ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ, Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ,
Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՈՒՂԵՑՈՒՅՑ

Պրակ երկրորդ

ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 1972

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Տեսական մեխանիկայի այն բաժինը, որն ուսումնասիրում է մարմինների շարժումը երկրաչափական տեսանկյունից, առանց հաշվի առնելու այդ մարմինների մասսաները և նրանց վրա ազդող ուժերը, կոչվում է կինեմատիկա։ Երբեմն կինեմատիկան անվանում են չորս չափանի տարածության երկրաչափություն, որտեղ չորրորդ չափման դերը կատարում է ժամանակը։

Մարմինների շարժումը կատարվում է տարածության մեջ ժամանակի ընթացքում։

Մեխանիկայում տարածությունը ընդունվում է էվկլիդյան եռաչափ տարածություն, որի հատկությունները նրա բոլոր կետերում և բոլոր ուղղություններով նույնն են։ Այսպիսի տարածությունն անվանում են բացարձակ։ Որպես երկարության միավոր ընդունվում է մետրը։

Մեխանիկայում ժամանակը ընդունվում է բացարձակ, այսինքն՝ տարածության բոլոր կետերի համար նույնը։ Ժամանակի չափումը հիմնված է նրա թվաբանացման վրա, այն է՝ ակնթարթային պահերի և իրական թվերի բազմության միջև փոխմիարժեք համապատասխանություն սահմանելու վրա։ Ժամանակը անընդհատ փոփոխվող սկալյար մեծություն է։ Կինեմատիկայի խնդիրներում t *ժամանակը ընդունվում է անկախ փոփոխական (արգումենտ), իսկ մնացած բոլոր փոփոխական մեծությունները՝ ժամանակի ֆունկցիաներ։ Ժամանակի հաշվումը կատարվում է որևէ սկզբնական պահից (*$t=0$*), որի ընտրությունը յուրաքանչյուր դեպքում կատարվում է ըստ պայմանավորվածության։ Ժամանակի տված ամեն մի* t *պահ որոշվում է այն վայրկյանների թվով, որն անցել է սկզբնական պահից մինչև տված պահը։ Որպես ժամանակի միավոր ընդունված է վայրկյանը (վրկ)։*

$$1 \text{ վրկ} = \frac{1}{24.60.60} \text{ — } \textit{արեգակնային միջին օրվա։}$$

Տեսական մեխանիկայում շարժումը դիտում են որպես տարածության մեջ տված մարմնի դիրքի փոփոխություն մյուս մարմինների նկատմամբ։ Մեխանիկական շարժումների ուսումնասիրության ժամանակ միշտ պետք է նշել այն մարմինը, որի նկատմամբ ուսումնասիրվում է տվյալ շարժումը։ Այդ մարմնին ամրացված կոորդինատական սիստեմը, որի նկատմամբ ուսումնասիրվում է շարժումը, կոչվում է դիրքորոշման սիստեմ կամ հաշվարկի սիստեմ։

Եթե կետի կամ մարմնի դիրքը տված հաշվարկի սիստեմի նկատմամբ չի փոխվում, ապա ասում են, որ կետը կամ մարմինը այդ հաշվարկի սիստեմի նկատմամբ գտնվում է հանգստի վիճակում։ Իսկ եթե նրանց դիրքերը փոխվում են, այսինքն՝ փոփոխվում են կետի կոորդինատները կամ մարմնի գոնե մեկ կետի կոորդինատները, ապա կետը կամ մարմինը տվյալ հաշվարկի սիստեմի նկատմամբ շարժվում է։ Տարբեր հաշվարկի սիստեմների նկատմամբ նրանք կարող են կատարել զանազան շարժումներ կամ գտնըվել հանգստի վիճակում։ Այս իմաստով կետի կամ մարմնի շարժումները հարաբերական են և կախված են ընտրված հաշվարկի սիստեմից։

Կինեմատիկան բաժանվում է երկու մասի՝ կետի կինեմատիկայի և պինդ մարմնի կինեմատիկայի։

ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ

ԿԵՏԻ ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱ

§1. ԿԵՏԻ ՀԵՏԱԳԻԾԸ ԵՎ ՇԱՐԺՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

1. Կետի կինեմատիկայի հիմնական խնդիրները։ *Կետի կինեմատիկայում դիտարկվում են հետևյալ երկու հիմնական խնդիրները՝ ա) տված հաշվարկի սիստեմի նկատմամբ կետի շարժման օրենքի տրման եղանակները, բ) կետի տված շարժման օրենքի հիման վրա շարժումը բնորոշող կինեմատիկական մեծությունների որոշումը (հետագիծը, արագությունը, արագացումը և այլն)։ Կինեմատիկայում ուսումնասիրել որևէ կետի շարժումը տված հաշվարկի սիստեմի նկատմամբ նշանակում է գտնել նրա շարժման օրենքը, հետագիծը, ինչպես նաև արագությունը և արագացումը ժամանակի յուրաքանչյուր մոմենտում*

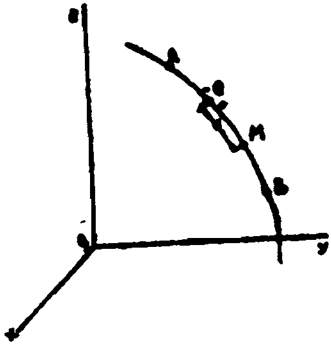
2. Կետի հետագիծը։ *Այն անընդհատ կորը, որը գծում է շարժվող կետը տված հաշվարկի սիստեմի նկատմամբ, կոչվում է կետի հետագիծ։ Եթե հետագիծը ուղիղ գիծ է, ապա կետի շարժումը կոչվում է ուղղագիծ, իսկ եթե կոր գիծ է՝ կորագիծ։ Կետի հետագծի ուղղագիծ կամ կորագիծ լինելը, իհարկե, կախված է հաշվարկի սիստեմի ընտրությունից։ Տվյալ սիստեմի նկատմամբ ուղղագիծ շարժումը կարող է մի այլ հաշվարկի սիստեմի նկատմամբ կորագիծ լինել և ընդհակառակը։*

Կետի կորագիծ շարժման դեպքում հետագիծը կարող է լինել հարթ կամ տարածական կոր։

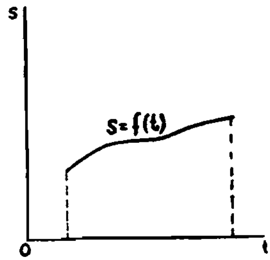
3. Կետի շարժման տրման եղանակները։ *Կետի շարժումը համարվում է հայտնի, եթե ժամանակի յուրաքանչյուր մոմենտում կարելի է որոշել նրա դիրքը տարածության մեջ։ Կետի շարժումը որոշվում է շարժման օրենքով։*

Շարժման օրենքը հնարավորություն է տալիս որոշելու կետի դիրքը տարածության մեջ ժամանակի յուրաքանչյուր մոմենտում։ Կետի շարժման օրենքը կարելի է տալ երեք եղանակով՝ ա) բնական, բ) կոորդինատական և գ) վեկտորական։

4. Շարժման տրման բնական եղանակը: *Կետի շարժումը բնական եղանակով տալիս պետք է տված լինի՝ ա) կետի հետագիծը, բ) հետագծի վրա հաշվարքի սկիզբը և հաշվման ուղ-*



Գծ. 1



Գծ. 2

ղությունը, գ) հետագծի վրա կետի շարժման օրենքը $s = f(t)$ *տեսքով, որտեղ* $s = OM$ *(գծ. 1), աղեղի երկարությունը որոշում է կետի կորագիծ կոորդինատը:*

Դիցուք M *կետը շարժվում է* O_1xyz *հաշվարքի սիստեմի նկատմամբ* AB *հետագծով (գծ. 1):* AB*-ի վրա վերցնենք որևէ* O *անշարժ կետ և այն ընդունենք որպես հաշվարքի սկիզբ: Այնուհետև* AB *հետագծի վրա ընտրենք դրական և բացասական ուղղություններ, ինչպես սովորական կոորդինատական առանցքի վրա: Սովորաբար հաշվարքի դրական ուղղությունը ուղղում են կետի շարժման կողմը: Այդ դեպքում* M *կետի դիրքը հետագծի վրա միարժեք կերպով կորոշվի հետագծի* $s = OM$ *աղեղի երկարությամբ: Կետի շարժման ժամանակ նրա* s *երկարությունը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է: Կետի շարժումը բնորոշելու համար պետք է տալ հետագծի վրա կետի դիրքի և ժամանակի միջև եղած կապը, այսինքն՝*

$$s = f(t). \qquad (1)$$

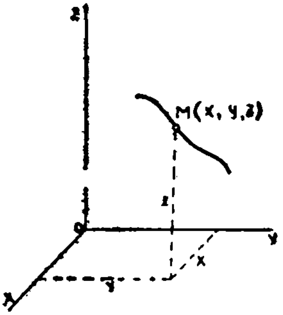
s*-ի և* t*-ի միջև եղած այս (1) կապը արտահայտում է կետի շարժման հավասարումը հետագծով:*

Շարժման բնույթից կախված $f(t)$*-ն պետք է լինի միարժեք, անընդհատ և առնվազն երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա:*

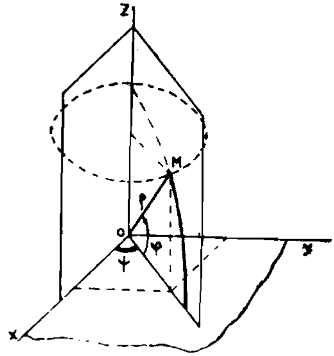
Կետի շարժման օրենքը կարող է տրված լինել նաև գրաֆիկորեն (գծ. 2), այսինքն՝ s*-ի և* t*-ի միջև եղած կապն արտա-*

հայտող կորով։ Շարժման օրենքի այս գրաֆիկական ներկայացումը կրճատ կոչվում է շարժման գրաֆիկ։ Շարժման գրաֆիկի կորը երբեք չի կարելի շփոթել շարժման հետագծի հետ։

5. Կետի շարժման տրման կոորդինատական եղանակը: *Կետի շարժումը կոորդինատական եղանակով տալիս պետք է արված լինի՝ ա) կոորդինատական որևէ սիստեմ (հաշվարկի սիստեմ) և բ) կետի կոորդինատները որպես ժամանակի ֆունկցիաներ։*



Գծ. 3



Գծ. 4

Կետի դիրքը տարածության մեջ կարելի է որոշել նրա դեկարտյան x, y, z *կոորդինատների միջոցով (գծ. 3)։ Եթե կետը շարժվում է, ապա նրա* x, y, z *կոորդինատները ժամանակի ընթացքում փոփոխվում են։ Կետի շարժումը տալ դեկարտյան կոորդինատական սիստեմում նշանակում է՝ տալ նրա* x, y, z *կոորդինատները որպես ժամանակի ֆունկցիաներ, այսինքն՝*

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)\text{։} \tag{1}$$

Այս հավասարումները լրիվին որոշում են կետի շարժման օրենքը՝ շարժման կոորդինատական եղանակի դեպքում։ Անհրաժեշտ է նշել, որ $f_1(t)$, $f_2(t)$ *և* $f_3(t)$ *ֆունկցիաները պետք է լինեն միարժեք, անընդհատ և առնվազն երկու անգամ դիֆերենցելի։*

(1) հավասարումները կարելի է դիտել նաև որպես շարժվող կետի հետագծի պարամետրական հավասարումներ, որտեղ պարամետրի դերը կատարում է t *ժամանակը։ Հետագծի հավասարումները կոորդինատական տեսքով ստանալու համար պետք է այդ հավասարումներից արտաքսել* t *պարամետրը։ Արտաքսելուց հետո կստացվեն կապակցություններ միայն կետի կոորդինատների միջև։*

Կետի դիրքը տարածության մեջ կարելի է որոշել նաև սֆերիկ և գլանային կոորդինատների միջոցով։

Սֆերիկ կոորդինատական սիստեմում M *կետի դիրքը որոշվում է՝ ա) անշարժ կետից նրա ունեցած* $\rho=OM$ *հեռավորությամբ (գծ. 4), բ)* M *կետով ու* z *առանցքով տարած հարթության և* xoz *հարթության միջև կազմված* ψ *անկյունով և գ)* OM *ուղիղով ու* xoy *հորիզոնական հարթության միջև կազմված* φ *անկյունով։ Տարածության մեջ* M *կետի շարժման ժամանակ նրա* ρ, ψ, φ *սֆերիկ կոորդինատները փոփոխվում են կախված ժամանակից։*

Կետի շարժման հավասարումները սֆերիկ կոորդինատներով կլինեն՝

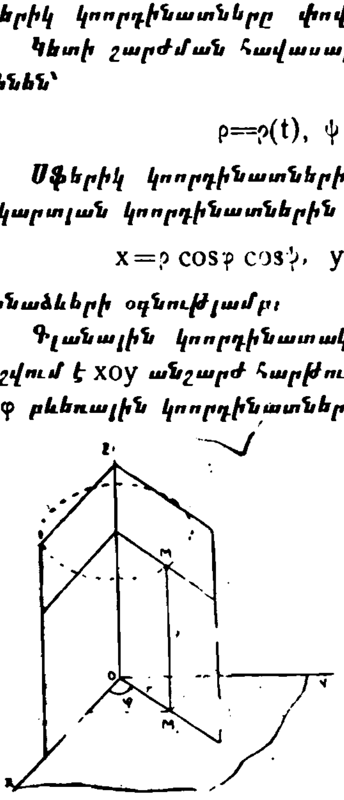
$$\rho=\rho(t),\quad \psi=\psi(t),\quad \varphi=\varphi(t)։$$

Սֆերիկ կոորդինատներից կարելի է անցնել ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներին

$$x=\rho\cos\varphi\cos\psi,\quad y=\rho\cos\varphi\sin\psi,\quad z=\rho\sin\varphi$$

բանաձևերի օգնությամբ։

Գլանային կոորդինատական սիստեմում M *կետի դիրքը որոշվում է* xoy *անշարժ հարթության վրա* M *կետի* M_1 *պրոյեկցիայի* r, φ *բևեռային կոորդինատներով (գծ. 5) և* M *կետի* z *ապլիկատով։ Տարածության մեջ* M *կետի շարժման ժամանակ նրա* r, φ, z *գլանային կոորդինատները նույնպես փոփոխվում են կախված ժամանակից։*



Գծ. 5

Կետի շարժման հավասարումները գլանային կոորդինատներով կլինեն՝

$$r=r(t),\quad \varphi=\varphi(t),\quad z=z(t)։$$

Գլանային կոորդինատներից ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներին անցումը կատարվում է

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z$$

բանաձևերի միջոցով։

Սֆերիկ և գլանային կոորդինատական սիստեմները կորագիծ կոորդինատական սիստեմներ են։

6. Հարթ շարժում: *Հարթ շարժման դեպքում կետի շարժման օրենքը շարժման հարթության վրա գտնվող որևէ կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ արտահայտվում է երկու հավասարումներով։*

Հարթ դեկարտյան կոորդինատական (xy) *սիստեմի դեպքում կետի շարժման օրենքը արտահայտվում է*

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t) \tag{1}$$

տեսքով։ (1) հավասարումներից արտաքսելով t *ժամանակը, կըստանանք կետի հետագծի հավասարումը դեկարտյան կոորդինատներով՝*

$$f(x,y)=0\text{։}$$

Բևեռային (r,φ) *կոորդինատական սիստեմի դեպքում կետի շարժման օրենքը կլինի*

$$r=f_3(t),\quad \varphi=f_4(t)\text{։} \tag{2}$$

(2)-*ից արտաքսելով* t *ժամանակը, կստանանք հետագծի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով՝*

$$\Phi(r,\varphi)=0\text{։}$$

7. Կետի շարժման օրենքի կոորդինատական եղանակից բնական եղանակին անցնելը: *Դիցուք կետի շարժման հավասարումները տված են դեկարտյան կոորդինատներով՝*

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t) \tag{1}$$

և պահանջվում է գտնել այդ կետի շարժման օրենքը բնական եղանակով։

Դրա համար նախ անհրաժեշտ է գտնել կետի հետագծի հավասարումը և ապա՝ այդ կետի շարժման օրենքը հետագծով։

Հետագծի հավասարումները գտնելու համար պետք է (1) հավասարումներից արտաքսել t *ժամանակը։ Իսկ* $s=f(t)$ *շարժման օրենքը որոշելու համար պետք է օգտվել աղեղի դիֆերենցիալի հետևյալ բանաձևից՝*

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\text{,}$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$ds=\pm\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\pm\sqrt{f_1'^2(t)+f_2'^2(t)+f_3'^2(t)}\,dt,$$

որտեղ դրական նշանը վերցվում է այն դեպքում, երբ շարժումը կատարվում է s-ի աճման ուղղությամբ։

Ինտեգրելով այս հավասարումը, $s=s_0$, երբ $t=t_0$ նախնական պայմանի դեպքում, կստանանք

$$s=s_0\pm\int_{t_0}^{t}\sqrt{f_1'^2(t)+f_2'^2(t)+f_3'^2(t)}\,dt։$$

Խնդիր 1. *Տված են կետի շարժման հավասարումները դեկարտյան կոորդինատներով՝* $x=3\cos 5t^2$, $y=3\sin 5t^2$։ *Գտնել նրա հետագծի հավասարումը, ինչպես նաև ցույց տալ կետի շարժման օրենքը հետագծով, հաշվելով հետագծի աղեղի երկարությունը կետի սկզբնական դիրքից։*

Լուծում։ Կետի հետագծի հավասարումը գտնելու համար պետք է տված հավասարումներից արտաքսել t ժամանակը։ Արտաքսելուց հետո կստանանք՝

$$x^2+y^2=9։$$

Հետևաբար, հետագիծը կլինի շրջանագիծ։

Շարժման օրենքը հետագծով որոշելու համար օգտվենք աղեղի դիֆերենցիալի

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$

բանաձևից։ Տեղադրելով dx, dy-ի արժեքները, կստանանք

$$ds=\sqrt{900t^2\cos^2 5t^2+900t^2\sin^2 5t^2}\,dt=30t\,dt։$$

Ինտեգրելով այս հավասարումը և նկատի ունենալով, որ երբ $t=0$, $s=0$, կունենանք

$$s=15t^2։$$

Հետևաբար, կետի շարժման օրենքը կլինի $s=15t^2$։

Պատ. Հետագիծը՝ $x^2+y^2=9$, շարժման օրենքը՝ $s=15t^2$։

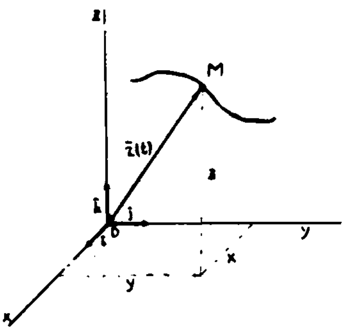
3. Կետի շարժման որոշման վեկտորական եղանակը: Դիցուք կետը շարժվում է հաշվարկի $oxyz$ սիստեմի նկատմամբ։ Այդ դեպքում կետի դիրքը կարելի է որոշել նրա $\bar{r}$ շառավիղ-վեկտորով (գծ. 6)։ Կետի շարժման ժամանակ $\bar{r}$ շառավիղ-վեկտորը փոփոխվում է թե՛ մեծությամբ և թե՛ ուղղությամբ։ Կետի շարժումը որոշելու համար անհրաժեշտ է նշել, թե ինչպես է փոփոխվում $\bar{r}$ շառավիղ-վեկտորը ժամանակի ընթացքում։

Եթե հայտնի է $\bar{r}$-ի փոփոխման օրենքը ժամանակի ընթացքում, ապա դա կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

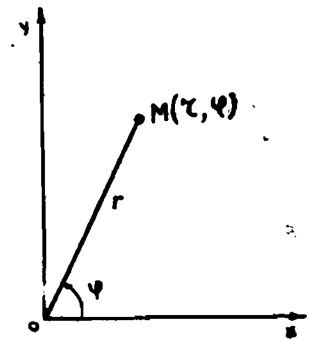
$$\bar{r} = \bar{f}(t) \qquad (1)$$

կամ

$$\bar{r} = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j} + f_3(t)\hat{k}, \qquad (2)$$



Գծ. 6



Գծ. 7

որտեղ $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$-ն կոորդինատական առանցքների միավոր վեկտորներն են, իսկ f_1, f_2, f_3-ը $\bar{f}(t)$ վեկտորի պրոյեկցիաներն են համապատասխանաբար x, y, z առանցքների վրա։

Այստեղ (1)-ը կամ (2)-ը կետի շարժման օրենքն է վեկտորական տեսքով։

Կետի շարժման օրենքը վեկտորական տեսքով տալու դեպքում կետի հետագիծը կլինի $\bar{r}$ շառավիղ-վեկտորի հոդոգրաֆը*։

Հարթ շարժման դեպքում, երբ շարժման հարթությունն ընդունված է որպես oxy հարթություն, կետի շարժման օրենքը վեկտորական տեսքով կլինի՝

$$\bar{r} = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j}։$$

Խնդիր 2. Կետի շարժման հավասարումը տված է

$$\bar{r} = 2\cos 10t \cdot \hat{i} + 2\sin 10t \cdot \hat{j}$$

տեսքով։ Գտնել հետագծի հավասարումը և շարժման հավասարումները բևեռային կոորդինատներով։ Միաժամանակ որոշել կետի շարժման օրենքը բնական եղանակով։

* Կամավոր կետում կառուցված $\bar{r}(t)$ վեկտորի ծայրակետերի երկրաչափական տեղը տարածության մեջ մի կոր գիծ է (հարթ կամ տարածական), որը կոչվում է $\bar{r}(t)$ վեկտորի հոդոգրաֆ։

Լուծում։ *Տված հավասարումից հետևում է, որ կետի շարժման հավասարումները դեկարտյան կոորդինատներով կլինեն՝*

$$x=2\cos 10t,$$

$$y=2\sin 10t. \tag{1}$$

Հետագիծը գտնելու համար (1) հավասարումներից պետք է արտաքսել t *ժամանակը։ Դրա համար այս հավասարումները բարձրացնենք քառակուսի և գումարենք, կստանանք*

$$x^2+y^2=4.$$

Հետևաբար, հետագիծը կլինի շրջանագիծ, որի շառավիղը հավասար է 2-ի և կենտրոնը գտնվում է սկզբնակետում։

Շարժման հավասարումները բևեռային կոորդինատներով ստանալու համար որպես բևեռ ընդունենք կոորդինատների սկզբնակետը, իսկ բևեռային առանցքը ուղղենք x *առանցքով (գծ. 7)։ Կետի բևեռային կոորդինատները նշանակենք* (r, φ) *և գրենք բևեռային ու դեկարտյան կոորդինատների միջև եղած առնչությունները,*

$$x=r\cos\varphi,$$

$$y=r\sin\varphi.$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$x^2+y^2=r^2.$$

Հետևաբար՝

$$r=2=\mathrm{const}$$

և

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}=\cos 10t,\quad \sin\varphi=\frac{y}{r}=\sin 10t.$$

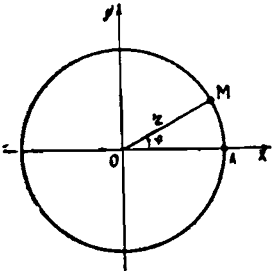
Նշանակում է

$$\varphi=10t.$$

Շարժման օրենքը բևեռային կոորդինատներով կլինի՝

$$r=2,\quad \varphi=10t.$$

Շարժման բնական եղանակին անցնելու համար անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ երբ $t=0$, $x=2$, $y=0$։ *(1)-ից հետևում է, որ կետը շարժվում է շրջանագծով, ժամացույցի սլաքի հակառակ* *ուղղությամբ։ Հաշվարկի սկիզբը ընտրենք* $x=r$, $y=0$ *կետում և* $s=\overset{\frown}{AM}$ *հեռավորությունը (գծ. 8) ընդունենք որպես շարժման օրենք հետագծով։ Այդ դեպքում կունենանք*



գծ. 8

$$s=r\varphi$$

կամ

$$s=20t։$$

Սա կլինի շարժման հավասարումը հետագծով։

Պատ. $x^2+y^2=4$; $r=2$; $\varphi=10t$; $s=20t$։

9. Կետի ուղղագիծ շարժումը։ *Կետի դիրքը ուղիղ գծի վրա որոշվում է* x *կոորդինատով (գծ. 9), որն իրենից ներկայացնում է շարժվող կետի հեռավորությունը կամավոր ընտրված սկզբնակետից, որին վերագրվում է դրական կամ բացասական նշան։ Այս*

գծ. 9

դեպքում կետի շարժման օրենքը արտահայտվում է

$$x=f(t) \qquad (1)$$

հավասարումով։ Անհրաժեշտ է նշել, որ (1) հավասարման մեջ x *մեծությունը որոշում է շարժվող* M *կետի դիրքը* xo *առանցքի վրա և ոչ թե կետի անցած ճանապարհը։*

Կետի ուղղագիծ շարժումներից առանձին դիտարկենք ներդաշնակ տատանողական շարժումը, որի շարժման օրենքն արտահայտվում է

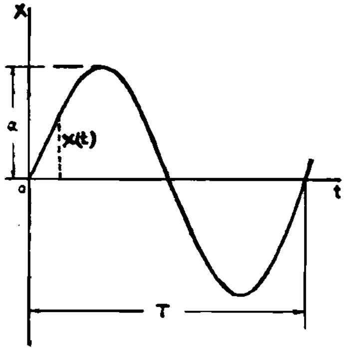
$$x=a\sin kt \qquad (a>o)$$

տեսքով։ Այստեղ a *մեծությունը շարժվող կետի ամենամեծ շեղումն է սկզբնակետից և կոչվում է տատանման ամպլիտուդ (գծ. 10)։* O *կետը կոչվում է տատանումների կենտրոն, իսկ այն ամենափոքր* T *ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում կետը վերա-*

դառնում է իր նախկին դիրքը նույն արագությամբ՝ տատանման պարբերություն։ Տատանման պարբերությունը որոշվում է

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

բանաձևով, որտեղ k-*ն կոչվում է շրջանային հաճախականություն։ Պարբերության հակադարձ մեծությունը կոչվում է տատանման հաճախականություն և որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝*



Գծ. 10

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi},$$

10. Կետի հետագծի և շարժման հավասարումների վերաբերյալ խնդիրների լուծում: *Այս խնդիրները լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը։*

1. Ընտրել ուղղանկյուն դեկարտյան, բևեռային կամ մի այլ կոորդինատական սիստեմ (կոորդինատական սիստեմը ընտրել այնպես, որ խնդրի հետագա լուծումը կատարվի ավելի հեշտ ձևով)։

2. Տված պայմանների համաձայն, ընտրված կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ, կազմել կետի շարժման հավասարումները։

3. Այնուհետև որոշել կետի դիրքը ժամանակի ընթացիկ մոմենտում, գտնել հետագիծը և այլն։

11. Խնդիրներ

Ստորև բերվում են կետի հետագծի և շարժման հավասարումների վերաբերյալ մի շարք խնդիրներ։ Տրվում են այդ խնդիրների լուծումները։ Այս խնդիրների մեծ մասը վերցված են Ի. Վ. Մեշչերսկու «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու» գրքից։ Ի. Վ. Մեշչերսկու խնդրագրքից վերցված խնդիրների համարները դրված են փակագծերում։

Խնդիր 8 (311)։ *Ըստ կետի տված շարժման հավասարումների գտնել նրա հետագծի հավասարումը։*

Դիտարկենք միայն 3) և 8) օրինակները, մյուսները թողնելով ընթերցողներին ինքնուրույն լուծելու։

3) Կետի շարժման հավասարումներն են՝

$$x=5+3\cos t,$$

$$y=4\sin t։$$

Լուծում։ *Կետի հետագծի հավասարումը դեկարտյան կոորդինատներով գտնելու համար այս հավասարումներից պետք է արտաքսել t ժամանակը։ Դրա համար տված հավասարումները գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{x-5}{3}=\cos t,\ \frac{y}{4}=\sin t։$$

Եթե այս հավասարումները բարձրացնենք քառակուսի ու գումարենք, ապա կստանանք

$$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1։$$

Պատ. *էլիպս՝* $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1։$

8. Կետի շարժման հավասարումներն են՝

$$x=3\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right),\quad y=4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi t\right)։$$

Լուծում։ *Տված հավասարումներից t ժամանակը արտաքսելու համար տված հավասարումները գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{x}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right), \tag{1}$$

$$\frac{y}{4}=\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right)\cos\frac{\pi}{8}+\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right)\sin\frac{\pi}{8}։ \tag{2}$$

Տեղադրենք (1) հավասարումից $\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right)$*-ի արժեքը (2) հավասարման մեջ, կստանանք*

$$y-\frac{4x}{3}\sin\frac{\pi}{8}=4\cos\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right)$$

կամ

$$\frac{y-\dfrac{4x}{3}\sin\dfrac{\pi}{8}}{4\cos\dfrac{\pi}{8}}=\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi t\right)։ \qquad (3)$$

Բարձրացնելով (1) և (3) հավասարումները քառակուսի և գումարելով ստացված հավասարումները, կստանանք՝

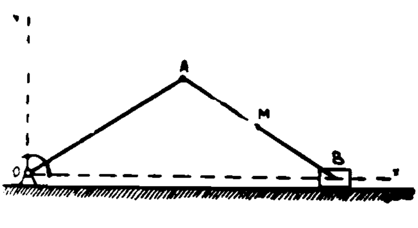
$$\frac{x^2}{9}+\frac{\left(y-\dfrac{4x}{3}\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^2}{16\cos^2\dfrac{\pi}{8}}=1$$

կամ

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{xy}{6}\sin\frac{\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}։$$

Պատ. *էլիպս՝* $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{xy}{6}\sin\dfrac{\pi}{8}=\cos^2\dfrac{\pi}{8}$։

Խնդիր 4 (317)։ OA *մեղեխը պտտվում է* $\omega=10$վրկ$^{-1}$ *հաստատուն անկյունային արագությամբ։ Տված է* OA=AB=80սմ։ *Գտնել շարժաթևի* M *միջնակետի շարժման հավասարումը և հետագիծը, ինչպես նաև* B *սողնակի շարժման հավասարումը, եթե սկզբնական մոմենտում սողնակը գտնվել է աջ եզրային դիրքում։ Կոորդինատական առանցքները ցույց են տրված գծագրում (գծ. 11)։*



Գծ. 11

Լուծում։ M *կետի կոորդինատները նշանակենք* x *և* y, *իսկ* AOB *անկյունը՝* φ։ M *կետի կոորդինատների համար կարող ենք գրել (գծ. 12)*

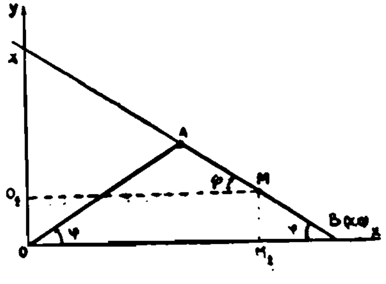
$$x=OM_1=O_1M=MD\cos\varphi,$$
$$y=M_1M=BM\sin\varphi։ \qquad (1)$$

Գծագրից երևում է, որ

$$MD=MA+AD=40+80=120\text{սմ},$$

$$AM=40\text{սմ։}$$

Խնդրի պայմանի համաձայն մեղեխը կատարում է հավասարաչափ պտտական շարժում $\omega=10$ վրկ$^{-1}$ անկյունային արագությամբ։ Հայտնի է, որ հավասարաչափ պտտական շարժման դեպքում պտտման φ անկյան և ω անկյունային արագության միջև գոյություն ունի հետևյալ առնչությունը



Գծ. 12

$$\varphi=\omega t+\varphi_0,$$

որտեղ φ_0-ն սկզբնական մոմենտում շարժաթևի և x առանցքի միջև կազմված անկյունն է։ Քանի որ սկզբնական մոմենտում սողնակը գտնվել է աջ եզրային դիրքում, ապա $\varphi_0=0$։ Հետևաբար կունենանք՝

$$\varphi=\omega t=10t\text{։}$$

Տեղադրելով MD, AM և φ-ի արժեքները (1)-ի մեջ, կստանանք M կետի շարժման հավասարումները հետևյալ տեսքով՝

$$x=120\cos 10t,$$

$$y=40\sin 10t\text{։} \qquad (2)$$

M կետի հետագծի հավասարումը ստանալու համար անհրաժեշտ է (2) հավասարումներից արտաքսել t ժամանակը։ t-ն արտաքսելուց հետո կստանանք

$$\frac{x^2}{120^2}+\frac{y^2}{40^2}=1\text{։}$$

Հետևաբար, M կետի հետագիծը կլինի էլիպս։

Դժվար չէ նկատել, որ B սողնակը կատարում է ուղղագիծ շարժում։ ΔOBD-ից կարող ենք գրել, որ

$$x=OB=BD\cos\varphi\text{։}$$

Տեղադրելով $BD=2AB=160$սմ և $\varphi=10t$ արժեքները, կըստանանք

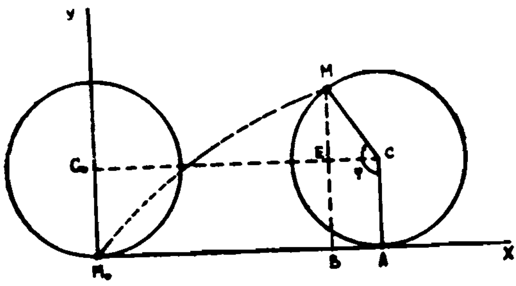
$$x=160\cos 10t$$

Պատ. *1)* M *կետի հետագիծը էլիպս է՝* $\dfrac{x^2}{120^2}+\dfrac{y^2}{40^2}=1$։

2) B *սողնակի շարժման հավասարումն է* $x=160\cos\omega t$։

Խնդիր 5 (*319*)։ *Որոշել շոգեքարշի* $R=1$մ *շառավիղ ունեցող անվի շրջանակի կետի շարժման հավասարումները և հետագիծը, եթե շոգեքարշը շարժվում է ուղղագիծ ճանապարհով* 20 մ/վրկ *հաստատուն արագությամբ։ Ընդունել, որ անիվը գլորվում է առանց սահելու. իբրև կոորդինատների սկզբնակետ վերցնել կետի սկզբնական դիրքը ճանապարհի վրա։* OX *առանցքը ուղղել ճանապարհով։*

Լուծում։ *Դիտարկենք անվի երկու դիրք՝ սկզբնական* $t=0$ *մոմենտում և կամայական* t *մոմենտում (գծ. 13)։ Շրջանագծի* M *կետի և անվի կենտրոնի դիրքերը այդ մոմենտներում նշանակենք համապատասխանաբար* M_0, M *և* C_0, C, *իսկ* MCA *անկյունը՝* φ։



Գծ. 13

M *կետի շարժման հավասարումները կազմելու համար նախ հաշվենք այդ կետի* x *և* y *կոորդինատները։ Դրանք կլինեն՝*

$$x=M_0B=M_0A-CE=C_0C-CE,$$

$$y=MB=ME+EB=ME+R \qquad (1)$$

Գծագրից երևում է, որ

$$ME=R\sin(\varphi-90^\circ)=-R\cos\varphi,$$

$$EC=R\cos(\varphi-90^\circ)=R\sin\varphi$$

Ակնհայտ է, որ անվի կենտրոնի հեռավորությունը ռելսից միշտ հավասար կլինի R*-ի։ Հետևաբար,* C *կետը կշարժվի ուղիղ գծով, զուգահեռ* x *առանցքին։ Բացի դրանից, խնդրի պայմանի* *համաձայն,* C *կետի շարժումը կլինի հավասարաչափ։ Եթե* C_0C *տեղափոխությունը կատարվել է* t *ժամանակամիջոցում, ապա կունենանք*

$$C_0C = vt։$$

Տեղադրելով ME, EC *և* C_0C*-ի արժեքները (1)-ի մեջ, կըստանանք՝*

$$x = vt - R\sin\varphi,$$

$$y = R - R\cos\varphi։ \qquad (2)$$

Մնում է գտնել φ*-ի կախումը* t *ժամանակից։ Քանի որ անվի գլորումը ռելսի վրայով կատարվում է առանց սահքի, ապա կունենանք՝*

$$\overset{\frown}{MA} = M_0A,$$

բայց

$$M_0A = C_0C = vt \text{ և } \overset{\frown}{MA} = R\varphi։$$

Այստեղից էլ հետևում է, որ

$$\varphi = \frac{vt}{R} = 20t։$$

Տեղադրելով R*-ի,* v*-ի և* φ*-ի արժեքները (2)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման հետագծի պարամետրական հավասարումները։*

Պատ. *Ցիկլոիդ՝* $x = 20t - \sin 20t$, $y = 1 - \cos 20t$։

Խ ն դ ի ր 6. *Օդանավից նետված բեռը շարժվում է*

$$x = 100t, \quad y = 2000 - 5t^2$$

օրենքով, որտեղ t*-ն չափված է վայրկյաններով, իսկ* x,y*-ը՝ մետրերով։ Որոշել բեռի հետագիծը, թռիչքի ժամանակամիջոցը և հորիզոնական հեռավորությունը։*

Լ ու ծ ու մ։ *Հետագծի հավասարումը ստանալու համար տված հավասարումներից պետք է արտաքսել* t *ժամանակը։ Դրա համար առաջին հավասարումից որոշենք* t*-ն և տեղադրենք երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք*

$$y = 2000 - 0{,}0005x^2։$$

Հետևաբար, բեռի հետագիծը կլինի պարաբոլ։

Բեռի շարժման հավասարումներից հետևում է, որ

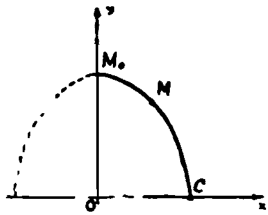
$$t=\frac{x}{100}\geqslant 0,\quad x\geqslant 0,$$

$$t=\sqrt{\frac{2000-y}{5}}\geqslant 0,\quad y\leqslant 2000:$$

Այսպիսով, ստանում ենք, որ բեռի շարժման հետագիծը պարաբոլի M_0MC *ճյուղն է (գծ. 14), որի հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$y=2000-0{,}0005x^2$$

$$x\geqslant 0,\quad y\leqslant 2000:$$



Գծ. 14

Բեռի թռիչքի t_c *ժամանակամիջոցը որոշում ենք այն պայմանից, որ* C *կետում* $y=0$: *Տեղադրելով* $y=0$ *արժեքը շարժման երկրորդ հավասարման մեջ, ստանում ենք*

$$2000-5t_c^2=0:$$

Այստեղից հետևում է, որ $t_c=20$վրկ:

Հորիզոնական x_c *հեռավորությունը որոշում ենք շարժման առաջին հավասարումից, նրա մեջ տեղադրելով* t_c*-ի արժեքը: Դրանից ստացվում է*

$$x_c=100t_c=100\cdot 20=2000 \text{ մ}=2 \text{ կմ}:$$

Պատ.

$$y=2000-0{,}0005x^2,\quad x\geqslant 0,\quad y\leqslant 2000,$$

$$t_c=20 \text{ վրկ},\quad x_c=2 \text{ կմ}:$$

Խնդիր 7: M *կետը շարժվում է*

$$x=a\cos kt,\quad y=a\sin kt,\quad z=bt$$

օրենքով, որտեղ a, k, b*-ն հաստատուն մեծություններ են:*

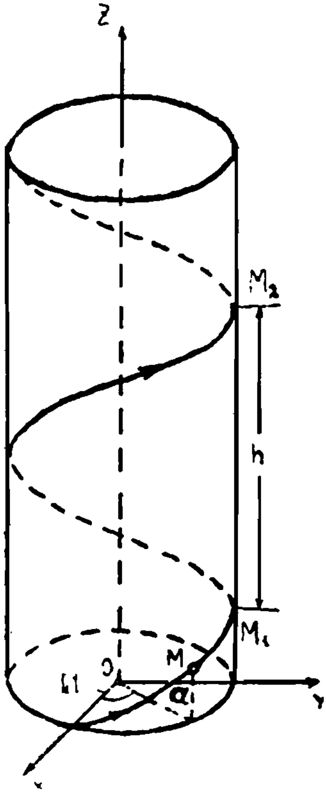
Գտնել կետի հետագծի հավասարումները և կետի շարժման օրենքը հետագծով, հաշվելով հեռավորությունը ըստ հետագծի կետի սկզբնական դիրքի:

Լուծում: *Հետագծի հավասարումները որոշելու համար* տված երրորդ հավասարումից հաշվենք t-ն և տեղադրենք առաջին և երկրորդ հավասարումների մեջ, կստանանք՝

$$x=a\cos\frac{k}{b}z,$$

$$y=a\sin\frac{k}{b}z։$$

Սա պտուտակագծի հավասարում է։ Նշանակում է, կետի հետագիծը կլինի պտուտակագիծ (գծ. 15)։ Տված առաջին երկու հավասարումներից հետևում է, որ կետի պրոյեկցիան xy հարթության վրա գծում է շրջանագիծ $\frac{2\pi}{k}$ ժամանակամիջոցում։ Այս ժամանակամիջոցում կետի պրոյեկցիան z առանցքի վրա տեղափոխվում է $h=\frac{2\pi}{k}b$ մեծությամբ։ Վերջինս կոչվում է պտուտակագծի քայլ։ Պտուտակագիծը փաթաթված է a շառավիղ ունեցող գլանի մակերևույթի վրա։



Գծ. 15

Կետի շարժման օրենքը հետագծով որոշելու համար հաշվենք աղեղի դիֆերենցյալը հետևյալ բանաձևով՝

$$ds=\sqrt{(dx^2)+(dy)^2+(dz)^2}=$$

$$=\sqrt{a^2k^2\sin^2kt+a^2k^2\cos^2kt+b^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{a^2k^2+b^2}\,dt։$$

Ինտեգրելով այս հավասարումը, կստանանք՝

$$s=\sqrt{a^2k^2+b^2}\,t+c, \qquad (1)$$

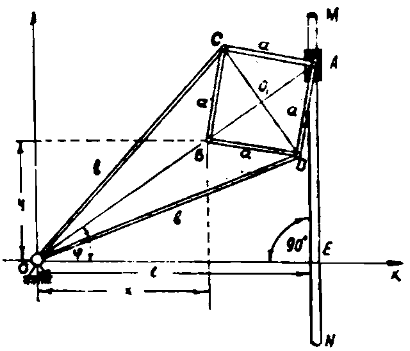
Ինտեգրման c հաստատունը որոշելու համար օգտվենք t=0, s=0 սկզբնական պայմանից։ Տեղադրելով այս սկզբնական պայմանը (1) հավասարման մեջ, կստանանք՝ c=0։ Հետևաբար, կետի շարժման օրենքը պտուտակագծով կլինի՝

$$s=\sqrt{a^2k^2+b^2}\,t։$$

Պատ. Հետագիծը պտուտակագիծ է, շարժման օրենքը՝

$$s=\sqrt{a^2k^2+b^2}\,t։$$

Խնդիր 8։ *Մեխանիզմի* AC, CB, BD, DA, OC *և* OD *ձողերը միացած են իրար հետ հոդակապերով, ընդ որում* OC *և* OD *ձողերը պտտվում են* O *կետի շուրջը, միմյանցից անկախ։* A *հոդակապը սողնակի օգնությամբ կատարում է ուղղագիծ շարժում* MN *ուղղորդով։ Գտնել մեխանիզմի* B *կետի շարժման հավասարումը և հետագիծը, եթե* OA-*ով և* MN-*ին ուղղահայաց* OE-*ով կազմված անկյունը փոփոխվում է* $\varphi=kt$ *օրենքով,* $AC=CB=BD=DA=a$, $OC=OD=b$, $OE=l$ *(գծ. 16)։*



Գծ. 16

Դիտողություն։ *Մեխանիզմի կառուցվածքը այնպիսին է, որ* φ *անկյունը չի կարող անսահմանափակ աճել։ Դրա հետևանքով մեխանիզմի դիտարկվող շարժումը հնարավոր է միայն վերջավոր ժամանակամիջոցում։*

Լուծում։ *Տանենք կոորդինատական առանցքներն այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում։* ACBD *շեղանկյան անկյունագծերի հատման կետը նշանակենք* O_1։ *Սիմետրիայի հետևանքով* B *կետը կգտնվի* OA *ուղղի վրա։ Բացի դրանից, ակնհայտ է, որ* $BO_1=O_1A$։ *Եթե* B *կետի ընթացիկ կոորդինատները նշանակենք* x, y, *ապա գծագրից կունենանք՝*

$$x=OB\cos\varphi,$$

$$y=OB\sin\varphi։ \qquad (1)$$

OB *անհայտ մեծությունը որոշելու համար դիտարկենք* OB.OA *արտադրյալը։ Ունենք*

$$OB.OA=(OO_1-O_1B).(OO_1+O_1A)=OO_1^2-O_1B^2,$$

բայց

$$OO_1^2=b^2-O_1C^2,\quad O_1B^2=a^2-O_1C^2,$$

հետևաբար,

$$OB\cdot OA=b^2-a^2։ \tag{2}$$

Գծագրից երևում է, որ

$$OA=\frac{l}{\cos\varphi}, \tag{3}$$

Տեղադրելով OA-ի արժեքը (3)-ից (2)-ի մեջ, կստանանք

$$OB=\frac{b^2-a^2}{l}\cos\varphi։ \tag{4}$$

Եթե նկատի ունենանք, որ $\varphi=kt$, ապա (1) և (4)-ից կստանանք B կետի շարժման հավասարումները հետևյալ տեսքով՝

$$x=\frac{b^2-a^2}{l}\cos^2 kt, \tag{5}$$

$$y=\frac{b^2-a^2}{l}\sin kt\cos kt։$$

Հետագծի հավասարումն ստանալու համար պետք է (5) հավասարումներից արտաքսել t ժամանակը։ Դրա համար (5)-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$x=\frac{b^2-a^2}{2l}(1+\cos 2kt),$$

$$y=\frac{b^2-a^2}{2l}\sin 2kt։$$

Այստեղից էլ կարելի է ստանալ B կետի հետագծի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$\left(x-\frac{b^2-a^2}{2l}\right)^2+y^2=\left(\frac{b^2-a^2}{2l}\right)^2։$$

Այսպիսով, B կետի հետագիծը կլինի շրջանագծի աղեղ, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և որի շառավիղը հավասար է $r=\frac{b^2-a^2}{2l}$։ Այդ շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է OX *առանցքի վրա և կիսում է* OB *հատվածը այն մոմենտում, երբ* $\varphi = 0$։

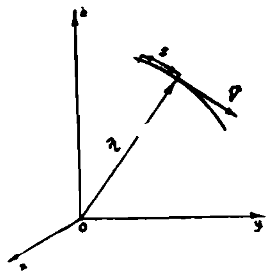
Պատ. $$x=\frac{b^2-a^2}{2l}(1+\cos 2kt),\quad y=\frac{b^2-a^2}{2l}\sin 2kt,$$

$$\left(x-\frac{b^2-a^2}{2l}\right)^2+y^2=\left(\frac{b^2-a^2}{2l}\right)^2.$$

§ 2. ԿԵՏԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆԸ

1. Կետի արագության վեկտորը։ *Կորագիծ շարժման դեպքում կետի արագությունը մի վեկտոր է, որն ուղղված է նրա հետագծի շոշափողով դեպի շարժման կողմը և թվապես հավասար է* $\frac{ds}{dt}$*-ի, որտեղ* ds*-ը հետագծի աղեղի էլեմենտն է (գծ. 17)։ Կետի արագության վեկտորը տվյալ մոմենտում հավասար է շարժվող կետի շառավիղ-վեկտորի առաջին ածանցյալին ըստ ժամանակի, այսինքն՝*

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}, \qquad (1)$$



Գծ. 17

2. Կետի արագությունը դեկարտյան կոորդինատներով։ *Եթե կետի* $\bar{r}$ *շառավիղ-վեկտորն արտահայտենք իր պրոյեկցիաներով ապա (1) առնչությունը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$\bar{v}=\frac{d}{dt}(x\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}z), \qquad (2)$$

որտեղ x, y, z*-ը* $\bar{r}$*-ի պրոյեկցիաներն են կոորդինատական* x, y, z *առանցքների վրա։*

Եթե v_x, v_y *և* v_z*-ով նշանակենք* $\bar{v}$*-ի պրոյեկցիաները, ապա (2) բանաձևից կունենանք՝*

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt},$$

Այստեղից հետևում է, որ կետի արագության պրոյեկցիաները դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատական առանցքների վրա հավասար են կետի կոորդինատների առաջին ածանցյալներին ըստ ժամանակի։

Արագության մեծությունը և ուղղությունը որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

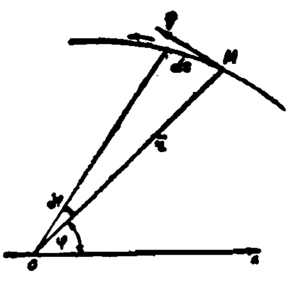
$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2},$$

$$\cos(\widehat{v,x})=\frac{v_x}{v}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

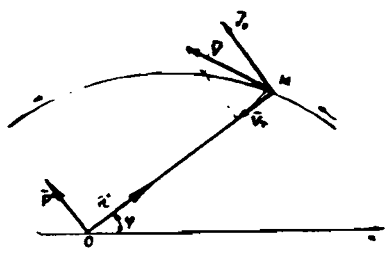
$$\cos(\widehat{v,y})=\frac{v_y}{v}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

$$\cos(\widehat{v,z})=\frac{v_z}{v}=\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

3. Կետի արագությունը բևեռային կոորդինատներով: *Եթե կետը շարժվում է հարթ կորով (գծ. 18) և նրա շարժման հավա-*



Գծ. 19



Գծ. 18

սարումները տված են բևեռային կոորդինատներով՝

$$r=f_1(t),\quad \varphi=f_2(t),$$

ապա կետի արագության վեկտորը բևեռային կոորդինատներում արտահայտվում է հետևյալ ձևով՝

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt}\bar{r}^\circ + r\frac{d\varphi}{dt}\bar{p}^\circ,$$

որտեղ $\bar{r}^\circ$*-ն* $\bar{r}$ *շառավիղ-վեկտորի միավոր վեկտորն է, իսկ* $\bar{p}^\circ$*-ն նրան ուղղահայաց միավոր վեկտորը՝ ուղղված* φ*-ի աճման ուղղությամբ (գծ. 19)։ Այստեղ* $\bar{v}_r = \frac{dr}{dt}\bar{r}^\circ$ *գումարելին կոչվում է ռադիալ արագություն, որի մեծությունը հավասար է* $\frac{dr}{dt}$*-ի, իսկ* $\bar{v}_p = r\frac{d\varphi}{dt}\bar{p}^\circ$ *գումարելին կոչվում է ընդլայնական կամ տրանսվերսալ արագություն. տրանսվերսալ բաղադրիչի մեծությունը հավասար է* $r\frac{d\varphi}{dt}$*-ի։ Քանի որ ռադիալ և տրանսվերսալ բաղադրիչները փոխադարձաբար ուղղահայաց են, ապա արագության վեկտորի մոդուլը հավասար կլինի՝*

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\text{։}$$

Գծ. 19-ում ցույց են տրված շարժվող M կետի արագության վեկտորի ռադիալ և տրանսվերսալ բաղադրիչները։ Արագության ռադիալ բաղադրիչը բնութագրում է շառավիղ-վեկտորի փոփոխությունն ըստ մեծության, իսկ տրանսվերսալ բաղադրիչը՝ ըստ ուղղության։

Խ ն դ ի ր 9։ *Կետի շարժման հավասարումները տրված են՝*

$$r = kt, \quad \varphi = \alpha t \qquad (1)$$

բևեռային կոորդինատներով, որտեղ k և α*-ն հաստատուն մեծություններ են։*

Գտնել կետի հետագիծը և արագությունը։

Լ ու ծ ու մ։ *Կետի հետագիծը որոշելու համար կետի շարժման (1) հավասարումներից պետք է արտաքսել t ժամանակը։ Արտաքսելուց հետո կստանանք՝*

$$r = a\varphi \quad \left(a = \frac{k}{\alpha}\right)\text{,}$$

Հետևաբար, հետագիծը կլինի Արքիմեդի պարուրագիծ (սպիրալ)։

Արագության պրոյեկցիաները կլինեն՝

$$v_r = \frac{dr}{dt} = k, \quad v_p = r\frac{d\varphi}{dt} = \alpha kt.$$

Արագության մեծությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

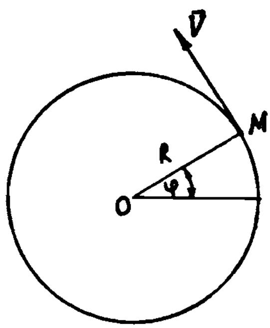
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = k\sqrt{1+t^2\alpha^2}.$$

Պատ. $r = a\varphi, \quad v = k\sqrt{1+t^2\alpha^2}.$

4. Շրջանային շարժման արագությունը: Անկյունային արագությունը: *Եթե կետը շարժվում է R շառավիղ ունեցող շրջանագծով (գծ. 20), ապա նրա արագության թվային արժեքը հավասար կլինի*

$$V = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

որտեղ $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ *կոչվում է անկյունային արագություն։*



Գծ. 20

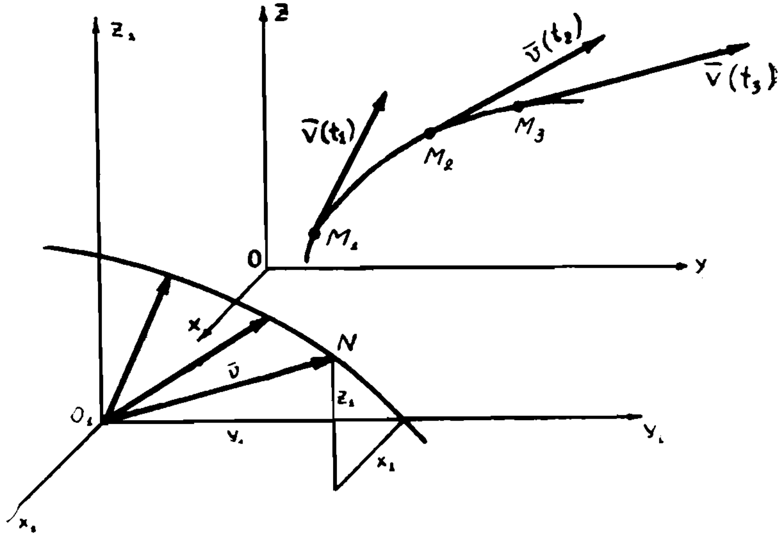
Շրջանային շարժման դեպքում կետի արագության վեկտորն ունի շրջանագծի շոշափողի ուղղությունը, իսկ արագության մեծությունը հավասար է շառավղի և անկյունային արագության արտադրյալին՝ $v = R\cdot\omega$։

5. Արագության հոդոգրաֆը: *Միևնույն կետից (բևեռից) տարված արագության վեկտորների ծայրակետերի երկրաչափական տեղը, հետագծի վրա գտնվող բոլոր կետերի համար, կոչվում է արագության հոդոգրաֆ (գծ. 21),*

Դիցուք M *կետը շարժվում է* OXYZ *ուղղանկյուն դեկարտյան սիստեմի նկատմամբ։* M *կետի արագության* $\bar{v}$ *վեկտորը ժամանակի ընթացքում փոխվում է ինչպես մեծությամբ, այնպես էլ ուղղությամբ։ Ենթադրենք* M *կետը* $t_1 \leqslant t \leqslant t_3$ *ժամանակամիջոցում անցնում է* $\overset{\frown}{M_1M_3}$*-ով։ Այդ ժամանակ նրա* $\bar{v}(t)$ *արագությունը անընդհատ* $\bar{v}(t_1)$*-ից կփոխվի* $\bar{v}(t_3)$*-ի։*

M *կետի արագության* $\bar{v}$ *վեկտորի փոփոխությունը ուսում-*

նասիրելու համար տանենք $O_1x_1y_1z_1$ նոր կոորդինատական սիստեմը, որի առանցքները համապատասխանաբար զուգահեռ լինեն $Oxyz$ սիստեմի առանցքներին (գծ. 21)։ Արագության $\bar{v}(t)$ վեկ-



Գծ. 21

տորները ($t_1 \leqslant t \leqslant t_3$) իրենց զուգահեռ տեղափոխենք O_1 սկզբնակետը։ Այդ դեպքում $\bar{v}(t)$ վեկտորների ծայրակետերը (քանի որ $\bar{v}(t)$-ն անընդհատ ֆունկցիա է) կգծեն մի անընդհատ կոր գիծ, որը կոչվում է արագության $\bar{v}$ վեկտորի հոդոգրաֆ։

Քանի որ $O_1x_1y_1z_1$ սիստեմի առանցքները զուգահեռ են $Oxyz$ սիստեմի առանցքներին և արագության հոդոգրաֆի շառավիղ-վեկտորները շարժվող M կետի արագության վեկտորներն են, ապա արագության հոդոգրաֆի կետերի (x_1, y_1, z_1) կոորդինատները պետք է համապատասխանաբար հավասար լինեն $\bar{v}$ վեկտորի՝

$$v_x = f_1'(t), \quad v_y = f_2'(t), \quad v_z = f_3'(t) \tag{1}$$

պրոյեկցիաներին $Oxyz$ սիստեմի առանցքների վրա, այսինքն՝

$$x_1 = f_1'(t), \quad y_1 = f_2'(t), \quad z_1 = f_3'(t)։ \tag{2}$$

Այս հավասարումներն իրենցից ներկայացնում են հոդոգրաֆը գծող կետի շարժման հավասարումները։ Արտաքսելով (2) հավասարումներից t ժամանակը, կստանանք արագության հոդոգրաֆի հավասարումները դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատներով։

Անհրաժեշտ է նշել, որ հետագծի հավասարումներն ստանալու համար պետք է արտաքսել t ժամանակը կետի շարժման հավասարումներից, իսկ արագության հոդոգրաֆի հավասարումները ստանալու համար՝ արտաքսել t ժամանակը շարժման հավասարումների ածանցյալներից։

Հոդոգրաֆ գծող կետի արագությունն ստանալու համար բավական է (1) հավասարումները ածանցել ըստ ժամանակի։

Խ ն դ ի ր 10։ Կետի շարժումը տված է՝

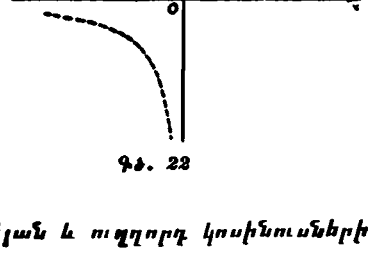
$$x=ae^{kt},\quad y=be^{-kt}$$

հավասարումներով, որտեղ $a>o$, $b>o$, $k>o$։ Գտնել կետի հետագիծը, արագությունը և արագության հոդոգրաֆի հավասարումը։

Լ ու ծ ու մ։ Հետագիծը որոշելու համար կետի շարժման հավասարումներից պետք է արտաքսել t ժամանակը։ Դրա համար շարժման հավասարումների աջ և ձախ մասերը համապատասխանաբար բազմապատկենք իրար հետ։ Կստանանք

$$xy=ab։$$

Հետևաբար, հետագիծը կլինի հավասարակողմ հիպերբոլ, որի համար կոորդինատական առանցքները ծառայում են որպես ասիմպտոտներ (գծ. 22)։ $a>o$, $b>o$ պայմանի դեպքում հիպերբոլի ճյուղերը դասավորված կլինեն առաջին և երկրորդ քառորդներում։



Գծ. 22

Կետի արագության պրոյեկցիաները հավասար կլինեն՝

$$v_x=\frac{dx}{dt}=ake^{kt},$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=-bke^{-kt},$$

Արագության վեկտորի մեծության և ուղղորդ կոսինուսների համար կունենանք՝

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(ake^{kt})^2+(-bke^{-kt})^2}=k\sqrt{a^2e^{2kt}+b^2e^{-2kt}},$$

$$\cos(\hat{v,x})=\frac{v_x}{v}=\frac{ak}{v}e^{kt},\quad \cos(\hat{v,y})=\frac{v_y}{v}=-\frac{bk}{v}e^{-kt}.$$

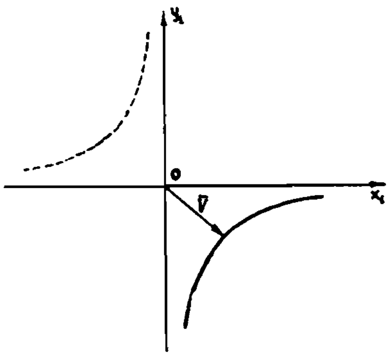
Այժմ որոշենք արագության հոդոգրաֆի հավասարումը։ Արագության հոդոգրաֆի ընթացիկ կետի կոորդինատները նշանակենք x_1, y_1։

Արագության հոդոգրաֆի սահմանումից ունենք՝

$$x_1=v_x=ake^{kt},\quad y_1=v_y=-bke^{-kt}. \tag{1}$$

Արագության հոդոգրաֆի հավասարումը ստանալու համար պետք է (1) հավասարումներից արտաքսել t *ժամանակը։ Եթե բազմապատկենք այս (1) հավասարումները, ապա կստանանք արագության հոդոգրաֆի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝*

$$x_1y_1=-abk^2.$$



Գծ. 23

Հետևաբար, արագության հոդոգրաֆը հավասարակողմ հիպերբոլ է, որի ճյուղերը գտնվում են երկրորդ և չորրորդ քառորդներում (գծ. 23)։

Պատ. *Հետագիծը՝* $xy=ab$, *արագության հոդոգրաֆը՝* $x_1y_1=-abk^2$,

$$v=k\sqrt{a^2c^{2kt}+b^2e^{-2kt}},$$

$$\cos(v,x)=\frac{ak}{v}e^{kt},$$

$$\cos(v,y)=-\frac{bk}{v}e^{-kt}.$$

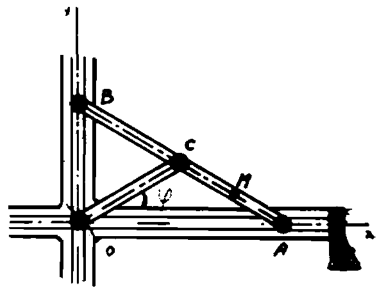
6. Կետի արագության վերաբերյալ խնդիրների լուծումը: *Այս պարագրաֆի խնդիրները լուծելիս նախ պետք է ընտրել կոորդինատական սիստեմ, կազմել կետի շարժման հավասարումները ընտրված սիստեմի նկատմամբ և այնուհետև կետի շարժման հավասարումների հիման վրա գտնել կետի արագության պրոյեկցիաները կոորդինատական առանցքների վրա և, վերջապես, որոշել կետի արագության մեծությունը և ուղղությունը։*

7. Խնդիրներ

Ստորև բերվում են արագության վերաբերյալ մի շարք *խնդիրներ։ Տրվում են այդ խնդիրների լուծումները և լուծման վերաբերյալ ցուցումներ։ Այս խնդիրների մեծ մասը վերցված են Ի. Վ. Մեշչերսկու «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու» գրքից։*

Խնդիր 11 (327)։ *Էլիպսոգրաֆի քանոնի երկարությունը՝* AB=40 սմ, *մեղեխի երկարությունը՝* OC=20 սմ, AC=CB։ *Մեղեխը հավասարաչափ պտտվում է* O *առանցքի շուրջը* ω *անկյունային արագությամբ։ Գտնել քանոնի* A *ծայրից* AM=10 սմ *հեռավորության վրա գտնվող* M *կետի հետագծի հավասարումը և արագության հոդոգրաֆը։*

Լուծում։ *Եթե* M *կետի կոորդինատները նշանակենք* x *և* y, *իսկ* AOC *անկյունը՝* φ *(գծ. 24), ապա այդ կետի կոորդինատների համար կունենանք՝*



Գծ. 24

$$x=30 \cdot \cos\varphi,$$

$$y=10 \cdot \sin\varphi\text{։}$$

Խնդրի պայմանի համաձայն մեղեխը կատարում է հավասարաչափ պտտական շարժում ω *հաստատուն անկյունային արագությամբ։ Այստեղից հետևում է, որ* φ *անկյունը համեմատական է* t *ժամանակին, և մենք կարող ենք գրել, որ*

$$\varphi = \omega t\text{։}$$

Հետևաբար, կետի շարժման հավասարումները կլինեն՝

$$x=30 \cdot \cos\omega t, \quad (1)$$

$$y=10 \cdot \sin\omega t\text{։} \quad (2)$$

Հետագծի հավասարումը ստանալու համար պետք է (1) և (2) հավասարումներից արտաքսել t *ժամանակը։ Արտաքսելուց հետո կստանանք՝*

$$\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{100} = 1\text{։}$$

Հետևաբար, հետագիծը կլինի էլիպս։

M *կետի արագության հոդոգրաֆի հավասարումը ստանալու* համար պետք է որոշել այդ կետի արագության պրոյեկցիաները կոորդինատական x և y առանցքների վրա։ Արագության պրոյեկցիաները կլինեն՝

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -30\,\omega \sin \omega t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 10\,\omega \cos \omega t։$$

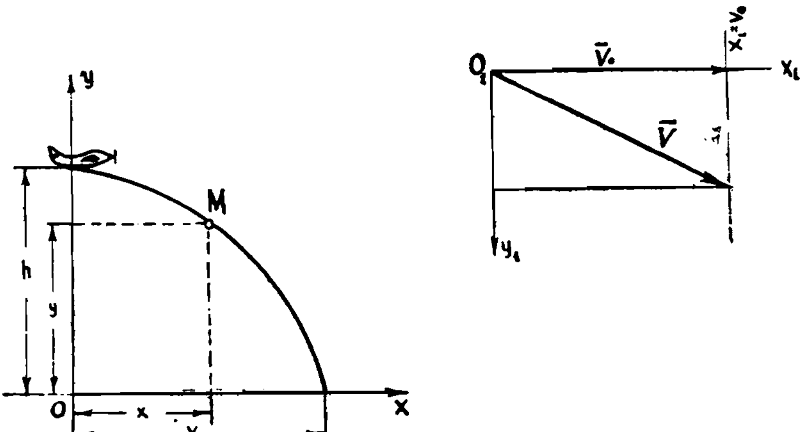
Կազմենք M կետի արագության հոդոգրաֆի հավասարումը $x_1 o y_1$ կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ։ Այստեղ x_1 և y_1-ը իրենցից ներկայացնում են արագության պրոյեկցիաները այդ առանցքների վրա, այսինքն՝

$$x_1 = -30\,\omega \sin \omega t,$$

$$y_1 = 10\,\omega \cos \omega t։$$

Հոդոգրաֆի հավասարումը ստանալու համար պետք է այս հավասարումներից արտաքսել t ժամանակը։ Արտաքսելուց հետո կստանանք՝

$$\frac{x_1^2}{900\omega^2} + \frac{y_1^2}{100\omega^2} = 1։$$



Գծ. 25

Նշանակում է M կետի արագության հոդոգրաֆը նույնպես կլինի էլիպս։

Պատ․

$$\frac{x^2}{900}+\frac{y^2}{100}=1,$$

$$\frac{x_1^{\,2}}{900\omega^2}+\frac{y_1^{\,2}}{100\omega^2}=1։$$

Խնդիր 12 (331)։ *Ինքնաթիռից նետված ռումբը շարժվում է*

$$x=v_0t,\quad y=h-\frac{gt^2}{2}$$

օրենքով։ OX *առանցքը ուղղված է հորիզոնական, իսկ* OY-*ը՝ ուղղահայաց դեպի վեր։ Գտնել 1) հետագծի հավասարումը, 2) ռումբի արագությունը (մեծությունը և ուղղությունը) այն մոմենտում, երբ նա հատում է* OX *առանցքը, 3) թռիչքի հեռավորությունը, 4) ռումբի արագության հոդոգրաֆի հավասարումը և հոդոգրաֆ գծող կետի* V_1 *արագությունը (գծ. 25)։*

Լուծում։ *Հետագծի հավասարումը ստանալու համար ռումբի շարժման հավասարումներից պետք է արտաքսել* t *ժամանակը։ Դրա համար, եթե առաջին հավասարումից գտնենք* t-*ն և նրա արժեքը տեղադրենք երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք՝*

$$y=h-\frac{g}{2v_0^{\,2}}x^2։$$

Հետևաբար, ռումբի շարժման հետագիծը կլինի պարաբոլ (գծ. 25)։

Արագության պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա կլինեն՝

$$v_x=\frac{dx}{dt}=v_0, \qquad (1)$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=-gt, \qquad (2)$$

իսկ արագության մեծությունը ցանկացած մոմենտում՝

$$v=\sqrt{v_0^{\,2}+g^2t^2}։ \qquad (3)$$

Խնդրում պահանջվում է գտնել արագությունն այն մոմեն-

տում, երբ ռումբը ընկնում է գետնին։ Այդ նպատակով y-ի արտահայտությունը հավասարեցնենք զրոյի՝

$$0=h-\frac{gt^2}{2},$$

որից հետո որոշենք թռիչքի տևողությունը՝

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

և այնուհետև t-ի համար ստացած այս արժեքը տեղադրենք v-ի արտահայտության մեջ։ Տեղադրելուց հետո, կստացվի՝

$$v=\sqrt{v_0^2+2gh}\,։$$

Ռումբի արագության վեկտորի ուղղությունը, երբ նա ընկնում է գետնի վրա, որոշվում է հետևյալ բանաձևերով՝

$$\cos(v,x)=\frac{v_x}{v}=\frac{v_0}{v},$$

$$\cos(v,y)=\frac{v_y}{v}=-\frac{gt}{v}=-\frac{\sqrt{2gh}}{v},$$

Թռիչքի երկարությունը հաշվելու համար պետք է x-ի արտահայտության մեջ t-ն փոխարինել $\sqrt{\frac{2h}{g}}$*-ով. կստացվի*

$$x=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

Ռումբի արագության հոդոգրաֆի հավասարումն ստանալու համար (1) և (2) հավասարումներից պետք է արտաքսել t ժամանակը։ Դրա համար կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$x_1=v_x=v_0,\quad y_1=v_y=-gt։$$

Հետևաբար, (x_1, y_1) *կոորդինատական սիստեմում հոդոգրաֆի հավասարումը կլինի՝*

$$x_1=v_0։$$

Սա մի ուղղաձիգ ուղիղ է, որը հեռացած է կոորդինատների սկզբնակետից v_0*-ի չափով (գծ. 25)։*

Հոդոգրաֆը գծող կետի v_1 *արագությունը ստանալու համար* *պետք է* x_1*-ի և* y_1*-ի արտահայտությունները մի անգամ ածանցել ըստ* t*-ի։ Կստանանք՝*

$$v_{1x}=0,\quad v_{1y}=-g։$$

$$\text{Պատ. } 1)\ y=h-g\frac{x^2}{2v_0^2},\quad 2)\ v=\sqrt{v_0^2+2gh},$$

$$\cos(\widehat{v,x})=\frac{v_0}{v},\ \cos(\widehat{v,y})=-\frac{\sqrt{2gh}}{v},$$

$$3)\quad x=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

4) ուղղաձիգ ուղիղ, որը հեռացված է կոորդինատների սկզբնակետից v_0*-ի չափով,* $v_{1y}=-g$*։*

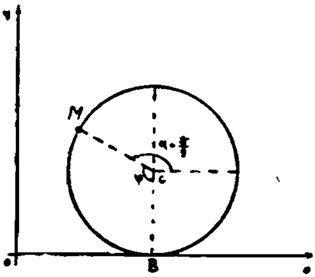
Խնդիր 13 (333)։ *Շոգեքարշի արագությունը* $v_0=72$ կմ/ժամ *է, նրա անվի շառավիղը* $R=1$ մ, *անիվը գլորվում է ուղղագիծ ռելսով առանց սահելու։ 1) Որոշել անվի վրա գտնվող* M *կետի արագության մեծությունը և ուղղությունը այն մոմենտում, երբ* M *կետով անցնող շառավիղը* v_0 *արագության ուղղության հետ կազմում է* $\frac{\pi}{2}+\alpha$ *անկյուն։ 2) Կառուցել* M *կետի արագության հոդոգրաֆը և որոշել հոդոգրաֆը գծող կետի* v_1 *արագությունը։*

Լուծում։ *Անվի շրջանակի վրա գտնվող* M *կետը (գծ. 26) կգծի*

$$x=20t-\sin 20t,$$

$$y=1-\cos 20t$$

ցիկլոիդը (տե՛ս 6 (319) խնդրի լուծումը)։



Գծ. 26

M *կետի արագության պրոյեկցիաները և արագության մեծությունը կլինեն՝*

$$v_x=\frac{dx}{dt}=20\,(1-\cos 20t),$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=20\sin 20t,$$

$$v=20\sqrt{(1-\cos 20t)^2+\sin^2 20t}=40\sin 10t, \qquad (1)$$

Գծագրից երևում է, որ

$$\varphi + \alpha = \pi, \qquad (2)$$

որտեղ $\varphi = \sphericalangle MCB$։ *Քանի որ անիվի գլորումը ռելսի վրայով կատարվում է առանց սահքի, ապա կունենանք՝*

$$\smile MB = OB։$$

Բայց $\smile MB = R\cdot\varphi$ *և միաժամանակ շարժման հավասարաչափ լինելու հետևանքով՝* $OB = v_0t$։ *Նշանակում է*

$$R\varphi = v_0t,$$

որտեղից ստացվում է

$$\varphi = \frac{v_0t}{R} = 20t։$$

Տեղադրելով φ*-ի այս արժեքը (2)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$20t + \alpha = \pi։$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$10t = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \qquad (3)$$

Անիվի շրջանակի M *կետի արագության մեծությունը այն մոմենտում, երբ* M *կետի շառավիղը* v_0 *արագության ուղղության հետ կազմում է* $\frac{\pi}{2} + \alpha$ *անկյուն, գտնելու համար* t*-ի արժեքը (3)-ից տեղադրենք (1)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$v = 40 \sin 10t = 40 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 40\cos\frac{\alpha}{2} \text{ մ/վրկ}։$$

Այժմ որոշենք M *կետի արագության ուղղությունը։ Ունենք*

$$\cos(\widehat{v,x}) = \frac{v_x}{v} = \frac{20(1 - \cos 20t)}{40.\sin 10t} = \frac{20.2\sin^2 10t}{40 \sin 10t} =$$

$$= \sin 10t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos(\widehat{v,y}) = \frac{v_y}{v} = \frac{20 \sin 20t}{40 \sin 10t} = \frac{20.\,2\sin 10t \cos 10t}{40 \sin 10t} =$$

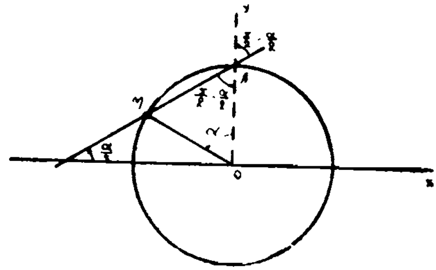
$$= \cos 10t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\measuredangle(\widehat{\bar{v}, x}) = \frac{\alpha}{2}, \quad \measuredangle(\widehat{\bar{v}, y}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

Հետևաբար, M *կետի արագությունն այն մոմենտում, երբ* M *կետի շառավիղը* v_0 *արագության ուղղության հետ կազմում է* $\frac{\pi}{2} + \alpha$ *անկյուն, ուղղված կլինի* MA *ուղղով (տե՛ս գծ. 27)։*

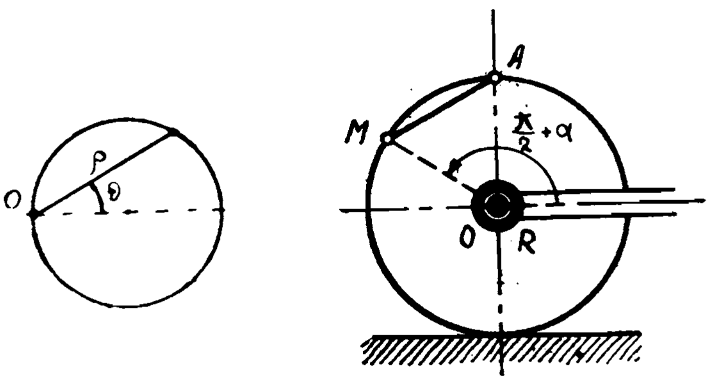
Եթե M *կետի հոդոգրաֆի ընթացիկ կետի կոորդինատները նշանակենք* (x_1, y_1), *ապա կունենանք՝*



Գծ. 27

$$x_1 = v_x = 20(1 - \cos 20t),$$
$$y_1 = v_y = 20 \sin 20t. \qquad (4)$$

Հոդոգրաֆի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով ստանալու համար հոդոգրաֆի ընթացիկ կետի կոորդինատները նշանակենք ρ, θ *(գծ. 28), որից հետո* ρ *շառավիղ-վեկտորի համար կունենանք՝*



Գծ. 28

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 20\sqrt{(1 - \cos 20t)^2 + \sin^2 20t} = 40 \sin 10t. \qquad (5)$$

Տեղադրենք t*-ի արժեքը (3)-ից (5)-ի մեջ, կստանանք*

$$\rho = 40 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 40 \cos\frac{\alpha}{2} = 2 v_0 \cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (6)$$

Հետևաբար, հոդոգրաֆը կլինի v_0 *շառավղով շրջանագիծ, որի հավասարումն է՝*

$$\rho = 2\,v_0 \cos\theta, \left(\theta = \frac{\alpha}{2}\right)։$$

Հոդոգրաֆը գծող կետի v_1 *արագությունը որոշելու համար կազմենք* x_1 *և* y_1 *կոորդինատների ածանցյալները ըստ ժամանակի։ Կստանանք՝*

$$v_{1x} = \frac{dx_1}{dt} = 400 \sin 20t,$$

$$v_{1y} = \frac{dy_1}{dt} = 400 \cos 20t։$$

Այստեղից հետևում է, որ հոդոգրաֆը գծող կետի արագությունը կլինի

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = 400\ մ/վրկ^2։$$

Պատ. *1) Արագությունը՝* $v = 40 \cos \dfrac{\alpha}{2}$ *և ուղղված է* MA *ուղղով։*

2) Շրջանագիծ՝ $\rho = 2v_0 \cos\theta$, *որտեղ* $\theta = \dfrac{\alpha}{2}$, *շառավիղը՝* $r = v_0$, $v_1 = 400$ մ/վրկ²։

Խնդիր 14։ *Կետը շարժվում է*

$$x = a \sin kt,\ \ y = b \cos kt,\ \ z = h\frac{kt}{2\pi}$$

օրենքով, որտեղ a, b, k, h *հաստատուն մեծություններ են։ Որոշել կետի հետագիծը և արագությունը։*

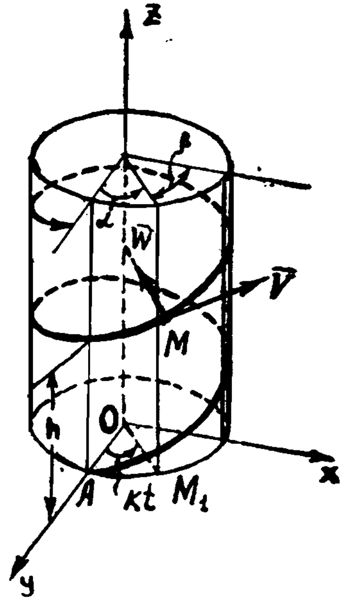
Լուծում։ *Կետի հետագիծը գտնելու համար կարելի է երրորդ հավասարումից որոշել* t *ժամանակը և այն տեղադրել առաջին և երկրորդ հավասարումների մեջ, այնուհետև հետազոտել ստացված երկու հավասարումները (տե՛ս խնդիր 8)։ Այս խնդիրը լուծենք այլ եղանակով։ Առաջին երկու հավասարումները բարձրացնենք քառակուսի ու գումարենք իրար, կստացվի՝*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1։$$

Այստեղից հետևում է, որ կետը ամբողջ շարժման ընթացքում մնում է էլիպսական գլանի վրա, որի հիմքի կիսաառանցքների երկարությունները հավասար են a-ի և b-ի, իսկ առանցքը համընկնում է z-ի հետ (գծ. 29)։

Դժվար չէ ցույց տալ, որ կետի հետագիծը կլինի պարուրագիծ, որը փաթաթված է էլիպսական գլանի մակերևույթին։

Կետի արագության պրոյեկցիաները կլինեն՝



Գծ. 29

$$V_x = ka\cos kt = k\frac{a}{b}\, b\cos kt = k\frac{a}{b}\, y,$$

$$V_y = -kb\sin kt = -k\frac{b}{a}\, a\sin kt = -k\frac{b}{a}\, x,$$

$$V_z = h\frac{k}{2\pi}\,;$$

Հետևաբար,

$$V = k\sqrt{a^2\frac{y^2}{b^2} + b^2\frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{4\pi^2}}\,;$$

Քանի որ

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

ապա արագության արտահայտությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$V = k\sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} - x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}\,;$$

Բայց մյուս կողմից հայտնի է, որ $a^2 - b^2 = c^2$, $\frac{c}{a} = e$, որտեղ c-ն էլիպսի կիսաֆոկուսային հեռավորությունն է, իսկ e-ն էլիպսի էքսցենտրիտետն է։ Կետի արագության արտահայտությունը վերջնականորեն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$V=k\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}-e^2x^2},$$

Պատ. Հետագիծը՝ պարուրագիծ էլիպսական գլանի վրա,

$$V=k\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4\pi^2}-e^2x^2},$$

Խնդիր 15 (335)։ *Նավը շարժվում է անշարժ կետի նկատմամբ պահպանելով ուղղորոշման α հաստատուն անկյուն, որտեղ α-ն նավի արագության ուղղության և նավը անշարժ կետին միացնող ուղղի միջև կազմված անկյունն է։ Գտնել նավի գծած կորի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով, եթե տված է α-ն և $r_{\varphi=0}=r_0$։ Նավը ընդունել որպես հարթության վրա շարժվող կետ, իսկ որպես բևեռ վերցնել այդ հարթության մի որևէ անշարժ կետ։ Հետազոտել նաև մասնավոր դեպքերը՝*

$$\alpha=0,\ \frac{\pi}{2}\ \text{և}\ \pi,$$

Գծ. 30

Լուծում։ *Խնդիրը լուծենք բևեռային կոորդինատներով։ Որպես բևեռ ընդունենք O անշարժ կետը (գծ. 30)։*

Նախ $\overline{V}$ արագությունը վերլուծենք $\overline{V}_p$ և $\overline{V}_r$ բաղադրիչների (գծ. 30)։ ΔABC-ից հետևում է, որ

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\frac{V_p}{V_r}, \qquad (1)$$

Տեղադրելով V_p-ի և V_r-ի արժեքները, կստանանք՝

$$-\operatorname{tg}\alpha=\frac{r\dfrac{d\varphi}{dt}}{\dfrac{dr}{dt}}$$

կամ

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\varphi}=-\operatorname{ctg}\alpha,$$

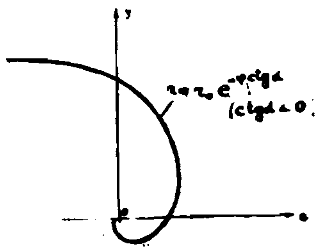
Ինտեգրենք այս հավասարումը (r_0, r), $(0, \varphi)$ սահմաններում, կստանանք՝

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} = -\int_{0}^{\varphi} \operatorname{ctg} \alpha d\varphi; \ \ln \frac{r}{r_0} = -\varphi \operatorname{ctg} \alpha ։$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$r = r_0 e^{-\varphi \cdot \operatorname{ctg} \alpha} ։ \tag{2}$$

Հետևաբար, հետագիծը կլինի լոգարիթմական պարուրագիծ (գծ. 31)։



Գծ. 31

Դիտարկենք հետևյալ մասնավոր դեպքերը՝

1) Եթե $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ապա $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ և (2)-ից ստացվում է $r = r_0$։

Սա շրջանագիծ է, որի շառավիղը հավասար է r_0-ի։

2) Եթե $\alpha = 0$ կամ $\alpha = \pi$, ապա (1)-ից հետևում է, որ արագության $\bar{V}$ վեկտորը կունենա միայն $\bar{V}_r$ բաղադրիչ, այսինքն՝ նավը կշարժվի մի ուղիղ գծով, որը միացնում է O անշարժ կետը նավի սկզբնական դիրքի հետ։

Պատ. Լոգարիթմական պարուրագիծ՝ $r = r_0 e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}$,

Երբ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $r = r_0$, շրջանագիծ. երբ $\alpha = 0$ կամ $\alpha = \pi$, ուղիղ գիծ։

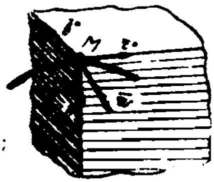
§ 3. ԿԵՏԻ ԱՐԱԳԱՑՈՒՄԸ

1. Կետի արագացման վեկտորը։ *Կորագիծ շարժման դեպքում կետի արագացումը մի վեկտոր է, որը հավասար է արագության առաջին ածանցյալին կամ շառավիղ-վեկտորի երկրորդ ածանցյալին ըստ ժամանակի, այսինքն՝*

$$\overline{W} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} ։ \tag{1}$$

Ընդհանուր դեպքում կետի արագացման $\overline{W}$ վեկտորը գտնը-

վամ է կետի հետագծի հպման հարթության վրա և ուղղված է կետի հետագծի գոգավորության կողմը (գծ. 32)։ Եթե կետի հետագիծը հարթ կոր գիծ է, ապա արագացման վեկտորը գտնվում է այդ հարթության վրա և ուղղված է նրա գոգավորության կողմը։*



Գծ. 32

2. Կետի արագացումը դեկարտյան կոորդինատներով: *Եթե կետի շառավիղ-վեկտորն արտահայտենք իր պրոյեկցիաներով, ապա (1)-ի հիման վրա կարող ենք գրել*

$$\bar{w} = \frac{d^2}{dt^2}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})։$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2},$$

այսինքն՝ արագացման պրոյեկցիաները դեկարտյան կոորդինատական առանցքների վրա հավասար են կետի կոորդինատների երկրորդ ածանցյալներին ըստ ժամանակի։

Արագացման մեծությունը և ուղղությունը որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$w = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

$$\cos(w, \hat{x}) = \frac{w_x}{w} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)}},$$

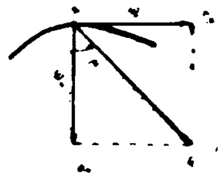
$$\cos(w, \hat{y}) = \frac{w_y}{w} = \frac{\frac{d^2v}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$

---

* *Կորի երեք կետերով անցնող հարթության սահմանային դիրքը, երբ այդ կետերից երկուսը կորի վրայով ձգտում են երրորդին, կոչվում է կորի հպման հարթություն տվյալ կետում։ Կորի հպման հարթությունը կարելի է սահմանել նաև որպես կորի շոշափողով և կորի որևէ կետով անցնող հարթության սահմանային դիրք, երբ այդ կետը կորի վրայով ձգտում է շոշափման կետին։ Հարթ կորի հպման հարթությունը համընկնում է այդ կորի հարթության հետ։*

$$\cos(w,\hat{}\,z)=\frac{w_z}{w}=\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$

3. Կետի տանգենցիալ և նորմալ արագացումները։ *Քանի որ կետի արագացման $\bar{w}$ վեկտորը միշտ գտնվում է հպման հարթության վրա, ապա նրա որոշման համար բավական է գտնել այդ վեկտորի պրոյեկցիաները հպման հարթության վրա գտնվող որևէ երկու փոխադարձաբար ուղղահայաց ուղղությունների վրա։ Որպես այդպիսի ուղղություններ ընդունված են հետագծի տվյալ M կետում հետագծին տարած τ° շոշափողի և n° գլխավոր նորմալի ուղղությունները (գծ. 33)։ Այստեղ τ°-ն շոշափողի, իսկ n°-ն գլխավոր նորմալի միավոր վեկտորներն են։ Այդ դեպքում արագացման վեկտորը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*



Գծ. 33

$$\bar{w}=\frac{dv}{dt}\tau^\circ+\frac{v^2}{\rho}n^\circ, \qquad (1)$$

որտեղ ρ-ն հետագծի կորության շառավիղն է կորի տվյալ կետում։

(1) բանաձևից երևում է, որ արագացման $\bar{w}$ վեկտորը բաղկացած է երկու վեկտորներից՝ մեկը ուղղված շոշափողով, իսկ մյուսը՝ գլխավոր նորմալով։ Արագացման $\bar{w}$ վեկտորի պրոյեկցիան շոշափողի ուղղության վրա կլինի՝

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}, \qquad (2)$$

իսկ նորմալի ուղղության վրա՝

$$w_n=\frac{v^2}{\rho}, \qquad (3)$$

Այստեղ $\bar{w}_\tau=\frac{dv}{dt}\tau^\circ$ *վեկտորը կոչվում է կետի տանգենցիալ արագացում, իսկ* $\bar{w}_n=\frac{v^2}{\rho}n^\circ$*-ն՝ նորմալ արագացում։*

$\bar{w}$ *լրիվ արագացման չափը (մոդուլը) որոշվում է*

$$w=|\bar{w}|=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}$$

բանաձևով, իսկ $\bar{w}$ վեկտորի և գլխավոր նորմալի միջև կազմված μ անկյունը (գծ. 33) որոշվում է

$$tg\mu=\frac{w_\tau}{w_n}$$

բանաձևի միջոցով։

Խնդիր 16։ *Տված են կետի շարժման հավասարումները՝*

$$x=a\cos kt, \quad y=a\sin kt, \quad z=bt,$$

որտեղ a, k, b *հաստատուն մեծություններ են։*

Գտնել կետի տանգենցիալ և նորմալ արագացումները, ինչպես նաև հետագծի կորության շառավիղը։

Լուծում: *Նախ որոշենք արագության մեծությունը՝*

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{a^2k^2(\sin^2kt+\cos^2kt)+b^2}=$$
$$=\sqrt{a^2k^2+b^2}\,։$$

Քանի որ արագությունը հաստատուն է, ապա տանգենցիալ արագացումը կլինի զրո՝

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}=0։$$

Ակնհայտ է, որ այս դեպքում կետի նորմալ արագացումը հավասար կլինի նրա լրիվ արագացմանը, հետևաբար կարող ենք գրել, որ

$$w_n=w=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{a^2k^4(\cos^2kt+\sin^2kt)}=ak^2։$$

Տեղադրելով v-*ի և* w_n-*ի արժեքները*

$$w_n=\frac{v^2}{\rho}$$

բանաձևի մեջ, կստանանք

$$ak^2=\frac{a^2k^2+b^2}{\rho},$$

որտեղից հետևում է, որ

$$\rho = a + \frac{b^2}{ak^2}.$$

Կորության շառավիղը, ինչպես երևում է այս վերջին բանաձևից, ավելի մեծ է, քան շրջանային գլանի շառավիղը։

Պատ. $w_\tau = 0$, $w_n = ak^2$, $\rho = a + \frac{b^2}{ak^2}$։

4. Կետի շարժման մասնավոր դեպքերը: *Դիտարկենք կետի շարժման մի քանի մասնավոր դեպքեր։*

ա) Ուղղագիծ շարժում: *Եթե կետի շարժման հետագիծը ուղիղ գիծ է, ապա* $\rho = \infty$։ *Այդ դեպքում* $w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ *և կետի լրիվ արագացումը հավասարվում է տանգենցիալ արագացմանը՝*

$$w = w_\tau = \frac{dv}{dt},$$

Տանգենցիալ արագացումը բնութագրում է արագության վեկտորի փոփոխությունն ըստ մեծության։

բ) Հավասարաչափ կորագիծ շարժում: *Կետի կորագիծ շարժումը կոչվում է հավասարաչափ, եթե արագության թվային արժեքը մնում է հաստատուն, այսինքն՝* $v = \text{const}$։ *Այդ դեպքում* $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ *և կետի լրիվ արագացումը հավասար է դառնում նորմալ արագացմանը՝*

$$w = w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Այս դեպքում w *արագացումը ամբողջ ժամանակ ուղղված կլինի կետի հետագծի նորմալով։*

Նորմալ արագացումը բնութագրում է արագության վեկտորի փոփոխությունն ըստ ուղղության։

Կետի հավասարաչափ կորագիծ շարժման օրենքն արտահայտվում է

$$s = s_0 + vt$$

տեսքով, որտեղ s_0*-ն կետի սկզբնական հեռավորությունն է հաշվարքի սկզբնակետից։*

գ) Հավասարաչափ ուղղագիծ շարժում: *Այս դեպքում* $w_n = w_\tau = 0$, *հետևաբար* $w = 0$։ *Միակ շարժումը, որի դեպքում* արագացումը ամբողջ ժամանակ հավասար է զրոյի, հանդիսանում է հավասարաչափ ուղղագիծ շարժումը։

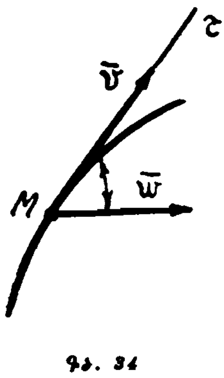
գ) Հավասարաչափ փոփոխական կորագիծ շարժում: Հավասարաչափ փոփոխական կոչվում է կետի այն կորագիծ շարժումը, որի դեպքում տանգենցիալ արագացումը ամբողջ ժամանակ մնում է հաստատուն, այսինքն՝ $w_\tau = \mathrm{const}$։ Հավասարաչափ փոփոխական կորագիծ շարժման դեպքում արագության փոփոխման օրենքը կախված ժամանակից կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$v = v_0 + w_\tau \cdot t \qquad (1)$$

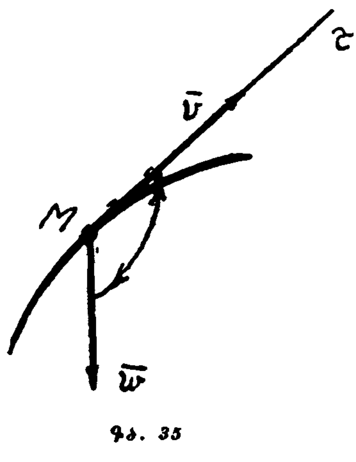
Այս դեպքում շարժման օրենքի համար կունենանք՝

$$s = s_0 + v_0 t + w_\tau \cdot \frac{t^2}{2} \qquad (2)$$

(1) և (2) բանաձևերում ընդունված են հետևյալ նախնական պայմանները՝ երբ $t=0$, $s=s_0$ և $v=v_0$։



Գծ. 34

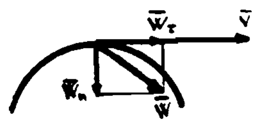


Գծ. 35

Եթե կետի կորագիծ շարժման դեպքում արագության բացարձակ արժեքը աճում է, ապա շարժումը կոչվում է արագացող, իսկ եթե նվազում է՝ դանդաղող։ Քանի որ արագության բացարձակ արժեքի փոփոխությունը բնութագրվում է տանգենցիալ արագացումով, ապա շարժումը կլինի արագացող, եթե v և w_τ մեծությունները ունեն միևնույն նշանը ($\bar{v}$ և $\bar{w}$ վեկտորներով կազմված անկյունը սուր է, գծ. 34) և դանդաղող, եթե նրանց նշանները տարբեր են ($\bar{v}$ և $\bar{w}$ վեկտորներով կազմված անկյունը բութ է, գծ. 35)։

Վերը շարադրված արդյունքները ներկայացնենք աղյուսակի միջոցով:

Աղյուսակ 1

Շարժման բնույթը	w_τ	w_n	w	Հետագծերը, արագության և արագացման վեկտորները
Հավասարաչափ ուղղագիծ	0	0	0	
Ուղղագիծ փոփոխական	w_τ	0	w_τ	
Հավասարաչափ կորագիծ	0	w_n	w_n	
Կորագիծ փոփոխական	w_τ	w_n	$\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}$	

Խնդիր 17: *Երկրագնդի մակերևույթից ուղղաձիգ դեպի վեր նետված է կետը v_0 սկզբնական արագությամբ: Գտնել վերընթացի բարձրության և սկզբնական v_0 արագության միջև եղած կապը:*

Լուծում: *Կետի շարժումը դեպի վեր կլինի հավասարաչափ դանդաղող: Դրա հետևանքով (1) և (2) բանաձևերը կընդունեն հետևյալ տեսքը*

$$v=v_0-gt, \tag{3}$$

$$s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2, \tag{4}$$

Դիցուք, երբ $s=h$*-ի,* $v=0$*: Այդ դեպքում (3)-ից կստանանք, որ* $t=\frac{v_0}{g}$*: Տեղադրելով այս արժեքը (4)-ի մեջ, կստանանք*

$$s=h=\frac{v_0^2}{g}-\frac{v_0^2}{2g}=\frac{v_0^2}{2g}\text{։}$$

Այստեղից ստացվում է

$$v_0^2=2gh$$

կամ

$$v_0=\sqrt{2gh}\text{։}$$

Սա կոչվում է Գալիլեյի բանաձև։

5. Կետի արագացումը բևեռային կոորդինատներով: Արագացման ռադիալ և տրանսվերսալ բաղադրիչները: *Դիցուք կետը շարժվում է հարթ կորով և նրա շարժման հավասարումները տված են բևեռային կոորդինատներով՝*

$$r=f_1(t),\quad \varphi=f_2(t)\text{։}$$

Այդ դեպքում կետի արագացման վեկտորն արտահայտվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\bar{w}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]r^0+\left[r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\right]p^{\circ},$$

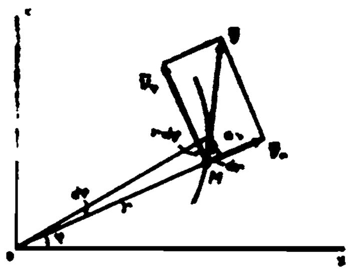
կամ

$$\bar{w}=\bar{w}_r+\bar{w}_p,$$

որտեղ

$$\bar{w}_r=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]r^{\circ},$$

$$\bar{w}_p=\left[r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\right]p^{\circ}\text{։}$$



Գծ. 36

Այստեղ $\bar{w}_r$ *վեկտորը կոչվում է ռադիալ արագացում, իսկ* $\bar{w}_p$*-ն՝ տրանսվերսալ արագացում (գծ. 36)։ Քանի որ* $\bar{w}_r$ *և* $\bar{w}_p$ *վեկտորները փոխադարձաբար ուղղահայաց են, ապա կետի արագացման վեկտորի մոդուլը հավասար կլինի՝*

$$w=|\bar{w}|=\sqrt{w_r^2+w_p^2},$$

կամ

$$w=\sqrt{\left[\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\right]^2+\left[r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\right]^2}\text{։}$$

Խնդիր 18։ *Կետի շարժման հավասարումները տված են բևեռային կոորդինատներով՝*

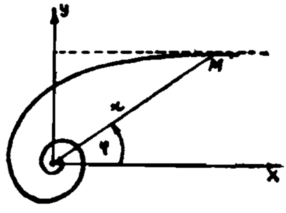
$$r=\frac{2}{t},\quad \varphi=4t$$

(t—վայրկյաններով, r—մետրերով, φ—ռադիաններով)։ Գտնել կետի հետագծի հավասարումը, ինչպես նաև կետի արագությունը և արագացումը $t=\frac{1}{2}$ *վայրկյանում։*

Լուծում։ *Տված հավասարումներից արտաքսելով t ժամանակը, կստանանք կետի հետագծի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝*

$$r=\frac{8}{\varphi}.$$

Սա կետի շարժման հետագծի հավասարումն է։ Այս հավասարումով որոշվող կորը կոչվում է հիպերբոլական պարուրագիծ (գծ. 37)։



Գծ. 37

Արագության ռադիալ և տրանսվերսալ բաղադրիչները կլինեն՝

$$v_r=\frac{dr}{dt}=-\frac{2}{t^2},\quad v_p=r\frac{d\varphi}{dt}=\frac{8}{t}.$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$(v_r)_{t=\frac{1}{2}}=-8\ \text{մ/վրկ},\quad (v_p)_{t=\frac{1}{2}}=16\ \text{մ/վրկ}.$$

Հետևաբար, արագության վեկտորի մոդուլի համար կունենանք՝

$$(v)_{t=\frac{1}{2}}=\sqrt{v_r^2+v_p^2}=\sqrt{8^2+16^2}=\sqrt{320}\ \text{մ/վրկ}.$$

Կետի $\bar{w}$ արագացման վեկտորի պրոյեկցիաները նույն r° և p° ուղղությունների վրա հավասար կլինեն՝

$$w_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{4}{t^3}-\frac{32}{t},$$

$$w_p=r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{16}{t^2},$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$(w_r)_{t=\frac{1}{2}}=-32\ \text{մ/վրկ}^2,$$

$$(w_p)_{t=\frac{1}{2}}=-64\ \text{մ/վրկ}^2:$$

4—2292

Դրա համար էլ արագացման մոդուլը կլինի՝

$$(w)_{t=\frac{1}{2}} = \sqrt{w_r^2 + w_p^2} = 71,6 \text{ մ/վրկ}^2։$$

Պատ. $r = \frac{8}{\varphi}$, $v_{t=\frac{1}{2}} = 17,9$ մ/վրկ, $w_{t=\frac{1}{2}} = 71,6$ մ/վրկ²։

6. Արագացման վերաբերյալ խնդիրների լուծման մասին։ *Այս խնդիրները լուծելու ժամանակ նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը՝*

1. ընտրել կոորդինատական սիստեմ,

2. կազմել կետի շարժման հավասարումները ընտրված կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ,

3. կետի շարժման հավասարումների հիման վրա որոշել կետի արագության պրոյեկցիաները և արագության մեծությունն ու ուղղությունը,

4. արագության պրոյեկցիաների հիման վրա որոշել արագացման պրոյեկցիաները կոորդինատական առանցքների վրա և արագացման մեծությունն ու ուղղությունը։

7. Խնդիրներ

Ստորև բերվում են արագացման վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումներ։ Այս խնդիրների մեծ մասը վերցված են Ի. Վ. Մեշչերսկու «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու» գրքից։

Այս պարագրաֆի խնդիրներում կան նաև այնպիսիները, որոնցում պահանջվում է որոշել կետի շարժման հավասարումները և հետագիծը, երբ տված է կետի շարժման արագացումը։ Այս տիպի խնդիրները լուծելիս նախ պետք է ընտրել կոորդինատական սիստեմը, կազմել արագացման պրոյեկցիաները ընտրված սիստեմի առանցքների վրա, այնուհետև ինտեգրել ստացված հավասարումները, արագության պրոյեկցիաները որոշելու համար։ Ինտեգրման հաստատունները որոշել նախնական պայմաններից։ Վերջապես, պետք է ինտեգրել արագության պրոյեկցիաների համար ստացած արտահայտությունները ու որոշել կետի շարժման հավասարումները, իհարկե, նախօրոք որոշելով ինտեգրման հաստատունները նախնական պայմաններից։

Խնդիր 19 (337)։ *Ցցահար վարսանդը ցցին հարվածելիս նրա հետ միասին շարժվում է 0,02 վայրկյանի ընթացքում, մին-*

չէ կանգ առնելը, ընդ որում ցիցը խրվում է գետնի մեջ 6 սմ։ *Որոշել ցցի շարժման սկզբնական արագությունը, ընդունելով շարժումը հավասարաչափ դանդաղող։*

Լուծում: *Ցիցը կատարում է ուղղագիծ հավասարաչափ դանդաղող շարժում։ Կամավոր* t *ժամանակամիջոցում նրա արագությունը և անցած ճանապարհն արտահայտվում են հետևյալ բանաձևերով՝*

$$v = v_0 - wt,$$

$$s = v_0 t - \frac{wt^2}{2}, \qquad (1)$$

որտեղ v_0-*ն սկզբնական արագությունն է։*

Խնդրի պայմանի համաձայն $t = 0{,}02$ վրկ *անցնելուց հետո ցիցը կանգ է առնում, հետևաբար նրա արագությունը՝* v-*ն, դառնում է զրո։ Բացի դրանից հայտնի է նաև, որ* $s = 6$ սմ: *Տեղադրելով այս արժեքները (1)-ի մեջ կստանանք՝*

$$0 = v_0 - 0{,}02a,$$

$$6 = 0{,}02v_0 - \frac{a}{2}\,(0{,}02)^2։$$

Լուծելով այս հավասարումների սիստեմը ստանում ենք $v_0 = 6$ մ/վրկ։

Պատ. $v_0 = 6$ մ/վրկ։

Խնդիր 20 (339): *Տրամվայի շարժումը ուղղագիծ ճանապարհով, նրա թափառքի ժամանակ, բնութագրվում է նրանով, որ տրամվայի անցած ճանապարհը համեմատական է ժամանակի խորանարդին։ Տրամվայն առաջին րոպեի ընթացքում անցնում է 90* մ *ճանապարհ։*

Գտնել $t = 0$ *և* $t = 5$ վրկ *մոմենտներում տրամվայի արագությունը և արագացումը։ Կառուցել հեռավորությունների, արագությունների և արագացումների կորերը։*

Լուծում: *Տրամվայը կատարում է ուղղագիծ շարժում*

$$s = at^3$$

օրենքով։ Այստեղ s-*ը հեռավորությունն է հաշվառքի սկզբնակետից, իսկ* a-*ն մի հաստատուն գործակից է, որը պետք է որոշել։*

Խնդրի պայմանի համաձայն տրամվայը առաջին րոպեում անցել է 90 մ։ *Հետևաբար,* a-*ն որոշելու համար պետք է (1)-ի* *մեջ s-ի փոխարեն տեղադրել 90* մ *և* t=1 *րոպե։ Այդ դեպքում կստանանք* a=*90* մ/ր³ *և տրամվայի շարժման օրենքը կլինի՝*

$$s=90\ t^3։ \qquad (2)$$

Նրա արագությունը և արագացումը ժամանակի ցանկացած մոմենտում կլինեն՝

$$v=\frac{ds}{dt}=270\ t^2 \text{ մ/րոպե}, \qquad (3)$$

$$w=\frac{dv}{dt}=540\ t \text{ մ/րոպե}^2։ \qquad (4)$$

(3) և (4) հավասարումներից հետևում է, որ տրամվայի արագությունը և արագացումը t=0 *մոմենտում կլինեն զրո, այսինքն՝*

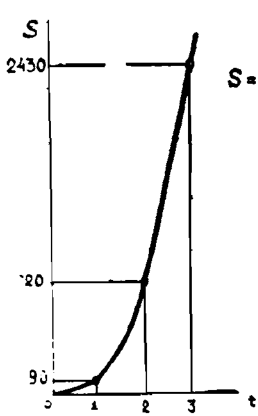
$$v_0=0, \quad w_0=0։$$

Տրամվայի շարժման սկզբից 5 րոպե անց նրա արագությունը և արագացումը կլինեն՝

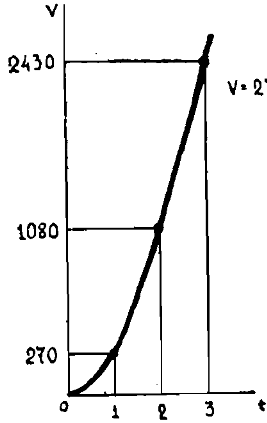
$$v_5=270\cdot\left(\frac{5}{60}\right)^2=\frac{15}{8} \text{ մ/րոպե},$$

$$w_5=w_{t_5}=540\cdot\frac{5}{60}=45 \text{ մ/րոպե}^2։$$

Իմանալով s, v, w-ի անալիտիկ արտահայտությունները, կարելի է նրանց փոփոխման օրենքն արտահայտել գրաֆիկորեն։ Դրա համար ուղղանկյուն կոորդինատական սիստեմում կառուցենք



Գծ. 38

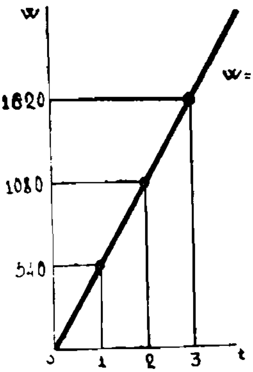


Գծ. 39

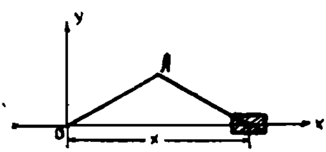
հեռավորությունների, արագությունների և արագացումների կորերը (գծ. 38, 39, 40)։

Խնդիր 21 *(344)։ Սողնակը շարժվում է ուղղագիծ ուղղորդով* $w_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t$ մ/վրկ^2 *արագացումով։ Գտնել սողնակի շարժման հավասարումը, եթե նրա սկզբնական արագությունը՝* $v_{0x} = 2\pi$մ/վրկ, *իսկ սկզբնական դիրքը համընկնում է սողնակի միջին դիրքի հետ, որն ընդունվում է որպես կոորդինատների սկզբնակետ։*

Կառուցել հեռավորությունների, արագությունների և արագացումների կորերը։



Գծ. 40



Գծ. 41

Լուծում: *Սողնակը կատարում է ուղղագիծ անհավասարաչափ շարժում։ Պահանջվում է որոշել սողնակի շարժման օրենքը։*

Սողնակը ընդունենք որպես կետ, որը շարժվում է ուղիղ գծով։ OX *առանցքը ուղղենք շարժման հետագծով դեպի աջ (գծ. 41)։*

Խնդրի պայմանի համաձայն

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t, \qquad (1)$$

Ինտեգրելով այս հավասարումը, կստանանք՝

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cos \frac{\pi}{2} t + c_1, \qquad (2)$$

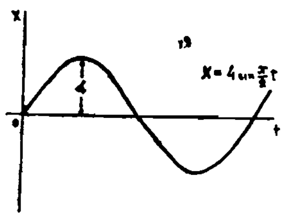
Ինտեգրման C_1 հաստատունը որոշվում է նախնական պայմաններից։ Տված է, որ երբ $t=0$, $v_{ox}=2\pi$ մ/վրկ։ Տեղադրելով այս (2)-ի մեջ, կստանանք, որ $C_1=0$։ Այսպիսով, սողնակի արագության փոփոխման օրենքը կլինի՝

$$v_x=2\pi \cos \frac{\pi}{2} t \text{։}$$

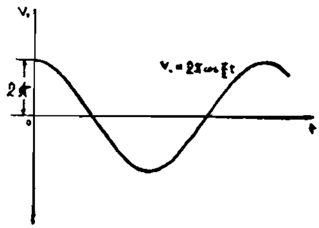
Ինտեգրելով այս հավասարումը և նկատի ունենալով, որ սողնակի սկզբնական դիրքը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, կստանանք շարժման օրենքը՝

$$x=4 \sin \frac{\pi}{2} t \text{։}$$

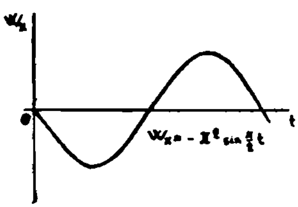
Հեռավորությունների կորն իրենից ներկայացնում է սինուսոիդ, արագությունների կորը՝ կոսինուսոիդ, իսկ արագացման կորը՝ նորից սինուսոիդ է, միայն հեռավորությունների կորի հետ համեմատած ունի այլ դասավորություն և կառուցվում է (w, t) կոորդինատական սիստեմում (գծ. 42, 43, 44)։



Գծ. 42



Գծ. 43



Գծ. 44

Պատ. $x=4 \sin \frac{\pi}{2} t$ մ։

Խնդիր 22 (352)։ Կետի շարժումը տված է հետևյալ հավասարումներով՝

$$x=a(e^{kt}+e^{-kt}), \quad y=a(e^{kt}-e^{-kt}),$$

որտեղ a-ն և k-ն տված հաստատուն մեծություններ են։ Գտնել կետի հետագծի հավասարումը, արագությունը և արագացումը որպես $r=\sqrt{x^2+y^2}$ շառավիղ-վեկտորի ֆունկցիաներ։

Լուծում: *Կետի հետագիծը գտնելու համար պետք է շարժման հավասարումներից արտաքսել* t *ժամանակը: Դրա համար այդ հավասարումները բարձրացնենք քառակուսի և հանենք իրարից, կստանանք՝*

$$x^2-y^2=4a^2\text{։}$$

Հետևաբար, հետագիծը կլինի հիպերբոլ։

Կետի արագությունը և արագացումը կորոշվեն հետևյալ ձևով՝

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=k\sqrt{a^2(e^{kt}-e^{-kt})+a^2(e^{kt}+e^{-kt})^2}=$$

$$=k\sqrt{x^2+y^2}=kr,$$

$$w=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=k^2\sqrt{a^2(e^{kt}+e^{-kt})^2+a^2(e^{kt}-e^{-kt})^2}=$$

$$=k^2\sqrt{x^2+y^2}=k^2r\text{։}$$

Պատ. *Հիպերբոլ՝* $x^2-y^2=4a^2$, $v=kr$, $w=k^2r$։

Խնդիր 23 *(358)։ Գտնել հորիզոնական* OX *առանցքով առանց սահքի գլորվող անիվի կետի արագացման ուղղությունը և մեծությունը, ինչպես նաև հետագծի կորության շառավիղը, եթե կետը գծում է՝*

$$x=20t-\sin 20t,\quad y=1-\cos 20t$$

ցիկլոիդը (t—*վայրկյաններով*, x, y—*մետրերով*)։ *Որոշել նաև կորության* ρ *շառավղի արժեքը* $t=0$ *մոմենտում։*

Լուծում։ *Նախ գտնենք արագացման մեծությունը։ Դրա համար հաշվենք*

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\ \text{մեծությունները։}$$

$$\frac{dx}{dt}=20(1-\cos 20t),\quad \frac{dy}{dt}=4\sin 20t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\ 400\sin 20t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=400\cos 20t\text{։}$$

Այստեղից արագացման մեծության համար կունենանք

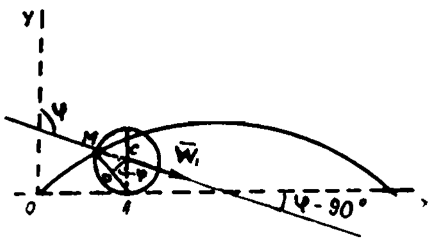
$$w=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{400^2\sin^2 20t+400^2\cos^2 20t}=400 \text{ մ/վրկ}^2\text{։}$$

Արագացման ուղղությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևերով՝

$$\cos(w,x)=\frac{w_x}{w}=\frac{400\sin 20t}{400}=\sin 20t=(20t-90°),$$

$$\cos(w,y)=\frac{w_y}{w}=\frac{400\cos 20t}{400}=\cos 20t\text{։} \tag{1}$$



Գծ. 45

Դժվար չէ նկատել (գծ. 45), որ $\sphericalangle MCA=\varphi=20t$ *[տե՛ս 13 (333) խնդրի լուծումը]։ (1) բանաձևից հետևում է, որ* $\bar{w}$ *արագացումը* ox *առանցքի հետ կազմում է* $\varphi-90°$ *անկյուն, իսկ* oy *առանցքի հետ՝* φ *անկյուն։ Այսպիսով,* $\bar{w}$ *վեկտորի մեծությունը և ուղղությունը հայտնի են։ Դժվար չէ համոզվել, որ* $\bar{w}$ *արագացումը ուղղված կլինի* MC*-ով դեպի գլորվող շրջանի* c *կենտրոնը։*

Մնում է որոշել հետագծի կորության շառավիղը։ Դրա համար պետք է որոշել արագությունը և նորմալ արագացումը։ Արագության համար կունենանք՝

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(20-20\cos 20t)^2+400\sin^2 20t=$$

$$=800(1-\cos 20t)=1600\sin^2 10t,$$

$$v=40\cdot\sin 10t \text{ մ/վրկ։}$$

Տանգենցիալ և նորմալ արագացումները կլինեն՝

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}=400\cos 10t,$$

$$w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}=\sqrt{400^2-400^2\cos^2 10t}=400\sin 10t\text{։}$$

Կորության շառավղի համար կունենանք՝

$$\rho=\frac{v^2}{w_n}=\frac{1600\sin^2 10t}{400\sin 10t}=4\sin 10t,\quad \rho_0=\rho/_{t=0}=0։$$

M կետը միացնենք A-ի հետ, իսկ C կետը՝ MA լարի D միջնակետի հետ։ Ստացված ACD եռանկյունին կլինի ուղղանկյուն, իսկ $\measuredangle ACD=\frac{\varphi}{2}=10t$։

$\triangle ACD$-ից ունենք՝

$$\sin 10t=\frac{AD}{CA}=\frac{AD}{1}=AD,$$

նշանակում է

$$MA=2AD=2\sin 10t,$$

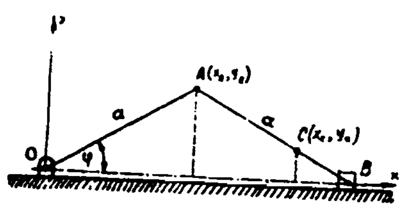
Հետևաբար՝

$$\rho=2MA։$$

Պատ. $w=400$ մ/վրկ^2 և ուղղված է MC-ով դեպի գլորվող շրջանի C կենտրոնը. $\rho=2MA$, $\rho_0=0$։

Խնդիր 21։ *Մեղեխա-շարժաթևային մեխանիզմի AO մեղեխը պտտվում է O կետի շուրջը ω_0 հաստատուն անկյունային արագությամբ, մեղեխը և AB շարժաթևը միացված են իրար հետ A հոդակապով։ Մեղեխի և շարժաթևերի երկարությունները իրար հավասար են՝ AO=AB=a։ B սողնակը շարժվում է ox առանցքով (գծ. 46)։ Գտնել A, B և C կետերի շարժման հավասարումները, հետագծերը, արագությունները և արագացումները։ C կետը գտնվում է AB-ի վրա և ունի B սողնակից BC=b հեռավորություն։*

Լուծում։ *Տանենք* xoy *կոորդինատական սիստեմը գծագրում ցույց տրված ձևով։ Եթե* A, B *և* C *կետերի կոորդինատները համապատասխանաբար նշանակենք* (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C), *ապա կունենանք՝*



Գծ. 46

$$\left.\begin{aligned} x_A&=a\cos\varphi, & y_A&=a\sin\varphi;\\ x_B&=2a\cos\varphi, & y_B&=0; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$x_C = (2a-b)\cos\varphi, \quad y_C = b։$$

Հայտնի է, որ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \omega_0։$$

Եթե ինտեգրենք այս հավասարումը և ընդունենք, որ սկզբնական մոմենտում OA *մեղեխի ուղղությունը համընկնում է* OX *առանցքի դրական ուղղության հետ, ապա կունենանք*

$$\varphi = \omega_0 t։$$

Տեղադրելով φ*-ի արժեքը* (2)*-ից* (1)*-ի մեջ, կստանանք* A, B *և* C *կետերի շարժման հավասարումները հետևյալ տեսքով՝*

$$\begin{aligned} &x_A = a\cos\omega_0 t, \quad y_A = a\sin\omega_0 t; \\ &x_B = 2a\cos\omega_0 t, \quad y_B = 0; \qquad (3) \\ &x_C = (2a-b)\cos\omega_0 t, \quad y_C = b\sin\omega_0 t։ \end{aligned}$$

Այժմ գտնենք այդ կետերի հետագծերը։ A *կետի համար կունենանք՝*

$$x_A^2 + y_A^2 = a^2։$$

Հետևաբար, A *կետը գծում է շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է* O *կետում և շառավիղը հավասար է* OA*-ի։*

B *կետը, ինչպես այդ անմիջականորեն հետևում է գծագրից, շարժվում է* OX *առանցքով, ընդ որում*

$$-2a \leqslant x_B \leqslant 2a։$$

Սողնակը կգտնվի մեղեխի պտտման կենտրոնից ամենամեծ հեռավորության վրա ժամանակի այն մոմենտներում, որոնք որոշվում են

$$\omega_0 t = \pi k$$

հավասարումով, որտեղ $k=0, 1, 2, \ldots$։ *Այն դեպքում, երբ* k*-ն զույգ է,* $x_B=2a$, *իսկ երբ* k*-ն կենտ է,* $x_B=-2a$։

C *կետի հետագիծը կլինի՝*

$$\frac{x_c^2}{(2a-b)^2} + \frac{y_c^2}{b^2} = 1։$$

Հետևաբար, C *կետի հետագիծը էլիպս է։*

A *կետի արագության համար կունենանք՝*

$$v_{Ax} = \frac{dx_A}{dt} = -a\omega_0\sin\omega_0 t, \quad v_{Ay} = \frac{dy_A}{dt} = a\omega_0\cos\omega_0 t,$$

$$V_A=\sqrt{V_{AX}^2+V_{Ay}^2}=a\omega_0\text{։}$$

Հետևաբար, A կետը շարժվում է շրջանագծով ω_0 հաստատուն անկյունային արագությամբ, այսինքն՝ A կետը կատարում է հավասարաչափ շրջանային շարժում։

B կետի V_B արագությունը ուղղված է x առանցքով, իսկ մեծությունը հավասար է

$$V_B=\frac{dx_B}{dt}=2a\omega_0\sin\omega_0 t\text{։}$$

Ժամանակի այն մոմենտները, որոնց դեպքում սողնակը գտնվում է մեղեխի պտտման կենտրոնից ամենամեծ հեռավորության վրա, որոշվում է

$$\omega_0 t=\pi k$$

հավասարումով։ (4)-ից հետևում է, որ այդ դիրքերում $V_B=0$։ Այս կետերը կոչվում են մեխանիզմի մեռյալ կետեր։

C կետի արագության համար կունենանք՝

$$V_{CX}=-(2a-b)\omega_0\sin\omega_0 t,\quad V_{CY}=b\omega_0\cos\omega_0 t,$$

$$V_C=\omega\sqrt{(2a-b)^2\sin^2\omega_0 t+b^2\cos^2\omega_0 t}\text{։}$$

Այժմ անցնենք A, B և C կետերի արագացումների որոշմանը։

A կետը կատարում է հավասարաչափ պտտական շարժում ω_0 անկյունային արագությամբ։ Հետևաբար, նրա տանգենցիալ արագացումը հավասար է զրոյի, իսկ նորմալ արագացումը կհամընկնի լրիվ արագացման հետ, այսինքն՝

$$W_A=W_n=\frac{V_A^2}{a}=a\omega_0^2\text{։}$$

B սողնակը կատարում է ուղղագիծ շարժում, հետևաբար նրա արագացումը կլինի՝

$$W_B=\frac{dV_B}{dt}=-2a\omega_0^2\cos\omega_0 t\text{։}$$

C կետի արագացման համար կունենանք՝

$$W_{CX}=\frac{dV_{CX}}{dt}=-(2a-b)\omega_0^2\cos\omega_0 t,$$

$$W_{CY}=\frac{dV_{CY}}{dt}=-b\omega_0^2\sin\omega_0 t,$$

$$W_C=\omega_0^2\sqrt{(2a-b)^2\cos^2\omega_0 t+b^2\sin^2\omega_0 t}\text{։}$$

Պատ. $x_A=a\cos\omega_0 t,\ y_A=a\sin\omega_0 t;$

$x_B=2a\cos\omega_0 t,\ y_B=0;$

$x_C=(2a-b)\cos\omega_0 t,\ y_C=b\sin\omega_0 t;$

$x_A^2+y_A^2=a^2;\ -2a\leqslant x_B\leqslant 2a,\ y_B=0;$

$$\frac{x_C^2}{(2a-b)^2}+\frac{y_C^2}{b^2}=1;$$

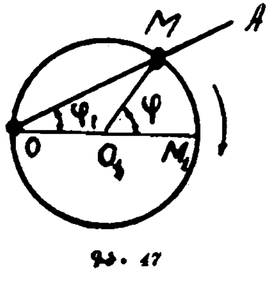
$V_A=a\omega_0;\ V_B=2a\omega_0\sin w_0 t;$

$$V_C=\omega\sqrt{(2a-b)^2\sin^2\omega_0 t+b^2\cos^2\omega_0 t};$$

$W_A=a\omega_0^2,\ W_B=-2a\omega_0^2\cos\omega_0 t;$

$$W_C=\omega_0^2\sqrt{(2a-b)^2\cos^2\omega_0 t+b^2\sin^2\omega_0 t}\text{։}$$

Խնդիր 25 (360): *10* սմ *շառավիղ ունեցող մետաղալարային շրջանագծի վրա հագցված է* M *օղակը, որով անցնող* OA *ձողը հավասարաչափ պտտվում է նույն շրջանագծի վրա գտնվող* O *կետի շուրջը։ Ձողի անկյունային արագությունն այնպիսին է, որ նա գծում է ուղիղ անկյունը 5* վրկ *ընթացքում։ Որոշել օղակի* V *արագությունը և* W *արագացումը (գծ. 47)։*



Գծ. 47

Լուծում։ M *օղակը կատարում է շրջանային շարժում* O_1 *կենտրոնի շուրջը*

$$V=\omega r$$

արագությամբ, որտեղ $r=10$ սմ, *իսկ* $\omega=\frac{d\varphi}{dt}$, OA *ձողը պտտվում է* O *կենտրոնի շուրջը* $\frac{d\varphi_1}{dt}$ *անկյունային արագությամբ։*

Գծագրից երևում է, որ $\varphi=2\varphi_1$, *քանի որ* φ *և* φ_1*-ը համապատասխանաբար կենտրոնական և ներգծյալ անկյուններ են, որոնք հենված են միևնույն* MM_1 *աղեղի վրա։ Ածանցելով այս առնչությունը ըստ* t *ժամանակի, կստանանք՝*

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\frac{d\varphi_1}{dt},$$

հետևաբար՝

$$\omega = 2\frac{d\varphi_1}{dt},$$

Խնդրի պայմանների համաձայն $\frac{d\varphi_1}{dt}$ *անկյունային արագությունը հաստատուն է և հավասար է* $\frac{\pi}{2.5}\cdot\frac{1}{վրկ}$*։ Այստեղից հետևում է՝*

$$\omega = 2\frac{d\varphi_1}{dt} = 2\cdot\frac{\pi}{2.5} = \frac{\pi}{5}\ 1/վրկ։$$

M *կետի արագությունը կլինի՝*

$$V = \omega\cdot r = \frac{\pi}{5}\cdot 10 = 2\pi\ սմ/վրկ։$$

M *կետը պտտվում է* O_1 *կենտրոնի շուրջը հաստատուն անկյունային արագությամբ, հետևաբար նրա* W_τ *տանգենցիալ արագացումը կլինի զրո, իսկ լրիվ արագացումը հավասար կլինի նորմալ արագացմանը, որի մեծությունն է*

$$W = W_n = \omega^2 r = \frac{\pi^2}{25}\cdot 10 = 0{,}4\pi^2\ սմ/վրկ^2։$$

Պատ. $V = 2\pi$ սմ/վրկ, $W = 0{,}4\pi^2$ սմ/վրկ^2։

Խնդիր 26 *(363)։ Կետի շարժումը տված է՝*

$$x = V_0 t\cos\alpha_0,\quad y = V_0 t\sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

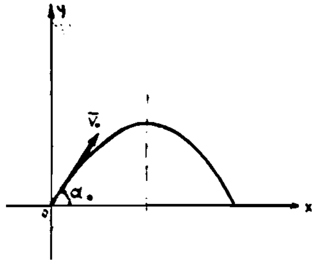
հավասարումներով, ընդ որում OX *առանցքը հորիզոնական է,* OY *առանցքն ուղղված է ուղղաձիգ դեպի վեր,* v_0, g *և* $\alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ *մեծությունները հաստատուններ են։ Գտնել՝ 1) կետի հետագիծը, 2) նրա ամենաբարձր դիրքի կոորդինատները, 3) կոորդինատական առանցքների վրա արագության պրոյեկցիաները այն մոմենտներում, երբ կետը գտնվում է* OX *առանցքի վրա։*

Լուծում։ *Կետի հետագծի հավասարումը գտնելու համար տված հավասարումներից պետք է արտաքսել* t *ժամանակը։ Դրա-*

համար առաջին հավասարումից գտնենք t-ն և ստացվածը տեղադրենք երկրորդ հավասարման մեջ, կստանանք

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}, \qquad (1)$$

Հետևաբար, հետագիծը կլինի պարաբոլ, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, իսկ առանցքը զուգահեռ է Oy առանցքին (գծ. 48)։ Պարաբոլի ամենաբարձր կետում շոշափողը զուգահեռ կլինի Ox առանցքին։ Հետևապես, $\frac{dy}{dx}$ ածանցյալը այդ կետում կդառնա զրո, այսինքն՝



Գծ. 48

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\alpha_0 - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha_0} = 0։$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$x = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha_0, \qquad (2)$$

Եթե տեղադրենք x-ի այս արժեքը (1)-ի մեջ, կստանանք՝

$$y = \frac{v_0^2\sin 2\alpha\,\mathrm{by}\alpha_0}{2g} - \frac{gv_0^4\sin^2 2\alpha_0}{4g^2\cdot 2v_0^2\cos^2 v_0} = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha_0,$$

Նշանակում է, հետագծի ամենաբարձր կետի կոորդինատները կլինեն՝

$$x = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha_0, \quad y = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha_0։$$

Այժմ գտնենք t-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում կետը կգտնվի OX առանցքի վրա։ Դրա համար y-ի արտահայտությունը հավասարեցնենք զրոյի, կստանանք՝

$$y = v_0 t\sin\alpha_0 - \frac{1}{2}yt^2 = 0։$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2v_0\sin\alpha_0}{g}, \qquad (3)$$

Մնում է գտնել կոորդինատական առանցքների վրա արագության պրոյեկցիաները այն մոմենտում, երբ կետը գտնվում է OX առանցքի վրա։ Դրա համար կազմենք v_x, v_y-ի արտահայտությունները և նրանց մեջ t-ի փոխարեն տեղադրենք *(3)*-ի արժեքները, կստանանք՝

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha_0, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha_0 - gt,$$

$$(v_y)_{t=t_1} = v_0 \sin\alpha_0, \ (v_y)_{t=t_2} = -v_0 \sin\alpha_0։$$

Պատ. *1)* $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 - \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} x^2,$

2) $x = \dfrac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha_0, \ y = \dfrac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha_0,$

3) $v_x = v_0 \cos\alpha_0, \quad v_y = \pm v_0 \sin\alpha_0$։

Ընդ որում, դրական նշանը համապատասխանում է սկզբնական մոմենտին, իսկ բացասականը՝ $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}$ *մոմենտին։*

Խ ն դ ի ր 27 *(372)։ Կայարանից մեկնելիս գնացքի արագությունը աճում է հավասարաչափ և մեկնումից 3 րոպե հետո հասնում է 72* կմ/ժամ *մեծության։ Ճանապարհը ընկած է 800* մ *շառավիղ ունեցող կորության վրա։ Որոշել գնացքի շոշափող, նորմալ և լրիվ արագացումները կայարանից մեկնելու մոմենտից 2 րոպե հետո։*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ *Խնդրի պայմանի համաձայն ունենք, որ*

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \mathrm{const} = a։$$

Ինտեգրելով վերջինս, կստանանք, որ

$$v = at + c_1։ \qquad (1)$$

Դժվար չէ նկատել, որ այստեղ $c_1 = 0$, *քանի որ* $t = 0$ *դեպքում* $v = 0$։

Եթե (1)-ի մեջ տեղադրենք $v = 72$ կմ/ժամ$=20$ մ/վրկ, $t = 3$ր $= 180$ վրկ *և* $c_1 = 0$, *կստանանք՝*

$$a = w_\tau = \frac{20}{180} = \frac{1}{9} \text{ մ/վրկ}^2։$$

Երկրորդ րոպեի վերջում արագությունը կլինի՝

$$v_2=\frac{1}{9}\cdot 120=\frac{40}{3}\ \text{մ/վրկ}։$$

Նորմալ արագացման համար կունենանք՝

$$w_n=\frac{v^2}{s}=\frac{1600}{9\cdot 800}=\frac{2}{9}\ \text{մ/վրկ}^2։$$

Լրիվ արագացումը կլինի՝

$$w=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{9}\ \text{մ/վրկ}^2։$$

Պատ. $w_\tau=\frac{1}{9}$ մ/վրկ^2, $w_n=\frac{2}{9}$ մ/վրկ^2, $w=\frac{\sqrt{s}}{9}$ մ/վրկ^2։

Խնդիր 28 *(374)։ Կետի շարժումը բևեռային կոորդինատների սիստեմում տված է* $r=ae^{kt}$ *և* $\varphi=kt$ *հավասարումներով, որտեղ* a*-ն և* k*-ն տված հաստատուն մեծություններ են։ Գտնել կետի հետագծի հավասարումը, արագությունը, արագացումը և հետագծի կորության շառավիղը, որպես նրա* r *շառավիղ վեկտորի ֆունկցիաներ։*

Լուծում: *Հետագծի հավասարումը ստանալու համար կետի շարժման հավասարումներից արտաքսենք* t *ժամանակը, կըստանանք՝*

$$r=ae^{\varphi}\ ։$$

Նշանակում է, հետագիծը կլինի լոգարիթմական պարուրագիծ։

Կետի արագությունը և արագացումը գտնելու համար նախ պետք է որոշել արագության և արագացման ռադիալ ու տրանսվերսալ բաղադրիչները։

Դրանք կլինեն՝

$$v_r=\frac{dr}{dt}=ake^{kt}=kr,\ \ v_p=r\,\frac{d\varphi}{dt}=kr,$$

$$w_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 ak^2e^{kt}-k^2r=k^2r-k^2r=0,$$

$$w_p=r\frac{d^2\varphi}{dt^2}=2\,\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=2k^2ae^{kt}=2k^2r։$$

Այնուհետև, կետի արագության ու արագացման թվային արժեքների համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունները՝

$$v=\sqrt{v_r^2+v_p^2}=\sqrt{k^2r^2+k^2r^2}=kr\sqrt{2},$$

$$w=\sqrt{w_r^2+w_p^2}=2k^2r։$$

Նշանակում է, կետի արագության և արագացման թվային արժեքները աճում են O կենտրոնից նրա ունեցած r հեռավորության համեմատական։

Այժմ որոշենք կետի տանգենցիալ և նորմալ արագացումները ու կետի հետագծի կորության շառավիղը։

$$w_\tau=\frac{dv}{dt}=k\sqrt{2}\frac{dr}{dt}=\sqrt{2}ak^2e^{kt}=\sqrt{2}k^2r,$$

$$w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}=\sqrt{4k^4r^2-2k^4r^2}=k^2r\sqrt{2},$$

$$\rho=\frac{v^2}{w_n}=\frac{2k^2r^2}{k^2r\sqrt{2}}=r\sqrt{2}։$$

Պատ. $r=ae^{\varphi}$ — *լոգարիթմական պարուրագիծ,*

$$v=kr\sqrt{2},\ w=2k^2r,\ s=r\sqrt{2}։$$

Խ ն դ ի ր 29: *Կետի շարժումը բևեռային կոորդինատական սիստեմում տված է*

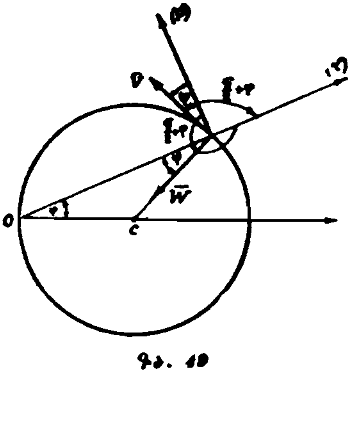
$$r=2a\cos kt,\ \varphi=kt$$

տեսքով, որտեղ $a>0$, $k>0$։ *Գտնել կետի շարժման հետագիծը, արագությունը և արագացումը։*

Լ ու ծ ու մ։ *Շարժման հավասարումներից արտաքսելով* t *ժամանակը, կստանանք հետագծի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝*

$$r=2a\cos\varphi։$$

Հետևաբար, հետագիծը a *շառավիղ ունեցող շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է բևեռային առանցքի վրա (գծ. 49)։*



Գծ. 49

Արագության ռադիալ և տրանսվերսալ բաղադրիչները կլինեն՝

$$v_r=\frac{dr}{dt}=-2ak\sin kt,$$

$$v_p = r\frac{d\varphi}{dt} = 2ak\cos kt\text{։}$$

Կետի արագության մեծության և ուղղության համար կունենանք՝

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} = 2ak,$$

$$\cos\left(\widehat{\bar v, r^0}\right) = \frac{v_r}{v} = -\sin kt = -\sin\varphi, \quad \angle\left(\widehat{\bar v, r^0}\right) = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

$$\cos\left(\widehat{\bar v, p^0}\right) = \frac{v_p}{v} = \cos kt = \cos\varphi, \quad \angle\left(\widehat{\bar v, p^0}\right) = \varphi\text{։}$$

Այժմ գտնենք կետի արագացման ռադիալ և տրանսվերսալ բաղադրիչները՝

$$w_r = \frac{dr}{dt} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -2ak^2\cos kt - 2ak^2\cos kt = -4ak^2\cos kt,$$

$$w_p = r\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -4ak^2\sin kt\text{։}$$

Այնուհետև, կետի արագացման թվային արժեքի և ուղղության համար կունենանք՝

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_p^2} = 4ak^2,$$

$$\cos\left(\widehat{\bar w, r^0}\right) = \frac{w_r}{w} = -\cos kt = -\cos\varphi, \quad \angle\left(\widehat{\bar w, r^0}\right) = \pi - \varphi,$$

$$\cos\left(\widehat{\bar w, p^0}\right) = \frac{w_p}{w} = -\sin kt = -\sin\varphi, \quad \angle\left(\widehat{\bar w, p^0}\right) = \frac{\pi}{2} + \varphi\text{։}$$

Կետի արագացման և արագության վեկտորների կառուցումը ցույց է տրված գծագիր 49-ում։

Պատ. $r = 2a\cos\varphi,$

$$v = 2ak, \quad \angle\left(\widehat{\bar v, r^0}\right) = \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \angle\left(\widehat{\bar v, p^0}\right) = \varphi,$$

$$w = 4ak^2, \quad \angle\left(\widehat{\bar w, r^0}\right) = \pi - \varphi, \quad \angle\left(\widehat{\bar w, p^0}\right) = \frac{\pi}{2} + \varphi\text{։}$$

ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՇԱՐԺՈՒՄՆԵՐԸ

Պինդ մարմնի պարզագույն շարժումները երկուսն են՝ պինդ մարմնի համընթաց շարժում և պինդ մարմնի պտտական շարժում։

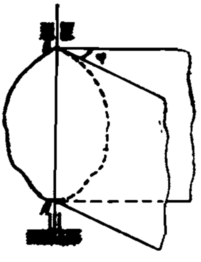
Համընթաց կոչվում է պինդ մարմնի այն շարժումը, որի դեպքում մարմնի ցանկացած երկու կետերը միացնող հատվածը շարժվում է ինքն իրեն զուգահեռ։ Ինչպես հայտնի է, պինդ մարմնի համընթաց շարժման ժամանակ մարմնի բոլոր կետերը ունեն հավասար արագություններ և հավասար արագացումներ։ Բոլոր կետերի հետագծերը հավասարահեռ գծեր են։ Այդ պատճառով պինդ մարմնի համընթաց շարժման ուսումնասիրության համար բավական է ուսումնասիրել նրա որևէ կետի շարժումը։ Շարժման կինեմատիկական ուսումնասիրության դեպքում կետի ընտրությունը միանգամայն կամավոր է։ Քանի որ կետի շարժման ուսումնասիրությունը արդեն կատարված է (տե՛ս ձեռնարկի առաջին գլուխը), այդ իսկ պատճառով պինդ մարմնի համընթաց շարժման վրա կանգ չենք առնի։

Այժմ դիտարկենք պինդ մարմնի պտտական շարժումն անշարժ առանցքի շուրջը։

§ 4. ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՊՏՏՈՒՄՆ ԱՆՇԱՐԺ ԱՌԱՆՑՔԻ ՇՈՒՐՋԸ

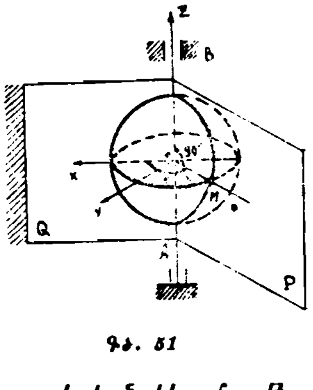
1. Անշարժ առանցքի շուրջը պինդ մարմնի շարժման օրենքը կամ հավասարումը: *Եթե պինդ մարմնի շարժման ժամանակ նրա երկու կետերը ամբողջ շարժման ընթացքում մնում են անշարժ, ապա մարմնի այդպիսի շարժումը անվանում են պտտում անշարժ առանցքի շուրջը։ Այդ երկու անշարժ կետերով անցնող ուղիղը կոչվում է մարմնի պտտման առանցք։ Պինդ մարմնի պտտական շարժումը իրականացնելու համար բավական է* անշարժորեն ամրացնել նրա որևէ երկու կետերը (գծ. 50)։ Առանցքի երկու կետերի ամրացումը գործնականորեն կատարվում է տարբեր տեսակի առանցքակալների և կրնկակալների օգնությամբ։

Ակնհայտ է, որ պտտման առանցքի վրա գտնվող մարմնի բոլոր կետերը, մարմնի ամբողջ շարժման ընթացքում մնում են անշարժ, իսկ պտտման առանցքի վրա չըգտնվող մարմնի կետերը գծում են շրջանագծեր, որոնց հարթությունները ուղղահայաց են պտտման առանցքին և կենտրոնները գտնվում են պտտման առանցքի վրա։



Գծ. 50

Անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող պինդ մարմնի դիրքը կարելի է միարժեք կերպով որոշել այն երկնիստ անկյունով, որն անցնում է պտտման առանցքով և կազմըված է երկու կիսահարթություններով (գծ. 51)։ Այդ կիսահարթություններից մեկը ընդունվում է անշարժ (տված հաշվառքի սիստեմի նկատմամբ), իսկ մյուսը՝ կոշտ կերպով ամրացված մարմնին։ Եթե մարմնի պտտման առանցքը ուղղենք կոորդինատական A_z առանցքով, իսկ անշարժ և շարժական կիսահարթությունները նշանակենք համապատասխանաբար Q և P, ապա P կիսահարթության կամ մարմնի դիրքը կորոշվի Q և P կիսահարթությունների միջև կազմված երկնիստ անկյան φ գծային անկյունով։ Այս φ անկյունը կոչվում է մարմնի պտտման անկյուն։ Պայմանավորվենք պտտման φ անկյունը համարել դրական այն դեպքում, երբ z առանցքի դրական ուղղությունից դիտելիս φ անկյան աճը (անշարժ կիսահարթությունից դեպի շարժական կիսահարթությունը) երևա ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությամբ։



Գծ. 51

Մարմնի պտտման անկյունը չափվում է ռադիաններով։ Որոշ դեպքերում, գործնական բնույթի խնդիրներում, պտտման անկյունը արտահայտում են մարմնի պտույտների n թվով։ Քանի որ մեկ պտույտին համապատասխանում է 2π ռադիան, ապա φ անկյան և պտույտների n թվի միջև գոյություն կունենա հետևյալ առնչությունը՝

$$\varphi = 2\pi n$$

Եթե մարմինը պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը, ապա պտտման անկյունը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է, հետևաբար, նա հանդիսանում է ժամանակի ֆունկցիա, այսինքն՝

$$\varphi = f(t) \qquad (*)$$

Ենթադրվում է, որ $f(t)$-ն միարժեք, անընդհատ և առնվազն երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա է։

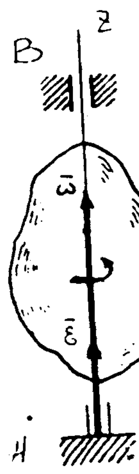
(*)-ը կոչվում է անշարժ առանցքի շուրջը պինդ մարմնի շարժման օրենք կամ հավասարում։ Այս հավասարումը լրիվին որոշում է պինդ մարմնի դիրքը ժամանակի յուրաքանչյուր մոմենտում։

Այսպիսով, անշարժ առանցքի շուրջը պինդ մարմնի կատարած պտտական շարժման ժամանակ մարմնի դիրքը որոշվում է մեկ ընդհանրացված կոորդինատով, ուստի այս դեպքում մարմինը կունենա ազատության մեկ աստիճան։

2. Անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող մարմնի անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը: Պինդ մարմնի պտտական շարժման հիմնական կինեմատիկական բնութագրողներ հանդիսանում են նրա ω անկյունային արագությունը և ε անկյունային արագացումը։

Մարմնի անկյունային արագությունը տվյալ մոմենտում մի ֆիզիկական մեծություն է, որը բնորոշում է պտտման անկյան փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում և որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad (1)$$



Գծ. 52

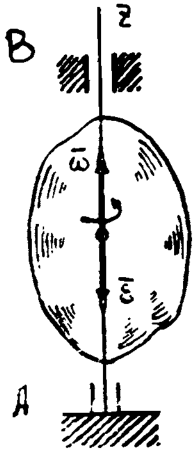
Անկյունային արագությունը տվյալ մոմենտում կարող է լինել դրական կամ բացասական։ Դա կախված է մարմնի պտտման ուղղությունից։ Պտտման անկյան սահմանման համաձայն ω անկյունային արագությունը կլինի դրական, եթե պտտման z առանցքի դրական ծայրից նայելիս (գծ. 52) մարմնի պտտումը երևա ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, և բացասական, եթե պտտումը երևա ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ։

(1)-ից հետևում է, որ անկյունային արագության չափումը կլինի $\frac{\text{ռադ}}{\text{վրկ}}$։ Երբ պտտման անկյունը չափվում է ռադիաններով, ընդունված է որպես անկյունալին արագության չափման միավոր համարել $\frac{1}{վրկ}$։

Հաճախ ω-ի փոխարեն տրվում է մարմնի մեկ րոպեում կատարած պտույտների թիվը։ Պտույտների n թվի և ω անկյունային արագության միջև գոյություն ունի հետևյալ առնչությունը՝

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}\frac{1}{վրկ},$$

Մարմնի անկյունային արագությունը կարելի է ներկայացնել որպես մի $\overline{\omega}$ վեկտոր, որի թվային արժեքը հավասար է $\frac{d\varphi}{dt}$-ի, ուղղված է պըտտման առանցքով դեպի այն կողմը, որտեղից դիտելիս պտտումը կերևա ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ (գծ. 53)։ Անկյունային արագության $\overline{\omega}$ վեկտորը կարելի է կիրառել պտտման առանցքի ցանկացած կետում։ Հետևաբար, $\overline{\omega}$ անկյունային արագությունը սահող վեկտոր է։



Գծ. 53

Մարմնի անկյունային արագացումը տվյալ մոմենտում մի ֆիզիկական մեծություն է, որը բնորոշում է անկյունային արագության փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում և հավասար է անկյունային արագության առաջին ածանցյալին կամ պտտման անկյան երկրորդ ածանցյալին ըստ ժամանակի, այսինքն՝

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \qquad (11)$$

Որպես անկյունային արագացման չափման միավոր ընդունված է $1/վրկ^2$։

Եթե անկյունային արագացման բացարձակ արժեքը ժամանակի ընթացքում աճում է, ապա մարմնի պտտումը կոչվում է արագացող, իսկ եթե նվազում է՝ դանդաղող։ Դժվար չէ նկատել, որ մարմնի պտտումը կլինի արագացող, եթե ω անկյունային արագությունը և ε անկյունային արագացումը ունեն նույն նշանը, և դանդաղող, եթե ունեն տարբեր նշաններ։

Մարմնի անկյունային արագացումը, երբ նա պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը, Նույնպես կարելի է դիտել որպես մի վեկտոր, որի թվային արժեքը հավասար է $\frac{d\omega}{dt}$-ի։ Քանի որ ժամանակի ընթացքում անկյունային արագության $\bar{\omega}$ վեկտորը փոփոխվում է միայն մեծությամբ, ուստի անկյունային արագացման $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ վեկտորը ուղղված կլինի նույնպես պտտման առանցքով։ Եթե մարմինը կատարում է արագացող պտտական շարժում, ապա անկյունային արագացման $\bar{\varepsilon}$ վեկտորը ուղղված կլինի նույն կողմը, ինչ որ $\bar{\omega}$ վեկտորը, և եթե կատարում է դանդաղող շարժում, ապա $\bar{\varepsilon}$ վեկտորը կունենա $\bar{\omega}$ վեկտորի հակառակ ուղղությունը։

Խնդիր 30։ *Սկավառակը պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը*

$$\varphi = kt^3 + \pi t^2 \qquad (1)$$

օրենքով, որտեղ k-*ն հաստատուն մեծություն է,* φ-*ն չափվում է ռադիաններով, իսկ* t-*ն՝ վայրկյաններով։ Որոշել սկավառակի անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը շարժման սկզբից 4 վայրկյան հետո, եթե նա առաջին երկու վայրկյանում կատարել է* $n=8$ *պտույտ։*

Լուծում։ *Մենք տեսանք, որ պտտման* φ *անկյան և պտույտների* n *թվի միջև գոյություն ունի*

$$\varphi = 2\pi n$$

առնչությունը։ Հետևաբար, տվյալ խնդրի պայմանի համաձայն, պտտման անկյունը $t=2$ վրկ *հետո հավասար կլինի*

$$\varphi = 2\pi \cdot 8 = 16\pi։$$

Հավասարեցնելով φ-*ի այս արժեքը խնդրում* φ-*ի համար տված արժեքի հետ, երբ* $t=2$ վրկ, *կստանանք՝*

$$16\pi = 8k + 4\pi։$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$k = \frac{3\pi}{2}։$$

Այսպիսով, սկավառակի շարժման հավասարումը կլինի՝

$$\varphi = \frac{3\pi t^3}{2} + \pi t^2, \qquad (1)$$

Ածանցելով (1)-ը ըստ t-ի, կստանանք սկավառակի անկյունային արագության և անկյունային արագացման արտահայտությունները հետևյալ տեսքով՝

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{9\pi t^2}{2} + 2\pi t,$$

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 9\pi t + 2\pi։$$

$t = 4$ վրկ. *պահին կունենանք՝*

$$\omega/_{t=4\ \text{վրկ}} = 80\pi\ 1/\text{վրկ},$$

$$\varepsilon/_{t=4\ \text{վրկ}} = 38\ \ 1/\text{վրկ}^2։$$

Պատ. $\omega = 80\pi\ \ 1/$վրկ, $\varepsilon = 38\ \ 1/$վրկ^2։

3. **Անշարժ առանցքի շուրջը պինդ մարմնի պտտական շարժման մասնավոր դեպքերը:** ա) Հավասարաչափ պտտական շարժում։ *Եթե մարմնի անկյունային արագությունը ամբողջ շարժման ընթացքում մնում է հաստատուն (ω=const), ապա մարմնի պտտումը կոչվում է հավասարաչափ։*

Մարմնի հավասարաչափ պտտման օրենքն արտահայտվում է

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

տեսքով, որտեղ φ_0-ն մարմնի սկզբնական պտտման անկյունն է։

Այստեղից հետևում է, որ հավասարաչափ պտտական շարժման դեպքում պտտման φ անկյունը ժամանակի գծային ֆունկցիա է։

բ) Հավասարաչափ փոփոխական պտտական շարժում: *Եթե մարմնի անկյունային արագացումը ամբողջ շարժման ընթացքում մնում է հաստատուն (ε=const), ապա մարմնի պտտումը կոչվում է հավասարաչափ փոփոխական։*

Մարմնի հավասարաչափ փոփոխական պտտական շարժման օրենքն արտահայտվում է

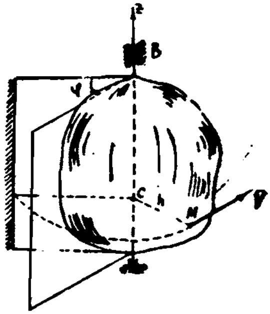
$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + \varphi_0$$

տեսքով (հաճախ ընդունվում է $\varphi_0 = 0$, որը չի խախտում ընդհանրությունը)։

Եթե ω անկյունային արագությունը և ε անկյունային արագացումը ունեն միևնույն նշանը, ապա մարմնի պտտումը կլինի համասարաչափ արագացող, իսկ եթե ունեն տարբեր նշաններ՝ համասարաչափ դանդաղող։

4. Անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող մարմնի կետերի արագությունները և արագացումները: *Մենք տեսանք, որ եթե պինդ մարմինը պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը, ապա նրա կետերը գծում են շրջանագծեր, որոնց հարթությունները ուղղահայաց են պտտման առանցքին և կենտրոնները գտնվում են պտտման առանցքի վրա։ Եթե մարմնի կամավոր M կետի հեռավորությունը պտտման առանցքից (գծ. 54) նշանակենք h, ապա այդ կետի արագությունը կլինի՝*

$$v = h\cdot\omega \qquad (III)$$



Գծ. 54

Այս v արագությունը հաճախ անվանում են նաև M կետի գծային արագություն։

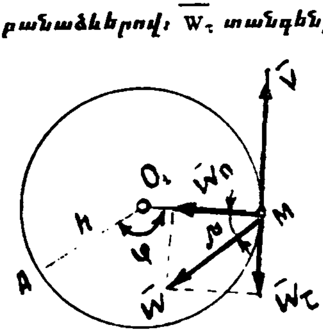
Այսպիսով, անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող մարմնի կամավոր կետի արագությունը հավասար է մարմնի անկյունային արագության և այդ կետի ու պտտման առանցքի միջև եղած հեռավորության արտադրյալին։

M կետի $\bar{v}$ գծային արագության վեկտորը ուղղված է M կետի գծած շրջանագծի շոշափողով և, հետևաբար, ուղղահայաց է պտտման առանցքով ու M կետով անցնող հարթությանը։

Մարմնի կամայական M կետի տանգենցիալ և նորմալ արագացումները որոշվում են

$$w_\tau = h\varepsilon, \quad w_n = h\omega^2 \qquad (IV)$$

բանաձևերով։ $\bar{w}_\tau$ տանգենցիալ արագացման վեկտորն ուղղված է հետագծի շոշափողով, ընդ որում դեպի շարժման կողմը, եթե մարմինը կատարում է արագացող պտտական շարժում, և հակառակ կողմը, եթե մարմինը կատարում է դանդաղող պտտական շարժում։ $\bar{w}_n$ նորմալ արագացման վեկտորը միշտ ուղղված է h շառավղով դեպի պտտման առանցքը (գծ. 55)։

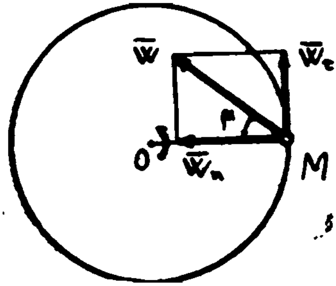


Գծ. 55

M կետի լրիվ արագացման թվային արժեքը կլինի՝

$$w = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}: \qquad (V)$$

$\bar{w}$ *լրիվ արագացման վեկտորի ուղղությունը որոշելու համար բավական է հաշվել այն μ անկյունը, որը կազմում է այդ* $\bar{w}$ *վեկտորը* M *կետի գծած շրջանագծի* O_1M *շառավղի հետ (գծ. 56)։* μ *անկյունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝*



Գծ. 56

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{w_\tau}{w_n}$$

կամ

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Խնդիր 31: $R = 1$մ *շառավիղ ունեցող թափանիվը հավասարաչափ պտտվում է իր առանցքի շուրջը, կատարելով 2 վայրկյանում 20 պտույտ։ Գտնել թափանիվի շրջանակի վրա գտնվող կետի արագությունը և արագացումը։*

Լուծում: *Քանի որ թափանիվը կատարում է հավասարաչափ պտտական շարժում, ապա կունենանք՝*

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t},$$

Խնդրի պայմանի համաձայն $t = 2$ վրկ-*ի ընթացքում կունենանք՝*

$$\varphi - \varphi_0 = 2\pi n = 2\pi \cdot 20 = 40\pi,$$

Հետևաբար,

$$\omega = \frac{40\pi}{2} = 20\pi \ 1/\text{վրկ}:$$

Քանի որ $\omega = \text{const}$, *ապա* $\varepsilon = 0$, $w_\tau = R\varepsilon = 0$,

Թափանիվի շրջանակի կետի արագությունը և արագացումը կլինեն՝

$$v = R \cdot \omega = 1 \cdot 20\pi = 20\pi \ \text{մ/վրկ},$$

$$w = w_n = R\omega^2 = 1 \cdot 400\pi^2 = 400\pi^2 \ \text{մ/վրկ}^2,$$

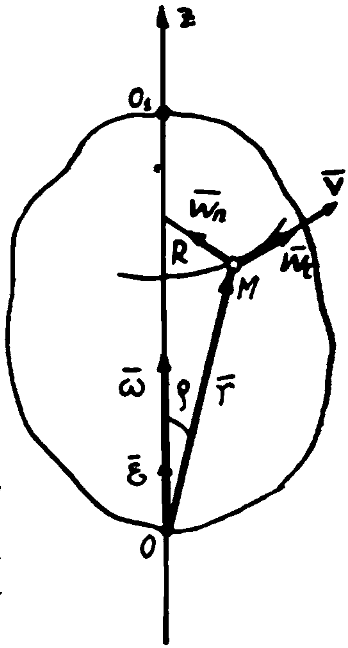
Պատ. $v = 20\pi$ մ/վրկ, $w = 400\pi^2$ մ/վրկ²,

5. Անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող մարմնի կետերի արագության և արագացման վեկտորական արտահայտությունները:

Դիցուք մարմնի M *կետի դիրքը որոշվում է նրա* $\bar{r}$ *շառավիղ-վեկտորի միջոցով պտտման առանցքի վրա գտնվող* O *կետի նկատմամբ (գծ. 57)։ Այդ դեպքում* M *կետի արագության վեկտորը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝*

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}\,, \qquad \text{(VI)}$$

Սա նշանակում է, որ անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող մարմնի որևէ կետի արագության վեկտորը հավասար է մարմնի անկյունային արագության վեկտորի և կետի շառավիղ-վեկտորի վեկտորական արտադրյալին, երբ շառավիղ-վեկտորի կիրառման կետը վերցրված է պտտման առանցքի վրա։ (VI)*-ը կոչվում է Էյլերի բանաձև, որը հնարավորություն է տալիս որոշել պտտվող մարմնի կետերի արագությունների մեծությունը և ուղղությունը։*



Գծ. 57

M *կետի արագացման վեկտորը որոշվում է*

$$\bar{w} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$$

բանաձևով։ Այստեղից հետևում է, որ արագացման $\bar{w}$ *վեկտորը հավասար է երկու վեկտորների երկրաչափական գումարին, որոնցից առաջինը* M *կետի տանգենցիալ արագացումն է, իսկ երկրորդը՝ նորմալ արագացումը։*

6. Անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող մարմնի վերաբերյալ խնդիրների լուծումը: *Այս պարագրաֆի խնդիրները լուծելիս նպատակահարմար է դիտարկել հետևյալ երկու դեպքերը։*

ա) Առաջին դեպքում տրված է լինում պինդ մարմնի պտտման օրենքը, պահանջվում է որոշել մարմնի անկյունային արագությունը, անկյունային արագացումը, ինչպես նաև պինդ մարմնի կետերի գծային արագությունները և արագացումները։ Այս խնդիրները լուծելիս նպատակահարմար է վարվել հետևյալ կերպ։

1. Ընտրել կոորդինատական առանցքն այնպես, որ առանցքներից մեկը (օրինակ, z առանցքը) համընկնի պտտման առանցքի հետ։

2. Կազմել պինդ մարմնի պտտման հավասարումը՝ $\varphi = f(t)$։

3. Հաշվել ω անկյունային արագությունը և ε անկյունային արագացումը (I) և (II) բանաձևերով։

4. Այնուհետև (III), (IV) և (V) բանաձևերի օգնությամբ հաշվել պինդ մարմնի որևէ կետի գծային արագությունը, արագացման տանգենցիալ, նորմալ բաղադրիչները և լրիվ արագացումը։

բ) Երկրորդ տիպի խնդիրների դեպքում տրված է լինում պինդ մարմնի պտտման անկյունային արագությունը կամ անկյունային արագացումը, պահանջվում է որոշել պտտման օրենքը, ինչպես նաև պինդ մարմնի որևէ կետի գծային արագությունն ու արագացումը։ Այս դեպքում օգտակար է վարվել հետևյալ կերպ՝

1. ինտեգրել (I) կամ (II) դիֆերենցիալ հավասարումը,

2. այդ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների մեջ մասնակցող ինտեգրման հաստատունները որոշել խնդրում տրըված սկզբնական պայմաններից,

3. այնուհետև (III)—(V) բանաձևերով որոշել պինդ մարմնի պտտման ժամանակ որևէ կետի ինչպես գծային արագությունը, այնպես էլ արագացումը։

7. Խնդիրներ

Ստորև բերվում են անշարժ առանցքի շուրջը պինդ մարմնի պտտման վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումները։ Այս խնդիրների մեծ մասը վերցված են Ի. Վ. Մեշչերսկու «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու» գրքից։ Ի. Վ. Մեշչերսկու խնդրագրքից վերցված խնդիրների համարները գրված են փակագծերում։

Խնդիր 32 (376)։ Գրել շոգետուրբինի սկավառակի պըտտման հավասարումը նրա ընթացքի ժամանակ, եթե հայտնի է, որ պտտման անկյունը համեմատական է ժամանակի խորանարդին և երբ $t = 3$ վրկ սկավառակի անկյունային արագությունը համապատասխանում է $n = 810 \frac{\text{պտ}}{\text{րոպ}}$-ի։

Լուծում։ Խնդրի պայմանի համաձայն սկավառակի պը-

պտտման φ *անկյան և* t *ժամանակի միջև եղած կապը կարելի է ներկայացնել*

$$\varphi = kt^3 \qquad (1)$$

տեսքով, որտեղ k*-ն համեմատականության գործակից է և առայժմ անհայտ։ Այդ գործակիցը որոշելու համար հաշվենք սկավառակի անկյունային արագությունը։ (1)-ից կունենանք՝*

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3kt^2\text{։} \qquad (2)$$

Տված է, որ երբ $t = 3$ վրկ, *սկավառակի անկյունային արագությունը ունի հետևյալ մեծությունը՝*

$$\omega = \frac{810 \cdot 2\pi}{60} = 27\pi\text{։} \qquad (3)$$

(2)-ի մեջ տեղադրելով $t = 3$ վրկ *և* $\omega = 27\pi$ 1/վրկ, *կստանանք՝*

$$k = \pi\text{։}$$

Հետևաբար, շոգետուրբինի սկավառակի պտտական շարժումը կարտահայտվի $\varphi = \pi t^3$ *օրենքով։*

Պատ. $\varphi = \pi t^3$ ռադ։

Խնդիր 33 (381): *Անշարժ առանցք ունեցող անիվի սկզբնական անկյունային արագությունը հավասար է* 2π $^1/$վրկ։ *Անիվը 10 պտույտ կատարելուց հետո կանգ է առնում առանցքակալներում եղած շփման հետևանքով։ Որոշել անիվի* ε *անկյունային արագացումը, ընդունելով, որ այն հաստատուն է։*

Լուծում: *Խնդրի պայմանի համաձայն կարող ենք գրել՝*

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \text{const}\text{։}$$

Ինտեգրելով այս հավասարումը, կստանանք՝

$$\omega = \varepsilon t + c_1\text{։} \qquad (1)$$

Տված է սկզբնական պայման՝

$$\omega = 2\pi\ ^1/\text{վրկ},\ \text{երբ}\ t = 0,$$

որտեղից $C_1 = 2\pi$։ *Հետևաբար, (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\omega = \varepsilon t + 2\pi \qquad (2)$$

կամ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon t + 2\pi\text{։} \qquad (3)$$

Տված է, որ անիվը տասը պտույտ կատարելուց հետո կանգ է առնում, այսինքն՝ նրա անկյունային արագությունը դառնում է զրո։ Եթե նշված տասը պտույտ կատարելու ժամանակամիջոցը նշանակենք t_1, *ապա (2)-ից կունենանք՝*

$$\omega(t_1) = \varepsilon t_1 + 2\pi = 0 ։$$

Այստեղից էլ հետևում է, որ

$$t_1 = -\frac{2\pi}{\varepsilon}, \qquad (4)$$

Այժմ ինտեգրելով (3) հավասարումը, կստանանք՝

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + 2\pi t + \varphi_0, \qquad (5)$$

Այստեղ, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կարող ենք ընդունել, որ $\varphi_0 = 0$, *հետևաբար*

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + 2\pi t ։ \qquad (6)$$

t_1 *ժամանակամիջոցում անիվը կատարում է տասը պտույտ։ Հետևաբար, անվի պտտման անկյունը կլինի՝*

$$\varphi = 2\pi \cdot 10 ։ \qquad (7)$$

Տեղադրելով (6) հավասարման մեջ t_1*-ի և* φ*-ի արժեքները (4)-ից և (7)-ից, կստանանք՝*

$$20\pi = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2} - 2\pi \cdot \frac{2\pi}{\varepsilon}.$$

Այս հավասարումից կստացվի

$$\varepsilon = -0{,}1\pi \ {}^1/\text{վրկ}^2 ։$$

Այս խնդիրը կարելի է լուծել նաև այլ ձևով։ Քանի որ անիվի անկյունային արագացումը հաստատուն է, ապա անիվը կկատարի հավասարաչափ փոփոխական պտտական շարժում, որի համար ունենք

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (8)$$

Ըստ պայմանի $\omega_0 = 2\pi \ {}^1/\text{վրկ}$։ *Տասը պտույտ կատարելուց հետո անիվը կանգ է առնում։ Այստեղից հետևում է, որ 10 պը-*

տույտից հետո անկյունային արագությունը դառնում է զրո, իսկ պտտման φ անկյունը հավասարվում է $2\pi \cdot 10$-*ի։*

Տեղադրելով այս արժեքները (8)-ի մեջ, կստանանք՝

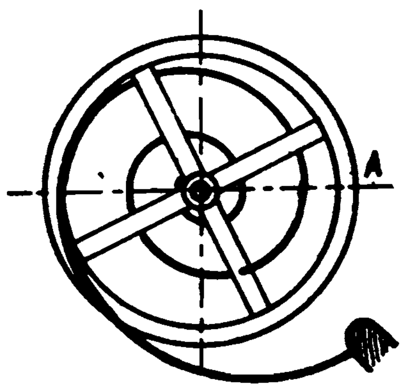
$$0 = 2\pi + \varepsilon t$$

$$20\pi = 2\pi t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Եթե այս հավասարումներից արտաքսենք t *ժամանակը, ապա կստանանք մի հավասարում, որից կորոշենք* ε *անհայտը։ Կստացվի* $\varepsilon = -0{,}1\pi$ 1/վրկ²։

Պատ. $\varepsilon = -0{,}1\pi$ 1/վրկ², *պտույտը դանդաղող է։*

Խնդիր 34 (384): *Ժամացույցի ճոճանակը կատարում է* $T = \frac{1}{2}$ վրկ *պարբերությամբ ներդաշնակ ոլորման տատանումներ։ Ճոճանակի շրջանակի կետի ամենամեծ շեղման անկյունը հավասարակշռության դիրքից՝* $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ռադ: *Գտնել ճոճանակի անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը 2* վրկ *հետո այն մոմենտից, երբ ճոճանակը անցնում է իր հավասարակշռության դիրքով (գծ. 58)։*



Գծ. 58

Լուծում։ *Ժամացույցի ճոճանակի ոլորման անկյունը նշանակենք* φ-*ով։ Գրենք ճոճանակի ներդաշնակ տատանումների օրենքը՝*

$$\varphi = \varphi_0 \sin kt:$$

Այստեղ φ-*ն տատանման ամպլիտուդն է և խնդրի պայմանի համաձայն հավասար է* $\frac{\pi}{2}$ *ռադիանի, իսկ* k-*ն հաճախականությունն է։* k-*ի համար ունենք՝*

$$k = \frac{2\pi}{T} = 4\pi:$$

Այսպիսով, ճոճանակի տատանումների օրենքը կլինի

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \sin 4\pi t։$$

Դրանից հետո ճոճանակի անկյունային արագության և անկյունային արագացման համար կունենանք՝

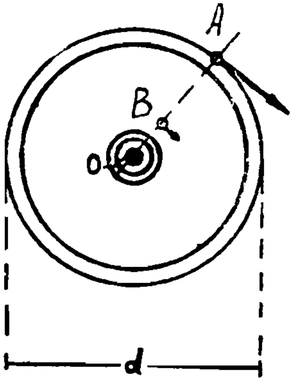
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi^2 \cos 4\pi t, \qquad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -8\pi^3 \sin 4\pi t։ \qquad (2)$$

Այժմ հաշվենք ճոճանակի անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը այն մոմենտից 2 վրկ *հետո, երբ ճոճանակը անցնում է իր հավասարակշռության դիրքով։ Դրա համար բավական է (1) և (2) բանաձևերում տեղադրել* $t = 2$։

Պատ. $\omega = 2\pi^2$ $^1/$վրկ, $\varepsilon = 0$։

Խնդիր 35 *(388)։ Փոկանիվի շրջանակի վրա գտնվող* A *կետը շարժվում է 50* սմ/վրկ *արագությամբ, իսկ* A *կետի հետ միևնույն շառավղի վրա գտնվող մի որևէ* B *կետ շարժվում է 10* սմ/վրկ *արագությամբ, ընդ որում* AB = 20 սմ։ *Որոշել* ω *անկյունային արագությունը և փոկանիվի տրամագիծը (գծ. 59)։*



Գծ. 59

Լուծում։ *Եթե փոկանիվի անկյունային արագությունը նշանակենք* ω-*ով, ապա* A *և* B *կետերի արագությունների համար կունենանք՝*

$$V_A = \omega \cdot AO, \qquad (1)$$

$$V_B = \omega \cdot BO։ \qquad (2)$$

Գծագրից երևում է, որ

$$AO = \frac{d}{2}, \quad BO = \frac{d}{2} - 20, \qquad (3)$$

որտեղ d-*ն փոկանիվի տրամագիծն է։*

Եթե AO-*ի և* BO-*ի արժեքները (3)-ից տեղադրենք (1) և (2)-ի մեջ և* ω-*ն արտաքսելու համար առաջին հավասարումը բաժանենք երկրորդ հավասարման վրա, կստանանք՝*

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{2} - 20},$$

կամ

$$\frac{50}{10}=\frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{2}-20},$$

Այստեղից ստացվում է, որ d=50 սմ:

ω *անկյունային արագությունը գտնելու համար կարելի է օգտվել (1) կամ (2) հավասարումներից։ Բավական է, օրինակ, (1) հավասարման մեջ տեղադրել* $AO=\frac{d}{2}=25$, *կստացվի* $\omega=2$ ¹/վրկ:

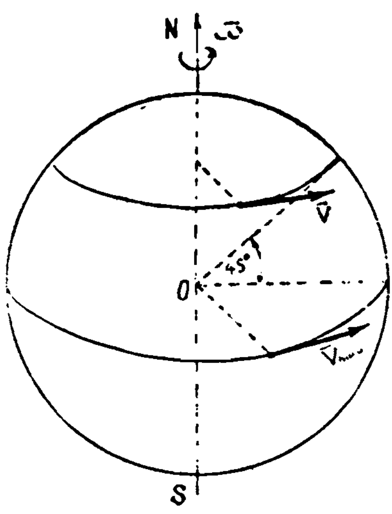
Պատ. $\omega=2$ ¹/վրկ, d=50 սմ:

Խ ն դ ի ր 36: *Որոշել երկրագնդի պտտման անկյունային արագության վեկտորը և հասարակածի ու երկրագնդի մակերևույթի 45° լայնության վրա գտնվող կետերի արագությունը և արագացումը։ Երկրագնդի շառավիղը ընդունել 6370* կմ։

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Երկրագունդը իր առանցքի շուրջը կատարում է մեկ պտույտ 24 ժամվա ընթացքում։ Հետևաբար, նրա պտտման անկյունային արագության թվային արժեքը կլինի*

$$\bar{\omega}=\frac{2\pi}{24}\cdot\frac{1}{\text{ժամ}}=\frac{2\pi}{24\cdot3600}\cdot\frac{1}{\text{վրկ}}\approx0{,}0000726\ ^1/\text{վրկ}:$$

Ակնհայտ է, որ անկյունային արագության $\bar{\omega}$ *վեկտորը ուղղված է երկրագնդի առանցքով։ Մնում է որոշել նրա ուղղությունը։ Քանի որ երկրագունդը պտտվում է իր առանցքի շուրջը արևմուտքից դեպի արևելք, ապա հյուսիսից դիտելիս երկրի պտույտը կերևա ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ (գծ. 60)։ Հետևաբար երկրի անկյունային արագության* $\bar{\omega}$ *վեկտորը ուղղված կլինի հարավից հյուսիս։*



Գծ. 60

Երկրագնդի հասարակածի վրա գտնվող կետերը կշարժվեն R=

=6370 կմ շառավիղ ունեցող շրջանագծով։ Հետևաբար, այդ կետերի արագությունը, տանգենցիալ և նորմալ արագացումները կլինեն՝

$$v_{\text{հաս.}} = R \cdot \omega = 6370 \cdot 0{,}0000726 \text{ կմ/վրկ} = 463 \text{ մ/վրկ},$$

$$w_{\tau,\ \text{հաս.}} = R\,\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

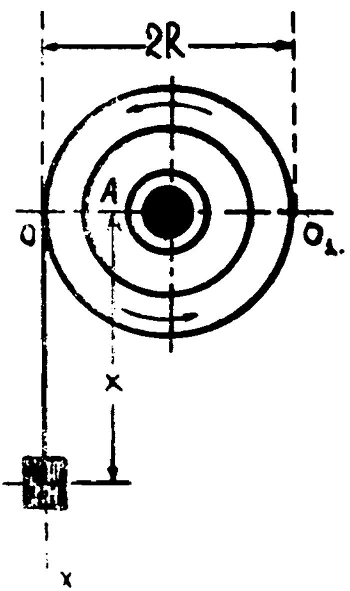
$$w_{n,\ \text{հաս.}} = R\omega^2 = 6370 \cdot (0{,}0000726)^2 \text{ կմ/վրկ}^2 = 0{,}0335 \text{ մ/վրկ}^2։$$

Երկրագնդի մակերևույթի 45° լայնության վրա գտնվող կետերը շարժվում են

$$R_1 = R \sin 45^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

շառավիղ ունեցող շրջանագծով։ Հետևաբար, այդ կետերի արագության, տանգենցիալ և նորմալ արագացումների համար կունենանք՝

$$v = R_1 \cdot \omega = R\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\omega = 327 \text{ մ/վրկ},$$



Գծ. 61

$$w_\tau = R_1\,\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$w_n = R_1\omega^2 = R\,\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega^2 =$$

$$= 0{,}0237 \text{ մ/վրկ}^2։$$

Պատ. $v_{\text{հաս.}} = 463$ մ/վրկ, $w_{\tau,\ \text{հաս.}} = 0$, $w_{n,\ \text{հաս.}} = 0{,}0335$ մ/վրկ², $v = 327$ մ/վրկ, $w_\tau = 0$, $w_n = 0{,}0237$ մ/վրկ²։

Խնդիր 37 (392)։ $R=10$ սմ *շառավիղ ունեցող* A *լիսեռը սկըսում է պտտվել նրանից թելով կախված* P *կշռաքարի օգնությամբ։ Կշռաքարի շարժումը արտահայտվում է* $x=100\,t^2$ *հավասարումով, որտեղ* x-*ը կշռաքարի հեռավորու-*

թյունն է OO_1 հորիզոնական անշարժ առանցքից արտահայտված սանտիմետրերով, իսկ t-ն՝ վայրկյաններով։ Որոշել լիսեռի ω անկյունային արագությունը և ε անկյունային արագացումը, ինչպես նաև լիսեռի մակերևույթի վրա գտնվող կետի w լրիվ արագացումը t մոմենտում (գծ. 61)։

Լուծում: Խնդրում տված է, որ թելը P կշռաքարի օգնությամբ շարժվում (բացվում) է առանց սահելու և պտտման մեջ է դնում լիսեռին, ընդ որում թելը և P կշռաքարը կատարում են համընթաց շարժում։

O կետը միաժամանակ պատկանում է երկու մարմիններին՝ լիսեռին և թելին։ Հետևաբար, O կետի արագությունը մի կողմից կլինի

$$v_0 = R\omega, \tag{1}$$

իսկ մյուս կողմից՝

$$v_0 = \frac{dx}{dt} = 200\,t, \tag{2}$$

որտեղ ω-ն անիվի պտտման անկյունային արագությունն է։

(1) և (2)-ից հետևում է, որ

$$10\omega = 200\,t։$$

Այստեղից էլ ստացվում է

$$\omega = 20\,t \ \text{1/վրկ}:$$

Լիսեռի անկյունային արագացումը կլինի

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 20 \ \text{1/վրկ}^2:$$

Այժմ մնում է որոշել լիսեռի մակերևույթի վրա գտնվող կետի լրիվ արագացումը կամայական t մոմենտում։ Դրա համար նախ որոշենք տանգենցիալ և նորմալ արագացումները։ Դրանք կլինեն՝

$$w_\tau = R\frac{d\omega}{dt} = 10 \cdot 20 = 200 \ \text{սմ/վրկ}^2,$$

$$w_n = R\omega^2 = 10 \cdot 20^2 \cdot t^2 = 4000\,t^2 \ \text{սմ/վրկ}^2:$$

Հետևաբար, լրիվ արագացման համար կունենանք՝

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{200^2 + 4000^2 t^4} = 200\sqrt{1 + 400\,t^4}\ \text{սմ/վրկ}^2:$$

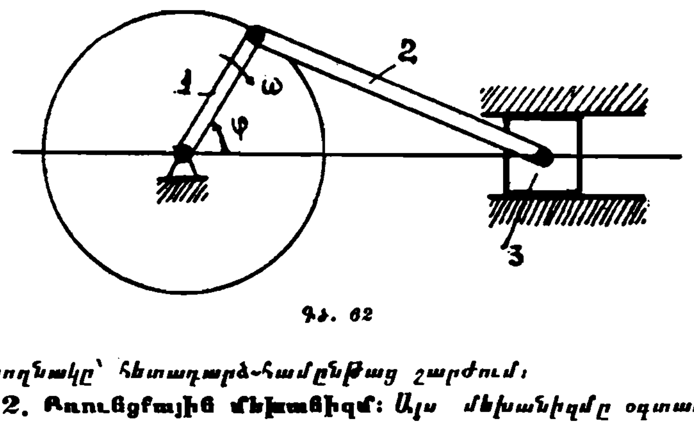
Պատ. $\omega = 20\,t\ \ 1/\text{վրկ}$, $\varepsilon = 20\ \ 1/\text{վրկ}^2$,

$$w = 200\sqrt{1 + 400\,t^4}\ \text{սմ/վրկ}^2:$$

§ 5. ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՇԱՐԺՈՒՄՆԵՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒՄԸ

Այս պարագրաֆի խնդիրներում ուսումնասիրվում է պինդ մարմինների շարժումների փոխանցումը, երբ մի մարմնի հարթ շարժումը փոխանցվում է մի այլ մարմնի (ատամնավոր, փոկային և այլ փոխանցումներ)։ Այս խնդիրների լուծումը կապված է որոշ պարզագույն մեխանիզմների կինեմատիկական տարրերի ուսումնասիրության հետ։ Ընթերցողների գործը հեշտացնելու համար տրվում է մի քանի պարզագույն մեխանիզմների կինեմատիկական տարրերի պարզաբանումը։

1. Մեղեխա-շարժաթևային մեխանիզմ: *Այս մեխանիզմը ծառայում է պտտական շարժումը համընթաց շարժման կամ ընդհակառակը՝ համընթաց շարժումը պտտական շարժման վերածելու համար։ Մեղեխա-շարժաթևային մեխանիզմը բաղկացած է մեղեխից, շարժաթևից և սողնակից (գծ. 62)։ Մեղեխը կատարում է պտտական շարժում, շարժաթևը՝ հարթ զուգահեռական,*



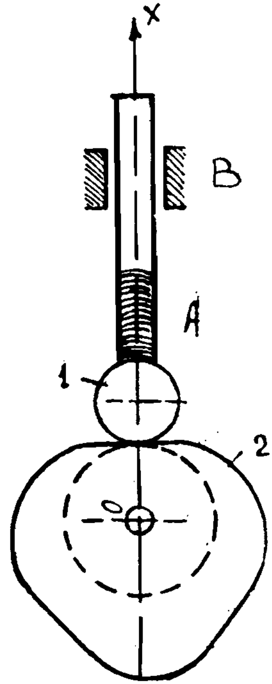
Գծ. 62

իսկ սողնակը՝ հետադարձ-համընթաց շարժում։

2. Թռուցքային մեխանիզմ: *Այս մեխանիզմը օգտագործվում է բարդ, համընթաց-հետադարձ շարժումներ իրականացնելու համար։ Թռուցքային մեխանիզմը բաղկացած է պտտվող* *բռունցքից և համընթաց շարժվող հրիչից (գծ. 63)։ Բռունցքի ձևից կախված հրիչը կատարում է այս կամ այն հետադարձ շարժումը։*

Կինեմատիկայում դիտարկվում են բռունցքային մեխանիզմի վերաբերյալ երկու տիպի խնդիրներ։

ա) Գտնել հրիչի շարժման օրենքը, երբ տված է բռունցքի ձևը (սովորաբար բևեռային կոորդինատական սիստեմում) և նրա շարժման օրենքը։



Գծ. 63

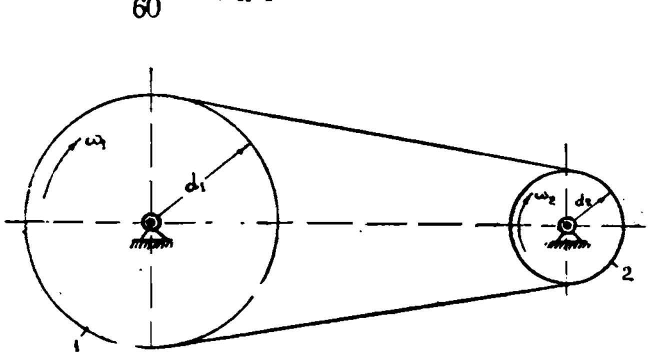
բ) Տված են հրիչի և բռունցքի շարժման օրենքները. պահանջվում է գտնել բռունցքի ձևը։

Փոխանցման թիվ։ *Լիսեռը և նրա վրա ամրացված փոխանցող օղակները (անիվները), որոնք հաղորդում են տված մոմենտը կամ շարժումը այլ օղակների, կոչվում են տանող, իսկ այն օղակները, որոնք ընդունում են տված մոմենտը կամ շարժումը, կոչվում են տարվող։*

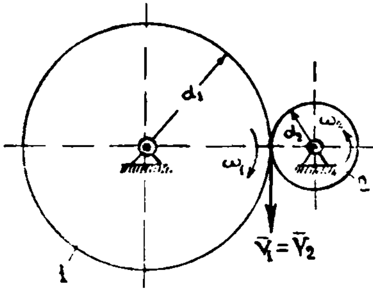
Տանող օղակները համարակալենք 1 ինդեքսներով, իսկ տարվող օղակները՝ 2 ինդեքսներով (գծ. 64, 65)։

Տանող և տարվող անիվների հպման կետերի արագությունները համապատասխանաբար կլինեն՝

$$v_1 = \frac{\pi d_1 n_1}{60} \text{ մ/վրկ},$$



Գծ. 64



Գծ. 65

$$V_2=\frac{\pi d_2 n_2}{60} \text{ մ/վրկ:}$$

Փոխանցումը առանց սահքի իրականացնելու համար պահանջվում է տանող և տարվող օղակների հպման կետերի արագությունների հավասարությունը, այսինքն՝

$$V_1=V_2,$$

կամ

$$\frac{\pi d_1 n_1}{60}=\frac{\pi d_2 n_2}{60},$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{d_2}{d_1},$$

որտեղ V_1, V_2*-ը տանող և տարվող օղակների արագություններն են,* d_1, d_2*-ը՝ տանող և տարվող օղակների տրամագծերը, իսկ* n_1, n_2*-ը՝ նույն օղակների պտույտների թվերն են մեկ րոպեում* ($n_1>0$, $n_2>0$)*։*

Քանի որ տանող օղակի և տարվող օղակի պտույտների թվերի հարաբերությունը կարելի է փոխարինել տանող և տարվող օղակների անկյունային արագությունների հարաբերությամբ, այսինքն՝

$$\frac{n_1}{n_2}=\pm\frac{\omega_1}{\omega_2},$$

ուստի

$$\pm\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{d_2}{d_1}=\frac{R_2}{R_1},$$

Եթե տանող և տարվող անիվները պտտվում են նույն ուղղությամբ, այսինքն՝ ω_1 *և* ω_2*-ը ունեն նույն նշանը, ապա վերը նշված բանաձևերում պետք է վերցնել դրական նշան, իսկ հակառակ դեպքում, երբ* ω_1 *և* ω_2*-ը ունեն տարբեր նշաններ, բացասական։*

Տանող օղակի անկյունային արագության հարաբերությունը տարվող օղակի անկյունային արագությանը կոչվում է փոխանց-

ման հարաբերություն կամ փոխանցման թիվ և նշանակվում է i տառով։ Դիտարկվող դեպքի համար կունենանք՝

$$i=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\pm\frac{n_1}{n_2}\,։$$

Փոխանցման թվին վերագրվում է դրական կամ բացասական նշան կախված անկյունային արագությունների ուղղություններից։ Գծ. 64-ում պատկերված մեխանիզմի անկյունային արագությունները ունեն հակադիր ուղղություններ։ Հետևաբար, i_{1-2} փոխանցման թվին պետք է վերագրել բացասական նշան՝

$$i_{1-2}=+\frac{\omega_1}{\omega_2}=-\frac{n_1}{n_2}\,։$$

Գծ. 65-ում պատկերված մեխանիզմի երկու անիվների անկյունային արագությունները ունեն նույն ուղղությունը, որի հետևանքով i_{1-2} փոխանցման թիվը կունենա դրական նշան։

3. Փոխանցման եղանակները: Շարժումը մի մարմնից մի այլ մարմնի փոխանցելու համար գոյություն ունեն երկու եղանակներ՝ ֆրիկցիոն և ատամնավոր։ Քննարկենք այս փոխանցման եղանակներն առանձին-առանձին։

Ֆրիկցիոն փոխանցումներ: Այս փոխանցումներն իրենց հերթին լինում են՝ ֆրիկցիոն փոխանցումներ անմիջական շոշափման միջոցով և ֆրիկցիոն փոխանցումներ ճկուն կապի օգնությամբ (փոկային փոխանցումներ)։

Ֆրիկցիոն փոխանցումներ անմիջական շոշափման միջոցով: Տարբերում են այսպիսի փոխանցումների երեք տեսակ՝

ա) գլանային, երբ տանող և տարվող լիսեռները զուգահեռ են,

բ) կոնական, երբ տանող և տարվող լիսեռները հատվում են կամայական անկյան տակ և

գ) ճակատային, երբ տանող և տարվող լիսեռները հատվում են ուղիղ անկյան տակ։

Առաջին երկու դեպքերում պտտումների ձևափոխման օրենքը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\pm r_1\omega_1=r_2\omega_2\,։$$

Այս դեպքում փոխանցման թիվը հաստատուն է և հավասար է

$$i=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\pm\frac{n_1}{n_2}\,, \qquad (1)$$

Ծակատային փոխանցման դեպքում i-*ն փոփոխական է և հավասար՝*

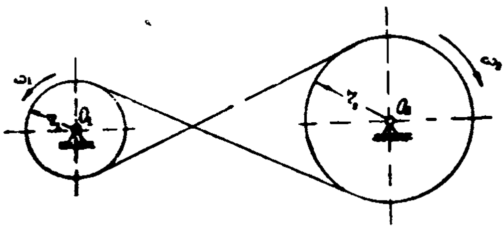
$$i = \pm \frac{n}{n_2} = \pm \frac{d_2}{d},$$

որտեղ d-*ն տանող անիվի փոփոխական տրամագիծն է։*

Ֆրիկցիոն փոխանցումներ ճկուն կապի օգնությամբ: *Այս փոխանցումները հաճախ անվանում են փոկային փոխանցումներ, որոնք իրենց հերթին լինում են՝*

ա) զուգահեռ լիսեռներով բաց փոկային փոխանցումներ (գծ. 65),

բ) զուգահեռ լիսեռներով խաչվող փոկային փոխանցումներ (գծ. 66)։



Գծ. 66

Բաց փոխանցման դեպքում տանող և տարվող լիսեռների պտտման ուղղությունները համընկնում են, փոխանցման թիվը դրական է և հավասար՝

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1},$$

Խաչվող փոխանցման դեպքում տանող և տարվող լիսեռների պտտման ուղղությունները հակառակ են, փոխանցման թիվը բացասական է և հավասար՝

$$i = -\frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{d_2}{d_1},$$

Փոկային փոխանցման դեպքում պտտումների ձևափոխման օրենքը ունի նույն տեսքը, ինչ որ նախորդ դեպքում, այսինքն՝

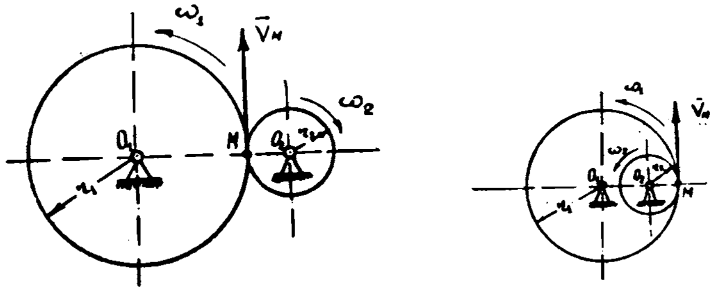
$$\pm r_1\omega_1 = r_2\omega_2,$$

կամ

$$n_1 d_1 = n_2 d_2,$$

Ատամնավոր փոխանցումներ: *Այս փոխանցումները տարբերվում են ֆրիկցիոն փոխանցումներից նրանով, որ տանող և տարվող անիվները ունեն որոշակի ձևի ատամներ։ Շարժման ժամանակ տանող անիվի ատամները կառչում են տարվող անիվի ատամներին և ստիպում են վերջինիս պտտվել առանց սահելու։ Ատամնավոր փոխանցումը ապահովում է փոխանցման թվի հաստատուն լինելը։*

Ատամնավոր փոխանցումները ըստ կառչման լինում են արտաքին և ներքին։ Եթե փոխանցման դեպքում պահանջվում է, որ տարվող անիվը պտտվի տանող անիվի հակառակ ուղղությամբ, ապա կիրառում են անիվների արտաքին կառչում (գծ. 67ա), իսկ եթե պահանջվում է պահպանել ուղղությունը՝ կիրառում են ներքին կառչում (գծ. 67բ)։



Գծ. 67 ա, բ

Ատամնավոր փոխանցման դեպքում պտտումների ձևափոխման օրենքը արտահայտվում է

$$n_1d_1=n_2d_2$$

բանաձևով։

Ատամնավոր փոխանցումների հաշվարկների ժամանակ անիվների շառավիղների փոխարեն օգտագործվում է նրանց ատամների թվերը։ Քանի որ տանող և տարվող անիվների ատամները միատեսակ են, ապա անիվների տրամագծերի տարբերությունը հավասար է համապատասխան անիվների ատամների թվերի հարաբերությանը, այսինքն՝

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{z_1}{z_2},$$

որտեղ z_1 *և* z_2*-ը տանող և տարվող անիվների ատամների թվերն* են։ Այս դեպքում պտտումների ձևափոխման բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$n_1 z_1 = n_2 z_2,$$

իսկ փոխանցման թվի համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{n_1}{n_2} = \pm\frac{d_2}{d_1} = \pm\frac{z_2}{z_1},$$

Եթե $|i|>1$, ապա տանող լիսեռն ավելի արագ է պտտվում, քան տարվողը, իսկ եթե $|i|<1$, ապա տանող լիսեռն ավելի դանդաղ է պտտվում, քան տարվողը։

Ատամնավոր անիվների շարքային միացում: *Ատամնավոր անիվների այն համախմբությունը, որոնց պտտման առանցքները անշարժ են, կոչվում են ատամնավոր անիվների շարքային միացումներ։ Այս դեպքում երկու կառչող անիվների պտտման անկյունային արագությունների հարաբերությունն անվանում են մասնակի փոխանցման թիվ՝*

$$i_{1-2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm\frac{z_2}{z_1}, \quad i_{2-3} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \pm\frac{z_3}{z_2}, \qquad (11)$$

Ընդհանուր փոխանցման թիվ: *Եթե կառչման մեջ գտնվում են մի քանի զույգ ատամնանիվներ (օրինակ՝ n զույգ), որոնք միացած են հաջորդաբար կամ զուգահեռ, ապա ընդհանուր փոխանցման թիվը հավասար է ատամնավոր անիվների բոլոր զույգերի փոխանցման թվերի արտադրյալին, այսինքն՝*

$$i_{1-n} = i_{1-2}\cdot i_{2-3}\cdot i_{3-4}\cdots i_{(n-1)-n},$$

Այստեղից էլ հետևում է, որ

$$i_{1-n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}(-1)^m,$$

որտեղ m-ը արտաքին կառչումով զույգերի թիվն է։

Ընդհանուր փոխանցման թիվը կարելի է արտահայտել նաև անիվների ատամների թվերի կամ շառավիղների հարաբերության միջոցով։ Օրինակ, ատամնավոր անիվների հաջորդական միացման դեպքում ընդհանուր փոխանցման թիվը հավասար կլինի

$$i_{1-n} = \frac{r_n}{r_1}(-1)^m = \frac{z_n}{z_1}\cdot(-1)^m,$$

Առանձնավոր անիվների զուգահեռ միացման դեպքում անհրաժեշտ է հաշվի առնել կառչման մեջ գտնվող բոլոր ատամնանիվների ատամների թվերը կամ շառավիղները։ Այս դեպքում կունենանք՝

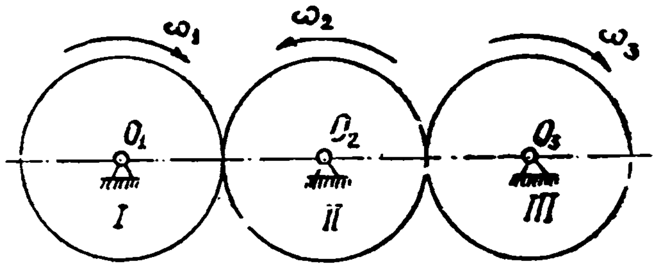
$$i_{1-n}=\left(\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z_3}{z_2'}\cdot\frac{z_4}{z_3'}\cdot\cdot\cdot\frac{z_n}{z_{n'-1}}\right)\cdot(-1)^m$$

և

$$i_{1-n}=\left(\frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{r_3}{r_2'}\cdot\frac{r_4}{r_3'}\cdot\cdot\cdot\frac{r_n}{r_{n'-1}}\right)\cdot(-1)^m,$$

որտեղ r_2 *և* r_2'*-ը նույն լիսեռի վրա նստած անիվների շառավիղներն են, իսկ* z_2 *և* z_2'*-ը նրանց ատամների թվերը։*

Խնդիր 38։ z_1, z_2 *և* z_3 *ատամնաթվեր ունեցող* I, II *և* III *ատամնանիվները գտնվում են արտաքին կառչման մեջ։ Գտնել ընդհանուր փոխանցման թիվը (գծ. 68)։*



Գծ. 68

Լուծում։ *Փոխանցման թիվը* I *անիվից* II *անիվը կլինի*

$$i_{1-2}=+\frac{\omega_1}{\omega_2}=-\frac{z_2}{z_1},$$

իսկ II *անիվից* III*-ը՝*

$$i_{2-3}=\frac{\omega_2}{\omega_3}=-\frac{z_3}{z_2};$$

Ընդհանուր փոխանցման թվի համար կունենանք՝

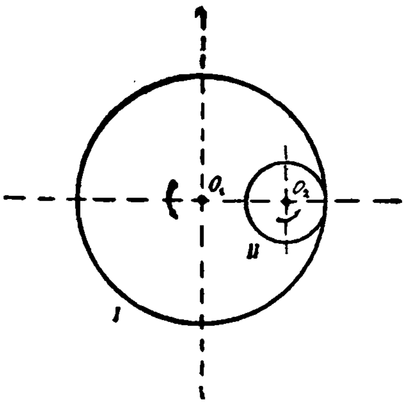
$$i_{1-3}=i_{1-2}\cdot i_{2-3}=\left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_2}\right)=\frac{z_3}{z_1};$$

Պատ. $i_{1-3}=\frac{z_3}{z_1};$

Եթե կառչման մեջ գտնվող երկու ատամնանիվներից մեկի շառավիղն անվերջ մեծացնենք, ապա այդ անիվը կվերածվի ձողի։ Ատամնավոր անիվ-ձող կառչումը կիրառվում է անիվի պտտական շարժումը ձողի համընթաց շարժման փոխանցելու և ընդհակառակն՝ ձողի համընթաց շարժումը անիվի պտտական շարժման փոխանցելու համար։

4. ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Խնդիր 39 *(395)*: $D_1=360$ մմ *տրամագիծ ունեցող* I *ատամնանիվը կատարում է* $n_1=100\ \frac{\text{պտ}}{\text{րոպ}}$*։ Ինչի՞ պետք է հավասար լինի* II *ատամնանիվի տրամագիծը, որը գտնվում է* I *անիվի հետ ներքին կառչման մեջ և կատարում է* $n_2=300\ \frac{\text{պտ}}{\text{րոպ}}$*։*



Գծ. 69

Լուծում: *Ենթադրենք, որ* I *ատամնանիվը պտտվում է* O_1 *կետի շուրջը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Այդ դեպքում անիվների կառչման* C *կետի արագությունը ուղղված կլինի այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծ. 69-ում։ Հետևաբար,* II *անիվը էլ կպտտվի նույն ուղղությամբ, ինչ որ* I*-ը, այսինքն՝ ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Սահքի բացակայության դեպքում* C *կետի արագության համար մի կողմից կունենանք*

$$v_c=\omega_1 \cdot \frac{D_1}{2}, \qquad (1)$$

իսկ մյուս կողմից՝

$$v_c=\omega_2 \cdot \frac{D_2}{2}, \qquad (2)$$

որտեղ ω_1 *և* ω_2*-ով նշանակված են համապատասխանաբար* I *և* II *անիվների անկյունային արագությունները։*

(1)-ը բաժանելով (2)-ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{D_2}{D_1}, \qquad (3)$$

Ակնհայտ է, որ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}, \qquad (4)$$

Այս (3) և (4) առնչություններից էլ հետևում է, որ

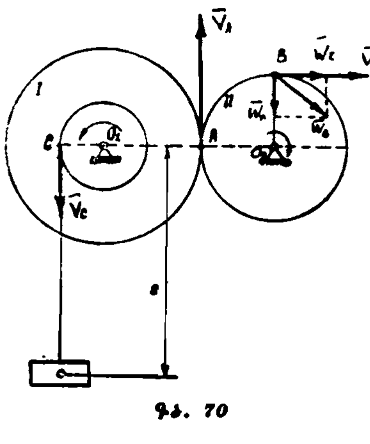
$$\frac{D_2}{D_1}=\frac{n_1}{n_2},$$

կամ

$$D_2=\frac{n_1}{n_2}D_1=\frac{100\cdot 360}{300}=120 \text{ մմ}։$$

Պատ. $D_2=120$ մմ։

Խնդիր 40։ $r_1=0{,}6$ մ *և* $r_2=0{,}5$ մ *շառավիղներով* I *և* II *ատամնանիվները գտնվում են իրար հետ արտաքին կառչման մեջ։* I *անիվի* $r_3=0{,}3$ մ *շառավղով լիսեռի վրա փաթաթված է թել, որի մեկ ծայրից կախված է բեռ։ Վերջինս շարժվում է ուղղաձիգ ուղղությամբ* $s=3t^2$ (s—*մետրերով,* t—*վայրկյաններով) օրենքով։ Գտնել* II *անվի անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը, ինչպես նաև այդ անվի շրջանակի վրա գտնվող որևէ* B *կետի լրիվ արագացումը (գծ. 70)։*



Գծ. 70

Լուծում։ *Քանի որ* I *և* II *անիվները գտնվում են արտաքին կառչման մեջ, ապա նրանց անկյունային արագությունների բացարձակ արժեքները և շառավիղների միջև պետք է գոյություն ունենա հետևյալ առնչությունը՝*

$$\omega_1 r_1=\omega_2 r_2$$

կամ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1},$$

Համընթաց շարժվող բեռի արագության մեծությունը կլինի

$$v_c=\frac{ds}{dt}=6t\ \text{մ/վրկ}:$$

Լիսեռի շրջանակի վրա գտնվող C *կետի արագությունը հավասար է բեռի արագությանը։ Այդ դեպքում լիսեռի, ինչպես նաև* I *անվի անկյունային արագությունը կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևով*

$$\omega_1=\frac{v_c}{r_3}=\frac{6t}{0,3}=20t\ \ 1/\text{վրկ}:$$

I *անիվի անկյունային արագացման համար կստանանք*

$$\varepsilon_1=\frac{d\omega_1}{dt}=20\ \ 1/\text{վրկ}^2:$$

I *և* II *անիվների պտտումները հավասարաչափ արագացող են, որի հետևանքով այդ անիվների անկյունային արագությունների համար կունենանք՝*

$$\omega_1=\varepsilon_1 t, \qquad \omega_2=\varepsilon_2 t։$$

Այստեղից ստացվում է

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \tag{1}$$

Լուծելով (1) հավասարումները, կորոշենք II *անվի* ω_2 *անկյունային արագությունը և* ε_2 *անկյունային արագացումը։ Դրանից կստացվի՝*

$$\omega_2=\omega_1\cdot\frac{r_1}{r_2}=20\,t\cdot\frac{0,6}{0,5}=24\,t\ \ 1/\text{վրկ},$$

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1\cdot\frac{r_1}{r_2}=20\cdot\frac{0,6}{0,5}=24\ \ 1/\text{վրկ}^2։$$

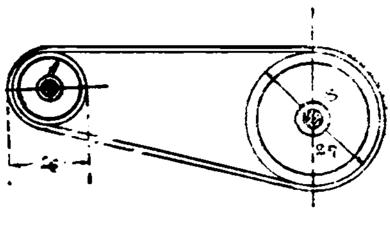
II *անիվի շրջանակի կամավոր* B *կետի արագացման թվային արժեքը կլինի*

$$w_в = r_2\sqrt{\varepsilon_2^2+\omega_2^4} = 12\sqrt{1+576t^4} \text{ մ/վրկ}^2:$$

Պատ. $\omega_2=24\,t$ 1/վրկ, $\varepsilon_2=24$ 1/վրկ²,

$$w_в = 12\sqrt{1+576t^4} \text{ մ/վրկ}^2:$$

Խնդիր 41 *(398)։* A *փոկանիվ ունեցող դինամոմեքենան շարժման մեջ է դրվում իր հանգըստի վիճակից անվերջ փոկի միջոցով, շոգեմեքենայի* B *փոկանիվով։ Փոկանիվների շառավիղներն են՝* $r_1=75$սմ, $r_2=30$սմ *(գծ. 71)։ Շոգեմեքենան շարժման մեջ գցելուց հետո, նրա անկյունային արագացումը հավասարվում է* $0{,}4\pi$ վ կ$^{-2}$*։ Անտեսելով փոկի և փոկանիվների միջև եղած սահքը, որոշել որքան ժամանակից հետո դինամոմեքենան կկատարի 300* պտ/րոպ:



Գծ. 71

Լուծում: *Առաջին անվի անկյունային արագությունը նշանակենք* ω_1, *իսկ երկրորդ անվինը՝* ω_2*։ Խնդրի պայմանի համաձայն կարող ենք գրել*

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0{,}4\,\pi։$$

Ինտեգրենք այս հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ երբ $t=0$, ω_1*-ն նույնպես հավասար է զրոյի։ Այդ դեպքում կստանանք*

$$\omega_1 = 0{,}4\,\pi t։ \qquad (1)$$

Հայտնի է, որ անվերջ փոկի միջոցով միացված երկու փոկանիվների անկյունային արագությունները հակադարձ համեմատական են նրանց շառավիղներին, այսինքն՝

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}, \qquad (2)$$

Լուծելով (2)-ը ω_1*-ի նկատմամբ, կստանանք՝*

$$\omega_1 = \frac{r_2}{r_1}\,\omega_2։ \qquad (3)$$

Համասարեցնելով ω_1-ի համար ստացած (1) և (3) արտահայտությունները, կունենանք՝

$$0{,}4\,\pi t = \frac{r_2}{r_1}\,\omega_2, \qquad (4)$$

Տված է, որ

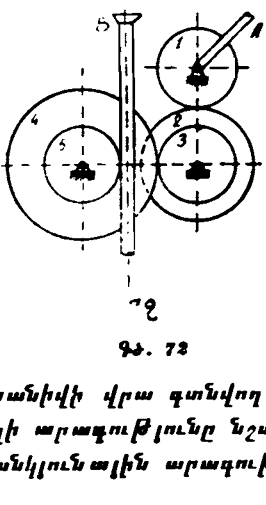
$$\omega_2 = \frac{2\pi \cdot 300}{60} = 10\,\pi,$$

Տեղադրելով r_1, r_2 ω_2-ի արժեքները (4)-ի մեջ, կստանանք՝

$$t = \frac{30 \cdot 10\pi}{0{,}4\pi \cdot 75} = 10 \text{ վրկ:}$$

Պատ. $t=10$ վրկ:

Խնդիր 42 *(401)։ Ամբարձիչի մեխանիզմի* A *բռնակի պտտման ժամանակ սկսում են պտտվել 1, 2, 3, 4 և 5 ատամնանիվները, որոնք շարժման մեջ են դնում ամբարձիչի* B *ատամնավոր ձողին։ Որոշել վերջինիս արագությունը, եթե* A *բռնակը կատարում է* 30 պտ/րոպ: *Ատամնանիվների ատամների թվերն են՝* $z_1=6$, $z_2=24$, $z_3=8$, $z_4=32$, *հինգերորդ ատամնանիվի շառավիղը* $r_5=4$ սմ *(գծ. 72)։*



Գծ. 72

Լուծում: *Խնդիրը լուծենք երկու եղանակով։*

Առաջին եղանակ: *Ամբարձիչի* B *ատամնավոր ձողի արագությունը հավասար կլինի հինգերորդ ատամնանիվի վրա գտնվող կետերի գծային արագությանը։ Եթե* B *ձողի արագությունը նշանակենք* v_B, *իսկ հինգերորդ ատամնանիվի անկյունային արագությունը՝* ω_5, *ապա կունենանք՝*

$$v_B = \omega_5 \cdot r_5, \qquad (1)$$

Այստեղ r_5-ը տված է, պետք է գտնել ω_5-ը։

Դժվար չէ նկատել, որ հինգերորդ և չորրորդ ատամնանիվների անկյունային արագությունները նույնը կլինեն, քանի որ այդ ատամնանիվներն ամուր կերպով ամրացված են միևնույն լիսեռին։ Նույն ձևով կարելի է ասել, որ երրորդ և երկրորդ *ատամնանիվների անկյունային արագությունները նույնպես իրար հավասար են։ Հետևաբար, կունենանք՝*

$$\omega_5 = \omega_4, \quad \omega_3 = \omega_2 \qquad (2)$$

Գծագրից երևում է, որ չորրորդ և երրորդ ատամնանիվներն ունեն ընդհանուր շոշափման կետ, հետևաբար, նրանց անկյունային արագությունների և ատամների թվերի միջև գոյություն կունենա հակադարձ համեմատական կախում, այսինքն՝

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{z_3}{z_4}, \qquad (3)$$

Նույն ձևով, երկրորդ և առաջին ատամնանիվների համար կարող ենք գրել

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}, \qquad (4)$$

(2)—(4) առնչությունների հիման վրա ω_5*-ի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$\omega_5 = \omega_4 = \omega_3 \cdot \frac{z_3}{z_4} = \omega_2 \cdot \frac{z_3}{z_4} = \omega_1 \cdot \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4}, \qquad (5)$$

Մնում է որոշել ω_1 *անկյունային արագությունը։ Դրա համար պետք է նկատի ունենալ, որ* A *բռնակը ամուր կերպով ամրացված է առաջին անվին։ Հետևաբար, նրանց անկյունային արագությունները կլինեն հավասար։ Տված է, որ բռնակը կատարում է 30 պտույտ մեկ րոպեում, հետևաբար, առաջին անվի անկյունային արագությունը կլինի՝*

$$\omega_1 = \frac{2\pi \cdot 30}{60} = \pi \text{ 1/վրկ։} \qquad (6)$$

Եթե տեղադրենք ω_1*-ի արժեքը (6)-ից (5)-ի մեջ և այնուհետև* ω_5*-ի արժեքը՝ (1)-ի մեջ, ապա կստանանք՝*

$$v_B = r_5 \cdot \frac{z_1 z_3}{z_2 \cdot z_4} \pi = 4 \cdot \frac{6 \cdot 8}{24 \cdot 32} \pi = \frac{\pi}{4} \text{ սմ/վրկ։}$$

Երկրորդ եղանակ։ *Այժմ խնդիրը լուծենք օգտագործելով ատամնավոր անիվների հաջորդական միացման համար գոյություն ունեցող (II) բանաձևը։ Դա հնարավորություն է տալիս անմիջա-*

7—2292

պես որոշել հաջորդական միացումների փոխանցման թիվը։ Ունենք, որ

$$i_{1-2}=\frac{z_2}{z_1}, \quad i_{3-4}=\frac{z_4}{z_3}, \quad i_{1-4}=i_{1-2}\cdot i_{3-4},$$

Հետևաբար, մեր խնդրի դեպքում կունենանք՝

$$i_{1-2}=\frac{24}{6}=4, \ i_{3-4}=\frac{32}{8}=4, \quad i_{1-4}=4\cdot 4=16։$$

Մյուս կողմից հայտնի է, որ

$$\omega_4=\frac{\omega_1}{i_{1-4}}, \qquad (7)$$

Նախ հաշվենք ω_1 անկյունային արագությունը։

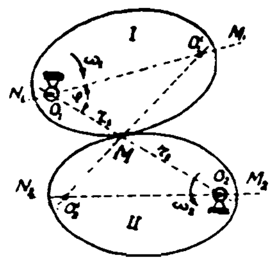
$$\omega_1=\frac{n_1\pi}{30}=\frac{30\pi}{30}=\pi \ \ 1/\text{վրկ}։ \qquad (8)$$

(7)-ի և (8)-ի օգնությամբ որոշվում է ω_4-ը։

Այսպիսով, ունենալով ω_4 անկյունային արագությունը, կարող ենք որոշել v_B-ն։

$$v_B=\omega_4\cdot r_5=\frac{\pi}{16}\cdot 4=\frac{\pi}{4}=0{,}78 \ \text{սմ/վրկ}։$$

Պատ. $v_B=7{,}8$ մմ/վրկ։



Գծ. 73

Խնդիր 43 (*403*)։ *Ստանալ* a *և* b *կիսաառանցքներ ունեցող երկու էլիպտական ատամնանիվների պտտման փոխանցման օրենքը։ Առաջին անվի անկյունային արագությունը հաստատուն է,* $\omega_1=\text{const}$։ *Առանցքների միջև եղած* O_1O_2 *հեռավորությունը հավասար է* 2a, *իսկ պտտման առանցքները միացնող ուղղով և առաջին էլիպտական անվի մեծ կիսաառանցքով կազմված անկյունը՝* φ։ *Առանցքներն անցնում են էլիպսների ֆոկուսներով (գծ. 73)։*

Լուծում։ *Երկու ատամնանիվների պտույտների փոխանցման օրենքը ստանալու համար պետք է գտնել նրանց* ω_1 *և* ω_2

անկյունային արագությունների հարաբերությունը։ Դրա համար օգտվենք էլիպսների շոշափման M կետում նրանց գծային արագությունների հավասարությունից։ Ունենք, մի կողմից

$$v_{м} = \omega_1 r_1,$$

իսկ մյուս կողմից՝

$$v_{м} = \omega_2 r_2։$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

կամ

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\,\omega_1 \qquad (1)$$

Այժմ r_1 և r_2-ը արտահայտենք էլիպսների կիսառանցքների և ֆոկուսների միջև եղած հեռավորության միջոցով։ Եռանկյունի $O_1O'M$-ից կոսինուսների թեորեմի համաձայն կարող ենք գրել՝

$$r_2^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4cr_1 \cos\varphi, \qquad (2)$$

որտեղ $2c$-ն էլիպսների ֆոկուսների միջև եղած հեռավորությունն է, ընդ որում $2c = O_1O_1'$։

Բացի դրանից, էլիպսի սահմանման համաձայն (գծ. 73) կարող ենք գրել, որ

$$r_1 + r_2 = 2a։ \qquad (3)$$

Մնում է (2) և (3) հավասարումներից որոշել r_1 և r_2-ը։ Դրա համար (3)-ից որոշենք r_2-ը և նրա արժեքը տեղադրենք (1)-ի մեջ, կստանանք՝

$$(2a - r_1)^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4c\,r_1 \cos\varphi։$$

Այստեղից ստացվում է

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi}, \qquad (4)$$

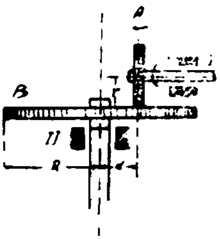
իսկ (3)-ից՝

$$r_2 = 2a - r_1 = 2a - \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi} = \frac{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi}{a - c\cos\varphi}, \qquad (5)$$

Տեղադրելով r_1 և r_2-ի արժեքները (4) և (5)-ից (1)-ի մեջ *և կատարելով նշված գործողությունները, կստանանք խնդրի պատասխանը։*

$$\text{Պատ.}\quad \omega_2=\frac{a^2-c^2}{a^2-2ac\cos\varphi+c^2}\cdot\omega_1,$$

Խնդիր 44 *(406)։ Ֆրիկցիոն փոխանցման* I *տանող լիսեռը կատարում է 600* պտ/րոպ *և պտտման ընթացքում տեղաշարժվում է (ուղղությունը ցույց է տրված սլաքով) այնպես, որ հեռավորությունը փոփոխվում է* $d=(10-5t)$ սմ *օրենքով* (t *վայրկյաններով)։ Որոշել՝ 1)* II *լիսեռի անկյունային արագությունը, որպես* d *հեռավորության ֆունկցիա. 2)* B *անվի շրջանակի վրա գտնվող կետի լրիվ արագացումը այն պահին, երբ* $d=r$։ *Տված են շփվող անիվների շառավիղները՝* $r=5$ սմ, $R=15$ սմ *(գծ. 74)։*



Գծ. 74

Լուծում: *Խնդրի պայմանի համաձայն* I *անվի* ω_1 *անկյունային արագությունը կլինի՝*

$$\omega_1=\frac{2\pi\cdot 600}{60}=20\,\pi\ \text{1/վրկ}: \qquad (1)$$

Երկրորդ լիսեռի ω *անկյունային արագությունը որոշելու համար գրենք*

$$\frac{\omega_1}{\omega}=\frac{d}{r}, \qquad (2)$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\omega=\frac{\omega_1\cdot r}{d}=\frac{20\,\pi\cdot 5}{10-0{,}5t}=\frac{100\,\pi}{10-0{,}5t}, \qquad (3)$$

Եթե երկրորդ լիսեռի անկյունային արագացումը նշանակենք ε, *ապա (3)-ի ածանցման միջոցով կստանանք*

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{50\,\pi}{(10-0{,}5t)^2}=\frac{50\pi}{d^2}\ \text{1/վրկ}^2: \qquad (4)$$

Մնում է գտնել B *անվի շրջանակի վրա գտնվող կետի արագությունը այն մոմենտում, երբ* $d=r$։ *Այս պայմանի դեպքում (3) և (4)-ից կունենանք՝*

$$\omega=\frac{100\pi}{r}=\frac{100\pi}{5}=20\pi\ 1/\text{վրկ},$$

$$\varepsilon=\frac{50\pi}{r^2}=\frac{50\pi}{25}=2\pi\ 1/\text{վրկ}^2:$$

Հետևաբար, այն պահին, երբ $d=r$ *կետի լրիվ արագացումը կլինի*

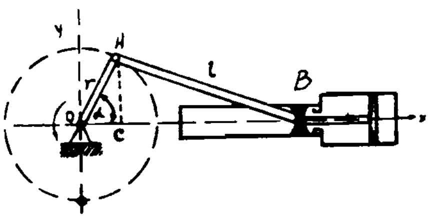
$$w=R\sqrt{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+\omega^4}=15\sqrt{(2\pi)^2+(20\pi)^4}=$$

$$=30\pi\sqrt{1+40000\pi^2}\ \text{սմ/վրկ}^2.$$

Պատ. *1)* $\varepsilon=\frac{50\pi}{d^2}$ վրկ$^{-2}$,

2) $w=30\pi\sqrt{1+40000\pi^2}$ սմ/վրկ^2։

Խնդիր 45 *(408)։ Որոշել մեղեխաշարժաթևային մեխանիզմի* B *սողնակի շարժման օրենքը, արագությունը, արագացումը, եթե* OA *մեղեխը պտտվում է հաստատուն* ω_0 *անկյունային արագությամբ։ Մեղեխի երկարությունը* $OA=r$, *շարժաթևի երկարությունը* $AB=l$։ Ox *առանցքը ուղղված է սողնակի ուղղորդով։ Որպես հաշվման սկիզբ ընդունել մեղեխի* O *կենտրոնը։* $\frac{r}{l}=\lambda$ *հարաբերությունը ընդունել բավականաչափ փոքր* ($\lambda\ll 1$), $\alpha=\omega_0 t$ *(գծ. 75)։*



Գծ. 75

Լուծում: *Նախ որոշենք* B *սողնակի շարժման օրենքը։ Դրա համար հաշվենք* OB *հատվածի երկարությունը։ Գծագրից հետևում է, որ*

$$OB=OC+CB \tag{1}$$

OAC *և* ACB *ուղղանկյուն եռանկյուններից կարելի է գրել*

$$OC=OA\cos\alpha=r\cos\omega_0 t, \tag{2}$$

$$CB=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega_0 t}\ . \tag{3}$$

Եթե տեղադրենք OC *և* CB-*ի արժեքները (2) և (3)-ից (1)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$x=OB=r\cos\omega_0 t+l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega_0 t}$$

B *սողնակի շարժման օրենքը պարզ տեսքով ստանալու համար* $\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega_0 t}$ *արտահայտությունը վեր ածենք շարքի արհամարհելով* λ^2-*ուց բարձր աստիճաններ պարունակող անդամները։ Շարքի վերլուծելով, կստանանք*

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega_0 t}=1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\omega_0 t$$

Այդ դեպքում B *սողնակի շարժման օրենքը կլինի*

$$x=r\left(\cos\omega_0 t+\frac{1}{4}\lambda\cos 2\omega_0 t\right)+l-\frac{1}{4}\lambda r \qquad (4)$$

B *սողնակի արագությունը գտնելու համար պետք է (4)-ը մեկ անգամ ածանցել, իսկ արագացումը գտնելու համար՝ երկու անգամ ածանցել։ Դրանից հետո կստանանք՝*

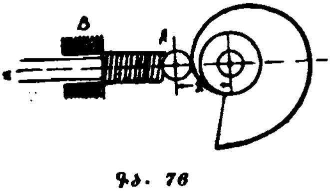
$$v_x=\frac{dx}{dt}=-r\omega_0\left(\sin\omega_0 t+\frac{1}{2}\lambda\sin 2\omega_0 t\right),$$

$$w_x=\frac{d^2x}{dt^2}=-r\omega_0^2(\cos\omega_0 t+\lambda\cos 2\omega_0 t)։$$

Պատ. $x=r\left(\cos\omega_0 t+\frac{\lambda}{4}\cos 2\omega_0 t\right)+l-\frac{\lambda}{4}r,$

$$v_x=-r\omega_0\left(\sin\omega_0 t+\frac{\lambda}{2}\sin 2\omega_0 t\right),$$

$$w_x=-r\omega_0^2(\cos\omega_0 t+\lambda\cos 2\omega_0 t)։$$



Գծ. 76

Խնդիր 46։ *Գտնել* AB *ձողին հավասարաչափ համընթաց շարժում հաղորդող բռունցքի եզրագծի հավասարումը։ Ձողի շարժման հավասարումն է՝* $x=5t+30$ *(x—սանտիմետրերով, t—վայրկյաններով)։ Բռունցքը կատարում է 7,5* պտ/րոպ *(գծ. 76)։*

Լուծում: *Դիցուք ձողը շարժվում է* $x=f(t)$ *օրենքով, իսկ բռունցքը պտտվում է համաձայն* $\varphi=\varphi(t)$ *օրենքի։*

Պահանջվում է գտնել բռունցքի եզրագծի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով, այսինքն՝ $r=r(\varphi)$ *հավասարումը։ Բևեռային կոորդինատական սիստեմի սկզբնակետը տեղավորենք բռունցքի կենտրոնում, բևեռագիծը ամրացնենք բռունցքին, իսկ բռունցքի* r *շառավիղը ուղղենք* OX *առանցքով։ Գծագրից երևում է, որ* A *կետի* x *կոորդինատը և բռունցքի* r *շառավիղը իրար հավասար են, այսինքն՝* $r=x=f(t)$*։ Բայց մյուս կողմից մենք ունենք, որ* $\varphi=\varphi(t)$*։ Հետևաբար, մենք ստացանք բռունցքի եզրագծի հավասարումը պարամետրական տեսքով՝*

$$r=f(t), \quad \varphi=\varphi(t)։$$

Տված խնդրի պայմանների համաձայն

$$\omega=\frac{7,5\,.\,\pi}{30}=\frac{\pi}{4}\ 1/\text{վրկ}:$$

Այստեղից հետևում է, որ $\varphi=\dfrac{\pi}{4}t(\varphi_0=0)$*։*

Տված է ձողի շարժման հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$x=5t+30։$$

Այս հավասարման մեջ x*-ը փոխարինելով* r*-ով, կստանանք*

$$r=5t+30։$$

Այսպիսով, բռունցքի եզրագծի հավասարումը պարամետրական տեսքով կլինի՝

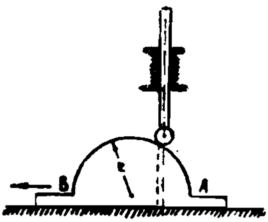
$$r=5t+30, \quad \varphi=\frac{\pi}{4}t։$$

Այստեղից արտաքսելով t *պարամետրը, կստանանք բռունցքի եզրագծի հավասարումը։*

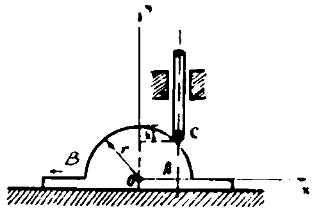
Պատ. $r=\dfrac{20}{\pi}\varphi+30$, *Արքիմեդյան պարուրագիծ։*

Խնդիր 47 *(415)։ Գտնել ինչպիսի երկարությամբ է իջնում ձողը, որն իր ծայրով հենվում է* $r=30$սմ *շառավիղ ունեցող շրջանային եզրագծի վրա։ Բռունցքը շարժվում է հետադարձ-համընթաց* $v=5$ սմ/վրկ *արագությամբ։ Ձողի իջնելու ժամանակամիջոցը՝* $t=3$ վրկ։ *Սկզբնական մոմենտում ձողը գտնվում է իր ամենաբարձր դիրքում (գծ. 77)։*

Լուծում: Oxy *կոորդինատական սիստեմն ամրացնենք բռունցքին (գծ. 78)։ Քանի որ բռունցքը կատարում է հավասա-*



Գծ. 77



Գծ. 78

րաչափ շարժում, ապա նրա անցած ճանապարհը $t=3$ *վայրկյանում կլինի՝*

$$x_A = OA = vt = 15 \text{ սմ:}$$

Այժմ հաշվենք C *կետի* y_c *կոորդինատը։* OCA *ուղղանկյուն եռանկյունից հետևում է, որ*

$$y_c = CA = \sqrt{OC^2 - OA^2} = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} = 15\sqrt{3} = 25{,}98 \text{ սմ:}$$

Բռունցքի տեղափոխման հետևանքով ձողը D *դիրքից գրավում է* C *դիրքը։ Հետևաբար, նրա իջեցման երկարությունը կլինի՝*

$$h = r - y_c = 30 - 25{,}98 = 4{,}02 \text{ սմ:}$$

Պատ. $h=4{,}02$ սմ։

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ

ԿԵՏԻ ԲԱՐԴ ՇԱՐԺՈՒՄԸ

§ 6. ԿԵՏԻ ԲԱՐԴ ՇԱՐԺՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ՀԵՏԱԳԻԾԸ

1. Հարաբերական, փոխադրական և բացարձակ շարժումներ: *Մինչև այժմ մենք դիտարկում էինք կետի շարժումը պայմանականորեն անշարժ ընդունված հաշվառքի սիստեմի նկատմամբ։ Սակայն կոնկրետ ֆիզիկական խնդիրներ լուծելիս հաճախ անհրաժեշտ է լինում ուսումնասիրել կետի շարժումը այնպիսի սիստեմի նկատմամբ, որն իր հերթին շարժվում է մեր կողմից ընտրված հաշվառքի սիստեմի նկատմամբ։ Այս դեպքում ասում են, որ կետը կատարում է բարդ շարժում։ Եթե ուղևորը շարժվում է տրամվայի վագոնում, իսկ վագոնը շարժվում է ռելսերի նկատմամբ, ապա ուղևորը կատարում է բարդ շարժում։ Այստեղ տրամվայի վագոնը կլինի շարժական հաշվառքի սիստեմ, իսկ ռելսերը՝ անշարժ հաշվառքի սիստեմ։*

Կետի շարժումը շարժական հաշվառքի սիստեմի նկատմամբ կոչվում է կետի հարաբերական շարժում։ Այդ շարժման հետագիծը, արագությունը և արագացումը համապատասխանաբար անվանում են կետի հարաբերական հետագիծ, հարաբերական արագություն և հարաբերական արագացում։

Կետի շարժումը անշարժ հաշվառքի սիստեմի նկատմամբ կոչվում է կետի բարդ կամ բացարձակ շարժում։ Այդ շարժման հետագիծը, արագությունը և արագացումը անվանում են կետի բացարձակ շարժման հետագիծ, բացարձակ արագություն և բացարձակ արագացում։

Շարժական հաշվառքի սիստեմի և նրա հետ անփոփոխ կերպով միացած բոլոր կետերի շարժումը անշարժ հաշվառքի սիստեմի նկատմամբ կոչվում է կետի փոխադրական շարժում։ Կետի փոխադրական շարժումը փաստորեն առաջանում է շարժական հաշվառքի սիստեմի շարժման հետևանքով։ Կետի փոխադրական հետագիծ, փոխադրական արագություն և փոխադրական արագացում կոչվում են տվյալ մոմենտում այն հետագիծը, արագությունը և արագացումը, որ կարող էր ունենալ շարժվող կետը, տվյալ մոմենտում, եթե նա սկսած այդ մոմենտից ամուր կերպով կապված լիներ շարժական սիստեմի հետ (այսինքն՝ չկատարեր հարաբերական շարժում)։ Այստեղից հետևում է, որ տվյալ մոմենտում կետի փոխադրական շարժման բնույթը որոշելու համար պետք է մտքով վերացնել այդ կետի հարաբերական շարժումը, ամրացնել այդ կետը տվյալ մոմենտում շարժական հաշվառքի սիստեմին և այնուհետև տեսնել, թե ինչպիսի շարժում է կատարում նա որպես մարմնի կետ։

Վերը բերված օրինակում մարդու շարժումը տրամվայի վագոնի նկատմամբ թող լինի հարաբերական, իսկ այդ շարժման արագությունը՝ մարդու հարաբերական շարժման արագություն։ Այդ դեպքում տրամվայի շարժումը ռելսերի նկատմամբ կլինի մարդու համար փոխադրական շարժում, իսկ վագոնի այն կետի արագությունը, որը տվյալ մոմենտում համընկնում է մարդու հետ, կլինի այդ մոմենտում մարդու փոխադրական արագությունը և, վերջապես, մարդու շարժումը ռելսերի նկատմամբ կլինի նրա բացարձակ շարժումը, իսկ այդ շարժման արագությունը՝ մարդու բացարձակ արագություն։

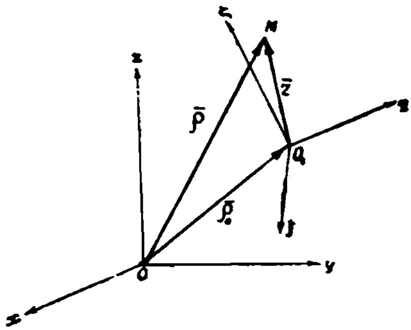
Այնուհետև ընդունենք հետևյալ նշանակումները՝ բացարձակ շարժման էլեմենտները նշանակենք a ինդեքսով, փոխադրական շարժմանը՝ e ինդեքսով. իսկ հարաբերական շարժմանը՝ r ինդեքսով։

Այսպիսով բացարձակ, փոխադրական և հարաբերական շարժման արագությունը և արագացումը նշանակենք համապատասխանաբար $\bar{v}_a$, $\bar{w}_a$, $\bar{v}_e$, $\bar{w}_e$, $\bar{v}_r$ և $\bar{w}_r$։

2. Կետի բարդ շարժման հավասարումները: Դիցուք M կետը շարժվում է որևէ $O_1\xi\eta\zeta$ շարժական սիստեմի նկատմամբ, իսկ վերջինս էլ իր հերթին շարժվում է oxyz անշարժ կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ (գծ. 79)։ Այս դեպքում ակնհայտ է, որ M կետի շարժումը $O_1\xi\eta\zeta$ շարժական սիստեմի նկատմամբ կլինի հարաբերական, oxyz-ի նկատմամբ՝ բարդ կամ բացարձակ, իսկ $O_1\xi\eta\zeta$ շարժական սիստեմի շարժումը oxyz անշարժ սիստեմի նկատմամբ կլինի շարժվող, M կետի համար՝ փոխադրական շարժում։

M կետի շառավիղ-վեկտորը oxyz անշարժ կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ նշանակենք $\bar{\rho}$, $O_1\xi\eta\zeta$, շարժական սիստեմի նկատմամբ՝ $\bar{r}$, իսկ $O_1\xi\eta\zeta$ սիստեմի սկզբնակետի շառավիղ-վեկտորը oxyz սիստեմի նկատմամբ՝ $\bar{\rho}_0$։ Այդ դեպքում ΔMOO_1-ից (գծ. 79) կարող ենք գրել, որ

$$\bar{\rho}=\bar{\rho}_0+\bar{r}\text{։} \qquad \text{(I)}$$



Գծ. 79

Եթե տված են կետի հարաբերական և փոխադրական շարժումների հավասարումները, ապա (I) բանաձևի օգնությամբ կարելի է որոշել այդ կետի բացարձակ շարժման հավասարումները։ Դրա համար (I) բանաձևը պրոյեկտենք oxyz անշարժ կոորդինատական սիստեմի առանցքների վրա։ Կստանանք՝

$$\begin{aligned} x&=x_0+\alpha_1\xi+\alpha_2\eta+\alpha_3\zeta,\\ y&=y_0+\beta_1\xi+\beta_2\eta+\beta_3\zeta,\\ z&=z_0+\gamma_1\xi+\gamma_2\eta+\gamma_3\zeta, \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

որտեղ (x, y, z)-ը $\bar{\rho}$ շառավիղ-վեկտորի պրոյեկցիաներն են անշարժ սիստեմի առանցքների վրա, (x_0, y_0, z_0)-ն՝ $\bar{\rho}_0$ շառավիղ-վեկտորի պրոյեկցիաները դարձյալ անշարժ սիստեմի առանցքների նկատմամբ, իսկ (ξ,η,ζ)-ն՝ $\bar{r}$ շառավիղ-վեկտորի պրոյեկցիաները շարժական սիստեմի առանցքների վրա։ Այստեղ α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3-ը շարժական և անշարժ կոորդինատական սիստեմների առանցքներով կազմված անկյունների կոսինուսներն են։ Այդ ուղղորդ կոսինուսները կարելի է ներկայացնել հետևյալ աղյուսակով։

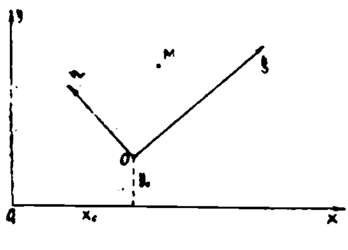
	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

Եթե տված են կետի փոխադրական և հարաբերական շարժման հավասարումները, ապա (II) հավասարումների աջ մասերը կլինեն ժամանակի տված ֆունկցիաներ և, այսպիսով, կստանանք կետի բացարձակ շարժման հավասարումները։

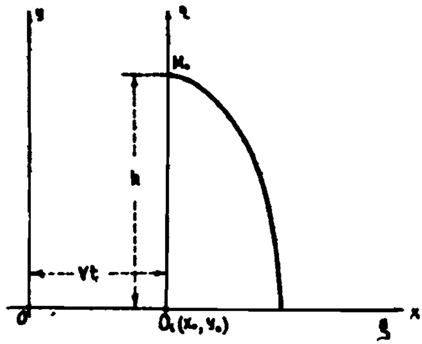
Բացարձակ շարժման հավասարումներից արտաքսելով t ժամանակը, կստանանք կետի բացարձակ հետագիծը, այսինքն՝ կետի հետագիծը անշարժ կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ։ Նույն ձևով, հարաբերական շարժման հավասարումներից արտաքսելով t ժամանակը, կստացվի կետի հարաբերական շարժման հետագիծը։

Կետի հարթ շարժման դեպքում (II) հավասարումներն ընդունում են պարզ տեսք։ Եթե OX և $O_1\xi$ առանցքների միջև կազմված անկյունը նշանակենք φ (գծ. 80), ապա (II) բանաձևերը ընդունում են հետևյալ տեսքը՝

$$x=x_0+\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi,$$
$$y=y_0+\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi \text{։} \qquad \text{(III)}$$



Գծ. 80



Գծ. 81

Եթե հարթ շարժական և անշարժ կոորդինատական սիստեմներն ունեն ընդհանուր սկզբնակետ, ապա (III) բանաձևերի փոխարեն կունենանք հետևյալը՝

$$x=\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi,$$
$$y=\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi \text{:} \qquad \text{(IV)}$$

Այժմ ենթադրենք, որ շարժական սիստեմը անշարժ սիստեմի նկատմամբ կատարում է համընթաց շարժում, այդ դեպքում (II) բանաձևերի փոխարեն կունենանք՝

$$x=x_0+\xi,$$
$$y=y_0+\eta, \qquad \text{(V)}$$
$$z=z_0+\zeta \text{:}$$

Խնդիր 48: *Գնացքի վագոնը շարժվում է ուղղագիծ տեղամասով* $v = \text{const}$ *արագությամբ։ Վագոնում գտնվող կետը ընկնում է ներքև* h *բարձրությունից։ Կետի սկզբնական արագությունը վագոնի նկատմամբ հավասար է զրոյի։*

Գտնել երկրի նկատմամբ այդ կետի կատարած շարժման հետագիծը (գծ. 81)։

Լուծում։ *Տանենք* oxy *անշարժ կոորդինատական սիստեմը և վագոնին ամրացված* $o_1\xi\eta$ *շարժական սիստեմը (գծ. 81)։ Ընկնող կետի կոորդինատները անշարժ սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* (x, y), *իսկ շարժական սիստեմի նկատմամբ՝* (ξ, η)։

Քանի որ շարժական սիստեմը անշարժ սիստեմի նկատմամբ կատարում է համընթաց շարժում, ուստի (V)*-ի համաձայն կունենանք՝*

$$x = x_0 + \xi,$$

$$y = y_0 + \eta, \qquad (1)$$

որտեղ (x_0, y_0)*-ն շարժական սիստեմի սկզբնակետի կոորդինատներն են անշարժ սիստեմի նկատմամբ։*

Ընկնող կետի փոխադրական և հարաբերական շարժումների հավասարումները կլինեն՝

$$x_0 = vt, \quad y_0 = 0,$$

$$\xi = 0, \quad \eta = h - \frac{gt^2}{2}, \qquad (2)$$

Տեղադրելով այս արժեքները (1)-ի մեջ, կստանանք՝

$$x = vt,$$

$$y = h - \frac{gt^2}{2}, \qquad (3)$$

(3)-ը կլինի ընկնող կետի շարժման հավասարումները երկրի (ռելսերի) նկատմամբ կամ ընկնող կետի բացարձակ շարժման հավասարումները։ Հետագծի հավասարումը անշարժ սիստեմի նկատմամբ ստանալու համար (3) հավասարումներից պետք է արտաքսել t *ժամանակը։ Արտաքսելուց հետո կստանանք*

$$y = h - \frac{g}{2v^2} \cdot x^2,$$

Հետևաբար, ընկնող կետի հետագիծը երկրի (ռելսերի) նկատմամբ կլինի պարաբոլ։

(2)-ից հետևում է, որ ընկնող կետի հետագիծը գնացքի նկատմամբ կլինի մի ուղիղ գիծ, որը զուգահեռ է oy *առանցքին և նրանից հեռացված է* vt-*ի չափով (գծ. 81)։*

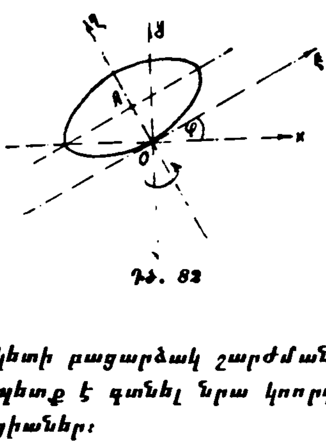
Պատ. *Հետագիծը երկրի նկատմամբ՝* $y = h - \frac{g}{2v^2}x^2$։

Խնդիր 49։ *Տված են կետի շարժման հավասարումները* $o\xi\eta$ *շարժական սիստեմի նկատմամբ հետևյալ տեսքով՝*

$$\xi = 4\sin\frac{\pi}{2}t,$$

$$\eta = 1 - \cos\frac{\pi}{2}t:$$

$o\xi\eta$ *սիստեմի առանցքները պտտվում են իրենց հարթության մեջ անշարժ* O *կետի շուրջը* $\varphi = \frac{\pi}{2}t$ *օրենքով (գծ. 82)։*



Գծ. 82

Կազմել M *կետի բացարձակ շարժման հավասարումները։*

Լուծում։ *Տվյալ խնդրում* M *կետի փոխադրական շարժումը կլինի շարժական* $o\xi\eta$ *սիստեմի պտտումը* O *անշարժ կետի շուրջը։* O *կետով տանենք անշարժ կոորդինատական սիստեմը։* M *կետի կոորդինատները անշարժ կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* x, y։ *Այդ կետի բացարձակ շարժման հավասարումները ստանալու համար պետք է գտնել նրա կոորդինատները որպես ժամանակի ֆունկցիաներ։*

M *կետի* (x,y) *և* (ξ,η) *կոորդինատների միջև եղած կապը* (IV) *բանաձևի համաձայն, կլինի՝*

$$x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,$$
$$y = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi:$$

Եթե այս հավասարումների մեջ տեղադրենք ξ, η, φ-*ի տված արժեքները, կստանանք՝*

$$x = 4\sin\frac{\pi}{2}t\cos\frac{\pi}{2}t - \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}t\right)\sin\frac{\pi}{2}t,$$

$$y=\left(1-\cos\frac{\pi}{2}t\right)\cos\frac{\pi}{2}t+4\sin\frac{\pi}{2}t\sin\frac{\pi}{2}t,$$

կամ

$$x=\frac{5}{2}\sin\pi t-\sin\frac{\pi}{2}t,$$

$$y=\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{5}{2}\cos\pi t+\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Պատ. M *կետի բացարձակ շարժման հավասարումներն են՝*

$$x=\frac{5}{2}\sin\pi t-\sin\frac{\pi}{2}t,$$

$$y=\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{5}{2}\cos\pi t+\frac{3}{2}.$$

3. Կետի բարդ շարժման հավասարումների և հետագծերի վերաբերյալ խնդիրների լուծումը: *Այս պարագրաֆի խնդիրները բաժանվում են երկու խմբի՝ ա) որոշել կետի բացարձակ շարժման հավասարումները և հետագիծը, եթե տված են այդ կետի փոխադրական և հարաբերական շարժումները և բ) որոշել կետի հարաբերական շարժման հավասարումները և հետագիծը, երբ հայտնի են բացարձակ և փոխադրական շարժումները։*

Խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է վարվել հետևյալ կերպ՝

1) ընտրել անշարժ և շարժական կոորդինատական սիստեմները,

2) պարզել փոխադրական շարժման բնույթը, այսինքն՝ այն մարմնի շարժման բնույթը, որի հետ ամուր կերպով ամրացված է շարժական կոորդինատական սիստեմը,

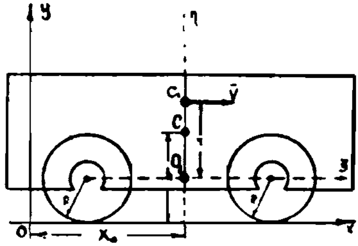
3) դրանից հետո անհրաժեշտ է պարզել, թե դիտարկվող կետի ո՞ր շարժումը կլինի հարաբերական և որը՞ բացարձակ,

4) հարաբերական շարժումը որոշելու համար օգտակար է մտքով կանգնեցնել փոխադրական շարժումը, իսկ փոխադրական շարժումը որոշելու համար՝ մտքով կանգնեցնել հարաբերական շարժումը։

4. Խնդիրներ

Ստորև բերվում են կետի բարդ շարժման հավասարումների և հետագծերի վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումներ։ Այդ *խնդիրների մեծ մասը վերցված են Ի. Վ. Մեշչերսկու «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու» խնդրագրքից։*

Խնդիր 50 *(419)։ Տրամվայը շարժվում է հավասարաչափ ուղղագիծ հորիզոնական ուղեմասով* v=18կմ/ժամ *արագությամբ, ընդ որում թափքը զսպանների վրա կատարում է ներդաշնակ տատանումներ* a=0,8 սմ *ամպլիտուդով և* T=0,5 վրկ *պարբերությունով։ Գտնել թափքի ծանրության կենտրոնի հետագծի հավասարումը, եթե նրա միջին հեռավորությունը ճանապարհի պաստառից՝* h=1,5 մ։ *Տված է, որ* t = 0 *պահին ծանրության կենտրոնը գտնվում է միջին դիրքում և տատանման արագությունը ուղղված է դեպի վեր։* ox *առանցքը ուղղել պաստառով շարժման ուղղությամբ,* oy *առանցքը՝ ուղղաձիգ դեպի վեր այնպես, որ* t=0 *պահին անցնի ծանրության կենտրոնով (գծ. 83)։*



Գծ. 83

Լուծում: *Վագոնի թափքի ծանրության կենտրոնը կատարում է բարդ շարժում։ Նա տեղափոխվում է հորիզոնական ուղղությամբ և միաժամանակ զսպանների նկատմամբ կատարում է ուղղաձիգ տատանումներ։*

Որպես անշարժ կոորդինատական սիստեմ ընտրենք xoy-ը *իսկ որպես շարժական կոորդինատական սիստեմ՝* $\xi o_1 \eta$-ն *(գծ. 83)։ Շարժական կոորդինատական* $\xi o_1 \eta$ *սիստեմը տեղադրենք վագոնի զսպանների հիմքի վրա, ընդ որում* $o_1\xi$-ն *ուղղենք անիվների կենտրոնները միացնող ուղղով, իսկ* $o_1\eta$-ն *ուղղենք թափքի ծանրության կենտրոնով՝ ուղղաձիգ դեպի վեր։ Թափքի ծանրության* C_1 *կենտրոնի կոորդինատները շարժական սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* (ξ,η)։ *Գծագրից երևում է, որ*

$$\xi = 0,$$

$$\eta = h - R + a \sin \omega t\text{։} \qquad (1)$$

Խնդրի պայմանի համաձայն ամպլիտուդը՝ a=0,008 մ, h==1,5 մ, *և միաժամանակ տատանումների հաճախականության համար կարող ենք գրել*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \ 1/\text{վրկ}\text{:}$$

Հետևաբար, (1)-ը այժմ կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\xi=0,$$

$$\eta=1{,}5+0{,}008\sin 4\pi t-R: \qquad (2)$$

Այստեղ (2)-ը թափքի ծանրության կենտրոնի հարաբերական շարժման հավասարումներն են։ Այժմ որոշենք նրա փոխադրական շարժման հավասարումները։ Դրա համար O_1 *կետի կոորդինատները* xoy *անշարժ սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* (x_0, y_0)։ *Այս կոորդինատների համար կունենանք՝*

$$x_0=vt=5t \text{ մ},$$

$$y_0=R\cdot$$

Սրանք կլինեն թափքի ծանրության կենտրոնի փոխադրական շարժման հավասարումները։

Այդ դեպքում (V) *բանաձևերի հիման վրա թափքի ծանրության կենտրոնի* (x,y) *կոորդինատները կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝*

$$x=x_0+\xi,$$

$$y=y_0+\eta,$$

կամ

$$x=5t,$$

$$y=1{,}5+0{,}008\sin 4\pi t+y_0-R: \qquad (3)$$

Այստեղ (3)-ը թափքի ծանրության կենտրոնի բացարձակ շարժման հավասարումներն են։

Հետագծի հավասարումը ստանալու համար (3) հավասարումներից պետք է արտաքսել t *ժամանակը։ Արտաքսելուց հետո կստանանք խնդրի պատասխանը։*

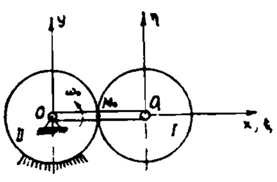
Պատ. $y=1{,}5+0{,}008\sin 0{,}8\pi x$։

Խ ն դ ի ր 51։ OO_1 *մեղեխը հավասարաչափ պտտվում է* O *կետի շուրջը* ω_0 *անկյունային արագությամբ (գծ. 84)։ Մեղեխի* O_1 *մատին ազատ հագցված է* r *շառավիղ ունեցող* I *անիվը, որը գլորվում է նույն* r *շառավիղով անշարժ* II *անվի վրայով առանց սահելու։ Գտնել* I *անվի շրջանակի* M *կետի բացարձակ շարժման հավասարումները և հետագիծը։*

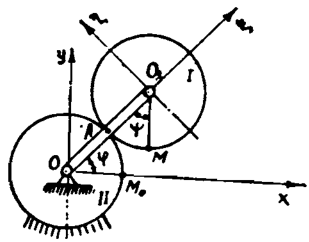
Լ ու ծ ու մ: *Խնդիրը լուծենք երկու եղանակով։*

ա) Առաջին եղանակ: *Տանենք անշարժ* oxy *և շարժական* $o_1\xi\eta$ *կոորդինատական սիստեմներն այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում։* ξ *առանցքը կոշտ կերպով ամրացնենք* OO_1 *մեղեխին։* $o_1\xi\eta$ *սիստեմի փոխադրական շարժումը կլինի նրա և* OO_1 *մեղեխի համատեղ պտտումը* O *կետի շուրջը* ω_0 *անկյունային արագությամբ։*

Ենթադրենք, որ սկզբնական մոմենտում x *և* ξ *առանցքները համընկնում են և շարժվող* M *կետը այդ մոմենտում գրավում է* x *առանցքի վրա* M_0 *դիրքը (գծ. 84)։*



Գծ. 84



Գծ. 85

Դիցուք t *ժամանակամիջոցում* OO_1 *մեղեխը պտտվում է* O *կետի շուրջը* $\varphi=\omega_0 t$ *անկյան տակ (գծ. 85)։ Այդ դեպքում* $o_1\xi\eta$ *սիստեմի փոխադրական շարժումը կորոշվի հետևյալ հավասարումներով՝*

$$\begin{aligned} &\varphi=\omega_0 t,\\ &x_{o_1}=OO_1\cos\varphi=2r\cos\omega_0 t,\\ &y_{o_1}=OO_1\sin\varphi=2r\sin\omega_0 t։ \end{aligned} \qquad (1)$$

O_1 *կետի շուրջը* I *անվի կատարած պտտման անկյունային արագությունը նշանակենք* ω։ *Այս շարժումը* M *կետի համար կլինի հարաբերական շարժում։*

Այժմ գտնենք անհայտ ω *անկյունային արագության մեծությունը։ Քանի որ* I *անիվը գլորվում է* II *անվի վրայով առանց սահելու (գծ. 85), ապա կունենանք՝*

$$\smile M_0A=\smile AM$$

կամ (2)

$$r\varphi=r\psi,$$

որտեղ φ *և* ψ *անկյունների* t *ժամանակամիջոցի* OO_1 *մեղեխի և* I *անվի պտտման անկյուններն են։ (2)-ից հետևում է, որ*

$$\varphi=\psi,$$

իսկ ω *անկյունային արագության համար կստանանք՝*

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0:$$

Այստեղից էլ ստացվում է, որ

$$\psi = \varphi = \omega_0 t:$$

M *կետի հարաբերական շարժման հավասարումները կլինեն (գծ. 85)*

$$\xi = -r\cos\psi = -r\cos\omega_0 t, \qquad (3)$$

$$\eta = -r\sin\psi = -r\sin\omega_0 t:$$

(3) հավասարումների սիստեմից արտաքսելով t *ժամանակը, կստանանք՝*

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2:$$

Հետևաբար, M *կետի հարաբերական շարժման հետագիծը* r *շառավիղ ունեցող շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է* O_1 *կետում։*

(III) *բանաձևի համաձայն* M *կետի բացարձակ շարժման հավասարումները կլինեն՝*

$$x = x_{o_1} + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,$$

$$y = y_{o_1} + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi: \qquad (4)$$

Եթե (x_{o_1}, y_{o_1})*-ի և* (ξ, η)*-ի արժեքները (1) և (3) բանաձևերից տեղադրենք (4)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ* $\varphi = \omega_0 t$, *ապա կստանանք՝*

$$x = 2r\cos\omega_0 t - r\cos 2\omega_0 t,$$

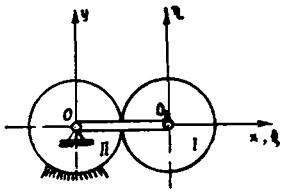
$$y = 2r\sin\omega_0 t - r\sin 2\omega_0 t: \qquad (5)$$

Հետևաբար, M *կետի բացարձակ շարժման հետագիծը կլինի կարդիոիդ, որի պարամետրական հավասարումները ունեն (5) տեսքը։*

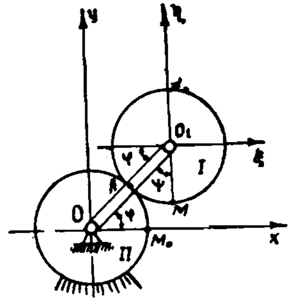
բ) Երկրորդ եղանակ: *Ընտրենք անշարժ* oxy *և շարժական* $o_1\xi\eta$ *կոորդինատական սիստեմներն այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագիր 86-ում։ Այս դեպքում* $o_1\xi\eta$ *սիստեմի փոխադրական շարժումը կլինի համընթաց։ Դիցուք սկզբնական մոմենտում* ox *և* $o_1\xi$

առանցքները գտնվում են միևնույն ուղղի վրա (գծ. 86)։ Ենթադրենք, որ t *ժամանակամիջոցում* OO_1 *մեղեխը պտտվել է* φ *անկյան տակ։ Այդ դեպքում փոխադրական շարժումը կորոշվի հետևյալ հավասարումներով՝*

$$x_0 = OO_1\cos\varphi = 2r\cos\omega_0 t,$$
$$y_0 = OO_1\sin\varphi = 2r\sin\omega_0 t \qquad (6)$$



Գծ. 86



Գծ. 87

I *անվի պտտումը* O_1 *կենտրոնի շուրջը* Ω *անկյունային արագությամբ կլինի* M *կետի հարաբերական շարժումը։* t *ժամանակամիջոցում* I *անիվը* ξ *առանցքի նկատմամբ պտտվում է (գծ. 87)*

$$\theta = \varphi + \psi$$

անկյան տակ։ Բայց քանի որ

$$\psi = \varphi,$$

ապա

$$\theta = \varphi + \psi = 2\varphi$$

Ածանցելով այս հավասարումը կստանանք՝

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = 2\frac{d\varphi}{dt} = 2\omega_0$$

M *կետի հարաբերական շարժման հավասարումները կլինեն՝*

$$\xi = -r\cos\theta = -r\cos 2\varphi,$$
$$\eta = -r\sin\theta = -r\sin 2\varphi,$$

կամ

$$\xi = -r\cos 2\omega_0 t,$$
$$\eta = -r\sin 2\omega_0 t \qquad (7)$$

Քանի որ փոխադրական շարժումը համընթաց է, ապա M *կետի բացարձակ շարժման հավասարումները* (V)*-ի համաձայն կունենան հետևյալ տեսքը՝*

$$x = x_{O_1} + \xi,$$

$$y = y_{O_1} + \eta \text{։} \qquad (8)$$

Եթե (x_{O_1}, y_{O_1})*-ի և* (ξ, η)*-ի արժեքները (6)-ից և (7)-ից տեղադրենք (8)-ի մեջ, ապա կստանանք* M *կետի բացարձակ շարժման հավասարումները՝*

$$x = 2r\cos\omega_0 t - r\cos 2\omega_0 t,$$

$$y = 2r\sin\omega_0 t - r\sin 2\omega_0 t \text{։} \qquad (9)$$

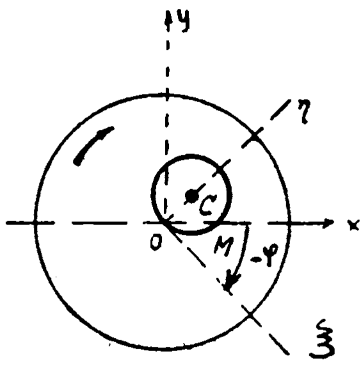
Նորից ստացանք կարդիոիդի հավասարումը պարամետրական տեսքով։

Պատ. *Բացարձակ շարժման հետագիծը կարդիոիդ է, որի պարամետրական հավասարումներն են՝*

$$x = 2r\cos\omega_0 t - r\cos 2\omega_0 t,$$

$$y = 2r\sin\omega_0 t - r\sin 2\omega_0 t \text{։}$$

Խնդիր 52 *(423)։* M *կտրիչը կատարում է ընդլայնական հետադարձ-համընթաց շարժում* $x = a\sin\omega t$ *օրենքով։ Գտնել* M *կտրիչի ծայրակետի հետագծի հավասարումը սկավառակի նկատմամբ, որը պտտվում է* O *առանցքի շուրջը հավասարաչափ* ω *անկյունային արագությամբ։* O *առանցքը հատում է կտրիչի բացարձակ հետագիծը (գծ. 88)։*



Գծ. 88

Լուծում: *Դիցուք* xoy*-ը անշարժ կոորդինատական սիստեմ է, իսկ* ξoη*-ն՝ շարժական (ամրացված սկավառակին)։ Այս երկու կոորդինատական սիստեմներն ունեն ընդհանուր* O *սկզբնակետ։ Հետևաբար, շարժական* ξoη *սիստեմը կարող է կատարել* xoy *անշարժ սիստեմի նկատմամբ միայն պտտական շարժում։* M *կետի կոորդինատները* xoy *սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* (x,y)*, իսկ* ξoη *սիստեմի նկատ-*

մամբ՝ (ξ,η)։ Քանի որ M կետը կատարում է հարթ շարժում, ապա նրա (x,y) և (ξ,η) կոորդինատների միջև եղած կապը (IV) բանաձևի համաձայն կարտահայտվի հետևյալ կերպ՝

$$x=\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi,$$
$$y=\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi, \tag{1}$$

որտեղ φ-ն ox և $o\xi$ առանցքների միջև կազմված անկյունն է (գծ. 88)։ Խնդրի պայմանում տված է, որ $\xi o\eta$ հարթությունը պտտվում է xoy հարթության O կետի շուրջը ω հաստատուն անկյունային արագությամբ։ Այստեղից հետևում է, որ $\varphi=\omega t$։

Այդ դեպքում (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x=\xi\cos\omega t-\eta\sin\omega t,$$
$$y=\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t\text{։} \tag{2}$$

Խնդրում պահանջվում է գտնել M կետի հարաբերական շարժման հետագիծը։ Դրա համար գտնենք հարաբերական շարժման հավասարումները, այսինքն՝ ξ,η կոորդինատները կախված ժամանակից։ Ըստ պայմանի M կետի բացարձակ շարժման օրենքը կլինի՝

$$x=a\sin\omega t,$$
$$y=0\text{։} \tag{3}$$

Եթե x և y-ի արժեքները (3)-ից տեղադրենք (2)-ի մեջ, ապա կստանանք M կետի հարաբերական շարժման հավասարումները՝

$$\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t=a\sin\omega t,$$
$$-\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t=0\text{։} \tag{4}$$

M կետի հարաբերական հետագծի կամ M կորիչի ծայրակետի հետագծի հավասարումը ստանալու համար պետք է (4) հավասարումներից արտաքսել t ժամանակը։

Լուծելով (4) հավասարումների սիստեմը ξ և η-ի նկատմամբ, կստանանք՝

$$\xi=a\sin\omega t\cos\omega t,$$
$$\eta=a\sin^2\omega t,$$

կամ

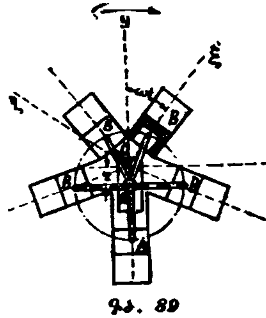
$$\xi = \frac{a}{2} \sin 2\omega t,$$

$$\eta = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos 2\omega t\text{։}$$

Այստեղից արտաքսելով t *ժամանակը, կստանանք խնդրի պատասխանը։*

Պատ. $\xi^2 + \left(\eta - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$, *սա մի շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է* $C\left(O, \frac{a}{2}\right)$ *կետում և շառավիղը հավասար է* $\frac{a}{2}$*-ի։*

Խնդիր 53 *(426)։ Գծագրում սխեմատիկորեն պատկերված ռոտատիվ շարժիչում կարտերին ամրացված գլանները պտտվում են նրա հետ միասին O լիսեռի անշարժ առանցքի շուրջը, իսկ մխոցների շարժաթևերը պտտվում են OA անշարժ մեղեխի A մասի շուրջը։ Ցույց տալ՝ 1) մխոցների B կետերի բացարձակ շարժման հետագիծը և 2) գլանների նկատմամբ նրանց հարաբերական շարժման մոտավոր հավասարումները, եթե գլանները պտտվում են* ω *անկյունային արագությամբ։ Տված է* $OA = r$ *և* $AB = l$*։* ox *և* oy *առանցքների կենտրոնը գտնվում է լիսեռի կենտրոնում։ Ընդունված է, որ* $\lambda = \frac{r}{l}$ *փոքր մեծություն է (գծ. 89)։*



Գծ. 89

Լուծում: *Դիցուք* xoy*-ը անշարժ կոորդինատական սիստեմ է, իսկ* ξoη*-ն շարժական (ամրացված գլաններին), ընդ որում այս երկու սիստեմներն ունեն ընդհանուր O սկզբնակետ (գծ.89)։*

Նախ գտնենք B կետերի բացարձակ շարժման հետագիծը։ Ակնհայտ է, որ B կետերի բացարձակ շարժումը կլինի նրանց պտտումը A անշարժ կետի շուրջը։ Հետևաբար, B կետի հետագիծը կլինի շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է A կետում և շառավիղը հավասար է $AB = l$*։ Գծագրից երևում է, որ A կետի կոորդինատները* xoy *անշարժ կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ կլինեն* $(o_1 - r)$*։ Հետևաբար, այդ շրջանագծի հավասարումը* xoy *սիստեմի նկատմամբ կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$x^2 + (y + r)^2 = l^2\text{:}$$

Սա B *կետերի բացարձակ շարժման հետագծի հավասարումն է։*

Այժմ գտնենք B *կետերի հարաբերական շարժման հավասարումը, այսինքն՝* B *կետի շարժման հավասարումը* $\xi o \eta$ *կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ։*

B *կետի կոորդինատները* $\xi o \eta$ *սիստեմի նկատմամբ կլինեն՝*

$$\xi = OB, \quad \eta = O:$$

OB *հեռավորությունը որոշելու համար դիտարկենք* BOA *եռանկյունին։ Կոսինուսների թեորեմի համաձայն կարող ենք գրել՝*

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos(\sphericalangle AOB),$$

կամ

$$l^2 = r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos(\sphericalangle AOB). \tag{1}$$

Քանի որ գլանները պտտվում են ω *հաստատուն անկյունային արագությամբ, ապա կարելի է ընդունել, որ* $\sphericalangle yo\xi = \omega t$։ *Այդ դեպքում գծագրից կունենանք՝*

$$\sphericalangle AOB = 180° - \sphericalangle yo\xi = 180° - \omega t.$$

Ուստի (1)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$l^2 = r^2 + \xi^2 + 2r\xi\cos\omega t:$$

Լուծելով այս հավասարումը ξ*-ի նկատմամբ, կստանանք՝*

$$\xi = -r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2 + r^2\cos^2\omega t}$$

կամ

$$\xi = l\left(-\lambda\cos\omega t + \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\omega t}\right): \tag{2}$$

Սա կլինի B *կետերի հարաբերական շարժման հավասարումը։*

Բայց խնդրում պահանջվում է գտնել B *կետերի հարաբերական շարժման հավասարումը, երբ տված է, որ* $\lambda = \frac{r}{l}$ *փոքր մեծություն է։ Դրա համար (2) արտահայտության մեջ մտնող արմատը վերածենք շարքի և* λ*-ի փոքրության պատճառով, վերցնենք միայն մինչև* λ^2 *պարունակող անդամները, այսինքն՝*

$$\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\omega t} = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\omega t:$$

Տեղադրելով այս արժեքը (2)-ի մեջ, կստանանք B *կետերի հարաբերական շարժման հավասարումը հետևյալ տեսքով՝*

$$\xi = l\left[-\lambda\cos\omega t + 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\omega t\right],$$

Պատ. *1) Շրջանագիծ* $x^2+(y+r)^2=l^2$,

$$2)\ \xi = l\left(1-\lambda\cos\omega t - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\omega t\right)։$$

§ 7. ԿԵՏԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

1. Արագությունների գումարման թեորեմը: *Եթե կետը կատարում է բարդ շարժում, ապա կետի բացարձակ արագությունը հավասար է հարաբերական և փոխադրական արագությունների երկրաչափական գումարին, այսինքն՝*

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e։ \qquad \text{(I)}$$

(I) *բանաձևը իրենից ներկայացնում է արագությունների գումարման թեորեմը։*

Եթե $\bar{v}_e$ *և* $\bar{v}_r$ *վեկտորների միջև կազմված անկյունը նշանակենք* α, *ապա բացարձակ արագության վեկտորի մեծությունը և ուղղությունը կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝*

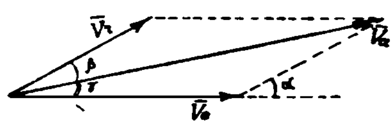
$$v_a = \sqrt{v_e^2+v_r^2+2v_e v_r\cos\alpha}, \qquad \text{(II)}$$

և

$$\frac{v_a}{\sin\alpha} = \frac{v_e}{\sin\beta} = \frac{v_r}{\sin\gamma}, \qquad \text{(III)}$$

որտեղ β *և* γ*-ն հանդիսանում են* $\bar{v}_a$ *վեկտորի* $\bar{v}_r$ *ու* $\bar{v}_e$ *վեկտորների հետ կազմած անկյունները (գծ. 90)։*

Գծ. 90-ում կառուցված պատկերը կոչվում է արագությունների զուգահեռակողմ։



Գծ. 90

Արագությունների զուգահեռակողմի օգնությամբ լուծվում են կետի կինեմատիկայի մի շարք խնդիրներ, այն է՝ 1) եթե հայտնի են $\bar{v}_r$ *և* $\bar{v}_e$*-ն, ապա կարելի է որոշել կետի* $\bar{v}_a$ *բացարձակ արագությունը, 2) եթե հայտնի են* $\bar{v}_a$ *վեկտորը և* $\bar{v}_2$ *ու* $\bar{v}_r$ *արա-*

գությունների ուղղությունները, ապա կարելի է գտնել այդ արագությունների մեծությունները և 3) եթե տված են $\bar{v}_a$ և $\bar{v}_e$ արագությունները, ապա

$$\bar{v}_r = \bar{v}_a + (-\bar{v}_e)$$

բանաձևի օգնությամբ կարելի է գտնել կետի հարաբերական արագությունը։

Եթե պրոյեկտենք (I) վեկտորական հավասարումը արագությունների հարթության վրա գտնվող դեկարտյան ուղղանկյան xoy կոորդինատական սիստեմի առանցքների վրա, ապա կստանանք՝

$$v_{ax} = v_{ex} + v_{rx},$$

$$v_{ay} = v_{ey} + v_{ry}. \qquad (IV)$$

Այս դեպքում բացարձակ արագության մեծությունը և ուղղությունը կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2},$$

$$\cos(\bar{v}_a, \hat{\bar{x}}) = \frac{v_{ax}}{v_a}, \quad \cos(\bar{v}_a, \bar{y}) = \frac{v_{ay}}{v_a}. \qquad (V)$$

Կետի արագությունների գումարման վերաբերյալ խնդիրները կարելի է լուծել երկու եղանակով՝ ա) երկրաչափական (արագությունների զուգահեռակողմի օգնությամբ, օգտագործելով (II) և (III) բանաձևերը), բ) անալիտիկ (պրոյեկցիաների միջոցով, օգտագործելով (IV) և (V) բանաձևերը)։

Խ ն դ ի ր 54։ *Ուղղաձիգ ընկնող անձրևի կաթիլը հորիզոնական ճանապարհով շարժվող վագոնի կողմնային ապակիների վրա թողնում է ուղղաձիգի նկատմամբ 30°-ի անկյան տակ թեքված շերտեր։ Վագոնի արագությունը 36* կմ/ժամ *է։ Որոշել անձրևի կաթիլների անկման* v_a *բացարձակ արագությունը։*

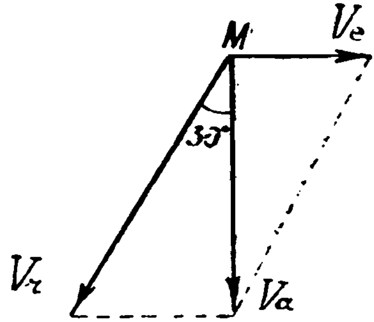
Լ ու ծ ու մ: Վագոնի շարժումը գետնի նկատմամբ թող լինի անձրևի կաթիլների համար փոխադրական շարժում, կաթիլների շարժումը վագոնի նկատմամբ՝ հարաբերական շարժում, իսկ գետնի նկատմամբ՝ բացարձակ շարժում։ Խնդիրը պահանջում է գտնել կաթիլների շարժման բացարձակ արագությունը։ Դրա համար բավական է գտնել փոխադրական արագության մեծությունն ու ուղղությունը և բացարձակ ու հարաբերական արագությունների կազմած անկյունը (գծ. 91)։

Անձրևի կաթիլների փոխադրական $\bar{v}_e$ *արագությունը ունի հորիզոնական ուղղություն և թվային արժեքով հավասար է* 36 կմ/ժամ = 10 մ/վրկ: *Անձրևի կաթիլների բացարձակ արագությունն ուղղված է ուղղաձիգ դեպի ներքև և հարաբերական արագության հետ կազմում է 30°-ի անկյուն։*

Արագությունների զուգահեռագծից կարող ենք գրել, որ

$$v_a = v_e \operatorname{tg} 60^\circ = 10 \cdot \sqrt{3} = 17{,}3 \text{ մ/վրկ}:$$

Պատ. $v_a = 17{,}3$ մ/վրկ:



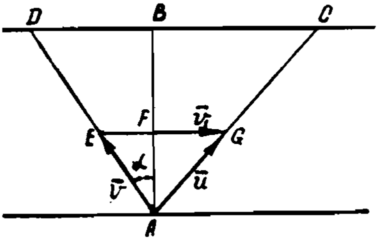
Գծ. 91

2. Կետի արագությունների գումարման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը: *Այս պարագրաֆի խնդիրները լուծելիս կարելի է հիմնականում վարվել նույն կերպ, ինչ որ նախորդ պարագրաֆում (§ 6), որտեղ դիտարկվում էր կետի բարդ շարժման հավասարումների ու հետագծերի վերաբերյալ խնդիրների լուծումները։*

Խնդիրները լուծելիս նախ պետք է ընտրել շարժական և անշարժ կոորդինատական սիստեմները, առանձնացնել կետի փոխադրական, հարաբերական և բացարձակ շարժումները։ Հարաբերական շարժումը որոշելու համար կարելի է մտքով կանգնեցնել փոխադրական շարժումը, իսկ փոխադրական շարժումը որոշելու համար՝ մտքով կանգնեցնել հարաբերական շարժումը։ Այնուհետև պետք է պարզել, թե տվյալ դեպքում կետի փոխադրական, հարաբերական և բացարձակ արագություններից ո՞րն է մեզ տված և ո՞րը պահանջվում է որոշել։ Խնդրի պայմանների համաձայն գրել տված արագությունների մեծություններն ու ուղղությունները բնորոշող արտահայտությունները։ Անհայտ արագությունը կամ արագությունների ուղղությունները որոշելու համար կիրառել արագությունների գումարման վերաբերյալ խնդրի լուծման երկրաչափական կամ անալիտիկ եղանակներից որևէ մեկը, նայած խնդրի բնույթին։

3. Խնդիրներ

Խնդիր 55: *Լողորդը ցանկանում է գետի մի ափից տեղափոխվել մյուս ափը։ Ի՞նչ α անկյան տակ պետք է լողա նա,* որպեսզի կարողանա ամենակարճ ժամանակամիջոցում մի ափից տեղափոխվել մյուս ափը, եթե գետի արագությունն է v_1, իսկ լողորդի արագությունը կանգնած ջրում՝ v։



Գծ. 92

Լուծում: Դիցուք գետի ամենակարճ հեռավորությունն է AB, լողորդը շարժվում է AD ուղղությամբ, իսկ C-ն մյուս ափի այն կետն է, որտեղ կանգ է առնում լողորդը (գծ. 92)։ Կառուցենք արագությունների AFG եռանկյունին։ Այստեղ $\bar{u}$-ն լողորդի բացարձակ արագությունն է, իսկ α-ն՝ AD և AB ուղիղներով կազմված անկյունը։ ABC և AFG եռանկյունների նմանությունից ստանում ենք

$$\frac{AC}{AG}=\frac{AB}{AF}, \tag{1}$$

Բայց $AG=u$, իսկ $AF=v\cos\alpha$։ Տեղադրելով այս արժեքները (1)-ի մեջ այն կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{AC}{u}=\frac{AB}{v\cos\alpha},$$

Այստեղ $\frac{AC}{u}$ մեծությունը այն t ժամանակամիջոցն է, որի ընթացքում լողորդը հասնում է գետի մյուս ափը։ Ուստի

$$t=\frac{AB}{v\cos\alpha},$$

Այս t ժամանակամիջոցը կլինի ամենափոքրը, երբ $\alpha=0$։ Սա նշանակում է, որ պետք է լողալ գետի ուղղահայաց ուղղությամբ։

Պատ. $\alpha=0$։

Խնդիր 56: $\omega=2t$ 1/վրկ անկյունային արագությամբ O_1O_2 առանցքի շուրջը պտտվող սկավառակի շառավիղով նրա կենտրոնից դեպի շրջանակը շարժվում է M կետը $OM=4t^2$ օրենքով։ OM շառավիղը O_1O_2 առանցքի հետ կազմում է 60°-ի անկյուն։

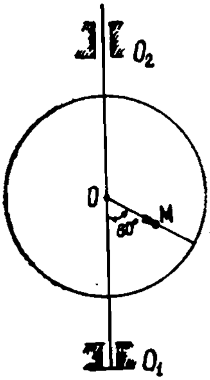
Որոշել t=1 վրկ *մոմենտում* M *կետի բացարձակ արագության մեծությունը (գծ. 93)։*

Լուծում: M *կետի բացարձակ արագությունը որոշվում է*

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$$

բանաձևով։ $\bar{v}_r$ *հարաբերական արագությունը ուղղված է սկավառակի շառավղով* O-*ից* M։ t=1 վրկ *պահին հարաբերական արագության մեծության համար կունենանք՝*

$$v_r = \frac{dOM}{dt}\Big|_{t=1\,\text{վրկ}} = 8t\Big|_{t=1\,\text{վրկ}} = 8\ \text{սմ/վրկ}:$$



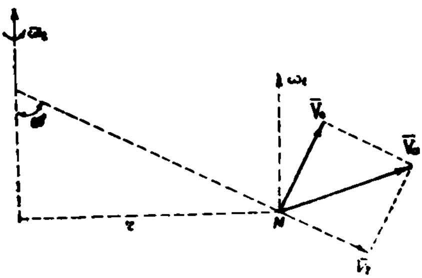
Գծ. 93

$\bar{v}_e$ *փոխադրական արագությունը էյլերի*

$$\bar{v}_e = \bar{\omega}_1 \times \overline{OM}$$

բանաձևի համաձայն ուղղահայաց է սկավառակի հարթությանը և $\bar{v}_r$ *հարաբերական արագությանը։ Փոխադրական արագության մեծությունը* t=1 վրկ *պահին հավասար կլինի՝*

$$v_e = \omega_e \,.\, OM\sin 60^\circ = 2\,.\,4\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ \text{սմ/վրկ}:$$



Գծ. 94

M *կետի* $\bar{v}_a$ *բացարձակ արագությունը ուղղված է* $\bar{v}_r$ *և* $\bar{v}_e$ *վեկտորների վրա կառուցված ուղղանկյան անկյունագծով (գծ. 94) և մեծությամբ հավասար է*

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{64+48} = \sqrt{112} \approx 10{,}6\ \text{սմ/վրկ}:$$

Պատ. $v_a = 10{,}6$ սմ/վրկ:

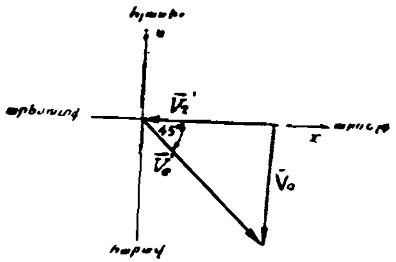
Խնդիր 57 *(427)։ Երբ նավը ընթանում է* a *հանգույց արագությամբ դեպի հարավ-արևելք, կայմի վրա ֆլյուգերը ցույց է տալիս, որ քամին ունի արևելյան ուղղություն։ Նավը փոք-*

րացնում է իր արագությունը մինչև $\frac{a}{2}$ հանգույց, Ֆլյուգերը ցույց է տալիս քամու ուղղությունը՝ հյուսիս-արևելք։ Որոշել՝ 1) քամու ուղղությունը և 2) քամու արագությունը։

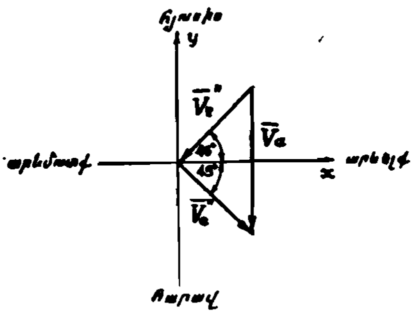
Դիտողություն. ընթացքի ուղղության անվանումը նշանակում է ուր է գնում նավը։ Քամու անվանում՝ որտեղից է փչում այն։

Լուծում: Ենթադրենք քամու շարժումը ջրի նկատմամբ բացարձակ է, իսկ նավի նկատմամբ՝ հարաբերական։ Նավի շարժումը ջրի նկատմամբ կլինի քամու համար փոխադրական շարժում։ Խնդրում պահանջվում է որոշել քամու բացարձակ արագության մեծությունը և ուղղությունը։ Բայց դա որոշելու համար անհրաժեշտ է գտնել նաև քամու փոխադրական արագությունը, այսինքն՝ նավի արագությունը։

Այսպիսով, այստեղ մենք ունենք երեք անհայտ մեծություններ։ Քանի որ արագությունների զուգահեռակողմից հնարավոր է որոշել ամենաշատը երկու անհայտ մեծություններ, ուստի նպատակահարմար է դիտարկել երկու դեպք։



Գծ. 95



Գծ. 96

Այստեղ օգտակար է խնդիրը լուծել անալիտիկ եղանակով, այսինքն՝ պրոյեկցիաների միջոցով։ Տանենք xoy կոորդինատական սիստեմը, x-երի առանցքն ուղղենք արևմուտքից դեպի արևելք, իսկ y-ների առանցքը՝ հարավից դեպի հյուսիս (գծ. 95, 96)։

Փոխադրական և հարաբերական արագությունների ուղղությունները ներկայացնենք կոորդինատական xoy սիստեմի առանցքների $(\hat{i}, \hat{j})$ միավոր վեկտորների միջոցով։

Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ նավն ընթանում է a *հանգույց արագությամբ դեպի հարավ-արևելք, իսկ քամին ուղղված է դեպի արևելք։ Այդ դեպքում, եթե քամու հարաբերական և փոխադրական արագությունները համապատասխանաբար նշանակենք* $\bar{v}_r'$ *և* $\bar{v}_e'$ *(գծ. 95), ապա կունենանք՝*

$$\bar{v}_r' = -v_r'\hat{i},$$

$$\bar{v}_e' = \frac{a}{\sqrt{2}}\,\hat{i} - \frac{a}{\sqrt{2}}\,\hat{j}։ \tag{1}$$

Այնուհետև դիտարկենք երկրորդ դեպքը, երբ նավն ընթանում է $\frac{a}{2}$ *հանգույց արագությամբ դարձյալ դեպի հարավ-արևելք, իսկ քամին ուղղված է դեպի հյուսիս-արևելք։ Այս դեպքում, եթե քամու հարաբերական ու փոխադրական արագությունները նշանակենք համապատասխանաբար* $\bar{v}_r''$ *և* $\bar{v}_e''$ *(գծ. 96), ապա կունենանք՝*

$$\bar{v}_r'' = -\frac{v_r''}{\sqrt{2}}\,\hat{i} - \frac{v_r''}{\sqrt{2}}\,\hat{j},$$

$$\bar{v}_e'' = \frac{a}{2\sqrt{2}}\,\hat{i} - \frac{a}{2\sqrt{2}}\,\hat{j}։ \tag{2}$$

Արագությունների գումարման (I) *բանաձևի հիման վրա կարելի է գրել (գծ. 95, 96)՝*

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e' + \bar{v}_r', \quad \bar{v}_a = \bar{v}_e'' + \bar{v}_r''։ \tag{3}$$

Տեղադրենք $\bar{v}_e'$, $\bar{v}_r'$, $\bar{v}_e''$ *և* $\bar{v}_r''$*-ի արժեքները (1) և (2)-ից (3)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$\bar{v}_a = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - v_r'\right)\hat{i} - \frac{a}{\sqrt{2}}\,\hat{j},$$

$$\bar{v}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{2} - v_r''\right)\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{2} + v_r''\right)\hat{j}։ \tag{4}$$

Պրոյեկտելով (4) վեկտորական հավասարությունները կոորդինատական x *և* y *առանցքների վրա, կունենանք՝*

$$v_{ax} = \frac{a}{\sqrt{2}} - v_r', \quad v_{ay} = -\frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$v_{ax} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{2} - v_r''\right), \quad v_{ay} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{2} + v_r''\right)։ \tag{5}$$

(5) հավասարումներից կարելի է ստանալ՝

$$\frac{a}{\sqrt{2}}-v_r'=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{2}-v_r''\right),$$

$$-\frac{a}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{2}+v_r''\right)\text{։} \tag{6}$$

Լուծելով (6)հավասարումների սիստեմը, կստանանք՝

$$v_r'=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad v_r''=\frac{a}{2}\text{։} \tag{7}$$

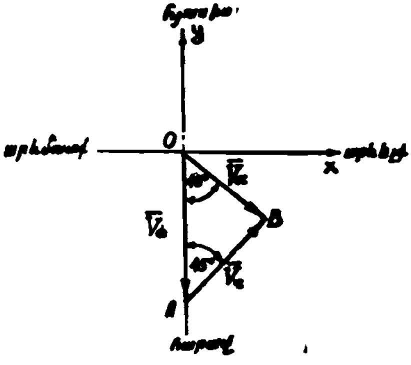
Տեղադրենք v_r' *և* v_r''*-ի արժեքները (7)-ից (5)-ի մեջ, կունենանք՝*

$$v_{ax}=0,\quad v_{ay}=-\frac{a}{\sqrt{2}}\text{։}$$

Սա նշանակում է, որ քամին փչում է հյուսիսից դեպի հարավ և նրա բացարձակ արագությունը հավասար է $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ *հանգույցի։*

Պատ. *1) հյուսիսից, 2)* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ *հանգույց։*

Խնդիր 58 *(432)։ Նավը լողում է դեպի հարավ* $30\sqrt{2}$ կմ/ժամ *արագությամբ։ Երկրորդ նավը ընթանում է դեպի հարավ-արևելք* 30 կմ/ժամ *արագությամբ։ Գտնել երկրորդ նավի արագության ուղղությունը և մեծությունը, որը որոշվում է առաջին նավի տախտակամածի վրա գտնվող դիտողի կողմից։*



Գծ. 97

Լուծում։ *Տանենք* xOy *անշարժ կոորդինատական սիստեմը, ամրացված երկրի մակերևույթին։* Ox *առանցքը ուղղենք դեպի հարավ, իսկ* Oy *առանցքը՝ դեպի արևելք (գծ. 97)։ Շարժական կոորդինատական սիստեմն ամրացնենք առաջին նավին, քանի որ խնդիրը պահանջում է գտնել նավի արագությունը առաջին նավի նկատմամբ։ Այս-*

տեղ երկրորդ նավի շարժումը ջրի նկատմամբ կլինի նրա բացարձակ շարժումը։ Խնդրի պայմանի համաձայն երկրորդ նավի բացարձակ արագությունը հավասար է 30 կմ/ժամ և ուղղված է դեպի հարավ-արևելք։ Երկրորդ նավի հարաբերական շարժումը կլինի նրա շարժումը առաջին նավի նկատմամբ, իսկ առաջին նավի շարժումը ջրի նկատմամբ կլինի երկրորդ նավի համար փոխադրական շարժում։ Տված է, որ փոխադրական արագությունը հավասար է $30\sqrt{2}$ կմ/ժամ-ի և ուղղված է դեպի հարավ։

Եթե երկրորդ նավի բացարձակ արագության պրոյեկցիաները անշարժ x և y առանցքների վրա նշանակենք v_{ax} և v_{ay}, ապա կունենանք՝

$$v_{ax}=30\cos 45^\circ=15\sqrt{2},\ v_{ay}=30\sin 45^\circ=15\sqrt{2}\text{։} \qquad (1)$$

Երկրորդ նավի փոխադրական արագության պրոյեկցիաները x և y առանցքների վրա կլինեն՝

$$v_{ex}=30\sqrt{2},\quad v_{ey}=0\text{։} \qquad (2)$$

Տեղադրելով երկրորդ նավի բացարձակ և փոխադրական արագության արտահայտությունները (1) և (2)-ից

$$v_{ax}=v_{rx}+v_{ex},$$

$$v_{ay}=v_{ry}+v_{ey},$$

բանաձևերի մեջ և լուծելով ստացված հավասարումները v_{rx} և v_{ry}-ի նկատմամբ, կստանանք՝

$$v_{rx}=15\sqrt{2}-30\sqrt{2}=-15\sqrt{2},$$

$$v_{ry}=15\sqrt{2}\text{։}$$

Այստեղից կարելի է ստանալ հարաբերական արագության մեծությունը և ուղղությունը.

$$v_r=\sqrt{v_{rx}^2+v_{ry}^2}=\sqrt{900}=30 \text{ կմ/ժամ},$$

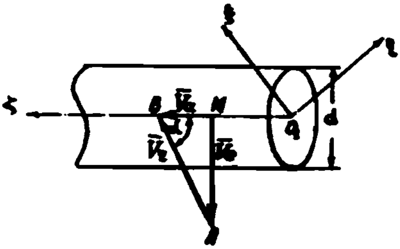
$$\cos(\widehat{\bar{v}_r,\bar{x}})=\frac{v_{rx}}{v}=\frac{-15\sqrt{2}}{30}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos(\widehat{\bar{v}_r,\bar{y}})=\frac{v_{ry}}{v_r}=\frac{15\sqrt{2}}{30}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

Հետևաբար, երկրորդ նավի հարաբերական արագությունը կազմում է oy *առանցքի դրական ուղղության և* ox *առանցքի բացասական ուղղության հետ 45°-ի անկյուններ, այսինքն՝ ուղղված է դեպի հյուսիս-արևելք։*

Պատ. $v_r=30$ կմ/ժամ *և ուղղված է դեպի հյուսիս-արևելք։*

Խնդիր 59 *(437)։ Շրջատաշ հաստոցի վրա տաշվում է* $d=80$ մմ *տրամագծով գլանը։ Իլը կատարում է* $\omega=30$ պտ/րոպ։ *Երկայնական մատուցման արագությունը* $v=0{,}2$ մմ/վրկ։ *Որոշել մշակվող իլի նկատմամբ կտրիչի հարաբերական արագությունը։*



Գծ. 98

Լուծում: *Դիցուք* $O_1\xi\eta\zeta$*-ն շարժական կոորդինատական սիստեմ է, որն ամրացված է տաշվող գլանին (գծ. 98)։ Այս* $O_1\xi\eta\zeta$ *սիստեմի շարժումը գլանի հետ միասին կլինեն կտրիչի փոխադրական շարժումը։ Կտրիչի շարժումը* $O_1\xi\eta\zeta$ *շարժական սիստեմի նկատմամբ՝ կտրիչի հարաբերական շարժումը, իսկ շարժումը հաստոցի նկատմամբ՝ բացարձակ շարժումը։ Խնդիրը պահանջում է գտնել կտրիչի հարաբերական արագությունը։*

Խնդրի պայմաններից հետևում է, որ $\bar{v}_a$ *բացարձակ արագությունը ուղղված է* $O_1\zeta$ *առանցքով (գծ. 98) և մեծությամբ հավասար է* 0,2 մմ/վրկ։ *Խնդրում տված է, որ* d *տրամագիծ ունեցող գլանը* ω *անկյունային արագությամբ պտտվում է* $O_1\xi$ *առանցքի շուրջը, հետևաբար, գլանին պատկանող* M *կետի (գծ. 98) արագությունը ուղղված կլինի գլանի այդ կետով անցնող ուղղորդ շրջանագծի շոշափողով, իսկ մեծությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝*

$$v_e=\omega\cdot\frac{d}{2}=\frac{2\pi\cdot30\cdot80}{60\cdot2}=40\,\pi \text{ մմ/վրկ}:$$

Կտրիչի M *ծայրակետի* $\bar{v}_r$ *հարաբերական արագությունը,* (I) *բանաձևի համաձայն, կորոշվի հետևյալ վեկտորական հավասարումով՝*

$$\bar{v}_r=\bar{v}_a-\bar{v}_e,$$

Գծագրից երևում է, որ $\bar{v}_r$ *հարաբերական արագության մեծությունը կարելի է որոշել* AMB *ուղղանկյուն եռանկյունուց։*

Այս եռանկյունին կլինի ուղղանկյուն, քանի որ $\bar{v}_a$*-ն ուղղված է* $O_1\xi$ *առանցքով, իսկ* $\bar{v}_e$*-ն գլանի* M *կետով անցնող ուղղորդ շրջանագծի շոշափողով։*

ΔAMB*-ից կարելի է գրել, որ*

$$v_r=\sqrt{v_a^2+v_e^2}=\sqrt{(0,2)^2+(40\pi)^2}\approx 125,7 \text{ մմ/վրկ},$$

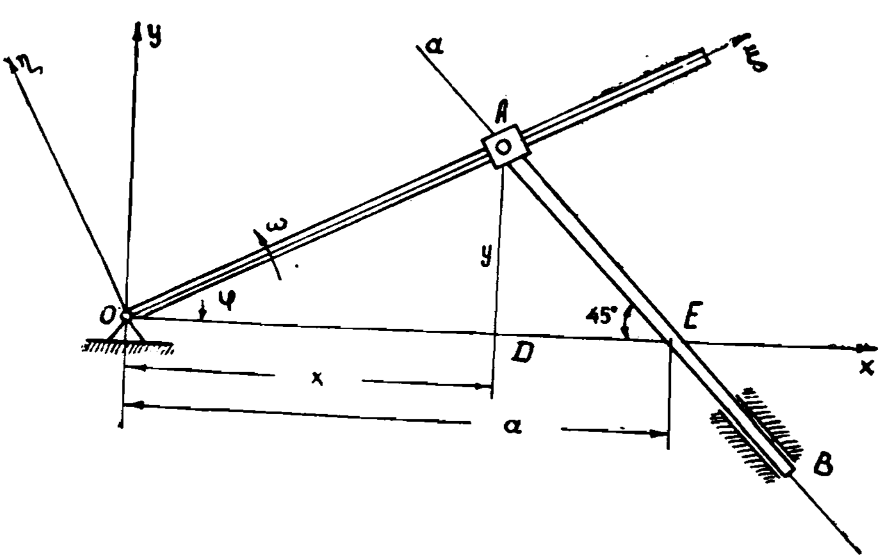
$$tg\alpha=\frac{v_e}{v_a}=\frac{40\pi}{0,2}=200\pi\approx 628.$$

Պատ. $v_r=125,7$ մմ/վրկ, $tg\alpha=628$, *որտեղ* α*-ն* $\bar{v}_r$*-ի և իլի առանցքի միջև կազմված անկյունն է։*

Խնդիր 60: OC *մեղեխը պտտվում է գծագրի հարթության մեջ* O *կետի շուրջը*

$$\varphi=\frac{\pi}{4}\sin 2\pi t$$

օրենքով, որտեղ φ*-ն չափվում է ռադիաններով, իսկ* t*-ն՝ վայրկյաններով։* A *սողնակը, շարժվելով* OC *մեղեխի երկարությամբ, շարժման մեջ է դնում* AB *ձողին։ Վերջինս միացած է* A *սողնակին հոդակապով և շարժվում է թեք ուղղորդներով, կազմելով հորիզոնի հետ 45°-ի անկյուն։ Որոշել սողնակի բացարձակ և հարաբերական շարժման հավասարումները, ինչպես նաև նրա բացարձակ և հարաբերական արագությունները* $t=1,5$ վրկ *պահին։ Տված է* OE=a=50 սմ *(գծ. 99)։*



Գծ. 99

Լուծում: *Տանենք* oxy *անշարժ և* $o\xi\eta$ *շարժական կոորդինատական սիստեմները գծագրում ցույց տրված ձևով։ Սողնակը ընդունենք որպես կետ։* A *կետի շարժումը* aB *ուղղով կլինի* A *կետի բացարձակ շարժումը, իսկ այդ կետի շարժումը* OC *ուղղով՝* A *կետի հարաբերական շարժումը։* $o\xi\eta$ *շարժական սիստեմի պտտումը* O *կենտրոնի շուրջը*

$$\varphi=\frac{\pi}{4}\sin 2\pi t \qquad (1)$$

օրենքով կլինի փոխադրական շարժում։

A *կետի կոորդինատները անշարժ* oxy *սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* (x,y)*։ Գծագրից կունենանք՝*

$$x=OD=OA\cos\varphi=\xi\cos\varphi,$$

$$y=AD=OA\sin\varphi=\xi\sin\varphi, \qquad (2)$$

որտեղ ξ*-ն* A *կետի աբցիսն է շարժական* $o\xi\eta$ *սիստեմում։*

Եռանկյունի ADE*-ից (գծ. 99) ունենք՝*

$$y=a-x$$

կամ

$$x+y=a \qquad (3)$$

(2) սիստեմի հավասարումները գումարելով, կստանանք

$$x+y=\xi(\sin\varphi+\cos\varphi) \qquad (4)$$

Հավասարեցնելով (3) և (4) հավասարումների աջ մասերը, կունենանք

$$\xi(\sin\varphi+\cos\varphi)=a,$$

որտեղից

$$\xi=OA=\frac{a}{\sin\varphi+\cos\varphi} \qquad (5)$$

Տեղադրելով ξ*-ի արժեքը (5)-ից (2)-ի մեջ, կստանանք* A *կետի բացարձակ շարժման հավասարումները հետևյալ տեսքով՝*

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi},$$

$$y=\frac{a\sin\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi}, \qquad (6)$$

որտեղ φ*-ն որոշվում է (1) հավասարությունից։*

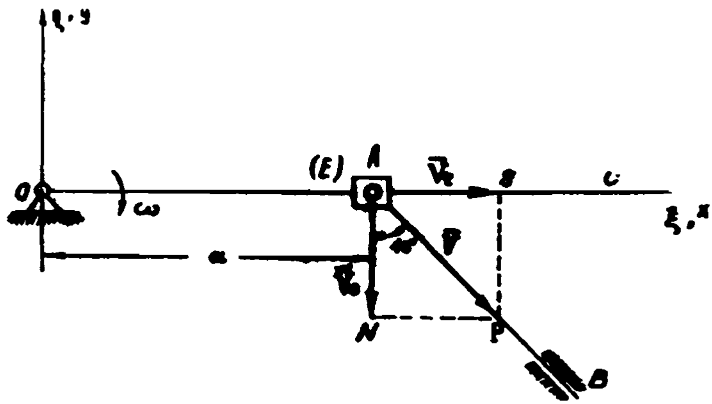
Դիֆերենցելով (1) արտահայտությունը ըստ t *ժամանակի, կստանանք* CD *ձողի անկյունային արագությունը՝*

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\pi^2}{2}\cos 2\pi t, \qquad (7)$$

t=1,5 վրկ *պահին (1), (7) և (5) հավասարումներից կստանանք՝*

$$\varphi=0,\ \omega=-\frac{\pi^2}{2},\ \xi=a=50,$$

ω-ի մինուս նշանը ցույց է տալիս, որ տվյալ մոմենտում OC *մեղեխը պտտվում է ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ (գծ. 100)։*



Գծ. 100

Այժմ անցնենք հարաբերական և բացարձակ արագությունները գտնելուն։

A *կետի* $\bar{v}_e$ *փոխադրական արագությունն ուղղահայաց է* OC-*ին և ուղղված է փոխադրական պտտման կողմը։* t=1,5 վրկ *պահին* $\bar{v}_e$ *վեկտորի մոդուլը հավասար կլինի՝*

$$v_e=|\omega|\cdot OA=|\omega|\cdot a=25\pi^2 \text{ սմ/վրկ։}$$

A *կետի* $\bar{v}_a$ *բացարձակ և* $\bar{v}_r$ *հարաբերական արագությունները ուղղված են համապատասխանաբար* AB *և* AC *ուղիղներով (գծ. 100)։*

Այսպիսով, մեզ հայտնի է $\bar{v}_e$ վեկտորի մեծությունը և ուղղությունը, ինչպես նաև $\bar{v}_a$ և $\bar{v}_r$ վեկտորների ուղղությունները։ Հետևաբար

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$$

բանաձևի հիման վրա կարող ենք կառուցել ANPS զուգահեռագիծը։ Դրանից կորոշենք $\bar{v}_a$ և $\bar{v}_r$ արագությունների մեծությունները հետևյալ տեսքով՝

$$v_a = \frac{v_e}{\cos 45^\circ} = 25\sqrt{2}\,\pi^2 \text{ սմ/վրկ},$$

$$v_r = v_e = 25\,\pi^2 \text{ սմ/վրկ}:$$

Պատ. *(1) բացարձակ շարժման հավասարումները՝*

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi},$$

$$y = \frac{a\sin\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi},$$

(2) հարաբերական շարժման հավասարումները՝

$$\xi = \frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}, \quad \eta = 0,$$

3) $v_a = 25\sqrt{2}\,\pi^2$ սմ/վրկ, $v_r = 25\,\pi^2$ սմ/վրկ:

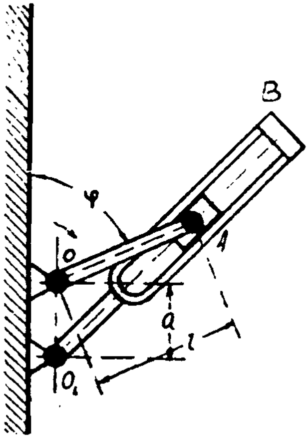
Խնդիր 61 *(441)։ Մեխանիզմը բաղկացած է* O *և* O_1 *երկու զուգահեռ լիսեռներից,* OA *մեղեխից և* O_1B *կուլիսից։* OA *մեղեխի* A *ծայրը սահում է* O_1B *կուլիսի փորվածքում։* OO_1 *լիսեռների առանցքների միջև եղած հեռավորությունը հավասար է* a*։* OA *մեղեխի երկարությունը հավասար է* l*, ընդ որում* $l>a$*։* O *լիսեռը պտտվում է* ω *հաստատուն անկյունային արագությամբ (գծ. 101)։ Գտնել՝ 1)* O_1 *լիսեռի* ω_1 *անկյունային արագությունը և* O_1B *կուլիսի նկատմամբ* A *կետի հարաբերական արագությունը արտահայտված* $O_1A = s$ *փոփոխական մեծության միջոցով. 2) այդ մեծությունների ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները. 3) մեղեխի այն դիրքը, երբ* $\omega_1 = \omega$*։*

Լուծում: *Կուլիսի պտտական շարժումն ընդունենք որպես փոխադրական շարժում։ Այդ դեպքում* A *կետի շարժումը կուլիսի* փորվածքում կլինի հարաբերական, իսկ OA մեղեխի պտտումը՝ բացարձակ։

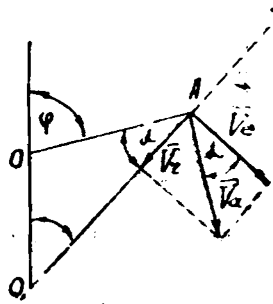
A կետի բացարձակ արագության $\bar{v}_a$ վեկտորը ուղղահայաց է մեղեխին և թվապես հավասար է $v_a = \omega l$, իսկ նույն A կետի փոխադրական արագության $\bar{v}_e$ վեկտորը ուղղահայաց է O_1A կուլիսի առանցքին և նրա թվային արժեքը որոշվում է

$$v_e = \omega_1 \cdot O_1A = \omega_1 \cdot s \qquad (1)$$

բանաձևով։ Եթե նշանակենք $\angle OAO_1 = \alpha$, ապա դժվար չէ նկատել, որ $\bar{v}_a$ և $\bar{v}_e$ վեկտորներով կազմված անկյունը նույնպես կլինի α, քանի որ $\bar{v}_a \perp OA$, $\bar{v}_e \perp O_1A$։ Այդ դեպքում կունենանք (գծ. 102)



Գծ. 101



Գծ. 102

$$v_e = v_a \cos\alpha = \omega l \cos\alpha, \qquad (2)$$

Համեմատելով (1) և (2)-ը, կստանանք կուլիսի ω_1 անկյունային արագության համար հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\omega_1 = \frac{\omega l \cos\alpha}{s}, \qquad (3)$$

Այժմ գտնենք $\cos\alpha$-ի արժեքը։ Դրա համար դիտարկենք եռանկյունի OAO_1-ը։ Կոսինուսների թեորեմների համաձայն կարող ենք գրել՝

$$a^2 = l^2 + s^2 - 2ls\cos\alpha,$$

որտեղից հետևում է

$$\cos\alpha = \frac{l^2 + s^2 - a^2}{2ls}, \qquad (4)$$

Տեղադրելով այս արժեքը (3)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\omega_1 = \frac{\omega}{2}\left(1+\frac{l^2-a^2}{s^2}\right), \qquad (5)$$

Հարաբերական արագության $\bar{v}_r$ *վեկտորի ազդման գիծը համընկնում է կուլիսի փորվածքի հետ, այսինքն՝* O_1A*-ի հետ։ Այդ դեպքում* v_r *հարաբերական արագության համար կունենանք՝*

$$v_r = v_a \sin\alpha = \omega l \sin\alpha, \qquad (6^*)$$

կամ

$$v_r = \omega l\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \qquad (7)$$

Տեղադրելով $\cos\alpha$*-ի արժեքը (4)-ից (7)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$v_r = \frac{\omega}{2s}\sqrt{4l^2s^2-(l^2+s^2-a^2)^2}, \qquad (8)$$

Նույնական ձևափոխություններից հետո (8)-ին կարելի է տալ հետևյալ տեսքը՝

$$v_r = \frac{\omega}{2s}\sqrt{(l+s+a)(l+s-a)(a+l-s)(a+s-l)}.$$

Քանի որ ω, l *և* a *հաստատուն են, ապա (5)-ից հետևում է, որ* ω_1*-ը կընդունի իր ամենամեծ արժեքը, երբ* s*-ը ստանում է իր ամենափոքր արժեքը։ Իսկ* ω_1*-ը կստանա իր ամենափոքր արժեքը, երբ* s*-ը ստանում է իր ամենամեծ արժեքը։ Գծագրից երևում է, որ*

$$s_{min} = l-a, \quad s_{max} = l+a.$$

Հետևաբար

$$\omega_{1max} = \frac{\omega}{2}\left[1+\frac{l^2-a^2}{(l-a)^2}\right] = \frac{\omega l}{l-a},$$

$$\omega_{1min} = \frac{\omega}{2}\left[1+\frac{l^2-a^2}{(l+a)^2}\right] = \frac{\omega l}{l+a},$$

Հարաբերական արագության ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները գտնելու համար (6) բանաձևի մեջ $\sin\alpha$*-ն արտահայտենք t-ի միջոցով։* ΔOO_1A*-ից ունենք՝*

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\varphi}{s}, \qquad s=\sqrt{a^2+l^2+2al\cos\varphi}.$$

Նկատի ունենալով, որ $\varphi=\omega t$, այս երկու հավասարումներից կորոշենք $\sin\alpha$-ի արտահայտությունը։ Կստանանք՝

$$\sin\alpha=\frac{a\sin\omega t}{\sqrt{a^2+l^2+2al\cos\omega t}},$$

Տեղադրենք $\sin\alpha$-ի արժեքը (6) բանաձևի մեջ, կունենանք՝

$$v_r=\frac{a\omega l\sin\omega t}{\sqrt{a^2+l^2+2al\cos\omega t}},\qquad (9)$$

Մնում է ածանցել այս (9) արտահայտությունը ըստ t-ի և ստացածը հավասարեցնել զրոյի։ Լուծելով ստացված հավասարումը, կստանանք

$$t=\frac{1}{\omega}\left[\pm\arccos\left(-\frac{a}{l}\right)+2\pi k\right]\ (k=0,\ \pm1,\ldots)\qquad (10)$$

իրական արմատները։

Տեղադրելով t-ի այս արժեքը v_r-ի (9) արտահայտության մեջ, կորոշենք նրա ամենամեծ արժեքը, որը կլինի՝

$$v_{r,\,max}=a\omega։$$

Քանի որ $v_r>0$, ապա (9)-ից հետևում է, որ v_r-ի ամենափոքր արժեքը կստացվի, եթե $\sin\omega t$-ն լինի զրո։ Հետևաբար՝

$$v_{r,\,min}=0։$$

Այժմ գտնենք մեղեխի այն դիրքը, երբ $\omega_1=\omega$։ Դրա համար (5) բանաձևի մեջ ընդունենք $\omega_1=\omega$։ Այդ դեպքում կստանանք՝

$$\omega_1=\frac{\omega}{2}\left(1+\frac{l^2-a^2}{s^2}\right),$$

Այստեղից ստացվում է, որ պետք է տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝

$$l^2-a^2=s^2,$$

Իսկ սա ցույց է տալիս, որ եռանկյունի OAO_1-ը պետք է լինի ուղղանկյուն, այսինքն՝ $O_1A\perp O_1O$ (գծ. 102)։

Պատ. *1)* $\omega_1=\dfrac{\omega}{2}\left(1+\dfrac{l^2-a^2}{s^2}\right),$

$$v_r=\frac{\omega}{2s}\sqrt{(l+s+a)(l+s-a)(a+l-s)(a+s-l)},$$

$$2)\ \omega_{1max}=\omega\frac{l}{l-a},\quad \omega_{1min}=\omega\frac{l}{l+a},$$

$$v_{r,\,max}=a\omega,\quad v_{r,\,min}=0,$$

3) եթե $\omega_1=\omega$, *ապա* $O_1B\perp O_1O$։

Խնդիր 62 *(443)։ Որոշել մեղեխա-կուլիսային մեխանիզմի պտտվող կուլիսի անկյունային արագությունը մեղեխի չորս՝ երկու ուղղաձիգ և երկու հորիզոնական դիրքերի դեպքում, եթե* a=60 սմ, l=80 սմ *և մեղեխի անկյունային արագությունը համապատասխանում է* n=30 պտ/րոպ *(գծ. 101)։*

Ցուցում: *Այս խնդիրը կարելի է լուծել նույն եղանակով, ինչ որ* 61 *(441) խնդիրը։ Միայն տարբերությունը կայանում է նրանում, որ* S*-ի փոխարեն այստեղ պետք է մուծել* φ *անկյունը։*

Կուլիսի անկյունային արագության համար 61*(441) խնդրի լուծման մեջ ստացված է հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$\omega_1=\frac{\omega}{2}\left(1+\frac{l^2-a^2}{s^2}\right), \qquad (1)$$

Տվյալ խնդրում ունենք՝

$$\omega=\frac{30\ .\ 2\pi}{60}=\pi\ 1/\text{վրկ},\ a=60\ \text{սմ},\ l=80\ \text{սմ}:$$

Բացի դրանից, եռանկյունի O_1OA*-ից կարող ենք գրել՝*

$$s=O_1A=\sqrt{l^2+a^2+2al\cos\varphi},$$

Տեղադրելով ω, l, s *և* a*-ի արժեքները (1)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$\omega_1=4\pi\ .\ \frac{4+3\cos\varphi}{25+24\cos\varphi},$$

Պատ. $\omega_I=\frac{4}{7}\pi\ 1/\text{վրկ},\quad \omega_{II}=\omega_{IV}=0{,}64\,\pi\ 1/\text{վրկ},$

$\omega_{III}=4\,\pi\ 1/\text{վրկ}$:

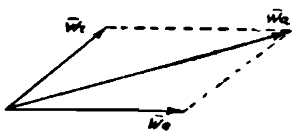
§ 8. ԿԵՏԻ ԱՐԱԳԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ ՀԱՄԸՆԹԱՑ ՓՈԽԱԴՐԱԿԱՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Կետի բարդ շարժման դեպքում, երբ փոխադրական շարժումը համընթաց է, կետի բացարձակ արագացումը հավասար է նրա փոխադրական ու հարաբերական արագացումների երկրաչափական գումարին (գծ. 103), այսինքն՝*

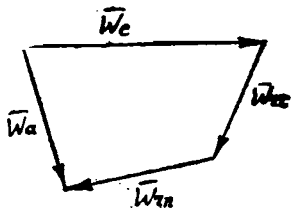
$$\bar{W}_a = \bar{W}_e + \bar{W}_r, \qquad \text{(I)}$$

կամ

$$\bar{W}_a = \bar{W}_e + \bar{W}_{r\tau} + \bar{W}_{rn}, \qquad \text{(II)}$$



Գծ. 103



Գծ. 104

որտեղ $\bar{W}_e$-ն կետի փոխադրական արագացումն է, իսկ $\bar{W}_{r\tau}$, $\bar{W}_{rn}$-ը կետի հարաբերական արագացման տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչները (գծ. 104)։

Եթե հարաբերական շարժումը ուղղագիծ է, ապա համապատասխան նորմալ արագացումը (W_{rn}) հավասար կլինի զրոյի, իսկ եթե հարաբերական շարժումը իրենից ներկայացնում է հավասարաչափ կորագիծ շարժում, ապա զրո է դառնում համապատասխան տանգենցիալ արագացումը ($W_{r\tau}$)։

Այս պարագրաֆի խնդիրները նույնպես կարելի է լուծել երկու եղանակով՝ երկրաչափորեն և անալիտիկ։

Խնդիրները անալիտիկ եղանակով լուծելու դեպքում անհրաժեշտ է նախ ընտրել որևէ անշարժ կոորդինատական սիստեմ և այնուհետև (I) կամ (II) վեկտորական հավասարումները պրոյեկտել այդ սիստեմի առանցքների վրա։ Օրինակ՝ պրոյեկտելով (I) հավասարումը կոորդինատական x, y, z առանցքի վրա, կստանանք՝

$$\begin{aligned} W_{ax} &= W_{ex} + W_{rx}, \\ W_{ay} &= W_{ey} + W_{ry}, \\ W_{az} &= W_{ez} + W_{rz} \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

---

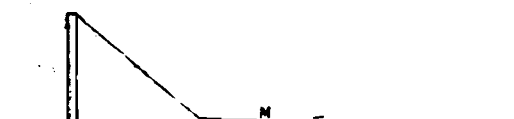
*) *Եթե փոխադրական շարժումը համընթաց է, ապա կորիոլիսի արագացում չի առաջանում (տե՛ս հաջորդ պարագրաֆը)։*

Խնդիրներ լուծելու ժամանակ անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ $\bar{V}_r$ հարաբերական արագությունը և $\bar{W}_r$ հարաբերական արագացումը որոշվում են կետի կինեմատիկայի սովորական բանաձևերով։ Այս դեպքում հաշվառքի շարժական սիստեմը դիտվում է որպես անշարժ։ $\bar{V}_e$ փոխադրական արագությունը և $\bar{W}_e$ փոխադրական արագացումը որոշվում են որպես հաշվառքի շարժական սիստեմի այն կետի արագությունը և արագացումը, որի հետ տվյալ մոմենտում համընկնում է շարժվող կետը։ Քանի որ շարժական սիստեմը շարժվում է որպես բացարձակ պինդ մարմին, ապա $\bar{V}_e$ և $\bar{W}_e$-ի հաշվումը կատարվում է բացարձակ պինդ մարմնի կինեմատիկայի բանաձևերի համաձայն։

Այս պարագրաֆի խնդիրները լուծելիս կարելի է հիմնականում վարվել նույն կերպ, ինչ որ արագությունների գումարման վերաբերյալ խնդիրներ լուծելու ժամանակ։ Այստեղ անհրաժեշտ է հատուկ ուշադրություն դարձնել այն խնդիրների լուծման վրա, որոնցում հարաբերական արագացումն ունի տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչներ։ Այս դեպքում խնդիրների լուծումը բավականաչափ դժվարանում է։

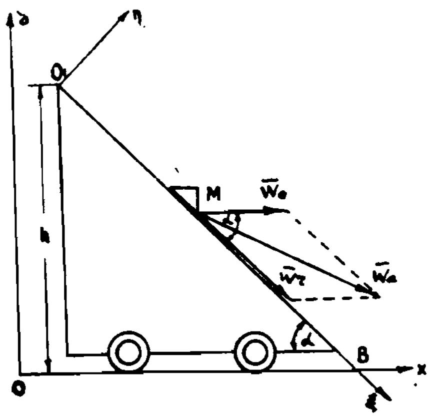
Ստորև բերվում են կետի արագացումների գումարման վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումները, երբ փոխադրական շարժումը իրենից ներկայացնում է համընթաց շարժում։

Խնդիր 63։ Հորիզոնի հետ 45°-ի անկյուն կազմող թեք հարթությունը (գծ. 105) շարժվում է հորիզոնական հարթության նկատմամբ 2 մ/վրկ² համընթաց արագացմամբ։ Այդ թեք հարթության վրայով սահում է M բեռը $\sqrt{2}$ մ/վրկ² հաստատուն արագացումով։ Որոշել M բեռի արագությունը և արագացումը անշարժ սիստեմի նկատմամբ, եթե ըսկըզբնական մոմենտում թեք հարթությունը և M բեռը գտնվել են հանգիստ վիճակում։ Թեք հարթության բարձրությունը՝ h=1 մ։



Գծ. 105

Լուծում։ M բեռի շարժումը անշարժ oxy սիստեմի նկատմամբ կլինի նրա բացարձակ շարժումը (գծ. 106)։ Այս շարժումը կազմված է երկու շարժումներից՝ հարաբերական և փոխադրական։ Բեռի շարժումը շարժվող թեք հարթության (շարժական $O_1\xi\eta$ սիստեմի) նկատմամբ կլինի նրա հարաբերական շարժումը, իսկ թեք հարթության շարժումը անշարժ սիստեմի նկատմամբ՝ փոխադրական շարժումը։



Գծ. 106

M բեռի $\bar{w}_e$ փոխադրական արագացումը հավասար է թեք հարթության շարժման արագացմանը, հետևաբար՝ փոխադրական արագացման մոդուլը հավասար կլինի $w_e = 2$ մ/վրկ², իսկ $\bar{w}_e$ վեկտորը զուգահեռ կլինի OX առանցքին։ Քանի որ M բեռը շարժվում է թեք հարթության նկատմամբ O_1B ուղղով, ապա $\bar{w}_r$ հարաբերական արագացումը ուղղված կլինի այդ ուղղով և թվային արժեքը հավասար կլինի $w_r = \sqrt{2}$ մ/վրկ²։

M բեռի բացարձակ արագացումը որոշվում է արագացումների գումարման զուգահեռակողմի կանոնի համաձայն։ $\bar{w}_a$ բացարձակ արագացման թվային արժեքը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$w_a = \sqrt{w_e^2 + 2w_e w_r \cos\alpha + w_r^2} = \sqrt{4 + 2\cdot 2\cdot \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 2} =$$

$$= \sqrt{10} \text{ մ/վրկ}^2\text{:}$$

Այժմ որոշենք w_a վեկտորի թվային արժեքը պրոյեկցիաների եղանակով։ Դրա համար

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r$$

վեկտորական հավասարումը պրոյեկտենք OXY կոորդինատական սիստեմի առանցքների վրա, կստանանք՝

$$w_{ax} = w_{ex} + w_{rx},$$

$$w_{ay} = w_{ey} + w_{ry},$$

Քանի որ

$$w_{ex} = 2,\ w_{ey} = 0,\ w_{rx} = w_r\cos 45^\circ = 1,\ w_{ry} = -w_r\sin 45^\circ = -1,$$

ապա

$$w_{ax} = 2 + 1 = 3, \quad w_{ay} = -1\text{։}$$

Հետևաբար, բացարձակ արագացման մեծության և ուղղության համար կունենանք՝

$$w_a = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ մ/վրկ}^2:$$

$$\cos(\widehat{w_a, x}) = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\widehat{w_a, y}) = -\frac{1}{\sqrt{10}}:$$

Այժմ գտնենք M *կետի բացարձակ արագության մեծությունը և ուղղությունը: Եթե նկատի ունենանք, որ*

$$w_{ax} = \frac{dv_{ax}}{dt} = 3, \quad w_{ay} = \frac{dv_{ay}}{dt} = -1,$$

և ինտեգրենք այս հավասարումները, ապա կստանանք՝

$$v_{ax} = 3t + c_1, \quad v_{ay} = -t + c_2: \qquad (1)$$

Խնդրի նախնական պայմանների համաձայն, երբ $t=0$, *ունենք* $v_{ax}=0$, $v_{ay}=0$: *Ուստի,* $c_1=c_2=0$: *Այդ դեպքում (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$v_{ax} = 3t, \quad v_{ay} = -t:$$

Այստեղից որոշում ենք M *կետի բացարձակ արագության թվային արժեքը՝*

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = t\sqrt{10} \text{ մ/վրկ}:$$

$\bar{v}_a$ *վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝*

$$\cos(\widehat{\bar{v}_a, \bar{x}}) = \frac{v_{ax}}{v_a} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos(\widehat{\bar{v}_a, \bar{y}}) = \frac{v_{ay}}{v_a} = -\frac{1}{\sqrt{10}}:$$

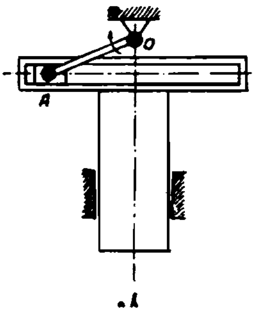
Պատ. $v_a = \sqrt{10} \, . \, t$ մ/վրկ, $\cos(v_a, x) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$,

$\cos(\widehat{\bar{v}_a, \bar{y}}) = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\quad w_a = \sqrt{10}$ մ/վրկ², $\cos(\widehat{\bar{w}_a, \bar{x}}) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$,

$$\cos(\widehat{\bar{v}_a, \bar{y}}) = -\frac{1}{\sqrt{10}}:$$

Խնդիր 64 *(445): Շարժաբեր մուրճի մեղխա-կուլիսային մեխանիզմը բաղկացած է հետադարձ-համընթաց շարժում կատարող ուղղագիծ կուլիսից: Կուլիսը շարժման մեջ է դրվում* A *քա-*

րով, որը միացված է OA=r=40 սմ *երկարություն ունեցող մեղեխի ծայրին։ Մեղեխը պտտվում է մի անկյունային արագությամբ, որը համապատասխանում է* n=120 պտ/րոպ։ t=0 *մոմենտում կուլիսը գրավում է իր ստորին դիրքը։ Գտնել կուլիսի արագացումը (գծ. 107)։*

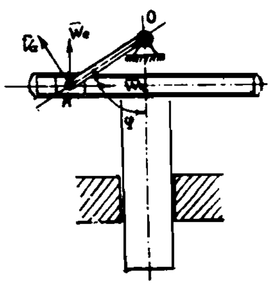


Գծ. 107

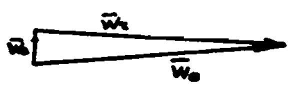
Լուծում: *Նախ առանձնացնենք* A *կետի բացարձակ հարաբերական և փոխադրական շարժումները։* A *կետի բացարձակ շարժումը կլինի նրա պտտումը* O *կետի շուրջը, իսկ հարաբերական շարժումը՝ նրա շարժումը կուլիսի նկատմամբ։ Կուլիսի շարժումը կլինի* A *կետի համար փոխադրական շարժում։ Խնդիրը պահանջում է գտնել կուլիսի արագացումը, այսինքն՝* A *կետի փոխադրական արագացումը։ Կուլիսը կատարում է շարժում միայն ուղղաձիգ ուղղությամբ, դրա համար էլ նրա շարժումը կլինի համընթաց։ Բացարձակ արագացումը կունենա միայն նորմալ բաղադրիչ, քանի որ* ω=const։ *Նրա թվային արժեքը հավասար կլինի՝*

$$w_a = \omega^2 r = \left(\frac{120 \,.\, 2\pi}{60}\right)^2 .\, 40 = 640\ \pi^2 \text{ սմ/վրկ}^2$$

ուղղված կլինի AO=r *շառավղով։*



Գծ. 108



Գծ. 109

Հարաբերական արագացումը ուղղված կլինի կուլիսի փորվածքով, հետևաբար կունենա հորիզոնական ուղղություն՝ ուղղահայաց փոխադրական արագացմանը (գծ. 108)։ $\overline{W}_a$, $\overline{W}_e$ *և* $\overline{W}_r$ *արագացումները կկազմեն վեկտորական ուղղանկյուն եռանկյուն (գծ. 109), որտեղից կարելի է գրել*

$$W_e = W_a \,.\, \cos\varphi \qquad (1)$$

Մնում է որոշել φ անկյունը։ Քանի որ OA-ն պտտվում է O կետի շուրջը

$$\omega=\frac{120\ .\ 2\pi}{60}=4\pi\ \ 1/\text{վրկ}$$

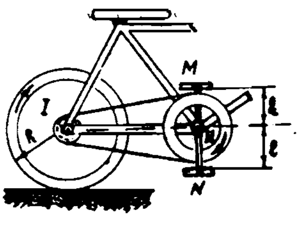
հաստատուն անկյունային արագությամբ և միաժամանակ տված է, որ երբ $t=0$, $\varphi=0$, *ապա ինտեգրելով* $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$ *հավասարումը, կստանանք* $\varphi=4\pi t$։

Տեղադրելով w_a*-ի և* φ*-ի արժեքները (1)-ի մեջ, կստանանք*

$$w_e=640\pi^2\cos4\pi t=6320\cos 4\pi t\ \text{սմ/վրկ}^2:$$

Պատ. $w_e=6320\cos4\pi t$ սմ/վրկ²։

Խնդիր 65 *(448)։ Հեծանվորդը հորիզոնական ուղղագիծ ճանապարհի մի որևէ մասով շարժվում է* $s=0{,}1t^2$ *օրենքով* (s— *մետրերով,* t—*վայրկյաններով)։ Տված է՝* $R=350$ մմ, $l=180$ մմ, *ատամների թվերը՝* $z_1=18$, $z_2=48$։ *Որոշել հեծանիվի ոտնակների* M *և* N *առանցքների բացարձակ արագացումները (ենթադրելով, որ անիվները գլորվում են առանց սահելու)* $t=10$ վրկ-*ում, եթե այդ պահին* MN *մեղեխը ունի ուղղաձիգ դիրք (գծ. 110)։*



Գծ. 110

Լուծում: *Հեծանիվի շրջանակի համընթաց շարժումը գետնի նկատմամբ ընդունենք որպես ոտնակների համար փոխադրական շարժում։ Այդ դեպքում ոտնակների մեղեխների պտտական շարժումը հեծանվի նկատմամբ կլինի ոտնակների համար հարաբերական շարժում։*

Փոխադրական շարժման արագությունը և արագացումը կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևերով՝

$$v_e=\frac{ds}{dt}=0{,}2\ t\ \ \text{մ/վրկ},$$

$$w_e=\frac{d^2s}{dt^2}=0{,}2\ \ \text{մ/վրկ}^2:$$

Ոտնակների մեղեխների անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը որոշելու համար գտնենք հեծանվի անիվի պտտման ω_1 անկյունային արագությունը։ Ենթադրենք մի պահ, որ հեծանիվը անշարժ է, իսկ գետինը շարժվում է դեպի ձախ։ Որպեսզի անիվը պտտվի ω_1 անկյունային արագությամբ, բավական է ընդունել, որ գետինը շարժվում է v_e արագությամբ դեպի ձախ։ Այստեղից կստանանք, որ

$$\omega_1 = \frac{v_e}{R} = \frac{0{,}2\,t}{0{,}35} = \frac{4}{7}\,t \ 1/\text{վրկ}:$$

Այժմ որոշենք ատամնակների մեղեխի հետ կապված II ատամնանիվի ω_2 անկյունային արագությունը և ε_2 անկյունային արագացումը։ Գրենք անկյունային արագությունների և անիվների ատամների թվերի միջև եղած հետևյալ առնչությունը՝

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2},$$

Այստեղից ստացվում է,

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{7}\,t \cdot \frac{18}{48} = \frac{3}{14}\,t \ 1/\text{վրկ},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{3}{14} \ 1/\text{վրկ}^2,$$

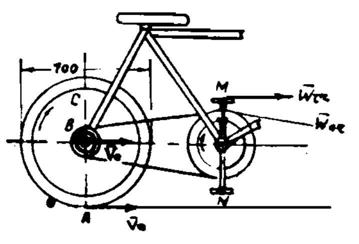
Տված մոմենտում, երբ t=10 վրկ, կունենանք՝

$$\omega_2 = \frac{15}{7} \ 1/\text{վրկ},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{3}{14} \ 1/\text{վրկ}^2,$$

Այժմ որոշենք M կետի արագացումը։

M կետը պտտվում է II առանցքի շուրջը։ Նրա հարաբերական արագացումը կազմված է տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչներից (գծ. 111)։



Գծ. 111

Տանգենցիալ արագացման վեկտորը t=10 վրկ մոմենտում ուղղված է հորիզոնական ուղ-

10—2292

ղությամբ դեպի աջ և մեծությամբ հավասար է

$$w_{r\tau}=\varepsilon_2\,.\,l=\frac{3}{14}\,.\,0{,}18=\frac{27}{700}\ \text{մ/վրկ}^2\text{։}$$

Նորմալ արագացման վեկտորը ուղղված է դեպի II *անվի կենտրոնը (ներքև) և մեծությամբ հավասար է*

$$w_{nr}=\omega_2^{2}\,l=\left(\frac{3}{14}\,t\right)^2.\,0{,}18=\frac{81}{9800}\,t^2\,.\ \text{մ/վրկ}^2,$$

կամ $t=10$ վրկ *մոմենտում*

$$w_{nr}=\frac{81}{98}\ \text{մ/վրկ}^2\text{։}$$

N *կետի հարաբերական արագացման բաղադրիչները մեծությամբ հավասար են* M *կետի հարաբերական արագացման բաղադրիչներին։* N *կետի հարաբերական արագացման տանգենցիալ բաղադրիչը ուղղված է հորիզոնական ուղղությամբ դեպի ձախ, իսկ նորմալ բաղադրիչը՝ շառավղով դեպի* II*-ի կենտրոնը (վերև)։*

Ոտնակների մեղեխների փոխադրական շարժումը համընթաց է։ M *և* N *կետերի բացարձակ արագացումները հավասար են փոխադրական և հարաբերական արագությունների երկրաչափական գումարին։*

M *կետի* w_e *փոխադրական արագացումը և հարաբերական արագացման* $w_{r\tau}$ *տանգենցիալ բաղադրիչը գտնվում են մի հորիզոնական ուղղի վրա։ Վերցնենք դրանց հանրահաշվական գումարը։ Այնուհետև, եթե երկրաչափորեն գումարենք այդ ստացվածը* M *կետի հարաբերական արագացման նորմալ բաղադրիչի հետ, ապա կստանանք* M *կետի բացարձակ արագացման արտահայտությունը հետևյալ տեսքով՝*

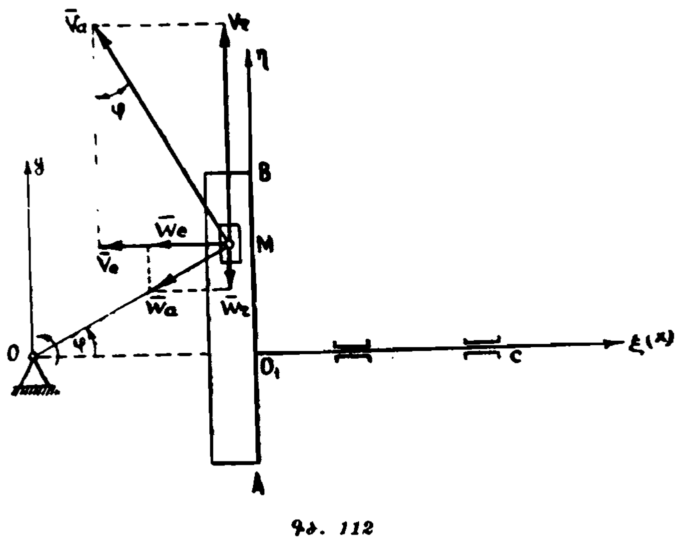
$$w_M=\sqrt{(w_e+w_{r\tau})^2+w_{nr}^2}=\sqrt{\left(0{,}2+\frac{27}{700}\right)^2+\left(\frac{81}{98}\right)^2}=$$
$$=0{,}870\ \text{մ/վրկ}^2\text{։}$$

Նույն ձևով կստանանք նաև N *կետի բացարձակ արագացման արտահայտությունը՝*

$$w_N=\sqrt{(w_e-w_{r\tau})^2+w_{nr}^{2}}=\sqrt{\left(0{,}2-\frac{27}{700}\right)^2+\left(\frac{81}{98}\right)^2}=$$
$$=0{,}841\ \text{մ/վրկ}^2\text{։}$$

Պատ. $w_M=0{,}870$ մ/վրկ², $w_N=0{,}841$ մ/վրկ²։

Խնդիր 66 ա: *Մեղեխա-կուլիսային մեխանիզմի* O_1M *մեղեխը կատարում է հավասարաչափ պտտական շարժում* O *առանցքի շուրջը։ Մեղեխի* M *ծայրակետը հոդակապով միացած է սողնակի հետ, որը մեղեխի պտտման ժամանակ սահում է* O_1C *ձողին ամրացած ուղղաձիգ* AB *սողնակի երկարությամբ և այդ կուլիսին հաղորդում է հետադարձ-համընթաց շարժում հորիզոնական ուղղությամբ։ Տրված է, որ մեղեխը պտտվում է* $\omega=10$ մ/վրկ *անկյունային արագությամբ և* $O_1M=0{,}4$ մ: *Պահանջվում է գտնել կուլիսի արագությունը և արագացումը այն մոմենտում, երբ մեղեխը կուլիսի առանցքի հետ կազմում է* $\varphi=30°$ *անկյուն (գծ. 112)։*



Գծ. 112

Լուծում: *Կոորդինատական սիստեմն ընտրենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում։*

M *կետի բացարձակ շարժումը կլինի նրա (մեղեխի հետ միասին) պտտումը անշարժ* O *կետի շուրջը։ Այս շարժումը կարելի է դիտել որպես հետևյալ երկու շարժումների գումար՝ 1)* M *կետի (կուլիսի հետ միասին) հետադարձ-համընթաց շարժումը* ox *առանցքի երկարությամբ (փոխադրական շարժում) և 2)* M *կետի (սողնակի հետ միասին) հետադարձ-համընթաց շարժումը կուլիսի փորվածքում (հարաբերական շարժում)։*

M կետի $\bar{v}_a$ բացարձակ արագության վեկտորն ունի OM մեղեխին ուղղահայաց ուղղություն, իսկ նրա մոդուլը որոշվում է

$$v_a = OM \cdot \omega = 0,4 \cdot 10 = 4 \text{ մ/վրկ}$$

արտահայտությամբ։

M կետի $\bar{v}_r$ հարաբերական արագությունը, որը հավասար է կուլիսի փորվածքում սողնակի արագությանը, ուղղված է կուլիսի երկարությամբ։ M կետի $\bar{v}_e$ փոխադրական արագությունը, որը հավասար է կուլիսի համընթաց արագությանը, ունի հորիզոնական ուղղություն։ Գծագիր 112-ից հետևում է, որ

$$v_e = v_a \sin\varphi = 4 \sin 30° = 2 \text{ մ/վրկ}:$$

Քանի որ մեղեխը պտտվում է O կետի շուրջը հավասարաչափ, ապա M կետի բացարձակ արագացումը կունենա միայն կենտրոնաձիգ բաղադրիչ, որի մոդուլը կլինի՝

$$w_a = OM \cdot \omega^2 = 0,4 \cdot 100 = 40 \text{ մ/վրկ}^2:$$

M կետի w_e փոխադրական արագացումը, որը հավասար է կուլիսի համընթաց արագացմանը, ուղղված է հորիզոնական ուղղությամբ, իսկ $\bar{w}_r$ հարաբերական արագացումը, այսինքն՝ սողնակի արագացումը կուլիսի փորվածքում, ուղղված է կուլիսի երկարությամբ։ Գծագրից երևում է, որ

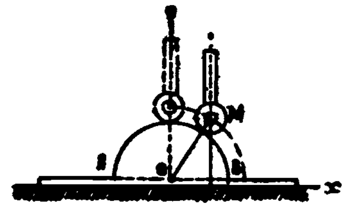
$$w_e = w_a \cos\varphi = 40 \cdot \cos 30° = 20\sqrt{3} \text{ մ/վրկ}^2:$$

Պատ. $v_a = 4$ մ/վրկ, $v_e = 2$ մ/վրկ, $w_a = 40$ մ/վրկ^2,
$w_e = 20\sqrt{3}$ մ/վրկ^2:

Խ ն դ ի ր 66 ը *(154)։ Համընթաց շարժվող բռունցքն ունի r շառավիղ ունեցող կիսասկավառակի ձև, որը սահում է իր AB տրամագծի ուղղությամբ v_0 հաստատուն արագությամբ։ Որոշել բռունցքի վրա հենվող նրա AB տրամագծերին ուղղահայաց և պահունակի փորվածքում ազատ սահող ձողի շարժման արագացումը։ Ձողի ծայրում գտնվող հոլովակի շառավիղը հավասար է ρ-ի։ Սկզբնական մոմենտում ձողը գտնվել է իր ամենաբարձր դիրքում (գծ. 113)։*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: M կետի արագացումը հաշվելու համար կարելի է օգտվել բարդ շարժման արագացումների գումարման թեորեմից։ Բայց այս եղանակով տվյալ խնդրի լուծումը բարդ է և բա-

վտկանաչափ երկար։ Ուստի խնդիրը լուծելու համար նախ կազմենք M կետի շարժման հավասարումը և այն երկու անգամ ածանցելու միջոցով գտնենք նրա արագացումը, քանի որ M կետը կատարում է ուղղագիծ շարժում։ Տանենք xoy *կոորդինատական սիստեմը գծագրում ցույց տըրված ձևով։ Եթե M կետի օրդինատը նշանակենք* y*-ով, ապա գծագիր 113-ից կունենանք*



Գծ. 113

$$y = MK\text{։} \qquad (1)$$

M *կետը միշտ կգտնվի* $\rho+r$ *շառավիղ և* O *կենտրոն ունեցող շրջանագծի վրա, ուստի* ΔOMK*-ից կունենանք՝*

$$MK^2 = (\rho+r)^2 - OK^2\text{։} \qquad (2)$$

Քանի որ բռունցքը կատարում է հավասարաչափ ուղղագիծ շարժում v_0 *արագությամբ, ապա* OK*-ն հավասար կլինի՝*

$$OK = v_0 t\text{։} \qquad (3)$$

(2) և (3)-ի հիման վրա (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$y = \sqrt{(\rho+r)^2 - v_0^2 t^2}\text{։} \qquad (4)$$

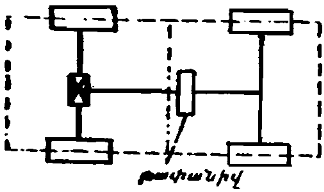
M *կետի արագացումը ստանալու համար անհրաժեշտ է* y*-ի (4) արտահայտությունը երկու անգամ ածանցել ըստ* t*-ի։ Ածանցելուց հետո կստանանք՝*

$$w = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v_0^2(\rho+r)^2}{[(\rho+r)^2 - v_0^2t^2]^{3/2}}\text{։}$$

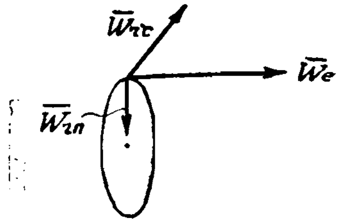
Պատ. $w = \dfrac{v_0^2(\rho+r)^2}{[(\rho+r)^2 - v_0^2t^2]^{3/2}}$։

Խնդիր 67 *(458)։ Ավտոմեքենան ճանապարհի ուղղագիծ մասում շարժվում է* $w_0 = 2$ մ/վրկ² *արագացմամբ։ Երկայնական լիսեռի վրա դրված է* $R = 0{,}25$ մ *շառավիղ ունեցող մի պտտվող դարձանիվ, որը տվյալ մոմենտում ունի* $\omega = 4$ վրկ$^{-1}$ *անկյունային արագություն և* $\varepsilon = 4$ վրկ$^{-2}$ *անկյունային արագացում։ Որոշել այդ մոմենտում դարձանվի շրջանակի կետերի բացարձակ արագացումը (գծ. 114)։*

Լուծում: *Ավտոմեքենայի շարժումը ճանապարհի նկատմամբ համարենք փոխադրական շարժում։ Այդ դեպքում դարձանիվի շարժումը ավտոմեքենայի նկատմամբ կլինի հարաբերական շարժում, իսկ ճանապարհի նկատմամբ՝ բացարձակ շարժում։ Խնդրում պահանջվում է գտնել դարձանիվի շրջանակի կետերի բացարձակ արագացումը։ Բացարձակ արագացումը հավասար կլինի փոխադրական և հարաբերական արագացումների գումարին, քանի որ* $\omega_2 = 0$)։



Գծ. 114



Գծ. 115

Խնդրի պայմանի համաձայն փոխադրական շարժումը համընթաց է և նրա արագացումը հավասար է w_0*-ի, իսկ հարաբերական շարժումը՝ պտտական։ Հետևաբար հարաբերական արագացումը կազմված կլինի երկու բաղադրիչներից՝ նորմալ և տանգենցիալ արագացումներից։ Նորմալ արագացման թվային արժեքը հավասար կլինի* $w_n = \omega^2 R$*-ի և ուղղված դարձանիվի շառավղով դեպի նրա կենտրոնը, իսկ տանգենցիալ արագացումը հավասար կլինի* $w_\tau = \varepsilon R$ *և ուղղված դարձանիվի շոշափողով (գծ. 115)։ (2) բանաձևի համաձայն դարձանիվի շրջանակի կետերի բացարձակ արագացումը հավասար կլինի այս երեք արագացումների գումարին, այսինքն՝*

$$\overline{w}_a = \overline{w}_e + \overline{w}_{rn} + \overline{w}_{r\tau},$$

Քանի որ $\overline{w}_e$, $\overline{w}_{rn}$ *և* $\overline{w}_{r\tau}$ *արագացումներն իրար ուղղահայաց են, ապա բացարձակ արագացման թվային արժեքը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝*

$$w_a = \sqrt{w_e^2 + w_{rn}^2 + w_{r\tau}^2}$$

կամ

$$w_a = \sqrt{w_0^2 + (\varepsilon R)^2 + (\omega^2 R)^2} = 4{,}58 \text{ մ/վրկ}^2,$$

Պատ. $w_a = 4{,}58$ մ/վրկ²,

§ 9. ԿԵՏԻ ԱՐԱԳԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ ԱՆՇԱՐԺ ԱՌԱՆՑՔԻ ՇՈՒՐՋԸ ՊՏՏԱԿԱՆ ՓՈԽԱԴՐԱԿԱՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

1. Արագացումների գումարումը։ Կորիոլիսի թեորեմը։ *Եթե կետը կատարում է բարդ շարժում և նրա փոխադրական շարժումը համընթաց չէ, ապա այդ կետի բացարձակ արագացումը հավասար է հարաբերական, փոխադրական և կորիոլիսի արագացումների երկրաչափական գումարին, այսինքն՝*

$$\bar{w}_a = \bar{w}_r + \bar{w}_e + \bar{w}_c, \qquad \text{(I)}$$

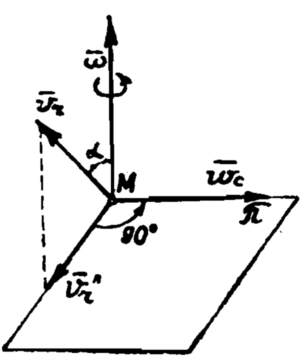
որտեղ $\bar{w}_c$-ն կորիոլիսի կամ լրացուցիչ արագացումն է։ (I) բանաձևը երբեմն անվանում են Կորիոլիսի թեորեմ։

2. Կորիոլիսի արագացումը։ *Կորիոլիսի արագացումը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝*

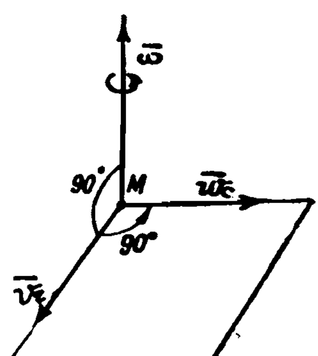
$$\bar{w}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r)\text{։} \qquad \text{(II)}$$

Այստեղից հետևում է, որ կորիոլիսի արագացումը հավասար է փոխադրական շարժման անկյունային արագության և կետի հարաբերական արագության վեկտորական արտադրյալի կրկնապատիկին։

Վեկտորական արտադրյալի սահմանման համաձայն $\bar{w}_c$ վեկտորը պետք է ուղղել $\bar{\omega}$ և $\bar{v}_r$ վեկտորներով որոշվող հարթությանը ուղղահայաց այնպես, որ այդ վեկտորի ծայրից նայելիս $\bar{\omega}$ վեկտորից դեպի $\bar{v}_r$ վեկտորը կատարվող ամենակարճ պտույտը երևա ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ (գծ. 116)։



Գծ. 116



Գծ. 117

Կորիոլիսի արագացման $\bar{w}_c$ վեկտորի ուղղությունը կարելի է ստանալ պրոյեկտելով $\bar{v}_r$ վեկտորը $\bar{\omega}$-ին ուղղահայաց π հարթության վրա և պտտելով այդ $\bar{v}_r$-ի պրոյեկցիան 90°-ի չափ փոխադրական պտտման ուղղությամբ (գծ. 117)։

(II) *բանաձևից հետևում է, որ կորիոլիսի արագացման թվային արժեքը հավասար կլինի՝*

$$w_c = 2\omega v_r \sin\alpha, \qquad \text{(III)}$$

որտեղ α-ն $\bar{\omega}$ և $\bar{v}_r$ վեկտորներով կազմված անկյունն է։

Կորիոլիսի արագացումը հավասար կլինի զրոյի, հետևյալ երեք մասնավոր դեպքերում.*

ա) երբ $\omega=0$, այսինքն՝ շարժական կոորդինատական սիստեմը կատարում է համընթաց շարժում անշարժ սիստեմի նկատմամբ։

բ) եթե $\bar{v}_r=0$, այսինքն՝ կետը անշարժ է շարժական կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ,

գ) երբ $\sin\alpha=0$, այսինքն՝ ω անկյունային արագության և $\bar{v}_r$ հարաբերական արագության վեկտորները կոլինեար են։

8. Կետի արագացումների գումարման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը, երբ փոխադրական շարժումը պտտական է: *Արագացումների գումարման թեորեմի համաձայն կարելի է որոշել կետի բացարձակ արագացումը, երբ տված են կետի փոխադրական և հարաբերական շարժումները։ Այս դեպքում կետի հարաբերական շարժման հավասարումների հիման վրա պետք է որոշել կետի հարաբերական արագությունը և հարաբերական արագացումը, իսկ փոխադրական շարժման հավասարումների հիման վրա՝ կետի փոխադրական արագությունը և փոխադրական արագացումը։ Այնուհետև, իմանալով փոխադրական շարժման անկյունային արագությունը և հարաբերական շարժման արագությունը, կարելի է որոշել կետի կորիոլիսի արագացումը։ Որից հետո կետի բացարձակ արագացումը կարելի է որոշել երկրաչափորեն։ Բացարձակ արագացումը կհանդիսանա փոխադրական, հարաբերական և կորիոլիսի արագացումների վեկտորների վրա կառուցված բազմանկյան փակող կողմը։ Այս տիպի խնդիրները կարելի է լուծել նաև պրոյեկցիաների մեթոդով։*

Ընդհանուր դեպքում, երբ շարժական կոորդինատական սիս-

---

* *Պարտադիր չէ, որ քննարկվող դեպքերը տեղի ունենան ամբողջ շարժման ընթացքում, բավական է որևէ պահին նրանցից մեկն ու մեկը տեղի ունենա։*

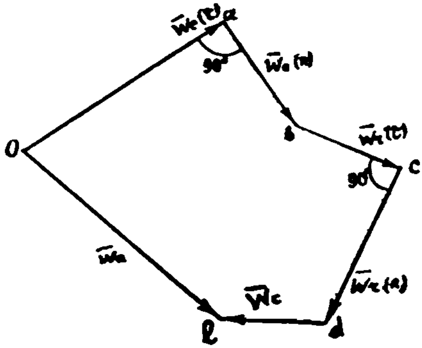
անմի կետերի հետագծերը ուղղագիծ չեն և կետի հարաբերական շարժումը նույնպես կորագիծ է, ապա նպատակահարմար է փոխադրական արագացումը դիտել որպես տանգենցիալ և նորմալ փոխադրական արագացումների երկրաչափական գումար և հարաբերական արագացումը՝ տանգենցիալ և նորմալ հարաբերական արագացումների երկրաչափական գումար, այսինքն՝

$$\overline{w}_r=\overline{w}_{r\tau}+\overline{w}_{rn}, \quad \overline{w}_e=\overline{w}_{e\tau}+\overline{w}_{en}. \qquad \text{(IV)}$$

Այդ դեպքում արագացումների գումարման (I) բանաձևը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\overline{w}_a=\overline{w}_{r\tau}+\overline{w}_{rn}+\overline{w}_{e\tau}+\overline{w}_{en}+\overline{w}_c, \qquad \text{(V)}$$

որտեղ $\overline{w}_{r\tau}$ և $\overline{w}_{rn}$-ը հարաբերական արագացման տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչներն են, իսկ $\overline{w}_{e\tau}$ և $\overline{w}_{en}$-ը փոխադրական արագացման տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչները (գծ. 118)։



Գծ. 118

Եթե $\overline{w}_r$, $\overline{w}_e$ և $\overline{w}_c$ վեկտորները փոխադարձաբար ուղղահայաց չեն և ուղղված չեն մի ուղղով, ապա երկրաչափորեն $\overline{w}_a$ վեկտորը որոշել դժվար է։ Այս դեպքում $\overline{w}_a$ բացարձակ արագացումը գտնելու համար նպատակահարմար է կիրառել պրոյեկցիաների մեթոդը։ Դրա համար պետք է կառուցել դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատական Mxyz սիստեմը, որի սկզբնակետը գտնվի M կետում։ Պրոյեկտելով (I) վեկտորական հավասարումը այդ սիստեմի առանցքների վրա, կստանանք՝

$$w_{ax}=w_{r\tau x}+w_{rnx}+w_{e\tau x}+w_{enx}+w_{cx},$$

$$w_{ay}=w_{r\tau y}+w_{rny}+w_{e\tau y}+w_{eny}+w_{cy},$$

$$w_{az}=w_{r\tau z}+w_{rnz}+w_{e\tau z}+w_{enz}+w_{cz}.$$

Այստեղից որոշում ենք w_{ax}, w_{ay}, w_{az} մեծությունները, որից հետո M կետի $\overline{w}_a$ բացարձակ արագացման մոդուլը որոշվում է

$$w_a=\sqrt{w_{ax}^2+w_{ay}^2+w_{az}^2}$$

բանաձևով, իսկ արագացման ուղղորդ կոսինուսները՝

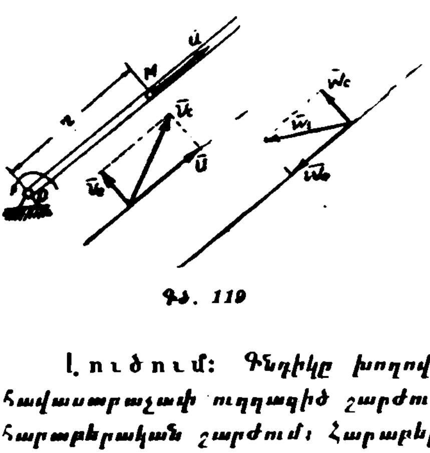
$$\cos(\widehat{\overline{w}_a, x}) = \frac{w_{ax}}{w} = \frac{w_{ax}}{\sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2}},$$

$$\cos(\widehat{w_a, y}) = \frac{w_{ay}}{w} = \frac{w_{ay}}{\sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2}},$$

$$\cos(\widehat{\overline{w}_a, z}) = \frac{w_{az}}{w} = \frac{w_{az}}{\sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2}}$$

բանաձևերով։

4. ԽՆԴԻՐՆԵՐ



Գծ. 119

Խնդիր 68: M գնդիկը շարժվում է խողովակի երկարությամբ հաստատուն u արագությամբ, իսկ խողովակը պտտվում է O կետի շուրջը հաստատուն ω անկյունային արագությամբ։ Գտնել M կետի բացարձակ արագությունը և բացարձակ արագացումը (գծ. 119)։

Լուծում: Գնդիկը խողովակի նկատմամբ կատարում է հավասարաչափ ուղղագիծ շարժում, որը գնդիկի համար կլինի հարաբերական շարժում։ Հարաբերական շարժման արագության և արագացման մեծության համար կունենանք՝

$$v_r = u, \quad w_r = 0։$$

Խողովակի հավասարաչափ պտտումը կհանդիսանա M գնդիկի համար փոխադրական շարժում։ Հետևաբար, կետի փոխադրական արագության և արագացման համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունները՝

$$v_e = \omega r, \quad w_e = \omega^2 r։$$

$\overline{w}_e$ փոխադրական արագացումը ուղղված կլինի դեպի պտտման O կենտրոնը։

Քանի որ $\overline{\omega}$ վեկտորը ուղղահայաց է $\overline{v}_r$ հարաբերական արա-

գումյանը, ապա M *կետի* $\bar{w}_c$ *կորիոլիսի արագացման մեծությունը կլինի՝*

$$w_c = 2\omega v_r = 2\omega u\text{։}$$

$\bar{w}_c$ *վեկտորը ուղղահայաց կլինի* $\bar{\omega}$ *և* $\bar{v}_r$ *վեկտորներին, հետևաբար նա կունենա գծագրում ցույց տրված ուղղությունը։*

M *գնդիկի* $\bar{v}_a$ *բացարձակ արագության և* $\bar{w}_a$ *բացարձակ արագացման մեծությունների համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունները՝*

$$v_a = \sqrt{u^2 + \omega^2 r^2},$$

$$w_a = \sqrt{4\omega^2 u^2 + \omega^4 r^2}\text{։} \qquad (1)$$

Քանի որ գնդիկը խողովակի նկատմամբ կատարում է հավասարաչափ ուղղագիծ շարժում, ապա կարող ենք գրել, որ

$$r = ut\text{։}$$

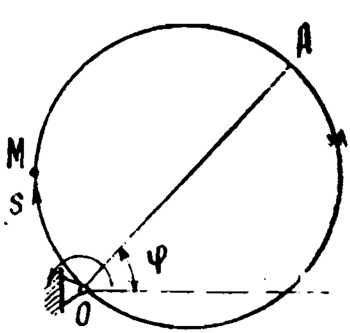
Այդ դեպքում (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$v_a = u\sqrt{1 + \omega^2 t^2},$$

$$w_a = \omega u\sqrt{4 + \omega^2 t^2}\text{։}$$

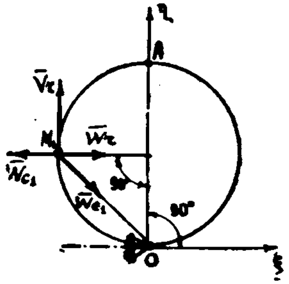
Պատ. $v_a = u\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$, $w_a = \omega u\sqrt{4 + \omega^2 t^2}$։

Խնդիր 69: $R = 1$մ *շառավիղ ունեցող շրջանագիծը պտտվում է ուղղաձիգ հարթության վրա* O *անշարժ առանցքի շուրջը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ* $\varphi = \pi t$ *օրենքով* (t — *վայրկյաններով,* φ — *ռադիաններով), որտեղ* φ*-ն շրջանագծի* OA *տրամագծի կազմած անկյունն է հորիզոնական ուղղության հետ (գծ. 120)։ Տված շրջանագծով, նրա* O *կետից, շարժվում է* M *կետը ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ* $s = \pi t$ *օրենքով* (s — *մետրերով)։ Որոշել* M *կետի բացարձակ արագացումը* $t_1 = \frac{1}{2}$ վրկ *և* $t_2 = 1$ վրկ *պահերին։*



Գծ. 120

Լուծում: M կետը կատարում է բարդ շարժում։ Շարժական կոորդինատական ξOη սիստեմն ամրացնենք շրջանագծին (գծ. 121)։ Այդ դեպքում M կետի շարժումը շրջանագծով կլինի հարաբերական, իսկ շրջանագծի այն կետի շարժումը, որով տվյալ մոմենտում անցնում է M կետը, կհանդիսանա փոխադրական շարժում։



Գծ. 121

M կետի բացարձակ արագացման վեկտորը կլինի՝

$$\bar{w}_a = \bar{w}_r + \bar{w}_e + \bar{w}_c, \qquad (1)$$

Նախ որոշենք հարաբերական $\bar{w}_r$ արագացումը։ Այս արագացման տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչների թվային արժեքները կլինեն՝

$$w_{r\tau} = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 0,$$

$$w_{rn} = \frac{v_r^2}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \pi^2 \text{ մ/վրկ}^2։$$

Այսպիսով, հարաբերական արագացումը ժամանակի յուրաքանչյուր մոմենտում ուղղված է դեպի շրջանագծի կենտրոնը և մեծությամբ հավասար է

$$w_r = \pi^2 \text{ մ/վրկ}^2:$$

Գտնենք M կետի փոխադրական արագացումը։ Քանի որ փոխադրական շարժումը պտտական է, ապա կունենանք

$$\bar{w}_e = \bar{w}_{e\tau} + \bar{w}_{en},$$

Այստեղ

$$w_{e\tau} = \varepsilon_e \cdot OM, \quad w_{en} = \omega_e^2 \cdot OM,$$

որտեղ OM-ը M կետի հեռավորությունն է շրջանագծի պտտման առանցքից, ω_e և ε_e-ն պտտվող շրջանագծի անկյունային արագությունն է ու անկյունային արագացումը։

Քանի որ $s|_{t=t_1} = \frac{\pi}{2}$ և $s|_{t=t_2} = \pi$, ապա կունենանք՝

$$OM|_{t=t_1} = \sqrt{2} \text{ մ}, \quad OM|_{t=t_2} = 2 \text{ մ}:$$

ω_e անկյունային արագությունը և ε_e անկյունային արագացումը համապատասխանաբար հավասար կլինեն՝

$$\omega_e=\frac{d\varphi}{dt}=\pi\ \frac{ռադ}{վրկ}=\text{const},\quad \varepsilon_e=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0:$$

Հետևաբար,

$$w_e=w_{en}=\omega_e^2\ .\ OM,$$

$t_1=\frac{1}{2}$ վրկ *մոմենտում* $w_{e,1}=\pi^2\sqrt{2}$ մ/վրկ²,

$t_2=1$ վրկ *մոմենտում* $w_{e,2}=2\pi^2$ մ/վրկ²։

Այս $\bar{w}_{e,1}$ և $\bar{w}_{e,2}$ արագացումներն ուղղված են դեպի O առանցքը։

Այժմ գտնենք $\bar{w}_c$ կորիոլիսի արագացումը։ $\bar{\omega}_e$ անկյունային արագության վեկտորն ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը և ուղղված է դեպի ընթերցողը։ Հարաբերական $\bar{v}_r$ արագությունը ուղղված է շրջանագծի շոշափողով դեպի ժամացույցի սլաքի շարժման կողմը։ Հետևաբար, շարժման յուրաքանչյուր մոմենտում $\bar{\omega}_e$ և $\bar{v}_r$ վեկտորներով կազմված անկյունը հավասար կլինի $\frac{\pi}{2}$-ի և $t=\frac{1}{2}$ վրկ, $t=1$ վրկ երկու մոմենտների համար էլ կորիոլիսի արագացումը կլինի՝

$$w_{e,1}=w_{e,2}=2\omega_e\ .\ v_r\sin\frac{\pi}{2}=2\pi^2 \text{ մ/վրկ}^2:$$

$\bar{w}_e$ վեկտորի ուղղությունը $t_1=\frac{1}{2}$ վրկ *և* $t_2=1$ վրկ *մոմենտներում ցույց է տրված գծագրում։*

Բացարձակ $\bar{w}_a$ արագացումը գտնելու համար (I) վեկտորական հավասարումը պրոյեկտենք կոորդինատական առանցքների վրա։ $t=t_1$ մոմենտի համար կունենանք՝

$$w_{ax_1}=w_{r,1}-w_{c,1}+w_{e,1}\ .\ \frac{\sqrt{2}}{2}=\pi^2-2\pi^2+\pi^2=0,$$

$$w_{ay_1}=-w_{e,1}\ .\ \frac{\sqrt{2}}{2}=-\pi^2:$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$w_{a/t=t_1}=\pi^2 \text{ մ/վրկ}^2$$

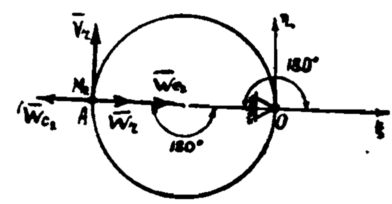
և ուղղված է դեպի ցած։

Իսկ $t=t_2$ մոմենտում M կետի բոլոր արագացումները ուղղված են մի ուղղով (գծ. 122), հետևաբար,

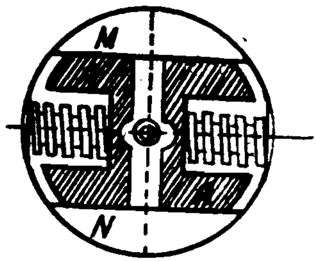
$w_{a/t=t_2}=w_{r,2}+w_{e,2}-w_{c,2}=\pi^2+2\pi^2-2\pi^2=\pi^2$ մ/վրկ^2 և $\bar{w}_{a/t=t_2}$ վեկտորն ուղղված է դեպի աջ։

Պատ. $w_{a/t=1/2}=\pi^2$ մ/վրկ^2 և $\bar{w}_{a/t=t_1}$ վեկտորն ուղղված է դեպի ցած, $\bar{w}_{a/t=1}=\pi^2$ մ/վրկ^2 և $\bar{w}_{a/t=t_2}$ վեկտորն ուղղված է դեպի աջ։

Խ ն դ ի ր 70 *(460)*։ *Ուղղաձիգ առանցքի շուրջը* $n=180$



Գծ. 122



Գծ. 123

պտ/րոպ *հաստատուն անկյունային արագությամբ պտտվող կանոնավորիչում զսպանակների ծայրերին ամրացված* A *ծանր կշռաքարերը կատարում են* MN *փորվածքի երկարությամբ հարմոնիկ տատանումներ այնպես, որ նրանց ծանրության կենտրոնների հեռավորությունը պտտման առանցքից փոփոխվում է* $x=(10+5\sin 8\pi t)$ սմ *օրենքով։ Որոշել կշռաքարերի ծանրության կենտրոնների արագացումները այն մոմենտում, երբ կորիոլիսի արագացումը հասնում է մաքսիմում արժեքի, ինչպես նաև ցույց տալ կորիոլիսի արագացման արժեքը կշռաքարերի եզրային դիրքերում (գծ. 123)։*

Լ ու ծ ու մ։ *Կշռաքարերի շարժումը կարգավորիչի նկատմամբ, որը կատարվում է* $x=(10+5\sin 8\pi t)$ սմ *օրենքով, թող լինի կշռաքարերի հարաբերական շարժումը։ Այդ դեպքում կարգավորիչի պտտական շարժումը ուղղաձիգ առանցքի շուրջը* $\omega=\frac{2\pi\cdot 180}{60}=6\pi$ 1/վրկ *անկյունային արագությամբ կլինի փոխադրական շարժում։ Քանի որ փոխադրական շարժումը պտտական է և պտտման առանցքը չի համընկնում* x *առանցքի հետ, որով ուղղված է*

$$v_r=\frac{dx}{dt}=40\pi\cos 8\pi t$$

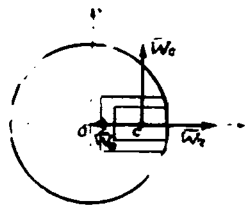
հարաբերական արագությունը, ապա կառաջանա կորիոլիսի արագացում։

Բացարձակ արագացման վեկտորը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\bar{w}_a=\bar{w}_e+\bar{w}_r+\bar{w}_c$$

$\bar{w}_r$ *հարաբերական արագացման վեկտորը ուղղված է* x *առանցքի դրական ուղղությամբ (գծ. 124), իսկ թվային արժեքը որոշվում է հետևյալ կերպ՝*

$$w_r=\frac{dv_r}{dt}=-320\pi^2\sin 8\pi t,$$



Գծ. 124

Փոխադրական շարժման նորմալ արագացումը նույնպես ուղղված կլինի x *առանցքով և կունենա* $w_{en}=\omega^2 x$ *մեծությունը, իսկ տանգենցիալ արագացումը հավասար է զրոյի, քանի որ* $\omega=\mathrm{const}$։

Կորիոլիսի $\bar{w}_c$ *արագացումը ուղղահայաց է ինչպես կարգավորիչի պտտման առանցքին, այնպես էլ* x *առանցքին։ Հետևաբար, նա կգտնվի գծագրի հարթության մեջ և ուղղահայաց կլինի* x *առանցքին։ Կորիոլիսի արագացման մեծությունը որոշվում է*

$$w_c=2\omega\frac{dx}{dt}=2\cdot 6\cdot \pi\cdot 40\pi\cos 8\pi t=480\pi^2\cos 8\pi t$$

բանաձևով։

Խնդրում պահանջվում է որոշել կշռաքարերի ծանրության կենտրոնների արագացումներն այն մոմենտում, երբ կորիոլիսի արագացումը ընդունում է իր ամենամեծ արժեքը։ Այդ նպատակով որոշենք t-*ի այն արժեքները, որոնց դեպքում* w_c-*ն ստանում է իր ամենամեծ արժեքը։* $\bar{w}_c$-*ի փոփոխման օրենքից հետևում է, որ* w_c-*ի բացարձակ արժեքը կլինի ամենամեծը, երբ տեղի ունենա*

$$\cos 8\pi t=1$$

պայմանը։ Այստեղից էլ ստացվում է $t=0$ *(բավական է վերցնել միայն մեկ արմատը)։*

Եթե w_r, w_e և w_c-ի արտահայտությունների մեջ տեղադրենք $t=0$, կստանանք

$$w_e=10\omega^2=360\pi^2 \text{ սմ/վրկ}^2,$$
$$w_r=0,$$
$$w_c=480\pi^2 \text{ սմ/վրկ}^2\text{:}$$

Քանի որ $\overline{w}_e$-ն և $\overline{w}_c$-ն փոխուղղահայաց են, ապա բացարձակ արագացման մեծությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$w_a=\sqrt{w_e^2+w_c^2}=\sqrt{(360\pi^2)^2+(480\pi^2)^2}=600\pi^2 \text{ սմ/վրկ}^2\text{։}$$

Կշռաքարերի եզրային դիրքերում կորիոլիսի արագացման թվային արժեքը որոշելու համար անհրաժեշտ է

$$x=10+5\sin 8\pi t$$

հավասարության մեջ ընդունել

$$\sin 8\pi t=1 \text{ և } \sin 8\pi t=-1 \qquad (1)$$

ու t-ի համար ստացված արժեքները տեղադրել

$$w_c=480\pi^2\cos 8\pi t$$

արտահայտության մեջ։

Հետևաբար, կշռաքարերի եզրային դիրքերի համար կստանանք $w_c=0$։

Պատ. $w_a=600\pi^2$ սմ/վրկ², $w_c=0$։

Խնդիր 71 *(464)*։ Կետը շարժվում է սկավառակի լարով հավասարաչափ v_r հարաբերական արագությամբ։ Սկավառակը պտտվում է իր հարթությանն ուղղահայաց և իր O կենտրոնով անցնող առանցքի շուրջը հաստատուն ω անկյունային արագությամբ։ Որոշել կետի բացարձակ արագությունը և արագացումը այն մոմենտում, երբ նա գտնվում է առանցքից ամենափոքր h հեռավորության վրա, ենթադրելով, որ կետի հարաբերական շարժումը տեղի է ունենում սկավառակի պտտման ուղղությամբ։

Լուծում։ Կետը շարժվում է սկավառակի լարով v_r հարաբերական արագությամբ, իսկ սկավառակը պտտվում է իր հարթությանն ուղղահայաց և իր կենտրոնով անցնող առանցքի շուրջը $v_e=\omega.h$ փոխադրական արագությամբ (գծ. 125)։ Քանի որ կետի հարաբերական և փոխադրական արագությունները ուղղված են սկավառակի լարով, ապա բացարձակ արագությունը հավասար կլինի դրանց գումարին, այսինքն՝

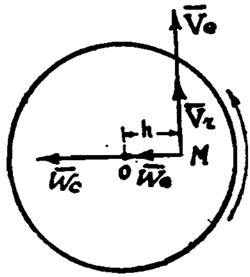
$$v_a = v_r + h\omega։$$

Բացարձակ արագացումը կազմված է միայն երկու բաղադրիչներից՝ փոխադրական և կորիոլիսի արագացումներից, քանի որ հարաբերական արագացումը հավասար է զրոյի ($w_r = \frac{dv_r}{dt} = 0$)։ *Փոխադրական շարժումը իրենից ներկայացնում է պտտական շարժում* $\omega = \text{const}$ *անկյունային արագությամբ, որի հետևանքով փոխադրական արագացման տանգենցիալ բաղադրիչը կլինի զրո* ($w_{e\tau} = h\frac{d\omega}{dt} = 0$), *կմնա միայն նորմալ բաղադրիչը՝* $w_e = w_{en} = \omega^2 h$։ *Վերջինս ուղղված կլինի դեպի սկավառակի կենտրոնը (գծ. 125)։ Կորիոլիսի արագացման վեկտորը որոշվում է*

$$\bar{w}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r)$$

բանաձևով։ Քանի որ $\bar{\omega}$*-ն ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը և ուղղված դեպի մեզ, ապա կորիոլիսի արագացումը ուղղված կլինի դեպի սկավառակի կենտրոնը (գծ. 125) և հավասար՝*

$$w_c = 2\omega v_r։$$



Գծ. 125

Նշանակում է փոխադրական և կորիոլիսի արագացումները ուղղված են նույն ուղղով։ Հետևաբար, բացարձակ արագացումը հավասար կլինի այդ երկու արագացումների գումարին, այսինքն՝

$$w_a = \omega^2 h + 2\omega v_r։$$

Պատ. $v_a = v_r + h\omega$, $w_a = \omega^2 h + 2\omega v_r$։

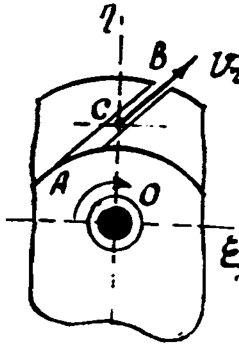
Խնդիր 72 *(467)։ Ուղղագիծ խողակներով կոմպրեսորը պտտվում է հավասարաչափ, գծագրի հարթությանն ուղղահայաց* O *առանցքի շուրջը* ω *անկյունային արագությամբ։ Օդը հոսում է խողակներով* v_r *հաստատուն հարաբերական արագությամբ։ Գտնել* AB *խողակի* C *կետում գտնվող օդի մասնիկի բացարձակ արագության և արագացման պրոյեկցիաները կոորդինատական առանցքների վրա, հետևյալ տվյալների դեպքում։* AB *խողակը թեքված է* OC *շառավղի նկատմամբ 45°-ի անկյան տակ,* $OC = 0{,}5$ մ, $\omega = 4\pi$ վրկ$^{-1}$, $v_r = 2$ մ/վրկ *(գծ. 126)։*

Լուծում։ *Տանենք* $\xi O \eta$ *կոորդինատական սիստեմը։ Նախ գտնենք* C *կետում գտնվող օդի մասնիկի բացարձակ արա-*

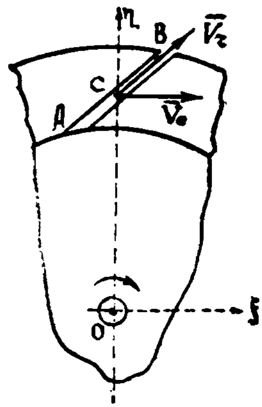
գության պրոյեկցիաները Oξ և Oη առանցքների վրա։

Կոմպրեսորի կատարած պտտական շարժումը O առանցքի շուրջը կլինի C մասնիկի համար փոխադրական շարժում։ Քանի որ այդ շարժումը կատարվում է ω անկյունային արագությամբ, ապա փոխադրական շարժման արագության մեծությունը հավասար կլինի

$$v_e = \omega \cdot OC։$$



Գծ. 126



Գծ. 127

$\bar{v}_e$ վեկտորը ուղղված կլինի Oξ առանցքով (գծ. 127)։ Խնդրի պայմանում տված են հարաբերական արագության մեծությունը և ուղղությունը։ Բացարձակ արագությունը որոշվում է

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r \qquad (1)$$

բանաձևով։ Պրոյեկտելով այս վեկտորական հավասարումը ξOη կոորդինատական սիստեմի Oξ և Oη առանցքների վրա, կստանանք՝

$$v_{a\xi} = \omega \cdot OC + v_r \cos 45^\circ = 4\pi \cdot 0{,}5 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7{,}7 \text{ մ/վրկ},$$

$$v_{a\eta} = v_r \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}41 \text{ մ/վրկ։}$$

Այժմ որոշենք բացարձակ արագացման պրոյեկցիաները կոորդինատական Oξ և Oη առանցքների վրա։ Քանի որ փոխադրական շարժումը պտտական է, ω=const անկյունային արագու-

թյամբ, ուստի փոխադրական արագացումը կունենա միայն նորմալ բաղադրիչ (գծ. 128) և նրա թվային արժեքը հավասար կլինի՝

$$w_e = \omega^2 \, OC։$$

$\bar{w}_e$ *վեկտորը ուղղված կլինի* η *առանցքով դեպի* O *կետը։ Հարաբերական արագացումը կլինի զրո, քանի որ* v_r*-ը հաստատուն է թե՛ մեծությամբ և թե՛ ուղղությամբ։*

Այժմ որոշենք կորիոլիսի արագացումը։ Նրա մեծությունը հավասար կլինի՝

$$w_c = 2\omega v_r,$$

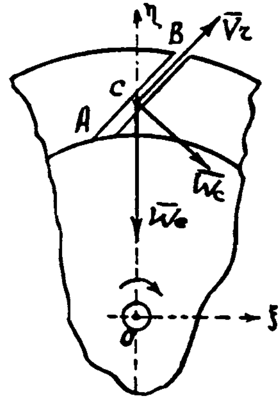
քանի որ $\bar{\omega}$ *և* $\bar{v}_r$ *վեկտորները փոխուղղահայաց են։ Վեկտորական արտադրյալի սահմանման համաձայն* $\bar{w}_c$ *վեկտորը ուղղահայաց կլինի* $\bar{\omega}$ *և* $\bar{v}_r$ *վեկտորներին, կգտնվի գծագրի հարթության վրա և ուղղված կլինի* $\bar{v}_r$*-ից դեպի աջ (գծ. 128)։*

Բացարձակ արագացումը կորոշվի

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_c \qquad (2)$$

բանաձևով։ $w_{a\xi}$ *և* $w_{a\eta}$ *մեծությունները որոշելու համար (2) վեկտորական հավասարումը պրոյեկտենք կոորդինատական* $O\xi$ *և* $O\eta$ *առանցքների վրա։*

Կստանանք՝



Գծ. 128

$$w_{a\xi} = w_c \cos 45^\circ = 2\omega \, . \, v_r \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 4\pi \, . \, 2\sqrt{2} = 35{,}54 \text{ մ/վրկ}^2,$$

$$w_{a\eta} = -w_e - w_c \sin 45^\circ =$$

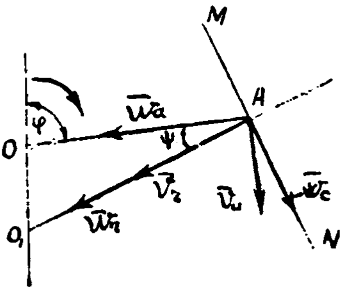
$$= -\omega^2 \, . \, OC - 2\omega \, . \, v_r \frac{\sqrt{2}}{2} = -16\pi^2 \, . \, 0{,}5 - 4\pi \, . \, 2\sqrt{2} =$$

$$= -114{,}5 \text{ մ/վրկ}^2։$$

Պատ. $v_{a\xi} = 7{,}7$ մ/վրկ, $v_{a\eta} = 1{,}41$ մ/վրկ,
$w_{a\xi} = 35{,}54$ մ/վրկ^2, $w_{a\eta} = -114{,}5$ մ/վրկ^2։

Խ ն դ ի ր 73 *(471)։ Որոշել տաշող հաստոցի մեղեխա-կուլիսային մեխանիզմի պտտվող կուլիսի անկյունային արագացումը մեղեխի երկու ուղղաձիգ և երկու հորիզոնական դիրքերի* դեպքում, եթե մեղեխի երկարությունը՝ l=40 սմ, մեղեխի և կուլիսի առանցքների միջև եղած հեռավորությունը՝ a=30 սմ, մեղեխի հավասարաչափ պտտման անկյունային արագությունը՝ $\omega=3$ վրկ$^{-1}$ (*գծ. 101*)։

Լուծում: *Կուլիսի անկյունային արագացումը մեղեխի ուղղաձիգ և հորիզոնական դիրքերում գտնելու համար նախ պետք է գտնել անկյունային արագացումը որպես φ անկյան ֆունկցիա և այնուհետև ստացված բանաձևի մեջ տեղադրել* $\varphi=0, \frac{\pi}{2}, \pi$ և $\frac{3}{2}\pi$։



Գծ. 129

Կուլիսի պտտական շարժումն ընդունենք որպես փոխադրական շարժում։ Այդ դեպքում A *կետի շարժումը կուլիսի ուղղությամբ կլինի հարաբերական, իսկ* OA *մեղեխի պտտումը՝ բացարձակ (գծ. 129)։*

Կուլիսի անկյունային արագացումը գտնելու համար նախ պետք է գտնել A *կետի փոխադրական արագացման տանգենցիալ բաղադրիչը, որը կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$w_{e\tau}=\varepsilon \cdot O_1A \tag{1}$$

Այնուհետև (1)-ից պետք է որոշել ε *անկյունային արագացումը՝*

$$\varepsilon = \frac{w_{e\tau}}{O_1A} \tag{2}$$

Կետի արագացումների գումարման

$$\bar{w}_a=\bar{w}_e+\bar{w}_r+\bar{w}_c$$

բանաձևից կարող ենք որոշել փոխադրական արագացումը, որը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\bar{w}_e=\bar{w}_a-\bar{w}_r-\bar{w}_c \tag{3}$$

Այժմ որոշենք (3) բանաձևի աջ կողմում գտնվող արագացումները։

Քանի որ A *կետը պտտվում է* O *կետի շուրջը* ω *հաստատուն անկյունային արագությամբ, ուստի* A *կետի* $\bar{w}_a$ *բացարձակ արագացումը կունենա միայն նորմալ բաղադրիչ, որի մեծությունն է՝*

$$w_a=\omega^2 l$$

$\bar{w}_a$ վեկտորը ուղղված կլինի AO մեղխով, A կետից դեպի O կետը (գծ. 129)։ $\bar{w}_r$ հարաբերական արագացումը ուղղված է AO_1-ով և թվային արժեքով հավասար է.

$$w_r = \frac{d^2 O_1 A}{dt^2},$$

$\bar{w}_c$ կորիոլիսի արագացումը գտնվում է գծագրի հարթության վրա, ուղղված է O_1A-ին տարած MN ուղղահայացով, A կետից դեպի M կետը։ Նրա թվային արժեքը հավասար է.

$$w_c = 2\omega_1 \cdot v_r,$$

քանի որ փոխադրական շարժման ω_1 անկյունային արագությունը ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը, իսկ v_r-ը ուղղված է O_1A-ով (գծ. 129)։

Եթե պրոյեկտենք (3) վեկտորական հավասարությունը MN ուղղության վրա, նկատի ունենանք, որ $\bar{w}_r \perp MN$-ին և $w_{e\tau} = (\bar{w}_e)_{MN}$, ապա կստանանք.

$$(\bar{w}_e)_{MN} = (\bar{w}_a)_{MN} - (\bar{w}_c)_{MN}, \qquad (3^*)$$

Քանի որ $\bar{w}_c$ արագացումը ուղղված է MN-ով, ապա կունենանք՝

$$(\bar{w}_c)_{MN} = 2\omega_1 v_r, \qquad (4)$$

Եթե OAO_1 անկյունը նշանակենք ψ, ապա կարող ենք գրել, որ

$$(\bar{w}_a)_{MN} = -\omega^2 l \sin\psi, \qquad (5)$$

Այժմ հաշվենք $\sin\psi$, ω_1 և v_r մեծությունները։ Դրա համար դիտարկենք OAO_1 եռանկյունին։ Սինուսների և կոսինուսների թեորեմների համաձայն կունենանք՝

$$\frac{\sin\psi}{a} = \frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{O_1A}, \qquad (6)$$

$$O_1A = \sqrt{a^2 + l^2 - 2al\cos(180^\circ - \varphi)}, \qquad (7)$$

(6) և (7) հավասարումներից կարելի է ստանալ, որ

$$\sin\psi = \frac{a\sin\varphi}{O_1A} = \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + l^2 + 2al\cos\varphi}}, \qquad (8)$$

A կետի $\bar{v}_r$ հարաբերական արագությունը հաշվելու համար բավական է նրա $\bar{v}_a$ բացարձակ արագությունը, որը մեծությամբ հավասար է ωl-ի և ուղղված է OA-ին ուղղահայաց, պրոյեկտել

AO_1-ի վրա։ Դրանից կստացվի

$$v_r = \omega l\cos(90^\circ - \psi) = \omega l\sin\psi։$$

Փոխադրական շարժման ω_1 անկյունային արագությունը հաշվելու համար բավական է $\bar{v}_a$ բացարձակ արագությունը պրոյեկտել MN-ի վրա և ստացածը բաժանել O_1A-ի վրա։ Կստանանք՝

$$\omega_1 = \frac{\omega l\cos\psi}{O_1A} = \frac{\omega l}{O_1A}\sqrt{1-\sin^2\psi} = \frac{\omega l}{O_1A}\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\varphi}{(O_1A)^2}} =$$

$$= \frac{\omega l}{(O_1A)^2}\sqrt{(O_1A)^2 - a^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{\omega l}{(O_1A)^2}\sqrt{a^2 + l^2 + 2al\cos\varphi - a^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{\omega l}{(O_1A)^2}\sqrt{l^2 + a^2\cos^2\varphi + 2al\cos\varphi}\,։ \qquad (8^*)$$

Տեղադրելով ω_1-ի և v_r-ի արժեքները $(\bar{w}_c)_{MN}$-ի *(4)* արտահայտության մեջ, կստանանք՝

$$(\bar{w}_c)_{MN} = 2\cdot\frac{\omega l}{(O_1A)^2}\cdot\sqrt{l^2 + a^2\cos^2\varphi + 2al\cos\varphi}\cdot\omega l\sin\psi։ \qquad (9)$$

Վերջապես *(2)*, *(3*)*, *(5)*, *(8)* և *(9)* բանաձևերից կստանանք՝

$$\varepsilon = \frac{1}{O_1A}\left[\frac{2\omega^2 l^2}{(O_1A)^2}\sqrt{l^2 + a^2\cos^2\varphi + 2al\cos\varphi}\cdot\sin\psi - \right.$$

$$\left. - \omega^2 l\sin\psi\right] = \frac{\omega^2 l\sin\psi}{O_1A}\left[\frac{2l}{(O_1A)^2}\sqrt{l^2 + a^2\cos^2\varphi + 2al\cos\varphi} - 1\right] =$$

$$= \frac{\omega^2 la\sin\varphi}{(O_1A)^2}\left[\frac{2l}{(O_1A)^2}\sqrt{l^2 + a^2\cos^2\varphi + 2al\cos\varphi} - 1\right]։ \qquad (10)$$

Այսպիսով կունենանք՝

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 al\sin\varphi}{a^2 + l^2 + 2al\cos\varphi}\cdot\left[2l\cdot\frac{\sqrt{l^2 + a^2\cos^2\varphi + 2al\cos\varphi}}{a^2 + l^2 + 2al\cos\varphi} - 1\right]։$$

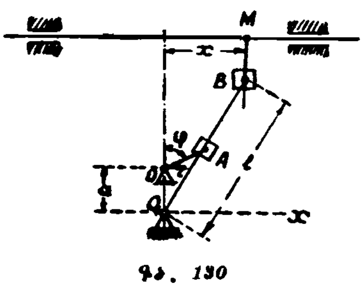
Այժմ բավական է տեղադրել φ-ի վերը նշված արժեքները *(10)*-ի մեջ, կստացվի խնդրում պահանջվող ε-ի արժեքները։

Այս խնդիրը կարելի է լուծել նաև առանց օգտագործելու *արագացումների գումարման թեորեմը։ Դրա համար բավական է միայն վերը նշված ձևով հաշվել փոխադրական շարժման* ω_1 *անկյունային արագությունը (օգտագործելով (8) բանաձևը) և այնուհետև ածանցել* ω_1*-ը ըստ* t*-ի։ Դրանից կստացվի* ε *անկյունային արագացման արտահայտությունը նույն (10)-ը տեսքով։*

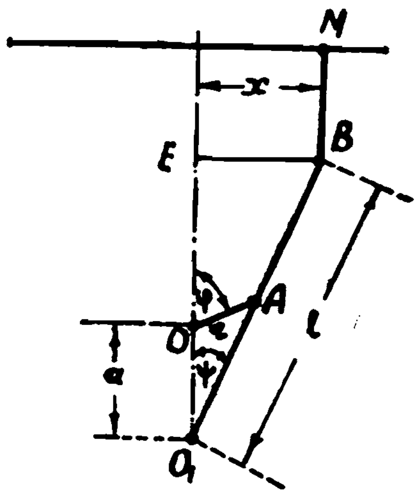
Պատ. $\varphi=0$ *և* $\varphi=180^\circ$, $\varepsilon=0$, $\varphi=90^\circ$, $\varepsilon=1{,}21$ 1/վրկ², $\varphi=270^\circ$, $\varepsilon=-1{,}21$ 1/վրկ²։

Խնդիր 74 *(473)։ Գտնել տաշող հաստոցի* M *սուպորտի շարժման հավասարումը, արագությունը և արագացումը, որը շարժման մեջ է դրվում* O_1B *ճոճվող կուլիս ունեցող մեղեխակուլիսային մեխանիզմի օգնությամբ։ Սխեման ցույց է տրված գծագրում։ Կուլիսը միացված է* M *սուպորտի հետ* B *սողնակի օգնությամբ, որը սահում է սուպորտի նկատմամբ նրա շարժման առանցքին ուղղահայաց ուղղորդով։ Տված է՝* $O_1B=l$, $OA=r$, $O_1O=a$, $r<a$, OA *մեղեխը պտտվում է* ω *անկյունային արագությամբ, մեղեխի պտտման անկյունը հաշվվում է ուղղաձիգ առանցքից (գծ. 130)։*

Լուծում։ *Գտնենք տաշող հաստոցի* M *սուպորտի*



Գծ. 130



Գծ. 131

շարժման հավասարումը։ Նախ որոշենք φ *անկյունը որպես ժամանակի ֆունկցիա։ Քանի որ*

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega=\text{const},$$

ապա ինտեգրելով, կստանանք՝

$$\varphi=\omega t+c, \tag{1}$$

Խնդրում ասված է, որ φ *անկյունը հաշվվում է ուղղաձիգ առանցքից, այսինքն՝ երբ* $t=0$, φ*-ն նույնպես զրո է։ Հետևաբար,* $c=0$ *և (1)-ից կստանանք՝*

$$\varphi = \omega t ։ \qquad (2)$$

BE հատվածի երկարությունը (գծ. 131) նշանակենք x, իսկ OO_1A անկյունը՝ ψ։ Պահանջվում է գտնել x-ը։ ΔO_1BE-ից ունենք

$$x = l \cdot \sin\psi ։ \qquad (3)$$

Անհայտ ψ անկյունը արտահայտենք φ անկյան միջոցով։ ΔO_1OA-ից սինուսների և կոսինուսների թեորեմների համաձայն կարող ենք գրել՝

$$\frac{\sin\psi}{r} = \frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{O_1A}, \qquad (4)$$

$$O_1A = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos(180^\circ - \varphi)} ։ \qquad (5)$$

(4) և (5) հավասարություններից կունենանք՝

$$\sin\psi = \frac{r\sin\varphi}{O_1A} = \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\varphi}} ։ \qquad (6)$$

Տեղադրելով $\sin\psi$-ի արժեքը (6)-ից (3)-ի մեջ, կստանանք տաշող հաստոցի M սուպորտի շարժման հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$x = \frac{rl\sin\omega t}{\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t}} ։ \qquad (7)$$

M կետի արագությունը և արագացումը կարելի է գտնել երկու եղանակով՝ 1) x-ի (7) արտահայտությունը ածանցելու միջոցով և 2) արագությունների և արագացումների գումարման թեորեմների համաձայն։

Արագությունը գտնելու համար (7)-ը ածանցենք ըստ t-ի, կստանանք՝

$$v = \frac{dx}{dt} = lr\omega \frac{(a + r\cos\omega t)(a\cos\omega t + r)}{(a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t)^{3/2}} ։ \qquad (8)$$

Ածանցելով (8) արտահայտությունը նորից ըստ t-ի, կստանանք M կետի արագացումը հետևյալ տեսքով՝

$$w = \frac{dv}{dt} = lr\omega^2 \cdot \frac{a(r^2 - a^2)(a + r\cos\omega t) - r^2(r + a\cos\omega t)}{(a^2 + r^2 + 2ar\cos\omega t)^{5/2}} \cdot \sin\omega t ։ \qquad (9)$$

Երկրորդ եղանակով տվյալ խնդրի լուծումը հիմնականում համընկնում է 73 (471) խնդրի լուծման հետ։ Այդ իսկ պատճա-

ռով այն թողնված է ընթերցողներին, ինքնուրույն լուծելու համար։

Պատ. $x=\dfrac{rl\sin\omega t}{\sqrt{a^2+r^2+2ar\cos\omega t}}$, $v=\dfrac{dx}{dt}=$

$$=lr\omega\frac{(a+r\cos\omega t)(a\cos\omega t+r)}{(a^2+r^2+2ar\cos\omega t)^{3/2}},\quad w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=$$

$$=lr\omega^2\frac{a(r^2-a^2)(a+r\cos\omega t)-r^2(r+a\cos\omega t)^2}{(a^2+r^2+2ar\cos\omega t)^{5/2}}\cdot\sin\omega t\text{։}$$

Դիտողություն։ *Ի. Վ. Մեշչերսկու «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու» գրքում այս խնդրի պատասխանում արագացման արտահայտության մեջ բաց է թողնված* $\sin\omega t$ *արտադրիչը։*

Խնդիր 75 *(476)։* $\omega=2t$ 1/վրկ *անկյունային արագությամբ* O_1O_2 *առանցքի շուրջը պտտվող սկավառակի շառավղով նրա կենտրոնից շրջանակի ուղղությամբ շարժվում է* M *կետը* $OM=4t^2$ *օրենքով։* OM *շառավիղը* O_1O_2 *առանցքի հետ կազմում է 60°-ի անկյուն։ Որոշել* $t=1$ վրկ *մոմենտում* M *կետի բացարձակ արագացման մեծությունը (գծ. 132)։*

Լուծում։ *Սկավառակի պտտումը* O_1O_2 *առանցքի շուրջը թող լինի* M *կետի փոխադրական շարժումը։ Այդ դեպքում* M *կետի ուղղագիծ շարժումը շառավղով կլինի կետի հարաբերական շարժումը։ Քանի որ փոխադրական շարժումը պտտական է, ապա կառաջանա կորիոլիսի արագացում և հետևաբար,* M *կետի բացարձակ արագացումը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝*

$$\bar{W}_a=\bar{W}_e+\bar{W}_r+\bar{W}_c\text{։}\qquad(1)$$

Հարաբերական շարժումը ուղղագիծ է, հետևաբար, հարաբերական արագությունը կլինի՝

$$v_r=\frac{dr}{dt}=8t\ \text{սմ/վրկ},$$

որտեղ $r=OM=4t^2$*, իսկ* $t=1$ վրկ *մոմենտում կունենանք՝* $v_r=8$ սմ/վրկ։

M *կետի հարաբերական արագացումը կորոշվի հետևյալ ձևով՝*

$$w_r=\frac{dv_r}{dt}=8\ \text{սմ/վրկ}^2\text{։}$$

Նշանակում է, w_r *հարաբերական արագացումը հաստատուն է և ուղղված է* OM*-ով (գծ. 133)։*

M *կետի փոխադրական արագացումը կազմված է տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչներից։*

Փոխադրական շարժման անկյունային արագությունը $\omega=$

$=2t$ 1/վրկ, *իսկ անկյունային արագացումը՝* $\varepsilon=2$ 1/վրկ^2։ *Քանի որ սկավառակի պտույտը կատարվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, ապա փոխադրական արագացման* $w_{e\tau}$ *տանգենցիալ բաղադրիչը կունենա փոխադրական արագության ուղղությունը։* $\bar{v}_r$ *վեկտորը ուղղահայաց է սկավառակի հարթությանը և նրա մեծությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝*

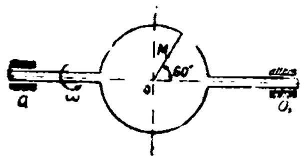
$$v_e = MB \cdot \omega = OM \sin\alpha \cdot \omega,$$

իսկ $t = 1$ վրկ *և* $\alpha = 60°$-*ի դեպքում* $v_e = 4\sin 60° \cdot 2.1 = 4\sqrt{3}$ սմ/վրկ։

Փոխադրական արագացման նորմալ բաղադրիչը ուղղված է MB *շառավղով դեպի պտտման* O_1O_2 *առանցքը և մեծությամբ հավասար է՝*

$$w_{en} = \omega^2 \cdot MB = \omega^2 OM \sin\alpha,$$

իսկ $t=1$ վրկ *և* $\alpha=60°$-*ի դեպքում՝* $w_{en} = 2^2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ սմ/վրկ^2։



Գծ. 132

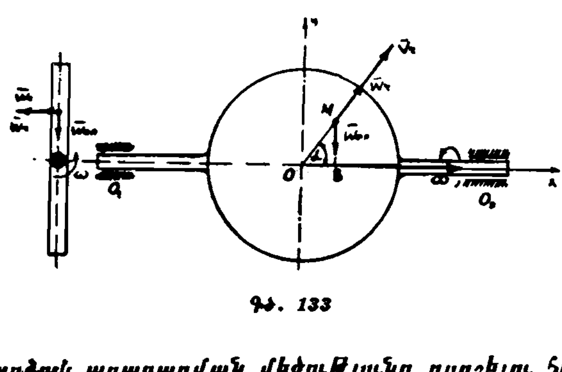
Կորիոլիսի արագացման թվային արժեքի համար կունենանք՝

$$w_c = 2\omega \cdot v_r \sin\alpha,$$

իսկ $t = 1$ վրկ *և* $\alpha=60°$-*ի դեպքում՝*

$$w_c = 2 \cdot 2t \cdot 8t \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 2 \cdot 8\frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$ սմ/վրկ^2։

$\bar{w}_c$ *վեկտորի ուղղությունը որոշվում է* $\bar{\omega}$ *և* $\bar{v}_r$ *վեկտորների վեկտորական արտադրյալի ուղղությամբ։*



Գծ. 133

Բացարձակ արագացման մեծությունը որոշելու համար տա-

նենք OXYZ դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատական սիստեմը և (I) վեկտորական հավասարումը պրոյեկտենք այդ սիստեմի առանցքների վրա, կստանանք՝

$$w_{ax}=w_r\cos 60°=8\ .\ \frac{1}{2}=4\ \text{սմ/վրկ}^2,$$

$$w_{ay}=-w_{en}+w_r\sin 60°=-8\sqrt{3}+8\ \frac{\sqrt{3}}{2}=-4\sqrt{3}\ \text{սմ/վրկ}^2,$$

$$w_{az}=w_{e\tau}+w_c=4\sqrt{3}+16\sqrt{3}=20\sqrt{3}\ \text{սմ/վրկ}^2։$$

Բացարձակ արագացման թվային արժեքը հավասար կլինի՝

$$w_a=\sqrt{w_{ax}^2+w_{ay}^2+w_{az}^2}=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2+(20\sqrt{3})^2}=$$
$$=35{,}56\ \text{սմ/վրկ}^2։$$

Պատ. $w_a=35{,}56$ սմ/վրկ²։

Խնդիր 76 *(479)։* r *շառավիղ ունեցող սնամեջ օղակը կոշտ միացված է* AB *լիսեռին, ընդ որում այնպես, որ լիսեռի առանցքը գտնվում է օղակի առանցքային հարթության մեջ։ Օղակը լցված է հեղուկով, որը շարժվում է նրա մեջ սլաքի ուղղությամբ հաստատուն* u *հարաբերական արագությամբ։* AB *լիսեռը պտտվում է ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ, եթե նայենք պտտման առանցքով* A*-ից դեպի* B*։ Լիսեռի* ω *անկյունային արագությունը հաստատուն է։ Որոշել 1, 2, 3 և 4 կետերում գտնվող հեղուկի մասնիկների բացարձակ արագացումների մեծությունները (գծ. 134, 135)։*

Լուծում: *Օղակի պտտական շարժումը փոխադրական շարժում է, իսկ ջրի պտտումը օղակում՝ հարաբերական շարժում։*

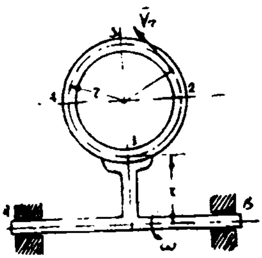
Հեղուկի յուրաքանչյուր կետի բացարձակ արագացումը որոշվում է

$$\bar{w}_a=\bar{w}_e+\bar{w}_r+\bar{w}_c$$

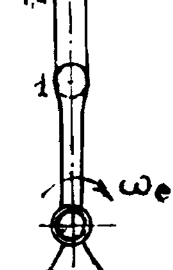
բանաձևով։

Նախ որոշենք 1 կետի (գծ. 135) բոլոր արագացումները։

Փոխադրական, հարաբերական և կորիոլիսի արագացումների թվային ար-



Գծ. 134



Գծ. 135

ժեքները 1-ին կետում համապատասխանաբար կլինեն՝

$$w_{e1}=w_{en1}=\omega^2 r,$$

$$w_{r_1}=w_{rn1}=\frac{u^2}{r},$$

$$w_{c1}=2\omega u\sin\alpha։$$

Քանի որ $\bar{\omega}$ և $\bar{u}$ վեկտորներով կազմված անկյունը 1 կետում հավասար է զրոյի, ապա կունենանք՝

$$w_{c1}=0։$$

Հետևաբար, բացարձակ արագացումը 1 կետում (գծ. 135) հավասար կլինի՝

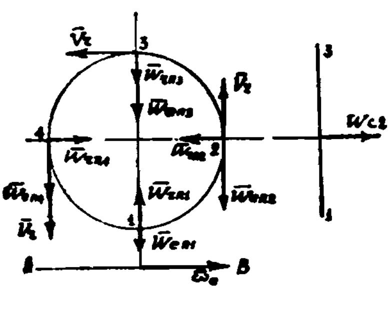
$$w_1=w_{e1}-w_{r1}=\omega^2 r-\frac{u^2}{r}։$$

Այժմ որոշենք 2-րդ կետի բացարձակ արագացումը։ Գրենք w_{e2}, w_{r_2} և w_{c2} արագացումների արտահայտությունները՝

$$w_{e2}=w_{en2}=2r\omega^2,$$

$$w_{r_2}=w_{rn2}=\frac{u^2}{r},$$

$$w_{c2}=2\omega u\sin\alpha=2\omega u։$$



Գծ. 136

Տվյալ կետում $\sin\alpha=\sin 90^\circ=1$, քանի որ $\bar{\omega}$ և $\bar{u}$ վեկտորները ուղղահայաց են։ w_{rn2} արագացման վեկտորը ուղղված է հորիզոնական ուղղությամբ դեպի ձախ (գծ. 136), իսկ $\bar{w}_{c2}$ կորիոլիսի արագացումը ուղղահայաց է $\bar{w}_{en2}$ և $\bar{w}_{rn2}$ արագացումներին, որի հետևանքով բացարձակ արագացման մեծությունը 2-րդ կետում կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

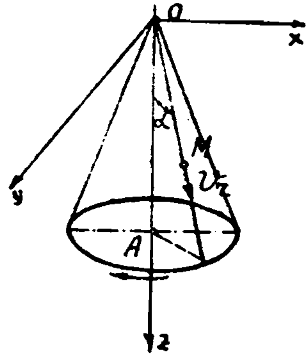
$$w_2=\sqrt{w_{en2}^2+w_{er2}^2+w_{c2}^2}=\sqrt{(2r\omega)^2+\left(\frac{u^2}{r}\right)^2+(2\omega u)^2}։$$

Նույն ձևով կարելի է որոշել բացարձակ արագացումը 3-րդ, 4-րդ կետերում։ Գծագիր 136-ում նշված են փոխադրական և հարաբերական արագացումների ուղղությունները 3-րդ, 4-րդ կետերում։

Պատ. $W_1 = r\omega^2 - \frac{u^2}{r}$, $W_3 = 3r\omega^2 + \frac{u^2}{r}$, $W_2 = W_4 =$

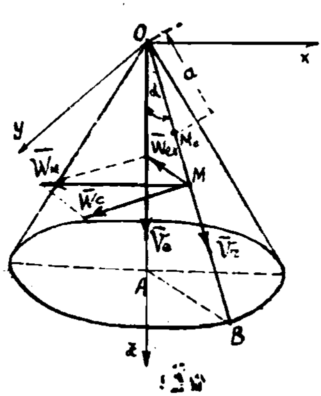
$$= \sqrt{4r^2\omega^2 + \frac{u^4}{r^2} + 4\omega^2u^2}\ ։$$

Խ ն դ ի ր 77 *(481)*։ M *կետը շարժվում է հավասարաչափ* OA *առանցք ունեցող շրջանային կոնի ծնիչով գագաթից դեպի հիմքը* v_r *հարաբերական արագությամբ։ Անկյուն* $MOA = \alpha$, $t = 0$ *մոմենտում* $OM_0 = a$։ *Կոնը պտտվում է իր առանցքի շուրջը հավասարաչափ* ω *անկյունային արագությամբ։ Գտնել* M *կետի բացարձակ արագացումը (գծ. 137)։*



Գծ. 137

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Տանենք* oxyz *անշարժ կոորդինատական սիստեմը (գծ.* 137)։ M *կետի շարժումը* oxyz *սիստեմի նկատմամբ կլինի բացարձակ, իսկ կոնի պտույտը* oz *առանցքի շուրջը՝ փոխադրական։ Փոխադրական շարժման հետագծերը կլինեն շրջանագծեր, որոնց կենտրոնները գտնվում են* oz *առանցքի վրա։* M *կետի շարժումը շարժվող կոնի նկատմամբ իրենից ներկայացնում է այդ կետի հարաբերական շարժումը. այն ուղղված կլինի* OB *ուղղով (գծ. 138)։* M *կետի բացարձակ արագացման համար կունենանք՝*



Գծ. 138

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r + \bar{w}_c,$$

Այստեղ $\bar{w}_e = \bar{w}_{en}$, *քանի որ կոնի պտտումը կատարվում է* ω *հաստատուն անկյունային արագությամբ* ($W_{e\tau} = 0$)։ *Մյուս կողմից՝* $\bar{w}_r = 0$։ *Սա հետևում է նրանից, որ հարաբերական շարժումը հավասարաչափ ուղղագիծ է։*

Կորիոլիսի արագացման վեկտորի համար ունենք՝

$$\bar{w}_c=2(\bar{\omega}\times\bar{v}_r),$$

Այս վեկտորի ուղղությունը որոշվում է վեկտորական արտադրյալի ուղղությամբ (գծ. 138), իսկ մեծությունը

$$W_c=2\omega v_r\sin\alpha \qquad (1)$$

բանաձևով։ $\bar{W}_c$ *և* $\bar{W}_{en}$ *վեկտորները իրար ուղղահայաց են և գտնըվում են* OA *պտտման առանցքին ուղղահայաց հարթության վրա։ Հետևաբար, բացարձակ արագացումը նույնպես կգտնվի* OA *առանցքին ուղղահայաց հարթության վրա և թվային արժեքով հավասար կլինի՝*

$$W_a=\sqrt{W_{en}^2+W_c^2}, \qquad (2)$$

Գծագրից երևում է, որ ժամանակի որևէ t *մոմենտում փոխադրական արագացման նորմալ բաղադրիչի թվային արժեքի համար կունենանք՝*

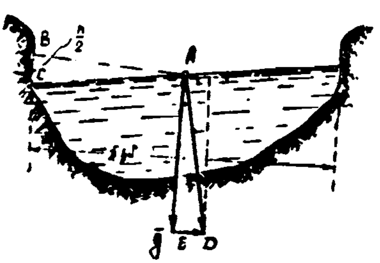
$$W_{en}=\omega^2(OM_0+M_0M)\sin\alpha=\omega^2(a+v_rt)\sin\alpha, \qquad (3)$$

Եթե W_c *և* W_{en}*-ի արժեքները (1) և (3)-ից տեղադրենք (2)-ի մեջ, կստանանք խնդրի պատասխանը։*

Պատ. *Բացարձակ արագացումը գտնվում է պտտման առանցքին ուղղահայաց հարթության վրա և թվային արժեքը հավասար է՝*

$$W_a=\omega\sin\alpha\sqrt{(a+v_rt)^2\omega^2+4v_r^2},$$

Խնդիր 78 *(484)։* 1 կմ *լայնություն ունեցող գետը հոսում է հարավից հյուսիս* 5 կմ/ժամ *արագությամբ։ Որոշել հյուսիսային լայնության 60°-ի տակ գտնվող ջրի մասնիկների* $\bar{w}_c$ *կորիոլիսի արագացումը։ Որոշել այնուհետև, թե որ ափի մոտ ջուրը բարձր է և ինչքանով, եթե հայտնի է, որ ջրի մակերևույթը պետք է ուղղահայաց լինի մի վեկտորի, որը ծանրության ուժի* g *արագացման և կորիոլիսի արագացման հավասար և հակառակ ուղղված վեկտորների գումարն է (գծ. 139)։*



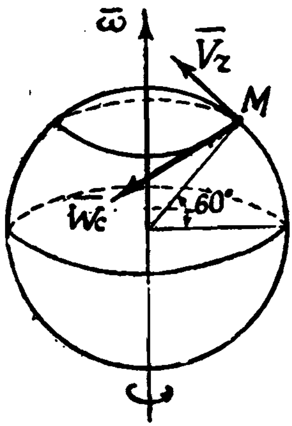
Գծ. 139

Լուծում: *Եթե երկրագնդի պտույտն իր առանցքի շուրջը համարենք փոխադրական շարժում, ապա գետի շարժումը* երկրագնդի նկատմամբ կլինի հարաբերական։ Խնդրի պայմանի համաձայն փոխադրական շարժման անկյունային արագության և հարաբերական շարժման արագության համար կունենանք՝

$$\omega=\frac{2\pi}{24\,.\,60\,.\,60}=0{,}0000729\ 1/\text{վրկ},$$

$$v_r=5\ \text{կմ/ժամ}=\frac{25}{18}\,\text{մ/վրկ}։$$

Այստեղ $\bar{\omega}$ անկյունային արագության վեկտորը ուղղված կլինի երկրագնդի պտտման առանցքով, հարավից դեպի հյուսիս, իսկ հարաբերական արագության $\bar{v}_r$ վեկտորը՝ երկրագնդի միջօրեականի շոշափողով դեպի հյուսիս (գծ. 140)։



Գծ. 140

Կորիոլիսի արագացումը որոշվում է

$$w_c=2(\bar{\omega}\mathrm{x}\bar{v}_r)$$

բանաձևով։ Այստեղից հետևում է, որ կորիոլիսի արագացումը ուղղված է M կետով տարված զուգահեռականի շոշափողով դեպի արևմուտք, իսկ թվային արժեքը հավասար կլինի՝

$$w_c=2\omega.v_r\sin 60^\circ=2\,.\,0{,}0000729\,.\,\frac{25}{18}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{մ/վրկ}^2=$$

$$=0{,}00017\ \text{մ/վրկ}^2=0{,}017\ \text{սմ/վրկ}^2։$$

Այժմ որոշենք, թե գետի ո՞ր ափի մոտ է ջուրն ավելի բարձր և ինչքանով։ Հայտնի է*, որ կորիոլիսի արագացման հետևանքով առաջանում է մի ուժ, որը ջրի մասնիկներին հրում է դեպի արևելք (քանի որ $\bar{w}_c$-ն ուղղված է դեպի արևմուտք)։ Հետևաբար, գետի աջ ափը ավելի բարձր կլինի, քան ձախ ափը։ Հաշվենք այդ բարձրության չափը։ Եթե աջ և ձախ ափերի ջրի մակարդակների տարբերությունը նշանակենք h (գծ. 139), ապա ABC և AED եռանկյունների նմանությունից կունենանք՝

*) Տ'ես Բերրի երևույթը կետի դինամիկայում։

$$\frac{\frac{h}{2}}{W_c}=\frac{0,5\,.\,1000}{9,81},$$

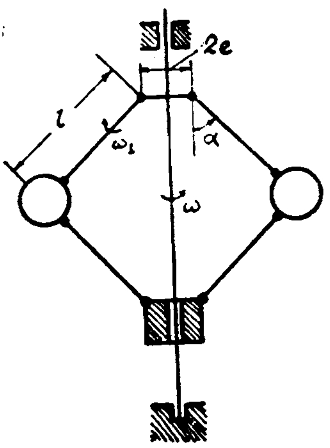
Այստեղից հետևում է, որ

$$h=\frac{1000}{9,81}\,.\,w_c=\frac{1000}{9,81}\,.\,0,00017=0,01782\ մ=1,782\ սմ։$$

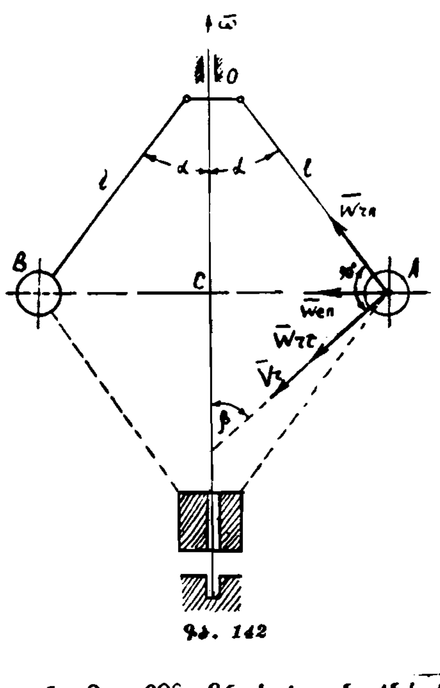
Պատ. *Կորիոլիսի արագացումը՝* $w_c=0,0175$ սմ/վրկ² *և ուղղված է արևմուտք։*

Ջուրը բարձր է աջ ափի մոտ 1,782 սմ-*ով։*

Խ ն դ ի ր 79 *(490)։ Գտնել Ուատտի կենտրոնախույս կանոնավորիչի գնդերի բացարձակ արագացումը, եթե մեքենայի բեռնավորվածության փոփոխությունից հետո կանոնավորիչը ըսկըսում է պտտվել* $\omega=\pi$ 1/վրկ *անկյունային արագությամբ, ընդ*



Գծ. 141



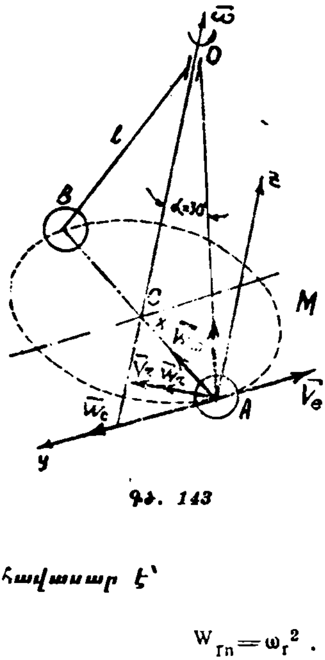
Գծ. 142

որում գնդերը տվյալ մոմենտում շարունակում են իջնել $v_2=100$ սմ/վրկ *արագությամբ և* $w_{r\tau}=10$ սմ/վրկ² *արագացումով։ Կանոնավորիչի բացման անկյունը* $2\alpha=60°$*։ Գնդերի բռնակների երկարությունը* $l=50$ սմ, *նրանց կախման առանցքների միջև եղած* 2c *հեռավորությունը կարելի է անտեսել։ Գնդերն ընդունել որպես կետեր (գծ. 141)։*

Լուծում: *Ուատտի կենտրոնախույս կանոնավորիչի գընդիկների փոխադրական շարժումը կլինի նրանց պտտումը (ձողերի հետ միասին) OC առանցքի շուրջը (գծ. 142), իսկ հարաբերական շարժումը՝ նրանց պտտումը O կետի շուրջը։ Քանի որ փոխադրական շարժումը պտտական է, ապա կառաջանա կորիոլիսի արագացում և գնդիկների բացարձակ արագացման վեկտորը կորոշվի*

$$\bar{w}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r + \bar{w}_c$$

բանաձևով։



Գծ. 143

Գնդիկի փոխադրական պտտումը OC *առանցքի շուրջը տեղի է ունենում* ω *հաստատուն անկյունային արագությամբ (գծ. 143)։ Դրա հետևանքով* A *կետի փոխադրական արագացման տանգենցիալ բաղադրիչը կլինի զրո և կունենանք*

$$w_e = w_{en} = \omega^2 AC = \omega^2 l \sin \alpha,$$

որտեղ AC*-ն պտտման շառավիղն է* (AC$=l$)*։ Այս* $\bar{w}_{en}$ *արագացումը ուղղված է* AC*-ով դեպի* C *կենտրոնը։*

A *գնդիկի հարաբերական արագացումը կազմված է* $\bar{w}_{r\tau}$ *տանգենցիալ բաղադրիչից, որի մեծությունը տված է* ($w_{r\tau}=10$ սմ/վրկ²)*, և* $\bar{w}_{rn}$ *նորմալ արագացումից, որի մեծությունը հավասար է՝*

$$w_{rn} = \omega_r^2 \cdot OA = \left(\frac{v_r}{l}\right)^2 \cdot l = \frac{v_r^2}{l},$$

Այստեղ ω_r*-ը ձողի և գնդիկի* O *կետի շուրջը կատարած հարաբերական պտտման անկյունային արագությունն է։* $\bar{w}_{rn}$ *նորմալ արագացումը ուղղված է դեպի պտտման* O *կենտրոնը։*

Կորիոլիսի արագացման մեծությունը կլինի

$$w_c = 2\omega v_r \sin \beta = 2\omega v_r \sin 60^\circ,$$

քանի որ $\bar{\omega}$*-ով և* $\bar{v}_r$*-ով կազմված անկյունը հավասար է 120°-ի։*

$\bar{w}_c$ *վեկտորի ուղղությունը որոշելու համար* $\bar{v}_r$ *հարաբերական արագության վեկտորը պրոյեկտում ենք պտտման առանց-*

12—2292

քին ուղղահայաց հարթության վրա և պտտում այդ պրոյեկցիան 90°-ի անկյան տակ փոխադրական պտտական շարժման կողմը, այսինքն՝ տվյալ դեպքում ժամացույցի սլաքի պտտմանը հակառակ ուղղությամբ։ Ինչպես երևում է գծագրից, $\bar{w}_c$ *արագացման վեկտորը ուղղված է* AMB *շրջանագծի շոշափողի ուղղությամբ դեպի փոխադրական արագության* $\bar{v}_e$ *վեկտորի հակառակ կողմը։*

Այս բոլոր արագացումների երկրաչափական գումարը հավասար է գնդի բացարձակ արագացման վեկտորին, այսինքն՝

$$\bar{w}_a=\bar{w}_{en}+\bar{w}_{r\tau}+\bar{w}_{rn}+\bar{w}_c\text{։}$$

Հաշվումները հեշտացնելու համար A *գնդի բոլոր արագացումները պրոյեկտենք կոորդինատական* ox, oy, oz *առանցքների վրա և հետո որոշենք բացարձակ արագացման մեծությունը հետևյալ բանաձևով՝*

$$w_a=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}\text{։}$$

Որոշենք արագացումների պրոյեկցիաների գումարը կոորդինատական առանցքների վրա՝

$$w_{ax}=w_{en}+w_{r\tau}\cos\alpha+w_{rn}\sin\alpha,$$
$$w_{ay}=w_c,$$
$$w_{az}=w_{rn}\cos\alpha-w_{r\tau}\sin\alpha\text{։}$$

Քանի որ այստեղ $\alpha=30°$, *ապա կունենանք՝*

$$w_{ax}=246{,}5+10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+200\cdot\frac{1}{2}=355\ \text{սմ/վրկ}^2,$$

$$w_{ay}=543{,}2\ \text{մ/վրկ}^2,$$

$$w_{az}=200\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-10\cdot\frac{1}{2}168\ \text{սմ/վրկ}^2\text{։}$$

Հետևաբար, կետի բացարձակ արագացման թվային արժեքը կլինի՝

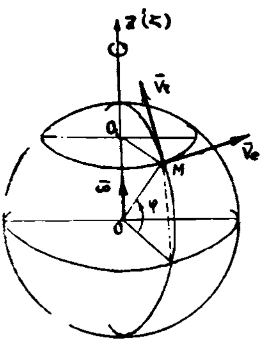
$$w_a=\sqrt{(355{,}1)^2+(543{,}2)^2+(168)^2}=671\ \text{սմ/վրկ}^2\text{։}$$

Պատ. $w_a=671\ \text{սմ/վրկ}^2$։

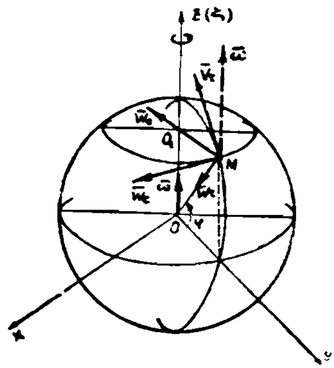
Խ ն դ ի ր 80։ *Մարմինը շարժվում է երկրի միջօրեականի ուղղությամբ հարավից դեպի հյուսիս* $v_r=u$ *հաստատուն (ըստ մեծության) համընթաց արագությամբ (գծ. 144)։ Գտնել մարմնի բացարձակ արագությունը և բացարձակ արագացումը, եթե նա գտնվում է հյուսիսային կիսագնդի φ լայնության վրա։ Տը-*

ված է երկրի ω անկյունային արագությունը և երկրի R շառավիղը (գծ. 144)։

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Մարմինը ընդունենք որպես մի M կետ։ Քանի որ երկիրը պտտվում է արևմուտքից արևելք, ապա $\bar{\omega}$ անկյունային արագության վեկտորը ուղղված կլինի երկրի առանցքով, հարավային բևեռից դեպի հյուսիսային բևեռ։ M կետը կատարում է բարդ շարժում՝ կազմված հարաբերական և փոխադրական շարժումներից։ Կետի շարժումը երկրի մակերևույթի նկատմամբ կլինի հարաբերական, իսկ երկրի պտույտն իր առանցքի շուրջը՝ փոխադրական։ M կետի $\bar{v}_r$ հարաբերական արագությունը հավասար է տված $\bar{u}$ վեկտորի մեծությանը, այսինքն՝ $v_r = u$։ M*



Գծ. 144



Գծ. 145

կետի $\bar{v}_e$ փոխադրական արագությունը հավասար է երկրի մակերևույթի այն կետի արագությանը, որի հետ տվյալ մոմենտում համընկնում է M կետը, այսինքն՝

$$\bar{v}_e = \bar{\omega} \times \overline{OM}։$$

$\bar{v}_e$ վեկտորի մոդուլը հավասար կլինի՝

$$v_e = MO_1 \cdot \omega = R\omega \cos\varphi,$$

որտեղ MO_1-ը զուգահեռականի շառավիղն է։

M կետի $\bar{v}_a$ բացարձակ արագության վեկտորը որոշելու համար նախ պետք է կառուցել $\bar{v}_r$ և $\bar{v}_e$ վեկտորները (գծ. 145) և այնուհետև գումարել այդ վեկտորները։ Այդ դեպքում կստանանք՝

$$\bar{v}_a = \bar{u} + \bar{\omega} \times \overline{OM}։$$

Քանի որ $\bar v_r=\bar u$ և $\bar v_e=\bar\omega\times\overline{OM}$ վեկտորները ուղղահայաց են, ապա $\bar v_a$ բացարձակ արագության մոդուլը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$v_e=\sqrt{u^2+\omega^2R^2\cos^2\varphi}\,։$$

Խնդրի պայմանի համաձայն M կետը շարժվում է միջօրեականով հավասարաչափ, որի հետևանքով նրա $\bar w_r$ հարաբերական արագացումը ուղղված կլինի դեպի երկրի կենտրոնը և թվային արժեքը կլինի՝

$$w_r=\frac{v_r^2}{R}=\frac{u^2}{R}\,։$$

M կետի $\bar w_e$ փոխադրական արագացումը ուղղված է զուգահեռականի շառավղով դեպի երկրի պտտման առանցքը, իսկ թվային արժեքը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$w_e=MO_1\cdot\omega^2=R\omega^2\cos\varphi\,։$$

M կետի կորիոլիսի

$$\bar w_c=2(\omega\times\bar v_r)=2(\bar\omega\times\bar u)$$

արագացումը ուղղահայաց է $\bar\omega$ և $\bar v_r$ վեկտորներով անցնող հարթությանը։ Այս վեկտորի ուղղությունը պարզելու համար ω վեկտորը փոխադրենք երկրի մակերևույթի տվյալ կետը։ Այդ դեպքում կտեսնենք, որ կորիոլիսի արագացումն ուղղված է զուգահեռականի շոշափողով դեպի արևմուտք։ Դժվար չէ նկատել, որ $\bar\omega$ և $\bar V_r$ վեկտորներով կազմված անկյունը հավասար է φ-ի։ Հետևաբար, M կետի կորիոլիսի արագացման թվային արժեքը հավասար կլինի՝

$$w_c=2\omega u\sin\varphi\,։$$

M կետի $\bar w_a$ բացարձակ արագացման վեկտորը հավասար կլինի՝

$$\bar w_a=\bar w_e+\bar w_r+\bar w_c\,։$$

Եթե պրոյեկտենք այս վեկտորական հավասարումը oxyz անշարժ կոորդինատական սիստեմի առանցքների վրա (գծ. 145), ապա կստանանք՝

$$w_{ax}=w_{ex}+w_{rx}+w_{cx}=2u\omega\sin\varphi,$$

$$w_{ay}=w_{ey}+w_{ry}+w_{cy}=-\left(R\omega^2+\frac{u^2}{R}\right)\cos\varphi,$$

$$w_{az}=w_{ez}+w_{rz}+w_{cz}=-\frac{u^2}{R}\sin\varphi\text{։}$$

Հետևաբար, M կետի $\bar{w}_a$ բացարձակ արագացման մոդուլը հավասար կլինի՝

$$w_c=\sqrt{w_{ax}^2+w_{ay}^2+w_{az}^2}=$$

$$=\sqrt{\left(4u^2\omega^2+\frac{u^4}{R^2}\right)\sin^2\varphi+\left(R\omega^2+\frac{u^2}{R}\right)^2\cos^2\varphi}\text{։}$$

Պատ. $v_a=\sqrt{u^2+\omega^2R^2\cos^2\varphi},$

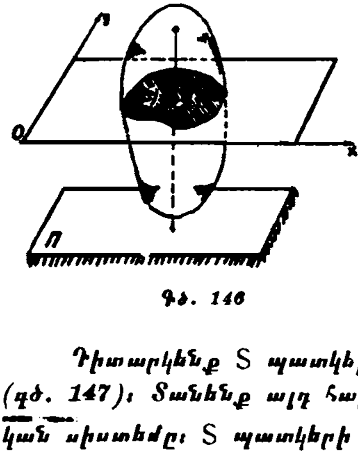
$$w_a=\sqrt{\left(4u^2\omega^2+\frac{u^4}{R^2}\right)\sin^2\varphi+\left(R\omega^2+\frac{u^2}{R}\right)^2\cos^2\varphi}\text{։}$$

ԳԼՈՒԽ ՉՈՐՐՈՐԴ

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱՐԹ ՇԱՐԺՈՒՄԸ

§ 10. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐԻ ԵՎ ՆՐԱ ԿԵՏԵՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Հարթ զուգահեռ (կամ հարթ) կոչվում է պինդ մարմնի այն շարժումը, որի դեպքում մարմնի բոլոր կետերը տեղափոխվում են որևէ անշարժ հարթությանը զուգահեռ (գծ. 146)։

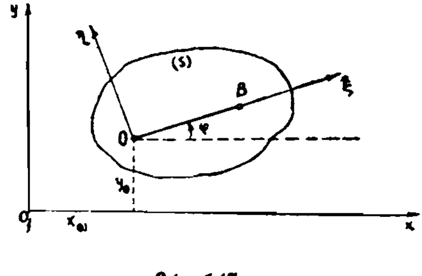


Գծ. 146

Տեխնիկայում օգտագործվող մեքենաների և մեխանիզմների էլեմենտների մեծ մասը կատարում է հարթ-զուգահեռ շարժում։

Հայտնի է, որ պինդ մարմնի հարթ-զուգահեռ շարժման ուսումնասիրությունը բերվում է հարթ պատկերի իր հարթության մեջ կատարած շարժման ուսումնասիրությանը։

Դիտարկենք S *պատկերի շարժումը իր հարթության մեջ (գծ. 147)։ Տանենք այդ հարթության վրա* xO_1y *կոորդինատական սիստեմը։* S *պատկերի վրա վերցնենք կամավոր մի* O *կետ և այն անվանենք բևեռ։ Այդ բևեռով տանենք* S *հատույթին ամրացված կոորդինատական* $O\xi$ *և* $O\eta$ *առանցքները, որոնք հատույթի հետ միասին շարժվում են անշարժ կոորդինատական* O_1xy *սիստեմի նկատմամբ։*



Գծ. 147

S հարթ պատկերի դիրքը անշարժ xO_1y հարթության վրա լիովին որոշվում է այդ պատկերի տված երկու կետերի դիրքով, օրինակ, O և B կետերով (գծ. 147) կամ ուղղի այն հատվածի դիրքով, որը միացնում է այդ երկու կետերը։ Այդ հատվածի դիրքը որոշվում է երեք պարամետրերով՝ նրա մի ծայրակետի կոորդինատներով և այդ հատվածի ու անշարժ առանցքի միջև կազմված φ անկյունով։ Այսպիսով, հարթ պատկերի դիրքը կամ շարժական $O\xi\eta$ սիստեմի դիրքը անշարժ xO_1y սիստեմի նկատմամբ որոշվում է O բևեռի (x_0, y_0) կոորդինատներով և շարժական $O\xi$ ու անշարժ O_1x առանցքների միջև կազմված φ անկյունով։ Հետևաբար, հարթ-զուգահեռ շարժում կատարող մարմինն ունի ազատության երեք աստիճան։

Եթե հարթ պատկերը շարժվում է xO_1y հարթության վրա, ապա x_0, y_0, φ մեծությունները փոփոխվում են կախված t ժամանակից։ Ընդունում ենք, որ այդ մեծությունները հանդիսանում են ժամանակի միարժեք, անընդհատ և առնվազն երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ.

$$x_0=f_1(t), \quad y_0=f_2(t), \quad \varphi=f_3(t)։ \qquad (I)$$

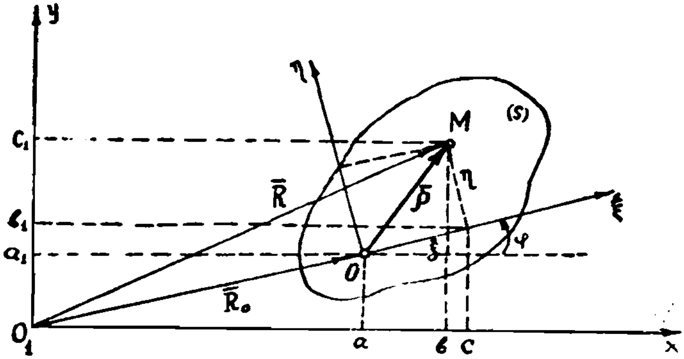
(I) հավասարումները, որոնք որոշում են հարթ պատկերի շարժումը անշարժ xO_1y հարթության վրա, կոչվում են պինդ մարմնի հարթ-զուգահեռ շարժման հավասարումներ։ Այստեղ $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ մեծությունները պինդ մարմնի ընդհանրացած կոորդինատներն են։ Եթե $\varphi=const$, ապա հարթ պատկերի հետ անշարժորեն ամրացված շարժական առանցքները կտեղափոխվեն իրենք իրենց զուգահեռ և, հետևաբար, այս դեպքում հարթ պատկերը կշարժվի համընթաց։ Եթե $x_0=const$, $y_0=const$, ապա շարժական առանցքների սկզբնակետը կլինի անշարժ և հարթ պատկերը կպտտվի O_1 կետով անցնող $O\xi\eta$ հարթությանը ուղղահայաց Z առանցքի շուրջը։ Ընդհանուր դեպքում, երբ x_0, y_0, φ մեծությունները փոփոխվում են ժամանակի ընթացքում, հարթ պատկերը կատարում է բարդ շարժում, կազմված համընթաց և պտտական շարժումներից։

Դիցուք հարթ պատկերը շարժվում է xO_1y անշարժ հարթության նկատմամբ։ Դիտարկենք այդ պատկերի կամավոր M կետի շարժումը (գծ. 148)։ Այդ կետի շառավիղ-վեկտորը անշարժ կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ նշանակենք $\overline{R}$, իսկ շարժական սիստեմի նկատմամբ՝ $\overline{\rho}$։

O_1OM վեկտորական եռանկյունուց ունենք

$$\overline{R} = \overline{R}_0 + \overline{\rho} \tag{II}$$

որտեղ $\overline{R}_0$-ն շարժական սիստեմի O սկզբնակետի շառավիղ-վեկտորն է O_1xy անշարժ սիստեմի նկատմամբ։



Գծ. 148

(II) առնչությունը կարելի է դիտել որպես M կետի շարժման վեկտորական հավասարում O_1xy սիստեմի նկատմամբ։

M կետի հետագծի պարամետրական հավասարումները գտնելու համար պրոյեկտենք (II) առնչությունը O_1x և O_1y առանցքների վրա։ Կստանանք՝

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \\ y &= y_0 + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi, \end{aligned} \tag{III}$$

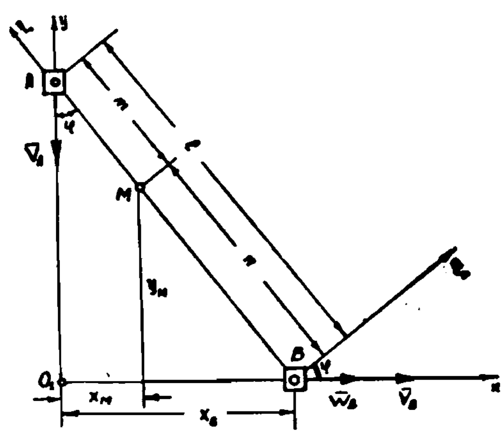
որտեղ x_0, y_0, φ-ն t ժամանակից կախված հայտնի ֆունկցիաներ են, ξ, η-ն M կետի կոորդինատներն են շարժական սիստեմի նկատմամբ, իսկ x,y-ը՝ M կետի կոորդինատները անշարժ սիստեմի նկատմամբ։ ξ և η կոորդինատները ժամանակից կախված չեն, այսինքն՝ $\xi=\mathrm{const}$, $\eta=\mathrm{const}$։ (III) առնչությունները հանդիսանում են հարթ պատկերի կամավոր M կետի շարժման հետագծի պարամետրական հավասարումները O_1xy անշարժ սիստեմի նկատմամբ։ Արտաքսելով այդ հավասարումներից t ժամանակը, կստանանք M կետի հետագծի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$F(x,y)=0։$$

Այս պարագրաֆի վերաբերյալ խնդիրները լուծելիս անհրաժեշտ է նախ ընտրել անշարժ և շարժական կոորդինատական սիստեմները և ապա կազմել հարթ պատկերի շարժման հավասարումները։ Իսկ եթե պահանջվում է որոշել հարթ պատկերի կետերի շարժման օրենքները, ապա x_0, y_0, φ-ի արժեքները պետք է տեղադրել (III) հավասարման մեջ։ Կետերի հետագծերը որոշելու համար պետք է արտաքսել t ժամանակը։

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Խ ն դ ի ր 81: $AB = l$ քանոնը իր A և B ծայրերով սահում է ուղիղ անկյան կողմերով (*գծ. 149*)։ B ծայրը սահում է $w_B = a = const$ արագացումով, ընդ որում B կետը սկզբնական մոմենտում գտնվել է O դիրքում և շարժումը սկսվել է հանգիստ վիճակից։ Գտնել AB քանոնի շարժման հավասարումները, որպես բևեռ ընդունելով B կետը։ Գտնել նաև քանոնի M կետի հետագիծը, եթե $AM = m$, $MB = n$ (*գծ. 149*)։



Գծ. 149

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ Տանենք O_1xy անշարժ և AB քանոնին ամրացված $B\xi\eta$ շարժական կոորդինատական սիստեմները գծագրում ցույց տրված ձևով։

AB քանոնի շարժման հավասարումները ընդհանուր դեպքում կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$x_B = f_1(t),$$
$$y_B = f_2(t),$$
$$\varphi = f_3(t),$$

որտեղ φ-ն O_1x և $B\xi$ առանցքների կազմած անկյունն է։ Քանի որ B կետը կատարում է ուղղագիծ հավասարաչափ արագացող շարժում x առանցքի ուղղությամբ, ապա (x_B, y_B) կոորդինատների համար կունենանք՝

$$x_B = \frac{at^2}{2},$$

$$y_B = 0.$$

Եռանկյունի AO_1B-ից ունենք՝

$$O_1B = x_B = l \sin \varphi,$$

այստեղից հետևում է, որ

$$\sin \varphi = \frac{x_B}{l} = \frac{at^2}{2l}. \tag{1}$$

Այսպիսով, AB քանոնի շարժման հավասարումները կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{at^2}{2}, \\ y_B &= 0, \\ \varphi &= \arcsin \frac{at^2}{2l}. \end{aligned} \tag{2}$$

Գրենք AB քանոնի M կետի շարժման հավասարումները ընդհանուր դեպքում՝

$$\begin{aligned} x &= x_B + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ y &= y_B + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

M կետի (ξ, η) կոորդինատները շարժական սիստեմում կլինեն՝

$$\xi = 0, \quad \eta = n. \tag{4}$$

Տեղադրելով (x_B, y_B) և (ξ, η)-ի արժեքները (2) և (4)-ից (3)-ի մեջ և նկատի ունենալով (1) առնչությունը, կստանանք M կետի շարժման հավասարումը պարամետրական տեսքով՝

$$\begin{aligned} x &= m \sin \varphi, \\ y &= n \cos \varphi. \end{aligned} \tag{5}$$

Հետագծի հավասարումը ստանալու համար (5) հավասարումներից պետք է արտաքսել φ անկյունը։ Արտաքսելուց հետո կստացվի՝

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$$

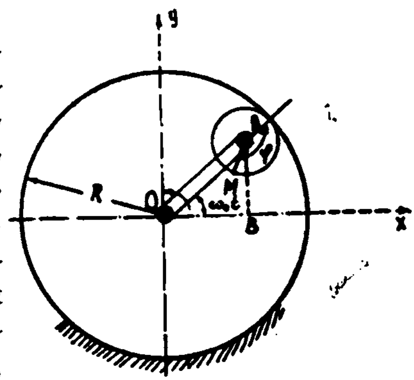
Հետևաբար, M կետի հետագիծը էլիպս է, որի կենտրոնը գտնվում է սկզբնակետում, իսկ կիսաառանցքները հավասար են m-ի և n-ի։

Պատ. *1) Քանոնի շարժման հավասարումներն են՝*

$$x_B=\frac{at^2}{2},\quad y_B=0,\quad \varphi=\arcsin\frac{at^2}{2},$$

2) M կետի հետագիծը՝ $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$։

Խ ն դ ի ր 82 *(494)։ R շառավիղ ունեցող անշարժ ատամնանվի ներսում պտտվող r շառավղով ատամնանիվը շարժման մեջ է դրվում OA մեղեխի միջոցով, որը պտտվում է հավասարաչափ ω_0 անկյունային արագությամբ։ Կազմել շարժական ատամնանիվների շարժման հավասարումները, ընդունելով որպես բևեռ նրա A կետը, եթե տված է, որ $t=0$ մոմենտում $\varphi_0=0$ (գծ. 150)։*



Գծ. 150

Լ ու ծ ու մ: *Շարժական ատամնանիվը կատարում է հարթզուգահեռ շարժում։ OA մեղեխը պտտվում է O առանցքի շուրջը ω_0 անկյունային արագությամբ։ Հետևաբար, t ժամանակամիջոցում մեղեխը իր սկզբնական հորիզոնական դիրքից կշեղվի $\omega_0 t$ անկյունով։ Եթե A բևեռի կոորդինատները նշանակենք x_0 և y_0, ապա $\triangle OAB$-ից կունենանք՝*

$$x_0=OA\cos\omega_0 t=(R-r)\cos\omega_0 t,$$

$$y_0=OA\sin\omega_0 t=(R-r)\sin\omega_0 t \qquad (1)$$

Ստացանք A բևեռի շարժման հավասարումը։ Շարժական ատամնանվի շարժման հավասարումները ստանալու համար մնում է գտնել A բևեռի շուրջը նրա պտտման φ անկյունը կախված t ժամանակից։

Շարժական ատամնանվի A բևեռի շուրջը կատարած պտտական շարժման անկյունային արագությունը նշանակենք ω, Ակնհայտ է, որ ω-ն տարբեր կլինի OA մեղեխի ω_0 անկյունային արագությունից։ Այստեղ շարժական ատամնանիվի և OA մեղեխի պտույտները կատարվում են հակառակ ուղղություններով։ Շարժական ատամնանիվի պտույտը կատարվում է բացասական ուղղությամբ, իսկ OA մեղեխինը՝ դրական։ Քանի որ շարժական ատամնանիվը պտտվում է առանց սահելու, հետևաբար, կունենանք՝

$$\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{R-r}{r},$$

որտեղից հետևում է, որ

$$\omega = -\frac{R-r}{r}\omega_0։$$

Եթե ω-ն փոխարինենք $\frac{d\varphi}{dt}$-ով և ինտեգրենք ու նկատի ունենանք խնդրում տված սկզբնական պայմանները, ապա կստանանք՝

$$\varphi = -\frac{R-r}{r}\omega_0 t։$$

Պատ. $x_0=(R-r)\cos\omega_0 t, \quad y_0=(R-r)\sin\omega_0 t,$

$$\varphi = -\left(\frac{R}{r} - 1\right)\omega_0 t,$$

որտեղ φ-ն շարժական ատամնանիվի պտտման անկյունն է. մինուս նշանը ցույց է տալիս, որ ատամնանիվը պտտվում է մեղեխի պտտման ուղղությանը հակառակ։

Խնդիր 83 *(498)*։ Պոսելյե-Լիպկինի ուղղորդը կամ ինվերսորը իրենից ներկայացնում է հոդակապային մեխանիզմ՝ բաղկացած a կողմ ունեցող ADBC շեղանկյունից, ընդ որում C և D գագաթները շարժվում են միևնույն շրջանագծով l երկարություն ունեցող OC և OD ձողերի օգնությամբ. B գագաթը շարժվում է մի այլ շրջանագծով՝ $r=CO_1$ երկարությամբ O_1B ձողի օգնությամբ։ Գտնել A գագաթի հետագիծը (գծ. 151)։

Լուծում: Տանենք xOy անշարժ կոորդինատական սիստեմը գծագիր 152-ում ցույց տրված ձևով։ A գագաթի x և y կոորդինատներն արտահայտենք φ անկյան միջոցով։

Դիտարկենք ODK և BKD եռանկյունները։ △ODK-ից ունենք՝

$$OK = l\cos\varphi, \quad KD = l\sin\varphi,$$

իսկ $\triangle BKD$*-ից՝*

$$KB = \sqrt{a^2 - KD^2} = \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi}.$$

Տված է, որ ACBD *քառանկյունին շեղանկյուն է, հետևաբար*

$$AK = KB.$$

Այժմ որոշենք OA*-ի մեծությունը։ Գծագրից երևում է, որ*

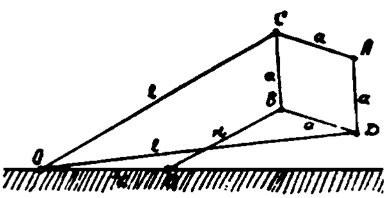
$$OA = OK + KA = OK + BK = l\cos\varphi + \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi}.$$

Եռանկյունի OAE*-ից կարող ենք գրել* A *գագաթի* x *և* y *կոորդինատների արտահայտությունները հետևյալ տեսքով՝*

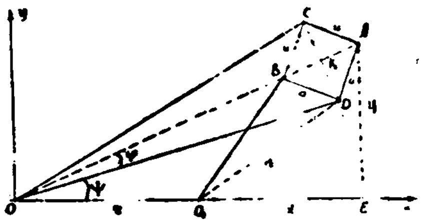
$$x = OA\cos(\varphi+\psi) = \left(l\cos\varphi + \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi}\right)\cos(\varphi+\psi), \qquad (1)$$

$$y = OA\sin(\varphi+\psi) = \left(l\cos\varphi + \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi}\right)\sin(\varphi+\psi), \qquad (2)$$

որտեղ $\psi = \angle O_1OD$*։ Մնում է* ψ *անկյունը արտահայտել* φ *անկյան միջոցով։*



Գծ. 151



Գծ. 152

Քանի որ $\triangle OO_1B$*-ն հավասարասրուն է, ապա կունենանք՝*

$$OB = 2r\cos(\varphi+\psi). \qquad (3)$$

Մյուս կողմից ունենք, որ

$$OB = OK - KB = l\cos\varphi - \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi}. \qquad (4)$$

(3) և (4) հավասարումներից կստանանք՝

$$2r\cos(\varphi+\psi) = l\cos\varphi - \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi}.$$

Այստեղից էլ ստացվում է, որ

$$\cos(\varphi+\psi) = \frac{1}{2r}\left(l\cos\varphi - \sqrt{a^2 - l^2\sin^2\varphi}\right).$$

Տեղադրելով (φ+ψ)-ի արժեքը (1)-ի և (2)-ի մեջ, կստանանք՝

$$x=(l\cos\varphi+\sqrt{a^2-l^2\sin^2\varphi})\frac{1}{2r}(l\cos\varphi-\sqrt{a^2-l^2\sin^2\varphi})=$$

$$=\frac{1}{2r}(l^2\cos^2\varphi-a^2+l^2\sin^2\varphi)=\frac{1}{2r}(l^2-a^2), \qquad (5)$$

$$y=(l\cos\varphi+\sqrt{a^2-l^2\sin^2\varphi})\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{1}{2r}\sqrt{4r^2-(l\cos\varphi-\sqrt{a^2-l^2\sin^2\varphi})^2}, \qquad (6)$$

Այսպիսով, ստացանք A *գագաթի* x *և* y *կոորդինատների արտահայտությունները, կախված* φ *անկյունից։ Հետագծի հավասարումն ստանալու համար բավական է* x *և* y*-ի (5) և (6) արտահայտություններից արտաքսել* φ *անկյունը։ Քանի որ այստեղ* x*-ը* φ*-ից կախված չէ, ապա* φ*-ի ցանկացած արժեքի դեպքում* x*-ը կմնա հաստատուն։ Այդպիսի կետերի երկրաչափական տեղը կլինի* oy *առանցքին զուգահեռ ուղիղ գիծ, որը հեռացված է* O *սկզբնակետից* $x=\frac{l^2-a^2}{2r}$ *հեռավորությամբ։*

Պատ. *Ուղիղ գիծ, որն ուղղահայաց է* OO_1*-ին և գտնվում է* O *կետից* $x=\frac{l^2-a^2}{2r}$ *հեռավորության վրա։*

Խնդիր 84 *(500)։ Կոնխոիդագրաֆը բաղկացած է* A *կետում սողնակի հետ միացած* AB *քանոնից։ Սողնակը սահում է* DE *ուղղագիծ փորվածքում։ Քանոնը անցնում է* N *անշարժ առանցքի շուրջը ազատ պտտվող դարձախողովակով.* N *առանցքի հեռավորությունը փորվածքի* ox *առանցքից հավասար է* a*-ի։ Գտնել* AB *քանոնի* M_1 *և* M_2 *կետերի գծած կորերի հավասարումները. եթե* $AM_1=a$ *և* $AM_2=\frac{a}{2}$*։*

Կոորդինատական առանցքները ցույց են տրված գծագրում (գծ. 153)։

Լուծում։ AB *քանոնի և* x *առանցքի կազմած անկյունը նշանակենք* φ *(գծ. 154)։* A *սողնակի շարժման հետևանքով* φ *անկյունը փոփոխվում է, հետևաբար նա ժամանակի ֆունկցիա է։* M_1 *կետի* (x, y) *կոորդինատներն արտահայտենք տված* a *մեծությամբ և* φ *անկյունով։ Գծագրից երևում է, որ*

$$x = OA - a\cos\varphi, \qquad (1)$$
$$y = a\sin\varphi։$$

$\triangle$ AON-ից ունենք

$$OA = \frac{a}{\mathrm{tg}\varphi}։ \qquad (2)$$

Տեղադրելով OA-ի արժեքը (2)-ից (1)-ի մեջ, կստանանք M_1 կետի շարժման հավասարումները հետևյալ տեսքով՝

$$x = \frac{a}{\mathrm{tg}\varphi} - a\cos\varphi, \qquad (3)$$
$$y = a\sin\varphi։ \qquad (4)$$

Հետագծի հավասարումը ստանալու համար (3) և (4) հավասարումներից պետք է արտաքսել φ անկյունը։ x-ի արտահայտությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sin\varphi} - a\cos\varphi = a\cos\varphi \cdot \frac{1-\sin\varphi}{\sin\varphi}։ \qquad (5)$$

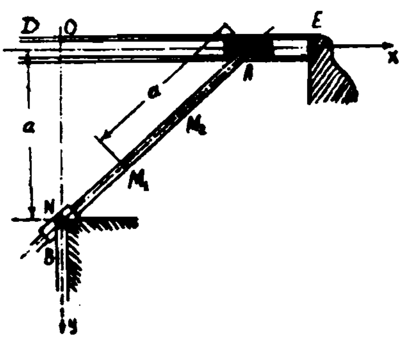
Տեղադրելով $\sin\varphi$-ի արժեքը (4)-ից (5)-ի մեջ, կստանանք՝

$$x = \frac{a-y}{y}\sqrt{a^2-y^2}։ \qquad (6)$$

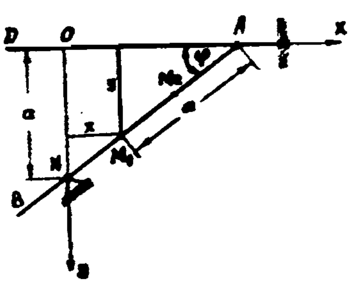
Այս (6) հավասարումը կարելի է տալ հետևյալ տեսքը՝

$$x^2y^2 = (a-y)^2(a^2-y^2)։$$

Սա չորրորդ կարգի կորի հավասարում է և կոչվում է կոնխոիդ։



Գծ. 153



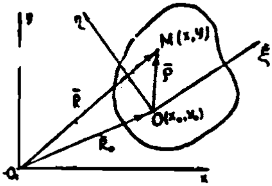
Գծ. 154

Նույն ձևով կարելի է ստանալ նաև M_2 կետի հետագծի հավասարումը։

Պատ. 1) $x^2y^2=(a-y)^2(a^2-y^2)$,
2) $4x^2y^2=(a-y)^2(a^2-4y^2)$։

§ 11. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐԻ ԿԵՏԵՐԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՀԱՐԹ ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ։ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿՆԹԱՐԹԱՅԻՆ ԿԵՆՏՐՈՆԸ

1. Հարթ պատկերի կետերի արագությունների որոշումը: *Դիցուք հարթ պատկերը շարժվում է անշարժ* xo_1y *կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ։ Այդ պատկերի որևէ* O *կետը ընդունենք որպես բևեռ։ Տանենք հարթ պատկերի հետ անշարժորեն միացած* $o\xi\eta$ *շարժական կոորդինատական սիստեմը (գծ. 155)։*



Գծ. 155

Եթե հարթ պատկերի կամավոր M *կետի շառավիղ-վեկտորը անշարժ* xo_1y *սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* $\bar{R}$, *շարժական* $o\xi\eta$ *սիստեմի նկատմամբ՝* $\bar{\rho}$, *իսկ* O *բևեռի շառավիղ-վեկտորը* xo_1y *սիստեմի նկատմամբ՝* $\bar{R}_0$, *ապա կունենանք՝*

$$\bar{R}=\bar{R}_0+\bar{\rho}\qquad (I)$$

Ածանցելով (I) *վեկտորական հավասարումը ըստ* t *ժամանակի, կստանանք՝*

$$\bar{v}_M=\bar{v}_0+\bar{\omega}\times\bar{\rho}\qquad (II)$$

Հարթ պատկերի M *կետի արագության* (II) *բանաձևը հաճախ գրում են հետևյալ տեսքով՝*

$$\bar{v}_M=\bar{v}_0+\bar{v}_{MO},\qquad (III)$$

որտեղ $\bar{v}_M$-*ը* M *կետի,* $\bar{v}_0$-*ն* O *բևեռի արագություններն են, իսկ* $\bar{v}_{MO}=\bar{\omega}\times\bar{\rho}$ M *կետի* O *բևեռի շուրջը կատարած պտտական շարժման արագությունն է, որի մեծությունը հավասար է* $v_{MO}=\omega\cdot OM$։

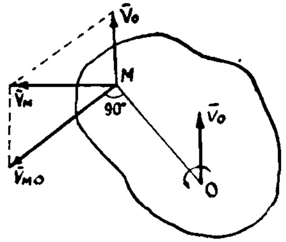
Այսպիսով, հարթ պատկերի որևէ M *կետի արագությունը կազմված է՝ 1) կամավոր ընտրված* O *բևեռի* $\bar{v}$ *արագությունից, որն ընդհանուր է պատկերի բոլոր կետերի համար և 2)* $\bar{v}_{MO}=\bar{\omega}\times\bar{\rho}$ *արագությունից, որն առաջանում է պատկերը* O *բևեռի շուրջը պտտելու հետևանքով (գծ. 156)։* $\bar{v}_{MO}$ *վեկտորը ուղղահայաց է* MO-*ին և ուղղված է պատկերի պտտման կողմը։*

Այս արդյունքը հնարավորություն է տալիս որոշելու պատկերի ցանկացած կետի արագությունը, երբ հայտնի է պատկերի որտեղ O կետի արագությունը և պատկերի $\bar{\omega}$ անկյունային արա-գությունը։

Մարմնի հարթ զուգահեռ շարժման արագության վերաբերյալ խնդիրների լուծման ժամանակ հաճախ կիրառվում է հետևյալ թեորեմը.

Հարթ պատկերի երկու կամավոր կետերի արագությունների պրոյեկցիաները այդ կետերը միացնող ուղղի վրա միմյանց հավասար են։

Այս թեորեմը անմիջականորեն հետևում է (III) բանաձևից։



Գծ. 156

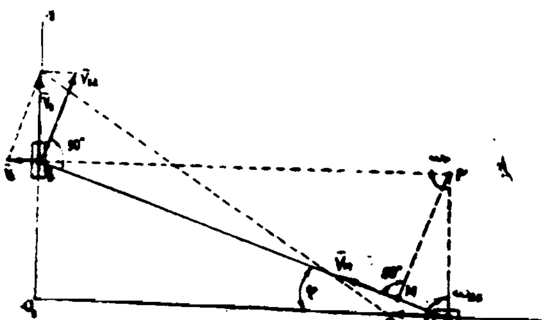
Եթե A-ն և B-ն հարթ պատկերի կամավոր կետերն են, ապա այդ կետերի արագությունների համար, վերը նշված թեորեմի համաձայն, կունենանք՝

$$\text{պր}_{AB}\bar{V}_B = \text{պր}_{AB}\bar{V}_A, \qquad \text{(IV)}$$

կամ

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha\text{։}$$

Խնդիր 85։ A և B սողնակները, որոնց ամրացված է էլիպսոգրաֆի l=AB երկարություն ունեցող քանոնը, տեղափոխվում են փոխուղղահայաց O_1x և O_1y ուղղիչներով (գծ. 157)։ Քանոնի A ծայրակետը շարժվում է O_1x առանցքի բացասական ուղղությամբ և այն մոմենտում, երբ O_1AB անկյունը հավասար է φ-ի, նրա արագությունը հայտնի է և մեծությամբ հավասար՝



Գծ. 157

v_A-ի: Պահանջվում է գտնել այդ մոմենտում քանոնի մյուս B ծայրակետի արագության մեծությունը և քանոնի անկյունային արագությունը:

Լուծում: AB *քանոնը կատարում է հարթ շարժում: A և B կետերի արագություններն ուղղված են O_1x և O_1y առանցքներով: A կետի $\bar{v}_A$ արագությունը հայտնի է թե՛ մեծությամբ և թե՛ ուղղությամբ: Այդ կետն ընդունենք որպես բևեռ: Քանոնի մյուս B ծայրակետի արագությունը կլինի՝*

$$\bar{v}_B=\bar{v}_A+\bar{v}_{BA}:$$

A բևեռի շուրջը B կետի կատարած պտտական շարժման $\bar{v}_{BA}$ արագության մեծության համար կունենանք՝

$$v_{BA}=\omega_A\cdot AB=\omega_A\cdot l, \qquad (1)$$

որտեղ ω_A-ն AB քանոնի A կետի շուրջը կատարած պտտման անհայտ անկյունային արագությունն է: $\bar{v}_{BA}$ արագությունը ուղղահայաց է AB քանոնին և ուղղված է դեպի նրա պտտման կողմը: Քանի որ A կետը շարժվում է O_1x առանցքով դեպի ձախ, ապա φ անկյունը այդ շարժման ընթացքում կաճի, հետևաբար, քանոնը կպտտվի ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ:

Այսպիսով, $\bar{v}_A$ վեկտորը մեզ հայտնի է թե՛ մեծությամբ և թե՛ ուղղությամբ, իսկ $\bar{v}_{BA}$ վեկտորը՝ ուղղությամբ: Այս $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_{BA}$ վեկտորների վրա կառուցենք զուգահեռակողմ (գծ. 157), որի անկյունագիծը կլինի որոնելի $\bar{v}_B$ արագությունը: Այդ զուգահեռակողմից հետևում է, որ

$$v_{BA}=\frac{v_A}{\sin\varphi}: \qquad (2)$$

(1) և (2) բանաձևերից ստացվում է, որ

$$\omega_A=\frac{v_A}{l\sin\varphi}:$$

$\bar{v}_B$ արագության մեծությունը որոշելու համար նպատակահարմար է օգտվել հարթ պատկերի երկու կետերի արագությունների պրոյեկցիաների թեորեմից՝

$$\text{պր}_{AB}\bar{v}_B=\text{պր}_{AB}\bar{v}_A,$$

կամ

$$v_B\sin\varphi=v_A\cos\varphi:$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$v_B=v_A\cdot\mathrm{ctg}\,\varphi:$$

Պատ. $v_B = v_A \cdot \operatorname{ctg}\varphi$, $\omega_A = \dfrac{v_A}{l \sin\varphi}$:

2. Հարթ պատկերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը: *Եթե հարթ պատկերը իր հարթության վրա կատարում է ոչ համընթաց շարժում ($\omega \neq 0$), ապա ժամանակի յուրաքանչյուր մոմենտում գոյություն կունենա մի կետ, որի արագությունը տվյալ մոմենտում հավասար լինի զրոյի:*

Այդ կետը կոչվում է հարթ պատկերի արագությունների ակնթարթային կենտրոն: Այն նշանակենք P տառով: Արագությունների ակնթարթային կենտրոնը հաճախ անվանում են նաև պտտման ակնթարթային կենտրոն:

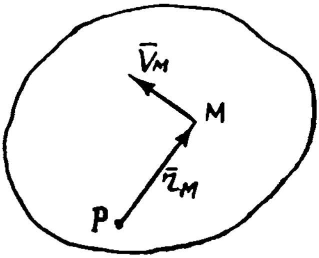
Հարթ պատկերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնի գտնելը էական նշանակություն ունի հարթ պատկերի կետերի արագությունները որոշելու համար:

Ակնթարթային կենտրոնի հայտնի լինելը հնարավորություն է տալիս որոշելու պատկերի ամեն մի կետի արագության ուղղությունը:

Եթե հարթ պատկերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը ընդունենք որպես բևեռ, ապա նրա կամավոր M կետի արագությունը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$\bar{v}_M = \bar{\omega} \times \bar{r}_M,$$

որտեղ $\bar{\omega}$-ն հարթ պատկերի անկյունային արագությունն է, իսկ $\bar{r}_M$-ը M կետի շառավիղ-վեկտորն է արագությունների ակնթարթային P կենտրոնի նկատմամբ (գծ. 158): *Հարթ պատկերի որևէ M կետի հեռավորությունը ակնթարթային P կենտրոնից կոչվում է այդ կետի ակնթարթային շառավիղ:*



Գծ. 158

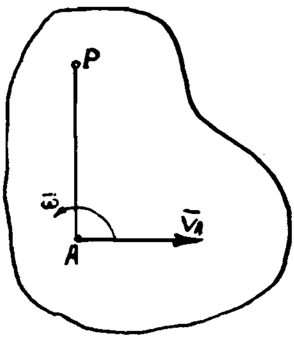
Այսպիսով, հարթ պատկերի բոլոր կետերը արագությունների ակնթարթային կենտրոնի շուրջը կատարում են պտտական շարժում, որի արագությունը ուղղահայաց է ակնթարթային շառավիղներին, իսկ յուրաքանչյուրի մեծությունը հավասար է պատկերի անկյունային արագության և համապատասխան ակնթարթային շառավղի արտադրյալին: Հարթ պատկերի կետերի ա-

րագությունների մեծությունները համեմատական են ակնթարթային շառավիղներին, այսինքն՝

$$\frac{V_B}{BP}=\frac{V_A}{AP}=\ldots=\omega:$$

3. Արագությունների ակնթարթային կենտրոնի դիրքը գտնելու եղանակները: *ա) Եթե տված է հարթ պատկերի որևէ* A *կետի* $\bar{v}_A$ *արագությունը մեծությամբ և ուղղությամբ ու միաժամանակ հայտնի են պատկերի պտտման ուղղությունն ու* ω *անկյունային արագությունը, ապա այդ պատկերի արագությունների ակնթարթային* P *կենտրոնը կգտնվի* A *կետում* $\bar{v}_A$ *արագությանը տարած* AP *ուղղահայացի վրա, ընդ որում* P *կետի հեռավորությունը* A *կետից որոշվում է*

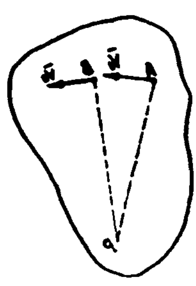
$$AP=\frac{v_A}{\omega}$$



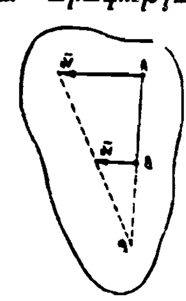
Գծ. 159

բանաձևով (գծ. 159)։ AP *ուղղահայացի ուղղությունը որոշելու համար անհրաժեշտ է* $\bar{v}_A$ *արագությունը պտտել* $\frac{\pi}{2}$ *անկյան տակ պատկերի պտտման ուղղությամբ։*

բ) Տված են հարթ պատկերի A *և* B *երկու կետերի արագությունների ուղղությունները (գծ. 160)։ Քանի որ հարթ պատկերի արագությունների ակնթարթային* P *կենտրոնը գտնվում է այդ պատկերի կամավոր կետում նրա արագության ուղղությանը տարած ուղղահայացի վրա, ուստի այս դեպքում պատկերի ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի* A *և* B *կետերում* $\bar{v}_A$ *և* $\bar{v}_B$ *արագություններին տարած ուղղահայացների հատման* P *կետում (գծ. 160)։*



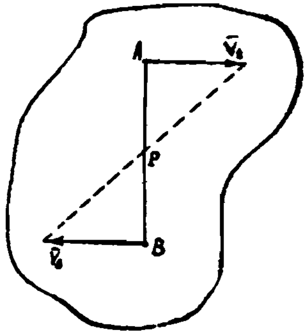
Գծ. 160



Գծ. 161

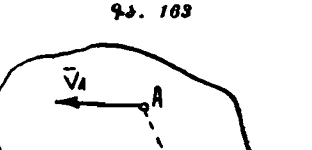
գ) Եթե հարթ պատկերի A *և* B *կետերի արագությունները ուղղահայաց են այդ կետերը* միացնող AB հատվածին, ապա պատկերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնի դիրքը որոշելու համար անհրաժեշտ է իմանալ նաև այդ արագությունների մեծությունները։ Այս դեպքում, եթե $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_B$ արագությունները ուղղված են նույն կողմը, ապա պատկերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի AB հատվածի շարունակության վրա (գծ. 161), իսկ եթե $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_B$ արագությունները ուղղված են տարբեր կողմեր, ապա ակնթարթային P կենտրոնը կգտնվի AB հատվածի վրա (գծ. 162)։ Այդ դեպքում P կենտրոնի դիրքը որոշվում է հետևյալ առնչությունից՝

$$\frac{\bar{v}_A}{v_B}=\frac{AP}{BP},$$



Գծ. 162

դ) Հարթ պատկերը գլորվում է անշարժ կորով, առանց սահելու (գծ. 163)։ Այս դեպքում արագությունների ակնթարթային P կենտրոնը կգտնվի պատկերի և կոր գծի հպման կետում։

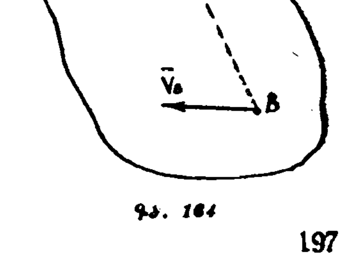


Գծ. 163

Եթե հարթ պատկերի երկու կետերի արագությունները զուգահեռ են և ուղղահայաց չեն այդ կետերը միացնող հատվածին (գծ. 164), կամ զուգահեռ են, թվային արժեքներով իրար հավասար և միաժամանակ ուղղահայաց այդ կետերը միացնող հատվածին (գծ. 165), ապա հարթ պատկերի անկյունային արագությունը տվյալ պահին հավասար կլինի զրոյի, և պատկերը կկատարի ակնթարթային համընթաց շարժում։

Հարթ պատկերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կարելի է գտնել նաև անալիտիկորեն.

4. Հարթ պատկերի կետերի արագությունների որոշումը անալիտիկ եղանակով։ Դիցուք հարթ պատկերը շարժվում է O_1xy անշարժ կոորդինատային սիստեմի նկատմամբ (գծ. 148)։



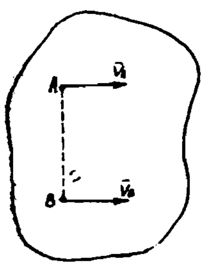
Գծ. 164

Ինչպես տեսանք վերևում, հարթ

պատկերի կամավոր M կետի արագությունը որոշվում է (II) բանաձևով։ Տեղադրելով $\vec{\rho}$-ի արժեքը (I)-ից (II)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\bar{v}_M = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times (\bar{R} - \bar{R}_0), \qquad (V)$$

Եթե M կետի $\bar{v}_M$ արագության պրոյեկցիաները անշարժ սիստեմի նկատմամբ նշանակենք (v_x, v_y), $\bar{v}_0$-ի պրոյեկցիաները՝ $\left(\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}\right)$, M կետի կոորդինատները անշարժ սիստեմի նկատմամբ՝ (x, y), իսկ O բևեռի կոորդինատները (x_0, y_0), ապա պրոյեկտելով (V) վեկտորական հավասարումը O_1xy անշարժ սիստեմի առանցքների վրա, կստանանք՝



Գծ. 165

$$v_x = \frac{dx_0}{dt} - \omega(y - y_0),$$
$$v_y = \frac{dy_0}{dt} + \omega(x - x_0), \qquad (VI)$$

Այստեղ ω-ն անկյունային արագության պրոյեկցիան է շարժման հարթությանը ուղղահայաց z առանցքի վրա։

Անհրաժեշտ է նշել, որ (VI) բանաձևերը կարելի է ստանալ նաև կետի շարժման § 10-ի (III) հավասարումների դիֆերենցման միջոցով։

Եթե ρ վեկտորի պրոյեկցիաները $O\xi\eta$ շարժական սիստեմի առանցքների վրա նշանակենք (ξ, η), ապա պրոյեկտելով (II) վեկտորական հավասարումը շարժական սիստեմի առանցքների վրա, կստանանք՝

$$v_\xi = \frac{dx_0}{dt}\cos\varphi + \frac{dy_0}{dt}\sin\varphi - \omega\eta,$$
$$v_\eta = -\frac{dx_0}{dt}\sin\varphi + \frac{dy_0}{dt}\cos\varphi + \omega\xi, \qquad (VII)$$

5. Արագությունների ակնթարթային կենտրոնի դիրքի որոշումը անալիտիկ եղանակով։ *Եթե տված են հարթ պատկերի կետերի արագությունների պրոյեկցիաների (VI) և (VII) բանաձևերը, ապա հեշտությամբ կարելի է գտնել արագությունների ակնթարթային կենտրոնի կոորդինատները։ Եթե ակնթարթային կենտրոնի կոորդինատները անշարժ սիստեմի նկատմամբ նշա-*

նակենք (x_p, y_p), *ապա նկատի ունենալով, որ ակնթարթային կենտրոնի արագությունը տվյալ մոմենտում հավասար է զրոյի,* (VI)-*ից կստանանք՝*

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_o}{dt}-\omega(y_p-y_o)=O, \\
&\frac{dy_o}{dt}+\omega(x_p-x_o)=O\text{։}
\end{aligned}
\qquad \text{(VIII)}
$$

Լուծելով այս երկու հավասարումները, կորոշենք արագությունների ակնթարթային կենտրոնի (x_p, y_p) *կոորդինատները անշարժ սիստեմի նկատմամբ։ Այստեղ* (x_o, y_o)-*ն* O *բևեռի կոորդինատներն են, որոնք նախօրոք տված են։*

Նույն ձևով, եթե ակնթարթային կենտրոնի կոորդինատները շարժական $O\xi\eta$ *սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* (ξ_p, η_p), *ապա* (VII)-*ից կստանանք՝*

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_o}{dt}\cos\varphi+\frac{dy_o}{dt}\sin\varphi-\omega\eta_p=O, \\
&-\frac{dx_o}{dt}\sin\varphi+\frac{dy_o}{dt}\cos\varphi+\omega\xi_p=O\text{։}
\end{aligned}
\qquad \text{(IX)}
$$

Այս երկու հավասարումներից պետք է որոշել (ξ_p, η_p) *անհայտ մեծությունները։*

(VIII) *և* (IX) *բանաձևերից նպատակահարմար է օգտվել այն դեպքում, երբ տված են հարթ պատկերի շարժման հավասարումները։*

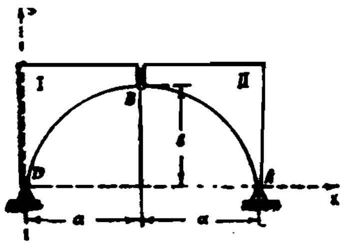
Ընդհանրապես հարթ պատկերի կետերի արագությունների որոշումը անալիտիկ եղանակով օգտակար է, եթե առանձին դժվարություն չի ներկայացնում հարթ պատկերի շարժման հավասարումների կազմումը։ Այս եղանակը հնարավորություն է տալիս որոշելու հարթ պատկերի կետերի արագությունները որպես t *ժամանակի ֆունկցիա։*

6. ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Խնդիր 86 *(504)։ Գտնել կամուրջի եռհոդակապ կամարի* I *և* II *մասերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնների դիրքերը, եթե դեֆորմացիայի հետևանքով* A *հենարանը ստանում է բավականաչափ փոքր տեղափոխություն՝ 1) հորիզոնա-*

կան ուղղությամբ, 2) ուղղաձիգ ուղղությամբ։ Կոորդինատական առանցքները և չափերը ցույց են տրված գծագրում (գծ. 166)։

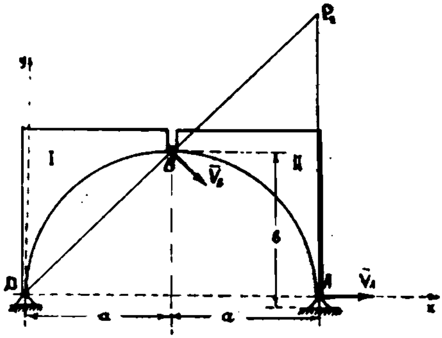
Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Նախ դիտարկենք առաջին դեպքը, երբ A կետը տեղափոխվում է հորիզոնական ուղղությամբ։ D կետը միշտ անշարժ է, հետևաբար, նա կհանդիսանա առաջին մասի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը։ B կետի $\bar{v}_B$ արագությունը ուղղահայաց է DB-ին, իսկ A կետի $\bar{v}_A$ արագությունը ուղղված է x առանցքով (գծ. 167)։ Քանի որ A և B կետերի արագությունների ուղղությունները հայտնի են, ուստի երկրորդ մասի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի A և B կետերում $\bar{V}_A$ և $\bar{V}_B$ արագություններին տարած ուղղահայացների հատման P_2 կետում (գծ. 167)։*



Գծ. 166

Այսպիսով, առաջին դեպքում, երբ A կետը տեղափոխվում է հորիզոնական ուղղությամբ, կամարի I և II մասերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնների կոորդինատները կլինեն՝

$$x_{cI}=0, \quad y_{cI}=0;$$
$$x_{cII}=2a, \quad y_{cII}=2b։$$



Գծ. 167

Այժմ դիտարկենք երկրորդ դեպքը, երբ A կետը տեղափոխվում է ուղղաձիգ ուղղությամբ։ Քանի որ D կետը միշտ մնում է անշարժ, ուստի նա կլինի առաջին մասի համար արագությունների ակնթարթային կենտրոնը։ B կետի $\bar{V}_B$ արագությունը ուղղահայաց է DB-ին, իսկ A կետի $\bar{v}_A$ արագությունը, խնդրի պայմանի համաձայն, զուգահեռ է Dy առանցքին։ Հետևաբար, կամարի երկրորդ մասի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի A և B կետերում $\bar{V}_A$ և $\bar{V}_B$ արագություններին տարած ուղղահայացների հատման D կետում (գծ. 168)։

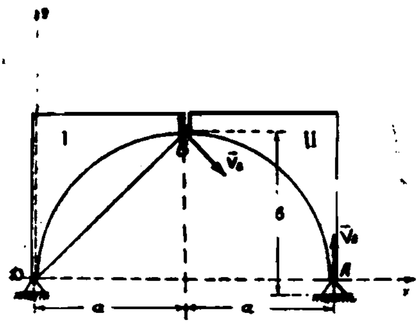
Նշանակում է այս դեպքում կամարի I *և* II *մասերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնների կոորդինատները կլինեն՝*

$$x_{cI}=0,\quad y_{cI}=0,\quad x_{cII}=0,\quad y_{cII}=0։$$

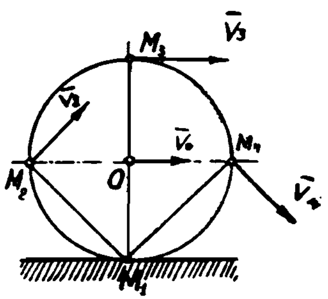
Պատ. *1)* $x_{cI}=0,\quad y_{cI}=0,\quad x_{cII}=2a,\quad y_{cII}=2b;$

2) $x_{cI}=0,\quad y_{cI}=0,\quad x_{cII}=0,\quad y_{cII}=0։$

Խնդիր 87 ***(510)։*** R=0,5 մ *շառավիղ ունեցող անիվը գլորվում է ճանապարհի ուղղագիծ մասով առանց սահելու։ Նրա կենտրոնի արագությունը հաստատուն է և հավասար* $\bar{V}_0=10$ մ/վրկ։



Գծ. 168



Գծ. 169

Գտնել անվի ուղղաձիգ և հորիզոնական տրամագծերի M_1, M_2, M_3 *և* M_4 *ծայրակետերի արագությունները, ինչպես նաև որոշել անվի անկյունային արագությունը (գծ. 169)։*

Լուծում: *Քանի որ անիվը գլորվում է առանց սահելու, ուստի նրա* M_1 *կետի արագությունը պետք է լինի նույնը, ինչ որ ռելսի* M_1 *կետինը։ Հետևաբար, անվի* M_1 *կետի արագությունը տվյալ մոմենտում հավասար է զրոյի* ($v_1=0$) *և այդ* M_1 *կետը հանդիսանում է անվի արագությունների ակնթարթային կենտրոն։*

Այդ դեպքում անվի կետերը M_1 *կետի նկատմամբ տվյալ մոմենտում կկատարեն պտտական շարժում, որի հետևանքով անվի կենտրոնի* v_0 *արագության համար կունենանք՝*

$$v_0=\omega\cdot MO։$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\omega=\frac{v_0}{MO}=\frac{10}{0,5}=20\ 1/\text{վրկ}։$$

Նույն ձևով անվի M_2, M_3 *և* M_4 *կետերի արագությունների համար կստանանք՝*

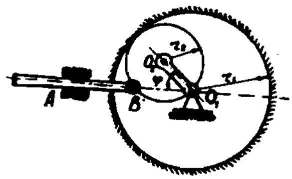
$$v_2 = \omega \cdot M_1M_2 = 20 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2} = 14{,}1 \text{ մ/վրկ},$$
$$v_3 = \omega \cdot M_1M_3 = 20 \cdot 1 = 20 \text{ մ/վրկ},$$
$$v_4 = \omega \cdot M_1M_4 = 20 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{2} = 14{,}1 \text{ մ/վրկ}.$$

Պատ. $\omega = 20$ 1/վրկ, $v_1 = 0$, $v_2 = v_4 = 14{,}1$ մ/վրկ, $v_3 = 20$ մ/վրկ։

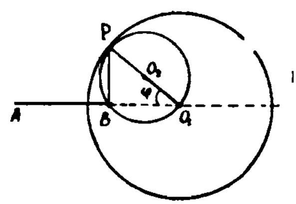
Խ ն դ ի ր 88 (*514*)։ $r_2 = 9$ սմ *շառավիղ ունեցող շրջանագիծը գլորվում է* $r_1 = 18$ սմ *շառավղով անշարժ շրջանագծի վրայով առանց սահելու։ Շարժական շրջանագծի հետ հոդակապով միացված* AB *ձողը շարժվում է հատուկ ուղղորդներում։ Որոշել* AB *ձողի արագությունը, երբ* $\varphi = 45°$, *եթե* O_1O_2 *ձողը կատարում է* $n = 180$ պտ/րոպ *(գծ. 170)։*

Լ ու ծ ու մ: AB *ձողի արագությունը որոշելու համար անհրաժեշտ է նախ գտնել շրջանագծին պատկանող* B *կետի արագության վեկտորը և ապա պրոյեկտել այն* AB*-ի ուղղության վրա։* O_2 *կենտրոն ունեցող շրջանագիծը կատարում է հարթ շարժում, որի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը գտնվում է* P *կետում (գծ. 171)։ Սա հետևում է նրանից, որ* P *կետի արագությունը տվյալ մոմենտում հավասար է զրոյի։ Գծագրից երևում է, որ* B *կետի* $\bar{v}_B$ *արագությունը ուղղահայաց է* PB*-ին, իսկ մեծությունը որոշվում է*

$$\frac{v_B}{v_{O2}} = \frac{PB}{r_2} \tag{1}$$



Գծ. 170



Գծ. 171

առնչությունից։ Դժվար չէ նկատել, որ PBO_1 *անկյունը ուղիղ է (որպես տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյուն)։ Այստեղից հետևում է, որ* B *կետի* $\bar{v}_B$ *արագությունը ուղղված կլինի* AB*-ով և* AB*-ի վրա պրոյեկտելու կարիք չկա։*

(1)-ից հետևում է, որ

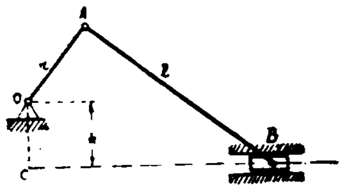
$$v_B = \frac{PB}{r_2} v_{o2} = \frac{r_1 \sin \varphi}{r_2}\, \omega(r_1 - r_2) = \frac{18 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{9} \cdot \frac{180\pi}{30} (18-9) =$$

$$= 239{,}87 \text{ սմ/վրկ։}$$

Պատ. $v_B = 239{,}87$ սմ/վրկ։

Խ ն դ ի ր 89 *(517)։ Գտնել արտակենտրոն մեղեխային մեխանիզմի B սողնակի արագությունը մեղեխի երկու հորիզոնական և երկու ուղղաձիգ դիրքերի դեպքում, եթե մեղեխը պտտվում է O լիսեռի շուրջը* $\omega = 1{,}5$ 1/վրկ *անկյունային արագությամբ։ Տված է* OA = 40 սմ, AB = 200սմ, OC = 20 սմ *(գծ. 172)*։

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Որոշենք B կետի արագությունը։ B կետը AB շարժաթևի և B սողնակի համար ընդհանուր կետ է։ AB շարժաթևը կատարում է հարթ-զուգահեռ շարժում, իսկ B սողնակը՝ ուղղագիծ շարժում։ Գտնենք AB և OA օղակների անկյունային արագությունների միջև եղած կապը։ Դրա համար որոշենք AB և OA օղակների ընդհանուր A կետի արագությունը, դիտելով այն մի անգամ որպես OA օղակին պատկանող, իսկ մյուս անգամ՝ AB շարժաթևին (գծ. 173)։ OA մեղեխը պտտվում է O կետով անցնող առանցքի շուրջը։ Հետևաբար, A կետի արագության մեծության համար կունենանք՝*



Գծ. 172

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA, \tag{1}$$

որտեղ ω_{OA}-*ն* OA *մեղեխի O կետով անցնող առանցքի շուրջը կատարած պտտման անկյունային արագությունն է։*

AB *շարժաթևի կետերի արագությունները գտնելու համար կառուցենք նրա արագությունների ակնթարթային կենտրոնը։ Ինչպես հայտնի է, այդ կենտրոնը կգտնվի* A *և* B *կետերի արագություններին այդ կետերում տարած ուղղահայացների հատման կետում։* A *կետի* $\bar{v}_A$ *արագությունը ուղղահայաց է պտտման* OA *շառավղին, իսկ* B *կետի* $\bar{v}_B$ *արագությունը ուղղված է* BC *ուղղով* (B *կետը շարժվում է* BC *ուղղով)։* PA *և* PB *ուղղահայացների հատման կետը կհանդիսանա* AB *մեղեխի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը (գծ. 173)։*

Գրենք A *կետի արագության արտահայտությունը, ընդունե-*

լով, որ A կետը պտտվում է P ակնթարթային կենտրոնի շուրջը՝

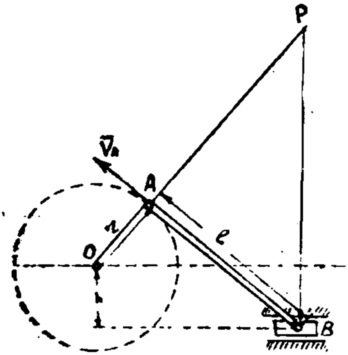
$$v_A = \omega_{AB} \cdot PA, \tag{2}$$

որտեղ ω_{AB}-ն AB շարժաթևի P կետով անցնող առանցքի շուրջը կատարած պտտական շարժման անկյունային արագությունն է։

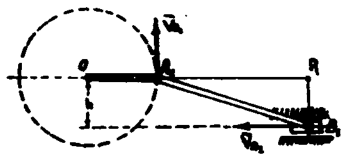
(1) և (2)-ից հետևում է, որ

$$\omega_{0A} \cdot OA = \omega_{AB} \cdot PA\text{։}$$

Այստեղից ստացվում է, որ



Գծ. 173



Գծ. 174

$$\omega_{AB} = \omega_{0A} \cdot \frac{OA}{PA}\text{։}$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot PB = \omega_{0A} \cdot \frac{OA \cdot PB}{PA}\text{։}$$

Այժմ անցնենք մեխանիզմի B սողնակի արագության որոշմանը։

Մեխանիզմի առաջին դիրքի համար (գծ. 174) կունենանք՝

$$P_1A_1 = \sqrt{AB^2 - h^2} = \sqrt{200^2 - 20^2} = 20\sqrt{99}\text{։}$$

$$v_1 = \omega_{0A} \cdot \frac{OA_1 \cdot P_1B_1}{P_1A_1} = 1{,}5 \cdot \frac{40 \cdot 20}{20\sqrt{99}} = 6{,}03 \text{ սմ/վրկ։}$$

$\bar{v}_B$ վեկտորի ուղղությունը որոշելու համար պետք է նկատի ունենալ այն հանգամանքը, որ $\bar{v}_B$-ն հանդիսանում է տվյալ մոմենտում P ակնթարթային կենտրոնի շուրջը B կետի կատարած պտտական շարժման արագությունը և, հետևաբար, ունի BP-ին տարած ուղղահայացի ուղղությունը։

Այժմ դիտարկենք մեխանիզմի երկրորդ դիրքը (գծ. 175)։

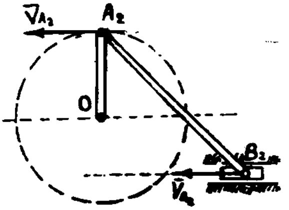
Այս դիրքում A և B կետերի արագություններին տարած ուղղահայացները զուգահեռ են։ Հետևաբար, շարժումը կլինի ակնթարթային համընթաց շարժում և կարող ենք գրել, որ

$$v_2 = v_{B2} = v_{A2} = \omega_{OA} \cdot OA = 1,5 \cdot 40 = 60 \text{ սմ/վրկ։}$$

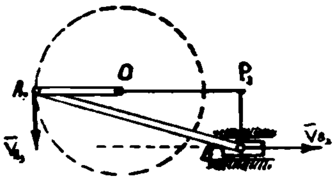
Մեխանիզմի III *դիրքի համար (գծ. 176) կունենանք՝*

$$v_3 = v_{B3} = \omega_{OA} \cdot \frac{OA \cdot P_3B_3}{P_3A_3} = 1,5 \cdot \frac{40 \cdot 20}{20\sqrt{99}} = 6,03 \text{ սմ/վրկ։}$$

Մեխանիզմի IV *դիրքի դեպքում (գծ. 177) շարժումը կլինի*



Գծ. 175

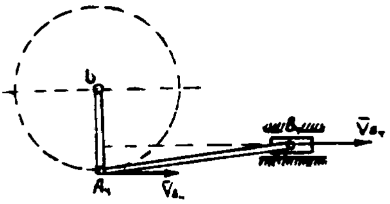


Գծ. 176

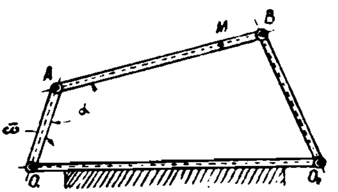
ակնթարթային համընթաց, ինչպես երկրորդ դեպքում էր, և B *կետի արագության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$v_4 = v_{B4} = v_{A4} = 60 \text{ սմ/վրկ:}$$

Պատ. $v_1 = v_3 = 6,03$ սմ/վրկ, $v_2 = v_4 = 60$ սմ/վրկ։



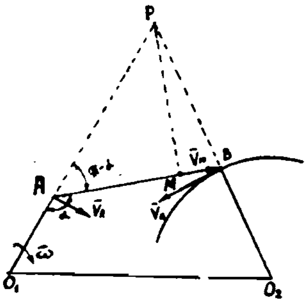
Գծ. 177



Գծ. 178

Խնդիր 90 *(521)։* O_1A *և* O_2B *ձողերը միացված են* AB *ձողի հետ* A *և* B *հոդակապերի միջոցով, որոնք կարող են պըտտվել* O_1 *և* O_2 *անշարժ կետերի շուրջը, մնալով միևնույն հարթության մեջ և կազմելով հոդակապային քառօղակ։ Տված են՝ ձողի երկարությունը* $O_1A = a$ *և նրա* ω *անկյունային արագությունը։ Կառուցման միջոցով որոշել ձողի այն* M *կետը, որի արագությունն ուղղված է այդ ձողով, ինչպես նաև գտնել* M *կետի* v *արագության մեծությունը այն մոմենտում, երբ* ∡ O_1AB*-ն ունի տված* α *մեծությունը (գծ. 178)։*

Լուծում: AB ձողի պահանջվող M կետի դիրքը և արագությունը որոշելու համար անհրաժեշտ է նախ կառուցել AB ձողի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը։ Այդ նպատակով որոշենք AB ձողի A և B կետերի արագությունները։ A կետը պտտվում է O_1 կետի շուրջը O_1A շառավղով, իսկ B-ն O_2 կետի շուրջը՝ O_2B շառավղով։ Հետևաբար, A կետի արագությունը ուղղահայաց կլինի O_1A ձողին, իսկ B կետի արագությունը՝ O_2B-ին։ A և B կետերի արագություններին տարած ուղղահայացները համընկնում են O_1A և O_2B ուղղությունների հետ, որոնք հատվում են P կետում (գծ. 179)։ Այսպիսով, AB ձողի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կլինի P կետը։ AB ձողի այն M կետը, որի արագությունը ուղղված է AB-ով, կլինի P կետից AB-ին իջեցրած PM ուղղահայացի հիմքը։



Գծ. 179

Այժմ որոշենք M կետի v_M արագության մեծությունը։ Դրա համար գրենք հետևյալ համեմատությունը՝

$$\frac{v_M}{v_A}=\frac{PM}{PA}։ \qquad (1)$$

Այս համեմատությունը ստանալու համար բավական է գրել P ակնթարթային կենտրոնի շուրջը M և A կետերի կատարած պտտական շարժման արագությունների մեծությունները և ապա դրանք բաժանել իրար վրա։

(1)-ից հետևում է, որ

$$v_M=\frac{PM}{PA}\cdot v_A։ \qquad (2)$$

$\triangle$ APM-ից ունենք՝

$$\frac{PM}{PA}=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha։$$

Հետևաբար, (2)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$v_M=v_A\sin\alpha, \qquad (3)$$

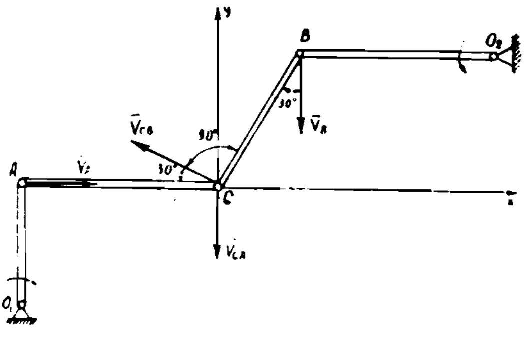
Բայց խնդրի պայմանի համաձայն

$$v_A = a\,.\,\omega\text{։} \tag{4}$$

Տեղադրելով (4)-ից v_A*-ի արժեքը (3)-ի մեջ, կստանանք* v_M*-ի արժեքը։*

Պատ. $v_M = a\omega \sin\alpha$։

Խ ն դ ի ր 91: *Զողային մեխանիզմը կազմված է 4 ձողերից, ընդ որում* O_1A *ձողը պտտվում է* ω_1 *անկյունային արագությամբ, իսկ* O_2B *ձողը՝* ω_2 *անկյունային արագությամբ։ Պտտումների ուղղությունները նշված են գծագրում։ Տվյալ մոմենտում* O_1A *ձողը ունի ուղղաձիգ դիրք,* AC *և* O_2B *ձողերը՝ հորիզոնական դիրք, իսկ* BC *ձողը կազմում է ուղղաձիգի հետ 30°-ի անկյուն։ Որոշել այդ մոմենտում* C *կետի արագությունը, եթե* $O_2B=b$, $O_1A=b\sqrt{3}$ *(գծ. 180)։*



Գծ. 180

Լ ու ծ ու մ: A *և* B *կետերի արագությունների մեծությունները կլինեն՝*

$$v_A = \omega_1\,.\,OA = \omega_1 b\sqrt{3},$$

$$v_B = \omega_2\,.\,OB = \omega_2 b\text{։}$$

$\bar{V}_A$ *և* $\bar{V}_B$ *ուղղությունները նշված են գծագրում։*

C *կետը միաժամանակ պատկանում է* AC *և* BC *օղակներին։ (II) բանաձևի համաձայն մի կողմից կստանանք՝*

$$\bar{V}_C = \bar{V}_A + \bar{V}_{CA}, \tag{1}$$

իսկ մյուս կողմից՝

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}\text{։} \tag{2}$$

Հավասարեցնելով (1) և (2) հավասարումների աջ մասերը, կստանանք՝

$$\bar{V}_A + \bar{V}_{CA} = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}\text{։} \tag{3}$$

$\bar{V}_{CA}$ *և* $\bar{V}_{CB}$ *վեկտորները ուղղահայաց են համապատասխանաբար* CA *և* CB*-ին, բայց նրանց ուղղությունները և մեծությունները անհայտ են։ Պայմանականորեն ընդունենք, որ այդ վեկտորները ուղղված են այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծա-*

գըրում։ Տանենք cxy կոորդինատական սիստեմը և պրոյեկտենք (3) վեկտորական հավասարումը այդ սիստեմի կոորդինատական առանցքների վրա։ Կստանանք՝

$$v_A = -v_{cB}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-v_{cA} = -v_B + v_{cB}\cdot\frac{1}{2}.$$

Առաջին հավասարումից ստացվում է՝

$$v_{cB} = -\frac{2}{\sqrt{3}}v_A.$$

Մինուս նշանը ցույց է տալիս, որ $\bar{v}_{cB}$ վեկտորը իրականում ուղղված է նախօրոք ընդունված ուղղությանը հակադիր։

Երկրորդ հավասարումից ստանում ենք՝

$$v_{cA} = v_B - v_{cB}\cdot\frac{1}{2} = v_B + \frac{v_A}{\sqrt{3}} = (\omega_1+\omega_2)b.$$

Քանի որ $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_{cA}$ արագությունները փոխուղղահայաց են, ապա (1)-ի համաձայն

$$v_c = \sqrt{v_A^2+v_{cA}^2}$$

կամ

$$v_c = b\sqrt{4\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_1\omega_2}.$$

Պատ. $v_c = b\sqrt{4\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_1\omega_2}$.

Խ ն դ ի ր 92 (524)։ Հանքի տեսակավորման համար ծառայող քարմաղի O_1A մեղեխը պտտվում է հավասարաչափ O_1 առանցքի շուրջը, կատարելով 60 պտ/րոպ։ AB ձողի միջոցով նա շարժումը հաղորդում է O_2 առանցքի շուրջը պտտվող O_2B մեղեխին։ Տրված է $O_1A=O_2B=AB=10$ սմ, $O_1O_2=4$ սմ։ Որոշել B կետի գծային արագությունը մեխանիզմի հետևյալ երեք դիրքերի համար՝ 1) A կետը գտնվում է O_1 և O_2 կենտրոնները միացնող գծի վրա, O_1-ից ձախ, 2) AB ձողը զուգահեռ է O_1O_2 գծին, 3) B կետը գտնվում է O_1O_2 գծի վրա, O_2-ից աջ (գծ. 181)։

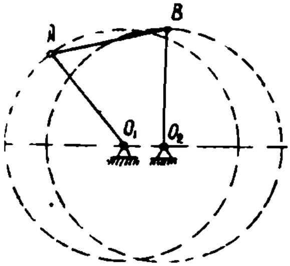
Լ ու ծ ու մ: Խնդիրը կարելի է լուծել որոշելով AB ձողի արագությունների ակնթարթային կենտրոնները մեխանիզմի բոլոր երեք դիրքերի համար։ Առաջին դիրքում (գծ. 182) AB ձողի արագությունների P_1 ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_B$

արագությունների A *և* B *կետերում տարած ուղղահայացների հատման* O_2 *կետում։ Հետևաբար,*

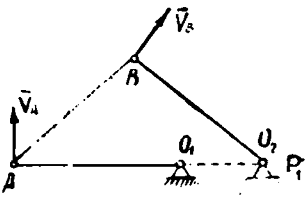
$$\frac{v_{1B}}{v_A} = \frac{O_2B}{O_1A},$$

որտեղ $\bar{V}_{1B}$*-ն* B *կետի արագությունն է առաջին դիրքում։* $\bar{V}_{1B}$*-ի մեծությունը կլինի՝*

$$v_{1B} = v_A \cdot \frac{O_2B}{O_1A},$$



Գծ. 181



Գծ. 182

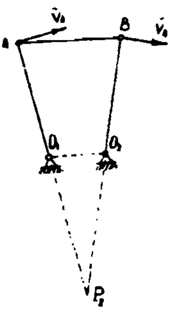
Խնդրում տված պայմանի համաձայն

$$v_A = \frac{\pi r n}{30} = \frac{3,14 \cdot 10 \cdot 60}{30} = 62,8 \text{ սմ/վրկ։}$$

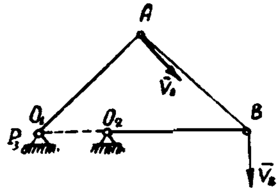
Հետևաբար,

$$v_1 = v_{1B} = 62,8 \cdot \frac{10}{14} = 44,9 \text{ սմ/վրկ։}$$

Մեխանիզմի երկրորդ դիրքում (գծ. 183) AB *ձողի արագությունների* P_2 *ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի* A *և* B *կետերից հավասար հեռավորության վրա։ Դրա հետևանքով* B *կետի արագությունը հավասար կլինի* A *կետի արագությանը, այսինքն՝*



Գծ. 183



Գծ. 184

$$v_2 = v_{2B} = v_A = 62,8 \text{ սմ/վրկ։}$$

Մեխանիզմի երրորդ դիրքում (գծ. 184) AB *ձողի արագու-*

14—2292

թյունների P_3 կենտրոնը կհամընկնի O_1 կետի հետ։ Այս դեպքում B կետի արագությունը որոշվում է հետևյալ առնչությունից՝

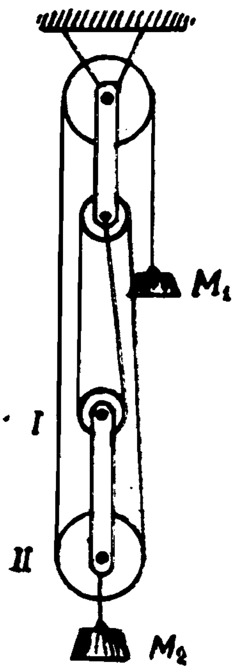
$$\frac{v_{3B}}{v_A}=\frac{O_1B}{O_1A},$$

Այստեղից էլ ստացվում է, որ

$$v_3=v_{3B}=v_A\cdot\frac{O_1B}{O_1A}=6{,}28\cdot\frac{14}{10}=88\text{։}$$

Պատ. $v_1=44{,}9$ սմ/վրկ, $v_2=62{,}8$ սմ/վրկ, $v_3=88$ սմ/վրկ։

Խ ն դ ի ր 93 *(527)։ Չորս ճախարակներից բաղկացած բազմաճախարակին կապված են M_1 և M_2 բեռները։ Որոշել շարժական պարույրի I և II ճախարակների ամենաստորին կետերի արագությունները, ճախարակների անկյունային արագությունները և M_2 բեռի v_2 արագությունը, եթե M_1 բեռը իջնում է $v_1=12$ սմ/վրկ արագությամբ, $r_1=6$ սմ, $r_2=9$ սմ (գծ. 185)։*



Գծ. 185

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Նախ որոշենք M_2 բեռի v_2 արագությունը։ Եթե M_2 բեռը բարձրանա $\triangle s_2$-ով, ապա ճախարակների վրա գցված պարանի 4 մասերից յուրաքանչյուրը կկարճանա նույն Δs_2-ով։ Հետևաբար, պարանի M_1 ծայրը կիջնի $\Delta s_1=4\Delta s_2$-ով։ Այս հավասարությունը բաժանելով Δt-ի վրա և անցնելով սահմանի, երբ $\Delta t\to 0$ կստանանք՝*

$$v_1=4v_2\text{։}$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$v_2=\frac{v_1}{4}=\frac{12}{4}=3\text{ սմ/վրկ։}$$

Այժմ որոշենք I ճախարակի ω_1 անկյունային արագությունը և նրա C կետի արագությունը։ Քանի որ ճախարակը կատարում է հարթ-զուգահեռ շարժում, ապա անհրաժեշտ է գտնել նրա արագությունների ակնթարթային կենտրոնը։ Ճախարակի P_1 կետի արագությունը տվյալ մոմենտում հավասար է զրոյի (գծ. 186), հետևաբար,

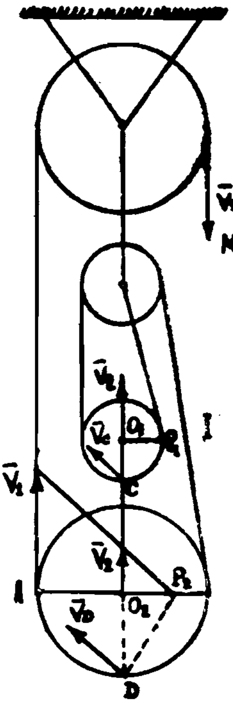
P_1-ը կլինի ճախարակի ակնթարթային կենտրոնը։ Եթե ճախարակի P_1 կենտրոնի շուրջը կատարած պտտման անկյունային արագությունը նշանակենք ω_1, ապա կունենանք՝

$$\omega_1 = \frac{v_2}{r_1} = \frac{3}{6} = 0{,}5 \ 1/\text{վրկ։}$$

C կետը ակնթարթային P_1 կենտրոնի շուրջը կատարում է պտտական շարժում, հետևաբար v_c արագության մեծությունը կլինի՝

$$v_c = \omega_1 \cdot P_1C = \omega_1 \cdot r_1\sqrt{2} = 0{,}5 \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} =$$
$$= 4{,}24 \ \text{սմ/վրկ։}$$

II ճախարակի պտտման ω_2 անկյունային արագությունը որոշելու համար անհրաժեշտ է նախ գտնել նրա արագությունների ակնթարթային կենտրոնը (ակնհայտ է, որ II ճախարակը նույնպես կատարում է հարթ-զուգահեռ շարժում)։ II ճախարակի O_2 կենտրոնի $\bar{v}_2$ և A կետի արագությունները զուգահեռ են, ուղղված են նույն կողմը և թվապես իրարից տարբեր են։ Հետևաբար, II ճախարակի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի $\bar{v}_1$ և $\bar{v}_2$ արագությունների ծայրակետերը միացնող գծի և $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ արագություններին A և O_2 կետերում տարած ընդհանուր AO_2 ուղղահայացի հատման P_2 կետում (գծ. 187)։ Ստացված AMP_2 և O_2NP_2 (գծ. 187) եռանկյունների նմանությունից հետևում է, որ



գծ. 186

$$\frac{AP_2}{O_2P_2} = \frac{v_1}{v_2} = 4\text{։}$$

Այստեղից ստացվում է

$$AP_2 = 4 \cdot O_2P_2\text{։} \qquad (1)$$

Մյուս կողմից ունենք՝

$$AP_2 = r_2 + O_2P_2\text{։} \qquad (2)$$

(1) և (2)-ից հետևում է, որ

$$O_2P_2=3 \text{ սմ։}$$

II *ճախարակի անկյունային արագությունը կլինի՝*

$$\omega_2=\frac{v_2}{O_2P_2}=\frac{3}{3}=1 \ 1/\text{վրկ։}$$

II *ճախարակի* D *կետի արագությունը՝*

$$v_D=\omega_2 \cdot P_2D,$$

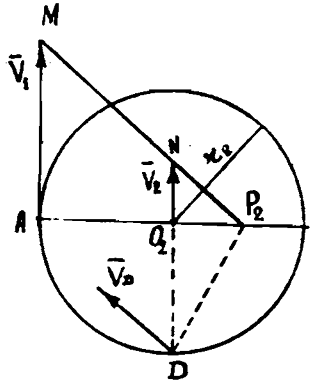
իսկ ΔO_2P_2D*-ից՝*

$$P_2D=\sqrt{r_2^2+\frac{r_2^2}{9}}=\frac{r_2}{3}\cdot\sqrt{10},$$

Հետևաբար,

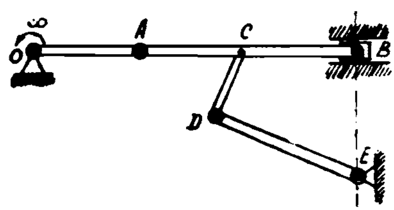
$$v_D=\omega_2\cdot\frac{r_2}{3}\sqrt{10}=1\cdot 3\sqrt{10}=9{,}49 \text{ սմ/վրկ։}$$

Պատ. $v_c=4{,}24$ սմ/վրկ, $v_D=9{,}49$ սմ/վրկ $\omega_1=0{,}5$ 1/վրկ, $\omega_2=1$ 1/վրկ, $v_2=3$ սմ/վրկ։



Գծ. 187

Խնդիր 94 *(530)։ Մեղեխաշարժաթևային մեխանիզմը իր շարժաթևի* C *միջնակետում միացված է* CD *ձողի հետ, իսկ վերջինս՝* E *կետի*



Գծ. 188

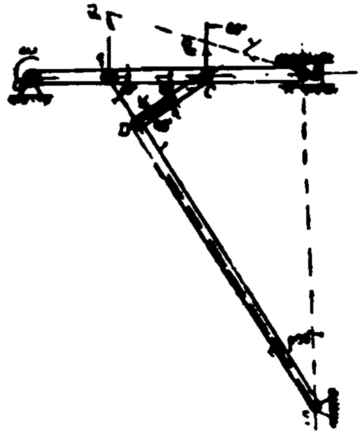
շուրջը պտտվող DE *ձողի հետ։ Որոշել* DE *ձողի անկյունային արագությունը մեխանիզմի գծագրում ցույց տրված դիրքում, եթե* B *և* E *կետերը գտնվում են մի ուղղաձիգի վրա.* OA *մեղեխի* ω *անկյունային արագությունը հավասար է* 8 1/վրկ, OA=25 սմ, DE=100 սմ, $\angle CDE=90°$, $\angle BED=30°$ *(գծ. 188)։*

Լուծում: OA *մեղեխի* A *կետի արագության մեծությունը կլինի՝*

$$v_A = \omega_A \cdot r = 8 \cdot 25 = 200 \text{ սմ/վրկ։}$$

OA մեղեխը պտտվում է O կետի շուրջը ժամացույցի սըլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Հետևաբար, $\bar{v}_A$ արագությունը ուղղահայաց կլինի OA-ին և ուղղված դեպի վեր (գծ. 189)։

AB շարժաթևի B կետի արագությունը հավասար է զրոյի, քանի որ տվյալ մոմենտում $\bar{v}_A$ արագությունը ուղղահայաց է AB-ին, իսկ B կետի արագությունը ուղղված է AB-ով։ Հետևաբար, տվյալ մոմենտում B կետը հանդիսանում է AB շարժաթևի արագությունների ակընթարթային կենտրոն։ Այստեղից էլ հետևում է, որ շարժաթևի յուրաքանչյուր կետի արագությունը համեմատական է շարժաթևի B ակնթարթային կենտրոնից ունեցած հեռավորությանը։ AB շարժաթևի C միջնակետի արագությունը կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևի միջոցով.



Գծ. 189

$$v_c = v_A \cdot \frac{CB}{AB} = 200 \cdot \frac{1}{2} = 100 \text{ սմ/վրկ։}$$

D կետի արագությունը ուղղահայաց է DE ձողին։ Քանի որ DC ձողը ուղղահայաց է DE-ին, ուստի D կետի արագությունը ուղղված կլինի DC ձողով։ D կետի արագությունը կարելի է որոշել օգտագործելով DC ձողի երկու կետերի արագությունների պրոյեկցիաների թեորեմը։ Պրոյեկտելով D և C կետերի արագությունները DC ուղղի վրա, կստանանք՝

$$v_D = v_C \cos 60^\circ,$$

կամ

$$v_D = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50 \text{ սմ/վրկ։}$$

Մյուս կողմից ունենք, որ

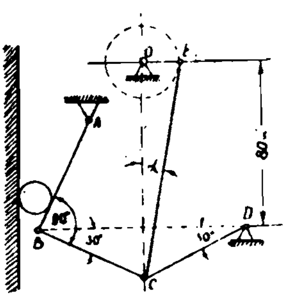
$$v_D = \omega_{DE} \cdot l\text{։}$$

Այստեղից էլ հետևում է, որ

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{l} = \frac{50}{100} = 0,5\ 1/\text{վրկ}$$

Պատ. $\omega_{DE} = 0,5\ 1/\text{վրկ}$

Խ ն դ ի ր 95 *(533)։ Բարշարդիչի* 60 սմ *երկարություն ունեցող* AB *շարժական այտը ճոճվում է* A *կենտրոնի շուրջը* 10 սմ *երկարություն ունեցող* OE *մեղեխի միջոցով։ Մեղեխը կատարում է* 100 պտ/րոպ *և հաղորդում է* AB-*ին շարժում՝* CE-*ի և* BC *ու* CD *լծակների սիստեմի միջոցով։* BC *և* CD *լծակներից յուրաքանչյուրի երկարությունը հավասար է* 40 սմ։ *Որոշել* AB *այտի անկյունային արագությունը այն դիրքում, որը ցույց է տրված գծագրում (գծ. 190)։*



Գծ. 190

Լ ու ծ ու մ: AB *այտի* ω *անկյունային արագությունը որոշելու համար նախ գտնենք* B *կետի* $\bar{v}_B$ *արագությունը։ Այդ դեպքում* ω-*ն կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝*

$$\omega = \frac{v_B}{AB}, \qquad (1)$$

$\bar{v}_B$ *արագությունը գտնելու համար օգտվենք՝*

$$v_B \cos\beta = v_c \cos\gamma \qquad (2)$$

բանաձևից, որտեղ β-*ն և* γ-*ն* $\bar{v}_B$ *և* $\bar{v}_C$ *արագությունների կազմած անկյուններն են* BC *ձողի հետ։ Տվյալ դեպքում* $\bar{v}_B$ *արագությունը ուղղված է* BC-*ով* ($\beta=0$), *իսկ* C *կետի* $\bar{v}_c$ *արագությունը՝* BC *ի հետ կազմում է 30°-ի անկյուն* ($\gamma=30°$), *քանի որ* $\bar{v}_c \perp$ $\overline{CD}$-*ին, իսկ* $\measuredangle DCB=120°$, *Հետևաբար, (2)-ից կունենանք՝*

$$v_B = v_c \cos 30°,$$

Բայց C *կետի արագությունը տված չէ։ Այն գտնելու համար պետք է որոշել* E *կետի արագությունը և ուղղաձիգի հետ* CE *մեղեխի կազմած անկյունը։*

Նախապես որոշենք E *կետի արագությունը՝*

$$v_E = \frac{\pi r n}{30} = \frac{\pi \cdot 10 \cdot 100}{30} = \frac{100\pi}{3}\ \text{սմ/վրկ},$$

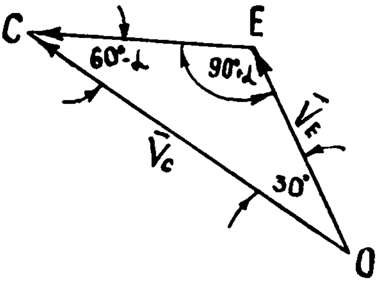
Այնուհետև որոշենք CE *մեղեխով և* CO-*ով կազմված* α *անկյունը՝*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{OE}{OC} = \frac{OE}{80+CD\sin30^\circ} = \frac{10}{80+40\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{10},$$

Մյուս կողմից C կետի արագության համար կունենանք՝

$$\bar{v}_C = \bar{v}_E + \bar{v}_{CE}. \qquad (3)$$

Կառուցենք (3) առնչության համապատասխան վեկտորական COE *եռանկյունին (գծ. 191)։ Այս եռանկյան անկյունները հայտնի են։* v_c *արագությունը որոշելու համար գրենք սինուսների թեորեմը՝*



Գծ. 191

$$\frac{v_c}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{v_E}{\sin(60^\circ-\alpha)},$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$v_c = v_E\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin 60^\circ\cos\alpha-\cos 60^\circ\cdot\sin\alpha} = \frac{200\pi}{3(\sqrt{3}-0,1)} \text{ սմ/վրկ}.$$

Տեղադրելով v_c*-ի այս արժեքը (2)-ի մեջ, կորոշենք* B *կետի* $\bar{v}_B$ *արագության մեծությունը՝*

$$v_B = \frac{200\pi}{3(\sqrt{3}-0,1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{100\sqrt{3}\,\pi}{3(\sqrt{3}-0,1)} \text{ սմ/վրկ}.$$

Հետևաբար, AB *այտի անկյունային արագությունը կլինի՝*

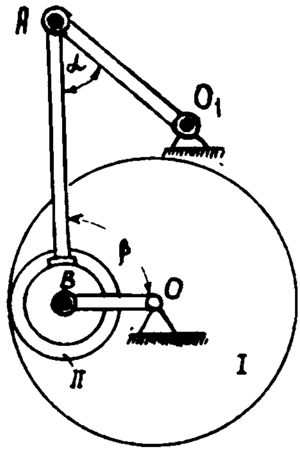
$$\omega = \frac{v_B}{AB} = \frac{100\sqrt{3}\cdot\pi}{60(\sqrt{3}-0,1)} = 1,852 \ 1/\text{վրկ}.$$

Պատ. $\omega=1,852$ 1/վրկ։

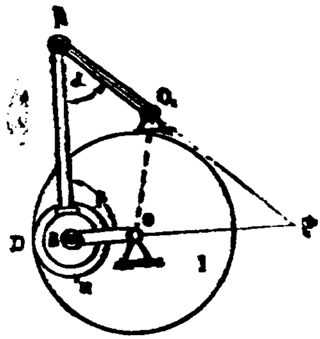
Խ ն դ ի ր 96 (*537*)։ *Պլանետար մեխանիզմը բաղկացած է* AB *շարժաթևը շարժող* O_1A *մեղեխից,* OB *լծակից և* $r_1=25$ սմ *շառավիղ ունեցող* I *ատամնանիվից։* AB *շարժաթևը վերջանում է* $r_2=10$ սմ *շառավղով և նրա հետ կոշտ կերպով միացված* II *ատամնանիվով։ Որոշել* O_1A *մեղեխի և* I *անվի անկյունային արագությունները այն մոմենտում, երբ* $\alpha=45^\circ$, $\beta=90^\circ$, *եթե* $O_1A=30\sqrt{2}$ սմ, $AB=150$ սմ, OB *լծակի անկյունային արագությունը* $\omega=8$ 1/վրկ (*գծ. 192*)։

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Տված է* OB *լծակի երկարությունը և պտըտ-*

ժան անկյունային արագությունը։ Հետևաբար, կարելի է որոշել լծակի B կետի արագությունը։ Բայց B կետը միաժամանակ պատկանում է AB շարժաթևին, որի հետ կոշտ կերպով ամրացված է II ատամնանիվը։ AB շարժաթևի A կետը միաժամանակ պատկանում է O_1A մեղեխին, որի հետևանքով A կետի արագությունը հայտնի կլինի մեխանիզմի ցանկացած դիրքում։



Գծ. 192



Գծ. 193

Այսպիսով, հայտնի է հարթ-զուգահեռ շարժում կատարող AB շարժաթևի A կետի արագության ուղղությունը ($\bar{v}_A \perp O_1A$) և B կետի արագության մեծությունն ($v_B = \omega \cdot OB$) ու ուղղությունը ($\bar{v}_B \perp OB$)։ Քանի որ այս $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_B$ արագությունները զուգահեռ չեն, ապա AB շարժաթևի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի A և B կետերում $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_B$ արագություններին տարած O_1A և OB ուղղահայացների հատման P կետում (գծ. 193)։

Այժմ որոշենք A և D կետերի արագությունների մեծությունները։ Դրա համար գրենք հետևյալ համեմատությունները՝

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{PA}{PB}, \qquad \frac{v_D}{v_B} = \frac{PD}{PB}, \tag{1}$$

Գծագրից երևում է, որ

$$PA = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{150}{\cos 45^\circ} = 150\sqrt{2}\ \text{սմ},$$
$$PB = AB \cdot \operatorname{tg}\alpha = 150 \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ = 150\ \text{սմ}։ \tag{2}$$

B կետի արագության թվային արժեքի համար ունենք՝

$$v_B = \omega \cdot OB = \omega(r_1 - r_2) = 8(25-10) = 120 \text{ սմ/վրկ։} \qquad (3)$$

Տեղադրելով PA, PB *և* v_B*-ի արժեքները (2)-ից և (3)-ից (1)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$v_A = \frac{PA}{PB} \cdot v_B = \frac{150 \cdot \sqrt{2}}{150} \cdot 120 = 120\sqrt{2} \text{ սմ/վրկ,}$$

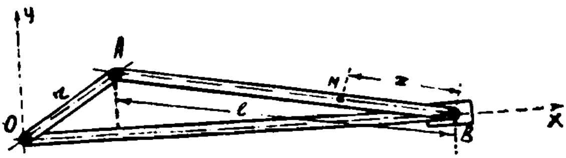
$$v_D = \frac{PD}{PB} \cdot v_B = \frac{PB + BD}{PB} \cdot v_B = \frac{150+10}{150} \cdot 120 = 128 \text{ սմ/վրկ։}$$

Եթե I *ատամնանվի անկյունային արագությունը նշանակենք* ω_1*, իսկ* O_1A *մեղխի անկյունային արագությունը* ω_0*, ապա կունենանք՝*

$$\omega_1 = \frac{v_D}{r_1} = \frac{128}{25} = 5{,}12 \text{ 1/վրկ,}$$

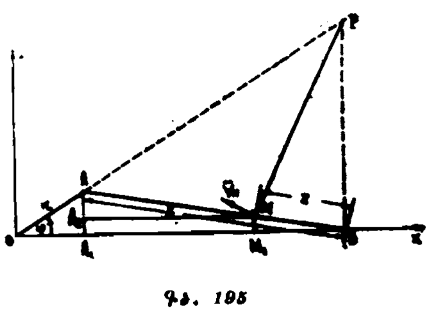
$$\omega_0 = \frac{v_A}{O_1A} = \frac{120\sqrt{2}}{30\sqrt{2}} = 4 \text{ 1/վրկ։}$$

Պատ. $\omega_1 = 5{,}12$ 1/վրկ, $\omega_0 = 4$ 1/վրկ։



Գծ. 194

Խ ն դ ի ՞ր 97 *(541)։ Գտնել մեղխա-շարժաթևային մեխանիզմի* AB *շարժաթևի որևէ* M *կետի արագության և արագացման պրոյեկցիաների մոտավոր արժեքները կոորդինատական առանցքների վրա, լիսեռի հավասարաչափ* ω *անկյունային արագությամբ պտտվելու դեպքում, ենթադրելով, որ մեղխի* r *երկարությունը շարժաթևի* l *երկարության նկատմամբ փոքր է։* M *կետի դիրքը որոշվում է սողնակի մատի առանցքից տարված* MB=z *հեռավորությամբ (գծ. 194)։*



Գծ. 195

Լ ու ծ ու մ: ***Խնդիրը***

կարելի է լուծել կառուցելով AB շարժաթևի արագությունների ակնթարթային P կենտրոնը։ Սակայն PA և PB (գծ. 195) ակնթարթային շառավիղների որոշումը բավականաչափ դժվար է։ Այդ պատճառով խնդիրը լուծենք այլ եղանակով։ Որոշենք M կետի x և y կոորդինատները որպես φ անկյան ֆունկցիաներ։ Գծագրից երևում է, որ $\Delta AA_1B \sim \Delta MM_1B$-ին։ Եռանկյունների նմանությունից հետևում է, որ

$$\frac{M_1M}{A_1A}=\frac{BM}{BA},$$

կամ

$$\frac{y}{r\sin\varphi}=\frac{z}{l}, \tag{1}$$

Այժմ օգտվելով (1)-ից գրենք M կետի x և y կոորդինատների արտահայտությունները՝

$$\begin{aligned}
x &= OM_1=OA_1+A_1M_1=OA_1+A_2M=r\cos\varphi+\sqrt{(l-z)^2-A_2A^2}= \\
&= r\cos\varphi+\sqrt{(l-z)^2-(A_1A-A_1A_2)^2}=r\cos\varphi+ \\
&+ \sqrt{(l-z)^2-(r\sin\varphi-y)^2}=r\cos\varphi+ \\
&+ \sqrt{(l-z)^2-\left(r\sin\varphi-\frac{z}{l}r\sin\varphi\right)^2}=r\cos\varphi+ \\
&+ \sqrt{(l-z)^2-r^2\sin^2\varphi\cdot\frac{(l-z)^2}{l^2}}=r\cos\varphi+ \\
&+ (l-z)\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2},
\end{aligned} \tag{2}$$

$$y=\frac{z}{l}r\sin\varphi, \tag{3}$$

(2) բանաձևում x-ի մեջ մտնում է $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2}$ արտահայտությունը, որտեղ $\varphi=\omega t$ ներկայացնում է $\measuredangle AOB$-ն։ Խնդրի պայմանի համաձայն մեղեխի r երկարությունը շարժաթևի l երկարության նկատմամբ փոքր է։ Դրա համար արմատը վերլուծենք շարքի, թողնելով միայն առաջին երկու անդամները։ Կստանանք՝

$$\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2}=1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2, \qquad (4)$$

Տեղադրելով այս արժեքը (2)-ի մեջ, կստանանք՝

$$x=r\cos\varphi+(l-z)\left[1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{r}{l}\sin\varphi\right)^2\right]. \qquad (5)$$

Ածանցելով x և y-ի արտահայտությունները ըստ t-ի, կըստանանք v_x-ի և w_x-ի արժեքները։

Պատ. $v_x=-\omega\left[r\sin\varphi+\frac{(l-z)r^2}{2l^2}\sin2\varphi\right]$,

$$v_y=\frac{zr}{l}\omega\cos\varphi, \qquad w_x=-\omega^2\left[r\cos\varphi+\frac{(l-z)r^2}{l^2}\cos2\varphi\right],$$

$$w_y=-\frac{zr}{l}\omega^2\sin\varphi.$$

§ 12. ՇԱՐԺԱԿԱՆ ԵՎ ԱՆՇԱՐԺ ՑԵՆՏՐՈԻԴՆԵՐԸ

Հարթ պատկերի շարժման ժամանակ արագությունների ակընթարթային P կենտրոնը անընդհատ փոփոխում է իր դիրքը, ինչպես անշարժ O_1xy հարթության մեջ, նույնպես և պատկերին ամրացված շարժական հարթության վրա։ Արագությունների ակընթարթային կենտրոնների երկրաչափական տեղը անշարժ հարթության վրա կոչվում է անշարժ ցենտրոիդ, իսկ պատկերի հետ կապված շարժական հարթության վրա՝ շարժական ցենտրոիդ։ Հարթ պատկերի շարժման ժամանակ նրա շարժական և անշարժ ցենտրոիդները շոշափում են միմյանց մի P կետում, որը այդ պատկերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնն է տվյալ մոմենտում։ Օգտվելով այս հատկությունից կարելի է հարթ պատկերի ամեն մի ոչ համընթաց շարժում երկրաչափորեն ներկայացնել որպես շարժական ցենտրոիդի գլորումը անշարժ ցենտրոիդի վրայով առանց սահելու։

Ցենտրոիդները կարելի է որոշել երկրաչափորեն կամ անալիտիկորեն։

Երկրաչափական եղանակով շարժական և անշարժ ցենտրոիդները որոշելու համար նախ պետք է կառուցել պատկերի կամավոր դիրքի համար նրա արագությունների ակնթարթային կենտրոնը։ Այնուհետև, անհրաժեշտ է գտնել հարթ պատկերի ա-

ակնթարթային կենտրոնի երկրաչափական տեղը, ինչպես անշարժ կոորդինատական սիստեմի, նույնպես և շարժական սիստեմի նկատմամբ։

Անալիտիկորեն անշարժ և շարժական ցենտրոիդների հավասարումները ստանալու համար անհրաժեշտ է օգտվել պատկերի արագությունների ակնթարթային կենտրոնի կոորդինատների համար նախորդ պարագրաֆում ստացած արտահայտություններից։ Մենք տեսանք, որ ակնթարթային կենտրոնի կոորդինատները O_1xy *անշարժ սիստեմի նկատմամբ որոշվում են՝*

$$x_p = x_0 - \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dy_0}{dt}, \qquad (I)$$

$$y_p = y_0 + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{dx_0}{dt}$$

բանաձևերով, իսկ շարժական $O\xi\eta$ *սիստեմի նկատմամբ՝*

$$\xi_p = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dx_0}{dt}\sin\varphi - \frac{dy_0}{dt}\cos\varphi\right), \qquad (II)$$

$$\eta_p = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dx_0}{dt}\cos\varphi + \frac{dy_0}{dt}\sin\varphi\right)$$

բանաձևերի օգնությամբ։ Այս բանաձևերում x_0, y_0*-ն բևեռի կոորդինատներն են,* $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$*-ն՝ բևեռի արագության պրոյեկցիաները անշարժ առանցքների վրա, իսկ* φ*-ն շարժական սիստեմի պտտման անկյունն է անշարժ սիստեմի նկատմամբ։*

(I) հավասարումները անշարժ ցենտրոիդի պարամետրական հավասարումներն են։ Արտաքսելով այդ հավասարումներից t *ժամանակը (կամ* t*-ից կախված այլ պարամետր), կստանանք՝*

$$f(x_p, y_p) = 0 \qquad (III)$$

տեսքի առնչությունը, որը կլինի անշարժ ցենտրոիդի հավասարումը։

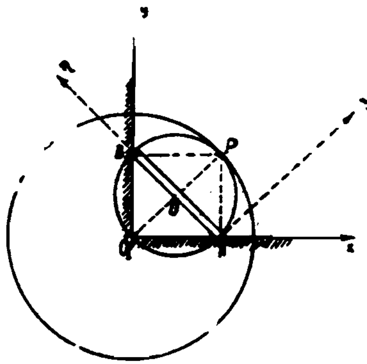
Այստեղ (II) հավասարումները հանդիսանում են շարժական ցենտրոիդի հավասարումները պարամետրական տեսքով։ Արտաքսելով այս հավասարումներից t *ժամանակը (կամ* t*-ից կախված այլ պարամետր), կստանանք շարժական ցենտրոիդի հավասարումը՝*

$$F(\xi_p, \eta_p) = 0 \qquad (IV)$$

տեսքով։

Հարթ պատկերի շարժական և անշարժ ցենտրոիդները որոշելու համար նախ պետք է ընտրել անշարժ և շարժական կոորդինատական սիստեմները, կառուցել արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կամ անալիտիկորեն որոշել այդ կետի կոորդինատները։ Այնուհետև ակնթարթային կենտրոնի կոորդինատները արտահայտել որևէ փոփոխական պարամետրով։ Վերջապես, արագությունների ակնթարթային կենտրոնի կոորդինատներից արտաքսել փոփոխական պարամետրը և ստանալ համապատասխան ցենտրոիդի հավասարումը։

Խնդիր 98: AB=2a հատվածը իր A և B ծայրերով սահում է xoy ուղիղ անկյան կողմերով։ Գտնել այդ հատվածի անշարժ և շարժական ցենտրոիդները (գծ. 196)։

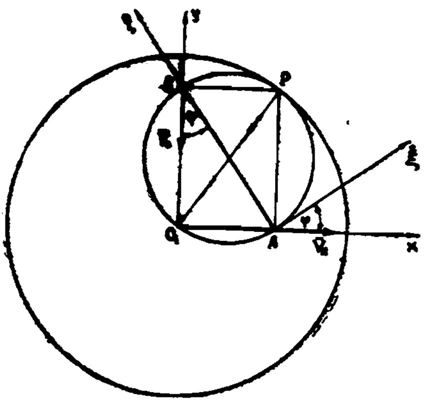


Գծ. 196

Լուծում։ Խնդիրը լուծենք երկու եղանակով։

ա) **Երկրաչափական եղանակ:** A կետի արագությունը ուղղված կլինի o_1x առանցքով, իսկ B կետի արագությունը՝ o_1y առանցքով։ Որոշակիության համար ընդունենք, որ A կետի արագությունը ունի o_1x առանցքի դրական ուղղությունը։ Այդ դեպքում B կետի արագությունը ուղղված կլինի o_1y առանցքի բացասական ուղղությամբ։ AB հատվածի արագությունների ակնթարթային կենտրոնի դիրքը որոշելու համար A և B կետերում տանենք $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_B$ արագություններին ուղղահայացներ, որոնց հատման P կետը կլինի ակնթարթային կենտրոնը։ Անշարժ ցենտրոիդը գտնելու համար անհրաժեշտ է որոշել P կետերի երկրաչափական տեղը xo_1y անշարժ հարթության վրա։ AB հատվածի շարժման ժամանակ P կետի հեռավորությունը o_1xy սիստեմի սկզբնակետից միշտ կմնա հաստատուն և հավասար կլինի 2a-ի, որպես ուղղանկյան անկյունագիծ։ Այսպիսով, AB հատվածի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը գտնվում է անշարժ O_1 կետից հաստատուն հեռավորության վրա, հետևաբար, արագությունների ակնթարթային կենտրոնների երկրաչափական տեղը xo_1y անշարժ հարթության վրա կլինի R=2a շառավղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է O_1 անշարժ կետում (գծ. 197)։

Շարժական ցենտրոիդը որոշելու համար տանենք AB հատվածին անշարժորեն միացված $A\xi\eta$ շարժական կոորդինատական սիստեմը։ Պետք է գտնել AB հատվածի շարժման ժամանակ P կետերի երկրաչափական տեղը $A\xi\eta$ շարժական սիստեմի վրա։ Դժվար չէ նկատել, որ ակնթարթային P կենտրոնի հեռավորությունը AB հատվածի միջնակետից, ամեն մի կամավոր դիրքում, հավասար է O_1APB ուղղանկյան անկյունագծի կեսին՝ $\frac{AB}{2}$։ Հետևաբար, շարժական ցենտրոիդը նույնպես շրջանագիծ է, որի շառավիղը $r=a$, իսկ կենտրոնը գտնվում է AB հատվածի միջնակետում (գծ. 197)։



Գծ. 197

բ) Անալիտիկ եղանակ։ *Տանենք անշարժ O_1xy և շարժական $A\xi\eta$ սիստեմները գծագրում ցույց տրված ձևով։*

Եթե φ-ով նշանակենք ABO_1 անկյունը, իսկ (x_0, y_0)-ով A քևեռի կոորդինատները, ապա հարթ շարժման հավասարումները կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$x_0 = 2a \sin \varphi,$$
$$y_0 = 0,$$
$$\varphi = \varphi(t)։$$

Եթե ակնթարթային P կենտրոնի կոորդինատները O_1xy սիստեմի նկատմամբ նշանակենք (x_p, y_p), ապա (I)-ի համաձայն անշարժ ցենտրոիդի պարամետրական հավասարումները կլինեն՝

$$x_p = 2a \sin \varphi,$$
$$y_p = 2a \cos \varphi։$$

Այս հավասարումներից արտաքսելով φ պարամետրը, կստանանք՝

$$x_p^2 + y_p^2 = 4a^2։$$

Հետևաբար, անշարժ ցենտրոիդը շրջանագիծ է, որի կենտ-

րոնը գտնվում է O_1 կետում և շառավիղը հավասար է 2a-ի։

Անկնթարթային P կենտրոնի կոորդինատները Aξη շարժական սիստեմի նկատմամբ նշանակենք (ξ_p, η_p)։ Այդ դեպքում (II)-ի համաձայն շարժական ցենտրոիդի պարամետրական հավասարումները կլինեն՝

$$\xi_p = a \sin 2\varphi,$$
$$\eta_p = 2a \cos^2 \varphi։$$

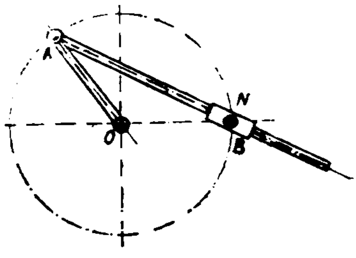
Արտաքսելով φ պարամետրը, կստանանք՝

$$\xi_p^2 + (\eta_p - a)^2 = a^2։$$

Նշանակում է շարժական ցենտրոիդը a շառավիղ ունեցող շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է AB=2a հատվածի միջնակետում։

Պատ. Անշարժ ցենտրոիդը շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է O_1 կետում, և շառավիղը հավասար է 2a-ի, իսկ շարժական ցենտրոիդը՝ նույնպես շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է AB հատվածի միջնակետում, իսկ շառավիղը հավասար է a-ի։

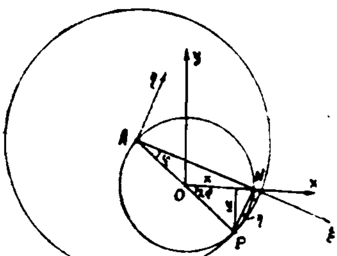
Խ ն դ ի ր 99 (546)։ AB ձողը շարժվում է այնպես, որ նրա A կետը գծում է r շառավղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է O կետում, իսկ ձողը միշտ անցնում է նույն շրջանագծի վրա գտնվող տված N կետով։ Գտնել ձողի ցենտրոիդները (գծ. 198)։



Գծ. 198

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ Խնդիրը լուծենք երկու եղանակով։

ա) Երկրաչափական եղանակ։ Նախ գտնենք AB ձողի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը։ OA մեղեխի A կետը գծում է շրջանագիծ O կենտրոնի շուրջը։ Հետևաբար, A կետի v_1 արագությունը ուղղված կլինի այդ շրջանագծի շոշափողով դեպի շարժման կողմը։ Քանի որ AB ձողը սահում է B կետում դրված ուղղորդով, ապա ձողի B կետի v_2 արագությունը ուղղված կլինի այդ ձողով։ Այսպիսով, AB ձողի A և B կետերի $\bar{v}_1$ և $\bar{v}_2$ արագությունների ուղղությունները հայտնի են։ Տանենք A և B կետերում $\bar{v}_1$ և $\bar{v}_2$ արագություններին ուղղահայացներ։ Այդ ուղղահայացները կհատվեն P *կետում, որը իրենից կներկայացնի* AB *ձողի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը (գծ. 199)։ Ակնթարթային* P *կենտրոնը գտնվում է հաստատուն հեռավորության վրա թե՛ անշարժ* O *կետից* (OP=r) *և թե՛ շարժվող* A *կետից* (AP=2r)։ *Հետևաբար, որոնելի ցենտրոիդները կլինեն շրջանագծեր, ընդ որում անշարժ ցենտրոիդը մի շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է* O *կետում և շառավիղը հավասար է* r*-ի, իսկ շարժական ցենտրոիդը դարձյալ շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է* A *կետում և շառավիղը հավասար է* 2r*-ի (գծ. 199)։*



Գծ. 199

բ) **Անալիտիկ եղանակ:** *Տանենք* oxy *անշարժ և* Aξη *շարժական կոորդինատական սիստեմները։ Անկյուն* NAP*-ն նշանակենք* φ *(գծ. 199)։ Անշարժ ցենտրոիդի հավասարումը ստանալու համար ակնթարթային* P *կենտրոնի* (x, y) *կոորդինատներն արտահայտենք* φ *անկյան միջոցով։ Գծագրից երևում է, որ*

$$x = r\cos 2\varphi,$$
$$y = -r\sin 2\varphi\text{։}$$

Անշարժ ցենտրոիդի հավասարումը ստանալու համար անհրաժեշտ է այս հավասարումներից արտաքսել φ *անկյունը (պարամետրը)։ Արտաքսելուց հետո կստանանք՝*

$$x^2 + y^2 = r^2\text{։}$$

Ուրեմն, անշարժ ցենտրոիդը շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է O *կետում և շառավիղը հավասար է* r*-ի։*

Եթե ակնթարթային P *կենտրոնի կոորդինատները շարժական* Aξη *կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* ξ *և* η, *ապա գծագիր 199-ից կունենանք՝*

$$\xi = 2r\cos\varphi,$$
$$\eta = -2r\sin\varphi\text{։}$$

Այստեղից, արտաքսելով φ *անկյունը, կստանանք շարժական ցենտրոիդի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝*

$$\xi^2 + \eta^2 = 4r^2\text{։}$$

Այսպիսով, շարժական ցենտրոիդը շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է A *կետում և շառավիղը հավասար է* 2r*-ի։*

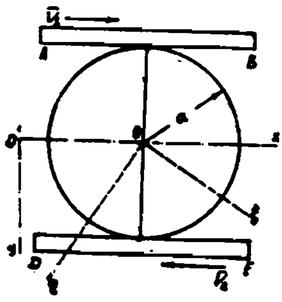
Պատ. *Անշարժ ցենտրոիդը* r *շառավղով շրջանագիծ է,* *որի կենտրոնը գտնվում է O կետում, իսկ շարժական ցենտրոիդը՝ 2r շառավղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է A կետում։*

Խ ն դ ի ր 100 *(552)։* AB *և* DE *երկու զուգահեռ ձողերը շարժվում են հակադիր կողմերով՝* $\bar{v}_1$ *և* $\bar{v}_2$ *հաստատուն արագություններով։ Ձողերի միջև գտնվում է* a *շառավղով սկավառակը, որը ձողերի շարժման և շփման պատճառով գլորվում է նրանց վրայով առանց սահելու։ Գտնել՝ 1) սկավառակի ցենտրոիդների հավասարումները, 2) սկավառակի* O *կենտրոնի* v_0 *արագությունը և 3) սկավառակի* ω *անկյունային արագությունը։ Կոորդինատական առանցքները ցույց են տրված գծագրում (գծ. 200)։*

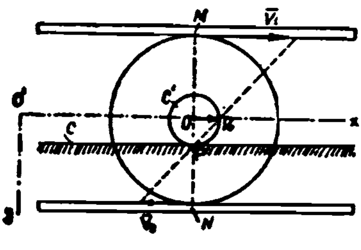
Լ ու ծ ու մ: *Եթե որպես բևեռ ընդունենք* O *կետը, ապա կարող ենք գրել՝*

$$\bar{v}_1=\bar{v}_0+\bar{v}_{OM}, \qquad (1)$$
$$\bar{v}_2=\bar{v}_0+\bar{v}_{ON},$$

որտեղ $\bar{v}_{OM}$ *և* $\bar{v}_{ON}$*-ը սկավառակի* M *և* N *կետերի (գծ. 201)* O *կենտրոնի շուրջը կատարած պտտական շարժման արագություններն են։ Ընդունենք, որ* $v_1>v_2$*-ից։ Այդ դեպքում սկավառակի*



Գծ. 200



Գծ. 201

պտույտը տեղի կունենա ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ։ Պրոյեկտելով (1) վեկտորական հավասարումները $\bar{v}_1$ *արագության ուղղության վրա, կստանանք՝*

$$v_1=v_0+\omega a,$$
$$-v_2=v_0-\omega a. \qquad (2)$$

Այստեղից ստացվում է սկավառակի O *կենտրոնի* v_0 *արագության և սկավառակի* ω *անկյունային արագության արժեքները՝*

$$v_0=\frac{v_1-v_2}{2}, \qquad \omega=\frac{v_1+v_2}{2a}. \qquad (3)$$

Եթե $v_1=v_2$*, ապա սկավառակի կենտրոնը չի շարժվի։*

Այս ω *և* v_0 *մեծությունները կարելի է որոշել նաև արագությունների ակնթարթային կենտրոնի կառուցման միջոցով։ Քանի որ* $\bar{v}_1$ *և* $\bar{v}_2$ *արագությունները հակազուգահեռ են և ուղղահայաց են* MN *հատվածին, ապա արագությունների կենտրոնը կգտնվի* MN *հատվածի և* $\bar{v}_1$ *ու* $\bar{v}_2$ *արագությունների ծայրակետերը միացնող ուղղի հատման* P *կետում (գծ. 201)։ Գծագրից երևում է, որ*

$$\frac{v_1}{PM}=\frac{v_2}{PN}=\omega, \quad PM+PN=2a։$$

Լուծելով այս երեք հավասարումների սիստեմը, կստանանք՝

$$PM=\frac{2av_1}{v_1+v_2}, \quad PN=\frac{2av_2}{v_1+v_2}, \quad \omega=\frac{v_1+v_2}{2a},$$

Սկավառակի O *կենտրոնի* v_0 *արագության համար կունենանք՝*

$$v_0=\omega\cdot OP=\omega(a-PN)=\omega\left(a-\frac{2av_2}{v_1+v_2}\right)=\frac{v_1-v_2}{2},$$

Այսպիսով, ω_0 *և* v_0*-ի համար ստացանք նույն արժեքները։*

Այժմ անցնենք ցենտրոիդների որոշմանը։ Սկավառակի ակընթարթային P *կենտրոնը գտնվում է* O *կետից հաստատուն* OP *հեռավորության վրա։ Այստեղից հետևում է, որ ակնթարթային* P *կենտրոնների երկրաչափական տեղը սկավառակին ամրացված հարթության վրա* OP *շառավղով շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է* O *կետում։*

Անշարժ ցենտրոիդը, կամ ակնթարթային P *կենտրոնների երկրաչափական տեղը անշարժ հարթության վրա կլինի մի ուղիղ գիծ, որը գտնվում է* O *կենտրոնից* OP *հաստատուն հեռավորության վրա։*

Տանենք O_1xy *անշարժ և* $O\xi\eta$ *շարժական կոորդինատական սիստեմները գծագիր 200-ում ցույց տրված ձևով։ Եթե արագությունների ակնթարթային* P *կենտրոնի կոորդինատները* O_1xy *սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* (x_p, y_p), *ապա կունենանք՝*

$$y_p=OP=a\cdot\frac{v_1-v_2}{v_1+v_2}=\text{const}։$$

Հետևաբար, անշարժ ցենտրոիդը կլինի Ox *առանցքին զուգահեռ մի ուղիղ գիծ, որը գտնվում է* Ox *առանցքից* OP *հաստատուն հեռավորության վրա։*

Ակնթարթային P *կենտրոնի կոորդինատները* $O\xi\eta$ *սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* (ξ_p, η_p), *իսկ* O_1x *և* $O\xi$ *առանցքներով կազմված անկյունը՝* φ։ *Այդ դեպքում* (ξ_p, η_p) *կոորդինատների համար կունենանք՝*

$$\xi_p = O_1P\cos\varphi = a\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\cos\varphi,$$

$$\eta_p = O_1P\sin\varphi = a\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\sin\varphi:$$

Արտաքսելով այս հավասարումներից φ *անկյունը, կստանանք շարժական ցենտրոիդի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝*

$$\xi_p^2 + \eta_p^2 = a^2\left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2,$$

Պատ. *1)* $y_p = a\dfrac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}$, $\quad \xi_p^2 + \eta_p^2 = a^2\left(\dfrac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)^2$,

2) սկավառակի կենտրոնի արագությունը ուղղված է տված արագություններից մեծի կողմը. v_0-ի մեծությունը հավասար է տված արագությունների կիսատարբերությանը,

3) $\omega = \dfrac{v_1 + v_2}{2a}$,

Խ ն դ ի ր 101 *(554)*։ ABC *ուղիղ անկյունը տեղափոխվում է այնպես, որ* A *կետը սահում է* x *առանցքով, իսկ* BC *կողմը անցնում է* y *առանցքի վրա գտնվող* D *անշարժ կետով։ Գտնել անշարժ և շարժական ցենտրոիդների հավասարումները, եթե հայտնի է, որ* AB=OD=a *(գծ. 202)*։

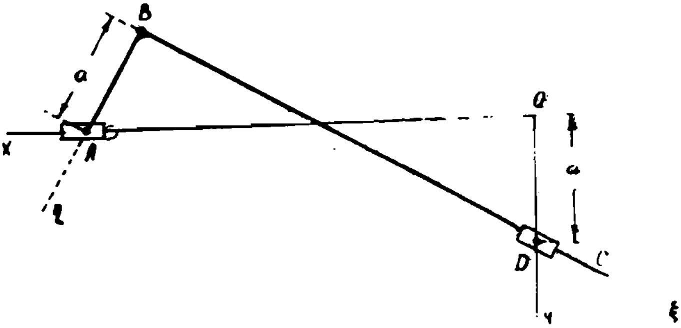
Լ ու ծ ու մ: *Շարժական և անշարժ ցենտրոիդների հավասարումները գտնելու համար նախ կառուցենք արագությունների ակնթարթային կենտրոնը։* A *կետի* $\bar v_A$ *արագությունը ուղղված է* x *առանցքով, իսկ* D *կետի* $\bar v_D$ *արագությունը՝* BD-*ով։ Հետևաբար, արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի* A *և* B *կետերում* $\bar v_A$ *և* $\bar v_B$ *արագություններին կանգնեցրած* AP *և* DP *ուղղահայացների հատման* P *կետում (գծ. 203)։ Այժմ* P *կետի* (x_p, y_p), (ξ_p, η_p) *կոորդինատները արտահայտենք* AB-*ի և* x *առանցքի միջև կազմված* φ *անկյունով։ Գծագրից երևում է, որ*

$$x_p = AE + OE, \qquad y_p = AK + KP,$$
$$\xi_p = BE + ED, \qquad \eta_p = DP, \qquad (1)$$

$$\triangle \text{ ABE-ից՝}\quad AE=\frac{a}{\cos\varphi},\quad BE=a\,tg\,\varphi,$$

$$\triangle \text{ OED-ից՝}\quad OE=a\,tg\,\varphi,\quad ED=\frac{a}{\cos\varphi}, \tag{2}$$

$$\triangle \text{ KDP-ից՝}\quad KP=KD\,.\,tg\,\varphi,\quad DP=\frac{KD}{\cos\varphi}.$$



Գծ. 202

Տեղադրելով AE, OE, DE, KP, DP, BE ***և*** ED-***ի արժեքները (2)-ից (1)-ի մեջ, կստանանք՝***

$$x_p=\frac{a}{\cos\varphi}+a\,tg\,\varphi,\quad y_p=a+x_p\,tg\,\varphi, \tag{3}$$

$$\xi_p=a\,tg\,\varphi+\frac{a}{\cos\varphi},\quad \eta_p=\frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{a}{\cos\varphi}+a\,tg\,\varphi\right). \tag{4}$$

Որոշենք անշարժ ցենտրոիդի հավասարումը։ Այդ նպատակով (3) հավասարումները գրենք հետևյալ ձևով՝

$$x_p^2=a^2\frac{(1+\sin\varphi)^2}{\cos^2\varphi}=a^2\left[\frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}+\frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,.\,\sin\varphi\right], \tag{5}$$

$$y_p=a+\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}+a\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=a\,\frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}. \tag{6}$$

(5) և (6) հավասարումներից φ անկյունը արտաքսելու համար (5)-ից որոշենք

$$\frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\quad \text{և}\quad \frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,.\,\sin\varphi$$

արտահայտությունները։ (6)-ից կունենանք՝

$$\frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{y_p}{a},\qquad \frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\sin\varphi=\frac{y_p}{a}-1\text{։}$$

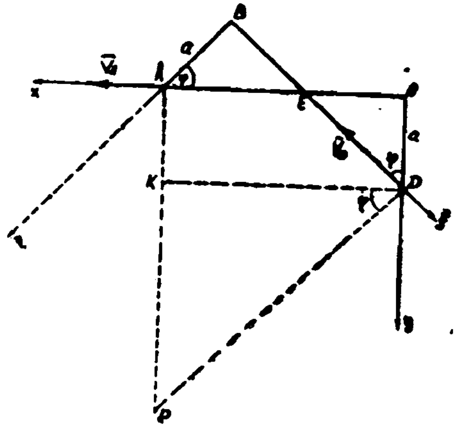
Տեղադրելով այս արտահայտությունների արժեքները (5)-ի մեջ, կստանանք՝

$$x_p^2=a^2\left(\frac{y_p}{a}+\frac{y_p}{a}-1\right)$$

կամ

$$x_p^2=a(2y_p-a)\text{։}$$

Սա անշարժ ցենտրոիդի հավասարումն է։



Գծ. 203

Շարժական ցենտրոիդի հավասարումը ստանալու համար (4) հավասարումներից պետք է արտաքսել φ պարամետրը։ Դրա համար (4)-ը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\xi_p^2=a^2\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}+\frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\sin\varphi\right),\qquad (7)$$

$$\eta_p=a\frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}=a\left(1+\frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\sin\varphi\right)\text{։}\qquad (8)$$

Նույն ձևով, եթե (8)-ից

$$\frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\quad \text{և}\quad \frac{1+\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\sin\varphi$$

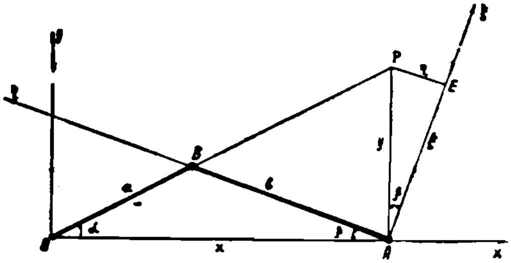
արտահայտությունների արժեքները տեղադրենք (7)-ի մեջ, կստանանք շարժական ցենտրոիդի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$\xi_p^2=a(2\eta_p-a)\text{։}$$

Պատ. $x_p^2=a(2y_p-a)$,
$\xi_p^2=a(2\eta_p-a)$։

Խ ն դ ի ր 102։ *Որոշել մեղեխա-շարժաթևային մեխանիզմի AB շարժաթևի անշարժ և շարժական ցենտրոիդները, եթե տված են OB=a, AB=b, ∢BOA=α (գծ. 204)։*

Լուծում: *Տանենք* oxy *անշարժ և* Aξη *շարժական կոորդինատական սիստեմները գծագրում ցույց տրված ձևով: Դժվար չէ նկատել, որ* AB *շարժաթևի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կլինի* OB *մեղեխի շարունակության և* A *կետում* ox *առանցքին տարած ուղղահայացի հատման* P *կետը:* P *կետի կոորդինատները անշարժ* oxy *սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* (x,y)*: Գծագրից երևում է, որ երբ* α*-ն գտնվում է առաջին և երրորդ քառորդներում, ապա* $y>O$, *իսկ երբ գտնվում է երկրորդ և չորրորդ քառորդներում՝* $y<O$*:* α*-ի այն արժեքների համար, որոնք գտնվում են առաջին քառորդում, կունենանք՝*



Գծ. 204

$$x=OA=a\cos\alpha+b\cos\beta,\quad a\sin\alpha=b\sin\beta,\quad y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha:$$

Առաջին երկու հավասարումներից կստանանք՝

$$b\cos\beta=x-a\cos\alpha,\quad b\sin\beta=a\sin\alpha:$$

Եթե այս հավասարումները բարձրացնենք քառակուսի և գումարենք իրար, կունենանք՝

$$b^2=x^2+a^2-2ax\cos\alpha:$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\cos^2\alpha=\frac{(x^2+a^2-b^2)^2}{4a^2x^2}, \qquad (1)$$

Գծագրից երևում է, որ

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x},$$

հետևաբար,

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad (2)$$

Հավասարեցնելով (1) և (2)-ում $\cos^2\alpha$*-ի համար ստացված արտահայտությունները, կստանանք անշարժ ցենտրոիդի հավասարումը ուղղանկյուն կոորդինատական սիստեմում հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+a^2-b^2)^2}{4a^2x^2}, \tag{3}$$

Եթե ներմուծենք (r, φ) *բևեռային կոորդինատները՝*

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi$$

բանաձևերով, ապա (3)-ից կունենանք՝

$$\cos^2\varphi=\frac{[r^2\cos^2\varphi-(b^2-a^2)^2]^2}{4a^2r^2\cos^2\varphi}$$

կամ

$$r^2\cos^2\varphi-(b^2-a^2)=\pm 2ar\cos^2\varphi, \tag{4}$$

Քանի որ $\alpha=0$ *արժեքի դեպքում*

$$\beta=0, \quad y=0, \quad \varphi=0, \quad x=r=a+b,$$

ապա կարելի է եզրակացնել, որ (4) հավասարման մեջ պետք է վերցնել դրական նշանը։ Այսպիսով, կունենանք՝

$$r^2\cos^2\varphi-(b^2-a^2)=2ar\cos^2\varphi.$$

Այստեղից էլ ստացվում է, որ

$$\cos\varphi=\pm\sqrt{\frac{b^2-a^2}{r(r-2a)}},$$

Քանի որ $\varphi=0$ *արժեքի դեպքում պետք է տեղի ունենա* $r=a+b$ *պայմանը, ուստի արմատի առաջ պետք է վերցնել դրական նշանը։ Այսպիսով, երբ* $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, AB *շարժաթևի անշարժ ցենտրոիդի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով վերջնականապես կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{b^2-a^2}{r(r-2a)}},$$

Այժմ գտնենք AB *շարժաթևի շարժական ցենտրոիդը։* P *ակնթարթային կենտրոնի կոորդինատները շարժական* $A\xi\eta$ *սիստեմի նկատմամբ նշանակենք* (ξ, η)*։ Գծագրից ունենք՝*

$$\xi=AP\cos\beta, \quad \eta=AP\sin\beta, \quad AP=OA\operatorname{tg}\alpha,$$

հետևաբար,

$$\xi=OA\operatorname{tg}\alpha\cos\beta, \quad \eta=OA\operatorname{tg}\alpha\sin\beta.$$

Ներմուծենք P *ակնթարթային կենտրոնի բևեռային* (ρ, ψ) *կոորդինատները հետևյալ բանաձևերով՝*

$$\xi=\rho\cos\psi,\quad \eta=\rho\sin\psi\text{։}$$

Այդ դեպքում գծագրից կունենանք՝

$$\psi=\beta,$$

$$\rho=AP=OA\,\mathrm{tg}\,\alpha=(a\cos\alpha+b\cos\beta)\,\mathrm{tg}\,\alpha=a\sin\alpha+b\cos\psi\,\mathrm{tg}\,\alpha\text{։}\qquad(5)$$

Մյուս կողմից՝

$$a\sin\alpha=b\sin\beta=b\sin\psi\qquad(6)$$

հավասարության հիման վրա կստանանք.

$$a\cos\alpha=\sqrt{a^2-b^2\sin^2\psi},\quad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b\sin\psi}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\psi}}\text{։}\qquad(7)$$

Տեղադրելով $a\sin\alpha$ *և* $\mathrm{tg}\,\alpha$*-ի արժեքները (6) և (7)-ից (5)-ի մեջ, կունենանք՝*

$$\rho=b\sin\psi\left[1+\frac{\cos\psi}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-\sin^2\psi}}\right]\text{։}\qquad(8)$$

Քանի որ $\frac{a}{b}\leqslant 1$, *ապա մենք կարող ենք կատարել նշանակում՝*

$$\frac{a}{b}=\sin\varepsilon\text{։}$$

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\sin^2\psi=(\sin\varepsilon+\sin\psi)(\sin\varepsilon-\sin\psi)=2\sin\frac{\varepsilon+\psi}{2}\cos\frac{\varepsilon-\psi}{2}\cdot$$

$$\cdot\sin\frac{\varepsilon-\psi}{2}\cos\frac{\varepsilon+\psi}{2}=\sin(\varepsilon+\psi)\sin(\varepsilon-\psi)\text{։}\qquad(9)$$

Տեղադրելով այս արժեքը (8)-ի մեջ, կստանանք AB *շարժաթևի շարժական ցենտրոիդի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով՝*

$$\rho=b\sin\psi\left[1+\frac{\cos\psi}{\sqrt{\sin(\varepsilon+\psi)\sin(\varepsilon-\psi)}}\right]\text{։}$$

Դժվար չէ նկատել, որ եթե $\alpha=\frac{\pi}{2}$, *ապա* OB*-ն ուղղահայաց կլինի* ox*-ին և ակնթարթային* P *կենտրոնը կձգտի անվերջության* AP*-ի ուղղությամբ։ Այդ դեպքում կունենանք՝*

$$r=\rho=\infty, \quad x=\sqrt{b^2-a^2}, \quad \varphi=\frac{\pi}{2}, \quad \psi=\varepsilon$$

Նույն ձևով կարելի է ստանալ անշարժ և շարժական ցենտրոիդների հավասարումները, երբ α-ն գտնվում է մյուս քառորդներում։

Պատ. *1) Անշարժ ցենտրոիդի հավասարումը* (r, φ) *բևեռային կոորդինատներով՝* $\cos\varphi=\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{r(r-2a)}}$,

երբ $0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

2) շարժական ցենտրոիդի հավասարումը (ρ, ψ) *բևեռային կոորդինատներով՝*

$$\rho=b\sin\psi\left[1+\frac{\cos\psi}{\sqrt{\sin(\varepsilon+\psi)\sin(\varepsilon-\psi)}}\right],$$

երբ $0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

§ 13. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐԻ ԿԵՏԵՐԻ ԱՐԱԳԱՑՈՒՄՆԵՐԸ։ ԱՐԱԳԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ԱԿՆԹԱՐԹԱՅԻՆ ԿԵՆՏՐՈՆ

1. Հարթ պատկերի կետերի արագացումները։ *Հարթ պատկերի կամավոր M կետի արագացումը որոշվում է*

$$\bar{W}_M=\bar{W}_0+\bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}-\omega^2\bar{\rho} \tag{I}$$

բանաձևով, որտեղ $\bar{W}_0$*-ն O բևեռի արագացումն է,* $\bar{\rho}$*-ն՝ M կետի շառավիղ-վեկտորը O բևեռի նկատմամբ, իսկ* $\bar{\omega}$ *և* $\bar{\varepsilon}=\dfrac{d\bar{\omega}}{dt}$ *վեկտորները՝ պատկերի անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումն են։ Այստեղ* $\bar{\omega}$ *և* $\bar{\varepsilon}$ *վեկտորները ուղղահայաց են պատկերի հարթությանը։*

Հաճախ (I) բանաձևը ներկայացնում են հետևյալ տեսքով՝

$$\bar{W}_M=\bar{W}_0+\bar{W}_{MO,1}+\bar{W}_{MO,2}, \quad (\bar{W}_{MO,1}=\bar{\varepsilon}\times\bar{\rho}, \ \bar{W}_{MO,2}=-\omega^2\bar{\rho}), \tag{II}$$

կամ

$$\bar{w}_M=\bar{w}_0+\bar{w}_{MO}, \tag{III}$$

որտեղ $\bar{w}_{MO}=\bar{w}_{MO,1}+\bar{w}_{MO,2}$*։ Այստեղ* $\bar{w}_{MO,1}$ *և* $\bar{W}_{MO,2}$ *վեկտորները հանդիսանում են այն պտտական և կենտրոնաձիգ արագացումները, որոնք կարող է ունենալ M կետը, եթե պատկերը կատա-*

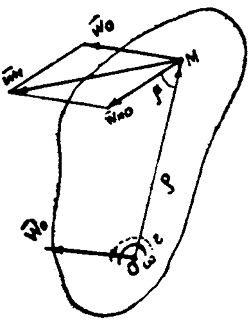
*րի միայն պտտում O բևեռի շուրջը $\bar{\omega}$ անկյունային արագությամբ և $\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացմամբ**։ Ուրեմն, հարթ պատկերի կամավոր կետի արագացումը հավասար է բևեռի արագացման և բևեռի շուրջը պատկերի կատարած պտտական շարժման արագացման երկրաչափական գումարին (գծ. 205)։ Այսպիսով կունենանք.*

$$w_{MO,1}=OM\cdot\varepsilon,\quad w_{MO,2}=OM\cdot\omega^2,\quad w_{MO}=OM\cdot\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\,, \qquad (III')$$

Այն μ անկյունը, որը կազմում է $\bar{w}_{MO}$ վեկտորը MO շառավղի հետ, որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\mathrm{tg}\,\mu=\frac{|w_{MO,1}|}{|w_{MO,2}|}=\frac{|\varepsilon|}{\omega^2},$$

Խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ $\bar{w}_{MO,1}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\overline{OM}$-ին և ուղղված է պատկերի պտտման կողմը, երբ պատկերի պտտումն արագացող է (գծ. 206) և պտտմանը հակառակ՝ երբ պատկերի պտտումը դանդաղող է (գծ. 207)։ $w_{MO,2}$-ը միշտ ուղղված է MA-ի երկարությամբ դեպի O բևեռը։



Գծ. 205

(III) բանաձևից հետևում է, որ հարթ պատկերի կամավոր M կետի արագացումը որոշելու համար անհրաժեշտ է իմանալ պատկերի որևէ O կետի արագացումը և պատկերի ակնթարթային $\bar{\omega}$ անկյունային արագությունն ու ակնթարթային $\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացումը։ Այդ դեպքում, գումարելով $\bar{w}_O$, $\bar{w}_{MO,1}$ և $\bar{w}_{MO,2}$ վեկտորները, ստանում ենք կետի որոնելի արագացումը (գծ. 206, 207)։

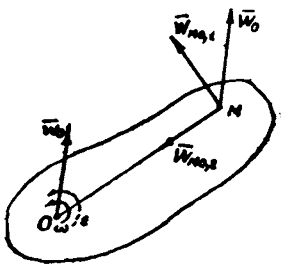
(III) բանաձևերի հիման վրա պատկերի կամավոր M կետի արագացումը կարելի է գտնել երկրաչափորեն՝ արագացումների բազմանկյան կառուցման միջոցով և անալիտիկորեն՝ արագացման պրոյեկցիաների օգնությամբ։

** Չի կարելի $\bar{w}_{MO,1}$ և $\bar{w}_{MO,2}$ արագացումները շփոթել M կետի նորմալ և տանգենցիալ արագացումների հետ, քանի որ M կետի նորմալ արագացումը ուղղված է M կետից դեպի արագությունների ակնթարթային P կենտրոնը, իսկ տանգենցիալ արագացումը ունի M կետի v_M արագության կամ նրա հակառակ ուղղությունը։ Ընդհանուր դեպքում O բևեռը և արագությունների ակնթարթային P կենտրոնը չեն համընկնում (գծ. 205)։*

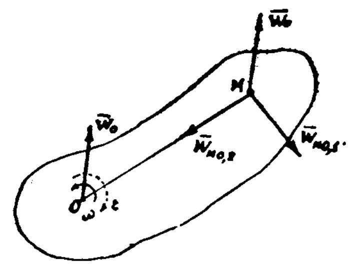
2. Հարթ պատկերի կետերի արագացման պրոյեկցիաները:
Տանենք xo_1y *անշարժ և պատկերին ամրացված* $o\xi\eta$ *շարժական կոորդինատական սիստեմները (գծ. 148)։ (I) բանաձևը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝*

$$\bar{w}_M = \frac{d^2\bar{R}_o}{dt^2} + \bar{\varepsilon} \times (\bar{R} - \bar{R}_o) - \omega^2(\bar{R} - \bar{R}_o), \qquad (IV)$$

որտեղ $\bar{R}_o$*-ն O բևեռի շառավիղ-վեկտորն է անշարժ սիստեմի նկատմամբ, իսկ* $\bar{R}$*-ը՝ պատկերի կամավոր M կետի շառավիղ-վեկտորը նույն սիստեմի նկատմամբ։*



Գծ. 206



Գծ. 207

Այժմ գտնենք հարթ պատկերի կետերի արագացումների պրոյեկցիաները անշարժ և շարժական սիստեմների նկատմամբ։

Եթե արագացման պրոյեկցիաները անշարժ xo_1y *սիստեմի առանցքների վրա նշանակենք* w_x *և* w_y*, ապա (IV) բանաձևի համաձայն կունենանք՝*

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \frac{d^2x_o}{dt^2} - \varepsilon(y - y_o) - \omega^2(x - x_o); \\ w_y &= \frac{d^2y_o}{dt^2} + \varepsilon(x - x_o) - \omega^2(y - y_o), \end{aligned}\right\} \qquad (V)$$

որտեղ (x_o, y_o) *և* (x, y)*-ը համապատասխանաբար O բևեռի և հարթ պատկերի կամավոր M կետի կոորդինատներն են անշարժ* xo_1y *սիստեմի նկատմամբ։*

Արագացման պրոյեկցիաները շարժական $o\xi$ *և* $o\eta$ *առանցքների վրա (IV) բանաձևի հիման վրա, կլինեն՝*

$$w_\xi = \frac{d^2x_o}{dt^2}\cos\varphi + \frac{d^2y_o}{dt^2}\sin\varphi - \varepsilon\eta - \omega^2\xi, \qquad (VI)$$

$$w_\eta = -\frac{d^2x_0}{dt^2}\sin\varphi + \frac{d^2y_0}{dt^2}\cos\varphi + \varepsilon\xi - \omega^2\eta,$$

Պատկերի կամավոր M կետի արագացման մեծությունը և ուղղորդ կոսինուսները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{w_\xi^2 + w_\eta^2},$$

$$\cos(\widehat{\bar{w}, x}) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos(\widehat{\bar{w}, y}) = \frac{w_y}{w},$$

$$\cos(\widehat{\bar{w}, \xi}) = \frac{w_\xi}{w}, \quad \cos(\widehat{\bar{w}, \eta}) = \frac{w_\eta}{w},$$

3. Արագացումների ակնթարթային կենտրոն: Հարթ պատկերի այն կետը, որի արագացումը տվյալ մոմենտում հավասար է զրոյի, կոչվում է արագացումների ակնթարթային կենտրոն: Արագացումների ակնթարթային Q կենտրոնի դիրքը որոշվում է

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \tag{VII}$$

$$OQ = \frac{w_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \tag{VIII}$$

բանաձևերով:

Եթե որպես բևեռ ընդունենք արագացումների ակնթարթային Q կենտրոնը, ապա $\bar{w}_Q$-ի զրո լինելու հետևանքով (III) և (III′)-ի հիման վրա հարթ պատկերի կամավոր M կետի արագացման համար կունենանք՝

$$\bar{w}_M = \bar{w}_{MQ} \text{ և } w_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

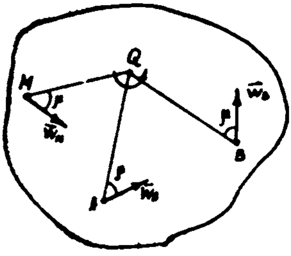
Այստեղից հետևում է, որ հարթ պատկերի բոլոր կետերի արագացումները տվյալ մոմենտում համեմատական են այդ կետերի արագացումների ակնթարթային Q կենտրոնից ունեցած հեռավորություններին, այսինքն՝

$$\frac{w_M}{MQ} = \frac{w_A}{AQ} = \frac{w_B}{BQ} = \ldots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{VIII′}$$

Բացի դրանից, հարթ պատկերի կետերի արագացումների և այդ կետերը արագացումների ակնթարթային կենտրոնի հետ միացնող հատվածների կազմած անկյունները նույնն են և հավասար μ-ի (գծ. 208):

Անհրաժեշտ է նշել, որ հարթ պատկերի արագությունների և արագացումների ակնթարթային կենտրոնները տարբեր կետեր են։ Մասնավոր դեպքում, եթե պատկերը կատարում է զուտ պտտական շարժում, ապա արագությունների և արագացումների ակնթարթային P և Q կենտրոնները համընկնում են պատկերի պտտման կենտրոնի հետ։

4. Արագացման ակնթարթային կենտրոնի կոորդինատների որոշումը։ *Արագացման ակնթարթային Q կենտրոնի կոորդինատները որոշելու համար պետք է հավասարեցնել զրոյի $\overline{w}_M$ արագացումը կամ նրա պրոյեկցիաները։ Այդ դեպքում Q կենտրոնի (x_Q, y_Q) կոորդինատները անշարժ կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ կորոշվեն հետևյալ հավասարումներից՝*



Գծ. 208

$$\frac{d^2x_o}{dt^2}-\varepsilon(y_Q-y_o)-\omega^2(x_Q-x_o)=0, \qquad (IX)$$

$$\frac{d^2y_o}{dt^2}+\varepsilon(x_Q-x_o)-\omega^2(y_Q-y_o)=0,$$

որտեղից հետևում է, որ

$$x_Q=x_o-\frac{\frac{d^2y_o}{dt^2}\varepsilon-\frac{d^2x_o}{dt^2}\omega^2}{\varepsilon^2+\omega^4}, \qquad (X)$$

$$y_Q=y_o+\frac{\frac{d^2x_o}{dt^2}\varepsilon+\frac{d^2y_o}{dt^2}\cdot\omega^2}{\varepsilon^2+\omega^4},$$

Արագացման ակնթարթային կենտրոնի ξ_Q և η_Q կոորդինատները շարժական $O\xi\eta$ սիստեմի նկատմամբ որոշվում են

$$\frac{d^2x_o}{dt^2}\cos\varphi+\frac{d^2y_o}{dt^2}\sin\varphi-\varepsilon\eta_Q-\omega^2\xi_Q=0,$$

$$-\frac{d^2x_o}{dt^2}\sin\varphi+\frac{d^2y_o}{dt^2}\cos\varphi+\varepsilon\xi_Q-\omega^2\eta_Q=0$$

հավասարումներից։ Այստեղից էլ ստացվում է, որ

$${}_Q=\frac{-w_{o\eta}\cdot\varepsilon+w_{o\xi}+\omega^2}{\varepsilon^2+\omega^4}, \qquad (XI)$$

$$\eta_Q = \frac{w_{O\xi} \cdot \varepsilon + w_{O\eta} \cdot \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

որտեղ

$$w_{O\xi} = \frac{d^2x_o}{dt^2}\cos\varphi + \frac{d^2y_o}{dt^2}\sin\varphi, \qquad (XII)$$

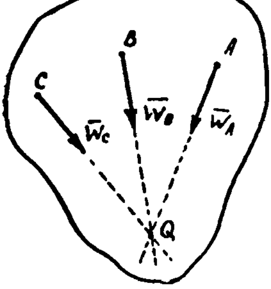
$$w_{O\eta} = -\frac{d^2x_o}{dt^2}\sin\varphi + \frac{d^2y_o}{dt^2}\cos\varphi\text{։}$$

5. Արագացումների ակնթարթային կենտրոնը գտնելու եղանակները: *ա) Դիցուք տված է, որ անկյունային արագացումը՝* $\varepsilon = 0$, *իսկ անկյունային արագությունը՝* $\omega \neq 0$։ *Սա հնարավոր է այն դեպքում, երբ հարթ պատկերը պտտվում է իր հարթության մեջ հաստատուն անկյունային արագությամբ կամ անկյունային արագությունն ստանում է իր հարաբերական ամենամեծ կամ ամենափոքր արժեքները։ Այս դեպքում* μ *անկյան համար կունենանք.*

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0, \quad \mu = 0\text{։}$$

Հետևաբար, այդ դեպքում արագացումների ակնթարթային Q *կենտրոնը կգտնվի այն ուղղի վրա, որով ուղղված է պատկերի կամավոր կետի արագացումը (գծ. 209)։ Քանի որ սա տեղի ունի պատկերի կամավոր կետի համար, ուստի արագացումների ակընթարթային կենտրոնը գտնվում է այն ուղիղների հատման կետում, որոնցով ուղղված են հարթ պատկերի արագացումները։*

Այս դեպքում հարթ պատկերի կետերի արագացումները ուղղված կլինեն դեպի արագացումների ակնթարթային Q *կենտրոնը։*



Գծ. 209

Եթե հայտնի է պատկերի որևէ O *կետի արագացման մեծությունը, ապա արագացումների ակնթարթային* Q *կենտրոնը կարելի է գտնել*

$$OQ = \frac{w_o}{\omega^2} \qquad (XIII)$$

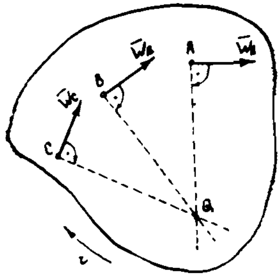
հեռավորության միջոցով։ Այս բանաձևը ստացվում է (VIII)*-ից, եթե նրանում ընդունենք* $\varepsilon = 0$։

բ) Դիցուք անկյունային արագությունը $\omega=0$, իսկ անկյունային արագացումը $\varepsilon\neq0$։ Սա հնարավոր է միայն ակնթարթային համընթաց շարժման դեպքում։ Այդ դեպքում կունենանք.

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\varepsilon}{\omega^2}=\infty,\quad \mu=\frac{\pi}{2},$$

Արագացումների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի պատկերի կետերի արագացումներին այդ կետերում տարած ուղղահայացների հատման կետում (գծ. 210)։ Եթե հայտնի է պատկերի որևէ O կետի արագացման մեծությունը, ապա O և Q կետերի միջև եղած հեռավորությունը որոշվում է

$$OQ=\frac{w_o}{\varepsilon}$$



Գծ. 210

բանաձևով, որն ստացվում է (VIII)-ից, եթե նրանում ընդունենք $\omega=0$։

գ) Դիտարկենք ընդհանուր դեպք, երբ ω անկյունային արագությունը և ε անկյունային արագացումը հայտնի են և հավասար չեն զրոյի։ Այդ դեպքում μ անկյան համար կունենանք՝

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}\neq 0.$$

Արագացումների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի այն ուղիղների հատման կետում, որոնք պատկերի կետերի արագացումների հետ կազմում են միևնույն μ անկյունը։ μ անկյունը պետք է տեղադրել այնպես, որ $\bar{\varepsilon}$, $\overline{QA}$ և $\bar{w}_A$ վեկտորները կազմեն աջ սիստեմ, անկախ հարթ պատկերի անկյունային արագությունից (գծ. 208)։ Եթե հայտնի է պատկերի որևէ O կետի արագացումը, ապա այդ կետի հեռավորությունը արագացումների ակնթարթային Q կենտրոնից որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$OQ=\frac{w_o}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}, \qquad \text{(XV)}$$

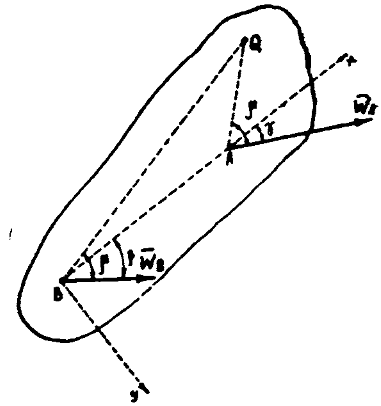
դ) Դիցուք տվյալ մոմենտում հայտնի են հարթ պատկերի A և B երկու կետերի արագացումների թե՛ մեծությունները և թե՛ ուղղությունները (գծ. 211)։ Գտնենք արագացումների ա-

կընթարթային կենտրոնը: Որպես բևեռ ընդունենք A *կետը և տանենք* Bxy *սիստեմը գծագրում ցույց տված ձևով: (I) բանաձևի համաձայն կունենանք՝*

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{BA,1} + \bar{w}_{BA,2}. \qquad (XVI)$$

Պրոյեկտելով (XVI) վեկտորական հավասարումը Bx *և* By *առանցքների վրա, կստանանք՝*

$$\left.\begin{aligned} w_B \cos\beta &= w_A \cos\gamma + AB\,.\,\omega^2 \\ w_B \sin\beta &= w_A \sin\gamma + AB\,.\,\varepsilon, \end{aligned}\right\} \qquad (XVII)$$



Գծ. 211

որտեղ β *և* γ*-ն* $\bar{w}_A$ *և* $\bar{w}_B$ *արագացումների կազմած անկյուններն են համապատասխանաբար* Bx *առանցքի հետ, ընդ որում* β *և* γ*-ի արժեքները տված են:* $\bar{w}_{BA,2}$*-ի պրոյեկցիան* Bx *առանցքի վրա պետք է վերցնել դրական, քանի որ* $\bar{w}_{BA,2}$ *միշտ ուղղված է* B *կետից դեպի* A *կետը:* By *առանցքը ընտրենք այնպես, որ* $w_{BA,1}$*-ի պրոյեկցիան* By *առանցքի վրա ունենա դրական նշան: Լուծելով (XVII) հավասարումները* ω^2 *և* ε*-ի նկատմամբ, կունենանք՝*

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{w_B \cos\beta - w_A \cos\gamma}{AB}, \\ \varepsilon &= \frac{w_B \sin\beta - w_A \sin\gamma}{AB}. \end{aligned}\right\} \qquad (XVIII)$$

ω^2 *և* ε*-ի արժեքները գտնելուց հետո արագությունների ակընթարթային կենտրոնը գտնելը բերվում է արդեն դիտարկված գ) դեպքին:*

6. Հարթ պատկերի կետերի արագացումների որոշման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը: *Մենք տեսանք, որ հարթ պատկերի կետերի արագացումները որոշելու համար էական նշանակություն ունի արագացումների ակնթարթային* Q *կենտրոնի հայտնի լինելը: Խնդիրներ լուծելու ժամանակ նպատակահարմար է դիտարկել արագացումների ակնթարթային կենտրոնը գտնելու* հետևյալ դեպքերը։ 1) Եթե տված են պատկերի շարժման հավասարումները § 10-ի (III) տեսքով, ապա արագացումների ակընթարթային կենտրոնի դիրքը որոշելու համար օգտակար է կիրառել անալիտիկ եղանակը՝ գտնել ակնթարթային Q կենտրոնի կոորդինատները (X) և (XI) բանաձևերի օգնությամբ։ 2) Տրված են պատկերի որևէ O կետի արագացման $\bar{w}_o$ վեկտորը և պատկերի $\bar{\omega}$ անկյունային արագության ու $\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացման մեծությունները ու ուղղությունները։ Այս դեպքում արագացումների ակնթարթային Q կենտրոնը կգտնվի $\bar{w}_o$ վեկտորի հետ μ անկյուն կազմող ուղղի վրա։ μ անկյունը որոշվում է (VII) բանաձևով։ Ակնթարթային Q կենտրոնի հեռավորությունը տված O կետից կարելի է որոշել (VIII) բանաձևի օգնությամբ։ 3) Տրված են պատկերի A և B երկու կետերի $\bar{w}_A$ և $\bar{w}_B$ արագացումների վեկտորները և նրանց միջև եղած AB հեռավորությունը։ Այս դեպքում նախ պետք է գրել w_A և $\bar{w}_B$ արագացումների միջև եղած կապը՝

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{BA}.$$

Այնուհետև, A կետը բևեռ ընդունելով, որոշել $\bar{w}_{BA}$ արագացումը։ Այս $\bar{w}_{BA}$ վեկտորի և AB գծի կազմած անկյունը համընկնում է պատկերի կամավոր կետի արագացման և այդ կետը արագացման ակնթարթային կենտրոնին միացնող գծի միջև կազմըված անկյանը։ Կառուցելով $\bar{w}_{BA}$ վեկտորը, կարելի է որոշել այդ μ անկյունը։ Այնուհետև A և B կետերով տանել երկու ուղիղներ, որոնք $\bar{w}_A$ և $\bar{w}_B$ վեկտորների հետ կազմեն տված μ անկյունը (μ անկյան հաշվումը կատարվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ)։ Այդ ուղիղների հատման Q կետը կլինի արագացումների ակնթարթային կենտրոնը։

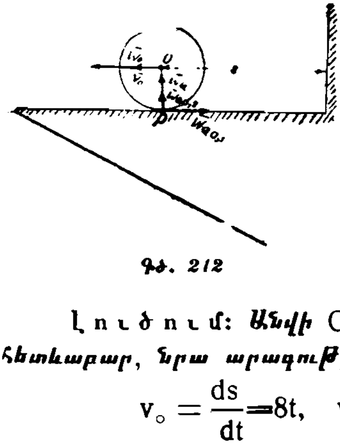
Հարթ պատկերի կետերի արագացումները որոշելու վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս ցանկալի է նշել այն հաջորդական քայլերը, որոնք պետք է կատարել տվյալ խնդիրը լուծելու համար։ Դիտարկենք այն դեպքը, երբ տված են հարթ պատկերի մի կետի արագության ու արագացման վեկտորները և պատկերի մի այլ կետի արագության և արագացման ուղղությունները։ Պահանջվում է գտնել պատկերի կետերի արագացումները։ Նախ հարթ պատկերի տված երկու կետերի արագություններին տանում ենք ուղղահայացներ, որոնց հատման կետը կլինի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը. որոշում ենք պատկերի ակընթարթային անկյունային արագությունը։ Այնուհետև որոշում

16—2292

մենք առաջին կետի շուրջը երկրորդ կետի կատարած պտտական շարժման նորմալ արագացումը։ Դրանից հետո պրոյեկտում ենք բոլոր արագացումները արագացման հայտնի ուղղության ուղղահայացի վրա և ստացված գումարը հավասարեցնում զրոյի։ Այստեղից ստացվում է պտտական շարժման արագացման թվային արժեքը։ Այս ստացված արագացման միջոցով որոշում ենք հարթ պատկերի ակնթարթային անկյունային արագացումը։ Վերջապես, (II) բանաձևի միջոցով որոշում ենք պատկերի ցանկացած կետի արագացումը։

7. Խնդիրներ

Ստորև բերվում են հարթ պատկերի արագացումների որոշման վերաբերյալ մի քանի խնդիրների լուծումները։



Գծ. 212

Խնդիր 103։ *Թեք հարթության վրայով առանց սահելու գլորվող անվի կենտրոնը շարժվում է*

$$s=4t^2+16$$

օրենքով (t—*վայրկյաններով*, s—*սանտիմետրերով*)։ *Որոշել* t=2 վրկ *պահին անվի և հարթության շոշափման կետի արագացումը։ Անվի շառավիղը՝* R=16 սմ *(գծ. 212)*։

Լուծում։ *Անվի* O *կենտրոնը շարժվում է ուղղագիծ, հետևաբար, նրա արագությունը և արագացումը կլինեն՝*

$$v_0=\frac{ds}{dt}=8t,\quad w_0=\frac{dv_0}{dt}=8։$$

t=2 վրկ *պահին* $v_0=16$ սմ/վրկ, $w_0=8$ սմ/վրկ²։

Քանի որ անիվը գլորվում է առանց սահելու, ուստի անվի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի անվի և հարթության շոշափման P *կետում (գծ. 212)։ Հետևաբար, ակնթարթային անկյունային արագությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝*

$$\omega=\frac{v_0}{OP}=\frac{8t}{16}=\frac{1}{2}t։$$

Ածանցելով ω-*ն ըստ* t-*ի, կստանանք* ε *անկյունային արագացումը՝*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} 1/\text{վրկ}^2 ։$$

Այսպիսով, t=2 վրկ պահին կունենանք՝

$$\omega = 1 \ 1/\text{վրկ}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} 1/\text{վրկ}^2 ։$$

Այժմ որոշենք P կետի արագացումը։ (II) բանաձևի համաձայն P կետի արագացման համար կունենանք՝

$$\bar{w}_p = \bar{w}_o + \bar{w}_{po,1} + \bar{w}_{po,2}, \qquad (1)$$

որտեղ

$$w_{po,2}/_{t=2\ \text{վրկ}} = \omega^2 \cdot OP = 16\ \text{սմ/վրկ}^2,$$

ընդ որում $w_{po,2}$ ուղղված է P կետից դեպի O կետը, իսկ

$$w_{po,1}/_{t=2\ \text{վրկ}} = \varepsilon \cdot OP = 8\ \text{սմ/վրկ}^2 ։$$

Քանի որ անիվը կատարում է հավասարաչափ արագացող պտտում (ε և ω-ն ունեն նույն նշանը), ուստի $\bar{w}_{po,1}$ պտտական արագացումը ուղղահայաց է PO-ին և ուղղված՝ O բևեռի շուրջը պատկերի կատարած պտտման կողմը։

$\bar{w}_o$ և $\bar{w}_{po,1}$ արագացումների մեծությունները հավասար են, իսկ ուղղությունները՝ հակադիր։ Հետևաբար,

$$\bar{w}_{po,1} + \bar{w}_o = O ։$$

Այդ դեպքում (1)-ից կստանանք՝

$$\bar{w}_p = \bar{w}_{po,2} ։$$

Այստեղից էլ ստացվում է, որ $w_p\Big|_{t=2\ \text{վրկ}} = w_{po,2}\Big|_{t=2\ \text{վրկ}} =$

$$= 16\ \text{սմ/վրկ}^2 ։$$

Պատ. $w_p = 16\ \text{սմ/վրկ}^2 ։$

Խ ն դ ի ր 104: R շառավիղ ունեցող անիվը գլորվում և սահում է անշարժ ուղղով, կատարելով հարթ շարժում։ Անվի կենտրոնի արագացումը տվյալ մոմենտում հավասար է w_o-ի, իսկ անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը համապատասխանաբար հավասար են ω-ի և ε-ի, ընդ որում $\omega < O$, $\varepsilon < O$։ Գտնել այդ մոմենտում անվի ուղղաձիգ և հորիզոնական տրամագծերի M, N և P ծայրակետերի արագացումները (գծ. 213)։

Լ ու ծ ու մ: Որպես բևեռ ընդունենք անվի O կենտրոնը։

Այդ դեպքում M կետի արագացումը (11)-ի հիման վրա հավասար կլինի՝

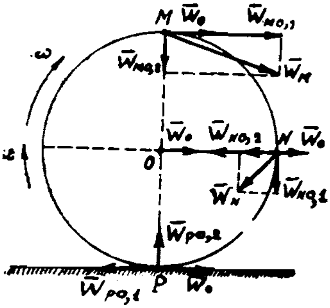
$$\bar{w}_M = \bar{w}_O + \bar{w}_{MO,1} + \bar{w}_{MO,2}։$$

M կետի $\bar{w}_{MO,1}$ և $\bar{w}_{MO,2}$ արագացումների մեծությունների համար կունենանք՝

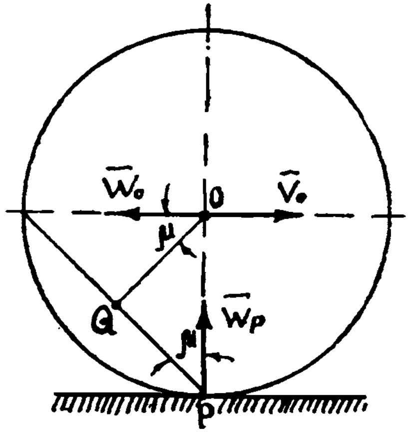
$$w_{MO,1} = \varepsilon \cdot OM = \varepsilon R,$$

$$w_{MO,2} = \omega^2 OM = \omega^2 R։$$

$\bar{w}_{MO,1}$ արագացումը ուղղահայաց է OM հատվածին և ուղղված է $\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացման կողմը, իսկ $\bar{W}_{MO,2}$ արագացումը ուղղված է M կետից դեպի O բևեռը։ Քանի որ M կետի $\bar{w}_0$ և $\bar{W}_{MO,1}$ վեկտորները ուղղված են միևնույն ուղղով (գծ. 213), ապա նախօրոք գումարելով այս երկու վեկտորները, մենք կըստանանք M կետի արագացման երկու փոխուղղահայաց բաղադրիչները՝ $\bar{w}_{MO,2}$ և $\bar{w}_O + \bar{w}_{MO,1}$։ Այստեղից հետևում է, որ



Գծ. 213



Գծ. 214

$$w_M = \sqrt{(w_{MO,2})^2 + (w_O + w_{MO,1})^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + (w_0 + \varepsilon R)^2}։$$

Նույն ձևով կարելի է ստանալ N և P կետերի արագացումները։

Պատ. $w_M = \sqrt{\omega^4 R^2 + (w_0 + \varepsilon R)^2},$

$w_N = \sqrt{(w_0 - R\omega^2)^2 + \varepsilon^2 R^2},$

$w_P = \sqrt{(w_0 - \varepsilon R)^2 + \omega^4 R^2}։$

Խ ն դ ի ր 105 *(559)։* R=0,5 մ *շառավիղ ունեցող անիվը գլորվում է առանց սահելու ուղղագիծ ռելսով. տվյալ մոմենտում* O *կենտրոնը ունի* v_0=0,5 մ/վրկ *արագություն և* w_0=0,5 մ/վրկ^2 *արագացում։ Գտնել՝ 1) անվի արագացումների ակնթարթային կենտրոնը, 2) անվի այն կետի* $\bar{w}_p$ *արագացումը, որը համընկնում է արագությունների* P *ակնթարթային կենտրոնի հետ, 3)* M *կետի արագացումը և 4) նրա հետագծի կորության շառավիղը. եթե* OM=MP=0,5 R։

Լ ու ծ ու մ։ *Լուծենք խնդիրը արագացումների ակնթարթային կենտրոնի օգնությամբ։ Որպես բևեռ ընդունենք* O *կետը, որի արագությունը և արագացումը տված են։ Քանի որ արագությունների ակնթարթային կենտրոնը համընկնում է անվի և ռելսի հպման* P *կետի հետ (գծ. 214), ուստի անվի անկյունային արագությունը տվյալ մոմենտում կլինի՝*

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \ 1/\text{վրկ}։$$

Անիվը P *կետի շուրջը կատարում է ակնթարթային պտտական շարժում, ընդ որում նրա կենտրոնի* w_0 *արագացումը կլինի շոշափող։ Ուստի կունենանք՝*

$$w_0 = R \cdot \varepsilon,$$

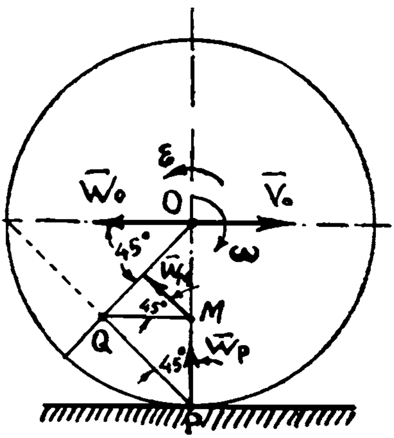
որտեղից հետևում է, որ

$$\varepsilon = \frac{w_0}{R} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \ 1/\text{վրկ}^2։$$

Այսպիսով, հայտնի են անվի անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը, ինչպես նաև անվի O *կենտրոնի* $\bar{w}_0$ *արագացումը։ Այդ դեպքում կարելի է որոշել արագացումների ակնթարթային* Q *կենտրոնի դիրքը։* O *կետի հեռավորությունը* Q *ակնթարթային կենտրոնից որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$OQ = \frac{w_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{0,5}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,3536 \text{ մ}։$$



Գծ. 215

OQ գծի և $\bar{w}_0$ վեկտորի կազմած μ անկյան համար կունենանք՝

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 1,$$

հետևաբար, $\mu = 45°$։

OQP ուղղանկյուն եռանկյունը հավասարասրուն է (գծ. 215), որի հիմքի անկյունը հավասար է 45°-ի։ Այստեղից հետևում է, որ

$$QP = QO = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{մ}։$$

Եթե ակնթարթային Q կենտրոնը միացնենք M կետի հետ, ապա կունենանք QM հատվածը, որը ուղղահայաց է անվի OP շառավղին և հավասար է՝

$$QM = \frac{R}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25 \text{ մ}։$$

Այժմ անցնենք անվի M և P կետերի արագացումները գտնելուն։ Անվի կետերի արագացումները համեմատական են արագացումների ակնթարթային Q կենտրոնից այդ կետերի ունեցած հեռավորություններին և կազմում են 45°-ի անկյուն տվյալ կետը Q կենտրոնին միացնող ուղղի հետ։ Այդ դեպքում (VIII′)-ի հիման վրա P և M կետերի արագացումների թվային արժեքների համար կունենանք՝

$$w_P = w_0 \cdot \frac{QP}{QO} = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5 \text{ մ/վրկ}^2,$$

$$w_M = w_0 \cdot \frac{QM}{QO} = 0{,}5 \cdot \frac{0{,}25 \cdot 4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}3536 \text{ մ/վրկ}^2։$$

$\bar{w}_P$ արագացումը ուղղված է ուղղաձիգ դեպի անվի O կենտրոնը, իսկ $\bar{w}_0$ և $\bar{w}_M$ արագացումների ուղղությունները ցույց են տված գծագրում։

Մնում է գտնել M կետի հետագծի կորության շառավիղը այդ M կետում։ Դրա համար M կետի արագացումը ներկայացնենք երկու բաղադրիչների միջոցով՝

$$w_M^2 = w_{MO,1}^2 + w_{MO,2}^2\,, \tag{1}$$

որտեղ

$$w_{MO,1} = \frac{R}{2}\varepsilon = \frac{0{,}5}{2} \cdot 1 = 0{,}25 \text{ մ/վրկ}^2,$$

$$w_{MO,2}=\frac{v_M^2}{\rho},\quad v_M=\omega\cdot\frac{R}{2}=1\cdot0{,}25=0{,}25\ \text{մ/վրկ։}$$

Տեղադրելով այս արժեքները (1)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\left(\frac{0{,}5\cdot1}{2}\right)^2+\left(\frac{0{,}25^2}{\rho}\right)^2\text{։}$$

Այս հավասարումից ստացվում է, որ

$$\rho=0{,}25\ \text{մ։}$$

Պատ. *1)* $r=OQ=0{,}3536$ մ, $\mu=\frac{\pi}{4}$,

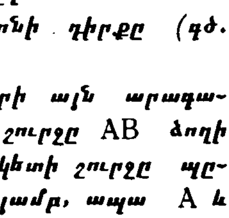
2) $w_p=0{,}5$ մ/վրկ^2,

3) $w_M=0{,}3536$ մ/վրկ^2,

4) $\rho=0{,}25$ մ։

Խ ն դ ի ր 106 *(565)։ Դեպի վեր, թեք նետված* AB *համասեռ ձողը շարժվում է ուղղաձիգ հարթության մեջ այնպես, որ նրա* O *ծանրության կենտրոնը գծում է պարաբոլ, ունենալով* $w_o=g=9{,}81$ մ/վրկ^2 *հաստատուն և ուղղաձիգ դեպի ներքև ուղղված արագացում։ Ձողը պտտվում է անկման հարթությանը ուղղահայաց առանցքի շուրջը* $\omega_o=10$ վրկ$^{-1}$ *հաստատուն անկյունային արագությամբ։ Գտնել ձողի ծայրակետերի արագացումները այն մոմենտում, երբ ձողը ուղղաձիգի հետ կազմում է* $\alpha=60°$ *անկյուն,* AB$=39{,}24$ սմ։ *Որոշել նաև նշված մոմենտում ձողի արագացումների ակնթարթային կենտրոնի դիրքը (գծ. 216)։*

Լ ու ծ ու մ: *Նախ որոշենք* A *և* B *կետերի այն արագացումները, որոնք առաջանում են* O *կենտրոնի շուրջը* AB *ձողի պտտվելու հետևանքով։ Քանի որ* AB *ձողը* O *կետի շուրջը պտտվում է հաստատուն անկյունային արագությամբ, ապա* A *և* B *կետերի արագացումները կունենան միայն կենտրոնաձիգ բաղադրիչներ՝ ուղղված* A *և* B *կետերից դեպի* O *կետը։ Այս արագացումները (գծ. 216) մեծությամբ կլինեն իրար հավասար և կորոշվեն հետևյալ բանաձևով.*



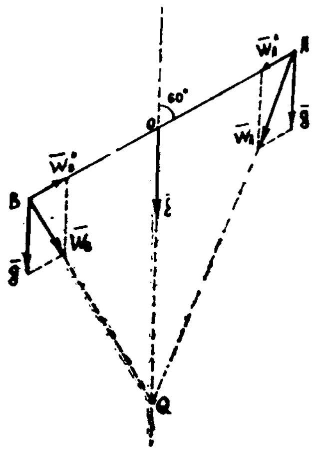
Գծ. 216

$$w_{AO,2}=w_{BO,2}=\omega^2\cdot OA=100\cdot19{,}62=$$
$$=1962\ \text{սմ/վրկ}^2=19{,}62\ \text{մ/վրկ}^2\text{։}\qquad(1)$$

Եթե հաշվի առնենք նաև AB *ձողի* O *կենտրոնի արագացումը, որն ընդհանուր է ձողի բոլոր կետերի համար, ապա* A *կետի* $\bar{w}_A$ *և* B *կետի* $\bar{w}_B$ *արագացումները կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝*

$$\bar{w}_A = \bar{w}_0 + \bar{w}_{AO,2} = \bar{g} + \bar{w}_{AO,2}, \tag{2}$$

$$\bar{w}_B = \bar{w}_0 + \bar{w}_{BO,2} = \bar{g} + \bar{w}_{BO,2}. \tag{3}$$



Գծ. 217

Եթե $\bar{g}$ *և* $\bar{w}_{AO,2}$ *վեկտորի վրա կառուցենք զուգահեռակողմ (գծ. 217), ապա* w_A*-ն կլինի այդ զուգահեռակողմի անկյունագիծը։ Նույն ձևով* $\bar{w}_B$*-ն կլինի* $\bar{g}$ *և* $\bar{w}_{BO,2}$ *վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռակողմի անկյունագիծը։ Կոսինուսների թեորեմի համաձայն կունենանք՝*

$$w_A = \sqrt{g^2 + w_{An}^2 - 2g \cdot w_{An} \cos 60^\circ}. \tag{4}$$

$$w_B = \sqrt{g^2 + w_{An}^2 - 2g w_{Bn} \cos 120^\circ}. \tag{5}$$

Տեղադրելով $w_{AO,2}$ *և* $w_{BO,2}$*-ի արժեքները (1)-ից (4) և (5) բանաձևերի մեջ, կստանանք՝*

$w_A = 17$ մ/վրկ², $w_B = 25.96$ մ/վրկ²։

Այժմ որոշենք արագացումների ակնթարթային կենտրոնի դիրքը։ Հայտնի է, որ

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \tag{6}$$

Բայց միաժամանակ տված է, որ ձողը պտտվում է $\omega = 10$ 1/վրկ *հաստատուն անկյունային արագությամբ։ Հետևաբար,* $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0$։ *Այդ դեպքում (6)-ից կհետևի, որ*

$$\mu = 0.$$

Սա նշանակում է, որ արագացումների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի AB *ձողի ցանկացած կետի արագացման վեկտորի վրա։ Մասնավորապես, այն կգտնվի* O *կետի* $\bar{g}$ *արագացման վեկտորի վրա։ Այդ ակնթարթային կենտրոնը նշանակենք* Q *տառով (գծ. 217)։* OQ *հեռավորությունը որոշելու համար օգտվենք*

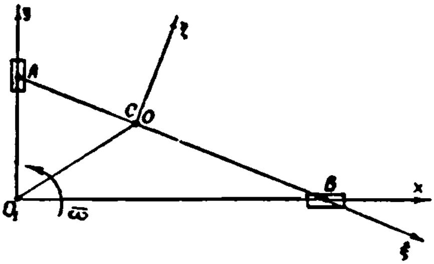
$$OQ = \frac{w_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{g}{\omega^2} \tag{7}$$

բանաձևից։ Տեղադրելով g*-ի և* ω*-ի տված արժեքները (7)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$OQ=\frac{g}{\omega^2}=\frac{9,81}{100}=0,0981 \text{ մ։}$$

Պատ. $w_A=17$ մ/վրկ²,
$w_B=25,96$ մ/վրկ²,
$OQ=0,0981$ մ։

Խ ն դ ի ր 107։ *Էլիպսոգրաֆի* $2l=40$ սմ *երկարություն ունեցող* AB *քանոնը շարժվում է* OC *մեղեխի միջոցով, որը պտտվում է* $\omega=2,5$ 1/վրկ *անկյունային արագությամբ։ Միաժամանակ տված է, որ* $AC=BC=l$։ *Գտնել արագացումների ակնթարթային կենտրոնը և քանոնի* A *ու* B *կետերի արագացումները այն մոմենտում, երբ* $\measuredangle ABO_1=30°$ *(գծ. 218)։*



Գծ. 218

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ *Արագացումների ակնթարթային կենտրոնը գտնենք անալիտիկորեն։ Տանենք* xo_1y *անշարժ և* $\xi O\eta$ *շարժական կոորդինատական սիստեմները գծագրում ցույց տրված ձևով։ Արագացումների ակնթարթային* Q *կենտրոնի* (x_2, y_2) *կոորդինատները անշարժ սիստեմի նկատմամբ որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝*

$$x_Q=x_0-\frac{\frac{d^2y_0}{dt^2}\cdot\varepsilon-\frac{d^2x_0}{dt^2}\omega^2}{\varepsilon^2+\omega^4},$$

$$y_Q=y_0+\frac{\frac{d^2x_0}{dt^2}\cdot\varepsilon+\frac{d^2y_0}{dt^2}\cdot\omega^2}{\varepsilon^2+\omega^4}, \qquad (1)$$

որտեղ x_0, y_0*-ն շարժական սիստեմի* O *կետի կոորդինատներն են անշարժ սիստեմի նկատմամբ։ Եթե* ABO_1 *անկյունը նշանակենք* φ, *ապա* x_0, y_0 *կոորդինատների համար կունենանք՝*

$$x_0=l\cos\varphi,$$
$$y_0=l\sin\varphi\text{։} \qquad (2)$$

Եթե երկու անգամ ածանցենք (2)-ը ըստ t-ի և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ խնդրի պայմանի համաձայն ε անկյունային արագացումը հավասար է զրոյի, կստանանք՝

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\omega^2 l \cos \varphi,$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} = -\omega^2 l \sin \varphi\text{։}$$

Այդ դեպքում (2)-ի և (3)-ի հիման վրա (1)-ից կստանանք՝

$$x_Q = l\cos\varphi - \frac{\omega^2 \cdot l\omega^2}{\omega^4}\cos\varphi = O,$$

$$y_Q = l\sin\varphi + \frac{-\omega^2 l\omega^2}{\omega^4}\sin\varphi = O\text{։}$$

Հետևաբար, արագացումների ակնթարթային Q *կենտրոնը գտնվում է* O_1 *(O, O) կետում։*

Բանոնի A *և* B *կետերի արագացումները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝*

$$w_A = AQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad w_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\text{։}$$

Հետևաբար,

$$w_A = 2l\sin 30^\circ \cdot \sqrt{O + \omega^4} = l\omega^2 = 20 \cdot 2{,}5^2 = 125 \text{ սմ/վրկ}^2,$$

$$w_B = 2l\cos 30^\circ \cdot \sqrt{O + \omega^4} = 2l\,\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \omega^2 =$$

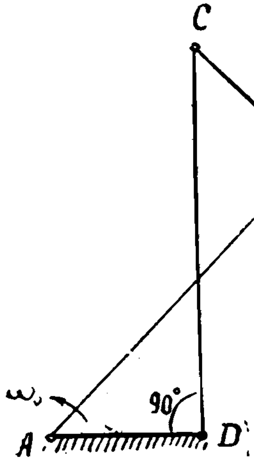
$$= 125 \cdot \sqrt{3} \text{ սմ/վրկ}^2\text{։}$$

Պատ. *Արագացումների ակնթարթային կենտրոնը գտնվում է* Q(O,O) *կետում,* $w_A = 125$ սմ/վրկ², $w_B = 125 \cdot \sqrt{3}$ սմ/վրկ²։

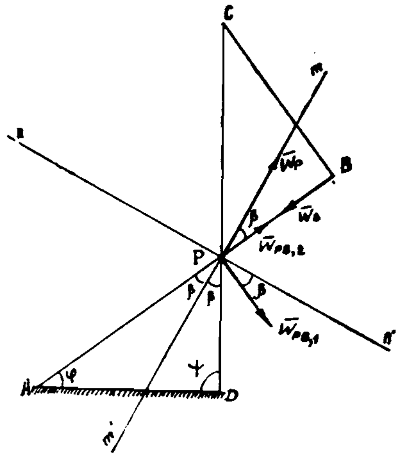
Խ ն դ ի ր 108 *(572)*։ *Հակազուգահեռագիծը բաղկացած է միևնույն* 40 սմ *երկարությամբ* AB *և* CD *երկու մեղեխներից և նրանց հետ հոդակապերով միացված* 20 սմ *երկարությամբ* BC *ձողից։* A *և* D *անշարժ առանցքների միջև հեռավորությունը հավասար է* 20 սմ։ AB *մեղեխը պտտվում է* ω_0 *հաստատուն անկյունային արագությամբ։ Որոշել* BC *ձողի անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը այն մոմենտում, երբ* ADC *անկյունը հավասար է* 90°*-ի (գծ. 219)։*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Խնդիրը լուծենք երկու եղանակով։*

ա) Առաջին եղանակ: Նախ որոշենք BC *ձողի արագությունների ակնթարթային կենտրոնի դիրքը՝ կախված* φ *անկյունից, դիտելով* φ*-ն որպես փոփոխական մեծություն (գծ. 220):* BC *ձողի* B *կետի արագությունը ուղղահայաց է* AB *ձողին, իսկ* C *կետի արագությունը՝* CD*-ին: Հետևաբար,* CB *ձողի արագու-*



Գծ. 219



Գծ. 220

թյունների ակնթարթային կենտրոնը կգտնվի $\bar{v}_B$ *և* $\bar{v}_C$ *արագություններին* B *և* C *կետերում տարած* AB *և* CD *ուղղահայացների հատման* P *կետում:*

Դժվար չէ ցույց տալ, որ $\triangle APD = \triangle BCP$*: Այստեղից հետևում է, որ*

$$AP + PD = 40: \qquad (1)$$

Եռանկյունի APD*-ից, կոսինուսների թեորեմի համաձայն, կունենանք՝*

$$PD^2 = (20)^2 + AP^2 - 2 \cdot 20 \cdot AP \cos\varphi: \qquad (2)$$

Լուծելով այս երկու հավասարումները AP *և* PD*-ի նկատմամբ, կստանանք՝*

$$AP = \frac{30}{2-\cos\varphi}, \quad PD = 10 \cdot \frac{5-4\cos\varphi}{2-\cos\varphi}:$$

B *կետի* $\bar{v}_B$ *արագության մեծությունը հավասար կլինի՝*

$$v_B = AB\,\omega_0:$$

Այստեղ ω_0*-ն* AB *մեղեխի* A *կետի շուրջը կատարած պը-*

տըտման անկյունային արագությունն է (ω_o-ն տված է)։ Քանի որ P կետը BC ձողի արագությունների ակնթարթային կենտրոնըն է, ապա BC ձողի անկյունային արագությունը կլինի՝

$$\omega_{BC}=\frac{v_B}{BP}=\frac{AB\quad\omega_o}{BP}=\frac{40\omega_o(2-\cos\varphi)}{10(5-4\cos\varphi)}=4\omega_o\cdot\frac{2-\cos\varphi}{5-4\cos\varphi}, \qquad (3)$$

BC *ձողի անկյունային արագացումը որոշելու համար* ω_{BC}*-ի (3) արտահայտությունը ածանցենք ըստ* t *ժամանակի, միաժամանակ նկատի ունենալով, որ* $\frac{d\varphi}{dt}=\omega_o$։ *Ածանցելուց հետո կստանանք՝*

$$\varepsilon_{BC}=\frac{d\omega_{BC}}{dt}=-\frac{12\omega_o^2\sin\varphi}{(5-4\cos\varphi)^2}, \qquad (4)$$

BC *ձողի անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը (այն մոմենտում, երբ* ADC$=\psi$ *անկյունը ուղիղ է) (գծ. 220) որոշելու համար անհրաժեշտ է* ω_{BC} *և* ε_{BC}*-ի (3) և (4) արտահայտությունների մեջ տեղադրել* $\sin\varphi$*-ի և* $\cos\varphi$*-ի արժեքները ընդունելով* $\psi=90^\circ$։ *Այս պայմանի դեպքում գծագիր 220-ից կունենանք՝*

$$AP+PD=40,$$
$$AP^2=PD^2+20^2.$$

Լուծելով այս հավասարումները AP *և* PD*-ի նկատմամբ, կստանանք* AP=25, PD=15։ *Այդ դեպքում* $\triangle$ APD*-ից հետևում է, որ*

$$\sin\varphi=\frac{3}{5},\quad \cos\varphi=\frac{4}{5}.$$

Տեղադրելով այս արժեքները (3) և (4)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\omega_{BC}=\frac{8}{3}\omega_o,\qquad \varepsilon_{BC}=-\frac{20}{9}\omega_o^2.$$

բ) Երկրորդ եղանակ: *Որպես բևեռ ընդունենք* B *կետը, որի արագացումը տված է։ Գրենք արագությունների ակնթարթային* P *կենտրոնի արագացման արտահայտությունը։* (II) *բանաձևի համաձայն կունենանք՝*

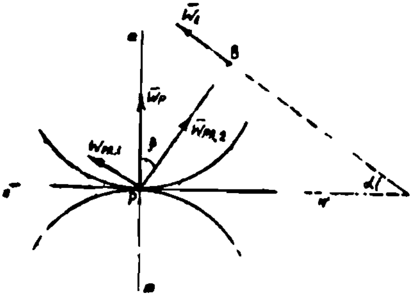
$$\overline{w}_P=\overline{w}_B+\overline{w}_{PB,1}+\overline{w}_{PB,2}, \qquad (5)$$

Տանենք շարժական կամ անշարժ ցենտրոիդի նորմալը P կետում։ Դժվար չէ նկատել, որ P կետի արագացումը ուղղված է mm′ նորմալով։ Եթե (5) վեկտորական հավասարումը պրոյեկտենք mm′-ին ուղղահայաց nn′-ի վրա, ապա կունենանք՝

$$0 = w_B \cos\alpha + w_{PB'1}\cos\beta - w_{PB'2}\sin\beta, \tag{6}$$

որտեղ α-ն w_B-ի կազմած անկյունն է mm′-ի հետ (գծ. 220)։

Տվյալ խնդրում (1) պայմանի համաձայն անշարժ ցենտրոիդը կլինի էլիպս, որի ֆոկուսները գտնվում են A և D կետերում, իսկ մեծ կիսաառանցքը հավասար է $\frac{AB}{2}=20$։



Գծ. 221

Հայտնի է, որ էլիպսի որևէ կետում նրան տարած նորմալը կիսում է այդ կետի ֆոկալ շառավիղ-վեկտորների կազմած անկյունը (գծ. 221)։ Այստեղից հետևում է, որ BP-ի և mm′ նորմալի միջև կազմված β անկյունը հավասար կլինի APD անկյան կեսին։ Գծագրից երևում է, որ

$$\cos \widehat{APD} = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi = \frac{3}{5},$$

Հետևաբար՝

$$\sin\beta = \sin\frac{\widehat{APD}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{APD}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\beta = \cos\frac{\widehat{APD}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\widehat{APD}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

B կետի $\bar{w}_B$ արագացումը ուղղված կլինի BA-ով, քանի որ $\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0=\text{const}$, իսկ մեծության համար կունենանք՝

$$w_B = \omega_0^2 \; AB = 40\omega_0^2։$$

220 և 221 գծագրերից հետևում է, որ

$$\alpha = 90^\circ - \beta, \quad \cos\alpha = \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

Տեղադրելով w_B*-ի,* $\cos\alpha$*-ի,* $w_{pB,1}=\varepsilon \cdot PB$, $w_{pB,2}=\omega^2 \cdot PB$, $\cos\beta$*-ի և* $\sin\beta$*-ի արժեքները (6)-ի մեջ և լուծելով այն* ε*-ի նկատմամբ, կստանանք՝*

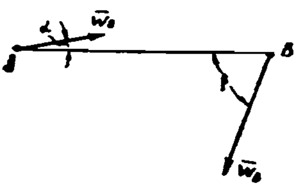
$$\varepsilon = \frac{-64 \cdot 5+40 \cdot 3}{15 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \omega_o^2 = -\frac{20}{9}\,\omega_o^2 ։$$

ω*-ի որոշումը կատարվում է ճիշտ նույն ձևով, ինչ որ առաջին եղանակի դեպքում։*

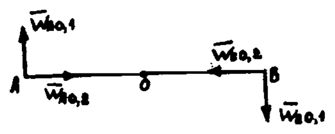
Պատ. $\omega_{BC} = \frac{8}{3}\,\omega_o$, *պտույտը դանդաղող է,*

$$\varepsilon_{BC} = \frac{20}{9} \cdot \omega_o^2 ։$$

Խ ն դ ի ր 109 *(574)։ Գտնել* AB *ձողի միջնակետի արագացումը, եթե հայտնի է նրա ծայրակետերի արագացումների մեծությունները՝* $w_A=10$ սմ/վրկ², $w_B=20$ սմ/վրկ² *և այդ արագացումներով ու* AB *ուղղով կազմված անկյունները՝* $\alpha=10^\circ$, $\beta=70^\circ$ *(գծ. 222)։*



Գծ. 222



Գծ. 223

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Որպես բևեռ ընդունենք ձողի* O *կենտրոնը (գծ. 223)։ Այդ դեպքում* A *և* B *կետերի արագացումների համար կունենանք՝*

$$\bar{w}_A = \bar{w}_0 + \bar{w}_{A0,1} + \bar{w}_{A0,2}, \qquad (1)$$

$$\bar{w}_B = \bar{w}_0 + \bar{w}_{B0,1} + \bar{w}_{B0,2}, \qquad (2)$$

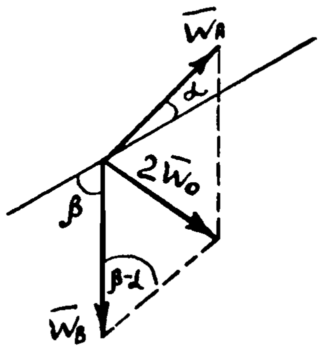
որտեղ $\bar{w}_{A0,1}$ *և* $\bar{w}_{B0,1}$ A *և* B *կետերի բևեռի շուրջը կատարած պտտական շարժումների արագացումներն են, իսկ* $\bar{w}_{A0,2}$ *և* $\bar{w}_{B0,2}$*-ը* A *և* B *կետերի առանցքաձիգ արագացումներն են։ Քանի որ* OA=OB, *ապա* O *կետի շուրջը* A *և* B *կետերի կատարած պտտական շարժումների արագացումները կլինեն իրար հավասար և հակառակ ուղղված, այսինքն՝*

$$\bar{w}_{A0,1} = -\bar{w}_{B0,1}, \quad \bar{w}_{A0,2} = -\bar{w}_{B0,2}, \qquad (3)$$

Գումարելով (1) և (2) վեկտորական հավասարումները և նկատի ունենալով (3)-ը, կստանանք՝

$$\bar{w}_O = \frac{1}{2}(\bar{w}_A + \bar{w}_B)։ \qquad (4)$$

Այստեղ $\bar{w}_A$ և $\bar{w}_B$ արագացումները մեզ նախօրոք տված են։ Դրանց վրա կառուցենք վեկտորական զուգահեռակողմ (գծ. 224)։ Այդ զուգահեռակողմի անկյունագիծը (4)-ի հիման վրա հավասար կլինի $2\bar{w}_O$-ի։ Կոսինուսների թեորեմի համաձայն կունենանք՝



Գծ. 224

$$w_O = \frac{1}{2}\sqrt{w_A^2 + w_B^2 - 2w_A\cdot w_B \mathrm{co}(\beta-\alpha)} =$$

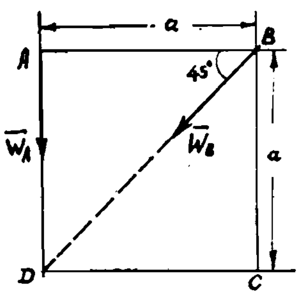
$$= \frac{1}{2}\sqrt{100 + 400 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{300} =$$

$$= 8{,}66 \text{ սմ/վրկ}^2։$$

Պատ. $w_O = \frac{1}{2}\sqrt{w_A^2 + w_B^2 - 2w_A\cdot w_B\cos(\beta-\alpha)} =$

$= 8{,}66$ սմ/վրկ²։

Խնդիր 110 *(578)։* a=2 սմ *կողմ ունեցող* ABCD *քառակուսին կատարում է հարթ շարժում։ Տվյալ մոմենտում նրա* A *և* B *գագաթների արագացումները համապատասխանաբար հավասար են՝* $w_A = 2$ սմ/վրկ², $w_B = 4\sqrt{2}$ սմ/վրկ² *և ուղղված են գծագրում ցույց տված ուղղություններով։ Գտնել քառակուսու ակնթարթային անկյունային արագությունը և ակնթարթային անկյունային արագացումը, ինչպես նաև* C *կետի արագացումը (գծ. 225)։*



Գծ. 225

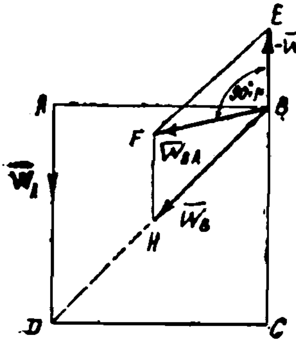
Լուծում: *Խնդիրը լուծենք երկու եղանակով։*

ա) Առաջին եղանակ: *Խնդրում տված է քառակուսու A և B կետերի $\bar{w}_A$ և $\bar{w}_B$ արագացումները, ինչպես նաև A և B կետերի միջև եղած հեռավորությունը։ Որպես բևեռ ընդունենք A կետը։ Գրենք A և B կետերի արագացումների միջև եղած կապը հետևյալ տեսքով՝*

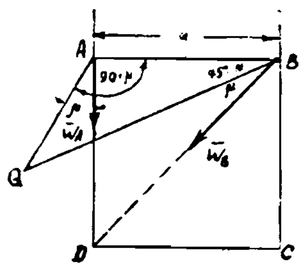
$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}_{BA}.$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\bar{w}_{BA} = \bar{w}_B + (-\bar{w}_A).$$



Գծ. 226



Գծ. 227

Այս երեք վեկտորների վրա կառուցենք զուգահեռակողմ (գծ. 226)։

Գծագրից՝ $\bar{w}_{BA}$ վեկտորի մեծության համար կունենանք՝

$$w_{BA} = \sqrt{w_A^2 + w_B^2 + 2w_A w_B \cos 135^\circ} =$$

$$= \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (4\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{5} \text{ սմ/վրկ}^2.$$

Որոշենք $\bar{w}_{BA}$ վեկտորի և BA գծի միջև կազմված μ անկյունը։ Դիտարկենք FBE եռանկյունին։ Գրենք սինուսների թեորեմը՝

$$\frac{w_B}{w_A} = \frac{\sin(90^\circ + \mu)}{\sin 45^\circ},$$

որտեղից հետևում է, որ

$$\cos\mu = \frac{4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \tag{1}$$

Այժմ գտնենք A *և* B *կետերի հեռավորությունները քառակուսու արագացումների ակնթարթային* Q *կենտրոնից (գծ. 227)։ Այդ* AQ *և* BQ *հատվածները* $\bar{w}_A$ *և* $\bar{w}_B$ *արագացումների հետ կազմում են միևնույն* μ *անկյունը։*

△AQB*-ից սինուսների թեորեմի համաձայն կարող ենք գրել՝*

$$\frac{BQ}{AB}=\frac{\sin(90^\circ+\mu)}{\sin 45^\circ},$$

որտեղից՝

$$BQ=\frac{a\cos\mu}{\sin 45^\circ}=\frac{2\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}\,\text{սմ։}$$

AQ *հեռավորությունը որոշելու համար օգտվենք այն պայմանից, որ* A *և* B *կետերի* $\bar{w}_A$ *և* $\bar{w}_B$ *արագացումները համեմատական են* AQ *և* BQ *հեռավորություններին, այսինքն՝*

$$\frac{AQ}{BQ}=\frac{w_A}{w_B},$$

որտեղից երևում է, որ

$$AQ=BQ\cdot\frac{w_A}{w_B}=\frac{4\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{2}{4\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\,\text{սմ։}$$

Քառակուսու անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը որոշվում են հետևյալ հավասարումներից՝

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{\varepsilon}{\omega^2}, \tag{2}$$

$$w_B=BQ\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\text{։} \tag{3}$$

(1)-ից ստացվում է, որ

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{1}{2}\text{։} \tag{4}$$

Եթե տեղադրենք w_B, BQ *և* tgμ*-ի համար ստացած արժեքները (2) և (3)-ի մեջ, ապա կստանանք՝*

$$\omega^2=2\varepsilon,$$

$$4\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\text{։}$$

Լուծելով այս երկու հավասարումների սիստեմը, կորոշենք ω *և* ε *անհայտների արժեքները։ Այդ արժեքները կլինեն՝*

$$\varepsilon = 1 \ 1/\text{վրկ}^2, \quad \omega = \sqrt{2} \ 1/\text{վրկ}։$$

Մնում է գտնել քառակուսու C կետի $\overline{W}_c$ արագացումը։ Նախ գտնենք արագացման մեծությունը։ Գծագրից 228-ից երևում է, որ

$$W_c = QC\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = QC\sqrt{1+4} = \sqrt{5}\,QC։ \qquad (5)$$

$\triangle QBC$-ից կոսինուսների թեորեմի համաձայն ունենք՝

$$QC = \sqrt{BC^2 + QB^2 - 2BC \cdot QB\cos(45^\circ + \mu)} =$$

$$= \sqrt{4 + \left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{4\sqrt{10}}{5}\cos(45^\circ + \mu)} =$$

$$= \sqrt{10{,}4 - 3{,}2\sqrt{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\mu - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\mu\right)}։$$

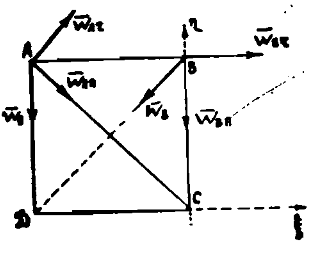
Քանի որ $\cos\mu = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, *ապա* $\sin\mu = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$։

Տեղադրելով $\sin\mu$ *և* $\cos\mu$*-ի արժեքները* QC*-ի արտահայտության մեջ, կստանանք՝*

$$QC = \frac{6\sqrt{5}}{5}։$$

Հետևաբար, W_c*-ի մեծության համար (5)-ից կունենանք՝*

$$W_c = \sqrt{5} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = 6 \ \text{սմ/վրկ}^2։$$



Գծ. 228

Գիտենք, որ $\overline{W}_c$ *վեկտորը* QC *անկյունագծի հետ կազմում է* μ *անկյուն։* $\overline{W}_c$ *վեկտորի ուղղությունը որոշելու համար հաշվենք* QCB *անկյունը։* $\triangle QCB$*-ից, սինուսների թեորեմի համաձայն, կունենանք՝*

$$\frac{\sin\gamma}{QB} = \frac{\sin(45^\circ + \mu)}{QC}, \quad (\gamma = \angle QCB)։$$

Այստեղից՝

$$\sin\gamma = \frac{QB}{QC}\sin(45^\circ + \mu) = \frac{4\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{5}{6\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\mu + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\mu\right) = \frac{2}{3}(\cos\mu + \sin\mu) = \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

Այսպիսով, ստացանք՝

$$\sin\gamma = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

և միաժամանակ ունենք

$$\cos\mu = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

Քանի որ $\sin\gamma=\cos\mu$ *և* γ *ու* μ *անկյունները սուր են, ապա կունենանք՝*

$$\gamma = 90° - \mu,$$

Հետևաբար, $\bar{w}_c$ *արագացումը, որը QC-ի հետ կազմում էր* μ *անկյուն, ուղղված կլինի քառակուսու CD կողմով, C-ից դեպի D։*

բ) Երկրորդ եղանակ: *Այժմ որպես բևեռ ընդունենք քառակուսու C կետը։ Գրենք A և B կետերի արագացումները՝*

$$\bar{w}_A = \bar{w}_C + \bar{w}_{AC,1} + \bar{w}_{AC,2}, \tag{6}$$

$$\bar{w}_B = \bar{w}_C + \bar{w}_{BC,1} + \bar{w}_{BC,2}, \tag{7}$$

որտեղ $\bar{w}_C$*-ն C կետի արագացումն է,* $\bar{w}_{AC,1}$, $\bar{w}_{BC,1}$, $\bar{w}_{AC,2}$, $\bar{w}_{BC,2}$ *վեկտորները A և B կետերի պտտական շարժման կենտրոնաձիգ արագացումներն են, որոնք առաջանում են C կետի շուրջը այդ կետերի կատարած պտտական շարժումից։ Այս արագացումների մեծությունները որոշվում են՝*

$$\begin{aligned} w_{AC,1} &= \varepsilon \cdot AC, \quad w_{AC,2} = \omega^2 \cdot AC, \\ w_{BC,1} &= \varepsilon \cdot BC, \quad w_{BC,2} = \omega^2 \cdot BC \end{aligned} \tag{8}$$

բանաձևերով, իսկ ուղղությունները ցույց են տրված գծագիր 228-ում։ ω *անկյունային արագության և* ε *անկյունային արագացման մեծությունները որոշելու համար (6)-ից հանենք (7)-ը և ստացածը պրոյեկտենք* $C\xi$ *և* $C\eta$ *շարժական առանցքների վրա, միաժամանակ օգտագործելով (8) բանաձևերը։ Արդյունքում կստանանք՝*

$$w_B\cos 45° = \varepsilon \cdot AC \cdot \cos 45° + \omega^2 \cdot AC\cos 45° - \varepsilon \cdot BC, \tag{9}$$

$$-w_A + w_B\cos 45° = \varepsilon \cdot AC \cdot \cos 45° - \omega^2 \cdot AC\cos 45° + \\ + \omega^2 \cdot BC. \tag{10}$$

Տեղադրելով (9) և (10) արտահայտությունների մեջ w_A,

w_B, AC և BC-ի թվային արժեքները, կունենանք՝

$$2\omega^2 = 4$$
$$2\varepsilon = 2։$$

Այստեղից ստացվում է

$$\omega = \sqrt{2}\ 1/\text{վրկ},\quad \varepsilon = 1\ 1/\text{վրկ}^2։ \qquad (11)$$

Այժմ որոշենք C կետի $\bar{w}_c$ արագացումը։

Պրոյեկտենք (7) հավասարումը $C\xi$ և $C\eta$ առանցքների վրա, միաժամանակ տեղադրելով ω և ε-ի արժեքները։ Կստանանք՝

$$-4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = w_{c\xi} + 1\cdot 2,$$
$$-4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = w_{c\eta} - 2\cdot 2։$$

Այս հավասարումներից հետևում է, որ

$$w_{c\xi} = -6,\quad w_{c\eta} = 0։$$

Այսպիսով, C կետի արագացումը կլինի՝ $w_c = 6$ սմ/վրկ², որն ուղղված է C-ից դեպի D կետը։

Պատ. $\omega = \sqrt{2}$ 1/վրկ, $\varepsilon = 1$ 1/վրկ²,
$w_c = 6$ սմ/վրկ² ուղղված է CD կողմով, C-ից դեպի D կետը։

§ 14. ՄԱՐՄՆԻ ՀԱՐԹ ՇԱՐԺՈՒՄՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

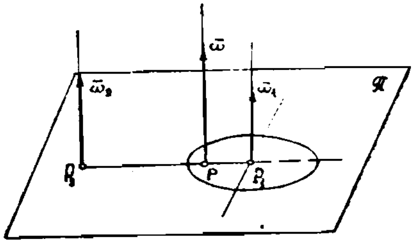
1. Զուգահեռ առանցքների շուրջը պինդ մարմնի կատարած պտույտների գումարումը: *Դիցուք պինդ մարմինը կատարում է պտտական շարժում երկու զուգահեռ առանցքների շուրջը $\bar{\omega}_1$ և $\bar{\omega}_2$ անկյունային արագություններով։ Այս դեպքում մարմնի շարժումը կլինի հարթ-զուգահեռ, ընդ որում անշարժ հարթությունը կլինի ուղղահայաց պտտման առանցքներին։ Մարմնի կետերի շարժումների ուսումնասիրությունը բերվում է պտտման առանցքներին ուղղահայաց հարթության մեջ գտնվող հարթ պատկերի շարժման ուսումնասիրությանը։*

Եթե պատկերը միաժամանակ պտտվում է երկու զուգահեռ առանցքների շուրջը ω_1, ω_2 անկյունային արագություններով, ապա արդյունարար շարժումը որոշելու համար նպատականարմար է դիտարկել հետևյալ երեք դեպքերը։

ա) Պտույտներն ուղղված են նույն կողմը: *Այս դեպքում ω_1 և ω_2 անկյունային արագություններին համապատասխան պտույտները կատարվում են նույն ուղղություններով։ Արդյունարար* շարժումը կլինի նույնպես պտտական։ Արդյունարար ω անկյունային արագության մեծությունը հավասար կլինի տված անկյունային արագությունների գումարին՝

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \tag{I}$$

Պատկերի արդյունարար պտտումը կկատարվի այն P ակընթարթային կենտրոնի շուրջը, որը գտնվում է P_1P_2 հատվածի վրա և բաժանում է P_1 և P_2 ակնթարթային կենտրոնների միջև եղած հեռավորությունը ω_1 և ω_2 անկյունային արագությունների մեծություններին հակադարձ համեմատական մասերի (գծ. 229).

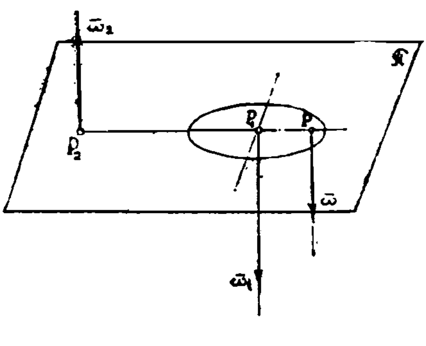


Գծ. 229

$$\frac{PP_1}{PP_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \tag{II}$$

բ) Պտտումները ուղղված են հակադիր կողմեր: Պտտումները կատարվում են տարբեր ուղղություններով, ω_1 և ω_2 անկյունային արագություններով, ընդ որում $\omega_1 \neq \omega_2$։ Որոշակիության համար ընդունենք, որ $\omega_1 > \omega_2$ (գծ. 230)։ Այս դեպքում պատկերի արդյունարար շարժումը կլինի նույնպես պտտական,

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \tag{III}$$



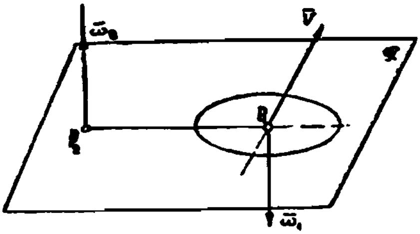
Գծ. 230

արդյունարար անկյունային արագությամբ։ Արդյունարար պտտումը կկատարվի P կենտրոնի շուրջը, որը գտնվում է P_1 և P_2 ակընթարթային կենտրոնները միացնող ուղիղ գծի վրա և բաժանում է P_1P_2 հեռավորությունը արտաքին կերպով ω_1 և ω_2 անկյունային արագությունների մեծություններին հակադարձ համեմատական մասերի՝

$$\frac{PP_1}{PP_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \tag{IV}$$

Արդյունարար պտտումը կկատարվի բաղադրիչ պտտումներից մեծի ուղղությամբ, տվյալ դեպքում ω_1-ին համապատասխան պտտման ուղղությամբ։

գ) Պտտումների զույգ: ω_1 *և* ω_2 *անկյունային արագությունները ուղղված են հակադիր կողմեր և մեծությամբ իրար հավասար են (գծ. 231)։ Այս դեպքում արդյունարար անկյունային արագությունը հավասար է զրոյի։ Մարմինը կատարում է համընթաց շարժում,* $v = \omega_1 \cdot d$ *արագությամբ, ուղղված* $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ *պտտման զույգի մոմենտով։*



Գծ. 231

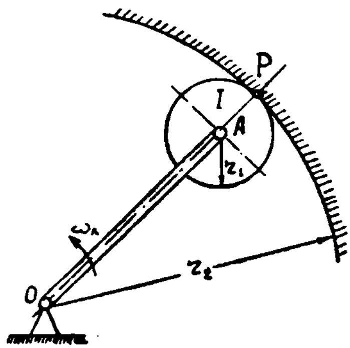
2. Մարմնի բարդ շարժումների գումարման վերաբերյալ խնդիրների լուծման եղանակները: *Այս պարագրաֆի վերաբերյալ խնդիրները լուծելիս նպատակահարմար է օգտվել հետևյալ երկու եղանակներից։*

ա) Պտտական շարժումների անկյունային արագությունների գումարման եղանակ: *Խնդիրների լուծման այս եղանակը կայանում է նրանում, որ զուգահեռ առանցքների շուրջը կատարված պտտական շարժումները փոխարինվում են համապատասխան արդյունարար շարժումով, որը կարող է լինել պտտական կամ համընթաց։ Այս եղանակով հիմնականում լուծվում են այն խնդիրները, երբ պատկերը կատարում է բարդ շարժում, ընդ որում թե՛ հարաբերական և թե՛ փոխադրական շարժումները պտտական են։ Այդպիսի խնդիրներ լուծելիս բավական է վերը դիտարկված դեպքերում* ω_1 *և* ω_2 *անկյունային արագություններով կատարվող պտտումներից մեկը համարել հարաբերական, իսկ մյուսը՝ փոխադրական։ Խնդրի պայմաններում բացարձակ, հարաբերական և փոխադրական անկյունային արագություններից մեկը տված է լինում, իսկ մյուս երկուսի մեծությունները որոշվում են*

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{OP}{AP}, \quad \omega_a = \omega_r \pm \omega_e \qquad (V)$$

երկու հավասարումներից, ընդ որում դրական վերցվում է այն դեպքում, երբ գումարելի պտտումները կատարվում են նույն ուղղությամբ և բացասական՝ երբ պտտվում են հակադիր ուղղություններով։

Խ ն դ ի ր 111: $r_1=5$ սմ շառավիղ ունեցող I ատամնանիվը շարժման մեջ է դրվում OA մեղեխով, որը հավասարաչափ պտտվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ $\omega_k=2\pi$ 1/վրկ անկյունային արագությամբ։ I ատամնանիվը գտնըվում է $r_2=20$ սմ շառավիղ ունեցող անշարժ II ատամնանիվի հետ ներքին կառչման մեջ։ Որոշել I ատամնանիվի բացարձակ անկյունային արագությունը և նույն անվի հարաբերական անկյունային արագությունը մեղեխի նկատմամբ (գծ. 232)։

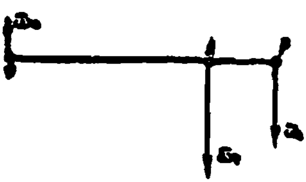


Գծ. 232

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ Խնդրի պայմանի համաձայն

$$\omega_e=\omega_k=2 \ 1/\text{վրկ}։$$

I անվի արագությունների ակընթարթային P կենտրոնը բաժանում է OA հատվածը արտաքին կերպով համեմատական մասերի, քանի որ I անվի փոխադրական և հարաբերական շարժումները զուգահեռ առանցքների շուրջը կատարվում են հակադիր ուղղություններով (233)։ Եթե $\omega_e=\omega_k$ ընդունենք դրական, ապա ω_r-ը կլինի բացասական։ I անվի հարաբերական անկյունային արագության մոդուլը որոշվում է



Գծ. 233

$$\frac{|\omega_r|}{\omega_e}=\frac{OP}{OA}$$

բանաձևով, որտեղից ստացվում է

$$|\omega_r|=\omega_e \cdot \frac{OP}{AP}=\omega_k \ \frac{r_2}{r_1}=2 \cdot \frac{20}{5}=8 \ 1/\text{վրկ}։$$

Նշանակում է

$$\omega_r=-8 \ 1/\text{վրկ}։$$

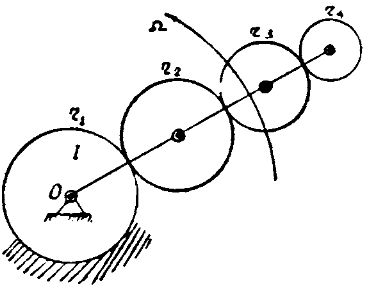
Հետևաբար, I ատամնանիվի ω_1 բացարձակ անկյունային արագությունը կլինի

$$\omega_1 = 2-8 = -6 \ 1/\text{վրկ}։$$

Պատ. $\omega_1 = -6 \ 1/\text{վրկ}$, $\omega_I = -8 \ 1/\text{վրկ}$։

բ) «Կանգնեցման» եղանակ: Նախքան այս եղանակի պարզաբանմանն անցնելը համառոտակի շարադրենք պտտական շարժումները փոխանցող ևս երկու մեխանիզմների մասին՝ պլանետար ատամնավոր փոխանցում և դիֆերենցիալ փոխանցում։ § 5-ում տրվեց մի քանի այլ մեխանիզմների համառոտ շարադրանքը։

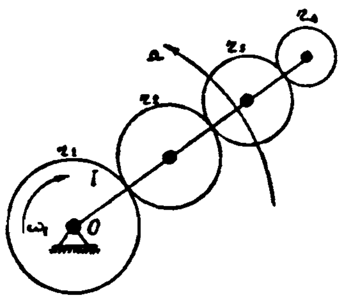
Պլանետար կոչվում է այն ատամնավոր փոխանցումը, որի մի ատամնանիվը անշարժ է, իսկ մյուս ատամնանիվները շարժման մեջ են դրվում մեղեխի միջոցով, որի պտտման առանցքը համընկնում է անշարժ անվի առանցքի հետ. մնացած անիվների առանցքները գտնվում են մեղեխի վրա (գծ. 234)։ Պլանետար ատամնավոր մեխանիզմի անշարժ առանցք ունեցող անիվը կոչվում է կենտրոնական, իսկ շարժական առանցք ունեցող անիվները՝ պլանետար անիվներ կամ սատելիտներ։ Պլանետար մեխանիզմը ունի ազատության մեկ աստիճան։



Գծ. 234

Ատամնավոր փոխանցումը կոչվում է դիֆերենցիալ, եթե նրա բոլոր ատամնանիվները և դրանք միացնող մեղեխը կարող են շարժվել, ընդ որում այդ ատամնանիվներից մեկը կարող է պտտվել նույն առանցքի շուրջը, ինչ որ մեղեխը (գծ. 235)։

Դիֆերենցիալ մեխանիզմի ազատության աստիճանների թիվը մեծ է մեկից։ Պարզագույն դեպքում դիֆերենցիալ մեխանիզմը ունի ազատության երկու աստիճան, այսինքն՝ մեխանիզմի երկու օղակները կարող են կատարել իրարից անկախ շարժումներ։



Գծ. 235

Պլանետար և դիֆերենցիալ մեխանիզմների վերաբերյալ կինեմատիկական խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է օգտավել այսպես կոչված «կանգնեցման» եղանակից: Այս եղանակի էությունը կայանում է նրանում, որ պլանետար և դիֆերենցիալ փոխանցման մեղեխը կանգնեցնում են, իսկ փոխանցման բոլոր օղակներին հաղորդում են մի այնպիսի անկյունային արագություն, որը մեծությամբ հավասար է մեղեխի անկյունային արագությանը և ունի նրա հակադիր ուղղությունը: Այդ դեպքում մեղեխի անկյունային արագությունը կլինի զրո, իսկ ատամնավոր անիվների անկյունային արագությունները հավասար կլինեն իրենց անկյունային արագությունների և մեղեխի անկյունային արագության տարբերությանը: Հետևաբար, պլանետար և դիֆերենցիալ փոխանցումները վերածվում են սովորական շարային փոխանցման: Մենք տեսանք (§ 5), որ շարային փոխանցման դեպքում ատամնանիվների անկյունային արագությունների, ատամների թվերի և շառավիղների միջև գոյություն ունի հետևյալ առնչությունը

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{1-n} \cdot (-1)^m, \qquad \text{(VI)}$$

որտեղ

$$i_{1-n} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_4}{r_3} \dots \frac{r_n}{r_{n-1}} \cdot (-1)^m = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} \dots \frac{z_n}{z_{n-1}} \cdot (-1)^m: \qquad \text{(VII)}$$

Այստեղ n-ը ատամնանիվների թիվն է, r_i $(i=1, 2, \dots, n)$ —անիվների շառավիղները, z_i $(i=1, \dots, n)$-ը անիվների ատամների թիվը, m-ը արտաքին կառչումների թիվը: (I) բանաձևը կարելի է կիրառել նաև պլանետար և դիֆերենցիալ մեխանիզմների դեպքում, եթե նրանում ω_i $(i=1, 2, \dots, n)$ անկյունային արագությունները փոխարինենք $\omega_i - \Omega$ $(i=1, \dots, n)$ անկյունային արագություններով, որտեղ Ω-ն մեղեխի անկյունային արագությունն է, վերցված հակադիր նշանով: Այդ դեպքում (VI)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

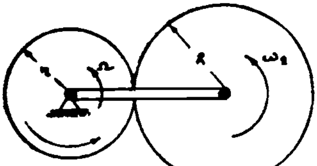
$$\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_n - \Omega} = i_{1-n} \cdot (-1)^m: \qquad \text{(VIII)}$$

Այս բանաձևը ճիշտ է ցանկացած ատամնավոր փոխանցման դեպքում և կոչվում է Վիլլիսի բանաձև: Դիֆերենցիալ փոխանցման դեպքում՝ $\omega_1 \neq 0$, $\Omega \neq 0$, պլանետար փոխանցման դեպքում՝ $\omega_1 = 0$, $\Omega \neq 0$, իսկ շարային փոխանցման դեպքում՝ $\omega_1 \neq 0$, $\Omega = 0$:

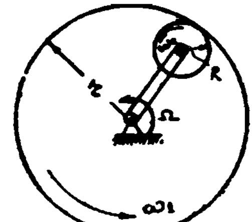
Դիտարկենք մասնավոր դեպք, երբ ունենք երկու անիվների *արտաքին և ներքին փոխանցում։ Երկու անիվների արտաքին կառչման դեպքում (գծ. 236) անիվների անկյունային արագությունների միջև եղած կապն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}, \qquad \text{(IX)}$$

որտեղ r_1, r_2-ը՝ անիվների շառավիղներն են, z_1, z_2-ը՝ ատամնե-



Գծ. 236



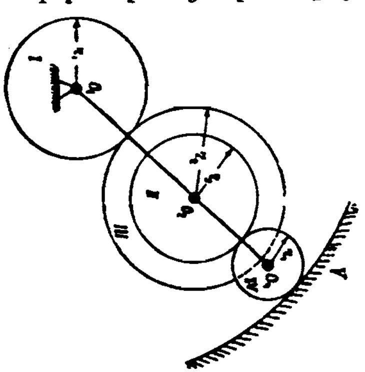
Գծ. 237

րի թվերը։ Այստեղ վերցված է բացասական նշան, քանի որ արտաքին կառչման դեպքում անիվները պտտվում են հակառակ ուղղություններով։

Երկու անիվների ներքին կառչման դեպքում (գծ. 237) այդ (VIII) առնչությունը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

Խ ն դ ի ր 112: *Պլանետար մեխանիզմի* I *անիվը պտտվում է* O_1 *կետով անցնող անշարժ առանցքի շուրջը* O_1O_4 *մեղեխի միջոցով։* I *անիվը պետք է պտտվի* ω_1 *անկյունային արագությամբ, որը համապատասխանում է* 10000 պտ/րոպ*։ Անիվների շառավիղները հավասար են՝* $r_1=10$ սմ, $r_2=16$ սմ, $r_3=8$ սմ, $r_4=6$ սմ*։ Գտնել* Ω *անկյունային արագությունը, որը պետք է հաղորդել մեղեխին, որպեսզի ապահովվի առաջին անվի վերը նշված անկյունային արագությունը (գծ. 238)։*



Գծ. 238

Լուծում: I, II, IV, V անիվների անկյունային արագությունները համապատասխանաբար նշանակենք ω_1, ω_2, ω_4, ω_5։ II և III անիվները կազմում են մի պինդ մարմին և ունեն նույն ω_2 անկյունային արագությունը։ Վիլլիսի բանաձևը VIII և VII բանաձևերի հիման վրա տվյալ խնդրի համար կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_5 - \Omega} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_4}{r_3} \cdot \frac{r_5}{r_4} \cdot (-1)^2, \qquad (1)$$

Այստեղ Ω-ն մեղեխի անհայտ անկյունային արագությունն է, V անվի անշարժ լինելու հետևանքով $\omega_5 = 0$, իսկ

$$\omega_1 = \frac{10000 \cdot 2\pi}{60} = \frac{1000\pi}{3} \, 1/\text{վրկ}։$$

Տեղադրելով ω_1, ω_5-ի արժեքները (1)-ի մեջ և լուծելով ստացված հավասարումը, կստանանք՝

$$\Omega = \omega_1 \cdot \frac{r_1 r_3}{r_1 r_3 - r_2 r_5} = \frac{1000\pi}{3} \cdot \frac{10 \cdot 8}{10 \cdot 8 - 16 \cdot 46} =$$

$$= -\frac{122\pi}{3} \cdot 1/\text{վրկ}։$$

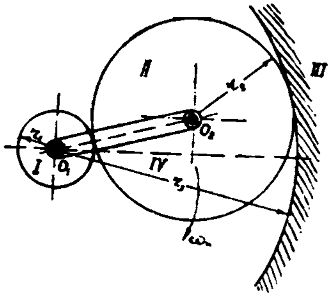
Ω-ի բացասական նշանը ցույց է տալիս, որ մեղեխի պըտըտման ուղղությունը հակադիր է առաջին անվի պտտմանը։

Պատ. $\Omega = -\frac{122\pi}{3} 1/\text{վրկ}$։

3. Խնդիրներ

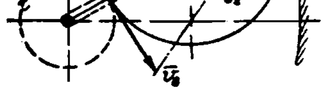
Այս պարագրաֆի վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս կարևոր է տարբերել հետևյալ երկու դեպքերը։ ա) Որոշել պլանետար և դիֆերենցիալ մեխանիզմների փոխանցման թվերը, անկյունային արագությունները և տարբեր կետերի արագությունները ու արագացումները։ բ) Արագությունների և արագացումների գումարման թեորեմների հիման վրա որոշել հարաբերական, փոխադրական և բացարձակ անկյունային արագությունները, ինչպես նաև կետերի արագություններն ու արագացումները։

Խնդիր 113 (582)։ Սրող քարի պտույտը արագացնող կառչումը կառուցված է հետևյալ կերպ՝ IV ձողը հատուկ բռնակի միջոցով պտտման մեջ է դրվում O_1 առանցքի շուրջը ω_4 անկյունային արագությամբ։ O_2 ձողի ծայրում գտնվում է մատ, որի վրա ազատ հագցված է r_2 շառավղով II անիվը։ Բանկի պտտման ժամանակ մատը ստիպում է II անիվին գլորվել առանց սահելու r_3 շառավղով III անշարժ շրջանի արտաքին մասով, Շփման հետևանքով II անիվը պտտում է r_1 շառավղով I անիվին առանց սահելու, ընդ որում I անիվը ազատ նստած է O_1 առանցքի վրա և անփոփոխ միացված է սրոցի առանցքին։ Արտաքին անշարժ շրջանակի տված r_3 շառավղի միջոցով գտնել r_1-ի այնպիսի արժեք, որպեսզի տեղի ունենա $\frac{\omega_1}{\omega_4}=12$ պայմանը, այսինքն՝ սրոցը պտտվի 12 անգամ արագ, քան նրան շարժման մեջ դնող բռնակը (գծ. 239)։



Գծ. 239

Լուծում: II անիվը գլորվում է III անշարժ անվի վրայով առանց սահելու։ Հետևաբար, II անվի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը ժամանակի յուրաքանչյուր մոմենտում գտնվում է այդ անիվների շոշափման P կետում (գծ. 240)։ O_2 մատը պատկանում է IV ձողին, իսկ խնդրում տված է, որ IV ձողը պտտվում է O_1 կենտրոնի շուրջը ω_4 անկյունային արագությամբ։ Հետևաբար, II անվի O_2 կենտրոնի արագությունը կլինի՝



Գծ. 240

$$v_{O2}=\omega_4(r_1+r_2)։$$

Երկրորդ անվի ω_2 անկյունային արագության համար կունենանք՝

$$\omega_2=\frac{v_{O2}}{r_2}=\omega_4\cdot\frac{r_1+r_2}{r_2},$$

Այժմ որոշենք I և II անիվների շոշափման B կետի արագությունը։ B կետի հեռավորությունը արագությունների ակնթարթային P կենտրոնից հավասար է 2r-ի, իսկ O_2 կետի հեռավորությունը նույն P կետից՝ r-ի։ Հետևաբար, B կետի արագությունը 2 անգամ մեծ կլինի O_2 կետի արագությունից։ Այստեղից հետևվում է, որ

$$v_B = \omega_4 \cdot \frac{r_1+r_2}{r_2} \cdot 2r_2 = 2\omega_4 (r_1 + r_2)։$$

B կետը միաժամանակ պատկանում է նաև I *անիվին (գծ. 241)։ Այստեղից հետևում է, որ* I *անիվի անկյունային արագությունը հավասար կլինի նրա* v_B *արագությունը բաժանած* r_1*-ի վրա, այսինքն՝*

$$\omega_1 = \omega_4 \cdot \frac{2(r_1+r_2)}{r_1},$$

Սա գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{2(r_1 + r_2)}{r_1}, \qquad (1)$$

Քանի որ $\frac{\omega_1}{\omega_4}=12$, *ապա (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

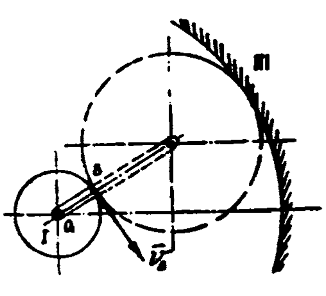
$$\frac{2(r_1 + r_2)}{r_1} = 12։ \qquad (2)$$

Գծագիր 239-ից երևում է, որ

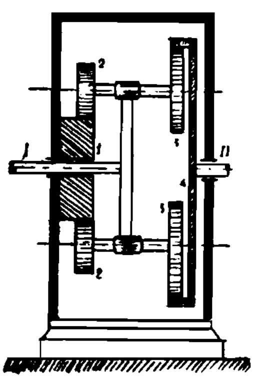
$$r_3 = r_1 + 2r_2։ \qquad (3)$$

(2) և (3)-ից կարելի է ստանալ, որ $r_3 = 11\, r_1$։

Պատ. $r_1 = \frac{1}{11} r_3։$

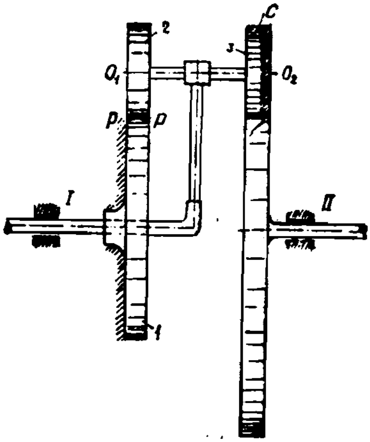


Գծ. 241



Գծ. 242

Խ ն դ ի ր 114 *(587)։ Արագությունների ռեդուկտորը բաղկացած է* $r_1=40$ սմ *շառավիղ ունեցող անշարժ ատամնանիվից,* *իրար զուգորդված* $r_2 = 20$ սմ *և* $r_3 = 30$ սմ *շառավիղներով երկու գլորվող ատամնանիվներից և տարվող անվի վրա նստած ներքին կառչում ունեցող* $r_4 = 90$ սմ *շառավղով ատամնանվից։ Տանող լիսեռը և գլորվող ատամնանիվների առանցքը, կրող մեղեխը կատարում են* $n_1=1800$ պտ/րոպ։ *Գտնել տարվող լիսեռի պտույտների թիվը մեկ րոպեում (գծ. 242)։*



Գծ. 243

Լուծում: *Խնդիրը լուծենք օգտագործելով արագությունների ակնթարթային կենտրոնի եղանակը։ Քանի որ 1 ատամնանիվը անշարժ է, ապա ռեդուկտորի ատամնային փոխանցումը կլինի պլանետար ատամնային փոխանցում։*

Մեղեխը հաղորդում է ատամնանվի O_2 *առանցքին* v_{O2} *շրջանային արագություն (գծ. 243), որի մեծությունը հավասար կլինի՝*

$$v_{O2}=\omega_1(r_1+r_2)=\frac{\pi n_1}{30}(r_1+r_2)$$

կամ

$$v_{O2}=\frac{\pi \cdot 1800}{30}(40+20)=3600\,\pi \text{ սմ/վրկ։}$$

Ատամնանիվ 2-ը գլորվում է անշարժ 1 ատամնանվի վրայով առանց սահելու։ Այս երկու ատամնանիվների շոշափման P *կետը կլինի ատամնանիվ 2-ի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը։ Ակնթարթային* P *կենտրոնի շուրջը ատամնանիվ 2-ի անկյունային արագությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$\omega_2=\frac{v_{O2}}{r_2}=\frac{3600\,\pi}{20}=180\,\pi \text{ 1/վրկ։}$$

Ատամնանիվ 3-ը անշարժ դրված է նույն O_1O_2 *առանցքի վրա, ինչ որ ատամնանիվ 2-ը։ Դրա հետևանքով ատամնանիվ 3-ի համար պտտման ակնթարթային առանցք կլինի նույն առանցքը, ինչ որ ատամնանիվ 2-ի համար էր, այսինքն՝* P *կետով անցնող* PP *առանցքը։ Այսպիսով, մեզ հայտնի է պտտման*

ԲԲ ակնթարթային դիրքը և ատամնանիվ 2-ի պտտման ω_2 *անկյունային արագությունը։ 3 և 4 ատամնանիվների շոշափման* C *կետի արագության մեծության համար կստանանք՝*

$$v_c = \omega_2(r_2 + r_3)$$

կամ

$$v_c = 180\pi(20 + 30) = 9000\pi \text{ սմ/վրկ։}$$

C *կետի* v_c *արագությունը միաժամանակ հանդիսանում է նաև ատամնանիվ 4-ի շրջանային շարժման գծային արագությունը, հետևաբար, ատամնանիվ 4-ի* ω_{II} *անկյունային արագությունը կարելի է որոշել հետևյալ բանաձևով՝*

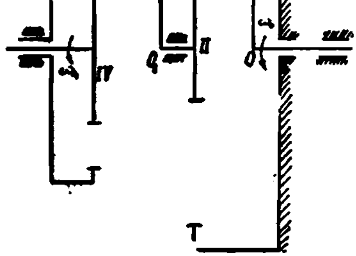
$$\omega_{II} = \frac{v_c}{r_4} = \frac{9000\pi}{90} = 100\pi \text{ 1/վրկ։}$$

Ատամնանիվ 4-ի պտույտների թիվը մեկ րոպեում հավասար կլինի՝

$$n_{II} = \frac{\omega_{II} \cdot 30}{\pi} = \frac{100\pi \cdot 30}{\pi} = 3000 \text{ պտ/րոպ։}$$

Պատ. $n_{II} = 3000$ պտ/րոպ։

Խ ն դ ի ր 115։ *Դիֆերենցիալ էպիցիկլիկ մեխանիզմի* VI *անիվը անշարժ է,* OA *լծափայտը ունի* ω_0 *անկյունային արագություն, իսկ* IV *անիվը՝* ω_4 *անկյունային արագություն և պտտվում է նույն ուղղությամբ, ինչ որ լծափայտը։ Որոշել* V *անվի անկյունային արագությունը, եթե* $r_1 = 10$ սմ, $r_2 = 4$ սմ, $r_3 = 4$ սմ, $r_4 = 8$ սմ *(գծ. 244)։*



Գծ. 244

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ *Վիլլիսի բանաձևի համաձայն* I *և* VI *անիվների համար կունենանք՝*

$$\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_6 - \Omega} = \frac{r_6}{r_1}, \qquad (1)$$

որտեղ Ω*-ն լծափայտի անհայտ անկյունային արագությունն է։*

(1) բանաձևում վերցված է դրական նշան, քանի որ I *և* VI *անիվների միջև զույգություն ունի ներքին կառչում։*

Խնդրի պայմանի համաձայն $\omega_6 = 0$ *է, գծագրից էլ հետևում է, որ*

$$r_6 = r_2 + 2r_1 = 24 \text{ սմ}։$$

Տեղադրելով ω_6*-ի և* r_6*-ի արժեքները (1)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$\omega_1 = -\frac{7}{5}\omega_0։ \tag{2}$$

Բացասական նշանը ցույց է տալիս, որ I *անիվը պտտվում է լծափայտի հակադիր ուղղությամբ։*

Այժմ գրենք Վիլլիսի բանաձևը I *և* II *անիվների համար՝*

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_2 - \omega_0} = -\frac{r_2}{r_1}, \tag{3}$$

Տեղադրելով ω_1, r_1, r_2*-ի արժեքները (3)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$\omega_2 = 7\omega_0։$$

III, IV *և* V *անիվների համար լծափայտի դերը կատարում է* O_1B *ձողը, որը պտտվում է* ω_2 *անկյունային արագությամբ։*

Վիլլիսի բանաձևի համաձայն III *և* IV *անիվների համար կունենանք՝*

$$\frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_4 - \omega_2} = -\frac{r_4}{r_3}, \tag{5}$$

Այստեղ $\omega_2 = 7\omega_0$ *և* ω_4*-ը տված է։ Այդ դեպքում (5)-ից կստանանք՝*

$$\omega_3 = 21\omega_0 - 2\omega_4։$$

Վերջապես, III *և* V *անիվների համար կունենանք՝*

$$\frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_5 - \omega_2} = \frac{r_5}{r_3}, \tag{6}$$

Գծագրից երևում է, որ

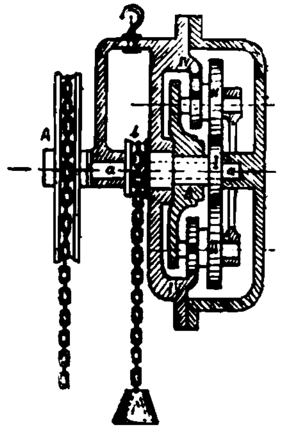
$$r_5 = 2r_3 + r_4 = 16 \text{ սմ}։$$

Տեղադրելով ω_3*-ի,* ω_5*-ի և* r_3, r_5*-ի արժեքները (6)-ի մեջ և լուծելով ստացված հավասարումը* ω_5*-ի նկատմամբ, կստանանք* ω_5*-ի արժեքը։*

Պատ. $\omega_5 = \dfrac{21\omega_0 - \omega_4}{2}$։

Խ ն դ ի ր 116 *(591)։ «Տրիպլեկս» սիստեմի ճախարակում* a—a *լիսեռի վրա կոշտ հագցված է* A *շղթանիվը։ Նույն լիսեռի վրա ազատ հագցված է* B *բռնակին խուլ միացված* b *ականոցը՝*

վերամբարձ շղթայով և բեռով։ Բռնակի յուրաքանչյուր բութակի վրա ազատ դրված են երկու, միմյանց զուգորդված II *և* III *ատամնանիվները։* II *ատամնանիվները կառչվում են* a—a *լիսեռի վրա ամրացված* I *ատամնանվին,* III *ատամնանիվները կառչված են* IV *անշարժ ատամնանիվներին։ Որոշել* a—a *լիսեռի և* b *ականոցի պտտման անկյունային արագությունների հարաբերությունը, երբ* I, II, III, V *անիվների ատամների թվերը համապատասխանաբար հավասար են՝* $z_1=12$, $z_2=28$, $z_3=14$, $z_4=54$ *(գծ. 245)։*

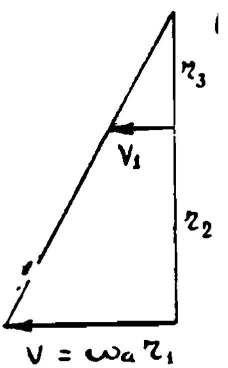


Գծ. 245

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Որոշենք* II *ատամնանիվների այն երկու կետերի արագությունները, որոնցով տվյալ մոմենտում շոշափվում են այդ անիվները* I *ատամնանվին։ Եթե* I *ատամնանվի շառավիղը նշանակենք* r_1, *պըտտման անկյունային արագությունը՝* ω_a, *իսկ այդ կետերի արագությունը* v, *ապա կունենանք՝*

$$v = \omega_a \cdot r_1 \text{։} \qquad (1)$$

II *և* III *ատամնանիվներից կազմված մարմինները կատարում են հարթ-զուգահեռ շարժում։ Այդ մարմիններից յուրաքանչյուրը շոշափում է* IV *ատամնանվին մի կետում, որի արագությունը տվյալ մոմենտում հավասար է զրոյի։ Հետևաբար, շոշափման այդ երկու կետերը կհանդիսանան պտտման ակնթարթային կենտրոններ* II *և* III *ատամնանիվներից կազմված մարմինների համար։*



Գծ. 246

Եթե II *և* III *ատամնանիվների կենտրոնների արագությունների մեծությունը նշանակենք* v_1 *(գծ. 246), ապա կարող ենք գրել՝*

$$\frac{v_1}{r_3} = \frac{v}{r_2 + r_3}, \qquad (2)$$

որտեղ r_2 *և* r_3*-ը՝* II *և* III *անիվների շառավիղներն են։*

Գծագիր 245-ից երևում է, որ v_1 *արագության և* b *ականոցի*

18—2292

ω_b պտտման անկյունային արագության միջև գոյություն ունի հետևյալ առնչությունը՝

$$v_1 = \omega_b (r_1 + r_2)\text{։} \qquad (3)$$

Տեղադրելով v և v_1-ի արժեքները (1) և (3)-ից (2)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\omega_b = \frac{r_1 r_3}{(r_2 + r_3)(r_1 + r_2)} \cdot \omega_a$$

կամ

$$\frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)}{r_1 \cdot r_3}\text{։} \qquad (4)$$

Քանի որ I, II, III և IV ատամնանիվների մեջ գոյություն ունի ատամնավոր կառչում, ապա կարող ենք գրել, որ

$$\frac{z_1}{r_1} = \frac{z_2}{r_2} = k, \qquad \frac{z_3}{r_3} = \frac{z_4}{r_4} = k_1, \qquad (5)$$

որտեղ z_1, z_2, z_3, z_4-ը համապատասխան անիվների ատամների թվերն են, իսկ k և k_1-ը անհայտ մեծություններ են։

Մյուս կողմից, գծագիր 245-ից ունենք՝

$$r_4 = r_3 + r_2 + r_1\text{։} \qquad (6)$$

Եթե (5) հավասարումներից որոշենք r_1, r_2, r_3, r_4-ի արժեքները և տեղադրենք (6)-ի մեջ, ապա կստանանք՝

$$\frac{z_4}{k_1} = \frac{z_3}{k_1} + \frac{z_2}{k} + \frac{z_1}{k}\text{։} \qquad (7)$$

Տեղադրելով z_1, z_2, z_3 և z_4-ի թվային արժեքները (7)-ի մեջ, կստանանք, որ $k = k_1$։

Այժմ (5) հավասարումներից որոշենք r_1, r_2, r_3, r_4-ը արտահայտված z_1, z_2, z_3, z_4-ի միջոցով և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ $k = k_1$։ Այդ արժեքները տեղադրելով (4)-ի մեջ, կունենանք՝

$$\frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)}{z_1 \cdot z_3} = \frac{(12+28)(28+14)}{12 \cdot 14} = \frac{40 \cdot 42}{12 \cdot 14} = 10\text{։}$$

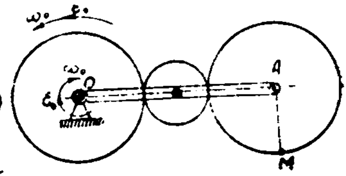
Պատ. $\frac{\omega_a}{\omega_b} = 10$։

Խ ն դ ի ր 117 (595)։ Էպիցիկլիկ փոխանցման մեջ, R շառավղով տանող ատամնանիվը պտտվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ ω_0 անկյունային արագությունով և ε_0 անկյունային արագացումով։ $3R$ երկարությամբ մեղեխը պտտ-

վում է ատամնանվի առանցքի շուրջը ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ՝ ունենալով միևնույն անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը։

Գտնել R շառավղով տարվող ատամնանվի ավյալ մոմենտում մեղեխին ուղղահայաց տրամագծի ծայրում գտնվող M *կետի արագությունը և արագացումը (գծ. 247)։*

Լուծում: *Երրորդ ատամնանվի* ω_3 *անկյունային արագությունը որոշելու համար օգտվենք Վիլլիսի բանաձևից։* I, II *և* III *ատամնանիվների համար, Վիլլիսի բանաձևի համաձայն, կունենանք՝*



Գծ. 247

$$\frac{\omega_1-\omega_0}{\omega_3-\omega_0}=(-1)^2\cdot\frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{r_3}{r_2}, \qquad (1)$$

որտեղ ω_1 *և* ω_3*-ը* I *և* III *ատամնանիվների անկյունային արագություններն են, իսկ* ω_0*-ն՝ մեղեխի անկյունային արագությունն է։ Խնդրի պայմանի համաձայն* $\omega_1=-\omega_0$, *իսկ* $r_1=r_3$։ *Այդ դեպքում (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$-2\omega_0=\omega_3-\omega_0,$$

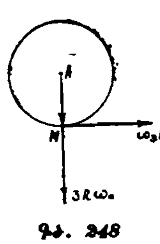
որտեղից

$$\omega_3=-\omega_0=\omega_1\text{։} \qquad (2)$$

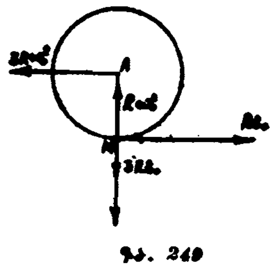
Նույնպիսի առնչություն կստացվի նաև անկյունային արագացումների միջև, այսինքն՝

$$\varepsilon_3=-\varepsilon_0=\varepsilon_1\text{։} \qquad (3)$$

Այժմ գտնենք M *կետի արագությունը։* M *կետի արագությունը կազմված է երկու գումարելիներից՝ մեկը* A *կետի շարժման արագությունն է, իսկ մյուսը՝* A *կետի շուրջը* M *կետի կատարած պտտական շարժման արագությունը (գծ. 248)։*



Գծ. 248



Գծ. 249

Քանի որ այս երկու արագությունները (փոխադրական և հարաբերական) ուղղահայաց են, ապա M *կետի արագության մեծությունը հավասար կլինի՝*

$$v_M = \sqrt{(3R\omega_0)^2 + (\omega_0 R)^2} = R\omega_0\sqrt{9+1} = \sqrt{10}\,R\omega_0 ։$$

Եթե որպես բևեռ ընդունենք A կետը, ապա M կետի արագացման վեկտորը կարտահայտվի

$$\bar{w}_M = \bar{w}_A + \bar{w}_{MA,1} + \bar{w}_{MA,2}$$

բանաձևով (գծ. 249)։

$\bar{w}_A$ *արագացումը կիրառված է A կետում և ունի երկու բաղադրիչներ՝* $\bar{w}_{A\tau}$ *և* $\bar{w}_{An}$, *որոնք ուղղված են համապատասխանաբար AM-ով և AO-ով։ Դրանց մեծությունները կլինեն՝*

$$w_{A\tau} = 3R\varepsilon_0, \quad w_{An} = 3R\omega_0^2 ։$$

$\bar{w}_{MA,1}$*-ը A կետի շուրջը կատարած շարժման տանգենցիալ արագացումն է (գծ. 249), որն ունի AM-ին ուղղահայաց ուղղություն, իսկ մեծությամբ հավասար է՝*

$$w_{MA,1} = R\varepsilon_0 ։$$

$\bar{w}_{MA,2}$*-ը A կետի շուրջը M կետի կատարած շարժման նորմալ արագացումն է, որն ուղղված է MA-ով և թվային արժեքով հավասար է՝*

$$w_{MA,2} = R\omega_0^2 ։$$

Այստեղից հետևում է, որ M կետի արագացման մեծությունը հավասար կլինի՝

$$w_M = \sqrt{(w_{An} - w_{MA,1})^2 + (w_{A\tau} - w_{MA,2})^2} =$$

$$= \sqrt{(3R\omega_0^2 - R\varepsilon_0)^2 + (3R\varepsilon_0 - R\omega_0^2)^2} = R\sqrt{10(\omega_0^4 + \varepsilon_0^2) - 12\omega_0^2\varepsilon_0} ։$$

Պատ. $v = \sqrt{10}\,R\omega_0$,

$$w = R\sqrt{10(\varepsilon_0^2 + \omega_0^4) - 12\,\omega_0^2\varepsilon_0} ։$$

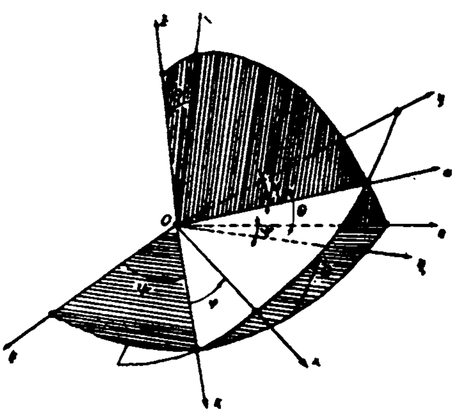
Գ Լ Ո Ւ Խ   Հ Ի Ն Գ Ե Ր Ո Ր Դ

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՊՏՏՈՒՄՆ ԱՆՇԱՐԺ ԿԵՏԻ ՇՈՒՐՋԸ

§ 15. ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՊՏՏՈՒՄՆ ԱՆՇԱՐԺ ԿԵՏԻ ՇՈՒՐՋԸ

1. Անշարժ կետ ունեցող պինդ մարմնի շարժման հավասարումները: *Մարմնի այն շարժումը, որի դեպքում նրա մի կետը ամբողջ շարժման ընթացքում մնում է անշարժ, կոչվում է պինդ մարմնի պտտումն անշարժ կետի շուրջը։ Այս շարժումը հաճախ անվանում են նաև պինդ մարմնի սֆերիկ շարժում, քանի որ շարժման ժամանակ մարմնի ցանկացած կետի հետագիծը գտնվում է անշարժ կետի շուրջը գծված գնդային մակերևույթի վրա։*

Տանենք OXYZ *անշարժ կոորդինատական սիստեմը և շարժվող մարմնին անշարժորեն ամրացված շարժական* $O\xi\eta\zeta$ *սիստեմը, որոնց ընդհանուր սկզբնակետը համընկնում է մարմնի անշարժ կետի հետ (գծ. 250)։ Մարմնի դիրքը տարածության մեջ հայտնի կլինի, եթե ժամանակի ցանկացած մոմենտում հնարավոր լինի որոշել շարժական* $O\xi\eta\zeta$ *սիստեմի դիրքը անշարժ* OXYZ *սիստեմի նկատմամբ։* $O\xi\eta\zeta$ *սիստեմի դիրքը կարելի է որոշել երեք անկախ պարամետրերի միջոցով, քանի որ այս դեպքում մարմինն ունի ազատության երեք աստիճան։ Որպես այդպիսի անկախ պարամետրեր ընդունենք էյլերյան* φ, ψ, θ *և-*



Գծ. 250

րենք անկյունները։ Եթե շարժական $O\xi\eta$ և անշարժ xoy հարթությունների հատման գիծը նշանակենք OK, ապա էյլերյան անկյունները կլինեն՝ 1) սեփական պտտման φ անկյունը, որը գտնվում է $O\xi\eta$ շարժական հարթության վրա և կազմված է OK ու ox առանցքներով, 2) պրեցեսիայի ψ անկյունը, որը գտնվում է xoy անշարժ հարթության վրա, $o\xi$ և OK առանցքների միջև, 3) նուտացիայի θ անկյունը, որը կազմված է $o\zeta$-ով ու oz-ով։

Այս անկյունների հաշվման դրական ուղղությունը ցույց է տրված գծ. 250-ում։ OK-ն կոչվում է հանգույցների գիծ, որի դրական ուղղությունը որոշվում է համաձայն աջ պտուտակի կանոնի։

Անշարժ կետի շուրջը պինդ մարմնի շարժման ժամանակ φ, ψ, θ էյլերյան անկյունները ժամանակի ընթացքում անընդհատ փոփոխվում են, այսինքն՝ հանդիսանում են ժամանակի ֆունկցիաներ՝

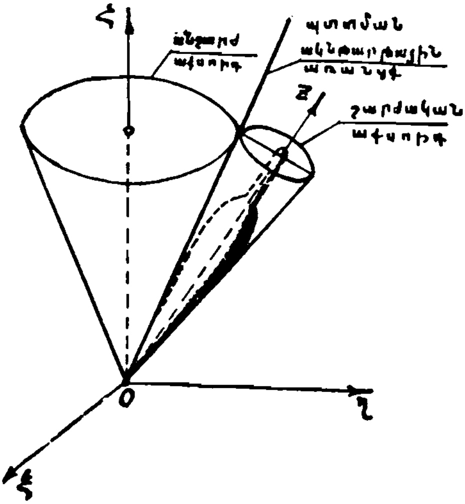
$$\varphi=f_1(t),\quad \psi=f_2(t),\quad \theta=f_3(t), \tag{I}$$

ընդ որում, այդ $f_1(t)$, $f_2(t)$ և $f_3(t)$ ֆունկցիաները պետք է լինեն միարժեք, անընդհատ և առնվազն երկու անգամ դիֆերենցելի։ Եթե այս ֆունկցիաները տված են, ապա անշարժ կետի շուրջը պտտական շարժում կատարող պինդ մարմնի դիրքը հայտնի կըլինի ժամանակի ցանկացած մոմենտում։ Այդ իսկ պատճառով (I) հավասարումները կլինեն անշարժ կետի շուրջը պինդ մարմնի կատարած շարժման հավասարումներ։

2. Պտտման ակնթարթային առանցք, անշարժ և շարժական աքսոիդներ։ Էյլեր-Դալամբերի թեորեմի համաձայն անշարժ կետ ունեցող պինդ մարմնի ամեն մի տեղափոխություն կարելի է ստանալ մեկ պտույտի միջոցով անշարժ կետով անցնող առանցքի շուրջը։ Այն առանցքը, որի շուրջը տվյալ մոմենտում տեղի է ունենում անշարժ կետ ունեցող մարմնի պտույտը, կոչվում է պտտման ակնթարթային առանցք։

Մարմնի շարժման ժամանակ պտտման ակնթարթային առանցքների երկրաչափական տեղը անշարժ $oxyz$ սիստեմի նկատմամբ մի կոնական մակերևույթ է, որը կոչվում է անշարժ աքսոիդ, իսկ երկրաչափական տեղը շարժական $O\xi\eta\zeta$ սիստեմի հետ կապված տարածության նկատմամբ դարձյալ մի կոնական մակերևույթ է, որը կոչվում է շարժական աքսոիդ (գծ. 251)։ Շարժական և անշարժ աքսոիդները ունեն մի ընդհանուր O գագաթ, որը համընկնում է մարմնի անշարժ կետի հետ։ Մարմնի շարժման ժամանակ շարժական և անշարժ աքսոիդները շոշափում են իրար մի ուղղով, որը հանդիսանում է տվյալ մոմենտում մարմնի պտտման ակնթարթային առանցքը։

Եթե մարմինը պտտվում է անշարժ կետի շուրջը, ապա նրա շարժական աքսոիդը գլորվում է անշարժ աքսոիդի վրայով առանց սահելու։ Հետևաբար, անշարժ կետի շուրջը պինդ մարմնի շարժման անընդհատ պրոցեսը երկրաչափորեն կարելի է ներկայացնել որպես պինդ մարմնի հետ անշարժորեն միացված մի կոնական մակերևույթի գլորում մի այլ անշարժ կոնական մակերևույթի վրայով։



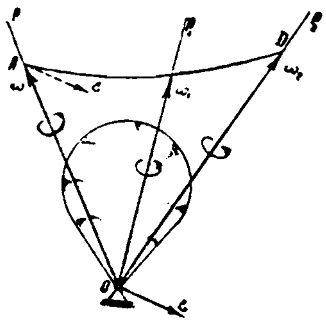
Գծ. 251

3. Մարմնի ակնթարթային անկյունային արագությունը և ակնթարթային անկյունային արագացումը: Այն $\bar{\omega}$ անկյունային արագությունը, որով տեղի է ունենում մարմնի անվերջ փոքր պտտումը ակնթարթային առանցքի շուրջը, կոչվում է ակնթարթային անկյունային արագություն կամ մարմնի անկյունային արագություն ժամանակի տվյալ մոմենտում։ $\bar{\omega}$ վեկտորը ուղղված է պտտման ակնթարթային առանցքով և կարող է կիրառվել նրա ցանկացած կետում, մասնավորապես O կետում, որով միշտ անցնում է պտտման ակնթարթային առանցքը։ Որոշակիության համար $\bar{\omega}$ վեկտորը ուղղենք պտտման ակնթարթային առանցքով այնպես, որ $\bar{\omega}$ վեկտորի ծայրակետից դիտելիս մարմնի պտույտը երևա ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Եթե մարմինը պտտվում է անշարժ կետի շուրջը, ապա, ընդհանուր դեպքում, $\bar{\omega}$ ակնթարթային անկյունային արագությունը փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում թե՛ մեծությամբ և թե՛ ուղղությամբ, այսինքն՝ $\bar{\omega}=\bar{\omega}(t)$։

$$\bar{\varepsilon}=\frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

վեկտորը կոչվում է ակնթարթային անկյունային արագացում կամ մարմնի անկյունային արագացում ժամանակի տվյալ մոմենտում։

Քանի որ $\bar{\omega}$ անկյունային արագությունը փոփոխվում է թե՛ մեծությամբ և թե՛ ուղղությամբ, ուստի $\bar{\varepsilon}$ ակնթարթային անկյունային արագացումը, ընդհանուր դեպքում, ուղղված չի լինի պըտտման ակնթարթային առանցքով։ $\bar{\varepsilon}$ վեկտորի ուղղությունը որոշելու համար պետք է տված լինի $\bar{\omega}$ վեկտորը որպես ժամանակի ֆունկցիա։ $\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացումը հանդիսանում է $\bar{\omega}$ վեկտորի հոդոգրաֆը գծող կետի արագությունը (տե՛ս արագության հոդոգրաֆը)։ Սովորաբար $\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացման վեկտորը ընդունված է կիրառել մարմնի O անշարժ կետում (գծ. 252)։



Գծ. 252

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\bar{\omega}$ ակնթարթային անկյունային արագության մեծությունը հաստատուն է ($\omega = \text{const}$)։ Այդ դեպքում $\bar{\varepsilon}$ ակնթարթային անկյունային արագացումը որոշելու համար $\bar{\omega}$ վեկտորը վերածենք երկու բաղադրիչների՝

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2,$$

որտեղ $\bar{\omega}_1$-ը ուղղահայաց է $\bar{\omega}$ վեկտորի ծայրակետի էլեմենտար տեղափոխությանը, իսկ $\bar{\omega}_2$-ի ուղղությունը կամավոր է։ ω_2-ի ուղղությունը ընտրվում է ելնելով տվյալ խնդրի կոնկրետ պայմաններից։

$\bar{\omega}_1$-ի այդպիսի ընտրության դեպքում կարելի է որոշել $\bar{\omega}$ վեկտորի ծայրակետի արագությունը, օգտվելով Էյլերի բանաձևից՝

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2) = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 =$$

$$= \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2։$$

Այսպիսով, երբ $\bar{\omega}$ ակնթարթային անկյունային արագությունը մեծությամբ հաստատուն է և $\bar{\omega}_1$-ը ընտրված է վերը նշված ձևով, ապա կունենանք՝

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2։$$

4. Էյլերի կինեմատիկական հավասարումները։ $\bar{\omega}$ ակընթարթային անկյունային արագության պրոյեկցիաները անշարժ $oxyz$ և շարժական $o\xi\eta\zeta$ կոորդինատական սիստեմների առանցքների վրա արտահայտվում են Էյլերյան φ, ψ, θ անկյունների և դրանց ածանցյալների միջոցով հետևյալ բանաձևերի օգնությամբ՝

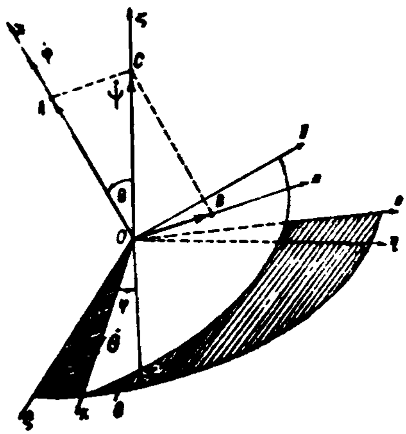
$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta} \cos\psi,$$
$$\omega_y = - \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi + \dot{\theta} \sin\psi, \qquad (II)$$
$$\omega_z = \dot{\varphi} \cos\theta + \dot{\psi},$$

$$\omega_\xi = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi,$$
$$\omega_\eta = \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \qquad (III)$$
$$\omega_\zeta = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}։$$

Այստեղ ω_x, ω_y, ω_z*-ը* $\bar{\omega}$ *վեկտորի պրոյեկցիաներն են անշարժ* Oxyz *սիստեմի առանցքների վրա, իսկ* ω_ξ, ω_η, ω_ζ*-ն՝ շարժական* $O\xi\eta\zeta$ *սիստեմի կոորդինատական առանցքների վրա։* $\dot{\bar{\varphi}}$, $\dot{\bar{\psi}}$ *և* $\dot{\bar{\theta}}$ *վեկտորները համապատասխանաբար ուղղված են* OZ, $O\zeta$ *և* Ok *առանցքներով (գծ. 253)։*

Ակնթարթային անկյունային արագության մեծությունը որոշվում է

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}$$



Գծ. 253

բանաձևով։

5. Մարմնի կետերի արագությունները։ *Անշարժ կետի շուրջը պտտվող պինդ մարմնի կետերի արագությունները որոշվում են Էյլերի*

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \qquad (IV)$$

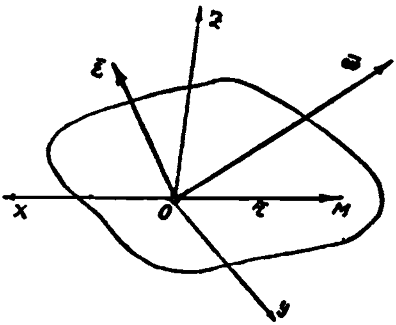
բանաձևով, որտեղ $\bar{r}$*-ը կետի շառավիղ-վեկտորն է տարված անշարժ* O *կետից,* $\bar{\omega}$*-ն՝ պինդ մարմնի ակնթարթային անկյունային արագությունն է (գծ. 254)։*

(IV) *բանաձևից հետևում է, որ մարմնի ցանկացած կետի արագության մեծությունը հավասար է*

$$v = \omega r \sin(\bar{\omega}, \widehat{\bar{r}}) = \omega \cdot h,$$

որտեղ h*-ը կետի հեռավորությունն է պտտման ակնթարթային առանցքից։*

Այսպիսով, մարմնի կետերի արագությունները համեմատական են պտտման ակնթարթային առանցքից այդ կետերի ունեցած հեռավորություններին։ Մարմնի յուրաքանչյուր կետի արագության վեկտորը ուղղահայաց է $\bar{\omega}$ և $\bar{r}$ վեկտորներով անցնող հարթությանը և հետևաբար, ուղղահայաց է h հատվածին։



Գծ. 234

Պրոյեկտելով (IV) վեկտորական հավասարումը անշարժ oxyz կոորդինատական սիստեմի առանցքների վրա, կստանանք արագության պրոյեկցիաների համար հետևյալ բանաձևերը՝

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y,$$
$$v_y = \omega_z x - \omega_x z, \qquad (V)$$
$$v_z = \omega_x y - \omega_y x,$$

որտեղ x, y, z-ը կետի կոորդինատներն են, ω_x, ω_y, ω_z-ը ակընթարթային անկյունային արագության պրոյեկցիաները անշարժ x, y, z առանցքների վրա։

Արագության պրոյեկցիաները շարժական ξ, η, ζ առանցքների վրա հավասար են՝

$$v_\xi = \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \cdot \eta,$$
$$v_\eta = \omega_\zeta \cdot \xi - \omega_\xi \cdot \zeta, \qquad (VI)$$
$$v_\zeta = \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi,$$

որտեղ ξ, η, ζ-ն կետի կոորդինատներն են, իսկ ω_ξ, ω_η, ω_ζ — ակընթարթային անկյունային արագության պրոյեկցիաները շարժական ξ, η, ζ առանցքների վրա։

(V) և (VI) բանաձևերը նույնպես կոչվում են Էյլերի բանաձևեր։ Անհրաժեշտ է նշել, որ (VI)-ում ξ, η, ζ-ն հաստատուն մեծություններ են, քանի որ մարմնի կետերի դիրքերը շարժվող պինդ մարմնի հետ անշարժորեն ամրացված առանցքների նկատմամբ չեն փոխվում ժամանակի ընթացքում։

6. Պտտման ակնթարթային առանցքի և շարժական ու անշարժ աքսոիդների հավասարումները: Պտտման ակնթարթային առանցքի հավասարումը ստանալու համար օգտվենք այն հանգամանքից, որ այդ առանցքի վրա գտնվող պինդ մարմնի կետերի արագությունները տվյալ մոմենտում հավասար են զրոյի։ Այդ դեպքում (V) և (VI) բանաձևերից կստացվեն՝

$$
\begin{aligned}
\omega_y z - \omega_z y &= 0,\\
\omega_z x - \omega_x z &= 0,\\
\omega_x y - \omega_y x &= 0;
\end{aligned}
\qquad (VII)
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta &= 0,\\
\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta &= 0,\\
\omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi &= 0.
\end{aligned}
\qquad (VIII)
$$

Այսպիսով, պտտման ակնթարթային առանցքի կետերի կոորդինատները բավարարում են (VII) *հավասարումներին անշարժ սիստեմում և* (VIII) *հավասարումներին՝ շարժական սիստեմում։*

Անհրաժեշտ է նշել, որ (VII) *և* (VIII) *հավասարումների սիստեմներից յուրաքանչյուրով որոշվում է ոչ թե մի կետ, այլ մի ուղիղ գիծ, քանի որ* (VII) *և* (VIII) *հավասարումները գծային են և դրանցից յուրաքանչյուրի մեջ կա մեկ կախվածություն։*

(VII) *հավասարումներից կստանանք պտտման ակնթարթային առանցքի հավասարումը՝*

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \qquad (IX)$$

անշարժ կոորդինատական սիստեմում, իսկ (VIII) *հավասարումներից շարժական սիստեմում.*

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}. \qquad (X)$$

(IX) *և* (X) *հավասարումներից արտաքսելով* t *ժամանակը, որից կախված են* ω_x, ω_y, ω_z, ω_ξ, ω_η, ω_ζ *մեծությունները, կստանանք անշարժ և շարժական աքսոիդների հավասարումները։*

7. Մարմնի կետերի արագացումները: *Անշարժ կետի շուրջը պտտվող պինդ մարմնի կամայական* M *կետի արագացումը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝*

$$\bar{w}_M = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \qquad (XI)$$

կամ

$$\bar{w}_M = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega}(\bar{\omega}\,\bar{r}) - \omega^2 \bar{r}. \qquad (XII)$$

Արագացման պրոյեկցիաները անշարժ կոորդինատական առանցքների վրա կլինեն՝

$$
\begin{aligned}
w_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x,\\
w_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y,\\
w_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z.
\end{aligned}
\qquad (XIII)
$$

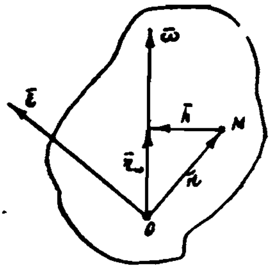
Արագացման պրոյեկցիաները շարժական կոորդինատական առանցքների վրա որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$
\begin{aligned}
w_\xi &= \varepsilon_\eta \zeta - \varepsilon_\zeta \eta + \omega_\xi(\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \xi, \\
w_\eta &= \varepsilon_\zeta \xi - \varepsilon_\xi \zeta + \omega_\eta(\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \eta, \qquad \text{(XIV)} \\
w_\zeta &= \varepsilon_\xi \eta - \varepsilon_\eta \xi + \omega_\zeta(\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \zeta։
\end{aligned}
$$

Եթե $\bar{\omega}$ վեկտորը գրենք $\bar{\omega} = \omega \bar{\omega}^\circ$ տեսքով, ապա արագացման (XII) արտահայտությունը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

$$\bar{w}_M = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \omega^2 \bar{h}, \qquad \text{(XV)}$$

որտեղ $\bar{h}$ վեկտորը հավասար է $r_\omega \bar{\omega}^\circ$ և $\bar{r}$ վեկտորների տարբերությանը, ընդ որում r_ω-ն $\bar{r}$ շառավիղ-վեկտորի պրոյեկցիան է $\bar{\omega}$ ակնթարթային անկյունային արագության վրա (գծ. 255)։



Գծ. 255

Այսպիսով, անշարժ կետ ունեցող պինդ մարմնի կամայական M կետի արագացումը տվյալ մոմենտում կազմված է երկու գումարելիներից՝

$$\bar{w}_{M,1} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \quad \bar{w}_{M,2} = \omega^2 \bar{h},$$

որոնցից առաջինը կոչվում է M կետի պտտական արագացում, իսկ երկրորդը՝ M կետի առանցքաձիգ արագացում։

$\bar{w}_{M,1}$ արագացումը ուղղահայաց է այն հարթությանը, որն անցնում է $\bar{\varepsilon}$ ակնթարթային անկյունային արագացումով ու M կետի $\bar{r}$ շառավիղ-վեկտորով և ուղղված է դեպի այն կողմը, որտեղից նայելով $\bar{\varepsilon}$ վեկտորի պտույտը $\bar{r}$-ի շուրջը կերևա ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությամբ (գծ. 256)։ $\bar{w}_{M,1}$ արագացման մեծությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$w_{M,1} = \varepsilon r \sin(\widehat{\bar{\varepsilon}, \bar{r}}) = \varepsilon h_1,$$

որտեղ h_1-ը M կետի հեռավորությունն է O անշարժ կետում կիրառված $\bar{\varepsilon}$ վեկտորից (գծ. 257)։

$\bar{w}_{M,2}$ առանցքաձիգ արագացումը ունի տվյալ M կետից $\bar{\omega}$ ակնթարթային անկյունային արագությանը տարած ուղղահայացի ուղղությունը և ուղղված է M կետից դեպի պտտման ակնթարթային առանցքը։ Առանցքաձիգ արագացման մեծությունը կլինի՝

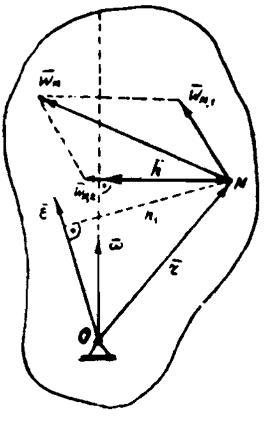
$$w_{M,2} = \omega^2 h,$$

որտեղ h-ը M կետի հեռավորությունն է $\bar{\omega}$ ակնթարթային անկյունային արագության վեկտորից։

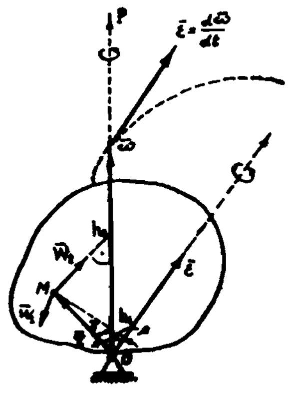
Եթե M կետի $\bar{w}_M$ արագացման վեկտորի $\bar{w}_{M,1}$ և $\bar{w}_{M,2}$ բաղադրիչների վրա կառուցենք զուգահեռակողմ, ապա $\bar{w}_M$ վեկտորի մեծությունը կոսինուսների թեորեմի համաձայն կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$w_M = \sqrt{w_{M,1}^2 + w_{M,2}^2 + 2w_{M,1}\, w_{M,2} \cos(\bar{w}_{M,1}, \hat{\bar{w}}_{M,2})},$$

$$w_M = \sqrt{\varepsilon^2 h_1^2 + h^2\omega^4 + 2hh_1\, \varepsilon\omega^2 \cos(\bar{w}_{M,1}, \hat{\bar{w}}_{M,2})}\ .$$



Գծ. 256



Գծ. 257

8. Պինդ մարմնի անշարժ կետի շուրջը կատարած պտտական շարժման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը: *Այս պարագրաֆի խնդիրները լուծելիս կարելի է առանձին դիտարկել հետևյալ երկու դեպքերը:*

ա) Տված են մարմնի շարժման հավասարումները էյլերյան անկյունների միջոցով՝

$$\varphi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t),$$

որտեղ $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ հայտնի ֆունկցիաներ են։ Պահանջվում է որոշել մարմնի անկյունային արագությունը և անկյունային արագացումը, շարժական և անշարժ աքսոիդների հավասարումները, ինչպես նաև մարմնի կամավոր կետի արագությունը և արագացումը։

Այս խնդիրները լուծելու համար նախ պետք է որոշել ա-

կընթարթային անկյունային արագության պրոյեկցիաները շարժական և անշարժ կոորդինատական առանցքների վրա։ Դրա համար պետք է մի անգամ ածանցել Էյլերի կինեմատիկական հավասարումները։ Որից հետո հեշտությամբ կարելի է որոշել ակընթարթային անկյունային արագության մեծությունը։ Այնուհետև պետք է որոշել ակնթարթային առանցքի հավասարումները շարժական և անշարժ առանցքների նկատմամբ։ Այդ հավասարումներից արտաքսելով t ժամանակից կախված պարամետրը որոշել շարժական և անշարժ աքսոիդների հավասարումները։ Ակընթարթային անկյունային արագացումը կարելի է գտնել դիտելով այն որպես անկյունային արագության վեկտորի ծայրակետի արագություն կամ օգտվելով պրոյեկցիաների մեթոդից։ Վերջապես, որոշել կամավոր M կետի արագության մեծությունն ու ուղղությունը, $\bar{w}_{M_1}$ պտտական և $\bar{w}_{M_2}$ առանցքաձիգ արագացումները։ Դրանից հետո որոշել արագացման մեծությունը և ուղղությունը։

բ) Տված են մարմնի մի կետի արագացումը և պտտման ակնթարթային առանցքի դիրքը։ Պահանջվում է գտնել ակնթարթային անկյունային արագությունը և ակնթարթային անկյունային արագացումը, շարժական և անշարժ աքսոիդները և մարմնի կամավոր կետի արագությունն ու արագացումը։

Այս խնդիրները լուծելիս նախ պետք է որոշել մարմնի ակընթարթային անկյունային արագությունը, այնուհետև՝ մարմնի կետերի արագությունները։ Դրանից հետո պետք է որոշել մարմնի ակնթարթային անկյունային արագացումը, դիտելով այն որպես $\bar{\omega}$ վեկտորի ծայրակետի արագություն։ Որոշել մարմնի կետերի պտտական և առանցքաձիգ արագացումները, որից հետո՝ լրիվ արագացման մեծությունը և ուղղությունը։ Վերջապես, մնում է որոշել շարժական և անշարժ աքսոիդների հավասարումները։

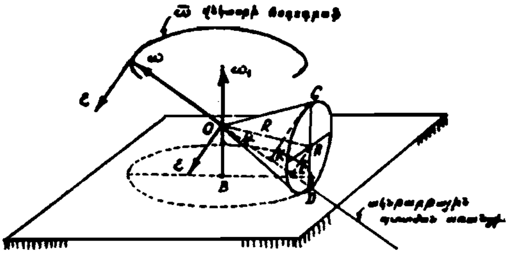
9. Խնդիրներ

Ստորև բերվում են պինդ մարմնի անշարժ կետի շուրջը կատարած պտտական շարժման վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումները։

Խնդիր 118: $AC = r$ շառավիղ ունեցող շրջանային սկավառակը գլորվում է հորիզոնական հարթության վրայով առանց սահելու։ Սկավառակի OA առանցքը պտտվում է անշարժ BO

ուղղի շուրջը հաստատուն ω_1 անկյունային արագությամբ։ Տված է $OB=r$, $OA=R=2r$։ Որոշել սկավառակի այն C կետի արագությունը և արագացումը, որը տվյալ մոմենտում գտնվում է ուղղահիգ DC տրամագծի վերին ծայրում (գծ. 258)։

Լուծում: Սկավառակի շարժման համար O-ն կլինի անշարժ կետ։ Նախ որոշենք պտտման ակնթարթային առանցքի դիրքը և ակնթարթային անկյունային արագությունը։ Սկավառակի և հարթության հպման D կետը տվյալ մոմենտում անշարժ է։ Հետևաբար, OD-ն կլինի պտտման ակնթարթային առանցք։



Գծ. 258

Խնդրի պայմանի համաձայն A կետի արագության մեծության համար կունենանք՝

$$v_A = \omega_1 \cdot R = 2\omega_1 \cdot r\text{։}$$

Եթե ակնթարթային անկյունային արագությունը նշանակենք ω, ապա նրա մեծությունը կարելի է որոշել հետևյալ ձևով՝

$$\omega = \frac{v_A}{AE} = \frac{2\omega_1 r}{r\cos\alpha} = \frac{2\omega_1}{\cos\alpha}\text{։}$$

Քանի որ ω_1-ը և α-ն հաստատուն են՝ ապա ω-ն նույնպես կլինի հաստատուն։

Այժմ գտնենք C կետի արագությունը։ Գծագրից ունենք՝

$$v_c = \omega \cdot CK = \frac{2\omega_1}{\cos\alpha} \cdot 2r\cos\alpha = 4\omega_1 \cdot r\text{։}$$

Եթե C կետի պտտական արագացումը նշանակենք $\overline{w}_{c,1}$, իսկ առանցքաձիգ արագացումը՝ $\overline{w}_{c,2}$, ապա դրանց մեծությունների համար կունենանք՝

$$w_{c,1} = \varepsilon h_1, \quad w_{c,2} = \omega^2 h_2, \tag{1}$$

որտեղ h_1-ը C կետի հեռավորությունն է այն ուղղից, որով ուղղված է ակնթարթային անկյունային արագացման վեկտորը, իսկ h_2-ը՝ C կետի հեռավորությունն է ակնթարթային անկյունային արագության վեկտորից։

Գծագրից երևում է, որ

$$h_1 = OC = \frac{r}{\cos\alpha}, \tag{2}$$

$$h_2 = CK = 2r\cos\alpha\text{։}$$

Մնում է որոշել ε *անկյունային արագացումը։ Քանի որ* ω *անկյունային արագության մեծությունը հաստատուն է, ապա* $\bar{\omega}$ *վեկտորի հոդոգրաֆը կլինի* O *կետի շուրջը գծված շրջանագիծ, որը գտնվում է հորիզոնական հարթության վրա և շառավիղը հավասար է* $2\omega_1$*։ Դրա հետևանքով* $\bar{\varepsilon}$ *վեկտորը ունի այդ շրջանագծի շոշափողի ուղղությունը, հետևաբար, ուղղահայաց է* $\bar{\omega}$ *վեկտորին։* $\bar{\varepsilon}$ *վեկտորի ուղղությունը ցույց է տրված գծագրում։ Դիտարկելով* $\bar{\varepsilon}$ *վեկտորը որպես* $\bar{\omega}$ *վեկտորի ծայրակետի արագություն և նկատի ունենալով, որ* $\bar{\omega}$ *վեկտորը պտտվում է* ω_1 *անկյունային արագությամբ* O *կետով անցնող ուղղաձիգ առանցքի շուրջը, կստանանք* $\bar{\varepsilon}$ *վեկտորի մոդուլը հետևյալ ձևով՝*

$$|\bar{\varepsilon}| = |\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}| = \omega \cdot \omega_1 \cos\alpha = 2\omega_1^2\text{։} \tag{3}$$

Տեղադրելով h_1, h_2 *և* ε*-ի արժեքները (2) և (3)-ից (1)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$w_{c,1} = \frac{4\omega_1^2 r}{\cos\alpha}, \quad w_{c,2} = \frac{8\omega_1^2 r}{\cos\alpha}\text{։}$$

$\bar{w}_{c,1}$ *արագացումը գտնվում է* OCD *հարթության վրա և ուղղահայաց է կոնի* OC *ծնիչին, իսկ* $\bar{w}_{c,2}$ *արագացումը գտնվում է նույն հարթության վրա և ուղղված է պտտման ակնթարթային շառավղով։* C *կետի արագացումը կլինի* $\bar{w}_1$ *և* $\bar{w}_2$ *վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռակողմի անկյունագիծը։ Քանի որ* $\bar{w}_{c,1}$ *և* $\bar{w}_{c,2}$ *վեկտորներով կազմված անկյունը հավասար է* $180^\circ - 2\alpha$*-ի, ապա կոսինուսների թեորեմի համաձայն* C *կետի արագացման մեծությունը կլինի՝*

$$w_c = \sqrt{w_{c,1}^2 + w_{c,2}^2 - 2w_{c,1}w_{c,2}\cos 2\alpha} = \frac{4r\omega_1^2}{\cos\alpha}\sqrt{5 - 4\cos 2\alpha}\text{։}$$

Պատ. $v_c = 4\omega_1 r, \quad w_c = \dfrac{4r\omega_1^2}{\cos\alpha}\sqrt{5 - 4\cos 2\alpha}$ ։

Խ ն դ ի ր 119: *Մարմնի շարժումը անշարժ կետի շուրջը տված է էյլերյան անկյունների միջոցով՝*

$$\varphi = 2t, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - 2t, \quad \theta = \frac{\pi}{6},$$

Գտնել մարմնի A *կետի արագությունը և արագացումը, եթե* $t = \frac{\pi}{2}$ *վայրկյանում այդ կետի կոորդինատները հավասար են՝* $x=4$ սմ, $y=5$ սմ, $z=6$ սմ։

Լուծում: *Նախ որոշենք անկյունային արագության պրոյեկցիաները անշարժ կոորդինատական* x, y, z *առանցքների վրա։ Դրա համար Էյլերի կինեմատիկական* (II) *հավասարումների մեջ տեղադրենք անկյունների տված արժեքները և դրանց ածանցյալները։ Կստանանք՝*

$$\omega_x = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) \sin\frac{\pi}{6} = \cos 2t,$$

$$\omega_y = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) \sin\frac{\pi}{6} = -\sin 2t,$$

$$\omega_z = -2 + 2\cos\frac{\pi}{6} = -2 + \sqrt{3},$$

$t = \frac{\pi}{2}$ վրկ *մոմենտում այս պրոյեկցիաները կլինեն՝*

$$\omega_x = -1 \ 1/\text{վրկ}, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = -0{,}27 \ 1/\text{վրկ}.$$

Անկյունային արագության մեծությունը հավասար կլինի՝

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-0{,}27)^2} = 1{,}035 \ 1/\text{վրկ}.$$

Տեղադրելով x, y, z*-ի տված և* ω_x, ω_y, ω_z*-ի համար ստացած այս արժեքները* v_x, v_y, v_z*-ի համար եղած* (V) *բանաձևերի մեջ, կստանանք՝*

$$v_x = 0 - (-0{,}27)\,.\,5 = 1{,}35 \ \text{սմ/վրկ},$$
$$v_y = -0{,}27\,.\,4 - (-1)\,.\,6 = 4{,}92 \ \text{սմ/վրկ},$$
$$v_z = (-1)\,.\,5 - 0 = -5 \ \text{սմ/վրկ}.$$

A *կետի արագության մեծությունը կլինի՝*

$$v = \sqrt{(1{,}35)^2 + (4{,}92)^2 + (-5)^2} = 7{,}14 \ \text{սմ/վրկ}.$$

Անկյունային արագացման պրոյեկցիաները անշարժ կոորդինատական x, y, z *առանցքների վրա որոշենք հետևյալ ձևով՝*

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = -2\sin 2t,$$

$$\varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt} = -2\cos 2t,$$

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = 0։$$

$t = \frac{\pi}{2}$ վրկ *մոմենտում արագացման այս պրոյեկցիաների համար ստանում ենք՝*

$$\varepsilon_x = -2\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\varepsilon_y = -2\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2,$$

$$\varepsilon_z = 0։$$

Տեղադրելով A *կետի* x, y, z *կոորդինատների տված արժեքները և անկյունային արագության ու անկյունային արագացման պրոյեկցիաների արժեքները* w_x, w_y, w_z*-ի համար եղած* (XIII) *բանաձևերի մեջ, կունենանք՝*

$$w_x = 12 + 4 + 1{,}62 - 1{,}073 \cdot 4 = 16{,}33,$$

$$w_y = 4 + 1{,}62 - 1{,}073 \cdot 5 = 0{,}255,$$

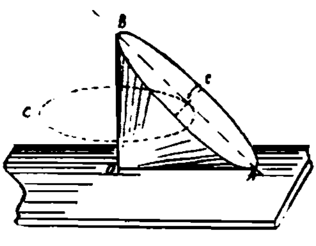
$$w_z = -8 + 4 + 1{,}62 - 1{,}073 \cdot 6 = -8{,}82։$$

A *կետի արագացման մեծությունը կլինի՝*

$$w = \sqrt{(16{,}33)^2 + (0{,}255)^2 + (-8{,}82)^2} = 18{,}53 \text{ սմ/վրկ}^2։$$

Պատ. $v = 7{,}14$ սմ/վրկ, $w = 18{,}53$ սմ/վրկ^2։

Խ ն դ ի ր 120 *(597)*։ O *անշարժ գագաթ ունեցող կոնը գլորվում է հարթության վրայով առանց սահելու։ Կոնի բարձրությունը* CO=18 սմ, *իսկ գագաթի* AOB *անկյունը՝ 90°։ Կոնի հիմքի* C *կենտրոնը շարժվում է հավասարաչափ և վերադառնում է իր սկզբնական դիրքը 1* վրկ *հետո։ Որոշել* AB *տրամագծի* B *ծայրի արագությունը, կոնի անկյունային արագացումը և* A *ու* B *կետերի արագացումները (գծ. 259)։*



Գծ. 259

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Նախ որոշենք կոնի պտտման* $\bar{\omega}$ *անկյունային արագությունը։ Կոնը շոշափում է հարթությունը* OA *ծնիչով։ Հե-*

տեսաբար $\bar{\omega}$ անկյունային արագությունը ուղղված կլինի այդ OA *ծնիչով։ $\bar{\omega}$-ի մեծությունը որոշելու համար գտնենք* C *կետի արագությունը։ Էյլերի բանաձևի համաձայն՝*

$$\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \overline{OC},$$

որտեղից

$$v_C = \omega \cdot OC \sin 45^\circ = \omega \cdot OC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

Մյուս կողմից, քանի որ C *կետը պտտվում է* CC_1 *շրջանագծով* $\omega' = \frac{2\pi}{1}$ 1/վրկ *անկյունային արագությամբ, ապա* v_C *արագության համար կունենանք՝*

$$v_C = \omega' \cdot CD = 2\pi \cdot OC \cdot \cos 45^\circ = \pi\sqrt{2} \cdot OC. \qquad (2)$$

(1) և (2)-ից հետևում է, որ

$$\omega = 2\pi \ 1/\text{վրկ}.$$

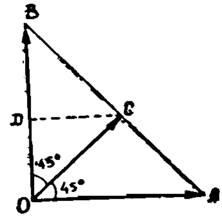
Այժմ որոշենք B *կետի* $\bar{v}_B$ *արագությունը։ Էյլերի բանաձևի համաձայն՝*

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \overline{OB}.$$

Հետևաբար, $\bar{v}_B$ *արագությունը ուղղահայաց է* $\bar{\omega}$ *և* $\overline{OB}$ *վեկտորներով անցնող հարթությանը, իսկ մեծությամբ հավասար է*

$$v_B = \omega \cdot OB \sin 90^\circ = 2\pi \cdot 18 \cdot \sqrt{2} = 36\sqrt{2}\,\pi \text{ սմ/վրկ} = 160 \text{ սմ/վրկ}.$$

Մենք տեսանք, որ $\bar{\omega}$ անկյունային արագությունը գտնվում է անշարժ հարթության վրա և մեծությամբ հաստատուն է։ Այստեղից հետևում է, որ նրա հոդոգրաֆը կլինի մի շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է O *կետում և շառավիղը հավասար է* 2π*-ի։ Հայտնի է, որ $\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացումը $\bar{\omega}$ վեկտորի հոդոգրաֆը գծող կետի արագությունն է։ Քանի որ հոդոգրաֆը շրջանագիծ է, ապա հոդոգրաֆը գծող կետի արագությունը կորոշվի $\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}$ վեկտորական արտադրյալով, որտեղ $\bar{\omega}_1$-ը ուղղված է* OB*-ով, իսկ մեծությամբ (գծ. 260) հավասար է* ω'*-ի, քանի որ $\bar{\omega}$ վեկտորը միշտ գտնվում է* AOC *հարթության վրա։*



Գծ. 260

Այսպիսով՝

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}$$

անկյունային արագացումը ուղղահայաց կլինի OA և OB ուղիղներով անցնող հարթությանը, իսկ մեծությամբ՝

$$\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega \sin(\widehat{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}}) = \omega_1 \omega \sin 90^\circ = 2\pi \cdot 2\pi \cdot 1 = 4\pi^2 = 39.5 \text{ 1/վրկ}^2\text{:}$$

Այժմ գտնենք A *և* B *կետերի* $\bar{w}_A$ *և* $\bar{w}_B$ *արագացումները։ Այդ արագացումները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝*

$$\bar{w}_A = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} + \omega^2 \bar{h}_A, \quad \bar{w}_B = \bar{\varepsilon} \times \overline{OB} + \omega^2 \bar{h}_B, \tag{3}$$

որտեղ h_A*-ն և* h_B*-ն* A *և* B *կետերի հեռավորություններն են պըտտման ակնթարթային առանցքից։ Տվյալ դեպքում* $h_A = 0$, $\bar{h}_B = -\overline{OB}$*։ Տեղադրելով այս արժեքները (3)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$\bar{w}_A = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA}, \tag{4}$$

$$\bar{w}_B = \bar{\varepsilon} \times \overline{OB} - \omega^2 \cdot \overline{OB}\text{:} \tag{5}$$

Քանի որ $\bar{\varepsilon} \perp \overline{OA}$, $\bar{\varepsilon} \perp \overline{OB}$ *և* $(\bar{\varepsilon} \times \overline{OB}) \perp \overline{OB}$*-ին, ապա* $\bar{w}_A$ *և* $\bar{w}_B$ *արագացումների մեծությունների համար կունենանք՝*

$$w_A = \varepsilon \cdot OA = 4\pi^2 \cdot 18\sqrt{2} = 72\sqrt{2}\,\pi^2 = 1000 \text{ սմ/վրկ}^2,$$

$$w_B = \sqrt{(\bar{\varepsilon} \times \overline{OB})^2 + \omega^4 \overline{OB}^2} = \sqrt{(4\pi^2 \cdot OB)^2 + \omega^4 \cdot OB^2} =$$

$$= OB\sqrt{(4\pi^2)^2 + (2\pi)^4} = 4\pi^2\sqrt{2} \cdot OB = 4\pi^2\sqrt{2} \cdot 18\sqrt{2} =$$

$$= 1000\sqrt{2} \text{ սմ/վրկ}^2\text{:}$$

(4) բանաձևից հետևում է, որ $\bar{w}_A$*-ն ուղղահայաց է* $\bar{\varepsilon}$*-ին և* $\overline{OA}$*-ին։ Հետևաբար,* $\bar{w}_A$*-ն զուգահեռ կլինի* OB*-ին։ Քանի որ* $\bar{\varepsilon} \times \overline{OB}$ *վեկտորական արտադրյալն ունի* OA*-ին զուգահեռ ուղղություն, իսկ* $\omega^2 \cdot \overline{OB}$*-ն՝* OB*-ին զուգահեռ, ուստի* $\bar{w}_B$ *վեկտորը կըգտնվի* AOB *հարթության մեջ։ Մյուս կողմից ունենք՝*

$$|\bar{\varepsilon} \times \overline{OB}| = \omega^2 \cdot OB \quad (\omega = 2\pi,\ \varepsilon = 4\pi^2,\ \bar{\varepsilon} \perp \overline{OB})\text{:}$$

Հետևաբար, $\bar{w}_B$ *վեկտորը* OB *ուղղության հետ կազմում է 45°-ի անկյուն։*

Պատ. $v_B = 36\pi\sqrt{2}$ սմ/վրկ $= 160$ սմ/վրկ,

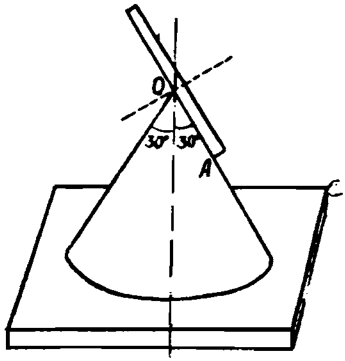
$\varepsilon = 39{,}5$ 1/վրկ^2 *և ուղղված է* OA*-ին և* OB*-ին ուղղահայաց,*

$w_A = 1000$ սմ/վրկ^2 *և ուղղված է* OB*-ին զուգահեռ,*

$w_B = 1000\sqrt{2}$ սմ/վրկ^2, *գտնվում է* AOB *հարթության մեջ և ուղղված է* OB*-ի նկատմամբ 45°-ի անկյան տակ։*

Խ ն դ ի ր 121 *(602)*։ $R=4\sqrt{3}$ սմ *շառավիղ ունեցող* OA *սկավառակը պտտվելով* O *անշարժ կետի շուրջը գլորվում է մի անշարժ կոնի վրայով, որի գագաթի անկյունը հավասար է 60°։*

Գտնել սկավառակի՝ իր սիմետրիայի առանցքի շուրջը պտտման անկյունային արագությունը, եթե սկավառակի A *կետի* $\bar{w}_A$ *արագացումը մեծությամբ հաստատուն է և հավասար* **48** սմ/վրկ² *(գծ. 261)։*



Գծ. 261

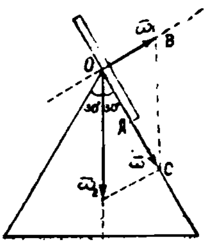
Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Սկավառակի* OA *շառավիղը անշարժ կոնի և սկավառակի համար ընդհանուր շոշափման գիծ է։ Հետևաբար, նա տվյալ մոմենտում կլինի անշարժ և պտտման* $\bar{\omega}$ *ակնթարթային անկյունային արագությունը ուղղված կլինի այդ* OA *ուղղով (գծ. 262)։*

Հայտնի է, որ

$$\bar{w}_A = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} + \omega^2 \bar{h}_A, \qquad (1)$$

որտեղ h_A*-ն* A *կետի հեռավորությունն է ակնթարթային առանցքից։ Բայց* $h_A=0$, *քանի որ* A *կետը գտնվում է պտտման ակնթարթային առանցքի վրա։ Այդ դեպքում (1) ընդունում է հետևյալ տեսքը՝*

$$\bar{w}_A = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA}.$$



Գծ. 262

$\bar{w}_A$ *արագացման թվային արժեքը կլինի՝*

$$w_A = \varepsilon \cdot OA \sin\alpha, \qquad (1')$$

որտեղ α*-ն* $\bar{\varepsilon}$ *և* $\overline{OA}$ *վեկտորներով կազմված անկյունն է։*

$\bar{\omega}$ *ակնթարթային անկյունային արագության վեկտորը վերլուծենք երկու բաղադրիչների՝*

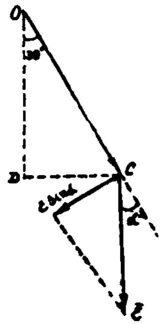
$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2. \qquad (2)$$

Այստեղ $\bar{\omega}_1$*-ը սկավառակի պտտման անկյունային արագությունն է իր առանցքի շուրջը, իսկ* $\bar{\omega}_2$*-ը՝ սկավառակի անկյունային արագությունն է, երբ նա պտտվում է կոնի առանցքի շուրջը։*

Եռանկյունի ODC*-ից (գծ. 263) ունենք՝*

$$\omega_1 = \omega \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \omega, \quad \omega_2 = \frac{\omega}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega, \tag{3}$$

Խնդրում պահանջվում է գտնել ω_1 անկյունային արագությունը։ (3)-ից հետևում է, որ ω_1-ի գտնելը բերվում է ω ակընթարթային անկյունային արագության գտնելուն։



Գծ. 263

Հայտնի է, որ անկյունային արագությունների հոդոգրաֆը գծող կետի արագությունը հանդիսանում է $\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացումը։ Դրա հիման վրա $\bar{\omega}$ վեկտորի ծայրակետի $\bar{v}_C$ արագությունը հավասար կլինի $\bar{\varepsilon}$ ակնթարթային անկյունային արագացմանը, այսինքն՝

$$\bar{v}_C = \bar{\varepsilon}, \tag{4}$$

Եթե պրոյեկտենք այս (4) հավասարությունը C կետում $\overline{OC}$ վեկտորին տարած ուղղահայացի վրա (գծ. 263), ապա կստանանք՝

$$v_c \sin\alpha = \varepsilon \sin\alpha = v_{cr}, \tag{5}$$

Այստեղ v_{cr}-ը C կետի արագության տանգենցյալ բաղադրիչն է։ Գծագրից երևում է, որ

$$v_{cr} = \omega_2 \cdot CD, \tag{6}$$

Եթե v_{cr}-ի արժեքը (6)-ից տեղադրենք (5)-ի մեջ և $\varepsilon \sin\alpha$-ի համար ստացած արժեքը՝ (1′)-ի մեջ և նկատի ունենանք (3)-ը, ապա կստանանք՝

$$w_A = OA \cdot \omega_r CD = OA \cdot CD \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \omega, \tag{7}$$

Եռանկյունի OCD-ից (գծ. 263) ունենք՝

$$CD = \omega \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \omega,$$

Այդ դեպքում (7)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$w_A = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\omega \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \omega = 4\omega^2,$$

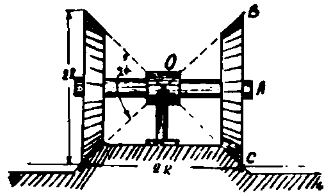
Այստեղից ստացվում է

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{w_A} = \frac{1}{2}\sqrt{48} = 2\sqrt{3} \ \text{1/վրկ։}$$

Տեղադրելով ω-ի այս արժեքը (3)-ի մեջ, կորոշենք ω_1-ի մեծությունը։

Պատ. $\omega_1 = 2$ 1/վրկ։

Խ ն դ ի ր 122 *(607)։ Գտնել կոնական գլդոնի* C *և* B *կետերի արագությունները և արագացումները, եթե գլդոնը գլորվում է հորիզոնական կոնական օղակային հենարանով առանց սահելու։ Տված են՝ գլդոնի հիմքի շառավիղը՝* $R = 10\sqrt{2}$ սմ, *գագաթի անկյունը՝* $2\alpha = 90°$, *գլդոնի* A *կենտրոնի շարժման արագությունը իր հետագծով՝* $v_A = 20$ սմ/վրկ *(գծ. 264)։*

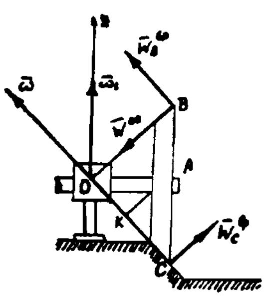


Գծ. 264

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Նախ գտնենք գլդոնի պտտման ակնթարթային առանցքը։ Ակնհայտ է, որ այդ առանցքը կանցնի անշարժ* O *կետով։ Քանի որ գլդոնը գլորվում է առանց սահելու, ապա գլդոնի և հարթության հըպման* C *կետի արագությունը տվյալ մոմենտում հավասար կլինի զրոյի։ Միացնելով* C *կետը* O*-ի հետ, կստանանք* CO *ուղիղը, որը կլինի գլդոնի պտտման ակնթարթային առանցքը (գծ. 265)։*

Այդ դեպքում գլդոնի կետերի արագությունների մեծությունները կորոշվեն

$$v = \omega h$$



Գծ. 265

բանաձևով, որտեղ ω*-ն գլդոնի ակընթարթային անկյունային արագությունն է,* h*-ը՝ տված կետի հեռավորությունն է պտտման ակնթարթային առանցքից։*

Եթե A, B *և* C *կետերից իջեցնենք ուղղահայացներ* OC *ակնթարթային առանցքին և նշանակենք* $h_A = AK$, $h_B = R$ $(h_C = 0)$, *ապա կստանանք՝*

$$v_A = \omega \cdot h_A = \omega \cdot R\cos 45^\circ,$$

$$v_B = \omega h_B = \frac{\omega R}{\cos 45^\circ}, \qquad (1)$$

Խնդրում տված է, որ $v_A = 20$ սմ/վրկ, *ուստի գլդոնի անկյունային արագության համար կունենանք՝*

$$\omega = \frac{v_A}{R\cos 45^\circ} = \frac{20 \,.\, 2}{10\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2}} = 2 \ 1/\text{վրկ}։$$

Տեղադրելով ω-ի համար ստացած այս արժեքները (1)-ի v_B-ի արտահայտության մեջ, կստանանք՝

$$v_B = \frac{\omega R}{\cos 45^\circ} = \frac{2 \quad 10\sqrt{2} \quad 2}{\sqrt{2}} = 40 \ \text{սմ/վրկ}։$$

$\bar{\omega}$ վեկտորն ուղղելով պտտման ակնթարթային առանցքով, C *կետից դեպի* O *կետը, տեսնում ենք, որ $\bar{v}_A$ և $\bar{v}_B$ արագությունների վեկտորները ուղղահայաց են գծագրի հարթությանը և ուղղված մեզանից դեպի գծագրի հարթությունը։* C *կետի $\bar{v}_C$ արագությունը հավասար է զրոյի, քանի որ* C *կետը գտնվում է ակնթարթային* OC *առանցքի վրա։*

Այժմ անցնենք գլդոնի B *և* C *կետերի արագացումների որոշմանը։ Գլդոնի* B *կետի արագացումը որոշվում է*

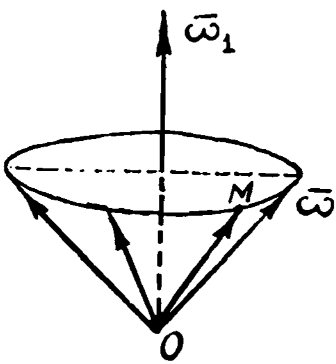
$$\bar{w} = \bar{w}_{B,1} + \bar{w}_{B,2}$$

բանաձևով, որտեղ $\bar{w}_{B,1}$-ը B *կետի պտտական արագացումն է, իսկ $\bar{w}_{B,2}$-ը՝ առանցքաձիգ արագացումը։ Այս արագացումների թվային արժեքները գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$w_{B,1} = \varepsilon \,.\, h_1; \quad w_{B,2} = \omega^2 h_2։ \tag{2}$$

Այստեղ ε-ը գլդոնի ակնթարթային անկյունային արագացումն է, h_1-ը B *կետի հեռավորությունն է ակնթարթային անկյունային արագացման վեկտորից, իսկ h_2-ը՝ պտտման ակնթարթային առանցքից։*

$\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացումը որոշելու համար կառուցենք $\bar{\omega}$ անկյունային արագության վեկտորի հոդոգրաֆը (գծ. 266)։ Քանի որ $\bar{\omega}$ անկյունային արագության մեծությունը հաստատուն է, ապա $\bar{\omega}(t)$ վեկտորները տեղադրելով պտտման ակնթարթային առանցքի վրա, O *կետից, կստանանք մի շրջանային կոն, որի գագաթը գտնվում է* O *կետում։ Հետևաբար, $\bar{\omega}$ վեկտորի հոդոգրաֆը կլինի շրջանագիծ և $\bar{\varepsilon}$ վեկտորը կունենա այդ շրջանագծի շոշափողի ուղղությունը։ Դիտելով $\bar{\varepsilon}$ վեկտորը որպես*



Գծ. 266

$\bar{\omega}$ *վեկտորի ծայրակետի արագություն և նկատի ունենալով, որ $\bar{\omega}$ վեկտորը պտտվում է $\bar{\omega}_1$ անկյունային արագությամբ* O *կետով անցնող* OZ *ուղղաձիգ առանցքի շուրջը, Էյլերի բանաձևի* ($\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$) *համաձայն կարող ենք գրել՝*

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}, \tag{3}$$

որտեղ $\bar{\omega}$ վեկտորը փոխարինում է $\bar{r}$ շառավիղ-վեկտորին, $\bar{\omega}_1$-ը գլդոնի անկյունային արագությունն է, երբ նա պտտվում է OZ *ուղղաձիգ առանցքի շուրջը։* ω_1-*ի թվային արժեքը կլինի՝*

$$\omega_1 = \frac{v_A}{R} = \frac{20}{10\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ ռմ/վրկ։}$$

(3) բանաձևից հետևում է, որ $\bar{\varepsilon}$ վեկտորը ուղղահայաց է $\bar{\omega}_1$ և $\bar{\omega}$ վեկտորներով անցնող հարթությանը և ուղղությունը որոշվում է աջ պտուտակի կանոնով։ Գլդոնի տվյալ դիրքում $\bar{\varepsilon}$ ակընթարթային անկյունային արագացման վեկտորը ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը, կիրառված է O *կետում և ուղղված է դեպի մեզ։ (3) բանաձևից հետևում է, որ $\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացման մեծությունը հավասար կլինի՝*

$$\varepsilon = \omega_1\omega \sin(\widehat{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}}) = \omega_1\omega \sin 45^\circ = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 2 \text{ 1/վրկ}^2\text{։} \tag{4}$$

Տեղադրելով ε-*ի այս արժեքը (2)-ի մեջ, պտտական արագացման* $\bar{w}_{B,1}$-*ի մեծության համար կստանանք՝*

$$w_{B,1} = \varepsilon \cdot h_1 = \varepsilon \cdot \frac{R}{\cos 45^\circ} = 2 \cdot \frac{10\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 40 \text{ ռմ/վրկ}^2\text{,}$$

Այս $\bar{w}_{B,2}$ *վեկտորը գտնվում է գծագրի հարթության վրա, ուղղահայաց է* OB-*ին (ուղղությունը ցույց է տրված գծագիր 265-ում)։*

Որոշենք $\bar{w}_{B,1}$ *առանցքաձիգ արագացման թվային արժեքը (2)-ից, կունենանք՝*

$$w_{B,2} = \omega^2 h_2 = \omega^2 \cdot \frac{R}{\cos 45^\circ} = 2^2 \cdot \frac{10\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 80 \text{ ռմ/վրկ}^2\text{,}$$

Այս $\bar{w}_{B,2}$ *վեկտորը ուղղված է* BO-*ով,* B *կետից դեպի* O *կետը։*

Քանի որ $\bar{w}_{B,1}$ *և* $\bar{w}_{B,2}$ *արագացումների վեկտորներն իրար* *ուղղահայաց են, ուստի* B *կետի լրիվ արագացման վեկտորի թը-վային արժեքը հավասար կլինի՝*

$$w_B = \sqrt{w_{B,1}^2 + w_{B,2}^2} = \sqrt{40^2 + 80^2} = 40\sqrt{5} \text{ սմ/վրկ}^2։$$

Այժմ գտնենք C *կետի արագացումը։* C *կետի* $\bar{w}_{C,1}$ *պտտական արագացման մեծության համար կունենանք՝*

$$w_{C,1} = \varepsilon \cdot OC = \varepsilon \cdot \frac{R}{\cos 45^\circ} = 2 \cdot \frac{10\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 40 \text{ սմ/վրկ}^2։$$

Այս $\bar{w}_{C,1}$ *վեկտորը ուղղահայաց է* OC-*ին (ուղղությունը ցույց է տրված գծագրում)։*

C *կետի* $\bar{w}_{C,2}$ *առանցքաձիգ արագացումը հավասար է զրոյի, քանի որ այդ կետը գտնվում է պտտման ակնթարթային առանցքի վրա։ Հետևաբար, կունենանք՝*

$$w_C = w_{C,1} = 40 \text{ սմ/վրկ}^2։$$

Պատ. $v_C = 0$, $w_C = 40$ սմ/վրկ².

$v_B = 40$ սմ/վրկ, $w_B = 40\sqrt{5}$ սմ/վրկ²։

Խ ն դ ի ր 123 *(610)։ Մարմնի շարժումը անշարժ կետի շուրջը տված է էյլերյան անկյունների օգնությամբ հետևյալ հավասարումներով՝* $\varphi = nt$, $\psi = \frac{\pi}{2} + ant$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ *։ Որոշել մարմնի անկյունային արագության և անկյունային արագացման պրոյեկցիաները անշարժ առանցքների վրա, եթե* a *և* n *մեծությունները հաստատուն են։ Ցույց տալ նաև* a *պարամետրի այն արժեքը, որի դեպքում մարմնի անշարժ աքսոիդը կլինի* Oxy *հարթությունը։*

Լ ու ծ ու մ: *Անկյունային արագության պրոյեկցիաները անշարժ սիստեմի առանցքների վրա որոշելու համար օգտվենք էյլերի կինեմատիկական հավասարումներից՝*

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi = \frac{\sqrt{3}}{2} n \cos ant,$$

$$\omega_y = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi = \frac{n\sqrt{3}}{2}\sin ant, \qquad (1)$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} = n\left(a + \frac{1}{2}\right)։$$

Անկյունային արագացման ε_x, ε_y, ε_z *պրոյեկցիաները գտնե-*

լու համար պետք է (1) հավասարումները ածանցել ըստ t ժամանակի։ Դրանից կստացվի՝

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = -n^2 a \frac{\sqrt{3}}{2} \sin ant,$$

$$\varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{an^2\sqrt{3}}{2} \cos ant,$$

$$\varepsilon_z = 0։$$

xoy հարթությունը մարմնի անշարժ աքսոիդ լինելու համար անհրաժեշտ է, որ ամբողջ շարժման ընթացքում տեղի ունենա

$$\omega_z = 0$$

պայմանը։ Տեղադրենք ω_z-ի արժեքը (1)-ից, կստանանք՝

$$n\left(a + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

Այստեղից ստացվում է, որ $a = -\frac{1}{2}$։

Պատ. $\omega_x = \frac{n\sqrt{3}}{2}\cos ant, \quad \omega_y = \frac{n\sqrt{3}}{2}\sin ant,$

$$\omega_z = n\left(a + \frac{1}{2}\right); \quad \varepsilon_x = -\frac{an^2\sqrt{3}}{2}\sin ant,$$

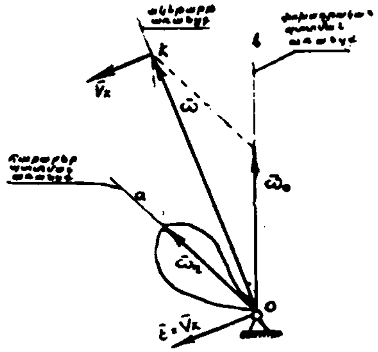
$$\varepsilon_y = \frac{an^2\sqrt{3}}{2}\cos ant, \quad \varepsilon_z = 0; \quad a = -\frac{1}{2}։$$

§ 16. ՀԱՏՎՈՂ ԱՌԱՆՑՔՆԵՐԻ ՇՈՒՐՋԸ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ԿԱՏԱՐԱԾ ՊՏՏՈՒՄՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

Դիցուք պինդ մարմինը միաժամանակ մասնակցում է հատվող առանցքների շուրջը կատարվող երկու շարժումների։ Այդ շարժումներից մեկը ընդունենք փոխադրական, իսկ մյուսը՝ հարաբերական (գծ. 267)։ Եթե փոխադրական շարժման ակնթարթային անկյունային արագությունը նշանակենք $\bar{\omega}_e$, իսկ հարաբերական շարժմանը՝ $\bar{\omega}_r$, ապա բացարձակ շարժման $\bar{\omega}_a$ ակնթարթային անկյունային արագությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e, \tag{1}$$

Այսպիսով, եթե մարմինը մասնակցում է միաժամանակ *երկու պտտական շարժումների՝ հատվող առանցքների շուրջը, ապա մարմնի արդյունարար շարժումը կլինի պտտում անշարժ կետի շուրջը։ Հետևաբար, պինդ մարմնի կետերի արագությունների և արագացումների, ակընթարթային անկյունային արագացման և շարժական ու անշարժ աքսոիդների գտնելը այս դեպքում կարելի է կատարել նախորդ պարագրաֆում շարադրված տեսության համաձայն։*



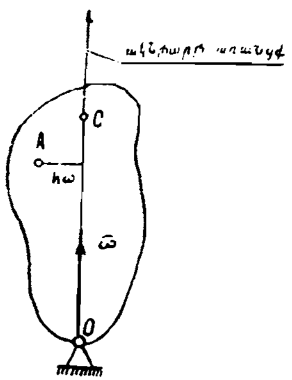
Գծ. 267

Այս պարագրաֆի խնդիրները լուծելիս նպատակահարմար է հաշվի առնել հետևյալը։

ա) Մարմնի անկյունային արագության և ակնթարթային առանցքի դիրքի որոշումը կատարվում է (1) *բանաձևի միջոցով։ Վեկտորապես գումարելով* $\bar\omega_e$ *և* $\bar\omega_r$ *վեկտորները, ստանում ենք մարմնի* $\bar\omega$ *բացարձակ անկյունային արագությունը և պտտման ակնթարթային առանցքի դիրքը։*

բ) $\bar\omega$ *ակնթարթային անկյունային արագության մեծությունը որոշվում է* (1) *բանաձևի օգնությամբ։ Բացի դրանից* $\bar\omega$*-ի մեծությունը կարելի է որոշել նաև հետևյալ ձևով։*

Դիցուք հայտնի է մարմնի որևէ A *կետի* $\bar v_A$ *արագության մեծությունը (գծ. 268)։ Այդ դեպքում մարմնի անկյունային արագության համար կունենանք՝*



Գծ. 268

$$\omega = \frac{v_A}{h_\omega},$$

որտեղ h_ω*-ն* A *կետից ակնթարթային առանցքի վրա իջեցրած ուղղահայացի երկարությունն է (գծ. 268)։*

գ) Մարմնի $\bar\varepsilon$ *ակնթարթային անկյունային արագացումը որոշվում է*

$$\bar\varepsilon = \frac{d\bar\omega}{dt} = \bar v_k$$

բանաձևով։ Սա նշանակում է, որ $\bar\varepsilon$ վեկտորը հավասար է $\bar\omega$ վեկտորի ծայրակետի արագության վեկտորին (գծ. 267)։

դ) Մարմնի որևէ A կետի արագության մեծությունը որոշվում է

$$v_A = \omega \; h_\omega,$$

իսկ արագացման վեկտորը՝

$$\bar w_A = \bar w_{A,1} + \bar w_{A,2}$$

բանաձևով։ Այստեղ $\bar w_{A1}$-ը պտտական արագացումն է, որն ուղղահայաց է A կետով և $\bar\varepsilon$ վեկտորով անցնող հարթությանը և ուղղված է $\bar\varepsilon$ վեկտորի շուրջը մարմնի կատարած պտտման կողմը։ Այս արագացման մեծությունը կլինի՝

$$w_{A,1} = \varepsilon \cdot h_\varepsilon,$$

որտեղ h_ε-ն A կետից $\bar\varepsilon$ վեկտորին իջեցրած ուղղահայացի երկարությունն է։ $\bar w_{A,2}$ առանցքի արագացումը ուղղահայաց է h_ω-ին և մեծությամբ հավասար է

$$w_{A,1} = \omega^2 \cdot h_\omega։$$

ե) Մարմնի կետերի արագությունների որոշումը կարելի է կատարել նաև արագությունների գումարման

$$\bar v_a = \bar v_e + \bar v_r$$

բանաձևով, որտեղ $\bar v_a$-ն կետի բացարձակ արագությունն է, իսկ $\bar v_e$, $\bar v_r$-ը՝ համապատասխանաբար փոխադրական և հարաբերական արագությունները։

զ) Նույն ձևով կարելի է որոշել մարմնի կետերի արագացումները, օգտագործելով արագացումների գումարման Կորիոլիսի թեորեմը, այսինքն՝

$$\bar w_a = \bar w_e + \bar w_r + \bar w_c,$$

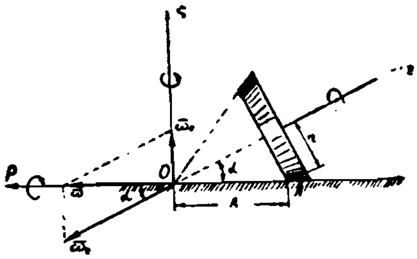
որտեղ $\bar w_a$-ն կետի բացարձակ արագացումն է, իսկ $\bar w_e$, $\bar w_r$, $\bar w_c$-ն համապատասխանաբար փոխադրական, հարաբերական և Կորիոլիսի արագացումներն են։ Կորիոլիսի արագացումը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\bar w_c = 2(\bar\omega_e \times \bar v_r)։$$

Խ ն դ ի ր 124։ r շառավիղ ունեցող կոնական անիվը մեկ րոպեի ընթացքում 5 անգամ պտտվում է շրջանագծով, որի շառավիղը՝ R=2r և կենտրոնը գտնվում է O կետում։ Կոնական անիվի առանցքը անցնում է շրջանագծի կենտրոնով։ Որոշել անվի իր առանցքի շուրջը կատարած հարաբերական շարժման $\bar{\omega}_r$ անկյունային արագությունը և պտտման ակնթարթային $\bar{\omega}$ անկյունային արագությունը (գծ. 269)։

Լուծում: *Որոշակիության համար ենթադրենք, որ անիվը պտտվում է ζ առանցքի շուրջը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։*

Անիվը կատարում է բարդ շարժում։ Նա պտտվում է իր Oz առանցքի շուրջը ω_r հարաբերական անկյունային արագությամբ, իսկ Oz առանցքը պտտվում է անշարժ $O\zeta$ առանցքի շուրջը $\bar{\omega}_e$ փոխադրական անկյունային արագությամբ։ Այսպիսով, անիվը միաժամանակ կատարում է Oz և $O\zeta$ հատվող առանցքների շուրջը պտտումներ $\bar{\omega}_r$ և $\bar{\omega}_e$ անկյունային արագություններով։ Հետևաբար, այս երկու պտտումները կարելի է փոխարինել մի պտտումով՝ $\bar{\omega}$ ակնթարթային անկյունային արագությամբ, որը որոշվում է



Գծ. 269

հետևյալ բանաձևով՝

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e.$$

Սահքի բացակայության հետևանքով անվի A կետը, ինչպես և O կետը, տվյալ մոմենտում կլինեն անշարժ։ Հետևաբար, OA ծնիչը տվյալ մոմենտում կլինի անվի պտտման ակնթարթային առանցքը։

Փոխադրական անկյունային արագության մեծությունը, խնդրի պայմանի համաձայն, կլինի՝

$$\omega_e = \frac{\pi n_e}{30} = \frac{\pi \cdot 5}{30} = \frac{\pi}{6}\ 1/\text{վրկ}.$$

$\bar{\omega}$ վեկտորը ուղղենք $O\zeta$ առանցքով այնպես, որ այդ վեկտորի ծայրից նայելիս փոխադրական պտտումը երևա ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Հետևաբար, $\bar{\omega}_e$ վեկտորը կունենա գծագրում ցույց տրված ուղղությունը։

Եթե Oz-ը պտտվում է $O\zeta$ առանցքի շուրջը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, ապա անվի հարաբերական պտտումը Oz առանցքի շուրջը տեղի կունենա ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ։ Հետևաբար, $\bar{\omega}_r$ հարաբերական անկյունային արագության վեկտորը (որի մոդուլը դեռ մեզ հայտնի չէ) ուղղված կլինի Oz առանցքի բացասական ուղղությամբ։

$\bar{\omega}$ բացարձակ անկյունային արագության վեկտորը ուղղված

կլինի OP պտտման ակնթարթային առանցքով և կհանդիսանա $\bar{\omega}_e$ ու $\bar{\omega}_r$ վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռակողմի անկյունագիծը։ Գծագրից ստանում ենք, որ

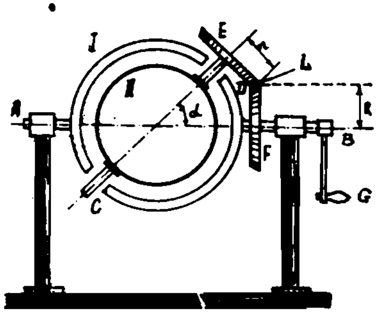
$$\omega = \omega_e \operatorname{ctg}\alpha = \omega_e \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\ 1/\text{վրկ},$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega^2 + \omega_e^2} = \frac{\pi}{3}\ 1/\text{վրկ}։$$

Պատ. $\omega = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\ 1/\text{վրկ}$. $\omega_r = \frac{\pi}{3}\ 1/\text{վրկ}$։

Խնդիր 125 (*613*)։ *Գնդավոր ջարդիչը բաղկացած է* II *սնամեջ գնդից (որում գտնվում են գնդերը և ջարդման ենթակա նյութը), որը նստած է* CD *առանցքի վրա։ Վերջինիս վրա ամրացված է* r *շառավղով* E *կոնական ատամնանիվը։* CD *առանցքը նստած է* I *շրջանակի մեջ գտնվող առանցքակալներում. շրջանակը կազմում է* AB *առանցքի հետ մեկ ամբողջություն և շարժման մեջ է դրվում* G *բռնակի օգնությամբ։* E *անիվը կառչվում է* R *շառավղով* F *անշարժ անվի հետ։*

Որոշել գնդավոր ջարդիչի բացարձակ անկյունային արագությունը, եթե բռնակը պտտվում է ω_0 *անկյունային արագությամբ.* AB *և* CD *առանցքների միջև կազմված անկյունը հավասար է* α։ *Որոշել նաև գնդավոր ջարդիչի բացարձակ անկյունային արագացումը, եթե բռնակի անկյունային արագությունը՝* $\omega_0 = \text{const}$ *(գծ. 270)։*

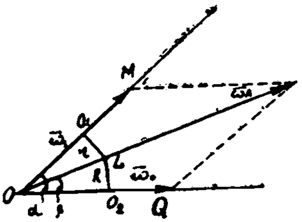


Գծ. 270

Լուծում։ II *սնամեջ գունդը միաժամանակ պտտվում է* AB *և* CD *հատվող առանցքների շուրջը։ Այդ առանցքները անցնում են գնդի կենտրոնով և իրար հետ կազմում են* α *անկյուն։ Քանի որ* II *ատամնանիվը անշարժ կերպով միացած է* II *գնդին, ապա նա ևս կկատարի պտտումներ* AB *և* CD *առանցքների շուրջը։ Ակնհայտ է, որ այս դեպքում գունդը և ատամնանիվը կկատարեն ակնթարթային պըտտական շարժում՝*

$$\bar{\omega}_A = \bar{\omega}_O + \bar{\omega}_1$$

ակնթարթային անկյունային արագությամբ։ Այստեղ $\bar{\omega}_0$-ն և $\bar{\omega}_1$-ը ուղղված են համապատասխանաբար AB-ով և CD-ով, իսկ մեծությամբ հավասար են այդ առանցքների շուրջը II գնդի կատարած պտտական շարժումների անկյունային արագությունների մեծություններին։ Քանի որ F ատամնանիվը անշարժ է, իսկ E-ն գլորվում է նրա վրայով, ապա նրանց շոշափման L կետի արագությունը հավասար կլինի զրոյի։ II գնդի ամբողջ շարժման ընթացքում նրա կենտրոնը մնում է անշարժ։ Հետևաբար, II գնդի կենտրոնը L կետին միացնող ուղիղը կլինի պտտման ակընթարթային առանցքը։



Գծ. 471

Տված $\bar{\omega}_0$ վեկտորի և $\bar{\omega}_1$-ի ուղղության վրա կառուցենք զուգահեռագիծ, որի անկյունագիծը համընկնի OL-ի հետ (գծ. 271)։ (1)-ի համաձայն կառուցված OMPQ զուգահեռագծի $\overline{OP}$ անկյունագիծը կլինի $\bar{\omega}_A$ ակընթարթային անկյունային արագությունը, իսկ $\overline{OM}$-ը՝ $\bar{\omega}_1$ անկյունային արագությունը։ $\triangle OPQ$-ից, սինուսների թեորեմի համաձայն, կունենանք՝

$$\frac{\omega_1}{\sin\beta} = \frac{\omega_0}{\sin(\alpha-\beta)}, \qquad (\beta = \angle POQ)։$$

Այստեղից՝

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}։ \tag{2}$$

$\sin\beta$ և $\sin(\alpha-\beta)$-ի արժեքները որոշելու համար դիտարկենք OLO_2 և OLO_1 ուղղանկյուն եռանկյունները։ Ունենք՝

$$\sin\beta = \frac{R}{OL}, \quad \sin(\alpha-\beta) = \frac{r}{OL}, \tag{3}$$

Տեղադրելով $\sin\beta$-ի և $\sin(\alpha-\beta)$-ի արժեքները (3)-ից (2)-ի մեջ, կունենանք՝

$$\omega_1 = \frac{R}{r}\,\omega_0։$$

ω_A անկյունային արագությունը որոշելու համար դիտարկենք OPQ եռանկյունին։ Կոսինուսների թեորեմի համաձայն կարող ենք գրել, որ

$$\omega_A = OP = \sqrt{OM^2 + OQ^2 - 2OM \cdot OQ \cos(\angle OQP)} =$$

$$= \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1 \cos\alpha} = \frac{\omega_0}{r}\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\alpha}\text{։}$$

Այժմ հաշվենք II *գնդի պտտման* $\bar{\varepsilon}$ *անկյունային արագացման մեծությունը։ Քանի որ* $\bar{\omega}$*-ի մեծությունը հաստատուն է, իսկ նրա ծայրակետը միշտ գտնվում է* AB*-ին ուղղահայաց հարթության մեջ (գծ. 270), ապա* $\bar{\varepsilon}$ *անկյունային արագացումը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝*

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_0 \times \bar{\omega}_1,$$

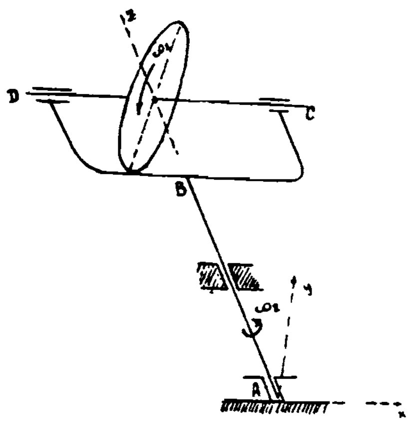
որտեղից՝

$$\varepsilon = \omega_0\omega_1 \sin(\widehat{\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1}) = \omega_0\omega_1 \sin\alpha = \omega_0^2 \cdot \frac{R}{r}\sin\alpha\text{։}$$

Պատ. $v_A = \frac{\omega_0}{r}\sqrt{r^2 + R^2 + 2Rr\cos\alpha}$,

$$\varepsilon = \omega_0^2 \frac{R}{r}\sin\alpha\text{։}$$

Խ ն դ ի ր 126 *(618)։* *Շրջանային սկավառակը պտտվում է* ω_1 *անկյունային արագությամբ* CD *հորիզոնական առանցքի շուրջը. միաժամանակ* CD *առանցքը պտտվում է* ω_2 *անկյունային արագությամբ սկավառակի* O *կենտրոնով անցնող* AB *ուղղաձիգ առանցքի շուրջը։ Հաշվել սկավառակի ակնթարթային* ω *անկյունային արագության և ակնթարթային* ε *անկյունային արագացման մեծությունը և ուղղությունը, եթե* $\omega_1 = 5$ վրկ$^{-1}$, $\omega_2 = 3$ վրկ$^{-1}$ *(գծ. 272)։*



Գծ. 272

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Սկավառակը միաժամանակ պտտվում է երկու հատվող առանցքների շուրջը* $\bar{\omega}_1$ *և* $\bar{\omega}_2$ *անկյունային արագություններով։ Հետևաբար, արդյունարար շարժումը կլինի պտտում* $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ *ակնթարթային անկյունային արագությամբ։ Այստեղ* $\bar{\omega}_1 \perp \bar{\omega}_2$*-ին, հետևաբար, գծ. 273-ից կարող ենք գրել՝*

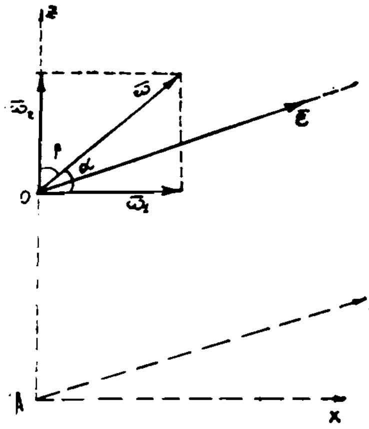
$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} = 5{,}82 \ 1/\text{վրկ}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = 30^\circ 41',$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 30^\circ 41' = 59^\circ 19'։$$

Այժմ որոշենք $\bar{\varepsilon}$ անկյունային արագացումը։ Քանի որ ω*-ն հաստատուն է և $\bar{\omega}$ վեկտորի ծայրակետը գծում է մի շրջանագիծ, որի հարթությունը ուղղահայաց է* Az *առանցքին, հետևաբար՝*

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1։$$



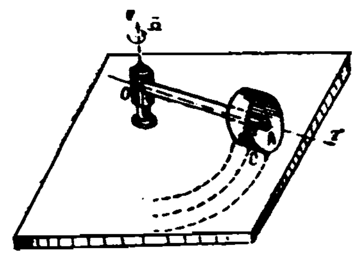
Գծ. 273

Այս բանաձևից հետևում է, որ $\bar{\varepsilon}$-ը ուղղված է Ay *առանցքին զուգահեռ, իսկ մեծությամբ հավասար է՝*

$$\varepsilon = \omega_2 \cdot \omega_1 \sin 90^\circ = 5 \cdot 3 = 15 \ 1/\text{վրկ}^2։$$

Պատ. $\omega = 5{,}82$ 1/վրկ *և կազմում է* x, z *առանցքների դրական ուղղությունների հետ* $\alpha = 30^\circ 41'$ *և* $\beta = 59^\circ 19'$ *անկյուններ.* $\varepsilon = 15$ վրկ$^{-2}$ *և ուղղված է* y *առանցքով։*

Խնդիր 127 *(621)։ Աղացող վազկանի* OA *առանցքը պտտվում է հավասարաչափ* Oz *առանցքի շուրջը* Ω *անկյունային արագությամբ։ Առանցքի երկարությունը* OA=R, *վազկանի շառավիղը* AC=r։ *Ընդունելով, որ տվյալ մոմենտում վազկանի* C *կետի արագությունը հավասար է զրոյի, որոշել վազկանի* ω *անկյունային արագությունը, ակնթարթային առանցքի ուղղությունը, շարժական և անշարժ աքսոիդները (գծ. 274)։*



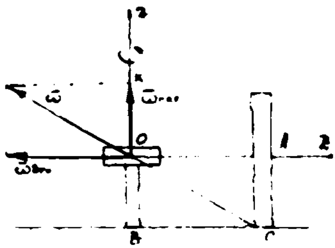
Գծ. 274

Լուծում: *Վազկանը կատարում է բարդ շարժում, ընդ որում նրա պտտումը* OA *առանցքի* (Oz′) *շուրջը կլինի հա-*

րաբերական, իսկ վագկանի և նրան ամրացած OA առանցքի պտտումը անշարժ oz առանցքի շուրջը՝ փոխադրական (գծ. 275)։ Տվյալ մոմենտում վագկանի արագությունների ակնթարթային առանցքը կլինի OC-ն, քանի որ նա անցնում է անշարժ O և C կետերով։ Վագկանի բացարձակ շարժումը կլինի նրա պտտումը ակնթարթային OC առանցքի շուրջը։ Եթե վագկանի փոխադրական, հարաբերական և բացարձակ անկյունային արագությունները համապատասխանաբար նշանակենք $\bar{\omega}_e = \bar{\Omega}$, $\bar{\omega}_r$ և $\bar{\omega}_a$, ապա կունենանք՝

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r.$$

Պարզենք այս անկյունային արագությունների ուղղությունները։ Գծագրից երևում է, որ ըստ տրված պայմանի, OA (oz') առանցքի պտտումը անշարժ oz առանցքի շուրջը կատարվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Վագկանի պտտումը OA առանցքի շուրջը, oz' առանցքի ծայրից, երևում է ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ։ Ուստի, աջ պտուտակի կանոնի համաձայն, $\bar{\Omega}$ վեկտորը կունենա oz առանցքի դրական ուղղությունը, իսկ $\bar{\omega}_r$ վեկտորը՝ oz' առանցքի բացասական ուղղությունը։ $\bar{\omega}_a$ բացարձակ անկյունային արագությունը ուղղված կլինի



Գծ. 275

վագկանի արագությունների ակնթարթային առանցքով և կհանդիսանա $\bar{\Omega}$ և $\bar{\omega}_r$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռակողմի անկյունագիծը (գծ. 275)։ OBC և OKL եռանկյունների նմանությունից հետևում է՝

$$\frac{\omega}{OC} = \frac{\Omega}{OB},$$

որտեղից

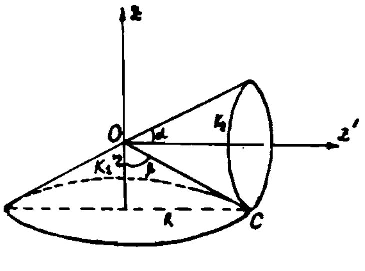
$$\omega = \Omega \cdot \frac{OC}{OB} = \Omega \cdot \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}.$$

Այժմ որոշենք վագկանի շարժական և անշարժ աքսոիդները։ OC ուղիղը հանդիսանում է պտտման ակնթարթային առանցք։ Վագկանի շարժման ընթացքում OC ուղիղների երկրաչափական տեղը անշարժ տարածության մեջ կլինի մի կոնական մակերեվույթ, որի գագաթը գտնվում է O կետում։ Դժվար չէ նկատել, որ այդ մակերևույթը շրջանային կոն է, քանի որ կետի հետագիծը (ուղղորդ կորը) շրջանագիծ է, որի հարթությունը ուղղահայաց է Oz առանցքին։ Ակնհայտ է, որ կոնի ծնիչի և Oz առանցքի կազմած β անկյունը (գծ. 276) կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{R}{r}, \qquad \beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{R}{r}\text{։}$$

Գծագիր 276-ից երևում է, որ

$$\sphericalangle zOC = \pi - \beta = \pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{R}{r}\text{։}$$



Գծ. 276

Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ, որ շարժական աքսոիդը նույնպես շրջանային կոն է, որի գագաթը գտնվում է O կետում, իսկ ուղղորդ կորը՝ վագկանի անիվի շրջանակն է։ Այդ գագաթի 2α անկյունը կարելի է հաշվել հետևյալ ձևով (գծ. 276)՝

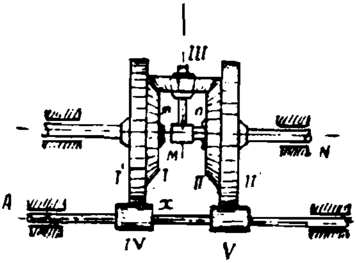
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{R}, \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R}\text{։}$$

Գծագրից հետևում է, որ

$$\sphericalangle z'OC = \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R}\text{։}$$

Պատ. $\omega = \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{r}\,\Omega$, ակնթարթային առանցքը OC ուղիղն է, աքսոիդները կոներ են, որոնց գագաթը գտնվում է O կետում, շարժական աքսոիդի գագաթի z'OC անկյունը հավասար է $2\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{R}$-ի, իսկ անշարժ աքսոիդի ZOC անկյունը՝ $\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{R}{r}$։

Խ ն դ ի ր 128 (*625*)։ AB և MN առանցքների պտտաթվերի նշված հարաբերությունը ստանալու համար դիֆերենցիալ կառչման կիրառման ժամանակ նրա I և II կոնական անիվներին խուլ կերպով միացված են I′ և II′ գլանային ատամնանիվները, որոնք կառչվում են AB առանցքի վրա խուլ հագցված IV և V ատամ նանիվներին։ Գտնել AB և MN լիսեռների ω_0 և ω անկյունային արագությունների միջև եղած առնչությունը, եթե I և II անիվների շառավիղները միևնույնն են, իսկ I′, II′, IV և V ատամնանիվների ատամնաթվերը համապատասխանաբար հավասար են՝ m, n, x, y (*գծ. 277*)։



Գծ. 277

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: IV և V ատամնանիվները ամրացած են AB լիսեռին, հետևաբար, նրանց պտտման անկյունային արագությունը կլինի ω_0։ I և I′-ի անկյունային արագությունը նշանակենք ω_1, II և II′-ի անկյունային արագությունը՝ ω_2, իսկ III անվի պտտման անկյունային արագությունը իր առանցքի շուրջը՝ ω_3։ I′ և IV, II′ և V ատամնավոր անիվների արտաքին կառչման շնորհիվ ω_1, ω_2 և ω_0 անկյունային արագությունների միջև գոյություն կունենան հետևյալ առնչությունները՝

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{x}{m} \cdot (-1), \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{y}{n} \cdot (-1),$$

որտեղից՝

$$\omega_1 = -\frac{x}{m}\omega_0, \qquad \omega_2 = -\frac{y}{n}\omega_0 \text{։} \tag{1}$$

Վիլլիսի բանաձևի համաձայն կունենանք՝

$$\frac{\omega_1 + \omega}{\omega_2 + \omega} = \frac{r_2}{r_1} \cdot (-1), \tag{2}$$

որտեղ ω-ն MN լիսեռի անկյունային արագությունն է, r_1 և r_2-ը՝ առաջին և երկրորդ անիվների շառավիղներն են։ Քանի որ $r_1 = r_2$, ապա (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\omega_1 + \omega}{\omega_2 + \omega} = -1 \text{։} \tag{3}$$

Տեղադրելով ω_1-ի և ω_2-ի արժեքները (1)-ից (3)-ի մեջ, կստանանք՝

$$-\omega_0\frac{x}{m} + \omega = \omega_0\frac{y}{n} - \omega,$$

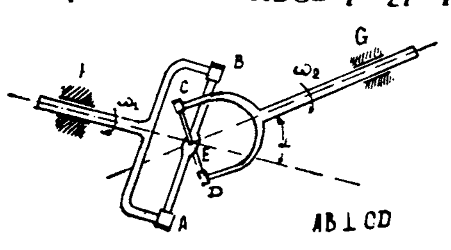
որտեղից

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_0\left(\frac{x}{m} + \frac{y}{n}\right)։$$

Պատ. $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n}\right)։$

Խ ն դ ի ր 129*(634)*։ *Կարդան-Հուկի ունիվերսալ հոդակապի* ABCD *խաչկապը* ($AB \perp CD$), *որը օգտագործվում է փոխհատվող առանցքների միջև պտտական շարժում փոխանցելու համար, պտտվում է* E *անշարժ կետի շուրջը։ Գտնել խաչկապով միացված լիսեռների համար* $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ *հարաբերությունը երկու դեպքում՝ 1) երբ* ABF *եղանիկի հարթությունը հորիզոնական է, իսկ* CDG *եղանիկի հարթությունը ուղղաձիգ, 2) երբ* ABF *եղանիկի հարթությունը ուղղաձիգ է, իսկ* CDG *եղանիկի հարթությունը նրան ուղղահայաց է։ Լիսեռների միջև կազմված անկյունը հաստատուն է՝* $\alpha=60°$ *(գծ. 278)։*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: ABCD *խաչկապի շարժման ժամանակ նրա* E *կետը միշտ մնում է անշարժ։ Նրա պտտման անկյունային արագությունը նշանակենք* $\bar{\omega}$։ *Տանենք* Exyz *անշարժ կոորդինատական սիստեմը,* Ez *առանցքը ուղղենք* EF-*ով, իսկ* Ex *և* Ey*—առանցքները տանենք այնպես, որ նրանք ուղղահայաց լինեն*



Գծ. 278

Ez-*ին, կազմեն աջ սիստեմ և* G *կետը գտնվի* yEz *հարթության վրա։ Խաչկապին ամրացված* $E\xi\eta\zeta$ *շարժական սիստեմի* $E\zeta$ *առանցքը ուղղենք* ABCD *հարթությանը ուղղահայաց,* $E\xi$ *առանցքը՝* EA-*ով, իսկ* $E\eta$-*ն՝* EC-*ով։* $E\zeta$-*ի ուղղությունը ընտրենք այնպես, որ* $E\xi\eta\zeta$-*ն կազմի աջ սիստեմ (գծ. 279)։*

Այս դեպքում խաչկապի դիրքը կորոշվի էյլերյան ψ *և* θ *անկյունների միջոցով, քանի որ* $E\zeta$ *առանցքը միշտ կգտնվի* xEy *հարթության վրա* ($\varphi=0$)։ *Խաչկապի շարժման ժամանակ* AB հատվածը միշտ մնում է xEy հարթության վրա, իսկ CD հատվածը՝ այն հարթության մեջ, որը xEy հարթության հետ կազմում է α անկյուն։ xEy հարթության հետ α անկյուն կազմող հարթության նորմալի միավոր վեկտորը նշանակենք $\bar{p}^{\circ}$ (գծ. 279)։

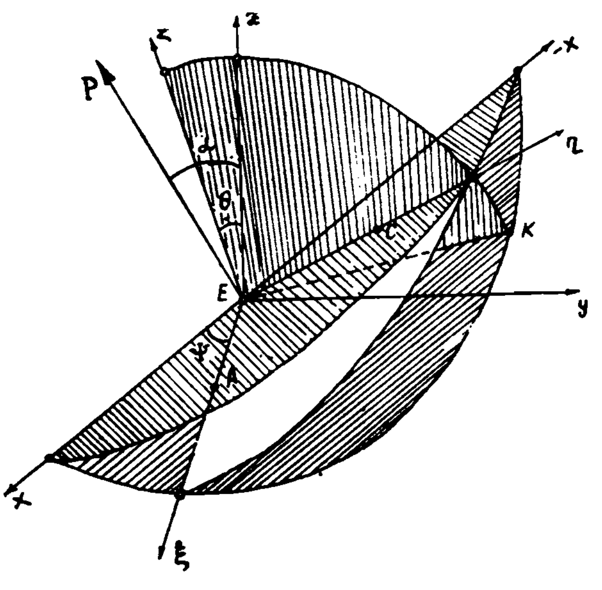
Ակնհայտ է, որ $E\eta$ առանցքը կգտնվի $\bar{p}^{\circ}$ նորմալ ունեցող հարթության մեջ։ $\bar{p}^{\circ}$ վեկտորը գտնվում է yEz հարթության մեջ և Ez-ի հետ կազմում է α անկյուն։

Այժմ գրենք Էյլերի կինեմատիկական հավասարումները անշարժ սիստեմի նկատմամբ, երբ $\varphi = \dot{\varphi} = 0$.

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\psi,$$
$$\omega_y = \dot{\theta}\sin\psi,$$
$$\omega_z = \dot{\psi},$$

որտեղ ω_x, ω_y, ω_z-ը $\bar{\omega}$ վեկտորի պրոյեկցիաներն են x, y, z առանցքների վրա։

Այժմ որոշենք $\bar{\omega}_2$ վեկտորի մեծությունը։ Դրա համար պրոյեկտենք $\bar{\omega}$ վեկտորը $\bar{p}^{\circ}$-ի ուղղության վրա և միաժամանակ նկատի



Գծ. 279

ունենանք, որ $\bar{\omega}_2$-ը ուղղված է $\bar{p}^\circ$-ով, իսկ $\bar{p}^\circ$-ի պրոյեկցիաները անշարժ սիստեմի առանցքների վրա կլինեն $(0, -\sin\alpha, \cos\alpha)$։ *Այդ դեպքում կստանանք՝*

$$\omega_2 = \bar{\omega} \cdot \bar{p}^\circ = \omega_z \cos\alpha - \omega_y \sin\alpha = \dot{\psi}\cos\alpha - \dot{\theta}\sin\psi\sin\alpha, \qquad (1)$$

Գծագրից հետևում է, որ $\dot{\psi} = \omega_1$-*ի։ Այժմ* ω_1-*ի և* ω_2-*ի կապը ստանալու համար* $\dot{\theta}$-*ը արտահայտենք* $\dot{\psi}$-*ի միջոցով։ Այդ նպատակով պետք է նկատի ունենալ, որ* $\bar{p}^\circ$ *վեկտորը ուղղահայաց է* $E\eta$ *առանցքին։ Հետևաբար,*

$$\bar{p}^\circ \cdot \bar{\eta}^\circ = 0, \qquad (2)$$

որտեղ η°-*ն* $E\eta$ *առանցքի միավոր վեկտորն է։ Գրենք (2) հավասարումը, երբ* $\bar{p}^\circ$ *և* $\bar{\eta}^\circ$ *միավոր վեկտորները պրոյեկտված են անշարժ կոորդինատական առանցքների վրա՝*

$$\bar{p}^\circ \cdot \bar{\eta}^\circ = -\cos\psi\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha = 0, \qquad (3)$$

Ածանցելով (3)-ը ըստ t-*ի, կստանանք՝*

$$\dot{\theta}\cos\theta\cos\alpha + \dot{\psi}\sin\psi\sin\alpha = 0, \qquad (4)$$

Եթե (4)-ից որոշենք $\dot{\theta}$-*ի արժեքը և տեղադրենք (1)-ի մեջ, ապա կունենանք՝*

$$\omega_2 = \omega_1\left(\cos\alpha + \frac{\sin\psi\,\sin^2\alpha}{\cos\theta\,\cos\alpha}\right), \qquad (5)$$

Խնդրում պահանջվող առաջին դեպքի համար, երբ ABF *եղանիկի հարթությունը հորիզոնական է, իսկ* CDG *եղանիկի հարթությունը ուղղաձիգ, կունենանք՝*

$$\psi = 0, \quad \theta = \alpha։$$

Եթե ψ-*ի և* θ-*ի արժեքները տեղադրենք (5)-ի մեջ, կստանանք՝*

$$\omega_2 = \omega_1\cos\alpha = 0{,}5\ \omega_1,$$

Երկրորդ դեպքի համար՝

$$\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = 0։$$

Եթե ψ-*ի և* θ-*ի այս արժեքները տեղադրենք դարձյալ (5)-ի մեջ, կունենանք՝*

$$\omega_2 = \omega_1 \left(\cos\alpha + \frac{\sin\dfrac{\pi}{2}\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \right) = \omega_1 \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\omega_1}{\cos\alpha} = 2\omega_1,$$

Отв. $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = 2,$ 2) $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \cos\alpha = 0{,}5,$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ

ԳԼՈՒԽ ՉՈՐՐՈՐԴ

ՆԿԱՏՎԱԾ ՎՐԻՊԱԿՆԵՐ

Էջ	Տող	Տպված է	Պետք է լինի
27	12 վ	$V = R\frac{d\varphi}{dt}\ R\omega$	$V = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$
55	2 ն	$\frac{d^2x}{dt^2}\ 400 \sin 20t$	$\frac{d^2x}{dt^2} = 400 \sin 20t$
56	4 վ	$\sin 20t = (20t - 90^0)$	$\sin 20t = \cos(20t - 90^0)$
59	7 վ	$2a\omega_0 \sin\omega_0 t$	$-2a\omega_0 \sin\omega_0 t$
64	7 վ	$W = \frac{\sqrt{s}}{9}$	$W = \frac{\sqrt{5}}{9}$
64	4 ն	$-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 ak^2e^{kt}$	$-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = ak^2e^{kt}$
70	10 ն	(11)	(II)
72	8, 9 վ	38 ^{1}/վրկ^2	38π^{1}/վրկ^2
118	10 ն	$\xi \cos\omega t + \eta \sin\omega t$	$\xi \cos\omega t - \eta \sin\omega t$
121	1 ն	V_2	V_e
157	5 ն	$W a\eta$	$W_{a\xi}$
181	5 վ	W_c	W_a
237	1 ն	$Q = \frac{-W_{0\eta} \cdot \varepsilon + W_{Q\xi} + \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}$	$\xi_Q = \frac{-W_{0\eta} \cdot \varepsilon + W_{0\xi} \cdot \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}$
280	11 վ	$\omega_y = 2$	$\omega_y = -2$

Պ. 2292