Գ.Մ. ՖԻԽՏԵՆԳՈԼՑ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ
ԱՆԱԼԻԶԻ
ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐ

Գ. Մ. ՖԻԽՏԵՆԳՈԼՑ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

ՀԱՏՈՐ I

Թույլատրված է

ՌՍՖՍՀ բարձրագույն և միջնակարգ մասնագիտական կրթության մինիստրության կողմից որպես դասագիրք պետական համալսարանների մեխանիկա-մաթեմատիկական ֆակուլտետների համար և որպես ուսումնական ձեռնարկ մանկավարժական ինստիտուտների ֆիզիկա-մաթեմատիկական ֆակուլտետների համար:

«ԼՈՒՅՍ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ 1970

«Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները» թարգմանելիս օգտագործվել են նույն հեղինակի «Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի դասընթաց»-ի I և II հատորների հայերեն թարգմանության համապատասխան գլուխները, ուստի և պահպանվել են «Դասընթաց»-ի թարգմանիչների անունները։

I, II, III, IV և XIV գլուխները թարգմանել է Վ. Վ. Սաղաթելյանը, V, VI, VII, VIII և IX գլուխները՝ Ց. Ա. Արաջյանը, X, XI և XII գլուխները՝ Հ. Ջ. Խաչատրյանը։

Թարգմանված է ռուսերեն հինգերորդ հրատարակությունից
Վ. Վ. ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆԻ խմբագրությամբ

Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

(на армянском языке)
Издательство „Луйс“
Ереван—1970

2—2—3

ԱՌԱՋԱԲԱՆ

«Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները» նախատեսված է որպես անալիզի դասագիրք համալսարանների մաթեմատիկական բաժինների առաջին և երկրորդ կուրսերի ուսանողների համար. դրան համապատասխան էլ գիրքը բաժանվում է երկու հատորի: Այն կազմելիս լայնորեն օգտագործել եմ իմ եռահատոր «Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի դասընթաց»-ը, սակայն նրանում պարունակված նյութը կրճատել և վերամշակել եմ, նպատակ ունենալով դասագիրքը մոտեցնել մաթեմատիկական անալիզի պաշտոնական ծրագրին և կարդացվող դասընթացի փաստական հնարավորություններին:

Այն դրույթներն ու խնդիրները, որոնք ես դրել եմ իմ առջև, բնութագրվում են հետևյալով.

1. Իմ գլխավոր խնդիրը ես համարել եմ մաթեմատիկական անալիզի հիմունքների *սիստեմատիկ* և, հնարավորին չափ, *խստականոն* շարադրումը: Ես գտնում եմ, որ նյութը *տրամաբանական* հաջորդականությամբ շարադրելը պարտադիր է դասագրքի համար՝ գիտելիքների հաջորդականությունը սովորողներին ակնառու դարձնելու նպատակով:

Դասագրքի այդպիսի կառուցվածքը, ի դեպ, դասախոսի համար չի բացառում առանձին դեպքերում, մանկավարժական նկատառումներով, նահանջել խիստ հերթականությունից (նրա համար, թերևս, նույնիսկ հեշտացնում է այդպիսի հնարավորությունը): Ես ինքս, օրինակի համար, դասախոսություններ կարդալիս սովորաբար որոշ չափով հետ եմ տանում սկսնակի համար դժվարըմբռնելի այնպիսի հարցեր, ինչպիսիք են իրական թվերի տեսությունը, զուգամիտության սկզբունքը կամ անընդհատ ֆունկցիաների հատկությունները:

2. Դրա հետ մեկտեղ, մաթեմատիկական անալիզի դասընթացը սովորողի համար չպետք է թվա լոկ «սահմանումների» ու «թեորեմաների» մի երկար շարան, այլ պետք է հանդիսանա գործունեության ուղեցույց: Ուսանողներին պետք է սովորեցնել, թե ինչպես պետք է այդ թեորեմաները գործնականում կիրառել, պետք է նրանց օգնել

տիրապետելու անալիզի հաշվողական ապարատին։ Թեպետև այս խընդիրը վարժություններին է վերաբերում, սակայն ես տեսական նյութի շարադրանքը նույնպես, անհրաժեշտության դեպքում, ուղեկցում եմ օրինակներով՝ ոչ մեծ թվով, սակայն այնպես ընտրված, որպեսզի սովորողին նախապատրաստեմ վարժությունների վրա գիտակցորեն աշխատելու։

3. Հայտնի է, թե մաթեմատիկական անալիզն ինչպիսի հիանալի ու բազմապիսի կիրառություններ ունի ինչպես բուն մաթեմատիկայում, այնպես էլ գիտելիքների հարակից բնագավառներում. ուսանողները այդ բանին հաճախ կհանդիպեն հետագայում։ Սակայն մաթեմատիկական անալիզի՝ մաթեմատիկական այլ դիսցիպլինների ու պրակտիկայի պահանջների հետ ունեցած կապի միտքն իսկ սովորողները պետք է յուրացնեն արդեն իսկ անալիզի հիմունքներն ուսումնասիրելիս։ Ահա թե ինչու ամենուրեք, որտեղ այդ հնարավոր է լինում, ես բերում եմ անալիզի կիրառման օրինակներ ոչ միայն երկրաչափության մեջ, այլև մեխանիկայում, ֆիզիկայում ու տեխնիկայում։

4. Անալիտիկ հաշվումները մինչև թվային արդյունքների հասցնելու հարցը հավասարապես և՛ սկզբունքային, և՛ կիրառական նշանակություն ունի։ Քանի որ անալիզի խնդիրների «ճշգրիտ» կամ «վերջավոր տեսքով» լուծումը միայն պարզագույն դեպքերում է հնարավոր, ուստի կարևոր նշանակություն ունի ուսանողներին ծանոթացնելը մոտավոր մեթոդների կիրառմանն ու մոտավոր բանաձևերի ստացման եղանակներին։ Դասագրքում դրա վրա նույնպես ուշադրություն է դարձված։

5. Կկամենայի որոշ պարզաբանումներ անել բուն շարադրանքի վերաբերյալ։ Ամենից առաջ՝ սահմանի գաղափարի մասին, որը կենտրոնական տեղ է գրավում անալիզի հիմնական գաղափարների շարքում և անցնում է տառացիորեն ողջ դասընթացի միջով, ընդամին հանդես գալով տարբեր ձևերով։ Վերջին հանգամանքը խնդիր է առաջադրում՝ միասնականություն ստեղծել սահմանի բոլոր բազմատեսակությունների մեջ։ Այդ ոչ միայն սկզբունքորեն կարևոր է, այլև գործնականորեն անհրաժեշտ է, որպեսզի ամեն անգամ նորից չկառուցենք սահմանների տեսությունը։ Այդ նպատակին հասնելու համար երկու ուղի կա. կամ միանգամից տալ «ուղղյալ փոփոխականի» սահմանի ամենաընդհանուր սահմանումը (օրինակ, հետևելով Շատունովսկուն և Մուրին-Սմիթին), կամ էլ ամեն մի սահման հանգեցնել պարզագույն դեպքին՝ այնպիսի փոփոխականի սահմանին, որը ընդունում է համարակալված հաջորդական արժեքներ։ Սկսնակի համար

առաջին տեսակետն անմատչելի է, ուստի ես կանգ առա երկրորդի վրա. սահմանի յուրաքանչյուր նոր տեսակի սահմանումը տրվում է հաջորդականության սահմանի օգնությամբ և ապա միայն՝ «ε—δ» լեզվով։

6. Նշեմ շարադրանքի մի մանրամաս ևս. երկրորդ հատորում, խոսելով կորագիծ և մակերևութային ինտեգրալների մասին, ես տարբերություն եմ դնում այդպիսի «առաջին տեսակի ինտեգրալների» և «երկրորդ տեսակի ինտեգրալների» միջև (առաջինները՝ ճշգրիտ անալոգներն են ոչկողմնորոշված տիրույթներով տարածված սովորական ու կրկնակի ինտեգրալների, իսկ երկրորդներում անալոգիան մասամբ վերանում է)։ Փորձով ես բազմիցս համոզվել եմ, որ այդպիսի տարբերումը նպաստում է ավելի լավ յուրացմանը և հարմար է կիրառությունների համար։

7. Որպես մի փոքր լրացում ծրագրին, ես դասագրքում ընթերցողին համառոտակի ծանոթացնում եմ էլիպտիկ ինտեգրալներին (որոնք գործնականում այնպես հաճախ են հանդիպում) և մի քանի դեպքերում տալիս եմ այնպիսի խնդիրներ, որոնք հանգեցնում են հենց էլիպտիկ ինտեգրալների։ Թո՛ղ դրանով չքանա լոկ պարզ խնդիրների լուծումով ստեղծվող այն վնասակար պատրանքը, թե իբր անալիտիկ հաշվումների արդյունքներն անպայման պետք է «տարրական» լինեն։

8. Դասագրքի տարբեր տեղերում ընթերցողը կգտնի պատմամաթեմատիկական բնույթի դիտողություններ։ Բացի դրանից, առաջին հատորն ավարտվում է «պատմական ակնարկով մաթեմատիկական անալիզի հիմնական գաղափարների առաջացման վերաբերյալ», իսկ երկրորդ հատորի վերջում զետեղված է «Ակնարկ մաթեմատիկական անալիզի հետագա զարգացման վերաբերյալ»։ Անշուշտ, այդ բոլորն ամենևին էլ կոչված չեն փոխարինելու մաթեմատիկական անալիզի պատմությանը, որին սովորողները հետագայում կծանոթանան «Մաթեմատիկայի պատմության» ընդհանուր դասընթացում։ Եթե հիշատակված ակնարկներից առաջինում շոշափվում է հասկացությունների բուն ծագման (գենեզիսի) հարցը, ապա պատմական բնույթի դիտողությունները նպատակ ունեն գոնե ընդհանուր ժամանակագրական պատկերացում տալու ընթերցողին անալիզի պատմության կարևորագույն իրադարձությունների վերաբերյալ։

Հենց նոր ասածիս հետ սերտորեն առնչված, ես այժմ նախազգուշացումով դիմում եմ անմիջականորեն ընթերցող-սովորողին։ Բանը նրանումն է, որ դասագրքում շարադրման կարգը կապված է մաթեմատիկական խստության վերաբերյալ արդի՛ պահանջ-

ների հետ, որոնք հասունացել են երկար ժամանակաշրջանի ընթացքում, ուստի և շարադրման կարգը, բնականաբար, շեղվում է այն ուղուց, որով պատմականորեն զարգացել է մաթեմատիկական անալիզը։ Ինչպես Մարքսն է ասում, «... բոլոր գիտությունների պատմական զարգացումը միայն բազմաթիվ խաչաձևվող ու շրջանցվող ուղիներով է հանգում նրանց իսկական ելման կետին։ Ի տարբերություն այլ ճարտարապետների, գիտությունը... շենքի առանձին բնակելի հարկերն ավելի շուտ է կանգնեցնում, քան կգցեր նրա հիմքը»։*

Ընթերցողը իրերի նման վիճակի կհանդիպի անալիզի ուսումնասիրության հենց սկզբից. դասագրքի առաջին գլուխը նվիրված է «իրական թվերին», երրորդը՝ «սահմանների տեսությանը», և միայն հինգերորդ գլխից է սկսվում դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի սիստեմատիկ շարադրանքը։ Մինչդեռ պատմականորեն հերթականությունը ճիշտ հակառակն է եղել. դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվը ծնունդ է առել XVII *դարում և զարգացել է* XVIII *դարում, գտնելով բազմաթիվ ու կարևոր կիրառություններ. սահմանների տեսությունը մաթեմատիկական անալիզի հիմք է դարձել* XIX *դարի սկզբում և միայն նույն դարի երկրորդ կեսում է ձևավորվել իրական թվի այն հստակ ըմբռնումը, որով և հիմնավորվում են հենց իր՝ սահմանների տեսության առավել նուրբ դրույթները։*

Սույն դասագիրքն ամփոփում է մաթեմատիկական անալիզի դասավանդման իմ բազմամյա փորձը Լենինգրադի համալսարանում։ Թող, ուրեմն, այն օգտակա՛ր լինի սովետական երիտասարդությանը։

Գ. Մ. Ֆիխտենգոլց

---

* **К. Маркс и Ф. Энгельс,** Сочинения (изд. 1935 г), т. XII, ч. I, стр. **44.**

ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ

§ 1. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՆՐԱ ԿԱՐԳԱՎՈՐՈՒՄԸ

1. Նախնական դիտողություններ: Ընթերցողին դպրոցական դասընթացից լավ հայտնի են ռացիոնալ թվերն ու նրանց հատկությունները: Միաժամանակ, դեռևս տարրական մաթեմատիկայի պահանջները բերում են այդ թվային բազմության ընդլայնման անհրաժեշտությանը: Իսկապես, ռացիոնալ թվերի մեջ հաճախ գոյություն չունեն արմատներ նույնիսկ դրական ամբողջ թվերից (բնական թվերից): Օրինակ, $\sqrt{2}$-ը. չկա այնպիսի $\frac{p}{q}$ ռացիոնալ կոտորակ (որտեղ p-ն և q-ն բնական թվեր են), որի քառակուսին հավասար լինի 2-ի: Այդ ապացուցելու համար ենթադրենք հակառակը. դիցուք գոյություն ունի այնպիսի $\frac{p}{q}$ կոտորակ, որ $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$: Մենք իրավունք ունենք այդ կոտորակն անկրճատելի համարել, այսինքն՝ p-ն և q-ն համարել ընդհանուր բազմապատկչից զուրկ: Քանի որ $p^2=2q^2$, ապա p-ն զույգ թիվ է՝ $p=2r$ (r-ը ամբողջ է) և, հետևաբար, q-ն կենտ է (այլապես 2-ը կլիներ նրանց համար ընդհանուր բազմապատկիչ): p-ի փոխարեն դնելով իր արտահայտությունը, կգտնենք՝ $q^2=2r^2$, որտեղից հետևում է, որ q-ն զույգ պիտի լինի: Ստացված հակասությունն ապացուցում է մեր ասածն այն մասին, որ $\frac{p}{q}$ ռացիոնալ կոտորակ գոյություն չունի, որի քառակուսին հավասար լինի 2-ի:

Դրա հետ միաժամանակ, եթե մենք բավարարվեինք միայն ռացիոնալ թվերի բազմությամբ, երկրաչափության մեջ կանխահայտորեն ոչ բոլոր հատվածները կկարողանային օժտվել երկարությամբ: Իրոք, վերցնենք մի քառակուսի, որի կողմի երկարությունը հավասար է միավորի։ Նրա անկյունագիծը չի կարող ունենալ $\frac{p}{q}$ ռացիոնալ երկարություն, քանի որ, հակառակ դեպքում, Պյութագորի թեորեմայի համաձայն, այդ երկարության քառակուսին պիտի հավասար լիներ 2-ի, որը, ինչպես մենք տեսանք, հնարավոր չէ։

Այս գլխում մենք խնդիր ենք դնում ընդլայնել ռացիոնալ թվերի բազմությունը, նրանց միացնելով նոր բնույթի թվեր՝ իռացիոնալ թվեր։

Մաթեմատիկական պրակտիկայում իռացիոնալ թվերը փաստորեն սկսել են հանդես գալ, արմատանշաններ պարունակող արտահայտությունների տեսքով, դեռևս միջին դարերում, սակայն նրանց չեն համարել իսկական թվեր։ XVII դարում Դեկարտի* ստեղծած կոորդինատների մեթոդը նոր ուժգնությամբ բարձրացրեց երկրաչափական մեծությունները թվերով արտահայտելու հարցը։ Դրա ազդեցությամբ աստիճանաբար սկսում է հասունանալ ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի իրավահավասարության գաղափարը. այդ գաղափարն իր վերջնական ձևակերպումն ստացավ (դրական) թվի հետևյալ սահմանումում, որը տվեց Նյուտոնը** իր «Համընդհանուր թվաբանության» մեջ (1707)***.

«Թիվ ասելով մենք հասկանում ենք ոչ այնքան որպես միավորների բազմություն, որքան որպես վերացական հարաբերություն ինչ-որ մի մեծության՝ նույն բնույթի մի այլ մեծությանը, որը մեր կողմից ընդունված է որպես միավոր»։

Ընդ որում ամբողջ և կոտորակային թվերն արտահայտում են այնպիսի մեծություններ, որոնք համաչափելի են միավորի հետ, իսկ իռացիոնալ թվերը՝ միավորի հետ անհամաչափելի մեծությունները։

Մաթեմատիկական անալիզը, որը ծնունդ է առել XVII դարում և բուռն կերպով զարգանում էր ողջ XVIII դարի ընթացքում, երկար ժամանակ բավարարվում էր այդ սահմանումով, չնայած այն հանգամանքին, որ այդ սահմանումն օտար էր թվաբանությանը և ստվերում էր թողնում թվերի ընդլայնված բազմության կարևորագույն հատկությունը՝ նրա անընդհատությունը (տե՛ս ստորև n° 5)։ Քննադատական ուղղությունը մաթեմատիկայում, որ սկսել էր XVIII դարի վերջում և XIX դարի սկզբում, պահանջ առաջադրեց՝ ճշգրիտ սահմանել անալիզի հիմնական գաղափարները և խստիվ ապացուցել նրա հիմնական դրույթները։ Այդ, իր հերթին, շուտով անհրաժեշտ դարձրեց իռացիոնալ թվերի՝ տրամաբանորեն անթերի տեսության կառուցումը այդ թվերի զուտ թվաբանական սահմանման հիման վրա։ Անցյալ դարի յոթանասունական թվականներին ստեղծվեցին այդպիսի մի քանի տեսություններ, որոնք ձևով տարբերվում են, սակայն ըստ էության համարժեք են միմյանց։ Դրանք բոլորն էլ իռացիոնալ թիվը սահմանում են, այն կապելով ռացիոնալ թվերի այս կամ այն անվերջ բազմության հետ։

---

* Ռենե Դեկարտ (1596—1650)՝ ֆրանսիացի նշանավոր փիլիսոփա և գիտնական։

** Իսահակ Նյուտոն (1642—1727)՝ անգլիացի խոշորագույն ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս։

*** Կա ռուսերեն թարգմանությունը՝ „Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе" (АН СССР, 1948), էջ 8։

2. Ռացիոնալ թվի սահմանումը: *Մենք իռացիոնալ թվերի տեսությունը կշարադրենք, հետևելով Դեդեկինդին*: Այդ տեսության հիմքում ընկած է ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ առաջացվող հատույթի գաղափարը: Դիտարկենք բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմության տրոհումը երկու ոչդատարկ (այսինքն՝ իրոք թեկուզ մեկական թիվ պարունակող) A և A′ բազմությունների. այլ կերպ ասած, մենք ենթադրում ենք, որ՝*

1°. Յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ ընկնում է A և A′ բազմություններից մեկի և միայն մեկի մեջ:

Մենք այդպիսի տրոհումը հատույթ կանվանենք, եթե բավարարվի նաև հետևյալ պայմանը՝

2°. A բազմության յուրաքանչյուր a թիվ փոքր է A′ բազմության յուրաքանչյուր a′ թվից:

A *բազմությունը կոչվում է հատույթի ստորին դաս,* A′ *բազմությունը՝ վերին դաս: Հատույթը նշանակելու ենք այսպես՝* A|A′:

Հատույթի սահմանումից հետևում է, որ ամեն մի ռացիոնալ թիվ, որը փոքր է ստորին դասին պատկանող մի a *թվից, նույնպես պատկանում է ստորին դասին: Նմանապես, ամեն մի ռացիոնալ թիվ, որը մեծ է վերին դասին պատկանող մի* a′ *թվից, նույնպես պատկանում է վերին դասին:*

Օրինակ 1. A *դասը որոշենք որպես այն բոլոր* a *ռացիոնալ թվերի բազմություն, որոնք բավարարում են* $a < 1$ *անհավասարությանը, իսկ* A′ *բազմության մեջ դցենք այն բոլոր* a′ *թվերը, որոնք* $\geqslant 1$:

Հեշտ է ստուգել, որ այդպիսով մենք իրոք ստանում ենք հատույթ: 1 թիվը պատկանում է A′ *դասին և, ակներևորեն, հանդիսանում է նրա մեջ ամենափոքր թիվը: Մյուս կողմից,* A *դասում չկա ամենամեծ թիվ, քանի որ* A *բազմությունից ինչպիսի* a *թիվ էլ վերցնելու լինենք, միշտ հնարավոր է ցույց տալ այնպիսի* a_1 *ռացիոնալ թիվ, որը գտնվի* a *թվի և 1-ի միջև, հետևաբար, մեծ լինի* a*-ից և նույնպես պատկանի* A *դասին:*

Օրինակ 2. Ստորին A *դասի մեջ դցենք այն բոլոր* a *ռացիոնալ թվերը, որոնք* $\leqslant 1$, *իսկ վերին դասի մեջ՝ 1-ից մեծ բոլոր* a′ *ռացիոնալ թվերը:*

Այս նույնպես հատույթ կլինի, ընդ որում այստեղ վերին դասում չկա ամենափոքր թիվ, իսկ ստորին դասում կա ամենամեծ (1 թիվը):

* *Ռիխարդ Դեդեկինդ (1831—1916)՝ գերմանացի մաթեմատիկոս:*

Օրինակ 3. Ա *դասի մեջ դցենք բոլոր բացասական ռացիոնալ թվերը, 0 թիվը և այն բոլոր դրական ռացիոնալ* a *թվերը, որոնց համար* $a^2 < 2$, *իսկ* A' *դասի մեջ՝ այն բոլոր դրական ռացիոնալ* a' *թվերը, որոնց համար* $a'^2 > 2$։

Ինչպես հեշտ է համոզվել, մենք դարձյալ հատույթ ստացանք։ Այստեղ ո՛չ A *դասում կա ամենամեծ թիվ, ո՛չ* A' *դասում՝ ամենափոքր թիվ։ Ապացուցենք այդ պնդումներից, օրինակ, առաջինը (երկրորդն ապացուցվում է նման եղանակով)։ Դիցուք* a*-ն* A *դասի որևէ դրական թիվ է, այնպես որ* $a^2 < 2$։ *Ցույց տանք, որ կարելի է ընտրել այնպիսի* n *դրական ամբողջ թիվ, որպեսզի*

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

այնպես որ $a + \frac{1}{n}$ *թիվը նույնպես կպատկանի* A *դասին։ Այդ անհավասարությունը համարժեք է հետևյալ անհավասարություններին՝*

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2.$$

Վերջին անհավասարությունը ավելի շուտ տեղի կունենա, եթե n*-ը բավարարի*

$$\frac{2a+1}{n} < 2 - a^2$$

անհավասարությանը, որի համար բավական է վերցնել

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2},$$

Այսպես, ուրեմն, ինչպիսին էլ լինի A *դասին պատկանող* a *դրական թիվը, նույն* A *դասում կգտնվի* a*-ից մեծ թիվ։ Քանի որ* $0 \geqslant a$ *թվերի համար այդ պնդումն ակներև է, ապա* A *դասի ոչ մի թիվ նրա մեջ ամենամեծը չէ։*

Հեշտ է հասկանալ, որ չի կարող գոյություն ունենալ այնպիսի հատույթ, որի համար միաժամանակ գտնվի ստորին դասում ամենամեծ a_0 թիվ, իսկ վերին դասում՝ ամենափոքր a'_0 թիվ: *Իսկապես, ենթադրենք, թե գոյություն ունի այդպիսի հատույթ։ Այդ դեպքում* a_0*-ի և* a'_0*-ի միջև վերցնենք որևէ* c *ռացիոնալ թիվ՝* $a_0 < c < a'_0$։ *Այդ* c *թիվը չի կարող պատկանել* A *դասին, այլապես* a_0*-ն չէր լինի ամենամեծ թիվն այդ դասում. Նմանապես* c *թիվը չի կարող պատ-*

կանել A' դասին, իսկ այդ հակասում է հատույթի սահմանման մեջ մտնող 1° հատկությանը:

Այսպիսով, հատույթները կարող են լինել միայն երեք տեսակի, որոնք լուսաբանվում են հենց 1, 2, 3 օրինակներով.

1) կամ A ստորին դասում չկա ամենամեծ թիվ, իսկ A' վերին դասում կա ամենափոքր r թիվ;

2) կամ A ստորին դասում կա ամենամեծ r թիվ, իսկ A' վերին դասում չկա ամենափոքր թիվ,

3) կամ, վերջապես, ո՛չ ստորին դասում կա ամենամեծ թիվ, ո՛չ վերին դասում՝ ամենափոքր թիվ:

Առաջին երկու դեպքերում ասում ենք, որ հատույթն առաջանում է r ռացիոնալ թվի միջոցով (որը A և A' դասերի միջև սահմանազատիչ թիվ է հանդիսանում) կամ՝ որ հատույթը որոշում է r ռացիոնալ թիվը: 1) և 2) օրինակներում այդպիսի r թիվը 1-ն էր: Երրորդ դեպքում սահմանազատիչ թիվ չկա, հատույթը ոչ մի ռացիոնալ թիվ չի որոշում: Այժմ մտցնենք նոր օբյեկտներ՝ իռացիոնալ թվեր, պայմանավորվելով ասել, որ 3) տեսակի ամեն մի հատույթ որոշում է մի որոշ α իռացիոնալ թիվ: Այդ α թիվը փոխարինում է պակասող սահմանազատիչ թվին. մենք կարծես թե այն տեղավորում ենք A դասի բոլոր a թվերի և A' դասի բոլոր a' թվերի միջև: 3-րդ օրինակում այդպիսի նոր ստեղծված թիվ կլինի, ինչպես հեշտ է կռահել, հենց $\sqrt{2}$-ը:

Իռացիոնալ թվերի համար միատիպ նշանակումներ* չմտցնելով, մենք α իռացիոնալ թիվը միշտ կապելու ենք ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ առաջացող այն $A|A'$ հատույթի հետ, որը որոշում է այդ թիվը:

Միակերպության տեսակետից հաճախ հարմար կլինի նույն բանը կատարել նաև r ռացիոնալ թվի նկատմամբ: Սակայն յուրաքանչյուր r ռացիոնալ թվի համար գոյություն ունեն այդ թիվը որոշող երկու հատույթներ. երկուսի համար էլ $r > a$ թվերը պատկանում են ստորին դասին, $r < a$ թվերը՝ վերին դասին, իսկ r թիվն ինքը մեր ցանկությամբ կարող է մացվել կամ ստորին դասի մեջ (այն ժամանակ նա այնտեղ կլինի ամենամեծը), կամ վերին դասի մեջ (նա այնտեղ կլինի

---

* Խոսքը վերաբերում է վերջավոր նշանակումներին. իռացիոնալ թվերի յուրատեսակ անվերջ նշանակումներին ընթերցողը կծանոթանա n° 4-ում: Ամենից հաճախ անհատապես տված իռացիոնալ թվերը նշանակում են՝ կախված նրանց ծագումից ու դերից, ինչպես՝ $\sqrt{2}$, log 5, sin 10° և այլն:

ամենափոքրը)։ Որոշակիության համար մենք ընդմիշտ պայմանավորվենք՝ r ռացիոնալ թիվը որոշող հատույթի մասին խոսելիս այդ թիվը մտցնել վերին դասի մեջ։

Ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերն ստացել են իրական թվեր ընդհանուր անունը։ Իրական թվի գաղափարը մաթեմատիկական անալիզի ինչպես և ընդհանրապես ողջ մաթեմատիկայի հիմնական գաղափարներից մեկն է։

3. Իրական թվերի բազմության կարգավորումը: α և β երկու իռացիոնալ թվերը, որոնք համապատասխանաբար որոշվում են $A|A'$ և $B|B'$ հատույթներով, համարվում են միմյանց հավասար, եթե այդ հատույթները նույնական են. *ի միջի այլոց, բավական է պահանջել, որ համընկնեն A և B ստորին դասերը, որովհետև այդ ժամանակ A' և B' վերին դասերն իրենք կհամընկնեն։ Այդ սահմանումը կարելի է պահպանել նաև այն դեպքում, երբ α և β թվերը ռացիոնալ են։ Այլ խոսքով,* եթե α և β ռացիոնալ թվերն իրար հավասար են, ապա այդ թվերը որոշող հատույթները համընկնում են, և, հակադարձաբար, հատույթների համընկնելուց բխում է α և β թվերի հավասարությունը: *Այդ ժամանակ, հասկանալի է, պետք է հաշվի առնել այն պայմանը, որն ընդունել էինք վերևում, ռացիոնալ թվերը հատույթների միջոցով որոշելիս։*

Այժմ անցնենք «մեծի» գաղափարի որոշմանն իրական թվերի նկատմամբ։ Ռացիոնալ թվերի համար այդ գաղափարն արդեն հայտնի է դպրոցական դասընթացից։ r ռացիոնալ թվի և α իռացիոնալ թվի համար «մեծի» գաղափարը փաստորեն որոշված է n° *2-ում, այն է՝ եթե α-ն որոշվում է $A|A'$ հատույթով, ապա մենք α-ն մեծ ենք համարում A դասին պատկանող բոլոր ռացիոնալ թվերից, իսկ A' դասին պատկանող բոլոր ռացիոնալ թվերը՝ մեծ են α-ից։*

Դիցուք, այժմ ունենք երկու իռացիոնալ թվեր՝ α, որը որոշվում է $A|A'$ հատույթով, և β, որը որոշվում է $B|B'$ հատույթով։ Մենք համարելու ենք մեծ այն թիվը, որի ստորին դասն ավելի մեծ է։ Ավելի ճշգրիտ ասած, մենք համարելու ենք $\alpha>\beta$, եթե A դասն իր մեջ ընդգրկում է B դասն ամբողջությամբ, չհամընկնելով նրա հետ: *(Այդ պայմանը, ակներևորեն, համարժեք է նրան, որ B' դասն իր մեջ ընդգրկում է A' դասն ամբողջությամբ, չհամընկնելով նրա հետ։) Հեշտ է ստուգել, որ* այդ սահմանումը կարող է պահպանվել նաև այն դեպքերի համար, երբ α և β թվերից մեկը, կամ նույնիսկ երկուսն էլ ռացիոնալ են:

«Փոքրի» *գաղափարը մուծվում է արդեն որպես ածանցյալ գաղափար։ Այն է՝ ասում են, որ $\alpha<\beta$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\beta>\alpha$։*

Մեր սահմանումներից կարելի է բխեցնել, որ՝

α և β իրական թվերի յուրաքանչյուր զույգի համար տեղի ունի հետևյալ երեք առնչություններից մեկը և միայն մեկը՝

$$\alpha = \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \alpha < \beta:$$

Այնուհետև՝

$\alpha > \beta$ և $\beta > \gamma$ պայմաններից հետևում է $\alpha > \beta$ պայմանը:

Ապացուցենք, վերջապես, երկու օժանդակ առաջադրություններ, որոնք շատ անգամ են մեզ օգտակար լինելու հետագա շարադրման ժամանակ:

1-ին լեմմա։ Ինչպիսին էլ լինեն α և β երկու իրական թվերը, որտեղ $\alpha > \beta$, միշտ կգտնվի այնպիսի իրական, և նույնիսկ, մասնավորապես՝ ռ ա ց ի ո ն ա լ, r *թիվ, որը գտնվում է նրանց միջև՝* $\alpha > r > \beta$ *(հետևաբար, կգտնվեն նաև անվերջ բազմությամբ այդպիսի ռացիոնալ թվեր):*

Քանի որ $\alpha > \beta$, *ապա* α *թիվը որոշող հատույթի* A *ստորին դասն իր մեջ ընդգրկում է* β *թիվը որոշող հատույթի* B *ստորին դասը, չհամընկնելով նրա հետ։ Ուստի* A *դասում կգտնվի այնպիսի* r *ռացիոնալ թիվ, որը չի պատկանում* B *դասին և, հետևաբար, պատկանում է* B' *դասին. նրա համար կունենանք՝*

$$\alpha > r \geqslant \beta$$

(հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ β*-ն ռացիոնալ լինի)։ Բայց քանի որ* A *դասում ամենամեծ թիվ չկա, ապա, հարկ եղած դեպքում մեծացնելով* r*-ը, կարելի է հավասարությունը բացառել։*

2-րդ լեմմա։ Դիցուք տրված են α և β երկու իրական թվերը: Եթե, ինչպիսի $e > 0$ ռացիոնալ թիվ էլ վերցնելու լինենք, α և β թվերը հնարավոր է զետեղել միևնույն s և s' երկու այնպիսի ռացիոնալ թվերի միջև, որոնց տարբերությունը e-ից փոքր է՝

$$s' \geqslant \alpha \geqslant s, \qquad s' \geqslant \beta \geqslant s, \qquad s' - s < e,$$

ապա α և β թվերն անհրաժեշտաբար հավասար են:

Ա պ ա ց ո ւ ց ե ն ք հակասող ընդունելությամբ։ Դիցուք, օրինակի համար, $\alpha > \beta$*։ 1-ին լեմմայի համաձայն,* α*-ի և* β*-ի միջև կարելի կլիներ վերցնել ե ր կ ո ւ ռացիոնալ թվեր՝* r *և* r'*՝*

$$\alpha > r' > r > \beta\text{։}$$

Այդ դեպքում ամեն երկու այնպիսի s *և* s' *ռացիոնալ թվերի համար, որոնց միջև գտնվում են* α*-ն և* β*-ն, ակներևաբար տեղի կունենային հետևյալ անհավասարությունները՝*

$s' > r' > r > s$, *որտեղից՝* $s' - s > r' - r > 0$,
այնպես որ $s' - s$ *տարբերությունը, լեմմայի պայմանին հակառակ, չէր կարելի փոքր դարձնել, օրինակի համար,* $e = r' - r$ *թվից։ Այս հակասությունն էլ հենց ապացուցում է մեր լեմման։*

4. Իրական թվի ներկայացումն անվերջ տասնորդական կոտորակով։ *Մենք ի նկատի ունենք այնպիսի ներկայացումը, որի ժամանակ կոտորակային մասը (մանտիսան) դրական է, մինչդեռ ամբողջ մասը կարող է ինչպես դրական լինել, այնպես էլ՝ բացասական կամ զրո։*

Նախ ենթադրենք, որ դիտարկվող α *իրական թիվը ո՛չ ամբողջ է, ո՛չ էլ վերջավոր տասնորդական կոտորակ։ Փնտրենք նրա տասնորդական մոտավորությունները։ Եթե* α *թիվը որոշվում է* $A|A'$ *հատույթով, ապա նախ և առաջ հեշտ է համոզվել, որ* A *դասում կգտնվի մի* M *ամբողջ թիվ, իսկ* A' *դասում՝ նույնպես ամբողջ* N *թիվ, ընդ որում* $N > M$*։ Ավելացնելով* M *թվին մեկական միավորներ, անհրաժեշտաբար կհասնենք իրար հաջորդող այնպիսի* C *և* $C+1$ *ամբողջ թվերի, որ*

$$C < \alpha < C + 1,$$

ընդ որում C *թիվը կարող է լինել դրական, բացասական կամ զրո։*

Այնուհետև, եթե C *և* $C+1$ *թվերի միջև ընկած միջակայքը*

$$C{,}1, \quad C{,}2, \cdots, C{,}9$$

թվերով տրոհենք տաս հավասար մասերի, ապա α *թիվը կընկնի այդ մասնակի միջակայքերից մեկի (և միայն մեկի) մեջ, և մենք կստանանք միմյանցից* $\frac{1}{10}$*-ով տարբերվող երկու թվեր՝* $C{,}c_1$ *և* $C{,}c_1 + \frac{1}{10}$*, որոնց համար՝*

$$C{,}c_1 < \alpha < C{,}c_1 + \frac{1}{10}.$$

Այս պրոցեսը շարունակելով, $n-1$ *հատ* $c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ *թվանշանները որոշելուց հետո,* n*-րդ թվանշանը՝* c_n*-ը կորոշենք*

$$C{,}c_1c_2\cdots c_n < \alpha < C{,}c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n} \tag{1}$$

անհավասարություններով։

Այսպիսով, α թվի տասնորդական մոտավորությունները գտնելու պրոցեսում մենք կառուցեցինք C ամբողջ թիվն ու $c_1, c_2, \cdots, c_n \cdots$ թվանշանների անվերջ հաջորդականությունը: Նրանցից կազմած անվերջ տասնորդական կոտորակը, այսինքն՝

$$C, c_1, c_2 \cdots c_n \cdots$$

պայմանանշանը (սիմվոլը) կարելի է դիտարկել իբրև α իրական թվի ներկայացում:

Ինչ վերաբերում է այն դեպքին, երբ α թիվն ինքն ամբողջ է կամ, ընդհանրապես, վերջավոր տասնորդական կոտորակ է, ապա կարելի է նման եղանակով հաջորդաբար որոշել C ամբողջ թիվն ու $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ թվանշանները, սակայն այս անգամ ելնելով

$$C,c_1c_2\cdots c_n \leqslant \alpha \leqslant C,c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n} \qquad (1ա)$$

առնչությունից, որն ավելի ընդհանուր է, քան (1)-ը: Բանը նրանումն է, որ նշված պրոցեսում մի որոշ քայլից հետո α թիվը կհամընկնի այն միջակայքի ծայրերից մեկի հետ, որի մեջ մենք նրան համարում ենք, ձախ կամ աջ ծայրի՝ մեր հայեցողությամբ. այդ պահից սկսած (1ա)-ում, համապատասխանորեն ձախ կամ աջ կողմում, արդեն մշտապես հավասարություն կլինի: Նայած թե այդ երկու հնարավորություններից որն է իրականանում, հաջորդ թվանշանները բոլորը կլինեն 0-ներ կամ բոլոր 9-եր: Այսպիսով, α թիվն այս անգամ ներկայացվում է երկակի ձևով, մեկը՝ 0-ի պարբերությամբ, մյուսը՝ 9-ի պարբերությամբ: Այսպես, օրինակ՝

$$2,718 = 2,718000\cdots = 2,717999\cdots ,$$

$$-2,718 = \bar{3},282 = \bar{3},282000 \cdots = \bar{3},281999\cdots$$

Իրական թվի, պակասորդով և հավելումով վերցրած՝

$$C,c_1c_2\cdots c_n \quad և \quad C,c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n}$$

տասնորդական մոտավորությունների տարբերությունը, որ հավասար է $\frac{1}{10^n}$-ի, n-ի աճման հետ միասին կարելի է դարձնել ցանկացած $e > 0$ ռացիոնալ թվից փոքր: Իրոք, քանի որ $\frac{1}{e}$ թիվը չգերազանցող բնական թվեր գոյություն ունեն միայն վերջավոր քանակությամբ, ուստի

$10^n \leqslant \frac{1}{e}$ անհավասարությունը կամ նրան համարժեք $\frac{1}{10^n} \geqslant e$ անհավասարությունը կարող է տեղի ունենալ n-ի միայն վերջավոր թվով արժեքների համար. մյուս բոլոր արժեքների համար կլինի՝

$$\frac{1}{10^n} < e.$$

Այս դիտողությունը, 2-րդ լեմմայի շնորհիվ. թույլ է տալիս եզրակացնել, որ α-ից տարբեր ոչ մի β թիվ չի կարող բավարարել միևնույն (1) կամ (1ա) բոլոր անհավասարություններին և, հետևաբար, նա կունենա անվերջ տասնորդական կոտորակի տեսքով այլ ներկայացում, քան α-ի ներկայացումն է։

Այստեղից, մասնավորապես, պարզ երևում է, որ վերջավոր տասնորդական կոտորակից տարբեր թվի ներկայացումը չունի ո՛չ զրո պարբերություն, ո՛չ 9 պարբերություն, քանի որ զրո կամ 9 պարբերությամբ ամեն մի տասնորդական կոտորակ բացահայտորեն վերջավոր տասնորդական կոտորակ է արտահայտում։

Կարելի է ապացուցել, որ, եթե կամայապես վերցնենք (2) տեսքի մի անվերջ կոտորակ, ապա գոյություն կունենա մի α իրական թիվ, որը կներկայացվի հենց այդ կոտորակով։ Իրոք, բավական է α թիվը կառուցել այնպես, որպեսզի տեղի ունենան բոլոր (1ա) անհավասարությունները։ Այդ նպատակով, կարճ նշանակելով՝

$$C_n = C,c_1c_2\cdots c_n \quad \text{և} \quad C'_n = C,c_1c_2\cdots c_n + \frac{1}{10^n},$$

կնկատենք, որ յուրաքանչյուր C_n կոտորակ փոքր է յուրաքանչյուր C'_m կոտորակից (ոչ միայն $m=n$ դեպքում, այլև $m \gtrless n$ դեպքերում)։ Այժմ հատույթ առաջացնենք ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ, A' վերին դասի մեջ դցելով այնպիսի a' ռացիոնալ թվերը, որոնք բոլոր C_n թվերից մեծ են (օրինակ՝ բոլոր C'_n թվերը), իսկ A ստորին դասի մեջ՝ մնացած բոլոր թվերը (օրինակ՝ C_n թվերը)։ Հեշտ է համոզվել, որ այդպիսով իրոք հատույթ է առաջանում։ Այդ հատույթը կորոշի մի α իրական թիվ, որը և կլինի որոնելին։

Իսկապես, քանի որ α-ն սահմանազատիչ թիվ է երկու դասերի միջև, ուստի մասնավորապես՝

$$C_n \leqslant \alpha \leqslant C'_n.$$

Այսուհետև ընթերցողը կարող է իրական թվերը միշտ պատկերացնել իբրև անվերջ. տասնորդական կոտորակներ։ Դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ պարբերական անվերջ տասնորդական կոտորակը պատկերում է ռացիոնալ թիվ և, հակադարձաբար, յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ վերլուծվում է հենց պարբերական կոտորակի։ Այդպիսով, մեր կողմից նոր մուծված իռացիոնալ թվերի պատկերման համար ծառայում են ոչ պարբերական անվերջ կոտորակները։

Այսպիսի ներկայացումը նույնպես կարող է ելակետ հանդիսանալ իռացիոնալ թվերի տեսությունը կառուցելու համար։

Դիտողություն: Հետագայում մենք կարիք ենք ունենալու օգտվելու α իրական թվի այնպիսի a և a' մոտավոր ռացիոնալ արժեքներից՝

$$a < \alpha < a',$$

որոնց տարբերությունը փոքր է կամայապես փոքր վերցրած $e > 0$ ռացիոնալ թվից։ Ռացիոնալ α-ի համար a և a' թվերի գոյությունն ակնհայտ է։ Իսկ իռացիոնալ α-ի համար որպես a և a' թվեր կարելի է, օրինակի համար, օգտագործել C_n և C_n' տասնորդական մոտավորությունները բավականաչափ մեծ n-ի դեպքում։

5. Իրական թվերի բազմության անընդհատությունը: Այժմ զբաղվենք բոլոր իրական թվերի բազմության մի շատ կարևոր հատկությամբ, որն այն էապես տարբերում է ռացիոնալ թվերի բազմությունից։ Դիտարկելով հատույթները ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ, մենք տեսանք, որ երբեմն այդպիսի հատույթի համար այդ բազմության մեջ չկա սահմանազատիչ թիվ, որի մասին կարելի լիներ ասել, թե նա առաջացնում է այդ հատույթը։ Ռացիոնալ թվերի բազմության հենց այդ ոչլրիվությունը, նրա մեջ հենց այդ բացտեղերի առկայությունն է հիմք ծառայել նոր՝ իռացիոնալ թվերի մուծման համար։ Այժմ սկսենք դիտարկել հատույթներ բոլոր իրական թվերի բազմության մեջ։ Այդպիսի հատույթ ասելով մենք հասկանում ենք այդ բազմության տրոհումը A և A' երկու ոչ-դատարկ բազմությունների, որի ժամանակ՝

1°. յուրաքանչյուր իրական թիվ ընկնում է A և A' բազմություններից մեկի և միայն մեկի մեջ և, բացի դրանից՝

2°. A բազմության յուրաքանչյուր α թիվ փոքր է A' բազմության յուրաքանչյուր α' թվից։

Հարց է ծագում՝ այդպիսի $A|A'$ հատույթի համար արդյոք մի՞շտ կգտնվի այդ հատույթն առաջացնող սահմանազատիչ թիվ (իրական թվերի բազմության մեջ), թե՞ իրական թվերի բազմության մեջ ևս կան դատարկ տեղեր (որոնք կարողանային հիմք ծառայել էլի՛ նոր թվերի մուծման համար)։

Պարզվում է, որ իրականում այդպիսի դատարկ տեղեր այլևս չկան։

Հիմնական թեորեմա (Դ ե դ ե կ ի ն դ ի)։ Իրական թվերի բազմության մեջ ամեն մի **A**|**A′** հատույթի համար գոյություն ունի այդ հատույթն առաջացնող մի β իրական թիվ։ Այդ β թիվը կլինի՝ 1) կամ ամենամեծը **A** ստորին դասի մեջ (այդ ժամանակ **A′** վերին դասում չկա ամենափոքրը), 2) կամ ամենափոքրը A′ վերին դասի մեջ (այդ դեպքում **A** ստորին դասում չկա ամենամեծը)։

Իրական թվերի բազմության այս հատկությունն անվանում են այդ բազմության լ ր ի վ ո ւ թ յ ո ւ ն, ինչպես նաև ա ն ը ն դ հ ա տ ո ւ թ յ ո ւ ն (կամ՝ ա ն ը ն դ մ ե ջ ո ւ թ յ ո ւ ն)։

Ա պ ա ց ո ւ յ ց։ **A** *դասին պատկանող բոլոր ռ ա ց ի ո ն ա լ թվերի բազմությունը նշանակենք* A*-ով, իսկ* **A′** *դասին պատկանող բ ո լ ո ր ռ ա ց ի ո ն ա լ թվերի բազմությունը՝* A′*-ով։ Հեշտ է համոզվել, որ* A *և* A′ *բազմությունները կազմում են հատույթ բոլոր ռ ա ց ի ո ն ա լ թվերի բազմության մեջ։*

Այդ A A′ *հատույթը որոշում է մի* β *իրական թիվ։ Նա պետք է ընկնի* **A** *և* **A′** *դասերից մեկի մեջ. ենթադրենք, օրինակ, թե* β*-ն ընկնում է* **A** *ստորին դասի մեջ և ապացուցենք, որ այն ժամանակ իրականանում է 1) դեպքը, այսինքն՝* β*-ն* **A** *դ ա ս ի մ ե ջ ա մ ե ն ա մ ե ծ ն է։ Իսկապես, եթե այդպես չլիներ, ապա այդ դասի մեջ կգտնվեր մի այլ* α_0 *թիվ, որը մեծ կլիներ* β*-ից։* α_0 *և* β *իրական թվերի միջև տեղավորենք (հենվելով 1-ին լեմմայի վրա) մի* r *ռ ա ց ի ո ն ա լ թիվ՝*

$$\alpha_0 > r > \beta.$$

r*-ը ևս կպատկանի* **A** *դասին, և, հետևաբար, նրա մասը կազմող* A *դասին։ Հանգեցինք հակասության.* β *թիվը որոշող հատույթի ստորին դասին պատկանող* r *ռացիոնալ թիվը մեծ ստացվեց այդ* β *թվից։ Այդպիսով ապացուցվում է մեր պնդումն այն մասին, որ* β*-ն* **A** *դասի մեջ ամենամեծն է։*

Նման դատողությունը ցույց է տալիս, որ եթե β*-ն ընկնի* **A′** *վերին դասի մեջ, ապա կիրականանա 2) դեպքը։*

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն: **A** *դասում ամենամեծ և* **A′** *դասում ամենափոքր թվերի միաժամանակյա գոյությունը անհնար է. այդ ցույց է տրվում այնպես, ինչպես ռացիոնալ թվերի բազմության հատույթի համար (1-ին լեմմայի օգնությամբ)։*

6. Թվային բազմությունների եզրերը։ *Օգտագործենք Դ ե դ ե կ ի ն դ ի հիմնական թեորեման* [5], *հենց այստեղ սահմանելու մի քանի գաղափարներ, որոնք կարևոր դեր են խաղում ժամանակակից անալիզի* մեջ։ Նրանք հարկավոր կլինեն արդեն իսկ իրական թվերի հետ թվաբանական գործողությունների հարցը քննելիս։

Պատկերացնենք թվերի մի կամայական անվերջ բազմություն*. Նա կարող է տրված լինել որևէ եղանակով։ Այդպիսի բազմություններ են հանդիսանում, օրինակ, բնական թվերի բազմությունը, բոլոր կանոնավոր կոտորակների բազմությունը, 0-ի ու 1-ի միջև գտնվող բոլոր իրական թվերի բազմությունը, $\sin x = \frac{1}{2}$ հավասարման բոլոր արմատների բազմությունը, և այլն։

Բազմությանը պատկանող ցանկացած թիվը կնշանակենք x-ով, այնպես որ x-ը կլինի բազմության թվերի տիպական նշանակումը։ x թվերի բազմությունն ինքը կնշանակենք՝ $X = \{x\}$։

Եթե դիտարկվող $\{x\}$ բազմության համար գոյություն ունի այնպիսի M վերջավոր թիվ, որ բոլոր $x \leqslant M$, ապա ասում են, որ տրված բազմությունը վերևից սահմանափակ է (M թվով), և M թիվն անվանում են նրա վերին եզր (верхняя граница)։ Օրինակ, կանոնավոր կոտորակների բազմությունը վերևից սահմանափակված է 1 թվով, ինչպես նաև 1-ից մեծ ամեն մի թվով։ Բնական թվերի բազմությունը վերևից սահմանափակ չէ։

Դրան համանման, եթե գոյություն ունի այնպիսի m վերջավոր թիվ, որ բոլոր $x \geqslant m$, ապա ասում են, որ $\{x\}$ բազմությունը ներքևից սահմանափակ է (m թվով), և m թիվն անվանում են նրա ստորին եզր (нижняя граница)։ Օրինակ, բնական թվերի բազմությունը ներքևից սահմանափակված է 1 թվով, ինչպես նաև 1-ից փոքր ամեն մի թվով։ Բոլոր կանոնավոր կոտորակների բազմությունը ներքևից սահմանափակված է 0 թվով, ինչպես նաև 0-ից փոքր ամեն մի թվով։

Վերևից (ներքևից) սահմանափակ բազմությունը կարող է սահմանափակ լինել նաև ներքևից (համապատասխանաբար՝ վերևից) կամ ոչ։ Այսպես, օրինակ, կանոնավոր կոտորակների բազմությունը սահմանափակ է և՛ վերևից, և՛ ներքևից, իսկ բնական թվերի բազմությունը ներքևից սահմանափակ է, բայց վերևից՝ ոչ։

Եթե բազմությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ չէ, ապա

---

* Ստորև ասվածն ամբողջությամբ իր ուժը պահպանում է նաև վերջավոր բազմությունների համար, սակայն այդ դեպքը հետաքրքրություն չի ներկայացնում։

նրա համար իբրև վերին (ստորին) եզր ընդունում են $+\infty$ (համապատասխանաբար՝ $-\infty$) «անիսկական թիվը»: Այդ «անիսկական թվերի» նկատմամբ ընդունում ենք, որ

$$\infty < +\infty \text{ և } -\infty < x < +\infty,$$

ինչպիսին էլ լինի x իրական («վերջավոր») թիվը:

Եթե բազմությունը վերևից սահմանափակ է, այսինքն՝ ունի M վերջավոր վերին եզր, ապա նա միաժամանակ ունի անվերջ թվով վերին եզրեր, քանի որ M-ից մեծ ամեն մի թիվ նույնպես կլինի նրա համար վերին եզր: Բոլոր վերին եզրերի մեջ հատկապես կարևոր է նրանցից *փոքրագույնը*, որը մենք կանվանենք **վերին ճշգրիտ եզր**: Նման ձևով, եթե բազմությունը ներքևից սահմանափակ է, ապա նրա ստորին եզրերից *մեծագույնը* կանվանենք **ստորին ճշգրիտ եզր**: Այսպես, օրինակ, բոլոր կանոնավոր կոտորակների բազմության համար ճշգրիտ եզրեր կլինեն, համապատասխանաբար, 1 և 0 թվերը:

Հարց է ծագում, թե արդյոք վերևից (ներքևից) սահմանափակ բազմության համար մի՞շտ գոյություն ունի վերին (ստորին) ճշգրիտ եզր: Իսկապես, քանի որ այդ դեպքում անվերջ թվով վերին (ստորին) եզրեր կան, իսկ թվերի անվերջ բազմության մեջ ոչ միշտ գոյություն ունի ամենափոքրը կամ ամենամեծը*, ապա տվյալ բազմության բոլոր վերին (ստորին) եզրերի մեջ ամենափոքրի (ամենամեծի) գոյությունը ապացուցել է պահանջում:

Թեորեմա: Եթե $X=\{x\}$ բազմությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ է, ապա նա ունի վերին (ստորին) ճշգրիտ եզր:**

Ապացույց: Ապացույցը բերենք վերին եզրի վերաբերյալ: Քննություն տանենք երկու դեպք.

1° Նախ ենթադրենք, թե X բազմության x թվերի մեջ կա ամենամեծ $\bar{x}$ թիվը: Այդ դեպքում բազմության բոլոր թվերը

* Այդպիսիք չկան, օրինակ, բոլոր կանոնավոր կոտորակների բազմության մեջ:

** Այս թեորեման, միայն այլ տերմիններով, առաջին անգամ 1817 թ. արտահայտել է չեխ փիլիսոփա և մաթեմատիկոս Բեռնհարդ Բոլցանոն (1781—1848): Դրա խիստ ապացուցումը հնարավոր դարձավ միայն իրական թվի գաղափարը ճշգրտելուց հետո:

կբավարարեն $x \leqslant \bar{x}$ անհավասարությանը, այսինքն $\bar{x}$-ը կլինի X-ի համար վերին եզր։ Մյուս կողմից, քանի որ $\bar{x}$-ը պատկանում է X-ին, ապա վերջինիս ամեն մի M վերին եզրի համար տեղի ունի $\bar{x} \leqslant M$ անհավասարությունը։ Այստեղից եզրակացնում ենք որ $\bar{x}$-ը X բազմության համար վերին ճշգրիտ եզր է։

2° Դիցուք այժմ X բազմության x թվերի մեջ չկա ամենամեծը։ Բոլոր իրական թվերի բազմության մեջ հատույթ առաջացնենք հետևյալ ձևով. A' վերին դասի մեջ գցենք X բազմության բոլոր α' վերին եզրերը, իսկ A ստորին դասի մեջ՝ մնացած բոլոր α իրական թվերը։ Այդ տրոհման ժամանակ X բազմության բոլոր x թվերը կընկնեն A դասի մեջ, քանի որ նրանցից ոչ մեկը, պայմանի համաձայն, ամենամեծը չէ։ Այդպիսով, A և A' դասերից ոչ մեկը դատարկ չէ։ Այդպիսի տրոհումն իրոք հատույթ է առաջացնում, քանի որ բոլոր իրական թվերը բաշխվում են երկու դասի, և A' դասի յուրաքանչյուր թիվ մեծ է A դասի ամեն մի թվից։ Դեդեկինդի հիմնական թեորեմայի [5] համաձայն, պետք է գոյություն ունենա այդ հատույթն առաջացնող β իրական թիվ։ Բոլոր x թվերը, իբրև A դասին պատկանող թվեր, չեն գերազանցում այդ β «սահմանազատիչ» թիվը, այսինքն՝ β-ն x-երի համար ծառայում է վերին եզր և, հետևաբար, պատկանում է A' դասին ու այնտեղ ամենափոքրն է։ Այդպիսով, β-ն իբրև բոլոր վերին եզրերի մեջ փոքրագույնը, հենց կլինի $X = \{x\}$ բազմության վերին ճշգրիտ եզրը։

Ճիշտ նման եղանակով ապացուցվում է թեորեմայի նաև երկրորդ մասը, որը վերաբերում է ստորին ճշգրիտ եզրի գոյությանը։

Եթե M^*-ը $X = \{x\}$ բազմության վերին ճշգրիտ եզրն է, ապա բոլոր x-երի համար կլինի՝

$$x \leqslant M^*.$$

Այժմ վերցնենք M^*-ից փոքր մի կամայական α թիվ։ Քանի որ M^*-ը վերին եզրերի մեջ փոքրագույնն է, ուստի նրանից փոքր α թիվը, անկասկած, վերին եզր չի լինի X բազմության համար, այսինքն՝ X բազմության մեջ կգտնվի այնպիսի x' թիվ, որ՝

$$x' > \alpha.$$

Այդ երկու անհավասարություններով լիովին բնորոշվում է X բազմության M^* վերին ճշգրիտ եզրը։ Այսինքն՝ M^*-ը կլինի $X = \{x\}$ բազմության վերին ճշգրիտ եզրը, եթե ամեն մի x-ի համար

$$x \leqslant M^*$$

և M^*-ից փոքր ցանկացած α թվի համար X բազմության մեջ գտնվի այնպիսի x' թիվ, որ

$$x' > \alpha\text{։}$$

Ճիշտ այդպես էլ, m^*-ը կլինի $X=\{x\}$ բազմության ստորին ճշգրիտ եզրը, եթե ամեն մի x-ի համար

$$x \geqslant m^*$$

և m^*-ից մեծ ցանկացած β թվի համար X բազմության մեջ գտնվի այնպիսի x'' թիվ, որ

$$x'' < \beta\text{։}$$

$X=\{x\}$ բազմության վերին և ստորին ճշգրիտ եզրերի համար ընդունված են հետևյալ նշանակումները՝

$$M^* = \sup X = \sup\{x\},$$

$$m^* = \inf X = \inf\{x\}$$

(լատիներեն՝ supremum = *բարձրագույն,* infremum = *ցածրագույն)։*

Նշենք մի ակնհայտ եզրակացություն, որը հետագայում հաճախ է օգտագործվելու.

Եթե $\{x\}$ բազմության բոլոր x թվերը բավարարում են $x \leqslant M$ անհավասարությանը, ապա նաև $\sup\{x\} \leqslant M$։

Իրոք, պայմանից բխում է, որ M-ն այդ բազմության վերին եզրերից մեկն է, ուստի և բոլոր վերին եզրերի մեջ փոքրագույնը չի կարող նրանից մեծ լինել։

Նմանապես, $x \geqslant m$ **անհավասարությունից հետևում է, որ նաև** $\inf\{x\} \geqslant m$։

Վերջապես, եթե X $\{x\}$ բազմությունը վերևից սահմանափակ չէ, պայմանավորվում ենք ասել, որ նրա վերին ճշգրիտ եզրն է $+\infty$*-ը՝* $\sup\{x\} = +\infty$։ *Ինչպես նաև, եթե բազմությունը ներքևից սահմանափակ չէ, կասենք, որ նրա ճշգրիտ ստորին եզրն է* $-\infty$*-ը՝* $\inf\{x\} = -\infty$։

§ 2. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏ

7. Իրական թվերի գումարի սահմանումը և հատկությունները։ *Դիցուք ունենք երկու α ու β իրական թվերը։ Դիտարկենք* a, a′ *և* b, b′ *ռացիոնալ թվերը, որոնք բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին՝*

$$a < \alpha < a' \quad \text{և} \quad b < \beta < b'։ \tag{1}$$

α ու β թվերի α + β գումար անվանենք այնպիսի γ թիվը, որը գտնվում է, մի կողմից՝ a + b տեսքի բոլոր գումարների և, մյուս կողմից՝ a′ + b′ տեսքի բոլոր գումարների միջև՝

$$a + b < \gamma < a' + b'։ \tag{2}$$

Նախ համոզվենք, որ α ու β իրական թվերի ամեն մի զույգի համար գոյություն ունի այդպիսի γ թիվ։

Դիտարկենք a + b *տեսքի բոլոր հնարավոր գումարների բազմությունը։ Այդ բազմությունը վերևից սահմանափակ է, օրինակ,* a′ + b′ *տեսքի ցանկացած գումարով։ Նշանակենք՝*

$$\gamma = \sup\{a + b\}$$

[*տես* 6.]։ *Այդ ժամանակ* $a + b \leqslant \gamma$ *և միաժամանակ* $\gamma \leqslant a' + b'$։ *Քանի որ, ինչպիսին էլ լինեն (1) պայմաններին բավարարող* a, b, a′, b′ *ռացիոնալ թվերը, միշտ հնարավոր է, պահպանելով այդ պայմանները,* a *և* b *թվերը մեծացնել, իսկ* a′ *և* b′ *թվերը փոքրացնել, ուստի հենց նոր ստացված հավասարություն-անհավասարությունների մեջ իրականում ոչ մի դեպքում չի կարող հավասարություն լինել։ Այսպիսով, γ թիվը բավարարում է գումարի սահմանմանը։*

Սակայն, այժմ հարց է ծագում, թե արդյոք $\gamma = \alpha + \beta$ *գումարը (2) անհավասարություններով միարժե՞ք է որոշվում։ Գումարի միակության մեջ համոզվելու համար* (n° 4*-ի դիտողության համաձայն) ընտրենք* a, a′, b, b′ *թվերն այնպես, որպեսզի՝*

$$a' - a < e \quad \text{և} \quad b' - b < e,$$

որտեղ e-ն կամայապես փոքր դրական ռացիոնալ թիվ է։ Այդտեղից կստանանք՝

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) < 2e,$$

*այսինքն՝ այս տարբերությունը ևս կարելի է ցանկացած չափով փոքր դարձնել**։

* 2e *թիվը ամեն մի* $e' > 0$ *թվից փոքր կդառնա, եթե վերցնենք* $e < \frac{e'}{2}$։

Այդ ժամանակ, 2-րդ լեմմայի համաձայն, $\alpha+\beta$ և $\beta+\alpha$ գումարների միջև գոյություն ունի միայն մեկ թիվ։

Նկատենք, վերջապես, որ եթե α և β թվերը երկուսն էլ ռացիոնալ թվեր են, ապա նրանց $\gamma = \alpha + \beta$ ռացիոնալ գումարը, ակներևաբար, բավարարում է (2) անհավասարություններին։ Այսպիսով, երկու իրական թվերի գումարի վերաբերյալ վերևում տրված ընդհանուր սահմանումը չի հակասում երկու ռացիոնալ թվերի գումարի նախկին սահմանմանը։

Իրական թվերի համար պահպանվում են գումարման բոլոր հիմնական հատկությունները՝

$$1)\ \alpha+\beta = \beta+\alpha$$

$$2)\ (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma),$$

$$3)\ \alpha+0 = \alpha$$

և, վերջապես,

4) $\alpha > \beta$ պայմանից հետևում է՝ $\alpha+\gamma > \beta+\gamma$։

Այս հատկությունները դժվար չէ ապացուցել, հենվելով վերևում տրված գումարի սահմանման վրա և, հասկանալի է, ռացիոնալ թվերի համանման հատկությունների վրա. դրա վրա մենք կանգ չենք առնելու։ Վերջին հատկության օգնությամբ՝ արդարացվում է երկու անհավասարությունների անդամ առ անդամ գումարումը։

8. Սիմետրիկ թվեր։ Բացարձակ մեծություն։ Այժմ ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր իրական թվի համար գոյություն ունի (նրան **սիմետրիկ**) $-\alpha$ թիվ, որը բավարարում է $\alpha + (-\alpha) = 0$ պայմանին։

Ապացուցելիս կարելի է սահմանափակվել այն դեպքով, երբ α թիվն իռացիոնալ է։

Ընդունելով, որ α թիվը որոշվում է $A|A'$ հատույթով, մենք $-\alpha$ թիվը սահմանենք հետևյալ ձևով։ $-\alpha$ թիվը որոշող հատույթի $\bar{A}$ ստորին դասի մեջ դցենք բոլոր $-a'$ ռացիոնալ թվերը, որտեղ a'-ը ցանկացած թիվ է A' դասից, իսկ $\bar{A}'$ վերին դասի մեջ դցենք բոլոր $-a$ ռացիոնալ թվերը, որտեղ a-ն ցանկացած թիվ է A դասից։ Դժվար չէ համոզվել, որ այդպիսի տրոհումն իրոք հատույթ է և որոշում է մի իրական (ավելի պարզ՝ իռացիոնալ) թիվ. այդ թիվը նշանակենք $-\alpha$։

Այժմ ցույց տանք, որ այդ թիվը բավարարում է վերը նշված պայմանին՝ $\alpha+(-\alpha) = 0$։ Օգտվելով հենց $-\alpha$ թվի սահմանումից, տեսնում ենք, որ $\alpha+(-\alpha)$ գումարը մի իրական թիվ է, որը գտնվում է $a-a'$ տեսքի և $a'-a$ տեսքի ռացիոնալ թվերի միջև, որտեղ $a < \alpha < a'$։ Բայց, ակներևաբար՝

$$a - a' < 0 < a' - a,$$

այնպես որ 0 թիվը նույնպես գտնվում է նույն ռացիոնալ թվերի միջև, ինչպես և $\alpha+(-\alpha)$ գումարը։ Այդպիսի հատկությամբ օժտված թվի միակության շնորհիվ [n° **3**, 2-րդ լեմմա], կունենանք՝

$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Ավելացնենք նաև, որ տված թվին սիմետրիկ թիվը միակն է և օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

$$-(-\alpha) = \alpha, \qquad -(\alpha+\beta) = (-\alpha) + (-\beta)։$$

Սիմետրիկ թվի գաղափարի օգնությամբ սպառվում է իրական թվերի հանման վերաբերյալ հարցը, որպես գումարմանը հակադարձ գործողության վերաբերյալ հարց. α և β թվերի տարբերություն կանվանենք (և կնշանակենք $\alpha - \beta$) այն γ թիվը, որը բավարարում է

$$\gamma + \beta = \alpha \quad (\text{կամ՝ } \beta + \gamma = \alpha)$$

պայմանին։ Հենվելով գումարման հատկությունների վրա, հեշտ է ցույց տալ, որ այդպիսին կլինի $\gamma = \alpha + (-\beta)$ թիվը։ Իսկապես՝

$$\gamma + \beta = [\alpha + (-\beta)] + \beta = \alpha + [(-\beta) + \beta] =$$

$$= \alpha + [\beta + (-\beta)] = \alpha + 0 = \alpha.$$

Այսպես է ապացուցվում նաև տարբերության միակությունը։

n° 7-ի 4) հատկությունն այժմ թույլ է տալիս օգտակար դիտողություն անել

$$\alpha > \beta \quad \text{և} \quad \alpha - \beta > 0$$

անհավասարությունների համարժեք լինելու մասին։ Իսկ այդտեղից էլ հետևում է, որ $\alpha > \beta$ անհավասարությունից բխում է $-\alpha < -\beta$ անհավասարությունը։

Վերջապես, սիմետրիկ թվի գաղափարի հետ կապված է նաև թվի բացարձակ մեծության գաղափարը։ Սիմետրիկ թվի կառուցումից պարզ երևում է, որ $\alpha > 0$ դեպքում անհրաժեշտաբար $-\alpha < 0$, իսկ $\alpha < 0$ դեպքում՝ $-\alpha > 0$։ Այլ խոսքով, եթե միայն $\alpha \neq 0$, ապա α և $-\alpha$ երկու թվերից մեկը (և միայն մեկը) զրոյից մեծ կլինի. հենց այդ թիվն էլ անվանում են ինչպես α թվի, այնպես էլ $-\alpha$ թվի բացարձակ մեծություն և նշանակում

$$|\alpha| = |-\alpha|$$

պայմանանշանով։ Զրո թվի բացարձակ մեծությունը համարում են հավասար զրոյի՝ $|0| = 0$։

Հետագայում օգտագործելու համար ևս երկու դիտողություն անենք բացարձակ մեծությունների վերաբերյալ։

Ամենից առաջ ցույց տանք, որ $|\alpha| < \beta$ անհավասարությունը (որտեղ, անշուշտ, $\beta > 0$) համարժեք է $-\beta < \alpha < \beta$ կրկնակի անհավասարությանը։

Իրոք, $|\alpha| < \beta$ անհավասարությունից հետևում է, որ միաժամանակ $\alpha < \beta$, և $-\alpha < \beta$, այսինքն՝ $\alpha > -\beta$։ Հակադարձաբար, եթե տրված է, որ $\alpha < \beta$ և $\alpha > -\beta$, ապա միաժամանակ ունենք՝ $\alpha < \beta$ և $-\alpha < \beta$։ Սակայն α և $-\alpha$ թվերից մեկը հենց $|\alpha|$-ն է, այնպես որ հաստատ $|\alpha| < \beta$։

Համանման ձևով ցույց է տրվում, որ համարժեք են նաև

$$|\alpha| \leqslant \beta \quad \text{և} \quad -\beta \leqslant \alpha \leqslant \beta$$

անհավասարությունները։

Ապացուցենք, այնուհետև՝

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$

օգտակար անհավասարությունը։

Անդամ առ անդամ գումարելով հետևյալ ակներև անհավասարությունները՝

$$-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha| \text{ և } -|\beta| \leqslant \beta \leqslant |\beta|,$$

կստանանք՝

$$-(|\alpha| + |\beta|) \leqslant \alpha + \beta \leqslant |\alpha| + |\beta|,$$

որտեղից և, վերևում արված դիտողության շնորհիվ, բխում է պահանջվող անհավասարությունը։

Ապացուցված անհավասարությունը մաթեմատիկական ինդուկցիայի օգնությամբ տարածվում է ցանկացած թվով գումարելիների դեպքի վրա։ Բացի դրանից, այնտեղից հեշտությամբ ստացվում է, որ՝

$$|\alpha+\beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|,$$

ինչպես նաև՝

$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha-\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Քանի որ միաժամանակ նաև՝

$$|\beta| - |\alpha| \leqslant |\alpha-\beta|,$$

ուստի, ակներևաբար՝

$$\big|\,|\alpha| - |\beta|\,\big| \leqslant |\alpha-\beta|.$$

Այս բոլոր անհավասարությունները բազմիցս պետք են գալու հետագայում։

9. Իրական թվերի արտադրյալի սահմանումը և հատկությունները: *Այժմ անցնենք իրական թվերի* *բազմապատկմանը*, *նախ սահմանափակվելով* *դրական* *թվերով։ Դիցուք տրված են այդպիսի երկու α և β թվեր։ Մենք այստեղ ևս կդիտարկենք (1) անհավասարություններին բավարարող բոլոր հնարավոր ռացիոնալ թվերը, ընդ որում այդ թվերը ևս ենթադրում ենք* *դրական*։

Երկու α ու β իրական դրական թվերի $\alpha\beta$ արտադրյալ անվանենք այնպիսի γ իրական թիվը, որը գտնվում է մի կողմից՝ ab տեսքի բոլոր արտադրյալների և մյուս կողմից՝ $a'b'$ տեսքի բոլոր արտադրյալների միջև՝

$$ab < \gamma < a'b'. \tag{3}$$

Այդպիսի γ թվի գոյությունն ապացուցելու համար վերցնենք բոլոր հնարավոր ab արտադրյալների բազմությունը. նա վերևից սահմանափակ է $a'b'$ տեսքի *ցանկացած* *արտադրյալով։ Եթե ընդունենք*

$$\gamma = \sup \{ab\},$$

ապա պարզ է, որ $ab \leqslant \gamma$ և միաժամանակ $\gamma \leqslant a'b'$։

a և b թվերը *մ ե ծ ա ց ն ե լ ո ւ* և a' և b' թվերը *փ ո ք ր ա ց ն ե լ ո ւ* հնարավորությունը այստեղ (ինչպես և գումարի դեպքում) թույլ է տալիս բացառելու համասարության նշանը, այնպես որ γ թիվը բավարարում է արտադրյալի սահմանմանը։

Ա ր տ ա դ ր յ ա լ ի մ ի ա կ ո ւ թ յ ո ւ ն ը բխում է հետևյալ դատողություններից. ընտրենք a, a' և b, b' ռացիոնալ թվերն այնպես (n° 4-ի դիտողության համաձայն), որպեսզի

$$a' - a < e \quad \text{և} \quad b' - b < e,$$

որտեղ e-ն կամայապես փոքր դրական ռացիոնալ թիվ է։ Ընդ որում կարելի է a, և b թվերը դրական համարել, իսկ a' և b' թվերը՝ համապատասխանորեն ոչ մեծ նախապես վերցրած a'_0 և b'_0 թվերից։ Այն ժամանակ՝

$$a'b' - ab = a'(b' - b) + b(a' - a) < (a'_0 + b'_0)\cdot e,$$

այսինքն՝ այդ տարբերությունը ևս կարելի է դարձնել ցանկացած չափով փոքր*, իսկ այդ էլ հենց բավական է, 2-րդ լեմմայի համաձայն, համոզվելու, որ (3) անհավասարություններին բավարարել կարող է *մ ի ա յ ն մ ե կ* γ թիվ։

Եթե α և β դրական թվերը երկուսն էլ *ռ ա ց ի ո ն ա լ* են, ապա նրանց $\gamma=\alpha\beta$ *ս ո վ ո ր ա կ ա ն* արտադրյալը, ակներևաբար, բավարարում է (3) անհավասարություններին, այսինքն՝ նույնպիսի թիվ է ստացվում և չի հակասում երկու իրական թվերի արտադրյալի ընդհանուր սահմանմանը։

Վերջապես, որևէ երկու իրական թվերի (ոչ անպայման դրական) արտադրյալը սահմանելու համար պայմանավորվենք հետևյալի մասին.

ամենից առաջ պայմանավորվենք, որ

$$\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0,$$

ինչպիսին էլ լինի α թիվը։ Իսկ եթե երկու բազմապատկիչն էլ 0-ից տարբեր են, ապա հիմք ենք ընդունում սովորական «նշանների կանոնը»՝

$$\alpha\cdot\beta = |\alpha|\cdot|\beta|, \text{ երբ } \alpha\text{-ն ու } \beta\text{-ն նույն նշանն ունեն},$$

$$\alpha\cdot\beta = -(|\alpha|\cdot(|\beta|), \text{ երբ } \alpha\text{-ն ու } \beta\text{-ն տարբեր նշաններ ունեն}$$

(թե ի՞նչ է նշանակում $|\alpha|$ և $|\beta|$ *դ ր ա կ ա ն* թվերի արտադրյալ, այդ արդեն գիտենք)։

---

* Նկատենք, որ $(a'_0 + b'_0)e$ արտադրյալը կդառնա ամեն մի $e' < 0$ թվից փոքր, եթե վերցնենք $e < \dfrac{e'}{a'_0 + b'_0}$։

Ինչպես և ռացիոնալ թվերի դեպքում, ցանկացած իրական թվերի համար պահպանվում են հետևյալ հատկությունները.

$$1)\ \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha,$$

$$2)\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma),$$

$$3)\ \alpha\cdot 1=\alpha,$$

$$4)\ (\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma,$$

ինչպես նաև՝

5) $\alpha>\beta$ և $\gamma>0$ պայմանից հետևում է՝ $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$։

Վերջին հատկության օգնությամբ արդարացվում է դրական անդամներ ունեցող երկու անհավասարությունների անդամ առ անդամ բազմապատկումը։

Եթե α և β թվերի $\frac{\alpha}{\beta}$ *քանորդը* սահմանենք որպես այնպիսի γ թիվ, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝

$$\gamma\cdot\beta=\alpha\quad(\text{կամ՝}\ \beta\cdot\gamma=\alpha),$$

ապա կարելի է ապացուցել քանորդի *գոյությունն* ու *միակությունը*, միայն թե β բաժանարարը զրոյից տարբեր լինի։

Սրանով ավարտելով իրական թվերի հետ թվաբանական գործողությունների վերաբերյալ ակնարկը, մենք մի անգամ ևս ընդգծենք, որ ռացիոնալ թվերի բոլոր այն հիմնական հատկությունները, որոնց վրա կառուցվում է տարրական հանրահաշիվը, տեղի ունեն նաև իրական թվերի համար։ Հետևաբար, իրական թվերի համար իրենց ուժը պահպանում են հանրահաշվի այն բոլոր կանոնները, որոնք վերաբերում են թվաբանական գործողություններին և հավասարությունների ու անհավասարությունների զուգորդմանը։

§ 3. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏԱԳԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՆ ՈՒ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

10. Արմատի գոյությունը: Ռացիոնալ ցուցիչով աստիճան: Իրական թվերի բազմապատկման (բաժանման) սահմանումը մեզ անմիջապես հանգեցնում է, ինչպես սովորաբար, ամբողջ դրական (և բացասական) ցուցիչով աստիճանի սահմանմանը։ Անցնելով ընդհանրապես ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի գաղափարին, կանգ առնենք նախ *արմատի գոյության* հարցի վրա։

Ինչպես մենք հիշում ենք, ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ պարզագույն արմատների բացակայությունը այդ բազմության ընդլայնման առիթներից մեկն է եղել։ Այժմ ստուգենք, թե արդյոք կատարված ընդլայնումը ի՞նչ չափով է լրացրել նախկին բացերը (չստեղծելով, իհարկե, նորերը)։

Դիցուք a-ն ցանկացած իրական թիվ է, իսկ n-ը՝ բնական թիվ է։ Ինչպես հայտնի է, a թվի n-րդ աստիճանի արմատ կոչվում է այնպիսի ξ իրական թիվը, որի համար՝

$$\xi^n = a.$$

Մենք սահմանափակվենք այն դեպքով, երբ a-ն դրական է, և փնտրենք մի դրական ξ թիվ, որը բավարարի այդ պայմանին, այսինքն՝ փնտրենք արմատի այսպես կոչված թվաբանական արժեքը։ Մենք կապացուցենք, որ միշտ գոյություն ունի այդպիսի ξ թիվ, այն էլ միայն մեկը։

Վերջին պնդումը ξ թվի միակության մասին անմիջապես բխում է նրանից, որ տարբեր դրական թվերին համապատասխանում են նրանց տարբեր աստիճանները՝

եթե $0 < \xi < \xi'$, ապա $\xi^n < \xi'^n$.

Եթե գոյություն ունի այնպիսի r ռացիոնալ թիվ, որի n-րդ աստիճանը հավասար է a-ին, ապա հենց այդ r-ը կլինի որոնելի ξ թիվը, ուստի բավական է սահմանափակվել այն ենթադրությամբ, թե այդպիսի ռացիոնալ թիվ չկա։

Այժմ բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ կատարենք մի $X|X'$ հատույթ հետևյալ եղանակով. X դասի մեջ դցենք բոլոր բացասական ռացիոնալ թվերն ու զրոն, ինչպես նաև այն դրական ռացիոնալ x թվերը, որոնց համար $x^n < a$։ X' դասի մեջ դցենք բոլոր x' դրական ռացիոնալ թվերը, որոնց համար $x'^n > a$։ Հեշտ է տեսնել, որ այդ դասերը դատարկ չեն և որ X դասն իրոք նաև դրական թվեր է պարունակում։ Եթե վերցնենք, օրինակ, m բնական թիվն այնպես, որ $\frac{1}{m} < a < m$, ապա առավել ևս կունենանք $\frac{1}{m^n} < a < m^n$, այնպես որ $\frac{1}{m}$ թիվը իրոք մտնում է X դասի մեջ, իսկ m թիվը՝ X' դասի մեջ։ Հատույթի համար պահանջվող մյուս պայմանները ստուգվում են անմիջականորեն։

Դիցուք այժմ ξ-ն այդ $X|X'$ հատույթով որոշվող թիվն է։ Ապացուցենք, որ $\xi^n = a$, այսինքն որ՝ $\xi = \sqrt[n]{a}$.

ξ^n թիվը դիտելով որպես ξ-ին հավասար n բազմապատիկների արտադրյալ, իրական դրական թվերի արտադրյալի սահմանման համաձայն եզրակացնում ենք, որ եթե x-ը և x'-ը այնպիսի դրական ռացիոնալ թվեր են, որոնց համար

$$0 < x < \xi < x',$$

ապա՝

$$x^n < \xi^n < x'^n.$$

Քանի որ x-ը պատկանում է X դասին, իսկ x'-ը՝ X' դասին, ապա, այդ դասերի որոշման համաձայն, միաժամանակ կունենանք նաև՝

$$x^n < a < x'^n.$$

Բայց $x' - x$ *տարբերությունը կարելի է ամեն մի* $e > 0$ *թվից փոքր դարձնել* n° 4-*ի դիտողությունը, ըստ որում ոչինչ չի խանգարում, որպեսզի* x' *թիվը համարենք նախապես վերցրած մի* x'_0 *թվից փոքր։ Այդ դեպքում կարող ենք գրել՝*

$$x'^n - x^n = (x' - x)(x'^{n-1} + x \cdot x'^{n-2} + \cdots + x^{n-1})\ e \cdot n \cdot x_0'^{n-1},$$

*այսինքն՝ այդ տարբերությունը ևս կարելի է ցանկացած չափով փոքր դարձնել**։ *Այստեղից էլ, 2-րդ լեմմայի համաձայն, հետևում է* ξ^n *և* α *թվերի հավասարությունը։*

Այժմ, երբ արմատի գոյությունն ապացուցված է, սովորական եղանակով սահմանվում է ցանկացած r *ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի գաղափարը և ստուգվում է, որ այդպիսի աստիճանների համար իրավացի են տարրական հանրահաշվի դասընթացում արտածվող սովորական կանոնները՝*

$$\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'}, \qquad \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'}$$

$$(\alpha^r)^{r'} = \alpha^{r \cdot r'}, \qquad (\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r}, \qquad \text{և այլն։}$$

Ընդգծենք նաև, որ երբ $\alpha > 1$, α^r *աստիճանը* r *ռացիոնալ ցուցիչի աճման հետ միասին աճում է։*

11. Ցանկացած իրական ցուցիչով աստիճան: *Այժմ անցնենք ցանկացած* α *իրական (դրական) թվի ցանկացած* β *իրական ցուցիչով աստիճանի սահմանմանը։ Դիտարկման ենթարկենք* α *թվի* b *և* b' *ռացիոնալ ցուցիչներով աստիճանները՝*

$$\alpha^b \quad \text{և} \quad \alpha^{b'},$$

որոնց ցուցիչները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$b < \beta < b'.$$

$1 < \alpha$ թվի** β ցուցիչով աստիճան անվանում են (և նշանակում α^β սիմվոլով) այն իրական γ թիվը, որը գտնվում է α^b և $\alpha^{b'}$ աստիճանների միջև՝

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}. \qquad (1)$$

---

* *Նկատենք, որ* $e \cdot n \cdot x_0'^{n-1}$ *թիվը կդառնա ամեն մի* $e' > 0$ *թվից փոքր, եթե վերցնենք* $e < \dfrac{e'}{n x_0'^{n-1}}$.

** *Կարելի է սահմանափակվել այդ դեպքով, քանի որ* $\alpha < 1$ *դեպքում կարող ենք ընդունել, օրինակի համար,* $\alpha^\beta = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}$.

Հեշտ է համոզվել, որ այդպիսի թիվ միշտ գոյություն ունի։ Իրոք, a^b *թվերի բազմությունը վերևից սահմանափակ է, օրինակ՝ ց ա ն կ ա ց ա ծ* $a^{b'}$ *աստիճանով։ Ընդունենք* [6]՝

$$\gamma = \sup_{b<\beta} \left\{ a^b \right\}.$$

Այդ թվի համար կունենանք՝

$$a^b \leqslant \gamma \leqslant a^{b'}.$$

Իրականում այստեղ հավասարության նշանները պետք չեն, քանի որ կարելի է b-*ն մ ե ծ ա ց ն ե լ և* b'-*ը փ ո ք ր ա ց ն ե լ, այնպես որ ստացած* γ *թիվը բավարարում է (1) պայմաններին։*

Այժմ ապացուցենք այդ պայմաններով որոշվող թվի միակությունը։ Դրա համար նախ նկատենք, որ n° *3-ի 2-րդ լեմման իր ուժը կպահպանի նաև այն դեպքում, երբ հրաժարվենք պահանջել, որպեսզի* a, a' *և* e *թվերն անպայման ռ ա ց ի ո ն ա լ լինեն. ապացույցը մնում է նույնը։ Այնուհետև ցույց տանք մի շատ պարզ և հաճախ օգտագործվող անհավասարություն. եթե* n-*ը մեկից մեծ բնական թիվ է և* $\gamma > 1$, *ապա՝*

$$\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1). \tag{2}$$

Իրոք, ընդունելով $\gamma = 1 + \lambda$, *որտեղ* $\lambda > 0$, *Ն յ ո ւ տ ո ն ի երկանդամի բանաձևի համաձայն կունենանք՝*

$$(1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \cdots,$$

Քանի որ չգրված անդամները դրական են, ուստի՝

$$(1 + \lambda)^n > 1 + n\lambda,$$

որը համարժեք է (2) անհավասարությանը։ (2)-ում դնելով $\gamma = a^{\frac{1}{n}}$ $(a > 1)$, *կստանանք մի նոր անհավասարություն՝*

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}, \tag{3}$$

որից մենք հենց հիմա կօգտվենք։

Մենք գիտենք (n° *4-ի գիտողությունը), որ* b *և* b' *թվերը կարելի է այնպես ընտրել, որպեսզի* b' — b *տարբերությունը* $\frac{1}{n}$-*ից փոքր լինի՝ նախապես տըր-*

ված ամեն մի n բնական թվի դեպքում. այդ դեպքում, (3) անհավասարության շնորհիվ՝

$$a^{b'}-a^{b'}=a^{b}\left(a^{b'-b}-1\right)<a^{b}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)<a^{b}\cdot\frac{a-1}{n},$$

Եթե b' թվերից որևէ մեկը նշանակենք b'_0, ապա վերջնականապես կունենանք՝

$$a^{b'}-a^{b}<a^{b'_0}\cdot\frac{a-1}{n},$$

Վերջին արտահայտությունը, n-ը մեծացնելու հաշվին, կարելի է դարձնել կամայապես փոքր ε դրական թվից ավելի փոքր. դրա համար բավական է վերցնել

$$n>\frac{a^{b'_0}(a-1)}{\varepsilon},$$

Այդ դեպքում, վերևում ընդհանրացրած 2-րդ լեմմայի համաձայն, a^{b} և $a^{b'}$ սահմանների միջև չեն կարող երկու տարբեր γ թվեր լինել։

Եթե β-ն ռացիոնալ է, ապա վերևում ձևակերպված սահմանումը մեզ վերադարձնում է a^{β} սիմվոլի մեր սովորական ըմբռնմանը։

Հեշտ է ստուգել, որ ցանկացած իրական ցուցիչով աստիճանի համար տեղի ունեն աստիճանի համար սովորական բոլոր կանոնները, ինչպես նաև՝ որ $1<a$-ի դեպքում β իրական ցուցիչի աճման հետ միասին աճում է նաև a^{β} աստիճանը։

12. Լոգարիթմներ: *Օգտվելով ցանկացած իրական ցուցիչով աստիճանի սահմանումից, այժմ հեշտ է ապացուցել ցանկացած իրական դրական γ թվի լոգարիթմի գոյությունը՝ 1-ից տարբեր դրական a հիմքի դեպքում (մենք կընդունենք, օրինակ, $a>1$)։*

Եթե գոյություն ունի այնպիսի r ռացիոնալ թիվ, որ

$$a^{r}=\gamma,$$

ապա հենց այդ r-ը կլինի որոնելի լոգարիթմը։ Ենթադրենք, թե այդպիսի ռացիոնալ թիվ չկա։ Բոլոր ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ առաջացնենք B/B′ հատույթը հետևյալ եղանակով. B դասի մեջ դցենք բոլոր այն b ռացիոնալ թվերը, որոնց համար $a^{b}<\gamma$, իսկ B′ դասի մեջ՝ այն b′ ռացիոնալ թվերը, որոնց համար $a^{b'}>\gamma$։ Ցույց տանք, որ B և B′ դասերը դատարկ չեն։ (2) անհավասարության շնորհիվ կունենանք՝

$$a^{n}>1+n(a-1)>n(a-1),$$

և բավական է վերցնել

$$n>\frac{\gamma}{a-1},$$

որպեսզի լինի $a^{n}>\gamma$. այդպիսի n բնական թիվը կպատկանի B′ դասին։ Միևնույն ժամանակ ունենք՝

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}>\frac{1}{n(a-1)},$$

և բավական է վերցնել

$$n>\frac{1}{\gamma(a-1)},$$

որպեսզի ստանանք $\alpha^{-n} < \gamma$ *և* $-n$ *թիվն ընկնի* B *դասի մեջ։ Հատույթ ստանալու համար պահանջվող մյուս պայմանները նույնպես բավարարվում են այստեղ։*

Այդ B/B′ *հատույթը որոշում է մի* β *իրական թիվ, որը հանդիսանում է «սահմանազատիչ» թիվ երկու դասերին պատկանող թվերի միջև։ Աստիճանի սահմանման համաձայն ունենք՝*

$$\alpha^{b} < \alpha^{\beta} < \alpha^{b'} \quad (b < \beta < b'),$$

ընդ որում α^{β} *թիվը միակն է, որը բավարարում է նման բոլոր անհավասարություններին։ Սակայն* γ *թվի համար (հենց հատույթի կառուցման համաձայն) ունենք՝*

$$\alpha^{b} < \gamma < \alpha^{b'}.$$

Հետևաբար՝

$$\alpha^{\beta} = \gamma \quad \text{և} \quad \beta = \log_{\alpha} \gamma,$$

որով և ապացուցվում է լոգարիթմի գոյությունը։

13. Հատվածների չափումը: *Ռացիոնալ թվերի բազմության սահմաններում մնալով, բոլոր հատվածները երկարությամբ օժտելու անհնարինությունը նույնպես շատ կարևոր առիթ է եղել իռացիոնալ թվերի մուծման համար։ Այժմ ցույց տանք, որ թվային բազմության՝ վերը կատարված ընդլայնումը բավական է հ ա տ վ ա ծ ն ե ր ի չ ա փ մ ա ն խ ն դ ի ր ը լուծելու համար։*

Ամենից առաջ ձևակերպենք այդ խնդիրն՝ ինքը։

Պահանջվում է յուրաքանչյուր A ուղղագիծ հատվածի հետ կապել մի որոշ $l(A)$ իրական դրական թիվ (որն անվանելու ենք «A հատվածի երկարություն») այնպե՛ս, որպեսզի՝

1) մի որոշ նախապես ընտրած E հատված («երկարության ստուգման նմուշ», էտալոն») ունենա 1 երկարություն՝ $l(E) = 1$,

2) հավասար հատվածները ունենան միևնույն երկարությունը,

3) հատվածները գումարելիս գումարի երկարությունը միշտ հավասար լինի գումարվող հատվածների երկարությունների գումարին՝

$$l(A + B) = l(A) + l(B)$$

[«գումարականության» («ադիտիվության») հատկություն]։

Առաջադրված պայմանները բերում են խնդրի միարժեք լուծման։ 2) և 3) պայմաններից հետևում է, որ էտալոնի q*-րդ մասը պետք է ունենա* $\frac{1}{q}$ *երկարություն, իսկ եթե այդ մասն իբրև գումարելի կրկնված է* p *անգամ, ապա ստացված հատվածը, 3) հատկության շնորհիվ, պետք է ունենա* $\frac{p}{q}$ *երկարություն։ Այսպիսով, եթե* A *հատվածը հ ա մ ա չ ա փ ե լ ի է երկարության* E *էտալոնի հետ և* A *ու* E *հատվածների ընդհանուր չափը նրանց մեջ տեղավորվում է համապատասխանաբար* p *և* q *անգամ, ապա անհրաժեշտաբար՝*

$$l(A) = \frac{p}{q},$$

Հեշտ է տեսնել, որ այդ թիվը կախված չէ վերցրած ընդհանուր չափից, և որ, եթե էտալոնի հետ համաչափելի հատվածներին վերագրենք հենց այդ կանոնով ստացվող ռացիոնալ երկարությունները, ապա այդ հատվածների համար չափման խնդիրը լրիվին լուծված կլինի։

Դիմելով ընդհանուր դեպքին, նկատենք, որ եթե A հատվածը մեծ է B հատվածից, այնպես որ $A = B + C$, որտեղ C-ն նույնպես մի որոշ հատված է, ապա 3) հատկության շնորհիվ պետք է լինի՝

$$l(A) = l(B) + l(C),$$

և, քանի որ $l(C) > 0$, ապա $l(A) > l(B)$։ Այսպես, ուրեմն, անհավասար հատվածները պետք է ունենան անհավասար երկարություններ, այն է՝ մեծ հատվածը պետք է ունենա մեծ երկարություն։

Քանի որ յուրաքանչյուր $\frac{p}{q}$ դրական ռացիոնալ թիվ հանդիսանում է երկարության E էտալոնի հետ համաչափելի մի որոշ հատվածի երկարություն, ապա մեր ասածից, ի միջի այլոց, պարզ հետևում է, որ էտալոնի հետ անհամաչափելի ոչ մի հատված չի կարող ռացիոնալ երկարություն ունենալ։

Այժմ ենթադրենք, թե Σ-ն E էտալոնի հետ անհամաչափելի հատված է։ Կգտնվեն անթիվ բազմությամբ S և S′ հատվածներ, որոնք համաչափելի են E-ի հետ և համապատասխանաբար մեծ են կամ փոքր Σ-ից։ Եթե նրանց երկարությունները նշանակենք s և s′՝ $l(S) = s$, $l(S') = s'$, ապա որոնելի $l(\Sigma)$ երկարությունը պետք է բավարարի հետևյալ անհավասարություններին՝

$$s < l(\Sigma) < s'^{*}.$$

Եթե բոլոր ռացիոնալ թվերը տրոհենք երկու S և S′ դասերի այնպես, որ S-ի մեջ ընկնեն բոլոր s թվերը, ինչպես նաև բոլոր բացասական թվերն ու 0-ն, իսկ S′ դասի մեջ՝ s′ թվերը, ապա կստանանք հատույթ ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ։ Քանի որ, ակներևաբար, ստորին դասի մեջ չկա ամենամեծ թիվ, իսկ վերին դասի մեջ չկա ամենափոքրը, ապա այդ հատույթով որոշվում է մի σ իռացիոնալ թիվ, որը կլինի $s < \sigma < s'$ անհավասարություններին բավարարող միակ իրական թիվը։ Հենց այդ σ թիվն էլ անհրաժեշտ է ընդունել իբրև $l(\Sigma)$ երկարություն։

Այժմ ենթադրենք, թե E-ի հետ համաչափելի և անհամաչափելի բոլոր հատվածներին, մատնանշված կանոններով, վերագրված են որոշ երկարություններ։ Նրանց համար 1) և 2) պայմանների բավարարվելն ակներև է։ 3) հատկության բավարարվելը ցույց տալու համար վերցնենք P և Σ երկու հատվածներ, որոնց երկարություններն են՝

$$\rho = l(P), \quad \sigma = l(\Sigma),$$

և նրանց $T = P + \Sigma$ գումարը, որի երկարությունը նշանակենք $\tau = l(T)$։ Վերցնելով r, r', s, s' կամայական ռացիոնալ դրական թվերն այնպես, որպեսզի՝

$$r < \rho < r', \quad s < \sigma < s',$$

---

* Հասկանալի է, որ E-ի հետ համաչափելի Σ հատվածի երկարության համար նույնպես բավարարվում են այդ անհավասարությունները։

կառուցենք R, R′, S, S′ *հատվածները, որոնց համար իբրև երկարություններ ծառայում են հենց այդ թվերը։* R + S *հատվածը, որի երկարությունն է* r + s *թիվը, փոքր կլինի* T *հատվածից, իսկ* R′ + S′ *հատվածը, որի երկարությունն է* r′ + s′ *թիվը, մեծ կլինի* T *հատվածից։ Այդ պատճառով էլ՝*

$$r + s < \tau < r' + s'.$$

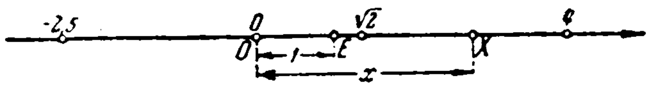
Սակայն, [7], r + s *տեսքի թվերի** *և* r′ + s′ *տեսքի թվերի միջև գտնվող միակ իրական թիվը* $\rho + \sigma$ *գումարն է։ Հետևաբար՝*

$$\tau = \rho + \sigma,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

«Ադիտիվության հատկության» տարածումը ցանկացած վերջավոր թվով գումարելիների դեպքի վրա կատարվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։

Եթե առանցքի (ուղղությամբ օժտված ուղիղի) վրա (գծ. 1) ընտրենք O *սկզբնակետը և* OE *երկարության էտալոնը, ապա այդ ուղիղի յուրաքանչյուր* X *կետին համապատասխանում է մի որոշակի իրական թիվ՝ նրա* x *աբսցիսը, որը հավասար է* OX *հատվածի երկարությանը, երբ* X *կետը գտնվում է* O *կետից դեպի դրական ուղղությունը, կամ այդ երկարությանը՝ վերցրած մինուս նշանով, երբ դասավորությունը հակառակն է։*



Գծ. 1.

Բնականաբար հարց է ծագում, թե արդյոք հակադարձը նույնպե՞ս ճիշտ կլինի, այսինքն՝ յուրաքանչյուր x իրական թիվ համապատասխանո՞ւմ է արդյոք ուղիղի մի որոշ կետի։ *Այդ հարցը երկրաչափության մեջ լուծվում է դրական իմաստով ուղիղի անընդհատության աքսիոմայի օգնությամբ, որն ուղիղի, որպես կետերի բազմության, համար հաստատում է՝ իրական թվերի բազմության անընդհատությանը* [n° 5] *նման մի հատկություն։*

Այսպիսով, բոլոր իրական թվերի և ուղղությամբ օժտված ուղիղի (առանցքի) բոլոր կետերի միջև կարելի է հաստատել փոխադարձաբար միարժեք համապատասխանություն։ Իրական թվերը կարելի է պատկերացնել առանցքի վրա գտնվող կետերով, որի պատճառով էլ այդ առանցքն անվանում են թվային առանցք։ Մենք առաջիկայում մշտապես օգտվելու ենք այդպիսի պատկերացումից։

---

* r *և* s *թվերը դրական վերցնելն, անշուշտ, էական չէ։*

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԳԱՂԱՓԱՐԸ

14. Փոփոխական մեծություն: *Մարդը, բնության երևույթները հետազոտելիս և իր պրակտիկ գործունեության ընթացքում, հանդիպում է բազմաթիվ զանազան տեսակի ֆիզիկական մեծությունների. այդպիսիք են ժամանակը, երկարությունը, ծավալը, արագությունը, զանգվածը, ուժը և այլն։ Դրանցից յուրաքանչյուրը, կախված այն խնդրի պայմաններից, որտեղ նա դիտարկվում է, ընդունում է կամ տարբեր արժեքներ, կամ միայն մեկ արժեք։ Առաջին դեպքում մենք գործ ունենք փոփոխական մեծության հետ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ հաստատուն մեծության հետ։*

Եթե չափման որոշ միավոր ընտրենք (ինչպես մենք այդ արեցինք, օրինակ, n° 13-ում, երկարության մասին խոսելիս), մեծության յուրաքանչյուր արժեքը կարելի է թվով արտահայտել։ Մաթեմատիկան սովորաբար վերանում է դիտարկելի մեծությունների ֆիզիկական իմաստից, հետաքրքրվելով նրանց լոկ թվային արժեքներով։ Վերանալու, աբստրահվելու այդ օրինաչափ պրոցեսի մասին ահա թե ինչ է ասում Ֆ. Էնգելսը։ Նշելով, որ «մաթեմատիկայի առարկան իրական աշխարհի տարածական ձևերն ու քանակական հարաբերություններն են», Էնգելսն այնուհետև շարունակում է՝ «բայց որպեսզի ի վիճակի լինենք այդ ձևերն ու հարաբերությունները մաքուր սեսքով հետազոտել, անհրաժեշտ է դրանք բոլորովին անջատել իրենց բովանդակությունից, վերջինս մի կողմ թողնելով իբրև ինչ որ կարևորություն չունեցող. այդպիսի ճանապարհով մենք ստանում ենք կետեր, որոնք զուրկ են չափումներից, գծեր, որոնք զուրկ են հաստությունից ու լայնությունից, զանազան a-եր ու b-եր, x-եր ու y-ներ, հաստատուն ու փոփոխական մեծություններ...»։*

---

* Ф. Энгельс, „Анти-Дюринг„, *1952 թ., էջ 37։*

Փոփոխական մեծության մուծումը մաթեմատիկայի մեջ,— այդ սովորաբար կապում են Դեկարտի անվան հետ,—վիթխարի կարևորություն ունեցող իրադարձություն է եղել։ Մաթեմատիկան հնարավորություն է ստացել ոչ միայն քանակական հարաբերություններ հաստատելու հաստատուն մեծությունների միջև, այլև ուսումնասիրելու բնության մեջ տեղի ունեցող պրոցեսները, որոնցում մասնակցում են նաև փոփոխական մեծություններ։ Ֆ. Էնգելսն* այդ հանգամանքն ընդգծում է հետևյալ բառերով՝

«Մաթեմատիկայում շրջադարձային կետ հանդիսացավ դեկարտյան փոփոխական մեծությունը։ Դրա շնորհիվ մաթեմատիկայի մեջ մուտք գործեցին շարժումն ու դիալեկտիկան և հենց դրա շնորհիվ էլ անհապաղ անհրաժեշտ դարձավ դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվը...»

15. Փոփոխական մեծության փոփոխման տիրույթը։ Մաթեմատիկական անալիզում,— եթե միայն խոսքը նրա կիրառությունների մասին չէ,—փոփոխական մեծություն (կամ կարճ՝ փոփոխական) ասելով հասկանում են վերացական կամ թվային մեծություն։ Այն նշանակում են որևէ պայմանանշանով (տառով, օրինակ՝ x), որին թվային արժեքներ են վերագրվում։ x փոփոխականը տրված է համարվում, եթե նշվում է այն արժեքների $X=\{x\}$ բազմությունը, որոնք նա կարող է ընդունել։ Հենց այդ բազմությունն էլ կոչվում է x փոփոխականի փոփոխման տիրույթ։ Ընդհանրապես, փոփոխականի փոփոխման տիրույթ կարող է ծառայել ամեն մի թվային բազմություն։

Հաստատուն մեծությունը (կարճ՝ հաստատունը) հարմար է դիտարկել որպես փոփոխականի մասնավոր դեպք. այդ համապատասխանում է այն ենթադրությանը, որ $X=\{x\}$ բազմությունը կազմված է մեկ էլեմենտից։

Մենք n° 13-ում տեսանք, որ թվերը երկրաչափորեն մեկնաբանվում են որպես կետեր առանցքի վրա։ x փոփոխականի փոփոխման X տիրույթն այդ առանցքի վրա պատկերվում է որպես կետերի մի որոշ բազմություն։ Այդ առումով, հենց փոփոխականի թվային արժեքները նույնպես կետեր են անվանում։

Հաճախ կարիք է լինում գործ ունենալ այնպիսի n փոփոխականի հետ, որն ընդունում է ամեն հնարավոր բնական արժեքներ՝

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100,\ 101,\ \cdots$$

այս փոփոխականի փոփոխման տիրույթը, այսինքն՝ բոլոր բնական թվերի $\{n\}$ բազմությունը մենք միշտ նշանակելու ենք N։

---

* Ф. Энгельс, „Диалектика природы", 1952, էջ 206։

Սակայն, մաթեմատիկական անալիզում սովորաբար ուսումնասիրում են այնպիսի փոփոխականներ, որոնք, ինչպես ասում են, անընդհատ կամ անընդմեջ են փոփոխվում. այդպիսի փոփոխականների նախակերպարները ֆիզիկական մեծություններն են՝ ժամանակը, շարժվող կետի անցած ճանապարհը և այլն: Այդպիսի փոփոխականի փոփոխման տիրույթ է ծառայում թվային միջակայքը: Ամենից հաճախ այդ լինում է վերջավոր միջակայք, որը սահմանափակված է երկու a և b ($a < b$) իրական թվերով՝ նրա ծայրակետերով, որոնք կարող են մտնել միջակայքի կազմի մեջ կամ ոչ: Դրանից կախված, մենք տարբերելու ենք՝

փակ միջակայք՝ $[a, b]$, $a \leqslant x \leqslant b$ (երկու ծայրերը ներառյալ),

կիսաբաց միջակայքեր՝ $\begin{cases} (a, b], & a < x \leqslant b \\ [a, b), & a \leqslant x < b \end{cases}$ (միայն մեկ ծայրը ներառյալ)

բաց միջակայք՝ (a, b), $a < x < b$ (երկու ծայրերը բացառյալ)

Բոլոր դեպքերում $b - a$ թիվը կոչվում է միջակայքի երկարություն:

Թվային միջակայքի երկրաչափական պատկերը, ինչպես հեշտ է տեսնել, թվային առանցքի հատվածն է, ընդ որում, նայած միջակայքի տեսակին, հատվածի ծայրակետերը նույնպես կարող են համարվել հատվածի կազմում կամ ոչ:

Հարկ է լինում դիտարկել նաև անվերջ միջակայքեր, որոնց համար որպես ծայրերից մեկը կամ երկուսն էլ ծառայում են $-\infty$, $+\infty$ «անիսկական» թվերը: Այդպիսի միջակայքերի նշանակումները նախորդներին նման են: Օրինակի համար, $(-\infty, +\infty)$-ը՝ բոլոր իրական թվերի բազմությունն է, $(a, +\infty)$-ը՝ $a < x$ անհավասարությունը բավարարող բոլոր x թվերի բազմությունն է, $(-\infty, b]$ միջակայքը որոշվում է $x \leqslant b$ անհավասարությունով: Երկրաչափորեն անվերջ միջակայքերը պատկերացվում են դեպի երկու կողմերն անվերջ շարունակվող ուղիղով (ամբողջ թվային առանցքով) կամ ճառագայթով:

16. Ֆունկցիոնալ կախում փոփոխականների միջև: Օրինակներ: Մաթեմատիկական անալիզի մեջ ուսումնասիրության գլխավոր առարկան, սակայն, հանդիսանում է ոչ թե մեկ փոփոխականի ինքնուրույն փոփոխությունը, այլ կախումն երկու կամ մի քանի փոփոխականների միջև՝ նրանց համատեղ փոփոխման ժամանակ: Այստեղ մենք կսահմանափակվենք պարզագույն դեպքով, երբ ունենք երկու փոփոխական:

Գիտության ու կյանքի տարբեր բնագավառներում,—հենց մաթեմատիկայում, ֆիզիկայում, տեխնիկայում,— ընթերցողը հաճախ է հանդիպել այդպիսի համատեղ փոփոխվող փոփոխականների:

Նրանք միաժամանակ չեն կարող ընդունել ցանկացած արժեքներ (իրենց փոփոխման տիրույթներից)․ եթե նրանցից մեկին (անկախ փոփոխականին) տրված է որոշակի արժեք, ապա դրանով հենց որոշվում է նաև մյուսի (կախյալ փոփոխականի կամ ֆունկցիայի) արժեքը։ Բերենք մի քանի օրինակներ։

1) Շրջանի Q մակերեսը նրա R շառավղի ֆունկցիա է․ նրա արժեքը կարելի է հաշվել շառավղի տված արժեքով՝

$$Q = \pi R^2$$

հայտնի բանաձևի օգնությամբ։

2) Մանր նյութական կետի ազատ անկման դեպքում, երբ բացակայում է դիմադրությունը, շարժման սկզբից հաշված t ժամանակը (վայրկյաններով) և այդ ժամանակամիջոցում անցած s ճանապարհը (մետրերով) կապված են՝

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

հավասարումով, որտեղ $g = 9{,}81\,\frac{\text{մետր}}{\text{վրկ}^2}$ հանդիսանում է ծանրության ուժի արագացումը։ Այդ հավասարումից որոշվում է s-ի այն արժեքը, որը համապատասխանում է ժամանակի t պահին․ s ճանապարհը հանդիսանում է անցած ժամանակի ֆունկցիա։

3) Դիտարկենք գլանի մխոցի տակ գտնվող իդեալական գազի որոշ զանգված։ Ենթադրելով, որ ջերմաստիճանը պահվում է անփոփոխ, գազի այդ զանգվածի v (լիտր) ծավալը և p (մթնոլորտ) ճնշումը ենթարկվում են Բոյլ-Մարիոտի օրենքին՝

$$pv = c = \text{const}.$$

Եթե v-ն կամավոր կերպով փոփոխենք, ապա p-ն, որպես v-ի ֆունկցիա, ամեն անգամ միարժեք կերպով կորոշվի

$$p = \frac{c}{v}$$

բանաձևով։

Այստեղ ևս նկատենք, որ դիտարկվող երկու փոփոխականներից անկախ փոփոխականի ընտրությունը երբեմն էական նշանակություն չունի կամ արվում է պարզ հարմարության նկատառումներով, սակայն մեծ մասամբ այդ թելադրվում է կատարվող հետազոտության նպատակադրումով։ Այսպես, վերջին օրինակում մեզ կարող էր հետաքրքրել v ծավալի կախումը p փոփոխական արտաքին ճնշումից (որ հաղորդվում է գազին). այդպիսի դեպքում այդ կախումը բնական կլիներ գրել

$$v=\frac{c}{p}$$

տեսքով, p-ն համարելով անկախ փոփոխական, իսկ v-ն՝ p-ի ֆունկցիա։

Ֆունկցիոնալ կախումը որոշ դեպքերում ժամանակի ընթացքում տեղի ունեցող իրական պրոցես է բնութագրում, հատկապես այնպիսի դեպքերում, երբ, ինչպես 2) օրինակում էր, ժամանակն ինքն անկախ փոփոխականն է։ Սակայն սխալ կլիներ կարծել, թե փոփոխականների փոփոխությունը միշտ կապված է ժամանակի ընթացքի հետ։ 1) օրինակում, ուսումնասիրելով շրջանի մակերեսի կախումը իր շառավղից, մենք ժամանակի ընթացքում փոփոխվող ոչ մի պրոցես չունեինք։

17. Ֆունկցիայի գաղափարի սահմանումը: Այժմ վերանանք, ինչպես սովորաբար, դիտարկվող մեծությունների ֆիզիկական իմաստից և տանք մաթեմատիկական անալիզի հիմնական գաղափարներից մեկի՝ ֆունկցիայի գաղափարի ընդհանուր ճշգրիտ սահմանումը։

Դիցուք տրված են երկու փոփոխականներ՝ x և y, որոնց փոփոխման տիրույթներն են X և Y։ Ենթադրենք, թե խնդրի պայմաններով x փոփոխականին կարելի է վերագրել X տիրույթից կամայական արժեք՝ առանց որևէ սահմանափակման։ Այդ դեպքում y փոփոխականը կոչվում է x փոփոխականի ֆունկցիա նրա փոփոխման X տիրույթում, եթե x-ի՝ X-ից վերցրած յուրաքանչյուր արժեքի որևէ կանոնով կամ օրենքով համապատասխանեցվում է **y**-ի մի որոշակի արժեք Y-ից:

x անկախ փոփոխականը կոչվում է նաև ֆունկցիայի արգումենտ։

Այս սահմանման մեջ էական են երկու հանգամանք. առաջինը՝ x արգումենտի փոփոխման X տիրույթը ցույց տալը (վերջինս անվանում են նաև ֆունկցիայի որոշման տիրույթ) և երկրորդը՝ x և y փոփոխականների արժեքների համապատասխանության կանոնը կամ օրենքը հաստատելը։ (y ֆունկցիայի փոփոխման Y տիրույթը սովորաբար ցույց չի տրվում, քանի որ համապատասխանեցման օրենքն ինքնին արդեն որոշում է ֆունկցիայի ստանալիք արժեքների բազմությունը։)

Կարելի է ֆունկցիայի գաղափարը սահմանելիս կանգնել ավելի ընդհանուր տեսակետի վրա, թույլատրելով, որ X-ից վերցրած յուրաքանչյուր x արժեքին համապատասխանի y-ի ոչ թե մեկ, այլ մի քանի արժեք (նույնիսկ անվերջ բազմությամբ արժեքներ)։ Նման դեպքերում ֆունկցիան անվանում են բազմարժեք, ի տարբերություն վերևում սահմանված միարժեք ֆունկցիայից։ Ի միջի այլոց, անալիզի դասընթացում, որը կանգնած է իրական փոփոխականի տեսակետի վրա, խուսափում են բազմարժեք ֆունկցիաներից. հետագայում, ֆունկցիայի մասին խոսելիս, եթե հակառակը չի ասվի, մենք միշտ կհասկանանք միարժեք ֆունկցիա։

Նշելու համար այն փաստը, որ y-ը x-ի ֆունկցիա է, գրում են՝

$$y=f(x),\quad y=\varphi(x),\quad y=F(x) \text{ և այլն*։}$$

f, φ, F,... տառերը բնութագրում են հենց այն կանոնը, որով ստացվում է y-ի՝ տված x-ին համապատասխանող արժեքը։ Այդ պատճառով, երբ միաժամանակ ուսումնասիրվում են միևնույն x արգումենտից կախված տարբեր ֆունկցիաներ, որոնք x-ի հետ կապված են համապատասխանության տարբեր օրենքներով, այդ ֆունկցիաները չպետք է նշանակել միևնույն տառով։

Չնայած հենց «էֆ» տառն է (տարբեր այբուբեններում) կապված «ֆունկցիա» բառի հետ, սակայն ֆունկցիոնալ կախումը նշելու համար, հասկանալի է, կարելի է օգտագործել նաև ամեն մի այլ տառ. երբեմն նույնիսկ կրկնում են միևնույն y տառը՝ $y=y(x)$։

Որոշ դեպքերում արգումենտը գրում են ֆունկցիայի մոտ նշանիկի տեսքով, օրինակ՝ y_x։

Եթե, դիտարկելով, ասենք՝ $y=f(x)$, ֆունկցիան, մենք ցանկանում ենք նշել նրա այն մասնավոր արժեքը, որը համապատասխանում է x-ի ընտրված x_0 մասնավոր արժեքին, ապա այդ արժեքը նշանակելու համար օգտագործում են $f(x_0)$ սիմվոլը։ Օրինակ, եթե

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad g(t)=\frac{10}{t},\qquad h(u)=\sqrt{1-u^2},\dots,$$

ապա $f(1)$-ը նշանակում է $f(x)$ ֆունկցիայի թվային արժեքը $x=1$ դեպքում, այսինքն՝ պարզապես $\frac{1}{2}$ թիվը։ Նմանապես, $g(5)$-ը նշանակում է 2 թիվը, $h\left(\frac{3}{5}\right)$-ը նշանակում է $\frac{4}{5}$ թիվը, և այլն։

---

* Այդ գրառումները կարդում են այսպես՝ «իգրեկը հավասար է էֆ իքսի», «իգրեկը հավասար է ֆի իքսի» և այլն։

Այժմ անցնենք փոփոխականների արժեքների համապատասխանեցման կանոնին կամ օրենքին, որը ֆունկցիոնալ կախման գաղափարի էությունն է կազմում։ Այդ կանոնը կարող է լինել ամենատարբեր բնույթի, որքանով որ այն ոչնչով չի սահմանափակվել։

Ամենից պարզ և բնական է թվում այդ կանոնի իրականացումն անալիտիկ արտահայտության կամ բանաձևի տեսքով, որը ցույց է տալիս այն օպերացիաները կամ գործողությունները, որոնք պետք է կատարել հաստատուն թվերի և x-ի արժեքի հետ՝ y-ի համապատասխան արժեքն ստանալու համար։ Ֆունկցիան տալու այդ անալիտիկ եղանակը մաթեմատիկական անալիզի համար ամենակարևորն է (մենք դրան դեռ կանդրադառնանք հետևյալ n°-ում)։ Դրա հետ ընթերցողը ամենից լավ է ծանոթ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացից. վերջապես, n° 16-ում բերված օրինակներում մենք օգտվեցինք հենց անալիտիկ եղանակից։

Սակայն սխալ կլիներ կարծել, թե այդ՝ ֆունկցիան տալու միակ եղանակն է։ Հենց մաթեմատիկայի մեջ բացառիկ չեն այն դեպքերը, երբ ֆունկցիան որոշվում է առանց բանաձևի օգնության։ Այդպիսին է, օրինակ, $E(x)$ ֆունկցիան՝ «x թվի ամբողջ մասը*»։ Չնայած $E(x)$ արտահայտության համար ոչ մի բանաձև մենք չունենք, բայց հեշտ է հասկանալ, որ՝

$$E(1)=1,\ E(2{,}5)=2,\ E(\sqrt{13})=3,\ E(-\pi)=-4,\ \text{և այլն։}$$

Բնական գիտությունների և տեխնիկայի մեջ մեծությունների միջև կախումն հաճախ որոշվում է փորձնականորեն կամ դիտումների միջոցով։ Օրինակ, եթե ջուրը ենթարկենք կամավորապես ընտրած P (մթնոլ.) ճնշման, ապա փորձի միջոցով կարելի է որոշել ջրի եռման համապատասխան $\theta°$(C) ջերմաստիճանը. θ-ն p-ի ֆունկցիա է։ Սակայն այդ ֆունկցիոնալ կապը տրվում է ոչ թե բանաձևով, այլ միայն աղյուսակով, որտեղ պարզապես զուգադրված են փորձից ստացված տվյալները։ Ֆունկցիայի տրման աղյուսակային եղանակի օրինակներ կարելի է գտնել յուրաքանչյուր տեխնիկական տեղեկագրքում։ Դրա անհարմարությունն այն է, որ ֆունկցիայի արժեքները տրվում են արգումենտի միայն մի քանի արժեքների համար։

Վերջապես, հիշեցնենք նաև, որ որոշ դեպքերում (ինքնագիր գործիքների օգնությամբ) ֆիզիկական մեծությունների ֆունկցիոնալ առըն-

* Կամ, ավելի ճշգրիտ՝ x-ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը (E-ն սկզբնատառն է ֆրանսերեն entier բառի, որ նշանակում է «ամբողջ»)։

չությունը տրվում է անմիջականորեն *գրաֆիկի* միջոցով։ Օրինակ, «ինդիկատորական դիագրաման», որը գծվում է ինդիկատորի միջոցով, տալիս է գոլորշու V ծավալի և p ճնշման կապն աշխատող շոգեմեքենայի գլանի մեջ. «բարոգրամ»-ը, որը գծվում է բարոգրաֆով, ներկայացնում է մթնոլորտային ճնշման օրական ընթացքը, և այլն։ Հասկանալի է, որ ֆունկցիայի տրման այս եղանակը հնարավորություն է տալիս ֆունկցիայի արժեքները հաշվելու միայն մոտավորապես։

Մենք մանրամասն կանգ չենք առնի ֆունկցիոնալ առնչությունն աղյուսակի կամ գրաֆիկի միջոցով տալու եղանակների վրա, որովհետև մաթեմատիկական անալիզի մեջ այդ եղանակից օգտվելու հարկ չի լինում։

18. Ֆունկցիայի տրման անալիտիկ եղանակը։ Ֆունկցիան *անալիտիկ արտահայտության* կամ *բանաձևի* միջոցով տալու եղանակի վերաբերյալ անենք մի շարք պարզաբանիչ դիտողություններ, քանի որ այդ եղանակը բացառիկ կարևոր դեր ունի մաթեմատիկական անալիզում։

1° Ամենից առաջ՝ ինչպիսի՞ *անալիտիկ օպերացիաներ* կամ *գործողություններ* կարող են մտնել այդ բանաձևերի մեջ։ Առաջին հերթին այստեղ հասկացվում են տարրական հանրահաշվի և եռանկյունաչափության մեջ ուսումնասիրված օպերացիաները, այն է՝ թվաբանական գործողությունները, աստիճան բարձրացնելը (և արմատ հանելը), լոգարիթմելը, անկյուններից՝ նրանց եռանկյունաչափական մեծություններին անցնելը և հակադարձը [տե՛ս ստորև § 2]։ Սակայն, և կարևոր է ընդգծել այդ, մեր գիտելիքներն անալիզից զարգացնելու հետ միասին, այդ օպերացիաներին կավելանան նաև նոր օպերացիաներ. այդպիսին է առաջին հերթին սահմանային անցումը, որին նվիրված է III գլուխը։

Այսպիսով, «անալիտիկ արտահայտություն» կամ «բանաձև» տերմինի լրիվ բովանդակությունը կբացահայտվի միայն աստիճանաբար։

2° Երկրորդ դիտողությունը վերաբերում է անալիտիկ արտահայտության կամ բանաձևի միջոցով ֆունկցիայի *որոշման տիրույթին*։

x արգումենտը պարունակող յուրաքանչյուր անալիտիկ արտահայտություն ունի, այսպես ասած, կիրառման *բնական* տիրույթ. այդ՝ x-ի *բոլոր* այն արժեքների բազմությունն է, որոնց համար այդ արտահայտությունն իմաստ ունի, այսինքն՝ ունի միանգամայն որոշակի, վերջավոր, իրական արժեք։ Վերջինս պարզաբանենք պարզ օրինակներով։

Այսպես, $\frac{1}{1+x^2}$ արտահայտության համար այդպիսի տիրույթ կլինի իրական թվերի ողջ բազմությունը։ $\sqrt{1-x^2}$ արտահայտության համար այդ տիրույթը բերվում է $[-1,1]$ փակ միջակայքին, որից դուրս նրա արժեքները դադարում են իրական լինել։ Ընդհակառակը, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ արտահայտության համար որպես կիրառման բնական տիրույթ պետք է վերցնել $(-1,1)$ բաց միջակայքը, որովհետև այդ միջակայքի ծայրերում հայտարարը դառնում է 0։ Երբեմն, այն արժեքների տիրույթը, որոնց համար տրված արտահայտությունն իմաստ ունի, բաղկացած է անջատված միջակայքերից։ Օրինակ, $\sqrt{x^2-1}$-ի համար դրանք կլինեն $(-\infty, -1]$ և $[1, +\infty)$ միջակայքերը, իսկ $\frac{1}{x^2-1}$-ի համար՝ $(-\infty, -1)$, $(-1,1)$ և $(1, +\infty)$ միջակայքերը, և այլն։*

Հետագա շարադրման ժամանակ հարկավոր կլինի դիտարկել ինչպես ավելի բարդ, այնպես և ավելի ընդհանուր անալիտիկ արտահայտություններ, և հաճախ պիտի զբաղվենք այդպիսի արտահայտությամբ տրված ֆունկցիայի հատկությունների ուսումնասիրությամբ այն ամբողջ տիրույթում, որտեղ այդ արտահայտությունն իմաստ ունի, այսինքն՝ պիտի զբաղվենք հենց անալիտիկ ապարատի ուսումնասիրությամբ։

Սակայն հնարավոր է և այլ դրություն, որի վրա հարկ ենք համարում նախապես հրավիրել ընթերցողի ուշադրությունը։ Ենթադրենք, թե որևէ կոնկրետ խնդիր, որի մեջ x փոփոխականն ըստ խնդրի էության սահմանափակված է փոփոխման X տիրույթով, բերվել է մի $f(x)$ ֆունկցիայի դիտարկման, որն ունի անալիտիկ արտահայտություն։ Թեկուզ և կարող է պատահել, որ այդ արտահայտությունն իմաստ ունենա նաև X տիրույթից դուրս, *սակայն, հասկանալի է, որ նրա սահմաններից դուրս գալ այնուամենայնիվ չի կարելի։ Այստեղ անալիտիկ արտահայտությունը ունի ենթակա, օժանդակ դեր։*

Օրինակ, եթե, ուսումնասիրելով երկրի մակերևույթից h բարձրության վրա գտնվող ծանր նյութական կետի ազատ անկումը, մենք դիմում ենք

$$s=\frac{gt^2}{2}$$

** Մեզ համար, հասկանալի է, հետաքրքրություն չեն ներկայացնում այնպիսի արտահայտություններ, որոնք x-ի ոչ մի արժեքի համար ընդհանրապես իմաստ չունեն։*

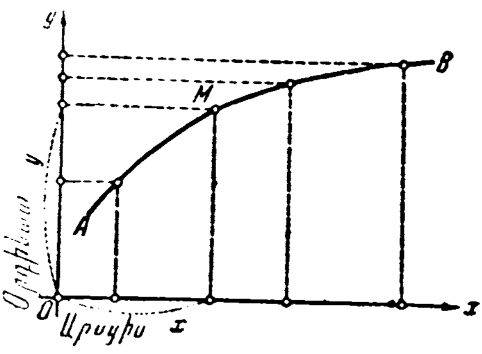
բանաձևին [16,2], ապա անիմաստ կլիներ դիտարկել t-ի բացասական արժեքները, կամ այն արժեքները, որոնք մեծ են $T=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ *արժեքից, որովհետև, ինչպես հեշտ է տեսնել, t=T պահին կետն ընկնում է գետնին։ Եվ այդ՝ չնայած այն հանգամանքին, որ* $\frac{gt^2}{2}$ *արտահայտությունն իմաստ ունի t-ի բոլոր իրական արժեքների համար։*

3°. *Կարող է պատահել, որ ֆունկցիան արգումենտի բոլոր արժեքների համար միևնույն բանաձևի միջոցով չորոշվի, այլ որոշ արժեքների համար մի բանաձևի, իսկ այլ արժեքների համար՝ մի այլ բանաձևի միջոցով։ Որպես այդպիսի ֆունկցիայի օրինակ կարող է ծառայել հետևյալ երեք բանաձևերի միջոցով* $(-\infty, +\infty)$ *միջակայքում որոշվող ֆունկցիան՝*

$f(x)=1$, *եթե* $|x|>1$ (*այսինքն՝ եթե կամ* $x>1$, *կամ* $x<-1$),
$f(x)=-1$, *եթե* $|x|<1$ (*այսինքն՝ եթե* $-1<x<1$),
$f(x)=0$, *եթե* $x=\pm 1$։

Ի միջի այլոց չպետք է կարծել, թե սկզբունքային տարբերություն կա x-ի բոլոր արժեքների համար մեկ բանաձևով տված ֆունկցիայի և այն ֆունկցիայի միջև, որի որոշումն օգտագործում է մի քանի բանաձևեր։ Մի քանի բանաձևերով տրված ֆունկցիան, սովորաբար (իհարկե արտահայտությունների որոշ բարդացման գնով) կարող է տրվել նաև մեկ բանաձևով։ Մասնավորապես, այդ ճիշտ է վերը բերված ֆունկցիայի համար [տե՛ս n° 43,5]։ Հետագայում այդպիսի օրինակների մենք շատ կհանդիպենք։

19. Ֆունկցիայի գրաֆիկը։ *Թեպետև մաթեմատիկական անալիզում ֆունկցիաները գրաֆիկորեն չեն տրվում, սակայն ֆունկցիայի գրաֆիկական պատկերացմանը միշտ դիմում են։ Գրաֆիկի պարզ դիտողականությունն ու զննականությունը նրան դարձնում են ֆունկցիայի հատկությունները ուսումնասիրելու անփոխարինելի օժանդակ միջոց։*



Գծ. 2

Դիցուք, մի որոշ X միջակայքում տրված է $y=f(x)$

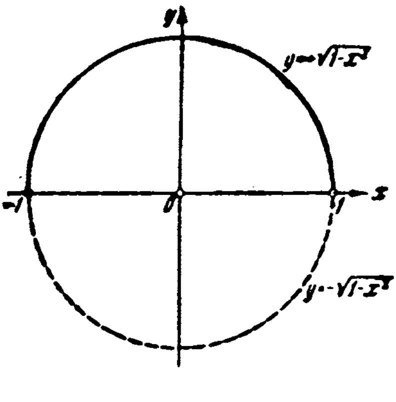
ֆունկցիան։ Հարթության վրա պատկերացնենք երկու փոխադարձաբար ուղղահայաց կոորդինատային առանցքներ՝ x-երի և y-ների առանցքները։ Դիտարկենք x-ի և y-ի մի զույգ համապատասխան արժեքներ, որտեղ x-ը վերցրած է X միջակայքից, իսկ $y=f(x)$. այդ զույգի պատկերը հարթության վրա կհանդիսանա $M(x, y)$ կետը, որի աբսցիսը x է, իսկ օրդինատը՝ y։ Երբ x փոփոխականը փոփոխվում է իր միջակայքի սահմաններում, այդ ժամանակ ստացվող բոլոր (x, y) կետերի համախումբը կազմում է ֆունկցիայի գրաֆիկը, որը և հանդիսանում է նրա երկրաչափական պատկերը։ Սովորաբար գրաֆիկըն իրենից մի կոր է ներկայացնում, ինչպես AB կորը գծ. 2-ում։

Այս դեպքում $y=f(x)$ հավասարումն անվանում են AB կորի հավասարում։

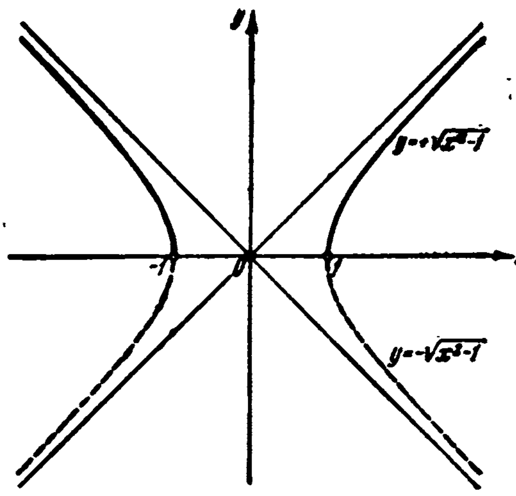
Օրինակ, 3-րդ և 4-րդ գծագրերի վրա ներկայացված են

$$y = \pm\sqrt{1-x^2} \quad (|x| \leqslant 1) \qquad \text{և} \qquad y = \pm\sqrt{x^2-1} \quad (|x| \geqslant 1)$$

ֆունկցիաների գրաֆիկները։ Ընթերցողը կնկատի, որ այդ գծագրերից



Գծ. 3.



Գծ. 4.

առաջինը շրջանագիծ է, իսկ երկրորդը՝ հավասարասրուն հիպերբոլ։ Ֆունկցիան գրաֆիկորեն պատկերացնելու շատ այլ օրինակներ ընթերցողը կգտնի մոտակա n°-երում։

Սովորաբար գրաֆիկը կառուցվում է կետերի միջոցով։ X մի-

չակայքից վերցնում են x*-ի մի շարք իրար մոտ գտնվող արժեքներ,* $y=f(x)$ *բանաձևով հաշվում են* y*-ի համապատասխան արժեքները՝*

$$\begin{array}{c|ccccc} x= & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \hline y= & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{array}$$

և գծագրի վրա նշում

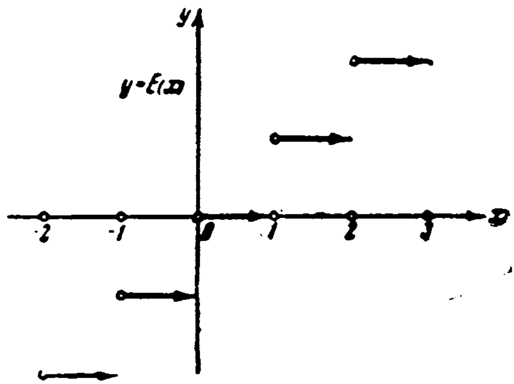
$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_3,y_3),\cdots,(x_n,y_n)$$

կետերը։

Ձեռքով կամ լեկալի միջոցով այդ կետերով անց են կացնում կոր, որը (իհարկե, միայն որոշ մոտավորությամբ) տալիս է որոնելի գրաֆիկը։ Որքան ավելի սահուն է գրաֆիկի ընթացքը և որքան ավելի խիտ են նրա վրա վերցրած կետերը, գծած կորն այնքան ավելի մեծ ճշգրտությամբ է պատկերում այդ գրաֆիկը։

Պետք է նկատել, որ չնայած միշտ կարելի է «պատկերացնել» ֆունկցիայի երկրաչափական պատկերը, բայց միշտ չէ, որ այդ պատկերը կլինի սովորական, ինտուիտիվ իմաստով կոր։

Օրինակ, կառուցենք $y=E(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը։ Քանի որ* $\cdots,[-2,-1),[-1,0),[0,1),[1,2),[2,3),\cdots$ *միջակայքերում ֆունկցիան պահպանում է* $\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ *հաստատուն արժեքներ, հետևապես, գրաֆիկը կազմված կլինի մի շարք իրարից անջատված հորիզոնական հատվածներից, որոնք զրկված են աջ ծայրակետերից (գծ. 5)*։*



Գծ. 5.

20. Բնական արգումենտի ֆունկցիաներ: *Մինչև այժմ մենք դիտարկում էինք բացառապես անընդհատ փոփոխվող արգումենտի ֆունկցիաների օրինակներ, երբ արգումենտի արժեքները լցնում էին մի անընդմեջ միջակայք։ Այժմ կանգ առնենք սկզբունքորեն ավելի պարզ (բայց ոչ պակաս կարևոր) դեպքի վրա, երբ* $f(n)$ *ֆունկցիայի* n *արգումենտն ընդունում է միայն բնական արժեքներ* N *բազմությունից։ Բնական արգումենտի*

---

* *Այդ հանգամանքը նշվում է սլաքներով, որոնք իրենց սուր ծայրերով ցույց են տալիս գրաֆիկին չպատկանող կետերը։*

ֆունկցիաները հետագա շարադրանքում հատուկ դեր են կատարելու:

Այդպիսի ֆունկցիան նշանակելիս հաճախ նահանջում են ֆունկցիաների նշանակման սովորական ձևից և $f(n)$ գրելու փոխարեն գրում են մի որևէ տառ՝ n ներիչով ներքևում, օրինակ՝ x_n: Եթե այդ ներիչը (որը, հիշե՛նք այդ, այստեղ անկախ փոփոխականն է) փոխարինենք կոնկրետ բնական թվով, օրինակ՝ 1, 23, 518,... թվերով, ապա x_1-ը, x_{23}-ը, x_{518}-ը..., կլինեն x_n ֆունկցիայի համապատասխան թվային արժեքները, ճիշտ այնպես, ինչպես $f(1)$-ը, $f(23)$-ը, $f(518)$-ը,... նշանակում էին $f(n)$ ֆունկցիայի թվային արժեքները:

Ընդհանուր սահմանման համաձայն, x_n ֆունկցիան համարվում է տրված, եթե հայտնի է այն կանոնը, որով կարելի է հաշվել նրա ցանկացած արժեքը, հենց որ նշվի n-ի արժեքը:

Սովորական դեպքն այն է, երբ x_n ֆունկցիան տրվում է այնպիսի բանաձևով, որը սահմանում է, թե ինչպիսի՞ անալիտիկ գործողություններ պետք է կատարել n փոփոխականի բնական արժեքների (և հաստատունների) հետ, որպեսզի ստանանք ֆունկցիայի համապատասխան արժեքը: Օրինակներ՝

$$x_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4}, \quad a_n = q^n, \quad y_n = \log n, \text{ և այլն:}$$

Սակայն, հասկանալի է, այստեղ դիտարկվող դեպքում նույնպես կարող է ֆունկցիան տրվել որևէ այլ կանոնով: Որպես օրինակ հիշենք «n թվի ֆակտորիալը»՝

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

ինչպես նաև $\tau(n)$ ֆունկցիան, որը ներկայացնում է n թվի բաժանարարների թիվը, կամ $\varphi(n)$ ֆունկցիան, որը ցույց է տալիս, թե 1, 2, 3,..., n թվերի շարքում n թվի հետ փոխադարձաբար պարզ քանի՞ թիվ կա: Չնայած այս ֆունկցիաները որոշող կանոնների յուրահատուկ բնույթին, նրանք հնարավորություն են տալիս ֆունկցիաների արժեքները հաշվել նույնպիսի որոշակիությամբ, ինչպես և բանաձևերը: Այսպես՝

$$\tau(10) = 4, \qquad \tau(12) = 6. \qquad \tau(16) = 5, \cdots$$

$$\varphi(10) = 4, \qquad \varphi(12) = 4, \qquad \varphi(16) = 8, \cdots$$

Եվս մի օրինակ. պատկերացնենք $\sqrt{2}$-ի տասնորդական մոտավորությունները (ասենք թե՝ պակասորդով) շարունակ աճող ճշգրտու-

թյամբ՝

$$1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ \ldots$$

Գիտենալով արմատները մոտավոր ճշգրտությամբ հաշվելու կանոնը, մենք իրավասու ենք լիովին որոշված համարելու այն ֆունկցիան, որը հավասար է մատնանշված արմատի մոտավոր արժեքին $\frac{1}{10^n}$-ի ճշգրտությամբ, չնայած այն բանին, որ այդ մոտավոր արժեքների համար մենք ընդհանուր արտահայտություն չունենք:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ընթերցողը շատ անգամ է հանդիպել բնական արգումենտի ֆունկցիաների: Օրինակ, եթե տրված է մի անվերջ երկրաչափական պրոգրեսիա՝

$$\div\!\!\div\ a,\ aq,\ aq^2, \cdots$$

ապա n բնական նշիչի ֆունկցիա կլինի այդ պրոգրեսիայի և՛ ընդհանուր անդամը՝

$$a_n = aq^{n-1},$$

և՛ առաջին n անդամների գումարը՝

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad (q \neq 1):$$

Շրջանագծի երկարությունն ու շրջանի մակերեսը որոշելու կապակցությամբ սովորաբար դիտարկում են շրջանագծին ներգծած այնպիսի կանոնավոր բազմանկյուններ, որոնք ստացվում են ներգծած վեցանկյունից՝ կողմերի թիվը հաջորդաբար կրկնապատկելով: Այդպիսի բազմանկյան կողմը, ապոթեման, պարագիծը և մակերեսը՝ բոլորը n բնական նշիչի ֆունկցիաներ են, եթե n-ի տակ հասկանանք պարզապես կրկնապատկման թիվը այդ պրոցեսում:

Պատմական տեղեկություններ: *«Ֆունկցիա» տերմինը երևացել է Լայբնիցի* մի աշխատանքում 1692 թ., հետո գործ է ածվել Յակոբ և Իոհան Բեռնուլի** եղբայրների կողմից՝ բնութագրելու համար զանազան հատվածներ, որոնք այս կամ այն կերպ կապված են մի որոշ կորի կետերի հետ: 1718 թ. Իոհան Բեռնուլին առաջին անգամ տվել է ֆունկցիայի այնպիսի սահմանում, որն ազատ է երկրաչա-*

---

* *Գոտֆրիդ Վիլհելմ Լայբնից (1646—1716)՝ գերմանացի ականավոր փիլիսոփա և մաթեմատիկոս: Նա Նյուտոնի հետ միասին բաժանում է դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի ստեղծողի վաստակը (տե՛ս պատմական ակնարկը XIV գլխում):*

** *Յակոբ Բեռնուլին (1654—1705) և Իոհան Բեռնուլին (1667—1748) մաթեմատիկայի պատմության մեջ նշանավոր, հոլանդական ծագում ունեցող, ընտանիքից էին. երկուսն էլ եղել են Լայբնիցի ուղեկիցները և շատ են նպաստել (առանձնապես կրտսեր եղբայրը) նոր հաշվի տարածմանը:*

փական պատկերացումներից։ Նրա աշակերտ Էյլերը* իր «Անվերջ փոքրերի անալիզի ներածություն» գրքում, որով մաթեմատիկոսների մի ամբողջ սերունդ է սովորել, վերարտադրում է Բեռնուլիի սահմանումը, որոշ չափով ճշգրտելով այն։

«Փոփոխական քանակության ֆունկցիան անալիտիկ արտահայտություն է՝ որևէ ձևով կազմված այդ փոփոխական քանակությունից և թվերից կամ հաստատուն քանակություններից**»։

Ինչպես տեսնում ենք, այս սահմանման մեջ ֆունկցիան պարզապես նույնացվում է այն անալիտիկ արտահայտության հետ, որով նա տրվում է։

«Բացահայտ» ֆունկցիաների հետ միասին Էյլերը դիտարկել է նաև «անբացահայտ» ֆունկցիաներ, որոնք որոշվում են չլուծված հավասարումներով։ Միաժամանակ, լարի տատանման վերաբերյալ նշանավոր խնդրի կապակցությամբ (որի մասին մանրամասն կխոսենք երկրորդ հատորում), Էյլերը հնարավոր էր համարում անալիզի մեջ մուտք թույլ տալու ոչ միայն «խառն» ֆունկցիաների, որոնք միջակայքի տարբեր մասերում տրվում են անալիտիկական տարբեր արտահայտություններով [հմմ. n° 18, 3°], այլև այնպիսի ֆունկցիաների, որոնք որոշվում են կամայապես գծված գրաֆիկներով։ Նրա «Դիֆերենցիալ հաշվի» (1755) առաջաբանում մենք գտնում ենք է՛լ ավելի ընդհանուր, թեպետ պակաս որոշակի ձևակերպում՝

«Երբ որոշ քանակություններ ուրիշներից կախված են այնպես, որ վերջիններս փոփոխելիս իրենք նույնպես փոփոխման են ենթարկվում, առաջինները կոչվում են երկրորդների ֆունկցիաներ»***։

Մի շարք տասնամյակների ընթացքում ֆունկցիայի գաղափարի սահմանման մեջ էական առաջադիմություն չէր լինում։ Սովորաբար Դիրիխլեին**** են վերագրում համապատասխանության գաղափարն առաջին պլանի վրա մղելու պատիվը, միակ գաղափարը, հենց որը և ընկած է ֆունկցիայի գաղափարի հիմքում։

1837 թ. նա տվել է x փոփոխականից կախված y ֆունկցիայի այսպիսի սահմանում (ենթադրվում է, որ x-ն ընդունում է մի որոշ միջակայքում գտնվող բոլոր արժեքները)՝

«Եթե յուրաքանչյուր x-ի համապատասխանում է միակ վերջավոր y..., ապա y-ը կոչվում է... x-ի ֆունկցիա այդ միջակայքի համար։ Ընդ որում, ամենևին էլ անհրաժեշտ չէ, որպեսզի այդ ամբողջ միջակայքում y-ն x-ից կախված լինի միևնույն օրենքով, և անգամ պարտադիր չէ կախումը պատկերացնել արտահայտված մաթեմատիկական գործողությունների միջոցով»։

Այս սահմանումը (չնայած հեղինակի վերապահումներին, որոնք նսեմացնում են նրա ընդհանրությունը) կարևոր դեր է կատարել մաթեմատիկական անալիզի պատմության մեջ։

---

* Լեոնարդ Էյլեր (1707—1783)՝ ականավոր մաթեմատիկոս. ծագումով լինելով շվեյցարացի, նա իր գիտակցական կյանքի մեծագույն մասն անց է կացրել Ռուսաստանում և եղել է Պետերբուրգի գիտությունների ակադեմիայի անդամ։

** Հա այդ երկի I հատորի ռուսերեն թարգմանությունը (բնագիրը գրված է լատիներեն 1748), 1936 թ., տե՛ս էջ 30։

*** Տե՛ս «Դիֆերենցիալ հաշվի» ռուսերեն թարգմանությունը, 1949 թ., էջ 38։

**** Պետեր Գուստավ Լեժեն-Դիրիխլե (1805—1859)՝ գերմանացի նշանավոր մաթեմատիկոս։

Երկար ժամանակ աննկատ էր մնացել, որ Լոբաչևսկին այդ միտքն արտահայտել է ոչ միայն ավելի շուտ, այլև անթերի ձևով։ Սկզբնական շրջանում հարելով Էյլերի տեսակետին, Լոբաչևսկին աստիճանաբար հեռանում է նրանից և իր «Եռանկյունաչափական շարքերի չքացման վերաբերյալ» (1834 թ.) աշխատության մեջ արդեն որոշակիորեն ասում է՝*

«Ընդհանուր գաղափարը պահանջում է, որպեսզի x*-ի ֆունկցիա անվանենք այն թիվը, որը տրվում է յուրաքանչյուր* x*-ի համար և նրա հետ միասին աստիճանաբար փոփոխվում է։ Ֆունկցիայի արժեքը կարող է տրվել կամ անալիտիկ արտահայտությամբ, կամ այնպիսի պայմանով, որը միջոց է տալիս ստուգելու բոլոր թվերը և ընտրելու նրանցից մեկը, կամ, վերջապես, կախումը կարող է գոյություն ունենալ և մնալ անհայտ»**։*

Վերջում նշենք, որ ֆունկցիայի մեզ համար սովորական $f(x)$ *նշանակումը պատկանում է Էյլերին։*

§ 2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԱՐԵՎՈՐԱԳՈՒՅՆ ԴԱՍԵՐԸ

22. Տարրական ֆունկցիաներ: *Այստեղ թվենք ֆունկցիաների մի քանի դասեր, որոնք ստացել են* տարրական *ֆունկցիաներ անունը։*

1°. Ամբողջ և կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաներ: *Այն ֆունկցիան, որը ներկայացվում է* x *տառի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամի տեսքով՝*

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

(a_0, a_1, a_2, $\cdots$ *թվերը հաստատուն են), կոչվում է ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիա։*

Երկու այդպիսի բազմանդամների՝

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

հարաբերությունը կոչվում է կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիա։ Նա որոշված է x*-ի բոլոր արժեքների համար, բացի այն արժեքներից, որոնք հայտարարը դարձնում են զրո։*

Որպես օրինակ, 6-րդ գծագրի վրա տրված են $y = ax^2$ *ֆունկցիայի գրաֆիկները* a *գործակցի տարբեր արժեքների դեպքում (պարաբոլներ), իսկ 7-րդ գծագրի վրա տրված են* $y = \frac{a}{x}$ *ֆունկցիայի գրաֆիկները, դարձյալ* a*-ի տարբեր արժեքների համար (հավասարասրուն հիպերբոլներ)։*

** Նիկոլայ Իվանովիչ Լոբաչևսկի (1793 — 1856)՝ ռուս մեծ մաթեմատիկոս, որը հռչակ ստացավ ստեղծելով ոչէվկլիդյան երկրաչափությունը։*

** Н. И. Лобачевский. Полное собрание сочинений, т. V (1951), էջ 43։

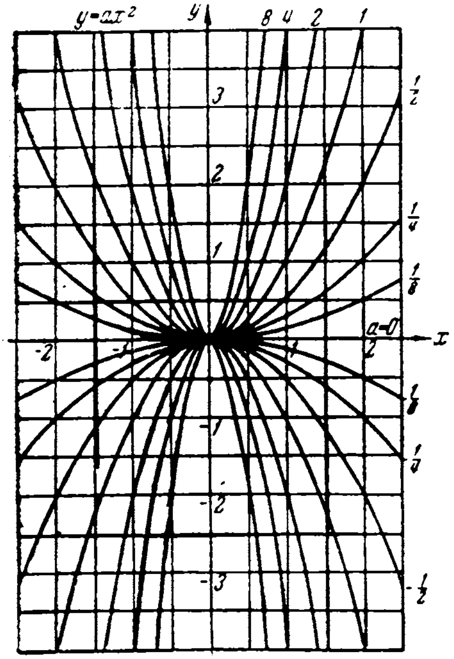
2°. Աստիճանային ֆունկցիա: *Այսպես է կոչվում*

$$y = x^{\mu}$$

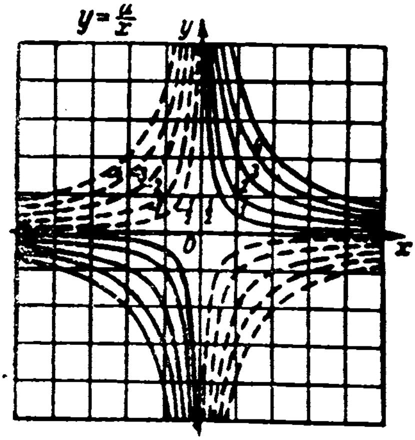
տեսքի ֆունկցիան, որտեղ μ-ն ցանկացած հաստատուն իրական թիվ է։ Երբ μ-ն ամբողջ է, ստացվում է ռացիոնալ ֆունկցիա։ Երբ μ-ն կոտորակ է, մենք կունենանք արմատ։ Ենթադրենք, օրինակ, m-ը բնական թիվ է և

$$y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}\,\text{։}$$

Այս ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար, եթե m-ը կենտ է, իսկ եթե m-ը զույգ է,



Գծ. 6.



Գծ. 7.

ապա նա որոշված է x-ի միայն ոչբացասական արժեքների համար (այս դեպքում նկատի ունենք արմատի միայն թվաբանական արժեքը)։ Վերջապես, եթե μ-ն իռացիոնալ թիվ է, մենք ենթադրելու ենք $x > 0$ ($x = 0$ *արժեքը թույլատրվում է միայն այն դեպքում, երբ* $\mu > 0$)։

8-րդ և 9-րդ գծագրերի վրա տրված են աստիճանային ֆունկցիայի գրաֆիկները μ-ի տարբեր արժեքների համար։

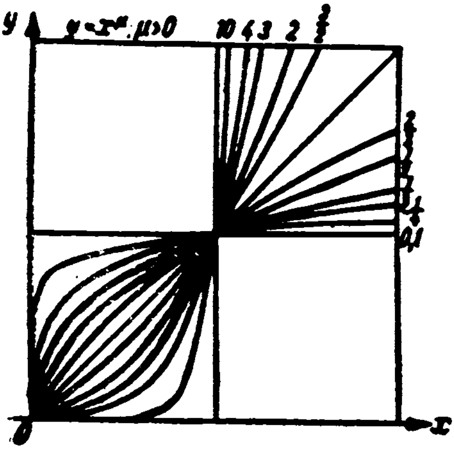
3°. Ցուցչային ֆունկցիա, *այսինքն՝*

$$y = a^{x}$$

տեսքի ֆունկցիա, որտեղ a-ն (մեկից տարբեր) դրական թիվ է, իսկ x-ն ընդունում է ամեն մի իրական արժեք։

a-ի տարբեր արժեքների համար ցուցչային ֆունկցիայի գրաֆիկները տրված են 10-րդ գծագրի վրա։

4°. Լոգարիթմական ֆունկցիա, *այսինքն՝*



Գծ. 8.

$$y = \log_a x$$

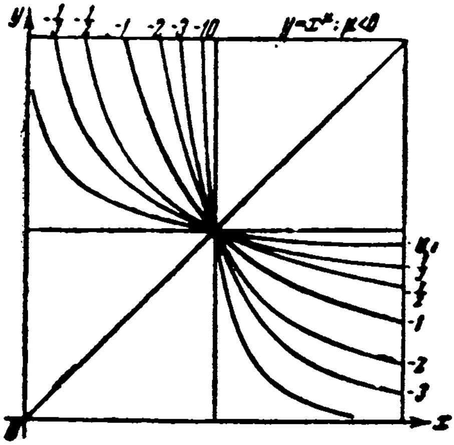
տեսքի ֆունկցիա, որտեղ a-ն, ինչպես և վերևում, դրական թիվ է (մեկից տարբեր), իսկ x-ն ընդունում է միայն դրական արժեքներ։*

11-րդ գծագրի վրա տրված են այդ ֆունկցիայի գրաֆիկները a-ի տարբեր արժեքների համար։

5°. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ՝

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,$$
$$y=\operatorname{ctg} x,\ y=\sec x,\ y=\csc x:$$

Շատ կարևոր է մեկ ընդմիշտ յուրացնել, որ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արգումենտները, երբ դրանք դիտում ենք որպես անկյան չափեր, այդ անկյունները միշտ արտահայտում են *ռադիաններով (եթե հակառակ վերապահում չի կատարված)։* $\operatorname{tg} x$*-ի և* $\sec x$*-ի համար բացառվում են* $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ *տեսք ունեցող արժեքները, իսկ* $\operatorname{ctg} x$*-ի և* $\csc x$*-ի համար՝* $k\pi$ *տեսք ունեցող արժեքները (*k*-ն ամբողջ է)։*

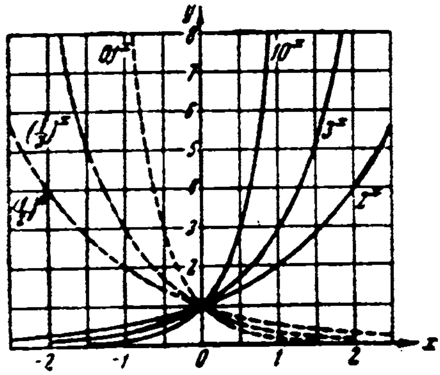


Գծ. 9.

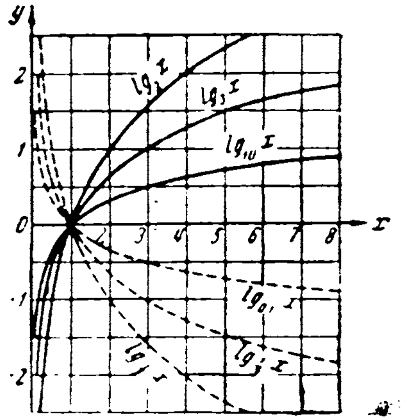
$y=\sin x$ $(\cos x)$ *և* $y=\operatorname{tg} x$ $(\operatorname{ctg} x)$ *ֆունկցիաների գրաֆիկները տրված են 10-րդ և 13-րդ գծագրերի վրա։*

Սինուսի գրաֆիկը սովորաբար անվանում են սինուսոիդ։

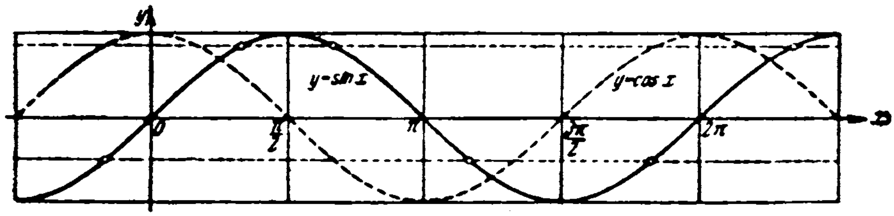
* $\log x$ *նշանակումը մենք պահպանում ենք տասնորդական լոգարիթմների համար՝* $\log x = \log_{10} x$.



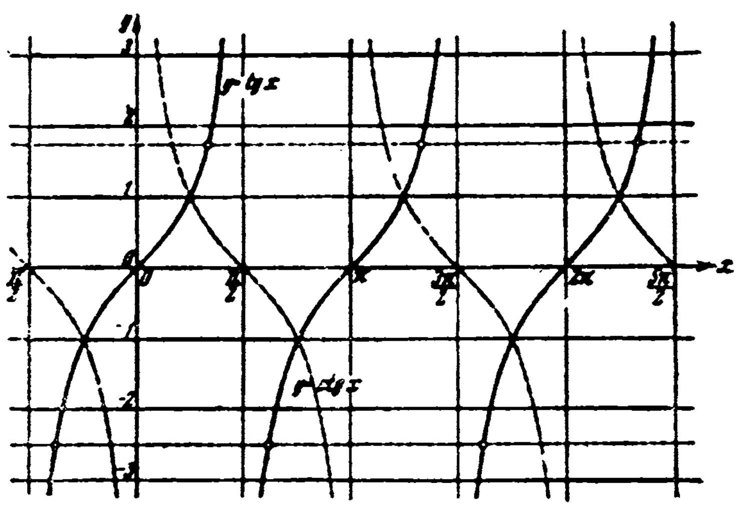
Գծ. 10.



Գծ. 11.



Գծ. 12.



Գծ. 13.

23. Հակադարձ ֆունկցիայի գաղափարը։ Նախքան հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներին անցնելը, որոշ պարզաբանումներ անենք ընդհանրապես հակադարձ ֆունկցիաների վերաբերյալ։

Ենթադրենք, թե $y = f(x)$ ֆունկցիան տրված է մի որոշ X տիրույթում և թող Y-ը լինի բոլոր այն արժեքների բազմությունը, որոնք այդ ֆունկցիան ընդունում է, երբ x-ը փոփոխվում է X տիրույթի սահմաններում։ Մեր պրակտիկայում ինչպես X-ը, նույնպես և Y-ը սովորաբար իրենցից կներկայացնեն միջակայքեր։

Y տիրույթից ընտրենք որևէ $y = y_0$ արժեք. այդ դեպքում X տիրույթում անպայման կգտնվի այնպիսի $x = x_0$ արժեք, որի համար մեր ֆունկցիան կընդունի հենց y_0 արժեքը, այնպես որ՝

$$f(x_0) = y_0.$$

Այդպիսի x_0 արժեքներ կարող են լինել նաև մի քանի հատ։ Այսպիսով Y-ից վերցրած յուրաքանչյուր y արժեքին համապատասխանեցվում է x-ի մեկ կամ մի քանի արժեք. այդպիսով Y տիրույթում որոշվում է մի $x = g(y)$ միարժեք կամ բազմարժեք ֆունկցիա, որը $y = f(x)$ ֆունկցիայի համար կոչվում է հակադարձ ֆունկցիա։

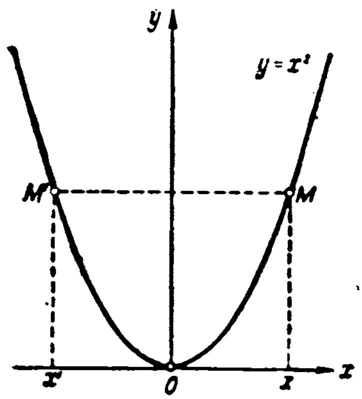
Դիտարկենք օրինակներ.

1. Դիցուք $y = a^x$ $(a > 1)$, որտեղ x-ը փոփոխվում է $X = (-\infty, +\infty)$ միջակայքում։ y-ի արժեքները լցնում են $Y = (0, +\infty)$ միջակայքը, ընդ որում, ինչպես գիտենք [12], այդ միջակայքից վերցրած y-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է X-ի ներսը գտնվող միայն մեկ որոշակի $x = \log_a y$։ Այս դեպքում հակադարձ ֆունկցիան միարժեք է։

2. Ընդհակառակը, $y = x^2$ ֆունկցիայի համար, եթե x-ը փոփոխվում է $X = (-\infty, +\infty)$ միջակայքում, հակադարձ ֆունկցիան կլինի երկարժեք. $y = [0, +\infty)$ միջակայքին պատկանող y-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է X-ին պատկանող երկու արժեք՝ $x = \pm\sqrt{y}$։ Այս երկարժեք ֆունկցիայի փոխարեն սովորաբար դիտարկում են երկու առանձին միարժեք ֆունկցիաներ՝ $x = +\sqrt{y}$ և $x = -\sqrt{y}$ (երկարժեք ֆունկցիայի «ճյուղերը»)։ Նրանք, առանձին-առանձին վերցրած, նույնպես կարող են համարվել $y = x^2$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիաներ, միայն թե պետք է ընդունել, որ x-ի փոփոխման տիրույթը սահմանափակված է, համապատասխանաբար, $[0, +\infty)$ կամ $(-\infty, 0]$ միջակայքով։

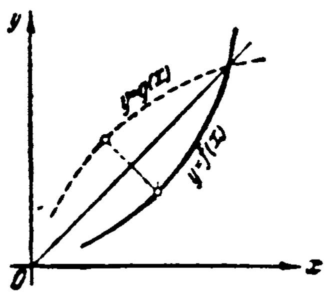
Նկատենք, որ $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից հեշտ է կռահել, թե նրա հակադարձ $x = g(y)$ ֆունկցիան միարժեք կլինի թե ոչ։

Միարժեք կլինի, եթե x*-երի առանցքին զուգահեռ ցանկացած ուղիղը այդ գրաֆիկը հատի միմիայն մեկ կետում. ընդհակառակը, եթե այդ ուղիղներից ոմանք գրաֆիկը հատում են մի քանի կետերում, ապա հակադարձ ֆունկցիան կլինի բազմարժեք։ Այս դեպքում, հենց գրաֆիկի օգնությամբ* x*-ի փոփոխման միջակայքը կարելի է բաժանել այնպիսի մասերի, որ յուրաքանչյուր մասին արդեն համապատասխանի այդ ֆունկցիայի միարժեք «ճյուղ»։ Օրինակ, մի հայացք նետելով 14-րդ գծագրի պարաբոլի վրա, որը հանդիսանում է* $y = x^2$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը, պարզ կլինի, որ նրա հակադարձ ֆունկցիան երկարժեք է, և որպեսզի ստանանք միարժեք «ճյուղերը», բավական է միայն այդ պարաբոլի աջ և ձախ մասերը, այսինքն* x*-ի դրական և բացասական արժեքները դիտարկել առանձին-առանձին*։*



Գծ. 14.

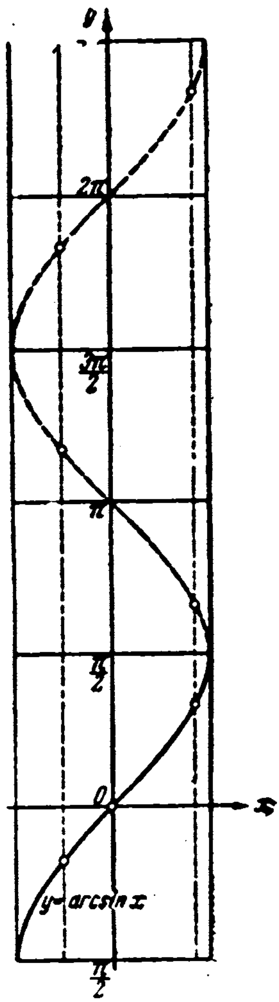
Եթե $x=g(y)$ *ֆունկցիան հանդիսանում է* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի հակադարձը, ապա պարզ է, որ այդ երկու ֆունկցիաների գրաֆիկները համընկնում են։ Սակայն, կարելի է պահանջել, որպեսզի նաև հակադարձ ֆունկցիայի արգումենտը նշանակվի* x *տառով, այսինքն՝* $x=g(y)$ *ֆունկցիայի փոխարեն դիտարկվի* $y=g(x)$*-ը։ Այդ դեպքում պետք է միայն հորիզոնական առանցքն անվանել* y*-ների առանցք, իսկ ուղղաձիգ առանցքը* x*-երի առանցք. գրաֆիկը, այնուամենայնիվ, կմնա նախկինը։ Իսկ եթե ցանկանանք, որպեսզի* x*-երի (նոր) առանցքը, ըստ սովորության, հորիզոնական լինի, իսկ* y*-ների (նոր) առանցքը՝ ուղղաձիգ, ապա հարկ կլինի այդ առանցքները մեկը մյուսի տեղը դնել, որն արդեն կփոխի նաև գրաֆիկը։ Այդ իրականացնելու համար ամենից հեշտ կլինի գծագրի* xOy *հարթությունը պտտել առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի շուրջը 180° անկյունով (գծ. 15)։*



Գծ. 15.

* Ստորև [71] մենք դեռ կանդրադառնանք հակադարձ ֆունկցիայի գոյության և միարժեքության հարցին։

Այսպիսով, $y = g(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է որպես* $y = f(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկի հայելապատկեր այդ կիսորդի նկատմամբ։ Օրինակ, 10-րդ և 11-րդ գծագրերից անմիջապես երևում է, որ նրանցից մեկը մյուսից ստացվել է հենց այդ եղանակով։ Ճիշտ նման ձևով, ելնելով վերոհիշյալ դատողություններից, հեշտ է բացատրել 8-րդ և 9-րդ գծագրերից յուրաքանչյուրի սիմետրիկությունը (անկյան կիսորդի նկատմամբ)։*



Գծ. 16.

24. Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ: *Ի լրացումն n° 22-ում հիշատակած տարրական ֆունկցիաների դասերի, այժմ դիտարկենք՝*

6°. Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները՝

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x,$$
$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad (y = \operatorname{arcsec} x, \quad \operatorname{arccosec} x)։$$

Նախ կանգ առնենք դրանցից առաջինի վրա։ $y = \sin x$ *ֆունկցիան որոշված է* $X = (-\infty, +\infty)$ *միջակայքում, ընդ որում նրա արժեքներն անընդմեջ լրացնում են* $Y = [-1, 1]$ *միջակայքը։* x*-երի առանցքին զուգահեռ ուղիղը սինուսոիդը, այսինքն՝* $y = \sin x$ *ֆունկցիայի գրաֆիկը (գծ. 12), հատում է անվերջ բազմությամբ կետերում. այլ խոսքով,* $[-1, 1]$ *միջակայքից վերցրած* y*-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում են* x*-ի անվերջ բազմությամբ արժեքներ։ Հետևապես, հակադարձ ֆունկցիան, որը նշանակում են*

$$x = \operatorname{Arcsin} y^{*},$$

կլինի բազմարժեք (անվերջարժեք)։

---

* *Մենք իր ժամանակին* [22,5°] *արդեն նշել ենք, որ եռանկյունաչափական ֆունկցիայի* x *արգումենտը անկյունն արտահայտում է ռադիաններով. հասկանալի է, որ այստեղ ևս հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները, եթե դրանք դիտարկվեն որպես անկյունների չափեր, արտահայտվում են ռադիաններով։*

Սովորաբար դիտարկում են այդ ֆունկցիայի միայն մեկ «ճյուղը», որը համապատասխանում է x*-ի փոփոխմանը* $-\frac{\pi}{2}$*-ի և* $\frac{\pi}{2}$*-ի միջև. [−1, 1]-ից վերցրած* y*-ի յուրաքանչյուր արժեքին համապատասխանում է* x*-ի միայն մեկ արժեք այդ սահմաններում։ Այդ «ճյուղը» նշանակում են այսպես՝*

$$x = \arcsin y$$

և անվանում արկսինուսի գլխավոր արժեք։

Սինուսոիդը պտտելով առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի շուրջը (գծ. 16), կստանանք $y = \operatorname{Arcsin} x$ *բազմարժեք ֆունկցիայի գրաֆիկը, անընդհատ կորով առանձնացված է նրա գլխավոր ճյուղի՝* $y = \arcsin x$*-ի գրաֆիկը. որը միարժեք կերպով որոշված է* x*-ի արժեքների [−1, 1] միջակայքում և բավարարում է*

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

անհավասարությանը, որը և բնութագրում է այդ ճյուղը մյուս ճյուղերի թվում։

Տարրական եռանկյունաչափությունից վերհիշելով, թե տված սինուսն ունեցող անկյունների բոլոր արժեքներն ինչպես են արտահայտվում այդ արժեքներից մեկի միջոցով, հեշտ է գրել այն բանաձևերը, որոնք արտահայտում են արկսինուսի բոլոր արժեքները՝

$$\operatorname{Arcsin} x = \arcsin x + 2k\pi, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

կամ՝

$$\operatorname{Arcsin} x = (2k+1)\pi - \arcsin x\text{։}$$

Նման դատողությունները կիրառելի են նաև $y = \cos x \, (-\infty < x < +\infty)$ *ֆունկցիայի նկատմամբ։ Այստեղ ևս*

$$y = \operatorname{Arccos} x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

հակադարձ ֆունկցիան՝ բազմարժեք (անվերջարժեք) է (տե՛ս գծ. 12)։ Միարժեք ճյուղն առանձնացնելու համար, ֆունկցիան ենթարկում են հետևյալ պայմանին՝

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi\text{։}$$

Այս՝ արկկոսինուսի գլխավոր ճյուղն է։

Arccos x ֆունկցիան arcsin x-ի հետ կապված է

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

ակնհայտ առնչությամբ. իրոք, ոչ միայն $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ անկյան կոսինուսը հավասար է $\sin(\arcsin x) = x$, այլև անկյունն ինքը գտնվում է հենց 0-ի և π-ի միջև։ Arccos x-ի մյուս արժեքները նրա գլխավոր արժեքի միջոցով արտահայտվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$\mathrm{Arccos}\, x = 2k\pi \pm \arccos x \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots):$$

$y = \operatorname{tg} x$ ֆունկցիան որոշված է x-ի բոլոր արժեքների համար, բացի $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ արժեքներից։ Այստեղ y-ի արժեքները լրացնում են $(-\infty, +\infty)$ միջակայքը, ընդ որում y-ի յուրաքանչյուր արժեքին դարձյալ համապատասխանում են x-ի անվերջ բազմությամբ արժեքներ (տե՛ս գծ. 13)։ Այդ պատճառով $x = \mathrm{Arctg}\, y$ հակադարձ ֆունկցիան, որը տված է $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում, կլինի բազմարժեք (անվերջարժեք)։ 17-րդ գծագրի վրա պատկերված է $y = \mathrm{Arctg}\, x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որն ստացվել է $y = \operatorname{tg} x$ ֆունկցիայի գրաֆիկն առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի շուրջը 180° անկյունով պտտելով։ Որպես արկտանգենսի գլխավոր արժեք՝ arctg x ընդունում են այդ բազմարժեք ֆունկցիայի արժեքներից այն, որը բավարարում է

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

անհավասարություններին։

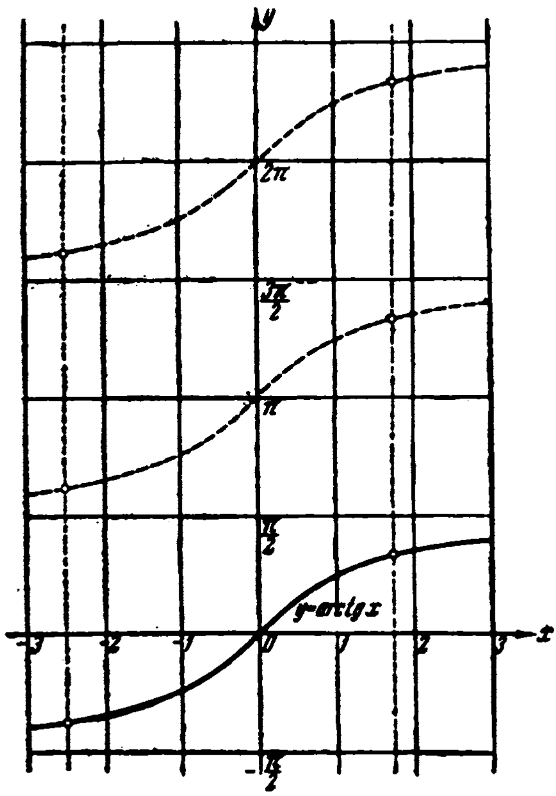
Այսպես որոշվում է միարժեք ֆունկցիա՝ արկտանգենսի գլխավոր ճյուղը, որը տրված է x-ի բոլոր արժեքների համար։ Արկտանգենսի մյուս արժեքներն, ինչպես հեշտ է ցույց տալ, ստացվում են այսպես՝

$$\mathrm{Arctg}\, x = \operatorname{arctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots):$$

Դժվար չէ arctg x և arcsin x ֆունկցիաների միջև անմիջական կապ հաստատել՝

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{կամ} \quad \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(-\infty < x < +\infty) \qquad\qquad (-1 < x < +1)$$

Օրինակ, եթե ընդունենք $\alpha = \operatorname{arctg} x$, *այնպես որ* $t\,\alpha = x$, *ապա*
$\mathrm{ain}\,\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, *ընդ որում արմատը վերցվում է դրական նշանով, որովհետև* $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. *այստեղից էլ հենց բխում է, որ* $\alpha = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,



Գծ. 17.

Հիշենք նաև $\operatorname{Arcctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$ *ֆունկցիայի մասին. նրա գլխավոր արժեքը որոշվում է*

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$$

անհավասարություններով և arctg x*-ի հետ կապված է*

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

առնչությամբ։

Արկկոտանգենսի մյուս արժեքներն ունեն այսպիսի տեսք՝

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots):$$

arcsec x $(-\infty < x \leqslant -1$ *և* $1 \leqslant x < +\infty)$ *և* arccsc x *(փոփոխման նույն միջակայքերով) ֆունկցիաների վրա կանգ չենք առնի, նրանց հետազոտումը թողնելով ընթերցողին։*

25. Ֆունկցիաների սուպերպոզիցիա (տեղադրումներ): Եզրափակիչ դիտողություններ: *Ծանոթանանք ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայի կամ տեղադրման գաղափարի հետ, որը կայանում է նրանում, որ տված ֆունկցիաների արգումենտի տեղ տեղադրվում է մի այլ ֆունկցիա (կախված այլ արգումենտից)։ Օրինակ,* $y = \sin x$ *և* $z = \log y$ *ֆունկցիաների սուպերպոզիցիան տալիս է* $z = \log \sin x$ *ֆունկցիան. Նույն ձևով ստացվում են նաև*

$$\sqrt{1 - x^2}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

և այլ ֆունկցիաները։

Ընդհանուր դեպքում, ենթադրենք $z = \varphi(y)$ *ֆունկցիան որոշված է մի* $Y = \{y\}$ *տիրույթում, իսկ* $y = f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է* $X = \{x\}$ *տիրույթում գտնվող* x*-երի համար, ընդ որում նրա բոլոր արժեքները գտնվում են* $Y = \{y\}$ *տիրույթում։ Այդ դեպքում* z *փոփոխականը, ինչպես ասում են, ինքը ևս հանդիսանում է* x*-ի ֆունկցիա՝* y*-ի միջոցով՝*

$$z = \varphi(f(x))։$$

X*-ից վերցրած* x*-ի միջոցով նախ գտնում են նրան համապատասխանող (*f *նշանով բնութագրվող օրենքով)* y*-ի արժեքը* Y *տիրույթից, և ապա որոշում են (*φ *նշանով բնութագրվող օրենքով)* y*-ի այդ արժեքին համապատասխանող* z*-ի արժեքը. վերջինս հենց համարում են* z*-ի՝* x*-ին համապատասխանող արժեքը։ Հենց այդպիսով ստացված* ֆունկցիայի ֆունկցիան *կամ* բարդ ֆունկցիան *էլ հանդիսանում է* f(x) *և* φ(y) ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայի *արդյունքը։*

Այն ենթադրությունը, թե $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները դուրս չեն գալիս Y տիրույթից, որտեղ որոշված է $\varphi(y)$ ֆունկցիան, չափազանց էական է. եթե այդ ի նկատի չունենանք, կարող է և անհեթեթություն ստացվել։ Ընդունելով, օրինակ, $z = \log y$, իսկ $y = \sin x$, մենք կարող ենք դիտարկել x-ի միայն այնպիսի արժեքներ, որոնց համար $\sin x > 0$, այլապես $\log \sin x$ արտահայտությունը իմաստ չէր ունենա։

Հենց այստեղ էլ օգտակար ենք համարում ընդգծել, որ ֆունկցիայի, որպես բարդ ֆունկցիայի, խարակտերիստիկան կապված է ոչ թե x-ից z-ի ֆունկցիոնալ կախման բնույթի հետ, այլ միայն այդ կապը տալու եղանակի հետ։ Օրինակ, դիցուք $z = \sqrt{1-y^2}$, երբ y-ը գտնվում է $[-1, +1]$-ում, իսկ $y = \sin x$, երբ x-ը գտնվում է $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$-ում։ Այդ դեպքում

$$z = \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x:$$

Պարզվեց, որ այստեղ $\cos x$-ը տրված էր բարդ ֆունկցիայի տեսքով։

Այժմ, երբ լրիվ չափով պարզաբանված է ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայի գաղափարը, կարող ենք ճշտորեն բնութագրել անալիզի մեջ ուսումնասիրվող ֆունկցիաների դասերից պարզագույնը։ Այդ դասին են պատկանում ամենից առաջ, վերևում թված $1°-6°$ տարրական ֆունկցիաները, և ապա՝ բոլոր այն ֆունկցիաները, որոնք ստացվում են նրանցից՝ թվաբանական չորս գործողությունների և սուպերպոզիցիաների միջոցով, որոնք հաջորդաբար կիրառվում են այդ ֆունկցիաների նկատմամբ վերջավոր անգամ։ Այդպիսի ֆունկցիաների մասին ասում են, որ նրանք արտահայտվում են տարրական ֆունկցիաների միջոցով վերջավոր տեսքով. երբեմն այդ բոլորը նույնպես անվանում են տարրական ֆունկցիաներ։

Հետագայում, երբ տիրապետենք ավելի բարդ անալիտիկ ապարատի (անվերջ շարքեր, ինտեգրալներ), մենք կծանոթանանք նաև այլ ֆունկցիաների հետ, որոնք անալիզի մեջ դարձյալ կարևոր դեր են խաղում, սակայն տարրական ֆունկցիաների դասին չեն պատկանում։

ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§ 1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԸ

26. Պատմական տեղեկություններ: Սահմանի գաղափարն այժմ ներթափանցում է ողջ մաթեմատիկական անալիզը, այն կարևոր դեր է կատարում նաև մաթեմատիկայի մյուս բնագավառներում։ Սակայն (ինչպես ընթերցողը կտեսնի XIV գլխում) այդ գաղափարը բոլորովին էլ ընկած չի եղել դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի հիմքում նրա ծագման շրջանում։ Սահմանի գաղափարի սահմանումն առաջին անգամ երևան է եկել (ըստ էության նույն ձևով, ինչ ձևով այն շարադրելու ենք ստորև n° 28-ում) Վալլիսի* մոտ, նրա «Անվերջ մեծությունների թվաբանություն» (1655) աշխատության մեջ։ Նյուտոնը «Բնափիլիսոփայության մաթեմատիկական հիմունքները» (1686—1687) նշանավոր աշխատության մեջ հրապարակեց իր՝ առաջին և վերջին հարաբերությունների (կամ՝ գումարների) մեթոդը, որի մեջ կարելի է նկատել սահմանների տեսության սաղմերը։ Սակայն, XVIII դարի մեծ մաթեմատիկոսներից ոչ մեկի մտքով չէր անցնում նոր հաշիվը հ ի մ ն ա վ ո ր ե լ սահմանի գաղափարի վրա և դրանով պատասխանել այն արդարացի հարձակումներին, որոնց նա ենթարկվում էր**։ Այս իմաստով բնորոշ է Էյլերի գիրքը, որը «Դիֆերենցիալ հաշվի» (1755) առաջաբանում պարզորոշ ասում է սահմանի մասին, բայց ամբողջ գրքում և ո՛չ մի տեղ այդ գաղափարից չի օգտվում։

Այդ հարցում բեկում առաջացրին Կոշիի** «Հանրահաշվական անալիզը» (1821) և նրա հետագա աշխատությունները, որտեղ առաջին անգամ զարգացվում էր սահմանների տեսությունը, որը Կոշիի ձեռքին ուժեղ զենք ծառայեց ողջ մաթեմատիկական անալիզի խստապահանջ կառուցման համար։ Կոշիի գիրքը, որը ցրեց այն միստիկական մշուշը, որով մինչ այդ ծածկված էին անալիզի հիմունքները, համընդհանուր ճանաչում գտավ։

Ի դեպ, Կոշիի վաստակը կիսում են նաև այլ գիտնականներ, որոնց թվում առանձնահատուկ տեղ է գրավում Բոլցանոն, որը մի շարք դեպքերում իր աշխատություններով կանխել է ոչ միայն Կոշիին, այլև հետագայի մաթեմատիկոսներին։ Այդ աշխատությունները տարածում չէին գտել և նրանց մասին հիշել են միայն շատ տասնամյակներ անց։

---

* Ջոն Վալլիս (1616—1703)՝ անգլիացի մաթեմատիկոս։

** Այդ մասին ավելի մանրամասն տե՛ս XIV գլխում։

*** Օգյուստեն Լուի Կ ո շ ի (1789—1857)՝ ֆրանսիացի ականավոր անալիստ (անալիզի գիտակ)։

27. Թվային հաջորդականություն: *Անալիզի հիմնական հասկացության՝* սահման *հասկացության պարզաբանումը մենք կսկսենք ամենապարզ մասնավոր դեպքից (որը հայտնի է անգամ դպրոցական դասընթացից), այն է՝ բնական արգումենտի* x_n *ֆունկցիայի սահմանից: Ինչպես կտեսնենք, սկզբունքորեն այս դեպքին են բերվում նաև մյուս բոլոր ավելի բարդ դեպքերը:*

n *արգումենտն ընդունում է բնական թվերի*

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ n',\ \ldots \qquad (1)$$

շարքից բոլոր արժեքները, որոնք մենք պատկերացնում ենք կարգավորված ըստ աճման, այնպես որ ավելի մեծ n' *թիվը հաջորդում է ավելի փոքր* n *թվին, ավելի փոքր* n *թիվը նախորդում է ավելի մեծ* n' *թվին:*

Եթե տրված է x_n *ֆունկցիան, ապա նրա* n *արգումենտը կամ նշիչը կարելի է դիտարկել որպես փոփոխականի համապատասխան արժեքի համար (նոմեր): Այսպես՝* x_1*-ը նրա առաջին արժեքն է,* x_2*-ը՝ երկրորդը,* x_3*-ը՝ երրորդը և այլն: Արժեքների այդ* $\{x_n\}$ *բազմությունը մենք միշտ պատկերացնելու ենք, (1) բնական շարքի նման, կարգավորված համարների աճման կարգով, այսինքն՝* թվային հաջորդականության *տեսքով՝*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots\ x_{n'},\ \ldots \qquad (2)$$

$n'>n$ *դեպքում* $x_{n'}$ *արժեքը հաջորդում է* x_n*-ին (*x_n*-ը նախորդում է* $x_{n'}$*-ին)* անկախ նրանից, թե $x_{n'}$ թիվն ինքը x_n-ից մե՞ծ կլինի, փո՞քր, թե՞ նույնիսկ հավասար*:

Օրինակ, եթե x_n *ֆունկցիան տրվի հետևյալ բանաձևերից մեկով՝*

$$x_n=1,\quad x_n=(-1)^{n+1},\quad x_n=\frac{1+(-1)^n}{n},$$

ապա համապատասխան հաջորդականությունները կլինեն՝

$$\underset{1}{1},\quad \underset{2}{1},\quad \underset{3}{1},\quad \underset{4}{1},\quad \underset{5}{1},\quad \underset{6}{1},\ \ldots$$

$$\underset{1}{1},\quad \underset{2}{-1},\quad \underset{3}{1},\quad \underset{4}{-1},\quad \underset{5}{1},\quad \underset{6}{-1},\ \ldots$$

$$\underset{1}{0},\quad \underset{2}{1},\quad \underset{3}{0},\quad \underset{4}{\frac{1}{2}},\quad \underset{5}{0},\quad \underset{6}{\frac{1}{3}},\ \ldots$$

---

* *Համանման ձևով կարելի էր խոսել նաև ուղիղի կետերի կամ ինչ-որ այլ առարկաների հաջորդականության մասին, որոնք համարակալված կլինեն բնական նշիչներով:*

Առաջին դեպքում մենք ունենք պարզապես հաստատուն մեծություն. նրա ընդունելիք արժեքների ողջ բազմությունը բաղկացած է մեկ արժեքից: Երկրորդ դեպքում այդ բազմությունը կազմված է երկու արժեքներից, որոնք նա ընդունում է հերթով: Երրորդ դեպքում x_n ֆունկցիայի ընդունելիք տարբեր արժեքների բազմությունն անվերջ է, սակայն այդ չի խանգարում, որպեսզի ֆունկցիայի արժեքները մեկ ընդ մեջ համասարվեն զրոյի:

Այսպիսով, x_n ֆունկցիայի, որպես փոփոխական մեծության, փոփոխման X տիրույթը և (2) հաջորդականությունն էապես տարբեր բաներ են: Առաջին տարբերությունն այն է, որ X բազմությունում յուրաքանչյուր թիվ հանդես է գալիս միայն մեկ անգամ, իսկ (2) հաջորդականության մեջ միևնույն թիվը կարող է կրկնվել մի քանի (նույնիսկ անվերջ) անգամ: Իսկ երկրորդ, և ավելի էական, տարբերությունն այն է, որ X բազմությունը «ձևազուրկ» է, «ամորֆ» է, որևէ կարգից զուրկ, իսկ (2) հաջորդականության էլեմենտների համար որոշակի կարգ է սահմանված:

Հաջորդականությունը գրի առնելու սովորական դարձած եղանակը [ինչպես (2)-ը] կարծես թե ենթադրում է հաջորդականության էլեմենտների տարածական դասավորություն: Սակայն այդպիսի գրառումը կիրառվում է լոկ հարմարության համար և հարցի էության հետ կապ չունի: Եթե մենք ասելու ենք, թե փոփոխականն «անցնելու է» արժեքների մի ինչ-որ հաջորդականությամբ, ապա ընթերցողի մոտ կարող է ստացվել այնպիսի պատկերացում, թե փոփոխականն իր արժեքներով անցնում է ժամանակի իրար հաջորդող պահերին, բայց փաստորեն ժամանակն էլ այստեղ գործ չունի: Միայն խոսքի պատկերավորության համար են երբեմն գործածում նաև այնպիսի արտահայտություններ, ինչպես, օրինակ՝ փոփոխականի «հեռավոր» արժեքներ սկսած մի որոշ «տեղից» կամ փոփոխման մի որոշ «պահից» և այլն:

28. Հաջորդականության սահմանի սահմանումը: x_n փոփոխականի արժեքների կարգավորումը նրանց համարների աճման կարգով, որը հանգեցրեց այդ արժեքների (2) հաջորդականության դիտարկմանը, հեշտացնում է n-ը անվերջորեն աճելիս x_n փոփոխականի՝ իր a սահմանին մոտենալու թուն «պրոցեսի» ըմբռնումը:

a թիվը կոչվում է x_n փոփոխականի **սահման**, եթե վերջինս ցանկացած չափով քիչ է տարբերվում a-ից՝ սկսած մի որոշ տեղից,, այսինքն՝ բոլոր բավականաչափ մեծ n համարների դեպքում:

Սրանով հարցի էությունը վառ է արտահայտված, սակայն ի՞նչ է նշանակում «ցանկացած չափով քիչ» և «բավականաչափ մեծ» — այդ *դեռևս ենթակա է ճշգրտման։ Այժմ բերենք սահմանի ավելի երկար, բայց արդեն սպառիչ խստությամբ ձևակերպված սահմանումը՝*

a թիվը կոչվում է x_n փոփոխականի սահման, եթե յուրաքանչյուր ε դրական թվին համապատասխան, որքան էլ այն փոքր լինի, գոյություն ունի այնպիսի N համար, որ x_n-ի այն բոլոր արժեքները, որոնց մոտ $n>N$, բավարարեն

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (3)$$

անհավասարությանը:

Այն փաստը, որ a-ն x_n փոփոխականի սահմանն է, գրում են այսպես՝

$$\lim x_n = a$$

(lim-ը *լատիներեն* limes *բառի համառոտագրությունն է, որ նշանակում է «սահման»)։ Ասում են նաև, որ* x_n *փոփոխականը ձգտում է* a-*ին, կամ ձգտում է դեպի* a-*ն, և գրում են՝*

$$x_n \to a.$$

Վերջապես, a թիվն անվանում են նաև (2) հաջորդականության սահման և ասում են, որ այդ հաջորդականությունը զուգամիտում է դեպի a-ն:

(3) անհավասարությունը, որտեղ ε-ը կամայապես փոքր է, հենց այն մտքի ճշգրիտ գրառումն է, թե x_n-*ը «ցանկացած չափով քիչ է տարբերվում»* a-*ից, իսկ N համարն էլ ցույց է տալիս հենց այն «տեղը», որտեղից սկսած այդ հանգամանքն իրականանում է, այնպես որ «բավականաչափ մեծ» կլինեն այն* n *համարները, որոնք* $>N$։

Շատ կարևոր է, որպեսզի ճիշտ հասկացվի այն հանգամանքը, որ N *համարը, ընդհանրապես ասած, չի կարող միկընդմիշտ նշվել. այն կախված է* ε *թվի ընտրությունից։ Այդ հանգամանքն ընդգծելու համար մենք երբեմն* N-*ի փոխարեն կգրենք* N_ε։ ε *թիվը փոքրացնելիս համապատասխան* $N=N_\varepsilon$ *համարը, ընդհանրապես ասած, մեծանում է.* x_n *փոփոխականի արժեքների՝* a *սահմանին որքան շատ մոտիկություն ենք պահանջում, այնքան «ավելի հեռավոր» արժեքներ պետք է դիտարկենք (2) հաջորդականության մեջ։*

Բացառություն է կազմում այն մասնավոր դեպքը, երբ x_n *փոփոխականի բոլոր արժեքները հավասար են* a *հաստատուն թվին։ Ակներևորեն այդ դեպքում* $a = \lim x_n$, *սակայն այս անգամ (3) անհավասարությունը կբավարարվի ցանկացած* $\varepsilon>0$ *թվի դեպքում՝ միաժամանակ* x_n-*ի բոլոր արժեքների համար**։

* *Նման երևույթ տեղի ունի նաև այնպիսի* x_n *փոփոխականի համար, որի արժեքները* a-*ին հավասար են դառնում սկսած մի որոշ տեղից։*

(3) անհավասարությունը, ինչպես գիտենք [**8**], *համարժեք է հետևյալ անհավասարություններին՝*

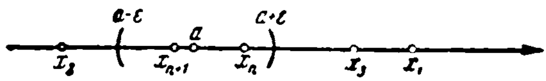
$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

կամ՝

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon. \tag{4}$$

որանից մենք հաճախ ենք օգտվելու հետագայում։

a *կետը կենտրոն ունեցող* $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ *բաց միջակայքն ընդունված է անվանել* a *կետի շրջակայք։ Այսպիսով,* a *կետի ինչպիսի փոքր շրջակայք էլ վերցնելու լինենք,* x_n-*ի բոլոր արժեքներն, սկսած մի որոշ արժեքից, պետք է ընկնեն այդ շրջակայքը (այնպես որ այդ շրջակայքից դուրս մնալ կարող են, թերևս, միայն. վերջավոր թվով արժեքներ)։ Եթե* a *թիվն ու* x_n *փոփոխականի արժեքները պատկերացնենք որպես կետեր թվային առանցքի վրա* [n° **18**] *(գծ. 18), ապա* a



Գծ. 18.

թիվը պատկերող կետը կհանդիսանա x_n-*ի արժեքները պատկերող կետերի մի տեսակ կուտակման կենտրոն։*

29. Անվերջ փոքր մեծություններ: *Այն դեպքը, երբ փոփոխականը ձգտում է զրոյի՝* $x_n \to 0$, *առանձնահատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում։*

Զրո սահման ունեցող x_n փոփոխականը կոչվում է **անվերջ փոքր** մեծություն, կամ պարզապես՝ **անվերջ փոքր**:

Եթե փոփոխականի սահմանի սահմանման մեջ [**28**] *ընդունենք* $a=0$, *ապա (3) անհավասարությունը կընդունի այսպիսի տեսք՝*

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \quad (\text{երբ } n > N_\varepsilon)\text{։}$$

Այսպիսով, անվերջ փոքրի վերոհիշյալ սահմանումը կարելի է առանց «սահման» տերմինը գործածելու ձևակերպել այսպես՝

x_n փոփոխականը կոչվում է **անվերջ փոքր**, եթե նա, սկսած մի որոշ համարից, իր բացարձակ մեծությամբ դառնում է և այնուհետև մնում ավելի փոքր, քան նախապես տրված ցանկացած չափով փոքր $\varepsilon > 0$ թիվը:

Ոչ լիովին հաջող (պատմականորեն ստեղծված) «անվերջ փոքր» մեծություն տերմինն ընթերցողին չպետք է մոլորության մեջ գցի. այդ *մեծության արժեքներից ոչ մեկն առանձին վերցրած չի կարող որակվել իբրև «փոքր», եթե նա ինքը հենց զրո չէ։ Հարցը նրանում է, որ այդ մեծությունը փոփոխական մեծություն* է, որը միայն իր փոփոխման ընթացքում է ընդունակ դառնալու ավելի փոքր, քան կամայապես վերցրած* $\varepsilon > 0$ *թիվը։*

Եթե վերադառնանք ընդհանուր դեպքին, երբ x_n *փոփոխականն ունի* a *սահմանը, ապա փոփոխականի և իր սահմանի միջև տարբերությունը՝*

$$\alpha_n = x_n - a,$$

ակներևաբար, կլինի անվերջ փոքր, քանի որ (3) անհավասարության շնորհիվ՝

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \quad (\text{երբ } n > N_\varepsilon)։$$

Հակադարձաբար, եթե α_n*-ը անվերջ փոքր է, ապա* $x_n \to a$*։ Այսպիսով, գալիս ենք հետևյալ եզրակացությանը՝*

Որպեսզի a հաստատուն թիվը լինի x_n փոփոխականի սահմանը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց $x_n - a = \alpha_n$ տարբերությունը լինի անվերջ փոքր:

Այդ կապակցությամբ, «սահման» գաղափարի համար ես կարելի կլիներ ձևակերպել մի ուրիշ (նախկինին համարժեք) սահմանում՝

a հաստատուն թիվը կոչվում է x_n փոփոխականի սահման, եթե նրանց տարբերությունն անվերջ փոքր մեծություն է:

Հասկանալի է, որ եթե ելնենք սահմանի այս վերջին սահմանումից, ապա անվերջ փոքրի համար պետք է ընդունել վերևում բերված երկու սահմանումներից երկրորդը։ Այլապես կստացվեր կախարդական շրջան. սահմանը կորոշվեր անվերջ փոքրի միջոցով, իսկ անվերջ փոքրը՝ սահմանի միջոցով։

Այսպես, ուրեմն, եթե փոփոխական $x_n \to a$, *ապա նա կարող է ներկայացվել այսպես՝*

$$x_n = a + \alpha_n,$$

որտեղ α_n*-ը անվերջ փոքր է, և հակադարձաբար, եթե* x_n *փոփոխականը հնարավոր է այդպես ներկայացնել, ապա նա ունի* a *սահմանը։ Սրանից հաճախ են օգտվում պրակտիկայում փոփոխականի սահմանը որոշելիս։*

30. Օրինակներ:

1) Դիտարկենք հետևյալ փոփոխականները՝

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = -\frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}։$$

* *Չհաշված այն ոչ հետաքրքիր դեպքը, երբ տված մեծությունը նույնաբար հավասար է զրոյի։*

Դրանց համապատասխանում են արժեքների այսպիսի հաջորդականություններ՝

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \ldots,$$

$$-1,\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\quad \ldots,$$

$$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{4},\quad \ldots.$$

Այդ երեք փոփոխականներն էլ անվերջ փոքրեր են, այսինքն՝ ունեն 0 սահմանը։ Իրոք, նրանց համար

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

հենց որ $n > \frac{1}{\varepsilon}$։ Այսպիսով, կարելի է որպես N_ε վերցնել, օրինակ, $\frac{1}{\varepsilon}$-ի մեջ մտնող ամենամեծ ամբողջ թիվը, այսինքն՝ $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$-ը*։

Նկատենք, որ առաջին փոփոխականը միշտ մեծ է մնում իր 0 սահմանից, երկրորդ փոփոխականը միշտ նրանից փոքր է մնում, իսկ երրորդը՝ հաջորդաբար դառնում է մեկ մեծ, մեկ փոքր նրանից։

2) Եթե ընդունենք՝

$$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n} F,$$

ապա կստացվի արժեքների հետևյալ հաջորդականությունը՝

$$1,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{3}{6},\quad \ldots$$

Այս դեպքում ևս $x_n \to 0$, քանի որ՝

$$|x_n| \leqslant \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

երբ $n > \frac{3}{\varepsilon}$, այնպես որ, կարելի է ընդունել $N_\varepsilon = E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$։

Այստեղ մենք հանդիպում ենք մի հետաքրքրաշարժ դեպքի. փոփոխականը հաջորդաբար մեկ *մոտենում* է իր 0 սահմանին, մեկ *հեռանում* նրանից։

3) Դիցուք այժմ

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}.$$

այս փոփոխականի հետ մենք արդեն գործ ենք ունեցել n° 27-ում։ Այստեղ ևս $x_n \to 0$, քանի որ

$$|x_n| \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon$$

* Տես 42-րդ էջը։

հենց որ $n>N_\varepsilon=E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$։ Նկատենք, որ այստեղ n-ի բոլոր կենտ արժեքների համար փոփոխականը հավասարվում է իր սահմանին։

Այս պարզ օրինակները հետաքրքիր են նրանով, որ նրանք բնորոշում են այն հնարավորությունների բազմազանությունը, որոնք ընդգրկվում են փոփոխականի սահմանի համար վերևում տրված սահմանմամբ։ Կարևոր չէ, թե փոփոխականի արժեքները սահմանի մեկ կողմում են գտնվում, թե ոչ. կարևոր չէ, թե արդյոք փոփոխականն իր սահմանին մոտենում է ամեն մի քայլից հետո, կարևոր չէ, վերջապես, թե փոփոխականը հասնո՞ւմ է արդյոք իր սահմանին, այսինքն՝ արդյոք նա ստանո՞ւմ է իր սահմանին հավասար արժեքներ։ Էականը միայն այն է, ինչի մասին ասված է սահմանման մեջ՝ փոփոխականը պետք է վերջ ի վերջո, այսինքն՝ իր արժեքներից բավականաչափ հեռավորների համար, ցանկացած չափով քիչ տարբերվի իր սահմանից։

4) Դիտարկենք հետևյալ փոփոխականը՝

$$x_n=a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\quad(a>1)$$

և ցույց տանք, որ $x_n\to1$։

Եթե օգտվենք n° 11-ի (3) անհավասարությունից, ապա կարող ենք գրել՝

$$|x_n-1|=\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}<\varepsilon,\ \text{հենց որ}\ n>N_\varepsilon=E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right)։$$

Սակայն կարելի է և այլ կերպ գտնել։ Այսպես,

$$|x_n-1|=a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon$$

անհավասարությունը համարժեք է հետևյալին՝

$$\frac{1}{n}<\log_a(1+\varepsilon)$$

կամ՝

$$n>\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)},$$

որը բավարարվում է, երբ $n>N_\varepsilon=E\left(\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}\right)$։

Նկատենք, որ մեր բերած երկու տարբեր եղանակներով ստացանք տարբեր արտահայտություններ N_ε-ի համար։ Օրինակ, երբ $a=10$ և $\varepsilon=0{,}01$, առաջին եղանակով ստանում ենք $N_{0,01}=\frac{9}{0{,}01}=900$, իսկ երկրորդ եղանակով՝ $N_{0,01}=E\left(\frac{1}{0{,}00432\cdots}\right)=231$։ Երկրորդ եղանակով մենք ստացանք $N_{0,01}$-ի բոլոր հնարավոր արժեքներից փոքրագույնը, քանի որ արդեն $10^{\frac{1}{231}}=1{,}010017\cdots$ թվի և 1-ի տարբերությունն $\varepsilon=0{,}01$-ից մեծ է։ Այդպես կլինի նաև ընդհանուր *դեպքում։ Այդ առթիվ նկատենք, որ եթե խոսքը վերաբերում է միայն սահմանին ձգտելու փաստի հաստատմանը, ապա մենք ամենևին էլ շահագրգռված չենք գտնելու N_ε-ի հնարավոր փոքրագույն արժեքը։ Պետք է երաշխավորվի (3) անհավասարության բավարարվելը՝ սկսած մի որևիցե համարից, հեռավոր համարից թե մոտիկ — այդ կարևոր չէ։*

ե) Անվերջ փոքրի շատ կարևոր օրինակ է տալիս

$$\alpha_n = q^n \left(|q| < 1\right)$$

փոփոխականը։ Ապացուցելու համար, որ իրոք $\alpha_n \to 0$, *դիտարկենք հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon,$$

որը համարժեք է հետևյալին՝

$$n \cdot \log \cdot |q| < \log \varepsilon$$

կամ՝

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|}^{*},$$

Այսպիսով, եթե $\varepsilon < 1$ *համարելով, ընդունենք*

$$N_\varepsilon = E\left(\frac{\log \varepsilon}{\log |q|}\right),$$

ապա $n > N_\varepsilon$ *դեպքում հիշատակված անհավասարությունն անկասկած տեղի կունենա։*

Նմանապես հեշտ է համոզվել, որ

$$\beta_n = A \cdot q^n \left(|q| < 1\right)$$

փոփոխականը, որտեղ A*-ն հաստատուն թիվ է, նույնպես անվերջ փոքր է։*

զ) Այժմ դիտարկենք անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիան՝

$$\div\div\; a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots \left(|q| < 1\right)$$

և խնդիր դնենք հաշվել նրա գումարը։ Անվերջ պրոգրեսիայի գումար ասելով, ինչպես հայտնի է, հասկացվում է այն սահմանը, որին ձգտում է նրա առաջին n *անդամների* s_n *գումարը, երբ* n*-ը անսահմանորեն աճում է։ Սակայն՝*

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} q^n,$$

այնպես որ s_n *փոփոխականը* $\frac{a}{1 - q}$ *հաստատուն թվից տարբերվում է*

---

* *Պիտի նկատի ունենալ, որ* $|q| < 1$ *և* $\log |q| < 0$, *ուստի և անհավասարության երկու մասերն այդ թվի վրա բաժանելիս անհավասարության նշանը պետք է փոխվի իր հակառակ նշանին։*

$\alpha = -\frac{a}{1-q}\cdot q^n$ *մեծությամբ, որն ինչպես մենք հենց նոր տեսանք, անվերջ փոքր է։ Հետևաբար, սահմանի երկրորդ սահմանման համաձայն, պրոգրեսիայի որոնելի գումարը կլինի՝*

$$s = \lim s_n = \frac{a}{1-q}\text{։}$$

31. Անվերջ մեծ մեծություններ։ *Անվերջ փոքր մեծություններին, որոշ իմաստով, հակադրվում են **անվերջ մեծ մեծությունները**, կամ պարզապես՝ **անվերջ մեծերը**։*

x_n փոփոխականը կոչվում է **անվերջ մեծ**, եթե նա n-ի բավականաչափ մեծ արժեքների համար դառնում է և մնում բացարձակ արժեքով **ավելի մեծ**, քան նախապես տրված ցանկացած չափով մեծ $E>0$ թիվը՝

$$|x_n| > E \quad (\text{եթե } n > N_E)\text{։}$$

*Ինչպես և անվերջ փոքրերի դեպքում, այստեղ ևս պետք է ընդգծել, որ անվերջ մեծ մեծության ոչ մի արժեքը առանձին վերցրած չի կարող համարվել որպես «մեծ». մենք այստեղ գործ ունենք **փոփոխական** մեծության հետ, որը միայն իր **փոփոխման ընթացքում** է ընդունակ վերջ ի վերջո դառնալու կամայապես վերցրած E թվից ավելի մեծ։*

Անվերջ մեծերի օրինակներ կարող են ծառայել հետևյալ փոփոխականները՝

$$x_n = n, \quad x_n = -n, \quad x_n = (-1)^{n+1}n,$$

որոնք անցնում են թվերի բնական շարքով, բայց առաջինը պլյուս նշանով, երկրորդը՝ մինուս նշանով, իսկ երրորդը՝ մեկընդմեջ նշանը փոխելով։

Ահա անվերջ մեծ մեծության մեկ օրինակ ևս՝

$$x_n = Q^n, \quad |Q| > 1 \text{ դեպքում։}$$

Իրոք, ինչպիսին էլ լինի $E>0$ *թիվը,*

$$|x_n| = |Q|^n > E$$

անհավասարությունը բավարարվում է, հենց որ՝

$$n\cdot\log|Q| > \log E, \quad \text{կամ՝} \quad n > \frac{\log E}{\log|Q|}\text{*},$$

* *Քանի որ* $|Q|>1$, *ուստի* $\log|Q|>0$։

այնպես որ իբրև N_E թիվ կարելի է վերցնել այս վերջին հարաբերության ամբողջ մասը՝

$$N_E = E\left(\frac{\log E}{\log |Q|}\right),$$

Առանձնապես կարևոր են այն դեպքերը, երբ x_n անվերջ մեծ մեծությունը (գոնե բավականաչափ մեծ n-երի համար) պահպանում է որոշակի նշան (+ կամ —). այդպիսի դեպքում, նշանին համապատասխան, ասում են, որ x_n փոփոխականն ունի $+\infty$ կամ $-\infty$ սահմանը, ինչպես նաև՝ որ նա ձգտում է $+\infty$ կամ $-\infty$, և գրում են այսպես՝

$$\lim x_n = +\infty, \qquad x_n \to +\infty,$$

կամ՝

$$\lim x_n = -\infty, \qquad x_n \to -\infty.$$

Կարելի էր այսպիսի դեպքերի համար տալ նաև անկախ սահմանում, $|x_n| > E$ անհավասարությունը փոխարինելով, նայած դեպքին, հետևյալով՝

$$x_n > E \quad \text{կամ} \quad x_n < -E,$$

որտեղից արդեն բխում է, համապատասխանաբար, որ $x_n > 0$ կամ $x_n < 0$։

Ակներև է, որ x_n անվերջ մեծ մեծությունը ընդհանուր դեպքում բնութագրվում է $|x_n| \to +\infty$ առնչությամբ։

Վերևում բերված անվերջ մեծ մեծությունների օրինակներից, ակներևորեն, $x_n = n$ փոփոխականը ձգտում է $+\infty$, $x_n = -n$ փոփոխականը՝ $-\infty$։ Ինչ վերաբերում է երրորդ փոփոխականին՝ $x_n = (-1)^{n+1}n$, ապա նրա մասին ո՛չ կարելի է ասել, թե նա ձգտում է $+\infty$, ո՛չ էլ՝ թե նա ձգտում է $-\infty$։

Վերջապես, $x_n = Q^n$ փոփոխականի մասին միայն $Q > 1$ դեպքում կարելի է ասել, որ նա ձգտում է $+\infty$. երբ $Q < -1$, նա սահման չունի։

$\pm\infty$ «անիսկական թվերին» մենք արդեն հանդիպել ենք n° 6-ում. հարկավոր է հիշել, որ նրանց գործածությունը զուտ պայմանական իմաստով է և զգույշ լինել նրանց հետ թվաբանական գործողություններ կատարելիս։

Հաճախ $+\infty$ փոխարեն գրում են ուղղակի ∞։

Վերջում նշենք այն կապը, որ գոյություն ունի անվերջ մեծ և անվերջ փոքր մեծությունների միջև։

Եթե x_n փոփոխականն անվերջ մեծ է, ապա նրա հակադարձ մեծությունը՝ $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$-ը կլինի անվերջ փոքր։

Վերցնենք ցանկացած $\varepsilon > 0$ *թիվը: Անվերջ մեծի սահմանման համաձայն,* $E = \frac{1}{\varepsilon}$ *թվին համապատասխան կգտնվի այնպիսի* N *համար, որ*

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ հենց որ } n > N:$$

Այդ ժամանակ n*-ի այդ նույն արժեքների համար, ակներևորեն, կլինի՝*

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը:

Նման ձևով կարելի է ապացուցել նաև հակադարձ պնդումը՝

Եթե α_n փոփոխականը (զրոյի չհավասարվող) անվերջ փոքր է, ապա նրա հակադարձ մեծությունը՝ $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$-ը կլինի անվերջ մեծ:

32. Ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը: *Դիտարկենք* $X = \{x\}$ *թվային բազմությունը:* a կետը կոչվում է այդ բազմության խտացման կետ, եթե այդ կետի ցանկացած $(a - \delta, a + \delta)$ շրջակայքում [n° **28**] կան x-ի՝ a-ից տարբեր արժեքներ X բազմությունից: *Խտացման կետն ինքն այդ ժամանակ կարող է պատկանել* X *բազմությանը կամ ոչ: Օրինակ, եթե* $X = [a, b]$ *կամ* $X = (a, b)$, *ապա երկու դեպքում էլ* a*-ն* X*-ի համար խտացման կետ է, մինչդեռ առաջին դեպքում նա պատկանում է* X*-ին, իսկ երկրորդ դեպքում չի պատկանում:*

Ընդունելով, որ a*-ն* X *բազմության համար խտացման կետ է, կարելի է, այն էլ անթիվ բազմությամբ եղանակներով,* X *բազմության* x *թվերից (*a*-ից տարբեր) կազմել այնպիսի հաջորդականություն՝*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{2}$$

որը ձգտի a *սահմանին: Իրոք, նախապես կազմելով զրոյի ձգտող* δ_n *դրական թվերի մի հաջորդականություն՝*

$$\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_n > \cdots \to 0,$$

a *կետի յուրաքանչյուր* $(a - \delta_n, a + \delta_n)$ *շրջակայքում* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *կգտնենք մեկական* x_n *կետ* X *բազմությունից (*a*-ից տարբեր): Քանի որ* $\delta_n \to 0$ *և* $|x_n - a| < \delta_n$, *ուստի* $x_n \to a$:

Դիցուք այժմ X *բազմությունում, որի համար* a*-ն խտացման կետ է, տրված է մի* $f(x)$ *ֆունկցիա: Հետաքրքրություն է ներկայացնում այդ ֆունկցիայի վարքը՝* x*-ը* a*-ին ձգտելիս: Ասում են, որ*

x-ը a-ին ձգտելիս (կամ կարճ՝ a կետում) $f(x)$ ֆունկցիան ունի A սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ), եթե x անկախ փոփոխականը X-ից վերցրած (2) տեսքի ինչպիսի հաջորդականությամբ էլ a սահմանին ձգտելու լինի, ֆունկցիայի համապատասխան արժեքների

$$f(x_1),\quad f(x_2),\quad f(x_3),\ \ldots,\quad f(x_n),\ \ldots \tag{5}$$

հաջորդականությունը միշտ ձգտի A սահմանին:

Այդ փաստը նշանակում են այսպես՝

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \tag{6}$$

կամ՝

$$f(x) \to A, \text{ երբ } x \to a\text{։} \tag{7}$$

Այժմ ենթադրենք, թե $X = \{x\}$ *բազմությունը պարունակում է* x*-ի ցանկացած չափով մեծ դրական արժեքներ. այդպիսի դեպքում ասում են, որ* $+\infty$-ը այդ բազմության խտացման կետ է: *Եթե* $+\infty$ *կետի շրջակայք անելով հասկանանք* $(\Delta, +\infty)$ *միջակայքը, ապա մեր կողմից հենց նոր արված ենթադրությունը կարելի է նաև այսպես պատկերացնել.* $+\infty$ կետի յուրաքանչյուր շրջակայքում պետք է գտնվեն կետեր X բազմությունից:

Եթե այդ ենթադրությունը տեղի ունի, ապա կարելի է X *բազմությունից առանձնացնել (2) տեսքի այնպիսի հաջորդականություն, որն ունենա* $+\infty$ *սահմանը։ Իրոք, վերցնելով դեպի* $+\infty$ *ձգտող մի կամայական* Δ_n *դրական փոփոխական, յուրաքանչյուր* Δ_n*-ի* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *համար* X*-ում կգտնենք մի* x_n *արժեք, որը մեծ է* Δ_n*-ից՝* $x_n > \Delta_n$. *ակներևաբար կունենանք՝* $x_n \to +\infty$։

Ենթադրելով, որ $+\infty$*-ը* X *բազմության համար խտացման կետ է, դիտարկենք այդ տիրույթում որոշված մի* $f(x)$ *ֆունկցիա։ Նրա համար* x*-ը* $+\infty$ *ձգտելիս սահմանի գաղափարը, այն է՝*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

կարելի է սահմանել ճիշտ այնպես, ինչպես վերևում, միայն a*-ն փոխարինելով* $+\infty$*-ով։*

Համանման ձևով սահմանվում է նաև $f(x)$ *ֆունկցիայի սահմանը, երբ* $x \to -\infty$, *այն է՝*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A\text{։}$$

Այստեղ միայն նախապես պետք է ենթադրել, որ $-\infty$*-ը* X *բազմության համար խտացման կետ է, որի իմաստն ինքնին հասկանալի է։*

Վերջում ասենք նաև, որ բնական արգումենտի ֆունկցիայի համար n° **29**-*ում և* **31**-*ում սահմանված տերմինաբանությունը տարած-*

վում է ֆունկցիայի սահմանի՝ այստեղ դիտարկված ընդհանուր դեպքի վրա։ Երբ x-ը մի որոշ սահմանի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է զրոյի, այդ ֆունկցիան անվանում են անվերջ փոքր մեծություն։ Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է A վերջավոր սահմանի, $f(x)-A$ տարբերությունը կլինի անվերջ փոքր և հակառակը։ $|f(x)|$-ը $+\infty$ ձգտելիս ֆունկցիան անվանում են անվերջ մեծ մեծություն։ Վերջապես, հեշտ է դիտարկվող դեպքի վրա տարածել նաև n° **31**-ի վերջում ապացուցված թեորեմները, որոնք կապ են հաստատում անվերջ փոքր և անվերջ մեծ մեծությունների միջև։*

33. Ֆունկցիայի սահմանի մյուս սահմանումը: *x-ը a-ին ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը մենք կառուցեցինք հաջորդականության սահմանի գաղափարի հիման վրա, որն ավելի վաղ էինք ուսումնասիրել և ավելի տարրական է։ Կարելի է, սակայն, տալ ֆունկցիայի սահմանի մի այլ սահմանում, որն ամենևին չի օգտագործում հաջորդականության սահմանի գաղափարը։*

Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ a և A թվերը երկուսն էլ վերջավոր են։ Այդ դեպքում, ենթադրելով, որ a-ն $f(x)$ ֆունկցիայի որման X տիրույթի խտացման կետ է, ֆունկցիայի սահմանի նոր սահմանումը կարելի է ձևակերպել այսպես.

x-ը a-ին ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ունի A սահմանը, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \text{հենց որ} \quad |x-a|<\delta \tag{8}$$

*(որտեղ x-ը վերցրած է X-ից և a-ից տարբեր է)***։*

*Այս սահմանումը լիովին համարժեք է վերը, n° **82**-ում տրված սահմանմանը։ Այդ ապացուցելու համար նախ ենթադրենք, թե տեղի ունի հենց նոր ձևակերպված պայմանը և կամայապես վերցրած $\varepsilon>0$ թվին համապատասխանող $\delta>0$ թիվը գտնված է։ X-ից առանձնացնենք մի (2) կամայական հաջորդականություն, որը ձգտի a սահմանին (ընդ որում՝ բոլոր x_n-երը a-ից տարբեր լինեն)։ Հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն, $\delta>0$ թվին կհամապատասխանի մի այնպիսի N համար, որ $N<n$-երի դեպքում տեղի կունենա $|x_n-a|<\delta$ անհավասարությունը և, հետևաբար [տե՛ս (8)-ը],*

---

* *Եթե այդ տեղի ունի x-ը a-ին ձգտելիս, որտեղ a-ն վերջավոր է, ապա ասում են նաև, որ a կետում ֆունկցիան անվերջություն է դառնում։*

** *Հենց այն բանից, որ a-ն X-ի համար խտացման կետ է, պարզ երևում է, որ a կետի $(a-\delta,\ a+\delta)$ շրջակայքում անշուշտ կլինեն x-ի այդպիսի արժեքներ։*

նաև $|f(x)-A|<\varepsilon$ *անհավասարությունը։ Դրանով էլ ապացուցվում է, որ (5) հաջորդականությունը ձգտում է* A *սահմանին։ Այդպիսով, տեղի է ունենում նախկին սահմանման մեջ պահանջվող պայմանը։*

Այժմ ենթադրենք, թե ֆունկցիայի սահմանը գոյություն ունի ըստ նախկին սահմանման։ Որպեսզի ապացուցենք, որ միաժամանակ տեղի ունի նաև նոր սահմանման մեջ պահանջվող պայմանը, ենթադրենք հակառակը։ Այդ դեպքում մի որոշ $\varepsilon>0$ *թվի համար գոյություն չէր ունենա համապատասխան* $\delta>0$ *թիվ, այսինքն՝ ինչպիսի փոքր* $\delta>0$ *թիվ էլ վերցնելու լինեինք, միշտ կգտնվեր* x *փոփոխականի գոնե մեկ* x' *արժեք (*a*-ից տարբեր), որի համար կլիներ՝*

$$|x'-a|<\delta \quad \text{և} \quad \text{այնուամենայնիվ} \quad |f(x')-A|\geqslant\varepsilon\text{։}$$

Կազմենք δ_n *դրական թվերի՝ զրոյի ձգտող մի հաջորդականություն։ Հենց նոր ասածի շնորհիվ, յուրաքանչյուր* $\delta=\delta_n$ *թվի համար կգտնվեր այնպիսի* $x'=x'_n$ *արժեք, որ կլիներ՝*

$$|x'_n-a|<\delta_n \quad \text{և} \quad \text{այնուամենայնիվ} \quad |f(x'_n)-A|\geqslant\varepsilon\text{։}$$

Եթե այս արժեքներից կազմեինք հաջորդականություն՝

$$x'_1,\quad x'_2,\quad x'_3,\ \ldots,\ x'_n,\ \ldots$$

ապա, քանի որ

$$|x'_n-a|<\delta_n \quad \text{և} \quad \delta_n\to 0,$$

ուստի կունենայինք՝

$$x'_n\to a\text{։}$$

Այդ դեպքում, նախկին սահմանման համաձայն, ֆունկցիայի համապատասխան արժեքներից կազմած

$$f(x'_1),\quad f(x'_2),\quad f(x'_3),\ \ldots,\ f(x'_n),\ \ldots$$

հաջորդականությունը պետք է ձգտի A *սահմանին, որ հնարավոր չէր լինի, եթե մեր ենթադրությունը ճիշտ լիներ, քանի որ բոլոր* $n=1, 2, 3, \ldots$ *համար կունենայինք* $|f(x'_n)-A|\geqslant\varepsilon$*։ Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ ճիշտ չէ մեր ենթադրությունն այն մասին, որ նոր սահմանման մեջ պահանջվող պայմանը իբր թե տեղի չունի։*

Սահմանի գաղափարի նոր սահմանումը հեշտ է ձևակերպել նաև այն դեպքերի համար, երբ a *և* A *թվերից մեկը կամ երկուսն էլ հավասար են* $+\infty$ *կամ* $-\infty$*։ Օրինակի համար բերենք սահմանի գաղափարի մանրամասն սահմանումն այն դեպքի համար, երբ* $a=+\infty$ *և* A*-ն վերջավոր է (կամ նույնպես* $=+\infty$*).*

x-ը $+\infty$ ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ունի A վերջավոր սահմանը (կամ ձգտում է $+\infty$), եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ $(E > 0)$ թվի համար գտնվի այնպիսի $\Delta > 0$ թիվ, որ տեղի ունենա

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (f(x) > E), \quad \text{հենց որ} \quad x > \Delta$$

(x-ը վերցված է X բազմությունից):

Այս սահմանման համարժեքությունը «հաջորդականությունների լեզվով» արված սահմանմանը ապացուցվում է նույն ձևով, ինչպես և վերևում:

*Եթե այս սահմանումը կիրառենք x_n փոփոխականի, որպես n անկախ փոփոխականի ֆունկցիայի նկատմամբ, երբ $n \to +\infty$, ապա մենք կվերադառնանք այդպիսի ֆունկցիայի սահմանի, կամ, որ միևնույնն է, հաջորդականության սահմանի ամենաառաջին սահմանմանը, որը ավել ենք n° **28**-ում և **31**-ում և որը մեզ համար ելակետ հանդիսացավ բոլոր դեպքերի համար (Δ թվի դերն այնտեղ կատարում էր N համարը): Այսպիսով, այն ժամանակ, երբ ֆունկյիայի սահմանի սկզբնական սահմանումն այդ գաղափարը հանգեցնում էր հաջորդականության սահմանի գաղափարին, պարզվում է, որ* հաջորդականության սահմանի սահմանումն էլ իր հերթին ընդհանրապես ֆունկցիայի սահմանի սահմանման մասնավոր դեպքն է՝ *նոր ձևով ձևակերպված: Այն սահմանը, որն առաջ նշանակում էինք այսպես՝*

$$\lim x_n,$$

նոր ձևով պետք է գրվեր այսպես՝

$$\lim_{n \to +\infty} x_n.$$

Ի դեպ, միշտ կարելի է $n \to +\infty$ նշումը բաց թողնել առանց թյուրիմացությունից վախենալու, քանի որ այստեղ սահմանային անցման ոչ մի այլ դեպք հասկացվել չի կարող. n բնական արգումենտի փոփոխման N տիրույթը ունի $+\infty$ միակ խտացման կետը:

Չնայած a-ի և A-ի վերաբերյալ արված տարբեր ենթադրությունների դեպքերում ֆունկցիայի սահմանի (նոր ձևով ձևակերպված) սահմանումների տարբերությանը, նրանց իմաստը նույնն է. ֆունկցիան պետք է գտնվի իր A սահմանի ցանկացած «շրջակայքում», հենց որ անկախ փոփոխականը գտնվի իր a սահմանի համապատասխանորեն ընտրած «շրջակայքում»:

Այսպիսով, անալիզում կարևոր նշանակություն ունեցող գաղափարի՝ ֆունկցիայի սահմանի գաղափարի համար մենք ունենք երկու համարժեք սահմանումներ. հարմարությունից կախված, մենք հետագայում օգտվելու ենք մերթ մեկ, մերթ մյուս սահմանումից:

34. Օրինակներ *1) n° **30**-ի 4) օրինակում ապացուցված՝*

$$\lim a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a > 1)$$

սահմանային առնչությանը համանման կարելի է ստանալ ավելի ընդհանուր առնչություն՝

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1 \quad (a > 1)։$$

Պահանջվում է տրված $\varepsilon > 0$ *թվին համապատասխան* գտնել այնպիսի* $\delta > 0$ *թիվ, որպեսզի*

$$| a^x - 1 | < \varepsilon, \quad \text{հենց որ} \quad | x | < \delta։$$

Այս անհավասարություններից առաջինը, կամ նրան համարժեք՝

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$$

անհավասարությունները տեղի կունենան, եթե՝

$$\log_a (1 - \varepsilon) < x < \log_a (1 + \varepsilon)։$$

Քանի որ

$$\log_a (1 - \varepsilon) + \log_a (1 + \varepsilon) = \log_a (1 - \varepsilon^2) < 0$$

և

$$\log_a (1 - \varepsilon) < - \log_a (1 + \varepsilon),$$

ապա վերոհիշյալ անհավասարությունները առավել ևս տեղի կունենան, եթե՝

$$- \log_a (1 + \varepsilon) < x < \log_a (1 + \varepsilon)$$

կամ՝

$$| x | < \log_a (1 + \varepsilon)։$$

Այսպիսով, բավական կլինի միայն ընդունել $\delta = \log_a (1 + \varepsilon)$, *որպեսզի* $| x | < \delta$ *դեպքում լինի* $| a^x - 1 | < \varepsilon$, *որով և ավարտվում է ապացույցը։*

2) Ապացուցենք, որ

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad (\text{երբ } a > 1)։$$

Ցանկացած E*-ի համար, բավական է վերցնել* $\Delta = \log_a E$, *որպեսզի*

$$x > \Delta \quad \text{անհավասարությունից բխի} \quad a^x > E,$$

*որը և ապացուցում է մեր ասածը**։*

Նույն ձևով ապացուցվում է, որ

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad (\text{երբ } (a > 1)։$$

Իրոք, ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ *թիվը, եթե վերցնենք* $\Delta = \log_a \frac{1}{\varepsilon} = - \log_a \varepsilon$, *ապա՝*

$$x < - \Delta \quad \text{դեպքում անհրաժեշտաբար} \quad a^x < \varepsilon։$$

Իսկ եթե $0 < a < 1$, *ապա*

---

* *Ընդ որում, մեզ ոչինչ չի խանգարում համարել* $\varepsilon < 1$։

** $\lim a^n = +\infty$ $(a > 1)$ *ավելի մասնավոր արդյունքի հետ մենք արդեն գործ ենք ունեցել n° **31**-ում։*

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

ձևափոխման օգնությամբ հեշտ է եզրակացնել, որ՝

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad (\text{եթե } 0<a<1)\text{։}$$

3) Ցույց տանք, որ $a>1$ և $x>0$ դեպքում՝

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty\text{։}$$

Յուրաքանչյուր տված $E>0$ թվի համար, հենց որ $x>a^E$, կունենանք՝ $\log_a x > E$, և նույն ձևով, հենց որ $0<x<a^{-E}$, տեղի կունենա $\log_a x < -E$։ Սրանով էլ ապացուցվում են վերոհիշյալ երկու առնչությունները։

4) Այնուհետև ունենք՝

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}\text{։}$$

Օրինակի համար կանգ առնենք առաջին սահմանի վրա։ Ցանկացած ε-ի համար, բավական է վերցնել $x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$, որպեսզի լինի $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2}-\varepsilon$, այնպես որ՝

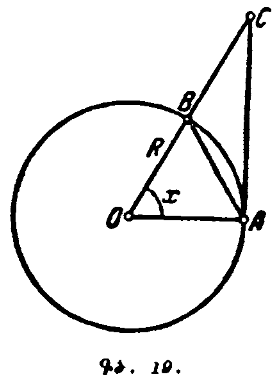
$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon\text{։}$$

5) Այժմ ցույց տանք (հետագայի համար ևս կարևոր) մի առնչություն՝

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\text{։} \tag{9}$$

Սակայն, նախապես մենք պետք է ապացուցենք մի քանի օգտակար անհավասարություններ, որոնք են՝

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)\text{։} \tag{10}$$



Գծ. 19.

Այդ նպատակով, R շառավիղ ունեցող շրջանի մեջ դիտարկենք AOB սուր անկյունը, AB լարը և շրջանագծին A կետում շոշափող AC ուղիղը (գծ. 19)։ Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\text{մակ. } \triangle AOB < \text{մակ. սեկտոր } AOB < \text{մակ. } \triangle AOC^*$$

Եթե x-ով նշանակենք AOB անկյան ռա-

* Մենք օգտվում ենք տարրական պատկերների մակերեսների վերաբերյալ այն գիտելիքներից, որոնք շարադրվում են դպրոցական դասընթացում։

դիանային չափը, ապա AB աղեղի երկարությունը կարտահայտվի Rx արտադրյալով և այդ անհավասարությունները կգրվեն այսպես՝

$$\frac{1}{2}R^2\cdot\sin x<\frac{1}{2}R^2\cdot x<\frac{1}{2}R^2\cdot\operatorname{tg} x:$$

Այստեղից, կրճատելով $\frac{1}{2}R^2$-ով, մենք կստանանք (10) անհավասարությունները:

Ենթադրելով, որ $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\sin x$-ը բաժանենք (10) անհավասարությունների յուրաքանչյուր անդամի վրա, կստանանք՝

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

որտեղից՝

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x:$$

Բայց՝

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x$$

[10-ի շնորհիվ], այնպես որ՝

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x:$$

Այստեղից հետևում է՝

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<|x|$$

անհավասարությունը, որն, ակներևաբար, տեղի ունի նաև այն դեպքում, երբ x-ը փոխում է իր նշանը, այսինքն՝ անհավասարությունը ճիշտ է բոլոր $x\neq 0$ արժեքների համար, միայն թե $|x|<\frac{\pi}{2}$:

Ստացված անհավասարությունն էլ լուծում է խնդիրը: Իրոք, եթե կամայականորեն տված է $\varepsilon>0$ թիվը, ապա որպես δ բավական է վերցնել δ և $\frac{\pi}{2}$ թվերից փոքրագույնը: Երբ $|x|<\delta$, այդ անհավասարությունը կիրառելի է $\left(\text{չէ որ } \delta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ և դրա շնորհիվ (քանի որ $\delta\leqslant\varepsilon$) կունենանք՝

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon:$$

6) Վերջապես, հետաքրքրական է դիտարկել նաև այնպիսի օրինակ, երբ ֆունկցիայի սահմանը գոյություն չունի։ Երբ x*-ը ձգտում է* $+\infty\ (-\infty)$*,* $\sin x$ *ֆունկցիան ոչ մի սահման չունի։*

Սահմանի բացակայության մեջ ամենից հեշտ է համոզվել, կանգնելով «հաջորդականությունների տեսակետի» վրա։ Բավական է նկատել, որ x*-ի արժեքների երկու՝*

$$\left\{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi\right. \quad \text{և} \quad \left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

հաջորդականություններին, որոնք ձգտում են $+\infty$*, համապատասխանում են ֆունկցիայի արժեքների այնպիսի հաջորդականություններ, որոնք ձգտում են տարբեր սահմանների, այն է՝*

$$\sin\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi=-1\to-1, \qquad \sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=1\to 1.$$

[Նույնը կարելի է արտահայտել նաև այլ կերպ. եթե վերցնենք x*-ի արժեքների*

$$\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

հաջորդականությունը, որը ձգտում է $+\infty$*, ապա նրան կհամապատասխանի ֆունկցիայի արժեքների*

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

հաջորդականությունը, որը ոչ մի սահման չունի]։

Եթե վերհիշենք սինուսոիդի «տատանական» բնույթը, ապա այս դեպքում սահմանի բացակայությունը ակնառու կդառնա։

$\sin\frac{1}{\alpha}$ *ֆունկցիան նույնպես սահման չունի, երբ* α*-ն ձգտում է 0-ի (աջից կամ ձախից)։ Ըստ էության, սա վերոհիշյալ օրինակի մի այլ ձևն է. համոզվելու համար բավական է միայն* $\sin x$ *ֆունկցիայի մեջ* x*-ը փոխարինել* $\frac{1}{\alpha}$*-ով։ Ակներև է, որ եթե* α*-ն ստանում է աջից (ձախից) զրոյի ձգտող հաջորդական արժեքներ, ապա* $x=\frac{1}{\alpha}$*-ը ձգտում է* $+\infty\ (-\infty)$*, և հակադարձը։*

$\sin\frac{1}{\alpha}$ *արտահայտության մեջ* α*-ի փոխարեն նորից գրենք* x *տառը (որպեսզի վերադառնանք արգումենտի սովորական նշանակմանը) և դիտարկենք ստացված*

$$y=\sin\frac{1}{x} \quad (x\neq 0)$$

ֆունկցիայի շատ ուսանելի գրաֆիկը, սահմանափակվելով x*-ի արժեքներով 0-ից մինչև* $\frac{2}{\pi}$ $\left(\text{և } -\frac{2}{\pi}\text{-ից մինչև } 0\right)$*։*

Նշենք x-ի զրոյի ձգտող հետևյալ հաջորդական արժեքները՝

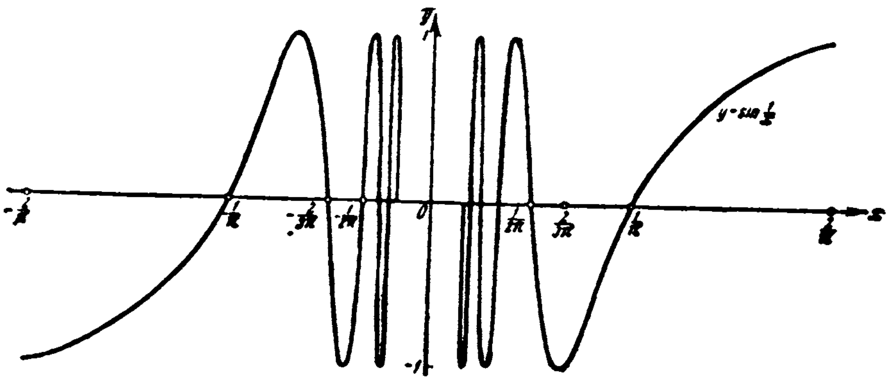
$$\frac{2}{\pi},\ \frac{1}{\pi},\ \frac{2}{3\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{2}{5\pi},\frac{1}{3\pi},\ \frac{2}{7\pi},\ \ldots,\ \frac{2}{(2n-1)\pi},\ \frac{1}{n\pi},\ \frac{2}{(2n+1)\pi},$$

դրանց համապատասխանում են $\frac{1}{x}$-ի մինչև ∞ աճող հետևյալ արժեքները՝

$$\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2},\ \ldots,\ \frac{(2n-1)\pi}{2},\ n\pi,\ \frac{(2n+1)\pi}{2},\ \ldots$$

Նշված արժեքների միջև գտնվող միջակայքերում $\sin\frac{1}{x}$ ֆունկցիան (x-ը նվազելիս) հերթականությամբ նախ նվազում է 1-ից մինչև 0 և 0-ից մինչև -1 և ապա աճում՝ -1-ից մինչև 0 և 0-ից մինչև 1, և այլն։ Այսպիսով, այդ ֆունկցիան, $\sin x$ ֆունկցիայի նման, կատարում է անթիվ բազմությամբ տատանումներ, բայց այն ժամանակ, երբ $\sin x$-ի համար այդ տատանումները բաշխվում են անվերջ միջակայքում, այստեղ նրանք բոլորը տեղավորվում են վերջավոր միջակայքում, խտանալով դեպի 0-ն։

Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է 20-րդ գծագրի վրա (հասկանալի է, որ ոչ լրիվ. անթիվ բազմությամբ տատանումները պատկերել հնարավոր չէ)։ Քանի



Գծ. 20.

որ x-ի նշանը փոխելիս $\sin\frac{1}{x}$-ը ևս նշանը փոխում է, ապա գրաֆիկի ձախ կեսը սիմետրիկ է աջին՝ սկզբնակետի նկատմամբ։

7) Եթե դիտարկենք $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ ֆունկցիան ($x\neq0$), որը հենց հիմա ուսումնասիրված $\sin\frac{1}{x}$ ֆունկցիայից տարբերվում է x արտադրիչով, ապա այս դեպքում, երբ $x\to0$, ֆունկցիայի սահմանը գոյություն ունի՝

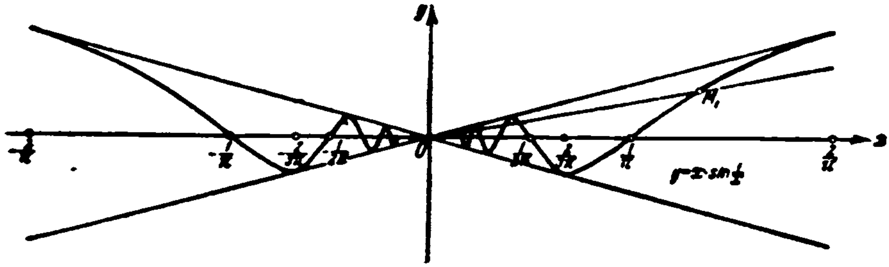
$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0,$$

որն անմիջապես հետևում է

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$$

անհավասարությունից։

Երբ x*-ը ձգտում է զրոյի, այս ֆունկցիան էլ նախորդի նման կատարում է անթիվ բազմությամբ տատանումներ, սակայն դրանց ամպլիտուդները (*x *բազմապատկչի շնորհիվ) նվազում են, ձգտելով զրոյի, որով և ապահովվում է սահմանի գոյությունը։*



Գծ. 21.

$$y=x\sin\frac{1}{x}$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է 21-րդ գծագրի վրա. Նա տեղավորված է կոորդինատային անկյունների՝ $y=x$ *և* $y=-x$ *երկու կիսորդների միջև*։*

Դիտողություն: *Մենք դիտարկեցինք հետևյալ սահմանները*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0,$$

որոնք ունեն մի ընդհանուր հատկություն՝ այստեղ դիտարկվող ֆունկցիաներից և ոչ մեկը $x=0$ *արժեքի համար որոշված չէ։ Սակայն այդ բոլորովին չի խանգարում խոսել այդ ֆունկցիաների սահմանների մասին, երբ* $x\to 0$, *որովհետև, տրված սահմանման ճշգրիտ իմաստի համաձայն, այդ դեպքում հենց* $x=0$ *արժեքը քննության չի առնվում։*

Այն հանգամանքը, որ $\sin\frac{1}{x}$ *ֆունկցիան* $x=0$ *արժեքի համար իմաստ չունի, դարձյալ չի խանգարում դնել նրա սահմանի հար-*

* Պարզության համար հարկ է եղել 20-րդ և 21-րդ գծագրերում x-երի առանցքի վրա վերցնել ավելի մեծ մասշտաբ, որն աղավաղում է առաջացնում։

ցը, երբ $x \to 0$. *սակայն այս անգամ պարզվում է, որ այդ սահմանը գոյություն չունի։*

35. Միակողմյան սահմաններ: *Եթե* X *տիրույթն այնպիսին է, որ* a*-ին ցանկացած չափով մոտ, սակայն* a*-ից դեպի աջ, գտնվում են* x*-ի արժեքներ* X*-ից, ապա կարելի է ֆունկցիայի սահմանի* n° **32**-*ում և* **33**-*ում տրված սահմանումը մասնավորեցնել, սահմանափակվելով միայն* $a < x$*-ի արժեքներով։ Այդ դեպքում ֆունկցիայի սահմանը, եթե այն գոյություն ունի, կոչվում է* $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանն x-ը աջից a-ին ձգտելիս *(կամ կարճ՝* a կետում աջից) *և նշանակվում է այսպես՝*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad \textit{կամ} \quad f(a+0)։$$

Համանման ձևով սահմանվում է ֆունկցիայի սահմանը x-ը ձախից a-ին ձգտելիս (a կետում ձախից)՝

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \quad \textit{կամ} \quad f(a-0)^{*}։$$

Այս երկու սահմանները կոչվում են միակողմյան սահմաններ:

Եթե X *տիրույթը հնարավորություն է տալիս* a*-ին մոտենալ թե՛ աջից, թե՛ ձախից, ապա կարելի է դիտարկել թե՛ մեկ և թե՛ մյուս սահմանը։ Հեշտ է ցույց տալ, որ (6)* սովորական («երկկողմյան») սահմանի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ձախակողմյան ու աջակողմյան երկու սահմաններն էլ զատ-զատ գոյություն ունենան և հավասար լինեն՝

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A։$$

Նշենք, որ այդ սահմանները երկուսն էլ կարող են գոյություն ունենալ, բայց հավասար չլինել։ Այդպիսի օրինակներ հեշտ է կառուցել, ելնելով n° **34**-*ում արդեն դիտարկված 2) և 4) օրինակներից։*

Օրինակներ: *Որոշենք երկու ֆունկցիաներ հետևյալ հավասարություններով* ($x \neq 0$ *դեպքում*)՝

$$f_1(x) = a^{\frac{1}{x}} \ (a > 1), \qquad f_2(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\,։$$

Դրանցից առաջինի համար ունենք՝

$$f_1(+0) = \lim_{x \to +0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to +\infty} a^z = +\infty,$$

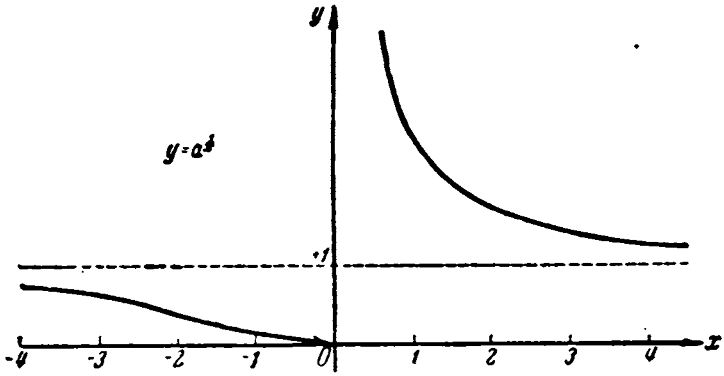
---

* *Եթե ինքը՝* $a = 0$, *ապա* $0+0$ *(կամ՝* $0-0$) *գրելու փոխարեն ուղղակի գրում են* $+0$ *(կամ՝* -0)։

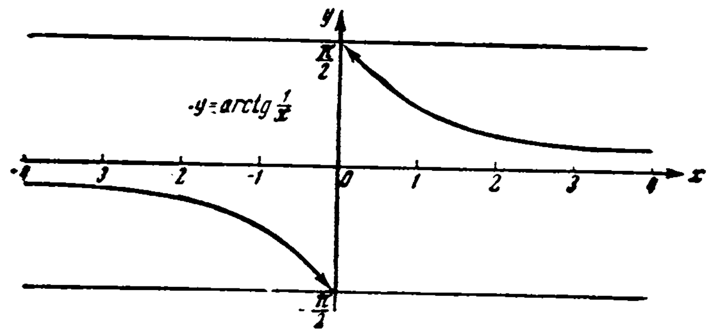
$$f_1(-0) = \lim_{x \to -0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to -\infty} a^z = 0,$$

Իսկ երկրորդի համար՝

$$f_2(+0) = \lim_{x \to +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{z \to +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2},$$



Գծ. 22.



Գծ. 23.

$$f_2(-0) = \lim_{x \to -0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \lim_{z \to -\infty} \operatorname{arctg} z = -\frac{\pi}{2},$$

Այս ֆունկցիաների գրաֆիկները պատկերված են 22-րդ և 23-րդ գծագրերում։

§ 2. ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

36. Բնական արգումենտի՝ սահման ունեցող ֆունկցիայի հատկությունները։ *Քանի որ բնական արգումենտի ֆունկցիայի վերաբերյալ թեորեմաների ձևակերպումն ու ապացույցն ավելի պարզ են, քան ընդհանուր տեսք ունեցող ֆունկցիայի դեպքում, ուստի մենք միշտ պետք է թեորեմաները նախ ձևակերպենք ու ապացուցենք այդ մասնավոր դեպքի համար, և ապա դիտողություններ կանենք դրանք ընդհանուր դեպքի վրա տարածելու վերաբերյալ։*

1. Եթե x_n փոփոխականը ձգտում է a սահմանին և $a>p$ (կամ $a<q$), ապա փոփոխականի բոլոր արժեքները, *սկսած մի որոշ արժեքից*, նույնպես մեծ կլինեն p-ից (կամ՝ փոքր կլինեն q-ից)։

ε դրական թիվն ընտրելով այնպես, որ $\varepsilon<a-p$ (կամ՝ $\varepsilon<q-a$), կունենանք՝

$$a-\varepsilon>p \quad (\text{կամ՝ } a+\varepsilon<q)։$$

Սակայն, x_n փոփոխականի սահմանի սահմանման համաձայն [n° 28], *այդ ε-ին համապատասխան կգտնվի այնպիսի N համար, որ $N<n$-երի դեպքում կլինի՝*

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon։$$

Այդ նույն արժեքների համար առավել ևս

$$x_n>p \quad (\text{կամ՝ } x_n<q)։$$

Այս պարզ առաջադրությունը մի շարք օգտակար հետևանքներ ունի։

2. Եթե x_n փոփոխականը ձգտում է $a>0$ (կամ $a<0$) սահմանին, ապա ինքը՝ x_n փոփոխականը նույնպես >0 (կամ՝ <0), *սկսած մի որոշ արժեքից*։

Ապացուցելու համար բավական է կիրառել նախորդ առաջադրությունը, ընդունելով $p=0$ ($q=0$)։

3. Եթե x_n փոփոխականը ձգտում է a սահմանին, միշտ մնալով

$$x_n\leqslant p \quad (\text{կամ՝ } x_n\geqslant q),$$

ապա նաև

$$a\leqslant p \quad (\text{կամ՝ } a\geqslant q)։$$

Ապացուցվում է հակասող ենթադրությամբ, օգտվելով 1)-ից։

Հենվելով 1) առաջադրության վրա, այժմ ապացուցենք սահմանի միակությունը՝

4. x_n փոփոխականը չի կարող միաժամանակ ձգտել երկու տարբեր (վերջավոր) սահմանների:

Իրոք, ենթադրենք հակառակը և թո՛ղ միաժամանակ $x_n \to a$ *և* $x_n \to b$, *ընդ որում՝* $a<b$։ *Վերցնենք* a-*ի և* b-*ի միջև մի կամայական* r *թիվ՝*

$$a<r<b.$$

Քանի որ $x_n \to a$ *և* $a<r$, *ուստի կգտնվեր այնպիսի* N' *համար, որ* $N'<n$-*երի դեպքում տեղի կունենար* $x_n<r$ *անհավասարությունը։ Մյուս կողմից, քանի որ* $x_n \to b$ *և* $b>r$, *ապա կգտնվեր նաև այնպիսի* N'' *համար, որ* $N''<n$-*երի համար կլիներ* $x_n>r$։ *Եթե* n-*ը վերցնենք մեծ և՛* N'-*ից, և՛* N''-*ից, ապա փոփոխականի համապատասխան* x_n *արժեքը միաժամանակ և՛ մեծ կլիներ* r-*ից, և՛ փոքր, որ հնարավոր չէ։ Այս հակասությունն էլ հենց հաստատում է մեր պնդումը։*

5. Եթե x_n փոփոխականը վերջավոր սահման ունի, ապա նա սահմանափակ է *այն իմաստով, որ նրա բոլոր արժեքները գտնվում են երկու վերջավոր եզրերի միջև՝*

$$m \leq x_n \leq M \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (1)$$

Ամենից առաջ, սահմանի սահմանումից անմիջապես երևում է, որ, ինչպիսին էլ վերցնենք $\varepsilon>0$ *թիվը, կգտնվի այնպիսի* N *համար, որ* $N<n$-*երի դեպքում կլինի՝*

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon.$$

Այսպիսով, $n=N+1,\ N+2,\ \ldots$ *համարների համար* x_n-*ի արժեքներն արդեն գտնվում են* $a-\varepsilon$ *և* $a+\varepsilon$ *եզրերի միջև։ Այդ եզրերից դուրս կարող են լինել միայն*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_N$$

N *հատ արժեքներից մի քանիսը, այսինքն՝ վերջավոր թվով։ Հետևաբար, կարելի է այդ եզրերի փոխարեն վերցնել նոր եզրեր այնպես, որպեսզի նրանց միջև գտնվեն բոլոր* x_n-*երը։ Օրինակի համար, կարելի է որպես* m *ստորին եզր վերցնել*

$$a-\varepsilon,\ \ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$$

թվերից փոքրագույնը, իսկ որպես M *վերին եզր՝*

$$a+\varepsilon,\ \ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$$

թվերից մեծագույնը։

Դիտողություն: *Այստեղից, մասնավորապես, հետևում է, որ վերջավոր սահման ունեցող փոփոխականը չի կարող միաժամանակ ձգտել $+\infty$ կամ $-\infty$։ Այս որոշ չափով լրացնում է սահմանի միակության վերաբերյալ 4) թեորեման։*

37. Տարածումը կամայական փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքի վրա: n° **36**-*ի բովանդակությունը հեշտ է վերաձևակերպել* $f(x)$ *ֆունկցիայի ընդհանուր դեպքի համար, երբ ֆունկցիան տրված է մի որոշ* X *տիրույթում, որն ունի* a *խտացման կետը**։

1) Երբ x-ն a-ին ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ունի A վերջավոր սահման և $A>p$ (կամ՝ $A<q$), ապա x-ի՝ a-ին բավականաչափ մոտ (և a-ից տարբեր) արժեքների համար ֆունկցիան ինքն էլ բավարարում է

$$f(x)>p \quad (\text{կամ՝ } f(x)<q) \tag{2}$$

անհավասարությանը:

ε դրական թիվն ընտրելով $\varepsilon<A-p$ (կամ՝ $\varepsilon<q-A$) պայմանով, կունենանք՝

$$A-\varepsilon>p \quad (\text{կամ՝ } A+\varepsilon<q)։$$

Սակայն, ֆունկցիայի սահմանի երկրորդ սահմանման համաձայն [n° **33**], *այդ ε-ի համար կգտնվի այնպիսի δ, որ, հենց որ $|x-a|<\delta$ (որտեղ x-ը վերցրած է X-ից և տարբեր է a-ից), անմիջապես կունենանք՝*

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon։$$

x-ի այդ նույն արժեքների համար, անշուշտ, տեղի կունենա նաև (2)-ը։

Ընթերցողը տեսնում է, որ ապացուցելու համար ոչ մի նոր գաղափար օգտագործելու հարկ չեղավ։

Այս առաջադրության օգնությամբ անմիջապես կարելի է հիմնավորել նաև այնպիսի առաջադրություններ, որոնք նման են n° **36**-*ի 2), 3) և 4) առաջադրություններին։ Օրինակ, 1)-ում ընդունելով* $p=0$ *(կամ՝* $q=0$) *կստանանք՝*

2) Երբ x-ն a-ին ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ունի դրական (կամ՝ բացասական) վերջավոր սահման, ապա ֆունկցիան ինքն էլ դրական (կամ՝ բացասական) կլինի գոնե x-ի այն արժեքների համար, որոնք

---

* a *թիվը կարող է նաև $+\infty$ կամ $-\infty$ լինել, սակայն որոշակիության համար մենք սահմանափակվելու ենք այն դեպքով, երբ a-ն վերջավոր է։*

բավականաչափ մոտ են a-ին, բայց a-ից տարբեր են:

Իրավացի է նաև 5)-ին համանման պնդումը, սակայն ավելի թույլ ասումով՝

3) Եթե x-ն a-ին ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ունի A վերջավոր սահման, ապա x-ի՝ a-ին բավականաչափ մոտ արժեքների համար ֆունկցիան սահմանափակ կլինի *այն իմաստով, որ նրա արժեքները կգտնվեն երկու վերջավոր եզրերի միջև՝*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \text{միայն} \quad 0<|x-a|<\delta \quad \text{համար:}$$

Իրոք, սահմանի սահմանման համաձայն, կամայականորեն վերցնելով $\varepsilon>0$ *թիվը, կգտնենք այնպիսի* $\delta>0$, *որպեսզի՝*

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon, \quad \text{երբ} \quad 0<|x-a|<\delta.$$

Հիշե՛նք, որ նման արդյունք մենք նախապես ստացել էինք x_n *փոփոխականի համար.*

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

անհավասարությունները տեղի ունեին միայն $N<n$*-երի համար: Սակայն այն դեպքում այդ եզրերից դուրս կարող էին լինել միայն վերջավոր թվով արժեքներ և հեշտ էր գտնել այնպիսի նոր եզրեր, որոնց միջև գտնվեին արդեն բոլոր արժեքները՝ առանց բացառության: Իսկ այստեղ արդեն այդ բանը, ընդհանրապես ասած, չի կարելի անել, քանի որ* x*-ի այնպիսի արժեքներ, որոնց համար* $|x-a|\geqslant\delta$, *կարող են և անվերջ թվով լինել: Օրինակի համար,* $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *ֆունկցիան* ($0<x$*-երի համար) ձգտում է մեկի, երբ* $x\to1$. *ակներևորեն՝* $0<f(x)<2$, *երբ* $|x-1|<\dfrac{1}{2}$, *սակայն* x*-ի բոլոր դիտարկվող արժեքների համար* $f(x)$ *ֆունկցիան ամենևին էլ սահմանափակ չէ. նա ձգտում է* $+\infty$, *երբ* $x\to+0$:

38. Սահմանային անցում հավասարությունում և անհավասարությունում: x_n *և* y_n *երկու փոփոխականները միացնելով հավասարության կամ անհավասարության նշանով, մենք միշտ հասկանում ենք, որ խոսքը նրանց համապատասխան արժեքների մասին է, այսինքն՝ միևնույն համարն ունեցող արժեքների մասին է:*

1) Եթե x_n և y_n երկու փոփոխականները իրենց փոփոխման ընթացքում միշտ իրար հավասար են՝ $x_n=y_n$, ընդ որում նրանցից

յուրաքանչյուրն ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

ապա այդ սահմանները ևս իրար հավասար են՝ $a = b$:

Անմիջապես հետևում է սահմանի միակության թեորեմայից [**36**; 4)]*։*

Սովորաբար այս թեորեմայից օգտվում են հ ա վ ա ս ա ր ո ւ թ յ ա ն մ ե ջ ս ա հ մ ա ն ա յ ի ն ա ն ց մ ա ն ձևով. $x_n = y_n$ հավասարությունից եզրակացնում են, որ $\lim x_n = \lim y_n$։

2) Եթե x_n և y_n երկու փոփոխականների համար միշտ տեղի ունի $x_n \geqslant y_n$ անհավասարությունը, ընդ որում նրանցից յուրաքանչյուրն ունի վերջավոր սահման՝

$$\lim x_n = a, \lim y_n = b,$$

ապա նաև $a \geqslant b$:

*Ենթադրենք հակառակը, և թող $a < b$։ Դատելով այնպես, ինչպես n° **36**, 41-ում, a և b թվերի միջև վերցնենք մի r թիվ՝ $a < r < b$։ Այն ժամանակ, մի կողմից՝ կգտնվի այնպիսի N' համար, որ $n > N'$ դեպքում կլինի $x_n < r$, մյուս կողմից, կգտնվի նաև այնպիսի N'' համար, որ $n > N''$ դեպքում կլինի $y_n > r$։ Եթե այժմ N-ը վերցնենք N'-ից ու N''-ից մեծ, ապա $n > N$ դեպքում միաժամանակ տեղի կունենան երկու անհավասարությունները՝*

$$x_n < r \quad \text{և} \quad y_n > r,$$

որտեղից կելնի, որ՝

$$x_n < y_n,$$

որը, սակայն, հակասում է թեորեմայի պայմանին։ Թեորեման ապացուցվեց։

Այս թեորեման հաստատում է ս ա հ մ ա ն ա յ ի ն ա ն ց մ ա ն թ ո ւ յ լ ա տ ր ե լ ի ո ւ թ յ ո ւ ն ն ա ն հ ա վ ա ս ա ր ո ւ թ յ ա ն մ ե ջ (հավասարության հետ միացած), $x_n \geqslant y_n$ անհավասարությունից կարելի է եզրակացնել, $\lim x_n \geqslant \lim y_n$։

Իհարկե, $>$ նշանը կարելի է ամենուրեք փոխարինել $<$ նշանով։

Ընթերցողի ուշադրությունը պիտի հրավիրել այն հանգամանքի վրա, որ $x_n > y_n$ խ ի ս տ անհավասարությունից, ընդհանրապես ասած, չի բխում նույնպիսի խ ի ս տ՝ $\lim x_n > \lim y_n$ անհավասարություն, այլ, առաջվա նման, միայն՝ $\lim x_n \geqslant \lim y_n$։ Այսպես, օրինակ, բոլոր *n-երի համար տեղի ունի* $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ *խիստ անհավասարությունը, բայց և այնպես՝*

$$\lim \frac{1}{n} = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0:$$

Փոփոխականի սահմանի գոյությունն ապացուցելիս և նրա մեծությունը որոշելիս հաճախ օգտակար է լինում հետևյալ թեորեմը՝

3) **Եթե** x_n, y_n, z_n փոփոխականների համար միշտ տեղի ունեն

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

անհավասարությունները, ընդ որում x_n և z_n փոփոխականները ձգտում են a ընդհանուր սահմանին՝

$$\lim x_n = \lim z_n = a,$$

ապա y_n փոփոխականը ևս ունի նույն սահմանը՝

$$\lim y_n = a:$$

Վերցնենք $\varepsilon > 0$ *կամայական թիվը: Այդ* ε*-ի համար նախ կգտնվի այնպիսի* N' *համար, որ* $n > N'$ *դեպքում տեղի կունենա՝*

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon:$$

Այնուհետև կգտնվի այնպիսի N'' *համար, որ* $n < N''$ *դեպքում տեղի կունենա՝*

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon:$$

N*-ը վերցնելով* N' *և* N'' *թվերից մեծ, այդ անհավասարությունները կբավարարվեն միաժամանակ, ուստի և՝*

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

որտեղից հետևում է՝

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon,$$

կամ՝

$$|y_n - a| < \varepsilon:$$

Այսպիսով, իսկապես $\lim y_n = a$:

Ապացուցված թեորեմից, մասնավորապես, հետևում է, որ եթե բոլոր n-երի համար

$$a \leqslant y_n \leqslant z_n$$

և հայտնի է, որ $z_n \to a$, ապա նաև $y_n \to a$: *Ի միջի այլոց, այդ շատ հեշտ է ապացուցել նաև անմիջականորեն։*

1), 2) և 3) թեորեմները հեշտությամբ տարածվում են նաև անվերջ սահմանների դեպքի վրա։

39. Լեմմաներ անվերջ փոքրերի վերաբերյալ: *Հետագա թեորեմների մեջ մենք միաժամանակ պետք է դիտարկենք երկու կամ ավելի թվով փոփոխականներ, նրանք միացնելով թվաբանական գործողությունների նշաններով։ Այդ ժամանակ, ինչպես վերևում էինք արել, այդ նշանները մենք վերագրելու ենք փոփոխականների համապատասխան արժեքներին։ Օրինակ, խոսելով* x_n *և* y_n *երկու փոփոխականների գումարի մասին, որոնք առանձին-առանձին վերցրած հաջորդաբար ստանում են հետևյալ արժեքները՝*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

և

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \dots\ y_n,\ \dots,$$

մենք նկատի ունենք $x_n + y_n$ *փոփոխականը, որը հաջորդաբար ստանում է հետևյալ արժեքները՝*

$$x_1 + y_1,\quad x_2 + y_2,\quad x_3 + y_3,\ \dots,\quad x_n + y_n,\ \dots\ ։$$

Փոփոխականների հետ թվաբանական գործողությունների արդյունքների վերաբերյալ թեորեմների ապացուցման ժամանակ կարևոր դեր են խաղալու հետևյալ երկու լեմմաներն անվերջ փոքրերի մասին։

1-ին լեմմա. Ցանկացած վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարը նույնպես անվերջ փոքր մեծություն է:

Ապացուցենք երկու անվերջ փոքրերի դեպքի համար (ընդհանուր դեպքի համար ապացույցը նման եղանակով է)։

Դիցուք ունենք α_n *և* β_n *անվերջ փոքրերը։ Վերցնենք* $\varepsilon > 0$ *կամայական թիվը։ Անվերջ փոքրի սահմանման համաձայն,* α_n *անվերջ փոքրի համար կգտնվի* $\frac{\varepsilon}{2}$ *թվին համապատասխանող այնպիսի* N' *համար, որ* $n > N'$ *դեպքում կլինի՝*

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ ։$$

Ճիշտ այդպես էլ, β_n *անվերջ փոքրի համար կգտնվի այնպիսի* N'' *համար, որ* $n > N''$ *դեպքում կլինի՝*

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ ։$$

Եթե N թիվը վերցնենք N′ և N″ թվերից մեծ, ապա $n>N$ *դեպքում այդ երկու անհավասարությունները տեղի կունենան միաժամանակ, և կստանանք՝*

$$|\alpha_n+\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\text{։}$$

Այդպիսով, $\alpha_n+\beta_n$ *մեծությունն իսկապես անվերջ փոքր է։*

2-րդ լեմմա. x_n սահմանափակ փոփոխականի և α_n անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր մեծություն է։

Դիցուք n*-ի բոլոր արժեքների համար*

$$|x_n|\leqslant M\text{։}$$

Վերցնենք $\varepsilon>0$ *կամայական թիվը։* α_n *անվերջ փոքրի համար կգտնվի* $\frac{\varepsilon}{M}$ *թվին համապատասխանող այնպիսի* N *համար, որ* $n>N$ *դեպքում կլինի՝*

$$|\alpha_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{M}\text{։}$$

Այն ժամանակ, այդ նույն n*-երի համար կստանանք՝*

$$|x_n\cdot\alpha_n|=|x_n|\cdot|\alpha_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon\text{։}$$

Այստեղից էլ հետևում է, որ $x_n\cdot\alpha_n$ *մեծությունն անվերջ փոքր է։*

40. Թվաբանական գործողություններ փոփոխականների հետ։ *Ստորև բերվող թեորեմները կարևոր են նրանով, որ նրանց օգնությամբ շատ դեպքերում կարիք չի լինում դիմել «սահման» գաղափարի սահմանմանը, տվյալ* ε*-ի համար համապատասխան* N*-ը գտնելով, և այլն։ Դրանով սահմանների հաշվումն զգալի չափով հեշտանում է։*

1) Եթե x_n և y_n փոփոխականներն ունեն վերջավոր սահմաններ՝

$$\lim x_n=a,\quad \lim y_n=b,$$

ապա նրանց գումարը (տարբերությունը) նույնպես սահման ունի, ընդ որում՝

$$\lim(x_n\pm y_n)=a+b\text{։}$$

Թեորեմայի պայմանից հետևում է, որ՝

$$x_n=a+\alpha_n,\quad y_n=b+\beta_n, \tag{3}$$

որտեղ α_n*-ը և* β_n*-ը անվերջ փոքրեր են։ Այդ դեպքում՝*

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n)\text{։}$$

Այստեղ $\alpha_n \pm \beta_n$ *մեծությունն անվերջ փոքր է* n° **39**-*ի 1-ին լեմմայի համաձայն. հետևաբար կարելի է պնդել, որ* $x_n \pm y_n$ *փոփոխականն ունի* $a \pm b$ *սահմանը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

Այս թեորեմն ու նրա ապացույցը տարածվում են ցանկացած վերջավոր թվով գումարելիների դեպքի վրա։

2) **Եթե** x_n և y_n փոփոխականներն ունեն վերջավոր սահմաններ՝

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

ապա նրանց արտադրյալը նույնպես սահման ունի և՝

$$\lim x_n y_n = a b\text{։}$$

Ելնելով նույն (3) հավասարություններից, այս անգամ կունենանք

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)\text{։}$$

Փակագծերի ներսի արտահայտությունը, 1-ին և 2-րդ լեմմաների շնորհիվ, անվերջ փոքր մեծություն է, որտեղից և հետևում է, որ $x_n y_n$ *փոփոխականն իրոք ունի* ab *սահմանը։*

Այս թեորեմն կարելի է տարածել ցանկացած վերջավոր թվով արտադրիչների դեպքի վրա (օրինակ, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով)։

3) Եթե x_n և y_n փոփոխականներն ունեն վերջավոր սահմաններ՝

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

ընդ որում b-ն զրոյից տարբեր է, ապա նրանց հարաբերությունը նույնպես սահման ունի և՝

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\text{։}$$

Դիցուք, օրինակի համար, $b > 0$. *վերցնենք* 0-*ի և* b-*ի միջև մի* r *թիվ։ Այդ ժամանակ, համաձայն* n° **36**-*ի 1) թեորեմայի, սկսած մի որոշ համարից, կունենանք՝*

$$y_n > r > 0,$$

այնպես որ $y_n \neq 0$։ *Սահմանափակվելով n համարի այն արժեքներով, որոնց դեպքում բավարարվում է այդ* *պայմանը, $\frac{x_n}{y_n}$ հարաբերությունն իմաստ կունենա։ Այն ժամանակ, դարձյալ ելնելով (3) հավասարություններից, կունենանք՝*

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)։$$

Փակագծերի ներսի արտահայտությունը, 1-ին և 2-րդ լեմմաների շնորհիվ, անվերջ փոքր մեծություն է, իսկ նրա մոտ գրված բազմապատկիչը, սկզբում ասածի շնորհիվ, սահմանափակ փոփոխական է՝

$$0 < \frac{1}{by_n} < \frac{1}{b_r}։$$

Հետևաբար, 2-րդ լեմմայի համաձայն, աջ մասի ամբողջ արտադրյալն անվերջ փոքր մեծություն է։ Սակայն նա $\frac{x_n}{y_n}$ փոփոխականի և $\frac{a}{b}$ թվի տարբերությունն է, ուրեմն $\frac{x_n}{y_n}$ փոփոխականի սահմանը $\frac{a}{b}$ թիվն է, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

41. Անորոշ արտահայտություններ: *Նախընթաց* n°*-ում մենք դիտարկեցինք հետևյալ արտահայտությունները՝*

$$x_n \pm y_n,\quad x_n y_n,\quad \frac{x_n}{y_n} \qquad (4)$$

և, ենթադրելով, որ x_n և y_n փոփոխականները ձգտում են վերջավոր սահմանների (որոնցից y_n-ի սահմանը քանորդի ժամանակ չպետք է հավասարվեր զրոյի), մենք որոշեցինք այդ արտահայտություններից յուրաքանչյուրի սահմանը։

Այժմ կանգ առնենք այն դեպքերի վրա, որոնք այնտեղ թողել էինք առանց քննարկման, այն է՝ երբ x_n և y_n փոփոխականների սահմանները (մեկը կամ երկուսն էլ) անվերջ են կամ երբ խոսքը քանորդի մասին է, երբ հայտարարի սահմանը զրո է։

1°. *Սկսենք $\frac{x_n}{y_n}$ քանորդից և ենթադրենք, թե x_n և y_n երկու փոփոխականները միաժամանակ ձգտում են զրոյի։ Այստեղ մենք առաջին անգամ հանդիպում ենք բոլորովին առանձնահատուկ մի երևույթի. չնայած մեզ հայտնի են x_n-ի և y_n-ի սահմանները, սակայն նրանց հարաբերության սահմանի մասին ոչ մի ընդհա-*

նուր եզրակացություն անել չենք կարող, եթե մեզ հայտնի չեն հենց այդ փոփոխականներն իրենք։ Այդ սահմանը, նայած, թե այդ երկու փոփոխականներն ինչ մասնակի օրենքով են փոփոխվում, կարող է տարբեր արժեքներ ունենալ, կամ նույնիսկ ամենևին գոյություն չունենալ։ *Ստորև բերվող պարզ օրինակները պարզաբանում են հենց այդ հանգամանքը։*

Ենթադրենք, օրինակ, $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$. *երկուսն էլ ձգտում են զրոյի. Նրանց հարաբերությունը՝* $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n}$ *նույնպես ձգտում է զրոյի։ Եթե, ընդհակառակն, ընդունենք* $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, *ապա, չնայած նրանք դարձյալ զրոյի են ձգտում, սակայն նրանց հարաբերությունը՝* $\frac{x_n}{y_n} = n$ *ձգտում է* $+\infty$*։ Իսկ եթե վերցնենք զրոյից տարբեր որևէ* a *թիվ և կառուցենք* $x_n = \frac{a}{n}$ *և* $y_n = \frac{1}{n}$ *երկու անվերջ փոքրերը, ապա կտեսնենք, որ նրանց հարաբերությունն ունի* a *սահմանը (քանի որ նույնաբար հավասար է* a-*ի)։ Վերջապես, եթե ընդունենք* $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, *որոնք երկուսն էլ դարձյալ ունեն զրո սահմանը, ապա նրանց հարաբերությունը՝* $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ *ոչ մի սահման չունի։*

Այսպիսով, x_n *և* y_n *փոփոխականների միայն սահմաններն իմանալով, տվյալ դեպքում, հնարավոր չէ դատել նրանց հարաբերության վարքի մասին. անհրաժեշտ է իմանալ հենց այդ ֆունկցիաներն՝ իրենք, այսինքն՝ նրանց փոփոխման օրենքները* n-*ից կախված, և անմիջականորեն հետազոտել* $\frac{x_n}{y_n}$ *հարաբերությունը։ Որպեսզի բնութագրեն այդ առանձնահատկությունը, ասում են, որ երբ* $x_n \to 0$ *և* $y_n \to 0$, *այդ ժամանակ* $\frac{x_n}{y_n}$ արտահայտությունը ներկայացնում է $\frac{0}{0}$ տեսքի ա ն ո ր ո շ ո ւ թ յ ո ւ ն։

2°. *Այն դեպքում, երբ միաժամանակ* $x_n \to \pm\infty$ *և* $y_n \to \pm\infty$, *նման երևույթ տեղի ունի։ Չիմանալով այդ ֆունկցիաներն՝ իրենք, նրանց հարաբերության վարքի մասին ընդհանուր եզրակացություն* *անել չի կարելի։ Դրանում կարելի է համոզվել այնպիսի օրինակներով, որոնք 1°-ում բերված օրինակների լրիվ անալոգներն են.*

$$x_n = n \to \infty, \qquad y_n = n^2 \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = n^2 \to \infty, \qquad y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty;$$

$$x_n = an \to \pm\infty (a \gtrless 0), \quad y_n = n \to \infty, \qquad \frac{x_n}{y_n} = a \to a;$$

$$x_n = [2 + (-1)^{n+1}]\, n \to \infty, \; y_n = n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^{n+1}$$ *սահման չունի։*

Այս դեպքում ևս ասում են, որ $\frac{x_n}{y_n}$ արտահայտությունը ներկայացնում է անորոշություն, *այս անգամ՝* $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի:

Անցնենք $x_n y_n$ *արտադրյալի դիտարկմանը։*

3°. *Եթե* x_n*-ը ձգտում է զրոյի, իսկ* y_n*-ը՝* ∞, *ապա, հետազոտելով* $x_n y_n$ *արտադրյալի վարքը, մենք հանդիպում ենք ճիշտ այնպիսի առանձնահատկության, ինչ որ 1°-ում ու 2°-ում։ Այդ մասին վկայում են հետևյալ օրինակները՝*

$$x_n = \frac{1}{n^2} \to 0, \; y_n = n \to \infty, \quad x_n y_n = \frac{1}{n} \to 0;$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0, \; y_n = n^2 \to \infty, \quad x_n y_n = n \to \infty;$$

$$x_n = \frac{a}{n} \to 0 \, (a \gtrless 0), \; y_n = n \to \infty, \qquad x_n y_n = a \to a;$$

$$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0, \qquad y_n = n \to \infty, \qquad x_n y_n = (-1)^{n+1}$$ *սահման չունի։*

Այդ կապակցությամբ, $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$ *դեպքում ասում են, որ* $x_n y_n$ արտահայտությունը ներկայացնում է $0 \cdot \infty$ տեսքի անորոշություն:

Դիտարկենք, վերջապես $x_n + y_n$ *գումարը։*

4°. *Այստեղ առանձնահատուկ է այն դեպքը, երբ* x_n*-ը և* y_n*-ը ձգտում են տարբեր նշաններով անվերջությունների.* $x_n + y_n$ *գումարի մասին ոչինչ որոշակի չի կարելի ասել, չիմանա-*

լով x_n-ը և y_n-ը։ Այստեղ պատահող զանազան հնարավորություննե-րի մասին կարելի է պատկերացնել հետևյալ օրինակների օգնությամբ՝

$$x_n = 2n \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = n \to +\infty;$$

$$x_n = n \to +\infty, \quad y_n = -2n \to -\infty, \quad x_n + y_n = -n \to -\infty;$$

$$x_n = n + a \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = a \to a;$$

$$x_n = n + (-1)^{n+1} \to +\infty, \quad y_n = -n \to -\infty, \quad x_n + y_n = (-1)^{n+1},$$

որը սահման չունի։

Այդ բոլորը նկատի ունենալով, ասում են, որ երբ $x_n \to +\infty$ և $y_n \to -\infty$, $x_n + y_n$ արտահայտությունը ներկայացնում է $\infty - \infty$ տեսքի անորոշություն:

Այսպիսով, x_n և y_n փոփոխականների սահմաններով որոշել (4) թվաբանական արտահայտությունների սահմանները ո՛չ միշտ է հնարավոր. մենք հանդիպեցինք չորս դեպքի, երբ այդ կատարել հնարավոր չէ. դրանք հետևյալ չորս տեսքի *անորոշություններն* են՝

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty\text{*}.$$

Այդ դեպքերում պետք է, հաշվի առնելով x_n և y_n փոփոխականների փոփոխման օրենքը, *անմիջականորեն* հետազոտել մեզ հետաքրքրող արտահայտությունը։ Այդպիսի հետազոտությունն ստացել է *անորոշությունների բացում* անունը։ Ամենևին ոչ միշտ է այդ այնպես պարզ, ինչպես վերևում բերված սխեմատիկ օրինակներում։

42. Տարածումն կամայական փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքի վրա: Նորից դիտողություն անենք ընդհանուր դեպքի վերաբերյալ։ Քանի որ այստեղ մենք ի նկատի ունենք այնպիսի թեորեմներ, որոնց մեջ փոփոխականները կապվում են հավասարության, անհավասարության կամ թվաբանական գործողությունների նշաններով, ամենից առաջ պետք է պայմանավորվենք, որ այդպիսի նշաններով միացնելով երկու կամ մի քանի՝ $f(x)$, $g(x)$, ... ֆունկցիաներ (որոնք որոշված են միևնույն $\mathcal{X}$ տիրույթում), մենք միշտ ենթադրում ենք, որ նրանց արժեքները համապատասխանում են x-ի միևնույն արժեքներին։

* Անշուշտ, այդ սիմվոլները զուրկ են թվային որևէ իմաստից։ Նրանցից ամեն մեկը լոկ կրճատ պայմանական բնութագիրն է չորս տեսակի անորոշություններից մեկն արտահայտելու համար։

Այդ բոլոր թեորեմները կարելի էր նորից ապացուցել այնպես, ինչպես այդ արեցինք n° **37**-*ում, սակայն, և այդ կարևոր է ընդգծել,* իրականում դրանց վերաապացուցման անհրաժեշտությունը ամենևին չկա: *Եթե, խոսելով ֆունկցիայի սահմանի մասին, կանգնենք «հաջորդականությունների տեսակետի» վրա, ապա քանի որ* n *նշիչից կախված փոփոխականների համար թեորեմներն ապացուցված են, նրանք ճիշտ կլինեն նաև ընդհանուր դեպքում կամայական արգումենտի ֆունկցիաների համար։*

Օրինակի համար, կանգ առնենք n° **40**-*ի 1), 2), 3) թեորեմների վրա.*

Դիցուք X տիրույթում (a խտացման կետով) տրված են երկու ֆունկցիաներ՝ f(x) և g(x) և x-ը a-ին ձգտելիս երկուսն էլ ունեն վերջավոր սահմաններ՝

$$\lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B\text{։}$$

Այդ դեպքում

$$f(x) \pm g(x), \qquad f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}$$

ֆունկցիաները նույնպես ունեն վերջավոր սահմաններ (քանորդի դեպքում ենթադրելով, որ $B \neq 0$), այն է՝

$$A \pm B, \quad A \cdot B, \quad \frac{A}{B}$$

սահմանները:

Այդ առնչությունները «հաջորդականությունների լեզվով» կարտահայտվեն այսպես. եթե $\{x_n\}$*-ը* X*-ից վերցրած* x*-ի* (a*-ից տարբեր) արժեքների ցանկացած հաջորդականություն է, որն ունի* a *սահմանը, ապա՝*

$$f(x_n) \to A, \quad g(x_n) \to B\text{։}$$

Եթե այս երկու ֆունկցիաների նկատմամբ, որոնք արդեն կախված են n *բնական արգումենտից, կիրառենք ապացուցած թեորեմները, ապա անմիջապես կստանանք՝*

$$\lim\,[f(x_n) \pm g(x_n)] = A \pm B, \quad \lim\,[f(x_n) \cdot g(x_n)] = A \cdot B,$$

$$\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B},$$

*իսկ այս էլ հենց («հաջորդականությունների լեզվով») արտահայտում է այն, ինչ որ պետք էր ապացուցել**։*

Նույն ձևով, այժմ դիտարկվող ընդհանուր դեպքի վրա տարածվում են նաև n° **41**-*ում ասածները «անորոշ արտահայտությունների» վերաբերյալ, որոնք բնութագրվում են հետևյալ պայմանանշաններով՝*

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty\text{։}$$

Ինչպես և պարզագույն դեպքում, երբ գործ ունեինք բնական արգումենտի ֆունկցիաների հետ, այստեղ «անորոշությունը բացելու» համար արդեն բավական չէ գիտենալ միայն $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաների սահմանները, այլ պետք է հաշվի առնել նաև նրանց փոփոխման բուն օրենքը։ Անորոշություններ բացելու օրինակներ ընթերցողը կգտնի հաջորդ* n°-*ում։*

Մենք այդ հարցին կանդրադառնանք VII *գլխի* § 3-*ում, որտեղ կտրվեն անորոշություններ բացելու ընդհանուր եղանակներ՝ արդեն դիֆերենցիալ հաշվի կիրառումով։*

43. Օրինակներ: 1) *Դիցուք* $p(x)$-*ը* x-*ի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամ է հաստատուն գործակիցներով՝*

$$p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{k-1} x + a_k \qquad (a_0 \neq 0)\text{։}$$

Պարզենք այդ բազմանդամի սահմանի հարցը, երբ $x \to +\infty$*։ Եթե այդ բազմանդամի բոլոր գործակիցները դրական (կամ՝ բացասական) լինեին, ապա պարզ է, որ* $p(x)$ *սահմանը կլիներ* $+\infty$ *(կամ՝* $-\infty$*)։ Իսկ տարբեր նշաններով գործակիցների առկայության դեպքում որոշ անդամներ կձգտեն* $+\infty$, *մյուսները՝* $-\infty$ *և կստացվի* $\infty-\infty$ *տեսքի անորոշություն։*

Այդ անորոշությունը բացելու համար $p(x)$-*ը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝*

$$p(x) = x^k\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{k-1}}{x^{k-1}} + \frac{a_k}{x^k}\right)\text{։}$$

Քանի որ փակագծերի ներսի բոլոր անդամները, սկսած երկրորդից, x-*ի անվերջ աճելու հետ անվերջ փոքրեր կլինեն, ապա փակագծի ներսի արտահայտությունը կձգտի* $a_0 \neq 0$ *սահմանին։ Իսկ առաջին* x^k *բազմապատկիչը կձգտի* $+\infty$*։ Այդ դեպքում ամբողջ արտահայտությունը կձգտի* $+\infty$ *կամ* $-\infty$, *կախված* a_0-*ի նշանից։*

---

* *Քանորդի դեպքում կարելի է նկատել (այնպես, ինչպես մենք այդ արեցինք* n° **40**, *3)-ում* y_n-*ի համար), որ* a-*ին բավականաչափ մոտ* x-*երի համար հայտարարը՝* $g(x) \neq 0$, *այնպես որ* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *կոտորակն իմաստ ունի* x-*ի գոնե այդ արժեքների համար։*

Այդպիսի արդյունք կստացվի, մասնավորապես, այն դեպքում, երբ անընդհատ փոփոխվող x *փոփոխականի փոխարեն գնենք բնական արժեքներ ընդունող* n *փոփոխականը։*

Ընթերցողին հանձնարարում ենք պարզելու $\lim p(x)$, *երբ* $x \to -\infty$ *(այս անգամ հաշվի առնելով* k *ցուցիչի զույգ կամ կենտ լինելը)։*

Բոլոր դեպքերում $p(x)$ *բազմանդամի սահմանը համընկնում է* a_0x^k *ավագ անդամի սահմանի հետ։*

«Անորոշությունը» վերացնելը տվյալ արտահայտությունը ձևափոխելու միջոցով, որից մենք այստեղ օգտվեցինք, հաճախ է կիրառվում անորոշության բացման համար։

2) Եթե $q(x)$*-ը նույնպիսի բազմանդամ է՝*

$$q(x) = b_0x^l + b_1x^{l-1} + \dots + b_{l-1}x + b_l \qquad (b_0 \neq 0),$$

ապա $\frac{p(x)}{q(x)}$ *քանորդը* $x \to +\infty$ *դեպքում կներկայացնի* $\frac{\infty}{\infty}$ *տեսքի անորոշություն։*

Բազմանդամներից յուրաքանչյուրը ձևափոխելով այնպես, ինչպես այդ արվեց 1) օրինակում, կստանանք՝

$$\frac{p(x)}{q(x)} = x^{k-l} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_k}{x^k}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_l}{x_l}};$$

Այստեղ երկրորդ բազմապատկիչն ունի $\frac{a_0}{b_0} \neq 0$ *վերջավոր սահմանը։ Եթե երկու բազմանդամների աստիճանները հավասար են՝* $k = l$, *այդ դեպքում* $\frac{p(x)}{q(x)}$ *հարաբերությունը նույնպես կունենա այդ* $\frac{a_0}{b_0}$ *սահմանը։ Եթե* $k > l$, *առաջին բազմապատկիչը կձգտի* $+\infty$, *երբ* $x \to +\infty$, *այնպես որ* $\frac{p(x)}{q(x)}$ *հարաբերությունը կձգտի* $\pm\infty$, *նայած* $\frac{a_0}{b_0}$*-ի նշանին։ Վերջապես, եթե* $k < l$, *սահմանը զրո կլինի։*

Այստեղ նույնպես կարելի է x*-ի փոխարեն* n *գնել։*

Հեշտ է որոշել $\frac{p(x)}{q(x)}$*-ի սահմանը նաև* $x \to -\infty$ *դեպքում։*

Բոլոր դեպքերում բազմանդամների հարաբերության սահմանը համընկնում է նրանց ավագ անդամների հարաբերության սահմանի հետ։

3) Գտնել $y = ax^2$ $(a > 0)$ *պարաբոլի* OM *աղեղով,* x*-երի առանցքի* OP *հատվածով և* PM *հատվածով սահմանափակված* OPM *պատկերի* Q *մակերեսը (գծ. 24)։*

OP *հատվածը տրոհենք* n *հավասար մասերի և նրանց վրա կառուցենք մի շարք ընդգրկյալ և ընդգրկող ուղղանկյուններ։ Այդ ուղղանկյուններից կազմված* *աստիճանաձև պատկերների* Q_n *և* Q_n' *մակերեսները միմյանցից կտարբերվեն ամենամեծ ուղղանկյան մակերեսով, որը հավասար է* $\frac{x}{n} \cdot y$ *(x-ն ու y-ը M կետի կոորդինատներն են)։ Այստեղից՝*

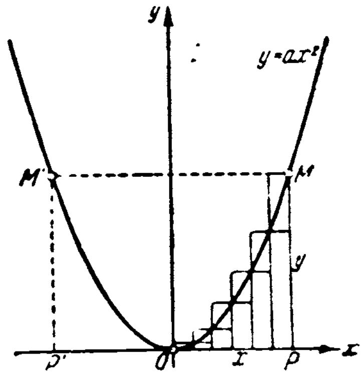
$$Q_n' - Q_n \to 0, \quad \text{երբ } n \to \infty,$$

և, քանի որ՝

$$Q_n < Q < Q_n',$$

ուստի՝

$$Q = \lim Q_n = \lim Q_n',$$



Գծ. 24.

Քանի որ ուղղանկյունների բարձրությունները այն կետերի օրդինատներն են, որոնք ունեն

$$\frac{1}{n}x, \quad \frac{2}{n}x \ \ldots, \quad \frac{n}{n}x = x$$

աբսցիսները և, պարաբոլի հավասարման շնորհիվ, իրենք հավասար են, համապատասխանաբար՝

$$a \cdot \frac{1}{n^2}x^2, \quad a \cdot \frac{2^2}{n^2}x^2, \ \ldots, \quad a \cdot \frac{n^2}{n^2}x^2,$$

ուստի Q_n' *-ի համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը՝**

$$Q_n' = \frac{ax^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)\ \frac{x}{n} = \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2},$$

Այստեղից, եթե օգտվենք 2-րդ օրինակից, կստանանք՝

$$Q = \lim Q_n' = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3},$$

Սրա վրա հենվելով, կարելի է հեշտությամբ ստանալ, որ M'OM պարաբոլական սեգմենտի մակերեսը հավասար է $\frac{4}{3}xy$, *այսինքն՝ արտագծած ուղղանկյան մակերեսի երկու երրորդին (այս արդյունքը հայտնի է եղել դեռևս Արքիմեդին**)։*

Դիտողություն։ *Կորագիծ պատկերի մակերեսի ընդհանուր սահմանումը տրվելու է միայն XII գլխում. հենց այնտեղ էլ մակերես* հաշվելու *այստեղ կիրառված մեթոդը կընդհանրացվի այլ կորագիծ պատկերների համար* [n° **196**]։

4) Գտնել

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \quad \text{և} \quad z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

---

* *Այստեղ մենք օգտվում ենք առաջին n բնական թվերի քառակուսիների գումարի հայտնի բանաձևից։*

** *Արքիմեդ՝ հին աշխարհի մեծագույն մաթեմատիկոս (III դար մ. թ. ա.)։*

փոփոխականների սահմանները և ապա

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

փոփոխականի սահմանը։

x_n և z_n արտահայտությունները ներկայացնում են $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություններ (քանի որ նրանց հայտարարները n-ից մեծ են, ուստի n-ի հետ միասին ձգտում են անվերջության)։ Ձևափոխենք, համարիչներն ու հայտարարները բաժանելով n-ի վրա՝

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}, \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}։$$

Քանի որ հայտարարներում երկու արմատն էլ ձգտում են 1-ի*, ուստի՝

$$x_n \to 1 \quad և \quad z_n \to 1։$$

y_n-ի արտահայտությունը յուրահատուկ ձև ունի. այդ գումարի յուրաքանչյուր անդամ կախված է n-ից, բայց նրանց թիվն էլ աճում է n-ի հետ միասին։ Քանի որ յուրաքանչյուր գումարելի փոքր է առաջին գումարելիից և մեծ է վերջին գումարելիից, ապա՝

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < y_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

այսինքն՝

$$x_n < y_n < z_n։$$

Սակայն, ինչպես տեսանք, x_n և z_n փոփոխականները ձգտում են ընդհանուր սահմանի՝ 1-ի. հետևաբար, n° **38**-ի 3) թեորեմայի համաձայն, այդ նույն սահմանին ձգտում է նաև y_n փոփոխականը։

5) Վերադառնանք n° **18**, 3)-ում դիտարկված f(x) ֆունկցիային, որն այնտեղ որոշվում էր երեք տարբեր բանաձևերով՝ x-ի տարբեր արժեքների համար։ Այժմ միանգամից x-ի բոլոր արժեքների համար նշանակենք՝

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}։$$

Եթե $|x| > 1$, ապա այստեղ ունենք $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն, որը հեշտությամբ

---

* Այդ, օրինակ, առաջին արմատի համար հետևում է հետևյալ անհավասարություններից՝

$$1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n} \quad [\text{n° } \mathbf{38},\ 3]։$$

բացվում է համարիչն ու հայտարարը բաժանելով x^{2n}-ի վրա. կստանանք՝ $f(x)=1$, երբ $|x|<1$, ակներևորեն $x^{2n}\to 0$ և $f(x)=-1$։ Վերջապես, եթե $x=\pm 1$, ապա կոտորակի համարիչը մշտապես հավասար է զրոյի, նրա հետ նաև $f(x)=0$։ Այսպիսով, այս՝ այն նույն ֆունկցիան է, սակայն այս անգամ տրված է մեկ բանաձևով։

6)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}.$$

Իրոք՝
$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1},$$

սակայն՝
$$1-|x|<\sqrt{1+x}<1+|x|,$$

այնպես որ՝
$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}=1,$$

որտեղից և հետևում է պահանջվող պատասխանը։

7) n 34, 5)-ում տրված
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

սահմանը հաճախ օգտագործում են այլ սահմաններ գտնելու համար։

ա)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right).$$

Ակներևաբար՝
$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

քանի որ փակագծի մեջ գրված արտահայտությունը ձգտում է մեկի, ապա ընդհանուր սահմանը կլինի $\frac{1}{2}$։

(բ)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right).$$

Այստեղ ևս կարելի է բերել արդեն ուսումնասիրված սահմաններին՝
$$\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2},$$

Նկատենք, որ, երբ $x\to 0$, ապա $\cos x\to 1$, ինչպես այդ երևում է, օրինակ, (ա)-ում ստացված արդյունքից։

§ 3. ՄՈՆՈՏՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

44. Բնական արգումենտի մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանը: Ֆունկցիաների սահմանների վերաբերյալ մինչև այժմ բերված թեորեմաներն այսպիսի բնույթ ունեին. ենթադրելով որոշ ֆունկցիաների սահմանների գոյությունը, ապացուցում էինք սահմանների գոյությունն այլ ֆունկցիաների, որոնք այս կամ այն կերպ կապված էին առաջինների հետ։ Տրված ֆունկցիայի վերջավոր սահմանի գոյության հայտանիշների հարցը, չկապված այլ ֆունկցիաների հետ, մինչև այժմ չի դրվել։ Այդ հարցի ընդհանուր լուծումը թողնելով մինչև § 4-ը, այստեղ դիտարկենք ֆունկցիաների մի պարզ ու կարևոր դաս, որի համար այդ հարցը հեշտությամբ լուծվում է։ Ինչպես միշտ, սկսենք պարզագույն դեպքից՝ բնական արգումենտի x_n ֆունկցիայից։

x_n փոփոխականը կոչվում է աճող, եթե՝

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots ,$$

այսինքն՝ եթե $n' > n$ պայմանից հետևում է $x_{n'} > x_n$։ Այն անվանում են չնվազող, եթե՝

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots ,$$

այսինքն՝ եթե $n' > n$ պայմանից հետևում է միայն $x_{n'} \geqslant x_n$։ Երկրորդ դեպքում էլ կարելի է փոփոխականն աճող անվանել, եթե այդ տերմինին ավելի լայն իմաստ վերագրենք։

Նման ձևով սահմանվում է նվազող (նեղ կամ լայն իմաստով) փոփոխականի գաղափարը. այդպես է կոչվում այն x_n փոփոխականը, որի համար, համապատասխանորեն,

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots ,$$

կամ՝

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots ,$$

այնպես որ, $n' > n$ պայմանից հետևում է (նայած դեպքին) $x_{n'} < x_n$ կամ միայն $x_{n'} \leqslant x_n$։

Այս բոլոր տեսակի փոփոխականները, որոնք n-ի աճման հետ փոփոխվում են մեկ ուղղությամբ, միավորվում են մի ընդհանուր անվան տակ՝ կոչվում են մոնոտոն փոփոխականներ։ Սովորաբար այդպիսի փոփոխականի մասին ասում են, որ նա «մոնոտոն աճում է» կամ «մոնոտոն նվազում է»։

n բնական նշիչից կախված x_n փոփոխականի հետ միաժա-

մանակ, համապատասխան դեպքերում, աճող կամ նվազող է կոչվում նաև նրա ընդունելիք արժեքների՝

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

հաջորդականությունը։

Մոնոտոն փոփոխականների համար տեղի ունի հետևյալ թեորեման։

Թեորեմա։ Դիցուք տրված է x_n մոնոտոն աճող փոփոխականը։ Եթե նա վերևից սահմանափակ է՝

$$x_n \leqslant M \quad (M = \text{const}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ապա անհրաժեշտաբար ունի վերջավոր սահման, հակառակ դեպքում ձգտում է $+\infty$:

Ճիշտ այդպես էլ, միշտ սահման ունի նաև x_n մոնոտոն նվազող փոփոխականը. նրա սահմանը վերջավոր է, եթե նա ներքևից սահմանափակ է, հակառակ դեպքում նա ձգտում է $-\infty$:*

Ապացուցում։ Սահմանափակվենք աճող, թեկուզ և լայն առումով, փոփոխականի դեպքով (նվազող փոփոխականի դեպքն ապացուցվում է համանման եղանակով)։

Նախ ընդունենք, որ տրված x_n *փոփոխականը վերևից սահմանափակ է։ Այդ դեպքում,* n° 6-*ի թեորեմայի համաձայն, նրա արժեքների* $\{x_n\}$ *բազմության համար պետք է գոյություն ունենա (վերջավոր) վերին ճշգրիտ եզր՝*

$$a = \sup \{x_n\}.$$

ինչպես հիմա ցույց կտանք, հենց այդ a *թիվն էլ կլինի* x_n *փոփոխականի սահմանը։*

Իրոք, հիշենք վերին ճշգրիտ եզրի բնորոշ հատկությունները [n° 6]։ *Նախ,* n-*ի բոլոր արժեքների համար կլինի՝*

$$x_n \leqslant a,$$

և ապա, ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ *թիվը, կգտնվի մեր փոփոխականի*

---

* *Հեշտ է հասկանալ, որ բոլոր եզրակացությունները ուժի մեջ են մնում նաև այնպիսի փոփոխականի համար, որը միայն որոշ տեղից սկսած մոնոտոն է դառնում (քանի որ, առանց ազդելու սահմանի վրա, նրա առաջին արժեքներից ցանկացած թվով կարելի է դեն նետել)։*

Թեորեմայում x_n *մոնոտոն փոփոխականի փոխարեն կարելի է խոսել մոնոտոն հաջորդականության մասին։*

այնպիսի արժեք, ասենք թե՝ x_N, որը կգերազանցի $a-\varepsilon$ թիվը՝

$$x_N > a-\varepsilon.$$

Քանի որ, x_n փոփոխականի մոնոտոնության շնորհիվ (այստեղ մենք առաջին անգամ հենվում ենք դրա վրա), $n>N$ դեպքում $x_n \geqslant x_N$ և առավել ևս՝ $x_n > a-\varepsilon$, ապա n-ի այդ արժեքների համար տեղի կունենան հետևյալ անհավասարությունները՝

$$0\leqslant a-x_n<\varepsilon,\quad \text{այնպես որ՝}\quad |x_n-a|<\varepsilon,$$

որտեղից և հետևում է, որ $\lim x_n = a$։

Դիցուք այժմ x_n փոփոխականը վերևից սահմանափակ չէ։ Այդ դեպքում, որքան էլ մեծ լինի $E>0$ թիվը, կգտնվի x_n փոփոխականի թեկուզ մեկ արժեք, որը մեծ կլինի E-ից. դիցուք այդ արժեքը x_N-ն է՝ $x_N>E$։ Այդ դեպքում, x_n փոփոխականի մոնոտոնության շնորհիվ, $n>N$ դեպքում առավել ևս

$$x_n>E,$$

իսկ այս էլ հենց նշանակում է, որ $\lim x_n=+\infty$։

Դիտողություն։ *Սահմանափակ մոնոտոն փոփոխականի համար վերջավոր սահմանի գոյությունն անցյալ դարի առաջին կեսում համարվում էր ինչ-որ ինքնին հասկանալի։ Ֆունդամենտալ կարևորություն ունեցող այս պնդումը խստորեն ապացուցելու պահանջը փաստորեն իռացիոնալ թվերի թվաբանական տեսությունն ստեղծելու առիթներից մեկն է եղել։ Ավելացնենք նաև, որ վերոհիշյալ պնդումը լրիվին համարժեք է իրական թվերի բազմության անընդհատության հատկությանը* [n° 5]։

Այժմ դիմենք թեորեմայի կիրառման օրինակներին։

45. Օրինակներ: *1)* Դիտարկենք

$$x_n=\frac{c^n}{n!}$$

արտահայտությունը, որտեղ $c>0$ և $n!=1\cdot 2\ldots n$։ ($c>1$ դեպքում այն ներկայացնում է $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշություն)։

Քանի որ

$$x_{n+1}=x_n\cdot\frac{c}{n+1},$$

ապա, հենց որ դառնա $n>c-1$, x_n փոփոխականը նվազող կդառնա։ Նա միաժամանակ ներքևից սահմանափակ է, օրինակ՝ զրոյով։ Հետևաբար, թեորեմայի համաձայն, x_n փոփոխականն ունի վերջավոր սահման, որը կնշանակենք a-ով։

Այդ սահմանը գտնելու համար, վերևում գրված հավասարության մեջ անցնենք սահմանին. քանի որ x_{n+1}-ը անցնում է արժեքների նույն հաջորդականությամբ, *ինչ որ x_n-ը (առաջին անդամի ճշգրտությամբ) և ունի միևնույն a սահմանը, ապա կստանանք՝*

$$a = a \cdot 0,$$

այստեղից՝ $a = 0$, *և վերջնականապես ստանում ենք՝*

$$\lim \frac{c^n}{n!} = 0.$$

2) Նորից համարելով $c > 0$, *x_n-ը այժմ որոշենք այսպես՝*

$$x_1 = \sqrt{c}, \qquad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \qquad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \ \ldots$$

և ընդհանրապես՝

$$x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ արմատներ}}.$$

Այսպիսով, x_{n+1}-ը x_n-ից ստացվում է այսպիսի բանաձևով՝

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}.$$

Պարզ է, որ x_n փոփոխականը մոնոտոն աճում է։ Միաժամանակ նա վերևից սահմանափակ է, օրինակ՝ $\sqrt{c} + 1$ թվով։ Իրոք, $x_1 = \sqrt{c}$ արժեքը փոքր է այդ թվից. այժմ եթե ընդունենք, որ մի որևէ արժեք՝ $x_n < \sqrt{c} + 1$, ապա հաջորդ արժեքի համար էլ կստանանք՝

$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

Այսպիսով, մեր պնդումը x_n փոփոխականի սահմանափակ լինելու մասին արդարանում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։

Ուրեմն, հիմնական թեորեմայի համաձայն, x_n փոփոխականն ունի մի վերջավոր սահման։ Այդ սահմանը հաշվելու համար սահմանին անցնենք այս հավասարության մեջ՝

$$x_{n+1}^2 = c + x_n,$$

որտեղից կստանանք՝

$$a^2 = c + a.$$

Այս քառակուսի հավասարումն ունի տարբեր նշաններով արմատներ. սակայն մեզ հետաքրքրող a սահմանը չի կարող բացասական լինել, հետևաբար, նա հավասար է այդ հավասարման դրական արմատին՝

$$a = \frac{\sqrt{4c + 1} + 1}{2},^*$$

** Այս հետաքրքիր օրինակն ըստ էության պատկանում է Յակոբ Բեռնուլլիին, որն այն դիտարկել է հետևյալ արտահայտությունը հաշվելու ձևով՝*

$$\sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}$$ *և այլն՝ մինչև անվերջություն։*

3) Դիցուք տված են a և b երկու դրական թվեր $(a > b)$։ Կազմենք նրանց թվաբանական և երկրաչափական միջինները՝

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{ab}\,։$$

Հայտնի է, որ առաջինը երկրորդից մեծ է*. միևնույն ժամանակ նրանք գտնվում են տված թվերի միջև՝

$$a > a_1 > b_1 > b\,։$$

a_1 և b_1 թվերի համար նորից կազմենք նրանց երկու միջինները՝

$$a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},$$

ընդ որում՝

$$a_1 > a_2 > b_2 > b_1,$$

և այլն։ Եթե a_n և b_n թվերի արդեն որոշված են, ապա a_{n+1} և b_{n+1} թվերը որոշվում են նման բանաձևերով՝

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

ընդ որում, ինչպես և վերևում՝

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n\,։$$

Այսպիսով, կազմվում են a_n և b_n երկու փոփոխականներ, որոնցից առաջինը նվազող է, իսկ երկրորդն աճող (մեկը մյուսին հանդիպակաց) և միևնույն ժամանակ՝

$$a > a_n > b_n > b,$$

այսինքն՝ սահմանափակ են, հետևաբար, երկուսն էլ ձգտում են վերջավոր սահմանների՝

$$\lim a_n = \alpha, \quad \lim b_n = \beta\,։$$

Եթե սահմանին անցնենք

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ կամ } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

հավասարության մեջ կստանանք՝

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{կամ} \quad \beta = \sqrt{\alpha\beta}, \quad \beta^2 = \alpha\beta\,։$$

Երկուսից էլ ստանում ենք՝

$$\alpha = \beta\,։$$

---

* Այդ անմիջապես հետևում է հետևյալ անհավասարությունից՝

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0, \text{ երբ } a \neq b\,։$$

Այսպիսով, a_n թվաբանական միջինների և b_n երկրաչափական միջինների երկու հաջորդականությունները ձգտում են մի ընդհանուր $\mu(a,b)$ սահմանի։ Գաուսին հետևելով, այդ սահմանն անվանում են տված a և b թվերի թվաբանա-երկրաչափական միջին։ $\mu(a,b)$ թվի արտահայտումն a և b թվերով առայժմ մեզ համար մատչելի չէ, դրա համար պահանջվում է այսպես կոչված էլիպտիկ ինտեգրալ [*տե՛ս* **173, 174**]։

Դիտողություն։ *Բերված օրինակներն առիթ են տալիս հետևյալ դիտողությունն անելու։ Ապացուցված թեորեման տիպիկ «գոյության թեորեմա» է․ նրա մեջ հաստատվում է սահմանի գոյության փաստը, բայց այդ սահմանը հաշվելու համար ոչ մի միջոց չի տալիս։ Այնուամենայնիվ, այդ թեորեման շատ կարևոր նշանակություն ունի։ Մի կողմից, տեսական հարցերում հաճախ սահմանի լոկ գոյությունն է հարկավոր լինում։ Մյուս կողմից. շատ դեպքերում սահմանի գոյության մեջ համոզվելը կարևոր է լինում նրանով, որ ճանապարհներ է բացում այդ սահմանը փաստորեն հաշվելու համար։ Այսպես. 1), 2) օրինակներում* հենց սահմանի գոյությունն իմանալու փաստը հնարավորություն տվեց, որպեսզի որոշ հավասարությունների մեջ սահմանին անցնելու օգնությամբ հաշվենք սահմանի ճիշտ արժեքը։

46. Ներդրված միջակայքերի լեմման։ *Այժմ կանգ առնենք իրար «հանդիպակաց» ուղղությամբ փոփոխվող երկու մոնոտոն փոփոխականների զուգակցման վրա։*

Դիցուք տված են մոնոտոն աճող x_n փոփոխականը և մոնոտոն նվազող y_n փոփոխականը, ընդ որում միշտ՝

$$x_n < y_n\text{։} \tag{1}$$

Եթե նրանց $y_n - x_n$ տարբերությունը ձգտում է զրոյի, ապա երկու փոփոխականներն ունեն մի ընդհանուր վերջավոր սահման՝

$$c = \lim x_n = \lim y_n\text{։}$$

Իսկապես, (1) պայմանից բխում է, որ

$$x_n < y_n \leqslant y_1$$

և

$$y_n > x_n \geqslant x_1,$$

այնպես որ մոնոտոն աճող x_n *փոփոխականը սահմանափակ է վերևից, իսկ մոնոտոն նվազող* y_n *փոփոխականը՝ ներքևից, հետևաբար, նրանք երկուսն էլ ունեն վերջավոր սահմաններ՝*

$$\lim x_n = c \text{ և } \lim y_n = c'\text{։}$$

Սակայն, n° 40-ի 1) թեորեմայի համաձայն, ունենք՝

$$c' - c = \lim (y_n - x_n),$$

որը, պայմանի համաձայն, հավասար է զրոյի։ Ուրեմն $c' = c$, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Ապացուցած թեորեմային կարելի է տալ ուրիշ ձև, որն ավելի հաճախ է կիրառվում։

Պայմանավորվենք ասել, որ $[a', b']$ միջակայքը պարունակվում է կամ ներդրված է $[a, b]$ միջակայքում, եթե առաջին միջակայքի բոլոր կետերը պատկանում են երկրորդ միջակայքին, կամ, որ միևնույնն է, եթե

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b.$$

Դրա երկրաչափական իմաստը պարզ է։

Դիցուք ունենք ներդրված միջակայքերի մի անվերջ հաջորդականություն՝

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n],$$

որոնցից յուրաքանչյուրը ներդրված է իր նախորդի մեջ, ընդ որում նրանց երկարությունները, երբ n-ը աճում է, ձգտում են զրոյի՝

$$\lim (b_n - a_n) = 0:$$

Այդ դեպքում միջակայքերի a_n և b_n ծայրակետերը (տարբեր կողմերից) ձգտում են մի ընդհանուր սահմանի՝

$$c = \lim a_n = \lim b_n,$$

որը բոլոր միջակայքերի համար միակ ընդհանուր կետն է։

Այս՝ վերևում ապացուցած թեորեմայի նոր ձևակերպումն է. պայմանի համաձայն՝

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n,$$

այնպես որ, n-րդ միջակայքի a_n ձախ ծայրը և b_n աջ ծայրն այստեղ x_n և y_n մոնոտոն փոփոխականների դեր են կատարում։

Քանի որ a_n-ը c-ին ձգտում է աճելով, իսկ b_n-ը նվազելով՝ ապա

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

այսինքն՝ c կետն իրոք որ պատկանում է բոլոր միջակայքերին։

Միևնույն ժամանակ, չի կարող լինել c-ից տարբեր մի այլ c' կետ, որն ունենա միևնույն հատկությունները. այլապես կլիներ

$$b_n - a_n \geqslant |c' - c| > 0$$

և n-րդ միջակայքի երկարությունը չէր կարող զրոյի ձգտել։

Հետագայում մենք հաճախ ենք հենվելու այս առաջադրության վրա, որն անվանելու ենք «ներդրված միջակայքերի լեմմա»։

47. Մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանն ընդհանուր դեպքում։ *Նորից վերադառնանք կամայական փոփոխականի* $f(x)$ *ֆունկցիայի դիտարկմանը։ Այստեղ նույնպես ֆունկցիայի*

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

սահմանի գոյության հարցն առանձնապես հեշտությամբ է լուծվում այն մասնավոր տիպի ֆունկցիաների համար, որոնք հանդիսանում են x_n *մոնոտոն փոփոխականի գաղափարի* [**44**] *ընդհանրացումը։*

Դիցուք $f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է մի* $X=\{x\}$ *տիրույթում։ Ֆունկցիան կոչվում է աճող (նվազող) այդ տիրույթում, եթե վերջինիս պատկանող յուրաքանչյուր զույգ* x *և* x' *արժեքների համար*

$$x' > x \text{ պայմանից հետևում է՝ } f(x') > f(x) \quad [f(x') < f(x)]։$$

Իսկ եթե՝

$$x' > x \text{ պայմանից հետևում է՝ միայն } f(x') \geqslant f(x)\,[f(x') \leqslant f(x)],$$

ապա ֆունկցիան կոչվում է չնվազող (չաճող)։ Երբեմն այս դեպքում էլ հարմար է ֆունկցիան անվանել աճող (նվազող), սակայն լայն իմաստով։ Բոլոր այս տիպի ֆունկցիաները կրում են մոնոտոն ընդհանուր անունը։ Մոնոտոն ֆունկցիայի համար գոյություն ունի մի թեորեմա, որը [**44**]*-ում* x_n *մոնոտոն փոփոխականի վերաբերյալ ապացուցված թեորեմայի անալոգն է։*

Թեորեմա։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է, թեկուզ լայն իմաստով, X տիրույթում, որն ունի a խտացման կետը, ընդ որում a-ն x-ի բոլոր արժեքներից մեծ է (կարող է լինել վերջավոր կամ $+\infty$)։ Եթե այդ ժամանակ ֆունկցիան վերևից սահմանափակ է՝

$$f(x) \leqslant M \text{ (}x\text{-ի բոլոր արժեքների համար } X\text{-ից)},$$

ապա, երբ $x \to a$, ֆունկցիան կունենա վերջավոր սահման, հակառակ դեպքում նա կձգտի $+\infty$։

Ապացույց։ Նախ ընդունենք, որ $f(x)$ *ֆունկցիան վերևից սահմանափակ է, այսինքն՝ վերևից սահմանափակ է ֆունկցիայի այն արժեքների* $\{f(x)\}$ *բազմությունը, որոնք համապատասխանում են* x*-ի փոփոխմանը* X *տիրույթում։ Այդ դեպքում այդ բազմության համար գոյություն ունի* [n°**6**] A *վերջավոր ճշգրիտ վերին եզր։ Ապացուցենք, որ հենց այդ* A *թիվը կլինի որոնելի սահմանը։*

Վերցնելով կամայական $\varepsilon > 0$ *թիվը, ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման հա-*

մաձայն, կգտնենք այնպիսի $x' < a$ արժեք, որ $f(x') > A - \varepsilon$։ Ֆունկցիայի մոնոտոնության հետևանքով, $x' < x$-ի արժեքների համար առավել ևս կլինի $f(x) > A - \varepsilon$։ Մյուս կողմից, քանի որ միշտ $f(x) \leqslant A < A + \varepsilon$, հետևապես x-ի վերոհիշյալ արժեքների համար տեղի կունենա

$$[f(x) - A] < \varepsilon$$

անհավասարությունը։

Հենց այս էլ ապացուցում է մեր թեորեման, բավական է միայն վերջավոր a-ի դեպքում ընդունել $x' = a - \delta$ (այսինքն $\delta = a - x'$), իսկ երբ $a = +\infty$, վերցնել $\Delta = x'$։

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ, ապա, ինչպիսին էլ լինի E թիվը, միշտ կգտնվի այնպիսի x', որ $f(x') > E$, այդ դեպքում $x' < x$-ի արժեքների համար առավել ևս $f(x) > E$, և այլն։

Առաջարկվում է ընթերցողին՝ այս թեորեման ձևափոխել այն դեպքի համար, երբ a սահմանային արժեքը փոքր է x-ի բոլոր արժեքներից, ինչպես նաև այն դեպքի համար, երբ ֆունկցիան մոնոտոն նվազող է։

Պարզ է, որ n°**44**-ում x_n մոնոտոն փոփոխականի վերաբերյալ ապացուցածը այս թեորեմայի մասնավոր դեպքն է։ Այնտեղ անկախ փոփոխականը n նշիչն էր, որի փոփոխման տիրույթը հանդիսանում էր $N = \{n\}$ բնական շարքը՝ $+\infty$ խտացման կետով։

Հետագայում հաճախ կարիք է լինելու որպես X տիրույթ, որտեղ դիտարկվում է $f(x)$ ֆունկցիան, վերցնել $[a', a)$ անընդմեջ միջակայքը, որտեղ $a' < a$ և a-ն վերջավոր թիվ է կամ $+\infty$, կամ թե՝ $(a, a']$ միջակայքը, որտեղ $a' > a$ և a-ն վերջավոր թիվ է կամ $-\infty$։

§ 4. e ԹԻՎԸ

48. e թիվը որպես հաջորդականության սահման. Մենք այստեղ սահմանային անցումը կօգտագործենք մի նոր, մինչև այժմ մեզ չպատահած, թիվ որոշելու համար։ Այն բացառիկ կարևոր նշանակություն ունի ինչպես անալիզում, այնպես էլ նրա կիրառությունների համար։

Վերցնենք հետևյալ փոփոխականը՝

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

և փորձենք նրա նկատմամբ կիրառել n°**44**-ի թեորեման։

Քանի որ n ցուցչի աճման հետ միասին աստիճանի հիմքը նվազում է, ապա փոփոխականի «մոնոտոն» բնույթն այստեղ անմիջապես չի երևում։ Որպեսզի համոզվենք, որ նա իրոք մոնոտոն է, դիմենք երկանդամի բանաձևին՝

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k}\cdot\frac{1}{n^k}+\dots$$

$$\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right), \quad (1)$$

Եթե x_n-ից անցնենք x_{n+1}-ին, այսինքն՝ n-ը մեծացնենք մեկ միավորով, ապա, նախ, կավելանա մի նոր, $(n+2)$-րդ անդամ (դրական), և, բացի այդ, արդեն գրված $(n+1)$ անդամներից ամեն մեկը կմեծանա, որովհետև փակագծերում գրված $1-\frac{s}{n}$ տեսքի յուրաքանչյուր բազմապատկիչ կփոխարինվի իրենից մեծ $\left(1-\frac{s}{n+1}\right)$ բազմապատկիչով։ Այսպիսով, ստացվում է, որ

$$x_{n+1}>x_n,$$

այսինքն՝ x_n փոփոխականն աճող է։

Այժմ ցույց տանք, որ նա վերևից սահմանափակ է։ (1) արտահայտությունում դեն նետելով փակագծերում գրված բոլոր արտադրիչները, մենք այդ արտահայտությունը կմեծացնենք, այնպես որ՝

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}=y_n,$$

Այս արտահայտության մեջ բոլոր հայտարարներում բոլոր արտադրիչներն, սկսած 3-ից, փոխարինելով 2-ով, մենք նորից կմեծացնենք այդ արտահայտությունը՝

$$y_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2_{n-1}},$$

Սակայն $\frac{1}{2}$ անդամից սկսվող պրոգրեսիան ունի 1-ից փոքր գումար, ուստի $y_n < 3$, նշանակում է առավել ևս

$$x_n < 3.$$

Այստեղից էլ հետևում է, n° **44**-ի թեորեմայի համաձայն, որ x_n փոփոխականը վերջավոր սահման ունի։ Էյլերի օրինակով այդ սահմանը միշտ նշանակում են e տառով՝

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Մենք ի նկատի ունեինք հենց այս թիվը։ Ահա այդ թվի տասնորդական վերլուծության սկզբի 15 թվանշանները՝

$$e = 2{,}7\ 1828\ 18284\ 59045\cdots:$$

Թեպետև հետևյալ արժեքների հաջորդականությունը՝

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \qquad x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25,$$

$$x_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}3703\cdots, \quad \ldots, \quad x_{100} = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} =$$

$$= 2{,}7048\cdots, \quad \ldots$$

ձգտում է e թվին, սակայն՝ դանդաղ, և e թիվը մոտավոր հաշվելու համար նրանից օգտվելը ձեռնտու չէ։ Հաջորդ n°-ում մենք կշարադրենք ավելի հարմար եղանակ այդպիսի հաշվումների համար, ինչպես նաև զուգահեռաբար կապացուցենք, որ e-ն իռացիոնալ թիվ է։

49. e թվի մոտավոր հաշվումը: Վերադառնանք (1) հավասարությանը։ Եթե k-ն սևեռենք (պահենք անփոփոխ) և, համարելով $n > k$, վերջին մասի $(k + 1)$-րդ անդամին հաջորդող բոլոր անդամները դեն նետենք, ապա կստանանք հետևյալ անհավասարությունը՝

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

Անցնենք սահմանին, n-ը ձգտեցնելով անվերջության. քանի որ բոլոր փակագծերի ներսի արտահայտությունները ձգտում են 1-ի, ուստի կունենանք՝

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Այս անհավասարությունը տեղի ունի ամեն մի բնական k-ի համար։ Այսպիսով, ունենք՝

$$x_n < y_n \leqslant e,$$

որտեղից հետևում է [n° **38**-ի 3) թեորեմայի համաձայն], որ նաև

$$\lim y_n = e.$$

e թվի մոտավոր հաշվման համար y_n փոփոխականը շատ ավելի հարմար է, քան x_n-ը։ Գնահատենք y_n-ի e-ին մոտենալու արագությունը։ Այդ նպատակով նախ դիտարկենք y_n-ին հաջորդող որևէ y_{n+m} արժեքի և y_n-ի տարբերությունը։ Ունենք՝

$$y_{n+m} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)}\right\}.$$

Եթե $\{\cdots\}$ փակագծերի ներսը հայտարարների բոլոր արտադրիչները փոխարինենք $(n+2)$-ով, կստանանք հետևյալ անհավասարությունը՝

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\},$$

որը միայն կուժեղանա, եթե փակագծերը փոխարինենք անվերջ պրոգրեսիայի գումարով՝

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Այստեղ n-ը անփոփոխ պահելով, m-ը մեծացնենք մինչև անվերջություն. m նշիչով համարակալված y_{n+m} փոփոխականը հաջորդաբար կստանա հետևյալ արժեքները՝

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ y_{n+3}, \cdots,\ y_{n+m}, \cdots,$$

որոնք, ակներևաբար, ձգտում են e*-ին։ Ուստի սահմանում ստանում ենք՝*

$$e - y_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1},$$

կամ, քանի որ $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$ *(այդ հեշտ է ստուգել), վերջնականապես կունենանք՝*

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!n}.$$

Եթե $e - y_n$ *տարբերության և* $\frac{1}{n!n}$ *թվի հարաբերությունը նշանակենք* θ*-ով (ակներևաբար՝* $0 < \theta < 1$*), կարելի կլինի գրել՝*

$$e - y_n = \frac{\theta}{n!n}.$$

Այստեղ y_n*-ը փոխարինելով իր լրիվ արտահայտությամբ, մենք կստանանք հենց այն կարևոր բանաձևը՝*

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}, \tag{2}$$

որը ելակետ կծառայի e *թիվը հաշվելու համար։ Դեն նետելով վերջին, «լրացուցիչ», անդամը և մնացած յուրաքանչյուր անդամ փոխարինելով իր տասնորդական մոտավորությամբ, մենք հենց դրանով էլ կստանանք* e *թվի մոտավոր արժեքը։*

Մեր առջև խնդիր դնենք (2) բանաձևի օգնությամբ հաշվել e*-ն, ասենք թե,* $\frac{1}{10^4}$*-ի ճշգրտությամբ։ Նախ պետք է պարզել, թե ինչպիսին պիտի ընտրել մեր տրամադրության տակ գտնվող* n*-ը, որպեսզի իրականացնենք այդ ճշգրտությունը։*

Հաջորդաբար հաշվելով ֆակտորիալներին հակադարձ թվերը (տե՛ս կից աղյուսակը), տեսնում ենք, որ $n = 7$ *դեպքում (2) բանաձևի «լրացուցիչ» անդամն արդեն կլինի*

$$\frac{\theta}{n!n} = \frac{\theta}{7!\,7} < 0{,}000\,03,$$

այնպես որ, այդ անդամը դեն նետելով, մենք պահանջվող սահմանից նշանակալի չափով փոքր սխալ ենք կատարում։ Ուրեմն կանգ առնենք n*-ի այդ արժեքի վրա։ Մնացած անդամներից յուրաքանչյուրը դարձնենք տասնորդական կոտորակ, կլորացնելով հինգերորդ թվանշանում (պահեստի ճշգրտության համար) այնպես, որ սխալը բացարձակ արժեքով փոքր լինի հինգերորդ տեղում գրված միավորի կեսից, այսինքն՝* $\frac{1}{2\cdot 10^5}$*-ից։ Հաշվումների արդյունքները մենք ամփոփել ենք աղյուսակի մեջ. մոտավոր արժեքի կողքին (+ կամ —) նշան է գրված, որը ցույց է տալիս, թե ճշգրիտ արժեքը վերականգնելու համար անհրաժեշտ ուղղումն ինչ նշան պիտի ունենա։*

Այսպիսով, տեսնում ենք, որ լրացուցիչ անդամը դեն նետելու հետևանքով պահանջվող ուղղումը փոքր է $\frac{3}{10^5}$-ից։ Հաշվի առնելով նաև կլորացման ուղղումները (իրենց նշաններով), հեշտ է կռահել, որ e *թվի համար ստացած մոտավոր արժեքի հանրագումարային ուղղումը գտնվում է*

$$
\begin{aligned}
& 2{,}000\,00 \\
\frac{1}{2!} &= 0{,}500\,00 \\
\frac{1}{3!} &= 0{,}166\,67 - \\
\frac{1}{4!} &= 0{,}041\,67 - \\
\frac{1}{5!} &= 0{,}008\,33 + \\
\frac{1}{6!} &= 0{,}001\,39 - \\
\frac{1}{7!} &= 0{,}000\,20 - \\
\hline
& 2{,}718\,26
\end{aligned}
$$

$$-\frac{2}{10^5} \text{ և } +\frac{3{,}5}{10^5}$$

թվերի միջև։ Հետևաբար, e *թիվն ինքը գտնվում է* 2,718 24 *և* 2,718 295 *կոտորակների միջև, այնպես որ կարելի է գրել՝*

$$e = 2{,}718\,2 + 0{,}000\,1\text{։}$$

Նշենք նաև, որ նույն (2) բանաձևը կարող է ծառայել նաև e *թվի իռացիոնալության ապացուցելու համար։ Հակասող ընդունելությամբ ենթադրենք, թե* e*-ն հավասար է մի $\frac{m}{n}$ ռացիոնալ կոտորակի. այդ դեպքում, եթե (2) բանաձևը գրենք հենց այդ* n*-ի համար, կստանանք՝*

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \quad (0 < \theta < 1)\text{։}$$

Այս հավասարության երկու մասերը բազմապատկելով n!*-ով, բոլոր կոտորակների հայտարարները, բացի վերջինից, կրճատվելուց հետո, մենք ձախ մասում կստանանք ամբողջ թիվ, իսկ աջ մասում, ամբողջ թիվ $\frac{\theta}{n}$ կոտորակի հետ միասին, որն անհնար է։ Ստացված հակասությունը հենց ապացուցում է, որ* e *թիվն ռացիոնալ չէ։*

50. Հիմնական բանաձև e թվի համար: Բնական լոգարիթմներ: n° **48**-*ում* e *թիվը սկզբնապես որոշվել էր որպես բնական արգումենտի ֆունկցիայի սահման, այն է՝*

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{3}$$

Իսկ այժմ մենք ապացուցենք ավելի ընդհանուր բանաձև՝

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, \tag{4}$$

Դրա համար բավական է [n° **35**] *ցույց տալ, որ առանձին-առանձին տեղի ունեն հետևյալ երկու առնչությունները՝*

$$\lim_{x \to +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad և \quad \lim_{x \to -0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e: \qquad (4ա)$$

Այս անգամ օգտվենք սահմանի՝ «հաջորդականությունների լեզվով» սահմանումից [n° **32**]*։*

Ի դեպ, եթե (3) սահմանը նույնպես, դիտարկելով այն որպես n*-ից կախված ֆունկցիայի սահման, մեկնաբանենք «հաջորդականությունների լեզվով», ապա կհանգենք*

$$\lim\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e \qquad (5)$$

առնչությանը, ինչպիսին էլ լինի k *համարի հետ միասին մինչև անվերջություն աճող բնական թվերի* $\{n_k\}$ *հաջորդականությունը։*

Դիցուք, այժմ x*-ն ընդունում է դրական արժեքներ, որոնք կազմում են զրոյի ձգտող մի որևէ* $\{x_k\}$ *հաջորդականություն. կարելի է ընդունել, որ բոլոր* $x_k < 1$*։ Նշանակենք* $n_k = E\left(\frac{1}{x_k}\right)$*, այնպես որ՝*

$$n_k \leqslant \frac{1}{x_k} < n_k + 1 \qquad և \quad n_k \to +\infty,$$

Քանի որ այդ դեպքում՝

$$\frac{1}{n_k+1} < x_k \leqslant \frac{1}{n_k},$$

ուստի՝

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1},$$

Եզրային երկու արտահայտությունները կարելի է այսպես ձևափոխել՝

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} : \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right),$$

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1+\frac{1}{n_k}\right),$$

և, քանի որ (5)-ի շնորհիվ՝

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \to e, \quad \textit{ինչպես և՝} \quad \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \to e$$

իսկ՝

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right) \to 1 \quad \textit{և} \quad \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right) \to 1,$$

ուստի այդ երկու եզրային արտահայտություններն էլ ձգտում են e *ընդհանուր սահմանին։ Հետևաբար* [**38**-*ի 3) թեորեմայի համաձայն*], *նրանց միջև գտնվող արտահայտությունը նույնպես կձգտի այդ* e *սահմանին՝*

$$\lim\,(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e:$$

Սրանով էլ ավարտվում է (4ա) առնչություններից առաջինի ապացուցումը «հաջորդականությունների լեզվով»։

Այդ առնչություններից երկրորդն ապացուցելու համար այժմ ենթադրենք, թե $\{x_n\}$ *հաջորդականությունը կազմված է զրոյի ձգտող* *բ ա ց ա ս ա կ ա ն* *արժեքներից. կարելի է համարել* $x_k > -1$։ *Եթե նշանակենք* $x_k = -y_k$, *ապա կունենանք,*

$$1 > y_k > 0 \quad \textit{և} \quad y_k \to 0:$$

Կարող ենք գրել,

$$\left(1+x_k\right)^{\frac{1}{x_k}} = \left(1-y_k\right)^{-\frac{1}{y_k}} = \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} =$$

$$= \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \cdot \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right),$$

Քանի որ առաջին բազմապատկիչը, ապացուցածի համաձայն, ձգտում է e *սահմանին, իսկ երկրորդ բազմապատկիչը՝ մեկի, ուստի ձախ կողմի արտահայտությունը նույնպես ձգտում է* e *սահմանին։ (4) բանաձևը լրիվ ապացուցվեց։*

e *թվի այս նշանավոր հատկությունն է ընկած նրա բոլոր կիրառությունների հիմքում։ Հենց այս հատկությունն է առանձնապես ձեռ-*

նըստու դարձնում e թիվը որպես լոգարիթմների սիստեմի հիմք ընտրելը: e հիմքով լոգարիթմները կոչվում են բնական լոգարիթմներ *և նշանակվում են* ln *տառերով* (logarithmus naturalis). *տեսական հետազոտություններում օգտագործում են բացառապես բնական լոգարիթմները**:*

Հիշենք, որ սովորական՝ տասնորդական լոգարիթմները բնական լոգարիթմների հետ կապված են՝

$$\log x = \ln x \cdot M$$

հայտնի բանաձևով, որտեղ M-ը անցման մոդուլն է և հավասար է՝

$$M = \log e = \frac{1}{\ln 10} = 0,434294\cdots :$$

Այդ բանաձևը հեշտությամբ կստացվի, եթե

$$x = e^{\ln x}$$

նույնությունը լոգարիթմենք 10 հիմքով:

§ 5. ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

51. Մասնակի հաջորդականություններ: *Դիցուք տրված է մի հաջորդականություն՝*

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ \cdots, \ x_n, \ \cdots, \ x_{n'}, \ \cdots \tag{1}$$

Դիտարկենք, դրա հետ միասին, դրանից առանձնացրած մի որևէ մասնակի *հաջորդականություն՝*

$$x_{n_1}, \ x_{n_2}, \ x_{n_3}, \ \cdots, \ x_{n_k}, \cdots, \tag{2}$$

որտեղ $\{n_k\}$*-ն՝* աճող *բնական թվերի մի որոշ հաջորդականություն է՝*

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots \tag{3}$$

---

* *Այս լոգարիթմները երբեմն սխալմամբ անվանում են նեպերյան՝ լոգարիթմները հորինող շոտլանդացի մաթեմատիկոս Նեպերի (1550 — 1617) անունով: Նեպերն ինքը լոգարիթմների սիստեմի հիմքի մասին գաղափար չի ունեցել, որովհետև նա դրանք կառուցել է յուրովի, բոլորովին այլ սկզբունքով, սակայն նրա լոգարիթմները համապատասխանում են այն լոգարիթմներին, որոնց հիմքը մոտ է* $\frac{1}{e}$*-ին: e-ին մոտ հիմք ունեն նրա ժամանակակից, շվեյցարացի մաթեմատիկոս Բյուրգիի (1552 — 1632) լոգարիթմները:*

Այստեղ հերթականությամբ բոլոր բնական արժեքներն ընդունող համարի դերը կատարում է արդեն ոչ թե n-ը, *այլ* k-ն. *իսկ* n_k-ն *իրենից ներկայացնում է* k-ից *կախված ֆունկցիա, որը բնական արժեքներ է ընդունում և, ակներևորեն, ձգտում է անվերջության, երբ* k-ն *աճում է։*

Եթե (1) հաջորդականությունն ունի որոշակի a սահման (վերջավոր կամ անվերջ), ապա նույն սահմանն ունի նաև (2) մասնակի հաջորդականությունը:

Իսկ եթե (1) հաջորդականությունը որոշակի սահման չունի, այդ չի բացառում սահմանի գոյության հնարավորությունը մի որևէ մասնակի հաջորդականության համար։

Դիցուք, օրինակ՝

$$x_n = (-1)^{n+1}.$$

այս փոփոխականը սահման չունի։ Իսկ եթե n-ը *ընդունի միայն կենտ կամ միայն զույգ արժեքներ, ապա՝*

$$x_1 = 1, \quad x_3 = 1, \quad \cdots, \quad x_{2k-1} = 1, \quad \cdots$$

և

$$x_2 = -1, \quad x_4 = -1, \quad \cdots, \quad x_{2k} = -1, \quad \cdots$$

մասնակի հաջորդականությունները կունենան, համապատասխանորեն, 1 և — 1 սահմանները։

Երբ (1) հաջորդականությունն անսահմանափակ է, երբեմն հնարավոր չի լինում այնպիսի մասնակի հաջորդականություն առանձնացնել, որը ձգտի վերջավոր սահմանի [այդպես կլինի, եթե (1) հաջորդականությունն ինքը ձգտում է $\pm\infty$*]։ Սահմանափակ հաջորդականության համար, ընդհակառակն, տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը պատկանում է Բոլցանոյին և Վայերշտրասին*.*

Բոլցանոյի-Վայերշտրասի լեմման: Յուրաքանչյուր (1) սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել այնպիսի (2) մասնակի հաջորդականություն, որը ձգտի վերջավոր սահմանի:

(Այս ձևակերպումը չի բացառում նաև հավասար թվերի հնարավորությունը տվյալ հաջորդականության կազմում, որ հարմար է կիրառություններում)։

---

* *Կարլ Վայերշտրաս (1815 — 1897) — գերմանացի ականավոր մաթեմատիկոս։*

Ապացուցում։ Դիցուք տրված է (1) հաջորդականությունը, որտեղ բոլոր x_n թվերը գտնվում են a և b թվերի միջև։ Այդ $[a, b]$ միջակայքը կիսենք. երկու կեսերից գոնե մեկում անվերջ բազմությամբ էլեմենտներ կլինեն տվյալ հաջորդականությունից, քանի որ, հակառակ դեպքում, ամբողջ $[a, b]$ միջակայքում նույնպես վերջավոր թվով էլեմենտներ կլինեին, որ հնարավոր չէ (անվերջ հաջորդականության համար)։ Այսպես, ուրեմն, թ՛ող $[a_1, b_1]$-ը լինի այն կեսը, որը պարունակում է անվերջ բազմությամբ x_n էլեմենտներ (իսկ եթե երկու կեսն էլ այդպիսին են՝ նրանցից որևէ մեկն է)։

Նման ձևով, $[a_1, b_1]$ միջակայքից վերցնենք նրա այն $[a_2, b_2]$ կեսը, որը պարունակում է անվերջ բազմությամբ x_n թվեր, և այլն։ Այդ պրոցեսը շարունակելով, նրա k-րդ քայլում կառանձնացնենք $[a_k, b_k]$ միջակայքը, որն անվերջ բազմությամբ x_n թվեր է պարունակում. և այսպես շարունակ, անվերջորեն։

Այսպես կառուցած միջակայքերից յուրաքանչյուրը (սկսած երկրորդից), ներդրված է իր նախորդի մեջ, կազմելով նրա կեսը։ Բացի դրանից, k-րդ միջակայքի երկարությունը, որը հավասար է

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k},$$

ձգտում է զրոյի, երբ k-ն անվերջորեն աճում է։ Կիրառելով ներդրված միջակայքերի լեմման [n° 46], այստեղից եզրակացնում ենք, որ a_k և b_k ծայրակետերը ձգտում են մի c ընդհանուր սահմանի։

Այժմ $\{x_{n_k}\}$ մասնակի հաջորդականությունը կազմենք ինդուկտիվ եղանակով, հետևյալ ձևով. իբրև x_{n_1} վերցնենք տրված հաջորդականության այն x_n էլեմենտներից որևիցե մեկը (օրինակ՝ հերթականությամբ առաջինը), որոնք գտնվում են $[a_1, b_1]$ միջակայքում։ Իբրև x_{n_2} վերցնենք x_{n_1}-ին հաջորդող այն x_n էլեմենտներից որևիցե մեկը (օրինակ՝ առաջինը), որոնք գտնվում են $[a_2, b_2]$ միջակայքում, և այլն։ Ընդհանրապես, իբրև x_{n_k} վերցնենք նախապես արդեն ընտրած $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_{k-1}}$ էլեմենտներին հաջորդող այն x_n էլեմենտներից որևիցե մեկը (օրինակ՝ առաջինը), որոնք գտնվում են $[a_k, b_k]$ միջակայքում։ Այդպիսի հաջորդական ընտրության հնարավորությունն ապահովվում է նրանով, որ $[a_k, b_k]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրը պարունակում է անվերջ բազմությամբ x_n թվեր, այսինքն՝ պարունակում է ցանկացած չափով մեծ համար ունեցող x_n էլեմենտներ։

Այնուհետև, քանի որ

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad \text{և} \quad \lim a_k = \lim b_k = c,$$

ուստի, n° **38**-ի 3) թեորեմայի համաձայն, նաև

$$\lim x_{n_k} = c,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Դիտարկվող միջակայքերը հաջորդաբար կիսելու մեթոդը, որ մենք հենց նոր կիրառեցինք, մեզ հաճախ է պետք գալու նաև այլ դեպքերում։

Բոլցանոյի-Վայերշտրասսի լեմման զգալի չափով հեշտացնում է մեծ թվով դժվար թեորեմաների ապացուցումը, ասես իր մեջ առնելով դատողությունների հիմնական դժվարությունը։ Մենք այդ լեմմայից կօգտվենք հենց առաջիկա համարում։

52. Վերջավոր սահմանի գոյության պայմանը բնական արգումենտի ֆունկցիայի համար: Դիցուք տրված է x_n փոփոխականը, որի արժեքները կազմում են (1) հաջորդականությունը. զբաղվենք, վերջապես, այդ փոփոխականի (կամ, որ միևնույնն է՝ (1) հաջորդականության) համար վերջավոր սահմանի գոյության ընդհանուր հայտանիշի հարցով։ Սահմանի սահմանումն ինքն այդ նպատակին ծառայել չի կարող, քանի որ նրանում արդեն իսկ մասնակցում է հենց այն սահմանը, որի գոյության մասին է խոսքը։ Մենք կարիք ունենք այնպիսի հայտանիշի, որն օգտագործեր լոկ այն, ինչը մեզ տրված է, այն է՝ փոփոխականի արժեքների (1) հաջորդականությունը։

Առաջադրված հարցը լուծում է հետևյալ նշանավոր թեորեման, որը պատկանում է Բոլցանոյին (1817) ու Կոշիին (1821). այն հաճախ **զուգամիտության սկզբունք** են անվանում։

Թեորեմա: x_n փոփոխականի վերջավոր սահմանի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվին համապատասխան գոյություն ունենա այնպիսի N համար, որ

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$$

անհավասարությունը բավարարվի հենց որ

$$n > N \quad \text{և} \quad n' > N.$$

Ինչպես ընթերցողը տեսնում է, այստեղ հարցի էությունն այն է, որպեսզի փոփոխականի արժեքները միմյանց անվերջորեն մոտենան՝ նրանց համարների աճման ընթացքում։ Դառնանք թեորեմայի *ապացուցմանը*։

Անհրաժեշտությունը։ Դիցուք x_n փոփոխականն ունի որոշակի վերջավոր սահման, ասենք թե՝ a։ Հենց սահմանի սահմանման համաձայն [n° **28**], ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ թիվը, $\frac{\varepsilon}{2}$ թվին համապատասխան կգտնվի այնպիսի N համար, որ $N <$ n-երի համար միշտ տեղի ունենա

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

անհավասարությունը։ Այժմ վերցնենք որևէ երկու համար՝ n և n′ այնպես, որ $n > N$, $n' > N$. դրանց համար միաժամանակ կունենանք՝

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{և} \quad |x_{n'} - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

որտեղից կհետևի՝

$$|x_n - x_{n'}| = |(x_n - a) + (a - x_{n'})| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n - a| + |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon:$$

Սրանով ապացուցվեց պայմանի անհրաժեշտությունը։ Զգալիորեն դժվար է ապացուցել նրա բավարար լինելը։

Բավարարությունը։ Այստեղ է, որ մենք կիրառելու ենք Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմման։

Այսպես ուրեմն, դիցուք պահանջվող պայմանը բավարարված է և տրված $\varepsilon > 0$ թվին համապատասխան գտնված է այնպիսի N համար, որ $N <$ n-ի և $N <$ n′-ի համար տեղի ունի (4) անհավասարությունը։ Եթե այդպես ընտրելուց հետո n′-ը սևեռենք (պահենք անփոփոխ) և (4)-ն արտագրենք այսպես՝

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon,$$

ապա կտեսնենք, որ x_n փոփոխականը, համենայն դեպս, *սահմանափակ* կլինի. $N <$ n-երի համար նրա արժեքները գտնվում են $x_{n'} - \varepsilon$ և $x_{n'} + \varepsilon$ թվերի միջև և դժվար չի լինի դրանց փոխարեն երկու այնպիսի թվեր վերցնել, որպեսզի ընդգրկվեն նաև մյուս N հատ՝ x_1, x_2, $\cdots$, x_N արժեքները։ Հետևաբար, Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, այդ սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել այնպիսի $\{x_{n_k}\}$ մասնակի հաջորդականություն, որը ձգտի մի c վերջավոր սահմանի՝

$$\lim x_{n_k} = c:$$

Ցույց տանք, որ ընդհանրապես այդ նույն սահմանին կձգտի նաև x_n *փոփոխականը։ Դրա համար* k*-ն այնքան մեծ վերցնենք, որպեսզի*

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon \quad \text{և միաժամանակ} \quad n_k > N.$$

Այդ դեպքում, (4) անհավասարությունում ընդունելով $n' = n_k$, *կունենանք՝*

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon.$$

Համադրելով ստացված երկու անհավասարությունները, վերջնականապես կստանանք՝

$$|x_n - c| < 2\varepsilon, \quad \text{երբ } n > N,$$

որը և ապացուցում է մեր պնդումը։*

Դիտողություն: *Թեպետև ինչպես Բոլցանոն, այնպես էլ Կոշին պնդել են, որ վերջավոր սահմանի գոյության համար իրենց արտահայտած պայմանը բավարար է, սակայն առանց իրական թվերի խստագույն տեսության, հասկանալի է, չէին կարող այն ապացուցել։*

53. Վերջավոր սահմանի գոյության պայմանը ցանկացած արգումենտի ֆունկցիայի համար: *Այժմ անցնենք ընդհանուր դեպքին՝* $f(x)$ *ֆունկցիայի դիտարկմանը, որը տրված է* a *խտացման կետ ունեցող մի* $X = \{x\}$ *տիրույթում։* x*-ը* a*-ին ձգտելիս* $f(x)$ *ֆունկցիայի վերջավոր սահմանի գոյության համար կարելի է ստանալ նույնպիսի հայտանիշ, ինչպիսին ստացել ենք բնական արգումենտի ֆունկցիայի դեպքում։ Այդ հայտանիշի ձևակերպումը մենք տալիս ենք զուգահեռաբար այն դեպքերի համար, երբ* a*-ն վերջավոր է և երբ* $a = +\infty$։

Թեորեմա: x-ը a-ին ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիայի վերջավոր սահման ունենալու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի $\delta > 0$ (կամ՝ $\Delta > 0$) թիվ, որ

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

անհավասարությունը բավարարվի հենց որ՝

$$|x - a| < \delta \quad \text{և} \quad |x' - a| < \delta$$

$$(\text{կամ՝ } x > \Delta \quad \text{և} \quad x' > \Delta):$$

---

* 2ε *թիվը նույնչափ «ցանկացած չափով փոքր» թիվ է, ինչպես և* ε*-ը։ Անշուշտ, կարելի էր սկզբից վերցնել ոչ թե* ε, *այլ* $\frac{\varepsilon}{2}$, *և այն ժամանակ այստեղ կստանայինք* ε։ *Նման հաշիվները առաջիկայում թողնելու ենք ընթերցողին։*

Ապացուցումը կատարենք ենթադրելով, որ a-ն վերջավոր է։

Անհրաժեշտությունը։ Դիցուք գոյություն ունի ֆունկցիայի վերջավոր սահման՝

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Այդ ժամանակ, տրված $\varepsilon > 0$ *թվին համապատասխան կգտնվի այնպիսի* $\delta > 0$, *որ տեղի կունենա՝*

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

հենց որ $[x - a] < \delta$։ *Իսկ եթե նաև* $[x' - a] < \delta$, *ապա տեղի կունենա նաև՝*

$$|A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Այդ երկու անհավասարություններից կստանանք՝

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

այն ենթադրությամբ, որ միաժամանակ՝

$$|x - a| < \delta \quad \text{և} \quad |x' - a| < \delta:$$

Բավարարությունը կարելի է ապացուցել, օրինակի համար, հարցը հանգեցնելով արդեն դիտարկված դեպքին։ Դրա համար ուղի է բացում հենց ֆունկցիայի սահմանի գաղափարի սահմանումը «հաջորդականության լեզվով» [n° **32**]։

Այսպես, ուրեմն, դիցուք թեորեմայում ձևակերպված պայմանը բավարարվում է, և կամայապես վերցրած $\varepsilon > 0$ *թվին համապատասխանող* $\delta > 0$ *թիվը գտնված է։ Եթե* $\{x_n\}$*-ը* a *սահմանին ձգտող արժեքների ցանկացած հաջորդականություն է* X *տիրույթից վերցրած, ապա, հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն, կգտնվի այնպիսի* N *համար, որ* $N < n$*-ի դեպքում կլինի* $[x_n - a] < \delta$։ *Այդ* n *համարի հետ միասին վերցնենք մի ուրիշ* n′ *համար ևս՝* $n' > N$, *այնպես որ, միաժամանակ կունենանք՝*

$$|x_n - a| < \delta \quad \text{և} \quad |x_{n'} - a| < \delta:$$

Այդ դեպքում, հենց δ *թվի ընտրության համաձայն կունենանք նաև՝*

$$|f(x_n) - f(x_{n'})| < \varepsilon.$$

Այս անհավասարության բավարարվելու համար միայն պահանջվում է, որպեսզի n *և* n′ *երկու համարներն էլ մեծ լինեն* N*-ից։ Այդ նշա-*

նակում է, որ n *բնական արգումենտի* $f(x_n)$ *ֆունկցիայի համար բավարարվում է* n° **52**-*ի պայմանը և, հետևաբար՝*

$$f(x_1),\quad f(x_2),\quad \ldots,\quad f(x_n), \ldots$$

հաջորդականությունը վերջավոր սահման ունի. այն նշանակենք A։

Մնում է ցույց տալ նաև, որ այդ A *սահմանը կախված չէ* $\{x_n\}$ *հաջորդականության ընտրությունից։*

Դիցուք $\{x_n'\}$-*ը* X-*ից առանձնացրած մի այլ հաջորդականություն է, որը նույնպես ձգտում է* a *սահմանին։ Ֆունկցիայի՝ դրան համապատասխանող արժեքների* $\{f(x_n')\}$ *հաջորդականությունը նույնպես, ապացուցածի համաձայն, ունի մի որոշ* A' *վերջավոր սահման։ Ապացուցելու համար, որ* $A' = A$, *հակասող ենթադրություն անենք և կազմենք* x-*ի արժեքների հետևյալ հաջորդականությունը՝*

$$x_1,\ x_1',\ x_2,\ x_2',\ \ldots,\ x_n,\ x_n',\ \ldots$$

որը, պարզ է, որ ձգտում է նույն a *սահմանին։ Ֆունկցիայի՝ դրան համապատասխանող արժեքներից կազմած՝*

$$f(x_1),\ f(x_1'),\ f(x_2),\ f(x_2'),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(x_n')\ldots$$

հաջորդականությունը սահման չի ունենա, քանի որ նրա երկու մասնակի հաջորդականությունները, որոնք կազմվում են միայն կենտ կամ միայն զույգ տեղերում գտնվող անդամներից, ձգտում են տարբեր սահմանների [n° **51**]։ *Իսկ այդ հակասում է մեր ապացուցածին, ըստ որի ամեն մի այդպիսի հաջորդականություն պետք է որոշակի սահման ունենա։ Ուրեմն,* x-*ը* a-*ին ձգտելիս* $f(x)$ *ֆունկցիան իրոք ձգտում է* A *վերջավոր սահմանին։*

§ 6. ԱՆՎԵՐՋ ՓՈՔՐ ԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ՄԵԾ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ

54. Անվերջ փոքրերի բաղդատումը: *Ենթադրենք, թե մի որևէ հարցի հետազոտության ընթացքում միաժամանակ դիտարկվում են մի շարք անվերջ փոքր մեծություններ՝*

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

որոնք, ընդհանրապես կլինեն ֆունկցիաներ միևնույն փոփոխականի, ասենք x-*ի, որը ձգտում է* a *վերջավոր կամ անվերջ սահմանին։*

Շատ դեպքերում հետաքրքրություն է ներկայացնում վերոհիշյալ անվերջ փոքրերի բաղդատումն իրար հետ՝ ըստ նրանց զրոյի ձգտելու բնույթի։ α և β երկու անվերջ փոքրերի բաղդատման հիմքում դրվում է նրանց հարաբերության վարքը։ Այս առթիվ ընդունենք երկու պայման, այն է՝*

I. Եթե $\frac{\beta}{\alpha}$ $\left(\text{նրա հետ նաև } \frac{\alpha}{\beta}\right)$ հարաբերությունը ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր սահման, ապա α և β անվերջ փոքրերը համարվում են միևնույն կարգի մեծություններ:

II. Իսկ եթե $\frac{\beta}{\alpha}$ հարաբերությունը ձգտում է զրոյի $\left(\text{իսկ } \frac{\alpha}{\beta}\right.$ հարաբերությունը՝ ∞), ապա β անվերջ փոքրը համարվում է ավելի բարձր կարգի մեծություն, քան α անվերջ փոքրը և միաժամանակ α անվերջ փոքրը կլինի ավելի ցածր կարգի, քան β անվերջ փոքրը:

Օրինակ, երբ $a = x \to 0$, *ապա այս անվերջ փոքրի նկատմամբ նույն կարգի անվերջ փոքրեր կլինեն նաև՝*

$$\sin x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \sqrt{1+x} - 1$$

մեծությունները, որովհետև, ինչպես գիտենք [(n° **34**,5) *և* n° **43**,6)]՝

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2},$$

Ընդհակառակը,

$$1 - \cos x, \qquad \operatorname{tg} x - \sin x$$

անվերջ փոքրերը, ակներևաբար, կլինեն ավելի բարձր կարգի, քան x-*ը* [n° **43**,7), (*ա*) *և* (*բ*)]։

Իհարկե, կարող է պատահել, որ երկու անվերջ փոքրերի հարաբերությունը ոչ մի սահմանի չձգտի, չլինելով նաև անվերջ մեծ. օրինակ, եթե վերցնենք

$$\alpha = x \quad և \quad \beta = x \sin \frac{1}{x},$$

[*տես* **34**, 6) *և* 7)]. *ապա նրանց հարաբերությունը, որը հավասար է* $\sin \frac{1}{x}$-*ի, սահման չունի, երբ* $x \to 0$։ *Այդ դեպքում ասում են, որ երկու անվերջ փոքրերը իրար հետ անբաղդատելի են։*

---

* *Մենք ընդունում ենք, որ այն փոփոխականը, որի վրա մենք բաժանում ենք. զրո չի դառնում, գոնե* a-*ին բավականաչափ մոտ գտնվող* x-*ի արժեքների համար։*

Նշենք, որ երբ β անվերջ փոքրն ավելի բարձր կարգի է, քան α անվերջ փոքրը, այդ փաստը գրառում են այսպես՝

$$\beta = o(\alpha):$$

Օրինակ, կարելի է գրել՝

$$1 - \cos x = o(x), \quad \operatorname{tg} x - \sin x = o(x), \text{ և այլն։}$$

Այսպիսով, α-ից ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքրերի ընդհանուր նշանակման համար ծառայում է $o(\alpha)$ *պայմանանշանը (սիմվոլը)։ Հետագայում մենք կօգտվենք այս հարմար նշանակումից։*

55. Անվերջ փոքրերի սանդղակ: *Երբեմն անհրաժեշտ է լինում անվերջ փոքրերի վարքի ավելի ճշգրիտ համեմատական բնութագրում, անհրաժեշտ է լինում նրանց կարգերն արտահայտել թվերով։ Այդ դեպքում, նախ իբրև յուրատեսակ «ստուգանմուշ» (էտալոն) ընտրում են ուսումնասիրության ենթակա անվերջ փոքրերից որևէ մեկը (ասենք՝ α-ն), և այն անվանում են հիմնական անվերջ փոքր։ Իհարկե, հիմնական անվերջ փոքրի ընտրությունը որոշ չափով կամավոր է, սակայն սովորաբար վերցնում են ամենապարզը։ Եթե դիտարկվող մեծությունները, ինչպես արդեն ընդունել ենք, հանդիսանում են* x*-ի ֆունկցիաներ և դառնում են անվերջ փոքրեր, երբ* x*-ը ձգտում է* a*-ին, ապա նայած թե* a*-ն զրո՞ է, վերջավոր և զրոյից տարբեր թի՞վ է, թե՞ անվերջություն է, ըստ այնմ էլ, բնական կլինի որպես հիմնական անվերջ փոքր վերցնել, համապատասխանաբար,*

$$|x|, \ |x - a|, \ \frac{1}{|x|}$$

մեծությունները։

Այնուհետև, α հիմնական անվերջ փոքրի (համարելու ենք $\alpha > 0$*) տարբեր դրական ցուցիչներ ունեցող* α^k *աստիճաններից կազմում են սանդղակի* (школа) *նման մի բան՝ ավելի բարդ բնույթի անվերջ փոքրերը գնահատելու համար։**

III. Պայմանավորվում են β անվերջ փոքրը համարել k-րդ կարգի մեծություն (հ ի մ ն ա կ ա ն α ա ն վ ե ր ջ փ ո ք ր ի ն կ ա տ մ ա մ բ), եթե β-ն և α^k-ը ($k>0$) նույն կարգի մեծություններ են, *այսինքն՝ եթե* $\frac{\beta}{\alpha^k}$ *հարաբերությունն ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր սահման։*

Այժմ, օրինակ, կարելի է չբավարարվելով միայն այն պնդումով, թե (1) անվերջ փոքրերը (երբ $x \to 0$*) ավելի բարձր կարգի են, քան*

* *Հեշտ է տեսնել, որ* $0 < k$*-ի դեպքում* α^k *մեծությունը* α*-ի հետ միաժամանակ կլինի անվերջ փոքր։*

$\alpha = x$ մեծությունը, ճշգրիտ ասել, որ դրանցից մեկը $\alpha = x$-ի նկատմամբ երկրորդ կարգի անվերջ փոքր է, իսկ մյուսը՝ երրորդ կարգի, որովհետև **43**, *7) (ա) և (բ)]՝*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2},$$

56. Համարժեք անվերջ փոքրեր: *Այժմ կանգ առնենք միևնույն կարգի անվերջ փոքրերի առանձնապես կարևոր մի դեպքի վրա։*

α և β անվերջ փոքրերը կանվանենք համարժեք (նշանակելով՝ $\alpha \sim \beta$), եթե նրանց $\beta - \alpha = \gamma$ տարբերությունը լինի ավելի բարձր կարգի մեծություն, քան α և β անվերջ փոքրերից յուրաքանչյուրն է, այսինքն՝

$$\gamma = o(\alpha) \quad \text{և} \quad \gamma = o(\beta):$$

Ի միջի այլոց բավական է պահանջել, որ γ-ն այդ անվերջ փոքրերից միայն մեկի նկատմամբ լինի բարձր կարգի, որովհետև, եթե, օրինակ, γ-ն ավելի բարձր կարգի է, քան α-ն, ապա նա բարձր կարգի կլինի նաև β-ի նկատմամբ։ Իրոք, $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ *հավասարությունից հետևում է, որ նաև*

$$\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} = \lim \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1 + \frac{\gamma}{\alpha}} = 0:$$

Դիտարկենք α և β երկու համարժեք անվերջ փոքրեր, որտեղ $\beta = \alpha + \gamma$ *և* $\gamma = o(\alpha)$*։ Եթե մոտավորապես ընդունենք* $\beta \approx \alpha$*, *ապա այդ երկու մեծությունների փոքրացման հետ միասին զրոյի կձգտի ոչ միայն այդ փոխարինման հետևանքով առաջացած բացարձակ սխալը, որը ներկայացվում է $|\gamma|$ մեծությունով, այլև հարաբերական սխալը, որը հավասար է* $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|$*-ի։ Այլ խոսքով,* α-ի և β-ի բավականաչափ փոքր արժեքների դեպքում կարելի է ցանկացած չափով մեծ հարաբերական ճշգրտությամբ ընդունել $\beta = \alpha$: *Սրա վրա է հիմնված, մոտավոր հաշվումների ժամանակ, բարդ անվերջ փոքրերը նրանց նկատմամբ համարժեք պարզ անվերջ փոքրերով փոխարինելը։*

Ստանանք երկու անվերջ փոքրերի համարժեքության մի օգտա-

---

* *≈ նշանը նշանակում է մոտավոր հավասարություն։*

կար հայտանիշ, որն ըստ էության տալիս է այդ գաղափարի երկրորդ սահմանումը՝ նախորդին հավասարազոր.

α և β երկու անվերջ փոքրերի համարժեքության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1:$$

Նշանակելով $\beta - \alpha = \gamma$, *կունենանք՝*

$$\frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\gamma}{\alpha},$$

Հենց այստեղից էլ անմիջապես բխում է մեր պնդումը: Իրոք, եթե $\frac{\beta}{\alpha} \to 1$, *ապա* $\frac{\gamma}{\alpha} \to 0$, *այսինքն՝* γ*-ն ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան* α*-ն, և* $\beta \sim \alpha$: *Հակադարձաբար, եթե տրված է, որ* $\beta \sim \alpha$, *ապա* $\frac{\gamma}{\alpha} \to 0$ *և այդ ժամանակ* $\frac{\beta}{\alpha} \to 1$:

Այս հայտանիշի շնորհիվ, օրինակ, երևում է, որ $x \to 0$ *դեպքում* $\sin x$ *անվերջ փոքրը համարժեք է* x*-ին, իսկ* $\sqrt{1+x} - 1$ *անվերջ փոքրը համարժեք է* $\frac{1}{2}x$*-ին: Այստեղից էլ ստացվում են հետևյալ մոտավոր բանաձևերը՝*

$$\sin x \approx x, \quad \sqrt{1+x} - 1 \approx \frac{1}{2}x:$$

Համարժեք անվերջ փոքրերի այս հատկությունն օգտագործվում է $\frac{0}{0}$ *տեսքի անորոշությունները բացելիս, այսինքն՝ երկու անվերջ փոքրերի* $\frac{\beta}{\alpha}$ *հարաբերության սահմանը որոնելիս: Այդ ժամանակ կարելի է, առանց ազդելու սահմանի վրա, դրանցից յուրաքանչյուրը փոխարինել իրեն համարժեք որևէ անվերջ փոքրով:*

Իրոք, եթե $\bar{\alpha} \sim \alpha$ *և* $\bar{\beta} \sim \beta$, *այսինքն՝*

$$\lim \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = 1 \quad \text{և} \quad \lim \frac{\bar{\beta}}{\beta} = 1,$$

ապա հետևյալ նույնությունից՝

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\bar{\beta}} \cdot \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \cdot \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$$

երևում է, որ $\frac{\beta}{\alpha}$ հարաբերությունը $\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ հարաբերությունից տարբերվում է այնպիսի բազմապատկիչներով, որոնք ձգտում են 1-ի. հետևաբար՝ այդ հարաբերությունները միաժամանակ սահման ունեն, այն էլ՝ միևնույն սահմանը։

Եթե հաջողվում է գտնել բավականաչափ պարզ $\overline{\alpha}$ և $\overline{\beta}$ մեծություններ, ապա այդ կարող է խնդիրը միանգամից զգալի չափով պարզեցնել։ Օրինակ՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x}=\frac{1}{4},$$

Ապացուցածից նաև հետևում է, որ եթե երկու անվերջ փոքրեր համարժեք են երրորդին, ապա նրանք իրար ևս համարժեք են։

57. Գլխավոր մասի առանձնացումը։ *Եթե α հիմնական անվերջ փոքրն արդեն ընտրված է, ապա, բնական կլինի, պարզագույն անվերջ փոքրեր համարել $c\cdot\alpha^k$ տեսքի մեծությունները, որտեղ c-ն հաստատուն գործակից է, իսկ $k>0$։ Դիցուք β անվերջ փոքրը α-ի նկատմամբ k-րդ կարգի է, այսինքն՝*

$$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c,$$

որտեղ c-ն զրոյից տարբեր վերջավոր թիվ է։ Այդ դեպքում

$$\lim\frac{\beta}{c\alpha^k}=1$$

և β ու $c\alpha^k$ անվերջ փոքրերը կլինեն համարժեք՝ $\beta\sim c\alpha^k$։ Այդ $c\alpha^k$ **պարզագույն** անվերջ փոքրը, որը համարժեք է տված β անվերջ փոքրին, կոչվում է վերջինիս **գլխավոր մաս** (կամ՝ **գլխավոր անդամ**)։

Օգտվելով վերևում ստացված արդյունքներից, բացի արդեն նշված պարզ օրինակներից, հեշտությամբ կարելի է անջատել հետևյալ արտահայտությունների գլխավոր մասերը՝

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\qquad \operatorname{tg}x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3:$$

Այստեղ $x\to 0$ և հենց $\alpha=x$ մեծությունը հանդիսանում է հիմնական անվերջ փոքրը։

Դիցուք $\beta\sim c\alpha^k$, այսինքն՝ $\beta=c\alpha^k+\gamma$, որտեղ $\gamma=o(c\alpha^k)$։ Կա-

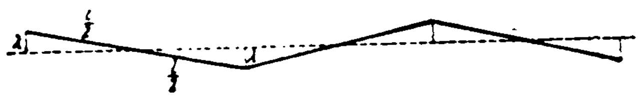
րելի է պատկերացնել, որ γ անվերջ փոքրից նորից անջատված է նրա գլխավոր մասը՝ $\gamma = c'\alpha^{k'} + \delta$, որտեղ $k' > k$, իսկ $\delta = o(\alpha^{k'})$, և այլն։

Անվերջ փոքրից՝ հետզհետե աճող կարգի պարզագույն անվերջ փոքրերի հաջորդաբար առանձնացման այս պրոցեսը կարելի է էլի՛ շարունակել։

Այս պարագրաֆում մենք սահմանափակվում ենք միայն ընդհանուր գաղափարների սահմանումով, դրանք լուսաբանելով միայն մի քանի օրինակներով։ Հետագայում մենք կնշենք սիստեմատիկ եղանակ ինչպես տված անվերջ փոքրի գլխավոր մասի կառուցման, այնպես էլ նրանից պարզագույն անվերջ փոքրերի հետագա առանձնացման համար, որի մասին այստեղ խոսվեց։

58. Խնդիրներ: *Շարադրված նկատառումները լուսաբանելու համար, բերենք երկու խնդիր, որոնց մեջ նրանք օգտագործվում են։*

1) Դիցուք, որևէ վայրի ուղղագիծ հեռավորությունը չափվում է l մ երկարություն ունեցող չափաքանոնի միջոցով։ Քանի որ, փաստորեն, քանոնը վերադրվում է չափվող ուղղի վրա ոչ ճշգրտորեն, նշանակում է չափման արդյունքը իսկական երկարությունից որոշ չափով մեծ կլինի։ Կատարենք ամենից անձեռնտու



Գծ. 25.

ենթադրությունը, այն է՝ որ քանոնը դրվում է զիգզագներով, այնպես որ նրա ծայրերը ուղղից λ մ հեռու են գտնվում, հերթականորեն մերթ դեպի մեկ, մերթ դեպի մյուս կողմը (գծ. 25.)։ Պահանջվում է գնահատել կատարված սխալը։

Քանոնը մեկ անգամ դնելուց առաջացած բացարձակ սխալը հավասար է քանոնի l երկարության և նրա՝ չափելի ուղղի վրա ձգած պրոյեկցիայի տարբերությանը. իսկ այդ պրոյեկցիան կլինի՝

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \lambda^2} = l\sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{l^2}},$$

Օգտվելով հետևյալ

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

մոտավոր բանաձևից՝ $x = -\frac{4\lambda^2}{l^2}$ *դեպքում (որն արդարացվում է, քանի որ λ-ն* *l-ը նկատմամբ բավականաչափ փոքր է), պրոյեկցիայի համար ստացված արտահայտությունը կփոխարինենք հետևյալով՝*

$$l\left(1-\frac{2\lambda^2}{l^2}\right)=l-\frac{2\lambda^2}{l},$$

Այսպիսով, վերոհիշյալ սխալը կլինի $\frac{2\lambda^2}{l}$, *իսկ հարաբերական սխալը ակներևաբար, կլինի* $\frac{2\lambda^2}{l^2}$*։ Նույն հարաբերական սխալը կպահպանվի նաև շատ անգամ քանոնը դնելու ժամանակ։*

Եթե այդ սխալի համար սահմանված է δ *եզրը, այսինքն՝ պետք է լինի* $\frac{2\lambda^2}{l^2}<\delta$,

ապա այստեղից ստացվում է, որ $\lambda < l\sqrt{\frac{\delta}{2}}$,

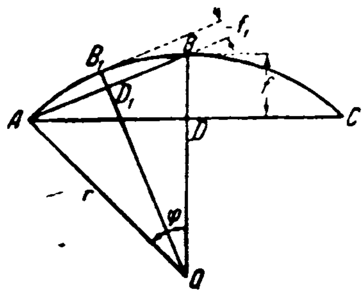
Օրինակ, երկումետրանոց ($l=2$) *քանոնով չափելիս, որպեսզի չափումը կատարվի 0,001 հարաբերական ճշգրտությամբ, պետք է, որ* λ *շեղումը մեծ չլինի, քան* $2\sqrt{0,0005}=0,045$մ $=4,5$ սմ:

2) Տեղանքում գտնվող շրջանագծային աղեղները մասերի բաժանելիս նշանակություն ունի հետևյալ խնդիրը. գտնել ABC շրջանագծային աղեղի $f=DB$ բարձրացման սլաքի և այդ աղեղի AB_1B կեսի $f_1=D_1B_1$ բարձրացման սլաքի հարաբերությունը *(գծ. 26.)։*

Եթե շրջանի շառավիղը ընդունենք r, $\angle AOB=\varphi$, *ապա* $\angle AOB_1=\frac{\varphi}{2}$ *և կունենանք՝*

$$f=DB=r(1-\cos\varphi),$$

$$f_1=r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right),$$



Գծ. 26.

Այսպիսով, որոնելի հարաբերությունը հավասար է

$$\frac{f}{f_1}=\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\frac{\varphi}{2}},$$

Այս արտահայտությունը շատ բարդ է. ուստի պրակտիկայում նրանից օգտվելը հարմար չէ։ Գտնենք սրա սահմանը, երբ $\varphi\to 0$ *(որովհետև բավականաչափ փոքր* φ*-երի դեպքում այդ արտահայտությունը մոտավորապես կարելի է փոխարինել իր սահմանով)։ Այդ նպատակով համարիչն ու հայտարարը փոխարինենք իրենց գլխավոր մասերով, կստանանք՝*

$$\lim\frac{f}{f_1}=\lim\frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2}=4:$$

Ուրեմն, ոչ մեծ կենտրոնական անկյուններին համապատասխանող աղեղների համար կարելի է ընդունել, որ կիսաղեղի բարձրացման սլաքը մոտավորապես չորս անգամ փոքր է աղեղի բարձրացման սլաքից։ *Այս հնարավորություն է տալիս հաջորդաբար կառուցել այն աղեղի միջակա կետերը, որի ծայրերը և միջնակետը տված են։*

59. Անվերջ մեծերի դասակարգումը։ *Նշենք, որ անվերջ մեծ մեծությունների համար ևս կարելի է նման դասակարգում կատարել։ Ինչպես և n° **54**-ում, այստեղ ևս կընդունենք, որ դիտարկվող մեծությունները միևնույն x փոփոխականի ֆունկցիաներ են, որոնք անվերջ մեծ են դառնում, երբ x-ը ձգտում է a-ի։*

I. y և z երկու անվերջ մեծերը համարվում են միևնույն կարգի մեծություններ, եթե նրանց $\frac{z}{y}$ $\left(\text{իսկ նրա հետ նաև } \frac{y}{z}\right)$ հարաբերությունն ունի վ ե ր ջ ա վ ո ր և զ ր ո յ ի ց տ ա ր բ ե ր սահման։

II. Իսկ եթե $\frac{z}{y}$ հարաբերությունը ինքը անվերջ մեծ է (իսկ հակադարձ $\frac{y}{z}$ հարաբերությունը՝ անվերջ փոքր), ապա z-ը համարվում է ավելի բ ա ր ձ ր կ ա ր գ ի անվերջ մեծ մեծություն, քան y-ը, և, միաժամանակ, y-ը կլինի ավելի ցածր կարգի անվերջ մեծ քան z-ը։

Այն դեպքում, երբ $\frac{z}{y}$ հարաբերությունը ոչ մի սահմանի չի ձգտում, y և z անվերջ մեծերը կլինեն ա ն բ ա ղ դ ա տ ե լ ի։

Մի շարք անվերջ մեծ մեծությունները միաժամանակ դիտարկելիս, նրանցից որևէ մեկը (ասենք՝ y-ը) ընտրում են որպես հ ի մ ն ա կ ա ն և նրա աստիճանների հետ բաղդատում են մյուս անվերջ մեծերը։ Օրինակ, եթե (ինչպես վերևում ենթադրել ենք) նրանք բոլորը x-ի ֆունկցիաներ են և անվերջ մեծ են դառնում, երբ $x \to a$ ապա, որպես հիմնական անվերջ մեծ սովորաբար վերցնում են $|x|$-ը՝ երբ $a = \pm\infty$, և $\frac{1}{|x-a|}$-ն՝ երբ a-ն վերջավոր է։

III. z անվերջ մեծը կոչվում է k-րդ կարգի (հիմնական y անվերջ մեծի նկատմամբ), եթե z-ը և y^k-ն նույն կարգի են, *այսինքն՝ $\frac{z}{y^k}$ հարաբերությունն ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր սահման։*

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ (ԵՎ ԽԶՈՒՄՆԵՐԸ)

60. Ֆունկցիայի՝ կետում անընդհատության սահմանումը: Ֆունկցիայի սահմանի գաղափարի հետ սերտորեն կապված է մաթեմատիկական անալիզի մի այլ կարևոր գաղափար՝ ֆունկցիայի անընդհատության գաղափարը: Այդ գաղափարի ճշգրիտ սահմանումը պատկանում է Բոլցանոյին և Կոշիին, որոնց անուններն արդեն հիշատակվել են:

Դիտարկենք $f(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է մի $X=\{x\}$ տիրույթում, որի համար x_0-ն խտացման կետ է, ընդ որում թող այդ x_0 կետն ինքը պատկանի ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, այնպես որ այդ կետում ֆունկցիան ունի որոշակի $f(x_0)$ արժեք:

Երբ սահմանում էինք ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը x-ը x_0-ին ձգտելիս [n°n° **32**, **33**]՝

$$\lim_{x \to x_0} f(x),$$

միշտ ընդգծում էինք, որ x փոփոխականը x_0 արժեքը չի ընդունում. այդ արժեքը նույնիսկ կարող էր ֆունկցիայի որոշման տիրույթին չպատկանել, իսկ եթե պատկաներ էլ, ապա վերոհիշյալ սահմանը գրելիս $f(x_0)$ արժեքը նկատի չէինք ունենում:

Սակայն հատուկ կարևորություն ունի հենց այն դեպքը, երբ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0): \tag{1}$$

Ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան **անընդհատ** է $x=x_0$ արժեքի դեպքում (կամ՝ $x=x_0$ կետում), եթե տեղի ունի այդ առնչությունը.

իսկ եթե խախտվում է այն, ապա ասում են, որ այդ արժեքի դեպքում (կամ՝ այդ կետում) ֆունկցիան *խզում* ունի*:

Այն դեպքում, երբ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ է (և, ակներևաբար, միայն այդ դեպքում), $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանը հաշվելիս, երբ $x \to x_0$, նշանակություն չունի, թե x-ը x_0-ին ձգտելիս, մասնավորապես, x_0 արժեքն ընդունո՞ւմ է, թե ոչ:

*Ֆունկցիայի անընդհատության սահմանումը կարելի է ձևակերպել նաև այլ տերմիններով: x_0 արժեքից x արժեքին անցնելը կարելի է պատկերացնել այնպես, որ x_0 արժեքին տրված է $\Delta x = x - x_0$ աճ**: Ֆունկցիայի $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ նոր արժեքը $y_0 = f(x_0)$ սկզբնական արժեքից կտարբերվի*

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

աճով: Որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ լինի, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի այդ կետում նրա Δy աճը անկախ փոփոխականի Δx աճի հետ միասին ձգտի զրոյի: Այլ խոսքով՝ անընդհատ ֆունկցիան բնութագրվում է նրանով, որ արգումենտի անվերջ փոքր աճին համապատասխանում է ֆունկցիայի նույնպես անվերջ փոքր աճ:

*Անդրադառնալով (1) հիմնական սահմանումին, նրա բովանդակությունը բացահայտենք «հաջորդականությունների լեզվով» [n° **32**]: x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության իմաստը հանգում է հետևյալին.*

X տիրույթից x-ի արժեքների՝ x_0-ին ձգտող ինչպիսի $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ հաջորդականություն էլ որ վերցնենք, ֆունկցիայի արժեքների

$$f(x_1),\ f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$$

համապատասխան հաջորդականությունը ձգտում է $f(x_0)$-ին:

*Վերջապես, «ε—δ լեզվով» [n° **33**] անընդհատությունը կարտահայտվի այսպես.*

---

* *Այս տերմինաբանությունը կապված է կորի անընդհատության և խզման ինտուիտիվ պատկերացման հետ՝ ֆունկցիան անընդհատ է, եթե անընդհատ է նրա գրաֆիկը, ֆունկցիայի խզման կետերը համապատասխանում են գրաֆիկի խզման կետերին: Իրականում, սակայն, կորի անընդհատության գաղափարն ինքը հիմնավորում է պահանջում. և դեպի այդ հիմնավորումը տանող պարզագույն ճանապարհն սկսվում է հենց ֆունկցիայի անընդհատությունից:*

** *Անալիզում ընդունված է $x, y, t, \ldots$ մեծությունների աճերը նշանակել $\Delta x, \Delta y, \Delta t, \ldots$ Այս նշանակումները պետք է դիտարկել որպես ամբողջական սիմվոլներ, չանջատելով Δ-ն x-ից (կամ մյուսներից):*

ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ թիվը, նրա համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ

$|x - x_0| < \delta$ անհավասարությունից կբխի

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ անհավասարությունը։

Վերջին անհավասարությունը, այսպիսով, պետք է տեղի ունենա x_0 *կետի* $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ *բավականաչափ փոքր շրջակայքում։*

Նշենք, որ (1) սահմանը հաշվելիս մենք կարող էինք x*-ը* x_0*-ին մոտեցնել թե՛ աջից, թե՛ ձախից, միայն թե* x*-ը դուրս չգար* X *միջակայքի սահմաններից։*

Այժմ սահմանենք տվյալ կետում ֆունկցիայի միակողմյան անընդհատության և միակողմյան խզման գաղափարները։

Ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան աջից (ձախից) անընդհատ է x_0 կետում, *եթե տեղի ունի հետևյալ սահմանային առնչությունը՝*

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+0) &= \lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \\ [\textit{կամ՝}\ f(x_0-0) &= \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)]\text{։} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Իսկ եթե այդ առնչություններից մեկը կամ մյուսը չի իրականանում, ապա $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում խզում ունի՝ համապատասխանորեն աջից կամ ձախից։

X *միջակայքի ձախ (աջ) ծայրակետի* վերաբերյալ, եթե այնտեղ ֆունկցիան որոշված է, խոսք կարող է լինել, ակներևորեն, միայն աջից (ձախից) անընդհատ լինելու կամ խզվելու մասին։ Իսկ եթե* x_0*-ն* X *միջակայքի ներքին կետ է, այսինքն՝ նրա ոչ մի ծայրակետի հետ չի համընկնում, ապա* x_0 *կետում ֆունկցիայի սովորական իմաստով անընդհատությունը արտահայտող (1) հավասարության իրականանալու համար անհրաժեշտ և բավարար, որպեսզի (2) հավասարումները երկուսը միաժամանակ տեղի ունենան* [n°**35**]*։ Այլ խոսքով,* x_0 կետում ֆունկցիայի անընդհատությունը համարժեք է այդ կետում միաժամանակ աջից և ձախից անընդհատ լինելուն։

Պայմանավորվենք, խոսքի կարճության համար, ասել, որ ֆունկցիան անընդհատ է X միջակայքում, եթե նա անընդհատ է այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում։

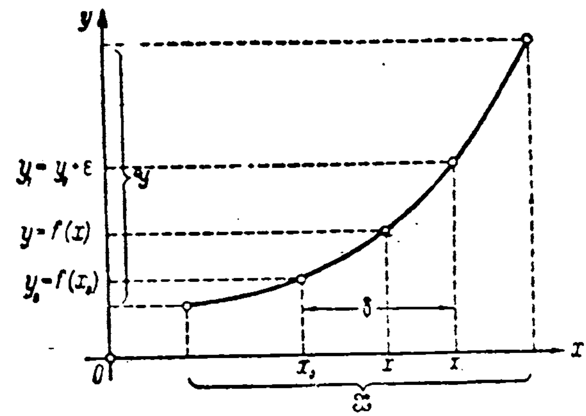
---

* *Ենթադրվում է, որ այդ ծայրը վերջավոր է։*

61. Մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատության պայմանը: *Դիտարկենք մի* f(x) *ֆունկցիա, որը* X *միջակայքում մոնոտոն աճում է (նվազում է)** [n° **47**]։ *Այդ միջակայքը կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես էլ անվերջ, փակ, կիսաբաց կամ բաց։ Այժմ մենք կհաստատենք մի պարզ հայտանիշ, որի օգնությամբ այդ տիպի ֆունկցիաների համար անմիջապես կհայտնաբերվի նրա անընդհատությունն ամբողջ* X *միջակայքում։*

Թեորեմա: Եթե x-ը X միջակայքում փոփոխվելիս f(x) մոնոտոն աճող (նվազող) ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմությունը գտնվում է մի որոշ Y միջակայքում և ա ն ը ն դ մ ե ջ լ ց ն ու մ է ա յ ն, ապա f(x) ֆունկցիան անընդհատ է X միջակայքում**:

X *միջակայքից վերցնենք մի ցանկացած* x_0 *կետ և, ենթադրելով, որ նա այդ միջակայքի աջ ծայրակետը չէ, ապացուցենք, որ* f(x) *ֆունկցիան* x_0 *կետում ա ջ ի ց անընդհատ է. Նման ձևով կապացուցվի նաև ֆունկցիայի ձ ա խ ի ց անընդհատությունը* x_0 *կետում, եթե* x_0*-ն դիտարկվող միջակայքի ձ ա խ ծայրակետը չէ. այստեղից էլ, միասին վերցրած, կհետևի թեորեմայի եզրակացությունը։*



Գծ. 27.

$y_0 = f(x_0)$ *կետը պատկանում է* Y *միջակայքին, չլինելով նրա աջ ծայ-*

---

* *Պարզության համար մենք ենթադրելու ենք, որ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է ն ե ղ ի մ ա ս տ ո վ (թեպետև թեորեման ճիշտ է նաև լայն իմաստով մոնոտոն ֆունկցիաների համար)։*

** *Հետագայում* [n° **70**] *մենք ցույց կտանք, որ այն պայմանը, որն այստեղ ձևակերպված է որպես բ ա վ ա ր ա ր պայման մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատության համար, նաև ա ն հ ր ա ժ ե շ տ պայման է։*

րակետը (չէ՛ որ X-ում կան $x_0<x$ *արժեքներ, իսկ դրանց համապատասխանում են* $y_0<f(x)=y$ *արժեքներ Y-ում)։ Թո՛ղ ε-ը լինի կամայապես փոքր դրական թիվ. մենք կենթադրենք նաև, որ նա այնքա՛ն փոքր է, որ* $y_1=y_0+\varepsilon$ *արժեքը նույնպես, պատկանում է Y միջակայքին։ Քանի որ, պայմանի համաձայն,* $Y=\{f(x)\}$, *ապա X-ում կգտնվի այնպիսի* x_1 *արժեք, որ*

$$f(x_1)=y_1,$$

ընդ որում, ակներևորեն, $x_1>x_0$ *(քանի որ* $x\leqslant x_0$ *դեպքում կլիներ նաև* $f(x)\leqslant y_0$*)։ Նշանակենք* $\delta=x_1-x_0$, *այնպես որ* $x_1=x_0+\delta$։ *Եթե այժմ՝*

$$0<x-x_0<\delta, \text{ այսինքն՝ } x_0<x<x_1,$$

ապա՝

$$y_0<f(x)<y_1=y_0+\varepsilon, \text{ կամ՝ } 0<f(x)-f(x_0)<\varepsilon։$$

Հենց այս էլ նշանակում է, որ

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0),$$

այսինքն՝ $f(x)$ *ֆունկցիան իսկապես աջից անընդհատ է* x_0 *կետում, որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

Բերված դատողությունները երկրաչափորեն ցուցադրված են 27-րդ գծագրում։

62. Թվաբանական գործողություններ անընդհատ ֆունկցիաների հետ: *Նախքան անընդհատ ֆունկցիաների օրինակներին անցնելը, ապացուցենք հետևյալ պարզ առաջադրությունը, որը հնարավորություն կտա հեշտությամբ շատացնելու այդպիսի օրինակների թիվը։*

Թեորեմա: Եթե $f(x)$ և $g(x)$ երկու ֆունկցիաները որոշված են միևնույն X միջակայքում և երկուսն էլ անընդհատ են x_0 կետում, ապա այդ նույն կետում անընդհատ կլինեն նաև հետևյալ ֆունկցիաները՝

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

(վերջինը՝ պայմանով, որ $g(x_0)\neq 0$):

Այս անմիջապես բխում է առանձին-առանձին սահմաններ ունեցող երկու ֆունկցիաների գումարի, տարբերության, արտադրյալի և քանորդի սահմանների վերաբերյալ թեորեմայից [n° **42**]։

Կանգ առնենք, օրինակի համար, երկու ֆունկցիաների քանորդի դեպքի վրա։ Այն ենթադրությունը, որ $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են x_0 կետում, համարժեք է հետևյալ հավասարությունների առկայությանը՝

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0):$$

Բայց այստեղից, քանորդի սահմանի վերաբերյալ թեորեմայի համաձայն (քանի որ հայտարարի սահմանը զրո չէ՛), կունենանք՝

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

որը հենց նշանակում է, որ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ է։

63. Տարրական ֆունկցիաների անընդհատությունը: 1°. Ամբողջ և կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաներ։ Հաստատունի կամ հենց x անկախ փոփոխականի վերածվող ֆունկցիաների անընդհատությունն ինքնին պարզ է։ Այստեղից, նախորդ համարի թեորեմայի հիման վրա, արդեն բխում է ցանկացած՝

$$ax^m = a \cdot \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{m \text{ անգամ}}$$

միանդամ արտահայտության, որպես անընդհատ ֆունկցիաների արտադրյալի, անընդհատությունը, իսկ այնուհետև նաև՝

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

բազմանդամի (ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիայի), որպես անընդհատ ֆունկցիաների գումարի, անընդհատությունը։ Այդ բոլոր դեպքերում անընդհատությունը տեղի ունի $(-\infty, +\infty)$ ողջ միջակայքում։

Ակներև է, վերջապես, որ երկու բազմանդամների քանորդը (կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիան)՝

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

նույնպես անընդհատ կլինի x-ի ամեն մի արժեքի դեպքում, բացի այնպիսի արժեքներից, որոնք հայտարարը դարձնում են զրո։

Մյուս տարրական ֆունկցիանիրի անընդհատությունն ապացուցենք հենվելով n° **61**-ի թեորեմայի վրա։

2°. $y = a^x$ $(a > 1)$ ցուցչային ֆունկցիան մոնոտոն աճում է, երբ x-ը փոփոխվում է $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$ միջակայքում։ Նրա արժեքները դրական են և լցնում են $\mathcal{Y} = (0, +\infty)$ ողջ միջակայքը. այդ *հետևում է* $x = \log_a y$ *լոգարիթմի գոյությունից ցանկացած* $y > 0$ *համար* [n° **12**]: *Հետևաբար, ցուցչային ֆունկցիան անընդհատ է* x-*ի ցանկացած արժեքի համար:*

3°. Լոգարիթմական ֆունկցիա՝ $y = \log_a x \ (a > 0)$, $a \neq 1$: *Սահմանափակվելով* $a > 1$ *դեպքով, տեսնում ենք, որ այդ ֆունկցիան աճում է, երբ* x-*ը փոփոխվում է* $X = (0, +\infty)$ *միջակայքում: Ակներև է նաև, որ նա ընդունում է* $Y = (-\infty, +\infty)$ *միջակայքին պատկանող ցանկացած* y *արժեքը, այն է՝* $x = a^y$ *դեպքում: Այստեղից էլ հետևում է ֆունկցիայի անընդհատությունը:*

4°. Աստիճանային ֆունկցիա՝ $y = x^{\mu}$ $(\mu \gtrless 0)$: *Երբ* x-*ը աճում է զրոյից մինչև* $+\infty$, *ֆունկցիան* $\mu > 0$ *դեպքում աճում է,* $\mu < 0$ *դեպքում՝ նվազում, ընդունելով ցանկացած դրական* y *արժեք* ($x = y^{\frac{1}{\mu}}$ *դեպքում*): *Հետևաբար, այս ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է**:

5°. Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ՝

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = \operatorname{tg} x,$$
$$y = \operatorname{ctg} x, \qquad y = \sec x, \qquad y = \csc x:$$

Նախ կանգ առնենք $y = \sin x$ *ֆունկցիայի վրա: Նրա անընդհատությունը, երբ* x-*ը փոփոխվում է, ասենք թե,* $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *միջակայքում, հետևում է այդ միջակայքում նրա մոնոտոնությունից, ինչպես նաև այն փաստից (որը հաստատվում է երկրաչափորեն), որ նա այդ ժամանակ ընդունում է* -1-*ի և* $+1$-*ի միջև գտնվող ցանկացած արժեք: Նույնը վերաբերում է նաև*

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

տեսքի ամեն մի միջակայքի: Վերջնականապես տեսնում ենք, որ $y = \sin x$ *ֆունկցիան անընդհատ է* x-*ի բոլոր արժեքների համար:*

---

* *Եթե* $\mu > 0$, *ապա 0 արժեքը մտնում է ինչպես* x-*ի փոփոխման միջակայքի, այնպես էլ* y-*ի փոփոխման միջակայքի մեջ, իսկ* $\mu < 0$ *դեպքում 0 արժեքը չի մտնում նրանց մեջ: Այնուհետև, եթե* μ-*ն* $\pm n$ *ամբողջ թիվ է, կամ* $\pm \frac{p}{q}$ *կոտորակ կենտ հայտարարով, ապա* x^{μ} *աստիճանը կարելի է դիտարկել նաև* $0 > x$-*երի համար. այդ արժեքների դեպքում ֆունկցիայի անընդհատությունը ցույց է տրվում նման ձևով:*

Նման ձևով ցույց է տրվում նաև $y = \cos x$ *ֆունկցիայի անընդհատությունը՝ դարձյալ* x*-ի բոլոր արժեքների համար:*

Այստեղից, նախորդ n°*-ի թեորեմայի համաձայն, արդեն հետևում է հետևյալ ֆունկցիաների անընդհատությունը՝*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

բացառությամբ առաջին երկու ֆունկցիաների համար $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ *տեսքի արժեքների, որոնք* $\cos x$*-ը դարձնում են զրո, իսկ վերջին երկուսի համար՝* $k\pi$ *տեսքի արժեքների, որոնք* $\sin x$*-ն են դարձնում զրո:*

Վերջապես, հիշատակենք՝

6°. Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաները՝

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x:$$

Առաջին երկուսն անընդհատ են $[-1, +1]$ *միջակայքում, իսկ վերջին երկուսը՝* $(-\infty, +\infty)$ *միջակայքում: Ապացուցելը թողնվում է ընթերցողին:*

Ամփոփելով, կարելի է ասել, այսպիսով, որ հիմնական տարրական ֆունկցիաները անընդհատ են բոլոր այն կետերում, որտեղ նրանք իմաստ ունեն, *այսինքն՝ իրենց որոշման բնական տիրույթներում:*

64. Անընդհատ ֆունկցիաների սուպերպոզիցիան: *Կարելի է անընդհատ ֆունկցիաների ընդարձակ դասեր կառուցել այնպիսի ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայի միջոցով, որոնց անընդհատ լինելն արդեն հայտնի է: Դրա հիմքում ընկած է հետևյալ թեորեմը՝*

Թեորեմ: Դիցուք $\varphi(y)$ ֆունկցիան որոշված է Y միջակայքում, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան՝ X միջակայքում, ընդ որում վերջին ֆունկցիայի արժեքները դուրս չեն գալիս Y-ի սահմաններից, երբ x-ը փոփոխվում է X-ում: Եթե $f(x)$-ն անընդհատ է X-ի x_0 կետում, իսկ $\varphi(y)$-ն անընդհատ է Y-ի x_0-ին համապատասխանող

$f(x_0) = y_0$ կետում, ապա $\varphi(f(x))$ բարդ ֆունկցիան նույնպես անընդհատ կլինի x_0 կետում:

Ապացուցում։ Վերցնենք $\varepsilon > 0$ կամավոր թիվը։ Քանի որ $\varphi(y)$-ն անընդհատ է $y = y_0$ դեպքում, ապա կարելի է գտնել ε-ին համապատասխան այնպիսի $\sigma > 0$ թիվ, որ

$$|y - y_0| < \sigma \text{ պայմանից հետևի } |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon\text{։}$$

Մյուս կողմից, $x = x_0$ կետում $f(x)$-ի անընդհատության շնորհիվ, σ-ին համապատասխան կարելի է գտնել այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ

$$|x - x_0| < \delta\text{-ից հետևի } |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \sigma\text{։}$$

Հենց σ թվի ընտրության համաձայն այստեղից հետևում է, այնուհետև, որ՝

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(y_0)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon\text{։}$$

Սրանով էլ «$\varepsilon - \delta$ լեզվով» ապացուցվեց $\varphi(f(x))$ ֆունկցիայի անընդհատությունն x_0 կետում։

Օրինակի համար, եթե x^μ $(x > 0)$ աստիճանային ֆունկցիան ներկայացնենք

$$x^\mu = e^{\mu \log x}$$

բարդ ֆունկցիայի տեսքով, որն ստացվում է լոգարիթմական և ցուցչային ֆունկցիաների սուպերպոզիցիայից, ապա վերջին երկու ֆունկցիաների անընդհատությունից արդեն կհետևի աստիճանային ֆունկցիայի անընդհատությունը։

65. Մի քանի սահմանների հաշվումը: *Ֆունկցիաների անընդհատությունը կարելի է բազմազան եղանակներով օգտագործել սահմաններ հաշվելիս*։ Այստեղ մենք, հենվելով տարրական ֆունկցիաների անընդհատության վրա, ստանանք մի քանի կարևոր սահմաններ, որոնք մեզ պետք կգան հաջորդ գլխում.*

** Փաստորեն նաև առաջներում ենք մենք այդպես արել. այսպես, n°**43**-ի 6) օրինակում մենք զուգահեռաբար ցույց տվեցինք $\sqrt{x}$ ֆունկցիայի անընդհատությունը $x = 1$ կետում և այդ օգտագործեցինք, իսկ 7) (բ) օրինակում նույն կերպ վարվեցինք $\cos x$ ֆունկցիայի նկատմամբ $x = 0$ կետում։*

$$1)\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a e \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$2)\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln a \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$3)\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\mu \qquad \left(\frac{0}{0}\right)։$$

Ունենք՝

$$\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha}=\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

և քանի որ աջ մասում լոգարիթմի տակ գրված արտահայտությունը ձգտում է e-ի, երբ $\alpha\to 0$ [**50**, (**4**)], ապա (լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատության համաձայն) նրա լոգարիթմը կձգտի $\log_a e$-ին, որը և պետք էր ապացուցել։

Նշենք ապացուցած բանաձևի մի մասնավոր դեպք, երբ խոսքը վերաբերում է բնական լոգարիթմին ($a=e$). այդ դեպքում՝

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1։$$

Բնական լոգարիթմների սիստեմի առավելությունները, ըստ էության, արմատավորված են հենց այս արդյունքի պարզության մեջ։

Դառնալով 2) բանաձևին, նշանակենք $a^{\alpha}-1=\beta$. այդ դեպքում, երբ $\alpha\to 0$, (ցուցչային ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ) նաև $\beta\to 0$։ Այնուհետև, ունենք. $\alpha=\log_a(1+\beta)$, այնպես որ, եթե օգտվենք արդեն ապացուցված արդյունքից, կստանանք՝

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(1+\beta)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Մասնավոր դեպքում, եթե վերցնենք $\alpha=\frac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$, ապա կստանանք հետաքրքիր բանաձև՝

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\log a \qquad (\infty\cdot 0)։$$

Վերջապես, 3) բանաձևն ապացուցելու համար նշանակենք. $(1+\alpha)^{\mu}-1=\beta$. երբ $\alpha\to 0$, (աստիճանային ֆունկցիայի *անընդհատության շնորհիվ) նաև* $\beta\to 0$։ $(1+\alpha)^{\mu}=1+\beta$ *հավասարությունը լոգարիթմելով, կստանանք՝*

$$\mu\cdot\ln(1+\alpha)=\ln(1+\beta):$$

Այս առնչության օգնությամբ, տված արտահայտությունը ձևափոխենք այսպես՝

$$\frac{(1+\alpha)^{\mu}-1}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\mu\cdot\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha},$$

Ըստ ապացուցածի,

$$\frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \quad և \quad \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$$

երկու հարաբերություններն էլ ձգտում են 1-ի, այնպես որ ամբողջ արտադրյալը կունենա μ *սահմանը, որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

n° **43**,*6)-ում դիտարկված սահմանն այստեղից ստացվում է որպես մասնավոր դեպք, երբ* $\mu=\frac{1}{2}$։

66. Աստիճանա-ցուցչային արտահայտություններ: *Այժմ դիտարկենք* u^v *աստիճանա-ցուցչային արտահայտությունը, որտեղ* u*-ն և* v*-ն ֆունկցիաներ են միևնույն* x *փոփոխականից, որի փոփոխման տիրույթը* X*-ն է՝* x_0 *խտացման կետով. մասնավորապես* u*-ն և* v*-ն կարող են լինել նաև* n *բնական արգումենտի* u_n *և* v_n *ֆունկցիաներ։*

Դիցուք գոյություն ունեն

$$\lim_{x\to x_0} u=a \quad և \quad \lim_{x\to x_0} v=b$$

վերջավոր սահմաններ, ընդ որում $a>0$։ *Պահանջվում է գտնել* u^v *արտահայտության սահմանը։*

Վերջինս ներկայացնենք այս տեսքով՝

$$u^v=e^{v\cdot\ln u},$$

v *և* $\ln u$ *ֆունկցիաներն ունեն հետևյալ սահմանները՝*

$$\lim_{x\to x_0} v=b,\quad \lim_{x\to x_0}\ln u=\ln a$$

(այստեղ օգտագործվում է լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատությունը), այնպես որ՝

$$\lim_{x\to x_0} v \ln u = b \ln a։$$

Այստեղից, ցուցչային ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, վերջնականապես ստացվում է՝

$$\lim_{x\to x_0} u^v = e^{b\cdot \ln a} = a^b։$$

u^v *արտահայտության սահմանը կարելի է ստանալ նաև այն դեպքում, երբ հայտնի է* $v\cdot\ln u$ *արտադրյալի* c *սահմանը՝ վերջավոր կամ անվերջ։ Երբ* c*-ն վերջավոր է, որոնելի սահմանը կլինի ակներևաբար,* e^c*-ը, իսկ եթե* $c=-\infty$ *կամ* $+\infty$*, ապա այդ սահմանը կլինի, համապատասխանաբար,* 0 *կամ* $+\infty$ [**34, 2**]։

Իսկ $c=\lim\{v\ln u\}$ *սահմանի որոշումը միայն տված* a *և* b *սահմանների միջոցով միշտ հնարավոր է, բացի այն դեպքերից, երբ այդ արտադրյալը (երբ* $x\to x_0$*) ներկայացնում է* $\infty\cdot 0$ *տեսքի անորոշություն։ Հեշտ է նկատել, որ այդ բացառիկ դեպքերը համապատասխանում են* a *և* b *արժեքների հետևյալ կոմբինացիաներին՝*

$$\begin{aligned} &a=1, && b=0\pm;\\ &a=\infty && b=0;\\ &a=+\infty, && b=0: \end{aligned}$$

Այս դեպքերում ասում են, որ u^v *արտահայտությունը ներկայացնում է* 1^∞, 0^0, ∞^0 *տեսքի անորոշություն* (նայած դեպքին)։ Այստեղ արդեն* u^v *արտահայտության սահմանի հարցը լուծելու համար բավական չէ գիտենալ միայն* u *և* v *ֆունկցիաների սահմանները, այլ պետք է հաշվի առնել նաև այն օրենքը, որով նրանք ձգտում են իրենց սահմաններին։*

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *արտահայտությունը, երբ* $n\to\infty$*, կամ ավելի ընդհանուր՝* $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ *արտահայտությունը, երբ* $\alpha\to 0$*, որոնք ունեն* e *սահմանը, հանդիսանում է* 1^∞ *տեսքի անորոշության օրինակ։*

** Այդ սիմվոլների վերաբերյալ կարելի է կրկնել այն, ինչ ասված է 99-րդ էջի տողատակի ծանոթագրության մեջ։*

Ինչպես արդեն նշվել է, բոլոր տեսակների անորոշությունների բացման ընդհանուր մեթոդները կտրվեն VII գլխի § 3-ում։

67. Խզումների դասակարգումը։ Օրինակներ։ *Ավելի հանգամանորեն կանգ առնենք x_0 կետում ֆունկցիայի, ասենք թե՝ աջից անընդհատ կամ խզվող լինելու հարցի վրա։ Ենթադրելով, որ $f(x)$ ֆունկցիան այդ կետից դեպի աջ ընկած մի որոշ $[x_0, x_0+h]$ $(h>0)$ միջակայքում որոշված է, տեսնում ենք, որ աջից անընդհատության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի առաջին՝ գոյություն ունենա $f(x)$ ֆունկցիայի $f(x_0+0)$ սահմանը (վերջավոր), երբ x-ը աջից ձգտում է x_0-ին, և երկրորդ՝ այդ սահմանը հավասար լինի ֆունկցիայի $f(x_0)$ արժեքին այդ կետում։*

Հետևաբար, հեշտ է հասկանալ, թե ինչպիսի՞ հանգամանքներում $f(x)$ ֆունկցիայի համար աջից խզում կառաջանա x_0 կետում։ Կարող է պատահել, որ թեպետև $f(x_0+0)$ վերջավոր սահման գոյություն ունի, սակայն այն հավասար չէ $f(x_0)$ արժեքին. այդպիսի խզումն անվանում են սովորական *կամ* առաջին տեսակի խզում*։ *Բայց կարող է և այնպես լինել, որ $f(x_0+0)$ սահմանն անվերջ է կամ բոլորովին գոյություն չունի. այդպիսի* խզումն *անվանում են* երկրորդ տեսակի։

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է միայն $(x_0, x_0+h]$ կիսաբաց միջակայքում, սակայն գոյություն ունի

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

վերջավոր սահմանը, ապա բավական է միայն լրացուցիչ կերպով որոշել ֆունկցիան x_0 կետում, $f(x_0)$-ն ընդունելով հավասար հենց այդ սահմանին, որպեսզի ֆունկցիան աջից անընդհատ դառնա x_0 կետում։ Առաջիկայում մենք սովորաբար այդպես էլ ենթադրելու ենք։ Ի դեպ, եթե ֆունկցիան որոշված է նաև x_0-ից ձախ, $[x_0-h, x_0)$ միջակայքում, և գոյություն ունի

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

վերջավոր սահմանը, ապա x_0 կետում ֆունկցիայի անընդհատությունը վերականգնել կարելի է միայն այն դեպքում, երբ այդ երկու սահմաններն իրար հավասար են։

Եթե, վերջապես, (x_0, x_0+h) կիսաբաց միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի համար x_0 կետում աջից վերջավոր սահման գոյություն չունի, ապա ասում են, որ ֆունկցիան x_0 կետում աջից երկրորդ տեսակի խզում *ունի, չնայած այն բանին, որ նա այդ կետում ամենևին որոշված էլ չէ. այդպիսի դեպքում ինչպես էլ լրացուցիչ կերպով ֆունկցիան որոշելու լինենք x_0 կետում, նա անխուսափելիորեն կմնա խզվող այդ կետում։*

Օրինակներ. 1) Դիտարկենք $y=E(x)$ ֆունկցիան (նրա գրաֆիկը պատկերված է գծ. 5-ում)։ Եթե x_0-ն ամբողջ թիվ չէ և $E(x_0)=m$, այսինքն՝ $m<x_0<m+1$, ապա $(m, m+1)$ միջակայքին պատկանող բոլոր x-երի համար ևս

** Այդպիսի դեպքում՝ ասում են նաև, որ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում աջից թռիչք կամ՝ ցատկ ունի, որն իր մեծությամբ հավասար է $f(x_0+0)-f(x_0)$ տարբերությանը։*

$E(x) = m$, *այնպես որ ակներև է ֆունկցիայի անընդհատությունը* x_0 *կետում։*

Այլ բան է ստացվում, երբ x_0*-ն հավասար է* m *ամբողջ թվի։ Այդ կետում աջից անընդհատություն տեղի ունի, քանի որ այդ կետից աջ, այն է՝* $(m, m+1)$ *միջակայքում* $E(x) = m$, *այնպես որ նաև* $E(m+0) = m = E(m)$։ *Մինչդեռ* $x_0 = m$ *կետից ձախ, ընդհակառակն,* $(m-1, m)$ *միջակայքում* $E(x) = m-1$, *հետևաբար նաև* $E(m-0) = m-1$, *որը հավասար չէ* $E(m)$*-ին և, հետևաբար* $x = m$ *կետում ձախից ֆունկցիան ունի սովորական խզում կամ թռիչք։*

$$2)\ f(x) = \frac{1}{x^3} \qquad (x \neq 0)$$

ֆունկցիայի համար $x = 0$ *կետը երկու կողմից էլ երկրորդ տեսակի խզման կետ է. այդ կետում և՛ աջից, և՛ ձախից ֆունկցիան ձգտում է անվերջության՝*

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x^3} = +\infty, \qquad f(-0) = \lim_{x \to -0} \frac{1}{x^3} = -\infty:$$

$$3)\ f(x) = \sin\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

ֆունկցիան նույնպես, որը դիտարկել ենք n° **34**, *6)-ում,* $x = 0$ *կետում ունի երկրորդ տեսակի խզում երկու կողմից էլ, սակայն այս անգամ այն պատճառով, որ ֆունկցիան այդ կետում բոլորովին չունի սահման ո՛չ աջից, ո՛չ ձախից։*

4) Իսկ եթե վերցնենք

$$f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

ֆունկցիան [n° **34**, 7], *ապա, ընդհակառակն, ինչպես տեսել էինք, դրա համար գոյություն ունի վերջավոր սահման՝*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

և, եթե ընդունենք լրացուցիչ կերպով $f(0) = 0$, *մենք ֆունկցիայի անընդհատությունը կվերականգնենք նաև այդ կետում։*

5) Որոշենք, վերջապես, երկու ֆունկցիաներ, $0 \neq x$*-երի համար հետևյալ հավասարումներով՝*

$$f_1(x) = a^{\frac{1}{x}} \quad (a > 1), \qquad f_2(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$$

և լրացուցիչ պայմանով՝

$$f_1(0) = f_2(0) = 0:$$

Ինչպես տեսել ենք n° **35**-*ում,*

$$f_1(+0) = +\infty, \qquad f_1(-0) = 0,$$

$$f_2(+0) = \frac{\pi}{2}, \qquad f_2(-0) = -\frac{\pi}{2},$$

Այսպիսով, $x=0$ կետում առաջին ֆունկցիան աջից ունի երկրորդ տեսակի խզում, ձախից անընդհատ է, իսկ երկրորդ ֆունկցիան երկու կողմից էլ թռիչք ունի [համեմատե՛լ գծ. 22 և 23]։

Վերջում կանգ առնենք սովորաբար դիտարկվող ֆունկցիաների մի կարևոր դասի վրա՝ մոնոտոն կամ կտոր առ կտոր մոնոտոն ֆունկցիաների վրա, և ցույց տանք, որ նրանց համար կարող են լինել թերևս միայն սովորական խզումներ։ Այդ հետևում է նրանից, որ այդպիսի $f(x)$ ֆունկցիայի համար նրա որոշման X միջակայքին պատկանող յուրաքանչյուր x_0 կետում միշտ գոյություն ունեն $f(x_0+0)$ և $f(x_0-0)$ վերջավոր սահմաններ (կամ՝ նրանցից մեկը, եթե x_0-ն X միջակայքի ծայրակետն է)։ Դիցուք, օրինակի համար, $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է և x_0-ն X միջակայքի ձախ ծայրը չէ. այդ դեպքում $x_0>x$-երի համար $f(x)$-ի արժեքները վերևից սահմանափակ կլինեն $f(x_0)$ թվով և n° **47**-ի թեորեմայի համաձայն, գոյություն ունի*

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

վերջավոր սահմանը։

§ 2. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

68. Թեորեմա ֆունկցիայի զրո դառնալու վերաբերյալ։ *Այժմ զբաղվենք մի որոշ միջակայքում անընդհատ ֆունկցիայի հիմնական հատկությունների ուսումնասիրությամբ։ Նաև ինքնին հետաքրքիր այս հատկությունները հետագա շարադրանքի մեջ հաճախ հիմք են ծառայելու զանազան եզրահանգումների համար։*

Դրանց խստագույն հիմնավորման ուղու վրա կանգնեց առաջինը Բոլցանոն (1817), այնուհետև՝ Կոշին (1821)։ Հենց նրանց է պատկանում ստորև բերվող կարևոր թեորեման։

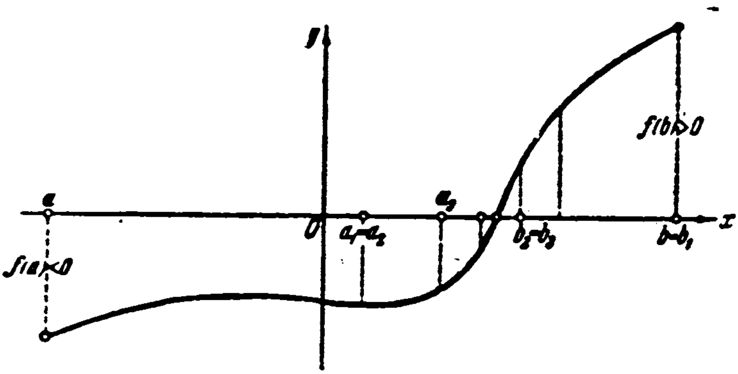
Բոլցանոյի—Կոշիի առաջին թեորեման։ Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a, b]$ փակ միջակայքում և այդ միջակայքի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ։ Այդ դեպքում a-ի և b-ի միջև անպայման կգտնվի այնպիսի c կետ, որտեղ ֆունկցիան դառնում է զրո՝

$$f(c)=0 \quad (a<c<b)։$$

Այս թեորեման ունի շատ պարզ երկրաչափական իմաստ. եթե

** Ֆունկցիան կոչվում է կտոր առ կտոր մոնոտոն, եթե նրա որոշման տիրույթը կարելի է տրոհել վերջավոր թվով այնպիսի մասնակի միջակայքերի, որոնցից յուրաքանչյուրում առանձին ֆունկցիան մոնոտոն է։*

անընդհատ կորը x*-երի առանցքի մի կողմից անցնում է մյուս կողմը, ապա նա հատում է այդ առանցքը (գծ. 28)։*



Գծ. 28

Ապացույցը մենք կկատարենք միջակայքը հաջորդաբար կիսելու մեթոդով [n° 51]։ *Որոշակիության համար ընդունենք, որ* $f(a) < 0$, *իսկ* $f(b) > 0$։ $[a, b]$ *միջակայքը* $\frac{a+b}{2}$ *կետով կիսենք։ Կարող է պատահել, որ այդ կետում* $f(x)$ *ֆունկցիան դառնա զրո. այդ դեպքում թեորեմն ապացուցված է՝ կարելի է ընդունել* $c = \frac{a+b}{2}$։ *Դիցուք, այժմ,* $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$. *այդ դեպքում* $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ *և* $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ *միջակայքերից մեկի ծայրակետերում ֆունկցիան կընդունի տարբեր նշաններով արժեքներ (ընդ որում բացասական արժեքը կընդունի ձախ ծայրում, իսկ դրականը՝ աջում)։ Այդ միջակայքը նշանակելով* $[a_1, b_1]$*-ով, կունենանք՝*

$$f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0:$$

$[a_1, b_1]$ *միջակայքը կիսենք և նորից մի կողմ թողնենք այն դեպքը, երբ* $f(x)$*-ը այդ միջակայքի* $\frac{a_1+b_1}{2}$ *կենտրոնում դառնում է զրո, որովհետև այդ դեպքում թեորեմն արդեն ապացուցված կլիներ։* $[a_2, b_2]$*-ով նշանակենք միջակայքի այն կեսը, որի համար՝*

$$f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0:$$

Միջակայքեր կառուցելու այս պրոցեսը շարունակենք։ Այդ ժամանակ, կամ վերջավոր թվով քայլերից հետո մենք կստանանք բա-

ժամման այնպիսի կետ, որտեղ ֆունկցիան հավասար է զրոյի, — և թեորեմայի ապացուցումը կավարտվի,— կամ կստանանք ներդրված միջակայքերի անվերջ հաջորդականություն։ Կանգ առնենք այս վերջին դեպքի վրա։ Այս դեպքում n-*րդ՝* $[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ *միջակայքի համար կունենանք՝*

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0, \tag{1}$$

ընդ որում նրա երկարությունը, ակներևաբար, հավասար է

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \tag{2}$$

Կառուցված միջակայքերի հաջորդականությունը բավարարում է ներդրվող միջակայքերի լեմմայի պայմաններին [n° **46**], *որովհետև (2)-ից կստանանք* $\lim(b_n - a_n) = 0$: *Հետևաբար,* a_n *և* b_n *երկու փոփոխականները ձգտում են մի ընդհանուր սահմանի՝*

$$\lim a_n = \lim b_n = c,$$

որը՝ ակներևաբար, պատկանում է $[a, b]$-*ին* [**36**, *3)*]։ *Ցույց տանք, որ հենց այդ կետը բավարարում է թեորեմայի պահանջին։*

(1) անհավասարությունների մեջ անցնելով սահմանին և միաժամանակ օգտագործելով ֆունկցիայի անընդհատությունը (մասնավորապես $x=c$ *կետում), կստանանք, որ միաժամանակ՝*

$$f(c) = \lim f(a_n) \leqslant 0 \text{ և } f(c) = \lim f(b_n) \geqslant 0,$$

այնպես որ, իրոք $f(c) = 0$։ *Թեորեմն ապացուցված է։*

Նկատենք, որ $[a, b]$ *փակ միջակայքում* $f(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատ լինելու պահանջը էական է։ Այն ֆունկցիան, որը թեկուզ մեկ կետում խզում ունի, կարող է բացասական արժեքից անցնել դրական արժեքի նաև առանց 0 դառնալու։ Այդպես կլինի, օրինակ,* $f(x) = E(x) - \frac{1}{2}$ *ֆունկցիայի հետ, որը ոչ մի տեղ զրո արժեք չի ընդունում, չնայած* $f(0) = -\frac{1}{2}$, *իսկ* $f(1) = \frac{1}{2}$ $(x = 1$ *արժեքի համար ունի ցատկ)։*

69. Կիրառումը հավասարումներ լուծելիս: *Ապացուցված թեորեման կիրառվում է հավասարումներ լուծելիս։*

Դիտարկենք, օրինակ, կենտ աստիճանի հանրահաշվական հավասարում (իրական գործակիցներով)՝

$$f(x) \equiv a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0:$$

x-ի՝ բացարձակ մեծությամբ բավականաչափ մեծ արժեքների համար բազմանդամն ունի ավագ անդամի նշանը, այսինքն՝ դրական x-ի համար՝ a_0-ի նշանը, իսկ բացասական x-ի համար՝ հակառակ նշանը։ Քանի որ բազմանդամն անընդհատ ֆունկցիա է, ապա, նշանը փոխելով, նա միջանկյալ կետում անպայման դառնում է զրո։ Այստեղից՝ կենտ աստիճանի ամեն մի հանրահաշվական հավասարում (իրական գործակիցներով) ունի առնվազն մեկ իրական արմատ:

Բոլցանո-Կոշիի թեորեմայից կարելի է օգտվել ոչ միայն արմատի գոյությունը հաստատելու համար, այլև նրա մոտավոր հաշվման համար։ (Այդ էլ հենց եղման տեսակետ է եղել Կոշիի համար թեորեման ապացուցելիս, որը նա զետեղել է «Հավասարումների թվային լուծման վերաբերյալ» բաժնում։)

Այդ պարզաբանենք օրինակով։ Դիցուք $f(x) = x^4 - x - 1$. *քանի որ* $f(1) = -1$, $f(2) = 13$, *նշանակում է* 1-*ի և* 2-*ի միջև բազմանդամն արմատ ունի։ Այդ* [1, 2] *միջակայքը բաժանենք 10 հավասար մասերի՝* 1,1; 1,2; 1,3;... *կետերով և սկսենք հաջորդաբար հաշվել՝*

$$f(1{,}1) = -0{,}63\cdots,\ f(1{,}2) = -0{,}12\cdots,\ f(1{,}3) = +0{,}55\cdots,\cdots:$$

Տեսնում ենք, որ արմատը գտնվում է 1,2-*ի և* 1,3-*ի միջև։ Այդ միջակայքը էլ բաժանելով 10 հավասար մասերի, կգտնենք՝*

$$f(1{,}21) = -0{,}06\cdots,\ f(1{,}22) = -0{,}04\cdots,\ f(1{,}23) = +0{,}058\cdots,\cdots:$$

Այժմ պարզ է, որ արմատը գտնվում է 1,22-*ի և* 1,23-*ի միջև, այսպիսով, մենք արդեն գիտենք արմատի արժեքը մինչև* 0,01-*ի ճշգրտությամբ և այլն**.

70. Թեորեմա միջակա արժեքի վերաբերյալ: n° **69**-*ում ապացուցած թեորեման անմիջականորեն ընդհանրացվում է հետևյալ կերպ։*

Բոլցանո-Կոշիի երկրորդ թեորեման: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a, b]$ փակ միջակայքում և այդ միջակայքի ծայրակետերում ընդունում է իրարից տարբեր արժեքներ՝

$$f(a) = A \text{ և } f(b) = B:$$

Այդ դեպքում ինչպիսին էլ լինի A-ի և B-ի միջև գտնվող C թիվը, a և b կետերի միջև կգտնվի այնպիսի c կետ, որ

$$f(c) = C^{**}։$$

Ապացույց։ Ընդունենք, որ

$$A < B, \text{ այնպես որ՝ } A < C < B։$$

---

* *Ի միջի այլոց, գործնականում այս ճանապարհն անձեռնտու է մեծաքանակ հաշվումների պատճառով. գոյություն ունեն այլ եղանակներ, որոնք ավելի արագ են հասցնում նպատակին (նրանք ցույց են տրվում դիֆերենցիալ հաշվում)։*

** *Ակներևաբար, առաջին թեորեման այս թեորեմայի մասնավոր դեպքն է, երբ* A-*ն և* B-*ն տարբեր նշաններով են, ապա որպես* C *կարելի է վերցնել նաև* 0-*ն։*

$[a, b]$ *միջակայքում դիտարկենք* $\varphi(x) = f(x) - C$ *օժանդակ ֆունկցիան: Այս ֆունկցիան* $[a, b]$ *միջակայքում անընդհատ է և նրա ծայրերում ունի տարբեր նշաններ՝*

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0, \quad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0:$$

Ուրեմն, ըստ առաջին թեորեմայի, a*-ի և* b*-ի միջև կգտնվի այնպիսի* c *կետ, որտեղ* $\varphi(c) = 0$*, այսինքն՝*

$$f(c) - C = 0, \text{ կամ՝ } f(c) = C,$$

ինչ և պետք էր ապացուցել:

Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք միջակայքում անընդհատ $f(x)$ *ֆունկցիայի մի կարևոր հատկություն՝* իր մեկ արժեքից մյուսին անցնելիս, յուրաքանչյուր միջակա թիվ ֆունկցիան գոնե մեկ անգամ ընդունում է որպես իր արժեք:

Առաջին հայացքից թվում է, թե այս հատկությունը բացահայտում է ֆունկցիայի անընդհատության բուն էությունը: Սակայն հեշտ է կառուցել կանխահայտորեն խզվող ֆունկցիաներ, որոնք այնուամենայնիվ օժտված են այդ հատկությամբ: Օրինակի համար, հետևյալ ֆունկցիան [n° **67**,3)]՝

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0$$

$x = 0$ *խզման կետը պարունակող ցանկացած միջակայքում ընդունում է իր համար ընդհանրապես հնարավոր բոլոր արժեքները* -1*-ից մինչև* $+1$*-ը*:*

Անընդհատ ֆունկցիայի ապացուցված հատկությունից բխում է այսպիսի (ըստ էության նրան համարժեք)

Հետևանք: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է որևիցե X միջակայքում (փակ կամ բաց, վերջավոր կամ անվերջ), ապա նրա ընդունելիք արժեքները իրենք նույնպես անընդմեջ լցնում են մի որոշ միջակայք:

Ֆունկցիայի արժեքների $\{f(x)\}$ *բազմությունը նշանակենք* Y*-ով: Դիցուք***

$$m = \inf Y, \qquad M = \sup Y$$

---

* *Դեռևս Բոլցանոն իզուր չէ ընդգծել, որ նշված հատկությունը անընդհատության հետևանք է, բայց այն չի կարելի դնել անընդհատության սահմանման հիմքում:*

** *Ընթերցողին հիշեցնում ենք, որ եթե* Y *բազմությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ չէ, ապա* n° **6**-*ում մենք պայմանավորվել ենք ընդունել* $\sup Y = +\infty$ $(\inf Y = -\infty)$:

և l-ը կամայական թիվ է m*-ի և* M*-ի միջև՝*

$$m < l < M։$$

Անհրաժեշտաբար կգտնվեն ֆունկցիայի այնպիսի $f(x_1)$ *և* $f(x_2)$ *արժեքներ (*x_1*-ը և* x_2*-ը վերցրած են* X *միջակայքից), որ՝*

$$m \leqslant f(x_1) < l < f(x_2) \leqslant M.$$

այդ բխում է թվային բազմության ճշգրիտ եզրերի հենց սահմանումից։ Բայց այդ դեպքում, ապացուցած թեորեմայի համաձայն, x_1*-ի և* x_2*-ի միջև գոյություն ունի այնպիսի* $x = x_0$ *արժեք (ակներևորեն, նույնպես* X*-ին պատկանող), որ* $f(x_0)$ *արժեքը ճշգրիտ հավասար է* l*-ին. Հետևաբար, այդ թիվը մտնում է* Y *բազմության մեջ։*

Այսպիսով, Y *բազմությունն իրենից ներկայացնում է մի միջակայք* m *և* M *ծայրակետերով (որոնք իրենք կարող են այդ միջակայքին պատկանել կամ ոչ՝ նայած դեպքին. համեմատել* n° **73***-ի հետ)։*

Մենք n° **61***-ում տեսել էինք, որ մոնոտոն ֆունկցիայի դեպքում ֆունկցիայի հենց նոր ձևակերպված հատկությունից հետևում է նրա անընդհատությունը։ Որ ոչ միշտ է այդպես, ցույց է տալիս վերևում բերված օրինակը։*

Դիտողություն։ Այն մասնավոր դեպքի համար, երբ դիտարկվող ֆունկցիան ամբողջ բազմանդամ է, երկու թեորեմներն էլ արտահայտված են եղել իրենց խիստ ապացուցումից դեռ շատ առաջ։ Օրինակի համար, Էյլերի մոտ նրա «Անալիզի ներածության» մեջ մենք գտնում ենք, նշված դեպքի համար, սույն n°*-ի թեորեմայի լրիվ ձևակերպումը, սակայն առանց համոզիչ հիմնավորման. այդ թեորեմն այնուհետև կիրառվում է հանրահաշվական հավասարումների իրական արմատների գոյության հարցում* [համեմատել* n° **69**]*։ Էյլերը, մյուս հեղինակների նման, երբեմն օգտվում է նաև երկրաչափական պատկերացումներից։ Հիշատակենք, վերջապես, որ Լագրանժը** իր «Տրակտատ բոլոր աստիճանների թվային հավասարումների լուծման մասին» աշխատությունն ուղղակի սկսում է* n° **68***-ի թեորեմայի անալիտիկ ապացուցումով (բազմանդամի՛ համար), որը հիմնված է բազմապատկիչների վերլուծման վրա։*

71. Հակադարձ ֆունկցիայի գոյությունը։ *Անընդհատ ֆունկցիայի՝ նախընթաց* n°*-ում ուսումնասիրած հատկություններն օգտագործենք (որոշ պայմանների առկայության դեպքում) ապացուցելու համար*

---

* *Ռուսերեն թարգմանության 44—46 էջերը (տե՛ս տողատակի ծանոթագրությունը 45 էջում։*

** *Ժոզեֆ—Լուի Լագրանժ (1736—1813)՝ ֆրանսիացի ականավոր մաթեմատիկոս և մեխանիկոս։*

միարժեք հակադարձ ֆունկցիայի գոյությունն ու անընդհատությունը [համեմատել n° **23**]։

Թեորեմ: Դիցուք f(x) ֆունկցիան որոշված է, մոնոտոն աճում (նվազում)* է և անընդհատ է մի որոշ X միջակայքում: Այդ դեպքում այդ ֆունկցիայի արժեքների համապատասխան Y միջակայքում գոյություն ունի $x=g(y)$ միարժեք հակադարձ ֆունկցիա, որը նույնպես մոնոտոն աճող (նվազող) է և անընդհատ:

Ապացույց։ Սահմանափակվենք աճող ֆունկցիայի դեպքով։ Վերևում տեսանք [տե՛ս հետևանքը], որ անընդհատ ֆունկցիայի արժեքներն անընդմեջ լցնում են մի որոշ Y *միջակայք, այնպես որ այդ միջակայքից վերցրած յուրաքանչյուր* y_0 *արժեքի համար կգտնվի գոնե մեկ այնպիսի* x_0 *արժեք (X-ից), որ՝*

$$f(x_0)=y_0.$$

Սակայն, այդ ֆունկցիայի մոնոտոնության շնորհիվ, այդպիսի միայն մեկ արժեք կգտնվի. եթե $x_1 >$ *կամ* $< x_0$, *ապա, համապատասխանաբար,* $f(x_1) >$ *կամ* $< f(x_0)$։

Հենց այդ x_0 *արժեքը համապատասխանեցնելով Y-ից վերցրած կամայական* y_0 *արժեքին, մենք կստանանք միարժեք ֆունկցիա՝*

$$x=g(y),$$

որը $y=f(x)$ *ֆունկցիայի համար հակադարձ ֆունկցիա է։*

Հեշտ է տեսնել, որ այդ $g(y)$ *ֆունկցիան,* $f(x)$ *ֆունկցիայի նման, նույնպես մոնոտոն աճում է։ Դիցուք՝*

$$y'<y'' \text{ և } x'=g(y'),\ x''=g(y'').$$

այդ դեպքում, $g(y)$ *ֆունկցիայի սահմանման համաձայն, միաժամանակ՝*

$$y'=f(x') \text{ և } y''=f(x'').$$

Եթե լիներ $x'>x''$, *ապա* $f(x)$ *ֆունկցիայի աճման շնորհիվ, նաև կլիներ* $y'>y''$, *որ հակասում է պայմանին։ Չի կարող լինել նաև* $x'=x''$, *որովհետև այդ ժամանակ կլիներ նաև* $y'=y''$, *որ նույնպես հակասում է պայմանին։ Ուրեմն, հնարավոր է միայն* $x'<x''$ *անհավասարությունը, այնպես որ՝* $g(y)$ *ֆունկցիան իրոք աճում է։*

Վերջապես, որպեսզի ապացուցենք $x=g(y)$ *ֆունկցիայի անընդ-*

---

* *Այդ բառի խիստ (նեղ) իմաստով (այստեղ այդ էական է)։*

հատությունը, բավական է միայն վկայակոչել n° **61**-ի թեորեման, որի պայմանները այստեղ բավարարված են. $x=g(y)$ ֆունկցիան մոնոտոն է, և նրա արժեքները, անխափան, անընդմեջ լցնում են X միջակայքը*։

Ապացուցված թեորեմայի օգնությամբ կարելի է մեզ հայտնի մի շարք արդյունքներ նորից հաստատել։

Օրինակ, եթե այն կիրառենք x^n ֆունկցիայի նկատմամբ $X=[0,+\infty)$ միջակայքում (n-ը բնական թիվ է), ապա կհանգենք $x=\sqrt[n]{y}$ (թվաբանական) արմատի գոյությանն ու անընդհատությանը $Y=[0,+\infty)$ միջակայքում։

72. Թեորեմա ֆունկցիայի սահմանափակության վերաբերյալ: *Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է (հետևապես, ընդունում է վերջավոր արժեքներ) մի որոշ վերջավոր միջակայքի բոլոր x արժեքների համար, ապա այդտեղից դեռևս անհրաժեշտաբար չի բխում ֆունկցիայի* սահմանափակությունը, *այսինքն՝ նրա ստացվող արժեքների $\{f(x)\}$ բազմության սահմանափակությունը։ Օրինակ, դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է այսպես՝*

$$f(x)=\frac{1}{x}, \text{ եթե } 0<x\leqslant 1, \text{ և } f(0)=0:$$

Այս ֆունկցիան ընդունում է միայն վերջավոր արժեքներ, սակայն նա սահմանափակ չէ, որովհետև երբ x-ը մոտենում է 0-ին, նա կարող է ընդունել ցանկացած չափով մեծ արժեքներ։ Նկատենք ի միջի այլոց, որ $(0,1]$ կիսաբաց միջակայքում նա անընդհատ է, բայց $x=0$ կետում խզում ունի։

Այլ արդյունք է ստացվում, երբ ֆունկցիան անընդհատ *է* լինում փակ միջակայքում։

Վայերշտրասի առաջին թեորեման: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a, b]$ փակ միջակայքում, ապա նա սահմանափակ է և՛ ներքևից, և՛ վերևից, այսինքն՝ գոյություն ունեն այնպիսի m և M հաստատուն վերջավոր թվեր, որ՝

$$m\leqslant f(x)\leqslant M, \text{ երբ } a\leqslant x\leqslant b:$$

Ապացույցը կատարենք հակասող ընդունելության եղանա-

---

* Ինչպիսի x էլ վերցնենք X-ից, բավական է միայն վերցնել $y=f(x)$, որպեսզի այդ y-ի համար $g(y)$ ֆունկցիան ունենա հենց մեր վերցրած x արժեքը։

հով. ենթադրենք, թե $f(x)$ ֆունկցիան, երբ x-ը փոփոխվում է $[a, b]$ միջակայքում, սահմանափակ չէ, ասենք թե՝ վերևից։

Այդ դեպքում, յուրաքանչյուր n բնական թվի համար $[a, b[$ միջակայքում կգտնվի այնպիսի $x = x_n$ արժեք, որ՝

$$f(x_n) \geqslant n\text{։} \tag{3}$$

Ըստ Բոլցանոյի—Վայերշտրասի լեմմայի [n° **51**], $\{x_n\}$ հաջորդականությունից կարելի է առանձնացնել այնպիսի $\{x_{n_k}\}$ մասնակի հաջորդականություն, որը զուգամիտի վերջավոր սահմանի՝

$$x_{n_k} \to x_0 \quad (\text{երբ } k \to \infty),$$

ընդ որում, ակներևաբար, $a \leqslant x_0 \leqslant b$։ x_0 կետում ֆունկցիայի անընդհատության հետևանքով, այդ ժամանակ պետք է նաև՝

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),$$

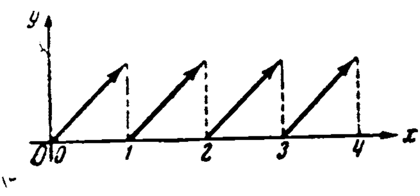
իսկ այս հնարավոր չէ, որովհետև (3)-ից հետևում է, որ

$$f(x_{n_k}) \to \infty\text{։}$$

Ստացված հակասությունն էլ հենց ապացուցում է թեորեման։

75. Ֆունկցիայի մեծագույն ու փոքրագույն արժեքները: Մենք գիտենք, որ թվային անվերջ բազմությունը, թեկուզ և նա սահմանափակ լինի, կարող է յուր կազմում չունենալ ամենամեծ (ամենափոքր) էլեմենտ։ Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված և նույնիսկ սահմանափակ է x-ի փոփոխման մի որոշ միջակայքում, ապա նրա արժեքների $\{f(x)\}$ բազմության կազմում կարող է չգտնվել ամենամեծ (ամենափոքր) արժեք։ Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան վերոհիշյալ միջակայքում չի հասնում արժեքների վերին (ստորին) ճշգրիտ եզրին։ Այդպես կլինի, օրինակ,

$$f(x) = x - E(x)$$



Գծ. 29.

ֆունկցիայի հետ (սրա գրաֆիկը տրված է 29-րդ գծագրում)։ Երբ x-ը փոփոխվում է ցանկացած $[0, b]$ $(b \geqslant 1)$ միջակայքում, ֆունկցիայի արժեքների վերին ճշգրիտ եզր կլինի 1-ը, սակայն դա անհասանելի է, այնպես որ ֆունկցիան մեծագույն արժեք չունի։

Ընթերցողին, հավանաբար, պարզ է այս հանգամանքի կապը դիտարկվող ֆունկցիայի խ զ ու մ ն ե ր ի առկայության հետ՝ x-ի բնական արժեքների դեպքում։ Իրոք, փ ա կ մ ի ջ ա կ ա յ ք ու մ ա ն ը ն դ հ ա տ ֆունկցիայի համար տեղի ունի՝

Վ ա յ ե ր շ տ ր ա ս ի ե ր կ ր ո ր դ թ ե ո ր ե մ ա ն։ Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a, b]$ փ ա կ միջակայքում, ապա նա այդ միջակայքում հ ա ս ն ու մ է իր վերին և ստորին ճշգրիտ եզրերին։

Այլ խոսքով, $[a, b]$ միջակայքում կգտնվեն այնպիսի $x = x_0$ և $x = x_1$ կետեր, որ $f(x_0)$ և $f(x_1)$ արժեքները համապատասխանաբար կլինեն $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր արժեքների մեջ մ ե ծ ա գ ու յ ն ը և փ ո ք ր ա գ ու յ ն ը։

Ա պ ա ց ու յ ց։ Նշանակենք՝

$$M = \sup\{f(x)\}.$$

ըստ նախորդ թեորեմայի, այդ թիվը վերջավոր է։ Ենթադրենք (հակառակ նրան, ինչ պետք է ապացուցել), որ միշտ $f(x) < M$, *այսինքն՝* M *ճշգրիտ եզրն անհասանելի է։ Այդ դեպքում կարելի է դիտարկել*

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

օժանդակ ֆունկցիան։ Քանի որ, ըստ ենթադրության, այստեղ հայտարարը զրո չի դառնում, ուստի այդ ֆունկցիան անընդհատ է, և, հետևապես (ըստ նախորդ թեորեմայի), սահմանափակ է՝ $\varphi(x) \leqq \mu$ $(\mu > 0)$*։ Բայց այստեղից հեշտ է ստանալ, որ այդ դեպքում՝*

$$f(x) \leqq M - \frac{1}{\mu},$$

այսինքն՝ $M - \frac{1}{\mu}$ *թիվը, որը* M*-ից փ ո ք ր է, պարզվեց, որ* $\varphi(x)$ *ֆունկցիայի արժեքների վերին եզր է, որ չի կարող լինել, որովհետև,* M*-ն այդ արժեքների վերին ճ շ գ ր ի տ եզրն է։ Ստացված հակասությունն ապացուցում է թեորեման՝* $[a, b]$ *միջակայքում կգտնվի այնպիսի* x_0 *արժեք, որ* $f(x_0) = M$ *արժեքը կլինի* $f(x)$*-ի բոլոր արժեքներից մ ե ծ ա գ ու յ ն ը։*

Նույն ձևով կարելի է ապացուցել նաև փ ո ք ր ա գ ու յ ն արժեքի վերաբերյալ պնդումը։

Նշենք, որ բերված ապացուցումը զուտ «գոյության ապացույց» է։ Օրինակ, $x = x_0$ *արժեքը հաշվելու ոչ մի եղանակ չի տրված։ Հետա-*

գալում [գլուխ VII, § 1], ճիշտ է, ֆունկցիայի նկատմամբ ավելի խիստ ենթադրությունների դեպքում, մենք կսովորենք փաստորեն գտնել անկախ փոփոխականի այն արժեքները, որոնք ֆունկցիային տալիս են մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքներ:

Եթե $f(x)$ *ֆունկցիան* x-*ը որևէ* X *միջակայքում փոփոխվելիս սահմանափակ է, ապա նրա* *տատանում* *այդ միջակայքում անվանում են վերին և ստորին ճշգրիտ եզրերի՝*

$$\omega = M - m$$

տարբերությունը: ω *տատանումը կարելի է սահմանել նաև որպես*

$$f(x'') - f(x')$$

տարբերությունների վերին ճշգրիտ եզր, որտեղ x'-*ը և* x''-*ը՝* X *միջակայքում ընդունում են իրարից անկախ կամայական արժեքներ, այսինքն՝*

$$\omega = \sup_{x',\, x''} \{|f(x'') - f(x')|\}:$$

Երբ խոսքը վերաբերում է $X=[a, b]$ *փակ վերջավոր միջակայքում անընդհատ* $f(x)$ *ֆունկցիային, ապա, ինչպես հետևում է ապացուցած թեորեմայից, տատանումը պարզապես կլինի այդ միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարբերությունը:*

Այս դեպքում ֆունկցիայի արժեքների Y *միջակայքը՝* $[m, M]$ *փակ միջակայքն է, և տատանումը տալիս է նրա երկարությունը:*

74. Հավասարաչափ անընդհատության գաղափարը: *Եթե* $f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է մի* X *միջակայքում (փակ կամ բաց, վերջավոր կամ անվերջ) և անընդհատ է այդ միջակայքի* x_0 *կետում, ապա*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

կամ [«$\varepsilon - \delta$ լեզվով», n° **60**]՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{անհավասարությունից կհետևի} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon:$$

Այժմ ենթադրենք, թե $f(x)$ *ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ* X *միջակայքում, այսինքն՝ անընդհատ է այդ միջակայքի յուրաքանչյուր* x_0 *կետում: Այդ դեպքում* X-*ի յուրաքանչյուր* x_0 *կետի հա-*

մար առանձին կգտնվի տված ε-ին վերոհիշյալ իմաստով համապատասխանող δ թիվ։ Երբ x_0-ն փոփոխվի X-ի սահմաններում, անգամ եթե ε-ը մնա հաստատուն, δ թիվը, ընդհանրապես ասած, կփոփոխվի։ Բավական է նայել 30-րդ գծագրին, որպեսզի համոզվենք, որ այն δ թիվը, որը պիտանի է այն հատվածում, որտեղ ֆունկցիան դանդաղ է փոփոխվում (գրաֆիկը հանդարտ բարձրացող կամ իջնող կոր է), կարող է լինել շատ մեծ այն հատվածի համար, որտեղ ֆունկցիան արագ է փոփոխվում (գրաֆիկը շեշտակի բարձրանում կամ իջնում է)։ Այլ խոսքով, δ թիվը ընդհանրապես կախված է ոչ միայն ε-ից, այլև x_0-ից։

Եթե խոսքը վերաբերեր վերջավոր թվով x_0 արժեքների (անփոփոխ ε-ի դեպքում), ապա նրանց համապատասխանող վերջավոր թվով δ թվերից կարելի կլիներ ընտրել ամենափոքրը, և այդ վերջինը պիտանի կլիներ, ակներևաբար, դիտարկվող բոլոր x_0 կետերի համար միաժամանակ։

Սակայն X միջակայքին պատկանող անվերջ բազմությամբ արժեքների նկատմամբ այդպես դատել արդեն չի կարելի. դրանց (հաստատուն ε-ի դեպքում) համապատասխանում է δ թվերի անվերջ բազմություն, որոնց մեջ կարող են գտնվել նաև ցանկացած չափով փոքրեր։ Այսպիսով, X միջակայքում անընդհատ f(x) ֆունկցիայի համար ծագում է հետևյալ հարցը՝ արդյոք տրված ε-ի համար գոյություն ունի՞ այնպիսի δ թիվ, որը պիտանի լինի այդ միջակայքի բոլոր x_0 կետերի համար։

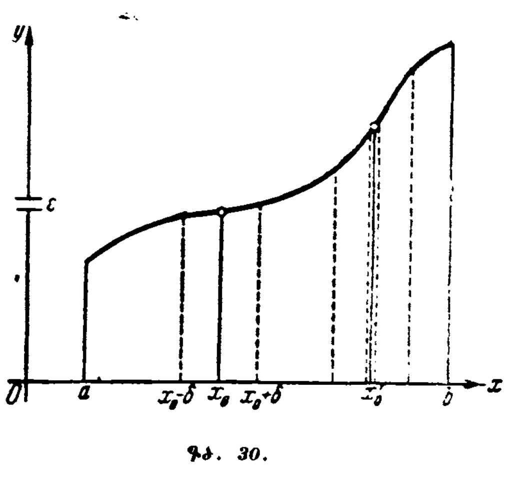
Եթե տրված յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ

$$|x - x_0| < \delta$$

անհավասարությունից հետևի՝

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

որտեղ էլ գտնվելու լինեն x_0 և x կետերը դիտարկվող X միջակայքի սահմաններում, ապա f(x) ֆունկցիան անվանում են հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ անընդհատ X միջակայքում։



Գծ. 30.

Այս դեպքում δ թիվը կախված է դառնում միայն ε-ից և այն կա-

րելի է նշել նախքան x_0-ի ընտրությունը. δ-ն պիտանի է դառնում x_0-ի բոլոր արժեքների համար միաժամանակ։

Հավասարաչափ անընդհատությունը նշանակում է, որ միջակայքի բոլոր մասերում բավական է արգումենտի երկու արժեքների մոտիկության միևնույն աստիճանը, որպեսզի հասնենք ֆունկցիայի համապատասխան արժեքների մոտիկության տված աստիճանին։

Օրինակի վրա կարելի է ցույց տալ, որ միջակայքի բոլոր կետերում ֆունկցիայի անընդհատությունից անհրաժեշտորեն չի հետևում նրա հավասարաչափ անընդհատությունն այդ միջակայքում։ Դիցուք, օրինակ, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, երբ x-ը գտնվում է 0-ի և $\frac{2}{\pi}$-ի միջև, բացառյալ 0-ն։ Այս դեպքում՝ x-ի փոփոխման տիրույթը $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$ ոչ փակ միջակայքն է և նրա յուրաքանչյուր կետում ֆունկցիան անընդհատ է։ Այժմ ընդունենք $x_0 = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, $x = \frac{1}{n\pi}$ (որտեղ n-ը ցանկացած բնական թիվ է). այդ ժամանակ՝

$$f(x_0) = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1, \qquad f(x) = \sin n\pi = 0,$$

ուստի՝

$$|f(x) - f(x_0)| = 1,$$

չնայած, որ $|x - x_0| = \frac{1}{n(2n+1)\pi}$ մեծությունը n-ի աճման հետ կարելի է դարձնել ցանկացած չափով փոքր։ Այստեղ $\varepsilon = 1$ դեպքում՝ չի կարելի գտնել այնպիսի δ, որը պիտանի լինի $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$-ի բոլոր x_0 կետերի համար միաժամանակ, թեև, ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, x_0-ի յուրաքանչյուր առանձին արժեքի համար այդպիսի δ գոյություն ունի։

75. Հավասարաչափ անընդհատության վերաբերյալ թեորեման: *Զարմանալի չէ այն հանգամանքը, որ $[a, b]$ փակ միջակայքում նման դրություն լինել արդեն չի կարող, ինչպես այդ երևում է հետևյալ թեորեմայից։*

Կանտորի* թեորեման: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a, b]$ փակ միջակայքում, ապա նա նաև հավասարաչափ անընդհատ է այդ միջակայքում:

---

* *Գեորգ Կանտոր (1845—1918)՝ գերմանացի հայտնի մաթեմատիկոս, ժամանակակից բազմությունների տեսության հիմնադիրը։*

Ապացուցենք հակառակ ընդունելության մեթոդով: Դիցուք որևէ որոշակի $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն չունի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որի մասին խոսվում է հավասարաչափ անընդհատության սահմանման մեջ: Այդ դեպքում, ինչպիսի $\delta>0$ թիվ էլ որ վերցնելու լինենք, $[a, b]$ միջակայքում կգտնվեին երկու այնպիսի x և x' արժեքներ, որ

$$|x'-x|<\delta, \text{ և այնուամենայնիվ՝ } |f(x')-f(x)|\geq\varepsilon:$$

Այժմ վերցնենք դրական թվերի այնպիսի $\{\delta_n\}$ հաջորդականություն, որ $\delta_n\to0$: Վերևում ասածի շնորհիվ, յուրաքանչյուր δ_n-ի համար $[a, b]$-ում կգտնվեին այնպիսի x_n և x'_n արժեքներ (նրանք կըկատարեին x-ի և x'-ի դերը), որ $n=1, 2, 3,\ldots$ դեպքում՝

$$|x_n-x'_n|<\delta_n \text{ և այնուամենայնիվ } |f(x_n)-f(x_n)|\geq\varepsilon:$$

Ըստ Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի [51], $\{x_n\}$ սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի կլիներ առանձնացնել այնպիսի մասնակի հաջորդականություն, որը զուգամիտեր $[a, b]$ միջակայքի մի որոշ x_0 կետի: Նշանակումները չբարդացնելու համար ընդունենք, որ հենց ինքը $\{x_n\}$ հաջորդականությունը զուգամիտում է x_0-ին:

Քանի որ $x_n-x'_n\to0$ (որովհետև $|x_n-x'_n|<\delta_n$, իսկ $\delta_n\to0$), ուստի միաժամանակ նաև $\{x'_n\}$ հաջորդականությունը կզուգամիտեր x_0-ին: Այդ ժամանակ, x_0 կետում ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, պետք է որ՝

$$f(x_n)\to f(x_0) \text{ և } f(x'_n)\to f(x_0),$$

ուստի կունենայինք նաև

$$f(x_n)-f(x'_n)\to0,$$

իսկ այս կհակասեր այն ենթադրությանը, որ n-ի բոլոր արժեքների համար՝

$$|f(x_n)-f(x'_n)|\geq\varepsilon:$$

Այսպիսով, թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցված թեորեմայից անմիջապես բխում է մի հետևանք, որը հետագայում մեզ համար օգտակար է լինելու:

Հետևանք: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a, b]$ փակ միջակայքում: Այդ դեպքում, տված $\varepsilon>0$ թվին համապատասխան կգտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ եթե միջակայքը կամայական եղանակով տրոհենք δ-ից փոքր երկարություն ունեցող մասնակի միջակայքերի, ապա դրանցից յուրաքանչյուրում $f(x)$ ֆունկցիայի տատանումը փոքր կլինի ε-ից:

Իրոք, եթե տված ε-ի համար որպես δ վերցնենք այն թիվը, որի մասին խոսվում է հավասարաչափ անընդհատության սահմանման մեջ, *ապա δ-ից փոքր երկարություն ունեցող մասնակի միջակայքում ֆունկցիայի ցանկացած երկու արժեքների տարբերությունը բացարձակ մեծությամբ փոքր կլինի ε-ից։ Մասնավորապես, այդ ճիշտ է նաև այդ արժեքներից մեծագույնի և փոքրագույնի տարբերության նկատմամբ, որը և տալիս է ֆունկցիայի տատանումը մասնանշված մասնակի միջակայքում* [n°**73**]։

Այսպես, կես հարյուրամյակի ընթացքում մեկը մյուսի ետևից ապացուցվել են անընդհատ ֆունկցիաների հիմնական հատկությունները՝ սկսած առավել «ակներևներից» և վերջացրած այնպիսի նուրբ հատկությամբ, ինչպիսին հավասարաչափ անընդհատությունն է, որ ապացուցեցինք վերջին թեորեմայում։ Մեկ անգամ էլ ընդգծենք, որ այդ ապացույցները հարկ եղած խստությունն ստացան միայն իրական թվերի թվաբանական տեսությունների հիման վրա, որոնք զարգացվեցին անցյալ դարի երկրորդ կեսում։

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑՈՒՄԸ

§ 1. ԱԾԱՆՑՅԱԼ ԵՎ ՆՐԱ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

76. Շարժվող կետի արագությունը որոշելու խնդիրը: *Անցնելով դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի հիմունքների շարադրմանը, մենք ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն իրողության վրա, որ այդ հաշվի գաղափարները ծագել են դեռևս XVII դարում, այսինքն՝ շա՜տ ավելի առաջ այն նրբամիտ տեսություններից, որոնք մենք ուսումնասիրեցինք նախորդ գլուխներում: Միայն սույն հատորի վերջին գլխում մենք հնարավորություն կունենանք շոշափելու մաթեմատիկական անալիզի նախապատմության կարևորագույն մոմենտները և բնութագրելու երկու մեծ մաթեմատիկոսների՝ Նյուտոնի և Լայբնիցի վաստակը, որոնք իրենց նախորդների աշխատանքն ավարտեցին՝ ստեղծելով իսկապես նոր հաշիվ: Մեր շարադրանքում մենք ղեկավարվելու ենք խստության վերաբերյալ արդեն ժամանակակից պահանջմունքներով և ոչ թե հարցի պատմությամբ:*

Գծ. 31.

Որպես դիֆերենցիալ հաշվի նախամուտք, սույն n°-ում դիտարկենք արագության խնդիրը, իսկ մոտակա n°-ում կդիտարկենք շոշափողի խնդիրը. երկու խնդիրն էլ պատմականորեն կապված են եղել դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական գաղափարի ձևավորման հետ՝ այն գաղափարի, որը հետագայում ստացել է ածանցյալ անունը:

Սկսենք մասնավոր օրինակից, այն է՝ դիտարկենք ծանր նյութական կետի ազատ անկումը (դատարկության մեջ, որպեսզի հաշվի չառնենք օդի դիմադրությունը):

Եթե t *(վ) ժամանակը հաշվվում է անկման սկզբից, ապա այդ ժամանակամիջոցում անցած* s *(մ) ճանապարհը, ըստ հայտնի բանաձևի, կարտահայտվի այսպես՝*

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

որտեղ $g = 9{,}81$։ *Այստեղից ելնելով,* պահանջվում է որոշել կետի շարժման v արագությունը տված t պահին, *երբ կետը գտնվում է* M *դիրքում (գծ. 31)։* t *փոփոխականին տանք մի որոշ* Δt *աճ և դիտարկենք* $t + t\Delta$ *պահը, երբ կետը կլինի* M_1 *դիրքում։* Δt *ժամանակամիջոցում ճանապարհի* MM_1 *աճը նշանակենք* Δs*-ով։*

(1)-ի մեջ t*-ի փոխարեն տեղադրելով* $t + \Delta t$, *ճանապարհի նոր արժեքի համար կստանանք*

$$s + \Delta s = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2$$

արտահայտությունը, որտեղից

$$\Delta s = \frac{g}{2}(2t \cdot \Delta t + \Delta t^2)։$$

Δs*-ը բաժանելով* Δt*-ի վրա, մենք կստանանք կետի անկման միջին արագությունը* MM_1 *տեղամասում, այն է՝*

$$v_{միջ} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2} \cdot \Delta t։$$

Ինչպես տեսնում ենք, այդ արագությունը փոփոխվում է Δt*-ի հետ միասին և այնքան ավելի լավ է բնորոշում ընկնող մարմնի վիճակը* t *պահին, որքան փոքր է այդ պահից հետո անցած* Δt *ժամանակամիջոցը։*

Կետի v արագություն ժամանակի t պահին անվանում են այն սահմանը, որին ձգտում է Δt ժամանակամիջոցում $v_{միջ}$ միջին արագությունը, երբ Δt-ն ձգտում է 0-ի։

Մեր դեպքում, ակներևաբար՝

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left(gt + \frac{g}{2}\Delta t\right) = gt։$$

Նույն ձևով հաշվում են v *արագությունը նաև կետի, ասենք թե՝ ուղղագիծ շարժման ընդհանուր դեպքում։ Կետի դիրքը որոշվում է նրա* s *հեռավորությամբ, որը հաշվվում է որևէ* 0 *սկզբնակետից։ Հենց այդ հեռավորությունը կոչվում է կետի անցած ճանապարհ։* t *ժամանակը հաշվվում է մի որոշ պահից, ընդ որում, անհրաժեշտ չէ, որ այդ պահին կետը գտնվի 0-ում։ Շարժումը համարվում է լրիվ տրված, երբ հայտնի է* $s = f(t)$ *շարժման հավասարումը, որտեղից կարելի է որոշել կետի դիրքը ցանկացած* t *պահի համար. դիտարկված օրինակի մեջ այդպիսի դեր խաղաց (1) հավասարումը։*

Տված t *պահին* v *արագությունը որոշելու համար հարկ* *կլիներ, ինչպես վերևում, t-ին տալ Δt աճ, որին կհամապատասխանի s ճանապարհի Δs աճ։*

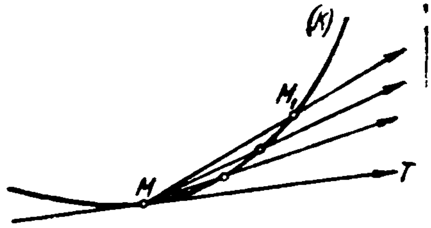
$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

հարաբերությունը կարտահայտի Δt ժամանակամիջոցում $v_{միջ.}$ *միջին արագությունը։ Իսկ իսկական v արագությունը t պահին այստեղից կստացվի սահմանային անցման միջոցով՝*

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{միջ} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \;:$$

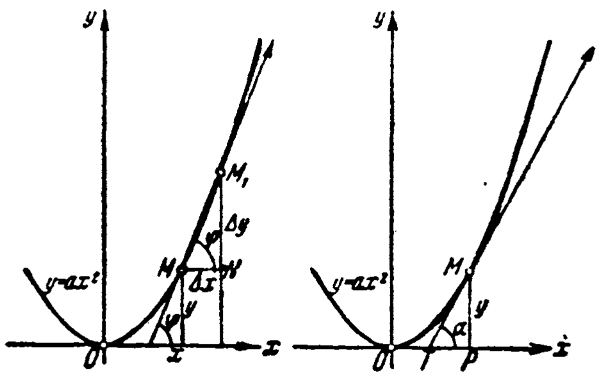
Ստորև մենք կդիտարկենք մի այլ կարևոր խնդիր, որը նույնպես հանգում է նման սահմանային անցման գործողության։

77. Կորին շոշափող տանելու խնդիրը։ *Դիցուք տրված է (K) կորը (գծ. 32) և նրա վրա M կետը. դիմենք M կետում կորի շոշափողի գաղափարի սահմանմանը։*



Գծ. 32.

Դպրոցական դասընթացում շրջանագծի շոշափողը սահմանում են որպես այնպիսի ուղիղ, որը կորի հետ ունի միայն մեկ ընդհանուր կետ։ Սակայն այս սահմանումը ունի մասնակի բնույթ և չի բացահայտում գործի էությունը։ Եթե փորձենք այդ կիրառել, օրինակ, $y = ax^2$ *պարաբոլի նկատմամբ (գծ. 33ա), ապա կոորդինատների O սկզբնակետում կո-*



(ա) (բ)

Գծ. 33.

օրդինատային երկու առանցքներն էլ կհամապատասխանեն այդ սահմանմանը. այնինչ, ինչպես հավանաբար անմիջապես պարզ է նաև ընթերցողին, իրականում միայն x-երի առանցքն է ծառայում որպես պարաբոլի շոշափող 0 կետում։

Մենք հիմա կտանք շոշափողի ընդհանուր սահմանումը։ (K) կորի վրա (գծ. 32) վերցնենք M կետից բացի նաև M_1 կետ և տանենք MM_1 հատողը։ Երբ M_1 կետը կորի վրայով տեղափոխվի, այդ հատողը կպտտվի M կետի շուրջը։

M կետում (K) կորի **շոշափող** կոչվում է MM_1 հատողի MT սահմանային դիրքը, երբ M_1 կետը կորի վրայով ձգտում է համընկնել M կետի հետ։ *Այս սահմանման իմաստը կայանում է նրանում, որ M_1MT անկյունը ձգտում է զրոյի, հենց որ զրոյի է ձգտում MM_1 լարը։*

Օրինակի համար, այս սահմանումը կիրառենք $y = ax^2$ պարաբոլի նկատմամբ, նրա $M(x, y)$ կամայական կետում։ Քանի որ շոշափողն անցնում է այդ կետով, ուրեմն նրա դիրքը որոշելու համար բավական է իմանալ նաև նրա անկյունային գործակիցը։ Մենք էլ հենց նպատակ ենք դնում գտնել M կետում շոշափողի $\operatorname{tg}\alpha$ անկյունային գործակիցը։

x աբսցիսին տալով Δx աճ, կորի M կետից կանցնենք M_1 կետին, որի աբսցիսն է $x + \Delta x$ և օրդինատը՝

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2$$

(գծ. 33ա)։ MM_1 հատողի $\operatorname{tg}\varphi$ անկյունային գործակիցը կորոշվի MNM_1 ուղղանկյուն եռանկյունից։ Սրա MN էջը հավասար է աբսցիսի Δx աճին, իսկ NM_1 էջը, ակներևաբար, օրդինատի համապատասխան

$$\Delta y = a(2x \cdot \Delta x + \Delta x^2)$$

աճն է, այնպես որ՝

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\,\Delta x։$$

Շոշափողի անկյունային գործակիցն ստանալու համար, ինչպես հեշտ է հասկանալ, պետք է այստեղ անցնել սահմանին, երբ $\Delta x \to 0$, քանի որ հենց այդ էլ համարժեք է այն բանին, որ $MM_1 \to 0$։ Այդ ժամանակ $\varphi \to \alpha$ և ($\operatorname{tg}\varphi$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ) $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$։

Այսպիսով, մենք հանգում ենք հետևյալ արդյունքին՝

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0}(2ax + a\Delta x) = 2ax\text{*:}$$

Ցանկացած կորի դեպքում, որի հավասարումն է

$$y = f(x),$$

շոշափողի անկյունային գործակիցը ստացվում է նույն ձևով: Աբսցիսի Δx աճին համապատասխանում է օրդինատի Δy աճ, և

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

հարաբերությունը արտահայտում է հատողի անկյունային գործակիցը՝ $\operatorname{tg}\varphi$-ն: Իսկ շոշափողի անկյունային գործակիցն այստեղից ստացվում է սահմանային անցման միջոցով, երբ $\Delta x \to 0$, այսինքն՝

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}:$$

78. Ածանցյալի սահմանումը: Բաղդատելով այն գործողությունները, որոնք մենք կատարեցինք վերևում դիտարկված երկու հիմնական խնդիրները լուծելիս, հեշտ է նկատել, որ երկու դեպքում էլ, եթե նկատի չունենանք փոփոխականների մեկնաբանումների միջև եղած տարբերությունը, ըստ էության կատարվում էր նույն բանը՝ ֆունկցիայի աճը բաժանում էինք անկախ փոփոխականի աճի վրա և ապա հաշվում այդ հարաբերության սահմանը: Հենց այդպիսի ճանապարհով էլ մենք գալիս ենք դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական գաղափարին՝ ածանցյալի գաղափարին:

Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում: Ելնելով անկախ փոփոխականի մի որոշ $x = x_0$ արժեքից, նրան տանք

---

* Ի միջի այլոց նկատենք, որ այստեղից ստացվում է հարմար եղանակ՝ պարաբոլի շոշափողի փաստական կառուցման համար: Այսպես, $\triangle MPT$-ից (գծ. 33 բ.) TP հատվածի համար կունենանք՝

$$TP = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

այնպես որ՝ T-ն OP հատվածի միջնակետն է: Ուրեմն, որպեսզի ստանանք պարաբոլի շոշափողը նրա M կետում, բավական է կիսել OP հատվածը և նրա միջնակետը միացնել M կետի հետ:

այնպիսի $\Delta x \neq 0$ *աճ, որը նրան դուրս չբերի* X *միջակայքից, այնպես որ* $x_0 + \Delta x$ *նոր արժեքը նույնպես պատկանի այդ միջակայքին։ Այդ ժամանակ, ֆունկցիայի* $y = f(x_0)$ *արժեքը կփոխարինվի նոր՝* $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ *արժեքով, այսինքն՝ նա կստանա*

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

աճը։

Եթե գոյություն ունի ֆունկցիայի աճի և անկախ փոփոխականի՝ այդ աճն առաջացնող աճի հարաբերության սահմանը, երբ Δx-ը ձգտում է 0-ի, այսինքն՝

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

ապա այդ սահմանը կոչվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի ա ծ ա ն ց յ ա լ* ըստ x անկախ փոփոխականի, նրա $x = x_0$ տված արժեքի դեպքում (կամ տված կետում)։

Այսպիսով, ածանցյալը $x = x_0$ *տված ա ր ժ ե ք ի դ ե պ ք ու մ, եթե այն գոյություն ունի, մի որոշակի թ ի վ է**։ Իսկ եթե ածանցյալը գոյություն ունի ամբողջ* X *միջակայքում, այսինքն՝ այդ միջակայքի ամեն մի* x*-ի համար, ապա նա* x*-ի ֆ ու ն կ ց ի ա է։*

Օգտվելով հենց նոր մուծված գաղափարից, շարժվող կետի արագության վերաբերյալ n° **76**-*ում ասածը կարելի է ամփոփել այսպես՝*

v արագությունը s անցած ճանապարհի ա ծ ա ն ց յ ա լ ն է ըստ t ժամանակի։

Եթե «արագություն» բառը հասկանանք ավելի ընդհանուր իմաստով, ապա կարելի կլինի ածանցյալը միշտ մեկնաբանել, որպես ինչ-որ «արագություն»։ Այն է՝ ունենալով x *անկախ փոփոխականի* y *ֆունկցիա, կարելի է առաջադրել* y *փ ո փ ո խ ա կ ա ն ի փ ո փ ո խ մ ա ն ա ր ա գ ու թ յ ա ն հ ա ր ց ը՝* x *փոփոխականի փոփոխման բաղդատմամբ (*x*-ի տվյալ արժեքի դեպքում)։*

---

* *«Ածանցյալ» տերմինը մուծվել է Լագրանժի կողմից դեռևս* XVIII *և* XIX *դարերի սահմանագլխին։*

** *Առայժմ մենք սահմանափակվում ենք այն դեպքով, երբ վերոհիշյալ սահմանը վ ե ր ջ ա վ ո ր է [տե՛ս* n° **87**]։

Եթե x-ին տված Δx աճը առաջացնում է y-ի Δy աճ, ապա n° **76**-*ի նման, y-ի փոփոխման միջին արագություն x-ի համեմատությամբ, երբ x-ը փոփոխվում է Δx չափով, կարելի է համարել*

$$v_{\text{միջ}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

հարաբերությունը։

Իսկ y-ի փոփոխման արագությունը x-ի տվյալ արժեքի դեպքում բնական կլինի անվանել այդ հարաբերության սահմանը, երբ Δx-ը ձգտում է զրոյի՝

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} V_{\text{միջ}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

այսինքն՝ հենց y-ի ածանցյալն ըստ x-ի:

n° **77**-*ում մենք դիտարկեցինք* $y = f(x)$ *հավասարումով տրված կորը և լուծեցինք տված կետում նրան շոշափող տանելու խնդիրը։ Այժմ այնտեղ ստացված արդյունքը կարող ենք ձևակերպել այսպես՝*

Շոշափողի $\operatorname{tg}\alpha$ անկյունային գործակիցը y օրդինատի ածանցյալն է ըստ x աբսցիսի:

Ածանցյալի այս երկրաչափական մեկնաբանումը հաճախ օգտակար է լինում։

Ի լրումն վերը դիտարկվածների, բերենք ևս մի քանի օրինակ, որոնք բացահայտում են ածանցյալի գաղափարի դերը։

Եթե շարժման v արագությունը հաստատուն չէ, այլ ինքն էլ t ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է՝ $v = f(t)$, *ապա դիտարկում են «արագության փոփոխման արագությունը», այն անվանելով արագացում։*

Այսպես, եթե ժամանակի Δt աճին համապատասխանում է արագության Δv աճ, ապա

$$a_{\text{միջ}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

հարաբերությունը կարտահայտի միջին արագացումը Δt ժամանակամիջոցում, իսկ նրա սահմանը կտա շարժման արագացումը տվյալ պահին՝

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{\text{միջ}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

Այսպիսով, արագացումը արագության ածանցյալն է ըստ ժամանակի:

Այժմ դիտարկենք զանգվածի «գծային» անընդհատ բաշխումը մի որոշ ուղղագիծ հատվածի երկարությամբ (այսինքն՝ այնպիսի ձողի երկարությամբ, որի լայնությունն ու հաստությունը մենք արհամարհում ենք)։ Դիցուք այդ հատվածի վրա կետի դիրքը որոշվում է x *աբսցիսով, հաշված (օրինակ՝ սանտիմետրերով) հատվածի սկզբից։* [0, x] *հատվածի երկարությամբ բաշխված* m *զանգվածը կախված կլինի* x*-ից՝* $m = f(x)$*։ Հատվածի ծայրի աբսցիսի* Δx *աճը կառաջացնի զանգվածի* Δm *աճ. այլ խոսքով՝* Δm*-ը* x *կետին կից* $[x, x + \Delta x]$ *հատվածի հետ կապված զանգվածն է։ Այդ դեպքում նշված հատվածում զանգվածի բաշխման* *միջին խտությունը* *կարտահայտվի*

$$\rho_{միջ} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

հարաբերությամբ։ Այս միջին խտության սահմանը, երբ հատվածը կծկվում է կետում, այսինքն՝ երբ $\Delta x \to 0$՝

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \rho_{միջ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x},$$

կոչվում է (գծային) *խտություն* x *կետում.* այդ խտությունը զանգվածի ածանցյալն է ըստ աբսցիսի:

Դիմենք ջերմության ուսմունքին և ածանցյալի օգնությամբ սահմանենք մարմնի *ջերմունակության* *գաղափարը* *տվյալ ջերմաստիճանում։*

Այս խնդրի մեջ մասնակցող ֆիզիկական մեծությունները նշանակենք հետևյալ կերպ. Θ*-ով՝ ջերմաստիճանը (*C *աստիճաններով),* W*-ով՝ ջերմության այն քանակը, որը պետք է հաղորդել մարմնին՝ նրան* 0°*-ից մինչև* $\Theta°$ *տաքացնելիս (կալորիաներով)։ Պարզ է, որ* W*-ն* Θ*-ի ֆունկցիան է՝* $W = f(\Theta)$*։* Θ*-ին տանք մի որոշ* $\Delta\Theta$ *աճ, այդ ժամանակ* W*-ն նույնպես կստանա* ΔW *աճ։* $\Theta°$*-ից մինչև* $(\Theta + \Delta\Theta)°$ *տաքացնելիս միջին* *ջերմունակությունը* *կլինի՝*

$$c_{միջ} = \frac{\Delta W}{\Delta\Theta},$$

Բայց, քանի որ $\Delta\Theta$*-ն փոփոխելիս այդ միջին ջերմունակությունը, ընդհանրապես, փոփոխվում է, ուստի մենք չենք կարող այդ հարա-*

բերությունն ընդունել որպես մարմնի ջերմունակություն առված Θ ջերմաստիճանում: Վերջինս ստանալու համար պետք է անցնել սահմանին՝

$$c = \lim_{\Delta\theta \to 0} c_{\text{միջ}} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta\theta},$$

Այսպիսով, կարելի է ասել, որ մարմնի ջերմունակությունը ջերմության քանակի ածանցյալն է ըստ ջերմաստիճանի:

Ածանցյալի բոլոր այս կիրառությունները (որոնց թիվը հեշտ կլիներ մեծացնել) բավարար պարզությամբ դրսևորում են այն փաստը, որ ածանցյալի գաղափարը էապես կապված է գիտության տարբեր բնագավառների հիմնական գաղափարների հետ, նպաստելով այդ գաղափարների հենց հայտնաբերմանը:

Ածանցյալների հաշվումը, ուսումնասիրումը և նրանց հատկությունների օգտագործումը հենց կազմում են դիֆերենցիալ հաշվի *հիմնական առարկան:*

Ածանցյալի նշանակման համար օգտագործում են տարբեր պայմանանշաններ (սիմվոլներ)՝

$$\frac{dy}{dx} \text{ կամ } \frac{df(x_0)^*}{dx} \qquad (\text{Լայբնից}),$$

$$y' \text{ կամ } f'(x_0) \qquad (\text{Լագրանժ}),$$

$$Dy \text{ կամ } D\,f(x_0) \qquad (\text{Կոշի}):$$

Մենք մեծ մասամբ կօգտվենք Լագրանժի պարզ նշանակումներից: Եթե կիրառում են ֆունկցիոնալ նշանակումը (տե՛ս երկրորդ սյունը), ապա փակագծերի մեջ գրած x_0 *տառը ցույց է տալիս անկախ փոփոխականի հենց այն արժեքը, որի համար վերցվում է ածանցյալը: Վերջապես, նկատենք, որ այն դեպքերում, երբ կարող է կասկած առաջանալ այն փոփոխականի նկատմամբ, ըստ որի վերցրած է ածանցյալը (որի հետ բաղդատելով սահմանվում է «ֆունկցիա-*

---

* *Առայժմ Լայբնիցի նշանակումները մենք դիտարկում ենք որպես ամբողջական սիմվոլներ. ստորև մենք կտեսնենք, որ նրանք կարելի է դիտարկել նաև որպես կոտորակներ: Մենք չենք օգտվելու Նյուտոնի* $\dot{y}$ *նշանակումից, որը ենթադրում է, որ անկախ փոփոխականի դերը կատարում է ժամանակը (այդ առթիվ տե՛ս* n° **224**)*.*

յի փոփոխման արագությունը»), այդ փոփոխականը գրվում է նշանիկի տեսքով ներքևում՝

$$y'_x,\quad f'_x(x_0),\quad D_x y,\quad D_x f(x_0),$$

ընդ որում, x նշանիկը կապ չունի անկախ փոփոխականի այն մասնակի x_0 արժեքի հետ, որի դեպքում հաշվում ենք ածանցյալը։

[Որոշ իմաստով, կարելի է ասել, որ

$$\frac{df}{dx},\quad f' \text{ կամ } f'_x,\quad Df \text{ կամ } D_x f$$

ամբողջական սիմվոլները ֆունկցիոնալ նշանակումների դեր են կատարում ֆունկցիայի ածանցյալի համար]։

Այժմ վերևում ստացված մի քանի արդյունքները գրենք, օգտվելով ածանցյալի համար մտցված սիմվոլներից։ Շարժման արագության համար ունենք՝

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{կամ} \quad v = s'_t,$$

իսկ արագացման համար՝

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{կամ} \quad a = v'_t\text{։}$$

Նույն ձևով, $y = f(x)$ կորի շոշափողի անկյունային գործակիցը կգրվի այսպես՝

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} \quad \text{կամ} \quad \operatorname{tg}\alpha = y'_x$$

և այլն։

79. Ածանցյալներ հաշվելու օրինակներ: *Որպես օրինակներ հաշվենք մի շարք տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները։*

1°. Ամենից առաջ նշենք երկու ակնհայտ արդյունքներ. եթե $y = c = \text{const.}$, *ապա* $\Delta y = 0$, *ինչպիսին էլ լինի* Δx*-ը, այնպես որ* $y' = 0$։ *Իսկ եթե* $y = x$, *ապա* $\Delta y = \Delta x$ *և* $y' = 1$։

2°. *Աստիճանային ֆունկցիա՝* $y = x^{\mu}$ *(որտեղ* μ*-ն ցանկացած իրական թիվ է)։* x*-ի փոփոխման տիրույթը կախված է* μ*-ից. այն ցույց է տրված* n° **22**, *2°-ում։ Ունենք (երբ* $x \neq 0$*)՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = x^{\mu - 1}\,\frac{\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}},$$

Եթե օգտվենք n° **65**, *3)-ում հաշված սահմանից, ապա կստանանք՝*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu-1}*,$$

Մասնավորապես,

եթե $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, *ապա* $y' = (-1)\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$,

եթե $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ *ապա* $y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

3°. *Ցուցչային ֆունկցիա՝* $y = a^x$ $(a > 0, -\infty < x < +\infty)$։ *Այստեղ՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

Օգտվելով n° **65**,2)*-ում հաշված սահմանից, կգտնենք՝*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Մասնավորապես՝

եթե $y = e^x$, *ապա* $y' = e^x$։

Ուրեմն, ցուցչային ֆունկցիայի աճման արագությունը (երբ $a > 1$*) համեմատական է այդ ֆունկցիայի արժեքին. որքան ավելի մեծ արժեքի է արդեն հասել ֆունկցիան, այնքան ավելի արագ է նա աճում այդ պահին։ Սա ցուցչային ֆունկցիայի աճման ճշգրիտ բնութագիրն է։*

4.° *Լոգարիթմական ֆունկցիա՝* $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1, 0 < x < +\infty)$։ *Այս դեպքում՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

* *Եթե* $\mu > 1$, *ապա հեշտ է անմիջապես ստանալ ածանցյալի արժեքը* $x = 0$ *դեպքում՝* $y' = 0$։

12—125

Օգտվելով n° **65**, *1)-ում հաշված սահմանից, կստանանք՝*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a e}{x}\text{։}$$

Մասնավորապես, բնական լոգարիթմի համար կստացվի բացառիկ պարզ արդյունք՝

$$\textit{երբ } y = \ln x, \textit{ ունենք } y' = \frac{1}{x}\text{։}$$

Այս հիմք է հանդիսանում (թեկուզ և, ըստ էության, ոչ նոր)՝ տեսական հետազոտությունների ժամանակ բնական լոգարիթմը գերադասել մյուս լոգարիթմներից։

Այն հանգամանքը, որ լոգարիթմական ֆունկցիայի աճման արագությունը հակադարձ համեմատական է արգումենտի արժեքին ($1<a$ *դեպքում) և արգումենտն անվերջ մեծացնելիս նա ձգտում է զրոյի, դրական մնալով, լավ բնութագրում է լոգարիթմական ֆունկցիայի աճը։*

5°. *Եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ։ Դիցուք* $y =$ $=$ in x, *այդ ժամանակ՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

Օգտվելով $\cos x$ *ֆունկցիայի անընդհատությունից և* n° **34**, 5)*-ից հայտնի՝* $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ *սահմանից, կստանանք՝*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x^{*}\text{։}$$

---

* *Նշենք, որ այս բանաձևը իր պարզությամբ պարտական է նրան, որ անկյունը չափվում է ռադիաններով։ Եթե* x*-ը չափենք, օրինակ, աստիճաններով, այդ դեպքում սինուսի և անկյան հարաբերության սահմանը հավասար չէր լինի մեկի, այլ, ինչպես հեշտ է տեսնել, կլիներ* $\frac{\pi}{180}$ *և այդ ժամանակ մենք կունենայինք՝*

$$(\sin x) = \frac{\pi}{180} \cos x\text{։}$$

Նման ձևով կստանանք՝

եթե $y = \cos x$, *ապա* $y' = -\sin x$։

$y = \operatorname{tg} x$ *ֆունկցիայի համար կունենանք՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\sin(x+\Delta x)\cdot\cos x - \cos(x+\Delta x)\cdot\sin x}{\Delta x\cdot\cos x\cdot\cos(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)},$$

Այստեղից, ինչպես և վերևում՝

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x։$$

Նման եղանակով՝

եթե $y = \operatorname{ctg} x$, *ապա* $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$։

80. Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը։ *Նախքան հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալները հաշվելը, ապացուցենք հետևյալ ընդհանուր թեորեման.*

Թեորեմա։ Դիցուք 1) $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է n°71-ի՝ հակադարձ ֆունկցիայի գոյության վերաբերյալ թեորեմայի պայմաններին, 2) $y = f(x)$ ֆունկցիան $x = x_0$ կետում ունի վերջավոր և զրոյից տարբեր $f'(x_0)$ ածանցյալ։ Այդ դեպքում $x = g(y)$ հակադարձ ֆունկցիայի համար համապատասխան $y_0 = f(x_0)$ կետում նույնպես գոյություն ունի $g'(y_0)$ ածանցյալը և հավասար է $\dfrac{1}{f'(x_0)}$-ի.։

Ապացույց։ $y = y_0$ *արժեքին տանք* Δy *կամավոր աճ, այդ ժամանակ համապատասխան* Δx *աճ կստանա և* $x = g(y)$ *ֆունկցիան։ Նկատենք, որ երբ* $\Delta y \neq 0$, *ապա,* $y = f(x)$ *ֆունկցիայի միարժեքության շնորհիվ, նաև* $\Delta x \neq 0$։ *Ունենք՝*

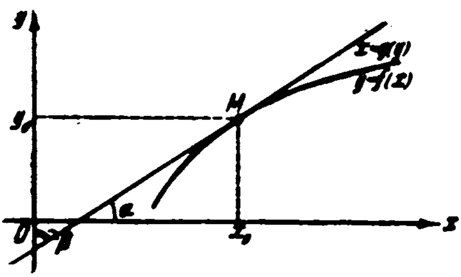
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}},$$

Այժմ, եթե որևէ օրենքով Δy*-ը ձգտի զրոյի, ապա,* $x=g(y)$ *ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, նաև* Δx *աճը կձգտի 0-ի։ Սակայն այդ ժամանակ վերոհիշյալ հավասարության աջ մասի հայտարարը կձգտի* $f'(x_0) \neq 0$ *սահմանին, հետևապես գոյություն ունի նաև ձախ մասի համար սահման, որը հավասար է* $\frac{1}{f'(x_0)}$*-ի և ներկայացնում է* $g'(y_0)$ *ածանցյալը։*

Այսպիսով, ստացանք հետևյալ պարզ բանաձևը՝

$$x'_y = \frac{1}{y'_x},$$

Հեշտ է պարզել վերջինիս երկրաչափական իմաստը։ Մենք գիտենք, որ y'_x *ածանցյալը* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկին տարած շոշափողով և* x*-երի առանցքով կազմված* α *անկյան տանգենսն է։ Սակայն,* $x=g(y)$ *հակադարձ ֆունկցիան նույն գրաֆիկն ունի, միայն թե սրա համար անկախ փոփոխականի արժեքները դրվում են* y*-ների առանցքի վրա։ Այդ պատճառով,* x'_y *ածանցյալը հավասար է նույն շոշափողով և* y*-ների առանցքով կազմված* β *անկյան տանգենսին (գծ. 34)։ Ուրեմն, ստացված բանաձևը հանգում է* $\frac{\pi}{2}$ *գումար ունեցող* α *և* β *երկու անկյունների տանգենսների միջև եղած հայտնի առնչությանը՝*



Գծ. 34.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Օրինակի համար, ընդունենք $y = a^x$*։ Սրա հակադարձ ֆունկցիան կլինի* $x = \log_a y$*։ Քանի որ (տես* 3°*)* $y'_x = a^x \ln a$*, ապա մեր բանաձևով կստանանք՝*

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{a_x \ln a} = \frac{\log_a e}{y},$$

որը նույնն է, ինչ որ 4°*-ում ստացածը։*

Այժմ անցնելով հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալները հաշվելուն, հարմարության համար x *և* y *փոփոխականների դերերը փոխենք և ստացված բանաձևը գրենք այսպես՝*

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

6.° Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ։ Դիտարկենք $y = \arcsin x$ *ֆունկցիան* $(-1 < x < 1)$, *ընդ որում՝* $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. *Այս հանդիսանում է* $x = \sin y$ *ֆունկցիայի հակադարձը, որը* y*-ի նշված արժեքների համար ունի* $x'_y = \cos y$ *դրական ածանցյալ։ Այդ դեպքում գոյություն ունի նաև* y'_x *ածանցյալը, որը, ըստ մեր բանաձևի, հավասար է՝*

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

արմատը վերցնում ենք դրական նշանով, որովհետև $\cos y > 0$.

Մենք բացառեցինք $x = \pm 1$ *արժեքները, որովհետև համապատասխան* $y = \pm \frac{\pi}{2}$ *արժեքների համար ածանցյալը հավասար է զրոյի՝* $x'_y = \cos y = 0$.

$y = \operatorname{arctg} x \ (-\infty < x < +\infty)$ *ֆունկցիան հանդիսանում է* $x = \operatorname{tg} y$ *ֆունկցիայի հակադարձը։ Ըստ մեր բանաձևի, կունենանք՝*

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Նման ձևով կարելի է ստանալ՝

$y = \arccos x$ *ֆունկցիայի համար՝* $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1)$,

$y = \operatorname{arcctg} x$ *ֆունկցիայի համար՝* $y' = -\frac{1}{1+x^2} \ (-\infty < x < +\infty)$.

81. Ածանցյալների բանաձևերի ցանկ: *Կատարենք մեր ստացած բոլոր բանաձևերի ամփոփում.*

1. $y = c$	$y' = 0$
2. $y = x$	$y' = 1$
3. $y = x^{\mu}$	$y' = \mu x^{\mu-1}$

$y = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $y' = -\frac{1}{x^2}$

$y = \sqrt{x}$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. $y = a^x$ $\qquad$ $y' = a^x \cdot \ln a.$

$y = e^x$ $\qquad$ $y' = e^x$

5. $y = \log_a x$ $\qquad$ $y' = \frac{\log_a e}{x}$

$y = \ln x$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{x}$

6. $y = \sin x$ $\qquad$ $y' = \cos x$

7. $y = \cos x$ $\qquad$ $y' = -\sin x$

8. $y = \operatorname{tg} x$ $\qquad$ $y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

9. $y = \operatorname{ctg} x$ $\qquad$ $y' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

10. $y = \arcsin x$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y \operatorname{arc} \cos x$ $\qquad$ $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $y = \operatorname{arctg} x$ $\qquad$ $y' = \frac{1}{1+x^2}$

13. $y = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad$ $y' = -\frac{1}{1+x^2}$

82. Ֆունկցիայի աճի բանաձևը: *Այստեղ ապացուցենք երկու պարզ առաջադրություն, որոնք կկիրառվեն հետագայում։*

Դիցուք $y = f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է* X *միջակայքում։ Ելնելով այդ միջակայքի* $x = x_0$ *որոշակի արժեքից,* x*-ի կամայական աճը նշանակենք* $\Delta x \neq 0$, *պայմանով, որ* $x_0 + \Delta x$ *կետը դուրս չգա* X*-ի սահմաններից։ Այդ դեպքում ֆունկցիայի համապատասխան աճը կլինի՝*

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)։$$

1°. Երբ $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի $y'_x = f'(x_0)$ (վերջավոր) ածանցյալ, ապա ֆունկցիայի աճը կարող է ներկայացվել այսպես՝

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x \qquad (2)$$

կամ, ավելի կարճ՝

$$\Delta y = y'_x\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x, \qquad (2ա)$$

որտեղ α-ն Δx-ից կախված մեծություն է և նրա հետ միասին ձգտում է զրոյի:

Քանի որ, հենց ածանցյալի սահմանման համաձայն, երբ $\Delta x \to 0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'_x,$$

ուստի, նշանակելով՝

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x,$$

տեսնում ենք, որ նաև $\alpha \to 0$։ *Այստեղից որոշելով* Δy*-ը, կստանանք (2ա) բանաձևը։*

Քանի որ $\alpha\cdot\Delta x$ *մեծությունը (երբ* $\Delta x \to 0$*) կլինի* Δx*-ի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, ուստի, օգտագործելով* n° **54**-*ում մուծված նշանակումը, կարելի է վերոհիշյալ բանաձևերը գրել այսպես՝*

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x) \qquad (3)$$

կամ այսպես՝

$$\Delta y = y'_x\cdot\Delta x + o(\Delta x)։ \qquad (3ա)$$

Դիտողություն: *Մինչև հիմա մենք համարում էինք* $\Delta x \neq 0$. *α մեծությունը* $\Delta x = 0$ *արժեքի համար որոշված էլ չէր։ Երբ մենք ասում էինք, թե Δx-ը զրոյի ձգտելիս α-ն ձգտում է զրոյի, ապա (ինչպես սովորաբար) ենթադրում էինք, որ Δx-ը ձգտում է 0-ի ցանկացած օրենքով, սակայն չընդունելով զ ր ո ա ր ժ ե ք։ Այժմ ընդունենք $\alpha = 0$, երբ $\Delta x = 0$. այդ դեպքում, հասկանալի է, (2) բանաձևը ճիշտ կլինի նաև $\Delta x = 0$ արժեքի համար։ Բացի այդ, Δx-ը զրոյի ձգտելիս $\alpha \to 0$ առնչությունը կարելի է հասկանալ ավելի լայն իմաստով, քան առաջ, առանց բացառելու Δx-ի համար այն հնարավորությունը, որ նա զրոյի ձգտելիս մյուս արժեքների թվում ընդունի նաև զրո արժեքը։*

Ապացուցված բանաձևերից անմիջապես բխում է՝

2.° Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի (վերջավոր) ածանցյալ, ապա այդ կետում ֆունկցիան անընդհատ ա ն ը ն դ հ ա տ է:

Իրոք, (2ա)-ից պարզ է, որ $\Delta x \to 0$-ից հետևում է՝ $\Delta y \to 0$։

83. Ածանցյալներ հաշվելու պարզագույն կանոնները: *Նախորդ* n° n°-*ում մենք հաշվեցինք տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները։ Այստեղ և հաջորդ* n°-*ում մենք կստանանք մի շարք պարզ կանոններ, որոնց օգնությամբ հնարավոր կլինի հաշվել ամեն մի ֆունկցիայի ածանցյալը, որը կազմված է տարրական ֆունկցիաներից՝ վերջավոր թվով թվաբանական գործողությունների և սուպերպոզիցիաների միջոցով* [25]։

I. Դիցուք $u = \varphi(x)$ ֆունկցիան (մի որոշ x կետում) ունի u' ածանցյալ: *Ապացուցենք, որ* $y = cu$ ($c = \text{const.}$) ֆունկցիան նույնպես ունի ածանցյալ (նույն կետում) *և հաշվենք այն։*

Եթե x անկախ փոփոխականին տանք Δx աճ, ապա u ֆունկցիան կստանա Δu աճ, սկզբնական u արժեքից անցնելով $u + \Delta u$ արժեքին։ y ֆունկցիայի նոր արժեքը կլինի $y + \Delta y = c(u + \Delta u)$: *Այստեղից՝* $\Delta y = c\Delta u$, *և՝*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot u'։$$

Ուրեմն, ածանցյալը գոյություն ունի և հավասար է

$$y' = (c \cdot u)' = c \cdot u'։$$

Այս բանաձևը արտահայտում է այսպիսի կանոն՝ հ ա ս տ ա տ ո ւ ն ա ր տ ա դ ր ի չ ը կ ա ր ե լ ի է դ ո ւ ր ս բ ե ր ե լ ածանցյալի նշանի տակից։

II. Դիցուք $u=\varphi(x)$ և $v=\psi(x)$ ֆունկցիաները (մի որոշ կետում) ունեն u' և v' ածանցյալներ: Ապացուցենք, որ $y=u\pm v$ ֆունկցիան նույնպես ունի ածանցյալ (նույն կետում) և հաշվենք այն:

x-ին տանք Δx աճ. այդ ժամանակ u, v և y ֆունկցիաները համապատասխանաբար կստանան Δu, Δv և Δy աճեր։ Նրանց $u+\Delta u$, $v+\Delta v$ և $y+\Delta y$ նոր արժեքները կապված կլինեն նույն առնչությամբ՝

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v)։$$

Այստեղից՝

$$\Delta y=\Delta u\pm\Delta v,\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

և՝

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v',$$

այնպես որ y' ածանցյալը գոյություն ունի և հավասար է՝

$$y'=(u\pm v)'=u'\pm v'։$$

Այս արդյունքը հեշտությամբ կարելի է տարածել ցանկացած թվով գումարելիների վրա (այն էլ՝ նույն մեթոդով)։

III. u և v ֆունկցիաների նկատմամբ անելով նույն ենթադրությունները, ապացուցենք, որ $y=u\cdot v$ ֆունկցիան նույնպես ածանցյալ ունի, *և հաշվենք այն։*

Ինչպես վերևում ստացինք, Δx աճին կհամապատասխանեն Δu, Δv և Δy աճեր, ընդ որում $y+\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)$, ուստի՝

$$\Delta y=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$

և՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v։$$

Քանի որ Δx-ը զրոյի ձգտելիս, n° **82**, 2°*-ում ասածի շնորհիվ, նաև* $\Delta v\to 0$, *ուստի՝*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\cdot v+u\cdot v'$$

այսինքն՝ գոյություն ունի y' *ածանցյալը և հավասար է՝*

$$y' = (u \cdot v)' = u' \cdot v + v'u.$$

Եթե $y = uvw$, *ընդ որում* u', v', w' *ածանցյալները գոյություն ունեն, ապա՝*

$$y = [(uv)w]' = (uv)' \cdot w + (uv) \cdot w' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Հեշտ է հասկանալ, որ n *արտադրիչների դեպքում նման ձևով կստացվի՝*

$$[\overbrace{u \cdot v \cdot w \cdots s}^{n}]' = u'vw \cdots s + uv'w \cdots s + uvw' \cdots s + uvw \cdots s'. \quad (4)$$

Այս ապացուցելու համար կարելի է օգտվել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից։

IV. Վերջապես, եթե u և v ֆունկցիաները բավարարում են նախորդ ենթադրություններին և, բացի այդ, v-ն զրոյից տարբեր է, ապա ապացուցենք, որ $\frac{u}{v}$ ֆունկցիան նույնպես ածանցյալ ունի *և հաշվենք այն։*

Վերոհիշյալ նշանակումներով, կունենանք՝

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

ուստի՝

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

և՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

Δx-*ը ձգտեցնելով զրոյի (ընդ որում միաժամանակ նաև* $\Delta v \to 0$), *կհամոզվենք, որ գոյություն ունի*

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

ածանցյալը։

84. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը։ *Այժմ մենք կարող ենք ստանալ պրակտիկայում ածանցյալ գտնելու համար շատ կարևոր մի կանոն, որը թույլ կտա հաշվել բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը, եթե հայտնի են բաղադրիչ ֆունկցիաների ածանցյալները։*

V. Դիցուք 1) $u = \varphi(x)$ ֆունկցիան մի որոշ x_0 կետում ունի $u'_x = \varphi'(x_0)$ ածանցյալ, 2) $y = f(u)$ ֆունկցիան համապատասխան

$u_0 = \varphi(x_0)$ կետում ունի $y'_u = f'(u_0)$ ածանցյալ: Այդ ժամանակ $y = f(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիան ևս վերոհիշյալ x_0 կետում կունենա ածանցյալ, որը հավասար կլինի $f(u)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաների ածանցյալների արտադրյալին՝

$$[f(\varphi(x_0))]' = f'_u(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)^*,$$

կամ ավելի կարճ՝

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x:$$

Ապացուցելու համար x*-ին տանք կամայական* Δx *աճ. դիցուք* Δu*-ն՝* $u = \varphi(x)$ *ֆունկցիայի համապատասխան աճն է, իսկ* Δy*-ը՝* $y = f(u)$ *ֆունկցիայի այն աճն է, որն առաջացել է* Δu *աճի շնորհիվ: Օգտվենք (2ա) առնչությունից, որի մեջ, եթե* x*-ը փոխարինենք* u*-ով, կստանանք՝*

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

(α*-ն կախված է* Δu*-ից և նրա հետ միասին ձգտում է զրոյի): Վերջինս անդամ առ անդամ բաժանելով* Δx*-ի վրա, կստանանք՝*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

Եթե Δx*-ը ձգտում է զրոյի, ապա զրոյի կձգտի նաև* Δu*-ն* [n° **82**, 2°], *իսկ այդ ժամանակ, ինչպես մենք գիտենք, զրոյի կձգտի նաև* Δu*-ից կախված* α *մեծությունը: Հետևապես, գոյություն ունի հետևյալ սահմանը՝*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x,$$

որը և իրենից ներկայացնում է որոնելի y'_x *ածանցյալը:*

Դիտողություն: *Այստեղ հանդես է գալիս* $\Delta x = 0$ *արժեքի դեպքում* α *մեծության մասին n°* **82***-ում արված դիտողության օգտավետությունը. քանի դեռ* Δx*-ը անկախ փոփոխականի աճն էր, մենք կարող էինք այն ընդունել զրոյից տարբեր, բայց երբ* Δx*-ը*

---

* *Ընդգծենք, որ* $f'_u(\varphi(x_0))$ *սիմվոլը նշանակում է* $f(u)$ *ֆունկցիայի ածանցյալը ըստ իր* u *արգումենտի (այլ ոչ՝ ըստ* x*-ի), հաշված այդ արգումենտի* $u_0 = \varphi(x_0)$ *արժեքի դեպքում:*

փոխարինված է $u = \varphi(x)$ *ֆունկցիայի աճով, ապա նույնիսկ* $\Delta x \neq 0$ *արժեքների համար մենք արդեն իրավունք չունենք համարելու, որ* $\Delta u \neq 0$։

85. Օրինակներ*։ *Նախ բերենք* I—IV *կանոնների կիրառման մի քանի օրինակներ։*

1) Դիտարկենք

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + (a_{n-1}x)' + a_n$$

բազմանդամը։ Ըստ II, *և ապա ըստ* I *կանոնի, կունենանք՝*

$$y' = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + \ldots + (a_{n-2}x^2)' + (a_{n-1}x)' + (a_n)' =$$

$$= a_0(x^n)' + a_1(x^{n-1})' + \ldots + a_{n-2}(x^2)' + a_{n-1}(x)' + (a_n)'.$$

Օգտագործելով n° **81**-*ի 1, 2, 3 բանաձևերը, վերջնականապես կստանանք՝*

$$y' = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

2) $y = (2x^2 - 5x + 1)\cdot e^x$.

Ըստ III *կանոնի, կունենանք՝*

$$y' = (2x^2 - 5x + 1)'e^x + (2x^2 - 5x + 1)\cdot(e^x)'.$$

Հենվելով նախորդ օրինակի և n° **81**-*ի և 4-րդ բանաձևի վրա, կստանանք՝*

$$y' = (4x - 5)e^x + (2x^2 - 5x + 1)e^x = (2x^2 - x - 4)e^x.$$

3) $y = \dfrac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}$.

Այստեղ նախ պետք է օգտվել IV *կանոնից, և ապա* II *և* III *կանոններից (նաև* n° **81**-*ի 6, 7 բանաձևերից).*

$$y' = \frac{(x\sin x + \cos x)'(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(x\cos x - \sin x)'}{(x\cos x - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{x\cos x(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x - \sin x)^2} = \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

---

* *Ստորև* x, y, u, v *տառերով նշանակված են փոփոխականները, իսկ մյուս տառերով՝ հաստատունները։*

Համարիչի և հայտարարի ածանցյալների հաշվումը մենք կատարեցինք առանց առանձին քայլերի վերածելու։ Վարժությունների միջոցով անհրաժեշտ է հասնել այնպիսի դրության, որպեսզի կարողանանք ընդհանրապես ածանցյալները գրել միանգամից։

Բարդ ֆունկցիաների ածանցյալներ հաշվելու օրինակներ։

4) Դիցուք $y = \ln \sin x$, *այլ խոսքով,* $y = \ln u$, *որտեղ* $u = \sin x$։ *Ըստ* V *կանոնի՝* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$։ *Այստեղ* $y'_u = (\ln u)'_u = \frac{1}{u}$ *ածանցյալը (5-րդ բանաձև) պետք է վերցնել* $u = \sin x$*-ի դեպքում։ Այսպիսով, կունենանք՝*

$$y'_x = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x \qquad \textit{(6-րդ բանաձև)}.$$

5) $y = e^{x^2}$, *այսինքն՝* $y = e^u$, *որտեղ* $u = x^2$.

$$y'_x = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2} \qquad (\text{V, 4 և 3}).$$

Իհարկե, բարդ ֆունկցիայի բաղադրիչ ֆունկցիաներն առանձին-առանձին գրելը գործնականում անհրաժեշտ չէ։

6) $y = \sin ax$, $y'_x = \cos ax \cdot (ax)' = a \cdot \cos ax \qquad (\text{V, 7, 1, 2})$

7) $$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad y'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (\text{V, 12, 3}).$$

Մի քանի սուպերպոզիցիաների հետևանքով ստացվող բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը գտնելու համար պետք է հ ա ջ ո ր դ ա բ ա ր կիրառել V *կանոնը։*

8) $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}$.

Այս դեպքում՝

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right)'_x = \qquad (\text{V, 3})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}} \cdot \sec^2 \frac{1}{2} x \cdot \left(\frac{1}{2} x\right)'_x = \qquad (\text{V, 8})$$

$$= \frac{\sec^2 \frac{1}{2} x}{4\sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x}},$$

Բերենք և մի քանի օրինակ բոլոր կանոնների կիրառման վերաբերյալ.

9) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + c})$,

$$y'_x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+c}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+c}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+c}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+c}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+c}},$$

10) $y = \frac{x}{c\sqrt{x^2+c}}$.

$$y'_x = \frac{1}{c} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+c} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+c}}}{\left(\sqrt{x^2+c}\right)^2} = \frac{1}{(x^2+c)^{3/2}},$$

11) Վարժության կարգով հետազոտենք նաև $y = u^v$ $(u > 0)$ *աստիճանա-ցուցչային արտահայտության ածանցյալի հարցը, որտեղ* u*-ն և* v*-ն* x*-ի ֆունկցիաներ են, որոնք տվյալ կետում ունեն* u' *և* v' *ածանցյալներ։*

Լոգարիթմելով $y = u^v$ *հավասարությունը, կստանանք՝*

$$\ln y = v \cdot \ln u. \qquad (4)$$

Այսպիսով, y*-ի արտահայտությունը կարելի է գրել նաև* $y = e^{v \cdot \ln u}$ *տեսքով, որտեղից արդեն պարզ է, որ* y' *ածանցյալը գոյություն ունի։ Իսկ այն հաշվելու համար ամենից հեշտ կլինի, եթե (4) հավասարության երկու կողմերի ածանցյալները միմյանց հավասարեցնենք։ Այդ ժամանակ մենք օգտագործում ենք V և III կանոնները (հիշելով, որ* u*-ն,* v*-ն և* y*-ը* x*-ի ֆունկցիաներ են)։ Մենք կստանանք՝*

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

որտեղից՝

$$y' = y\left(\frac{vu'}{u} + v' \ln u\right),$$

կամ, y*-ի տեղը գրելով իր արտահայտությունը, վերջնականապես կստանանք՝*

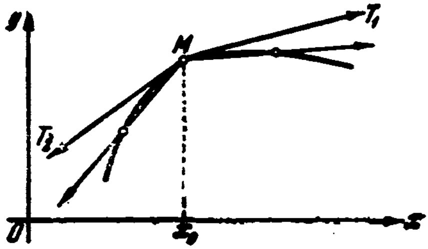
$$y' = u^v\left(\frac{vu'}{u} + v' \ln u\right). \qquad (5)$$

Այս բանաձևն առաջին անգամ ստացել են Լայբնիցը և Ի. Բեռնուլին։

Օրինակ.

$$\text{եթե } y = x^{\sin x}, \text{ ապա } y'_x = x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right)։$$

86. Միակողմյան ածանցյալներ: *Վերջում քննության առնենք մի շարք հատուկ դեպքեր, որոնք կարող են առաջանալ ածանցյալների վերաբերյալ։ Սկսենք միակողմյան ածանցյալների գաղափարի սահմանումից։ Եթե դիտարկվող* x *արժեքը հանդիսանում է այն* X *միջակայքի ծայրերից մեկը, որտեղ որոշված է* $y = f(x)$ *ֆունկցիան, ապա* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *հարաբերության սահմանը հաշվելիս ստիպված կլինենք սահմանափակվել այն դեպքով, երբ* Δx*-ը զրոյի է ձգտում միայն աջից (երբ խոսքը վերաբերում է միջակայքի ձախ ծայրին) կամ միայն ձախից (աջ ծայրի համար)։ Այս դեպքում խոսում են միակողմյան ածանցյալի մասին՝ աջից կամ ձախից։ Համապատասխան կետերում ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի միակողմյան շոշափող։*



Գծ. 35.

Կարող է պատահել, որ ներքին x *կետի համար էլ գոյություն ունենան* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *հարաբերության միայն միակողմյան սահմաններ (երբ* $\Delta x \to +0$ *կամ երբ* $\Delta x \to -0$*), որոնք իրարից տարբեր են. դրանք նույնպես կոչվում են միակողմյան ածանցյալներ։ Համապատասխան կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի համար գոյություն կունենան միայն միակողմյան շոշափողներ, որոնք իրար հետ անկյուն են կազմում, իսկ այդ կետը կլինի անկյունային կետ (գծ. 35)։*

Որպես օրինակ քննության առնենք $y = f(x) = |x|$ *ֆունկցիան։ Ելնելով* $x = 0$ *արժեքից, կունենանք՝*

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|,$$

Եթե $\Delta x > 0$, *ապա՝*

$$\Delta y = \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

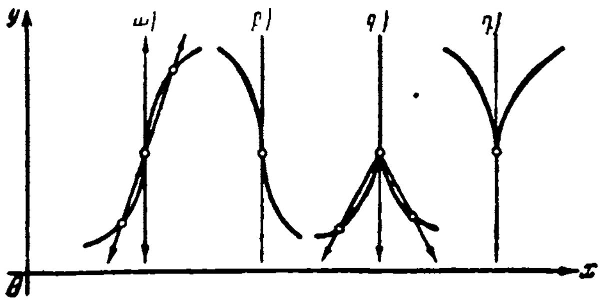
Իսկ եթե $\Delta x < 0$, ապա՝

$$\Delta y = -\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Կոորդինատների սկզբնակետը այս ֆունկցիայի գրաֆիկի համար անկյունային կետ է, որն ստացվում է առաջին և երկրորդ կոորդինատային անկյունների կիսորդների հատումից։

87. Անվերջ ածանցյալներ։

Եթե աճերի $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ հարաբերությունը, երբ $\Delta x \to 0$, ձգտում է $+\infty$ կամ $-\infty$, ապա այդ անիսկական թիվը նույնպես անվանում են ածանցյալ և նշանակում են սովորական ձևով։



Գծ. 36.

Ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանումը, որպես շոշափողի անկյունային գործակից, տարածվում է նաև այս դեպքի վրա, բայց այստեղ շոշափողը լինում է y-ների առանցքին զուգահեռ (գծ. 36 ա, բ)։ Նույն ձևով սահմանվում է միակողմյան անվերջ ածանցյալի գաղափարը։

Ի դեպ, այս անգամ նույնիսկ տարբեր նշաններով միակողմյան ածանցյալների առկայության դեպքում (գծ. 36, գ, դ) դարձյալ գոյություն ունի միակ՝ ուղղաձիգ շոշափող։ Այս դեպքի առանձնահատկությունը սայրի առկայությունն է՝ ուղղված դեպի վեր կամ դեպի վար։

Դիցուք, օրինակ, $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$։ $x \neq 0$ դեպքում n° **81**-ի 3-րդ բանաձևը տալիս է՝

$$f_1'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},$$

որը, սակայն, կիրառելի չէ $x = 0$ դեպքում։ Այդ կետում ածանցյալը հաշվենք, ելնելով անմիջապես նրա սահմանումից. կազմելով

$$\frac{f_1(0+\Delta x)-f_1(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}}$$

հարաբերությունը, տեսնում ենք, որ նրա սահմանը, երբ $\Delta x \to 0$, կլինի $+\infty$։

Նման ձևով կհամոզվենք, որ $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ֆունկցիայի համար $x = 0$ դեպքում ածանցյալը ձախից հավասար է $-\infty$, իսկ աջից՝ $+\infty$։

*Օգտվելով ածանցյալի գաղափարի ընդհանրացումից, կարելի է n° **80**-ի հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալին վերաբերող թեորեման լրացնել ցուցումով այն մասին, որ այն դեպքերում, երբ $f'(x_0)$-ն հավասար է զրոյի կամ անվերջության, հակադարձ ֆունկցիայի $g'(y_0)$ ածանցյալը գոյություն ունի և հավասար է, համապատասխանաբար, $\pm\infty$ կամ 0-ի։ Օրինակ, քանի որ $\sin x$ ֆունկցիան $x = \pm\frac{\pi}{2}$ դեպքում ունի $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ածանցյալը, ապա $\arcsin y$ հակադարձ ֆունկցիայի համար $y = \pm 1$ դեպքում գոյություն ունի անվերջ ածանցյալ (այն է՝ $+\infty$)։*

88. Հատուկ դեպքերի այլ օրինակներ: 1°. Օրինակ, երբ ածանցյալ գոյություն չունի։ Ինչպես արդեն տեսանք, [n° **86**] $y = |x|$ ֆունկցիան $x = 0$ կետում սովորական, *ե ր կ կ ո ղ մ յ ա ն*, ածանցյալ չունի։ Սակայն ավելի հետաքրքիր է հետևյալ ֆունկցիայի օրինակը՝

$$f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x} \quad (\text{երբ } x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

որն անընդհատ է նաև $x = 0$ դեպքում [n° **67**, *4*), բայց այդ կետում նա չունի նույնիսկ միակողմյան ածանցյալներ։ Իրոք,

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}$$

հարաբերությունը, երբ $\Delta x \to \pm 0$, ոչ մի սահմանի չի ձգտում։

Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկից (գծ. 21) հեշտ է նկատել, որ OM_1 հատողը, որը դուրս է գալիս O սկզբնակետից, երբ M_1 կետը ձգտում է O-ին, սահմանային դիրք չունի, ուստի սկզբնակետում կորը շոշափող (նույնիսկ միակողմյան) չունի։

Հետագայում մենք կծանոթանանք մի նշանավոր ֆունկցիայի հետ, որը արգումենտի բոլոր արժեքների դեպքում անընդհատ է, բայց նրանցից ոչ մեկի դեպքում ածանցյալ չունի։

2°. Օրինակ, երբ ածանցյալը խզում ունի: *Եթե մի որոշ X միջակայքի յուրաքանչյուր կետում $y = f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $y' = f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ, ապա այդ ածանցյալը, իր հերթին, իրենից ներկայացնում է x-ի ֆունկցիա X միջակայքում։ Մինչև հիմա մեզ հանդիպած բազմաթիվ օրինակների մեջ պարզվում էր, որ այդ ֆունկցիան ինքն էլ անընդհատ էր։ Սակայն, կարող է և այդպես չլինել։ Դիտարկենք, օրինակ, հետևյալ ֆունկցիան՝*

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \quad (\text{երբ } x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

Եթե $x \neq 0$, ապա նրա ածանցյալը հաշվվում է սովորական եղանակով՝

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

Սակայն ստացված արդյունքը $x = 0$ արժեքի համար կիրառելի չէ։ Այս դեպքում, դիմելով անմիջապես ածանցյալի գաղափարի սահմանմանը, կունենանք՝

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} = 0,$$

Միաժամանակ պարզ է, երբ $x \to 0$, $f'(x)$-ը ոչ մի սահմանի չի ձգտում, ուստի $x = 0$ արժեքի դեպքում $f'(x)$ ֆունկցիան խզում ունի։

Այս օրինակում ածանցյալի խզումը երկրորդ տեսակի է։ Այդ պատահականություն չէ. հետագայում [n° **108**] *մենք կտեսնենք, որ ածանցյալը առաջին տեսակի խզումներ, այսինքն թռիչքներ, ունենալ չի կարող։*

§ 2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

89. Դիֆերենցիալի սահմանումը: *Դիցուք ունենք $y = f(x)$ ֆունկցիան, որը որոշված է մի X միջակայքում և անընդհատ է նրա x_0 կետում։ Այդ ժամանակ արգումենտի Δx աճին կհամապատասխանի ֆունկցիայի*

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

աճը, որը Δx-ի հետ միասին անվերջ փոքր է։ Մեծ կարևորություն ունի հետևյալ հարցը՝ արդյոք Δy-ի համար գոյություն ունի՞ Δx-ի նկատմամբ գծային այնպիսի $A \cdot \Delta x$ ($A = \text{const.}$) անվերջ փոքր մեծություն, որ նրանց տարբերությունը Δx-ի նկատմամբ լինի ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր՝

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)։ \tag{1}$$

*Երբ $A \neq 0$, (1) հավասարության առկայությունը ցույց է տալիս, որ $A \cdot \Delta x$ անվերջ փոքրը համարժեք է Δy անվերջ փոքրին և, ուրեմն, վերջինիս համար ծառայում է իբրև գլխավոր մաս, եթե որպես հիմնական անվերջ փոքր վերցրած է Δx-ը [n°n° **56**, **57**]։*

Եթե (1) հավասարությունը տեղի ունի, ապա $y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի (տված $x = x_0$ արժեքի դեպքում), իսկ $A \cdot \Delta x$ արտահայտությունը կոչվում է ֆունկցիայի դիֆերենցիալ և նշանակվում է dy կամ $df(x_0)$ սիմվոլով:

[Վերջին դեպքում փակագծերի մեջ նշվում է x-ի սկզբնական արժեքը։]*

Կրկնում ենք, որ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը բնութագրվում է երկու հատկություններով. ա) նա արգումենտի Δx աճի գծային համասեռ ֆունկցիա է, բ) ֆունկցիայի աճից տարբերվում է այնպիսի մեծությամբ, որը, երբ $\Delta x \to 0$, հանդիսանում է ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր, քան Δx-ը։

Դիտարկենք օրինակներ.

1) r շառավիղ ունեցող շրջանի Q մակերեսը տրվում է $Q = \pi r^2$ բանաձևով։ Եթե r շառավիղը մեծացնենք Δr-ով, Q մեծության համապատասխան ΔQ աճը կլինի այն շրջանային օղակի մակերեսը, որը գտնվում է r և $r + \Delta r$ շառավիղներ ունեցող համակենտրոն շրջանագծերի միջև։

$$\Delta Q = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \cdot \Delta r + \pi(\Delta r)^2$$

արտահայտությունից անմիջապես նկատվում է, որ ΔQ-ի գլխավոր մասը, երբ $\Delta r \to 0$, կլինի $2\pi r \cdot \Delta r$-ը. հենց այդ էլ dQ դիֆերենցիալն է։ Երկրաչափորեն նա ներկայացնում է այն ուղղանկյան մակերեսը (որը կարծես՝ստացված է օղակի «ուղղումից»), որի հիմքը հավասար է շրջանագծի $2\pi r$ երկարությանը, իսկ բարձրությունը՝ Δr։

2) Դիտարկենք նյութական կետի ազատ անկումը, որը տեղի է ունենում $s = \frac{gt^2}{2}$ օրենքով։ Շարժվող կետը t-ից մինչև $t + \Delta t$, այսինքն՝ Δt ժամանակամիջոցում կանցնի հետևյալ ճանապարհը՝

$$\Delta s = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt \cdot \Delta t + \frac{g}{2} \cdot (\Delta t)^2։$$

Երբ $\Delta t \to 0$, նրա գլխավոր մասը կլինի $ds = gt \cdot \Delta t$։ Հիշելով, որ արագությունը t պահին կլինի $v = gt$ [n° **76**], տեսնում ենք, որ ճանապարհի դիֆերենցիալը

---

* Այստեղ df-ը, որպես միասնական սիմվոլ, ֆունկցիոնալ նշանակման դեր է խաղում։

(որը մոտավորապես փոխարինում է ճանապարհի աճին) հաշվվում է որպես մի ճանապարհ, որը կանցներ կետը, եթե ամբողջ Δt ժամանակամիջոցում նա շարժվեր հենց այդ արագությամբ։

90. Դիֆերենցելիության և ածանցյալի գոյության կապը։ *Այժմ հեշտ է ցույց տալ հետևյալ առաջադրության իրավացիությունը.*

Որպեսզի $y = f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի լինի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա համար այդ կետում գոյություն ունենա $y' = f'(x_0)$ վերջավոր ածանցյալ։ Այդ պայմանի բավարարման դեպքում (1) հավասարությունը տեղի ունի A հաստատունի այն արժեքի համար, որը հավասար է հենց այդ ածանցյալին՝

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + o(\Delta x): \qquad (1ա)$$

Անհրաժեշտությունը։ Եթե տեղի ունի (1) հավասարությունը, ապա այդտեղից կստացվի՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

ուստի, Δx-ը ձգտեցնելով 0-ի, իրոք կստանանք՝

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x։$$

Բավարարությունն անմիջապես բխում է n°82-ի 1°-ից [տե՛ս այնտեղ (3ա)]։

Ուրեմն, $y = f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը միշտ հավասար է՝

$$dy = y'_x \cdot \Delta x^{*}։ \qquad (2)$$

Այստեղ ևեթ ընդգծենք, որ այս արտահայտության մեջ Δx-ի տակ հասկանում ենք անկախ փոփոխականի կամայական աճ, այսինքն՝ կամայական թիվ (որը հաճախ հարմար է լինում համարել x-ից անկախ)։ Ընդ որում բոլորովին էլ անհրաժեշտ չէ Δx-ը համարել անվերջ փոքր. սակայն, եթե $\Delta x \to 0$, ապա dy դիֆերենցիալը նույնպես կլինի անվերջ փոքր, և կլինի (երբ $(y'_x \neq 0)$ հենց ֆունկցիայի

---

* *Հեշտ է ստուգել, որ նախորդ n°-ում դիտարկված բոլոր օրինակներում հենց այդպես էլ կազմվում էր դիֆերենցիալը։ Օրինակ, 1) դեպքում ունենք՝*

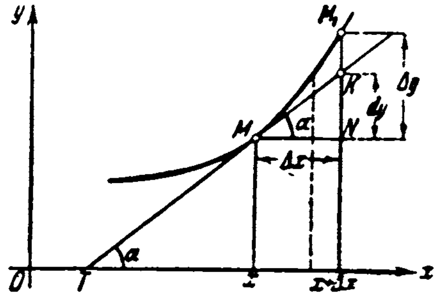
$$Q = \pi r^2, \quad Q'_r = 2\pi r, \quad dQ = 2\pi r \cdot \Delta r։$$

Δy անվերջ փոքր աճի գլխավոր մասը։ Հենց այս էլ հիմք է ծառայում մոտավորապես ընդունել՝

$$\Delta y \approx dy \qquad (3)$$

այնքան ավելի մեծ ճշգրտությամբ, որքան ավելի փոքր է Δx-ը։ (3) մոտավոր հավասարության դիտարկմանը մենք կանդրադառնանք n° **93**-ում։

$y = f(x)$ ֆունկցիայի dy, դիֆերենցիալը և նրա կապը Δy աճի հետ երկրաչափորեն մեկնաբանելու համար, դիտարկենք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը (գծ. 37)։ Արգումենտի x և օրդինատի y արժեքներով կորի վրա կորոշվի M կետը։ Կորի այդ կետում տանենք MT շոշափողը. ինչպես մենք արդեն տեսել ենք [n° **78**], նրա $\operatorname{tg}\alpha$ անկյունային գործակիցը հավասար է y'_x ածանցյալին։ Եթե x արգումենտին տանք Δx աճ, ապա կորի y օրդինատը կստանա $\Delta y = NM_1$ աճ։ Միաժամանակ շոշափողի օրդինատը կստանա NK աճ։ Հաշվելով NK հատվածը, որպես MNK ուղղանկյուն եռանկյան էջ, կստանանք՝



Գծ. 37.

$$NK = MN \cdot \operatorname{tg}\alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy։$$

Այսպիսով, այն ժամանակ, երբ Δy-ը կորի օրդինատի աճն է, dy-ը հանդիսանում է շոշափողի օրդինատի համապատասխան աճը։

Վերջում կանգ առնենք հենց իր՝ x անկախ փոփոխականի վրա. նրա դիֆերենցիալ անվանում են հենց Δx աճը, այսինքն՝ պայմանավորվում են ընդունել

$$dx = \Delta x։ \qquad (4)$$

Եթե x անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալը նույնացնենք $y = x$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի հետ (այստեղ էլ յուրատեսակ պայմանավորում է), ապա (4) բանաձևը կարելի է և ապացուցել, ելնելով (2) բանաձևից՝ $dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$։

Հաշվի առնելով (4)-ը, այժմ կարելի է դիֆերենցիալի սահմանումը տվող (2) բանաձևը գրել այսպես՝

$$dy = y'_x \cdot dx, \qquad (5)$$

սովորաբար հենց այսպես էլ գրում են։

Այստեղից ստացվում է՝

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \qquad (6)$$

ուստի՝ այն արտահայտությունը, որը մենք առաջ դիտում էինք որպես ամբողջական սիմվոլ, այժմ կարելի է մեկնաբանել որպես կոտորակ։ Այն հանգամանքը, որ վերոհիշյալ արտահայտության մեջ ձախ մասում գտնվում է միանգամայն որոշակի թիվ, այնինչ աջ մասում ունենք երկու անորոշ dy *և* dx *թվերի հարաբերություն (չէ որ* $dx = \Delta x$ *մեծությունը կամայական է), ընթերցողին չպետք է անհանգստացնի.* dx *և* dy *մեծությունները փոփոխվում են համեմատականորեն, ընդ որում* y'_x *ածանցյալը հենց հանդիսանում է համեմատականության գործակիցը։*

Դիֆերենցիալի գաղափարը և «դիֆերենցիալ» տերմինը պատկանում է Լայբնիցին, որը, սակայն, չի տվել այդ գաղափարի ճշգրիտ սահմանումը։ Դիֆերենցիալների հետ միասին Լայբնիցը դիտարկել է նաև «դիֆերենցիալ քանորդները», այսինքն՝ երկու դիֆերենցիալների քանորդները, որոնք համարժեք են մեր ածանցյալներին. սակայն հենց դիֆերենցիալն է եղել Լայբնիցի համար սկզբնական գաղափար։ Կոշիի ժամանակից սկսած, որը սահմանների տեսությամբ հիմք ստեղծեց ողջ անալիզի համար և առաջին անգամ հստակորեն ածանցյալը սահմանեց որպես սահման, սովորական դարձավ ելնել հենց ածանցյալի գաղափարից, իսկ դիֆերենցիալի գաղափարը կառուցել արդեն ածանցյալի գաղափարի հիման վրա։*

* *Լատիներեն* differentia *բառից է, որը նշանակում է «տարբերություն»։*

91. Դիֆերենցման հիմնական բանաձևերը և կանոնները: *Ֆունկցիաների դիֆերենցիալների հաշվումը կոչվում է **դիֆերենցում*** (дифференцирование)*։ *Քանի որ* dy *դիֆերենցիալը* y'_x *ածանցյալից տարբերվում է միայն* dx *բազմապատկիչով, ուստի տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների աղյուսակից* [**81**] *հեշտ է կազմել այդ ֆունկցիաների դիֆերենցիալների աղյուսակը.*

1. $y = c \qquad dy = 0$

2. $y = x^{\mu} \qquad dy = \mu x^{\mu-1}\, dx$

$$y = \frac{1}{x} \qquad dy = -\frac{dx}{x^2}$$

$$y = \sqrt{x} \qquad dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

3. $y = a^x \qquad dy = a^x \ln a\, dx$

$$y = e^x \qquad dy = e^x\, dx$$

4. $y = \log_a x \qquad dy = \frac{\log_a e}{x}\, dx$

$$y = \ln x \qquad dy = \frac{dx}{x}$$

5. $y = \sin x \qquad dy = \cos x\, dx$

6. $y = \cos x \qquad dy = -\sin x\, dx$

7. $y = \operatorname{tg} x \qquad dy = \sec^2 x\, dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$

---

* *Ի դեպ, նույն տերմինով սովորաբար նշանակում են նաև ածանցյալների հաշվումը, որի համար ռուսերենում հատուկ տերմին չկա։ Օտար լեզուների մեծ մասում այդ գործողությունների նշանակման համար կան երկու տարբեր տերմիններ. օրինակ, ֆրանսերեն տարբերում են* „dérivation“ *և* „differentiation“ *տերմինները։* Հեղինակ

*Հայերենում նույնպես պաշտոնապես ընդունված էր միայն **դիֆերենցում** (**դիֆերենցել**) տերմինը, սակայն վաղուց գործածական է դարձել նաև **ածանցում** (**ածանցել**) հաջող տերմինը՝ միայն ածանցյալը գտնելու գործողության համար։* Թարգմանության խմբագիր

$$8.\ y = \operatorname{ctg} x \qquad dy = -\operatorname{csec}^2 x dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$9.\ y = \arcsin x \qquad dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$10.\ y = \arccos x \qquad dy = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$11.\ y = \operatorname{arctg} x \qquad dy = \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$12.\ y = \operatorname{arcctg} x \qquad dy = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

*Դ ի ֆ ե ր ե ն ց մ ա ն կ ա ն ո ն ն ե ր ը** *կգրվեն այսպես՝*

$$\text{I.}\ d(c \cdot u) = c\,du,$$

$$\text{II.}\ d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$\text{III.}\ d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$\text{IV.}\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

Այս բոլորը հեշտությամբ ստացվում են ածանցյալների համար ստացված համապատասխան կանոններից։ Ապացուցենք, օրինակ, վերջին երկուսը.

$$d(uv) = (u \cdot v)' \cdot dx = (u'v + uv')dx =$$

$$= v(u' \cdot dx) + u(v' \cdot dx) = v\,du + u\,dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' \cdot dx = \frac{u'v - v'u}{v^2} \cdot dx = \frac{v\,(u' \cdot dx) - u \cdot (v' \cdot dx)}{v^2} =$$

$$= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

92. Դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականությունը (ինվարիանտությունը): *Բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը մեզ հանգեցնում է դիֆերենցիալի մի ուշագրավ և կարևոր հատկության։*

---

* *Այժմ խոսքը վերաբերում է հենց դ ի ֆ ե ր ե ն ց ի ա լ ն ե ր ը հաշվելուն։*

Դիցուք $y=f(x)$ *և* $x=\varphi(t)$ *ֆունկցիաներն այնպիսին են, որ նրանցից կարելի է կազմել* $y=f(\varphi(t))$ *բարդ ֆունկցիա։ Եթե գոյություն ունեն* y'_x *և* x'_t *ածանցյալները, ապա, ըստ* n° **84**-*ի* V *կանոնի, գոյություն ունի նաև*

$$y'_t=y'_x\cdot x'_t \tag{7}$$

ածանցյալը։

Եթե x-*ը ընդունենք որպես անկախ փոփոխական,* dy *դիֆերենցիալը կարտահայտվի (5) բանաձևով։ Այժմ ընդունենք, որ անկախ փոփոխականը* t-*ն է, այս դեպքում դիֆերենցիալի համար կունենանք այլ արտահայտություն՝*

$$dy=y'_t\cdot dt.$$

Սակայն, y'_t *ածանցյալը փոխարինելով իր (7) արտահայտությամբ և նկատելով, որ* $x'_t\cdot dt$-*ն* x-*ի, որպես* t-*ի ֆունկցիայի, դիֆերենցիալն է, վերջնականապես կստանանք՝*

$$dy=y'_x\cdot x'_t\,dt=y'_x\,dx$$

այսինքն՝ վերադարձանք դիֆերենցիալի նախկին ձևին։

Այսպիսով, մենք տեսնում ենք, որ դիֆերենցիալի ձևը կարող է պահպանվել նույնիսկ այն դեպքում, երբ նախկին անկախ փոփոխականը փոխարինվում է նորով: *Մենք միշտ իրավունք ունենք* y-*ի դիֆերենցիալը գրել (5) ձևով, անկախ այն բանից, թե արդյոք* x-*ը անկա՞խ փոփոխական է, թե ոչ. տարբերությունը կայանում է միայն նրանում, որ, եթե որպես անկախ փոփոխական վերցրած է* t-*ն, ապա* dx-*ը նշանակում է ոչ թե կամավոր* Δx *աճ, այլ* t-*ից կախված* x *ֆունկցիայի դիֆերենցիալ։ Հենց այս հատկությունն էլ անվանում են* **դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականություն** *(***ինվարիանտություն***)։*

Քանի որ (5) բանաձևից անմիջապես ստացվում է (6) բանաձևը, որն y'_x *ածանցյալն արտահայտում է* dx *և* dy *դիֆերենցիալների միջոցով, ապա վերջին բանաձևը նույնպես պահպանում է իր ուժը, ո՛ր* *անկախ փոփոխականի, (իհարկե, ամեն դեպքում՝ միևնույն) նկատմամբ էլ հաշվելու լինենք նշված դիֆերենցիալները։*

Դիցուք, օրինակ, $y=\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<1)$, այնպես որ՝

$$y'_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Այժմ ընդունենք $x=\sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$։ Այդ ժամանակ $y=$

$= \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, և մենք կունենանք՝ $dx = \cos t \cdot dt$, $dy = -\sin t \cdot dt$։ Հեշտ է ստուգել, որ (6)-ով ստացվող

$$y'_x = \frac{-\sin t\, dt}{\cos t\, dt} = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

բանաձևը տալիս է միայն այլ արտահայտություն վերևում հաշված ածանցյալի համար։

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն: *Ածանցյալը ցանկացած փոփոխականի նկատմամբ վերցրած դիֆերենցիալների միջոցով արտահայտելու հնարավորությունը, մասնավորապես, բերում է այն բանին, որ հակադարձ և բարդ ֆունկցիաների դիֆերենցման կանոնները լայբնիցյան նշանակումներով արտահայտող*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

բանաձևերը դառնում են պարզ հանրահաշվական նույնություններ (որքանով որ բոլոր դիֆերենցիալները այստեղ կարող են վերցվել ըստ միևնույն փոփոխականի)։ Ի միջի այլոց, չպետք է կարծել, որ սրանով տրվեց վերոհիշյալ բանաձևերի նոր արտածում. նախ՝ այստեղ չապացուցվեց այդ հավասարությունների աջ մասերում գրված ածանցյալների գ ո յ ո ւ թ յ ո ւ ն ը, և, որ գլխավորն է, մենք էապես օգտվեցինք դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականությունից, որն ինքը V կանոնի հետևանք է։

93. Դիֆերենցիալները որպես մոտավոր բանաձևերի աղբյուր: *Մենք տեսանք, որ Δx-ը զրոյի ձգտելիս, y ֆունկցիայի dy դիֆերենցիալը (եթե միայն $y'_x \neq 0$) իրենից ներկայացնում է ֆունկցիայի Δy անվերջ փոքր աճի գ լ խ ա վ ո ր մ ա ս ը։ Ուստի $\Delta y \sim dy$, այնպես որ՝*

$$\Delta y = dy \tag{3}$$

կամ, ավելի մանրամասն՝

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x) \cdot \Delta x \tag{3ա}$$

Δx-ի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքրի ճշտությամբ։ Այդ նշանակում է [n° **56**], *որ այդ հավասարության հ ա ր ա բ ե ր ա կ ա ն սխալը, բավականաչափ փոքր Δx-ի դեպքում, դառնում է ցանկացած չափով փոքր։*

Այդ հանգամանքը կարելի է և անմիջապես տեսնել 37-րդ գծագրից, որը տալիս է դիֆերենցիալի երկրաչափական մեկնաբանումը։ Գծագրից երևում է, որ Δx-ը փոքրացնելիս, իրոք, գնալով ավելի մեծ հարաբերական ճշգրտությամբ կարելի է կորի օրդինատի աճը փոխարինել շոշափողի օրդինատի աճով։

Ֆունկցիայի Δy աճը նրա dy դիֆերենցիալով փոխարինելու առավելությունը այն է, ինչպես ընթերցողի համար պարզ է, որ dy-ը Δx-ից կախված է գծորեն, այնինչ Δy-ը սովորաբար իրենից ներկայացնում է Δx-ի ավելի բարդ ֆունկցիա։

Եթե նշանակենք $\Delta x = x - x_0$ և $x_0 + \Delta x = x$, ապա (3ա) հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

կամ՝

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\text{։}$$

Այս բանաձևի միջոցով, x_0-ին մոտ x-ի արժեքների համար, $f(x)$ ֆունկցիան մոտավորապես փոխարինվում է գծային ֆունկցիայով։ Երկրաչափորեն այդ նշանակում է $y = f(x)$ կորի $(x_0, f(x_0))$ կետին առընթեր աղեղը փոխարինել այդ կետում կորին տարած

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

շոշափողի հատվածով (տես գծ. 37)։ Պարզության համար վերցնելով $x_0 = 0$ և սահմանափակվելով x-ի փոքր արժեքներով, կունենանք՝*

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$$

մոտավոր բանաձևը։

Այստեղից, $f(x)$-ը փոխարինելով զանազան տարրական ֆունկցիաներով, հեշտ է ստանալ մի շարք բանաձևեր.

$$(1 + x)^{\mu} \approx 1 + \mu x, \text{ մասնավորապես՝ } \sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2} x.$$

$$e^x \approx 1 + x, \quad \ln(1 + x) = x, \quad \sin x \approx x, \quad \operatorname{tg} x \approx x, \text{ և այլն,}$$

որոնցից շատերը մեզ արդեն հայտնի են։

94. Դիֆերենցիալների կիրառումը սխալներ գնահատելիս։ *Առանձնապես հարմար է ու բնական դիֆերենցիալի գաղափարը օգտագործել մոտավոր հաշվումների*

---

* *Իրոք, k անկյունային գործակից ունեցող և (x_0, y_0) կետով անցնող ուղղի հավասարումը կլինի՝*

$$y = y_0 + k(x - x_0).$$

շոշափողի դեպքում այստեղ պետք է ընդունել $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$։

ժամանակ սխալները գնահատելիս։ Դիցուք, օրինակ, x-ի մեծությունը չափում կամ հաշվում ենք անմիջականորեն, իսկ նրանից կախված y-ի մեծությունը որոշում ենք $y = f(x)$ բանաձևով։ x-ի մեծությունը չափելիս սովորաբար առաջանում է Δx սխալ, որի շնորհիվ ստացվում է y մեծության համար Δy սխալ։ Ի նկատի ունենալով, որ այդ սխալները փոքր են, ընդունում են՝

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x,$$

այսինքն՝ աճը փոխարինում են դիֆերենցիալով։ Դիցուք x մեծության բացարձակ սխալի մեծագույն արժեքը δx է, այսինքն՝ $|\Delta x| \leqslant \delta x$ (սովորական պայմաններում չափումների ժամանակ այդպիսի սխալի սահմանը հայտնի է)։ Այդ ժամանակ, ակներևաբար, y-ի համար որպես մեծագույն բացարձակ սխալ (սխալի սահման) կարելի է ընդունել

$$\delta y = |y'_x| \cdot \delta x \tag{8}$$

մեծությունը։

1) Դիցուք, օրինակ, գնդի ծավալը որոշելու համար նախ անմիջականորեն չափում են (ձողակարկինի, հաստաչափի, մանրաչափի միջոցով և այլն) գնդի D տրամագիծը և ապա հաշվում V ծավալը՝

$$V = \frac{\pi}{6} D^3$$

բանաձևով։

Քանի որ $V'_D = \frac{\pi}{2} D^2$, ուստի այս դեպքում, (8)-ի շնորհիվ կունենանք՝

$$\delta V = \frac{\pi}{2} D^2 \cdot \delta D.$$

Այս հավասարությունը բաժանելով նախորդի վրա, կստանանք՝

$$\frac{\delta V}{V} = 3 \frac{\delta D}{D},$$

այնպես որ ծավալի համար ստացված արժեքի (մեծագույն) հարաբերական սխալը երեք անգամ ավելի մեծ է, քան տրամագծի չափումից ստացված արժեքի (մեծագույն) հարաբերական սխալը։

2) Եթե x թիվը, որի համար պետք է հաշվել նրա $y = \log_{10} x$ տասնորդական լոգարիթմը, ստացված է որոշ սխալով, ապա այդ ազդում է լոգարիթմի վրա, նրանում ևս առաջացնելով սխալ։

Այստեղ $y'_x = \frac{M}{x}$ $(M \approx 0{,}4343)$, ուստի, ըստ (8) բանաձևի, կունենանք՝

$$\delta y = 0{,}4343 \frac{\delta x}{x}.$$

Այսպիսով, լոգարիթմի (մեծագույն) բացարձակ սխալը պարզապես որոշվում է հենց վերցրած թվի (մեծագույն) հարաբերական սխալով, և հակառակը։

Այս արդյունքը ունի բազմազան կիրառություններ։ Օրինակ, սրա միջոցով կարելի է գաղափար կազմել 25 սմ = 250 մմ-անոց սովորական լոգարիթմական քանոնի ճշգրտության մասին։ Դիտագիծը դիտակայելիս կարելի է սխալվել, մոտավորապես, 0,1 մմ դեպի մեկ կամ մյուս կողմը, որին կհամապատասխանի լոգարիթմի

$$\delta y = \frac{0,1}{250}\, 0,0004$$

սխալը։ Այստեղից, ըստ մեր բանաձևի, կունենանք՝

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{0,0004}{0,4343} \approx 0,00092 \ldots \approx 0,001.$$

Թվաքանոնի բոլոր մասերում հաշվման հարաբերական ճշգրտությունը միևնույնն է։

§ 3. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

95. Բարձր կարգի ածանցյալների սահմանումը: *Եթե* $y = f(x)$ *ֆունկցիան ունի* $y' = f'(x)$ *վերջավոր ածանցյալ մի* X *միջակայքում, այնպես որ այդ ածանցյալն ինքը ներկայացնում է* x*-ի ֆունկցիա, ապա կարող է պատահել, որ այդ ֆունկցիան իր հերթին* X*-ի մի* x_0 *կետում ունենա ածանցյալ, վերջավոր կամ ոչ։ Այդ ածանցյալն անվանում են* $y = f(x)$ *ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ կամ երկրորդ ածանցյալ վերոհիշյալ* x_0 *կետում, և նշանակում են հետևյալ սիմվոլներից մեկով՝*

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad y'', \quad D^2y, \quad \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}, \quad f''(x_0), \quad D^2f(x_0).$$

Այսպես, օրինակ, n°**78**-*ում մենք տեսանք, որ կետի շարժման արագությունը հավասար է կետի անցած* s *ճանապարհի ածանցյալին ըստ* t *ժամանակի՝* $v = \frac{ds}{dt}$, *իսկ* a *արագացումը՝* v *արագության ածանցյալն է ըստ ժամանակի՝* $a = \frac{dv}{dt}$. *Նշանակում է, արագացումը հանդիսանում է ճանապարհի երկրորդ կարգի ածանցյալն ըստ ժամանակի՝* $a = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Նույն ձևով, եթե $y = f(x)$ *ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ ամբողջ* X *միջակայքում (այսինքն՝ այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում), ապա սրա ածանցյալը, վերջավոր կամ ոչ,* *X-ի որևէ x_0 կետում կոչվում $y = f(x)$ ֆունկցիայի երրորդ կարգի ածանցյալ կամ երրորդ ածանցյալ այդ կետում, և նշանակվում է այսպես՝*

$$\frac{d^3y}{dx^3},\ y''',\ D^3y,\ \frac{d^3f(x_0)}{dx^3},\ f'''(x_0),\ D^3f(x_0)։$$

Նույն եղանակով, երրորդ կարգի ածանցյալից անցնում ենք չորրորդ կարգի ածանցյալին և այլն։ Եթե ընդունենք, որ $(n-1)$-րդ կարգի ածանցյալի գաղափարն արդեն սահմանված է և որ $(n-1)$-րդ կարգի ածանցյալն X միջակայքում գոյություն ունի և վերջավոր է, ապա նրա ածանցյալը այդ միջակայքի որևէ x_0 կետում կոչվում է տված $y = f(x)$ ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալ կամ n-րդ ածանցյալ։ Վերջինիս նշանակման համար օգտագործվում են հետևյալ պայմանանշանները (սիմվոլները)՝

$$\frac{d^ny}{dx^n},\quad y^{(1)},\ D^n y,\quad \frac{d^nf(x_0)}{dx^n},\ f^{(n)}(x_0),\ D^n f(x_0)։$$

Երբեմն, Լագրանժի և Կոշիի նշանակումներից օգտվելիս, կարող է անհրաժեշտ լինել ցույց տալ այն փոփոխականը, ըստ որի վերցրած է ածանցյալը. այդ դեպքում այդ փոփոխականը որպես նշանիկ գրվում է սիմվոլների ներքևի ծայրերի մոտ՝

$$y''_{x^2},\ D^3_{x^3} f(x),\ f^{(n)}_{x^n}(x_0),\ \text{և այլն},$$

ընդ որում x^2, x^3,... *արտահայտությունը* xx, xxx, ... *գրության ձևերի պայմանական կրճատ ձևերն են։ Օրինակ, կարելի է գրել՝* $a = s''_{t^2}$։

(Ընթերցողի համար պարզ է, որ այստեղ ևս

$$\frac{d^n f}{dx^n},\quad f^{(n)}\ \text{կամ}\ f^{(n)}_{x^n},\ D^n f\ \text{կամ}\ D^n_{x^n} f$$

ամբողջական սիմվոլները կարելի է դիտել որպես ֆունկցիոնալ նշանակումներ)։

Այսպիսով, մենք սահմանեցինք n-րդ կարգի ածանցյալը, այսպես ասած, ինդուկտիվ եղանակով, հերթականությամբ առաջին կարգի ածանցյալից հաջորդին անցնելով։ n-րդ կարգի ածանցյալը որոշող

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'\quad ,$$

առնչությունը անվանում են նաև «անդրադարձ» (կամ «ռեկուրենտ») առնչություն, որքանով որ նա մեզ n-րդ ածանցյալից «վերադարձնում է» (n−1)-րդին։

n-րդ կարգի ածանցյալի հաշվումը, երբ տված է n թիվը, կատարվում է ընթերցողին արդեն հայտնի կանոններով ու բանաձևերով։

Օրինակ՝ եթե

$$y=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^3+2x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{2},$$

ապա՝

$$y'=2x^3-\frac{1}{2}x^2+4x+\frac{4}{3},\qquad y''=6x^2-x+4,$$

$$y'''=12x-1,\quad y^{IV}=12,$$

այնպես որ, հաջորդ բոլոր կարգի ածանցյալները նույնաբար հավասար են զրոյի։

Կամ, դիցուք՝

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

այդ դեպքում՝

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\quad y''=-\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}},\qquad y'''=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}},$$ և այլն։

Նկատենք, որ բարձր կարգի ածանցյալների համար նույնպես, ինդուկտիվ եղանակով, կարելի է սահմանել միակողմյան ածանցյալի գաղափարը [տես n° **86**]։ Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է միայն X միջակայքում, ապա խոսելով որևէ կարգի ածանցյալի մասին այդ միջակայքի ծայրակետում, միշտ ի նկատի ունեն հենց միակողմյան ածանցյալը։

96. Ընդհանուր բանաձևեր ցանկացած կարգի ածանցյալների համար: Ինչպես տեսանք, որպեսզի հաշվենք որևէ ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալը, ընդհանրապես ասած, պետք է նախապես հաշվել բոլոր նախորդող կարգի ածանցյալները։ Սակայն մի շարք դեպքերում հնարավոր է լինում n-րդ կարգի ածանցյալի համար ստանալ այնպիսի ընդհանուր արտահայտություն, որն անմիջապես կախված է n-ից ու այլևս չի պարունակում նախորդ ածանցյալների նշանակումները։

Այդպիսի ընդհանուր արտահայտություններ արտածելիս երբեմն օգտակար են լինում հետևյալ բանաձևերը՝

$$(c\,u)^{(n)} = c \cdot u^{(n)} \qquad (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)},$$

որոնք n° **83**-*ի՝ ընթերցողին հայտնի* I *և* II *կանոններն են ընդհանրացված բարձր կարգի ածանցյալների համար։ Դրանք հեշտ է ստանալ այդ կանոնների հաջորդաբար կիրառման միջոցով։*

1) Նախ դիտարկենք $y = x^{\mu}$ *աստիճանային ֆունկցիան, որտեղ* μ-*ն որևէ իրական թիվ է։ Հաջորդաբար կունենանք՝*

$$y' = \mu x^{\mu-1}, \quad y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$
$$y''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}, \ldots$$

Այստեղից հեշտ է նկատել նաև ընդհանուր օրենք՝

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\ldots(\mu-n+1)\,x^{\mu-n},$$

որն ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։ Եթե, օրինակ, վերցնենք $\mu = -1$, *կստանանք՝*

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}},$$

Երբ μ-*ն ինքը բնական* m *թիվ է, ապա* x^m-*ի* m-*րդ կարգի ածանցյալն արդեն կլինի* $m!$ *հաստատուն թիվը, իսկ բոլոր հաջորդները՝ զրոներ։ Այստեղից պարզ է, որ* m *դրական ամբողջ աստիճանի բազմանդամի համար էլ գոյություն ունի նման հանգամանք։*

2) Դիցուք այժմ $y = \ln x$։ *Ամենից առաջ ունենք՝*

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

Սրա երկու մասից վերցնենք $(n-1)$-*րդ կարգի ածանցյալ 1) օրինակի համապատասխան բանաձևի օգնությամբ, վերջինիս մեջ* n-*ը փոխարինելով* $(n-1)$-*ով, կստանանք՝*

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

3) Եթե $y = a^x$, *ապա՝*

$$y' = a^x \cdot \ln a, \quad y'' = a^x \cdot (\ln a)^2, \ldots$$

իսկ ընդհանուր բանաձևը՝

$$y^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$$

հեշտությամբ ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։
Մասնավոր դեպքում, ակներևաբար՝

$$(e^x)^{(n)} = e^x,$$

4) Ընդունենք $y = \sin x$. այդ ժամանակ՝

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x,$$

$$y'''' = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x, \ldots$$

Այս ճանապարհով n-րդ կարգի ածանցյալի համար ընդհանուր արտահայտություն գտնելը դժվար է։ Սակայն գործն անմիջապես հեշտանում է, եթե առաջին կարգի ածանցյալի համար ստացված բանաձևը գրենք $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ տեսքով. պարզվում է, որ ամեն մի ածանցումից հետո արգումենտին կգումարվի $\frac{\pi}{2}$, ուստի՝

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)։$$

Նույն ձևով ստացվում է նաև

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

բանաձևը։

5) Կանգ առնենք նաև $y = \operatorname{arctg} x$ ֆունկցիայի վրա։ Նախ $y^{(n)}$-ը արտահայտենք y-ի միջոցով։ Քանի որ $x = \operatorname{tg} y$, ուստի՝

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)։$$

Երկրորդ անգամ ածանցելով ըստ x-ի (և հիշելով, որ y-ը x-ի ֆունկցիա է), կստանանք՝

$$y'' = \left[-\sin y \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos y \cdot \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot y' =$$

$$= \cos^2 y \cdot \cos\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y \cdot \sin 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)։$$

Հաջորդ ածանցումը կտա՝

$$y''' = \left[-2\sin y \cdot \cos y \cdot \sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\cos^2 y \cdot \cos 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot y' = 2\cos^3 y \cdot \cos\left(3y + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\cos^3 y \cdot \sin 3\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\Big],$$

Վերջապես,

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \cdot \sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

ընդհանուր բանաձևը հիմնավորվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։

97. Լայբնիցի բանաձևը: *Ինչպես մենք արդեն նշել ենք նախորդ* n°*-ի սկզբում,* n° **83***-ի* I *և* II *կանոնները անմիջականորեն տարածվում են նաև ցանկացած կարգի ածանցյալների դեպքի վրա։ Ավելի բարդ է* III *կանոնի հարցը, որը վերաբերում է արտադրյալի ածանցմանը։*

Ենթադրենք x*-ից կախված* u *և* v *ֆունկցիաներն առանձին-առանձին ունեն մինչև* n*-րդ (ներառյալ) կարգի ածանցյալներ։ Ապացուցենք, որ այդ դեպքում նրանց* $y = uv$ *արտադրյալը նույնպես կունենա* n*-րդ կարգի ածանցյալ և գտնենք նրա արտահայտությունը։*

Կիրառելով III *կանոնը, սկսենք հաջորդաբար ածանցել այդ արտադրյալը. կգտնենք՝*

$$y' = u'v + v'u, \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \ldots$$

Հեշտ է տեսնել այն օրենքը, որով կազմված են բոլոր այս բանաձևերը. նրանց աջ մասերը հիշեցնում են $u+v$, $(u+v)^2$, $(u+v)^3, \ldots$ *երկանդամների բանաձևերը, միայն թե* u*-ի և* v*-ի աստիճանների փոխարեն գրված են նրանց համապատասխան կարգի ածանցյալները։ Նմանությունն ավելի լրիվ կդառնա, եթե ստացված բանաձևերի մեջ*

*u-ի և v-ի փոխարեն գրենք $u^{(0)}$ և $v^{(0)}$։ Այս օրենքը տարածելով ցանկացած n-ի դեպքի վրա, կստանանք ընդհանուր բանաձև**

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, u^{(n-i)} v^{(i)} =$$

$$= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{(n-2)} v'' + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1.2\ldots i} u^{(n-i)} v^{(i)} + \cdots + uv^{(n)}, \qquad (1)$$

Սրա իրավացիությունն ապացուցելու համար դարձյալ դիմենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդին։ Ընդունենք, որ n-ի մի որոշ արժեքի համար վերոհիշյալ բանաձևը ճիշտ է։ Եթե u և v ֆունկցիաների համար գոյություն ունեն նաև $(n+1)$-րդ ածանցյալները, ապա կարելի է այդ բանաձևը մեկ անգամ ևս ածանցել ըստ x-ի, կստանանք՝

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left[u^{(n-i)}\, y^{(i)}\right]' =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, u^{(n-i)} v^{(i+1)},$$

---

* $\sum$ *սիմվոլը նշանակում է միատեսակ գումարելիների գումար։ Երբ այդ գումարելիները կախված են մեկ նշանիկից, որը փոփոխվում է որոշակի սահմաններում, ապա նշվում են հենց այդ սահմանները (ներքևից և վերևից)։ Օրինակ՝*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m},$$ *և այլն։*

Այժմ վերջին երկու գումարների մեջ միացնենք այն գումարելիները, որոնք իրենց մեջ պարունակում են u *և* v *ֆունկցիաների ածանցյալների միատեսակ արտադրյալներ (այդպիսի արտադրյալների մեջ, ինչպես հեշտ է տեսնել, ածանցյալների կարգերի գումարը միշտ հավասար է* $n+1$)։ $u^{(n+1)}v^{(0)}$ *արտադրյալը գտնվում է միայն առաջին գումարի մեջ (երբ* $i=0$), *որտեղ նրա գործակիցն է* $C_n^0=1$։ *Ճիշտ այդպես էլ,* $u^{(0)}v^{(n+1)}$*-ն էլ գտնվում է միայն երկրորդ գումարի մեջ* ($i=n$ *համար ունեցող գումարելիի մեջ), որի գործակիցն է՝* $C_n^n=1$։ *Մնացած բոլոր արտադրյալները, որոնք գտնվում են այդ գումարների մեջ, ունեն* $u^{(n+1-k)}v^{(k)}$ *տեսքը, ընդ որում* $1\leqslant k\leqslant n$։ *Յուրաքանչյուր այդպիսի արտադրյալ հանդիպում է թե՛ առաջին գումարի* ($i=k$ *համար ունեցող գումարելին) և թե՛ երկրորդ գումարի* ($i=k-1$ *համար ունեցող գումարելին) մեջ։ Համապատասխան գործակիցների գումարը կլինի* $C_n^k+C_n^{k-1}$։ *Բայց, ինչպես հայտնի է,*

$$C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k\text{։}$$

Այսպիսով, վերջնականապես ստանում ենք՝

$$y^{(n+1)}=u^{(n+1)}v^{(0)}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k\,u^{[(n+1)-k]}v^{(k)}+u^{(0)}v^{(n+1)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k\,u^{[(n+1)-k]}v^{(k)},$$

որովհետև $C_{n+1}^0=C_{n+1}^{n+1}=1$։

$y^{(n+1)}$*-ի համար ստացանք մի արտահայտություն, որը (1) արտահայտության լրիվ անալոգն է [միայն* n*-ը փոխարինված է* $(n+1)$*-ով]. Հենց սրանով ապացուցվում է (1) բանաձևի իրավացիությունն* n*-ի բոլոր բնական արժեքների համար։*

Ստացված բանաձևը կրում է Լայբնիցի բանաձև *անունը։ Նա հաճախ է օգտակար լինում* n*-րդ կարգի ածանցյալի համար ընդհանուր արտահայտություններ արտածելիս։*

Նկատենք, որ նման բանաձև կարելի էր ստանալ նաև մի քանի արտադրիչների $y=u\cdot v\cdots t$ *արտադրյալի* n*-րդ կարգի ածանցյալի համար, դա նման կլինի* $(u+v+\cdots+t)^n$ *բազմանդամի բացումից ստացված արտահայտությանը։*

Օրինակ։ *Գտնենք*

$$y = e^{ax} \cdot \sin bx$$

ֆունկցիայի n*-րդ կարգի ածանցյալի ընդհանուր արտահայտությունը։ Լայբնիցի բանաձևով կստանանք՝*

$$y^{(n)} = e^{ax} \cdot a^{n} \cdot \sin bx + ne^{ax} \cdot a^{n-1} \cdot b \cdot \cos bx - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^{ax} \cdot a^{n-2} \cdot b^{2} \cdot \sin bx - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{ax} \cdot a^{n-3} \cdot b^{3} \cdot \cos bx + \cdots$$

կամ՝

$$y^{(n)} = e^{ax} \left\{ \sin bx \left[a^{n} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^{2} + \cdots \right] + \cos bx \left[na^{n-1} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^{3} + \cdots \right] \right\}.$$

98. Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ։ *Այժմ անցնենք բարձր կարգի դիֆերենցիալներին. Նրանք նույնպես սահմանվում են ինդուկտիվ եղանակով։* $y = f(x)$ *ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ կամ երկրորդ դիֆերենցիալ տված որևէ կետում, կոչվում է նրա (առաջին) դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը նույն կետում. Նշանակում են՝*

$$d^{2}y = d(dy).$$

Երրորդ կարգի դիֆերենցիալ կամ երրորդ դիֆերենցիալ կոչվում է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը՝

$$d^{3}y = d(d^{2}y).$$

Ընդհանրապես, $y = f(x)$ *ֆունկցիայի* n*-րդ կարգի դիֆերենցիալ կամ* n*-րդ դիֆերենցիալ կոչվում է նրա* $(n-1)$*-րդ կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը՝*

$$d^{n}y = d(d^{n-1}y).$$

Եթե օգտվենք ֆունկցիոնալ նշանակումներից, ապա հաջորդական դիֆերենցիալները կարող են նշանակվել այսպես՝

$$d^{2}f(x_0), \quad d^{3}f(x_0), \ \cdots, \ d^{n}f(x), \cdots,$$

ընդ որում հնարավոր է լինում նշել այն $x = x_0$ մասնավոր արժեքը, որի դեպքում վերցվում են դիֆերենցիալները։

Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ հաշվելիս շատ կարևոր է հիշել այն, որ dx-ը կամայական և x-ից անկախ թիվ է. ըստ x-ի դիֆերենցման ժամանակ այն պետք է դիտել որպես հաստատուն արտադրիչ։ Այդ ժամանակ կունենանք (միշտ ենթադրելով, որ համապատասխան ածանցյալները գոյություն ունեն)՝

$$d^2y = d(dy) = d(y'\cdot dx) = dy'\cdot dx = (y''\cdot dx)\cdot dx = y''dx^2,$$

$$d^3y = d(d^2y) = d(y''\cdot dx^2) = dy''\cdot dx^2 = (y'''\cdot dx)\cdot dx^2 = y'''dx^3 \text{*}$$

և այլն։ Հեշտությամբ կռահվող ընդհանուր օրենքը՝

$$d^ny = y^{(n)}\cdot dx^n, \tag{2}$$

ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։ Այդ օրենքից հետևում է, որ

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

ուստի սրանից հետո վերոհիշյալ սիմվոլը կարելի է դիտել որպես կոտորակ։

Օգտվելով (2) հավասարությունից, այժմ արդեն հեշտ է Լայբնիցի բանաձևը գրել դիֆերենցիալների միջոցով։ Բավական է միայն այդ բանաձևի երկու մասը բազմապատկել dx^n-ով, որպեսզի ստացվի՝

$$d^n(u\cdot v) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, d^{n-i}u\cdot d^iv \quad (d^0u = u, \quad d^0v = v)։$$

Լայբնիցն ինքն իր բանաձևն ստացել է հենց այս տեսքով։

99. Ձևի անփոփոխականության խախտումը բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար։ Հիշելով, որ ֆունկցիայի (առաջին) դիֆերենցիալը օժտված է ձևի անփոփոխականության հատկությամբ, բնական

---

* $dx^2\cdot dx^3\ldots$ և այլն նշանակումների տակ միշտ հասկացվում են դիֆերենցիալների աստիճանները՝ $(dx)^2$, $(dx)^3$, …։ Աստիճանի դիֆերենցիալը կնշանակենք այսպես՝ $d(x^2)$, $d(x^3)$,…

կլինի, եթե առաջադրենք հետևյալ հարցը. արդյոք բարձր կարգի դիֆերենցիալները նույնպե՞ս օժտված են այդ հատկությամբ, թե ոչ։ Օրինակով ցույց տանք, որ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալն այլևս այդ հատկությունը չունի։

Դիցուք $y = f(x)$ *և* $x = \varphi(t)$, *այնպես որ* y-*ը կարելի է դիտարկել որպես* t-*ի բարդ ֆունկցիա՝* $y = f(\varphi(t))$։ *Սրա առաջին դիֆերենցիալը ըստ* t-*ի կարելի է գրել* $dy = y'_x \cdot dx$ *ձևով, որտեղ* $dx = x'_t \cdot dt$ *և* t-*ի ֆունկցիա է։ Հաշվենք երկրորդ կարգի դիֆերենցիալն ըստ* t-*ի՝*

$$d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx)։$$

dy'_x *դիֆերենցիալը, օգտվելով (առաջին) դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականությունից, կարելի է գրել* $dy'_x = y''_{x^2} \cdot dx$ *ձևով, ուստի վերջնականապես կունենանք՝*

$$d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2 + y'_x \cdot d^2x, \qquad (3)$$

մինչդեռ, երբ x-*ը անկախ փոփոխական էր, երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը ուներ* $d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2$ *տեսքը։ Իհարկե, (3) արտահայտությունը* d^2y-*ի համար հանդիսանում է ավելի ը ն դ հ ա ն ու ր արտահայտություն. եթե, մասնավորապես,* x-*ը անկախ փոփոխական է, ապա* $d^2x = 0$ *և կմնա միայն առաջին անդամը։*

Օրինակ։ Դիցուք $y = x^2$, *այնպես որ քանի դեռ* x-*ը անկախ փոփոխական է՝*

$$dy = 2x\,dx, \quad d^2y = 2dx^2։$$

Այժմ ընդունենք $x = t^2$. *այդ ժամանակ* $y = t^4$, *և*

$$dy = 4t^3\,dt, \quad d^2y = 12t^2dt^2։$$

dy-*ի նոր արտահայտությունը կարելի է ստանալ նաև նախորդից, եթե այնտեղ տեղադրենք* $x = t^2$, $dx = 2t \cdot dt$։ *Սակայն* d^2y-*ի մեջ եթե կատարենք նույնպիսի տեղադրություն,* $12t^2 \cdot dt^2$-*ու փոխարեն կըստանանք* $8t^2\,dt^2$։ *Իսկ եթե ըստ* t-*ի դիֆերենցենք* $dy = 2x\ dt$ *հավասարությունը,* x-*ը համարելով* t-*ի ֆունկցիա, ապա (3)-ի նման, կստանանք՝*

$$d^2y = 2dx^2 + 2x \cdot d^2x$$

բանաձևը։ Սրա մեջ տեղադրելով $x=t^2$, $dx=2t \cdot dt$, $d^2x=2dt^2$, *արդեն կստանանք ճիշտ արդյունք՝* $12t^2\,dt^2$։

Ուրեմն, երբ x-*ը դադարում է լինել անկախ փոփոխական, այդ դեպքում* d^2y *երկրորդ կարգի դիֆերենցիալն* x-*ի դիֆերենցիալի միջոցով արտահայտվում է (3) ե ր կ ա ն դ ա մ բանաձևով։ Երրորդ և ավելի բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար լրացուցիչ անդամների*

Թիվը (երբ անցնում ենք նոր անկախ փոփոխականի) ավելի մեծանում է։ Այդ պատճառով էլ, y''_{x^2}, $y'''_{x^3}, \ldots$ *բարձր կարգի ածանցյալների՝ դիֆերենցիալներով գրված՝*

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad y'''_{x^3} = \frac{c^3y}{dx^3}, \ldots \tag{4}$$

արտահայտությունների մեջ արդեն չի կարելի դիֆերենցիալները վերցնել ըստ ցանկացած փոփոխականի, այլ միայն ըստ x-*ի։*

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐԸ

§ 1. ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐ ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

100. Ֆերմայի թեորեման: *Որևէ ֆունկցիայի ածանցյալը (կամ մի քանի ածանցյալները) գիտենալը թույլ է տալիս եզրակացություններ անելու ֆունկցիայի՝ իր վարքի մասին։ Ածանցյալի գաղափարի գանազան կիրառությունների (տե՛ս* VII *և* VIII *գլուխները) հիմքում ընկած են մի քանի պարզ, սակայն կարևոր թեորեմաներ ու բանաձևեր, որոնց և նվիրված է այս գլուխը։*

Սկսենք մի օժանդակ առաջադրությունից, որն արդարացի կլիներ կոչել Ֆերմայի անունով։ Հասկանալի է, ստորև բերված ձևով այդ առաջադրությունը նրա մոտ չկա (Ֆերման դեռևս չուներ ածանցյալի գաղափարը), բայց այն այնուամենայնիվ վերարտադրում է էությունը այն եղանակի, որը կիրառում էր Ֆերման ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոնման համար (տե՛ս* XIV *գլ.)։*

Ֆերմայի թեորեման: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է մի X միջակայքում և այդ միջակայքի ներքին c կետում ընդունում է մեծագույն (փոքրագույն) արժեք: Եթե այդ կետում գոյություն ունի $f'(c)$ վերջավոր ածանցյալ, ապա անհրաժեշտաբար $f'(c)=0$։

Ապացուցում։ Դիցուք, որոշակիության համար, $f(x)$*-ը* c *կետում ընդունում է մեծագույն արժեք, այնպես որ* X*-ին պատկանող բոլոր* x*-երի համար*

$$f(x) \leqslant f(c)։$$

Ըստ ածանցյալի սահմանման՝

---

* *Պիեռ Ֆերմա (1601—1665)՝ ֆրանսիացի ականավոր մաթեմատիկոս, որի ստեղծագործությունը սերտորեն կապված է անվերջ փոքրերի անալիզի նախապատմության հետ (տե՛ս* XIV *գլ.)։*

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

ընդ որում՝ այդ սահմանը կախված չէ այն բանից, թե x*-ը* c*-ին պետք է մոտենա աջի՞ց, թե՞ ձախից։ Սակայն* $x > c$ *դեպքում ունենք՝*

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

այնպես որ սահմանում ևս, երբ $x \to c + 0$, *կստացվի՝*

$$f'(c) \leqslant 0. \tag{1}$$

Իսկ եթե $x < c$, *ապա կունենանք՝*

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

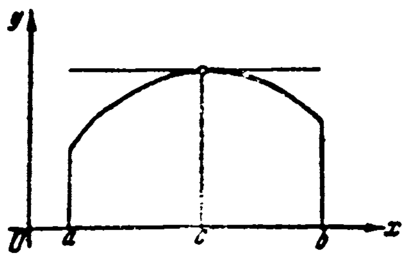
և, այստեղ անցնելով սահմանին, երբ $x \to c - 0$, *կգտնենք՝*

$$f'(c) \geqslant 0. \tag{2}$$

Բաղդատելով (1) և (2) առնչությունները, հանգում ենք պահանջվող եզրակացությանը՝

$$f'(c) = 0.$$

Դիտողություն: *Արված դատողությունը, ըստ էության, ապացուցում է, որ նշված* c *կետում չի կարող գոյություն ունենալ նաև (երկկողմյան) անվերջ ածանցյալ։ Այսպիսով, թեորեմի եզրակացությունը կպահպանվի, եթե այդ կետում ենթադրենք (երկկողմյան) ածանցյալի գոյությունը, նախապես վերապահում չանելով նրա վերջավոր լինելու վերաբերյալ։*



Գծ. 38.

Հիշենք [n°n° **77, 78**] $y' = f'(x)$ *ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանությունը որպես* $y = f(x)$ *կորի շոշափողի անկյունային գործակից։* $f'(c)$ *ածանցյալի զրո դառնալը երկրաչափորեն նշանակում է, որ այդ կորի համապատասխան կետում շոշափողը զուգահեռ է* OX *առանցքին։ 38-րդ գծագիրն այդ հանգամանքը լրիվին տեսանելի է դարձնում։*

Ապացուցման մեջ է ա պ ե ս օգտագործվեց այն ենթադրությունը, *որ c-ն միջակայքի ն ե ր ք ի ն կետ է, քանի որ կարիք եղավ դիտարկելու և՛ c-ից աջ գտնվող x կետերը, և՛ c-ից ձախ գտնվող x կետերը։ Առանց այդ ենթադրության թեորեմը կդադարեր իրավացի լինելուց. եթե* $f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է փակ միջակայքում և իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքին հասնում է այդ միջակայքի ծայրակետերից մեկում, ապա* $f'(x)$ *ածանցյալն այդ կետում (եթե գոյություն ունի) կարող է և զրո չլինել։ Ընթերցողին ենք թողնում համապատասխան օրինակ գտնելը։*

101. Ռոլլի թեորեմը։ *Դիֆերենցիալ հաշվի շատ թեորեմների ու բանաձևերի, ինչպես նաև նրա կիրառությունների հիմքում ընկած է հետևյալ պարզ, բայց կարևոր թեորեմը, որը կապվում է Ռ ո լ լ ի անվան հետ*։*

Ռ ո լ լ ի թ ե ո ր ե մ ը։ Դիցուք. 1) $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a, b]$ փակ միջակայքում, 2) գոյություն ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ առնվազն (a, b) բաց միջակայքում**, 3) միջակայքի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է հավասար արժեքներ՝ $f(a)=f(b)$։

Այդ դեպքում a-ի և b-ի միջև կգտնվի այնպիսի c կետ $(a<c<b)$, որտեղ $f'(c)=0$։

Ա պ ա ց ու ց ու մ։ $f(x)$*-ը* $[a, b]$ *փակ միջակայքում անընդհատ է և, ուրեմն, ըստ Վ ա յ ե ր շ տ ր ա ս ի 2-րդ թեորեմայի* [n°73], *նա այդ միջակայքում ընդունում է իր ինչպես M մեծագույն արժեքը, նույնպես և m փոքրագույն արժեքը։ Դիտարկենք երկու դեպք.*

1. $M=m$։ *Այդ ժամանակ* $f(x)$*-ը* $[a, b]$ *միջակայքում պահպանում է հաստատուն արժեք. իրոք,* $m\leqslant f(x)\leqslant M$ *անհավասարությունը այդ դեպքում կտա, որ* $f(x)=M$՝ *x-ի բոլոր արժեքների համար, ուստի* $f'(x)=0$ *ամբողջ միջակայքում, այնպես որ, որպես c կետ, կարելի է վերցնել* (a, b)*-ի ամեն մի կետ։*

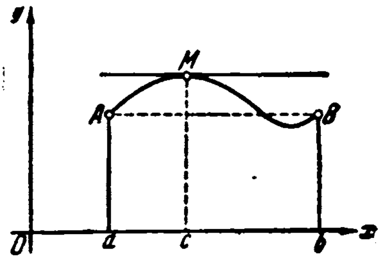
2. $M>m$։ *Մենք գիտենք, որ այս երկու արժեքներին էլ ֆունկցիան հասնում է, բայց, քանի որ* $f(a)=f(b)$, *ուստի նա չի կարող այդ ե ր կ ու արժեքներին էլ հասնել միջակայքի ծայրակետերում և դրանցից գոնե մեկը նա ընդունում է a-ի և b-ի միջև գտնվող որևէ c կետում։ Այդ դեպքում Ֆ ե ր մ ա յ ի թեորեմայից հետևում է, որ այդ*

---

* *Միշել Ռոլլ (1652–1719)—ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, որը երկար ժամանակ նոր հաշվի հակառակորդ էր և նրան հարեց միայն մեծ տարիքում։ Այստեղ բերված թեորեմը Ռոլլը արտահայտել է միայն բազմանդամների համար։*

** *Անշուշտ,* $f(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունը* (a, b)*-ում արդեն 2)-ից հետևում է, բայց մենք ոչ այստեղ և ոչ էլ հետագայում նպատակ չունենք թեորեմայի պայմանը բաժանել երկու փոխադարձաբար անկախ ենթադրությունների։*

կետում $f'(c)$ *ածանցյալը դառնում է զրո։ Թեորեմն ապացուցված է։*



Գծ. 39.

Երկրաչափական լեզվով Ռոլլի թեորեմն նշանակում է հետևյալը. եթե $y=f(x)$ *կորի ծայրերի օրդինատները հավասար են, ապա կորի վրա կգտնվի այնպիսի կետ, որտեղ կորին տարած շոշափողը զուգահեռ է* x*-երի առանցքին (գծ. 39)։*

Ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, որ $[a, b]$ *փակ միջակայքում* $f(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունը և ողջ* (a, b) *բաց միջակայքում ածանցյալի գոյություն ունենալը էական են թեորեմայի եզրակացության ճշտության համար։* $f(x)=x-E(x)$ *ֆունկցիան* $[0,1]$ *միջակայքում բավարարում է թեորեմայի բոլոր պայմաններին, բացառությամբ նրանից, որ* $x=1$ *արժեքի համար նա ունի խզում, իսկ* $(0,1)$*-ում ամենուրեք* $f'(x)=1$*։ Հետևյալ ֆունկցիան, որը որոշվում է* $f(x)=x$*, երբ* $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ *և* $f(x)=1-x$*, երբ* $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ *հավասարություններով, նույնպես բավարարում է բոլոր պայմաններին նույն միջակայքում, բացառելով միայն այն հանգամանքը, որ* $x=\frac{1}{2}$ *արժեքի համար ածանցյալ (երկկողմանի) գոյություն չունի, միաժամանակ միջակայքի ձախ կեսում* $f'(x)$ *ածանցյալը հավասար է* $+1$*-ի, իսկ աջ կեսում՝* -1*-ի*

Ճիշտ այդպես էլ, կարևոր է նաև թեորեմայի 3)-րդ պայմանը. $f(x)=x$ *ֆունկցիան* $[0,1]$ *միջակայքում բավարարում է թեորեմայի բոլոր պայմաններին, բացի 3)-րդից, իսկ նրա ածանցյալը ամենուրեք հավասար է մեկի՝* $f'(x)=1$.

Այս ֆունկցիաների գրաֆիկները գծելը թողնում ենք ընթերցողին։

102. Վերջավոր աճերի թեորեման։ *Անցնենք Ռոլլի թեորեմայի անմիջական հետևանքներին։ Դրանցից առաջինը վերջավոր աճերի թեորեման է, որը պատկանում է Լագրանժին։*

Լ ա գ ր ա ն ժ ի թ ե ո ր ե մ ա ն։ Դիցուք՝ 1) $f(x)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $[a, b]$ փակ միջակայքում, 2) գոյություն ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ առնվազն (a, b) բաց միջակայքում։ Այդ դեպքում a-ի և b-ի միջև կգտնվի այնպիսի c $(a<c<b)$ կետ, որ նրա համար տեղի կունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\text{։} \qquad (3)$$

Ապացուցում։ *Մտցնենք մի օժանդակ ֆունկցիա, որը* [a, b] *միջակայքում որոշվում է այսպես՝*

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\text{։}$$

Այս ֆունկցիան բավարարում է Ռոլլի թեորեմայի բոլոր պայմաններին։ Իրոք, նա [a, b]*-ում անընդհատ է, որովհետև իրենից ներկայացնում է* $f(x)$ *անընդհատ ֆունկցիայի և գծային ֆունկցիայի տարբերություն։* (a, b)*-ում նա ունի որոշակի վերջավոր ածանցյալ, որը հավասար է,*

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

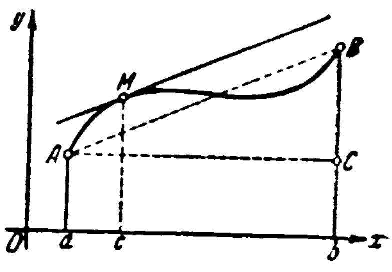
Վերջապես, անմիջական տեղադրության միջոցով համոզվում ենք, որ $F(a) = F(b) = 0$, *այսինքն՝* $F(x)$ *ֆունկցիան միջակայքի ծայրակետերում ընդունում է հավասար արժեքներ։*

Հետևապես, $F(x)$ *ֆունկցիայի նկատմամբ կարելի է կիրառել Ռոլլի թեորեման և համոզվել, որ* (a, b)*-ում այնպիսի* c *կետ գոյություն ունի, որտեղ* $F'(c) = 0$։ *Այսպիսով, կունենանք՝*

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \text{ որտեղից՝ } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Ռոլլի թեորեման հանդիսանում է Լագրանժի թեորեմայի մասնավոր դեպքը։ Այն դիտողությունները, որոնք վերևում արվեցին այդ թեորեմայի 1) և 2) պայմանների նկատմամբ, իրենց ուժը պահպանում են նաև այստեղ։



Գծ. 40.

Դիմելով Լագրանժի թեորեմայի երկրաչափական մեկնաբանմանը (գծ. 40), նկատենք, որ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{CB}{AC}$$

հարաբերությունը AB *հատողի անկյունային գործակիցն է, իսկ* $f'(c)$ *ածանցյալը՝* $y = f(x)$ *կորին* $x = c$ *աբսցիս ունեցող կետում տարած շոշափողի անկյունային գործակիցը։ Այսպիսով, Լագրանժի թեորեմայի պնդումը համարժեք է հետևյալին.* AB *աղեղի վրա միշտ կգըտ-*

ներսի առնվազն մեկ M կետ, որտեղ շոշափողը զուգահեռ է AB լարին։

Ապացուցված՝

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{կամ} \quad f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

բանաձևը կոչվում է Լագրանժի բանաձև կամ վերջավոր աճերի բանաձև։ Նա, ակներևաբար, տեղի ունի նաև այն դեպքում, երբ $a>b$։

$[a, b]$ *միջակայքում վերցնենք ցանկացած* x_0 *արժեք և նրան տանք այնպիսի* $\Delta x \lessgtr 0$ *աճ, որը նրան այդ միջակայքից դուրս չի բերում։ Լագրանժի բանաձևը կիրառենք* $[x_0, x_0+\Delta x]$ *միջակայքի նկատմամբ, երբ* $\Delta x>0$, *կամ* $[x_0+\Delta x, x_0]$ *միջակայքի նկատմամբ, երբ* $\Delta x<0$։ *Այդ դեպքում Լագրանժի բանաձևը կընդունի այսպիսի տեսք՝*

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(c) \tag{3ա}$$

կամ՝

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x։ \tag{4}$$

c *թիվը, որն այս դեպքում գտնվում է* x_0*-ի և* $(x+\Delta x)$*-ի միջև, կարելի է ներկայացնել այսպես՝*

$$c=x_0+\theta\cdot\Delta x, \quad \text{որտեղ} \quad 0<\theta<1^{*}։$$

Այս (4) հավասարությունը, որը տալիս է ճշգրիտ արտահայտություն ֆունկցիայի աճի համար արգումենտի ցանկացած Δx *վերջավոր աճի դեպքում, բնականաբար հակադրվում է*

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x$$

մոտավոր հավասարությանը [n° **93**, *(3 ա)*], *որի հարաբերական սխալը ձգտում է զրոյի միայն անվերջ փոքր* Δx*-ի դեպքում։ Հենց այստեղից էլ ծագում է «վերջավոր աճերի» վերաբերյալ հիշատակումը բանաձևի (և թեորեմայի) անվանման մեջ։*

---

* *Երբեմն ասում են, որ θ-ն «կանոնավոր կոտորակ» է, սակայն չպետք է կարծել, թե խոսքը ռացիոնալ կոտորակի մասին է. θ թիվը կարող է նաև իռացիոնալ լինել։*

*Լագրանժի բանաձևի համար թերությունն է այն, որ նրա մեջ մասնակցում է մեզ անհայտ c (կամ θ) թիվը**։ *Այդ չի խանգարում, սակայն, նրա բազմազան կիրառություններին անալիզում։*

103. Ածանցյալի սահմանը։ *Այդպիսի կիրառության օգտակար օրինակ է հանդիսանում հետևյալ դիտողությունը։ Ենթադրենք, թե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[x_0, x_0+H]$ միջակայքում $(H>0)$ և $x_0 < x$-երի համար ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ։ Եթե գոյություն ունի*

$$\lim_{x \to x_0+0} f'(x) = K$$

սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ), ապա հենց այդպիսին կլինի նաև աջակողմյան ածանցյալը x_0 կետում։ Իսկապես, $0 < \Delta x \leqslant H$ դեպքում ունենք (3 ա) հավասարությունը։ Քանի որ ածանցյալի c արգումենտը գտնվում է x_0-ի և $(x_0+\Delta x)$-ի միջև, ուստի, երբ $\Delta x \to 0$, նա կձգտի x_0-ին, այնպես որ հավասարության աջ մասը, իսկ նրա հետ նաև ձախ մասը, կձգտի K սահմանին, որը և պահանջվում էր ապացուցել։ Համանման պնդում հաստատվում է նաև x_0 կետի ձախակողմյան շրջակայքի համար։

Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f(x) = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$[-1, 1]$ *միջակայքում։ Եթե $-1 < x < 1$, ապա ածանցման սովորական կանոններով հեշտ է գտնել՝*

$$f'(x) = \arcsin x\text{։}$$

Երբ $x \to 1-0$ (կամ՝ $-1+0$), այդ ածանցյալը, ակնհայտորեն, կձգտի $\frac{\pi}{2}$ (կամ $-\frac{\pi}{2}$) սահմանին. նշանակում է՝ նաև $x = \pm 1$ դեպքում գոյություն ունեն (միակողմյան) ածանցյալներ՝ $f'(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}$։

*Եթե վերադառնանք n° **87**-ում դիտարկած $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$ և $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$ ֆունկցիաներին, ապա դրանց համար ($x \gtrless 0$ դեպքում) ունենք՝*

$$f_1(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}, \qquad f_2(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}\text{։}$$

---

* *Միայն քիչ դեպքերում մենք կարող ենք այն իմանալ. օրինակի համար, $f(x) = ax^2 + bx + c$ քառակուսային ֆունկցիայի համար, ինչպես հեշտ է ստուգել, միշտ $\theta = \frac{1}{2}$։*

Քանի որ $x \to 0$ *ժամանակ այս արտահայտություններից առաջինը ձգտում է* $+\infty$, *իսկ երկրորդը* $x \to \pm 0$ *ժամանակ ունի համապատասխանաբար* $\pm\infty$ *սահմանները, ուստի անմիջապես եզրակացնում ենք, որ* $f_1(x)$ *ֆունկցիան* $x = 0$ *կետում ունի երկկողմյան ածանցյալ՝* $+\infty$, *իսկ* $f_2(x)$*-ի համար այդ կետում գոյություն ունեն միայն միակողմյան ածանցյալներ, աջից՝* $+\infty$, *իսկ ձախից՝* $-\infty$։

Ասածից բխում է նաև, որ եթե $f'(x)$ *վերջավոր ածանցյալ գոյություն ունի մի որոշ միջակայքում, ապա այն իրենից ներկայացնում է այնպիսի ֆունկցիա, որը չի կարող ունենալ սովորական խզումներ կամ թռիչքներ. յուրաքանչյուր կետում նա կամ անընդհատ է, կամ երկրորդ տեսակի խզում ունի [համեմատել* n° **88**, 2°]։

104. Վերջավոր աճերի ընդհանրացրած թեորեման: *Վերջավոր աճերի վերաբերյալ* n° **102***-ում ապացուցած թեորեման Կոշին հետևյալ կերպ է ընդհանրացրել։*

Կոշիի թեորեման: Դիցուք՝ 1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[a, b]$ փակ միջակայքում, 2) գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ՝ առնվազն (a, b) բաց միջակայքում, 3) $g'(x) \neq 0$ (a, b) միջակայքում։

Այդ դեպքում a-ի և b-ի միջև կգտնվի այնպիսի c կետ, որ

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \tag{5}$$

Այս բանաձևը կրում է Կոշիի բանաձև անունը։

Ապացուցում։ Նախ նկատենք, որ վերոհիշյալ հավասարության ձախ մասի հայտարարը զրոյի հավասար չէ, քանի որ հակառակ դեպքում այդ արտահայտությունը իմաստ չէր ունենա։ Եթե լիներ $g(b) = g(a)$, *ապա, ըստ Ռոլլի թեորեմայի, մի որոշ միջանկյալ կետում պետք է* $g'(x)$ *ածանցյալը հավասար լիներ զրոյի, որը կհակասեր 3)-րդ պայմանին. ուրեմն* $g(b) \neq g(a)$։

Այժմ դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,[g(x) - g(a)]\text{։}$$

Սա բավարարում է Ռոլլի թեորեմայի բոլոր պայմաններին։ Իրոք, $F(x)$*-ը* $[a, b]$*-ում անընդհատ է, որովհետև* $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաները անընդհատ են.* $F'(x)$ *ածանցյալը* (a, b)*-ում գոյություն ունի և հավասար է*

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$$

արտահայտությանը։ Վերջապես, ուղղակի տեղադրության միջոցով հա-

մոգվում ենք, որ $F(a) = F(b) = 0$։ *Հետևապես Ռոլլի թեորեմայի համաձայն* (a, b) *միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի* c *կետ, որտեղ* $F'(c) = 0$։ *Այլ կերպ ասած, ունենք՝*

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

կամ՝

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)\text{։}$$

Բաժանելով $g'(c)$*-ի վրա (որը հնարավոր է, որովհետև* $g'(c) \neq 0$*), կստանանք պահանջվելիք հավասարությունը։*

Պարզ է, որ Լագրանժի թեորեման հանդիսանում է Կոշիի թեորեմայի մասնավոր դեպքը։ Կոշիի բանաձևից վերջավոր աճերի բանաձևն ստանալու համար պետք է ընդունել $g(x) = x$։ n°n° **101**, **102**, **104**-*ում ապացուցած թեորեմաներում ածանցյալի նշանի տակ մասնակցում է անկախ փոփոխականի մի ինչ որ* *միջանկյալ արժեք*, *որը, ինչպես արդեն նշել ենք, ընդհանրապես մեզ համար անհայտ է։ Այդ արժեքը ածանցյալին նույնպես տալիս է, որոշ իմաստով,* *միջին արժեք*։ *Այդ կապակցությամբ բոլոր այդ թեորեմաներն անվանում են «միջին արժեքների թեորեմաներ»։*

§ 2. ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

105. Թեյլորի բանաձևը բազմանդամի համար։ *Եթե* $p(x)$*-ը* n*-րդ աստիճանի ամբողջ բազմանդամ է՝*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n, \tag{1}$$

ապա այդ բազմանդամը հաջորդաբար n *անգամ դիֆերենցելով, կըստանանք՝*

$$p'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \cdots + n \cdot a_n x^{n-1},$$

$$p''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \cdots + (n-1)\, n \cdot a_n x^{n-2},$$

$$p'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots + (n-2)(n-1)n \cdot a_n x^{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot a_n\text{։}$$

Այդ բոլոր բանաձևերի մեջ ընդունելով $x = 0$, *կստանանք բազման-*

դամի գործակիցներն՝ արտահայտված բազմանդամի ու նրա ածանցյալների արժեքներով $x=0$ *կետում՝*

$$a_0=p(0),\quad a_1=\frac{p'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{p''(0)}{2!},$$

$$a_3=\frac{p'''(0)}{3!},\ldots,\quad a_n=\frac{p^{(n)}(0)}{n!}։$$

Գործակիցների այս արժեքները տեղադրենք (1)-ի մեջ՝

$$p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\frac{p'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n։\qquad (2)$$

Այս բանաձևը (1)-ից տարբերվում է գործակիցների գրության ձևով։

Բազմանդամը x*-ի աստիճաններով վերլուծելու փոխարեն կարելի է վերցնել նրա վերլուծումը* $(x-x_0)$*-ի աստիճաններով, որտեղ* x_0*-ն* x*-ի որևէ մասնավոր հաստատուն արժեք է։ Այսպես՝*

$$p(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+$$
$$+A_3(x-x_0)^3+\cdots+A_n(x-x_0)^n։\qquad (3)$$

Ընդունելով $x-x_0=\xi$, $p(x)=p(x_0+\xi)=P(\xi)$,

$$P(\xi)=A_0+A_1\xi+A_2\xi^2+A_3\xi^3+\cdots+A_n\xi^n$$

բազմանդամի գործակիցների համար, ըստ ապացուցածի, կունենանք հետևյալ արտահայտությունները՝

$$A_0=P(0),\quad A_1=\frac{P'(0)}{1!},\quad A_2=\frac{P''(0)}{2!},$$

$$A_3=\frac{P'''(0)}{3!},\ldots,\quad A_n=\frac{P^{(n)}(0)}{n!}։$$

Սակայն՝

$$P(\xi)=p(x_0+\xi),\quad P'(\xi)=p'(x_0+\xi),$$
$$P''(\xi)=p''(x_0+\xi),\ldots$$

ուստի՝

$$P(0)=p(x_0),\quad P'(0)=p'(x_0),\quad P''(0)=p''(x_0),\ldots$$

և՝

$$
\left.\begin{array}{l}
A_0 = p(x_0), \quad A_1 = \dfrac{p'(x_0)}{1!}, \; A_2 = \dfrac{p''(x_0)}{2!}, \\[2mm]
A_3 = \dfrac{p'''(x_0)}{3!}, \ldots, \quad A_n = \dfrac{p^{(n)}(x_0)}{n!},
\end{array}\right\} \tag{4}
$$

այսինքն՝ (3)-րդ վերլուծության գործակիցներն արտահայտվեցին բազմանդամի ու նրա ածանցյալների արժեքներով $x = x_0$ կետում։

(4) արտահայտությունները տեղադրելով (3)-ի մեջ, կստանանք

$$
p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +
$$
$$
+ \frac{p'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\text{։} \tag{5}
$$

*(5) բանաձևը, ինչպես նաև նրա (2) մասնավոր դեպքը (երբ $x_0 = 0$), կոչվում է Թեյլորի բանաձև։ Ի դեպ, (2) բանաձևը սովորաբար Մակլորենի բանաձև են անվանում**։*

Հայտնի է, թե ինչպիսի կարևոր կիրառություններ ունի այս բանաձևը հանրահաշվի մեջ։

Անենք (հետագայի համար օգտակար) ակներև մի դիտողություն. եթե $p(x)$ բազմանդամը ներկայացվում է

$$
p(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(x - x_0) + \frac{c_2}{2!}(x - x_0)^2 +
$$
$$
+ \frac{c_3}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{c_n}{n!}(x - x_0)^n
$$

տեսքով, ապա անհրաժեշտաբար՝

$$
p(x_0) = c_0, \; p'(x_0) = c_1, \; p''(x_0) = c_2, \ldots, \; p^{(n)}(x_0) = c_n\text{։}
$$

106. Կամայական ֆունկցիայի վերլուծումը։ *Այժմ անցնենք կամայական $f(x)$ ֆունկցիայի դիտարկմանը, որն ընդհանրապես ամբողջ բազմանդամ չէ, բայց որոշված է մի X միջակայքում։ Ենթադրենք, թե մի x_0 կետում (X-ից) այդ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն բոլոր կարգի ածանցյալներ, մինչև n-րդը ներառյալ։ Ավելի ճշգրիտ ասած, այդ նշանակում է, որ ֆունկցիան որոշված է և ունի բոլոր կարգի ածանցյալներ, մինչև $(n - 1)$-րդը ներառյալ՝*

---

* *Բրուկ Թեյլոր (1685—1731) և Կոլին Մակլորեն (1698—1746)՝ անգլիացի մաթեմատիկոսներ, Նյուտոնի հետևորդներ։*

$$f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),\ldots,\ f^{(n-1)}(x)$$

x_0 կետի մի որոշ շրջակայքում, և, բացի այդ, n-րդ կարգի $f^{(n)}(x_0)$ ածանցյալ ունի հենց x_0 կետում*։ Այդ ժամանակ, (5)-ի օրինակով, $f(x)$ ֆունկցիայի համար ևս կարելի կլինի կազմել այսպիսի բազմանդամ՝

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ ; \qquad (6)$$

Համաձայն նախորդ դիտողության, այս բազմանդամն ու նրա ածանցյալները (մինչև n-րդը ներառյալ) x_0 կետում ունեն նույն արժեքները, ինչ որ $f(x)$ ֆունկցիան ու նրա ածանցյալները։

Սակայն այս անգամ, եթե միայն $f(x)$-ը n-րդ աստիճանի ամբողջ ֆունկցիան չէ, արդեն չի կարելի պնդել, որ տեղի ունի $f(x) = p_n(x)$ հավասարությունը։ $p_n(x)$ բազմանդամը տալիս է միայն $f^n(x)$ ֆունկցիայի մի որոշ մոտավորությունը, որի օգնությամբ էլ հենց կարելի է այդ ֆունկցիան հաշվել մի որոշ ճշգրտությամբ։ Այդ կապակցությամբ հատուկ հետաքրքրություն է ստանում

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

կամ՝

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (7)$$

տարբերության գնահատականը X-ից վերցրած տվյալ x-ի և տվյալ n-ի համար։

$r_n(x)$-ի համար գրված արտահայտությունն այդ նպատակին չի կարող ծառայել։ Որպեսզի հետազոտության համար ավելի հարմար տեսքով ներկայացնենք այն, մենք պետք է $f(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ առաջադրենք ավելի խիստ պայմաններ, քան այն պայմանները, որոնք անմիջականորեն հարկավոր են $p_n(x)$ բազմանդամը կազմելու

---

* Եթե x_0 կետը հանդիսանում է X միջակայքի ծայրակետերից մեկը, ապա այդ կետում ածանցյալների մասին խոսելիս, մենք ի նկատի ունենք միակողմյան ածանցյալները։ Ճիշտ այդպես էլ, x_0 կետի շրջակայք ասելով հասկանում ենք, այս դեպքում, միակողմյան շրջակայքը։

համար։ Այն է՝ այսուհետև մենք ենթադրելու ենք, որ $f(x)$ *ֆունկցիայի համար* X *միջակայքում գոյություն ունեն բոլոր ածանցյալները մինչև* $(n+1)$*-րդ կարգին ներառյալ՝*

$$f'(x),\quad f''(x),\cdots,\quad f^{(n)}(x),\quad f^{(n+1)}(x)։$$

Այժմ X *միջակայքից վերցնենք մի ցանկացած* x *արժեք և այն սևեռենք (պահպանենք հաստատուն)։ Այնուհետև, (7) բանաձևի աջ մասի օրինակով,* x_0 *հաստատուն թիվը փոխարինելով* z *փոփոխականով, կազմենք մի նոր, օ ժ ա ն դ ա կ ֆունկցիա՝*

$$\varphi(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2-\dots$$

$$\dots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

ընդ որում ընդունում ենք, որ z *անկախ փոփոխականը փոփոխվում է* $[x_0, x]$ *միջակայքում։** *Այդ միջակայքում* $\varphi(z)$ *ֆունկցիան անընդհատ է և նրա ծայրակետերում ընդունում է հետևյալ արժեքները [տե՛ս (7)]՝*

$$\varphi(x_0)=r_n(x),\quad \varphi(x)=0։ \tag{8}$$

Բացի այդ, (x_0, x) *միջակայքում գոյություն ունի նրա ածանցյալը՝*

$$\varphi'(z)=-f'(z)-\left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z)-f'(z)\right]-$$

$$-\left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2-\frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right]-$$

$$-\left[\frac{f^{IV}(z)}{3!}(x-z)^3-\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n-\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right]$$

կամ, պարզեցնելուց հետո՝

$$\varphi'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n, \tag{9}$$

---

* *Մենք, որոշակիության համար, համարելու ենք* $x>x_0$։

Եթե վերցնենք մի որևէ $\psi(z)$ *ֆունկցիա ևս, որը* $[x_0, x]$ *միջակայքում անընդհատ է և* (x_0, x) *բաց միջակայքում ունի զրո չդարձող* $\psi'(z)$ *ածանցյալ, ապա* $\varphi(z)$ *և* $\psi(z)$ *ֆունկցիաների նկատմամբ կարելի է կիրառել Կոշիի բանաձևը* [n^0 **104**]՝

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)}=\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

որտեղ c*-ն գտնվում է* x_0*-ի և* x*-ի միջև, այսինքն՝*

$$c=x_0+\Theta\,(x-x_0)\quad(0<\Theta<1)։$$

Հաշվի առնելով (8)-ը և (9)-ը, նախորդ հավասարությունից կգտնենք՝

$$r_n(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\,(x-c)^n։ \tag{10}$$

$\psi(z)$ *ֆունկցիան նախ ընտրենք այսպես՝*

$$\psi(z)=(x-z)^{(n+1)},$$

որի համար բավարարվում են վերևում ձևակերպված պայմանները։ Ունենք՝

$$\psi(x_0)=(x-x_0)^{n+1},\quad \psi(x)=0,\quad \psi'(c)=-(n+1)(x-c)^n։$$

Դրանք տեղադրելով (10)-ում, վերջնականորեն կստանանք՝

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}։ \tag{11}$$

Այժմ, հաշվի առնելով (7)-ը և (11)-ը, $f(x)$ *ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել հետևյալ բանաձևով՝*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{12}$$

որը բազմանդամի համար ստացած Թեյլորի բանաձևից տարբերվում է հենց (11) լրացուցիչ անդամի առկայությամբ։

Լրացուցիչ անդամի (11) ձևը Լագրանժին է պատկանում. այդ տեսքով լրացուցիչ անդամը հիշեցնում է Թեյլորի բանաձևի հաջորդ հերթական անդամը, միայն փոխանակ $(n+1)$*-րդ ածանցյալը հաշվելու* x_0 *կետում, այդ ածանցյալը վերցրած է* x_0*-ի և* x*-ի միջև գտնվող մի* c *միջանկյալ արժեքի համար։*

(12) բանաձևն անվանում են ***Թեյլորի բանաձև՝ լագրանժյան ձևի լրացուցիչ անդամով։*** *Եթե այդ բանաձևում* $f(x_0)$*-ն տեղափոխենք ձախ մասը և նշանակենք* $x - x_0 = \Delta x$, *ապա այն կարտագրվի այսպես՝*

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}\text{։} \qquad (12\ ա)$$

Այս տեսքով նա ուղղակի ընդհանրացումն է ***վերջավոր աճերի***

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x$$

բանաձևի, որը համապատասխանում է $n = 0$ *դեպքին։*

Թեպետև լրացուցիչ անդամը լագրանժյան տեսքով այնքա՜ն պարզ է, որ ավելին սպասել չի էլ կարելի, բայց, այնուամենայնիվ, առանձին դեպքերում այդ ձևը պիտանի չէ լրացուցիչ անդամի գնահատման համար և հարկավոր է լինում դիմելու այլ, պակաս չափով պարզ, ձևերի։ Դրանցից այստեղ հիշատակենք Կոշիի ձևը, որը (10)-ից ըստացվում է, երբ $\psi(z) = x - z$։ *Այս դեպքում՝*

$$\psi(x_0) = x - x_0, \quad \psi(x) = 0, \quad \psi'(c) = -1$$

և, քանի որ՝

$$(x - c)^n = [x - x_0 - \theta(x - x_0)]^n = (1 - \theta)^n (x - x_0)^n,$$

ուստի՝ հանգում ենք այսպիսի վերջնական արտահայտության՝

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}\text{։} \qquad (13)$$

Չնայած (լագրանժյան ձևի հետ համեմատած) $(n + 1)$ *բազմապատկչի կորստին հայտարարում, այս ձևը երբեմն ավելի ձեռնտու է հենց* $(1 - \theta)^n$ *բազմապատկչի առկայության շնորհիվ։*

Թեյլորի բանաձևը, նշված ձևերից այս կամ այն ձևով գրված լրացուցիչ անդամով, ինչպես տեսնում ենք, միջին արժեքների թեորեմների մի տարատեսակն է. այստե՛ղ ևս մասնակցում է c *կամ* θ։

107. Լրացուցիչ անդամի մի այլ ձև։ *Թեյլորի բանաձևի լրացուցիչ անդամի վերևում արտածված ձևերը կիրառվում են այնպիսի դեպքերում, երբ,* x*-ի այս կամ այն սևեռյալ արժեքի (*x_0*-ից տարբեր)* *համար, ցանկանում ենք* $f(x)$ *ֆունկցիան մոտավորապես փոխարինել* $p_n(x)$ *բազմանդամով և թվապես գնահատել այդ ժամանակ առաջացող սխալը։ Սակայն դեպքեր են լինում, երբ մեզ չեն հետաքրքրում* x*-ի առանձին արժեքները, այլ մեզ համար կարևոր է սոսկ լրացուցիչ անդամի վարքը* x*-ը* x_0*-ին ձգտելիս, ավելի ճշգրիտ ասած՝ նրա փոքրության կարգը։ Այդ կարգի հարցը կարելի է պարզել նույնիսկ որոշ չափով ավելի թույլ պայմանների դեպքում, քան վերևում ենթադրել էինք։ Այն է, ենթադրենք միայն*

$$f'(x),\quad f''(x),\cdots,\quad f^{(n)}(x)$$

հաջորդական n *ածանցյալների գոյությունը* x_0*-կետի շրջակայքում (երկկողմյան կամ միակողմյան) և դրանցից վերջինի անընդհատությունը* x_0 *կետում**։ *Այդ դեպքում, (12) բանաձևում* n*-ը փոխարինելով* $(n-1)$*-ով, կարող ենք գրել՝*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

որտեղ c*-ն գտնվում է* x_0*-ի և* x*-ի միջև։ Վերջին անդամում նշանակենք՝*

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)\text{։} \tag{14}$$

Քանի որ, երբ $x\to x_0$ *նաև* $c\to x_0$, *այնպես որ (անընդհատության շնորհիվ)* $f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(x_0)$, *ուստի* $\alpha(x)\to 0$ *և* $\alpha(x)\cdot(x-x_0)^n=o((x-x_0)^n)$։ *Վերջնականապես ստանում ենք՝*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\text{։} \tag{15}$$

Այսպիսով, այս անգամ՝

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n), \tag{16}$$

**Փաստորեն բավական է ենթադրել* $f^{(n)}(x_0)$ *ածանցյալի միայն գոյությունը* $x=x_0$ *կետում։ Մենք այստեղ ավելի խիստ պայմաններ ենք դրել ապացուցումը հեշտացնելու համար։*

այսինքն՝ լրացուցիչ անդամի վերաբերյալ մենք այստեղ միայն ա՛յն գիտենք, որ հաստատուն n-ի դեպքում, երբ $x \to x_0$, նա կլինի $(x - x_0)$-ի նկատմամբ n-րդից բարձր կարգի անվերջ փոքր, չնայած և կարևոր է այդ ընդգծել, մենք ոչինչ չգիտենք նրա արժեքի մասին x-ի և ոչ մի սևեռյալ արժեքի դեպքում։ Լրացուցիչ անդամի (16) ձևը ցույց է տվել Պեանոն*։

Մենք տեսնում ենք, որ (15) բանաձևն իրոք որոշակիորեն «լոկալ» (տեղային) բնույթ ունի, բնութագրելով սոսկ ֆունկցիայի վարքը x-ը x_0-ին ձգտելիս։

Եթե (15)-ում նորից $f(x_0)$-ն տեղափոխենք աջ մասը և նշանակենք $x - x_0 = \Delta x$, ապա կհանգենք հետևյալ վերլուծությանը՝

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + o(\Delta x^n), \quad (15\ \text{ա})$$

որը n° 82-ում ստացած՝

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

(3) բանաձևի ընդհանրացումն է. այն ստացվում է (15 ա)-ից $n = 1$ դեպքում։

Երբեմն ավելի հարմար է լինում (14)-ի փոխարեն նշանակել պարզապես՝

$$f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0) + \alpha(x).$$

այստեղ նույնպես $\alpha(x) \to 0$, երբ $x \to x_0$, իսկ Թեյլորի բանաձևը Պեանոյի ձևով լրացուցիչ անդամով կգրվի այսպես՝

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (17)$$

Վերջում մի դիտողություն ևս անենք։ Եթե (12 ա) և (15 ա) բանաձևերում Δx-ը փոխարինենք dx-ով և հիշենք, որ՝

$$f'(x_0)dx = df(x_0), \quad f''(x_0)dx^2 = d^2f(x_0), \cdots$$

$$\cdots, f^{(n)}(x_0)dx^n = d^nf(x_0) \ \text{և}\ f^{(n+1)}(c)dx^{n+1} = d^{n+1}f(c),$$

ապա, այս արտահայտությունները տեղադրելով, վերոհիշյալ վերլուծությունները կներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

---

* Ջուզեպե Պեանո (1858—1932)՝ իտալացի մաթեմատիկոս։

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^nf(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}f(c)$$

$$(c = x_0 + \theta\Delta x, \quad 0 < \theta < 1) \qquad (12\ բ)$$

կամ՝

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!} d^2f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^nf(x_0) + o(\Delta x^n)\text{։} \qquad (15\ բ)$$

Այսպիսով, եթե ենթադրենք, որ $\Delta x \to 0$, *ապա այս բանաձևերով ֆունկցիայի* $\Delta f(x_0)$ *անվերջ փոքր աճից առանձնացվում է ոչ միայն նրա գլխավոր մասը՝ առաջին դիֆերենցիալը, այլև ավելի բարձր կարգի փոքրության անդամներ, որոնք, հայտարարներում գտնվող ֆակտորիալների ճշգրտությամբ, համընկնում են հաջորդական բարձր կարգի* $d^2f(x_0), \cdots, d^nf(x_0)$ *դիֆերենցիալների հետ։*

108. Ստացած բանաձևերի կիրառումը տարրական ֆունկցիաների նկատմամբ: *Թեյլորի բանաձևն ամենից պարզ տեսք է ընդունում* $x_0 = 0$ *դեպքում՝**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x)\text{։} \qquad (18)$$

Հարցը միշտ կարելի է հանգեցնել այս մասնավոր դեպքին, $(x - x_0)$*-ն ընդունելով որպես նոր փոփոխական։*

Դիտարկենք տարրական ֆունկցիաների համար մի քանի կոնկրետ վերլուծումներ այդ բանաձևով։

1) Դիցուք $f(x) = e^x$. *այդ ժամանակ ցանկացած* $k = 1, 2, 3, \cdots$ *դեպքում* $f^{(k)}(x) = e^x$ [n° **96**, 3)]։ *Քանի որ այս դեպքում* $f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = 1$, *ուստի (18) բանաձևով կստանանք՝*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x)\text{։}$$

2) Եթե $f(x) = \sin x$, *ապա* $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ [n° **96**, 4)],

ուստի՝

$$f(0) = 0, \quad f^{(2m)}(0) = \sin m\pi = 0,$$

* *Այս բանաձևը ևս կրում են Մակլորենի անվան հետ։*

$$f^{(2m-1)}(0) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)։$$

Այդ պատճառով, (18) բանաձևի մեջ ընդունելով $n = 2m$, *կունենանք՝*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x)։$$

3) Նույն ձևով, երբ $f(x) = \cos x$, *կունենանք* [n° **96**, 4)]՝

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f(0) = 1, \quad f^{(2m)}(0) = (-1)^m,$$

$$f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)։$$

Ուստի (եթե ընդունենք $n = 2m + 1$*)՝*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + r_{2m+1}(x)։$$

4) Այժմ դիտարկենք x^m *աստիճանային ֆունկցիան, որտեղ* m*-ը ո՛չ բնական թիվ է, ո՛չ էլ զրո։ Այս դեպքում, երբ* $x \to 0$, *կամ ինքը ֆունկցիան (եթե* $m < 0$*), կամ նրա ածանցյալները (սկսած որևէ կարգից, երբ* $n > m$*) անվերջ աճում են։ Հետևապես, այստեղ արդեն չի կարելի վերցնել* $x_0 = 0$։

Վերցնենք $x_0 = 1$, *այսինքն՝* x^m*-ը վերլուծենք* $(x-1)$*-ի աստիճաններով։ Ի միջի այլոց, ինչպես արդեն ասվել է, որպես նոր փոփոխական կարելի է ընդունել* $(x-1)$*-ը։ Այդ փոփոխականը նախկինի նման դարձյալ նշանակենք* x*-ով և* $(1+x)^m$ *ֆունկցիան վերլուծենք* x*-ի աստիճաններով։*

Ինչպես գիտենք [n° **96**, 1)],

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

ուստի՝

$$f(0) = 1, \quad f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-k+1)։$$

Վերլուծումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}x^n + r_n(x)։$$

5) Եթե անցնենք $\ln x$ *լոգարիթմական ֆունկցիային, որը, երբ*

$x \to 0$, ձգտում է $-\infty$, ապա, ինչպես և նախորդ օրինակում, նպատակահարմար կլինի դիտարկել $f(x) = \ln(1+x)$ ֆունկցիան և այն վերլուծել x-ի աստիճաններով։

Այդ ժամանակ [(n°**96**, 2)] *կունենանք՝*

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^{*}}{(1+x)^k},$$

$$f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

որտեղից՝

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x)$$

6) Դիցուք, այժմ $f(x) = \operatorname{arctg} x$։ n° **96**, *5)-ից հեշտ է ստանալ նրա ածանցյալների արժեքները* $x = 0$ *կետում՝*

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m-1)}(0) = (-1)^{m-1}(2m-2)!,$$

ուստի նրա վերլուծումը կներկայացվի այսպես՝

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + r_{2m}(x)։$$

109. Մոտավոր բանաձևեր: Օրինակներ: *Եթե (18) բանաձևում լրացուցիչ անդամը դեն նետենք, ապա կստացվի հետևյալ մոտավոր բանաձևը՝*

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

որը ավելի բարդ բնույթի ֆունկցիան փոխարինում է բազմանդամով։ Այս բանաձևի որակը գնահատվում է երկու ձևով. կամ նշում են $r_n(x)$ *սխալի սահմանը, սովորաբար օգտվելով լրացուցիչ անդամի լագրանժյան ձևից՝*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1,)$$

կամ, հետևելով Պեանոյին, բավարարվում են այդ սխալի փոքրության կարգը նշելով $x \to 0$ *դեպքում՝*

$$r_n(x) = o(x^n)։$$

Օրինակների համար դիմենք տարրական ֆունկցիաների՝ վերևում դիտարկված վերլուծություններին։

1) Ընդունենք $f(x) = e^x$։ *Մոտավոր բանաձևը կլինի՝*

---

* *Ընդունում ենք, ինչպես միշտ, որ* $0! = 1$։

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

քանի որ այստեղ լրացուցիչ անդամն է

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

ուստի, օրինակ, երբ $x > 0$, *սխալը գնահատվում է այսպես՝*

$$0 < r_n(x) < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $x = 1$,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad 0 < r_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Նման բանաձևից մենք արդեն օգտվել ենք n° **49**-*ում* e *թվի մոտավոր հաշվման համար, սակայն լրացուցիչ անդամի գնահատականը, որն ստացված էր այլ ճանապարհով, այնտեղ ավելի ճշգրիտ էր։*

2) Վերցնելով $f(x) = \sin x$, *կստանանք՝*

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

Այս դեպքում լրացուցիչ անդամն է՝

$$r_{2m}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!} x^{2m+1} =$$

$$= (-1)^m \cos\theta x \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

և սխալը գնահատվում է հեշտությամբ՝

$$[r_{2m}(x)] \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Մասնավորապես, եթե մենք բավարարվենք միայն մեկ անդամով և ընդունենք

$$\sin x \approx x,$$

ապա, որպեսզի սխալը ավելի փոքր լինի, քան, ասենք թե 0,001-*ը, բավական է վերցնել (համարելով* $x > 0$)*՝*

$$\frac{x^3}{6} < 0{,}001, \quad \text{կամ՝} \quad x < 0{,}1817,$$

որը մոտավորապես հավասար է 10°-*ի։ Երբ օգտվենք երկանդամ բանաձևից՝*

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6},$$

Նույն ճշգրտությունն ստանալու համար արդեն բավական է վերցնել

$$\frac{x^5}{120} < 0{,}001, \text{ կամ՝ } \quad x < 0{,}6544(\approx 37^\circ{,}5),$$

իսկ եթե սահմանափակվենք $x < 0{,}4129(\doteq 23^\circ{,}5)$ անկյուններով, ապա սխալը նույնիսկ $< 0{,}0001$ և այլն։

3) Նույն ձևով, $f(x) = \cos x$ ֆունկցիայի համար ունենք

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

ընդ որում՝

$$r_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos\theta x \, \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

այնպես որ,

$$|r_{2m+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Օրինակ,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

բանաձևի համար սխալը՝

$$|r_3(x)| \leqslant \frac{x^4}{24}$$

և հետևապես կլինի, ասենք՝ $< 0{,}0001$, երբ $x < 0{,}2213\ (\approx 13^\circ)$ և այլն։

Մենք ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք էական առաջընթացի վրա n°n° **56**, **57**, **93**-ի բանաձևերի համեմատությամբ. մենք այժմ կարող ենք որոշել սխալի սահմանները և ձեռքի տակ ունենք ցանկացած ճշգրտությամբ բանաձևեր:

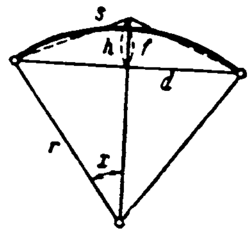
Վերջապես, բերենք բոլորովին այլ տեսակի մոտավոր բանաձևի մի օրինակ, որը, այնուամենայնիվ, օգտագործում է Թեյլորի բանաձևը։

4) Շրջանագծի՝ շառավղի համեմատությամբ փոքր աղեղի երկարությունը հաշվելու համար (գծ. 41) Չեբիշևը* տվել է հետևյալ կանոնը,

---

* Ակադեմիկոս Պաֆնուտի Լվովիչ Չ ե բ ի շ և վ (1821—1894)՝ ռուս մեծ մաթեմատիկոս, պետերբուրգյան մաթեմատիկական դպրոցի հիմնադիրը։

s աղեղը մոտավորապես հավասար է d լարի վրա կառուցված այն հավասարասրուն եռանկյան հավասար կողմերի գումարին, որի բարձրությունը հավասար է f սլաքի $\sqrt{\frac{4}{3}}$ մասին:



Գծ. 41.

Եթե կենտրոնական անկյան կեսը նշանակենք x, *իսկ շառավիղը՝* r, *ապա* $s = 2rx$։ *Մյուս կողմից՝*

$$\frac{1}{2}d = r\sin x = r\left\{ x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right\},$$

$$\left(\frac{1}{2}d\right)^2 = r^2\left\{ x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) \right\},$$

$$h = \sqrt{\frac{4}{3}}\,f = \sqrt{\frac{4}{3}}\,r(1-\cos x) = \sqrt{\frac{4}{3}}\,r\left\{ \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \right\},$$

$$h^2 = r^2\left\{ \frac{x^4}{3} + o(x^5) \right\},$$

այնպես որ հավասար կողմերի գումարը, Պյութագորասի թեորեմայի համաձայն, հավասար է՝

$$2\sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + h^2} = 2r\sqrt{x^2 + o(x^5)} =$$

$$= 2rx\sqrt{1 + o(x^3)} = 2rx + o(x^4)։$$

Ընթերցողի համար պարզ է, որ Չեբիշևի բանաձևում $\sqrt{\frac{4}{3}}$ *բազմապատկչի դերը հենց կայանում է նրանում, որպեսզի արմատանշանի տակ ոչնչացվի* x^4 *պարունակող անդամը։ Վերջնական հաշվում աղեղի համար ստացված մոտավոր արժեքը աղեղից տարբերվում է չորրորդից բարձր կարգի փոքր մեծությամբ։*

Լրացուցիչ անդամով Թեյլորի բանաձևին մենք կվերադառնանք XV *գլխում (երկրորդ հատոր), որը նվիրված է անվերջ շարքերին և որտեղ այդ բանաձևը շատ կարևոր դեր է կատարելու։ Հենց այնտեղ էլ կբերվեն շարքերը մոտավոր հաշվումներում կիրառելու օրինակներ, որոնք հաճախ, ըստ էության, հանդիսանում են Թեյլորի բանաձևի կիրառումներ։*

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

§ 1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ԸՆԹԱՑՔԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

110. Ֆունկցիայի հաստատուն լինելու պայմանը: *Ֆունկցիայի փոփոխման ընթացքն ուսումնասիրելիս առաջին հերթին հարց է ծագում այն պայմանների մասին, որոնց առկայության դեպքում ֆունկցիան տվյալ միջակայքում պահպանում է հաստատուն արժեք կամ փոփոխվում է մոնոտոն* [n° **47**]։

Թեորեմ: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում* և նրա ներսում ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ, իսկ ծայրակետերում (եթե դրանք պատկանում են X-ին, պահպանում է անընդհատությունը: X միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի հաստատուն լինելու համար բավական է հետևյալ պայմանը՝

$$f'(x) = 0 \qquad X\text{-ի ներսում։}$$

Ապացուցում։ Դիցուք այդ պայմանը տեղի ունի։ X միջակայքից մի x_0 կետ սևեռենք և վերցնենք մի այլ ցանկացած x կետ։ $[x_0, x]$ կամ $[x, x_0]$ միջակայքի համար բավարարված են Լագրանժի թեորեմայի [n° **102**] *բոլոր պայմանները, ուստի կարող ենք գրել՝*

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)\,(x - x_0),$$

որտեղ c-ն գտնվում է x_0-ի և x-ի միջև, ուստի և կանխահայտորեն գտնվում է X-ի ներսում։ Սակայն, պայմանի համաձայն, $f'(c) = 0$, այնպես որ X-ին պատկանող բոլոր x-երի համար

---

* *Որը կարող է լինել փակ կամ բաց, վերջավոր կամ անվերջ։*

$$f(x)=f(x_0)=\mathrm{const},$$

և մեր պնդումն ապացուցված է։

Նկատենք, որ ձևակերպված պայմանը, ակներևորեն, նաև ա ն հ ր ա ժ ե շ տ է ֆունկցիայի հաստատուն լինելու համար։

Ինտեգրալ հաշվում կարևոր կիրառություն ունի այստեղից բխող հետևյալ պարզ հետևանքը.

Հ ե տ և ա ն ք: Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ երկու ֆունկցիաները որոշված են X միջակայքում և նրա ն ե ր ս ո ւ մ ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ, իսկ ծայրակետերում (եթե դրանք պատկանում են X-ին) պահպանում են անընդհատությունը:

Եթե այդ ժամանակ

$$f'(x)=g'(x) \qquad X\text{-ի ներսը},$$

ապա ողջ X միջակայքում այդ ֆունկցիաները կտարբերվեն միայն հաստատունով՝

$$f(x)=g(x)+C \qquad (C=\mathrm{const}):$$

Ապացուցման համար բավական է թեորեման կիրառել $f(x)-g(x)$ *տարբերության նկատմամբ. քանի որ նրա ածանցյալը* X*-ի ներսը զրո է դառնում, ապա ինքը՝ տարբերությունը* X *միջակայքում հաստատուն կլինի։*

Օրինակի համար դիտարկենք

$$\operatorname{arctg} x \ \text{և}\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$$

ֆունկցիաները։ Հեշտ է ստուգել, որ սրանց ածանցյալները համընկնում են բոլոր x *կետերում, բացառությամբ* $x=\pm 1$ *արժեքներից (որտեղ ֆունկցիաներից երկրորդը կորցնում է իր իմաստը)։ Այդ պատճառով,*

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\operatorname{arctg}x+C$$

նույնությունը համարվում է ապացուցված միայն

$$(-1,\ +1),\ (-\infty,\ -1),\ (+1,\ +\infty)$$

միջակայքներից յուրաքանչյուրի համար ա ռ ա ն ձ ի ն վ ե ր ց ր ա ծ։ Հետաքրքրական է, որ նաև C *հաստատունի արժեքները այդ միջակայքներում կլինեն տարբեր։ Դրանցից առաջինի համար* $C=0$ *(որում համոզվում ենք, ընդունելով* $x=0$*), իսկ* *մնացած երկուսի համար, համապատասխանաբար կունենանք* $C = \frac{\pi}{2}$ *կամ* $C = -\frac{\pi}{2}$ *(որ հեշտ է տեսնել, եթե, օրինակ, ընդունենք որ* x*-ը ձգտում է* $-\infty$ *կամ* $+\infty$*)։*

Այս բոլոր առնչությունները կարելի է ապացուցել նաև տարրական եղանակով։

Դիտողություն: *Ապացուցած թեորեմայի նշանակությունը երևան է գալիս տեսական հետազոտությունների ժամանակ և ընդհանրապես այն դեպքերում, երբ ֆունկցիան տրված է լինում այնպես, որ նրա որոշումից անմիջապես չի հետևում, որ նա պահպանում է հաստատուն արժեք։ Այդպիսի դեպքեր հետագայում մեզ շատ կպատահեն։*

111. Ֆունկցիայի մոնոտոն լինելու պայմանը: *Այժմ պարզենք, թե ֆունկցիայի ածանցյալի միջոցով ինչպես կարելի է դատել ֆունկցիայի իր աճման (նվազման) մասին տվյալ միջակայքում։*

Թեորեմա: Դիցուք f(x) ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում և նրա ներսում ունի f′(x) վերջավոր ածանցյալ, իսկ ծայրակետերում (եթե դրանք պատկանում են X-ին) պահպանում է անընդհատությունը: Որպեսզի f(x)-ը X միջակայքում նեղ իմաստով մոնոտոն աճող (նվազող) լինի, բավական է հետևյալ պայմանը՝

$$f'(x) > 0 \quad (< 0) \text{ X-ի ներսում:}$$

Ապացուցումը կատարենք աճման դեպքի համար։ Դիցուք այդ դեպքի համար նշված պայմանը կատարված է։ X միջակայքից վերցնենք երկու x' *և* x'' *արժեքներ* $(x' < x'')$ *և* $[x', x'']$ *միջակայքում* f(x) *ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառենք Լագրանժի բանաձևը՝*

$$f(x'') - f(x') = f'(x)(x'' - x') \quad (x' < c < x'')\text{։}$$

Քանի որ $f'(c) > 0$, *ապա*

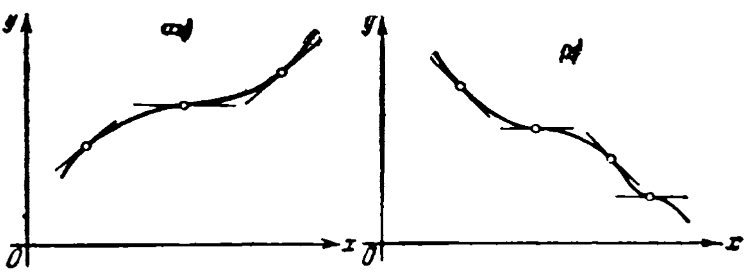
$$f'(x'') > f(x')$$

և f(x) *ֆունկցիան կլինի խիստ իմաստով աճող։*

Այս անգամ ձևակերպված պայմանն արդեն ոչ լրիվ իմաստով է անհրաժեշտ։ Թեորեմայի պնդումն իր ուժը պահպանում է, օրինակ, նաև այն դեպքում, երբ f′(x) *ածանցյալը զրո է դառնում X միջակայ-*

քի ներսը գտնվող վերջավոր թվով կետերում։ Դրանում հեշտ է համոզվել, եթե թեորեման կիրառենք հիմնական միջակայքի յուրաքանչյուր մասի նկատմամբ առանձին, որոնց նա տրոհվում է այդ կետերով։

Ածանցյալի նշանի և ֆունկցիայի փոփոխման ուղղության միջև ստացված կապը երկրաչափորեն միանգամայն ակներև կլինի, եթե վերհիշենք [n° n° 77, 78], *որ ածանցյալն իրենից ներկայացնում է ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողի անկյունային գործակիցը։ Այդ անկյունային գործակցի նշանը ցույց է տալիս, թե շոշափողը թեքված է դեպի վերև, թե դեպի ներքև, և սրա հետ միասին նաև ինքը՝ կորը գնում է դեպի վերև, թե դեպի ներքև (գծ. 42)։*



Գծ. 42.

Սակայն առանձին կետերում շոշափողը կարող է լինել նաև հորիզոնական, որը համապատասխանում է ածանցյալի զրո դառնալուն։

Օրինակներ։ 1) *Վերջին դեպքին վերաբերող պարզագույն օրինակ կարող է հանդիսանալ* $f(x) = x^3$ *ֆունկցիան. Նա աճում է, բայց և այնպես նրա* $f'(x) = 3x^2$ *ածանցյալը* $x = 0$ *արժեքի համար դառնում է զրո։*

2) *Նմանապես, աճող կլինի նաև*

$$f(x) = x - \sin x$$

ֆունկցիան, որովհետև նրա

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

ածանցյալը բացասական չէ, զրո դառնալով $x = 2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ *արժեքների դեպքում։*

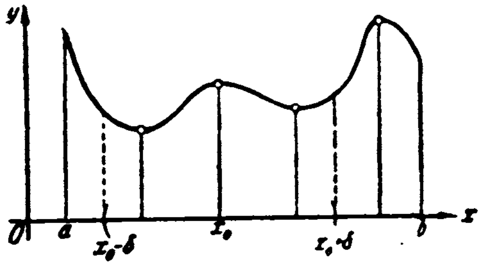
112. Մաքսիմումներ և մինիմումներ. անհրաժեշտ պայմանները: *Եթե* $[a, b]$ *միջակայքում որոշված ու անընդհատ* $f(x)$ *ֆունկցիան այդտեղ մոնոտոն չէ, ապա կգտնվեն* $[a, b]$ *միջակայքի այնպիսի* $[\alpha, \beta]$ *մասեր, որտեղ մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքին ֆունկցիան կհասնի ներքին կետում, այսինքն՝* α*-ի և* β*-ի միջև։ Ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա [գծ. 43] այդպիսի միջակայքերին համապատասխանում են յուրատեսակ ուռուցքներ կամ փոսեր։*

Ասում են, որ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում ունի մաքսիմում (կամ մինիմում)*, եթե այդ կետը կարելի է շրջապատել ֆունկցիայի որոշման միջակայքում գտնվող այնպիսի $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ շրջակայքով, որ այնտեղ գտնվող բոլոր x կետերի համար տեղի ունենա

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\textit{կամ՝ } f(x) \geqslant f(x_0))$$

անհավասարությունը:

Այլ խոսքով, x_0 *կետը* $f(x)$ *ֆունկցիային տալիս է մաքսիմում (մինիմում), եթե* $f(x_0)$ *արժեքը հանդիսանում է այդ կետի մի որոշ (թեկուզ և փոքր) շրջակայքում ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից մեծագույնը (փոքրագույնը)։ Նշենք, որ մաքսիմումի (մինիմումի) սահմանումն ինքը ենթադրում է, որ ֆունկցիան տրված է* x_0 *կետի երկու կողմերում։*



Գծ. 43.

Եթե գոյություն ունի այնպիսի շրջակայք, որի սահմաններում (երբ $(x \neq x_0)$ *տեղի ունի*

$$f(x) < f(x_0) \quad (\textit{կամ՝ } f(x) > f(x_0))$$

խիստ անհավասարությունը, ապա ասում են, որ ֆունկցիան x_0 *կետում ունի իսկական մաքսիմում (մինիմում), հակառակ դեպքում՝ անիսկական։*

Եթե ֆունկցիան x_0 *և* x_1 *կետերում մաքսիմումներ ունի, ապա* $[x_0, x_1]$ *միջակայքի նկատմամբ կիրառելով Վայերշտրասի 2-րդ թեորեման [73], կտեսնենք, որ այդ միջակայքում ֆունկցիան իր փոքրագույն արժեքին հասնում է* x_0 *ի և* x_1*-ի միջև գտնվող մի* x_2

* *Լատիներեն* maximum *և* minimum *բառերը նշանակում են «մեծագույն» «փոքրագույն» (արժեքներ)։*

կետում և այդտեղ նա ունի մ ի ն ի մ ու մ։ Նույն ձևով, երկու մինիմումների միջև անպայման կգտնվի մաքսիմում։ Այն պարզագույն (և պրակտիկայում՝ կարևորագույն) դեպքում, երբ ֆունկցիան ընդհանրապես ունի միայն վերջավոր թվով մաքսիմումներ ու մինիմումներ, դրանք պարզապես իրար հաջորդում են։

Նկատենք, որ մաքսիմումն ու մինիմումը նշանակելու համար գոյություն ունի նաև դրանք միասին արտահայտող տերմին՝ է ք ս տ ր ե մ ու մ*։

Խնդիր դնենք՝ գտնել արգումենտի բոլոր այն արժեքները, որոնք ֆունկցիային տալիս են էքստրեմում։ Այս խնդիրը լուծելիս հիմնական դեր է խաղալու ածանցյալը։

Նախ ընդունենք, որ (a, b) միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի վերջավոր ածանցյալ։ Եթե x_0 կետում ֆունկցիան ունի էքստրեմում, ապա Ֆերմայի թեորեման [n° **100**] կիրառելով $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ միջակայքի նկատմամբ, որի մասին վերևում խոսեցինք, եզրակացնում ենք, որ $f'(x_0) = 0$. Հենց սրանում է կայանում էքստրեմումի ա ն հ ր ա ժ ե շ տ պ ա յ մ ա ն ը։ Էքստրեմում պետք է որոնել միայն այն կետերում, որտեղ ածանցյալը հավասար է զրոյի. այդպիսի կետերը կանվանենք ստացիոնար կետեր**։

Սակայն չպետք է կարծել, թե ամեն մի ստացիոնար կետ ֆունկցիային տալիս է էքստրեմում. հենց նոր նշված անհրաժեշտ պայմանը բավարար պայման չէ։ Օրինակ, n° **111**-ի 1)-ում մենք տեսանք, որ x^3 ֆունկցիայի համար $3x^2$ ածանցյալը դառնում է զրո $x = 0$ կետում, սակայն այդ կետում ֆունկցիան էքստրեմում չունի. նա միշտ աճում է։

Այսպիսով, $f(x)$ ֆունկցիայի համար ստացիոնար կետը, այսպես ասած, միայն «կասկածելի» կետ է էքստրեմումի համար և ե ն թ ա կ ա է հ ե տ ա գ ա ս տ ու գ մ ա ն։

Եթե ընդարձակենք դիտարկվող $f(x)$ ֆունկցիաների դասը և ընդունենք, որ առանձին կետերում վերջավոր ածանցյալ գոյություն չունի, ապա չի բացառվում այն հնարավորությունը, որ էքստրեմում կարող է ստացվել այդպիսի կետերից որևէ մեկում։ Այդ պատճառով այդպիսի կետերը նույնպես պետք է դասել էքստրեմումի համար «կասկածելի» կետերի շարքը և ստուգման ենթարկել։

---

* Լատիներեն extremum նշանակում է «ծայրագույն» (արժեք)։

** Այդ կետերում ֆունկցիայի փոփոխությունը կարծես թե «կանգ է առնում», այդ փոփոխության արագությունը [n° **78**] դառնում է զրո։

113. Առաջին կանոնը: *Այսպես, ուրեմն, դիցուք* x_0 *կետը «կասկածելի է»* $f(x)$ *ֆունկցիայի էքստրեմումի տեսակետից։*

Ենթադրենք, թե x_0 *կետի մի որոշ* $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ *շրջակայքում (գոնե* $x\neq x_0$ *համար) գոյություն ունի* $f'(x)$ *վերջավոր ածանցյալ և ինչպես* x_0*-ից ձախ, նույնպես և* x_0*-ից աջ (առանձին-առանձին) այդ ածանցյալը պահպանում է որոշակի նշան։ Այդ ժամանակ հնարավոր են հետևյալ երեք դեպքերը՝*

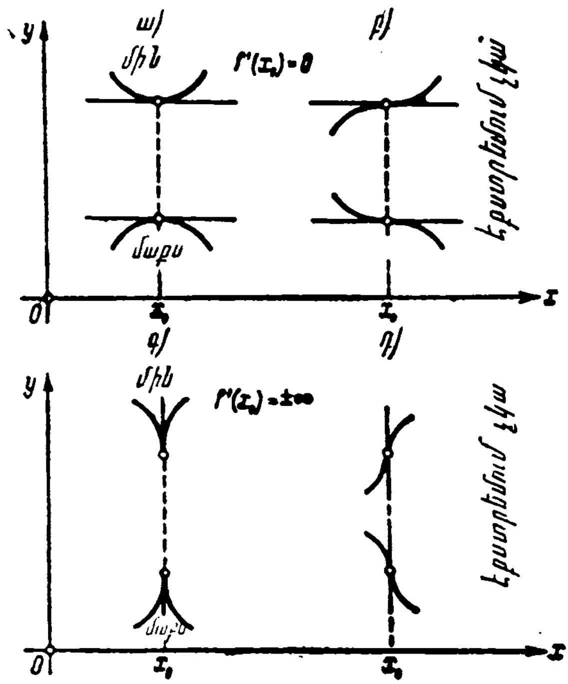
I. $f'(x)>0$, *երբ* $x<x_0$ *և* $f'(x)<0$, *երբ* $x>x_0$, *այսինքն՝* x_0 կետով անցնելիս $f'(x)$ ածանցյալը նշանը փոխում է դրականից բացասականի: *Այս դեպքում* $[x_0-\delta,\ x_0]$ *միջակայքում* $f(x)$ *ֆունկցիան աճում է, իսկ* $[x_0,\ x_0+\delta]$ *միջակայքում՝ նվազում* [**127**], *այնպես որ* $f(x_0)$ *արժեքը կլինի մեծագույնը* $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ *միջակայքում, այսինքն՝* x_0 *կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում։*

II. $f'(x)<0$, *երբ* $x<x_0$ *և* $f'(x)>0$, *երբ* $x>x_0$, *այսինքն՝* x_0 կետով անցնելիս $f'(x)$ ածանցյալը նշանը փոխում է բացասականից դրականի: *Այս դեպքում նույն ձևով համոզվում ենք, որ* x_0 *կետում ֆունկցիան ունի մինիմում։*

III. $f'(x)>0$ *ինչպես* $x_0<x$, *նույնպես և* $x_0>x$, *արժեքների համար, կամ թե՝* $f'(x)<0$ *այդ բոլոր արժեքների համար, այսինքն՝* x_0 կետով անցնելիս $f'(x)$-ը նշանը չի փոխում: *Այդ ժամանակ ֆունկցիան կամ միշտ աճում է, կամ միշտ նվազում.* x_0 *կետի ցանկացած մոտակայքում մի կողմից կգտնվեն այնպիսի* x *կետեր, որտեղ* $f(x)<f(x_0)$, *իսկ մյուս կողմից՝ այնպիսի* x *կետեր, որտեղ* $f(x)>f(x_0)$, *այնպես որ՝* x_0 *կետում ոչ մի էքստրեմում չկա։*

Այսպիսով, մենք ստանում ենք x_0 *«կասկածելի» արժեքն ստուգելու առաջին կանոնը.* $f'(x)$ ածանցյալի մեջ տեղադրելով նախ $x<x_0$ և ապա՝ $x>x_0$ արժեքներ, որոշում ենք ածանցյալի նշանը x_0-ի մոտակայքում՝ x_0-ից դեպի ձախ և դեպի աջ. եթե այդ ժամանակ $f'(x)$-ը նշանը փոխում է դրականից բացասականի, ապա առկա է մաքսիմում, եթե նշանը փոխում է բացասականից դրականի, ապա առկա է մինիմում, իսկ եթե նշանը չի փոխում, ապա էքստրեմում չկա:

Այժմ բնութագրենք ֆունկցիաների այն դասը, որի նկատմամբ մենք կիրառելու ենք այդ կանոնը։ $f(x)$ *ֆունկցիան ենթադրում ենք անընդհատ* $[a,\ b]$ *միջակայքում և այնտեղ* $f'(x)$ *անընդհատ ածանցյալ ունեցող, բացառությամբ, թերևս, վերջավոր թվով կետերից։ Այդ կետերում* $f'(x)$ *ածանցյալը ինչպես ձախից, այնպես էլ աջից ձգտում է անվերջ սահմանների՝ նույն կամ հակադիր նշաններով. առաջին դեպքում գոյություն ունի երկկողմյան անվերջ ածանցյալ, իսկ երկրորդ* *դեպքում՝ նշաններով տարբերվող միակողմյան ածանցյալներ*։ Վերջապես, ընդունենք նաև, որ ածանցյալը զրո է դառնում նույնպես միայն վերջավոր թվով կետերում։ Էքստրեմումի համար «կասկածելի» կետերի վերաբերյալ տարբեր հնարավորությունները գրաֆիկորեն պատկերված են գծ. 44-ում։*



Գծ. 44.

Նշենք, որ բ), գ), դ) դեպքերում կորը հատում է շոշափողը, նրա մի կողմից մյուսն անցնելով. այդպիսի դեպքերում, ինչպես ասում են, կորը շրջում ունի։

Դիտարկվող դասին պատկանող ֆունկցիաների համար բերված կանոնը լիովին որոշում է մեզ հետաքրքրող հարցը։ Բանը նրանումն է, որ այդպիսի ֆունկցիայի համար (a, b) *միջակայքում միայն վերջավոր թվով են ստացիոնար կետերը և այնպիսի կետերը, որտեղ վերջավոր ածանցյալ չկա՝*

** Այդ դեպքերը միմյանցից տարբերելը իրականացվում է հենց ածանցյալի նշանի հետազոտման օգնությամբ, որի մասին նոր խոսվեց։*

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_{n-1} < b, \qquad (1)$$

և այդ կետերով կազմած

$$(a, x_1),\ (x_1, x_2), \cdots,\ (x_k, x_{k+1}), \cdots, (x_{n-1}, b) \qquad (2)$$

միջակայքերից յուրաքանչյուրում $f'(x)$ ածանցյալը նշանը պահպանում է։ Իրոք, եթե $f'(x)$-ը նշանը փոխեր, օրինակ, (x_k, x_{k+1}) միջակայքում, ապա, $f'(x)$-ի անընդհատության շնորհիվ, որ մենք ենթադրել էինք, Բոլցանոյի-Կոշիի թեորեմայի համաձայն [n° **68**], նա պետք է զրո դառնար x_k-ի և x_{k+1}-ի միջև գտնվող մի ինչ որ կետում, որն անհնար է, քանի որ ածանցյալի բոլոր արմատներն արդեն գտնվում են կետերի (1) շարքում։

Ըստ n° **111**-ի թեորեմայի, (2) միջակայքերից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան խիստ մոնոտոն է փոփոխվում։

Դիտողություն: *Թեպետև ֆունկցիաների նշված դասն իր մեջ ընդգրկում է գործնականորեն հետաքրքրություն ներկայացնող բոլոր դեպքերը, այնուամենայնիվ օգտակար է ի նկատի ունենալ, որ կարող են այնպիսի դեպքեր լինել, երբ «կասկածելի» արժեքների հետազոտման մեր կանոնը անկիրառելի է։ Եթե, օրինակ, դիտարկենք հետևյալ հավասարություններով որոշվող ֆունկցիան՝*

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad \text{երբ } x \neq 0 \text{ և } f(0) = 0,$$

ապա, ինչպես գիտենք [n° **88**, 2°], $x = 0$ *կետում ունի ածանցյալ՝* $f'(0) = 0$։ *Սակայն, այդ ստացիոնար կետին ցանկացած չափով մոտ, ինչպես ձախ կողմում, այնպես էլ աջ կողմում,*

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

ածանցյալն անվերջ անգամ զրո է դառնում՝ նշանը փոխելով. կանոնը կիրառելի չէ (չնայած առանց դրա էլ պարզ է, որ էքստրեմում չկա)։

114. Երկրորդ կանոնը: *Եթե* x_0*-ն ստացիոնար կետ է՝*

$$f'(x_0) = 0 \qquad (3)$$

և $f(x)$ *ֆունկցիան ոչ միայն առաջին կարգի* $f'(x)$ *ածանցյալ ունի այդ կետի շրջակայքում, այլև* $f''(x_0)$ *երկրորդ ածանցյալ հենց* x_0 *կետում, ապա ամբողջ ստուգումը կարելի է հանգեցնել այդ երկրորդ ածանցյալի նշանի դիտարկմանը, ենթադրելով, որ այն զրոյից տարբեր է։*

Իրոք, ըստ ածանցյալի սահմանման, հաշվի առնելով (3) պայմանը, կունենանք՝

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Բայց n° **37**-ի 2) թեորեմայի համաձայն,

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} \tag{4}$$

ֆունկցիան ընդունում է ու պահպանում իր $f''(x_0)$ սահմանի նշանը, հենց որ x-ը (x_0-ից տարբեր մնալով) բավականաչափ մոտ է լինում x_0-ին ($|x - x_0| < \delta$)։

Դիցուք, օրինակ, $f''(x_0) > 0$. այդ դեպքում (4) կոտորակը դրական է x-ի նշված բոլոր արժեքների համար։ Բայց $x < x_0$ դեպքում հայտարարում $x - x_0 < 0$, հետևաբար $f'(x)$ համարիչը անհրաժեշտաբար նույնպես փոքր է զրոյից. իսկ $x > x_0$ դեպքում, ընդհակառակը, կունենանք $x - x_0 > 0$, ուստի նաև $f'(x) > 0$։ Այլ խոսքով, ստացվում է, որ $f'(x)$ ածանցյալը նշանը փոխում է մինուսից պլյուսի, իսկ այդպիսի դեպքում, արդեն ըստ առաջին կանոնի, x_0 կետում կլինի մինիմում։ Նման ձևով ցույց է տրվում, որ $f''(x_0) < 0$ դեպքում x_0 կետում առկա է մաքսիմում։

Այսպիսով, կարելի է ձևակերպել x_0 «կասկածելի» արժեքի ստուգման *երկրորդ կանոնը*.

x_0 արժեքը դնում ենք $f''(x)$ երկրորդ ածանցյալում. եթե $f''(x_0) > 0$, ապա ֆունկցիան մինիմում ունի, իսկ եթե $f''(x_0) < 0$, ապա մաքսիմում ունի։

Այս կանոնը, ընդհանրապես ասած, կիրառման ավելի նեղ շրջան ունի. այն, օրինակ, բացահայտ կերպով անկիրառելի է այն կետերի նկատմամբ, որտեղ առաջին կարգի վերջավոր ածանցյալ գոյություն չունի (քանի որ այդտեղ խոսք անգամ չի կարող լինել երկրորդ ածանցյալի մասին)։ Այն դեպքերում, երբ երկրորդ ածանցյալը զրո է դառնում, կանոնը դարձյալ ոչինչ չի ասում։ Այդպիսի դեպքերում հարցի լուծումը կախված կլինի բարձր կարգի ածանցյալների վարքից [տե՛ս n° **117**]։

115. Ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը։ $y = f(x)$ ֆունկցիային էքստրեմալ արժեքներ տվող x-ի արժեքները գտնել կարողանալը կարելի է օգտագործել այնպե՛ս կառուցելու համար ֆունկցիայի գրաֆիկը, որ նա ճշգրիտ բնութագրի *ֆունկցիայի փոփոխման ընթացքը*, երբ x-ն աճում է $[a, b]$ միջակայքում։

Առաջներում [n° **19**] մենք գրաֆիկը կառուցում էինք շատ կամ քիչ չափով խիտ, բայց պատահականորեն վերցրած կետերով և հաշվի *չառնելով գրաֆիկի առանձնահատկությունները (որոնք նախապես մեզ հայտնի չեն)։ Իսկ այժմ մենք ի վիճակի ենք վերը նշված մեթոդների օգնությամբ գտնելու որոշ քանակությամբ «հիմնական» կետեր, որոնք բնութագրող են հենց տվյալ գրաֆիկի համար։ Մենք այստեղ նկատի ունենք ամենից առաջ գրաֆիկի «շրջադարձի կետերը», այսինքն՝ նրա ուռուցքների ու փոսերի գագաթները, որոնք համապատասխանում են ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքներին։ Ի դեպ, դրանց հետ պետք է միացնել նաև այն բոլոր կետերը, որտեղ շոշափողը հորիզոնական է կամ ուղղաձիգ, անգամ եթե նրանք չեն համապատասխանում ֆունկցիայի էքստրեմումներին։*

Մենք կսահմանափակվենք այնպիսի $y=f(x)$ *ֆունկցիաների դիտարկմամբ, որոնք պատկանում են* n° **113**-*ում նշված դասին։ Այդ ժամանակ, այդպիսի* $y=f(x)$ *ֆունկցիայի կառուցման համար պետք է կատարել հետևյալը.*

1) որոշել x-*ի այն արժեքները, որոնց համար* $y'=f'(x)$ *ածանցյալը հավասար է զրոյի կամ անվերջության (կամ՝ գոնե գոյություն ունեն միակողմյան անվերջ ածանցյալներ), և դրանք հետազոտել էքստրեմումի տեսակետից.*

2) հաշվել $y=f(x)$ *ֆունկցիայի իր արժեքները այդ բոլոր կետերում, ինչպես նաև դիտարկվող միջակայքի* a *և* b *ծայրակետերում։*

Հարմար է արդյունքները գրի առնել աղյուսակի ձևով (տե՛ս ստորև բերված օրինակները), անպայման նշելով գրաֆիկի տվյալ կետի առանձնահատկությունը՝ մաքսիմում, մինիմում, շրջում, $y'=0$, $y'=+\infty$, $y'=-\infty$ *և, վերջապես,* $y'=\pm\infty$ *կամ* $y'=\mp\infty$ *(մենք պայմանականորեն այսպես կնշանակենք այն դեպքը, երբ գոյություն ունեն միակողմյան անվերջ ածանցյալներ տարբեր նշաններով)։ Գրաֆիկի մատնանշված կետերին, ցանկության դեպքում, ավելացնում են և մի քանի այլ կետեր, օրինակ՝ կոորդինատային առանցքների հետ գրաֆիկի հատման կետերը։*

Գտած կետերը գծագրի վրա նշելուց հետո (դրանց թիվը սովորաբար մեծ չէ), նրանցով անց են կացնում գրաֆիկը, այդ ժամանակ հաշվի առնելով այդ կետերի վերը նշված բոլոր առանձնահատկությունները։ Հարկավոր է հիշել, որ այդ կետերի միջև, ինչպես պարզաբանվել է n° **113**-*ում, ածանցյալը նշանը պահպանում է և գրաֆիկը կամ միշտ դեպի վեր է ընթանում, կամ միշտ դեպի վար։*

Հաշվումները և կորը գծելը հեշտանում են, եթե x-*ի նշանը փոխելիս ֆունկցիան իր արժեքը չի փոխում (զույգ ֆունկցիա է), այնպես որ գրաֆիկը սիմետրիկ է ուղղաձիգ առանցքի նկատմամբ։ Նման ծառայություն կարող է մատուցել նաև սիմե-*

տրիկությունը կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, որն անալիտիկորեն արտահայտվում է նրանով, որ x-ի նշանը փոխելիս ֆունկցիան նույնպես միայն նշանն է փոխում (կենտ ֆունկցիա է)։

Այս ձևով կառուցված գրաֆիկը, հավակնություն չունենալով առանձին օրդինատների ճշգրտության վերաբերյալ, բավականաչափ լրիվ արտացոլում է ֆունկցիայի փոփոխման ընթացքը (որը հենց մեր նպատակն էր), ճշգրիտ նշելով նրա աճման ու նվազման միջակայքերը, ինչպես նաև այն կետերը, որտեղ ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը նվազում է մինչև զրո կամ աճում մինչև անվերջություն։

116. Օրինակներ: Գտնել

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$$

ֆունկցիայի էքստրեմումները և կառուցել նրա գրաֆիկը։

Ի նկատի ունենալով այն հանգամանքը, որ ֆունկցիան ունի 2π պարբերություն, բավական է սահմանափակվել x-ի փոփոխման $[0, 2\pi]$ միջակայքով։ Գտնենք ածանցյալը՝

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x - 3\sin x \cdot \cos^2 x = 3\sin x \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x):$$

Ածանցյալի արմատներ (ստացիոնար կետեր) այս անգամ կլինեն՝

$$0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi:$$

$x = 0$ կետով անցնելիս $\sin x$ բազմապատկիչը բացասական նշանը փոխում է դրականի, իսկ ամբողջ ածանցյալը դրական նշանը փոխում է բացասականի, քանի որ վերջին երկու բազմապատկիչները $x = 0$ կետի մոտակայքում պահպանում են բացասական նշան. ուրեմն ֆունկցիան $x = 0$ կետում ունի մաքսիմում։

$\sin x - \cos x$ բազմապատկիչը, որը զրո է դառնում $x = \frac{\pi}{4}$ կետում, այդ կետով անցնելիս բացասական նշանը փոխում է դրականի։ Նույնը կկատարվի նաև ածանցյալի հետ, քանի որ $x = \frac{\pi}{4}$ կետի մոտակայքում մյուս բազմապատկիչները դրական են. հետևաբար, այստեղ ֆունկցիան ունի մինիմում։

Նման եղանակով հետազոտվում են նաև մյուս ստացիոնար կետերը. Նրանք հերթականությամբ (մեկ ընդ մեջ) ֆունկցիային տալիս են մաքսիմումներ և մինիմումներ։

Առաջին ածանցյալի փոփոխությունը հետազոտելու փոխարեն կարելի էր հաշվել երկրորդ ածանցյալը՝

$$f''(x) = 3(\sin x + \cos x)(3\sin x\ \cos x - 1)$$

և նրա մեջ ուղղակի տեղադրել x*-ի փորձարկվող արժեքը։ Օրինակի համար,* $x = 0$ *դեպքում կստանանք* $f''(0) = -3$, *որը համապատասխանում է մ ա ք ս ի մ ու մ ի ն,* $x = \frac{\pi}{4}$ *դեպքում* $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, *որը համապատասխանում է մ ի ն ի մ ու մ ի ն և այլն։*

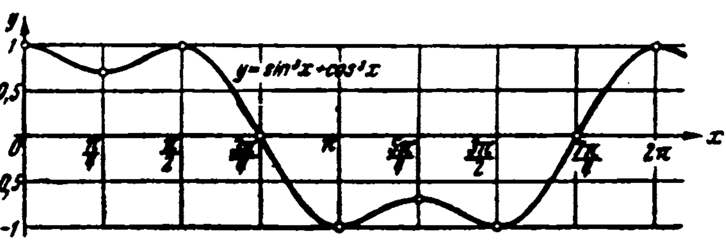
Գտնենք նաև x*-երի առանցքի հետ գրաֆիկի հատման կետերի աբսցիսները, այսինքն լուծենք* $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$ *հավասարումը. այդտեղից ստանում ենք* $\cos x = -\sin x$, *այնպես որ,*

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ կամ } \frac{7\pi}{4}\,։$$

Այժմ հաշվենք ֆունկցիայի այն արժեքները, որոնք համապատասխանում են x*-ի գտած բոլոր արժեքներին և կազմենք հետևյալ աղյուսակը.*

x =	0 $(2\pi = 6{,}28)$	$\frac{\pi}{4} = 0{,}78$	$\frac{\pi}{2} = 1{,}57$	$\frac{3\pi}{4} = 2{,}36$	$\pi = 3{,}14$	$\frac{5\pi}{4} = 3{,}94$	$\frac{3\pi}{2} = 4{,}71$	$\frac{7\pi}{4} = 5{,}50$
y =	1	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}71$	1	0	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}71$	−1	0
	$y' = 0$	$y' = 0$	$y' = 0$		$y' = 0$	$y' = 0$	$y' = 0$	
	մաքս.	*մին.*	*մաքս.*		*մին.*	*մաքս.*	*մին.*	

Հենց այս աղյուսակով էլ կառուցված է 45-րդ գծագրում պատկերված գրաֆիկը։



Գծ. 45.

2) Գտնել

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$$

ֆունկցիայի էքստրեմումները և կառուցել նրա գրաֆիկը։

Այս անգամ՝

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

և վերջավոր ածանցյալ գոյություն ունի ամենուրեք, բացի $x=0$ *և* $x=\pm 1$ *կետերից։ Երբ* x*-ն այդ կետերին մոտենում է ինչպես ձախից, այնպես էլ աջից, ածանցյալն ունի անվերջ սահմաններ, նշանակում է՝ այդ կետերում միակողմյան ածանցյալները երկուսն էլ անվերջ են* **[103]**։

Ածանցյալի արմատները գտնելու համար նրա համարիչը հավասարեցնում ենք զրոյի, այդտեղից գտնում ենք՝ $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$։ *Այսպիսով, էքստրեմումների համար «կասկածելի» կլինեն հետևյալ կետերը՝*

$$-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1։$$

Ի միջի այլոց, ֆունկցիայի զ ու յ գ լինելու (հետևաբար, y*-ների առանցքի նկատմամբ գրաֆիկի սիմետրիկ լինելու) շնորհիվ, բավական է սահմանափակվել աջ կիսահարթությամբ, այսինքն՝* $x\geqslant 0$ *արժեքներով։*

$x=0$ *կետում (և նրա մոտակայքում) ածանցյալի համարիչը և հայտարարի երկրորդ բազմապատկիչը դրական նշան ունեն, իսկ հայտարարի* $x^{\frac{1}{3}}$ *բազմապատկիչը նշանը փոխում է բացասականից դրականի. ածանցյալը նույնպես։ Ուրեմն՝ այդ կետում մ ի ն ի մ ու մ է։*

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ *կետում (և նրա մոտակայքում) ածանցյալի հայտարարը դրական է։ Իսկ համարիչը, ի նկատի ունենալով* $\frac{1}{\sqrt{2}}$*-ին մոտ* x*-ի արժեքները, արտագրենք այսպես՝* $(1-x^2)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}$. *այն* $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ *կետում զրո է դառնում,* x*-ը փոքրացնելիս մեծանում է, իսկ մեծացնելիս՝ փոքրանում, այնպես որ նշանը փոխում է դրականից բացասականի. ածանցյալը նույնպես։ Ուրեմն՝ այդ կետում մ ա ք ս ի մ ու մ է։*

$x=1$ կետում հայտարարի $(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ բազմապատկիչը զրո դառնալով, նշանը չի փոխում. այդ իրավացի է նաև ածանցյալի համար։ Ուրեմն՝ $x=1$ կետում էքստրեմում չկա։

Թեպետև դիտարկվող ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է $(-\infty, +\infty)$ ողջ միջակայքում, սակայն գրաֆիկի կառուցումն իրականացնել, հասկանալի է, հնարավոր է միայն վերջավոր միջակայքում։ Ի դեպ, ֆունկցիայի վարքը կարելի է ընութագրել նաև «անվերջությունում». այն արտագրելով այսպես՝

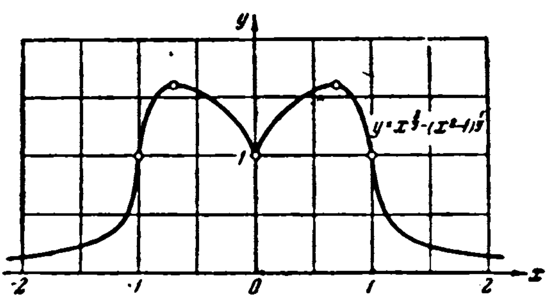
$$f(x)=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)^{\frac{1}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

տեսնում ենք, որ $f(x)>0$ և ձգտում է զրոյի, երբ $x\to\pm\infty$։ Այսպիսով, ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է x-երի առանցքից վեր, բայց ինչպես դեպի ձախ, այնպես էլ դեպի աջ հեռանալով դեպի անվերջություն, նա անսահմանափակորեն մոտենում է այդ առանցքին։

Կազմենք աղյուսակը.

$x=$	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}=-0.71$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}=0,71$	1	$+\infty$
$y=$	0	1	$\sqrt[3]{4}=1,59$	1	$\sqrt[3]{4}=1,59$	1	0
		$y'=+\infty$	$y'=0$	$y'=\mp\infty$	$y'=0$	$y'=-\infty$	
			մաքս.	մին.	մաքս.		

Ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է 46-րդ գծագրում։



Գծ. 46.

117. Բարձր կարգի ածանցյալների օգտագործումը: Մենք տեսանք, որ երբ $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)>0$, $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում հասնում է մինիմումի, իսկ եթե $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)<0$, ապա ֆունկցիան այդ կետում ունի մաքսիմում։ Այն դեպքը, երբ $f'(x_0)=0$ և $f''(x_0)=0$, մենք թողեցինք առանց հետազոտության։

Այժմ ենթադրենք, թե $f(x)$ *ֆունկցիան* $x = x_0$ *կետում ունի* n *հաջորդական ածանցյալներ, ընդ որում* n*-րդ ածանցյալն* $x = x_0$ *կետում անընդհատ է։ Դիցուք նրանք բոլորը, ընդհուպ մինչև* $(n-1)$*-րդը, այդ կետում դառնում են զրո՝*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

մինչդեռ $f^{(n)}(x_0) \neq 0$։ $f(x)$ *ֆունկցիայի* $f(x) - f(x_0)$ *աճը Թեյլորի բանաձևով վերլուծենք* $(x - x_0)$*-ի աստիճաններով՝ Պեանոյի տեսքով լրացուցիչ անդամով* [n° **107**, (*17*)]։ *Քանի որ* n*-ից ցածր կարգի բոլոր ածանցյալները* x_0 *կետում հավասար են զրոյի, ուստի կունենանք՝*

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n։$$

Շնորհիվ այն բանի, որ երբ $x \to x_0$, $\alpha \to 0$, x_0*-ին բավականաչափ մոտ գտնվող* x*-երի համար համարիչում գտնվող գումարի նշանը կհամընկնի* $f^{(n)}(x_0)$*-ի նշանի հետ, ինչպես* $x < x_0$ *արժեքների, նույնպես և* $x > x_0$ *արժեքների դեպքում։ Դիտարկենք երկու դեպք։*

1.° n*-ը կ ե ն տ թ ի վ է՝* $n = 2k + 1$։ x*-ի* x_0*-ից փոքր արժեքներից* x_0*-ից մեծ արժեքներին անցնելիս,* $(x - x_0)^n$ *արտահայտությունը փոխում է նշանը, և քանի որ այդ դեպքում առաջին արտադրիչի նշանը չի փոխվում, ուստի նաև* $f(x) - f(x_0)$ *տարբերության նշանը կփոխվի։ Այսպիսով,* x_0 *կետում* $f(x)$ *ֆունկցիան էքստրեմում ունենալ չի կարող, որովհետև այդ կետի մոտակայքում նա ընդունում է* $f(x_0)$*-ից թե՛ փոքր, և թե մեծ արժեքներ։*

2.° n*-ը զ ու յ գ թ ի վ է՝* $n = 2k$։ *Այս դեպքում* $f(x) - f(x_0)$ *տարբերությունը,* x*-ի* x_0*-ից փոքր արժեքներից* x_0*-ից մեծ արժեքներին անցնելիս, նշանը չի փոխում, որովհետև,* x*-ի բոլոր արժեքների համար* $(x - x_0)^n > 0$։ *Ակներևորեն* x_0*-ի մոտակայքում թե ձախից և թե աջից* $f(x) - f(x_0)$ *տարբերության նշանը համընկնում է* $f^{(n)}(x_0)$ *թվի նշանի հետ։ Ուրեմն, եթե* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *ապա* x_0*-ի մոտակայքում* $f(x) > f(x_0)$ *և* x_0 *կետում* (fx) *ֆունկցիան ունի մինիմում. իսկ եթե* $f^{(n)}(x_0) < 0$, *ապա ֆունկցիան ունի մաքսիմում։*

Այստեղից ստացվում է հետևյալ կ ա ն ո ն ը.

Եթե x_0 կետում զրո չդարձող ածանցյալներից առաջինը կենտ կարգի է, x_0 կետում ֆունկցիան չունի ոչ մաքսիմում և ոչ էլ մինիմում: Եթե այդպիսի ածանցյալը զույգ կարգի է, x_0 կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում կամ մինիմում, նայած նրան, թե այդ ածանցյալը բացասակա՞ն է, թե՞ դրական*։

Օրինակ, $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ *ֆունկցիայի համար* $x=0$ *կետը ստացիոնար կետ է, որովհետև այդ կետում*

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$$

ածանցյալը դառնում է զրո։ Այնուհետև՝

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x,\quad f''(0)=0;$$

$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x,\quad f'''(0)=0,$$

$$f''''(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x,\quad f''''(0)=4.$$

Քանի որ առաջին զրո չդարձող ածանցյալը զույգ կարգի է, ուստի առկա է էքստրեմում, այն է՝ մինիմում, որովհետև $f''''(0)>0$։

§ 2. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ ԵՎ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԸ

118. Մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոնումը։ *Դիցուք* $f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ* $[a, b]$ *վերջավոր փակ միջակայքում։ Մինչև հիմա մենք հետաքրքրվում էինք միայն նրա մաքսիմումներով և մինիմումներով, իսկ այժմ հարց ենք դնում՝ գտնել այդ միջակայքում ֆունկցիայի ստացած արժեքներից մեծագույնը և փոքրագույնը***։ *Ըստ Վայերշտրասի 2-րդ թեորեմայի* [73], *այդպիսի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ գոյություն ունեն։ Որոշակիության համար կանգ առնենք մեծագույն արժեքի վրա։*

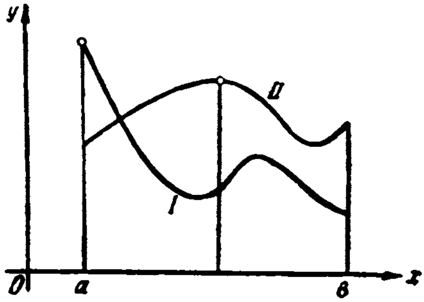
Եթե այդ մեծագույն արժեքն ստացվում է a*-ի և* b*-ի միջև գտնվող որևէ կետում, ապա այն միաժամանակ կլինի նաև մաքսիմումներից որևէ մեկը (ակներևաբար՝ ամենամեծը). սակայն մեծա-*

---

* *Այս կանոնը 1742 թ. մատնանշել է Կոլին Մակլորենը իր «Տրակտատ ֆլյուքսիաների մասին» աշխատության մեջ։*

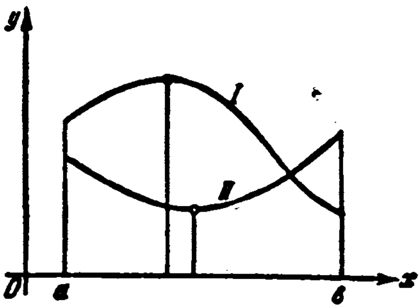
** *Այսպիսով, «մաքսիմում» տերմինի համար մենք պահպանում ենք նրա «լոկալ» (տեղային) իմաստը (համապատասխան կետի անմիջական շրջակայքում մեծագույն արժեքը), և այն տարբերում ենք ֆունկցիայի մեծագույն արժեքից ամբողջ դիտարկվող միջակայքում։ Նույնը վերաբերում է նաև ֆունկցիայի մինիմումին և փոքրագույն արժեքին։*

գույն արժեք կարող է ստացվել նաև միջակայքի ծայրակետերից որևէ մեկում, a-ում կամ b-ում (գծ. 47)։ Այսպիսով, միմյանց հետ պետք է բաղդատել f(x) ֆունկցիայի բոլոր մաքսիմումները և f(a) ու f(b) եզրային արժեքները. այդ թվերից ամենամեծը հենց կլինի [a, b]-ում f(x) ֆունկցիայի բոլոր արժեքներից մեծագույնը։ Նման եղանակով որոնում են նաև ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը։



Գծ. 47.

Եթե ցանկանում են խուսափել մաքսիմումը կամ մինիմումը ստուգելուց, կարելի է այլ կերպ վարվել։ Հարկավոր է միայն հաշվել ֆունկցիայի արժեքները բոլոր «կասկածելի» (էքստրեմումների համար) կետերում և նրանք բաղդատել f(a) ու f(b) եզրային արժեքների հետ, այդ թվերից ամենամեծը և ամենափոքրը հենց կլինեն ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները ֆունկցիայի բոլոր արժեքների մեջ տվյալ միջակայքում։



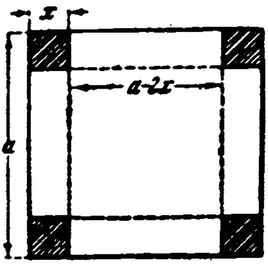
Գծ. 48.

Դիտողություն։ Կիրառական խնդիրներում ամենից հաճախ հանդիպում է այն պարզ դեպքը, երբ a-ի և b-ի միջև լինում է միայն մեկ «կասկածելի» x_0 կետ։ Եթե այդ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում (մինիմում), ապա, առանց եզրային արժեքների հետ բաղդատելու, պարզ է, որ այդ հենց կլինի միջակայքում ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը (տես գծ. 48.)։ Նման դեպքերում հաճախ ավելի հեշտ է լինում կատարել մաքսիմումի և մինիմումի հետազոտումը, քան թե ֆունկցիայի առանձին արժեքների հաշվումն ու բաղդատումը (հատկապես, երբ նրա արտահայտության մեջ մտնում են տառային հաստատուններ)։

Կարևոր է ընդգծել, որ վերևում ասածը լիովին կիրառելի է թե (a,b) բաց միջակայքի և թե անվերջ մեծ միջակայքի նկատմամբ։

119. Խնդիրներ։ *Այժմ շարադրենք տարբեր բնագավառներից մի շարք խնդիրներ, որոնց լուծումը հենց հանգում է ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքի որոնմանը։ Ի միջի այլոց, շատ հաճախ հետաքրքրություն են ներկայացնում ոչ այնքան այդ արժեքները, որքան այն կետերը (արգումենտի այն արժեքները), որոնք ֆունկցիային տալիս են այդպիսի արժեքներ։*

1) a *կողմ ունեցող քառակուսի թիթեղից, անկյուններից կտրելով հավասար քառակուսիներ և եզրերը ծալելով (գծ. 49), պատրաստում են բաց ուղղանկյուն արկղ։ Ինչպե՞ս ստանալ ամենամեծ տարողություն ունեցող արկղը։*



Գծ. 49.

Եթե կտրվող քառակուսու կողմը նշանակենք x*-ով, ապա արկղի* y *ծավալը կարտահայտվի այսպես՝*

$y = x(a-2x)^3$*, ընդ որում* x*-ը փոփոխվում է* $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ *միջակայքում։ Այսպիսով, խնդիրը հանգեց այդ միջակայքում* y *ֆունկցիայի մեծագույն արժեքի որոնմանը։*

Քանի որ $y' = (a-2x)(a-6x)$ *ածանցյալը 0-ի և* $\frac{a}{2}$*-ի միջև ունի միայն մեկ՝* $x = \frac{a}{6}$ *արմատ, ուստի, համոզվելով, որ այդ արժեքը ֆունկցիային տալիս է մաքսիմում, միաժամանակ կստանանք նաև որոնելի մեծագույն արժեքը։ Կամ, այլ ձևով. երբ* $x = \frac{a}{6}$*, ունենք՝* $y = \frac{2a^3}{27}$*, մինչդեռ y-ի եզրային արժեքները հավասար են 0-ի. հետևապես, երբ* $x = \frac{a}{6}$*, իրոք, ստացվում է y-ի ամենամեծ արժեքը։*

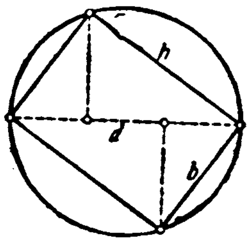
2) Տված է d *տրամագիծ ունեցող շրջանային հատույթով կոճղ։ Պահանջվում է այն տաշել այնպես, որ ստացվի ուղղանկյուն հատույթով գերան՝ ամենամեծ դիմացկունությամբ։*

Ցուցում։ Նյութերի դիմադրության տեսությունում ապացուցվում է, որ ուղղանկյուն գերանի դիմացկունությունը համեմատական է bh^2 *արտադրյալին, որտեղ* b*-ն գերանի ուղղանկյուն հատույթի հիմքն է, իսկ* h*-ը՝ բարձրությունը։*

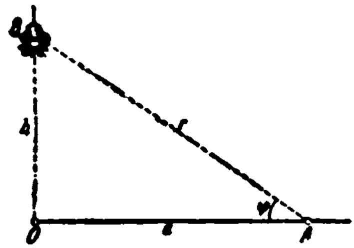
Քանի որ $h^2 = d^2 - b^2$*, ուստի խոսքը վերաբերում է* $y = bh^2 = b(d^2 - b^2)$ *արտահայտության մեծագույն արժեքին, ընդ որում* b *«անկախ փոփոխականը» փոփոխվում է* $(0, d)$ *միջակայքում։* $y' = d^2 - 3b^2$ *ածանցյալն այդ միջակայքի ներսում միայն մեկ անգամ է զրո դառնում՝* $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ *կետում։ Երկրորդ կարգի ածանցյալը՝* $y'' = -6b < 0$*, հետևապես, վերոհիշյալ կետում, ստացվում է մաքսիմում, իսկ սրա հետ միաժամանակ նաև ամենամեծ արժեքը։*

Երբ $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$*, կունենանք՝* $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$*, ուստի* $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$։

50-րդ գծագրից երևում է, թե ինչպես պետք է կառուցել պահանջվող ուղղանկյունը (տրամագիծը բաժանված է երեք հավասար մասերի, բաժանման կետերում կանգնեցրած են ուղղահայացներ)։



Գծ. 50.



Գծ. 51.

3) Դիցուք էլեկտրական լամպը կարող է տեղափոխվել (օրինակ, ճախարակի վրա) OB ուղղաձիգ ուղիղով (գծ. 51)։ OA հորիզոնական հարթությունից ի՞նչ հեռավորության վրա պետք է այն տեղավորել, որպեսզի այդ հարթության A կետում ստացվի ամենամեծ լուսավորվածություն։

Ցուցում։ J լուսավորվածությունը համեմատական է sinφ-ին և հակադարձ համեմատական է r = AB հեռավորության քառակուսուն, այսինքն՝

$$J = c \cdot \frac{\sin\varphi}{r^2},$$

որտեղ c-ն կախված է լամպի լույսի ուժից։

Եթե որպես անկախ փոփոխական ընդունենք h = OB մեծությունը, ապա՝

$$\sin\varphi = \frac{h}{r}, \quad r = \sqrt{h^2 + a^2}$$

և

$$J = c \cdot \frac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}} \quad (0 < h < +\infty)։$$

Այնուհետև՝

$$J_h' = c \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}}$$

ածանցյալը զրո է դառնում երբ $h = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7\,a$, այդ արժեքով անցնելիս նշանը փոխելով դրականից բացասականի։ Հենց այդ կլինի ամենաօգտակար հեռավորությունը։

Դիտողություն։ Օգտվելով առիթից, ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք հետևյալ հանգամանքի վրա։ Արգումենտի փոփոխման որոշակի միջակայքի համար ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը որոնելիս, կարող է պատահել, որ այդ միջակայքի ներսը բոլորովին չլինեն ածանցյալի արմատներ (կամ այլ «կասկածե-

լիս արժեքներ)։ Այդ վկայում է այն մասին, որ դիտարկվող միջակայքում ֆունկցիան մոնոտոն աճող է կամ նվազող և, հետևապես, իր ինչպես մեծագույն, նույնպես և փոքրագույն արժեքներն ստանում է միջակայքի ծայրակետերում։

§ 3. ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՑՈՒՄԸ

120. $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություններ: *Ածանցյալի գաղափարն այժմ օգտագործենք բոլոր տեսքի անորոշությունների բացման համար։ Սկզբում կզբաղվենք հիմնական դեպքով՝ $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշությամբ, այսինքն՝ կուսումնասիրենք $f(x)$ և $g(x)$ երկու այնպիսի ֆունկցիաների հարաբերության սահմանի վերաբերյալ հարցը, որոնք ձգտում են զրոյի (օրինակի համար, $x \to a$ դեպքում)։ Ստորև բերվող թեորեման հիմնականում պատկանում է Իոհանն Բեռնուլիին։ Սակայն, նրանում պարունակվող կանոնը սովորաբար «Լոպիտալի կանոն» են անվանում, որովհետև այն առաջին անգամ (թեպետև ոչ բոլորովին այդ նույն տեսքով) հրապարակվել է հենց Լոպիտալի* «Անվերջ փոքրերի անալիզ» գրքում, որը լույս է տեսել 1696 թ.*

Թեորեմա 1. Դիցուք՝ 1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $(a, b]$ միջակայքում, 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, 3) $(a,b]$ միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ, ընդ որում $g'(x) \neq 0$, և, վերջապես, 4) գոյություն ունի

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

սահմանը (վերջավոր կամ ոչ)։ Այդ ժամանակ նաև՝

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K։$$

Ապացուցում։ $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաների սահմանումը լրացնենք, ընդունելով, որ* $x = a$ *կետում նրանք հավասար են զրոյի՝*

---

* *Գիյոմ Ֆրանսուա դե Լոպիտալ (1661—1704)՝ ֆրանսիացի մաթեմատիկոս։ Տեքստում հիշատակված գիրքը դիֆերենցիալ հաշվի առաջին տպագիր դասընթացն է։*

$f(a)=g(a)=0$*։ Այդ ժամանակ այդ ֆունկցիաները անընդհատ կլինեն ամբողջ $[a, b]$ փակ միջակայքում. նրանց արժեքները a կետում կհամընկնեն սահմանների հետ, երբ $x \to a$ [2)-ի շնորհիվ], իսկ մյուս կետերում անընդհատությունը բխում է վերջավոր ածանցյալների գոյությունից [տես 3)]։ Կիրառելով Կոշիի թեորեման [**104**], կստանանք՝

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

որտեղ $a<c<x$։ Այն հանգամանքը, որ $g(x) \neq 0$, այսինքն՝ $g(x) \neq g(a)$, հանդիսանում է $g'(x) \neq 0$ ենթադրության հետևանքը, ինչպես այդ արդեն ցույց ենք տվել Կոշիի բանաձևն ստանալիս։

Երբ $x \to a$, ակներևաբար, նաև $c \to a$, ուստի, 4)-ի շնորհիվ կունենանք՝

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Այսպիսով, ապացուցված թեորեման ֆունկցիաների հարաբերության սահմանը հանգեցնում է ածանցյալների հարաբերության սահմանին, եթե վերջինս գոյություն ունի։ Հաճախ պարզվում է, որ ածանցյալների հարաբերության սահմանը հաշվելը ավելի հեշտ է և կարելի է գտնել տարրական եղանակներով։

Նկատենք, որ միայն որոշակիության համար մենք դիտարկեցինք այն դեպքը, երբ a-ն միջակայքի ձախ ծայրակետն է և x փոփոխականն աջից է ձգտում a-ին։ Կարելի էր a-ն համարել նաև միջակայքի աջ ծայրակետ և x-ը ձախից ձգտեցնել a-ին։ Վերջապես, թույլատրելի է նաև երկկողմյան սահմանային անցում։

---

* Անշուշտ, կարելի էր ուղղակի նախապես ենթադրել, որ ֆունկցիաները որոշված են ու անընդհատ $x=a$ կետում, սակայն կիրառությունների ժամանակ երբեմն ավելի հարմար է թեորեմայի պայմանների այն ձևակերպումը, որը տրված է տեքստում (տես, օրինակի համար թեորեմա 1*)։

Օ ր ի ն ա կ ն ե ր ։ 1) Գտնել հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}\ *,$$

Ըստ Լոպիտալի կանոնի, այն հավասար է հետևյալ սահմանին՝

$$\lim_{x \to a} \frac{\dfrac{a^3 - 2x^3}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \dfrac{a^2}{3\sqrt[3]{ax^2}}}{-\dfrac{3a}{4\sqrt[4]{a^3x}}} = \frac{16}{9}a\text{։}$$

Այստեղ վերջնական արդյունքն ստացվում է ածանցյալների հարաբերությունից՝ $x = a$ պարզ տեղադրությամբ, շնորհիվ այն բանի, որ այդ հարաբերությունն անընդհատ է $x = a$ կետում։

2) Գտնել հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x},$$

Ածանցյալների հարաբերությունը հաջորդաբար պարզեցվում է այսպես՝

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x}.$$

երբ $x \to 0$, վերջին հարաբերությունն, ակներևաբար, ձգտում է 2-ի։ Թեորեմայի համաձայն, որոնելի սահմանը նույնպես կլինի 2։

Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն հանգամանքի վրա, որ այս օրինակում նաև ածանցյալների հարաբերությունը $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշություն ներկայացրեց, բայց այդ անորոշությունը հնարավոր եղավ բացել տարրական ձևափոխությունների միջոցով։ Կարևոր է ընդգծել, որ այդ ձևափոխությունների ընթացքում թույլատրելի են ստացվող արտահայտությունների ամեն տեսակի պարզեցումներ՝ կրճատում ընդհանուր բազմապատկչով, արդեն հայտնի սահմանների օգտագործում և այլն։

1-ին թեորեման հեշտությամբ տարածվում է այն դեպքի վրա, երբ x արգումենտը ձգտում է անվերջ սահմանի՝ $a = \pm\infty$։ Այն է, տեղի ունի, օրինակի համար, հետևյալ թեորեման՝

** Այս անորոշությունների բացման վերաբերյալ հենց այն առաջին օրինակն է, որ բերված է Լոպիտալի գրքում։*

Թեորեմա 1*: Դիցուք՝ 1) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[c, +\infty)$ միջակայքում, 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 3) $(c,+\infty)$ միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ, ընդ որում $g'(x)\neq 0$, և, վերջապես, 4) գոյություն ունի

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$$

սահմանը (վերջավոր կամ ոչ)։ Այդ ժամանակ նաև՝

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K։$$

Ապացուցում։ *x փոփոխականը ձևափոխենք հետևյալ բանաձևով՝ $x=\frac{1}{t}$, $t=\frac{1}{x}$։ Այդ ժամանակ, եթե $x\to+\infty$, ապա $t\to+0$, և ընդհակառակը։ 2)-ի շնորհիվ կունենանք՝*

$$\lim_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right)=0,\quad \lim_{t\to+0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0,$$

իսկ 4)-ի շնորհիվ՝

$$\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K։$$

*t նոր փոփոխականից կախված $f\left(\frac{1}{t}\right)$ և $g\left(\frac{1}{t}\right)$ ֆունկցիաների նկատմամբ կարելի է կիրառել 3-րդ թեորեման, որը մեզ կտա**

$$\lim_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{}^*=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K,$$

իսկ այդ ժամանակ նաև՝

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել։

---

* $f\left(\frac{1}{t}\right)$ և $g\left(\frac{1}{t}\right)$ ֆունկցիաներն ըստ t-ի ածանցում ենք որպես բարդ ֆունկցիաներ։

121. $\frac{\infty}{\infty}$ **տեսքի անորոշություններ:** *Դիմենք* $\frac{\infty}{\infty}$ *տեսքի անորոշ արտահայտությունների դիտարկմանը, այսինքն՝ հետազոտենք* f(x) *և* g(x) *երկու այնպիսի ֆունկցիաների հարաբերության սահմանի վերաբերյալ հարցը, որոնք ձգտում են անվերջության (երբ* $x \to a$*)։ Ցույց տանք, որ այս դեպքում կիրառելի է Լոպիտալի նույն կանոնը. հետևյալ թեորեման 1-ին թեորեմայի պարզ վերաձևակերպումն է։*

Թեորեմա 2. Դիցուք 1) f(x) և g(x) ֆունկցիաները որոշված են (a,b] միջակայքում, 2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, 3) (a,b] միջակայքում գոյություն ունեն f'(x) և g'(x) ածանցյալները, ընդ որում $g'(x) \neq 0$, և, վերջապես, 4) գոյություն ունի

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$$

սահմանը (վերջավոր կամ ոչ): Այդ դեպքում նաև՝

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K:$$

Ապացուցում։ 2) պայմանի շնորհիվ կարելի է համարել, որ x*-ի բոլոր արժեքների համար* $f(x) > 0$ *և* $g(x) > 0$*։*

Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ K*-ն վերջավոր է։ Կամայականորեն վերցրած* $\varepsilon > 0$ *թվի համար, 4) պայմանի շնորհիվ, գոյություն կունենա այնպիսի* $\eta > 0$ *թիվ* ($\eta \leqslant b - a$), *որ* $a < x < a + \eta$ *դեպքում կունենանք՝*

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Կարճության համար նշանակենք $a + \eta = x_0$ *և* x*-ը վերցնենք* a*-ի և* x_0*-ի միջև։* $[x, x_0]$ *միջակայքի նկատմամբ կիրառելի* է Կոշիի բանաձևը՝*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

---

* *Հենց սրանում է էական տարբերությունն 1-ին թեորեմայի ապացուցումից. Կոշիի բանաձևն այստեղ չի կարելի կիրառել* [a, x] *միջակայքի նկատմամբ, որովհետև, ինչպես էլ որոշելու լինենք* f(x) *և* g(x) *ֆունկցիաներն* $x = a$ *կետում, 2) պայմանի պատճառով նրանցից այդ կետում անընդհատ ֆունկցիաներ չեն ստացվի։*

որտեղ $x < c < x_0$։ Հետևաբար՝

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - K\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

Այժմ գրենք հետևյալ նույնությունը (որն ստուգվում է անմիջականորեն)՝

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - K\right]։$$

Քանի որ $g(x) \to \infty$, երբ $x \to a$, ուստի կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ (կարելի է համարել $\delta \leqslant \eta$), որ $a < x < a + \delta$ դեպքում միաժամանակ տեղի կունենան հետևյալ անհավասարությունները՝

$$g(x) > g(x_0) \text{ և } \left|\frac{f(x_0) - K\cdot g(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Այդ դեպքում, x-ի նշված արժեքների համար կունենանք [տե՛ս (1)]՝

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

որը և ապացուցում է պահանջվող պնդումը։

Դիցուք այժմ $K = \infty$ [(2) պայմանի առկայության դեպքում $K = -\infty$ դեպքը հնարավոր չէ]. այդ դեպքում $f'(x) \neq 0$ x-ի գոնե այն արժեքների համար որոնք բավականաչափ մոտ են a-ին։ f և g ֆունկցիաների դերերը փոխանակելով, կունենանք՝

$$\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0,$$

այնպես որ, ապացուցածի համաձայն, նաև՝

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0,$$

որտեղից, վերջապես, սկզբում արված դիտողությունների կապակցությամբ, ստացվում է՝

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty։$$

2-րդ թեորեմայի տեքստում կարելի էր համարել նաև $a = -\infty$, առանց էական փոփոխությունների ապացուցման մեջ։ Եթե a-ն լիներ դիտարկվող միջակայքի աջ ծայրակետը, ապա, մասնավորապես, կա-

ռելի էր համարել նաև $a = +\infty$։ *Այսպիսով,* $a = \pm\infty$ *դեպքերն ըստ էության արդեն ընդգրկված են 2-րդ թեորեմայում։*

Օրինակներ։

3) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\mu}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mu x^{\mu}} = 0 \text{ (եթե } \mu > 0),$$

4) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\mu}}{a^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{a^{x}\ln a} \quad (a > 1, \ \mu > 0)\text{:}$$

Եթե $\mu > 1$, *ապա աջ մասում նորից նույն* $\frac{\infty}{\infty}$ *տեսքի անորոշություն է ըստացվում, սակայն, այդ պրոցեսը շարունակելով և մի քանի անգամ կիրառելով 2-րդ թեորեմը, ի վերջո «համարիչում» կստանանք բացասական (կամ զրո) ցուցիչով աստիճան։ Հետևաբար, բոլոր դեպքերում կստանանք՝*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\mu}}{a^{x}} = 0\text{։}$$

122. Անորոշությունների մյուս տեսակները: *Նախորդ թեորեմները վերաբերում էին* $\frac{0}{0}$ *և* $\frac{\infty}{\infty}$ *տեսքի անորոշություններին։*

Եթե մենք ունենք $0\cdot\infty$ *տեսքի անորոշություն, ապա այն կարող ենք բերել* $\frac{0}{0}$ *կամ* $\frac{\infty}{\infty}$ *տեսքի և ապա օգտվել Լոպիտալի կանոնից։*

Դիցուք՝

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

ընդ որում $f(x)$-ը *նշանը չի փոխում։ Այդ դեպքում՝*

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\text{։}$$

Այս արտահայտություններից երկրորդը, երբ $x \to a$, *իրենից ներկայացնում է* $\frac{0}{0}$ *տեսքի անորոշություն, երրորդը՝* $\frac{\infty}{\infty}$ *տեսքի անորոշություն։*

Օրինակ 5)

$$\lim_{x\to+0}(x^{\mu}\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{x^{\mu}}{-\mu}=0$$

(ընդունում ենք $\mu>0$)։

$\frac{0}{0}$ կամ $\frac{\infty}{\infty}$ տեսքի անորոշության կարելի է բերել նաև $\infty-\infty$ տեսքի անորոշությունը։ Դիցուք ունենք $f(x)-g(x)$ արտահայտությունը, ընդ որում՝

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty:$$

Այդ ժամանակ կարելի է կատարել, օրինակ, հետևյալ ձևափոխությունը, որն այդ արտահայտությունը բերում է $\frac{0}{0}$ տեսքի անորոշության՝

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}},$$

Հաճախ նույն նպատակին կարելի է հասնել ավելի հեշտությամբ։

Օրինակ 6)

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}^2x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\cos^2x-\sin^2x}{x^2\cdot\sin^2x},$$

բայց՝

$$\frac{x^2\cdot\cos^2x-\sin^2x}{x^2\cdot\sin^2x}=\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}.$$

առաջին բազմապատկիչի սահմանը գտնվում է տարրական եղանակով՝

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=2,$$

իսկ երկրորդի նկատմամբ կիրառում ենք 1-ին թեորեման՝

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{-x\cdot\sin x}{\sin^2 x+2x\cdot\sin x\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3},$$

Այսպիսով, որոնելի սահմանը հավասար է $-\frac{2}{3}$*-ի։*

1^∞, 0^0, ∞^0 *տեսքի անորոշ արտահայտությունների դեպքում խորհուրդ է տրվում նախապես լոգարիթմել այդ արտահայտությունները։*

Դիցուք $y=[f(x)]^{g(x)}$*։ Այդ դեպքում* $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$*։* $\ln y$*-ի սահմանն իրենից ներկայացնում է արդեն ուսումնասիրված* $0\cdot\infty$ *տեսքի անորոշություն։ Ենթադրենք, թե վերոհիշյալ եղանակներից որևէ մեկի օգնությամբ հաջողվում է գտնել* $\lim\limits_{x\to a}\ln y$*-ը, որը հավասար է մի* K *վերջավոր թվի,* $+\infty$ *կամ* $-\infty$*։ Այդ դեպքում* $\lim\limits_{x\to a} y$*-ը կլինի, համապատասխանաբար,* e^k, $+\infty$ *կամ* 0*։*

Օրինակ 7) Դիցուք՝

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}},$$

Պահանջվում է գտնել $\lim y$*-ը, երբ* $x\to0$ (1^∞ *տեսքի անորոշություն)։*

Եթե համարենք $x>0$ *(կարելի է բավարարվել այս ենթադրությամբ, ի նկատի ունենալով* y *ֆունկցիայի զույգ լինելը), ապա՝*

$$\ln y=\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x},$$

Կիրառենք 1-ին թեորեման՝

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x},$$

Բայց մենք նախորդ օրինակում տեսանք, որ այս սահմանը հավասար է $-\frac{1}{3}$-ի։ Այսպիսով՝

$$\lim_{x \to 0} y = e^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{e}},$$

Դիտողություն։ $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ և $\infty - \infty$ տեսքի անորոշությունները հանդիպում են Էյլերի մոտ. իսկ ցուցչային տեսքի անորոշությունները դիտարկել է Կոշին։ Սակայն, ո՛չ մեկը, ո՛չ էլ մյուսը $\frac{\infty}{\infty}$ դեպքի համար խիստ ապացույց չի տվել։

ՈՒԹԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐԸ

123. Ֆունկցիոնալ կախում փոփոխականների միջև: Օրինակներ: *Մինչև հիմա մենք ուսումնասիրում էինք երկու փոփոխականների համատեղ փոփոխությունը, որոնցից մեկը կախված էր մյուսից. անկախ փոփոխականի արժեքով արդեն լրիվին որոշվում էր կախյալ փոփոխականի կամ ֆունկցիայի արժեքը։ Սակայն, բացառիկ չեն այն դեպքերը, երբ լինում են մի քանի անկախ փոփոխականներ, և ֆունկցիայի արժեքը գտնելու համար անհրաժեշտ է նախապես որոշել այն արժեքները, որոնք համատեղ կերպով ստանում են բոլոր այդ անկախ փոփոխականները։*

1) Այսպես, օրինակ, շրջանային գլանի V ծավալը ֆունկցիա է նրա հիմքի R շառավղի և նրա H բարձրության. այդ փոփոխականների միջև կապը արտահայտվում է

$$V=\pi R^2 H$$

բանաձևով, որը հնարավորություն է տալիս, գիտենալով R և H անկախ փոփոխականների արժեքները, հաշվել V-ի համապատասխան արժեքը։

2) Դիցուք՝ գլանի մխոցի տակ գտնվող գազի զանգվածի ջերմաստիճանը հաստատուն չէ. այդ ժամանակ նրա v ծավալը և p ճնշումը կապված են նրա T (բացարձակ) ջերմաստիճանի հետ, այսպես կոչվող, Կլապեյրոնի բանաձևով՝

$$pv=RT \quad (R=\text{const}).$$

Այստեղից, օրինակ, ընդունելով v-ն և T-ն որպես անկախ փոփոխականներ, p ֆունկցիան դրանց միջոցով կարելի է արտահայտել այսպես՝

$$p=\frac{RT}{v},$$

3) Ուսումնասիրելով որևէ մարմնի ֆիզիկական վիճակը, հաճախ հարկավոր է լինում դիտել նրա հատկությունների փոփոխությունը կետից կետ անցնելիս։ Այդ-

պինք են՝ խտությունը, ջերմաստիճանը, էլեկտրական պոտենցիալը և այլն։ Բոլոր այդ մեծությունները «կետի ֆունկցիաներ» են, կամ, եթե կուզեք, կետի x, y, z կոորդինատների ֆունկցիաներ են։ Եթե մարմնի ֆիզիկական վիճակը փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում, ապա այդ անկախ փոփոխականների թվին կավելանա նաև t ժամանակը։ Այդ դեպքում մենք գործ կունենանք չորս անկախ փոփոխականների ֆունկցիայի հետ։

Նման օրինակների թիվն ընթերցողն ինքը կարող է ցանկացած չափով ավելացնել։

Մի քանի անկախ փոփոխականների ֆունկցիայի գաղափարի ճըշգրտումը կսկսենք այն պարզագույն դեպքից, երբ այդ փոփոխականների թիվը երկուսն է։

124. Երկու փոփոխականի ֆունկցիաներ և նրանց որոշման տիրույթները: *Խոսելով x և y երկու անկախ փոփոխականների փոփոխման մասին, մենք ամեն անգամ պետք է ցույց տանք, թե նրանք (x, y) արժեքների ինչպիսի զույգեր կարող են ընդունել համատեղ. հենց այդ զույգերի M բազմությունը կլինի x, y փոփոխականների փոփոխման տիրույթը։*

Ֆունկցիայի սահմանումը տրվում է այն նույն արտահայտություններով, ինչ-որ մեկ անկախ փոփոխականի դեպքում.

z փոփոխականը (փոփոխման Z տիրույթով) կոչվում է x, y անկախ փոփոխականների ֆունկցիա M բազմությունում, եթե M-ից վերցրած նրանց արժեքների յուրաքանչյուր (x, y) զույգին, որևէ օրենքով կամ կանոնով, համապատասխանեցվում է z-ի մեկ որոշակի արժեք (Z-ից):

Այստեղ ի նկատի ունենք միարժեք ֆունկցիա. այս սահմանումը հեշտությամբ կարելի է տարածել նաև բազմարժեք ֆունկցիաների դեպքի վրա։

M բազմությունը, որի մասին վերևում խոսվեց, հենց ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է։ x, y փոփոխականները կոչվում են z ֆունկցիայի արգումենտներ։ z և x, y փոփոխականների միջև ֆունկցիոնալ կապը նշանակում են, մեկ անկախ փոփոխականի դեպքի նմանությամբ, այսպես՝

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y) \text{ և այլն։}$$

Եթե (x_0, y_0) զույգը վերցրած է M-ից, ապա $f(x_0, y_0)$-ն նշանակում է $f(x, y)$ ֆունկցիայի այն մասնավոր (թվային) արժեքը, որը նա ընդունում է $x = x_0$, $y = y_0$ դեպքում։

Բերենք մի քանի ֆունկցիաների օրինակներ, որոնք տրված են անալիտիկորեն՝ բանաձևերով, ցույց տալով նրանց որոշման տիրույթները

$$1)\ z = x^2 + y^2$$

բանաձևը ֆունկցիան որոշում է բոլոր (x, y) զույգերի համար առանց բացառության։

$$2)\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad 3)\ z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

բանաձևերը պիտանի են (եթե մենք ցանկանում ենք գործ ունենալ z-ի իրական վերջավոր արժեքների հետ) միայն այն (x, y) զույգերի համար, որոնք բավարարում են համապատասխանաբար,

$$x^2 + y^2 \leq 1 \text{ կամ } x^2 + y^2 < 1$$

անհավասարությանը։

$$4)\ z = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b}$$

բանաձևով ֆունկցիան որոշված է x-ի և y-ի այն արժեքների համար, որոնք առանձին-առանձին բավարարում են

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b$$

անհավասարություններին։

Այս բոլոր դեպքերում մենք ցույց ավեցինք բանաձևի կիրառման ամենից ավելի ընդարձակ՝ բնական [n°18, 2°] տիրույթը։

Այժմ դիտարկենք այսպիսի օրինակ.

5) Դիցուք եռանկյան կողմերը կամայապես փոփոխվում են, միայն այն սահմանափակումով, որ նրա պարագիծը պահպանում է իր հաստատուն $2p$ մեծությունը։ Եթե նրա երկու կողմերը նշանակենք x և y, ապա նրա երրորդ կողմը կլինի $2p - x - y$, ուստի եռանկյունը որոշվում է իր x և y կողմերով։ Այդ մեծություններից ինչպե՞ս է կախված եռանկյան z մակերեսը։

Ըստ հայտնի բանաձևի, այդ մակերեսը կարտահայտվի այսպես՝

$$z = \sqrt{p(p - x)(p - y)(x + y - p)}։$$

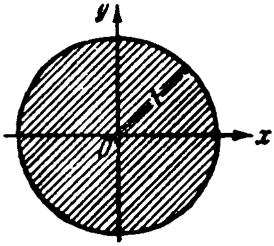
Իսկ ինչ վերաբերում է այդ ֆունկցիայի որոշման M տիրույթին, ապա նա, այս անգամ, պայմանավորված է այն կոնկրետ խնդրով, որը մեզ բերեց այդ ֆունկցիայի դիտարկմանը։ Քանի որ եռանկյան յուրաքանչյուր կողմի երկարությունը դրական թիվ է, որը փոքր է կիսապարագծից, ուստի պետք է տեղի ունենան

$$0 < x < p, \quad 0 < y < p, \quad x + y > p$$

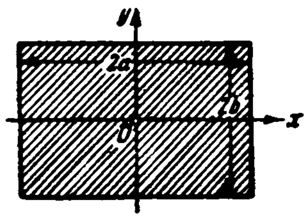
անհավասարությունները. հենց դրանք էլ բնորոշում են M տիրույթը, չնայած նրան, որ տրված բանաձևն ինքնըստինքյան իմաստ ունի նաև ավելի լայն տիրույթում. օրինակ, $x > p$ և $y > p$ արժեքների համար։

Այսպիսով, այն ժամանակ երբ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար արգումենտի փոփոխման ստանդարտ տիրույթ հանդիսանում է (վերջավոր կամ անվերջ) միջակայքը, երկու փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքում մենք հանդիպում ենք արգումենտների փոփոխման հնարավոր (և բնական) տիրույթների շատ բազմատեսակության և բարդության։

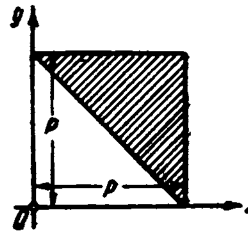
Այդ տիրույթների դիտարկումը նշանակալիորեն հեշտացվում է նրանց երկրաչափական մեկնաբանմամբ։ Եթե հարթության վրա վերցնենք երկու փոխադարձաբար ուղղահայաց առանցքներ և սովորական



Գծ. 52.



Գծ. 53.



Գծ. 54.

ձևով դրանց վրա դասավորենք x*-ի և* y*-ի արժեքները, ապա, ինչպես հայտնի է, յուրաքանչյուր* (x, y) *զույգով հարթության վրա միարժեքորեն որոշվում է մի կետ, որի կոորդինատները այդ արժեքներն են, և, հակադարձաբար, յուրաքանչյուր կետով որոշվում է* x*-ի և* y*-ի արժեքների մի զույգ։*

Այդ դեպքում, բնութագրելու համար այն (x, y) *զույգերը, որոնց համար ֆունկցիան որոշված է, ամենից ավելի հեշտ է ցույց տալ, թե* xy *հարթության վրա համապատասխան կետերով ի՞նչ պատկեր է լրացվում։*

Այսպես.ասում են, որ 1) ֆունկցիան որոշված է ողջ հարթության վրա, 2) և 3) ֆունկցիաները՝ շրջանում, համապատասխանաբար, փակ (այսինքն ներառյալ շրջանագիծը) կամ բաց (առանց շրջանագծի) (գծ. 52), 4)-ը որոշված է ուղղանկյունում (գծ. 53), և վերջապես, 5) ֆունկցիան դիտարկվում է բաց եռանկյան ներսում (գծ. 54)։

Այս երկրաչափական մեկնաբանումն այնքան հարմար է, որ սովորաբար հենց (x, y) *թվերի զույգերն իրենք անվանում են «կետեր», իսկ այդպիսի «կետերի» բազմությունը, որը համապատասխանում է այս կամ այն երկրաչափական պատկերներին, անվանում են այդ պատ-*

կերների անունով։ Այսպես, այն «կետերի» կամ (x, y) զույգերի բազմությունը, որոնց համար տեղի ունեն

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d$$

անհավասարությունները, «ուղղանկյուն» է, որի չափումները հավասար են $b-a$ և $d-c$. այդ ուղղանկյունը կնշանակենք $[a, b; c, d]$ պայմանանշանով, որը նման է միջակայքի նշանակմանը։

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 \leqslant r^2$$

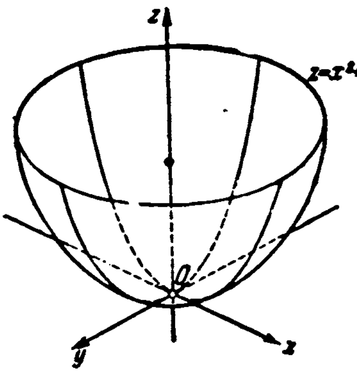
անհավասարությանը բավարարող «կետերի» կամ (x, y) զույգերի բազմությունը՝ r շառավղով «շրջան» է, որի կենտրոնը (α, β) «կետումն» է և այլն։

Ինչպես որ $y=f(x)$ ֆունկցիան երկրաչափորեն պատկերվում էր իր գրաֆիկով [n° **19**], նույնպես և այստեղ կարելի է $z=f(x, y)$ հավասարումը երկրաչափորեն մեկնաբանել։ Տարածության մեջ վերցնենք x, y, z կոորդինատային առանցքների ուղղանկյուն սիստեմ. xy հարթության վրա պատկերացնենք x և y փոփոխականների փոփոխման M տիրույթը, և, վերջապես, այդ տիրույթի յուրաքանչյուր $M(x, y)$ կետում կանգնեցնենք xy հարթությանն ուղղահայաց և նրա վրա վերցնենք $z=f(x, y)$ արժեքին համապատասխանող հատված։ Այդ ձևով ստացված կետերի երկրաչափական տեղը հենց կհանդիսանա մեր ֆունկցիայի յուրատեսակ տարածական գրաֆիկը։ Ընդհանրապես ասած, այդ կլինի մի որոշ մակերևույթ. $z=f(x, y)$ հավասարումն, իր հերթին, կոչվում է մակերևույթի հավասարում։

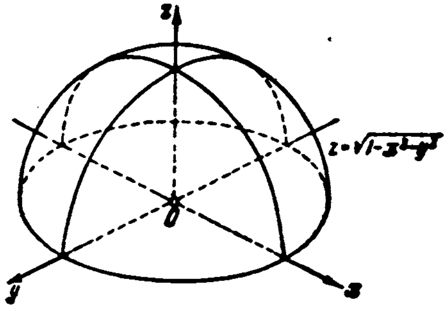
Որպես օրինակ, 55-րդ և 56-րդ գծագրերի վրա պատկերված են

$$z=x^2+y^2 \text{ և } z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

ֆունկցիաների երկրաչափական պատկերները։



Գծ. 55.



Գծ 56.

Դրանցից առաջինն իրենից ներկայացնում է պտտման պարաբոլոիդ, իսկ երրորդը՝ կիսասֆերա։

125. Թվաբանական m-չափանի տարածություն: *Անցնելով* m *անկախ փոփոխականների ֆունկցիաներին* ($m \geqslant 3$ *դեպքում*), *մենք նախ կանգ առնենք այդ փոփոխականների համատեղ արժեքների սիստեմների վրա։*

$m = 3$ *դեպքում* (x, y, z) *երեք թվերի այդպիսի սիստեմը, ինչպես այդ պարզ է ընթերցողի համար, դեռևս կարող է երկրաչափորեն մեկնաբանվել որպես տարածության կետ, իսկ այդպիսի եռյակների բազմությունը՝ որպես տարածության մաս կամ երկրաչափական մարմին։ Բայց* $m > 3$ *դեպքում անմիջական երկրաչափական մեկնաբանման հնարավորություն արդեն չկա։*

Այնուամենայնիվ, ցանկանալով տարածել երկրաչափական մեթոդները (որոնք օգտավետ եղան երկու և երեք փոփոխականի ֆունկցիաների համար) նաև ավելի շատ թվով փոփոխականների ֆունկցիաների տեսության վրա, անալիզի մեջ մուծում են m*-չափանի «տարածության» գաղափարը նաև* $m > 3$*-ի դեպքում,*

m *հատ իրական թվերի սիստեմն անվանենք (*m*-չափանի) «կետ»՝* $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$*, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *թվերը կհանդիսանան այդ* M *«կետի» կոորդինատներ։ Բոլոր մտածելի* m*-չափանի «կետերի» բազմությունը կազմում է* m*-չափանի «տարածություն», որը երբեմն անվանում են թվաբանական տարածություն։*

«m*-չափանի կետի» և «*m*-չափանի (թվաբանական) տարածության» գաղափարներն սկիզբ են առնում Ռիմանից**, սակայն տերմինաբանությունը պատկանում է Կանտորին։*

Նպատակահարմար է մուծել նաև

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_m) \text{ և } M'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$$

(m*-չափանի) երկու «կետերի»* $\overline{MM'}$ *«հեռավորության» գաղափարը։ Հե-*

* *Գործ ունենալով անորոշ թվով փոփոխականների հետ, ավելի հարմար է լինում դրանք նշանակել ոչ թե տարբեր տառերով, այլ միևնույն տառով՝ միայն տարբեր համարներով։ Այսպիսով,* x_i *նշանակում է (հակառակ նախկին պրակտիկայի) ոչ թե որևէ փոփոխականի* i*-րդ արժեքը, այլ հենց* i*-րդ փոփոխականն ինքը, որը ինքն է ընդունում տարբեր արժեքներ։*

** *Բեռնհարդ Ռիման (1826—1866)՝ գերմանացի ականավոր մաթեմատիկոս։*

հետևելով անալիտիկ երկրաչափությունից հայտնի բանաձևին, ընդունում են՝

$$\overline{MM'}=\overline{M'M}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i'-x_i)^2}=$$

$$=\sqrt{(x_1'-x_1)^2+(x_2'-x_2)^2+\ldots+(x_m'-x_m)^2}. \qquad (1)$$

$m=2$ *և* $m=3$ *դեպքերում այդ «հեռավորությունը» համընկնում է երկու համապատասխան երկրաչափական կետերի սովորական հեռավորության հետ։*

Եթե վերցնենք ևս մեկ «կետ»՝

$$M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_m''),$$

ապա կարելի է ապացուցել, որ $\overline{MM'}$, $\overline{M'M''}$ *և* $\overline{MM''}$ *«հեռավորությունների» համար տեղի ունի*

$$\overline{MM''}\leqslant\overline{MM'}+\overline{M'M''} \qquad (2)$$

անհավասարությունը, որը հիշեցնում է երկրաչափության հայտնի թեորեման՝ «եռանկյան կողմը մեծ չէ մյուս երկու կողմերի գումարից»։

Իրոք, կամայապես վերցրած $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *և* $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *իրական թվերի համար տեղի ունի*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2}$$

անհավասարությունը։*

---

* *Եթե այդ անհավասարության երկու կողմերը քառակուսի բարձրացնենք և երկու մասերից գեն նետենք հավասար անդամները, ապա նա կհանգի Կոշիի հայտնի անհավասարությանը՝*

$$\sum_{i=1}^{m}a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{m}b_i^2},$$

Զուգընթացաբար ցույց տանք, թե ինչպես այս վերջինս կարելի է ստանալ տարրական եղանակով։ Հետևյալ՝

$$\sum_{i=1}^{m}(a_ix+b_i)^2=x^2\cdot\sum_{i=1}^{m}a_i^2+2x\cdot\sum_{i=1}^{m}a_ib_i+\sum_{i=1}^{m}b_i^2$$

քառակուսի եռանդամը բացասական արժեքներ չի ընդունում։ Այդ դեպ-

Եթե այստեղ ընդունենք

$$a_i = x_i' - x_i, \quad b_i = x_i'' - x_i',$$

այնպես, որ՝

$$a_i + b_i = x_i'' - x_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ապա կստանանք՝

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i'' - x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i' - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i'' - x_i')^2},$$

որը համարժեք է (2) անհավասարությանը։ Այսպիսով, հեռավորության այդ էական հատկությունը տեղի ունի նաև մեր «տարածության» մեջ։

m-չափանի «տարածությունում» կարելի է դիտարկել նաև «ուղիղներ»։ Ընթերցողը կհիշի, որ x_1x_2 հարթության վրա ուղիղը որոշվում է

$$\frac{x_1 - \beta_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - \beta_2}{\alpha_2}$$

հավասարումով, իսկ $x_1x_2x_3$ տարածությունում՝

$$\frac{x_1 - \beta_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - \beta_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - \beta_3}{\alpha_3}$$

հավասարումներով (α գործակիցները չեն կարող միաժամանակ զրո դառնալ)։ Դրանց նմանությամբ, m-չափանի «տարածությունում» «ուղիղ» անվանենք այն $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ «կետերի» բազմությունը, որոնք բավարարում են հավասարումների հետևյալ սիստեմին՝

$$\frac{x_1 - \beta_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - \beta_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{x_m - \beta_m}{\alpha_m}$$

(α գործակիցների նկատմամբ արված նույն պայմանով)։ Եթե այդ հարաբերությունների ընդհանուր արժեքը նշանակենք t, ապա «ուղիղը» կարելի է որոշել նաև պարամետրական հավասարումներով՝

$$x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, \quad x_2 = \alpha_2 t + \beta_2, \quad \dots, \quad x_m = \alpha_m t + \beta_m,$$

---

* *քում նա չի կարող ունենալ տարբեր իրական արմատներ, և նրա դիսկրիմինանտը ոչդրական է՝*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i^2 - \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i b_i \right\}^2 \geqslant 0,$$

որը համարժեք է Կոշիի անհավասարությանը։

ենթադրելով, որ t պարամետրը փոփոխվում է $-\infty$-ից մինչև $+\infty$: Այդ ուղղի կետերը կհամարենք մեկը մյուսին հաջորդող պարամետրի աճման կարգով. եթե $t' < t < t''$, ապա դրանց համապատասխանող M', M, M'' «կետերից» հենց M կետն է, որ գտնվում է մյուս երկուսի միջև, որովհետև նա հաջորդում է M'-ին և նախորդում է M''-ին: Այս պայմանների դեպքում, հեշտ է ցույց տալ, որ դրանց միջև գտնվող հեռավորությունները բավարարում են հետևյալ առնչությանը՝

$$\overline{M'M''} = \overline{M'M} + \overline{MM''},$$

որը բնորոշ է նաև սովորական տարածության մեջ գտնվող ուղղի համար:

Տրված՝

$$M'(x_1', x_2', \ldots, x_m') \text{ և } M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$$

երկու «կետերով» անցնող «ուղղի» հավասարումները, ակներևաբար, կարելի է գրել այսպես՝

$$x_1 = x_1' + t(x_1'' - x_1'), \ \ldots, \ x_m = x_m' + t(x_m'' - x_m')$$
$$(-\infty < t < +\infty),$$

ընդ որում M' և M'' կետերն իրենք ստացվում են այստեղից $t=0$ և $t=1$ դեպքերում: Իսկ եթե t-ն փոփոխենք 0-ից մինչև 1, կստանանք այդ «կետերը» միացնող $M'M''$ «ուղղագիծ հատվածը»:

Վերջապես, եթե ունենք մեկը մյուսին կցված մի քանի հատվածներ՝ $M'M_1$, M_1M_2, …, M_kM'', ապա նրանցից կկազմվի «բեկյալ» m-չափանի տարածությունում:

126. Տիրույթների օրինակներ m-չափանի տարածության մեջ: *Այժմ դիմենք m-չափման «տարածության» մեջ «մարմինների» կամ «տիրույթների» մի քանի պարզագույն օրինակների դիտարկմանը:*

1) Այն $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ «կետերի» բազմությունը, որոնց կոորդինատներն իրարից անկախ բավարարում են հետևյալ անհավասարություններին՝

$$a \leq x_1 \leq b_1, \ a_2 \leq x_2 \leq b_2, \ \ldots, \ a_m \leq x_m \leq b_m,$$

կոչվում է (m-չափանի) «ուղղանկյուն զուգահեռանիստ» և նշանակվում է այսպես՝

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_m, b_m]:$$

Այստեղից, մասնավոր դեպքում, երբ $m=2$, *ստացվում է այն «ուղղանկյունը», որի մասին արդեն խոսել ենք* n° **124**-*ում. եռաչափ «զուգահեռանիստին» տարածության մեջ համապատասխանում է սովորական ուղղանկյուն զուգահեռանիստ։*

Եթե վերոհիշյալ անհավասարությունների մեջ բացառենք հավասարության դեպքերը՝

$$a_1<x_1<b_1,\ a_2<x_2<b_2,\ \ldots,\ a_m<x_m<b_m,$$

ապա այսպիսով կորոշվի բաց «ուղղանկյուն զուգահեռանիստ»՝

$$(a_1,\ b_1;\ a_2,\ b_2;\ \ldots,\ a_m,\ b_m),$$

ի տարբերություն որից, վերևում դիտարկվածը կոչվում է փակ «զուգահեռանիստ»։ Երկու զուգահեռանիստերի համար էլ $b_1-a_1, b_2-a_2, \ldots, b_m-a_m$ *տարբերությունները կոչվում են չափումներ, իսկ*

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\ \frac{a_2+b_2}{2},\ \ldots,\ \frac{a_m+b_m}{2}\right)$$

կետը՝ կենտրոն։

$M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_m)$ *«կետի» շրջակայք կոչվում է ցանկացած՝*

$$(\overset{\circ}{x}_1-\delta_1,\ \overset{\circ}{x}_1+\delta_1;\ \overset{\circ}{x}_2-\delta_2,\ \overset{\circ}{x}_2+\delta_2;\ \ldots;\ \overset{\circ}{x}_m-\delta_m;\ \overset{\circ}{x}_m+\delta_m) \qquad (3)$$

$$(\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_m>0)$$

բաց «զուգահեռանիստ», որի կենտրոնը M_0 *կետն է. ամենից հաճախ այդ լինում է «խորանարդ»՝*

$$(\overset{\circ}{x}_1-\delta,\ \overset{\circ}{x}_1+\delta;\ \overset{\circ}{x}_2-\delta,\ \overset{\circ}{x}_2+\delta;\ \ldots;\ \overset{\circ}{x}_m-\delta,\ \overset{\circ}{x}_m+\delta),$$

$$(\delta>0)$$

որի բոլոր չափումները իրար հավասար են $(=2\delta)$։

2) Դիտարկենք այն $M(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ *կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հետևյալ անհավասարությանը,*

$$(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+(x_3-x_3^0)^2+\ldots+(x_m-x_m^0)\leqslant r^2 \ \ (\text{կամ} < r^2),$$

որտեղ $M_0(x_1^0,\ \overset{\circ}{x}_2,\ \ldots,\ x_m^0)$-*ն հաստատուն «կետ» է, իսկ* r-*ը՝ հաստատուն դրական թիվ։ Այդ բազմությունը կոչվում է փակ (կամ բաց)* m-*չափանի «գունդ»՝* r *շառավղով և* M_0 *կենտրոնով։ Այլ խոսքով, «գունդը» այն* M *«կետերի» բազմությունն է, որոնց «հեռավորությունը» մի* M_0 *հաստատուն «կետից» չի գերազանցում (կամ փոքր է)*

*r-ից։ Ինքնըստինքյան պարզ է, որ $n=2$ դեպքում այդ «գնդին» համապատասխանում է շրջան [համեմատել n°**124**-ի հետ], իսկ $n=3$ դեպքում՝ սովորական գունդ։*

Ցանկացած $r>0$ շառավղով և $M_0(x_1^0, \ldots x_n^0)$ կենտրոնով բաց «գունդը» նույնպես կարելի է դիտարկել որպես այդ կետի շրջակայք. ի տարբերություն առաջ սահմանած «զուգահեռանիստային» շրջակայքից, այս շրջակայքը կանվանենք «գնդային» շրջակայք։

Պետք է մեկընդմիշտ իմանալ, որ եթե M_0 «կետը» շըրջապատված է վերոհիշյալ երկու տեսակի շրջակայքերից որևէ մեկով, ապա այն կարելի է շրջապատել նաև մյուս տեսակի շրջակայքով այնպես, որ այդ շրջակայքը գտնվի առաջինի ներսը։

Դիցուք նախ տված է (3) «զուգահեռանիստը», որի կենտրոնը M_0 «կետն» է։ Բավական է վերցնել նույն կենտրոնով և բոլոր δ_i-երից ($i=1, 2 \ldots, m$) փոքր r շառավղով մի գունդ, որպեսզի այդ գունդը արդեն գտնվի վերոհիշյալ «զուգահեռանիստի» ներսը։ Իրոք, այդ գընդի ցանկացած $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ «կետի» համար կունենանք (յուրաքանչյուր $i=1, 2, \ldots, m$ արժեքի համար)՝

$$x_i - x_i^0 \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - x_k^0)^2} = \overline{MM_0} < r < \delta^i$$

կամ

$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i,$$

ուստի այդ «կետը» պատկանում է տված «զուգահեռանիստին»։

Հակադարձաբար, եթե տված է r շառավղով և M_0 կենտրոնով «գունդ», ապա (3) «զուգահեռանիստը» նրա ներսը կգտնվի, օրինակ, երբ $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_m = \frac{r}{\sqrt{m}}$։ Այս հետևում է նրանից, որ այդ «զուգահեռանիստի» ցանկացած $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ «կետը» գտնվում է M_0 «կետից» հետևյալ «հեռավորության» վրա՝

$$\overline{MM_0} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \delta_k^2} = r$$

և հետևապես, պատկանում է տված «գնդին»։

127. Բաց և փակ տիրույթների ընդհանուր սահմանումը։ $M'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ *«կետը» կանվանենք* M *բազմության (*m*-չափանի «տա-*

րածության» մեջ) ներքին «կետ», եթե նա M բազմությանն է պատկանում իր բավականաչափ փոքր շրջակայքի հետ միասին։ Նախորդ n°-ի վերջում ապացուցածից, ակներևորեն, հետևում է, որ նշանակություն չունի այն, թե այստեղ ինչ տիպի շրջակայք ենք ի նկատի ունենում՝ «զուգահեռանիստայի՞ն», թե՞ «գնդային»։

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_m, b_m) \tag{4}$$

բաց «ուղղանկյուն զուգահեռանիստի» համար նրա յուրաքանչյուր «կետը» ներքին կետ է։ Իրոք, եթե

$$a_1 < x_1' < b_1, \; a_2 < x_2' < b_2, \; \ldots, \; a_m < x_m' < b_m,$$

ապա հեշտ է գտնել այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որպեսզի տեղի ունենան

$$a_1 < x_1' - \delta < x_1' + \delta < b_1, \; \ldots, a_m < x_m' - \delta < x_m' + \delta < b_m$$

անհավասարությունները։

Նմանապես, r շառավղով և M_0 կենտրոնով բաց «գնդի» դեպքում, նրան պատկանող յուրաքանչյուր M' «կետը» հանդիսանում է նրա ներքին «կետ»։ Եթե ρ-ն վերցնենք այնպես, որ

$$0 < \rho < r - \overline{M'M_0}$$

և M' «կետի» շուրջը գծենք այդ ρ շառավղով գունդ, ապա նա ամբողջապես կգտնվի սկզբում վերցրած «գնդի» ներսը. հենց որ $\overline{MM'} < \rho$, անմիջապես տեղի կունենա [n°**125** *(2)*]՝

$$\overline{MM_0} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M_0} < \rho + \overline{M'M_0} < r;$$

ուստի M «կետը» պատկանում է սկզբում վերցրած «գնդին»։

Այդ տեսակի բազմությունը, որը ամբողջապես կազմված է ներքին «կետերից», կանվանենք բաց «տիրույթ»:

Այսպիսով, բաց «ուղղանկյուն զուգահեռանիստը» և բաց «գունդը» ծառայում են որպես բաց «տիրույթների» օրինակներ։

Այժմ ընդհանրացնենք խտացման կետի գաղափարը [n°**82**] m-չափանի «տարածության» **M** բազմության դեպքի համար. M_0 «կետը» կոչվում է **M** բազմության «խտացման կետ», եթե նրա յուրաքանչյուր շրջակայքում (դարձյալ՝ անկախ շրջակայքի տեսակից) գտնվում է **M** բազմությանը պատկանող գոնե մեկ «կետ», որը M_0-ից տարբեր է:

Բաց «տիրույթի» այն խտացման կետերը, որոնք «տիրույթին» չեն պատկանում, կոչվում են նրա եզրային «կետեր»։ Եզրային «կետերի» համախմբությունը կազմում է «տիրույթի եզրը»: Բաց «տիրույթը» իր «եզրի» հետ միասին կոչվում է փ ա կ «տիրույթ»:

Դժվար չէ տեսնել, որ (4) բաց «զուգահեռանիստի» համար եզրային «կետեր» կլինեն այն $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ կետերը, որոնց համար

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ \ldots, \ a_m \leqslant x_m \leqslant b_m,$$

ընդ որում գոնե մեկ դեպքում տեղի ունի հենց հավասարություն:

Ճիշտ նույն կերպ, վերևում դիտարկված բաց «գնդի» համար եզրային կլինեն այն M «կետերը», որոնց համար ճշտորեն $\overline{MM_0}=r$:

Այսպիսով, փակ «ուղղանկյուն զուգահեռանիստը» և փակ «գունդը» փակ «տիրույթների» օրինակներ են:

Այսուհետև, խոսելով բաց կամ փակ «տիրույթի» մասին, մենք միշտ ի նկատի կունենանք այստեղ նշված հատուկ իմաստով «տիրույթ»:

Այժմ ցույց տանք, որ փակ «տիրույթին» պատկանում են նրա բոլոր խտացման «կետերը»:

Դիցուք տված է $\overline{D}$ փակ «տիրույթը» և նրանից դուրս M_0 «կետը»: Ապացուցենք, որ M_0-ն $\overline{D}$-ի համար խտացման «կետ» չի լինի:

$\overline{D}$ փակ «տիրույթն» ստացվում է մի որոշ D բաց «տիրույթից»՝ նրան իր E «եզրը» միակցելու միջոցով: Ակներևաբար, M_0 կետը D-ի համար խտացման «կետ» չէ, հետևապես M_0-ն կարելի է շրջապատել այնպիսի բաց «գնդով», որ նրա մեջ D-ին պատկանող «կետեր» բոլորովին չգտնվեն: Բայց այդ դեպքում այդտեղ չեն գտնվի նաև E-ից «կետեր», չէ՞ որ, եթե E-ից որևէ M' «կետ» գտնվեր այդ գնդի ներսում, ապա այդտեղ կգտնվեր նաև M' «կետի» մի որոշ շրջակայք ամբողջությամբ, և այդ շրջակայքի ներսում չէր լինի D-ից և ոչ մի կետ, որը կհակասեր «եզրի» սահմանմանը: Ուրեմն, վերոհիշյալ «գնդում» $\overline{D}$-ից կետեր չկան, որը և ապացուցում է մեր պնդումը:

Ընդհանրապես «կետային» այնպիսի M բազմությունը, որն իր մեջ պարունակում է բոլոր իր խտացման «կետերը», անվանում են փ ա կ բազմություն: Այսպիսով, փակ «տիրույթը» փակ բազմության մասնավոր դեպքն է:

Վերջին nn°-ում շարադրվածները բոլորը կարելի է դիտարկել միայն որպես ինչ-որ ե ր կ ր ա չ ա փ ա կ ա ն լ ե զ վ ի սահմանում. վերջինիս հետ ($m > 3$ դեպքում) ոչ մի իսկական երկրաչափական պատկերացում չի կապված: Սակայն օգտակար է ընդգծել, որ m-չափանի (թվաբանական) տարածությունը փաստորեն հանդիսանում է միայն առաջին քայլը դեպի տարածության գաղափարի վերին աստիճանի *բեղմնավոր ընդհանրացումները, որոնք դրված են ժամանակակից անալիզի ավելի բարձր մասերից շատերի հիմքում։**

128. m փոփոխականների ֆունկցիաներ: *Դիցուք ունենք* m *հատ* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *փոփոխականներ, որոնց համատեղ արժեքները կամավոր կերպով կարող են ընտրվել* m*-չափանի տարածության մի որոշ* **M** *բազմությունից. այդ փոփոխականները կոչվում են անկախ փոփոխականներ։ Երկու փոփոխականի դեպքում ֆունկցիայի սահմանումը և նրա վերաբերյալ բոլոր ասածները* [**124**] *անմիջականորեն փոխանցվում են նաև այս դիտարկվող դեպքի վրա, ուստի դրանց վրա կանգ առնելու հարկ չկա։*

Եթե $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *կետը նշանակենք* M*-ով, ապա այդ փոփոխականների* $u=f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ *ֆունկցիան երբեմն անվանում են* M *կետի ֆունկցիա և նշանակում են նույն նշանով՝* $u=f(M)$*։*

Այժմ ենթադրենք, թե k*-չափանի տարածության (որտեղ* k*-ն* m*-ի հետ կապված չէ) կետերի մի որոշ* **P** *բազմության մեջ տված են* k *հատ՝* $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *փոփոխականների* m *հատ ֆունկցիաներ՝*

$$x_1=\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots\ x_m=\varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k) \tag{5}$$

կամ, ավելի կարճ՝

$$x_1=\varphi_1(P), \ldots, x_m=\varphi_m(P), \tag{5ա}$$

որտեղ P*-ով նշանակված է* k*-չափանի տարածության* $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ *կետը։ Բացի դրանից, ընդունենք, որ, երբ* $P(t_1, t_2, \ldots t_k)$ *կետը փոփոխվում է* **P** *բազմության սահմաններում, նրան համապատասխանող* m*-չափանի* M *կետը, որն ունի (5)* [*կամ (5ա)*] *կոորդինատներ, դուրս չի գալիս* m*-չափանի այն* **M** *բազմության սահմաններից, որտեղ որոշված է* $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)=f(M)$ *ֆունկցիան։*

Այդ դեպքում u *փոփոխականը կարելի է դիտարկել որպես* $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *(***P*** բազմության ներսը) անկախ փոփոխականների բարդ ֆունկցիա՝* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *փոփոխականների միջոցով՝*

$$u=f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k)),$$

u*-ն հանդիսանում է* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ **ֆունկցիաների ֆունկցիա** [*համեմատել* **n°25***-ի հետ*]

---

* *Մենք չակերտների մեջ էինք առնում բոլոր այն երկրաչափական տերմինները, որոնք գործածվում էին սովորականից տարբեր իմաստով՝ «կետ», «հեռավորություն», «տիրույթ» և այլն. Այսուհետև այլևս չակերտներ չենք գործածելու։*

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ *ֆունկցիաների և* f *ֆունկցիայի միջոցով բարդ ֆունկցիայի որոշման պրոցեսն ինքը կոչվում է (ինչպես և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի պարզ դեպքում) սուպերպոզիցիա։*

Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների այն դասը, որի հետ սկզբնական շրջանում գործ պետք է ունենանք, շատ էլ մեծ չէ։ Ըստ էության, նա կառուցվում է, սուպերպոզիցիայի օգնությամբ, մեկ փոփոխականի տարրական ֆունկցիաներից [**22, 24**] *և երկու փոփոխականների հետևյալ ֆունկցիաներից՝*

$$z = x \pm y, \quad z = xy, \quad z = \frac{x}{y} \text{ և } z = x^y,$$

այսինքն՝ թվաբանական չորս գործողությունների և, այսպես կոչվող, աստիճանա-ցուցչային ֆունկցիայի միջոցով։

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ *անկախ փոփոխականների և հաստատունների նկատմամբ բազմակի կիրառված թվաբանական գործողությունները ամենից առաջ բերում են ամբողջ բազմանդամներին՝*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_m} C_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_m^{\nu_m} \text{*} \qquad (6)$$

(ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիա) և երկու այդպիսի բազմանդամների հարաբերությանը՝

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{\sum C_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_m^{\nu_m}}{\sum C'_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_m^{\mu_m}}$$

(կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիա)։

Մեկ փոփոխականի տարրական ֆունկցիաների օգտագործումը հանգեցնում է, օրինակ, այսպիսի ֆունկցիաների՝

$$f(x, y, z) = \frac{\ln(x + y + z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \sin xy + \sin yz + \sin zt + \sin tx$$

և այլն

Այն դիտողությունները, որոնք արվել են n° **18**-*ում մեկ փոփոխա-*

---

* *Մենք գիտենք, որ* Σ *նշանը նշանակում է միատեսակ գումարելիների գումար։ Այստեղ ունենք ավելի բարդ դեպք, երբ գումարելիները կախված են մի քանի նշանիկներից։*

կանի ֆունկցիան անալիտիկորեն տալու առթիվ, կարող են կրկնվել և այստեղ։

129. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի սահմանը: m-չափանի տարածության մեջ դիտարկենք կետերի մի հաջորդականություն՝

$$\{M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\} \quad (n=1, 2, 3, \ldots)։ \tag{8}$$

Մենք ասելու ենք, որ կետերի այս հաջորդականությունը զուգամիտում է դեպի $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ սահմանային կետը կամ ձգտում է M_0 կետին, եթե M_n կետի կոորդինատներն առանձին-առանձին ձգտում են M_0 կետի համապատասխան կոորդինատներին, այսինքն՝ եթե n-ը անվերջ աճելիս

$$x_1^{(n)} \to a_1, \; x_2^{(n)} \to a_2, \; \ldots, \; x_m^{(n)} \to a_m։ \tag{9}$$

Դրա փոխարեն կարելի էր պահանջել, որպեսզի M_n և M_0 կետերի հեռավորությունը ձգտի զրոյի՝

$$\overline{M_0M_n} \to 0։ \tag{10}$$

Երկու սահմանումների համարժեքությունը բխում է երկու տեսակի շրջակայքերի վերաբերյալ n°**126**-ում ապացուցած պնդումից։ Իրոք, (9) պայմանը նշանակում է, որ, ինչպիսին էլ լինի $\delta > 0$ թիվը, M_n կետը բավականաչափ մեծ n-ի դեպքում բավարարում է հետևյալ անհավասարություններին՝

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \delta, \; \ldots, \; |x_m^{(n)} - a_m| < \delta,$$

այսինքն գտնվում է M_0 կենտրոնով

$$(a_1 - \delta, \; a_1 + \delta; \; \ldots; \; a_m - \delta, \; a_m + \delta)$$

բաց զուգահեռանիստում։ Իսկ (10) պահանջը նշանակում է այն, որ, ինչպիսին էլ լինի $r > 0$ թիվը, M_n կետը, դարձյալ բավականաչափ մեծ n-ի դեպքում, բավարարում է

$$\overline{M_0M_n} < r$$

անհավասարությանը, այսինքն՝ ընկնում է նույն M_0 կենտրոնով և r շառավղով բաց գնդի ներսը։

Դիցուք տրված է կետերի մի որոշ **M** բազմություն m-չափանի տարածությունում և դիցուք $M_0(a_1, a_2, \ldots a_m)$ կետը այդ բազմության խտացման կետ է։ Այդ դեպքում միշտ կարելի է **M** բազմությու-

նից առանձնացնել M_0 կետից տարբեր կետերի այնպիսի (8) հաջոր-դականություն, որը ձգտի M_0 կետին որպես սահմանային կետի։

Այժմ ենթադրենք, թե նշված **M** *բազմությունում որոշված է* $f(x_1 \ldots, x_m)$ *ֆունկցիան։ Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքի նը-մանությամբ ասում են՝*

$f(x_1, \ldots, x_m) = f(M)$ ֆունկցիան ունի A սահմանը $x_1, \ldots, x_m$ փոփոխականները, համապատասխանորեն, a_1-ին,..., a_m-ին ձգտելիս (կամ, ավելի կարճ՝ M կետն M_0 կետին ձգտելիս), եթե M_0 կետից տարբեր կետերի՝ դեպի նույն M_0 կետը զուգամիտող ինչպիսի (8) հաջորդականություն էլ առանձնացնելու լինենք M բազ-մությունից, ֆունկցիայի համապատասխան արժեքներից կազմած $\{f(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\} = \{f(M_n)\}$ թվային հաջորդականությունը միշտ ձգտի A սահմանին:

Այդ փաստը գրառում են այսպես՝

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, \ldots, x_m),$$

կամ, ավելի կարճ՝

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M)։$$

Ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը հեշտությամբ տարածվում է այն դեպքի վրա, երբ $A, a_1, \ldots, a_m$ *թվերից մի քանիսը կամ բոլորն անվերջ մեծ են։*

Ընդգծենք, որ, այդպիսով, մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի համար նույնպես սահմանի գաղափարը հանգեցվում է հաջորդակա-նության սահմանի գաղափարին։

Սակայն, այստեղ էլ կարելի է սահմանի սահմանումը ձևակեր-պել «$\varepsilon - \delta$ լեզվով», առանց հիշատակելու հաջորդականությունների մասին։ Ահա թե ինչպիսին է այդ սահմանումն այն դեպքում, երբ բոլոր $A, a_1, \ldots, a_m$ *թվերը վերջավոր են.*

ասում են, որ $f(x_1, \ldots, x_m)$ ֆունկցիան ունի A սահմանը $x_1, \ldots, x_m$ փոփոխականները, համապատասխանորեն, a_1-ին, ..., a_m-ին ձգտելիս, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնը-վի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - A| < \varepsilon,$$

հենց որ

$$|x_1 - a_1| < \delta, \ldots, |x_m - a_m| < \delta։$$

Այստեղ ենթադրվում է, որ M կետը վերցրած է **M** *բազմությունից և* $(a_1, \ldots, a_m)$ *կետից տարբեր է։ Այդպիսով, ֆունկցիայի համար գրված անհավասարությունը պետք է տեղի ունենա* **M** *բազմության այն բոլոր կետերում, որոնք գտնվում են* M_0 *կետի*

$$(a_1-\delta,\ a_1+\delta;\ \ldots;\ a_m-\delta,\ a_m+\delta)$$

բավականաչափ փոքր շրջակայքում, բացառյալ $(a_1, \ldots, a_m)$ *կետն ինքը (անգամ եթե այն պատկանում է* **M***-ին)։*

$(x_1, \ldots, x_m)$ *և* $(a_1, \ldots, a_m)$ *կետերը նշանակելով M և* M_0*, սահմանը կարելի է երկրաչափական տերմիններով վերաձևակերպել այսպես.*

A թիվը կոչվում է f(M) ֆունկցիայի սահմանման M կետն M_0 կետին ձգտելիս (կամ՝ M_0 կետում), եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $r > 0$ թիվ, որ

$$|f(M)-A| < \varepsilon,$$

հենց որ $\overline{M_0M}$ հեռավորությունը $< r$։

Ինչպես և վերևում, ենթադրվում է, որ M կետը վերցվում է **M** *բազմությունից, բայց* M_0*-ից տարբեր։ Այդպիսով, ֆունկցիայի համար անհավասարությունը պետք է տեղի ունենա* **M** *բազմության այն բոլոր կետերում, որոնք գտնվում են* M_0 *կետի բավականաչափ փոքր գնդային շրջակայքում, բացառությամբ* M_0 *կետի։*

n° **126**-*ում տարբեր տեսակի շրջակայքերի վերաբերյալ արված դիտողությունից անմիջապես բխում է ֆունկցիայի սահմանի նոր սահմանման երկու ձևերի համարժեքությունը։*

Իսկ ինչ վերաբերում է նոր սահմանման և նախկին՝ «հաջորդականությունների լեզվով» տրված սահմանման համարժեքությանը, ապա այդ ապացուցվում է այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում [n°*33*]։

Վերջում նկատենք, որ III *գլխում զարգացրած սահմանների ողջ տեսությունը տարածվում է նաև մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքի վրա։ Մեծ մասամբ այդ տարածումն իրականացվում է ավտոմատիկորեն, որքանով որ այստեղ ևս բոլորը կարելի է հանգեցնել հաջորդականության* [*համ.* n°**42**-*ի հետ*]։

130. Օրինակներ: *1) Օգտվելով արտադրյալի սահմանի վերաբերյալ թեորեմայից, ամենից առաջ հեշտ է ցույց տալ, որ՝*

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} C x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_m^{\nu_m} = C a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \ldots a_m^{\nu_m}.$$

որտեղ $C, a_1, \ldots, a_m$-ը ցանկացած իրական, իսկ $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$-ը՝ ոչբացասական ամբողջ թվեր են։ Այստեղից, եթե (6) ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիան նշանակենք $P(x_1, \ldots, x_m)$, ապա, գումարի վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, կըստացվի նաև՝

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} P(x_1, \ldots, x_m) = P(a_1, \ldots, a_m).$$

Նույն ձևով, ըստ քանորդի վերաբերյալ թեորեմի, (7) կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիայի համար կունենանք՝

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_m \to a_m}} Q(x_1, \ldots, x_m) = Q(a_1, \ldots, a_m),$$

իհարկե, միայն այն պայմանով, որ հայտարարը $(a_1, \ldots, a_m)$ կետում զրո չի դառնում։

2) Դիտարկենք x^y աստիճան-ցուցչային ֆունկցիան, երբ $x > 0$, իսկ y-ը կամայական արժեքներ է ընդունում։ Այդ դեպքում, եթե $a > 0$, իսկ b-ն կամայական իրական թիվ է, կունենանք՝

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} x^y = a^b.$$

Իրոք, եթե վերցնենք n-ից կախված ցանկացած x_n և y_n փոփոխականներ այնպես, որ $x_n \to a$ և $y_n \to b$, ապա [համ. 66] կունենանք՝

$$x_n^{y_n} = e^{y_n \ln x_n} \to e^{b \ln a} = a^b,$$

իսկ այս, «հաջորդականությունների լեզվով», հենց տալիս է պահանջվող արդյունքը։

3) Դիտարկենք հետևյալ սահմանի հարցը՝

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Այստեղ ֆունկցիան որոշված է ամբողջ հարթության վրա, բացառությամբ հենց $x=0$, $y=0$ կետից։

Եթե վերցնենք կետերի երկու մասնակի հաջորդականություններ՝

$$\left\{M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\} \text{ և } \left\{M'_n\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\},$$

որոնք, ակնհայտաբար, զուգամիտում են $(0,0)$ կետին, ապա պարզվում է, որ n-ի բոլոր արժեքների համար՝

$$f(M_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{իսկ } f(M'_n) = f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{5},$$

Այստեղից արդեն հետևում է, որ վերոհիշյալ սահմանը գոյություն չունի։

Առաջարկվում է նման եղանակով համոզվել, որ գոյություն չունի նաև հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

1) Ընդհակառակը՝ գոյություն ունի այս սահմանը՝

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

Այդ անմիջապես բխում է հետևյալ անհավասարությունից՝

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leqslant \frac{1}{2} |x|.$$

131. Հաջորդական սահմաններ: *Բացի* $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *ֆունկցիայի վերևում դիտարկված այն սահմանից, երբ բոլոր արգումենտները միաժամանակ ձգտում են իրենց սահմաններին, հարկավոր է լինում գործ ունենալ նաև այլ տեսակի սահմանների հետ, որոնք ստացվում են որպես մի շարք իրար հաջորդող սահմանային անցումների արդյունք՝ ըստ յուրաքանչյուր արգումենտի առանձին, այս կամ այն կարգով: Առաջին սահմանը կոչվում է* m*-պատիկ (կամ՝ կրկնապատիկ, եռապատիկ և այլն, երբ* $m=2, 3, \ldots$*), իսկ վերջինը՝ հաջորդական սահման։*

Պարզության համար սահմանափակվենք երկու փոփոխականների $f(x, y)$ *ֆունկցիայի դեպքով: Ենթադրենք նաև, որ* x, y *փոփոխականների փոփոխման* $\mathbf{M}$ *տիրույթն այնպիսին է, որ* x*-ը (անկախ* y*-ից) կարող է ընդունել ամեն մի արժեք մի որոշ* $\mathbf{X}$ *բազմությունից, որի համար* a*-ն խտացման կետ է, բայց նրան չի պատկանում, և նմանապես նաև* y*-ը (անկախ* x*-ից) փոփոխվում է մի* $\mathbf{Y}$ *բազմության ներսը, որի համար խտացման կետ է նրան չպատկանող* b *կետը։ Այդպիսի* $\mathbf{M}$ *տիրույթը կարելի էր սիմվոլիկ կերպով նշանակել, որպես* $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$։ *Օրինակ,*

$$(a, a+H; b, b+K) = (a, a+H) \times (b, b+K).$$

Եթե $\mathbf{Y}$*-ից վերցրած յուրաքանչյուր հաստատուն* y*-ի դեպքում* $f(x, y)$ *ֆունկցիայի համար (որը կլինի միայն* x*-ի ֆունկցիա) գոյություն ունի սահման, երբ* $x \to a$, *ապա այդ սահմանը, ընդհանրապես* *ասած, կախված կլինի նախապես հաստատուն պահած* y-*ի արժեքից՝*

$$\lim_{x\to a} f(x,\ y)=\varphi(y)։$$

Այնուհետև կարելի է դնել $\varphi(y)$ *ֆունկցիայի սահմանի հարցը, երբ* $y\to b$՝

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,\ y).$$

Հենց այս էլ կլինի երկու հաջորդական սահմաններից մեկը։ Մյուսը կստացվի, եթե սահմանային անցումները կատարենք հակառակ կարգով՝

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,\ y)։$$

Չպետք է կարծել, որ այդ հաջորդական սահմաններն անհրաժեշտաբար հավասար են։

1) Եթե, օրինակ, $M(0,\ +\infty;\ 0,\ +\infty)$ *տիրույթում ընդունենք՝*

$$f(x,\ y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$$

և վերցնենք $a=b=0$*, ապա կստանանք՝*

$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0} f(x,\ y)=y-1,\quad \lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\ \lim_{x\to 0} f(x,\ y)=-1,$$

մինչդեռ՝

$$\psi(x)=\lim_{y\to 0} f(x,\ y)=x+1,\quad \lim_{x\to 0}\psi(x)=\lim_{x\to 0}\ \lim_{y\to 0} f(x,\ y)=1։$$

Նաև կարող է պատահել, որ հաջորդական սահմաններից մեկը գոյություն ունենա, իսկ մյուսը՝ ոչ։

Այդպես կլինի, օրինակ, հետևյալ ֆունկցիաների համար՝

$$2)\ f(x,y)=\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y},\quad \text{կամ՝}\quad 3)\ f(x,\ y)=x\cdot\sin\frac{1}{y}.$$

այստեղ երկու դեպքում էլ գոյություն ունի $\lim\limits_{y\to 0}\ \lim\limits_{x\to 0} f$ *հաջորդական սահմանը, բայց չկա* $\lim\limits_{x\to 0}\ \lim\limits_{y\to 0} f$ *հաջորդական սահման (իսկ վերջին օրինակում նույնիսկ չկա* $\lim\limits_{y\to 0} f$ *սովորական սահման)։*

Այս պարզ օրինակները ցույց են տալիս, թե որքան զգույշ պետք *է լինել տարբեր փոփոխականների նկատմամբ երկու սահմանային անցումները տեղափոխելիս. շատ հաճախ սխալ եզրակացություններ են ստացվել հենց այդպիսի ապօրինի տեղափոխումից: Միաժամանակ, անալիզի կարևոր հարցերից շատերը կապված են հենց սահմանային անցումների տեղափոխման հետ, սակայն, հասկանալի է, որ ամեն անգամ պետք է հատկապես հիմնավորված լինի այդ տեղափոխման թույլատրելիությունը:*

Այդպիսի հիմնավորման ճանապարհներից մեկը բաց է անում հետևյալ կարևոր թեորեմը, որը միաժամանակ կապ է հաստատում կրկնապատիկ և հաջորդական սահմանների միջև:

Թեորեմ: Եթե 1) գոյություն ունի (վերջավոր կամ անվերջ) կրկնապատիկ սահման՝

$$A = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$$

և 2) Y-ից վերցրած ամեն մի y-ի դեպքում գոյություն ունի (վերջավոր) պարզ սահման ըստ x-ի՝

$$\varphi(y) = \lim_{x \to a} f(x, y),$$

ապա գոյություն ունի նաև

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y),$$

հաջորդական սահմանը, որը հավասար է կրկնապատիկ սահմանին:

Ապացուցենք վերջավոր A-ի, a-ի և b-ի համար: Ֆունկցիայի սահմանի «$\varepsilon - \delta$ լեզվով» սահմանման համաձայն, [n° **129**], *նախապես տված $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ՝*

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \tag{11}$$

հենց որ $|x - a| < \delta$ և $|y - b| < \delta$ (ընդ որում x-ը վերցվում է X-ից, իսկ y-ը՝ Y-ից): Այժմ y-ն ընտրենք այնպես, որ տեղի ունենա $|y - b| < \delta$ անհավասարությունը և պահենք հաստատուն: (11)-ի մեջ անցնենք սահմանին, x-ը ձգտեցնելով a-ին: Քանի որ, 2)-ի շնորհիվ, այդ ժամանակ $f(x, y)$-ը ձգտում է $\varphi(y)$ սահմանին, ապա կստանանք՝

$$|\varphi(y) - A| \leqslant \varepsilon:$$

Վերհիշելով, որ այստեղ y-ը Y-ից վերցրած ցանկացած թիվ է, *միայն* $|y-b|<\delta$ *պայմանին բավարարող, գալիս ենք այն եզրակացության, որ՝*

$$A=\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y),$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Եթե, 1) և 2) պայմանների հետ միասին, X*-ից վերցրած ցանկացած* x*-ի դեպքում գոյություն ունի (վերջավոր)*

$$\psi(x)=\lim_{y\to b}f(x,y)$$

պարզ սահմանն ըստ y*-ի, ապա, ինչպես հետևում է արդեն ապացույցից, եթե* x*-ի և* y*-ի դերերը փոխենք, գոյություն կունենա նաև երկրորդ հաջորդական սահմանը՝*

$$\lim_{x\to a}\psi(x)=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y),$$

և հավասար կլինի նույն A *թվին. այս դեպքում երկու հաջորդական սահմանները իրար հավասար են։*

Ապացուցված թեորեմայից անմիջապես պարզ է, որ 1) և 2) օրինակներում կրկնապատիկ սահման գոյություն չունի։ Դրանում հեշտությամբ կարելի է համոզվել նաև անմիջականորեն։

3)-րդ օրինակում, ընդհակառակը, կրկնակի սահմանը գոյություն ունի.

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x|$$

անհավասարությունից տեսնում ենք, որ այդ սահմանը հավասար է զրոյի։ Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ թեորեմայի 1) պայմանից 2)-րդ պայմանը՝ չի հետևում։

Սակայն չպետք է կարծել, որ կրկնապատիկ սահմանի գոյությունն անհրաժեշտ է հաջորդական սահմանների հավասարության համար. Նախորդ n°-ի 3) օրինակում երկու հաջորդական սահմաններն էլ գոյություն ունեն և հավասար են զրոյի, թեպետև կրկնապատիկ սահման չկա։

§ 2. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

132. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների անընդհատությունը և խզումները։ *Դիցուք* $f(x_1, \ldots, x_m)$ *ֆունկցիան որոշված է* *m-չափանի տարածության կետերի մի որոշ **M** բազմությունում և $M'(x_1', \ldots, x_m')$-ը այդ բազմության խտացման կետ է, որը պատկանում է այդ բազմությանը։*

Ասում են, որ $f(x_1, \ldots, x_m)$ ֆունկցիան **ա ն ը ն դ հ ա տ** է $M'(x_1', \ldots, x_m')$ կետում, եթե տեղի ունի

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ \cdots\cdots \\ x_m \to x_m'}} f(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1', \ldots, x_m') \tag{1}$$

հավասարությունը. հակառակ դեպքում *ասում են, որ* ֆունկցիան M' կետում **խ զ վ ու մ** է։

Ֆունկցիայի անընդհատությունը** M' **կետում** «$\varepsilon - \delta$ **լեզվով» կարտահայտվի այսպես [**129**]՝ նախապես տրված ամեն մի $\varepsilon > 0$ թվի համար պետք է գտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ՝

$$|f(x_1, \ldots, x_m) - f(x_1', \ldots, x_m')| < \varepsilon, \tag{2}$$

հենց որ՝

$$|x_1 - x_1'| < \delta, \ \ldots, \ |x_m - x_m'| < \delta. \tag{3}$$

այլ կերպ ասած՝ $\varepsilon > 0$ թվի համար պետք է գտնվի այնպիսի $r > 0$ թիվ, որ՝

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon,$$

հենց որ այդ կետերի հեռավորությունը՝

$$\overline{MM'} < r.$$

Ընդ որում ենթադրվում է, որ $M(x_1, \ldots, x_m)$ *կետը պատկանում է **M** բազմությանը, և մասնավորապես կարող է նաև համընկնել* M'*-ի հետ։ Այն սովորական պահանջը, որը* M*-ը պետք է լինի* M'*-ից տարբեր, այստեղ դառնում է ավելորդ, հենց այն պատճառով, որ ֆունկցիայի սահմանն* M' *կետում նույնաբար հավասար է այդ կետում ֆունկցիայի ունեցած արժեքին։*

$x_1 - x_1', \ldots, x_m - x_m'$ *տարբերությունները դիտարկելով որպես անկախ փոփոխականների* $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$ ***աճեր**, իսկ*

$$f(x_1, \ldots, x_m) - f(x_1', \ldots, x_m')$$

տարբերությունը՝ որպես ֆունկցիայի աճ, կարելի է ասել (ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում), որ ֆունկցիան ա ն ը ն դճառ է, երբ անկախ փոփոխականների անվերջ փոքր աճերին համապատասխանում է ֆունկցիայի անվերջ փոքր աճ:

Ֆունկցիայի վերևում սահմանված անընդհատությունն M′ կետում՝ անընդհատություն է, այսպես ասած, $x_1, \ldots, x_m$ *փոփոխականների ողջ համախմբությամբ: Եթե այդ տեղի ունի, ապա միաժամանակ տեղի կունենան նաև՝*

$$\lim_{x_1 \to x'_1} f(x_1, x'_2, \ldots, x'_m) = f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m),$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x'_1 \\ x_2 \to x'_2}} f(x_1, x_2, x'_3, \ldots, x'_m) = f(x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_m)$$

և այլն, որովհետև այստեղ մենք իրականացնում ենք միայն M-ը M′-ին մոտեցնելու մասնակի օրենքներ: Այլ խոսքով, պարզվում է, որ ֆունկցիան անընդհատ է ըստ յուրաքանչյուր x_i *փոփոխականի առանձին վերցրած, ըստ փոփոխականների յուրաքանչյուր* x_i, x_j *զույգի և այլն:*

Անընդհատ ֆունկցիաների օրինակների մենք արդեն հանդիպել ենք: Այսպես, 130-ի 1)-ինում ապացուցեցինք m *արգումենտների ամբողջ և կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաների անընդհատությունը ողջ* m*-չափանի տարածության մեջ (կոտորակային ֆունկցիայի համար՝ բացառությամբ այն կետերի, որոնք նրա հայտարարը դարձնում են զրո): Նույն տեղում, 2)-ում, ապացուցեցինք* x^y *աստիճանացուցչային ֆունկցիայի անընդհատությունն աջ կիսահարթության բոլոր կետերի համար* ($x > 0$):

Եթե նորից դիտարկենք

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 > 0)$$

ֆունկցիան, որն այդ բանաձևով որոշված է ամբողջ հարթության վրա, բացի սկզբնակետից, և լրացուցիչ ընդունենք, որ $f(0,0)=0$, *ապա կստանանք խզման օրինակ: Այդ խզումը տեղի ունի հենց սկզբնակետում, որովհետև* [n° **130**)] *երբ* $x \to 0$, $y \to 0$, *ֆունկցիայի համար սահման գոյություն չունի:*

Այստեղ մենք հանդիպում ենք մի այսպիսի հետաքրքիր հանգամանքի: Դիտարկվող $f(x, y)$ *ֆունկցիան, չնայած (0,0) կետում անընդհատ չէ երկու փոփոխականների նկատմամբ միասին վերցրած, այնուամենայնիվ նա այդ կետում անընդհատ է ինչպես ըստ* x*-ի, այնպես և ըստ* y*-ի առանձին-առանձին վերցրած. այդ հետևում է նրանից, որ* $f(x,0) = f(0,y) = 0$: *Ի միջի այլոց, այս ասածը կդադարի տարօրինակ թվալ, եթե ի նկատի ունենանք, որ ըստ* x*-ի և ըստ* y*-ի առանձին-առանձին անընդհատ լինելու մասին խոսելիս, մենք հաշվի ենք առնում միայն* x*-երի և* y*-ների առանցքներով (0,0) կետին մոտենալը, մի կողմ թողնելով մոտեցման անթիվ բազմությամբ այլ եղանակները:*

Դիտողություն: Կոշին «Հանրահաշվական անալիզում» փորձել է ապա-

ցուցել, որ մի քանի փոփոխականների այնպիսի ֆունկցիան, որն ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի անընդհատ է, անընդհատ կլինի նաև ըստ նրանց համախմբության։ Նախորդ օրինակը հենց ծառայում է որպես այդպիսի պնդման հերքում։

Եթե $f(M)$ *ֆունկցիայի համար* M*-ը* M'*-ին ձգտելիս բոլորովին գոյություն չունի*

$$\lim_{M \to M'} f(M)$$

որոշակի վերջավոր սահման, ապա ասում են, որ M' *կետում ֆունկցիան ունի խզում, նույնիսկ այն դեպքում, երբ* M' *կետում ֆունկցիան որոշված չէ։*

133. Գործողություններ անընդհատ ֆունկցիաների հետ: *Հեշտությամբ կարելի է ձևակերպել ու ապացուցել թեորեմա երկու ֆունկցիաների գումարի, տարբերության, արտադրյալի, քանորդի անընդհատության վերաբերյալ [հմմ. n° **62**-ի հետ] այդ թողնում ենք ընթերցողին։*

*Մենք կանգ կառնենք անընդհատ ֆունկցիաների սուպերպոզիցիային վերաբերող թեորեմայի վրա միայն։ Ինչպես և n° **128**-ում, մենք կենթադրենք, որ* m*-չափանի* $M(x_1, \ldots, x_m)$ *կետերի* $\mathbf{M}$ *բազմության մեջ տրված* $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ *ֆունկցիայից բացի, մեզ տրված են նաև* k*-չափանի* $P(t_1, \ldots, t_k)$ *կետերի մի որոշ* $\mathbf{P}$ *բազմությունում որոշված* m *հատ ֆունկցիաներ՝*

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ \ldots, \ x_m = \varphi_m(t_1, \ldots, t_k), \tag{4}$$

ընդ որում (4) կոորդինատներով որոշվող M *կետը վերոհիշյալ* $\mathbf{M}$ *բազմության սահմաններից դուրս չի գալիս։*

Թեորեմա: Եթե բոլոր $\varphi_i(P)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $\mathbf{P}$-ին պատկանող $P'(t'_1, \ldots, t'_k)$ կետում, իսկ $f(M)$ ֆունկցիան անընդհատ է համապատասխան $M'(x'_1, \ldots, x'_m)$ կետում, որի կոորդինատներն են՝

$$x'_1 = \varphi_1(t'_1, \ldots, t'_k), \ \ldots, \ x'_m = \varphi_m(t'_1, \ldots, t'_k),$$

ապա՝

$$u = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, \ldots, t_k)) =$$
$$= f(\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P))$$

բարդ ֆունկցիան ևս կլինի անընդհատ P' կետում:

Իրոք, նախ $\varepsilon > 0$ *թվով կորոշվի այնպիսի* $\delta > 0$ *թիվ, որ (3)-ից կհետևի (2)-ը (*f *ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ)։ Ապա* δ

թիվ (*$\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ֆունկցիաների անընդհատության շնորհիվ) կգտնվի այնպիսի $\eta>0$ թիվ, որ*

$$|t_1-t_1'|<\eta, \ \ldots, \ |t_k-t_k'|<\eta \tag{5}$$

անհավասարություններից կհետևեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$|x_1-x_1'|=|\varphi_1(t_1, \ldots, t_k)-\varphi_1(t_1', \ldots, t_k')|<\delta,$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|x_m-x_m'|=|\varphi_m(t_1, \ldots, t_k)-\varphi_m(t_1', \ldots, t_k')|<\varepsilon$$

Բայց այդ դեպքում, (5)-րդ անհավասարությունների առկայության դեպքում, նաև տեղի կունենա՝

$$\begin{aligned}|f(x_1, \ldots, x_m)-f(x_1', \ldots, x_m')|&=\\=|f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, \varphi_m(t_1, \ldots, t_k))&-\\-f(\varphi_1(t_1', \ldots, t_k'), \ldots, \varphi_m(t_1', \ldots, t_k'))|&<\varepsilon,\end{aligned}$$

որը և ապացուցում է մեր թեորեման։

134. Ֆունկցիայի զրո դառնալու վերաբերյալ թեորեման: *Այժմ զբաղվենք մի քանի փոփոխականների այնպիսի ֆունկցիաների հատկությունների ուսումնասիրությամբ, որոնք անընդհատ են m-չափանի տարածության մի որոշ D տիրույթի* բոլոր կետերում (կամ, ավելի կարճ՝ D տիրույթում)։ Այդ հատկությունները լիովին նման են մեկ փոփոխականի՝ միջակայքում անընդհատ ֆունկցիաների հատկություններին (գլ. IV, § 2)։*

Շարադրելիս, լոկ կարճության համար, կսահմանափակվենք երկու անկախ փոփոխականների դեպքով։ Ընդհանուր դեպքի վրա տարածելը կատարվում է անմիջականորեն և առանձին դժվարություն չի ներկայացնում։ Ի միջի այլոց, այդ առթիվ որոշ դիտողություններ կարվեն զուգընթացաբար։

*Բոլցանո-Կոշիի առաջին թեորեմային (n° **68**) համանման թեորեման ձևակերպելու համար մեզ անհրաժեշտ է ծանոթանալ կապակցված տիրույթի գաղափարին. այդպես է կոչվում այնպիսի տիրույթը, որի ցանկացած երկու կետերը կարելի է միացնել իր բոլոր կետերով այդ տիրույթում գտնվող բեկյալով (n° 125)։*

* *Տիրույթը հասկանալով n° **127**-ի իմաստով։*

Թեորեմա։ Դիցուք f(x, y) ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է D կապակցված տիրույթում։ Երբ այդ տիրույթի $M'(x', y')$ և $M''(x'', y'')$ երկու կետերում ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշաններով արժեքներ՝

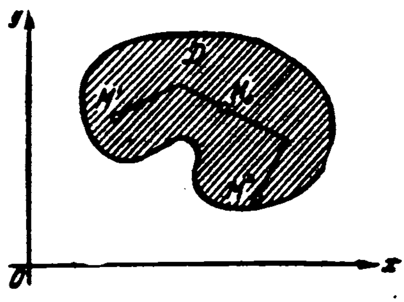
$$f(x', y') < 0, \quad f(x'', y'') > 0,$$

ապա այդ տիրույթում կգտնվի նաև այնպիսի $M_0(x_0, y_0)$ կետ, որտեղ ֆունկցիան դառնում է զրո՝

$$f(x_0, y_0) = 0։$$

Ապացուցումը կառուցենք մեկ անկախ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքին հանգեցնելով։

D տիրույթի կապակցված լինելու շնորհիվ, M′ և M″ կետերը կարելի է միացնել այնպիսի բեկյալով, որն ամբողջությամբ գտնվում է D-ում (գծ. 57)։ Եթե այդ բեկյալի գագաթներից որևէ մեկում f(x, y) ֆունկցիան հավասարվում է զրոյի, թեորեմայի պնդումն արդարացված է։ Հակառակ դեպքում, բեկյալի կողմերը հերթով մեկ առ մեկ ստուգելով, մենք կհանդիպենք այնպիսի ուղղագիծ հատվածի, որի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է հակառակ նշաններով արժեքներ։ Այսպիսով, կարելի էր, ընդհանրությունը չնվազեցնելով, սկզբից և եթ համարել, որ հենց M′M″ ուղղագիծ հատվածը, որն ունի



Գծ. 57.

$$x = x' + t(x'' - x')$$
$$y = y' + t(y'' - y'), \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

հավասարումները, իր բոլոր կետերով պատկանում է D տիրույթին։ Երբ M(x, y) կետը տեղափոխվում է այդ հատվածի վրա, մեր f(x, y) սկզբնական ֆունկցիան դառնում է մեկ փոփոխականի՝ t-ի բարդ ֆունկցիա՝

$$F(t) = f(x' + t(x'' - x'),\ y' + t(y'' - y')),$$

որն, ակներևորեն, անընդհատ ֆունկցիա է նախորդ n°-ի թեորեմայի համաձայն։ Սակայն, այդ F(t) ֆունկցիայի համար ունենք՝

$$F(0) = f(x', y') < 0, \quad F(1) = f(x'', y'') > 0։$$

$F(t)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառելով n° **68**-ում ապացուցված թեորեման, կարող ենք պնդել, որ 0-ի և 1-ի միջև գտնվող մի որոշ t_0-ի դեպքում $F(t_0)=0$: Հիշելով $F(t)$ ֆունկցիայի սահմանումը, այդպիսով ստանում ենք, որ

$$f(x_0, y_0)=0,$$

որտեղ՝

$$x_0=x'+t_0(x''-x'), \quad y_0=y'+t_0(y''-y'):$$

$M_0(x_0, y_0)$ կետը հենց որոնելի կետն է:

Այստեղից բխում է նաև Բոլցանոյի-Կոշիի երկրորդ թեորեմային համանման թեորեման, (որն, ի միջի այլոց, կարող էր ստացվել նաև միանգամից):

Ընթերցողը տեսնում է, որ m-չափանի տարածության անցնելը ($m>2$ դեպքում) ոչ մի դժվարություն չի առաջացնում, որովհետև m-չափանի կապակցված տիրույթում նույնպես կարելի է կետերը միացնել բեկյալով և հարցը կհանգեցվի, ինչպես հենց նոր արվեց, մեկ փոփոխականից կախված ֆունկցիայի դիտարկմանը:

135. Բոլցանոյի-Վայերշտրասի լեմման: Հետագա շարադրանքի համար մեզ պետք է գալու n° **51**-ի լեմմայի ընդհանրացումը ցանկացած թվով չափում ունեցող տարածության մեջ կետերի հաջորդականության դեպքում: Դիտարկենք այդ տարածությունում կետերի M բազմության անվանել սահմանափակ, եթե այդ բազմությունը պարփակված է մի որոշ զուգահեռանիստի մեջ: Ինչպես միշտ, կանգ առնենք միայն «հարթ» դեպքի վրա:

Կետերի ցանկացած

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \dots,\ M_n(x_n, y_n),\ \dots$$

սահմանափակ հաջորդականությունից միշտ կարելի է առանձնացնել այնպիսի մասնակի հաջորդականություն՝

$$M_{n_1}(x_{n_1}, y_{n_1}),\ M_{n_2}(x_{n_2}, y_{n_2}),\ \dots,\ M_{n_k}, (x_{n_k} y_{n_k}),\ \dots$$

$$(n_1<n_2< \dots <n_k< \dots,\ n_k\to+\infty),$$

որը ձգտի սահմանային կետի:

Ապացուցումն ամենից հեշտ կկառուցվի, եթե օգտվենք գծային հաջորդականության համար n° **51**-ում արդեն ապացուցված լեմմայից:

Քանի որ տրված հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա

Նրա բոլոր կետերը գտնվում են մի որոշ [a, b; c, d] ուղղանկյունում, այնպես որ՝

$$a \leqslant x_n \leqslant b, \quad c \leqslant y_n \leqslant d \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,)։$$

n° **51**-ի լեմման նախ կիրառելով $\{x_n\}$ հաջորդականության նկատմամբ, կառանձնացնենք մի $\{x_{n_k}\}$ մասնակի հաջորդականություն, որը ձգտում է մի որոշակի $\bar{x}$ սահմանի։ Այդպիսով, կետերի

$$(x_{n_1},\ y_{n_1}),\ (x_{n_2},\ y_{n_2}),\ \ldots,(x_{n_k}, y_{n_k}),\ \ldots,$$

մասնակի հաջորդականության համար առաջին կոորդինատներն արդեն ունեն սահման։ Հիշատակված լեմման երկրորդ անգամ կիրառենք երկրորդ կոորդինատների $\{y_{n_k}\}$ հաջորդականության նկատմամբ և նրանից առանձնացնենք այնպիսի $\{y_{n_{k_i}}\}$ մասնակի հաջորդականություն, որը նույնպես կձգտի որոշակի $\bar{y}$ սահմանի։ Այդ դեպքում, ակներևաբար,

$$(x_{n_{k_1}},\ y_{n_{k_1}}),\ (x_{n_{k_2}},\ y_{n_{k_2}}),\ \ldots,\ (x_{n_{k_i}},\ y_{n_{k_i}}),\ \ldots$$

կետերի մասնակի հաջորդականությունը կձգտի $(\bar{x},\ \bar{y})$ սահմանային կետին։

Այստեղ ևս արված դատողությունները հեշտությամբ տարածվում են m-չափանի $(m>2)$ տարածության դեպքի վրա. միայն մասնակի հաջորդականությունների առանձնացումը պետք է կրկնել ոչ թե երկու անգամ, այլ m անգամ։

136. Ֆունկցիայի սահմանափակ լինելու վերաբերյալ թեորեմներ։ Վերևում ապացուցված լեմմայի օգնությամբ ամենից առաջ կարելի է ապացուցել Վայերշտրասի 1-ին թեորեմը երկու փոփոխականների ֆունկցիայի համար։

Թեորեմ։ Եթե $f(x,\ y)$ ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ է D սահմանափակ փակ տիրույթում*, ապա նա սահմանափակ է ինչպես վերևից, այնպես էլ ներքևից, այսինքն՝ նրա բոլոր արժեքները գտնվում են երկու վերջավոր եզրերի միջև՝

$$m \leqslant f(x,\ y) \leqslant M։$$

Ապացույցը (հակասող ընդունելությամբ) միանգամայն նման է n° 72-ում արված դատողությանը։ Դիցուք $f(x,\ y)$ ֆունկցիան, երբ $(x,\ y)$-ը փոփոխվում է D-ում, անսահմանափակ է, ասենք թե,

* Որն այս անգամ կարող է և կապակցված չլինել։

վերևից։ Այդ ժամանակ ցանկացած n*-ի համար* D*-ում կգտնվեր այնպիսի* $M_n(x_n, y_n)$ *կետ, որ*

$$f(x_n, y_n) > n։ \qquad (6)$$

Ըստ n° **135**-*ի լեմմայի,* $\{M_n\}$ *սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի է ընտրել այնպիսի* $\{M_{n_k}\}$ *մասնակի հաջորդականություն, որը զուգամիտում* $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$ *սահմանային կետի։*

Նկատենք, որ այդ $\overline{M}$ *կետը անպայման կպատկանի* D *տիրույթին։ Իրոք, հակառակ դեպքում* M_{n_k} *կետերը բոլորը նրանից տարբեր կլինեին, և* $\overline{M}$ *կետը կլիներ* D *տիրույթի խտացման կետ, որը նրան չէր պատկանի, իսկ վերջինս հնարավոր չէ* D *տիրույթի փակ լինելու պատճառով [տես* **127**]*։*

$\overline{M}$ *կետում ֆունկցիայի անընդհատության հետևանքով պետք է տեղի ունենա հետևյալը՝*

$$f(M_{n_k}) = f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\overline{M}) = f(\overline{x}, \overline{y}),$$

իսկ այս հակասում է (6) անհավասարություններին։

Վայերշտրասի 2-րդ թեորեման ձևակերպվում և ապացուցվում է (օգտվելով նախորդ թեորեմայից) ճիշտ այնպես, ինչպես n° **73**-*ում։*

Նկատենք որ, դատողությունների մեջ առանց էական փոփոխությունների, Վայերշտրասի երկու թեորեմաներն էլ փոխանցվում են այն դեպքի վրա, երբ ֆունկցիան անընդհատ է ցանկացած սահմանափակ փակ **M** *բազմությունում (թեկուզ և նա իրենից տիրույթ չներկայացնող)։*

Այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, $f(x, y)$ *ֆունկցիայի համար, որը որոշված է ու սահմանափակ* **M** *բազմությունում,* **M**-*ում ֆունկցիայի արժեքների վերին ու ստորին ճշգրիտ եզրերի տարբերությունը կոչվում է նրա տատանում այդ բազմությունում։ Եթե* **M**-*ը սահմանափակ է և փակ (մասնավորապես եթե* **M**-*ը սահմանափակ փակ տիրույթ է), և* f *ֆունկցիան այնտեղ անընդհատ է, ապա տատանումը պարզապես նրա մեծագույն ու փոքրագույն արժեքների տարբերությունն է։*

137. Հավասարաչափ անընդհատությունը: *Մենք գիտենք, որ* $f(x, y)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունը նրա որոշման* **M** *բազմու-*

թյան որոշակի (x_0, y_0) կետում «$\varepsilon-\delta$ լեզվով» արտահայտվում է այսպես. ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար պետք է գտնվի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որ

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$$

անհավասարությունը տեղի ունենա M-ից վերցրած ամեն մի (x, y) կետում, հենց որ

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta։$$

Դիցուք այժմ $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է ողջ M բազմությունում. այդ ժամանակ հարց է ծագում, թե արդյոք կարելի՞ է տրված $\varepsilon>0$ թվի համար գտնել այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որը պիտանի լինի, վերոհիշյալ իմաստով, M-ի բոլոր (x_0, y_0) կետերի համար միաժամանակ։ Եթե այդ հնարավոր է (ցանկացած ε-ի համար), ապա ասում են, որ ֆունկցիան M-ում հավասարաչափ անընդհատ է։

Կանտորի թեորեման։ Եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է D սահմանափակ փակ տիրույթում, ապա նա կլինի նաև հավասարաչափ անընդհատ D-ում։

Ապացույցը կատարենք հակասող ընդունելությամբ։ Ենթադրենք, թե որևէ $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն չունի այնպիսի $\delta>0$ թիվ, որը միաժամանակ պիտանի լիներ D տիրույթի բոլոր (x_0, y_0) կետերի համար։

Վերցնենք 0-ի ձգտող դրական թվերի մի հաջորդականություն՝

$$\delta_1>\delta_2>\ldots>\delta_n>\ldots>0, \quad \delta_n\to 0։$$

Քանի որ δ_n թվերից ոչ մեկը միաժամանակ չի կարող պիտանի լինել, վերոհիշյալ իմաստով, D տիրույթի բոլոր (x_0, y_0) կետերի համար, ուստի յուրաքանչյուր δ_n-ի համար D-ում կգտնվի այնպիսի մի կոնկրետ (x_n, y_n) կետ, որի համար δ_n-ը պիտանի չէ։ Դա նշանակում է, որ D-ում գոյություն ունի այնպիսի (x_n', y_n') կետ, որի համար, չնայած

$$|x_n'-x_n|<\delta_n, \quad |y_n'-y_n|<\delta_n,$$

բայց այնուամենայնիվ՝

$$|f(x_n', y_n')-f(x_n, y_n)|\geqslant\varepsilon։ \tag{7}$$

Կետերի $\{(x_n, y_n)\}$ սահմանափակ հաջորդականությունից Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, անջատենք այնպիսի

$\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ *մասնակի հաջորդականություն, որ* $x_{n_k} \to \bar{x}$, $y_{n_k} \to \bar{y}$, *ընդ որում* $(\bar{x}, \bar{y})$ *սահմանային կետը անպայման կպատկանի* D *տիրույթին (նրա փակ լինելու շնորհիվ)։*

Այնուհետև, քանի որ՝

$$|x'_{n_k} - x_{n_k}| < \delta_{n_k}, \quad |y'_{n_k} - y_{n_k}| < \delta_{n_k}$$

և, k-ն մեծանալիս, $n_k \to +\infty$ *և* $\delta_{n_k} \to 0$, *ուստի՝*

$$x'_{n_k} - x_{n_k} \to 0, \qquad y'_{n_k} - y_{n_k} \to 0,$$

այնպես որ, նաև՝

$$x'_{n_k} \to \bar{x}, \quad y'_{n_k} \to \bar{y}\text{։}$$

D *տիրույթին պատկանող* $(\bar{x}, \bar{y})$ *կետում ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, մենք պետք է ունենանք ինչպես՝*

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

նույնպես և՝

$$f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \to f(\bar{x}, \bar{y}),$$

որտեղից կստանանք՝

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x'_{n_k}, y'_{n_k}) \to 0,$$

որը հակասում է (7) անհավասարություններին։ Թեորեման ապացուցված է։

Այստեղից բխող հետևանքը ձևակերպելու համար մեզ պետք է կետային բազմության *տ ր ա մ ա գ ծ ի* *գաղափարը. այդպես է կոչվում բազմության երկու ցանկացած կետերի հեռավորությունների վերին ճշգրիտ եզրը։*

Հետևանք։ Եթե $f(x, y)$ ֆունկցիան անընդհատ է D սահմանափակ փակ տիրույթում, ապա տված $\varepsilon > 0$ թվի համար կարելի է գտնել այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ այդ տիրույթը ինչպիսի մասնակի $D_1, \ldots, D_n$ փակ տիրույթների* էլ բաժանենք, որոնց տրամագծերը

---

* *Այդ մասնակի տիրույթները կարող են ունենալ միայն եզրային ընդհանուր կետեր։*

փոքր են δ-ից, այդ մասերից յուրաքանչյուրում առանձին վերցրած ֆունկցիայի տատանումը փոքր կլինի ε-ից:

Բավական է որպես δ վերցնել այն թիվը, որի մասին խոսվում է հավասարաչափ անընդհատության սահմանման մեջ։ Եթե D_i մասնակի տիրույթի տրամագիծը փոքր է δ-ից, ապա նրա ցանկացած (x, y) և (x_0, y_0) երկու կետերի հեռավորությունը փոքր է δ-ից՝ $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$։ Այստեղից առավել ևս՝ $|x-x_0|<\delta$ և $|y-y_0|<\delta$, ուստի $|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$։ Եթե այդ կետերն ընտրենք այնպես, որ $f(x, y)$ և $f(x_0, y_0)$ արժեքները, համապատասխանաբար, լինեն D_i տիրույթում ֆունկցիայի արժեքներից մեծագույնը և փոքրագույնը, ապա կստանանք հենց այն, ինչ պահանջվում էր։

Հեշտ է տեսնել, որ ապացուցված թեորեման առանց փոփոխության փոխանցվում է (Վայերշտրասի թեորեմայի նման) այն դեպքի վրա, երբ ֆունկցիան անընդհատ է ցանկացած M սահմանափակ փակ բազմության։

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑՈՒՄԸ

§ 1. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՆ ՈՒ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐԸ

138. Մասնակի ածանցյալներ: *Շարադրանքի և գրության պարզեցման համար մենք սահմանափակվում ենք այն դեպքով, երբ ֆունկցիան կախված է երեք փոփոխականներից. սակայն բոլորն իրավացի են նաև ցանկացած թվով փոփոխականներից կախված ֆունկցիաների համար:*

Դիցուք մի D (բաց) տիրույթում ունենք $u = f(x, y, z)$ *ֆունկցիա: Այդ տիրույթում վերցնենք* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *կետը: Եթե մենք* y *և* z *փոփոխականներին վերագրենք* y_0 *և* z_0 *հաստատուն արժեքներ և* x*-ը փոփոխենք, ապա* u*-ն կլինի մեկ՝* x *փոփոխականի ֆունկցիա* x_0*-ի շրջակայքում կարելի է դնել* $x = x_0$ *կետում նրա ածանցյալը գտնելու հարցը: Այդ* x_0 *արժեքին ավելացնենք* Δx *աճ. այդ ժամանակ ֆունկցիան կստանա*

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$$

աճը, որը կարելի էր անվանել նրա մասնակի աճ (ըստ x*-ի), այնքանով, որքանով այդ աճն ավելացել է միայն մեկ փոփոխականի արժեքի փոփոխման հետևանքով: Ածանցյալի սահմանման համաձայն, նա իրենից ներկայացնում է հետևյալ սահմանը՝*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$

Այս ածանցյալը կոչվում է $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի **մասնակի ածանցյալ ըստ** x**-ի** (x_0, y_0, z_0) **կետում:**

Ինչպես տեսնում ենք, այս սահմանման մեջ ոչ բոլոր կոորդինատներն են իրավահավասար, որովհետև y_0-ն և z_0-ն հաստատուն են, իսկ x-ը փոփոխվում է, ձգտելով x_0-ի։

Մասնակի ածանցյալները նշանակում են հետևյալ պայմանանշաններից մեկով՝

$$\frac{\partial u}{\partial x}\quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}^{*},\ u'_x,\ f'_x(x_0, y_0, z_0),\ D_x u,\ D_x f(x_0, y_0, z_0)$$

Նկատենք, որ այս նշանակումների մեջ ներքևում գրված x տառը միայն ցույց է տալիս, թե ածանցյալը ըստ ո՞ր փոփոխականի է վերցվում, և կապված չէ այն բանի հետ, թե ո՞ր (x_0, y_0, z_0) կետում ենք մենք հաշվում ածանցյալը**։

Նման ձևով, ընդունելով x-ը և z-ը հաստատուն, իսկ y-ը՝ փոփոխական, կարելի է դիտարկել հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y},$$

Այդ սահմանը կոչվում է $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ ըստ y-ի (x_0, y_0, z_0) կետում և նշանակվում է նախորդին նման պայմանանշաններով՝

$$\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y},\ u'_y,\ f'_y(x_0, y_0, z_0),\ D_y u,\ D_y f(x_0, y_0, z_0)$$

Ճիշտ այդպես էլ որոշվում է նաև $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալն ըստ z-ի (x_0, y_0, z_0) կետում։

Մասնակի ածանցյալի հաշվումն ինքը, համեմատած սովորական ածանցյալի հաշվման հետ, ըստ էության ոչ մի նոր բան չի ներկայացնում։

* Սովորաբար օգտվում են կլոր ∂-ից (ուղիղ d-ի փոխարեն) հենց մասնակի ածանցյալը նշանակելիս։

** Այստեղ ևս

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad f'_x,\ D_x f$$

ամբողջական սիմվոլները կարելի է դիտել որպես ըստ x-ի վերցրած մասնակի ածանցյալի ֆունկցիոնալ նշանակումներ։ Նման ծանոթություններ հետագայում այլևս չենք կրկնելու։

Օրինակներ: 1) *Դիցուք* $u = x^y$ $(x > 0)$: *Այս ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները կլինեն՝*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \cdot \ln x,$$

որոնցից առաջինը հաշվվում է որպես x-*ի աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալ* (*երբ* $y = \mathrm{const}$), *իսկ երկրորդը՝ որպես* y-*ի ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալ* (*երբ* $x = \mathrm{const}$):

2) *Եթե* $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, *ապա*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

3) $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ *ֆունկցիայի համար ունենք՝*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

Նկատենք, որ մասնակի ածանցյալների համար ընդունված նշանակումները (կլոր ∂-*ով) պետք է հասկանալ միայն որպես ամբողջական նշաններ, և ոչ որպես քանորդներ կամ կոտորակներ:*

139. Ֆունկցիայի լրիվ աճը: *Եթե, ելնելով անկախ փոփոխականների* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ *արժեքներից, այդ բոլոր երեքին էլ տանք* Δx, Δy, Δz *աճեր, ապա* $u = f(x, y, z)$ *ֆունկցիան կստանա հետևյալ աճը՝*

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

որը կոչվում է ֆունկցիայի լրիվ աճ:

$y = f(x)$ *մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, ենթադրելով, որ* x_0 *կետում ֆունկցիայի համար գոյություն ունի* $f'(x_0)$ (*վերջավոր*) *ածանցյալ, ֆունկցիայի աճի համար տեղի ունի այսպիսի բանաձև* [*82, (2)*]՝

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

որտեղ α-*ն կախված է* Δx-*ից և* $\alpha \to 0$, *երբ* $\Delta x \to 0$:

Մենք ցանկանում ենք այդ բանաձևի նման բանաձև ստանալ $u = f(x, y, z)$ *ֆունկցիայի աճի համար, այն է՝*

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x +$$

$$+ f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \Delta z, \qquad (1)$$

որտեղ α, β, γ *մեծությունները կախված են* Δx, Δy, Δz *աճերից և դրանց հետ միասին ձգտում են զրոյի։ Սակայն այս անգամ հարկ կլինի ֆունկցիան ենթարկել ավելի խիստ սահմանափակումների։*

1.° Երբ $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն ոչ միայն $(x_0\ y_0\ z_0)$ կետում, այլև նրա մի որոշ շրջակայքում, և, բացի այդ, դրանք այդ կետում անընդհատ են (որպես x, y, z փոփոխականների ֆունկցիաներ), ապա տեղի ունի (1) բանաձևը:

Ապացուցելու համար ֆունկցիայի Δu *լրիվ աճը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝*

$$\Delta u = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)] +$$

$$+ [f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z)] +$$

$$+ [f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)]։$$

Այս տարբերություններից յուրաքանչյուրն իրենից ներկայացնում է ֆունկցիայի մասնակի աճ միայն մեկ փոփոխականի նկատմամբ։ Քանի որ մենք ենթադրեցինք, որ (x_0, y_0, z_0) *կետի շրջակայքում մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն, ուստի, բավականաչափ փոքր* Δx, Δy, Δz *աճերի դեպքում, այդ տարբերությունների նկատմամբ առանձին-առանձին վերցրած կարելի է կիրառել վերջավոր աճերի բանաձևը* [n° *102*].* *մենք կստանանք՝*

$$\Delta u = f'_x(x_0 + \Theta \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \cdot \Delta x +$$

$$+ f'_y(x_0, y_0 + \Theta_1 \Delta y, z_0 + \Delta z) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0 + \Theta_2 \Delta z) \cdot \Delta z,$$

Եթե այստեղ ընդունենք՝

$$f'_x(x_0 + \Theta \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = f'_x(x_0, y_0, z_0) + \alpha,$$

$$f'_y(x_0, y_0 + \Theta_1 \Delta y, z_0 + \Delta z) = f'_y(x_0, y_0, z_0) + \beta,$$

$$f'_z(x_0, y_0, z_0 + \Theta_2 \Delta z) = f'_z(x_0, y_0, z_0) + \gamma,$$

* *Եթե վերցնենք, օրինակ, առաջին տարբերությունը, ապա այն կարելի է դիտարկել որպես մեկ փոփոխականից կախված* $f(x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ *ֆունկցիայի աճ, որը համապատասխանում է* $x = x_0$ *կետից* $x = x_0 + \Delta x$ *կետն անցնելուն։ Այդ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ* x*-ի, այսինքն՝* $f'_x(x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$*-ը, ըստ ենթադրության, գոյություն ունի* $[x_0, x_0 + \Delta x]$ *միջակայքի բոլոր* x*-ի արժեքների համար, ուստի վերջավոր աճերի բանաձևը կիրառելի է և այլն։*

ապա Δu-*ի համար կստանանք (1) արտահայտությունը։ Երբ* $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, *վերոհիշյալ հավասարումների ձախ մասերում գտնվող արգումենտները կձգտեն* x_0-*ի*, y_0-*ի և* z_0-*ի (որովհետև* Θ, Θ_1, Θ_2 *մեծությունները կանոնավոր կոտորակներ են), հետևապես, իրենք՝ ածանցյալները ևս կձգտեն աջ մասերում գրված ածանցյալներին, իսկ* α, β, γ *մեծությունները՝ զրոյի, որովհետև, ըստ արված ենթադրության, փոփոխականների այդ արժեքների համար մասնակի ածանցյալներն անընդհատ են։ Այսպիսով, թեորեման ապացուցված է։*

Ապացուցած թեորեման, ի միջի այլոց, հնարավորություն է տալիս հաստատել, որ

2°. տված կետում մասնակի ածանցյալների գոյությունից և անընդհատությունից բխում է ֆունկցիայի իր անընդհատությունն այդ կետում:

Իրոք, եթե $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, *ապա, ակներևաբար, նաև* $\Delta u \to 0$։

Որպեսզի (1) բանաձևը գրենք ավելի սեղմ ձևով, մուծենք

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

արտահայտությունը, որը

$$(x_0, y_0, z_0) \text{ և } (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$$

կետերի հեռավորությունն է։

Դրանից օգտվելով, կարող ենք գրել՝

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta x = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho} + \gamma \cdot \frac{\Delta z}{\rho}\right) \cdot \rho։$$

Փակագծերի մեջ եղած արտահայտությունը նշանակելով ε-*ով, կունենանք՝*

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z = \varepsilon \cdot \rho,$$

որտեղ ε-*ը կախված է* Δx, Δy, Δz *աճերից և ձգտում է զրոյի, երբ այդ աճերը ձգտում են զրոյի, կամ, ավելի կարճ, երբ* $\rho \to 0$։ *Ուրեմն, (1) բանաձևն այժմ կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y +$$

$$+ f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \varepsilon \cdot \rho, \qquad (2)$$

որտեղ $\varepsilon \to 0$, *երբ* $\rho \to 0$: *Այնուհետև,* $\varepsilon \cdot \rho$ *մեծությունը կարելի է գրել որպես* $o(\rho)$ *(տես* n° *54-ում կատարված նշանակումները տարածենք նաև մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքի վրա):*

Նկատենք, որ մեր դատողությունների մեջ ձևականորեն չէր բացառված այն դեպքը, երբ Δx, Δy, Δz *աճերն առանձին-առանձին կամ նույնիսկ բոլորը միաժամանակ հավասար են զրոյի: Այսպիսով, խոսելով*

$$\alpha \to 0,\quad \beta \to 0,\quad \gamma \to 0,\quad \varepsilon \to 0$$

սահմանային առնչությունների մասին, երբ $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$, *մենք դրանք հասկանում ենք լայն իմաստով և այդ աճերի համար նրանց փոփոխման ընթացքում զրո դառնալու հնարավորությունը չենք բացառում: (Համեմատել* n° *82-ում արված համանման դիտողության հետ:)*

Նախորդ թեորեման ապացուցելիս մենք մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայից ավելի շատ բան պահանջեցինք, քան այն դեպքում, երբ ֆունկցիան կախված էր մեկ փոփոխականից: Ցույց տալու համար, որ այդ պահանջները չբավարարվելու դեպքում (1) կամ (2) բանաձևը այստեղ կ ա ր ո ղ էր և կիրառելի չլինել, վերջում դիտարկենք հետևյալ օ ր ի ն ա կ ը (որտեղ պարզության համար գործ ունենք միայն երկու փոփոխականների հետ):

$f(x, y)$ *ֆունկցիան որոշենք հետևյալ հավասարություններով՝*

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (\text{եթե } x^2 + y^2 > 0), \quad f(0, 0) = 0:$$

Այս ֆունկցիան անընդհատ է ողջ հարթության վրա. (0, 0) կետի համար այդ հետևում է 130 (4)-ից: Այնուհետև, ըստ x*-ի և ըստ* y*-ի մասնակի ածանցյալները նույնպես գոյություն ունեն ողջ հարթության վրա: Երբ* $x^2 + y^2 > 0$, *ակներևաբար՝*

$$f'_x(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad f'_y(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}:$$

Իսկ սկզբնակետում ունենք՝ $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. *այս անմիջապես հետևում է, հենց մասնակի ածանցյալների սահմանման համաձայն, նրանից, որ* $f(x, 0) = f(0, y) = 0$: *Հեշտ է ցույց տալ, որ* (0, 0) *կետում ածանցյալների անընդհատությունը խախտվում է (դրանցից առաջինի համար բավական է, օրինակ, ընդունել* $y = x = \frac{1}{n} \to 0$ *):*

(1) կամ (2) տեսքի բանաձևը (0, 0) կետում մեր ֆունկցիայի համար տեղի չունի: Իրոք, եթե ենթադրենք, որ այն տեղի ունի, ապա կլինեի՝

$$\Delta f(0, 0) = \frac{\Delta x^2 \cdot \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

որտեղ $\varepsilon \to 0$, *երբ* $\Delta x \to 0$ *և* $\Delta y \to 0$: *Մասնավորապես ընդունելով* $\Delta y = \Delta x > 0$, *կունենայինք՝*

$$\frac{1}{2} \Delta x = \varepsilon \cdot \sqrt{2}\, \Delta x, \text{ որտեղից՝ } \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

և ε*-ը չէր ձգտի զրոյի, երբ* $\Delta x \to 0$, *որը հակասում է ենթադրությանը:*

140. Բարդ ֆունկցիաների ածանցյալները: *Որպես ստացված (1) բանաձևի կիրառություն, զբաղվենք բարդ ֆունկցիաների ածանցման հարցով:*

Դիցուք ունենք

$$u = f(x, y, z)$$

ֆունկցիան, որը որոշված է D *տիրույթում, ընդ որում* x, y, z *փոփոխականներից յուրաքանչյուրն իր հերթին հանդիսանում է* t *փոփոխականի ֆունկցիա՝*

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \ z = \chi(t),$$

t*-ի մի որոշ միջակայքում:*

Բացի այդ, դիցուք t*-ն փոփոխվելիս* (x, y, z) *կետը* D *տիրույթի սահմաններից դուրս չի գալիս:*

f *ֆունկցիայի մեջ տեղադրելով* x, y *և* z *փոփոխականների արժեքները, կստանանք*

$$u = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$$

բարդ ֆունկցիա:

Ենթադրենք, թե u*-ն ըստ* x, y *և* z *փոփոխականների ունի* u'_x, u'_y, u'_z *անընդհատ ածանցյալներ և* x'_t, y'_t, z'_t *ածանցյալները գոյություն ունեն: Այդ ժամանակ կարելի է ապացուցել բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի գոյությունը և միաժամանակ հաշվել այն:*

Իրոք, t փոփոխականին տանք մի որոշ Δt աճ, այդ ժամանակ x, y և z փոփոխականները համապատասխանաբար կստանան Δx, Δy և Δz աճեր, իսկ u ֆունկցիան կստանա Δu աճ։

u ֆունկցիայի աճը ներկայացնելով (1) ձևով (այդ մենք անել կարող ենք, որովհետև ենթադրել ենք u'_x, u'_y, u'_z անընդհատ մասնակի ածանցյալների գոյությունը), կստանանք՝

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z,$$

որտեղ $\alpha, \beta, \gamma \to 0$, երբ $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$։ Հավասարության երկու մասերը բաժանելով Δt-ի վրա, կունենանք՝

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + u'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + u'_z \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}\text{։}$$

Δt աճը ձգտեցնենք զրոյի. այդ ժամանակ Δx, Δy, Δz աճերը կձգտեն զրոյի, քանի որ t-ից կախված x, y և z ֆունկցիաներն անընդհատ են (մենք ենթադրեցինք, որ x'_t, y'_t և z'_t ածանցյալները գոյություն ունեն), ուստի α, β և γ մեծությունները նույնպես կձգտեն զրոյի։ Սահմանում կստանանք՝

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t\text{։} \tag{3}$$

Տեսնում ենք, որ վերևում արված ենթադրությունների դեպքում բարդ ֆունկցիայի ածանցյալն իսկապես գոյություն ունի։ Եթե օգտվենք դիֆերենցիալ նշանակումներից, ապա (3) բանաձևը կարելի կլինի գրել այսպես՝

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}\text{։} \tag{4}$$

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ x, y և z փոփոխականները կախված են ոչ թե մեկ t փոփոխականից, այլ մի քանի փոփոխականներից, օրինակ՝

$$x = \varphi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(t, v)\text{։}$$

Բացի $f(x, y, z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների գոյությունից ու անընդհատությունից, մենք այստեղ ենթադրում ենք, որ գոյություն ունեն x, y, z ֆունկցիաների ածանցյալներն ըստ t-ի և ըստ v-ի։

φ, ψ, χ ֆունկցիաներն f ֆունկցիայի մեջ տեղադրելուց հետո մենք կունենանք t և v երկու փոփոխականներից կախված մի որոշ ֆունկցիա, և հարց է առաջանում u'_t և u'_v մասնակի ածանցյալների գոյության և նրանք հաշվելու մասին։ Սակայն այս դեպքը էապես չի տարբերվում արդեն ուսումնասիրված դեպքից, որովհետև երկու փոփոխականների ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալը հաշվելիս մենք փոփոխականներից մեկը պահում ենք հաստատուն, և մեզ համար մնում է միայն մեկ փոփոխականի ֆունկցիա։ Հետևապես, այս դեպքի համար (3) բանաձևը մնում է անփոփոխ, իսկ (4) բանաձևը պետք է գրել այսպես,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}, \qquad (4\,ա)$$

141. Օրինակներ: *1) Դիտարկենք*

$$u = x^y$$

աստիճանա-ցուցչային ֆունկցիան։

Ընդունելով $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ և ածանցելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման հենց նոր արտածված կանոնով, կստանանք Լայբնիցի և Ի. Բեռնուլիի մեջ արդեն հայտնի բանաձևը՝

$$u'_t = y\cdot x^{y-1}\cdot x'_t + x^y\cdot \ln x\cdot y'_t.$$

Առաջ մենք այդ ստացել էինք (այլ նշանակումներով) արհեստական եղանակով [1. 85, (5)]։

(3) բանաձևը նման է $u'_t = u'_x\cdot x'_t$ բանաձևին մեկ (x) փոփոխականի u ֆունկցիայի դեպքի համար։ Սակայն, նորից ընդգծենք այն տարբերությունը, որը գոյություն ունի այդ բանաձևերն ստանալու պայմանների միջև։ Եթե u-ն կախված է մեկ փոփոխականից, ապա բավական է միայն ենթադրել u'_x ածանցյալի գոյությունը. իսկ մի քանի փոփոխականների դեպքում՝ մենք ստիպված եղանք ենթադրել u'_x, u'_y, ... ածանցյալների անընդհատությունը ևս։ Հետևյալ օրինակը ցույց է տալիս, որ այդ ածանցյալների միայն գոյությունը (3) բանաձևի իրավացիության համար ընդհանրապես բավական չէ։

2) Որոշենք $u = f(x, y)$ ֆունկցիան, ընդունելով՝

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \quad (\text{երբ } x^2+y^2>0), \quad f(0.0) = 0.$$

Ինչպես տեսանք, այդ ֆունկցիան բոլոր կետերում, առանց բացառելու նաև (0,0) սկզբնակետը, ունի մասնակի ածանցյալներ, ընդ որում

$$f'_x(0,0) = 0, \quad f'_y(0,0) = 0.$$

նկատենք, որ հենց այդ կետում ածանցյալներն ունեն խզում։

Եթե մտցնենք t նոր փոփոխական, ընդունելով $x = t$ և $y = t$, ապա կստանանք t-ից կախված բարդ ֆունկցիա։ Ըստ (3) բանաձևի, այդ ֆունկցիայի ածանցյալը $t = 0$ դեպքում կլինե՛ր՝

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t = 0.$$

Բայց, մյուս կողմից, եթե x և y փոփոխականների արժեքները տեղադրենք տված $u = f(x, y)$ ֆունկցիայի մեջ, $t \neq 0$ դեպքում կստանանք՝

$$u = \frac{t^2 \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} t.$$

Այս ճիշտ է նաև $t = 0$ դեպքում։

Հիմա անմիջականորեն ածանցելով ըստ t-ի, կունենանք $u'_t = \frac{1}{2}$, t-ի ցանկացած արժեքի դեպքում, ուրեմն նաև $t = 0$ դեպքում։

Պարզվում է, որ տվյալ դեպքում (3) բանաձևը կիրառելի չէ։

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

հավասարումից y-ը որոշվում է որպես x-ի ֆունկցիա՝

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a < x < a),$$

որն ունի հետևյալ ածանցյալը՝

$$y'_x = \mp \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Գտնենք այս ածանցյալը՝ առանց հավասարումը լուծելու y-ի նկատմամբ։

Լուծում։ Եթե պատկերացնենք, որ հիշված ֆունկցիան y-ի փոխարեն տեղադրված է տրված հավասարման մեջ, ապա վերջինը կդառնար նույնաբար (x-ի նկատմամբ)։ Ստացված նույնությունն ածանցելով ըստ x-ի (օգտվելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնից), կգտնենք՝

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot y'_x = 0,$$

որտեղից՝

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

ինչպես և առաջ էինք ստացել։

4) Դիցուք, ընդհանրապես, ունենք y-ի նկատմամբ չլուծված

$$F(x,y)=0$$

հավասարումը (այստեղ F ֆունկցիան իր ածանցյալների հետ միասին անընդհատ է)։ Որոշ պայմանների առկայության դեպքում (տե՛ս երկրորդ հատորի XX գլուխը) կարելի է պնդել, որ այս հավասարումով y փոփոխականը որոշվում է որպես x-ի ֆունկցիա, այն էլ՝ ածանցյալ ունեցող (թեպետև այդ ֆունկցիայի՝ իր անալիտիկ արտահայտությունը կարող ենք և չիմանալ)։ Նման դեպքերում y-ը կոչվում է x-ի անբացահայտ ֆունկցիա։ Գտնել անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալը։

Լուծում։ Ինչպես և մասնավոր օրինակում, պատկերացնենք, թե տրված հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրված է հենց այդ անբացահայտ ֆունկցիան։ Ստացված նույնությունն ածանցելով ըստ x-ի, ստանում ենք՝

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\cdot y'_x=0,$$

որտեղից (անշո՛ւշտ, եթե $F'_y\neq 0$)՝

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\,.$$

142. Լրիվ դիֆերենցիալ։ Մեկ փոփոխականի $y=f(x)$ ֆունկցիայի դեպքում, մենք n° 89-ում դիտարկեցինք ֆունկցիայի $\Delta y=\Delta f(x_0)=$ $=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ աճի՝

$$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\quad(A=\text{const.})$$

տեսքով ներկայացնելիության հարցը։ Պարզվեց [n° **90**], որ այդ տեսքով ներկայացնելու հնարավորության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $x=x_0$ կետում գոյություն ունենա $f'(x_0)$ վերջավոր ածանցյալ, ընդ որում վերոհիշյալ հավասարությունը տեղի ունի հենց $A=f'(x_0)$ դեպքում։

Ֆունկցիայի աճի գծային մասը՝

$$A\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot\Delta x=y'_x\cdot\Delta x$$

մենք անվանեցինք նրա դիֆերենցիալ՝ dy։

Անցնելով մի քանի, օրինակ՝ երեք, փոփոփականների $f(x,y,z)$ ֆունկցիային, որը որոշված է մի (ասենք թե՝ բաց) D տիրույթում, բնական կլինի դնել նման հարց նրա

$$\Delta u=\Delta f(x_0,y_0,z_0)=$$

$$=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)$$

աճի՝

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + C\cdot\Delta z + o(\rho) \qquad (6)$$

տեսքով ներկայացնելիության վերաբերյալ, որտեղ A, B *և* C *մեծությունները հաստատուն են, իսկ* $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$։

Ինչպես և n° **90**-*ում, հեշտ է ցույց տալ, որ եթե տեղի ունի (6) վերլուծությունը, ապա* (x_0, y_0, z_0) *կետում գոյություն ունեն մասնակի ածանցյալներ ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի, ընդ որում՝*

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = B, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = C։$$

Իրոք, (6)-ի մեջ ընդունելով, օրինակ, $\Delta y = \Delta z = 0$ *և* $\Delta x \neq 0$, *կստանանք* [*համեմ.* n° **90**, *(1ա)*]՝

$$\Delta_x f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) =$$
$$= A\cdot\Delta x + o(|\Delta x|),$$

որտեղից և հետևում է, որ գոյություն ունի՝

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A։$$

Այսպիսով, (6) առնչությունը կարող է իրականացվել միայն այսպիսի տեսքով՝

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta x +$$
$$+ f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta z + o(\rho), \qquad (7)$$

կամ, ավելի կարճ ձևով գրված, այսպես՝

$$\Delta u = u'_x\cdot\Delta x + u'_y\cdot\Delta y + u'_z\cdot\Delta z + o(\rho)։ \qquad (7ա)$$

Սակայն, այն ժամանակ, երբ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում $y'_x = f'(x_0)$ *ածանցյալի գոյությունը դիտարկելի կետում նաև բավական էր (5) առնչության առկայության համար, այս դեպքում*

$$u'_x = f'_x(x_0, y_0, z_0), \quad u'_y = f'_y(x_0, y_0, z_0), \quad u'_z = f'_z(x_0, y_0, z_0)$$

մասնակի ածանցյալների գոյությունը դեռևս չի ապահովում (6) վերլուծությունը։ Երկու փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքի համար մենք այդ տեսանք n° *139-ի օրինակով։ Նույն տեղում նշված են (6) առնչությունը տեղի ունենալու բավարար պայմանները. այդ՝ մաս-*

նակի ածանցյալների գոյությունն է (x_0, y_0, z_0) *կետի շրջակայքում և նրանց անընդհատությունն այդ կետում։ Ի միջի այլոց, հեշտ է ցույց տալ, որ այդ պայմանները բոլորովին էլ անհրաժեշտ չեն (7) կամ (7ա) բանաձևերի համար։ Այդ արդեն հետևում է նրանից, որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար (որը, եթե կուզեք, կարելի է դիտել նաև որպես ցանկացած թվով փոփոխականներից կախված ֆունկցիա) նման պայմաններ անհրաժեշտ չեն։*

(7) բանաձևի առկայության դեպքում $f(x, y, z)$ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի (x_0, y_0, z_0) կետում և *(միայն այդ դեպքում)* ֆունկցիայի աճի գծային մասը, այսինքն՝

$$u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z =$$

$$= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z$$

արտահայտությունը, կոչվում է նրա (լրիվ) դիֆերենցիալ *և նշանակվում է* du *կամ* $df(x_0, y_0, z_0)$ *պայմանանշանով։*

Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքում այն պնդումը, թե տված կետում «ֆունկցիան դիֆերենցելի է», ինչպես տեսնում ենք, արդեն համարժեք չէ այն պնդմանը, թե այդ կետում «ֆունկցիան ունի մասնակի ածանցյալներ ըստ բոլոր փոփոխականների», այլ ինչ-որ ավելին է նշանակում։ Ի միջի այլոց, մենք սովորաբար ենթադրելու ենք մասնակի ածանցյալների գոյությունն ու անընդհատությունը, իսկ դա արդեն ծածկում է դիֆերենցելիության պահանջը։

Անկախ փոփոխականների dx, dy, dz *դիֆերենցիալներ ասելով պայմանավորվում ենք հասկանալ* $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ *կամայական աճերը*, ուստի կարելի է գրել՝*

$$df(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot dz$$

կամ՝

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

* *Եթե* x *անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալը նույնացնենք* x, y, z *անկախ փոփոխականներից կախված* x *ֆունկցիայի դիֆերենցիալի հետ, ապա, համաձայն ընդհանուր բանաձևի, կարելի է գրել՝*

$$dx = x'_x \cdot \Delta x + x'_y \cdot \Delta y + x'_z \cdot \Delta z = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + 0 \cdot \Delta z = \Delta x.$$

այդ դեպքում $dx = \Delta x$ *հավասարությունն ապացուցված կլինի։*

143. (Առաջին) դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականությունը (ինվարիանտությունը): *Դիցուք* $u = f(x, y, z)$ *ֆունկցիան ունի* u'_x, u'_y, u'_z *մասնակի անընդհատ ածանցյալներ, ընդ որում* x, y, z *փոփոխականները, իրենց հերթին, հանդիսանում են* t *և* v *նոր փոփոխականների ֆունկցիաներ՝*

$$x = \varphi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(t, v),$$

որոնք նույնպես ունեն x'_t, x'_v, y'_t, y'_v, z'_t, z'_v *մասնակի անընդհատ ածանցյալներ: Այդ դեպքում* [n° **140**] *ոչ միայն գոյություն ունեն* u *ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն ըստ* t*-ի և ըստ* v*-ի, այլև այդ ածանցյալները նույնպես անընդհատ են* t*-ի և* v*-ի նկատմամբ, ինչպես այդ հեշտ է նկատել (3) բանաձևից:*

Եթե x, y, z *փոփոխականները լինեին անկախ փոփոխականներ, ապա, ինչպես մենք արդեն գիտենք,* u*-ի լրիվ դիֆերենցիալը հավասար կլիներ՝*

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz$$

արտահայտությանը:

Իսկ տվյալ դեպքում u*-ն՝* x, y, z *փոփոխականների միջոցով կախված է* t *և* v *փոփոխականներից: Հետևապես, այդ փոփոխականների նկատմամբ դիֆերենցիալը կգրվի այսպես՝*

$$du = u'_t \cdot dt + u'_v \cdot dv:$$

Բայց, (3)-ի շնորհիվ, ունենք՝

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t,$$

և, նույն ձևով՝

$$u'_v = u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v:$$

Այս արժեքները տեղադրելով du*-ի համար գրված արտահայտության մեջ, կունենանք՝*

$$du = (u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t)dt + (u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v) \cdot dv:$$

Սրա անդամները վերախմբավորենք հետևյալ կերպ՝

$$du = u'_x \cdot (x'_t \cdot dt + x'_v \cdot dv) + u'_y \cdot (y'_t \cdot dt + y'_v \cdot dv) + \\ + u'_z \cdot (z'_t \cdot dt + z'_v \cdot dv):$$

Դժվար չէ տեսնել, որ փակագծերի մեջ գրված արտահայտությունները ոչ այլ ինչ են, եթե ոչ x, y, z *ֆունկցիաների* (u*-ից և* v*-ից կախված) դիֆերենցիալները, ուստի կարող ենք գրել՝*

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz։$$

Մենք ստացանք դիֆերենցիալի նույն ձևը, ինչ որ ունեինք այն դեպքում, երբ x, y, z *փոփոխականներն անկախ էին (բայց այստեղ, իհարկե,* dx, dy, dz *սիմվոլների իմաստը արդեն այլ է)։*

Ուրեմն, մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի համար տեղի ունի (առաջին) դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականություն (ինվարիանտություն), *ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար**։*

Կարող է պատահել, որ x, y, z *փոփոխականները կախված լինեն տարբեր փոփոխականներից, օրինակ՝*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(v, w)։$$

Այդպիսի դեպքում մենք միշտ կարող ենք համարել, որ

$$x = \varphi_1(t, v, w), \quad y = \psi_1(t, v, w), \quad z = \chi_1(t, v, w),$$

և նախորդ բոլոր դատողությունները կիրառելի կլինեն նաև այս դեպքի նկատմամբ։

Հետևանք։ Այն դեպքում, երբ x*-ը և* y*-ը մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ էին, ունեինք հետևյալ բանաձևերը՝*

$$d(c \cdot x) = c \cdot dx, \quad d(x \pm y) = dx \pm dy, \quad d(x\,y) = y \cdot dx + x \cdot dy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}։$$

Այս բանաձևերը ճշմարիտ են նաև այն դեպքում, երբ x*-ը և* y*-ը հանդիսանում են ցանկացած թվով փոփոխականների ֆունկցիաներ, այսինքն, երբ՝*

$$x = \varphi(t, v, \ldots), \quad y = \psi(t, v, \ldots)։$$

* *Նշենք, որ այդ նույն եզրակացությունն իրավացի է նաև միայն այն ենթադրության դեպքում, երբ ընդունում ենք, որ բոլոր ֆունկցիաները դիֆերենցելի են։ Սրանում համոզվելու համար բավական է ցույց տալ, որ դիֆերենցելի ֆունկցիաների սուպերպոզիցիաների արդյունքը դարձյալ դիֆերենցելի ֆունկցիա կլինի։*

Ապացուցենք, օրինակ, վերջին բանաձևը։

Դրա համար սկզբում ընդունենք, որ x*-ը և* y*-ը անկախ փոփոխականներ են, այդ ժամանակ կունենանք՝*

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{y}\cdot dx-\frac{x}{y^2}\cdot dy=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{y^2},$$

Տեսնում ենք, որ այդ ենթադրության դեպքում դիֆերենցիալը ունի նույն տեսքը, ինչ որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համար։ Իսկ դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականության հիման վրա կարելի է պնդել, որ այդ բանաձևը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ x*-ը և* y*-ը հանդիսանում են ցանկացած թվով անկախ փոփոխականների ֆունկցիաներ։*

Լրիվ դիֆերենցիալի վերոհիշյալ հատկությունն ու նրանից բխող հետևանքները թույլ են տալիս ավելի հեշտացնելու դիֆերենցիալների հաշվումը. օրինակ՝

$$1)\ d\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{x^2+y^2},$$

Քանի որ անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալների գործակիցներ հանդիսանում են համապատասխան մասնակի ածանցյալները, ուստի այստեղից անմիջապես ստացվում են նաև վերջիններիս արժեքները։

Օրինակ, $u=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}$*-ի համար անմիջապես կունենանք՝*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2},$$

[*համեմ.* n 138,2)]։

144. Լրիվ դիֆերենցիալի կիրառումը մոտավոր հաշվումներում։ *Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի նմանությամբ* [n° **94**], *մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը ևս հաջողությամբ կիրառվում է մոտավոր հաշվումներում սխալները գնահատելիս։ Դիցուք, ունենք* $u=f(x, y)$ *ֆունկցիան, ընդ որում* x*-ի և* y*-ի արժեքները հաշվելիս կատարում ենք, ասենք թե,* Δx *և* Δy *սխալներ։ Այդ ժամանակ* u*-ի արժեքը, որը հաշված է արգումենտների որոշ չափով սխալ արժեքներով, նույնպես կստացվի* $\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x, y)$ *սխալով։ Խոսքը վերաբերում է այդ սխալի գնահատմանը, եթե հայտնի են* Δx *և* Δy *սխալների գնահատականները։*

Ֆունկցիայի աճը (մոտավորությամբ) փոխարինելով նրա դիֆերենցիալով (որը արդարացվում է միայն Δx*-ի և* Δy*-ի բավականաչափ փոքր արժեքների դեպքում), կստանանք՝*

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y. \tag{8}$$

Այստեղ թե՛ Δx և Δy սխալները, և թե՛ նրանց գործակիցները կարող են լինել ինչպես դրական, նույնպես և բացասական մեծություններ. դրանք փոխարինելով իրենց բացարձակ արժեքներով, կստանանք հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|\Delta u| \leqslant \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y|.$$

Եթե δu, δx, δy սիմվոլներով նշանակենք առավելագույն բացարձակ սխալները (կամ՝ բացարձակ սխալների սահմանները), ապա, ակներևաբար, կարելի է ընդունել՝

$$\delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cdot \delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \cdot \delta y. \tag{9}$$

Բերենք օրինակներ։

1) Ամենից առաջ, վերևում ստացված բանաձևերի օգնությամբ հեշտությամբ կարելի է ստանալ մոտավոր հաշվումների պրակտիկայում սովորաբար կիրառվող կանոնները։ Դիցուք $u = x \cdot y$ *(որտեղ $x > 0$, $y > 0$), այնպես որ* $du = y \cdot dx + x \cdot dy$. *դիֆերենցիալներն աճերով փոխարինելով, կստանանք* $\Delta u \approx y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y$ *[տե՛ս (8)] կամ, անցնելով սխալների սահմաններին [տե՛ս (9)]՝*

$$\delta u = y \cdot \delta x + x \cdot \delta y.$$

Այս հավասարման երկու մասերը բաժանելով $u = xy$*-ի վրա, կստանանք վերջնական բանաձև՝*

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}, \tag{10}$$

որն արտահայտում է հետևյալ կանոնը՝

Արտադրյալի (առավելագույն) հարաբերական սխալը հավասար է արտադրիչների (առավելագույն) հարաբերական սխալների գումարին։

Կարելի էր վարվել ավելի հեշտ ձևով՝ նախ լոգարիթմել $u = x \cdot y$ *բանաձևը, և ապա դիֆերենցել՝.*

$$\ln u = \ln x + \ln y, \qquad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}^{*}$$ *և այլն։*

Եթե $u = \dfrac{x}{y}$, *ապա այդ եղանակով կգտնենք՝*

$$\ln u = \ln x - \ln y, \qquad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}.$$

** Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն հանգամանքի վրա, որ* $\ln u$*-ի դիֆերենցիալը մենք հաշվում ենք այնպես, ինչպես որ կհաշվեինք, եթե* u*-ն լիներ անկախ փոփոխական, չնայած որ իրականում* x*-ի և* y*-ի ֆունկցիա է։ Այս դիտողությունը պետք է նկատի ունենալ նաև առաջև։*

անցնելով բացարձակ արժեքներին և առավելագույն սխալներին, մենք դարձյալ կստանանք (10) բանաձևը։ Այսպիսով, քանորդի (առավելագույն) հարաբերական սխալը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի (առավելագույն) հարաբերական սխալների գումարին:

2) Սխալների հաշվումը հաճախակի կիրառություն է գտնում տոպոգրաֆիայում, գլխավորապես եռանկյան անմիջականորեն չչափած էլեմենտները՝ նրա չափած էլեմենտների միջոցով հաշվելիս։

Այդ բնագավառից բերենք մի օրինակ։ Դիցուք ABC *ուղղանկյուն եռանկյան* $AB = b$ *էջը և նրա* $\sphericalangle BAC = \alpha$ *անկյունը չափված են, իսկ երկրորդ՝* a *էջը հաշվվում է* $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ *բանաձևով (գծ. 58)։* b *և* α *մեծությունները չափելիս առաջացած սխալներն ինչպե՞ս են անդրադառնում* a*-ի արժեքի վրա։*

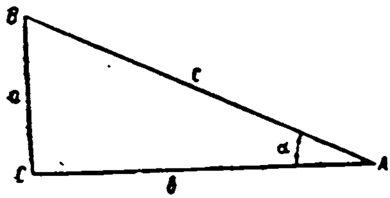
Դիֆերենցելով, կստանանք՝

$$da = \operatorname{tg} \alpha \cdot db + \frac{b}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha,$$

ուստի և՝

$$\delta a = \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta b + \frac{b}{\cos^2 \alpha} \cdot \delta \alpha.$$

145. Համասեռ ֆունկցիաներ:



Գծ. 58.

Ինչպես հայտնի է, համասեռ բազմանդամներ կոչվում են այն բազմանդամները, որոնք կազմված են միևնույն չափումն ունեցող անդամներից։ Օրինակ՝

$$3x^2 - 2xy + 5y^2$$

արտահայտությունը երկրորդ աստիճանի համասեռ բազմանդամ է։ Եթե այստեղ x*-ը և* y*-ը բազմապատկենք որևէ* t *արտադրիչով, ապա ամբողջ բազմանդամը ձեռք կբերի* t^2 *արտադրիչ։ Այդպիսի երևույթ տեղի ունի ամեն մի համասեռ բազմանդամի համար։*

Սակայն, նաև ավելի բարդ կառուցվածքի ֆունկցիաները կարող են ունենալ վերոհիշյալ հատկությունը։ Օրինակ, եթե վերցնենք

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x - y} \cdot \ln \frac{x}{y}$$

արտահայտությունը, ապա սա էլ կստանա t^2 *արտադրիչ, երբ* x *և* y *երկու արգումենտներն էլ բազմապատկվեն* t*-ով, այս տեսակետից նմանվելով երկրորդ աստիճանի համասեռ բազմանդամին։ Նման ֆունկցիան, բնական կլինի, դարձյալ անվանել երկրորդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա։*

Ձևակերպենք ընդհանուր սահմանում.

m թվով արգումենտների $f(x_1, \ldots, x_m)$ ֆունկցիան, որը որոշված է D տիրույթում, կոչվում է k-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա, եթե նրա բոլոր արգումենտները t-ով բազմապատկելիս ֆունկցիան ձեռք է բերում այդ նույն արտադրիչը k-րդ աստիճանով, *այսինքն, եթե նույնաբար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝*

$$f(tx_1, \ldots, tx_m) = t^k \cdot f(x_1, \ldots, x_m)\text{:} \tag{19}$$

Պարզության համար մենք սահմանափակվում ենք այն ենթադրությամբ, որ այստեղ $x_1, \ldots, x_m$ և t մեծությունները ընդունում են միայն դրական արժեքներ: Ենթադրվում է, որ այն D տիրույթը, որտեղ դիտարկվում է f ֆունկցիան, իր յուրաքանչյուր $M(x_1, \ldots, x_m)$ կետի հետ միասին պարունակում է նաև բոլոր $M_t(tx_1, \ldots, tx_m)$ տեսքի կետերը, երբ $t > 0$, այսինքն՝ սկզբնակետից ելնող և M կետով անցնող ամբողջ ճառագայթը:

Համասեռության k աստիճանը կարող է լինել ցանկացած իրական թիվ. այսպես, օրինակ,

$$x^{\pi} \cdot \sin\frac{y}{x} + y^{\pi} \cdot \cos\frac{x}{y}$$

ֆունկցիան հանդիսանում է x և y արգումենտների π-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա:

Այժմ աշխատենք ստանալ k-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիայի ընդհանուր արտահայտությունը:

Դիցուք սկզբում $f(x_1, \ldots, x_m)$ ֆունկցիան զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է. այդ դեպքում՝

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\text{:}$$

Ընդունելով $t = \frac{1}{x_1}$, *կստանանք՝*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f\left((1, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_m}{x_1}\right),$$

Եթե մուծենք $(n-1)$ *արգումենտների՝*

$$\varphi(u_1, \ldots, u_{n-1}) = f(1, u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

ֆունկցիան, ապա կպարզվի, որ

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)։$$

Այսպիսով, զրո աստիճանի յուրաքանչյուր համասեռ ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել բոլոր արգումենտների և դրանցից մեկի հարաբերությունների ֆունկցիայի տեսքով։ Ակներևաբար, հակադարձը նույնպես ճիշտ է, այնպես որ նախորդ հավասարությունը տալիս է զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիայի ընդհանուր արտահայտությունը։

Եթե $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ *ֆունկցիան* k*-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է, նրա հարաբերությունը* x_1^k*-ին կլինի զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիա, ուստի, ապացուցածի համաձայն՝*

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{x_1^k} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right),$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1^k \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_m}{x_1}\right)։$$

Եթե, հակադարձաբար, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ *ֆունկցիայի համար տեղի ունի նման հավասարություն, ապա այն, ինչպես հեշտ է ստուգել, կլինի* k*-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա։ Այսպիսով, մենք ստացանք* k*-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիայի ընդհանուր տեսքը։*

Օրինակ՝

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y} \cdot \ln\frac{x}{y} = x^2 \cdot \frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}}{\frac{y}{x}-1} \cdot \ln\frac{y}{x}։$$

Այժմ ենթադրենք, թե $f(x, y, z)$** համասեռ (*k *աստիճանի) ֆունկցիան* D *(բաց) տիրույթում ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ ըստ բոլոր արգումենտների։ Ֆիքսելով* D*-ի մի կամայական* (x_0, y_0, z_0) *կետ, (11) հիմնական նույնության շնորհիվ, ցանկացած* $t>0$ *արժեքի համար կունենանք՝*

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^k f(x_0, y_0, z_0)։$$

---

* *Միայն գրության պարզության համար այստեղ մենք սահմանափակվում ենք երեք փոփոխականների դեպքով։*

Այս հավասարությունն ածանցենք ըստ t-ի. հավասարության ձախ մասը՝ բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնով, աջ մասը՝ որպես աստիճանային ֆունկցիա։ Կստանանք՝*

$$f'_x(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot x_0 + f'_y(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot y_0 +$$

$$f'_z(tx_0, ty_0, tz_0)\cdot z_0 = kt^{k-1}\cdot f(x_0, y_0, z_0)\text{։}$$

Եթե այստեղ ընդունենք $t = 1$, *կստանանք հետևյալ բանաձևը՝*

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot x_0 + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot y_0 + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot z_0 =$$

$$= kf(x_0, y_0, z_0)\text{։}$$

Այսպիսով, ցանկացած (x, y, z) *կետի համար տեղի ունի այսպիսի հավասարություն՝*

$$f'_x(x, y, z)\cdot x + f'_y(x, y, z)\cdot y + f'_z(x, y, z)\cdot z =$$

$$= kf(x, y, z)\text{։} \qquad (12)$$

Այս հավասարությունը կրում է Էյլերի բանաձև *անվանումը։*

Մենք տեսանք, որ այդ հավասարությունը բավարարում է k-րդ աստիճանի ամեն մի համասեռ ֆունկցիա, որն ունի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ։ Կարելի է ցույց տալ նաև հակադարձը՝ որ ամեն մի ֆունկցիա, որն իր մասնակի ածանցյալների հետ միասին անընդհատ է և բավարարում է Էյլերի (12) հավասարությանը, անհրաժեշտաբար հանդիսանում է k-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա։

Դիտողություն: *Էյլերը «Դիֆերենցիալ հաշվում» դիտարկում է համասեռ արտահայտությունների միայն մասնավոր տիպեր՝ ամբողջ, կոտորակային, արմատանշաններով արտահայտություններ և նրանց որոշ զուգորդություններ, և ը ն դ հ ա ն ո ւ ր սահմանում չի տալիս։ Սակայն, իր անունը կրող բանաձևն արտածելիս, նա ելնում է նրանից, որ համասեռ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել արգումենտներից մեկի աստիճանի և մյուս արգումենտների ու դրա հարաբերություններից կախված ֆունկցիայի արտադրյալի տեսքով։*

---

* *Հենց նրա համար, որպեսզի իրավունք ունենանք կիրառելու այդ կանոնը, մենք ենթադրեցինք մասնակի ածանցյալների անընդհատությունը։*

§ 2. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

146. Բարձր կարգի ածանցյալներ: *Եթե* $u=f(x, y, z)$* *ֆունկցիան մի որոշ* D *(բաց) տիրույթում ունի մասնակի ածանցյալ ըստ փոփոխականներից մեկի, ապա այդ ածանցյալն ինքը ևս, հանդիսանալով* x, y, z *փոփոխականների ֆունկցիա, կարող է որոշ* (x_0, y_0, z_0) *կետում ունենալ մասնակի ածանցյալներ ըստ նույն կամ մի այլ փոփոխականի։ Այդ վերջին ածանցյալները* $u=f(x, y, z)$ *սկզբնական ֆունկցիայի համար կլինեն երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներ (կամ երկրորդ մասնակի ածանցյալներ)։*

Եթե առաջին ածանցյալը վերցրած է եղել, օրինակ, ըստ x*-ի, ապա դրա ածանցյալներն ըստ* x, y, z *փոփոխականների նշանակվում են այսպես՝*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial z}$$

կամ՝

$$u''_{x^2}=f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0), \qquad u''_{xy}=f''_{xy}(x_0, y_0, z_0),$$

$$u''_{xz}=f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)^{**}.$$

Նման ձևով սահմանվում են 3-րդ, 4-րդ և այլ կարգի ածանցյալները (երրորդ, չորրորդ, … ածանցյալները)։ n*-րդ կարգի ածանցյալի ընդհանուր սահմանումը կարելի է տալ ինդուկտիվորեն։*

Նկատենք, որ ըստ տարբեր փոփոխականների վերցրած բարձր կարգի ածանցյալը, օրինակ՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}, \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2}, \ \ldots,$$

կոչվում է խառը մասնակի ածանցյալ։

---

* *Այստեղ և գրության պարզության համար մենք սահմանափակվում ենք երեք փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքով։*

** *Հասկանալի է, որ դիֆերենցիալ նշանակումները պետք է դիտել որպես ամբողջական սիմվոլներ։ Հայտարարում գրված* ∂x^2*-ն փոխարինում է, պայմանական ձևով,* $\partial x \partial x$*-ին և ցույց է տալիս երկու անգամ ըստ* x*-ի դիֆերենցումը. ճիշտ նույն կերպ ներքևում գրված* x^2 *նշանիկը փոխարինում է* xx*-ին։ Այս պետք է նկատի ունենալ նաև հետագայում։*

Օրինակներ. 1) Դիցուք $u=x^4y^3z^2$, *այդ դեպքում՝*

$$u'_x = 4x^3y^3z^2, \qquad u''_{xy} = 12x^3y^2z^2,$$

$$u'_y = 3x^4y^2z^2, \qquad u''_{yx} = 12x^3y^2z^2,$$

$$u'_z = 2x^4y^3z, \qquad u''_{zx} = 8x^3y^3z,$$

$$u'''_{xyz} = 24x^3y^2z, \qquad u^{(4)}_{xyzx} = 72x^2y^2z,$$

$$u'''_{yxx} = 36x^2y^2z^2, \qquad u^{(4)}_{yxxz} = 72x^2y^2z,$$

$$u'''_{zxy} = 24x^3y^2z, \qquad u^{(4)}_{zxyx} = 72x^2y^2z.$$

2) $u=\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$ *ֆունկցիայի համար մենք արդեն ստացել ենք* [n° **138**, *2)*] *նրա մասնակի ածանցյալները՝*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

այժմ հաշվենք նրա հաջորդ ածանցյալները՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{dx}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3}$$

և այլն։

147. Թեորեմաներ խառն ածանցյալների վերաբերյալ: *1) և 2) օրինակները դիտարկելիս աչքի է ընկնում միևնույն փոփոխականների նկատմամբ, բայց տարբեր հերթականությամբ, վերցրած խառն ածանցյալների հավասարությունը։*

Պետք է անմիջապես նշել, որ այդ բոլորովին էլ անհրաժեշտորեն չի բխում խառն ածանցյալի սահմանումից. գոյություն ունեն դեպքեր, երբ վերոհիշյալ համընկնումը չկա։

Որպես օրինակ դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f(x,\ y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ \textit{(երբ } x^2+y^2>0\textit{)},\quad f(0,\ 0)=0.$$

Ունենք՝

$$f'_x(x,\ y) = y\cdot\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+x^2)^2}\right]\ \textit{(երբ } x^2+y^2>0\textit{)},$$

$$f'_x(0,\ 0)=0.$$

x-*ին տալով զրոյին հավասար մասնակի արժեք, ցանկացած* y-*ի համար (սրանց թվում նաև երբ* $y=0$*) կունենանք՝* $f'_x(0,\ y)=-y$։ *Այս ֆունկցիան ըստ* y-*ի ածանցելով, կստանանք* $f''_{xy}(0,\ y)=-1$։ *Այստեղից, մասնավորապես, հետևում է, որ նաև* (0, 0) *կետում պետք է ունենանք*

$$f''_{xy} = (0,\ 0) = -1.$$

Նույն ձևով հաշվելով f''_{yx}-*ը* (0, 0) *կետում, կստանանք՝*

$$f''_{yx}(0,\ 0)=1.$$

Ուրեմն, դիտարկվող ֆունկցիայի համար $f''_{xy}(0,\ 0)\neq f''_{yx}(0,\ 0)$։

Բայց և այնպես, օրինակներում նկատվող այն մասնակի ածանցյալների համընկնումը, որոնք իրարից տարբերվում են միայն դիֆերենցումների կարգով, պատահական չէ. այդ տեղի ունի բավականաչափ շատ դեպքերում։

Թեորեմ։ Ենթադրենք, թե 1) $f(x,\ y)$ ֆունկցիան որոշված է D (բաց) տիրույթում, 2) այդ տիրույթում գոյություն ունեն f'_x ու f'_y առաջին կարգի, ինչպես նաև f''_{xy} ու f''_{yx} երկրորդ կարգի խառն ածանցյալները, և, վերջապես, 3) այդ վերջին՝ f''_{xy} և f''_{yx} ածանցյալները, որպես x-ի ու y-ի ֆունկցիաներ, անընդհատ են D տիրույթի մի $(x_0,\ y_0)$ կետում։ Այդ դեպքում այդ կետում՝

$$f''_{xy}(x_0,\ y_0) = f''_{yx}(x_0,\ y_0). \tag{1}$$

Ապացույց։ Դիտարկենք

$$W = \frac{f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0+h,\ y_0)-f(x_0,\ y_0+k)+f(x_0,\ y_0)}{hk}$$

արտահայտությունը, որտեղ h*-ը և* k*-ն զրոյից տարբեր են, օրինակ, դրական են, և ընդ որում այնքան փոքր են, որ* $[x_0, x_0+h; y_0, y_0+k]$ *ուղղանկյունն ամբողջությամբ գտնվում է* D*-ում. այդ մեծությունները այդպես ֆիքսում ենք մինչև մեր դատողությունների վերջը։*

Այժմ մուծենք x*-ից կախված մի օժանդակ ֆունկցիա՝*

$$\varphi(x)=\frac{f(x, y_0+k)-f(x, y_0)}{k},$$

որը $[x_0, x_0+h]$ *միջակայքում, 2)-ի շնորհիվ, ունի ածանցյալ՝*

$$\varphi'(x)=\frac{f'_x(x, y_0+k)-f'_x(x, y_0)}{k}$$

և, հետևապես, անընդհատ է։

Այդ ֆունկցիայի օգնությամբ W *արտահայտությունը, որը հավասար է՝*

$$W=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)}{k}-\right.$$

$$\left.-\frac{f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)}{k}\right]$$

արտահայտությանը, կարելի է արտագրել այսպես՝

$$W=\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h},$$

Քանի որ $[x_0, x_0+h]$ *միջակայքում* $\varphi(x)$ *ֆունկցիայի համար տեղի ունեն Լագրանժի թեորեմայի բոլոր պայմանները* [n° **102**], *ուստի մենք կարող ենք, ըստ վերջավոր աճերի բանաձևի,* W *արտահայտությունը ձևափոխել այսպես՝*

$$W=\varphi'(x_0+\theta h)=\frac{f'_x(x_0+\theta h, y_0+k)-f'_x(x_0+\theta h, y_0)}{k}$$

$$(0<\theta<1),$$

Օգտվելով $f''_{xy}(x, y)$ *երկրորդ ածանցյալի գոյությունից, նորից կիրառենք վերջավոր աճերի բանաձևը, այս անգամ* y*-ից կախված* $f'_x(x_0+\theta h, y)$ *ֆունկցիայի նկատմամբ՝* $[y_0, y_0+k]$ *միջակայքում։ Վերջնականապես կստանանք՝*

$$W=f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k) \qquad (0<\theta,\ \theta_1<1)\text{։} \qquad (2)$$

Բայց W *արտահայտությունը, մի կողմից, պարունակում է* x *և* y, *իսկ մյուս կողմից՝* h *և* k *մեծությունները միատեսակ ձևով։ Ուստի դրանց դերերը կարելի է փոխել և, մուծելով*

$$\psi(y)=\frac{f(x_0+h,\ y)-f(x_0,\ y)}{h}$$

օժանդակ ֆունկցիան, վերոհիշյալ դատողությունների միջոցով ստանալ՝

$$W=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k) \qquad (0<\theta_2,\ \theta_3<1)\text{։} \qquad (3)$$

Բաղդատելով (3) և (2) արդյունքները, կգտնենք՝

$$f''_{xy}(x_0+\theta h,\ y_0+\theta_1 k)=f''_{yx}(x_0+\theta_2 h,\ y_0+\theta_3 k)\text{։}$$

Այժմ h*-ը և* k*-ն ձգտեցնելով զրոյի, այս հավասարության մեջ անցնենք սահմանին։* θ, θ_1, θ_2, θ_3 *մեծությունների սահմանափակ լինելու շնորհիվ ձախ և աջ մասերում արգումենտները կձգտեն, համապատասխանաբար,* x_0*-ի,* y_0*-ի։ Իսկ այդ ժամանակ, 3)-ի շնորհիվ, վերջնականապես կստանանք՝*

$$f''_{xy}(x_0,\ y_0)=f''_{yx}(x_0,\ y_0),$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Այսպիսով, f''_{xy} և f''_{yx} անընդհատ խառն ածանցյալները միշտ հավասար են:

Վերևում բերված օրինակի մեջ այդ ածանցյալները՝

$$f''_{xy}=f''_{yx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left\{1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right\} \quad (x^2+y^2>0)$$

բոլորովին սահման չունեն, երբ $x\to 0$, $y\to 0$, *և, հետևապես,* (0, 0) *կետում ունեն խզում. այդ դեպքում, մեր թեորեման, բնականաբար, կիրառելի չէ։*

Դիտողություն։ Խառն ածանցյալների հավասարության վերաբերյալ հիշատակումներ և այն ապացուցելու փորձեր կան դեռևս Էյլե-

րի և Կլերոյի մոտ (1740)։ Խիստ ապացուցումն առաջին անգամ տվել է Շվարցը** միայն 1873 թ.։*

Նշենք երկու ածանցումների տեղափոխման վերաբերյալ հարցի կապը երկու սահմանային անցումների տեղափոխման վերաբերյալ ընդհանուր հարցի հետ, որը դիտարկել ենք n° **131**-*ում։*

Տեղի ունի խառն ածանցյալների վերաբերյալ նաև հետևյալ ընդհանուր թեորեման.

Թ ե ո ր ե մ ա: Դիցուք m փոփոխականներից կախված $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ֆունկցիան որոշված է m-չափանի D բաց տիրույթում և այնտեղ ունի բոլոր հնարավոր մասնակի ածանցյալները մինչև $(n-1)$-րդ կարգինները ներառյալ և n-րդ կարգի խառն ածանցյալներ, ընդ որում այդ բոլորն ա ն ը ն դ հ ա տ ե ն D-ում:

Այս պայմանների դեպքում n-րդ կարգի ցանկացած խառն ածանցյալի արժեքը կախված չէ այն կարգից (հերթականությունից), որով կատարվում են հաջորդական ածանցումները:

Մենք կանգ չենք առնում այս թեորեմայի ապացուցման վրա, որը հիմնվում է նախորդ թեորեմայի վրա։

Քանի որ այսուհետև միշտ ենթադրելու ենք, որ դիտարկվող ածանցյալներն անընդհատ են, ուստի, մեզ համար հաջորդական ածանցումների հերթականությունը կարևոր չէ։ Խառն ածանցյալներն օգտագործելիս մենք սովորաբար մի տեղ ենք հավաքելու ըստ միևնույն փոփոխականի կատարվող բոլոր ածանցումները։

148. Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ: *Դիցուք* D *տիրույթում տրված է մի* $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *ֆունկցիա, որն ունի առաջին կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ։*

Այդ դեպքում, ինչպես գիտենք, du *(լրիվ) դիֆերենցիալ կոչվում է հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{dx_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m,$$

որտեղ $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ *մեծությունները՝* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *անկախ փոփոխականների կամայական աճերն են։*

Մենք տեսնում ենք, որ du-*ն ևս հանդիսանում է* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *փոփոխականների ֆունկցիա։ Եթե ենթադրենք, որ* u-*ի համար գոյու-*

---

* *Ալեքսիս Կլոդ Կ լ ե ր ո (1713—1765)՝ ֆրանսիացի ականավոր մաթեմատիկոս։*

** *Կարլ Հերման Արմանդուս Շ վ ա ր ց (1843—1921)՝ գերմանացի մաթեմատիկոս։*

թյուն ունեն երկրորդ կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, ապա du-*ն կունենա առաջին կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ և կարելի կլինի խոսել այդ* du *դիֆերենցիալի (լրիվ) դիֆերենցիալի մասին, այսինքն՝* $d(du)$-*ի մասին, որը կոչվում է* u-*ի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ (կամ երկրորդ դիֆերենցիալ) և նշանակվում է* d^2u *սիմվոլով։*

Կարևոր է ընդգծել, որ այդ ժամանակ dx_1, dx_2, ..., dx_m *աճերը դիտվում են որպես հաստատուններ և մեկ դիֆերենցիալից հաջորդին անցնելիս նրանք մնում են միևնույնը* (d^2x_1, d^2x_2, ..., d^2x_m *երկրորդ դիֆերենցիալները կլինեն զրոներ)։*

Այսպիսով, եթե օգտվենք n° **148**-*ում նշված դիֆերենցման կանոններից, կունենանք՝*

$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{dx_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{dx_m}\cdot dx_m\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2 + \dots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)\cdot dx_m$$

կամ, կատարելով մատնանշված ածանցումները, կստանանք՝

$$d^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m}dx_m\right)\cdot dx_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_m}dx_m\right)\cdot dx_2 +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right)\cdot dx_m =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}dx_m^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + 2\frac{d^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}dx_1 dx_3 + \cdots$$

$$\cdots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}dx_2 dx_3 + \dots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}\partial x_m}dx_{m-1}dx_m,$$

Նույն ձևով սահմանվում է երրորդ կարգի դիֆերենցիալը, d^3u-*ն և այլն։ Ընդհանրապես, եթե* ($n - 1$)-*րդ կարգի դիֆերենցիալը՝* $d^{n-1}u$-*ն արդեն սահմանված է, ապա* n-*րդ կարգի դիֆերենցիալը՝* $d^n u$-*ն սահմանվում է որպես* ($n - 1$)-*րդ կարգի դիֆերենցիալի* (լրիվ) դիֆերենցիալ՝

$$d^n u = d(d^{n-1} u).$$

Եթե u ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն և անընդհատ են բոլոր մասնակի ածանցյալները մինչև n-րդ կարգին ներառյալ, ապա այդ n-րդ դիֆերենցիալի գոյությունն ապահովված է։ Բայց գնալով ավելի ու ավելի բարդանում են այդ հաջորդական դիֆերենցիալների համար ստացվող արտահայտությունները։ Նրանց գրությունը պարզեցնելու համար դիմում են հետևյալ հնարքին։

Ամենից առաջ, առաջին կարգի դիֆերենցիալի արտահայտության մեջ պայմանաբար «u տառը փակագծերից դուրս բերենք». այդ ժամանակ այդ դիֆերենցիալը սիմվոլիկ (պայմանական) ձևով կարելի կլինի գրել հետևյալ կերպ՝

$$du = \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right) \cdot u.$$

Այժմ նկատում ենք, որ եթե երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի համար ստացված արտահայտության մեջ նույնպես «u-ն դուրս բերենք փակագծերից», ապա փակագծերի մեջ մնացող արտահայտությունը ձևականորեն իրենից ներկայացնում է

$$\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{d}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m$$

արտահայտության քառակուսին՝ բացված տեսքով, ուստի երկրորդ դիֆերենցիալը սիմվոլիկ (պայմանական) ձևով կարելի է գրել այսպես՝

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{dx_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 \cdot u.$$

Նույն կերպ կարելի է գրել երրորդ կարգի դիֆերենցիալը և այլն։ Այդ կանոնը ընդհանուր է. ամեն մի n-ի համար կունենանք

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^n \cdot u \tag{4}$$

սիմվոլիկ հավասարությունը, որը պետք է հասկանալ այսպես՝ նախ փակագծերի մեջ գտնվող «բազմանդամը» ձևականորեն բարձրացվում է աստիճան հանրահաշվի կանոններով, ապա ստացված բոլոր անդամները «բազմապատկվում են» u-ով (որը գրվում է համարիչներում գտնվող ∂^n-ի կողքին), և միայն դրանից հետո բոլոր սիմվոլներին վերադարձվում են ածանցյալների և դիֆերենցիալների իրենց իմաստները։

(4) կանոնի ապացուցումը կարելի է իրականացնել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով։

Այսպիսով, n-րդ դիֆերենցիալն n աստիճանի համասեռ բազմանդամ է կամ, ինչպես ասում են, n աստիճանի ձև (ֆորմա) է անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալների նկատմամբ, որոնց համար գործակիցներ են ծառայում ֆունկցիայի n-րդ մասնակի ածանցյալները՝ բազմապատկած ամբողջ թվային գործակիցներով («բազմանդամային» գործակիցներով)։

Օրինակ, եթե $u=f(x, y)$, ապա՝

$$d^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3u=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3,$$

$$d^4u=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}dx^4+4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y}dx^3dy+6\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y^2}dx^2dy^2+4\frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3}dxdy^3+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}dy^4$$

և այլն։ Ընդունելով, մասնավորապես, $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, կունենանք՝

$$du=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2},\qquad d^2u=\frac{2xy\,(dy^2-dx^2)+2(x^2-y^2)\,dxdy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^3u=\frac{(6x^2y-2y^3)dx^3+(18xy^2-6x^3)dx^2dy}{(x^2+y^2)^3}+\frac{(6y^3-18x^2y)dxdy^2+(2x^3-6xy^2)dy^3}{(x^2+y^2)^3}$$

և այլն։

149. Բարդ ֆունկցիաների դիֆերենցիալները: Դիցուք այժմ ունենք

$$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

բարդ ֆունկցիան, որտեղ, իրենց հերթին,

$$x_i=\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)\qquad (i=1, 2, \ldots, m)։$$

Այս դեպքում առաջին դիֆերենցիալը կարելի է պահել նախկին տեսքով՝

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m$$

[առաջին դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականության հիման վրա, n° **143**]։ Բայց այստեղ dx_1, dx_2, ..., dx_m դիֆերենցիալներն արդեն հանդիսանում են ոչ թե անկախ փոփոխականների, այլ ֆունկցիաների դիֆերենցիալներ, և հետևապես, իրենք ևս կլինեն ֆունկցիաներ, և կարող են նախորդ դեպքի նման հաստատուններ չլինել։

Այժմ հաշվելով մեր ֆունկցիայի երկրորդ դիֆերենցիալը, կունենանք [եթե օգտվենք n° 143-ում տրված դիֆերենցման կանոններից]՝

$$d^2u=d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\cdot dx_1+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\cdot dx_2+\dots+d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)\cdot dx_m+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d(dx_1)+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d(dx_2)+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot d(dx_m)=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^2\cdot u+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot d^2x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot d^2x_2+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot d^2x_m.$$

Մենք տեսնում ենք, որ առաջինից բարձր կարգի դիֆերենցիալի համար ձևի անփոփոխականությունը ընդհանրապես տեղի չունի։

Այժմ դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ, x_1, x_2, ..., x_m փոփոխականները՝ t_1, t_2, ..., t_k փոփոխականների գծային ֆունկցիաներ են, այսինքն, երբ՝

$$x_i=\alpha_i^{(1)}t_1+\alpha_i^{(2)}t_2+\dots+\alpha_i^{(k)}t_k+\beta_i$$

$$(i=1,\ 2,\ \dots,\ m),$$

որտեղ $\alpha_i^{(j)}$ և β_i մեծությունները հաստատուններ են։

Այս դեպքում կունենանք՝

$$dx_i=\alpha_i^{(1)}dt_1+\dots+\alpha_i^{(k)}dt_k=\alpha_i^{(1)}\Delta t_1+\dots+\alpha_i^{(k)}\Delta t_k.$$

Տեսնում ենք, որ x_1, x_2, ..., x_m ֆունկցիաների բոլոր առաջին դիֆերենցիալներն այս դեպքում հաստատուններ են, կախված չեն t_1, t_2, ..., t_k փոփոխականներից, հետևապես, n° 148-ում կատարված հաշվումները առանց փոփոխության կիրառելի են։ Այստեղից հետևում է, որ x_1, x_2, ..., x_m անկախ փոփոխականները t_1, t_2, ..., t_k նոր փոփոխականների գծային ֆունկցիաներով փոխարինելու դեպքում, նույնիսկ բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար կարող են պահպանվել նախկին արտահայտությունները։

Դրանց մեջ $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ *դիֆերենցիալները համընկնում են* $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ *աճերի հետ, սակայն, այդ աճերը անկախ չեն, այլ պայմանավորված են* $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_k$ *աճերով։*

Այս պարզ ու կարևոր դիտողությունը պատկանում է Կոշիին. մենք այն անմիջապես կօգտագործենք հետևյալ n°-*ում։*

150. Թեյլորի բանաձևը: *Մենք արդեն գիտենք* [n° **107**, *(12 բ)*], *որ* $F(t)$ *ֆունկցիան, նրա առաջին* $(n+1)$ *ածանցյալների գոյության դեպքում, կարող է Թ ե յ լ ո ր ի բանաձևով վերլուծվել հետևյալ կերպ՝*

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!} d^2F(t_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^nF(t_0) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}F(t_0 + \theta \cdot \Delta t) \quad (0 < \theta < 1)\text{։}$$

Ընդ որում կարևոր է ընդգծել, որ աջ մասում գտնվող դիֆերենցիալների արտահայտությունների մեջ մտնող dt *մեծությունը ճշտորեն հավասար է այն* Δt *աճին, որը գտնվում է ձախ մասում գրված ֆունկցիայի* $\Delta F(t_0) = F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)$ *աճի մեջ։*

Թեյլորի բանաձևը, հենց այդ վերջին տեսքով գրված, տարածվում է նաև մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքի վրա (Կոշի)։

Գրության պարզեցման համար սահմանափակվում ենք երկու փոփոխականների $f(x, y)$ *ֆունկցիայով։*

Ենթադրենք, թե մի որոշակի (x_0, y_0) *կետի շրջակայքում այդ ֆունկցիան ունի անընդհատ ածանցյալներ մինչև* $(n+1)$-*րդ կարգը ներառյալ։* x_0-*ին և* y_0-*ին տանք* Δx *ու* Δy *աճեր այնպես, որ* (x_0, y_0) *և* $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ *կետերը միացնող ուղղագիծ հատվածը դուրս չգա* (x_0, y_0) *կետի դիտարկվող շրջակայքի սահմաններից։*

Պահանջվում է ապացուցել, որ $f(x, y)$ *ֆունկցիայի նկատմամբ արված ենթադրությունների դեպքում իրավացի է հետևյալ հավասարությունը՝*

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^nf(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y) \quad (0 < \Theta < 1),$$

ընդ որում աջ մասում տարբեր աստիճաններով գրված dx *ու* dy *դիֆերենցիալները հավասար են անկախ փոփոխականների հենց այն* Δx

ու Δy աճերին, որոնք առաջացրել են ձախ մասում գտնվող ֆունկցիայի աճը։

Ապացուցելու համար մուծենք մի նոր t անկախ փոփոխական, ընդունելով՝

$$x = x_0 + t\cdot\Delta x, \qquad y = y_0 + t\cdot\Delta y \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \qquad (6)$$

x-ի և y-ի այս արժեքները տեղադրելով $f(x, y)$ ֆունկցիայի մեջ, կստանանք t մեկ փոփոխականի բարդ ֆունկցիա՝

$$F(t) = f(x_0 + t\cdot\Delta x,\ y_0 + t\cdot\Delta y).$$

Մենք արդեն գիտենք, որ մեր գրած (6) բանաձևերը երկրաչափորեն արտահայտում են $M_0(x_0, y_0)$ և $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ կետերը միացնող ուղղագիծ հատվածը։

Ակներևորեն,

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

աճի փոխարեն մենք կարող ենք դիտարկել օժանդակ ֆունկցիայի՝

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0)$$

աճը, քանի որ այդ երկուսը հավասար են։ Բայց $F(t)$-ն մեկ փոփոխականի ֆունկցիա է և ունի $(n+1)$ անընդհատ ածանցյալներ. հետևապես, նրա նկատմամբ կիրառելով Թեյլորի արդեն արտածված բանաձևը, կստանանք՝

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\Theta) \quad (0 < \Theta < 1), \qquad (7)$$

ընդ որում, աջ մասում տարբեր աստիճաններով գրված dt դիֆերենցիալը հավասար է՝ $\Delta t = 1 - 0 = 1$։

Այժմ, օգտվելով նրանից, որ փոփոխականների գծային փոխարինման ժամանակ նույնիսկ բարձր կարգի դիֆերենցիալների ձևը չի փոխվում, կարող ենք գրել՝

$$dF(0) = f'_x(x_0, y_0)\cdot dx + f'_y(x_0, y_0)dy = df(x_0, y_0),$$

$$d^2F(0) = f''_{x^2}(x_0, y_0)\cdot dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot dxdy +$$

$$+ f''_{y^2}(x_0, y_0)\cdot dy^2 = d^2f(x_0, y_0),$$

և այլն։ Վերջապես, $(n+1)$-րդ դիֆերենցիալի համար կունենանք՝

$$d^{n+1}F(\Theta) = d^{n+1}f(x_0 + \Theta\Delta x,\ y_0 + \Theta\Delta y)\text{։}$$

Կարևոր է նշել, որ այստեղ dx և dy դիֆերենցիալները ոչնչով չեն տարբերվում նախապես վերցրած Δx և Δy աճերից։

Իրոք, քանի որ $dt = 1$,

$$dx = \Delta x \cdot dt = \Delta x, \qquad dy = \Delta y \cdot dt = \Delta y\text{։}$$

Այս բոլորը տեղադրելով (7)-ի մեջ, մենք կստանանք հենց պահանջվող (5) վերլուծությունը։

Ընթերցողը պետք է իրեն հաշիվ տա, որ չնայած դիֆերենցիալ ձևով գրված Թեյլորի բանաձևը մի քանի փոփոխականների դեպքում ունի նույնպիսի պարզ տեսք, ինչպես և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, սակայն բացազատված տեսքով նա շատ ավելի բարդ է։

§ 3. ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ, ՄԵԾԱԳՈՒՅՆ ԵՎ ՓՈՔՐԱԳՈՒՅՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐ

151. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի էքստրեմումները։ Անհրաժեշտ պայմանները։ Դիցուք

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

ֆունկցիան որոշված է D տիրույթում և $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$-ն այդ տիրույթի ներքին կետ է։

Ասում են, որ $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ֆունկցիան $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ կետում ունի մաքսիմում (մինիմում), եթե այդ կետը կարելի է շրջապատել այնպիսի

$$(x_1^0 - \delta,\ x_1^0 + \delta;\ x_2^0 - \delta,\ x_2^0 + \delta;\ \ldots;\ x_m^0 - \delta,\ x_m^0 + \delta)$$

շրջակայքով, որ այդ շրջակայքի բոլոր կետերի համար տեղի ունենա

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$$

անհավասարությունը։

Եթե այդ շրջակայքը հնարավոր է վերցնել այնքան փոքր, որ հավասարության նշանը տեղի չունենա, այսինքն՝ որ նրա յուրաքանչյուր կետում, բացի $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$ կետից, տեղի ունենա

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) < f(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$$
$$(>)$$

խիստ անհավասարությունը, ապա ասում են, որ $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$ կետում կա իսկական մաքսիմում (մինիմում). հակառակ դեպքում մաքսիմումը (մինիմումը) կոչվում է անիսկական։

Մաքսիմումը և մինիմումը նշելու համար օգտագործվում է նաև ընդհանուր տերմին՝ էքստրեմում։

Ենթադրենք, թե մեր ֆունկցիան մի $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$ կետում ունի էքստրեմում։

Ցույց տանք, որ եթե այդ կետում գոյություն ունեն

$$f'_{x_1}(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m), \ldots, f'_{x_m}(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$$

վերջավոր մասնակի ածանցյալներ, ապա բոլոր այդ մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի, այնպես որ, **առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների զրո դառնալը էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայման է**։

Այդ նպատակի համար ընդունենք $x_2 = x^0_2, \ldots, x_m = x^0_m$, x_1-ը թողնելով փոփոխական. այդ ժամանակ մենք կստանանք միայն x_1 փոփոխականի ֆունկցիա՝

$$u = f(x_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)։$$

Քանի որ մենք ենթադրում ենք, որ $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$ կետում էքստրեմում գոյություն ունի (որոշակիության համար թող այդ լինի մաքսիմում), ապա, մասնավորապես, այստեղից հետևում է, որ $x_1 = x^0_1$ կետի մի որոշ $(x^0_1 - \delta, x^0_1 + \delta)$ շրջակայքում անպայման պետք է տեղի ունենա

$$f(x_1, x^0_2, \ldots, x^0_m) \leqslant f(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$$

անհավասարությունը, այնպես որ վերոհիշյալ մեկ փոփոխականի ֆունկցիան $x_1 = x^0_1$ կետում կունենա մաքսիմում, իսկ այստեղից, ըստ Ֆերմայի թեորեմայի [n° 100] հետևում է, որ՝

$$f'_{x_1}(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m) = 0։$$

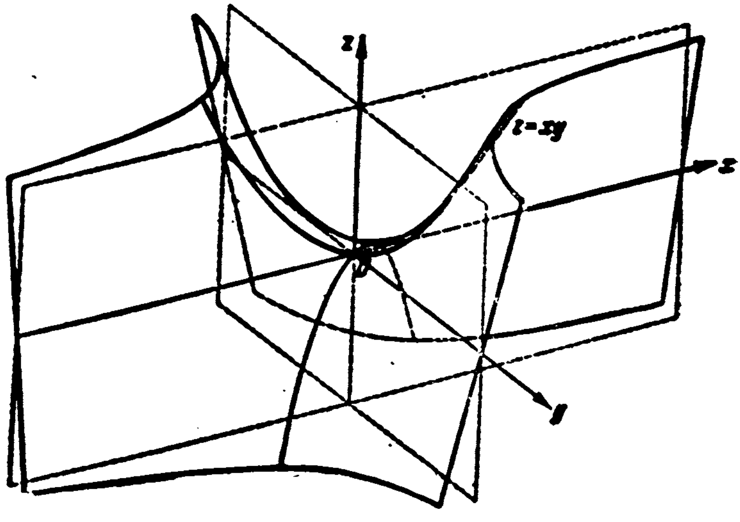
Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ նաև, որ $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$ կետում մյուս մասնակի ածանցյալները նույնպես հավասար են զրոյի։

Ուրեմն, էքստրեմումի համար «կասկածելի» հանդիսանում են այն կետերը, որտեղ բոլոր առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները դառնում են զրո. այդ կետերի կոորդինատները կարելի է գտնել, լուծելով հետևյալ հավասարումների սիստեմը՝

$$\left.\begin{array}{l} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ինչպես և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, այդպիսի կետերը կոչվում են ս տ ա ց ի ո ն ա ր կետեր։

152. Ստացիոնար կետերի հետազոտումը (երկու փոփոխականի դեպքը): *Ինչպես և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում, այստեղ ևս ստացիոնար կետում բոլորովին էլ ապահովված չէ էքստրեմումի առկայությունը։ Եթե, օրինակի համար. վերցնենք* $z=xy$ *պարզ ֆունկցիան, ապա դրա համար* $z'_x=y$ *և* $z'_y=x$ *ածանցյալները միասին զրո են դառնում միայն մեկ կետում՝* $(0, 0)$ *սկզբնակետում, որտեղ* $z=0$*։ Միաժամանակ անմիջականորեն երևում է, որ այդ կետի ցանկացած շրջակայքում ֆունկցիան ընդունում է, թե՛ դրական, թե՛ բացասական արժեքներ և էքստրեմում չկա։ 59-րդ գծագրի վրա պատկերված է*



Գծ. 59.

$z=xy$ հավասարմանը համապատասխանող մակերևույթը (հիպերբոլական պարաբոլոիդ). սկզբնակետի մոտ նա թամբաձև է, մեկ ուղղաձիգ հարթությունում ծռվելով դեպի վերև, իսկ մյուսում՝ դեպի ներքև։

Այսպիսով, առաջանում է էքստրեմումի գոյության (կամ բացակայության) բավարար պայմանների հարցը, այն հետազոտության հարցը, որին լրացուցիչ կերպով պետք է ենթարկվի ստացիոնար կետը։

Մենք սահմանափակվում ենք երկու փոփոխականների $f(x, y)$ ֆունկցիայի դեպքով։ Ենթադրենք, թե այդ ֆունկցիան որոշված է, անընդհատ է և ունի առաջին ու երկրորդ կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ մի որոշ (x_0, y_0) կետի շրջակայքում, որն ստացիոնար կետ է, այսինքն՝ բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \qquad f'_y(x_0, y_0)=0 \tag{1ա}$$

Որպեսզի իմանանք, թե արդյո՞ք մեր ֆունկցիան (x_0, y_0) կետում էքստրեմում ունի թե՞ ոչ, բնականաբար պետք է դիմել

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

տարբերության դիտարկմանը։ Այդ տարբերությունը վերլուծենք Թեյլորի բանաձևով, լրացուցիչ անդամը գրելով Լագրանժի տեսքով [n° **150**, *(5)*] *և սահմանափակվելով սկզբի երկու անդամներով։ Բայց, քանի որ (x_0, y_0) կետը, ըստ ենթադրության, ստացիոնար կետ է, ուստի առաջին անդամը չքանում է, և մենք պարզապես կունենանք՝*

$$\Delta = \frac{1}{2!}\{f''_{x^2}\cdot\Delta x^2 + 2f''_{xy}\cdot\Delta x\Delta y + f''_{y^2}\cdot\Delta y^2\} \tag{2}$$

Այստեղ Δx, Δy աճերի դերը խաղում են $x-x_0$ և $y-y_0$ տարբերությունները, և բոլոր ածանցյալները հաշվվում են մի՝

$$(x_0+\theta\Delta x, \ y_0+\theta\Delta y) \qquad (0<\theta<1)$$

կետում։

Դիտարկման ենթարկենք այդ ածանցյալների արժեքները հենց ուսումնասիրվող կետում՝

$$a_{11}=f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad a_{12}=f''_{xy}(x_0, y_0), \quad a_{22}=f''_{y^2}(x_0, y_0) \tag{3}$$

և ընդունենք՝

$$f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x, \ y_0+\theta\Delta y)=a_{11}+\alpha_{11},$$

$$f''_{xy}(\dots)=a_{12}+\alpha_{12}, \quad f''_{y^2}(\dots)=a_{22}+\alpha_{22},$$

այնպես որ, երկրորդ կարգի ածանցյալների անընդհատության շնորհիվ՝

բոլոր $\alpha \to 0$, երբ $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$։

Δ տարբերությունը կգրվի այսպես՝

$$\Delta = \frac{1}{2}\{a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2 + \alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\}։$$

Մենք ցույց կտանք, որ Δ տարբերության վարքն էապես կախված է $a_{11}a_{22} - a^2_{12}$ արտահայտության նշանից։

Դատողությունները հեշտացնելու համար այժմ ընդունենք $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$, որտեղ $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ մեծությունը (x_0, y_0) և (x, y) կետերի հեռավորությունն է։ Այդ դեպքում, վերջնականապես կունենանք՝

$$\Delta = \frac{\rho^2}{2}\{a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi +$$

$$+ \alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi\}։$$

1°. Նախ ենթադրենք, թե, $a_{11}a_{22} - a^2_{12} > 0$։

Այս դեպքում $a_{11}a_{22} > 0$, ուստի $a_{11} \neq 0$, և $\{\ldots\}$ փակագծերի մեջ գտնվող առաջին եռանդամը կարելի է ներկայացնել այսպես՝

$$\frac{1}{a_{11}}\cdot[(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a^2_{12})\sin^2\varphi], \tag{5}$$

Այստեղից պարզ է, որ $[\ldots]$ փակագծերի մեջ եղած արտահայտությունը միշտ դրական է, ուստի վերոհիշյալ եռանդամը φ-ի բոլոր արժեքների համար, զրո չդառնալով, պահպանում է a_{11} գործակցի նշանը։ Նրա բացարձակ արժեքը, որպես $[0, 2\pi]$ միջակայքում φ-ի անընդհատ ֆունկցիա, ունի m փոքրագույն (ակներևաբար՝ դրական) արժեք՝

$$|a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi| \geqslant m > 0։$$

Մյուս կողմից, եթե դիմենք $\{\ldots\}$ փակագծերի մեջ գրած երկրորդ եռանդամին, ապա, (4)-ի շնորհիվ, միանգամից բոլոր φ-երի համար կունենանք՝

$$|\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi| \leqslant |\alpha_{11}| + 2|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| < m,$$

հենց որ ρ-ն (իսկ սրա հետ նաև Δx, Δy աճերը) բավականաչափ փոքր է։ Բայց այդ ժամանակ $\{\ldots\}$ փակագծերի ներսի ամբողջ արտահայտությունը, և ուրեմն նաև Δ տարբերությունը, կպահպանի նույն *նշանը, ինչ որ եռանդամներից առաջինը, այսինքն՝ a_{11}-ի նշանը։*

Այսպիսով, եթե $a_{11}>0$, ապա նաև $\Delta>0$, այսինքն՝ դիտարկվող (x_0, y_0) կետում ֆունկցիան ունի մ ի ն ի մ ու մ. իսկ եթե $a_{11}<0$, կունենանք նաև $\Delta<0$, այսինքն՝ կա մ ա ք ս ի մ ու մ։

2°. Այժմ ենթադրենք, թե $a_{11}a_{22}-a^2_{12}<0$։

Կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ $a_{11}\neq 0$. այդ ժամանակ այստեղ ևս կարելի է օգտագործել (5) ձևափոխությունը։ Երբ $\varphi=\varphi_1=0$, [...] փակագծերի արտահայտությունը կլինի դ ր ա կ ա ն, որովհետև կդառնա a^2_{11}։ Ընդհակառակը, եթե $\varphi=\varphi_2$ արժեքը որոշենք

$$a_{11}\cos\varphi_2+a_{12}\sin\varphi_2=0 \qquad (\sin\varphi_2\neq 0)$$

պայմանից, ապա այդ արտահայտությունը կբերվի հետևյալին՝ $(a_{11}a_{22}-a^2_{12})\sin^2\varphi_2$ և կլինի բ ա ց ա ս ա կ ա ն։ ρ-ի բավականաչափ փոքր արժեքի դեպքում {...} փակագծերի ե ր կ ր ո ր դ եռանդամը ինչպես $\varphi=\varphi_1$ արժեքի, նույնպես և $\varphi=\varphi_2$ արժեքի համար կլինի ցանկացած չափով փոքր, և Δ-ի նշանը կորոշվի ա ռ ա ջ ի ն եռանդամի նշանի միջոցով։ Այսպիսով, դիտարկվող (x_0, y_0) կետի ցանկացած մոտակայքում՝ այն ճառագայթների վրա, որոնք որոշվում են $\varphi=\varphi_1$ և $\varphi=\varphi_2$ անկյուններով, Δ տարբերությունը կունենա տարբեր նշաններով արժեքներ։ Հետևապես. այդ կետում էքստրեմում լինել չի կարող։

Եթե $a_{11}=0$, և {...} փակագծերի առաջին եռանդամը դառնում է՝

$$2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi=\sin\varphi\cdot(2a_{12}\cos\varphi+a_{22}\sin\varphi),$$

ապա, օգտվելով նրանից, որ անշուշտ $a_{12}\neq 0$, կարելի է որոշել $\varphi_1\neq 0$ անկյունն այնպես, որ՝

$$|a_{22}|\,|\sin\varphi_1|<2|a_{12}|\cdot|\cos\varphi_1|։$$

Այդ ժամանակ $\varphi=\varphi_1$ և $\varphi=\varphi_2=-\varphi_1$ արժեքների համար վերոհիշյալ եռանդամը կունենա հակառակ նշաններ, և դատողությունն ավարտվում է, ինչպես և վերևում։

Այսպիսով, եթե $a_{11}a_{22}-a^2_{12}>0$, ապա փորձարկվող (x_0, y_0) ս տ ա ց ի ո ն ա ր կետում $f(x, y)$ ֆունկցիան ունի էքստրեմում, այն է՝ մ ա ք ս ի մ ու մ $a_{11}<0$ դեպքում և մինիմում $a_{11}>0$ դեպքում: Իսկ եթե $a_{11}a_{22}-a^2_{12}<0$, ապա էքստրեմում չկա:

Իսկ այն դեպքում, երբ $a_{11}a_{22}-a^2_{12}=0$, հարցը լուծելու համար պետք է դիմել բարձր կարգի ածանցյալներին, այդ «կասկածելի» դեպքը մենք քննության չենք առնի։

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն: *Առաջինն Էյլերն է նկատել*

$$f'_x(x_0, y_0)=0, \qquad f'_y(x_0, y_0)=0$$

պայմանների ա ն հ ր ա ժ ե շ տ ու թ յ ու ն ը, որպեսզի $f(x, y)$ *ֆունկցիան* (x_0, y_0)

կետում էքստրեմում ունենա։ Սակայն նա սխալվել է, կարծելով, թե դրա համար բավարար պայման է հանդիսանում միատեսակ էքստրեմումի առկայությունն ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի առանձին վերցրած (որ տեղի կունենա, օրինակի համար, եթե f''_{x^2} և f''_{y^2} ածանցյալները միևնույն նշանն ունենան այդ կետում)։ Լագրանժը հասկացել է Էյլերի սխալը և որպես բավարար պայման ստացել է

$$f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 > 0$$

անհավասարությունը։ Նա նշել է նաև, որ հակառակ անհավասարությունը պայմանավորում է էքստրեմումի բացակայությունը, սակայն այդ հիմնավորել է ոչ լրիվ։

Օրինակներ. *1) մաքսիմումի ու մինիմումի համար հետազոտենք*

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0, \; q > 0)$$

ֆունկցիան։ Հաշվենք մասնակի ածանցյալները՝

$$z'_x = \frac{x}{p}, \qquad z'_y = \frac{y}{q}.$$

Այստեղից անմիջապես տեսնում ենք, որ միակ ստացիոնար կետը $(0, 0)$ կոորդինատների սկզբնակետն է։

Հաշվելով a_{11}, a_{12} և a_{22} արտահայտությունները, կստանանք՝

$$a_{11} = \frac{1}{p}, \qquad a_{12} = 0, \qquad a_{22} = \frac{1}{q}.$$

այստեղից՝ $a_{11}a_{22} - a^2_{12} > 0$։ Հետևապես, $(0,0)$ կետում z ֆունկցիան ունի մինիմում. ի միջի այլոց, այդ պարզ է նաև անմիջականորեն։

Մեր ֆունկցիայի երկրաչափական պատկերը կլինի էլիպսական պարաբոլոիդ, որի գագաթը գտնվում է սկզբնակետում (հմմ. գծ. 55)։

2) $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} \quad (p > 0, \; q > 0)$.

ունենք՝

$$z'_x = \frac{x}{p}, \qquad z'_y = -\frac{y}{q}.$$

Այստեղ ևս տեսնում ենք, որ ստացիոնար կետ է $(0, 0)$ կետը։

Հաշվում ենք՝

$$a_{11} = \frac{1}{p}, \qquad a_{12} = 0, \qquad a_{22} = -\frac{1}{q}.$$

այստեղից՝ $a_{11}a_{22} - a^2_{12} < 0$։ Հետևապես, էքստրեմում չկա։

Երկրաչափորեն մենք այստեղ գործ ունենք հիպերբոլական պարաբոլոիդի հետ, որի գագաթը գտնվում է սկզբնակետում։

3) $z = y^2 + x^4$ կամ $z = y^2 + x^3$.

երկու դեպքում էլ ստացիոնար կետ է $(0, 0)$ կետը. և այնտեղ $a_{11}a_{22} - a^2_{12} = 0$։

Մեր հայտանիշը պատասխան չի տալիս, ընդ որում, ինչպես անմիջապես երևում է, առաջին դեպքում կլինի մինիմում, իսկ երկրորդ դեպքում՝ էքստրեմում չկա։

153. Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները: Օրինակներ: *Դիցուք $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ֆունկցիան որոշված է ու անընդհատ մի D սահմանափակ փակ տիրույթում և այդ տիրույթում ունի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ: Ըստ Վայերշտրասի թեորեմայի [n° 136], այդ տիրույթում կգտնվի այնպիսի $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$ կետ, որտեղ ֆունկցիան ստանում է բոլոր արժեքներից մեծագույնը (փոքրագույնը): Եթե $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_m)$ կետը գտնվում է D տիրույթի ներսը, ապա այդտեղ ֆունկցիան, ակներևաբար, ունի մաքսիմում (մինիմում), ուստի այդ դեպքում մեզ հետաքրքրող կետը անպայման կգտնվի էքստրեմումի համար «կասկածելի» կետերի թվում: Սակայն u ֆունկցիան իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքին կարող է հասնել նաև տիրույթի եզրի վրա: Ուստի*, որպեսզի գտնենք $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը D տիրույթում, պետք է գտնել էքստրեմումի համար «կասկածելի» բոլոր ներքին ստացիոնար կետերը, այդ կետերում հաշվել ֆունկցիայի արժեքները և դրանք համեմատել տիրույթի եզրի կետերում ֆունկցիայի ստացած արժեքների հետ, այդ արժեքներից մեծագույնը (փոքրագույնը) հենց կլինի ֆունկցիայի մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը ամբողջ տիրույթում:

Այս ասածները պարզաբանենք օրինակներով:

1) Դիցուք պահանջվում է գտնել

$$u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

ֆունկցիայի մեծագույն արժեքն այն եռանկյունում, որը սահմանափակված է x-երի առանցքով, y-երի առանցքով և $x + y = 2\pi$ ուղղով (գծ. 60): Ունենք՝

$$u'_x = \cos x - \cos(x + y); \quad u'_y = \cos y - \cos(x + y).$$

Տիրույթի ներսում ածանցյալները զրո են դառնում միայն $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ կետում, որտեղ $u = \frac{3\sqrt{3}}{2}$: Քանի որ տիրույթի եզրի վրա, այսինքն՝ $x=0$, $y=0$ և $x+y=2\pi$ ուղիղների վրա, մեր ֆունկցիան հավասար է զրոյի, ուստի, ակներևաբար, հենց վերևում գտած $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ կետում ֆունկցիան ստանում է իր մեծագույն արժեքը:

2) Գտնել

$$u = xyzt$$

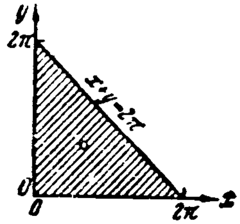
արտադրյալի մեծագույն արժեքը, որտեղ x, y, z, t փոփոխականները ոչբացասական թվեր են և նրանց գումարը պահպանում է հաստատուն արժեք՝

$$x + y + z + t = 4c.$$

Ցույց տանք, որ u-ի համար մեծագույն արժեք ստացվում է այն դեպքում, երբ բոլոր արտադրիչներն իրար հավասար են՝ $x = y = z = t = c$*. Տված պայմանից գտնելով t-ն՝ $t = 4c - x - y - z$, տեղադրենք այդ արտահայտությունը u-ի մեջ, կստանանք՝

$$u = xyz(4c - x - y - z).$$

Այստեղ մենք ունենք x, y, z երեք անկախ փոփոխականների ֆունկցիա եռաչափ տիրույթում, որը որոշվում է՝



Գծ. 60.

$$x \geqslant 0, \qquad y \geqslant 0, \qquad z \geqslant 0, \qquad x + y + z \leqslant 4c$$

պայմաններով։ Երկրաչափորեն այդ տիրույթը ներկայացվում է $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 4c$ հարթություններով սահմանափակված քառանիստ (տետրաէդրի) տեսքով։

Ածանցյալները հաշվենք և հավասարեցնենք զրոյի.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz(4c - 2x - y - z) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = zx(4c - x - 2y - z) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy(4c - x - y - 2z) = 0.$$

Տիրույթի ներսում այդ հավասարումները բավարարվում են միայն $x = y = z = c$ կետում, որտեղ $u = c^4$։ Քանի որ տիրույթի եզրին $u = 0$, ուստի այդ կետում, իրոք, ֆունկցիայի համար ստացվում է մեծագույն արժեք։

Մեր պնդումն ապացուցված է, քանի որ $x = y = z = c$ դեպքում նաև $t = c$**։

Դիտողություն։ Այս բոլոր օրինակներում դիտարկվող տիրույթի ներսում գոյություն ուներ միայն մեկ ստացիոնար կետ։ Կարելի կլիներ համոզվել, որ այդ կետում կա մաքսիմում։ Սակայն, ի տարբերություն նրանից, ինչ նշված էր մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում (տես n° 118-ում արված դիտողությունը), այստեղ միայն դրանից չէր կարելի եզրակացնել, որ մենք գործ ունենք տիրույթում ֆունկցիայի մ ե ծ ա գ ու յ ն արժեքի հետ:

Հետևյալ պարզ օրինակը ցույց է տալիս, որ այդպիսի եզրակացությունը

* Մենք միայն որոշակիության համար արտադրիչների թիվը վերցնում ենք չորս, արդյունքը նույնը կլինի ցանկացած թվով արտադրիչների համար։

** Ասածից հետևում է, որ այն դրական թվերի xyzt արտադրյալը, որոնց գումարը հավասար է 4c-ի, չի գերազանցում c^4-ին, ուստի՝

$$\sqrt[4]{xyzt} < c = \frac{x + y + z + t}{4},$$

այսինքն՝ երկրաչափական միջինը չի գերազանցում թվաբանական միջինին։ Այդ ճիշտ է ցանկացած քանակությամբ թվերի համար։

իրականում կարող է հանգեցնել ոչ ճիշտ արդյունքի։ [— 5,5; — 1,1] ուղղանկյան ներսը դիտարկենք

$$u = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$$

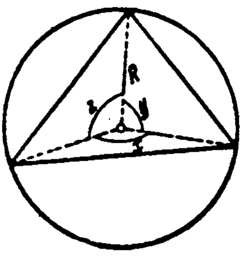
ֆունկցիան։ Նրա

$$u'_x = 3x^2 - 8x + 2y, \qquad u'_y = 2x - 2y$$

ածանցյալները տիրույթի սահմաններում զրո են դառնում միայն (0,0) կետում։ n° 187-*ում տրված հայտանիշի օգնությամբ հեշտ է տեսնել, որ այդ կետում ֆունկցիան ունի մաքսիմում (որը հավասար է զրոյի)։ Բայց այդ արժեքը տիրույթում մեծագույնը չի լինի, որովհետև, օրինակ, (5,0) կետում ունենք* $u=25$։

Դրա հետևանքով, մի քանի փոփոխականների ֆունկցիայի դեպքում, տիրույթում ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները որոնելիս, մաքսիմումի և մինիմումի համար ֆունկցիայի հետազոտությունը գործնականորեն հարկավոր չէ։

154. Խնդիրներ: *Շատ խնդիրներ, — ինչպես մաթեմատիկայի բնագավառից, նույնպես և գիտության ու տեխնիկայի այլ բնագավառներից, — բերվում են մի որոշ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքը գտնելու հարցին։*



Գծ. 61.

Ստորև բերված 1) և 2) խնդիրների լուծումը կապված է նախորդ n°-*ում արդեն դիտարկված օրինակների հետ։*

1) Տված R *շառավիղ ունեցող շրջանին ներգծած եռանկյունների թվում գտնել այն, որի մակերեսն ամենամեծն է (գծ. 61)։*

Եթե եռանկյան կողմերի վրա հենված կենտրոնական անկյունները նշանակենք x, y, z, *ապա դրանք կապված կլինեն* $x + y + z = 2\pi$ *առնչությամբ, որտեղից* $z = 2\pi - x - y$։ *Եռանկյան* P *մակերեսը դրանց միջոցով կարտահայտվի այսպես՝*

$$P = \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin x + \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin y + \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin z = \frac{1}{2} R^2 [\sin x + \sin y - \sin(x+y)]։$$

Այստեղ x *և* y *փոփոխականների փոփոխման տիրույթը որոշվում է* $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 2\pi$ *պայմաններով։ Պետք է գտնել փոփոխականների այն արժեքները, որոնք փակագծերի ներսի արտահայտությանը տալիս են մեծագույն արժեք։*

Մենք արդեն գիտենք [n° **153**, *օրինակ 1)*], *որ դրանք կլինեն* $x = y = \frac{3\pi}{3}$ *արժեքները, այնպես որ նաև* $z = \frac{2\pi}{3}$. *ստացվում է հավասարակողմ եռանկյուն։*

2) Տված 2p *պարագիծ ունեցող եռանկյուններից գտնել այն, որի* P *մակերեսն ամենամեծն է։*

Դիցուք եռանկյան կողմերն են x, y, z. *այդ դեպքում, ըստ հայտնի բանաձևի, կունենանք՝*

$$P = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}\,,$$

կարելի էր, այստեղ տեղադրելով $z = 2p - x - y$, P-ն բերել հետևյալ տեսքին՝

$$P = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

և որոնել այդ ֆունկցիայի ամենամեծ արժեքը այն եռանկյուն տիրույթում, որի մասին արդեն խոսել ենք n° 124-ի 5)-ում։

Մենք կվարվենք այլ կերպ. խնդիրը բերվում է դրական թվերի՝

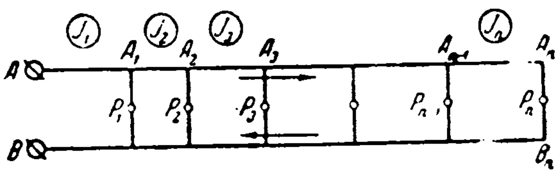
$$u = (p-x)(p-y)(p-z)$$

արտադրյալի ամենամեծ արժեքը գտնելուն, այն պայմանով, որ նրանց գումարը հաստատուն է՝

$$(p-x)+(p-y)+(p-z) = 3p - 2p = p.$$

Իսկ մենք արդեն գիտենք [153, օրինակ 2)], որ դրա համար բոլոր արտադրիչները պետք է իրար հավասար լինեն, ուստի $x = y = z = \frac{2P}{3}$։ Դարձյալ ստացվեց հավասարակողմ եռանկյունը։

3) Դիտարկենք զուգահեռ միացումով էլեկտրական սնուցող ցանց։ 62-րդ գծագրի վրա ներկայացված է ցանցի սխեման, ընդ որում A-ն և B-ն հոսանքի աղբյուրներն են և P_1, P_2, ..., P_n-ը՝ հոսանքի ընդունիչներն են, որոնք, համապատասխանաբար, սպառում են i_1, i_2, ..., i_n հոսանք։ Պահանջվում է լարերի հատույթները որոշել այնպես, որպեսզի ամբողջ մագիստրալի համար ծախսվի նվազագույն քանակությամբ պղինձ, եթե նախապես տրված է, որ պոտենցիալների ընդհանուր թույլատրելի անկումը հավասար է $2e$-ի։



Գծ. 62.

Ակներևաբար, բավական է սահմանափակվել լարերից միայն մեկի, ասենք AA_n-ի, ուսումնասիրությամբ, որովհետև մյուս լարը լրիվին գտնվում է համանման պայմաններում։ AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ մասերի երկարությունները (մետրերով) նշանակենք l_1, l_2, ..., l_n-ով, նրանց հատույթների մակերեսները (մմ²-ներով)՝ q_1, q_2, ..., q_n-ով։ Այդ ժամանակ

$$u = l_1q_1 + l_2q_2 + \cdots + l_nq_n$$

արտահայտությունը հենց կլինի ամբողջ ծախսված պղնձի ծավալը (սմ³-ներով). Նրա համար պետք է ստանալ ամենափոքր արժեք, ի նկատի ունենալով, որ AA_n լարի մեջ պոտենցիալի ընդհանուր անկումը պետք է հավասար լինի e-ի։

Հեշտ է հաշվել, թե շղթայի AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ հատվածներում ինչպիսի J_1, J_2, ..., J_n հոսանքներ կանցնեն՝

$$J_1 = i_1 + i_2 + \cdots + i_n, \quad J_2 = i_2 + \cdots + i_n, \quad \ldots, \quad J_n = i_n.$$

Եթե մեկ մետր երկարությամբ և մեկ մմ² հատույթով պղնձյա լարի դիմադրությունը նշանակենք ρ-ով, ապա այդ հատվածների դիմադրությունները կլինեն՝

$$r_1 = \frac{\rho l_1}{q_1}, \qquad r_2 = \frac{\rho l_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad r_n = \frac{\rho l_n}{q_n},$$

ուստի, համաձայն Օհմի օրենքի, այդ հատվածներում պոտենցիալի համապատասխան անկումները կարտահայտվեն այսպես՝

$$e_1 = r_1 J_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{q_1}, \quad e_2 = r_2 J_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{q_2}, \ \ldots, \ e_n = r_n J_n = \frac{\rho l_n J_n}{q_n}.$$

Որպեսզի խուսափենք բարդ հաշվումներից, մենք, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ փոփոխականների փոխարեն, կվերցնենք հենց այդ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ մեծությունները, որոնք իրար հետ կապված են հետևյալ պարզ պայմանով՝

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_n = e, \text{ որտեղից՝ } e_n = e - e_1 - e_2 - \cdots - e_{n-1}.$$

Այդ ժամանակ, իր հերթին՝

$$q_1 = \frac{\rho l_1 J_1}{e_1}, \ q_2 = \frac{\rho l_2 J_2}{e_2}, \ \ldots, \ q_n = \frac{e l_n J_n}{e_n} = \frac{\rho l_n J_n}{e - e_1 - e_2 - \cdots - e_{n-1}},$$

և՝

$$u = \rho\left[\frac{l_1^2 J_1}{e_1} + \cdots + \frac{l^2_{n-1} J_{n-1}}{e_{n-1}} + \frac{l^2_n J_n}{e - e_1 - e_2 - \cdots - e_{n-1}}\right],$$

ընդ որում $e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}$ անկախ փոփոխականների փոփոխման տիրույթը որոշվում է

$$e_1 > 0, \ e_2 > 0, \ \ldots, \ e_{n-1} > 0, \quad e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} < e$$

անհավասարություններով։

u-ի ածանցյալներն ըստ բոլոր փոփոխականների հավասարեցնելով զրոյի, կստանանք հավասարումների հետևյալ սիստեմը՝

$$-\frac{l_1^2 J_1}{e^2_1} + \frac{l_n^2 J_n}{(e - e_1 - \cdots - e_{n-1})^2} = 0,$$

$$-\frac{l_2^2 J_2}{e_2^2} + \frac{l^2_n J_n}{(e - e_1 - \cdots - e_{n-1})^2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{l^2_{n-1} J_{n-1}}{e^2_{n-1}} + \frac{l_n^2 J_{2n}}{(e - e_1 - \cdots - e_{n-1})^2} = 0,$$

որտեղից (նորից գրելով e_n-ը) կունենանք՝

$$\frac{l_1^2 J_1}{e_1^2} = \frac{l_2^2 J_2}{e_2^2} = \cdots = \frac{l_n^2 J_n}{e_n^2},$$

Այս բոլոր հարաբերությունների ընդհանուր մեծությունը հարմար է նշանակել $\frac{1}{\lambda^2}$*-ով ($\lambda > 0$)։ Այդ դեպքում՝*

$$e_1=\lambda l_1\sqrt{J_1}\,,\qquad e_2=\lambda l_2\sqrt{J_2}\,,\ \ldots,\quad e_n=\lambda l_n\sqrt{J_n}\,,$$

ընդ որում λ-ն՝ հեշտությամբ որոշվում է $e_1+e_2+\cdots+e_n=e$ *պայմանից՝*

$$\lambda=\frac{e}{l_1\sqrt{J_1}+l_2\sqrt{J_2}+\cdots+l_n\sqrt{J_n}},$$

Վերջապես, վերադառնալով մեր հիմնական q_1, q_2, …, q_n *փոփոխականներին, կստանանք՝*

$$q_1=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_1}\,,\quad q_2=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_2}\,,\quad \ldots,\quad q_n=\frac{\rho}{\lambda}\sqrt{J_n}\,,$$

այնպես որ լարերի ամենաձեռնտու հաստությունները ստացվում են համեմատական- համապատասխան հոսանքի ուժերից քառակուսի արմատներին։

Դիտողություն: *Քանի որ տվյալ դեպքում* e_1, e_2, …, e_{n-1} *փոփոխական- ների փոփոխման տիրույթը բաց տիրույթ է, ապա Վայերշտրասի երկրորդ թեո- րեման* [n° **186**] *անմիջորեն կիրառելի չէ։ Հաշվի առնենք, սակայն, որ տիրույթի եզրը որոշվում է*

$$e_1\geqslant 0,\ e_2\geqslant 0,\ \ldots,\ e_{n-1}\geqslant 0,\ e_1+e_2+\cdots+e_{n-1}\leqslant e$$

անհավասարություններով, որտեղ գոնե մեկ դեպքում հավասարություն տեղի ունի։ Այդ դեպքում, $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ *կետը տիրույթի եզրին մոտենալիս* u*-ի մեծու- թյունն անվերջորեն աճում է։ Այստեղից արդեն կարելի է եզրակացնել, որ* e_1, e_2, …, e_{n-1} *մեծությունների համար գտած արժեքները, իրոք, փոքրագույն արժեք են- տալիս* u *ֆունկցիային։*

ՏԱՍՆԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՆԱԽՆԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ (ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ)

§ 1. ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ԱՅՆ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ

155. Նախնական ֆունկցիայի (եվ անորոշ ինտեգրալի) գաղափարը: *Գիտության ու տեխնիկայի շատ հարցերում հարկ է լինում վերականգնել ֆունկցիան նրա հայտնի ածանցյալով:*

*n° **78**-ում, ենթադրելով, որ հայտնի է շարժման $s=f(t)$ հավասարումը, այսինքն՝ ժամանակի ընթացքում ճանապարհի փոփոխության օրենքը, մենք ածանցելու միջոցով գտանք նախ $v=\frac{ds}{dt}$ արագությունը, իսկ այնուհետև նաև $a=\frac{dv}{dt}$ արագացումը: Գործնականում, սակայն, հաճախ հարկ է լինում լուծել հակադարձ խնդիրը. a արագացումը տրված է որպես t ժամանակի ֆունկցիա՝ $a=a(t)$ և պահանջվում է որոշել v արագությունը և անցած s ճանապարհը, կախված t-ից: Այսպիսով, այստեղ կարիք է լինում $a=a(t)$ ֆունկցիայով վերականգնել այն $v=v(t)$ ֆունկցիան, որի համար a-ն ածանցյալ է հանդիսանում, իսկ այնուհետև, իմանալով v ֆունկցիան, գտնել այն $s=s(t)$ ֆունկցիան, որի համար ածանցյալ կհանդիսանա v-ն:*

*Նման եղանակով, գիտենալով x-երի առանցքի $[0, x]$ ուղղագիծ հատվածի երկարությամբ անընդհատ բաշխված $m=m(x)$ զանգվածը, n° **78**-ում մենք ածանցման միջոցով գտանք $\rho=\rho(x)$ «գծային» խտությունը: Բայց բնականաբար հարց է ծագում, թե խտության փոփոխության տրված $\rho=\rho(x)$ օրենքի միջոցով ինչպե՞ս գտնել բաշխված զանգվածի իր մեծությունը, այսինքն՝ դարձյալ $\rho(x)$ հայտնի ֆունկցիայով գտնել այն $m=m(x)$ ֆունկցիան, որի համար $\rho(x)$-ն ածանցյալ է հանդիսանում:*

$F(x)$ ֆունկցիան տվյալ x միջակայքում կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի **նախնական ֆունկցիա*** կամ նրա **ինտեգրալ**, եթե այդ ամբողջ միջակայքում $f(x)$-ը հանդիսանում է $F(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը, կամ, որ միևնույնն է, $f(x)dx$-ը $F(x)$-ի համար ծառայում է որպես դիֆերենցիալ՝

$$F'(x) = f(x) \text{ կամ } dF(x) = f(x)\,dx^{**}։$$

Ֆունկցիայի բոլոր նախնական ֆունկցիաների որոնումն էլ հենց, որ նրա ինտեգրում է կոչվում, ինտեգրալ հաշվի *խնդիրներից մեկն է. ինչպես տեսնում ենք, այս խնդիրը դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական խնդրի հակադարձն է։*

Թեորեմա: Եթե մի որոշ (վերջավոր կամ անվերջ, փակ կամ ոչ-փակ) X միջակայքում $F(x)$ ֆունկցիան նախնական ֆունկցիա է $f(x)$ ֆունկցիայի համար, ապա $F(x)+C$ ֆունկցիան ևս, որտեղ C-ն ցանկացած հաստատուն է, նույնպես կլինի նախնական ֆունկցիա $f(x)$-ի համար: Հակադարձաբար, յուրաքանչյուր ֆունկցիա, որը նախնական ֆունկցիա է $f(x)$-ի համար X միջակայքում, կարող է ներկայացվել այդ ձևով:

Ապացուցում։ Այն հանգամանքը, որ $F(x)$-ի հետ մեկտեղ $F(x)+C$-ն ևս $f(x)$-ի համար նախնական ֆունկցիա է, միանգամայն ակներև է, քանի որ $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$։

Դիցուք այժմ $\Phi(x)$-ը ցանկացած նախնական ֆունկցիա է $f(x)$-ի համար, այնպես որ $[a, b]$ միջակայքում

$$\Phi'(x) = f(x)։$$

*Քանի որ $F(x)$ և $\Phi(x)$ ֆունկցիաները դիտարկվող միջակայքում միևնույն ածանցյալն ունեն, ապա նրանք տարբերվում են հաստատունով [n° **110**, հետևանք]՝*

$$\Phi(x) = F(x) < C,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Թեորեմայից հետևում է, որ տվյալ $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր նախնական ֆունկցիաներն իմանալու համար բավական է գտնել միայն

** «Նախնական» (կամ «պրիմիտիվ») ֆունկցիա տերմինը նույնպես պատկանում է Լագրանժին (տե՛ս 172 էջի ծանոթագրությունը)։*

*** Այս գրքում ասում են նաև, որ $F(x)$ ֆունկցիան նախնական ֆունկցիա (կամ ինտեգրալ) է $f(x)\,dx$ դիֆերենցիալ արտահայտության համար։*

մեկ $F(x)$ *նախնական ֆունկցիա, քանի որ նրանք իրարից տարբերվում են միայն հաստատուն գումարելիներով։*

Դրա շնորհիվ, $F(x)+C$ արտահայտությունը, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է, ներկայացնում է այն ֆունկցիայի ընդհանուր տեսքը, որն ունի $f(x)$ ածանցյալը կամ $f(x)\,dx$ դիֆերենցիալը։ *Այդ արտահայտությունն անվանում են* $f(x)$*-ի* ***անորոշ ինտեգրալ*** *և նշանակում*

$$\int f(x)\,dx$$

սիմվոլով, որի մեջ անբացահայտ կերպով արդեն պարունակվում է կամայական հաստատուն։ $f(x)\,dx$ *արտադրյալը կոչվում է* ***ընդինտեգրալ արտահայտություն****, իսկ* $f(x)$ *ֆունկցիան՝* ***ընդինտեգրալ ֆունկցիա։***

Օրինակ։ *Դիցուք* $f(x)=x^2$. *այդ դեպքում, ինչպես դժվար չէ տեսնել, այդ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալը կլինի՝*

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

Այդ հեշտ է ստուգել հակադարձ գործողության՝ ածանցման միջոցով։

Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն հանգամանքի վրա, որ «ինտեգրալի» $\int$ *նշանի տակ գրում են որոնելի նախնական ֆունկցիայի* ***դիֆերենցիալը****, և ոչ թե* ***ածանցյալը*** *(մեր օրինակում* x^2dx *և ոչ* x^2*)։ Գրության այս ձևը, ինչպես ստորև կպարզվի* [n° **175**], *պատմականորեն է առաջ եկել. դրա հետ միասին, նա ունի նաև մի շարք առավելություններ, և նրա պահպանումը միանգամայն նպատակահարմար է։*

Անորոշ ինտեգրալի սահմանումից անմիջականորեն բխում են հետևյալ հատկությունները.

1. $$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx,$$

այսինքն՝ d և $\int$ նշանները, երբ առաջինը դրված է երկրորդի առջև, փոխադարձաբար կրճատվում են։

2. *Քանի որ* F(x)*-ը նախնական ֆունկցիա է* F′(x)*-ի համար, ապա ունենք՝*

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

որը կարող ենք արտագրել այսպես՝

$$\int dF(x) = F(x) + C:$$

Այստեղից երևում է, որ F(x)-ի առջև դրված d և $\int$ նշանները կրճատվում են նաև այն ժամանակ, երբ d-ն դրված է $\int$-ից հետո, սակայն այդ դեպքում F(x)-ին պետք է գումարել կամայական հաստատուն:

Վերադառնալով սույն n°*-ի սկզբում դրված մեխանիկական խնդրին, այժմ կարող ենք գրել, որ*

$$v = \int a(t)dt \quad \textit{և} \quad s = \int v(t)dt:$$

Որոշակիության համար ենթադրենք, թե գործ ունենք հավասարաչափ արագացող շարժման հետ, օրինակ՝ ծանրության ուժի ազդեցությամբ առաջացող շարժման հետ. այդ դեպքում $a = g$ *(եթե ուղղաձիգ ուղղությունը դեպի ցած դրական համարենք) և, ինչպես դժվար չէ կռահել,*

$$v = \int g dt = gt + C:$$

v *արագության համար մենք ստացանք մի արտահայտություն, որի մեջ, բացի* t *ժամանակից, մտնում է նաև* C *կամայական հաստատունը:* C*-ի տարբեր արժեքների դեպքում արագության համար ևս կստանանք տարբեր արժեքներ ժամանակի միևնույն պահին. հետևապես, մեր ունեցած տվյալները բավական չեն խնդրի լրիվ լուծման համար: Խնդրի լիովին որոշակի լուծման համար բավական է իմանալ արագության մեծությունը ժամանակի որևէ մի պահի: Օրինակի համար, դիցուք մեզ հայտնի է, որ* $t = t_0$ *պահին արագությունը՝* $v = v_0$*. այս արժեքները տեղադրենք արագության համար ստացված արտահայտության մեջ՝*

$$v_0 = gt_0 + C, \quad \textit{որտեղից՝} \quad C = v_0 - gt_0,$$

և այժմ մեր լուծումն ընդունում է միանգամայն որոշակի տեսք՝

$$v = g(t - t_0) + v_0.$$

Այնուհետև գտնենք s *ճանապարհի արտահայտությունը։ Ունենք՝*

$$s = \int [g(t - t_0) + v_0]dt = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + C'$$

(ածանցելով հեշտ է ստուգել, որ նախնական ֆունկցիան կարելի է այս ձևով վերցնել)։ Մեզ համար անհայտ C' *նոր հաստատունը կարելի է որոշել, եթե, օրինակ, տրված է, որ* $t = t_0$ *պահին ճանապարհը՝* $s = s_0$*։ Գտնելով, որ* $C' = s_0$*, լուծումը կարող ենք գրել վերջնական տեսքով՝*

$$s = \frac{1}{2} g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

t_0, s_0, v_0 *արժեքները պայմանականորեն կոչվում են* t, s, v *մեծությունների սկզբնական արժեքներ։*

Ճիշտ այդպես էլ կարելի է գրել՝

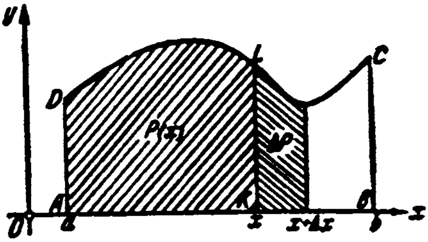
$$m = \int \rho(x)\, dx.$$

Այստեղ նույնպես ինտեգրելիս C *հաստատուն հանդես կգա, որն այս անգամ հեշտությամբ որոշվում է այն պայմանից, որ* $x = 0$ *դեպքում* m *զանգվածը նույնպես պետք է զրո դառնա։*

156. Ինտեգրալը և մակերեսի որոշման խնդիրը։ *Քանի որ պատմականորեն նախնական ֆունկցիայի գաղափարը սերտորեն կապված է եղել մակերեսը հաշվելու խնդրի հետ, ապա մենք այդ խնդրի վրա կանգ կառնենք հենց այստեղ (օգտվելով հարթ պատկերի մակերեսի ինտուիտիվ պատկերացումից և այդ հարցի ճշգրիտ դրումը հետաձգելով մինչև* XII *գլուխը)։*

Դիցուք [a, b] *միջակայքում տրված է* $y = f(x)$ *անընդհատ ֆունկցիան, որը միայն դրական (ոչ բացասական) արժեքներ է ընդունում։ Դիտարկենք* ABCD *պատկերը (գծ. 63), որը սահմանափակված է* $y = f(x)$ *կորով,* $x = a$ *և* $x = b$ *երկու օրդինատներով և* x*-երի առանցքի հատվածով. նման պատկերն անվանելու ենք* կորագիծ սեղան։ *Ցանկանալով որոշել այդ պատկերի* P *մակերեսի մեծությունը, ուսումնասիրենք* AKLD *փոփոխական պատկերի մակերեսը, որը գտնվում է* $x = a$ *սկզբնական օրդինատի և* [a, b] *միջակայ-*

քում x-ի կամայապես ընտրած արժեքին համապատասխանող օրդինատի միջև: x-ը փոփոխելիս այս վերջին մակերեսը համապատասխանաբար կփոփոխվի, ընդ որում յուրաքանչյուր x-ին կհամապատասխանի նրա միանգամայն որոշակի արժեք, այնպես որ AKLD կորագիծ սեղանի մակերեսը x-ի մի որոշ ֆունկցիա է. այդ ֆունկցիան նշանակենք P(x)-ով:



Գծ. 63.

Մեր առջև նախ խնդիր դնենք՝ գտնել այդ ֆունկցիայի աճը: Այդ նպատակով x-ին տանք մի որոշ (ասենք՝ դրական) Δx աճ. այդ դեպքում P(x) մակերեսը կստանա ΔP աճ: [x, x+Δx] միջակայքում f(x) ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները [n° **73**] նշանակենք, համապատասխանաբար, m և M, և ΔP մակերեսը բաղդատենք այն ուղղանկյունների մակերեսների հետ, որոնք կառուցված են Δx հիմքի վրա և ունեն m և M բարձրությունները: Ակներևաբար՝

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

որտեղից՝

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M:$$

Եթե $\Delta x \to 0$, ապա, անընդհատության հետևանքով, m-ը և M-ը կձգտեն f(x)-ին, և այդ դեպքում՝

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x):$$

Այսպիսով, մենք հանգում ենք հետևյալ նշանավոր թեորեմային, որը սովորաբար կոչվում է Նյուտոնի և Լայբնիցի թեորեմ*. P(x) փոփոխական մակերեսի ածանցյալն ըստ վերջին x աբսցիսի հավասար է y = f(x) վերջին օրդինատին:

Ուրիշ խոսքով, P(x) փոփոխական մակերեսը տվյալ y = f(x) ֆունկցիայի համար նախնական ֆունկցիա է: *Մյուս նախնական ֆունկցիաների շարքում այս աչքի է ընկնում նրանով, որ դառնում է զրո* x = a *դեպքում: Ուստի, եթե հայտնի է* f(x) *ֆունկ-*

* *Իրականում, սակայն, այդ թեորեման, թեև այլ ձևով, հրապարակել է դեռևս Իսահակ Բառոուն (1630 — 1677)՝ Նյուտոնի ուսուցիչը:*

ցիայի որևէ F(x) *նախնական ֆունկցիա և, նախորդ* n°*-ի թեորեմայի համաձայն՝*

$$P(x) = F(x) + C,$$

ապա C *հաստատունը հեշտ է որոշել, այստեղ ընդունելով* $x = a$՝

$$0 = F(a) + C, \text{ այնպես որ՝ } C = -F(a)։$$

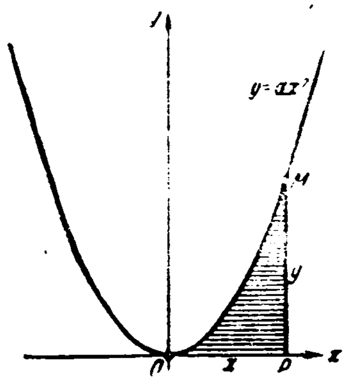
Վերջնականորեն՝

$$P(x) = F(x) - F(a)։$$

Մասնավորապես, ամբողջ ABCD *կորագիծ սեղանի մակերեսն ստանալու համար պետք է վերցնել* $x = b$՝

$$P = F(b) - F(a)։$$

Որպես օրինակ, գտնենք այն պատկերի P(x) *մակերեսը, որը սահմանափակված է* $y = ax^2$ *պարաբոլով, մինչև* x *աբսցիսին համապատասխանող օրդինատով և* x*-երի առանցքի հատվածով (գծ. 64)։ Քանի որ կոորդինատների սկզբնակետում պարաբոլը շոշափում է* x*-երի առանցքը, ապա* x*-ի սկզբնական արժեքն այստեղ հավասար է զրոյի։* $f(x) = ax^2$ *ֆունկցիայի համար հեշտ է գտնել նախնական ֆունկցիան՝* $F(x) = \frac{ax^3}{3}$։ *Այս ֆունկցիան էլ հենց* 0 *է դառնում* $x = 0$ *դեպքում, այնպես որ՝*



Գծ. 64.

$$P(x) = F(x) = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}$$

[*համեմատել* n°**48**, *3)*]։

Ի նկատի ունենալով այն կապը, որը գոյություն ունի ինտեգրալների հաշվելու և հարթ պատկերների մակերեսները գտնելու, այսինքն՝

նրանց քառակուսման միջև, սովորական է դարձել հենց ինտեգրալների հաշվումը ևս քառակուսում անվանել։

Որպեսզի վերևում ասածն ամբողջովին տարածվի նաև բացասական արժեքներ ընդունող ֆունկցիայի դեպքի վրա, բավական է պայմանավորվել՝ բացասական համարել պատկերի այն մասերի մակերեսները, որոնք դասավորված են x-*երի առանցքի տակ։*

Այսպիսով, ինչպիսին էլ լինի [a, b] *միջակայքում անընդհատ* f(x) *ֆունկցիան, ընթերցողը միշտ կարող է նրա նախնական ֆունկցիան պատկերացնել որպես փոփոխական մակերես, որը սահմանափակված է տվյալ ֆունկցիայի գրաֆիկով։ Սակայն, հասկանալի է, որ այս երկրաչափական լուսաբանումը չի կարելի նախնական ֆունկցիայի գոյության ապացույց համարել, քանի որ հենց իր՝ մակերեսի գաղափարը դեռևս հիմնավորված չէ։*

Հաջորդ գլխում [n° **183**] *մենք կկարողանանք տալ խիստ և ընդսմին զուտ անալիտիկ ապացույցն այն կարևոր փաստի, որ* տվյալ միջակայքում անընդհատ յուրաքանչյուր f(x) ֆունկցիա այդ միջակայքում ունի նախնական ֆունկցիա։ *Այդ պնդումը մենք ընդունում ենք այժմ իսկ։*

Այս գլխում մենք խոսելու ենք միայն անընդհատ ֆունկցիաների նախնական ֆունկցիաների մասին։ Եթե ֆունկցիան կոնկրետորեն է տրված և խզման կետեր ունի, ապա այն կդիտարկենք միայն նրա անընդհատության միջակայքերում։ Ուստի, ընդունելով վերևում ձևակերպած պնդումը, մենք ազատվում ենք ամեն անգամ ինտեգրալների գոյության մասին վերապահումներ անելու անհրաժեշտությունից. մեր կողմից դիտարկվող ինտեգրալները բոլորն էլ գոյություն ունեն։

157. Հիմնական ինտեգրալների աղյուսակ։ *Դիֆերենցիալ հաշվի ամեն մի բանաձև, որը հաստատում է, թե* F(x) *ֆունկցիայի ածանցյալը կլինի* f(x)-*ը, անմիջականորեն բերում է ինտեգրալ հաշվի համապատասխան բանաձևի՝*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\text{։}$$

Մեկ-մեկ հիշելով n° **81**-*ի բանաձևերը, որոնցով տարրական ֆունկցիաների ածանցյալներն էինք հաշվում, այժմ կարող ենք կազմել ինտեգրալների հետևյալ աղյուսակը.*

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$

3. $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \; (\mu \neq -1)$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \log |x| + C$

5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

6. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

Չորրորդ բանաձևի առթիվ անենք հետևյալ պարզաբանումը։ Այն կիրառելի է զրո չպարունակող ամեն մի միջակայքում։ Իրոք, եթե այդ միջակայքը զրոյից դեպի աջ է գտնվում, այսինքն՝ $x > 0$, *ապա ածանցման՝* $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ *հայտնի բանաձևից անմիջականորեն հետևում է, որ*

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C,$$

Իսկ եթե միջակայքը գտնվում է զրոյից դեպի ձախ և $x < 0$, *ապա ածանցելով հեշտ է համոզվել, որ* $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$, *որտեղից՝*

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

Այս երկու բանաձևերն էլ հենց միավորված են 4 բանաձևի մեջ։ Վերը բերված ինտեգրալների աղյուսակի շրջանակները լայնանում են ինտեգրման կանոնների օգնությամբ։

158. Ինտեգրման պարզագույն կանոնները: I. Եթե a-*ն հաստատուն է* $(a \neq 0)$, *ապա*

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx.$$

Իրոք, դիֆերենցելով աջակողմյան արտահայտությունը, կստանանք [n° **91**, I]՝

$$d\left[a \cdot \int f(x)\,dx\right] = a \cdot d\left[\int f(x)\,dx\right] = a \cdot f(x)dx,$$

այսինքն՝ այդ արտահայտությունը $a \cdot f(x)\,dx$ *դիֆերենցիալ արտահայտության համար նախնական ֆունկցիա է, որը և պահանջվում էր ապացուցել։ Այսպիսով,*

հաստատուն բազմապատկիչը կարելի է դուրս հանել ինտեգրալի նշանի տակից:

$$\text{II.} \quad \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Դիֆերենցենք աջակողմյան արտահայտությունը [n° **91**. II]՝

$$d\left[\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right] = d\int f(x)\,dx \pm d\int g(x)dx =$$

$$= [f(x) \pm g(x)]\,dx.$$

այսպիսով, այդ արտահայտությունը նախնական ֆունկցիա է հանդիսանում վերջին դիֆերենցիալ արտահայտության համար, որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Դիֆերենցիալների գումարի (տարբերության) անորոշ ինտեգրալը հավասար է առանձին-առանձին դիֆերենցիալների ինտեգրալների գումարին (տարբերությանը):

Դիտողություն։ *Այս երկու բանաձևերի առթիվ նկատենք հետևյալը։ Դրանց մեջ մասնակցում են անորոշ ինտեգրալներ, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է կամայական հաստատուն գումարելի։ Նման տիպի հավասարությունները հասկացվում են այն իմաստով, որ նրանց աջ և ձախ մասերի տարբերությունը հաստատուն է։ Այդ հավասարությունները կարելի է նաև տառացիորեն հասկանալ, սակայն այդ դեպքում նրանց մեջ մասնակցող ինտեգրալներից մեկը դադարում է կամայական նախնական ֆունկցիա լինելուց. նրա մեջ հաստատունը որոշվում է մյուս ինտեգրալների հաստատունների ընտրությունից հետո։ Այս կարևոր դիտողությունը պետք է ի նկատի ունենալ նաև առաջիկայում։*

III. *Եթե*

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C,$$

ապա՝

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b) + C'։$$

Իրոք, տվյալ առնչությունը հավասարազոր է հետևյալին՝

$$\frac{d}{dt}F(t) = F'(t) = f(t)։$$

Բայց այդ դեպքում՝

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = F'(ax+b)\cdot a = a\cdot f(ax+b),$$

այնպես որ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right] = f(ax+b),$$

այսինքն՝ $\frac{1}{a}F(ax+b)$-*ն իրոք նախնական ֆունկցիա է* $f(ax+b)$ *ֆունկցիայի համար։*

Առանձնապես հաճախ են պատահում այնպիսի դեպքեր, երբ $a = 1$ *կամ* $b = 0$՝

$$\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C_1, \quad \int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\cdot F(x) + C_2.$$

[*Իրականում* III-*ը հանդիսանում է շատ մասնակի մի դեպք անորոշ ինտեգրալի մեջ փոփոխականի փոխարինման կանոնի, որի՝ մասին կխոսվի ստորև,* n° **160**։]

159. Օրինակներ: 1) $\int (6x^2 - 3x + 5)\,dx.$

Օգտվելով II *և* I *կանոններից (և 3-րդ ու 2-րդ բանաձևերից), ունենք՝*

$$\int (6x^2 - 3x + 5)dx = \int 6x^2 dx - \int 3x\,dx + \int 5dx =$$

$$= 6\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 5\int dx =$$

$$= 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

2) $$\int (1+\sqrt{x})^4 dx = \int (1 + 4\sqrt{x} + 6x + 4x\sqrt{x} + x^2)\,dx =$$

$$= \int dx + 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + 6\int x\,dx + 4\int x^{\frac{3}{2}}dx + \int x^2\,dx =$$

$$= x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C. \quad (\text{II, I, 3,2})$$

3) $$\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx =$$

$$= \int x^{\frac{7}{6}}dx - \int x^{\frac{1}{6}}\,dx = \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C: \qquad (\text{II, 3})$$

Բերենք մի շարք օրինակներ III *կանոնի կիրառման վերաբերյալ.*

4) (ա) $$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C. \qquad (\text{III, 4})$$

$$(բ) \int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\, dx =$$
$$(k > 1)$$

$$= \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, \qquad \text{(III, 3)}$$

$$5)\ (ա) \int \sin mx\, dx = -\frac{1}{m}\cos mx + C, \qquad \text{(III, 8)}$$
$$(m \neq 0)$$

$$(բ) \int \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx + C, \qquad \text{(III, 9)}$$
$$(m \neq 0)$$

$$6\ (ա) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad \text{(III, 6)}$$
$$(a>0)$$

$$(բ) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{a} + C, \qquad \text{(III, 5)}$$

Բարդ հայտարար ունեցող կոտորակի ինտեգրումը հաճախ շատ ավելի հեշտանում է, երբ այն վեր ենք ածում ավելի պարզ հայտարարներ ունեցող կոտորակների գումարի։ Օրինակ,

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

ուստի՝

$$7)\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right] = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

Որոշ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ, այս կամ այն տարրական ձևափոխումներից հետո, ինտեգրվում են նույնպես պարզագույն եղանակների օգնությամբ։

Ակներև է, օրինակ, որ

$$\cos^2 mx = \frac{1+\cos 2mx}{2}, \qquad \sin^2 mx = \frac{1-\cos 2mx}{2},$$

որտեղից՝

$$8)\ (ա)\ \int \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m}\sin 2mx + C, \qquad (m \neq 0)$$

$$(բ)\ \int \sin^2 mx\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\sin 2mx + C։$$

160. Ինտեգրում փոփոխականի փոխարինման միջոցով: *Շարադրենք ֆունկցիայի ինտեգրման ամենազորեղ եղանակներից մեկը՝ փոփոխականի փոխարինման կամ տեղադրման մեթոդը։ Այդ մեթոդի հիմքում դրված է հետևյալ պարզ դիտողությունը՝*

Եթե հայտնի է, որ

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C,$$

ապա այդ դեպքում

$$\int g(\omega(x))\,\omega'(x)\,dx = G(\omega(x)) + C։$$

[Ենթադրվում է, որ այստեղ մասնակցող բոլոր՝ $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$ *ֆունկցիաներն անընդհատ են։]*

Այդ ուղղակի բխում է բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնից [n° **84**]՝

$$\frac{d}{dx} G(\omega(x)) = G'(\omega(x))\,\omega'(x) = g(\omega(x))\,\omega'(x),$$

եթե հաշվի առնենք, որ $G'(t) = g(t)$։ *Նույն բանը կարելի է արտահայտել նաև այլ ձևով, ասելով, որ*

$$dG(t) = g(t)\,dt$$

առնչությունն իր ուժը պահպանում է նաև այն դեպքում, երբ t *անկախ փոփոխականը փոխարինվում է* $\omega(x)$ *ֆունկցիայով* [n° **92**]։

Դիցուք պահանջվում է հաշվել

$$\int f(x)\,dx$$

ինտեգրալը։ Շատ դեպքերում հաջողվում է որպես նոր փոփոխական ընտրել x*-ի այնպիսի* $t = \omega(x)$ *ֆունկցիա, որպեսզի ընդինտեգրալ արտահայտությունը ներկայանա*

$$f(x)\,dx = g(\omega(x))\,\omega'(x)\,dx \tag{1}$$

տեսքով, որտեղ $g(t)$-ն ինտեգրման համար ավելի հարմար ֆունկցիա է, քան $f(x)$-ը։ Այդ դեպքում, վերն ասածի համաձայն, բավական է գտնել

$$\int g(t)dt = G(t) + C$$

ինտեգրալը, որպեսզի դրանից ստացվի որոնելի ինտեգրալը $t = \omega(x)$-ի տեղադրման միջոցով։ Սովորաբար պարզապես գրում են

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)dt, \tag{2}$$

ենթադրելով արդեն, որ աջ կողմում ինտեգրալով ներկայացված t-ի ֆունկցիայի մեջ կատարված է նշված փոխարինումը։

Գտնենք, օրինակ, հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx.$$

Քանի որ $d\sin x = \cos x\,dx$, ապա, ընդունելով $t = \sin x$, ընդինտեգրալ արտահայտությունը ձևափոխենք և բերենք հետևյալ տեսքին՝

$$\sin^3 x \cos x\,dx = \sin^3 x\,d\sin x = t^3 dt.$$

Վերջին արտահայտության ինտեգրալը հեշտությամբ հաշվվում է՝

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Մնում է միայն վերադառնալ x փոփոխականին, t-ի փոխարեն տեղադրելով $\sin x$՝

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն բանի վրա, որ ընդինտեգրալ արտահայտությունը պարզեցնող $t = \omega(x)$ տեղադրության ընտրության ժամանակ պետք է հիշել, որ նրա կազմի մեջ պետք է գտնվի $\omega'(x)\,dx$ արտադրիչը, որը տալիս է նոր փոփոխականի dt դիֆերենցիալը [տե՛ս (1)]։ Նախորդ օրինակում $t = \sin x$ տեղադրման հաջողությունը պայմանավորվում էր $\cos x\,dx = dx$ արտադրիչի առկայությամբ։

Այդ կապակցությամբ ուսանելի է

$$\int \sin^3 x\,dx$$

օրինակը. այստեղ $t = \sin x$ տեղադրությունը պիտանի չէր լինի հիշյալ արտադրիչի բացակայության պատճառով։ Եթե փորձենք ընդ-

ինտեգրալ արտահայտությունից առանձնացնել, որպես նոր փոփոխականի դիֆերենցիալ, $\sin x\, dx$ *արտադրիչը, կամ ավելի լավ է՝* $-\sin x dx$ *արտադրիչը, ապա դա կբերի* $t = \cos x$ *տեղադրման. քանի որ մնացած՝*

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$$

արտահայտությունն այդ տեղադրումով պարզեցվում է, ապա տեղադրումն արդարացված է։ Ունենք՝

$$\int \sin^3 x\, dx = \int (t^2 - 1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C\text{։}$$

Երբեմն տեղադրությունը կիրառվում է նշվածից տարբեր ձևով։ Այն է՝ $f(x)\, dx$ *ընդինտեգրալ արտահայտության մեջ* x*-ի փոխարեն անմիջականորեն տեղադրում են* t *նոր փոփոխականի* $x = \varphi(t)$ *ֆունկցիա և արդյունքում ստանում*

$$f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = g(t)\, dt$$

արտահայտությունը։ Ակներև է, որ եթե այս արտահայտության մեջ տեղադրենք $t = \omega(x)$, *որտեղ* $\omega(x)$*-ը* $\varphi(t)$*-ի համար հակադարձ ֆունկցիա է, ապա կվերադառնանք* $f(x)\, dx$ *սկզբնական ընդինտեգրալ արտահայտությանը։ Ուստի, ինչպես և առաջ, տեղի ունի (2) հավասարությունը, որտեղ աջ կողմում, ինտեգրալը հաշվելուց հետո, պետք է տեղադրել* $t = \omega(x)$։

Օրինակի համար, գտնենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\text{։}$$

Արմատի տակ քառակուսիների տարբերությունը (որոնցից առաջինը հաստատուն է) մեզ հուշում է $x = a \sin t$* *եռանկյունաչափական տեղադրությունը։ Ունենք՝*

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, \qquad dx = a \cos t\, dt$$

---

* *Տեղին է նշել, որ* x*-ը համարում ենք* $-a$ *և* a *սահմաններում փոփոխվող, իսկ* t*-ն՝* $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$*-ի և* $\frac{\pi}{2}$*-ի միջև։ Ուստի* $t = \arcsin \frac{x}{a}$։

և՝

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2 t\, dt ։$$

Բայց մենք արդեն գիտենք [n° **159**,8)], *որ*

$$a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right] + C ։$$

x-ին անցնելու համար տեղադրում ենք $t = \arcsin \frac{x}{a}$. *երկրորդ գումարելիի ձևափոխումը հեշտանում է նրանով, որ*

$$\frac{a^2}{4} \sin 2t = \frac{1}{2} a \sin t \cdot a \cos t = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} ։$$

Վերջնականապես՝

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C ։$$

Ձեռնտու տեղադրություններ գտնելու հմտությունը վարժությունների օգնությամբ է ձեռք բերվում։ Թեև այդ մասին հնարավոր չէ ընդհանուր ցուցումներ տալ, բայց այդ որոնումը հեշտացնող առանձին մասնավոր դիտողություններ ընթերցողը կգտնի հետևյալ n°-*ում։ Կանոնական դեպքերում տեղադրումները պարզապես կնշվեն՝ դասընթացի մեջ։*

161. Օրինակներ։ 1) *(ա)* $\int e^{x^2} x\, dx$, *(բ)* $\int \frac{x\, dx}{1 + x^4}$ ։

(ա) Լուծում։ Ընդունելով $t = x^2$, *ունենք՝* $dt = 2x\, dx$, *այնպես որ*

$$\int e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2} \int e^t\, dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C ։$$

(բ) Ցուցում։ Նույն տեղադրությունն է։ Պատասխան՝ $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x^2 + C$ ։

Երկու դեպքում էլ ինտեգրալներն ունեին

$$\int g(x^2)\, x\, dx = \frac{1}{2} \int g(x^2)\, dx^2$$

տեսքը, որտեղ g*-ն ինտեգրման համար հարմար ֆունկցիա է. այդպիսի ինտեգրալների համար բնական է* $t = x^2$ *տեղադրումը։*

$$2)\ (ա)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx,\quad (բ)\ \int \frac{dx}{x\ln x},\quad (գ)\ \int \frac{dx}{x\ln^2 x}.$$

Ցուցում։ Այս բոլոր ինտեգրալներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\int g(\ln x)\,\frac{dx}{x} = \int g(\ln x)\,d\ln x$$

և ինտեգրվում են $t = \ln x$ *տեղադրությամբ։*

Պատասխան։ $(ա)\ \frac{1}{2}\ln^2 x + C,\ (բ)\ \ln\ln x + C,\ (գ)\ -\frac{1}{\ln x} + C.$

$$3)\ \int g(\sin x)\cos x\,dx,\quad \int g(\cos x)\cdot\sin x\,dx,\quad \int g(\operatorname{tg} x)\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$$

տեսքի ինտեգրալները վերցվում են (ինտեգրվում են), համապատասխանաբար, հետևյալ տեղադրումներով՝

$$t = \sin x,\ t = \cos x,\ t = \operatorname{tg} x.$$

Օրինակի համար՝

$$(ա)\ \int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arc\,tg}\sin x + C.$$

$$բ)\ \int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{du}{u} =$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$4)\ (ա)\ \int \frac{2x\,dx}{x^2+1},\qquad (բ)\ \int \operatorname{ctg} x\,dx.$$

Լուծում։ (ա) Եթե ընդունենք $t = x^2 + 1$, *ապա* $2x\,dx$ *համարիչը ճշտորեն տալիս է* dt. *ինտեգրալը բերվում է հետևյալին՝*

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

Նկատենք, որ միշտ, երբ առաջարկված ինտեգրալն ունի

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)}$$

տեսքը, այսինքն՝ ընդինտեգրալ արտահայտության մեջ համարիչը հայտարարի դիֆերենցիալն է ներկայացնում, $t = f(x)$ տեղադրումը միանգամից նպատակին է հասցնում՝

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Այսպես վարվելով, կունենանք՝

$$(բ)\ \int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C \qquad [\text{համեմատել } 3)\ (բ)].$$

$$5)\ \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Տեղադրում՝ $x = a \operatorname{tg} t$*, $\quad dx = \dfrac{a\, dt}{\cos^2 t}, \quad x^2 + a^2 = \dfrac{a^2}{\cos^2 t}$,

այնպես որ՝

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2a^3}(t + \sin t \cos t) + C. \qquad [\text{տես n}^\circ\ 159{,}8)].$$

Այժմ անցնենք x փոփոխականին, դնելով $t = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ և $\sin t$-ն ու $\cos t$-ն արտահայտելով $\operatorname{tg} t = \dfrac{x}{a}$-ով։ Վերջնականապես՝

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

$$6)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \qquad (a \gtrless 0).$$

Նշանակենք $\sqrt{x^2+a} = t - x$ և t-ն ընդունենք իբրև նոր փոփոխական։ Քառակուսի բարձրացնելիս կարելի է x^2-ն երկու մասերից դեն նետել և արդյունքում կստացվի՝

$$x = \frac{t^2 - a}{2t},$$

այնպես որ

$$\sqrt{x^2+a} = t - \frac{t^2-a}{2t} = \frac{t^2+a}{2t}, \qquad dx = \frac{t^2+a}{2t^2}\, dt.$$

Վերջնականապես՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C.$$

162. Մասերով ինտեգրում: *Դիցուք* $u = f(x)$-*ը և* $v = g(x)$-*ը* x-*ի երկու ֆունկցիաներ են, որոնք ունեն* $u' = f'(x)$ *և* $v' = g'(x)$ *անընդհատ ածանցյալներ։ Այդ դեպքում, արտադրյալի դիֆերենցման կանոնի համաձայն,* $d(uv) = udv + vdu$, *կամ՝* $udv = d(uv) - vdu$. *Սակայն* $d(uv)$ *արտահայտության համար, ակներևորեն, նախնական ֆունկցիա կլինի* uv-*ն. ուստի տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{3}$$

Այս բանաձևն արտահայտում է մասերով ինտեգրման կանոնը, որը $udv = uv'dx$ *արտահայտության ինտեգրումը բերում է* $vdu = vu'dx$ *արտահայտության ինտեգրմանը։*

Դիցուք, օրինակի համար, պահանջվում է գտնել $\int x\cos x\,dx$ *ինտեգրալը։ Ընդունենք՝*

$u = x$, $dv = \cos x\,dx$, *այնպես որ՝* $du = dx$, $v = \sin x$*, *և, ըստ (3) բանաձևի,*

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C. \tag{4}$$

Այսպիսով, մասերով ինտեգրումը հնարավորություն տվեց $x\cos x$ *բարդ ընդինտեգրալ ֆունկցիան փոխարինել* $\sin x$ *պարզ ֆունկցիայով։ Զուգընթացաբար հարկ եղավ* v-*ն ստանալու համար ինտեգրալ* $\cos x\,dx$ *արտահայտությունը. այստեղից էլ առաջ է եկել մասերով (կամ մաս առ մաս) ինտեգրում տերմինը։*

Տրված ինտեգրալը հաշվելու համար (3) բանաձևը կիրառելիս հարկ է լինում ընդինտեգրալ արտահայտությունը տրոհել երկու ար-

---

* *Քանի որ մեր նպատակների համար բավական է* $\cos x\,dx$ *արտահայտությունը գոնե մեկ ձևով* dv *տեսքով ներկայացնել, ապա կարիք չկա գրելու* v-*ի համար կամավոր հաստատուն պարունակող ամենաընդհանուր արտահայտությունը։ Այս դիտողությունը պետք է նկատի ունենալ հետագայում ևս։*

տարրիչների՝ u *և* dv = v′dx, *որոնցից առաջինը դիֆերենցվում է, իսկ երկրորդն՝ ինտեգրվում աջ մասում ինտեգրալին անցնելու ժամանակ։ Պետք է աշխատել, որպեսզի* dv *դիֆերենցիալի ինտեգրումը դժվարություններ չներկայացնի և որպեսզի* u*-ի փոխարինումը* du*-ով և* dv*-ի փոխարինումը* v*-ով միասին վերցրած տանի դեպի ընդինտեգրալ արտահայտության պարզեցում։ Այսպես, քննարկված օրինակի մեջ ակնհայտորեն անձեռնտու կլիներ վերցնել, ասենք,* x dx*-ը* dv*-ի փոխարեն, իսկ* cos x*-ը* u*-ի փոխարեն։*

Որոշ հմտության դեպքում կարիք չկա u *և* v *նշանակումները մտցնել, և կարելի է միանգամից կիրառել բանաձևը [համեմատել (4)]։*

Մասերով ինտեգրման կանոնը կիրառման ավելի սահմանափակ բնագավառ ունի, քան փոփոխականի փոխարինումը։ Բայց կան ինտեգրալների ամբողջ դասեր, օրինակ՝

$$\int x^k \ln^m x\,dx, \quad \int x^k \sin bx\,dx, \quad \int x^k \cos bx\,dx, \quad \int x^k e^{ax}\,dx$$ *և այլն,*

որոնք հենց մասերով ինտեգրման օգնությամբ են հաշվվում։

163. Օրինակներ: *1)* $\int x^3 \ln x\,dx$։

$\ln x$*-ի դիֆերենցումը բերում է պարզեցման, ուստի ընդունում ենք՝*

$$u = \ln x, \quad dv = x^3\,dx,$$ *այնպես որ* $$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{4}x^4$$

և

$$\int x^3 \ln x\,dx \quad \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

2) *(ա)* $\int \ln x\,dx$, *(բ)* $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

Երկու դեպքերում էլ ընդունելով $dx = dv$, *կստանանք՝*

(ա) $$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C.$$

(բ) $$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\,d\operatorname{arc\,tg} x = x\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$ [*տե՛ս 161, 4) (ա)*]։

3) $\int x^2 \sin x \, dx$։

Ունենք՝

$$\int x^2 d(-\cos x) = -x^2 \cos x - \int (-\cos x) dx^2 =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx.$$

Այսպիսով, որոնելի ինտեգրալը բերինք մեզ արդեն ծանոթ ինտեգրալի [n° 162 *(4)*], *տեղադրելով նրա արժեքը, կստանանք՝*

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

Մասերով ինտեգրման կանոնն այստեղ հարկ եղավ կիրառել ընդամենը երկու անգամ։

Նույնպես էլ, այդ կանոնի հաջորդական կիրառմամբ, հաշվվում են հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int P(x) e^{ax} dx, \qquad \int P(x) \sin bx \, dx, \qquad \int P(x) \cos bx \, dx,$$

որտեղ $P(x)$*-ը* x*-ի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամ է։*

4) Հետաքրքիր օրինակ են ներկայացնում

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \qquad \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

ինտեգրալները։ Եթե դրանց նկատմամբ կատարենք մասերով ինտեգրում (ասենք, թե երկու դեպքում էլ վերցնելով $dv = e^{ax} dx$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$), *ապա կստանանք՝*

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

*Այսպիսով, ինտեգրալներից յուրաքանչյուրն արտահայտվեց մյուսով**։

---

* *Եթե ինտեգրալ ասելով հասկանանք ո ր ո շ ա կ ի նախնական ֆունկցիա* [*համեմատել* n° *158-ի դիտողության հետ*], *ապա, ցանկանալով երկրորդ բանաձևում ունենալ նույն ֆունկցիաները, ինչ որ առաջինում, մենք պետք է, խստորեն ասած, աջ կողմում մի որոշ հաստատուն էլ միացնեինք։ Անշուշտ նա կկլանվեր* C *և* C' *հաստատունների կողմից վերջնական արտահայտությունների մեջ։*

Սակայն, եթե առաջին բանաձևի մեջ տեղադրենք երկրորդ ինտեգրալի արտահայտությունը երկրորդ բանաձևից, ապա կստանանք հ ա վ ա ս ա ր ու մ առաջին ինտեգրալի նկատմամբ, որից նա կորոշվի՝

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} + C.$$

Նման ձևով գտնում ենք և երկրորդ ինտեգրալը

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} + C'.$$

7) Որպես մասերով ինտեգրման մեթոդի կիրառման վերջին օրինակ արտածենք ա ն դ ր ա դ ա ր ձ (ռ ե կ ու ր ե ն տ) բանաձև՝

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ինտեգրալը հաշվելու համար։

Դրա նկատմամբ կիրառենք (3) բանաձևը, ընդունելով՝

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \qquad dv = dx, \quad \text{այնպես որ} \quad du = -\frac{2nx\cdot dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = x.$$

Մենք կստանանք՝

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx.$$

Վերջին ինտեգրալը կարելի է ձևափոխել հետևյալ կերպ՝

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1}.$$

Այս արտահայտությունը նախորդ հավասարության մեջ տեղադրելով, կստանանք հետևյալ առնչությունը՝

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1},$$

որտեղից՝

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{a^2}J_n, \tag{5}$$

Ստացված բանաձևը J_{n+1} ինտեգրալի հաշվումը բերում է J_n ինտեգրալը հաշվելուն, որի ինդեքսը մեկով պակաս է։ Գիտենալով

$$J_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$$

ինտեգրալը n° [**159**,6) *(բ)*. *վերցնում ենք նրա արժեքներից մեկը], այս բանաձևով,* $n = 1$ *դեպքում, գտնում ենք՝*

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$$

[որը մենք վերևում ստացանք այլ ճանապարհով, տե՛ս n° **161**,5)]*։ Ընդունելով (5) բանաձևի մեջ* $n = 2$, *այնուհետև կստանանք՝*

$$J_3 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} J_2 =$$

$$= \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

և այլն։ Այս եղանակով J_n *ինտեգրալը կարելի է հաշվել ցանկացած բնական* **n** *ցուցիչի համար։*

§ 2. ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

164. Վերջավոր տեսքով ինտեգրման խնդրի դրումը: *Մենք ծանոթացանք անորոշ ինտեգրալներ հաշվելու տարրական եղանակներին։ Այդ եղանակները ճշտորեն չեն նախորոշում այն ուղին, որով պետք է ընթանալ տվյալ ինտեգրալը հաշվելու համար, և շատ բան են վերապահում հաշվողի հմտությանը։ Այս և հետևյալ պարագրաֆներում մենք ավելի մանրամասն կանգ կառնենք ֆունկցիաների մի քանի կարևոր մասնավոր դասերի վրա և նրանց ինտեգրալների նկատմամբ կսահմանենք հաշվելու միանգամայն որոշակի կարգ։*

Այժմ պարզենք, թե ինչն է մեզ հետաքրքրելու վերոհիշյալ դասերի ֆունկցիաներն ինտեգրելիս և ինչ սկզբունքով է կատարվելու այդ դասերի առանձնացումն ինքը։

n° **25**-*ում բնորոշվեց այն ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց նկատմամբ առաջին հերթին կիրառվում է անալիզը։ Դրանք, այսպես կոչված, տարրական ֆունկցիաներն են և այն ֆունկցիաները, որոնք արտահայտվում են տարրականների միջոցով վերջավոր թվով թվաբանական գործողությունների և սուպերպոզիցիաների օգնությամբ (առանց սահմանային անցման)։*

V *գլխում մենք տեսանք, որ բոլոր այդպիսի ֆունկցիաներն ածանցելի են և նրանց ածանցյալները պատկանում են նույն բազմությանը։*

Այլ է գործը նրանց ինտեգրալների հետ։ Շատ հաճախ պարզվում է, որ վերոհիշյալ բազմությանը պատկանող ֆունկցիայի ինտեգրալն այդ բազմությանը չի պատկանում, այսինքն՝ չի արտահայտվում, տարրական ֆունկցիաներով վերջավոր թվով վերևում նշված օպերացիաների օգնությամբ։ Նախահայտորեն վերջավոր տեսքով չարտահայտվող այդպիսի ինտեգրալների թվին են պատկանում, օրինակ, հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int e^{-x^2}dx, \qquad \int \sin x^2\,dx, \qquad \int \cos x^2\,dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x},$$

Նման տեսակի ուրիշ օրինակներ կբերվեն ստորև [n° n° **169,- 172** *և հաջորդները*]։ Կարևոր է ընդգծել, որ այդ բոլոր ինտեգրալները ռեալ կերպով գոյություն ունեն*, սակայն դրանք միանգամայն նոր ֆունկցիաներ են ներկայացնում և չեն բերվում այն ֆունկցիաներին, որոնք մենք տարրական ենք անվանել։

Հայտնի են ֆունկցիաների համեմատաբար ոչ շատ դասեր, որոնց ինտեգրումը կարող է կատարվել վերջավոր տեսքով. հենց այդ դասերով էլ մենք ավելի մոտիկից կզբաղվենք։ Դրանց մեջ առաջին տեղը պետք է դնել ռացիոնալ ֆունկցիաների կարևոր դասը։

165. Պարզագույն կոտորակներ և նրանց ինտեգրումը: *Քանի որ անկանոն ռացիոնալ կոտորակի մեջ կարելի է առանձնացնել ամբողջ մաս, որի ինտեգրումը դժվարություններ չի ներկայացնում, ապա բավական է զբաղվել կանոնավոր կոտորակների ինտեգրումով (որոնց համարիչի աստիճանը հայտարարի աստիճանից ցածր է)։*

Մենք այստեղ կանգ կառնենք դրանցից, այսպես կոչված, պարզագույն կոտորակների վրա. դրանք հետևյալ չորս տիպի կոտորակներն են՝

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \qquad \text{II. } \underset{(k=2,\,3,\,\ldots)}{\frac{A}{(x-a)^k}}, \qquad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \qquad \text{IV. } \underset{(m=2,\,3,\,\ldots)}{\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}},$$

որտեղ A, M, N, a, p, q — *իրական թվեր են. բացի այդ,* III *և* IV *տեսքի կոտորակների նկատմամբ ենթադրվում է, որ* x^2+px+q *եռանդամը իրական արմատներ չունի, այնպես որ՝*

$$q-\frac{p^2}{4}>0:$$

* *Տե՛ս այդ մասին ասածը* n° **156**-*ում։ Մենք դրան կվերադառնանք ստորև,* n° **183**-*ում։*

I և II տեսքի կոտորակների ինտեգրումը մենք արդեն գիտենք [n° **159**,4)]՝

$$A\int\frac{dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

$$A\int\frac{dx}{(x-a)^k}=-\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

Ինչ վերաբերում է III և IV տեսքի կոտորակներին, ապա նրանց ինտեգրումը հեշտանում է հետևյալ տեղադրումով. x_2+px+q արտահայտությունից առանձնացնենք երկանդամի լրիվ քառակուսի՝

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Փակագծերի մեջ եղած վերջին արտահայտությունը, ենթադրությամբ համաձայն, դրական թիվ է, ուստի այն կարելի է ընդունել հավասար a^2, եթե վերցնենք՝

$$a=+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}},$$

Այժմ դիմենք հետևյալ տեղադրմանը՝

$$x+\frac{p}{2}=t,\qquad dx=dt,$$

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\qquad Mx+N=Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right).$$

III դեպքում կունենանք՝

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}\,dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C,$$

կամ, վերադառնալով x-*ին և* a-*ի փոխարեն իր արժեքը տեղադրելով՝*

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2} \ln (x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C\text{։}$$

IV *դեպքի համար նույն տեղադրումը կտա՝*

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m}\,dx = \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^m}\,dt =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{2t\,dt}{(t^2 + a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}, \qquad (1)$$

Աջակողմյան ինտեգրալներից առաջինը հեշտությամբ կարելի է հաշվել $t^2 + a^2 = u$, $2t\,dt = du$ *տեղադրումով՝*

$$\int \frac{2t\,dt}{(t^2 + a^2)^m} = \int \frac{du}{u^m} = -\frac{1}{m-1} \frac{1}{u^{m-1}} + C =$$

$$= -\frac{1}{m-1} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} + C\text{։} \qquad (2)$$

Իսկ աջակողմյան ինտեգրալներից երկրորդը, ցանկացած m-*ի դեպքում, կարելի է հաշվել* n° **168**-*ի (5) անդրադարձ բանաձևով։ Այնուհետև* x *փոփոխականին անցնելու համար կմնա միայն արդյունքում տեղադրել* $t = \frac{2x + p}{2}$,

Սրանով սպառվում է պարզագույն կոտորակների ինտեգրման հարցը։

166. Կանոնավոր կոտորակների ինտեգրումը: *Եվ այսպես, պարզագույն կոտորակներն ինտեգրել կարողանում ենք։ Իսկ ինչ վերաբերում է կամայական կանոնավոր կոտորակին, ապա նրա ինտեգրումը հիմնվում է հետևյալ կարևոր թեորեմայի վրա, որն ապացուցվում է բարձրագույն հանրահաշվի դասընթացում.*

Յուրաքանչյուր

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

կանոնավոր կոտորակ կարող է ներկայացվել վերջավոր թվով պարզագույն կոտորակների գումարի տեսքով:

Կանոնավոր կոտորակի այս վերլուծումը պարզագույն կոտորակների սերտորեն կապված է նրա $Q(x)$ *հայտարարի պարզ արտադրիչների վերլուծման հետ։ Ինչպես հայտնի է, իրական գործակիցներ ունեցող յուրաքանչյուր ամբողջ բազմանդամ վերլուծվում է (այն էլ միակ եղանակով)* $x-a$ *և* x^2+px+q *տիպի դարձյալ իրական արտադրիչների. ընդ որում; ենթադրվում է, որ քառակուսային արտադրիչներն իրական արմատներ չունեն և, հետևաբար, իրական գծային արտադրիչների չեն վերլուծվում։ Միատեսակ արտադրիչները (եթե այդպիսիններ կան) մի տեղ հավաքելով և համարելով, պարզության համար, որ* $Q(x)$ *բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է մեկի, այդ բազմանդամի վերլուծումը սխեմատիկորեն կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots, \tag{3}$$

որտեղ $k,\cdots,\ m,\cdots$ *բնական թվեր են։*

Նկատենք, որ եթե $Q(x)$ *բազմանդամն* n *աստիճանի է, ապա ակներև է, որ բոլոր* k *ցուցիչների գումարը, գումարած բոլոր* m *ցուցիչների կրկնապատիկ գումարին, ճշգրտորեն կտա* n՝

$$\sum k+2\sum m=n\text{։} \tag{4}$$

Հանրահաշվում ցույց է տրվում, որ կանոնավոր կոտորակի հայտարարի վերլուծության մեջ գրված $(x-a)^k$ *տեսքի յուրաքանչյուր բազմապատկչի համապատասխանում է* k *թվով պարզագույն կոտորակների այսպիսի խումբ՝*

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}, \tag{5}$$

իսկ $(x^2+px+q)^m$ *տեսքի յուրաքանչյուր բազմապատկչի՝* m *թվով պարզագույն կոտորակների այսպիսի խումբ՝*

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}, \tag{6}$$

որտեղ A*-երը,* M*-երը և* N*-երն՝ այստեղ թվային գործակիցներ են։*

Այսպիսով, (3) վերլուծումը գտնելով, դրանով իսկ գտնենք այն պարզագույն կոտորակների հայտարարները, որոնք տվյալ $\frac{P}{Q}$

կոտորակի վերլուծման մեջ են մտնում։ Կանգ առնենք համարիչները որոշելու, այսինքն՝ A, M, N գործակիցները որոշելու, հարցի վրա։ Քանի որ (5) կոտորակների խմբի համարիչները k թվով գործակից են պարունակում, իսկ (6) կոտորակների խմբի համարիչները $2m$ թվով գործակից, ապա (4)-ի շնորհիվ, նրանք ընդամենը n հատ կլինեն։

Վերոհիշյալ գործակիցները որոշելու համար սովորաբար դիմում են անորոշ գործակիցների մեթոդին, որը կայանում է հետևյալում։ Գիտենալով $\frac{P}{Q}$ կոտորակի վերլուծման ձևը, այդ վերլուծումը գրում են տառային գործակիցներով աջակողմյան համարիչներում։ Բոլոր պարզագույն կոտորակների ընդհանուր հայտարարը, ակներևաբար, կլինի Q բազմանդամը։ Այդ կոտորակները գումարելով կստանանք կանոնավոր կոտորակ*։ Այժմ, եթե ձախից և աջից դեն նետենք Q հայտարարը, ապա կհանգենք $(n-1)$-րդ աստիճանի երկու բազմանդամների հավասարության, որն x-ի նկատմամբ նույնություն կլինի։ Աջակողմյան բազմանդամի մեջ x-ի զանազան աստիճանների գործակիցները կլինեն տառերով նշանակված n գործակիցների նկատմամբ գծային համասեռ բազմանդամներ։ Դրանք հավասարեցնելով P բազմանդամի համապատասխան թվային գործակիցներին, կստանանք, վերջապես, n գծային հավասարումների սիստեմ, որից և կորոշվեն տառային գործակիցները։ Քանի որ պարզագույն կոտորակների վերլուծելու հնարավորությունը նախապես ապացուցված է, ապա վերոհիշյալ սիստեմը երբեք հակասական չի կարող լինել։

Դեռ ավելին. քանի որ հավասարումների վերոհիշյալ սիստեմը լուծում ունի, ինչպիսին էլ լինեն ազատ անդամները (P բազմանդամի գործակիցները), ապա սիստեմի դետերմինանտ անհրաժեշտորեն զրոյից տարբեր կլինի։ Այլ խոսքով, սիստեմը միշտ որոշյալ սիստեմ կլինի։ Այս հասարակ դիտողությունը զուգընթացաբար ապացուցում է նաև կանոնավոր կոտորակի պարզագույն կոտորակների վերածման միակությունը։

Ասածը պարզաբանենք օրինակով։

Դիցուք տրված է $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ կոտորակը։ Ընդհանուր թեորեմայի հա-

* Կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակների գումարը միշտ կանոնավոր կոտորակ էլ ներկայացնում է։

մաձայն, այդ կոտորակի համար ունենք հետևյալ վերլուծությունը՝

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

A, B, C, D, E *գործակիցները կորոշենք, ելնելով հետևյալ նույնությունից՝*

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) +$$
$$+ (Dx+E)(x-2)։$$

Ձախ և աջ մասերում եղած x*-ի միատեսակ աստիճանների գործակիցները հավասարեցնելով, կստանանք հինգ հավասարումների սիստեմ՝*

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A + B = 0, \\ x^3 & -2B + C = 0, \\ x^2 & 2A + B - 2C + D = 2, \\ x^1 & -2B + C - 2D + E = 2, \\ x_0 & A - 2C - 2E = 13, \end{array}$$

որտեղից՝

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = -2, \quad D = -3, \quad E = -4։$$

Վերջնականապես՝

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2},$$

Թեև առաջ մեր հաստատած հանրահաշվական փաստն անմիջական կիրառում ունի ռացիոնալ կոտորակներն ինտեգրելիս ինչպես նախորդ n°*-ում տեսանք, պարզագույն կոտորակներն ինտեգրվում են վերջավոր տեսքով։ Այժմ այդ նույնը կարող ենք ասել ցանկացած ռացիոնալ կոտորակի մասին։ Եթե ուշադրությամբ դիտենք այն ֆունկցիաները, որոնց միջոցով արտահայտվում են ամբողջ բազմանդամի ու կանոնավոր կոտորակների ինտեգրալները, ապա կարելի է ձևակերպել ավելի ճշգրիտ արդյունք.*

Ցանկացած ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալն արտահայտվում է վերջավոր տեսքով՝ ռացիոնալ ֆունկցիայի, լոգարիթմի և արկտանգենսի օգնությամբ։

Այսպես, վերադառնալով քիչ առաջ դիտարկված օրինակին և հիշելով n° **165**-*ի բանաձևերը, ունենք՝*

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \int\frac{dx}{x-2} - \int\frac{x+2}{x^2+1}\,dx - \int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\,\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Դիտողություն։ *Պարզագույն կոտորակների վերլուծումն իր սկիզբն առնում է Լայբնիցից։ Նա հեշտությամբ լուծում է հարցը հայտարարի գծային բազմապատկիչների հետ, անգամ բազմապատիկ արմատներին համապատասխանող։ Կեղծ արմատների դեպքում Լայբնիցը յուրաքանչյուր այդպիսի արմատի հետ միասին դիտարկում է նաև նրա համալուծ արմատը և երկու գծային կեղծ արտահայտություններից ստանում իրական քառակուսի արտահայտություն։ Սակայն այդ ո՛չ միշտ է հաջողվում նրան. այսպես, օրինակ,*

$$x^4+a^4=\left(x^2+\sqrt{2}\,ax+a^2\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,ax+a^2\right)$$

վերլուծությունը Լայբնիցը չի կարողացել ստանալ (հետագայում այդ ցույց է տվել Թեյլորը)։

Պարզագույն կոտորակների համարիչները գտնելու համար անորոշ գործակիցների մեթոդի օգտագործումը պատկանում է Իոհանն Բեռնուլիին։

167. Ինտեգրալի ռացիոնալ մասն առանձնացնելու Օստրոգրադսկու մեթոդը: *Օստրոգրադսկին* նշել է մի եղանակ, որի օգնությամբ կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրալը գտնելը զգալիորեն պարզեցվում է։ Այդ եղանակը հնարավորություն է տալիս զուտ հանրահաշվական ճանապարհով առանձնացնել ինտեգրալի ռացիոնալ մասը։*

Մենք տեսել ենք [n° **165**], *որ ինտեգրալի կազմի մեջ ռացիոնալ անդամներ ստացվում են* II *և* IV *տեսքի պարզագույն կոտորակներն ինտեգրելիս։ Առաջին դեպքում ինտեգրալը կարելի է գրել միանգամից՝*

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \tag{7}$$

Այժմ պարզենք, թե ինչ տեսք ունի

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx \quad \left(m>1,\quad q-\frac{p^2}{4}>0\right)$$

---

* *Ակադեմիկոս Միխայիլ Վասիլևիչ Օստրոգրադսկի (1801—1861)՝ ռուս ականավոր մաթեմատիկոս և մեխանիկոս։*

ինտեգրալի ռացիոնալ մասը։

Դիմելով մեզ արդեն հայտնի $x + \frac{p}{2} = t$ *տեղադրմանը, օգտագործենք (1), (2) հավասարությունները և* n° **168**-*ի (5) վերածման բանաձևը* $n = m - 1$ *դեպքում։ Եթե վերադառնանք* x *փոփոխականին, ապա կստանանք՝*

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx = \frac{M'x + N'}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \alpha \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{m-1}},$$

որտեղ M'-*ը,* N'-*ը և* α-*ն որոշ հաստատուն գործակիցներ են։ Այդ նույն բանաձևով* m-*ը փոխարինելով* m — 1-*ով, վերջին ինտեգրալի համար կգտնենք (եթե* $m > 2$*)՝*

$$\int \frac{\alpha\, dx}{(x^2 + px + q)^{m-1}} = \frac{M''x + N''}{(x^2 + px + q)^{m-2}} + \beta \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{m-2}},$$

և այլն, մինչև որ $x^2 + px + q$ *եռանդամի ցուցիչն աջակողմյան ինտեգրալի մեջ մեկի կհասցնենք։ Հաջորդաբար առանձնացող բոլոր ռացիոնալ անդամները կանոնավոր կոտորակներ են։ Դրանք ի մի հավաքելով, արդյունքը կստանանք հետևյալ տեսքով՝*

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx = \frac{R(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \lambda \int \frac{dx}{x^2 + px + q}, \qquad (8)$$

որտեղ R(x)-*ը հայտարարից ցածր աստիճանի ամբողջ բազմանդամ է*, իսկ* λ-*ն հաստատուն է։*

Դիցուք ունենք $\frac{P}{Q}$ *կանոնավոր կոտորակը, որն անկրճատելի ենք համարելու, և դիցուք նրա* Q *հայտարարը պարզ արտադրիչների է վերլուծված [տե՛ս (3)]։ Այդ դեպքում այդ կոտորակի ինտեգրալը կներկայանա (5) կամ (6) տեսքի կոտորակների ինտեգրալների գումարի տեսքով։ Եթե* k-*ն (կամ* m-*ը) մեկից մեծ է, ապա (5) [կամ (6)] խմբի բոլոր կոտորակների ինտեգրալները, բացի առաջինից, կձևափոխվեն (7) [կամ (8)] բանաձևով։ Այդ բոլոր արդյունքները միավորելով, վերջնականապես կստանանք հետևյալ տեսքի բանաձև՝*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \qquad (9)$$

---

* *Տես 378 էջի տողատակի ծանոթագրությունը։*

ինտեգրալի $\frac{P_1}{Q_1}$ ռացիոնալ մասն ստացվել է վերևում առանձնացրած ռացիոնալ մասերի գումարումից. հետևապես, նա ամենից առաջ կանոնավոր կոտորակ է, իսկ նրա Q_1 հայտարարն ունի հետևյալ վերլուծությունը՝

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1} \cdots (x^2+px+q)^{m-1} \cdots$$

Իսկ ինչ վերաբերում է ինտեգրալի նշանի տակ մնացած $\frac{P_2}{Q_2}$ կոտորակին, ապա այն ստացվել է I և III տեսքի կոտորակների գումարումից, ուստի նա ևս կանոնավոր է և

$$Q_2(x) = (x-a) \cdots (x^2+px+q) \cdots$$

Ակներևաբար [տե՛ս (3)], $Q = Q_1Q_2$։

(9) բանաձևն էլ հենց կոչվում է Օստրոգրադսկու բանաձև։

Ածանցելով, կարելի է այն ներկայացնել համարժեք տեսքով՝

$$\frac{P}{Q} = \left[\frac{P_1}{Q_1}\right]' + \frac{P_2}{Q_2}, \tag{10}$$

Մենք տեսանք, որ Q_1 և Q_2 բազմանդամները հեշտությամբ են գտնվում, եթե հայտնի է Q բազմանդամի (3) վերլուծությունը։ Բայց նրանք առանց այդ վերլուծման էլ կարող են որոշվել։ Իրոք, քանի որ Q' ածանցյալը պարունակում է Q-ի բոլոր պարզ արտադրիչները հենց մեկով պակաս ցուցիչներով, ապա Q_1-ը ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է հանդիսանում Q-ի և Q'-ի համար, ուստի և նա կարող է որոշվել այդ բազմանդամների օգնությամբ, օրինակ, հաջորդական բաժանման եղանակով։ Եթե Q_1-ը հայտնի է, ապա Q_2-ը կարելի է որոշել պարզապես Q-ն Q_1-ի վրա բաժանելով։

Այժմ դառնանք (10) բանաձևի մեջ P_1 և P_2 համարիչները որոշելուն։ Դրա համար նույնպես օգտվում են անորոշ գործակիցների մեթոդից։

Q, Q_1, Q_2 բազմանդամների աստիճանները նշանակենք, համապատասխանաբար, n, n_1, n_2, այնպես որ $n_1 + n_2 = n$. այդ դեպքում P, P_1, P_2 բազմանդամների աստիճաններն ավելի բարձր չեն լինի, քան $n-1$, n_1-1, n_2-1։ Որպես P_1 և P_2 տեղադրենք n_1-1 և n_2-1 աստիճանների բազմանդամներ տառային գործակիցներով. ընդամենը կլինի n_1+n_2, այսինքն՝ n գործակից։ (10)-ի մեջ ածանցումը կատարենք՝

$$\frac{P'_1Q_1 - P_1Q'_1}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P}{Q},$$

Այժմ ցույց տանք, որ առաջին կոտորակը միշտ կարելի է Q հայտարարի բերել, համարիչն ամբողջ պահելով։ Այսպես՝

$$\frac{P'_1Q_1 - P_1Q'_1}{Q_1^2} = \frac{P'_1Q_2 - P_1\frac{Q'_1Q_2}{Q_1}}{Q_1Q_2} = \frac{P'_1Q_2 - P_1H}{Q},$$

որտեղ H-*ը նշանակում է* $\frac{Q'_1Q_2}{Q_1}$ *քանորդը։ Բայց այդ քանորդը կարելի է ներկայացնել ամբողջ բազմանդամի տեսքով։ Իրոք, եթե* $(x-a)^k$-*ը,* $k \geqslant 1$ *դեպքում, մտնում է* Q_1-*ի կազմի մեջ, ապա* $(x-a)^{k-1}$-*ը կմտնի* Q'-*ի մեջ, իսկ* $(x-a)$-*ն՝* Q_2-*ի կազմի մեջ. Նման եզրակացություն կարելի է հանել նաև* $(x^2+px+q)^m$ *տեսքի արտադրիչի վերաբերյալ* $m \geqslant 1$ *դեպքում։ Հետևապես,* H-*ի համարիչն ամբողջորեն բաժանվում է հայտարարի վրա, և այսուհետև* H *ասելով կարելի է հասկանալ ամբողջ բազմանդամ* (n_2-1 *աստիճանի)։*

Q *ընդհանուր հայտարարից ազատվելով, կգանք երկու* ($n-1$ *աստիճանի) բազմանդամների նույնության՝*

$$P'_1Q_2 - P_1H + P_2Q_1 = P.$$

Այստեղից, ինչպես և վերևում, մեր մուծած n *հատ տառային գործակիցները որոշելու համար կստանանք* n *հատ գծային հավասարումների սիստեմ։*

Քանի որ (10) վերլուծման հնարավորությունը հաստատված է, P-*ն ինչպիսին էլ լինի, ապա վերոհիշյալ սիստեմը համատեղ սիստեմ կլինի ցանկացած ազատ անդամների դեպքում։ Այստեղից ինքնըստինքյան բխում է, որ այդ սիստեմի դետերմինանտը զրոյից տարբեր է, ուրեմն և սիստեմն անհրաժեշտաբար որոշյալ սիստեմ է և (10) վերլուծությունը, նշված* Q_1 *և* Q_2 *հայտարարների դեպքում, հնարավոր է միակ եղանակով**

Օրինակ։ Դիցուք պահանջվում է առանձնացնել հետևյալ ինտեգրալի ռացիոնալ մասը՝

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^3}\,dx.$$

Ունենք՝

$$Q_1 = Q_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1,$$

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2} =$$

$$= \left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]' + \frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1},$$

---

* *Հմմ. կանոնավոր կոտորակները պարզագույն կոտորակների վերածելու առթիվ արված համանման դիտողության հետ, էջ 378։*

որտեղից՝

$$4x^4+4x^3+16x^2+12x+8=(2ax+b)(x^3+x^2+x+1)-$$

$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1)+(dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1)\text{։}$$

Հավասարության երկու մասերում x-*ի միատեսակ աստիճանների գործակիցները հավասարեցնելով, կստանանք հավասարումների սիստեմ, որտեղից էլ կորոշվեն* a, b, ..., f *անհայտները՝*

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & d=0, \ (\textit{հաջորդներում արդեն } d\textit{-ն հաշվի չենք առնում}) \\
x^4 & -a+e=4. \\
x^3 & -2b+e+f=4, \\
x^2 & a-b-3c+e+f=16, \qquad a=-1,\ \ b=1,\ \ c=-4, \\
x^1 & 2a-2c+e+f=12, \qquad d=0,\ \ e=3,\ \ f=3\text{։} \\
x^0 & b-c+f=8,
\end{array}$$

Այսպիսով, որոնելի ինտեգրալը կլինի՝

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+$$

$$+3\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1}+3\operatorname{arctg}x+C\text{։}$$

Այս օրինակի մեջ վերջին ինտեգրալի հաշվումը հեշտությամբ միանգամից կատարվեց։ Ուրիշ դեպքերում հարկ է լինում նորից պարզ կոտորակների վերածել։ Հնարավոր է, ի միջի այլոց, նաև այս պրոցեսը միացնել նախորդի հետ։

§ 3. ԱՐՄԱՏԱՆՇԱՆՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

168. $R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ տեսքի արտահայտությունների ինտեգրումը*: *Վերը մենք սովորեցինք վերջավոր տեսքով ինտեգրել ռացիոնալ դիֆերենցիալները։ Հետագայում դիֆերենցիալ արտահայտությունների այս կամ այն դասերի ինտեգրման հիմնական եղանակը*

** Պայմանավորվենք մեկընդմիշտ* R *տառով նշանակել իր արգումենտների ռացիոնալ ֆունկցիան։*

լինելու է այնպիսի $t = \omega(x)$ *(որտեղ* ω*-ն ինքն արտահայտվում է տարրական ֆունկցիայի միջոցով) տեղադրումների որոնումը, որոնք ընդինտեգրալ արտահայտությունը ռացիոնալ տեսքի կբերեն։ Այդ եղանակն անվանենք* ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացման մեթոդ։

Որպես այդ մեթոդի կիրառման առաջին օրինակ դիտարկենք

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx \tag{1}$$

տեսքի ինտեգրալը, որտեղ R*-ը երկու արգումենտի ռացիոնալ ֆունկցիա է նշանակում,* m*-ը՝ բնական թիվ է, իսկ* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$*՝ հաստատուններ են։*

Ընդունենք՝

$$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad x = \varphi(t) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m},$$

Ինտեգրալը կփոխարկվի հետևյալին՝

$$\int R(\varphi(t), t)\, \varphi'(t)\, dt.$$

այստեղ դիֆերենցիալն արդեն ռացիոնալ տեսք ունի, քանի որ R*-ը,* φ*-ն,* φ'*-ը ռացիոնալ ֆունկցիաներ են։ Այս ինտեգրալը նախորդ պարագրաֆի կանոններով հաշվելով, հին փոփոխականին կվերադառնանք, տեղադրելով* $t = \omega(x)$։

(1) տեսքի ինտեգրալին են բերվում նաև ավելի ընդհանուր ինտեգրալներ՝

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \ldots\right) dx,$$

որտեղ բոլոր $r, s, \ldots$ *ցուցիչները ռացիոնալ են. բավական է միայն այդ ցուցիչները* m *ընդհանուր հայտարարի բերել, որպեսզի ինտեգրալի նշանի տակ ստացվի* x*-ի և* $\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$ *արմատի ռացիոնալ ֆունկցիա։*

Օրինակ. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\, \frac{dx}{x+1},$$

Ընդունում ենք՝ $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = -\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}$.

այդ դեպքում

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1} = \int \frac{-3dt}{t^3-1} = \int\left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{(t^2+t+1)}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

որտեղ $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$։

169. Բինոմային դիֆերենցիալների ինտեգրումը։ *Բինոմային կոչվում են*

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

տեսքի դիֆերենցիալները, որտեղ a-*ն ու* b-*ն ցանկացած հաստատուններ են, իսկ* m, n, p *ցուցիչները ռացիոնալ թվեր են։ Պարզենք այն դեպքերը, երբ այդ արտահայտությունները ինտեգրվում են վերջավոր տեսքով։*

Այդպիսի դեպքերից մեկը պարզ է անմիջականորեն. եթե p-*ն ամբողջ թիվ է (դրական, զրո կամ բացասական), ապա դիտարկվող արտահայտությունը պատկանում է նախորդ* n°-*ում ուսումնասիրված տեսակին։ Այն է՝ եթե* m *և* n *կոտորակների հայտարարների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը նշանակենք* λ-*ով, ապա այստեղ կունենանք* $R(\sqrt[\lambda]{x})\,dx$ *տեսքի արտահայտություն, այնպես որ նրա ռացիոնալացման համար բավական է տեղադրել* $t=\sqrt[\lambda]{x}$։

Այժմ տրված արտահայտությունը ձևափոխենք $z = x^n$ *տեղադրությամբ։ Այդ դեպքում*

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}\cdot dz$$

և, համառոտության համար ընդունելով

$$\frac{m+1}{n} - 1 = q,$$

կստանանք՝

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^q \, dz. \qquad (2)$$

Եթե q*-ն ամբողջ թիվ է, ապա մենք նորից գալիս ենք ուսումնասիրված տեսակի արտահայտությանը։ Իրոք, եթե* p *կոտորակի հայտարարը նշանակենք* ν, *ապա ձևափոխված արտահայտությունը կունենա* $R\left(z, \sqrt[\nu]{a+bx}\right)$ *տեսքը։ Ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացմանը կարելի է հասնել և միանգամից, հետևյալ տեղադրությամբ՝*

$$t = \sqrt[\nu]{a+bz} = \sqrt[\nu]{a+bx^n}.$$

Վերջապես, (2) ինտեգրալներից երկրորդն արտագրենք այսպես՝

$$\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q} \, dz.$$

Հեշտ է տեսնել, որ $p+q$ *ամբողջ լինելու դեպքում դարձյալ ունենք ուսումնասիրված դեպքը. ձևափոխված արտահայտությունն ունի* $R\left(z, \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}\right)$ *տեսքը։ Տվյալ ինտեգրալի մեջ ընդինտեգրալ արտահայտությունը ռացիոնալացվում է նաև միանգամից՝*

$$t = \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}$$

տեղադրությամբ։

Այսպիսով, (2)-ի երկու ինտեգրալն էլ արտահայտվում են վերջավոր տեսքով, երբ ամբողջ է

$$p, \; q, \; p+q$$

թվերից մեկը կամ *(որ միևնույն է)*՝

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n}+p$$

թվերից մեկը։

Ինտեգրման այս դեպքերը, ըստ էության, հայտնի են եղել դեռևս Նյուտոնին։ Սակայն միայն անցյալ դարի կեսերին Պ. Լ. Չեբիշևը հաստատեց այն նշանավոր փաստը, որ բինոմային դիֆերենցիալների համար վերջավոր տեսքով ինտեգրման ուրիշ դեպքեր գոյություն չունեն։

Դիտարկենք օրինակներ:

$$1)\ \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Այստեղ՝ $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$. *քանի որ* $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$,

ուստի ունենք ինտեգրելիության երկրորդ դեպքը։ Նկատելով, որ $\nu = 3$, *ընդունենք (ընդհանուր կանոնի համաձայն)՝*

$$t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}},\ x = (t^3-1)^4,\quad dx = 12t^2(t^3-1)^3\,dt.$$

այդ դեպքում՝

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 12\int (t^6 - t^3)\,dt = \frac{3}{7}t^4(4t^3-7) + C \text{ և այլն։}$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx.$$

Այս անգամ $m=0$, $n=4$, $p = -\frac{1}{4}$. *ինտեգրելիության երրորդ դեպքն է, քանի որ* $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$։ *Այստեղ* $\nu = 4$. *ընդունենք՝*

$$t = \sqrt[4]{x^{-4}+1} = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x},\qquad x = (t^4-1)^{-\frac{1}{4}},$$

$$dx = -t^3 (t^4-1)^{-\frac{5}{4}} dt,$$

այնպես որ՝ $\sqrt[4]{1+x^4} = tx = t(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}$ և՝

$$x^4 \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right) dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t + C,$$

և այլն։

170. $R(x\sqrt{ax^2+bx+c})$ տեսքի արտահայտությունների ինտեգրումը: Էյլերի տեղադրությունները: *Անցնում ենք ինտեգրալների մի շատ կարևոր դասի՝*

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx \qquad (3)$$

տեսքի ինտեգրալների դիտարկմանը։ Ենթադրում ենք, իհարկե, որ քառակուսի եռանդամը հավասար արմատներ չունի, այնպես որ $\sqrt{ax^2+bx+c}$-ն ռացիոնալ արտահայտությամբ չի կարելի փոխարինել։ Մենք կուսումնասիրենք երեք տեղադրություններ, որոնք Էյլերի տեղադրություններ են կոչվում և որոնց օգնությամբ այստեղ միշտ կարելի է հասնել ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացմանը։

I *տեղադրությունը կիրառելի է այն դեպքում, երբ* $a > 0$։ *Այս դեպքում ընդունում ենք՝*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\, x^{*}։$$

---

* *Կարելի է տեղադրել նաև*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}\, x։$$

Այս հավասարությունը քառակուսի բարձրացնելով և երկու մասերում ax^2 *ոչնչացնելով, կստանանք* $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\,tx$, *այնպես որ*

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\,t + b}, \qquad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}\,t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t + b},$$

$$dx = 2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t + b)^2}\,dt։$$

Էյլերյան տեղադրման ամբողջ սրամտությունը հենց նրանումն է, որ x*-ը որոշելու համար առաջին աստիճանի հավասարում է ստացվում, այնպես որ* x*-ը, և դրա հետ միաժամանակ նաև* $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ *արմատը* t*-ի միջոցով ռացիոնալ տեսքով են արտահայտվում։*

Եթե ստացված արտահայտությունները (4)-ի մեջ տեղադրենք, հարցը կհանգի t*-ի ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրմանը։ Արդյունքում,* x*-ին վերադառնալով, պետք է տեղադրել*

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}\,x։$$

II *տեղադրությունը կիրառելի է, երբ* $c > 0$։ *Այս դեպքում կարելի է ընդունել՝*

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}\,{}^{*}։$$

Եթե քառակուսի բարձրացնենք, երկու մասերում c*-ն ոչնչացնենք և* x*-ով կրճատենք, ապա կստանանք* $ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}\,t$՝ *նորից* x*-ի նկատմամբ առաջին աստիճանի հավասարում։ Այստեղից՝*

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t - b}{a - t^2}, \qquad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}\,t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a - t^2},$$

$$dx = 2\,\frac{\sqrt{c}\,t^2 - bt + \sqrt{c}\,a}{(a - t^2)^2}\,dt։$$

---

* *կամ՝* $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$։

Այս տեղադրելով (3)-ի մեջ, ակներևորեն, կիրագործենք ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացումը։ Ինտեգրելով, արդյունքում կտեղադրենք $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$.

Դիտողություն I։ *Վերը դիտարկված դեպքերը* ($a>0$ *և* $c>0$), *մեկը մյուսին են բերվում* $x=\dfrac{1}{z}$ *տեղադրությամբ։ Ուստի միշտ կարելի է խուսափել երկրորդ տեղադրությունից։*

Վերջապես, III *տեղադրությունը պիտանի է այն դեպքում, երբ* ax^2+bx+c *քառակուսի եռանդամն ունի* λ *և* μ *(տարբեր) իրական արմատներ։ Այդ դեպքում, ինչպես հայտնի է, այդ եռանդամը վերլուծվում է գծային արտադրիչների՝*

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu).$$

Ընդունենք՝

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda).$$

Բարձրացնելով քառակուսի և կրճատելով $x-\lambda$*-ով, այստեղ ևս կըստանանք առաջին աստիճանի հավասարում՝* $a(x-\mu)=t^2(x-\lambda)$, *այնպես որ՝*

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},$$

$$dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}\,dt$$

և այլն։

Դիտողություն II։ *Արված ենթադրությունների դեպքում,* $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}$ *արմատը (որոշակիության համար համարելով, ասենք՝* $x>\lambda$*) կարելի է ձևափոխել հետևյալ տեսքի՝*

$$(x-\lambda)\sqrt{a\,\frac{x-\mu}{x-\lambda}},$$

այնպես որ դիտարկվող դեպքում

$$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})=R_1\left(x,\sqrt{a\,\frac{x-\mu}{x-\lambda}}\right),$$

և, ըստ էության, գործ ունենք n° **168**-*ում ուսումնասիրված տեսակի դիֆերենցիալի հետ։ Էյլերի* III *տեղադրությունը, որը կարելի է գրել*

$$t = \sqrt{a\,\frac{x-\mu}{x-\lambda}}$$

ձևով, նույնական է արդեն n° **168**-*ում նշված տեղադրմանը։*

Այժմ ցույց տանք, որ Էյլերի միայն I *և* III *տեղադրությունները բավական են (3)-ի մեջ ընդինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացումն իրագործելու համար բոլոր հնարավոր դեպքերում։ Իրոք, եթե* ax^2+bx+c *եռանդամն իրական արմատներ ունի, ապա, ինչպես տեսանք, կիրառելի է* III *տեղադրումը։ Բայց եթե իրական արմատներ չկան, այսինքն՝* $b^2-4ac<0$, *ապա՝*

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]$$

եռանդամը x *փոփոխականի բոլոր արժեքների դեպքում* a-*ի նշանն ունի։* $a<0$ *դեպքը մեզ չի հետաքրքրում, որովհետև այդ դեպքում արմատն ամենևին չէր ունենա իրական արժեքներ, իսկ* $a>0$ *դեպքում կիրառելի է* I *տեղադրումը։*

Այս նկատառումները միաժամանակ բերում են հետևյալ ընդհանուր եզրակացությանը. (3) տիպի ինտեգրալները միշտ վերցվում են (ինտեգրվում են) վերջավոր տեսքով, ընդ որում նրանց ներկայացման համար, բացի այն ֆունկցիաներից, որոնց միջոցով արտահայտվում են ռացիոնալ դիֆերենցիալների ինտեգրալները, պետք են նաև միայն քառակուսի արմատներ:

Օրինակներ: *1)* n° **161**, *6)-ում մենք փաստորեն կիրառել ենք* I *տեղադրությունը հետևյալ ինտեգրալը հաշվելու համար*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \quad (\alpha = \pm a)^2,$$

Թեև երկրորդ հիմնական ինտեգրալը՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

մեզ հայտնի է տարրական նկատառումներից, բայց, վարժության նպատակով, մենք այնուամենայնիվ նրա նկատմամբ կիրառենք Էյլերյան տեղադրությունները։

(ա) Եթե նախ օգտվենք III *տեղադրությունից՝* $\sqrt{a^2-x^2} = t(a-x)$, *ապա*

$$x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}, \qquad \sqrt{a^2-x^2} = \frac{2at}{t^2+1}$$

և՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

Քանի որ տեղի ունի

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \arcsin\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \qquad (-a<x<a)$$

նույնությունը, ապա այս արդյունքը մեզ արդեն հայտնի արդյունքից միայն ձևով է տարբերվում։

Ընթերցողը հետագայում ևս պետք է հաշվի առնի,՝ որ ինտեգրալը կարող է տարբեր ձևերով ստացվել, կախված այն բանից, թե հաշվելու ինչ մեթոդ է կիրառվել:

(բ) Եթե նույն ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք II *տեղադրությունը՝* $\sqrt{a^2-x^2} = xt - a$, *ապա նման ձևով կստանանք՝*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -2\int \frac{dt}{t^2+1} = -2\operatorname{arctg} t + C =$$

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

Այստեղ մենք հանդիպում ենք մի այլ հետաքրքիր հանգամանքի. այս արդյունքը պիտանի է առանձնաբար $(-a, 0)$ *միջակայքի համար և* $(0, a)$ *միջակայքի համար, որովհետև* $x = 0$ *կետում*

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

արտահայտությունն իմաստից զուրկ է։ Այդ արտահայտության սահմանները $x \to -0$ *և* $x \to +0$ *դեպքերում տարբեր են. նրանք հավասար են, համապատասխանաբար,* π *և* $-\pi$ *թվերին։ Հիշյալ միջակայքերի համար* C *հաստատունի նույնպես տարբեր արժեքներ ընտրելով այնպես, որ նրանցից երկրորդն առաջինից* 2π*-ով մեծ լինի, կարելի է կազմել մի ֆունկցիա, որն անընդհատ կլինի* $(-a, a)$ *ամբողջ միջակայքում, եթե նրա արժեքը* $x = 0$ *կետում ընդունենք ընդհանուր սահմանն աջից և ձախից։*

Այս անգամ էլ ստացանք նախկին արդյունքը միայն այլ ձևով, որովհետև տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները՝

$$-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=\begin{cases}\arcsin\dfrac{x}{a}-\pi, & 0<x<a \text{ համար}\\[2mm] \arcsin\dfrac{x}{a}+\pi, & -a<x<0 \text{ համար,}\end{cases}$$

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$;

(ա) Նախ կիրառենք I *տեղադրությունը՝* $\sqrt{x^2-x+1}=t-x,$

$$x=\frac{t^2-1}{2t-1},\quad dx=2\,\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt,$$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}\,dt=$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right]dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\,\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C.$$

Եթե այստեղ տեղադրենք $t=x+\sqrt{x^2-x+1}$, *ապա վերջնականապես կստանանք՝*

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=-\frac{3}{2}\,\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}-$$

$$-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|+2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|+C.$$

(բ) Այժմ կիրառենք II *տեղադրությունը՝* $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1,$

$$x=\frac{2t-1}{t^2-1},\quad dx=-2\,\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}\,dt,\quad \sqrt{x^2-x+1}=\frac{t^2-t+1}{t^2-1},$$

$$x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1},$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}\,dt =$$

$$= \int \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{t-1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2}\right] dt =$$

$$= \frac{3}{t+1} + 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t+1| + C'։$$

Մնում է այստեղ տեղադրել $t = \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$. *ակներև պարզեցումներից հետո կստանանք՝*

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1} +$$

$$+ 2\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-x+1\right| -$$

$$- \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+x+1\right| + C'.$$

Այս արտահայտությունը թեև առաջ ստացվածից ձևով տարբերվում է, բայց $C' = C + \dfrac{3}{2}$ *դեպքում նրա հետ նույնանում է։*

§ 4. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՎ ՑՈՒՑՉԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

171. $R(\sin x, \cos x)\,dx$ դիֆերենցիալների ինտեգրումը։ *Այս տեսքի դիֆերենցիալները միշտ կարող են ռացիոնալացվել հետևյալ տեղադրումով՝* $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$։ *Իրոք՝*

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

այնպես որ՝

$$R(\sin x,\ \cos x)dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2},\quad \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2},$$

Այսպիսով՝

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx$$

տիպի ինտեգրալները միշտ ինտեգրվում են վերջավոր տեսքով. դրանց արտահայտության համար, բացի ռացիոնալ դիֆերենցիալների ինտեգրման ժամանակ պատահող ֆունկցիաներից, պետք են նաև միայն եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ:

(1) տիպի ինտեգրալների համար ընդհանրական (ունիվերսալ) հանդիսացող վերոհիշյալ տեղադրումը երբեմն բարդ հաշվումների է բերում: Սորև նշված են դեպքեր, երբ նպատակին կարելի է հասնել ավելի պարզ տեղադրումների օգնությամբ: Նախապես անենք հետևյալ տարրական դիտողությունները հանրահաշվի բնագավառից:

Երբ R (u, v) *ամբողջ կամ կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիան արգումենտներից մեկի, օրինակ՝* u*-ի, նշանը փոխելիս իր արժեքը չի փոխում, այսինքն, եթե՝*

$$R(-u,\ v) = R(u,\ v),$$

ապա նա կարող է բերվել

$$R(u,\ v) = R_1(u^2,\ v)$$

տեսքի, որն u*-ի միայն զույգ աստիճաններ է պարունակում:*

Իսկ եթե, ընդհակառակը, u*-ի նշանը փոխելիս* R(u, v) *ֆունկցիան նույնպես փոխում է իր նշանը, այսինքն, եթե՝*

$$R(-u,\ v) = -R(u,\ v),$$

ապա նա բերվում է հետևյալ տեսքի՝

$$R(u,\ v) = R_2(u^2,\ v)\,u.$$

այդ անմիջականորեն բխում է նախորդ դիտողությունից, եթե վերջինս կիրառենք $\frac{R(u,\ v)}{u}$ *ֆունկցիայի նկատմամբ:*

I. *Դիցուք այժմ* R(u, v)*-ն փոխում է իր նշանը* u*-ի նշանը փոխելիս. այդ դեպքում՝*

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx =$$

$$= -R_0(1-\cos^2 x, \cos x)\,d\cos x,$$

և ռացիոնալացման կարելի է հասնել $t=\cos x$ *տեղադրումով։*

II. *Նմանապես, եթե* R(u, v)*-ն իր նշանը փոխում է* v*-ի նշանը փոխվելիս, ապա՝*

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R_*^*(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx =$$

$$= R_*^*(\sin x, 1-\sin^2 x)\,d\sin x,$$

այնպես որ այստեղ նպատակահարմար է $t=\sin x$ *տեղադրումը։*

III. *Վերջապես, ենթադրենք, թե* u*-ի և* v*-ի նշանները միաժամանակ փոխվելիս* R(u, v) *ֆունկցիան իր արժեքը չի փոխում*

$$R(-u, -v) = R(u, v)։$$

Այս դեպքում u*-ն փոխարինելով* $\frac{u}{v}$ v*-ով, կունենանք՝*

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right)։$$

Ըստ R *ֆունկցիայի հատկության, եթե* u*-ի և* v*-ի նշանները փոխենք* $\Big($$\frac{u}{v}$ *հարաբերության նշանն այդ դեպքում չի փոխվում*$\Big)$, *ապա*

$$R^*\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R^*\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

իսկ այդ դեպքում, ինչպես գիտենք,

$$R^*\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_1^*\left(\frac{u}{v}, v^2\right)։$$

Ուստի՝

$$R(\sin x, \cos x) = R_1^*(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_1^*\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right),$$

այսինքն, պարզապես՝

$$R(\sin x,\ \cos x) = \tilde{R}(\operatorname{tg} x)։$$

Այստեղ նպատակին հասցնում է $t = \operatorname{tg} x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ *տեղադրությունը, քանի որ՝*

$$R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \tilde{R}\,(t)\,\frac{dt}{1+t^3} \text{ և այլն։}$$

Դիտողություն: *Պետք է ասել, որ ինչպիսին էլ լինի* $R(u,\ v)$ *ռացիոնալ արտահայտությունը, այն միշտ կարելի է ներկայացնել վերը դիտարկված մասնավոր տիպերի երեք արտահայտությունների գումարով։ Օրինակ, կարելի է գրել՝*

$$R(u,\ v) = \frac{R(u,\ v) - R(-u,\ v)}{2} + \frac{R(-u,\ v) - R(-u,\ -v)}{2} +$$

$$+ \frac{R(-u,\ -v) + R(u,\ v)}{2},$$

Այս արտահայտություններից առաջինն իր նշանը փոխում է u*-ի նշանը փոխելիս, երկրորդն իր նշանը փոխում է* v*-ի նշանը փոխելիս, իսկ երրորդը պահպանում է իր արժեքը* u*-ի և* v*-ի նշանը միաժամանակ փոխելիս։* $R(\sin x,\ \cos x)$ *արտահայտությունը համապատասխան գումարելիների վերածելով, նրանցից առաջինի նկատմամբ կարելի է կիրառել* $t = \cos x$ *տեղադրումը, երկրորդի նկատմամբ՝* $t = \sin x$ *տեղադրումը և, վերջապես, երրորդի նկատմամբ՝* $t = \operatorname{tg} x$ *տեղադրումը։ Այսպիսով, (1) տիպի ինտեգրալը հաշվելու համար այս երեք տեղադրումները բավական են։*

Օրինակներ: *1)* $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$։ *Ընդինտեգրալ արտահայտությունը փոխում է իր նշանը* $\cos x$*-ը* $(-\cos x)$*-ով փոխարինելիս։ Տեղադրումն է՝* $t = \sin x$

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int t^2(1 - t^2)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \quad \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C։$$

2) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$։ *Ընդինտեգրալ արտահայտությունն իր արժեքը չի փո-*

խում $\sin x$*-ը* $(-\sin x)$*-ով և* $\cos x$*-ը* $(-\cos x)$*-ով փոխարինելիս։ Տեղադրումն է՝* $t = \operatorname{tg} x$.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\, dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} = \int \frac{dx}{\sin x\,(2\cos^2 x - 1)}$, *Տեղադրումն է՝* $t = \cos x$.

$$\int \frac{dx}{\sin x\,(2\cos^2 x - 1)} = \int \frac{dx}{(1-t^2)(1-2t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + t\sqrt{2}}{1 - t\sqrt{2}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2}\cos x}{1 - \sqrt{2}\cos x} \right| + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

4) $\displaystyle\frac{1}{2} \int \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx \quad (0 < r < 1,\ -\pi < x < \pi)$.

Այստեղ կիրառենք $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ *ընդհանրական տեղադրումը։ Ունենք՝*

$$\frac{1}{2} \int \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx = (1 - r^2) \int \frac{dt}{(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r}\, t \right) + C = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

Այս ինտեգրալին է բերվում նաև հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx = \int \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} x + \operatorname{arctg} \left(\frac{1+r}{1-r} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

172. Այլ դեպքերի ակնարկ: n° **163**-*ում մենք արդեն նշել ենք, թե ինչպես են ինտեգրվում*

$$P(x) e^{ax}\, dx, \qquad P(x) \sin bx\, dx, \qquad P(x) \cos bx\, dx$$

տեսքի արտահայտությունները, որտեղ P(x)*-ն ամբողջ բազմանդամ է։ Հետաքրքրական է նշել, որ*

$$\frac{e^x}{x^n}\,dx,\quad \frac{\sin x}{x^n}\,dx,\quad \frac{\cos x}{x^n}\,dx \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

կոտորակային արտահայտություններն արդեն չեն ինտեգրվում վերջավոր տեսքով։

Մասերով ինտեգրման օգնությամբ հեշտ է այդ արտահայտությունների ինտեգրալների համար անդրադարձ բանաձևեր ստանալ և բերել դրանք, համապատասխանաբար, հետևյալ երեք հիմնական ինտեգրալներին՝

I. $\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{dy}{\ln y} = \mathrm{li}\, y$* *(«ինտեգրալային լոգարիթմ»)*,

II. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \mathrm{si}\, x$ *(«ինտեգրալային սինուս»)*,

III. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx = \mathrm{ci}\, x$ *(«ինտեգրալային կոսինուս»)***։

Մենք արդեն գիտենք հետևյալ ինտեգրալները [n° **168**,4)]՝

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}\,e^{ax} + C.$$

Դրանցից ելնելով, կարելի է վերջավոր տեսքով գտնել հետևյալ ինտեգրալները՝

$$\int x^n e^{ax}\sin bx\,dx,\quad \int x^n e^{ax}\cos bx\,dx,$$

---

* *Տեղադրումն է՝* $x = \log y$։

** *Ի միջի այլոց, բոլոր երեք դեպքերում պետք է նաև կամավոր հաստատունը ֆիքսել. այդ կարգի հետագայում։*

որտեղ $n = 1, 2, 3 \ldots$ *Այն է, մասերով ինտեգրելով, կստանանք՝*

$$\int x^n e^{ax} \sin bx \, dx = x^n \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} - $$

$$- \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx \, dx + \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx \, dx,$$

$$\int x^n e^{ax} \cos bx \, dx = x^n \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} -$$

$$- \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx \, dx - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Այս անդրադարձ բանաձևերը թույլատրում են մեզ հետաքրքրող ինտեգրալները բերել $n = 0$ *դեպքին։*

§ 5. ԷԼԻՊՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

173. Սահմանումներ: n° **170**-*ում դիտարկված*

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

տեսքի ինտեգրալներին, որոնք միշտ կարելի է հաշվել վերջավոր տեսքով, բնականաբար հարում են հետևյալ տեսքի ինտեգրալները՝

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right) dx, \tag{1}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right) dx, \tag{2}$$

որոնք պարունակում են քառակուսի արմատներ երրորդ կամ չորրորդ աստիճանի բազմանդամներից։ Այս՝ կիրառություններում ոչ հազվադեպ ինտեգրալների շատ կարևոր դաս է։ Սակայն պետք է ասել, որ (1) և (2) տեսքի ինտեգրալները, որպես կանոն, արդեն չեն արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով վերջավոր տեսքով:

Այդ պատճառով էլ դրանց հետ ծանոթանալը մենք գցել ենք եզրափակիչ պարագրաֆի մեջ, որպեսզի գլխավորապես վերջավոր տեսքով վերցվող ինտեգրալների դասի ուսումնասիրությանը նվիրված սույն գլխի շարադրման հիմնական գիծը չընդհատենք։

Ենթադրվում է, որ ենթարմատային բազմանդամներն իրական գործակիցներ ունեն։ Բացի այդ, միշտ կհամարենք, որ նրանք բազմապատիկ արմատներ չունեն, որովհետև հակառակ դեպքում գծային արտադրիչն արմատի տակից կարելի կլիներ դուրս հանել. հարցը կհանգեր արդեն առաջ ուսումնասիրված տիպերին պատկանող արտահայտությունների ինտեգրման, և ինտեգրալը վերջավոր տեսքով կարտահայտվեր։ Վերջին հանգամանքը կարող է տեղի ունենալ երբեմն նաև բազմապատիկ արմատների բացակայության դեպքում. օրինակ հեշտ է ստուգել, որ՝

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C,$$

$$\int \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}\,dx = x\sqrt{2x^3+1} + C։$$

(1) և (2) տիպի ինտեգրալներն ընդհանրապես անվանում են էլիպտիկ *ինտեգրալներ, կապված այն հանգամանքի հետ, որ առաջին անգամ դրանց հանդիպել են էլիպսի երկարությունը հաշվելու խնդիրը լուծելիս* [n° **201,4**)]*։ Ի միջի այլոց, այդ անունը, ստույգ իմաստով, սովորաբար վերագրում են այդ ինտեգրալներից նրանց, որոնք վերջավոր տեսքով չեն վերցվում, իսկ մյուսները, քիչ առաջ բերվածների նմանները, անվանում են* պսևդոէլիպտիկ (կեղծ էլիպտիկ):

(1) և (2) արտահայտությունների ինտեգրալների ուսումնասիրությունը և նրանց արժեքների համար աղյուսակներ կազմելը a, b, c, ..., *կամայական գործակիցների դեպքում, իհարկե, դժվարին գործ է։ Ուստի բնական է ցանկանալ այդ բոլորը բերել սակավ թվով այնպիսի ինտեգրալների, որոնց կազմի մեջ հնարավորին չափ քիչ կամայական գործակիցներ (պարամետրեր) մտնեն։*

174. Բերումն կանոնական ձևի: *Ամենից առաջ նկատենք, որ ընդհանրապես բավական է սահմանափակվել արմատի տակ 4-րդ աստիճանի բազմանդամի դեպքով, որովհետև հեշտությամբ դրան է բերվում և այն դեպքը, երբ արմատի տակ 3-րդ աստիճանի բազմանդամ է։ Իրոք, իրական գործակիցներ ունեցող* ax^3+bx^2+cx+d *երրորդ աստիճանի բազմանդամն անպայման իրական արմատ ունի* [n° **69**], *ասենք՝* λ, *և, հետևապես, թույլատրում է իրական վերլուծում՝*

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\lambda)(x^2+px+q)։$$

Հենց $x - \lambda = t^2$ (կամ՝ $x - \lambda = -t^2$) տեղադրումն էլ իրականացնում է պահանջված ձևափոխությունը՝

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3 + \ldots}\right) dx = \int R\left(t^2 + \lambda, \quad t\sqrt{at^4 + \ldots}\right) 2t\,dt.$$

Այսուհետև կդիտարկենք միայն (2) տեսքի դիֆերենցիալներ, որոնք պարունակում են արմատ 4-րդ աստիճանի բազմանդամից։

Տարրական ձևափոխությունների ու տեղադրությունների օգնությամբ, որոնց վրա այստեղ հնարավորություն չունենք կանգ առնելու, (2) էլիպտիկ ինտեգրալն ամենից առաջ, բացի վերջավոր տեսքով արտահայտվող ինտեգրալներից, բերվում է այսպես կոչված կանոնական ինտեգրալի, որն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int \frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}, \tag{3}$$

որտեղ k-ն մի որոշ դրական կանոնավոր կոտորակ է՝ $0 < k < 1$։

R ռացիոնալ ֆունկցիայից առանձնացնելով ամբողջ մասը, իսկ մնացած կանոնավոր կոտորակը վերլուծելով պարզագույն կոտորակների, վերջը հանգում ենք այսպիսի ընդհանուր եզրակացության.

բոլոր էլիպտիկ ինտեգրալները տարրական տեղադրումների օգնությամբ, և վերջավոր տեսքով արտահայտվող գումարելիների ճշգրտությամբ, բերվում են հետևյալ երեք ստանդարտ ինտեգրալներին՝

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}, \qquad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} \\ \displaystyle\int \frac{dz}{(1 + hz^2)\sqrt{(1 - z^3)(1 - k^2z^3)}}, \end{array}\right\} (0 < k < 1),$$

որտեղ վերջին ինտեգրալում h-ը կարող է նաև կոմպլեքս թիվ լինել։ Այս ինտեգրալները, ինչպես ցույց է տվել Լիուվիլը*, արդեն վերջավոր տեսքով չեն վերցվում։ Դրանք Լեժանդրն* անվանել է էլիպտիկ ինտեգրալներ, համապատասխանաբար, 1-ին, 2-րդ և 3-րդ սեռակի։ Առաջին երկուսը միայն մեկ k պարամետր են պարունակում, իսկ վերջինը, բացի այդ, նաև h (կոմպլեքս) պարամետր։

---

* Անդրիան Մարի Լեժանդր (1752—1833) և Ժոզեֆ Լիուվիլ (1809—1882)՝ ֆրանսիացի ականավոր մաթեմատիկոսներ։

Լ ե ժ ա ն դ ր ն այդ ինտեգրալների մեջ էլի, հետագա պարզեցումներ է մտցրել, կատարելով նրանց մեջ $z = \sin\varphi$ տեղադրություն (φ փոփոխվում է 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$)։ Այդ դեպքում նրանցից առաջինն անմիջականորեն բերվում է հետևյալ ինտեգրալին՝

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,. \tag{4}$$

Երկրորդը ձևափոխվում է այսպես՝

$$\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{k^2}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{k^2}\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\,,$$

այսինքն բերվում է նախորդ ինտեգրալին և մի նոր ինտեգրալի՝

$$\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\,. \tag{5}$$

Վերջապես, երրորդ ինտեգրալը նշված տեղադրումով դառնում է

$$\int\frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,. \tag{6}$$

(4), (5) և (6) ինտեգրալները նույնպես 1-ին, 2-րդ և 3-րդ տեսակի էլիպտիկ ինտեգրալներ են կոչվում Լ ե ժ ա ն դ ր ի ձևով։

Դրանցից հատուկ կարևորություն և հաճախակի կիրառում ունեն առաջին երկուսը։ Եթե համարենք, որ $\varphi = 0$ դեպքում այդ ինտեգրալները զրո են դառնում, և դրանով ֆիքսենք նրանց մեջ պարունակվող կամավոր հաստատունները, ապա կստացվեն φ-ի երկու միանգամայն որոշակի ֆունկցիաներ, որոնք Լ ե ժ ա ն դ ր ը նշանակել է, համապատասխանաբար, $F(k, \varphi)$ և $E(k, \varphi)$։ Այստեղ, բացի φ անկախ փոփոխականից, նշված է նաև այդ ֆունկցիաների արտահայտությունների մեջ մտնող k պարամետրը, որը մ ո դ ու լ է կոչվում։

Լ ե ժ ա ն դ ր ը այդ ֆունկցիաների արժեքների լայնածավալ աղյուսակներ է կազմել տարբեր φ-երի և տարբեր k-երի դեպքում։ Այդ աղյուսակների մեջ ոչ միայն φ արգումենտն է աստիճաններով արտահայտվում, որը մեկնաբանվում է որպես ա ն կ յ ու ն, այլև k մոդուլը (կանոնավոր կոտորակը!) դիտարկվում է որպես մի որոշ անկյան սինուս, որը և նշվում է աղյուսակի մեջ մոդուլի փոխարեն, և ընդսմին նույնպես աստիճաններով։

Բացի այդ, ինչպես Լ ե ժ ա ն դ ր ի, այնպես էլ ուրիշ գիտնականների կողմից ուսումնասիրվել են այդ ֆունկցիաների շատ խորը հատ-

կություններ, ստացվել են դրանց վերաբերող մի շարք բանաձևեր և այլն։ Դրա շնորհիվ, Լեժանդրի F և E ֆունկցիաները մտել են անալիզի և նրա կիրառումների մեջ հանդիպող ֆունկցիաների ընտանիքը, տարրական ֆունկցիաների հետ հավասար իրավունքներով։

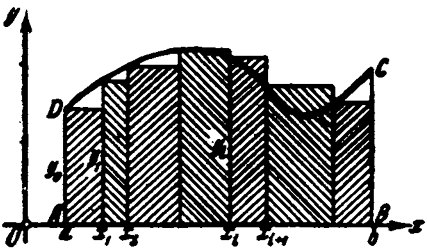
Ինտեգրալ հաշվի ստորին մասը, որով հիմնականում ստիպված ենք առայժմ սահմանափակվել, զբաղվում է «վերջավոր տեսքով» ինտեգրումով։ Սակայն սխալ կլիներ կարծել, թե դրանով սահմանափակվում են ինտեգրալ հաշվի խնդիրներն ընդհանրապես. F և E էլիպտիկ ինտեգրալները այնպիսի ֆունկցիաների օրինակներ են հանդիսանում, որոնք բեղմնավոր կերպով ուսումնասիրվում են իրենց ինտեգրալ արտահայտություններով, թեև տարրական ֆունկցիաների միջոցով չեն կարող ներկայացվել վերջավոր տեսքով։

ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

§ 1. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ ԵՎ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

175. Այլ մոտեցում մակերեսի խնդրին: *Վերադառնանք* ABCD *(գծ. 65) կորագիծ սեղանի մակերեսը որոշելու խնդրին, որով արդեն զբաղվել ենք* n° **156**-*ում: Այժմ կշարադրենք այդ խնդրի լուծման մի այլ մոտեցում**:

Սեղանի AB *հիմքը կամայական եղանակով տրոհենք մասերի և տանենք տրոհման կետերին համապատասխանող օրդինատները. այդ ժամանակ կորագիծ սեղանը կտրոհվի մի շարք շերտերի (տե՛ս գծագիրը):*



Գծ. 65.

Այժմ յուրաքանչյուր շերտ մոտավորապես փոխարինենք մի ուղղանկյունով, որի հիմքը նույնն է, ինչ որ շերտինը, իսկ բարձրությունը համընկնում է շերտի օրդինատներից մեկին, ասենք՝ ձախակողմյանին: Այսպիսով, կորագիծ պատկերը կփոխարինվի առանձին ուղղանկյուններից կազմված մի աստիճանաձև պատկերով:

Տրոհման կետերի աբսցիսները նշանակենք՝

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots x_n = b: \qquad (1)$$

i-*րդ ուղղանկյան հիմքը* $(i=0, 1, 2, \dots, n-1)$, *ակներևորեն, հավասար է* $x_{i+1} - x_i$ *տարբերությանը, որը կնշանակենք* Δx_i-*ով: Ինչ վերաբե-*

---

* *Ընդհանրացնելով այդ ժամանակ այն գաղափարը, որն արդեն մեկ անգամ կիրառվել է մասնավոր օրինակում* **[43, 4]**:

րում է բարձրությանը, ապա, ըստ մեր ասածի, նա հավասար է $y_i = f(x_i)$*։ Ուստի* i*-րդ ուղղանկյան մակերեսը կլինի՝* $y_i\Delta x_i = f(x_i)\Delta x_i$*։*

Բոլոր ուղղանկյունների մակերեսները միագումարելով, կստանանք կորագիծ սեղանի P *մակերեսի մոտավոր արժեքը՝*

$$P \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i\Delta x_i \quad \text{կամ՝} \quad P \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i\text{։}$$

Այս հավասարության սխալը բոլոր Δx_i*-երը անսահմանորեն նվազելիս ձգտում է զրոյի։* P *մակերեսի ճշգրիտ արժեքը կստացվի որպես սահման՝*

$$P = \lim \sum y_i\,\Delta x_i = \lim \sum f(x_i)\,\Delta x_i, \tag{2}$$

այն ենթադրությամբ, որ բոլոր Δx_i *երկարությունները միաժամանակ ձգտում են 0-ի։*

Նույն եղանակը կիրառելի է նաև AKLD *(գծ. 63) պատկերի* $P(x)$ *մակերեսը հաշվելու համար, միայն կարիք կլիներ մասերի տրոհել* AK *հատվածը։ Նկատենք և այն, որ այն դեպքը, երբ* $y = f(x)$ *ստանում է նաև բացասական արժեքներ, սպառվում է* n° **156***-ում պարունակված այն պայմանով, որ պատկերի՝* x*-երի առանցքից ցածր գտնվող մասերի մակերեսները պետք է բացասական համարել։*

Հենց $\Sigma y\Delta x$ *տեսքի գումարը (ավելի ճշգրիտ՝ այդ գումարի սահմանային արժեքը) նշանակելու համար է Լայբնիցը մուծել* $\int y\,dx$ *սիմվոլը, որտեղ* $y\,dx$*-ը հիշեցնում է գումարի տիպական գումարելին, իսկ* $\int$*-ը՝ ոճավորված* S *տառն է՝ լատինական «Summa»* բառի սկզբնատառը։ Քանի որ այդ սահմանային արժեքը ներկայացնող մակերեսը միաժամանակ* y *ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիան է հանդիսանում, ապա միևնույն սիմվոլը պահպանվել է նաև նախնական ֆունկցիան նշանակելու համար։ Հետագայում, երբ մուծվել է ֆունկցիոնալ նշանակումը, սկսել են գրել՝*

$$\int f(x)\,dx,$$

եթե խոսքը վերաբերում էր փոփոխական մակերեսին և՝

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ABCD *հաստատուն պատկերի մակերեսի դեպքում, որը համապատասխանում է* x*-ի փոփոխմանը* a*-ից մինչև* b*։*

---

* *«Ինտեգրալ» (լատիներեն* integer*=ամբողջ) տերմինն առաջարկել է Լայբնիցի աշակերտ և սխրակից Իոհան Բեռնուլին։ Լայբնիցն ինքն սկզբում ասելիս է եղել «բոլոր* $y\,dx$*-երի գումարը»։*

Մենք օգտվեցինք մակերեսի ինտուիտիվ պատկերացումից, որպեսզի բնականորեն մոտենանք (2) տեսքի յուրատեսակ գումարների սահմանների դիտարկմանը, որոնք էլ հենց պատմականորեն մուծվել են մակերես հաշվելու խնդրի կապակցությամբ։ Սակայն մակերեսի գաղափարն ինքը հիմնավորման կարիք է զգում, և, եթե խոսքը վերաբերում է կորագիծ սեղանին, այդ հիմնավորումը տրվում է հենց վերոհիշյալ սահմանների օգնությամբ։ Հասկանալի է, որ դրան պետք է նախորդի (2) սահմանների ինքնին ուսումնասիրությունը, չկապված երկրաչափական պատկերացումների հետ։ Հենց դրան է նվիրված դասընթացի ներկա գլուխը։

(2) տեսքի սահմանները բացառիկ կարևոր դեր են խաղում մաթեմատիկական անալիզում և նրա բազմազան կիրառություններում։ Ընդսմին, այստեղ զարգացվող գաղափարները տարբեր ձևափոխություններով բազմիցս կրկնվելու են դասընթացի ամբողջ ընթացքում։

176. Սահմանումը։ *Դիցուք* $f(x)$ *ֆունկցիան տրված է մի որոշ* $[a, b]$ *միջակայքում։ Այդ միջակայքը կամայական եղանակով տրոհենք մասերի, մտցնելով* a*-ի և* b*-ի միջև տրոհման (1) կետերը։* $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *տարբերություններից մ ե ծ ա գ ու յ ն ն այսուհետև նշանակելու ենք* λ*-ով։*

$[x_i, x_{i+1}]$ *մասնակի միջակայքերից յուրաքանչյուրի մեջ կամայապես վերցնենք* $x = \xi_i$ *կետ**՝*

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} \quad (i = 0, \ldots, n-1)$$

և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i\text{։}$$

Այժմ սահմանենք այս գումարի՝

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma\text{։} \tag{3}$$

(վերջավոր) սահմանի գաղափարը։

Պատկերացնենք, որ $[a, b]$ *միջակայքը հաջորդաբար տրոհվում է մասերի, նախ մի եղանակով, ապա՝ երկրորդ եղանակով, երրորդ եղանակով և այլն։ Միջակայքի տրոհումների այսպիսի հաջորդականությունը կանվանենք հ ի մ ն ա կ ա ն, եթե* $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ *արժեքների համապատասխան հաջորդականությունը ձգտում է զրոյի։*

---

* *Վերևում որպես* ξ_i *բոլոր դեպքերում վերցնում էինք փոքրագույն արժեքը՝* x_i*։*

(3) հավասարությունը հասկանում ենք այն իմաստով, որ միջակայքի տրոհումների ցանկացած *հիմնական* հաջորդականությանը համապատասխանող σ գումարի արժեքների հաջորդականությունը միշտ ձգտում է I սահմանին, ինչպես էլ ընտրելու լինենք այդ ժամանակ ξ_i թվերը:

Այստեղ ևս կարելի է սահմանի գաղափարը ձևակերպել «ε — δ լեզվով»: Այսպես. ասում են որ σ գումարը $\lambda \to 0$ դեպքում ունի I (վերջավոր) սահմանը, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար կգանվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ, հենց որ լինի $\lambda < \delta$ (այսինքն՝ հիմնական միջակայքը տրոհված լինի այնպիսի մասերի, որոնց Δx_i երկարությունները $< \delta$),

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

անհավասարությունը տեղի կունենա ξ թվերի ցանկացած ընտրության դեպքում:

Երկու սահմանումների համարժեքության ապացուցումը կարելի է կատարել նույն դատողությունների օգնությամբ, ինչ որ n° 33-ում: Առաջին սահմանումը («հաջորդականությունների լեզվով») թույլատրում է սահմանների տեսության հիմնական գաղափարներն ու առաջադրությունները փոխանցել այս նոր տեսակի սահմանի վրա:

σ գումարի I վերջավոր սահմանը, երբ $\lambda \to 0$, կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ a-ից մինչև b միջակայքում *և նշանակվում է այսպես՝**

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

եթե այդպիսի սահման գոյություն ունի, ապա $f(x)$ *ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի* $[a, b]$ *միջակայքում:*

a *և* b *թվերը կոչվում են ինտեգրալի, համապատասխանաբար, ստորին և վերին սահմաններ: Հաստատուն սահմանների դեպքում որոշյալ ինտեգրալը հաստատուն թիվ է:*

---

* *Որոշյալ ինտեգրալի համար այս նշանակումը մուծել է ֆրանսիայի մաթեմատիկոս ու ֆիզիկոս Ժան Բատիստ Ժոզեֆ Ֆուրյեն (1768—1830): Էյլերն ավելի մեծածավալ տեսքով է գրել՝*

$$\int P\,dx \begin{bmatrix} x = a\text{-ից} \\ \text{մինչև } x = b \end{bmatrix},$$

Բերված սահմանումը պատկանում է *Ռիմանին*, որն առաջինն է արտահայտել այն ընդհանուր ձևով և ուսումնասիրել նրա կիրառման բնագավառը: σ գումարն ևս երբեմն *ռիմանյան գումար* են անվանում, չնայած փաստորեն դեռևս Կոշին է պարզորոշ կերպով օգտվել նման գումարների սահմաններից անընդհատ ֆունկցիայի դեպքի համար: Բայց մենք գերադասելու ենք այն անվանել *ինտեգրալային գումար*, ընդգծելու համար նրա կապն ինտեգրալի հետ:

Այժմ խնդիր դնենք՝ պարզել այն պայմանները, որոնց դեպքում σ ինտեգրալային գումարը վերջավոր սահման ունի, այսինքն՝ գոյություն ունի (4) որոշյալ ինտեգրալը:

Ամենից առաջ նկատենք, որ բերված սահմանումը իրականում կարող է կիրառվել միայն *սահմանափակ* ֆունկցիայի նկատմամբ: Իրոք, եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ միջակայքում անսահմանափակ լիներ, ապա, միջակայքը ցանկացած եղանակով մասերի տրոհելիս, նա կպահպաներ նման հատկություն մասերից գոնե մեկի մեջ: Այդ դեպքում, այդ մասի մեջ ξ կետի ընտրության հաշվին կարելի կլիներ $f(\xi)$ արժեքը, իսկ դրա հետ միասին նաև σ գումարը, դարձնել ցանկացած չափով մեծ. այս պայմաններում σ-ի համար վերջավոր սահման, ակներևորեն, չէր կարող գոյություն ունենալ: Այսպիսով, ինտեգրելի ֆունկցիան անհրաժեշտորեն սահմանափակ է:

Այդ պատճառով էլ հետագա հետազոտության ժամանակ նախապես ենթադրելու ենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան *սահմանափակ* է՝

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \text{եթե} \quad a \leqslant x \leqslant b:$$

177. Դարբուի գումարները: Որպես հետազոտման օժանդակ միջոց, ինտեգրալ գումարների հետ միասին դիտարկման ենթարկենք, *Դարբուի** օրինակով, նաև այլ, դրանց նման, բայց ավելի պարզ գումարներ:

m_i-ով ու M_i-ով նշանակենք $f(x)$ ֆունկցիայի, համապատասխանաբար, ստորին և վերին ճշգրիտ եզրերը $[x_i, x_{i+1}]$ միջակայքում, և կազմենք հետևյալ գումարները՝

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i:$$

Հենց այս գումարները կոչվում են, համապատասխանաբար, *ստորին* և *վերին (ինտեգրալային) գումարներ*, կամ՝ *Դարբուի գումարներ*:

* Գաստոն Դարբու (1842—1917)՝ ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

Մասնավոր դեպքում, երբ $f(x)$-ը անընդհատ է, նրանք պարզապես հանդիսանում են վերցրած տրոհմանը համապատասխանող ինտեգրալային գումարներից մեծագույնն ու փոքրագույնը, որովհետև այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան յուրաքանչյուր միջակայքում հասնում է իր ճշգրիտ եզրերին և ξ_i կետերը կարելի է ընտրել այնպես, որ, ըստ ցանկության լինի

$$f(\xi_i) = m_i \quad \text{կամ} \quad f(\xi_i) = M_i\text{։}$$

Անցնելով ընդհանուր դեպքին, հենց ստորին և վերին եզրերի սահմանումից ունենք՝

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i\text{։}$$

Այս անհավասարությունների երկու մասերն էլ Δx_i-ով բազմապատկելով (Δx_i-ն դրական է) և ըստ i-ի հանրագումարելով, կստանանք՝

$$s \leqslant \sigma \leqslant S\text{։}$$

Տվյալ տրոհման դեպքում s և S գումարները հաստատուն թվեր կլինեն, մինչդեռ σ գումարը դեռևս փոփոխական է մնում ξ_i թվերի կամավոր լինելու շնորհիվ։ Բայց հեշտ է տեսնել, որ ξ_i-երի ընտրության հաշվին կարելի է $f(\xi_i)$ արժեքները ցանկացած չափով մոտեցնել ինչպես m_i-ին, այնպես էլ M_i-ին, ուրեմն և σ գումարը ցանկացած չափով մոտեցնել s-ին կամ S-ին։ Իսկ այդ դեպքում նախորդ անհավասարությունները բերում են հետևյալ արդեն ընդհանուր դիտողությանը՝ միջակայքի տվյալ տրոհման դեպքում Դարբուի s և S գումարները ծառայում են որպես ինտեգրալային գումարների, համապատասխանաբար, ստորին և վերին ճշգրիտ եզրեր:

Դարբուի գումարներն օժտված են հետևյալ պարզ հատկություններով.

Առաջին հատկություն։ Եթե եղած տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնենք, ապա Դարբուի ստորին գումարը դրանից թերևս կարող է միայն մեծանալ, իսկ վերին գումարը՝ թերևս միայն փոքրանալ:

Ապացուցում։ Այս հատկությունն ապացուցելու համար բավական է սահմանափակվել արդեն եղած տրոհման կետերին մեկ x' տրոհման կետ ևս ավելացնելով։

Դիցուք այդ կետն ընկնում է x_k և x_{k+1} կետերի միջև, այնպես որ՝

$$x_k < x' < x_{k+1}\text{։}$$

Եթե *նոր* վերին գումարը նշանակենք S', ապա նախկին S-ից նա միայն նրանով կտարբերվի, որ S գումարի մեջ $[x_k, x_{k+1}]$ միջակայքին համապատասխանում էր

$$M_k(x_{k+1}-x_k)$$

գումարելին, իսկ S' նոր գումարի մեջ այդ միջակայքին համապատասխանում է

$$\overline{M}_k(x'-x_k)+\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x')$$

երկու գումարելիների գումարը, որտեղ $\overline{M}_k$-ն ու $\overline{\overline{M}}_k$-ն $f(x)$ ֆունկցիայի վերին ճշգրիտ եզրերն են $[x_k, x']$ և $[x', x_{k+1}]$ միջակայքերում։ Քանի որ այդ միջակայքերը $[x_k, x_{k+1}]$ միջակայքի մասերն են հանդիսանում, ապա

$$\overline{M}\leqslant M_k,\quad \overline{\overline{M}}\leqslant M_k,$$

այնպես որ՝

$$\overline{M}_k(x'-x_k)\leqslant M_k(x'-x_k),\quad \overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x')\leqslant M_k(x_{k+1}-x')։$$

Գումարելով այս անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\overline{M}_k(x'-x_k)+\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x')\leqslant M_k(x_{k+1}-x_k)։$$

Այստեղից հետևում է, որ $S'\leqslant S$։ Ստորին գումարի համար ապացուցումը կատարվում է նման եղանակով։

Երկրորդ հատկություն։ Դարբուի յուրաքանչյուր ստորին գումար չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարին, թեկուզ և միջակայքի այլ տրոհման համապատասխանող:

Ապացուցում։ $[a, b]$ միջակայքը կամավոր եղանակով տրոհենք մասերի և այդ տրոհման համար կազմենք *Դարբուի* գումարները՝

$$s_1 \text{ և } S_1։ \tag{I}$$

Այժմ դիտարկենք $[a, b]$ միջակայքի մի այլ, առաջինի հետ ոչ մի կերպ չկապված, տրոհում։ Դրան նույնպես կհամապատասխանեն իր *Դարբուի գումարները*՝

$$s_2 \text{ և } S_2։ \tag{II}$$

Պահանջվում է ապացուցել, որ $s_1\leqslant S_2$։ Այդ նպատակով միավորենք մեկ և մյուս տրոհման կետերը. այդ դեպքում կստանանք մի երրորդ, օժանդակ, տրոհում, որին կհամապատասխանեն

$$s_3 \text{ և } S_3 \qquad \text{(III)}$$

գումարները։

Երրորդ տրոհումը մենք ստացանք առաջինից, *ավելացնելով տրոհման նոր կետեր*. ուստի *Դարբուի* գումարների ապացուցված 1-ին հատկության հիման վրա, ունենք՝

$$s_1 \leqslant s_3\text{։}$$

Այժմ երկրորդ և երրորդ տրոհումները համեմատելով, ճիշտ նույնպես եզրակացնում ենք, որ՝

$$S_3 \leqslant S_2\text{։}$$

Բայց $s_3 \leqslant S_3$, այնպես որ հենց նոր ստացված անհավասարություններից բխում է՝

$$s_1 \leqslant S_2,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Ապացուցածից հետևում է, որ ստորին գումարների ամբողջ $\{s\}$ բազմությունը սահմանափակված է վերևից, օրինակ՝ ցանկացած S վերին գումարով։ Այդպիսի դեպքում [n° 6] այդ բազմությունն ունի վերջավոր վերին *ճշգրիտ* եզր՝

$$I_* = \sup\{s\}$$

և, բացի այդ,

$$I_* \leqslant S,$$

ինչպիսին էլ լինի S վերին գումարը։ Քանի որ վերին գումարների $\{S\}$ բազմությունը, այդպիսով, ներքևից սահմանափակված է լինում I_* թվով, ապա նա ունի վերջավոր ստորին *ճշգրիտ* եզր՝

$$I^* = \inf\{S\},$$

ընդ որում, ակներևորեն,

$$I_* \leqslant I^*\text{։}$$

Համադրելով բոլոր ասածները, *Դարբուի* ցանկացած ստորին և վերին գումարների համար ունենք՝

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S\text{։} \qquad (3)$$

178. Ինտեգրալի գոյության պայմանը: *Դարբուի* գումարների օգնությամբ այժմ հեշտ է բանաձևել այդ պայմանը։

Թեորեմա։ Որոշյալ ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի լինի

$$\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0։ \qquad (6)$$

*n° **176**-ում ասվածը բավական է այդ սահմանի իմաստը պարզաբանելու համար։ Օրինակ, «ε — δ լեզվով» (6) պայմանը նշանակում է, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$, որ հենց որ $\lambda < \delta$ (այսինքն՝ միջակայքը տրոհվի այնպիսի մասերի, որոնց Δx_i երկարությունները $< \delta$), անմիջապես տեղի է ունենում*

$$S - s < \varepsilon$$

անհավասարությունը։

Ապացուցում։ Անհրաժեշտությունը։ *Ենթադրենք, թե գոյություն ունի (4) ինտեգրալը։ Այդ դեպքում ամեն մի տված $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$, որ հենց որ բոլոր $\Delta x_i < \delta$, անմիջապես՝*

$$|\sigma - I| < \varepsilon, \quad \text{կամ} \quad I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon,$$

ինչպես էլ ընտրելու լինենք ξ_i-երը համապատասխան միջակայքերի սահմաններում։ Բայց s և S գումարները, միջակայքի տված տրոհման դեպքում, ինչպես մենք ցույց տվեցինք, ինտեգրալային գումարների համար, համապատասխանաբար, ստորին և վերին ճշգրիտ եզրեր են հանդիսանում. ուստի դրանց համար կունենանք՝

$$I - \varepsilon \leqslant s \leqslant S \leqslant I + \varepsilon,$$

այնպես որ՝

$$\lim_{\lambda \to 0} s = I, \quad \lim_{\lambda \to 0} S = I, \qquad (7)$$

որտեղից և հետևում է (6)-ը։

Բավարարությունը։ *Ենթադրենք, թե (6) պայմանը կատարված է. այդ դեպքում (5)-ից անմիջապես պարզ է, որ $I_* = I^*$ և, եթե նրանց ընդհանուր արժեքը նշանակենք I-ով,*

$$s \leqslant I \leqslant S։ \qquad (5^*)$$

Եթե σ-ի տակ հասկացվի ինտեգրալային գումարի այն արժեքներից մեկը, որոնք համապատասխանում են միջակայքի նույն տրոհմանը, ինչ որ s և S գումարները, ապա, ինչպես գիտենք,

$$s \leqslant \sigma \leqslant S։$$

Համաձայն (6) պայմանի, եթե բոլոր Δx_i-երը ենթադրենք բավական չափ փոքր, s և S գումարներն իրարից ավելի քիչ կտարբերվեն, քան կամավոր կերպով վերցրած $\varepsilon>0$ թիվը։ Սակայն այդ դեպքում այդպես կլինի նաև նրանց միջև գտնվող σ և I թվերի նկատմամբ՝

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

այնպես որ, I-ն σ-ի սահմանն է, այսինքն որոշյալ ինտեգրալ է։

Եթե ֆունկցիայի $M_i - m_i$ տատանումը i-րդ մասնակի միջակայքում նշանակենք ω_i-ով, ապա կունենանք՝

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i,$$

և որոշյալ ինտեգրալի գոյության պայմանը կարող է արտագրվել այսպես՝

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0 \qquad (8)$$

Այն սովորաբար այս ձևով էլ կիրառվում է։

179. Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասեր։ *Մեր գտած հայտանիշը կիրառենք ինտեգրելի ֆունկցիաների մի քանի դասեր որոշելու համար։*

I. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ միջակայքում անընդհատ է, ապա այն ինտեգրելի է։

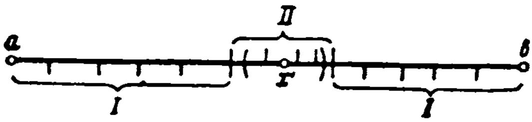
Ապացույց։ Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա, Կանտորի թեորեմայի հետևանքի հիման վրա [n° 75], տրված $\varepsilon>0$ թվի համար միշտ կգտնվի այնպիսի $\delta>0$, որ հենց որ $[a, b]$ միջակայքը տրոհվի այնպիսի մասերի, որոնց Δx_i երկարությունները $<\delta$, ապա բոլոր $\omega_i<\varepsilon$։ Այստեղից՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon (b-a).$$

Քանի որ $(b-a)$-ն հաստատուն թիվ է, իսկ ε-ը կամայականորեն փոքր է, ապա (8) պայմանը բավարարվում է, իսկ դրանից էլ բխում է ինտեգրալի գոյությունը։ Ապացուցված պնդումը կարելի է որոշ չափով ընդհանրացնել։

II. Եթե $f(x)$ սահմանափակ ֆունկցիան $[a, b]$ միջակայքում միայն վերջավոր թվով խզման կետեր ունի, ապա այն ինտեգրելի է:

Ապացուցումը սահմանափակենք այն դեպքով, երբ a-ի և b-ի միջև միայն մեկ խզման կետ կա. այն նշանակենք x' (գծ. 66): Վերցնենք մի կամայական $\varepsilon>0$ թիվ և առանձնացնենք x' կետի $(x'-\varepsilon, x'+\varepsilon)$ շրջակայքը: Մնացած երկու (փակ) միջակայքերում $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ կլինի և



Գծ. 66.

նրանցից յուրաքանչյուրի նկատմամբ առանձնաբար կարող ենք կիրառել Կանտորի թեորեմայի հետևանքը: Այդ երկու միջակայքերի համար ε-ին համապատասխանող երկու δ թվերից ընտրենք փոքրը (այն նույնպես կնշանակենք δ տառով): Այդ դեպքում նա պիտանի կլինի նշված միջակայքերից յուրաքանչյուրի համար: Մեզ ոչինչ չի խանգարում վերցնել այդ դեպքում $\delta<\varepsilon$: Այժմ $[a, b]$ միջակայքը մասերի տրոհենք այնպես, որ նրանց Δx_i երկարությունները δ-ից փոքր լինեն: Ստացված մասնակի միջակայքերը երկու տեսակի կլինեն.

1) Միջակայքեր, որոնք ամբողջովին գտնվում են խզման կետի մոտ առանձնացրած շրջակայքից դուրս: Նրանց մեջ ֆունկցիայի ω_i տատանումը $<\varepsilon$:

2) Միջակայքեր, որոնք կամ ամբողջովին գտնվում են առանձնացրած շրջակայքի ներսը, կամ մասամբ ծածկում են այդ շրջակայքը:

Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան ենթադրվում է սահմանափակ, ապա այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրում նրա տատանումը չի գերազանցում նրա Ω տատանումից ամբողջ $[a, b]$ միջակայքում:

$$\sum \omega_i \Delta x_i$$

գումարը տրոհենք երկու գումարների՝

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \quad \text{և} \quad \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''},$$

որոնք տարածվում են, համապատասխանաբար, առաջին և երկրորդ տեսակի միջակայքերի վրա:

Առաջին գումարի համար, ինչպես և նախորդ թեորեմայում, կունենանք՝

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon (b-a)$$

Ինչ վերաբերում է երկրորդ գումարին, նկատենք, որ երկրորդ տեսակի այն միջակայքերի երկարությունների գումարը, որոնք ամբողջովին ընկել են առանձնացրած շրջակայքի ներսը, 2ε-ից մեծ չէ, իսկ նրան մասամբ ծածկող միջակայքերի թիվը կարող է լինել երկուսից ոչ ավելի և նրանց երկարությունների գումարը $<2\delta$, ուրեմն ավելի ևս $<2\varepsilon$։ Հետևաբար՝

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \cdot 4\varepsilon ։$$

Այսպիսով, վերջնականորեն, $\Delta x_i < \delta$ դեպքում ունենք՝

$$\sum_{i} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon\left[(b - a) + 4k\Omega\right]։$$

Հենց այս էլ ապացուցում է մեր պնդումը, քանի որ քառակուսի փակագծերի մեջ պարունակվում է հաստատուն թիվ, իսկ ε-ը կամայականորեն փոքր է։

Վերջապես, նշենք ինտեգրելի ֆունկցիաների մի պարզ դաս ևս, որը նախորդի մեջ չի մտնում։

III. $f(x)$ մոնոտոն սահմանափակ ֆունկցիան միշտ ինտեգրելի է։

Ապացուցում։ Դիցուք, $f(x)$-ը մոնոտոն աճող ֆունկցիա է։ Այդ դեպքում նրա տատանումը $[x_i, x_{i+1}]$ միջակայքում կլինի՝

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)։$$

Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ և ընդունենք՝

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)},$$

Հենց որ լինի $\Delta x_i < \delta$, անմիջապես կունենանք՝

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \delta \sum \left[f(x_{i+1}) - f(x_i)\right] = \delta\left[f(b) - f(a)\right] = \varepsilon,$$

որտեղից և հետևում է ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը։

Դիտողություն։ *Նշենք, որ* ինտեգրելի ֆունկցիայի արժեքները փոխելը վերջավոր (k) թվով կետերում չի անդրադառնա ո՛չ ինտեգրալի գոյության, ո՛չ էլ նրա մեծության վրա։

Քանի որ ֆունկցիայի արժեքները փոխելը կարող է նշանակություն ունենալ $\sum \omega_i \Delta x_i$ գումարի ոչ ավելի քան k թվով անդամների համար, ապա այդ գումարն առաջվա նման կձգտի զրոյի, երբ $\lambda \to 0$։ Ինչ վերաբերում է ինտեգրալի արժեքին, ապա միշտ կարելի է ընտրել ֆունկ-

ցիաների (սկզբնականի և փոփոխվածի) համար էլ ինտեգրալային գումարներում ξ_i կետերն ընտրել այնպես, որպեսզի նրանք չհամընկնեն այն կետերի հետ, որտեղ այդ ֆունկցիաների արժեքները միմյանցից տարբեր են։

§ 2. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

180. Ինտեգրալ կողմնորոշված միջակայքում: Մինչև հիմա, խոսելով a-ից մինչև b միջակայքում ինտեգրալի մասին, մենք միշտ ենթադրում էինք, որ $a<b$։ Այժմ վերացնենք այդ նեղիչ սահմանափակումը։

Այդ նպատակով մենք, ամենից առաջ, սահմանենք ուղղությամբ օժտված կամ կողմնորոշված միջակայքի գաղափարը։ $[a, b]$ կողմնորոշված միջակայք ասելով (որտեղ կարող է լինել և՛ $a<b$, և՛ $a>b$), մենք հասկանալու ենք x-ի այն արժեքների բազմությունը, որոնք բավարարում են, համապատասխանաբար,

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{կամ} \quad a \geqslant x \geqslant b$$

անհավասարություններին և դասավորված կամ կարգավորված են a-ից դեպի b-ն, այսինքն՝ աճման կարգով, եթե $a<b$, կամ նվազման կարգով, եթե $a>b$։ Այսպիսով, մենք իրարից տարբերում ենք $[a, b]$ և $[b, a]$ միջակայքերը. համընկնելով իրենց կազմով (որպես թվային բազմություններ), նրանք տարբերվում են ուղղությամբ։

Ինտեգրալի այն սահմանումը, որը տրվել է n° **176**-ում, վերաբերում է $[a, b]$ կողմնորոշված միջակայքին միայն այն դեպքի համար, երբ $a<b$։

Դիմենք ինտեգրալը որոշելուն $[a, b]$ կողմնորոշված միջակայքում, ենթադրելով, որ $a>b$։ Այս դեպքի համար կարելի է կրկնել միջակայքի տրոհման սովորական պրոցեսը, մտցնելով տրոհման այնպիսի կետեր, որոնք գնում են a-ից դեպի b ուղղությամբ՝

$$x_0 = a > x_1 > x_2 > \cdots > x_i > x_{i+1} > \cdots > x_n = b:$$

Յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ միջակայքում ընտրելով մեկական ξ_i կետ այնպես, որ $x_i \geqslant \xi \geqslant x_{i+1}$, կազմենք

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta x_i$$

ինտեգրալային գումարը, որտեղ, այս անգամ, բոլոր $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < 0$։ *Վերջապես, այդ գումարի սահմանը, երբ* $\lambda = \max|\Delta x_i| \to 0$, *հենց կբերի մեզ ինտեգրալի գաղափարին՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sigma ։$$

Եթե $[a, b]$ *և* $[b, a]$ *միջակայքերի համար (որտեղ* $a < b$) *վերցնենք տրոհման միևնույն կետերը և միևնույն* ξ *կետերը, ապա դրանց համապատասխանող ինտեգրալային գումարները կտարբերվեն միայն նշաններով։ Այստեղից, անցնելով սահմաններին, ստանում ենք այսպիսի առաջադրություն՝*

1°. Եթե $f(x)$-ը ինտեգրելի է $[b, a]$ միջակայքում, ապա այն ինտեգրելի է նաև $[a, b]$ միջակայքում, ընդ որում՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx ։$$

Ի միջի այլոց, կարելի էր հենց այս հավասարությունն ընդունել որպես $\int_a^b$ *ինտեգրալի սահմանում* $a > b$ *դեպքում, ենթադրելով, որ* $\int_b^a$ *ինտեգրալը գոյություն ունի։*

Նկատենք նաև, որ հենց սահմանման համաձայն էլ համարում ենք՝

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 ։$$

181. Հավասարություններով արտահայտվող հատկությունները։

*Թվենք որոշյալ ինտեգրալների հաջորդ հատկությունները, որոնք արտահայտվում են հավասարություններով**։

* *Այստեղ և հետագայում, եթե խոսքը վերաբերում է* $\int_a^b$ *ինտեգրալին, մենք համարում ենք, որ* $a < b$ *և* $a > b$ *երկու դեպքն էլ հնարավոր են (եթե հատուկ վերապահում չի արվում)։*

2.° Դիցուք f(x)-ը ինտեգրելի է [a, b], [a, c] և [c, b] միջակայքերից ամենամեծում*: Այդ դեպքում այն ինտեգրելի է նաև մյուս երկուսում, և տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

ինչպիսին էլ լինի a, b և c կետերի փոխադարձ դասավորությունը:

Ապացուցում: Նախ ենթադրենք, թե $a < c < b$ *և ֆունկցիան ինտեգրելի է* [a, b] *միջակայքում:*

Դիտարկենք [a, b] *միջակայքի մասերի տրոհումը, ընդ որում* c *կետը համարենք տրոհման կետերից մեկը: Այդ դեպքում նախ կունենանք (նշանակումների իմաստը, ինքնին հասկանալի է)՝*

$$\sum_a^b \omega\,\Delta x = \sum_a^c \omega\,\Delta x + \sum_c^b \omega\,\Delta x$$

և, բոլոր գումարելիների դրական լինելու շնորհիվ, ձախակողմյան գումարի զրոյի ձգտելուց կհետևի նույնը նաև աջակողմյան գումարների համար, այնպես որ f(x) *ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը* [a, c] *և* [c, b] *միջակայքերում ապացուցված է: Իսկ այժմ, ակներևաբար՝*

$$\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x = \sum_a^c f(\xi)\,\Delta x + \sum_c^b f(\xi)\,\Delta x:$$

Անցնելով սահմանին $\lambda \to$ *դեպքում, մենք կստանանք պահանջված հավասարությունը:*

a, b, c *կետերի դասավորության այլ դեպքերը բերվում են այս դեպքին: Դիցուք, օրինակ,* $b < a < c$ *և* f(x) *ֆունկցիան ինտեգրելի է* [c, b] *միջակայքում կամ, որ միևնույնն է 1°-ի համաձայն, ինտեգրելի է* [b, c] *միջակայքում: Այդ դեպքում, ըստ ապացուցածի, կունենանք՝*

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx,$$

---

* *Դրա փոխարեն կարելի էր ենթադրել, որ* f(x) *ֆունկցիան ինտեգրելի է երկու փոքր միջակայքերից յուրաքանչյուրում, այդ դեպքում այն ինտեգրելի կլիներ նաև մեծում:*

որանցից. առաջին և երկրորդ ինտեգրալները հավասարության մի մասից մյուսը փոխադրելով և սահմանները տեղափոխելով (1° հատկության հիման վրա), կգանք դարձյալ նախկին անհավասարությանը։

3°. Եթե f(x)-ը ինտեգրելի է [a, b] միջակայքում, ապա kf(x)-ը (որտեղ k = const.) նույնպես ինտեգրելի է այդ միջակայքում, ընդ որում՝

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx ։$$

4°. Եթե f(x)-ը և g(x)-ը երկուսն էլ ինտեգրելի են [a, b] միջակայքում, ապա f(x) ± g(x)-ը նույնպես ինտեգրելի է այդ միջակայքում, ընդ որում՝

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx ։$$

Երկու դեպքում էլ ապացուցումը կատարվում է համանման ձևով՝ ելնելով ինտեգրալային գումարներից և անցնելով սահմանին։ Կատարենք այդ ապացուցումը, օրինակ, վերջին առաջադրության համար։

[a, b] *միջակայքը կամայական կերպով տրոհենք մասերի և կազմենք ինտեգրալային գումարներ բոլոր երեք ինտեգրալների համար։ Ընդ որում* ξ_i *կետերն ամեն մի մասնակի միջակայքում ընտրում ենք կամայականորեն, բայց բոլոր գումարների համար միևնույնը։ Այդ դեպքում կունենանք՝*

$$\sum[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \sum g(\xi_i)\Delta x_i ։$$

Դիցուք այժմ $\lambda \to 0$. *քանի որ աջակողմյան երկու գումարների համար էլ գոյություն ունի սահման, ապա ձախակողմյան գումարի համար ևս գոյություն ունի սահման, որով և հաստատվում է* $f(x) \pm g(x)$ *ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը։ Նախորդ հավասարության մեջ անցնելով սահմաններին, գալիս ենք պահանջված առնչությանը։*

182. Անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները։ *Մինչև այժմ մենք դիտարկում էինք ինտեգրալների այն հատկությունները, որոնք արտահայտվում են հավասարություններով. այժմ անցնենք այն հատկություններին, որոնք արտահայտվում են անհավասարություններով։*

5°. Եթե [a, b] միջակայքում ինտեգրելի f(x) ֆունկցիան ոչ բացասական է և $a < b$, ապա՝

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 ։$$

Ապացույցն ակներև է։

Այստեղից (և 4°-ից) անմիջապես հետևում է՝

6°. Եթե f(x) և g(x) երկու ֆունկցիաներն էլ ինտեգրելի են [a, b] միջակայքում և միշտ $f(x) \leqslant g(x)$, ապա նաև՝

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

ենթադրելով, որ $a < b$։

Պետք է միայն նախորդ հատկությունը կիրառել $g(x) - f(x)$ *տարբերության նկատմամբ։*

7°. Դիցուք f(x) ֆունկցիան ինտեգրելի է [a, b] միջակայքում, և $a < b$. այդ դեպքում $|f(x)|$ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է այդ միջակայքում և տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx ։$$

Ամենից առաջ համոզվենք, որ $|f(x)|$*-ի ինտեգրալը գոյություն ունի։ Եթե* $[x_i, x_{i+1}]$ *միջակայքում վերցնենք ցանկացած* x' *և* x'' *երկու կետ, ապա* [n°8]՝

$$\big|\,|f(x'')| - |f(x')|\,\big| \leqslant |f(x'') - f(x')| ։$$

Հետևաբար, ω_i^**-ով նշանակելով* $|f(x)|$ *ֆունկցիայի տատանումը* $[x_i, x_{i+1}]$ *միջակայքում, տատանման սահմանման համաձայն* [n° 78], *կունենանք* $\omega_i^* \leqslant \omega_i$, *այնպես որ՝*

$$0 \leqslant \sum \omega_i^* \Delta x_i \leqslant \sum \omega_i \Delta x_i *$$

և աջակողմյան գումարի զրոյի ձգտելուց կհետևի նույնը նաև ձախակողմյան գումարի համար։

---

* *Քանի որ* $a < b$, *ապա բոլոր* $\Delta x_i > 0$։

Իսկ պահանջվող անհավասարությունն ինքը հեշտ է անմիջականորեն ստանալ, ելնելով հետևյալ ինտեգրալային գումարներից՝

$$\left|\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i\right| \leqslant \sum \left| f(\xi_i) \right| \cdot \Delta x_i\text{*}$$

և անցնելով սահմաններին։

8°. Եթե $f(x)$-ն ինտեգրելի է $[a, b]$-ում, որտեղ $a < b$ և եթե այդ ամբողջ միջակայքում տեղի ունի

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

անհավասարությունը, ապա՝

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)։$$

Կարելի է 6° հատկությունը կիրառել m, $f(x)$ *և* M *ֆունկցիաների նկատմամբ, բայց ավելի հեշտ է անմիջականորեն օգտվել հետևյալ ակներև անհավասարություններից՝*

$$m\sum \Delta x_i \leqslant \sum f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant M\sum \Delta x_i\text{*}$$

և անցնել սահմանին։

Ապացուցված առնչություններին կարելի է ավելի հարմար՝ հավասարության ձև տալ, միաժամանակ ազատվելով $a < b$ *սահմանափակումից։*

9°. Միջին արժեքի թեորեման։ Դիցուք $f(x)$-ն ինտեգրելի է $[a, b]$-ում $(a \gtrless b)$ և դիցուք այդ ամբողջ միջակայքում $m \leqslant f(x) \leqslant M$, այդ դեպքում՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

որտեղ $m \leqslant \mu \leqslant M$։

Ապացուցում։ Եթե $a < b$, *ապա* 8° *հատկության համաձայն կունենանք՝*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

---

* *Քանի որ* $a < b$, *ապա բոլոր* $\Delta x_i > 0$։

որտեղից՝

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M,$$

Ընդունելով՝

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu,$$

ստանում ենք պահանջված հավասարությունը։

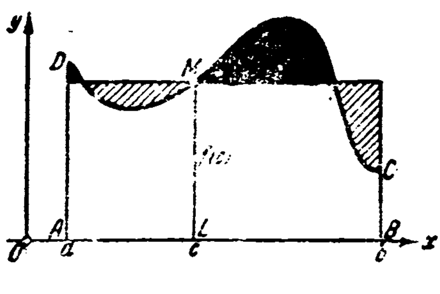
Այն դեպքի համար, երբ, $a > b$, անում ենք նույն դատողությունը $\int_b^a$-ի համար, իսկ այնուհետև, անդամփոխելով սահմանները, գալիս ենք նախկին բանաձևին։

Հենց նոր ապացուցած հավասարությունն առանձնապես պարզ տեսք է ընդունում, երբ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է։ Իրոք, եթե ընդունենք, որ m-ը և M-ը ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներն են, որոնք գոյություն ունեն ըստ Վայերշտրասի թեորեմի, [n° 73], ապա միջանկյալ μ արժեքը ևս, ըստ Բոլցանո-Կոշիի թեորեմի, [n° 70], պետք է ընդունվի $f(x)$ ֆունկցիայի կողմից $[a, b]$ միջակայքի մի որոշ c կետում։ Այսպիսով՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c),$$

որտեղ c-ն գտնվում է $[a, b]$-ում։

Վերջին բանաձևի երկրաչափական իմաստը պարզ է։ Դիցուք $f(x) \geqslant 0$։ Դիտարկենք $y = f(x)$ կորի տակ գտնվող $ABCD$ կորագիծ պատկերը (գծ. 67)։ Այդ ժամանակ կորագիծ պատկերի մակերեսը (որն արտահայտվում է որոշյալ ինտեգրալով) հավասար է այն ուղղանկյան մակերեսին, որն ունի նույն հիմքը և որպես բարձրություն՝ մի որոշ LM միջին օրդինատ։



Գծ. 67.

10. **Միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմը։** Դիցուք՝ 1) $f(x)$-ը և $f(x)\cdot g(x)$ արտադրյալն ինտեգրելի են $[a, b]$ միջա-

կայքում, 2) $m \leq f(x) \leq M$. 3) $g(x)$-ը ամբողջ միջակայքում նշանը չի փոխում՝ $g(x) \geq 0$ $[g(x) \leq 0]$: Այդ դեպքում՝

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

որտեղ՝ $m \leq \mu \leq M$:

Ապացուցում։ *Դիցուք նախ* $g(x) \geq 0$ *և* $a < b$. *այդ դեպքում ունենք՝*

$$mg(x) \leq f(x)\,g(x) \leq \; g(x).$$

Այս անհավասարությունից, 6° և 3° հատկությունների հիման վրա, ստանում ենք՝

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx.$$

$g(x)$ *ֆունկցիայի մասին արած ենթադրության շնորհիվ, ըստ 5°-ի, ունենք՝*

$$\int_a^b g(x)\,dx \geq 0.$$

Եթե այս ինտեգրալը հավասար է զրոյի, ապա նախորդ անհավասարություններից պարզ է, որ միաժամանակ նաև

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0,$$

և թեորեմայի պնդումն ակներև է դառնում։ Իսկ եթե ինտեգրալը զրոյից մեծ է, ապա, բաժանելով նրա վրա վերևում ստացված կրկնակի անհավասարության բոլոր մասերը, ընդունենք՝

$$\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu$$

և կհանգենք պահանջված արդյունքին։

Այն սահմանափակումները, որ $a < b$ *և* $g(x) \geqslant 0$, *փաստորեն պետք չեն. սահմանների տեղափոխումը կամ* $g(x)$*-ի նշանի փոխելը հավասարությունը չեն խախտում։*

Եթե $f(x)$*-ն անընդհատ է, ապա այդ բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx,$$

որտեղ c*-ն գտնվում է* $[a, b]$*-ում։*

Դիտողություն: *Ինտեգրման փոփոխականը մենք միշտ նշանակում էինք* x *տառով. սակայն, հասկանալի է, ոչինչ չէր փոխվի, եթե* x*-ի փոխարեն մենք օգտագործեինք մի որևէ այլ տառ, միայն թե պահպանվեին* a *և* b *սահմանները, որոնց միջև փոփոխվում է այդ փոփոխականը, և* f *ընդինտեգրալ ֆունկցիան։* $\int_a^b f(x)\,dx$ *սիմվոլը ճիշտ նույնն է նշանակում, ինչ որ* $\int_a^b f(t)\,dt$*-ն կամ* $\int_a^b f(z)\,dz$*-ը և այլն։*

Այս ակներև դիտողությունից մենք հիմա կօգտվենք։

183. Որոշյալ ինտեգրալը որպես վերին սահմանի ֆունկցիա: *Եթե* $f(x)$ *ֆունկցիան ինտեգրելի է* $[a, b]$ *միջակայքում* $(a \lesseqgtr b)$, *ապա* [**181**, 2°] *այն ինտեգրելի է նաև* $[a, x]$ *միջակայքում, որտեղ* x*-ը* $[a, b]$*-ից վերցրած ցանկացած արժեք է։ Որոշյալ ինտեգրալի* b *սահմանը փոխարինելով* x *փոփոխականով, կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt^{*}, \tag{1}$$

որն, ակներևաբար, x*-ի ֆունկցիա է հանդիսանում։ Այդ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով՝*

11°. Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a, b]$-ում, ապա $\Phi(x)$-ը կլինի x-ի անընդհատ ֆունկցիա նույն միջակայքում:

Ապացուցում։ x*-ին տալով* $\Delta x = h$ *կամայական աճ (միայն*

* *Ինտեգրման փոփոխականն այստեղ մենք նշանակում ենք* t*-ով, որպեսզի այն չշփոթենք վերին սահման* x*-ի հետ։*

այնպես, որ $x+h$*-ը դուրս չգա դիտարկվող միջակայքի սահմաններից), կստանանք (1) ֆունկցիայի նոր արժեքը*

$$\Phi(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt=\int_a^x+\int_x^{x+h}$$

[*տես* 2°], *այնպես որ՝*

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt։$$

Այս ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք միջին արժեքի 9° *թեորեման՝*

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\mu h. \tag{2}$$

այստեղ μ*-ն գտնվում է* $f(x)$ *ֆունկցիայի* m' *և* M' *ճշգրիտ եզրերի միջև* $[x, x+h]$ *միջակայքում, և, հետևապես, առավել ևս* m *և* M *(հաստատուն) եզրերի միջև* $[a, b]$ *հիմնական միջակայքում**։

Եթե այժմ h*-ը ձգտեցնենք զրոյի, ապա, ակներևաբար,*

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)\to 0 \quad \textit{կամ} \quad \Phi(x+h)\to\Phi(x),$$

որը և ապացուցում է $\Phi(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատությունը։*

12°. Եթե ենթադրենք, որ $f(t)$ ֆունկցիան $t=x$ կետում անընդհատ է, ապա այդ կետում $\Phi(x)$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ, որը հավասար է $f(x)$-ին՝

$$\Phi'(x)=f(x)^{**}։$$

Ապացուցում։ Իրոք, (2)-ից ունենք՝

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\mu, \quad \textit{որտեղ} \quad m'\leqslant\mu\leqslant M'։$$

Բայց, $t=x$ *դեպքում* $f(x)$ *ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, ցանկացած* $\varepsilon>0$ *թվի համար կգտնվի այնպիսի* $\delta>0$*, որ* $|h|<\delta$ *դեպքում՝*

$$f(x)-\varepsilon<f(t)<f(x)+\varepsilon,$$

---

* *Հիշեցնենք, որ ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանափակ է* [n° **176**]։

** *Այս կարևոր առաջադրությունը, ողջ* $[a, b]$ *միջակայքում անընդհատ ֆունկցիայի համար, առաջինը Կոշին է խստորեն ապացուցել* [*1823*]։

Եթե հիշենք որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական մեկնաբանությունը որպես մակերես [n° **175**], *ապա* 12° *թեորեման կնույնանա այսպես կոչված՝ Նյուտոնի և Լայբնիցի թեորեմայի հետ* [n° **156**]։

t-ի բոլոր արժեքների համար $[x, x+h]$ միջակայքում։ Այդ դեպքում տեղի ունեն նաև հետևյալ անհավասարությունները [n° 6]՝

$$f(x) - \varepsilon \leq m' \leq M' \leq f(x) + \varepsilon,$$

այնպես որ նաև՝

$$f(x) - \varepsilon \leq \mu \leq f(x) + \varepsilon \quad \text{կամ՝} \quad |\mu - f(x)| \leq \varepsilon\text{։}$$

Այժմ պարզ է, որ՝

$$\Phi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \mu = f(x),$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։

Մենք եկանք մի եզրակացության, որն ունի սկզբունքային և գործնական հսկայական նշանակություն։ Եթե ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է ողջ $[a, b]$ միջակայքում, ապա այն ինտեգրելի է [n° **179**, I], և նախորդ պնդումը կիրառելի է լինում այդ միջակայքի ցանկացած x կետի նկատմամբ՝ (1) ինտեգրալի ածանցյալն ըստ x փոփոխական վերին սահմանի ամենուրեք հավասար է $f(x)$ ընդինտեգրալ ֆունկցիայի արժեքին այդ x կետում։

Ուրիշ խոսքով, $[a, b]$ միջակայքում անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի համար միշտ գոյություն ունի նախնական ֆունկցիա. որպես դրա օրինակ հանդիսանում է փոփոխական վերին սահման ունեցող (1) որոշյալ ինտեգրալը։

Այսպիսով, մենք, վերջապես, հաստատեցինք այն առաջադրությունը, որի մասին հիշատակել էինք դեռ n° **156**-ում։

Մասնավորապես, մենք այժմ կարող ենք Լեժանդրի F և E ֆունկցիաները [n° **174**] գրել որոշյալ ինտեգրալների տեսքով՝

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}\, d\theta.$$

Հենց նոր ապացուցածի համաձայն, դրանք կլինեն նախնական ֆունկցիաներ, համապատասխանաբար, հետևյալ ֆունկցիաների համար՝

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

ընդ որում նրանք վերջիններիս այն նախնական ֆունկցիաներն են, որոնք 0 են դառնում $\varphi = 0$ դեպքում։

Դիտողություն։ *Այս n°-ում ապացուցված պնդումները հեշտությամբ տարածվում են ինտեգրալի այն դեպքի վրա, երբ փոփոխական է ստորին սահմանը, քանի որ* (1°)՝

$$\int_x^b f(t)\,dt = -\int_b^x f(t)\,dt։$$

Այս ինտեգրալի ածանցյալն ըստ x*-ի, ակներևաբար, հավասար է* $-f(x)$*-ի, եթե* x*-ը անընդհատության կետ է։*

§ 3. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ԵՎ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ

184. Հաշվումը ինտեգրալային գումարների օգնությամբ: *Բերենք որոշյալ ինտեգրալ հաշվելու օրինակներ, ինտեգրալն անմիջականորեն դիտարկելով որպես ինտեգրալային գումարների սահման՝ համաձայն նրա սահմանումի։ Նախապես գիտենալով, որ անընդհատ ֆունկցիայի համար ինտեգրալ գոյություն ունի, այն հաշվելու համար կարող ենք միջակայքի տրոհումն ու* ξ *կետերը ընտրել, ղեկավարվելով բացառապես հարմարության նկատառումներով։*

1) $\int_a^b \sin x\,dx$։ *Տրոհելով* $[a, b]$ *միջակայքը* n *հավասար մասերի, ընդունենք՝* $h = \frac{b-a}{n}$. *հաշվենք* $\sin x$ *ֆունկցիան աջ ծայրակետերի համար, եթե* $a < b$, *և ձախերի համար, եթե* $a > b$։ *Այդ դեպքում՝*

$$\sigma_n = h \sum_{i=1}^{n} \sin(a + ih)։$$

Աջակողմյան գումարի համար գտնենք սեղմ արտահայտություն։ Բազմապատկելով և բաժանելով այն $2\sin\frac{h}{2}$*-ով, և այնուհետև բոլոր գումարելիները ներկա-*

յացնելով որպես կոսինուսների տարբերություն, հեշտությամբ կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih)=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\left(a+ih-\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+ih+\frac{1}{2}h\right)\right]=$$

$$=\frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+nh+\frac{1}{2}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}, \qquad (1)$$

Այսպիսով՝

$$\sigma_n=\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right],$$

Քանի որ $h\to 0$, երբ $n\to\infty$, ապա՝

$$\int_a^b \sin x\,dx=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right]=\cos a-\cos b.$$

2) $\int_a^b x^\mu\,dx$ ($b>a>0$, μ-ն կամայական իրական թիվ է)։

Այս անգամ $[a, b]$ միջակայքը տրոհենք անհավասար մասերի, այն է՝ a-ի և b-ի միջև տեղավորենք $n-1$ հատ երկրաչափական միջիններ։ Ուրիշ խոսքով՝ ընդունելով՝

$$q=q_n=\sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$

դիտարկենք թվերի հետևյալ շարքը՝

$$a,\ aq,\ \ldots,\ aq^i,\ \ldots,\ aq^n=b.$$

Նկատենք, որ երբ $n\to\infty$, $q=q_n$ հարաբերությունը ձգտում է 1-ի, իսկ $aq^{i+1}-aq^i$ տարբերությունները բոլորը ավելի փոքր են $b(q-1)$ մեծությունից, որը $\to 0$։

Հաշվելով ֆունկցիան ձ ա խ ծայրակետերի համար, ունենք՝

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^{\mu} (aq^{i+1} - aq^i) = a^{\mu+1} (q-1) \sum_{i=0}^{n-1} (q^{\mu+1})^i.$$

Նախ ենթադրենք, թե $\mu \neq -1$. *այդ դեպքում՝*

$$\sigma_n = a^{\mu+1}(q-1) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1} - 1}{q^{\mu+1} - 1} = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1}$$

և, օգտագործելով արդեն հայտնի սահմանը [n° **65**, 3], *կստանանք՝*

$$\int_a^b x^{\mu}\, dx = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = (b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \lim_{q \to 1} \frac{q-1}{q^{\mu+1} - 1} = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu + 1},$$

Իսկ այն դեպքում, երբ $\mu = -1$, *կլինի՝*

$$\sigma_n = n(q_n - 1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right),$$

և մյուս հայտնի հետևանքի հիման վրա [*նույն տեղում*, (2)]՝

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \ln b - \ln a.$$

185. Ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևը: n° **183**-*ում մենք տեսանք, որ* $[a, b]$ *միջակայքում անընդհատ* $f(x)$ *ֆունկցիայի համար*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

ինտեգրալը նախնական ֆունկցիա է հանդիսանում։ Եթե $F(x)$-*ը* $f(x)$-*ի ցանկացած նախնական ֆունկցիա է (օրինակ, նախորդ գլխի* §§ *1 — 4-ի մեթոդներով գտնված) ապա* [n° **155**]՝

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

C *հաստատունը հեշտ է որոշել, ընդունելով այստեղ* $x = a$, *որովհետև* $\Phi(a) = 0$. *այսպիսով, կունենանք՝*

$$O = \Phi(a) = F(a) + C, \quad \text{որտեղից՝} \quad C = -F(a).$$

Վերջնականապես՝

$$\Phi(x) = F(x) - F(a):$$

Մասնավորապես, երբ $x = b$ *կստանանք՝*

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{A}$$

Այս՝ ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևն է*:

Այսպիսով, որոշյալ ինտեգրալի արժեքը արտահայտվում է ցանկացած նախնական ֆունկցիայի՝ $x = b$ դեպքում և $x = a$ դեպքում ստացած երկու արժեքների տարբերությամբ:

(A) բանաձևը արդյունավետ ու պարզ միջոց է տալիս $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալը հաշվելու համար: Չէ՞ որ այդպիսի ֆունկցիաների մի շարք պարզ դասերի համար մենք կարողանում ենք նախնական ֆունկցիան արտահայտել վերջավոր տեսքով՝ տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Այդպիսի դեպքերում որոշյալ ինտեգրալը հաշվվում է անմիջականորեն հիմնական բանաձևի միջոցով: Նկատենք միայն, որ աջակողմյան տարբերությունը սովորաբար նշանակում են $F(x)\Big|_a^b$ *սիմվոլով («կրկնակի տեղադրում a-ից մինչև b») և բանաձևը գրում են այս տեսքով՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b, \tag{A*}$$

Այսպես, օրինակ, միանգամից գտնում ենք՝

$$1)\quad \int_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b,$$

---

* *Այստեղի դատողությունները լրիվին նման են այն դատողություններին, որոնցով օգտվում էինք n° **156**-ում P(x) ֆունկցիան և P մակերեսը հաշվելիս: Ինքը (A) բանաձևը հեշտությամբ կարող էր ստացվել nn° **156**-ի և **175**-ի արդյունքները համադրելով:*

$$2)\ \int_a^b x^{\mu}\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{\mu+1}\ (\mu \neq -1),$$

$$3)\ \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\,\Big|_a^b = \ln b - \ln a\ (a > 0,\ b > 0),$$

արդյունքներ, որոնք նախորդ n°-ում ստացանք ոչ առանց դժվարության:

186. Որոշյալ ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման բանաձևը: *Նույն (A) հիմնական բանաձևը մեզ թույլ կտա ստանալ որոշյալ ինտեգրալի նշանի տակ փոփոխականի փոխարինման կանոնը:*

Դիցուք պահանջվում է հաշվել $\int_a^b f(x)\,dx$ *ինտեգրալը, որտեղ* $f(x)$-*ն անընդհատ ֆունկցիա է* $[a, b]$ *միջակայքում: Ընդունենք* $x = \varphi(t)$, *ենթարկելով* $\varphi(t)$ *ֆունկցիան հետևյալ պայմաններին՝*

1) $\varphi(t)$-*ն որոշված ու անընդհատ է մի որոշ* $[\alpha, \beta]$ *միջակայքում և նրա արժեքներն* $[a, b]$ *միջակայքի սահմաններից դուրս չեն գալիս*, երբ* t-*ն փոփոխվում է* $[\alpha, \beta]$-*ում.*

2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

3) $[\alpha, \beta]$-*ում գոյություն ունի* $\varphi'(t)$ *անընդհատ ածանցյալ:*

Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt: \qquad (2)$$

Շնորհիվ այն ենթադրության, որ ընդինտեգրալ ֆունկցիաներն անընդհատ են, գոյություն ունեն ոչ միայն այդ որոշյալ ինտեգրալները, այլև նրանց համապատասխան անորոշները, և երկու դեպքում էլ կարելի է օգտվել հիմնական բանաձևից: Բայց եթե $F(x)$-*ը լինի նախնական ֆունկցիաներից մեկը* $f(x)\,dx$ *դիֆերենցիալի համար, ապա* $\Phi(t) = F(\varphi(t))$, *ֆունկցիան, ինչպես գիտենք, նախ-*

* *Կարող է պատահել, որ* $f(x)$ *ֆունկցիան որոշված ու անընդհատ լինի* $[a, b]$-*ից ավելի լայն՝* $[A, B]$ *միջակայքում. Այդ դեպքում բավական է պահանջել, որպեսզի* $\varphi(t)$-*ի արժեքները դուրս չգան* $[A, B]$ *միջակայքի սահմաններից:*

նական ֆունկցիա կլինի $f(\varphi(t))\,\varphi'(t))\,dt$ *դիֆերենցիալի համար* [*համեմատել* n° **160**-*ի հետ*]։ *Ուստի ունենք միաժամանակ՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

և

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

որտեղից և բխում է ապացուցվելիք հավասարությունը։

Դիտողություն: *Նշենք (2) բանաձևի մի կարևոր առանձնահատկությունը։ Այն ժամանակ, երբ փոփոխականի փոխարինման միջոցով անորոշ ինտեգրալը հաշվելիս, ստանալով* t *փոփոխականով արտահայտված որոնելի ֆունկցիան, մենք պետք է վերադառնայինք հին փոփոխականին՝* x-*ին, այստեղ դրա կարիքը չկա։ Եթե հաշված է (2) որոշյալ ինտեգրալներից երկրորդը, որն իրենից թիվ է ներկայացնում, ապա դրանով իսկ հաշված է նաև առաջինը։*

Օրինակներ: *1) Գտնենք* $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ *ինտեգրալը՝* $x = a\sin t$ *տեղադրման օգնությամբ.* α-*ի և* β-*ի դերն այստեղ կատարում են* 0 *և* $\frac{\pi}{2}$ *արժեքները։ Ունենք՝*

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

(*համեմատել* 160-*ի հետ*)։

2) Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi};$$

վերջին ինտեգրալը $x=\pi-t$ *տեղադրումով (որտեղ t-ն փոփոխվում է* $\frac{\pi}{2}$*-ից մինչև* 0) *բերվում է հետևյալ տեսքին՝*

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$$

և ներկայացվում է հետևյալ տարբերության տեսքով՝

$$\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt.$$

Տեղադրելով, կրճատումներից հետո, կստանանք

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\pi\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

187. Մասերով ինտեգրումը որոշյալ ինտեգրալում: *Մենք* n° **162**-*ում ստացել էինք մասերով ինտեգրման*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{3}$$

բանաձևը, ենթադրելով, որ x *անկախ փոփոխականի* u *և* v *ֆունկցիաներն իրենց* u' *և* v' *ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են դիտարկվող* $[a, b]$ *միջակայքում: Այժմ, նույն* (A) *հիմնական բանաձևի օգնությամբ, (3) բանաձևը վերափոխենք համանման բանաձևի՝ արդեն որոշյալ ինտեգրալների համար, որը մի որոշյալ ինտեգրալի հաշվումը բերում է մի այլ (սովորաբար՝ ավելի պարզ) ինտեգրալ հաշվելուն:*

(3) բանաձևի աջակողմյան ինտեգրալը նշանակենք $\varphi(x)$*-ով: Այդ դեպքում,* (A) *բանաձևի համաձայն՝*

$$\int_{a}^{b} u\,dv = [uv - \varphi(x)]\Big|_{a}^{b} = uv\Big|_{a}^{b} - \varphi(x)\Big|_{a}^{b}.$$

Այստեղից, (5)-ի շնորհիվ, գտնում ենք՝

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\,\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

կամ՝

$$\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n},$$

Քանի որ երկու ծայրային արտահայտությունների տարբերությունը՝

$$\frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{1}{2n}\,\frac{\pi}{2},$$

անվերջորեն, ձգտում է 0-ի, երբ $n \to \infty$, *ուստի* $\frac{\pi}{2}$*-ը հանդիսանում է նրանց ընդհանուր սահմանը։ Այսպիսով՝*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1},$$

կամ՝

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

Հենց այս է Վալլիսի բանաձևը*։ *Նա ունի պատմական հետաքրքրություն որպես π թվի առաջին ներկայացում՝ հեշտ հաշվվող ռացիոնալ փոփոխականի սահմանի տեսքով։ Տեսական հետազոտություններում նրանից օգտվում են նաև այժմ. սակայն π թվի մոտավոր հաշվման համար այժմ գոյություն ունեն այնպիսի մեթոդներ, որոնք շատ ավելի արագ են նպատակին հասցնում։*

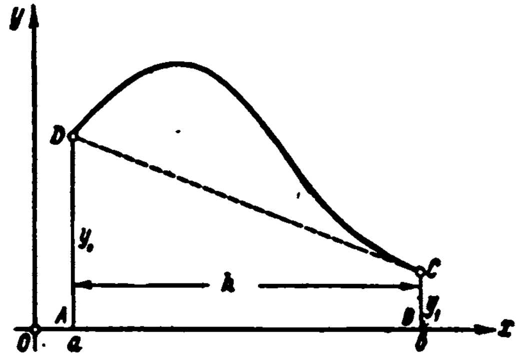
§ 4. ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

189. Սեղանների բանաձևը: *Դիցուք պահանջվում է հաշվել* $\int_a^b f(x)\,dx$ *որոշյալ ինտեգրալը, որտեղ* $f(x)$*-ը* $[a, b]$ *միջակայքում տրված մի որոշ անընդհատ ֆունկցիա է։ § 3-ում մենք այդպիսի ինտեգրալը մեծ մասամբ հաշվում էինք (A) բանաձևով՝ նախնական ֆունկցիայի օգնությամբ։ Սակայն նախնական ֆունկցիան վերջավոր տեսքով արտահայտվում է միայն ֆունկցիաների նեղ դասի համար. այդպիսի դասի չպատկանող ֆունկցիաների դեպքում սովորաբար հարկ է լինում դիմել մոտավոր հաշվի զանազան մեթոդների։ Այդ մեթոդներն ինտեգրալի համար մոտավոր արտահայտություններ են տալիս ընդինտեգրալ ֆունկցիայի այնպիսի արժեքների միջոցով, որոնք հաշված են անկախ փո-*

---

* *Բնագրում տրված է բանաձև* $\frac{4}{\pi}$*-ի համար։*

փոփոխականի մի շարք արժեքների համար։ Պարզագույն դեպքերում այդպիսի արտահայտության ստացումը հեշտանում է երկրաչափական նկատառումներով, քանի որ [n°**175**] *որոշյալ ինտեգրալը կարող է մեկնաբանվել որպես* $y = f(x)$ *կորով սահմանափակված* ABCD *«կորագիծ սեղանի» մակերես (գծ. 68), և մեր խնդիրը բերվում է այդպիսի մակերեսի մոտավոր հաշվման։*



Գծ. 68.

Ամենից առաջ, բնական կլինի CD *կորը փոխարինել իր լարով, իսկ կորագիծ սեղանը՝ սովորական սեղանով։ Վերջինիս մակերեսը հաշվելու համար բավական է իմանալ միայն սկզբի և վերջի օրդինատները՝*

$$f(a) = y_0, \quad f(b) = y_1$$

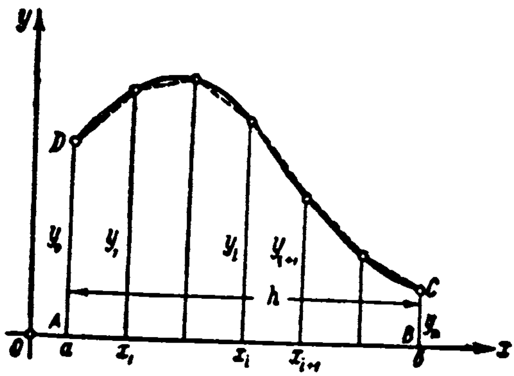
և $b - a = h$ *հիմքը։ Այսպիսով, մենք հանգում ենք հետևյալ մոտավոր բանաձևին՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)\text{։} \qquad (1)$$

Անշուշտ, այս բանաձևը, միայն կոպիտ մոտավորություն է տալիս։ Ավելի ճշգրիտ բանաձև ստանալու համար $[a, b]$ *միջակայքը* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *կետերով տրոհենք* n *հավասար մասնակի միջակայքերի՝*

$$[a, x_1], \quad [x_1, x_2], \ldots \ldots, [x_{n-1}, b] \qquad (2)$$

և տանենք այդ կետերին համապատասխանող օրդինատները. դրանք տրված պատկերը կտրոհեն n *հատ շերտերի, որոնցից յուրաքանչյուրը մոտավորությամբ կը փոխարինենք սեղանով, ինչպես վերևում արեցինք ամբողջ պատկերի համար (գծ. 69)։*



Գծ. 69.

Քանի որ բոլոր սեղանների բարձրությունները հավասար են $\frac{h}{n}$*-ի, ուստի, նշանակելով՝*

$$f(a)=y_0,\quad f(x_1)=y_1,\ \ldots,\quad f(x_{n-1})=y_{n-1},\quad f(b)=y_n,$$

սեղանների մակերեսների համար համապատասխանաբար կստանանք հետևյալ արժեքները՝

$$\frac{h}{2n}(y_0+y_1),\quad \frac{h}{2n}(y_1+y_2),\ \ldots,\quad \frac{h}{2n}(y_{n-1}+y_n):$$

Գումարելով, կհանգենք հետևյալ մոտավոր բանաձևին՝

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\cdots+y_n\right]: \tag{3}$$

Սա էլ հենց, այսպես կոչված, **սեղանների բանաձևն է:**

Կարելի է ցույց տալ, որ n-ը մինչև անվերջություն աճելիս սեղանների բանաձևի սխալն անսահմանորեն փոքրանում է: Այդպիսով, բավականաչափ մեծ n-ի դեպքում այդ բանաձևը որոնելի ինտեգրալը ներկայացնում է ցանկացած աստիճանի ճշգրտությամբ:

Որպես օրինակ վերցնենք մեզ հայտնի հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}=0{,}785398\ldots$$

և դրա նկատմամբ կիրառենք մեր արտածած մոտավոր բանաձևը, ընդունելով $n=10$ *և հաշվումները կատարելով չորս թվանշանով:*

Սեղանների բանաձևով ունենք՝

$x_0=0{,}0$	$y_0=1{,}0000$	$x_1=0{,}1$	$y_1=0{,}9901$
$x_{10}=1{,}0$	$y_{10}=0{,}5000$	$x_2=0{,}2$	$y_2=0{,}9615$
	Գումարը՝ $=1{,}5000$	$x_3=0{,}3$	$y_3=0{,}9174$
		$x_4=0{,}4$	$y_4=0{,}8621$
		$x_5=0{,}5$	$y_5=0{,}8000$
		$x_6=0{,}6$	$y_6=0{,}7353$
		$x_7=0{,}7$	$y_7=0{,}6711$
		$x_8=0{,}8$	$y_8=0{,}6098$
		$x_9=0{,}9$	$y_9=0{,}5525$
		Գումարը	$=7{,}0998$

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2}\quad 7{,}0998\right)=0{,}78498:$$

Ստացած մոտավոր արդյունքն իսկական արժեքից տարբերվում է 0,0005-ից ավելի քիչ:

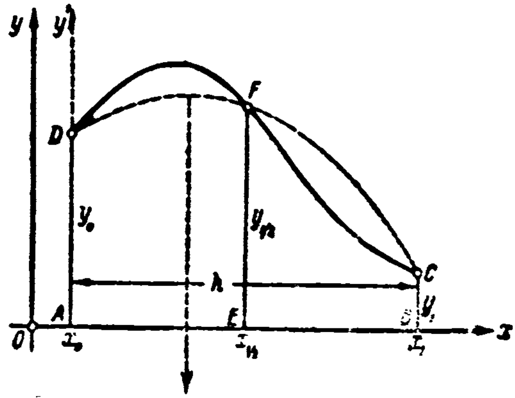
Ընթերցողն, անշուշտ, իրեն հաշիվ է տալիս, որ այստեղ մենք կարողացանք սխալը գնահատել միայն այն պատճառով, որ նախապես գիտեինք ինտեգրալի ճշգրիտ արժեքը։ Որպեսզի մեր բանաձևն իրոք պիտանի լինի մոտավոր հաշվումների համար, պետք է սխալի համար ունենալ մի այնպիսի հարմար արտահայտություն, որը հնարավորություն տար ոչ միայն գնահատելու սխալը տրված n*-ի դեպքում, այլև այնպես՝ ընտրելու* n*-ը, որպեսզի ապահովվի պահանջվող աստիճանի ճշգրտություն։ Այս հարցին մենք կանդրադառնանք* n° **191***-ում։*

190. Պարաբոլական բանաձևը։ *Վերադառնանք* ABCD *կորագիծ պատկերին և, նրա* AB *հիմքը* E *կետում կիսելով, տանենք համապատասխան* EF *օրդինատը (գծ. 70)։*

Ենթադրում ենք, որ

$AD = y_0$, $EF = y_{1/2}$, $BC = y_1$

օրդինատները և $AB = h$ *հիմքը հայտնի են։ Այս անգամ* C *կորը փոխարինենք ոչ թե* CF *և* F *լարերով, այլ* C, F, D *կետերով անցնող պարաբոլով (ուղղաձիգ առանցքով), հուսալով, որ պարաբոլն ավելի լավ կվերարտադրի տված կորը, քան* CFD *բեկյալը։*



Գծ. 70.

Անշուշտ, ամենից առաջ պետք է հավաստիանալ, որ հարթության կամայական

$$(x_0, y_0),\quad (x_{1/2}, y_{1/2}),\quad (x_1, y_1),\quad (x_0 < x_{1/2} < x_1)$$

երեք կետերով իրո՛ք միշտ կարելի է տանել այդպիսի պարաբոլ, և այն էլ միայն մեկը։ Ուղղաձիգ առանցք ունեցող պարաբոլի հավասարումն այսպիսի տեսք ունի՝

$$y = ax^2 + bx + c,$$

և նրա գործակիցները միարժեքորեն որոշվում են հետևյալ երեք հավասարումներից՝

$$ax_0^2 + bx_0 + c = y_0,$$

$$ax_{1/2}^2 + bx_{1/2} + c = y_{1/2},$$

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1,$$

որովհետև այս սիստեմի

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_{1/2}^2 & x_{1/2} & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \end{vmatrix}$$

դետերմինանտը («Վանդերմոնդի դետերմինանտը») զրոյից տարբեր է*։

Այժմ զբաղվենք այն պատկերի P մակերեսի հաշվումով, որը վերևից սահմանափակված է հենց պարաբոլի աղեղով։ Ինչպես ցույց կտանք, այդ մակերեսն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$P = \frac{h}{6}\,(y_0 + 4y_{1/2} + y_1). \tag{4}$$

սովորաբար այս բանաձևը կապում են Սիմպսոնի** անվան հետ։

Ընդհանրությունը չնսեմացնելով, կարելի է համարել, որ y-ների առանցքն անցնում է A կետով։ Այդ դեպքում՝

$$P = \int_0^h (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{h}{6}\,(2ah^2 + 3bh + 6c)։$$

Եթե հաշվի առնենք, որ

$$y_0 = c, \quad y_{1/2} = a\frac{h^2}{4} + b\frac{h}{2} + c, \quad y_1 = ah^2 + bh + c,$$

ապա Սիմպսոնի բանաձևն ստուգվում է անմիջականորեն։

Պարաբոլով սահմանափակված պատկերի մակերեսի ճշգրիտ արժեքը տվող (4) արտահայտությունը $y = f(x)$ կորով սահմանափակված պատկերի մակերեսը վերարտադրում է միայն մոտավորությամբ՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{6}\,(y_0 + 4y_{1/2} + y_1)։ \tag{5}$$

Բարձր ճշգրտության հասնելու համար վարվենք այնպես, ինչպես վերևում. [a, b] միջակայքը նախ տրոհենք n հավասար մասերի՝ (2), իսկ դիտարկվող պատկերը՝ n շերտերի, որոնցից յուրաքանչյուրի նկատմամբ առանձին կիրառենք (5)-ի տիպի բանաձև։ Քանի որ այդ բանա-

* $a = 0$ դեպքում պարաբոլը դառնում է ուղիղ։

** Թոմաս Սիմպսոն (1710—1761)՝ անգլիացի մաթեմատիկոս։ Ըստ երևույթին, բանաձևը հայտնի է եղել նրանից առաջ։

ձևն օգտագործում է բացի եզրային օրդինատներից նաև միջին օրդինատը, ուստի մենք պետք է (2) մասնակի միջակայքերից յուրաքանչյուրը $x_{1/2}, x_{3/2}, \dots, x_{n-1/2}$ կետերով նորից կիսենք (այնպես որ, ընդհանուր առմամբ, հիմնական միջակայքը տրոհված կլինի $2n$ մասերի)։ Քանի որ բոլոր n հատ (և ո՛չ $2n$) շերտերի հիմքերը հավասար են $\frac{h}{n}$-ի, ուստի նրանց մակերեսների համար կստանանք հետևյալ մոտավոր արտահայտությունները՝

$$\frac{h}{6n}\left(y_0 + 4y_{1/2} + y_1\right),$$

$$\frac{h}{6n}\left(y_1 + 4y_{3/2} + y_2\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{h}{6n}\left(y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n\right)։$$

Սրանք գումարելով, ստանում ենք մի նոր մոտավոր բանաձև՝

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{6n}\left[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + \dots + y_{n-1}) + \right.$$

$$\left. + 4(y_{1/2} + \dots + y_{n-1/2})\right], \qquad (6)$$

որը կոչվում է պարաբոլական բանաձև *կամ* Սիմպսոնի բանաձև: *Ինտեգրալների մոտավոր հաշվման համար այս բանաձևից ավելի հաճախ են օգտվում, քան սեղանների բանաձևից, որովհետև նույնքան աշխատանք ծախսելով, սա սովորաբար ավելի ճշգրիտ արդյունք է տալիս։*

Համեմատելու համար նորից հաշվենք

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ինտեգրալը, այս անգամ՝ Սիմպսոնի բանաձևով։ Վերցնենք $2n = 4$, այնպես որ օգտագործվող օրդինատների թիվն այս անգամ նույնիսկ ավելի փոքր է, քան առաջ։ Ունենք (հաշվելով վեց թվանշան)՝

$$x_0 = 0 \quad x_{1/2} = \frac{1}{4} \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad x_{3/2} = \frac{3}{4}, \quad x_2 = 1$$

$$y_0 = 1 \quad 4y_{1/2} = 3{,}76471 \quad 2y_1 = 1{,}6 \quad 4y_{3/2} = 2{,}56 \quad y_2 = 0{,}5$$

$$\frac{1}{12}(1+3{,}76471+1{,}6+2{,}56+0{,}5)=0{,}78539\ldots$$

բոլոր հինգ թվանշաններն ստույգ են։

Անշուշտ, (5) բանաձևի նկատմամբ կարելի է կրկնել նախորդ n°-ի վերջում արած դիտողությունները։ Մենք հենց այժմ էլ անցնում ենք մոտավոր բանաձևերի սխալի գնահատմանը։

191. Մոտավոր բանաձևերի լրացուցիչ անդամները: *Նախ դիտարկենք սեղանների բանաձևի պարզագույն մասնավոր դեպքը, երբ* $n=1$, *այսինքն (1) բանաձևը։ Այդ բանաձևի ճշգրտությունը վերականգնելով մի ինչ որ* ρ *«լրացուցիչ անդամի» օգնությամբ, կարող ենք գրել՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\rho,$$

և խնդիրը կկայանա նրանում, որպեսզի գտնենք գնահատման համար հարմար արտահայտություն ρ*-ի համար։*

Ենթադրենք, թե $f(x)$ *ֆունկցիան* $[a, b]$ *միջակայքում ունի առաջին երկու կարգի անընդհատ ածանցյալներ։ Այդ դեպքում* $\int_a^b f(x)\,dx$ *ինտեգրալի հետևյալ տարրական ձևափոխությունները, որոնք հանգում են երեք անգամ կրկնվող մասերով ինտեգրման, անմիջականորեն բերում են* ρ*-ի համար որոնվող արտահայտությանը։*

Ունենք՝

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,d(x-a)=f(b)(b-a)-\int_a^b f'(x)(x-a)\,dx,$$

$$\int_a^b f'(x)(x-a)\,dx=\int_a^b f'(x)(x-a)\,d(x-b)=-\int_a^b (x-b)\,d[f'(x)(x-a)]=$$

$$=-\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx-\int_a^b f'(x)(x-b)\,dx,$$

$$\int_a^b f'(x)(x-b)\,dx=\int_a^b (x-b)\,df(x)=f(a)(b-a)-\int_a^b f(x)\,dx,$$

Այս բոլորը տեղադրելով, կստանանք՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,[f(a)+f(b)] - \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx,$$

որտեղից՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx,$$

այնպես որ՝

$$\rho = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,dx.$$

Քանի որ $f''(x)$ *ֆունկցիան անընդհատ է, իսկ* $(x-a)(x-b)$ *բազմապատկիչը* $[a, b]$ *միջակայքում նշանը չի փոխում, ապա, միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմայի համաձայն* [n° **182**, 10°]՝

$$\rho = \frac{1}{2} f''(\xi)\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

որտեղ՝ $a \leqslant \xi \leqslant b$*։

Եթե $[a, b]$ *միջակայքը տրոհված է* $n > 1$ *հավասար մասերի, ապա յուրաքանչյուր* $[x_i, x_{i+1}]$ *մասնակի միջակայքի համար, ըստ ապացուցածի, կունենանք՝*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_i+y_{i+1}}{2} - \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_i) \quad (x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1})։$$

Այս հավասարություններն անդամ առ անդամ գումարելով $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *կստանանք՝*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \cdots + y_n\right) + R_n \quad (h = b-a),$$

որտեղ՝

$$R_n = -\frac{h^3}{12n^2}\cdot\frac{f''(\xi_0) + f''(\xi_1) + \cdots + f''(\xi_{n-1})}{n}$$

արտահայտությունը (3) սեղանների բանաձևի լրացուցիչ անդամն է։

---

* *(1) բանաձևի լրացուցիչ անդամի արտահայտության այս պարզ արտածումը պատկանում է ուսանող Գ. Ցեյտինին։*

$f''(x)$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն $[a, b]$ միջակայքում նշանակենք, համապատասխանաբար, m և M [n° **73**]. այդ դեպքում

$$\frac{f''(\xi_0)+f''(\xi_1)+\cdots+f''(\xi_{n-1})}{n}$$

թվաբանական միջինը նույնպես կգտնվի m-ի և M-ի միջև։ Անընդհատ ֆունկցիայի հայտնի [n° **70**] հատկության համաձայն, $[a, b]$ միջակայքում կգտնվի այնպիսի ξ կետ, որ նշված արտահայտությունը ճշգրտորեն հավասար կլինի $f''(\xi)$-ի։ Հետևաբար, վերջնականապես կունենանք՝

$$R_n=-\frac{h^3}{12n^2}f''(\xi)\qquad(a\leq\xi\leq b)։ \tag{7}$$

n-ը աճելիս այս լրացուցիչ անդամը նվազում է, *մոտավորապես*, ինչպես $\frac{1}{n^2}$-ն*։

Վերադառնանք, օրինակի համար, $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ ինտեգրալի հաշվմանը, որը կատարել ենք n **189**-ում։ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ընդինտեգրալ ֆունկցիայի համար ունենք՝

$$f''(x)=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}.$$

այս ածանցյալը $[0, 1]$ միջակայքում նշանը փոխում է, բայց բացարձակ մեծությամբ երկուսից փոքր է մնում։ Այստեղից, ըստ (7) բանաձևի, $|R_{10}|<0{,}0017$։ Մենք օրդինատները հաշվել ենք չորս թվանշանով՝ 0,00005-ի ճշգրտությամբ։ Դժվար չէ տեսնել, որ օրդինատների կլորացումից առաջացած սխալները կարելի է մտցնել վերը բերված գնահատականի մեջ։ Իսկական սխալը, իրականում, այդ սահմանից փոքր է։

Սիմպսոնի (6) բանաձևի նկատմամբ մենք կբավարարվենք նրանով, որ նրա լրացուցիչ անդամը կբերենք առանց արտածման։ Ենթադրելով, որ գոյություն ունեն $f(x)$ ֆունկցիայի *չորս* անընդհատ ածանցյալներ, այդ լրացուցիչ անդամը (եթե միջակայքը տրոհված է $2n$ մասի) կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$R_{2n}=-\frac{h^5}{180\cdot(2n)^4}f^{(4)}(\eta)\qquad(a\leq\eta\leq b)։ \tag{8}$$

Նորից դիմենք $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ ինտեգրալին։ (8) բանաձևում մասնակցող չորրորդ կարգի ածանցյալը հաշվելուց խուսափելու համար նկատենք, որ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

---

* *Մոտավորապես* ենք ասում, քանի որ ξ-ն նույնպես կարող է փոփոխվել n-ի հետ միասին։ Այս պետք է հիշել նաև առաջիկայում։

ֆունկցիան ինքը $y = \operatorname{arctg} x$-ի ածանցյալն է, այնպես որ կարող ենք օգտվել n° **96**, 5)-ի պատրաստի բանաձևից։ Այն բանաձևի համաձայն՝

$$f^{(4)}(x) = y^{(5)} = 24 \cos^5 y \sin 5\left(y + \frac{\pi}{2}\right),$$

որտեղից՝ $|f^{(4)}(x)| \leqslant 24$, այնպես որ, (7) բանաձևով՝

$$|R_4| < \frac{1}{1920} < 0{,}0006.$$

Իսկական սխալը, ինչպես տեսանք, զգալի չափով փոքր է այդ սահմանից։

192. Օրինակ: Վերջում, որպեսզի բերենք այնպիսի որոշյալ ինտեգրալի մոտավոր հաշվման օրինակ, որի արժեքը մեզ նախապես հայտնի չէ, մեր առջև խնդիր դնենք Սիմպսոնի բանաձևով 0,001 ճշգրտությամբ հաշվել

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$$

2-րդ տեսակի լ ր ի վ է լ ի պ տ ի կ ի ն տ ե գ ր ա լ ը*։

$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}$ ֆունկցիայի համար, երբ x-ը փոփոխվում է 0-ից մինչև $\frac{\pi}{2}$, ունենք՝ $|f^{(4)}(x)| < 12$**, ուստի [տես (7)]

$$|R_{2n}| < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot 12 < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(2n)^4}, \text{ քանի որ } \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 < 10.$$

---

* Լ ե ժ ա ն դ ր ի $F(k, \varphi)$ և $E(k, \varphi)$ ինտեգրալները լ ր ի վ են անվանում $\varphi = \frac{\pi}{2}$ դեպքում. այս դեպքում նրանց նշանակումներում մենք երկրորդ արգումենտը բաց ենք թողնելու և պարզապես գրելու ենք $F(k)$, $E(k)$։ Լրիվ ինտեգրալների համար գոյություն ունեն հատուկ աղյուսակներ։

** Ակներևորեն, $y = f(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, դիֆերենցելով $y^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^3 x$ նույնությունը, հեշտ է հաջորդաբար ստանալ y', y'', y''', y'''' ածանցյալների բացարձակ արժեքների գնահատումները (վերևից)։

Վերցնենք $2n = 6$, *այնպես որ* $|R_6| < 0{,}00052$։ *Այդ դեպքում՝*

$$
\begin{array}{lll}
x_0 = 0 \quad (0^\circ) & & y_0 = 1{,}0000 \\[4pt]
x_{1/2} = \dfrac{\pi}{12} \quad (15^\circ) & 4y_{1/2} = & \sqrt{12+\sqrt{12}} = 3{,}9324 \\[4pt]
x_1 = \dfrac{\pi}{6} \quad (30^\circ) & 2y_1 = & \sqrt{14}/2 = 1{,}8708 \\[4pt]
x_{3/2} = \dfrac{\pi}{4} \quad (45^\circ) & 4y_{3/2} = & \sqrt{12} = 3{,}4641 \\[4pt]
x_2 = \dfrac{\pi}{3} \quad (60^\circ) & 2y_2 = & \sqrt{10}/2 = 1{,}5811 \\[4pt]
x_{5/2} = \dfrac{5\pi}{12} \quad (75^\circ) & 4y_{5/2} = & \sqrt{12-\sqrt{12}} = 2{,}9216 \\[4pt]
x_3 = \dfrac{\pi}{2} \quad (90^\circ) & y_3 = & \sqrt{2}/2 = 0{,}7071 \\
\hline
 & & \text{գումարը՝ } 15{,}4771
\end{array}
$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{15{,}4771}{18} \quad 1{,}35063\ldots$$

Ստացված արդյունքին, բացի R_6 *ուղղումից, պետք է ավելացնել նաև (ոչ բացասական) ուղղում կլորացման համար, որը չի գերազանցում՝*

$$\frac{0{,}0003\ \ \pi}{36} < 0{,}00003\text{։}$$

Այսպիսով՝

$$1{,}35011 < E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1{,}35118,$$

և կարելի է պնդել, որ $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad 1{,}351 \pm 0{,}001$։

(Փաստորեն, ստացված արդյունքի մեջ բոլոր թվանշաններն ստույգ են)։

Այս օրինակը հետաքրքիր է նրանով, որ համապատասխան նախնական ֆունկցիան վերջավոր տեսքով չի արտահայտվում, այնպես որ որոշյալ ինտեգրալը հաշվելու համար նրանից օգտվելն անհնարին կլիներ։

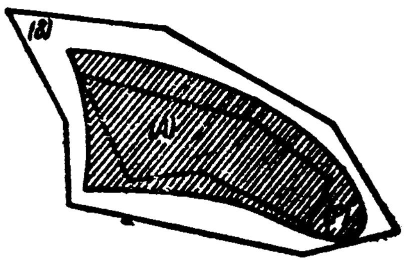
Ընդհանրապես, եթե այս և սրա նման դեպքերում նախնական ֆունկցիաները ներկայացնենք որոշյալ ինտեգրալների տեսքով՝ փոփոխական վերին սահմանով, ապա հնարավոր կլինի հաշվել այդ ինտեգրալների արժեքները վերին սահմանի մի շարք արժեքների դեպքում։ Սրանով է, սկզբունքային տեսակետից, բացատրվում միայն իրենց ինտեգրալային արտահայտություններով տրված ֆունկցիաների համար նույնպիսի աղյուսակներ կազմելու հնարավորությունը, ինչպիսիններն ընթերցողին հայտնի են տարրական ֆունկցիաների համար։

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԵՎ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

§ 1. ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐ ԵՎ ԾԱՎԱԼՆԵՐ

193. Մակերեսի գաղափարի սահմանումը: Քառակուսելի տիրույթներ: *Բազմանկյուն տիրույթ, կամ կարճ՝ բազմանկյուն, մենք կանվանենք յուրաքանչյուր վերջավոր (հնարավոր է և ոչ կապակցված) հարթ պատկեր, որը սահմանափակված է մեկ կամ մի քանի փակ բեկյալներով։ Այդպիսի պատկերի մակերեսի գաղափարը բավականաչափ ուսումնասիրվել է երկրաչափության դպրոցական դասընթացում, այդ մենք հիմք կընդունենք։*

Այժմ վերցնենք հարթության վրա մի կամայական (P) պատկեր, որն իրենից ներկայացնում է սահմանափակ փակ տիրույթ։ Նրա (K) եզրը կամ կոնտուրը մենք միշտ պատկերացնելու ենք փակ կորի (կամ մի քանի այդպիսի կորերի) տեսքով։



Գծ. 71.

Դիտարկենք բոլոր հնարավոր այնպիսի (A) բազմանկյունները, որոնք ամբողջովին պարունակվում են (P)-ի մեջ և բոլոր հնարավոր այնպիսի (B) բազմանկյունները, որոնք իրենց մեջ ամբողջովին պարունակում են (P)-ն (գծ. 71)։ Եթե A-ն և B-ն նշանակում են, համապատասխանաբար, նրանց մակերեսները, ապա միշտ $A \leqslant B$։ Թվերի $\{A\}$ բազմությունը, որը վերևից սահմանափակված է ցանկացած B-ով, ունի P_* ճշգրիտ վերին եզր [n° 6], ընդ որում $P_* \leqslant B$։ Ճիշտ այդպես էլ, թվերի $\{B\}$ բազմությունը, որը ներքևից սահմանափակված է P_* թվով, ունի ճշգրիտ ստորին եզր՝ $P^* \geqslant P_*$։ Այդ եզրերը *կարելի կլիներ անվանել առաջինը՝* (P) *պատկերի ներքին մակերես, իսկ երկրորդը՝ արտաքին մակերես։*

Եթե

$$P_* = \sup\{A\} \quad \text{և} \quad P^* = \inf\{B\}$$

երկու եզրերը համընկնում են, ապա նրանց P ընդհանուր արժեքը կոչվում է (P) պատկերի մակերես: *Այդ դեպքում* (P) *պատկերն անվանում են քառակուսելի։*

1°. Մակերեսի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գտնվեն այնպիսի (A) և (B) երկու բազմանկյուններ, որ $B - A < \varepsilon$:

Իրոք, այդ պայմանի անհրաժեշտությունը բխում է ճշգրիտ եզրերի հիմնական հատկություններից [n° 6], *եթե* P *մակերես գոյություն ունի, ապա կգտնվի այնպիսի* (A), *որ* $A > P - \frac{\varepsilon}{2}$, *և այնպիսի* (B), *որ* $B < P + \frac{\varepsilon}{2}$*։ Բավարարությունն անմիջապես հետևում է*

$$A \leqslant P_* \leqslant P^* \leqslant B$$

անհավասարություններից։

Նույն միտքը կարելի է նաև այլ կերպ արտահայտել, (P) *տիրույթի քառակուսելիության հարցում էական դեր է կատարում նրա* (K) *եզրագիծը։*

Եթե քառակուսելիությունն առկա է, ապա, ինչպես հենց նոր տեսանք, տրված $\varepsilon < 0$ *դեպքում* (K) *կորը կարելի է ամփոփել երկու* (A) *և* (B) *բազմանկյունների եզրագծերով սահմանափակված այնպիսի* $(B - A)$ *բազմանկյուն տիրույթի ներսը, որի* $B - A$ *մակերեսը* $< \varepsilon$ *(գծ. 71)։*

Այժմ ենթադրենք, հակադարձորեն, որ (K) *եզրագիծը կարելի է ամփոփել մի այնպիսի* (C) *բազմանկյուն տիրույթի ներսը, որի* C *մակերեսը* $< \varepsilon$, *որտեղ* ε*-ը նախապես տրված ցանկացած դրական թիվ է։ Ընդ որում, առանց ընդհանրությունը նվազեցնելու, կարելի է ենթադրել, որ* (C)*-ն ամբողջովին չի ծածկում* (P) *տիրույթը։ Այդ դեպքում* (P) *տիրույթի այն կետերից, որոնք* (C)*-ի մեջ չեն ընկնում, կկազմվի մի* (A) *բազմանկյուն տիրույթ, որը կգտնվի* (P)*-ի ներսը։ Իսկ եթե* (A)*-ին միացնենք* (C)*-ն, ապա կստացվի մի* (B) *բազմանկյուն տիրույթ, որն արդեն իր մեջ կպարունակի* (P) *տիրույթը։ Քանի որ* $B - A = C < \varepsilon$, *ապա, 1°-ի շնորհիվ, այստեղից բխում է* (P) *տիրույթի քառակուսելիությունը։*

Խոսքի հեշտացման համար պայմանավորվենք ասել, որ (փակ *կամ ոչփակ)* (K) կորն ունի զրոյի հավասար մակերես *(կամ, ավելի կարճ՝* զրո մակերես), *եթե այն կարելի է ծածկել կամայականորեն փոքր մակերես ունեցող բազմանկյուն տիրույթով։ Այդ դեպքում վերը բերված դատողությունը թույլատրում է բանաձևել քառակուսելիության պայմանը նոր ձևով՝*

2°. Որպեսզի (P) պատկերը քառակուսելի լինի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա (K) եզրագիծն ունենա զրո մակերես:

Այս կապակցությամբ կարևորություն է ստանում զրո մակերես ունեցող կորերի ընդարձակ դասերի առանձնացումը։

Հեշտ է ցույց տալ, որ այդ հատկությամբ օժտված է ամեն մի անընդհատ կոր, որն արտահայտվում է

$$y = f(x) \quad \textit{կամ} \quad x = g(y) \qquad (1)$$
$$(a \leqslant x \leqslant b) \qquad (c \leqslant y \leqslant d)$$

տեսքի բացահայտ հավասարումով ((f-ը և g-ն՝ անընդհատ ֆունկցիաներ են)։

Դիցուք, օրինակ, մենք գործ ունենք այդ հավասարումներից առաջինի հետ։ Տրված $\varepsilon < 0$*-ի դեպքում կարելի է* $[a, b]$ *միջակայքը տրոհել* $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ *մասերի այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրի մեջ* f *ֆունկցիայի* ω_i *տատանումը լինի* $< \frac{\varepsilon}{b-a}$ [n° **75**]: *Եթե* i*-րդ միջակայքում* f *ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները նշանակենք, ինչպես սովորաբար,* m_i *և* M_i, *ապա մեր ամբողջ կորը կծածկվի մի պատկերով, որը բաղկացած է*

$$[x_i, x_{i+1}; m_i, M_i] \quad (i = 0, \cdots, n-1)$$

ուղղանկյուններից (տես գծ. 72), որոնց ընդհանուր մակերեսն է

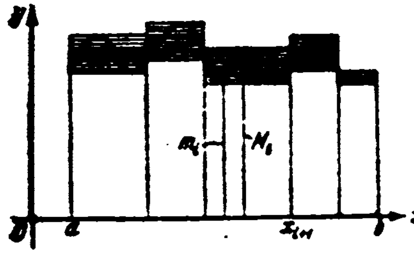
$$\sum_i (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\omega}{b-a} \sum_i \Delta x_i = \varepsilon,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել։ Ուրեմն (1) կորն ունի զրո մակերես։ Այստեղից հետևում է՝

3°. Եթե (P) պատկերը սահմանափակված է մի քանի անընդհատ կորերով, որոնցից յուրաքանչյուրն, առանձին վերցրած, արտահայտվում է (1) բացահայտ հավասարումով (այս կամ այն տիպի), ապա այդ պատկերը քառակուսելի է:

Իրոք, քանի որ հիշատակված կորերից յուրաքանչյուրն ունի 0 *մակերես, ապա և ամբողջ եզրագիծը, ակներևորեն, նույնպես կունենա 0 մակերես։*

194. Մակերեսի ադիտիվությունը (գումարականությունը)։ *Պատկերացնենք, որ* (P) *պատկերը վերլուծված է* (P_1) *և* (P_2) *երկու պատկերների*. կարելի է այդ իրականացնել, օրինակ,* (P)*-ի եզրագծի երկու կետերը միացնող կամ ամբողջովին նրա ներսը գտնվող կորի միջոցով (գծ.* **73**, *ա և բ)։ Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ թեորեման.*

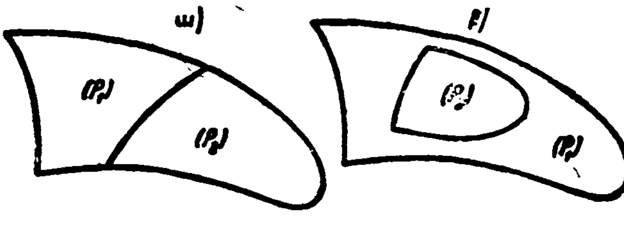


Գծ. 72.

4°. Այդ (P), (P_1), (P_2) երեք պատկերներից երկուսի քառակուսելիությունը առաջ է բերում երրորդի քառակուսելիություն, ընդ որում միշտ՝

$$P = P_1 + P_2, \qquad (2)$$

այսինքն՝ մակերեսն օժտված է ադիտիվության (գումարականության) հատկությամբ։



Գծ. 73.

Քառակուսելիության վերաբերյալ պնդումն անմիջականորեն բխում է 2° հատկությունից։ Մնում է միայն ապացուցել (2) հավասարությունը։ Դիտարկենք (P_1) *և* (P_2) *պատկերներին համապատասխանող* (A_1), (B_1) *և* (A_2), (B_2) *ընդգրկյալ ու ընդգրկող բազմանկյունները։* (A_1) *և* (A_2) *փոխադարձաբար չծածկող բազմանկյուններից կկազմվի ամբողջապես* (P) *տիրույթի մեջ գտնվող մի* (A) *բազմանկյուն տի-*

** Նրանք կարող են ունենալ մասնակի ընդհանուր եզր, սակայն, առանց մեկը մյուսին ծածկելու, այսինքն՝ նրանք չունեն ընդհանուր ներքին կետեր։*

րույթ՝ $A = A_1 + A_2$ *մակերեսով։ Իսկ* (B_1) *և* (B_2), *հնարավոր է և փոխադարձաբար ծածկող, բազմանկյուններից կկազմվի* (P) *տիրույթն իր մեջ պարունակող մի* (B) *տիրույթ՝* $B_1 + B_2 \geqslant B$ *մակերեսով։*

Միաժամանակ ունենք՝

$$A_1 + A_2 = A \leqslant P \leqslant B \leqslant B_1 + B_2$$

և

$$A_1 + A_2 \leqslant P_1 + P_2 \leqslant B_1 + B_2,$$

այնպես որ P *թիվն ու* $P_1 + P_2$ *թիվը գտնվում են միևնույն, և ընդսըմին իրար կամայականորեն մոտ,* $A_1 + A_2$ *և* $B_1 + B_2$ *սահմանների միջև. հետևապես, այդ թվերը հավասար են, որը և պահանջվում էր ապացուցել։*

Նկատենք, մասնավորապես, որ այստեղից՝ $P_1 < P$, *այնպես որ* պատկերի մասն ավելի փոքր մակերես ունի, քան ամբողջ պատկերը:

195. Մակերեսը որպես սահման: *Քառակուսելիության՝ նախորդ* n°-*ում ձևակերպած 1° պայմանը կարելի է վերաձևակերպել այսպես.*

5°. Որպեսզի (P) պատկերը քառակուսելի լինի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան (P)-ի մեջ պարունակվող և (P)-ն իրենց մեջ պարունակող այնպիսի բազմանկյունների $\{(A_n)\}$ և $\{(B_n)\}$ երկու հաջորդականություններ, որոնց մակերեսները ունենան ընդհանուր սահման՝

$$\lim A_n = \lim B_n = P: \tag{3}$$

Հենց այդ սահմանն էլ, ակներևորեն, կլինի (P) *պատկերի մ ա կ ե ր ե ս ը։ Երբեմն ձեռնտու է բազմանկյունների փոխարեն օգտագործել ուրիշ այնպիսի պատկերներ, որոնց քառակուսելիությունն արդեն հաստատված է.*

6°. Եթե (P) պատկերի համար կարելի է կառուցել, համապատասխանաբար, (P)-ի մեջ պարունակվող և (P)-ն իրենց մեջ պարունակող այնպիսի ք ա ռ ա կ ո ւ ս ե լ ի պատկերների $\{(Q_n)\}$ և $\{(R_n)\}$ երկու հաջորդականություններ, որոնց մակերեսներն ունեն ը ն դ հ ա ն ո ւ ր ս ա հ մ ա ն՝

$$\lim Q_n = \lim R_n = P, \tag{3'}$$

ապա (P) պատկերը նույնպես ք ա ռ ա կ ո ւ ս ե լ ի է, *ընդ որում հենց այդ սահմանն էլ կլինի նրա* մ ա կ ե ր ե ս ը:

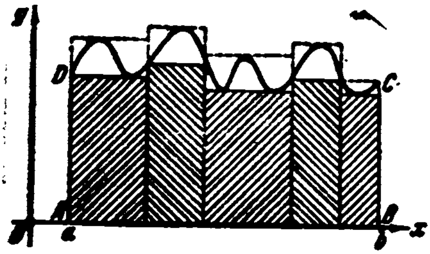
Այդ անմիջապես բխում է նախորդ պնդումից, եթե յուրաքանչյուր (Q_n) *պատկեր փոխարինենք նրա մեջ պարունակվող* (A_n) *բազմանկյունով, իսկ* (R_n)*-ը՝ իրեն պարունակող* (B_n) *բազմանկյունով, որոնք* *ըստ մակերեսների մեծության այնքան մոտ լինեն նրանց, որպեսզի միաժամանակ տեղի ունենա և (3)-ը։*

196. Մակերեսի արտահայտումն ինտեգրալով: *Այժմ դիմենք հարթ պատկերների մակերեսները ինտեգրալների օգնությամբ հաշվելուն։*

Առաջին հերթին դիտարկենք, առաջին անգամ՝ խիստ շարադրումով, ABCD *կորագիծ սեղանի մակերեսը որոշելու մեզ արդեն հանդիպած խնդիրը (գծ. 74)։ Այդ պատկերը վերևից սահմանափակված է* DC *կորով, որի հավասարումն է՝*

$$y = f(x),$$

որտեղ $f(x)$*-ը* $[a, b]$ *միջակայքում դրական և անընդհատ ֆունկցիա է. ներքևից նա սահմանափակված է* x*-երի առանցքի* AB *հատվածով, իսկ կողքերից՝* AD *և* BC *երկու օրդինատներով (որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է դառնալ մի կետ)։ Փաստորեն, դիտարկվող* ABCD *պատկերի* P *մակերեսի գոյությունը հետևում է 3°-ից և խոսքը վերաբերում է միայն նրա հաշվմանը։*



Գծ. 74.

Այդ նպատակով, $[a, b]$ *միջակայքը տրոհենք, ինչպես սովորաբար, մասերի,* a*-ի և* b*-ի միջև տեղավորելով մի շարք կետեր՝*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b:$$

Նշանակելով m_i *և* M_i*, համապատասխանաբար,* $f(x)$ *ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները* i*-րդ* $[x_i, x_{i+1}]$ *միջակայքում* ($i=0, 1, \dots, n-1$)*, կազմենք (Դարբուի) գումարները՝*

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_i M_i \Delta x_i։$$

Դրանք, ակներևորեն, ներկայացնում են այն աստիճանաձև պատկերների մակերեսները, որոնք կազմված են, համապատասխանաբար, ընդգրկյալ և ընդգրկող ուղղանկյուններից (տե՛ս գծագիրը)։ Ուստի՝

$$s < P < S։$$

Բայց երբ Δx_i *տարբերություններից ամենամեծը ձգտում է զրոյի,* *երկու գումարն էլ որպես իրենց սահման ունեն* $\int_a^b f(x)\,dx$ *ինտեգրալը**, *հետևապես, հենց դրան էլ հավասար է որոնելի մակերեսը՝*

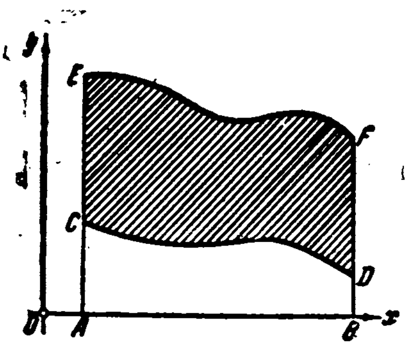
$$P = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx: \qquad (4)$$

Եթե CDFE *կորագիծ սեղանը և՛ ներքևից, և՛ վերևից սահմանափակված է կորերով (գծ. 75), որոնց հավասարումներն են*

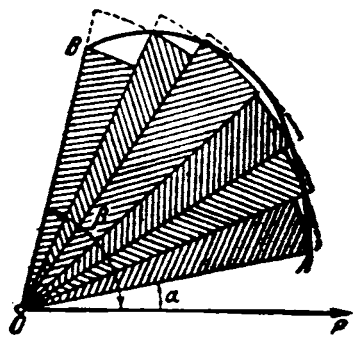
$$y_1 = f_1(x) \text{ և } y_2 = f_2(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

ապա, այն դիտարկելով որպես ABFE *և* ABDC *երկու պատկերների տարբերություն, այդ սեղանի մակերեսը [տե՛ս 4°] կստանանք հետևյալ տեսքով՝*

$$P = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)\,dx: \qquad (5($$



Գծ. 75.



Գծ. 76.

Դիցուք այժմ տված է AOB *սեկտորը (գծ. 76), որը սահմանափակված է* AB *կորով և* OA *ու* OB *երկու շառավիղ-վեկտորներով (որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է մի կետ դառնալ)։ Ընդ որում* AB

---

* *5°-ի շնորհիվ դա ինքնըստինքյան ապացուցում է* ABCD *կորագիծ սեղանի քառակուսելիությունը. ստանալու համար պատկերների այնտեղ հիշատակված հաջորդականությունները, կարելի կլիներ, օրինակ, բաժանել միջակայքը* n *հավասար մասերի,* n*-ը ձգտեցնելով անվերջության։*

կորը տրվում է $r=g(\theta)$ *բևեռային հավասարումով, որտեղ* $g(\theta)$*-ն դրական անընդհատ ֆունկցիա է* $[\alpha, \beta]$ *միջակայքում։*

Տեղադրելով α*-ի և* β*-ի միջև (տե՛ս գծագիրը) հետևյալ արժեքները՝*

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_i<\theta_{i+1}<\cdots<\theta_n=\beta,$$

տանենք այդ անկյուններին համապատասխանող շառավիղ-վեկտորները։ Եթե այստեղ ևս մուծենք $g(\theta)$ *ֆունկցիայի* $[\theta_i, \theta_{i+1}]$*-ում փոքրագույն և մեծագույն արժեքները՝* μ_i *և* M_i*, ապա այդ շառավիղներով գծված շրջանային սեկտորները AOB պատկերի համար կլինեն, համապատասխանաբար, ընդգրկյալ և ընդգրկող։ Ընդգրկյալ սեկտորներից և ընդգրկող սեկտորներից կազմենք երկու առանձին պատկերներ, որոնց մակերեսները կլինեն՝*

$$\sigma=\frac{1}{2}\sum_i \mu_i^2\,\Delta\theta_i \quad \text{և} \quad \Sigma=\frac{1}{2}\sum_i M_i^2\,\Delta\theta_i\text{։}$$

Հանձին այդ σ *և* Σ *գումարների հեշտ է ճանաչել Դարբուի գումարները* $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2\,d\theta$ *ինտեգրալի համար. երբ* $\Delta\theta_i$ *տարբերություններից մեծագույնը ձգտում է զրոյի, նրանք երկուսն էլ որպես սահման ունեն այդ ինտեգրալը։ Այդ դեպքում, 6°-ի շնորհիվ*, (P) պատկերը քառակուսելի է և՝*

$$P=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2\,d\theta\text{։} \qquad (6)$$

Օրինակներ։ *1) Տված է* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *էլիպսը և նրա վրա* $M(x, y)$ *կետը (գծ. 77)։ Որոշել BOKM կորագիծ սեղանի և OMB սեկտորի մակերեսները։*

Էլիպսի հավասարումից ունենք՝ $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$*, այնպես որ, ըստ (4) բանաձևի՝*

---

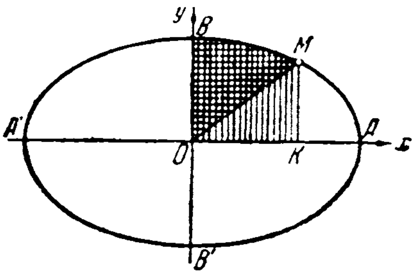
* *6°-ում հիշատակված պատկերների հաջորդականություն ստանալու համար այստեղ նույնպես կարելի էր միջակայքը տրոհել* n *հավասար մասերի։*

$$P_1 = \text{մակ.}\ BOKM = \int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

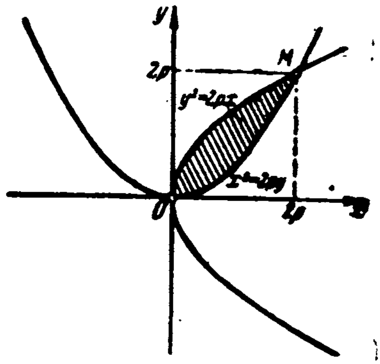
$$= \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{b}{2a}\,x\sqrt{a^2-x^2} = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{xy}{2}\text{։}$$

Քանի որ վերջին գումարելին ներկայացնում է ΔOKM-ի մակերեսը, ուստի, այն հանելով, սեկտորի մակերեսի համար կստանանք՝

$$P_2 = \text{մակ.}\ OMB = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}\text{։}$$



Գծ. 77.



Գծ. 78.

$x = a$ դեպքում էլիպսի մեկ քառորդ մասի մակերեսի համար կգտնենք $\frac{\pi ab}{4}$ արժեքը, այնպես որ ամբողջ էլիպսի մակերեսը՝ $P = \pi ab$։ Շրջանի համար $a = b = r$ և ստացվում է $P = \pi r^2$ հայտնի բանաձևը։

2) Որոշել $y^2 = 2px$ և $x^2 = 2py$ երկու կոնգրուենտ պարաբոլների միջև պարփակված պատկերի մակերեսը (գծ. 78)։

Ակներևորեն, պետք է օգտվել (5) բանաձևից, ընդունելով այնտեղ՝

$$y_1 = \frac{x^2}{2p}, \qquad y_2 = \sqrt{2px}\text{։}$$

Ինտեգրման միջակայքը որոշելու համար այդ հավասարումները միասին լուծենք և գտնենք երկու պարաբոլների հատման այն M կետի աբսցիսը, որը տարբեր է սկզբնակետից. այն հավասար է 2p-ի։ Ունենք՝

$$P = \int_0^{2p}\left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p}\right)\Bigg|_0^{2p} = \frac{4}{3}p^2\text{։}$$

3) (4) բանաձևը կարելի է օգտագործել նաև այն դեպքում, երբ կորագիծ սեղանը սահմանափակող կորը տրված է պարամետրական հավասարումներով՝

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T).$$

(4) ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինում կատարելով (ընդունելով, որ $t = t_0$ *դեպքում* $x = a$ *և* $t = T$ *դեպքում* $x = b$*), կստանանք՝*

$$P = \int_{t_0}^{T} y x'_t dt = \int_{t_0}^{T} \psi(t)\,\varphi'(t)dt. \qquad (7)$$

Եթե, օրինակի համար, էլիպսի մակերեսը հաշվելիս ելնենք նրա պարամետրական ներկայացումից՝

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

և հաշվի առնենք, որ x*-ն աճում է* $-a$*-ից մինչև* a*, երբ* t*-ն նվազում է* π*-ից մինչև 0, ապա կգտնենք՝*

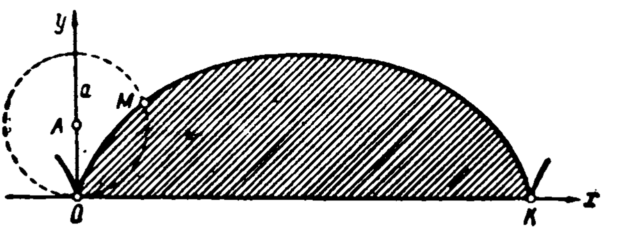
$$P = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t)dt = 2ab\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt = \pi ab.$$

Մենք այստեղ հաշվեցինք էլիպսի վերին կեսի մակերեսը և այն կրկնապատկեցինք։

4) Նման ձևով կարելի է հաշվել

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

ցիկլոիդով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (գծ. 79)։ Ըստ (7) բանաձևի՝



Գծ. 79.

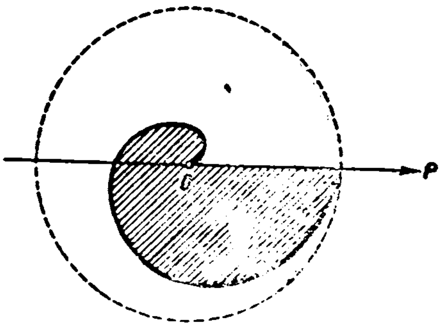
$$P = \int_{0}^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Այսպիսով, որոնելի մակերեսն ստացվեց հավասար a *շառավղով շրջանի մակերեսի եռապատիկին։*

ճ) Գտնել $r = a\theta$ *արքիմեդյան սպիրալի մեկ գալարի մակերեսը (գծ. 80)։ Ըստ (6) բանաձևի ունենք՝*

$$P = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{a^2}{6} \theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2,$$

այն ժամանակ, երբ $2\pi a$ *շառավիղ ունեցող շրջանի մակերեսը կլինի* $4\pi^3 a^2$*։ Ուրեմն, սպիրալի մեկ գալարի մակերեսը հավասար է շրջանի մակերեսի մեկ երրորդին (այս արդյունքը հայտնի է եղել դեռևս Արքիմեդին)։*



Գծ. 80.

197. Ծավալի գաղափարի սահմանումը, նրա հատկությունները: *Այնպես, ինչպես* n° **193**-*ում, ելնելով բազմանկյան մակերեսի գաղափարից, մենք սահմանեցինք կամայական հարթ պատկերի մակերեսի գաղափարը, այժմ կտանք մարմնի ծավալի սահմանումը, հենվելով բազմանիստի ծավալի գաղափարի վրա։*

Այսպես, դիցուք տված է կամայական ձևի (V) մարմին, այսինքն՝ սահմանափակ փակ տիրույթ եռաչափ տարածության մեջ։ Դիցուք մարմնի (S) եզրը հանդիսանում է մի փակ մակերևույթ (կամ մի քանի այդպիսի մակերևույթներ)։

Մենք կդիտարկենք X ծավալ ունեցող (X) բազմանիստեր, որոնք ամբողջապես պարունակվում են մեր վերցրած մարմնի մեջ, և Y ծավալ ունեցող (Y) բազմանիստեր, որոնք իրենց մեջ պարունակում են այդ մարմինը։ Միշտ գոյություն ունի V_* *ճշգրիտ վերին եզր X-երի համար և* V^* *ճշգրիտ ստորին եզր Y-ների համար, ընդ որում* $V_* \leqslant V^*$. *դրանք կարելի կլիներ անվանել մարմնի, համապատասխանաբար, ներքին և արտաքին ծավալներ։*

Եթե

$$V_* = \sup\{X\} \quad \text{և} \quad V^* = \inf\{Y\}$$

երկու մեծությունները համընկնում են, ապա նրանց ընդհանուր V արժեքը կոչվում է (V) մարմնի ծավալ: *Այդ դեպքում (V) մարմինը երբեմն անվանում են խորանարդելի։*

Այստեղ ևս հեշտությամբ ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

1°. Ծավալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գտնվեն այնպիսի (X) և (Y) երկու բազմանիստեր, որոնց համար $Y - X < \varepsilon$:

Այս թեորեման կարելի է բանաձևել նաև այլ կերպ.

2°. Որպեսզի (V) մարմինը ծավալ ունենա, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի այն սահմանափակող (S) մակերևույթն ունենա զրո ծավալ, *այսինքն՝ որպեսզի այդ մակերևույթը հնարավոր լինի ամփոփել ցանկացած չափով փոքր ծավալ ունեցող բազմանիստ մարմնի ներսը:*

Զրո ծավալ ունեցող մակերևույթների թվին, ամենից առաջ, պատկանում են այն մակերևույթները, որոնք արտահայտվում են հետևյալ երեք տիպերին պատկանող բացահայտ հավասարումներից մեկով՝

$$z = f(x, y), \quad y = g(z, x), \quad x = h(y, z),$$

որտեղ f-ը, g-ն և h-ը երկու արգումենտի անընդհատ ֆունկցիաներ են որոշ սահմանափակ տիրույթներում:

Դիցուք, տված է, ասենք, առաջին տիպի հավասարում (P) տիրույթում, որը գտնվում է (R) ուղղանկյան մեջ: Համաձայն n° **137**-*ի թեորեմայի, ինչպիսին էլ լինի $\varepsilon > 0$ թիվը, կարելի է այդ ուղղանկյունը վերլուծել այնչափ մանր (R_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ուղղանկյունների, որ f ֆունկցիայի տատանումը (P) տիրույթի այն (P_i) մասում, որը պարունակվում է (R_i)-ում, լինի $< \frac{\varepsilon}{R}$: Եթե m_i-ն և M_i-ն հանդիսանում են f ֆունկցիայի արժեքներից փոքրագույնը և մեծագույնը (P_i)-ում, ապա մեր ամբողջ մակերևույթը կարող է ամփոփվել մի այնպիսի բազմանիստի մեջ, որը կազմված է հիմքերի R_i մակերեսներ և $\omega = M_i - m_i$ բարձրություններ ունեցող ուղղանկյուն զուգահեռանիստերից: Այդ բազմանիստի ծավալը կլինի՝*

$$\sum_i \omega_i R_i < \frac{\varepsilon}{R} \sum R_i = \varepsilon,$$

որը և պահանջվում էր ապացուցել: Հետևաբար՝

3°. Եթե (V) մարմինը սահմանափակված է մի քանի անընդհատ մակերևույթներով, որոնցից յուրաքանչյուրն առանձին վերցրած արտահայտվում է բացահայտ հավասարումով (երեք տիպերից մեկով), ապա այդ մարմինն ունի ծավալ:

Մակերեսի նման, ծավալը նույնպես օժտված է ադիտիվության հատկությամբ.

4°. Երբ (V) մարմինը վերլուծված է (V_1) և (V_2) երկու մարմինների, ապա այդ երեք մարմիններից երկուսի ծավալի գոյությունից բխում է երրորդ մարմնի ծավալի գոյությունը, ընդ որում՝

$$V = V_1 + V_2:$$

Ծավալների համար ճիշտ է վերաձևակերպել նաև n° **195**-*ում մակերեսների համար ապացուցված 5° և 6° առաջադրությունները.*

5°. Որպեսզի (V) մարմինը ծավալ ունենա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան այնպիսի, համապատասխանաբար, ընդգրկվող և ընդգրկող բազմանիստերի $\{(X_n)\}$ և $\{(Y_n)\}$ երկու հաջորդականություններ, որոնց ծավալները ունենան ընդհանուր սահման՝

$$\lim X_n = \lim Y_n = V:$$

Հենց այդ սահմանն էլ կլինի (V) մարմնի ծավալը:

Օգտակար է նշել և այնպիսի առաջադրություն, որտեղ բազմանիստերի փոխարեն գեր են խաղում կամայական մարմիններ, որոնք նախահայտորեն ծավալ ունեն:

6°. Երբ (V) մարմնի համար կարելի է կառուցել այնպիսի, համապատասխանաբար, ընդգրկվող և ընդգրկող մարմինների $\{(T_n)\}$ և $\{(U_n)\}$ երկու հաջորդականություններ, որոնք ունեն ծավալներ, ընդ որում այդ ծավալները ձգտում են ընդհանուր սահմանի՝

$$\lim T_n = \lim U_n = V,$$

ապա (V) մարմինը ևս ունի ծավալ, որը հավասար է հենց այդ սահմանին:

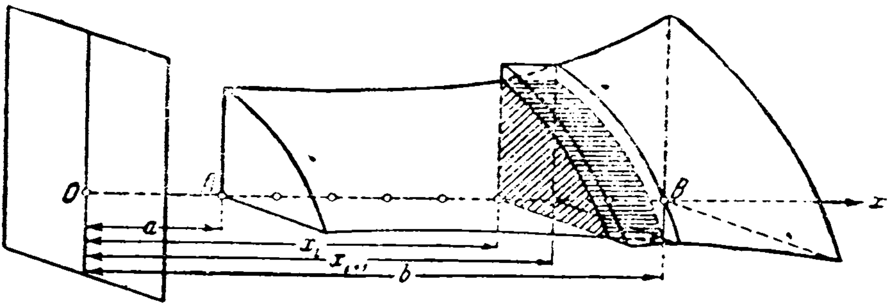
198. Ծավալի արտահայտումն ինտեգրալով: *Սկսենք գրեթե ակներև դիտողություններից.* H բարձրություն ունեցող ուղիղ գլանը, որի հիմքը (P) քառակուսելի հարթ պատկեր է, ունի ծավալ, որը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին՝ $V = PH$:

(A_n) *և* (B_n) *բազմանկյունները, որոնք, համապատասխանաբար, պարունակվում են* (P)-*ի մեջ և պարունակում են իրենց մեջ* (P)-*ն, վերցնենք այնպես, որ նրանց* A_n *և* B_n *մակերեսները ձգտեն* P-*ին* [n° **195**, *5°*]: *Եթե այդ բազմանկյունների վրա կառուցվեն* (X_n) *և* (Y_n) *ուղիղ պրիզմաներ* H *բարձրությամբ, ապա նրանց*

$$X_n = A_n H \quad \text{և} \quad Y_n = B_n H$$

ծավալները կձգտեն $V = PH$ *ընդհանուր սահմանին, որը և* [n° **197**, *5°-ի շնորհիվ*] *կլինի հենց տրված գլանի ծավալը:*

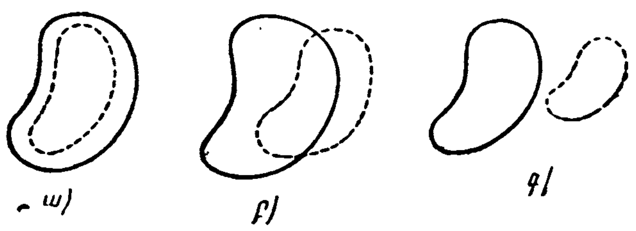
Այժմ դիտարկենք $x = a$ *և* $x = b$ *հարթությունների միջև գտնվող մի (V) մարմին և այն հատենք x-երի առանցքին ուղղահայաց հարթություններով (գծ. 81)։ Ենթադրենք, թե այդ բոլոր հատույթները*



Գծ. 81.

քառակուսելի են, և դիցուք x աբսցիսին համապատասխանող հատույթի մակերեսը, նշանակենք այն P(x)-ով, x-ի անընդհատ ֆունկցիա է ($a \leqslant x \leqslant b$ *համար*)։

Եթե երկու այդպիսի հատույթներ պրոյեկտենք (առանց աղավաղման) x-երի առանցքին ուղղահայաց որևէ հարթության վրա, ապա նրանք կամ կպարունակվեն մեկը մյուսի մեջ (ինչպես 27, (a) գծագրում), կամ մասամբ իրար կծածկեն և կամ կգտնվեն մեկը մյուսից դուրս (տես գծ. 27, (б) և (в))։



Գծ. 82.

Մենք կանգ առնենք այն դեպքի վրա, երբ երկու տարբեր հատույթներ, պրոյեկտվելով x-երի առանցքին ուղղահայաց հարթության վրա, միշտ մեկը մյուսի մեջ է գտնվում։

Այս ենթադրությամբ, կարելի է պնդել, որ մարմինն ունի ծավալ, որն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$V = \int_a^b P(x)\,dx: \qquad (8)$$

Ապացուցման համար x-երի առանցքի [a, b] հատվածը տրոհենք մասերի՝

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

կետերով և տրոհման կետերով տարած $x = x_i$ հարթություններով ամբողջ մարմինը վերլուծենք շերտերի։ Դիտարկենք i-րդ շերտը, որը գտնվում է $x = x_i$ և $x = {}_{i+1}$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ հարթությունների միջև։ $[x_i, x_{i+1}]$ միջակայքում $P(x)$ ֆունկցիան ունի M_i մեծագույն արժեք և m_i փոքրագույն արժեք. եթե այդ միջակայքում x-ի զանազան արժեքներին համապատասխանող հատույթները տեղավորենք մեկ, ասենք՝ $x = x_i$ հարթության վրա, ապա նրանք բոլորն էլ (արված ենթադրության դեպքում) կպարունակվեն ամենամեծի մեջ, որի մակերեսն է M_i և կպարունակեն իրենց մեջ ամենափոքրը. որի մակերեսն է m_i։ Եթե այդ մեծագույն և փոքրագույն հատույթների վրա կառուցենք ուղիղ գլաններ $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ բարձրությամբ, ապա նրանցից մեկը կպարունակի իր մեջ մարմնի դիտարկվող շերտը, իսկ փոքրը ինքը կպարունակվի այդ շերտի մեջ։ Սկզբում արված դիտողության համաձայն, այդ գլանների ծավալները կլինեն, համապատասխանաբար, $M_i\Delta x_i$ և $m_i\Delta x_i$։

Ընդգրկված գլաններից կկազմվի մի (T) մարմին, իսկ ընդգրկողներից՝ մի (U) մարմին։ Նրանց ծավալները հավասար են, համապատասխանաբար,

$$\sum_i M_i\Delta x_i \quad \text{և} \quad \sum_i m_i\Delta x_i$$

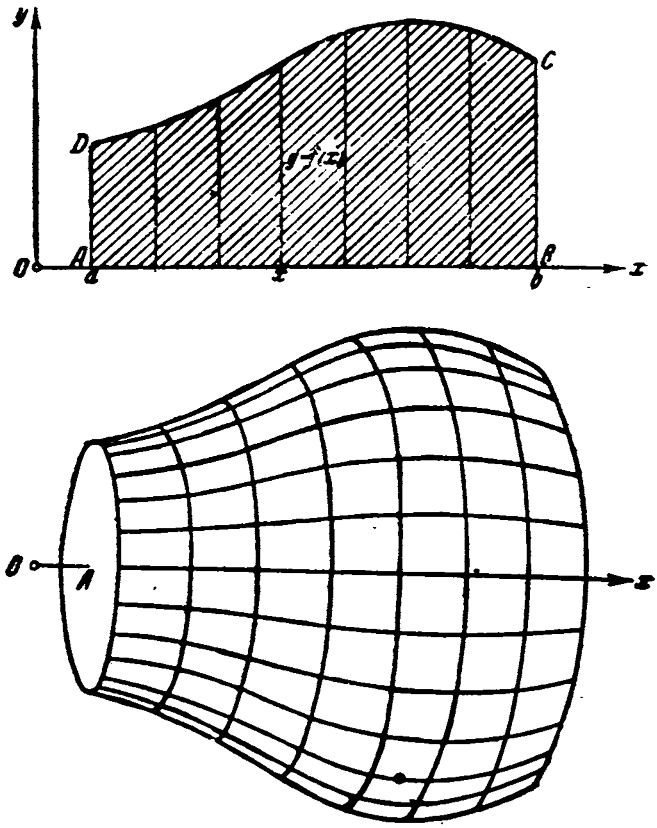
և ունեն (8) ընդհանուր սահմանը, երբ $\lambda = \max \Delta x_i$-ն ձգտում է զրոյի։ **197**, 6°-ի շնորհիվ, այդպիսին կլինի նաև (V) մարմնի ծավալը*։

Կարևոր մասնավոր դեպք, երբ նախահայտորեն բավարարվում է վերևում նշված ենթադրությունը հատույթների փոխդասավորության մասին, ներկայացնում են *պտտման մարմինները*։ Պատկերացնենք xy հարթության վրա մի կոր, որը տրված է $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ հավասարումով, որտեղ $f(x)$-ը անընդհատ է և ոչբացասական. սկսենք պտտել նրանով սահմանափակված կորագիծ սեղանը x-երի առանցքի շուրջը (գծ. 83 (a) և (б))։ Ստացված (V) մարմինը, ակներևորեն, մտնում է դիտարկվող դեպքի մեջ, որովհետև նրա հատույթները պրո-

* Այդպես կլինի, օրինակ, եթե մարմինը բավարարում է 3° թեորեմայի պայմաններին։

յեկտվում են x-երի առանցքին ուղղահայաց հարթության վրա համակենտրոն շրջանների տեսքով: Այստեղ՝

$$P(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2,$$



Գծ. 83.

այնպես որ՝

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx: \qquad (9)$$

Եթե կորագիծ սեղանը սահմանափակված է և՛ ներքևից, և՛ վերևից $y_1 = f_1(x)$ և $y_2 = f_2(x)$ կորերով, ապա, ակներևորեն՝

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2 - y_1^2]\, dx = \pi \int_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\}\, dx, \qquad (10)$$

թեև հատույթների վերաբերյալ արած ենթադրությունը այստեղ կարող է և չկատարվել։ Ընդհանրապես, ապացուցված արդյունքը հեշտությամբ տարածվում է բոլոր այնպիսի մարմինների վրա, որոնք ստացվում են այն մարմինների գումարման կամ հանման միջոցով, որոնք բավարարում են վերոհիշյալ ենթադրությունը։

Ընդհանուր դեպքում կարելի է պնդել միայն հետևյալը՝ եթե (V) մարմինը ունի ծավալ*, ապա այն արտահայտվում է (8) բանաձևով։

Օրինակներ: *1) Դիցուք* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *էլիպսը պտտվում է x-երի առանցքի շուրջը։ Քանի որ*

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

ապա պտտման էլիպսոիդի համար կգտնենք՝

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)\,dx^*=$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Համանման ձևով, y-ների առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմնի ծավալի համար կգտնենք $\frac{4}{3}\pi a^2b$։ *Իսկ եթե այդ բանաձևերում ընդունենք* $a=b=r$, *կստանանք* $\frac{4}{3}\pi r^3$ *հայտնի արտահայտությունը r շառավիղ ունեցող գնդի ծավալի համար։*

2) Նույնը՝ $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ *ցիկլոիդի հյուգի համար։*

Կորի պարամետրական հավասարումները հեշտացնում են $x=a(t-\sin t)$, $dx=a(1-\cos t)\,dt$ *տեղադրումները*

$$V=\pi\int_{0}^{2\pi a}y^2dx$$

---

* *Հեշտ է տեսնել, որ* $\int_{-a}^{0}=\int_{0}^{a}$ *(x = −t տեղադրությամբ)։*

ստանում։ Այն է՝

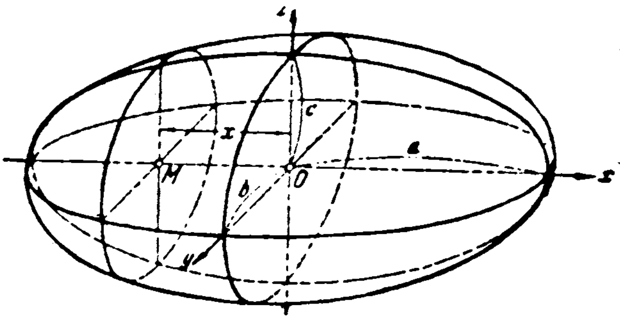
$$V = \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - 4 \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3 :$$

3) Գտնել այն տարածության էլիպսոիդի ծավալը, որը տրված է

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

կանոնական հավասարումով (գծ. 84)։



Գծ. 84.

x-երի առանցքին ուղղահայաց և այդ առանցքի M(x) կետով անցնող հարթությունը] էլիպսոիդը կհատի էլիպսով. yz հարթության վրա նրա պրոյեկցիայի (առանց աղավաղման) հավասարումը կլինի այսպիսին

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = 1 \qquad (x = \text{const.})\text{.}$$

Այստեղից պարզ է, որ նրա կիսառանցքները կլինեն, համապատասխանաբար,

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{և} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

իսկ մակերեսը [n° **196**, *1)*] *կարտահայտվի այսպես՝*

$$P(x) = \pi bc \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2)\text{.}$$

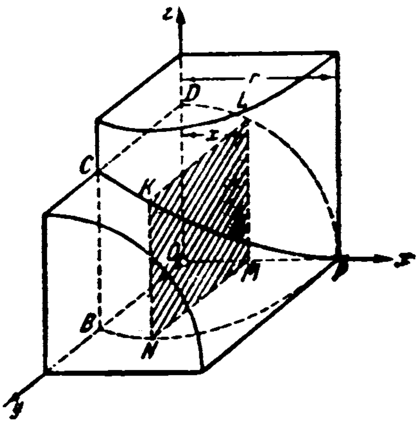
Այսպիսով, ըստ (5) բանաձևի որոնելի ծավալը՝

$$V = \frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

4) Դիտարկենք r շառավիղ ունեցող երկու շրջանային գլաններ, որոնց առանցքները հատվում են ուղիղ անկյան տակ, և որոշենք դրանցով սահմանափակված մարմնի ծավալը։

Գծ. 85-ում պատկերված OABCD մարմինը կազմում է մեզ հետաքրքրող մարմնի մեկ ութերորդ մասը։ x-երի առանցքը տանենք գլանների առանցքների հատման O կետով, ուղղահայաց երկու առանցքներին։ Այդ դեպքում, OABCD մարմնի այն հատույթում, որը տրված է O-ից x հեռավորության վրա, ուղղահայաց x-երի առանցքին, կստացվի KLMN քառակուսին, որի կողմն է $MN = \sqrt{r^2 - x^2}$, *այնպես որ* $P(x) = r^2 - x^2$. *Այդ ժամանակ, ըստ (8) բանաձևի՝*

$$V = 8\int_{0}^{r}(r^2 - x^2)\,dx = \frac{16}{3}r^3.$$



Գծ. 85.

5) Վերջում լուծենք նույն խնդիրը, բայց այն ենթադրությամբ, որ գլաններն ունեն տարբեր շառավիղներ՝ r *և* $R > r$.

Տարբերությունը, համեմատած նախկինի հետ, կլինի միայն այն, որ դիտարկվող մարմնի՝ O կետից x հեռավորության վրա տարած հարթության հատույթում քառակուսու փոխարեն կստացվի ուղղանկյուն, որի կողմերը կլինեն $\sqrt{r^2 - x^2}$ *և* $\sqrt{R^2 - x^2}$. *Այսպիսով, այս դեպքում V ծավալը կարտահայտվի արդեն էլիպտիկ ինտեգրալով՝*

$$V = 8\int_{0}^{r}\sqrt{(R^2 - x^2)(r^2 - x)}\,dx,$$

կամ, եթե կատարենք $x = r\sin\varphi$ *տեղադրում և ընդունենք* $k = \frac{r}{R}$, *ապա՝*

$$V = 8Rr^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cdot\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = 8Rr^2.I.$$

Զբաղվենք I ինտեգրալը երկու տեսքի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալների բերելու հարցով։ Ամենից առաջ՝*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi-k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=I_1+I_2,$$

Բայց՝

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=\frac{k^2-1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+$$

$$+\frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\left(1-\frac{1}{k^2}\right)F(k)+\frac{1}{k^2}E(k).$$

Մյուս կողմից, մասերով ինտեգրելով, ունենք՝

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\;d\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\frac{1}{2}\sin 2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=E(k)-2I.$$

Այստեղից՝

$$I=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{k^2}+1\right)E(k)-\left(\frac{1}{k^2}-1\right)F(k)\right],$$

Այսպիսով, վերջնականապես՝

$$V=\frac{8R^3}{3}\left[(1+k^2)E(k)-(1-k^2)F(k)\right].$$

---

* *Տես 447 էջի տողատակի ծանոթագրությունը։*

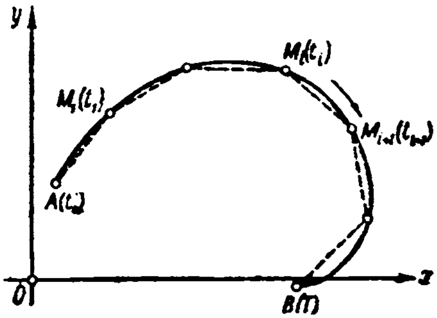
§ 2. ԱՂԵՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

199. Աղեղի երկարության գաղափարի սահմանումը: *Դիտարկենք մի* AB *կոր հարթության վրա (սկզբում՝ ոչ փակ), որը տրված է պարամետրական հավասարումներով՝*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{1}$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

որտեղ φ *և* ψ *ֆունկցիաները ենթադրվում են անընդհատ։ Համարենք, որ* A *կետը համապատասխանում է* $t = t_0$ *արժեքին, իսկ* B *կետը՝* $t = T$ *արժեքին։ Ընդամին դիցուք կորի վրա բազմապատիկ կետեր չկան, այնպես որ* t *պարամետրի տարբեր արժեքներին համապատասխանում են տարբեր կետեր կորի վրա։*

Եթե կորի կետերը համարենք դասավորված t *պարամետրի աճման կարգով (այսինքն՝ երկու կետերից ա՛յն համարենք մյուսին հաջորդող, որը համապատասխանում է պարամետրի ավելի մեծ արժեքին), ապա դրանով կորի վրա հաստատվում է որոշակի ուղղություն (գծ. 86)։*



Գծ. 86.

Այժմ AB *կորի վրա վերցնենք մի շարք կետեր՝*

$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_i, M_{i+1}, \cdots, M_m = B,$$

որոնք մեկը մյուսին հաջորդում են նշված ուղղությամբ. դրանց համապատասխանում են պարամետրի աճող արժեքներ՝

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_m = T:$$

AB *կորին ներգծենք* $(p) = AM_1M_2 \cdots B$ *բեկյալ և նրա պարագիծը նշանակենք* p։

p պարագծի s վերջավոր սահմանը, երբ (p) բեկյալի $M_i M_{i+1}$ կողմերից մեծագույնի երկարությունը ձգտում է զրոյի, կոչվում է AB աղեղի երկարություն՝

$$s = \breve{AB} = \lim p.$$

Եթե այդպիսի սահման գոյություն ունի, ապա կորն ինքը կոչվում է ուղղելի։

Այս սահմանման բովանդակությունը կարելի է բացահայտել այսպես. կորին ներգծած բեկյալների ինչպիսի $\{(p_n)\}$ հաջորդականություն էլ վերցնելու լինենք, որը բավարարում է միայն այն պայմանին, որ (p_n) բեկյալի մեծագույն կողմի երկարությունը, n-ը աճելիս, ձգտում է զրոյի, p_n պարագիծը ամեն անգամ ձգտում է s սահմանին:

Այդ սահմանումը կարելի է արտահայտել նաև «$\varepsilon - \delta$ լեզվով». յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար պետք է գտնվի այնպիսի $\delta > 0$ թիվ, որ

$$0 \leqslant s - p < \varepsilon$$

անհավասարությունը տեղի ունենա հենց որ ներգծված բեկյալի բոլոր կողմերը՝

$$\overline{M_i M_{i+1}} < \delta:$$

Երկու սահմանումների համարժեքությունը հաստատվում է սովորական եղանակով։

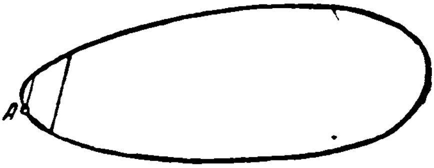
Աղեղի երկարության կարևոր հատկությունը նրա ադիտիվությունն է (գումարականությունը).

Եթե AB աղեղի վրա վերցնենք մի C կետ, ապա AB աղեղի ուղղելիությունից բխում է AC և CB երկու աղեղների ուղղելիությունը, ընդ որում՝

$$\breve{AB} = \breve{AC} + \breve{CB}:$$

Այս պնդումը մենք այստեղ ընդունում ենք առանց ապացուցման. այն կորերի համար, որոնք մենք սովորաբար դիտարկելու ենք [*տե՛ս* n° **201**], *ոչ միայն ապահովված կլինի աղեղի երկարության գոյությունը, այլև ադիտիվությունը կբխի աղեղի երկարությունը ինտեգրալով արտահայտելուց։*

Այժմ դիմենք փակ կորի դեպքին, որի համար A *և* B *կետերը համընկնում են (սակայն բազմապատիկ կետեր, այնուամենայնիվ, չկան, այսինքն՝* $A \equiv B$ *կետից տարբեր յուրաքանչյուր կետ ստացվում է* t *պարամետրի միայն մեկ արժեքի դեպքում)։ Դժվար չէ տեսնել, որ այս դեպքում աղեղի երկարության վերևում բերված սահմանումն արդեն չի կարելի կիրառել առանց վերապահության. չէ՛ որ նշված պայմանը պահպանելիս անգամ ոչինչ չէր խանգարի բեկյալին կծկվելու մեկ կետում, իսկ նրա պարագծին՝ ձգտելու զրոյի (գծ. 87)։ Հարցի* ձությունը կայանում է նրանում, որ ո չ փ ա կ կորի դեպքում միայն (p) բեկյալի բոլոր օղակների երկարությունների զրոյի ձգտելն արդեն ապահովում է նրանց ավելի ու ավելի սերտ մերձեցումը համապատասխան մասնակի աղեղներին. ուստի և բնական է նրա p պարագծի սահմանն ընդունել որպես ողջ աղեղի երկարություն։ Իսկ փակ կորի դեպքում արդեն այդպես չէ*։



Գծ. 87.

Կարելի էր ձևափոխել այդ սահմանումը (անխուսափելիորեն բարդացնելով այն) այնպես, որպեսզի այն ընդգրկեր նաև փակ կորի դեպքը։ Մենք նախընտրում ենք, հանուն պարզության, այլ ճանապարհ. այն է՝ պատկերացնենք, որ փակ կորը նրա վրա կամայապես վերցրած մի C կետով տրոհված է երկու ոչփակ կտորների և նրանց երկարությունների գումարը (եթե նրանք երկուսն էլ ուղղելի են) անվանենք ողջ աղեղի երկարություն։ Հիմնվելով աղեղի երկարության ադիտիվության վրա, հեշտ է ցույց տալ, որ այդ գումարը փաստորեն կախված չէ A և C կետերի ընտրությունից։

200. Լեմմաներ: *Նորից դիտարկենք բազմապատիկ կետեր չունեցող (1) ո չ փ ա կ կորը։ Նրա համար ապացուցենք հետևյալ երկու օժանդակ առաջադրությունները.*

Լեմմա 1. Երբ M' և M'' կետերը համապատասխանում են պարամետրի t' և t'' արժեքներին ($t' < t''$), ապա ցանկացած $\delta > 0$ համար կգտնվի այնպիսի $\eta > 0$, որ $t'' - t' < \eta$ դեպքում լարի երկարությունը՝ $\overline{M'M''} < \delta$:

Իրոք, (1)-ի φ և ψ ֆունկցիաների հավասարաչափ անընդհատության շնորհիվ, յուրաքանչյուր $\delta > 0$ համար կգտնվի այնպիսի $\eta > 0$, որ $|t'' - t'| < \eta$ դեպքում միաժամանակ կլինեն՝

$$|\varphi(t'') - \varphi(t')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad \text{և} \quad |\psi(t'') - \psi(t')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

ուստի և՝

$$\overline{M'M''} = \sqrt{[\varphi(t'') - \varphi(t')]^2 + [\psi(t'') - \psi(t')]^2} < \varepsilon.$$

Տեղի ունի նաև՝

Լեմմա 2. Ցանկացած $\eta > 0$ համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$, որ,

---

* *Եթե տարրական երկրաչափության դասընթացից հիշենք շրջանագծի երկարության սահմանումը որպես ներգծած կանոնավոր բազմանկյան պարագծի սահման, ապա բազմանկյան կ ա ն ո ն ա վ ո ր լինելու վերաբերյալ վերապահումն է հենց, որ կանխում է մեր տեքստում նշված հնարավորությունը։*

հենց որ լարի երկարությունը՝ $M'M'' < \delta$, պարամետրի՝ նրա ծայրերին համապատասխանող արժեքների $t'' - t'$ տարբերությունը ($t' < t''$) դառնում է $< \eta$։

Ասենք հակառակ ենթադրություն. այդ դեպքում մի որոշ $\eta > 0$ համար, ցանկացած $\delta > 0$ դեպքում կգտնվեին երկու այնպիսի $M'(t')$ և $M''(t'')$ կետեր, որ $\overline{M'M''} < \delta$ և միաժամանակ $t'' - t' \geqslant \eta$։ Վերցնելով զրոյի ձգտող մի $\{\delta_n\}$ հաջորդականություն և հերթով ընդունելով $\delta = \delta_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, կհանգեինք կետերի երկու հաջորդականությունների՝ $\{M'(t_n')\}$ և $\{M''(t_n'')\}$, որոնց համար՝

$$\overline{M'_n M_n''} < \delta_n, \text{ սակայն } t_n'' - t_n' \geqslant \eta \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)։$$

Ըստ Բոլցանոյի-Վայերշտրասի լեմմայի [n° **51**], *առանց ընդհանրությունը նվազեցնելու, կարելի է ենթադրել, որ այդ դեպքում*

$$t_n' \to t^*, \qquad t_n'' \to t^{**}$$

(դրան կարելի է հասնել, անցնելով, հարկ եղած դեպքում, մասնակի հաջորդականությունների)։ Ակներևորեն՝

$$t^{**} - t^* \geqslant \eta,$$

այնպես որ $t^* \neq t^{**}$։ Միևնույն ժամանակ համապատասխան M^* և M^{**} կետերի համար կունենայինք $\overline{M^*M^{**}} = 0$, այսինքն՝ այդ կետերը պետք է համընկնեին, որ անհնարին է, քանի որ կորը բազմապատիկ կետեր չունի և փակ չէ։ Ստացված հակասությունն ավարտում է ապացուցումը։

Այս երկու լեմմաները ցույց են տալիս, որ ոչ փակ կորի երկարությունը սահմանելիս ամենևին նշանակություն չունի, թե արդյոք երկու պահանջներից որի՞ց կելնենք՝ որպեսզի զրոյի ձգտի ներգծված բեկյալի $\overline{M_iM_{i+1}}$ կողմերի՞ց մեծագույնը [*համաձայն* n° **199**-*ի*], *թե՞ $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ տարբերություններից մեծագույնը, քանի որ այդ երկու պահանջներից մեկից բխում է մյուսը։ Հենց այժմ մեզ համար ավելի հարմար կլինի սահմանային պրոցեսը բնութագրել երկրորդ պահանջից ելնելով։*

201. Աղեղի երկարության արտահայտումն ինտեգրալով: *Լրացուցիչ ենթադրենք, որ ոչ փակ կորի (1) պարամետրական հավասարումներում մասնակցող φ և ψ ֆունկցիաներն ունեն φ' և ψ' անընդհատ ածանցյալներ։ Այդ պայմաններում, ինչպես կապացուցենք, կորն ուղղելի է և աղեղի երկարությունն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$s = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt: \qquad (2)$$

Մենք կելնենք $[t_0, T]$ *միջակայքը*

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_n = T$$

կետերով $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ երկարությամբ մասերի տրոհելուց։ t-ի այդ արժեքներին համապատասխանում են $\overset{\frown}{AB}$ աղեղին ներգծված $AM_1 \cdots M_{n-1}B$ բեկյալի գագաթները, և (ինչպես վերևում պարզաբանեցինք) նրա s երկարությունը կարելի է որոշել որպես բեկյալի p պարագծի սահման, երբ $\lambda^* = \max \Delta t_i$ ձգտում է զրոյի։

Նշանակենք՝

$$\varphi(t_i) = x_i, \quad \psi(t_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

և

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1)։$$

Ներգծյալ բեկյալի i-րդ կողմի՝ M_iM_{i+1}-ի երկարությունը կարտահայտվի այսպես՝

$$\overline{M_iM_{i+1}} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}:$$

(1) ֆունկցիաների Δx_i և Δy_i աճերի նկատմամբ առանձին-առանձին կիրառելով վերջավոր աճերի բանաձևը, կստանանք՝

$$\Delta x_i = \varphi(t_i + \Delta t_i) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i,$$

$$\Delta y_i = \psi(t_i + \Delta t_i) - \psi(t_i) = \psi'(\tau_i^*)\Delta t_i,$$

ընդ որում τ_i և τ_i^* արժեքների մասին մենք ոչինչ չգիտենք, բացի այն, որ նրանք երկուսն էլ պարունակվում են t_i և t_{i+1}-ի միջև։ Այժմ ունենք՝

$$\overline{M_iM_{i+1}} = \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\,\Delta t_i,$$

այնպես որ ամբողջ բեկյալի պարագծի համար ստացվում է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$p = \sum_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2}\,\Delta t_i:$$

Եթե արմատանշանի տակ երկրորդ գումարելիի մեջ ամենուրեք τ_i^*-ն փոխարինենք τ_i-ով, ապա ձևափոխված

$$\sigma = \sum_i \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^3 + [\psi'(\tau_i)]^2}\,\Delta t_i$$

արտահայտությունը, ակներևորեն, կներկայացնի ինտեգրալային գումար հենց (2) ինտեգրալի համար։ λ^*-ն զրոյի ձգտելիս հենց այդ գումարն էլ որպես սահման կունենա հիշյալ ինտեգրալը*։ Ապացուցե-

---

* Նրա գոյությունը տարակուսանք չի առաջացնում, որովհետև ընդինտեգրալ ֆունկցիան անընդհատ է [n° **179**, I]։

լու համար, որ նույն սահմանին է ձգտում նաև բեկյալի p պարագիծը, բավական է ցույց տալ, որ p — σ տարբերությունը ձգտում է զրոյի։

Այդ նպատակով գնահատենք այդ տարբերությունը՝

$$|p-\sigma| \leqslant \sum_i \left| \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i^*]^2} - \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2+[\psi'(\tau_i)]^2} \right| \Delta t_i \text{։}$$

Հետևյալ տարրական անհավասարությունը՝

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}\right| \leqslant |b-b_1|^*,$$

եթե այն կիրառենք վերևում գրված գումարի յուրաքանչյուր գումարելիի նկատմամբ առանձին-առանձին, մեզ կտա՝

$$|p-\sigma| \leqslant \sum_i |\psi'(\tau_i)-\psi'(\tau_i^*)|\, \Delta t_i \text{:}$$

$\psi'(t)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, ցանկացած տրված $\varepsilon > 0$ թվի համար կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$, որ $|\psi'(t)-\psi'(t^*)| < \varepsilon$, հենց որ $t|-t^*| < \delta$։ Եթե վերցնենք բոլոր $\Delta t_i < \delta$, ապա և $|\tau_i - \tau_i^*| < \delta$, այնպես որ $|\psi(\tau_i)-\psi(\tau_i^*) < \varepsilon$ և

$$|p-\sigma| \leqslant \varepsilon \sum_i \Delta t = \varepsilon(T-t_0) \text{:}$$

Հենց այս էլ ապացուցում է մեր պնդումը։

Եթե կորը տրված է բացահայտ հավասարումով ուղղանկյուն կոորդինատներով՝

$$y = f(x) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant X),$$

ապա, x-ը ընդունելով որպես պարամետր, (2) բանաձևից, որպես նրա մասնավոր դեպք, կստանանք՝

$$s = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1+y_x'^2}\, dx = \int_{x_0}^{X} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx \text{:} \qquad (2ա)$$

Վերջապես, կորը բևեռային կոորդինատներով տալու դեպքը՝

$$r = g(\theta) \quad (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \Theta)$$

---

* Այդ անհավասարությունն ակներև է $a = 0$ դեպքում. իսկ եթե $a \neq 0$, ապա այն անմիջականորեն բխում է հետևյալ նույնությունից՝

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2} = \frac{b+b_1}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}(b-b_1),$$

քանի որ փակագծերի մեջ եղած տարբերության բազմապատկիչը բացարձակ մեծությամբ մեկից փոքր է։

Նույնպես բերվում է պարամետրականի՝ անցման սովորական բանաձևերի օգնությամբ՝

$$x = r\cos\theta = g(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = g(\theta)\sin\theta,$$

որտեղ պարամետրի դերը խաղում է θ*-ն։ Այս դեպքի համար*

$$x'_\theta = r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta, \qquad y'_\theta = r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta,$$

այնպես որ՝

$$x'^2_\theta + y'^2_\theta = r^2 + r'^2_\theta \tag{3}$$

և՝

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}\, d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{[g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2}\, d\theta: \tag{2բ}$$

Դիտողություն։ *(2) բանաձևն անմիջականորեն տարածվում է նաև փակ կորի դեպքի վրա։ Վերցնենք այդ դեպքում մի կամայական* t' t_0*-ի և* T*-ի միջև, տրված (1) փակ կորը համապատասխան* $M'(t')$ *կետով տրոհենք* AM' *և* $M'B$ *երկու ոչփակ կորերի և յուրաքանչյուրի համար առանձին կիրառենք (2) բանաձևը՝*

$$s_1 = \breve{AM'} = \int_{t_0}^{t'}, \qquad s_2 = \breve{M'B} = \int_{t'}^{T},$$

Այս երկու արդյունքները գումարելով, ամբողջ փակ կորի համար կստանանք՝

$$s = s_1 + s_2 = \int_{t_0}^{T},$$

Օրինակներ։ *1) Պարաբոլ՝* $y = \frac{x^2}{2p}$,

Ընդունելով O $(x = 0)$ *գագաթը որպես աղեղների հաշվման սկիզբ,* x *աբսցիս ունեցող կամայական* M *կետի համար ունենք՝*

$$s = \breve{OM} = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{x^2+p^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+p^2})\right]\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{x}{2p}\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p},$$

2) Ցիկլոիդ՝ $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$:
Այստեղ ($0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ *դեպքում*)՝

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a \sin\frac{t}{2}.$$

ցիկլոիդի մեկ ճյուղի երկարությունը, ըստ (2) բանաձևի, կլինի՝

$$S = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a:$$

3) Արքիմեդյան սպիրալ (գալարագիծ)՝ $r = a\theta$։
Ըստ (2բ) բանաձևի, հաշվելով աղեղը O բևեռից մինչև ցանկացած (θ *անկյանը համապատասխանող) M կետը, ստանում ենք՝*

$$s = \overset{\smile}{OM} = a\int_0^{\theta} \sqrt{1 + \theta^2}\,d\theta = \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{1 + \theta^2} + \ln\left(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}\right)\right]:$$

Հետաքրքրական է, որ այստեղ դնելով $\theta = \frac{r}{a}$, *մենք կստանանք մի արտահայտություն, որը ձևականորեն նման է պարաբոլի աղեղի երկարության համար ստացված արտահայտությանը [տես (1)]*

4) Էլիպս՝ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

Ավելի հարմար է, ի միջի այլոց, վերցնել էլիպսի հավասարումները պարամետրական տեսքով՝ $x = a \sin t$, $y = b \cos t$: *Ակնհայտորեն՝*

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 t} =$$
$$= a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t},$$

որտեղ $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ *էլիպսի թվային էքսցենտրիսիտետն է։*

Հաշվելով էլիպսի աղեղի երկարությունը փոքր առանցքի վերին ծայրից մինչև նրա ցանկացած կետն առաջին քառորդում, կստանանք՝

$$s = a\int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\,dt = a \cdot E(\varepsilon, t):$$

Այսպիսով, էլիպսի աղեղի երկարությունն արտահայտվում է 2-րդ տեսակի էլիպտիկ ինտեգրալով [n° **174**, *տես նաև* n° **183**]. *ինչպես նշվել է, հենց այդ փաստն է առիթ ծառայել «էլիպտիկ» («էլիպսական») անվան համար։*

*Մասնավորապես, էլիպսի շրջագծի մեկ քառորդի երկարությունն արտահայտվում է լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալով**.*

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt = a \cdot E(\varepsilon)\text{:}$$

Իսկ էլիպսի ամբողջ շրջագծի երկարությունը կլինի՝

$$S = 4a \cdot E\ (\varepsilon)\text{:}$$

202. Փոփոխական աղեղ, նրա դիֆերենցիալը: AB *աղեղի վրա վերցնենք պարամետրի* t *կամայական արժեքին համապատասխանող* M *կետը։ Այդ դեպքում* $\breve{AM}$ *աղեղի երկարությունը, (2)-ի փոխարեն, կարտահայտվի*

$$s = s(t) = \breve{AM} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt \qquad (4)$$

բանաձևով և, ակներևորեն, կլինի t*-ի աճող և անընդհատ ֆունկցիա։*

Ավելին, ընդինտեգրալ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, այդ $s = s(t)$ *փոփոխական աղեղը կունենա ածանցյալ ըստ* t*-ի, հավասար ընդինտեգրալ ֆունկցիային* [n° **183**, *12°*]՝

$$s'_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\text{:} \qquad (5)$$

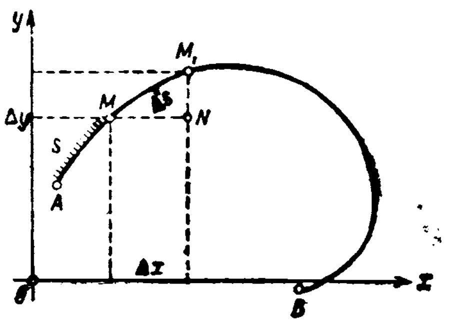
Եթե այս հավասարությունը քառակուսի բարձրացնենք և անդամ առ անդամ բազմապատկենք dt^2 *-ով, կստանանք իր պարզությամբ հիանալի մի բանաձև՝.*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad (6)$$

որն ընդսմին ունի երկրաչափական ակնառու մեկնաբանություն. գծ. 88-ում MNM_1 *կորագիծ ուղղանկյուն եռանկյան մեջ որպես «էջեր» ծառայում են* M *կետի կոորդինատների* $MN = \Delta x$ *և* $NM_1 = \Delta y$ *աճերը, իսկ որպես «ներքնաձիգ»՝* $\breve{MM_1} = \Delta s$ *աղեղը, որը* $\breve{AM} = s$ *աղեղի աճն է։ Պարզվում է, որ եթե ո՛չ աճերի իրենց համար, ապա նրանց գլխավո՛ր մասերի՝ դիֆերենցիալների՛ համար տեղի ունի յուրատեսակ «Պյութագորասի թեորեմա»։*

* *Տե՛ս 447 էջի տողատակի ծանոթագրությունը։*

Օգտակար է նշել (5) կարևոր բանաձևի մասնավոր դեպքերը, որոնք համապատասխանում են կորի տրման զանազան մասնավոր դեպքերին։ Այսպես, եթե կորը տրված է բացահայտ հավասարումով դեկարտյան կոորդինատներով՝ $y = f(x)$, ապա պարամետրի դերում հանդես է գալիս x-ը, աղեղը կախված է x-ից՝ $s = s(x)$, և (5) բանաձևն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝



Գծ. 88.

$$s'_x = \sqrt{1 + y_x'^2}։ \qquad (5ա)$$

Իսկ եթե կորը տրված է բևեռային հավասարումով՝ $r = g(\theta)$ և պարամետր հանդիսանում է θ-ն, ապա աղեղն այս անգամ θ-ի ֆունկցիա կլինի՝ $s = s(\theta)$։ (3)-ի շնորհիվ (5) բանաձևը ձևափոխվում է այսպես՝

$$s'_\theta = \sqrt{r^2 + r_\theta'^2}։ \qquad (5բ)$$

Հաճախ հարմար է լինում որպես հաշվման A սկզբնակետ վերցնել ոչ թե աղեղի ծայրակետերից մեկը, այլ նրա ներքին կետերից որևէ մեկը։ Այդպիսի դեպքերում բնական է այդ կետից պարամետրի աճման ուղղությամբ վերցվող աղեղները համարել դրական, իսկ մյուս ուղղությամբ վերցվող աղեղները՝ բացասական, և, դրան համապատասխան, աղեղի երկարությանն առաջին դեպքում վերագրել պլյուս նշան, երկրորդ դեպքում՝ մինուս նշան։ Այս աղեղի հենց այս մեծությունը նշանի հետ միասին, համառոտության համար, մենք պարզապես անվանելու ենք աղեղ։ (4), (5), (5ա), (5բ) բանաձևերը տեղի ունեն բոլոր դեպքերում։

Քանի որ $s = \overset{\frown}{AM}$ փոփոխական աղեղը t պարամետրի մոնոտոն աճող անընդհատ ֆունկցիա է, ապա t-ն էլ իր հերթին կարող է դիտարկվել որպես s-ի միարժեք ու անընդհատ ֆունկցիա՝ $t = \omega(s)$ [n°71], t-ի այս արտահայտությունը տեղադրելով (1) հավասարումների մեջ, մենք կստանանք x և y ընթացիկ կոորդինատներն արտահայտված որպես s-ի ֆունկցիաներ՝

$$x = \varphi(\omega(s)) = \Phi(s), \quad y = \psi(\omega(s)) = \Psi(s)։$$

Անկասկած, $s = \overset{\frown}{AM}$ աղեղը, որն M կետի «կորագիծ աբսցիսի» դեր է կատարում, նրա դիրքը որոշող ամենաբնական պարամետրն է։

Ենթադրենք, թե t-*ի տվյալ արժեքի դեպքում* x'_t *և* y'_t *երկու ածանցյալները միաժամանակ չեն դառնում զրո (այս ենթադրության երկրաչափական իմաստը կպարզվի* n° **210**-*ում)։ Այդ դեպքում*

$$s'_t = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} > 0$$

և s-*ի համապատասխան արժեքի դեպքում գոյություն ունի* t'_s *ածանցյալը* [n° *80*]՝

$$t'_s = \omega'(s) = \frac{1}{\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}}$$

և, հետևաբար, նաև՝

$$x'_s = \Phi'(s), \quad y'_s = \Psi'(s)$$

ածանցյալները։

203. Տարածական կորի աղեղի երկարությունը: *Բազմապատիկ կետեր չունեցող տարածական կորի նկատմամբ, որը տրվում է*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

հավասարումներով, աղեղի երկարության սահմանումը կարելի է տալ նույն ձևով, ինչպես և հարթ կորի համար [n° n° **199** — **201**]:

Այստեղ ևս կորի երկարության համար ստացվում է մի բանաձև, որը նման է (2)-ին՝

$$s = \breve{AB} = \int_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt$$

և այլն։ Այս դեպքի վրա, համարյա առանց փոփոխության, կարելի է տարածել հարթ կորի դեպքի համար բոլոր ասածները։ Կանգ չառնելով դրա վրա, բերենք *օ ր ի ն ա կ ն ե ր։*

1) *Պտուտակագիծ՝* $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ct$։

Քանի որ այստեղ՝

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

ուստի կորի աղեղի երկարությունը A (t = 0) *կետից մինչև* M *(ցանկացած* t*) կետը կլինի՝*

$$s = \breve{AM} = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2}\, dt = \sqrt{a^2 + c^2}\, t,$$

ակներև արդյունք, եթե հիշենք, որ գլանային մակերևույթը փռելու դեպքում նրա վրա գտնված պտուտակագիծը փոխարկվում է թեք ուղիղի։

2) Վիվիանիի կորը՝ $x = R\sin^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = R\cos t$, *որտեղ* $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$։

Ունենք՝

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = R\sqrt{1+\sin^2 t}.$$

Այդպիսի դեպքում ամբողջ կորի երկարությունը կարտահայտվի 2-րդ տեսակի լրիվ էլիպտիկ ինտեգրալով՝

$$S = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\,R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}\,dt = \sqrt{2}\,R\cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

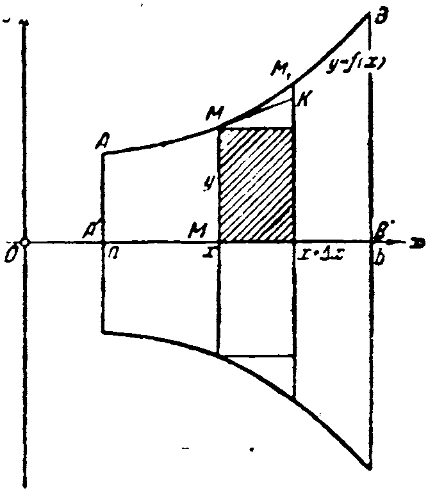
§ 3. ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ԵՎ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

204. Որոշյալ ինտեգրալի կիրառման սխեման: *Նախքան անցնելը որոշյալ ինտեգրալի կիրառմանը մեխանիկայի, ֆիզիկայի և տեխնիկայի բնագավառում, օգտակար է առաջուց պարզել այն ճանապարհը, որով գործնական հարցերում սովորաբար հանգում են որոշյալ ինտեգրալին։ Այդ նպատակով մենք կուրվագծենք ինտեգրալի կիրառման ընդհանուր սխեման, լուսաբանելով այն արդեն ուսումնասիրված երկրաչափական խնդիրների օրինակներով։*

Պատկերացնենք, որ պահանջվում է որոշել մի որոշ Q հաստատուն մեծություն (երկրաչափական կամ այլ մեծություն), որը կապված է [a, b] *միջակայքի հետ։ Ընդ որում դիցուք* [a, b] *միջակայքի մեջ պարունակվող յուրաքանչյուր* [α, β] *մասնակի միջակայքին համապատասխանում է Q մեծության որոշ մաս այնպես, որ* [a, b] *միջակայքի վերլուծումը մասնակի միջակայքերի որպես հետևանք առաջ է բերում նաև Q մեծության համապատասխան մասերի վերլուծում։*

Ավելի ճշգրիտ ասած, խոսքը վերաբերում է մի որոշ «միջակայքի ֆունկցիայի»՝ $Q([\alpha, \beta])$, *որն օժտված է ա դ ի տ ի վ ու թ յ ա ն հ ա տ կ ու թ յ ա մ բ, այնպես որ, եթե* $[\alpha, \beta]$ *միջակայքը կազմված է* $[\alpha, \gamma]$ *և* $[\gamma, \beta]$ *մասնակի միջակայքերից, ապա այդ դեպքում նաև*

$$Q([\alpha, \beta]) = Q([\alpha, \gamma]) + Q([\gamma, \beta]):$$



Գծ. 89.

Իսկ խնդիրը կայանում է նրա՝ ամբողջ $[a, b]$ *միջակայքին համապատասխանող արժեքը գտնելում:*

Որպես օրինակ վերցնենք հարթության վրա մի $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ *կոր (գծ. 89): Այս դեպքում՝ 1)* AB *կորի* S *ե ր կ ա ր ու թ յ ու ն ը, 2) նրանով սահմանափակված* $AA'B'B$ *կորագիծ սեղանի* P *մ ա կ ե ր ե ս ը և 3) այդ սեղանն x-երի առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած* V *մարմնի ծ ա վ ա լ ը՝ բոլոր երեքն էլ նշված տիպի մեծություններ են: Դժվար չէ կռահել, թե դրանցով ինչպիսի «միջակայքի ֆունկցիաներ» են առաջանում:*

Դիտարկենք Q *մեծության* ΔQ *«էլեմենտը», որը համապատասխանում է* $[x, x+\Delta x]$ *«տարրական (էլեմենտար) միջակայքին»: Ելնելով խնդրի պայմաններից, աշխատում են* ΔQ*-ի համար գտնել* $q(x)\Delta x$ *տեսքի մոտավոր արտահայտություն՝* Δx*-ի նկատմամբ գծային, այնպես որ նա տարբերվի* ΔQ*-ից թերևս միայն ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծությամբ: Ուրիշ խոսքով,* ΔQ անվերջ փոքր «էլեմենտից» ($\Delta x \to 0$ դեպքում) առանձնացնում են նրա գ լ խ ա վ ո ր մ ա ս ը: *Պարզ է, որ այդ դեպքում*

$$\Delta Q \approx q(x)\,\Delta x \tag{1}$$

մոտավոր հավասարության հարաբերական սխալը կձգտի զրոյի Δx*-ի հետ միասին:*

Այսպես, 1) օրինակում աղեղի $\breve{MM_1}$ *էլեմենտը կարելի է փոխարինել շոշափողի* MK *հատվածով, այնպես որ* ΔS*-ից առանձնացվում է*

$$\sqrt{1 + y_x'^2}\,\Delta x = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\Delta x$$

գծային մասը։ 2) օրինակում բնական է ΔP տարրական շերտը փոխարինել ընդգրկվող ուղղանկյունով, որի մակերեսն է՝

$$y\Delta x = f(x)\,\Delta x:$$

Վերջապես, 3) օրինակում ΔV տարրական շերտից առանձնացվում է նրա գլխավոր մասը՝ ընդգրկվող շրջանային գլանի տեսքով, որի ծավալն է՝

$$\pi y^2\Delta x = \pi[f(x)]^2\,\Delta x:$$

Բոլոր երեք դեպքերում էլ դժվար չէ ցույց տալ, որ այդպիսի փոխարինումից առաջացած սխալը կլինի ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն, քան Δx-ն է։

Հենց որ այդ արված է, կարելի է արդեն պնդել, որ որոնելի Q մեծությունը ճ շ գ ր տ ո ր ե ն արտահայտվում է հետևյալ ինտեգրալով՝

$$Q = \int_a^b q(x)\,dx: \tag{2}$$

Այդ բացատրելու համար $[a, b]$ միջակայքը $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ կետերի միջոցով տարրական միջակայքերի վերլուծենք՝

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_i, x_{i+1}], \cdots, x_{n-1}, b]:$$

Քանի որ յուրաքանչյուր $[x_i, x_{i+1}]$ կամ $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ միջակայքին համապատասխանում է մեր մեծության այնպիսի մաս, որը մոտավորապես հավասար է $q(x_i)\Delta x_i$, ապա որոնելի Q մեծությունը մոտավորապես կարտահայտվի հետևյալ գումարով՝

$$Q \approx \sum_i q(x_i)\,\Delta x_i:$$

Ստացված արժեքի ճշգրտության աստիճանը կլինի այնքան ավելի բարձր, որքան ավելի մանր են մասնակի միջակայքերը. այնպես որ Q-ն, ակներևորեն, կլինի հիշյալ գումարի սահմանը, այսինքն՝ իրոք կարտահայտվի $\int_a^b q(x)\,dx$ որոշյալ ինտեգրալով։

Այս լրիվ չափով վերաբերում է դիտարկված բոլոր երեք օրինակներին։ Եթե S, P, V մեծությունների համար վերևում ստացանք մի փոքր այլ բանաձևեր, ապա այդ այն պատճառով էր, որ մեր խնդիրը կայանում էր ոչ միայն նրանց հաշվելում, այլև նրանց գոյությունն ապացուցելում՝ համաձայն նախօրոք տրված սահմանումների։

Այսպիսով, ամբողջ գործը հանգում է (1) մոտավոր հավասարությունը ստանալուն, որը սովորաբար գրվում է հետևյալ ձևով՝

$$dQ = q(x)\,dx\text{։} \qquad (3)$$

Այնուհետև մնում է միայն «հանրագումարել» այդ «տարրերը», որը և բերում է (2) բանաձևին։

Ընդգծում ենք, որ այստեղ սովորական գումարի փոխարեն ինտեգրալից օգտվելը շատ էական է։ Գումարը Q-ի համար կտար միայն մոտավոր արտահայտություն, որովհետև նրա վրա կանդրադառնային (3) տիպի առանձին հավասարությունների սխալները. իսկ սահմանային անցումը, որի օգնությամբ գումարից ինտեգրալ է ստացվում, ոչնչացնում է սխալը և բերում է միանգամայն ճշգրիտ արդյունքի։ Այսպիսով, սկզբում պարզության շահերից ելնելով, dQ էլեմենտի արտահայտության մեջ դեն են ձգվում բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծությունները և առանձնացվում է գլխավոր մասը, իսկ այնուհետև, նկատի ունենալով ճշգրտության շահերը, գումարումը փոխարինվում է ինտեգրումով, և պարզ ստացվող արդյունքը դառնում է ճշգրիտ։

Ի միջի այլոց կարելի կլիներ հարցին մոտենալ և այլ տեսակետից։ $Q(x)$-ով նշանակենք Q մեծության փոփոխական մասը, որը համապատասխանում է $[a, x]$ միջակայքին, ընդ որում $Q(a)$-ն բնականաբար համարում ենք հավասար 0-ի։ Պարզ է, թե վերևում դիտարկված $Q([\alpha, \beta])$ «միջակայքի ֆունկցիան» ինչպես է արտահայտվում այդ $Q(x)$ «կետի ֆունկցիայի» միջոցով՝

$$Q([\alpha, \beta]) = Q(\beta) - Q(\alpha)\text{։}$$

Մեր օրինակներում կետի ֆունկցիաներ են հանդիսանում՝ 1) $\overset{\frown}{AM}$ փոփոխական աղեղը, 2) $AA'M'M$ փոփոխական սեղանի մակերեսը և, վերջապես, 3) հենց այդ սեղանի պտտումից առաջացած մարմնի ծավալը։

ΔQ մեծությունը պարզապես $Q(x)$ ֆունկցիայի աճն է, իսկ նրա գլխավոր մասը հանդիսացող $q(x)\Delta x$ արտադրյալը ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը։ Այսպիսով, դիֆերենցիալ նշանակումներով գրված (3) հավասարությունը փաստորեն այժմ ոչ թե մոտավոր, այլ ճշգրիտ հավասարություն է։ Այստեղից նույնպես միանգամից ստացվում է պահանջվող արդյունքը՝

$$\int_a^b q(x)dx = Q(b) - Q(a) = Q([a, b]) = Q:$$

Նշենք, այնուամենայնիվ, որ կիրառություններում առավել հարմար և բեղմնավոր է անվերջ փոքր էլեմենտների հանրագումարման գաղափարը (Լայբնից), ինքնին հասկանալի սահմանային անցումով։

205. Պտտման մակերևույթի մակերեսը։ Որպես նկարագրված սխեմայի կիրառման առաջին օրինակ դիտարկենք մի խնդիր երկրաչափության բնագավառից՝ պտտման մակերևույթի մակերեսի հաշվման խնդիրը։

Մենք հնարավորություն չունենք այստեղ ընդհանուր առմամբ սահմանելու կոր (այսինքն՝ ոչհարթ) մակերևույթի մակերեսի գաղափարը. այդ կարվի երկրորդ հատորում։ Այդ պատճառով այժմ մենք միայն կսովորենք հաշվել պտտման մակերևույթի մակերեսը, համարելով, որ այն գոյություն ունի և օժտված է ադիտիվության հատկությամբ։ Հետագայում կտեսնենք, որ մեր ստացած բանաձևը որպես մասնավոր դեպք մտնում է կոր մակերևույթի մակերեսը հաշվելու ընդհանուր բանաձևի մեջ։

Այսպես, ուրեմն, դիցուք xy հարթության վրա (այն է՝ վերին կիսահարթությունում) ունենք մի AB կոր, որը տրված է

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (4)$$
$$(t_0 \leq t \leq T)$$

տեսքի հավասարումներով, որտեղ φ-ն և ψ-ն իրենց ածանցյալների հետ միասին պարամետրի անընդհատ ֆունկցիաներ են։ Պարզության համար ենթադրելու ենք, որ նա փակ չէ և բազմապատիկ կետեր չունի։

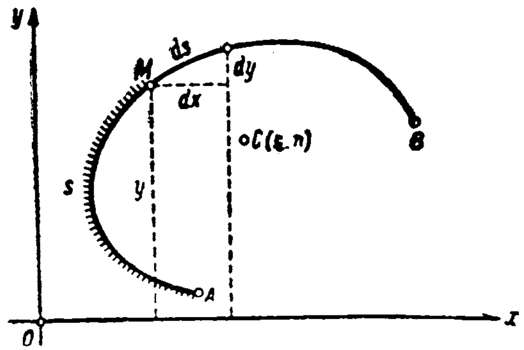
Տվյալ դեպքում մեզ համար հարմար է որպես պարամետր վերցնել s աղեղը՝ հաշված $A(t_0)$ կետից և անցնել կորի

$$x = \Phi(s), \quad y = \Psi(s) \qquad (5)$$
$$(0 \leq s \leq S)$$

ներկայացմանը, որի մասին խոսք եղավ n° 202-ում։ s պարամետրն այստեղ փոփոխվում է 0-ից մինչև S, որտեղ S-ով նշանակված է ամբողջ AB կորի երկարությունը։

Մեր խնդիրն է՝ որոշել AB *կորի* x-*երի առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած մակերևույթի* Q *մակերեսը։ Ընթերցողի ուշադրությունը հրավիրում ենք այն բանի վրա, որ անկախ փոփոխականի դերն այստեղ կատարում է* s-*ը, որի փոփոխման միջակայքն է* $[0, S]$։

Եթե առանձնացնենք կորի ds *էլեմենտը (գծ. 90), ապա այն մոտավորապես կարելի է ընդունել որպես ուղղագիծ էլեմենտ և նրան համապատասխանող մակերեսի* dQ *էլեմենտը հաշվել որպես հատած կոնի մակերես, որի ծնիչը հավասար է* ds-*ի, իսկ հիմքերի շառավիղները՝* y-*ի և* $y+dy$-*ի։ Այդ դեպքում, դպրոցական դասընթացից հայտնի բանաձևով՝*



Գծ. 90.

$$dQ = 2\pi \frac{y + (y + dy)}{2} ds:$$

Այս դեռևս այն բանաձևը չէ, որը մենք ցանկանում ենք ստանալ. երկու անվերջ փոքրերի $dy \cdot ds$ *արտադրյալը հարկավոր է դեն նետել։ Այդպիսով, մենք կհանգենք* ds-*ի նկատմամբ գծային բանաձևի՝*

$$dQ = 2\pi y ds,$$

որտեղից արդեն, «հանրագումարելով», վերջնականապես կստանանք՝

$$Q = 2\pi \int_0^S y ds, \qquad (6)$$

որտեղ որպես y *պետք է հասկանալ (5)-ում մասնակցող* $\Psi(s)$ *ֆունկցիան։*

Եթե վերադառնանք մեր կորի (4) ընդհանուր պարամետրական հավասարումներին, ապա, (6) ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինում կատարելով [տե՛ս n° **186**, *(2)], այն կձևափոխենք այսպես՝*

$$Q = 2\pi \int_{t_0}^{T} y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = 2\pi \int_{t_0}^{T} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt: \qquad (6ա)$$

Մասնավորապես, եթե կորը տրված է

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

բացահայտ հավասարումով, այնպես որ պարամետրի դերում հանդես է գալիս x*-ը, կունենանք՝*

$$Q = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\text{:} \qquad (6բ)$$

Օրինակներ: *1) Որոշել գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսը։ Դիցուք սկզբնակետի շուրջը* r *շառավղով գծած կիսաշրջանագիծը պտտվում է* x*-երի առանցքի շուրջը։ Շրջանագծի հավասարումից ունենք՝* $y = \sqrt{r^2 - x^2}$*. այնուհետև՝*

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \qquad \sqrt{1 + y_x'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$y\sqrt{1 + y_x'^2} = r\text{։}$$

Այդ դեպքում այն աղեղով գծած գոտու մակերևույթի մակերեսը, որի ծայրերն ունեն x_1 *և* $x_2 > x_1$ *աբսցիսներ, ըստ (6բ) բանաձևի կլինի՝*

$$Q = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} r\, dx = 2\pi r(x_2 - x_1) = 2\pi r h,$$

որտեղ h*-ը գոտու բարձրությունն է։ Այսպիսով, գնդային գոտու մակերևույթի մակերեսը հավասար է մեծ շրջանի շրջանագծի երկարության և գոտու բարձրության արտադրյալին։*

Մասնավոր դեպքում, երբ $x_1 = -r$, $x_2 = r$, *այսինքն՝* $h = 2r$ *դեպքում, ստանում ենք ամբողջ գնդային մակերևույթի մակերեսը՝* $Q = 4\pi r^2$։

2) Գտնել $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ *ցիկլոիդի աղեղն* x*-երի առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած մակերևույթի մակերեսը։*

Քանի որ $y = 2a \sin^2 \frac{t}{2}$, $ds = 2a \sin \frac{t}{2}\, dt$, *ապա՝*

$$Q = 2\pi \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u\, du =$$

206. Կորի ստատիկ մոմենտներն ու ծանրության կենտրոնը գտնելը: *Ինչպես հայտնի է, m զանգված ունեցող նյութական կետի K ստատիկ մոմենտը որևէ առանցքի նկատմամբ հավասար է m զանգվածի և կետի՝ առանցքից ունեցած d հեռավորության արտադրյալին։ m_1, m_2, $\cdots$, m_n զանգվածներ ունեցող և առանցքի հետ մի հարթության մեջ գտնվող n նյութական կետերի սիստեմի դեպքում, երբ այդ կետերն առանցքից ունեն, համապատասխանաբար, d_1, d_2, $\cdots$, d_n հեռավորություններ, ստատիկ մոմենտը կարտահայտվի հետևյալ գումարով՝*

$$K = \sum_i m_i d_i :$$

Ընդ որում, առանցքի մի կողմում գտնվող կետերի հեռավորությունները վերցվում են պլյուս նշանով, իսկ մյուս կողմում գտնվողները՝ մինուս նշանով։

Իսկ եթե զանգվածները չեն կենտրոնացած առանձին կետերում, այլ դասավորված են անընդմեջ, լցնելով գիծ կամ հարթ պատկեր, ապա այդ դեպքում ստատիկ մոմենտն արտահայտելու համար գումարի փոխարեն կպահանջվի ինտեգրալ։

Կանգ առնենք որևէ AB հարթ կորի երկարությամբ դասավորված զանգվածների՝ x-երի առանցքի նկատմամբ K_x ստատիկ մոմենտը որոշելու հարցի վրա (գծ. 90)։ Ընդ որում մենք ենթադրենք, որ այդ կորը համասեռ է, այնպես որ նրա ρ գծային խտությունը (այսինքն՝ երկարության միավորի վրա գտնվող զանգվածը) հաստատուն կլինի. պարզության համար ենթադրենք նույնիսկ, որ $\rho = 1$ (հակառակ դեպքում հարկ կլինի ստացված արդյունքը միայն բազմապատկել ρ-ով)։ Այս ենթադրությունների դեպքում մեր կորի ցանկացած աղեղի զանգվածը չափվում է պարզապես նրա երկարությամբ, և ստատիկ մոմենտի գաղափարը զուտ երկրաչափական բնույթ է ստանում։ Նկատենք ընդհանրապես, որ երբ խոսում են կորի ստատիկ մոմենտի (կամ ծանրության կենտրոնի) մասին — առանց հիշատակելու նրա երկարությամբ զանգվածների բաշխման մասին, ապա միշտ էլ նկատի ունեն հենց այնպիսի ստատիկ մոմենտ (ծանրության կենտրոն), որը որոշված է հիշյալ ենթադրությունների դեպքում։

Նորից առանձնացնենք կորի մի որևէ ds էլեմենտ (որի զանգվածը նույնպես արտահայտվում է ds թվով)։ Այդ էլեմենտը մոտավորապես ընդունելով որպես նյութական կետ, որը գտնվում է առանցքից y հեռավորության վրա, նրա ստատիկ մոմենտի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը

$$dK_x = y\,ds\text{։}$$

Համրագումարելով այդ տարրական ստատիկ մոմենտները, ընդ որում որպես անկախ փոփոխական վերցնելով s աղեղը, որը հաշվվում է A կետից, կստանանք

$$K_x = \int_0^s y\,ds,$$

Համանման ձևով է արտահայտվում մոմենտը նաև y-ների առանցքի նկատմամբ՝

$$K_y = \int_0^S x\,ds:$$

Անշուշտ, այստեղ ենթադրվում է, որ y-ը (կամ x-ը) արտահայտված է s-ի միջոցով։ Գործնականորեն այս բանաձևի մեջ s-ը փոխարինում են այն t, x կամ θ փոփոխականով, որը կորի անալիտիկ ներկայացման մեջ անկախ փոփոխականի դեր է կատարում։

Կորի K_x և K_y ստատիկ մոմենտները թույլատրում են հեշտությամբ որոշել նրա $C(\xi, \eta)$ ծանրության կենտրոնը։ C կետն ունի այն հատկությունը, որ եթե այնտեղ կենտրոնացնենք կորի ամբողջ S զանգվածը (որն արտահայտվում է նույն թվով, ինչ որ երկարությունը), ապա այդ զանգվածի մոմենտը ցանկացած առանցքի նկատմամբ համընկնում է կորի մոմենտի հետ այդ առանցքի նկատմամբ. մասնավորապես, եթե դիտարկենք կորի մոմենտները կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, ապա կգտնենք՝

$$S\xi = K_y = \int_0^S x\,ds, \qquad S\eta = K_x = \int_0^S y\,ds,$$

որտեղից՝

$$\xi = \frac{K_y}{S} = \frac{1}{S}\int_0^S x\,ds, \qquad \eta = \frac{K_x}{S} = \frac{1}{S}\int_0^S y\,ds: \tag{7}$$

Ծանրության կենտրոնի η օրդինատի բանաձևից մենք ստանում ենք մի նշանավոր երկրաչափական հետևանք։ Իրոք, ունենք՝

$$\eta S = \int_0^S y\,ds,$$

որտեղից՝

$$2\pi\eta\cdot S = 2\pi\int_0^S y\,ds,$$

բայց այդ հավասարության աջ մասը ներկայացնում է AB կորի պտըտումից ստացված մակերևույթի Q մակերեսը [**205**, *(6)*], *իսկ հավասարության ձախ մասում 2πη-ն նշանակում է կորի ծանրության կենտրոնի՝ x-երի առանցքի շուրջը պտտումից գծված շրջանագծի երկարությունը, S-ն էլ մեր կորի երկարությունն է։ Այսպիսով, հանգում ենք* Գուլդինի* *հետևյալ թեորեմային՝*

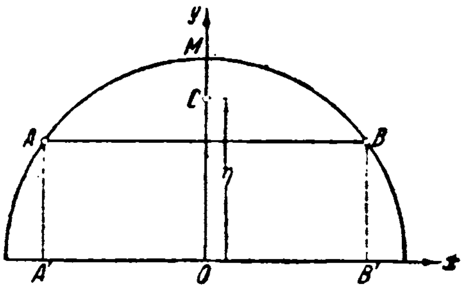
Կորն իրեն չհատող որևէ առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած մակերևույթի մեծությունը հավասար է այդ կորի աղեղի երկարությունը, բազմապատկած կորի C ծանրության կենտրոնի գծած շրջանագծի երկարությամբ *(գծ. 90)*՝

$$Q = S\cdot 2\pi\eta։$$

Այս թեորեման հնարավորություն է տալիս որոշել կորի ծանրության կենտրոնի η կոորդինատը, եթե հայտնի են նրա S երկարությունը և նրա գծած պտտման մակերևույթի Q մակերեսը։

Ահա դրա օրինակներ.

1) Օգտվելով Գուլդինի թեորեմայից, որոշել r շառավիղ ունեցող շրջանագծի AB աղեղի ծանրության կենտրոնի դիրքը (գծ. 91)։



Գծ. 91.

Քանի որ այդ աղեղը սիմետրիկ է իր M միջնակետով անցնող OM շառավղի նկատմամբ, ապա նրա C ծանրության կենտրոնը գտնվում է այդ շառավղի վրա, և ծանրության կենտրոնի դիրքի լրիվ որոշման համար անհրաժեշտ է միայն գտնել նրա η հեռավորությունը O կենտրոնից։ Առանցքներն ընտրում ենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում, և նշանակում ենք $\overset{\frown}{AB}$ *աղեղի երկարությունը s-ով, իսկ նրա AB = (A'B') լարի երկարությունը h-ով։ Դիտարկվող աղեղն x-երի*

* *Պաուլ Գուլդին (1577 — 1643), շվեյցարացի մաթեմատիկոս։ Ի դեպ, նկատենք, որ նրա երկու թեորեմաներն էլ (տե՛ս հաջորդ n°-ը) հայտնի են եղել դեռևս մեր թվականության III դարի ականավոր հույն մաթեմատիկոս Պապպուսին։*

առանցքի շուրջը պտտելուց ստացվում է մի գնդային գոտի, որի մակերևույթի Q մակերեսը, ինչպես գիտենք [n° **205**, *1)*], հավասար է $2\pi rh$։ Ըստ Գուլդինի թեորեմայի, նույն մակերևույթը հավասար է $2\pi\eta s$, այնպես որ $s\eta = rh$ և $\eta = \frac{rh}{s}$։

Մասնավորապես, կիսաշրջանագծի համար $h = 2r$, $s = \pi r$ և $\eta = \frac{2}{\pi} r \approx$ $\approx 0,637\, r$։

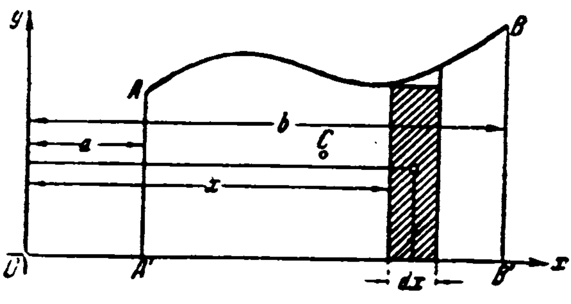
2) Որոշել

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

ցիկլոիդի մի ճյուղի ծանրության կենտրոնը։

Եթե հաշվի առնենք սիմետրիան, ապա անմիջապես պարզ է, որ $\xi = \pi a$։ Իսկ հաշվի առնելով n° 205-ի 2) օրինակի արդյունքները, հեշտ է այնուհետև ստանալ՝ $\eta = \frac{4}{3} a$։

207. Հարթ պատկերի ստատիկ մոմենտներն ու ծանրության կենտրոնը գտնելը: *Դիտարկենք* AA′B′B *հարթ պատկերը (գծ. 92), որը վերևից սահմանափակված է* $y = f(x)$ *բացահայտ հավասարումով տրված* AB *կորով։ Ենթադրենք, թե այդ պատկերի մակերեսով հավասարաչափ բաշխված են զանգվածներ, այնպես որ նրանց* ρ *մակերևութային խտությունը (այսինքն՝ միավոր մակերեսին ընկնող զանգվածը) հաստատուն է։ Այդ դեպքում, առանց էապես նվազեցնելու*



Գծ. 92.

ընդհանրությունը, կարելի է ընդունել, որ $\rho = 1$, *այսինքն՝ որ մեր պատկերի ցանկացած մասի զանգվածը չափվում է նրա մակերեսով։ Հենց այդ էլ միշտ հասկացվում է, երբ խոսվում է պարզապես հարթ պատկերի ստատիկ մոմենտների (կամ ծանրության կենտրոնի) մասին։*

Ցանկանալով որոշել այդ պատկերի K_x, K_y *ստատիկ մոմենտները* կոորդինատային առանցքների նկատմամբ, մենք առանձնացնենք, ինչպես սովորաբար, մեր պատկերի որևէ էլեմենտ՝ անվերջ նեղ ուղղաձիգ շերտի տեսքով (տես գծագիրը)։ Ընդունելով այդ շերտը մոտավորապես որպես ուղղանկյուն, տեսնում ենք, որ նրա զանգվածը (որն արտահայտվում է նույն թվով, ինչ որ մակերեսը) կլինի ydx։ Որոշելու համար համապատասխան dk_x, dk_y տարրական մոմենտները, ենթադրենք, որ շերտի ամբողջ զանգվածը կենտրոնացած է նրա ծանրության կենտրոնում (այսինքն՝ ուղղանկյան կենտրոնում), որը, ինչպես հայտնի է, չի փոխում ստատիկ մոմենտների մեծությունը։ Ստացված նյութական կետը գտնվում է x-երի առանցքից $\frac{1}{2}y$ հեռավորության վրա, իսկ y-երի առանցքից՝ $\left(x+\frac{1}{2}dx\right)$ հեռավորության վրա. վերջին արտահայտությունը կարելի է պարզապես x-ով փոխարինել, որովհետև դեն ձգված $\frac{1}{2}dx$ մեծությունը, բազմապատկվելով ydx զանգվածով, կտար երկրորդ կարգի անվերջ փոքր մեծություն։ Այսպիսով, ունենք՝

$$dk_x = \frac{1}{2}y^2dx, \qquad dk_y = xydx:$$

Հանրագումարելով այս տարրական մոմենտները կհանգենք հետևյալ արդյունքին՝

$$K_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2dx, \qquad K_y = \int_a^b xydx, \tag{8}$$

ընդ որում y-ի տակ հասկացվում է, անշուշտ, AB կորի հավասարման մեջ մասնակցող $f(x)$ ֆունկցիան։

Ինչպես և կորի դեպքում, դիտարկվող պատկերի՝ կոորդինատային առանցքների նկատմամբ այս ստատիկ մոմենտների օգնությամբ այժմ հեշտ է որոշել նաև պատկերի ծանրության կենտրոնի ξ, η կոորդինատները։ Եթե պատկերի մակերեսը (հետևապես, և զանգվածը) նշանակենք P, ապա ծանրության կենտրոնի հիմնական հատկության համաձայն՝

$$P\xi = K_y = \int_a^b xydx, \qquad P\eta = K_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,$$

որտեղից՝

$$\xi = \frac{K_y}{P} = \frac{1}{P}\int_a^b xy\,dx, \qquad \eta = \frac{K_x}{P} = \frac{1}{2P}\int_a^b y^2 dx: \tag{9}$$

Այս դեպքում էլ մենք ստանում ենք կարևոր երկրաչափական հետևանք ծանրության կենտրոնի η *օրդինատի բանաձևից։ Իրոք, այդ բանաձևից ունենք՝*

$$2\pi\eta P = \pi\int_a^b y^2 dx\text{։}$$

Այս հավասարության աջ մասն արտահայտում է $AA'B'B$ *հարթ պատկերն x-երի առանցքի շուրջը պտտելուց ստացված մարմնի* V *ծավալը* [n° **198**, *(9)*], *իսկ ձախ մասն արտահայտում է այդ պատկերի* P *մակերեսի և պատկերի ծանրության կենտրոնի գծած շրջանագծի* $2\pi\eta$ *երկարության արտադրյալը։ Այստեղից ստացվում է* Գուլդինի *երկրորդ* թեորեման՝

Հարթ պատկերն՝ իրեն չհատող առանցքի շուրջը պտտելով առաջացած մարմնի ծավալը հավասար է այդ պատկերի մակերեսի և պատկերի ծանրության կենտրոնի գծած շրջանագծի երկարության արտադրյալին՝

$$V = P\cdot 2\pi\eta\text{։}$$

Նկատենք, որ (8) և (9) բանաձևերը տարածվում են նաև այն դեպքի վրա, երբ պատկերը թե՛ վերևից, թե՛ ներքևից սահմանափակված է կորերով (գծ. 75)։ Օրինակ, այդ դեպքի համար՝

$$K_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx, \qquad K_y = \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx. \tag{8ա}$$

այստեղից արդեն պարզ է, թե ինչպես են ձևափոխվում (9) բանաձևերը։ Եթե հիշենք n° **196**-*ի (5) բանաձևը, ապա հեշտ է տեսնել, որ Գ ու լ դ ի ն ի թեորեման իրավացի է նաև այս դեպքի համար։*

Օրինակներ: 1) *Տանել* $y^2 = 2px$ *պ ա ր ա բ ո լ ո վ, x-երի առանցքով և x աբսցիսին համապատասխանող օրդինատով սահմանափակված պատկերի* K_x, K_y *ստատիկ մոմենտներն ու ծանրության կենտրոնի կոորդինատները։*

Քանի որ $y \sqrt{2px}$, *ապա ըստ (8) բանաձևերի՝*

$$K_x = \frac{1}{2} \cdot 2p \int_0^x x\,dx = \frac{1}{2} px^2, \qquad K_y = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5} x^{\frac{5}{2}},$$

Մյուս կողմից, մակերեսը [n° **196**, *(4)*]՝

$$P = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3} x^{\frac{3}{2}},$$

Այդ դեպքում, ըստ (9) բանաձևերի,

$$\xi = \frac{3}{5} x, \qquad \eta = \frac{3}{8}\sqrt{2px} = \frac{3}{8} y:$$

Օգտվելով ξ *և* η *արժեքներից, հեշտ է գտնել, ըստ Գ ու լ դ ի ն ի թեորեմայի, դիտարկվող պատկերը կոորդինատային առանցքների շուրջը կամ ծայրային օրդինատի շուրջը պտտելով առաջացած մարմնի ծավալը։ Օրինակ, եթե կանգ առնենք վերջին դեպքի վրա, քանի որ ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը պտտման առանցքից* $\frac{2}{5} x$ *է, ապա որոնելի ծավալը կլինի* $V = \frac{8}{15} \pi x^2 y$։

2) *Գտնել* $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ *ց ի կ լ ո ի դ ի մի ճյուղով և* x*-երի առանցքով սահմանափակված պատկերի ծանրության կենտրոնը։*

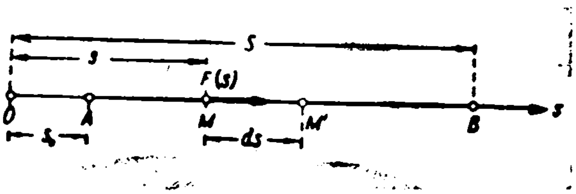
Օգտվելով n° **196**, *4)-ից և* n° **198**, *2)-ից ըստ Գ ու լ դ ի ն ի թեորեմայի հեշտ է որոշել՝* $\eta = \frac{5}{6} a$։ *Սիմետրիայի շնորհիվ՝* $\xi = \pi a$։

208. Մեխանիկական աշխատանք: *Դիցուք* M *կետը շարժվում է ուղղագիծ (այս դեպքով ենք սահմանափակվում պարզության համար), ընդ որում* s *տեղափոխության համար նրա վրա ազդում է նույն ուղիղով ուղղված* F *հաստատուն ուժը։ Մեխանիկայի տարրերից ընթերցողին հայտնի է, որ այդ դեպքում այդ ուժի կատարած աշխատանքն արտահայտվում է* $F \cdot s$ *արտադրյալով։*

Ավելի հաճախ, սակայն, պատահում է, որ ուժի մեծությունը հաստատուն չի մնում, այլ կետից-կետ անընդհատ փոփոխվում է, և աշխատանքն արտահայտելու համար նորից պետք է դիմել որոշյալ ինտեգրալի օգնությանը։

Թող կետի անցած s *ճանապարհը լինի անկախ փոփոխական. ընդսմին ենթադրենք, թե* M *կետի* A *սկզբնական դիրքին համապատասխանում է* $s = s_0$ *արժեքը, իսկ* B *վերջնական դիրքին՝* $s = S$ *արժեքը (գծ. 93)։* $[s_0, S]$ *միջակայքում* s*-ի յուրաքանչյուր արժեքին հա-*

մապատասխանում է շարժվող կետի որոշակի դիրք, ինչպես նաև F *ուժի մեծության որոշակի արժեք. այդպիսով,* F *ուժի մեծությունը կարելի է դիտարկել որպես* s*-ի ֆունկցիա։* M *կետը վերցնելով նրա*



Գծ. 93.

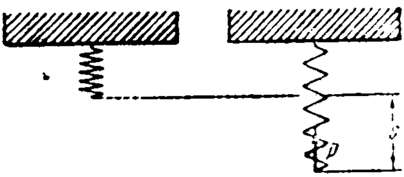
մի որոշակի դիրքում, որը որոշվում է ճանապարհի s *արժեքով, գըտնենք մոտավոր արտահայտություն այն տարրական աշխատանքի համար, որը համապատասխանում է ճանապարհի* s*-ից մինչև* s+ds *ընկած* ds *աճին, որի ժամանակ կետը* M *դիրքից տեղափոխվել է մոտակա* M′ *դիրքը (տե՛ս գծագիրը)։* M *դիրքում կետի վրա ազդում է որոշակի* F *ուժ։ Քանի որ կետը* M *դիրքից* M′ *դիրքը տեղափոխվելիս, փոքր* ds*-ի դեպքում, ուժի փոփոխությունը նույնպես փոքր կլինի, այդ փոփոխությունը հաշվի չառնենք և,* F *ուժի մեծությունը մոտավորապես հաստատուն համարելով,* ds *տեղափոխության համար կատարվող աշխատանքի էլեմենտի համար կգտնենք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$dW = F\cdot ds,$$

այնպես որ ամբողջ W *աշխատանքը կարտահայտվի այսպիսի ինտեգրալով՝*

$$W = \int_{s_0}^{s} F ds: \qquad (10)$$

Օրինակ: *Որպես օրինակ, (10) բանաձևը կիրառենք մեկ ծայրն ամրակցված զսպանակի ձգման (կամ սեղմման) աշխատանքը հաշվելու համար (գծ. 94). այդպիսի հաշվում կարիք է լինում կատարել, օրինակ, երկաթուղային վագոնների թափարգելների (բուֆերների) նախահաշվումների ժամանակ։*



Գծ. 94.

Հայտնի է, որ զսպանակի s *ձգումը (եթե միայն զսպանակը գերբեռնված չէ) առաջացնում է մի* p *լարում, որը մեծությամբ համեմատական է ձգմանը, այնպես որ* $p = cs$*, որտեղ* c*-ն՝ զսպանակի առաձգական հատկություններից կախում ունեցող մի որոշ հաստատուն է (զսպանակի «կոշտությունը»)։ Այն ուժը, որը* *ձգում է զսպանակը, պետք է հաղթահարի այդ լարումը։ Եթե հաշվի առնենք աճող ուժի միայն այն մասը, որը ծախսվում է դրա վրա, ապա նրա աշխատանքը, երբ ձգումն աճում է 0-ից մինչև S, կարտահայտվի այսպես՝*

$$W = \int_0^S p\,ds = c\int_0^S s\,ds = c\left.\frac{s^2}{2}\right|_0^S = \frac{cS^2}{2}\,։$$

P-ով նշանակելով լարման (կամ նրան հաղթահարող ուժի) այն առավելագույն մեծությունը, որը համապատասխանում է զսպանակի S ձգմանը (և հավասար է cS-ի), մենք կարող ենք աշխատանքի արտահայտությունը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$W = \frac{1}{2}\,PS\,։$$

Եթե զսպանակի ազատ ծայրին միանգամից կիրառված լիներ P ուժ (օրինակ, բեռ կախված լիներ), ապա S տեղափոխման համար նա կկատարեր երկու անգամ ավելի աշխատանք՝ PS։ Ինչպես տեսնում ենք, նրա միայն կեսն է ծախսվում զսպանակի ձգման համար, մյուս մասը կծախսվի բեռնված զսպանակին կինետիկ էներգիա հաղորդելու համար։

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 1. ՇՈՇԱՓՈՂ ԵՎ ՇՈՇԱՓՈՂ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

209. Հարթ կորերի անալիտիկական ներկայացումը: Սույն գլխում, որպես օրինակ, երկրաչափության մեջ դիֆերենցիալ հաշվի միայն մի քանի կիրառությունների կծանոթանանք, մեծ մասամբ՝ հարթության վրա։ Այդ կիրառությունները հանգամանորեն ուսումնասիրվում են *դիֆերենցիալ երկրաչափության* մեջ, որն ինքնուրույն մաթեմատիկական առարկա է։

Նախ վերհիշենք հարթության վրա կորերի անալիտիկական ներկայացման տարբեր եղանակները (որոնք ընթերցողին հայտնի են անալիտիկ երկրաչափությունից), ենթադրելով, որ որպես հիմք ընդունված է կոորդինատների մի որոշ ուղղանկյուն սիստեմ*։

1°. Վերևում մենք բազմիցս դիտարկել ենք

$$y = f(x) \qquad [\text{կամ՝ } x = g(y)] \tag{1}$$

տեսքի հավասարում և ուսումնասիրել նրան համապատասխանող կորը։ Կորի տրման այսպիսի եղանակը, երբ նրա կետի ընթացիկ կոորդինատներից մեկն անմիջականորեն ներկայացվում է մյուս կոորդինատի միարժեք ֆունկցիայի տեսքով, մենք անվանելու ենք կորի *բացահայտ տրման* (*կամ ներկայացման*) եղանակ։ Այն օժտված է առանձնահատուկ պարզությամբ ու դիտողականությամբ։

Որպես *օրինակ* կարող է ծառայել $y = ax^2$ պարաբոլը։

---

* *Պայմանավորվենք մեկընդմիշտ*, որ այն ֆունկցիաները, որոնց մասին խոսվելու է սույն գլխում, որպես կանոն, ենթադրվում են անընդհատ և անընդհատ ածանցյալներ ունեցող ըստ իրենց արգումենտների. հարկ եղած դեպքում մենք պահանջելու ենք նաև հաջորդ ածանցյալների գոյությունն ու անընդհատությունը։

2°. Ի միջի այլոց, անալիտիկ երկրաչափության մեջ կորն ավելի հաճախ տրվում է այնպիսի հավասարումով, որը լուծված չէ ո՛չ x-ի, ո՛չ էլ y-ի նկատմամբ՝

$$F(x)\ y) = 0. \qquad (2)$$

այն անվանում են կորի ա ն բ ա ց ա հ ա յ տ հ ա վ ա ս ա ր ու մ։

Օրինակ։ էլիպս՝ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$։

Երբեմն մենք ի վիճակի ենք լինում (2) հավասարումից կոորդինատներից մեկն արտահայտել մյուսով, օրինակ՝ y-ը x-ով, և կորը (կամ նրա մի մասը) ներկայացնել (1) բացահայտ հավասարումով։ Այսպես, օրինակ, էլիպսի դեպքում

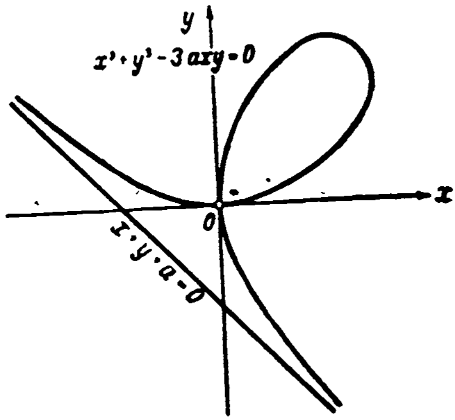
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$(-a \leqslant x \leqslant a$ *համար)։*

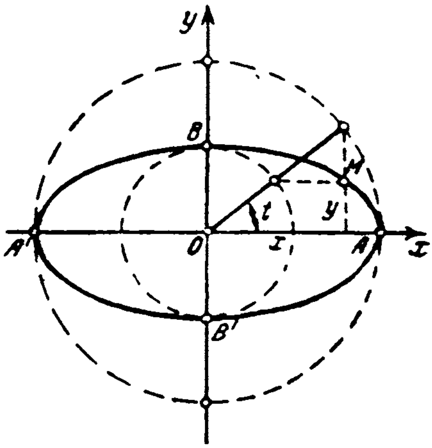
Այլ դեպքերում, թեպետև, ասենք թե, y-ի կախումն x-ից, որոշվում էլ է (2) հավասարումով և, որոշ պայմանների առկայության դեպքում, գոյություն ունի (2) հավասարմանը բավարարող (1) միարժեք ֆունկցիա, և նույնիսկ կարելի է պնդել, որ այդ «անբացահայտ» ֆունկցիան անընդհատ է և ունի անընդհատ ածանցյալ, այնուամենայնիվ մենք չենք կարող նրա համար բացահայտ արտահայտություն գրել։ Այդպես կլինի, օրինակի համար,*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

դեկարտյան տերևի համար *(գծ. 95)*։



Գծ. 95.



Գծ. 96.

3°. Վերջապես, նախորդ շարադրանքում ասվել է այն մասին, որ

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (3)$$

---

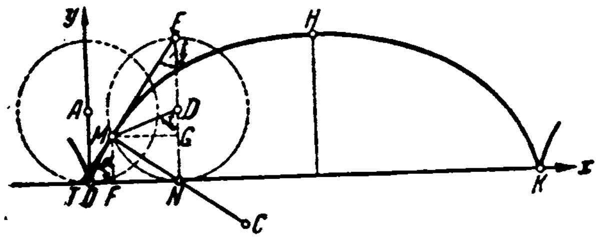
* *Այդ առթիվ տե՛ս* XIX *գլուխը երկրորդ հատորում։*

տեսքի հավասարումները, որ արտահայտում են կետի ընթացիկ կոորդինատների կախումը մի որոշ t պարամետրից, նույնպես կոր են որոշում հարթության վրա։ Այդպիսի հավասարումներն անվանում են *պարամետրական հավասարումներ*. Նրանք տալիս են կորի *պարամետրական ներկայացումը*։

Որպես օրինակ, ամենից առաջ, կարող է ծառայել էլիպսի պարամետրական ներկայացումը՝

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

Երբ t պարամետրը (որի երկրաչափական իմաստը պարզ է գծ. 96-ից) փոփոխվում է 0-ից մինչև 2π, էլիպսը գծվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, սկսած մեծ առանցքի $A(a, 0)$ ծայրից։



Գծ. 97.

Որպես երկրորդ օրինակ, հիշենք մեզ բազմիցս պատահած ցիկլոիդը՝

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t).$$

որն իրենից ներկայացնում է ուղիղի վրա գլորվող շրջանագծի կետի հետագիծը (գծ. 97)։ Այստեղ պարամետրի դերում հանդես է գալիս DM շարժական շառավղի և նրա OA սկզբնական դիրքի միջև կազմված $t = \sphericalangle NDM$ անկյունը։ Երբ t-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև 2π, կետը գծում է գծագրում պատկերված աղեղը։ Ամբողջ կորը, որը համապատասխանում է t-ի փոփոխմանը $-\infty$-ից մինչև $+\infty$, բաղկացած է անվերջ բազմությամբ այդպիսի աղեղներից։

210. Հարթ կորի շոշափողը: Շոշափողի գաղափարը մեզ արդեն հանդիպել է մի քանի անգամ [տես, օրինակ, n° 77]։ Այն կորը, որը տված է

$$y = f(x)$$

բացահայտ հավասարումով, իր յուրաքանչյուր (x, y) կետում ունի շոշափող, որի $\operatorname{tg}\alpha$ անկյունային գործակիցն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\operatorname{tg}\alpha = y'_x = f'(x).$$

Այսպիսով, շոշափողի հավասարումն ունի այսպիսի տեսք՝

$$Y - y = y'_x(X - x)\text{։} \qquad (4)$$

Այստեղ (ինչպես նաև ստորև), X*-ն ու* Y*-ը նշանակում են ընթացիկ կոորդինատներ, իսկ* x*-ն ու* y*-ը՝ շոշափման կետի կոորդինատները։*

*Հեշտ է ստանալ նաև **նորմալի**, այսինքն՝ շոշափման կետում շոշափողին ուղղահայաց ուղիղի, հավասարումը՝*

$$Y - y = -\frac{1}{y'_x}(X - x),$$

կամ՝

$$X - x + y'_x(Y - y) = 0\text{։} \qquad (5)$$

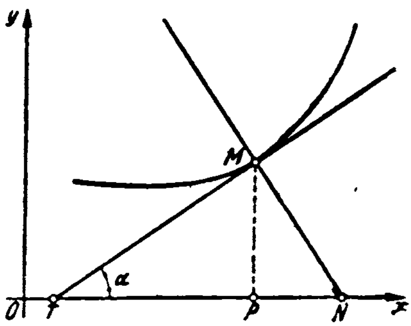
Շոշափողի ու նորմալի կապակցությամբ դիտարկում են մի քանի հատվածներ, այն է՝ TM, MN *հատվածներն ու նրանց* TP, PN *պրոյեկցիաներն* x*-երի առանցքի վրա (գծ. 98)։ Վերջիններս կոչվում են, համապատասխանաբար, **ենթաշոշափող** և **ենթանորմալ**, և նշանակվում են՝* sbt (subtangens) *և* sbn (subnormal)*։ (4) և (5) հավասարումներում ընդունելով* $Y = 0$*, հեշտ է հաշվել ու ստանալ՝*

$$\text{sbt} = TP = \frac{y}{y'_x}, \qquad \text{sbn} = PN = yy'_x\text{։} \qquad (6)$$

1) Օրինակ, $y = ax^2$ *պարաբոլի համար ունենք՝*

$$\text{sbt} = \frac{y}{y'_x} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

արդյունք, որը մեզ արդեն հայտնի էր [տես՝ 171 էջի ծանոթագրությունը]։



Գծ. 98.

Այժմ դիմենք այն դեպքին, երբ կորը տրվում է (2) անբացահայտ հավասարումով։ Եթե ընդունենք, որ մեզ հետաքրքրող կետի մոտակայքում այդ հավասարումը համարժեք է (1) տեսքի հավասարման, ապա կորն այդ կետում նախահայտորեն ունի (4) շոշափող։* n° **141**, *4)-ում մենք ստ-*

** Տես՝ նախորդ ծանոթագրությունը։*

վորել ենք մեզ անմիջականորեն ոչ հայտնի y «անբացահայտ» ֆունկցիայի y'_x ածանցյալն արտահայտել F'_x և F'_y հայտնի ածանցյալներով. այն է, մենք ունեինք՝

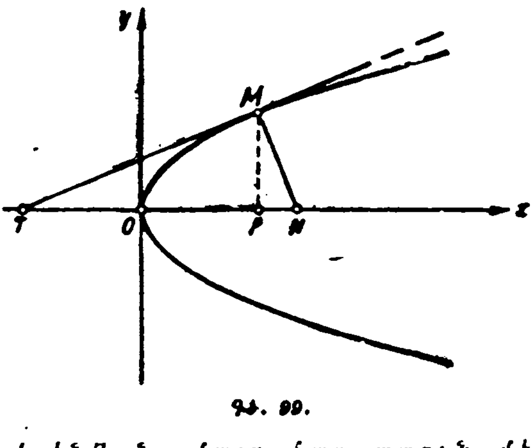
$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

ենթադրելով, որ $F'_y \neq 0$։ [Ի դեպ, նշենք, որ այս հենց այն պայմանն է, որի բավարարվելու դեպքում (2) հավասարումը կորի դիտարկվող կետի շրջակայքում համարժեք է դառնում (1) տեսքի հավասարման։] y'_x-ի համար գտած արտահայտությունը տեղադրելով շոշափողի հավասարման մեջ, պարզ ձևափոխություններից հետո կստանանք հետևյալ հավասարումը՝

$$F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0 \text{։} \tag{7}$$

Շնորհիվ այս հավասարման լրիվ սիմետրիկության x-ի ու y-ի նկատմամբ, պարզ է, որ շոշափողի համար նույն հավասարումը կստացվի, եթե x-ի և y-ի դերերը փոխենք, ենթադրելով $F'_x \neq 0$։ Միայն այն դեպքում, երբ դիտարկվող կետում F'_x և F'_y ածանցյալները երկուսն էլ միաժամանակ հավասար են զրոյի, (7) հավասարությունը նույնություն է դառնում և դադարում է որոշակի ուղիղի հավասարում լինելուց։ Այդպիսի դեպքում (x, y) կետն անվանում են կորի եզակի կետ. եզակի կետում կորն իսկապես կարող է և որոշակի շոշափող ունենալ։

Օրինակներ: 2) Պարաբոլ՝ $y^2 = 2px$ (գծ. 99)։ Այս հավասարությունն ածանցելով, y-ը համարելով x-ի ֆունկցիա, կստանանք՝ $yy'_x = p$։ Այսպիսով, [տե՛ս



Գծ. 99.

(6)], պարաբոլի ենթանորմալը հաստատուն մեծություն է։ Այստեղից բխում է պարզ եղանակ պարաբոլի նորմալի, նրա հետ նաև շոշափողի, կառուցման համար։

Ի դեպ, այս դեպքում ենթաշոշափողը ևս պարզ արտահայտություն ունի. պարաբոլի հավասարումն անդամ առ անդամ բաժանելով հենց նոր ստացված հավասարության վրա, անմիջապես գտնում ենք՝

$$\frac{y}{y'_x} = 2x, \quad \textit{կամ՝} \quad sbt = 2x։$$

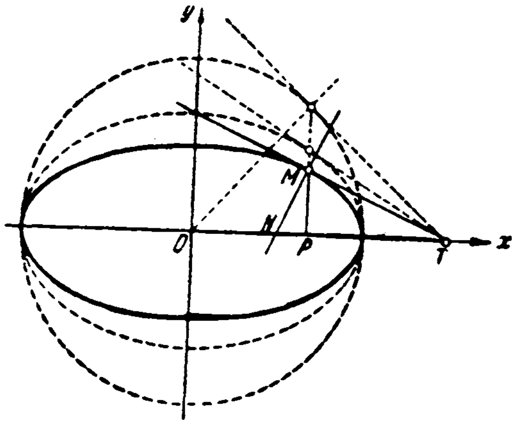
3) Էլիպս՝ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (գծ. 100)։ (7) բանաձևի համաձայն, շոշափողի համար ունենք այսպիսի հավասարում՝

$$\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) = 0։$$

Հաշվի առնելով էլիպսի հավասարումը, այս հավասարումը կարելի է գրել ավելի պարզ տեսքով,

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1,$$

Այստեղ ընդունելով $Y = 0$, կգտնենք՝ $X = \frac{a^2}{x}$։ Այսպիսով, x-երի առանցքի հետ շոշափողի հատման T կետը ո՛չ y-ից է կախված, ո՛չ b-ից։ Տարբեր b-երի համապատասխանող տարբեր էլիպսների՝ միևնույն x աբսցիսն ունեցող կետերում տարված շոշափողները բոլորն անցնում են x-երի առանցքի միևնույն T կետով։ Քանի որ $b = a$ դեպքում էլիպսը վեր է ածվում շրջանագծի, որի համար շոշափողը հեշտ է կառուցվում, ուստի T կետն անմիջապես որոշվում է, և այդ հանգամանքը բերում է էլիպսի շոշափողի կառուցման մի շատ հեշտ եղանակի, որը պարզ երևում է գծագրի վրա։



Գծ. 100

4) $x^3+y^3-3axy=0$ դեկարտյան տերևի համար հավասարման ձախ մասի մասնակի ածանցյալները՝

$$F'_x = 3(x^2 - ay) \quad \textit{և} \quad F'_y = 3(y^2 - ax),$$

երկուսն էլ սկզբնակետում դառնում են զրո. ինչպես գծ. 95-ից երևում է, կորի այդ եզակի կետում, իրոք, չկա որոշակի շոշափող։

Վերջապես, դիտարկենք (3) պարամետրական հավասարումներով տրված կորը։ Եթե դիտարկվող կետում $x'_t = \varphi'(t)$ ածանցյալը զրոյից տարբեր է, ասենք թե՝ զրոյից մեծ է, ապա նրա անընդհատության շնորհիվ, նաև այդ կետի մոտակայքում դրական կլինի. նշանակում է՝ $x = \varphi(t)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է [n° 111], բայց այդ ժամանակ նաև t-ն կլինի x-ի աճող ֆունկցիա՝ $t = t(x)$ [n° 71], որի ածանցյալը՝ $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ [n° 80]։ $y = \psi(t)$ հավասարման մեջ t-ի փո-

խարեն տեղադրելով x-ի այդ ֆունկցիան, կստանանք, որ կորի մի որոշ մասում y-ը x-ի ֆունկցիա է՝

$$y = \psi(t(x)) = f(x),$$

որը նույնպես ածանցյալ ունի։ Այսպիսով, ստացվում է, որ կորի դիտարկվող կետին առընթեր մասը կարող է արտահայտվել նաև բացահայտ հավասարումով. այդպիսի դեպքում կորն այդ կետում շոշափող ունի։

Շոշափողի անկյունային գործակիցը կարելի է արտահայտել հետևյալ կերպ՝

$$\operatorname{tg}\alpha = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}, \tag{8}$$

Այս արտահայտությունը տեղադրելով շոշափողի (4) հավասարման մեջ, այն հեշտությամբ բերում ենք համեմատության տեսքի՝

$$\frac{X - x}{x'_t} = \frac{Y - y}{y'_t}, \tag{9}$$

Ի միջի այլոց, հաճախ երկու հայտարարները բազմապատկում են dt-ով և շոշափողի հավասարումը գրում նաև այսպես՝

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy}, \tag{10}$$

Եթե ենթադրենք, որ դիտարկվող կետում զրոյից տարբեր է $y'_t = \psi'(t)$ *ածանցյալը, ապա, x-ի և y-ի դերերը փոխելով, դարձյալ կհանգեինք նույն հավասարմանը։ Միայն այն դեպքում, երբ տվյալ կետում* x'_t *և* y'_t *ածանցյալները երկուսն էլ զրո են դառնում, մեր դատողությունը կիրառելի չէ։ Այդպիսի կետը ևս կոչվում է կորի եզակի կետ. այդ կետում շոշափող կարող է և չլինել։ Ի դեպ, (9) և (10) հավասարումները նույնպես կորցնում են իմաստը՝ հայտարարները երկուսն էլ զրոներ են։*

ծ) Որպես օրինակ, դիտարկենք

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

ցիկլոիդին *շոշափող տանելու խնդիրը (գծ. 97)։ Այս դեպքում ունենք՝*

$$x'_t = a(1 - \cos t), \qquad y'_t = a \sin t,$$

այնպես որ եզակի կետեր կլինեն $t = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *արժեքներին համապատասխանող կետերը։ Բացառությամբ այս կետերի, (8) բանաձևով ունենք՝*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right),$$

և կարելի է ընդունել $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$*։*

Հիշե՛նք (գծ. 97), որ $t = \measuredangle MDN$*, այնպես որ* $\measuredangle MEN = \frac{t}{2}$*։ Եթե* EM *ուղիղը շարունակենք մինչև* x*-երի առանցքի հետ* T *կետում հատվելը, ապա* $\measuredangle ETx = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} = \alpha$*։ Հետևաբար,* ME *ուղիղը, որը ցիկլոիդի* M *կետը միացնում է գլորվող շրջանի համապատասխան դիրքում եղած պահին նրա* E *բարձրագույն կետի հետ, հենց կլինի ցիկլոիդի շոշափողն* M *կետում։ Այստեղից պարզ է նաև, որ* MN *ուղիղն էլ կլինի նորմալը։*

Հետագայում մեզ պետք է գալու նորմալի այն n *հատվածի արտահայտությունը, որը գտնվում է շոշափման կետի և* x*-երի առանցքի հետ հատման կետի միջև։ Այդ հեշտ է ստանալ* MEN *ուղղանկյուն եռանկյունից, այն է՝*

$$n = MN = 2a\sin\frac{t}{2}\text{։}$$

Այս անգամ շոշափողներ գոյություն ունեն նաև եզակի կետերում. նրանք զուգահեռ են y*-ների առանցքին։ Սակայն, շոշափողների նկատմամբ կորի դասավորությունն այդ կետերում արտասովոր է՝ սրածայր է («դարձակետեր» են)։*

211. Շոշափողի դրական ուղղությունը։ *Մինչև այժմ կորի շոշափողի դիրքը մենք որոշում էինք նրա* $\operatorname{tg}\alpha$ *անկյունային գործակցով, չտարբերելով երկու հակադիր ուղղությունները շոշափողի վրա.* $\operatorname{tg}\alpha$*-ն երկու ուղղությունների համար նույնն էր։ Որոշ հետազոտությունների ժամանակ, սակայն, անհրաժեշտություն է զգացվում ընտրելու այդ երկու ուղղություններից մեկը։*

Դիցուք կորը տրված է (3) պարամետրական հավասարումներով։ Դիտարկենք նրա վրա մի «սովորական», այսինքն՝ ոչ եզակի կետ։ Այդ կետում, ինչպես տեսանք n° **202***-ում, գոյություն ունեն*

$$x'_s = \frac{dx}{ds}, \qquad y'_s = \frac{dy}{ds}$$

ածանցյալները, ընդ որում՝

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \tag{11}$$

ինչպես այդ հեշտ է ստանալ

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

հիմնական առնչությունից [n° **202**, *(6)*], ds^2*-ու վրա բաժանելով։*

Նախքան վերնագրում նշված հարցի էությանն անցնելը, ապացուցենք մի օժանդակ պնդում, որը մեզ համար օգտակար կլինի նաև հետագայում։

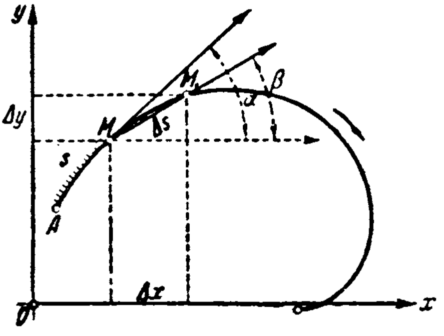
Լեմմա։ Դիցուք M-ը կորի սովորական կետ է (գծ. 101)։ Եթե M_1-ով նշանակենք նույն կորի փոփոխական կետը, ապա M_1-ը M-ին ձգտելիս MM_1 լարի հարաբերությունը $\overset{\smile}{MM_1}$ աղեղին կձգտի մեկի՝

$$\lim_{M_1 \to M} \frac{MM_1}{\overset{\smile}{MM_1}} = 1. \tag{12}$$

Որպես պարամետր ընդունենք աղեղը։ Դիցուք M *կետը համապատասխանում է աղեղի* s *արժեքին, իսկ* M_1 *կետը՝* $s + \Delta s$ *արժեքին։ Թո՛ղ այդ կետերի կոորդինատները, համապատասխանորեն, լինեն* x, y *և* $x + \Delta x$, $y + \Delta y$*։ Այդ դեպքում* $\overset{\smile}{MM_1} = |\Delta s|$, $MM_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, *այնպես որ՝*

$$\frac{MM_1}{\overset{\smile}{MM_1}} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{|\Delta s|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2},$$

Աջ մասում անցնելով սահմանին, երբ $\Delta s \to 0$, *(11)-ի շնորհիվ կստանանք պահանջվող արդյունքը։*



Գծ. 101.

Այսպիսով, նշված պայմանների դեպքում, անվերջ փոքր լարըն ու աղեղը համարժեք են։

Դիցուք այժմ դիտարկվող կորի վրա ընտրված են հաշվումների սկզբնակետ և որոշակի ուղղություն. որպես կորի վրա կետի դիրքը որոշող պարամետր դարձյալ վերցնենք աղեղը։

Դիցուք M *կետին համապատասխանում է* s *աղեղ։ Եթե* s*-ին տանք* Δs *դրական աճ,* $s + \Delta s$ *աղեղը կորոշի մի նոր* M_1 *կետ, որը կգտնվի* M *կետից դեպի աղեղի աճման կողմում։ Հատողն ուղղենք* M*-ից դեպի* M_1 *և հենց այդ ուղղության կազմած անկյունը* x*-երի առանցքի դրական ուղղության հետ նշանակենք* β*։* MM_1 *հատվածը պրոյեկտելով կոորդինատա-*

յին առանցքների վրա (գծ. 101), պրոյեկցիաների տեսության հայտնի թեորեմայի համաձայն, կստանանք՝

$$\text{պր}_x \cdot MM_1 = \Delta x = MM_1 \cos\beta,$$

$$\text{պր}_y \cdot MM_1 = \Delta y = MM_1 \sin\beta,$$

որտեղից՝

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{MM_1}, \qquad \sin\beta = \frac{\Delta y}{MM_1}.$$

Քանի որ $\breve{MM_1} = \Delta s$, *այդ հավասարումները կարելի է արտագրել այսպես՝*

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\breve{MM_1}}{MM_1}, \qquad \sin\beta = \frac{\Delta y}{\Delta s} \cdot \frac{\breve{MM_1}}{MM_1}. \tag{13}$$

Դրական ենք անվանելու շոշափողի այն ուղղությունը, որը գնում է **դեպի աղեղի աճման կողմը**. *ավելի ճշգրիտ ասած, այդ ուղղությունը որոշվում է որպես վերևում բացատրված ձևով ուղղված* MM_1 *ճառագայթի սահմանային դիրք, երբ* $\Delta s \to 0$։ *Եթե շոշափողի դրական ուղղության կազմած անկյունը* x*-երի առանցքի դրական ուղղության հետ նշանակենք* α, *ապա, հաշվի առնելով (12)-ը, (13)-ից սահմանային դեպքում կստանանք,*

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}. \tag{14}$$

Այս բանաձևերն α *անկյունը որոշում են արդեն* $2k\pi$*-ի (*k*-ն ամբողջ է) ճշգրտությամբ, ուստի և իրոք սևեռում են շոշափողի երկու հնարավոր ուղղություններից մեկը, այն է՝ դրական ուղղությունը*

212. Տարածական կորի դեպքը: *Այս դեպքի վրա մենք կանգ կառնենք համառոտակի, ի նկատի ունենալով լիակատար անալոգիա (համանմանություն) հարթ կորի հետ։*

Ինչպես արեցինք հարթ կորի դեպքում, տարածական կորի փոփոխական կետի կոորդինատները, նույնպես, կարելի է տալ որպես մի որոշ t *օժանդակ փոփոխականի՝ պարամետրի ֆունկցիաներ՝*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t), \tag{15}$$

այն հաշվով, որպեսզի t *պարամետրը փոփոխելիս այն կետը, որի կոորդինատները տրվում են այդ հավասարումներով, գծի դիտարկվող կորը։*

(15) տարածական կորի համար շոշափողի սահմանումը մնում է նույնը, ինչ որ հարթ կորի համար էր։ Դիտարկումից բացառենք կորի եզակի կետերը, որոնց համար x'_t, y'_t, z'_t ածանցյալները միաժամանակ զրո են դառնում, և վերցնենք կորի մի որևէ $M(x, y, z)$ սովորական կետ, որը որոշվում է պարամետրի t արժեքով։ t-ին տանք Δt աճ, պարամետրի $t+\Delta t$ աճած արժեքին կհամապատասխանի մի այլ՝ $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ կետ։ MM_1 հատողի հավասարումները կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z},$$

որտեղ X-ը, Y-ը, Z-ը ընթացիկ կոորդինատներ են։ Այդ հավասարումների երկրաչափական իմաստը չի փոխվի, եթե բոլոր հայտարարները բաժանենք Δt-ի վրա՝

$$\frac{X-x}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}},$$

Եթե Δt-ն զրոյի ձգտելիս այս հավասարումները սահմանում պահպանում են որոշակի իմաստ, ապա դրանով հաստատվում է հատողի սահմանային դիրքի, այսինքն՝ շոշափողի գոյությունը։ Բայց սահմանում կստանանք՝*

$$\frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}=\frac{Z-z}{z'_t}, \tag{16}$$

և այս հավասարումներն, իրոք, ուղիղ են ներկայացնում, քանի որ ոչ բոլոր հայտարարներն են հավասար զրոյի։ Այսպիսով, կորի յուրաքանչյուր սովորական կետում շոշափողը թե՛ գոյություն ունի և թե որոշվում է այդ հավասարումներով։ Եզակի կետի համար շոշափողի հարցը բաց է մնում։

(16) հավասարումները, երբեմն, հարմար է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}, \tag{17}$$

որոնք ստացվում են (16)-ից, բոլոր հայտարարները dt-ով բազմապատկելով։

---

* *Մենք այստեղ սահմանին անցանք, երբ $\Delta t \to 0$։ Բայց կարելի է ցույց տալ, որ այդ համարժեք է, այսպես ասած, ավելի երկրաչափական ենթադրության՝ $MM_1 \to 0$։*

Եթե կոորդինատային առանցքների հետ շոշափողի կազմած անկյունները նշանակենք α, β, γ, *ապա ուղղորդ կոսինուսները կարտահայտվեն այսպես՝*

$$\cos\alpha = \frac{x'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}}, \qquad \cos\beta = \frac{y'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}},$$

$$\cos\gamma = \frac{x'_t}{\pm\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}}.$$

Արմատանշանների առջև որոշակի նշանի ընտրությունը համապատասխանում է շոշափողի որոշակի ուղղության ընտրությանը։

Որպես օ ր ի ն ա կ դիտարկենք պտուտակագիծը (գծ. 102)՝

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z'_t = ct.$$

Այս դեպքում՝

$$x'_t = -a\sin t, \qquad y'_t = a\cos t, \qquad z'_t = c,$$

և շոշափողի հավասարումները կլինեն՝

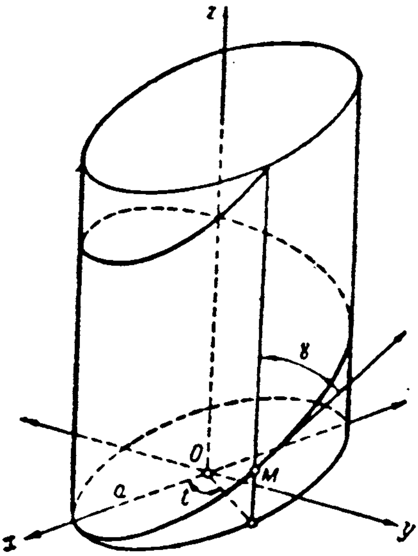
$$\frac{X-x}{-a\sin t} = \frac{Y-y}{a\cos t} = \frac{Z-z}{c},$$

իսկ ուղղորդ կոսինուսները՝

$$\cos\alpha = -\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$



Գծ. 102.

Նշենք, որ $\cos\gamma = \text{const.}$, *հետևաբար, նաև* $\gamma = \text{const.}$։ *Եթե պտուտակագիծը պատկերացնենք փաթաթված ուղիղ շրջանային գլանին, ապա կարելի է ասել, որ պտուտակագիծն այդ գլանի բոլոր ծնորդները հատում է միևնույն անկյունով**։

* *Եթե գլանի մակերևույթը կտրենք ծնորդի երկարությամբ և փռենք, պտուտակագիծը կդառնա մի ուղիղ, որը բոլոր ուղղաձիգ ուղիղները, բնականաբար, կհատի միևնույն անկյունով։ Այս դատողությունը նախորդ արդյունքը դարձնում է միանգամայն ակներև։*

Տարածական կորի համար, ինչպես և հարթ կորի դեպքում, որպես կետի դիրքը որոշող պարամետր, կարելի է ընտրել s *աղեղը, հաշված կամայապես ընտրած սկզբնակետից՝ որոշակի ուղղությամբ։ Որպես շոշափողի դրական ուղղություն ընտրում են աղեղի աճման ուղղությունը։ Եթե խոսքը վերաբերում է կորի սովորական կետին, ապա նրա համար դեպի դրական կողմն ուղղված շոշափողի ուղղորդ կոսինուսներն արտահայտվում են այսպես՝*

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}, \tag{18}$$

(համեմատել n° **211**-*ի հետ)։*

213. Մակերևույթի շոշափող հարթությունը: *Մենք արդեն գործ ենք ունեցել* [n° **124**],

$$y = f(x, y) \tag{19}$$

հավասարումով տրված մակերևույթի հետ. այս՝ մակերևույթի բացահայտ հավասարում է։ Անալիտիկ երկրաչափությունում մակերևույթն ավելի հաճախ տրվում է անբացահայտ հավասարումով՝*

$$F(x, y, z) = 0, \tag{20}$$

որը փոփոխականներից ոչ մեկի նկատմամբ լուծված չէ։

Օրինակներ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{էլիպսոիդ}),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (\text{երկրորդ կարգի կոն})։$$

*Ինչպես և հարթ կորի անբացահայտ հավասարումով տրման ժամանակ, այստեղ ևս, որոշ պայմանների դեպքում**, (20) հավասարումը համարժեք է լինում (19) տեսքի հավասարմանը, կոորդինատներից մեկը որոշելով որպես մյուս երկուսի ֆունկցիա (անընդհատ մասնակի ածանցյալներով), թեպետև մենք կարող ենք և չիմանալ այդ ֆունկցիայի բացահայտ արտահայտությունը։*

Դիցուք M(x, y, z)-*ը (20) մակերևույթի որևէ կետ է։ Մակերևույթի վրա* M *կետով տանենք մի կամայական կոր և* M *կետում կա-*

---

* *Անշուշտ,* z-*ի հատուկ դերը պատահական է. բացահայտ կլինի մակերևույթի հավասարումը նաև* $x = g(y, z)$ *կամ* $y = h(z, x)$ *տեսքով։*

** *Տե՛ս 407 էջի ծանոթագրությունը։*

ուցենք այդ կորին շոշափող ուղիղը, այդպիսի կորեր (և նրանց շոշափողներ) գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ։

Եթե մակերևույթի վրա գտնվող և M կետով անցնող բոլոր կորերին այդ կետում տարված շոշափողները գտնվում են մեկ հարթության մեջ, ապա այդ հարթությունն անվանում են մակերևույթի *շոշափող հարթություն* M կետում, M կետն էլ այդ դեպքում անվանում են *շոշափման կետ*։

*(20) մակերևույթի վրա գտնվող կորերը կարելի է ընդհանրապես պատկերացնել անալիտիկորեն արտահայտված (15) տեսքի հավասարումներով։ Քանի որ, ըստ ենթադրության, կորն իր բոլոր կետերով գտնվում է մակերևույթի վրա, ուստի (20) հավասարման մեջ x-ի, y-ի, z-ի փոխարեն համապատասխան φ, ψ, χ ֆունկցիաները տեղադրելիս այդ հավասարումը t պարամետրի նկատմամբ կդառնա նույնություն։ Այդ նույնությունն ըստ t-ի դիֆերենցելով [առաջին դիֆերենցիալի ձևի անփոփոխականությունից օգտվելով, n° **143**], կստանանք՝*

$$F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy + F'_z \cdot dz = 0, \qquad (21)$$

որտեղ որպես F'_x, F'_y, F'_z ֆունկցիաների արգումենտների արժեքներ կարելի է, մասնավորապես, վերցնել M շոշափման կետի x, y, z կոորդինատները, իսկ dx-ի, dy-ի, dz-ի տակ պետք է հասկանալ (15) ֆունկցիաների դիֆերենցիալները t-ի համապատասխան արժեքների դեպքում։ Մյուս կողմից, դիտարկվող կորի շոշափողն $M(x, y, z)$ կետում կներկայացվի (17) հավասարումներով, որտեղ X-ը, Y-ը, Z-ը ընթացիկ կոորդինատներ են, իսկ dx-ը, dy-ը, dz-ը՝ նույնն են, ինչ որ մի քիչ առաջ։ (21)-ում dx-ի, dy-ի, dz-ի փոխարեն տեղադրելով, (17)-ի շնորհիվ նրանց համեմատական, $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ տարբերությունները, վերջնականապես կստանանք հետևյալ հավասարությունը՝

$$F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) = 0, \qquad (22)$$

որն, այսպիսով, բավարարվում է սահմանման մեջ հիշատակված շոշափողներից յուրաքանչյուրի բոլոր կետերի համար։ Եթե F'_x, F'_y, F'_z ածանցյալներից գոնե մեկը M կետում զրոյից տարբեր է, (22) հավասարությունը հանդիսանում է հարթության հավասարում, որը և կլինի շոշափող հարթությունը։

Այն բացառիկ դեպքում, երբ դիտարկվող կետում միաժամանակ

$$F'_x = F'_y = F'_z = 0$$

(այդպիսի կետը կոչվում է եզակի կետ), (22) հավասարումը դառնում է նույնություն, և շոշափող հարթություն կարող է և գոյություն չունենալ։

Օրինակներ: *1)* էլիպսոիդ՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Շոշափող հարթությունն ստացվում է (22) բանաձևով, հաշվի առնելով էլիպսոիդի իր հավասարումը, հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}=1.$$

2) Երկրորդ կարգի կոն՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^3}=0.$$

Շոշափող հարթությունն է՝

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=0.$$

կոնի (0, 0, 0) գագաթում, որը եզակի կետ է այս հավասարումն իմաստը կորցնում է, և շոշափող հարթություն էլ չկա։

Մակերևույթի նորմալի (այսպես է կոչվում շոշափման կետում, շոշափող հարթությանն ուղղահայաց ուղիղը) ուղղորդ կոսինուսներն ակներևաբար, կլինեն՝

$$\cos\lambda=\frac{F'_x}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\mu=\frac{F'_y}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}},$$

$$\cos\nu=\frac{F'_z}{\pm\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}.$$

(19) բացահայտ հավասարումը, արտագրելով

$$z-f(x, y)=0$$

տեսքով, կարելի է դիտարկել որպես (20) հավասարման մասնավոր դեպք։ Եթե կատարենք

$$\frac{\partial f}{\partial x}=p, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=q$$

սովորական նշանակումները, ապա այս դեպքի համար շոշափող հարթության (22) հավասարումը կարտագրվի այսպես՝

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \tag{23}$$

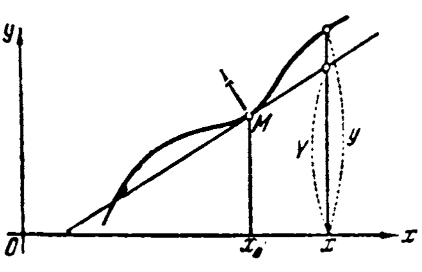
իսկ նորմալի ուղղորդ կոսինուսները կլինեն՝

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \cos\mu = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ \cos\nu &= \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

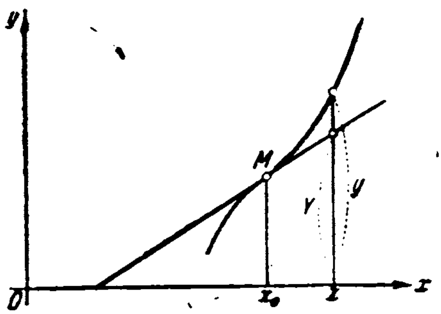
§ 2. ՀԱՐԹ ԿՈՐԻ ԿՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

214. Գոգավորության ուղղությունը, շրջման կետեր: *Դիտարկենք մի որևէ հարթ կոր, որը տրված է, ասենք թե, $y = f(x)$ բացահայտ հավասարումով, և $M(x_0, f(x_0))$ կետը նրա վրա։*

Ասում են, որ M կետում կորը գոգավորությամբ ուղղված է շոշափողից դեպի մի որոշակի կողմ, *եթե M կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում կորն իր բոլոր կետերով գտնվում է շոշափողի հենց այդ կողմում (գծ. 103)։ Տվյալ կետն անվանում են* շրջման կետ, *եթե, դարձյալ նրա փոքր շրջակայքում, x_0-ից փոքր x աբսցիսներ ունեցող կետերը գտնվում են շոշափողի մեկ կողմում, իսկ x-ից մեծ x աբսցիսներ ունեցող կետերը՝ մյուս կողմում, այսինքն՝ եթե M կետում կորը շոշափողի մի կողմից անցնում է մյուս կողմը կամ, կարճ ասած՝ հատում է շոշափողը (գծ. 104)։*



Գծ. 103.



Գծ. 104.

Քանի որ M կետում տարված շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)^*,$$

ուստի գոգավորության ուղղության կամ շրջման կետի առկայության վերաբերյալ հարցը լուծելու համար հարկավոր է ուսումնասիրել

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

տարբերության նշանը x_0 կետի շրջակայքում։ Ընդունենք, որ այդ շրջակայքում գոյություն ունի $f''(x)$ երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալ։

Նախ ենթադրենք, թե $f''(x_0) \neq 0$։ Դիմենք Թեյլորի բանաձևին Պեանոյի տեսքով լրացուցիչ անդամով [n° **107**, *(17)*], ընդունելով $n = 2$՝

$$y - Y = \frac{f''(x_0) + \alpha}{2!}(x - x_0)^2,$$

որտեղ $x \to x_0$ հետ միասին $\alpha \to 0$։ x_0-ին բավականաչափ մոտ x-երի համար այդ տարբերությունը պահպանում է $f''(x_0)$ թվի նշանը, հետևապես, $f''(x_0) > 0$ դեպքում M կետում կորը գոգավորությամբ ուղղված է դեպի վեր, իսկ $f''(x_0) < 0$ դեպքում՝ դեպի ներքև։

Իսկ եթե $f''(x_0) = 0$, ապա աջ կողմում մնում է միայն $\frac{\alpha}{2}$ պարունակող անդամը, որը ոչինչ չի ասում $y - Y$ տարբերության նշանի մասին։ Այս դեպքում լրացուցիչ անդամը վերցնենք Լագրանժի տեսքով [n° **106**, *(12)*], դարձյալ ընդունելով $n = 2$՝

$$y - Y = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

որտեղ կամ $x < c < x_0$ կամ $x_0 < c < x$։ Եթե x_0 արժեքից մոտ (ինչպես ձախ կողմում, այնպես էլ աջ կողմում) $f''(x)$ երկրորդ ածանցյալը պահպանում է միևնույն նշանը, ապա նույն նշանը պահպանում է նաև $y - Y$ տարբերությունը, և M կետում գոգավորությունը ուղղված է, համապատասխանորեն, դեպի վերև կամ դեպի ներքև։

Եթե, ընդհակառակն, x_0 կետով անցնելիս $f''(x)$-ը նշանը փոխում է, ապա M կետում առկա է շրջում։ Այս դեպքում M շրջման

---

* Մենք այստեղ նահանջեցինք n° **210**, *(4)*-ում օգտագործած նշանակումներից, սակայն առաջվա նման շոշափողի կետի ընթացիկ օրդինատը նշանակում ենք Y-ով, որպեսզի այն տարբերենք կորի՝ նույն x աբսցիսն ունեցող կետի $y = f(x)$ օրդինատից։

*կետը, եթե սահմանափակվենք նրա բավականաչափ փոքր շրջակայքով, կարծես թե միմյանցից բաժանում է այն կետերը, որտեղ կորի գոգավորությունն ուղղված է դեպի վերև, այն կետերից, որտեղ գոգավորությունն ուղղված է դեպի ներքև**։*

Որպես օ ր ի ն ա կ, դիտարկենք $y = \sin x$ սինուսոիդը։ *Այստեղ՝*

$$y'' = -\sin x = -y.$$

Հետևաբար, այն միջակայքում, որտեղ $\sin x$*-ը պահպանում է պլյուս (մինուս) նշան, սինուսոիդը գոգավորությամբ ուղղված է դեպի ներքև (դեպի վերև)։* $x = k\pi$ *(*k*-ն ամբողջ է) տեսքի արժեքների դեպքում* y''*-ը դառնում է զրո՝ նշանը փոխելով, դրանց համապատասխանում են սինուսոիդի շրջման կետերը։* $y = x^4$ *ֆունկցիայի համար, ընդհակառակն,* $y'' = 12x^2$ *և, թեպետև* $x = 0$ *դեպքում երկրորդ ածանցյալը զրո է դառնում, մյուս բոլոր կետերում պահպանում է պլյուս նշան և, հետևաբար, կորն ամենուրեք գոգավորությամբ ուղղված է դեպի վերև։*

Շրջման առկայության համար (եթե ենթադրենք երկրորդ ածանցյալի գոյությունը) $y'' = 0$ պայմանն ա ն հ ր ա ժ ե շ տ է, բ ա յ ց բ ա վ ա ր ա ր չ է։

Այստեղ հեշտ է նկատել համանմանություն էքստրեմումների տեսությանը [համեմատել n° **112** *և հաջ.]։*

Վերջում նկատենք, որ, փոխանակ հետազոտելու $f''(x)$*-ի նշանը* x_0 *կետի մոտակայքում, այստեղ ևս կարելի է դիտարկել* $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \ldots$ *հաջորդական ածանցյալների արժեքները բուն* x_0 *կետում։ Քանի որ սրան վերաբերող նկատառումները լրիվին նման են* n° **117***-ում շարադրվածին, ուստի այդ թողնում ենք ընթերցողին։*

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն։ Կորի հետազոտությունը շրջման կետերի հայտնաբերման տեսակետից, հնարավորություն է ընձեռում ճշգրտելու ֆունկցիաների գրաֆիկների կառուցումը n° **115***-ում ասվածի համեմատությամբ։*

215. Կորության գաղափարը։ *Դիտարկենք*

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \tag{1}$$

պարամետրական հավասարումներով տրված, բազմապատիկ ու եզակի կետերից զերծ կորի աղեղը։ Եթե նրա յուրաքանչյուր կետում շոշափող տանենք (ասենք՝ դրական ուղղությամբ), ապա, կորի «կորացած»

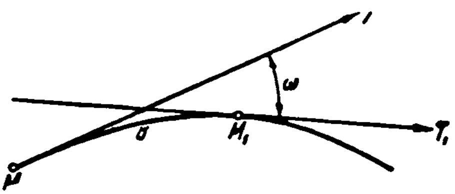
---

* *Երբեմն հենց այս հատկությունն են դնում շրջման կետերի սահմանման հիմքում։ Այդպիսի սահմանումը ոչ լրիվին է համարժեք տեքստում տրված սահմանմանը։*

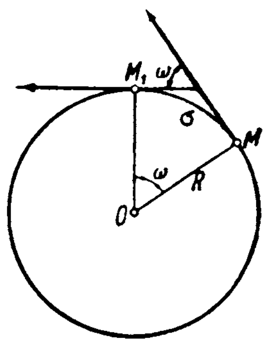
լինելու շնորհիվ, շոշափման կետը տեղափոխելիս այդ շոշափողը կըպտտվի. դրանով էլ կորն էապես տարբերվում է ուղիղից, որի համար շոշափողը (իր հետ համընկած լինելով) պահպանում է միևնույն ուղղությունը բոլոր կետերի համար։

Կորի ընթացքը որոշող կարևոր էլեմենտը՝ նրա «կորացածության աստիճանը» կամ «կորությունն» է զանազան կետերում. այդ կորությունը կարելի է արտահայտել թվով։

Դիցուք, $\overset{\frown}{MM_1}$*-ը կորի աղեղն է (գծ. 105). դիտարկենք այդ աղեղի ծայրակետերում դրական ուղղությամբ տարված* MT *և* M_1T_1 *շոշափողները։ Բնական կլինի կորի կորությունը բնութագրել աղեղի միավոր երկարության համար հաշված շոշափողի պտտման անկյունով, այսինքն՝* $\frac{\omega}{\sigma}$ *հարաբերությամբ, որտեղ* ω *անկյունը չափվում է ռադիաններով, իսկ* σ *երկարությունը՝ երկարության ընտրած միավորներով։* Այդ հարաբերությունն անվանում են կորի աղեղի միջին կորություն:



Գծ. 105.



Գծ. 106.

Կորի տարբեր մասերում նրա միջին կորությունն ընդհանրապես տարբեր կլինի։ Ի միջի այլոց գոյություն ունի մի կոր (միակ կորը), որի համար միջին կորությունն ամենուրեք միևնույնն է. այդ շրջանագիծն է։ Իրոք, նրա համար ունենք (գծ. 106)՝*

$$\frac{\omega}{\sigma} = \frac{\omega}{R\omega} = \frac{1}{R},$$

շրջանագծի ո՛ր աղեղն էլ վերցնելու լինենք։

$\overset{\frown}{MM_1}$ *աղեղի միջին կորության գաղափարից անցնենք կորի կորության գաղափարին տվյալ կետում։*

* *Չհաշվելով ուղիղը, որի համար կորությունը միշտ հավասար է զրոյի։*

Կորի կ ո ր ո ւ թ յ ո ւ ն M կետում կոչվում է այն սահմանը, որին ձգտում է $\overset{\frown}{MM_1}$ աղեղի միջին կորությունը, երբ M_1 կետը կորի վրայով ձգտում է M կետին։

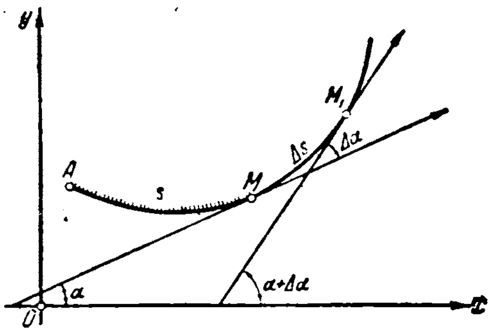
Կորի կորությունը տվյալ կետում նշանակելով k-ով, կունենանք՝

$$k = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\omega}{\sigma},$$

Շրջանագծի համար, ակներևորեն, $k = \frac{1}{R}$, *այսինքն՝* շրջանագծի կորությունը նրա շառավղի հակադարձ մեծությունն է։

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն։ *Միջին կորության և տվյալ կետում կորության գաղափարները միանգամայն նման են շարժվող կետի միջին արագության և տվյալ կետում արագության գաղափարներին։ Կարելի է ասել, որ միջին կորությունը բնութագրում է շոշափողի ուղղության փոփոխման միջին արագությունը մի որոշ աղեղի վրա, իսկ կորությունը կետում՝ այդ ուղղության փոփոխման իսկական արագությունը տվյալ կետում։*

Այժմ անցնենք կորության համար անալիտիկ արտահայտության արտածմանը, որով կարելի կլինի հաշվել այդ կորությունը, ելնելով կորի պարամետրական հավասարումներից։



Գծ. 107.

Նախ ենթադրենք, թե պարամետրի դերում հանդես է գալիս աղեղը։ Կորի վրա վերցնենք M *ս ո վ ո ր ա կ ա ն կ ե տ ը, և թող նրան համապատասխանի աղեղի* s *արժեքը։* s*-ին տալով* Δs *կամայական աճ, կստանանք մի որոշ* $M_1(s + \Delta s)$ *կետ (գծ. 107)։* M *կետից* M_1 *կետին անցնելիս շոշափողի թեքության անկյան* Δα *աճը կտա երկու շոշափողներով կազմված* ω *անկյունը՝* $\omega = \Delta\alpha$։ *Քանի որ* $\sigma = \Delta s$, *ուստի միջին կորությունը կլինի* $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ *հարաբերությունը։*

$\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$*-ը ձգտեցնելով զրոյի,* M *կետում կորի կորության համար կստանանք՝*

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}, \qquad (2)$$

Կարևոր է նշել, որ այս բանաձևը ճիշտ է միայն նշանի ճշգրտությամբ, քանի որ, մեր սահմանման համաձայն, կորությունը ոչբացասական թիվ է, իսկ աջ մասում կարող է ստացվել նաև բացասական թիվ։ Բանը նրանումն է, որ ինչպես $\Delta\alpha$*-ն, այնպես էլ* Δs*-ը կարող են բացասական լինել, այնպես որ, խիստ ասած պիտի գրեինք՝* $\omega = |\Delta\alpha|$, $\sigma = |\Delta s|$ *և՝*

$$k = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|,$$

Այս դիտողությունը պիտի ի նկատի ունենալ նաև առաջիկայում։

Որպեսզի (2) բանաձևին տանք այնպիսի տեսք, որը հարմար է կորությունն անմիջականորեն հաշվելու համար (և դրա հետ միասին ապացուցելու կորության գոյությունը), դիմենք կորի (1) ընդհանուր հավասարումներին պարամետրական տեսքով, ընդ որում այս անգամ φ *և* ψ *ֆունկցիաները ենթադրենք առաջին երկու կարգի անընդհատ ածանցյալներ ունեցող։*

Դիցուք դիտարկելի $M(t)$ *կետը սովորական (և պարզ) կետ է. առանց ընդհանրությունը նվազեցնելու կարելի է համարել, որ հենց* $x'_t = \varphi'(t) \neq 0$։

Այժմ (2) բանաձևն արտագրենք այսպես՝

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'_t}{s'_t}, \tag{3}$$

Բայց՝ $s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}$ [n° **202**, *(5)*]. *Մնում է գտնել միայն* α'_t*-ն։ Քանի որ* [n° **211**, *(8)*]՝

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ և } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{y'_t}{x'_t},$$

ապա՝

$$\alpha'_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^2_t} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^2_t + y'^2_t}, \tag{4}$$

s'_t*-ի ու* α'_t*-ի արժեքները տեղադրելով (3)-ի մեջ, կստանանք վերջնական բանաձև՝*

$$k = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{(x'^2_t + y'^3_t)^{\frac{3}{2}}}, \tag{5}$$

Այս բանաձևը շատ հարմար է հաշվելու համար, որովհետև նրա մեջ մասնակցող բոլոր ածանցյալները հեշտությամբ հաշվվում են կորի պարամետրական հավասարումներից։

Երբ կորը տրված է $y=f(x)$ *բացահայտ հավասարումով, այդ բանաձևն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝*

$$k=\frac{y''_{x^2}}{(1+y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (5ա)$$

Վերջապես, երբ կորը տրված է $r=g(\theta)$ *բևեռային հավասարումով, կարելի է, ինչպես սովորաբար անում ենք, անցնել պարամետրական ներկայացմանը ուղղանկյուն կոորդինատներով, որպես պարամետր ընդունելով* θ*-ն։ Այդ ժամանակ (5)-ի օգնությամբ կստանանք՝*

$$k=\frac{r^2+2r'^2_\theta-rr''_{\theta^2}}{(r^2+r'^2_\theta)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (5բ)$$

216. Կորության շրջան և կորության շառավիղ: *Շատ հետազոտություններում հարմար է լինում դիտարկելի կետի մոտակայքում կորը մոտավորապես փոխարինել այնպիսի շրջանագծով, որն ունի նույն կորությունը, ինչ որ կորը տվյալ կետում։*

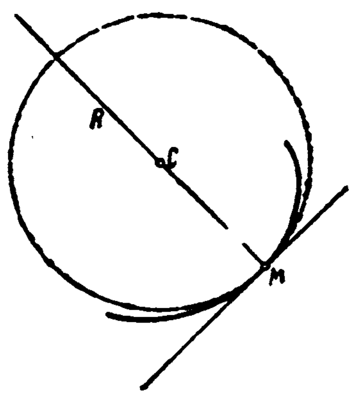
Մենք կորի **կորության շրջան*** նրա M կետում անվանելու ենք այն շրջանագիծը, որը՝

1) շոշափում է կորը M կետում,

2) այդ կետում գոգավորությամբ ուղղված է դեպի այն կողմը, դեպի որ կողմն ուղղված է կորը,

3) ունի նույն կորությունը, ինչ որ կորը M կետում *(գծ. 108)*։

Կորի կորության շրջանի C *կենտրոնը պարզապես կոչվում է այդ կորի* **կորության կենտրոն**, *իսկ շառավիղը՝* **կորության շառավիղ** *տվյալ կետում։*



Գծ. 108.

Կորության շրջանի սահմանումից երևում է, որ կորության կենտրոնը միշտ գտնվում է կորի դիտարկելի կետում տարած նորմալի վրա՝ գոգավորության կողմում։ Եթե կորի կորությունը տվյալ կետում նշանակենք k*-ով, ապա, հիշելով* [n° **215**], *որ շրջանագծի համար ունեինք* $k=\frac{1}{R}$

* *Այստեղ «շրջան» բառը, ըստ սովորության, գործ է ածվում «շրջանագծի» իմաստով։*

բանաձևը, այժմ կորության շառավղի համար, ակներևորեն, կունենանք՝

$$R = \frac{1}{k},$$

Օգտվելով կորության համար նախորդ n°*-ում արտածված տարբեր արտահայտություններից, մենք կարող ենք կորության շառավղի համար միանգամից գրել մի շարք բանաձևեր՝*

$$R = \frac{ds}{d\alpha}, \tag{6}$$

$$R = \frac{(x_t'^2 + y_t'^2)^{\frac{3}{2}}}{x_t' y_{t^2}'' - x_{t^2}'' y_t'}, \tag{7}$$

$$R = \frac{(1 + y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_{x^2}''}, \tag{7ա}$$

$$R = \frac{(r^2 + r_\theta'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r_\theta'^2 - r r_{\theta^2}''}, \tag{7բ}$$

որոնք և օգտագործվում են համապատասխան դեպքերում։

Կորության արտահայտության նշանի վերաբերյալ արված [n° **215**] *դիտողությունը վերաբերում է նաև կորության շառավղին։*

Ի դեպ, նշանը դեն նետելու փոխարեն, կարելի կլիներ այն մեկնաբանել երկրաչափորեն, այդ կապելով այն բանի հետ, թե շոշափողի (դրական ուղղությամբ ուղղված, [n° **211**]*) ո՞ր կողմում պետք է նորմալի վրա վերցնել կորության շառավիղը։ Այն է՝ կ ո ո ր դ ի ն ա տ ա յ ի ն ա ռ ա ն ց ք ն ե ր ի ս ո վ ո ր ա կ ա ն դ ա ս ա վ ո ր ո ւ թ յ ա ն դ ե պ ք ո ւ մ կորության շառավղի դրական նշանը ցույց է տալիս, որ նա շոշափողից դեպի ձախ է ուղղված, իսկ բացասական նշանի դեպքում՝ դեպի աջ*։ Այդ առանձնապես հեշտ է ստուգել կորի բացահայտ տրման դեպքում, քանի որ այդ դեպքում [տե՛ս (7ա)] կորության շառավղի նշանը համընկնում է* y_{x^2}''*-ի նշանի հետ, իսկ վերջինս էլ, ինչպես գիտենք* [n° **214**]*, հենց որոշում է, թե շոշափողից դեպի ո՞ր կողմն է ուղղված կորի գոգավորությունը (նրա հետ նաև՝ կորության շառավիղը)։*

** Պետք է հիշել, որ աղեղների հաշվման դրական ուղղությունը համապատասխանում է պարամետրի (*t*-ի,* x*-ի,* θ*-ի) աճմանը։*

Օրինակներ: *1) Որոշել*

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t)$$

ցիկլոիդի կորության շառավիղը (գծ. 97)։

Քանի որ [n° **210**, *5)*] $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, *ուստի* $d\alpha = -\frac{1}{2}dt$։ *Մյուս կողմից* [n° **201**, *2)*]՝

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 2a\sin\frac{t}{2}, \quad \text{այսինքն՝} \quad ds = 2a\sin\frac{t}{2}dt\text{։}$$

Այսպիսի դեպքում R*-ը հաշվելու համար կարելի է օգտվել (6) բանաձևից՝*

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{2a\sin\frac{t}{2}dt}{-\frac{1}{2}dt} = -4a\sin\frac{t}{2}\text{։}$$

Եթե վերհիշենք նորմալի n *հատվածի համար* n° **210**, *5)-ում արտածված արտահայտությունը, ապա կստացվի՝*

$$R = -2n\text{։}$$

Այստեղից էլ ստացվում է կորության C *կենտրոնի կառուցումը, որը պարզ երևում է գծագրի վրա։*

2) Վերջում մի քանի խոսք ասենք մի գործնական հարցի մասին, որտեղ հենց էապես օգտագործվում է կորության փոփոխությունը կորի երկարությամբ. խոսքն այսպես կոչված փ ո խ ա ն ց մ ա ն կ ո ր ե ր ի մասին է, որոնք օգտագործվում են երկաթուղու բոլորումների կառուցման ժամանակ։

Ինչպես ցույց է տրվում մեխանիկայում, նյութական կետի կորագիծ շարժման ժամանակ զարգանում է կենտրոնախույս ուժ, որի մեծությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

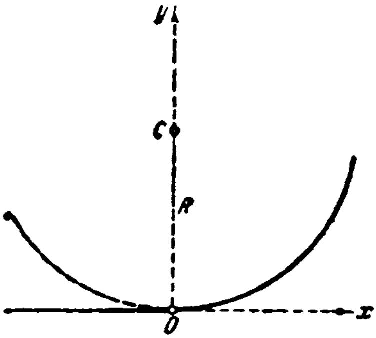
$$F = \frac{mv^2}{R},$$

որտեղ m*-ը կետի զանգվածն է,* v*-ն՝ նրա արագությունը, իսկ* R*-ը՝ կորի կորության շառավիղն է նրա դիտարկելի կետում։*

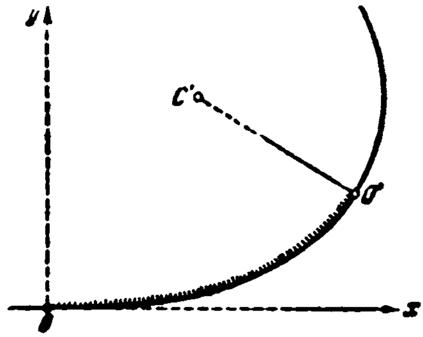
Եթե երկաթուղու ուղղագիծ մասն անմիջապես միանար շրջանային աղեղով կառուցվող բոլորմանը (գծ. 109, ա), ապա այդ բոլորման վրա անցնելիս կենտրոնախույս ուժը կծագեր ակնթարթորեն, առաջացնելով հանկարծակի և ուժեղ ցնցում, որը վնասակար է շարժակազմի և գծի վերին կառուցվածքի համար։ Դրանից խուսափելու համար ուղու ուղղագիծ մասը շրջանային աղեղի հետ կապում են մի որոշ փ ո խ ա ն ց մ ա ն կ ո ր ի օգնությամբ (գծ. 109, բ)։ Այդ կորի երկարությամբ կորության շառավիղն ա ս տ ի ճ ա ն ա բ ա ր նվազում է անվերջ մեծ արժեքից (ուղղագիծ մասին կցվելու կետում) մինչև շրջանի շառավիղը (շրջանային աղեղին կցվելու կետում), և դրան համապատասխան կենտրոնախույս ուժն աճում է ա ս տ ի ճ ա ն ա բ ա ր։

Որպես փոխանցման կոր օգտագործվում է, օրինակի համար, $y = \frac{x^3}{6q}$ խորանարդ պարաբոլը։ Այս դեպքում, ակներևորեն, ունենք՝

$$y' = \frac{x^2}{2q}, \qquad y'' = \frac{x}{q},$$



Գծ. 109 ա.



Գծ. 109 բ.

այնպես որ կորության շառավղի համար ստացվում է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$R = \frac{q}{x}\left(1 + \frac{x^4}{4q^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$x = 0$ *դեպքում ունենք՝* $y' = 0$ *և* $R = \infty$, *այսինքն՝ մեր կորը կոորդինատների ըսկըզբնակետում շոշափում է* x*-երի առանցքը և այստեղ ունի զրո կորություն։*

ՏԱՍՆՉՈՐՍԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՊԱՏՄԱԿԱՆ ԱԿՆԱՐԿ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐԻ ԾԱԳՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

§ 1. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ՆԱԽԱՊԱՏՄՈՒԹՅՈՒՆԸ

217. XVII դարը և անվերջ փոքրերի անալիզը: *Այդ՝ միջնադարից նոր ժամանակին անցնելու շրջանն էր, սկիզբը կապիտալիզմի ծագման, որն այն ժամանակ, ֆեոդալական կարգի դեմ մղվող պայքարում առաջադիմական դեր էր ներկայացնում։ Ճշգրիտ գիտությունները հենց կյանքից իրենից հզոր խթաններ էին ստանում արագ զարգացման համար։ Նավագնացությունը մեծացրել էր հետաքրքրությունը դեպի աստղագիտությունն ու օպտիկան։ Նավաշինությունը, ամբարտակների ու ջրանցքների կառուցումը, զանազան մեքենաների ու կառուցվածքների ստեղծումը, բալիստիկայի պահանջները և ընդհանրապես ռազմական գործը նպաստում էին մեխանիկայի զարգացմանը։ Աստղագիտությունը, օպտիկան, մեխանիկան, ինչպես և տեխնիկան ինքն անմիջականորեն, իրենց հերթին պահանջում էին այն ժամանակվա մաթեմատիկայի վճռական* նորացում:

Այդ նորացումը *տեղի ունեցավ փ ո փ ո խ ա կ ա ն մ ե ծ ո ւ թ յ ա ն մուծման նշանաբանով, որն Էնգելսն իրավամբ անվանել է «շրջադարձային կետ մաթեմատիկայում» (տե՛ս մեջբերումը 37-րդ էջում)։ Միայն փոփոխական մեծությունների մաթեմատիկան կարող էր սպասարկել նոր ծագող մաթեմատիկական բնագիտությանը։ Նոր խնդիրները հանգեցրին «անվերջ փոքր» մեծությունների դիտարկման հետ կապված նոր մեթոդների (կամ՝ «ինֆինիտեզիմալ» մեթոդների) ստեղծմանը։ Այստեղից էլ մաթեմատիկական անալիզը, որը դարի վերջում ձևավորվել էր որպես ինքնուրույն գիտական դիսցիպլին, ստացել է «անվերջ փոքրերի անալիզ» անվանումը, որը պահպանվել է անգամ մինչև մեր ժամանակները։*

Սկզբնական շրջանում այդ ասպարեզում գերակշռում էր «արհեստավորական արտադրությունը». ամեն մի առանձին փաստ հաստատում պահանջում էր հետազոտողի հատուկ մոտեցում։ Սակայն ժամանակի ընթացքում իրերի վիճակը փոխվեց։ Նախ սկսեցին երևան գալ ընդհանուր մեթոդներ միատիպ խնդիրների լուծման համար, կապեր հաստատվեցին տարբեր տիպի խնդիրների միջև, աստիճանաբար պարզվում էին այն ընդհանուր գաղափարները, որոնք ընկած էին խնդիրների լուծման հիմքում, և այդ բոլորը փայլուն կերպով ավարտվեց, Նյուտոնի և Լայբնիցի ձեռքում, դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի հայտնագործումով։

Առաջին պարագրաֆը նվիրված է այն նվաճումների ակնարկին, որոնք, մաթեմատիկոսների առնվազն երկու սերնդի կողմից, մեկևկես հարյուրամյակի ընթացքում նախապատրաստեցին այդ հայտնագործությունը։

218. **Անտրոհելիների մեթոդը:** *Սկսենք ինտեգրալ հաշվի նախապատմությունից, որը փաստորեն սկիզբ է առնում հեռավոր հնադարյան շրջանից։ Ինչ վերաբերում է մակերեսներ ու ծավալներ հաշվելուն, ինչպես նաև պատկերների ծանրության կենտրոնների դիրքի որոշմանը, ապա այստեղ* XVII *դարի մաթեմատիկոսների իսկական ուսուցիչն Արքիմեդն է եղել* (III *դար մեր թվականությունից առաջ)։*

Մեզ հասած «Արքիմեդի ուղերձը Էրատոսթենեսին» աշխատության մեջ հաղորդվում է, որ նա իր արդյունքները, նախնական կարգով, ստացել է մի յուրատեսակ մեթոդի օգնությամբ, որի մեջ ձևականորեն օգտագործվել է լծակի հավասարակշռության տեսությունը, սակայն ըստ էության եղել է* հարթ պատկերները գծերից կազմելու, իսկ մարմինները՝ հարթություններից կազմելու միտքը: *Այդ «ատոմիստական» մեթոդով գտած ճշմարտությունները հետագայում հրապարակվել են խիստ ապացուցումներով, ըստ այն ժամանակվա սովորության՝ հակասող ընդունելության մեթոդով։ Սակայն,* XVII *դարի մաթեմատիկոսներին այդ «Ուղերձը» հայտնի չի եղել. երկու հազարամյակի ընթացքում այն կորած է համարվել, և նրա տեքստը բոլորովին պատահականորեն հայտնաբերվել է միայն մեր հարյուրամյակի սկզբին։ Այդպիսով, մեզ հետաքրքրող ժամանակաշրջանում այն մեթոդի մասին, որից Արքիմեդն օգտվել էր իր արդյունքների հայտնագործման համար, կարելի էր միայն կռահել նրա այլ աշխատություններից, որոնք պահպանվել էին։ Նրանցում երբեմն հետք անգամ չի մնացել այն ճանապարհից, որով փաստորեն ստացվել են արդյունքները։ Սակայն որոշ աշխատություններում, հենց հակասող ընդունելության մեթոդով ապացուցման ժամանակ, Արքիմեդն, այնուամենայնիվ, օգտվել է հարթ պատկերը (կամ մարմինը) էլեմենտների վերլուծելուց, ճիշտ է, վերցրած վերջավոր թվով և վերջավոր հաստությամբ, այդ կապակցությամբ նա դիտարկել է նաև ներգծած ու արտագծած աստիճանաձև պատկերներ (մարմիններ), որոնք երկրաչափական նախակերպարներն են եղել մեր ինտեգրալային գումարների։*

*Արքիմեդյան մեթոդը բացահայտելու և նրա կիրառման ասպարեզն ընդարձակելու առաջին փորձը կատարել է գերմանացի աստղագետ ու մաթեմատիկոս Իոհան Կեպլերը (1571—1630)։ Նա 1615 թ. հրապարակեց «Գինու տակառների նոր տարածաչափություն» խորագրով գիրքը**։ Թեպետև այդ աշխատությունը գրված է պատահական առիթով և, կարծես թե, զուտ գործնական թեմայով, սակայն այն պարունակում է այն ժամանակվա համար նոր մոտեցում քառակուսման ու խորանարդման հարցին. հարթ պատկերը վերլուծվում է անվերջ թվով անվերջ փոքր էլեմենտների և ապա նույն էլեմենտներից, անհրաժեշտության դեպքում՝ դեֆորմացիայի ենթարկված, կազմվում է նոր պատկեր՝ արդեն հայտնի մակերեսով (համանման եղանակով նաև մարմնի համար)։*

Նշենք, որ մատնանշված էլեմենտները Կեպլերի մոտ ոչ ամենևին զրկված են հաստությունից. նա խոսում է «բարակագույն շրջանակների» մասին, «չափազանց բարակ, գծի հաստություն ունեցող մասերի» վերաբերյալ և այլն։

Այս ճանապարհով Կեպլերը նախ ստանում է դեռևս Արքիմեդին հայտնի մի շարք արդյունքների ուղղակի արտածումները և ապա այն բաժնում, որ նա

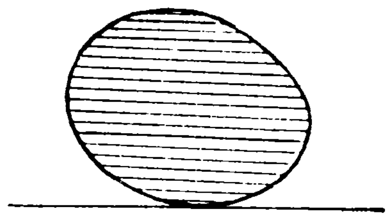
* *Կա ռուսերեն թարգմանությունը՝* „Новое сочинение Архимеда“ (Одесса,, Mathesis, 1909)։

** *Կա ռուսերեն թարգմանությունը՝* „Новая стереометрня винных бочек“ (ГТТИ, 1935)։

անվանել է «Լրացում Արքիմեդին», հաշվում է 87 նոր պտտման մարմինների ծավալներ։

Կեպլերի գաղափարների ժառանգորդն ու «անտրոհելիների մեթոդի», որպես այդպիսինի, հիմնադիրը եղել է իտալացի գիտնական վանական, Գալիլեյի աշակերտ Բոնավենտուրա Կ ա վ ա լ յ ե ր ի ն (1598—1647), որի համար այդ մեթոդի պրոպագանդումը դարձել էր նրա ամբողջ կյանքի զբաղմունքը։ 1635 թ. լույս է տեսել նրա հիմնական աշխատությունը՝ «Երկրաչափություն, շարադրված անընդհատի անտրոհելիների նոր մեթոդով», որը հետագայում (1647 թ.) լրացվել է «Երկրաչափական վեց փորձերով»։ Այդ աշխատություններում, ըստ էության, հարություն առավ Արքիմեդի ատոմիստական տեսակետը։*

«Հարթ պատկերների չափերը որոշելու համար, ասում է Կավալյերին, օգտագործվում են մի որոշ ուղիղի զուգահեռ ուղիղներ..., որոնք մենք երևակայում ենք տարված անվերջ քանակությամբ այդ պատկերներում» (գծ. 110)։ Նման ձևով է նա վարվում նաև մարմինների նկատմամբ, միայն այնտեղ գծերի փոխարեն տարվում են հարթություններ։ Այդ գծերն (հարթությունները) էլ հենց տխրահռչակ «անտրոհելիներն» են. նրանք «քանակությամբ սահմանափակ չեն և զուրկ են որևէ հաստությունից», (սրանով Կավալյերին հակադրվում է Կեպլերին)։ Սակայն Կավալյերին չի համարձակվում պնդել, որ



Գծ. 110.

պատկերները կամ մարմինները կ ա զ մ վ ա ծ ե ն այդ անտրոհելիներից, որոնք զուրկ են հաստությունից։ Նրա հիմնական դրույթը բանաձևվում է ավելի զգուշորեն. «Հարթ պատկերները (կամ մարմինները) հ ա ր ա բ ե ր ու մ ե ն, ինչպես նրանց բոլոր անտրոհելիները՝ միասին վերցրած»։ Այսպես, օրինակ, եթե ABCD զուգահեռագիծը (գծ. 111) AC անկյունագծով բաժանենք երկու եռանկյունների և երևակայենք նրանցում ուղիղներ՝ զուգահեռ CD հիմքին, ապա «զուգահեռագծի բոլոր (OR) գծերը» հարաբերում են «եռանկյան բոլոր (QR) գծերին» ինչպես 2:1, քանի որ այդպիսին է զուգահեռագծի մակերեսի հարաբերությունը եռանկյան մակերեսին։

Գծ. 111.

Պատկերի «բոլոր գծեր» ասելով Կավալյերին հասկացել է, ինչպես կարելի է կարծել, այդ գծերի գումարը, այսինքն՝ անվերջ («անսահմանափակ») մեծություն, այնպես որ երկու այդպիսի գումարների միայն հ ա ր ա բ ե ր ու թ յ ու ն ը կարող էր վերջավոր լինել։ Ըստ երևույթին (թեպետև Կավալյերին ոչ մի տեղ բացահայտորեն չի ասում այդ), անտրոհելիները միմյանցից հավասար հեռավորությունների վրա են գտնվում, սակայն այդ հեռավորությունները ոչ մի տեղ չեն մասնակցում։ Եթե փորձենք Կավալյերիի միտքն արտահայտել մեզ համար սովորական տերմինն-

---

* *Կա երկու գրքի ռուսերեն թարգմանությունը՝* „Геометрия“ *և* „Опыт IV“ (ГТТИ, 1940)։

քով, ապա կարելի կլինի ասել, որ նա օգտագործում է օրդինատների գումարը (կամ՝ ֆունկցիայի արժեքների գումարը), դրանք չբազմապատկելով աբսցիսի (անկախ փոփոխականի) աճերով։ Այսպես, վերևում ձևակերպված պնդումը, եթե որպես զուգահեռագիծ պարզության համար վերցնենք a կողմով քառակուսի և վերականգնենք բազմապատկումը h հեռավորությամբ անտրոհելիների միջև, կարելի է (անշուշտ, վերին սահմանի պայմանականորեն) ցուցադրել հետևյալ հավասարությունների շղթայով՝

$$\frac{\sum OR}{\sum QR} = \frac{\sum a}{\sum x} = \frac{\sum ah}{\sum xh} = \frac{\int\limits_0^a a\,dx}{\int\limits_0^a x\,dx} = 2,$$

Կավալյերին հաջորդ կարևոր քայլը կատարում է, «Երկրաչափության» մեջ ստանալով «զուգահեռագծի (OR գծերի) բոլոր քառակուսիների» հարաբերությունը «եռանկյան (QR գծերի) բոլոր քառակուսիներին»։ Մի երկար շարք մտահանգումներից հետո պարզվում է, որ այն հավասար է երեքի։ Այնուհետև, «IV փորձ»-ում նա համեմատում է զուգահեռագծի և եռանկյան (գծերի) «բոլոր խորանարդները» ու «բոլոր քառակուսա-քառակուսիները». այստեղ հարաբերություններն ստացվում են հավասար չորսի և հինգի։ Այստեղից Կավալյերին եկել է այն եզրակացության, որ նույնպիսի օրենք իրավացի է նաև ցանկացած m բնական ցուցիչով աստիճանի դեպքում։ Այդ օրենքը մեր սիմվոլներով կարելի կլիներ գրառել այսպես՝

$$\frac{\int\limits_0^a a^m\,dx}{\int\limits_0^a x^m\,dx} = m + 1,$$

այնպես որ, ըստ էության, այստեղ խոսքը վերաբերում է հետևյալ ինտեգրալը հաշվելուն՝

$$\int\limits_0^a x^m\,dx = \frac{1}{m+1}\int\limits_0^a a^m\,dx = \frac{1}{m+1}a^{m+1},$$

Կավալյերին իր արդյունքներն անմիջապես կիրառում է զանազան քառակուսումների ու խորանարդումների նկատմամբ, սակայն այդ արդյունքները նա ստանում է կիրառություններից բոլորովին անկախ։ Խնդրի դրվածքի այս ընդհանրության մեջ է (այն է՝ հենց որպես որոշյալ ինտեգրալ հաշվելու խնդրի մեջ) առաջընթացը Կեպլերի նկատմամբ, որն ամեն անգամ կատարում էր միայն կոնկրետ խորանարդում։

219. Անտրոհելիների ուսմունքի հետագա զարգացումը: $\int_0^a a^m \, dx = a^{m+1}$ *ինտեգրալի հետ համադրելու միջոցով* $\int_0^a x^m \, dx$ *ինտեգրալի հաշվումով զբաղվել են նաև այլ գիտնականներ։ Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Պյեռ Ֆ ե ր մ ա ն (1601—1665), ինչպես երևում է նրա նամակագրությունից, Կավալյերիի ընդհանուր արդյունքին հանգել է նրանից մի փոքր ավելի վաղ։ Այնուհետև պետք է հիշատակել ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս ու փիլիսոփա Բլեզ Պ ա ս կ ա լ ի ն (1623—1662) իր «Թվային աստիճանների գումարը» (1654) աշխատությամբ, ինչպես նաև անգլիացի գիտնական Ջոն Վ ա լ լ ի ս ի ն (1616—1703), որի «Անվերջ մեծությունների թվաբանություն» (1655) գրքի մասին մենք արդեն առիթ ենք ունեցել խոսելու։ Դրանք բոլորը ելնում էին թ վ ա բ ա ն ա կ ա ն ն կ ա տ ա ռ ո ւ մ ն ե ր ի ց և այդ հաշվումը կապում էին հաջորդական բնական թվերի* m*-րդ աստիճանների գումարի դիտարկման հետ։ Մեզ համար սովորական լեզվով հարցի էությունը կարելի է արտահայտել այսպես. եթե* $[o, a]$ *միջակայքը տրոհենք* n *հավասար մասերի* $h = \frac{a}{n}$ *երկարությամբ, ապա ինտեգրալային գումարների հարաբերության համար կունենանք՝*

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} a\right)^m h}{\sum\limits_{i=1}^{n} a^m h} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} i^m}{n^{m+1}} \to \frac{1}{m+1}, \quad \text{երբ } n \to \infty\text{։}$$

Սահմանային անցումը, ի դեպ, պարզորոշ արտահայտված է միայն Վալլիսի մոտ։ Բոլոր դատողությունների հիմքում ընկած է եզրահանգումն ըստ ինդուկցիայի։

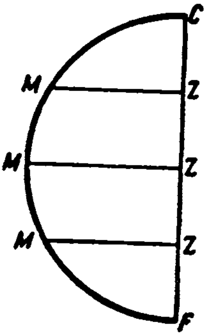
Ֆերման ավելի ուշ շրջանի աշխատություններում, զբաղվելով զանազան* $y^m = cx^n$ *«պարաբոլների» և* $y^m x^n = c$ *«հիպերբոլների» քառակուսման հարցերով, արդեն կորի տակ գտնվող պատկերն ուղղակի տրոհում է շերտերի (ինչպես մենք ենք անում), սակայն այնչափ մանր, որպեսզի հնարավոր լինի դրանք «հավասարեցնել» ուղղանկյունների։ Ընդ որում, նրա մոտ աբսցիսները կազմում են նույնիսկ ոչ թե թվաբանական, այլ երկրաչափական պրոգրեսիա [(համմ.* **184**, 2)]։ *Այս ճանապարհով Ֆերման կարողացել է հաշվել* $r = \pm \frac{n}{m}$ *ռացիոնալ ցուցիչով* x^r *աստիճանային ֆունկցիաների ինտեգրալները (բացառությամբ միայն* $r = -1$ *դեպքի, որը համապատասխանում է դասական հիպերբոլին)։*

Որոշյալ ինտեգրալի ժամանակակից ըմբռնմանն ավելի մոտեցավ և ինտեգրալ հաշվի (դեռևս չստեղծված) հզորությունը բացահայտեց Պասկալը։ Մենք ի նկատի ունենք նրա այն աշխատությունները, որոնք միայն վերցրած տալիս են հենց իր

---

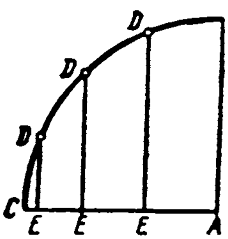
* *Առանձին հատվածներ դրանցից կարելի է գտնել* Вилейтнер „Хрестоматия по истории математики", вып. IV (ГТТИ, 1933) *գրքում, էջ 70։*

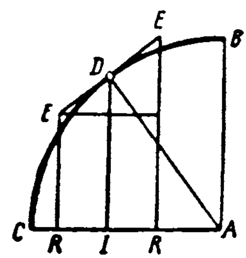
կողմից 1658 թ. առաջադրված մի շարք այնպիսի խնդիրների լուծումը, որոնք կապված են ցիկլոիդի հետ և պահանջում են զանազան մակերեսների, ծավալների, աղեղների երկարությունների հաշվումներ և ծանրության կենտրոնների դիրքերի որոշումներ։ Այդ աշխատությունները սկզբում հրապարակվել են կեղծ անունով, որպես «Ա. Դետոնվիլի զանազան հայտնագործությունները երկրաչափության մեջ»։



Գծ. 112.

Պասկալը շարունակում է օգտվել «անտրոհելիների լեզվից», բայց հանգամանալից «Նախածանուցման» մեջ մանրազնին պարզաբանում է, թե այդ լեզուն ինչպե՞ս պետք է հասկանալ։ Օրինակի համար, եթե կիսաշրջանի տրամագիծը (գծ. 112) Z կետերում բաժանված է «անսահմանափակ» թվով հավասար մասերի և տարված են ZM օրդինատները, ապա «օրդինատների գումար» ասելով հասկացվում է «անսահմանափակ թվով այնպիսի ուղղանկյունների գումարը, որոնք կազմված են յուրաքար օրդինատով՝ տրամագծի միմյանց հավասար փոքրիկ մասերից յուրաքանչյուրի հետ», ընդ որում այդ գումարը «կիսաշրջանի մակերեսից տարբերվում է այնպիսի մեծությամբ, որը փոքր է ցանկացած տրվածից»։ 113-րդ գծագրում շրջանի BC աղեղը D կետերում բաժանված է «անսահմանափակ» թվով հավասար աղեղների և այդ կետերից իջեցրած են DE ուղղահայացները, որոնց անվանում են «սինուսներ»։ Այդ դեպքում, «եթե պարզապես ասում են DE սինուսների գումար, ապա դրանով հասկանում են այն ուղղանկյունների գումարը, որոնք կազմված են յուրաքանչյուր DE սինուսով և յուրաքանչյուր DD փոքրիկ ուղղված աղեղով, քանի որ այդ սինուսներն առաջացել են աղեղը հավասար մասերի բաժանելով»։ Բերված օրինակներում ինքնին հասկանալի է, թե այնտեղ դիտարկվող օրդինատները, կամ սինուսները, ո՞ր գծի մասերով պետք է բազմապատկել. այլ դեպքերում այդ գիծը պետք է պարզորոշ նշվի։ Այսպիսով, անկախ փոփոխականը, որը Կավալյերին ստվերում էր թողել, դիտարկելով միայն ֆունկցիայի արժեքների գումարը, այստեղ լիակատար պարզորոշությամբ վերականգնվում է իր իրավունքներում՝ ֆունկցիայի արժեքները բազմապատկվում են անկախ փոփոխականի աճերով։





Գծ. 113, 114.

Որպեսզի մի նմուշ տանք այն դատողության, որից Պասկալն օգտվում էր իրեն արկավոր ինտեգրալները հաշվելու համար, բերենք մի առաջադրություն «Տրակտատ շրջանի քառորդի սինուսների վերաբերյալ»* աշխատությունից։ Ամենից առաջ ապա-

2

* Դրանից քաղվածքներ կան Վիլայտների արդեն հիշատակված «Քրեստոմատիայում», պրակ IV, էջ 81։

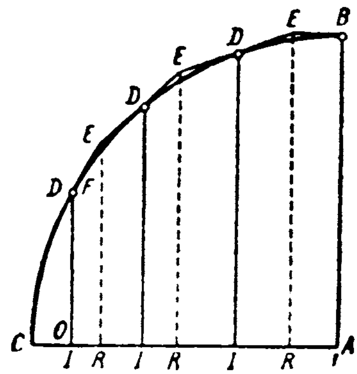
ցուցվում է հետևյալ ակներև լեմման (տե՛ս գծ. 114, որտեղից և պարզ են նշանակումները)՝

$$DJ \cdot IE = RR \times AB\text{։} \qquad (1)$$

Իսկ հիշյալ առաջադրությունն ինքն ասում է՝

BF աղեղի սինուսների գումարը հավասար է AO հատվածին՝ բազմապատկած AB շառավղով (գծ. 115)։

(1)-ում յուրաքանչյուր EE շոշափող փոխարինելով DD աղեղով և գումարելով այդ տիպի բոլոր հավասարությունները, ձախ մասում կստանանք մեզ հարկավոր «սինուսների գումարը», իսկ աջ մասում՝ բոլոր RR-երի գումարը կամ, որ միևնույնն է, AO գիծը, բազմապատկած AB-ով։ Դրանով էլ ավարտվում է ապացուցումը։



Գծ. 115.

Դրան հաջորդում է մի հետաքրքիր «նախազգուշացում», որտեղ Պասկալն ընթերցողին առաջարկում է չզարմանալ այն բանից, «որ բոլոր RR հեռավորությունները միասին հավասար են AO-ին, ինչպես նաև, որ յուրաքանչյուր EE շոշափող հավասար է DD փոքրիկ աղեղներից յուրաքանչյուրին, քանի որ բավականաչափ հայտնի է, որ թեպետև այդ հավասարությունը ճիշտ չէ, երբ սինուսների բազմությունը վերջավոր է, այնուամենայնիվ այն ճիշտ է, երբ այդ բազմությունն անսահմանափակ է»։

Որպեսզի ապացուցած պնդումը մեկնաբանենք մեր լեզվով, ընդունենք, որ շառավիղ $AB = 1$ և մուծենք φ $\measuredangle BAD$ անկյունը. այդ դեպքում այն համարժեք է հետևյալ հավասարությանը՝

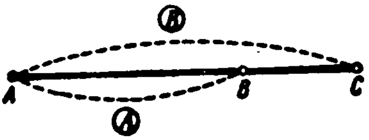
$$\int_0^{\varphi} \cos\varphi \, d\varphi = \sin\varphi\text{։}$$

Շատ ուսանելի է նաև Պասկալի հենց մոտեցումը իր առաջադրած խնդիրների լուծմանը. նա նախապես, ընդհանուր տեսքով, ճշգրիտ թվարկում է, թե ի՞նչ տիպի ինտեգրալներ («գումարներ») դրա համար հարկավոր կլինեն։ Այնուհետև նա ցույց է տալիս, թե դրանք ինչպե՞ս հաշվել իրեն հետաքրքրող կոնկրետ դեպքում, և դրանով ավարտում է լուծումը։ Հիշատակենք նաև զանազան, բավականաչափ բարդ, ինտեգրալային բանաձևերի մասին, որոնք մի տեսակի ինտեգրալները («գումարները») ձևափոխում են այլ ինտեգրալների. Պասկալը դրանք ստանում է տարածաչափական նկատառումներից և նրանցից օգտվում է մեծ վարպետությամբ։

220. Մեծագույններն ու փոքրագույնները գտնելը, շոշափողներ տանելը: Դիմենք դիֆերենցիալ հաշվի նախապատմությանը։ Այս բնագավառում նախաձեռնող պետք է համարել Ֆերմային, որն զբաղվել է հենց այն երկու խնդիրներով էլ, որոնք սովորաբար համարվում են դիֆերենցիալ հաշվինը՝ մեծագույնների ու փոքրագույնների որոնումով և շոշափողներ տանելով, և առաջինն է *կիրառել դրանց լուծման համար այնպիսի մեթոդներ, որոնք ըստ էության ինֆինիտեզիմալ բնույթ ունեն։*

Ֆերմայի «Մեծագույնների ու փոքրագույնների հետազոտման մեթոդ» աշխատությունը հայտնի է դարձել նրա նամակներից, սկսած 1629 թվականից, մասնակիորեն հրապարակվել է 1642—1644 թ. թ., իսկ լրիվ՝ միայն 1679 թ., արդեն Ֆերմայի մահից հետո։*

Մեծագույն և փոքրագույն արժեքների որոնման համար Ֆերմայի առաջարկած (առա՛նց որևէ հիմնավորման) կանոնը մենք կպարզաբանենք նրա իսկ դիտարկած խնդիրներից մեկի օրինակով. տրված AC գիծը *(գծ. 116)* հատել B կետում այնպես, որպեսզի AB-ի քառակուսու և BC գծի վրա կառուցված մարմինը լինի ամենամեծը:



Գծ. 116.

Տրված AC հատվածը նշանակելով B-ով, իսկ որոնելի AB հատվածը՝ A-ով, մեծագույն ծավալի համար կստանանք $A^2(B-A)$ *արտահայտությունը**։ Այստեղ A-ի փոխարեն դնելով* $A+E$ *(Ֆերմայի մոտ E տառը ծառայում է որպես ստանդարտ (միօրինակ) նշանակում դիտարկվող A մեծության աճի համար), երկու (իրականում ո՛չ հավասար) արտահայտությունները հավասարեցնում ենք՝*

$$(A+E)^2(B-A-E)=A^2(B-A)։$$

Այժմ երկու մասերում բաց թողնենք ընդհանուր անդամները և մնացածները կրճատենք նրանց բոլորի մեջ մտնող E բազմապատկչի վրա՝

$$2A(B-A)-A^2+E(B-A-E)-2AE=0։$$

Վերջապես, այստեղ ոչնչացնենք այն անդամները, որոնք այդ կրճատումից հետո էլ պարունակում են E բազմապատկիչը։ Արդյունքում կստացվի՝

$$2A(B-A)-A^2=0, \quad \text{կամ՝} \quad 2AB=3A^2։$$

Այս արդեն կլինի, Ֆերմայի արտահայտությամբ, «իսկական» հավասարություն, մինչդեռ նախորդ հավասարությունները միայն «հորինված» կամ «մոտավոր» էին։ Վերջին հավասարությունից էլ որոշվում է A-ն $\left(=\frac{2}{3}B\right)$։

Ընդհանուր տեսքով, եթե օգտագործենք ֆունկցիոնալ նշանակումներ, «Ֆերմայի կանոնը» կներկայացվի այսպես. $f(A)$ *արտահայտությանը մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք տվող A մեծությունը որոնելու համար Ֆերման նախ գրում է «մոտավոր» հավասարություն՝*

$$f(A+E)=f(A), \quad \text{կամ՝} \quad f(A+E)-f(A)=0,$$

որտեղից, բաժանելով A-ի վրա, ստանում է՝

$$\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0։$$

** Տե՛ս Վիլայտների «Քրեստոմատիան», պրակ IV, էջ 78։*

*** Մենք այստեղ և հետագայում ամենուրեք օգտվում ենք մեզ համար սովորական հանրահաշվական նշանակումներից, անկախ նրանից, թե իրականում ինչպես է գրել հեղինակը։*

վերջին հավասարության մեջ նա ոչնչացնում է այն անդամները, որոնք դեռևս պարունակում են E-ն, այսինքն ընդունում է $A = 0$ (իսկ այդ այստեղ հավասարազոր է սահմանին անցնելուն, երբ $E \to 0$)։ Այդ ժամանակ ստացվում է, վերջապես, «իսկական» հավասարությունը՝

$$\left[\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right]_{E=0}=0$$

կամ, մեր նշանակումներով՝

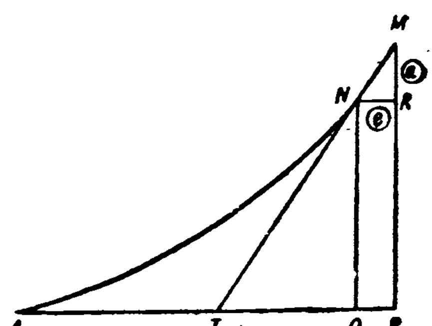
$$f'(A) = 0,$$

որտեղից և որոշվում է որոնելի A-ն [համ. **100** և **112**]։

E մեծությունը, թեպետև Ֆերման այդ չի ասում, խաղում է A անկախ փոփոխականի շատ փոքր (եթե ոչ՝ անվերջ փոքր) աճի դեր։ $f(A+E)=f(A)$ ելակետային հավասարությունն արտահայտում է յուրատեսակ կանգառի սկզբունքը այն պահին, երբ մեծությունը հասնում է իր մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքին, նա կարծես թե իր փոփոխությունում կանգ է առնում*։

Նույն աշխատությունում Ֆերման մատնանշում է, որ իր մեթոդով կարելի է լուծել նաև կորերին շոշափողներ տանելու խնդիրը։ Այս անգամ նա A-ով նշանակում է ենթաշոշափողը, իսկ E-ով՝ նրա աճը (կամ կորուստը). օգտվելով կորի հավասարումից, նա նախ կազմում է «մոտավոր» հավասարություն, կիրառում է նախկին պրոցեդուրան, և արդյունքում ստանում է այն հավասարությունը, որտեղից որոշվում է A-ն։

Ֆերմայի հետազոտություններին հարում են նշված խնդիրների լուծման համար ուրիշ հեղինակների տված կանոնները, որոնք կամ պարզեցնում են Ֆերմայի կանոնը, կամ ընդարձակում նրա կիրառման ասպարեզը։ Մենք կհիշատակենք միայն շոշափողներ տանելու այն մեթոդը, որը Նյուտոնի ուսուցիչ Իսահակ Բարրոուն (1630—1677) շարադրել է իր «Դասախոսություններ օպտիկայից և երկրաչափությունից» (1660—1670) աշխատությունում, նշելով, որ այդ անում է «բարեկամի խորհրդով» (ըստ երևույթին՝ Նյուտոնի խորհրդով)։



Գծ. 117.

Բարրոուն մուծում է ստանդարտ (միօրինակ) նշանակումներ կորի M կետի երկու կոորդինատների և նրանց աճերի համար (գծ. 117), ընդունելով՝

$$AP = f, \quad PM = m, \quad NR = e, \quad RM = a,$$

ընդ որում, այդ աճերը, NM աղեղի հետ միասին համարում է «անսահմանափակորեն փոքր» 3N կետի $f-e$ և $m-a$ կոորդինատները միմյանց հետ կապելով կորի հավասարումով, Բարրոուն ստացված առնչության մեջ գեն է նետում այն բոլոր անդամները, որոնք բոլորովին չեն պարունակում ո՛չ e,

---

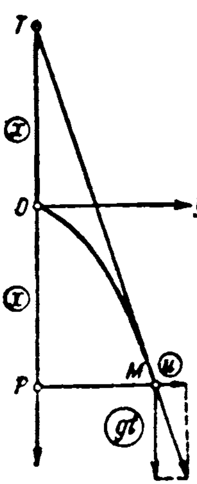
Այդպիսի* սկզբունք ձևակերպվել է ավելի վաղ, օրինակ, Կեպլերի կողմից։

ո՛չ a (դրանք փաստորեն փոխադարձաբար կոչնչացվեն), ինչպես նաև այն անդամները, որոնք e-ի և a-ի նկատմամբ առաջինից բարձր աստիճանի են («քանի որ այդ անդամները ոչ մի նշանակություն չեն ունենալու»)։ Այստեղ առաջին անգամ բացահայտորեն հանդես է գալիս բարձր կարգի փոքրություն ունեցող անդամները արհամարհելու սկզբունքը (Ֆերմայի մոտ միայն կարելի է կասկածել նրա մասին)։

Այժմ արդեն հեշտ է որոշել a-ի հարաբերությունը e-ին, կամ, որ միևնույնն է, PM = m օրդինատի հարաբերությունը TP = t ենթաշոշափողին։ Այդ երկու հարաբերությունների հավասարությունը բխում է TPM վերջավոր եռանկյան և NRM անվերջ փոքր եռանկյան նմանությունից (որի մեջ «կորի մասնիկը» փոխարեն, հենց նրա «անսահմանափակորեն փոքր լինելու» շնորհիվ, տեղադրվում է «շոշափողի մասնիկը»)։

Այդ նման եռանկյուններն այն ժամանակից ի վեր հաստատապես մտել են անվերջ փոքրերի անալիզի տեօրյայի մեջ։ Հետագայում Լայբնիցը դրանք անվանել է «խարակտերիստիկ» («բնութագրիչ») եռանկյուններ*։

221. Շոշափողներ տանելը կինեմատիկական նկատառումների օգնությամբ: Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ժիլ Պերսոն դե Ռոբերվալը (1602—1675) և իտալացի ֆիզիկոս ու մաթեմատիկոս Էվանջելիստա Տորիչելլին (1608—1647) մեկը մյուսից անկախ և գրեթե միաժամանակ (նրանց հետազոտություններն առաջին անգամ հրապարակվել են 1644 թ.) հանգել են կորերին շոշափող տանելու համար կինեմատիկական նկատառումներն օգտագործելու մտքին։ Այն է՝ եթե կորը հաջողվում է ներկայացնել որպես կետի այնպիսի շարժման հետագիծ, որը բաղադրվում է երկու ավելի պարզ շարժումներից, որոնց համար արագություններն անմիջականորեն տրված են իրենց մեծություններով և ուղղություններով, ապա բաղադրյալ շարժման արագության ուղղությունը, իսկ դրա հետ նաև հետագծի շոշափողի ուղղությունը, որոշվում է «զուգահեռագծի կանոնով»։



Գծ. 118.

Որպես օրինակ, բերենք պարաբոլին շոշափող տանելու վերաբերյալ խնդրի լուծումը, որը պատկանում է Տորիչելլիին։ Նա օգտագործում է իր ուսուցիչ Գալիլեյի կինեմատիկական նկատառումները, որոնք, կարճության համար, բնագրից նահանջելով, մենք կշարադրենք անալիտիկ երկրաչափության լեզվով։ Դիցուք կետը ժամանակի սկզբնական պահին գտնվում է O-ում (գծ. 118) և g արագացումով (նշանակում է՝ gt արագությամբ, եթե t-ով նշանակենք ժամանակը) ազատ ընկնում է ուղղաձիգ ուղիղով, որն ինքը տեղափոխվում է հորիզոնական ուղղությամբ u հաստատուն արագությամբ։ Այդ դեպքում, գծագրի նշանակումներով, t պահին կունենանք՝

$$x = \frac{1}{2} g t^2, \quad y = ut,$$

որտեղից, t-ն արտաքսելով, կգտնենք՝

$$y^2 = 2\frac{u^2}{g} x.$$

---

* Ի դեպ, նրա ալնդմամբ, անվերջ փոքր «խարակտերիստիկ» եռանկյան գաղափարը ինքը փոխ է առել ոչ թե Բարրոուից, այլ Պասկալից [տե՛ս n° **219**, գծ. 114]։

Այսպիսով, որպես կետի հետագիծ ստացվում է պարաբոլ (որը, ի հաշիվ u*-ի ընտրության, կարող է նույնացվել ցանկացած* $y^2 = 2px$ *պարաբոլի հետ)։ Ուղղաձիգ արագության հարաբերությունը հորիզոնականին հավասար է՝*

$$\frac{gt}{u} = \frac{gt^2}{ut} = \frac{2x}{y},$$

որտեղից և, հաշվի առնելով եռանկյունների նմանությունը, տեսնում ենք, որ շոշափողը պարաբոլի առանցքը հատում է նրա գագաթի ետևում՝ x *հեռավորության վրա [համ.* **210**, 2]։

Մենք հենց ա՛յս օրինակի վրա կանգ առանք այն կապակցությամբ, որ այստեղ շոշափող տանելու համար օգտագործված է կորով կատարվող շարժման վերլուծումը բաղադրիչ շարժումների՝ հորիզոնական և ուղղաձիգ ուղղություններով։

Հետագայում Բարրոուն, ընդհանրացնելով այդ միտքը, սկսեց արդեն կամայական կորով տեղի ունեցող շարժումը ներկայացնել բաղկացած երկու շարժումներից՝ հորիզոնական (որը միշտ կարելի է համարել հավասարաչափ) և ուղղաձիգ։ Այդ դեպքում TM *շոշափողի դիրքը (գծ. 118) կորոշվի* TP *և* PM *հատվածների հարաբերությամբ, որը հավասար է «անկման» արագության հարաբերությանը «կողքով շարժվելու» արագությանը։*

222. Շոշափող տանելու և քառակուսման խնդիրների փոխադարձությունը: *Բացառիկ հետաքրքրություն և կարևորություն են ներկայացնում Բարրոուի «Դասախոսություններ երկրաչափությունից» գրքի տասներորդ և տասնմեկերորդ դասախոսությունները. Նրանցում շոշափող տանելը կապվում է քառակուսման հետ։ Այս հարցին վերաբերող բազմաթիվ առաջադրություններից մենք կառանձնացնենք* XI *թեորեման 10-րդ դասախոսությունից և* XIX *թեորեման 11-րդ դասախոսությունից, որոնցում, առաջին անգամ անվերջ փոքրերի անալիզի նախապատմության մեջ, ուղղակիորեն հակադրվում են դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի երկու հիմնական խնդիրները՝ երկրաչափական ձևով, այն է՝ կորին շոշափող տանելը և կորի քառակուսումը*։ Այդ թեորեմները թարգմանելով անալիտիկ լեզվի, նրանց բովանդակությունը մեզ համար սովորական նշանակումներով կարելի է բանաձևել այսպես՝*

$$\text{I. } \textit{եթե } y = \int_0^x z\,dx, \quad \textit{ապա՝ } \frac{dy}{dx} = z\text{։}$$

$$\text{II. } \textit{եթե } z = \frac{dy}{dx}, \quad \textit{ապա՝ } \int_0^x z\,dx = y$$

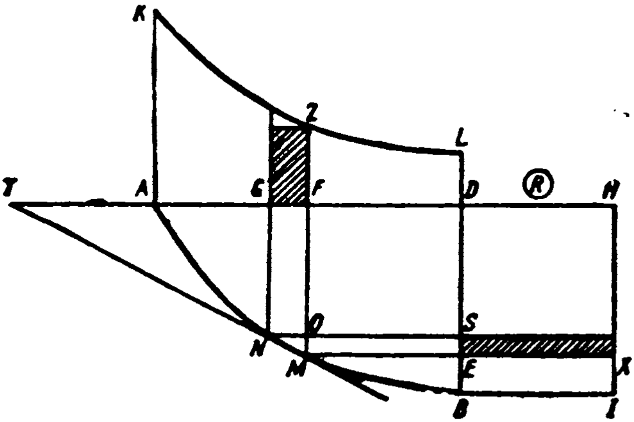
(ենթադրվում է, որ $y = 0$, *երբ* $x = 0$*)։*

Որպեսզի պատկերացում տանք այն մասին, թե իսկապես ի՞նչ է արված Բարրոուի մոտ, համառոտակի շարադրենք այս թեորեմներից երկրորդի ձևակերպումն ու ապացուցումը։

Տե՛ս Վիլայտների «Քրեստոմատիան», պրակ IV, *էջ 89։*

Տրված է AB կամայական կորը *(գծ. 119)*։ Դիցուք MT-ն նրա շոշափողն է M կետում։ KL երկրորդ կորը որոշենք $FZ:R = FM:TF$ պայմանով, որտեղ R-ը տրված հատված է ($= DH$)։ Այդ դեպքում ADLK մակերեսը հավասար է $DB \times R$ արտադրյալին։

Ապացուցման համար AB *գծի վրա վերցնենք* «MN *անսահմանափոքրին փոքր*



Գծ. 119.

հատված» և տանենք գծագրում ցույց տրված գծերը։ Այդ դեպքում (ինչպես արդեն գիտենք)՝

$$MO : NO = FM : TF = FZ : R,$$

որտեղից՝

$$NO \times FZ = MO \times R \quad \text{կամ՝} \quad GF \times FZ = ES \times EX.$$

«Բայց քանի որ բոլոր $GF \times FZ$ *ուղղանկյունները ցանկացած չափով քիչ են տարբերվում* ADLK *մակերեսից և բոլոր* $ES \times EX$ *համապատասխան ուղղանկյունները կազմում են* DHJB *ուղղանկյունը, ապա պնդումը բավական հասկանալի է»։*

Եթե ընդունենք $AF = x$, $FM = y$, $FZ = z$ *և* $R = 1$, *ապա, երկրորդ կորը որոշող պայմանի համաձայն, հենց կունենանք՝*

$$\frac{z}{1} \quad \frac{FM}{TF} = \frac{dy}{dx},$$

իսկ թեորեմայի եզրակացությունը համարժեք է նրան, որ՝

$$\int_{0}^{x} z\,dx = y \times 1 = y.$$

Իզուր կլիներ, սակայն փնտրել Բարրոուի մոտ նույնիսկ պարզ զուգադրությունը այդ երկու թեորեմների (գրքում դրանք իրարից բաժանված են երկու տասնյակ այլ թեորեմներով). ընդսմին նրանք գրեթե չեն էլ օգտագործվում։ Հենց այստեղ էլ նշանակություն է ունեցել այն հանգամանքը, որ Բարրոուն խոսում է երկրաչափական լեզվով, չտիրապետելով այն ընդհանուր հասկացություններին, միայն որոնք էլ հենց կարող էին լուսաբանել հարցի էությունը և լայն կիրառությունների ճանապարհ բացել։

223. Նախորդի ամփոփումը: Այժմ ամփոփենք այն արդյունքները, որոնց հասել էին XVII դարում «անվերջ փոքրերի անալիզի» ուղղությամբ՝ մինչև Նյուտոնի և Լայբնիցի հանդես գալը մաթեմատիկայի անդաստանում։

Ամենից ավելի արվել էր այն բնագավառում, որն այժմ կազմում է ինտեգրալ հաշվի հենք։ Այստեղ ոչ միայն մեծ քանակությամբ կոնկրետ արդյունքներ էին ստացվել քառակուսման, խորանարդման, աղեղների ուղղման, մակերևույթների հարթման և ծանրության կենտրոնների որոշման վերաբերյալ, այլև գիտակցվել էր կապը բոլոր նման խնդիրների միջև, որոնք ըստ սովորության բերվում էին դրանցից պարզագույնին՝ քառակուսման։ Կավալյերիի, Պասկալի և այլոց աշխատություններում սկսել էր արդեն բյուրեղանալ որոշյալ ինտեգրալի գաղափարը։ Հաշվվել էին փաստորեն մի շարք պարզագույն ինտեգրալներ, ավելի հաճախ երկրաչափական ձևով, բայց երբեմն նաև զուտ թվաբանորեն (Ֆերմա, Պասկալ, Վալլիս). գտնվել էին որոշ ինտեգրալներ այլ ինտեգրալների ձևափոխող զանազան առնչություններ (Ֆերմա, Պասկալ, Բարրոու)։

Այն բնագավառում, որն այժմ վերաբերում է դիֆերենցիալ հաշվին, Ֆերման տվել էր ինֆինիտեզիմալ բնույթի միօրինակ մեթոդ մեծագույն ու փոքրագույն արժեքների որոնման և շոշափողների կառուցման վերաբերյալ խնդիրների լուծման համար։ Նրա հետազոտությունները շարունակել էին մի շարք այլ հեղինակներ։ Սակայն այստեղ չէր հաջողվել պարզել այն հիմնական հասկացությունները, որոնք ընկած են հարցի բուն էությունում։ Առանձնակի տեղ են գրավում Ռոբերվալի և Տորիչելլիի փորձերը, որոնք շարունակեց Բարրոուն, կորին շոշափող տանելու խնդիրը լուծելու՝ ելնելով կինեմատիկական նկատառումներից (այդ հետազոտում իր արտացոլումը գտավ Նյուտոնի ըմբռնումներում)։

Վերջապես, ինչպես հենց նոր տեսանք, Բարրոուին հաջողվել էր մասնակի կամուրջ գցելու մի խմբի խնդիրներից դեպի մյուս խմբի խնդիրները։

Այսպիսով, արդեն հող էր պատրաստված նոր հաշվի համար, սակայն հաշիվ, որպես այդպիսին, դեռևս չկար։ Մինչդեռ, ինչպես հետագայում ցայտուն կերպով արտահայտել է Լայբնիցը, «այդպիսի հաջողություններից հետո գիտությանը առավել մեկ բան էր պակասում՝ Արիադնեի թելը խնդիրների լաբիրինթոսում, այն է՝ հանրահաշվի նման մի անալիտիկ հաշիվ»։ Այստեղ, ամենից առաջ, հարկավոր էր ընդհանուր ձևով սահմանել նոր հաշվի հիմնական հասկացությունները և փոխադարձ կապ ստեղծել նրանց միջև։ Այնուհետև, հարմար պայմանանշաններ (սիմվոլիկա) մուծելով, հարկավոր էր ստեղծել հաշվման ռեգուլյար (կանոնավոր) պրոցես կամ՝ ալգորիթմ։ Հենց այդ էլ արեցին Նյուտոնը և Լայբնիցը, մեկը մյուսից անկախ* և ընդսմին՝ տարբեր ձևերով։

Նախքան անվերջ փոքրերի անալիզին վերաբերող նրանց աշխատանքների ակնարկին անցնելը ցանկանում ենք անել նաև հետևյալ դիտողությունը հենց «անվերջ փոքրի» հասկացության մասին։ Այն ժամանակներում, ինչպես և հետագայում՝ երկար ժամա-

* Մենք բոլորովին մի կողմ ենք թողնում նոր հաշվի հայտնագործման առաջնության վերաբերյալ անհիմն վեճը, որ ծագել էր հետագայում։

նակ, անվերջ փոքր կամ անսահմանափակ փոքր ասելով հասկանում էին, հաճախ պարզորոշ չասելով այդ, այսպես ասած՝ ստատիկ, այսինքն՝ չփոփոխվող մեծություն, որը զրոյի հավասար չէ և միևնույն ժամանակ փոքր է (բացարձակ մեծությամբ) ամեն մի վերջավոր մեծությունից։ «Ակտուալ» անվերջ փոքրի այդ հասկացությունը, թվի և տարածության մեր ըմբռնման տեսակետից, հակասական է և առեղծվածային (միստիկական) բնույթ ունի։ Դրան հակադրվում է, մեզ համար այժմ սովորական դարձած, «պոտենցիալ» անվերջ փոքրի հասկացությունը որպես փոփոխական մեծություն, որը լոկ իր փոփոխման ընթացքում է դառնում փոքր (բացարձակ մեծությամբ) ցանկացած վերջավոր մեծությունից։ Անցումն անվերջ փոքրի մի հասկացությունից մյուսին հանդիպել է մեծ դժվարությունների, քանի որ պահանջում էր սահմանային պրոցեսի հստակ պատկերացում։ Այդ երկու ըմբռնումների պայքարն ընթերցողը կտեսնի նաև Նյուտոնի և Լայբնիցի աշխատություններում, որոնց դիտարկմանն ենք անցնում այժմ։

§ 2. ԻՍԱԱԿ ՆՅՈՒՏՈՆ (1642—1727)

224. Ֆլյուքսիաների հաշիվը: *Նյուտոնի հիմնական աշխատությունը, որտեղ շարադրվում է այդ հաշիվը, «Ֆլյուքսիաների և անվերջ շարքերի մեթոդը»* տրակտատն է։ Այն կազմված է եղել մոտավորապես 1671 թ. (Նրա հիմնական մտքերը ձևավորվել են, հավանաբար, ավելի վաղ), բայց լույս է տեսել միայն 1736 թ., հեղինակի մահից հետո։ Փոփոխական մեծությունները Նյուտոնն անվանում է «ֆլյուենտներ» (այսինքն՝ «ընթացող», «ընթացիկ» մեծություններ) և նշանակում է լատիներեն այբուբենի վերջին տառերով՝* u, y, x, z. *դրանք դիտարկվում են որպես աճող (կամ նվազող) ժամանակի ընթացքում։ Իսկ նրանց աճման արագությունները կոչվում են նրանց «ֆլյուքսիաներ» և նշանակվում են նույն տառերով՝ վրան կետ դրած՝* $\dot{u}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{z}$։ *Այսպիսով, Նյուտոնի համար արագությունն անմիջականորեն պարզ գաղափար է, որը սահմանման կարիք չի զգում, իսկ նրա միջոցով արդեն սահմանվում է ֆլյուքսիան, այսինքն, ինչպես մենք կասեինք, ֆլյուենտի ածանցյալն ըստ ժամանակի**։*

Ճշմարիտ է, Նյուտոնը վերապահություն է անում, որ ժամանակն այստեղ հասկացվում է ոչ տառացիորեն. որպես «ժամանակ» կարող է ընտրվել ամեն մի մեծություն, ասենք թե՝ x, *որը հավասարաչափ աճում է իսկական ժամանակի հետ միասին, այնպիսին, որ* $\dot{x} = 1$։ *Սակայն պետք է հիշել, որ բոլոր ֆլյուենտները կախված են այդ «ժամանակից», այսինքն՝ միևնույն համընդհանուր (ունիվերսալ) անկախ փոփոխականից։ Այսպիսով, ո՛չ մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաներ, ո՛չ էլ մասնակի ածանցյալներ Նյուտոնի մոտ չկան։*

---

* *Կա ռուսերեն թարգմանությունը. տե՛ս* „Математические работы Ньютона“ (ОНТИ, 1937), *էջ 25—166։*

** *Թեպետև Նյուտոնի սիմվոլիկայից այժմ չեն օգտվում, բայց մեխանիկայում ու ֆիզիկայում մինչև հիմա պահպանվել է սովորություն՝ ածանցյալներն ըստ ժամանակի նշանակել կետերով։*

Առաջին հիմնական խնդիրը Նյուտոնն այնուհետև ձևակերպում է այսպես.

«Ֆլյուենտների միջև տրված առնչությունով որոշել առնչություն ֆլյուքսիաների միջև»։

Այս խնդիրն ավելի ընդհանուր է, քան պարզապես տրված ֆլյուենտի ֆլյուքսիան գտնելը։ Սակայն Նյուտոնն այդ խնդիրն անմիջականորեն լուծում է միայն հանրահաշվական հավասարումների համար։ Որպես օրինակ նա վերցնում է հետևյալ հավասարումը՝

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0. \tag{1}$$

Նյուտոնի առաջարկած կանոնը հանգում է հետևյալին. x-ի աստիճան պարունակող յուրաքանչյուր անդամ բազմապատկվում է x-ի ցուցիչով և x-երից մեկը փոխարինվում է $\dot{x}$-ով. նման ձևով, y պարունակող յուրաքանչյուր անդամ բազմապատկվում է y-ի ցուցիչով և y-ներից մեկը փոխարինվում է $\dot{y}$-ով. այս եղանակով գտած բոլոր անդամների գումարը հավասարեցվում է զրոյի։ Տրված (1) օրինակում ստացվում է՝

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

Հեշտ է հասկանալ, թե այս կանոնն ինչպես է տարածվում ցանկացած թվով ֆլյուենտներ պարունակող հանրահաշվական հավասարման ընդհանուր դեպքի վրա։ Կոտորակների և արմատանշանների առկայության դեպքում Նյուտոնը դիմում է օժանդակ միջոցի։ Դիցուք տրված է հետևյալ հավասարումը՝

$$x^3 - ay^2 + \frac{by^3}{a+y} - x^2\sqrt{ay+x^2} = 0.$$

Նշանակելով՝

$$\frac{by^3}{a+y} = z \quad \text{և} \quad x^2\sqrt{ay+x^2} = u,$$

Նյուտոնը տրված հավասարումը հանգեցնում է հետևյալին՝

$$x^3 - ay^2 + z - u = 0,$$

որի նկատմամբ կիրառելի է նշված կանոնը՝

$$3x^2\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0.$$

Ինչ վերաբերում է $\dot{z}$-ին և $\dot{y}$-ին, դրանք էլ իրենց հերթին որոշվում են այն առնչություններից, որոնք ստացվում են, երբ նույն կանոնը կիրառում ենք հետևյալ հավասարումների նկատմամբ՝

$$az + yz - by^2 = 0, \quad axy^4 + x^6 - u^2 = 0.$$

Անցնելով իր կանոնի ապացուցմանը, Նյուտոնը մուծում է մի նոր գաղափար՝ ընթացիկ մեծությունների «մոմենտների» գաղափարը։ Այդ՝ «նրանց անսահմանափակորեն փոքր մասերն են, որոնց ավելացնելու շնորհիվ, ժամանակի անսահմանափակորեն փոքր մասերում անընդհատ աճում են մեծություններն իրենք»։ Այդ մոմենտները համեմատական են այն արագություններին, որոնցով փոփոխվում են մեծությունները, այսինքն՝ ֆլյուքսիաներին։ Մուծելով 0 անսահմանափակորեն փոքր մեծությունը (այդ զրոն չէ՛, այլ ժամանակի «ակտուալ» անվերջ փոքր աճը), Նյուտոնը մեծությունների մոմենտները գրառում է այսպես՝ $\dot{u}0$, $\dot{y}0$, $\dot{z}0$, $\dot{x}0$ (լայբնիցյան դիֆերենցիալնե՛րը)։

Բուն ապացուցումը Նյուտոնը կատարում է արդեն դիտարկված օրինակի վրա, հիմնականում կրկնելով Ֆերմայի պրոցեդուրան։ (1) հավասարության մեջ դնելով x-ի փոխարեն $x+\dot{x}o$ և y-ի փոխարեն՝ $y+\dot{y}0$, նա ստացածից անդամ առ անդամ հանում է (1)-ը, կրճատում է 0-ի վրա և, վերջապես, արհամարհում է այն անդամները, որոնք դրանից հետո էլ դեռևս պարունակում են 0. «քանի որ, պարզաբանում է Նյուտոնը, մենք 0-ն համարել ենք անվերջ փոքր մեծություն, ..., ուստի այն անդամները, որոնք նրանով բազմապատկված են, կարելի է ոչինչ համարել մյուսների համեմատությամբ»։ Ո՛չ այս սկզբունքը, ո՛չ էլ կանոնն ինքը ձևականորեն նոր չեն, սակայն էապես նորն այն է, որ արդյունքն այստեղ հաստատվում է ցանկացած բնույթի ֆլյուենտների համար, անկախ որևէ մասնավոր խնդիրներից։

Հետագայում Նյուտոնը մուծել է նաև ֆլյուքսիայի ֆլյուքսիան, այսինքն՝ երկրորդ ֆլյուքսիան՝ $\ddot{u}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{x}$, և անգամ բարձր կարգի ֆլյուքսիաներ։

Իր ֆլյուքսիաների հաշիվը Նյուտոնը նախ կիրառում է այն խնդիրների նկատմամբ, որոնց մասին արդեն բազմիցս խոսվել է վերևում։

«Որոշել մեծությունների մեծագույն և փոքրագույն արժեքները»:

Նախ ձևակերպվում է կանգառի սկզբունքը. «երբ մեծությունը բոլոր հնարավորներից մեծագույնն է կամ փոքրագույնը, նա այդ պահին չի ընթանում ո՛չ դեպի առաջ, ո՛չ դեպի ետ»։ Այստեղից կանոն՝ գտնել ֆլյուքսիան և այն հավասարեցնել զրոյի։ Ընդսմին, ինչպես ընդգծում է Նյուտոնը, ֆլյուենտը որոշող առընչությունը կարող է պարունակել նաև իռացիոնալություններ, ինչը չէին թույլատրում մինչ այդ հրապարակված կանոնները։

«Կորին շոշափող տանել»:

Հիմնական դեպքում, երբ անմիջականորեն տրված է հավասարումը կորի փոփոխական կետի x, y դեկարտյան կոորդինատների միջև, Նյուտոնը գտնում է Բարրոուի նման [n° **221**], միայն e և a անվերջ փոքր աճերը (կորուստները) նա փոխարինում է $\dot{x}.0$ և $\dot{y}.0$ մոմենտներով, այնպես որ (պահպանելով գծ. 117-ի նշանակումները)՝

$$PM : TP = \dot{y} : \dot{x}.$$

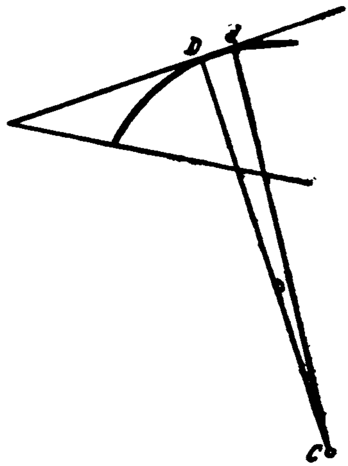
իսկ ֆլյուքսիաների հարաբերությունը որոշում է նշված կանոնով՝ կորի հավասարումից։ Նյուտոնը դիտարկում է շոշափող տանելու մի շարք այլ եղանակներ ևս, որոնք համապատասխանում են կորի տրման այլ եղանակներին։

Ըստ գրվածքի միանգամայն նոր է հետևյալ խնդիրը.

«Որոշել տրված որևէ կորի կորության մեծությունը տվյալ կետում»:

Ձևակերպելով այն, Նյուտոնն ավելացնում է՝ «Կորերի ուսմունքի մեջ քիչ կան այնպիսի խնդիրներ, որոնք դրանից առավել գեղեցիկ լինեին և առավել խորությամբ բացահայտեին նրանց (կորերի) բնույթը»։

Կորության գաղափարի սահմանումը չի տրվում։ Շրջանագծի համար՝ կորությունը միևնույնն է բոլոր կետերում, տարբեր շրջանագծերի համար այն հակադարձ համեմատական է տրամագծին։ Կորի կորությունը տվյալ կետում (գծ. 120) համընկնում *է այն շրջանագծի կորության հետ, որն ամենից ավելի է մերձենում կորին այդ կետի մոտակայքում (Նյուտոնը փաստորեն գտնում է, որ կորն ու շրջանագիծը միաձուլվում են* Dd *անվերջ փոքր աղեղի երկարությամբ)։ Եթե* C*-ն այդ շրջանագծի կենտրոնն է («կորության կենտրոնը»), ապա այնտեղ հատվում են կորի* CD *և* Cd *անվերջ մոտ նորմալները։ Շրջանագծի շառավղի («կորության շառավղի») համար Նյուտոնն արտածում է բանաձև, որը սոսկ գրառման ձևով է տարբերվում մեզ համար սովորական բանաձևից։*



Գծ. 120.

225. Ֆլյուքսիաների հաշվի հակադարձ հաշիվը. քառակուսումներ: *Առաջին հիմնական խնդրից հետո, Նյուտոնը «Ֆլյուքսիաների մեթոդում» ձևակերպում է նաև նրան հակադարձ երկրորդ խնդիրը.*

«Ֆլյուքսիաներ պարունակող տրված հավասարումով գտնել առնչությունը ֆլյուենտների միջև»:

Այս տեսքով սա (ինչպես մենք կասեինք այժմ)՝ սովորական դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրման խնդիրն է, որը շատ ավելի ընդհանուր է և դժվարին, քան անմիջականորեն ֆլյուենտը գտնելը իր ֆլյուքսիայով, այսինքն՝ նախնական ֆունկցիայի որոնումը։ Մենք այստեղ չենք զբաղվի նշված ընդհանուր խնդրով (Նյուտոնն այն լուծում է գերազանցապես անվերջ շարքերի օգնությամբ) և կանգ կառնենք միայն նախնական ֆունկցիան որոնելու խնդրի վրա, որը Նյուտոնը միշտ մեկնաբանում է երկրաչափորեն՝ որպես կորի քառակուսման խնդիր։

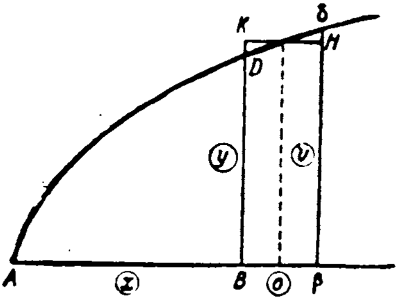
Հիմքում ընկած է մի հիմնական առաջադրություն այն մասին, որ (եթե օգտվենք մեզ համար սովորական տերմինաբանությունից) փոփոխական մակերեսի ածանցյալն ըստ աբսցիսի՝ օրդինատն է, այնպես որ մակերեսն ինքը օրդինատի համար հենց նախնական ֆունկցիա է [համմ. n°**156**]։

Հետաքրքրություն է ներկայացնում այս առաջադրության այն ապացուցումը, որը Նյուտոնը տվել է իր ավելի վաղ աշխատության մեջ, Ֆլյուքսիաների մեթոդի ձևակերպումից առաջ։ Ցանկանալով հաստատել, որ* $y = ax^{\frac{m}{n}}$ *կորի համար* z *մակերեսը (հաշված այն կետից, որի համար* $y = 0$) *կարտահայտվի* $z = \frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ *բանաձևով, Նյուտոնը գնում է հակադարձ ճանապարհով և մակերեսի արտահայտությունից ստանում է արտահայտություն օրդինատի համար։ Նա սկսում է մասնավոր*

* *«Անալիզ անվերջ թվով անդամներով հավասարումների օգնությամբ». տե՛ս* „Математические работы Ньютона“, *էջ 3 — 24։ Այս աշխատությունը գրվել է դեռևս 1666—1667 թ. թ., բայց տպագրվել է միայն 1711 թ.։*

դեպքից. եթե $z = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, ապա $y = x^{\frac{1}{2}}$. վերարտադրենք սրան վերաբերող դատողությունները, որը միանգամայն ընդհանուր բնույթ ունի։

Եվ այսպես, դիցուք (գծ. 121)՝ $AB = x$, $BD = y$ և մակ. $ADB = z$։ Նշանակենք $B\beta = 0$ (այստեղ 0-ն դեռևս չի՛ նշանակում ժամանակի աճը, ինչպես ֆլյուքսիաների տեսության մեջ) և մուծենք $BK = v$ այնպես, որպեսզի ov մակերես ունեցող $B\beta HK$ ուղղանկյունը հավասարամեծ լինի $B\beta\delta D$ պատկերին. այդ դեպքում $A\beta = x \quad o$ և $A\delta\beta = z + ov$։



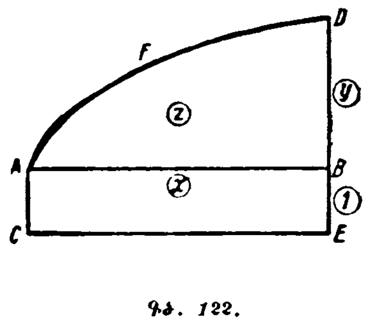
Գծ. 121.

Այս արտահայտությունները x-ի և z-ի փոխարեն տեղադրելով $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$ կամ $\frac{4}{9} x^3 = z^2$ առնչության մեջ, հավասար անդամները դեն նետելու և o-ի վրա կրճատելու սովորական գործողություններից հետո, կստանանք հետևյալ հավասարությունը՝

$$\frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2) = 2zv + ov^2,$$

«Եթե այժմ, շարունակում է Նյուտոնը, ընդունենք, որ $B\beta$-ն անվերջ նվազում է և չքանում կամ որ o-ն զրո է, ապա y-ն ու v-ն դառնում են հավասար և o բազմապատկիչ պարունակող անդամները չքանում են»։ Այստեղից արդեն հեշտությամբ ստացվում է պահանջվող արդյունքը՝ $y = x^{\frac{1}{2}}$,

Քանի որ v-ն, փաստորեն, հենց մակերեսի աճի $(= ov)$ հարաբերությունն է աբսցիսի աճին $(= o)$, և այն պնդումը, թե v-ն դառնում է օրդինատին հավասար o-ն անվերջորեն նվազելիս, կապված չէ դիտարկվող մասնավոր խնդրի հետ, ուստի ըստ էության այս էլ հենց ապացուցումն է [համմ. n°**156**] վերևում ձևակերպված առաջադրության։ Նկատենք, որ $o = B\beta$-ն այստեղ ավելի շուտ անվերջ փոքր է մե՛ր իմաստով և զգացվում է որոշակի ակնարկում սահմանային անցման մասին։



Գծ. 122.

Այլ կերպ է վարվում Նյուտոնը «Ֆլյուքսիաների մեթոդում»։ ADB փոփոխական կորագիծ պատկերի հետ միասին նա դիտարկում է նաև AC 1 օրդինատ ունեցող ACEB փոփոխական ուղղանկյունը (գծ. 122)։ Երկու մակերեսներն էլ «առաջանում են» համապատասխանորեն, BD և BE ուղիղների շարժումով։ «Այդ դեպքում այդ մակերեսների աճերը* և նրանց ֆլյուքսիաները

* Այս անգամ, երևի, «ակտուալ» անվերջ փոքր։

միշտ կլինեն նույն հարաբերությամբ, ինչ որ նրանց գծող ուղիղները։ Նախկին նշանակումներով (հաշվի առնելով, որ ուղղանկյան մակերեսն x է), կունենանք՝

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{y}{1}, \text{ կամ՝ } \dot{z} = y\dot{x}։$$

Իսկ եթե ընդունենք, որ $\dot{x} = 1$, պարզապես կստանանք՝ $\dot{z} = y$։ Այս երկու արդյունքներից էլ Նյուտոնը շարունակ օգտվում է։

Այժմ հեշտությամբ լուծվում է հետևյալ խնդիրը՝

«Գտնել որքան ցանկանաք կորեր, որոնց մակերեսները ներկայացվում են վերջավոր հավասարման օգնությամբ»։

Այսինքն, նախապես տրված է կամայական հավասարում x-ի և z-ի միջև, նրանից պետք է գտնել հավասարում x-ի և $\dot{z} = y$-ի միջև. այս ճանապարհով էլ հենց ստացվում է այն կորը, որի մակերեսն ունի նախապես հայտնի արտահայտություն աբսցիսի միջոցով (կամ, ընդհանրապես, նրա հետ կապված է հայտնի հավասարումով)։

Դրանից անմիջապես հետո Նյուտոնը դնում է այսպիսի խնդիր՝

«Գտնել որքան ցանկանաք կորեր, որոնց մակերեսները տրված որևէ կորի մակերեսի հետ կապված են վերջավոր հավասարումով»։

Կարճ ասած, այստեղ մի ինտեգրալ բերվում է մյուսին՝ տեղադրման օգնությամբ, սակայն գործողությունը կատարվում է, ինչպես և հենց նոր, հակադարձ կարգով՝ որոնվում է այն ֆունկցիան, որի ինտեգրալը նախապես տրված տեղադրության օգնությամբ կարող է արտահայտվել տրված ինտեգրալի միջոցով՝ նախապես տրված հավասարումով։

Օգտվելով այս երկու միջոցներից, Նյուտոնը կազմել է ընդարձակ «կատալոգներ» («ցուցակներ») այնպիսի կորերի, որոնց քառակուսումը կատարվում է կամ անմիջականորեն և կամ էլ, նշված տեղադրությունների օգնությամբ, բերվում է էլիպսի կամ հիպերբոլի քառակուսման («որոնց մակերեսները կարելի է համարել որևէ ձևով հայտնի)։ Բերումն կոնական հատույթների քառակուսման փաստորեն նշանակել է օգտագործել պարզագույն տրանսցենդենտ ֆունկցիաներ՝ լոգարիթմական և հակադարձ շրջանային, որոնք այն ժամանակ դեռևս մուծված չէին անալիզի մեջ։

*Հատկապես քառակուսումների հաշվին է նվիրված Նյուտոնի մի այլ աշխատություն՝ «Քննախոսություն կորերի քառակուսման վերաբերյալ», որը գրվել է «Ֆլյուքսիաների մեթոդից» անմիջապես հետո և լույս է տեսել 1704 թ.**։ *Այնտեղ դիտարկվում են նաև ավելի բարդ տեսքի արտահայտություններ, օրինակ՝*

$$z^{\theta}(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \dots)^{\lambda}(a + bz^{\eta} + c_z{}^{2\eta} + \dots),$$

որտեղ θ-ն, λ-ն, η-ն ռացիոնալ ցուցիչներ են։ Որպես մասնավոր դեպք նշենք բինոմային ինտեգրալների գտնելը, այսինքն՝ նախնական ֆունկցիաների որոնումը

$$z^{\circ}(e + fz^{\eta})^{\lambda}$$

տեսքի արտահայտությունների համար։ Ի միջի այլոց, այդ մասին ավելի մանրամասն

---

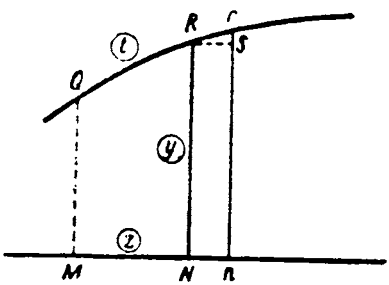
* *Տե՛ս* „Математичские работы Ньютона“, *էջ 167—193։ «Քննախոսության» ներածությունը և այլ մասեր իրենց վրա կրում են հետագա մշակման հետքեր։*

Նյուտոնը խոսում է Լայբնիցի համար նախատեսված նամակներից մեկում (1676). Նա գրում, որ քառակուսումը կատարվում է հանրահաշվորեն, եթե $\frac{\theta+1}{\eta}$-ն ամբողջ (դրական) թիվ է կամ $\frac{\theta+1}{\eta}+\lambda$-ն ամբողջ (բացասական) թիվ է [համմ. n° **169**]։

Ինչ վերաբերում է քառակուսումների հաշվի կիրառություններին, ապա «Ֆլյուքսիաների մեթոդում» Նյուտոնը պարզորոշ ընդգծում է, որ կորերի մակերեսների աղյուսակներից կարելի է օգտվել նաև այլ բնույթի մեծություններ իրենց տրված ֆլյուքսիաներով որոշելու համար։ Որպես օրինակ կարող է ծառայել հետևյալ խնդիրը՝

«Որոշել կորերի երկարությունները»։

Հարցը հանգում է $t = QR$ *աղեղը (գծ. 123) իր* $\dot{t} = \sqrt{\dot{z}^2 + \dot{y}^2}$ *ֆլյուքսիայով որոշելուն [համմ. n°* **202**, *(5)], որտեղ* $z = MN$*-ը և* $y = NR$*-ը* y *կորի* R *փոփոխական կետի աբսցիսն ու օրդինատն են, իսկ* $\dot{t}$*-ի բանաձևն անմիջականորեն բխում է* RSr *ուղղանկյուն եռանկյան դիտարկումից, որի համար կողմեր են ծառայում* z, y, t *մեծությունների «մոմենտները»։*



Գծ. 123.

226. Նյուտոնյան «Հիմունքները» և սահմանների տեսության ծագումը: *Նյուտոնի բոլոր աշխատություններից ավելի մեծ փառք բերեց նրան «Բնափիլիսոփայության մաթեմատիկական հիմունքները»* աշխատությունը, որը լույս տեսավ 1686—1687 թ. թ.։ Այդ աշխատությունում դրված են հիմունքները ողջ մեխանիկայի ընդհանրապես և երկնային մեխանիկայինը՝ առանձնապես։*

Նյուտոնը մի նամակում ասում է, որ իր «հիմունքների» կարևորագույն առաջադրություններն ինքը հայտնաբերել է ֆլյուքսիաների մեթոդով։ Սակայն բուն շարադրանքի վրա այդ հանգամանքը ամենևին չի արտացոլվել. սովորաբար բերվում են, ինչպես հնում անում էին, առաջադրությունների ապացուցումները միայն սինթետիկորեն երկրաչափական ձևով։

Սակայն դրա հետ միասին «Հիմունքները» պարունակում են նաև էապես նոր և կարևոր բան մեթոդոլոգիական տեսակետից։ Հենց առաջին գրքի («Մարմինների շարժման մասին») առաջին գլուխը Նյուտոնը նվիրում է յուրատեսակ սահմանների տեսության՝ «Առաջին և վերջին հարաբերությունների մեթոդը» անունով։

Երկու մեծությունների «առաջին հարաբերություններ» կամ «վերջին հարաբերություններ» կոչվում են նրանց սահմանային հարաբերությունները։ Առաջին տերմինը Նյուտոնն օգտագործում է երկու «ծագող», «սկզբնավորվող» (ան-

* *Կա ակադեմիկոս Ա. Ն. Կռիլովի կատարած ռուսերեն թարգմանությունը (1915—1916), որն արտատպված է նաև* „Собрание сочинений акад. А. Н. Крылова" VII *հատորում (1936)։*

վերջ փոքր) մեծությունների հարաբերության սահմանը նշանակելու համար, իսկ երկրորդը՝ ինչպես «չքացող», «անհետացող» (անվերջ փոքր) մեծությունների հարաբերության, այնպես էլ վերջավոր և նույնիսկ անվերջ մեծ մեծությունների հարաբերության համար։ Նյուտոնը խոսում է նաև «ծագող մեծությունների առաջին գումարի» կամ «չքացող մեծությունների վերջին գումարի» մասին։ Կարևոր է ընդգծել, որ այդ բոլոր հասկացությունները չեն սահմանվում, և նրանց բովանդակությունը պարզվում է միայն նրանց կիրառման եղանակից։ Նյուտոնի տերմինաբանության յուրատեսակությունը կապված է այն պատկերացման հետ, որ փոփոխականը հասնում է իր սահմանին, որն, այդպիսով, հանդիսանում է նրա համար «վերջին» («առաջին») արժեք։

Ողջ Նյուտոնյան սահմանների տեսությունը բաղկացած է տասնմեկ լեմմաներից, որոնք երկրաչափական բովանդակություն ունեն։ Ինչպես Նյուտոնը նշում է դրանց հաջորդող «Ուսուցում»-ի մեջ, դրանք բերվում են ապացուցումները կրճատելու նպատակով։ Նույն բանին կարելի էր հասնել նաև անտրոհելիների մեթոդի օգնությամբ, սակայն վերջինս «պակաս երկրաչափական է»։ «Ուստի, շարունակում է նա, եթե հետագա ամբողջ շարադրանքում ես դիտարկում էլ եմ որոշ մեծություններ որպես կարծես թե կազմված հաստատուն մասնիկներից, ... ապա պետք է հասկանալ, որ այդ՝ անտրոհելիներ չեն, այլ տրոհելի չքացող մեծություններ, որ այդ՝ ո՛չ վերջավոր մեծությունների գումարներ, ո՛չ էլ դրանց հարաբերություններ են, այլ չքացող մեծությունների վերջին գումարներ և վերջին հարաբերություններ են...»։ Եվ այնուհետև՝ «եթե հետագայում խոսքի պարզության համար ես խոսելու եմ չափազանց փոքր կամ չքացող կամ ծագող մեծությունների մասին, ապա այդպես ասելով չպետք է հասկանալ որոշակի մեծությամբ քանակություններ, այլ պետք է դրանք դիտարկել որպես անսահմանորեն փոքրացող մեծություններ»։ Այսպիսով, այստեղ հռչակվում է մի տեսակետ, որն սկզբունքորեն մոտ է ժամանակակից տեսակետին. «ակտուալ» անվերջ փոքրերի փոխարեն սկսում են դիտարկվել «պոտենցիալ» անվերջ փոքրեր և նրանց գումարների ու հարաբերությունների սահմանները։

227. Հիմնավորման հարցերը Նյուտոնի մոտ: *Մենք տեսնում ենք, որ Նյուտոնի դիրքորոշումն իր հաշվի հիմնավորման հարցերում, քսան տարիների ընթացքում, զգալի էվոլյուցիա է ունեցել։*

«Ֆլյուքսիաների մեթոդում», որն արտացոլում է նրա հին հայացքները, մեծությունների «մոմենտները» բացահայտ կերպով «ակտուալ» անվերջ փոքրեր են, մեծության աճումը հանգեցվում է հաջորդաբար այդպիսի «մոմենտներ» ավելացնելուն։ Ազատորեն օգտագործվում է վերջավոր մեծությունների համեմատությամբ անվերջ փոքր մեծությունների արհամարհման սկզբունքը:

«Հիմունքներում» Նյուտոնն արդեն հրաժարվում է անտրոհելիների տեսակետից։ «Կորերի քառակուսման» ներածությունում, որն ավելի ուշ է գրված, նա ասում է՝ «Ես այստեղ մաթեմատիկական մեծությունները դիտարկում եմ ոչ թե բաղկացած մանրագույն մասնիկներից, այլ որպես առաջացած անընդհատ շարժումով»։ «Հիմունքների» երկրորդ հրատարակության (1713) մեջ մի դիտողությունից երևում է, որ հենց «մեծությունների առաջացման եղանակում» է Նյուտոնը տեսնում իր մեթոդի գլխավոր տարբերությունը Լայբնիցի մեթոդից։ Սահմանների այն տեսությունը, որը, թեպետև սաղմնային ձևով, մենք գտնում ենք «Հիմունքներում», ներկայացնում է էական առաջընթաց նոր անալիզի հիմնավորման հարցում։ Հետագա-

յում, արդեն հիշատակված «կորերի քառակուսման» նախաբանում, Նյուտոնը x^n-ի ֆլյուքսիայի հենց արտածումը ևս կապում է երկու չքացող մեծությունների «վերջին հարաբերությունը» դիտարկելու հետ, այսինքն, ըստ էության՝ սահմանային անցման հետ։

Սակայն Նյուտոնն այնուամենայնիվ մինչև վերջն այդ տեսակետին չի մնում։ Ոչ ուշ, քան «Սկզբունքների» երկրորդ գրքում, նա նորից է մուծում մեծությունների «մոմենտների» ոչ պարզ հասկացությունը, այսինքն՝ մեծությունների «ակընթարթային աճումները կամ նվազումները»։

Այդ «մոմենտների» վերաբերյալ ստացվում են մի շարք պարզ պնդումներ (այդ ժամանակ, պետք է ասել՝ համարժեք ձևերով, Լայբնիցի կողմից արդե՛ն հրապարակված)։ Ահավասիկ, օրինակ, դրանցից մեկը. եթե A, B *մեծությունների մոմենտներն են* a-*ն,* b-*ն, ապա* A·B *արտադրյալի մոմենտն է՝* Ab + Ba*։ Հետաքրքրական է, որ այն ապացուցելիս Նյուտոնը չի ելնում բնականաբար առաջացող հետևյալ հավասարությունից՝*

$$(A+a)\cdot(B+b)-A\cdot B=Ab+Ba+ab,$$

քանի որ այդ դեպքում նա պետք է արհամարհեր a·b *անդամը մյուսների համեմատությամբ (ո՛րն էլ հենց անում է Լայբնիցը), այլ դիմում է խորամանկության, այն է՝ օգտվում է հետևյալ հավասարությունից՝*

$$\left(A+\frac{1}{2}a\right)\left(B+\frac{1}{2}a\right)-\left(A-\frac{1}{2}a\right)\left(B-\frac{1}{2}a\right)=Ab+Ba,$$

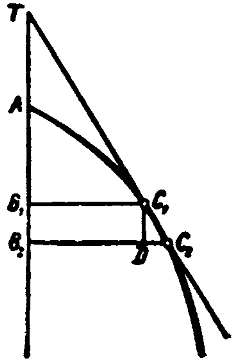
որը, ճշմարիտ է, միանգամից բերում է հարկավոր արդյունքին, սակայն ամենևին չի բխում հարցի էությունից։

Այսպիսով, Նյուտոնի փորձը՝ իր «Առաջին և վերջին հարաբերությունների մեթոդով» նոր հաշվի հուսալի հիմքը գցելու, *հետևողական չէր։ Այն հետագա զարգացում է ստացել և ավարտվել միայն ավելի քան հարյուրամյակ հետո՝ արդեն* XIX *դարի սկզբի մաթեմատիկոսների աշխատություններում* [n° **228**]։

§ 3. ԳՈՏՖՐԻԴ ՎԻԼՀԵԼՄ ԼԱՅԲՆԻՑ (1646—1716)

228. Նոր հաշիվ ստեղծելու առաջին քայլերը: *Ի տարբերություն Նյուտոնի, Լայբնիցից հետո մնացել է հսկայական ձեռագիր ժառանգություն, ընդ որում՝ ժամանականշումներով, որ հնարավորություն է տալիս վերականգնելու նրա մտքերի զարգացման հաջորդականությունը։ Նրա ձեռագրերից մեկում, որի վրա նշված է 1675 թ., առաջին անգամ հանդիպում է $\int$ նշանը. «Հարմար կլինի, ասում է Լայբնիցը, գրել $\int$ —* բոլոր-*ի փոխարեն, $\int l$ —* բոլոր *l-ի փոխարեն, այսինքն՝ l-*երի գումար-*ի փոխարեն» (l-ը այստեղ նշանակում է գ ի ծ)։ Շուտով երևան է գալիս նաև* տարբերության d *նշանը, ստացվում են այդ նշանների վերաբերյալ պարզագույն բանաձևեր։ Միայն աստիճանաբար է Լայբնիցն սկսում գրել* dx *կամ* dy $\int$ *նշանի տակ։*

1676—1677 թ. թ. ընթացքում Նյուտոնը և Լայբնիցը (երրորդ անձի միջոցով) երկու անգամ նամակներ են փոխանակել։ Նյուտոնը այդ նամակներում շարադրում *է իր արդյունքներն անվերջ շարքերի վերլուծման և քառակուսումների վերաբերյալ։ Հիշատակելով իր պատրաստած տրակտատի մասին (ըստ երևույթին, ի նկատի է ունեցել «Ֆլյուքսիաների մեթոդը»), Նյուտոնը հաղորդում է, որ ինքը տիրապետում է մի մեթոդի, որի օգնությամբ ոչ միայն լուծվում են շոշափողի կամ մեծագույն ու փոքրագույն արժեքների վերաբերյալ խնդիրները, այլև հեշտանում է քառակուսումների հարցը. սակայն բուն մեթոդը նա թաքցնում է։ Լայբնիցը դրան անմիջապես պատասխանում է իր մեթոդի շարադրումով, ճիշտ է սահմանափակվելով միայն դիֆերենցիալ հաշվով։ Նա գրում է.*



Գծ. 124.

«TB_1 *հատվածը (գծ. 124) հարաբերում է* B_1C_1 *օրդինատին* ինչպես* C_1D*-ն (*AB_2, AB_1 *երկու աբսցիսների տարբերությունը)* DC_2*-ին (երկու օրդինատների տարբերության)... Այստեղից պարզվում է, որ շոշափողը գտնելը ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ օրդինատների տարբերությունը գտնել, եթե հարկ կա՝ աբսցիսների տարբերությունն ընդունել միմյանց հավասար։*

Ուստի, եթե այսուհետև dy *անվանենք երկու մոտակա* y*-ների տարբերությունը և* dx*՝ երկու մոտակա* x*-երի տարբերությունը, ակներև է, որ* $d(y^2)$*-ն* $2y\,dy$ *է,* $d(y^3)$*-ը՝* $3y^2dy$ *է և այլն։ Օրինակի համար՝*

$$dy^2 = (y + dy)^3 - y^3$$

կամ, եթե բաց թողնենք փոխադարձ ոչնչացնող մեծությունները, ինչպես և $(dy)^3$ *քառակուսին՝ «այն հիման վրա, որը հայտնի է մեծագույնների և փոքրագույնների մեթոդից»**, ապա կլինի՝* $d(y^2) = 2ydy$*։*

Այնուհետև, Լայբնիցը բերում է արտադրյալի և արմատի (արմատը դիտարկելով որպես աստիճան) դիֆերենցման բանաձևերը, դիֆերենցում է նաև ավելի բարդ արմատանշանային արտահայտություններ, ընդգծելով, որ «շատ զարմանալի և արտակարգ հարմար ձևով ստացվում է, որ dy*-ն ու* dx*-ը միշտ գտնվում են իռացիոնալ կապից դուրս»։*

229. Առաջին տպագիր աշխատությունը դիֆերենցիալ հաշվի վերաբերյալ: *Միայն 1684 թվականին է տպագրվել Լայբնիցի առաջին մեմուարը երկարաշունչ վերնագրով՝ «Մեծագույնների ու փոքրագույնների, ինչպես և շոշափողների նոր մեթոդ, որի համար խոչընդոտ չեն ծառայում ո՛չ կոտորակային, ո՛չ էլ իռացիոնալ մեծությունները, և դրա համար հաշվի հատուկ տեսակ»***։*

Այստեղ Լայբնիցն սկզբում փորձում է խուսափել անվերջ փոքրերից և փոփոխական մեծությունների «տարբերությունների» (differentia) *ու «դիֆերենցիալների»*

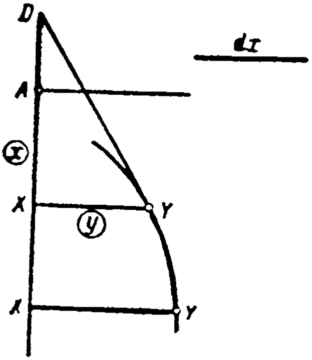
---

* *Այստեղ և հետագայում պետք է ի նկատի ունենալ, որ Լայբնիցը սովորաբար աբսցիսները վերցնում է ուղղաձիգ ուղղությամբ, իսկ օրդինատները՝ հորիզոնական։*

** *Ակնարկ է Ֆերմայի և այլոց մասին, որոնք լուծել էին մեծագույն և փոքրագույն արժեքները որոնելու խնդիրը։*

*** *Ռուսերեն լեզվով թարգմանված կան* „Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница“ (Успехи математических наук, т. III, в. 1, 1948, *էջ 166—173)։*

(quantitas diffetentialis) *Նկատմամբ կանգնում է այլ տեսակետի վրա, քան Նյուտոնին գրված նամակում, որ վերևում մեջբերվեց։ Դիցուք՝ (գծ. 125) YY-ը կամայական կոր է, Y-ը՝ փոփոխական կետ նրա վրա, որն ունի* AX = x *աբսցիս և* YX = y *օրդինատը։* dx-*ով Լայբնիցը նշանակում է պարզապես կամայապես վերցրած հատված։ Եթե* YD-*ն կորի շոշափողն է* Y *կետում, ապա այն հատվածը, որը հարաբերում է* dx-*ին այնպես, ինչպես* y *օրդինատը՝* XD-*ին (ենթաշոշափողին), կոչվում է* dy*։*



Գծ. 125.

Այսպիսով, ի տարբերություն Նյուտոնի, որի համար նախասկզբնական հասկացությունը արագությունն էր, Լայբնիցի մոտ այստեղ նախասկզբնական հասկացություն հանդիսանում է շոշափողը։

Այնուհետև Լայբնիցը հաղորդում է, առանց որևէ արտածման, «հաշվի կանոնները», որոնք վերաբերում են հաստատունի, գումարի, տարբերության, արտադրյալի, քանորդի, աստիճանի, արմատի դիֆերենցմանը։ «Եթե գիտենք այդ հաշվի, որը ես դիֆերենցիալ հաշիվ եմ անվանում, այսպես ասած, ալգորիթմը, ապա... կարելի կլինի գտնել մեծագույններն ու փոքրագույնները, ինչպես և շոշափողները, անհրաժեշտություն չզգալով վերացնելու կոտորակները և իռացիոնալությունները..., ինչպես այդ հարկ էր լինում, սակայն, անել, մինչև այժմ հրապարակված մեթոդներից օգտվելիս»։ Ինչ վերաբերում է այդ բոլորի ապացուցմանը, ապա դրա համար պետք է ի նկատի ունենալ, որ* dx-*ը և* dy-*ը, ... կարելի է համարել համապատասխանաբար համեմատական «*x-*ի,* y-*ի, ... ակնթարթային աճումներին կամ նվազումներին»։ Այսպիսով, վերջին հաշվով հարցը այնուամենայնիվ հանգում է անվերջ փոքրերի դիտարկմանը, ինչպես և Նյուտոնին գրված նամակում։*

Լայբնիցը նշում է, որ մեծագույն կամ փոքրագույն օրդինատը որոշվում է այն պայմանով, որ շոշափողը չի թեքված ո՛չ դեպի մեկ, ո՛չ էլ դեպի մյուս կողմը, այսինքն՝ նրանով, որ $dy = 0$. *այդ պահին օրդինատները «ո՛չ աճում են, ո՛չ էլ նվազում, այլ գտնվում են դադարում»։ Նա մեծագույն արժեքը փոքրագույնից տարբերում է նրանով, թե կորը դեպի աբսցիսների առանցքին ուղղված է իր գոգավորությամբ, թե՞ ուռուցիկությամբ, իսկ դրա մասին էլ դատում է* d dy-*ի նշանով։ Վերջապես, նա հետազոտում է նաև շրջման կետերը, (թույլատրելով, սակայն, այստեղ անճշգրտություններ)։*

Վերջում Լայբնիցն իր մեթոդով լուծում է մի շարք խնդիրներ, այդ թվում հետևյալ նշանավոր խնդիրը, որով զբաղվել էին Ֆերման և XVII *դարի մյուս գիտնականները.* ինչպիսի՞ն պետք է լինի լույսի ճանապարհը մեկ միջավայրի C կետից մինչև մյուս միջավայրի E կետը *(գծ. 126)*, որպեսզի լույսն այն անցնի կարճագույն ժամանակամիջոցում: *Լայբնիցը մուծում է դիտարկվող միջավայրերի* h *և* r *«խտությունները» («դիմադրության իմաստով, որին լույսի ճառագայթները ենթարկվում են այդ միջավայրերում») և* SS *ուղիղի վրա, որը պատկերում է միջավայրերը մի-*

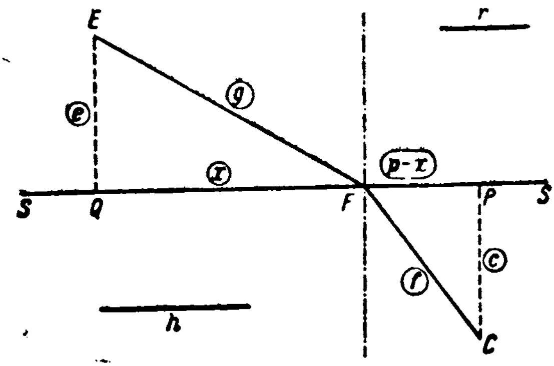
** Նրանցից մի քանիսում պատահում են կրկնակի նշաններ այն կապակցությամբ, որ ենթաշոշափողն օժտված չէ նշանով։*

միանցից բաժանող հարթությունը, որոնում է այնպիսի F *կետ, որպեսզի* CFE *ճանապարհը «լինի ամենահեշտը բոլոր հնարավորներից», այսինքն, որպեսզի*

$$w = CF \cdot h + FE \cdot r$$

մեծությունը լինի փոքրագույնը։ Գծագրի նշանակումներով՝

$$w = hf + rg = h\sqrt{(p-x)^2 + c^2} + r\sqrt{x^2 + e^2}.$$



Գծ. 126.

Որոնելի x*-ը որոշվում է* $dw = 0$ *պայմանից, կամ՝*

$$\frac{h(p-x)}{f} = \frac{rx}{g},$$

որը կարելի է արտագրել նաև այսպես՝

$$\frac{p-x}{f} : \frac{x}{g} = r : h,$$

Հեշտ է նկատել, որ սրանով արտահայտված է ֆիզիկայի հետևյալ հայտնի օրենքը. անկման և անդրադարձման անկյունների սինուսները հակադարձ համեմատական են երկու միջավայրերի օ պ տ ի կ ա կ ա ն խտություններին։ *«Ուրիշ ամենագիտուն մարդիկ, եզրակացնում է Լայբնիցը, հարկադրված են եղել բարդ ճանապարհներով հասնելու նրան, որը այս հաշվի մեջ փորձառու մարդը կկատարի երեք տողում»։*

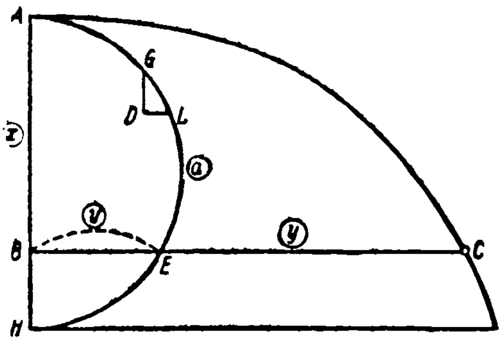
230. Առաջին տպագիր աշխատությունը ինտեգրալ հաշվի վերաբերյալ։ *1686 թ. Լայբնիցը հրապարակել է «Խոր երկրաչափության և անորոշելիների, ինչպես և անվերջների անալիզի մասին»* մեմուարը, որտեղ առաջին անգամ հանդիպում է* $\int$ *նշանը (այս անգամ՝ փոքրատառ* s*-ի տեսքով)։*

Սկզբում խոսքը վերաբերում է Բարրոուի մի թեորեմայի. Եթե աբսցիսը, օրդինատը և ենթանորմալը նշանակենք y, x *և* p, *ապա՝* $p\,dy = x\,dx$ *(այս հեշտ է*

* *Տե՛ս* „Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница", *էջ 175—177։*

ստանալ, օգտվելով dy *և* dx *էջեր ունեցող անվերջ փոքր «խարակտերիստիկ» եռանկյունից)։ «Եթե այս տարբերական (դիֆերենցիալ) հավասարումը դարձնենք գումարողական հավասարում, ապա կլինի՝* $\int p\,dy = \int x\,dx$*։ Բացի այն բանից, ինչ ես շարադրել եմ իմ՝ շոշափողների մեթոդում, երևում է, որ* $d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x\,dx$*. Հետևապես նաև հակադարձաբար՝* $\frac{1}{2}x^2 = \int x\,dx$ *(քանի որ մեզ մոտ գումարներն ու տարբերությունները կամ՝* $\int$*-ը և* d*-ն փոխհակադարձ են, ինչպես աստիճաններն ու արմատները սովորական հաշվում)»։ Այստեղից՝* $\int p\,dy = \frac{1}{2}x^2$*, որը և Բարրոուի թեորեմայի բովանդակությունն է կազմում։*

Լայբնիցը հաստատում է, որ իր հաշիվը հնարավորություն է տալիս հավասարումների միջոցով արտահայտելու նաև «տրանսցենդենտ», այսինքն՝ ոչհանրահաշվական գծերը, օրինակ՝ ցիկլոիդը։ Մենք կշարադրենք մեմուարի համապատասխան տեղը, լրացնելով հենց Լայբնիցի այն պարզաբանումներով, որոնք նա դրա վերաբերյալ արել է իր նամակներում։ Գծ. 127-ում պատկերված են կիսաշրջանագիծ և ցիկլոիդի աղեղի կեսը. դիցուք շրջանագծի շառավիղը հավասար է միավորի, $AB = x$, $BE = v$, $BC = y$, $\overset{\frown}{AE} = a$, $GD = dx$, $DL = dv$*։ Այդ դեպքում, ըստ երկրաչափության հայտնի թեորեմայի,* $v = \sqrt{2x - x^2}$*, այնպես որ՝*



Գծ. 127.

$$dv = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx,\quad GL = \sqrt{(dx)^2 + (dv)^3} = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}},\quad a = \int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}\text{։}$$

Քանի որ, ըստ ցիկլոիդի առաջացման, $EC = a$ *և* $y = a + v$*, ապա՝*

$$y = \sqrt{2x-x^2} + \int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}\text{։}$$

«Այս հավասարումը կատարյալ կերպով արտահայտում է առնչությունը y *օրդինատի և* x *աբսցիսի միջև և նրանից կարող են արտածվել ցիկլոիդի բոլոր հատկությունները»։ (Օրինակի համար, դիֆերենցման միջոցով այստեղից հեշտ է ստանալ ցիկլոիդի շոշափողի կամ նորմալի հայտնի կառուցումը)։ Այսպիսով, ինտեգրումը Լայբնիցի համար միջոց է ծառայում կառուցելու այնպիսի տրանսցենդենտ ֆունկցիաներ, որոնք նա այլ կերպ ո՛չ գրել, ո՛չ հետազոտել չի կարող։*

Մեմուարի վերջում Լայբնիցը կարևոր նախազգուշացում է անում այն մասին, որ

∫ նշանի տակ չի կարելի արհամարհել dx *բազմապատկիչը, քանի որ այդ կփակեր մի պատկեր մյուսին ձևափոխելու ճանապարհը։ Պարզ է, որ այստեղ ի նկատի է առնվում փոփոխականի ձևափոխությունը, որը հնարավորություն է տալիս մի քառակուսում հանգեցնելու մյուսին, իսկ դրա իրականացումը, իրոք, հեշտանում է* dx *բազմապատկչի առկայությամբ։*

Եվ այսպես, ինտեգրալ հաշվում Լայբնիցի համար հիմնական հասկացություն եղել է y dx *«ակտուալ» անվերջ փոքր ուղղանկյունների գումարը (որը նա ավելի ուշ, Բեռնուլի եղբայրների օրինակով, սկսել է անվանել ինտեգրալ)։ Իսկ Նյուտոնը, ինչպես տեսանք, հիմքում դրել էր նախնական ֆունկցիայի հասկացությունը։ Կիրառությունների համար Լայբնիցի տեսակետը ավելի հարմար էր, թեպետև ինտեգրալի հաշվումը նա ևս հանգեցնում է նախնական ֆունկցիան գտնելուն։*

231. Լայբնիցի հաջորդ աշխատությունները: Դպրոցի ստեղծումը: *Լայբնիցի մի քանի առանձնակ հոդվածների ու դիտողությունների, ինչպես նաև, իր ժամանակի ականավոր մաթեմատիկոսների հետ նրա նամակագրության բովանդակությունը շատ բազմազան է։ Այն ընդգրկում է, ամենից առաջ, իր ստեղծած հաշվի հետագա զարգացումը։ Այդպիսի հարցերից մի քանիսը մենք արդեն հիշատակել ենք հենց անալիզի շարադրման ընթացքում, նախորդ գլուխներում. աստիճանացուցչային արտահայտությունների դիֆերենցումը* [n° **85**, (5)], *արտադրյալի բարձր կարգի դիֆերենցիալների բանաձևը* [n° **98**], *ռացիոնալ կոտորակների վերլուծումը պարզագույն կոտորակների՝ նրանց ինտեգրումը հեշտացնելու համար* [n **166**]։ *Լայբնիցի մյուս աշխատությունները կապված են ֆունկցիաներն անվերջ շարքերի վերլուծելու հետ կամ պատկանում են անալիզի ավելի բարձր բնագավառներին [մենք դրանց կհանդիպենք երկրորդ հատորում]։ Անալիզի ապարատն ստեղծելու հետ միասին, Լայբնիցն զբաղվել է նաև նրա կիրառություններով, հատկապես «դիֆերենցիալ» երկրաչափության բնագավառում։ Նա հաճախ իր ժամանակակիցների առաջ դրել է զանազան կիրառական խնդիրներ և, իր հերթին, ինքն էլ լուծել է ուրիշների կողմից առաջադրված խնդիրներ։*

Հատկապես կարևոր նշանակություն է ունեցել այն փաստը, որ Լայբնիցն ստեղծեց դպրոց, որի գլխավոր ներկայացուցիչներն են եղել Բեռնուլի եղբայրները՝ Յակոբը՝ (1654–1705) և Իոհաննը (1667—1748), ինչպես նաև, Գիյոմ Ֆրանսուա դե Լոպիտալը (1661—1704)՝ դիֆերենցիալ հաշվի առաջին դասագրքի հեղինակը։ Դպրոցի ստեղծմանը նպաստեցին Լայբնիցի գիտական էնտուզիազմը, նրա գրչի տակից դուրս եկող աշխատությունների անընդհատ հրապարակումը և նրա գործուն գիտական նամակագրությունը։

Չի կարելի թերագնահատել նաև Լայբնիցի մտցրած հարմար նշանակումների դերը, որոնք վերին աստիճան հարմարեցված էին երկրաչափական ու մեխանիկական հետազոտություններին (իզուր չէ, որ հենց լայբնիցյա՛ն նշանակումներն են պահպանվել մինչև մեր ժամանակները)։ Նպատակահարմար սիմվոլիկան, անկասկած, հեշտացրել է իսկական ալգորիթմի ստեղծումը, որի մասին նա երազում էր հենց սկզբից։ Այդ ալգորիթմը աստիճանաբար դարձավ ընդհանուրի սեփականություն։

232. Հիմնավորման հարցերը Լայբնիցի մոտ*: *Այս ուղղությամբ Լայբնիցը լուրջ դժվարություններ է կրել, մինչև կյանքի վերջը չընդհատելով ուղիների որոնումը՝ իր հաշվի հիմնավորման համար։*

---

* *Տե՛ս* „Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница“, *էջ 187—196։*

«Ակտուալ» անվերջ փոքրերը կազմում են ինչպես դիֆերենցիալ հաշվի, այնպես էլ ինտեգրալ հաշվի հիմքը: Առաջինի համար Լայբնիցը [n° **229**] դեռևս փորձում էր անվերջ փոքր տարբերությունները փոխարինել իրենց համապատասխան վերջավոր մեծություններով. անվերջ փոքր («անցուցանելի») խարակտերիստիկ եռանկյան հետ միասին նա դիտարկում էր նրա նման վերջավոր («ցուցանելի») եռանկյուն: Սակայն իր բանաձևերի արտածման համար նա, այնուամենայնիվ, չէր կարող յոլա գնալ առանց անվերջ փոքրերի և առանց օգտվելու բարձր կարգի անվերջ փոքրերն արհամարհելու սկզբունքից:

Ի պատասխան նոր հաշվի քննադատողների հարձակումներին, Լայբնիցն առաջարկում է «անվերջ փոքր» մեծությունները փոխարինել «անհամեմատելի փոքր» մեծություններով, ինչպիսիք են, օրինակ, փոշու հատիկը Երկրի նկատմամբ կամ Երկիրը՝ երկնակամարի նկատմամբ: Դրա հետ միասին, Լայբնիցը, իր ասույթներում, ընդգծում է, որ անվերջ փոքր ասելով ինքը բոլորովին էլ չի հասկանում «այնպիսի մեծություն, որն իրոք շատ փոքր է, բայց միշտ հաստատուն է և որոշակի». այդ մեծությունը պետք է միայն բավականաչափ փոքր լինի նրա համար, որպեսզի սխալը փոքր լինի ցանկացած նշվածից: Դրանում, թերևս, կարելի է նկատել ակնարկում՝ «պոտենցիալ» անվերջ փոքրերի տեսակետին մոտենալու:

Հնարավոր երբ Լայբնիցը տեսնում է մինչև անգամ նրանում, որպեսզի անվերջ փոքրերը համարի «ֆիկտիվ» («հնարովի») կամ «իդեալական» հասկացություններ, որոնք ծառայում են միայն հայտնագործումները հեշտացնելու և դատողությունները կրճատելու համար, կեղծ արմատների նմանությամբ սովորական անալիզում: Վերջապես, նա նշում է մի խումբ իդեաներ ևս, որոնցով փորձում է հիմնավորել իր մտահղացումների օրինական լինելը. այդ՝ նրա «անընդհատության սկզբունքն» է, որը որոշ չափով կապ ունի սահմանային անցման հետ: Սակայն, իր հաշվի հիմնավորելու Լայբնիցի բոլոր փորձերը, ըստ երևույթին, մինչև վերջը համոզիչ չէին նաև հենց իր համար: Մի ձեռագրում հարց տալով՝ կլինեն արդյոք անվերջ փոքրերը գոյություն ունեցողներ և կարող են արդյոք նրանք լինել խստորեն հիմնավորված, Լայբնիցը հայտարարում է՝ «Ես կարծում եմ, որ այդ կարելի է թողնել կասկածի տակ»:

Մյուս կողմից, իր բանավիճային հոդվածներից մեկում նա այսպես է արտահայտվում. «Ես բարձր եմ գնահատում նրա՛նց ջանասիրությունը, որոնք ձգտում են ամեն ինչ ապացուցել, ընդհուպ մինչև նախասկզբնային դրույթները, և հաճախ ինքս եմ ճիգեր անում այդ ուղղությամբ. սակայն ես խորհուրդ չէի տա չափից ավելի խնամքով խոչընդոտներ հարուցել հայտնագործման արվեստին և կամ այդ պատճառաբանությամբ զեն նետել լավագույն հայտնագործությունները և ինքն իրեն զրկել նրանց պտուղներից...»: Այսպիսով, նույնիսկ համոզված չլինելով, որ հնարավոր կլինի հիմնավորել իր ստեղծած հաշիվը, Լայբնիցը նրա կիրառումը գտնում է արդարացված այն արդյունքներով, որոնց նա հանգեցրել է:

Այդ իրավիճակն ամենից լավ Մարքսն է բնութագրել, հենց այն ժամանակաշրջանի մաթեմատիկոսներին վերաբերող հետևյալ խոսքերով. «Իրենք հավատում էին նորահայտ հաշվի առեղծվածային բնույթին, որը ճիշտ (ընդ որում՝ երկրաչափական կիրառություններում ուղղակի ապշեցուցիչ) արդյունքներ էր տալիս՝ մաթեմատիկորեն հաստատապես անճիշտ ճանապարհով: Այդպիսով, իրենք իրենց մոլորեցրել էին և դրանով է՛լ ավելի էին գնահատում նոր հաշիվը ...»*:

* К. Маркс, „Математические рукописи" (Под знаменем марксизма, 1. 1933), էջ 65:

233. Վերջաբան: *Հաջորդ հարյուրամյակը նշանավորվեց մաթեմատիկական անալիզի հետագա ծաղկումով, նրա մեթոդները կատարելագործվում էին, կիրառության ասպարեզն զգալիորեն ընդարձակվում էր։ Այնուամենայնիվ զգալի չափով պահպանվում էր նրա «առեղծվածային» բնույթը. նրա հիմունքները, որ բազմիցս քննադատության էին ենթարկվում, մնում էին չպարզված։*

Ճշմարիտ է, սահմանի հասկացությունը, որը միայն ակնարկվում էր XVII *դարի մաթեմատիկոսների մոտ, հետագայում ճշգրտվել է։ Պետերբուրգյան նշանավոր ակադեմիկոս Լեոնարդ Էյլերը (1707—1783) իր «Դիֆերենցիալ հաշվի» (1755) նախաբանում լիակատար պարզորոշությամբ խոսում է սահմանի մասին, որին ավելի ու ավելի է մոտենում երկու մեծությունների աճերի հարաբերությունը, այն ժամանակ, երբ այդ աճերն իրենք դառնում են ավելի ու ավելի փոքր։ Մենք այդ մասին արդեն հիշատակել ենք* n° **26**-*ում, բայց հենց այնտեղ էլ ընդգծել ենք, որ Էյլերի նույն տրակտատում սահմանի գաղափարը ոչ մի անգամ չի օգտագործվում։ Մոտավորապես նույն ժամանակներում ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և փիլիսոփա Ժակ Լերոն Դալամբերը (1717—1783), նշանավոր «Էնցիկլոպեդիայում» տպագրված իր հոդվածներում, ավելի է սահմանի նաև ընդհանուր սահմանումը, ընդ որում Դալամբերն այն համոզմունքն է արտահայտել, որ «սահմանների տեսությունն է հենց հիմքը դիֆերենցիալ հաշվի ճշմարիտ մետաֆիզիկայի»։* XVIII *դարի վերջում անալիզում ու երկրաչափությունում սահմանների տեսության կիրառման լայն պրոպագանդա էր անում ռուս մաթեմատիկոս ու մեխանիկոս Սեմյոն Եմելյանովիչ Գուրևը (1764—1813)։ Սակայն փաստորեն* սահմանի գաղափարը, այնուամենայնիվ, դեռևս չէր դարձել արդյունավետ միջոց մաթեմատիկական անալիզի հիմնավորման համար։ *Այսպես, 1797 թվականին Լազար Կարնոն (1753—1823) հանդես եկավ իր «Խորհրդածություններ անվերջ փոքրերի մետաֆիզիկայի վերաբերյալ»* * *աշխատությամբ, որտեղ, կրկնելով դեռևս ավելի* վաղ էլ արտահայտված *միտքը, նա փորձում է հիմնավորել այն արդյունքների անկասկած ճշմարիտ լինելը, որոնք ստացվում են կասկածելի միջոցների օգնությամբ՝ սխալների փոխադարձ համասարակշռումով։*

Միայն XIX *դարի սկզբի մաթեմատիկոսները, հատկապես Օգյուստեն Լյուի Կոշին (1789—1857),* սահմանի գաղափարն իսկական հիմք դարձրին հետևողականորեն կառուցելու համար մաթեմատիկական անալիզն ամբողջությամբ վերցրած, *վերջնականապես դուրս մղելով նրանից ամեն մի առեղծված։ Ի դեպ, ինչպես գիտենք, այդ հիմքում դեռևս ճեղք էր մնացել՝ պակասում էր հենց իրական թվի գաղափարի խստիվ հիմնավորումը և իրական թվերի բազմության անընդհատության հաստատումը. այդ կատարվեց արդեն անցյալ դարի երկրորդ կեսում։*

Այժմ, վերջապես, ընթերցողը հնարավորություն ստացավ իր համար պարզելու դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի այն հիմնական գաղափարների ծագման, զարգացման ու ճշգրտման ամբողջական պատկերը, որոնք ուսումնասիրվել են այս հատորում։

---

* *Կա ռուսերեն թարգմանությունը՝* „Размышления о метафизике бесконечно малых" (ГТТИ, 1933)։

ԱՅԲԲԵՆԱԿԱՆ ՑԱՆԿ

(Թվերը ցույց են տալիս էջերը)

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§ 1. Ֆունկցիայի սահմանը

§ 2. Թեորեմներ սահմանների վերաբերյալ

§ 3. Մոնոտոն ֆունկցիա

§ 4. e թիվը

§ 5. Զուգամիտության սկզբունքը

§ 6. Անվերջ փոքր և անվերջ մեծ մեծությունների դասակարգումը

ՉՈՐՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. Ֆունկցիայի անընդհատությունը (և խզումները)

§ 2. Անընդհատ ֆունկցիաների հատկությունները

ՀԻՆԳԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑՈՒՄԸ

§ 1. Ածանցյալ և նրա հաշվումը

§ 2. Դիֆերենցիալ

§ 3. Բարձր կարգի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ

ՎԵՑԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐԸ

§ 1. Թեորեմաներ միջին արժեքների վերաբերյալ

§ 2. Թեյլորի բանաձևը

ՅՈԹԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

§ 1. Ֆունկցիայի փոփոխման ընթացքի ուսումնասիրությունը

§ 2. Ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները

§ 3. Անորոշությունների բացումը

ՈՒԹԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. Հիմնական գաղափարները

§ 2. Անընդհատ ֆունկցիաներ

ԻՆՆԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑՈՒՄԸ

§ 1. Մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների ածանցյալներն ու դիֆերենցիալները

§ 2. Բարձր կարգի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ

§ 3. Էքստրեմումներ, մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ

ՏԱՍՆԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՆԱԽՆԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱ (ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ)

§ 1. Անորոշ ինտեգրալ և այն հաշվելու պարզագույն եղանակները

§ 2. Ռացիոնալ արտահայտությունների ինտեգրումը

§ 3. Արմատականներ պարունակող մի քանի արտահայտությունների ինտեգրումը

§ 4. Եռանկյունաչափական և ցուցչային ֆունկցիաներ պարունակող արտահայտությունների ինտեգրումը

§ 5. Էլիպտիկ ինտեգրալներ

ՏԱՍՆՄԵԿԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

§ 1. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը և գոյության պայմանները

§ 2. Որոշյալ ինտեգրալների հատկությունները

§ 3. Որոշյալ ինտեգրալների հաշվումը և ձևափոխումը

§ 2. Հարթ կորի կորությունը

ՏԱՍՆՉՈՐՍԵՐՈՐԴ ԳԼՈՒԽ

ՊԱՏՄԱԿԱՆ ԱԿՆԱՐԿ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԳԱՂԱՓԱՐՆԵՐԻ ԾԱԳՄԱՆ

§ 1. Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի նախապատմությունը

§ 2. Իսահակ Նյուտոն (1642 – 1727)

§ 3. Գոտֆրիդ Վիլհելմ Լայբնից (1646 – 1716)

Գրիգորի Միխայլովիչ Ֆիխտենգոլց

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

ՀԱՏՈՐ ԱՌԱՋԻՆ

Գեղ. խմբագիր՝ Թ. Վ. Մազմանյան
Տեխ. խմբագիր՝ Վ. Ս. Աբրահամյան
Վերստուգող սրբագրիչ՝ Հ. Ս. Մելքումյան

Պատվեր 125 *Տպաքանակ 10000*

Հանձնված է արտադրության 16 I 1969 թ.։
Ստորագրված է տպագրության 15 VI 1970 թ.։
Թուղթ 60×90 $^1/_{16}$, № 2։ Հրատ. 29,3 մամ., տպագր. 35,5 մամ.։
Գինը՝ 98 կ.։

ՀՍՍՀ Մինիստրների սովետի մամուլի պետական կոմիտեի պոլիգրաֆար-դյունաբերության գլխավոր վարչության Հակոբ Մեղապարտի անվան պոլիգրաֆկոմբինատ, Երևան, Տերյան 91։