Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Լ. Հ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ, Ա. Կ. ԹԱՍԼԱՔՅԱՆ,
Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, Կ. Ա. ՆԱՎԱՍԱՐԴՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

առաջին մաս

Երկրորդ լրամշակված
հրատարակություն

Էդիթ Պրինտ

Երաշխավորված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից
որպես բուհերի ուսումնական ձեռնարկ

ՀՏԴ 51 (07)
ԳՄԴ 22.1 y73
Մ 151

Մ 151 Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք /Գ.Գ.Գևորգյան, Լ.Հ.Գալստյան, Ա.Կ.Թասլաքյան, Գ.Վ.Միքայելյան, Կ.Ա.Նավասարդյան: Մաս 1.-2-րդ լրամշ. հրատ.-Եր.: Էդիթ Պրինտ, 2003. -266 էջ:

Ուսումնական ձեռնարկը նախատեսված է բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական և բնագիտական ֆակուլտետների համար:

ԳՄԴ 22.1 y73

Մ $\frac{1602010000}{789\ (07)\ 2003}$ 2003թ.

Երկրորդ հրատարակության նախաբան

Խնդրագրքի ներկայացվող այս նոր հրատարակությունը պարունակում է նախորդի ըստ էության բոլոր խնդիրներն ու վարժությունները:

Որոշ բաժինների Ա խմբերը լրացվել են մեթոդական առումով կարևոր նոր վարժություններով: Նույն նկատառումով կատարվել են մի շարք վարժությունների և խնդիրների վերադասավորում, ձևակերպումների փոփոխություններ և շտկումներ: Ինչ-որ չափով թարմացվել է խնդիրներին նախորդող տեսական նյութը:

Լսարաններում աշխատելու ընթացքում նկատվել են թե՛ հիմնական տեքստում, թե՛ պատասխաններում սպրդած անճշտություններ և վրիպակներ, որոնց ուղղումները մեզ ներկայացրել են ամբիոնի աշխատակիցներ Հ. Մ. Հակոբյանը, Մ. Ս. Մարտիրոսյանը և Մ. Պ. Պողոսյանը: Նրանց մենք մեր անկեղծ երախտագիտությունն ենք հայտնում:

Հեղինակներ

Առաջին հրատարակության նախաբան

Ընթերցողի ուշադրությանը ներկայացվող «Մաթեմատիկական անալի-զի խնդրագիրք»-ը հայերեն լեզվով համապարփակ և ծավալուն ժողովածուի հրատարակման առաջին փորձն է: Այն ընդգրկում է համալսարանների առա-ջին և երկրորդ կուրսերի ծրագրով նախատեսված մաթեմատիկական անալիզի գրեթե բոլոր բաժինները:

Խնդրագիրքը լույս է տեսնում երկու հատորով: Առաջին հատորը նվիր-ված է թվային հաջորդականություններին ու մեկ փոփոխականի իրականար-ժեք ֆունկցիաների դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվին: Երկրորդ հատորում շարադրվում են խնդիրներ և վարժություններ՝ շարքերի (այդ թվում աստիճա-նային և Ֆուրիեի շարքերի), անվերջ արտադրյալների, պարամետրից կախ-ված ինտեգրալների, շատ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ և ին-տեգրալ հաշվի ու Ստիլտեսի ինտեգրալի վերաբերյալ:

Անալիզի յուրաքանչյուր ամբողջական բաժին խնդրագրքում ներկայաց-ված է առանձին գլխով, որն սկսվում է անհրաժեշտ տեսական նյութի սեղմ շարադրանքով: Յուրաքանչյուր գլուխ տրոհված է, հիմնականում ըստ խնդիր-ների բարդության, Ա, Բ և Գ խմբերի: Ա խմբի վարժությունների զգալի մասը վերցված է Բ.Պ. Դեմիդովիչի «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» դասական ժողովածուից: Ուսումնական գործընթացում դրանց օգտակարությունը հաստատված է տասնամյակների փորձով: Նույն այդ խնդրագրքի որոշ խնդիրներ, որոնք տեղ են գտել նաև Բ և Գ խմբերում, մեր կողմից շտկվել են, վերստին համակարգվել, լրացվել են անհրաժեշտ ընդհան-րացումներով և հակադարձ խնդիրներով: Գ խմբի խնդիրներից շատերը հետա-զոտական բնույթի են և դրանց հաղթահարումը երբեմն մեծ հմտություն է պա-հանջում: Այդ խնդիրներն ընտրված են Գ. Պոլիայի և Գ. Սեգյոյի «Задачи и теоремы из анализа» հայտնի խնդրագրքից, միջազգային ուսանողական մա-թեմատիկական տարբեր օլիմպիադաների առաջադրանքներից, ինչպես նաև մի շարք այլ հայտնի աղբյուրներից, որոնց ցուցակը բերված է երկրորդ հա-տորի վերջում: Նշենք, որ Գ խմբի խնդիրները հիմնականում նախատեսված են ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետներում կազմակերպվող արտալսարա-նային պարապմունքների կամ ուսանողների ինքնուրույն աշխատանքի հա-մար:

Վերջին տարիներին տեսաբազմական, տոպոլոգիական և հանրահաշ-վական տարբեր հասկացությունների բուռն ներթափանցումը մաթեմատիկա-կան անալիզ մի շարք սահմանումների և թեորեմների նոր, արդիական շունչ է հաղորդել: Մենք փորձել ենք, իհարկե խուսափելով ավելորդ ծայրահեղություններից, թե՛ տեսական նյութի և թե՛ խնդիրների շարադրանքում հետևել ժամանակակից ոճին: Մասնավորապես, ֆունկցիայի անընդհատության, դիֆերենցիալի այստեղ բերված սահմանումները տարբերվում են Գ.Մ. Ֆիխտենգոլցի «Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի դասընթաց»-ում տրված սահմանումներից: Հրաժարվել ենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի բարձր կարգի դիֆերենցիալների անպտուղ գաղափարից: Երկրորդ հատորում, սահմանելով հաշվելի բազմության և զրո չափի բազմության գաղափարները, հնարավորություն ենք ստացել շարադրելու բազմաթիվ խնդիրներ, որոնք առաջին և երկրորդ կուրսերում ավանդաբար օգտագործվող խնդրագրքերում երբեւէ չեն ընդգրկվել:

Խնդիրների և վարժությունների դասակարգման լայն սպեկտրը հնարավորություն է տալիս խնդրագիրքն օգտագործել ոչ միայն ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետներում, այլև տեխնիկական բուհերում և բնագիտական այն ֆակուլտետներում, որտեղ դասավանդվում է մաթեմատիկական անալիզ:

Գրքի ձեռագիրն ընթերցվել և քննարկվել է Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկական անալիզի, կիրառական անալիզի, ֆիզիկայի ֆակուլտետի բարձրագույն մաթեմատիկայի և ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետի բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոններում: Առանձնապես օգտակար են եղել Ռ.Ա. Ավետիսյանի, Ռ.Ս. Դավթյանի, Ս.Ա. Հակոբյանի և Լ.Վ. Միքայելյանի դիտողություններն ու առաջարկությունները: Մենք մեր անկեղծ երախտագիտությունն ենք հայտնում ոչ միայն նրանց, այլև մեր բոլոր այն գործընկերներին, որոնց բարեկամական աջակցությունն էապես նպաստել է գրքի լույս ընծայմանը:

Երևան, 1998թ. Հեղինակներ

Գլուխ 1

Թվային բազմություններ, տարրական ֆունկցիաներ

Բազմությունները հիմնականում նշանակվում են լատիներենի մեծատառերով: Այն փաստը, որ a-ն A բազմության տարր է, գրվում է $a \in A$ (a-ն պատկանում է A-ին) տեսքով: Նույն փաստի բացասման համար օգտագործվում է $a \notin A$ ձևը:

Եթե A բազմության յուրաքանչյուր տարրը պատկանում է նաև B բազմությանը, ապա A-ն անվանում են B-ի *ենթաբազմություն* և գրում՝ $A \subset B$ կամ $B \supset A$ (A-ն ընկած է B-ի մեջ, A-ն պարունակվում է B-ում կամ B-ն պարունակում է A-ն):

Տեսաբազմական գործողություններ: A և B բազմությունների *միավորումը* $(A \bigcup B)$ բազմություն է, որը կազմված է այն տարրերից, որոնք պատկանում են A և B բազմություններից գոնե մեկին: A և B բազմությունների *հատումը* $(A \bigcap B)$ բազմություն է, որը կազմված է այն տարրերից, որոնք պատկանում են թե՛ A-ին և թե՛ B-ին: A և B բազմությունների *տարբերությունը* $(A \setminus B)$ կազմված է A-ի այն տարրերից, որոնք չեն պատկանում B-ին: Ոչ մի տարր չպարունակող բազմությունը կոչվում է *դատարկ բազմություն* և նշանակվում՝ $\varnothing$:

Բազմությունը, որի տարրերը բազմություններ են, կանվանենք *ընտանիք*: α ընտանիքի *միավորումը*՝ $\bigcup \alpha$-ն, այն տարրերի բազմություն է, որոնք պատկանում են α ընտանիքի բազմություններից առնվազն մեկին: α ընտանիքի *հատումը*՝ $\bigcap \alpha$-ն, այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են α ընտանիքի բազմություններից յուրաքանչյուրին:

Մաթեմատիկական տեքստերում հանդիպող “ցանկացած” և “գոյություն ունի” արտահայտությունների փոխարեն հաճախ օգտագործվում են համապատասխանաբար $\forall$ և $\exists$ նշանները: Օրինակ, $\forall x \in A \ \exists y \in B \left(x + y = 1\right)$ արտահայտությունը կարդացվում է՝ A բազմությանը պատկանող ցանկացած x տարրի համար գոյություն ունի B-ին պատկանող y տարր, այնպիսին, որ ճշմարիտ է $x + y = 1$ հավասարությունը:

A բազմության այն տարրերի ենթաբազմությունը, որոնք բավարարում են P պայմանին, նշանակվում է՝ $\{x \in A : P\}$: Մասնավորապես, $\{x \in A : x > 0\}$-ն A-ին պատկանող դրական թվերի բազմությունն է, իսկ $\{x \in A : x \notin B\}$-ն վերը սահմանված $A \setminus B$ բազմությունն է:

Եթե α ընտանիքի բազմությունները ինդեքսավորված են, օրինակ $\alpha = \{A_n : n \in N\}$, ապա $\bigcup \alpha$-ի և $\bigcap \alpha$-ի համար օգտագործվում են նաև $\bigcup\limits_{n \in N} A_n$ և $\bigcap\limits_{n \in N} A_n$ նշանակումները:

Ստորև շարադրվելիք խնդիրներում և վարժություններում հանդիպում են բազմությունների նշանակման այլ, ավելի կրճատ ձևեր: Օրինակ, $\{m \in N : \exists k \in N (m = 4k)\}$ բազմության համար հավասարապես օգտագործվում են ինչպես $\{4k\}_{k \in N}$, այնպես էլ $\{4k : k \in N\}$ նշանակումները: Եթե բազմությունը վերջավոր է (կազմված է վերջավոր թվով տարրերից), ապա այն կարող է ներկայացվել ձևավոր փակագծերով, որոնց ներսում մեկ առ մեկ, ստորակետերով անջատված, նշված են այդ բազմության բոլոր տարրերը: Մասնավորապես, $\{a\}$-ն միայն a տարրից կազմված բազմությունն է:

Թ վ ա յ ի ն բ ա զ մ ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր ի օ ր ի ն ա կ ն ե ր ։ Բազմությունը, որի տարրերը թվեր են, կոչվում է թվային բազմություն: Մաթեմատիկական անալիզում առավել հաճախ հանդիպող թվային բազմություններից են՝

$R=(-\infty;+\infty)$ (*իրական թվեր*):

$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ (*բնական թվեր*);

$Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots\}$ (*ամբողջ թվեր*);

$Q=\left\{\frac{p}{q}:p\in Z,q\in N\right\}$ (*ռացիոնալ թվեր*);

$I=R\setminus Q$ (*իռացիոնալ թվեր*);

$[a;b]=\{x\in R:a\le x\le b\}$ (*փակ միջակայք* կամ *հատված*);

$(a;b)=\{x\in R:a<x<b\}$ (*միջակայք* կամ *բաց միջակայք*);

$\left.\begin{array}{l}[a;b)=\{x\in R:a\le x<b\}\\(a;b]=\{x\in R:a<x\le b\}\end{array}\right\}$ (*կիսաբաց* կամ *կիսափակ միջակայքեր*);

$\left.\begin{array}{l}(a;+\infty)=\{x\in R:x>a\}\\ [a;+\infty)=\{x\in R:x\ge a\}\\(-\infty;a)=\{x\in R:x<a\}\\(-\infty;a]=\{x\in R:x\le a\}\end{array}\right\}$ *անվերջ բաց, փակ միջակայքեր* կամ *ճառագայթներ*.

Ցանկացած $A\subset R$ բազմության համար կնշանակենք.

$A_-=\{x\in A:x\le 0\}$, $A_+=\{x\in A:x\ge 0\}$:

$A\subset R$ բազմության համար $R\setminus A$ բազմությունը կոչվում է A-ի *լրացում* և նշանակվում՝ A^c :

Թ վ ա յ ի ն բ ա զ մ ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր ի հ ա ն ր ա հ ա շ վ ա կ ա ն գ ո ւ մ ա ր և ա ր տ ա դ ր յ ա լ ։ A և B բազմությունների *հանրահաշվական գումարը* ($A+B$) և *արտադրյալը* ($A\cdot B$) սահմանվում են հետևյալ ձևով.

$A+B=\{a+b:a\in A,\ b\in B\}$, $\quad A\cdot B=\{ab:a\in A,\ b\in B\}$:

Եթե $A=\{a\}$, ապա $\{a\}\cdot B$ գրելու փոխարեն գրում են aB ։ Ընդունված են նաև հետևյալ նշանակումները. $a+A=\{a\}+A$, $-A=(-1)\cdot A$, $A-B=A+(-B)$:

Դ ե կ ա ր տ յ ա ն ա ր տ ա դ ր յ ա լ ։ Կամայական a և b թվերի համար (a,b) զույգն անվանում են *կարգավորված զույգ*, նկատի ունենալով, որ եթե $a\ne b$, ապա $(a,b)\ne(b,a)$:

$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$ կարգավորված զույգերի բազմությունը կոչվում է A և B բազմությունների *դեկարտյան արտադրյալ*: Ցանկացած $P\subset A\times B$ ենթաբազմության համար

$P_A=\{a\in A:\exists b\in B\ ((a,b)\in P)\}$ և $P_B=\{b\in B:\exists a\in A\ ((a,b)\in P)\}$

բազմությունները կոչվում են P բազմության պրոյեկցիաներ համապատասխանաբար A-ի և B-ի վրա: Մասնավորապես՝ $(A\times B)_A=A$, $(A\times B)_B=B$:

Դեկարտյան արտադրյալի օրինակ է դեկարտյան հարթությունը: Այն իրենից ներկայացնում է Ox և Oy թվային առանցքների դեկարտյան արտադրյալը: Այս դեպքում հարթության յուրաքանչյուր կետ ընդունված կարգով նույնացվում է որոշակի (x,y) կարգավորված թվազույգի հետ, որում x-ը կոչվում է այդ կետի աբսցիս, իսկ y-ը՝ օրդինատ:

$A\times A$-ի փոխարեն հաճախ գրում են A^2: Մասնավորապես, դեկարտյան հարթության համար ընդունված է R^2 նշանակումը, որտեղ R-ը իրական թվերի բազմությունն է:

Սահմանափակ բազմություններ: A թվային բազմությունը կոչվում է *վերևից* (*ներքևից*) սահմանափակ, եթե $\exists M\in R\ \forall x\in A\,(x\le M)$ $(\exists m\in R\ \forall x\in A\ \ (x\ge m))$: Եվ վերևից և ներքևից սահմանափակ բազմությունն անվանում են *սահմանափակ բազմություն*.

Եթե M_0 թիվն այնպիսին է, որ

$$\forall x\in A\,(x\le M_0)\ \text{և}\ \forall\varepsilon>0\ \ \exists x_0\in A\,(x_0>M_0-\varepsilon),$$

ապա M_0-ն անվանում են A բազմության *ճշգրիտ վերին եզր* և նշանակում՝ $M_0=\sup A$: Նույն ձևով, եթե գոյություն ունի m_0 թիվ այնպիսին, որ

$$\forall x\in A\,(x\ge m_0)\ \text{և}\ \forall\varepsilon>0\ \ \exists x_0\in A\,(x_0<m_0+\varepsilon),$$

ապա այն կոչվում է A բազմության *ճշգրիտ ստորին եզր* և նշանակվում՝ $m_0=\inf A$:

Թեորեմ: Վերևից (ներքևից) սահմանափակ ցանկացած ոչ դատարկ բազմություն ունի ճշգրիտ վերին (ստորին) եզր:

Եթե A-ն սահմանափակ չէ վերևից (ներքևից), ապա պայմանավորվում ենք գրել՝ $\sup A=+\infty$ $(\inf A=-\infty)$:

Բաց, փակ բազմություններ: Կուտակման կետ: Թվային բազմության տարրերը հաճախ անվանում են կետեր:

Տրված x_0 կետի և $\varepsilon>0$ թվի համար $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ միջակայքը կոչվում է x_0-ի ε-*շրջակայք* կամ ուղղակի՝ x_0-ի շրջակայք: Երբեմն $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$ և $(-\infty;a)\cup(a;+\infty)$ բազմությունները անվանում են համապատասխանաբար $-\infty$-ի, $+\infty$-ի և ∞-ի շրջակայքեր:

A բազմության a կետը կոչվում է այդ բազմության *ներքին կետ*, եթե գոյություն ունի a-ի շրջակայք, որը պարունակվում է A-ում: A-ն կոչվում է *բաց բազմություն*, եթե նրա բոլոր կետերը ներքին կետեր են: Բաց բազմության պարզագույն օրինակներ են վերջավոր կամ անվերջ բաց միջակայքերը:

Բազմությունը կոչվում է *փակ*, եթե նրա լրացումը բաց է:

Բազմության լրացման ներքին կետերն այդ բազմության համար կոչվում են *արտաքին կետեր*.

Եթե a կետի ցանկացած շրջակայք պարունակում է կետեր թե՛ A-ից և թե՛ A^c-ից, ապա a-ն անվանում են A բազմության *եզրային կետ*. A բազմության եզրային կետերի բազմությունն անվանում են A-ի *եզր* և նշանակում՝ ∂A:

Եթե $x_0\in R$ կետի ցանկացած շրջակայքում կա x_0-ից տարբեր առնվազն մեկ կետ A-ից, ապա x_0-ն անվանում են A բազմության *սահմանային* կամ *կուտակման կետ*. A բազմության կուտակման կետերի բազմությունը նշանակում են A', իսկ $\overline{A}=A\cup A'$ բազմությունն անվանում են A-ի *փակում*.

$A\setminus A'$ բազմության կետերն անվանում են A բազմության *մեկուսացված կետեր*.

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը: Բնական թվերի համար որևէ պնդում համարվում է ապացուցված, եթե՝

ա) $n=1$ թվի համար պնդումը ճշմարիտ է;

բ) ենթադրելով, որ պնդումը ճշմարիտ է n-ից փոքր բոլոր բնական թվերի համար, կարելի է ապացուցել, որ այն ճշմարիտ է նաև n-ի համար:

Ընդունված նշանակումներ են՝

$0!=1,\ 1!=1,\ n!=n\cdot(n-1)!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot n,\ n\in N$ (n ֆակտորիալ);

$$\left.\begin{array}{l} 2!!=2,\ (2n)!!=2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n,\ n\in N, n>1 \\ 1!!=1,\ (2n+1)!!=1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n+1),\ n\in N \end{array}\right\}$$ (կիսաֆակտորիալներ);

$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $n,k\in Z_+$, $k\le n$ (զուգորդություն n-ից k-ական):

Ֆունկցիայի գաղափարը: Դիցուք X-ը և Y-ը ոչ դատարկ բազմություններ են: Եթե X բազմության յուրաքանչյուր x տարրին համապատասխանեցված է Y բազմության որոշակի մեկ y տարր, ապա ասում են, որ տրված է $f:X\to Y$ ֆունկցիա, որի համար X-ը *որոշման տիրույթն* է, իսկ Y-ը՝ *փոփոխման տիրույթը*: Սովորաբար այն միակ y-ը, որը համապատասխանում է $x\in X$ տարրին, նշանակում են $f(x)$: Հաճախ x փոփոխականն անվանում են *արգումենտ*, իսկ $f(x)$-ը՝ x կետում *ֆունկցիայի արժեք*: Ընդունված է նաև $f:X\to Y$ ֆունկցիան անվանել X բազմության *արտապատկերում* Y-*ի մեջ*: $Y_0=\{f(x):x\in X\}$ բազմությունը կոչվում է f ֆունկցիայի *արժեքների բազմություն*: Այդ կապակցությամբ ասում են նաև, որ f-ը X բազմությունն *արտապատկերում է* Y_0-*ի վրա*: Ֆունկցիան, որի արժեքների բազմությունը բաղկացած է միայն մեկ տարրից, կոչվում է *հաստատուն ֆունկցիա*:

Ընդունված նշանակումներ են՝

$f(A)=\{f(x):x\in A\}$ ($A\subset X$ *բազմության պատկեր*);

$f^{-1}(B)=\{x\in X:f(x)\in B\}$ ($B\subset Y$ *բազմության նախապատկեր*):

Ֆունկցիան կոչվում է *փոխմիարժեք* (*հակադարձելի*), եթե որոշման տիրույթի տարբեր կետերում ընդունում է տարբեր արժեքներ: Դիցուք $f:X\to Y$ ֆունկցիան X-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է Y-ի վրա: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $y\in Y$ տարրին համապատասխանեցնելով այն միակ x-ը, որի համար $f(x)=y$, ստանում ենք Y-ը X-ի վրա արտապատկերող ֆունկցիա, որը կոչվում է f ֆունկցիայի *հակադարձ ֆունկցիա* և նշանակվում՝ $f^{-1}:Y\to X$:

Տրված $f:X\to Y$ և $g:Y\to Z$ ֆունկցիաների $g\circ f:X\to Z$ վերադրումը (բարդ ֆունկցիան) սահմանվում է հետևյալ բանաձևով. $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, $x\in X$:

Իրական փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիաներ: Եթե X-ը և Y-ը թվային բազմություններ են, ապա $f:X\to Y$ ֆունկցիան ընդունված է անվանել *իրական փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիա*:

$f:X\to Y$ ֆունկցիան կոչվում է *աճող* (*չնվազող, նվազող, չաճող*), եթե $x_1,x_2\in X$ և $x_1<x_2$ պայմաններից հետևում է, որ $f(x_1)<f(x_2)$ (համապատասխանաբար՝ $f(x_1)\le f(x_2)$, $f(x_1)>f(x_2)$, $f(x_1)\ge f(x_2)$): Այս չորս տիպի ֆունկցիաները միասին կոչվում են *մոնոտոն ֆունկցիաներ*:

$f:X\to Y$ ֆունկցիան կոչվում է՝

ա) *զույգ ֆունկցիա*, եթե $X=-X$ և $\forall x\in X$ $(f(-x)=f(x))$;

բ) *կենտ ֆունկցիա*, եթե $X=-X$ և $\forall x\in X$ $(f(-x)=-f(x))$:

$f:X\to R$ ֆունկցիան կոչվում է *պարբերական* (T-*պարբերական*) *ֆունկցիա*, եթե $\exists T\ne0$ այնպիսին, որ $X+T=X$ և $\forall x\in X$ $(f(x+T)=f(x))$: Այդ դեպքում T-ն անվանում են *պարբերություն*:

Դեկարտյան հարթության վրա $\{(x,f(x)):x\in X\}$ կարգավորված զույգերի բազմությունն անվանում են $f:X\to Y$ ֆունկցիայի *գրաֆիկ*:

Դեկարտյան և բևեռային կոորդինատների կապը: Եթե (r,φ)-ն և (x,y)-ը միևնույն կետի կոորդինատներն են համապատասխանաբար բևեռային և դեկարտյան կոորդինատների համակարգերում, ապա $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$:

Ա

1. Գտնել A և B բազմությունների միավորումը.

ա) $A=\{-2,1,3,7\}$, $B=\{0,1,\sqrt{2},7,9\}$;

բ) $A=[1;4]$, $B=[3;6)$; գ) $A=[2;3)$, $B=[3;4]$;

դ) $A=(-\infty;0)$, $B=[0;+\infty)$; ե) $A=Q$, $B=I$;

զ) $A=\{2k:k\in N\}$, $B=\{2k-1:k\in N\}$:

2. Գտնել A և B բազմությունների հատումը.

ա) $A=\{-1,2,3,8\}$, $B=\{2,4,6,8,10\}$; բ) $A=[-3;2]$, $B=(0;4]$;

գ) $A=[0;2]$, $B=(0;4]$; դ) $A=(3,7]$, $B=(7;11)$;

ե) $A=Z$, $B=(-5;+\infty)$; զ) $A=Q$, $B=I$;

է) $A=(-\infty;7]$, $B=\{n^2-9:n\in N\}$:

3. Գտնել A և B բազմությունների տարբերությունը.

ա) $A=\{-3,2,1\}$, $B=\{-5,-3,1,4,6\}$; բ) $A=[5;11]$, $B=(7;9)$;

գ) $A=[2;7)$, $B=(3;4]$; դ) $A=Z_+$, $B=N$; ե) $A=R$, $B=I$:

4. Գտնել բազմության լրացումը.

ա) $[0;1]$, բ) $(-\infty;3)$, գ) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$,

դ) I, ե) $(-3;-1)\cup(1;3)$, զ) $\{x\in R:x^2-3x+2=0\}$:

5. Գտնել $A=\{4k:k\in N\}$ և $B=\{6k:k\in N\}$ բազմությունների հատումը:

6. Գտնել $\{3k\}_{k\in Z_+}$, $\{3k+1\}_{k\in Z_+}$ և $\{3k+2\}_{k\in Z_+}$ բազմությունների միավորումը:

7. Յանկացած $p\in N$ թվի համար գտնել $\{pk+n\}_{k\in Z_+}$, $n=0,1,\cdots,p-1$, բազմությունների միավորումը:

8. Գտնել A և B բազմությունների հանրահաշվական գումարն ու տարբերությունը.

ա) $A=[2;5]$, $B=[-3;7]$; բ) $A=[0;+\infty)$, $B=Z$; գ) $A=N$, $B=-N$:

9. Գտնել A և B բազմությունների հանրահաշվական արտադրյալը.

ա) $A=\{1,2\}$, $B=[-3;1]$; բ) $A=\{0\}$, $B=R$; գ) $A=N$, $B=-N$:

10. Դիցուք A-ն թվային բազմություն է: Ճշմարի՞տ են արդյոք $A+A=2A$, $A-A=\{0\}$ հավասարությունները:

11. Դեկարտյան հարթության վրա պատկերել հետևյալ բազմությունները.

ա) $[1;4]\times[-2;5]$; բ) $(2;3)\times((-1;2)\cup[4;6])$; գ) $(0;+\infty)\times(1;3]$;

դ) $Z\times R_+$; ե) $R_+\times Z$; զ) R_+^2; ե) Z^2:

12. Դիցուք A-ն և B-ն թվային բազմություններ են: Ճշմարի՞տ են արդյոք $A\times B=B\times A$, $A\cdot A=A^2$, $\{0\}\times B=\{0\}$ հավասարությունները:

13. Դիցուք P_x-ը և P_y-ը $P\subset R^2$ բազմության պրոյեկցիաներն են, համապատասխանաբար Ox և Oy առանցքների վրա: Հետևյալ առնչություններից ո՞րն է ճշմարիտ կամայական P բազմության համար.

1) $P_x\times P_y=P$, 2) $P_x\times P_y\subset P$, 3) $P_x\times P_y\supset P$:

14. Դեկարտյան հարթության վրա պատկերել $P=\{(x;y): x^2+y^2\le 1\}$ կարգավորված զույգերի բազմությունը, գտնել այդ բազմության P_x և P_y պրոյեկցիաները, հարթության վրա պատկերել $P_x\times P_y$ արտադրյալը և համեմատել այն P-ի հետ:

***

15. Ապացուցել, որ ցանկացած երկու ռացիոնալ թվերի գումարը, արտադրյալը և քանորդը (եթե բաժանարարը զրո չէ) ռացիոնալ թվեր են:

16. Ապացուցել, որ ցանկացած երկու իրարից տարբեր ռացիոնալ թվերի միջև գոյություն ունի երրորդը:

17. Դիցուք $a,b,c,d\in N$ և $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$: Ստուգել, որ ցանկացած m և n բնական թվերի համար

$$\frac{a}{b}<\frac{ma+nc}{mb+nd}<\frac{c}{d}:$$

18. Ապացուցել, որ $\sqrt{2}$ և $\sqrt{3}$ թվերը իռացիոնալ են:

19. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ ցանկացած երկու իռացիոնալ թվերի գումարը և արտադրյալը իռացիոնալ թվեր են:

20. Ապացուցել, որ եթե $r\in Q$ և $\alpha\in I$, ապա $r+\alpha\in I$, $r-\alpha\in I$ և եթե $r\neq 0$, ապա $r\alpha\in I$:

21. Ցույց տալ, որ ցանկացած r ռացիոնալ թիվ կարող է ներկայացվել որպես՝ ա) երկու իռացիոնալ թվերի գումար; բ) երկու իռացիոնալ թվերի արտադրյալ, եթե $r \neq 0$:

22. Նկարագրել $Q+Q$, $I+Q$, $I+I$, $Q\cdot Q$ և $I\cdot I$ բազմությունները:

23. Ապացուցել, որ եթե α-ն և β-ն իռացիոնալ թվեր են, ապա $\alpha+\beta$ և $\alpha-\beta$ թվերից առնվազն մեկն իռացիոնալ է:

24. Ցույց տալ, որ ցանկացած երկու իրարից տարբեր իռացիոնալ թվերի միջև կա երրորդը:

25. Ապացուցել, որ ցանկացած a և b թվերի համար տեղի ունեն՝

ա) $|a+b| \le |a|+|b|$; բ) $|a-b| \ge \big||a|-|b|\big|$

անհավասարությունները: Ստուգել, որ հավասարություն տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a\cdot b \ge 0$:

***

26. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ ցանկացած $a_1, a_2, \cdots, a_n$ թվերի համար ճշմարիտ է

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

անհավասարությունը:

27. Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը՝ ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար ճշմարիտ են հետևյալ հավասարությունները.

ա) $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

բ) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

գ) $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

դ) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

ե) $1^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

զ) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$;

է) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$;

ը) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

բ) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$;

ժ) $\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$:

28. Ստուգել, որ ցանկացած $m,n\in N$ $(m\le n)$ թվերի համար՝

ա) $C_n^m=C_n^{n-m}$;　　　　բ) $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$:

29. Ապացուցել Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}\quad (n\in N):$$

30. Օգտվելով Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից՝ ապացուցել, որ

ա) $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$;　　　　բ) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0$;

գ) $(1+x)^n\ge\dfrac{n(n-1)}{2}x^2\quad(x\ge 0)$;　　　　դ) $\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$:

31. Ապացուցել, որ նշված բնական թվերի համար ճշմարիտ է անհավասարությունը.

ա) $2^n>2n+1$ ($n>2$);　　　　բ) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}>n!$ ($n\ge 3$);

գ) $\dfrac{n}{2}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<n$ ($n>1$);

դ) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},\quad (n\ge 2)$;

ե) $n!>n^{\frac{n}{2}}\quad(n>2)$;　　　　զ) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$;

է) $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k\quad(0\le x_k\le\pi;\ k=1;2;\ldots;n)$;

ը) $|\sin nx|\le n|\sin x|\quad(n\ge 1)$:

32. Ապացուցել Բեռնուլիի անհավասարությունները.

ա) ցանկացած $x>-1$ թվի և n բնական թվի համար $(1+x)^n \geq 1+nx$: Ստուգել, որ երբ $n>1$, հավասարությունը տեղի ունի միայն $x=0$ դեպքում:

բ) եթե $x_1, x_2, \cdots, x_n$ թվերը միևնույն նշանի են և մեծ -1-ից, ապա

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n:$$

33. Օգտվելով Բեռնուլիի անհավասարությունից՝ ապացուցել, որ ցանկացած $n>1$ բնական թվի համար $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$:

34. Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը՝ ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար

ա) $\left(11^{n+2}+12^{2n+1}\right)$-ը առանց մնացորդի բաժանվում է 133-ի;

բ) $\left(3^{2n+1}+40n-67\right)$-ը առանց մնացորդի բաժանվում է 64-ի:

***

35. Հետազոտել հետևյալ բազմությունների սահմանափակությունը.

ա) $[0;1]$; բ) $(0;1)$; գ) $(-3;1)\cup[4;71]$;

դ) $(0;+\infty)$; ե) $(-\infty;6]$; զ) $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$:

36. Դիցուք A-ն սահմանափակ բազմություն է: Ապացուցել, որ՝

ա) A-ի ցանկացած ենթաբազմություն սահմանափակ է;

բ) ցանկացած B բազմության համար $A \cap B$ և $A \setminus B$ բազմությունները սահմանափակ են;

գ) եթե B-ն սահմանափակ բազմություն է, ապա $A \cup B$, $A+B$ և $A \cdot B$ բազմություններից յուրաքանչյուրը սահմանափակ է:

37. Ապացուցել, որ

ա) $\sup\left\{\dfrac{n-1}{n} : n \in N\right\} = 1$; բ) $\inf\left\{\dfrac{n-1}{n} : n \in N\right\} = 0$;

գ) $\sup\left\{\dfrac{1}{n^2} : n \in N\right\} = 1$; դ) $\inf\left\{\dfrac{1}{n^2} : n \in N\right\} = 0$;

ե) $\sup\left\{\dfrac{(-1)^n}{n} : n \in N\right\} = \dfrac{1}{2}$; զ) $\inf\left\{\dfrac{(-1)^n}{n} : n \in N\right\} = -1$;

է) $\sup\left\{\dfrac{n}{n+1}\sin\dfrac{2\pi n}{3} : n \in N\right\} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

ը) $\inf\left\{\dfrac{n}{n+1}\sin\dfrac{2\pi n}{3}\, n \in N\right\} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

38. Գտնել տրված բազմության ճշգրիտ ստորին և վերին եզրերն ու ամենափոքրը և ամենամեծ տարրերը (եթե այդպիսիք գոյություն ունեն).

ա) $[0;1]$; բ) $(0;1]$; գ) $[0;+\infty)$; դ) $(0;+\infty)$; ե) Q; զ) $I\cap R_+$;

է) $I\cap[0;1]$; ը) $Q\cap R_+$; թ) $Q\cap[0;1]$:

39. Ապացուցել, որ եթե A ոչ դատարկ բազմությունը սահմանափակ է վերևից (ներքևից), ապա $-A$ բազմությունը սահմանափակ է ներքևից (վերևից), ընդ որում՝

ա) $\inf(-A)=-\sup A$; բ) $\sup(-A)=-\inf A$:

40. Ապացուցել, որ եթե $A\subset B$, ապա

ա) $\sup A\le\sup B$; բ) $\inf A\ge\inf B$:

41. Ապացուցել, որ ցանկացած A և B ոչ դատարկ սահմանափակ բազմությունների համար

ա) $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A;\sup B\}$;

բ) $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A;\inf B\}$;

գ) $\max\{\inf A;\inf B\}\le\inf(A\cap B)\le\min\{\sup A;\sup B\}$:

42. Ստուգել, որ $(0;1)$, $(0;+\infty)$ և $(-\infty;0)$ միջակայքերը բաց բազմություններ են:

43. Ապացուցել, որ ցանկացած a և b $(b\ge a)$ թվերի համար $(a;b)$ միջակայքը բաց բազմություն է, իսկ $[a;b]$ հատվածը՝ փակ: Այստեղից հետևեցնել, որ ցանկացած կետի ցանկացած շրջակայքը բաց բազմություն է:

44. Պարզել՝ հետևյալ բազմություններից որոնք են բաց, որոնք՝ փակ և որոնք՝ ո՛չ բաց և ո՛չ էլ փակ.

ա) $(0;1)\cup(3;+\infty)$; բ) $(-3;2)\cup(4;7]$; գ) $[-3;1]\cup[3;7]$;

դ) $[-2;5]\cup[7;+\infty)$; ե) $[-5;2]\cap(1;3)$; զ) $[-4;1)\cap(0;6]$;

է) $\{-5\}$; ը) $\{-5;7\}$; թ) Z:

45. Ապացուցել, որ երկու բաց բազմությունների միավորումը բաց է:

46. Ապացուցել, որ եթե $a\ne b$, ապա

ա) գոյություն ունի a կետի V_a շրջակայք, որը չի պարունակում b-ն;

բ) գոյություն ունեն a և b կետերի V_a և V_b շրջակայքեր, որոնք չեն հատվում:

47. Ստուգել, որ a կետի ցանկացած երկու շրջակայքի հատումն a-ի շրջակայք է:

48. Ապացուցել, որ երկու բաց բազմությունների հատումը բաց բազմություն է:

49. Ապացուցել, որ բազմությունը փակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ պարունակում է իր բոլոր կուտակման կետերը:

50. Ստուգել, որ R-ը միաժամանակ թե՛ բաց է, թե՛ փակ:

***

51. Հետևյալ արտահայտություններում գտնել x փոփոխականի թույլատրելի արժեքների բազմությունը (ԹԱԲ).

ա) $\dfrac{2x-3}{x^2+3x+2}$; բ) $\sqrt{3x-x^3}$; գ) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

դ) $\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$; ե) $\arcsin\dfrac{2x-5}{3}$; զ) $\log_2\log_3 x$;

է) $\dfrac{1+x^2}{1-tgx}$; ը) $\arccos\dfrac{1+x^2}{2x}$; թ) $\dfrac{ctgx}{1+\log_2^2(1-|x|)}$:

Այսուհետև, եթե վարժության մեջ $y=f(x)$ բանաձևով տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը նշված չէ, ապա համարվում է, որ այն $f(x)$ արտահայտության ԹԱԲ-ն է:

52. Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաները մոնոտոն են և պարզել յուրաքանչյուրի մոնոտոնության բնույթը.

ա) $y=2x-7$; բ) $y=5-0{,}5x$; գ) $y=arctgx$;

դ) $y=x^2$, $x\in R_+$; ե) $y=x^2$, $x\in R_-$; զ) $y=ctgx$, $x\in(0;\pi)$;

է) $y=\cos x$, $x\in(0;\pi)$; ը) $y=\cos x$, $x\in(-\pi;0)$; թ) $y=a^x$ $(a>0)$;

53. Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որոնք են զույգ, որոնք՝ կենտ և որոնք՝ ո՛չ զույգ և ո՛չ էլ կենտ.

ա) $y=3x-x^3$; բ) $y=x+x^2$; գ) $y=|\sin 3x|$;

դ) $y=\sin^4 3x$; ե) $y=5^x+5^{-x}$; զ) $y=5^x-5^{-x}$;

է) $y=(x-2)^2$; ը) $y=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; թ) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$:

54. Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաները պարբերական են.

ա) $y=\sin 3x$; բ) $y=\cos^2 x$; գ) $y=1+\cos x+\sin 2x$:

55. Ապացուցել, որ եթե T-ն $f:R\to R$ ֆունկցիայի համար պարբերություն է, ապա mT $(m\in Z, m\neq 0)$ թվերից յուրաքանչյուրը նույնպես պարբերություն է:

56. Ապացուցել, որ Դիրիխլեի ֆունկցիայի՝

$$\chi(x)=\begin{cases}1, \text{ երբ } x\in Q,\\ 0, \text{ երբ } x\in I,\end{cases}$$

համար ցանկացած զրոյից տարբեր ռացիոնալ թիվ պարբերություն է:

57. Ստուգել, որ $y=\operatorname{sgn} x$ (սիգնում իքս) ֆունկցիան՝

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{երբ } x < 0, \\ 0, \text{երբ } x = 0, \\ 1, \text{երբ } x > 0, \end{cases}$$

կենտ է: Ցույց տալ, որ $|x| = x \operatorname{sgn} x$:

58. $y = [x]$ (ամբողջ մաս իքս) ֆունկցիան սահմանվում է հետևյալ կերպ. եթե $x = n + r$, որտեղ $n \in Z$ և $r \in [0;1)$, ապա $[x] = n$;

ա) գտնել $y = [x]$ ֆունկցիայի արժեքները $0; \pm 0{,}75; \pm\sqrt{2}; \pm\pi$ կետերում;

բ) գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը;

գ) ապացուցել, որ ֆունկցիան չնվազող է;

դ) պարզել՝ կենտ է այն, թե՝ ոչ:

59. Ապացուցել, որ $y = x - [x]$ (կոտորակային մաս իքս) ֆունկցիան պարբերական է և գտնել նրա փոքրագույն դրական պարբերությունը: Ո՞րն է ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:

60. Դիցուք $f(y)$ արտահայտության ԹԱԲ-ը $(0;1)$ միջակայքն է: Գտնել ա) $f(\sin x)$; բ) $f(\lg x)$ արտահայտություններից յուրաքանչյուրի ԹԱԲ-ը:

61. Տրված $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ֆունկցիայից կազմել $y = f(f(x))$, $y = f(f(f(x)))$ վերադրումները:

62. Տրված $\varphi : X \to Y$ և $\psi : Y \to Z$ ֆունկցիաների համար կազմել $\psi \circ \varphi : X \to Z$ բարդ ֆունկցիան.

ա) $\varphi(x) = x^2$, $\psi(y) = 2^y$; բ) $\varphi(x) = 2^x$, $\psi(y) = y^2$;

գ) $\varphi(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $\psi(y) = \arccos y$; դ) $\varphi(x) = 1 + \sin^2 x$, $\psi(y) = \log_2 y$:

63. Ապացուցել, որ եթե $y = \varphi(x)$ $(x \in R)$ ֆունկցիան զույգ է (պարբերական է), ապա ցանկացած $\psi(y)$ $(y \in R)$ ֆունկցիայի համար $\psi(\varphi(x))$ $(x \in R)$ ֆունկցիան կլինի զույգ (պարբերական):

64. Դիցուք $\varphi : X \to Y$ և $\psi : Y \to Z$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն իր որոշման տիրույթում մոնոտոն է: Ի՞նչ կարելի է ասել $z = \psi(\varphi(x))$ $(x \in X)$ բարդ ֆունկցիայի մոնոտոնության վերաբերյալ:

65. Դիցուք a-ն, b-ն դրական թվեր են և $c > 1$: $y = x^2$ և $y = \log_c x$ ֆունկցիաների ո՞ր հատկության վրա են հիմնված հետևյալ պնդումները.

ա) $a > b$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $a^2 > b^2$;

բ) $a>b$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\log_c a>\log_c b$:

Եթե $0<c<1$, ապա ինչպե՞ս պետք է ձևափոխել բ) պնդումը:

66. Ապացուցել, որ ցանկացած աճող (նվազող) ֆունկցիա հակադարձելի է: Ճշմարի՞տ է արդյոք պնդումը ցանկացած չնվազող (չաճող) ֆունկցիայի համար: Բերել համապատասխան օրինակներ:

67. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ երբ } x\in Q, \\ -x, \text{ երբ } x\in \mathrm{I}, \end{cases}$$

ֆունկցիան ոչ մի միջակայքի վրա մոնոտոն չէ, բայց հակադարձելի է :

68. Համոզվել, որ $y=f(x)$ $(x\in X)$ ֆունկցիան հակադարձելի է, նշել հակադարձ ֆունկցիայի որոշման Y տիրույթը և տալ $x=f^{-1}(y)$ $(y\in Y)$ ֆունկցիան բանաձևով.

ա) $y=3x-1,\ x\in R$; բ) $y=\log_2 x$, $x\in(0;+\infty)$;

գ) $y=x^2$, $x\in R_+$; դ) $y=x^2$, $x\in R_-$;

ե) $y=tg^2x$, $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$; զ) $y=tg^4x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right]$:

69. ա) Ապացուցել, որ զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ, իսկ կենտ ֆունկցիայինը՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

բ) Ապացուցել, որ եթե $f:X\to Y$ ֆունկցիան X-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է Y-ի վրա, ապա $y=f(x)$ $(x\in X)$ և $y=f^{-1}(x)$ $(x\in Y)$ ֆունկցիաներից մեկի գրաֆիկը $y=x$ ուղիղի նկատմամբ համաչափ է մյուսի գրաֆիկին:

Հետևյալ վարժություններում (70-113) պահանջվում է կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը: Դրա համար անհրաժեշտ է.

1) եթե բանաձևով տրված ֆունկցիայի կողքին նշված չէ որոշման տիրույթը, ապա գտնել այն (տես 52 վարժությունից առաջ արված դիտողությունը);

2) հետազոտել ֆունկցիան զույգության, կենտության, պարբերականության և մոնոտոնության առումով;

3) ուսումնասիրել ֆունկցիայի վարքը որոշման տիրույթի եզրային կետերի շրջակայքում;

4) գտնել առանցքների հետ գրաֆիկի հնարավոր հատման կետերը;

5) որոշման տիրույթի մի քանի կետում հաշվել ֆունկցիայի արժեքները և հարթության վրա նշել այդ արժեքներին համապատասխանող կետերը: Տարրական ֆունկցիաների գրաֆիկները, որպես կանոն, ստացվում են նշված կետերը «սահուն» գծով միացնելիս: Դա կատարելիս անհրաժեշտ է հաշվի առնել ֆունկցիայի վերը բացահայտված բոլոր առանձնահատկությունները:

70. Կոորդինատների միևնույն համակարգում կառուցել $y=ax$ գծային և համասեռ ֆունկցիայի գրաֆիկը, երբ $a=0;-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-2$ և 2:Համեմատել ստացված

գրաֆիկները:

71. Գծել $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (պարաբոլ): Կառուցել $y=x^2+2x+2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ ֆունկցիան նախապես ներկայացնելով $y=y_0+(x-x_0)^2$ տեսքով:

72. Կոորդինատների միևնույն համակարգում կառուցել հետևյալ աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y=x^3$; բ) $y=x^4$; գ) $y=\dfrac{1}{x^2}$; դ) $y=\sqrt{x}$; ե) $y=\sqrt[3]{x}$:

Կառուցել կոտորակագծային ֆունկցիայի գրաֆիկը (հիպերբոլներ) (73-75).

73. $y=\dfrac{1}{x}$: 74. $y=1+\dfrac{1}{x-2}$: 75. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$:

Կառուցել ռացիոնալ ֆունկցիայի գրաֆիկը (74-81).

76. $y=x+\dfrac{1}{x}$ (հիպերբոլ): 77. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ (Նյուտոնի եռաժանի):

78. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ (Նյուտոնի օձաքար): 79. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ (Անյեզիի կոր):

80. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$: 81. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$:

Կառուցել իռացիոնալ ֆունկցիայի գրաֆիկը (82-84).

82. ա) $y=-\sqrt{-x-2}$; բ) $y=\sqrt{-x-2}$;

83. ա) $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$; բ) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$;

84. ա) $y=-\sqrt{x^2-1}$; բ) $y=\sqrt{x^2-1}$:

Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (85-100).

85. ա) $y=\sin\dfrac{1}{2}x$; բ) $y=\sin 2x$: 86. ա) $y=|\sin x|$; բ) $y=\sin^2 x$:

87. ա) $y=\sin x^2$; բ) $y=\sin\dfrac{1}{x}$: 88. ա) $y=tg3x$; բ) $y=\dfrac{1}{3}tgx$:

89. ա) $y=\sin(\arcsin x)$; բ) $y=\arcsin(\sin x)$:

90. ա) $y=2^x$; բ) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$: 91. ա) $y=\log_2 x$; բ) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$:

92. ա) $y=3^{|x|}$; բ) $y=\log_3|x|$: 93. ա) $y=|\log_3 x|$; բ) $y=\left|\log_3|x|\right|$:

94. ա) $y=x\sin x$; բ) $y=x^2\sin x$; գ) $y=\dfrac{1}{x}\cos x$:

95. ա) $y=2^x\sin x$; բ) $y=2^x\sin^2 x$:

96. ա) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$; բ) $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$:

97. $y=\dfrac{1}{\sin x}$: 98. $y=arctg\dfrac{1}{x}$: 99. $y=2^{\frac{1}{x}}$: 100. $y=2^{-\frac{1}{x^2}}$:

Բևեռային կոորդինատների համակարգում կառուցել տրված $r=r(\varphi)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (101-107).

101. $r=3$ (շրջանագիծ): 102. $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ (ճառագայթ):

103. $r=\varphi$ (Արքիմեդի գալարագիծ):

104. $r=\dfrac{\pi}{\varphi}$ (հիպերբոլական գալարագիծ):

105. $r=2(1+\cos\varphi)$ (սրտաձև գիծ): 106. $r=10\sin 3\varphi$ (եռաթերթ վարդ):

Դիցուք տրված են $x=\varphi(t)$ և $y=\psi(t)$ $(t\in T)$ ֆունկցիաները (պարամետրական հավասարումները): Դեկարտյան հարթության վրա $\{(\varphi(t),\psi(t)): t\in T\}$ կետերի բազմությունն անվանում են տրված պարամետրական հավասարումներով որոշվող կոր:

Կառուցել հետևյալ պարամետրական հավասարումներով որոշվող կորերը (107-110).

107. $x=1-t,\ y=1-t^2$: 108. $x=10\cos t,\ y=\sin t$ (էլիպս):

109. $x=5\cos t,\ y=5\sin t$ (շրջանագիծ):

110. $x=2^t+2^{-t},\ y=2^t-2^{-t}$ (հիպերբոլ):

Տրված $F(x,y)=0$ հավասարմամբ որոշվող կորն այդ հավասարմանը բավարարող (x,y) կարգավորված զույգերի բազմությունն է:

Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը (111-114).

111. ա) $x^2-y^2=0$; բ) $xy=0$: 112. $x^2-4x+y^2=0$:

113. ա) $x^2-a^2=0$; բ) $y^2-b^2=0$; գ) $y^2-y=0$:

114. ա) $\min\{x,y\}=1$; բ) $\max\{x,y\}=1$; գ) $\min\{x^2,y\}=1$:

Բ

115. Ստուգել, որ ցանկացած A, B և C բազմությունների համար ճշմարիտ են զուգորդական և բաշխական հետևյալ օրենքները.

ա) $(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C)$; բ) $(A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C)$;

գ) $(A\bigcup B)\bigcap C = (A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$;

դ) $(A\bigcap B)\bigcup C = (A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$:

116. Ստուգել, որ ցանկացած A և B բազմությունների համար $A\bigcap B = A\setminus(A\setminus B)$:

117. Ապացուցել Դ՝Մորգանի երկակիության օրենքները՝

ա) $(A\bigcup B)^c = A^c\bigcap B^c$; բ) $(A\bigcap B)^c = A^c\bigcup B^c$:

118. Ապացուցել, որ $A\bigcup B = A$ և $A\bigcap B = B$ հավասարություններից յուրաքանչյուրը ճշմարիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $B\subset A$:

119. Յուրաքանչյուր $\alpha\in R$ թվի համար նշանակենք $Q_\alpha = \alpha + Q$: Ապացուցել, որ ցանկացած α և β թվերի համար ճշմարիտ է հետևյալ հավասարություններից մեկը և միայն մեկը. $Q_\alpha = Q_\beta$, $Q_\alpha\bigcap Q_\beta = \varnothing$:

120. Ցանկացած X_1, X_2, Y_1 և Y_2 բազմությունների համար ապացուցել հետևյալ առնչությունները.

ա) $(X_1\bigcup X_2)\times Y_1 = (X_1\times Y_1)\bigcup(X_2\times Y_1)$;

բ) $X_1\times(Y_1\bigcup Y_2) = (X_1\times Y_1)\bigcup(X_1\times Y_2)$;

գ) $(X_1\bigcap X_2)\times Y_1 = (X_1\times Y_1)\bigcap(X_2\times Y_1)$;

դ) եթե $X_1\subset X_2$, ապա $X_1\times Y_1\subset X_2\times Y_1$:

***

121. Ապացուցել, որ հետևյալ թվերն իռացիոնալ են. ա) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; բ) $\sqrt[3]{3}$; գ) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; դ) $\log_4 18$; ե) $tg15^\circ$; զ) $tg5^\circ$:

122. ա) Ապացուցել, որ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ թվերը չեն կարող լինել միևնույն թվաբանական պրոգրեսիայի որևէ անդամներ:

բ) Կարո՞ղ են արդյոք 10, 11, 12 թվերը լինել միևնույն երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամներ:

123. Կարո՞ղ է արդյոք իռացիոնալ թվի իռացիոնալ աստիճանը լինել ռացիոնալ թիվ:

124. Ապացուցել հավասարությունները.

ա) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$; բ) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k kC_n^k = 0 \quad (n>1)$;

գ) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$;

դ) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$:

125. Ապացուցել անհավասարությունները.

ա) $2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1 \ (n>1)$;

բ) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$; գ) $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1} \ \ (n\ge 3)$;

դ) $n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n \quad (n\ge 6)$; ե) $\frac{a^n+b^n}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \quad (a,b>0)$:

126. Տրված են $x_1,x_2,\cdots,x_n$ դրական թվերը: Ապացուցել, որ

ա) եթե $x_1x_2\cdots x_n=1$, ապա $x_1+x_2+\cdots+x_n\ge n$;

բ) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\ge n$;

գ) $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$;

դ) $\left(\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_n^{-1}}{n}\right)^{-1}\le\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$;

ե) նախորդ կետերից յուրաքանչյուրում հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $x_1=x_2=\cdots=x_n$:

***

127. Դիցուք A-ն և B-ն ոչ դատարկ սահմանափակ թվային բազմություններ են: Ապացուցել, որ

ա) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$; բ) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$:

128. Ապացուցել, որ եթե A և B բազմությունները կազմված են ոչ բացասական տարրերից, ապա

ա) $\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$; բ) $\inf(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B$:

129. Բերել A և B բազմությունների այնպիսի օրինակներ, որ 41 վարժության մեջ առաջարկված անհավասարություններից ա) միայն մեկը լինի խիստ;   բ) երկուսն էլ լինեն խիստ:

130. ա) Ապացուցել, որ վերջավոր բազմության բոլոր կետերը մեկուսացված կետեր են: Որո՞նք են այդ բազմության եզրային կետերը:

բ) Բերել անվերջ և սահմանափակ բազմության օրինակ, որի բոլոր կետերը մեկուսացված են:

131. Դիցուք X-ը և Y-ը ոչ դատարկ թվային բազմություններ են և $\forall x \in X \ \forall y \in Y \ (x \le y)$: Օգտվելով ճշգրիտ վերին եզրի գոյության մասին թեորեմից՝ ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի $z \in R$, որ $\forall x \in X \ \forall y \in Y \ (x \le z \le y)$:

132. ա) Ապացուցել, որ ոչ դատարկ փակ և սահմանափակ բազմությունն ունի թե՛ ամենամեծ և թե՛ ամենափոքր տարրեր:

բ) Ապացուցել, որ բաց բազմությունը չունի ո՛չ ամենամեծ և ո՛չ էլ ամենափոքր տարր:

133. Ապացուցել, որ եթե a-ն X բազմության կուտակման կետ է, ապա a-ի ցանկացած շրջակայք պարունակում է X-ին պատկանող անվերջ թվով կետեր:

***

134. Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան զույգ է: Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը զույգ է.

ա) $y = f^2(x)$; բ) $y = f^3(x)$;   գ) $y = |f(x)|$;   դ) $y = f(|x|)$:

135. Ցույց տալ, որ եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան զույգ է (կենտ է), ապա $y = y_0 + f(x - x_0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է $x = x_0$ ուղիղի ($(x_0; y_0)$ կետի) նկատմամբ:

136. Ապացուցել, որ $(-a; a)$ միջակայքում տրված ցանկացած իրականարժեք ֆունկցիա միակ ձևով կարելի է ներկայացնել որպես զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումար:

137. Դիցուք՝ $X_0 \subset X_1$, $X_0 \ne X_1$: $F : X_1 \to Y_1$ ֆունկցիան կոչվում է $f : X_0 \to Y_0$ ֆունկցիայի *շարունակություն*, եթե $\forall x \in X_0 \ (F(x) = f(x))$:

Տրված է $f : (0; a) \to R$ ֆունկցիան: Կառուցել f-ի $F : (-a; a) \to R$ շարունակությունն այնպես, որ

ա) F-ը լինի զույգ ֆունկցիա;   բ) F-ը լինի կենտ ֆունկցիա:

138. Ապացուցել, որ եթե $f : R \to R$ ֆունկցիայի համար ցանկացած իռացիոնալ թիվ պարբերություն է, ապա f-ը հաստատուն ֆունկցիա է:

139. α և β թվերը կոչվում են *համաչափելի*, եթե $\alpha = r \cdot \beta$, որտեղ $r \in Q \setminus \{0\}$:

Ապացուցել, որ եթե երկու պարբերական ֆունկցիաների պարբերությունները համաչափելի են, ապա դրանց թե՛ գումարը և թե՛ արտադրյալը պարբերական ֆունկցիաներ են:

140. Դիցուք $f : R \to R$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն $k > 0$ և $T > 0$ հաստատուններ, այնպիսիք, որ $\forall x \in R\ (f(x+T) = kf(x))$: Ապացուցել, որ f-ը կարելի է ներկայացնել $f(x) = a^x \varphi(x)$ տեսքով, որտեղ $a > 0$, իսկ $\varphi(x)$-ը T պարբերությամբ ֆունկցիա է:

141. Դիցուք $f : [a;b] \to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է: Ապացուցել, որ f-ի արժեքների բազմությունը սահմանափակ է: Ճշմարի՞տ է արդյոք պնդումը $(a;b)$ բաց միջակայքում մոնոտոն ֆունկցիայի համար: Բերել օրինակներ:

142. Դիցուք X փակ և սահմանափակ բազմության վրա որոշված $f : X \to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է: Ապացուցել, որ

ա) f-ի արժեքների $f(X)$ բազմությունը սահմանափակ է;

բ) $f(X)$ բազմության մեջ կա ամենամեծը և ամենափոքրը:

143. Ապացուցել, որ եթե $f : X \to R$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ, ապա X-ում կա կետերի այնպիսի $x_1 < x_2 < x_3$ եռյակ, որ $f(x_2)$-ը չի գտնվում $f(x_1)$-ի և $f(x_3)$-ի միջև:

144. Դիցուք $f : X \to R$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը սահմանափակ է: Ստուգել, որ

ա) $\varphi(x) = \sup\{f(\xi) : \xi \in X \text{ և } \xi \le x\}$ ֆունկցիան չնվազող է;

բ) $\psi(x) = \inf\{f(\xi) : \xi \in X \text{ և } \xi \le x\}$ ֆունկցիան չաճող է;

գ) եթե f-ը մոնոտոն է, ապա φ և ψ ֆունկցիաներից մեկը համընկնում է f-ին, իսկ մյուսը հաստատուն է:

145. Տրված է $f : X \to Y$ արտապատկերումը: Գտնել նշված A_1, A_2, A_3 բազմությունների պատկերները.

ա) $y = 2x - 0{,}5$, $A_1 = R$, $A_2 = [-1;2)$, $A_3 = Q$;

բ) $y = x^2 - 4x + 3$, $A_1 = R$, $A_2 = [2;+\infty)$, $A_3 = (1;3)$;

գ) $y = \sin x$, $A_1 = R$, $A_2 = \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, $A_3 = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

դ) $y = \lg x$, $A_1 = (0;+\infty)$, $A_2 = (0;1]$, $A_3 = (1;10)$;

ե) $y = 2 + 2^x$, $A_1 = R$, $A_2 = [-1;3]$, $A_3 = (0;+\infty)$:

146. Տրված է $f : X \to R$ արտապատկերումը: Գտնել B_1, B_2, B_3 բազմությունների նախապատկերները.

ա) $y=3x+1$, $B_1=R$, $B_2=[-2;7]$, $B_3=Q$:

բ) $y=4x-x^2$, $B_1=(0;4)$, $B_2=\{0\}$, $B_3=(5;+\infty)$;

գ) $y=\cos 2x$, $B_1=(-1;1]$, $B_2=\{-1,1\}$, $B_3=(\sqrt{2};+\infty)$;

դ) $y=2^x$, $B_1=(0;+\infty)$, $B_2=(-\infty;0]$, $B_3=\{-1;1\}$;

ե) $y=\arcsin x$; $B_1=R$, $B_2=[\pi;3\pi]$, $B_3=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right\}$:

147. Ստուգել, որ $y=ctg\pi x$ ֆունկցիան $(0;1)$ միջակայքը փոխմիարժեք արտապատկերում է R-ի վրա:

148. Կառուցել ֆունկցիա, որը տրված X բազմությունը փոխմիարժեք արտապատկերում է Y-ի վրա.

ա) $X=[0;1]$, $Y=[0;2]$;

բ) $X=N$, $Y=\{2n:n\in N\}$;

գ) $X=[3;7]$, $Y=[7;15]$;

դ) $X=(-\infty;0)$, $Y=R$;

ե) $X=R$, $Y=(-1;1)$;

զ) $X=Q$, $Y=Q\setminus Q_-$:

149. Տրված է $f:X\to Y$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ ցանկացած $X_1, X_2\subset X$ բազմությունների համար

ա) $f(X_1\cup X_2)=f(X_1)\cup f(X_2)$;

բ) $f(X_1\cap X_2)\subset f(X_1)\cap f(X_2)$;

գ) $f(X_1\setminus X_2)\supset f(X_1)\setminus f(X_2)$:

Օրինակներով հիմնավորել, որ բ) և գ) կետերում պարունակման նշանը չի կարելի փոխարինել հավասարման նշանով:

150. Տրված է $f:X\to Y$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ ցանկացած $Y_1, Y_2\subset Y$ բազմությունների համար

ա) $f^{-1}(Y_1\cup Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)$;

բ) $f^{-1}(Y_1\cap Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$;

գ) $f^{-1}(Y_1\setminus Y_2)=f^{-1}(Y_1)\setminus f^{-1}(Y_2)$:

151. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ երբ } x\neq 0,\\ a, \text{ երբ } x=0\ (a\in R)\end{cases}$$

ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարմանը. $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$:

152. Ստուգել, որ $f(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարմանը. $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$:

153. Հայտնի է, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $2f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը: Գտնել $f(x)$-ը:

154. Գտնել $f(x)$-ը, եթե

ա) $f(x+1)=x^2-3x+2$; բ) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$;

գ) $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$; դ) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$:

155. Կառուցել $\varphi(\psi(x))$ և $\psi(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիաները և գտնել դրանցից յուրաքանչյուրի արժեքների բազմությունը, եթե

ա) $\varphi(x)=\operatorname{sgn} x$, $\psi(x)=|x|$; բ) $\varphi(x)=[x]$, $\psi(x)=\sin \pi x$:

156. Կառուցել $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, նախապես համոզվելով, որ ֆունկցիան պարբերական է:

157. Կառուցել $y=f(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե հայտնի է, որ ֆունկցիան բավարարում է $f(x+1)=f(x)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը և, բացի այդ, $f(x)=x(1-x)$, երբ $x\in[0;1]$:

158. Տրված է՝ $y=f(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x+\pi)=$ $=f(x)+\sin x$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը և $f(x)=0$, երբ $0\le x\le\pi$: Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը:

159. Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $x^2-xy+y^2=1$ (էլիպս); բ) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (պարաբոլ);

գ) $\sin x=\sin y$; դ) $\cos\left(\pi x^2\right)=\cos(\pi y)$:

160. Կոորդինատների միևնույն համակարգում կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $|x|+|y|=a$; բ) $x^2+y^2=a^2$; գ) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (աստղաձև գիծ):

161. Բևեռային կոորդինատների համակարգում կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $r^2=36\cos 2\varphi$ (Բեռնուլիի լեմնիսկատ); բ) $r^2+\varphi^2=1$:

Գ

162. Ապացուցել, որ

ա) $(0;1)=\bigcup\limits_{n\in N}\left[\frac{1}{n+1};\frac{n}{n+1}\right]=\bigcup\limits_{n\in N}\left(\frac{1}{n+1};\frac{n}{n+1}\right)$;

բ) $[0;1]=\bigcap\limits_{n\in N}\left[-\frac{1}{n};\frac{n+1}{n}\right]=\bigcap\limits_{n\in N}\left(-\frac{1}{n};\frac{n+1}{n}\right)$:

գ) $\bigcap\limits_{n\in N}\left[0;\frac{1}{n}\right]=\{0\}$;

դ) $\bigcap\limits_{n\in N}\left(0;\frac{1}{n}\right)=\varnothing$;

ե) $\bigcap\limits_{n\in N}[n;+\infty)=\varnothing$;

զ) $\bigcup\limits_{n\in N}(-n;n)=R$:

163. Ապացուցել, որ

ա) բաց բազմություններից կազմված ցանկացած ընտանիքի միավորումը բաց բազմություն է;

բ) փակ բազմություններից կազմված ցանկացած ընտանիքի հատումը փակ բազմություն է;

գ) բաց բազմություններից կազմված ցանկացած վերջավոր ընտանիքի հատումը բաց բազմություն է;

դ) փակ բազմություններից կազմված ցանկացած վերջավոր ընտանիքի միավորումը փակ բազմություն է:

164. Ստուգել, որ Q և I բազմությունները ո՛չ բաց են, ո՛չ փակ: Ապացուցել, որ $\partial Q=\partial I=R$:

165. Ապացուցել, որ ցանկացած բազմության

ա) ներքին կետերի բազմությունը բաց բազմություն է;

բ) եզրային կետերի բազմությունը փակ բազմություն է;

գ) կուտակման կետերի բազմությունը փակ բազմություն է:

166. Ապացուցել հավասարությունները.

ա) $[a;b]+[c;d]=[a+c;b+d]$;

բ) $(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$;

գ) $[a;b]\cdot[c;d]=[ac;bd]\quad(a>0,c>0)$;

դ) $(a;b)\cdot(c;d)=(ac;bd)\quad(a>0,c>0)$:

167. Ապացուցել, որ եթե A և B բազմությունները բաց են, ապա բաց են նաև $A+B$ և $A\cdot B$ բազմությունները:

168. Ապացուցել, որ եթե $[a;b]=A\bigcup B$, որտեղ A-ն և B-ն ոչ դատարկ փակ բազմություններ են, ապա A և B բազմություններն ունեն գոնե մեկ ընդհանուր կետ:

169. Դիցուք A-ն բաց բազմություն է, իսկ B-ն՝ փակ: Ստուգել, որ $A\setminus B$ բազմությունը բաց է, իսկ $B\setminus A$-ն՝ փակ:

170. Ապացուցել, որ եթե $X\subset R$ բազմությունը միաժամանակ բաց է և փակ, ապա $X=\varnothing$ կամ $X=R$:

171. $X\subset R$ բազմությունն անվանենք *կապակցված բազմություն*, եթե այն իր ցանկացած $x_1<x_2$ տարրերի հետ մեկտեղ պարունակում է ողջ $(x_1;x_2)$ միջակայքը:

Ապացուցել, որ R-ում կապակցված բազմություններ են բոլոր բաց, փակ, կիսաբաց, վերջավոր և անվերջ միջակայքերը և միայն դրանք:

172. Ապացուցել, որ $X\subset R$ բազմությունը կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն չունեն հետևյալ պայմաններին բավարարող G_1 և G_2 բաց բազմություններ.

$$G_1\cap X\neq\varnothing,\quad G_2\cap X\neq\varnothing,\quad G_1\cap G_2=\varnothing,\quad X\subset G_1\cup G_2:$$

173. Որպեսզի $F\subset R$ բազմությունը լինի փակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ F-ի հետ հատվող ցանկացած $[a;b]$ հատվածի համար $F\cap[a;b]$ բազմությունն ունենա ամենամեծ և ամենափոքր տարրեր: Ապացուցե՛լ:

***

174. Գտնել x-ի բոլոր ա) ամբողջ, բ) ռացիոնալ արժեքների բազմությունը, որոնց համար $\sqrt{x^2+x+1}$-ը ռացիոնալ թիվ է:

175. Ստուգել, որ ցանկացած $n\geq 2$ բնական թվի համար $\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ թիվը իռացիոնալ է:

176. Ապացուցել, որ եթե $x_1, x_2,\ldots,x_n$ և $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}$ թվերը ռացիոնալ են, ապա $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2},\ldots,\sqrt{x_n}$ թվերը նույնպես ռացիոնալ են:

177. Ապացուցել, որ $\sqrt[3]{2}$ թիվը հնարավոր չէ ներկայացնել $p+q\sqrt{r}$ տեսքով, որտեղ p, q և r թվերը ռացիոնալ են:

178. Գտնել $\left\{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{m}:n,m\in N\right\}$ բազմության կուտակման կետերի բազմությունը:

179. Գտնել հետևյալ բազմություններից յուրաքանչյուրի փակումը.

ա) $\left\{\dfrac{p^2}{q^2}:p,q\in N\right\}$; բ) $\left\{2^{\frac{p}{q}}:p,q\in N\right\}$:

***

180. Ապացուցել, որ եթե $y=f(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է $x=a$ և $x=b$ $(b\neq a)$ ուղիղների նկատմամբ, ապա f-ը պարբերական է:

181. Ապացուցել, որ եթե $y=f(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է $A(a_1,b_1)$ և $B(a_2,b_2)$ $(a_1\neq a_2)$ կետերի նկատմամբ, ապա f-ը գծային և պարբերական ֆունկցիաների գումար է: Մասնավորապես, եթե $b_1=b_2$, ապա f-ը պարբերական է:

182. Ապացուցել, որ եթե $y=f(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է $A(a,b)$ կետի և $x=c$ $(c\neq a)$ ուղղի նկատմամբ, ապա f-ը պարբերական է:

183. Ստուգել, որ Ռիմանի ֆունկցիան՝

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, \text{ երբ } x=\dfrac{p}{q} & \text{անկրճատելի կոտորակ է և } q\in N,\\ 0, \text{ երբ } x\in I,\end{cases}$$

պարբերական է և գտնել նրա փոքրագույն դրական պարբերությունը:

184. Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $x^4+y^4=x^2y$; բ) $(x^2+y^2)^2=2xy$ (լեմնիսկատ);

գ) $x^3+y^3-3xy=0$ (Դեկարտի տերև);

դ) $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$ (լեմնիսկատ):

185. Բևեռային կոորդինատների համակարգում կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $\varphi=2\pi\sin r$; բ) $r=\max\{2|\cos 2\varphi|,1\}$:

186. Դիցուք $x^2+(y-a)^2=a^2$ հավասարումով որոշվող շրջանագիծը (անիվը), որի վրա նշված է $A(0;0)$ կետը, գլորվում է Ox առանցքի վրայով: Գտնել A կետի հետագծի (ցիկլոիդի) պարամետրական հավասարումները՝ որպես պարամետր ընտրելով շրջանագծի կենտրոնը A կետին միացնող շառավիղ-վեկտորի պտտման անկյունը:

187. Ստուգել, որ բևեռային կոորդինատների համակարգում $r^2=18\cos 2\varphi$ հավասարումով որոշվող կորը (Բերնուլիի լեմնիսկատը) այն (r,φ) կետերի բազմությունն է, որոնց $F_1(3,\pi)$ և $F_2(3,0)$ կետերից (լեմնիսկատի ֆոկուսներից) ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հաստատուն է: Գտնել այդ հաստատունը:

Գլուխ 2

Թվային հաջորդականություններ

Բնական թվերի բազմության վրա որոշված $f: N \to X$ ֆունկցիան կոչվում է հաջորդականություն: Եթե X -ը թվային բազմություն է, ապա f -ն անվանում են *թվային հաջորդականություն* : Ցանկացած $n \in N$ թվի համար $x_n = f(n)$ արժեքն անվանում են հաջորդականության n -րդ կամ ընդհանուր անդամ: Այսուհետև $f: N \to X$ հաջորդականությունը պարզապես կանվանենք x_n հաջորդականություն: Տրված x_n -ի համար x_{n-1} -ը և x_{n+1} -ը կոչվում են համապատասխանաբար նախորդ և հաջորդ անդամներ: Ֆունկցիայի մոնոտոնության, սահմանափակության, հաստատունության սահմանումները պահպանվում են նաև հաջորդականությունների համար: Ավելացնենք միայն, որ x_n հաջորդականությունը կանվանենք *ի վերջո մոնոտոն* (հաստատուն), եթե գոյություն ունի $n_0 \in N$, այնպիսին, որ x_n -ը մոնոտոն է (հաստատուն է) $\{n_0, n_0+1, \ldots\}$ բազմության վրա:

Հ ա ջ ո ր դ ա կ ա ն ո ւ թ յ ա ն ս ա հ մ ա ն: a թիվը կոչվում է x_n հաջորդականության սահման, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0 \in N$, այնպիսին, որ բոլոր $n \ge n_0$ բնական թվերի համար տեղի ունի $|x_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ \forall n \in N \left(n \ge n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right):$$

Եթե a թիվը x_n հաջորդականության սահմանն է, ապա գրում են $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ կամ $x_n \to a$ (x_n -ը ձգտում է a -ի): Վերջավոր սահման ունեցող հաջորդականությունը կոչվում է զուգամետ, չունեցողը՝ տարամետ:

Զուգամետ հաջորդականության սահմանը միակն է:

x_n հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե $x_n \to 0$: x_n հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ մեծ, եթե $\forall E > 0 \, \exists n_0 \in N \, \forall n \in N \left(n \ge n_0 \Rightarrow |x_n| > E\right)$: Այս դեպքում գրում են $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ կամ $x_n \to \infty$: Ընդունված են նաև ա) $x_n \to -\infty$, բ) $x_n \to +\infty$ նշանակումները, եթե ա) $\forall E > 0 \, \exists n_0 \in N \, \forall n \in N \left(n \ge n_0 \Rightarrow x_n < -E\right)$; բ) $\forall E > 0 \, \exists n_0 \in N \ \forall n \in N$ $\left(n \ge n_0 \Rightarrow x_n > E\right)$:

Ն ե ր դ ր վ ա ծ մ ի ջ ա կ ա յ ք ե ր ի լ ե մ մ ա : Փակ միջակայքերի (հատվածների) $\left\{[a_n; b_n] : n \in N\right\}$ ընտանիքը կոչվում է ներդրված միջակայքերի ընտանիք, եթե $\forall n \in N$ $\left([a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]\right)$:

Լեմմա (Կոշի-Կանտորի սկզբունքը): Եթե ներդրված միջակայքերի $\left\{[a_n; b_n] : n \in N\right\}$ ընտանիքն այնպիսին է, որ $b_n - a_n \to 0$, ապա գոյություն ունի c թիվ, ընդ որում միակը, որը պատկանում է այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրին. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{c\}$:

Սահմանի գոյության հայտանիշներ: Եթե y_n և z_n հաջորդականությունները զուգամետ են և $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, ապա ցանկացած x_n հաջորդականություն, որը բավարարում է $y_n \le x_n \le z_n$ անհավասարություններին, նույնպես զուգամետ է և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

Վայերշտրասի թեորեմը: Ցանկացած ի վերջո չնվազող և վերևից սահմանափակ հաջորդականություն զուգամետ է:

Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը: x_n հաջորդականությունը կոչվում է ֆունդամենտալ, եթե

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \ \forall m,n \in N\ \left(m > n \ge n_0 \Rightarrow \left|x_m - x_n\right| < \varepsilon\right):$$

Որպեսզի x_n հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունդամենտալ:

Թվաբանական գործողություններ և անհավասարություններ: Եթե x_n և y_n հաջորդականությունները զուգամետ են, ապա զուգամետ են $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$, իսկ եթե $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, $\dfrac{x_n}{y_n}$ հաջորդականությունները, ընդ որում

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

բ) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

գ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$:

Եթե $\forall n \ge n_0\ \left(x_n \le y_n\right)$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$:

Ենթահաջորդականություններ և մասնակի սահմաններ: Բնական թվերից կազմված ցանկացած $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ հաջորդականության համար $z_n = x_{k_n}$ հաջորդականությունը կոչվում է x_n հաջորդականության ենթահաջորդականություն:

a թիվը ($-\infty$-ը, $+\infty$-ը) կոչվում է x_n հաջորդականության մասնակի սահման, եթե x_n հաջորդականության որևէ ենթահաջորդականություն ձգտում է a-ի ($-\infty$-ի, $+\infty$-ի): x_n հաջորդականության մասնակի սահմաններից ամենափոքրն (ամենամեծն) անվանում են x_n հաջորդականության ստորին (վերին) սահման և նշանակում՝ $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ ($\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$): Ընդ որում, եթե $x_n \to -\infty\ \left(+\infty\right)$, ապա $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty\ \left(+\infty\right)$:

Որպեսզի x_n հաջորդականությունն ունենա սահման (վերջավոր կամ անվերջ), անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$:

Բոլցանո–Վայերշտրասի լեմման: ա) Ցանկացած անվերջ և սահմանափակ բազմություն ունի առնվազն մեկ կուտակման կետ: բ) Ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն ունի զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Ա

Ապացուցել x_n հաջորդականության սահմանափակությունը (188-197).

188. $x_n = (-1)^n$:

189. $x_n = \sin n!$:

190. $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$:

191. $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{3n-1}$:

192. $x_n = \dfrac{5n^2+6}{(n^4+1)(n^2-2)}$:

193. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)}$:

194. $x_n = \dfrac{n+arctgn}{n+\ln n}$:

195. $x_n = \dfrac{\lg^2 n+10}{\lg^2 n+2}$:

196. $x_n = \lg\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)-\lg n$:

197. $x_n = \dfrac{5^{2n+1}+2^n}{1-25^n}$:

Ստուգել, որ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ չէ (198-206).

Ստուգել, որ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ չէ (198-206).

198. $x_n = (-1)^n n^2$:

199. $x_n = q^n \quad (q>1)$:

200. $x_n = n+(-1)^n n$:

201. $x_n = n\sin\dfrac{\pi n}{4}$:

202. $x_n = 2^{n(-1)^n}$:

203. $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$:

204. $x_n = (n-1)^{\sin\frac{\pi n}{2}}$:

205. $x_n = \dfrac{3^n-2^n}{2^n+1}$:

206. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^3+2n}}{\sqrt{n+1}}$:

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը մոնոտոն (ի վերջո մոնոտոն) է և պարզել մոնոտոնության բնույթը (207-217).

207. $x_n = \dfrac{100n}{n^2+16}$:

208. $x_n = n^3-6n$:

209. $x_n = nq^n, q>0$:

210. $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$:

211. $x_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$:

212. $2^n - 100n$:

213. $x_n = 3^n - 2^n$:

214. $x_n = \dfrac{2^n}{n}$:

215. $x_n = \lg(n+1) - \lg n$:

216. $x_n = \lg\left(n^2+9n\right) - 2\lg n$:

217. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k(2k+1)} - \dfrac{1}{2(n+1)}$:

Ելնելով հաջորդականության սահմանի սահմանումից՝ ապացուցել հավասարությունը (218-226).

218. ա) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{2n-1} = \dfrac{3}{2}$:

219. ա) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0,\ p > 0$:

220. ա) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{n} = 0$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{12} = 0$:

221. ա) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{3n-1}} = 0$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\ |q| < 1$:

222. ա) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{n+1} 2 = 0$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 \dfrac{2n+1}{n} = 1$:

223. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2+n+1} = 1$:

224. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n\sin n+1}{2n^2+n-1} = 0$:

225. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{8n^2-2n+10} = \dfrac{1}{4}$:

226. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt{n^2+2n+10}} = \sqrt{3}$:

227. Գտնել բոլոր այն բնական n-երը, որոնց համար $\dfrac{1}{2} < \dfrac{n+10}{2n-1} < \dfrac{1}{2} + \varepsilon$, որտեղ

ա) $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$; բ) $\varepsilon = \dfrac{1}{k+1},\ k \in N$:

228. Դիցուք $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ և $y_n = x_{n+p}$ $(p \in N)$: Ապացուցել, որ y_n հաջորդականությունը զուգամետ է և $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$:

229. Ապացուցել, որ զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

230. Ապացուցել, որ ի վերջո հաստատուն հաջորդականությունը զուգամետ է:

231. Տրված է $\lim_{n\to\infty} x_n = a$: Ապացուցել, որ $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$: Օրինակներով համոզվել, որ $|x_n| \to |a| \Rightarrow x_n \to a$ հետևությունը ճշմարիտ չէ:

231.1. Տրված է $\lim_{n\to\infty} x_n = a$: Ապացուցել, որ ցանկացած բնական k թվի համար $\lim_{n\to\infty} x_n^{2k} = a^{2k}$: Կառուցել x_n հաջորդականության օրինակ, որի համար $\lim_{n\to\infty} x_n^{2k} = a^{2k}$, բայց x_n-ը չի ձգտում a-ի:

231.2. Ապացուցել, որ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lim_{n\to\infty} x_n^{2k-1} = a^{2k-1}$ $(k \in N)$:

232. Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ և ինչ-որ համարից սկսած $x_n \geq b$ $(x_n \leq c)$, ապա $a \geq b$ $(a \leq c)$:

233. Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n\to\infty} x_n > a$ ($\lim_{n\to\infty} x_n < b$), ապա ինչ-որ համարից սկսած՝ $x_n > a$ ($x_n < b$):

234. Ապացուցել, որ

ա) անվերջ փոքր հաջորդականության և սահմանափակ հաջորդականության արտադրյալն անվերջ փոքր է;

բ) զրոյից տարբեր անդամներով x_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\frac{1}{x_n}$ հաջորդականությունն անվերջ մեծ է:

235. Ստուգել, որ հետևյալ հաջորդականություններն անվերջ փոքր են.

ա) $x_n = \frac{\sin n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$; բ) $x_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$; գ) $x_n = \frac{[\sqrt{n}]}{n\sqrt{n}}$:

Ստուգել, որ x_n հաջորդականությունն անվերջ մեծ է (236-241).

236. $x_n = (-1)^n n$:

237. $x_n = \lg\lg n$:

238. $x_n = (\lg n)^3$:

239. $x_n = q^n, |q| > 1$:

240. $x_n = 4\sqrt{n} - n$:

241. $x_n = \frac{2^n(n+1)}{2n+1}$:

242. Ստուգել, որ $x_n = n^{(-1)^n}$ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, բայց անվերջ մեծ էլ չէ:

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը տարամետ է (243-248).

243. $x_n=(-1)^n$:

244. $x_n=\sin\frac{n\pi}{12}$:

245. $x_n=\frac{n}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$:

246. $x_n=2^{(-1)^n n}$:

247. $x_n=\frac{n^2-2n}{n+1}$:

248. $x_n=n^2\sin\frac{\pi n}{4}$:

Ապացուցել հավասարությունը (249-256).

249. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$:

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1)$:

251. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$:

252. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$:

253. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$:

254. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=1$:

255. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0\quad(a>1)$:

256. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$:

Հաշվել սահմանը (257-271).

257. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a_1)(n+a_2)}-n\right)$

258. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot arctg2^n}{2^n}$:

259. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$:

260. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$:

261. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[2+(-1)^n\right]^n}{3^n\lg n}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}$:

262. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2+1}{n^3-n+10}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+3}{n^3+n^2-7}$;

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3-1}{3n^3+n^2-5}$;

դ) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_{q-1} n + b_q}$ $(a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, p, q \in N)$:

263. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}-2}{3n}$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(n\sqrt{n^2+1}-n^2\right)}$:

264. ա) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} \right)$;

բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}$:

265. ա) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n \right)$; բ) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right)$:

266. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{5+\lg n}{1+\lg n^2}$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lg(2^n+1)}{n+1}$:

267. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\log_2(n+3)}{n^2+2}$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+\sqrt{n}\ln n}{n^2+n+1}$:

268. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3^n}{n+3^n}$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\ln n+5^n}{n^2-5^n}$:

269. $\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\left(1+\frac{p}{n}\right)^q - \left(1+\frac{q}{n}\right)^p \right)$ $(p, q \in N)$:

270. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$:

271. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(a+\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2 \right]$:

Օգտվելով մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմից՝ ապացուցել հաջորդականության զուգամիտությունը (272-276).

272. ա) $x_n = \frac{1}{n}$; բ) $x_n = \frac{n+1}{3n+7}$:

273. ա) $x_n = \frac{n}{3^n}$; բ) $x_n = \frac{3n}{n^2+7n-1}$:

274. ա) $x_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; բ) $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$:

275. ա) $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$;

բ) $x_1=1,\ \ x_{n+1}=x_n\left(1-\frac{1+(-1)^n}{2n}\right)$:

276. ա) $x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$; բ) $x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$:

277. Ապացուցել, որ եթե մոնոտոն հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, ապա անվերջ մեծ է:

278. Դիցուք՝ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$: Ապացուցել, որ

ա) x_n հաջորդականությունը աճող է, իսկ y_n-ը՝ նվազող ;

բ) ցանկացած բնական m-ի և n-ի համար $x_m<y_n$;

գ) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (այդ սահմանը նշանակում են e);

դ) $2<e<3$;

ե) $0<e-x_n<\frac{e}{n}$;

զ) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, որտեղ նշանակված է $\ln x=\log_e x$:

Օգտվելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ ապացուցել հաջորդականության զուգամիտությունը (279-283).

279. ա) $x_n=\frac{1}{n+2}$; բ) $x_n=\frac{n+1}{n^2+3}$:

280. ա) $x_n=\frac{2n+1}{3n+2}$; բ) $x_n=\frac{n+\sin n}{n+7}$:

281. ա) $x_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1},|q|<1$;

բ) $x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$:

282. ա) $x_n=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$;

բ) $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$:

283. ա) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$; բ) $x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$ $(p > 2)$:

Օգտվելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ ապացուցել հաջորդականության տարամիտությունը (284-286).

284. ա) $x_n = (-1)^n + 1$; բ) $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

285. ա) $x_n = \sin\frac{\pi n}{4}$; բ) $x_n = \frac{n\cos n\pi - 1}{2n}$:

286. ա) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ բ) $x_n = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$:

287. Զուգամե՞տ է արդյոք x_n հաջորդականությունը, եթե ցանկացած p բնական թվի համար $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p} - x_n) = 0$: Բերել համապատասխան օրինակ:

287.1. ա) Դիցուք x_n հաջորդականության համար $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$ և $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = b$: Ապացուցել, որ x_n հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $\{a; b\}$-ն է:

բ) Դիցուք $p \in N$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_{pn+k} = a_k$, $k = 0;1;\ldots;p-1$: Ապացուցել, որ x_n հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $\{a_0; a_1; \ldots; a_{p-1}\}$-ն է:

Գտնել $\inf x_n$-ը, $\sup x_n$-ը, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$-ը և $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$-ը (288-295).

288. $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$: 289. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$:

290. $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{\pi n}{4}$: 291. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$:

292. $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$: 293. $x_n = n^{(-1)^n}$:

294. $x_n = \frac{1}{n - 10{,}2}$; 295. $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$:

296. Դիցուք՝ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, իսկ y_n-ը ցանկացած թվային հաջորդականություն է: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$: Բերել համապատասխան օրինակներ:

297. Դիցուք՝ $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

ա) Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ կա՛մ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, կա՛մ $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$:

բ) Կարո՞ղ են արդյոք x_n և y_n հաջորդականությունները միաժամանակ լինել անսահմանափակ:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

գ) Ապացուցել, որ եթե x_n և y_n հաջորդականությունները դրական են, ապա կամ այդ հաջորդականություններից գոնե մեկը ձգտում է զրոյի, կամ $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n = 0$:

Այսուհետև պայմանավորվենք օգտագործել հետևյալ «թվաբանական» կանոնները.

$+\infty + (+\infty) = +\infty$, $+\infty + a = +\infty$, $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$,

$-\infty + (-\infty) = -\infty$, $-\infty + a = -\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$:

298. Ապացուցել, որ a թիվը ($-\infty$-ը, $+\infty$-ը) կլինի x_n հաջորդականության մասնակի սահման այն և միայն այն դեպքում, երբ a-ի ($-\infty$-ի, $+\infty$-ի) ցանկացած շրջակայք պարունակում է x_n-ի անվերջ թվով անդամներ:

Գտնել հաջորդականության մասնակի սահմանները (299-302):

299. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \cdots$;

300. $x_n = \cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}$;

301. $x_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$;

302. $x_n = \frac{1}{2}\left[(a+b) + (-1)^n(a-b)\right]$;

303. Բերել թվային հաջորդականության օրինակ, որի մասնակի սահմանները նախապես տրված $a_1, a_2, ..., a_p$ թվերն են:

Բ

Ապացուցել հաջորդականության սահմանափակությունը (304-307).

304. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$:

305. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1}$:

306. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$: 307. $x_n = \log_2\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right), n \geq 2$:

308. Ինչպիսի՞ p-ի և q-ի համար, $0 \leq q < p$,

$$x_n = \sqrt[k]{n^p + an^q + 1} - \sqrt[k]{n^p + bn^q + 1} \quad (a \neq b)$$

հաջորդականությունը կլինի սահմանափակ:

309. x_n բնական թվերի հաջորդականությունն այնպիսին է, որ $S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: Ապացուցել, որ սահմանափակ է նաև $y_n = \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)$ հաջորդականությունը:

Անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամն արտահայտել n-ով և հետազոտել սահմանափակությունը (310-313).

310. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}$:

311. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{n+2} = \frac{3x_{n+1} - x_n}{2}$:

312. $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$:

313. $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = -3x_{n+1} - 2x_n + 6$:

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ չէ (314-317).

314. ա) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} kq^{n-k}, q \in R, q \neq 0$; բ) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2$:

315. ա) $x_n = \frac{2^n}{n^2}$; բ) $x_n = \frac{n+1}{\log_2(n+1)}$:

316. ա) $x_n = \sqrt[n]{n!}$ բ) $x_n = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$:

317. $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n$:

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը մոնոտոն (ի վերջո մոնոտոն) է (318-321).

318. $x_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k!$: 319. $x_n = \frac{a^n - 1}{n}, a > 0$:

320. $x_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n, x>0$:

321. $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n+1}{n+1}$:

322. Դիցուք՝ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ և $x_n \geq -1, n \in N$: Ապացուցել, որ ցանկացած p-ի համար $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1$:

323. Դիցուք՝ $x_n \to \infty$, երբ $n \to \infty$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$:

324. Դիցուք՝ $x_n > 0$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$:Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = \ln a$:

325. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \ln a \quad (a>0)$:

326. Ապացուցել, որ $x_n = \sin n$ հաջորդականությունը տարամետ է:

Հաշվել սահմանը (327-340).

327. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$:

328. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$:

329. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$:

330. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$:

331. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]$:

332. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot3^n+1}{n!+1}$:

333. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{n}{2}}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$:

334. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{a}-1}{\sqrt[n]{b}-1} \quad (a,b>1)$:

335. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$:

336. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n+n^2 2^n-1}{n^4+(n!)^2}$:

337. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^m$, որտեղ $a_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,m$:

338. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}\right)$, որտեղ a_n-ը զրոյից տարբեր անդամներով և $d\neq 0$ տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա է:

339. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right)$, որտեղ a_n-ը դրական անդամներով և $d\neq 0$ տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա է:

340. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(q+2q^2+\cdots+nq^n\right)$ $\quad(|q|<1)$:

341. Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$; $\qquad$ բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{e}$:

342. Դիցուք $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$: Ապացուցել, որ

ա) $e-S_n<\frac{n+2}{n!(n+1)^2}$; $\qquad$ բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e-S_n}{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=0$:

343. Ապացուցել, որ $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$:

344. Դիցուք $m\in N$ և $M=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}$: Ապացուցել, որ $e^M>m+1$:

Հետազոտել հաջորդականության զուգամիտությունը և հաշվել սահմանը (345-351).

345. $x_1=0$, $x_{n+1}=\frac{x_n+1}{x_n+2}$: $\qquad$ 346. $0<x_1<1$, $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$:

347. $x_1=13$, $x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$: $\qquad$ 348. $x_1=\sqrt[k]{a}$, $x_{n+1}=\sqrt[k]{ax_n}$, $a>0$:

349. $x_1=0$, $x_{n+1}=\frac{x_n+A}{4}$: $\qquad$ 350. $x_1=M>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{M}{x_n^2}\right)$:

351. $x_1=\sqrt{a}$, $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, $a>0$:

352. Տրված է $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$: Ի՞նչ կարելի է ասել $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$-ի մասին:

353. Դիցուք x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից և բավարա-

բում է $x_{n+1}-x_n>-\frac{1}{n^2}$ $(n\in N)$ անհավասարությանը: Ապացուցել, որ x_n-ը զուգամետ է:

354. Դիցուք x_n հաջորդականության համար $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+2}-x_n)=0$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$:

355. Գտնել $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\ldots$ հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը:

356. Ապացուցել, որ ցանկացած հաջորդականություն ունի մոնոտոն ենթահաջորդականություն:

357. Ապացուցել, որ

$$\inf x_n\le\varliminf_{n\to\infty}x_n\le\varlimsup_{n\to\infty}x_n\le\sup x_n:$$

Բերել օրինակներ, որ անհավասարության տարբեր մասերում լինի ա) հավասարություն; բ) խիստ անհավասարություն:

357.1. Ապացուցել, որ

ա) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\ge n}x_k$; բ) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\ge n}x_k$:

358. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը զուգամետ է, ապա ցանկացած y_n հաջորդականության համար ճշմարիտ են հետևյալ հավասարությունները.

ա) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$;

բ) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$:

359. Ապացուցել, որ եթե x_n, y_n հաջորդականություններից որևէ մեկը սահմանափակ է, ապա

ա) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n\le\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$;

բ) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n\le\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$:

Բերել հաջորդականությունների օրինակներ, որ անհավասարությունների բոլոր մասերում լինեն խիստ անհավասարություններ

360. :Ապացուցել, որ եթե $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<+\infty$, ապա ցանկացած y_n հաջորդականության համար $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$:

361. Ապացուցել, որ եթե $x_n > 0$ $(n \in N)$ և $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n} = 1$, ապա x_n հաջորդականությունը զուգամետ է:

362. Դիցուք x_n հաջորդականությունը բավարարում է $0 \le x_{m+n} \le x_m + x_n$ $(m, n \in N)$ պայմանին:Ապացուցել, որ $\frac{x_n}{n}$ հաջորդականությունը զուգամետ է:

363. Ապացուցել, որ զուգամետ հաջորդականությունն ունի փոքրագույն կամ մեծագույն անդամ:

364. x_n հաջորդականությունն անվանում են սահմանափակ փոփոխության հաջորդականություն, եթե գոյություն ունի այնպիսի C հաստատուն, որ կամայական n-ի համար

$$\sigma_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < C:$$

Ապացուցել, որ

ա) մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականությունն ունի սահմանափակ փոփոխություն;

բ) սահմանափակ փոփոխության հաջորդականությունը զուգամետ է: Բերել x_n հաջորդականության օրինակ, որը զուգամետ է,բայց սահմանափակ փոփոխության չէ:

գ) ցանկացած սահմանափակ փոփոխության հաջորդականության համար գոյություն ունեն a_n և b_n մոնոտոն աճող ու սահմանափակ հաջորդականություններ, այնպիսիք որ $x_n = a_n - b_n$, $(n \in N)$:

365. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը զուգամետ է, ապա

$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, $(n \in N)$ հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է և $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n$: Ընդհանուր դեպքում y_n հաջորդականության զուգամիտությունից չի հետևում x_n հաջորդականության զուգամիտությունը: Բերել օրինակ:

366. Դիցուք x_n հաջորդականության համար $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$ և $\lim_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = 0$: Ապացուցել, որ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$:

367. Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, ապա $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = +\infty$:

368. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը զուգամետ է և $x_n > 0$, ապա $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$:

369. Ապացուցել, որ եթե $x_n > 0$ և գոյություն ունի $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, ապա $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$:

370. Ապացուցել, որ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$:

371. Ապացուցել, որ ցանկացած սահմանափակ անվերջ բազմություն ունի կուտակման կետ:

372. Դիցուք՝ $[a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \cdots \supset [a_n;b_n] \supset \cdots$: Ապացուցել, որ

ա) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n;b_n] \neq \varnothing$;

բ) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n;b_n]$ բաղկացած է մեկ կետից այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$;

գ) ճշմարի՞տ են արդյոք ձևակերպված պնդումները $(a_n;b_n)$ բաց միջակայքերի համար:

373. Դիցուք N_1 և N_2 բազմությունների միավորումը բնական թվերի բազմությունն է: Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}_{n\in N_1}$ հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը A-ն է, իսկ $\{x_n\}_{n\in N_2}$ հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը՝ B-ն, ապա x_n հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $A \cup B$-ն է:

Գ

374. Հետազոտել $x_n = \left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$ հաջորդականության սահմանափակությունը, որտեղ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)(a_n + 1)$:

Ապացուցել x_n հաջորդականության սահմանափակությունը (375-377).

375. $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$: 376. $x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n+1-j}$: 377. $x_n=\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!$:

378. Տրված է՝ $x_1=2$, $x_{n+1}=\frac{x_n^4+1}{5x_n}$: Ապացուցել, որ $\frac{4\sqrt[4]{3}}{15}<x_n\le 2$:

379. Դիցուք՝ $x_1=a$ և $x_n=\frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}$, $n>1$: Ինչպիսի՞ a-երի դեպքում բոլոր n-երի համար x_n-ը կլինի որոշված:

380. Դիցուք՝ $x_1=a$:

ա) Ապացուցել, որ եթե $a\notin[3;4]$, ապա գոյություն ունի x_n հաջորդականություն, որը բավարարում է $x_{n+1}=\frac{x_n}{4-x_n}$ $(n\in N)$ հավասարմանը;

բ) գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում գոյություն չունի նշված հավասարմանը բավարարող հաջորդականություն:

381. Տրված է՝ $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$, $y_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)}$, $x_1=a>0$, $y_1=b>a$:

Ապացուցել, որ

ա) $y_n\ge x_n$, $x_n\uparrow$ (աճող է), $y_n\downarrow$ (նվազող է);

բ) $y_{n+1}-x_{n+1}\le\frac{b-a}{4^n}$:

382. Տրված է՝ $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$, $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$, $x_1=a>0$, $y_1=b>a$: Ապացուցել, որ

ա) $x_n\uparrow$, $y_n\downarrow$ և x_n, y_n հաջորդականությունները սահմանափակ են;

բ) $y_{n+1}-x_{n+1}\le\frac{b-a}{2^n}$ $(n\in N)$:

383. x_n և y_n հաջորդականությունները բավարարում են $x_1=a>0$, $y_1=b>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$, $y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$ պայմաններին: Ապացուցել, որ այդ հաջորդականությունները զուգամետ են և ունեն միևնույն սահմանը: Գտնել այդ սահմանը:

384. Դիցուք՝ $\binom{0}{\alpha}=1$, $\binom{n}{\alpha}=\binom{n-1}{\alpha}\frac{\alpha-n+1}{n}$, $(n\in N,\alpha\in R)$: Ապացուցել, որ

ա) եթե $\alpha\geq-1$, ապա $\left|\binom{n}{\alpha}\right|$ հաջորդականությունն ի վերջո չաճող է;

բ) եթե $\alpha<-1$, ապա $\left|\binom{n}{\alpha}\right|$ հաջորդականությունն ի վերջո չնվազող է:

385. Դիցուք՝ $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{t}{n}\right)$: Ապացուցել, որ ցանկացած $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$ թվի համար a_n հաջորդականությունն ի վերջո աճող է, իսկ ցանկացած $t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ թվի համար՝ նվազող:

386. Դիցուք՝ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$: Ապացուցել, որ

ա) $\frac{1}{4}<n\left(\frac{e}{x_n}-1\right)<\frac{1}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$;

բ) $\frac{3x_n+y_n}{4}<e<\frac{x_n+y_n}{2}$;

գ) $\frac{e}{4n+4}<e-x_n<\frac{e}{2n}$:

387. Դիցուք՝ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$: Ապացուցել, որ

ա) կամայական $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $n_0=n_0(t)$ համար, որ $(1-t)x_n+ty_n<e$, երբ $n>n_0$;

բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n\left(1+\frac{1}{2n}\right)-e}{e-x_n}=0$;

գ) $\frac{e}{2n+2}<e-x_n<\frac{e}{2n+1}$:

388. Ապացուցել, որ.

ա) եթե $a < e$, ապա ի վերջո $n!\left(\frac{a}{n}\right)^n < e$; բ) $\lim_{n\to\infty} n!\left(\frac{e}{n}\right)^n = +\infty$:

389. Դիցուք $\sigma_n = 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$: Ապացուցել, որ

ա) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = e$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n - e}{e - S_n} = 0$, որտեղ $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$:

390. Դիցուք $a_n > 0$ $(n \in N)$:Ապացուցել, որ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geq e$:

Հետազոտել հաջորդականության զուգամիտությունը (391-394).

391. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = (1 - x_n)^2$:

392. $x_1 = a$, $0 < a < 1$, $x_{n+1} = 1 - x_n^2$:

393. $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + b$, $a > 0$, $b > 0$:

394. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2$:

395. Դիցուք՝ $x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}$: Ապացուցել, որ

ա) x_n հաջորդականությունը մոնոտոն է և սահմանափակ;

բ) ցանկացած n և k բնական թվերի համար $x_n < x_k + \frac{1}{2^{k-1}}$:

396. Դիցուք՝ $x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$ $(a_i > 1, i \in N)$: Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը զուգամետ է, եթե $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \ln a_n < \ln 2$:

397. Տրված է x_n հաջորդականությունը: Դիցուք ցանկացած $\alpha > 1$ թվի համար $\lim_{m\to\infty} x_{[\alpha m]} = 0$, որտեղ $[\alpha m]$-ը $(m \in N)$ αm-ի ամբողջ մասն է: Ապացուցել, որ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$:

398. Դիցուք՝ $x_n > 0$ և $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$: Ապացուցել, որ

ա) գոյություն ունեն անվերջ թվով n_k համարներ, այնպիսիք, որ $\forall n \in N$ $(n < n_k \Rightarrow x_n > x_{n_k})$;

բ) գոյություն ունեն անվերջ թվով n_k համարներ, այնպիսիք, որ $\forall n \in N$ $(n > n_k \Rightarrow x_n < x_{n_k})$:

399. Դիցուք x_n -ը ոչ բացասական թվերի հաջորդականություն է, որը բավարարում է $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} < +\infty$ և $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$ պայմաններին: Ապացուցել, որ $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n^2}=0$:

a -ի և b -ի ինչ՞ արժեքների դեպքում x_n հաջորդականությունը կլինի զուգամետ (400-402).

400. $x_1=a, x_2=b, x_{n+2}=4x_{n+1}-3x_n$: 401. $x_1=a, x_2=b, x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$:

402. $x_1=a, x_2=b$, $x_{n+2}=\frac{5}{2}x_{n+1}+x_n$:

403. Տրված է $x_1=a, x_{n+1}=a\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$ հաջորդականությունը: Ապացուցել, որ

ա) $\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$, եթե $a\ge 1$; բ) $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\frac{a}{1-a}}$, եթե $0<a<1$:

404. Հետազոտել $x_n=\sqrt{2\sqrt{3\cdots\sqrt{n}}}$ հաջորդականության զուգամիտությունը:

405. Դիցուք՝ $x_1=1$, $x_2=1$, $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ (Ֆիբոնաչիի հաջորդականություն): Ապացուցել, որ $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ հաջորդականությունը զուգամետ է և գտնել նրա սահմանը:

406. Դիցուք $x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=px_{n+1}+qx_n$,որտեղ a,b,p,q -ն տրված հաստատուն թվեր են: Ապացուցել, որ

ա) եթե $\lambda^2-p\lambda-q=0$ հավասարումն ունի λ_1 և λ_2 իրարից տարբեր իրական արմատներ, ապա

$$x_n=\frac{(\lambda_2 a-b)\lambda_1^{n-1}-(\lambda_1 a-b)\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2-\lambda_1};$$

բ) եթե $\lambda^2-p\lambda-q=0$ հավասարումն ունի $\lambda_0\ne 0$ կրկնակի իրական արմատ, ապա $x_n=\left(2a\lambda_0-b+n(b-a\lambda_0)\right)\lambda_0^{n-2}$;

407. Կառուցել թվային հաջորդականություն, որի համար $A=\{a_i : i\in N\}$ բազմության բոլոր տարրերը լինեն մասնակի սահմաններ: Ստուգել, որ այդպիսի հաջորդականության համար A բազմության բոլոր կուտակման կետերը նույնպես մասնակի սահմաններ են:

408. Ապացուցել, որ

ա) ցանկացած հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը փակ է;

բ) ցանկացած A փակ և սահմանափակ բազմության համար գոյություն ունի հաջորդականություն, որի մասնակի սահմանների բազմությունը A-ն է:

409. Կառուցել հաջորդականություն,

ա) որը չունի վերջավոր մասնակի սահման;

բ) որն ունի միակ վերջավոր մասնակի սահմանը, բայց զուգամետ չէ;

գ) որն ունի անվերջ թվով մասնակի սահմաններ;

դ) որի համար յուրաքանչյուր իրական թիվ հանդիսանում է մասնակի սահման:

410. Ապացուցել, որ եթե A և B բազմությունները փակ են և սահմանափակ, ապա $A+B$ և $A\cdot B$ բազմությունները նույնպես փակ են և սահմանափակ: Բերել A և B փակ բազմությունների օրինակներ, որոնց համար $A+B$ և $A\cdot B$ բազմությունները փակ չեն:

411. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է և $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, ապա այդ հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n; \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n\right]$ հատվածն է:

412. Կառուցել հաջորդականություն, որի համար $\varlimsup\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|>0$ և $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n; \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n\right]$ հատվածի ցանկացած թիվ այդ հաջորդականության մասնակի սահման է:

413. Ապացուցել, որ ցանկացած a_n չնվազող հաջորդականության համար $x_n=\dfrac{a_n}{n+a_n}$ հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը հատված է կամ, եթե x_n-ը զուգամետ է՝ կետ: Բերել a_n հաջորդականության օրինակ, որի դեպքում x_n հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $[0;1]$ հատվածն է:

414. Ապացուցել, որ

ա) $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ հաջորդականությունը զուգամետ է (այդ հաջորդականության սահմանն անվանում են Էյլերի հաստատուն և նրա մոտավոր արժեքն է՝ $C\approx 0{,}577216$);

բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$:

415. Ապացուցել Շտոլցի թեորեմը. դիցուք x_n հաջորդականությունն ի վերջո մոնոտոն է, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, իսկ y_n հաջորդականությունն այնպիսին է, որ

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$:

416. Դիցուք x_n հաջորդականությունն ի վերջո մոնոտոն է, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ և $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$, որտեղ $a\in R$ կամ $a=\pm\infty$: Ապացուցել, որ

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$:

Հաշվել սահմանը (417-422).

417. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\left(1^p+2^p+\cdots+n^p\right)\quad (p\in N)$:

418. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\left(1^p+2^p+\cdots+n^p\right)-\frac{n}{p+1}\right)\quad (p\in N)$:

419. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$:

420. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^2+\cdots+n^n}{n^n}$:

421. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\ln\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right|^p$:

422. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdots\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}_{n\text{ հատ}}}$:

423. Դիցուք a_n սահմանափակ հաջորդականության անդամները բնական թվեր են: Տրված է՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=1$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=1$:

424. Դիցուք x_n հաջորդականությունը ցանկացած $m,n \in N$ թվերի համար բավարարում է $\left|x_m - x_n\right| > \frac{1}{n}$ պայմանին: Ապացուցել, որ x_n-ը սահմանափակ չէ:

425. Դիցուք $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = +\infty$: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն այնպիսի m և n բնական թվեր, որ $\left|a_m - a_n\right| > 1$ և $\left|b_m - b_n\right| > 1$:

426. Տրված է՝ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է և բավարարում է $\lim_{n\to\infty}\left(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}\right) = 0$ պայմանին: Ապացուցել, որ $\lim_{n\to\infty}\left(x_n - x_{n+1}\right) = 0$:

427. Դիցուք x_n հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է և բավարարում է $x_{n+1} - x_n \ge -a_n$ պայմանին, որտեղ $a_n \ge 0$ $(n \in N)$ և ցանկացած k-ի համար $\sum_{n=1}^{k} a_n < 1$: Ապացուցել, որ x_n-ը զուգամետ է:

428. Դիցուք $\{X_n : n \in N\}$-ը ոչ դատարկ, փակ և սահմանափակ ներդրված թվային բազմությունների ցանկացած ընտանիք է: Ապացուցել, որ

ա) $\bigcap_{n\in N} X_n \ne \varnothing$;

բ) $\bigcap_{n\in N} X_n$-ը կազմված է մեկ կետից, այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lim_{n\to\infty}\left(\sup X_n - \inf X_n\right) = 0$;

գ) բերել $\{X_n : n \in N\}$ ներդրված փակ բազմությունների ընտանիքի այնպիսի օրինակ, որ $\bigcap_{n\in N} X_n = \varnothing$;

դ) բերել $\{X_n : n \in N\}$ ներդրված սահմանափակ բազմությունների ընտանիքի օրինակ, որի համար $\bigcap_{n\in N} X_n = \varnothing$:

Գլուխ 3

Ֆունկցիայի սահման

Ս ա հ մ ա ն ա փ ա կ ֆ ու ն կ ց ի ա ն ե ր : $f:X\to R$ ֆունկցիան կոչվում է *սահմանափակ*, եթե սահմանափակ է f-ի արժեքների բազմությունը: Այս դեպքում $\sup\limits_{x\in X} f(x)=$ $=\sup\{f(x):x\in X\}$ և $\inf\limits_{x\in X} f(x)=\inf\{f(x):x\in X\}$ թվերը կոչվում են ֆունկցիայի համապատասխանաբար ճշգրիտ վերին և ճշգրիտ ստորին եզրեր: Եթե f-ի արժեքների բազմությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ չէ, ապա գրում են $\sup\limits_{x\in X} f(x)=+\infty$ $\left(\inf\limits_{x\in X} f(x)=-\infty\right)$:

f ֆունկցիան կոչվում է a *կետում սահմանափակ*, եթե գոյություն ունի a կետի U_a շրջակայք, այնպիսին, որ $X\bigcap U_a$ բազմության վրա f-ի ընդունած արժեքների բազմությունը սահմանափակ է:

Ֆ ու ն կ ց ի ա յ ի ս ա հ մ ա ն : Դիցուք a-ն X բազմության կուտակման կետ է: A թիվը կոչվում է $f:X\to R$ *ֆունկցիայի սահման* a կետում և նշանակվում՝ $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\right)$$

(ֆունկցիայի սահման ըստ Կոշիի):

Որպեսզի A թիվը լինի f ֆունկցիայի սահմանն a կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $x_n\to a$ $(x_n\in X, x_n\neq a, n=1,2,\ldots)$ հաջորդականության համար $y_n=f(x_n)$ հաջորդականությունը ձգտի A-ի (ֆունկցիայի սահման ըստ Հայնեի):

Ասում են, որ $f:X\to R$ ֆունկցիան a կետում ունի *անվերջ սահման* և գրում՝

ա) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, բ) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, գ) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, եթե

ա) $\forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>E\right)$,

բ) $\forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)<-E\right)$,

գ) $\forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>E\right)$:

Դիցուք ∞-ի ցանկացած շրջակայք X բազմության հետ ունի ոչ դատարկ հատում: A թիվն անվանում են $f:X\to R$ ֆունկցիայի *սահման անվերջում* և գրում $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0\ \forall x\in X\ \left(|x|>\Delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\right):$$

Համանմանորեն սահմանվում են ֆունկցիայի վերջավոր կամ անվերջ սահմաններ $-\infty$-ում և $+\infty$-ում:

Թեորեմ: Եթե $f:X\to R$ ֆունկցիան a կետում ունի վերջավոր սահման, ապա f-ն a կետում սահմանափակ է:

Կոշիի սկզբունքը: Որպեսզի $f: X \to R$ ֆունկցիան $a \in X'$ կետում ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X\ \left(0 < |x_1 - a| < \delta \text{ և } 0 < |x_2 - a| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\right):$$

Թեորեմ: Եթե f և g ֆունկցիաները a կետում ունեն վերջավոր սահման, ապա $f \pm g$, $f \cdot g$ և, եթե $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, $f(x)/g(x)$ ֆունկցիաները նույնպես ունեն վերջավոր սահման, ընդ որում՝

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x),$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}:$$

Միակողմանի սահմաններ: Մասնակի սահմաններ: Դիցուք X բազմության a կուտակման կետն այնպիսին է, որ ցանկացած $\delta > 0$ թվի համար $(a - \delta; a)$ միջակայքն X բազմության հետ ունի ոչ դատարկ հատում: A թիվը կոչվում է $f: X \to R$ ֆունկցիայի *ձախակողմյան սահման* a կետում, եթե

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \left(a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right):$$

Նույն ձևով սահմանվում է ֆունկցիայի *աջակողմյան սահմանը* a կետում: Ձախակողմյան և աջակողմյան սահմանները համապատասխանաբար նշանակվում են $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ և $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$:

Դիցուք ցանկացած $\delta > 0$ թվի համար $(a - \delta; a)$ և $(a; a + \delta)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրն X բազմության հետ ունի ոչ դատարկ հատում: Որպեսզի a կետում $f: X \to R$ ֆունկցիան ունենա սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ a կետում գոյություն ունենան ֆունկցիայի միակողմանի սահմանները և լինեն հավասար $(f(a-0) = f(a+0))$:

A թիվը կոչվում է $f: X \to R$ ֆունկցիայի *մասնակի սահման* կամ *սահմանային արժեք* a կետում, եթե գոյություն ունի $x_n \to a$ ($x_n \in X, x_n \neq a, n = 1,2,\ldots$) հաջորդականություն, որի համար $y_n = f(x_n)$ հաջորդականությունը ձգտում է A-ի:

Տրված a կետում f ֆունկցիայի մասնակի սահմաններից փոքրագույնը (մեծագույնը) կոչվում է *ստորին (վերին) սահման* և նշանակվում՝ $\underline{\lim\limits_{x \to a}}\, f(x)$ $\left(\overline{\lim\limits_{x \to a}}\, f(x)\right)$: Որպեսզի ֆունկցիան տրված կետում ունենա սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում նրա ստորին և վերին սահմանները համընկնեն:

Անվերջ մեծ և անվերջ փոքր ֆունկցիաներ: f ֆունկցիան a կետում կոչվում է *անվերջ փոքր*, եթե $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$: Իսկ եթե $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, ապա f ֆունկցիան a կետում կոչվում է *անվերջ մեծ*:

Դիցուք f-ը և g-ն X-ի վրա որոշված ֆունկցիաներ են, $a \in X'$ և g-ն a-ի շրջակայքում ներկայացված է $g(x) = \alpha(x) f(x)$ տեսքով:

1) Եթե α -ն սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա գրում են $g(x)=O(f(x))$, երբ $x\to a$: Եթե նաև $f(x)=O(g(x))$, երբ $x\to a$, ապա f -ը և g -ն կոչվում են *միևնույն կարգի ֆունկցիաներ* x -ը a -ի ձգտելիս:

2) Եթե $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=1$, ապա f -ը և g -ն կոչվում են *համարժեք* (ասիմպտոտորեն համարժեք) ֆունկցիաներ x -ը a -ի ձգտելիս: Այս դեպքում գրում են $f(x)\sim g(x)$, $x\to a$:

3) Եթե $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, ապա g -ն անվանում են f -ի նկատմամբ անվերջ փոքր և գրում՝ $g(x)=o(f(x))$, երբ $x\to a$: Մասնավորապես, եթե գրված է $g(x)=o(1)$, $x\to a$, նշանակում է g -ն անվերջ փոքր է x -ը a -ի ձգտելիս:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է (մեծ է), երբ $x\to a$: Եթե f -ն a կետի շրջակայքում ներկայացված է $f(x)=g(x)+o(g(x))$ տեսքով, ապա g -ն անվանում են f -ի գլխավոր մաս:

Ա

429. Ցույց տալ $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանափակությունը.

ա) $f(x)=\dfrac{\sin x^6}{1+x^4}$; բ) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$;

գ) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; դ) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$:

430. Հետազոտել $f(x)=\ln x\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{x}$ ֆունկցիայի սահմանափակությունը $(0;\varepsilon)$ միջակայքում:

431. Ստուգել, որ $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ ֆունկցիայի համար $\sup\limits_{x\in[0;+\infty)}f(x)=1$, $\inf\limits_{x\in[0;+\infty)}f(x)=0$:

Հաշվել $f(x)$ ֆունկցիայի ճշգրիտ ստորին և վերին եզրերը նշված բազմության վրա (432-438).

432. $f(x)=x^2$, $[-2;5]$: **433.** $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(-\infty;+\infty)$:

434. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $(-\infty;+\infty)$: **435.** $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $(0;+\infty)$:

436. $f(x)=\sin x+\cos x$, ա) $[0;2\pi]$, բ) R:

437. $f(x)=[x]$, ա) $[0;2)$, բ) $(0;2]$:

438. $f(x)=\cos(x^2+x+1)$, $[0;1]$:

«$\varepsilon-\delta$» լեզվով ձևակերպել հետևյալ պնդումները (439-441).

439. ա) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$; բ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$; գ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$:

440. ա) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$; բ) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$; գ) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$:

441. ա) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; բ) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$; գ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$:

Ելնելով ֆունկցիայի սահմանի սահմանումից՝ ապացուցել հավասարությունը (442-445).

442. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}=2$:

443. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-3x^2}{x-3}=9$:

444. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\dfrac{7}{3}$:

445. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{x^2-1}=3$:

446. Ապացուցել, որ եթե x_0 կետի որևէ շրջակայքում տեղի ունեն $g_1(x)\le$ $\le f(x)\le g_2(x)$ $(x\ne x_0)$ անհավասարությունները և $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g_2(x)=$ $=a$, ապա $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$:

447. Դիցուք $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է: Ապացուցել, որ

ա) ցանկացած $x_0\in(a;b)$ կետում f-ն ունի $f(x_0-0)$ և $f(x_0+0)$ վերջավոր միակողմանի սահմաններ;

բ) a և b կետերից յուրաքանչյուրում գոյություն ունեն վերջավոր կամ անվերջ սահմաններ:

448. Ստուգել, որ $x=0$ կետում $f(x)$ ֆունկցիան սահման չունի.

ա) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$; բ) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$; գ) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$:

449. Ստուգել, որ $f(x)$ ֆունկցիան սահման չունի, երբ $x\to\pm\infty$.

ա) $f(x)=\cos x$; բ) $f(x)=x-[x]$:

450. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները x_0 կետում սահման չունեն: Հետևու՞մ է արդյոք դրանից, որ $f(x)+g(x)$ և $f(x)\cdot g(x)$ ֆունկցիաները նույնպես սահման չունեն:

451. Տրված է $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ $(n\in N,\ a_n\ne0)$ բազմանդամը: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$:

452. Տրված է $Q(x)=\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ $(a_n\neq 0, b_m\neq 0)$ ռացիոնալ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ

$$\lim_{x\to\infty} Q(x)=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} \text{ երբ } n=m,\\ 0, \text{ երբ } n<m,\\ \infty, \text{ երբ } n>m:\end{cases}$$

Հաշվել սահմանը (453-475).

453. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$:

454. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$:

455. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in N$:

456. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$:

457. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$:

458. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$:

459. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+20)^{30}}{(2x+1)^{50}}$:

460. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$:

461. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$:

462. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in N$:

463. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$:

464. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$:

465. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$:

466. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$:

467. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$:

468. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$:

469. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$:

470. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$:

471. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$:

472. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$:

473. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{x+9}-2}$:

474. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$:

475. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}$, որտեղ $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$:

476. Օգտվելով $\sin x < x < tgx$, $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, անհավասարություններից՝ ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$:

477. Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$;

բ) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$;

գ) $\lim\limits_{x\to a}tgx=tga$, $a\neq\dfrac{2n-1}{2}\pi$, $n\in Z$;

դ) $\lim\limits_{x\to a}ctgx=ctga$, $a\neq\pi n, n\in Z$:

Հաշվել սահմանը (478-493).

478. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$:

479. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x-a}$:

480. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$, $\beta\neq 0$:

481. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$:

482. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 5x}$:

483. $\lim\limits_{x\to 0}x^2ctg^2x$:

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$:

485. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{tgx-tga}{x-a}$:

486. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$:

487. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$:

488. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$:

489. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$:

490. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}tg2xtg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$:

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$:

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$:

493. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$:

494. Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$:

495. Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to a}\ln x = \ln a$ $(a>0)$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$:

496. Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to b}a^x = a^b$ $(a>0)$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ $(a>0, a\neq 1)$:

496.1. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$:

497. Դիցուք՝ $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0$, իսկ $v(x)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to a}u(x)v(x)$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to a}[1+u(x)]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}u(x)v(x)}$:

497.1. ա) Դիցուք $u(x)\geq 0$, $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ և $\lim\limits_{x\to a}v(x)=c$ $(b<\infty, 0<c<\infty)$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=b^c$:

բ) Դիցուք $u(x)\geq 0$, $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ և $\lim\limits_{x\to a}v(x)=+\infty$: Ապացուցել, որ եթե $b<1$, ապա $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)}=0$:

Հաշվել սահմանը (498-510).

498. ա) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$:

499. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$; բ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[tg\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{tg\,2x}$:

500. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$; բ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$:

501. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{x^{-1}}$:

502. ա) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-x^{-2}}$; բ) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{ctg\,\pi x}$:

503. ա) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

504. ա) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a};(a>0)$; բ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$:

505. ա) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln tgx}{1-ctgx}$; բ) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln(x^2-4x+4)}{\ln(x^{10}+5x+2)}$:

506. ա) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2+xe^x}\right)^{ctg^2 x}$:

507. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(1+xe^x)}$: 508. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin x}-1}{\ln(1+tgx)}$:

509. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \quad (a>0, b>0)$:

510. ա) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; բ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$:

511. Հետևյալ ֆունկցիաները անվանում են հիպերբոլական ֆունկցիաներ.

$shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in R$ (հիպերբոլական սինուս),

$chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in R$ (հիպերբոլական կոսինուս),

$thx=\dfrac{shx}{chx}$, $x\in R$ (հիպերբոլական տանգենս),

$cthx=\dfrac{chx}{shx}$, $x\in R\setminus\{0\}$ (հիպերբոլական կոտանգենս):

Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to x_0} shx=shx_0$; բ) $\lim\limits_{x\to x_0} chx=chx_0$; գ) $\lim\limits_{x\to x_0} thx=thx_0$; դ) $\lim\limits_{x\to x_0} cthx=cthx_0 \quad (x_0\neq 0)$:

512. Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx}{x}=1$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{thx}{x}=1$; գ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$:

Հաշվել սահմանը (513-515).

513. $\lim\limits_{x\to a}\frac{shx-sha}{x-a}$: 514. $\lim\limits_{x\to a}\frac{chx-cha}{x-a}$: 515. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln chx}{\ln\cos x}$:

516. Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$:

Հաշվել սահմանը (517-520).

517. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}$: 518. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-arctg\frac{x}{x+1}\right)$:

519. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$: 520. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{arctg(x+h)-arctgx}{h}$:

521. Տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիան: «$\varepsilon-\delta$» լեզվով ձևակերպել, թե ի՞նչ է նշանակում ֆունկցիայի սահման ներքևից կամ վերևից.

ա) $y\to b-0$, երբ $x\to a$; բ) $y\to b-0$, երբ $x\to+\infty$;

գ) $y\to b+0$, երբ $x\to a-0$; դ) $y\to b+0$, երբ $x\to\infty$:

Հաշվել սահմանը և պարզել, թե ֆունկցիան իր սահմանին ձգտում է վերևի՞ց, թե՞ ներքևից (522-525).

522. ա) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+x}$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x}$:

523. ա) $\lim\limits_{x\to 1-0}arctg\frac{1}{1-x}$; բ) $\lim\limits_{x\to 1+0}arctg\frac{1}{1-x}$:

524. ա) $\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ բ) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; :

525. ա) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$:

Գտնել $f(x_0-0)$-ն և $f(x_0+0)$-ն (526-534).

526. $f(x)=\frac{x-|x|}{2x}$, $x_0=0$: 527. $f(x)=2^{ctgx}$, $x_0=0$:

528. $f(x)=\frac{2(1-x^2)+|x^2-1|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}$, $x_0=1$: 529. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$:

530. $f(x)=\frac{1}{x+3^{\frac{1}{3-x}}}$, $x_0=3$: 531. $f(x)=x+[x^2]$, $x_0=10$:

532. $f(x)=\frac{1}{x-[x]}$, $x_0=-1$: 533. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$, $x_0=1$:

534. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3}{x^n-1}$, $x_0=1$:

Գտնել $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$-ը և $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$-ը (535-537).

535. $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)^x$:

536. $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)^x$:

537. $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$:

538. Ստուգել, որ եթե $f(x)=o(1)$, $g(x)=o(1)$ և $f\sim g$, երբ $x\to a$, ապա $f-g=o(f)$, երբ $x\to a$:

539. Ապացուցել, որ

ա) $O(1)+O(1)=O(1)$;

բ) $o(1)+O(1)=O(1)$;

գ) $O(f(x))+o(f(x))=O(f(x))$;

դ) $o(1)+o(1)=o(1)$;

ե) $o(o(f(x)))=o(f(x))$;

զ) $O(o(f(x)))=o(f(x))$:

540. Դիցուք $x\to 0$ և $m>n>0$: Ապացուցել, որ

ա) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$;

բ) $O(x^n)\cdot O(x^m)=O(x^{m+n})$:

541. Դիցուք $x\to\infty$ և $m>n>0$: Ապացուցել, որ

ա) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^m)$;

բ) $O(x^n)\cdot O(x^m)=O(x^{m+n})$:

542. Դիցուք՝ $x\to 0$: Ապացուցել, որ

ա) $2x-x^2=O(x)$;

բ) $x\sin\sqrt{x}=O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$;

գ) $x\sin\dfrac{1}{x}=O(|x|)$:

543. Դիցուք՝ $x\to+\infty$: Ապացուցել, որ

ա) $\dfrac{x+1}{x^2+x}=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

բ) $x+x^2\sin x^2=O(x^2)$;

գ) $\dfrac{arctgx}{1+x^2}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

դ) $x^pe^{-x}=o(x^{-2})$:

544. Ապացուցել, որ

ա) $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, երբ $x\to 0$;

բ) $tg(x-1)\sim x-1$, երբ $x\to 1$;

գ) $arctg\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}$, երբ $x\to\infty$;

դ) $tgx-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$, երբ $x\to 0$;

ե) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$, երբ $x\to 0$;

զ) $x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$, երբ $x\to+\infty$:

545. Ապացուցել հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևերը $(x \to 0)$.

ա) $\sin x = x + o(x)$; բ) $tgx = x + o(x)$;

գ) $e^x = 1 + x + o(x)$; դ) $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$;

ե) $\ln(1+x) = x + o(x)$; զ) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$;

է) $\arcsin x = x + o(x)$; ը) $arctgx = x + o(x)$:

546. Ապացուցել ասիմպտոտիկ բանաձևը՝

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right),\ x \to +\infty:$$

Օգտվելով 545 խնդրում բերված ասիմպտոտիկ բանաձևերից՝ հաշվել սահմանը (547-557).

547. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$: 548. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$:

549. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg2x - 3\arcsin 4x}{\sin 5x - 6arctg7x}$: 550. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\sin tg\frac{x^2}{2}}{\ln\cos 3x}$:

551. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{arctg(2-x) + \sin(x-2)^2}{x^2 - 4}$: 552. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2} + x^3 - 1}{\ln\cos x}$:

553. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3\sqrt[10]{x}\cos x + \sin^3 x}{1 - \sqrt{1+x^3}}$: 554. $\lim\limits_{x\to +0} \frac{2\sin\sqrt{x^2 + \sqrt{x^3}} + \ln(1+x)}{x + \sqrt{x\sqrt{x}}}$:

555. $\lim\limits_{x\to +0} \frac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}\left(e^{7\sqrt[3]{x}} - 1\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\cdot\ln(1+3x)}$: 556. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin 2x - 2tgx)^2 + (1-\cos 2x)^3}{tg^7 6x + \sin^6 x}$:

557. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x+x^2\right) + \arcsin 2x - 3x^3}{\sin 3x + tg^2 x + \left(e^x - 1\right)^{10}}$:

558. Դիցուք f-ն անվերջ փոքր է, երբ $x \to a$: Կասենք, որ f-ը $(x-a)$-ի նկատմամբ k-րդ կարգի $(k > 0)$ անվերջ փոքր է, եթե f-ն ու $(x-a)^k$-ը միևնույն կարգի են: Որոշել անվերջ փոքր ֆունկցիայի կարգը, երբ $x \to 0$.

ա) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$; բ) $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$;

գ) $f(x) = \sqrt{4-x^4} + x^2 - 2$; դ) $f(x) = \sin\left(\sqrt{x^2+9} - 3\right)$;

ե) $f(x) = 2^{x^2} - 1$; զ) $f(x) = 1 - x^4 - \cos^2 x$:

559. Դիցուք f -ն անվերջ մեծ է, երբ $x \to a$: Կասենք, որ f -ը $\frac{1}{x-a}$ -ի նկատմամբ (եթե $a=\infty$՝ x -ի նկատմամբ) k -րդ կարգի $(k>0)$ անվերջ մեծ է, եթե f -ն ու $\frac{1}{(x-a)^k}$ -ը (x^k -ը) միևնույն կարգի են: Որոշել անվերջ մեծ ֆունկցիայի կարգը.

ա) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, երբ $x \to +\infty$;

բ) $f(x)=\frac{\ln x}{(x-1)^2}$,երբ $x \to 1$; գ) $f(x)=ctg^2 x^3$,երբ $x \to 0$;

դ) $f(x)=\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^5}$,երբ $x \to 0$:

Պարզել թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են անվերջ փոքր (560-562).

560. $f(x)=\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$, $x \to 0$:

561. $f(x)=\sin\ln(x^2+1)-\sin\ln(x^2-1)$, $x \to \infty$:

562. $f(x)=\frac{1}{1+2^x}$ ա) երբ $x \to -\infty$; բ) երբ $x \to +\infty$:

Պարզել թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են անվերջ մեծ (563-566).

563. $f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, ա) $x \to -\infty$; բ) $x \to +\infty$:

564. $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$, $x \to \frac{\pi}{2}$:

565. $f(x)=(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$ ա) $x \to +0$; բ) $x \to -0$:

566. $f(x)=chx-shx$ ա) $x \to -\infty$; բ) $x \to +\infty$:

567. Դիցուք՝ $x \to 1$: Հետևյալ ֆունկցիաներից անջատել գլխավոր մասը $C(x-1)^n$ տեսքով և որոշել անվերջ փոքրի կարգը $(x-1)$-ի նկատմամբ.

ա) $y=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$; բ) $y=\ln x$; գ) $y=e^x-e$; դ) $y=x^x-1$:

568. Դիցուք՝ $x \to +\infty$: Հետևյալ ֆունկցիաներից անջատել գլխավոր մասը Cx^n տեսքով և որոշել անվերջ մեծի կարգը x -ի նկատմամբ.

ա) $y=\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$; բ) $y=\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; գ) $y=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$:

569. Հաշվել $\overline{\lim_{x\to 0}} f(x)$-ը և $\underline{\lim_{x\to 0}} f(x)$-ը, եթե

ա) $f(x)=\sin^2\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\pi}arctg\dfrac{1}{x}$; բ) $f(x)=(2-x^2)\cos\dfrac{1}{x}$:

570. Հաշվել $\overline{\lim_{x\to \infty}} f(x)$-ը և $\underline{\lim_{x\to \infty}} f(x)$-ը, եթե

ա) $f(x)=\sin x$; բ) $f(x)=x^2\cos^2 x$;

գ) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x-arctgx$:

571. Ապացուցել, որ Դիրիխլեի ֆունկցիան՝

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ է},\\ 0, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ է},\end{cases}$$

ոչ մի կետում սահման չունի:

572. Կառուցել ֆունկցիա, որը միայն մեկ կետում ունի վերջավոր սահման:

Բ

573. Դիցուք $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաները որոշված են X բազմության վրա: Ապացուցել, որ

$$\sup(f_1(x)+f_2(x))\le \sup f_1(x)+\sup f_2(x);$$
$$\inf(f_1(x)+f_2(x))\ge \inf f_1(x)+\inf f_2(x):$$

Կառուցել $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաներն այնպես, որ ա) բերված անհավասարությունները լինեն խիստ, բ) տեղի ունենա հավասարություն:

574. Դիցուք

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{եթե } x\text{-ն իռացիոնալ է},\\ n, & \text{եթե } x=\dfrac{m}{n}\in Q \text{ (անկրճատելի կոտորակ է և՝ } n\in N\text{)}:\end{cases}$$

Ապացուցել, որ $f(x)$-ը ոչ մի կետում սահմանափակ չէ:

575. Ապացուցել, որ Ռիմանի ֆունկցիան՝

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{երբ } x=\dfrac{p}{q} \text{ (անկրճատելի կոտորակ է և } q\in N\text{)},\\ 0, & \text{երբ } x\text{-ն իռացիոնալ է,}\end{cases}$$

բոլոր կետերում ունի սահման:

576. Դիցուք $y=R(x)$-ը Ռիմանի ֆունկցիան է և $f(y)=\operatorname{sgn}|y|$: Ստուգել, որ $\lim\limits_{x\to 0}R(x)=0$, $\lim\limits_{y\to 0}f(y)=1$, սակայն $f(R(x))$ բարդ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում սահման չունի:

577. Ապացուցել, որ եթե $f(x)\neq b$, երբ $x\neq a$ և գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{y\to b}g(y)$ սահմանները, ապա a կետում գոյություն ունի $g(f(x))$ բարդ ֆունկցիայի սահմանը և $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=\lim\limits_{y\to b}g(y)$:

577.1. Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ և $\lim\limits_{y\to b}g(y)=g(b)$ սահմանները, ապա a կետում գոյություն ունի $g(f(x))$ բարդ ֆունկցիայի սահմանը և $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=g(b)$:

Հաշվել սահմանը (578-585).

578. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}}$: 579. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, $n\in N$:

580. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$, $n\in N$:

581. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $m,n\in N$: 582. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$:

583. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$, $m,n\in N$:

584. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$, $n\in N$:

585. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\right)$:

586. Ընտրել a_i և b_i $(i=1,2)$ թվերն այնպես, որ ճշմարիտ լինեն

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0$$

հավասարությունները:

587. Ընտրել λ և μ թվերն այնպես, որ

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_kx^2+b_kx+c_k}-\lambda x-\mu \quad (a_k>0, k=1,2,\dots,n)$$

ֆունկցիան լինի անվերջ փոքր, երբ $x\to+\infty$:

Հաշվել սահմանը (588-609).

588. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$:

589. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ctg(a+2x)-2ctg(a+x)+ctga}{x^2}$:

590. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$:

591. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg(a+x)tg(a-x)-tg^2a}{x^2}$:

592. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$:

593. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$:

594. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$:

595. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x$, $a_1a_2>0$;

596. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$:

597. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$:

598. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[m]{\cos\beta x}}{x^2}$:

599. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\right)}{\sin bx}$:

600. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{ctg^3x}$:

601. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x^\alpha}{\sin\pi x^\beta}$:

602. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2(2^x\pi)}{\ln(\cos(2^x\pi))}$:

603. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$:

604. ա) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$, $a>0$; բ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$:

605. ա) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$, $a>0$; բ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$:

606. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-a^a},\ a>0$:

607. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$:

608. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}},\ a,b,c>0$:

609. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}},\ a,b>0$:

610. Ապացուցել, որ եթե $a>1, n>0, \varepsilon>0$, ապա

ա) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0$; գ) $\lim\limits_{x\to+0}x^\varepsilon\log_a x=0$:

Հաշվել սահմանը (611-625).

611. $\lim\limits_{x\to+0}\ln(x\ln a)\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right),\ a>1$: 612. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{ch\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$:

613. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx-n}{\sin x^2}$:

614. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}{\sqrt{1+2x}-1}$: 615. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+tg2x+\cdots+tgnx}{arctgx}$:

616. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2}-\pi}$: 617. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\sin\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\pi}}$:

618. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(x^2+\cos\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{x}-1}$: 619. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x^2}-16}{\ln(x^2-x-1)}$:

620. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}$: 621. $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(tg\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$:

622. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$:

623. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}),\ |x|<1$:

624. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)},\ a>0$: 625. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$:

α-ի և β-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կլինի անվերջ փոքր (626-630).

626. $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}-\alpha x-\beta$ ա) $x\to+\infty$; բ) $x\to-\infty$:

627. $f(x)=(x+4)e^{\frac{1}{x}}-\alpha x-\beta,\ x\to\infty$:

628. $f(x)=\ln(1+e^{3x})-\alpha x-\beta$ ա) $x\to+\infty$; բ) $x\to-\infty$:

629. $f(x)=x\,arctgx-\alpha x-\beta$ ա) $x\to+\infty$; բ) $x\to-\infty$:

630. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta},\ x\to+0$:

631. Դիցուք՝ $x\to0$: Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի գլխավոր մասը՝ Cx^α տեսքով.

ա) $f(x)=(\cos x)^{2\sin x}-e^{-x^2}$; բ) $f(x)=\sqrt[3]{\cos\sqrt{6x}}-1-2\ln(1-x^2)$:

632. Հաշվել $\overline{\lim\limits_{x\to a}}f(x)$-ը և $\underline{\lim\limits_{x\to a}}f(x)$-ը, եթե

ա) $f(x)=2^{\sin x^2}$; $a=\infty$; բ) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2\sin^2x},\ a=+\infty$;

գ) $f(x)=e^{\cos\frac{1}{x^2}},\ a=0$; դ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}},\ a=0$;

ե) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x-2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{x-2},\ a=2$:

633. Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանային արժեքների բազմությունը.

ա) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x},\ x\to0$; բ) $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]},\ x\to\infty$:

634. Ապացուցել, որ $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}(\cos4x+\sin x)=2$:

Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (635-640).

635. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\ x\ge0$: 636. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)arctgx^n$:

637. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$: 638. $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{1}{t-x}\ln\dfrac{t}{x},\ x>0$:

639. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x tg^{2n}\frac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{tg^{2n}\frac{\pi x}{4}+1}$, $x\geq 0$:   640. $y=\lim\limits_{n\to\infty} x\,\mathrm{sgn}\left|\sin(n!\pi x)\right|$:

Գ

641. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a;+\infty)$ բազմության վրա և սահմանափակ է ցանկացած $(a;b)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$;

բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $\left(f(x)\geq c>0\right)$,

ենթադրելով, որ աջ կողմում գրված սահմանները գոյություն ունեն և վերջավոր են:

642. Հաշվել հետևյալ սահմանները. ա) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$:

643. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a;+\infty)$ բազմության վրա, սահմանափակ է ցանկացած $(a;b)$ միջակայքում և

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\infty$, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$:

644. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a;+\infty)$ բազմության վրա, սահմանափակ է ցանկացած $(a;b)$ միջակայքում և գոյություն ունի

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l$$

վերջավոր կամ անվերջ սահմանը, ապա

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}:$$

645. Դիցուք α_{mn} հաջորդականությունը m-ի նկատմամբ հավասարաչափ ձգտում է զրոյի, երբ $n\to\infty$. $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ \ \forall m,n\in N\ \left(n\geq n_0\Rightarrow\left|\alpha_{mn}\right|<\varepsilon\right)$: Ապացուցել, որ եթե f և g ֆունկցիաները որոշված են $x=0$ կետի շրջակայքում, $f(x)>0$ և $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, ապա

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(g(\alpha_{1n})+g(\alpha_{2n})+\cdots+g(\alpha_{nn})\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(\alpha_{1n})+f(\alpha_{2n})+\cdots+f(\alpha_{nn})\right)$,
ընդունելով, որ աջ կողմում սահմանը գոյություն ունի:

Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ հաշվել սահմանը (646-649).

646. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$: 647. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{ka}{n^2}$:

648. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right), a>0$: 649. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$:

650. Գտնել $f(x)$-ը, եթե $f(0)=1$, $f(2x)=f(x)\cos^2 x$ և $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$:

651. Դիցուք $x_0=m$, $x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}$ $(n\in N, 0<\varepsilon<1)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի x_n հաջորդականության սահմանը և այն հանդիսանում է $x-\varepsilon\sin x=m$ հավասարման (Կեպլերի հավասարման) միակ լուծումը:

652. Ապացուցել, որ ինչպիսին էլ լինեն անվերջի ձգտող $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x),\ldots$ $(x_0<x<+\infty)$ ֆունկցիաները, գոյություն ունի $f(x)$ ֆունկցիա, որն ավելի արագ է աճում, քան $f_n(x)$-երից յուրաքանչյուրը. ցանկացած n-ի համար $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f_n(x)}=\infty$:

653. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածի յուրաքանչյուր կետում ունի վերջավոր սահման: Ապացուցել, որ f-ը սահմանափակ է:

654. Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են ամբողջ թվային առանցքի վրա և պարբերական են: Հայտնի է, որ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$: Ապացուցել, որ $f(x)\equiv g(x)$:

655. Դիցուք $f:(0;+\infty)\to R$ ֆունկցիան $(0;1)$ միջակայքում սահմանափակ է և ցանկացած x և y դրական թվերի համար $f(x+y)\le f(x)+f(y)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ):

656. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան $(0;+\infty)$ միջակայքում մոնոտոն է, դրական և $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$: Ապացուցել, որ ցանկացած C դրական թվի համար $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(Cx)}{f(x)}=1$:

657. Տրված է՝ $\lambda, \mu \in R, \lambda \neq \mu$: Ապացուցել, որ $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sin \lambda x - \sin \mu x\right| \geq 1$:

658. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է R-ի վրա և ցանկացած a-ի համար $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a}{n}\right) = 0$: Հետևո՞ւմ է արդյոք այդտեղից, որ $x = 0$ կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի սահման:

Գլուխ 4

Անընդհատ ֆունկցիաներ, հավասարաչափ անընդհատություն

Ֆունկցիայի անընդհատությունը։ $f: X \to R$ ֆունկցիան $x_0 \in X$ կետում կոչվում է *անընդհատ*, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right):$$

Եթե $f: X \to R$ ֆունկցիան անընդհատ է X բազմության յուրաքանչյուր կետում, ապա այն անվանում են X-ի վրա *անընդհատ ֆունկցիա* և գրում՝ $f \in C(X)$։

Եթե որևէ $x_0 \in X$ կետում ֆունկցիան անընդհատ չէ, ապա այն անվանում են *խզվող ֆունկցիա*, իսկ x_0-ն՝ ֆունկցիայի *խզման կետ*։

$f: [a;b] \to R$ ֆունկցիայի խզման կետերը դասակարգվում են երկու սեռի. $x_0 \in (a;b)$ խզման կետը կոչվում է *առաջին սեռի*, եթե f-ն այդ կետում ունի $f(x_0 - 0)$ և $f(x_0 + 0)$ վերջավոր միակողմանի սահմաններ։ Ընդ որում, երբ $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$՝ խզումը կոչվում է *վերացնելի*։ Իսկ երբ $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, այդ դեպքում $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ թիվն անվանում են x_0 կետում ֆունկցիայի *թռիչք*։ Հատվածի ծայրակետում ֆունկցիայի խզումը կոչվում է առաջին սեռի, եթե գոյություն ունի միակողմանի սահմանը։

Եթե ֆունկցիայի խզումը առաջին սեռի չէ, ապա այն անվանում են *երկրորդ սեռի խզում*։

Անընդհատ ֆունկցիայի լոկալ հատկությունները։ Եթե $f: X \to R$ ֆունկցիան $x_0 \in X$ կետում անընդհատ է, ապա այն x_0 կետում սահմանափակ է։ Եթե նաև $f(x_0) > p$ $\left(f(x_0) < q\right)$, ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ այնպիսին, որ ցանկացած $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ կետում $f(x) > p$ $\left(f(x) < q\right)$։

Դիցուք $g: X \to R$ ֆունկցիան x_0 կետում նույնպես անընդհատ է։ Այդ դեպքում $f \pm g$, fg ֆունկցիաները, ինչպես նաև $\dfrac{f}{g}$ ֆունկցիան, եթե $g(x_0) \neq 0$, անընդհատ են x_0 կետում։

Եթե $f: X \to Y$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0 \in X$ կետում, իսկ $g: Y \to Z$ ֆունկցիան անընդհատ է $y_0 = f(x_0)$ կետում, ապա $z = g(f(x))$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում։

Անընդհատ ֆունկցիայի գլոբալ հատկությունները։ Դիցուք $f \in C[a;b]$։ Այդ դեպքում.

ա) եթե $f(a)f(b) < 0$, ապա գոյություն ունի $c \in (a;b)$, այնպիսին, որ $f(c) = 0$ (Բոլցանո-Կոշիի թեորեմ);

բ) f-ը սահմանափակ ֆունկցիա է։ Գոյություն ունի կետ, որում ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը և գոյություն ունի կետ, որում ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը (Վայերշտրասի թեորեմ);

գ) եթե f-ը աճող (նվազող) է $[a;b]$-ում, ապա f-ի արժեքների բազմությունը $[f(a);f(b)]$ ($[f(b);f(a)]$) հատվածն է, և f^{-1} ֆունկցիան այդ հատվածի վրա անընդհատ է:

Հավասարաչափ անընդհատություն: $f:X\to R$ ֆունկցիան կոչվում *հավասարաչափ անընդհատ ֆունկցիա*, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_1,x_2\in X\ \left(|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\right):$$

Բաց բազմությունների Σ ընտանիքը կոչվում է X բազմության *բաց ծածկույթ*, եթե $X\subset\bigcup\Sigma$: Եթե $\Sigma_0\subset\Sigma$ վերջավոր ընտանիքն այնպիսին է, որ $X\subset\bigcup\Sigma_0$, ապա Σ_0-ն անվանում են X բազմության Σ ծածկույթից անջատված *վերջավոր ենթածածկույթ*:

Բորել-Լեբեգի լեմման: $[a;b]$ հատվածի ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

Կանտորի թեորեմը: $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:

Ա

659. Դիցուք $f:X\to R$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններից որևէ մեկին.

ա) $\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0\ \forall x\in X\ \left(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$;

բ) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\delta\right)$;

գ) $\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0\ \forall x\in X\ \left(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\delta\right)$:

Հետևու՞մ է արդյոք այդտեղից, որ f-ը x_0 կետում անընդհատ է: Եթե ոչ, ապա ա), բ), գ) պայմաններից որը ֆունկցիայի ինչ հատկություն է բնորոշում:

660. Ցույց տալ, որ եթե $f:X\to R$ ֆունկցիայի x_0 անընդհատության կետը X բազմության կուտակման կետ է, ապա f-ը այդ կետում ունի սահման, ընդ որում՝ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$:

661. Ելնելով ֆունկցիայի անընդհատության սահմանումից՝ համոզվել, որ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի բոլոր մեկուսացված կետերում անընդհատ է:

662. Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն իր որոշման տիրույթի վրա անընդհատ է (տես վարժ. 477, 495, 496).

ա) $y=ax+b$;	բ) $y=x^2$;	գ) $y=\sqrt{x}$;
դ) $y=x^n\ \ (n\in N)$;	ե) $y=\cos x$;	զ) $y=tgx$;
է) $y=arctgx$;	ը) $y=\ln x$;	թ) $y=2^x$:

Հետազոտել ֆունկցիայի անընդհատությունը: Դասակարգել խզման կետերն ըստ սեռի (663-682).

663. $y=[x]$: 664. $y=x-[x]$: 665. $y=\operatorname{sgn} x$: 666. $y=\operatorname{sgn}|x|$:

667. $y=\begin{cases} x^2, \text{ երբ } x\in(-\infty;1), \\ 2x-1, \text{ երբ } x\in[1;+\infty): \end{cases}$

668. $y=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, \text{ երբ } x\neq 2, \\ 4, \text{ երբ } x=2: \end{cases}$

669. $f(x)=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$, երբ $x\neq 0$, $f(0)=1$:

670. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, երբ $x\neq 0$, $f(0)=0$:

671. $f(x)=ctgx$, երբ $x\neq \pi n$, $f(\pi n)=0$ $(n\in Z)$:

672. $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^3}$, երբ $x\neq -1$, $f(-1)=\dfrac{1}{3}$:

673. $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$:

674. $f(x)=x^2-[x^2]$:

675. $f(x)=x[x]$:

676. $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$:

677. $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$:

678. $y=\operatorname{sgn}(x-[x])$:

679. $y=[x]\sin\pi x$:

680. $y=(-1)^{[x^2]}$:

681. $y=x\ln x$, երբ $x>0$, $y(0)=0$:

682. $y=e^{-\frac{1}{|x|}}$, երբ $x\neq 0$, $y(0)=0$:

683. Ընտրել a պարամետրի արժեքն այնպես, որ ֆունկցիան լինի անընդհատ.

ա) $y=\begin{cases} x^2, \text{ երբ } x\leq 4, \\ 3x+a, \text{ երբ } x>4; \end{cases}$

բ) $y=\begin{cases} \sin|x|-\ln|x|, \text{ երբ } |x|\geq 1, \\ ax^2-1, \text{ երբ } |x|<1: \end{cases}$

գ) $y=\begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ երբ } -1<x<0, \\ e^{ax+1}, \text{ երբ } x\geq 0; \end{cases}$

դ) $y=\begin{cases} (1+x)^{1+x}, \text{ երբ } x<1, \\ a^2x^2-2ax+1, \text{ երբ } x\geq 1: \end{cases}$

684. Համոզվել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի համար

ա) $y=\begin{cases} \ln|x|, \text{ երբ } x\neq 0, \\ a, \text{ երբ } x=0; \end{cases}$

բ) $y=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{|x|}, \text{ երբ } x\neq 0, \\ a, \text{ երբ } x=0 \end{cases}$

ֆունկցիաները $x_0=0$ կետում խզվող են: Պարզել խզման սեռը:

685. Ստուգել, որ Դիրիխլեի ֆունկցիան՝

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{երբ } x\in Q,\\ 0, & \text{երբ } x\in I,\end{cases}$$

ամենուրեք խզվող է: Պարզել խզումների սեռը:

686. Ապացուցել, որ եթե $f:X\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0\in X$ կետում, ապա $|f(x)|$ ֆունկցիան այդ կետում նույնպես անընդհատ է: Բերել $f(x)$ խզվող ֆունկցիայի այնպիսի օրինակ, որ $|f(x)|$ և $f^2(x)$ ֆունկցիաները լինեն անընդհատ:

687. Դիցուք տրված է $f:X\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ

ա) $|f(x)|$ և $f^2(x)$ ֆունկցիաներից մեկի $x_0\in X$ կետում անընդհատությունից հետևում է մյուսի անընդհատությունը նույն կետում;

բ) $f(x)$ և $f^3(x)$ ֆունկցիաներից մեկի $x_0\in X$ կետում անընդհատությունից հետևում է մյուսի անընդհատությունը նույն կետում:

688. Դիցուք $f:X\to R$ և $g:X\to R$ ֆունկցիաներից մեկը $x_0\in X$ կետում անընդհատ է, իսկ մյուսը՝ խզվող: Հետազոտել $f+g$, fg ֆունկցիաների անընդհատությունն այդ կետում:

689. Դիցուք $f:X\to R$ և $g:X\to R$ ֆունկցիաները $x_0\in X$ կետում խզվող են: Հետազոտել x_0 կետում

ա) $f+g$ ֆունկցիայի անընդհատությունը;

բ) fg ֆունկցիայի անընդհատությունը:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

690. Տրված են $f:X\to Y$ և $g:Y\to R$ ֆունկցիաները: Դիցուք f-ը $x_0\in X$ կետում կամ g-ն $y_0=f(x_0)$ կետում խզվող է: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $z=g(f(x))$ $(x\in X)$ բարդ ֆունկցիան x_0 կետում խզվող է: Բերել համապատասխան օրինակներ:

691. Կառուցել $f:R\to R$ ամենուրեք խզվող ֆունկցիայի օրինակ, այնպիսին, որ $y=f(f(x))$ $(x\in R)$ ֆունկցիան լինի ամենուրեք անընդհատ:

692. Կառուցել $f:R\to R$ ֆունկցիա, որի անընդհատության կետերի բազմությունը կազմված է նախապես տրված $a_1,a_2,\dots,a_n$ թվերից:

693. Կառուցել $f:R\to R$ չնվազող ֆունկցիա, որի խզման կետերի բազմությունը կազմված է նախապես տրված $a_1<a_2<\dots<a_n$ թվերից:

Հետազոտել ֆունկցիայի անընդհատությունը (694-699).

694. $y=\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ $(0\le x\le 1)$:

695. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$ $(x\ge 0)$:

696. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$:

697. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$:

698. $y=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^{\alpha x}\right)}{\ln\left(1+e^{\alpha}\right)}$:

699. $y=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(1+x)th\alpha x$:

700. Գտնել

$$y=\begin{cases}\sin\pi x, \text{ երբ } x\in Q,\\ 0, \text{ երբ } x\in I\end{cases}$$

ֆունկցիայի անընդհատության կետերի բազմությունը:

701. Կառուցել $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված այնպիսի ֆունկցիայի օրինակ, որն ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, սակայն ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

702. Կառուցել X բազմություն և նրա վրա անընդհատ այնպիսի ֆունկցիայի օրինակ, որն ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, բայց ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

703. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, \text{ երբ } x\neq 0,\\ 0, \text{ երբ } x=0\end{cases}$$

ֆունկցիան անընդհատ չէ, սակայն ցանկացած $[a;b]$ հատվածում ընդունում է $f(a)$-ի և $f(b)$-ի միջև ընկած բոլոր արժեքները:

704. Ստուգել, որ հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրը նշված միջակայքում ունի առնվազն մեկ իրական արմատ.

ա) $x^3+5x^2-7=0$, $x\in[1;2]$;   բ) $x^4+6x^3-1=0$, $x\in[0;1]$;

գ) $16x^2-2tgx-7=0$, $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$;   դ) $x^3+\ln x-20=0$, $x\in(0;e)$:

705. Ապացուցել, որ հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրն ունի առնվազն երկու իրական արմատ.

ա) $2x^2+9\sin x-1=0$;   բ) $sh^2x+3x^5-2=0$;

գ) $e^x-x-2=0$;   դ) $x^3\operatorname{sgn}x+x^2+3x-1=0$:

706. Ապացուցել, որ կենտ աստիճանի ցանկացած հանրահաշվական բազմանդամ ունի առնվազն մեկ իրական արմատ:

707. Պարզել, թե հետևյալ բազմություններից ո՞րը կարող է լինել $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ որևէ ֆունկցիայի արժեքների բազմություն.

ա) $[-3;1]$;   բ) $(-3;1)$;   գ) $(-3;1]$;

դ) $\{-3\}$;   ե) $\{-3;1\}$;   զ) $[-3;1]\cup[2;3]$;
է) $[-3;+\infty)$;   ը) Q;   թ) R:

708. Կառուցել $(0;1)$ միջակայքի վրա այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որը չունենա ո՛չ ամենամեծ, ո՛չ ամենափոքր արժեքներ:

709. Կառուցել $[0;1)$ կիսաբաց միջակայքի վրա այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որը չունենա ո՛չ ամենամեծ, ո՛չ ամենափոքր արժեքներ:

710. Ապացուցել, որ եթե ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ $[0;1]\cup[2;4]$ բազմության վրա, ապա այն ունի ամենամեծ և ամենափոքր արժեքներ:

711. Բերել $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված խզվող ֆունկցիայի օրինակ, որը ցանկացած $(\alpha;\beta)\subset[a;b]$ միջակայքում ընդունում է մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

712. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և չնվազող, ապա $f([a;b])=[f(a);f(b)]$:

713. Կառուցել $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված այնպիսի փոխմիարժեք և խզվող ֆունկցիա, որի համար $f([a;b])=[f(a);f(b)]$:

***

714. Ապացուցել, որ հավասարաչափ անընդհատ ֆունկցիան անընդհատ է:

715. Բերել $(a;b)$ միջակայքի վրա անընդհատ ֆունկցիայի օրինակ, որը հավասարաչափ անընդհատ չէ:

716. Ապացուցել, որ եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(a;b)$ միջակայքի վրա, որտեղ $-\infty\le a<b\le+\infty$, և գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ և $\lim\limits_{x\to b}f(x)$ վերջավոր սահմանները, ապա $f(x)$-ը $(a;b)$-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

717. Ապացուցել, որ $f(x)$ ֆունկցիան X բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ, այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն ε_0 դրական թիվ և $x'_n, x''_n\in X$ հաջորդականություններ այնպես, որ $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n-x''_n)=0$ և $|f(x'_n)-f(x''_n)|\ge\varepsilon_0$:

Հետազոտել ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունը (618-729).

718. $y=2x-3$, $x\in R$:   719. $y=\sqrt{x}$, $x\in R_+$:

720. $y=x^3$, $x\in R$:   721. $y=\sqrt[3]{x}$, $x\in R$:

722. $y=\frac{1}{x^2}$, ա) $x\in(0;+\infty)$; բ) $x\in[1;+\infty)$:

723. $y=\frac{1+x}{1+x^2}$, $x\in R$:

724. $y=\frac{\sin x}{x}$, $x\in(0;+\infty)$:

725. $y=\sin 2x$, $x\in R$:

726. $y=arctgx$, $x\in R$:

727. $y=tgx$, ա) $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$; բ) $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

728. $y=\ln x$, ա) $x\in[1;+\infty)$; բ) $x\in(0;1)$:

729. $y=e^x$, ա) $x\in R$; բ) $x\in R_-$:

Բ

Հետազոտել ֆունկցիայի անընդհատությունը: Դասակարգել խզումները ըստ սեռի (730-733).

730. $y=x\sin\frac{1}{x}$, երբ $x\neq 0$, $y(0)=0$:

731. $y=arctg\frac{1}{x}$, երբ $x\neq 0$, $y(0)=0$:

732. $f(x)=(x-2)\chi(x)$, որտեղ $\chi(x)$-ը Դիրիխլեի ֆունկցիան է:

733. $y=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\chi(x)$, որտեղ $a_1,a_2,...,a_n$-ը իրարից տարբեր իրական թվեր են:

734. Ստուգել, որ Ռիմանի ֆունկցիան (տես վարժ. 575) անընդհատ է բոլոր իռացիոնալ կետերում և խզվող՝ ռացիոնալ կետերում:

735. Դիցուք $Q_2=\left\{\frac{2p-1}{2^q}: p\in Z, q\in Z_+\right\}$-ը երկուական ռացիոնալ թվերի բազմությունն է: Ստուգել, որ

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^q}, \text{ երբ } x=\frac{2p-1}{2^q}\in Q_2,\\ 0, \text{ երբ } x\in R\setminus Q_2\end{cases}$$

ֆունկցիան անընդհատ է $R\setminus Q_2$ բազմության վրա և խզվող՝ Q_2-ի վրա: Պարզել խզումների սեռը:

736. Հետազոտել հետևյալ ֆունկցիայի անընդհատությունը.

$$\psi(x)=\begin{cases}\dfrac{p}{q+1}, \text{ երբ } x=\dfrac{p}{q} & \text{(անկրճատելի կոտորակ է և } q\in N\text{)},\\ |x|, \text{ երբ } x\in I:\end{cases}$$

737. Տրված $M\subset R$ բազմության համար

$$\chi_M(x)=\begin{cases}1, \text{ երբ } x\in M,\\ 0, \text{ երբ } x\in M^c\end{cases}$$

ֆունկցիան կոչվում է M բազմության *բնութագրիչ ֆունկցիա* : Նկարագրել այդ ֆունկցիայի անընդհատության և խզման կետերի բազմությունները և դասակարգել խզումներն ըստ սեռի:

738. Հետազոտել $\varphi\circ\psi$ և $\psi\circ\varphi$ բարդ ֆունկցիաների անընդհատությունը, եթե

ա) $\varphi(x)=\operatorname{sgn} x$, $\psi(x)=1+x^2$;

բ) $\varphi(x)=|2x-1|$, $\psi(x)=\chi(x)$ (Դիրիխլեի ֆունկցիան է);

գ) $\varphi(x)=\psi(x)=\chi(x)$:

$f:X\to R$ ֆունկցիան $x_0\in X$ կետում կոչվում է

1) ձախից անընդհատ, եթե

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(x_0-\delta<x\le x_0\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$;

2) աջից անընդհատ, եթե

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(x_0\le x<x_0+\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$:

739. Ապացուցել, որ որպեսզի f-ն x_0 կետում լինի անընդհատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի x_0-ում թե' ձախից և թե' աջից անընդհատ:

Հետազոտել ֆունկցիայի անընդհատությունը, անընդհատությունը ձախից և աջից (740-744).

740. $y=\dfrac{|\sin x|}{x}$, երբ $x\neq 0$, $y(0)=-1$:

741. $y=\dfrac{e^x-1}{|x|}$, երբ $x\neq 0$, $y(0)=-1$:

742. $y=[\ln x]$:

743. $y=\ln x-[\ln x]$:

744. $y=\operatorname{sgn}(ctgx)$, երբ $x\neq\pi n$, $y(\pi n)=(-1)^n$, $n\in Z$:

745. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան սահմանափակ է: Ապացուցել, որ

ա) $m(x)=\inf f([a;x))$ և $M(x)=\sup f([a;x))$

ֆունկցիաները $(a;b]$-ի յուրաքանչյուր կետում ձախից անընդհատ են;

բ) եթե f-ը անընդհատ է, ապա $m(x)$ և $M(x)$ ֆունկցիաները նույնպես անընդհատ են:

746. Ապացուցել, որ եթե $f:X\to R$ և $g:X\to R$ ֆունկցիաները $x_0\in X$ կետում անընդհատ են, ապա այդ կետում անընդհատ են նաև

$$\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\} \text{ և } \psi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

ֆունկցիաները:

747. Դիցուք $f:X\to R$ ֆունկցիան X-ի վրա անընդհատ է և $c>0$: Ապացուցել, որ

$$f_c(x)=\begin{cases} -c, \text{ եթե } f(x)<-c, \\ f(x), \text{ եթե } |f(x)|\le c, \\ c, \text{ եթե } f(x)>c \end{cases}$$

ֆունկցիան X-ի վրա անընդհատ է:

748. Ապացուցել, որ $f:X\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0\in X$ կետում այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ի կետերից կազմված ցանկացած $x_n\to x_0$ հաջորդականության համար $f(x_n)\to f(x_0)$ (անընդհատություն ըստ Հայնեի):

749. Ապացուցել, որ եթե $f\in C[a;b]$ ֆունկցիան աճող է (նվազող է), ապա ցանկացած x_n հաջորդականության համար

$$f(x_n)\to f(x_0)\Rightarrow x_n\to x_0:$$

750. Ստուգել, որ $y=(1+x^2)\operatorname{sgn} x$ ֆունկցիան հակադարձելի է և խզվող, սակայն հակադարձ ֆունկցիան անընդհատ է:

751. Ապացուցել, որ եթե f-ը $(a;b)$ միջակայքի վրա մոնոտոն է և հակադարձելի, ապա f^{-1}-ն իր որոշման տիրույթում ամենուրեք անընդհատ է: Ճշմարի՞տ է արդյոք պնդումը ցանկացած հակադարձելի, բայց ոչ մոնոտոն ֆունկցիայի համար:

752. Կառուցել $f:X\to R$ փոխմիարժեք ֆունկցիա, որը $x_0\in X$ կետում անընդհատ է, բայց նրա հակադարձը $y_0=f(x_0)$ կետում խզվող է:

753. Ապացուցել, որ եթե f-ն անընդհատ է $[a;b]$ հատվածի վրա և հակադարձելի, ապա այն $[a;b]$-ի վրա մոնոտոն է:

754. Ապացուցել, որ մոնոտոն ֆունկցիայի խզումները կարող են լինել միմիայն առաջին սեռի:

755. Կառուցել $[0;1]$ հատվածի վրա որոշված մոնոտոն և սահմանափակ ֆունկցիա, որի խզման կետերի բազմությունն անվերջ է:

756. Դիցուք $f: R \to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և ունի T պարբերություն: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $x_0 \in R$, այնպիսին, որ $f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0)$:

757. Ապացուցել, որ եթե $f: R \to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և պարբերական, ապա այն սահմանափակ է:

758. Ապացուցել, որ եթե $f: R \to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և պարբերական, ապա կա'մ այն ունի փոքրագույն դրական պարբերություն, կա'մ հաստատուն է:

759. $x_0 \in X$ կետը կոչվում է $f: X \to R$ ֆունկցիայի *անշարժ կետ*, եթե $f(x_0) = x_0$:

Ապացուցել, որ եթե $f: [0;1] \to [0;1]$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա այն ունի անշարժ կետ:

760. Կառուցել $f: R \to R$ անընդհատ ֆունկցիա, որն անշարժ կետ չունի:

761. Կառուցել $f: (0;1) \to (0;1)$ անընդհատ ֆունկցիա, որն անշարժ կետ չունի:

762. Ապացուցել, որ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը հատված է:

763. Դիցուք $f \in C[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե f-ն $[a;b]$ հատվածի ոչ մի կետում զրո չի դառնում, ապա գոյություն ունի $\delta > 0$, այնպիսին, որ $[a;b]$-ի բոլոր կետերում $|f(x)| > \delta$: Կմնա՞ արդյոք պնդումը ճշմարիտ, եթե $[a;b]$ հատվածը փոխարինենք $(a;b)$ միջակայքով:

***

764. Ապացուցել Բորել-Լեբեգի լեմմայի հետևյալ ընդհանրացումը. $[a;b] \cup [c;d]$ բազմության ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

765. Բերել $(a;b)$ միջակայքի այնպիսի բաց ծածկույթի օրինակ, որից հնարավոր չէ անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

766. Բերել $[a;+\infty)$ միջակայքի այնպիսի բաց ծածկույթի օրինակ, որից հնարավոր չէ անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

767. Ապացուցել, որ եթե F բազմության ցանկացած բաց ծածկույթից հնարավոր է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ, ապա F-ը սահմանափակ է:

768. Փակ բազմությունների α ընտանիքն անվանենք F բազմության փակ ծածկույթ, եթե $F \subset \bigcup \alpha$: Կառուցել $[a;b]$ հատվածի փակ ծածկույթ, որից հնարավոր չէ անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

769. Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է և հավասարաչափ անընդհատ $(a;b)$ վերջավոր միջակայքի վրա: Ապացուցել, որ

ա) f-ը սահմանափակ է;

բ) գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ և $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ վերջավոր սահմանները;

գ) գոյություն ունի (ընդ որում միակը) f-ի $F:[a;b]\to R$ անընդհատ շարունակություն:

770. Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է և հավասարաչափ անընդհատ $[a;+\infty)$ միջակայքի վրա: Ճշմարի՞տ են արդյոք հետևյալ պնդումները.

ա) f-ը սահմանափակ է;

բ) գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ վերջավոր սահման:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

771. Ապացուցել, որ եթե վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա այն այդ միջակայքի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

772. Ապացուցել, որ եթե ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ և $[c;d]$ հատվածներից յուրաքանչյուրի վրա, ապա այն $[a;b]\cup[c;d]$ բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

773. Ստուգել, որ $y=\dfrac{\sin x}{|x|}$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է $[-1;0)$ և $(0;1]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա, սակայն $[-1;0)\cup(0;1]$ բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ:

774. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և պարբերական, ապա այն R-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

775. Դիցուք $f:X\to R$ և $g:X\to R$ ֆունկցիաները հավասարաչափ անընդհատ են: Ապացուցել, որ

ա) $f+g$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է;

բ) եթե X-ը վերջավոր միջակայք է, ապա $f\cdot g$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:

776. Ստուգել, որ $y=x$ և $y=\sin x$ ֆունկցիաները R-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ են, սակայն $y=x\sin x$ ֆունկցիան R-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ:

Հետազոտել ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունը (777-786).

777. $y=\sin x^2$, $x\in(0;+\infty)$:

778. $y=\sin\dfrac{1}{x}$, $x\in(0;1)$:

779. $y=x\sin\dfrac{1}{x}$, $x\in R\setminus\{0\}$:

780. $y=\dfrac{\sin x^2}{x}$, $x\in(0;+\infty)$:

781. $y = x\operatorname{arctg}x^2$, $x \in R$:

782. $y = x^2\operatorname{arctg}x$, $x \in R$:

783. $y = x + \sin x$, $x \in R$:

784. $y = x^n e^{-|x|}$ $(n \in N)$, $x \in R$:

785. $y = \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{|x|}}$, $x \in R\setminus\{0\}$:

786. $y = \sqrt{x}\ln x$, $x \in (0;+\infty)$:

787. Դիցուք $P(x)$-ը հանրահաշվական բազմանդամ է: Ապացուցել, որ $y = P\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ ֆունկցիան $R\setminus\{0\}$ բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

788. Տրված $f : X \to R$ սահմանափակ ֆունկցիայի և ցանկացած $\delta > 0$ թվի համար

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in X \text{ և } |x_1 - x_2| < \delta\}$$

ֆունկցիան անվանում են f ֆունկցիայի *անընդհատության մոդուլ*:

Ցույց տալ, որ

ա) $\omega_f(\delta)$-ն ոչ բացասական չնվազող ֆունկցիա է և, հետևաբար, գոյություն ունի $\omega_f(+0) = \lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)$ վերջավոր սահմանը;

բ) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X\ (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \omega_f(+0) + \varepsilon)$;

գ) եթե $g : X \to R$-ը մեկ այլ սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա

$$\omega_{f+g}(\delta) \le \omega_f(\delta) + \omega_g(\delta);$$

դ) $f : X \to R$ սահմանափակ ֆունկցիան X բազմության վրա կլինի հավասարաչափ անընդհատ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\omega_f(+0) = 0$:

789. Հետևյալ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի անընդհատության մոդուլի համար ստանալ $\omega_f(\delta) \le C\cdot\delta^\alpha$ տեսքի գնահատական (C-ն և α-ն հաստատուններ են).

ա) $y = x^3$, $x \in [0;1]$;

բ) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0;1]$;

գ) $y = \operatorname{arctg}x$, $x \in R$;

դ) $y = \sin x + \cos x$, $x \in R$;

ե) $y = \sin x^2$, $x \in R$;

զ) $y = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \in (0;+\infty)$:

***

$f : R \to R$ ֆունկցիան կոչվում է *ադիտիվ ֆունկցիա*, եթե այն բավարարում է $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը:

790. Ապացուցել, որ միակ անընդհատ և ադիտիվ ֆունկցիան $f(x) = ax$ գծային և համասեռ ֆունկցիան է, որտեղ $a = f(1)$:

791. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է և ադիտիվ, ապա այն գծային է և համասեռ:
792. Ապացուցել, որ եթե ադիտիվ ֆունկցիան $x=0$ կետում սահմանափակ է, ապա այն գծային է և համասեռ:
793. $f:R\to R$ ֆունկցիան անվանենք x_0 կետում Չեզարոյի իմաստով անընդհատ, եթե ցանկացած x_n հաջորդականության համար

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\to x_0 \Rightarrow \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\to f(x_0):$$

Ցույց տալ, որ

ա) $f(x)=ax+b$ գծային ֆունկցիան Չեզարոյի իմաստով անընդհատ է R-ի վրա;

բ) եթե f-ը Չեզարոյի իմաստով անընդհատ է առնվազն մեկ կետում, ապա այն գծային է:

794. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը: Ապացուցել, որ

ա) եթե f-ը հաստատունից տարբեր է և անընդհատ, ապա այն ցուցչային ֆունկցիա է. $f(x)=a^x$, որտեղ $a=f(1)$;

բ) եթե f-ը հաստատունից տարբեր է և $(0;\varepsilon)$ միջակայքում սահմանափակ, ապա այն ցուցչային է:

795. Ապացուցել, որ միակ անընդհատ և նույնաբար զրոյից տարբեր f ֆունկցիան, որը ցանկացած x,y դրական թվերի համար բավարարում է $f(xy)=$ $=f(x)+f(y)$ հավասարմանը և $f(a)=1$ պայմանին, $f(x)=\log_a x$ ֆունկցիան է, որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական հաստատուն է:
796. Ապացուցել, որ նույնաբար զրոյից տարբեր միակ անընդհատ ֆունկցիան, որը բավարարում է $f(xy)=f(x)f(y)$ $(x,y>0)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը, $f(x)=x^a$ աստիճանային ֆունկցիան է:
797. Գտնել բոլոր $f(x)$ $(x\in R)$ անընդհատ ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը:
798. Դիցուք տրված է $f:R\to R$ ֆունկցիան: Հետևյալ արտահայտությունները կոչվում են f-ի համապատասխանաբար *առաջին* և *երկրորդ կարգի վերջավոր աճեր.*

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x),\ \Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x)):$$

Ապացուցել, որ եթե f-ն անընդհատ է և ցանկացած x-ի ու Δx-ի համար $\Delta^2 f(x)=0$, ապա f-ը գծային է. $f(x)=ax+b$:

Գ.

799. Տրված է $f: X \to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ f-ը $x_0 \in X$ կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $f(x_0)$ կետի ցանկացած V շրջակայքի համար գոյություն ունի x_0 կետի U շրջակայք այնպիսին, որ $f(U \cap X) \subset V$:

800. Ապացուցել, որ $f: R \to R$ ֆունկցիան R-ի վրա անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ

ա) ցանկացած $G \subset R$ բաց բազմության $f^{-1}(G)$ նախապատկերը բաց բազմություն է;

բ) ցանկացած F փակ բազմության նախապատկերը փակ է:

801. Ապացուցել, որ $f: X \to R$ ֆունկցիան X-ի վրա անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ

ա) ցանկացած G բաց բազմության համար գոյություն ունի P բաց բազմություն, այնպիսին, որ $f^{-1}(G)=P \cap X$;

բ) ցանկացած F փակ բազմության համար գոյություն ունի K փակ բազմություն, այնպիսին, որ $f^{-1}(F)=K \cap X$:

802. Ապացուցել, որ $f: R \to R$ ֆունկցիան կլինի ամենուրեք անընդհատ այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $a \in R$ թվի համար

ա) $\{x \in R: f(x)<a\}$ և $\{x \in R: f(x)>a\}$ բազմությունները լինեն բաց;

բ) $\{x \in R: f(x) \le a\}$ և $\{x \in R: f(x) \ge a\}$ բազմությունները լինեն փակ:

803. Տրված է $f: X \to R$ ֆունկցիան: Ցանկացած $a \in R$ թվի համար $\{x \in X: f(x)=a\}$ բազմությունը կոչվում է f ֆունկցիայի *a-կետերի բազմություն*: Ապացուցել, որ եթե X բազմությունը փակ է և $f \in C(X)$, ապա ցանկացած $a \in R$ թվի համար f-ի a-կետերի բազմությունը փակ է:

804. Դիցուք՝ $f, g \in C[a;b]$: Ապացուցել, որ $\{x \in [a;b]: f(x)=g(x)\}$ բազմությունը փակ է:

805. $f: R \to R$ ֆունկցիան կոչվում է *բաց արտապատկերում*, եթե ցանկացած G բաց բազմության $f(G)$ պատկերը բաց է: Ապացուցել, որ եթե f բաց արտապատկերումն անընդհատ է, ապա այն մոնոտոն է:

806. Տրված է $f:R\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $(\alpha;\beta)$ միջակայքի համար $f((\alpha;\beta))=(f(\alpha);f(\beta))$, ապա f-ն անընդհատ է և աճող:

807. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $G\subset R$ բաց բազմության $f(G)$ պատկերը փակ է, ապա f-ը հաստատուն է:

808. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա ցանկացած $X\subset R$ կապակցված բազմության $f(X)$ պատկերը կապակցված է (տես 170 խնդիրը):

809. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած A կապակցված բազմության $f(A)$ պատկերը կապակցված է, ապա f-ն անընդհատ է:

810. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և $f(a)\cdot f(b)<0$: Ստուգել, որ $\{x\in(a;b):f(x)>0\}$ և $\{x\in(a;b):f(x)<0\}$ բազմությունները բաց են և ոչ դատարկ: Օգտվելով 171 խնդրում ձևակերպված պնդումից, ապացուցել միջանկյալ արժեքի վերաբերյալ Բոլցանո-Կոշիի թեորեմը:

811. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(a;b)$ միջակայքում և $x_1,x_2,\dots,x_n$ կետերը այդ միջակայքից են, ապա դրանց միջև կգտնվի մի ξ կետ, այնպիսին, որ

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]:$$

812. Դիցուք f-ը որոշված է և անընդհատ $(a;b)$ $(b\le+\infty)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում: Ապացուցել, որ b կետում ֆունկցիայի *սահմանային արժեքների բազմությունը* փակ է և կապակցված: Այլ կերպ՝ եթե $l=\varliminf_{x\to b}f(x)$ և $L=\varlimsup_{x\to b}f(x)$, ապա ցանկացած $l\le\lambda\le L$ թվի համար գոյություն ունի $x_n\to b$ $(x_n\in(a;b),n=1,2,\dots)$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda$:

813. Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան $(0;+\infty)$ միջակայքում անընդհատ է և սահմանափակ: Ապացուցել, որ ցանկացած T թվի համար գոյություն ունի $x_n\to+\infty$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ $\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0$:

814. Դիցուք $f:[0;1]\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և $f(0)=f(1)$: Ապացուցել, որ

ա) ցանկացած $n \in N$ բնական թվի համար գոյություն ունի $\frac{1}{n}$ երկարության հորիզոնական հատված, որի ծայրակետերը գտնվում են f ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա (հատվածը ներգծված է գրաֆիկին);

բ) եթե l թիվը $\frac{1}{n}$ տեսքի չէ, ապա կարելի է կառուցել նշված պայմանները բավարարող f ֆունկցիա, որի գրաֆիկին l երկարությամբ հորիզոնական հատված ներգծելն անհնար է:

815. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան չնվազող է և $Q\cap[f(a);f(b)]\subset \subset f([a;b])$: Ապացուցել, որ f-ն անընդհատ է:

816. $A\subset[a;b]$ բազմությունը կոչվում է $[a;b]$-ում *խիտ*, եթե $\overline{A}=[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան չնվազող է և նրա արժեքների բազմությունը խիտ է $[f(a);f(b)]$-ում, ապա f-ն անընդհատ է:

817. Դիցուք $f,g\in C[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե $\{x\in[a;b]: f(x)=g(x)\}$ բազմությունը խիտ է $[a;b]$-ում, ապա $f=g$:

818. Դիցուք $f_1:[0;1]\to[0;1]$ ֆունկցիան անընդհատ է և $f_1(0)=0$, $f_1(1)=1$: Նշանակենք $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$ $(n\in N)$: Ապացուցել հետևյալ պնդումները.

ա) $\forall x\in[0;1]\,(f_2(x)=x)\Rightarrow \forall x\in[0;1]\,(f_1(x)=x)$;

բ) $\exists n\in N\ \forall x\in[0;1]\,(f_n(x)=x)\Rightarrow \forall x\in[0;1]\,(f_1(x)=x)$;

գ) $\forall x\in[0;1]\,\exists n_x\in N\ (f_{n_x}(x)=x)\Rightarrow \forall x\in[0;1]\,(f_1(x)=x)$:

819. Դիցուք f և g ֆունկցիաները $[0;1]$ հատվածն անընդհատ արտապատկերում են $[0;1]$-ի մեջ, ընդ որում՝ $f\circ g=g\circ f$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $c\in[0;1]$ կետ, որ $f(c)=g(c)$:

820. Դիցուք $f:[0;1]\to R$ ֆունկցիան բավարարում է $f(0)>0$ և $f(1)<0$ պայմաններին: Ապացուցել, որ եթե $f=g+h$, որտեղ g-ն անընդհատ է, իսկ h-ը՝ չնվազող, ապա գոյություն ունի $x_0\in(0;1)$ կետ, այնպիսին, որ $f(x_0)=0$:

821. Տրված է $f:R_+\to R_+$ անընդհատ ֆունկցիան: Դիցուք կամայական $h>0$ թվի համար $\lim\limits_{n\to\infty} f(nh)=0$ $(n\in N)$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

822. Դիցուք $f:R_+\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և կամայական $x\in R_+$ թվի համար $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0$ $(n\in N)$: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$: Կառուցել համապատասխան օրինակ:

823. Ապացուցել, որ եթե $f: R_+ \to R$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է և կամայական $x \in R_+$ թվի համար $\lim_{n\to\infty} f(x+n)=0$ $(n\in N)$, ապա $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$:

824. Ապացուցել, որ եթե $f: R_+ \to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և կամայական $x \in R_+$ թվի համար $\lim_{n\to\infty} f(x+\sqrt{n})=0$ $(n\in N)$, ապա $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$:

825. Դիցուք $f: R_+ \to R$ ֆունկցիան անընդհատ է, իսկ դրական թվերից կազմված c_n աճող հաջորդականությունը բավարարում է $\lim_{n\to\infty} c_n=+\infty$ և $\lim_{n\to+\infty}(c_{n+1}-c_n)=0$ պայմաններին: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $x\in R_+$ թվի համար $\lim_{n\to\infty} f(x+c_n)=0$, ապա $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$:

826. Տրված $f: X \to R$ ֆունկցիայի և $x_0 \in X$ կետի համար նշանակենք՝

$$\Omega_f(x_0;\delta)=\sup\{f(x_1)-f(x_2): x_1,x_2\in(x_0-\delta;x_0+\delta)\}:$$

Ապացուցել, որ

ա) $0\le\Omega_f(x_0;\delta)\le+\infty$ և որպես δ -ից կախված ֆունկցիա $\Omega_f(x_0;\delta)$-ն $(0;+\infty)$ միջակայքի վրա չնվազող է;

բ) գոյություն ունի $\Omega_f(x_0)=\lim_{\delta\to+0}\Omega_f(x_0;\delta)$ վերջավոր կամ անվերջ սահմանը (կոչվում է f *ֆունկցիայի տատանում x_0 կետում*);

գ) f -ը x_0 կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\Omega_f(x_0)=0$ (անընդհատություն ըստ Բեռի);

դ) եթե X -ը փակ բազմություն է, ապա ցանկացած $a\in(0;+\infty)$ թվի համար $\{x\in X:\Omega_f(x)\ge a\}$ բազմությունը փակ է;

ե) $\bigcup_{n\in N}\left\{x\in X:\Omega_f(x)\ge\frac{1}{n}\right\}$-ը f ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունն է:

827. Դիցուք F -ը կամայական փակ բազմություն է: Կառուցել $f: R\to R$ ֆունկցիա, որի խզման կետերի բազմությունը F -ն է:

Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ ցանկացած ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը փակ է:

828. Տրված է $f: R\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ f -ն անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $c>0$ թվի համար

$$f_c(x)=\begin{cases}-c, \text{ երբ } f(x)<-c,\\ f(x), \text{ երբ } |f(x)|\le c,\\ c, \text{ երբ } f(x)>c\end{cases}$$

ֆունկցիան անընդհատ է:

829. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և

$$\forall x_1,x_2\in R\ \left(x_1\neq x_2\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\ge|x_1-x_2|\right):$$

Ապացուցել, որ f-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է R-ը R-ի վրա:

830. K բազմությունը կոչվում է *կոմպակտ*, եթե նրա ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ: Ապացուցել, որ $K\subset R$ բազմությունը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն փակ է և սահմանափակ:

831. Ապացուցել Վայերշտրասի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը.

ա) կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է;

բ) կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիան ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ;

գ) կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը կոմպակտ է (կոմպակտի անընդհատ պատկերը կոմպակտ է):

832. Ապացուցել նախորդ խնդրի ա) պնդման հետևյալ ընդհանրացումը. եթե $f:K\to R$ ֆունկցիան որոշված է K կոմպակտի վրա և յուրաքանչյուր կուտակման կետում ունի վերջավոր սահման, ապա f-ը սահմանափակ է:

833. Ապացուցել Կանտորի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը. կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:

834. Դիցուք X-ը թվային բազմություն է: Ապացուցել Վայերշտրասի թեորեմի հետևյալ շրջումը.

ա) եթե կամայական $f:X\to R$ անընդհատ ֆունկցիա սահմանափակ է, ապա X-ը կոմպակտ է;

բ) եթե կամայական $f:X\to R$ անընդհատ ֆունկցիա ունի մեծագույն արժեք, ապա X-ը կոմպակտ է:

835. Դիցուք X-ը թվային բազմություն է:Ճշմարի՞տ է արդյոք Կանտորի թեորեմի հետևյալ շրջումը. եթե կամայական $f:X\to R$ անընդհատ ֆունկցիա հավասարաչափ անընդհատ է, ապա X-ը կոմպակտ է: Բերել համապատասխան օրինակ:

836. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է, ապա գոյություն ունեն a և b հաստատուններ, այնպիսիք, որ $|f(x)|\le a|x|+b$:

Ճշմարի՞տ է արդյոք հակադարձ պնդումը: Կառուցել $f: R \to R$ անընդհատ և անող ֆունկցիա, որը բավարարում է $|f(x)| \leq |x|$ անհավասարությանը, բայց R-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ:

837. Ապացուցել, որ սահմանափակ բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է:

838. Դիցուք A-ն ոչ դատարկ և սահմանափակ թվային բազմություն է, իսկ $\overline{A}$-ն՝ A-ի փակումը: Ապացուցել, որ $f: A \to R$ ֆունկցիան ունի $F: \overline{A} \to R$ անընդհատ շարունակություն այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը A-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է: Համոզվել, որ այդպիսի շարունակությունը միակն է:

Գլուխ 5

Ֆունկցիայի ածանցյալ

Տրված է $f:X\to R$ ֆունկցիան: Դիցուք $x_0\in X$ կետը X-ի կուտակման կետ է: Ցանկացած $x\in X$ կետի համար $\Delta x=x-x_0$ տարբերությունը կոչվում է *արգումենտի աճ*, իսկ $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ տարբերությունը՝ Δx աճին համապատասխանող *ֆունկցիայի աճ*:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի

$$f'(x_0)=\frac{df(x_0)}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

վերջավոր, $+\infty$ կամ $-\infty$ սահման, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի *ածանցյալ* x_0 կետում:

Միակողմանի ածանցյալներ: Եթե x_0 կետում գոյություն ունի $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ հարաբերության ձախակողմյան (աջակողմյան) սահմանը, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի *ձախակողմյան* (*աջակողմյան*) *ածանցյալ* x_0 կետում և նշանակվում՝ $f'_-(x_0)$ $(f'_+(x_0))$:

Որպեսզի f ֆունկցիան x_0 կետում ունենա վերջավոր ածանցյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում գոյություն ունենան նրա վերջավոր միակողմանի ածանցյալները և լինեն իրար հավասար:

Ֆունկցիայի դիֆերենցիալ: Եթե գոյություն ունի A հաստատուն, այնպիսին, որ f ֆունկցիայի աճը x_0 կետում ներկայացվում է

$$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$$

տեսքով, ապա f-ն անվանում են x_0 կետում *դիֆերենցելի*:

Որպեսզի f-ն x_0 կետում լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն այդ կետում ունենա վերջավոր ածանցյալ: Ընդ որում՝ $A=f'(x_0)$:

Դիցուք $f:X\to R$ ֆունկցիան $x_0\in X$ կետում դիֆերենցելի է.

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0):$$

Սահմանում: Δx-ին $f'(x_0)\cdot\Delta x$-ը համապատասխանեցնող գծային ֆունկցիան կոչվում է x_0 կետում f *ֆունկցիայի դիֆերենցիալ* և նշանակվում՝ $df(x_0)$.

$$(df(x_0))(\Delta x)=f'(x_0)\cdot\Delta x:$$

Մասնավորապես, $f(x)=x$ ֆունկցիայի համար, $(dx)(\Delta x)=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$ և հետևաբար կարող ենք գրել.

$$df(x_0)=f'(x_0)dx,$$

որտեղ dx-ն $y=x$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալն է:

Ած ա ն ց մ ա ն կ ա ն ո ն ն ե ր ը ։ Դիցուք c -ն հաստատուն է, իսկ $u=u(x)$ և $v=v(x)$ ֆունկցիաները x_0 կետում դիֆերենցելի են: Այդ դեպքում

1. $(cu)'=cu'$; 2. $(u+v)'=u'+v'$;

3. $(uv)'=u'v+uv'$; 4. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$։

Եթե $x=\varphi(t)$-ն դիֆերենցելի է t_0 կետում, իսկ $y=f(x)$ ֆունկցիան՝ $x_0=\varphi(t_0)$ կետում, ապա $f\circ\varphi$ բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է t_0 կետում և

$$(f\circ\varphi)'(t_0)=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)\text{։}$$

Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի համար ստացվում է հետևյալ բանաձևը՝

$$d(f\circ\varphi)(t_0)=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)dt=f'(x_0)d\varphi=f'(x_0)dx,$$

որի կապակցությամբ ասում են, որ $y=f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի տեսքը մնում է անփոփոխ, երբ x -ը դառնում է որևէ այլ փոփոխականից կախված ֆունկցիա։

Եթե $f:X\to Y$ հակադարձելի ֆունկցիան $x_0\in X$ կետում դիֆերենցելի է, $f'(x_0)\neq 0$ և f^{-1} հակադարձ ֆունկցիան $y_0=f(x_0)$ կետում անընդհատ է, ապա f^{-1}-ը y_0-ում դիֆերենցելի է և $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ ։

Տ ա ր ր ա կ ա ն ֆ ու ն կ ց ի ա ն ե ր ի ա ծ ա ն ց յ ա լ ն ե ր ի ա ղ յ ու ս ա կ ը ։

1. $c'=0$ ։ 2. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$ ։

3. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ $\left(\left(e^x\right)'=e^x\right)$։ 4. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ $\left((\ln x)'=\frac{1}{x}\right)$։

5. $(\sin x)'=\cos x$ ։ 6. $(\cos x)'=-\sin x$ ։

7. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ ։ 8. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ ։

9. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ։ 10. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ։

11. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$ ։ 12. $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$ ։

13. $(shx)'=chx$ ։ 14. $(chx)'=shx$ ։

15. $(thx)'=\frac{1}{ch^2x}$ ։ 16. $(cthx)'=-\frac{1}{sh^2x}$ ։

Ա ծ ա ն ց յ ա լ ի մ ե խ ա ն ի կ ա կ ա ն ի մ ա ս տ ը ։ Դիցուք կետը ուղղագիծ շարժվում է $S=S(t)$ օրենքով, որտեղ t -ն ժամանակն է, իսկ $S(t)$-ն՝ ժամանակի t պահին կետի անցած ճանապարհը: $S(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ t -ի՝ $S'(t)$ -ն, ժամանակի t պահին կետի շարժման արագությունն է: Եթե կետի ուղղագիծ շարժման արագությունը փոփոխվում է $V=V(t)$ օրենքով, ապա $V'(t)$ -ն ժամանակի t պահին կետի շարժման արագացումն է:

Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը: Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$-ն $(x_0, f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի *շոշափողի հավասարումն* է: Փաստորեն, $f'(x_0)$-ն շոշափողի *անկյունային գործակիցն* է:

Ուղիղը, որն անցնում է $(x_0, f(x_0))$ կետով և ուղղահայաց է այդ կետում գրաֆիկի շոշափողին, կոչվում է *նորմալ*: Եթե $f'(x_0)\neq 0$, ապա նորմալի հավասարումն է՝ $y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$: Այն դեպքում, երբ շոշափողն ունի հորիզոնական դիրք՝ $f'(x_0)=0$, նորմալի հավասարումն ընդունում է $x=x_0$ տեսքը:

Ասում են, որ $y=f(x)$ և $y=g(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկներն x_0 աբսցիսն ունեցող կետում հատվում են φ անկյան տակ, եթե $f(x_0)=g(x_0)$ և այդ կետով գրաֆիկներին տարված շոշափողները կազմում են φ անկյուն.

$$tg\varphi=\left|\frac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)g'(x_0)}\right| \quad \left(0\leq\varphi<\frac{\pi}{2}\right):$$

Այն դեպքում, երբ $1+f'(x_0)g'(x_0)=0$՝ $\varphi=\frac{\pi}{2}$: Նկատենք, որ φ-ն x_0 աբսցիս ունեցող կետով գրաֆիկներին տարված շոշափողների կազմած սուր անկյունն է:

Պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիայի ածանցյալը: Տրված են $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t\in T)$ պարամետրական հավասարումները: Եթե t պարամետրի փոփոխման այս կամ այն միջակայքում պարամետրական հավասարումներով որոշվող կորի աղեղն իրենից ներկայացնում է որոշակի $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկ, ապա f-ն անվանում են պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիա: Դա մասնավորապես կարող է տեղի ունենալ այն դեպքում, երբ $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան $T_0\subset T$ միջակայքում հակադարձելի է: Այդ դեպքում $f(x)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$:

Եթե φ և ψ ֆունկցիաները $t=t_0$ կետում բավարարում են φ^{-1} հակադարձ ֆունկցիայի և $\psi\circ\varphi^{-1}$ բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության պայմաններին, ապա f-ն $x_0=\varphi(t_0)$ կետում դիֆերենցելի է, ընդ որում

$$f'(x_0)=y'_x(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \quad \left(t_0=\varphi^{-1}(x_0)\right):$$

Բարձր կարգի ածանցյալներ: Եթե $f:X\to R$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x_0\in X$ կետի որևէ շրջակայքի յուրաքանչյուր կետում, ապա այդ շրջակայքում որոշված $f'(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում կոչվում է f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ x_0-ում և նշանակվում՝ $f''(x_0)$ կամ $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$: Համանմանորեն սահմանվում են երրորդ՝ $f'''(x_0)$, չորրորդ՝ $f^{(4)}(x_0)$ և ավելի բարձր կարգի ածանցյալները:

Եթե f ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալը՝ $f^{(n)}(x)$-ը, գոյություն ունի X բազմության յուրաքանչյուր կետում և ներկայացնում է անընդհատ ֆունկցիա, ապա գրում են՝ $f \in C^n(X)$:

Տարրական ֆունկցիաների n-րդ կարգի ածանցյալների աղյուսակ.

1. $\left(x^\alpha\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$:

2. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad \left(\left(e^x\right)^{(n)} = e^x\right)$:

3. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$:

4. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$:

5. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$:

Լեյբնիցի բանաձևը: Եթե u և v ֆունկցիաները n անգամ դիֆերենցելի են, ապա $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$, որտեղ $u^{(0)} = u$ և $v^{(0)} = v$:

Ա

839. Տրված է $f : X \to R$ ֆունկցիան: Դիցուք x փոփոխականի աճն x_0 կետում Δx-ն է: Գտնել $\Delta f(x_0)$ աճը, եթե

ա) $f(x) = ax + b$; բ) $f(x) = ax^2 + bx + c$; գ) $f(x) = a^x$; դ) $f(x) = tgx$:

840. Ստուգել, որ

ա) $\Delta[f(x) \pm g(x)] = \Delta f(x) \pm \Delta g(x)$;

բ) $\Delta[f(x)g(x)] = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$;

գ) $\Delta\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x + \Delta x)}$:

841. Ելնելով ածանցյալի սահմանումից՝ գտնել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

ա) $y = x^2$; բ) $y = \dfrac{1}{x}$; գ) $y = \sqrt{x}$; դ) $y = \sqrt[3]{x}$;

ե) $y = \sin x$; զ) $y = \arccos x$; է) $y = arctgx$:

842. Ցույց տալ, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x=0$ կետում և $f(0)=0$, ապա $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$:

843. Ցույց տալ, որ եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $x=0$ կետում, $f(0)=g(0)=0$ և $g'(0)\neq 0$, ապա $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}$:

844. Ելնելով ածանցյալի սահմանումից, հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները $x=x_0$ կետում.

ա) $y=x^2+3x-1$, $x_0=1$; բ) $y=2x^3-2x+3$, $x_0=0$;

գ) $y=x^2\sin(x-2)$, $x_0=2$; դ) $y=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $x_0=1$;

ե) $y=x|x|$, $x_0=0$:

845. Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաները $x=x_0$ կետում դիֆերենցելի չեն.

ա) $y=\sqrt{x}$, $x_0=0$; բ) $y=|x|$, $x_0=0$;

գ) $y=\sqrt[3]{x-1}$, $x_0=1$; դ) $y=|\ln x|$, $x_0=1$:

846. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է և $n\in N$, ապա

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=f'(x_0):$$

Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե նշված սահմանը գոյություն ունի, ապա f-ն x_0 կետում դիֆերենցելի է:

Ցուցում: Դիտարկել Դիրիխլեի ֆունկցիան:

847. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են: Ապացուցել, որ $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ և եթե $g(x)\neq 0$, ապա նաև $\frac{f(x)}{g(x)}$ ֆունկցիաները նույնպես դիֆերենցելի են և ճշմարիտ են ածանցման հետևյալ կանոնները.

ա) $\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$;

բ) $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

գ) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (848-954).

848. $y = x^3(x^2 - 1)$:

849. $y = (x^2 + 1)(3x - 2)(1 - x^3)$:

850. $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$:

851. $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$:

852. $y = \dfrac{x}{(1 - x)^2(1 + x)^3}$:

853. $y = \dfrac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$:

854. $y = \sqrt[3]{x}$:

855. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$:

856. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$:

857. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$:

858. $y = x\sqrt[4]{x}$:

859. $y = \dfrac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}}$:

860. $y = x\sin x - x^2 \cos x$:

861. $y = xtgx + ctgx$:

862. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$:

863. $y = \dfrac{x\sin x}{1 + tgx}$:

864. $y = e^x(x^2 + x - 1)$:

865. $y = e^x \sin x + x\ln x$:

866. $y = 2^x ctgx$:

867. $y = (1 + 3x)^5$:

868. $y = \sqrt{2 - 3x}$:

869. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$:

870. $y = x\sqrt{1 + x^2}$:

871. $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$:

872. $y = \left(\dfrac{1 + x^2}{1 - x}\right)^3$:

873. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$:

874. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + x\sqrt{x}}}$:

875. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}}$:

876. $y = \sin^3 3x$:

877. $y = \cos(3x - 1)\sin 2x$:

878. $y = tg(x^2 + 1) + tg2$:

879. $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$:

880. $y = \sqrt{1 + \sin 2x}$:

881. $y = \sin^2 x^2$:

882. $y = \cos^2 \sqrt[3]{x^2 - 1}$:

883. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$:

884. $y=tg\frac{x}{2}-\frac{1}{3}tg^3x$:

885. $y=tg^5\left(x^2+2x-1\right)$:

886. $y=\sqrt[3]{ctg^2x}$:

887. $y=x^2\sin(\sin x)$:

888. $y=\sin\left(\cos\frac{1}{x}\right)$:

889. $y=\sin\left(\cos^2\left(tg^3x\right)\right)$:

890. $y=\frac{\sin^2 3x}{1+ctg3x}$:

891. $y=\sqrt{1+tg\left(x^2+x^{-2}\right)}$:

892. $y=2^{tg\frac{1}{x}}$:

893. $y=e^{-x^2}\cos\frac{x}{2}$:

894. $y=x^2e^{-2x^3}$:

895. $y=e^{\cos x}\sin x^2$:

896. $y=e^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$:

897. $y=sh(\cos x)$:

898. $y=e^{-2x}chx^3$:

899. $y=\frac{chx^2}{sh^2x^2}$:

900. $y=e^{e^x}$:

901. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$:

902. $y=\ln(3x+1)+\ln 3$:

903. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$:

904. $y=\ln\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}\right)$:

905. $y=\lg^3x^2$:

906. $y=\log_2^3(2x+3)^2$:

907. $y=10^{\frac{x}{\log_3 x}}$:

908. $y=e^{\sqrt{\ln\left(x^2+x+1\right)}}$:

909. $y=\ln\left(\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right)$:

910. $y=\ln(\ln(\ln x))$:

911. $y=\ln\left(\ln^2\left(\ln^3x\right)\right)$:

912. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$:

913. $y=\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$:

914. $y=\ln^2(1+\cos x)$:

915. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$:

916. $y=\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^4}$:

917. $y=x(\sin\ln x-\cos\ln x)$:

918. $y=\arcsin\frac{x}{2}$:

919. $y=\arccos\frac{1}{x}$:

920. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{x}$:

921. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$:

922. $y=\arccos\left(\cos^2 x\right)$:

923. $y=arctg\frac{1+x}{1-x}$:

924. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$

925. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$:

926. $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$:

927. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}$:

928. $y=\frac{1+x^2arctgx^2}{\sqrt{1+x^4}}$:

929. $y=3^{arctg(2x+x)}$:

930. $y=\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}-arctg\sqrt{e^{2x}-1}$:

931. $y=arctge^{\frac{x}{2}}-\ln\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$:

932. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$:

933. $y=arctg\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$:

934. $y=\arccos\left(\sin x^2-\cos x^2\right)$

935. $y=arctg\left(tg^2x\right)$:

936. $y=\arcsin\left(\sin x^2\right)+\arccos\left(\cos x^2\right)$:

937. $y=\arcsin\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}$:

938. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$:

939. $y=x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-x}arctge^x$:

940. $y=\arccos\left(\sin^2 x^4-\cos^2 x^4\right)$:

941. $y=\sqrt{arctg\sqrt{\cos\ln^3 x}}$:

942. $y=arctg(thx)$:

943. $y=\arccos\left(\frac{1}{chx}\right)$:

944. $y=x^x$:

945. $y=x^{x^x}$:

946. $y=x^{e^x}$:

947. $y=(chx)^{e^x}$:

948. $y=x^{\frac{1}{x}}$:

949. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$:

950. $y=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$:

951. $y=(\sin x)^{\cos x}$:

952. $y=\left(tg\frac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}$:

953. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$: 954. $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$:

$y=f(x)$ ֆունկցիայի մոդուլի լոգարիթմի ածանցյալը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի *լոգարիթմական ածանցյալ.* $\frac{d}{dx}\ln|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)}$: Գտնել ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալը (955-958).

955. $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$: 956. $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$:

957. $y=(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$: 958. $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$:

Գտնել ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալները x_0 կետում (959-965).

959. $y=|x|,\ x_0=0$: 960. $y=|x^2-5x+6|,\ x_0=2$:

961. $y=|2^x-2|,\ x_0=1$: 962. $y=x|\sin x|,\ x_0=1$:

963. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}},\ x_0=0$:

964. $y=\begin{cases} x^2, x\le 1, \\ 2-x, x>1, \end{cases}\quad x_0=1$: 965. $y=\begin{cases} e^x, x\le 0, \\ x^2+2x, x>0, \end{cases}\quad x_0=0$:

Գտնել ածանցյալը (966-971).

966. $y=\left|(x-1)^2(x+1)^3\right|$: 967. $y=|\sin^3 x|$:

968. $y=\begin{cases} 1-x, \ -\infty<x<1, \\ (1-x)(2-x), 1\le x\le 2, \\ x-2,\ 2<x<+\infty: \end{cases}$ 969. $y=\begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2,\ x\in[a;b], \\ 0,\ x\notin[a;b]: \end{cases}$

970. $y=\begin{cases} x,\ x<0, \\ \ln(1+x),\ x\ge 0: \end{cases}$ 971. $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2},\ |x|\le 1, \\ \frac{1}{e},\ |x|>1: \end{cases}$

972. Գտնել $x=x(y)$ հակադարձ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և ածանցյալը.

ա) $y=x+\ln x$; բ) $y=chx,\ x\in R_+$; գ) $y=x+e^x$;

դ) $y=thx$; ե) $y=shx$:

Գտնել y'_x-ը (973-981).

973. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$: 974. $x=\sqrt{t^2+t}$, $y=\frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}$:

975. $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$: 976. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$:

977. $x=acht$, $y=bsht$: 978. $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$:

979. $x=e^t(\cos t+\sin t)$, $y=e^t(\cos t-\sin t)$:

980. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$:

981. $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$:

Գրել տրված կետում կորի շոշափողի և նորմալի հավասարումները (982-991).

982. $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ ա) $x=-1$; բ) $x=2$:

983. $y=2^{-x^2}\sin\pi x$ ա) $x=0$; բ) $x=1$:

984. $y=x^2\arccos\frac{x}{2}$ ա) $x=1$; բ) $x=\sqrt{3}$:

985. $y=x^3 ctg\pi x$ ա) $x=\frac{1}{4}$; բ) $x=\frac{1}{2}$:

986. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ ա) $t=0$; բ) $t=1$:

987. $x=e^{-t}\sin t$, $y=e^{-t}\cos t$ ա) $t=0$; բ) $t=\frac{\pi}{4}$:

988. $x=\frac{2t+t^2}{1+t^3}$, $y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}$ ա) $t=0$; բ) $t=1$:

Գտնել կորերի հատման կետում նրանց կազմած անկյունը (989-992).

989. $y=x^2$, $x=y^2$: 990. $y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{1}{1+x^2}$:

991. $y=\sin x$, $y=\cos x$: 992. $y=x^2\ln x$, $y=4-4x^2$:

993. $y=2+x+x^2$ կորի ո՞ր կետերով նրան տարված շոշափողը կլինի զուգահեռ ա) աբսցիսների առանցքին; բ) $y=x$ ուղիղին:

994. Ապացուցել, որ

$y=a(x-x_1)(x-x_2)$ $(a\neq 0,\ x_1\neq x_2)$

պարաբոլն x-երի առանցքը երկու անգամ հատում է միևնույն սուր անկյան տակ:

995. a, b, c գործակիցների միջև ի՞նչ կապի դեպքում $y = ax^2 + bx + c$ պարաբոլը կշոշափի x-երի առանցքը:

996. Ի՞նչ պայմանների դեպքում $y = x^3 + px + q$ խորանարդ պարաբոլը կշոշափի x-երի առանցքը:

997. a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում $y = ax^2$ պարաբոլը կշոշափի $y = \ln x$ կորը (հատման կետում կորերի կազմած անկյունը կլինի 0):

Գտնել ֆունկցիայի դիֆերենցիալը (998-1003).

998. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$:

999. $y = \cos x + \sqrt[3]{x}$:

1000. $y = \sqrt{\arccos x} + 2^{-x}$:

1001. $y = 3^{\sqrt{arctgx^2}}$:

1002. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$:

1003. $y = \dfrac{1}{\sin^3 2x}$:

1004. Դիցուք $u = u(x)$, $v = v(x)$ և $w = w(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են: Գտնել y ֆունկցիայի դիֆերենցիալը, եթե

ա) $y = uvw$; բ) $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$; գ) $y = arctg\dfrac{u}{v}$; դ) $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$:

1005. Գտնել ածանցյալը.

ա) $\dfrac{d}{d(x^3)}\left(x^3 - 2x^6 - x^9\right)$; բ) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; գ) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$; դ) $\dfrac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$:

Փոխարինելով ֆունկցիայի աճը դիֆերենցիալի արժեքով, գտնել արտահայտության մոտավոր արժեքը (1006-1010).

1006. $\sqrt[3]{1,02}$:

1007. $\sin 29^\circ$:

1008. $\cos 151^\circ$:

1009. $arctg1,05$:

1010. $\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$, երբ $x = 0,15$:

1011. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա այն այդ կետում անընդհատ է:

1012. Կարո՞ղ է արդյոք ֆունկցիան իր խզման կետում ունենալ անվերջ ածանցյալ:

1013. Կառուցել ֆունկցիա, որը լինի անընդհատ R-ի վրա, բայց

ա) դիֆերենցելի չլինի միայն մեկ կետում;

բ) դիֆերենցելի չլինի միայն երկու կետում:

1014. Կարո՞ղ է արդյոք $f(x)+g(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում լինել դիֆերենցելի, եթե

ա) $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, իսկ $g(x)$-ը՝ ոչ;

բ) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի չեն x_0 կետում:

1015. Կարո՞ղ է արդյոք $f(x)g(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում լինել դիֆերենցելի, եթե

ա) $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, իսկ $g(x)$-ը՝ ոչ;

բ) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները x_0 կետում դիֆերենցելի չեն:

1016. Դիֆերենցելի՞ են արդյոք հետևյալ ֆունկցիաները.

ա) $y=x|x|$; բ) $y=\left|x^3\right|$; գ) $y=x|\sin x|$:

1017. Ապացուցել, որ R-ի վրա դիֆերենցելի զույգ ֆունկցիայի ածանցյալը կենտ ֆունկցիա է, իսկ կենտ ֆունկցիայինը՝ զույգ:

1018. Ապացուցել, որ դիֆերենցելի և պարբերական ֆունկցիայի ածանցյալը պարբերական ֆունկցիա է:

1019. Մոնոտո՞ն է արդյոք մոնոտոն ֆունկցիայի ածանցյալը:

Ցուցում: Դիտարկել $y=x+\sin x$ ֆունկցիան:

Գտնել y''-ը (1020-1026).

1020. $y=x\sqrt{1+x^2}$:

1021. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$:

1022. $y=e^{-x^2}$:

1023. $y=tgx$:

1024. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$:

1025. $y=\left(1+x^2\right)arctgx$:

1026. $y=x^x$:

1027. Ապացուցել հետևյալ բանաձևերը.

ա) $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$;

բ) $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a$;

գ) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

դ) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

ե) $\left(x^m\right)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$;

զ) $(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$:

1028. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան ունի n-րդ կարգի ածանցյալ, ապա

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b):$$

Գտնել $y = y(x)$ ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալը (1029-1048).

1029. $y = \dfrac{1}{2x+3}$:

1030. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$:

1031. $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$:

1032. $y = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$:

1033. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$:

1034. $y = \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{1-x}}$:

1035. $y = \sin^2 x$:

1036. $y = \sin^3 x$:

1037. $y = \cos^4 x$:

1038. $y = \cos ax \cos bx$:

1039. $y = \sin x \cos^2 2x$:

1040. $y = x^2 \sin^2 x$:

1041. $y = x^2 \ln(1+x)$:

1042. $y = e^{3x} \sin 4x$:

1043. $y = e^x \cos^2 x$:

1044. $y = xshx$:

1045. $y = chaxchbx$:

1046. $y = x^n e^x$:

1047. $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$:

1048. $y = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$:

1049. Դիցուք՝ $f(x) = x^n, n \in N$: Ստուգել, որ $f(1) + \dfrac{f'(1)}{1!} + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$:

1050. Դիցուք՝ $f(x) = x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}, n \in N$: Ստուգել, որ $[f(x)]^{(n)} = (-1)^n \dfrac{f(x)}{x^{2n}}$:

Գտնել պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիայի նշված կարգի ածանցյալը (1051-1056).

1051. y''_{xx}-ը, եթե $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$:

1052. y''_{xx}-ը, եթե $x = a\cos t$, $y = a \sin t$:

1053. y'''_{xxx}-ը, եթե $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$:

1054. y'''_{xxx}-ը, եթե $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$:

1055. y''_{xx}-ը, եթե $x = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$:

1056. y'''_{xxx}-ը, եթե $x = t^2$, $y = \ln \sin t - t \cdot ctgt$:

Հավասարման մեջ կատարել փոփոխականի նշված փոխարինումը (1057-1059).

1057. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$, $x = e^t$, $y = y(t)$:

1058. $u'' - q(t)u = 0$, $u = \sqrt{t}v$, $s = \frac{1}{2}\ln t$, $v = v(s)$:

1059. $(x^2 + y^2)^3 y'' - 2(xy' - y)(yy' + x)^2 = 0$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = r(\varphi)$:

Դիցուք $u = \varphi(x)$ և $v = \psi(x)$ ֆունկցիաները երկու անգամ դիֆերենցելի են: Գտնել y''-ը (1060-1065).

1060. $y = u^2$: 1061. $y = u \cdot v$: 1062. $y = \frac{u}{v}$:

1063. $y = \ln\frac{u}{v}$: 1064. $y = \sqrt{u^2 + v^2}$: 1065. $y = u^v$:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան երեք անգամ դիֆերենցելի է: Գտնել y''-ը և y'''-ը (1066-1068).

1066. $y = f(x^2)$: 1067. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$: 1068. $y = f(e^x)$:

Հետևյալ խնդիրներում, եթե հատուկ նշված չէ, ճանապարհի չափման միավորն է՝ մետր, ժամանակինը՝ վայրկյան, արագությանը՝ մ/վրկ, արագացմանը՝ մ/վրկ^2:

1069. Մարմինը շարժվում է ուղղագիծ՝ $S = 1 + 2t + t^2$ օրենքով: Հաշվել նրա արագությունը ժամանակի $t = 2$ պահին:

1070. Ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագությունը որոշվում է $V = 3t + t^2 + t^3$ բանաձևով: Ինչպիսի՞ արագացում կունենա մարմինը շարժման սկզբից 4 վրկ անց:

1071. Ուղղագիծ շարժվող մարմնի անցած S ճանապարհը որոշվում է $S = \frac{1}{8}t^3 + 3t^2 + t$ բանաձևով: Գտնել շարժման արագությունը և արագացումը, երբ $t = 10$:

1072. Պտտվող թափանիվը, որին պահում է արգելակը, t վայրկյանի ընթացքում պտտվում է $\varphi = \alpha + \beta t - \gamma t^2$ անկյունով(α, β, γ-ն դրական հաստատուններ են): Գտնել անկյունային արագությունը և պտտման արագացումը: Անիվը ե՞րբ կանգ կառնի:

1073. 100 կգ զանգվածով մարմինը շարժվում է ուղղագիծ՝ $S = 2t^2 + 3t + 1$ օրենքով: Գտնել մարմնի կինետիկ էներգիան $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ շարժումն սկսելուց 5 վրկ անց:

1074. Ապացուցել, որ եթե մարմինը շարժվում է $S = ae^t + be^{-t}$ օրենքով, ապա արագացման թվային արժեքը հավասար է ճանապարհի թվային արժեքին:

1075. Մարմնի շարժման օրենքը տրված է $S = a + bt + ct^2$ բանաձևով: Ապացուցել, որ մարմնի վրա ազդող ուժը հաստատուն է:

1076. 1,7 մ հասակ ունեցող մարդը 5 կմ/ժ արագությամբ հեռանում է լույսի աղբյուրից, որը գտնվում է $h > 1{,}7$ մ բարձրության վրա,: Գտնել նրա գլխի ստվերի շարժման արագությունը:

1077. Մարմինը շարժվում է $y = 2x + 3$ ուղիղով այնպես, որ նրա աբսցիսը աճում է $V_x = 3$ հաստատուն արագությամբ: Ի՞նչ արագությամբ է փոփոխվում օրդինատը:

1078. Մարմինը շարժվում է $x^2 + y^2 = 100$ $(x, y > 0)$ շրջանագծի աղեղով այնպես, որ նրա օրդինատը աճում է $V = 3$ հաստատուն արագությամբ: Ի՞նչ արագությամբ է փոփոխվում աբսցիսը: Գտնել աբսցիսի փոփոխման արագությունն այն պահին, երբ օրդինատը հավասար է 6-ի:

1079. Մարմինը շարժվում է $12y = x^3$ կորով: Նրա ո՞ր կոորդինատն է փոփոխվում ավելի արագ:

Բ

1080. Գտնել $f'(0)$-ն, եթե

ա) $f(x) = |x|(1 - \cos x)$; բ) $f(x) = \prod_{k=0}^{n}(x + k)$; գ) $f(x) = \prod_{k=1}^{n}(x + k)$;

դ) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^4 \sin\dfrac{5}{x}\right), x \neq 0, \\ 0, x = 0; \end{cases}$ ե) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{4}{3x} + \dfrac{x}{2}, x \neq 0, \\ 0, x = 0: \end{cases}$

Հաշվել ֆունկցիայի ածանցյալը (1081-1084).

1081. $y = \arccos\dfrac{1}{|x|}$: 1082. $y = [x]\sin^2 \pi x$:

1083. $y = \begin{cases} (x+1)arctg^2\dfrac{1}{x+1} + 2x, x \neq -1, \\ -2, x = -1: \end{cases}$

1084. $y=\begin{cases} arctgx, |x|\le 1, \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\frac{x-1}{2}, |x|>1: \end{cases}$

1085. Ապացուցել արտադրյալի ածանցման հետևյալ կանոնը

$$(f_1(x)\cdots f_n(x))' = \sum_{k=1}^{n} f_1(x)\cdots f_k'(x)\cdots f_n(x):$$

1086. a-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կլինի անընդհատ $x=0$ կետում: Ստուգել $f'(0)$ ածանցյալի գոյությունը և հաշվել այն, եթե

ա) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x}, x\ne 0, \\ a, x=0; \end{cases}$ բ) $f(x)=\begin{cases} \frac{(e^x-1)^2}{x}, x\ne 0, \\ a, x=0; \end{cases}$

1087. Դիցուք g և φ ֆունկցիաները որոշված են համապատասխանաբար $\{x: x\ge a\}$ և $\{x: x\le a\}$ բազմությունների վրա և

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\ge a, \\ \varphi(x), & x<a: \end{cases}$$

Ապացուցել, որ $f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության համար հետևյալ պայմանները անհրաժեշտ են և բավարար.

1) $g(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $\{x: x>a\}$ բազմության վրա, իսկ $\varphi(x)$-ը՝ $\{x: x<a\}$ բազմության վրա;

2) $g(a)=\varphi(a)$;

3) $g'_+(a)=\varphi'_-(a)$:

a և b թվերի ինչպիսի՞ ընտրության դեպքում ֆունկցիան կլինի դիֆերենցելի (1088-1091).

1088. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1, \\ ax+b, & x>1: \end{cases}$ 1089. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0, \\ x^2+ax+b, & x>0: \end{cases}$

1090. $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & |x|<1, \\ \frac{1}{|x|}, & |x|\ge 1: \end{cases}$ 1091. $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<0, \\ a\cos x+b\sin x, & x\ge 0: \end{cases}$

Ընտրել a_1, b_1, a_2, b_2 թվերն այնպես, որ $f(x)$ ֆունկցիան լինի դիֆերենցելի (1092-1095).

1092. $f(x)=\begin{cases} a_1x+b_1, & x>\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right], \\ a_2x+b_2, & x<-\dfrac{\pi}{2}: \end{cases}$ 1093. $f(x)=\begin{cases} a_1x^2+b_1, & x>1, \\ x\sin\pi x, & x\in[-1;1], \\ a_2x+b_2, & x<-1: \end{cases}$

1094. $f(x)=\begin{cases} a_1(x-2)^2+b_1, & x>1, \\ x^2 arctgx, & x\in[-1;1], \\ a_2(x+2)^2+b_2, & x<-1: \end{cases}$

1095. $f(x)=\begin{cases} a_1x^2+b_1, & x<\dfrac{1}{e}, \\ x^2\ln x, & x\in\left[\dfrac{1}{e};e\right], \\ a_2x+b_2, & x>e: \end{cases}$

Գտնել ածանցյալը (1096-1099).

1096. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n} ch\dfrac{x}{2^k}:$ 1097. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right),\ |x|<1:$

Հետազոտել ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը (1098-1100).

1098. $f(x)=\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|:$ 1099. $f(x)=|\cos x|:$

1100. $f(x)=\left|\pi^2-x^2\right|\sin^2 x:$

Գտնել $x=0$ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի մինչև այն կարգի ածանցյալները, որոնք գոյություն ունեն (1101-1104).

1101. $f(x)=\begin{cases} x^{10}, \text{ երբ } x\in Q, \\ -x^{10}, \text{ երբ } x\in I: \end{cases}$ 1102. $f(x)=|x|^3$:

1103. $f(x)=\begin{cases} 1-\cos x, & x<0, \\ \ln(1+x)-x, & x\geq 0: \end{cases}$ 1104. $f(x)=\begin{cases} shx-x, & x<0, \\ x-\sin x, & x\geq 0: \end{cases}$

1105. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

ֆունկցիան ունի խզվող ածանցյալ:

1106. α -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$f(x)=\begin{cases} x^{a}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0 \end{cases}$$

ֆունկցիան $x=0$ կետում

ա) կլինի անընդհատ;

բ) կլինի դիֆերենցելի;

գ) կունենա անընդհատ ածանցյալ:

1107. α -ի և β -ի $(\beta>0)$ ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$f(x)=\begin{cases} |x|^{a}\sin\frac{1}{|x|^{\beta}}, x\neq 0, \\ 0, x=0 \end{cases}$$

ֆունկցիան $x=0$ կետի շրջակայքում ունի

ա) սահմանափակ ածանցյալ;

բ) անսահմանափակ ածանցյալ:

1108. Դիցուք $f(x), g(x), h(x)$ ֆունկցիաները որոշված են x_0 կետի շրջակայքում և բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

1) $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, $f(x_0)=h(x_0)$;

2) $f(x)$ և $h(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են x_0 կետում;

3) $f'(x_0)=h'(x_0)$:

Ապացուցել, որ $g(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է և $g'(x_0)=f'(x_0)=h'(x_0)$:

1109. Դիցուք $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$ ֆունկցիան բավարարում է $|f(x)|\leq|\sin x|$ անհավասարությանը: Ապացուցել, որ $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leq 1$:

1110. Գտնել $f'(a)$-ն, եթե $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, որտեղ $\varphi(x)$ ֆունկցիան $x=a$ կետում անընդհատ է:

1111. Ապացուցել, որ եթե $\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $x=a$ կետում և $\varphi(a)\neq 0$, ապա $f(x)=|x-a|\varphi(x)$ ֆունկցիան a կետում դիֆերենցելի չէ: Հաշվել $f'_-(a)$ և $f'_+(a)$ միակողմանի ածանցյալները:

1112. Կառուցել անընդհատ ֆունկցիա, որը տրված $a_1,a_2,...,a_n$ կետերում (և միայն այդտեղ) դիֆերենցելի չէ:

1113. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{երբ } x\text{-ը ռացիոնալ է}, \\ 0, \text{երբ } x\text{-ն իռացիոնալ է} \end{cases}$$

ֆունկցիան դիֆերենցելի է միայն $x=0$ կետում:

1114. Ապացուցել, որ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, x\neq 0, \\ 0, x=0 \end{cases}$$

ֆունկցիան $x=0$ կետում դիֆերենցելի է, բայց այդ կետի ոչ մի շրջակայքում դիֆերենցելի չէ:

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի $f'_-(x)$ և $f'_+(x)$ միակողմանի ածանցյալները այն կետերում, որտեղ f-ը դիֆերենցելի չէ (1115-1125).

1115. $f(x)=[x]\sin\pi x$:

1116. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$:

1117. $f(x)=\begin{cases} x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, x\neq 0, \\ 0, x=0: \end{cases}$

1118. $f(x)=\begin{cases} arctg\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, x=0: \end{cases}$

1119. $f(x)=\begin{cases} arctg\dfrac{1+x}{1-x}, x\neq 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, x=1: \end{cases}$

1120. $f(x)=\begin{cases} (x-4)arctg\dfrac{1}{x-4}, x\neq 4, \\ 0, x=4: \end{cases}$

1121. $f(x)=\left|\ln|x|\right|$:

1122. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$:

1123. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2^{\frac{1}{x}}-1}, x\neq 0, \\ 0, x=0: \end{cases}$

1124. $f(x)=\arcsin e^{-x^2}$:

1125. $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$:

Գտնել $f'_-(0)$-ն և $f'_+(0)$-ն (1126-1129).

1126. $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$:

1127. $f(x)=\begin{cases} x, x\leq 0, \\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, x>0: \end{cases}$

1128. $f(x)=\begin{cases} 2x, x\leq 0, \\ \ln\left(1+\sqrt[5]{x^7}\right), x>0: \end{cases}$

1129. $f(x)=\begin{cases} 1+e^{\frac{1}{x}}, x<0, \\ \sqrt{1+\sqrt[3]{x^4}}, x\geq 0: \end{cases}$

1130. Ապացուցել, որ

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0 \end{cases}$$

ֆունկցիան անընդհատ է $x=0$ կետում, բայց այդ կետում չունի միակողմանի ածանցյալներ:

1131. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x=x_0$ կետում, $f(x_0)\neq 0$, իսկ $g(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ է, բայց՝ ոչ դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ $f(x)g(x)$ ֆունկցիան այդ կետում դիֆերենցելի չէ:

1132. Ի՞նչ կարելի է ասել $x=x_0$ կետում $f(g(x))$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության մասին, եթե

ա) $f(y)$-ն $y_0=g(x_0)$ կետում դիֆերենցելի է, $g(x)$-ն $x=x_0$ կետում դիֆերենցելի չէ;

բ) $f(y)$-ն y_0-ում դիֆերենցելի չէ, $g(x)$-ն x_0-ում դիֆերենցելի է;

գ) $f(y)$-ն y_0-ում դիֆերենցելի չէ, $g(x)$-ն x_0-ում դիֆերենցելի չէ:

1133. Դիցուք $f(y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $y=0$ կետում և

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0: \end{cases}$$

Ապացուցել, որ $f(g(x))$ ֆունկցիան $x=0$ կետում ունի զրոյի հավասար ածանցյալ:

1134. Կարելի՞ է արդյոք ֆունկցիաների միջև անհավասարությունն ածանցել. $f(x)\leq g(x)$ անհավասարությունից հետևու՞մ է արդյոք $f'(x)\leq g'(x)$ անհավասարությունը:

Հաշվել գումարը (1135-1138).

1135. ա) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$;

բ) $1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$:

1136. ա) $\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin nx$;

բ) $\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx$:

1137. ա) $\cos x+3\cos 3x+\cdots+(2n-1)\cos(2n-1)x$;

բ) $\sin x+3\sin 3x+\cdots+(2n-1)\sin(2n-1)x$:

1138. $\dfrac{1}{2}tg\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}tg\dfrac{x}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}tg\dfrac{x}{2^n}$:

Ցուցում: Օգտվել $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ նույնությունից:

Ապացուցել, որ տրված հավասարումից որոշվող $y=y(x)$ ֆունկցիան միակն է և գտնել y'_x-ը (1139-1140).

1139. $y^3+3y=x$: 1140. $y-\varepsilon\sin y=x$ $(0\le\varepsilon<1)$:

1141. Ստուգել, որ $x=2t+|t|$ և $y=5t^2+4t|t|$ հավասարումներից որոշվող $y=y(x)$ ֆունկցիան պարամետրի $t=0$ արժեքի դեպքում դիֆերենցելի է, բայց նրա ածանցյալը չի կարելի հաշվել $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$ բանաձևով:

1142. Ապացուցել n-րդ կարգի որոշիչի ածանցման հետևյալ կանոնը.

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

1143. Հաշվել $F'(x)$-ը, եթե

ա) $F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$; բ) $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$:

1144. Գտնել y'_x ածանցյալը, եթե ա) $r=a\varphi$; բ) $r=a(1+\cos\varphi)$; գ) $r=ae^{m\varphi}$, որտեղ r-ը և φ-ն $(x;y)$ կետի բևեռային կոորդինատներն են:

1145. Պարզել, թե $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ո՞ր կետերում ունի ուղղաձիգ շոշափող:

1146. Գտնել միևնույն շառավղով երկու շրջանագծերի կազմած անկյունը, եթե այդ շրջանագծերից մեկի կենտրոնը գտնվում է մյուս շրջանագծի վրա:

1147. Ցույց տալ, որ $y=|x|^{\alpha}$ կորը շոշափում է

ա) y-ների առանցքը, երբ $0<\alpha<1$;

բ) x-երի առանցքը, երբ $1<\alpha<\infty$:

1148. Ապացուցել, որ $r = ae^{m\varphi}$ (a-ն և m-ը հաստատուններ են) լոգարիթմական գալարագծի շոշափողի և շոշափման կետի շառավիղ-վեկտորի կազմած անկյունը հաստատուն է:

1149. Ապացուցել, որ հիպերբոլների հետևյալ ընտանիքները՝

$$x^2 - y^2 = a,\ xy = b,$$

կազմում են օրթոգոնալ ցանց. այդ ընտանիքներից մեկին պատկանող ցանկացած հիպերբոլ մյուս ընտանիքի ցանկացած հիպերբոլի հետ հատվում է ուղիղ անկյան տակ:

1150. Ապացուցել, որ պարաբոլների

$$y^2 = 4a(a - x),\ y^2 = 4b(b + x)\ \ (a > 0, b > 0)$$

ընտանիքները կազմում են օրթոգոնալ ցանց:

1151. Գտնել ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալը.

ա) $y = \arcsin x$; բ) $y = arctgx$:

1152. Գտնել $f^{(n)}(a)$-ն, եթե $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, որտեղ $\varphi(x)$ ֆունկցիան a կետի շրջակայքում ունի $(n-1)$-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալ:

1153. Ապացուցել, որ

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0 \end{cases} \quad n \in N,$$

ֆունկցիան $x = 0$ կետում ունի մինչև n-րդ կարգի ածանցյալները և չունի $(n+1)$-րդ կարգի ածանցյալ:

1154. Ստուգել, որ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0, \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է և հաշվել $f^{(n)}(0)$-ն $(n \in N)$:

1155. Ստուգել, որ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x > 0, \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է և հաշվել $f^{(n)}(0)$-ն, $n \in N$:

1156. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան $(-\infty; x_0]$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի է: a, b, c թվերի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$g(x) = \begin{cases} f(x), x \leq x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, x > x_0 \end{cases}$$

ֆունկցիան կլինի երկու անգամ դիֆերենցելի:

1157. Ստուգել, որ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \dfrac{d^2}{dx^2}\sqrt{ax^2+bx+c}=0 \quad (a>0)$:

1158. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]^{(n)}=e^{ax}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$;

բ) $\left[e^{ax}\cos(bx+c)\right]^{(n)}=e^{ax}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi)$;

որտեղ $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$:

1159. Դիցուք $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$: Ապացուցել, որ $f(x)$-ը ռացիոնալ ֆունկցիա չէ. չի կարող ներկայացվել որպես երկու հանրահաշվական բազմանդամների հարաբերություն:

Գ

1160. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր միջակայքում և $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$: Այստեղից հետևու՞մ է արդյոք, որ

ա) $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty$; բ) $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\left|f'(x)\right|=+\infty$:

1161. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր միջակայքում և $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty$: Հետևու՞մ է արդյոք այդտեղից, որ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$:

1162. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;+\infty)$ բազմության վրա և գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ վերջավոր սահման: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $f'(x)$-ը $+\infty$-ում ունի վերջավոր կամ անվերջ սահման:

1163. Դիցուք $f(x)$ սահմանափակ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;+\infty)$ բազմության վրա և գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ վերջավոր սահման: Հետևու՞մ է արդյոք այդտեղից, որ գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ վերջավոր կամ անվերջ սահման:

1164. Կառուցել ֆունկցիա, որը լինի դիֆերենցելի $0;-1;1$ կետերում և խզվող՝ $[-2;2]$ հատվածի մնացած կետերում:

1165. Ապացուցել, որ

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}}, |x|<1, \\ 0, |x|\geq 1 \end{cases}$$

ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է:

Կառուցել անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա, որը $(0;\varepsilon)$ միջակայքում դրական է, իսկ այդ միջակայքից դուրս՝ զրո:

1166. $f(x)$ ֆունկցիան կանվանենք *ողորկ* x_0 կետում, եթե

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h}=0:$$

Ապացուցել, որ

ա) եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, ապա այդ կետում այն ողորկ է;

բ) կառուցել ֆունկցիա, որը տվյալ կետում ողորկ է, բայց դիֆերենցելի չէ:

1167. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է x_0 կետում, $\alpha_n<x_0<\beta_n$ $(n\in N)$ և $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$:

1168. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է x_0 կետում, $x_0<\alpha_n<\beta_n$ $(n\in N)$ և $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$:

ա) Կառուցել x_0 կետում դիֆերենցելի ֆունկցիա, որի համար հնարավոր լինի խնդրի պայմաններին բավարարող α_n և β_n հաջորդականությունները ընտրել այնպես, որ $\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$ հաջորդականությունը չզուգամիտի $f'(x_0)$-ի;

բ) ապացուցել, որ եթե $\dfrac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$:

1169. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան բավարարում է

$$f(x+y)=f(x)f(y),\quad (x,y\in R)$$

ֆունկցիոնալ հավասարմանը և դիֆերենցելի է $x=0$ կետում, ապա այն անվերջ դիֆերենցելի է ցանկացած $x\in R$ կետում և $f^{(n)}(x)=[f'(0)]^n f(x)$:

1170. Տրված է $y=(1+x)^x$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ

$$y^{(n+1)}(0)=(-1)^{n+1}n!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{y^{(k)}(0)}{k!}\cdot\frac{n-k+1}{n-k}\quad(n\in N):$$

1171. Դիցուք՝ $a_1<a_2<\cdots<a_{2n}$: Ապացուցել, որ

$$\left[\frac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_{2n-1})}{(x-a_2)(x-a_4)\cdots(x-a_{2n})}\right]'<0:$$

1172. Դիցուք $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ թվերը ցանկացած բնական k-ի դեպքում բավարարում են $\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k>0$ անհավասարությանը և

$$f(x)=\frac{1}{(1-\lambda_1x)(1-\lambda_2x)\cdots(1-\lambda_nx)}:$$

Ապացուցել, որ $f^{(k)}(0)>0$ $(k\in N)$:

1173. Դիցուք n-րդ աստիճանի $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի $x_1,x_2,\ldots,x_n$ արմատներն իրական են և միմյանցից տարբեր: Ապացուցել հավասարությունը.

$$\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\cdots+\frac{1}{P'(x_n)}=0:$$

1174. Ապացուցել հավասարությունը.

$$\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right):$$

Ապացուցել բանաձևը (1174-1175).

1175. $\frac{d^n}{dx^n}(x^n\ln x)=n!\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ $(x>0)$:

1176. $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x-S_n(x)\cos x]$,

որտեղ

$$C_n(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ,\ \ S_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}:$$

1177. Ապացուցել, որ

$$\lim_{x\to0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin^2x}{x^2}\right)=\begin{cases}0, & \text{երբ } n\text{-ը կենտ է,}\\ (-1)^k\dfrac{2^{2k-1}}{(2k)!}, & \text{երբ } n\text{-ը զույգ է:}\end{cases}$$

1178. Ստուգել, որ

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\cdot\arccos x)\ \ (m\in N)$$

ֆունկցիաները հանրահաշվական բազմանդամներ են (Չեբիշևի բազմանդամներ) և բավարարում են

$\left(1-x^2\right)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0$ դիֆերենցիալ հավասարմանը:

1179. Ապացուցել, որ Լեժանդրի բազմանդամները՝

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\left[\left(x^2-1\right)^m\right]^{(m)}\ \ (m=0,1,2,\ldots),$$

բավարարում են

$\left(1-x^2\right)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0$ դիֆերենցիալ հավասարմանը:

Ցուցում: $\left(x^2-1\right)u'=2mxu$ հավասարությունը, որտեղ $u=\left(x^2-1\right)^m$, ածանցել $m+1$ անգամ:

1180. Լագերի բազմանդամները սահմանվում են հետևյալ բանաձևով.

$$L_m(x)=e^x\left(x^m e^{-x}\right)^{(m)}\ \ (m=0,1,2,\ldots):$$

Ապացուցել, որ $L_m(x)$-ը բավարարում է հետևյալ հավասարմանը.

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL(x)=0:$$

Ցուցում: Օգտագործել $xu'=(m-x)u$ հավասարությունը, որտեղ $u=x^m e^{-x}$:

1181. Դիցուք $y=f(u)$ և $u=\varphi(x)$ ֆունկցիաները n անգամ դիֆերենցելի են: Ապացուցել, որ

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u)$$

ներկայացման մեջ $A_k(x)$ գործակիցները f ֆունկցիայից կախված չեն:

1182. Ապացուցել $y=f\left(x^2\right)$ ֆունկցիայի ածանցման հետևյալ կանոնը.

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(2x)^n f^{(n)}\left(x^2\right)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}\left(x^2\right)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}\left(x^2\right)+\cdots:$$

1183. Հերմիտի բազմանդամները սահմանվում են

$$H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(m)}\ \ (m=0,1,2,\ldots)$$

բանաձևով: Ապացուցել, որ $H_m(x)$-ը բավարարում է

$H_m''(x)-2xH_m'(x)+2mH_m(x)=0$ դիֆերենցիալ հավասարմանը:

Ցուցում: Օգտագործել $u' = -2xu$ հավասարությունը, որտեղ $u = e^{-x^2}$

1184. Ապացուցել, որ եթե $P_1(x)$ և $P_2(x)$ n-րդ աստիճանի բազմանդամների արժեքները $n+1$ կետերում համընկնում են,ապա $P_1(x) \equiv P_2(x)$:

1185. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է R-ի վրա և $x_0, x_1, ..., x_n$-ը իրարից տարբեր իրական թվեր են: Ապացուցել, որ Լագրանժի ինտերպոլացիոն բազմանդամը՝

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \text{-ը,}$$

միակ n-րդ աստիճանի բազմանդամն է, որը բավարարում է $L_n(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0,1,...,n)$ պայմաններին:

1186. Դիցուք $k_1, k_2, ..., k_n$-ը բնական թվեր են, $x_1, x_2, ..., x_n$-ը՝ իրարից տարբեր իրական թվեր, իսկ $P_1(x)$-ը և $P_2(x)$-ը

$$P_1^{(i)}(x_j) = P_2^{(i)}(x_j) \quad (j = 1,2,...,n, i = 0,...,k_j - 1)$$

պայմաններին բավարարող $(k_1 + k_2 + \cdots + k_n - 1)$-րդ աստիճանի բազմանդամներ են: Ապացուցել, որ $P_1(x) \equiv P_2(x)$:

1187. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան $x_1, x_2, ..., x_n$ կետերում համապատասխանաբար $k_1, k_2, ..., k_n$ անգամ դիֆերենցելի է: Ապացուցել, որ գոյություն ունի m-րդ կարգի $(m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n - 1)$ միակ $H_m(x)$ բազմանդամ, որը բավարարում է

$$H_m^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j) \quad (j = 1,2,...,n,\ i = 0,1,...,k_j - 1)$$

պայմաններին (Հերմիտի ինտերպոլացիոն բազմանդամ):

1188. Ընտրել ամենացածր աստիճանի $P(x)$ բազմանդամն այնպես, որ $f(x)$ ֆունկցիան լինի 1) անընդհատ; 2) դիֆերենցելի.

ա) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x}{4 + x^2}, |x| \ge 1, \\ P(x), |x| < 1; \end{cases}$ բ) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-2x}, |x| \le 1, \\ P(x), |x| > 1: \end{cases}$

1189. Ապացուցել, որ Ռիմանի ֆունկցիան ոչ մի կետում դիֆերենցելի չէ:

1190. Ապացուցել, որ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q^3}, \text{երբ } x = \dfrac{p}{q} \\ 0, \text{երբ } x \in I \end{cases}$$ (անկրճատելի կոտորակ է, $q \in N$)

ֆունկցիան ցանկացած $k \in N \setminus \{n^2 : n \in N\}$ թվի համար $x = \sqrt{k}$ կետում դի-ֆերենցելի է:

1191. Կառուցել $f : R \to R$ հակադարձելի ֆունկցիա, որն x_0 կետում դիֆե-րենցելի է, $f'(x_0) \neq 0$, իսկ f^{-1} հակադարձ ֆունկցիան $y_0 = f(x_0)$ կետում դի-ֆերենցելի չէ:

Գլուխ 6

Դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական թեորեմները, ածանցյալի կիրառությունները

Ռ ո լ լ ի թ ե ո ր ե մ ը : Եթե $f \in C[a;b]$ ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի է և $f(a)=f(b)$, ապա գոյություն ունի $\xi \in (a;b)$ կետ, որի համար $f'(\xi)=0$:

Լ ա գ ր ա ն ժ ի թ ե ո ր ե մ ը (վերջավոր աճերի բանաձևը): Եթե $f \in C[a;b]$ ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի է, ապա գոյություն ունի $\xi \in (a;b)$ կետ, որի համար

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a):$$

Կ ո շ ի ի թ ե ո ր ե մ ը : Եթե $f,g \in C[a;b]$ ֆունկցիաները $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի են և $g'(x)\neq 0$, ապա գոյություն ունի $\xi \in (a;b)$ կետ, այնպիսին, որ

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}:$$

Թ ե յ լ ո ր ի բ ա ն ա ձ և ը : Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում n անգամ դիֆերենցելի է:

$$P_n(x_0,x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

հանրահաշվական բազմանդամը կոչվում է x_0 կետում f ֆունկցիայի n-րդ կարգի ***Թեյլորի բազմանդամ***.

Թեյլորի բանաձևը հետևյալն է.

$$f(x)=P_n(x_0,x)+r_n(x_0,x),$$

որտեղ $r_n(x_0,x)=f(x)-P_n(x_0,x)$-ը կոչվում է մնացորդային անդամ:

Եթե f-ն x_0 կետում n անգամ դիֆերենցելի է, ապա

$r_n(x_0,x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ (մնացորդային անդամի Պեանոյի ներկայացում):

Եթե $f \in C^n[x_0;x]$ և $(x_0;x)$ միջակայքում f-ն ունի $(n+1)$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, ապա գոյություն ունի $\xi \in (x_0;x)$ կետ, այնպիսին, որ

1) $r_n(x_0,x)=\dfrac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$ (մնացորդային անդամի Կոշիի ներկայացում);

2) $r_n(x_0,x)=\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ (մնացորդային անդամի Լագրանժի ներկայացում):

Լ ո պ ի տ ա լ ի կ ա ն ո ն ը ։ Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են և դիֆերենցելի $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում, ընդ որում՝ $g'(x)\neq 0$։ Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ վերջավոր կամ անվերջ ($-\infty$ կամ $+\infty$) սահմանը և

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \text{ կամ } \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

ապա

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A:$$

Ֆ ու ն կ ց ի ա յ ի հ ե տ ա զ ո տ ու մ ը ։ Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $(a;b)$ միջակայքում և դիֆերենցելի է։

Թ ե ո ր ե մ 1: f-ն $(a;b)$-ում կլինի հաստատուն այն և միայն այն դեպքում, երբ $f'(x)\equiv 0$ ։

Թ ե ո ր ե մ 2: f-ն $(a;b)$-ում չնվազող է (չաճող է) այն և միայն այն դեպքում, երբ միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x)\geq 0$ (≤ 0)։

Ու ռ ու ց ի կ ֆ ու ն կ ց ի ա ն ե ր ։ Դիցուք X-ը կապակցված բազմություն է։ $f: X\to R$ ֆունկցիան կոչվում է *ուռուցիկ*, եթե ցանկացած $x_1,x_2\in X$ կետերի և $0\leq\alpha\leq 1$ թվի համար տեղի ունի

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

անհավասարությունը։ Եթե $x_1\neq x_2$, $\alpha\neq 0$ և $\alpha\neq 1$ դեպքում անհավասարությունը խիստ է, ապա f-ը կոչվում է *խիստ ուռուցիկ ֆունկցիա*. f-ը կանվանենք *գոգավոր ֆունկցիա*, եթե $-f$-ը ուռուցիկ է։

Թ ե ո ր ե մ 3 ։ Որպեսզի $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի f ֆունկցիան լինի ուռուցիկ (գոգավոր), անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f'(x)$ ֆունկցիան լինի չնվազող (չաճող)։

Հ ե տ և ա ն ք ։ $(a;b)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիան կլինի ուռուցիկ (գոգավոր) այն և միայն այն դեպքում, երբ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում $f''(x)\geq 0$ (≤ 0)։

Շ ր ջ մ ա ն կ ե տ ։ Դիցուք f-ն x_0 կետի U_{x_0} շրջակայքում դիֆերենցելի է։ Նշանակենք $U_{x_0}^{-}=\{x\in U_{x_0}: x<x_0\}$, $U_{x_0}^{+}=\{x\in U_{x_0}: x>x_0\}$։ Եթե $U_{x_0}^{-}$ և $U_{x_0}^{+}$ կիսաշրջակայքերից մեկում ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է, իսկ մյուսում՝ խիստ գոգավոր, ապա x_0-ն անվանում են *շրջման կետ*.

Եթե x_0 շրջման կետում f-ը երկու անգամ դիֆերենցելի է, ապա $f''(x_0)=0$ ։

Է ք ս տ ր ե մ ու մ ն ե ր ։ $x_0\in(a;b)$ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի *լոկալ մինիմումի* (*մաքսիմումի*) կետ, եթե գոյություն ունի x_0-ի U_{x_0} շրջակայք այնպիսին, որ

$$x\in U_{x_0}\Rightarrow f(x)\geq f(x_0)\ \ (f(x)\leq f(x_0)):$$

Եթե այս անհավասարությունը խիստ է, երբ $x\neq x_0$, ապա x_0-ն անվանում են խիստ մինիմումի (մաքսիմումի) կետ։ Լոկալ մինիմումի և մաքսիմումի կետերը միասին կոչվում են ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետեր։

Ֆ ե ր մ ա յ ի թ ե ո ր ե մ ը (էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը): Եթե x_0-ն f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ է և այդ կետում f-ը դիֆերենցելի է, ապա $f'(x_0)=0$:

Թ ե ո ր ե մ 4 (Էքստրեմումի բավարար պայմանը): Դիցուք f-ն x_0 կետի U_{x_0} շրջակայքում անընդհատ է և ամենուրեք (բացի գուցե x_0 կետից) ունի վերջավոր ածանցյալ:

Ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

ա) $\forall x \in U_{x_0}^- \ (f'(x)>0)$ և $\forall x \in U_{x_0}^+ \ (f'(x)<0) \Rightarrow x_0$-ն խիստ մաքսիմումի կետ է;

բ) $\forall x \in U_{x_0}^- \ (f'(x)<0)$ և $\forall x \in U_{x_0}^+ \ (f'(x)>0) \Rightarrow x_0$-ն խիստ մինիմումի կետ է:

Թ ե ո ր ե մ 5: Դիցուք f-ն x_0 կետի U_{x_0} շրջակայքում n անգամ դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ $f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ և $f^{(n)}(x_0)\neq 0$: Եթե n-ը կենտ է, ապա f-ն x_0 կետում էքստրեմում չունի: Եթե n-ը զույգ է, ապա $f^{(n)}(x_0)>0$ դեպքում x_0-ն խիստ մինիմումի կետ է, իսկ $f^{(n)}(x_0)<0$ դեպքում՝ խիստ մաքսիմումի:

Դիցուք՝ $f\in C[a;b]$: $x_0\in[a;b]$ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ, եթե $f'(x_0)=0$ կամ f-ն x_0 կետում դիֆերենցելի չէ: Ֆունկցիայի փոքրագույն (մեծագույն) արժեքը ստանալու համար բավական է համեմատել նրա արժեքները կրիտիկական կետերում, ինչպես նաև a և b կետերում, և ընտրել այդ արժեքներից փոքրագույնը (մեծագույնը):

Ա ս ի մ պ տ ո տ ն ե ր: $y=c_0+c_1x$ ուղիղը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի *ասիմպտոտ* (*թեք ասիմպտոտ*) x-ը $-\infty$-ի ($+\infty$-ի) ձգտելիս, եթե $f(x)=c_0+c_1x+o(1)$, երբ $x\to-\infty$ $(+\infty)$: Այս դեպքում

$$c_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ c_0=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-c_1x]:$$

Եթե $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\infty\right)$, ապա $x=a$ ուղիղն անվանում են f ֆունկցիայի *ուղղաձիգ ասիմպտոտ*:

Ա

1192. Ստուգել, որ $f(x)=|x|$ ֆունկցիան անընդհատ է $[-1;1]$ հատվածի վրա, ծայրակետերում ընդունում է հավասար արժեքներ, սակայն գոյություն չունի $\xi\in[-1;1]$ կետ, որի համար $f'(\xi)=0$: Չի՞ հակասում արդյոք այս փաստը Ռոլլի թեորեմին:

1193. Տրված է

$$f(x)=\begin{cases}x, \text{երբ } 0<x\le 1,\\ 1, \text{երբ } x=0\end{cases}$$

ֆունկցիան: Համոզվել, որ այն $[0;1]$ հատվածի ծայրակետերում ունի հավասար արժեքներ, $(0;1)$ միջակայքում դիֆերենցելի է, սակայն $f'(x)$-ը ոչ մի կետում զրո չի դառնում: Պարզել Ռոլլի թեորեմի հետ թվացյալ հակասության պատճառը:

1194. Ճշմարի՞տ է արդյոք վերջավոր աճերի բանաձևը $y=\frac{1}{x}$ $(x\in[a;b])$ ֆունկցիայի համար, եթե ա) $a\cdot b>0$; բ) $a\cdot b<0$: Պատասխանը հիմնավորել:

1195. Ստուգել, որ $[-1;1]$ միջակայքում $f(x)=x^2$ և $g(x)=x^3$ ֆունկցիաների համար Կոշիի թեորեմի կիրառումը բերում է սխալ արդյունքի և պարզել պատճառը:

1196. Դիցուք $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$: Ապացուցել, որ $f'(x)=0$ հավասարման բոլոր արմատներն իրական են և ընկած են $(0;4)$ միջակայքում:

1197. Ապացուցել, որ եթե $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի համար x_0-ն բազմապատիկ արմատ է, ապա այն արմատ է նաև $P'(x)$-ի համար:

1198. Ապացուցել, որ եթե $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի բոլոր արմատներն իրական են, ապա $P'(x)$-ի բոլոր արմատները նույնպես իրական են:

1199. Տրված է $y=x^2$ ֆունկցիան: Համոզվել, որ ցանկացած $[a;b]$ հատվածի համար վերջավոր աճերի բանաձևում առկա ξ կետը միակն է և գտնել այն:

1200. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիայի համար վերջավոր աճերի բանաձևը ներկայացված է

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

տեսքով: Գտնել θ-ի կախումն x-ից և Δx-ից, եթե

ա) $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$; բ) $f(x)=\frac{1}{x}$; գ) $f(x)=e^x$:

1201. $y=x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա նշել այն $(\xi;\xi^3)$ կետը, որով տարված շոշափողը զուգահեռ է $A(-1;-1)$ և $B(2;8)$ կետերը միացնող լարին:

1202. Կառուցել (գրաֆիկորեն) $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիա, որի համար գոյություն ունի Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևում առկա
ա) ճիշտ երկու ξ կետ; բ) ճիշտ երեք ξ կետ:

1203. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$; բ) $|arctgx-arctgy|\le|x-y|$;

գ) $py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y) \quad (p>1, 0<y<x)$;

դ) $\frac{x-y}{x}<\ln\frac{x}{y}<\frac{x-y}{y}$ $(0<y<x)$:

1204. Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$ միջակայքում $f'(x)\equiv 0$, ապա f-ն այդ միջակայքում հաստատուն է:

1205. Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$ միջակայքում $f'(x)\equiv g'(x)$, ապա այդ միջակայքում f և g ֆունկցիաների տարբերությունը հաստատուն է:

1206. Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$; բ) $arctgx+arctg\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x$ $(x\neq 0)$;

գ) $2arctgx+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn} x$ $(|x|\geq 1)$;

դ) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$ $\left(|x|\leq\frac{1}{2}\right)$:

1207. Ստուգել, որ $f(x)=arctg\frac{1+x}{1-x}$ և $g(x)=arctgx$ ֆունկցիաները $(-\infty;1)$ և $(1;+\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա տարբերվում են համապատասխան հաստատուն գումարելիով: Գտնել այդ հաստատունները:

1208. Ապացուցել, որ R-ի վրա դիֆերենցելի միակ ֆունկցիան, որի ածանցյալը հաստատուն է՝ $f'(x)\equiv k$, $f(x)=kx+b$ գծային ֆունկցիան է:

1209. Ստուգել, որ $x_0=0$ կետի շրջակայքում ցանկացած n բնական թվի համար ճշմարիտ են Թեյլորի հետևյալ վերլուծությունները.

ա) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

բ) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$;

գ) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$;

դ) $shx=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$;

ե) $chx=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$;

զ) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$;

ե) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$:

1210. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան զույգ է, ապա $x_0=0$ կետի շրջակայքում նրա Թեյլորի բազմանդամը բաղկացած է x-ի միայն զույգ աստիճաններից, իսկ եթե f-ը կենտ է՝ x-ի միայն կենտ աստիճաններից:

1211. Վերլուծել $P(x)=1-3x+x^3$ բազմանդամն ըստ $(x+1)$-ի աստիճանների.
$P(x)=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)^3$:

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բազմանդամն x_0 կետի շրջակայքում (1212-1223).

1212. $f(x)=e^{2x}$, $x_0=0$:

1213. $f(x)=xe^{-x}$, $x_0=0$:

1214. $f(x)=e^{x^2}$, $x_0=0$:

1215. $f(x)=2\sin^2 2x$, $x_0=0$:

1216. $f(x)=\ln\sqrt{x}$, $x_0=1$:

1217. $f(x)=(1-x)\ln x$, $x_0=1$:

1218. $f(x)=x^3 ch3x$, $x_0=0$:

1219. $f(x)=e^x-shx$, $x_0=0$:

1220. $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$, $x_0=0$:

1221. $f(x)=\ln(1-x^3)$, $x_0=0$:

1222. $f(x)=a^x$, $x_0=0$:

1223. $\Delta_h^n(f+g)=\Delta_h^n(f)+\Delta_h^n(g)$, $x_0=1$:

1224. Հետևյալ մոտավոր բանաձևերում գնահատել բացարձակ սխալանքը.

ա) $\Delta_h^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left(x+\frac{n-2k}{2}h\right)$, $0\le x\le 1$;

բ) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$, $|x|\le\frac{1}{2}$;

գ) $tgx\approx x+\frac{x^3}{3}$, $|x|\le 0,1$;

դ) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $0\le x\le 1$:

1225. Պարզել, թե x-ի ինչ արժեքների դեպքում $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$ բանաձևում բացարձակ սխալանքը չի գերազանցի $0,0001$-ը:

1226. Ապացուցել հետևյալ բանաձևը.

$$\sqrt[n]{a^n+x}=a+\frac{x}{na^{n-1}}-r,\ a>0,\ x>0,$$

որտեղ $0<r<\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}}$:

1227. Թեյլորի բանաձևի միջոցով գտնել հետևյալ արտահայտություններից յուրաքանչյուրի մոտավոր արժեքը: Սխալանքը գնահատելու համար օգտագործել մնացորդային անդամի Լագրանժի ներկայացումը.

ա) $\sqrt[3]{30}$; բ) $\sqrt[5]{250}$; գ) $\sqrt[7]{e}$; դ) $\sin 18^\circ$; ե) $\ln 1{,}01$; զ) $1{,}1^{1,2}$:

1228. Հաշվել՝

ա) e-ն՝ 10^{-6}-ի ճշտությամբ; բ) $sh0{,}5$-ը՝ 10^{-3}-ի ճշտությամբ;

գ) $\sin 1^\circ$-ը՝ 10^{-5}-ի ճշտությամբ; դ) $\sqrt{5}$-ը՝ 10^{-4}-ի ճշտությամբ:

Օգտվելով վարժություն 1209-ում ստացված վերլուծություններից՝ հաշվել սահմանը (1229-1240).

1229. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$: 1230. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$:

1231. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)-sh^2x}{1-e^{-x^2}}$: 1232. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x+3^{-x}-2}{x^2}$:

1233. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$: 1234. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$:

1235. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$:

1236. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$:

1237. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$: 1238. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-ctgx\right)$:

1239. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$: 1240. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sh(tgx)-x}{x^3}$:

Գտնել ֆունկցիայի նշված n-րդ կարգի Թեյլորի բազմանդամը $x_0=0$ կետի շրջակայքում (1241-1248).

1241. $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $n=4$: 1242. $f(x)=e^{2x-x^2}$, $n=5$:

1243. $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$, $n=4$: 1244. $f(x)=\ln\cos x$, $n=6$:

1245. $f(x)=\sin\sin x$, $n=3$: 1246. $f(x)=tgx$, $n=5$:

1247. $f(x)=arctgx$, $n=10$: 1248. $f(x)=\arcsin x$, $n=10$:

1249. Գտնել $f(x)=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի $x_0=1$ կետում Թեյլորի վերլուծության առաջին երեք անդամները:

Օգտվելով Լոպիտալի կանոնից՝ հաշվել սահմանը (1250-1291).

1250. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$: 1251. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx-\cos x}{x^2}$: 1252. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$:

1253. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x-4tgx}{\sin 4x-4\sin x}$: 1254. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-arctgx}{\ln(1+x^3)}$:

1255. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$: 1256. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx+\dfrac{2}{2x-\pi}\right)$:

1257. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xctgx-1}{x^2}$: 1258. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$:

1259. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$: 1260. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$:

1261. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$: 1262. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$:

1263. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$: 1264. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$:

1265. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$: 1266. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sin x-\cos x}{x^4}$:

1267. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$: 1268. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$:

1269. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$: 1270. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$:

1271. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a}{e^x}$: 1272. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}\quad(a>0)$:

1273. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$: 1274. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(tg\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$:

1275. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2 x\right)$: 1276. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$:

1277. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$: 1278. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$:

1279. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

1280. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}$:

1281. $\lim_{x\to +\infty}(thx)^x$:

1282. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

1283. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{arctgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

1284. $\lim_{x\to +\infty} x\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{x}\right)$:

1285. $\lim_{x\to +0} x\ln\ln\frac{1}{x}$:

1286. $\lim_{x\to +0}\sin x\cdot\ln x$:

1287. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$:

1288. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{chx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

1289. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln chx}{\sqrt[m]{chx}-\sqrt[n]{chx}}$:

1290. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{cthx}$:

1291. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{thx}-\frac{1}{tgx}\right)$:

1292. Թույլատրելի՞ է արդյոք Լոպիտալի կանոնի կիրառումը հետևյալ օրինակներում.

ա) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;

բ) $\lim_{x\to \infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$;

գ) $\lim_{x\to 0}\frac{xchx}{1+e^{-x}}$;

դ) $\lim_{x\to \infty}\frac{x}{x+\sin x}$:

Գտնել ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը (1293-1304).

1293. $y=x^2e^{-x}$:

1294. $y=\sqrt[3]{x^2}(x-2)^3$:

1295. $y=\frac{3x-7}{(x^2-1)^2}$:

1296. $y=\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$:

1297. $y=arctgx-\ln x$:

1298. $y=x-\sin 2x$:

1299. $y=x^x$:

1300. $y=x^{\frac{1}{x}}$:

1301. $y=x^2-\ln x^2$:

1302. $y=\frac{\pi x}{2}-x\,arcctgx$:

1303. $y=\frac{x^2}{2^x}$:

1304. $y=\frac{\ln x}{x^2}$:

1305. Դիցուք f և g ֆունկցիաները $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի են: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ

ա) $\forall x\in(a;b)\ (f(x)>g(x))\Rightarrow\forall x\in(a;b)\ (f'(x)>g'(x))$;

բ) $\forall x\in(a;b)\ (f'(x)>g'(x))\Rightarrow\forall x\in(a;b)\ (f(x)>g(x))$:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

1306. Ապացուցել հետևյալ պնդումը. եթե f և g ֆունկցիաները $[x_0;b)$ $(b\le+\infty)$ միջակայքում դիֆերենցելի են, $f(x_0)=g(x_0)$ և ցանկացած $x\in(x_0;b)$ կետում $f'(x)>g'(x)$, ապա $(x_0;b)$ միջակայքում ամենուրեք $f(x)>g(x)$:

1307. Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $e^x>1+x\ \ (x\neq0)$;

բ) $e^x>e\cdot x\ \ (x>1)$;

գ) $\sin x<x\ \ (x>0)$;

դ) $tgx>x\ \ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

ե) $\cos x>1-\frac{x^2}{2}\ \ (x>0)$;

զ) $\ln x<x-1\ \ (x>1)$:

Գտնել ֆունկցիայի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը: Նշել շրջման կետերը (1308-1316).

1308. $y=3x^2-x^3$:

1309. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}\ \ (a>0)$:

1310. $y=x+x^{\frac{5}{3}}$:

1311. $y=\sqrt{1+x^2}$:

1312. $y=x+\sin x$:

1313. $y=e^{-x^2}$:

1314. $y=\ln(1+x^2)$:

1315. $y=x\cdot\sin(\ln x)$:

1316. $y=x^x$:

1317. Ցույց տալ, որ $x^\alpha\ (\alpha>1)$, e^x, $x\ln x$ ֆունկցիաները $(0;+\infty)$ միջակայքում ուռուցիկ են, իսկ $x^\alpha\ (0<\alpha<1)$ և $\ln x$ ֆունկցիաները՝ գոգավոր:

1318. Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները և մեկնաբանել դրանք երկրաչափորեն.

ա) $\frac{1}{2}\left(x^{\alpha}+y^{\alpha}\right)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\alpha}$ $\left(x, y>0, x \neq y, \alpha>1\right)$;

բ) $\frac{e^{x}+e^{y}}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x \neq y)$;

գ) $x \ln x+y \ln y>(x+y) \ln \frac{x+y}{2}$ $(x, y>0, x \neq y)$:

Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը և պարզել՝ էքստրեմումի կետեր են դրանք, թե ոչ (1319-1328).

1319. $y=2+x-x^{2}$:

1320. $y=(x-1)^{3}$:

1321. $y=(x-1)^{4}$:

1322. $y=x^{m}(1-x)^{n}$ $(m, n \in N)$:

1323. $y=\cos x$:

1324. $y=chx$:

1325. $y=\cos x+chx$:

1326. $y=(x+1)^{10} \cdot e^{-x}$:

1327. $y=|x|$:

1328. $y=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$:

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և հաշվել էքստրեմալ արժեքները (1329-1342).

1329. $y=x^{3}-6x^{2}+9x-4$:

1330. $y=2x^{2}-x^{4}$:

1331. $y=x(x-1)^{2}(x-2)^{3}$:

1332. $y=x+\frac{1}{x}$:

1333. $y=\frac{2x}{1+x^{2}}$:

1334. $y=\frac{x^{2}-3x+2}{x^{2}+2x+1}$:

1335. $y=x \cdot \sqrt[3]{x-1}$:

1336. $y=xe^{-x}$:

1337. $y=\frac{\ln^{2} x}{x}$:

1338. $y=\cos x+\frac{1}{2} \cos 2x$:

1339. $y=\frac{10}{1+\sin^{2} x}$:

1340. $y=arctgx-\frac{1}{2} \ln\left(1+x^{2}\right)$:

1341. $y=e^{x} \sin x$:

1342. $y=\left(x^{2}-3\right)e^{-x}$:

Գտնել նշված միջակայքում ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները (1343-1352).

1343. $y=2^{x}$, $x \in[-1;5]$:

1344. $y=\log_{2} x$, $x \in[1;16]$:

1345. $y=x^{4}+32x+1$, ա) $x \in[-2;0]$; բ) $x \in[-5;0]$:

1346. $y=x^{3}-6x^{2}+9x-1$, ա) $x \in[4;5]$; բ) $x \in[-1;4]$:

1347. $y=x^3-3x^2+6x-2,\ \ x\in[-4;3]$:

1348. $y=\left|x^2-3x+2\right|,\ \ x\in[-10;10]$:

1349. $y=\sqrt{2x-x^2}$:

1350. $y=\sqrt{x}\ln x,\ x\in(0;1]$:

1351. $y=\sqrt{5-4x}\ ,\ x\in[-1;1]$:

1352. $y=|x|+\dfrac{x^3}{3},\ \ x\in[-1;1]$:

Գտնել ֆունկցիայի ճշգրիտ ստորին և վերին եզրերը (1353-1357).

1353. $y=xe^{-2x},\ x\in(0;+\infty)$:

1354. $y=\dfrac{1+x^2}{1+x^4},\ x\in(0;+\infty)$:

1355. $y=e^{-x^2}\cos x^2,\ x\in R$:

1356. $y=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+10},\ x\in R$:

1357. $y=\dfrac{x^2+x\sqrt{3+x^2}}{3+x^2}$, ա) x $_0$; բ) k ; գ) $x\in[-1;1]$:

Գտնել x_n հաջորդականության մեծագույն անդամը և համոզվել, որ այդ անդամից սկսած x_n-ը նվազում է (1358-1359).

1358. $x_n=\dfrac{n^{10}}{e^n}\ \ (n\in N)$:

1359. $x_n=\sqrt[n]{n}\ \ (n\in N)$:

Գտնել ֆունկցիայի ասիմպտոտները (1360-1365).

1360. $y=\dfrac{x^2+1}{2x-1}$:

1361. $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$:

1362. $y=x-\dfrac{1}{x}$:

1363. $y=2x-xe^x$:

1364. $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$:

1365. $y=x\,arctgx$:

***

Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (1366-1409).

Ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելիս անհրաժեշտ է.

1) գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը;
2) պարզել ֆունկցիայի վարքը որոշման տիրույթի եզրային կետերում;
3) հետազոտել ֆունկցիան զույգության, կենտության և պարբերականության առումով;
4) հնարավորության դեպքում գտնել ֆունկցիայի զրոները;
5) գտնել էքստրեմումի կետերը և հաշվել ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքները (այդ թվում մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, եթե դրանք գոյություն ունեն);
6) գտնել մոնոտոնության և ուռուցիկության միջակայքերը;
7) գտնել ասիմպտոտները, եթե այդպիսիք գոյություն ունեն:

1366. $y=3x-x^3$:

1367. $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$:

1368. $y=(x+1)(x-2)^2$:

1369. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$:

1370. $y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$:

1371. $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$:

1372. $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$:

1373. $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$:

1374. $y=(x-3)\sqrt{x}$:

1375. $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{10}{3x^2}-\dfrac{1}{x-1}$:

1376. $y=\sqrt{8x^2-x^4}$:

1377. $y=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$:

1378. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$:

1379. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$:

1380. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$:

1381. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$:

1382. [illegible]:

1383. [illegible]:

1384. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$:

1385. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$:

1386. $y=\sin x+\cos^2 x$:

1387. $y=(7+2\cos x)\sin x$:

1388. $y=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$:

1389. $y=\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$:

1390. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$:

1391. $y=\sin x\cdot\sin 3x$:

1392. $y=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$:

1393. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$:

1394. $y=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$:

1395. $y=2x-tgx$:

1396. $(k=0,1,2)$:

1397. $y=(1+x^2)e^{-x^2}$:

1398. $y=x+e^{-x}$:

1399. $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$:

1400. $y=e^{-2x}\sin^2 x$:

1401. $y=\dfrac{e^x}{1+x}$:

1402. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$:

1403. $y=x^x$:

1404. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$:

1405. $y=x+arctgx$:

1406. $y=\dfrac{x}{2}+arcctgx$:

1407. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$:

1408. $y=\arccos\dfrac{1-x}{1-2x}$:

1409. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$:

***

1410. Ապացուցել, որ եթե $f(x)\geq 0$, ապա $F(x)=c\cdot f^2(x)$, $c\neq 0$, ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը համընկնում են f-ի էքստրեմումի կետերի հետ:

1411. Ապացուցել, որ եթե $\varphi(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիան աճող է, ապա f և $\varphi\circ f$ ֆունկցիաները ունեն միևնույն էքստրեմումի կետերը:

1412. Տրված են m և n դրական թվերը: Գտնել x^m+y^n արտահայտության փոքրագույն արժեքը, եթե հայտնի է, որ $x>0, y>0$ և $xy=a$ $(a=const)$:

1413. Տրված են m և n դրական թվերը: Գտնել $x^m y^n$ $(x>0, y>0)$ արտահայտության մեծագույն արժեքը, եթե $x+y=a$:

1414. Տրված S մակերեսն ունեցող ուղղանկյուններից գտնել այն, որի պարագիծը փոքրագույնն է:

1415. Տրված P պարագիծն ունեցող ուղղանկյուններից գտնել այն, որի մակերեսն ամենամեծն է:

1416. Ուղղանկյուն եռանկյան էջի և ներքնաձիգի գումարը հաստատուն է: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն այդպիսի եռանկյան սուր անկյունները, որպեսզի այն ունենա մեծագույն մակերես:

1417. Գերանի լայնակի կտրվածքը d տրամագծով շրջան է: Գերանը տաշելով պատրաստում են չորսու, որի լայնակի կտրվածքը b հիմքով և h բարձրությամբ ուղղանկյուն է: Հայտնի է, որ չորսուի ամրությունը գնահատվում է bh^2 մեծությամբ: Ի՞նչ համամասնությամբ պետք է տաշել գերանը, որպեսզի նրանից ստացվող չորսուն լինի մաքսիմալ ամրության:

1418. b հիմք և h բարձրություն ունեցող սուրանկյուն եռանկյանը ներգծված է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթը գտնվում են եռանկյան հիմքի վրա: Գտնել այդպիսի ուղղանկյան առավելագույն մակերեսը:

1419. Տրված l ծնիչն ունեցող կոներից գտնել այն, որի ծավալը մեծագույնն է:

1420. R շառավղով գնդին ներգծել գլան, որի լրիվ մակերևույթի մակերեսը լինի մեծագույնը:

1421. R շառավղով գնդին ներգծել գլան, որի ծավալը մեծագույնն է:

1422. Գտնել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$ էլիպսի մեծագույն լարը, որի մի ծայրակետը $B(0;-b)$-ն է:

1423. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին տանել այնպիսի շոշափող, որ կոորդինատների առանցքների հետ նրա հատումից առաջացած եռանկյունն ունենա փոքրագույն մակերես:

1424. a երկարությամբ հատվածի A և B ծայրակետերում տեղավորված են համապատասխանաբար S_A և S_B մոմաճոց լուսաղբյուրներ: Գտնել հատվածի առավել քիչ լուսավորված կետի հեռավորությունը A-ից, եթե հայտնի է, որ կետի լուսավորվածությունը հակադարձ համեմատական է լուսաղբյուրից ունեցած հեռավորության քառակուսուն:

1425. Կլոր սեղանի կենտրոնից ի՞նչ բարձրության վրա պետք է կախել էլեկտրական լամպը, որպեսզի սեղանի եզրը լինի մաքսիմալ լուսավորված: Հայտնի է, որ կետի լուսավորվածությունը արտահայտվում է $I=k\frac{\sin\varphi}{r^2}$ բանաձևով, որտեղ φ-ն սեղանի հարթության վրա ճառագայթի անկման անկյունն է, r-ը լուսաղբյուրից եղած հեռավորությունը, իսկ k-ն՝ լուսաղբյուրի լույսի ուժը:

1426. Բեռը դրված է հորիզոնական հարթության վրա, որի հետ շփման գործակիցը k է: Հարթության նկատմամբ ի՞նչ անկյան տակ պետք է քաշել այդ բեռը, որպեսզի այն տեղաշարժելու համար պահանջվի մինիմալ մեծության ուժ:

1427. a շառավիղ ունեցող կիսագնդաձև գավաթի մեջ դրված է l երկարության ձող $(2a<l<4a)$: Գտնել ձողի հավասարակշռության դիրքը, եթե հայտնի է, որ այդ դիրքում նրա ծանրության կենտրոնը (ձողի միջնակետը) զբաղեցնում է հնարավոր ամենացածր մակարդակը:

Բ

1428. Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում և $f(a+0)=f(b-0)=A$ $(-\infty\le A\le+\infty)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, այնպիսին, որ $f'(\xi)=0$:

1429. Դիցուք $f \in C^{n-1}[x_0; x_n]$, $(x_0; x_n)$ միջակայքի բոլոր կետերում f-ն ունի n-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ և բացի այդ՝ $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi \in (x_0; x_n)$ կետ, որի համար $f^{(n)}(\xi) = 0$:

1430. Դիցուք՝ $f \in C^{p+q}[a; b]$ և $(a; b)$ միջակայքում f-ն ունի $(p+q+1)$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ: Ապացուցել, որ եթե

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0,$$

$$f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0,$$

ապա գոյություն ունի $\xi \in (a; b)$ կետ, որի համար $f^{(p+q+1)}(\xi) = 0$:

1431. Ապացուցել, որ Լեժանդրի բազմանդամի՝

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right]\text{-ի,}$$

բոլոր արմատներն իրական են և ընկած են $(-1; 1)$ միջակայքում:

1432. Ապացուցել, որ Լագերի բազմանդամի՝

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)\text{-ի,}$$

բոլոր արմատները դրական են:

1433. Ապացուցել, որ Հերմիտի բազմանդամի՝

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)\text{-ի,}$$

բոլոր արմատներն իրական են:

1434. Ապացուցել, որ եթե $P(x)$-ը $(n-1)$-րդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ է, ապա $P^{(n)}(x) \equiv 0$:

1435. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան R-ի վրա n անգամ դիֆերենցելի է և $f^{(n)}(x) \equiv 0$, ապա f-ը ոչ ավելի, քան $(n-1)$-րդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ է:

1436. Դիցուք՝ $f \in C^1(R)$ և ցանկացած x-ի և h-ի համար

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x):$$

Ապացուցել, որ f-ը գծային է. $f(x) = ax + b$:

1437. Դիցուք $f \in C^2(R)$ և ցանկացած x-ի և h-ի համար

$$f(x+h)-f(x)=hf'\left(x+\frac{h}{2}\right):$$

Ապացուցել, որ f -ը քառակուսային ֆունկցիա է. $f(x)=ax^2+bx+c$:

1438. Համաձայն վերջավոր աճերի բանաձևի, ցանկացած $x\geq 0$ արժեքի համար

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

որտեղ $0<\theta(x)<1$: Ապացուցել, որ այս դեպքում՝

ա) $\frac{1}{4}\leq\theta(x)\leq\frac{1}{2}$;

բ) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$:

1439. Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը $[0;2]$ հատվածում բավարարում է Լագրանժի թեորեմի բոլոր պայմաններին և գտնել համապատասխան ξ կետը, որի համար ճշմարիտ է վերջավոր աճերի բանաձևը.

ա) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, 0\leq x\leq 1,\\ \dfrac{1}{x}, 1<x\leq 2;\end{cases}$ բ) $f(x)=\begin{cases} arctgx, 0\leq x\leq 1,\\ \dfrac{\pi-1}{2}x-\dfrac{\pi-2}{4}x^2,\ 1<x\leq 2:\end{cases}$

1440. Համոզվել, որ հետևյալ ֆունկցիաները $[-1;1]$ հատվածի ոչ բոլոր կետերում են դիֆերենցելի, սակայն ցանկացած $[a;b]\subset[-1;1]$ հատվածի վրա դրանցից յուրաքանչյուրի համար ճշմարիտ է վերջավոր աճերի բանաձևը.

ա) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; բ) $f(x)=\sqrt{|x|}\operatorname{sgn}x$:

1441. Դիցուք f և g ֆունկցիաները $[a;b]$ հատվածում անընդհատ են, իսկ $(a;b)$-ում՝ դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ եթե $g(a)\neq g(b)$, ապա Կոշու թեորեմում $g'(x)\neq 0$ պայմանը կարելի է փոխարինել $f'(x)\neq 0$ պայմանով:

1442. Դիցուք f -ը դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ ցանկացած $\xi\in(a;b)$ կետի համար գոյություն ունի կետերի $x_1,x_2\in(a;b)$ զույգ, այնպիսին, որ

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)\ \ (x_1<\xi<x_2):$$

Բերել համապատասխան օրինակ:

1443. f ֆունկցիան անվանենք $[a;b]$ հատվածում հավասարաչափ դիֆերենցելի, եթե այն $[a;b]$-ում դիֆերենցելի է և, բացի այդ,

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x_1,x_2\in[a;b]\left(0<|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-f'(x_1)\right|<\varepsilon\right):$$

Ապացուցել, որ f-ն $[a;b]$-ում հավասարաչափ դիֆերենցելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ $f\in C^1[a;b]$:

1444. Ապացուցել, որ եթե n անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիայի արժեքները $n+1$ կետում համընկնում են $(n-1)$-րդ աստիճանի որևէ հանրահաշվական բազմանդամի արժեքներին, ապա գոյություն ունի միջանկյալ կետ, որում $f^{(n)}(x)$-ը զրո է:

1445. Հայտնի է, որ $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի բոլոր արմատները իրական են: Ցույց տալ, որ եթե a-ն $P'(x)$ բազմանդամի համար բազմապատիկ արմատ է, ապա այն արմատ է նաև $P(x)$-ի համար:

1446. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $[x_1;x_2]$ հատվածում, ընդ որում՝ $x_1\cdot x_2>0$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi\in(x_1;x_2)$ կետ, որի համար

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi):$$

1447. Դիցուք f և g ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $[x_1;x_2]$ հատվածում, ընդ որում՝ $g(x)g'(x)\neq0$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi\in(x_1;x_2)$ կետ, որի համար՝

$$\frac{1}{g(x_1)-g(x_2)}\begin{vmatrix}g(x_1) & g(x_2)\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=\frac{1}{g'(\xi)}\begin{vmatrix}f(\xi) & g(\xi)\\ f'(\xi) & g'(\xi)\end{vmatrix}:$$

1448. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր միջակայքում և սահմանափակ չէ, ապա $f'(x)$-ը նույնպես սահմանափակ չէ: Օրինակով համոզվել, որ հակադարձ պնդումը ճշմարիտ չէ:

1449. Ապացուցել, որ եթե f-ն $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում ունի սահմանափակ ածանցյալ $(|f'(x)|\leq K)$, ապա՝

ա) f-ը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին.
$\forall x,y\in(a;b)\,(|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|)$;

բ) f-ն $(a;b)$-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

1450. Ապացուցել, որ եթե f-ն $(a;+\infty)$-ում դիֆերենցելի է և $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, ապա՝ ա) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$։

1451. Ապացուցել, որ եթե f-ը դիֆերենցելի է $y=2$ միջակայքում և $f(x)=o(x)$, երբ $x\to+\infty$, ապա $\underline{\lim}\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$։ Բերել մոնոտոն և դիֆերենցելի ֆունկցիայի օրինակ, որի համար $f(x)=o(1)$, երբ $x\to+\infty$, բայց $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f'(x)|=+\infty$։

1452. Դիցուք f-ն $[a;b]$ հատվածում անընդհատ է, իսկ $(a;b)$ միջակայքում՝ դիֆերենցելի։ Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)=f'(a+0)$ վերջավոր կամ անվերջ սահմանը, ապա գոյություն կունենա նաև $f'_+(a)$ համապատասխանաբար վերջավոր կամ անվերջ միակողմանի ածանցյալը, ընդ որում՝ $f'_+(a)=f'(a+0)$։

1453. Ստուգել, որ

$$= \left| \cdot^{(\cdot)}(\cdot) \right| < +\infty \quad [illegible], \quad f(1)=0$$

ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to1} f'(x)$ վերջավոր սահմանը, սակայն f-ը $x=1$ կետում չունի վերջավոր միակողմանի ածանցյալներ։ Պարզել նախորդ խնդրի հետ թվացյալ հակասության պատճառը։

1454. Ապացուցել, որ $y(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիան բավարարում է $y'=\lambda y$ $(\lambda=const)$ դիֆերենցիալ հավասարմանը, այն և միայն այն դեպքում, երբ $y=C\cdot e^{\lambda x}$, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է։

1455. Ապացուցել, որ $y(x)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ֆունկցիան բավարարում է $y'tgx-y=a$ $(a=const)$ դիֆերենցիալ հավասարմանը, այն և միայն այն դեպքում, երբ $y=C\sin x-a$, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է։

1456. Դիցուք $f(x)=\cos\chi(x)$, որտեղ $\chi(x)$-ը Դիրիխլեի ֆունկցիան է։ Ստուգել, որ f-ը $x_0=0$ կետի շրջակայքում նույնիսկ մեկ անգամ դիֆերենցելի չէ և, այնուամենայնիվ, պարզել՝ ճշմարի՞տ է արդյոք ֆունկցիայի հետևյալ վերլուծությունը.

$$f(x)=1-\frac{\chi^2(x)}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{\chi^{2n}(x)}{(2n)!}+r_{2n}(x),$$

որտեղ $|r_{2n}(x)|\le\frac{1}{(2n+2)!}$:

1457. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ երբ } x\ne 0,\\ 0, \text{ երբ } x=0\end{cases}$$

ֆունկցիան $x_0=0$ կետում անվերջ դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ $f^{(n)}(0)=0$ $(n\in N)$:

ա) Ճշմարի՞տ է արդյոք հետևյալ վերլուծությունը.

$$e^{-\frac{1}{x^2}}=1-\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!x^{2n}}+o\left(\frac{1}{x^{2n}}\right)\quad(x\to\infty):$$

բ) Գտնել ֆունկցիայի $x_0=0$ կետի շրջակայքում Թեյլորի վերլուծության n-րդ մնացորդային անդամը ($r_n(x_0,x)$-ը):

1458. Ստուգել, որ $y=e^{|x|}$ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում դիֆերենցելի չէ և պարզել՝ ճշմարի՞տ է արդյոք հետևյալ վերլուծությունը.

$$e^{|x|}=1+|x|+\cdots+\frac{|x|^n}{n!}+o(x^n):$$

Գտնել անվերջ փոքր ֆունկցիայի գլխավոր մասը՝ $C\cdot x^n$ $(x\to 0)$ տեսքով (1459-1462).

1459. $f(x)=tg\sin x-\sin tgx$:   **1460.** $f(x)=(1+x)^x-1$:

1461. $f(x)=1-\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$:   **1462.** $f(x)=\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$:

1463. Ընտրել a և b գործակիցներն այնպես, որ ճշմարիտ լինի հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը.

$$ctgx=\frac{1+ax^2}{x+bx^3}+O(x^5)\quad(x\to 0):$$

1464. Ընտրել a,b,c,d թվերն այնպես, որ ճշմարիտ լինի հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը.

$$e^x=\frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2}+O(x^5)\quad(x\to 0):$$

1465. Ընտրել a,b,c թվերն այնպես, որ հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևերը լինեն ճշմարիտ n-ի հնարավոր ամենամեծ արժեքի համար $(x \to 0)$.

ա) $\ln(1+x) = \dfrac{ax^2+x}{bx+1} + O(x^n)$;

բ) $arctgx = \dfrac{ax^3+x}{bx^2+1} + O(x^n)$;

գ) $\arcsin x = \dfrac{ax^3+x}{bx^2+1} + O(x^n)$;

դ) $(1+x)^x = \dfrac{ax^2+bx+1}{cx+1} + O(x^n)$;

ե) $\sqrt[k]{1+x} = \dfrac{ax+1}{bx+1} + O(x^n)$:

1466. Հետազոտել $f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը $x_0 = 0$ կետում.

ա) $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}$; բ) $f(x) = \sqrt[4]{\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}}$;

գ) $f(x) = (x - \ln(1+x)) \cdot \operatorname{sgn} x$; դ) $f(x) = (shx - tgx)\chi(x)$,

որտեղ $\chi(x)$-ը Դիրիխլեի ֆունկցիան է:

1467. Գտնել $f(h) = \ln(x+h)$ $(x>0)$ ֆունկցիայի վերլուծությունը ըստ h-ի աստիճանների:

1468. Դիցուք f-ն x_0 կետում $n+1$ անգամ դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ $\lim\limits_{x \to x_0} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$:

Ապացուցել, որ Թեյլորի վերլուծության մեջ՝

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n,$$

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}:$$

1469. Ապացուցել, որ ցանկացած

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (n \ge 1, a_n \neq 0),$$

հանրահաշվական բազմանդամի համար գոյություն ունի այնպիսի x_0, որ $(-\infty; -x_0)$ և $(x_0; +\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա $P(x)$-ը խիստ մոնոտոն է:

1470. Ապացուցել, որ ցանկացած ռացիոնալ ֆունկցիա՝

$$Q(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m} \quad (m+n>0, a_nb_m\neq 0),$$

$(-\infty;-x_0)$ և $(x_0;+\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա, որտեղ x_0-ն բավականաչափ մեծ դրական թիվ է, խիստ մոնոտոն է:

1471. Ապացուցել, որ եթե f և φ ֆունկցիաները $[x_0;+\infty)$ միջակայքում դիֆերենցելի են, φ-ն աճող է և $|f'(x)|\leq\varphi'(x)$ $(x\geq x_0)$, ապա

$$|f(x)-f(x_0)|\leq\varphi(x)-\varphi(x_0) \quad (x\geq x_0):$$

1472. $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է x_0 *կետում աճող*, եթե x_0-ի որևէ շրջակայքում արգումենտի $\Delta x=x-x_0$ աճը և ֆունկցիայի $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ աճը միևնույն նշանի են:

Ապացուցել, որ եթե f-ն $[a;b]$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում աճող է, ապա այն այդ միջակայքում աճող է:

1473. Ստուգել, որ $f(x)=x+x^2\sin\frac{2}{x}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում աճող է (տես նախորդ խնդիրը), սակայն այդ կետի ոչ մի շրջակայքում աճող չէ:

1474. Դիցուք φ և ψ ֆունկցիաները $[x_0;+\infty)$ միջակայքում n անգամ դիֆերենցելի են, ընդ որում՝ $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$: Ապացուցել, որ եթե $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$ $(x>x_0)$, ապա $\varphi(x)>\psi(x)$ $(x>x_0)$:

1475. Օգտվելով նախորդ խնդրում ձևակերպված պնդումից՝ ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները.

ա) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ $(x>0)$;

բ) $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$ $(x>0)$; գ) $tgx>x+\frac{x^3}{3}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$:

1476. Դիցուք $P(x)$-ն n-րդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ է և $a\in R$: Ապացուցել, որ եթե $P(a)\geq 0$, $P'(a)\geq 0$, ... , $P^{(n-1)}(a)\geq 0$ և $P^{(n)}(a)>0$, ապա $P(x)$ բազմանդամի իրական արմատները չեն գերազանցում a-ն:

Ապացուցել անհավասարությունը (1477-1485).

1477. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ $(x>0)$:

1478. $1+2\ln x \le x^2 \quad (x>0)$:

1479. $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$:

1480. $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$ $M_1\ 4M_0M_2$:

1481. $\cos x<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \quad \left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right)$:

1482. $\sin x+tgx>2x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$:

1483. $\sin x \le \frac{4x}{\pi^2}(\pi-x) \quad (0\le x\le \pi)$:

1484. $\cos x \le 1-\frac{4x^2}{\pi^2} \quad \left(0\le x\le \frac{\pi}{2}\right)$:

1485. ա) $tgx \ge \frac{2x}{\pi-2x} \quad \left(0\le x\le \frac{\pi}{4}\right)$; բ) $tgx \le \frac{2x}{\pi-2x} \quad \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}\right)$:

Գտնել պարամետրական հավասարումներով տրված $y=y(x)$ ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը (1486-1491).

Այս վարժությունները կատարելիս անհրաժեշտ է նախ գտնել t պարամետրի փոփոխման այն միջակայքերը, որոնցում y-ը որոշվում է որպես x-ից կախված միարժեք ֆունկցիա և, այնուհետև, հետազոտել ստացված ֆունկցիան մոնոտոնության առումով:

1486. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$:

1487. $x=\frac{(t+1)^2}{4}$, $y=\frac{(t-1)^2}{4}$:

1488. $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$:

1489. , $y=\frac{\ln t}{t}$:

1490. $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$:

1491. $x=sht-t$, $y=cht-1$:

1492. Կառուցել R-ի վրա դիֆերենցելի և խիստ մոնոտոն ֆունկցիա, որի ածանցյալն անվերջ թվով կետերում զրո է:

1493. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում, $f'(x)\ge 0$ և $f'(x)$-ի զրոները միմյանցից մեկուսացված կետեր են, ապա $f(x)$-ն աճող է:

1494. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում և $f'(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա f-ը կարելի է ներկայացնել որպես երկու աճող ֆունկցիաների տարբերություն:

1495. Ցույց տալ, որ $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ ֆունկցիան ունի երեք շրջման կետ: Ստուգել, որ գրաֆիկի համապատասխան կետերը գտնվում են մի ուղիղի վրա:

1496. Ընտրել h պարամետրի արժեքն այնպես, որ $y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ $(h>0)$ կորն $x=\pm\sigma$ կետերում ունենա շրջում:

1497. Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները.

ա) $x^{\alpha}-1\le\alpha(x-1)$ $\quad\beta\quad$;

բ) $x^{\alpha}-1\ge\alpha(x-1)$ $\quad(x>0,\alpha<0 \text{ կամ } \alpha>1)$:

1498. Դիցուք՝ $a>0$, $b>0$, իսկ p և q թվերն այնպիսին են, որ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$: Ապացուցել Յունգի անհավասարությունները.

ա) $a^{\frac{1}{p}}\cdot b^{\frac{1}{q}}\le\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$ $\quad(p>1)$; $\qquad$ բ) $a^{\frac{1}{p}}\cdot b^{\frac{1}{q}}\ge\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$ $\quad(p<1)$:

Ցուցում: Նախորդ խնդրում տեղադրել $x=\frac{a}{b}$ և $\alpha=\frac{1}{p}$:

1499. Դիցուք՝ $x_i,y_i\in R_+$ $(i=1,2,...,n)$ և $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$: Ապացուցել Հյոլդերի անհավասարությունները.

ա) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\le\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}$ $\quad(p>1)$;

բ) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\ge\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}$ $\quad(p<1,\ p\ne0)$

(երբ $p<0$՝ ընդունել $x_i>0$, $i=1,2,...,n$):

Ցույց տալ, որ հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $x_i=\lambda y_i$, $i=1,2,...,n$ $(\lambda=const)$:

Ցուցում: Յունգի անհավասարության մեջ տեղադրել $a=\frac{x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p}$, $b=\frac{y_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^q}$:

1500. Դիցուք՝ $x_i,y_i\in R_+$ $(i=1,2,...,n)$: Ապացուցել Մինկովսկու անհավասարությունները.

ա) $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\le\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ $\quad(p>1)$;

բ) $\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \ge \left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p<1, p\neq 0)$

($p<0$ դեպքում ընդունել $x_i, y_i>0$, $i=1,2,\dots,n$):

Ստուգել, որ հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $x_i=\lambda y_i$, $i=1,2,\dots,n$ $(\lambda = const)$:

Ցուցում: $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \equiv \sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1}$ նույնության աջ կողմի նկատմամբ կիրառել Հյոլդերի անհավասարությունը:

1501. Դիցուք f -ն $(a;b)$ միջակայքում ուռուցիկ ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ այդ միջակայքի ցանկացած $x_1, x_2, \dots, x_n$ կետերի և ցանկացած $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ $(\alpha_i>0, i=1,2,\dots,n)$ թվերի համար ճշմարիտ է Յենսենի անհավասարությունը.

$$f\left(\frac{\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\right)\le\frac{\alpha_1f(x_1)+\dots+\alpha_nf(x_n)}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}:$$

1502. Օգտագործելով լոգարիթմական ֆունկցիայի ուռուցիկությունը՝ ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը. ցանկացած $x_i>0$, $p_i\ge 0$ $\left(i=1,\dots,n, \sum_{i=1}^{n}p_i=1\right)$ թվերի համար $\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_i}\le\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$: Այստեղից ստանալ Յունգի անհավասարության նոր ապացույց:

1503. Համոզվել, որ $\ln(1+e^x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է և դա օգտագործելով՝ ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը. ցանկացած a_i, b_i, α_i, $i=1,2,\dots,n$, դրական թվերի համար $(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=1)$

$$a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}+b_1^{\alpha_1}\cdots b_n^{\alpha_n}\le(a_1+b_1)^{\alpha_1}\cdots(a_n+b_n)^{\alpha_n}:$$

1504. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի շրջակայքում և x_0 -ն նրա համար մաքսիմումի կետ է: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ գոյություն ունի U_{x_0} շրջակայք, այնպիսին, որ $U_{x_0}^-$ -ի վրա f -ն աճող է, իսկ $U_{x_0}^+$ -ի վրա՝ նվազող: Բերել համապատասխան օրինակ:

1505. Ստուգել, որ $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$ և $g(x)=xf(x)$ ֆունկցիաները $x=0$ կետում բավարարում են միևնույն՝ $f^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)=0$ $(n\in N)$, պայմանին, բայց f -ն այդ կետում ունի մաքսիմում, իսկ g -ի համար այն էքստրեմումի կետ չէ:

1506. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\left|3x-x^3\right|\le 2$, երբ $|x|\le 2$;

բ) $\frac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1$, երբ $0\le x\le 1$, $p>1$;

գ) $x^\alpha(c-x)^\beta\le\frac{\alpha^\alpha\beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}c^{\alpha+\beta}$, երբ $\alpha>0$, $\beta>0$ և $0\le x\le c$:

1507. Ապացուցել, որ երկու անգամ դիֆերենցելի ցանկացած ֆունկցիայի էքստրեմումի երկու կետերի միջև գոյություն ունի առնվազն մեկ շրջման կետ:
1508. Կառուցել ֆունկցիա, որի երկու շրջման կետերի միջև գոյություն չունենա էքստրեմումի կետ:
1509. Համոզվել, որ ֆունկցիայի շրջման կետը չի կարող միաժամանակ լինել խիստ էքստրեմումի կետ:

Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են $[a;b]$ հատվածի վրա:

$$\Delta=\sup_{a\le x\le b}\left|f(x)-g(x)\right|$$

արտահայտությունը կոչվում է $[a;b]$ հատվածի վրա f և g ֆունկցիաների *շեղում*:

1510. Գտնել $f(x)=x^2$ և $g(x)=x^3$ ֆունկցիաների շեղումը $[0;1]$ հատվածի վրա:
1511. Գտնել $[-2;1]$ հատվածի վրա $P(x)=x(x-1)^2(x+2)$ բազմանդամի շեղումը զրոյից:
1512. q պարամետրի ի՞նչ արժեքի դեպքում $[-1;1]$ հատվածի վրա $P(x)=x^2+q$ ֆունկցիայի շեղումը զրոյից կլինի նվազագույնը:
1513. $f(x)=ax+b$ գծային ֆունկցիան ընտրել այնպես, որ $[-1;2]$ հատվածի վրա նրա շեղումը $g(x)=|x|$ ֆունկցիայից լինի նվազագույնը:
1514. $f(x)=ax+b$ գծային ֆունկցիան ընտրել այնպես, որ $[0;1]$ հատվածի վրա նրա շեղումը $g(x)=x^2$ ֆունկցիայից լինի նվազագույնը:

***

1515. Ապացուցել, որ եթե $y=y(x)$ ֆունկցիան տրված է $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ հավասարումներով և նրա գրաֆիկն ունի կոորդինատների առանցքներին ոչ զուգահեռ ասիմպտոտ, ապա գոյություն ունի t_0 $(-\infty\le t_0\le+\infty)$, այնպիսին, որ միաժամանակ

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty \quad \text{և} \quad \lim_{t\to t_0}\psi(t)=\infty:$$

Ընդսմին, եթե ասիմպտոտի հավասարումն է՝ $y=ax+b$, ապա

$$a=\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \quad b=\lim_{t\to t_0}\left[\psi(t)-a\varphi(t)\right]:$$

Ինչպե՞ս գտնել առանցքներին զուգահեռ ասիմպտոտները:

1516. Գտնել հետևյալ կորերի ասիմպտոտները.

ա) $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$; բ) $x=\dfrac{2t}{1-t^2}$, $y=\dfrac{t^2}{1-t^2}$:

Կառուցել հետևյալ պարամետրական հավասարումներով որոշվող կորերը (1517-1520).

1517. $x=t^3+3t+1$, $y=t^3-3t+1$:

1518. $x=\dfrac{3t}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$:

1519. $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$:

1520. $x=te^t$, $y=te^{-t}$:

Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը (1521-1524).

Ցուցում: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ բանաձևերով անցնել բևեռային կոորդինատների, կամ դրանց միջոցով՝ պարամետրական հավասարումների:

1521. $x^2+y^2=x^4+y^4$:

1522. $y^2(a-x)=x^2(a+x)$ $(a>0)$:

1523. $y^2(2a-x)=x^3$:

1524. $x^2y^2=a(x^3+y^3)$ $(a>0)$:

***

1525. Ցույց տալ, որ $xe^x=2$ հավասարումն ունի միայն մեկ իրական արմատ և այն էլ $(0;1)$ միջակայքում:

1526. Դիցուք f-ն անընդհատ է $[x_0;+\infty)$ միջակայքում, $f'(x)>k>0$, երբ $x>x_0$ $(k=const)$: Ապացուցել, որ եթե $f(x_0)<0$, ապա $f(x)=0$ հավասարումն $\left(x_0;x_0-\dfrac{f(x_0)}{k}\right)$ միջակայքում ունի ճիշտ մեկ իրական արմատ:

1527. Դիցուք $[x_0;+\infty)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x_0)>0$, $f'(x_0)<0$ և $f''(x)\le 0$ $(x>x_0)$ պայմաններին: Ապացուցել, որ $f(x)=0$ հավասարումն $[x_0;+\infty)$ միջակայքում ունի ճիշտ մեկ իրական արմատ:

Գտնել հավասարման արմատների թիվը և սահմանազատել դրանք շրջակայքերով (1528-1533).

1528. $x^3-6x^2+9x-10=0$:

1529. $x^5-5x=a$:

1530. $\ln x = kx$: 1531. $e^x = ax^2$:

1532. $\sin^3 x \cdot \cos x = a \quad (0 \le x \le \pi)$: 1533. $chx = kx$:

1534. Պարզել, թե p և q պարամետրերի ի՞նչ արժեքների համար $x^3 + px + q = 0$ հավասարումը կունենա

ա) ճիշտ մեկ իրական արմատ;
բ) ճիշտ երեք իրական արմատ:

Գ.

1535. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $[a;+\infty)$ միջակայքում և $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: Ապացուցել, որ $f'(x) = 0$ հավասարման արմատների քանակը ավելի քիչ չէ, քան $f(x) = 0$ հավասարմանը:

1536. Ապացուցել, որ եթե $(0;+\infty)$-ում դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիայի զրոների քանակն n է, ապա ցանկացած $\alpha \in R$ թվի համար $g(x) = f'(x) + \alpha f(x)$ ֆունկցիայի զրոների քանակը $(n-1)$-ից պակաս չէ: Ավելին, եթե $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x} f(x) = 0$, ապա $g(x)$-ը $(0;+\infty)$-ում ունի առնվազն n զրո:

1537. Դիցուք $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ հավասարման բոլոր արմատներն իրական են: Ապացուցել, որ եթե $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի բոլոր արմատներն իրական են, ապա $a_0 P(x) + a_1 P'(x) + \cdots + a_n P^{(n)}(x) = 0$ հավասարման բոլոր արմատները նույնպես իրական են:

1538. Դիցուք f-ն n անգամ դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում $(0 < a < b)$ և այդ միջակայքի $n+1$ կետերում դառնում է զրո: Ապացուցել, որ եթե $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ բազմանդամի բոլոր արմատներն իրական են, ապա $(a;b)$ միջակայքում գոյություն ունի ξ կետ, այնպիսին, որ

$$a_0 f(\xi) + a_1 f'(\xi) + \cdots + a_n f^{(n)}(\xi) = 0:$$

1539. Ապացուցել, որ եթե $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ հավասարման բոլոր արմատներն իրական են, ապա իրական են նաև

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \cdots + \frac{a_n}{n!} x^n = 0$$

հավասարման բոլոր արմատները:

1540. Տրված է $[0;+\infty)$ միջակայքում անընդհատ և $(0;+\infty)$-ում դիֆերենցելի f ֆունկցիա: Դիցուք $\xi=\xi(x)$ ֆունկցիան ընտրված է այնպես, որ ցանկացած $x>0$ արժեքի համար ճշմարիտ է վերջավոր աճերի բանաձևը.

$$f(x)-f(0)=xf'(\xi(x)):$$

Ապացուցել, որ եթե $f(x)=x\sin(\ln x)\ (x>0)$, $f(0)=0$, ապա ցանկացած $(0;\varepsilon)$ միջակայքում $\xi(x)$ ֆունկցիան խզվող է:

1541. Ապացուցել, որ եթե f-ը $[0;+\infty)$-ում անընդհատ դիֆերենցելի է, իսկ $f'(x)$-ը՝ խիստ մոնոտոն (աճող կամ նվազող), ապա նախորդ խնդրում սահմանված $\xi(x)$ ֆունկցիան միակն է և անընդհատ է:

1542. Ցույց տալ, որ ցանկացած $n\in N$ թվի համար $(-1;+\infty)$ միջակայքում

$$(1+x)^{\alpha}-\left(1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right)\quad(\alpha\neq 0)$$

տարբերության միակ 0-կետը $x=0$-ն է:

1543. Ստուգել, որ

$$e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=0$$

հավասարման միակ արմատը $x=0$-ն է:

1544. Ապացուցել, որ

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$$

հավասարումը կամ իրական արմատ չունի (n-ը զույգ է), կամ ունի միայն մեկ իրական արմատ (n-ը կենտ է): Համոզվել, որ երկրորդ դեպքում արմատը բազմապատիկ չէ:

1545. Դիցուք $P(x)$-ն $(n-1)$-րդ աստիճանի դրական գործակիցներով բազմանդամ է: Ապացուցել, որ $x^n=P(x)$ հավասարումն ունի միայն մեկ դրական արմատ:

1546. Տրված է՝ $c_0+\frac{c_1}{2}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0$:Ապացուցել,որ $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n=0$ հավասարումն ունի առնվազն մեկ իրական արմատ:

1547. Ապացուցել, որ

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(2x-x^2\right)^k-2x^k}{k}$$

բազմանդամի համար $x=0$-ն $(n+1)$-պատիկ արմատ է:

1548. Դիցուք՝ $f \in C^{\infty}(R)$ և $M = \{0;1;...;n\}$: Ապացուցել, որ եթե

$$\forall x \in R \ \ \exists n_x \in M \ \ \left(f^{(n_x)}(x) = 0\right),$$

ապա f-ը ոչ ավելի, քան $(n-1)$-րդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ է:

1549. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $(0;+\infty)$ միջակայքում և

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) + f'(x)\right] = A:$$

Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$: Կմնա՞ արդյոք պնդումը ճշմարիտ, եթե խնդրի պայմանում $f(x) + f'(x)$-ը փոխարինենք $f(x) - f'(x)$-ով:

1550. Դիցուք f-ը $(0;+\infty)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի է և

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) + f'(x) + f''(x)\right] = A:$$

Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$:

1551. Տրված է՝ $f:[0;1] \to [0;1]$ ֆունկցիան անընդհատ է, $(0;1)$ միջակայքում՝ դիֆերենցելի, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի միմյանցից տարբեր կետերի $a, b \in (0;1)$ զույգ, այնպիսին, որ $f'(a) \cdot f'(b) = 1$:

1552. Ապացուցել Դարբուի թեորեմը. եթե f ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[a;b]$ հատվածում և $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, ապա գոյություն ունի $\xi \in (a;b)$ կետ, որի համար $f'(\xi) = 0$:

1553. Տրված է $[0;1]$ հատվածում դիֆերենցելի f ֆունկցիա, որը բավարարում է $f'(0) = 1$ և $f'(1) = 0$ պայմաններին: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi \in (0;1)$ կետ, որի համար $f'(\xi) = \xi$:

1554. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ $f'(x)$ ֆունկցիայի խզումները կարող են լինել միմիայն երկրորդ սեռի:

Նկատենք, որ $y = |x|$ ֆունկցիայի ածանցյալն x-ը զրոյի ձգտելիս ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ: Չի՞ հակասում արդյոք այս փաստը խնդրում ձևակերպված պնդմանը:

1555. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում և ամենուրեք, բացի գուցե վերջավոր թվով կետերից, $f'(x) = 0$: Ապացուցել, որ $f = const$:

1556. Տրված է $f: R \to R$ դիֆերենցելի ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $a \in R$ թվի համար $f'(x)$ ֆունկցիայի a-կետերի (տես խնդիր 803) բազմությունը փակ է, ապա $f'(x)$-ը անընդհատ է:

1557. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $x=0$ կետի շրջակայքում և $f(0)=0$: Համաձայն Լագրանժի թեորեմի՝ բավականաչափ փոքր $h>0$ թվի համար

$$\frac{f(-h)}{-h}=f'(\zeta)\ ,\quad \frac{f(h)}{h}=f'(\xi),$$

որտեղ $-h<\zeta<0<\xi<h$: Ապացուցել, որ եթե $x=0$ կետում գոյություն ունի f-ի երկրորդ կարգի ածանցյալը և $f''(0)\neq 0$, ապա $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\xi-\zeta}{h}=1$:

1558. Դիցուք f-ն $(a;b)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի է և $\xi\in(a;b)$: Ապացուցել, որ եթե $f''(\xi)\neq 0$, ապա $(a;b)$-ում գոյություն ունեն x_1, x_2 կետեր $(x_1<\xi<x_2)$, որոնց համար

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi):$$

1559. Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում, իսկ $(a;b)$-ում՝ դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ եթե f-ը գծային չէ, ապա գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, որի համար

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|:$$

1560. Ապացուցել, որ եթե f-ն $[a;b]$-ում երկու անգամ դիֆերենցելի է և $f'(a)=f'(b)=0$, ապա գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, այնպիսին, որ

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|:$$

1561. Դիցուք f-ն $[a;b]$ հատվածում n անգամ դիֆերենցելի է և

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,$$
$$f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0:$$

Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, որի համար

$$\left|f^{(n)}(\xi)\right|\geq\frac{2^{n-1}\cdot n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|:$$

1562. Դիցուք $f\in C^2[0;1]$ և $f(0)=f(1)=0$: Ապացուցել, որ

$$\forall x\in(0;1)\ (|f''(x)|\leq A)\Rightarrow\forall x\in[0;1]\left(|f'(x)|\leq\frac{A}{2}\right):$$

1563. Տրված է $[-1;1]$ հատվածում անընդհատ և $(-1;1)$-ում երկու անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիա: Հայտնի է նաև, որ $f(-1)=f(1)=0$: Ապացուցել, որ

$$\forall x\in[-1;1]\ (|f''(x)|\le A)\Rightarrow \forall x\in[-1;1]\left(|f(x)|\le\frac{A}{2}(1-x^2)\right):$$

1564. Դիցուք f-ն R-ի վրա երկու անգամ դիֆերենցելի է և

$$M_k=\sup_{x\in R}\left|f^{(k)}(x)\right|<+\infty\quad (k=0,1,2):$$

Ապացուցել անհավասարությունը. $M_1^2\le 2M_0M_2$:

1565. Դիցուք f-ը երկու անգամ դիֆերենցելի է $[-a;a]$ հատվածում և

$$M_k=\sup_{-a\le x\le a}\left|f^{(k)}(x)\right|<+\infty\ (k=0,1,2):$$

Ապացուցել, որ

ա) $|f'(x)|\le\dfrac{M_0}{a}+\dfrac{x^2+a^2}{2a}M_2$;

բ) եթե $a\ge\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$, ապա $M_1^2\le 4M_0M_2$:

Օրինակով համոզվել, որ այս վերջին անհավասարության մեջ գործակիցը չի կարելի փոխարինել ավելի փոքրով:

1566. Դիցուք f ֆունկցիան p անգամ դիֆերենցելի է և

$$M_k=\sup_{x\in R}\left|f^{(k)}(x)\right|\ (k=0,1,\ldots,p):$$

Ապացուցել, որ եթե M_0-ն և M_p-ն վերջավոր են, ապա վերջավոր են նաև M_1-ը, M_2-ը, ..., M_{p-1}-ը, ընդ որում՝

$$M_k\le 2^{\frac{k(p-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{p}}\cdot M_p^{\frac{k}{p}}\ (k=1,\ldots,p-1):$$

1567. Տրված է $[0;1]$ հատվածում երկու անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիա, որը բավարարում է $f(0)=f(1)=0$ և $\min\limits_{x\in[0;1]}f(x)=-1$ պայմաններին: Ապացուցել, որ $\max\limits_{x\in[0;1]}f''(x)\ge 8$:

1568. Դիցուք $f\in C^2[0;+\infty)$ և ամենուրեք՝ $|f''(x)|\le 1$: Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$:

1569. Դիցուք f ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[0;1]$ հատվածի վրա, $f(0)=0$ և գոյություն ունի k հաստատուն, այնպիսին, որ ցանկացած $x\in[0;1]$ կետում՝ $|f'(x)|\le k|f(x)|$: Ապացուցել, որ $f(x)\equiv 0$:

1570. Դիցուք $f\in C^{\infty}(R)$ և գոյություն ունի L հաստատուն, այնպիսին, որ բոլոր $n\in N$ և $x\in R$ թվերի համար $\left|f^{(n)}(x)\right|\le L$: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած բնական թվի համար $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, ապա $f(x)\equiv 0$:

1571. Տրված է $f\in C^{\infty}(R)$ ֆունկցիան: Հայտնի է, որ ցանկացած $n\in Z_+$ և $x\in R$ թվերի համար $f^{(n)}(0)=0$ և $f^{(n)}(x)\ge 0$: Ապացուցել, որ $f(x)\equiv 0$:

1572. Դիցուք $f\in C^{\infty}[-1;1]$, ցանկացած $n\in Z_+$ թվի համար $f^{(n)}(0)=0$ և գոյություն ունի $\alpha\in(0;1)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\sup_{x\in[-1;1]}\left|f^{(n)}(x)\right|\le\alpha^n n!\quad(n=0,1,2,\ldots):$$

Ապացուցել, որ $f(x)\equiv 0$:

1573. Դիցուք f -ը որոշված է x_0 կետի շրջակայքում: Եթե գոյություն ունի

$$f_s'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

վերջավոր սահմանը, ապա այն կոչվում է x_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի *սիմետրիկ ածանցյալ* կամ *ածանցյալ ըստ Շվարցի*.

Ապացուցել, որ եթե f -ն անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում, $(a;b)$ միջակայքի բոլոր կետերում ունի $f_s'(x)$ սիմետրիկ ածանցյալ և $f(a)<f(b)$, ապա գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, որում $f_s'(\xi)\ge 0$:

1574. Ապացուցել, որ եթե $f\in C[a;b]$, $f(a)=f(b)$ և $(a;b)$-ում f -ն ունի $f_s'(x)$ սիմետրիկ ածանցյալ, ապա գոյություն ունեն $x_1,x_2\in(a;b)$ կետեր, այնպիսիք, որ $f_s'(x_1)\le 0$ և $f_s'(x_2)\ge 0$:

Կառուցել խնդրի բոլոր պայմաններին բավարարող $f(x)$ ֆունկցիա, որի սիմետրիկ ածանցյալը ոչ մի կետում զրո չէ:

1575. Դիցուք $f\in C[a;b]$ և $(a;b)$ միջակայքի բոլոր կետերում գոյություն ունի $f_s'(x)$ սիմետրիկ ածանցյալ: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $x_1,x_2\in(a;b)$ կետերի զույգ, այնպիսին, որ

$$f_s'(x_1)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le f_s'(x_2):$$

1576. Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$ միջակայքում ամենուրեք $f_s'(x)=0$, ապա $f=const$:

1577. Երկրորդ կարգի սիմետրիկ ածանցյալը, կամ Շվարցի երկրորդ ածանցյալը, սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$f_s''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}:$$

Ապացուցել, որ եթե f-ը x կետում երկու անգամ դիֆերենցելի է, ապա գոյություն ունի $f_s''(x)$-ը և $f_s''(x)=f''(x)$:

1578. Դիցուք x_0 կետի շրջակայքում f ֆունկցիան ունի հետևյալ վերլուծությունը. $f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+\frac{Bh^2}{2!}+o(h^2)$: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ ա) $B=f''(x_0)$; բ) $B=f_s''(x_0)$: Պատասխանը հիմնավորել:

1579. Նշանակելով $\Delta_s f(x)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)$, $\Delta_s^2 f(x)=\Delta_s(\Delta_s f(x))=$ $=f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$՝ սահմանենք x կետում f ֆունկցիայի n-րդ կարգի սիմետրիկ աճը՝ $\Delta_s^n f(x)=\Delta_s\left(\Delta_s^{n-1}f(x)\right)$ ինդուկտիվ բանաձևով:

Ապացուցել, որ

ա) $\Delta_s^k(f+g)=\Delta_s^k(f)+\Delta_s^k(g)$;

բ) $\Delta_s^k(cf)=c\Delta_s^k f$;

գ) $\Delta_s^n f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left(x+\frac{n-2k}{2}h\right)$, $n\in N$:

1580. Եթե x_0 կետում գոյություն ունի

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_s^k f(x_0)}{h^k}=f_s^{(k)}(x_0)$$

սահմանը, ապա այն անվանում են f ֆունկցիայի x_0 կետում k-րդ կարգի սիմետրիկ ածանցյալ կամ Շվարցի ածանցյալ: Ապացուցել, որ եթե f-ն x_0 կետում k անգամ դիֆերենցելի է, ապա $f_s^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$:

1581. Դիցուք x_0 կետի շրջակայքում f ֆունկցիան ունի

$$f(x_0+h)=c_0+c_1h+\cdots+c_nh^n+o(h^n)$$

վերլուծություն: Ապացուցել, որ x_0 կետում գոյություն ունեն f ֆունկցիայի ընդհուպ մինչև n-րդ կարգի Շվարցի ածանցյալները, ընդ որում՝

$$c_0 = \lim_{h\to 0} f(x_0+h),\ c_k = \frac{f_s^{(k)}(0)}{k!}\ \ (k=1,2,\ldots,n):$$

Ստուգել, որ եթե f-ն x_0 կետում անընդհատ է, ապա այն նաև դիֆերենցելի է: Այս պայմաններում երաշխավորվա՞ծ է արդյոք f-ի երկրորդ ածանցյալի գոյությունը:

1582. Ապացուցել, որ եթե $f \in C[a;b]$ և $(a;b)$ միջակայքում ամենուրեք $f_s''(x)=0$, ապա f-ը գծային է. $f(x)=c_0+c_1x$:

1583. Ապացուցել, որ եթե $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ f ֆունկցիայի $f_s'(x)$ սիմետրիկ ածանցյալը ամենուրեք դրական է, ապա f-ը աճող է:

1584. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե դիֆերենցելի ֆունկցիայի ածանցյալը որևէ կետում դրական է, ապա այդ կետի շրջակայքում ֆունկցիան աճող է: Բերել համապատասխան օրինակ:

Ապացուցել անհավասարությունը (1585-1593).

1585. $\dfrac{\ln x}{x-1} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ \ (x>0, x\ne 1)$:

1586. $\dfrac{2}{2x+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{2x+1}{2x(x+1)}\ \ (x>0)$:

1587. $|x-y| \le |x^2\ln x - y^2\ln y| \le 3e|x-y|\ \ (1\le x, y\le e)$:

1588. $\left|\dfrac{\ln x-\ln y}{x-y} - \dfrac{1}{y}\right| \le \dfrac{1}{2}|x-y|\ \ (x, y\ge 1)$:

1589. $|x^2 arctgx - y^2 arctgy| \le \dfrac{\pi+1}{2}|x-y|\ \ (0\le x, y\le 1)$:

1590. $\left|\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y} - \cos y\right| \le \dfrac{1}{2}|x-y|$:

1591. $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\ \ (x, y>0,\ \beta>\alpha>0)$:

1592. $x^y+y^x>1\ \ (x, y>0)$:

1593. $x+y+\cos(xy)\ge 1\ \ (x, y\ge 0)$:

1594. Տրված են $x_i \ge 0$, $\alpha_i > 0$ $(i=1,\ldots,n)$ թվերը, ընդ որում՝ $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$: Դիտարկենք

$$M_t(x;\alpha)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t\right\}^{\frac{1}{t}}\quad (t\neq 0)$$

ֆունկցիան: Այն անվանում են x_i թվերի α կշռով t-րդ կարգի միջին:

ա) Հաշվել $M_0(x;\alpha)=\lim\limits_{t\to 0}M_t(x;\alpha)$ սահմանը:

բ) Ցույց տալ, որ երբ $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$, ապա $t=-1$, 0, 1 և 2 արժեքների դեպքում ստացվում են x_i թվերի համապատասխանաբար հարմոնիկ, երկրաչափական, թվաբանական և քառակուսային միջինները:

գ) Ստուգել, որ $M_t(x;\alpha)$-ն որպես t-ի ֆունկցիա R-ի վրա չնվազող է, ընդ որում աճող է, եթե $n>1$ և x_i թվերից ոչ բոլորն են միմյանց հավասար:

1595. Դիցուք $(a;b)$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի ցանկացած x_1,x_2 կետերի համար բավարարում է

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

անհավասարությանը: Ապացուցել, որ

ա)ցանկացած $n\in N$ թվի և $x_1,\ldots,x_n\in(a;b)$ կետերի համար

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n};$$

բ) ցանկացած $r\in Q\cap[0;1]$ թվի և $x_1,x_2\in(a;b)$ կետերի համար

$$f(rx_1+(1-r)x_2)\leq rf(x_1)+(1-r)f(x_2);$$

գ) եթե f-ն անընդհատ է, ապա այն ուռուցիկ է:

1596. Դիցուք f-ը որոշված է $[a;b]$ հատվածում և սահմանափակ է $(\alpha;\beta)\subset[a;b]$ միջակայքում: Ապացուցել, որ եթե կետերի կամայական $x_1,x_2\in[a;b]$ զույգի համար

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

ապա

ա) f-ը սահմանափակ է $[a;b]$ հատվածում;

բ) f-ն անընդհատ է (հետևաբար նաև ուռուցիկ է) $(a;b)$ միջակայքում:

1597. Դիցուք $f\in C[a;b]$ և ցանկացած $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$ հատվածում գոյություն ունի $x=p\alpha+(1-p)\beta\in(\alpha;\beta)$ $(0<p<1)$ կետ, այնպիսին, որ

$$f(p\alpha+(1-p)\beta)\le pf(\alpha)+(1-p)f(\beta):$$

Ապացուցել, որ f -ն ուռուցիկ է:

1598. Ապացուցել, որ եթե $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է, ապա այն անընդհատ է: Ճշմարի՞տ է արդյոք պնդումն $[a;b]$ հատվածի համար:

1599. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է և որևէ $x_0=pa+(1-p)b$ $(0<p<1)$ կետում $f(x_0)=pf(a)+(1-p)f(b)$, ապա f -ը գծային է:

1600. Դիցուք $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է և ցանկացած $x_1,x_2\in(a;b)$ կետերի համար գոյություն ունի միայն մեկ ξ կետ, որի համար

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi):$$

Ապացուցել, որ f -ն ուռուցիկ է կամ գոգավոր:

1601. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է և վերևից սահմանափակ, ապա այն հաստատուն է:

1602. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է: Ապացուցել, որ եթե

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

ապա f -ը հաստատուն է:

1603. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է և գոյություն ունեն a և b հաստատուններ, այնպիսիք, որ $|f(x)|\le a|x|+b$ $(x\in R)$, ապա f -ը R -ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է (տես խնդ. 836):

1604. Դիցուք $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է: Ապացուցել, որ

ա) $(a;b)$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում գոյություն ունեն $f'_-(x)$ և $f'_+(x)$ միակողմանի ածանցյալներ, ընդ որում՝ $f'_-(x)\le f'_+(x)$;

բ) ցանկացած $x_1<x_2$ կետերի համար՝ $f'_+(x_1)\le f'_-(x_2)$:

1605. Ապացուցել, որ եթե նույնաբար զրոյից տարբեր f ֆունկցիան $(x_0;+\infty)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի է և

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

ապա այդ միջակայքում գոյություն ունի f ֆունկցիայի առնվազն մեկ շրջման կետ:

1606. Դիցուք f -ը $(x_0;+\infty)$ միջակայքում դիֆերենցելի է և չունի շրջման կետեր: Ապացուցել, որ եթե $y=kx+b$ ուղիղն f ֆունկցիայի ասիմպտոտն է, երբ $x\to+\infty$, ընդ որում՝ $f(x)\geq kx+b$ $(x>x_0)$, ապա f -ը ուռուցիկ է և $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=k$:

1607. Դիցուք $f\in C^1[x_0;+\infty)$ ֆունկցիան չունի շրջման կետեր: Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ սահմանը վերջավոր է, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$:

1608. Ապացուցել, որ եթե $[x_0;+\infty)$ միջակայքում սահմանափակ ֆունկցիան ունի մոնոտոն ածանցյալ, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$:

1609. Դիցուք թվային առանցքի վրա երկու անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիան բավարարում է $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-|x|\right]=0$ պայմանին: Ապացուցել, որ եթե առնվազն մեկ կետում $f(x)\leq 0$, ապա գոյություն ունի ξ կետ, որում $f''(\xi)=0$:

1610. Ապացուցել, որ կենտ աստիճանի $(n\geq 3)$ ցանկացած հանրահաշվական բազմանդամ ունի առնվազն մեկ շրջման կետ:

1611. Ապացուցել, որ եթե հաստատունից տարբեր, դրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամը զույգ ֆունկցիա է, ապա այն նաև ուռուցիկ է: Ստուգել, որ այդպիսի բազմանդամի միակ էքստրեմումի կետը մինիմումի կետ է:

1612. Գտնել ամենացածր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ, որը $x=1$ կետում ընդունում է $y=6$ մաքսիմալ արժեք, իսկ $x=3$ կետում՝ $y=2$ մինիմալ արժեք:

1613. Գտնել մեծագույն α և փոքրագույն β թվերը, որոնց համար ճշմարիտ է

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leq e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}\quad(n\in N)$$

անհավասարությունը:

Գլուխ 7

Նախնական ֆունկցիա, անորոշ ինտեգրալ

Ս ա հ մ ա ն ո ւ մ : $F(x)$-ը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի *նախնական* $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում, եթե F-ն $(a;b)$-ում դիֆերենցելի է և $F'(x)=f(x)$, $x\in(a;b)$:

Եթե F-ն $(a;b)$ միջակայքում f ֆունկցիայի նախնականն է, ապա f-ի նախնականներ են $F(x)+C$ $(C=const)$ տեսքի բոլոր ֆունկցիաները և միայն դրանք:

Դիցուք F-ը տրված միջակայքում f-ի որևէ նախնականն է:

Սահմանում : f ֆունկցիայի բոլոր նախնականների բազմությունը՝ $\{F(x)+C : C\in R\}$-ը, կոչվում է f-ի *անորոշ ինտեգրալ* և նշանակվում՝

$\int f$ կամ $\int f(x)dx$:

Այս նշանակման մեջ f-ը կոչվում է *ենթաինտեգրալ ֆունկցիա*, իսկ $f(x)dx$-ը՝ *ենթաինտեգրալ արտահայտություն*:

Տարրական ֆունկցիաների նախնականների աղյուսակ.

1. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$;

2. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$;

3. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C \quad (a>0, a\neq1)$, $\int e^{x}dx=e^{x}+C$;

4. $\int\sin xdx=-\cos x+C$;

5. $\int\cos xdx=\sin x+C$;

6. $\int\dfrac{dx}{\cos^{2}x}=tgx+C$;

7. $\int\dfrac{dx}{\sin^{2}x}=-ctgx+C$;

8. $\int shxdx=chx+C$;

9. $\int chxdx=shx+C$;

10. $\int\dfrac{dx}{ch^{2}x}=thx+C$;

11. $\int\dfrac{dx}{sh^{2}x}=-cthx+C$;

12. $\int\dfrac{dx}{x^{2}+a^{2}}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C_1=-\dfrac{1}{a}arcctg\dfrac{x}{a}+C_2 \quad (a\neq0)$;

13. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C_1=-\arccos\dfrac{x}{a}+C_2 \quad (a>0)$;

14. $\int\dfrac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a\neq0)$;

15. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^{2}+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^{2}+a}\right|+C \quad (a\neq0)$:

Անորոշ ինտեգրալի հաշվման (ինտեգրման) հիմնական եղանակները:

1. Ինտեգրալի գծայնությունը: Դիցուք u և v ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը տրված միջակայքում ունի նախնական: Ցանկացած α և β հաստատունների համար $\alpha u+\beta v$ ֆունկցիան այդ միջակայքում նույնպես կունենա նախնական, ընդ որում՝

$$\int(\alpha u+\beta v)=\alpha\int u+\beta\int v:$$

2. Մասերով ինտեգրում: Եթե $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները տրված միջակայքում դիֆերենցելի են, $u'(x)v(x)$ և $v'(x)u(x)$ ֆունկցիաներից որևէ մեկն ունի նախնական, ապա մյուսը նույնպես ունի նախնական և

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx:$$

3. Փոփոխականի փոխարինում կամ տեղադրում: Եթե $(a;b)$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականը $F(x)$-ն է և $x=\varphi(t)$ $(t\in(\alpha;\beta))$ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիայի արժեքները ընկած են $(a;b)$-ում, ապա ճշմարիտ է ինտեգրման հետևյալ բանաձևը.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C,\quad t\in(\alpha;\beta):$$

4. Ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրումը: Տրված է $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ռացիոնալ ֆունկցիան: Եթե $Q(x)$ հանրահաշվական բազմանդամը ներկայացված է

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_l)^{k_l}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$$

տեսքով, որտեղ $x_1,\ldots,x_l$-ը $Q(x)$-ի իրարից տարբեր իրական արմատներն են և $(p_i,q_i)\neq(p_j,q_j)$, երբ $i\neq j$, ապա հնարավոր է ստանալ $R(x)$-ի հետևյալ վերլուծությունը.

$$R(x)=p(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{a_{ik}}{(x-x_i)^k}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{b_{ik}x+c_{ik}}{(x^2+p_ix+q_i)^k}:$$

Այս վերլուծության մեջ $p(x)$-ը հանրահաշվական բազմանդամ է, որը ստացվում է $P(x)$ բազմանդամը $Q(x)$-ի վրա բաժանելիս և հետևաբար հայտնվում է միայն այն դեպքում, երբ $P(x)$-ի կարգը փոքր չէ $Q(x)$-ի կարգից: Իսկ a_{ik}, b_{ik} և c_{ik} հաստատունները միարժեքորեն որոշվում են որպես գծային հավասարումների համակարգի լուծումներ, որը ստացվում է «անորոշ գործակիցների մեթոդը» կիրառելիս. $R(x)$-ի վերլուծության աջ կողմը բերվում է ընդհանուր հայտարարի (այն համընկնում է $Q(x)$-ին) և, այնուհետև, համարիչում ստացված անհայտ գործակիցներով բազմանդամը նույնացվում է $P(x)$-ի հետ: Օգտագործելով ինտեգրալի գծայնությունը՝ $R(x)$-ի ինտեգրման խնդիրը հանգեցվում է աստիճանային ֆունկցիաների և պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրմանը:

Սահմանում: $F\in C(a;b)$ ֆունկցիան կոչվում է $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիայի ընդհանրացված նախնական, եթե $(a;b)$ միջակայքում ամենուրեք, բացի գուցե վերջավոր թվով կետերից, F-ը դիֆերենցելի է և $F'(x)=f(x)$:

Ա

Կատարելով փոփոխականի պարզագույն փոխարինում և օգտվելով նախնականների աղյուսակից՝ գտնել ինտեգրալը (1614-1697).

1614. $\int\sqrt[3]{2x}\,dx$:

1615. $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{5x}}$:

1616. $\int x^2\left(x^2-3\right)dx$:

1617. $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x+\sqrt{x}-2\right)dx$:

1618. $\int\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$:

1619. $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$:

1620. $\int e^{-x-3}dx$:

1621. $\int a^{x+1}e^{x+1}dx$:

1622. $\int\frac{dx}{x\ln x}$:

1623. $\int\cos(x+1)dx$:

1624. $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$:

1625. $\int ctg^2 x\,dx$:

1626. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$:

1627. $\int\frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$:

1628. $\int\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$:

1629. $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$:

1630. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-tgx}}$:

1631. $\int\frac{dx}{x\cos^2(1+\ln x)}$:

1632. $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$:

1633. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$:

1634. $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$:

1635. $\int e^x\sin\left(e^x\right)dx$:

1636. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$:

1637. $\int xe^{x^2}dx$:

1638. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$:

1639. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$:

1640. $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^{10}}}$:

1641. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt[5]{2x^4+1}}$:

1642. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+a^2}$:

1643. $\int \sqrt[4]{1-3x}\,dx$:

1644. $\int 2^{-2x-7}dx$:

1645. $\int \left(e^{2x}-1\right)^3 dx$:

1646. $\int \frac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^4}dx$:

1647. $\int \frac{xdx}{x+4}$:

1648. $\int \frac{3+x}{3-x}dx$:

1649. $\int \frac{x^2dx}{2+x^2}$:

1650. $\int \frac{x^2dx}{1-3x^2}$:

1651. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx$:

1652. $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx$:

1653. $\int (a\cdot sh3x+b\cdot ch4x)dx$:

1654. $\int th^2xdx$:

1655. $\int \frac{shxdx}{a^2+ch^2x}$:

1656. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$:

1657. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$:

1658. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$:

1659. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}$:

1660. $\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}$ $\left(a^2\neq b^2\right)$:

1661. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ $(a\neq b)$:

1662. $\int \sin^2 xdx$:

1663. $\int \sin 3x\cdot \sin 5xdx$:

1664. $\int \cos^3 xdx$:

1665. $\int \sin^4 xdx$: $= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}$

1666. $\int tg^3xdx$:

1667. $\int \sin^2 3x\cdot \sin^2 2xdx$:
$\cos(\alpha+\beta)$

1668. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$:

1669. $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin x}$:

1670. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$:

1671. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$:

1672. $\int e^x\sqrt{e^x+1}dx$:

1673. $\int \frac{\left(1+e^x\right)^2}{e^{2x}}dx$:

1674. $\int \frac{\left(2x-\sqrt{\arcsin x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx$:

1675. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$:

1676. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$:

1677. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$:

1678. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$:

1679. $\int \frac{x^2dx}{\left(8x^3+27\right)^{2/3}}$:

1680. $\int \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$:

1681. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$:

1682. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$:

1683. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$:

1684. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{ctgx}}$:

1685. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$:

1686. $\int \frac{dx}{\cos x}$:

1687. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx \quad (n\neq -2)$:

1688. $\int \frac{x^4dx}{x^{10}+3}$:

1689. $\int \frac{2^x3^x}{9^x-4^x}dx$:

1690. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$:

1691. $\int \frac{dx}{2+e^x+e^{-x}}$:

1692. $\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{100}}$:

1693. $\int \frac{x^5dx}{x+1}$:

1694. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$:

1695. $\int x\sqrt{2-5x}dx$:

1696. $\int \frac{x^3dx}{x^8-2}$:

1697. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$:

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ գտնել նախնականը (1698-1706).

1698. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$:

1699. $\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx$:

1700. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$:

1701. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

1702. $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos^2 x}{1+\cos^2 x}dx$:

1703. $\displaystyle\int\frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$:

1704. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$:

1705. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$:

1706. $\displaystyle\int\frac{arctg\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}(1+x)}$:

Կատարելով փոփոխականի $x=a\sin t$, $x=atgt$, $x=a\sin^2 t$ $(a>0)$ փոխարինում՝ գտնել նախնականը (1707- 1712).

1707. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$:

1708. $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx$:

1709. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$:

1710. $\displaystyle\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$:

1711. $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$:

1712. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$:

Կատարելով փոփոխականի $x=asht$, $x=acht$, $x=atht$ $(a>0)$ փոխարինում՝ գտնել նախնականը (1713-1715).

1713. $\displaystyle\int\sqrt{a^2+x^2}dx$:

1714. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$:

1715. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$:

Կիրառելով մասերով ինտեգրման մեթոդը՝ գտնել նախնականը (1716-1746).

1716. $\displaystyle\int\ln x dx$:

1717. $\displaystyle\int x^n\ln x dx \quad (n\neq -1)$:

1718. $\displaystyle\int\sqrt{x}\ln^2 x dx$:

1719. $\displaystyle\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$:

1720. $\displaystyle\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$:

1721. $\displaystyle\int xe^{-x}dx$:

1722. $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}dx$:

1723. $\displaystyle\int x\cos x dx$:

1724. $\displaystyle\int x^2\sin 2x dx$:

1725. $\displaystyle\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$:

1726. $\displaystyle\int x\sin^2 x dx$:

1727. $\displaystyle\int\sin x\ln tgx dx$:

1728. $\int x^2 chx dx$:

1729. $\int arctgx dx$:

1730. $\int x arctgx dx$:

1731. $\int \arccos(5x-2)dx$:

1732. $\int x^2 \arcsin 2x dx$:

1733. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$:

1734. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$:

1735. $\int (\arcsin x)^2 dx$:

1736. $\int \frac{x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$:

1737. $\int e^{\sqrt{x}}dx$:

1738. $\int x \sin\sqrt{x} dx$:

1739. $\int \sin \ln x dx$:

1740. $\int e^{ax}\cos bx dx$:

1741. $\int e^{ax}\sin bx dx$:

1742. $\int e^{2x}\sin^2 x dx$:

1743. $\int \frac{e^{arctgx}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$:

1744. $\int (e^x - \cos x)^2 dx$:

1745. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x}dx$:

1746. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$:

Քառակուսի եռանդամից լրիվ քառակուսի անջատելով՝ գտնել նախնականը (1747-1761).

1747. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}$:

1748. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}$:

1749. $\int \frac{xdx}{x^4-2x^2-1}$:

1750. $\int \frac{(x+1)}{x^2+x+1}dx$:

1751. $\int \frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}$:

1752. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$:

1753. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$:

1754. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$:

1755. $\int \frac{xdx}{x^2-2x\cos a+1}$, $\sin a \neq 0$:

1756. $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2+6x+18}$:

1757. $\int\frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$:

1758. $\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$:

1759. $\int\sqrt{x-x^2}\,dx$:

1760. $\int\frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$:

1761. $\int\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$:

Գտնել ռացիոնալ ֆունկցիայի նախնականը (1762-1776).

1762. $\int\frac{(2x+3)dx}{(x-2)(x+5)}$:

1763. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$:

1764. $\int\frac{x^3dx}{x^2+x-2}$:

1765. $\int\frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$:

1766. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-1)}$:

1767. $\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$:

1768. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$:

1769. $\int\frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$:

1770. $\int\frac{xdx}{x^3-1}$:

1771. $\int\frac{(5x-14)dx}{x^3-x^2-4x+4}$:

1772. $\int\frac{x^5-2x^2+3}{x^2-4x+4}dx$:

1773. $\int\frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx$:

1774. $\int\frac{(x^4+1)dx}{(x-1)(x^4-1)}$:

1775. $\int\frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$:

1776. $\int\frac{x^6+x-1}{(x^6-x^5)(x+1)}dx$:

Գտնել իռացիոնալ ֆունկցիայի նախնականը (1777-1785).

$R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ արտահայտության ինտեգրումը, որտեղ $R(u,v)$-ն ռացիոնալ ֆունկցիա է, իսկ a,b,c,d թվերը հաստատուններ են, $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ տեղադրումով բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրմանը:

1777. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$:

1778. $\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$:

1779. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}$: 1780. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$:

1781. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$: 1782. $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3}$:

1783. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$: 1784. $\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$:

1785. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$:

Ինտեգրել եռանկյունաչափական արտահայտությունը (1786-1803).

$\int R(\sin x,\cos x)dx$ տեսքի ինտեգրալը, որտեղ $R(u,v)$-ն ռացիոնալ ֆունկցիա է, ընդհանուր դեպքում բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի՝ փոփոխականի $t=tg\frac{x}{2}$ փոխարինման միջոցով: Եթե հայտնի է նաև, որ $R(-u,v)=-R(u,v)$ կամ $R(u,-v)=-R(u,v)$ կամ $R(-u,-v)=R(u,v)$, ապա ավելի հարմար է կատարել համապատասխանաբար $t=\cos x$, $t=\sin x$, $t=tgx$ փոխարինումը:

1786. $\int \cos^5 x dx$: 1787. $\int \sin^6 x dx$:

1788. $\int \sin^4 x\cos^5 x dx$: 1789. $\int \sin x\sin 2x\sin 3x dx$:

1790. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$: 1791. $\int \frac{\sin 3x dx}{\cos x}$:

1792. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$: 1793. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$:

1794. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$: 1795. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$:

1796. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x-6\sin x+5}$: 1797. $\int \frac{dx}{\cos x+\cos a}$, $\sin a\neq 0$:

1798. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$: 1799. $\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\sin^2 x}$:

1800. $\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$ ա) $0<\varepsilon<1$; բ) $\varepsilon>1$:

1801. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$: 1802. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$:

1803. $\int tgx\,tg(x+a)dx$:

Գտնել ինտեգրալը (1804-1829).

1804. $\int x\sqrt[3]{a+x}dx$:

1805. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$:

1806. $\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx$:

1807. $\int arctg\left(1+\sqrt{x}\right)dx$:

1808. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$:

1809. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx$:

1810. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}$:

1811. $\int \frac{x^2dx}{x^2+12x+35}$:

1812. $\int \frac{xdx}{2x^2-x+1}$:

1813. $\int \frac{x^4dx}{x^2+4}$:

1814. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$:

1815. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt[4]{x}}$:

1816. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$:

1817. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$:

1818. $\int \sqrt{4x^2-4x+3}dx$:

1819. $\int \frac{\sin xdx}{1+\sin x}$:

1820. $\int \left(tg^2x+tg^4x\right)dx$:

1821. $\int sh^3xch^4xdx$:

1822. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}$:

1823. $\int \frac{tgxdx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$:

1824. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$:

1825. $\int x^3\sin x^2dx$:

1826. $\int \frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$:

1827. $\int e^{x+e^x}dx$:

1828. $\int \frac{\ln x\cos\ln x}{x}dx$:

1829. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$:

Բ

1830. Դիցուք $F'(x)=f(x)$ $(x\in R)$: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ

ա) եթե $f(x)$-ը պարբերական ֆունկցիա է, ապա $F(x)$-ը ևս պարբերական է;

բ) եթե $f(x)$-ը կենտ ֆունկցիա է, ապա $F(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է;

գ) եթե $f(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է, ապա $F(x)$-ը կենտ ֆունկցիա է:

1831. Ապացուցել, որ $f(x)=\operatorname{sgn} x$ ֆունկցիան R-ի վրա նախնական չունի:

1832. Բերել խզվող ֆունկցիայի օրինակ, որն R-ի վրա ունի նախնական:

Գտնել ինտեգրալը (1833-1839).

1833. $\int|x|dx$: 1834. $\int x|x|dx$: 1835. $\int e^{-|x|}dx$:

1836. $\int\left(|x+1|-|1-x|\right)dx$: 1837. $\int|shx|dx$:

1838. $\int f'(2x)dx$: 1839. $\int xf''(x)dx$:

1840. Գտնել $f(x)$-ը, եթե $f(0)=0$ և

ա) $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$; բ) $f'(\ln x)=\begin{cases}1, 0<x\le 1,\\ x, 1<x<+\infty:\end{cases}$

1841. Դիցուք $p^2-4q<0$: Կատարելով համապատասխան ձևափոխություններ՝ $\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ $(n\in N)$ ինտեգրալի հաշվումը բերել $I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ ինտեգրալի հաշվմանը և վերջինիս համար ստանալ աստիճանի իջեցման հետևյալ բանաձևը

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right):$$

1842. Օգտվելով նախորդ խնդրում ստացված բանաձևից՝ գտնել նախնականը.

ա) $\int\frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}$; բ) $\int\frac{dx}{\left(4+x^2\right)^3}$:

Գտնել ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալը (1843-1851).

1843. $\int\frac{dx}{x^4+1}$: 1844. $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$: 1845. $\int\frac{dx}{x^6+1}$:

1846. $\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$: 1847. $\int\frac{x^4+2x^2+4}{\left(x^2+1\right)^3}dx$:

1848. $\int\frac{x^4-2x^2+2}{\left(x^2-2x+2\right)^2}dx$: 1849. $\int\frac{dx}{x^6+2x^4+x^2}$:

1850. $\int\frac{dx}{x^4\left(x^3+1\right)^2}$: 1851. $\int\frac{dx}{x^8+x^4+1}$:

1852. Ապացուցել, որ եթե $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$, ապա

ա) $\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C$, երբ $a>0$;

բ) $\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(-\frac{y'}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)+C$, երբ $a<0$:

1853. Դիցուք $P_n(x)$-ն n-րդ աստիճանի բազմանդամ է և $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն $(n-1)$-րդ աստիճանի $Q_{n-1}(x)$ բազմանդամ և λ թիվ, այնպիսիք, որ

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{y}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{y}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{y}}:$$

Գտնել ինտեգրալը (1854-1860).

1854. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$: 1855. $\int\frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$:

1856. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$: 1857. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$:

1858. $\int\frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$: 1859. $\int\frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$:

1860. $\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$:

Կատարելով էյլերյան տեղադրությունները՝

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$, $a>0$,

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$, $c>0$,

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$,

գտնել ինտեգրալը (1861-1866).

1861. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$:

1862. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$:

1863. $\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$:

1864. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}dx$:

1865. $\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$:

1866. $\int\frac{x^3dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$:

Գտնել բինոմական դիֆերենցիալի ինտեգրալը (1867-1872).

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ ինտեգրալի հաշվումը, որտեղ $m,n,p\in Q$, բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրման միայն հետևյալ երեք դեպքերում (Չեբիշևի թեորեմ). ա) երբ p-ն ամբողջ է, տեղադրում են $x=z^k$, որտեղ k-ն m և n կոտորակների ընդհանուր հայտարարն է; բ) երբ $\frac{m+1}{n}$-ն ամ-բողջ է, տեղադրում են $a+bx^n=z^k$, որտեղ k-ն p-ի հայտարարն է; գ) երբ $\frac{m+1}{n}+p$-ն ամ-բողջ է, տեղադրում են $ax^{-n}+b=z^k$, որտեղ k-ն p-ի հայտարարն է:

1867. $\int\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$:

1868. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$:

1869. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$:

1870. $\int\sqrt[3]{3x-x^3}dx$:

1871. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$:

1872. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$:

Ինտեգրել եռանկյունաչափական արտահայտությունը (1873-1884).

1873. $\int\frac{dx}{2\cos^2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2x}$:

1874. $\int\frac{dx}{\cos 2x-\sin 2x}$:

1875. $\int\frac{dx}{2+3\sin 2x-4\cos^2x}$:

1876. $\int\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}$:

1877. $\int\frac{\cos xdx}{\sin^3x+\cos^3x}$:

1878. $\int\frac{dx}{\sin^6x+\cos^6x}$:

1879. $\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$, $0<\varepsilon<1$:

1880. $\int \frac{\sin 4x dx}{\sin^8 x+\cos^8 x}$:

1881. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$:

1882. $\int \frac{1-2\sin 2x+2\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$:

1883. $\int \frac{3\sin x+\cos x+1}{\sin x+3\sin^2 x}dx$:

1884. $\int \frac{ctg^3 x+ctgx}{4+tg^2 x}dx$:

Ինտեգրել հիպերբոլական արտահայտությունը (1885-1893).

1885. $\int \frac{dx}{1-thx}$:

1886. $\int \frac{dx}{4+3sh^2 x}$:

1887. $\int \frac{ch2xdx}{sh^4 x+ch^4 x}$:

1888. $\int \frac{dx}{2shx-chx}$:

1889. $\int \frac{dx}{achx+bshx}$, $a>0$, $a^2\neq b^2$:

1890. $\int \frac{sh2xdx}{5shx+3chx}$:

1891. $\int \frac{chx+2shx+3}{4chx+5shx+6}dx$:

1892. $\int \sqrt{thx}dx$:

1893. $\int \frac{\sqrt[3]{th^2 x}}{ch^4 x}dx$:

Գտնել ինտեգրալը (1894-1948).

1894. $\int \frac{dx}{1+e^x+e^{2x}+e^{3x}}$:

1895. $\int \frac{dx}{(e^x-1)^4}$:

1896. $\int \frac{dx}{(e^{x-1}+1)^2-(e^{x+1}+1)^2}$:

1897. $\int (x^3+x)e^{-x^2}dx$:

1898. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$:

1899. $\int e^x\ln(1+e^{-x})dx$:

1900. $\int \frac{\ln(1-x+x^2)}{x^2}dx$:

1901. $\int \frac{(x\ln x)^2}{\sqrt{x}}dx$:

1902. $\int \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})dx$:

1903. $\int arctg\frac{1}{x-1}dx$:

1904. $\int x^7 arctgxdx$:

1905. $\int x\sqrt{1-x^2}\arccos xdx$:

1906. $\int e^{-x}\arcsin e^x dx$:

1907. $\int e^{\arcsin x}dx$:

1908. $\int \frac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx$:

1909. $\int \frac{\ln x dx}{(\ln x+1)^2}$:

1910. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}dx$:

1911. $\int \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|}{x^2}dx$:

1912. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}dx$:

1913. $\int \frac{\ln|x|}{(x+2)^2}dx$:

1914. $\int \frac{x\ln|x|}{\left(1-x^2\right)\sqrt{x^2-1}}dx$:

1915. $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$:

1916. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$:

1917. $\int \frac{\sqrt{\sin^3 2x}}{\sin^5 x}dx$:

1918. $\int \sqrt{th^2 x+1}dx$:

1919. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$:

1920. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}$:

1921. $\int \frac{x\sin x dx}{(1+\cos x)^2}$:

1922. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x\cos x}}$:

1923. $\int \frac{2x^4-2x^3-x^2+2}{2x^3-4x^2+3x-1}dx$:

1924. $\int \frac{5x^7-5x^2-18x}{x^5+3x^2-1}dx$:

1925. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$:

1926. $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$:

1927. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}}$:

1928. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$:

1929. $\int \frac{dx}{\left(3+5x^3\right)\sqrt[3]{3+4x^3}}$:

1930. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x^2+x}\right)^2}$:

1931. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^5}}$:

1932. $\int \frac{x\ln|x|}{\left(1+x^2\right)^2}dx$:

1933. $\int \frac{arctge^{\frac{x}{2}}}{e^{x/2}\left(1+e^x\right)}dx$:

1934. $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$:

1935. $\int\frac{x^2\arccos\left(x\sqrt{x}\right)}{\left(1-x^3\right)^2}dx$:

1936. $\int\frac{3x^2-1}{x\sqrt{x}}\,arctgx\,dx$:

1937. $\int\frac{x\sin x}{\sqrt{\left(4-\sin^2 x\right)^3}}dx$:

1938. $\int x^{a-1}\ln^{b-1}x\left(a\ln x+b\right)dx$:

1939. $\int\frac{thx\,dx}{\sqrt{1-thx}}$:

1940. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}$:

1941. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{10}}$:

1942. $\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}$:

1943. $\int\frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$:

1944. $\int\frac{dx}{\left(1-x^4\right)\sqrt{1+x^2}}$:

1945. $\int\frac{11x-13}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+1}}dx$:

1946. $\int\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x-1}}$:

1947. $\int\frac{x^2dx}{\left(4-2x+x^2\right)\sqrt{2+2x-x^2}}$:

1948. $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$:

Գ.

Գտնել ինտեգրալը (1949-1952).

1949. $\int\max\left(1,x^2\right)dx$:

1950. $\int[x]\left|\sin\pi x\right|dx \quad (x\geq 0)$:

1951. $\int f(x)dx$, որտեղ $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leq 1,\\ 1-|x|, & |x|>1:\end{cases}$

1952. $\int f(x)dx$, որտեղ $f(x)=\begin{cases}1, & -\infty<x<0,\\ x+1, & 0\leq x\leq 1,\\ 2x, & 1<x<+\infty:\end{cases}$

1953. Դիցուք $\varphi(x)$-ը x թվի հեռավորությունն է x-ին ամենամոտ ամբողջ թվից: Գտնել $\int\varphi(x)dx$-ը:

1954. Դիցուք $f(x)$-ը մոնոտոն և անընդհատ ֆունկցիա է, իսկ $f^{-1}(x)$-ը՝ նրա հակադարձ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե

$$\int f(x)dx = F(x)+C \ ,$$

ապա

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x)-F\left(f^{-1}(x)\right)+C :$$

Դիտարկել՝ ա) $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha>0$; բ) $f(x)=e^{x}$; գ) $f(x)=\arcsin x$ ֆունկցիաները:

1955. Դիցուք $P(x)$-ը n-րդ աստիճանի բազմանդամ է, $a\neq 0$: Ապացուցել, որ

ա) $$\int P(x)e^{ax}dx=\left(P(x)-\frac{P'(x)}{a}+\dots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^n}\right)\frac{e^{ax}}{a}+C ;$$

բ) $$\int P(x)\sin axdx=-\left(P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\dots\right)\frac{\cos ax}{a}+$$

$$+\left(\frac{P'(x)}{a}-\frac{P^{(3)}(x)}{a^3}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^5}-\dots\right)\frac{\sin ax}{a}+C ;$$

գ) $$\int P(x)\cos axdx=\left(P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\dots\right)\frac{\sin ax}{a}+$$

$$+\left(\frac{P'(x)}{a}-\frac{P^{(3)}(x)}{a^3}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^5}-\dots\right)\frac{\cos ax}{a}+C :$$

Ինտեգրալի համար ստանալ աստիճանի իջեցման բանաձև $(n\in N)$ (1956-1963).

1956. $I_n=\int x^n e^{ax}dx \quad (a\neq 0)$:

1957. $I_n=\int x^{\alpha}\ln^n xdx \quad (\alpha\neq -1)$:

1958. $I_n=\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}}$:

1959. $I_n=\int \sin^n xdx$:

1960. $I_n=\int ch^n xdx$:

1961. $I_n=\int \frac{dx}{\sin^n x}$:

1962. $I_n=\int \frac{dx}{ch^n x}$:

1963. $I_n=\int tg^n xdx$:

Ապացուցել անդրադարձ բանաձևը $(m,n\in N, m>1, n>1)$ (1964-1967).

1964.

$$I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{na}\left(x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2}(2n-1)I_{n-1} - c(n-1)I_{n-2} \right):$$

1965. $I_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x dx$:

ա) $$I_{n,m} = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} I_{n-2,m};$$

բ) $$I_{n,m} = \frac{\sin^{n+1} \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} I_{n,m-2}:$$

1966. $I_n = \int \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x)^n}$, $a^2+b^2 \neq 0$:

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[\frac{a\sin x - b\cos x}{(a\cos x + b\sin x)^{n-1}} + (n-2)I_{n-2} \right]:$$

Գտնել $\int \frac{dx}{(2\cos x + \sin x)^3}$ -ը:

1967. $I_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n dx$, $n \in N$:

$$I_n = \frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^{n-1} + 2I_{n-1}\cos a - I_{n-2}:$$

1968. Գտնել $\int \frac{\left(\cos \frac{x+a}{2}\right)^{n-1}}{\left(\sin \frac{x-a}{2}\right)^{n+1}} dx$ -ը $(\cos a \neq 0)$:

1969. Ապացուցել, որ

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c} dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| +$$

$$+C\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} \quad (a^2+b^2 \neq 0):$$

Գտնել A, B, C գործակիցները:

Գտնել ինտեգրալը (1970-1971).

1970. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx$:

1971. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} dx$:

1972. Ապացուցել, որ

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx = A \sin x + B \cos x +$$

$$+ C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}, \; a^2 + b^2 \neq 0:$$

Գտնել A, B, C գործակիցները:

Գտնել ինտեգրալը (1973-1974).

1973. $\int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx:$

1974. $\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx:$

1975. Դիցուք $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$: Ընտրել A և B հաստատունները այնպես, որ տեղի ունենա

$$\int \frac{a_1 \cos x + b_1 \sin x}{a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x} dx = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}$$

հավասարությունը, որտեղ λ_1, λ_2 -ը $(\lambda - a)(\lambda - c) = b^2$ հավասարման արմատները են, $u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x$ և $k_i = \frac{1}{c - \lambda_i}$, $i = 1,2$:

Գտնել ինտեգրալը (1976-1977).

1976. $\int \frac{(\sin x + \cos x) dx}{2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}:$

1977. $\int \frac{\sin x - 2 \cos x}{1 + 4 \sin x \cos x} dx:$

1978. Դիցուք

$$I_n = \int \frac{dx}{(a \cos x + c)^n}, \; (|a| \neq |c|, n \in N):$$

Ստանալ հետևյալ անդրադարձ բանաձևը.

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2 - c^2)} \left[\frac{a \sin x}{(a \cos x + c)^{n-1}} - (2n-3) c I_{n-1} + (n-2) I_{n-2} \right]:$$

1979. Գտնել ինտեգրալը՝ $\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^3}, \; \varepsilon > 1:$

1980. Տրված է՝ $I_m = \int x^m (ax^n + b)^p dx$ $(m, n \in N, m > n)$: Ապացուցել, որ I_m-ը բավարարում է հետևյալ անդրադարձ հավասարմանը.

$$a(m+1+np)I_m = x^{m+1-n}(ax^n + b)^{p+1} - b(m+1-n)I_{m-n}:$$

Գտնել ինտեգրալը (1981-2007).

1981. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$:

1982. $\int \frac{(a+\cos x)dx}{1+2a\cos x + a^2}$:

1983. $\int \frac{dx}{a + tg^2 x}$:

1984. $\int \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x)^2}$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$:

1985. $\int \frac{dx}{[a + (ax+b)tgx]^2}$ $(a \neq 0)$:

1986. $\int \left(\frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\right)^2 dx$:

1987. $\int \frac{arctgxdx}{(ax^2+b)\sqrt{ax^2+b}}$ $(a \neq 0)$:

1988. $\int \frac{dx}{[x^2 + (a+b)x + ab]^2}$ $(a \neq b)$:

1989. $\int \frac{dx}{x^4 + (a^2+b^2)x^2 + a^2b^2}$ $(ab \neq 0)$:

1990. $\int \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^n dx$ $(n \in N)$:

1991. $\int \frac{a_1 chx + b_1 shx}{achx + bshx} dx$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$:

1992. $\int \frac{dx}{3chx + 5shx + 3}$:

1993. $\int \frac{2shx + chx}{(3shx + 4chx)^2} dx$:

1994. $\int \frac{sh2x - 2shx}{sh^6 \frac{x}{2} - sh^3 x} dx$:

1995. $\int \frac{(\sin x - \cos x)\sin 2x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$:

1996. $\int \frac{a_1 \cos x + b_1 \sin x}{(a\cos x + b\sin x)^2} dx$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$:

1997. $\int \frac{\cos^2 x}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)} dx$, $a^2 + b^2 \neq 0$:

1998. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$:

1999. $\int \frac{dx}{x^{2n} - a^{2n}} \quad (n \in N, a > 0)$:

2000. $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)\sqrt{b^2 - x^2}} \quad (ab \neq 0)$:

2001. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n + a}} \quad (a \neq 0, n \in N)$:

2002. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \quad (n \in N)$:

2003. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x+a}} dx$:

2004. $\int \frac{\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|}{x^2} dx$:

2005. $\int \left(\frac{x}{(ax - b)\sin x + (a + bx)\cos x} \right)^2 dx \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$:

2006. $\int \frac{x \arcsin x}{(1 + ax^2)^2} dx$:

2007. $\int \frac{2\sin x - \sin 2x}{\sin^3 x + (1 - \cos x)^3} dx$:

Գտնել ֆունկցիայի ընդհանրացված նախնականը (2008-2011).

2008. $y = \operatorname{sgn}(x - a)$:

2009. $y = [x]$:

2010. $y = \begin{cases} arctg\,\frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0: \end{cases}$

2011. $y = \begin{cases} \ln x, x > 0, \\ 1, x \leq 0: \end{cases}$

2012. Ապացուցել, որ Ռիմանի ֆունկցիան ոչ մի միջակայքում նախնական չունի:

Գլուխ 8

Ռիմանի ինտեգրալ, անիսկական ինտեգրալներ

Տրված $[a;b]$ $(a<b)$ հատվածի համար կետերի $P=(x_0,x_1,...,x_n)$ շարվածքը կոչվում է այդ հատվածի *տրոհում*, եթե $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$։ Դրան համապատասխան՝ $\Delta_i=$ $=[x_i,x_{i+1}]$ հատվածները կոչվում են *տրոհման հատվածներ*, իսկ $\lambda(P)=\max\limits_{0\le i\le n-1}\Delta x_i$-ն, որտեղ $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, *տրոհման տրամագիծ*։

Դիցուք f-ն $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիա է։ Այդ հատվածի ցանկացած P տրոհման և ցանկացած $\xi_i\in\Delta_i$ $(i=0,1,...,n-1)$ կետերի համար կազմենք

$$\sigma_f(P,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$$

գումարը։ Այն կոչվում է f ֆունկցիայի $[a;b]$ հատվածի P տրոհմանը և ξ_i կետերին համապատասխանող *ինտեգրալային գումար*։

Ս ա հ մ ա ն ու մ ։ I թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի որոշյալ *ինտեգրալ* (*Ռիմանի ինտեգրալ*) $[a;b]$ հատվածում, եթե ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $[a;b]$ հատվածի ցանկացած P տրոհման և դրան համապատասխան՝ ξ_i կետերի կամայական ընտրության դեպքում՝

$$\lambda(P)<\delta\Rightarrow\left|\sigma_f(P,\xi)-I\right|<\varepsilon\text{:}$$

Եթե այդպիսի I թիվը գոյություն ունի, ապա f-ը կոչվում է $[a;b]$ հատվածում *ինտեգրելի* (Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի) և նշանակվում է՝

$$I=\lim_{\lambda(P)\to0}\sigma_f(P,\xi)=\int_a^b f(x)dx\text{:}$$

Տրված $[a;b]$ հատվածի վրա Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի ֆունկցիաների բազմությունը նշանակվում է $\Re[a;b]$-ով։

Ի ն տ ե գ ր ե լ ի ու թ յ ա ն ա ն հ ր ա ժ ե շ տ պ ա յ մ ա ն ը ։ Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանափակ է։

Ի ն տ ե գ ր ե լ ի ու թ յ ա ն ա ն հ ր ա ժ ե շ տ և բ ա վ ա ր ա ր պ ա յ մ ա ն ը ։ Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան սահմանափակ է։ $[a;b]$ հատվածի P տրոհման համար նշանակենք՝

$$m_i=\inf_{x\in\Delta_i}f(x),\quad M_i=\sup_{x\in\Delta_i}f(x),\quad \Omega_i=M_i-m_i\quad(i=0,1,...,n-1)\text{:}$$

Որպեսզի f-ը լինի Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $[a;b]$ հատվածի ցանկացած P տրոհման համար

$$\lambda(P)<\delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}\Omega_i\Delta x_i<\varepsilon:$$

Հետևյալ գումարները կոչվում են Դարբուի համապատասխանաբար *ստորին* և *վերին գումարներ*.

$$L_f(P)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i\ ,\quad U_f(P)=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i\ :$$

Այս նշանակումներով ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կարող է գրվել նաև հետևյալ կերպ. $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\left(U_f(P)-L_f(P)\right)=0$:

Ցանկացած $f:[a;b]\to R$ սահմանափակ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}L_f(P)=L\int_a^b f(x)dx \quad \text{և} \quad \lim_{\lambda(P)\to 0}U_f(P)=U\int_a^b f(x)dx$$

վերջավոր սահմանները, որոնք կոչվում են $[a;b]$ հատվածում f ֆունկցիայի համապատասխանաբար *ստորին* և *վերին* ինտեգրալներ: Դրանց հավասարությունը անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի f-ն $[a;b]$-ում լինի ինտեգրելի:

Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասեր: Եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա այն $[a;b]$-ում ինտեգրելի է. $C[a;b]\subset\Re[a;b]$:

Եթե f-ն $[a;b]$ հատվածում սահմանափակ է և ունի միայն վերջավոր թվով խզումներ, ապա այն $[a;b]$-ում ինտեգրելի է:

Եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա այն ինտեգրելի է:

$\Re[a;b]$ **դասի կառուցվածքը**: Ցանկացած $f,g\in\Re[a;b]$ ֆունկցիաների համար՝

ա) $\alpha f+\beta g\in\Re[a;b]$ $(\alpha,\beta\in R)$, ընդ որում՝

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$ (ինտեգրալի գծայնություն);

բ) $|f|\in\Re[a;b]$;

գ) $f\cdot g\in\Re[a;b]$;

դ) եթե $[c;d]\subset[a;b]$ $(c<d)$, ապա f-ը $[c;d]$ հատվածի վրա ինտեգրելի է:

Եթե $f\in\Re[a;b]$, ապա ընդունված է գրել. $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx=0$:

Ինտեգրալի ադիտիվություն: Եթե $f\in\Re[a;b]$, ապա ցանկացած $\alpha,\beta,\gamma\in[a;b]$ կետերի համար ճշմարիտ է

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx$$

հավասարությունը:

Ինտեգրալի մոնոտոնություն: Դիցուք՝ $f,g\in\Re[a;b]$: Եթե $a\le b$ և $f(x)\le g(x)$ $(a\le x\le b)$, ապա

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx :$$

Միջին արժեքի առաջին թեորեմը: Եթե $f \in \Re[a;b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ և $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, ապա գոյություն ունի $\mu \in [m;M]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a):$$

Մասնավորապես, եթե $f \in C[a;b]$, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a;b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a):$$

Միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմ: Եթե $f, g \in \Re[a;b]$, $g(x) \ge 0$, $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ և $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, ապա գոյություն ունի $\mu \in [m;M]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx :$$

Միջին արժեքի երկրորդ թեորեմը (Բոնեի բանաձևը): Եթե $f, g \in \Re[a;b]$ և g-ն $[a;b]$-ի վրա մոնոտոն է, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a;b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx :$$

Ինտեգրալը որպես փոփոխական վերին սահմանի ֆունկցիա: Դիցուք՝ $f \in \Re[a;b]$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b)$$

ֆունկցիան կոչվում է փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալ:

Ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

ա) $F \in C[a;b]$;

բ) եթե f-ն $x_0 \in [a;b]$ կետում անընդհատ է, ապա F-ն այդ կետում դիֆերենցելի է և $F'(x_0) = f(x_0)$: Մասնավորապես, եթե $f \in C[a;b]$, ապա F-ն f-ի նախնականն է:

Նյուտոն–Լայբնիցի բանաձևը: Դիցուք՝ $f \in \Re[a;b]$, f-ն $[a;b]$-ում ունի ոչ ավելի, քան վերջավոր թվով խզումներ և $F:[a;b] \to R$ ֆունկցիան f-ի (ընդհանրացված) նախնականն է: Ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a):$$

Մասերով ինտեգրում: Եթե $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները $[a;b]$ հատվածում անընդհատ դիֆերենցելի են, ապա՝

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx :$$

Փ ո փ ո խ ա կ ա ն ի փ ո խ ա ր ի ն ու մ ։ Եթե $\varphi:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է, $\varphi(\alpha)=a$ և $\varphi(\beta)=b$, ապա ցանկացած $f\in C[a;b]$ ֆունկցիայի համար $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ֆունկցիան $[\alpha;\beta]$ միջակայքում ինտեգրելի է, ընդ որում՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt :$$

Ա ն ի ս կ ա կ ա ն ի ն տ ե գ ր ա լ ն ե ր ։ Դիցուք $f:[a,\omega)\to R$ ($\omega\in R$ կամ $\omega=+\infty$) ֆունկցիան ցանկացած $[a;b]$ $(a<b<\omega)$ միջակայքում Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է։

Ս ա հ մ ա ն ու մ ։ $\int_a^\omega f(x)dx$ սիմվոլն անվանում են $[a;\omega)$ միջակայքում f ֆունկցիայի *անիսկական ինտեգրալ*։ Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx$ սահմանը, ապա այն ընդունում են որպես $\int_a^\omega f(x)dx$-ի արժեք և եթե այդ սահմանը վերջավոր է, ապա անիսկական ինտեգրալն անվանում են *զուգամետ*։ Իսկ եթե նշված սահմանը գոյություն չունի կամ անվերջ է, ապա անիսկական ինտեգրալն անվանում են *տարամետ*։ ω-ն անվանում են անիսկական ինտեգրալի կամ ընդինտեգրալ ֆունկցիայի *եզակիություն*։

Համանմանորեն սահմանվում է $\int_{\omega_1}^b f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը, որտեղ $\omega_1\in R$ կամ $\omega_1=-\infty$։ Եթե $f:(\omega_1;\omega)\to R$ ֆունկցիան ցանկացած $[a;b]\subset(\omega_1;\omega)$ հատվածում Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է, ապա սահմանվում է նաև $\int_{\omega_1}^\omega f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը, որը համարվում է զուգամետ միայն այն դեպքում, երբ որևէ $c\in(\omega_1;\omega)$ թվի համար $\int_{\omega_1}^c f(x)dx$ և $\int_c^\omega f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները միաժամանակ զուգամետ են ։ Ընդսմին ընդունվում է՝

$$\int_{\omega_1}^\omega f(x)dx = \int_{\omega_1}^c f(x)dx + \int_c^\omega f(x)dx :$$

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{-b}^{b} f(x)dx$ վերջավոր սահմանը, ապա այն անվանում են *անիսկական ինտեգրալի գլխավոր արժեք* և նշանակում՝ $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:

Համանմանորեն, տրված $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ և $\int\limits_{\omega}^{b} f(x)dx$ $(a<\omega<b)$ անիսկական ինտեգրալների գումարը նույնպես անվանում են անիսկական ինտեգրալ և նշանակում՝ $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$: Այս գումարն էլ համարվում է զուգամետ միայն այն դեպքում, երբ գումարելիներից յուրաքանչյուրը զուգամետ է: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{a}^{\omega-\varepsilon} f(x)dx+\int\limits_{\omega+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$ վերջավոր սահմանը, ապա այն ընդունում են որպես *ինտեգրալի գլխավոր արժեք* և նշանակում՝ $v.p.\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$:

Անիսկական ինտեգրալի սահմանումն ադիտիվության սկզբունքով ընդհանրացվում է վերջավոր թվով եզակիություններ ունեցող ֆունկցիաների համար:

Գծայնության, ադիտիվության և մոնոտոնության հատկությունները զուգամետ անիսկական ինտեգրալների համար նույնությամբ պահպանվում են:

Մասերով ինտեգրման բանաձևը անիսկական ինտեգրալների համար: Դիցուք $u,v\in C^1[a;\omega)$: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to\omega-0} u(x)v(x)$ վերջավոր սահմանը, ապա $\int\limits_{a}^{\omega} u(x)v'(x)dx$ և $\int\limits_{a}^{\omega} u'(x)v(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ, ընդ որում առաջին դեպքում՝

$$\int_{a}^{\omega} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{a}^{\omega} - \int_{a}^{\omega} u'(x)v(x)dx ,$$

որտեղ

$$u(x)v(x)\Big|_{a}^{\omega} = \lim_{x\to\omega} u(x)v(x) - u(a)v(a):$$

Անիսկական ինտեգրալի զուգամիտության հայտանիշները: Դիցուք $f:[a;\omega)\to R$ ֆունկցիան կամայական $[a;b]\subset[a;\omega)$ հատվածում Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է:

Կոշիի սկզբունքը: Որպեսզի $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի

$\Delta \in [a;\omega)$ թիվ, որ ցանկացած $b_1, b_2 \in [\Delta, \omega)$ կետերի համար տեղի ունենա $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Սահմանում: $\int_a^{\omega} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը կոչվում է *բացարձակ զուգամետ*, եթե զուգամետ է $\int_a^{\omega} |f(x)|dx$ ինտեգրալը: Բացարձակ զուգամետ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է:
Եթե անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է, բայց ոչ բացարձակ, ապա ասում են, որ այն *պայմանական զուգամետ* է:

Բաղդատման առաջին հայտանիշ: Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են $[a;\omega)$ միջակայքում և ցանկացած $[a;b] \subset [a;\omega)$ հատվածում ինտեգրելի են: Եթե $|f(x)| \le g(x)$ $(a \le x < \omega)$ և $\int_a^{\omega} g(x)dx$ -ը զուգամետ է, ապա $\int_a^{\omega} f(x)dx$ -ը բացարձակ զուգամետ է:

Բաղդատման երկրորդ հայտանիշ: Եթե f և g ֆունկցիաները $[a;\omega)$ միջակայքում ոչ բացասական են և գոյություն ունեն c_1, c_2 դրական հաստատուններ, այնպիսիք, որ $c_1 f(x) \le g(x) \le c_2 f(x)$, ապա $\int_a^{\omega} f(x)dx$ և $\int_a^{\omega} g(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ:

Աբելի հայտանիշը: Եթե $\int_a^{\omega} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է, իսկ $g:[a;\omega) \to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է և սահմանափակ, ապա $\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx$ -ը զուգամետ է:

Դիրիխլեի հայտանիշը: Եթե $F(z) = \int_a^{z} f(x)dx$ ֆունկցիան $[a;\omega)$ միջակայքում սահմանափակ է, իսկ $g:[a;\omega) \to R$ ֆունկցիան մոնոտոն ձգտում է զրոյի, երբ $x \to \omega - 0$, ապա $\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է:

Ա

Տրոհելով տրված հատվածն n հավասար մասերի և տրոհման յուրաքանչյուր հատվածում որպես ξ_i կետ ընտրելով հատվածի միջնակետը՝ կազմել ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարը և հաշվել այն (2013-2016).

2013. $y=1+x$, $x\in[-1;4]$: 2014. $y=3x^2+3x$, $x\in[0;4]$:

2015. $y=\sin x$, $x\in[0;\pi]$:

2016. $y=\chi(x)$ (Դիրիխլեի ֆունկցիան է) ա) $x\in[-3;7]$; բ) $x\in\left[-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right]$:

Տրոհելով տրված հատվածն n հավասար մասերի՝ գտնել Դարբուի ստորին և վերին գումարները (2017-2020).

2017. $f(x)=2x-1$, $x\in[-2;5]$: 2018. $f(x)=2^x$, $x\in[0;10]$:

2019. $f(x)=\cos x$, $x\in[0;\pi/2]$: 2020. $f(x)=\chi(x)$, $x\in[a;b]$:

Ընդունելով ինտեգրալի գոյությունը՝ հաշվել այն՝ որպես հարմար ձևով կազմված ինտեգրալային գումարների սահման (2021-2026).

2021. $\int_{-1}^{2}x^2dx$: 2022. $\int_{0}^{\pi}\sin xdx$:

2023. $\int_{0}^{1}a^xdx \quad (a>0)$: 2024. $\int_{0}^{\pi/2}\cos tdt$:

2025. $\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^2} \quad (0<a<b)$: 2026. $\int_{a}^{b}\frac{dx}{x} \quad (0<a<b)$:

Ցուցում: Վերջին երկուսում տրոհման կետերն ընտրել այնպես, որ դրանք կազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա:

2027. Ելնելով ինտեգրալի սահմանումից՝ համոզվել, որ $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված $y=C$ հաստատուն ֆունկցիան ինտեգրելի է և գտնել նրա ինտեգրալը:

2028. Ցանկացած հատվածում հաշվել Դիրիխլեի ֆունկցիայի Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալները և համոզվել, որ այդ ֆունկցիան ոչ մի հատվածում ինտեգրելի չէ:

2029. Դիցուք f-ն $[a;b]$ $(a<b)$ հատվածում ինտեգրելի է: Ապացուցել, որ $|f|$ ֆունկցիան այդ նույն հատվածում նույնպես ինտեգրելի է, ընդ որում՝

$$\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|\le\int_{a}^{b}|f(x)|dx:$$

2030. Տրված է $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե $|f|$-ն $[a;b]$-ում ինտեգրելի է, ապա f-ը նույնպես ինտեգրելի է:

Օգտվելով Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից՝ հաշվել ինտեգրալը (2031-2040).

2031. $\int\limits_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}dx$:

2032. $\int\limits_{0}^{\pi}\cos^2 2xdx$:

2033. $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$:

2034. $\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

2035. $\int\limits_{sh1}^{sh2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$:

2036. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ $(0<\alpha<\pi)$:

2037. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(ab\neq 0)$:

2038. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2}{1+x^6}dx$:

2039. $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$:

2040. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx$:

Հաջորդականության անդամները ներկայացնելով որպես որոշակի ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարներ՝ գտնել հաջորդականության սահմանը (2041-2047).

2041. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$:

2042. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$:

2043. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$:

2044. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$:

2045. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$:

2046. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$:

2047. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$:

2048. Դիցուք՝ $f\in C[a;b]$, $\varphi:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ և $\psi:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են: Ապացուցել փոփոխական վերին սահմաններով ինտեգրալի ածանցման հետևյալ կանոնը.

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x)dx = f(\psi(t))\psi'(t) - f(\varphi(t))\varphi'(t):$$

Գտնել ածանցյալը (2049-2054).

2049. $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx$:

2050. $\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx$:

2051. $\frac{d}{dt}\int_0^{t^2} \sqrt{1+x^2}\,dx$:

2052. $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$:

2053. $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi x^2)dx$:

2054. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^4} e^{x^2} dx$:

Օգտվելով Լոպիտալի կանոնից՝ գտնել սահմանը (2055-2058).

2055. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x^2+x}$:

2056. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x (arctgx)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$:

2057. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2} du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2} du}$:

2058. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x} \ln(1+t)dt}{\int_{x^4}^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt}$:

2059. Հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\int_0^2 f(x)dx$, որտեղ $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1, \\ 2-x, 1<x\le 2; \end{cases}$

բ) $\int_0^1 f(x)dx$, որտեղ $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x\le t, \\ t\dfrac{1-x}{1-t}, t<x\le 1: \end{cases}$

Կատարելով մասերով ինտեգրում՝ հաշվել ինտեգրալը (2060-2067).

2060. $\int_0^{\ln 2} xe^{-x} dx$:

2061. $\int_0^{\pi} x\sin x dx$:

2062. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$:

2063. $\int_0^1 \arccos x dx$:

2064. $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$:

2065. $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$:

2066. $\int_1^2 x \ln x dx$:

2067. $\int_{1/e}^{e} |\ln x| dx$:

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ հաշվել ինտեգրալը (2068-2073).

2068. $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$:

2069. $\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$:

2070. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$:

2071. $\int_e^{e^2} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$:

2072. $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$:

2073. $\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$:

2074. Հետևյալ ինտեգրալներում փոփոխականի նշված $x=\varphi(t)$ փոխարինումը բերում է սխալ արդյունքի: Պարզել պատճառը:

$$ա)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2},\quad x=\frac{1}{t};\qquad բ)\ \int_{-1}^{1} \left(1+x^2\right)dx,\quad x=ctgt\ \left(-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}\right):$$

2075. Կարելի՞ է արդյոք $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ ինտեգրալում $x=\sin t$ տեղադրում կատարելիս որպես t-ի փոփոխման սահմաններ վերցնել π-ն և $\frac{\pi}{2}$-ը:

2076. Ապացուցել, որ ցանկացած $f \in \Re[a;b]$ ֆունկցիայի համար

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx :$$

2077. Ապացուցել հավասարությունը.

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx \ \left(f \in \Re[0;a^2],\ a>0\right):$$

2078. Ապացուցել, որ եթե $f \in \Re[-l;l]$ ֆունկցիան

ա) զույգ է, ապա $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^{l} f(x)dx$;

բ) կենտ է, ապա $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$:

Գտնել ինտեգրալը (2079-2086).

2079. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$:

2080. $\int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)^2}dx$:

2081. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$:

2082. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} tgx dx$:

2083. $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$:

2084. $\int_0^{\ln 2} sh^4 x dx$:

2085. $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$:

2086. $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$:

2087. Օգտագործելով ադիտիվության և մոնոտոնության հատկությունները՝ պարզել, թե հետևյալ ինտեգրալներից ո՞րն է դրական և ո՞րը բացասական.

ա) $\int_{1/2}^{1} x^2 \ln x dx$;

բ) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}dx$;

գ) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx$;

դ) $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$:

2088. Տրված երկու ինտեգրալներից ո՞րն է մեծ.

ա) $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx, \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} x^2 dx$;

բ) $I_1 = \int_0^1 e^{-x} dx, \quad I_2 = \int_0^1 e^{-x^2} dx$;

գ) $I_1=\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x dx$, $\quad I_2=\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x dx$:

2089. Դիցուք $f\in C[0;+\infty)$: Համաձայն միջին արժեքի առաջին թեորեմի՝

$$\int\limits_0^x f(t)dt = x\cdot f(\xi(x)) \quad (0<\xi(x)<x):$$

Գտնել $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\xi(x)}{x}$ և $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\xi(x)}{x}$ սահմանները, եթե

ա) $f(t)=t^{\alpha}$ $\quad(\alpha>0)$; $\qquad$ բ) $f(t)=e^t$:

2090. Գնահատել հետևյալ ինտեգրալները.

ա) $I=\int\limits_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x}}dx$; $\qquad$ բ) $I=\int\limits_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx$:

Օգտվելով միջին արժեքի երկրորդ թեորեմից՝ գնահատել ինտեգրալը (2091-2092).

2091. $I=\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx$: $\qquad$ 2092. $I=\int\limits_a^b e^{-x}\frac{\sin x}{x}dx \quad (0<a<b)$:

***

Հաշվել անիսկական ինտեգրալը (2093-2099).

2093. ա) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; $\qquad$ բ) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$:

2094. ա) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$; $\qquad$ բ) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$:

2095. ա) $\int\limits_0^1\ln x dx$; $\qquad$ բ) $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

2096. ա) $\int\limits_1^{+\infty}e^{-3x}dx$; $\qquad$ բ) $\int\limits_0^{+\infty}x2^{-x}dx$:

2097. ա) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$; $\qquad$ բ) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$:

2098. ա) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$; բ) $\int\limits_0^4\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$:

2099. ա) $\int\limits_{-1}^0\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$; բ) $\int\limits_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$:

2100. Ապացուցել, որ $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է միայն $p>1$ դեպքում, իսկ $\int_0^a\frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$ ինտեգրալը՝ միայն $p<1$ դեպքում:

Հետազոտել անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը (2101-2107).

2101. ա) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$; բ) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$:

2102. ա) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}dx$; բ) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$:

2103. ա) $\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$; բ) $\int\limits_1^{\infty}\frac{tg\,\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$:

2104. ա) $\int\limits_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$; բ) $\int\limits_0^1\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$:

2105. ա) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{arctgx}{x}dx$; բ) $\int\limits_0^1\frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}dx$:

2106. ա) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x-\sin x}$; բ) $\int\limits_0^2\frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1}dx$:

2107. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$:

2108. Գտնել տարամետ անիսկական ինտեգրալի գլխավոր արժեքը.

ա) $v.p.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$;　　բ) $v.p.\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}$;

գ) $v.p.\int_{1/2}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$;　　դ) $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$:

Բ

2109. Տրված է $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել ինտեգրելիության բավարար պայմանի հետևյալ ուժեղացումը. եթե կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $[a;b]$ հատվածի $P=(x_0,x_1,...,x_n)$ տրոհում, այնպիսին, որ $\sum_{i=0}^{n-1}\Omega_i\Delta x_i<\varepsilon$, ապա $f\in\Re[a;b]$:

2110. Ապացուցել ինտեգրելիության հետևյալ հայտանիշը. $f:[a;b]\to R$ սահմանափակ ֆունկցիան Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած ε և δ դրական թվերի համար գոյություն ունի $[a;b]$ հատվածի տրոհում, որի այն հատվածների երկարությունների գումարը, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա f-ի տատանումը մեծ է δ-ից, փոքր է ε-ից:

2111. Ապացուցել Դյուբուա-Ռայմոնի հայտանիշը. որպեսզի $[a;b]$ հատվածի վրա սահմանափակ f ֆունկցիան լինի Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական ε և δ դրական թվերի համար $[a;b]$ հատվածի բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրում f-ի տատանումը մեծ է δ-ից, հնարավոր լինի ծածկել վերջավոր թվով միջակայքերով, որոնց երկարությունների գումարը փոքր է ε-ից:

2112. Տրված է՝ $f,g\in\Re[a;b]$: Դիցուք $P=(x_0,x_1,...,x_n)$-ը $[a;b]$ հատվածի տրոհում է և $\xi_i,\eta_i\in\Delta_i$ $(i=0,1,...,n-1)$: Ապացուցել, որ

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)g(x)dx:$$

2113. Դիցուք՝ $f\in\Re[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե $f^*:[a;b]\to R$ ֆունկցիան f-ից տարբերվում է միայն վերջավոր թվով կետերում, ապա $f^*\in\Re[a;b]$, ընդ որում՝

$$\int_a^b f^*(x)dx = \int_a^b f(x)dx :$$

Ապացուցել ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը(2114-2116).

2114. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$, երբ $x \in (0;1]$, $f(0) = 0$:

2115. $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$, երբ $x \in (0;1]$, $f(0) = 0$:

2116. $f(x) = R(x)$ (Ռիմանի ֆունկցիան է), $x \in [a;b]$:

2117. Տրված է՝ $f \in \Re[a;b]$: Դիցուք յուրաքանչյուր $n \in N$ թվի համար $[a;b]$ հատվածը տրոհված է $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0,1,\dots,n$, կետերով: Ապացուցել, որ $f_n(x) = \sup\limits_{t\in\Delta_i} f(t)$, երբ $x \in \Delta_i$, որտեղ $\Delta_0 = [x_0;x_1]$, $\Delta_i = (x_i;x_{i+1}]$, $i = 1,2,\dots,n-1$, ֆունկցիաները $[a;b]$ հատվածի վրա ինտեգրելի են, ընդ որում՝

ա) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$;

բ) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx = 0$:

2118. Ապացուցել, որ ցանկացած $f \in \Re[a;b]$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ $\varphi_n(x)$ $(n \in N)$ ֆունկցիաների հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |\varphi_n(x) - f(x)|dx = 0 :$$

2119. Դիցուք՝ $f \in \Re[a;b]$ և $[c;d] \subset (a;b)$: Ապացուցել, որ f-ն օժտված է «ինտեգրալային անընդհատությամբ» հետևյալ հատկությամբ.

$$\lim_{h\to 0} \int_c^d |f(x+h) - f(x)|dx = 0 :$$

2120. Դիցուք $\varphi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$ ֆունկցիան ինտեգրելի է և $f \in C[a;b]$: Ապացուցել, որ $f \circ \varphi \in \Re[\alpha;\beta]$:

2121. Ստուգել, որ եթե $f,g\in\Re[a;b]$, ապա $\max\{f;g\}\in\Re[a;b]$ և $\min\{f;g\}\in\Re[a;b]$:

2122. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է: Ապացուցել, որ $f\in\Re[a;b]$, ընդ որում՝

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}:$$

2123. Տրված է՝ $f:[1;+\infty)\to R$ ֆունկցիան չնվազող է և գոգավոր: Ապացուցել, որ

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{2}f(n)+\int_1^n f(x)dx+O(1)\quad(n\to\infty):$$

2124. Դիցուք $f:[0;1]\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է: Ապացուցել, որ

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty):$$

2125. Դիցուք՝ $f\in C^1[a;b]$ և

$$d_n=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right):$$

Գտնել $\lim\limits_{n\to\infty}nd_n$ սահմանը:

2126. Դիցուք՝ $f\in\Re[a;b]$ և ամենուրեք՝ $f(x)\ge0$: Ապացուցել, որ եթե $\int_a^b f(x)dx=0$, ապա f-ի բոլոր անընդհատության կետերում $f(x)=0$: Մասնավորապես, եթե $f\in C[a;b]$, ապա $f(x)\equiv0$:

2127. Դիցուք՝ $\int_a^b f(x)dx>0$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $[c;d]\subset[a;b]$ $(c<d)$ հատված, որի վրա ամենուրեք՝ $f(x)>0$:

2128. Ապացուցել, որ եթե $f\in C[a;b]$ ֆունկցիան նույնաբար զրո չէ, ապա գոյություն ունի $[c;d]\subset[a;b]$ հատված, այնպիսին, որ $\int_c^d f(x)dx\ne0$:

2129. Ստուգել, որ ցանկացած $f\in\Re[0;1]$ ֆունկցիայի համար՝

ա) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

բ) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$;

գ) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\cos x dx$:

2130. Տրված է՝ $f \in \Re[a;b]$ և ցանկացած $z \in [0;b-a]$ կետում $f(a+z) = f(b-z)$: Ստուգել, որ

$$\int\limits_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)dx :$$

2131. Դիցուք $f: R \to R$ ֆունկցիան $[0;T]$ հատվածում ինտեգրելի է և ունի T պարբերություն: Ապացուցել, որ ցանկացած $a \in R$ թվի համար՝

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx :$$

2132. Դիցուք՝ $f \in C(R)$ և ցանկացած $a \in R$ թվի համար՝

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx \quad (T \neq 0):$$

Ապացուցել, որ f -ը T -պարբերական ֆունկցիա է:

2133. Տրված է՝ $f \in C[-l;l]$ և ցանկացած $0 < a \le l$ թվի համար

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx :$$

Ապացուցել, որ f -ը զույգ ֆունկցիա է:

2134. Ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար

$$F(x) = \int\limits_0^x \sin^n t dt \quad \text{և} \quad G(x) = \int\limits_0^x \cos^n t dt$$

ֆունկցիաները, երբ n-ը կենտ է, 2π -պարբերական ֆունկցիաներ են. իսկ երբ n-ը զույգ է, ապա դրանցից յուրաքանչյուրը ներկայացնում է մեկական գծային և պարբերական ֆունկցիաների գումար:

2135. Դիցուք $f \in C(R)$ ֆունկցիան ունի T պարբերություն: Ապացուցել, որ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել որպես գծային ֆունկ-ցիայի և T-պարբերական ֆունկցիայի գումար:

2136. Տրված է՝ f-ը ցանկացած $[0;a]$ հատվածում ինտեգրելի է և $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$: Գտնել սահմանը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)dx$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt$:

Գտնել գումարի սահմանը (2137-2140).

Ցուցում: Գումարելիներից յուրաքանչյուրում առանձնացնել բարձր կարգի անվերջ փոքրերը և գնահատելով դրանք՝ դեն նետել:

2137. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$:

2138. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$:

2139. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$ $(x>0)$:

2140. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$:

2141. Ապացուցել անվերջ փոքրերի համարժեքությունը $(x\to+0)$.

ա) $\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{tgt}\,dt \sim \int\limits_0^{tgx}\sqrt{\sin t}\,dt$; բ) $\int\limits_x^{x^2}\ln t\,dt \sim \int\limits_{x^{2x}}^{x^x}\frac{dt}{t}$:

2142. Գոյություն ունի՞ արդյոք $f \in \Re[0;1]$ ոչ բացասական ֆունկցիա, որը որևէ $\alpha \in R$ թվի համար բավարարում է

$$\int\limits_0^1 f(x)dx=1,\quad \int\limits_0^1 xf(x)dx=\alpha \quad և \quad \int\limits_0^1 x^2 f(x)dx=\alpha^2$$

պայմաններին:

2143. Դիցուք f-ը $[0;+\infty)$ միջակայքում դրական և անընդհատ ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x uf(u)du}{\int_0^x f(u)du}$$

ֆունկցիան $[0;+\infty)$-ում աճող է:

2144. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\left|\int_a^{a+1}\sin x^2dx\right|\le\frac{1}{\alpha}\quad(\alpha>0)$; բ) $\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}dx<\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}}dx$:

Հաշվել ինտեգրալը (2145-2150).

2145. $\int_{1/2}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$:

2146. $\int_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)'\right|dx\quad(n\in N)$: 2147. $\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 xdx}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\quad(\alpha=const)$:

2148. $\int_0^{\pi}\frac{\sin xdx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}\quad(\alpha=const)$:

2149. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$: 2150. $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$:

Ապացուցել հավասարությունը (2151-2152).

2151. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=2\pi\,\mathrm{sgn}(1-r)\quad(r\in R_+)$:

2152. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)^2}=\frac{\pi}{4}\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}\quad(a,b>0)$:

2153. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \qquad (n \in N, n \geq 2)$ ինտեգրալի համար ապացուցել

$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ անդրադարձ բանաձևը:

2154. Հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$; բ) $\int_0^{\pi} \sin^7 x dx$; գ) $\int_0^{\pi} \cos^8 x dx$:

2155. Ստուգել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ երբ } n \text{ - ը զույգ է,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, \text{ երբ } n \text{ - ը կենտ է :} \end{cases}$$

2156. Ապացուցել Վալիսի բանաձևը.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 = \frac{\pi}{2} :$$

2157. Ապացուցել եռանկյունաչափական համակարգի օրթոգոնալությունը $[-\pi;\pi]$ հատվածում.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin kx dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \qquad (m, n, k \in Z_+, \ m \neq n):$$

2158. Ապացուցել Լեժանդրի բազմանդամների համակարգի (տես խնդիր 1179) օրթոգոնալությունը $[-1;1]$ հատվածում.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, \text{ երբ } m \neq n; \\ \frac{2}{2n+1}, \text{ երբ } m = n : \end{cases}$$

2159. $I_n = \int_0^1 (\arccos x)^n dx$ ինտեգրալի համար ապացուցել

$$I_n = n \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2} \qquad (n > 1)$$

անդրադարձ բանաձևը:

Ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար ճշմարիտ է հավասարությունը (2160-2163).

2160. ա) $\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$;

բ) $\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{2n-1}{2}} dx = a^{2n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (a > 0)$:

2161. ա) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \cos(n+2)x dx = 0$;

բ) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \sin(n+2)x dx = \frac{1}{n+1}$;

գ) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \cos(n+2)x dx = -\frac{1}{n+1} \sin\frac{\pi n}{2}$;

դ) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \sin(n+2)x dx = \frac{1}{n+1} \cos\frac{\pi n}{2}$:

2162. ա) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$;

բ) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$:

2163. $\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0 \quad (n \in Z)$:

Ստիճանի իջեցման եղանակով ցանկացած $n \in N$ թվի համար հաշվել ինտեգրալը (2164-2167).

2164. $I_{n,m} = \int\limits_0^1 x^m (1-x)^n dx \quad (m, n \in Z_+)$:

2165. $I_n = \int\limits_0^1 x^m \ln^n x dx \quad (m \in N)$:

2166. $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} tg^{2n} x dx$:

2167. $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$:

2168. Դիցուք՝ $u, v \in C^{n+1}[a;b]$: Ապացուցել մասերով ինտեգրման բանաձևի հետևյալ ընդհանրացումը.

$$\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)\Big|_a^b - (-1)^n \int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)dx :$$

2169. Դիցուք՝ $f \in C^{n+1}[a;b]$ և $x_0, x \in [a;b]$: Ապացուցել Թեյլորի բանաձևը՝ մնացորդային անդամի ինտեգրալային տեսքով.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt :$$

Գտնել ֆունկցիայի ընդհանրացված նախնականը (2170-2173).

2170. $\int \operatorname{sgn}(\sin x)dx$:

2171. $\int x[x]dx$:

2172. $\int (x-[x])dx$:

2173. $\int (-1)^{[x]}dx$:

Հաշվել ինտեգրալը (2174-2177).

2174. $\int_0^2 [e^x]dx$:

2175. $\int_1^{n+1} \ln[x]dx \quad (n \in N)$:

2176. $\int_0^{\pi} x\operatorname{sgn}(\cos x)dx$:

2177. $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx$:

Ապացուցել անհավասարությունը (2178-2183).

2178. $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$:

2179. $\int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos u}{u}du < 0 \quad \left(x > \frac{\pi}{2}\right)$:

2180. $\int_1^2 2^{\frac{1}{x}}dx < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$:

2181. $\int_0^{\pi} e^{\sin^2\varphi}d\varphi > \frac{3\pi}{2}$:

2182. $\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}d\varphi < \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right) \quad (R > 0)$:

2183. $\int_a^b e^{-x^2}dx < \frac{1}{2a}e^{-a^2} \quad (0 < a < b)$:

2184. Ապացուցել միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմի հետևյալ ճշգրտումը. եթե $f \in C[a;b]$, $g \in \Re[a;b]$ և $g(x) \ge 0 \ (a \le x \le b)$, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a;b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx:$$

2185. Տրված է՝ $f \in C[a;b]$, $g \in C^1[a;b]$ և g-ն $[a;b]$-ում չնվազող է: Օգտվելով նախորդ խնդրից և կատարելով մասերով ինտեգրում՝ ապացուցել միջին արժեքի երկրորդ թեորեմը:

***

Աստիճանի իջեցման եղանակով հաշվել անիսկական ինտեգրալը (2186-2190).

2186. $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx:$

2187. $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\cdot\dots\cdot(x+n)}:$

2188. $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (ac-b^2>0):$

2189. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}:$

2190. $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{ch^{n+1}x}:$

2191. Հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx$;

բ) $\int_0^{\pi/2} \ln\cos x dx$;

գ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x ctg x dx$;

դ) $\int_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{1-x^2}}:$

2192. Ապացուցել, որ

ա) $\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx \quad (a,b>0)$;

բ) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx$,

ենթադրելով, որ ձախ կողմում գրված ինտեգրալները զուգամետ են:

Հետազոտել անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը (2193-2204)

2193. $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$: 2194. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$:

2195. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$: 2196. $\int_0^{+\infty} x^p |x-1|^q dx$:

2197. $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$: 2198. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$:

2199. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x (\ln\ln x)^r}$: 2200. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$:

2201. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$:

2202. ա) $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$; բ) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$:

2203. ա) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2} dx$; բ) $\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$:

2204. ա) $\int_0^{\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^a} dx$; բ) $\int_1^{\infty} (\ln x)^a \frac{\sin x}{x} dx$:

2205. Ապացուցել, որ $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է $\alpha > 1$ դեպքում, պայմանական զուգամետ՝ $0 < \alpha \le 1$ դեպքում:

Հետազոտել անիսկական ինտեգրալի պայմանական և բացարձակ զուգամիտությունը (2206-2210).

2206. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$: 2207. $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$:

2208. $\int_{0}^{+\infty} \sin x^n dx$:

2209. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx$:

2210. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$, $q \geq 0$:

2211. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ -ը զուգամետ է, ապա

ա) $f(x) \to 0$ երբ $x \to +\infty$;

բ) f -ը սահմանափակ է $+\infty$ -ի շրջակայքում:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

2212. Դիցուք՝ $f \in C^1[a;+\infty)$, $|f'(x)| \leq M \quad (x \geq a)$ և $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ -ը զուգամետ է: Ապացուցել, որ $f(x) \to 0$, երբ $x \to +\infty$:

2213. Ապացուցել, որ եթե f -ը $[a;+\infty)$-ում մոնոտոն է և $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ -ը զուգամետ է, ապա $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$, երբ $x \to +\infty$:

2214. Կարելի՞ է արդյոք $f:[a;b] \to R$ ֆունկցիայի զուգամետ անիսկական ինտեգրալը՝ $\int_a^b f(x)dx$ -ը, սահմանել որպես ինտեգրալային գումարների սահման:

2215. Դիցուք f -ը $(0;1]$ միջակայքում մոնոտոն և զրոյի շրջակայքում անսահմանափակ ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ եթե $\int_0^1 f(x)dx$ -ը զուգամետ է, ապա

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{0}^{1} f(x)dx:$$

Օգտվելով այս փաստից՝ հաշվել $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ -ը:

2216. Տրված է՝ $f \in C[1;+\infty)$: Ապացուցել, որ եթե $\int_1^{+\infty} xf(x)dx$ -ը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ -ը:

2217. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան ցանկացած հատվածում ինտեգրելի է, ունի T պարբերություն և $\int_0^T f(x)dx=0$: Ապացուցել, որ եթե g -ն $[a;+\infty)$-ում մոնոտոն է և $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, ապա $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ -ը զուգամետ է:

2218. Դիցուք f և g ֆունկցիաները $[a;\omega)$ միջակայքի ցանկացած հատվածում ինտեգրելի են: Ապացուցել, որ եթե $\int_a^{\omega} f^2(x)dx$ և $\int_a^{\omega} g^2(x)dx$ ինտեգրալները զուգամետ են, ապա զուգամետ է նաև $\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx$ ինտեգրալը, ընդ որում՝

$$\left[\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^{\omega} f^2(x)dx\cdot\int_a^{\omega} g^2(x)dx:$$

Գ

2219. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածի յուրաքանչյուր կետում ունի վերջավոր սահման, ապա $f\in\Re[a;b]$:

2220. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիայի խզումները առաջին սեռի են, ապա $f\in\Re[a;b]$:

2221. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ տրված հատվածում նախնական ունեցող ցանկացած ֆունկցիա այդ հատվածում Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է: Բերել համապատասխան օրինակ:

2222. Կառուցել $f\in\Re[0;1]$ և $\varphi:[0;1]\to[0;1]$ ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ φ -ն խիստ մոնոտոն է և դիֆերենցելի, $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, սակայն

$$\int_0^1 f(x)dx\ne\int_0^1 f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

այն պատճառով, որ աջ կողմում ինտեգրալը գոյություն չունի:

2223. Դիցուք $f:[a;b]\to R_+$ ֆունկցիան Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է: Ապացուցել, որ ցանկացած $p>1$ թվի համար $f^p(x)$ ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածում նույնպես ինտեգրելի է և գտնել

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(\Delta x_i)^{p-1}}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt\right)^p$$

սահմանը, որտեղ $P=(x_0;x_1;\ldots;x_n)$-ն $[a;b]$-ի տրոհում է:

2224. Դիցուք $f\in C[a;b]$ ֆունկցիան աճող է և դրական: Ապացուցել, որ

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy=bf(b)-af(a):$$

2225. Ապացուցել, որ եթե $f\in\Re[0;1]$, ապա ցանկացած $\alpha\in[0;1]$ թվի համար

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+\alpha}{n}} f(x)dx=\alpha\int_0^1 f(x)dx:$$

2226. Դիցուք $f:[0;1]\to R$ ֆունկցիան չաճող է: Ապացուցել, որ ցանկացած $\alpha\in[0;1]$ թվի համար $\int_0^\alpha f(x)dx\ge\alpha\int_0^1 f(x)dx$:

2227. Ապացուցել, որ եթե $f:[0;a]\to R$ ֆունկցիան չնվազող է, ապա $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ ֆունկցիան $(0;a]$ միջակայքում չնվազող է:

2228. Դիցուք $f:R_+\to R$ ֆունկցիան չնվազող է և $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=A$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$:

2229. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան չնվազող է, ապա ցանկացած $x\in(a;b)$ թվի համար

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\le\frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)dt:$$

2230. Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են $[0;1]$ հատվածում, ընդ որում՝ f-ը չնվազող է, իսկ g-ն՝ չաճող: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx\le\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 g(x)dx:$$

2231. Ապացուցել, որ եթե $[0;1]$ հատվածում որոշված f և g ֆունկցիաները երկուսն էլ չնվազող են կամ՝ երկուսն էլ չաճող, ապա

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx :$$

2232. Դիցուք՝ $f \in C^1[0;1]$ և $f(1)-f(0)=1$: Ապացուցել, որ $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 1$:

2233. Դիցուք՝ $f \in C^1[0;1]$ և $f(1)=0$: Ապացուցել, որ

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 3\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 :$$

2234. Տրված է՝ $f \in C^1[a;b]$ և $f(a)=f(b)=0$: Ապացուցել, որ

$$\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx :$$

2235. Դիցուք f -ը $[0;1]$ հատվածում նվազող և դրական ֆունկցիա է: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x)dx}{\int_0^1 x f(x)dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} :$$

2236. Դիցուք $f \in C[0;1]$ ֆունկցիան գոգավոր է, դրական և $f(0)=1$: Ապացուցել, որ

$$\int_0^1 x f(x)dx \leq \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 :$$

2237. Տրված է՝ $f \in \Re[a;b]$ և $\inf_{x \in [a;b]} f(x) > 0$: Ապացուցել $[a;b]$ հատվածում f ֆունկցիայի «միջին երկրաչափական» և «միջին թվաբանական» արժեքների միջև հետևյալ անհավասարությունը.

$$\exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right\} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \left(\exp\{u\} = e^u\right):$$

2238. Դիցուք $f \in C(R)$ ֆունկցիան դրական է և 1-պարբերական: Ապացուցել, որ ցանկացած $a \in R$ թվի համար՝

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)}dx \ge 1:$$

2239. Դիցուք՝ $f,g \in \Re[a;b]$: Օգտվելով գումարների համար Հյոլդերի անհավասարությունից (տես խնդիր 1499)՝ ապացուցել Հյոլդերի անհավասարությունն ինտեգրալների համար.

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

որտեղ $p,q>1$ և $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$:

2240. Դիցուք՝ $f,g \in \Re[a;b]$ և $p \ge 1$: Օգտվելով գումարների համար Մինկովսկու անհավասարությունից (տես խնդիր 1500)՝ ապացուցել Մինկովսկու անհավասարությունն ինտեգրալների համար.

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}:$$

Ցույց տալ, որ $0<p<1$ դեպքում գրված անհավասարությունը փոխարինվում է հակադիր անհավասարությամբ:

2241. Դիցուք՝ $f,g \in C[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $x \in [a;b]$ կետում $f(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt$, ապա $f(x)\equiv 0$:

2242. Դիցուք՝ $f \in C[a;b]$ և $\int_a^b f(x)dx=0$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi \in (a;b)$ կետ, այնպիսին, որ $\int_a^\xi f(x)dx = f(\xi)$:

2243. Տրված է՝ $f \in C^1[0;1]$ և $f'(0)\ne 0$: Դիցուք $\xi(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $\int_0^x f(t)dt = xf(\xi(x))$ պայմանին: Գտնել $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi(x)}{x}$-ը:

2244. Տրված է՝ $f \in C[a;b]$: Ապացուցել, որ

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{a\le x\le b}|f(x)|:$$

2245. Դիցուք՝ $f \in C[0;1]$ և ամենուրեք՝ $f(x)>0$: Նշանակենք՝

$$F(\alpha)=\int_0^1 [f(x)]^{\alpha}\,dx:$$

Հաշվել $\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{\ln F(\alpha)}{\alpha}$-ն:

2246. Դիցուք՝ $f,g\in C[0;1]$ և ամենուրեք՝ $g(x)>0$: Գտնել սահմանը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^1 x^n f(x)dx}{\int_0^1 x^n g(x)dx}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \sqrt[n]{g(x)}dx\right)^n$:

2247. $\varphi:[a;b]\to R$ ֆունկցիան կոչվում է *կտոր առ կտոր հաստատուն* կամ *աստիճանաձև* ֆունկցիա, եթե գոյություն ունի $[a;b]$ հատվածի այնպիսի $P=(x_0;x_1;...;x_n)$ տրոհում, որ $(x_i;x_{i+1})$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա φ-ն հաստատուն է:

Դիցուք՝ $f\in\Re[a;b]$: Ապացուցել, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $[a;b]$-ում կտոր առ կտոր հաստատուն φ և ψ ֆունկցիաների զույգ, այնպիսին, որ $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ $(x\in[a;b])$ և

$$\int_a^b \psi(x)dx-\int_a^b \varphi(x)dx<\varepsilon:$$

2248. Տրված է՝ $f\in\Re[a;b]$: Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx=0$;

բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|dx=\dfrac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx$:

2249. Դիցուք՝ $f\in\Re[0;1]$, իսկ $g\in C(R)$ ֆունկցիան T-պարբերական է: Ապացուցել, որ

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^1 f(x)g(\alpha x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\cdot\int_0^1 f(x)dx:$$

2250. Ապացուցել, որ եթե $f\in\Re[a;b]$ և $x_0\in(a;b)$ կետում f-ն ունի առաջին սեռի խզում, ապա $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի չէ: Ցույց տալ, որ x_0-ում F-ն ունի սիմետրիկ ածանցյալ (տես խնդիր 1573) և

$$F_s'(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}:$$

2251. Ապացուցել, որ եթե $f\in C(a;b)$ և ցանկացած $x\in(a;b)$ կետում

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_0^h[f(x+t)-f(x)]dt=0,$$

ապա f-ը հաստատուն ֆունկցիա է:

2252. Դիցուք $f\in C[a;b]$ և ցանկացած $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$ հատվածի համար

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\le M|\alpha-\beta|^{1+\delta},$$

որտեղ M-ը և δ-ն դրական հաստատուններ են: Ապացուցել, որ $f(x)\equiv 0$:

2253. Դիցուք x_n $(n\in N)$ հաջորդականության բոլոր անդամները $[0;1]$ հատվածից են: Տրված $(\alpha;\beta)\subset[0;1]$ միջակայքի համար նշանակենք $\nu_n(\alpha,\beta)$-ով x_n հաջորդականության այն անդամների քանակը, որոնք ընկած են $(\alpha;\beta)$-ի մեջ և որոնց համարները չեն գերազանցում n-ը:

Կասենք, որ x_n հաջորդականությունը $[0;1]$ հատվածում հավասարաչափ է բաշխված, եթե ցանկացած $(\alpha;\beta)\subset[0;1]$ միջակայքի համար $\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(\alpha,\beta)}{n}=\beta-\alpha$: Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը $[0;1]$-ում հավասարաչափ է բաշխված այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $f\in\Re[0;1]$ ֆունկցիայի համար

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=\int_0^1 f(x)dx:$$

2254. Գտնել սահմանը. $\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \cos x^n dx$:

2255. Հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\int_{-1}^1\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$; բ) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^\alpha+1)(x^2+1)}$ $(\alpha>0)$;

գ) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$; դ) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{\pi^2-x^2}dx$:

2256. Յանկացած $n\in N$ թվի համար հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}d\varphi$; բ) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 d\varphi$:

2257. Ստուգել, որ ցանկացած n-րդ աստիճանի $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի համար

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}P(x)dx=P(0)+P'(0)+\cdots+P^{(n)}(0):$$

2258. Դիցուք $P(x)$-ը n-րդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ է: Ապացուցել, որ եթե $\int_0^1 x^k P(x)dx=0 \quad (k=1,2,\ldots,n)$, ապա

$$\int_0^1 P^2(x)dx=(n+1)^2\left(\int_0^1 P(x)dx\right)^2:$$

2259. Դիցուք $f\in C[1;+\infty)$ ֆունկցիան T-պարբերական է: Ընտրել α պարամետրի արժեքն այնպես, որ $\int^{+\infty}\left(f\left(x^2\right)+\alpha\right)dx$ ինտեգրալը լինի զուգամետ:

2260. Տրված է՝ $f\in C[0;+\infty)$, $f(x)>0 \quad (x\geq 0)$ և $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)}$-ը զուգամետ է: Ապացուցել, որ

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a^2}\int_0^a f(x)dx=+\infty:$$

2261. Դիցուք $f\in C^1[0;+\infty)$ և ամենուրեք՝ $f(x)>0$: Ապացուցել, որ

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+f'^2(x)}}{f(x)}dx=+\infty:$$

2262. Դիցուք $f\in C^1[0;+\infty)$ և ամենուրեք՝ $f(x)>0$, $f'(x)>0$: Ապացուցել, որ եթե $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)+f'(x)}<+\infty$ (զուգամետ է), ապա $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)}<+\infty$:

2263. Տրված է՝ $f:(0;a)\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է, իսկ $\int_0^a x^p f(x)dx$ -ը՝ զուգամետ: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 0} x^{p+1} f(x)=0$:

2264. Դիցուք՝ $f\in C(R_+)$, $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx<+\infty$ և $g(x)=f(x)-2e^{-x}\int_0^x e^z f(z)dz$: Ապացուցել, որ

$$\int_0^{+\infty} g^2(x)dx=\int_0^{+\infty} f^2(x)dx :$$

Գլուխ 9

Ինտեգրալի կիրառություններ

Սեղանակերպի մակերեսը: Դիցուք՝ $f \in \Re[a;b]$ և $f(x) \geq 0$: Դեկարտյան հարթության վրա

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

անհավասարություններով որոշվող պատկերի (սեղանակերպի) S մակերեսը որոշվում է

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

բանաձևով:

Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան տրված է $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ պարամետրական հավասարումներով, $\varphi \in C^1[\alpha;\beta]$, $\varphi'(t) \geq 0$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\psi \in C[\alpha;\beta]$ և $\psi(t) \geq 0$, ապա

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt:$$

Սեկտորի մակերեսը: Բևեռային կոորդինատների համակարգում $r = r(\varphi)$ $(\varphi_0 \leq \varphi \leq \phi, 0 < \phi - \varphi_0 \leq 2\pi)$ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկով և $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \phi$ ճառագայթներով սահմանափակված պատկերի (սեկտորի) մակերեսը որոշվում է

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\phi} r^2(\varphi)d\varphi$$

բանաձևով:

Կորի երկարությունը: Դիցուք տարածական L կորը տրված է $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \lambda(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$ պարամետրական հավասարումներով: Եթե $\varphi, \psi, \lambda \in C^1[\alpha;\beta]$, ապա L կորի երկարությունը որոշվում է

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \lambda'^2(t)}dt$$

բանաձևով:

Հարթ կորի դեպքում $(\lambda(t) \equiv 0)$ կորի երկարության բանաձևն ընդունում է

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

տեսքը: Մասնավորապես, $f \in C^1[a;b]$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(t)}dt$$

երկարություն:

Եթե L հարթ կորը բևեռային կոորդինատների համակարգում տրված է $r=r(\varphi)$ $(\varphi_0\le\varphi\le\phi)$ հավասարումով, որտեղ $r(\varphi)$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա

$$l=\int_{\varphi_0}^{\phi}\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi:$$

Պտտման մարմնի ծավալը: Տրված $f\in C[a;b]$ ֆունկցիայի գրաֆիկով և $x=a$, $x=b$, $y=0$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերն Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի V ծավալը որոշվում է

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

բանաձևով:

Պտտման մակերևույթի մակերեսը: Տրված $f\in C^1[a;b]$ ֆունկցիայի գրաֆիկն Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի S մակերեսը որոշվում է

$$S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

բանաձևով:

Ինտեգրալի կիրառությունները մեխանիկայում: Դիցուք $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_0\le t\le T$, l երկարությամբ կորի երկայնքով բաշխված է $\rho=1$ հաստատուն խտությամբ զանգված: Հետևյալ բանաձևերով հաշվում են.

կորի ստատիկ մոմենտները Ox և Oy առանցքների նկատմամբ՝

$$M_x=\int_{t_0}^T\psi(t)\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2(t)}dt,\qquad M_y=\int_{t_0}^T\varphi(t)\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2(t)}dt,$$

ծանրության կենտրոնի կոորդինատները՝

$$x_c=\frac{M_x}{l},\qquad y_c=\frac{M_x}{l},$$

իներցիայի մոմենտները Ox և Oy առանցքների նկատմամբ՝

$$I_x=\int_{t_0}^T\psi^2(t)\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2(t)}dt,\qquad I_y=\int_{t_0}^T\varphi^2(t)\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2(t)}dt:$$

Դիցուք P պատկերը տրված է հետևյալ անհավասարումներով՝

$a\le x\le b$, $f_1(x)\le y\le f_2(x)$,

որտեղ $f_1,f_2\in C[a;b]$: Եթե P-ի վրա բաշխված է $\rho=1$ հաստատուն խտությամբ զանգված, ապա պատկերի m զանգվածը, M_x և M_y ստատիկ մոմենտները, ծանրության կենտրոնի x_c և

y_c կոորդինատները, ինչպես նաև իներցիայի I_x և I_y մոմենտները հաշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$m = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx :$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx, \quad M_y = \int_a^b x(f_2(x) - f_1(x))dx :$$

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} :$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \left(f_2^3(x) - f_1^3(x)\right)dx, \quad I_y = \int_a^b x^2(f_2(x) - f_1(x))dx :$$

Ա

Այս գլխի խնդիրներում հանդիպող պարամետրերը դրական են:

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված սեղանակերպի մակերեսը (2265-2268).

2265. $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi :$

2266. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = a :$

2267. $y = xe^x,\ y = 0,\ x = 1 :$

2268. $y = |\log_a x|,\ y = 0,\ x = \frac{1}{a},\ x = a\ \ (a > 1) :$

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (2269-2282).

2269. $y = x^2,\ x + y = 2 :$

2270. $y = x - \frac{\pi}{2},\ y = \cos x,\ x = 0 :$

2271. $y = \sin^2 x,\ y = x\sin x\ \ (0 \le x \le \pi) :$

2272. $y = \ln(1 + x),\ y = -xe^{-x},\ x = 1 :$

2273. $y = \sin^3 x + \cos^3 x,\ y = 0\ \ \left(-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}\right) :$

2274. $y = |x|^3 e^{-x^2},\ |x| = a,\ y = 0 :$

2275. $x = y^2(y - 1),\ x = 0 :$

2276. $x^2 + y^2 = 2,\ y^2 = 2x - 1\ \ \left(x \ge \frac{1}{2}\right) :$

2277. $y=(x+1)^2,\ x=\sin\pi y,\ y=0\ \ (0\le y\le 1)$:

2278. $y=x,\ y=\frac{1}{x},\ y=\frac{10}{3}-x\ \ (x\ge 1)$:

2279. $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=0$:

2280. $y=\sqrt{3}x^2,\ y=\sqrt{4-x^2}$:

2281. $y=x^2,\ y=x^2+x-1,\ y=\frac{5}{2}x\ \ (y\le x^2)$:

2282. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

2283. Դիցուք՝ $y(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ և $y(x)\ge 0$, երբ $x_1\le x\le x_2$: Ապացուցել, որ $0\le y\le y(x)$, $x_1\le x\le x_2$ անհավասարություններով որոշվող պատկերի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով (Սիմպսոնի բանաձև).

$$S=\frac{1}{6}(x_2-x_1)\left[y(x_1)+y(x_2)+4y\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]:$$

Հաշվել կորի երկարությունը (2284-2290).

2284. $y=x^{\frac{3}{2}},\ 0\le x\le 4$:

2285. $y=e^x,\ 0\le x\le \ln 7$:

2286. $y=\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4},\ 1\le x\le 3$:

2287. $y=\ln\sin x,\ \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$:

2288. $y=\ln(x^2-1),\ 2\le x\le 5$:

2289. $y=\arcsin e^x,\ -\ln 7\le x\le -\ln 2$:

2290. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\ 0\le x\le\frac{9}{16}$:

Հաշվել պարամետրական հավասարումներով տրված կորի երկարությունը (2291-2298).

2291. $x=6-3t^2,\ y=4t^3\ \ (x\ge 0)$:

2292. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ \ 0\le t\le 2\pi$ (աստղաձև գիծ):

2293. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ \ 0\le t\le 2\pi$ (ցիկլոիդ):

2294. $x=2a\sin^2 t,\ y=2a\cos t$:

2295. $x=6at^5,\ y=5at(1-t^8)$, $A(0;0)$ կետից մինչև $B(6a;0)$ կետը:

2296. $x=ae^{bt}\cos t,\ y=ae^{bt}\sin t,\ \ 0\le t\le\pi$:

2297. $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t),\ \ 0\le t\le T$:

2298. $x = ch^3 t$, $y = sh^3 t$, $0 \le t \le T$:

Հաշվել տարածական կորի երկարությունը (2299-2304).

2299. $x = 2a\cos t$, $y = 2a\sin t$, $z = at$, $0 \le t \le 2\pi$:

2300. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$, $0 \le t \le T$:

2301. $x = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$, $y = -\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3 + t^2$, $0 \le t \le 1$:

2302. $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $z = e^t$, $0 \le t \le 2\pi$:

2303. $x = acht$, $y = bsht$, $z = at$, $0 \le t \le T$:

2304. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$:

Հաշվել բևեռային կոորդինատների համակարգում տրված կորի երկարությունը (2305-2309).

2305. $r = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (Արքիմեդի գալարագիծ):

2306. $r = \varphi^2$, $0 \le \varphi \le \pi$:

2307. $r = a\sin\varphi$ (շրջանագիծ):

2308. $r = a(1 + \cos\varphi)$ (սրտաձև գիծ):

2309. $r = \cos^3 \frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$:

2310. Հաշվել կոնի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղն r է, իսկ բարձրությունը՝ h :

2311. Հաշվել հատած կոնի ծավալը, եթե նրա հիմքերի շառավիղներն են R և r, իսկ բարձրությունը՝ h :

2312. Հաշվել R շառավղով գնդի ծավալը:

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերը Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը (2313-2320).

2313. $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = 0$, $x = 1$ $(x \ge 0)$: 2314. $y = \sin 2x$, $y = 0$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$:

2315. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$:

2316. $y^2 = 2x$, $y = 2$, $x = 0$:

2317. $y = \sin^2 x$, $y = x\sin x$ $(0 \le x \le \pi)$:

2318. $y=e^x$, $y=x+1$, $x=3$:

2319. $y=e^{-x}$, $y=0$ $(0\le x<+\infty)$:

2320. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$:

Հաշվել տրված կորն Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը (2321-2324).

2321. $y=\sqrt{x}$ $(2\le x\le 6)$:

2322. $y=e^{-x}$ $(0\le x\le 1)$:

2323. $y=\sin x$ $(0\le x\le \pi)$:

2324. $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\le x\le 2)$:

Հաշվել տրված կորն Oy առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը (2325-2328).

2325. $y=\dfrac{x^2}{6}$ $(0\le x\le 4)$:

2326. $3x=4\cos y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le y\le 0\right)$:

2327. $x=chy$ $(\ln 2\le y\le \ln 3)$:

2328. $4x+2\ln y=y^2$ $(e^{-1}\le y\le e)$:

Բ

2329. Հաշվել $y=x^2-2x+3$ պարաբոլով, $(3;6)$ կետով նրան տարված շոշափողով և կոորդինատական առանցքներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

2330. Հաշվել $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսով, $\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ կետով նրան տարված շոշափողով և $y=0$ ուղիղով սահմանափակված կորագիծ եռանկյան մակերեսը:

2331. Հաշվել աբսցիսների առանցքով, $y=(x-1)^5+1$ կորով և նրան $10x-2y-5=0$ ուղիղին զուգահեռ տարված շոշափողով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

2332. Հաշվել տրված պարաբոլով և նշված աբսցիսն ունեցող կետերում պարաբոլի շոշափողներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

ա) $y=x^2+4x+9$, $x_1=-3$, $x_2=0$;

բ) $y=4x-x^2+1$, $x_1=0$, $x_2=3$:

2333. Գտնել k-ի այն արժեքը, որի դեպքում $y=kx+b$ ուղիղով և $y=x^2+px+q$ պարաբոլով սահմանափակված պատկերն ունի փոքրագույն մակերես $(b\ge q)$:

2334. Գտնել $y^2=2px$ պարաբոլի վրա կետ, որում պարաբոլին տարված նորմալը պարունակող ուղիղով և պարաբոլով սահմանափակված պատկերն ունի փոքրագույն մակերես:

Հաշվել պարամետրական հավասարումներով տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (2335-2340).

2335. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$:

2336. $y=a\cos^3 t$, $x=a\sin^3 t$:

2337. $x=a\sin t$, $y=a\sin 2t$:

2338. $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$:

2339. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$, $y=0$:

2340. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$, $x=a$ $(y\le 0)$:

Հաշվել բևեռային կոորդինատների համակարգում տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (2341-2345).

2341. $r=\dfrac{a}{2\pi}\varphi$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi=\pi$:

2342. $r=Le^{k\varphi}$, $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ $(k>0)$:

2343. $r=a(1+\cos\varphi)$:

2344. $r=\dfrac{P}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$:

2345. ա) $r^2+\varphi^2=1$;

բ) $\varphi=r\,\mathrm{arcctg}\,r$, $\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$:

Անցնելով պարամետրական հավասարումների՝ գտնել տրված կորով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (2346-2349).

2346. $x^3+y^3=axy$:

2347. $(x+y)^3=axy$:

2348. $x^4+y^4=ax^2y$:

2349. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$:

Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (2350-2353).

2350. $x^4+y^4=ax^2$:

2351. $(x^2+y^2)^3=ax^4y$:

2352. $x^6+y^6=a(x^4+y^4)$:

2353. $(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$, $(x^2+y^2)^2=2axy$:

2354. Դիցուք՝ $f\in C^2(a;b)$: Ապացուցել, որ

$$x=f'(t)\cos t+f(t)\sin t,\ y=f(t)\cos t-f'(t)\sin t,\ a<t_1\le t\le t_2<b$$

կորի L երկարությունը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\left|f(t)+f''(t)\right|dt:$$

Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ գտնել կորի երկարությունը (2355-2356).

2355. $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\ y=(t^2-2)\cos t-2t\sin t\quad (0\le t\le\pi):$

2356. $x=a(2\cos 2t\cos t+\sin 2t\sin t),\ y=a(\sin 2t\cos t-2\cos 2t\sin t)$
$(0\le t\le\pi):$

2357. Դիցուք՝ $f,g\in C^2[a;b]$: Ապացուցել, որ

$$x=f(t)-g'(t),\ y=f'(t)+g(t),\ a\le t\le b$$

և

$$x=f'(t)\sin t-g'(t)\cos t,\ y=f'(t)\cos t+g'(t)\sin t,\ a\le t\le b$$

կորերի երկարությունները հավասար են:

Հաշվել կորի երկարությունը (2358-2361).

2358. $y=\int_1^x\sqrt{t^4-1}dt,\ 1\le x\le 2:$

2359. $y=\int_0^x\sqrt{\cos 2t}dt,\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}:$

2360. $\varphi=\sqrt{r}\quad (0\le r\le R):$

2361. $\varphi=\int_0^r\frac{sh\rho}{\rho}d\rho\quad (0\le r\le R):$

Անցնելով պարամետրական հավասարումների՝ հաշվել կորի երկարությունը (2362-2364).

2362. $(y-\arcsin x)^2=1-x^2:$

2363. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}:$

2364. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1:$

2365. Դիցուք՝ $f\in C[a;b]$ $(a>0)$ և $f(x)\ge 0$: Ապացուցել, որ $a\le x\le b$ և $0\le y\le f(x)$ անհավասարություններով որոշվող պատկերն Oy առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հաշվվում է

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

բանաձևով:

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերը Oy առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը (2366-2370).

2366. $y=3\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $y=0$, $x=2$ $(x\geq 0)$:

2367. $y=\cos x^2$, $y=1$, $x=1$ $(0\leq x\leq 1)$:

2368. $y^2=4x$, $y=x$:   2369. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=\frac{a}{2}$:

2370. $y=e^x+6$, $y=e^{2x}$, $x=0$:

Հաշվել հետևյալ կորը նշված ուղիղի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (2371-2373).

2371. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ա) Ox առանցքի շուրջը; բ) $x=a$ ուղիղի շուրջը:

2372. $x=a\sin t$, $y=a\sin 2t$ ա) Ox առանցքի շուրջը; բ) Oy առանցքի շուրջը; գ) $x=a$ ուղիղի շուրջը; դ) $y=a$ ուղիղի շուրջը:

2373. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$, $y=0$ ա) Ox առանցքի շուրջը; բ) Oy առանցքի շուրջը; գ) $y=2a$ ուղիղի շուրջը:

2374. Դիցուք $r=r(\varphi)$-ն անընդհատ է $[\alpha;\beta]$-ի վրա ($0\leq\alpha<\beta\leq\pi$, r-ը և φ-ն բևեռային կոորդինատներն են): Ապացուցել, որ $\alpha\leq\varphi\leq\beta$ և $0\leq r\leq r(\varphi)$ անհավասարություններով որոշվող սեկտորը բևեռային առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi:$$

Հաշվել բևեռային կոորդինատներով տրված կորը բևեռային առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը (2375-2376).

2375. $r=a(1+\cos\varphi)$ $(0\leq\varphi\leq 2\pi)$: 2376. $r=a\varphi$ $(0\leq\varphi\leq\pi)$:

2377. Դիցուք կորը տրված է $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, պարամետրական հավասարումներով, որտեղ $\varphi,\psi\in C^1[\alpha;\beta]$ և $\psi(t)\geq 0$: Ապացուցել, որ այդ կորը Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt:$$

Հաշվել պարամետրական հավասարումներով տրված կորը ա) Ox, բ) Oy առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը (2378-2380).

2378. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\quad (0\le t\le 2\pi)$:

2379. $x=a(3\cos t-\cos 3t),\ y=a(3\sin t-\sin 3t)\quad \left(0\le t\le \frac{\pi}{2}\right)$:

2380. $x=\sqrt{2}\sin t,\ \ y=\frac{1}{4}\sin 2t\quad (0\le t\le \pi)$:

2381. Ապացուցել, որ բևեռային կոորդինատներով տրված $r=r(\varphi)$ $(0\le\alpha\le$ $\le\varphi\le\beta\le\pi)$ կորը բևեռային առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\sin\varphi d\varphi:$$

Հաշվել բևեռային կոորդինատներով տրված կորը բևեռային առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը (2382-2384).

2382. $r=a(1+\cos\varphi)$: 2383. $r=2a\sin\varphi$: 2384. $r=a+b\cos\varphi\quad (a>b)$:

2385. Գտնել $r^2=a^2\cos 2\varphi$ կորը նշված առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը. ա) բևեռային առանցքի; բ) $\varphi=\frac{\pi}{2}$ առանցքի; գ) $\varphi=\frac{\pi}{4}$ առանցքի:

2386-2399 խնդիրներում ընդունել $\rho=1$:

Գտնել կորի M_x և M_y ստատիկ մոմենտները (2386-2389).

2386. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\quad (x\ge 0, y\ge 0)$: 2387. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (y\ge 0, a>b)$:

2388. $x=a\sin^3 t,\ y=a\cos^3 t\quad \left(0\le t\le \frac{\pi}{2}\right)$:

2389. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\quad (0\le t\le 2\pi)$:

Գտնել կորի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները (2390-2391).

2390. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad (x\ge 0, y\ge 0)$:

2391. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\quad (0\le t\le 2\pi)$:

Գտնել կորի I_x իներցիայի մոմենտը (2392-2393).

2392. $y=e^x$ $\left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)$:   2393. $x^2+(y-a)^2=R^2$ $(a>R)$:

Գտնել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի ստատիկ մոմենտները (2394-2395).

2394. $y=\cos x$ $\left(|x|\le\frac{\pi}{2}\right)$, $y=0$:   2395. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$:

Գտնել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները (2396-2397).

2396. $x^2+y^2=R^2$ $(y\ge 0)$, $y=0$:   2397. $y^2=2px$, $x^2=2py$:

2398. Գտնել a հիմքով և h բարձրությամբ ուղղանկյան իներցիայի մոմենտը նրա հիմքի նկատմամբ:

2399. Գտնել $y^2=4ax$ պարաբոլով և $x=a$ ուղիղով սահմանափակված պատկերի իներցիայի մոմենտը Oy առանցքի նկատմամբ:

Գ

2400. Դիցուք՝ $f,g\in C[0;1]$: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2+\left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\le\left(\int_0^1\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}dx\right)^2:$$

Ո՞ր դեպքում է հնարավոր հավասարությունը:

2401. Դիցուք $\varphi(x)$-ն R_+-ի վրա աճող և անընդհատ ֆունկցիա է, ընդ որում՝ $\varphi(0)=0$: Ապացուցել, որ ցանկացած $a,b\ge 0$ թվերի համար

$$ab\le\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\varphi^{-1}(x)dx,$$

որտեղ φ^{-1}-ը φ-ի հակադարձ ֆունկցիան է:

Ո՞ր դեպքում է հնարավոր հավասարությունը:

2402. Դիցուք՝ $f\in C^2[0;a]$, $f(x)\ge 0$, $f''(x)\ge 0$, $f(0)=0$ և $f(a)=b$: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\int_0^a f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\le\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}:$$

Ո՞ր դեպքում է հնարավոր հավասարությունը:

2403. Դիցուք $f\in C[0;1]$ ֆունկցիան չնվազող է, $f(0)=0$, $f(1)=1$ և l-ը այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի երկարությունն է:

ա) Ապացուցել, որ $l<2$:

բ) Համոզվել, որ նախորդ կետում գրված անհավասարության մեջ 2-ը չի կարելի փոխարինել ավելի փոքր թվով:

2404. Դիցուք $f\in C(R_+)$ ֆունկցիան դրական է և $S(t)$-ն $y=f(x)$ կորով, $x=t$ ուղիղով և կոորդինատների առանցքներով սահմանափակված պատկերի մակերեսն է: Գտնել f-ը, եթե ցանկացած $t>0$ համար $S(t)=\alpha t f(t)$ $(0<\alpha\le 1)$:

2405. Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում և $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x\ge 0, y\ge 0)$ աստղաձև գծի աղեղը բաժանում է հավասար երկարությամբ երեք աղեղների:

2406. Ապացուցել, որ $r=ae^{k\varphi}$ լոգարիթմական գալարագծի $2\pi n\le\varphi\le\le 2\pi(n+1)$, $n\in N$, գալարների երկարությունները կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել պրոգրեսիայի հայտարարը:

2407. Ապացուցել, որ a, b կիսաառանցքներով էլիպսի l երկարությունը բավարարում է

$$\pi(a+b)<l<\pi\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$$

անհավասարություններին:

2408. Գտնել $y=f(x)$, $x\ge 0$ ($f(x)>0$, երբ $x>0$) կորը, եթե ցանկացած a-ի համար $0\le x\le a$, $0\le y\le f(x)$ անհավասարություններով տրված պատկերն Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հաշվվում է $\lambda\pi a f^2(a)$ $(0<\lambda<1)$ բանաձևով:

2409. Ապացուցել, որ C հարթ կորն իրեն չհատող և իր հարթության մեջ գտնվող առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը հավասար է C-ի երկարության և C-ի ծանրության կենտրոնի գծած շրջանագծի երկարության արտադրյալին (Գուլդինի առաջին թեորեմ):

2410. Ապացուցել, որ S հարթ պատկերն իրեն չհատող և իր հարթության մեջ գտնվող առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հավասար է S-ի մակերեսի և S-ի ծանրության կենտրոնի գծած շրջանագծի երկարության արտադրյալին (Գուլդինի երկրորդ թեորեմ):

2411. a կողմով հավասարակողմ եռանկյունը պտտվում է իր ծանրության կենտրոնից d $(d>a)$ հեռավորության վրա գտնվող առանցքի շուրջը: Գտնել առաջացած մարմնի ծավալը և մակերևույթի մակերեսը:

2412. Գտնել R շառավղով կիսաշրջանագծի և կիսաշրջանի ծանրության կենտրոնները:

2413. Գտնել Ox առանցքով և $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ցիկլոիդի մեկ կամարով սահմանափակված պատկերի ծանրության կենտրոնը:

Պատասխաններ

Գլուխ 1

1. ա) $\{-2;0;1;\sqrt{2};3;7;9\}$; բ) $[1;6)$; գ) $[2;4]$; դ) R; ե) R; զ) N: 2. ա) $\{2;8\}$; բ) $(0;2]$; գ) $(0;2]$; դ) $\varnothing$; ե) $\{-4;-3;...\}$; զ) $\varnothing$; է) $\{-8;-5;0;7\}$: 3. ա) $\{2\}$; բ) $[5;7]\cup[9;11]$; գ) $[2;3]\cup(4;7)$; դ) $\{0\}$; ե) Q: 4. ա) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; բ) $[3;+\infty)$; գ) $[0;1]$; դ) Q; ե) $(-\infty;-3]\cup[-1;1]\cup[3;+\infty)$; զ) $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$: 5. $\{12k : k\in N\}$: 6. Z_+: 7. Z_+: 8. ա) $[-1;12], [-5;8]$; բ) R, R; գ) Z, $N\setminus\{1\}$: 9. ա) $[-6;2]$; բ) $\{0\}$; գ) $-N$: 10. Ոչ: 12. Ընդհանրապես ասած՝ ոչ: 13. 3)-ը: 19. Ոչ: 22. $Q, I, R, Q, R\setminus\{0\}$: 35. ա) Սահմանափակ է; բ) սահմանափակ է; գ) սահմանափակ է; դ) սահմանափակ է ներքևից; ե) սահմանափակ է վերևից; զ) ո՛չ վերևից, ո՛չ ներքևից սահմանափակ չէ: 38. ա) $\min A=0, \max A=1$; բ) $\inf A=0$, $\max A=1$; գ) $\min A=0$, $\sup A=+\infty$; դ) $\inf A=0$, $\sup A=+\infty$; ե) $\inf A=-\infty$, $\sup A=+\infty$; զ) $\inf A=0$, $\sup A=+\infty$; է) $\inf A=0$, $\sup A=1$; ը) $\min A=0$, $\sup A=+\infty$; թ) $\min A=0$, $\max A=1$: 44. ա) Բաց է; բ) ո՛չ բաց է, ո՛չ փակ; գ) փակ է; դ) փակ է; ե) ո՛չ բաց է, ո՛չ փակ; զ) բաց է; է) փակ է; ը) փակ է; թ) փակ է: 51. ա) $R\setminus\{-1;-2\}$; բ) $(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[0;\sqrt{3}]$; գ) $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$; դ) $(-1;1)$; ե) $[1;4]$; զ) $(1;+\infty)$; է) $R\setminus\left(\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k : k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k : k\in Z\right\}\right)$; ը) $\{-1;1\}$; թ) $(-1;0)\cup(0;1)$: 52. ա) աճող է; բ) նվազող է; գ) աճող է; դ) աճող է; ե) նվազող է; զ) նվազող է; է) նվազող է; ը) աճող է; թ) երբ $0<a<1$, նվազող է, երբ $a>1$, աճող է: 53. ա) Կենտ է; բ) ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ; գ) զույգ է; դ) զույգ է; ե) զույգ է; զ) կենտ է; է) ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ; ը) կենտ է; թ) կենտ է: 58. ա) $[0]=0$, $[-0,75]=-1$, $[0,75]=0$, $[-\sqrt{2}]=-2$, $[\sqrt{2}]=1$, $[-\pi]=-4$, $[\pi]=3$; բ) Z; դ) ոչ: 59. $T=1$, $Y_0=[0;1)$: 60. ա) $\bigcup_{k\in Z}(2\pi k;\pi+2\pi k)$; բ) $(1;10)$: 61. $\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$, $\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$: 62. ա) 2^{x^2}; բ) 2^{2x}; գ) $\arccos\frac{2x}{1+x^2}$; դ) $\log_2(1+\sin^2 x)$: 64. Եթե φ-ն և ψ-ն երկուսն էլ չնվազող են, կամ երկուսն էլ չաճող, ապա $\psi\circ\varphi$-ն չնվազող է: Եթե φ և ψ ֆունկցիաներից մեկը չաճող է, մյուսը՝ չնվազող, ապա $\psi\circ\varphi$-ն չաճող է: 65. Ֆունկցիաները աճող են: 66. Ոչ: 68. ա) R, $x=\frac{y+1}{3}$; բ)

R, $x=2^y$; գ) R_+, $x=\sqrt{y}$; դ) R_+, $x=-\sqrt{y}$; ե) R_+, $x=arctg\sqrt{y}$; զ) R_+, $x=-arctg\sqrt[4]{y}$: 122. բ) Ոչ: 123. Այո: 141. Ոչ: 145. ա) R, $[-2{,}5;3{,}5)$, Q; բ) $[-1;+\infty)$, $[-1;+\infty)$, $[-1;0)$; գ) $[-1;1]$, $[0;1)$, $[-1;1]$; դ) R, R_-, $(0;1)$; ե) $(2;+\infty)$, $[2{,}5;10]$, $(3;+\infty)$: 146. ա) R, $[-1;2]$, Q; բ) $(0;2)\cup(2;4)$, $\{0;4\}$, $\varnothing$; գ) $R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k : k\in Z\right\}$, $\left\{\frac{\pi k}{2} : k\in Z\right\}$, $\varnothing$; դ) R, $\varnothing$, $\{0\}$; ե) $[-1;1]$, $\varnothing$, $\left\{\frac{1}{2};1\right\}$:148. ա) $y=2x$; բ) $y=2x$; գ) $y=2x+1$; դ) $y=\ln(-x)$; ե) $y=\dfrac{2}{\pi}arctgx$; զ) $y=-\dfrac{1}{x}$, երբ $x\le -1$ և $x+2$, երբ $x>-1$: 153. $-\dfrac{1}{5}\left(2x^2+\dfrac{3}{x^2}\right)$: 154. ա) x^2-5x+6; բ) x^2-2; գ) $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$; դ) x^3-3x^2: 155. ա) $\{0;1\}$, $\{0;1\}$; բ) $\{-1;0;1\}$, $\{0\}$: 174. ա) $\{-1;0\}$; բ) $\left\{\dfrac{1-r^2}{2r-1} : r\in Q\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right\}$: 178. R: 179. ա) R_+; բ) $[1;+\infty)$: 183. $T=1$: 186. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$: 187. 9:

Գլուխ 2

227. ա) $n>11$; բ) $n>\frac{21(k+1)+2}{4}$: 257. ա) 0; բ) $\dfrac{a_1+a_2}{2}$: 258. ա) 0; բ) 0: 259. ա) $1/3$; բ) $4/3$: 260. ա) 1; բ) 2: 261. ա) 0; բ) 0: 262. ա) 3; բ) 0; գ) ∞; դ) a_0/b_0, երե $p=q$; 0, երե $p<q$; ∞, երե $p>q$: 263. ա) $1/3$; բ) 2: 264. ա) 0; բ) 0: 265. ա) $2/3$; բ) 0: 266. ա) $1/2$; բ) $\lg 2$: 267. ա) 0; բ) 2: 268. ա) 1; բ) -1: 269. $\dfrac{qp(q-p)}{2}$: 270. -1: 271. $a^2+a+\frac{1}{3}$: 287. Ոչ: 288. $\inf x_n=-3{,}5$; $\sup x_n=5$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-2$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=2$: 289. $\inf x_n=0$; $\sup x_n=2$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=0$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=2$: 290. $\inf x_n=0$; $\sup x_n=1$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=0$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=1$: 291. $\inf x_n=-4$; $\sup x_n=6$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-4$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=6$: 292. $\inf x_n=-1/2$; $\sup x_n=1$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-1/2$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=1$: 293. $\inf x_n=0$; $\sup x_n=+\infty$;

$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$: 294. $\inf x_n = -5$; $\sup x_n = 1{,}25$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$: 295. $\inf x_n = 1$; $\sup x_n = \sqrt{5}$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 2$: 296. Ոչ: 297. ա) Ոչ; բ) Այո: 299. $\{0;1\}$: 300. $\{-1;0;1\}$: 301. $\{1;5\}$: 302. $\{a;b\}$: 308. $p \ge \frac{kq}{k-1}$: 310. $x_n = \frac{n}{n+1}$; սահմանափակ է: 311. $x_n = 2 - 2^{2-n}$; սահմանափակ է: 312. $x_n = (b-a)2^{n-1} + 2a - b$, սահմանափակ է, եթե $a = b$: 313. $x_n = (2a+b-3)(-1)^{n-1} - (a+b-2)(-2)^{n-1} + 1$; սահմանափակ է, երբ $a + b = 2$: 327. $2/3$: 328. 3: 329. 1: 330. $\sqrt{2}/2$: 331. $1/4$: 332. 0: 333. 1: 334. $\frac{\ln a}{\ln b}$: 335. $4/5$: 336. 0: 337. $\sqrt[m]{a_1 a_2 ... a_m}$: 338. $1/da_1$: 339. $1/\sqrt{d}$: 340. $q/(1-q)^2$: 345. Զուգամետ է; $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$: 346. Զուգամետ է; 1: 347. Զուգամետ է; 4: 348. Զուգամետ է; $\sqrt[k-1]{a}$: 349. Զուգամետ է; $A/3$: 350. Զուգամետ է; $\sqrt[3]{M}$: 351. Զուգամետ է; $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$: 352. 1, եթե $a \ne 0$; եթե $a = 0$՝ սահմանը գոյություն չունի կամ պատկանում է $[-1;1]$ հատվածին: 355. $[0;1]$: 372. գ) Ոչ: 374. Սահմանափակ է: 379. $a \notin \left\{-\frac{2^k}{2^k-1} : k \in N\right\}$; $x_n = \frac{a}{(a+1)2^{n-1} - a}$: 380. ա) $x_n = \frac{3a}{a - (a-3)4^{n-1}}$; բ) $a \in \left\{\frac{3\cdot 4^k}{4^k - 1} : k \in N\right\}$: 383. $\sqrt{ab}$: 391. Տարամետ է: 392. Զուգամետ է, երբ $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$: 393. Զուգամետ է: 394. Զուգամետ է: 400. $a = b$: 401. $a = b = 0$: 402. $b = \frac{a}{4}\left(5 - \sqrt{41}\right)$: 404. Զուգամետ է: 405. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$: 417. $\frac{1}{p+1}$: 418. $\frac{1}{2}$: 419. $4/e$: 420. 1: 421. 0: 422. $\pi/2$:

Գլուխ 3

430. Սահմանափակ չէ: 432. $\inf f(x) = 0$; $\sup f(x) = 25$: 433. $\inf f(x) = 0$; $\sup f(x) = 1$: 434. $\inf f(x) = -1$; $\sup f(x) = 1$: 435.

$\inf f(x)=2$; $\sup f(x)=+\infty$: 436. ա) $\inf f(x)=-\sqrt{2}$; $\sup f(x)=\sqrt{2}$; բ) $\inf f(x)=-\sqrt{2}$; $\sup f(x)=\sqrt{2}$: 437. ա) $\inf f(x)=0$; $\sup f(x)=1$; բ) $\inf f(x)=0$; $\sup f(x)=2$: 438. $\inf f(x)=\cos 3$, $\sup f(x)=\cos 1$: 450. Ոչ: 453. 1: 454. 10: 455. $\dfrac{mn(n-m)}{2}$: 456. $0{,}5$: 457. $1/4$: 458. 5^{-5}: 459. $(3/2)^{30}$: 460. $(3/2)^{10}$: 461. $\dfrac{n(n+1)}{2}$: 462. m/n: 463. 1: 464. -2: 465. $1/\sqrt{2a}$: 466. $0{,}25$: 467. $2{,}4$: 468. $(a+b)/2$: 469. $-0{,}25$: 470. -2: 471. $0{,}25$: 472. $1{,}5$: 473. $16/3$: 474. n/m: 475. a_1/m: 478. 0: 479. 1: 480. α/β: 481. 1: 482. $3/5$: 483. 1: 484. $\cos a$: 485. $1/\cos^2 a$: 486. $0{,}5$: 487. $0{,}5$: 488. 1: 489. $1/p$: 490. $0{,}5$: 491. $\sqrt{2}$: 492. $-9/128$: 493. 4: 498. ա) $0{,}5$; բ) 1: 499. ա) 0; բ) 0: 500. ա) 1; բ) e^4: 501. ա) e^3; բ) $e^{-0{,}5}$: 502. ա) $\sqrt{e}$; բ) e^{-1}: 503. ա) 1; բ) $e^{1{,}5}$: 504. ա) $1/a$; բ) $-x^{-2}$: 505. ա) 1; բ) $0{,}2$: 506. ա) $2/3$; բ) $e^{-0{,}5}$: 507. 1: 508. $1/5$: 509. $\sqrt{ab}$: 510. ա) 0; բ) $\log_2^3$: 513. cha: 514. sha: 515. -1: 517. $-\pi/2$: 518. $0{,}5$: 519. $\pi/3$: 520. $1/(1+x^2)$: 522. ա) 2; վերևից; բ) 2; ներքևից: 523. ա) $\pi/2$; ներքևից; բ) $-\pi/2$; վերևից: 524. ա) 1; ներքևից; բ) 0; վերևից: 525. ա) 0; ներքևից; բ) 1; վերևից: 526. $f(-0)=1$; $f(+0)=0$: 527. $f(-0)=0$; $f(+0)=+\infty$: 528. $f(1-0)=1{,}5$; $f(1+0)=0{,}25$: 529. $f\left(\dfrac{\pi}{2}-0\right)=1$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}+0\right)=-1$: 530. $f(3-0)=0$; $f(3+0)=1/3$: 531. $f(10-0)=109$; $f(10+0)=110$: 532. $f(-1-0)=1$; $f(-1+0)=+\infty$: 533. $f(1-0)=0$; $f(1+0)=1$: 534. $f(1-0)=3$; $f(1+0)=2$: 535. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$: 536. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=e^{-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e$: 537. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$: 547. $25/16$: 548. 2: 549. $10/37$: 550. $-1/9$: 551. $-0{,}25$: 552. $-0{,}5$: 553. -2: 554. 2: 555. $7/3$: 556. 12: 557. 1: 558. ա) 1; բ) 2; գ) 2; դ) 2; ե) 2; զ) 2: 559. ա) 2; բ) 1; գ) 6; դ) 3: 560. Անվերջ փոքր է: 561. Անվերջ փոքր է: 562. ա) Անվերջ փոքր չէ; բ) անվերջ փոքր է: 563. ա) Անվերջ մեծ է; բ) անվերջ մեծ չէ: 564. Անվերջ մեծ է: 565. ա) Անվերջ մեծ չէ; բ) անվերջ մեծ է: 566. ա) Անվերջ մեծ է; բ) անվերջ մեծ չէ: 567. ա) $-\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$; բ) $x-1$; գ) $e(x-1)$; դ) $x-1$: 568. ա) $2x^2$; բ) $x^{\frac{2}{3}}$; գ) $x^{\frac{1}{8}}$: 569. ա) $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x)=-1$; $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x)=2$; բ) $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x)=-2$; $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x)=2$: 570. ա) $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=-1$; $\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=1$; բ) $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=0$; $\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=+\infty$; գ) $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$; $\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=\pi$: 578. $n^{-\frac{n(n+1)}{2}}$: 579. $\dfrac{n(n+1)}{2}$: 580. $\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$: 581. $\dfrac{m-n}{2}$: 582. $-0,5$: 583. $\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}$: 584. $1/n!$: 585. $(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$: 586. $a_1=-1; b_1=0,5; a_2=1; b_2=-0,5$: 587. $\lambda=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$, $\mu=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{b_k}{2\sqrt{a_k}}$: 588. $-\cos a$: 589. $2\cos a/\sin^3 a$, $a\notin\{\pi k : k\in Z\}$: 590. 14: 591. $-\cos 2a/\cos^4 a$: 592. $4/3$: 593. $-1/12$: 594. 3: 595. 0, եթե $a_1<a_2$; $e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$, եթե $a_1=a_2$; $+\infty$, եթե $a_1>a_2$: 596. $\sqrt{e}$: 597. 1: 598. $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2m}$: 599. $\dfrac{2a}{b}$: 600. $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$: 601. α/β: 602. -2: 603. 1: 604. ա) $a^b\ln a$; բ) $a^a\ln(a/e)$: 605. ա) $\dfrac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$; բ) $a^a\ln ae$: 606. $a^{a^a}(\ln a-1)$: 607. e^{-a-b}: 608. $(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$: 609. $1/\sqrt{ab}$: 611. $2\ln a$: 612. e^{π^2}: 613. $-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}$: 614. $\dfrac{n(n+1)}{2}$: 615. $\dfrac{n(n+1)}{2}$: 616. $-4,5$: 617. 0: 618. $4-\pi$: 619. $\dfrac{64}{3}\ln 2$: 620. $\sqrt{2}$: 621. $e^{-\frac{\pi}{4}}$: 622. 0: 623. $\dfrac{1}{1-x}$: 624. 0: 625. $\dfrac{\sin x}{x}$: 626. ա) $\alpha=1$, $\beta=0$; բ) $\alpha=\beta=0$: 627. $\alpha=1, \beta=5$: 628. ա) $\alpha=3$, $\beta=0$; բ) $\alpha=\beta=0$: 629. ա) $\alpha=\pi/2$, $\beta=-1$; բ) $\alpha=-\pi/2$, $\beta=-1$: 630. $\beta<0$ կամ $0\le\beta<\alpha$: 631. ա) x^2; բ) x^2: 632. ա)

$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$, $\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=2$; բ) $\underline{\lim}_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\overline{\lim}_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; գ) $\underline{\lim}_{x\to0} f(x)=\frac{1}{e}$, $\overline{\lim}_{x\to0} f(x)=e$; դ) $\underline{\lim}_{x\to0} f(x)=-\frac{1}{2}$, $\overline{\lim}_{x\to0} f(x)=+\infty$; ե) $\underline{\lim}_{x\to2} f(x)=-\frac{\pi}{2}$, $\overline{\lim}_{x\to2} f(x)=\frac{\pi}{2}$: 633. ա) $[-1;1]$; բ) $[1;+\infty)$:642. ա) 1; բ) 1: 646. 1/6: 647. $a/2$: 648. $\frac{\ln a}{2}$: 649. $\sqrt[3]{e^{-a^2}}$: 650. $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$:

Գլուխ 4

659. ա) Ոչ. f-ը x_0-ի ցանկացած շրջակայքում սահմանափակ է; բ) ոչ. եթե X-ը սահմանափակ է, ապա ցանկացած $f: X\to R$ ֆունկցիա բավարարում է նշված պայմանին, իսկ եթե X-ը սահմանափակ չէ, ապա $\lim_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$; գ) ոչ. եթե նշված պայմանը տեղի ունի յուրաքանչյուր $x_0\in X$ կետում, ապա f-ը հակադարձելի է, ընդ որում f^{-1}-ը անընդհատ է: 663. Z բազմության բոլոր կետերում ֆունկցիան ունի առաջին սեռի խզում: 664. Z բազմության բո-լոր կետերում ֆունկցիան ունի առաջին սեռի խզում: 665. $x_0=0$-ն առաջին սեռի խզման կետ է: 666. $x_0=0$-ն վերացնելի խզման կետ է: 667. Անընդհատ է: 668. Անընդհատ է: 669. Անընդհատ է: 670. $x_0=0$-ն երկրորդ սեռի խզման կետ է: 671. $\{\pi n: n\in Z\}$ բազմության կետերը երկրորդ սեռի խզման կետեր են: 672. Անընդհատ է: 673. $\{n^2: n\in N\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: 674. $\{\pm\sqrt{n}: n\in N\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: 675. $Z\setminus\{0\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: 676. $\{\pi n: n\in N\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: 677. $\{1/n: n\in Z\setminus\{0\}\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: 678. Z բազմության կետերը վերացնելի խզման կետեր են: 679. Անընդհատ է: 680. $\{\pm\sqrt{n}: n\in N\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: 681. Անընդհատ է: 682. Անընդհատ է: 683. ա) 4; բ) $\sin 1+1$; գ) $a\in R$; դ) 3;−1: 684. ա) Երկրորդ սեռի է; բ) առաջին սեռի է: 685. Երկրորդ սեռի է: 690. Ոչ: 694. $x=1$-ում y-ն ունի առաջին սեռի խզում: 695. $x=1$-ում y-ն ունի առաջին

սեռի խզում: 696. Անընդհատ է: 697. $\{\pi n : n \in Z\}$ բազմության կետերը վերացնելի խզման կետեր են: 698. Անընդհատ է: 699. $x = 0$ կետն առաջին սեռի խզման կետ է: 700. Z : 707. ա)-ն և դ)-ն: 718. Հավասարաչափ անընդհատ է: 719. Հավասարաչափ անընդհատ է: 720. Հավասարաչափ անընդհատ չէ: 721. Հավասարաչափ անընդհատ է: 722. ա) Հավասարաչափ անընդհատ չէ; բ) հավասարաչափ անընդհատ է: 723. Հավասարաչափ անընդհատ է: 724. Հավասարաչափ անընդհատ է: 725. Հավասարաչափ անընդհատ է: 726. Հավասարաչափ անընդհատ է: 727. ա) Հավասարաչափ անընդհատ է; բ) հավասարաչափ անընդհատ չէ: 728. ա) Հավասարաչափ անընդհատ է; բ) հավասարաչափ անընդհատ չէ: 729. ա) Հավասարաչափ անընդհատ չէ; բ) հավասարաչափ անընդհատ է: 730. Անընդհատ է: 731. $x = 0$ կետում առաջին սեռի խզում է: 732. Անընդհատ է $x = 2$ կետում; խզման կետերը երկրորդ սեռի են: 733. Անընդհատ է $a_1, a_2, \ldots, a_n$ կետերում: Խզման կետերը երկրորդ սեռի են: 735. Խզումները վերացնելի են: 736. $(-\infty; 0)$ միջակայքի բոլոր կետերը երկրորդ սեռի խզման կետեր են, իսկ $(0; +\infty)$ միջակայքի ռացիոնալ կետերը խզման կետեր են: 737. Խզման կետերի բազմությունը ∂M-ն է: Ընդ որում ∂M բազմության մեկուսացված կետերում ֆունկցիայի խզումն առաջին սեռի է, իսկ մնացած կետերում՝ երկրորդ սեռի: 738. ա) $\varphi \circ \psi$-ն անընդհատ է, $\psi \circ \varphi$-ն՝ խզվող; բ) $\varphi \circ \psi$-ն անընդհատ է, $\psi \circ \varphi$-ն՝ խզվող; գ) անընդհատ է: 740. $x = 0$ կետում ձախից անընդհատ է: 741. $x = 0$ կետում ձախից անընդհատ է: 742. $\{e^n : n \in Z\}$ բազմության կետերում աջից անընդհատ է: 743. $\{e^n : n \in Z\}$ բազմության կետերում աջից անընդհատ է: 744. $\{\pi n/2 : n \in Z\}$ բազմության կետերը թռիչքի կետեր են, $\{2\pi k : k \in Z\}$ բազմության կետերում անընդհատ է աջից, իսկ $\{2\pi k + \pi : k \in Z\}$ բազմության կետերում՝ ձախից: 751. Ոչ: 763. Ոչ: 770. ա) Ոչ; բ) ոչ: 777. Հավասարաչափ անընդհատ չէ: 778. Հավասարաչափ անընդհատ չէ: 779. Հավասարաչափ անընդհատ է: 780. Հավասարաչափ անընդհատ է: 781. Հավասարաչափ անընդհատ է: 782. Հավասարաչափ անընդհատ չէ: 783. Հավասարաչափ անընդհատ է: 784. Հավասարաչափ անընդհատ է: 785. Հավասարաչափ անընդհատ է: 786. Հավասարաչափ անընդհատ է: 789. ա) $\omega_f(\delta) \le 3\delta$; բ) $\omega_f(\delta) \le \sqrt{\delta}$; գ) $\omega_f(\delta) \le \delta$; դ) $\omega_f(\delta) \le \sqrt{2}\delta$; ե) $\omega_f(\delta) \le 2$; զ) $\omega_f(\delta) \le 2$: 797. $f(x) \equiv 0$; $f(x) = \cos ax$; $f(x) = chax$: 822. Ոչ: 827. Ոչ: 835. Ոչ: 836. Ոչ:

Գլուխ 5

839. ա) $a\Delta x$; բ) $(2ax_0+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$; գ) $a^{x_0}\left(a^{\Delta x}-1\right)$; դ) $\dfrac{tg\Delta x}{\cos^2 x_0(1-tgx_0tg\Delta x)}$: 841. ա) $2x$; բ) $-\dfrac{1}{x^2}$; գ) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; դ) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; ե) $\cos x$; զ) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; է) $\dfrac{1}{1+x^2}$: 844. ա) 5; բ) -2; գ) 4; դ) $\dfrac{\pi}{4}+1$; ե) 0: 846. Ոչ: 848. $5x^4-3x^2$: 849. $2x(3x-2)(1-x^3)+3(x^2+1)(1-x^3)-3x^2(x^2+1)(3x-2)$: 850. $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$: 851. $\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$: 852. $\dfrac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$: 853. $(-3x^5+5x^4+2x^3-6x^2-6x+12)/(1-x)^3$: 854. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$: 855. $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$: 856. $\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$: 857. $-\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)$: 858. $\dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$: 859. $-\dfrac{8\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}+2}{6\sqrt[6]{x}\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)^2}$: 860. $\sin x-x\cos x+x^2\sin x$: 861. $\dfrac{x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}+tgx$: 862. $\dfrac{1}{1+\cos x}$: 863. $\dfrac{\sin x\cos^2 x+\sin^2 x\cos x+x\cos^3 x-x\sin^3 x}{1+\sin 2x}$: 864. $e^x(x^2+3x)$: 865. $1+\ln x+e^x(\cos x+\sin x)$: 866. $2^x\ln 2ctgx-\dfrac{2^x}{\sin^2 x}$: 867. $15(1+3x)^4$: 868. $\dfrac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$: 869. $\dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$: 870. $\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$: 871. $\dfrac{4}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$: 872. $\dfrac{3(1+x^2)^2(2x-x^2+1)}{(1-x)^4}$: 873. $\dfrac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$: 874. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+x\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{1+\frac{3}{2}\sqrt{x}}{2\sqrt{x+x\sqrt{x}}}\right)$: 875. $\dfrac{2x^2}{1-x^6}\times\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$: 876. $9\sin^2 3x\cos 3x$: 877. $-3\sin(3x-1)\sin 2x+2\cos(3x-1)\times\cos 2x$: 878. $\dfrac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$: 879. $x^2\sin x$: 880. $\dfrac{\cos 2x}{|\sin x+\cos x|}$: 881. $2x\sin 2x^2$:

882. $-\dfrac{2x\sin\left(2\sqrt[3]{x^2-1}\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}$: 883. $\sin x+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$: 884. $\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}-\dfrac{tg^2 x}{\cos^2 x}$: 885. $\dfrac{10(x+1)tg^4\left(x^2+2x-1\right)}{\cos^2\left(x^2+2x-1\right)}$: 886. $\dfrac{-2}{3\sin^2 x\sqrt[3]{ctgx}}$: 887. $2x\sin(\sin x)+x^2\cos x\times$ $\times\cos(\sin x)$: 888. $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\cos\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$: 889. $-3\dfrac{tg^2 x}{\cos^2 x}\sin\left(2tg^3 x\right)\times$ $\times\cos\left(\cos^2\left(tg^3 x\right)\right)$: 890. $\dfrac{3\sin 6x(1+ctg3x)+3}{(1+ctg3x)^2}$: 891. $\dfrac{x^4-1}{x^3\cos^2\left(x^2+x^{-2}\right)\sqrt{1+tg\left(x^2+x^{-2}\right)}}$: 892. $-\dfrac{2^{tg\frac{1}{x}}\ln 2}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$: 893. $e^{-x^2}\left(-2x\cos x/2-\right.$ $\left.-\dfrac{1}{2}\sin x/2\right)$: 894. $2x\left(1-3x^3\right)e^{-2x^3}$: 895. $\left(2x\cos x^2-\sin x\sin x^2\right)e^{\cos x}$: 896. $\dfrac{e^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$: 897. $-\sin x ch\cos x$: 898. $e^{-2x}\left(-2chx^3+3x^2shx^3\right)$: 899. $-2x\dfrac{sh^2x^2+2}{sh^3x^2}$: 900. $e^x e^{e^x}$: 901. $a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x a^{a^x}\ln^2 a$: 902. $\dfrac{3}{3x+1}$: 903. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$: 904. $\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}}$: 905. $\dfrac{6\lg^2 x^2}{x\ln 10}$: 906. $\dfrac{12\log_2^2(2x+3)^2}{(2x+3)\ln 2}$: 907. $10^{\frac{x}{\log_3 x}}\cdot\ln 10\cdot\dfrac{\log_3\dfrac{x}{e}}{\log_3^2 x}$: 908. $\dfrac{(2x+1)}{2\left(x^2+x+1\right)}\times$ $\times\dfrac{e^{\sqrt{\ln\left(x^2+x+1\right)}}}{\sqrt{\ln\left(x^2+x+1\right)}}$: 909. $\dfrac{-\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$: 910. $\dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$: 911. $\dfrac{6}{x\ln x\ln\ln^3 x}$: 912. $\dfrac{x}{x^4-1}$: 913. $\dfrac{1}{\cos x}$: 914. $\dfrac{-2\sin x}{1+\cos x}\ln(1+\cos x)$: 915. $-\dfrac{1}{\cos x}$: 916. $\dfrac{\ln x}{x^5}$: 917.

$2\sin\ln x$; 918. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; 919. $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; 920. $\frac{-1}{x^2+2}$; 921. $-\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x\neq 0)$; 922. $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $(\sin x\neq 0)$; 923. $\frac{1}{1+x^2}$; 924. $\frac{-2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$ $(x\neq 0)$; 925. $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$; 926. $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$; 927. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}\frac{2x\ln\frac{1}{3}}{\sqrt{1-x^4}}$; 928. $\frac{2x\,arctgx^2}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}$; 929. $3^{arctg(2x+\pi)}\frac{2\ln 3}{1+(2x+\pi)^2}$; 930. $-\frac{xe^{2x}}{(e^{2x}-1)\sqrt{e^{2x}-1}}$; 931. $\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{2(e^x+1)}$; 932. $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; 933. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$; 934. $\frac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$; 935. $\frac{2\sin 2x}{2-\sin^2 2x}$; 936. $2x[\operatorname{sgn}\cos x^2+\operatorname{sgn}\sin x^2]$ $\left(x^2\neq\frac{\pi k}{2}, k\in Z_+\right)$; 937. $\frac{\sin\alpha\operatorname{sgn}(\cos x-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha\cos x}$ $(\cos x\neq\cos\alpha)$; 938. $\sqrt{a^2-x^2}$; 939. $\frac{2}{1+e^{2x}}-$ $-e^{-x}arctge^x$; 940. $-8x^3\operatorname{sgn}\sin 2x^4$ $(\sin 2x^4\neq 0)$; 941. $-\frac{3\ln^2 x\sin\ln^3 x}{4x(1+\cos\ln^3 x)\sqrt{\cos\ln^3 x}\sqrt{arctg\sqrt{\cos\ln^3 x}}}$; 942. $\frac{1}{(1+th^2x)ch^2x}$; 943. $\frac{\operatorname{sgn} shx}{chx}$ $(x\neq 0)$; 944. $x^x(1+\ln x)$; 945. $x^x x^{x^x}\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right)$; 946. $e^x x^{e^x}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$; 947. $e^x(chx)^{e^x}(\ln chx+thx)$; 948. $\frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x^2}$; 949. $x^{a-1}x^{x^a}(1+a\ln x)+a^x x^{a^x}\left(\ln a\ln x+\frac{1}{x}\right)+x^x a^{x^x}\ln a(1+\ln x)$; 950. $\frac{(\ln x)^{x-1}[x-2\ln^2 x+x\ln x\cdot\ln\ln x]}{x^{\ln x+1}}$; 951. $\sin x(\sin x)^{\cos x}(ctg^2 x-\ln\sin x)$; 952. $\left(tg\frac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}\left(\arcsin 2x\cdot\ln tg\frac{x}{2}+\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\ln tg\frac{x}{2}+\frac{x\arcsin 2x}{\sin x}\right)$;

953. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right)$: 954. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\left(\ln\frac{\sin x}{x}+x\,ctgx-1\right)$: 955. $\frac{1-x-x^2}{x\left(1-x^2\right)}$: 956. $\frac{2x^3+4x^2-36x+54}{3x(1-x)\left(9-x^2\right)}$: 957. $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x-a_k}$: 958. $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$: 959. $1;-1$: 960. $1;-1$: 961. $2\ln 2;-2\ln 2$: 962. $\cos 1+\sin 1$: 963. $1;-1$: 964. $-1;2$: 965. $-\infty;1$: 966. $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$: 967. $\frac{3}{2}\sin 2x|\sin x|$: 968. -1, երբ $x<1$; $2x-3$, երբ $1\le x\le 2$; 1, երբ $x>2$: 969. $2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$, երբ $x\in[a;b]$; 0, երբ $x\notin[a;b]$: 970. 1, երբ $x<0$; $\frac{1}{1+x}$, երբ $x\ge 0$: 971. $2xe^{-x^2}\left(1-x^2\right)$, երբ $|x|\le 1$; 0, երբ $|x|>1$: 972. ա) R, $\frac{x(y)}{x(y)+1}$; բ) $[1;+\infty)$, $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ $(y>1)$; գ) R, $\frac{1}{1+e^{x(y)}}$; դ) $(-1;1)$, $\frac{1}{1-y^2}$; ե) R, $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$: 973. $\sqrt[6]{\frac{\left(1-\sqrt{t}\right)^4}{t\left(1-\sqrt[3]{t}\right)^3}}$: 974. $\frac{2(t+1)}{(2t+1)\left(t^2+1\right)}\sqrt{\frac{t^2+t}{t^2+1}}$: 975. -1: 976. $-\frac{b}{a}ctgt$: 977. $\frac{b}{a}ctht$: 978. $-tg^3t$: 979. $-tgt$: 980. $ctg\frac{t}{2}$: 981. $\operatorname{sgn} t$ $(t\ne 0)$: 982. ա) $y=\sqrt[3]{4}(x+1)$, $y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$; բ) $y=3$, $x=2$: 983. ա) $y=\pi x$, $y=-\frac{1}{\pi}x$; բ) $y=-\frac{\pi}{2}(x-1)$, $y=\frac{2}{\pi}(x-1)$: 984. ա) $y=\frac{\pi}{3}+\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times$ $\times(x-1)$, $y=\frac{\pi}{3}-\frac{3}{2\pi-\sqrt{3}}(x-1)$; բ) $y=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-3\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$, $y=\frac{\pi}{2}-$ $-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-3}\left(x-\sqrt{3}\right)$: 985. ա) $y=\frac{1}{64}+\frac{6-\pi}{32}\left(x-\frac{1}{4}\right)$, $y=\frac{1}{64}+\frac{32}{\pi-6}\left(x-\frac{1}{4}\right)$; բ) $y=-\frac{\pi}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $y=\frac{8}{\pi}\left(x-\frac{1}{2}\right)$: 986. ա) $3x-2y=0$, $2x+3y=0$; բ) $3x-y-1=0$, $x+3y-7=0$: 987. ա) $y=1-x$, $y=1+x$; բ) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$,

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$: 988. ա) $y=x$, $y=-x$; բ) $3x-y-4=0$, $x+3y-3=0$: 989. $\frac{\pi}{2}$, $arctg\frac{3}{4}$: 990. $arctg3$: 991. $arctg2\sqrt{2}$: 992. $arctg\frac{9}{7}$: 993. ա) $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right)$; բ) $(0;2)$: 995. $b^2-4ac=0$. 996. $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$: 997. $a=\frac{1}{2e}$: 998. $-\frac{dx}{2\sqrt{x^3}}$: 999. $\left(-\sin x+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$: 1000. $\left(\frac{-1}{2\sqrt{(1-x^2)\arccos x}}-2^{-x}\ln 2\right)dx$:

1001. $\frac{3^{\sqrt{arctgx^2}}x\ln 3}{(1+x^4)\sqrt{arctgx^2}}dx$: 1002. $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}dx$: 1003. $-\frac{6\cos 2x}{\sin^4 2x}dx$: 1004. ա) $vwdu+uwdv+uvdw$; բ) $-\frac{udu+vdv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$; գ) $\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$; դ) $\frac{udu+vdv}{u^2+v^2}$: 1005. ա) $1-4x^3-3x^6$; բ) $-ctgx$; գ) $\frac{1}{2x^2}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)$; դ) -1: 1006. $1{,}007$: 1007. $0{,}4849$: 1008. $-0{,}8747$: 1009. $0{,}8104$: 1010. $0{,}925$: 1012. Կարող է: 1014. ա) Չի կարող; բ) կարող է: 1015. ա) Կարող է; բ) կարող է: 1016. ա) Այո; բ) այո; գ) դիֆերենցելի չէ $x=\pi k$, $k\in Z\setminus\{0\}$, կետերում: 1020. $\frac{x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$: 1021. $\frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$: 1022. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$: 1023. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$: 1024. $\frac{3x}{(1-x^2)^2}+$ $+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$: 1025. $\frac{2x}{1+x^2}+2arctgx$: 1026. $x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1}$: 1029. $\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}$: 1030. $\frac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$: 1031. $n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$:

1032. $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$: 1033. $\frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}$: 1034. $\frac{(-1)^n}{3^n}1\cdot 4\cdot\dots\cdot(3n-5)(1-x)^{-n-\frac{1}{3}}(9n-2x-4)$, $n\geq 2$: 1035.

$-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$: 1036. $\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)$: 1037. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+2^{2n-3}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$: 1038. $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{\pi n}{2}\right]+$ $+\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{\pi n}{2}\right]$: 1039. $\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)+$ $+\frac{5^n}{4}\sin\left(5x+\frac{\pi n}{2}\right)$: 1040. $-2^{n-3}\left[4x^2\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+4nx\cos\left(2x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+\right.$ $\left.(n^2-n)\cos\left(2x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)\right]$, $n\geq 3$: 1041. $\frac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{(x+1)^n}(2x^2+2xn+n^2-n)$, $n\geq 3$: 1042. $5^n e^{3x}\sin(4x+n\varphi)$, $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$: 1043. $\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{2}5^{\frac{n}{2}}\times$ $\times\cos(2x+n\varphi)$, $\varphi=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$: 1044. $\frac{1}{2}\left\{\left[(x+n)-(-1)^n(x-n)\right]chx+\right.$ $\left.+\left[(x+n)+(-1)^n(x-n)\right]shx\right\}$: 1045. $y^{(2k)}=\frac{1}{2}(a+b)^{2k}ch(a+b)x+$ $+\frac{1}{2}(a-b)^{2k}ch(a-b)x$, $y^{(2k-1)}=\frac{1}{2}(a+b)^{2k-1}sh(a+b)x+\frac{1}{2}(a-b)^{2k-1}\times$ $\times sh(a-b)x$, $k\in N$: 1046. $e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+n!\right]$: 1047. $a_n n!$: 1048. $-\frac{(n-1)!}{(1-x^2)^n}\left[(1+x)^n+(-1)^{n-1}(1-x)^n\right]$: 1051. $\frac{3}{4(1-t)}$: 1052. $-\frac{1}{a\sin^3 t}$: 1053. $\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$: 1054. $\frac{e^{-2t}(2\sin t+\cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$: 1055. $\frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$:

1056. $\frac{t+2t\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin 2t}{4t^3\sin^4 t}$: 1057. $y''-5y'+6y=0$: 1058. $v''-$ $-\left[1+4e^{4s}q\left(e^{2s}\right)\right]v=0$: 1059. $r''-r=0$: 1060. $2(uu''+u'^2)$: 1061. $uv''+$

$+2u'v'+vu''$: 1062. $\dfrac{v(u''v-uv'')-2v'(vu'-uv')}{v^3}$: 1063. $\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}-\dfrac{vv'-v'^2}{v^2}$:

1064. $\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$: 1065. $u^v\left[\left(v\dfrac{u'}{u}+v'\ln u\right)^2+\dfrac{2u'v'}{u}+\right.$

$\left.+v\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}+v''\ln u\right]$: 1066. $y''=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2)$, $y'''=8x^3f'''(x^2)+$

$12xf''(x^2)$:1067. $y''=\dfrac{1}{x^4}f''\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{2}{x^3}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $y'''=-\dfrac{1}{x^6}f'''\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{6}{x^5}f''\left(\dfrac{1}{x}\right)-$

$\dfrac{6}{x^4}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$: 1068. $y''=e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$, $y'''=e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+$

$+e^xf'(e^x)$: 1069. 6 : 1070. 59: 1071. $98{,}5$; $13{,}5$: 1072. $v=\beta-2\gamma t$, $a=-2\gamma$;

անիվը կանգ կառնի, երբ $t=\dfrac{\beta}{2\gamma}$: 1073. 26450: 1076. $\dfrac{5h}{h-1{,}7}$կմ/ժ : 1077. 6:

1078. $-\dfrac{2y}{\sqrt{100-y^2}}$; $-1{,}5$: 1079. Օրդինատը փոփոխվում է ավելի արագ, երբ

$|x|>2$, ավելի դանդաղ՝ երբ $|x|<2$: 1080. ա) 0 ; բ) $n!$; գ) $n!\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$; դ) 0 ; ե) $\dfrac{1}{2}$:

1081. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$: 1082. $\pi[x]\sin 2\pi x$: 1083. $y'=-\dfrac{2(x+1)arctg\,\frac{1}{x+1}}{x^2+2x+2}+$

$+arctg^2\dfrac{1}{x+1}+2$, երբ $x\neq-1$, $y'(-1)=\dfrac{\pi^2}{4}+2$: 1084. $\dfrac{1}{x^2+1}$, երբ $-1<x\leq1$,

$\dfrac{1}{2}$, երբ $|x|>1$: 1086. ա) $a=0$, $f'(0)=1$; բ) $a=0$, $f'(0)=1$: 1088. $a=2$,
$b=-1$: 1089. $a=1$, $b=1$: 1090. $a=1{,}5$, $b=-0{,}5$: 1091. $a=b$: 1092.
$a_1=-1$, $b_1=\pi/2$, $a_2=1$, $b_2=\pi/2$: 1093. $a_1=-\pi/2$, $b_1=\pi/2$, $a_2=\pi$,
$b_2=\pi$: 1094. $a_1=-\dfrac{\pi+1}{4}$, $b_1=\dfrac{2\pi+1}{4}$, $a_2=\dfrac{\pi+1}{4}$, $b_2=-\dfrac{2\pi+1}{4}$: 1095.

$a_1=-\dfrac{1}{2}$, $b_1=-\dfrac{1}{2e^2}$, $a_2=3e$, $b_2=-2e^2$: 1096. $f(x)=\dfrac{xchx-shx}{x^2}$, $x\neq0$;

$f'(0)=0$: 1097. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$: 1098. Դիֆերենցելի չէ $x=1$ կետում: 1099. Դիֆերենցելի չէ $\left\{\dfrac{2k-1}{2}\pi : k\in Z\right\}$ բազմության կետերում: 1100. Դիֆերենցելի է: 1101. $f'(0)=0$: 1102. $f'(0)=0$, $f''(0)=0$: 1103. $f'(0)=0$: 1104. $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=1$, $f^{(4)}(0)=0$: 1106. ա) $\alpha>0$; բ) $\alpha>1$; գ) $\alpha>2$: 1107. ա) $\alpha\ge\beta+1$; բ) $1<\alpha<\beta+1$: 1110. $\varphi(a)$: 1111. $f'_-(a)=-\varphi(a)$, $f'_+(a)=\varphi(a)$: 1115. $f'_-(k)=(-1)^k(k-1)\pi$, $f'_+(k)=(-1)^k k\pi$, $k\in Z$: 1116. $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$, $f'_-\left(\pm\sqrt{(2k+1)\pi}\right)=\mp\infty$, $k\in Z_+$, $f'_+\left(\pm\sqrt{2\pi k}\right)=\pm\infty$, $k\in N$: 1117. $f'_-\left(\dfrac{2}{2k+1}\right)=-(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $f'_+\left(\dfrac{2}{2k+1}\right)=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in Z$: 1118. $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=+\infty$: 1119. $f'_+(1)=-\infty$, $f'_-(1)=\dfrac{1}{2}$: 1120. $f'_-(4)=-\dfrac{\pi}{2}$, $f'_+(4)=\dfrac{\pi}{2}$: 1121. $f'_-(\pm1)=-1$, $f'_+(\pm1)=1$: 1122. $f'_-(\pm1)=\pm1$, $f'_+(\pm1)=\mp1$: 1123. $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=0$: 1124. $f'_-(0)=\sqrt{2}$, $f'_+(0)=-\sqrt{2}$: 1125. $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$: 1126. $f'_-(0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $f'_+(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: 1127. $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$: 1128. $f'_-(0)=2$, $f'_+(0)=0$: 1129. $f'_-(0)=0$, $f'_+(0)=0$: 1132. ա), բ), գ) Կարող է դիֆերենցելի լինել, կարող է և չլինել: 1134. Ընդհանրապես՝ ոչ: 1135. ա) $\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$, բ) $\dfrac{\left(1+x-(n+1)^2x^n+\left(2n^2+2n-1\right)x^{n+1}-n^2x^{n+2}\right)}{(1-x)^3}$: 1136. $\dfrac{\frac{1}{2}\sin nx-n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$; բ) $\dfrac{n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2}-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$: 1137. ա) $\dfrac{\sin nx(2n\cos nx\sin x-\sin nx\cos x)}{\sin^2 x}$; բ) $\dfrac{\sin 2nx\cos x-2n\cos 2nx\sin x}{2\sin^2 x}$: 1138. $\dfrac{1}{2^n}ctg\dfrac{x}{2^n}-ctgx$: 1139. $\dfrac{1}{3\left(y^2+1\right)}$: 1140. $\dfrac{1}{1-\varepsilon\cos y}$: 1143. ա) $3x^2+15$; բ)

$6x^2$: 1144. ա) $tg(\varphi + arctg\varphi)$; բ) $-ctg\dfrac{3\varphi}{2}$; գ) $tg\left(\varphi + arctg\dfrac{1}{m}\right)$: 1145. $x = \pi k$, $k \in Z$: 1146. $\dfrac{\pi}{3}$: 1151. ա) $\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1-x^2}}\left\{\dfrac{(2n-3)!!}{(1+x)^{n-1}} - (n-1)\dfrac{(2n-5)!!\cdot 1!!}{(1+x)^{n-2}(1-x)} + \dfrac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\dfrac{(2n-7)!!3!!}{(1+x)^{n-3}(1-x)^2} + \cdots\right\}$, $n > 3$; բ) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(narcctgx)$: 1152. $n!\varphi(a)$: 1154. $f^{(n)}(0) = 0$: 1155. $f^{(n)}(0) = 0$:

1156. $a = \dfrac{1}{2}f''(x_0)$, $b = f'(x_0)$, $c = f(x_0)$: 1160. ա) Ընդհանրապես՝ ոչ; բ) այո: 1161. Ընդհանրապես՝ ոչ: 1162. Ոչ: 1163. Ոչ: 1188. ա) 1) x, 2) $-\dfrac{1}{5}x^3 + \dfrac{6}{5}x$; բ) 1) $ch2 - xsh2$, 2) $\left(-\dfrac{3}{4}e^2 - \dfrac{e^{-2}}{4}\right)x^3 + e^2x^2 - sh2 + \left(\dfrac{3}{4}e^{-2} + \dfrac{1}{4}e^2\right)x$:

Գլուխ 6

1194. ա) Այո; բ) ոչ: 1199. $\xi = (a+b)/2$: 1200. ա) $\theta = 1/2$; բ) $\theta = \dfrac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1 + \dfrac{\Delta x}{x}} - 1\right)$ $(x(x+\Delta x) > 0)$; գ) $\theta = \dfrac{1}{\Delta x}\ln\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$: 1201. $A(-1;-1)$; $C(1;1)$: 1207. $\dfrac{\pi}{4}$, երբ $x \in (-\infty;1)$; $-\dfrac{3\pi}{4}$, երբ $x \in (1;+\infty)$: 1211. $P(x) = 3 - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$: 1212. $1 + 2x + \dfrac{2^2}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{2^n}{n!}x^n$: 1213. $x - x^2 + \dfrac{x^3}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{(n-1)!}$: 1214. $1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{n!}$: 1215. $\dfrac{4^2}{2!}x^2 - \dfrac{4^4x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{4^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$: 1216. $\dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{4}(x-1)^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{2n}$: 1217.

$-(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n-1}$: 1218. $x^3+\frac{3^2}{2!}x^5+\cdots+\frac{3^{2n}}{(2n)!}x^{2n+3}$:
1219. $1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n!}$: 1220. $1+x^2+\cdots+x^{2n}$: 1221. $-x^3-\frac{x^6}{2}-\cdots-\frac{x^{3n}}{n}$:
1222. $1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\cdots+\frac{\ln^n a}{n!}x^n$: 1223. $\frac{x-1}{\ln a}-\frac{(x-1)^2}{2\ln a}+\cdots+$
$+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n\ln a}$ 1224. ա) Փոքր է $\frac{e}{(n+1)!}$-ից; բ) փոքր է $\frac{1}{3840}$-ից; գ) փոքր
է $2\cdot10^{-6}$-ից; դ) փոքր է $\frac{1}{16}$-ից: 1225. $|x|\le\frac{\sqrt[4]{24}}{10}$: 1227. ա) 3,107; բ) 3,0171; գ)
1,1535; դ) 0,309; ե) 0,00995; զ) 1,121: 1228. ա) 2,718282; բ) 0,021; գ)
0,01745; դ) 2,2361: 1229. $-\frac{1}{12}$: 1230. $1/3$: 1231. 0: 1232. $\ln^2 3$: 1233. $1/3$:
1234. $1/2$: 1235. $1/6$: 1236. $-1/4$: 1237. 0: 1238. $1/3$: 1239. $1/2$: 1240. $1/2$:
1241. $1+2x+2x^2-2x^4$: 1242. $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5$: 1243.
$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}$: 1244. $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}$: 1245. $x-\frac{x^3}{3}$: 1246. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$:
1247. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}$: 1248. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+$
$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{x^9}{9}$: 1249. $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2$: 1250. $\frac{a}{b}$: 1251. 1: 1252. 2:
1253. -2: 1254. $\frac{1}{2}$: 1255. $\frac{1}{2}$: 1256. 0: 1257. $-\frac{1}{3}$: 1258. $\frac{1}{3}$: 1259. $\frac{1}{6}$: 1260.
$\frac{\ln a}{6}$: 1261. 1: 1262. $\frac{1}{2}$: 1263. $1/e$: 1264. $-e/2$: 1265. 1: 1266. $1/6$: 1267. 1:
1268. $(a/b)^2$: 1269. $1/e$: 1270. 1: 1271. 0: 1272. 0: 1273. 2: 1274. 1: 1275.
$2/3$: 1276. -2: 1277. $a^a(\ln a-1)$: 1278. $1/a$: 1279. $e^{-\frac{1}{6}}$: 1280. $e^{-\frac{2}{\pi}}$: 1281. 1:
1282. $e^{-\frac{1}{6}}$: 1283. $e^{-\frac{1}{3}}$: 1284. 2π: 1285. 0: 1286. 0: 1287. $e^{-\frac{1}{2}}$: 1288. $1/e$: 1289.
$\frac{mn}{n-m}$: 1290. $\sqrt{e}$: 1291. $\frac{2}{3}$: 1292. Ոչ: 1293. Նվազող է $(-\infty;0)$ և $(2;+\infty)$ միջա-

կայքերում, աճող՝ $(0;2)$ միջակայքում: 1294. Նվազող է $\left(0;\frac{4}{11}\right)$ միջակայքում, պ̆ճող՝ $(-\infty;0)$ և $\left(\frac{4}{11};+\infty\right)$ միջակայքերում: 1295. Նվազող է $(-\infty;-1)$, $(1/9;1)$ և $(3;+\infty)$ միջակայքերում, աճող՝ $(-1;1/9)$ և $(1;3)$ միջակայքերում: 1296. Նվազող է $(0;1)$ և $(e^4;+\infty)$ միջակայքերում, աճող՝ $(1;e^4)$ միջակայքում: 1297. Նվազող է $(0;+\infty)$ միջակայքում: 1298. Նվազող է $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$, միջակայքերում, աճող՝ $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{5\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$, միջակայքերում: 1299. Նվազող է $(0;e^{-1})$ միջակայքում, աճող՝ $(e^{-1};+\infty)$ միջակայքում: 1300. Նվազող է $(e;+\infty)$ միջակայքում, աճող՝ $(0;e)$ միջակայքում: 1301. Նվազող է $(-\infty;-1)$ և $(0;1)$ միջակայքերում, աճող՝ $(-1;0)$ և $(1;+\infty)$ միջակայքերում: 1302. Աճող է R-ում: 1303. Նվազող է $(-\infty;0)$ և $(2/\ln 2;+\infty)$ միջակայքերում, աճող՝ $(0;2/\ln 2)$ միջակայքում: 1304. Նվազող է $(\sqrt{e};+\infty)$ միջակայքում, աճող՝ $(0;\sqrt{e})$ միջակայքում: 1305. ա) Ոչ; բ) ոչ: 1308. Ուռուցիկ է $(-\infty;1]$-ում, գոգավոր՝ $[1;+\infty)$-ում, $x=1$-ը շրջման կետ է: 1309. Ուռուցիկ է $\left(-\infty;-\frac{a}{\sqrt{3}}\right]$ և $\left[\frac{a}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ միջակայքերում, գոգավոր՝ $\left[-\frac{a}{\sqrt{3}};\frac{a}{\sqrt{3}}\right]$ միջակայքում, շրջման կետերն են՝ $\mp\frac{a}{\sqrt{3}}$: 1310. Ուռուցիկ է R_+-ում, գոգավոր՝ R_--ում, $x=0$-ն շրջման կետ է: 1311. Ուռուցիկ է R-ում: 1312. Ուռուցիկ է $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $k\in Z$, միջակայքերում, գոգավոր՝ $[2\pi k;\pi+2\pi k]$, $k\in Z$, միջակայքերում, շրջման կետերն են՝ $x=\pi k$, $k\in Z$: 1313. Ուռուցիկ է $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ և $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\infty\right)$ միջակայքերում, գոգավոր՝ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ միջակայքում, շրջման կետերն են՝ $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$: 1314. Ուռուցիկ է $[-1;1]$ միջակայքում, գոգավոր՝ $(-\infty;-1]$ և

$[1;+\infty)$ միջակայքերում, շրջման կետերն են՝ ± 1: 1315. Ուռուցիկ է $\left[e^{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k};e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k}\right]$, $k\in Z$, միջակայքերում, գոգավոր՝ $\left[e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k};e^{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}\right]$, $k\in Z$, միջակայքերում, շրջման կետերն են՝ $x=e^{\frac{\pi}{4}+\pi k}$, $k\in Z$: 1316. Ուռուցիկ է $(0;+\infty)$ միջակայքում: 1319. $x_{max}=1/2$: 1320. $x=1$-ը կրիտիկական կետ է: 1321. $x_{min}=1$: 1322. $x_{max}=\dfrac{m}{m+n}$; երբ m-ը զույգ է, $x_{min}=0$; երբ n-ը զույգ է, $x_{min}=1$: 1323. $x_{max}=2\pi k$, $x_{min}=\pi+2\pi k$ $(k\in Z)$: 1324. $x_{min}=0$: 1325. $x_{min}=0$: 1326. $x_{min}=-1$, $x_{max}=9$: 1327. $x_{min}=0$: 1328. $x_{min}=1$, $x_{max}=\dfrac{1}{3}$, $x=0$-ն կրիտիկական կետ է: 1329. $x_{max}=1$, $y(1)=0$; $x_{min}=3$, $y(3)=-4$: 1330. $x_{max}=\pm1$, $y(1)=y(-1)=1$; $x_{min}=0$, $y(0)=0$: 1331. $x_{min}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$, $y\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right)\approx-0{,}05$, $y\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right)\approx-0{,}76$; $x_{max}=1$, $y(1)=0$: 1332. $x_{max}=-1$, $y(-1)=-2$; $x_{min}=1$, $y(1)=2$: 1333. $x_{min}=-1$, $y(-1)=-1$; $x_{max}=1$, $y(1)=1$: 1334. $x_{min}=\dfrac{7}{5}$, $y\left(\dfrac{7}{5}\right)=-\dfrac{1}{24}$: 1335. $x_{min}=\dfrac{3}{4}$, $y\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{2}$: 1336. $x_{max}=1$, $y(1)=1/e$: 1337. $x_{min}=1$, $y(1)=0$; $x_{max}=e^2$, $y(e^2)=4/e^2$: 1338. $x_{max}=\pi k$, $y(\pi k)=(-1)^k+1/2$, $k\in Z$; $x_{min}=\pm2\pi/3+2\pi k$, $y(\pm2\pi/3+2\pi k)=-3/4$, $k\in Z$: 1339. $x_{max}=\pi k$, $y(\pi k)=10$, $k\in Z$; $x_{min}=\pi/2+\pi k$, $y(\pi/2+\pi k)=5$, $k\in Z$: 1340. $x_{max}=1$, $y(1)=\pi/4-\ln 2/2$: 1341. $x_{min}=-\pi/4+2\pi k$, $y(-\pi/4+2\pi k)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}$, $k\in Z$; $x_{max}=3\pi/4+2\pi k$, $y(3\pi/4+2\pi k)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}$, $k\in Z$: 1342. $x_{min}=-1$, $y(-1)=-2e$; $x_{max}=3$, $y(3)=6e^{-3}$: 1343. $\min y=1/2$, $\max y=32$: 1344. $\min y=0$, $\max y=4$: 1345. ա) $\min y=-47$, $\max y=1$; բ) $\min y=-47$; $\max y=466$: 1346. ա) $\min y=3$, $\max y=19$; բ)

$\min y=-17$, $\max y=3$: 1347. $\min y=-138$, $\max y=16$: 1348. $\min y=0$, $\max y=132$: 1349. $\min y=0$, $\max y=1$: 1350. $\min y=-2/e$, $\max y=0$: 1351. $\min y=1$, $\max y=3$: 1352. $\min y=0$, $\max y=4/3$: 1353. $\inf y=0$, $\max y=1/(2e)$: 1354. $\inf y=0$, $\max y=(\sqrt{2}+1)/2$: 1355. $\min y= =-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$, $\max y=1$: 1356. $\min y=0$, $\max y=7/5$: 1357. ա) $\inf y=0$, $\sup y=2$; բ) $\min y=-1/4$, $\sup y=2$; գ) $\min y=-1/4$, $\max y=3/4$: 1358. $\max x_n=(10/e)^{10}$: 1359. $\max x_n=\sqrt[3]{3}$: 1360. $y=x/2+1/4$, երբ $x\to\infty$; $x=1/2$: 1361. $y=x/2$, երբ $x\to+\infty$; $y=-x/2$, երբ $x\to-\infty$: 1362. $y=x$, երբ $x\to\infty$; $x=0$: 1363. $y=2x$, երբ $x\to-\infty$: 1364. $x=0$; $y=0$: 1365. $y=\pi x/2-1$, երբ $x\to+\infty$; $y=-\pi x/2-1$, երբ $x\to-\infty$: 1412. $(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$: 1413. $m^m n^n\left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n}$: 1414. $\sqrt{S}$ կողմով քառակուսի: 1415. $\frac{P}{4}$ կողմով քառակուսի: 1416. 30°, 60°: 1417. $b=\frac{d}{\sqrt{3}}$; $h=d\sqrt{\frac{2}{3}}$: 1418. $S=\frac{bh}{4}$: 1419. $V=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$: 1420. $S=\pi R^2(1+\sqrt{5})$: 1421. $V=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$: 1422. Եթե $\sqrt{2}b<a$, ապա մեծագույն լարն ունի $|MB|=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ երկարություն, որտեղ M-ի կոորդինատներն են $\left(\pm\frac{a^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-2b^2};\frac{b^3}{a^2-b^2}\right)$; եթե $\sqrt{2}b\geq a$, ապա մեծագույն լարն ունի $|MB|=2b$ երկարություն, որտեղ M-ի կոորդինատներն են $(0;b)$: 1423. Շոշափման կետերն են՝ $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}};\pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$: 1424. $a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_B}{S_A}}\right)^{-1}$: 1425. $\frac{R}{\sqrt{2}}$, որտեղ R-ը սեղանի շառավիղն է: 1426. $arctgk$: 1427. Հորիզոնի նկատմամբ ձողի կազմած α անկյունը որոշվում է $\cos\alpha=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$ հավասարումից: 1439. ա) $1/2$, $\sqrt{2}$; բ) 1: 1442. Ոչ:

1456. Այո: 1457. ա) Այո; բ) $e^{-\frac{1}{x^2}}$: 1458. Այո: 1459. $x^7/30$: 1460. x^2: 1461. $x/2$: 1462. $2x$: 1463. $a=-2/5$, $b=-1/15$: 1464. $a=1/2$, $b=d=1/12$, $c=-1/2$: 1465. ա) $a=1/6$, $b=2/3$, $n=4$: բ) $a=4/15$, $b=3/5$, $n=7$; գ) $a=-17/60$; $b=-9/20$, $n=7$; դ) $a=1$, $b=c=1/2$, $n=4$; ե) $a=(k+1)/2k$, $b=(k-1)/2k$, $n=3$: 1466. Դիֆերենցելի են: 1467. $f(h)=$ $=\ln x+\dfrac{h}{x}-\dfrac{h^2}{2x^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{h^n}{nx^n}+o(h^n)$: 1486. Նվազող է, երբ $t\in(-\infty;-1]$, աճող է, երբ $t\in[-1;1]$ կամ $t\in[1;+\infty]$: 1487. Նվազող է, երբ $t\in[-1;1]$, աճող է, երբ $t\in(-\infty;-1]$ կամ $t\in[1;+\infty)$: 1488. Աճող է, երբ $t\in(-\infty;0]$ կամ $t\in[0;+\infty)$: 1489. Նվազող է, երբ $t\in(0;1/e)$ կամ $t\in(e;+\infty)$, աճող է, երբ $t\in(1/e;e)$: 1490. Նվազող է, երբ $t\in[\pi k/2;\pi(k+1)/2]$, $k\in Z$: 1491. Նվազող է, երբ $t\in(-\infty;0]$, աճող է, երբ $t\in[0;+\infty)$: 1496. $h=1/\sqrt{2}\sigma$: 1504. Ոչ: 1510. $4/27$: 1511. $\dfrac{9+6\sqrt{3}}{4}$: 1512. $q=-1/2$: 1513. $f(x)=\dfrac{x+2}{3}$: 1514. $f(x)=x-\dfrac{1}{8}$: 1516. ա) $y=0$, $x=-1$; բ) $y=\pm\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$: 1528. Մեկ արմատ $(3;+\infty)$ միջակայքում: 1529. Երբ $a>4$, հավասարումն ունի մեկ արմատ $(1;+\infty)$ միջակայքում; երբ $a<-4$՝ մեկ արմատ $(-\infty;-1)$ միջակայքում; երբ $-4<a<4$՝ մեկական արմատ $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ և $(1;+\infty)$ միջակայքերում; երբ $a=-4$՝ մեկ արմատ $(-\infty;-1)$-ում և $x=1$ կրկնակի արմատ; երբ $a=4$՝ մեկ արմատ $(1;+\infty)$-ում և $x=-1$ կրկնակի արմատ: 1530. Երբ $k>1/e$՝ արմատ չունի; երբ $k=1/e$՝ $x=e$-ն կրկնակի արմատ է; երբ $0<k<1/e$՝ մեկական արմատ $(1;1/k)$ և $(1/k;+\infty)$ միջակայքերում; երբ $k\le 0$՝ մեկ արմատ $(0;1]$-ում: 1531. Երբ $a\le 0$՝ արմատ չունի,; երբ $0<a<e^2/4$՝ մեկ արմատ $(-\infty;0)$-ում; երբ $a=e^2/4$՝ մեկ արմատ $(-\infty;0)$-ում և $x=2$ կրկնակի արմատ; երբ $a>e^2/4$՝ մեկական արմատ $(-\infty;0)$, $(0;2)$ և $(2;+\infty)$ միջակայքերում: 1532. Երբ $|a|>3\sqrt{3}/16$ հավասարումն արմատ չունի; երբ $-3\sqrt{3}/16<a<0$՝ մեկական արմատ $(\pi/2;2\pi/3)$-ում և $(2\pi/3;\pi)$-ում; երբ $0<a<3\sqrt{3}/16$՝ մեկական արմատ $(0;\pi/3)$-ում և $(\pi/3;\pi/2)$-ում; երբ $a=0$՝ $x=0$-ն և $x=\pi$-ն եռապատիկ արմատներ են,իսկ $x=\pi/2$-ը պարզ արմատ է; երբ $a=\pm 3\sqrt{3}/16$, համապատասխանաբար $x=\pi/2\mp\pi/6$-ը կրկնակի արմատ է: 1533. Երբ $|k|>sh\xi$, որտեղ ξ-ն $cthx=x$ հավասարման դրական արմատն է, ապա մեկական արմատ $(0;\xi)$-ում և $(\xi;+\infty)$-ում; երբ $|k|<sh\xi$, հավասարումն արմատ չունի: 1534. ա) $p^3/27+q^2/4>0$; բ) $p^3/27+q^2/4<0$: 1549. Ոչ: 1578. ա) Ոչ; բ) այո: 1581. Ոչ: 1584. Ոչ: 1594. ա) $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$:1598. Ոչ: 1613. $\alpha=\dfrac{1}{\ln 2}-1$; $\beta=\dfrac{1}{2}$:

Գլուխ 7

1614. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}x^{\frac{4}{3}}$: 1615. $\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4/5}$: 1616. $\frac{x^5}{5}-x^3$: 1617. $x^2\left(\frac{2\sqrt{x}}{5}+1\right)-$ $-2x\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+1\right)$:1618. $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}+3x+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$:1619. $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}$: 1620. $-e^{-x-3}$: 1621. $\frac{(ae)^{x+1}}{1+\ln a}$: 1622. $\ln|\ln x|$: 1623. $\sin(x+1)$: 1624. $\frac{1}{3}tg3x$: 1625. $-x-ctgx$: 1626. $-tgx-ctgx$: 1627. tgx: 1628. $3x-\frac{2}{\ln 3-\ln 2}\left(\frac{3}{2}\right)^x$: 1629. $3\sqrt[3]{\sin x}$: 1630. $-2\sqrt{1-tgx}$: 1631. $tg(1+\ln x)$: 1632. $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}$: 1633. $\sqrt{x^2+1}$: 1634. $\frac{-1}{\arcsin x}$: 1635. $-\cos(e^x)$: 1636. $-e^{\cos x}$: 1637. $\frac{e^{x^2}}{2}$: 1638. $\ln|x|-\frac{1}{4x^4}$: 1639. $\arcsin x+$ $+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$: 1640. $\frac{1}{5}\arcsin x^5$: 1641. $\frac{5}{32}(2x^4+1)^{\frac{4}{5}}$: 1642. $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+a^2)$: 1643. $-\frac{4}{15}(1-3x)^{\frac{5}{4}}$: 1644. $-\frac{1}{\ln 4}2^{-2x-7}$: 1645. $\frac{1}{6}e^{6x}-$ $-\frac{3}{4}e^{4x}+\frac{3}{2}e^{2x}-x$: 1646. $\frac{1}{2}arctgx^2-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)$: 1647. $x-4\ln|x+4|$: 1648.

$-x-6\ln|x-3|$: 1649. $x-\sqrt{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$: 1650. $\frac{\sqrt{3}}{18}\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}x}{1-\sqrt{3}x}\right|-\frac{x}{3}$: 1651. $x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$: 1652. $e^x+x-2\ln(1+e^x)$: 1653. $\frac{a}{3}ch3x+\frac{b}{4}sh4x$: 1654. $x-thx$: 1655. $\frac{1}{a}arctg\frac{chx}{a}$: 1656. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$: 1657. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|$: 1658. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+2}\right|$: 1659. $arctgx-\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$: 1660. $\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}-\frac{1}{b}arctg\frac{x}{b}\right)$: 1661. $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|$: 1662. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$: 1663. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$: 1664. $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$: 1665. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$: 1666. $\frac{1}{2}tg^2x+\ln|\cos x|$: 1667. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{16}-\frac{\sin 4x}{16}-\frac{\sin 6x}{24}+\frac{\sin 10x}{80}$: 1668. $tgx-ctgx$: 1669. $\cos x+\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$: 1670. $tgx+\frac{tg^3x}{3}$: 1671. $-e^{\frac{1}{x}}$: 1672. $\frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}$: 1673. $x-2e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$: 1674. $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}$: 1675. $-\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}-\frac{1}{9}(\arccos 3x)^3$: 1676. $(\arcsin\sqrt{x})^2$: 1677. $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|$: 1678. $2arctg\sqrt{x}$: 1679. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$: 1680. $\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$: 1681. $\ln|\ln\ln x|$: 1682. $\frac{3}{2}(1-\sin 2x)^{\frac{1}{3}}$: 1683. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2 x-\frac{1}{2}}\right|$: 1684. $-\frac{4}{3}(ctgx)^{\frac{3}{4}}$: 1685. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)$: 1686. $\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$: 1687. $\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)$: 1688. $\frac{1}{5\sqrt{3}}arctg\frac{x^5}{\sqrt{3}}$: 1689. $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$: 1690. $-\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)$:

1691. $-\frac{1}{e^x+1}$: 1692. $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$: 1693. $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|$: 1694. $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]$: 1695. $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}$: 1696. $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$: 1697. $-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}$: 1698. $\frac{-3}{140}\left(9+12x+14x^2\right)(1-x)^{\frac{4}{3}}$: 1699. $-\frac{1+55x^2}{6600}\left(1-5x^2\right)^{11}$: 1700. $\frac{-2}{15}(32+8x+$ $+3x^2)\sqrt{2-x}$: 1701. $\frac{-1}{15}\left(8+4x^2+3x^4\right)\sqrt{1-x^2}$: 1702. $arctg(\cos x)-\cos x$: 1703. $\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}$: 1704. $-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln\left(1+e^{-\frac{x}{2}}\right)$: 1705. $x-$ $-2\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)$: 1706. $\left(arctg\sqrt{x}\right)^2$: 1707. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$: 1708. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$: 1709. $-\sqrt{a^2-x^2}+a\cdot\arcsin\frac{x}{a}$: 1710. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$: 1711. $-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$: 1712. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$: 1713. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$: 1714. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$: 1715. $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}\right)$, երբ $x>a$; $-\sqrt{x^2-a^2}+2a\ln\left(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a}\right)$, երբ $x<-a$: 1716. $x(\ln x-1)$: 1717. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)$: 1718. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$: 1719. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$: 1720. $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$: 1721. $-(x+1)e^{-x}$: 1722. $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$: 1723. $x\sin x+\cos x$: 1724. $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$: 1725.

$x\,tgx+\ln|\cos x|$: 1726. $\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}$: 1727. $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\cos x\ln tgx$:
1728. $x^2 shx-2xchx+2shx$: 1729. $x\,arctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$: 1730. $-\frac{x}{2}+$
$+\frac{1+x^2}{2}arctgx$: 1731. $x\arccos(5x-2)+\frac{2}{5}\arcsin(5x-2)-\frac{1}{5}\sqrt{1-(5x-2)^2}$:
1732. $\frac{1}{3}x^3\arcsin 2x+\frac{1}{36}(1+2x^2)\sqrt{1-4x^2}$: 1733. $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$:
1734. $-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x$: 1735. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$: 1736.
$\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x$: 1737. $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}$: 1738. $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-$
$-6(2-x)\sin\sqrt{x}$: 1739. $\frac{x}{2}[\sin\ln x-\cos\ln x]$: 1740. $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$:
1741. $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$: 1742. $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$: 1743. $\frac{(1+x)e^{arctgx}}{2\sqrt{1+x^2}}$:
1744. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x-e^x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}$: 1745. $-[x+ctgx\ln(e\sin x)]$: 1746.
$\frac{e^x}{x+1}$: 1747. $\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$: 1748. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$: 1749. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}-1}{x^2+\sqrt{2}-1}\right|$:
1750. $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$: 1751. $\frac{1}{9}\ln\left\{|x^3+1|(x^3-2)^2\right\}$: 1752.
$\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$: 1753. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|$: 1754. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+1}\right|$:
1755. $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos a+1)+ctga\cdot arctg\frac{x-\cos a}{\sin a}$: 1756. $\frac{29}{45}arctg\frac{5x+3}{9}-$
$-\frac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)$: 1757. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)$:
1758. $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}$: 1759. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+$

$+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)$: 1760. $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}$: 1761. $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln\left(x+1+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2+2x+5}\right)$: 1762. $\ln|(x-2)(x+5)|$: 1763. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$: 1764. $\frac{x^2}{2}-$ $-x+\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{8}{3}\ln|x+2|$: 1765. $x+\frac{1}{3}arctgx-\frac{8}{3}arctg\frac{x}{2}$: 1766. $\frac{1}{x+1}+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|$: 1767. $\frac{1}{33}\ln\left|\frac{(3x+1)^9(2x-3)^2}{x^{11}}\right|$: 1768. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x+1)^4(x-2)^5}{(x-1)^4(x+2)^5}\right|$: 1769. $\frac{1}{2-x}-arctg(x-2)$: 1770. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$: 1771. $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x-2)(x+2)^2}\right|$: 1772. $\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3+6x^2+30x-\frac{27}{x-2}+72\ln|x-2|$: 1773. $\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}arctgx$: 1774. $\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|+\frac{1}{2}arctgx-\frac{1}{2(x-1)}$: 1775. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$:1776. $-\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+\ln|x|+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$: 1777. $2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$: 1778. $\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+$ $+\frac{15}{8}\ln\left(t^2+t+2\right)-\frac{27}{4\sqrt{7}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{7}}$, $t=\sqrt[3]{2+x}$: 1779. $\frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$: 1780. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}$: 1781. $\sqrt{x}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+\frac{3}{4}\sqrt[6]{x}+$ $+3\sqrt[12]{x}+\frac{12}{5}\ln\left|1-\sqrt[12]{x}\right|-\frac{3}{40}\ln\left(1+2\sqrt[12]{x}+2\sqrt[6]{x}\right)-\frac{9}{20}arctg\left(1+2\sqrt[12]{x}\right)$: 1782. $\frac{5}{4}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{4/5}-\frac{5}{9}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{9/5}$: 1783. $\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$: 1784. $\ln\left|1+3\sqrt[3]{x}\right|$: 1785. $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$: 1786. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+$ $+\frac{1}{5}\sin^5 x$: 1787. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x$: 1788. $\frac{\sin^5 x}{5}-$

$-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}$: 1789. $\frac{\cos 6x}{24}-\frac{\cos 4x}{16}-\frac{\cos 2x}{8}$: 1790. $\frac{2}{\cos x}$: 1791. $\ln|\cos x|-\cos 2x$: 1792. $-\frac{ctg^4 x}{4}$: 1793. $\frac{tg^2 x}{2}+\ln|tgx|$: 1794. $-\frac{ctg^3 x}{3}-ctgx$: 1795. $\frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{2(1+\cos x)}$: 1796. $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}$: 1797. $\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$:

1798. $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$: 1799. $x-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tgx\right)$: 1800. ш) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}arctg\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}tg\frac{x}{2}\right)$; р) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|$: 1801. $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$: 1802. $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$: 1803. $-x+ctga\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|$: 1804. $\frac{3}{7}(a+x)^{7/3}-\frac{3}{4}a(a+x)^{4/3}$: 1805. $4\sqrt{x+1}\times\times\left(\ln\sqrt{x+1}-1\right)$: 1806. $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120\right)$:

1807. $xarctg\left(1+\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}+\ln\left|x+2\sqrt{x}+2\right|$: 1808. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$: 1809. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|-\frac{\sqrt{2x+1}}{4x}$: 1810. $arctg\sqrt{x-1}++\frac{\sqrt{x-1}}{x}$: 1811. $x+\frac{25\ln|x+5|-49\ln|x+7|}{2}$: 1812. $\frac{1}{4}\ln\left(2x^2-x+1\right)++\frac{1}{2\sqrt{7}}arctg\frac{4x-1}{\sqrt{7}}$: 1813. $\frac{x^3}{3}-4x+8arctg\left(\frac{x}{2}\right)$: 1814. $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}--6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)$: 1815. $-\frac{2}{3}\ln\frac{(1+y)^2}{1-y+y^2}+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{2y-1}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt[4]{x}$: 1816. $\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+2\ln\left|1-\sqrt[4]{2x-1}\right|$: 1817. $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2}$: 1818. $\frac{2x-1}{4}\times$

$\times\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$: 1819. $x-tgx+\frac{1}{\cos x}$: 1820. $\frac{tg^3x}{3}$: 1821. $\frac{ch^7x}{7}-\frac{ch^5x}{5}$: 1822. $\sqrt{2}\ln ctg\left(\frac{\pi-x}{4}\right)$: 1823. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}\right)$: 1824. $\frac{1}{4}\ln\frac{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\left(1-\sqrt{1-e^x}\right)}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)\left(1+\sqrt{1-e^x}\right)}-e^{-x}\times$ $\times\frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}{2}$:1825. $\frac{1}{2}\sin x^2-\frac{1}{2}x^2\cos x^2$: 1826. $\frac{xe^x}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$: 1827. e^{e^x} : 1828. $\ln x\cdot\sin\ln x+\cos\ln x$: 1829. $x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\sqrt{x}-arctg\sqrt{x}$:1830. ա) ճշմարիտ չէ; բ) ճշմարիտ է; գ) ճշմարիտ չէ: 1833. $x|x|/2$: 1834. $x^2|x|/3$: 1835. e^x-1, երբ $x<0$ և $1-e^{-x}$, երբ $x\geq 0$: 1836. $\frac{(x+1)|1+x|}{2}+\frac{(1-x)|1-x|}{2}$: 1837. $1-chx$, երբ $x<0$ և $chx-1$, երբ $x\geq 0$: 1838. $\frac{1}{2}f(2x)$: 1839. $xf'(x)-f(x)$: 1840. ա) $x-x^2/2$; բ) x, երբ $-\infty<x\leq 0$ և e^x-1, երբ $0<x<+\infty$: 1842. ա) $\frac{1}{2}\left(arctgx-\frac{x}{1+x^2}\right)$; բ) $\frac{1}{128}\left[\frac{3x^3+20x}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}\right]$: 1843. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(arctg\left(\sqrt{2}x+1\right)+arctg\left(\sqrt{2}x-1\right)\right)$: 1844. $\frac{1}{4}\times$ $\times\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$: 1845. $\frac{1}{6}arctgx^3+$ $+\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}$: 1846. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$: 1847. $\frac{3x\left(3x^2+5\right)}{8\left(x^2+1\right)^2}+\frac{17}{8}arctgx$: 1848. $\frac{x^3-2x^2+x+3}{x^2-2x+2}+2\ln\left(x^2-2x+2\right)+$ $+arctg(x-1)$: 1849. $-\frac{3x^2+2}{2x\left(x^2+1\right)}-\frac{3}{2}arctgx$: 1850. $-\frac{2x^3+1}{3x^3\left(x^3+1\right)}+\frac{2}{3}\times$

$\times \ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|$: 1851. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$: 1854. $\frac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)$: 1855. $\frac{11}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+$ $+\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}$: 1856. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right|$: 1857. $\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{2}|x-1|}$: 1858. $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$:1859. $\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}|x+2|}$: 1860. $\sqrt{x^2+2x+2}++\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|$:

1861. $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}$ $\left(z=x+\sqrt{x^2+x+1}\right)$: 1862. $\frac{1}{24}\left[(z-1)^3+(z-1)^{-3}\right]+\frac{1}{8}\left[(z-1)^2-(z-1)^{-2}\right]+\frac{1}{8}\left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]+\frac{1}{2}\ln|z-1|$, $z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$: 1863. $\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{\left(2+x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}$: 1864.

$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}}$: 1865. $\frac{3}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)-$ $-\ln\frac{2-x+2\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\sqrt{x^2-x+1}$ $(x>0)$: 1866. $-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}+$ $+2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{x+1}$: 1867. $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-$ $-21arctgx^{\frac{1}{6}}$: 1868. $\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$: 1869. $-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{z^5}{5}$, $z=\sqrt{1-x^2}$: 1870. $\frac{3z}{2z^3+2}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$,

$z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$: 1871. $\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z$, $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$: 1872. $\frac{5}{4}z^4-\frac{5}{9}z^9$, $z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$: 1873. $\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2tgx+1}{\sqrt{7}}$: 1874. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1+\sqrt{2}}{tgx+1-\sqrt{2}}\right|$: 1875. $\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2tgx+3-\sqrt{13}}{2tgx+3+\sqrt{13}}\right|$: 1876. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tg2x}{\sqrt{2}}$: 1877. $\frac{1}{6}\ln\frac{(tgx+1)^2}{tg^2x-tgx+1}+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tgx-1}{\sqrt{3}}$: 1878. $arctg\frac{tg2x}{2}$: 1879. $\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}arctg\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}tg\frac{x}{2}\right)-\frac{\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right]$: 1880. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}-\cos 4x}$: 1881. $-\ln\left(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x}\right)$: 1882. $3\cos x-$ $-\sin x+2\sqrt{2}\ln|tg(x/2+\pi/8)|$: 1883. $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\frac{3\sin x+1}{\sin x}\right|$: 1884. $-\frac{1}{8}ctg^2x+$ $+\frac{1}{32}\ln\left(1+4ctg^2x\right)$: 1885. $\frac{x}{2}+\frac{sh2x}{4}+\frac{sh^2x}{2}$: 1886. $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{thx-2}{thx+2}\right|$: 1887. $-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{sh2x}{\sqrt{2}}$: 1888. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{e^x-\sqrt{3}}{e^x+\sqrt{3}}\right|$: 1889. $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}arctg\frac{a\,th\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$, երբ $b^2<a^2$, $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{a\,th\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\,th\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}$, երբ $b^2>a^2$: 1890. $\frac{1}{8}\left(5shx-3chx-\frac{15}{4}\ln\left|\frac{3th\frac{x}{2}+1}{th\frac{x}{2}+3}\right|\right)$: 1891. $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2th\frac{x}{2}-5+3\sqrt{5}}{2th\frac{x}{2}-5-3\sqrt{5}}\right|-$ $-\frac{1}{3}\ln|4chx+5shx+6|$: 1892. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{thx}}{1-\sqrt{thx}}\right|-arctg\sqrt{thx}$: 1893. $\frac{3}{55}th^{\frac{5}{3}}x\times$ $\times\left(11-5th^2x\right)$: 1894. $x-\frac{1}{2}\ln\left((1+e^x)\sqrt{1+e^{2x}}\right)-\frac{1}{2}arctge^x$: 1895. $x-\ln\left|1-e^x\right|+$

$+\frac{1}{1-e^{x}}+\frac{1}{2\left(1-e^{x}\right)^{2}}+\frac{1}{3\left(1-e^{x}\right)^{3}}$: 1896. $\frac{1}{4sh1}\left(e^{-x}+ch1\left(x-\ln\left(1+e^{x}ch1\right)\right)\right)$: 1897. $-\left(1+\frac{x^{2}}{2}\right)e^{-x^{2}}$: 1898. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right)$:

1899. $\left(1+e^{x}\right)\ln\left(1+e^{-x}\right)+x$: 1900. $\ln\frac{\sqrt{1-x+x^{2}}}{x}-\frac{\ln\left(1-x+x^{2}\right)}{x}+\sqrt{3}\times$ $\times arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$: 1901. $\frac{2x^{2}\sqrt{x}}{125}\left(25\ln^{2}x-20\ln x+8\right)$: 1902. $\frac{1}{2}\left(\arcsin x-x\right)+$ $+x\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$: 1903. $(x-1)arctg\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}-2x+2\right)$: 1904. $\frac{1}{8}\left[\left(x^{8}-1\right)arctgx-\frac{x^{7}}{7}+\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{3}}{3}+x\right]$: 1905. $\frac{1}{9}\left(x^{3}-3x-3\left(1-x^{2}\right)^{\frac{3}{2}}\arccos x\right)$:

1906. $x-e^{-x}\arcsin e^{x}-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$: 1907. $\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1-x^{2}}\right)e^{\arcsin x}$: 1908. $\frac{x}{\ln x}$: 1909. $\frac{x}{1+\ln x}$: 1910. $\frac{x}{\sqrt{x^{2}+1}}\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}+1\right)$: 1911. $arctg\sqrt{x^{2}-1}-\frac{\ln\left|x+\sqrt{x^{2}-1}\right|}{x}$: 1912. $2\sqrt{x-1}\left(\ln x-2\right)+4arctg\sqrt{x-1}$: 1913. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|-\frac{\ln|x|}{x+2}$: 1914. $\frac{\ln|x|}{\sqrt{x^{2}-1}}+\arcsin\frac{1}{x}$: 1915. $a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln\left|x^{2}-1\right|\right)+$ $+\frac{a+b}{4}\ln^{2}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$: 1916. $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$: 1917. $-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{ctg^{5}x}$:1918. $-2\ln\left(thx+\sqrt{1+th^{2}x}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+th^{2}x}+\sqrt{2}thx}{\sqrt{1+th^{2}x}-\sqrt{2}thx}$:1919. $e^{x}tg\frac{x}{2}$: 1920. $\frac{\sqrt{2tgx}}{5}\left(5+tg^{2}x\right)$: 1921. $\frac{x}{1+\cos x}-tg\frac{x}{2}$: 1922. $-\frac{3}{2}(tgx)^{-\frac{2}{3}}$:

1923. $\frac{x^{2}}{2}+x+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^{2}}{2x^{2}-2x+1}-3arctg(2x-1)$: 1924. $\frac{5}{3}x^{3}-3\ln\left|x^{5}+3x^{2}-1\right|$:

1925. $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{x-1}$: 1926. $\dfrac{2x^2+x+7}{6}\sqrt{x^2+2x+2}+$ $+\dfrac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)$: 1927. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-\sqrt{3}arctg\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}, t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$:

1928. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(z+1)^2}{1-z+z^2}-\sqrt{3}arctg\dfrac{2z-1}{\sqrt{3}},\ z=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x}}$: 1929. $\dfrac{1}{18}\ln\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}-$ $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}arctg\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}},\quad t=\dfrac{\sqrt[3]{3+4x^3}}{x}$: 1930. $\dfrac{2\sqrt{5}}{25}\ln\dfrac{2t+\sqrt{5}+1}{2t-\sqrt{5}+1}+\dfrac{2(4t-3)}{5(t^2+t-1)}$, $t=\sqrt{x^2+x}-x$: 1931. $-\dfrac{3x^3+4}{8x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$: 1932. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}-\dfrac{\ln|x|}{2+2x^2}$: 1933. $x-\ln(1+e^x)-\dfrac{2arctg\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}}-\left(arctg\sqrt{e^x}\right)^2$: 1934. $\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+$ $+\arcsin(e^{-x})$: 1935. $\dfrac{\arccos(x\sqrt{x})}{3(1-x^3)}+\dfrac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{1-x^3}}$: 1936. $\dfrac{2(x^2+1)arctgx}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}$:

1937. $\dfrac{1}{3}\left(\arcsin\dfrac{\sin x}{2}-\dfrac{x\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\right)$: 1938. $x^a\ln^b x$: 1939. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+e^{2x}}+\right.$ $\left.+\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)\right]$: 1940. $-\dfrac{3}{2}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-2}$: 1941. $-\dfrac{1+9\sqrt[4]{x}}{18\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^9}$: 1942. $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{t-1}{t+1}-\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{t^2-t+1}{t^2+t+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}arctg\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}arctg\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}},\quad t=\sqrt[6]{x^6+1}$:

1943. $\dfrac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|$: 1944. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+$ $+\dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$: 1945. $-2arctg\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}-4\sqrt{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right|,\ t=\dfrac{1+x}{1-x}$: 1946. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}(2x+1)+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{\sqrt{2}(2x+1)-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|$: 1947. $-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\ln\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}+$

$+\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}arctg\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{2}(1-x)}$: 1948. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|-$

$-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$:1949. x, երբ $|x|\le 1$; $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn}x$, երբ $|x|>1$:1950. $\frac{[x]}{\pi}\left\{[x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x\right\}$:1951. $x-\frac{x^3}{3}$, երբ $|x|\le 1$; $x-\frac{x}{2}|x|+\frac{1}{6}\operatorname{sgn}x$, երբ $|x|>1$: 1952. x, երբ $-\infty<x\le 0$; $\frac{x^2}{2}+x$, երբ $0\le x\le 1$; $x^2+\frac{1}{2}$, երբ $x>1$: 1953. $\frac{x}{4}+\frac{t}{4}(1-2t), t=x-[x]-\frac{1}{2}$: 1956. $I_n=\frac{1}{a}x^ne^{ax}-\frac{n}{a}I_{n-1}$: 1957. $I_n=\frac{x^{\alpha+1}\ln^n x}{\alpha+1}-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}$: 1958. $I_n=\frac{x^{n-1}\sqrt{x^2+a}}{n}-\frac{n-1}{n}aI_{n-2}$: 1959. $I_n=$

$=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$: 1960. $I_n=\frac{shxch^{n-1}x}{n}-\frac{n-1}{n}I_{n-2}$: 1961. $I_n=$
$=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$:1962. $I_n=\frac{shx}{(n-1)ch^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$:1963. $I_n=$
$=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}$: 1966. բ) $\frac{2\sin x-\cos x}{10(2\cos x+\sin x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|tg\frac{x+arctg2}{2}\right|$: 1967.
$-\frac{2}{n\cos a}\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)^n\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)^{-n}$: 1968. $A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$, $B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}$, $C=$
$=c_1-c\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$: 1970. $\frac{2}{5}x+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}(2tg\frac{x}{2}-1)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}(2tg\frac{x}{2}-1)}\right|-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+$

$+4\cos x-2|$: 1971. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+\sin x+\cos x\right)$: 1972.

$A=\frac{2ab_1+bc_1-ba_1}{a^2+b^2}$, $B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2}$, $C=\frac{a^2c_1+b^2a_1-2abb_1}{a^2+b^2}$: 1973.
$3\cos x-\sin x+2\sqrt{2}\ln|tg(x/2+\pi/8)|$: 1974. $\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{5}+1-2tg\frac{x}{2}}\right|+$

$+\frac{1}{5}(\sin x+3\cos x)$ 1975. $A=\frac{a_1(a-\lambda_2)+bb_1}{b(\lambda_2-\lambda_1)}$, $B=\frac{a_1(a-\lambda_1)+bb_1}{b(\lambda_1-\lambda_2)}$: 1976. $\frac{3}{5}arctg(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}$: 1977. $\frac{3}{4\sqrt{2}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1}\right|-\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|$: 1979. $\frac{\varepsilon^2+2}{2(\varepsilon^2-1)^{\frac{5}{2}}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon-1}tg\frac{x}{2}+\sqrt{\varepsilon+1}}{\sqrt{\varepsilon-1}tg\frac{x}{2}-\sqrt{\varepsilon+1}}\right|+\frac{\varepsilon\sin x(\varepsilon^2-3\varepsilon\cos x-4)}{2(\varepsilon^2-1)^2(1+\varepsilon\cos x)^2}$: 1981. $\left(\frac{1}{9}x^7-\frac{7}{54}x^4+\frac{14}{81}x\right)t^2\frac{7}{243}\ln\frac{t^2+tx+x^2}{t^2-2tx+x^2}+\frac{14}{81\sqrt{3}}arctg\frac{2t+x}{\sqrt{3}x}, t=\sqrt[3]{1+x^3}$: 1982. $\frac{x}{2a}+\frac{1}{a}arctg\frac{a-1}{a+1}tg\frac{x}{2}$, $|x|<\pi$, երբ $a\neq-1$; $\sin x$, երբ $a=0$; $-\frac{x}{2}$, երբ $a=-1$:

1983. $\frac{x}{a-1}-\frac{1}{\sqrt{a}(a-1)}arctg\frac{tgx}{a}$, երբ $a>0$, $a\neq1$; $\frac{x}{a-1}-\frac{1}{2(a-1)\sqrt{-a}}\times\ln\left|\frac{tgx-\sqrt{-a}}{tgx+\sqrt{-a}}\right|$, երբ $a<0$; $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$, երբ $a=1$; $-ctgx-x$, երբ $a=0$:

1984. $\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{a\sin x-b\cos x}{a\cos x+b\sin x}$: 1985. $\frac{tgx}{a[a+(ax+b)tgx]}$: 1986. $-\frac{4}{3+3tg^3x}$:

1987. $\frac{xarctgx}{b\sqrt{ax^2+b}}-\frac{1}{b\sqrt{a-b}}arctg\sqrt{\frac{ax^2+b}{a-b}}$, երբ $a>b$; $\frac{xarctgx+1}{a\sqrt{b}\sqrt{x^2+1}}$, երբ $a=b$; $\frac{xarctgx}{b\sqrt{ax^2+b}}-\frac{1}{2b\sqrt{b-a}}\ln\frac{\left|\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{b-a}\right|}{\sqrt{ax^2+b}+\sqrt{b-a}}$, երբ $a<b$: 1988. $\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}$: 1989. $\left(\frac{1}{b}arctg\frac{x}{b}-\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\right)\times$ $\times\frac{1}{a^2-b^2}$, երբ $a^2\neq b^2$; $\frac{1}{2b^2}\left(\frac{x}{x^2+b^2}+\frac{1}{b}arctg\frac{x}{b}\right)$, երբ $a^2=b^2$: 1990. $x+(a-b)\left[n\ln|x+b|-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_n^{k-1}\left(\frac{a-b}{x+b}\right)^k\right]$: 1991. $\frac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}\ln|achx+bshx|+$

$+\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}x$, եթե $a^2\neq b^2$, $\frac{a_1\pm b_1}{2a}x+\frac{a_1\mp b_1}{4a}sh2x+\frac{b_1\mp a_1}{2a}sh^2x$, եթե $a=\pm b$: 1992. $\frac{1}{5}\ln\left|5th\frac{x}{2}+3\right|$: 1993. $-\frac{1}{7}\left(\frac{5}{4chx+3shx}+\frac{4}{\sqrt{7}}arctg\frac{4th\frac{x}{2}+3}{\sqrt{7}}\right)$: 1994. $\frac{2}{3}\ln\frac{\left(th\frac{x}{2}-2\right)^2}{th^2\frac{x}{2}+2th\frac{x}{2}+4}-\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{th\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$: 1995. $\frac{2}{3}\ln\left|\sin^3x+\cos^3x\right|$: 1996. $\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{ab_1-ba_1}{a\cos x+b\sin x}+\frac{aa_1+bb_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|tg\frac{x+\varphi}{2}\right|\right)$, որտեղ $\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$: 1997. $\frac{1}{2b^2}\left(\frac{tgx}{a^2tg^2x+b^2}+\frac{1}{ab}arctg\left(\frac{a}{b}tgx\right)\right)$, եթե $a\neq 0$, $b\neq 0$; $-\frac{ctg^3x}{3a^4}$, եթե $a\neq 0$, $b=0$; $\frac{tgx}{b^4}$, եթե $a=0$, $b\neq 0$: 1998. $4\sqrt[4]{tgx}$: 1999. $\frac{1}{2na^{2n-1}}\left\{\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\cos\frac{k\pi}{n}\ln\left(x^2-2ax\cos\frac{k\pi}{n}+a^2\right)-2\sin\frac{k\pi}{n}\times\right.\right.$ $\left.\left.\times arctg\frac{x-a\cos\frac{k\pi}{n}}{a\sin\frac{k\pi}{n}}\right]\right\}$:2000. $\frac{1}{|a|\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\left|\sqrt{b^2-a^2}x+|a|\sqrt{b^2-x^2}\right|}$, եթե $a^2<b^2$; $-\frac{x}{b^2\sqrt{b^2-x^2}}$, եթե $a^2=b^2$; $\frac{1}{|a|\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{\sqrt{a^2-b^2}x}{|b|\sqrt{a^2-x^2}}$, եթե $a^2>b^2$: 2001. $\frac{1}{n\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{x^n+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^n+a}+\sqrt{a}}$, եթե $a>0$; $\frac{2}{n\sqrt{-a}}\arccos\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{x^n}}$, եթե $a<0$: 2002. $\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$, եթե $a\neq b$; $\frac{1}{b-x}$, եթե $a=b$: 2003. $2(\ln x-2)\sqrt{x+a}+2\sqrt{a}\ln\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}$, եթե $a\geq 0$; $2(\ln x-2)\sqrt{x+a}+$ $+4\sqrt{-a}arctg\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{-a}}$, եթե $a<0$: 2004. $-\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}{x}+\frac{1}{\sqrt{a}}\times$

$\times\ln\dfrac{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}}{|x|}$, եթե $a>0$; $-\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{-a}}arctg\dfrac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{-a}}$, եթե $a<0$; $-\dfrac{1+\ln 2x}{x}$, եթե $a=0$: 2005. $\dfrac{x\sin x+\cos x}{b[(ax-b)\sin x+(a+bx)\cos x]}$, եթե $b\neq 0$; $\dfrac{\sin x-x\cos x}{a^2(x\sin x+\cos x)}$, եթե $b=0$: 2006. $\dfrac{1}{2a\sqrt{a+1}}arctg\dfrac{\sqrt{a+1}x}{\sqrt{1-x^2}}-$ $-\dfrac{\arcsin x}{2a(1+ax^2)}$, եթե $a\in(-1;0)\bigcup(0;+\infty)$; $\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}\right)\arcsin x+\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{4}$, եթե $a=0$; $-\dfrac{\arcsin x}{2a(1+ax^2)}+\dfrac{1}{4a\sqrt{-a-1}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{-a-1}x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{-a-1}x}\right|$, եթե $a<-1$; $\dfrac{\arcsin x}{2(1-x^2)}-\dfrac{x}{2\sqrt{1-x^2}}$, եթե $a=-1$: 2007. $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{\left(tg\frac{x}{2}+1\right)^2}{tg^2\frac{x}{2}-2tg\frac{x}{2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times$ $\times arctg\dfrac{2tg\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$: 2008. $|x-a|$: 2009. $\dfrac{n(2x-n-1)}{2}$, եթե $x\in[n;n+1)$, $n\in Z$: 2010. $x\,arctg\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$: 2011. $x\ln x-x$, եթե $x>0$; x, եթե $x\leq 0$:

Գլուխ 8

2013. $12{,}5$: 2014. $88-\dfrac{16}{n^2}$: 2015. $\dfrac{\pi}{n}\cdot\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}$: 2016. ա) 10 ; բ) 0 : 2017. $\dfrac{49(n-1)}{n}-35$; $\dfrac{49(n+1)}{n}-35$: 2018. $\dfrac{10\left(2^{10}-1\right)}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}$; $\dfrac{2^{\frac{10}{n}}10\left(2^{10}-1\right)}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}$: 2019. $\dfrac{\sqrt{2}\pi\cos\frac{n+1}{4n}\pi}{4n\sin\frac{\pi}{4n}}$; $\dfrac{\sqrt{2}\pi\cos\frac{n-1}{4n}\pi}{4n\sin\frac{\pi}{4n}}$: 2020. 0; $b-a$: 2021. 3: 2022. 2: 2023. $\dfrac{a-1}{\ln a}$: 2024. 1: 2025. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$: 2026. $\ln\dfrac{b}{a}$: 2027. $C(b-a)$: 2030. Ոչ: 2031.

11,25: 2032. $\frac{\pi}{2}$: 2033. $\frac{\pi}{6}$: 2034. $\frac{\pi}{3}$: 2035. 1: 2036. $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$: 2037. $\frac{1}{ab}arctg\frac{a}{b}$: 2038. $\frac{\pi}{12}$: 2039. $\ln 2$: 2040. π: 2041. 0,5: 2042. $\ln 2$: 2043 $2/\pi$: 2044. $2\left(2\sqrt{2}-1\right)/3$: 2045. $\pi/4$: 2046. $1/(p+1)$: 2047. $\pi/6$: 2049. 0: 2050. $-\sin a^2$: 2051. $2t\sqrt{1+t^4}$: 2052. $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$: 2053. $(\sin x-\cos x)\times\times\cos\left(\pi\sin^2 x\right)$: 2054. $4x^3e^{x^8}$: 2055. 1: 2056. $\frac{\pi^2}{4}$: 2057. 0: 2058. 2: 2059. ա) 5/6; բ) $t/2$: 2060. $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$: 2061. π: 2062. 4π: 2063. 1: 2064. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$: 2065. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$: 2066. $\ln 4-\frac{3}{4}$: 2067. $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$: 2068. $1/6$: 2069. $\ln\frac{3+\sqrt{6}}{3}$: 2070. $\frac{64\sqrt{2}}{15}-\frac{86}{15}$: 2071. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$: 2072. $2\ln\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{3}}$: 2073. $\sqrt{3}-1$: 2074. ա) $x=\frac{1}{t}$ ֆունկցիան $t=0$ կետում որոշված չէ; բ) $x=ctgt$ ֆունկցիան $t=0$ կետում որոշված չէ: 2075. Կարելի է: 2079. $\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$: 2080. $\ln 2e$: 2081. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$: 2082. 0: 2083. $1/6$: 2084. $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}$: 2085. $\frac{3}{5}\left(e^{\pi}-1\right)$: 2086. $\frac{3\pi}{16}$: 2087. ա) բացասական է; բ) դրական է; գ) դրական է; դ) բացասական է: 2088. ա) I_2-ը; բ) I_2-ը; գ) I_1-ը: 2089. ա) $\frac{1}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$; բ) $\frac{1}{2}$; 1: 2090. $\frac{1}{4\sqrt{2}}<I<\frac{1}{4}$; բ) $0,005\cdot\theta<I<0,01\cdot\theta$, $\theta=1-e^{-100}$: 2091. $\frac{\theta}{50\pi}$ $(0<\theta<1)$: 2092. $\frac{2}{a}\theta$ $(|\theta|<1)$: 2093. ա) 1; բ) 2: 2094. ա) $\frac{\pi}{2}$; բ) $\sqrt{2}\pi$: 2095. ա) -1; բ) π: 2096. ա) $\frac{1}{3e^3}$; բ) $\frac{1}{\ln^2 2}$: 2097. ա) $\frac{2}{3}\ln 2$; բ) $\frac{\pi}{2}-1$: 2098. ա) 0; բ) $\ln 9$: 2099. ա) $\frac{1}{e}$; բ) $\frac{\pi^2}{8}$: 2101. ա) Զույգական է; բ) զույգական է: 2102. ա) Տարական է; բ) տարական է: 2103. ա) Զույգական է; բ) զույգական է: 2104. ա) Զույգական է; բ) տարամետ է: 2105. ա) Տարամետ է; բ) զուգամետ է: 2106. ա) Տարամետ է; բ) զուգամետ է: 2107. Զուգամետ է $\min\{p,q\}<1<\max\{p,q\}$ դեպքում: 2108. ա) 0; բ) 0; գ) 0; դ) π: 2125. $(b-a)(f(b)-f(a))$: 2136. ա) A; բ) A: 2137. $5\pi/6$: 2138. $\pi/\sqrt{3}$: 2139. $x+1/2$: 2140. $1/\ln 2$: 2142. Ոչ: 2145. $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$: 2146. $4n$: 2147. $\pi/2$, երբ $|\alpha|\le 1$; $\pi/(2\alpha)$, երբ $|\alpha|>1$: 2148. 2, երբ $|\alpha|\le 1$; $2/|\alpha|$, երբ $|\alpha|>1$: 2149. $\pi^2/4$: 2150. $200\sqrt{2}$: 2154. ա) $8/15$; բ) $32/35$; գ) $35\pi/128$: 2164. $I_{m,n}=m!n!/(m+n+1)!$: 2165. $I_n=(-1)^n n!/(m+1)^{n+1}$: 2166. $I_n=(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right]$: 2167. $I_n=(-1)^n\left[-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right]$: 2170. $\arccos(\cos x)$: 2171. $-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12}+\frac{x^2[x]}{2}$: 2172. $\frac{x^2}{2}-x[x]+ +\frac{[x]([x]+1)}{2}$: 2173. $\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)$: 2174. $14-\ln(7!)$: 2175. $\ln n!$: 2176. $-\frac{\pi^2}{4}$: 2177. $30/\pi$: 2186. $I_n=n!$: 2187. $I_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(k+1)$: 2188. $I_n=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$: 2189. $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, երբ n-ը զույգ է; $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, երբ n-ը կենտ է: 2190. $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\pi$, երբ n-ը զույգ է; $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, երբ n-ը կենտ է: 2191. ա) $-\pi\ln 2/2$; բ) $-\pi\ln 2/2$; գ) $\pi\ln 2/2$; դ) $-\pi\ln 2/2$: 2193. Զուգամետ է, երբ $n>-1$: 2194. Զուգամետ է: 2195. Զուգամետ է, երբ $p<1, q<1$: 2196. Զուգամետ է, երբ $p>-1$, $q>-1$, $p+q<-1$: 2197. Զուգամետ է, երբ $p>-1$, $q>-1$: 2198. Զուգամետ է, երբ $p>1$, $q<1$: 2199. Զուգամետ է, երբ $p>1, r<1$ և երբ $p=1, q>1, r<1$: 2200. Զուգամետ է: 2201. Զուգամետ է, երբ $1<p<2$: 2202. ա) Զուգամետ է, երբ $\alpha>0$; բ) տարամետ է: 2203. ա) Զուգամետ է; բ) զուգամետ է: 2204. ա) Զուգամետ է, երբ $0<\alpha<2$; բ) զուգամետ է, երբ $\alpha>-1$: 2206. Պայմանական զուգամետ է: 2207. Պայմանական զուգամետ է: 2208. Բացարձակ զուգամետ է, երբ $n<-1$, պայմանական զուգամետ է, երբ $n>1$: 2209. Բացարձակ զուգամետ է, երբ $-1<(1-p)/q<0$; պայմանական զուգամետ է, երբ

$0 \le (1-p)/q < 1$: 2210. Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > -2, q > p+1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $p > -2, p < q \le p+1$: 2211. ա) Ոչ; բ) ոչ: 2214. Ոչ: 2215. $1/e$: 2223. $\int_a^b f^p(x)dx$: 2243. $1/2$: 2245. $\int_0^1 \ln f(x)dx$: 2246. ա) $f(1)/g(1)$; բ) $\exp\left(\int_0^1 \ln g(x)dx\right)$: 2254. 1: 2255. ա) $\pi/4$; բ) $\pi/4$; գ) $-\pi/4$; դ) 0: 2256. ա) $2\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$, երբ $n = 2m$ $(m \in Z_+)$; $\pi/2$, երբ n-ը կենտ է; բ) $n\pi$: 2259. $\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$:

Գլուխ 9

2265. 2: 2266. $1-e^{-a}$: 2267. 1: 2268. $\frac{a^2-1}{a} - \frac{(a-1)^2}{a\ln a}$: 2269. 4,5: 2270. $1+\frac{\pi^2}{8}$: 2271. $\frac{\pi}{2}$: 2272. $2\ln 2 - 2e^{-1}$: 2273. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$: 2274. $1-e^{-a^2}(1+a^2)$: 2275. $\frac{1}{12}$: 2276. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$: 2277. $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}$: 2278. $\frac{20}{9} - \ln 3$: 2279. $\sqrt{2}-1$: 2280. $\frac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$: 2281. $\frac{37}{48}$: 2282. πab: 2284. $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$: 2285. $4\sqrt{2} + \ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$: 2286. $4+\frac{\ln 3}{4}$: 2287. $\ln 3$: 2288. $3+\ln 2$: 2289. $\ln(2+\sqrt{3})$: 2290. $\frac{\sqrt{2}}{2}$: 2291. 26: 2292. $6a$: 2293. $8a$: 2294. $a(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))$: 2295. $10a$: 2296. $\frac{a\sqrt{b^2+1}}{b} \times \times (e^{\pi b}-1)$: 2297. $\frac{aT^2}{2}$: 2298. $0{,}5(ch^{\frac{1}{2}}(2T)-1)$: 2299. $2\sqrt{5}\pi a$: 2300. $2shT$: 2301. $\frac{\sqrt{3}}{21}(27-2\sqrt{2})$: 2302. $\sqrt{5}(e^{2\pi}-1)$: 2303. $\sqrt{a^2+b^2}\,shT$: 2304. 2,5: 2305. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$: 2306. $\frac{1}{3}\left((\pi^2+4)^{\frac{3}{2}}-8\right)$: 2307. πa: 2308.

$8a$: 2309. $\frac{1}{8}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$: 2310. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$: 2311. $\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+rR+r^2\right)$: 2312. $\frac{4}{3}\pi R^3$: 2313. $\frac{3}{7}\pi$: 2314. $\frac{\pi^2}{4}$: 2315. $\frac{\pi(\pi-2)}{4}$: 2316. 4π : 2317. $\frac{\pi^2\left(4\pi^2-15\right)}{24}$: 2318. $\frac{\pi}{2}\left(e^6-43\right)$: 2319. $\frac{\pi}{2}$: 2320. $\frac{4}{3}\pi ab^2$: 2321. $\frac{49}{3}\pi$: 2322. $\pi\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{e^2+1}}{e^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^2}}{e\left(1+\sqrt{2}\right)}\right)$: 2323. $2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$: 2324. $\pi\left(\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)$: 2325. $\frac{196}{9}\pi$: 2326. $\frac{\pi}{9}(20+9\ln 3)$: 2327. $\frac{\pi}{144}\left(185+144\ln\frac{3}{2}\right)$: 2328. $\frac{\pi}{8}\left(sh4-4e^{-2}\right)$: 2329. 4,5 : 2330. $\frac{ab}{6}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$: 2331. 1,6 : 2332. ш) 2,25 ; р) 2,25 : 2333. $k=p$: 2334. $\left(\frac{p}{2};\pm p\right)$: 2335. πab : 2336. $\frac{3\pi}{8}a^2$: 2337. $\frac{8a^2}{3}$: 2338. 8/15 : 2339. $3\pi a^2$: 2340. $a^2\left(4\pi^3+3\pi\right)/3$: 2341. $7\pi a^2/192$: 2342. $\left(e^{4\pi k}-1\right)\times$ $\times L^2/4k$: 2343. $3\pi a^2/2$: 2344. $\pi P^2/\left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}$: 2345. ш) 2/3; р) $\left(1-\ln 2+\pi/\sqrt{3}\right)/2$: 2346. $a^2/6$: 2347. $a^2/60$: 2348. $\pi a^2/8\sqrt{2}$: 2349. $3\pi a^2/8$: 2350. $\pi a/\sqrt{2}$: 2351. $7\pi a^2/512$: 2352. $2\pi a/3$: 2353. $a\left(1-\sqrt{2}/2\right)$: 2355. $\pi^3/3$: 2356. $6a$: 2358. 7/3 : 2359. 1 : 2360. $\left((R+4)^{\frac{3}{2}}-8\right)/3$: 2361. shR : 2362. 8 : 2363. $a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+1\right)$: 2364. $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$: 2366. 9π : 2367. $\pi(1-\sin 1)$: 2368. $128\pi/15$: 2369. $\pi a^3(\ln 2-0,5)$: 2370. $3\pi\ln 3(2\ln 3-1)$: 2371. ш) $32\pi a^3/105$; р) $3\pi^2 a^3/4$: 2372. ш) $16\pi a^3/15$; р) $\pi^2 a^3/2$; ч) $16\pi a^3/3$; ц) $16\pi a^3/3$: 2373. ш) $5\pi^2 a^3$; р) $6\pi^3 a^3$; ч) $7\pi^2 a^3$: 2375. $8\pi a^3/3$: 2376. $2a^3\pi^2\left(\pi^2-6\right)/3$: 2378. ш) $64\pi a^2/3$; р) $16\pi^2 a^2$: 2379. ш) $18\pi^2 a^2$; р) $24\pi a^2$: 2380. ш) $\pi/2$; р) $10\sqrt{2}\pi/3$: 2382. $32\pi a^2/5$: 2383. $4\pi^2 a^2$: 2384. $4\pi\left(a^2+\frac{2}{3}b^2-\frac{b^4}{5a^2}\right)$: 2385. ш)

$2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$; բ) $2\sqrt{2}\pi a^2$; գ) $4\pi a^2$: 2386. $M_x=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, $M_y=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$:

2387. $M_x=b\left(b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$, $M_y=0$: 2388. $M_x=M_y=\frac{3}{5}a^2$:

2389. $M_x=\frac{32a^2}{3}$, $M_y=8\pi a^2$: 2390. $x_c=y_c=\frac{2a}{5}$: 2391. $x_c=\pi a$, $y_c=\frac{4a}{3}$:

2392. $\frac{1}{3}\left((1+e)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right)$: 2393. $\pi R\left(2a^2+R^2\right)$: 2394. $M_x=\frac{\pi}{4}$, $M_y=0$: 2395. $M_x=M_y=\frac{3}{20}$: 2396. $x_c=0$, $y_c=\frac{4R}{3\pi}$: 2397. $x_c=y_c=\frac{9p}{10}$: 2398. $\frac{ah^3}{3}$:

2399. $8a^4/7$: 2400. f-ը և g-ն նշանները չեն փոխում և գոյություն ունեն այնպիսի α, β թվեր, որ $\alpha f(x)\equiv\beta g(x)$ և $\alpha^2+\beta^2\neq 0$: 2401. $\varphi(a)=b$: 2402. $f(x)=\frac{b}{a}x$: 2404. $f(x)=cx^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ $(c>0)$: 2405. $\frac{a}{\sqrt{3}}$: 2406. $e^{2\pi k}$: 2408. $f(x)=cx^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}}$ $(c>0)$: 2411. $S=6\pi ad$, $V=\frac{\sqrt{3}\pi a^2d}{2}$: 2412. $x_c=0$, $y_c=\frac{2R}{\pi}$ (կիսաշրջանագիծ); $x_c=0$, $y_c=\frac{4R}{3\pi}$ (կիսաշրջան): 2413. $x_c=\pi a$, $y_c=\frac{5a}{6}$: