{II}$ ($s_i \in W_{II}$). Если предположить, что система S перешла из подмножества W_I в подмножество W_{III} (вероятность этой гипотезы равна $P_{III} = 1 - P_{II}$), то найдем предельные вероятности системы $S - p_k^{(III)}$. Опять, применяя формулы полной вероятности, найдем $p_k = p_k^{(III)} P_{III}$ ($s_k \in W_{III}$).

Таким образом, задача сводится сначала к отысканию вероятности P_{II} — попадания системы S в подмножество состояний W_{II} и вероятности $P_{III} = 1 - P_{II}$ — попадания в подмножество состояний W_{III} . Для нахождения этих вероятностей выделим в составе подмножеств W_{II} и W_{III} те состояния, в которые система S непосредственно попадает из подмножества W_I . Назовем эти состояния подмножества *входными состояниями подмножества* W_{II} и будем их обозначать $s_i^{(B)}$. Все такие состояния составляют входное подмножество $W_{II}^{(B)}$ ($s_i^{(B)} \in W_{II}$, $W_{II}^{(B)} \subseteq W_{II}$). Не исключается и случай, когда $W_{II}^{(B)} = W_{II}$, т. е. когда система S может непосредственно попасть в любое состояние подмножества W_{II} . Аналогичные понятия вводятся и для подмножества W_{III} : *входные состояния подмножества* W_{III} обозначим $s_k^{(B)}$, все такие состояния составляют *входное подмножество* $W_{III}^{(B)}$ ($s_k^{(B)} \in W_{III}$, $W_{III}^{(B)} \subseteq W_{III}$). Все это схематично изображено на рис. 4.2.7.

Преобразуем размеченный граф состояний системы следующим образом: сделаем все входные состояния $s_i^{(B)}$ (принадлежащие входному подмножеству $W_{II}^{(B)}$) и все входные состояния $s_k^{(B)}$ (принадлежащие входному подмножеству $W_{III}^{(B)}$) *поглощающими*. Преобразованные подмножества показаны на рис. 4.2.8 (они помечены сверху знаком « $\sim$ »). Для преобразова-

ной так системы $\tilde{S}$ составляется размеченный граф состояний и находятся предельные вероятности

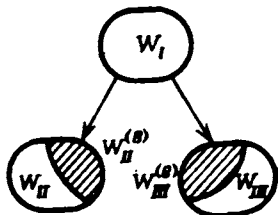


Рис. 4.2.7

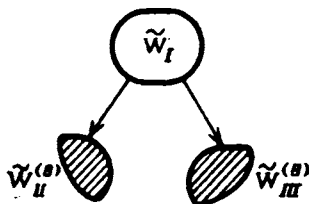


Рис. 4.2.8

$\tilde{p}_i (\tilde{s}_i \in W_{II}^{(B)})$ и $\tilde{p}_k (\tilde{s}_k \in \tilde{W}_{III}^{(B)})$. Так как при $t \rightarrow \infty$ система $\tilde{S}$ попадает либо в подмножество $\tilde{W}_{II}^{(B)}$, либо в подмножество $\tilde{W}_{III}^{(B)}$, то

$$P_{II} = \sum_i \tilde{p}_i \quad (\tilde{s}_i \in \tilde{W}_{II}^{(B)}), \quad (4.2.33)$$

$$P_{III} = \sum_k \tilde{p}_k \quad (\tilde{s}_k \in \tilde{W}_{III}^{(B)}), \quad P_{II} + P_{III} = 1. \quad (4.2.34)$$

Пример 5. Размеченный граф состояний системы показан на рис. 4.2.9. Найти предельные вероятности

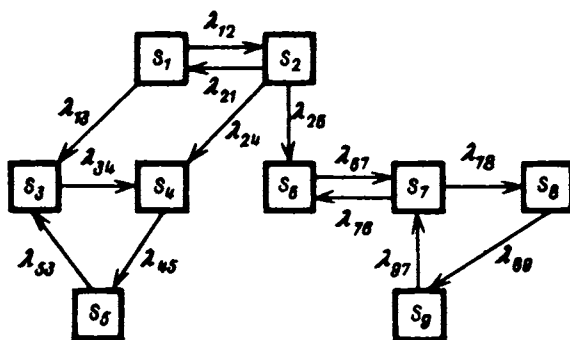


Рис. 4.2.9

состояний системы для начальных условий:

$$p_1(0) + p_2(0) = 1 \quad (p_1(0) \geq 0, \quad p_2(0) \geq 0).$$

Решение. Состав подмножеств W_I, W_{II}, W_{III} следующий:

$$W_I = \{s_1, s_2\}, \quad W_{II} = \{s_3, s_4, s_5\}, \quad W_{III} = \{s_6, s_7, s_8, s_9\},$$

входные состояния для подмножества $W_{II} \sim s_3$ и s_4 , для подмножества $W_{III} \sim s_6$.

Следовательно, входные подмножества будут

$$W_{II}^{(B)} = \{s_3, s_4\}, \quad W_{III}^{(B)} = \{s_6\}.$$

Преобразованный граф состояний имеет вид, показанный на рис. 4.2.10. Для нахождения предельных

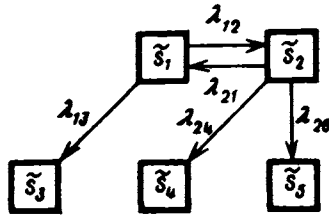


Рис. 4.2.10

вероятностей $\bar{p}_3$, $\bar{p}_4$ и $\bar{p}_6$ воспользуемся седьмым свойством преобразования Лапласа (4.2.12):

$$\bar{p}_l = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}_l(t) \bigcirc \text{---} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \bar{\pi}_l(x),$$

где $\bar{p}_l(t) \bigcirc \text{---} \bullet \bar{\pi}_l(x)$ ($l = 3, 4, 6$).

Составим алгебраические уравнения для изображений вероятностей состояний, соответствующих преобразованному графу состояний, изображенному на рис. 4.2.10. Для этого воспользуемся формулами (4.2.14) и (4.2.17):

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_2(x) &= (\lambda_{12} \bar{\pi}_1(x) + p_2(0)) / (x + \lambda_2), \\ (\lambda_2 &= \lambda_{21} + \lambda_{24} + \lambda_{25}), \quad \bar{\pi}_3(x) = \lambda_{13} \bar{\pi}_1(x) / x, \\ \bar{\pi}_4(x) &= \lambda_{24} \bar{\pi}_2(x) / x, \quad \bar{\pi}_6(x) = \lambda_{26} \bar{\pi}_2(x) / x, \\ \bar{\pi}_1(x) + \bar{\pi}_2(x) + \bar{\pi}_3(x) + \bar{\pi}_4 + \bar{\pi}_6(x) &= 1/x. \end{aligned}$$

Решим полученную систему алгебраических уравнений относительно изображения $\bar{\pi}_1(x)$:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_1(x) + \frac{\lambda_{13} \bar{\pi}_1(x)}{x + \lambda_2} + \frac{p_2(0)}{x + \lambda_2} + \frac{\lambda_{13} \bar{\pi}_1(x)}{x} + \\ + \frac{\lambda_{24}}{x} \left[\frac{\lambda_{13} \bar{\pi}_1(x)}{x + \lambda_2} + \frac{p_2(0)}{x + \lambda_2} \right] + \frac{\lambda_{26}}{x} \left[\frac{\lambda_{13} \bar{\pi}_1(x)}{x + \lambda_2} + \right. \\ \left. + \frac{p_2(0)}{x + \lambda_2} \right] = \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

откуда

$$\bar{\pi}_1(x) = \frac{1 - \rho_2(0) \left[\frac{x}{x + \lambda_2} + \frac{\lambda_{24}}{x + \lambda_2} + \frac{\lambda_{26}}{x + \lambda_2} \right]}{x + \frac{x\lambda_{12}}{x + \lambda_2} + \lambda_{12} + \frac{\lambda_{24}\lambda_{12}}{x + \lambda_2} + \frac{\lambda_{26}\lambda_{12}}{x + \lambda_2}}.$$

Следовательно,

$$\bar{\pi}_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \bar{\pi}_1(x) = \frac{\lambda_2 - \rho_2(0)(\lambda_{24} + \lambda_{26})}{\lambda_{12}\lambda_2 + \lambda_{24}\lambda_{12} + \lambda_{26}\lambda_{12}}.$$

Из равенства

$$\bar{\pi}_2(x) = \lambda_{13}\bar{\pi}_1(x)/x$$

получаем

$$x\bar{\pi}_2(x) = \lambda_{13}\bar{\pi}_1(x),$$

откуда

$$\bar{\beta}_2 = \lim_{x \rightarrow 0} x\bar{\pi}_2(x) = \lambda_{13}\bar{\pi}_1(0) = \frac{\lambda_{12}\lambda_2 - \rho_2(0)(\lambda_{12}\lambda_{24} + \lambda_{12}\lambda_{26})}{\lambda_{12}\lambda_2 + \lambda_{24}\lambda_{12} + \lambda_{26}\lambda_{12}}.$$

Далее, из равенства

$$\bar{\pi}_2(x) = \frac{\lambda_{12}\bar{\pi}_1(x) + \rho_2(0)}{x + \lambda_2}$$

получим

$$\bar{\pi}_2(0) = \frac{\lambda_{12}\bar{\pi}_1(0) + \rho_2(0)}{\lambda_2}.$$

Следовательно,

$$\bar{\beta}_4 = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\beta}_4(t) = \lim_{x \rightarrow 0} x\bar{\pi}_4(x) = \lambda_{24} \lim_{x \rightarrow 0} \pi_2(x) = \lambda_{24}\bar{\pi}_2(0).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\beta}_1(t) = \bar{\beta}_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\beta}_2(t) \\ = \lim_{x \rightarrow 0} x\pi_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x\bar{\pi}_2(x) = 0. \end{aligned}$$

Теперь найдем предельные вероятности для эргодического процесса блуждания системы по состояниям подмножеств W_{II} и W_{III} . Для этого составим два размеченных графа состояний, показанных на рис. 4.2.11. Так как это второе преобразование графа системы S изображенной на рис. 4.2.9, то состояние системы пометим знаком $\approx$.

Предельные вероятности для системы, граф которой представлен на рис. 4.2.11, а, были найдены в примере 2, так как этот граф с точностью до обозначения

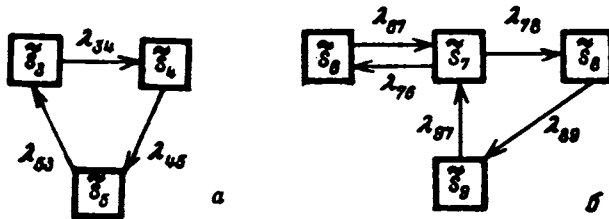


Рис. 4.2.11

ний совпадает с графом, изображенным на рис. 4.2.1. Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{p}_3 &= \lambda_{53}\lambda_{45}/(\lambda_{53}\lambda_{45} + \lambda_{53}\lambda_{34} + \lambda_{34}\lambda_{45}), & \tilde{p}_5 &= 1 - \tilde{p}_3 - \tilde{p}_4, \\ \tilde{p}_4 &= \lambda_{53}\lambda_{34}/(\lambda_{53}\lambda_{45} + \lambda_{53}\lambda_{34} + \lambda_{34}\lambda_{45}).\end{aligned}$$

Предельные вероятности состояний для графа, изображенного на рис. 4.2.11, б, найдем по формулам (4.2.25) — (4.2.27):

$$\begin{aligned}\tilde{p}_6 &= \frac{\lambda_{78}}{\lambda_{67}} \tilde{p}_7, & \tilde{p}_8 &= \frac{\lambda_{78}}{\lambda_{89}} \tilde{p}_7, & \tilde{p}_9 &= \frac{\lambda_{89}}{\lambda_{97}} \tilde{p}_8, \\ \tilde{p}_6 + \tilde{p}_7 + \tilde{p}_8 + \tilde{p}_9 &= 1.\end{aligned}$$

Решим эту систему уравнений относительно вероятности $\tilde{p}_7$:

$$\frac{\lambda_{78}}{\lambda_{67}} \tilde{p}_7 + \tilde{p}_7 + \frac{\lambda_{78}}{\lambda_{89}} \tilde{p}_7 + \frac{\lambda_{89}\lambda_{78}}{\lambda_{97}\lambda_{89}} \tilde{p}_7 = 1,$$

откуда

$$\begin{aligned}\tilde{p}_7 &= \frac{\lambda_{67}\lambda_{89}\lambda_{97}}{\lambda_{67}\lambda_{89}\lambda_{97} + \lambda_{78}\lambda_{89}\lambda_{97} + \lambda_{78}\lambda_{67}\lambda_{97} + \lambda_{78}\lambda_{67}\lambda_{89}}, \\ \tilde{p}_6 &= \frac{\lambda_{78}}{\lambda_{67}} \tilde{p}_7, & \tilde{p}_8 &= \frac{\lambda_{78}}{\lambda_{89}} \tilde{p}_7, & \tilde{p}_9 &= \frac{\lambda_{89}}{\lambda_{97}} \tilde{p}_7.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем окончательные формулы для предельных вероятностей состояний системы, граф которой изображен на рис. 4.2.9:

$$\begin{aligned}p_1 &= p_2 = 0, & p_3 &= \tilde{p}_3 P_{II}, & p_4 &= \tilde{p}_4 P_{II}, & p_5 &= \tilde{p}_5 P_{II}, \\ p_6 &= \tilde{p}_6 P_{III}, & p_7 &= \tilde{p}_7 P_{III}, & p_8 &= \tilde{p}_8 P_{III}, & p_9 &= \tilde{p}_9 P_{III}.\end{aligned}$$

Рассмотрим в качестве иллюстрации численный пример, в котором для простоты расчетов все интенсивности потоков для графа, изображенного на рис. 4.2.9, равны единице, а начальные условия таковы:

$$p_2(0) = p_1(0) = 1/2.$$

В этом случае

$$\begin{aligned}\bar{p}_3 &= \frac{3 - (1/2) \cdot (2)}{3 + 1 + 1} = \frac{2}{5}, & \bar{\pi}_1(0) &= \frac{3 - (1/2) \cdot 2}{3 + 1 + 1} = \frac{2}{5}, \\ \bar{\pi}_2(0) &= \frac{2/5 + 1/2}{3} = \frac{3}{10}, & \bar{p}_4 &= 1 \cdot 3/10 = 3/10, \\ \bar{p}_6 &= 1 - 2/5 = 3/10 = 3/10, & P_{II} &= \bar{p}_3 + \bar{p}_4 = 7/10, \\ P_{III} &= 1 - P_{II} = 3/10, \\ \bar{p}_3 &= \bar{p}_4 = \bar{p}_5 = 1/3, & \bar{p}_7 &= \bar{p}_8 = \bar{p}_9 = \bar{p}_6 = 1/4.\end{aligned}$$

Окончательно получим значения предельных вероятностей:

$$\begin{aligned}p_1 &= p_2 = 0, & p_3 &= p_4 = p_5 = 1/3 \cdot 7/10 = 7/30, \\ p_6 &= p_7 = p_8 = p_9 = 1/4 \cdot 3/10 = 3/40,\end{aligned}$$

дающие в сумме единицу.

Предельные вероятности зависят от начальных условий. Так, если в начальный момент система находится в состоянии s_1 , т. е. $p_1(0) = 1$, получим

$$\begin{aligned}\bar{p}_3 &= 3/5, & \bar{\pi}_1(0) &= 3/5, & \bar{\pi}_2(0) &= 1/5, & \bar{p}_4 &= 1/5, \\ \bar{p}_6 &= 1/5, & P_{II} &= \bar{p}_3 + \bar{p}_4 = 4/5, & P_{III} &= 1/5, \\ p_3 &= p_4 = p_5 = 4/15, & p_6 &= p_7 = p_8 = p_9 = 1/20, \\ p_1 &= p_2 = 0.\end{aligned}$$

Если в начальный момент система находится в состоянии s_2 , т. е. $p_2(0) = 1$, то

$$\begin{aligned}\bar{p}_3 &= 1/5, & \bar{\pi}_1(0) &= 1/5, & \bar{\pi}_2(0) &= 2/5, & \bar{p}_4 &= 2/5, \\ \bar{p}_6 &= 2/5, & P_{II} &= \bar{p}_3 + \bar{p}_4 = 3/5, & P_{III} &= 2/5, \\ p_3 &= p_4 = p_5 = 1/5, & p_6 &= p_7 = p_8 = p_9 = 1/10, \\ p_1 &= p_2 = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, мы убедились в том, что для различных начальных условий у системы S , граф ко-

торой изображен на рис. 4.2.9, существуют предельные вероятности, но эти вероятности существенно зависят от начальных условий. ►

4.3. Закон распределения и числовые характеристики времени однократного пребывания марковского случайного процесса с непрерывным временем и дискретными состояниями в произвольном подмножестве состояний U

Вначале рассмотрим самый простой случай, когда подмножество состояний U состоит из одного состояния s_i : $U = \{s_i\}$. Очевидно, что случай, когда состояние s_i является конечным (поглощающим), рассматривать нет смысла, так как, попав в это состояние, система остается в нем навсегда. Следовательно, нетривиальным является случай, когда состояние s_i является либо начальным (источником), либо транзитивным (см. п. 3.1).

Допустим, что в начальный момент $t=0$ система S с конечным числом состояний n попала (или находилась) в начальном или транзитивном состоянии s_i . Рассмотрим случайную величину T_i — время однократного нахождения системы S в состоянии s_i , отсчитываемое от момента $t=0$. Если интенсивность суммарного потока событий, выводящего систему S из состояния s_i , не зависит от времени:

$$\lambda_i(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) = \lambda_i = \text{const}, \quad (4.3.1)$$

то случайная величина T_i будет иметь показательный закон распределения с параметром λ_i (это было показано в п. (2.2)):

$$F_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda_i t} & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$$f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t} \quad (t > 0). \quad (4.3.2)$$

Заметим, что такой закон распределения случайной величины T_i будет иметь место как в случае, если интенсивности $\lambda_{ij} = \text{const} (j = 1, 2, \dots, n)$, так и в случае, если $\lambda_{ij}(t) \neq \text{const}$, но их сумма (4.3.1) постоянна.

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда сумма (4.3.1) зависит от времени:

$$\lambda_i(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \neq \text{const.} \quad (4.3.3)$$

Найдем вероятность события $\{T_i > t\}$ (рис. 4.3.1). Система покинет состояние s_i , как только в пуассоновском потоке событий с интенсивностью $\lambda_i(t)$ наступит первое событие. Следовательно, вероятность события $\{T_i > t\}$ равна вероятности события: {в пуассоновском потоке событий с интенсивностью $\lambda_i(t)$ на интервале $(0, t)$ не наступит ни одного события}.

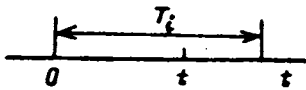


Рис. 4.3.1

Таким образом,

$$P\{T_i > t\} = e^{-\int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau} \quad (t > 0), \quad (4.3.4)$$

откуда

$$F_i(t) = 1 - P\{T_i > t\} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau} & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

$$f_i(t) = F'_i(t) = \lambda_i(t) e^{-\int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau} \quad (t > 0). \quad (4.3.6)$$

Введем обозначение

$$\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau. \quad (4.3.7)$$

Тогда

$$F_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 - e^{-\Lambda_i(t)} & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad (4.3.8)$$

$$f_i(t) = \lambda_i(t) e^{-\Lambda_i(t)} \quad (t > 0). \quad (4.3.9)$$

Очевидно, если $\lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const}$, из (4.3.9) получится показательный закон распределения.

Таким образом, зная интенсивность пуассоновского потока событий $\lambda_i(t)$, выводящего систему из состояния s_i , можно по формулам (4.3.8) найти ф.р. $F_i(t)$ с.в. T_i — времени однократного пребывания системы в состоянии s_i при условии, что в момент $t = 0$ система находилась в этом состоянии.

Можно решить и обратную задачу: допустим, что нам известна ф.р. $F_i(t)$ неотрицательной с.в. T_i ; какой должна быть интенсивность пуассоновского потока событий $\lambda_i(t)$? Из уравнения (4.3.8) имеем

$$F_i(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau} \quad (t > 0).$$

Найдем отсюда функцию $\lambda_i(t)$:

$$e^{-\int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau} = 1 - F_i(t), \quad \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau = -\ln(1 - F_i(t)).$$

Дифференцируя последнее выражение по t , получим

$$\lambda_i(t) = \frac{f_i(t)}{1 - F_i(t)} \quad (t > 0). \quad (4.3.10)$$

Формула (4.3.10) позволяет найти соответствие между заданным законом распределения с.в. T_i и интенсивностью потока событий $\lambda_i(t)$.

Пример 1. Интенсивность пуассоновского потока событий, выводящего систему из состояния s_i , $\lambda_i(t) = at + b$; найти закон распределения случайной величины T_i — времени однократного пребывания системы в состоянии s_i ($a > 0, b > 0$).

Решение. По формулам (4.3.8) и (4.3.9) получаем

$$F_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 - \exp\{-at^2/2 - bt\} & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$$f_i(t) = \dot{F}_i(t) = (at + b) \exp\{-at^2/2 - bt\} \quad (t > 0).$$

При $b = 0$ $f_i(t) = at \exp\{-at^2/2\}$ ($t > 0$) получаем закон Рэлея (см. 7.9.26*) с параметром $\sigma = 1/\sqrt{a}$; при $a = 0$ $f_i(t) = b \exp\{-bt\}$, т. е. когда интенсивность не зависит от времени, естественно, получим показательный закон с параметром $\lambda_i = b$.

Пример 2. Интенсивность пуассоновского потока событий, выводящего систему из состояния s_i , равна $\lambda_i(t)$. Найти закон распределения с. в. T_i при условии, что система попала в состояние s_i в момент времени $\tau > 0$.

Решение. Применяя тот же прием, что в предыдущем примере, получим:

$$F_i(t|\tau) = 1 - P\{T_i > t|\tau\} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ 1 - \exp\left\{-\int_{\tau}^t \lambda_i(x) dx\right\} & \text{при } t > \tau, \end{cases}$$

$$f_i(t|\tau) = \dot{F}_i(t|\tau) = \lambda_i(t) \exp\left\{-\int_{\tau}^t \lambda_i(x) dx\right\} \quad (t > \tau).$$

Если $\lambda_i(t) = at + b$, то получим

$$F_i(t|\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ 1 - \exp\left\{-\left[\frac{a}{2}(t^2 - \tau^2) + b(t - \tau)\right]\right\} & \text{при } t > \tau, \end{cases}$$

$$f_i(t|\tau) = [at + b] \exp\left\{-\left[\frac{a}{2}(t^2 - \tau^2) + b(t - \tau)\right]\right\} \quad (t > \tau).$$

При $b = 0$ получаем «сдвинутый» закон Рэлея с параметром $\sigma = 1/\sqrt{a}$:

$$f_i(t|\tau) = at \exp\left\{-\frac{a}{2}(t^2 - \tau^2)\right\} \quad (t > \tau),$$

при $a = 0$ получаем «сдвинутый» на величину τ показательный закон с параметром $\lambda = b$ (рис. 4.3.2):

$$f_i(t|\tau) = b \exp\{-b(t - \tau)\} \quad (t > \tau).$$

Пример 3. Какова должна быть интенсивность пуассоновского потока событий $\lambda_i(t)$, если с. в. T_i распределена по закону Эрланга 2-го порядка, а система S в момент времени $t = 0$ находилась в состоянии s_i ?

Решение. $f_i(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \ (t > 0)$,

$$F_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t} (1 + \lambda t) & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lambda_i(t) = \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t} (1 + \lambda t))} = \frac{\lambda^2 t}{\lambda t + 1} = \frac{\lambda}{1 + 1/(\lambda t)}.$$

График этой функции показан на рис. 4.3.3.

Можно применить и несколько иной подход к определению закона распределения с.в. T_i — времени однократного пребывания в состоянии s_i . Это время

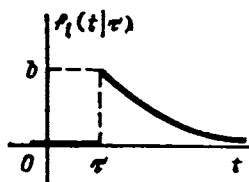


Рис. 4.3.2

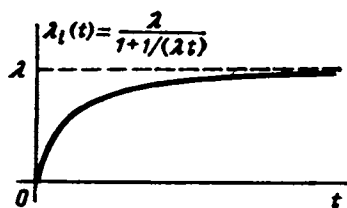


Рис. 4.3.3

будет определяться моментом первого попадания системы S в одно из соседних (по отношению к состоянию s_i) состояний.

Множество всех соседних состояний по отношению к состоянию s_i обозначим $W_i = \{s_1, s_2, \dots, s_l, \dots, s_k\}$.

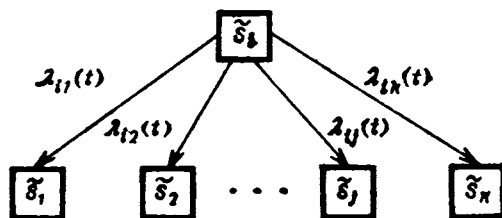


Рис. 4.3.4

Преобразуем систему S таким образом, что все соседние по отношению к состоянию s_i состояния сделаем конечными (поглощающими) (рис. 4.3.4). Тогда очевидно, что функция распределения с.в. T_i будет определяться из выражения

$$F_i(t) = P\{T_i < t\} = \bar{p}_1(t) + \bar{p}_2(t) + \dots + \bar{p}_l(t) + \dots + \bar{p}_k(t). \quad (4.3.11)$$

где $\bar{p}_j(t)$ — вероятность того, что система, описываемая графом G , изображенным на рис. 4.3.4, в момент времени t будет в состоянии $\bar{s}_j$, если в момент времени $t=0$ она была в состоянии $\bar{s}_i$ ($j = 1, 2, \dots, k$). В соответствии с нормировочным условием для этого графа G имеем

$$\bar{p}_i(t) + \sum_{j=1}^k \bar{p}_j(t) = 1, \quad (4.3.12)$$

откуда

$$F_i(t) = 1 - \bar{p}_i(t). \quad (4.3.13)$$

Для системы, граф G которой изображен на рис. 4.3.4, можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} d\bar{p}_i(t)/dt &= -\bar{p}_i(t) \sum_{j=1}^k \lambda_{ij}(t) = \\ &= -\bar{p}_i(t) \left[\sum_{j=1}^k \lambda_{ij}(t) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_{ij}(t) \right]. \end{aligned}$$

Все интенсивности $\lambda_{ij}(t)$ ($j = k+1, \dots, n$) равны нулю, так как состояния $s_{k+1}, \dots, s_n$ не являются соседними по отношению к состоянию s_i . Следовательно,

$$d\bar{p}_i(t)/dt = -\bar{p}_i(t) \sum_{j=1}^k \lambda_{ij}(t).$$

В соответствии с формулой (4.3.3) последнее уравнение можно записать в виде

$$d\bar{p}_i(t)/dt = -\bar{p}_i(t) \lambda_i(t). \quad (4.3.14)$$

Решение этого дифференциального уравнения при начальном условии $\bar{p}_i(0) = 1$ имеет вид

$$\bar{p}_i(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau \right\} \quad (t > 0).$$

Подставляя его в (4.3.13), получим

$$F_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 - \exp \left\{ - \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau \right\} & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Полученное выражение для функции распределения $F_i(t)$ совпадает с выражением (4.3.8).

Этот прием мы будем использовать в дальнейшем.

Найдем вероятность P_{ij} перехода из состояния s_i в состояние s_j , соседнее по отношению к s_i , при условии, что в начальный момент $t=0$ система находится в состоянии s_i (т. е. при $\bar{p}_i(0)=1$). Эта вероятность определяется по формуле

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (4.3.15)$$

при этом $\sum_{j=1}^k P_{ij} = 1$.

Вероятность $\bar{p}_j(t)$ может быть получена в результате решения системы дифференциальных уравнений, соответствующих размеченному графу G , изображенному на рис. 4.3.4, при начальном условии

$$\bar{p}_i(0) = 1, \quad \bar{p}_j(0) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Если все интенсивности постоянны, т. е.

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij} = \text{const} \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

то вероятность P_{ij} равна отношению интенсивности λ_{ij} к суммарной интенсивности всех потоков событий, выводящих систему из состояния s_i :

$$P_{ij} = \lambda_{ij} / \sum_{l=1}^k \lambda_{il}. \quad (4.3.16)$$

Теперь рассмотрим произвольное незамкнутое подмножество состояний $U = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_r}, \dots, s_n\}$. Так как множество U не замкнуто, то система S попав (или находясь) в момент времени $t=0$ в подмножестве состояний U , рано или поздно покинет его. В начальный момент времени $t=0$ система S была в одном из состояний множества U , следовательно,

$$\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1. \quad (4.3.17)$$

Очевидно, что время T_U однократного пребывания системы S в подмножестве состояний U будет равно времени, в течение которого система попадает в одно

из входных состояний подмножества Z , являющегося дополнением подмножества U (рис. 4.3.5):

$$W = U + Z. \quad (4.3.18)$$

Обозначим $s_{k-1}, \dots, s_j, \dots, s_{l-1}$ входные состояния подмножества Z . Тогда входное подмножество $Z^{(B)}$

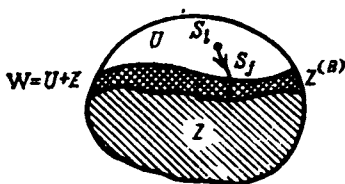


Рис. 4.3.5

можно определить следующим образом:

$$Z^{(B)} = \{s_{k-1}, \dots, s_j, \dots, s_{l-1}\} \quad (Z^{(B)} \subseteq Z).$$

Схема разбиения множества состояний W на подмножества показана на рис. 4.3.6.

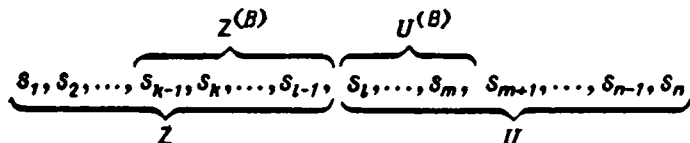


Рис. 4.3.6

Преобразуем нашу систему так, чтобы все входные состояния подмножества Z были концевыми (поглощающими). Преобразованные таким образом подмножества состояний изображены на рис. 4.3.7 (преобразованные подмножества помечены сверху тильдой).

Если для преобразованных подмножеств состояний $\tilde{U} + \tilde{Z}^{(B)}$ составить преобразованный размеченный граф состояний $\tilde{G}(S)$ и найти для начальных условий $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i(0) = 1$ вероятность

$$P_{Z^{(B)}}(t) = \sum_{j=k-1}^{l-1} \tilde{p}_j(t), \quad (4.3.19)$$

то ф. р. времени пребывания системы S в подмножестве состояний U определяется из выражения

$$F_u(t) = P_{Z^{(B)}}(t). \quad (4.3.20)$$

Найдем п. р. случайной величины T_U , для чего продифференцируем левую и правую части равенства (4.3.20) (см. (4.3.19)):

$$f_u(t) = \dot{F}_u(t) = \dot{P}_{Z^{(B)}}(t) = \sum_{i=k-1}^{l-1} d\bar{p}_i(t)/dt. \quad (4.3.21)$$

Так как все состояния $\bar{s}_j$ ($j = k-1, \dots, l-1$) являются конечными, то

$$d\bar{p}_j(t)/dt = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}(t) \bar{p}_i(t) \quad (j = k-1, k, \dots, l-1). \quad (4.3.22)$$

Следовательно,

$$f_u(t) = \sum_{i=k-1}^{l-1} \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \bar{p}_i(t). \quad (4.3.23)$$

Таким образом, для отыскания закона распределения времени блуждания процесса в незамкнутом подмножестве состояний $U = \{s_1, \dots, s_l, \dots, s_n\}$ до первого выхода за пределы этого подмножества необходимо:



Рис. 4.3.7

1. Определить подмножество входных состояний $Z^{(B)} = \{s_{k-1}, s_k, \dots, s_l, \dots, s_{l-1}\}$,

в которое система S может непосредственно попасть из подмножества U .

2. Преобразовать систему S таким образом, чтобы все состояния подмножества $Z^{(B)} = \{s_{k-1}, s_k, \dots, s_l, \dots, s_{l-1}\}$ стали конечными, т. е. нужно положить

$$\lambda_{ji}(t) = 0 \quad (j = k-1, k, \dots, l-1; i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.3.24)$$

3. Для таким образом преобразованной системы $\tilde{S}$, состоящей из подмножеств состояний $\tilde{U}$ и $\tilde{Z}^{(B)}$, составить размеченный граф состояний $\tilde{G}(\tilde{S})$ и записать систему дифференциальных уравнений, которую нужно

решать при начальных условиях $\bar{p}_1(0), \bar{p}_{i+1}(0), \dots, \bar{p}_n(0)$, причем

$$\sum_{i=1}^n \bar{p}_i(0) = 1. \quad (4.3.25)$$

4. Решив эту систему уравнений, найти п.р. случайной величины T_U по формуле (4.3.23).

Обратим особое внимание на то, что указанный способ нахождения п.р. времени T_U однократного пребывания в незамкнутом подмножестве состояний U может применяться как в случае однородного, так и неоднородного марковского процесса.

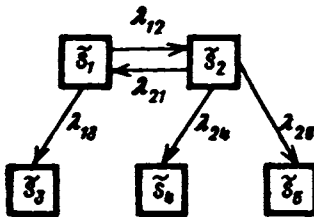


Рис. 4.3.8

Пример 4. Для условий примера 5 п. 4.2 найти закон распределения времени пребывания в подмно-

жестве состояний $U = \{s_1, s_2\}$ (см. рис. 4.2.9) при начальных условиях

$$p_1(0) + p_2(0) = 1, \quad p_1(0) \geq 0, \quad p_2(0) \geq 0.$$

Решение. Подмножество состояний $Z^{(a)}$ состоит из состояний s_3, s_4, s_5 . Преобразованный граф состояний системы S будет иметь вид, показанный на рис. 4.3.8.

Решение дифференциальных уравнений будем искать с помощью преобразования Лалласа, так как рассматриваемый марковский процесс однороден:

$$\bar{p}_1(x) = (\lambda_{21}\bar{p}_2(x) + p_1(0))/(x + \lambda_1) \quad (\lambda_1 = \lambda_{12} + \lambda_{13}),$$

$$\bar{p}_2(x) = (\lambda_{12}\bar{p}_1(x) + p_2(0))/(x + \lambda_2) \quad (\lambda_2 = \lambda_{21} + \lambda_{24} + \lambda_{25}),$$

откуда

$$\bar{p}_1(x) = \frac{\lambda_{21} + (\lambda_{24} + \lambda_{25})p_1(0) + xp_1(0)}{x^2 + C_1x + C_0},$$

где $C_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $C_0 = \lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}\lambda_{21}$.

Найдем корни уравнения $x^2 + C_1x + C_0 = 0$:

$$\alpha_1 = (-C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_0})/2,$$

$$\alpha_2 = (-C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_0})/2.$$

Допустим, что $C_1^2 > 4C_0$; тогда в соответствии со свойством 6 преобразования Лапласа имеем (см. п. 4.2):

$$\bar{p}_1(t) = [\lambda_{21} + (\lambda_{24} + \lambda_{26}) p_1(0) + \alpha_1 p_1(0)] e^{\alpha_1 t} / (2\alpha_1 + C_1) + [(\lambda_{21} + \lambda_{24} + \lambda_{26}) p_1(0) + \alpha_2 p_1(0)] e^{\alpha_2 t} / (2\alpha_2 + C_1).$$

Аналогичное решение получим и для вероятности $\bar{p}_2(t)$:

$$\bar{p}_2(x) = \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} p_2(0) + x p_2(0)}{x^2 + C_1 x + C_0}.$$

где $C_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $C_0 = \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12} \lambda_{21}$. Следовательно,

$$\bar{p}_2(t) = \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} p_2(0) + \alpha_1 p_2(0)}{2\alpha_1 + C_1} e^{\alpha_1 t} + \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} p_2(0) + \alpha_2 p_2(0)}{2\alpha_2 + C_1} e^{\alpha_2 t}.$$

По формуле (4.3.23) получим выражение для п. р. случайной величины T_U :

$$f_u(t) = \lambda_{12} \bar{p}_1(t) + \lambda_{24} \bar{p}_2(t) + \lambda_{26} \bar{p}_2(t).$$

Для наглядности рассмотрим простой числовой пример:

$$\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{21} = \lambda_{24} = \lambda_{26} = 1, \quad p_1(0) = 0, \quad p_2(0) = 1.$$

Найдем величины

$$\lambda_1 = 1 + 1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$C_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 5, \quad C_0 = \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12} \lambda_{21} = 5,$$

$$-\alpha_1 = (-5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 5})/2 \approx -1,382, \quad \alpha_2 \approx -3,618,$$

$$\bar{p}_1(t) = \lambda_{21} e^{\alpha_1 t} / (2\alpha_1 + C_1) + \lambda_{21} e^{\alpha_2 t} / (2\alpha_2 + C_1) = \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} (e^{-1,382t} - e^{-3,618t}),$$

$$\bar{p}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} (0,618 e^{-1,382t} + 1,618 e^{-3,618t}).$$

Следовательно,

$$f_u(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} [e^{-1,382t} - e^{-3,618t} + \\ + 2(0,618 e^{-1,382t} + 1,618 e^{-3,618t})/\sqrt{5}] = \\ = e^{-1,382t} + e^{-3,618t} = e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t} \quad (t > 0).$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $f_u(t)$ обладает необходимыми свойствами плотности распределения:

$$f_u(t) \geq 0, \quad \int_0^{\infty} f_u(t) dt = 1.$$

Запишем полученную плотность распределения в несколько ином виде: положим $-\alpha_1 = a_1 > 0$, $-\alpha_2 = a_2 > 0$; тогда $f_u(t) = \frac{1}{a_1} a_1 e^{-a_1 t} + \frac{1}{a_2} a_2 e^{-a_2 t}$. Заметим, что $1/a_1 + 1/a_2 = 1$, $1/a_1 > 0$, $1/a_2 > 0$. Следовательно, полученная плотность $f_u(t)$ представляет собой вероятностную смесь (см. гл. 9*) двух показательных законов распределения $f_1(t) = a_1 e^{-a_1 t}$, $f_2(t) = a_2 e^{-a_2 t}$ с вероятностями $p_1 = 1/a_1$, $p_2 = 1/a_2$:

$$f_u(t) = p_1 f_1(t) + p_2 f_2(t).$$

Можно убедиться в том, что последняя формула для п. р. случайной величины T_u справедлива для любых начальных условий и любых постоянных положительных интенсивностей λ_{12} , λ_{21} , λ_{13} , λ_{24} , λ_{25} . Это следует из того, что всегда существуют два различных действительных отрицательных корня α_1 и α_2 уравнения

$$x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_{12}\lambda_{21} = 0,$$

которые не зависят от начальных условий.

По формулам (9.8.3)*—(9.8.5)* найдем $M[T_u]$ и $D[T_u]$:

$$M[T_u] = \frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \approx 0,599,$$

$$\alpha_2[T_u] = p_1 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^2} \right) + p_2 \left(\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) = \frac{2}{a_1^3} + \frac{2}{a_2^3},$$

$$D[T_u] = \alpha_2[T_u] - (M[T_u])^2 = \frac{2}{a_1^3} + \frac{2}{a_2^3} - \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right)^2 \approx 0,444.$$

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

5.1. Определение марковского процесса гибели и размножения с непрерывным временем, его размеченный граф состояний, условия существования стационарного режима, предельные вероятности состояний

Ранее (п. 3.1) мы уже сталкивались с процессами гибели и размножения для цепи Маркова. Как и в том случае, с состоянием s_i связана неслучайная величина x_i : если система S в момент времени t находится в состоянии s_i , то дискретная случайная величина $X(t)$, связанная с функционированием системы, принимает значение i . Таким образом, получаем с.п. $X(t)$, который в случайные, заранее неизвестные моменты времени скачком изменяет свое состояние. Одномерный закон распределения с.п. $X(t)$ определяется равенством

$$P\{X(t) = i\} = P\{S(t) = s_i\} = p_i(t) \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.1.1)$$

Если в процессе гибели и размножения для цепи Маркова скачки функции $X(t)$ могли происходить в строго определенные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_k$, то в марковском процессе гибели и размножения с непрерывным временем скачки функции $X(t)$ могут происходить в любой момент времени t .

Таким образом, *марковским процессом гибели и размножения с непрерывным временем* назовем такой случайный процесс, который может принимать только целые неотрицательные значения; изменения этого процесса могут происходить в любой момент времени t , при этом в любой момент времени он может либо увеличиться на единицу, либо уменьшиться на единицу, либо остаться неизменным. Коротко такой процесс будем называть *процессом гибели и размножения*.

Размеченный граф состояний $G(S)$ процесса гибели и размножения показан на рис. 5.1.1. Интенсивности пуассоновских потоков событий, ведущих к увеличению функции $X(t)$ («размножению»), обозначены $\lambda_i(t)$, где индекс i соответствует индексу того состояния s_i , из которого выходит стрелка

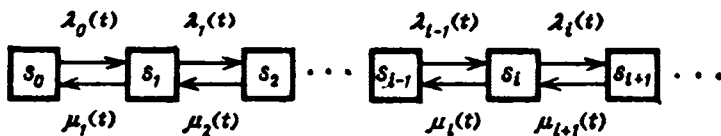


Рис. 5.1.1

(рис. 5.1.1). Интенсивности пуассоновских потоков событий, ведущих к уменьшению функции $X(t)$ («гибели»), обозначены $\mu_i(t)$, где индекс i также соответствует индексу того состояния s_i , из которого выходит стрелка. Пуассоновские потоки событий, ведущие к «размножению» процесса $X(t)$ (интенсивности которых обозначены буквой λ с индексом), будем называть *потоками размножения*. Пуассоновские потоки событий, ведущие к «гибели» процесса $X(t)$ (интенсивности которых обозначены буквой μ с индексом), будем называть *потоками гибели*.

Очевидно, что одномерный закон распределения процесса гибели и размножения $X(t)$ можно определить с помощью системы уравнений Колмогорова для графа $G(S)$, изображенного на рис. 5.1.1:

$$\begin{aligned} dp_0(t)/dt &= \mu_1(t) p_1(t) - \lambda_1(t) p_0(t), \\ dp_i(t)/dt &= \lambda_{i-1}(t) p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}(t) p_{i+1}(t) - \\ &\quad - (\lambda_i(t) + \mu_i(t)) p_i(t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

где

$$p_i(t) = P\{S(t) = s_i\} = P\{X(t) = i\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.1.3)$$

Систему уравнений (5.1.2) нужно решать при начальных условиях $p_i(0) \geq 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), при этом

$$\sum_i p_i(0) = 1. \quad (5.1.4)$$

В инженерных приложениях обычно имеют дело с процессами гибели и размножения с ограниченным числом состояний, когда $0 \leq X(t) \leq n$. У такого процесса $n+1$ состояний; размеченный граф состояний

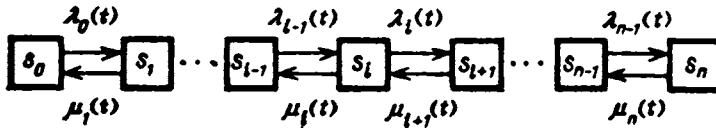


Рис. 5.1.2

показан на рис. 5.1.2. Система уравнений Колмогорова для процесса гибели и размножения с ограниченным числом состояний имеет вид

$$\begin{aligned} dp_0(t)/dt &= \mu_1(t) p_1(t) - \lambda_0(t) p_0(t), \\ &\dots \dots \dots \\ dp_i(t)/dt &= \lambda_{i-1}(t) p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}(t) p_{i+1}(t) - \\ &\quad - (\lambda_i(t) + \mu_i(t)) p_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (5.1.5) \\ &\dots \dots \dots \\ dp_n(t)/dt &= \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - \mu_n(t) p_n(t). \end{aligned}$$

Систему уравнений (5.1.5) нужно решать при начальных условиях $p_i(0) \geq 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), при этом

$$\sum_{i=0}^n p_i(0) = 1. \quad (5.1.6)$$

Иногда в инженерной практике встречаются процессы «чистого» размножения. *Процессом чистого размножения* называется такой процесс гибели и размножения, у которого интенсивности всех потоков гибели равны нулю. Размеченный граф состояний такого процесса без ограничения на число состояний показан на рис. 5.1.3, а. Система уравнений Колмогорова для таких процессов может быть получена из системы уравнений (5.1.2), в которой нужно положить все интенсивности потоков гибели равными нулю: $\mu_i(t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$).

Размеченный граф состояний процесса чистого размножения с конечным числом состояний $n+1$ показан на рис. 5.1.3, б.

Система уравнений Колмогорова для процесса чистого размножения с конечным числом состояний

может быть получена из системы уравнений (5.1.5), если в ней положить $\mu_i(t) \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Аналогично вводится понятие процесса «чистой» гибели. *Процессом чистой гибели* называется такой процесс гибели и размножения, у которого интенсивности

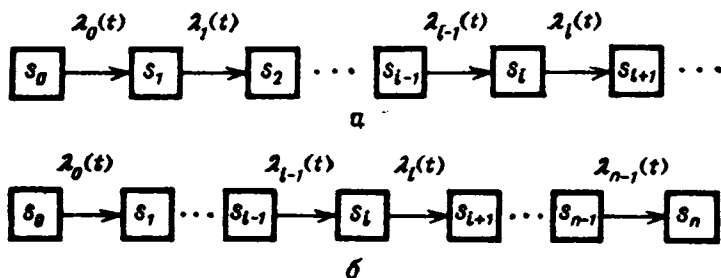


Рис. 5.1.3

всех потоков размножения равны нулю. Размеченный граф состояний такого процесса с конечным числом состояний показан на рис. 5.1.4. Система уравнений

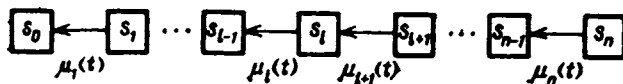


Рис. 5.1.4

Колмогорова для процесса чистой гибели может быть получена из системы уравнений (5.1.5), если в ней положить $\lambda_i(t) \equiv 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Процессы гибели и размножения (однородные и неоднородные), т. е. с постоянными или переменными интенсивностями потоков, находят широкое применение в инженерной практике при исследовании различных технических систем. Процессы, происходящие в различных системах массового обслуживания, также относятся к процессам гибели и размножения¹⁾.

Пример 1. Рассматривается производство автомашин на автозаводе. Считая поток производимых

¹⁾ Исследованием систем массового обслуживания занимается специальная теория массового обслуживания; авторы предполагают посвятить ей отдельную книгу, в которой будут освещены различные инженерные приложения этой теории.

автомашин пуассоновским с интенсивностью $\lambda(t)$, найти одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ — числа выпущенных машин к моменту времени t , если в момент $t=0$ начат выпуск автомашин.

Решение. Очевидно, что здесь процесс чистого размножения без ограничения на число состояний, при этом $\lambda_i(t) = \lambda(t)$, так как интенсивность выпуска автомашин не зависит от того, сколько их уже выпущено. Граф состояний такого процесса показан на

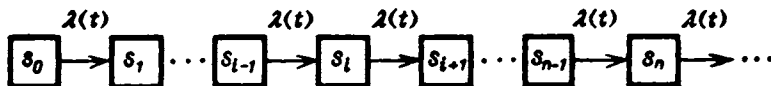


Рис. 5.1.5

рис. 5.1.5. Одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ для графа, изображенного на рис. 5.1.5, определяется системой уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned}
 dp_0(t)/dt &= -\lambda(t) p_0(t), \\
 \dots \dots \dots \\
 dp_i(t)/dt &= -\lambda(t) p_i(t) + \lambda(t) p_{i-1}(t) \quad (i = 1, 2, \dots) \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.1.7}$$

Так как число выпущенных автомашин $X(t)$ на любой фиксированный момент времени t распределено по закону Пуассона с параметром

$$a(t) = \int_0^t \lambda(t) dt, \tag{5.1.8}$$

то

$$P\{X(t) = i\} = p_i(t) = \frac{[a(t)]^i}{i!} e^{-a(t)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \tag{5.1.9}$$

$$M[X(t)] = D[X(t)] = a(t).$$

Можно непосредственно убедиться, что вероятности (5.1.9) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (5.1.7) при начальном условии $p_0(0) = 1$.

Действительно, по формуле (5.1.9) получим:

$$p_0(t) = e^{-a(t)} = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau},$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} (-1) \frac{d}{dt} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau =$$

$$= -\lambda(t) e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} = -\lambda(t) p_0(t),$$

а это есть первое уравнение системы (5.1.7). Далее,

$$p_1(t) = a(t) e^{-a(t)},$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = e^{-a(t)} \frac{da(t)}{dt} - a(t) e^{-a(t)} \frac{da(t)}{dt} =$$

$$= \left| \frac{da(t)}{dt} - \frac{d}{dt} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau = \lambda(t) \right| =$$

$$= \lambda(t) e^{-a(t)} - \lambda(t) a(t) e^{-a(t)} = \lambda(t) p_0(t) - \lambda(t) p_1(t).$$

Мы получили второе уравнение системы (5.1.7). Таким же образом можно получить i -е уравнение системы (5.1.7).

Следовательно, в данном случае для нахождения одномерного закона распределения случайного процесса $X(t)$ нет необходимости решать систему дифференциальных уравнений (5.1.7).

Для фиксированного момента времени t числовые характеристики случайной величины $X(t)$ будут:

$$M[X(t)] = D[X(t)] = a(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau. \quad (5.1.10) \quad \blacktriangleright$$

Рассмотренный в этом примере процесс $X(t)$ называется *неоднородным процессом Пуассона*. Процесс $X(t)$ представляет собой скачкообразную неубывающую целочисленную функцию, скачки которой могут принимать только значение «+1».

Если интенсивность $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, то получим *однородный процесс Пуассона* или просто *процесс*

Пуассона. Для такого процесса при $p_0(0) = 1$, $p_i(0) = 0$ ($i > 0$)

$$P\{X(t) = i\} = p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.1.11)$$

Характеристики процесса Пуассона будут

$$M[X(t)] = D[X(t)] = \lambda t. \quad (5.1.12)$$

Очевидно, что процесс Пуассона является процессом восстановления (см. п. 2.2), у которого срок службы элемента распределен по показательному закону с параметром λ .

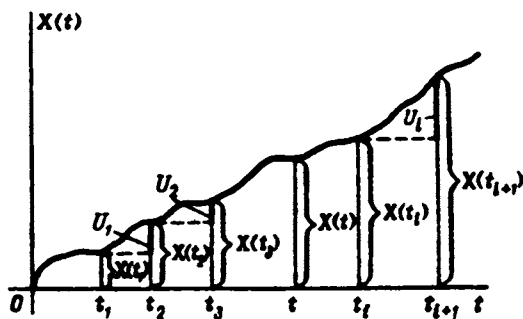


Рис. 5.1.6

Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любых значений аргументов $t_1 < t_2 < t_3 \dots t_i < t_{i+1} \dots$ случайные величины — приращения процесса $X(t)$ —

$$U_1 = X(t_2) - X(t_1), \quad U_2 = X(t_3) - X(t_2), \dots,$$

$$U_i = X(t_{i+1}) - X(t_i), \dots$$

независимы (см. рис. 5.1.6, где с. п. показан в виде непрерывной кривой).

Процесс Пуассона $X(t)$ (как однородный, так и неоднородный) является *процессом с независимыми приращениями*, так как его приращение на любом участке времени $(t, t + \tau)$ есть число событий, появившихся на этом участке, а для пуассоновского потока числа событий, попадающие на непересекающиеся участки времени, являются независимыми (см. п. 2.1).

Пример 2. В условиях предыдущего примера производство автомашин длится лишь до тех пор, пока их не будет произведено n штук, после чего завод переходит на производство других автомашин. Определить закон распределения случайного процесса $X(t)$ — числа выпущенных машин на момент времени t , если в момент времени $t=0$ начат выпуск автомашин.

Решение. В этом примере мы имеем дело с процессом чистого размножения с ограниченным числом состояний: $0 \leq X(t) \leq n$. Однако для отыскания одномерного закона распределения такого процесса опять

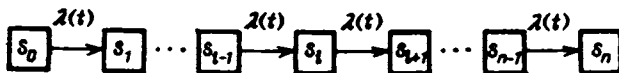


Рис. 5.1.7

нет необходимости решать систему уравнений Колмогорова, соответствующую размеченному графу, изображенному на рис. 5.1.7.

Действительно, так как до состояния s_{n-1} графы на рис. 5.1.7 и 5.1.5 совпадают, то должны совпадать и соответствующие вероятности:

$$P\{X(t) = i\} = p_i(t) = \frac{[a(t)]^i}{i!} e^{-a(t)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (5.1.13)$$

где

$$a(t) = \int_0^t \lambda(t) dt. \quad (5.1.14)$$

Но для любого момента времени t должно выполняться нормированное условие

$$\sum_{i=0}^n p_i(t) = 1. \quad (5.1.15)$$

Следовательно,

$$p_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i(t) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[a(t)]^i}{i!} e^{-a(t)}. \quad (5.1.16)$$

Числовые характеристики случайного процесса $X(t)$ определяются по формулам

$$M[X(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} i p_i(t) + n p_n(t), \quad (5.1.17)$$

$$M[X^2(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 p_i(t) + n^2 p_n(t), \quad (5.1.18)$$

$$D[X(t)] = M[X^2(t)] - (M[X(t)])^2. \quad (5.1.19)$$

Очевидно, что при неограниченном увеличении времени t

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M[X(t)] = n, \quad (5.1.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D[X(t)] = 0. \quad (5.1.21)$$

Если интенсивность производства автомашин постоянная $\lambda(t) = \lambda$, то формулы для одномерного закона распределения несколько упрощаются:

$$P\{X(t) = i\} = p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (5.1.22)$$

$$P\{X(t) = n\} = p_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}. \quad (5.1.23)$$

Отсюда (см. (5.2.7)*, (5.2.9)*)

$$M[X(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} i P(i, \lambda t) + n[1 - R(n-1, \lambda t)],$$

$$\begin{aligned} M[X^2(t)] &= \sum_{i=0}^{n-1} i^2 P(i, \lambda t) + n^2[1 - R(n-1, \lambda t)] = \\ &= (\lambda t)^2 R(n-3, \lambda t) + \lambda t R(n-2, \lambda t) + \\ &\quad + n^2[1 - R(n-1, \lambda t)]; \end{aligned}$$

На рис. 5.1.8 ($n > 2$) показаны графики функций $M[X(t)]$ и $\sigma[X(t)] = \sqrt{M[X^2(t)] - (M[X(t)])^2}$.

Пример 3. Рассматривается процесс эксплуатации однотипных автомашин в большом автохозяйстве. На момент времени $t=0$ в автохозяйстве имелось n таких автомашин, новых машин в автохозяйство не

поступает. Интенсивность потока списания (снятия с эксплуатации) каждой автомашины данного типа постоянная и равна μ . Это значит, что срок службы

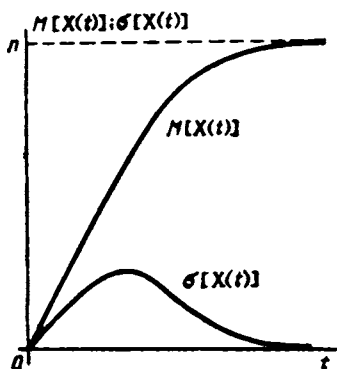


Рис. 5.1.8

каждой автомашины есть случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром μ . Рассматривается случайный процесс $X(t)$ — число однотипных автомашин, находящихся в эксплуатации. Найти одномерный закон распределения этого процесса, если автохозяйство не пополняется данным типом автомашин.

Решение. Процесс $X(t)$ есть процесс чистой гибели, размеченный граф $G(S)$ состояний которого

представлен на рис. 5.1.9. На этом графе $\mu_i = i\mu$, так как в состоянии s_i в эксплуатации находится i автомашин, а каждая машина порождает поток списаний с интенсивностью μ , следовательно, суммарный поток,

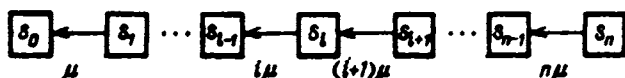


Рис. 5.1.9

переводящий систему из состояния s_i в состояние s_{i-1} , будет равен $\sum_{k=1}^i \mu = i\mu$ ($i = n, n-1, \dots, 1$). Система уравнений Колмогорова для процесса $X(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} dp_0(t)/dt &= +\mu p_1(t), \\ dp_i(t)/dt &= (i+1)\mu p_{i+1}(t) - i\mu p_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ dp_n(t)/dt &= -n\mu p_n(t). \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

Эту систему уравнений нужно решать при начальных условиях

$$p_n(0) = 1, \quad p_i(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (5.1.25)$$

Решение системы уравнений будем искать с помощью преобразований Лапласа (см. п. 4.2):

$$\begin{aligned} x\pi_0(x) &= \mu\pi_1(x), \\ x\pi_i(x) &= (i+1)\mu\pi_{i+1}(x) - i\mu\pi_i(x) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, n-1), \\ x\pi_n(x) &= -n\mu\pi_n(x) + 1. \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

Из последнего уравнения получаем

$$\pi_n(x) = 1/(x + n\mu).$$

Следовательно (см. (4.2.8) и (4.2.9)),

$$p_n(t) = e^{-n\mu t}, \quad (5.1.27)$$

Это также следует из того, что закон распределения времени пребывания в состоянии s_n является показательным с параметром λ_n . Убеждаемся в том, что $p_n(0) = 1$. Далее, из уравнения $x\lambda_{n-1}(x) = \lambda_n p_n(x) - (n-1)\lambda_{n-1}(x)$ находим

$$\pi_{n-1}(x) = n\mu\pi_n(x)/(x + (n-1)\mu) = \\ = n\mu/[(x + n\mu)(x + (n-1)\mu)].$$

Следовательно (см. (4.2.8) и (4.2.9)),

$$p_{n-1}(t) = n [e^{-(n-1)\mu t} - e^{-n\mu t}].$$

Нетрудно установить, что

$$\pi_{n-i}(x) = \frac{(n-i+1)(n-i+2) \dots (n-1) n \mu^i}{(x+n\mu)(x+(n-1)\mu) \dots (x+(n-i)\mu)} =$$

$$= \frac{\mu^i \prod_{l=0}^{i-1} (n-l)}{\prod_{l=0}^i (x+(n-l)\mu)} = \frac{\mu^i n!}{(n-i)!} \cdot \frac{1}{\prod_{l=0}^i (x+(n-l)\mu)}$$

$$(i=0, 1, \dots, n-1). \quad (5.1.28)$$

Изображение $\lambda_{n-1}(x)$ представляет собой выражение, подобное (4.2.8), следовательно, решение будем искать в виде (4.2.9).

Обозначим

$$r_l(x) = \prod_{j=0}^l (x + (n-l)\mu)$$

полином степени i , который имеет $(i+1)$ различных корней:

$$\alpha_0 = -n\mu, \quad \alpha_1 = -(n-1)\mu, \dots$$

$$\dots, \alpha_k = -(n-k)\mu, \dots, \alpha_i = -(n-i)\mu.$$

Найдем производную этого полинома

$$dr_i(x)/dx = \sum_{l=0}^i r_l(x)/(x + (n-l)\mu)$$

и ее значение при $x = \alpha_k = -(n-k)\mu$ ($k=0, 1, \dots, i$):

$$\begin{aligned} \frac{dr_i(x)}{dx} \Big|_{x=-(n-k)\mu} &= \sum_{l=0}^i \frac{r_l(-(n-k)\mu)}{-(n-k)\mu + (n-l)\mu} = \\ &= \sum_{l=0}^i \frac{\prod_{h=0}^l [-(n-k)\mu + (n-h)\mu]}{\mu(k-l)} = \sum_{l=0}^i \frac{\mu^{l+1} \prod_{h=0}^l (k-h)}{\mu(k-l)} = \\ &= \mu^i \sum_{l=0}^i \frac{\prod_{h=0}^l (k-h)}{k-l} \quad (k=0, 1, 2, \dots, i). \end{aligned}$$

Следовательно (см. (4.2.10)),

$$\begin{aligned} p_{n-i}(t) &= \frac{\mu^i n!}{(n-i)!} \frac{1}{\mu^i} \sum_{k=0}^i \frac{e^{-(n-k)\mu t}}{\sum_{l=0}^i \prod_{h=0}^l (k-h)/(k-l)} = \\ &= \frac{n!}{(n-i)!} \sum_{k=0}^i e^{-\mu(n-k)t} / \left[\sum_{l=0}^i \prod_{h=0}^l (k-h)/(k-l) \right] \\ &\quad (i=0, 1, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

Так, при $i=2$ получим

$$\begin{aligned} p_{n-2}(t) &= \frac{n!}{(n-2)!} \sum_{k=0}^2 e^{-\mu(n-k)t} / \left[\sum_{l=0}^2 \prod_{h=0}^l (k-h)/(k-l) \right] = \\ &= n(n-1) \left[\frac{e^{-n\mu t}}{2} + \frac{e^{-(n-1)\mu t}}{-1} + \frac{e^{-(n-2)\mu t}}{2} \right]. \end{aligned}$$

¹⁾ Полагая $\prod_{h=0}^l (k-h)/(k-l) = \prod_{h=0}^{l-1} (k-h) \prod_{m=l+1}^l (k-m)$.

Эту систему необходимо решать при начальных условиях, рассмотренных выше. В любом случае

$$\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1.$$

Отыскание решения системы (5.1.34) и тем паче (5.1.33) в общем виде и при произвольной функции $\lambda(t)$ представляет значительные трудности и не имеет практических приложений. Дело в том, что при решении различных инженерных задач нужно знать характеристики процесса $X(t)$: $M[X(t)]$, $D[X(t)]$, а одномерный закон распределения $p_i(t) = P\{X(t) = i\}$ является промежуточным звеном в таком исследовании. Ниже, в этой же главе, будет указан способ составления уравнений непосредственно для характеристик процесса гибели и размножения $X(t)$ (без привлечения одномерного закона распределения $p_i(t)$). ►

Продолжим исследования процессов гибели и размножения. При постоянных интенсивностях потоков гибели и размножения и конечном числе состояний $n + 1$ будет существовать стационарный режим. Это вытекает из того, что множество W всех состояний процесса гибели и размножения является эргодическим: все его состояния и все подмножества состояний являются транзитивными (см. п. 3.1). Следовательно,

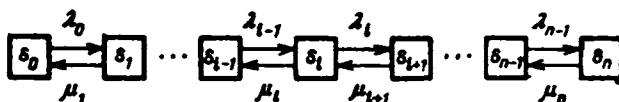


Рис. 5.1.12

система S с конечным числом состояний $n + 1$, в которой протекает процесс гибели и размножения с постоянными интенсивностями потоков гибели и размножения, является простейшей эргодической системой (см. п. 4.2).

Для простейшей эргодической системы гибели и размножения с конечным числом состояний размеченный граф состояний показан на рис. 5.1.12.

Предельные вероятности состояний для простейшего эргодического процесса гибели и размножения, находящегося в стационарном режиме, могут быть получены из системы уравнений (5.1.5), в которой

нужно все интенсивности потоков взять постоянными, а все производные вероятностей состояний положить равными нулю:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0, \\ 0 &= \lambda_{i-1} p_{i-1} + \mu_{i+1} p_{i+1} - (\lambda_i + \mu_i) p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ 0 &= \lambda_{n-1} p_{n-1} - \mu_n p_n. \end{aligned} \quad (5.1.35)$$

Найдем решение этой системы однородных алгебраических уравнений. Из первого уравнения получим:

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1.$$

Из второго уравнения имеем:

$$\mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1 - \lambda_0 p_0,$$

но $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$, следовательно,

$$\mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1 - \mu_1 p_1 = \lambda_1 p_1.$$

Далее

$$\mu_3 p_3 = (\lambda_2 + \mu_2) p_2 - \lambda_1 p_1,$$

но $\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2$, откуда

$$\mu_3 p_3 = (\lambda_2 + \mu_2) p_2 - \mu_2 p_2 = \lambda_2 p_2$$

и т. д. Проводя такую рекуррентную процедуру, можно доказать, что

$$\mu_i p_i = \lambda_{i-1} p_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.1.36)$$

Подставляя равенство (5.1.36) в любое уравнение системы (5.1.35), можно убедиться в его справедливости.

Равенство (5.1.36) можно сформулировать в виде правила: *для простейшей схемы гибели и размножения, находящейся в стационарном режиме, потоки вероятности между любыми двумя соседними состояниями равны.* Советуем запомнить это правило, им мы будем пользоваться в дальнейшем.

Из равенства (5.1.36) получаем

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} p_{i-1} = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \cdot \frac{\lambda_{i-2}}{\mu_{i-1}} \dots \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \\ &= p_0 \prod_{k=1}^i \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.1.37)$$

Таким образом, любую предельную вероятность p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) можно выразить через предельную вероятность p_0 . Вероятность p_0 можно найти из нормировочного условия

$$\sum_{i=0}^n p_i = p_0 + p_0 \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^i \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = 1,$$

откуда

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^i \lambda_{k-1}/\mu_k}. \quad (5.1.38)$$

Формулы (5.1.36) и (5.1.38) дают возможность вычислить предельные вероятности состояний простейшего процесса гибели и размножения, находящегося в стационарном режиме при конечном числе состояний.

В инженерных приложениях иногда приходится сталкиваться с простейшими схемами гибели и размножения, у которых практически нет ограничений на число состояний $n + 1$. Например, рассматривая процесс ввода в эксплуатацию, саму эксплуатацию и закрытие буровых скважин по добыче нефти, которых насчитывается в СССР несколько сотен тысяч, как процесс гибели и размножения, можно практически считать, что число состояний такого процесса ничем не ограничено ($n \rightarrow \infty$).

В этом случае (при $n \rightarrow \infty$) нужно более детально рассмотреть условие существования стационарного режима. Из равенства (5.1.38) следует, что стационарный режим будет существовать, если сумма, стоящая в правой части формулы (5.1.38), при $n \rightarrow \infty$ сходится к некоторому конечному числу. Можно доказать, что

для существования стационарного режима процесса гибели и размножения при $n \rightarrow \infty$ достаточно сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^i \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}. \quad (5.1.39)$$

При этом ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^i \frac{\mu_k}{\lambda_{k-1}}$$

должен расходиться. Очевидно, что условие (5.1.39) будет выполняться, если начиная с некоторого i будет справедливо неравенство

$$\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \leq \kappa < 1. \quad (5.1.40)$$

Этому неравенству можно дать простое и наглядное инженерное толкование: начиная с некоторого состояния s_i и для всех последующих состояний интенсивность потока размножения должна быть меньше интенсивности потока гибели.

Пример 5. В условиях предыдущего примера найти предельные вероятности состояний системы для стационарного режима (если он существует), если интенсивность поступления автомашин в автохозяйстве постоянная $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$.

Решение. 1) Если нет ограничений на число автомашин в автохозяйстве, то условие (5.1.40) будет иметь вид

$$\frac{\lambda}{i\mu} \leq \kappa < 1,$$

так как в рассматриваемом примере $\lambda_i = \lambda$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), $\mu_i = i\mu$. Очевидно, что при любых положительных (конечных) значениях интенсивностей λ и μ найдется такое значение i , при котором неравенство (5.1.40) выполняется. Это неравенство будет выполняться и для всех последующих состояний

s_i ($j > i$). Найдем предел

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^i \frac{\lambda}{k\mu} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \prod_{k=1}^i \frac{1}{k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} e^{+\frac{\lambda}{\mu}} = \\ &= e^{\frac{\lambda}{\mu}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} - e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \right) = e^{\frac{\lambda}{\mu}} - 1, \end{aligned}$$

так как $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = 1$ как сумма всех вероятностей распределения Пуассона с параметром λ/μ . Следовательно (см. (5.1.38)),

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^i \frac{\lambda}{k\mu}} = \frac{1}{1 + e^{\lambda/\mu} - 1} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}. \quad (5.1.41)$$

Обозначим

$$\lambda/\mu = \alpha. \quad (5.1.42)$$

Из формул (5.1.37), (5.1.41), (5.1.42) получаем, что

$$p_i = p_0 \prod_{k=1}^i \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = p_0 \prod_{k=1}^i \frac{\lambda}{k\mu} = p_0 \frac{\alpha^i}{i!} = \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha} = P(i, \alpha), \quad (5.1.43)$$

где $P(i, \alpha) = \alpha^i e^{-\alpha} / i!$ ($i = 0, 1, \dots$) — распределение Пуассона.

Таким образом, мы получили интересный результат: число автомашин, находящихся в эксплуатации в стационарном режиме (при отсутствии ограничений на общее их число), распределено по закону Пуассона с параметром α , равным отношению интенсивности потока поступления автомашин в автохозяйство λ к интенсивности потока списаний каждой автомашины μ . Этот вывод естественно может быть

распространен на эксплуатацию любых однотипных технических устройств (ЭВМ, самолетов, станков, нефтедобывающих скважин, машин, танков, ракет, кораблей и т. д.).

Из того что число эксплуатируемых машин распределено по закону Пуассона, следует, что м. о. числа эксплуатируемых автомашин равно его дисперсии:

$$M[X(t)] = D[X(t)] = \alpha = \frac{\lambda}{\mu}.$$

2) Если в автохозяйстве может быть не более n автомашин данного типа, то (см. (5.1.38)):

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^i \lambda_{k-1}/\mu_k} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \alpha^i/i!} = \frac{e^{-\alpha}}{\sum_{i=0}^n \alpha^i e^{-\alpha}/i!} = \\ &= P(0, \alpha)/R(n, \alpha), \end{aligned}$$

где $P(k, \alpha) = \alpha^k e^{-\alpha}/k!$ ($k = 0, 1, \dots$) — распределение Пуассона,

$$R(n, \alpha) = \sum_{k=0}^n P(k, \alpha).$$

Следовательно (см. (5.1.37)),

$$\begin{aligned} p_i &= p_0 \prod_{k=1}^i \lambda/\mu_k = p_0 \prod_{k=1}^i \lambda/(k\mu) = p_0 \frac{\alpha^i}{i!} = \\ &= \frac{\alpha^i e^{-\alpha}}{i!} \cdot \frac{1}{R(n, \alpha)} = P(i/\alpha)/R(n, \alpha) \\ &\quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.1.44)$$

Назовем распределение предельных вероятностей (5.1.44) *усеченным законом Пуассона*; этот закон зависит от двух параметров α и n . Таким образом, число автомашин, находящихся в эксплуатации в стационарном режиме при условии, что их общее число не может быть больше n , распределено по усеченному закону Пуассона с параметрами α и n , где параметр α равен отношению интенсивности потока поступлений автомашин в автохозяйство λ к интенсивности потока списания каждой автомашины μ .

Найдем м. о. числа эксплуатируемых автомашин в стационарном режиме:

$$\begin{aligned}
 M[X(t)] &= \sum_{i=0}^n i p_i = \frac{\sum_{i=1}^n i P(i, \alpha)}{R(n, \alpha)} = \\
 &= \frac{1}{R(n, \alpha)} \sum_{i=1}^n i \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha} = \frac{1}{R(n, \alpha)} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^i}{(i-1)!} e^{-\alpha} = \\
 &= \frac{\alpha}{R(n, \alpha)} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\alpha} = \frac{\alpha R(n-1, \alpha)}{R(n, \alpha)}. \quad (5.1.45)
 \end{aligned}$$

Из формулы (5.1.45), в частности, следует

$$\sum_{i=0}^n i P(i, \alpha) = \sum_{i=1}^n i P(i, \alpha) = \alpha R(n-1, \alpha) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.1.46)$$

Эта формула пригодится при исследовании систем массового обслуживания.

Для вычисления дисперсии числа эксплуатируемых машин найдем второй начальный момент:

$$\begin{aligned}
 M[X^2(t)] &= \sum_{i=0}^n i^2 p_i = \frac{1}{R(n, \alpha)} \sum_{i=0}^n i^2 \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha} = \\
 &= \frac{1}{R(n, \alpha)} \sum_{i=1}^n i^2 \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha} = \frac{1}{R(n, \alpha)} \sum_{i=1}^n i \frac{\alpha^i}{(i-1)!} e^{-\alpha} = \\
 &= \frac{1}{R(n, \alpha)} \sum_{i=1}^n (i-1+1) \frac{\alpha^i}{(i-1)!} e^{-\alpha} = \\
 &= \frac{1}{R(n, \alpha)} \left[\sum_{i=1}^n (i-1) \frac{\alpha^i}{(i-1)!} e^{-\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^i}{(i-1)!} e^{-\alpha} \right] = \\
 &= \frac{1}{R(n, \alpha)} \left[\sum_{i=2}^n (i-1) \frac{\alpha^i e^{-\alpha}}{(i-1)!} + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha} \right] = \\
 &= \frac{1}{R(n, \alpha)} \left[\alpha^2 \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha} + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha} \right] = \\
 &= \alpha \frac{R(n-1, \alpha)}{R(n, \alpha)} + \alpha^2 \frac{R(n-2, \alpha)}{R(n, \alpha)} \quad (n > 1), \quad (5.1.47)
 \end{aligned}$$

откуда

$$D[X(t)] = M[X^2(t)] - (M[X(t)])^2 = \frac{\alpha R(n-1, \alpha)}{R(n, \alpha)} + \\ + \alpha^2 \left[\frac{R(n-2, \alpha)}{R(n, \alpha)} - \left(\frac{R(n-1, \alpha)}{R(n, \alpha)} \right)^2 \right] \quad (n > 1). \quad (5.1.48)$$

Легко видеть, что при $n \rightarrow \infty$ $M[X(t)] = D[X(t)] = \alpha$, так как $\lim_{k \rightarrow \infty} R(k, \alpha) = 1$.

Формулы (5.1.44) называют *формулами Эрланга*; в теории массового обслуживания их обычно записывают в виде

$$p_i = \frac{\alpha^i}{i!} \left/ \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \right. \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (5.1.49)$$

Они были получены шведским ученым Эрлангом при исследовании n канальной системы массового обслуживания с отказами, с интенсивностью потока поступления заявок на обслуживание λ и интенсивностью потока обслуживания каждой заявки μ . Вероятность p_i равна вероятности того, что в системе будет ровно i заявок в стационарном режиме. Подробный анализ различных систем массового обслуживания будет проведен в следующей книге авторов. ►

Рассмотрим более подробно процесс гибели и размножения, когда ряд (5.1.39) расходится и неравенство (5.1.40) не выполняется ни для какого i . В этом случае стационарного режима не существует. Более того, при возрастании t

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

т. е. система будет все время «двигаться в среднем вправо», в сторону большего номера состояния, а с. п. $X(t)$ будет иметь тенденцию все время в среднем возрастать, его м. о. будет все время увеличиваться.

Если рассматриваются процессы чистого размножения, то нормировочное условие

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) = 1$$

будет выполняться только в случае когда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$$

расходится.

Если же ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$$

сходится, то

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) < 1,$$

откуда

$$p(t) = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) > 0.$$

Последнее неравенство означает, что за конечное время t имеется вероятность $p(t)$ того, что значение процесса чистого размножения $X(t)$ будет больше сколь угодно большого значения n . Такие процессы имеют место при рассмотрении явлений типа «взрыва» и находят широкое применение при ядерных исследованиях.

Пример 6. Рассматривается процесс чистого размножения, у которого интенсивность $\lambda_i = a^i \lambda$, где a — безразмерная величина. Определить условия, при которых будет наблюдаться явление «взрыва».

Решение. Исследуем ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^i \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^i}.$$

Очевидно, что при $a > 1$ ряд $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{a^i}$ сходится (бесконечная геометрическая прогрессия) и, следовательно, будет наблюдаться явление «взрыва». ►

5.2. Закон распределения и числовые характеристики времени нахождения процесса гибели и размножения в произвольном подмножестве состояний

В главе 4 (п. 4.3 и 4.4) были рассмотрены общие приемы определения закона распределения и числовых характеристик времени T_U нахождения марковского случайного процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем в произвольном подмножестве состояний U , которые могут быть применены и для марковских процессов гибели и размножения. Однако особенности графа процессов гибели и размножения во многом упрощают нахождение законов распределения и числовых характеристик с. в. T_U .

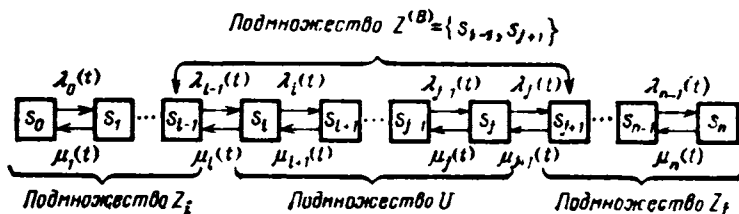


Рис. 5.2.1

Как правило, в различных инженерных приложениях рассматривается подмножество U соседних состояний (рис. 5.2.1):

$$U = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\} \quad (i \leq j; i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (5.2.1)$$

Когда $i = j$, то подмножество содержит одно состояние s_i : $U = \{s_i\}$.

Обозначим $T_{i,j}$ время однократного пребывания процесса гибели и размножения в подмножестве $U = \{s_i, \dots, s_j\}$. Для нахождения закона распределения времени $T_{i,j}$ составим преобразованный размеченный граф состояния $\tilde{G}(\tilde{S})$, показанный на рис. 5.2.2. На этом графе состояния $\tilde{s}_{i-1}$ и $\tilde{s}_{j+1}$ являются концевыми (поглощающими), так как эти состояния образуют входное подмножество $Z^{(B)}$ (см. рис. 5.2.1):

$$Z^{(B)} = \{s_{i-1}, s_{j+1}\}. \quad (5.2.2)$$

В свою очередь, входное подмножество $Z^{(B)}$ принадлежит подмножеству Z , являющемуся дополнением к подмножеству U (см. рис. 5.2.1):

$$U + Z = W, \quad U \cap Z = \emptyset, \quad Z = Z_i + Z_j = \\ = \{s_0, \dots, s_{i-1}, s_{j+1}, \dots, s_n\}. \quad (5.2.3)$$

Согласно правилу нахождения закона распределения случайной величины $T_{i,j}$, изложенному в п. 4.3, нужно составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний для системы с графом, изображенным на рис. 5.2.2, и решить их при

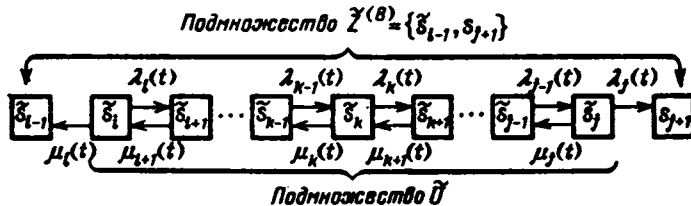


Рис. 5.2.2

начальных условиях $\bar{p}_k(0)$, удовлетворяющих ограничениям

$$\sum_{k=i}^j \bar{p}_k(0) = 1, \quad \bar{p}_k(0) \geq 0. \quad (5.2.4)$$

Эти начальные условия соответствуют тому, что при $t=0$ система S находилась в одном из состояний подмножества $U = \{s_i, \dots, s_j\}$.

Система дифференциальных уравнений для нахождения закона распределения времени $T_{k,j}$ имеет вид (см. граф на рис. 5.2.2)

$$\begin{aligned} d\bar{p}_{i-1}(t)/dt &= \mu_i(t) \bar{p}_i(t), \\ d\bar{p}_i(t)/dt &= \mu_{i+1} \bar{p}_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_i(t)) \bar{p}_i(t), \\ &\dots \dots \dots \\ d\bar{p}_k(t)/dt &= \mu_{k+1} \bar{p}_{k+1}(t) + \lambda_{k-1}(t) \bar{p}_{k-1}(t) - \\ &\quad - (\lambda_k(t) + \mu_k(t)) \bar{p}_k(t) \quad (k=i+1, \dots, j-1), \\ &\dots \dots \dots \\ d\bar{p}_j(t)/dt &= \lambda_{j-1} \bar{p}_{j-1}(t) - (\lambda_j(t) + \mu_j(t)) \bar{p}_j(t), \\ d\bar{p}_{j+1}(t)/dt &= \lambda_j(t) \bar{p}_j(t). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Функция распределения $F_{i,j}(t) = P\{T_{i,j} < t\}$ равна вероятности того, что к моменту времени t система $\tilde{S}$ уйдет из подмножества состояний O (рис. 5.2.2) и окажется в подмножестве состояний $Z^{(B)} = \{\tilde{s}_{i-1}, \tilde{s}_{j+1}\}$, т. е. либо в состоянии $\tilde{s}_{i-1}$, либо в $\tilde{s}_{j+1}$. Следовательно,

$$F_{i,j}(t) = \tilde{p}_{i-1}(t) + \tilde{p}_{j+1}(t) \quad (t > 0), \quad (5.2.6)$$

где вероятности состояний $\tilde{p}_{i-1}(t)$ и $\tilde{p}_{j+1}(t)$ вычисляются в результате решения системы уравнений (5.2.5) при начальных условиях (5.2.4), откуда (см. (5.2.6) и (5.2.5)) п. р. случайной величины $T_{i,j}$ будет:

$$\begin{aligned} f_{i,j}(t) &= \frac{d}{dt} F_{i,j}(t) = \frac{d\tilde{p}_{i-1}(t)}{dt} + \frac{d\tilde{p}_{j+1}(t)}{dt} = \\ &= \mu_i(t) \tilde{p}_i(t) + \lambda_j(t) \tilde{p}_j(t). \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Таким образом, для отыскания закона распределения с. в. $T_{i,j}$ — времени пребывания процесса гибели и размножения в произвольном подмножестве $U = \{s_i, \dots, s_j\}$ — нужно:

1) Определить подмножество состояний $Z^{(B)}$, в которое система S может непосредственно попасть из подмножества U :

$$Z^{(B)} = \{s_{i-1}, s_{j+1}\} \quad (i \geq 1, j \leq n-1). \quad (5.2.8)$$

2) Преобразовать систему S так, чтобы все состояния подмножества $Z^{(B)}$ были поглощающими (см. рис. 5.2.1):

$$\lambda_{i-1}(t) = \mu_{i-1}(t) = \lambda_{j+1}(t) = \mu_{j+1}(t) = 0. \quad (5.2.9)$$

3) Для таким образом преобразованной системы $\tilde{S}$, состоящей из подмножеств $\tilde{U}$ и $\tilde{Z}^{(B)}$ (рис. 5.2.2), составить размеченный граф состояний $\tilde{G}(\tilde{S})$ и записать систему дифференциальных уравнений, которую нужно решать при начальных условиях (5.2.4).

4) Решив эту систему уравнений, найти плотность распределения с. в. $T_{i,j}$ по формуле (5.2.7).

Рассмотрим частный случай, когда одно из состояний s_i или s_j является граничным ($s_i = s_0$ или $s_j = s_n$). Для случая, когда $s_i = s_0$, размеченный граф состояний системы $\tilde{S}$ имеет вид, показанный на рис. 5.2.3.

В этом случае (при $s_i = s_0$) система дифференциальных уравнений для определения плотности $f_{0,j}(t)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} d\bar{p}_0(t)/dt &= \mu_1(t) \bar{p}_1(t) - \lambda_0(t) \bar{p}_0(t) \\ d\bar{p}_k(t)/dt &= \lambda_{k-1}(t) \bar{p}_{k-1}(t) + \mu_{k+1}(t) \bar{p}_{k+1}(t) - \\ &\quad - (\lambda_k(t) + \mu_k(t)) \bar{p}_k(t) \quad (k=1, 2, \dots, j-1), \\ d\bar{p}_j(t)/dt &= \lambda_{j-1}(t) \bar{p}_{j-1}(t) - (\lambda_j(t) + \mu_j(t)) \bar{p}_j(t), \\ d\bar{p}_{j+1}(t)/dt &= \lambda_j(t) \bar{p}_j(t). \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Решив систему (5.2.10) при начальных условиях

$$\bar{p}_k(0) \geq 0 \quad (k=0, 1, \dots, j), \quad \sum_{k=0}^j \bar{p}_k(0) = 1, \quad (5.2.11)$$

найдем плотность распределения с. в. $T_{0,j}$ по формуле

$$f_{0,j}(t) = \lambda_j(t) \bar{p}_j(t) \quad (t > 0). \quad (5.2.12)$$

Аналогично определяется и плотность распределения с. в. $T_{i,n}$, когда $s_j = s_n$. В этом случае граф

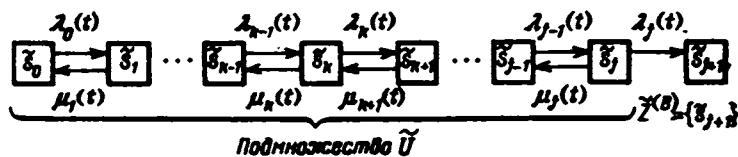


Рис. 5.2.3

преобразований системы $\tilde{S}$ показан на рис. 5.2.4. Система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} d\bar{p}_{i-1}(t)/dt &= \mu_i(t) \bar{p}_i(t), \\ d\bar{p}_i(t)/dt &= \mu_{i+1}(t) \bar{p}_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_i(t)) \bar{p}_i(t), \\ d\bar{p}_k(t)/dt &= \lambda_{k-1}(t) \bar{p}_{k-1}(t) + \mu_{k+1}(t) \bar{p}_{k+1}(t) - \\ &\quad - (\lambda_k(t) + \mu_k(t)) \bar{p}_k(t) \quad (k=i+1, \dots, n-1), \\ d\bar{p}_n(t)/dt &= \lambda_{n-1}(t) \bar{p}_{n-1}(t) - \mu_n(t) \bar{p}_n(t). \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Решив систему (5.2.13) при начальных условиях

$$\bar{p}_k(0) \geq 0 \quad (k=i, i+1, \dots, n), \quad \sum_{k=i}^n \bar{p}_k(0) = 1, \quad (5.2.14)$$

найдем плотность распределения с. в. $T_{i, n}$ по формуле

$$f_{i, n}(t) = \mu_i(t) \bar{p}_i(t) \quad (t > 0). \quad (5.2.15)$$

Зная плотность распределения с. в. $T_{i, 1}$, можно найти ее числовые характеристики: м. о.

$$\begin{aligned} M[T_{i, 1}] &= \int_0^{\infty} t f_{i, 1}(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} t \lambda_i(t) \bar{p}_i(t) dt + \int_0^{\infty} t \mu_i(t) \bar{p}_i(t) dt, \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

второй начальный момент

$$\begin{aligned} M[T_{i, 1}^2] &= \int_0^{\infty} t^2 f_{i, 1}(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} t^2 \lambda_i(t) \bar{p}_i(t) dt + \int_0^{\infty} t^2 \mu_i(t) \bar{p}_i(t) dt \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

и дисперсию

$$D[T_{i, 1}] = M[T_{i, 1}^2] - (M[T_{i, 1}])^2. \quad (5.2.18)$$

Пример 1. В вычислительном центре (ВЦ) имеется три однотипных ЭВМ. На каждую ЭВМ действует пуассоновский поток отказов с интенсивностью

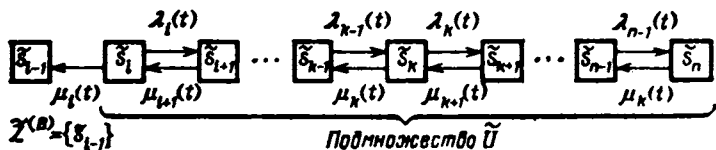


Рис. 5.2.4

$\lambda(t)$ и пуассоновский поток ремонта (восстановления) ЭВМ с интенсивностью $\mu(t)$. Найти выражение для п. р. $f_{1, 2}(t)$ с. в. $T_{1, 2}$ — времени, в течение которого в ВЦ будет работать одна или две ЭВМ, если в начальный момент времени $t=0$ работала одна ЭВМ, все ЭВМ работают независимо.

Решение. Состояния ВЦ следующие:

s_0 — не работает ни одна ЭВМ (все три ЭВМ восстанавливаются),

s_1 — работает одна ЭВМ, две восстанавливаются,

s_2 — работают две ЭВМ, одна ЭВМ восстанавливается,

s_3 — работают все три ЭВМ.

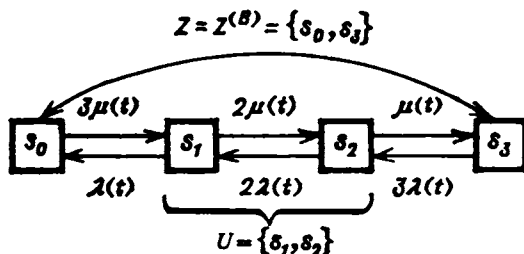


Рис. 5.2.5

Граф состояний ВЦ имеет вид, показанный на рис. 5.2.5. Подмножество $U = \{s_1, s_2\}$, подмножество $Z^{(B)} = \{s_0, s_3\}$. Преобразованный граф $\tilde{G}(\tilde{S})$ показан на рис. 5.2.6.

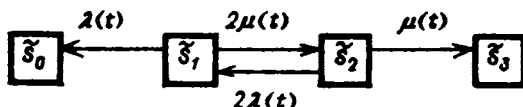


Рис. 5.2.6

Система дифференциальных уравнений, соответствующая графу $\tilde{G}(\tilde{S})$:

$$\begin{aligned} d\tilde{p}_0(t)/dt &= \lambda(t) \tilde{p}_1(t), \\ d\tilde{p}_1(t)/dt &= 2\lambda(t) \tilde{p}_2(t) - (\lambda(t) + 2\mu(t)) \tilde{p}_1(t), \\ d\tilde{p}_2(t)/dt &= 2\mu(t) \tilde{p}_1(t) - (2\lambda(t) + \mu(t)) \tilde{p}_2(t), \\ d\tilde{p}_3(t)/dt &= \mu(t) \tilde{p}_2(t). \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Эту систему нужно решать при начальных условиях

$$\tilde{p}_0(0) = 1, \quad \tilde{p}_i(0) = 0 \quad (i = 0, 2, 3).$$

При переменных интенсивностях $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ решать систему (5.2.19) можно любым численным методом

на ЭВМ. Для иллюстрации рассмотрим случай, когда $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, $\mu(t) = \mu = \text{const}$. Система уравнений для изображений по Лапласу вероятностей состояний будет:

$$\begin{aligned} x\bar{\pi}_0(x) &= \lambda\bar{\pi}_1(x), \\ x\bar{\pi}_1(x) &= 2\lambda\bar{\pi}_2(x) - (\lambda + 2\mu)\bar{\pi}_1(x) + 1, \\ x\bar{\pi}_2(x) &= 2\mu\bar{\pi}_1(x) - (2\lambda + \mu)\bar{\pi}_2(x), \\ x\bar{\pi}_3(x) &= \mu\bar{\pi}_2(x). \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Решая эту систему, получим

$$\bar{\pi}_1(x) = \frac{x + 2\lambda + \mu}{x^2 + C_1x + C_0}, \quad (5.2.21)$$

где

$$C_1 = 3\lambda + 3\mu, \quad C_0 = 2\lambda^2 + \lambda\mu + 2\mu^2. \quad (5.2.22)$$

Корнями уравнения $p(x) = x^2 + C_1x + C_0 = 0$ будут

$$\alpha_{1,2} = \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_0}}{2}. \quad (5.2.23)$$

Оба эти корня действительные, отрицательные и различные, следовательно,

$$\bar{\pi}_1(x) = \frac{x - \alpha_2}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}, \quad (5.2.24)$$

где

$$\alpha_2 = -(2\lambda + \mu).$$

Применяя формулы (4.2.8)–(4.2.11), получим

$$\bar{p}_1(t) = \frac{e^{\alpha_1 t}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{e^{\alpha_2 t}(\alpha_2 - \alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad (5.2.25)$$

$$\bar{\pi}_2(x) = \frac{2\mu}{x - \alpha_2} \bar{\pi}_1(x) = \frac{2\mu}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)}, \quad (5.2.26)$$

откуда

$$\bar{p}_2(t) = 2\mu \left[\frac{e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} - \frac{e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} \right]. \quad (5.2.27)$$

По формуле (5.2.7) находим плотность распределения с. в. $T_{1,2}$:

$$\begin{aligned} f_{1,2}(t) &= \lambda \bar{p}_1(t) + \mu \bar{p}_2(t) = \\ &= \frac{\lambda}{\alpha_1 - \alpha_2} [e^{\alpha_1 t}(\alpha_1 - \alpha_2) - e^{\alpha_2 t}(\alpha_2 - \alpha_2)] + \\ &+ \frac{2\mu^2}{\alpha_1 - \alpha_2} [e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}] = q_1(-\alpha_1)e^{\alpha_1 t} + \\ &+ q_2(-\alpha_2)e^{\alpha_2 t} \quad (t > 0), \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

где

$$q_1 = \frac{\lambda(\alpha_1 - \alpha_2) + 2\mu^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)(-\alpha_1)}, \quad q_2 = \frac{\lambda(\alpha_2 - \alpha_1) + 2\mu^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2}. \quad (5.2.29)$$

Выражение (5.2.28) представляет собой вероятностную смесь (см. п. 9.8*) двух показательных законов распределения с параметрами $(-\alpha_1)$ и $(-\alpha_2)$ и с вероятностями q_1 и q_2 соответственно ($q_1 + q_2 = 1$).

Следовательно (см. п. 9.8*),

$$M[T_{1,2}] = \frac{q_1}{-\alpha_1} + \frac{q_2}{-\alpha_2}, \quad M[T_{1,2}^2] = \frac{2q_1}{\alpha_1^2} + \frac{2q_2}{\alpha_2^2}, \quad (5.2.30)$$

$$D[T_{1,2}] = M[T_{1,2}^2] - (M[T_{1,2}])^2.$$

Рассмотрим численные примеры:

а) $\lambda = \mu = 1$. В этом случае $f_{1,2}(t) = e^{-t}$ ($t > 0$), так как из каждого состояния подмножества $U = \{s_1, s_2\}$ можно перейти в одно из состояний подмножества $Z = \{s_0, s_3\}$ и при этом интенсивность потоков событий, переводящих систему из подмножества $U = \{s_1, s_2\}$ в подмножество $Z = \{s_0, s_3\}$, постоянная и равна единице (см. граф на рис. 5.2.5). Можно убедиться в том, что в этом случае

$$C_1 = 3\lambda + 3\mu = 6, \quad C_0 = 2\lambda^2 + \lambda\mu + 2\mu^2 = 5,$$

$$\alpha_1 = \frac{-6 + \sqrt{36 - 20}}{2} = -1, \quad \alpha_2 = \frac{-6 - \sqrt{36 - 20}}{2} = -5,$$

$$\alpha_3 = -2\lambda - \mu = -3, \quad q_1 = \frac{1(-1+3)+2}{(-1+5)1} = 1,$$

$$q_2 = \frac{1(-5+3)+2}{(-1+5)(-3)} = 0,$$

$$M[T_{1,2}] = \sigma[T_{1,2}] = 1.$$

б) $\lambda = 2, \mu = 1$. В этом случае

$$C_1 = 9, \quad C_0 = 12, \quad \alpha_1 = -1,628, \quad \alpha_2 = -7,372, \quad \alpha_3 = -5,$$

$$q_1 = 0,9351, \quad q_2 = 0,0649, \quad \sigma[T_{1,2}] = 0,2413,$$

$$f_{1,2}(t) = 1,522e^{-1,628t} + 0,478e^{-7,372t} \quad (t > 0),$$

$$M[T_{1,2}] = 0,6832. \blacktriangleright$$

Рассмотрим простейший процесс гибели и размножения (все интенсивности пуассоновских потоков постоянны), находящийся в стационарном режиме.

Блуждание процесса по подмножеству состояний U может начаться только из состояний s_i или s_j (рис. 5.2.1). Следовательно, начальные условия для решения системы уравнений (5.2.5) будут удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} \bar{p}_i(0) + \bar{p}_j(0) &= 1, \\ \bar{p}_k(0) &= 0 \quad (k = i - 1, i + 1, \dots, j - 1, j + 1). \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

Для стационарного режима функционирования системы S , граф которой представлен на рис. 5.2.1, эти начальные условия определяются по формуле Бейеса (см. п. 2.6*):

$$\bar{p}_i(0) = \frac{\bar{p}_i}{\bar{p}_i + \bar{p}_j}, \quad (5.2.32)$$

где

$$\bar{p}_i = \sum_{l=0}^{i-1} p_l \quad (5.2.33)$$

— вероятность того, что система S (рис. 5.2.1) в стационарном режиме будет находиться в подмножестве состояний $Z_i = \{s_0, s_1, \dots, s_{i-1}\}$, а

$$\bar{p}_j = \sum_{k=j+1}^n p_k \quad (5.2.34)$$

представляют собой вероятности того, что система S в стационарном режиме будет находиться в подмножестве состояний $Z_l = \{s_{l+1}, \dots, s_{n-1}, s_n\}$.

В формулах (5.2.33) и (5.2.34) вероятности p_l ($l = 0, 1, \dots, i - 1$) и p_k ($k = j + 1, \dots, n$) определяются как предельные вероятности состояний системы S , граф которой изображен на рис. 5.2.1 при $\lambda_i(t) = \lambda_i$, $\mu_i(t) = \mu_i$. Решая систему уравнений (5.2.10) при начальных условиях (5.2.5) и (5.2.6), можно найти закон распределения с. в. $T_{i,j}$ — времени однократного пребывания системы S в подмножестве состояний $U = \{s_i, \dots, s_j\}$ в стационарном режиме.

Если требуется определить только математическое ожидание времени $T_{i,j}$ пребывания системы S в стационарном режиме в подмножестве состояний $U = \{s_i, \dots, s_j\}$, то можно обойтись и без решения системы дифференциальных уравнений (5.2.10).

Покажем, как это делается. Введем обозначения

$$\bar{i}_{i,j} = M[T_{i,j}], \quad \bar{i}_{0,i-1} = M[T_{0,i-1}], \quad \bar{i}_{j+1,n} = M[T_{j+1,n}]. \quad (5.2.35)$$

Тогда на основании эргодического свойства системы **S**, находящейся в стационарном режиме, можно записать равенство

$$\bar{p}_{i,j} = \frac{\bar{i}_{i,j}}{\bar{i}_{i,j} + \bar{\tau}_{i,j}}, \quad (5.2.36)$$

где

$$\bar{p}_{i,j} = \sum_{l=i}^j p_l \quad (i < j; i = 0, 1, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, n), \quad (5.2.37)$$

$\bar{\tau}_{i,j}$ — м.о. времени пребывания системы **S** вне подмножества $U = \{s_i, \dots, s_j\}$ в стационарном режиме.

Очевидно, что на основании формулы полной вероятности (см. п. 2.5*)

$$\bar{\tau}_{i,j} = p_{Z_i} \bar{i}_{0,i-1} + p_{Z_j} \bar{i}_{j+1,n}, \quad (5.2.38)$$

где p_{Z_i} — вероятность того, что система **S** в стационарном режиме, выйдя из подмножества U , попадет в подмножество Z_i (см. рис. 5.2.1); p_{Z_j} — вероятность того, что система **S** в стационарном режиме, выйдя из подмножества U , попадет в подмножество Z_j ;

$$p_{Z_i} + p_{Z_j} = 1. \quad (5.2.39)$$

На основании формулы Бейеса (см. п. 2.6*) получим

$$p_{Z_i} = \sum_{k=0}^{i-1} p_k / \left(\sum_{k=0}^{i-1} p_k + \sum_{k=j+1}^n p_k \right) \quad (i > 0, j < n). \quad (5.2.40)$$

Если $i=0$, то $p_{Z_0}=0$, $p_{Z_j}=1$ ($j < n$), если $j=n$, то $p_{Z_i}=1$, $p_{Z_n}=0$ ($i > 0$).

На основании эргодического свойства можно записать следующие равенства:

$$\frac{\bar{t}_{0, t-1}}{\bar{t}_{0, t-1} + \bar{t}_{t, n}} = \bar{p}_{0, t-1}, \quad (5.2.41)$$

$$\frac{\bar{t}_{j+1, n}}{\bar{t}_{j+1, n} + \bar{t}_{0, j}} = \bar{p}_{j+1, n}. \quad (5.2.42)$$

Из этих равенств

$$\begin{aligned} \bar{t}_{0, t-1} &= \bar{t}_{t, n} \frac{\bar{p}_{0, t-1}}{1 - \bar{p}_{0, t-1}}, \\ \bar{t}_{j+1, n} &= \bar{t}_{0, j} \frac{\bar{p}_{j+1, n}}{1 - \bar{p}_{j+1, n}}. \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

Следовательно (см. (5.2.36)),

$$\bar{t}_{t, j} = \frac{\bar{p}_{t, j}}{1 - \bar{p}_{t, j}} \bar{t}_{t, j}. \quad (5.2.44)$$

Таким образом, для отыскания $\bar{t}_{t, j} = M[T_{t, j}]$ нужно определить величины $\bar{t}_{0, t-1}$ и $\bar{t}_{j+1, n}$.

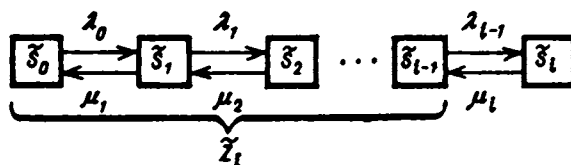


Рис. 5.2.7

Рассмотрим граф состояний подсистемы $\tilde{S}_t$, изображенный на рис. 5.2.7. Очевидно, закон распределения времени пребывания в подмножестве $\tilde{Z}_t$ системы $\tilde{S}_t$ (рис. 5.2.7) и в подмножестве Z_t системы S (рис. 5.2.1) в стационарном режиме будет одинаковым, так как для обеих систем начальные условия блуждания одинаковы: $\bar{p}_{t-1}(0) = p_{t-1}(0) = 1$, а сами подмножества Z_t и $\tilde{Z}_t$ одинаковы: $Z_t = \tilde{Z}_t = \{s_0, s_1, \dots, s_{t-1}\}$. Для графа, изображенного на рис. 5.2.7, на основании эргодического свойства имеем

$$\bar{t}_{0, t-1} / (\bar{t}_{0, t-1} + \bar{t}_{t, t}) = \bar{p}_{0, t-1}, \quad (5.2.45)$$

где

$$\bar{p}_{0, i-1} = \sum_{l=0}^{i-1} \bar{p}_l \quad (5.2.46)$$

— вероятность того, что система $\tilde{S}_i$, граф состояний которой $\tilde{G}(\tilde{S}_i)$ изображен на рис. 5.2.7, в стационарном режиме будет находиться в подмножестве состояний Z_i (рис. 5.2.7);

$$\bar{t}_{i, i} = M [T_{i, i}] = \frac{1}{\mu_i} \quad (5.2.47)$$

— математическое ожидание времени однократного нахождения системы $\tilde{S}_i$ в состоянии $\tilde{s}_i$ (для стационарного режима); мы знаем, что оно распределено по показательному закону с параметром μ_i .

Для нахождения предельных вероятностей $\bar{p}_i$ нужно решить систему алгебраических уравнений, соответствующих размеченному графу состояний, изображенному на рис. 5.2.7 (см. (5.1.37) и (5.1.38)),

$$\begin{aligned} \bar{p}_i &= \bar{p}_0 \prod_{k=1}^i \lambda_{k-1} / \mu_k \quad (i = 1, 2, \dots, i), \\ \bar{p}_0 &= \left(1 + \sum_{l=1}^i \prod_{k=1}^l \lambda_{k-1} / \mu_k \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.2.48)$$

Из формулы (5.2.45) получаем

$$\bar{t}_{0, i-1} = \bar{t}_{i, i} \bar{p}_{0, i-1} / (1 - \bar{p}_{0, i-1}) = \frac{1}{\mu_i} \bar{p}_{0, i-1} / (1 - \bar{p}_{0, i-1}). \quad (5.2.49)$$

Аналогичным образом поступаем и для отыскания величины $\bar{t}_{i+1, n}$. Вводится в рассмотрение граф подсистемы $\tilde{S}_i$, изображенный на рис. 5.2.8. Для подсистемы $\tilde{S}_i$ имеем

$$\frac{\bar{t}_{i+1, n}}{\bar{t}_{i+1, n} + \bar{t}_{i, i}} = \bar{p}_{i+1, n}, \quad (5.2.50)$$

где

$$\bar{p}_{i+1, n} = \sum_{l=i+1}^n \bar{p}_l \quad (5.2.51)$$

— вероятность того, что система $\tilde{S}_i$, граф состояний которой изображен на рис. 5.2.8, в стационарном ре-

жиме будет находиться в подмножестве $Z_l = \{\tilde{s}_{j+1}, \dots, \tilde{s}_n\}$. Вероятность $\bar{p}_l$ находим по формулам

$$\begin{aligned}\bar{p}_l &= \bar{p}_j \prod_{k=j+1}^l \lambda_{k-1}/\mu_k \quad (l = j+1, \dots, n), \\ \bar{p}_j &= \left(1 + \sum_{l=j+1}^n \sum_{k=j+1}^l \lambda_{k-1}/\mu_k\right)^{-1}\end{aligned}\quad (5.2.52)$$

откуда

$$\bar{i}_{jj} = 1/\lambda_j, \quad (5.2.53)$$

$$\bar{i}_{j+1, n} = \frac{1}{\lambda_j} \bar{p}_{j+1, n} / (1 - \bar{p}_{j+1, n}). \quad (5.2.54)$$

Если одно из состояний множества U является граничным ($s_i = s_0$ или $s_i = s_n$ (рис. 5.2.1)), то задача

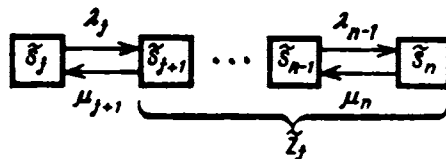


Рис. 5.2.8



Рис. 5.2.9

упрощается. При $s_i = s_0$ ($j < n$) размеченный граф состояний системы $\tilde{S}_j$ будет иметь вид, показанный на рис. 5.2.9. В этом случае имеем

$$\begin{aligned}\bar{i}_{0, j} &= \frac{1}{\mu_{j+1}} \bar{p}_{0, j} / (1 - \bar{p}_{0, j}), \\ \bar{p}_{0, j} &= \sum_{l=0}^j \bar{p}_l = 1 - \bar{p}_{j+1,}, \\ \bar{p}_{j+1} &= \bar{p}_0 \prod_{k=1}^{j+1} \lambda_{k-1}/\mu_k, \\ \bar{p}_0 &= \left(1 + \sum_{l=1}^{j+1} \prod_{k=1}^l \lambda_{k-1}/\mu_k\right)^{-1}.\end{aligned}\quad (5.2.55)$$

При $s_i = s_n$ ($i > 0$) размеченный граф состояний системы $\tilde{S}_i$ будет иметь вид, показанный на рис. 5.2.10. В этом случае получим

$$\begin{aligned}\bar{i}_{i,n} &= \frac{1}{\lambda_{i-1}} \bar{p}_{i,n} (1 - \bar{p}_{i,n}), \\ \bar{p}_{i,n} &= 1 - \bar{p}_{i-1}, \\ \bar{p}_{i-1} &= \left(1 + \sum_{l=i}^n \prod_{k=i}^l \lambda_{k-1} / \mu_k \right)^{-1}.\end{aligned}\quad (5.2.56)$$

Все сказанное в данном пункте можно распространить и на случай, когда n не ограничено, но при этом должны соблюдаться условия существования стационарного режима, изложенные в предыдущем пункте.

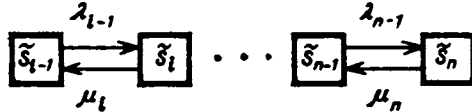


Рис. 5.2.10

Пример 2. Для условий примера 5 из п. 5.1 найти м.о. времени T_i , в течение которого для стационарного режима в автохозяйстве находится не менее i автомашин при условии, что нет практических ограничений на число автомашин.

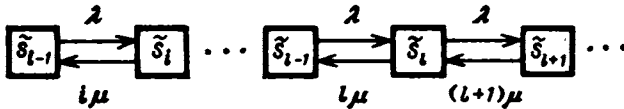


Рис. 5.2.11

Решение. Для отыскания закона распределения с.в. T_i составим граф состояний, изображенный на рис. 5.2.11. По формулам (5.2.56) находим

$$\begin{aligned}\bar{p}_{i-1} &= \left(1 + \sum_{l=i}^{\infty} \prod_{k=i}^l \lambda / k\mu \right)^{-1} = \\ &= \left(1 + \sum_{l=i}^{\infty} (\lambda/\mu)^{l-(i-1)} (i-1)!/l! \right)^{-1}.\end{aligned}$$

Введем обозначение $\lambda/\mu = \alpha$; тогда

$$\tilde{p}_{i-1} = \left(1 + \frac{1 - \sum_{l=0}^{i-1} \alpha^l e^{-\alpha}/l!}{\alpha^{i-1} e^{-\alpha}/(i-1)!} \right)^{-1} = \frac{P(i-1, \alpha)}{1 - R(i-2, \alpha)} \quad (i > 1),$$

где $P(k, \alpha) = \alpha^k e^{-\alpha}/k!$ — распределение Пуассона, $R(n, \alpha) = \sum_{k=0}^n P(k, \alpha)$. В данном случае $n = \infty$. Отсюда (см. (5.2.26)) при $\lambda_{i-1} = \lambda$ получим

$$\tilde{p}_{i, \infty} = 1 - \tilde{p}_{i-1} = 1 - \frac{P(i-1, \alpha)}{1 - R(i-2, \alpha)} = \frac{1 - R(i-1, \alpha)}{1 - R(i-2, \alpha)},$$

$$M[T_i] = \frac{1}{\lambda} \frac{1 - R(i-1, \alpha)}{R(i-1, \alpha) - R(i-2, \alpha)}. \quad \blacktriangleright$$

5.3. Метод псевдосостояний

Рассмотрим простой процесс восстановления (см. п. 2.2), когда элемент выходит из строя и мгновенно заменяется другим. Последовательные моменты выходов из строя (они же моменты восстановления) разделены случайными интервалами $T_1, T_2, \dots$, которые независимы и одинаково распределены с плотностью $f(t)$. Так, например, процесс Пуассона (или процесс чистого размножения с параметром $\lambda = \text{const}$), рассмотренный в п. 5.1, представляет собой простой процесс восстановления, где случайные величины $T_1, T_2, \dots$ независимы и распределены одинаково по показательному закону с параметром λ : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ($t > 0$).

Встает задача: можно ли с помощью марковского случайного процесса с непрерывным временем и дискретными состояниями составить модель простого процесса восстановления, у которого закон распределения времени между восстановлениями не был бы показательным. Эту задачу можно решить с помощью метода псевдосостояний. Покажем, как это делается.

Рассмотрим процесс чистого размножения с конечным числом состояний $n+1$, размеченный граф состояний которого представлен на рис. 5.3.1. Найдем для этого процесса чистого размножения закон распределения времени T_U пребывания в подмножестве

состояний $U = \{s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ (см. рис. 5.3.1) при условии, что в момент $t=0$ система S находилась в состоянии s_0 . Очевидно, что с.в. T_U представляет собой сумму времен пребывания в состояниях $s_0, s_1, \dots, s_{n-2}, s_{n-1}$:

$$T_U = \sum_{i=0}^{n-1} T_i, \quad (5.3.1)$$

где T_i — время однократного пребывания системы в состоянии s_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Мы знаем, что время однократного пребывания в транзитивном состоянии s_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) для

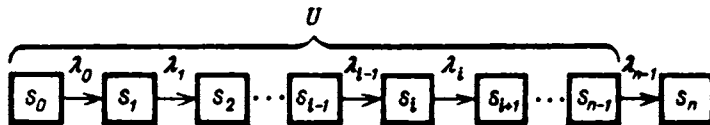


Рис. 5.3.1

однородного марковского случайного процесса распределено по показательному закону с параметром λ_i . Следовательно, случайная величина T_U будет иметь обобщенный закон распределения Эрланга n -го порядка (см. (9.5.15)*)

$$f_u(t) = (-1)^{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda_l t}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{n-1} (\lambda_l - \lambda_k)} \quad (t > 0).$$

Это распределение можно представить в виде

$$f_u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \quad (t > 0), \quad (5.3.2)$$

где

$$a_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_i}. \quad (5.3.3)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1. \quad (5.3.4)$$

Отметим, что величины a_i могут быть как положительными, так и отрицательными. В [13] показано, что

с помощью обобщенного закона Эрланга n -го порядка можно с достаточной степенью точности аппроксимировать произвольную плотность распределения неотрицательной случайной величины.

Назовем подмножество состояний U *псевдосостоянием* и рассмотрим процесс чистого размножения, состоящий из таких псевдосостояний $U_0, U_1, U_2, \dots$

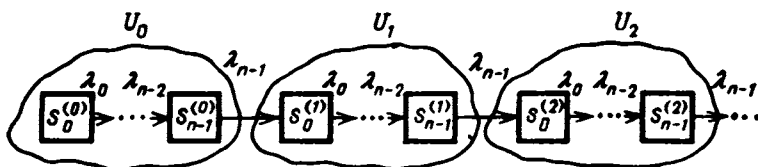


Рис. 5.3.2

(рис. 5.3.2). Процесс чистого размножения, состоящий из псевдосостояний $U_0, U_1, U_2, \dots$, не будет марковским процессом, однако его можно моделировать с помощью марковского процесса блуждания по состояниям $s_i^{(j)}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, 2, \dots$).

Таким образом, с помощью системы S , граф которой изображен на рис. 5.3.2, можно моделировать простой процесс восстановления с достаточно произвольной п.р. $f(t)$ времени между восстановлениями.

Псевдосостояние U может иметь самую различную структуру, однако структура, изображенная на рис. 5.3.1, является достаточно простой для проведения различного моделирования немарковских процессов.

Другая достаточно простая структура псевдосостояния $U = \{s_0, s_1, \dots, s_i, \dots, s_{n-1}\}$ показана на рис. 5.3.3. Очевидно, что с вероятностью

$$a_i = \frac{\lambda_{0,i}}{\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{0,k}} > 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i = 1; i = 1, 2, \dots, n-1 \right) \quad (5.3.5)$$

закон распределения случайной величины T_U будет представлять обобщенный закон Эрланга 2-го порядка

с параметрами $\lambda_{0,i}$ и $\lambda_{i,n}$. Следовательно, безусловный закон распределения случайной величины T_U будет представлять собой вероятностную смесь (см. п. 9.8*) обобщенных законов Эрланга 2-го порядка:

$$f_u(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\lambda_{0,i} \lambda_{i,n} (e^{-\lambda_{0,i} t} - e^{-\lambda_{i,n} t})}{\lambda_{i,n} - \lambda_{0,i}}. \quad (5.3.6)$$

Пример 1. Рассматривается процесс эксплуатации ЭВМ. Время безотказной работы ЭВМ распределено по обобщенному закону Эрланга 2-го порядка

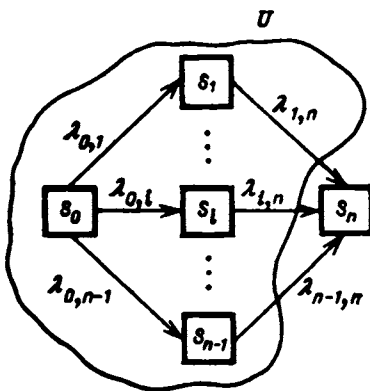


Рис. 5.3.3

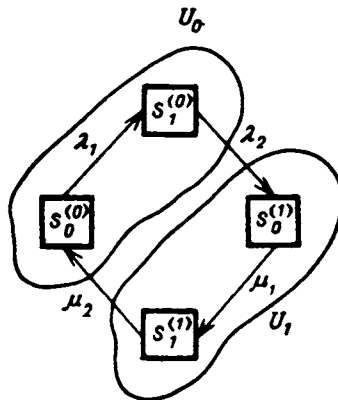


Рис. 5.3.4

с параметрами λ_1, λ_2 ; время ремонта ЭВМ распределено по обобщенному закону Эрланга 2-го порядка с параметрами μ_1, μ_2 . Определить вероятность того, что ЭВМ будет в момент времени t работать, если в момент $t=0$ она была отремонтирована и начала работать. Найти предельную вероятность того, что ЭВМ работает.

Решение. Очевидно, что ЭВМ может находиться в двух псевдосостояниях: U_0 — ЭВМ работает, U_1 — ЭВМ ремонтируется. Размеченный граф состояний, из которых состоят псевдосостояния, показан на рис. 5.3.4 ($U_0 = \{s_0^{(0)}, s_1^{(0)}\}$, $U_1 = \{s_0^{(1)}, s_1^{(1)}\}$).

Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний, входящих в псевдосостояния, будет иметь вид

$$\begin{aligned} dp_1^{(1)}(t)/dt &= \mu_1 p_0^{(1)}(t) - \mu_2 p_1^{(1)}(t), \\ dp_1^{(0)}(t)/dt &= \lambda_1 p_0^{(0)}(t) - \lambda_2 p_1^{(0)}(t), \\ dp_0^{(1)}(t)/dt &= \lambda_2 p_1^{(0)}(t) - \mu_1 p_0^{(1)}(t), \\ p_0^{(0)}(t) + p_1^{(0)}(t) + p_0^{(1)}(t) + p_1^{(1)}(t) &= 1. \end{aligned}$$

Решение будем искать с помощью преобразования Лапласа при начальном условии $p_0^{(0)}(0) = 1$, $p_1^{(0)}(0) = -p_0^{(1)}(0) = p_1^{(1)}(0) = 0$:

$$\begin{aligned} x\pi_1^{(0)}(x) &= \lambda_1 \pi_0^{(0)}(x) - \lambda_2 \pi_1^{(0)}(x), \\ x\pi_0^{(1)}(x) &= \lambda_2 \pi_1^{(0)}(x) - \mu_1 \pi_0^{(1)}(x), \\ x\pi_1^{(1)}(x) &= \mu_1 \pi_0^{(1)}(x) - \mu_2 \pi_1^{(1)}(x), \\ \pi_0^{(0)}(x) + \pi_1^{(0)}(x) + \pi_0^{(1)}(x) + \pi_1^{(1)}(x) &= 1/x. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$\pi_0^{(0)}(x) = \frac{(x + \mu_1)(x + \mu_2)(x + \lambda_2)}{xp(x)}.$$

где

$$\begin{aligned} p(x) &= (x + \mu_1)(x + \mu_2)(x + \lambda_2) + \lambda_1(x + \mu_1)(x + \mu_2) + \\ &+ \lambda_1\lambda_2(x + \mu_2) + \lambda_1\lambda_2\mu_2 = x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0. \end{aligned}$$

В зависимости от значений параметров λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 уравнение $p(x) = 0$ может иметь те или другие корни. Рассмотрим для простоты случай, когда все корни этого уравнения различные и отрицательные:

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

Тогда

$$\pi_0^{(0)}(x) = \frac{\lambda_2\mu_1\mu_2}{xp(x)} + \frac{g_0^{(0)}(x)}{p(x)},$$

где

$$\begin{aligned} g_0^{(0)}(x) &= \frac{(x + \mu_1)(x + \mu_2)(x + \lambda_2) - \lambda_2\mu_1\mu_2}{x} = \\ &= x^2 + x(\mu_1 + \mu_2 + \lambda_2) + \lambda_2\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_2, \end{aligned}$$

следовательно (см. п. 4.2),

$$\begin{aligned} p_0^{(0)}(t) &= \frac{\lambda_2 \mu_1 \mu_2}{p(0)} + \sum_{k=1}^3 \frac{e^{a_k t}}{a_k p'(a_k)} + \sum_{k=1}^3 \frac{e^{a_k t}}{p'(a_k)} g_0^{(0)}(a_k) = \\ &= \frac{\lambda_2 \mu_1 \mu_2}{p(0)} + \sum_{k=1}^3 \frac{e^{a_k t}}{a_k p'(a_k)} (1 + a_k g_0^{(0)}(a_k)). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \pi_1^{(0)} &= \frac{\lambda_1}{x + \lambda_2} \pi_0^{(0)} = \frac{\lambda_1 (x + \mu_1) (x + \mu_2)}{x p(x)} = \\ &= \frac{\lambda_1 \mu_1 \mu_2}{x p(x)} + \frac{\lambda_1 g_1^{(0)}(x)}{p(x)}. \end{aligned}$$

где

$$g_1^{(0)}(x) = \frac{(x + \mu_1)(x + \mu_2) - \mu_1 \mu_2}{x} = x + \mu_1 + \mu_2,$$

откуда

$$p_1^{(0)}(t) = \frac{\lambda_1 \mu_1 \mu_2}{p(0)} + \lambda_1 \sum_{k=1}^3 \frac{e^{a_k t}}{a_k p'(a_k)} (1 + a_k g_1^{(0)}(a_k)).$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \pi_0^{(1)}(x) &= \frac{\lambda_2}{x + \mu_1} \frac{\lambda_1}{x + \lambda_2} \pi_0^{(0)}(x) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (x + \mu_2)}{x p(x)} = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu_2}{x p(x)} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{p(x)}. \end{aligned}$$

$$p_0^{(1)}(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu_2}{p(0)} + \sum_{k=1}^3 \frac{e^{a_k t}}{a_k p'(a_k)} + \lambda_1 \lambda_2 \sum_{k=1}^3 \frac{e^{a_k t}}{p'(a_k)},$$

$$\pi_1^{(1)}(x) = \frac{\mu_1}{x + \mu_2} \frac{\lambda_2}{x + \mu_1} \frac{\lambda_1}{x + \lambda_2} \pi_0^{(0)}(x) = \frac{\mu_1 \lambda_2 \lambda_1}{x p(x)},$$

$$p_1^{(1)}(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \mu_1}{p(0)} + \mu_1 \lambda_2 \lambda_1 \sum_{k=1}^3 \frac{e^{a_k t}}{a_k p'(a_k)}.$$

Вероятность того, что ЭВМ будет исправна в момент времени t , найдем по формуле:

$$\begin{aligned} P\{S(t) \subset U_0\} &= r_0(t) = p_0^{(0)}(t) + p_1^{(0)}(t) = \\ &= \frac{\lambda_2 \mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \mu_1 \mu_2}{p(0)} + \sum_{k=1}^3 \frac{e^{a_k t}}{a_k p'(a_k)} \times \\ &\quad \times [2 + a_k (g_0^{(0)}(a_k) + g_1^{(0)}(a_k))]. \end{aligned}$$

Вероятность того, что ЭВМ будет ремонтироваться в момент времени t , равна:

$$P\{S(t) = U_1\} = r_1(t) = 1 - r_0(t).$$

При $t \rightarrow \infty$ существует стационарный режим. Предельные вероятности можно найти по формулам

$$r_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} r_0(t) = \frac{\lambda_2 \mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \mu_1 \mu_2}{p(0)} = 1 - r_1,$$

$$p(0) = \mu_1 \mu_2 \lambda_2 + \lambda_1 \mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu_1,$$

откуда

$$r_0 = \frac{\lambda_2 \mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 \lambda_2 + \lambda_1 \mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu_1} = 1 - r_1.$$

Если требуется найти только предельную вероятность r_0 , то сделать это можно из следующих соображений. Обозначим $\bar{i}_0$, $\bar{i}_1$ — среднее время однократного пребывания в подмножестве U_0 и U_1 соответственно (в стационарном режиме). Тогда

$$\frac{\bar{i}_0}{\bar{i}_0 + \bar{i}_1} = 1 - r_1.$$

Очевидно, что $\bar{i}_0 = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2$, $\bar{i}_1 = 1/\mu_1 + 1/\mu_2$, откуда

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}} = \\ &= \frac{\lambda_2 \mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 \mu_2 \lambda_2 + \lambda_1 \mu_1 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu_2 + \lambda_1 \lambda_2 \mu_1}. \end{aligned}$$

Пример 2. Рассматривается эксплуатация одинаковых технических устройств (ТУ) на предприятии (например, станков или ЭВМ, или компрессоров). Поток поступлений новых ТУ на предприятие представляет собой поток Пальма; интервал времени между событиями в этом потоке распределен по обобщенному закону Эрланга $(k+1)$ -го порядка с параметрами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$. Время эксплуатации ТУ распределено по показательному закону с параметром μ . Найти для стационарного режима числовые характеристики числа эксплуатируемых ТУ при условии, что

на предприятии может одновременно эксплуатироваться не более n ТУ и что это условие снято ($n \rightarrow \infty$).

Решение. Рассмотрим псевдосостояние U_m , граф которого показан на рис. 5.3.5. Тогда размеченный

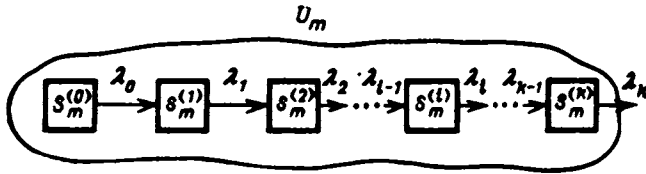


Рис. 5.3.5

граф состояний рассматриваемой системы S при $n \rightarrow \infty$ будет иметь вид, показанный на рис. 5.3.6. Очевидно, что у такой системы S с псевдосостояниями

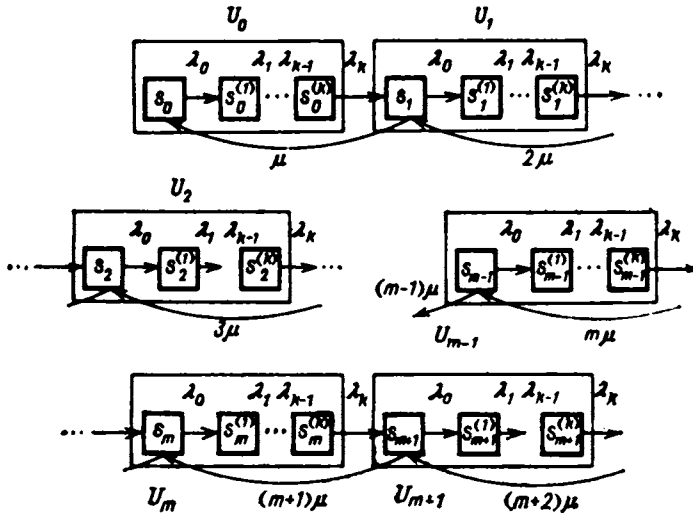


Рис. 5.3.6

будет иметься стационарный режим. Допустим, что решая систему алгебраических уравнений для предельных вероятностей, соответствующих размеченному графу состояний, изображенному на рис. 5.3.6, мы нашли вероятности $p_0, p_1, \dots, p_m, \dots$ пребывания системы S в состояниях $s_0, s_1, \dots, s_m, \dots$ ($p_m = P\{S = s_m\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$).

Теперь рассмотрим систему алгебраических уравнений для предельных вероятностей подмножества U_m в стационарном режиме (см. рис. 5.3.5 и 5.3.6):

$$\begin{aligned}\lambda_0 p_m &= \lambda_1 p_m^{(1)}, \\ \lambda_1 p_m^{(1)} &= \lambda_2 p_m^{(2)}, \\ &\vdots \\ \lambda_{i-1} p_m^{(i-1)} &= \lambda_i p_m^{(i)}, \\ &\vdots \\ \lambda_{k-1} p_m^{(k-1)} &= \lambda_k p_m^{(k)},\end{aligned}$$

где

$$p_m^{(i)} = P\{S = s_m^{(i)}\} \quad (i = 1, 2, \dots, k; \quad m = 0, 1, 2, \dots).$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{aligned}p_m^{(1)} &= \frac{\lambda_0}{\lambda_1} p_m, \quad p_m^{(2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} p_m^{(1)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} p_m, \dots \\ \dots, \quad p_m^{(i)} &= \frac{\lambda_0}{\lambda_i} p_m, \dots, \quad p_m^{(k)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_k} p_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots).\end{aligned}\tag{5.3.7}$$

Обозначим r_m вероятность того, что система S в стационарном режиме находится в псевдосостоянии U_m :

$$r_m = P\{S \subset U_m\} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что эта вероятность будет равна (см. рис. 5.3.5):

$$r_m = p_m + \sum_{i=1}^k p_m^{(i)} = p_m + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_0}{\lambda_i} p_m = p_m \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_0}{\lambda_i}.$$

Введем обозначение

$$a = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_0}{\lambda_i} > 1, \tag{5.3.8}$$

откуда

$$r_m = p_m a \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \tag{5.3.9}$$

Найдем предельные вероятности p_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) из следующей системы алгебраических уравнений, со-

откуда

$$p_0 = \frac{e^{-a}}{a}, \quad p_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \quad (5.3.14)$$

Следовательно (см. (5.3.9)),

$$r_m = p_m a = \frac{a^m}{m!} e^{-a} = P(m, a) \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.3.15)$$

где $P(m, a) = a^m e^{-a} / m!$ — распределение Пуассона.

Сравнивая это распределение вероятностей с распределением (5.1.43) из примера 5 п. 5.1, убеждаемся в том, что они совпадают. Таким образом, получили

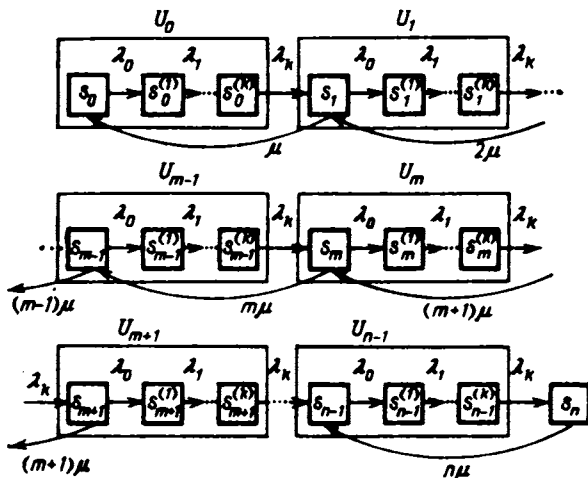


Рис. 5.3.7

интересный результат: вероятности того, что система S будет в стационарном режиме находиться в псевдосостояниях $U_0, U_1, \dots, U_m, \dots$, распределены по закону Пуассона. Этот вывод не зависит от того, каким образом распределены интервалы между событиями в потоке Пальма поступающих на предприятие ТУ, т.е. не зависит от $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, так как с помощью обобщенных законов Эрланга можно с достаточной точностью аппроксимировать практически любую плотность распределения неотрицательной случайной величины.

В случае, если на предприятии может быть в эксплуатации не больше n ТУ (см. граф на рис. 5.3.7), уравнения (5.3.11) примут вид

$$\begin{aligned} \lambda_0 p_0 &= \mu p_1, \\ &\dots \dots \dots \\ (\lambda_0 + m\mu) p_m &= \lambda_0 p_{m-1} + (m+1)\mu p_{m+1} \quad (5.3.16) \\ &\dots \dots \dots \\ n\mu p_n &= \lambda_0 p_{n-1}. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$p_m = \frac{a^m}{m!} p_0 \quad (m=0, 1, 2, \dots, n).$$

Обратим внимание на то, что на рис. 5.3.7 подмножество U_n содержит одно состояние: $U_n = \{s_n\}$, поэтому

$$\begin{aligned} r_m &= \frac{a^m}{m!} p_0 a \quad (m=0, 1, \dots, n-1), \\ r_n &= p_n = \frac{a^n}{n!} p_0. \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

Следовательно,

$$\sum_{m=0}^{n-1} r_m + r_n = a p_0 \sum_{m=0}^{n-1} \frac{a^m}{m!} + \frac{a^n}{n!} p_0 = 1,$$

откуда

$$p_0 = \frac{1/a}{\sum_{m=0}^n \frac{a^m}{m!} + \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{1-a}{a}}, \quad (5.3.18)$$

$$r_m = \frac{a^m/m!}{\sum_{m=0}^n \frac{a^m}{m!} + \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{1-a}{a}} = \frac{P(m, a)}{R(n, a) + P(n, a) \cdot \frac{1-a}{a}}$$

($m=0, 1, \dots, n-1$),

$$r_n = \frac{a^n/(an!)}{\sum_{m=0}^n \frac{a^m}{m!} + \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{1-a}{a}} = \frac{\frac{1}{a} P(n, a)}{R(n, a) + P(n, a) \frac{1-a}{a}}. \quad (5.3.19)$$

Математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $X(t)$ — числа ТУ на предприятии, находящихся в эксплуатации в стационарном режиме при ограниченном числе n , найдем (см. (5.1.45), (5.1.47) и (5.1.48)) по формулам

$$M[X(t)] = \sum_{m=0}^{n-1} mr_m + nr_n = \frac{\alpha R(n-2, \alpha) + nP(n, \alpha)/\alpha}{R(n, \alpha) + P(n, \alpha) \frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Напомним, что

$$P(n, \alpha) = \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha}, \quad R(n, \alpha) = \sum_{k=0}^n P(k, \alpha),$$

$$\begin{aligned} M[X^2(t)] &= \sum_{m=0}^{n-1} m^2 r_m + n^2 r_n = \\ &= \frac{\alpha R(n-2, \alpha) + \alpha^2 R(n-3, \alpha) + n^2 P(n, \alpha)/\alpha}{R(n, \alpha) + P(n, \alpha) \frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (n > 2), \end{aligned}$$

$$D[X(t)] = M[X^2(t)] - (M[X(t)])^2.$$

При $n \rightarrow \infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, \alpha) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n, \alpha) = 1$) получим

$$M[X(t)] = D[X(t)] = \alpha. \quad \blacktriangleright$$

5.4. Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса гибели и размножения без ограничения на число состояний

Анализируя марковские процессы гибели и размножения, мы до сих пор основное внимание обращали на определение одномерного закона распределения случайного процесса $X(t)$ — числа «живых» единиц, а также его различных временных характеристик.

В инженерной практике нас чаще всего интересуют характеристики этого процесса: математическое ожидание $m_x(t) = M[X(t)]$, дисперсия $D_x(t) = D[X(t)]$, а также корреляционная функция $K_x(t, t') = M[\dot{X}(t) \dot{X}(t')]$ (см. п. 1.2).

Задачу определения характеристик случайного процесса $X(t)$ можно решать следующим образом.

Обратим внимание на то, что в левой части уравнения (5.4.2) стоит производная математического ожидания $m_x(t)$ (если оно существует). Действительно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \frac{dp_i(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\infty} i p_i(t) = \frac{d}{dt} M[X(t)] = \frac{dm_x(t)}{dt}. \quad (5.4.3)$$

Проведем ряд простых преобразований правой части равенства (5.4.2):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} i \lambda_{i-1}(t) p_{i-1}(t) - \sum_{i=1}^{\infty} i \lambda_i(t) p_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} i \mu_{i+1}(t) p_{i+1}(t) - \\ & - \sum_{i=1}^{\infty} i \mu_i(t) p_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \lambda_i(t) p_i(t) - \sum_{i=0}^{\infty} i \lambda_i(t) p_i(t) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \mu_i(t) p_i(t) - \sum_{i=1}^{\infty} i \mu_i(t) p_i(t) = \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1-i) \lambda_i(t) p_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (i-1-i) \mu_i(t) p_i(t) = \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i(t) - \mu_i(t)) p_i(t) \quad (5.4.4) \end{aligned}$$

(так как $\mu_0(t) = 0$).

Следовательно,

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = m_x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_i(t) - \mu_i(t)) p_i(t). \quad (5.4.5)$$

С помощью такого же приема найдем производную второго начального момента случайного процесса $X(t)$ (если этот момент существует). Для этого умножим левую и правую части i -го уравнения системы (5.1.2) на величину i^2 :

$$\begin{aligned} 0 \cdot dp_0(t)/dt &= 0 \cdot \mu_1(t) p_1(t) - 0 \cdot \lambda_0(t) p_0(t), \\ i^2 dp_i(t)/dt &= i^2 \lambda_{i-1}(t) p_{i-1}(t) + i^2 \mu_{i+1}(t) p_{i+1}(t) - \\ & - i^2 (\lambda_i(t) + \mu_i(t)) p_i(t) \quad (i > 0), \quad (5.4.6) \end{aligned}$$

Теперь сложим левые и правые части полученных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \frac{d p_i(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 p_i(t) = \\
 &= \frac{d a_2[X(t)]}{dt} = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \lambda_{i-1}(t) p_{i-1}(t) - \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \lambda_i(t) p_i(t) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \mu_{i+1}(t) p_{i+1}(t) - \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \mu_i(t) p_i(t) = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} [(i+1)^2 - i^2] \lambda_i(t) p_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [(i-1)^2 - i^2] \mu_i(t) p_i(t) = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda_i(t) + \mu_i(t) + 2i(\lambda_i(t) - \mu_i(t))] p_i(t). \quad (5.4.7)
 \end{aligned}$$

Известно, что

$$D[X(t)] = a_2[X(t)] - m_x^2(t).$$

Продифференцируем обе части этого равенства и воспользуемся формулами (5.4.7) и (5.4.5):

$$\begin{aligned}
 \frac{dD[X(t)]}{dt} &= \frac{dD_x(t)}{dt} = \frac{da_2[X(t)]}{dt} - 2m_x(t) \frac{dm_x(t)}{dt} = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda_i(t) + \mu_i(t) + 2i(\lambda_i(t) - \mu_i(t)) - \\
 &\quad - 2m_x(t)(\lambda_i(t) - \mu_i(t))] p_i(t) = \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda_i(t) + \mu_i(t) + 2(i - m_x(t))(\lambda_i(t) - \mu_i(t))] p_i(t). \quad (5.4.8)
 \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (1.2.18) и найдем корреляционную функцию $K_x(t, t')$ процесса гибели и размножения $X(t)$. Будем для определенности считать $t' > t$. Введем обозначение

$$\begin{aligned}
 p_{i,j}(t, t') &= P\{X(t) = i, X(t') = j\} = \\
 &= P\{S(t) = s_i, S(t') = s_j\}. \quad (5.4.9)
 \end{aligned}$$

По теореме умножения вероятностей получим

$$\begin{aligned} p_{i,j}(t, t') &= P\{X(t) = i\} P\{X(t') = j | X(t) = i\} = \\ &= P\{S(t) = s_i\} P\{S(t') = s_j | S(t) = s_i\} = \\ &= p_i(t) p_{j|i}(t', t), \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

где

$$p_{i,j}(t, t') = P\{X(t) = i, X(t') = j\} \quad (5.4.11)$$

— вероятность того, что с. п. $X(t)$ ¹⁾ в момент t равен i , а в момент времени t' равен j (рис. 5.4.1);

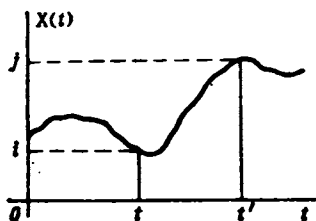


Рис. 5.4.1

$$\begin{aligned} p_{j|i}(t', t) &= \quad (5.4.12) \\ &= P\{X(t') = j | X(t) = i\} \end{aligned}$$

— условная вероятность того, что с. п. $X(t')$ в момент времени t' равен j , вычисленная при условии, что в момент времени t с. п. $X(t)$ равен i (рис. 5.4.1).

С учетом формул (5.4.10)—(5.4.12) запишем выражение для первого смешанного начального момента с. п. $X(t)$:

$$\begin{aligned} M[X(t)X(t')] &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} ij p_{i,j}(t, t') = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i p_i(t) \sum_{j=0}^{\infty} j p_{j|i}(t', t). \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

Выражение $\sum_{j=0}^{\infty} j p_{j|i}(t', t)$ представляет собой условное м.о. случайной величины $X(t')$, вычисленное при условии, что в момент времени $t < t'$ с. п. $X(t)$ был равен i ($X(t) = i$).

Обозначим это математическое ожидание

$$m_{x|i}(t', t) = \sum_{j=0}^{\infty} j p_{j|i}(t', t). \quad (5.4.14)$$

Для нахождения этого условного м.о. нужно интегрировать уравнение (5.4.5) на участке времени (t, t')

¹⁾ Случайный процесс $X(t)$ ступенчатый, на рис. 5.4.1 он для простоты изображен в виде непрерывной кривой.

при условии, что в момент времени t математическое ожидание $m_x(t) = i$. Следовательно,

$$M[X(t)X(t')] = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i(t) m_{x', i}(t, t'). \quad (5.4.15)$$

По формуле (1.2.18) находим корреляционную функцию случайного процесса $X(t)$:

$$K_x(t, t') = M[X(t)X(t')] - m_x(t)m_x(t'). \quad (5.4.16)$$

Пример 1. Рассматривается процесс эксплуатации одинаковых технических устройств (ТУ) на предприятии. Пуассоновский поток поступлений ТУ на предприятие имеет интенсивность $\lambda(t)$, пуассоновский поток списаний каждого ТУ — интенсивность $\mu(t)$. Найти характеристики — м.о. и дисперсию — случайного процесса $X(t)$ — числа ТУ, эксплуатируемых на предприятии в момент времени t , если нет практических ограничений на число ТУ на предприятии и в начальный момент $X(0) = 0$.

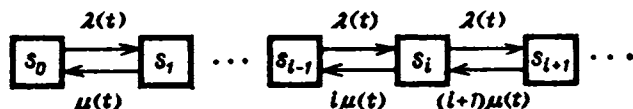


Рис. 5.4.2

Решение. Размеченный граф состояний этого процесса показан на рис. 5.4.2. Имеем

$$\lambda_i(t) = \lambda(t), \quad \mu_i(t) = i\mu(t). \quad (5.4.17)$$

Уравнение (5.4.5) для м.о. $m_x(t)$ процесса $X(t)$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dm_x(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda(t) - i\mu(t)) p_i(t) = \\ &= \lambda(t) - \mu(t) \sum_{i=0}^{\infty} i p_i(t) = \lambda(t) - \mu(t) m_x(t). \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

Общее решение уравнения (5.4.18) при начальном условии $m_x(0)$ будет

$$m_x(t) = e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau} \left[\int_0^t \lambda(x) e^{\int_0^x \mu(\tau) d\tau} dx + m_x(0) \right]. \quad (5.4.19)$$

В соответствии с условием примера решать уравнение (5.4.18) нужно при начальном условии

$$m_x(0) = X(0) = 0. \quad (5.4.20)$$

Поэтому в данном примере выражение для $m_x(t)$ примет вид

$$m_x(t) = e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau} \int_0^t \lambda(x) e^{\int_0^x \mu(\tau) d\tau} dx. \quad (5.4.21)$$

При постоянных интенсивностях $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ решение уравнения (5.4.19) будет

$$m_x(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + m_x(0) e^{-\mu t}, \quad (5.4.22)$$

а при начальном условии $m_x(0) = 0$ получим

$$m_x(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}). \quad (5.4.23)$$

Найдем по формуле (5.4.8) уравнение для дисперсии случайного процесса $X(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dD_x(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda(t) + i\mu(t) + 2(i - m_x(t))(\lambda(t) - \\ &- i\mu(t))] p_i(t) = \lambda(t) + \mu(t)m_x(t) + 2\lambda(t)m_x(t) - \\ &- 2\lambda(t)m_x(t) - 2\mu(t)\alpha_2[X(t)] + 2\mu(t)m_x^2(t) = \\ &= \lambda(t) + \mu(t)m_x(t) - 2\mu(t)D_x(t). \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

Общее решение уравнения (5.4.24) при начальном условии $D_x(0)$ имеет вид

$$\begin{aligned} D_x(t) &= \\ &= e^{-\int_0^t 2\mu(\tau) d\tau} \left[\int_0^t (\lambda(x) + \mu(x)m_x(x)) e^{\int_0^x 2\mu(\tau) d\tau} dx + D_x(0) \right]. \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

В соответствии с условиями примера решать уравнение (5.4.24) нужно при начальном условии

$$D_x(0) = D[X(0)] = D[0] = 0. \quad (5.4.26)$$

Поэтому в данном примере выражение для $D_x(t)$ примет вид

$$D_x(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x) dx} \int_0^t (\lambda(x) + \mu(x) m_x(x)) e^{\int_0^x \lambda(x) dx} dx. \quad (5.4.27)$$

При постоянных $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ и начальных условиях $D_x(0) = m_x(0) = 0$ получим

$$D_x(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) = m_x(t), \quad (5.4.28)$$

т. е. м.о. случайного процесса равно его дисперсии. В примере 5 из п. 5.1 было показано, что в стационарном режиме (при $t \rightarrow \infty$) вероятность того, что анализируемый случайный процесс $X(t)$ примет значение i , определяется по формуле (см. 5.1.43)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i = \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\alpha},$$

где $\alpha = \lambda/\mu$. Другими словами, в стационарном режиме одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ представляет собой закон Пуассона с параметром $\alpha = \lambda/\mu$, для которого, как известно, математическое ожидание равно дисперсии.

На нашем примере можно убедиться, что и для нестационарного режима одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ является тоже законом Пуассона с параметром $m_x(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})$ (при начальных условиях (5.4.20) и (5.4.26) и при постоянных $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$). Покажем, что это так. Если

$$p_i(t) = \frac{[m_x(t)]^i}{i!} e^{-m_x(t)}, \quad (5.4.29)$$

то

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_i(t)}{dt} &= \\
 &= \frac{im_x(t)^{i-1}e^{-m_x(t)} \frac{dm_x(t)}{dt} - m_x(t)^i e^{-m_x(t)} \frac{dm_x(t)}{dt}}{i!} = \\
 &= \frac{[m_x(t)]^{i-1}}{(i-1)!} e^{-m_x(t)} \frac{dm_x(t)}{dt} - \frac{[m_x(t)]^i}{i!} e^{-m_x(t)} \frac{dm_x(t)}{dt} = \\
 &= p_{i-1}(t) \frac{dm_x(t)}{dt} - p_i(t) \frac{dm_x(t)}{dt} = \\
 &= (p_{i-1}(t) - p_i(t)) \frac{dm_x(t)}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (5.4.30)
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \right] = \lambda e^{-\mu t} = \lambda - \mu m_x(t). \quad (5.4.31)$$

С учетом выражения (5.4.31) получим

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_i(t)}{dt} &= p_{i-1}(t)(\lambda - m_x(t)\mu) - p_i(t)(\lambda - m_x(t)\mu) = \\
 &= \lambda p_{i-1}(t) - \mu \frac{m_x(t)[m_x(t)]^{i-1}}{(i-1)!} e^{-m_x(t)} - \lambda p_i(t) + \\
 &\quad + \mu \frac{m_x(t)[m_x(t)]^i}{i!} e^{-m_x(t)} = \\
 &= \lambda p_{i-1}(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t) - \lambda p_i(t) - i\mu p_i(t). \quad (5.4.32)
 \end{aligned}$$

Это уравнение полностью совпадает с уравнением для производной вероятности $p_i(t)$, полученным для размеченного графа состояний, изображенного на рис. 5.4.2. Следовательно, выражение (5.4.29) соответствует решению системы дифференциальных уравнений для вероятностей состояний, получаемых на основе графа, изображенного на рис. 5.4.2.

Мы показали, что одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ при постоянных $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ и начальном условии $X(0) = 0$ представляет собой закон Пуассона с параметром $m_x(t)$, определяемым равенством (5.4.23). Покажем, что необходимым условием того, чтобы одномерный закон распределения с. п. $X(t)$ был законом Пуассона,

является условие $X(0)=0$. Другими словами, одномерный закон распределения с.п. $X(t)$ является законом Пуассона и при переменных интенсивностях $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ лишь бы в начальный момент времени при $t=0$ $X(0)=0$. В этом случае $m_x(t)$ определяется равенством (5.4.21). Найдем производную левой и правой частей этого равенства:

$$\begin{aligned} \frac{dm_x(t)}{dt} = & -\mu(t) e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau} \int_0^t \lambda(x) e^{\int_0^x \mu(\tau) d\tau} dx + \\ & + \lambda(t) e^{\int_0^t \mu(\tau) d\tau} e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau} = \lambda(t) - \mu(t) m_x(t). \end{aligned}$$

Следовательно, если

$$p_i(t) = \frac{[m_x(t)]^i}{i!} e^{-m_x(t)} \quad (i=0, 1, 2, \dots),$$

то (см. (5.4.30))

$$\begin{aligned} \frac{dp_i(t)}{dt} = & p_{i-1} \frac{dm_x(t)}{dt} - p_i(t) \frac{dm_x(t)}{dt} = \\ = & p_{i-1}(t) (\lambda(t) - \mu(t) m_x(t)) - p_i(t) (\lambda(t) - \mu(t) m_x(t)) = \\ = & \lambda(t) p_{i-1}(t) + (i+1) \mu(t) p_{i+1}(t) - \\ & - (\lambda(t) + i\mu(t)) p_i(t) \quad (i=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Получили уравнение (5.4.32) и для переменных интенсивностей, что и требовалось показать.

Следовательно, и для переменных интенсивностей $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ имеют место равенства

$$m_x(t) = D_x(t), \quad p_i(t) = \frac{[m_x(t)]^i}{i!} e^{-m_x(t)} \quad (i=0, 1, 2, \dots),$$

которые определяются тем, что одномерный закон распределения с.п. $X(t)$ является законом Пуассона.

Можно доказать и более общее утверждение: необходимым и достаточным условием того, чтобы одномерный закон распределения с.п. $X(t)$ был законом Пуассона, является условие, чтобы начальное распределение с.п. $X(t)$ было распределением Пуассона:

$$\begin{aligned} m_x(0) = D_x(0), \quad p_i(0) = \frac{[m_x(0)]^i}{i!} e^{-m_x(0)} \\ (i=0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (5.4.33)$$

Нетрудно убедиться в том, что начальное условие $X(0)=0$, при котором $m_x(0)=D_x(0)=0$, $p_0(0)=1$, $p_i(0)=0$ ($i=1, 2, \dots$), является частным случаем этого условия (5.4.33).

Для нахождения корреляционной функции случайного процесса $X(t)$ найдем сначала условное м.о. $m_{x'|t}(t', t)$, которое можно получить из равенства (5.4.19) в виде

$$\begin{aligned} m_{x'|t}(t', t) = \\ = e^{-\int_t^{t'} \mu(\tau) d\tau} \left[\int_t^{t'} \lambda(x) e^{\int_t^x \mu(\tau) d\tau} dx + i \right] \quad (t' > t). \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

Следовательно (см. (5.4.15)),

$$\begin{aligned} M[X(t)X(t')] = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i(t) m_{x'|t}(t', t) = \\ = e^{-\int_t^{t'} \mu(\tau) d\tau} \left[\left(\int_t^{t'} \lambda(x) e^{\int_t^x \mu(\tau) d\tau} dx \right) m_x(t) + a_2[X(t)] \right], \end{aligned} \quad (5.4.35)$$

где $m_x(t)$ определяется из уравнения (5.4.21), а

$$a_2[X(t)] = D_x(t) + m_x^2(t).$$

Дисперсия $D_x(t)$ может быть найдена из уравнения (5.4.27).

Корреляционную функцию $K_x(t, t')$ найдем по формуле (5.4.16). Если интенсивность потоков постоянна, $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, $\mu(t) = \mu = \text{const}$, то формулы (5.4.34) и (5.4.35) примут вид

$$m_{x'|t}(t', t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu(t'-t)}) + i e^{-\mu(t'-t)}, \quad (t' > t), \quad (5.4.36)$$

$$\begin{aligned} M[X(t)X(t')] = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu(t'-t)}) m_x(t) + \\ + e^{-\mu(t'-t)} a_2[X(t)] \quad (t' > t). \end{aligned} \quad (5.4.37)$$

Если в начальный момент времени при $t=0$ имеем $X(0)=0$ ($m_x(0)=D_x(0)=0$), то формулы (5.4.36) и (5.4.37) примут вид

$$m_x(t) = (\lambda/\mu)(1 - e^{-\mu t}), \quad (5.4.38)$$

$$\sigma_x^2[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) + \left[\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})\right]^2.$$

откуда

$$K_x(t, t') = M[X(t)X(t')] - m_x(t)m_x(t') =$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})e^{-\mu(t'-t)} \quad (t' > t). \quad (5.4.39)$$

Так как $K_x(t, t') = K_x(t', t)$, то

$$K_x(t, t') = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t'})e^{-\mu(t-t')} \quad (t > t'). \quad (5.4.40)$$

Формулы (5.4.39) и (5.4.40) можно объединить в одну:

$$K_x(t, t') = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu \min(t, t')})e^{-\mu |t-t'|}. \quad (5.4.41)$$

В пределе (при $t \rightarrow \infty$ и $t' \rightarrow \infty$) получим стационарный режим, для которого

$$m_x(t) = D_x(t) = m_x = D_x = \frac{\lambda}{\mu},$$

$$K_x(t, t') = \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu |t-t'|}. \quad (5.4.42)$$

Замечание. При достаточно большом $m_x(t)$ ($m_x(t) > 20$) одномерный закон распределения с.п. $X(t)$ можно приближенно считать нормальным, так как

$$P\{X(t) \leq n\} = \sum_{k=0}^n [m_x(t)]^k e^{-m_x(t)}/k! =$$

$$= R(n, m_x(t)) \approx \Phi((n - m_x(t))/\sqrt{m_x(t)}) + 0,5,$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа.

Это замечание справедливо как для постоянных интенсивностей $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, так и для переменных интенсивностей; как для стационарного, так и для нестационарного режимов. ►

Можно доказать и более общее утверждение: *нормальный случайный процесс $X(t)$ с характеристиками $m_x(t)$ и $K_x(t, t')$ является марковским*. Нормальный с. п. полностью описывается двумя характеристиками: м. о. $m_x(t)$ и к. ф. $K_x(t, t')$.

Пример 2. Рассматривается процесс эксплуатации нефтяных скважин. Интенсивность ввода нефтяных скважин в эксплуатацию $\lambda(t) = at$. Интенсивность потока выходов из строя каждой скважины

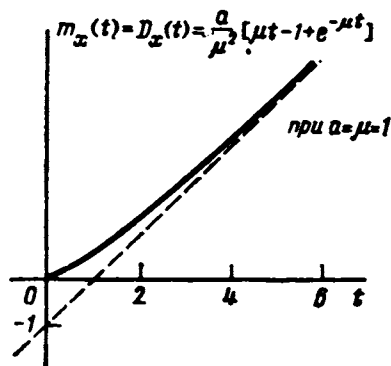


Рис. 5.4.3

$\mu = \text{const}$. Найти характеристики с. п. $X(t)$ — числа нефтяных скважин, находящихся в эксплуатации на момент времени t , если $X(0) = 0$.

Решение. В соответствии с решением предыдущего примера имеем (см. (5.4.21), (5.4.33)):

$$m_x(t) = e^{-\mu t} \int_0^t a x e^{\mu x} dx = \frac{a}{\mu^2} [\mu t - 1 + e^{-\mu t}]. \quad (5.4.43)$$

График зависимости $m_x(t)$ показан на рис. 5.4.3 при $a = 1$, $\mu = 1$. Кривая $m_x(t)$ имеет асимптоту

$$\frac{a}{\mu} t - \frac{a}{\mu^2} = \frac{a}{\mu} \left(t - \frac{1}{\mu} \right).$$

Таким образом, по истечении времени $\tau \approx 3/\mu$ начнется практически линейный рост числа эксплуатируемых нефтяных скважин:

$$m_x(t) = D_x(t) \approx \frac{at}{\mu} - \frac{a}{\mu^2} = \frac{a}{\mu} \left(t - \frac{1}{\mu} \right) \quad \left(t > \frac{3}{\mu} \right).$$

Одномерный закон распределения с.п. $X(t)$ по-прежнему будет законом Пуассона:

$$P\{X(t) = i\} = p_i(t) = \frac{[m_x(t)]^i}{i!} e^{-m_x(t)}. \quad (5.4.44)$$

Для нахождения условного м.о. $m_{x'|i}(t', t)$ найдем общее решение уравнения (5.4.5) при начальном условии $m_x(0) = i$; $\lambda_i(t) = at$; $\mu(t) = i\mu$:

$$\begin{aligned} m_{x'|i}(t', t) &= e^{-\int_t^{t'} \mu d\tau} \left[\int_t^{t'} a x e^{\int_t^x \mu d\tau} dx + i \right] = \\ &= \frac{a}{\mu^2} [\mu t' - 1 - e^{-\mu(t'-t)}(\mu t - 1)] + i e^{-\mu(t'-t)} \quad (t' > t). \end{aligned}$$

Следовательно (см. (5.4.15)):

$$\begin{aligned} M[X(t)X(t')] &= \sum_{i=0}^{\infty} i p_i(t) m_{x'|i}(t', t) = \\ &= \frac{a}{\mu^2} [\mu t' - 1 - e^{-\mu(t'-t)}(\mu t - 1)] m_x(t) + \\ &+ e^{-\mu(t'-t)} m_x(t)(1 + m_x(t)) \quad (t' > t), \quad (5.4.45) \end{aligned}$$

откуда

$$K_x(t, t') = M[X(t)X(t')] - m_x(t)m_x(t'). \blacktriangleright$$

Пример 3. В условиях примера 2 ($\lambda(t) = at$, $\mu = \text{const}$) известно, что на начало года (на момент $t_1 > 0$) в эксплуатации было n_1 нефтяных скважин. По плану к концу года на момент t_2 ($t_2 > t_1$) в эксплуатации должно быть n_2 нефтяных скважин. Определить вероятность выполнения плана.

Решение. Математическое ожидание числа скважин, эксплуатируемых на конец года, будет определяться по формуле, аналогичной (5.4.19) (см. также (5.4.44)):

$$\begin{aligned} m_x(t_2) &= e^{-\int_{t_1}^{t_2} \mu d\tau} \left[\int_{t_1}^{t_2} a x e^{\int_{t_1}^x \mu d\tau} dx + n_1 \right] = \\ &= \frac{a}{\mu^2} [\mu t_2 - 1 - e^{-\mu(t_2-t_1)}(\mu t_1 - 1)] + n_1 e^{-\mu(t_2-t_1)}. \quad (5.4.46) \end{aligned}$$

Дисперсию числа скважин, эксплуатируемых на конец года, найдем по формуле, аналогичной (5.4.27) (при $D_x(t_1) = 0$, так как в момент t_1 число скважин $X(t_1) = n_1$, где n_1 — неслучайное число):

$$\begin{aligned} D_x(t_2) &= e^{-\int_{t_1}^{t_2} 2\mu dx} \int_{t_1}^{t_2} (ax + \mu m_x(x)) e^{\int_{t_1}^x 2\mu dx} dx = \\ &= \frac{a}{2\mu^2} [2\mu t_2 - 1 - e^{-2\mu(t_2-t_1)}(2\mu t_1 - 1)] - \\ &- \frac{a}{2\mu^2} (1 - e^{-2\mu(t_2-t_1)}) - \frac{a(\mu t_1 - 1)}{\mu^2} [e^{-\mu(t_2-t_1)} - \\ &- e^{-2\mu(t_2-t_1)}] + n_1 (e^{-\mu(t_2-t_1)} - e^{-2\mu(t_2-t_1)}). \quad (5.4.47) \end{aligned}$$

При большом значении $m_x(t_2)$ и при условии $m_x(t_2) - 3\sqrt{D_x(t_2)} > 0$ можно с достаточной точностью считать, что с.в. $X(t_2)$ распределена нормально. Следовательно, вероятность выполнения плана можно найти по формуле

$$\begin{aligned} P\{X(t_2) > n_2\} &= 1 - P\{X(t_2) < n_2\} = \\ &= 0,5 - \Phi\left(\frac{n_2 - m_x(t_2)}{\sqrt{D_x(t_2)}}\right). \end{aligned}$$

Замечание. При большом значении t_2 (когда $\mu(t_2 - t_1) > 3$ и $\mu t_2 > 10$) имеет место приближенное равенство

$$m_x(t_2) \approx D_x(t_2) \approx \frac{a}{\mu^2} (\mu t_2 - 1).$$

В этом случае закон распределения случайной величины $X(t_2)$ будет «приближаться» к закону Пуассона с параметром $m_x(t_2)$. ►

Пример 4. Рассматривается производство и эксплуатация однопоточных ЭВМ. Интенсивность пуассоновского потока производимых ЭВМ имеет вид

$$\lambda(t) = \begin{cases} at & \text{при } 0 \leq t \leq t_1, \\ at_1 & \text{при } t_1 < t \leq t_2, \\ 0 & \text{при } t > t_2. \end{cases} \quad (5.4.48)$$

На рис. 5.4.4 показан график зависимости $\lambda(t)$. На участке $(0, t_1)$ происходит развертывание производства ЭВМ; на участке (t_1, t_2) ЭВМ производятся с по-

стоянной интенсивностью, а в момент t_2 — снимаются с производства. Каждая произведенная ЭВМ эксплуатируется в течение случайного времени T , распределенного по показательному закону с параметром μ . Определить м. о. $m_x(t)$ и дисперсию $D_x(t)$ числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации, если на момент начала производства $t=0$ данного типа ЭВМ в эксплуатации не было ($m_x(0)=D_x(0)=0$).

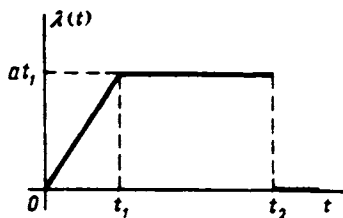


Рис. 5.4.4

Решение. В соответствии с решением примера 2 имеем (см. (5.4.43)):

$$m_x(t) = D_x(t) = \frac{a}{\mu^2} (\mu t - 1 + e^{-\mu t}) \quad (0 \leq t \leq t_1). \quad (5.4.49)$$

Для нахождения характеристик $m_x(t) = D_x(t)$ при $t_1 < t < t_2$ достаточно ввести переменную $\tau = t - t_1$, при этом начальное условие для решения уравнения (5.4.18) на этом участке будет иметь вид

$$m_x|_{\tau=0} = D_x|_{\tau=0} = a(\mu t_1 - 1 + e^{-\mu t_1})/\mu^2. \quad (5.4.50)$$

Так как на участке $\tau > 0$ интенсивности потоков λ и μ постоянны, то можно воспользоваться ранее найденным решением (см. (5.4.22)):

$$m_x(\tau) = D_x(\tau) = \frac{a t_1}{\mu} (1 - e^{-\mu \tau}) + m_x|_{\tau=0} e^{-\mu \tau}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} m_x(t) = D_x(t) &= \\ &= \frac{a t_1}{\mu} (1 - e^{-\mu(t-t_1)}) + \frac{a}{\mu^2} (\mu t_1 - 1 + e^{-\mu t_1}) e^{-\mu(t-t_1)} = \\ &= \frac{a t_1}{\mu} - \frac{a}{\mu^2} (1 - e^{-\mu t_1}) e^{-\mu(t-t_1)} \quad (t_1 < t < t_2). \end{aligned} \quad (5.4.51)$$

На участке времени $t > t_2$ имеет место процесс гибели ($\lambda = 0$), следовательно (см. (5.4.22)),

$$m_x(t) = D_x(t) = m_x(t_2) e^{-\mu(t-t_2)} \quad (t > t_2), \quad (5.4.52)$$

где

$$m_x(t_2) = \frac{a t_1}{\mu} - \frac{a}{\mu^2} (1 - e^{-\mu t_1}) e^{-\mu(t_1-t_1)}. \quad (5.4.53)$$

График зависимости $m_x(t) = D_x(t)$ при $t_1 = 3$ (года), $t_2 = 6$ (лет), $a = 1000$ (1/год²) $1/\mu = 4$ (года) показан на рис. 5.4.5. При $m_x(t) > 20$ можно с достаточной точностью считать, что одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ — числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации, — будет нормальным

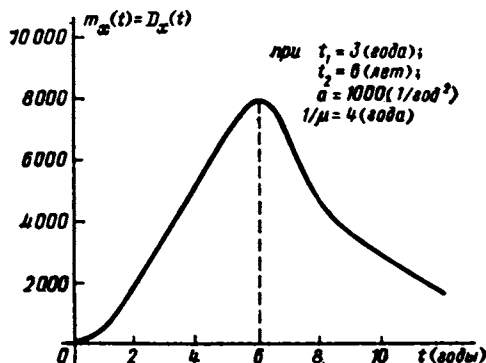


Рис. 5.4.5

с найденными характеристиками. На основании «правила трех сигма» можно утверждать, что практически возможные значения числа эксплуатируемых ЭВМ будут находиться в пределах

$$m_x(t) \pm 3 \sqrt{D_x(t)} = m_x(t) \pm 3 \sqrt{m_x(t)} = m_x(t) \left(1 \pm \frac{3}{\sqrt{m_x(t)}} \right).$$

Так, например, если в эксплуатации находится в среднем $m_x(t) = 4900$ ЭВМ, то для фактического числа эксплуатируемых ЭВМ получаем следующие границы:

$$4900 \left(1 \pm \frac{3}{\sqrt{4900}} \right) = 4900 \pm 211.$$

Таким образом, практически все возможные значения числа эксплуатируемых ЭВМ колеблются в пределах 4 % их среднего числа. При этом чем большее значение имеет м. о., тем меньше относительное колебание у с. п. $X(t)$. ►

Представляет определенный интерес рассмотрение характеристик процесса «чистого» размножения, когда $\mu(t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$).

В этом случае получим следующие дифференциальные уравнения для характеристик процесса «чистого» размножения (см. (5.4.5), (5.4.8)):

$$dm_x(t)/dt = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(t) p_i(t), \quad (5.4.54)$$

$$dD_x(t)/dt = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i(t) [1 + 2(i - m_x(t))] p_i(t). \quad (5.4.55)$$

Если $\lambda_i(t) = \lambda(t)$ и в начальный момент времени $t = 0$ распределение вероятностей $p_i(0)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) представляет собой распределение Пуассона с параметром $m_x(0)$:

$$p_i(0) = [m_x(0)]^i e^{-m_x(0)} / i! \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.4.56)$$

то одномерный закон распределения с.п. $X(t)$ представляет собой закон Пуассона с параметром $m_x(t)$, определяемым решением уравнения

$$dm_x(t)/dt = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(t) p_i(t) = \lambda(t), \quad (5.4.57)$$

откуда

$$m_x(t) = \int_0^t \lambda(t) dt + m_x(0). \quad (5.4.58)$$

При этом выполняются равенства

$$m_x(t) = D_x(t), \quad p_i(t) = [m_x(t)]^i e^{-m_x(t)} / i! \quad (5.4.59)$$

Заметим, что равенства (5.4.58) и (5.4.59) будут выполняться также и в случае, если $m_x(0) = 0$, так как в этом случае имеет место «вырожденное» распределение Пуассона и равенства (5.4.56) справедливы.

При постоянной интенсивности $\lambda(t) = \lambda$ и $m_x(0) = 0$ получаем

$$m_x(t) = D_x(t) = \lambda t, \quad p_i(t) = (\lambda t)^i e^{-\lambda t} / i! \quad (i = 0, 1, \dots). \quad (5.4.60)$$

Корреляционную функцию процесса «чистого» размножения при $\lambda = \text{const}$ можно получить из выражения (5.4.41) при $\mu \rightarrow 0$:

$$K_x(t, t') = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu |\min(t, t')|}) e^{-\mu |t - t'|}.$$

Раскрывая полученную неопределенность по правилу Лопиталья, получим

$$K_x(t, t') = \lambda \min(t, t'). \quad (5.4.61)$$

Пример 5. В условиях предыдущего примера определить вероятность того, что за все время производства (за 6 лет) будет произведено не менее 13 200 ЭВМ.

Решение. Используя зависимость (5.4.48), найдем по формуле (5.4.58) величину м.о. общего числа произведенных ЭВМ при условии, что $m_x(0) = 0$:

$$\begin{aligned} m_x(\infty) &= \int_0^{\infty} \lambda(t) dt = \int_0^{t_1} \lambda(t) dt = \\ &= \int_0^{t_1} at dt + \int_{t_1}^{t_2} at_1 dt = \frac{at_1^2}{2} + at_1(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (5.4.62)$$

Подставляя в это выражение данные предыдущего примера: $a = 1000$ (год)⁻², $t_1 = 3$ (года); $t_2 = 6$ (лет), получаем

$$m_x(\infty) = m_x(t_2) = 1000 \cdot 9/2 + 1000 \cdot 3 \cdot 3 = 13500 \text{ (ЭВМ)}.$$

Так как в нашем случае выполняются условия пуассоновского распределения с.п. $X(t)$ ($m_x(0) = D_x(0) = 0$, $p_0(0) = 1$), то $m_x(t_2) = D_x(t_2) = 13500$, откуда

$$\sigma_x(t_2) = \sqrt{13500} = 116,2 \text{ (ЭВМ)}.$$

Известно, что при $m_x(t_2) > 20$ можно с достаточной для практики точностью считать, что с.в. $X(t_2)$, распределенная по закону Пуассона, распределена по нормальному закону с параметрами $m_x(t_2) = 13500$ (ЭВМ), $\sigma_x(t_2) = 116,2$ (ЭВМ). Следовательно, искомая вероятность

$$P\{X(t_2) > 13200\} = 0,5 - \Phi\left\{\frac{13200 - 13500}{116,2}\right\} = 0,995.$$

Заметим, что если по «правилу трех сигма» практически возможное число произведенных ЭВМ определяется из условия

$$m_x(t_2) \pm 3\sigma_x(t_2) = 13500 \pm 348,6,$$

Проведя преобразования, аналогичные тем, которые были проведены в п. 5.4, получим дифференциальное уравнение для дисперсии с. п. $X(t)$:

$$dD_x(t)/dt = \sum_{i=0}^n [\lambda_i(t) + \mu_i(t) + 2(i - m_x(t))(\lambda_i(t) - \mu_i(t))] p_i(t). \quad (5.5.3)$$

При решении уравнения (5.5.3) необходимо учитывать ограничения (5.5.2).

Корреляционную функцию $K_x(t, t')$ с. п. $X(t)$ найдем по формулам (5.4.9) — (5.4.16), в которых верхний предел сумм нужно брать равным n .

Рассмотрим один частный случай, когда

$$\begin{aligned} \lambda_i(t) &= (n - i) \lambda(t) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \\ \mu_i(t) &= i \mu(t) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Обратим внимание на то, что для выражений (5.5.4) $\lambda_n(t) = \mu_0(t) = 0$. В этом случае формулы (5.5.1) и (5.5.3) примут вид

$$dm_x(t)/dt = n\lambda(t) - (\mu(t) + \lambda(t))m_x(t), \quad (5.5.5)$$

$$dD_x(t)/dt = n\lambda(t) + (\mu(t) - \lambda(t))m_x(t) - 2(\mu(t) + \lambda(t))D_x(t). \quad (5.5.6)$$

Размеченный граф состояний для случая, когда $\lambda_i(t) = (n - i)\lambda(t)$, $\mu_i(t) = i\mu(t)$ показан на рис. 5.5.2.

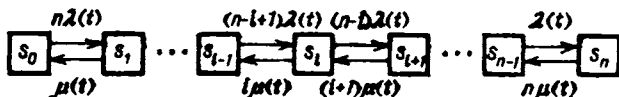


Рис. 5.5.2

Рассматриваемый случай имеет следующее довольно распространенное инженерное приложение. Имеется система, состоящая из n однородных (одинаковых) технических устройств (ЭВМ, станков, компрессоров, автомашин и т. п.). Любое техническое устройство (ТУ) (например, i -е) может находиться в двух состояниях $s_0^{(i)}$ и $s_1^{(i)}$, размеченный граф состояний i -го технического устройства показан на рис. 5.5.3. Например, состояние $s_1^{(i)}$ — i -е ТУ неис-

правно и ремонтируется, состояние $s_i^{(i)}$ — i -е ТУ исправно и находится в эксплуатации. В этом случае $\lambda(t)$ — интенсивность пуассоновского потока восстановления ТУ, $\mu(t)$ — интенсивность пуассоновского потока отказов ТУ. При этом предполагается, что любое техническое устройство переходит из состояния в состояние независимо от того, в каком состоянии находятся другие ТУ, и все ТУ «ведут себя» статистически одинаково. Поэтому размеченный граф состояний, изображенный на рис. 5.5.3, описывает поведение произвольного i -го ТУ.

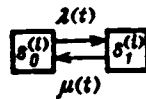


Рис. 5.5.3

Случайный процесс $Z_i(t)$ — блуждание i -го ТУ по своим двум состояниям — определим следующим образом:

$$Z_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если в момент времени } t \\ & i\text{-е ТУ находится в состоянии } s_1^{(i)}; \\ 0, & \text{если в момент времени } t \\ & i\text{-е ТУ находится в состоянии } s_0^{(i)}. \end{cases}$$

Следовательно, общее число ТУ, находящихся в «первом» состоянии,

$$X(t) = \sum_{i=1}^n Z_i(t). \quad (5.5.7)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \pi_1(t) &= P\{Z_i(t) = 1\}, \\ \pi_0(t) &= P\{Z_i(t) = 0\} = 1 - \pi_1(t). \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Эти вероятности не зависят от индекса i , так как каждое ТУ (из общего числа n) «ведет себя» статистически одинаково и независимо от других ТУ. Таким образом, одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ будет *биномиальным* с параметрами $n, \pi_1(t)$.

Найдем м.о. процесса $X(t)$, определяемого равенством (5.5.7). С учетом принятых обозначений (5.5.8) имеем

$$\begin{aligned} M[X(t)] &= m_x(t) = M\left[\sum_{i=1}^n Z_i(t)\right] = \\ &= \sum_{i=1}^n M[Z_i(t)] = n\pi_1(t). \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

В соответствии с размеченным графом состояний, изображенным на рис. 5.5.3, получим:

$$\begin{aligned} d\pi_1(t)/dt &= \lambda(t)\pi_0(t) - \mu(t)\pi_1(t) = \lambda(t)(1 - \pi_1(t)) - \\ &\quad - \mu(t)\pi_1(t) = \lambda(t) - (\mu(t) + \lambda(t))\pi_1(t). \end{aligned}$$

Умножим левую и правую части этих равенств на n ; с учетом (5.5.9)

$$\begin{aligned} n d\pi_1(t)/dt &= d(n\pi_1(t))/dt = dm_x(t)/dt = n\lambda(t) - \\ &\quad - (\mu(t) + \lambda(t))n\pi_1(t) = n\lambda(t) - (\mu(t) + \lambda(t))m_x(t). \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Это выражение в точности совпадает с (5.5.5).

Так как одномерный закон распределения с.п. $X(t)$ является биномиальным с параметрами $n, \pi_1(t)$, то

$$\begin{aligned} D_x(t) &= n\pi_1(t)(1 - \pi_1(t)) = n\pi_1(t) - n\pi_1^2(t) = \\ &= m_x(t) - m_x^2(t)/n = m_x(t)(1 - m_x(t)/n). \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

В рассматриваемом случае нет необходимости решать дифференциальное уравнение (5.5.6) для нахождения дисперсии. Достаточно найти решение уравнения (5.5.5) и затем по формуле (5.5.11) определить дисперсию.

Покажем, что выражение (5.5.11) удовлетворяет уравнению (5.5.6). Действительно,

$$\begin{aligned} n\lambda(t) + (\mu(t) - \lambda(t))m_x(t) - \\ - 2(\mu(t) + \lambda(t))m_x(t)(1 - m_x(t)/n) = \\ = dm_x(t)/dt - [2m_x(t)/n]dm_x(t)/dt, \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

где

$$\begin{aligned} dm_x(t)/dt - [2m_x(t)/n]dm_x(t)/dt = \\ = \frac{d}{dt} \left[m_x(t) \left(1 - \frac{m_x(t)}{n} \right) \right] = \frac{dD_x(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Если в равенство (5.5.12) вместо производной $dm_x(t)/dt$ подставить выражение, определяемое правой частью равенства (5.5.5), то получится тождество, в чем читателю предлагается убедиться самостоятельно.

Из равенства (5.5.7) следует, что

$$\begin{aligned}\overset{0}{X}(t) &= X(t) - m_x(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n Z_i(t) - M \left[\sum_{i=1}^n Z_i(t) \right] = \sum_{i=1}^n \overset{0}{Z}_i(t), \quad (5.5.13)\end{aligned}$$

где $\overset{0}{Z}_i(t) = Z_i(t) - M[Z_i(t)]$.

Найдем корреляционную функцию с. п. $X(t)$:

$$K_x(t, t') = M[\overset{0}{X}(t) \overset{0}{X}(t')] = M \left[\sum_{i=1}^n \overset{0}{Z}_i(t) \sum_{j=1}^n \overset{0}{Z}_j(t') \right].$$

Так как с. п. $Z_i(t)$ и $Z_j(t)$ независимы при $i \neq j$, то

$$\begin{aligned}K_x(t, t') &= M \left[\sum_{i=1}^n \overset{0}{Z}_i(t) \overset{0}{Z}_i(t') \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n M[\overset{0}{Z}_i(t) \overset{0}{Z}_i(t')]. \quad (5.5.14)\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$K_{x_i}(t, t') = M[\overset{0}{Z}_i(t) \overset{0}{Z}_i(t')] = K_x(t, t'). \quad (5.5.15)$$

С учетом этого получим

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^n K_{x_i}(t, t') = n K_x(t, t'). \quad (5.5.16)$$

Запишем корреляционную функцию $K_x(t, t')$ в виде:

$$\begin{aligned}K_x(t, t') &= M[Z_i(t) Z_i(t')] - m_{x_i}(t) m_{x_i}(t') \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.5.17)\end{aligned}$$

На рис. 5.5.4 показана одна из возможных реализаций $z_i(t)$ с. п. $Z_i(t)$. Ряд распределения сечения с. п. $Z_i(t)$ имеет вид

$$Z_i(t): \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 - \pi_1(t) & \pi_1(t) \end{array} \right|.$$

Произведение $Z_i(t)Z_i(t')$ (рис. 5.5.4) может принимать только два значения: 0 и 1; поэтому ряд распре-

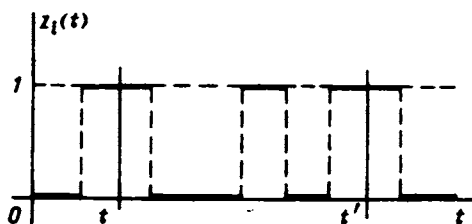


Рис. 5.5.4

деления с. в. $Z_i(t)Z_i(t')$ для фиксированных значений t и t' имеет вид

$$Z_i(t)Z_i(t') = \begin{cases} 0 & | & 1 \\ 1 - \pi_1(t, t') & | & \pi_1(t, t') \end{cases} \quad (5.5.18)$$

где

$$\pi_1(t, t') = P\{Z_i(t)Z_i(t') = 1\}. \quad (5.5.19)$$

Следовательно,

$$M[Z_i(t)Z_i(t')] = \pi_1(t, t'). \quad (5.5.20)$$

На основании правила умножения вероятностей (см. п. 2.3*) получаем

$$\pi_1(t, t') = \pi_1(t) \pi_{1|1}(t', t) \quad (t' > t), \quad (5.5.21)$$

где $\pi_{1|1}(t', t)$ — условная вероятность того, что с. п. $Z_i(t') = 1$ при условии, что с. п. $Z_i(t) = 1$:

$$\pi_{1|1}(t', t) = P\{Z_i(t') = 1 | Z_i(t) = 1\} \quad (t' > t) \quad (5.5.22)$$

(рис. 5.5.4). В соответствии с размеченным графом, изображенным на рис. 5.5.3, вероятность $\pi_1(t)$ будет определяться следующим образом:

$$\pi_1(t) = e^{-\int_0^t (\mu(x) + \lambda(x)) dx} \left[\int_0^t \lambda(x) e^{\int_0^x (\mu(\tau) + \lambda(\tau)) d\tau} dx + \pi_{1,0} \right]. \quad (5.5.23)$$

где $\pi_{1,0} = \pi_1(0)$.

Следовательно, для нахождения условной вероятности $\pi_{1|1}(t', t)$ нужно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, соответствующую размеченному графу состояний, изображенному на рис. 5.5.3, в интервале времени от t до t' ($t' > t$) при условии, что в момент времени t система находилась в состоянии $s_1^{(1)}$:

$$\pi_{1|1}(t', t) = e^{-\int_t^{t'} (\mu(x) + \lambda(x)) dx} \left[\int_t^{t'} \lambda(x) e^{\int_t^x (\mu(\tau) + \lambda(\tau)) d\tau} dx + 1 \right] \quad (t' > t). \quad (5.5.24)$$

Таким образом, по формулам (5.5.23) и (5.5.24) находим

$$K_x(t, t') = \pi_1(t) \pi_{1|1}(t', t) - \pi_1(t) \pi_1(t'),$$

откуда при $t' > t$ получим:

$$K_x(t, t') = n\pi_1(t) \pi_{1|1}(t', t) - n\pi_1(t) \pi_1(t') = m_x(t)(\pi_{1|1}(t', t) - \pi_1(t')). \quad (5.5.25)$$

Пример 1. Рассматривается эксплуатация n одинаковых станков на машиностроительном заводе. Интенсивность пуассоновского потока отказов каждого станка $\mu = \text{const}$; интенсивность пуассоновского потока восстановлений каждого станка $\lambda = \text{const}$. В начальный момент времени $t = 0$ все станки были исправны ($m_x(0) = n$, $D_x(0) = 0$, $\pi_1(0) = 1$). Определить характеристики с. п. $X(t)$ — числа исправных станков.

Решение. В этом случае выражения (5.5.23) и (5.5.24) примут вид

$$\pi_1(t) = e^{-\int_0^t (\mu + \lambda) dx} \left[\int_0^t \lambda e^{\int_0^x (\mu + \lambda) d\tau} dx + 1 \right] = \lambda/(\lambda + \mu) + \mu e^{-(\mu + \lambda)t}/(\lambda + \mu) \quad (t > 0), \quad (5.5.26)$$

$$\pi_{1|1}(t', t) = e^{-\int_t^{t'} (\mu + \lambda) dx} \left[\int_t^{t'} \lambda e^{\int_t^x (\mu + \lambda) d\tau} dx + 1 \right] = \lambda/(\lambda + \mu) + \mu e^{-(\mu + \lambda)(t' - t)}/(\lambda + \mu) \quad (t' > t). \quad (5.5.27)$$

Следовательно (см. (5.5.9), (5.5.11), (5.5.25)),

$$m_x(t) = \pi_1(t) n = n\lambda/(\lambda + \mu) + n\mu e^{-(\lambda + \mu)t}/(\lambda + \mu) \quad (t > 0), \quad (5.5.28)$$

$$\begin{aligned} D_x(t) &= m_x(t) \left(1 - \frac{m_x(t)}{n} \right) = \\ &= [n\lambda/(\lambda + \mu) + n\mu e^{-(\lambda + \mu)t}/(\lambda + \mu)] \frac{\mu}{\lambda + \mu} (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}), \end{aligned} \quad (5.5.29)$$

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= m_x(t) (\pi_{11}(t', t) - \pi_1(t')) = \\ &= \left[\frac{n\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{n\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda + \mu)t} \right] \frac{\mu}{\mu + \lambda} (e^{-(\lambda + \mu)(t' - t)} - e^{-(\lambda + \mu)t'}) \\ &\quad (t' > t). \end{aligned} \quad (5.5.30)$$

Если $t' < t$, то в выражении (5.5.30) нужно аргументы t и t' поменять местами:

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \left[\frac{n\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{n\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda + \mu)t'} \right] \times \\ &\quad \times \frac{\mu}{\mu + \lambda} (e^{-(\lambda + \mu)(t - t')} - e^{-(\lambda + \mu)t}) \quad (t > t'). \end{aligned}$$

Поэтому выражение для $K_x(t, t')$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \left[\frac{n\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{n\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda + \mu) \min(t, t')} \right] \times \\ &\quad \times \frac{\mu}{\mu + \lambda} (e^{-(\lambda + \mu)|t - t'|} - e^{-(\lambda + \mu) \max(t, t')}). \end{aligned} \quad (5.5.31)$$

В данном примере система обладает эргодическим свойством ($\lambda_i(t) = (n - i)\lambda = \text{const}$, $\mu_i(t) = i\mu = \text{const}$, число состояний конечно), поэтому для нее будет существовать стационарный режим, для которого

$$\begin{aligned} m_x &= \lim_{t \rightarrow \infty} m_x(t) = n\lambda/(\lambda + \mu) = n\pi_1 \quad (\pi_1 = \lambda/(\lambda + \mu)), \\ D_x &= \lim_{t \rightarrow \infty} D_x(t) = n\lambda\mu/(\lambda + \mu)^2 = n\pi_1(1 - \pi_1), \end{aligned} \quad (5.5.32)$$

$$K_x^c(t, t') = \lim_{t \rightarrow \infty, t' \rightarrow \infty} K_x(t, t') = D_x e^{-(\lambda + \mu)|t' - t|}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 2. Цех, работающий круглосуточно (в три смены), имеет 100 одинаковых станков с ЧПУ (числовым программным управлением), среднее время безотказной работы каждого станка 10 суток,

среднее время ремонта станка 0,5 суток. Определить характеристики с.п. $X(t)$ — числа исправных станков в стационарном режиме, считая, что потоки отказов и восстановлений каждого станка — простейшие и все станки работают независимо друг от друга.

Решение. В соответствии с условиями примера имеем:

$$\mu = 1/10 = 0,1 \left(\frac{1}{\text{сутки}} \right), \quad \lambda = 1/0,5 = 2 \left(\frac{1}{\text{сутки}} \right).$$

Следовательно,

$$m_x = n\lambda/(\lambda + \mu) = 100 \cdot 2/(2 + 0,1) \approx 95,24 \text{ (станка)},$$

$$D_x = n\lambda\mu/(\lambda + \mu)^2 = 100 \cdot 2 \cdot 0,1/(2 + 0,1)^2 \approx 4,51,$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \approx 2,12 \text{ (станка)},$$

$$K_x^c(t, t') = D_x e^{-(\mu + \lambda)|t - t'|} \approx 4,51 e^{-2,1|t - t'|}.$$

Вероятность того, что произвольно выбранный станок в данный момент времени t будет в ремонте (неисправен),

$$\pi_0 = 1 - \pi_1 = \frac{100 - 95,24}{100} = 0,0476. \quad \blacktriangleright$$

Пример 3. Рассматривается работа вычислительного центра (ВЦ), с которым соединено n дисплеев, работающих в режиме «on line» круглосуточно. Каждый дисплей включается в работу с ВЦ в среднем λ раз в сутки независимо от работы других дисплеев. Каждое включение дисплея на работу с ВЦ длится случайное время, распределенное по показательному закону с параметром μ , независимо от того, сколько дисплеев работает. Считая поток включений каждого дисплея простейшим с параметром λ , определить характеристики с.п. $X(t)$ — числа включенных дисплеев в момент времени t , если в момент времени $t = 0$ ни один из дисплеев не работал.

Решение. Вероятность того, что дисплей (любой из n) будет включен в работу с ВЦ, определяется по формуле (5.5.23) при $\pi_1(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \pi_1(t) &= e^{-\int_0^t (\mu + \lambda) dx} \int_0^t \lambda e^{\int_0^x (\mu + \lambda) d\tau} dx = \\ &= \frac{\lambda}{\mu + \lambda} (1 - e^{-(\mu + \lambda)t}). \end{aligned} \quad (5.5.33)$$

Следовательно (см. 5.5.9), (5.5.11), (5.5.25)):

$$m_x(t) = n\lambda(1 - e^{-(\mu+\lambda)t})/(\mu + \lambda) \quad (t > 0), \quad (5.5.34)$$

$$D_x(t) = n\lambda\mu(1 - e^{-(\mu+\lambda)t})\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}e^{-(\mu+\lambda)t}\right)/(\mu + \lambda)^2, \quad (5.5.35)$$

$$K_x(t, t') = \frac{n\lambda\mu}{(\mu + \lambda)^2} (1 - e^{-(\mu+\lambda)\min(t, t')}) \times \\ \times \left(e^{-(\mu+\lambda)|t-t'|} - \frac{\lambda}{\mu}e^{-(\mu+\lambda)\max(t, t')}\right). \quad (5.5.36)$$

В условиях данного примера существует стационарный режим, для которого

$$m_x(t) = m_x = n\lambda/(\mu + \lambda), \quad D_x(t) = D_x = n\lambda\mu/(\mu + \lambda)^2, \quad (5.5.37)$$

$$K_x(t, t') = n\lambda\mu e^{-(\mu+\lambda)|t-t'|}/(\mu + \lambda)^2.$$

Например, если $n = 100$, $\lambda = 20 \left(\frac{1}{\text{сутки}}\right)$, $\mu = 288 \left(\frac{1}{\text{сутки}}\right)$, $\frac{1}{\mu} = 5$ (мин), то

$$m_x = \frac{100 \cdot 20}{288 + 20} \approx 6,50, \quad D_x = \frac{100 \cdot 20 \cdot 288}{(288 + 20)^2} \approx 6,10,$$

$$K_x(t, t') = 6,10e^{-308|t-t'|}.$$

Таким образом, в стационарном режиме с ВЦ будут «общаться» в среднем 6,5 дисплея. ►

Пример 4. В условиях предыдущего примера определить вероятность того, что число «общающихся» с ВЦ дисплеев будет больше величины k ; определить закон распределения времени T_k , в течение которого число «общающихся» с ВЦ дисплеев будет больше k .

Эта задача имеет большое практическое значение при проектировании ВЦ, работающего со многими терминалами (дисплеями). Допустим, что ВЦ спроектирован таким образом, что если обращения поступают не более чем от k дисплеев, то все эти обращения обеспечиваются вычислительными ресурсами, в противном случае (когда обращения поступают от $l > k$ дисплеев) k дисплеев обеспечиваются вычислительными ресурсами, а $(l - k)$ дисплеев ожидают.

Решение. В соответствии с результатами данного пункта случайная величина $X(t)$ — сечение про-

цесса в момент времени t — распределена по биномиальному закону с параметрами n и $\pi_1(t)$ (см. (5.5.33)). Следовательно,

$$P\{X(t) > k\} = 1 - \sum_{m=0}^k C_n^m \pi_1^m(t) (1 - \pi_1(t))^{n-m}. \quad (5.5.38)$$

Например, если $k = 10$, то для стационарного режима при $\lambda = 20 \left(\frac{1}{\text{сутки}}\right)$. $\mu = 288 \left(\frac{1}{\text{сутки}}\right)$ получим ($\pi_1 = m_x/n = 6,50/100 = 0,065$):

$$\begin{aligned} P\{X(t) > 10\} &= 1 - P\{X(t) \leq 10\} = \\ &= 1 - \sum_{m=0}^{10} C_{100}^m \cdot 0,065^m \cdot 0,935^{100-m}. \end{aligned}$$

Так как величина π_1 мала, а n велико, то с достаточной для инженерной практики точностью можно считать, что с.в. $X(t)$ (при фиксированном t) распределена по закону Пуассона с параметром $a = m_x = 6,5$. Тогда

$$P\{X(t) > k\} \approx 1 - R(k, m_x), \quad (5.5.39)$$

где $R(m, a) = \sum_{k=0}^m a^k e^{-a} / k!$ — функция, связанная с распределением Пуассона.

В нашем случае

$$P\{X(t) > 10\} = 1 - R(10; 6,5).$$

По таблице (см., например, [5]) находим $P\{X(t) > 10\} \approx 0,0670$.

Если величина $m_x(t) > 20$ и $m_x(t) - 3\sqrt{D_x(t)} > 0$, то с достаточной для инженерной практики точностью можно считать, что с.в. $X(t)$ (при фиксированном t) распределена по нормальному закону с параметрами $m_x(t)$ и $D_x(t)$, следовательно,

$$P\{X(t) > k\} = 0,5 - \Phi\left(\frac{k - m_x(t)}{\sqrt{D_x(t)}}\right). \quad (5.5.40)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа.

Например, если в условиях предыдущего примера считать $n = 400$, то в стационарном режиме получим:

$$m_x = 400 \cdot 20 / (288 + 20) \approx 26,$$

$$D_x = 400 \cdot 20 \cdot 288 / (288 + 20)^2 \approx 24,4,$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \approx 4,94, \quad m_x - 3\sigma_x = 26 - 14,82 = 11,18 > 0$$

и в этом случае (при $k = 40$)

$$P\{X(t) > k\} \approx 0,5 - \Phi([40 - 26]/4,94) \approx 0,00233. \blacktriangleright$$

Перейдем теперь к определению закона распределения времени T_k , в течение которого с. п. $X(t)$ будет больше k . На рис. 5.5.5 изображена реализация с. п. $X(t)$. Для простоты эта реализация изображена в виде

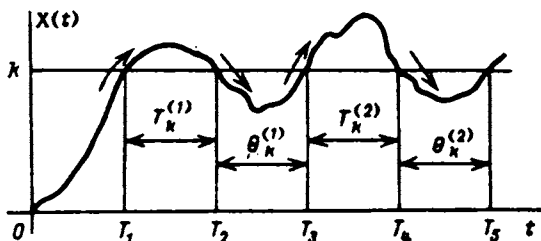


Рис. 5.5.5

непрерывной кривой, в то время как на самом деле эта кривая имеет скачкообразный характер, со скачками, равными ± 1 при включении или выключении одного из n дисплеев.

Поясним рис. 5.5.5. В случайный момент времени T_1 произошло первое пересечение случайным процессом $X(t)$ уровня k «снизу вверх». Процесс $X(t)$ превышал уровень k в течение случайного времени $T_k^{(1)}$, после чего в случайный момент времени T_2 он пересек уровень k «сверху вниз». Далее процесс $X(t)$ не превышал уровня k в течение случайного времени $\theta_k^{(1)}$, после чего в случайный момент времени T_3 он вновь пересек уровень k «снизу вверх» и находился выше уровня k в течение случайного времени $T_k^{(2)}$ и т. д. Очевидно, что случайные величины $T_k^{(1)}, T_k^{(2)}, T_k^{(3)}, \dots$ в стационарном режиме будут распределены одинаково и независимы.

Для нахождения закона распределения случайной величины T_k воспользуемся приемом, изложенным в п. 4.3. Закон распределения времени T_k найдем с помощью преобразованного графа состояний, изображенного на рис. 5.5.6 (см. также рис. 5.5.2).

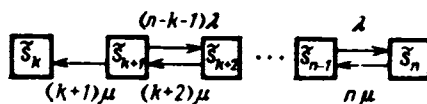


Рис. 5.5.6

Плотность распределения случайной величины T_k определяется по формуле

$$f_k(t) = (k+1)\mu \bar{p}_{k+1}(t), \quad (5.5.41)$$

где вероятность $\bar{p}_{k+1}(t)$ определяется в результате решения системы дифференциальных уравнений, соответствующих размеченному графу состояний (рис. 5.5.6), интегрируемых при начальном условии: $\bar{p}_{k+1}(0) = 1$, $\bar{p}_i(0) = 0$ ($i \neq k+1$). Заметим, что таким же образом можно получать закон распределения случайной величины T_k и для нестационарного (неоднородного) случая, когда интенсивности потоков событий зависят от времени $[\lambda(t), \mu(t)]$.

Если интенсивности потоков постоянные (λ, μ), то для нахождения математического ожидания случайной величины T_k в стационарном режиме нет необходимости решать систему дифференциальных уравнений, а можно воспользоваться приемом, описанным в п. 4.4.

Рассмотрим преобразованный граф состояний (рис. 5.5.7). Для системы с таким графом существует стационарный режим; предельные вероятности $\bar{p}_i$ имеют вид

$$\bar{p}_i = \frac{C_n^i p^i q^{n-i}}{C_n^k p^k q^{n-k}} \bar{p}_k \quad (i = k, k+1, \dots, n), \quad (5.5.42)$$

$$\bar{p}_k = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{1 - \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i p^i q^{(n-i)}}, \quad (5.5.43)$$

где

$$p = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}, \quad q = 1 - p = \frac{\mu}{\mu + \lambda}. \quad (5.5.44)$$

Для системы с графом, изображенным на рис. 5.5.7, м. о. времени H_k пребывания в состоянии $\tilde{z}_k$ равно

$$M[H_k] = \frac{1}{(n-k)\lambda}. \quad (5.5.45)$$

так как с. в. H_k распределена по показательному закону с параметром $(n-k)\lambda$. На основании формулы

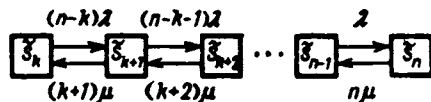


Рис. 5.5.7

(4.2.29) получим

$$\bar{p}_k = \frac{M[H_k]}{M[H_k] + M[T_k]}.$$

откуда

$$M[T_k] = M[H_k] \frac{1 - \bar{p}_k}{\bar{p}_k}. \quad (5.5.46)$$

Так, для случая, когда $k=10$, $n=100$, $\lambda=20\left(\frac{1}{\text{сутки}}\right)$, $\mu=288\left(\frac{1}{\text{сутки}}\right)$, получим:

$$M[H_k] = \frac{1}{(n-k)\lambda} = \frac{1}{90 \cdot 20} (\text{суток}) = 0,0133 (\text{часа}) = \\ = 0,8 (\text{мин}) = 48 (\text{сек}).$$

Далее

$$\bar{p}_k = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{1 - \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i p^i q^{n-i}}.$$

Эту вероятность можно определять по приближенной формуле, заменяя биномиальное распределение пуассоновским с параметром m_x :

$$\bar{p}_k \approx \frac{m_x^k e^{-m_x} / k!}{1 - \sum_{i=0}^{k-1} m_x^i e^{-m_x} / i!} = \frac{P(k, m_x)}{1 - R(k-1, m_x)}.$$

где

$$m_x = np = n\lambda/(\mu + \lambda) \approx 6,5.$$

По таблицам, приведенным в [5], получим:

$$P(10; 6,5) = 0,055792; \quad 1 - R(9; 6,5) \approx 0,122781;$$

$$\bar{\rho}_k \approx 0,4544.$$

Отсюда

$$m_{t_k} = M[T_k] \approx 48 \frac{1 - 0,4544}{0,4544} = 57,63 \text{ (сек.)}.$$

Расчеты показывают, что с достаточной для инженерной практики точностью можно приближенно полагать, что случайная величина T_k распределена по показательному закону с найденным математическим ожиданием:

$$F_k(t) = P\{T_k < t\} \approx 1 - e^{-t/m_{t_k}} \quad (t > 0). \quad (5.5.47)$$

Следовательно,

$$D[T_k] \approx m_{t_k}^2 \approx 3322, \quad \sigma[T_k] \approx m_{t_k} \approx 57,63 \text{ (сек.)} \quad \blacktriangleright$$

Пример 5. Для условий предыдущих двух примеров определить закон распределения времени Q_k

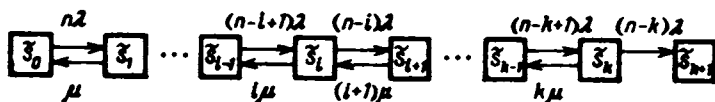


Рис. 5.5.8

(см. рис. 5.5.5), в течение которого число «общающихся» с ВЦ дисплеев будет не больше k (в стационарном режиме).

Решение. Размеченный граф состояний системы для определения закона распределения с.в. Q_k представлен на рис. 5.5.8. Плотность распределения с.в. Q_k определяется из выражения (см. п. 4.3)

$$g_k(t) = (n - k) \lambda \bar{\rho}_k(t), \quad (5.5.48)$$

где вероятность $\bar{\rho}_k(t)$ определяется в результате решения системы дифференциальных уравнений, соответствующих размеченному графу состояний

(рис. 5.5.8), интегрируемых при начальном условии: $\bar{p}_k(0) = 1, \bar{p}_i(0) = 0 \ (i \neq k)$.

При постоянных интенсивностях потоков (λ, μ) математическое ожидание случайной величины Q_k

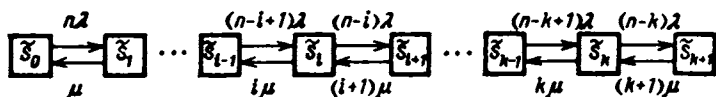


Рис. 5.5.9

определяется с помощью размеченного графа состояний, показанного на рис. 5.5.9. Для этого случая м. о. времени Ψ_{k+1} пребывания в состоянии $\tilde{s}_{k+1}$

$$M[\Psi_{k+1}] = \frac{1}{(k+1)\mu}, \quad (5.5.49)$$

так как с. в. Ψ_{k+1} распределена по показательному закону с параметром $(k+1)\mu$. Следовательно,

$$\bar{p}_{k+1} = M[\Psi_{k+1}]/(M[\Psi_{k+1}] + M[Q_k]),$$

откуда

$$M[Q_k] = M[\Psi_{k+1}](1 - \bar{p}_{k+1})/\bar{p}_{k+1}. \quad (5.5.50)$$

Например, при $k = 10$; $n = 100$; $\lambda = 20 \left(\frac{1}{\text{сутки}}\right)$; $\mu = 288 \left(\frac{1}{\text{сутки}}\right)$ получим

$$M[\Psi_{k+1}] = \frac{1}{(k+1)\mu} = \frac{1}{11 \cdot 288} \approx 3,157 \cdot 10^{-4} \text{ (суток)} \approx \\ \approx 7,576 \cdot 10^{-3} \text{ (часа)} = 0,4545 \text{ (мин)} = 27,27 \text{ (сек)}.$$

Решая систему алгебраических уравнений, соответствующих графу, изображенному на рис. 5.5.9, найдем предельные вероятности

$$\bar{p}_i = C'_n p^i q^{n-i} \bar{p}_0 / q^n \quad (i = 0, 1, 2, \dots, k+1), \quad (5.5.51)$$

$$\bar{p}_0 = q^n / \left(\sum_{i=0}^{k+1} C'_n p^i q^{n-i} \right).$$

Отсюда

$$\bar{p}_{k+1} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-(k+1)}}{\sum_{i=0}^{k+1} C_n^i p^i q^{n-i}}, \quad p = \frac{\lambda}{\mu + \lambda},$$

$$q = 1 - p = \frac{\mu}{\mu + \lambda}.$$

Заменяя биномиальное распределение пуассоновским, найдем

$$\bar{p}_{k+1} \approx \frac{m_x^{k+1} e^{-m_x} / (k+1)!}{\sum_{i=0}^{k+1} m_x^i e^{-m_x} / i!} = \frac{P(k+1, m_x)}{R(k+1, m_x)}.$$

По таблицам, приведенным в [5], получим:

$$P(11; 6,5) = 0,03345, \quad R(11; 6,5) = 0,96606, \quad \bar{p}_{k+1} \approx 0,0342,$$

откуда

$$M[Q_k] = M[\Psi_{k+1}] \frac{1 - \bar{p}_{k+1}}{\bar{p}_{k+1}} \approx 27,27 \frac{1 - 0,0342}{0,0342} \approx$$

$$\approx 770,1 \text{ (сек)} = 12,83 \text{ (мин)}. \quad \blacktriangleright$$

**6.1. Канонические разложения и интегральные
канонические представления случайных
процессов**

Известно, что неслучайную функцию $x(t)$, отвечающую определенным условиям¹⁾, можно в интервале $[-T; T]$ изменения аргумента разложить в ряд Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (-T < t < T),$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega t dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

В. С. Пугачевым [18] была предложена и развита идея представления с. п. $X(t)$ в виде его разложения

$$X(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t) \quad (6.1.1)$$

(где V_k — случайные величины, $\varphi_k(t)$ — неслучайные функции), т. е. в виде суммы элементарных случайных функций (э. с. ф.).

Как будет показано в дальнейшем, представление с. п. в виде разложения (6.1.1) дает возможность проводить довольно просто различные преобразования с. п. — как линейные, так и нелинейные, определение которым будет дано ниже, в п. 6.2. Это объясняется тем, что разложение (6.1.1) для фиксированного мо-

¹⁾ Точнее, условиям Дирихле.

мента времени t представляет собой линейную функцию с. в. V_k , что намного облегчает нахождение характеристик с. в. $X(t)$. С другой стороны, вся зависимость от времени сосредоточена в функциях $\varphi_k(t)$, которые являются неслучайными функциями времени.

В. С. Пугачев показал [18], что для любого случайного процесса $X(t)$ можно построить его разложение вида (6.1.1); при этом можно предложить много способов такого построения.

В пункте 1.1. было введено понятие элементарной случайной функции. Очевидно, что с. п. вида

$$X(t) = V \cdot \varphi(t) \quad (6.1.2)$$

(где V — обычная центрированная с. в. с характеристиками $m_v = 0$, D_v ; $\varphi(t)$ — обычная (неслучайная) функция времени) является э. с. ф.

В дальнейшем произведение центрированной случайной величины V на неслучайную функцию $\varphi(t)$ будем называть *элементарным случайным процессом* (э. с. п.). Вся случайность сосредоточена в с. в. V , зависимость от времени t — в неслучайной функции $\varphi(t)$. На закон распределения с. в. V не накладывается каких-либо ограничений, кроме того, что $M[V] = m_v = 0$.

Найдем характеристики э. с. п. (6.1.2). Для этого зафиксируем аргумент t и рассмотрим с. в. $X(t) = V \cdot \varphi(t)$; она представляет собой линейную функцию с. в. V , следовательно (см. п. 8.2*),

$$M[X(t)] = M[V \cdot \varphi(t)] = \varphi(t) M[V] = \varphi(t) \cdot 0 = 0, \quad (6.1.3)$$

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= D[V \cdot \varphi(t)] = \varphi^2(t) D[V] = \\ &= \varphi^2(t) M[V^2] = \varphi^2(t) D_v. \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Для нахождения корреляционной функции э. с. п. зафиксируем моменты времени t и t' и рассмотрим две центрированные с. в.: $X(t)$ и $X(t')$. Найдем их ковариацию: это и есть корреляционная функция с. п. $X(t)$:

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M[X(t) X(t')] = M[V \varphi(t) V \varphi(t')] = \\ &= \varphi(t) \varphi(t') M[V^2] = \varphi(t) \varphi(t') D[V] = \varphi(t) \varphi(t') D_v. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Положив в выражении (6.1.5) $t = t'$, получим дисперсию случайного процесса (6.1.4). Нормированная корреляционная функция э.с.п. имеет вид

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t) D_x(t')}} = \frac{\varphi(t) \varphi(t') D_v}{\sqrt{\varphi^2(t) D_v \varphi^2(t') D_v}} = 1. \quad (6.1.6)$$

Пример 1. Рассматриваются элементарные случайные процессы:

$$Y(t) = V \cdot a, \quad Z(t) = V \cos^2 t, \quad U(t) = V t^2,$$

где V — нормально распределенная с.в. с характеристиками $m_v = 0$, σ_v , a — неслучайная величина. Найти характеристики (м.о., дисперсию и корреляционную функцию) каждого из этих процессов и построить для каждого из них семейство реализаций.

Решение. По формулам (6.1.2) — (6.1.5) имеем:

$$m_y(t) = m_z(t) = m_u(t) = 0, \quad K_y(t, t') = a^2 \sigma_v^2 = D_y(t),$$

$$K_z(t, t') = \cos^2 t \cos^2 t' \sigma_v^2, \quad D_z(t) = K_z(t, t) = \cos^4 t \sigma_v^2,$$

$$K_u(t, t') = t^2 (t')^2 \sigma_v^2, \quad D_u(t) = K_u(t, t) = t^4 \sigma_v^2.$$

Семейства реализаций рассматриваемых э.с.п. показаны на рис. 6.1.1—6.1.3. Для всех рассматриваемых

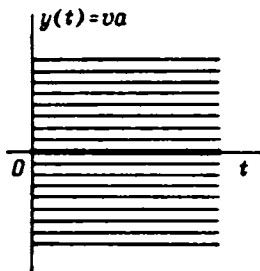


Рис. 6.1.1

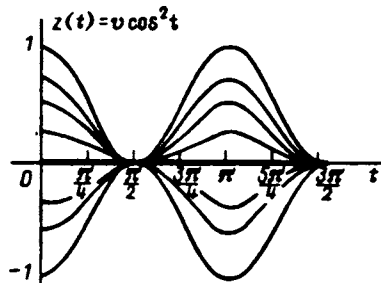


Рис. 6.1.2

э.с.п. ось $0t$ представляет собой математическое ожидание этих процессов. ►

Каноническим разложением случайного процесса $X(t)$ называется выражение вида

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t). \quad (6.1.7)$$

В этом выражении $m_x(t) = M[X(t)]$ представляет собой м.о. случайного процесса $X(t)$; $V_1, \dots, V_k, \dots$ — некоррелированные, центрированные с.в. с дисперсиями $D_1, \dots, D_k, \dots$; $\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ — неслучайные функции аргумента t .

Выражение (6.1.7) можно переписать в виде

$$X(t) = m_x(t) + \overset{0}{X}(t),$$

где

$$\overset{0}{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t) \quad (6.1.8)$$

— центрированный с.п., а выражение (6.1.8) представляет собой каноническое разложение центрированного с.п. $\overset{0}{X}(t)$.

Случайные величины $V_1, \dots, V_k, \dots$ будем называть *коэффициентами канонического разложения*, а неслучайные функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t), \dots$ — *координатными функциями канонического разложения*. Каноническое разложение (6.1.7) может содержать как конечное число членов разложения, так и бесконечное (счетное) число членов.

Найдем характеристики с.п. $X(t)$, заданного своим каноническим разложением. При фиксированном аргументе t выражение (6.1.7) представляет собой линейную функцию с.в. $V_1, \dots, V_k, \dots$, следовательно,

$$M[X(t)] = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} M[V_k] \varphi_k(t).$$

Но по условию с.в. V_k центрирована ($M[V_k] = 0$), поэтому

$$M[X(t)] = m_x(t). \quad (6.1.9)$$

Зафиксируем два момента времени t и t' и найдем ковариацию с.в. $X(t)$ и $X(t')$, т.е. корреляционную функцию с.п. $X(t)$,

$$K_x(t, t') = M[\overset{0}{X}(t) \overset{0}{X}(t')].$$

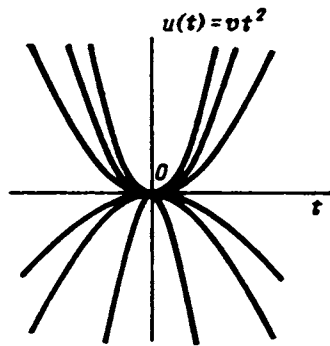


Рис. 6.1.3

Подставим в это выражение разложение центрированного с. п. (6.1.8):

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M \left[\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) V_k \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h(t') V_h \right] = \\ &= M \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} V_k V_h \varphi_k(t) \varphi_h(t') \right]. \end{aligned}$$

По теореме сложения м. о. знак суммы и знак м. о. можно менять местами, а неслучайные множители $\varphi_k(t)$ и $\varphi_h(t')$ можно вынести за знак м. о.:

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_h(t') M[V_k V_h].$$

Но $M[V_k V_h] = 0$ при $k \neq h$, так как с. в. $V_1, V_2, \dots$ не коррелированы; при одинаковых значениях индексов ($k = h$) получим

$$M[V_k V_k] = M[V_k^2] = D_k.$$

Следовательно, корреляционная функция с. п. $X(t)$, заданного своим каноническим разложением (6.1.7), имеет вид

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_k(t') D_k. \quad (6.1.10)$$

Выражение (6.1.10) называется *каноническим разложением корреляционной функции с. п. $X(t)$* ; оно представляет собой сумму произведений координатных функций (при аргументах t и t') и дисперсий D_k .

Таким образом, мы доказали, что если с. п. представлен своим каноническим разложением (6.1.7), то его корреляционная функция выражается каноническим разложением корреляционной функции (6.1.10). Можно доказать и обратное утверждение (мы этого делать не будем): если корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ представлена своим каноническим разложением (6.1.10), то центрированный случайный процесс $\overset{0}{X}(t)$ может быть представлен каноническим разложением (6.1.8).

Дисперсия с. п. $X(t)$, заданного своим каноническим разложением (6.1.7), равна значению корреля-

ционной функции при равенстве ее аргументов:

$$D_x(t) = K_x(t, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t) D_k. \quad (6.1.11)$$

Выражение (6.1.11) будем называть *каноническим разложением дисперсии с.п. $X(t)$* , оно представляет собой сумму произведений квадратов координатных функций и дисперсий D_k .

В соответствии с формулой (1.2.23) нормированная корреляционная функция с.п. $X(t)$, представленного своим каноническим разложением (6.1.7), будет иметь вид (см. (6.1.10) и (6.1.11))

$$\begin{aligned} r_x(t, t') &= \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t) D_x(t')}} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_k(t') D_k}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t) D_k\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t') D_k\right)}}. \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

Таковы основные характеристики с.п., представленного своим каноническим разложением (6.1.7). Особо отметим три обстоятельства, связанные с каноническими разложениями.

Во-первых, каноническое разложение с.п. $X(t)$ можно получать множеством способов. Известно, что функцию $x(t)$ можно разложить в обобщенный ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(t),$$

где на функции $\psi_k(t)$ накладываются определенные ограничения (они должны быть ортогональны и нормированы). Но такие функции $\psi_k(t)$ можно получить различным образом.

Во-вторых, каноническое разложение (6.1.7) ничего не говорит о том, какой одномерный, двумерный, ..., k -мерный закон распределения имеет с.п. $X(t)$. Одно и то же каноническое разложение может иметь различные законы распределения, так как с.в. $V_1, V_2, \dots, V_k, \dots$ могут быть распределены по разным законам.

В-третьих, практические способы построения канонического разложения (6.1.7) должны основываться на статистических данных об с. п. Обработывая такие статистические данные, получаем оценки для м. о. и корреляционной функции с. п. $X(t)$: $\bar{m}_x(t)$, $R_x(t, t')$. Имея эти оценки, можно найти аналитическое приближение к ф. $K_x^{(a)}(t, t') \approx \tilde{K}_x(t, t')$.

По аналитическому приближению можно функцию двух аргументов $K_x^{(a)}(t, t')$ разложить в двойной ряд Фурье и найти координатные функции и дисперсии коэффициентов канонического разложения. Этим приемом мы воспользуемся в гл. 7 при нахождении канонического разложения стационарного с. п.

Пример 2. Случайный процесс $X(t)$ задан своим каноническим разложением

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^n V_k \Phi_k(t),$$

где с. в. V_k распределены нормально с характеристиками $M[V_k] = 0$, $D[V_k] = D_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $M[V_k \cdot V_m] = 0$ ($k \neq m$) (с. в. $V_1, V_2, \dots, V_n$ не коррелированы).

Найти одномерный, двумерный и l -мерный законы распределения с. п. $X(t)$.

Решение. Для фиксированного момента t с. в.

$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^n V_k \Phi_k(t)$ будет представлять собой линейную функцию некоррелированных, нормально распределенных с. в. $V_1, V_2, \dots, V_n$. Следовательно (см. п. 9.7*), случайная величина $X(t)$ будет распределена нормально с характеристиками (см. (6.1.11))

$$m_x(t) = M[X(t)], \quad D_x(t) = D[X(t)] = \sum_{k=1}^n \Phi_k^2(t) D_k.$$

Одномерный закон распределения будет иметь вид

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x(t)}} \exp \left\{ -\frac{[x - m_x(t)]^2}{2D_x(t)} \right\}. \quad (6.1.13)$$

По этим же причинам двумерный закон распределения рассматриваемого с. п. также нормальный с

характеристиками $m_x(t)$, $m_x(t')$, $D_x(t)$, $D_x(t')$ и

$$r_x(t, t') = \frac{K_x(t, t')}{\sqrt{D_x(t) D_x(t')}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \varphi_k(t') D_k}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(t) D_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(t') D_k\right)}}.$$

Следовательно,

$$f(t, t', x, x') = \frac{1}{2\pi \sqrt{D_x(t) D_x(t') (1 - r_x^2(t, t'))}} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r_x^2(t, t'))} \left[\frac{(x - m_x(t))^2}{D_x(t)} - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{2r_x(t, t') (x - m_x(t)) (x' - m_x(t'))}{\sqrt{D_x(t) D_x(t')}} + \frac{(x' - m_x(t'))^2}{D_x(t')} \right] \Bigg\}.$$

(6.1.14)

Аналогично, l -мерный закон распределения с. п. $X(t)$, взятый для сечений $t_1, t_2, \dots, t_l$, будет нормальным с математическими ожиданиями $m_x(t_1), m_x(t_2), \dots, m_x(t_l)$ и корреляционной матрицей $\|K_x(t_i, t_j)\|$, где

$$K_x(t_i, t_j) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t_i) \varphi_k(t_j) D_k \quad (i, j = 1, 2, \dots, l).$$

Замечание. Особо отметим, что *двумерный закон распределения нормального* с. п. $X(t)$ является его исчерпывающей характеристикой, так как все характеристики l -мерного закона распределения ($l = 2, 3, \dots$) зависят только от двух функций $m_x(t)$ и $K_x(t, t')$. Кроме того, с. п. $X(t)$ будет марковским. ►

До сих пор рассматривалось каноническое разложение случайного процесса, которое можно построить для ряда дискретных точек, получаемых при разложении случайного процесса на конечном интервале $(-T, T)$. Если $T \rightarrow \infty$, то этот ряд дискретных точек сольется в прямую. При этом каноническое разложение случайного процесса $X(t)$ перейдет в *интегральное*

каноническое представление. Покажем, как это происходит.

Запишем каноническое разложение с. п. $X(t)$ в виде

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} V_{\lambda} \Phi_{\lambda}(t). \quad (6.1.15)$$

Пусть λ — действительная переменная, принадлежащая некоторой области Λ ($\lambda \in \Lambda$); обозначим $\Delta\lambda$ — длину каждого из элементарных участков, на которые равномерно разбивается область Λ . Тогда выражение (6.1.15) можно переписать в виде

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{V_{\lambda}}{\Delta\lambda} \Phi_{\lambda}(t) \Delta\lambda. \quad (6.1.16)$$

Очевидно, что при неограниченном увеличении интервала T , на котором рассматривалось каноническое разложение (6.1.15) ($T \rightarrow \infty$), величина $\Delta\lambda$ стремится к нулю, а отношение $V_{\lambda}/\Delta\lambda$ будет представлять собой некоторую случайную функцию¹⁾ непрерывного аргумента λ :

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} V_{\lambda}/\Delta\lambda = Z(\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda). \quad (6.1.17)$$

При этом функция $\Phi_{\lambda}(t)$ двух аргументов (дискретного λ и непрерывного t) станет функцией двух непрерывных аргументов λ и t :

$$\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \Phi_{\lambda}(t) = \Phi(\lambda, t), \quad (6.1.18)$$

а сумма в (6.1.16) преобразуется в интеграл по области Λ

$$X(t) = m_x(t) + \int_{(\Lambda)} Z(\lambda) \Phi(\lambda, t) d\lambda. \quad (6.1.19)$$

Последнее выражение называется *интегральным каноническим представлением* случайного процесса $X(t)$.

Каноническому разложению (6.1.15) соответствует каноническое разложение корреляционной функции с. п. $X(t)$

$$K_x(t, t') = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Phi_{\lambda}(t) \Phi_{\lambda}(t') D_{\lambda}, \quad (6.1.20)$$

где $D_{\lambda} = M[V_{\lambda}^2]$.

¹⁾ Здесь мы говорим о случайной функции, так как аргумент λ не является временем.

Так как отношение $D_\lambda/\Delta\lambda$ представляет собой ту часть дисперсии, которая приходится на значение λ , отнесенное к длине элементарного интервала $\Delta\lambda$, то формулу (6.1.20) можно переписать в виде

$$K_x(t, t') = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \varphi_\lambda(t) \varphi_\lambda(t') \frac{D_\lambda}{\Delta\lambda} \Delta\lambda. \quad (6.1.21)$$

Введем обозначение

$$G(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} D_\lambda/\Delta\lambda. \quad (6.1.22)$$

Функция $G(\lambda)$ называется *плотностью дисперсии*. Тогда при $\Delta\lambda \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$) сумма (6.1.21) перейдет в интеграл по области Λ , и мы получим выражение для корреляционной функции с. п. $X(t)$:

$$K_x(t, t') = \int_{(\Lambda)} \varphi(\lambda, t) \varphi(\lambda, t') G(\lambda) d\lambda. \quad (6.1.23)$$

Осталось выяснить, какими свойствами обладает случайная функция $Z(\lambda)$ в (6.1.17). Очевидно, что случайная функция $Z(\lambda)$ является центрированной:

$$M[Z(\lambda)] = 0. \quad (6.1.24)$$

Это вытекает из того, что для любой сколь угодно малой величины $\Delta\lambda$ случайная величина $V_\lambda/\Delta\lambda$ является центрированной.

Корреляционная функция $K_z(\lambda, \lambda')$ случайной функции $Z(\lambda)$ при $\lambda \neq \lambda'$ должна быть равна нулю:

$$K_z(\lambda, \lambda') = 0 \quad (\lambda \neq \lambda'). \quad (6.1.25)$$

Это следует из того, что случайные величины $V_\lambda/\Delta\lambda$ и $V_{\lambda'}/\Delta\lambda$ не коррелированы при любом сколь угодно малом значении величины $\Delta\lambda$ и $\lambda \neq \lambda'$.

Покажем, что корреляционная функция $K_z(\lambda, \lambda')$ определяется из выражения

$$K_z(\lambda, \lambda') = G(\lambda) \delta(\lambda - \lambda'), \quad (6.1.26)$$

где $G(\lambda)$ — плотность дисперсии (см. 6.1.22), $\delta(x)$ — дельта-функция (см. приложение 6 в [5]).

Для доказательства этого утверждения достаточно показать справедливость формулы (6.1.23) при условии, что корреляционная функция случайной функции $Z(\lambda)$ определяется по формуле (6.1.26).

По определению $K_x(t, t') = M[\overset{0}{X}(t) \overset{0}{X}(t')]$. В соответствии с равенством (6.1.19) центрированный с. п. $\overset{0}{X}(t)$ может быть записан в виде

$$\overset{0}{X}(t) = \int_{(\Lambda)} Z(\lambda) \varphi(\lambda, t) d\lambda,$$

откуда

$$K_x(t, t') = M \left[\left(\int_{(\Lambda)} Z(\lambda) \varphi(\lambda, t) d\lambda \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\int_{(\Lambda)} Z(\lambda') \varphi(\lambda', t') d\lambda' \right) \right].$$

Так как области интегрирования одинаковые, то последнее выражение можно переписать в виде

$$K_x(t, t') = M \left[\int_{(\Lambda)} \int_{(\Lambda)} \varphi(\lambda, t) \varphi(\lambda', t') Z(\lambda) Z(\lambda') d\lambda d\lambda' \right].$$

Допустим, что двумерный закон распределения $f_x(z, z', \lambda, \lambda')$ случайной функции $Z(\lambda)$ известен; тогда

$$K_x(t, t') = \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{(\Lambda)} \int_{(\Lambda)} \varphi(\lambda, t) \varphi(\lambda', t') z z' d\lambda d\lambda' \right\} \times \\ \times f_x(z, z', \lambda, \lambda') dz dz'.$$

Переменим порядок интегрирования:

$$K_x(t, t') = \int_{(\Lambda)} \int_{(\Lambda)} \varphi(\lambda, t) \varphi(\lambda', t') \times \\ \times \left[\iint_{-\infty}^{\infty} z z' f_x(z, z', \lambda, \lambda') dz dz' \right] d\lambda d\lambda'.$$

Внутренний интеграл по определению представляет собой корреляционную функцию $K_x(\lambda, \lambda')$ слу-

чайной функции $Z(\lambda)$. Воспользуемся для этой функции выражением (6.1.26); получим

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \int_{(\Lambda)} \int_{(\Lambda)} \varphi(\lambda, t) \varphi(\lambda', t') G(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') d\lambda d\lambda' = \\ &= \int_{(\Lambda)} \varphi(\lambda, t) G(\lambda) \left[\int_{(\Lambda)} \varphi(\lambda', t') \delta(\lambda - \lambda') d\lambda' \right] d\lambda. \end{aligned}$$

В соответствии со свойством 4 дельта-функции (см. приложение 6 в [5])

$$\int_{(\Lambda)} \varphi(\lambda', t') \delta(\lambda - \lambda') d\lambda' = \varphi(\lambda, t'),$$

следовательно,

$$K_x(t, t') = \int_{(\Lambda)} \varphi(\lambda, t) \varphi(\lambda, t') G(\lambda) d\lambda,$$

что совпадает с выражением (6.1.23). Таким образом, мы показали, что выражение (6.1.26) удовлетворяет свойствам корреляционной функции случайной функции $Z(\lambda)$.

Дисперсию с.п. $X(t)$, заданного своим интегральным каноническим представлением, найдем, положив в формуле (6.1.23) $t = t'$:

$$D_x(t) = K_x(t, t) = \int_{(\Lambda)} \varphi^2(\lambda, t) G(\lambda) d\lambda. \quad (6.1.27)$$

Приведенное построение интегрального канонического представления не является математическим доказательством возможности построения такого представления для любого случайного процесса, однако они расширяют наши знания о структуре процесса. В главе 7 будет показано, как получать интегральные канонические представления для одного важного класса случайных процессов — стационарных случайных процессов.

Случайная функция $Z(\lambda)$, у которой корреляционная функция равна произведению неслучайной функции $G(\lambda)$ на дельта-функцию разности аргументов λ и λ' ($K_x(\lambda, \lambda') = G(\lambda) \delta(\lambda - \lambda')$), называется *нестационарным «белым шумом»*. Если функция $G(\lambda)$ не

зависит от λ ($G(\lambda) = G = \text{const}$), то $K(\lambda, \lambda') = G\delta(\lambda - \lambda')$, и случайная функция называется *стационарным «белым шумом»*. Для случайного процесса, представляющего собой «белый шум» (стационарный или нестационарный), характерно следующее:

$$K_x(\lambda, \lambda') = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda \neq \lambda', \\ \infty & \text{при } \lambda = \lambda'. \end{cases}$$

Это вытекает из свойств дельта-функции. Более подробно о «белом шуме» мы расскажем в гл. 7.

6.2. Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов

В инженерной практике часто возникает следующая задача. На вход системы S подается с.п. $X(t)$ — «входной сигнал» или «входное воздействие» (рис. 6.2.1). Система S осуществляет преобразование

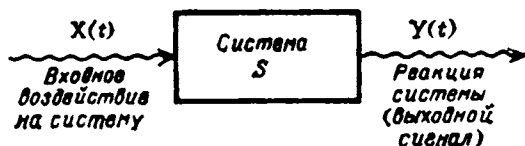


Рис. 6.2.1

входного сигнала $X(t)$, в результате чего на выходе системы S получается с.п. $Y(t)$, называемый «реакцией системы» S (или «выходным сигналом» системы S).

Например, при полете самолета в качестве входного воздействия $X(t)$ на самолет (систему S) можно рассматривать колебания плотности атмосферы, а в качестве выходного сигнала $Y(t)$ — колебания самолета относительно его центра масс.

Другой пример: рассматривается система S , в которой проводится эксплуатация однородных технических устройств (ТУ) (например автомашин). В качестве входного воздействия $X(t)$ рассматривается число введенных (на момент времени t) в эксплуатацию ТУ, а в качестве реакции системы $Y(t)$ — число эксплуатируемых в момент t технических устройств ($X(t) \geq Y(t)$, так как часть ТУ может выйти из строя).

При эксплуатации ЭВМ в качестве входного воздействия можно рассматривать напряжение силового питания $X(t)$, подаваемого на вход стабилизатора напряжения, а в качестве выходного сигнала $Y(t)$ — напряжение на выходе стабилизатора.

В общем случае в качестве входного воздействия на систему S может рассматриваться векторный с. п. $\vec{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$, когда на вход системы S подается n с. п. (см. рис. 6.2.2), на выходе

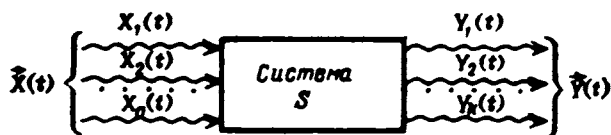


Рис. 6.2.2

системы S получают тоже векторный случайный процесс $\vec{Y}(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_k(t)\}$. Размерности векторных случайных процессов $\vec{X}(t)$ и $\vec{Y}(t)$ могут и не совпадать ($k \neq n$).

Символически преобразование случайного процесса $X(t)$, поступающего на вход системы S (рис. 6.2.1), в выходной сигнал $Y(t)$ можно записать в виде

$$Y(t) = A_t \{X(t)\}, \quad (6.2.1)$$

где A_t — оператор системы S .

Индекс t означает, что этот оператор осуществляет преобразование случайного процесса по аргументу t , обычно имеющему смысл времени.

Заметим, что понятие оператора A_t системы S значительно шире понятия функции. Например, запись $y = f(x)$ (y есть функция x) означает, что каждому значению аргумента x (из области его возможных значений) по определенному правилу (алгоритму) ставится в соответствие значение функции y . Таким образом, число x преобразуется в число y .

Понятие оператора A_t несколько иное. Запись $y(t) = A_t \{x(t)\}$ (функция $y(t)$ является результатом преобразования функции $x(t)$ оператором A_t) означает, что каждой функции $x(t)$ по определенному правилу (алгоритму) ставится в соответствие функция $y(t)$.

Например: $x(t) = \cos \omega t$; оператор A , является оператором дифференцирования $A = \frac{d}{dt}$. тогда

$$y(t) = A \{ \cos \omega t \} = \frac{d}{dt} \cos \omega t = -(\sin \omega t) \omega.$$

Ниже будут рассматриваться различные операторы: оператор интегрирования, оператор решения дифференциальных уравнений, оператор возведения в квадрат, оператор суммирования, оператор умножения и др.

При исследовании преобразования (6.2.1) в инженерной практике могут иметь место две задачи: *прямая* и *обратная*.

Прямая задача ставится так: известны характеристики (или законы распределения) с. п. $X(t)$ на входе в систему S , известен оператор A , системы S ; требуется определить характеристики (или законы распределения) с. п. $Y(t)$ на выходе системы S .

Обратная задача ставится несколько иначе: известны характеристики (или законы распределения) с. п. $X(t)$ на входе в систему S ; заданы требования к характеристикам (или законам распределения) с. п. $Y(t)$ на выходе системы S ; требуется определить вид оператора A , системы S , наилучшим образом удовлетворяющий заданным требованиям к с. п. $Y(t)$.

Необходимо отметить, что решение прямой задачи намного проще, чем обратной. Решение обратной задачи находит широкое применение при проектировании различных технических устройств, так как оно дает возможность обосновать требования к оператору A , системы S . Другими словами, решение обратной задачи дает возможность сформулировать требования к проектируемому техническому устройству.

В соотношении (6.2.1) есть три элемента: входное воздействие на систему $X(t)$, оператор A , и реакция системы $Y(t)$. Если известны какие-либо два элемента, можно определить третий: 1) зная характеристики входного воздействия $X(t)$ и оператор системы A , можно определить характеристики реакции системы $Y(t)$ (*прямая задача*); 2) зная характеристики входного воздействия $X(t)$ и требования к характеристикам реакции системы $Y(t)$, можно определить оператор системы A , (*обратная задача*)

Иногда в инженерной практике возникает и третья задача: зная характеристики реакции системы $Y(t)$ и оператор системы A_t , определить характеристики входного воздействия $X(t)$. Примером третьей задачи может быть следующая инженерная проблема: с.п. $X(t)$ изучается (измеряется) с помощью оператора системы A_t , который нам известен. Результат такого измерения $Y(t)$ также известен. Требуется определить характеристики с.п. $X(t)$.

Модификацией обратной задачи является задача идентификации оператора системы A_t , которая ставится следующим образом: зная характеристики входного воздействия $X(t)$ и характеристики реакции системы $Y(t)$, определить оператор системы A_t , т.е. найти различные параметры, определяющие оператор системы A_t .

Преобразование векторного с.п. $\vec{X}(t)$ размерности n можно символически записать так (см. рис. 6.2.2):

$$Y_i(t) = A_i^{(1)}\{\vec{X}(t)\} = A_i^{(1)}\{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\} \\ (i = 1, 2, \dots, k). \quad (6.2.2)$$

Другими словами, i -я составляющая $Y_i(t)$ векторного с.п. $\vec{Y}(t)$ получается в результате преобразования оператором $A_i^{(1)}$ векторного с.п. $\vec{X}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Пример такого преобразования может быть следующий:

$$Y_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)}(t) X_j(t) + b^{(1)}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (6.2.3)$$

Перейдем к анализу различных операторов. Все множество операторов A можно разделить на два непересекающихся подмножества L и N ($A = L + N$; $L \cdot N = \emptyset$). Подмножество L состоит из *линейных операторов*, а подмножество N — из *нелинейных операторов*. В свою очередь, подмножество линейных операторов L можно разделить на два непересекающихся подмножества: L_0 — *линейных однородных операторов* и L_n — *линейных неоднородных операторов* (рис. 6.2.3).

Оператор L_0 называется *линейным однородным*, если он обладает следующими двумя свойствами:

1°. Линейный однородный оператор от суммы функций равен сумме линейных однородных операторов от каждой функции, входящей в сумму:

$$L_0 \left\{ \sum_{i=1}^n x_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n L_0 \{x_i(t)\}. \quad (6.2.4)$$

Другими словами, знак линейного однородного оператора L_0 и знак суммы $\sum$ можно менять местами.

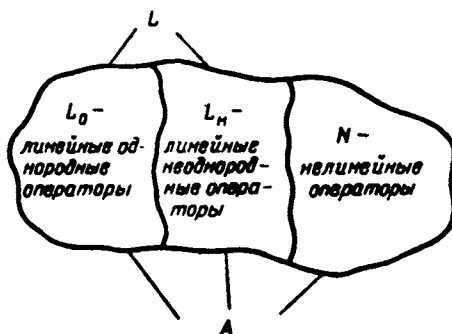


Рис. 6.2.3

2°. Постоянную величину (не зависящую от переменной, по которой проводится преобразование) можно выносить за знак оператора L_0 :

$$L_0 \{cx(t)\} = cL_0 \{x(t)\}. \quad (6.2.5)$$

Из этих двух свойств следует, что

$$L_0 \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n a_i L_0 \{x_i(t)\}, \quad (6.2.6)$$

в частности, если $n = 1$ и $a_1 = 0$, то

$$L_0 \{0\} = 0, \quad (6.2.7)$$

т. е. если входное воздействие отсутствует, то и реакция системы равна нулю.

Оператор L_n называется *линейным неоднородным*, если он состоит из линейного однородного оператора

и некоторой вполне определенной неслучайной функции $\varphi(t)$:

$$L_{\pi}\{x(t)\} = L_0\{x(t)\} + \varphi(t). \quad (6.2.8)$$

Пример 1. Указать, к какому виду относятся следующие операторы:

$$1) y(t) = a(t) \frac{dx(t)}{dt} \quad (\text{оператор дифференцирования}),$$

$$2) y(t) = a(t) \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (\text{оператор интегрирования}),$$

$$3) y(t) = \int_0^t \psi(\tau) x(\tau) d\tau \quad (\text{оператор интегрирования}$$

с определенным «весом» $\psi(t)$).

4) $y(t) = a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$ (оператор дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами),

$$5) y(t) = a(t) \frac{dx(t)}{dt} + \varphi_1(t),$$

$$6) y(t) = a(t) \int_0^t \psi(\tau) x(\tau) d\tau + \varphi_2(t),$$

$$7) y(t) = \varphi(t) x(t) + \varphi_3(t).$$

Решение. Операторы 1)–4) являются линейными однородными, так как оба свойства (6.2.4), (6.2.5) выполняются. Например, оператор 4) может применяться к сумме почленно:

$$\begin{aligned} y(t) &= a_2 \frac{d^2 (x_1(t) + x_2(t))}{dt^2} + a_1 \frac{d (x_1(t) + x_2(t))}{dt} + \\ &+ a_0 (x_1(t) + x_2(t)) = a_2 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + \\ &+ a_0 x_1(t) + a_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + a_0 x_2(t) = \\ &= y_1(t) + y_2(t); \end{aligned}$$

не зависящую от t величину c можно вынести за знак оператора:

$$a_2 \frac{d^2 (cx(t))}{dt^2} + a_1 \frac{d (cx(t))}{dt} + a_0 cx(t) = cy(t).$$

Отметим, что если в операторе 4) коэффициенты будут зависеть от времени: $a_2(t)$, $a_1(t)$, $a_0(t)$, то оператор остается линейным однородным.

Операторы 5), 6), 7) являются линейными неоднородными, так как они содержат слагаемые $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ соответственно. Если эти слагаемые положить равными нулю, то операторы 5), 6), 7) станут линейными однородными.

Пример 2. Указать, к какому виду относятся следующие операторы:

- 1) $y(t) = \cos x(t) + \varphi(t)$,
- 2) $y(t) = a(t)x^3(t)$,
- 3) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + \sin x(t)$,
- 4) $y(t) = e^{-\lambda(t)}x(t)$.

Решение. Все указанные операторы являются нелинейными, так как не выполняются ни условия (6.2.4), (6.2.5), ни условие (6.2.8). ►

Будем называть систему *нелинейной* и обозначать ее S_N , если оператор этой системы является нелинейным (N). Если оператор системы линейный (L), то систему будем называть *линейной* и обозначать S_L .

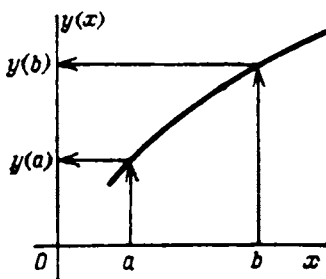


Рис. 6.2.4

Линейные системы S_L играют значительную роль в инженерных приложениях. Оператор системы S во многих случаях может быть либо строго линейным, либо линеаризуемым. На рис. 6.2.4 показана зависимость скорости вращения вала турбо-

реактивного двигателя в зависимости от количества подаваемого топлива x . В диапазоне «рабочих» значений величины $x \in (a, b)$ функция $y(x)$ может быть линеаризована или представлена рядом прямых (ломаной). Как увидим в дальнейшем, анализ линейных систем намного легче, чем анализ нелинейных систем.

Здесь имеется определенная аналогия с функциями случайных величин. Известно (см. п. 8.2*), что числовые характеристики линейной функции случайных

величин определяются через числовые характеристики аргументов. Если случайная величина

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + a_0,$$

то

$$M[Y] = m_y = \sum_{i=1}^n a_i m_i + a_0,$$

$$D[Y] = D_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K_{ij},$$

где $m_i = M[X_i]$, $K_{ij} = M[\overset{0}{X}_i \overset{0}{X}_j]$.

В п. 6.1 было указано, что с.п. $X(t)$ может быть с достаточной точностью представлен своим каноническим разложением

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \Phi_k(t). \quad (6.2.9)$$

Этот с.п. подается на вход линейной системы S_L , имеющей линейный неоднородный оператор $L_n\{\cdot\}$

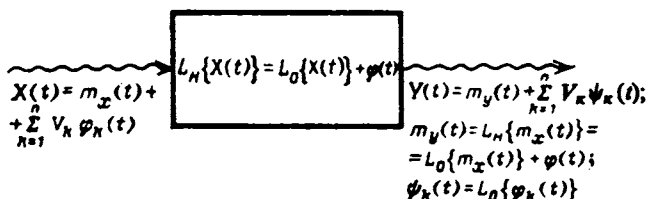


Рис. 6.2.5

(рис. 6.2.5). Следовательно, с.п. $X(t)$ подвергнется линейному неоднородному преобразованию (6.2.8):

$$\begin{aligned} Y(t) &= L_n\{X(t)\} = L_0\{X(t)\} + \varphi(t) = \\ &= L_0\left\{m_x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \Phi_k(t)\right\} + \varphi(t). \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

В соответствии с первым свойством линейного однородного оператора (6.2.4) получаем:

$$Y(t) = L_n\{X(t)\} = L_0\{m_x(t)\} + \sum_{k=1}^{\infty} L_0\{V_k \Phi_k(t)\} + \varphi(t).$$

Так как с. в. V_k не зависит от времени t , по которому проводится линейное однородное преобразование, то эту с. в. можно вынести за знак линейного однородного оператора:

$$Y(t) = L_n\{X(t)\} = L_0\{m_x(t)\} + \sum_{k=1}^{\infty} V_k L_0\{\Phi_k(t)\} + \Phi(t).$$

Обозначим

$$L_0\{\Phi_k(t)\} = \Psi_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6.2.11)$$

$$L_0\{m_x(t)\} = \Psi_0(t). \quad (6.2.12)$$

Тогда получим

$$Y(t) = L_n\{X(t)\} = \Psi_0(t) + \Phi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \Psi_k(t). \quad (6.2.13)$$

Выражение (6.2.13) представляет собой каноническое разложение с. п. $Y(t)$, у которого

1) математическое ожидание

$$\begin{aligned} m_y(t) = M[Y(t)] &= \Psi_0(t) + \Phi(t) = L_0\{m_x(t)\} + \Phi(t) = \\ &= L_n\{m_x(t)\}, \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

2) координатные функции определяются из выражения (6.2.11),

3) коэффициенты разложения V_k ($k = 1, 2, \dots$) остались без изменения; следовательно,

$$Y(t) = L_n\{X(t)\} = m_y(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \Psi_k(t). \quad (6.2.15)$$

Таким образом, можно сформулировать следующее правило неоднородного линейного преобразования с. п., заданного своим каноническим разложением (6.2.9) (см. рис. 6.2.5). Если случайный процесс, заданный своим каноническим разложением $X(t) =$

$= m_x(t) + \sum_{k=1}^n V_k \Phi_k(t)$, подвергнут линейному неоднородному преобразованию $L_n\{\cdot\}$, то получится случайный процесс тоже в виде канонического разложения:

$$Y(t) = L_n\{X(t)\} = m_y(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \Psi_k(t),$$

при этом математическое ожидание с. п. $Y(t)$ получается в результате того же линейного неоднородного

преобразования математического ожидания случайного процесса $X(t)$:

$$m_y(t) = L_u \{m_x(t)\};$$

а координатные функции канонического разложения случайного процесса $Y(t)$ получаются в результате соответствующего линейного однородного преобразования координатных функций канонического разложения случайного процесса $X(t)$: $\psi_k(t) = L_o \{\varphi_k(t)\}$ (коэффициенты канонического разложения с.п. $Y(t)$ остаются теми же, что коэффициенты канонического разложения с.п. $X(t)$).

Так как с.п. $Y(t)$ представлен своим каноническим разложением (6.2.15), то его корреляционная функция может быть также представлена каноническим разложением (см. (6.1.10))

$$K_y(t, t') = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \psi_k(t') D_k. \quad (6.2.16)$$

Но в соответствии с равенствами (6.2.11) выражение (6.2.16) можно записать в виде

$$K_y(t, t') = \sum_{k=1}^{\infty} L_{o_t} \{\varphi_k(t)\} L_{o_{t'}} \{\varphi_k(t')\} D_k. \quad (6.2.17)$$

В этом выражении $L_{o_t} \{\varphi_k(t)\}$ означает, что линейный однородный оператор $L_o \{\cdot\}$ берется по аргументу t , а $L_{o_{t'}} \{\varphi_k(t')\}$ — по аргументу t' .

Применяя к выражению (6.2.17) первое свойство линейного однородного оператора (6.2.4), получим

$$K_y(t, t') = L_{o_t} \left\{ L_{o_{t'}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) \varphi_k(t') D_k \right\} \right\}.$$

Выражение, стоящее под знаком суммы, представляет собой корреляционную функцию с.п. $X(t)$, следовательно,

$$K_y(t, t') = L_{o_t} \{L_{o_{t'}} \{K_x(t, t')\}\}.$$

Так как к.ф. симметрична относительно своих аргументов, то

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= L_{o_t} \{L_{o_{t'}} \{K_x(t, t')\}\} = \\ &= L_{o_{t'}} \{L_{o_t} \{K_x(t, t')\}\}. \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

Таким образом, корреляционную функцию $K_y(t, t')$ случайного процесса $Y(t)$, полученного в результате линейного неоднородного преобразования случайного процесса $X(t)$: $Y(t) = L_n\{X(t)\}$, можно найти в результате соответствующего двойного линейного однородного преобразования корреляционной функции $K_x(t, t')$ случайного процесса $X(t)$, взятого сначала по аргументу t , а затем — по t' (или наоборот).

Так как дисперсия $D_y(t)$ с. п. $Y(t)$ равна его к. ф. при равенстве аргументов, то

$$D_y(t) = K_y(t, t) = \lim_{t \rightarrow t'} L_{0t} \{L_{0t'} \{K_x(t, t')\}\}. \quad (6.2.19)$$

Следовательно, дисперсия $D_y(t)$ случайного процесса $Y(t)$, полученного в результате линейного неоднородного преобразования случайного процесса $X(t)$: $Y(t) = L_n\{X(t)\}$, получается в результате двукратного применения соответствующего линейного однородного преобразования к к. ф. $K_x(t, t')$ и затем нахождения предела полученного выражения при $t \rightarrow t'$.

Таким образом, схема решения задачи линейного преобразования с. п. $X(t)$ следующая: даны характеристики преобразуемого с. п. $X(t)$ (м. о. $m_x(t)$ и к. ф. $K_x(t, t')$), задано линейное неоднородное преобразование

$$Y(t) = L_n\{X(t)\} = L_o\{X(t)\} + \varphi(t).$$

Требуется найти характеристики с. п. $Y(t)$ (м. о. $m_y(t)$ и к. ф. $K_y(t, t')$).

В соответствии с равенствами (6.2.14) и (6.2.18) получаем

$$\begin{aligned} Y(t) &= L_n\{X(t)\} = L_o\{X(t)\} + \varphi(t), \\ m_y(t) &= L_n\{m_x(t)\} = L_o\{m_x(t)\} + \varphi(t), \\ K_y(t, t') &= L_{0t} \{L_{0t'} \{K_x(t, t')\}\}. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Схема решения этой задачи изображена на рис. 6.2.5.

Особо отметим, что указанная схема имеет место как для случая, когда с. п. $X(t)$ задан своим каноническим разложением, так и для случая, когда неизвестно каноническое разложение с. п. $X(t)$. Это следует из того, что практически любой с. п. может быть

с достаточной точностью представлен своим каноническим разложением.

Задача 1. Дифференцирование случайного процесса. Даны характеристики с.п. $X(t)$: $m_x(t)$ и $K_x(t, t')$; с.п. $X(t)$ подвергается дифференцированию:

$$Y(t) = \frac{d}{dt} X(t). \quad (6.2.21)$$

Требуется найти характеристики процесса $Y(t)$.

Решение. Операция дифференцирования является линейной однородной, следовательно,

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt}, \quad K_y(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t'), \quad (6.2.22)$$

$$D_y(t) = \lim_{t \rightarrow t'} K_y(t, t').$$

Пример 3. Найти характеристики производной с.п. $X(t) = Vt + a$, рассмотренного в примере 4 из п. 1.2 (где введены несколько иные обозначения).

Решение. В примере 4 из п. 1.2 были найдены характеристики с.п. $X(t)$: $m_x(t) = m_0 t + a$, $K_x(t, t') = \sigma_0^2 t t'$, где $m_0 = M[V]$, $\sigma_0^2 = M[V^2]$.

Случайный процесс $Y(t)$ есть производная с.п. $X(t)$: $Y(t) = \frac{d}{dt} X(t)$, значит,

$$m_y = \frac{d}{dt} m_x(t) = \frac{d}{dt} (m_0 t + a) = m_0 = \text{const},$$

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} \sigma_0^2 t t' = \sigma_0^2 = \text{const},$$

$$D_y(t) = \lim_{t \rightarrow t'} K_y(t, t') = \sigma_0^2 = \text{const}.$$

Таким образом, с.п. $Y(t) = V$. Это следует непосредственно из того, что

$$Y(t) = \frac{d}{dt} X(t) = \frac{d}{dt} (Vt + a) = V.$$

Пример 4. Найти характеристики производной с.п. $X(t) = W e^{-Vt}$, где с.в. W распределена нормально с параметрами m_w , σ_w , а с.в. V распределена равномерно в интервале $(0, a)$; $t > 0$, $a > 0$, с.в. W , V независимы.

Решение. Найдем характеристики с. п. $X(t)$:

$$m_x(t) = M[W e^{-Vt}] = M[W] M[e^{-Vt}] = \\ = m_w \int_0^a e^{-ut} \frac{du}{a} = m_w \frac{1 - e^{-at}}{at}.$$

$$M[X(t) X(t')] = M[W^2 e^{-Vt} e^{-Vt'}] = \\ = (\sigma_w^2 + m_w^2) \frac{1 - e^{-a(t+t')}}{a(t+t')}.$$

$$K_x(t, t') = M[X(t) X(t')] - m_x(t) m_x(t') = \\ = (\sigma_w^2 + m_w^2) \frac{1 - e^{-a(t+t')}}{a(t+t')} - m_w^2 \frac{(1 - e^{-at})(1 - e^{-at'})}{a^2 t t'}.$$

Отсюда

$$m_y(t) = \frac{d}{dt} m_x(t) = \frac{m_w}{a} \frac{1 - e^{-at}(1 + at)}{t^2} (-1).$$

Находим корреляционную функцию производной:

$$K_y(t, t') = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t'} K_x(t, t') \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\sigma_w^2 + m_w^2}{a} \frac{1 - e^{-a(t+t')} - (t+t')ae^{-a(t+t')}}{-(t+t')^2} - \right. \\ \left. - \frac{m_w^2}{a^2 t} \frac{(1 - e^{-at})(1 - e^{-at'} - t'ae^{-at'})}{-(t')^2} \right\} = \\ = \frac{\sigma_w^2 + m_w^2}{a} \left\{ \frac{a^2 e^{-a(t+t')}}{t+t'} - \frac{2}{(t+t')^2} \times \right. \\ \times [a(t+t')e^{-a(t+t')} + e^{-a(t+t')} - 1] \Big\} - \\ - \frac{m_w^2}{a^2 (tt')^2} (ate^{-at} + e^{-at} - 1)(at'e^{-at'} + e^{-at'} - 1).$$

Полагая $t \rightarrow t'$, найдем

$$D_y = \frac{\sigma_w^2 + m_w^2}{a} \left\{ \frac{-2[1 - e^{-2at} - 2ate^{-2at}]}{(2t)^2} + \frac{a^2 e^{-2at}}{2t} \right\} - \\ - \frac{m_w^2}{a^2} \frac{(1 - e^{-at} - ate^{-at})^2}{t^4}.$$

Пример 5. Найти производную с. п. $X(t) = Y \cos(\psi t + \Theta)$, где с. в. Y распределена по закону Рэлея с параметром σ , а с. в. Θ распределена равно-

мерно в интервале $(0, 2\pi)$, ψ — неслучайный параметр, с. в. Y и Θ независимы.

Решение. В примере 7 из п. 1.2 было показано, что с. п. $X(t)$ имеет характеристики $m_x(t) = 0$, $K_x(t - t') = \sigma^2 \cos \psi(t - t')$, следовательно,

$$m_y(t) = \frac{dm_x(t)}{dt} = 0,$$

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t') = \sigma^2 \psi^2 \cos \psi(t - t'),$$

$$D_y(t) = \lim_{t \rightarrow t'} K_y(t, t') = \sigma^2 \psi^2.$$

Задача 2. Интегрирование случайного процесса. Даны характеристики с. п. $X(t)$: $m_x(t)$ и $K_x(t, t')$. Случайный процесс $Y(t)$ получается в результате интегрирования с. п. $X(t)$:

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau.$$

Требуется найти характеристики с. п. $Y(t)$.

Решение. Операция интегрирования является линейной однородной, поэтому

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau, \quad K_y(t, t') = \int_0^t \left(\int_0^{t'} K_x(\tau, \tau') d\tau' \right) d\tau, \quad (6.2.23)$$

$$D_y(t) = \int_0^t \left(\int_0^t K_x(\tau, \tau') d\tau' \right) d\tau.$$

Пример 6. С. п. $X(t)$ задан в виде своего канонического разложения

$$X(t) = t^2 + \sum_{k=1}^n V_k e^{-\alpha_k t} \quad (t > 0),$$

где V_k — центрированные некоррелированные с. в. с дисперсиями D_k ($k = 1, 2, \dots, n$), $\alpha_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), с. п. $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$; определить его характеристики ($t > 0$).

Решение. Применим формулы (6.2.23)

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau = \int_0^t \tau^2 d\tau = t^3/3 \quad (t > 0).$$

Найдем корреляционную функцию с. п. $X(t)$. По формуле (6.1.10) получим

$$K_x(t, t') = \sum_{k=1}^n e^{-a_k(t+t')} D_k.$$

Найдем двойной интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_0^{t'} e^{-a_k(\tau+\tau')} d\tau' \right) d\tau &= \int_0^t e^{-a_k\tau} d\tau \int_0^{t'} e^{-a_k\tau'} d\tau' = \\ &= (1 - e^{-a_k t}) (1 - e^{-a_k t'}) / a_k^2 \quad (t > 0, t' > 0). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= \int_0^t \left(\int_0^{t'} K_x(t, t') dt \right) dt = \\ &= \int_0^t \left(\int_0^{t'} \sum_{k=1}^n e^{-a_k(\tau+\tau')} D_k d\tau' \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^n D_k \int_0^t \left(\int_0^{t'} e^{-a_k(\tau+\tau')} d\tau' \right) d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(1 - e^{-a_k t}) (1 - e^{-a_k t'})}{a_k^2} D_k. \end{aligned}$$

Каноническое разложение с. п. $Y(t)$ будет иметь вид

$$Y(t) = \frac{t^3}{3} + \sum_{k=1}^n V_k \frac{1 - e^{-a_k t}}{a_k} \quad (t > 0). \blacktriangleright$$

Перейдем к анализу нелинейного преобразования с. п. $X(t)$, заданного своим каноническим разложением:

$$Y(t) = N_t \{X(t)\} = N_t \left\{ m_x(t) + \sum_{k=1}^n V_k \varphi_k(t) \right\},$$

где $N_t \{X(t)\}$ — нелинейный оператор от функции $X(t)$ по аргументу t .

Нелинейные операторы $N_i\{X(t)\}$ не обладают общими свойствами, которыми обладают линейные операторы $L_i\{X(t)\}$ (см. (6.2.4) — (6.2.8)). Каждый нелинейный оператор $N_i\{X(t)\}$ обладает своими свойствами. Поэтому общих правил нахождения характеристик с. п., полученного в результате преобразования с. п. $X(t)$ нелинейной системой S_N , нет.

Однако и в этом случае можно утверждать, что с. п. $Y(t)$ на выходе нелинейной системы S_N тоже можно представить в виде канонического разложения, параметры которого: м. о. $m_y(t)$, координатные функции $\varphi_k(t)$ и коэффициенты разложения будут зависеть от параметров канонического разложения случайной функции $X(t)$, подаваемой на вход нелинейной системы S_N и оператора этой системы $N_i\{X(t)\}$. Это утверждение следует из того, что с достаточной точностью любой случайный процесс можно представить в виде канонического разложения. Покажем справедливость этого утверждения для некоторых нелинейных операторов.

Задача 3. Квадратичное преобразование с. п. $X(t)$, заданного своим каноническим разложением

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^n V_k \varphi_k(t).$$

Требуется найти характеристики с. п. $Y(t) = (X(t))^2$.

На случайные величины V_k ($k = 1, 2, \dots, n$) накладываются дополнительные ограничения: любые четыре из этих величин независимы (также независимы любая тройка и пара), а распределения этих величин симметричны относительно математического ожидания (например, нормальный закон, закон равнобедренного треугольника, равномерное распределение при условии, что м. о. равно нулю).

Решение. В соответствии с условиями задачи имеем:

$$\begin{aligned} Y(t) = X(t)^2 &= \left(m_x(t) + \sum_{k=1}^n V_k \varphi_k(t) \right)^2 = \\ &= m_x^2(t) + 2 \sum_{k=1}^n V_k \varphi_k(t) m_x(t) + \sum_{k=1}^n V_k^2 \varphi_k^2(t) + \\ &\quad + \sum_{k < l} V_k V_l 2 \varphi_k(t) \varphi_l(t). \quad (6.2.24) \end{aligned}$$

Найдем м. о. случайного процесса $Y(t)$:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M[(m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t))^2] = m_x^2(t) + \\ + 2m_x(t) M[\overset{\circ}{X}(t)] + M[\overset{\circ}{X}^2(t)] = m_x^2(t) + D_x(t)$$

Так как с. п. $X(t)$ задан своим каноническим разложением, то

$$m_y(t) = m_x^2(t) + D_x(t) = m_x^2(t) + \sum_{k=1}^n D_k \varphi_k^2(t). \quad (6.2.25)$$

Вычтем из выражения (6.2.24) математическое ожидание, определяемое по формуле (6.2.25):

$$\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = \sum_{k=1}^n V_k 2m_x(t) \varphi_k(t) + \\ + \sum_{k=1}^n (V_k^2 - D_k) \varphi_k^2(t) + \sum_{k < l} V_k V_l 2\varphi_k(t) \varphi_l(t). \quad (6.2.26)$$

Введем обозначения

$$2m_x \varphi_k(t) = \psi_k(t), \quad \varphi_k^2(t) = v_k(t), \quad 2\varphi_k(t) \varphi_l(t) = \varphi_{k,l}(t), \quad (6.2.27)$$

$$V_k^2 - D_k = U_k, \quad V_k V_l = W_{k,l}.$$

С учетом принятых обозначений получим:

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=1}^n V_k \psi_k(t) + \sum_{k=1}^n U_k v_k(t) + \sum_{k < l} W_{k,l} \varphi_{k,l}(t). \quad (6.2.28)$$

Покажем, что выражение (6.2.28) представляет собой каноническое разложение центрированного с. п. $\overset{\circ}{Y}(t)$ (см. (6.1.8)).

Для этого достаточно показать, что с. в. V_k , U_k , $W_{k,l}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $k \neq l$, являются центрированными и некоррелированными

$$1) M[V_k] = 0, \quad M[V_k V_l] = 0, \quad D[V_k] = D_k$$

по условию задачи;

$$2) M[U_k] = M[V_k^2 - D_k] = D_k - D_k = 0,$$

$$M[U_k U_l] = M[(V_k^2 - D_k)(V_l^2 - D_l)] = \\ = M[V_k^2 - D_k] M[V_l^2 - D_l] = 0,$$

так как случайные величины V_k и V_l независимы;

$$3) M[W_{k,l}] = M[V_k V_l] = 0 \text{ по условию задачи;}$$

$$4) M[V_k U_l] = M[V_k (V_l^2 - D_l)] = 0,$$

так как случайные величины V_k и V_l независимы;

$$5) M[V_k U_k] = M[V_k (V_k^2 - D_k)] = M[V_k^3 - D_k V_k] = \\ = M[V_k^3] - D_k M[V_k] = 0,$$

так как закон распределения с. в. V_k симметричен относительно м. о. (в этом случае все нечетные центральные моменты равны нулю);

$$6) M[V_k W_{k,l}] = M[V_k^2 V_l] = 0 \text{ или } M[V_k W_{l,l}] = \\ = M[V_k V_l V_l] = 0,$$

так как с. в. V_k ($k = 1, 2, \dots, n$) независимы;

$$7) M[U_k W_{k,l}] = M[(V_k^2 - D_k) V_l V_l] = 0 \text{ или } \\ M[U_k W_{l,l}] = M[(V_k^2 - D_k) V_l V_l] = 0, \text{ так как любые}$$

три или две с. в. V_k ($k = 1, 2, \dots, n$) независимы;

$$8) M[W_{k,l} W_{l,l}] = M[V_k V_l V_l V_l] = 0, \text{ так как лю-}$$

бые четыре с. в. с разными индексами независимы.

Следовательно, корреляционная функция с. п. $Y(t)$ может быть представлена своим каноническим разложением:

$$K_y(t, t') = \sum_{k=1}^n D_k \psi_k(t) \psi_k(t') + \sum_{k=1}^n D_{U_k} \gamma_k(t) \gamma_k(t') + \\ + \sum_{k < l} D_{W_{k,l}} \varphi_{k,l}(t) \varphi_{k,l}(t'),$$

где

$$D_k = D[V_k], \\ D_{U_k} = D[U_k] = D[V_k^2 - D_k] = \\ = M[(V_k^2 - D_k)^2] = M[V_k^4] - D_k^2 = \mu_4^{(k)} - D_k^2, \\ D_{W_{k,l}} = D[W_{k,l}] = D[V_k V_l] = M[V_k^2 V_l^2] = D_k D_l.$$

(так как случайные величины V_k и V_l независимы).

Пример 7. На вход квадратичного детектора подается с. п. $X(t) = V \cos \psi t + U \sin \psi t$, где V и U некоррелированные, центрированные, нормально распределенные с. в. с дисперсиями $D[V] = D[U] = \sigma^2$

(см. пример 10 из п. 1.2). На выходе детектора получается с. п.

$$Y(t) = (X(t))^2.$$

Найти характеристики с. п. $Y(t)$.

Решение. В данном случае

$$\begin{aligned} D_1 = D_2 = \sigma^2, \quad D_{u_1} = D_{u_2} = M[(V^2 - \sigma^2)^2] = \\ = M[(U^2 - \sigma^2)^2] = \mu_4 - \sigma^4. \end{aligned}$$

Для нормального закона четвертый центральный момент будет равен $\mu_4 = 3\sigma^4$ (см. (6.3.13)*), следовательно, $D_{u_1} = D_{u_2} = 2\sigma^4$, $D_{w_{1,2}} = D_1 D_2 = \sigma^4$. Далее (см. (6.2.27)):

$$\begin{aligned} \psi_1(t) = \psi_2(t) = 0, \quad v_1(t) = \cos^2 \psi t, \quad v_2(t) = \sin^2 \psi t, \\ \varphi_{k,1}(t) = \varphi_{1,2}(t) = 2 \cos \psi t \sin \psi t. \end{aligned}$$

Следовательно, каноническое разложение с. п. $\overset{0}{Y}(t)$ будет иметь вид

$$\overset{0}{Y}(t) = U_1 \cos^2 \psi t + U_2 \sin^2 \psi(t) + W_{1,2} 2 \cos \psi t \sin \psi t,$$

откуда

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= 2\sigma^4 \cos^2 \psi t \cos^2 \psi t' + \\ &+ 2\sigma^4 \sin^2 \psi t \sin^2 \psi t' + 4\sigma^4 \cos \psi t \sin \psi t' = \\ &= 2\sigma^4 (\cos \psi t \cos \psi t' + \sin \psi t \sin \psi t')^2 = \\ &= 2\sigma^4 \cos^2 \psi(t - t') = 2(K_x(t, t'))^2, \end{aligned}$$

так как $K_x(t, t') = \sigma^2 \cos \psi(t - t')$ (см. пример 7 из п. 1.2);

$$D_y(t) = K_y(t, t) = 2\sigma^4 = 2D_x^2.$$

В соответствии с формулой (6.2.25)

$$m_y(t) = D_x = \sigma^2.$$

Пример 8 На вход квадратичного детектора подается с. п.

$$X(t) = \sum_{k=1}^n (V_k \cos \psi_k t + U_k \sin \psi_k t),$$

где V_k и U_k некоррелированные, центрированные, нормально распределенные с. в. с дисперсиями

$D[V_k] = D[U_k] = D_k = \sigma_k^2$. Найти характеристики с. п. $Y(t) = (X(t))^2$ на выходе детектора.

Решение. В соответствии с решением предыдущего примера имеем центрированный с. п.

$$\begin{aligned} \overset{0}{Y}(t) = \sum_{k=1}^n [(V_k^2 - \sigma_k^2) \cos^2 \psi_k(t) + \\ + 2V_k U_k \sin \psi_k t \cos \psi_k t + (U_k^2 - \sigma_k^2) \sin^2 \psi_k t], \end{aligned}$$

который представлен своим каноническим разложением; следовательно,

$$\begin{aligned} K_y(t, t') = 2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^4 \cos^2 \psi_k(t - t'), \quad D_y(t) = 2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^4, \\ m_y(t) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2. \end{aligned}$$

Если с. п. $X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^n (V_k \cos \psi_k t + U_k \sin \psi_k t)$, то каноническое разложение центрированного с. п. $\overset{0}{Y}(t)$ будет иметь вид (см. (6.2.27) и (6.2.28))

$$\begin{aligned} \overset{0}{Y}(t) = 2m_x(t) \sum_{k=1}^n (V_k \cos \psi_k t + U_k \sin \psi_k t) + \\ + \sum_{k=1}^n [(V_k^2 - \sigma_k^2) \cos^2 \psi_k t + 2V_k U_k \sin \psi_k t \cos \psi_k t + \\ + (U_k^2 - \sigma_k^2) \sin^2 \psi_k t]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K_y(t, t') = 2m_x(t) m_x(t') \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \cos \psi_k(t - t') + \\ + 2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^4 \cos^2 \psi_k(t - t'), \\ D_y(t) = 2m_x^2(t) \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^4, \\ m_y(t) = m_x^2(t) + \sum_{k=1}^n \sigma_k^2. \end{aligned}$$

6.3. Линейная форма векторного случайного процесса. Сложение случайных процессов

В п. 6.2 были рассмотрены линейные и нелинейные преобразования скалярного с. п. В этом пункте будет рассмотрено преобразование векторного с. п.:

$$\vec{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)\}.$$

Неоднородной линейной формой векторного случайного процесса $X(t)$ называется выражение

$$Y_n(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) X_i(t) + a_0(t). \quad (6.3.1)$$

Если $a_0(t) = 0$, то получаем *однородную линейную форму* векторного с. п. $X(t)$:

$$Y_0(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) X_i(t). \quad (6.3.2)$$

Известны характеристики векторного с. п. $\vec{X}(t)$:

1. Математическое ожидание векторного с. п. $\vec{X}(t)$

$$m_x(t) = \{m_1(t), m_2(t), \dots, m_k(t)\}, \quad (6.3.3)$$

где

$$m_i(t) = M[X_i(t)] \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (6.3.4)$$

2. Квадратная матрица размерности $(k \times k)$ взаимных корреляционных функций векторного с. п. $\vec{X}(t)$

$$\|R_{ij}(t, t')\|, \quad (6.3.5)$$

где

$$R_{ij}(t, t') = M[\overset{\circ}{X}_i(t) \overset{\circ}{X}_j(t')] \quad (i, j = 1, 2, \dots, k). \quad (6.3.6)$$

Требуется найти характеристики с. п. $Y_n(t)$ и $Y_0(t)$, определяемых по формулам (6.3.1) и (6.3.2) соответственно.

Заметим, что для фиксированного момента времени t выражение (6.3.1) является линейной функцией системы случайных величин $(X_1(t), \dots, X_k(t))$.

Следовательно, в соответствии с формулами (8.2.9)*, (8.2.13)* получаем

$$M[Y_n(t)] = m_{Y_n}(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) m_i(t) + a_0(t), \quad (6.3.7)$$

$$D[Y_n(t)] = D_{Y_n}(t) = \sum_{i=1}^k a_i^2(t) D_i(t) + \\ + 2 \sum_{i < j} a_i(t) a_j(t) K_{ij}(t), \quad (6.3.8)$$

где

$$D_i(t) = D[X_i(t)] = K_i(t, t), \quad (6.3.9)$$

$$K_{ij}(t) = M[\overset{0}{X}_i(t) \overset{0}{X}_j(t)]. \quad (6.3.10)$$

Но в соответствии со свойствами взаимной корреляционной функции, приведенными в п. 1.2 (см. (1.2.40) — (1.2.42)),

$$K_i(t, t) = M[\overset{0}{X}_i(t) \overset{0}{X}_i(t)] = R_{ii}(t, t), \quad (6.3.11)$$

$$K_{ij}(t) = R_{ij}(t, t). \quad (6.3.12)$$

Следовательно,

$$D[Y_n(t)] = \sum_{i=1}^k a_i^2(t) R_{ii}(t, t) + \\ + 2 \sum_{i < j} a_i(t) a_j(t) R_{ij}(t, t). \quad (6.3.13)$$

Короче, выражение (6.3.13) можно записать так:

$$D[Y_n(t)] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i(t) a_j(t) R_{ij}(t, t). \quad (6.3.14)$$

Если составляющие векторного случайного процесса $X(t)$ не коррелированы ($R_{ij}(t, t) = 0$ при $i \neq j$), то

$$D[Y_n(t)] = \sum_{i=1}^k a_i^2(t) R_{ii}(t, t) = \sum_{i=1}^k a_i^2(t) D_i(t). \quad (6.3.15)$$

Для отыскания корреляционной функции с.п. $Y_n(t)$ найдем центрированный с.п. $\overset{\circ}{Y}_n(t)$ (см. (6.3.1) и (6.3.7)):

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{Y}_n(t) &= Y_n(t) - m_{Y_n}(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) X_i(t) + a_0(t) - \\ &- \sum_{i=1}^k a_i(t) m_i(t) - a_0(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) \overset{\circ}{X}_i(t), \quad (6.3.16)\end{aligned}$$

где $\overset{\circ}{X}_i = X_i(t) - m_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

По определению корреляционной функции

$$\begin{aligned}K_{Y_n}(t, t') &= M[\overset{\circ}{Y}_n(t) \overset{\circ}{Y}_n(t')] = \\ &= M\left[\sum_{i=1}^k a_i(t) \overset{\circ}{X}_i(t) \sum_{j=1}^k a_j(t') \overset{\circ}{X}_j(t')\right] = \\ &= M\left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i(t) a_j(t') \overset{\circ}{X}_i(t) \overset{\circ}{X}_j(t')\right].\end{aligned}$$

Для фиксированных моментов t и t' получаем сумму с.в., к которой применяем теорему сложения математических ожиданий:

$$\begin{aligned}K_{Y_n}(t, t') &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i(t) a_j(t') M[\overset{\circ}{X}_i(t) \overset{\circ}{X}_j(t')] = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i(t) a_j(t') R_{ij}(t, t') = \sum_{i=1}^k a_i(t) a_i(t') R_{ii}(t, t') + \\ &+ \sum_{i \neq j} a_i(t) a_j(t') R_{ij}(t, t') = \sum_{i=1}^k a_i(t) a_i(t') K_i(t, t') + \\ &+ \sum_{i \neq j} a_i(t) a_j(t') R_{ij}(t, t'). \quad (6.3.17)\end{aligned}$$

Если составляющие с.п. $\vec{X}(t)$ не коррелированы, то

$$K_{Y_n}(t, t') = \sum_{i=1}^k a_i(t) a_i(t') K_i(t, t'). \quad (6.3.18)$$

Математическое ожидание с.п. $Y_0(t)$, определяемого формулой (6.3.2),

$$M[Y_0(t)] = m_{Y_0}(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) m_i(t). \quad (6.3.19)$$

Корреляционная функция

$$K_{y_0}(t, t') = K_{y_n}(t, t'). \quad (6.3.20)$$

Частным случаем линейной формы векторного с. п. $\vec{X}(t)$ является сумма его составляющих:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^k X_i(t). \quad (6.3.21)$$

В этом случае характеристики случайного процесса $Y(t)$ будут (см. (6.3.7) и (6.3.17)) равны:

$$m_y(t) = \sum_{i=1}^k m_i(t), \quad K_y(t, t') = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k R_{ij}(t, t'), \quad (6.3.22)$$

т. е. м. о. $m_y(t)$ равно сумме м. о., составляющих векторного с. п. $\vec{X}(t)$, а корреляционная функция — сумме всех элементов взаимной корреляционной матрицы этого векторного с. п. $\vec{X}(t)$.

Если составляющие векторного с. п. $\vec{X}(t)$ не коррелированы, то (см. (6.3.18))

$$K_y(t, t') = \sum_{i=1}^k K_i(t, t'), \quad (6.3.23)$$

т. е. корреляционная функция суммы некоррелированных случайных процессов равна сумме корреляционных функций этих случайных процессов.

Пример 1. «Производственная функция» отрасли (предприятия) может быть представлена приближенной формулой

$$Y(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) X_i(t), \quad (6.3.24)$$

где $Y(t)$ — количество выпускаемой отраслью продукции на момент времени t , $X_1(t)$ — трудовые ресурсы отрасли на момент времени t , $X_2(t)$ — основные фонды отрасли на момент времени t и т. д., $a_1(t)$, $a_2(t)$, ..., $a_k(t)$ — переменные коэффициенты, которые известны. Известны также характеристики с. п. $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_k(t)$: $m_1(t)$, $m_2(t)$, ..., $m_k(t)$ и взаимная корреляционная матрица $\|R_{ij}(t, t')\|$. Требуется определить характеристики случайного процесса $Y(t)$.

Решение. Производственная функция отрасли представляет собой линейную форму векторного с. п.

$\tilde{X}(t)$, составляющие которого $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_k(t)$ представляют различного вида ресурсы, имеющиеся в распоряжении отрасли.

Следовательно, по формулам (6.3.19), (6.3.20), (6.3.7) и (6.3.17) находим

$$M[Y(t)] = m_y(t) = \sum_{i=1}^k a_i(t) m_i(t), \quad (6.3.25)$$

$$K_y(t, t') = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i(t) a_j(t) R_{ij}(t, t'). \quad (6.3.26)$$

Пример 2. Плановое задание для отрасли по выпуску продукции за год установлено y_n . Определить вероятность выполнения плана отраслью в конце года (на момент времени t_n) при условии, что в начале года t_0 выпуск составлял y_0 , а двумерный закон распределения с.п. $Y(t)$ — нормальный с характеристиками (6.3.25) и (6.3.26).

Решение. По условию в начале года (в момент t_0) с.в. $Y(t_0)$ равна y_0 .

В п. 1.2 было указано, что двумерный закон распределения нормального случайного процесса является его исчерпывающей характеристикой. Это означает, что для определения вероятности выполнения плана $P\{Y(t_n) > y_n\}$ достаточно знать состояние процесса в момент времени t_0 . Указанная вероятность не будет зависеть от того, как процесс развивался до момента t_0 (напомним, что такие процессы называются марковскими, они были подробно рассмотрены в гл. 3, 4, 5).

Таким образом, безусловный двумерный закон распределения с.п. $Y(t)$ в точках t_0 и t_n (для случайных величин $Y(t_0)$ и $Y(t_n)$) будет нормальный с тремя параметрами

$$m_y(t_0) = \sum_{i=1}^k a_i(t_0) m_i(t_0),$$

$$m_y(t_n) = \sum_{i=1}^k a_i(t_n) m_i(t_n),$$

$$K_y(t_0, t_n) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i(t_0) a_j(t_n) R_{ij}(t_0, t_n).$$

Зная двумерный закон распределения, можно найти условный одномерный закон распределения с.в.

$Y(t_k) = Y_k$, вычисленной при условии, что с.в. $Y(t_0)$ равна y_0 . Известно (см. (7.9.15)*), что этот закон тоже будет нормальным с параметрами

$$m_{y_k|y_0} = m_{y_k} + \frac{r_{y_k y_0} \sigma_{y_k} (y_0 - m_{y_k})}{\sigma_{y_0}},$$

$$D_{y_k|y_0} = D_{y_k} (1 - r_{y_k y_0}^2), \quad \sigma_{y_k|y_0} = \sqrt{D_{y_k|y_0}},$$

где

$$m_{y_k} = m_y(t_k), \quad m_{y_0} = m_y(t_0), \quad D_{y_k} = K_y(t_k, t_k),$$

$$\sigma_{y_k} = \sqrt{D_{y_k}}, \quad D_{y_0} = K_y(t_0, t_0), \quad \sigma_{y_0} = \sqrt{D_{y_0}},$$

$$r_{y_k y_0} = K_{y_k y_0} / (\sigma_{y_k} \sigma_{y_0}) = K_y(t_0, t_k) / (\sigma_{y_k} \sigma_{y_0}).$$

Следовательно, искомая вероятность выполнения отраслю плана при условии, что в момент t_0 выпуск составлял y_0 , будет

$$P\{Y(t_k) > y_k | Y(t_0) = y_0\} = 0,5 - \Phi\left(\frac{y_k - m_{y_k|y_0}}{\sigma_{y_k|y_0}}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа (см. (6.3.15)*).

Рассмотрим численный пример. Пусть средний выпуск ЭВМ отраслю определяется по формуле

$$m_y(t) = 1000t + 10000$$

(где t измеряется в годах), а к.ф. $K_y(t, t')$ выпуска ЭВМ — по формуле

$$K_y(t, t') = 10^6 e^{-0,369 |t - t'|}.$$

Найти вероятность выполнения пятилетнего плана $y_k = 15000$ ЭВМ, если к концу четвертого года пятилетки было выпущено $y_0 = 14850$ ЭВМ. Для этих условий получим:

$$m_{y_k} = m_y(5) = 15000 \text{ (ЭВМ)},$$

$$m_{y_0} = m_y(4) = 14000 \text{ (ЭВМ)},$$

$$D_{y_k} = D_y(5) = 10^6, \quad \sigma_{y_k} = \sigma_{y_0} = 10^3 \text{ (ЭВМ)},$$

$$r_{y_k y_0} = \frac{K_y(t_0, t_k)}{\sigma_{y_k} \sigma_{y_0}} = e^{-0,369} \approx 0,7,$$

$$m_{y_n|y_0} = 15000 + \frac{0,7 \cdot 10^3 (14850 - 14000)}{10^3} \approx 15595 \text{ (ЭВМ)},$$

$$\sigma_{y_n|y_0} = \sqrt{10^3 (1 - 0,7^5)} = 714 \text{ (ЭВМ)},$$

$$\begin{aligned} P(Y(t_5) > y_n | Y(t_4) = y_0) &= 0,5 - \Phi\left(\frac{15000 - 15595}{714}\right) = \\ &= 0,5 + \Phi(0,834) \approx 0,5 + 0,3 \approx 0,8. \end{aligned}$$

Заметим, что безусловная вероятность выполнения плана на конец пятилетки определяется по одномерному закону распределения, который будет нормальным с характеристиками $m_y(5) = 15000$ (ЭВМ) и $\sigma_y(5) = 1000$ (ЭВМ), а вероятность выполнения плана $P(Y(5) > y_n) = 0,5$.

Пример 3. Рассматривается процесс $X(t)$ эксплуатации одинаковых технических устройств (ТУ) на предприятии при интенсивности поступления ТУ $\lambda(t) = \text{const}$ и $X(0) = 0$ (см. п. 5.4). Случайный процесс $Y(t)$ — число списанных (вышедших из строя) ТУ к моменту времени t ($Y(0) = 0$); с. п. $Z(t)$ — число поступивших в эксплуатацию ТУ к моменту времени t ($Z(0) = 0$). Считая поток поступлений ТУ в эксплуатацию простейшим с параметром λ , а время работы каждого ТУ распределенным по показательному закону с параметром μ , найти характеристики случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$.

Решение. Очевидно, что $Z(t) = X(t) + Y(t)$. Характеристики с. п. $X(t)$ и $Y(t)$ для начальных условий $X(0) = Z(0) = 0$ были найдены в п. 5.4:

$$m_x(t) = D_x(t) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}), \quad m_z(t) = D_z(t) = \lambda t,$$

$$K_x(t, t') = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu \min(t, t')}) e^{-\mu |t - t'|},$$

$$K_z(t, t') = \lambda \min(t, t').$$

В п. 5.4 было показано, что для условий данного примера одномерный закон распределения случайного процесса чистого размножения $Z(t)$ с параметром λ представляет собой закон Пуассона с параметром $m_z(t)$ и одномерный закон распределения случайного процесса гибели и размножения $X(t)$ с параметрами μ и λ является также законом Пуассона с параметром $m_x(t)$.

В п. 9.8* было показано, что если сумма двух неотрицательных случайных величин распределена по

закону Пуассона и одно из слагаемых распределено тоже по закону Пуассона, то и другое слагаемое также распределено по закону Пуассона, при этом сами слагаемые независимы. Следовательно, с. п. $Y(t)$

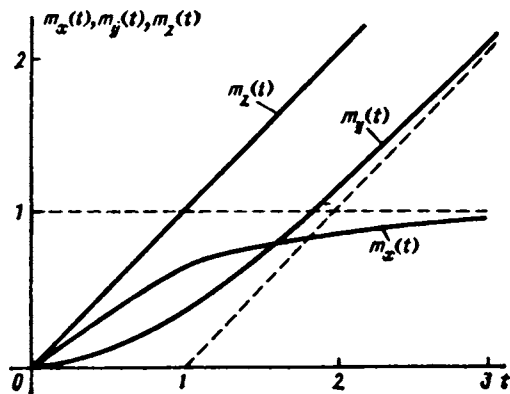


Рис. 6.3.1

имеет пуассоновский одномерный закон распределения с параметром

$$\begin{aligned} m_y(t) = D_y(t) = m_z(t) - m_x(t) = \\ = \lambda t - \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) = \lambda \left(t - \frac{1 - e^{-\mu t}}{\mu} \right). \end{aligned}$$

На рис. 6.3.1 показаны зависимости $m_x(t)$, $m_y(t)$ и $m_z(t)$ при $\lambda = \mu = 1$.

6.4. Комплексные случайные процессы

При исследовании стационарных с. п. мы будем широко использовать выражения тригонометрических функций через комплексные функции, в связи с чем нам необходимо будет пользоваться комплексными с. п.

Комплексным случайным процессом называется с. п. вида

$$X(t) = X_1(t) + iX_2(t), \quad (6.4.1)$$

где $X_1(t)$, $X_2(t)$ — действительные случайные процессы, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Таким образом,

комплексный с. п. представляет собой линейную форму двух действительных с. п. (см. п. 6.3).

Для фиксированного момента времени t комплексный с. п. $X(t)$ превращается в комплексную с. в.; случайная величина $X_1(t)$ — его действительная часть, $X_2(t)$ — его мнимая часть. Пользуясь определениями для комплексной с. в., приведенными в п. 8.8*, найдем характеристики комплексного с. п. $X(t)$. Математическое ожидание комплексного с. п. (6.4.1) равно:

$$m_x(t) = m_{x_1}(t) + im_{x_2}(t), \quad (6.4.2)$$

где

$$m_{x_1}(t) = M[X_1(t)], \quad m_{x_2}(t) = M[X_2(t)]. \quad (6.4.3)$$

Обозначим $\overset{\circ}{X}(t)$ — центрированный комплексный с. п.:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = \overset{\circ}{X}_1(t) + i\overset{\circ}{X}_2(t), \quad (6.4.4)$$

$$\overset{\circ}{X}_1(t) = X_1(t) - m_{x_1}(t), \quad \overset{\circ}{X}_2(t) = X_2(t) - m_{x_2}(t). \quad (6.4.5)$$

Корреляционная функция комплексного с. п. определяется по формуле

$$K_x(t, t') = M[\overset{\circ}{X}(t) \overline{\overset{\circ}{X}(t')}], \quad (6.4.6)$$

где

$$\overline{\overset{\circ}{X}(t')} = \overset{\circ}{X}_1(t') - i\overset{\circ}{X}_2(t') \quad (6.4.7)$$

— комплексный с. п., сопряженный комплексному случайному процессу $\overset{\circ}{X}(t')$.

Дисперсия комплексного с. п. $X(t)$ определяется через его к. ф. следующим образом:

$$\begin{aligned} D_x(t) = K_x(t, t) &= M[\overset{\circ}{X}(t) \overline{\overset{\circ}{X}(t)}] = \\ &= M[|\overset{\circ}{X}(t)|^2] = D_1(t) + D_2(t), \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

где

$$D_1(t) = D[X_1(t)], \quad D_2(t) = D[X_2(t)] \quad (6.4.9)$$

— дисперсии действительной и мнимой частей комплексного с. п. $X(t)$.

Корреляционная функция комплексного с. п. может быть выражена через корреляционные функции

его действительной и мнимой части и через их взаимные к. ф.

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')] = \\ &= M[(\overset{\circ}{X}_1(t) + i\overset{\circ}{X}_2(t))(\overset{\circ}{X}_1(t') - i\overset{\circ}{X}_2(t'))] = \\ &= M[\overset{\circ}{X}_1(t) \overset{\circ}{X}_1(t') + \overset{\circ}{X}_2(t) \overset{\circ}{X}_2(t') + \\ &\quad + i(\overset{\circ}{X}_1(t') \overset{\circ}{X}_2(t) - \overset{\circ}{X}_1(t) \overset{\circ}{X}_2(t'))] = \\ &= K_1(t, t') + K_2(t, t') + i[R_{12}(t', t) - R_{12}(t, t')], \quad (6.4.10) \end{aligned}$$

где

$$K_1(t, t') = M[\overset{\circ}{X}_1(t) \overset{\circ}{X}_1(t')] \quad (6.4.11)$$

— к. ф. действительной составляющей комплексного с. п. $\overset{\circ}{X}(t)$;

$$K_2(t, t') = M[\overset{\circ}{X}_2(t) \overset{\circ}{X}_2(t')] \quad (6.4.12)$$

— к. ф. мнимой составляющей комплексного с. п. $\overset{\circ}{X}(t)$;

$$R_{12}(t, t') = M[\overset{\circ}{X}_1(t) \overset{\circ}{X}_2(t')] \quad (6.4.13)$$

— в. к. ф. действительной и мнимой составляющих комплексного с. п. $\overset{\circ}{X}(t)$.

Отметим, что математическое ожидание $m_x(t)$ комплексного случайного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$ (6.4.2) представляет собой неслучайную комплексную функцию аргумента t ; дисперсия $D_x(t)$ комплексного случайного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$ (6.4.8) представляет собой неотрицательную неслучайную действительную функцию аргумента t , корреляционная функция $K_x(t, t')$ комплексного случайного процесса (6.4.10) может быть как действительной, так и комплексной неслучайной функцией двух аргументов t и t' . Корреляционная функция $K_x(t, t')$ будет действительной либо когда действительная и мнимая части случайного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$ не коррелированы ($R_{12}(t, t') \equiv 0$), либо когда их взаимная корреляционная функция симметрична относительно t и t' : ($R_{12}(t, t') = R_{12}(t', t)$).

Комплексный с. п. $\overset{\circ}{X}(t)$ можно записать через полярные координаты случайной точки $\overset{\circ}{X}_1(t)$ и $\overset{\circ}{X}_2(t)$ на комплексной плоскости:

$$\overset{\circ}{X}(t) = R(t) \cos \Theta(t) + iR(t) \sin \Theta(t), \quad (6.4.14)$$

где

$$R(t) = |X(t)| = \sqrt{X(t)\overline{X(t)}} = \sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t)}, \quad (6.4.15)$$

$$\operatorname{tg} \Theta(t) = X_2(t)/X_1(t), \quad (6.4.16)$$

$$\Theta(t) = \operatorname{arctg}(X_2(t)/X_1(t)). \quad (6.4.17)$$

Пользуясь формулами Эйлера, выражение (6.4.14) можно записать в виде:

$$X(t) = R(t) e^{i\Theta(t)}.$$

Действительный с. п. $R(t)$ называется *модулем* (или *абсолютной величиной*) комплексного с. п. $X(t)$; действительный с. п. $\Theta(t)$ называется *аргументом* комплексного с. п. $X(t)$.

7.1. Определение стационарного случайного процесса, эргодическое свойство

Выше (см. гл. 3, 4, 5) мы уже сталкивались с с. п., протекающими однородно во времени, когда наступает стационарный режим функционирования системы. Такие режимы были проанализированы при исследовании цепей Маркова (гл. 3), марковских с. п. с непрерывным временем и дискретными состояниями (гл. 4) и марковских процессов гибели и размножения с непрерывным временем и дискретными состояниями (гл. 5). В этой главе мы рассмотрим общие свойства таких случайных процессов.

В качестве примеров стационарных с. п. можно рассмотреть следующие

- колебание напряжения, подаваемого в качестве силового питания ЭВМ;

- колебания числа эксплуатируемых технических устройств (ТУ), если поток вводимых в эксплуатацию ТУ является стационарным и каждое ТУ эксплуатируется в среднем одно и то же время;

- давление газа в газопроводе и др.

Очевидно, что у стационарного с. п. $X(t)$ все вероятностные характеристики не должны зависеть от времени.

Рассмотрим одномерную п. р. стационарного с. п. $f(t, x)^1$). Так как эта плотность не зависит от того, где взято сечение t , то имеет место равенство

$$f(t_1, x) = f(t_2, x) = \dots = f(x). \quad (7.1.1)$$

¹⁾ Для простоты будем считать, что сечение случайного процесса является непрерывной случайной величиной.

Зная одномерную плотность стационарного с.п. $X(t)$, можно найти его м.о. и дисперсию:

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = m_x = \text{const}, \quad (7.1.2)$$

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(t, x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = D_x = \text{const}. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Таким образом, у стационарного с.п. математическое ожидание и дисперсия являются постоянными величинами, не зависящими от времени.

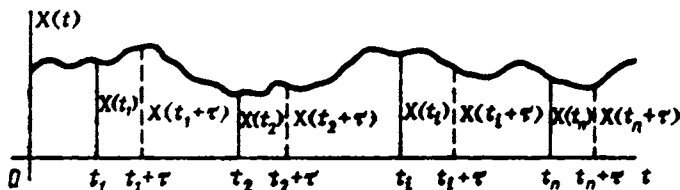


Рис. 7.1.1

Рассмотрим n сечений стационарного с.п. $X(t)$, взятых в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ (см. рис. 7.1.1); n -мерную плотность распределения с.п. $X(t)$ можно записать в виде

$$f_n(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7.1.4)$$

Очевидно, что если с.п. является стационарным, то эта n -мерная п.р. не изменится при сдвиге всех аргументов времени на одинаковую величину τ (см. рис. 7.1.1):

$$\begin{aligned} f_n(t_1, t_2, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) &= \\ &= f_n(t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau; x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Таким образом, приходим к следующему определению стационарного с.п.: случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в узком смысле*, если его n -мерная плотность распределения не изменяется при сдвиге всех его временных аргументов на одинаковую произвольную величину τ .

Таким образом, n -мерная п.р. стационарного с.п. не зависит от того, в какие моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ рассматриваются сечения этого процесса, а зависят лишь от сдвигов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ между этими сечениями (рис. 7.1.2).



Рис. 7.1.2

Следовательно, двумерная п.р. стационарного с.п. $X(t) \sim f_2(t_1, t_2, x_1, x_2)$ будет зависеть не от аргументов t_1 и t_2 , а только от аргумента τ промежутка между сечениями (рис. 7.1.3). Очевидно, что эта п.р. не должна зависеть от того, каким образом занумерованы сечения, другими словами, двумерная п.р. должна зависеть лишь от разности между аргументами:

$$\begin{aligned} f_2(t_1, t_2, x_1, x_2) &= \\ &= f_2(t_2 - t_1, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Обозначим

$$t_2 - t_1 = \tau. \quad (7.1.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_2(t_1, t_2, x_1, x_2) &= \\ &= f_2(\tau, x_1, x_2). \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

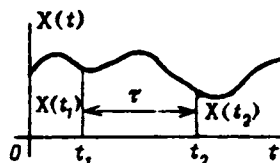


Рис. 7.1.3

Найдем корреляционную функцию стационарного с.п.: $K_x(t_1, t_2) =$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f_2(t_1, t_2, x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f_2(\tau, x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= k_x(\tau). \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

Так как величина τ определяется равенством (7.1.6), то к.ф. стационарного с.п. обладает следующим свойством:

$$k_x(\tau) = k_x(-\tau), \quad (7.1.9)$$

т. е. корреляционная функция стационарного с. п. есть четная функция сдвига τ между двумя сечениями этого процесса (см. рис. 7.1.3).

Случайный процесс называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание постоянно ($m_x = \text{const}$), а корреляционная функция есть функция сдвига между аргументами: $K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau)$.

Очевидно, что если с. п. является стационарным в узком смысле, то он является стационарным и в широком смысле. Обратное же утверждение не всегда может быть справедливым: если с. п. является стационарным в широком смысле, то он не обязательно будет стационарным в узком смысле.



Рис. 7.1.4

Обозначим $W_{\text{ш}}$ множество всех стационарных в широком смысле процессов и $W_{\text{у}}$ — множество всех стационарных в узком смысле процессов. Между этими множествами существуют следующие соотношения: $W_{\text{у}} \subset W_{\text{ш}}$, $W_{\text{у}} \cap W_{\text{ш}} = W_{\text{у}}$, которые проиллюстрированы на рис. 7.1.4.

Так как дисперсия равна корреляционной функции при равенстве аргументов: $D_x(t) = K_x(t, t)$, то имеет место равенство

$$D_x = K_x(t, t) = k_x(t - t) = k_x(0). \quad (7.1.10)$$

Так как $D_x \geq 0$, то и

$$k_x(0) \geq 0. \quad (7.1.11)$$

Кроме свойств (7.1.9)–(7.1.11) к. ф. стационарного с. п. должна обладать свойством

$$|k_x(\tau)| \leq k_x(0) \quad (7.1.12)$$

и свойством положительной определенности

$$\int_B \int_B k_x(t - t') \varphi(t) \varphi(t') dt dt' \geq 0, \quad (7.1.13)$$

условия выполнения которого будут даны в п. 7.2. В выражении (7.1.13) $\varphi(t)$ — любая функция аргумента t , а область B — любая область изменения аргумента t .

Помимо корреляционной функции вводится в рассмотрение еще одна характеристика: *нормированная корреляционная функция* (н. к. ф.) стационарного с. п.

$$r_x(\tau) = k_x(\tau)/D_x = k_x(\tau)/k_x(0). \quad (7.1.14)$$

Она обладает практически теми же свойствами, что и корреляционная функция, у которой изменен масштаб по оси ординат. Тем не менее выпишем эти свойства:

$$r_x(\tau) = r_x(-\tau), \quad r_x(0) = 1, \quad |r_x(\tau)| \leq 1, \\ \int_{(B)} \int_{(B)} r_x(t-t') \varphi(t) \varphi(t') dt dt' \geq 0. \quad (7.1.15)$$

Из неравенства $|r_x(\tau)| \leq 1$ следует неравенство $|k_x(\tau)| \leq k_x(0)$ (см. (7.1.12)).

Стационарные с. п. могут обладать или не обладать эргодическим свойством. При рассмотрении марковских процессов с дискретными состояниями мы вводили понятие эргодического множества состояний (см. гл. 3 и 4). Если процесс протекает однородно и множество состояний конечно и обладает эргодическим свойством, то в нем устанавливается стационарный режим функционирования, характеризующийся тем, что любая реализация этого процесса рано или поздно пройдет через любое состояние независимо от того, в каком состоянии находился этот процесс в начальный момент времени. Другими словами, эргодическое свойство состоит в том, что любая реализация эргодического стационарного с. п. достаточной продолжительности является как бы «полномочным представителем» всей совокупности реализаций стационарного с. п.

Для эргодического стационарного с. п. $X(t)$ м. о. может быть определено из выражения

$$m_x = M[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt. \quad (7.1.16)$$

Достаточным условием выполнения равенства (7.1.16) — эргодичности стационарного с. п. $X(t)$ по математическому ожиданию — является

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_x(\tau) = 0. \quad (7.1.17)$$

Дисперсия эргодического с. п. может быть найдена по формуле

$$D_x = D[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t) - m_x)^2 dt. \quad (7.1.18)$$

Достаточным условием выполнения равенства (7.1.18) — эргодичности стационарного с. п. $X(t)$ по дисперсии — является

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_y(\tau) = 0, \quad (7.1.19)$$

где $k_y(\tau)$ — к. ф. стационарного с. п.,

$$Y(t) = [X(t)]^2. \quad (7.1.20)$$

Корреляционная функция эргодического стационарного с. п. может быть определена по формуле

$$k_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t) - m_x)(X(t - \tau) - m_x) dt. \quad (7.1.21)$$

Достаточным условием выполнения равенства (7.1.21) — эргодичности стационарного с. п. $X(t)$ по к. ф. — является

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_z(\tau) = 0, \quad (7.1.22)$$

где $k_z(\tau)$ — корреляционная функция с. п.,

$$Z(t, \phi) = X(t)X(t + \phi). \quad (7.1.23)$$

Обычно стационарный с. п. бывает неэргодическим, когда он протекает неоднородно. В частности, неэргодичность с. п. $X(t)$ может быть вызвана тем, что в качестве слагаемого с. п. рассматривается с. в. Например, случайный процесс

$$U(t) = X(t) + V \quad (7.1.24)$$

будет неэргодическим, если V — с. в. с характеристиками m_v и D_v , а $X(t)$ — эргодический с. п. Действительно, в соответствии с результатами, полученными в п. 6.3, имеем, если с. п. $X(t)$ и с. в. V независимы,

$$m_u(t) = m_x + m_v, \quad k_u(\tau) = k_x(\tau) + D_v. \quad (7.1.25)$$

В этом случае

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_x(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} (k_x(\tau) + D_0) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} k_x(\tau) + \lim_{\tau \rightarrow \infty} D_0 = D_0. \quad (7.1.26)\end{aligned}$$

Следовательно, с.п. $U(t)$ является неэргодическим.

Пример 1. Рассматривается неслучайная величина a как частный случай с.п.: $X(t) = a$; найти ее характеристики; определить, является ли этот процесс стационарным и обладает ли он свойством эргодичности?

Решение. $M[X(t)] = a = \text{const}$, $D_x(t) = K_x(t, t) = k_x(0) = 0$, с.п. $X(t) = a$ стационарен и обладает эргодическим свойством.

Пример 2. Рассматривается с.в. V как частный случай с.п.: $X(t) = V$; найти его характеристики, определить, является ли этот процесс стационарным и обладает ли он свойством эргодичности.

Решение. $M[X(t)] = M[V] = m_0$, $K_x(t, t') = M[\overset{0}{X}(t)\overset{0}{X}(t')] = M[(V - m_0)(V - m_0)] = D[V] = D_0 = k_x(\tau)$. Случайный процесс $X(t) = V$ стационарен, но не обладает эргодическим свойством, так как $\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_x(\tau) \neq 0$. ►

Многие стационарные с.п. возникают в результате преобразования стационарного пуассоновского процесса (стационарного пуассоновского (простейшего) потока).

Пример 3. Случайная телеграфная волна. Случайный процесс $X(t)$ — случайная телеграфная волна — возникает следующим образом. На оси $0t$ имеется простейший поток событий с интенсивностью λ . Случайный процесс $X(t)$ попеременно принимает значения a и $-a$; при наступлении очередного события в простейшем потоке с.п. $X(t)$ скачком меняет свое состояние с $+a$ на $-a$ или наоборот (рис. 7.1.5). Найти характеристики с.п. $X(t)$.

Решение. Одномерный закон распределения с.п. $X(t)$, очевидно, имеет вид

$$X(t): \begin{vmatrix} -a & +a \\ 0,5 & 0,5 \end{vmatrix}.$$

Действительно, так как моменты перемен знака никак не связаны со значением с.п. $X(t)$, то нет никаких оснований считать какое-либо из значений ($+a$ или $-a$) вероятнее другого. Следовательно,

$$m_x(t) = -a \cdot 0,5 + a \cdot 0,5 = 0;$$

$$D_x(t) = (-a)^2 \cdot 0,5 + (+a)^2 \cdot 0,5 = a^2. \quad (7.1.27)$$

Рассмотрим два произвольных сечения с.п. $X(t)$ и $X(t')$ и найдем м.о. их произведения:

$$K_x(t, t') = M[\overset{0}{X}(t) \overset{0}{X}(t')] = M[X(t) X(t')].$$

Произведение $X(t)X(t')$ может принимать два значения: $-a^2$, если в интервале (t, t') в простейшем потоке произошло нечетное число событий; $+a^2$, если

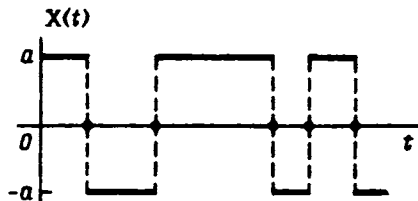


Рис. 7.1.5

в этом потоке произошло четное число событий. Следовательно, вероятность того, что на интервале $\tau = t' - t$ ($t' > t$) произойдет четное число событий в потоке, будет

$$P_{\text{чет}} = P\{X(t)X(t') = a^2\} = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda\tau)^{2m} e^{-\lambda\tau} / (2m)! =$$

$$= e^{-\lambda\tau} \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda\tau)^{2m} / (2m)! = e^{-\lambda\tau} \operatorname{ch} \lambda\tau =$$

$$= e^{-\lambda\tau} \frac{(e^{\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau})}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda\tau}}{2},$$

откуда

$$P_{\text{неч}} = P\{X(t)X(t') = -a^2\} = 1 - P_{\text{чет}} = \frac{1 - e^{-2\lambda\tau}}{2}.$$

Следовательно,

$$K_x(t, t') = k_x(\tau) = a^2 \frac{1 + e^{-2\lambda\tau}}{2} - \\ - a^2 \frac{1 - e^{-2\lambda\tau}}{2} = a^2 e^{-2\lambda\tau} \quad (\tau > 0).$$

Аналогично, при $t' < t$ и $\tau = t' - t < 0$ получим:

$$K_x(t, t') = k_x(\tau) = a^2 e^{-2\lambda(-\tau)} \quad (\tau < 0).$$

Объединяя последние две формулы в одну, получаем

$$k_x(\tau) = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}. \quad (7.1.28)$$

График этой функции показан на рис. 7.1.6. Следовательно, с. п. $X(t)$ стационарен и эргодичен.

Пример 4. Обобщенная случайная телеграфная волна. Как и в предыдущем примере, на оси $0t$ имеется простейший поток событий с интенсивностью λ . В момент наступления i -го события с. п. $X(t)$ принимает случайное значение X_i ($i = 0, 2, \dots$), сохраняя

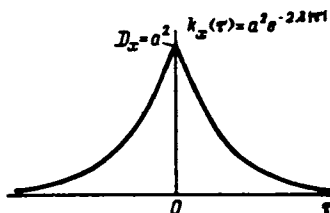


Рис. 7.1.6

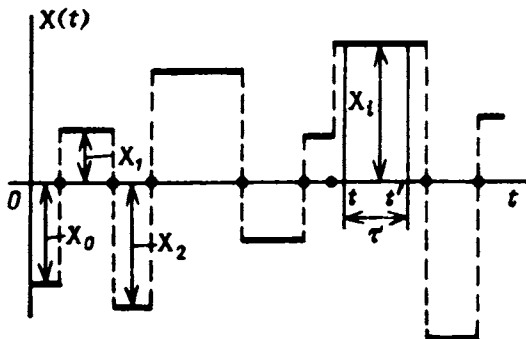


Рис. 7.1.7

его до следующего события в потоке (рис. 7.1.7). В начальный момент времени $t=0$ $X(0)=X_0$. Случайные величины $X_0, X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$ независимы и распределены одинаково с плотностью $f(x)$. Найти характеристики с. п. $X(t)$.

Решение. Очевидно, что одномерная плотность распределения с.п. $X(t)$ равна $f(x)$. Следовательно,

$$m_x(t) = M[X(t)] = M[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = m_x, \quad (7.1.29)$$

$$D_x(t) = D[X(t)] = D[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = D_x.$$

Рассмотрим два сечения с.п. $X(t)$ и $X(t')$, разделенные интервалом $\tau = t' - t$, $\tau > 0$. Если между точками t и t' не появится ни одного события в простейшем потоке, то $\overset{\circ}{X}(t) = \overset{\circ}{X}(t') = \overset{\circ}{X}_i$ (см. рис. 7.1.7). Если между точками t и t' появится хотя бы одно событие в простейшем потоке, то $\overset{\circ}{X}(t) = \overset{\circ}{X}_i$, $\overset{\circ}{X}(t') = \overset{\circ}{X}_j$ ($i \neq j$). Следовательно,

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= k_x(\tau) = e^{-\lambda\tau} M[\overset{\circ}{X}_i^2] + (1 - e^{-\lambda\tau}) M[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j] = \\ &= D_x e^{-\lambda\tau} \quad (\tau > 0), \end{aligned}$$

так как случайные величины X_i и X_j независимы при $i \neq j$. Аналогично, для $\tau < 0$ получаем

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\lambda(-\tau)}.$$

Объединяя последние две формулы, имеем

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\lambda|\tau|}. \quad (7.1.30)$$

Следовательно, рассматриваемый с.п. является стационарным и эргодическим.

Рассмотрим случай, когда случайные величины $X_0, X_1, X_2, \dots$ представляют собой систему одинаково распределенных нормальных, независимых случайных величин. Будет ли в этом случае с.п. $X(t)$ нормальным? Нет, несмотря на то, что одномерный закон распределения нормален. Дело в том, что закон распределения двух сечений с.п. $X(t)$ не является нормальным, так как эти сечения с отличной от нуля вероятностью совпадают: $P\{X(t) = X(t')\} = e^{-\lambda(t'-t)}$ ($t' > t$). Вероятность же равенства двух случайных величин, распределенных по нормальному закону, должна быть равна нулю.

Рассмотрим еще один случай, когда с. в. X_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) дискретна и имеет ряд распределения

$$X_i: \left| \begin{array}{cc} -\sqrt{D_x} & \sqrt{D_x} \\ 0,5 & 0,5 \end{array} \right|.$$

В этом случае

$$m_x(t) = m_x = M[X_i] = 0, \quad D_x = D[X_i] = D_x(t),$$

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\lambda|\tau|}.$$

Одна из реализаций такого процесса показана на рис. 7.1.8.

Замечание. Процессы, изображенные на рис. 7.1.7 и 7.1.8, имеют различный вид, однако их

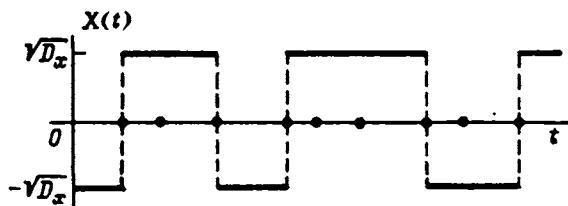


Рис. 7.1.8

характеристики полностью совпадают. Отсюда следует, что равенство м. о., дисперсии и корреляционной функции с. п. еще не означает равенства законов распределения этих процессов, что вполне естественно.

Пример 5. Процесс с независимыми сечениями. Рассматривается с. п. $X(t)$, описанный в предыдущем примере, при неограниченном увеличении интенсивности простейшего потока ($\lambda \rightarrow \infty$). Найти характеристики такого предельного процесса $Y(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} X(t)$,

считая, что этот предел существует.

Решение. Математическое ожидание m_x и дисперсия D_x с. п. $X(t)$ не зависят от интенсивности λ , и поэтому они остаются неизменными: $m_y = m_x$, $D_y = D_x$. Найдем к. ф. предельного с. п. $Y(t)$:

$$\begin{aligned} k_y(\tau) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} k_x(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} D_x e^{-\lambda|\tau|} = D_x \lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-\lambda|\tau|} = \\ &= \begin{cases} D_x & \text{при } \tau = 0, \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (7.1.31) \end{aligned}$$

Так как по условию предыдущего примера при $\lambda \rightarrow \infty$ все сечения с. п. $X(t)$ независимы, то получим модель с. п. $Y(t)$, для которого любые два сколь угодно близких сечения независимы. Такой процесс будем называть *процессом с независимыми сечениями*. Случайный процесс с независимыми сечениями не имеет ни одной точки непрерывности.

Пример 6. Стационарный белый шум. Исследуем предельное поведение с. п. $X(t)$, рассмотренного в примере 4, при условии, что интенсивность простейшего потока λ неограниченно увеличивается ($\lambda \rightarrow \infty$), дисперсия сечения этого процесса тоже неограниченно увеличивается ($D_x \rightarrow \infty$), но при этом отношение D_x/λ остается постоянным: $\lim_{D_x \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow \infty} D_x/\lambda = C$.

Найти характеристики с. п.

$$Z(t) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ D_x \rightarrow \infty \\ D_x/\lambda = C}} X(t).$$

Решение. Преобразуем корреляционную функцию с. п. $X(t)$ (см. (7.1.30)) с учетом равенства $D_x/\lambda = c$:

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\lambda|\tau|} = \frac{D_x}{\lambda} \lambda e^{-\lambda|\tau|} = c \lambda e^{-\lambda|\tau|}$$

Следовательно, корреляционная функция с. п. $Z(t)$ будет

$$k_z(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} c \lambda e^{-\lambda|\tau|} = 2c \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|\tau|}.$$

Под знаком предела стоит плотность распределения с. в. U , распределенной по закону Лапласа (см. (8.9.19)*), симметричному относительно начала координат, у которого м. о. равно нулю, а с. к. о. равно $\sqrt{2/\lambda}$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|\tau|} = \delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция. Таким образом,

$$k_z(\tau) = 2c \delta(\tau). \quad (7.1.32)$$

Мы убедились в том, что с. п. $Z(t)$ представляет собой стационарный белый шум (см. п. 6.1), и построили модель такого шума. Следовательно, белый

шум можно представить как предельный случай последовательности очень коротких импульсов, амплитуда которых представляет собой независимые случайные величины с очень большой дисперсией, при этом отношение дисперсии этих импульсов к частоте их появления является постоянной (конечной) величиной. Такие процессы (или весьма близкие к ним) встречаются на практике при рассмотрении различных естественных помех в каналах связи, «теплового шума» в электронных устройствах, «дробового эффекта» в электронных лампах и кинескопах. Подробнее о белом шуме будет сказано ниже.

Пример 7. Модель электронного потока в радиолампе (кинескопе). Поток электронов, направляющихся от катода к аноду радиолампы, представляет собой простейший поток событий с параметром λ . При попадании электрона на анод его напряжение $X(t)$ возрастает на единицу и затем убывает по экспоненциальному закону с параметром α , зависящим от



Рис. 7.1.9

характеристик электронной схемы (рис. 7.1.9). Единичный скачок напряжения от поглощения очередного электрона анодом суммируется с остаточным напряжением на аноде. Найти характеристики с. п. $X(t)$ напряжения на аноде.

Решение. Напряжение $X_i(t)$ от воздействия i -го электрона, поступившего на анод в момент времени T_i , будет иметь вид

$$X_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < T_i \\ e^{-\alpha(t-T_i)} & \text{при } t \geq T_i \end{cases} = 1(t - T_i) e^{-\alpha(t-T_i)}, \quad (7.1.33)$$

где $1(t)$ — единичная функция (см. приложение 6 в [5]), $t > 0$, $T_i > 0$. Так как поток электронов простейший, то к моменту времени t на анод поступит случайное число Y электронов, распределенное по закону Пуассона с параметром λt . Следовательно, напряжение на аноде будет представлять собой случайное число Y случайных слагаемых $X_i(t)$:

$$X(t) = \sum_{i=1}^Y X_i(t) = \sum_{i=1}^Y 1(t - T_i) e^{-\alpha(t - T_i)}. \quad (7.1.34)$$

Известно (см. задачу 8.80 в [5]), что пуассоновский поток событий на интервале $(0, t)$ можно с достаточной точностью представить как совокупность

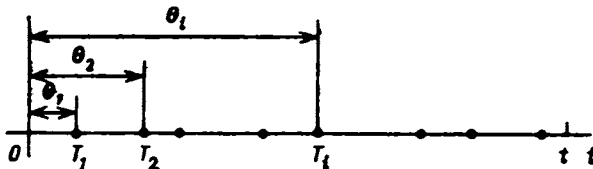


Рис. 7.1.10

точек на этом интервале, координата каждой из которых $\theta_i \in (0, t)$ распределена равномерно в этом интервале (см. рис. 7.1.10) и не зависит от координат других точек. В этом случае выражение (7.1.34) примет вид

$$X(t) = \sum_{i=1}^Y e^{-\alpha(t - \theta_i)} \quad (t > 0, \theta_i < t), \quad (7.1.35)$$

где все с.в. θ_i независимы и распределены равномерно в интервале $(0, t)$; с.в. Y не зависит от с.в. θ_i ($i = 1, 2, \dots$). Следовательно (см. п. 8.5*),

$$M[X(t)] = M[Y] M[e^{-\alpha(t - \theta_i)}],$$

$$D[X(t)] = M[Y] D[e^{-\alpha(t - \theta_i)}] + D[Y] (M[e^{-\alpha(t - \theta_i)}])^2.$$

Так как случайная величина Y распределена по закону Пуассона с параметром λt , то $M[Y] = D[Y] = \lambda t$.

Далее, с. в. Θ_t распределена равномерно в интервале $(0, t)$, следовательно,

$$M[e^{-a(t-\Theta_t)}] = \frac{1}{t} \int_0^t e^{-a(t-x)} dx = \frac{1 - e^{-at}}{at},$$

$$M[(e^{-a(t-\Theta_t)})^2] = \frac{1}{t} \int_0^t e^{-2a(t-x)} dx = \frac{1 - e^{-2at}}{2at}.$$

Поэтому

$$M[X(t)] = \lambda t \frac{1 - e^{-at}}{at} = \frac{\lambda}{a} (1 - e^{-at}), \quad (7.1.36)$$

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= \lambda \{D[e^{-a(t-\Theta_t)}] + (M[e^{-a(t-\Theta_t)}])^2\} = \\ &= \lambda M[(e^{-a(t-\Theta_t)})^2] = \frac{\lambda}{2a} (1 - e^{-2at}). \end{aligned} \quad (7.1.37)$$

Рассмотрим два сечения с. п. $X(t)$ в моменты времени t и t' ($t' > t$) (рис. 7.1.9). Случайный процесс $X(t')$ будет равен напряжению $X(t)$, умноженному на экспоненту $e^{-a(t'-t)}$ плюс напряжение $U(t'-t)$, которое получается в результате поступления электронов на анод (в интервале времени (t, t')):

$$X(t') = X(t)e^{-a(t'-t)} + U(t'-t). \quad (7.1.38)$$

Случайные величины $X(t)$ и $U(t'-t)$ независимы, так как они получались в результате поступления на анод электронов в различные непересекающиеся интервалы времени $(0, t)$ и (t, t') . Поэтому при $t' > t$

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')] = \\ &= M[\overset{\circ}{X}(t)(\overset{\circ}{X}(t)e^{-a(t'-t)} - \overset{\circ}{U}(t'-t))] = \\ &= M[\overset{\circ}{X}(t)^2 e^{-a(t'-t)}] + M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{U}(t'-t)] = \\ &= D_x(t)e^{-a(t'-t)}. \end{aligned} \quad (7.1.39)$$

При $t > t'$ получим

$$K_x(t, t') = D_x(t')e^{-a(t-t')} \quad (t > t'). \quad (7.1.40)$$

Следовательно,

$$K_x(t, t') = D_x(\min(t, t'))e^{-a|t-t'|} \quad (7.1.41)$$

Рассмотрим предельное поведение процесса $X(t)$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} m_x(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) = \frac{\lambda}{\alpha}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} D_x(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) = \frac{\lambda}{2\alpha}, \\ \lim_{\substack{t, t' \rightarrow \infty \\ |t - t'| = |\tau|}} K_x(t, t') &= \\ &= \lim_{\substack{t, t' \rightarrow \infty \\ |t - t'| = |\tau|}} D_x(\min(t, t')) e^{-\alpha |t - t'|} = \frac{\lambda}{2\alpha} e^{-\alpha |\tau|}. \quad (7.1.42)\end{aligned}$$

При $\lambda/\alpha = m_x > 20$ с. п. можно считать нормальным.

Таким образом, с. п. $X(t)$ при $t \rightarrow \infty$ (практически при $t > 3/\alpha$) будет стационарным и эргодическим.

Если предположить, что напряжение на аноде не затухает ($\alpha \rightarrow 0$), то с. п. $X(t)$ будет представлять собой процесс Пуассона (процесс чистого размножения с интенсивностью $\lambda = \text{const}$), характеристики которого были найдены в п. 5.4.

Действительно, при $\alpha \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0} m_x(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda (1 - e^{-\alpha t})/\alpha = \lambda \lim_{\alpha \rightarrow 0} t e^{-\alpha t} = \lambda t, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} D_x(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda (1 - e^{-2\alpha t})/(2\alpha) = \lambda t, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} K_x(t, t') &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\lambda}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha \min(t, t')}] e^{-\alpha |t - t'|} = \\ &= \lambda \min(t, t').\end{aligned}$$

Полученные выражения совпадают с формулами (5.4.60), (5.4.61).

Пример 8. Модель функционирования линейного детектора. В условиях предыдущего примера положим, что электроны поступают на анод «пачками», при этом моменты поступления пачек образуют простейший поток событий с интенсивностью λ , а число электронов в i -й пачке — с. в. W_i , имеющая функцию распределения $F(w)$ с числовыми характеристиками m_w и D_w . Случайные величины $W_1, W_2, \dots, W_i, \dots$ независимы и не зависят от числа поступивших пачек.

Такая схема имеет место при работе линейного детектора, когда на его вход в случайные моменты

времени, определяемые пуассоновским потоком, подаются положительные импульсы случайной величины W_i , а в период между импульсами напряжение убывает по экспоненциальному закону (рис. 7.1.11). Скачок напряжения от прихода очередной пачки электронов суммируется с остаточным напряжением на

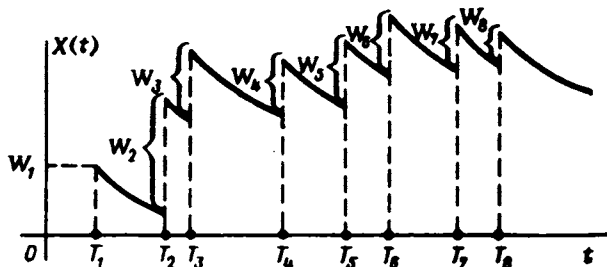


Рис. 7.1.11

аноде. Требуется найти характеристики с. п. $X(t)$ — напряжение на аноде.

Решение. Очевидно, что процесс $X(t)$ может быть записан в виде формулы, аналогичной (7.1.35):

$$X(t) = \sum_{i=1}^Y W_i e^{-a(t-\Theta_i)}, \quad (7.1.43)$$

где с. в. Y — число пачек электронов, поступивших на анод к моменту времени t ; W_i — число электронов в i -й пачке, Θ_i — момент поступления i -й пачки. Случайные величины Y , W_i , Θ_i взаимно независимы. Обозначим

$$X_i(t) = W_i e^{-a(t-\Theta_i)}, \quad (7.1.44)$$

тогда (см. п. 8.5*)

$$M[X_i(t)] = M[W_i] M[e^{-a(t-\Theta_i)}] = m_w (1 - e^{-at}) / (at), \quad (7.1.45)$$

$$\begin{aligned} M[(X_i(t))^2] &= M[W_i^2] M[(e^{-a(t-\Theta_i)})^2] = \\ &= (D_w + m_w^2) \frac{1 - e^{-2at}}{2at}. \end{aligned} \quad (7.1.46)$$

11 Теория случайных процессов и ее инженерные приложения

Следовательно,

$$\begin{aligned} M[X(t)] &= M\left[\sum_{i=1}^Y X_i(t)\right] = \\ &= M[Y] M[X_i(t)] = \lambda m_{\bullet} \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}, \end{aligned} \quad (7.1.47)$$

$$\begin{aligned} D_x(t) &= D\left[\sum_{i=1}^Y X_i(t)\right] = \\ &= M[Y] D[X_i(t)] + D[Y] (M[X_i(t)])^2 = \\ &= \lambda (D_{\bullet} + m_{\bullet}^2) (1 - e^{-2\alpha t}) / (2\alpha) = \\ &= \lambda (D_{\bullet} + m_{\bullet}^2) (1 - e^{-2\alpha t}) / (2\alpha). \end{aligned} \quad (7.1.48)$$

Проводя преобразования, аналогичные тем, которые были проведены в предыдущем примере, получим

$$K_x(t, t') = D_x(\min(t, t')) e^{-\alpha |t - t'|}. \quad (7.1.49)$$

При $t \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow \infty$ и $t' - t = \tau$ получим

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} m_x(t) &= m_x = \lambda m_{\bullet} / \alpha, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} D_x(t) &= D_x = \lambda (D_{\bullet} + m_{\bullet}^2) / (2\alpha), \\ \lim_{t \rightarrow \infty, t' \rightarrow \infty} K_x(t, t') &= k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha |\tau|}. \end{aligned} \quad (7.1.50)$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ напряжение $X(t)$ представляет собой стационарный эргодический случайный процесс.

Рассмотрим предельное поведение процесса $X(t)$, когда неограниченно увеличиваются

а) интенсивность простейшего потока событий λ , порождающего «пачки» электронов ($\lambda \rightarrow \infty$);

б) дисперсия числа электронов в каждой пачке ($D_{\bullet} \rightarrow \infty$);

в) параметр α ($\alpha \rightarrow \infty$).

Неограниченное увеличение параметра α означает, что напряжение от каждой пачки электронов очень быстро падает до нуля; в пределе при $\alpha \rightarrow \infty$ площадь импульса (рис. 7.1.11) будет стремиться к нулю. При этом имеют место равенства

$$\lambda/\alpha = k_1, \quad D_{\bullet}/\alpha = k_2. \quad (7.1.51)$$

В этом случае выражения (7.1.50) примут такой вид:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow \infty} m_x &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow \infty} \lambda m_{\square} / \alpha = k_1 m_{\square}, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow \infty} k_x(\tau) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow \infty} \lambda (D_{\square} + m_{\square}^2) e^{-\alpha |\tau|} / (2\alpha) = \\ &= k_1 k_2 \delta(\tau), \quad (7.1.52)\end{aligned}$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Таким образом, в пределе получаем стационарный белый шум, который образуется в результате бесконечно частой последовательности пачек электронов, имеющих конечное м.о. и бесконечную дисперсию числа электронов в пачке, а также бесконечно малую длительность импульса от воздействия пачки электронов.

Пример 9. Импульсный дробовой эффект. Рассматривается напряжение в цепи $X(t)$, порождаемое импульсами напряжения, имеющими прямоугольную форму (рис. 7.1.12). Высота i -го импульса W_i , продолжительность K_i . Моменты появления импульсов $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ образуют простейший поток событий с интенсивностью λ . Напряжение $X_i(t)$ от i -го импульса суммируется с напряжением от других импульсов. Случайные величины W_i, K_i и T_i взаимно независимы и имеют характеристики $m_{\square} = M[W_i]$, $D_{\square} = D[W_i]$, $m_{\kappa} = M[K_i]$, $D_{\kappa} = D[K_i]$. Требуется найти характеристики процесса $X(t)$.

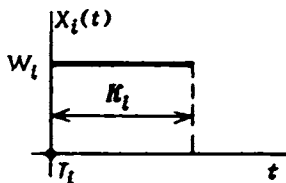


Рис. 7.1.12

Решение. На участке $(0, t)$ с.п. $X(t)$ может быть представлен формулой

$$X(t) = \sum_{i=1}^Y X_i(t) = \sum_{i=1}^Y W_i \varphi(t, \Theta_i, K_i), \quad (7.1.53)$$

где с.в. Y распределена по закону Пуассона с параметром λt , с.в. Θ_i распределена равномерно в интервале $(0, t)$, функция $\varphi(t, \Theta_i, K_i) = 1(t - \Theta_i) \cdot 1(\Theta_i + K_i - t)$ — импульс, начало которого приходится на момент времени $\Theta_i \in (0, t)$, длительность его равна K_i , а высота — единице (рис. 7.1.13).

Введем в рассмотрение гипотезу о том, что с.в. K_i принадлежит элементарному интервалу $(x; x + dx)$: $K_i \in (x, x + dx)$. Вероятность такой гипотезы будет

$$P\{K_i \in (x, x + dx)\} \approx f_x(x) dx,$$

где $f_x(x)$ — плотность распределения с.в. K_i .

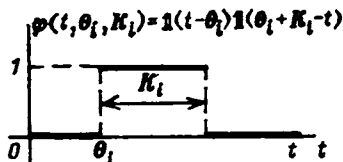


Рис. 7.1.13

Тогда условное м.о. функции $\varphi(t, \Theta_i, K_i)$ (при указанной выше гипотезе) будет

$$M[\varphi(t, \Theta_i, K_i = x)] = \frac{1}{t} \int_0^t 1(t - y) 1(y + x - t) dy.$$

Интеграл представляет собой площадь прямоугольного импульса, высота которого равна единице, а длина — x . Следовательно,

$$M[\varphi(t, \Theta_i, K_i = x)] = \frac{1}{t} \cdot 1 \cdot x = \frac{x}{t}.$$

Безусловное м.о. будет

$$M[\varphi(t, \Theta_i, K_i)] = M[K_i/t] = m_K/t. \quad (7.1.54)$$

Аналогично находим

$$M[\varphi(t, \Theta_i, K_i = x)^2] = \frac{1}{t} \int_0^t [1(t - y) 1(y + x - t)]^2 dy,$$

но $[1(t - y) 1(y + x - t)]^2 = 1(t - y) 1(y + x - t)$, следовательно, $M[\varphi(t, \Theta_i, K_i = x)^2] = x/t$, откуда

$$M[\varphi(t, \Theta_i, K_i)]^2 = m_K/t. \quad (7.1.55)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} M[X_i(t)] &= M[W_i \varphi(t, \theta_i, K_i)] = \\ &= M[W_i] M[\varphi(t, \theta_i, K_i)] = \frac{m_\varphi m_K}{t}, \\ M[X_i^2(t)] &= M[W_i^2 \varphi(t, \theta_i, K_i)^2] = \\ &= M[W_i^2] M[\varphi(t, \theta_i, K_i)]^2 = \frac{(D_\varphi + m_\varphi^2) m_K}{t}, \\ M[X(t)] &= M\left[\sum_{i=1}^Y X_i(t)\right] = M[Y] M[X_i(t)] = \lambda m_\varphi m_K, \end{aligned} \quad (7.1.56)$$

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= D\left[\sum_{i=1}^Y X_i(t)\right] = M[Y] D[X_i(t)] + \\ &+ D[Y] (M[X_i(t)])^2 = \lambda (D_\varphi + m_\varphi^2) m_K. \end{aligned} \quad (7.1.57)$$

Рассмотрим с.п. $X(t)$, когда $W_i = 1$ ($m_\varphi = 1$, $D_\varphi = 0$), а с.в. K_i распределена по показательному закону с параметром μ ($m_K = 1/\mu$). В этом случае импульсный дробовый эффект превращается в процесс гибели и размножения с неограниченным числом состояний с параметрами $\lambda_i(t) = \lambda$, $\mu_i(t) = i\mu$ (см. п. 5.4). Его характеристики при $t \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow \infty$, $t' - t = \tau$ будут (см. (5.4.42), (7.1.56), (7.1.57)):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_x(t) = m_x = \lambda m_\varphi m_K = \lambda/\mu,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_x(t) = D_x = \lambda (D_\varphi + m_\varphi^2) m_K = \lambda (0 + 1^2)/\mu = \lambda/\mu.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty, t' \rightarrow \infty} K_x(t, t') = \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu|t-t'|} = \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu|\tau|} = k_x(\tau).$$

Случайный процесс гибели и размножения при $t \rightarrow \infty$ будет стационарным и эргодическим.

Пример 10. Случайный процесс $X(t)$ в любой точке t может иметь значение $+a$ или $-a$ с одинаковой вероятностью, равной 0,5. Изменения процесса $X(t)$ могут происходить только в моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, процесс $X(t)$ постоянен на любом участке $(n-1, n)$, где n — натуральное число, а на границе каждого нового участка независимо от предыдущего значения принимает одно из значений $+a$ или $-a$ с вероятностью 0,5. Реализация процесса $X(t)$ показана на рис. 7.1.14. Найти характеристики процесса $X(t)$.

Решение. Очевидно, что $m_x(t) = m_x = a \cdot 0,5 - a \cdot 0,5 = 0$, $D_x(t) = D_x = a^2 \cdot 0,5 + (-a)^2 \cdot 0,5 = a^2$. Если точки t и t' принадлежат одному и тому же интервалу $(n-1, n)$, то $K_x(t, t') = D_x = a^2$. Если точки

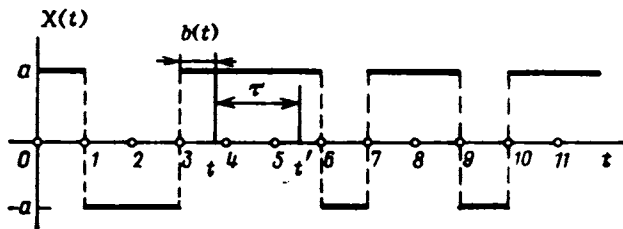


Рис. 7.1.14

t и t' принадлежат разным интервалам, то $K_x(t, t') = 0$. Следовательно,

$$K_x(t, t') = \begin{cases} a^2 & \text{при } |\tau| < 1 - b[\min(t, t')], \\ 0 & \text{при } |\tau| \geq 1 - b[\min(t, t')], \end{cases} \quad (7.1.58)$$

где $b[z]$ — целая часть числа z (см. рис. 7.1.14).

Несмотря на то, что $m_x = 0 = \text{const}$, $D_x = a^2 = \text{const}$, с. п. $X(t)$ не является стационарным, так как к. ф. $K_x(t, t')$ зависит не только от $\tau = t - t'$, но от того, где на оси $0t$ находится участок (t, t') .

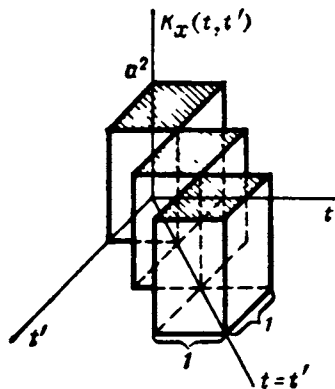


Рис. 7.1.15

Поверхность $K_x(t, t')$ выглядит как ряд прямоугольных параллелепипедов, основание каждого из которых представляет собой квадрат со сторонами, равными единице, а высота равна a^2 . Эти параллелепипеды поставлены на плоскости $t0t'$ вдоль биссектрисы первого координатного угла, на которой $t = t'$, так,

что диагонали оснований совпадают с биссектрисой (рис. 7.1.15).

Пример 11. Телеграфная волна. Случайный процесс $X(t)$ формируется так, как и в предыдущем примере, с той лишь разницей, что начало координат

распределено равномерно в пределах между моментами возможного изменения значения с.п. $X(t)$ (рис. 7.1.16). Найти характеристики процесса $X(t)$.

Решение. Как и в предыдущем примере, $m_x = 0$, $D_x = a^2$. Возьмем произвольную точку t на оси Ot

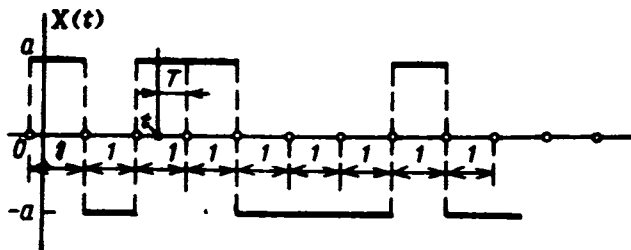


Рис. 7.1.16

(рис. 7.1.16). Очевидно, что эта точка t будет отстоять на расстоянии T до ближайшей точки возможной перемены знака процесса $X(t)$, где T — случайная величина, распределенная равномерно на интервале $(0, 1)$. При $t' > t$ и $\tau = t' - t$ к.ф. $K_x(t, t') = a^2$ при $\tau < T$ и к.ф. $K_x(t, t') = 0$ при $\tau > T$. Следовательно, при $\tau \in (0, 1)$ к.ф.

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= a^2 P\{T > \tau\} + 0 \cdot P\{T < \tau\} = \\ &= P\{T > \tau\} a^2 = (1 - \tau) a^2. \end{aligned}$$

При $\tau \in (-1, 0)$ получим

$$K_x(t, t') = (1 + \tau) a^2,$$

при $|\tau| > 1$

$$K_x(t, t') = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} k_x(\tau) &= \begin{cases} (1 - |\tau|) a^2 & \text{при } |\tau| < 1, \\ 0 & \text{при } |\tau| \geq 1 \end{cases} = \\ &= a^2 (1 - |\tau|) \mathbb{I}(1 - |\tau|). \quad (7.1.59) \end{aligned}$$

Рассмотренный в этом примере процесс $X(t)$ является стационарным и эргодическим. График к.ф. $k_x(\tau)$ показан на рис. 7.1.17.

Пример 12. Обобщенная телеграфная волна. Случайный процесс $X(t)$ формируется так же, как и в предыдущем примере, с той лишь разницей, что

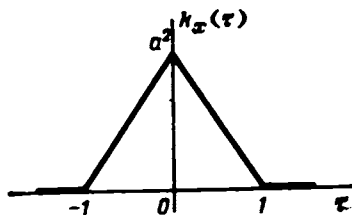


Рис. 7.1.17

в моменты, разделенные единичным интервалом, процесс $X(t)$ принимает случайные значения U_i независимо от предыдущих и последующих значений с. п. $X(t)$, реализация которого показана на рис. 7.1.18. Случайная величина U_i имеет характеристики $M[U_i] = m_u$,

$D[U_i] = D_u$. Найти характеристики процесса $X(t)$.

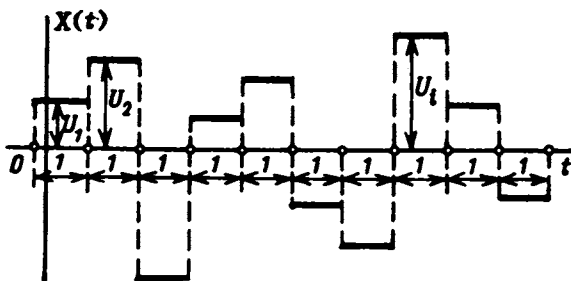


Рис. 7.1.18

Решение. В соответствии с решением предыдущего примера имеем

$$\begin{aligned}
 m_x(t) &= m_x = m_u, & D_x(t) &= D_x = D_u, \\
 k_x(\tau) &= \begin{cases} D_u(1 - |\tau|) & \text{при } |\tau| < 1, \\ 0 & \text{при } |\tau| \geq 1 \end{cases} = \\
 &= D_u(1 - |\tau|) \mathbf{1}(1 - |\tau|). \quad (7.1.60)
 \end{aligned}$$

Пример 13. Рассматривается с. п. $X(t)$, заданный своим каноническим разложением:

$$X(t) = m_x + \sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \quad (7.1.61)$$

где

$$M[U_k] = M[V_k] = 0, \quad D[U_k] = D[V_k] = D_k,$$

$$M[U_k V_k] = M[V_i V_j] = M[U_i U_j] = M[U_i V_j] = 0 \quad (i \neq j).$$

Показать, что этот процесс является стационарным.

Решение. Найдем математическое ожидание с. п. $X(t)$:

$$m_x(t) = M[m_x] + \\ + M\left[\sum_{k=0}^{\infty} (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t)\right] = m_x. \quad (7.1.62)$$

Обозначим

$$\overset{0}{X}_k(t) = U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t. \quad (7.1.63)$$

Случайный процесс $\overset{0}{X}_k(t)$ будем называть *элементарным стационарным случайным процессом*. Следовательно,

$$\overset{0}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{0}{X}_k(t).$$

В примере 5 из п. 1.2 было показано, что

$$K_{\overset{0}{X}_k}(t, t') = M[\overset{0}{X}_k(t) \overset{0}{X}_k(t')] = D_k \cos \omega_k \tau, \quad (7.1.64)$$

где $\tau = t - t'$.

Так как с. п. $\overset{0}{X}_i(t)$ и $\overset{0}{X}_j(t)$ не коррелированы, то

$$K_x(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty} K_{\overset{0}{X}_k}(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau = k_x(\tau). \quad (7.1.65)$$

Таким образом, мы показали, что с. п. $X(t)$ является стационарным.

Пример 14. Рассматривается произведение двух независимых стационарных процессов: $X(t) = X_1(t) \times X_2(t)$, где $X_1(t)$ — случайная телеграфная волна (пример 3), $X_2(t)$ — элементарный стационарный с. п. с характеристиками D_k и ω_k (пример 13). Найти характеристики процесса $X(t)$.

Решение. Так как $m_x(t) = m_{x_1}(t) = 0$, то $m_x(t) = m_{x_2}(t) = 0$. Далее (см. (7.1.28) и (7.1.65))

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t')] = M[\overset{\circ}{X}_1(t)\overset{\circ}{X}_2(t)\overset{\circ}{X}_1(t')\overset{\circ}{X}_2(t')] = \\ &= M[\overset{\circ}{X}_1(t)\overset{\circ}{X}_1(t')] M[\overset{\circ}{X}_2(t)\overset{\circ}{X}_2(t')] = \\ &= D_x e^{-2\lambda|t-t'|} \cos \tau, \quad (7.1.66) \end{aligned}$$

где $D_x = a^2 D_{x_1}$.

Процесс $X(t)$ является стационарным и эргодическим. На рис. 7.1.19 показаны возможные реализации случайных процессов $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X(t)$.

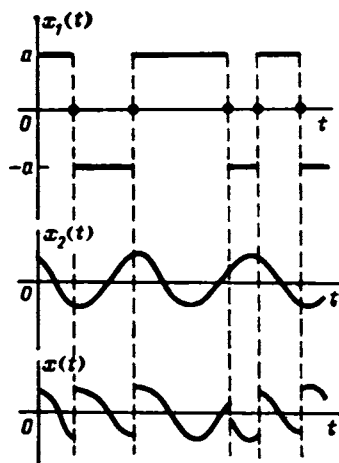


Рис. 7.1.19

Обобщая этот пример на произвольное число n независимых стационарных с.п. $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$, имеющих м.о. $m_{x_1} = m_{x_2} = \dots = m_{x_n} = 0$ и к.ф. $k_1(\tau)$, $k_2(\tau)$, ..., $k_n(\tau)$, можно показать, что характеристики с.п. $X(t) = \prod_{i=1}^n X_i(t)$ будут:

$$m_x(t) = m_x = 0, \quad k_x(\tau) = \prod_{i=1}^n k_{x_i}(\tau). \quad \blacktriangleright$$

7.2. Спектральное разложение стационарного случайного процесса. Спектральная плотность

В п. 7.1 мы указали, что стационарный с. п. может быть представлен своим каноническим разложением

$$X(t) = m_x + \sum_{k=0}^{\infty} (V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t), \quad (7.2.1)$$

а его к. ф. — каноническим разложением корреляционной функции:

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k (t - t') = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k (\cos \omega_k t \cos \omega_k t' + \sin \omega_k t \sin \omega_k t') = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau = k_x(\tau), \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

где

$$\begin{aligned} M[V_k] &= M[U_k] = M[V_k U_k] = 0, \quad M[V_i U_j] = 0 \quad (i \neq j); \\ D[V_k] &= D[U_k] = D_k, \quad \tau = t - t'. \end{aligned}$$

Координатными функциями канонического разложения стационарного с. п. являются косинусы и синусы различных частот.

Каноническое разложение (7.2.1) называется *спектральным разложением* стационарного с. п. Спектральное разложение (7.2.1) может быть представлено в виде (см. примеры 5 и 7 из п. 1.2)

$$X(t) = m_x + \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \cos(\omega_k t - \Theta_k), \quad (7.2.3)$$

где Θ_k — фаза гармонического колебания элементарного стационарного с. п. — случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$; Z_k — амплитуда гармонического колебания элементарного стационарного с. п. — тоже с. в.

Случайные величины $Z_0, Z_1, \dots, Z_k, \dots, \Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_k, \dots$ зависимы. Между случайными величинами Z_k, Θ_k и V_k, U_k имеют место соотношения

$$Z_k \cos \Theta_k = V_k, \quad Z_k \sin \Theta_k = U_k. \quad (7.2.4)$$

В соответствии с решением примера 7 из п. 1.2 между числовыми характеристиками с. в. Z_k и числовыми характеристиками с. в. V_k и U_k имеет место следующее равенство:

$$\{D[Z_k] + (M[Z_k])^2\}/2 = D[V_k] = D[U_k] = D_k. \quad (7.2.5)$$

Таким образом, стационарный с. п. может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний (см. (7.2.3)) со случайными амплитудами Z_k и случайными фазами Θ_k на различных неслучайных частотах ω_k . Заметим, что даже если амплитуды колебаний Z_k являются неслучайными ($D[Z_k] = 0$), а $M[Z_k] \neq 0$, то все равно будет иметь место стационарный процесс за счет случайного сдвига фазы колебания Θ_k на частоте ω_k .

Очевидно, что коэффициенты канонического разложения к. ф. $k_x(\tau)$ и набор различных частот ω_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) в формуле (7.2.2) должны зависеть от конкретного вида к. ф. $k_x(\tau)$. Эту зависимость можно получить различными способами, разлагая к. ф. в ряд. Так как к. ф. стационарного с. п. $X(t)$ является четной функцией своего аргумента ($k_x(\tau) = k_x(-\tau)$), то ее на интервале $(-T, T)$ можно разложить в ряд Фурье по четным (косинусным) гармоникам

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau, \quad (7.2.6)$$

где

$$\omega_k = k\omega_1, \quad \omega_1 = 2\pi/(2T) = \pi/T, \quad (7.2.7)$$

$$D_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T k_x(\tau) d\tau, \quad D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau. \quad (7.2.8)$$

Можно доказать, что коэффициенты $D_0, D_1, \dots, D_k, \dots$ являются неотрицательными величинами для любой корреляционной функции $k_x(\tau)$ стационарного с. п. $X(t)$.

Таким образом, зная вид к. ф. $k_x(\tau)$, можно получить значения (дисперсии) коэффициентов канонического разложения (V_k, U_k) и частоты ω_k стационарного с. п. $X(t)$.

Дисперсию стационарного с. п. $X(t)$, представленного своим каноническим разложением (7.2.1), найдем

по формуле (см. (7.2.2))

$$D_x = k_x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k 0 = \sum_{k=0}^{\infty} D_k. \quad (7.2.9)$$

Таким образом, дисперсия стационарного с.п., представленного своим каноническим разложением (7.2.1), равна сумме дисперсий всех гармоник его спектрального разложения. На рис. 7.2.1 показан «спектр дисперсий» стационарного с.п., представленного своим

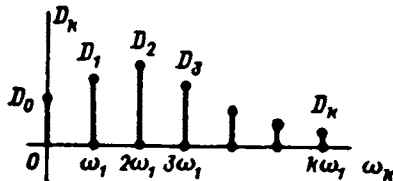


Рис. 7.2.1

спектральным разложением, на котором $\omega_k = k\omega_1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Очевидно, что разложение к.ф. $k_x(\tau)$ в ряд (7.2.6) будет тем точнее, чем больший интервал разложения T будет взят. Рассмотрим разложение (7.2.6) на интервале $(-T', T')$, где $T' = 2T$. В этом случае $\omega'_k = k\omega'_1$, $\omega'_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\omega_1}{2}$, где $\omega_1 = \frac{\pi}{T}$.

Далее,

$$D'_0 = \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} k_x(\tau) d\tau = \frac{1}{4T} \int_{-2T}^{2T} k_x(\tau) d\tau,$$

$$D'_k = \frac{1}{T'} \int_{-T'}^{T'} k_x(\tau) \cos \omega'_k \tau d\tau = \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} k_x(\tau) \cos \omega'_k \tau d\tau.$$

На рис. 7.2.2 показаны спектры дисперсий стационарных с.п., представленных своими разложениями на интервале $(0, T)$ и $(0, T')$ ($T' = 2T$). Так как $\omega_1 = 2\omega'_1$, то спектр дисперсии разложения с.п. $X(t)$ на интервале $(0, T')$ содержит в 2 раза больше составляющих. Однако сумма всех этих составляющих как для разложения на интервале $(0, T)$, так и для

разложения на интервале $(0, T')$, должна быть одинаковой:

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D'_k = D_x.$$

Это следует из условия (7.2.9).

При неограниченном увеличении периода разложения корреляционной функции ($T \rightarrow \infty$) коэффициенты разложения к. ф. (7.2.6) будут неограниченно

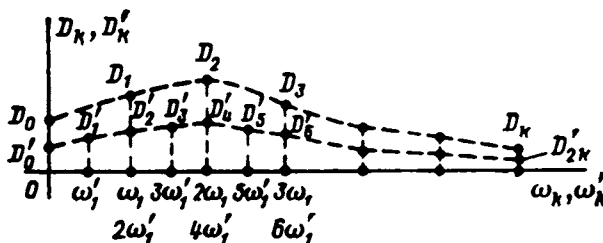


Рис. 7.2.2

уменьшаться ($D_k \rightarrow 0$), а число их в сумме (7.2.9) неограниченно увеличиваться. При этом величина $\Delta\omega = \omega_1$ — интервал между соседними частотами — будет также стремиться к нулю.

Запишем выражение (7.2.6) в несколько ином виде, имея в виду, что

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\Delta\omega} (\cos k\Delta\omega\tau) \Delta\omega. \quad (7.2.10)$$

Введем обозначение

$$D_k/\Delta\omega = D_k/\omega_1 = S_x(\omega_k). \quad (7.2.11)$$

Величина $S_x(\omega_k)\Delta\omega = D_k$ представляет собой ту часть общей дисперсии стационарного с. п. $X(t)$, которая приходится на k -ю гармонику. На рис. 7.2.3 показаны зависимости $S_x(\omega_k)$ и $S_x(\omega'_k)$ при $\omega_1 = 2\omega'_1$.

Мы видим, что с увеличением периода разложения ($T \rightarrow \infty$) ступенчатая функция $S_x(\omega_k)$ будет неограниченно приближаться к плавной кривой $S_x(\omega)$, которая представляет собой *плотность распределения дисперсий по частотам непрерывного спектра*.

Таким образом,

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} D_k / \Delta\omega = S_x(\omega). \quad (7.2.12)$$

Функция $S_x(\omega)$ называется *спектральной плотностью стационарного случайного процесса* $X(t)$.

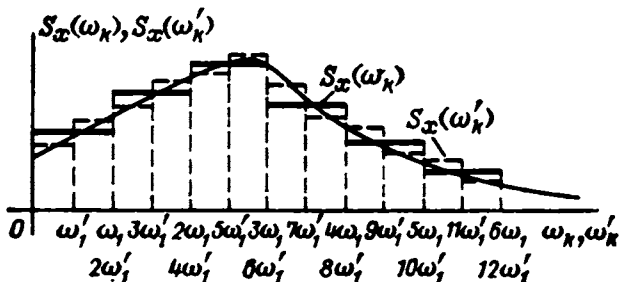


Рис. 7.2.3

В этом случае выражение (7.2.10) примет вид

$$\begin{aligned} k_x(\tau) &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\Delta\omega} (\cos k\Delta\omega\tau) \Delta\omega = \\ &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

Таким образом, к.ф. и спектральная плотность стационарного с.п. связаны между собой *косинус-преобразованием Фурье*. Следовательно, спектральная плотность выражается через к.ф. стационарного с.п. следующим образом:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (7.2.14)$$

Последнее выражение можно получить предельным переходом при $\Delta\omega \rightarrow 0$ (см. (7.2.11), (7.2.8) и (7.2.6)):

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D_k}{\Delta\omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D_k}{\pi/T} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi/T} \cdot \frac{1}{T} \int_{-T}^T k_x(\tau) \cos \omega_k\tau d\tau. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция $k_x(\tau) \cos \omega_k \tau$ четная, то

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau. \quad (7.2.15)$$

При $T \rightarrow \infty$ $\omega_k \rightarrow \omega$ и получим выражение (7.2.14).

Спектральная плотность $S_x(\omega)$ стационарного с. п. обладает следующими свойствами:

1°. Она является неотрицательной функцией частоты ω :

$$S_x(\omega) \geq 0.$$

Это следует из выражения (7.2.12), так как предел отношения двух неотрицательных величин $D_k \geq 0$ и $\Delta\omega > 0$ не может быть отрицательным.

2°. Интеграл от спектральной плотности в пределах от 0 до ∞ равен дисперсии стационарного с. п.:

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (7.2.16)$$

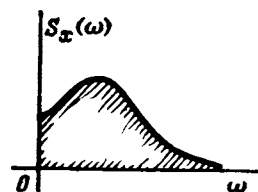


Рис. 7.2.4

Это следует из равенства (7.2.13):

$$D_x = k_x(0) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) (\cos \omega \cdot 0) d\omega = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega.$$

Графически эти два свойства спектральной плотности отображены на рис. 7.2.4. Кривая $S_x(\omega)$ расположена не ниже оси абсцисс, а площадь, ограниченная этой кривой сверху, осью абсцисс снизу и осью ординат слева, равна дисперсии D_x (заштрихованная фигура на рис. 7.2.4).

По аналогии с нормированной корреляционной функцией

$$r_x(\tau) = k_x(\tau)/k_x(0) = k_x(\tau)/D_x \quad (7.2.17)$$

вводится в рассмотрение *нормированная спектральная плотность* стационарного с. п.:

$$s_x(\omega) = S_x(\omega)/D_x. \quad (7.2.18)$$

Нормированная к. ф. и нормированная спектральная плотность связаны между собой преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= \int_0^{\infty} s_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \\ s_x(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

Рассмотрим, как будет преобразовываться спектральное разложение (7.2.1) при неограниченном увеличении интервала разложения ($T \rightarrow \infty$). Перепишем разложение (7.2.1) в таком виде:

$$\begin{aligned} X(t) &= m_x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k}{\Delta\omega} (\cos k \Delta\omega t) \Delta\omega + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_k}{\Delta\omega} (\sin k \Delta\omega t) \Delta\omega. \end{aligned} \quad (7.2.20)$$

Рассмотрим предел этого выражения при $\Delta\omega \rightarrow 0$. Введем обозначения:

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{V_k}{\Delta\omega} = V(\omega), \quad \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{U_k}{\Delta\omega} = U(\omega). \quad (7.2.21)$$

Тогда при $T \rightarrow \infty$ ($\Delta\omega \rightarrow 0$ и $k\Delta\omega \rightarrow \omega$) получим *интегральное каноническое представление* стационарного с. п. (см. (6.1.19)):

$$X(t) = m_x + \int_0^{\infty} V(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^{\infty} U(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (7.2.22)$$

где $V(\omega)$ и $U(\omega)$ — случайные функции непрерывного аргумента ω -частоты.

Как было показано в п. 6.1, случайные функции $V(\omega)$ и $U(\omega)$ представляют собой белый шум с характеристиками

$$M[V(\omega)] = M[U(\omega)] = 0,$$

$$K_v(\omega, \omega') = K_u(\omega, \omega') = S_x(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (7.2.23)$$

где $S_x(\omega)$ — спектральная плотность стационарного с. п. $X(t)$, $\delta(x)$ — дельта-функция.

Так как случайные величины V_k и U_k не были коррелированы для любых k , то взаимная корреляционная функция случайных функций $V(\omega)$ и $U(\omega)$ равна нулю при любых значениях аргументов:

$$R_{vu}(\omega, \omega') = M[V(\omega)U(\omega')] = 0. \quad (7.2.24)$$

С помощью формул Эйлера для комплексных чисел

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, элементарный стационарный с. п. $X(t)$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} X_k(t) &= V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t = \\ &= V_k (e^{i\omega_k t} + e^{-i\omega_k t})/2 - iU_k (e^{i\omega_k t} - e^{-i\omega_k t})/2 = \\ &= \frac{V_k - iU_k}{2} e^{i\omega_k t} + \frac{V_k + iU_k}{2} e^{-i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (7.2.25)$$

Обозначим

$$W_k = \frac{V_k - iU_k}{2}, \quad \bar{W}_k = \frac{V_k + iU_k}{2}, \quad (7.2.26)$$

где W_k — комплексная с. в. (см. п. 8.8*); $\bar{W}_k$ — с. в., комплексно сопряженная со с. в. W_k .

Следовательно, элементарный стационарный с. п. в комплексной форме имеет вид

$$X_k(t) = W_k e^{i\omega_k t} + \bar{W}_k e^{-i\omega_k t}. \quad (7.2.27)$$

Покажем, что выражение (7.2.27) представляет собой каноническое разложение элементарного стационарного с. п. в комплексной форме. Действительно (см. (7.2.26)),

$$M[W_k] = M[(V_k - iU_k)/2] = \frac{1}{2}(M[V_k] - iM[U_k]) = 0,$$

так как $M[V_k] = M[U_k] = 0$. Аналогично получим:

$$M[\bar{W}_k] = M[(V_k + iU_k)/2] = \frac{1}{2}(M[V_k] + iM[U_k]) = 0.$$

Покажем, что с. в. W_k и $\bar{W}_k$ не коррелированы (см. п. 8.8*):

$$\begin{aligned} K_{W_k \bar{W}_k} &= M[W_k(\bar{W}_k)] = M[W_k W_k] = \\ &= M[(V_k + iU_k)^2/4] = M[V_k^2 + 2iV_k U_k - U_k^2]/4 = \\ &= \frac{1}{4}(M[V_k^2] + 2iM[V_k U_k] - M[U_k^2]) = 0, \end{aligned}$$

так как $M[V_k^2] = M[U_k^2] = D_k$, $M[V_k U_k] = K_{v_k u_k} = 0$.

Найдем дисперсию с. в. W_k (см. п. 8.8*):

$$\begin{aligned} D[W_k] &= M[W_k \bar{W}_k] = M[(V_k - iU_k)(V_k + iU_k)/4] = \\ &= \frac{1}{4} M[V_k^2 + iV_k U_k - iV_k U_k - U_k^2] = \\ &= \frac{1}{4} M[V_k^2 + U_k^2] = \frac{D_k}{2}. \quad (7.2.28) \end{aligned}$$

Аналогично,

$$D[\bar{W}_k] = M[\bar{W}_k \overline{(\bar{W}_k)}] = M[\bar{W}_k W_k] = D_k/2. \quad (7.2.29)$$

Корреляционная функция элементарного стационарного с. п. $X_k(t) = V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t$ имеет вид

$$k_{x_k}(\tau) = D_k \cos \omega_k \tau,$$

но $\cos \omega_k \tau = (e^{i\omega_k \tau} + e^{-i\omega_k \tau})/2$, поэтому

$$k_{x_k}(\tau) = \frac{D_k}{2} (e^{i\omega_k \tau} + e^{-i\omega_k \tau}). \quad (7.2.30)$$

Выражение (7.2.30) представляет собой разложение корреляционной функции элементарного стационарного с. п. в комплексной форме.

Следовательно, спектральное разложение стационарного с. п. (7.2.1) в комплексной форме имеет вид

$$\begin{aligned} X(t) &= m_x + \sum_{k=0}^{\infty} (W_k e^{i\omega_k t} + \overline{W_k e^{i\omega_k t}}) = \\ &= m_x + \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{i\omega_k t}, \quad (7.2.31) \end{aligned}$$

а его корреляционная функция

$$k_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{2} (e^{i\omega_k \tau} + e^{-i\omega_k \tau}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{i\omega_k \tau}. \quad (7.2.32)$$

В выражениях (7.2.31) и (7.2.32) $W_{-k} = W_k$, $i\omega_{-k} = -i\omega_k$. Зависимость (7.2.13) можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned} k_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) d\omega/2 = \\ &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega/2 + \int_0^{\infty} S_x(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega/2. \quad (7.2.33) \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение новую функцию $S_x^*(\omega)$, которую определим следующим образом:

$$\begin{aligned} S_x^*(\omega) &= S_x(\omega)/2 \quad \text{при } \omega \geq 0, \\ S_x^*(\omega) &= S_x(-\omega)/2 \quad \text{при } \omega < 0. \end{aligned} \quad (7.2.34)$$

Таким образом, функция $S_x^*(\omega)$ является четной функцией аргумента ω и определена для любых значений

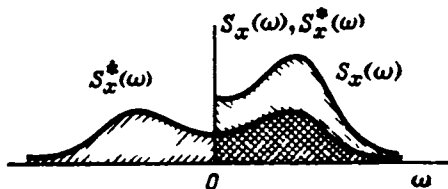


Рис. 7.2.5

этого аргумента — как положительных, так и отрицательных.

На рис. 7.2.5 показаны графики функций $S_x(\omega)$ и $S_x^*(\omega)$. Значения функции $S_x^*(\omega)$ при положительных значениях ω в два раза меньше значений спектральной плотности $S_x(\omega)$ при тех же значениях аргумента ω .

Функция $S_x^*(\omega)$ называется *спектральной плотностью стационарного случайного процесса в комплексной форме*. Она обладает тремя свойствами:

1°. $S_x^*(\omega) \geq 0$ при $-\infty < \omega < \infty$ (неотрицательная функция);

2°. $\int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) d\omega = D_x$ (т. е. интеграл от спектральной плотности в бесконечных пределах равен дисперсии с. п.);

3°. $S_x^*(\omega) = S_x^*(-\omega)$ (четная функция).

С учетом (7.2.34) выражение для $k_x(\tau)$ (7.2.33) примет вид

$$\begin{aligned} k_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega/2 + \int_0^{\infty} S_x(-\omega) e^{-i\omega\tau} d(-\omega) \frac{(-1)}{2} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{S_x(\omega)}{2} e^{i\omega\tau} d\omega - \int_0^{\infty} \frac{S_x(-\omega)}{2} e^{i(-\omega)\tau} d(-\omega) = \\ &= \int_0^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega + \int_{-\infty}^0 S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (7.2.35) \end{aligned}$$

Заменяя в выражении (7.2.14) $\cos \omega\tau$ на $(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau})/2$, получим

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \frac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{2} d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} k_x(-\tau) e^{i\omega\tau} d(-\tau) (-1) + \int_0^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^0 k_x(\tau) e^{i\omega\tau} d(-\tau) + \int_0^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Деля левую и правую части этого равенства на 2 и полагая аргумент ω принадлежащим всей числовой оси, получим

$$S_x^*(\omega) = S_x(\omega)/2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (7.2.36)$$

Выражения (7.2.35) и (7.2.36) представляют собой преобразование Фурье спектральной плотности $S_x(\omega)$ и к. ф. $k_x(\tau)$ в комплексной форме

В п. 7.1 было указано, что к. ф. $k_x(\tau)$ должна обладать свойством положительной определенности (7.1.13). Покажем, что это свойство выполняется при условии, что спектральная плотность $S_x(\omega) \geq 0$.

По формуле (7.2.13) имеем

$$\begin{aligned} k_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega t \cos \omega t' d\omega + \int_0^{\infty} S_x(\omega) \sin \omega t \sin \omega t' d\omega, \end{aligned}$$

где $\tau = t - t'$.

В этом случае формула (7.1.13) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{(B)} \int_{(B)} k_x(t - t') \varphi(t) \varphi(t') dt dt' &= \\ &= \int_{(B)} \int_{(B)} \left\{ \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega t \cos \omega t' \varphi(t) \varphi(t') d\omega + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} S_x(\omega) \sin \omega t \sin \omega t' \varphi(t) \varphi(t') d\omega \right\} dt dt' = \\ &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \left\{ \int_{(B)} \cos \omega t \varphi(t) dt \int_{(B)} \cos \omega t' \varphi(t') dt' + \right. \\ &\quad \left. + \int_{(B)} \sin \omega t \varphi(t) dt \int_{(B)} \sin \omega t' \varphi(t') dt' \right\} d\omega, \end{aligned}$$

где (B) — любая область интегрирования, принадлежащая интервалу $(0, \infty)$; $\varphi(t)$ — любая функция аргумента t . Введем обозначения

$$\int_{(B)} \cos \omega t \varphi(t) dt = \chi_1(\omega, (B)), \quad \int_{(B)} \sin \omega t \varphi(t) dt = \chi_2(\omega, (B)).$$

Тогда условие положительной определенности (7.1.13) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{(B)} \int_{(B)} k_x(t-t') \varphi(t) \varphi(t') dt dt' = \\ = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \{[\chi_1(\omega, (B))]^2 + [\chi_2(\omega, (B))]^2\} d\omega \geq 0, \end{aligned}$$

так как подынтегральная функция неотрицательна. Можно доказать (мы этого делать не будем), что условие $S_x(\omega) \geq 0$ является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы корреляционная функция была положительно определенной.

Таким образом, с помощью преобразования Фурье в комплексной форме устанавливается однозначное соответствие между к. ф. $k_x(\tau)$ стационарного с. п. и его спектральной плотностью $S_x^*(\omega)$ (см. (7.3.35)) и спектральной плотностью $S_x^*(\omega)$ стационарного с. п. и его к. ф. (см. (7.3.36)). В приложении 1 дана таблица таких соответствий для некоторых стационарных с. п., встречающихся в инженерной практике.

Пример 1. Найти спектральную плотность $S_{x_k}(\omega)$ элементарного стационарного с. п. $X_k(t) = V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t$.

Решение. Корреляционная функция $k_{x_k}(\tau)$ имеет вид

$$k_{x_k}(\tau) = D_k \cos \omega_k \tau,$$

где $D_k = D[V_k] = D[U_k]$.

Покажем, что искомая спектральная плотность $S_{x_k}(\omega)$ определяется выражением

$$S_{x_k}(\omega) = D_k \delta(\omega - \omega_k), \quad (7.2.37)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Действительно, в соответствии с формулой (7.2.13)

$$k_{x_k}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{x_k}(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \int_0^{\infty} D_k \delta(\omega - \omega_k) \cos \omega \tau d\omega;$$

в соответствии со свойствами дельта-функции (см. приложение 6 в [5])

$$k_{x_k}(\tau) = D_k \int_{\omega_k - \varepsilon}^{\omega_k + \varepsilon} \delta(\omega - \omega_k) \cos \omega \tau d\omega = D_k \cos \omega_k \tau.$$

Так как преобразование Фурье определяет спектральную плотность и корреляционную функцию взаимно однозначно, то выражение (7.2.37) является искомой спектральной плотностью элементарного стационарного с. п.

Найдем спектральную плотность элементарного стационарного с. п. в комплексной форме. В соответствии с (7.2.34) имеем:

$$S_{x_k}^*(\omega) = \frac{D_k}{2} \delta(\omega + \omega_k) + \frac{D_k}{2} \delta(\omega - \omega_k). \quad (7.2.38)$$

Можно убедиться в том, что это выражение для спектральной плотности соответствует заданной корреляционной функции (см. (7.2.35)):

$$\begin{aligned} k_{x_k}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_k}{2} [\delta(\omega + \omega_k) e^{i\omega\tau} + \delta(\omega - \omega_k) e^{i\omega\tau}] d\omega = \\ &= \frac{D_k}{2} \left[\int_{-\omega_k - \varepsilon}^{-\omega_k + \varepsilon} \delta(\omega + \omega_k) e^{i\omega\tau} d\omega + \int_{\omega_k - \varepsilon}^{\omega_k + \varepsilon} \delta(\omega - \omega_k) e^{i\omega\tau} d\omega \right] = \\ &= D_k \cos \omega_k \tau, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Найти спектральную плотность стационарного с. п., заданную своим спектральным разложением (7.2.1).

Решение. Имеем (см. (7.2.2)) и решение предыдущего примера):

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau \cos \omega \tau d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \delta(\omega - \omega_k). \end{aligned} \quad (7.2.39)$$

Спектральная плотность в комплексной форме будет (см. (7.2.38)):

$$S_x^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k [\delta(\omega + \omega_k) + \delta(\omega - \omega_k)]/2. \quad (7.2.40)$$

Пример 3. Найти спектральную плотность вырожденного стационарного случайного процесса $X(t)$ (когда $X(t) = V$, где V — с. в. (см. пример 2 из п. 7.1)), у которого $k_x(\tau) = D_v = D[V]$.

Решение. Рассматриваемый случай является частным случаем примера 1 при $\omega_k = 0$ и $D_k = D_v$. Действительно,

$$k_x(\tau) = D_v = \lim_{\omega_k \rightarrow 0} D_k \cos \omega_k \tau = D_k.$$

Следовательно (см. (7.2.38)),

$$\begin{aligned} S_x^*(\omega) &= \lim_{\omega_k \rightarrow 0} \frac{D_k}{2} [\delta(\omega + \omega_k) + \delta(\omega - \omega_k)] = \\ &= D_k \delta(\omega) = D_v \delta(\omega). \end{aligned} \quad (7.2.41)$$

Можно убедиться в том, что равенство $k_x(\tau) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \text{ выполняется. Действительно,}$$

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} D_v \delta(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = D_v.$$

При $D_v = 1$ получаем

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau = \delta(\omega). \quad (7.2.42)$$

Эта формула может служить «аналитическим» выражением дельта-функции.

В частном случае, когда с. в. является не случайной, а постоянной: $V = a = \text{const}$, получим:

$$k_x(\tau) = 0, \quad S_x^*(\omega) = 0.$$

Пример 4. Найти корреляционную функцию стационарного с. п. $X(t)$, если ее спектральная плотность $S_x(\omega)$ постоянна на интервале (ω_1, ω_2) и равна

c , а вне этого интервала равна нулю.

$$S_x(\omega) = \begin{cases} c & \text{при } \omega \in (\omega_1, \omega_2), \\ 0 & \text{при } \omega \notin (\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Решение. По формуле (7.2.13)

$$\begin{aligned} k_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \\ &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} c \cos \omega \tau d\omega = \frac{c}{\tau} [\sin \omega_2 \tau - \sin \omega_1 \tau] = \\ &= \frac{2c}{\tau} \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \tau \right) \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau \right). \quad (7.2.43) \end{aligned}$$

Дисперсия рассматриваемого случайного процесса $X(t)$ будет

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} c d\omega = c(\omega_2 - \omega_1),$$

откуда

$$c = \frac{D_x}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Следовательно,

$$k_x(\tau) = \frac{2D_x}{\omega_2 - \omega_1} \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \tau \right) \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau \right) \frac{1}{\tau}. \quad (7.2.44)$$

Рассмотрим предел этого выражения при $\omega_2 \rightarrow \omega_1$:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} D_x \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \tau \right) \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau \right) / \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau \right) &= \\ = D_x \cos \omega_1 \tau \lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau \right) / \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau \right) &= \\ = D_x \cos \omega_1 \tau. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ мы получили случай, рассмотренный в примере 1, когда с. п. является элементарным стационарным случайным процессом — случайные колебания на частоте ω_1 .

Пример 5. Найти спектральную плотность с. п. $X(t)$, представляющего собой случайную телеграфную волну (см. пример 3 из п. 7.1): $k_x(\tau) = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 S_x^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-2\lambda|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-2\lambda|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau \right] = \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{2\lambda\tau - i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-2\lambda\tau - i\omega\tau} d\tau \right] = \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2\lambda - i\omega} - \frac{1}{-2\lambda - i\omega} \right] = \\
 &= \frac{a^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2\lambda - i\omega} + \frac{1}{2\lambda + i\omega} \right] = \frac{a^2}{2\pi} \cdot \frac{4\lambda}{(2\lambda)^2 + \omega^2} = \\
 &= \frac{a^2}{\pi} \frac{2\lambda}{(2\lambda)^2 + \omega^2}. \quad (7.2.45)
 \end{aligned}$$

График $S_x^*(\omega)$ показан на рис. 7.2.6.

Пример 6. Показать, что стационарный белый шум $X(t)$ имеет постоянную спектральную плотность.

Решение. У стационарного белого шума (см. пример 6 из п. 7.1) корреляционная функция может быть записана в виде

$$k_x(\tau) = c\delta(\tau),$$

откуда

$$\begin{aligned}
 S_x^*(\omega) &= \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c\delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{c}{2\pi}.
 \end{aligned}$$

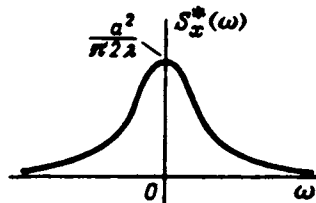


Рис. 7.2.6

Величина c называется *интенсивностью белого шума*. Таким образом, стационарный белый шум представляет собой случайные колебания на всех частотах, при этом дисперсия этих колебаний, приходящихся на элементарный участок $\Delta\omega$, остается постоянной и не зависит от частоты колебаний ω . Действительно, эта дисперсия будет приближенно равна

$$\Delta D_x \approx S_x^*(\omega) \Delta\omega = \frac{c}{2\pi} \Delta\omega$$

и не зависит от частоты ω .

Пример 7. Найти спектральную плотность стационарного случайного процесса $X(t)$, представляющего собой телеграфную волну (см. пример 11 из п. 7.1): $k_x(\tau) = a^2(1 - |\tau|) \mathbb{1}(1 - |\tau|)$.

Решение.

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{2a^2}{\pi} \int_0^1 (1 - \tau) \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{2a^2}{\pi} \left[\int_0^1 \frac{\cos \omega \tau}{\omega} d\omega \tau - \frac{1}{\omega^2} \int_0^1 \omega \tau \cos \omega \tau d\omega \tau \right] = \\ &= \frac{2a^2}{\pi} \left[\frac{1}{\omega} \Big|_0^1 \sin x - \frac{1}{\omega^2} \Big|_0^1 (\cos x + x \sin x) \right] = \\ &= \frac{2a^2}{\pi} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} = \frac{a^2}{\pi} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^2 / \left(\frac{\omega}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

График спектральной плотности $S_x(\omega)$ показан на рис. 7.2.7.

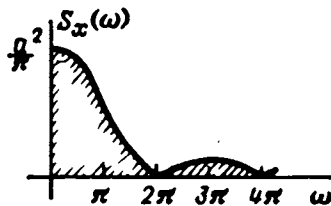


Рис. 7.2.7

Если корреляционная функция имеет вид

$$k_x(\tau) = a^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} \right) \mathbb{1} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0} \right),$$

где $\tau_0 > 0$, то

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{2a^2}{\pi} \frac{1 - \cos \omega \tau_0}{\tau_0 \omega^2} = \frac{2\tau_0 a^2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos \omega \tau_0}{(\omega \tau_0)^2} = \\ &= \frac{\tau_0 a^2}{\pi} \left(\frac{\sin (\omega \tau_0)/2}{\omega \tau_0/2} \right)^2. \end{aligned}$$

Пример 8. Определить, при каких положительных параметрах α , β и D_x функция

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha |\tau|} \left(\operatorname{ch} \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta |\tau| \right) \quad (7.2.46)$$

обладает свойствами корреляционной функции.

Решение. Первое свойство $k_x(0) = D_x > 0$, очевидно, выполняется.

Второе свойство $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$ (четность корреляционной функции) тоже выполняется.

Третье свойство $|k_x(\tau)| \leq k_x(0) = D_x$. Так как $k_x(\tau)$ — функция четная, достаточно исследовать ее при $\tau \geq 0$. В этом случае

$$k_x(\tau) = D_x \left\{ \frac{1}{2} e^{-(\alpha-\beta)\tau} \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) - \frac{1}{2} e^{-(\alpha+\beta)\tau} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \right\} \quad (\tau \geq 0).$$

Выражение в фигурных скобках по модулю не должно превышать единицы. Это условие будет выполняться только в случае, когда $\alpha \geq \beta$.

Четвертое свойство $S_x^*(\omega) \geq 0$. Найдем спектральную плотность

$$\begin{aligned} S_x^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{D_x}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-\beta+i\omega)\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta+i\omega)\tau} d\tau \right\} = \\ &= \frac{D_x}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\beta+\alpha}{\alpha-\beta+i\omega} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+i\omega} \right\} = \\ &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \cdot 2\alpha D_x}{\pi [(\alpha-\beta)^2 + \omega^2][(\alpha+\beta)^2 + \omega^2]}. \quad (7.2.47) \end{aligned}$$

где $\operatorname{Re}\{x\}$ — действительная часть комплексного числа x .

Анализ полученного выражения показывает, что $S_x^*(\omega) > 0$ при $\alpha > \beta$. При $\alpha = \beta$ спектральная плотность $S_x^*(\omega)$ пропорциональна дельта-функции: $S_x^*(\omega) = D_x \delta(\omega)$.

Таким образом, при $\alpha \geq \beta$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ корреляционная функция (7.2.46) обладает всеми четырьмя свойствами корреляционной функции стационарного с. п. Заметим, что при $\alpha = \beta$ с. п. $X(t)$ превращается в с. в. (см. пример 3). В этом случае (при $\alpha = \beta$)

$$k_x(\tau) = D_x, \quad S_x^*(\omega) = D_x \delta(\omega).$$

На рис. 7.2.8 показаны графики зависимостей $k_x(\tau)$ и $S_x^*(\omega)$.

При $\alpha \rightarrow \beta$ график к. ф. $k_x(\tau)$ будет «выпрямляться» и приближаться к прямой, параллельной оси абсцисс 0τ и отстоящей от нее на величину D_x (см. пунктирную линию на рис. 7.2.8, а), а график спектральной плотности $S_x^*(\omega)$ будет вытягиваться вверх в точке $\omega = 0$ и более круто падать вниз, сохраняя

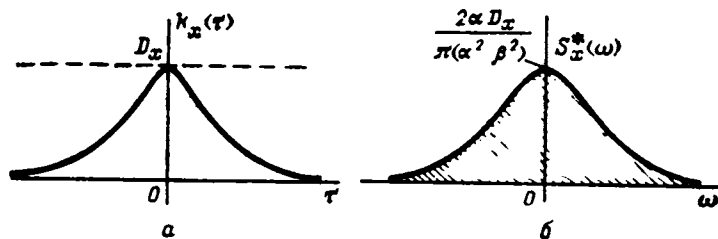


Рис. 7.2.8

неизменной площадью, ограниченную кривой $S_x^*(\omega)$ и осью абсцисс 0ω (см. площадь, заштрихованную на рис. 7.2.8, б). Эта площадь равна дисперсии D_x . В пределе при $\alpha = \beta$ спектральная плотность будет пропорциональна дельта-функции: $S_x^*(\omega) = D_x \delta(\omega)$ (см. (7.2.47)).

7.3. Линейные преобразования стационарных случайных процессов

В п. 7.2 мы показали, что стационарный с. п. $X(t)$ можно с необходимой для инженерной практики точностью представить своим каноническим разложением (7.2.1). Для этого достаточно корреляционную функцию $k_x(\tau)$ разложить в ряд Фурье на интервале $(-T, T)$, при этом получаем дисперсии коэффициентов разложения D_k и частоты гармонических колебаний ω_k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Чем больше будет интервал разложения, тем точнее можно представить с. п. своим спектральным разложением (7.2.1).

Рассмотрим линейное однородное преобразование стационарного с. п. $X(t)$:

$$Y(t) = L_{0,1}\{X(t)\}. \quad (7.3.1)$$

В соответствии с формулой (6.2.14) м.о. случайного процесса $Y(t)$ будет:

$$m_y(t) = M[Y(t)] = L_{o_t}\{m_x\}, \quad (7.3.2)$$

а его к.ф. определяется по формуле (6.2.18):

$$K_y(t, t') = L_{o_{t'}}\{L_{o_t}\{K_x(t, t')\}\}.$$

Но корреляционная функция $K_x(t, t')$ стационарного с.п., заданного своим спектральным разложением, определяется по формуле (7.2.2). Следовательно,

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= L_{o_{t'}}\left\{L_{o_t}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k(t - t')\right\}\right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k L_{o_{t'}}\{L_{o_t}\{\cos \omega_k t \cdot \cos \omega_k t' + \sin \omega_k t \cdot \sin \omega_k t'\}\}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} L_{o_t}\{\cos \omega_k t\} &= \varphi_k(t), \\ L_{o_t}\{\sin \omega_k t\} &= \psi_k(t). \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} K_y(t, t') &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k L_{o_{t'}}\{\varphi_k(t) \cos \omega_k t' + \psi_k(t) \sin \omega_k t'\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k [\varphi_k(t) \varphi_k(t') + \psi_k(t) \psi_k(t')] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k \varphi_k(t) \varphi_k(t') + \sum_{k=0}^{\infty} D_k \psi_k(t) \psi_k(t'). \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Получили каноническое разложение корреляционной функции с.п. $Y(t)$.

Если рассматривается линейное неоднородное преобразование (6.2.8)

$$Y(t) = L_{o_t}\{X(t)\} = L_{o_t}\{X(t)\} + \varphi(t), \quad (7.3.5)$$

то формула для математического ожидания с.п. $X(t)$ примет вид

$$m_y(t) = M[Y(t)] = L_{o_t}\{m_x\} + \varphi(t), \quad (7.3.6)$$

а формулы (7.3.3) и (7.3.4) для определения к.ф. остаются теми же и для линейного однородного преобразования.

Чтобы с. п. $Y(t)$ был стационарен по математическому ожиданию, необходимо выполнение условия

$$m_y(t) = m_y = L_{0,t} \{m_x\} + \varphi(t) = \text{const.} \quad (7.3.7)$$

Чтобы с. п. $Y(t)$ был стационарен по корреляционной функции, достаточно выполнения условий (см. (7.3.3))

$$\begin{aligned} L_{0,t} \{\cos \omega_k t\} &= \alpha_k \cos \omega_k t, \\ L_{0,t} \{\sin \omega_k t\} &= \beta_k \sin \omega_k t \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

или наоборот

$$\begin{aligned} L_{0,t} \{\cos \omega_k t\} &= \alpha_k \sin \omega_k t, \\ L_{0,t} \{\sin \omega_k t\} &= \beta_k \cos \omega_k t, \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

причем

$$\alpha_k^2 = \beta_k^2. \quad (7.3.9')$$

Рассмотрим несколько примеров линейных преобразований стационарного с. п. $X(t)$, считая при этом известными m_x и $k_x(\tau)$.

1. Дифференцирование

$$Y(t) = dX(t)/dt. \quad (7.3.10)$$

В этом случае по формуле (6.2.22) получаем

$$m_y(t) = m_y = dm_x/dt = 0, \quad (7.3.11)$$

$$L_{0,t} \{\cos \omega_k t\} = \frac{d}{dt} \cos \omega_k t = -\omega_k \sin \omega_k t = \varphi_k(t),$$

$$L_{0,t} \{\sin \omega_k t\} = \frac{d}{dt} \sin \omega_k t = \omega_k \cos \omega_k t = \psi_k(t).$$

Условия (7.3.7) — (7.3.9') выполняются, следовательно, с. п. $Y(t) = dX(t)/dt$ будет стационарен по математическому ожиданию и по корреляционной функции, которую найдем по формуле (6.2.22):

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} k_x(t - t'). \quad (7.3.12)$$

Обозначим $\tau = t - t'$, тогда

$$k_y(\tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial (-\tau)} k_x(\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} k_x(\tau). \quad (7.3.13)$$

Используя метод полной индукции, можно показать, что k -я производная стационарного с. п. $X(t)$

$$Y_k(t) = d^k X(t)/dt^k \quad (7.3.14)$$

является стационарным с.п. с характеристиками

$$\begin{aligned} m_y &= M[Y_k(t)] = 0, \\ k_{y_k}(\tau) &= (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial \tau^{2k}} k_x(\tau). \end{aligned} \quad (7.3.15)$$

Кроме того, можно показать, что если стационарный с.п. $X(t)$ является нормальным, то его k -я производная $Y_k(t) = d^k X(t)/dt^k$ является также нормальным с.п. с характеристиками (7.3.15).

Найдем спектральную плотность с.п. $Y(t) = dX(t)/dt$. В соответствии с формулами (7.2.35), (7.2.36) и (7.3.13) спектральная плотность с.п. $Y(t)$

$$\begin{aligned} S_y^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} k_x(\tau) \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\tau \left[-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 e^{i\omega\tau} d\tau \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \right] = \\ &= \frac{\omega^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \omega^2 S_x^*(\omega). \end{aligned}$$

Таким образом, если с.п. $Y(t) = dX(t)/dt$ и спектральная плотность с.п. $X(t)$ равна $S_x^*(\omega)$, то спектральная плотность с.п. $Y(t)$ определяется по формуле

$$S_y^*(\omega) = \omega^2 S_x^*(\omega). \quad (7.3.16)$$

Ввиду важности формулы (7.3.16) запишем ее в виде правила: *спектральная плотность производной стационарного с.п. равна произведению спектральной плотности этого с.п. на ω^2 .*

Если с.п. $Y_k(t) = d^k X(t)/dt^k$ (см. (7.3.14)) и спектральная плотность с.п. $X(t)$ равна $S_x^*(\omega)$, то

$$S_{y_k}^*(\omega) = \omega^{2k} S_x^*(\omega). \quad (7.3.17)$$

Формулу (7.3.17) можно получить из формулы (7.3.16), применяя метод математической индукции.

Пример 1. Найти характеристики производной с. п. $X(t)$, который представляет собой случайную телеграфную волну (см. пример 3 из п. 7.1): $m_x = 0$, $k_x(\tau) = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}$.

Решение. $m_y = dm_x/dt = 0$,

$$k_y(\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} a^2 e^{-2\lambda|\tau|} = a^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ e^{-2\lambda|\tau|} \cdot 2\lambda \frac{d|\tau|}{d\tau} \right\}.$$

В приложении 6 в [5] показано, что

$$\frac{d|\tau|}{d\tau} = \text{sign } \tau, \quad \frac{d^2|\tau|}{d\tau^2} = 2\delta(\tau),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} k_y(\tau) &= a^2 2\lambda \left\{ e^{-2\lambda|\tau|} \cdot (-2\lambda) \frac{d|\tau|}{d\tau} \cdot \frac{d|\tau|}{d\tau} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2|\tau|}{d\tau^2} e^{-2\lambda|\tau|} \right\} = a^2 2\lambda e^{-2\lambda|\tau|} [2\delta(\tau) - 2\lambda (\text{sign } \tau)^2]. \end{aligned}$$

Наличие слагаемого $2\delta(\tau)$ показывает, что в составе стационарного с. п. $Y(t)$ есть белый шум. Найдем

спектральную плотность $S_y^*(\omega)$ (см. (7.2.45)):

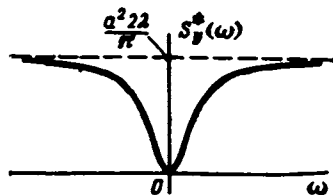


Рис. 7.3.1

$$\begin{aligned} S_y^*(\omega) &= \omega^2 S_x^*(\omega) = \\ &= \frac{a^2 2\lambda}{\pi} \cdot \frac{\omega^2}{(2\lambda)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

На рис. 7.3.1 показан график зависимости $S_y^*(\omega)$.

Так как с. п. $Y(t)$ содержит белый шум, то

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_y^*(\omega) d\omega \rightarrow \infty$. Это значит, что площадь, ограниченная кривой $S_y^*(\omega)$ и осью абсцисс на рис. 7.3.1, тоже стремится к бесконечности.

Пример 2. Найти в.к.ф. стационарного с. п. $X(t)$ и его производной $Y(t) = dX(t)/dt$.

Решение. По определению

$$\begin{aligned} R_{xy}(t, t') &= M \left[\overset{\circ}{X}(t) \frac{d}{dt'} \overset{\circ}{X}(t') \right] = \frac{\partial}{\partial t'} M [\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t')] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t'} K_x(t, t') = \frac{\partial}{\partial t'} k_x(\tau). \end{aligned}$$

где $\tau = t' - t$, следовательно,

$$R_{xy}(t, t') = \left(\frac{\partial}{\partial t} k_x(\tau) \right) \frac{\partial \tau}{\partial t'} = \frac{d}{d\tau} k_x(\tau).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} R_{xy}(t', t) &= \frac{\partial}{\partial t} K_x(t, t') = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} k_x(\tau) \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \\ &= \frac{d}{d\tau} k_x(\tau) = -R_{xy}(t, t'). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_{xy}(\tau) = -\frac{d}{d\tau} k_x(\tau). \quad (7.3.18)$$

Другими словами, стационарный с.п. $X(t)$ и его производная $Y(t) = dX(t)/dt$ «стационарно коррелированы», так как $R_{xy}(\tau)$ есть функция только сдвига τ .

Покажем, что стационарные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ в одной точке t не коррелированы. Действительно, при $t' = t$ $\tau = t' - t = 0$, следовательно,

$$R_{xy}(0) = -\frac{d}{d\tau} k_x(0) = -\frac{d}{d\tau} D_x = 0.$$

Пример 3. Рассматривается линейное неоднородное преобразование стационарного с.п. $X(t)$

$$Z(t) = a_0(t) + a_1(t) dX(t)/dt. \quad (7.3.19)$$

Процесс $X(t)$ имеет характеристики m_x и $k_x(\tau)$. Требуется найти характеристики с.п. $Z(t)$.

Решение. Обозначим

$$Y(t) = dX(t)/dt.$$

Тогда

$$Z(t) = a_0(t) + a_1(t) Y(t), \quad (7.3.20)$$

что является линейной формой с.п. $Y(t)$ (см. п. 6.3). Следовательно,

$$m_z(t) = a_0(t) + a_1(t) m_y(t).$$

Но $m_y(t) = 0$ (см. (7.3.12)). Тогда

$$m_z(t) = a_0(t). \quad (7.3.21)$$

Корреляционная функция процесса $Z(t)$ определяется по формуле (6.3.18) при $k=1$:

$$\begin{aligned} K_z(t, t') &= a_1(t) a_1(t') k_y(t - t') = \\ &= a_1(t) a_1(t') \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} k_x(t - t'). \end{aligned} \quad (7.3.22)$$

Таким образом, с.п. $Z(t)$ в общем случае не будет стационарным. Если коэффициенты в уравнении (7.3.19) будут постоянными:

$$a_1(t) = a_1 = \text{const}, \quad a_2(t) = a_2 = \text{const}, \quad (7.3.23)$$

то с.п. $Z(t)$ будет стационарным с характеристиками (см. (7.1.13))

$$m_z = a_0, \quad k_z(\tau) = -a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} k_x(\tau). \quad (7.3.24)$$

Если с.п. $Z_k(t)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= a_0(t) + a_1(t) \frac{dX(t)}{dt} + \dots + a_k(t) \frac{d^k X(t)}{dt^k} = \\ &= a_0(t) + \sum_{i=1}^k a_i(t) \frac{d^i X(t)}{dt^i}, \end{aligned} \quad (7.3.25)$$

где $X(t)$ — стационарный с.п. с характеристиками m_x и $k_x(\tau)$, то (см. (6.3.7))

$$m_{z_k}(t) = M[Z_k(t)] = a_0(t) + \sum_{i=1}^k a_i(t) M[Y_i(t)],$$

где $Y_i(t) = d^i X(t)/dt^i$. В соответствии с формулой (7.3.15) $M[Y_i(t)] = 0$, поэтому

$$m_{z_k}(t) = a_0(t). \quad (7.3.26)$$

Введем обозначения

$$K_{y_i}(t, t') = M[\overset{\circ}{Y}_i(t) \overset{\circ}{Y}_i(t')] = \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left\{ \frac{\partial^i}{(\partial t')^i} k_x(t - t') \right\}. \quad (7.3.27)$$

$$\begin{aligned} R_{y_i y_j}(t, t') &= M[\overset{\circ}{Y}_i(t) \overset{\circ}{Y}_j(t')] = \frac{\partial^i}{\partial t^i} \left\{ \frac{\partial^j}{(\partial t')^j} k_x(t - t') \right\} \\ &(i \neq j). \end{aligned} \quad (7.3.28)$$

Тогда в соответствии с формулой (6.3.17) получим

$$\begin{aligned} K_{z_k}(t, t') &= \sum_{i=1}^k a_i(t) a_i(t') K_{y_i}(t, t') + \\ &+ \sum_{i \neq j} a_i(t) a_j(t') R_{y_i y_j}(t, t'). \end{aligned} \quad (7.3.29)$$

Таким образом, при переменных коэффициентах $a_0(t)$, $a_1(t)$, ..., $a_k(t)$ с.п. $Z_k(t)$ (см. (7.3.25)) не будет стационарным.

При постоянных коэффициентах $a_0, a_1, \dots, a_k$ получим (см. (7.3.15))

$$m_{x_k}(t) = a_0, \quad (7.3.30)$$

$$K_{x_k}(t, t') = k_{x_k}(\tau) = \sum_{i=1}^k a_i^2 (-1)^i \frac{\partial^{2i}}{\partial \tau^{2i}} k_x(\tau) + \\ + \sum_{i \neq j} a_i a_j (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial \tau^{i+j}} k_x(\tau). \quad (7.3.31)$$

Следовательно, при постоянных коэффициентах a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) в выражении (7.3.25) с.п. $Z_k(t)$ будет стационарным. Если процесс $X(t)$ был нормальным, то и процесс $Z(t)$ тоже будет нормальным при любых коэффициентах в выражении (7.3.25) — как постоянных, так и переменных. ►

В дальнейшем будем называть оператор A_i (см. п. 6.2) стационарным оператором и обозначать его A_{t_c} , если этот оператор преобразует стационарный с.п. $X(t)$ в стационарный с.п. $Y(t)$. Таким образом, линейный неоднородный оператор

$$a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \frac{d^i X(t)}{dt^i} \quad (7.3.32)$$

является стационарным оператором.

2. *Интегрирование.* Рассмотрим линейное однородное преобразование — интегрирование стационарного с.п. $X(t)$ в пределах от 0 до t :

$$Y(t) = \int_0^t X(t) dt. \quad (7.3.33)$$

Так как оператор интегрирования является линейным однородным, то

$$m_y(t) = \int_0^t m_x dt = t m_x, \quad (7.3.34)$$

$$K_y(t, t') = \int_0^t \int_0^{t'} k_x(t - t') dt dt'. \quad (7.3.35)$$

Мы видим, что преобразование (7.3.33) не является стационарным по математическому ожиданию.

Чтобы исследовать функцию $K_y(t, t')$, рассмотрим более подробно преобразование (7.3.33), считая, что процесс $X(t)$ представлен своим спектральным разложением (7.2.1):

$$Y(t) = \int_0^t \left[m_x + \sum_{k=0}^{\infty} (V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t) \right] dt = \\ = m_x t + \sum_{k=0}^{\infty} [V_k \sin \omega_k t / \omega_k + U_k (1 - \cos \omega_k t) / \omega_k]. \quad (7.3.36)$$

Мы видим, что выражение (7.3.36) представляет собой каноническое разложение, однако оно не является спектральным и с. п. $Y(t)$ не является стационарным. Следовательно, каноническое разложение к. ф. будет иметь вид

$$K_y(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\omega_k^2} [\sin \omega_k t \sin \omega_k t' + \\ + (1 - \cos \omega_k t)(1 - \cos \omega_k t')] \quad (7.3.37)$$

и дисперсия с. п. $Y(t)$ будет определяться по формуле

$$D_y(t) = K_y(t, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\omega_k^2} [\sin^2 \omega_k t + (1 - \cos \omega_k t)^2] = \\ = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\omega_k^2} (1 - \cos \omega_k t). \quad (7.3.38)$$

Рассмотрим еще одно линейное однородное преобразование стационарного с. п. $X(t)$, связанное с интегрированием:

$$Z(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(t) dt. \quad (7.3.39)$$

Считая, что процесс $X(t)$ задан своим спектральным разложением (7.2.1), получим (см. (7.3.36)):

$$Z(t) = m_x + \sum_{k=0}^{\infty} [V_k \sin \omega_k t / (\omega_k t) + U_k (1 - \cos \omega_k t) / (\omega_k t)]. \quad (7.3.40)$$

Выражение (7.3.40) является каноническим разложением, но не спектральным; поэтому с. п. $Z(t)$ не является стационарным процессом. Его к. ф. будет иметь вид

$$K_z(t, t') = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \left[\frac{\sin \omega_k t \sin \omega_k t'}{\omega_k^2 t t'} + \frac{(1 - \cos \omega_k t)(1 - \cos \omega_k t')}{\omega_k^2 t t'} \right]. \quad (7.3.41)$$

а дисперсию найдем по формуле

$$D_z(t) = K_z(t, t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \left[\left(\frac{\sin \omega_k t}{\omega_k t} \right)^2 + \left(\frac{1 - \cos \omega_k t}{\omega_k t} \right)^2 \right] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{1 - \cos \omega_k t}{(\omega_k t)^2}. \quad (7.3.42)$$

Рассмотрим частный случай для формул (7.3.40), (7.3.42), когда $\omega_0 = 0$ и $D_0 > 0$. В этом случае спектральное разложение с. п. $X(t)$ примет вид

$$X(t) = m_x + V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t), \quad (7.3.43)$$

а для процесса $Z(t)$ получим такое выражение:

$$\begin{aligned} Z(t) &= m_x + V_0 \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} + U_0 \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0 t} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(V_k \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k t} + U_k \frac{1 - \cos \omega_k t}{\omega_k t} \right) = \\ &= m_x + V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(V_k \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k t} + U_k \frac{1 - \cos \omega_k t}{\omega_k t} \right). \end{aligned} \quad (7.3.44)$$

В рассматриваемом случае (при $\omega_0 = 0$) в составе канонического разложения $Z(t)$ присутствует с. в. V_0 .

Следовательно,

$$m_z(t) = m_z = m_x, \quad (7.3.45)$$

$$K_z(t, t') = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left[\frac{\sin \omega_k t \sin \omega_k t'}{\omega_k^2 t t'} + \frac{(1 - \cos \omega_k t)(1 - \cos \omega_k t')}{\omega_k^2 t t'} \right], \quad (7.3.46)$$

$$D_z(t) = D_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{(\omega_k t)^2} (1 - \cos \omega_k t). \quad (7.3.47)$$

Мы видим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_z(t) = D_0. \quad (7.3.48)$$

Линейное однородное преобразование (7.3.39) используют для получения оценки м.о. m_x стационарного с.п. $X(t)$ (см. п. 11.6*). Эта оценка является несмещенной, так как $M[Z(t)] = m_x$, но дисперсия этой оценки будет зависеть от величин D_0 и t . Если в составе стационарного с.п. $X(t)$ нет слагаемых в виде случайной величины ($V_0 = 0$), а есть только слагаемые в виде случайных колебаний на различных частотах, то в этом случае оценка (7.3.39) будет *асимптотически состоятельной*, так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D_z(t) = 0. \quad (7.3.49)$$

Таким образом, преобразование (7.3.39) может быть использовано для оценки м.о. m_x стационарного с.п. $X(t)$, если его к.ф. $k_x(\tau)$ обладает свойством

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k_x(\tau) = 0. \quad (7.3.50)$$

3. *Сумма двух стационарных случайных процессов.* Рассматривается процесс $Z(t)$, равный сумме двух стационарных с.п. $X(t)$ и $Y(t)$:

$$Z(t) = X(t) + Y(t). \quad (7.3.51)$$

Даны характеристики процессов $X(t)$ и $Y(t)$: m_x , $k_x(\tau)$, m_y , $k_y(\tau)$, а также их взаимная к.ф. (см. п. 1.2):

$$R_{xy}(t, t') = R_{yx}(t', t). \quad (7.3.52)$$

Случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ называются *стационарно связанными*, если выполняется условие

$$R_{xy}(t, t') = R_{xy}(\tau), \quad (7.3.53)$$

где $\tau = t - t'$.

Из свойства (7.3.53) следует, что для стационарно связанных процессов выполняется равенство

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau). \quad (7.3.54)$$

Найдем характеристики с. п. $Z(t)$. В соответствии с формулой (6.3.7), (6.3.13), (6.3.17) имеем

$$m_z(t) = m_z = m_x + m_y = \text{const}, \quad (7.3.55)$$

$$K_z(t, t') = k_x(t - t') + k_y(t - t') + R_{xy}(t, t') + R_{yx}(t, t'), \quad (7.3.56)$$

$$\begin{aligned} D_z(t) &= k_x(0) + k_y(0) + 2R_{xy}(t, t) = \\ &= D_x + D_y + 2R_{xy}(t, t). \end{aligned} \quad (7.3.57)$$

Мы видим, что м. о. суммы двух стационарных с. п. есть постоянная величина, равная сумме математических ожиданий слагаемых.

Корреляционная функция суммы двух стационарных с. п. в общем случае будет функцией двух аргументов t и t' . Если с. п. $X(t)$ и $Y(t)$ стационарно связаны, то с. п. $Z(t) = X(t) + Y(t)$ будет стационарным:

$$K_z(t, t') = k_z(\tau) = k_x(\tau) + k_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau), \quad (7.3.58)$$

$$D_z = D_x + D_y + 2R_{xy}(0). \quad (7.3.59)$$

Если стационарные с. п. $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированы: $R_{xy}(t, t') = 0$, то

$$k_z(\tau) = k_x(\tau) + k_y(\tau) \quad (7.3.60)$$

и с. п. $Z(t)$ будет стационарным.

Пример 4. Рассматривается сумма двух элементарных стационарных с. п. $Z(t) = X(t) + Y(t)$, где

$$X(t) = U \cos \omega_1 t + V \sin \omega_1 t, \quad Y(t) = U \sin \omega_1 t - V \cos \omega_1 t.$$

Случайные величины U и V центрированы и не коррелированы с одинаковыми дисперсиями $D_u = D_v = D$. Требуется найти характеристики с. п. $Z(t)$.

Решение. Можно убедиться в том, что

$$m_x = m_y = 0, \quad k_x(\tau) = k_y(\tau) = D \cos \omega_1 \tau \quad (\tau = t' - t).$$

Найдем в. к. ф. процессов $X(t)$ и $Y(t)$:

$$\begin{aligned} R_{xy}(t, t') &= M[\overset{0}{X}(t) \overset{0}{Y}(t')] = \\ &= M[(U \cos \omega_1 t + V \sin \omega_1 t)(U \sin \omega_1 t' - V \cos \omega_1 t')] = \\ &= M[U^2 \cos \omega_1 t \sin \omega_1 t' - V^2 \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t' + \\ &\quad + UV(\sin \omega_1 t \sin \omega_1 t' - \cos \omega_1 t \cos \omega_1 t')] = \\ &= D(\cos \omega_1 t \sin \omega_1 t' - \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t') = \\ &= D \sin \omega_1(t - t') = D \sin \omega_1 \tau = R_{xy}(\tau). \end{aligned}$$

По формуле (7.3.58) находим (см. (7.3.54)):

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= k_x(t - t') + k_y(t - t') + R_{xy}(t - t') + \\ &\quad + R_{yx}(t - t') = D[\cos \omega_1 \tau + \cos \omega_1 \tau + \sin \omega_1 \tau + \\ &\quad + \sin \omega_1(-\tau)] = k_x(\tau) + k_y(\tau) = k_x(\tau). \end{aligned}$$

Мы видим, что процесс $Z(t)$ представляет собой элементарный стационарный с. п. вида

$$Z(t) = W_1 \cos \omega_1 t + W_2 \sin \omega_1 t,$$

где W_1 и W_2 центрированные некоррелированные с. в. с одинаковыми дисперсиями $D_{W_1} = D_{W_2} = 2D$. Случайные величины W_1 и W_2 выражаются через с. в. U и V следующим образом:

$$\begin{aligned} Z(t) &= U \cos \omega_1 t + V \sin \omega_1 t + U \sin \omega_1 t - V \cos \omega_1 t = \\ &= (U - V) \cos \omega_1 t + (U + V) \sin \omega_1 t, \end{aligned}$$

откуда $W_1 = U - V$, $W_2 = U + V$.

Можно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} M[W_1] &= M[W_2] = 0, \quad D[W_1] = D[W_2] = 2D, \\ K_{W_1, W_2} &= M[W_1 W_2] = 0. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Найдем в общем случае спектральную плотность стационарного с. п. $Z(t) = X(t) + Y(t)$, если процессы $X(t)$ и $Y(t)$ стационарно связаны (см. (7.3.58)):

$$\begin{aligned} S_z^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [k_x(\tau) + k_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= S_x^*(\omega) + S_y^*(\omega) + S_{xy}^*(\omega) + S_{yx}^*(\omega), \quad (7.3.61) \end{aligned}$$

где $S_x^*(\omega)$, $S_y^*(\omega)$ — спектральные плотности стационарных с. п. $X(t)$ и $Y(t)$ соответственно,

$$S_{xy}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (7.3.62)$$

— взаимная спектральная плотность двух стационарно связанных с. п. Из (7.3.62) следует, что

$$S_{yx}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (7.3.63)$$

В соответствии с равенством (7.3.54) между взаимными плотностями $S_{xy}^*(\omega)$ и $S_{yx}^*(\omega)$ существует следующее равенство:

$$S_{xy}^*(\omega) = \overline{S_{yx}^*(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (7.3.64)$$

Тогда формулу (7.3.61) можно записать в виде

$$S_z^*(\omega) = S_x^*(\omega) + S_y^*(\omega) + 2 \operatorname{Re} \{S_{xy}^*(\omega)\}, \quad (7.3.65)$$

где $\operatorname{Re}\{a\}$ — действительная часть комплексного числа a .

Если случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ не коррелированы, то

$$S_z^*(\omega) = S_x^*(\omega) + S_y^*(\omega). \quad (7.3.66)$$

Из общих свойств спектральной плотности, приведенных в п. 7.2, следует, что $\operatorname{Re} \{S_{xy}^*(\omega)\}$ является четной неотрицательной функцией ω .

Пример 5. Найти взаимную спектральную плотность $S_{xy}^*(\omega)$ элементарных стационарных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, рассмотренных в предыдущем примере.

Решение. По формуле (7.3.62) имеем

$$\begin{aligned} S_{xy}^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D \sin \omega_1 \tau e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_1\tau} - e^{-i\omega_1\tau}}{2i} e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{(-i)D}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_1)\tau} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega_1)\tau} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Применяя формулу (7.2.42), получим

$$S_{xy}^*(\omega) = -\frac{iD}{2} [\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)].$$

Мы видим, что действительная часть спектральной плотности $S_{xy}^*(\omega)$ равна нулю. Поэтому в примере 4 корреляционная функция с.п. $Z(t) = X(t) + Y(t)$ определяется по формуле $k_z(\tau) = k_x(\tau) + k_y(\tau)$. Таким образом, стационарные случайные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ могут быть стационарно связанными ($R_{xy}(\tau) \neq 0$), тем не менее спектральная плотность их суммы будет определяться по формуле (7.3.65), если действительная часть их взаимной спектральной плотности равна нулю ($\text{Re}\{S_{xy}^*(\omega)\} = 0$).

Пример 6. Даны к.ф. двух стационарных с.п. $X(t)$ и $Y(t)$:

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \quad (D_x > 0, \alpha > 0),$$

$$k_y(\tau) = D_y \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right) \mathbf{1}\left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_0}\right) \quad (D_y > 0, \tau_0 > 0)$$

и их взаимная спектральная плотность

$$S_{xy}^*(\omega) = \beta / [(\omega^2 - \gamma^2)^2 + i\omega^4] \quad (\beta > 0).$$

Требуется найти спектральную плотность с.п. $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

Решение. Преобразуем выражения для $S_{xy}^*(\omega)$:

$$\begin{aligned} S_{xy}^*(\omega) &= \frac{\beta}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + i\omega^4} \frac{(\omega^2 - \gamma^2)^2 - i\omega^4}{(\omega^2 - \gamma^2)^2 - i\omega^4} = \\ &= \frac{\beta}{(\omega^2 - \gamma^2)^4 + \omega^4} [(\omega^2 - \gamma^2)^2 - i\omega^4] = \\ &= \frac{\beta(\omega^2 - \gamma^2)^2}{(\omega^2 - \gamma^2)^4 + \omega^4} - i \frac{\beta\omega^4}{(\omega^2 - \gamma^2)^4 + \omega^4}, \end{aligned}$$

откуда

$$\text{Re}\{S_{xy}^*(\omega)\} = \frac{\beta(\omega^2 - \gamma^2)^2}{(\omega^2 - \gamma^2)^4 + \omega^4}.$$

Следовательно (см. примеры 5 и 7 из п. 7.2),

$$\begin{aligned} S_z^*(\omega) &= S_x^*(\omega) + S_y^*(\omega) + \text{Re}\{S_{xy}^*(\omega)\} = \\ &= \frac{D_x}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{D_y \tau_0}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau_0}{2}}{\frac{\omega \tau_0}{2}} \right)^2 + \frac{\beta(\omega^2 - \gamma^2)^2}{(\omega^2 - \gamma^2)^4 + \omega^4}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

7.4. Преобразование стационарного случайного процесса стационарной линейной системой

Рассмотрим преобразование стационарного с.п. стационарной линейной системой, описываемой линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} Y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} Y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} Y(t) + \\ + a_0 Y(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} X(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} X(t) + \dots \\ \dots + b_1 \frac{d}{dt} X(t) + b_0 X(t). \quad (7.4.1) \end{aligned}$$

Этому дифференциальному уравнению можно дать следующую инженерную трактовку. На вход стационарной линейной системы L_c поступает стационарный с.п. $X(t)$, имеющий характеристики: м. о. — m_x , к. ф. — $k_x(\tau)$ (или спектральную плотность $S_x^*(\omega)$ (рис. 7.4.1)).

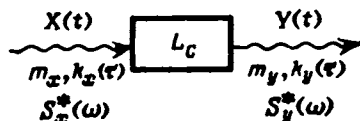


Рис. 7.4.1

На выходе системы L_c в установившемся режиме будет иметь место стационарный с.п. $Y(t)$. Требуется найти характеристики этого с.п.: м. о. — m_y ; к. ф. — $k_y(\tau)$ (или спектральную плотность $S_y^*(\omega)$).

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение уравнения (7.4.1) (где вместо с.п. $X(t)$ нужно взять реализацию $x(t)$, а вместо с.п. $Y(t)$ — реализацию $y(t)$) будет содержать два слагаемых

$$y(t) = y_c(t) + y_n(t).$$

Слагаемое $y_c(t)$ представляет так называемые *собственные колебания* системы, если она выведена из равновесия. Если система L_c устойчива (а такие системы чаще всего и рассматриваются в инженерной практике), то собственные колебания в системе со временем затухают. Будем в дальнейшем считать, что система L_c устойчива.

Слагаемое $y_n(t)$ представляет собой *вынужденные колебания* системы L_c , которые она совершает под

воздействием входного сигнала — реализации $x(t)$ с.п. $X(t)$. Поэтому если рассматривать участок времени, достаточно удаленный от начала воздействия с.п. $X(t)$ на систему L_c , когда практически все переходные процессы в ней затухнут, то можно рассматривать только вынужденные колебания системы, чем мы и будем заниматься в дальнейшем.

Применим к уравнению (7.4.1) преобразование Лапласа (см. п. 4.2) и обозначим изображение реализации входного процесса $x(t) \sim \chi(u)$, а изображение реализации выходного сигнала $y(t) \sim \varphi(u)$:

$$x(t) \circ \text{---} \bullet \chi(u), \quad y(t) \circ \text{---} \bullet \varphi(u). \quad (7.4.2)$$

Так как вынужденные колебания устойчивой системы L_c в установившемся режиме происходят в системе спустя достаточно продолжительное время после начала воздействия входного сигнала, то начальные условия уже не будут оказывать воздействия. Поэтому уравнение (7.4.1) для изображений реализаций с.п. $x(t)$ и $y(t)$ будут иметь вид (см. (4.2.4))

$$(a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0) \varphi(u) = \\ = (b_m u^m + b_{m-1} u^{m-1} + \dots + b_1 u + b_0) \chi(u). \quad (7.4.3)$$

Обозначим

$$A_n(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k, \quad B_m(u) = \sum_{k=0}^m b_k u^k. \quad (7.4.4)$$

Тогда уравнение (7.4.3) можно переписать в виде

$$\varphi(u) = \frac{B_m(u)}{A_n(u)} \chi(u). \quad (7.4.5)$$

Введем еще одно обозначение

$$\frac{B_m(u)}{A_n(u)} = G(u), \quad (7.4.6)$$

откуда

$$\varphi(u) = G(u) \chi(u). \quad (7.4.7)$$

Функция $G(u)$ называется *передаточной функцией* стационарной линейной системы. Таким образом, мы получим в пространстве изображений простую формулу: *изображение выходного сигнала $\varphi(u)$ на выходе стационарной линейной системы в установившемся режиме равно произведению передаточной*

функции этой системы на изображение входного воздействия $\chi(u)$. Символически это можно изобразить в виде схемы (рис. 7.4.2).

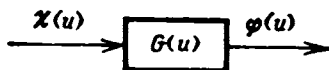


Рис. 7.4.2

Воспользовавшись свойствами преобразований Лапласа [9], можно записать выражение, связывающее реализацию $y(t)$ стационарного с. п. $Y(t)$ на выходе стационарной линейной системы L_c с реализацией $x(t)$ стационарного с. п. $X(t)$, подаваемого на вход этой системы:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (7.4.8)$$

где $g(t)$ — оригинал изображения $G(u)$:

$$g(t) \circ \text{---} \bullet G(u).$$

Функция $g(t)$ называется *весовой функцией*¹⁾ стационарной линейной системы. Выражение типа (7.4.8) называется *сверткой* функций $g(t)$ и $x(t)$ и уже встречалось в п. 9.4* при рассмотрении композиции двух случайных величин: плотность распределения суммы двух независимых с. в. X_1 и X_2 равна свертке плотностей распределения этих с. в. Операция (7.4.8) символически записывалась в п. 9.4* так:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) x(t - \tau) d\tau = g(t) * x(t). \quad (7.4.9)$$

Следовательно, имеет место соотношение (см. (7.4.7))

$$y(t) = g(t) * x(t) \circ \text{---} \bullet \varphi(u) = G(u) \chi(u), \quad (7.4.10)$$

которое связывает выходной сигнал (или его изображение) со входным сигналом (или его изображением).

Из теории автоматического управления [14, 18] известно, что если имеются две последовательно

¹⁾ Иногда весовую функцию $g(t)$ называют *функцией Грина*.

соединенные стационарные линейные системы (рис. 7.4.3) с передаточными функциями $G_1(u)$ и

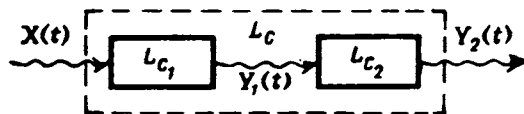


Рис. 7.4.3

$G_2(u)$, то передаточная функция всей системы L_c будет

$$G(u) = G_1(u) G_2(u). \quad (7.4.11)$$

Этому соответствует схема, изображенная на рис. 7.4.4.

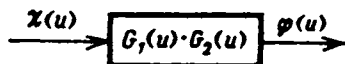


Рис. 7.4.4

Если имеется система, охваченная отрицательной обратной связью (рис. 7.4.5), то этой системе соответствует схема в изображении (рис. 7.4.6). Если обратная связь положительная (рис. 7.4.7), то этой системе соответствует схема в изображении (рис. 7.4.8).

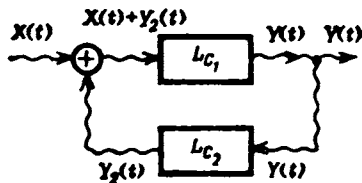


Рис. 7.4.5

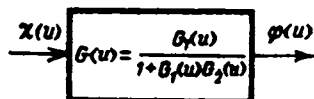


Рис. 7.4.6

Следовательно, изображение выходного сигнала на выходе системы (рис. 7.4.5) будет иметь вид

$$\Phi(u) = \frac{G_1(u)}{1 + G_1(u) G_2(u)} X(u), \quad (7.4.12)$$

а на выходе системы, изображенной на рис. 7.4.7, будет определяться так:

$$\Phi(u) = \frac{G_1(u)}{1 - G_1(u) G_2(u)} X(u). \quad (7.4.13)$$

Таким образом, если известна передаточная функция линейной системы $G(u)$, то можно найти изображение выходного сигнала, зная изображение входного сигнала (в установившемся режиме).

В п. 7.2 было показано, что стационарный с.п. представляет собой спектральное разложение типа (7.2.31), т. е. сумму гармонических колебаний со случайной амплитудой и неслучайной частотой. Поэтому рассмотрим реакцию системы L_c на гармоническое колебание $e^{i\omega t}$ и найдем выходной сигнал $y(t)$.

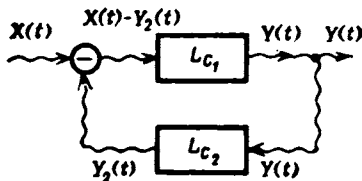


Рис. 7.4.7

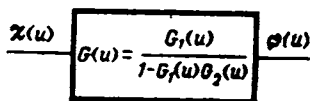


Рис. 7.4.8

Очевидно, что выходной сигнал в установившемся режиме тоже будет представлять гармоническое колебание той же частоты ω . Покажем, что это колебание будет определяться по формуле

$$y(t) = G(i\omega) e^{i\omega t}, \quad (7.4.14)$$

где $G(i\omega)$ — передаточная функция, у которой аргумент равен $i\omega$. Для этого в уравнение (7.4.1) вместо $Y(t)$ подставим $y(t) = G(i\omega) e^{i\omega t}$, а вместо $X(t)$ — соответственно $x(t) = e^{i\omega t}$ и будем иметь в виду, что

$$\frac{d^k}{dt^k} e^{i\omega t} = (i\omega)^k e^{i\omega t}. \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} [a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 i\omega + a_0] G(i\omega) e^{i\omega t} = \\ = [b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_1 i\omega + b_0] e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Сокращая левую и правую части равенства на $e^{i\omega t}$, получаем

$$G(i\omega) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (i\omega)^k}.$$

Учитывая обозначения (7.4.4), имеем

$$G(i\omega) = \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)}. \quad (7.4.15)$$

Таким образом, мы доказали справедливость равенства (7.4.14).

Функция $G(i\omega)$ (где i — мнимая единица, а ω — круговая частота) называется частотной характеристикой стационарной линейной системы; она равна передаточной функции $G(u)$ этой системы (см. (7.4.6)), в которой в качестве аргумента взято произведение $i \times \omega$. Частотная характеристика стационарной линейной системы определяет степень усиления (или ослабления) амплитуды гармонического колебания $e^{i\omega t}$ на выходе этой системы.

Следовательно, равенство (7.4.8) можно записать в виде

$$y(t) = G(i\omega) e^{i\omega t} = \int_0^t g(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (7.4.16)$$

Тогда, если на вход стационарной линейной системы подать элементарный стационарный с.п. в комплексной форме (см. (7.2.27)) $X_h(t) = W_h e^{i\omega_h t}$, то получаем (см. (7.4.16)):

$$\begin{aligned} Y_h(t) &= \int_0^t g(\tau) W_h e^{i\omega_h(t-\tau)} d\tau = \\ &= W_h \int_0^t g(\tau) e^{i\omega_h(t-\tau)} d\tau = W_h G(i\omega_h) e^{i\omega_h t}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$W_h G(i\omega_h) = Z_h(i\omega_h); \quad (7.4.17)$$

поэтому

$$Y_h(t) = Z_h(i\omega_h) e^{i\omega_h t}.$$

Следовательно, подавая на вход стационарной линейной системы стационарный с.п. в виде спектрального разложения (7.2.31), на выходе этой системы получим стационарный с.п. тоже в виде спектрального разложения

$$Y(t) = m_y + \sum_{h=-\infty}^{\infty} W_h G(i\omega_h) e^{i\omega_h t}, \quad (7.4.18)$$

где W_k — комплексная с. в. ($\bar{W}_k = W_{-k}$, $D[W_k] = D[W_{-k}] = D_k$, $M[W_k] = M[W_{-k}] = 0$).

В этом выражении величина m_y определяется по формуле

$$m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x = G(0) m_x. \quad (7.4.19)$$

Формула (7.4.19) может быть получена в результате подстановки в уравнение (7.4.1) вместо $Y(t)$ величины m_y , а вместо $X(t)$ — величины m_x .

Найдем дисперсию комплексной с. в. $W_k G(i\omega_k)$ (см. (7.2.28), (8.8.7)*):

$$\begin{aligned} D[W_k G(i\omega_k)] &= M[W_k G(i\omega_k) \overline{W_k G(i\omega_k)}] = \\ &= G(i\omega_k) \overline{G(i\omega_k)} M[W_k \bar{W}_k] = D_k |G(i\omega_k)|^2, \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

так как $M[W_k] = M[\bar{W}_k] = 0$, $D[W_k] = D_k$.

Следовательно, корреляционная функция стационарного с. п. на выходе стационарной линейной системы, имеющей частотную характеристику $G(i\omega)$, будет иметь вид

$$k_y(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k |G(i\omega_k)|^2 e^{i\omega_k \tau}. \quad (7.4.21)$$

Таким образом, при преобразовании стационарного с. п. стационарной линейной системой каждая из координат ее спектра умножается на квадрат модуля частотной характеристики для соответствующей частоты.

Величина $|G(i\omega_k)|^2$ может быть как больше единицы, так и меньше. Таким образом, с. п. $Y(t)$ на выходе линейной системы претерпевает определенные изменения: все те частоты колебаний ω_k , которые имелись во входном воздействии $X(t)$, остаются в с. п. $Y(t)$, однако дисперсия амплитуд этих колебаний может либо возрастать, либо уменьшаться. Таким образом, некоторые колебания усиливаются, в то время как другие ослабляются (отфильтровываются).

Так же, как это мы делали в п. 7.2, перейдем от дискретного спектра (при разложении к. ф. на конечном интервале T) к спектральной плотности (когда интервал разложения к. ф. $T \rightarrow \infty$). Очевидно, что в этом случае спектральная плотность $S_y^*(\omega)$ будет равна спектральной плотности $S_x^*(\omega)$, умноженной на

квадрат модуля частотной характеристики $|G(i\omega)|^2$:

$$S_y^*(\omega) = |G(i\omega)|^2 S_x^*(\omega). \quad (7.4.22)$$

Таким образом, получаем довольно простое правило: *спектральная плотность стационарного с. п. $Y(t)$ на выходе стационарной линейной системы равна произведению спектральной плотности стационарного с. п. $X(t)$, подаваемого на вход системы, на квадрат модуля частотной характеристики этой системы¹⁾.*

Следовательно, задачу, сформулированную в начале этого пункта, нужно ставить и решать следующим образом.

Даны:

1) частотная характеристика $G(i\omega)$ (или передаточная функция $G(u)$) стационарной линейной системы L_c , т. е. задана система постоянных чисел $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$, определяющих вид дифференциального уравнения (7.4.1) (см. (7.4.4) и (7.4.6));

2) характеристики стационарного с. п. $X(t)$: $m_x, k_x(\tau)$ (или $S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$), подаваемого на вход системы L_c .

Требуется найти характеристики с. п. $Y(t)$ на выходе системы L_c : $m_y, S_y^*(\omega), k_y(\tau)$.

Последовательно находим:

1) математическое ожидание m_y :

$$m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x = G(0) m_x; \quad (7.4.23)$$

2) квадрат модуля частотной характеристики (см. (7.4.6)):

$$\begin{aligned} |G(i\omega)|^2 &= G(i\omega) G(-i\omega) = \\ &= \frac{|B_m(i\omega)|^2}{|A_n(i\omega)|^2} = \frac{B_m(i\omega) B_m(-i\omega)}{A_n(i\omega) A_n(-i\omega)}; \end{aligned} \quad (7.4.24)$$

3) спектральную плотность $S_y^*(\omega)$ с. п. $Y(t)$ (см. (7.4.22)):

$$S_y^*(\omega) = |G(i\omega)|^2 S_x^*(i\omega); \quad (7.4.25)$$

¹⁾ Обратим внимание еще раз на то, что это правило справедливо для установившегося режима работы устойчивой стационарной линейной системы.

4) корреляционную функцию $k_y(\tau)$ с. п. $Y(t)$:

$$k_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (7.4.26)$$

и дисперсию с. п. $Y(t)$:

$$D_y = k_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y^*(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_y(i\omega) d\omega, \quad (7.4.27)$$

так как функция $S_y^*(\omega)$ четная.

Можно доказать [18], что если на вход линейной стационарной системы L_c поступает стационарный с. п. $X(t)$, обладающий эргодическим свойством, то и с. п. $Y(t)$ будет обладать эргодическим свойством.

Пример 1. На вход стационарной линейной системы L_c , имеющей частотную характеристику $G(i\omega)$, подается стационарный белый шум $X(t)$ (см. примеры 6 из п. 7.1 и 7.2) с характеристиками $S_x^*(\omega) = c/(2\pi)$, $k_x(\tau) = c\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция. Требуется найти характеристики с. п. $Y(t)$ на выходе системы L_c .

Решение. По формулам (7.4.23) — (7.4.27) имеем:

$$\begin{aligned} m_y &= G(0) m_x, \quad S_y^*(\omega) = |G(i\omega)|^2 c/(2\pi), \\ k_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_y^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (7.4.28) \\ D_y = k_y(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_y^*(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Может показаться, что такая задача имеет небольшое значение в инженерных приложениях, так как белый шум (колебания одинаковой интенсивности на всех частотах) практически не имеет места. На самом деле это не так. Рассмотрим случай, когда система L_c описывается следующим образом:

$$a_1 dY(t)/dt + a_0 Y(t) = X(t), \quad (7.4.29)$$

откуда

$$G(i\omega) = \frac{1}{a_1 i\omega + a_0}, \quad |G(i\omega)|^2 = \frac{1}{a_0^2} \cdot \frac{1}{1 + (a_1\omega/a_0)^2}. \quad (7.4.30)$$

На вход такой системы L_c поступает с. п. $X(t)$, имеющий спектральную плотность (7.2.45):

$$S_x^*(\omega) = \frac{a^2}{\pi} \frac{2\lambda}{(2\lambda)^2 + \omega^2} = \frac{a^2}{\pi 2\lambda} \cdot \frac{1}{1 + [\omega/(2\lambda)]^2};$$

если $1/(2\lambda) \ll a_1/a_0$ и $1/a_0^2 = a^2/(\pi 2\lambda)$, то графики $S_x^*(\omega)$ и $|G(i\omega)|^2$ будут иметь вид, показанный на

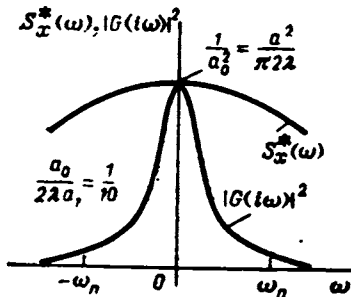


Рис. 7.4.9

рис. 7.4.9. Мы видим, что в пределах «полосы пропускания» $(-\omega_n, \omega_n)$ системы L_c спектральная плотность $S_x^*(\omega)$ остается практически постоянной. Полоса пропускания $(-\omega_n, \omega_n)$ в данном случае определяется из условия $|G(i\omega_n)|^2 = \varepsilon$, где ε — достаточно малая величина. Для рассматриваемого примера мож-

но с достаточной для инженерных приложений точностью считать, что (см. (7.4.45))

$$S_y^*(\omega) \approx \frac{1}{a_0^2 + a_1^2 \omega^2} \frac{a^2}{\pi 2\lambda} = \frac{a^2}{\pi 2\lambda a_1 a_0} \frac{a_0/a_1}{(a_0/a_1)^2 + \omega^2},$$

откуда (см. пример 5 из п. 7.2)

$$k_y(\omega) = \frac{a^2}{2\lambda a_1 a_0} e^{-\frac{a_0}{a_1} |\tau|}, \quad D_y = k_y(0) = \frac{a^2}{2\lambda a_1 a_0}.$$

Пример 2. В результате статистической обработки с. п. $X(t)$ и $Y(t)$ на входе и выходе линейной системы L_c определены оценки $\bar{m}_x$, $\bar{k}_x(\tau)$, $\bar{S}_x^*(\omega)$, $\bar{m}_y$, $\bar{k}_y(\tau)$, $\bar{S}_y^*(\omega)$. Считая полученные оценки приближенно равными соответствующим характеристикам, найти приближенно параметры системы L_c .

Решение. Имеем следующие равенства:

$$\bar{m}_y = \frac{b_0}{a_0} \bar{m}_x, \quad \bar{S}_y^*(\omega) = |G(i\omega)|^2 \bar{S}_x^*(\omega).$$

Допустим, что в результате обработки получены оценки

$$\bar{m}_y = 0, \quad \bar{m}_x, \quad \bar{k}_x(\tau) = D_x e^{-\alpha |\tau|}, \\ \bar{k}_y(\tau) = D_y e^{-\alpha |\tau|} (\cos \beta \tau - [\alpha \sin \beta |\tau| / \beta]) \quad (\alpha \geq \beta).$$

В соответствии с приложением (п. 5 и 9)

$$\tilde{S}_x^*(\omega) = \frac{D_x a}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 + \omega^2}.$$

$$\tilde{S}_y^*(\omega) = \frac{D_y a}{\pi} \cdot \frac{2\omega^2}{(\omega^2 + a^2 + \beta^2)^2 - (2\beta\omega)^2}.$$

Следовательно, оценку частотной характеристики $\tilde{G}(i\omega)$ можно найти из выражения

$$\begin{aligned} |\tilde{G}(i\omega)| &= \frac{\tilde{S}_y^*(\omega)}{\tilde{S}_x^*(\omega)} = \frac{2D_y a}{D_x a} \frac{\omega^2 (a^2 + \omega^2)}{(\omega^2 + a^2 + \beta^2)^2 - (2\beta\omega)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{D_y a \cdot 2}{D_x a}} \frac{(i\omega)(a + i\omega)}{(i\omega)^2 + \sqrt{2} a i\omega + a^2 + \beta^2} \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{D_y a \cdot 2}{D_x a}} \frac{(-i\omega)(a - i\omega)}{(-i\omega)^2 - \sqrt{2} a i\omega + a^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка передаточной функции системы имеет вид

$$\tilde{G}(u) = \frac{\sqrt{2D_y a} u^2 + \sqrt{2D_y a} a u}{\sqrt{D_x a} u^2 + \sqrt{2D_x a} a u + \sqrt{D_x a} (a^2 + \beta^2)},$$

откуда (см. (7.4.4) и (7.4.6))

$$\tilde{b}_0 = 0, \quad \tilde{b}_1 = \sqrt{2D_y a} a, \quad \tilde{b}_2 = \sqrt{2D_y a},$$

$$\tilde{a}_0 = \sqrt{D_x a} (a^2 + \beta^2), \quad \tilde{a}_1 = \sqrt{2D_x a} a, \quad \tilde{a}_2 = \sqrt{D_x a},$$

а дифференциальное уравнение, описывающее работу системы, таково:

$$\tilde{b}_2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + \tilde{b}_1 \frac{dY(t)}{dt} = \tilde{a}_2 \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \tilde{a}_1 \frac{dX(t)}{dt} + \tilde{a}_0 X(t). \quad \blacktriangleright$$

В п. 7.2 были перечислены задачи, решаемые при прохождении с.п. $X(t)$ через систему S , в результате чего на выходе этой системы получается с.п. $Y(t)$. Для стационарных линейных систем, работающих в установившемся режиме, при условии, что с.п. $X(t)$ и $Y(t)$ стационарны, решение всех этих задач намного облегчается простой связью (7.4.22) между спектральными плотностями с.п. $X(t)$ и с.п. $Y(t)$. Тем не менее само решение этих задач требует изложения значительного по объему материала, что выходит за рамки данной книги.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица соответствий корреляционных функций $k_x(\tau)$ и спектральных плотностей $S_x^*(\omega)$

$k_x(\tau)$	$S_x^*(\omega)$
1. $D\delta(\tau)$, $\delta(\tau)$ — дельта-функция	$D/2\pi$
2. D	$D\delta(\omega)$
3. $D \cos \beta\tau$	$D [\delta(\omega + \beta) + \delta(\omega - \beta)]/2$
4. $\sum_{i=1}^n D_i \cos \beta_i \tau$	$\sum_{i=1}^n D_i [\delta(\omega + \beta_i) + \delta(\omega - \beta_i)]/2$
5. $De^{-\alpha \tau }$ ($\alpha > 0$)	$\frac{D}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
6. $\sum_{i=1}^n D_i e^{-\alpha_i \tau }$	$\sum_{i=1}^n \frac{D_i}{\pi} \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2}$
7. $De^{-\alpha \tau } \cos \beta\tau$ ($\alpha > 0, \beta > 0$)	$\frac{Da}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\beta - \omega)^2][\alpha^2 + (\beta + \omega)^2]}$
8. $De^{-\alpha \tau } \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right)$	$\frac{Da}{\pi} \cdot \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2\beta^2}$
9. $De^{-\alpha \tau } \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta \tau \right)$	$\frac{Da}{\pi} \cdot \frac{2\omega^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2) - 4\beta^2\omega^2}$
10. $De^{-\alpha \tau } \left(\operatorname{ch} \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta \tau \right)$ ($\alpha \geq \beta$)	$\frac{Da}{\pi} \cdot \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{[(\alpha - \beta)^2 + \omega^2][(\alpha + \beta)^2 + \omega^2]}$

Продолжение

$k_x(\tau)$	$S_x^*(\omega)$
11. $D(1 - \tau) \mathbf{1}(1 - \tau)$, где $\mathbf{1}(x)$ — единичная функция	$\frac{D}{2\pi} \cdot \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2$
12. $De^{-a \tau }(1 + a \tau)$	$\frac{D}{\pi} \cdot \frac{2a^4}{(a^2 + \omega^2)^3}$
13. $De^{-a \tau }(1 + a \tau +$ $+ a^2\tau^2/3)$	$\frac{Da}{\pi} \cdot \frac{a^4}{3(a^2 + \omega^2)^3}$
14. $De^{-a \tau }(1 + a \tau -$ $- 2a^2\tau^2 + a^3 \tau ^3/3)$	$\frac{Da}{\pi} \cdot \frac{16a^3\omega^4}{(a^2 + \omega^2)^4}$
15. $2a \sin(\beta\tau)/\tau$ ($a > 0, \beta > 0$)	$a \mathbf{1}(1 - \omega /\beta)$
16. $2a^2(2 \cos \beta\tau - 1) \frac{\sin \beta\tau}{\tau}$	$\begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \omega < \beta, \\ a^2 & \text{при } \beta < \omega < 2\beta, \\ 0 & \text{при } 2\beta < \omega \end{cases}$
17. $De^{-(a\tau)^2}$	$\frac{D}{2a\sqrt{\pi}} \exp \left\{ - \left(\frac{\omega}{2a} \right)^2 \right\}$
18. $De^{-a \tau } [2\delta(\tau) -$ $- a(\text{sign } \tau)^2]$	$\frac{Da}{\pi} \cdot \frac{\omega^2}{a^2 + \omega^2}$

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

- в. к. ф. — взаимная корреляционная функция
 к. ф. — корреляционная функция
 м. о. — математическое ожидание
 н. к. ф. — нормированная корреляционная функция
 п. р. — плотность распределения
 с. в. — случайная величина
 с. к. о. — среднее квадратическое отклонение
 с. п. — случайный процесс
 ф. р. — функция распределения
 э. с. п. — элементарный случайный процесс
 э. с. ф. — элементарная случайная функция

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. — М.: Сов. радио, 1972. — 530 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Высшая школа, 1999. — 576 с.
3. Вентцель Е.С. Определение вероятностей состояний в динамике боя многочисленных групп. // Морской сб. — 1962, № 10. — С. 12—21.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973. — 368 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. — М.: Радио и связь, 1983. — 416 с.
6. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. — М.: Высшая школа, 2000. — 480 с.
7. Володин Б. Г. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. — М.: Наука, 1970. — 656 с.
8. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1987. — 336 с.
9. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования: Пер. с англ. — М.: Наука, 1971. — 288 с.
10. Динер И. Я. О некоторых направлениях развития исследования операций. // Морской сб. — 1970, № 1. — С. 9—18.
11. Карлин С. Основы теории случайных процессов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971. — 536 с.
12. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова: Пер. с англ. — М.: Наука, 1970. — 271 с.
13. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления: Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1967. — 300 с.
14. Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1968. — 381 с.
15. Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. — М.: Машиностроение, 1969. — 324 с.
16. Овчаров Л. А., Селетков С. Н. Автоматизированные банки данных. — М.: Финансы и статистика, 1982. — 263 с.
17. Оре О. Теория графов: Пер. с фр. — М.: Наука, 1968. — 352 с.
18. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М.: Гостехиздат, 1957. — 659 с.

19. Романов В. Г. К вопросу о методике динамики моментов. // Problems of Control and Information Theory. Budapest. — 1976. — V. 5, No 5—6. — P. 437—448.
20. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций — М.: Наука, 1968. — 463 с.
21. Тараканов К. В., Овчаров Л. А., Тырышкин А. Н. Аналитические методы исследования систем. — М.: Сов. радио, 1974. — 240 с.
22. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1963. — 735 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Балансовое условие стационарного режима марковского процесса 181
- — — — — процесса гибели и размножения 182
- — — — — цепи Маркова 122
- Вероятность задержки 112
- i -го состояния 106
- Весовая функция 367
- Взаимная корреляционная функция 45
- спектральная плотность 363
- Гамма-поток 78
- Двумерный закон распределения с. п. 26
- Дисперсия с. п. 30
- Дифференцирование с. п. 285
- Замкнутое (концевое) подмножество состояний 102
- Изолированное состояние 101
- Импульсный дробовой эффект 323
- Интегральное каноническое представление стационарного с. п. 270, 337
- Интегрирование с. п. 287
- Интенсивность потока событий 50
- Каноническое разложение дисперсии с. п. 267
- — — — — корреляционной функции с. п. 266
- — — с. п. 264
- — — центрированного с. п. 265
- Квадратичное преобразование с. п. 268
- Концевое (поглощающее) состояние 100
- Корреляционная функция с. п. 33
- Коэффициенты канонического разложения с. п. 265
- Линейный неоднородный оператор системы 278
- однородный оператор системы 278
- оператор системы 277
- Марковская цепь 110
- Марковский с. п. 106
- — — — — гибели и размножения с непрерывным временем 177
- — — — — с непрерывным временем 128
- Математическое ожидание с. п. 27
- Матрица интенсивностей 136
- стохастическая 112
- Метод псевдосостояний 214
- Мнемоническое правило составления уравнений Колмогорова 136
- Модель линейного детектора 320
- электронного потока в радиолampe 317
- Начальное распределение вероятностей 112
- состояние (источник) 100
- Начальный момент k -го порядка с. п. 39
- Некоррелированные с. п. 46
- Нелинейный оператор системы 277
- Неоднородная линейная форма векторного с. п. 294
- Неоднородный процесс Пуассона 182
- Нестационарный «белый шум» 273
- Нормированная взаимная к. ф. 46
- к. ф. 35
- — — стационарного с. п. 309
- спектральная плотность стационарного с. п. 336
- Нормированный поток Эрланга 75
- Обобщенная случайная телеграфная волна 313
- телеграфная волна 328
- Одномерный закон распределения с. п. 24
- Однородная линейная форма векторного с. п. 294
- цепь Маркова 113
- Однородный марковский с. п. 136
- процесс Пуассона 182
- Оператор системы 275
- Ординарный поток событий 40
- Передаточная функция 366
- Переходная вероятность марковской цепи 111
- Плотность дисперсии с. п. 271
- Поглощающее (концевое) состояние 100

Поток вероятности для марковского процесса с непрерывным временем 136

— — — марковской цепи 121

— гибели 178

— Пальма 54

— размножения 178

— событий 47

— без последствия 52

— с ограниченным последствием 54

— Эрланга 70

Предельная вероятность 117

— теорема для редущих потоков

92

— — — суммарного потока 79

Преобразование Лапласа 142

Простейшая система 142

— эргодическая система 150

Простейший (стационарный пуассоновский) поток событий 54

Простой процесс восстановления

69

Процесс гибели и размножения 103

— «чистого» размножения 104, 179

— «чистой» гибели 104, 180

Псевдосостояние 216

Пуассоновский поток событий 53

Разложение с. п. 262

Реализация с. п. 13

Рекуррентный поток событий 54

Связное (эргодическое) подмножество состояний 102

Семейство реализаций с. п. 14

Сечение с. п. 12

Случайная телеграфная волна 311

Случайный процесс 12

— — — дискретным временем 18

— — — непрерывным временем 18

Соседнее состояние 100

Состояние — источник 100

Спектральная плотность стационарного с. п. 335

Спектральное разложение стационарного с. п. 331

Среднее квадратическое отклонение с. п. 31

Стационарный «белый шум» 274

— в узком смысле с. п. 306

— — — широком смысле с. п. 308

— поток событий 53

— пуассоновский (простейший) поток событий 54

— режим марковского с. п. 149

Стохастическая матрица 112

Сумма независимых пуассоновских потоков 92

— потоков 80

Телеграфная волна 326

Теория восстановления 68

— случайных процессов 5

Транзитивное подмножество состояний 102

— состояние 101

Уравнения Колмогорова 132

Усеченный закон Пуассона 196

Финальная (предельная) вероятность 106

Формулы Эрланга 196

Центральный момент k -го порядка с. п. 30

Центрированный с. п. 29

Частотная характеристика 370

Элементарная случайная функция 20

Элементарный с. п. 263

— стационарный с. п. 329

Эргодические цепи Маркова 118

Эргодический стационарный с. п. 309

Эргодическое (связное) подмножество состояний 102

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Основные понятия теории случайных процессов	12
1.1. Определение случайного процесса. Классификация случайных процессов	12
1.2. Законы распределения и основные характеристики случайных процессов	24
Глава 2. Потоки событий, их свойства и классификация	47
2.1. Потоки событий	47
2.2. Некоторые свойства потоков Пальма	56
2.3. Потоки Эрланга	70
2.4. Предельные теоремы теории потоков	78
Глава 3. Марковские процессы с дискретными состояниями. Марковские цепи	98
3.1. Граф состояний. Классификация состояний. Вероятности состояний	98
3.2. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова)	107
3.3. Стационарный режим для цепи Маркова	117
Глава 4. Марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем	128
4.1. Описание марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения Колмогорова	128
4.2. Однородные марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Стационарный режим, уравнения для предельных вероятностей	141
4.3. Закон распределения и числовые характеристики времени однократного пребывания марковского процесса с непрерывным временем и дискретными состояниями в произвольном подмножестве состояний U	165
Глава 5. Марковские процессы гибели и размножения с непрерывным временем	177
5.1. Определение марковского процесса гибели и размножения с непрерывным временем, его размеченный граф состояний, условия существования стационарного режима, предельные вероятности состояний	177

5.2. Закон распределения и числовые характеристики времени нахождения процесса гибели и размножения в произвольном подмножестве состояний	200
5.3. Метод псевдосостояний	214
5.4. Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса гибели и размножения без ограничения на число состояний	226
5.5. Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса гибели и размножения при ограниченном числе состояний	245
Глава 6. Преобразования случайных процессов	262
6.1. Канонические разложения и интегральные канонические представления случайных процессов	262
6.2. Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов	274
6.3. Линейная форма векторного случайного процесса. Сложение случайных процессов	294
6.4. Комплексные случайные процессы	301
Глава 7. Стационарные случайные процессы	306
7.1. Определение стационарного случайного процесса, эргодическое свойство	306
7.2. Спектральное разложение стационарного случайного процесса. Спектральная плотность	331
7.3. Линейные преобразования стационарных случайных процессов	350
7.4. Преобразование стационарного случайного процесса стационарной линейной системой	365
Приложение	376
Основные сокращения	377
Список литературы	378
Предметный указатель	380

Учебное издание

**Венцель Елена Сергеевна
Овчаров Лев Александрович**

**ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
И ЕЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Редактор Ж.И. Яковлева
Художественный редактор Ю.Э. Иванова
Технический редактор Л.А. Овчинникова**

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ-206. Сдано в набор и подп. в печать
02.02.2000. Формат 60x88 ¹/₁₆. Бум. газетн. Гарнитура обыкновенная
Печать офсетная. Объем: 23,52 усл. печ. л., 23,52 усл. кр.-отг., 19,72 уч.-изд. л.
Тираж 8000 экз. Заказ № 692

ГУП издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4,
Неглинная ул., д. 29/14

Отпечатано в ГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432601, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14