ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ, Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ,
Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

# ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՈՒՂԵՑՈՒՅՑ

Պրակ երրորդ

## ԿԵՏԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ—1974

# ԿԵՏԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

## § 1. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

**1. Դինամիկայի հիմնական հասկացությունները և սահմանումները:** *Տեսական մեխանիկայի այն բաժինը, որն ուսումնասիրում է նյութական մարմինների շարժման օրենքները, կախված այդ մարմինների վրա ազդող ուժերից, կոչվում է դինամիկա։*

*Ինչպես հայտնի է, ամեն մի նյութական մարմին կարելի է դիտել որպես նյութական կետերի սիստեմ։ Սիստեմի շարժումը համարվում է հայտնի, եթե հայտնի են նրա բոլոր բաղկացուցիչ մասերի շարժումները։ Ուստի բնական է նախ ուսումնասիրել նյութական կետի շարժումը և ապա անցնել սիստեմի շարժման ուսումնասիրությանը։ Դրա հետևանքով ընդունված է դինամիկան բաժանել երկու մասի՝ նյութական կետի դինամիկայի և նյութական կետերի սիստեմի դինամիկայի։*

*Սովորաբար նյութական կետ անվանում են այն նյութական մարմինը, որի շարժման ուսումնասիրության ժամանակ նրա չափերը կարելի է արհամարհել։ Դինամիկայի մի շարք խնդիրներում, կախված ուսումնասիրվող շարժման բնույթից, որպես նյութական կետ ընդունում են նաև մեծ չափեր ունեցող մարմինները։ Այսպես, օրինակ, երկրագունդը կարելի է ընդունել որպես նյութական կետ, երբ դիտարկվում է նրա պտույտը Արեգակի շուրջը։ Սա բացատրվում է նրանով, որ երկրագնդի շառավիղը, համեմատած նրա ուղեծրի չափերի հետ, շատ փոքր է։*

*Եթե մարմինը շարժվում է համընթաց, ապա ամբողջ մարմնի շարժումը լրիվին որոշվում է նրա մի կետի շարժումով։ Դրա համար էլ համընթաց շարժվող նյութական մարմինը կարելի է ընդունել որպես նյութական կետ, որի մասսան հավասար է տվյալ մարմնի մասսային։*

*Դինամիկայում բացի ուժից օգտագործվում է նաև մարմնի* մասսայի հասկացությունը։ Ուժը և մասսան կետի դինամիկայի հիմնական հասկացություններն են։

**2. Դինամիկայի հիմնական օրենքները:** *Դինամիկայի հիմքում ընկած են Նյուտոնի օրենքները, որոնք հայտնաբերվել են մարմինների շարժման վերաբերյալ կատարված բազմաթիվ փորձերի և դիտումների արդյունքների ընդհանրացման հիման վրա և ստուգվել մարդկության դարավոր փորձով։*

**Առաջին օրենք** (**Իներցիայի օրենք**): *Մեկուսացված նյութական կետը գտնվում է հանգստի կամ հավասարաչափ ուղղագիծ շարժման վիճակում։*

*Մեկուսացված կոչվում է այն կետը, որի վրա ուժեր չեն ազդում։ Այս օրենքից հետևում է, որ եթե կետի վրա ազդող ուժը հավասար է զրոյի* ($\overline{F}=0$), *ապա կետը կշարժվի մեծությամբ և ուղղությամբ հաստատուն արագությամբ* ($\overrightarrow{v}=\overline{const}$) *և, հետևաբար, նրա արագացումը հավասար կլինի զրոյի* ($\overline{w}=0$)*։ Կետի այդպիսի շարժումը կոչվում է իներցիոն շարժում։ Այն հաշվարկի սիստեմը, որի նկատմամբ տեղի ունի իներցիայի օրենքը, կոչվում է հաշվարկի իներցիոն սիստեմ։*

**Երկրորդ օրենք:** *Նյութական կետի մասսայի և արագացման արտադրյալը հավասար է ազդող ուժին։*

*Մաթեմատիկորեն այս օրենքը կարելի է ներկայացնել*

$$m\overline{w}=\overline{F} \qquad \text{(I)}$$

*բանաձևով, որտեղ* m*-ը կետի մասսան է, իսկ* $\overline{F}$*-ը՝ նրա վրա ազդող ուժը։ Այս հավասարումը անվանում են կետի դինամիկայի հիմնական հավասարում։*

*Եթե կետի վրա ազդում են մի քանի ուժեր, ապա այդ ուժերը կարելի է փոխարինել մի* $\overline{R}$ *համազորով, որը հավասար է այդ ուժերի վեկտորական գումարին։ Այդ դեպքում դինամիկայի հիմնական հավասարումը ընդունում է*

$$m\overline{w}=\overline{R}$$

*կամ*

$$m\overline{w}=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i \qquad \text{(II)}$$

*տեսքը։*

**Երրորդ օրենք** (**Ազդեցության և հակազդեցության հավասարության օրենք**): *Երկու նյութական կետեր ազդում են մեկը մյու-*

*ափ վրա երկու այնպիսի ուժերով, որոնց մոդուլները հավասար են, ուղղված են այդ կետերը միացնող ուղղով և ունեն հակադիր ուղղություններ։*

**3. Դինամիկայի երկու խնդիրները:** *Կետի դինամիկայում դիտարկվում են երկու տիպի խնդիրներ։ Առաջին տիպի խնդիրներում տրված է լինում նյութական կետի շարժման օրենքը և մասսան, պահանջվում է որոշել այն ուժը, որի ազդեցության տակ շարժվում է կետը։ Այս տիպի խնդիրները հաճախ անվանում են նաև դինամիկայի ուղիղ խնդիրներ։*

*Երկրորդ տիպի խնդիրներում տրված է լինում կետի վրա ազդող ուժը և մասսան, պահանջվում է որոշել կետի շարժման օրենքը։ Այս տիպի խնդիրները կոչվում են դինամիկայի հակադարձ խնդիրներ։*

## § 2. ԿԵՏԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ԱՌԱՋԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

### (Ուժի որոշումը, երբ տրված է շարժումը)

**1. Կետի դինամիկայի առաջին խնդիրը:** *Տված է կետի մասսան և շարժման օրենքը, պահանջվում է գտնել այդ կետի վրա ազդող ուժը։ Այս խնդրի լուծումը բերվում է կետի արագացումը գտնելուն, որի համար բավական է կետի շարժման տված հավասարումները երկու անգամ ածանցել ըստ ժամանակի։*

*Այստեղ անհրաժեշտ է առանձին-առանձին դիտարկել նյութական կետի ազատ և ոչ ազատ շարժման դեպքերը։*

**2. Դինամիկայի առաջին խնդիրը ազատ կետի համար:** *Ազատ կոչվում է այն նյութական կետը, որի շարժման վրա ոչ մի սահմանափակում չի դրված։ Այդպիսի կետը տարածության մեջ կարող է գրավել ամեն մի կամայական դիրք։*

*Կինեմատիկայից հայտնի է, որ նյութական կետի շարժման օրենքը կարելի է ներկայացնել երեք եղանակով։*

*ա) Կետի շարժման օրենքը տրված է*

$$\bar{r} = \bar{f}(t)$$

*վեկտորական տեսքով։ Կետի արագացման վեկտորի համար կունենանք*

$$\bar{w} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{f}(t)}{dt^2},$$

*Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն, կետի վրա ազդող $\bar{F}$ ուժը կլինի՝*

$$\bar{F} = m\bar{w} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = m\frac{d^2\bar{f}(t)}{dt^2}։$$

*բ) Կետի շարժման օրենքը տրված է*

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t)$$

*դեկարտյան կոորդինատական եղանակով։ Արագացման վեկտորի պրոյեկցիաները կլինեն՝*

$$w_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2f_1(t)}{dt^2}, \quad w_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2f_2(t)}{dt^2},$$

$$w_z=\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d^2f_3(t)}{dt^2},$$

*Եթե պրոյեկտենք կետի դինամիկայի հիմնական հավասարումը դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատական սիստեմի առանցքների վրա, ապա կստանանք՝*

$$mw_x=F_x, \quad mw_y=F_y, \quad mw_z=F_z, \qquad \text{(III)}$$

*Տեղադրելով* $w_x$, $w_y$, $w_z$*-ի արժեքները* (III) *հավասարումների մեջ, կորոշենք կետի վրա ազդող ուժի պրոյեկցիաները՝*

$$F_x=mw_x=m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=m\frac{d^2f_1(t)}{dt^2},$$

$$F_y=mw_y=m\frac{d^2y(t)}{dt^2}=m\frac{d^2f_2(t)}{dt^2},$$

$$F_z=mw_z=m\frac{d^2z(t)}{dt^2}=m\frac{d^2f_3(t)}{dt^2},$$

*Այստեղից էլ անմիջապես կարելի է որոշել անհայտ* $\bar{F}$ *ուժի մոդուլը և ուղղությունը՝*

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=m\sqrt{\left(\frac{d^2f_1}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2f_2}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2f_3}{dt^2}\right)^2},$$

$$\cos(F,\hat{\ }x)=\frac{F_x}{F}, \quad \cos(F,\hat{\ }y)=\frac{F_y}{F}, \quad \cos(F,\hat{\ }z)=\frac{F_z}{F},$$

Խ ն դ ի ր 1։ $P=4{,}9$ կԳ *կշիռ ունեցող մարմինը կատարում է համընթաց շարժում* $x=2t^2+1$, $y=t^2+1$, $z=3t^2-1$ *օրենքով, որտեղ* x*-ը,* y*-ը,* z*-ը չափվում են մետրերով, իսկ* t*-ն՝ վայրկյաններով։ Որոշել այդ մարմնի վրա ազդող* $\bar{F}$ *ուժի մոդուլը և ուղղությունը, ընդունելով* $g\approx9{,}8$ մ/վրկ²։

Լուծում: *Մարմինը կատարում է համընթաց շարժում, հետևաբար, այն կարելի է դիտել որպես նյութական կետ, որի մասսան հավասար է մարմնի մասսային, այսինքն՝*

$$m = \frac{P}{g} = \frac{4,9}{9,8} = 0,5 \frac{\text{կԳ վրկ}^2}{\text{մ}},$$

*Երկու անգամ դիֆերենցելով շարժվող կետի կոորդինատները ըստ* t *ժամանակի, կստանանք կետի արագացման պրոյեկցիաները՝*

$$w_x = \ddot{x} = 4 \frac{\text{մ}}{\text{վրկ}^2}, \quad w_y = \ddot{y} = 2 \frac{\text{մ}}{\text{վրկ}^2}, \quad w_z = \ddot{z} = 6 \frac{\text{մ}}{\text{վրկ}^2},$$

*Տեղադրելով կետի մասսայի և արագացման պրոյեկցիաների արտահայտությունները* (III) *հավասարումների մեջ, կորոշենք կետի վրա ազդող* $\overline{F}$ *ուժի պրոյեկցիաները՝*

$$F_x = m\ddot{x} = 2 \text{ կԳ}, \quad F_y = m\ddot{y} = 1 \text{կԳ}, \quad F_z = m\ddot{z} = 3 \text{ կԳ}:$$

$\overline{F}$ *ուժի մոդուլի և ուղղորդ կոսինուսների համար կունենանք՝*

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \approx 3,74 \text{ կԳ},$$

$$\cos\alpha = \cos(\overline{F}, \widehat{\ } x) = \frac{F_x}{F} = \frac{2}{3,74} \approx 0,534,$$

$$\cos\beta = \cos(\overline{F}, \widehat{\ } y) = \frac{F_y}{F} = \frac{1}{3,74} \approx 0,267,$$

$$\cos\gamma = \cos(\overline{F}, \widehat{\ } z) = \frac{F_z}{F} = \frac{3}{3.74} \approx 0,802,$$

*Այստեղից հետևում է, որ*

$$\alpha = 57^\circ 41', \qquad \beta = 74^\circ 30', \qquad \gamma = 36^\circ 42',$$

Պատ. $F \cong 3,74$ կԳ, $\measuredangle(F, x) = 57^\circ 41'$, $\measuredangle(F, y) = 74^\circ 30'$, $\measuredangle(F, z) = 36^\circ 42'$,

*գ) Կետի շարժման օրենքը տրված է բնական եղանակով: Դիցուք կետը շարժվում է տված հետագծով,* $s = f(t)$ *օրենքով: Այս դեպքում նախ պետք է գտնել*

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{df(t)}{dt}$$

*արագությունը, այնուհետև՝ $\bar{F}$ ուժի պրոյեկցիաները բնական եռանիստի առանցքների՝ վրա։ Վերջինս որոշելու համար անհրաժեշտ է Նյուտոնի երկրորդ օրենքի վեկտորական (I) հավասարումը պրոյեկտել բնական եռանիստի առանցքների վրա։ Դրանից կստացվի*

$$mw_\tau = F_\tau, \quad mw_n = F_n, \quad 0 = F_b, \qquad (1)$$

*որտեղ $F_\tau$, $F_n$, $F_b$-ն ուժի պրոյեկցիաներն են բնական եռանիստի առանցքների վրա, իսկ $w_\tau$ և $w_n$-ը՝ արագացման տանգենցիալ և նորմալ բաղադրիչները։*

*Հայտնի է, որ*

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho},$$

*որտեղ $\rho$-ն հետագծի կորության շառավիղն է տվյալ կետում։ Տեղադրելով $w_\tau$-ի և $w_n$-ի այս արժեքները (1) հավասարումների մեջ, կստանանք*

$$\begin{aligned} F_\tau &= mw_\tau = m\frac{dv}{dt}, \\ F_n &= mw_n = m\frac{v^2}{\rho}, \\ F_b &= 0 \end{aligned} \qquad (1V)$$

*$\bar{F}$ ուժի մոդուլը և ուղղորդ կոսինուսները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով.*

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2},$$

$$\cos(\widehat{\tau^\circ, \bar{F}}) = \frac{F_\tau}{F}, \quad \cos(\widehat{n^\circ, \bar{F}}) = \frac{F_n}{F}, \quad \cos(\widehat{b^\circ, \bar{F}}) = 0.$$

**Խնդիր 2։** *m մասսա ունեցող կետը հանգիստ վիճակից սկսում է շարժվել R շառավիղ ունեցող շրջանագծով, հաստատուն $w_\tau$ տանգենցիալ արագացմամբ։ Որոշել այդ կետի վրա ազդող ուժի մեծությունը և ուղղությունն այն մոմենտում, երբ կետը գտնվում է իր սկզբնական դիրքից $S = R\sqrt{2}$ հեռավորության վրա (գծ. 1)։*

Լուծում: *Այստեղ նպատակահարմար է օգտվել կետի շարժման բնական հավասարումներից։ (IV) բանաձևի հիման վրա կարող ենք գրել, որ*

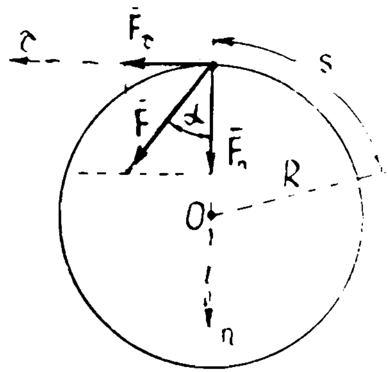
$$F_\tau = mw_\tau, \quad F_n = m\frac{v^2}{R}, \quad F_b = 0, \qquad (1)$$

*Հայտնի է, որ*

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \qquad (2)$$

*Նկատի ունենալով, որ կետի շարժումը տեղի է ունենում հաստատուն* $w_\tau$ *տանգենցիալ արագացմամբ, և միաժամանակ ըսկզբնական արագությունը հավասար է զրոյի, (2)-ից կունենանք*

$$v = w_\tau t, \quad S = \frac{w_\tau t^2}{2}, \qquad (3)$$




*Գծ. 1*

*Տեղադրելով* v*-ի արժեքը* (3)*-ից* (1)*-ի մեջ, կստանանք*

$$F_\tau = mw_\tau, \quad F_n = m\frac{w_\tau^2 t^2}{R},$$

*Հետևաբար,*

$$F = m\sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = mw_\tau\sqrt{1 + \frac{w_\tau^2 t^4}{R^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{F_n}{F}, \qquad (4)$$

*Այն մոմենտում, երբ* $S = R\sqrt{2}$, *կունենանք*

$$\frac{w_\tau t_1^2}{2} = R\sqrt{2},$$

*Այստեղից ստացվում է, որ*

$$\frac{w_\tau^2 t_1^4}{R^2} = 8, \qquad (5)$$

*Տեղադրելով այս արժեքը* (4)*-ի մեջ, կստանանք*

$$F = mw_\tau\sqrt{1+8} = 3mw_\tau, \quad \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

Պատ. $F = 3mw_\tau, \quad \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3},$

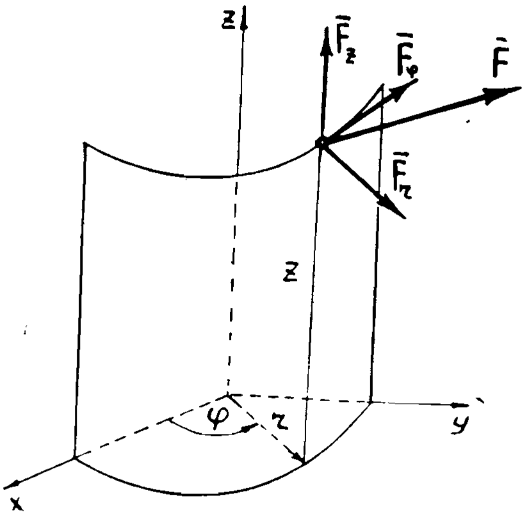
*Եթե կետի շարժման օրենքը տրված է գլանային կոորդինատներով՝*

$$r = f_1(t), \qquad \varphi = f_2(t), \qquad z = f_3(t),$$

*ապա այդ շարժումն առաջ բերող* $\overline{F}$ *ուժի* $F_r$, $F_\varphi$ *և* $F_z$ *պրոյեկցիաները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝*

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \quad F_\varphi = \frac{m}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}), \quad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

*որոնք ստացվում են, երբ (I) վեկտորական հավասարումը պրոյեկտում ենք բևեռային r շառավղի, նրան ուղղահայաց φ ուղղության և z առանցքի վրա (գծ. 2)։*




Գծ. 2

*Այդ դեպքում* $\overline{F}$ *ուժի մոդուլի և ուղղորդ կոսինուսների համար կունենանք*

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\varphi^2 + F_z^2},$$

$$\cos(\widehat{r, \overline{F}}) = \frac{F_r}{F},$$

$$\cos(\widehat{\varphi, \overline{F}}) = \frac{F_\varphi}{F},$$

$$\cos(\widehat{z, \overline{F}}) = \frac{F_z}{F}։$$

**3. Դինամիկայի առաջին խնդիրը ոչ ազատ նյութական կետի համար։** *Կետի շարժումը կոչվում է ոչ ազատ, եթե նրա վրա դրված են կապեր, որոնք ստիպում են նրան շարժվելու տված մակերևույթով կամ կոր գծով։*

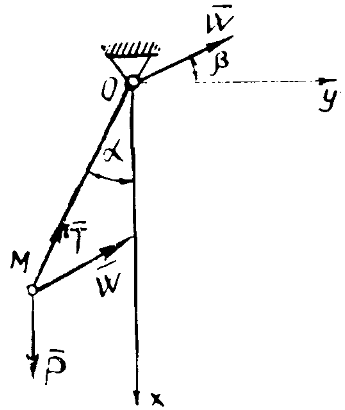
*Դինամիկայի հիմնական օրենքը ոչ ազատ կետի շարժման համար ընդունում է*

$$m\overline{W} = \overline{F} + \overline{N} \qquad \text{(V)}$$

*տեսքը, որտեղ* $\overline{F}$*-ը կետի վրա ազդող ակտիվ ուժն է, իսկ* $\overline{N}$*-ը կապի հակազդումը։ Սովորաբար, ոչ ազատ կետի համար գինա-*

միկայի առաջին խնդրի լուծումը բերվում է կապի հակազդման որոշմանը, երբ տրված են կետի մասսան, շարժման օրենքը և կետի վրա ազդող ակտիվ ուժը։ Եթե տրված է կապի հակազդումը, ապա կարելի է որոշել ակտիվ ուժը։

**Խնդիր 3։** *Օդանավը վեր բարձրանալիս կատարում է համընթաց ուղղագիծ շարժում $\overline{W}$ հաստատուն արագացմամբ, որը հորիզոնի հետ կազմում է $\beta$ անկյուն։ Որոշել այդ արագացման մեծությունը, եթե հայտնի է, որ օդանավի նկատմամբ անշարժ մաթեմատիկական ճոճանակի OM թելը շեղված է ուղղաձիգից $\alpha$ անկյան տակ։ Որոշել նաև OM թելի T լարումը, եթե ճոճանակի մասսան հավասար է m-ի (գծ. 3)։*




Գծ. 3

**Լուծում:** M նյութական կետի վրա ազդում են $\overline{P}$ ծանրության ուժը և թելի $\overline{T}$ հակազդումը։ Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն կունենանք

$$m\overline{W} = \overline{P} + \overline{T}\ ։$$

Պրոյեկտելով այս վեկտորական հավասարումը կոորդինատական x և y առանցքների վրա, կըստանանք

$$-mW\sin\beta = P - T\cos\alpha\ ,$$
$$mW\cos\beta = T\sin\alpha\ ։$$

Լուծելով այս երկու հավասարումների սիստեմը, կորոշենք W և T անհայտները։

Պատ. $W = \dfrac{g\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}, \quad T = \dfrac{mg\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$ ։

**4. Կետի դինամիկայի առաջին խնդրի լուծման մասին:** Կետի դինամիկայի առաջին խնդիրը լուծելիս, երբ պահանջվում է գտնել կետի վրա ազդող ակտիվ ուժը կամ կապի հակազդումը, նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

1) Նշել դիտարկվող կետը ժամանակի տվյալ մոմենտում։

2) Առանձնացնել այդ կետի վրա ազդող ակտիվ ուժերը։

*3) Կետը ազատել կապերից, կապերը փոխարինելով համապատասխան հակազդումներով։*

*4) Ընտրել կոորդինատական սիստեմը, եթե այն խնդրի պայմաններում տրված չէ։*

*5) Տված շարժման օրենքի համաձայն որոշել կետի արագացման պրոյեկցիաները։*

*6) Կետի դինամիկայի հիմնական հավասարումը պրոյեկտել կոորդինատական առանցքների վրա։*

*7) Ստացված հավասարումների մեջ տեղադրել արագացման պրոյեկցիաների արտահայտությունները և դրանցից որոշել ուժի պրոյեկցիաները։*

*8) Ուժի պրոյեկցիաների հիման վրա որոշել ուժի մեծությունը և ուղղությունը։*

## 5. Խ Ն Դ Ի Ր Ն Ե Ր

*Ստորև բերվում են դինամիկայի առաջին խնդրի վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումները։ Ի. Վ. Մեշչերսկու «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու» գրքից վերցված խնդիրների համարները դրված են փակագծերի մեջ։*

**Խնդիր 4։** *Կետը շարժվում է պտուտակագծով,*

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = bt \tag{1}$$

*օրենքով՝ երկու ուժերի ազդեցության տակ, որոնցից մեկը կետի կշիռն է, իսկ մյուսը՝ անհայտ* $\bar{F}$ *ուժը։ Գտնել* $\bar{F}$ *ուժի հորիզոնական* R *և ուղղաձիգ* Z *պրոյեկցիաները։*

**Լուծում:** *Կետի արագացման պրոյեկցիաները կլինեն՝*

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t, \qquad W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -a\sin t,$$

$$W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \text{ ։} \tag{2}$$

*Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն կունենանք*

$$m\bar{W} = \bar{F} + \bar{P},$$

*որտեղ* $P = mg$ *կետի կշիռն է։ Եթե պրոյեկտենք այս վեկտորական հավասարումը դեկարտյան* x, y, z *առանցքների վրա (z առանցքը ուղղենք դեպի վեր), կստանանք*

$$mW_x = F_x, \qquad mW_y = F_y, \qquad mW_z = F_z - P \text{ ։} \tag{3}$$

*(2) և (3)-ից հետևում է, որ*

$$F_x = -ma\cos t, \quad F_y = -ma\sin t, \quad F_z - mg = 0\text{։} \qquad (4)$$

*Օգտագործելով (1)-ը, (4)-ին կարելի է տալ հետևյալ տեսքը՝*

$$F_x = -mx, \quad F_y = -my, \quad F_z = Z = mg\text{։}$$

*$\bar{F}$ ուժի հորիզոնական $\bar{R}$ բաղադրիչի համար կունենանք*

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = m\sqrt{x^2 + y^2} = mr,$$

*որտեղ $\bar{r}$-ը պտտական շառավիղ վեկտորի պրոյեկցիան է (x y) հարթության վրա։*

Պատ. $R = mr$, $Z = mg$։

**Խնդիր 5։** m *մասսա ունեցող* M *կետը շարժվում է*

$$x = 3 + 5\sin \pi t, \quad y = 7\cos \pi t \qquad (1)$$

*օրենքով։ Գտնել այդ շարժումն առաջացնող ուժը։*

Լուծում: *Տված է* M *կետի շարժման օրենքը, պետք է գտնել ուժը։ Դրա համար նախ գտնենք կետի արագացման պրոյեկցիաները՝*

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -5\pi^2 \sin \pi t, \quad W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -7\pi^2 \cos \pi t\text{։}$$

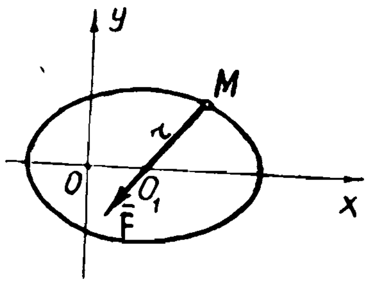
*Եթե անհայտ ուժի պրոյեկցիաները նշանակենք* $F_x$ *և* $F_y$, *ապա Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն կունենանք*

$$mW_x = F_x, \quad mW_y = F_y\text{։}$$

*Տեղադրելով* $W_x$, $W_y$*-ի արժեքները, կստանանք՝*

$$F_x = -m\pi^2 (5\sin \pi t) = -m\pi^2 (x-3),$$
$$F_y = -m\pi^2 (7\cos \pi t) = -m\pi^2 y\text{։} \qquad (2)$$

*$\bar{F}$ ուժի մոդուլը հավասար կլինի*




Գծ. 4

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\pi^2 \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = m\pi^2 r,$$

*որտեղ r-ը նյութական M կետի հեռավորությունն է (1) էլիպսի կենտրոնից (գծ. 4)։*

$\bar{F}$ *ուժի ուղղորդ կոսինուսները կլինեն՝*

$$\cos(F,\hat{}\,x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x-3}{r}, \quad \cos(F,\hat{}\,y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}. \qquad (3)$$

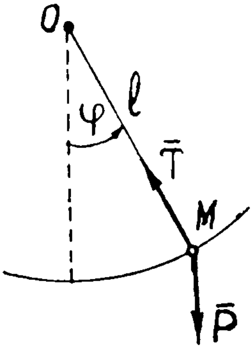
*(2) և (3)-ից հետևում է, որ* $\bar{F}$ *ուժը անցնում է էլիպսի կենտրոնով։*

Պ ա տ. $F = m\pi^2 r$ *և անցնում է էլիպսի* $O_1$ *կենտրոնով։*

18.5 **Խ ն դ ի ր 6(641)**։ *3 կԳ կշիռ ունեցող քարը ամրացված է 1 մ երկարություն ունեցող թելին և կատարում է շրջանային շարժում ուղղաձիգ հարթության վրա։ Որոշել քարի ամենափոքր ω անկյունային արագությունը, որի դեպքում առաջանում է թելի խզում, եթե թելի դիմադրությունը հավասար է 9 կԳ-ի։*

Լ ու ծ ու մ: *Քարը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Նրա վրա ազդում են իր* $\bar{P}$ *կշիռը և թելի* $\bar{T}$ *ճիգը (գծ. 5)։ Գրենք նյուտոնի երկրորդ օրենքը վեկտորական տեսքով՝*

$$m\bar{W} = \bar{P} + \bar{T}. \qquad (1)$$




Գծ. 5

*Եթե նկատի ունենանք, որ քարը կատարում է շրջանային շարժում հաստատուն ω անկյունային արագությամբ, ապա (1) հավասարումը պրոյեկտելով քարի հետագծի նորմալի ուղղության վրա, երբ OM թելն ունի ուղղաձիգ դիրք, կստանանք*

$$\frac{mV^2}{l} = T - P. \qquad (2)$$

*Քանի որ քարի արագությունը* $V = \omega l$, *ապա (2)-ից կունենանք*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \sqrt{\frac{T-P}{ml}}. \qquad (3)$$

*Մնում է (3)-ի մեջ տեղադրել* $T = 9$ կԳ, $P = 3$ կԳ, $m = \frac{P}{g}$ *և կատարել նշված գործողությունները։*

Պ ա տ. $\omega = 4{,}44$ 1/վրկ։

**Խ ն դ ի ր 7 (648)**։ *Տրամվայի վագոնի թափքը բեռի հետ* *միասին կշռում է* $Q_1=10$ տ, *սայլակը անիվների հետ միասին ունի* $Q_2=1$ տ *կշիռ։ Որոշել ռելսերի վրա վագոնի ամենամեծ և ամենափոքր ճնշումը ճանապարհի ուղղագիծ հորիզոնական մասում, եթե ընթացքի ժամանակ թափքը զսպանակների վրա կատարում է ուղղաձիգ տատանումներ* $x=2\sin 10t$ *օրենքով։*

Լուծում: *Տրամվայի վագոնի թափքը սայլակի հետ միասին ընդունենք որպես նյութական կետ։ Այդ կետի վրա ազդում են նրա* $\overline{Q}_1+\overline{Q}_2$ *սեփական կշիռը և ռելսերի* $\overline{N}$ *հակազդումը։ Վերջինս ուղղված է ուղղաձիգ դեպի վեր։*

*Եթե* ox *առանցքը ուղղենք ուղղաձիգ դեպի ներքև, ապա այդ կետի արագացման համար կունենանք*

$$W=\ddot{x}=-200\sin 10t\text{։} \tag{1}$$

*Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն կարող ենք գրել, որ*

$$mW=Q_1+Q_2-N, \tag{2}$$

*որտեղ* m-*ը կետի մասսան է՝*

$$m=\frac{Q_1}{g}=\frac{10}{980}=\frac{1}{98}\text{,} \tag{3}$$

*Տեղադրելով* W-*ի և* m-*ի արժեքները* (1)-*ից և* (3)-*ից* (2)-*ի մեջ, կստանանք*

$$-\frac{1}{98}\cdot 200\sin 10t=11-N\text{։}$$

*Այստեղից ստացվում է, որ*

$$N=11+\frac{1}{98}\cdot 200\sin 10t,$$

*հետևաբար,*

$$N_{max}=11+\frac{1}{98}\cdot 200=11+\frac{100}{49}=13{,}04 \text{ տ.}$$

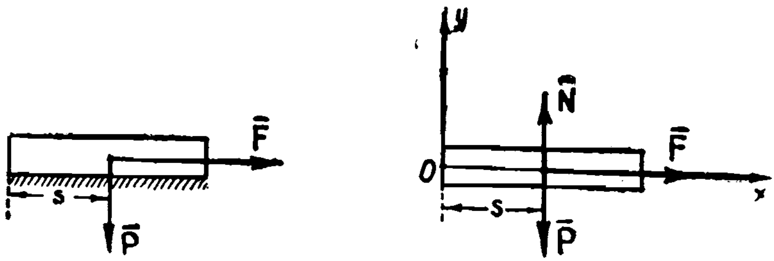
$$N_{min}=11-\frac{1}{98}\cdot 200=11-\frac{100}{49}=8{,}96 \text{ տ։}$$

**Պատ.** $N_{max}=13{,}04$ տ, $N_{min}=8{,}96$ տ։

**Խնդիր 8։** *20 Գ կշիռ ունեցող մարմինը գտնվում է ողորկ հորիզոնական մակերևույթի վրա և կատարում է հետադարձ համընթաց ուղղագիծ շարժում (գծ. 6)։ Մարմնի հեռավորությունը անշարժ* O *կետից որոշվում է* $s=0{,}1\sin\frac{\pi}{2}t$ *օրենքով,* որտեղ s-ը չափվում է մետրերով, իսկ t-ն՝ վայրկյաններով։ Որոշել մակերևույթի հակազդումը, մարմնի վրա ազդող հորիզոնական $\bar{F}$ ուժի և s հեռավորության միջև եղած կապը, ինչպես նաև այդ ուժի ամենամեծ արժեքը։

Լուծում: Կոորդինատական սիստեմի սկզբնակետը տեղադրենք O կետում, Ox առանցքն ուղղենք հորիզոնական ուղղությամբ դեպի աջ, իսկ Oy առանցքը՝ ուղղաձիգ դեպի վեր։ Հատակի ազդեցությունը փոխարինենք $\bar{N}$ հակազդումով (գծ. 6)։ Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն կունենանք

$$m\bar{W} = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N}\,։$$




*Գծ. 6*

Պրոյեկտելով այս հավասարումը կոորդինատական x և y առանցքների վրա, կստանանք

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x = F, \qquad (1)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = N - P\,։$$

Խնդրի տված պայմանների համաձայն ունենք

$$x = s, \qquad m = \frac{P}{g}, \qquad y = 0\,։$$

Հետևաբար,

$$\ddot{x} = \ddot{s} = -0{,}1\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}t, \qquad \ddot{y} = 0\,։$$

Տեղադրելով այս արժեքները (1)-ի մեջ, կստանանք

$$\frac{P}{g}\left(-\ 1\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}t\right) = F; \quad 0 = N - P\,։ \qquad (2)$$

Տված պայմանի համաձայն $s = 0,1 \sin \frac{\pi}{2} t$։ Դրա հետևանքով (2)-ի առաջին հավասարումից կունենանք

$$F = -\frac{P}{g}\frac{\pi^2}{4}s = -\frac{20}{9,8}\cdot\frac{\pi^2}{4}s = -5,03 \cdot s \text{ Գ։}$$

(2)-ի երկրորդ հավասարումից ստացվում է $N = P = 20$ Գ։

F ուժի ամենամեծ արժեքը կլինի այն մոմենտին, երբ մարմինը գտնվի O կետից ամենամեծ հեռավորության վրա, այսինքն՝ երբ լինի $\sin\frac{\pi}{2}t = -1$։ Այդ դեպքում կունենանք

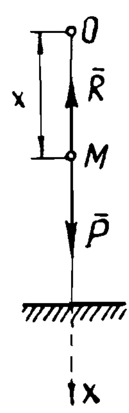
$$F_{max} = 0,1\frac{P}{g}\frac{\pi^2}{4} = 0,1\frac{20}{9,8}\frac{\pi^2}{4} = 0,503 \text{ Գ։}$$

Պ ա տ. $N=20$ Գ, $F=-5,03\,s$ Գ, $F_{max}=0,503$ Գ և ուղղված է դեպի O կետը։

**Խ ն դ ի ր 9։** 2 գ մասսա ունեցող M գնդիկը ծանրության ուժի ազդեցության տակ ընկնում է ցած։ Նրա վրա ազդում է նաև օդի դիմադրության ուժը։ Գնդիկը շարժվում է

$$x = 490\,t - 245\,(2 - e^{-2t})$$

օրենքով ($x$-ը չափվում է սանտիմետրերով, իսկ $t$-ն՝ վայրկյաններով)։ Ox առանցքը ուղղված է ուղղաձիգ դեպի ցած։ Որոշել գնդիկի վրա ազդող օդի դիմադրության R ուժը դիներով, կախված նրա v արագությունից, ընդունելով $g=980$ սմ/վրկ²։



Գծ. 7

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ Գնդիկը կատարում է համընթաց շարժում։ Հետևաբար, գնդիկը կարելի է դիտել որպես նյութական կետ։ Այդ կետի վրա ազդում են հակադիր ուղղություններ ունեցող երկու ուժեր՝ ծանրության $\bar P$ և դիմադրության $\bar R$ ուժերը (գծ. 7)։

Եթե կետի ընթացիկ կոորդինատը նշանակենք x, իսկ կշիռը՝ P, ապա կետի դինամիկայի ($\bar V$) հիմնական հավասարումը պրոյեկտելով Ox առանցքի վրա, կունենանք

$$m\ddot{x} = F_x = P - R\text{։}$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$R = P - m\ddot{x}\text{։} \qquad (1)$$

Կետի արագության և արագացման պրոյեկցիաները Ox առանցքի վրա կլինեն՝

$$\dot{x} = 490\,(1 - e^{-2t}), \tag{2}$$

$$\ddot{x} = 980\, e^{-2t} \,: \tag{3}$$

Եթե (1) հավասարման մեջ տեղադրենք $P = mg = 1960$ դին և $\ddot{x}$-ի արժեքը (3)-ից, կստանանք

$$R = 1960\,(1 - e^{-2t}): \qquad (4$$

Նկատի ունենալով, որ

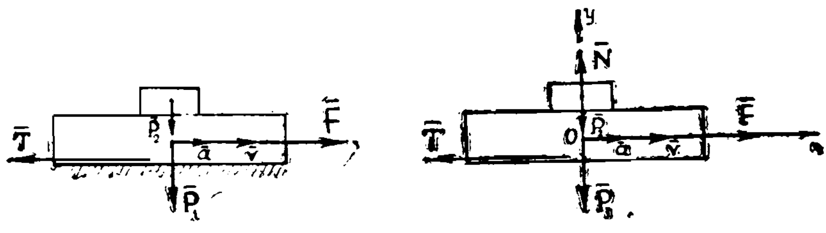
$$v = 490\,(1 - e^{-2t}),$$

(4)-ից կստանանք $R = 4v$ դին։

Պատ. $R = 4v$ դին։

**Խնդիր 10 (654)**։ Ռանդող հաստոցի սեղանը կշռում է $P_1 = 700$ կԳ, իսկ մշակվող առարկան՝ $P_2 = 300$ կԳ, սեղանի ընթացքի արագությունը $v = 0{,}5$ մ/վրկ, թափառքի ժամանակը $t = 0{,}5$ վրկ։ Որոշել սեղանի թափառքի և հետագա հավասարաչափ շարժման համար անհրաժեշտ ուժը, ընդունելով թափառքի ժամանակ սեղանի շարժումը հավասարաչափ արագացող, եթե թափառքի ժամանակ շփման գործակիցը՝ $f_1 = 0{,}14$, իսկ հավասարաչափ շարժման ժամանակ՝ $f_2 = 0{,}07$։

Լուծում: Հաստոցի սեղանը (գծ. 8) և նրա վրա ամրացված մշակվող առարկան ոչ ազատ մարմիններ են և կատարում




Գծ. 8

են համընթաց շարժում։ Կապերի նորմալ հակազդումը նշանակենք $\bar{N}$-ով, իսկ շփման ուժը՝ $\bar{T}$-ով։ Այստեղ շփման $\bar{T}$ ուժը ունի $\bar{V}$ հարաբերական արագության հակադիր ուղղությունը (գծ. 8), իսկ նրա մեծությունը հավասար է $fN$-ի։

Այսպիսով, շարժվող սիստեմի վրա ազդում են հինգ ուժեր՝ սեղանի $\bar{P}_1$ և մշակվող առարկայի $\bar{P}_2$ կշիռները, սեղանը շարժող

$\bar{F}$ *ուժը,* $\bar{N}$ *հակազդումը և շփման* $\bar{T}$ *ուժը։ Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն կունենանք*

$$m\bar{W} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{F} + \bar{N} + \bar{T}\ ։ \qquad (1)$$

*Եթե դեկարտյան կոորդինատական առանցքները ընտրենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագիր 8-ում, ապա (1)-ը պրոյեկտելով* x *և* y *առանցքների վրա, կստանանք*

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F - T, \\ m\ddot{y} &= N - P_1 - P_2\ ։ \end{aligned} \qquad (2)$$

*Խնդրի պայմանների համաձայն*

$$m = \frac{P_1 + P_2}{g}, \quad \ddot{x} = w, \quad \ddot{y} = 0\ ։$$

*Այդ դեպքում (2)-ից կունենանք*

$$N = P_1 + P_2\ ։$$

*Հետևաբար,*

$$\begin{aligned} T &= f_1 (P_1 + P_2), \\ F = m\ddot{x} + T &= \frac{P_1 + P_2}{g} \cdot a + f_1 (P_1 + P_2)\ ։ \end{aligned} \qquad (3)$$

*Քանի որ թափառքի ժամանակամիջոցում* $(0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$ վրկ) *շարժումը հավասարաչափ արագացող է, ուստի*

$$a = \frac{v}{t} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1 \ \text{մ/վրկ}^2 ։$$

*Տեղադրելով* w*-ի արժեքը (3)-ի մեջ, կստանանք*

$$F_1 = \frac{700 + 300}{9{,}8} \cdot 1 + 0{,}14\,(700 + 300) = 242 \ \text{կԳ}։$$

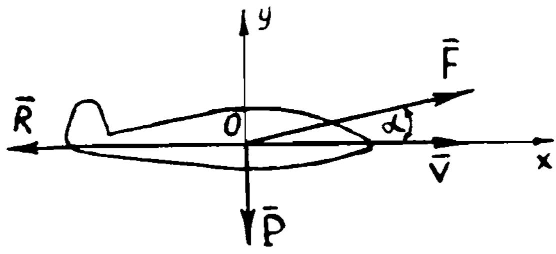
*Երբ* $t > 0{,}5$ վրկ, *սեղանը կատարում է հավասարաչափ ուղղագիծ շարժում, հետևաբար,* a *արագացումը կլինի զրո և (3)-ից կունենանք*

$$F_2 = f_2 (P_1 + P_2) = 0{,}07\,(700 + 300) = 70 \ \text{կԳ}։$$

Պ ա տ. $F_1 = 242$ կԳ, $F_2 = 70$ կԳ ։

**Խ ն դ ի ր 11 (659)**։ *2000* կԳ *կշիռ ունեցող ինքնաթիռը թռչում է հորիզոնական ուղղությամբ 5* մ/վրկ² *արագացումով և ունի տվյալ մոմենտում 200* մ/վրկ *արագություն։ Օդի դիմադրությունը համեմատական է արագության քառակուսուն և 1* մ/վրկ *արագության դեպքում հավասար է 0,05 կԳ: Ընդունելով, որ դիմադրության ուժը ունի արագության հակադիր ուղղությունը, որոշել պտուտակի քաշող ուժը, եթե նա կազմում է թռիչքի ուղղության հետ 10° անկյուն:*

Լուծում: *Ինքնաթիռը շարժվում է համընթաց: Հետևաբար, այն կարելի է ընդունել որպես նյութական կետ: Ինքնաթիռի վրա ազդող* $\overline{P}$, $\overline{R}$, $\overline{F}$ *ուժերը կիրառենք նրա ծանրության* O *կենտրոնում (գծ. 9): Կոորդինատական սիստեմի սկզբնակետը տեղավորենք* O *կետում,* x *առանցքը ուղղենք հորիզոնական ուղ-*




*Գծ. 9*

*ղությամբ ուղղված շարժման կողմը, իսկ* oy-*ը՝ ուղղաձիգ դեպի վեր: Քանի որ ինքնաթիռը շարժվում է* ox *առանցքի ուղղությամբ, ապա Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն կունենանք*

$$m\ddot{x} = F\cos\alpha - R$$

*կամ*

$$\frac{P}{g} \cdot a = F\cos 10^\circ - R \quad (1)$$

*Այստեղ* P-*ն ինքնաթիռի կշիռն է և խնդրի տվյալների համաձայն հավասար է 2000* կԳ, a-*ն ինքնաթիռի արագացումն է և հավասար է 5* մ/վրկ$^2$, F-*ը պտուտակի ձգող անհայտ ուժն է, իսկ* R-*ը՝ օդի դիմադրության ուժը: Խնդրի պայմանների համաձայն՝*

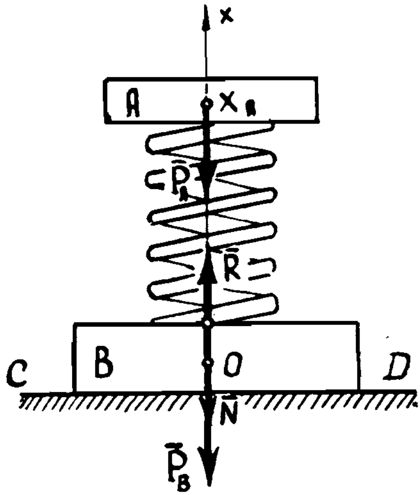
$$R = kv^2, \quad (2)$$

*որտեղ* k-*ն համեմատականության գործակիցն է: Տված պայմանի համաձայն* R=0,05 կԳ, *երբ* v=1 մ/վրկ: *Տեղադրելով այս արժեքը (2)-ի մեջ, կստանանք* R=0,05 $v^2$: *Այժմ մնում է* R-*ի այս արժեքը տեղադրել (1)-ի մեջ և այն լուծել* F-*ի նկատմամբ: Դրանից կստացվի*

$$F = \frac{\frac{P}{g}a \quad 0,05\,v^2}{\cos 10^\circ} = \frac{\frac{2000}{9,8} \cdot 5 + 0,05 \cdot 200^2}{0,985} = 3080 \text{կԳ}։$$

Պ ա տ. $F = 3080$ կԳ։

**Խ ն դ ի ր 12 (661)**։ $P_A=20$ կԳ *և* $P_B=40$ կԳ *կշիռներով* A *և* B *բեռները միացված են իրար զսպանակով, գծագիր 10-ում ցույց տրված ձևով։* A *բեռը կատարում է 1* սմ *ամպլիտուդով և 0,25* վրկ *պարբերությամբ ազատ տատանումներ ուղղաձիգ ուղղով։ Հաշվել* CD *հենարանային մակերևույթի վրա* A *և* B *բեռների ամենամեծ և ամենափոքր ճնշումները (գծ. 10)։*




Գծ. 10

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ A *բեռը կատարում է ներդաշնակ տատանումներ։ Եթե* OX *կոորդինատական առանցքը ընտրենք գծ. 10-ում ցույց տրված ձևով, ապա* A *բեռի շարժման օրենքը կլինի*

$$x_A = x_0 + a \sin(kt + \varepsilon), \qquad (1)$$

*որտեղ* $x_0$*-ն հաստատուն մեծություն է,* a*-ն՝ տատանման ամպլիտուդը,* k*-ն՝ անկյունային հաճախականությունը, իսկ* $\varepsilon$*-ը՝ սկզբնական փուլը։ Խնդրի պայմանների համաձայն* $a=1$ սմ, *իսկ պարբերությունը՝* $T=0,25$ վրկ։ *Քանի՛որ*

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0,25,$$

*ապա*

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,25} = 8\pi\ ։$$

*Տեղադրելով* a*-ի և* k*-ի արժեքները (1)-ի մեջ, կստանանք*

$$x_A = x_0 + \sin(8\pi + \varepsilon)\ ։$$

*Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն ունենք*

$$m_A \frac{d^2 x_A}{dt^2} = N - P_A$$

կամ

$$P_A - \frac{P_A}{g}(8\pi)^2 \sin(8\pi t + \varepsilon) = N, \tag{2}$$

որտեղ N-ը A բեռի տատանումից առաջացած CD հենարանային մակերևույթի հակազդումն է։

Այսպիսով, CD հենարանի վրա ազդում են $\bar{P}_B$ և $\bar{N}$ ուժերը, որոնք ուղղված են x առանցքով։ Եթե դրանց համազորը նշանակենք $\bar{R}$-ով, կունենանք

$$R = P_B + N \tag{3}$$

Տեղադրելով (3)-ի մեջ $P_B$ և N-ի արժեքները, կստանանք

$$R = 60 - \frac{20}{981}(8\pi)^2 \sin(8\pi t + \varepsilon) \tag{4}$$

(4)-ից հետևում է, որ

$$R_{max} = 60 + 20 \cdot \frac{(8\pi)^2}{981} = 72{,}8 \text{ կԳ},$$

$$R_{min} = 60 - 20\frac{(8\pi)^2}{981} = 47{,}2 \text{ կԳ}։$$

Պատ. $R_{max} = 72{,}8$ կԳ, $R_{min} = 47{,}2$ կԳ։

**Խնդիր 13 (664)**։ *Ինչի՞ է հավասար 1 կԳ կշիռը լուսնի վրա, եթե նրա ձգողության ուժի արագացումը* $g=1{,}7$ մ/վրկ²։ *Ինչի՞ է հավասար 1 կԳ կշիռը արեգակի վրա, եթե նրա վրա ձգողության ուժի արագացումը հավասար է* $g=270$ մ/վրկ²։

Լուծում: *Ձգողության ուժի արագացումը երկրի վրա նշանակենք g, լուսնի վրա՝ $g_1$, իսկ արեգակի վրա՝ $g_2$։ Դիցուք ունենք մի մարմին, որը երկրի վրա կշռում է P կԳ։ Այդ դեպքում Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն կարող ենք գրել, որ*

$$mg = P, \tag{1}$$

*որտեղ m-ը մարմնի մասսան է։ Եթե լուսնի վրա այդ մարմնի կշիռը նշանակենք $P_1$, ապա (1)-ի փոխարեն կունենանք*

$$mg_1 = P_1 \tag{2}$$

*(1) և (2)-ից արտաքսելով m մասսան, կստանանք*

$$P_1 = P\frac{g_1}{g}, \tag{3}$$

*Եթե ընդունենք P=1 կԳ և միաժամանակ տեղադրենք*

$g=9{,}8$ մ/վրկ² և $g_1=1{,}7$ մ/վրկ² *արժեքները, ապա (3)-ից կըստանանք*

$$P_1 = 1 \cdot \frac{1{,}7}{9{,}8} = 0{,}1735 \text{ կԳ։}$$

*Նույն ձևով արեգակի համար կունենանք*

$$P_2 = P\,\frac{g_2}{g}, \tag{4}$$

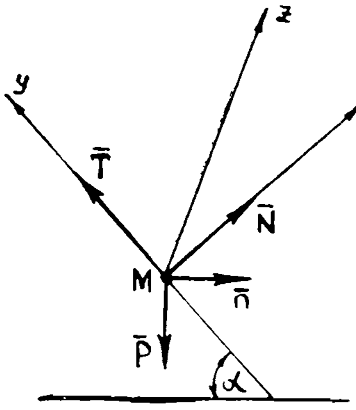
*որտեղ* $P_2$*-ով նշանակված է նույն մարմնի կշիռը արեգակի վրա։ Տեղադրելով* $P=1$ կԳ, $g=9{,}8$ մ/վրկ² *և* $g_2=270$ մ/վրկ² *արժեքները (4)-ի մեջ, կստանանք*

$$P_2 = 1 \cdot \frac{270}{9{,}8} = 27{,}55 \text{ կԳ։}$$

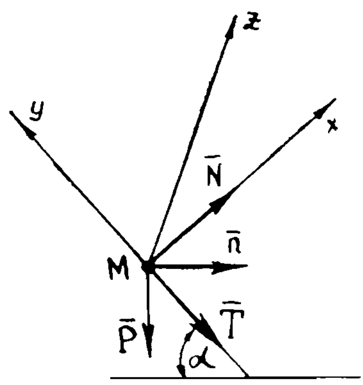
Պատ. *Լուսնի վրա՝ 0,1735* կԳ։ *Արեգակի վրա՝ 27,55* կԳ։

Խնդիր **14 (668)**։ *Հեծանվային խճուղին իր կորագիծ մասում ունի թեքուղիներ, որոնց պրոֆիլները ընդլայնական կտրվածքներում ներկայացնում են ուղիղներ՝ թեքված հորիզոնի նկատմամբ այնպես, որ կորագիծ մասերում հեծանվուղու արտաքին եզրը բարձր է ներքինից։ Ինչպիսի՞ ամենափոքր և ինչպիսի՞ ամենամեծ արագությամբ կարելի է ընթանալ թեքուղով, որն ունի* $R$ *շառավիղ և հորիզոնի նկատմամբ թեքության* $\alpha$ *անկյուն, եթե ռետինե դողերի և ճանուղու միջին շփման գործակիցը հավասար է* $f$*-ի։*

Լուծում։ Առաջին եղանակ։ *Հեծանիվը ընդունենք որպես նյութական կետ, որի վրա դրված է ոչ իդեալական կապ։ Վե-*




*Գծ. 11*




*Գծ. 12*

բացնենք կապը, այն փոխարինելով համապատասխան հակազդումով: Կետի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ հեծանվի $\overline{P}$ կշիռը, ժեքուղու $\overline{N}$ նորմալ հակազդումը և շփման $\overline{T}$ ուժը:

Տանենք դեկարտյան կոորդինատական սիստեմ հետևյալ ձևով: Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք շարժվող կետի կամավոր $M$ դիրքում, $z$ առանցքն ուղղենք կետի հետագծի շոշափողով, $x$ առանցքը՝ հեծանվուղու նորմալով, դեպի նրա գոգավորության կողմը, իսկ $y$ առանցքը՝ ուղղահայաց $x$ և $z$ առանցքներին (գծ. 11, 12):

Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն կունենանք

$$m\overline{W} = \overline{P} + \overline{N} + \overline{T}. \tag{1}$$

Այստեղ անհրաժեշտ է դիտարկել երկու դեպք՝ ա) երբ շփման $\overline{T}$ ուժը ուղղված է $y$ առանցքով և, հետևաբար, չի թույլ տալիս, որ կետը սահի հեծանվուղուց ցած, բ) երբ շփման $\overline{T}$ ուժը ուղղված է $y$ առանցքի հակառակ ուղղությամբ և չի թույլ տալիս, որ կետը դուրս թռչի հեծանվուղուց դեպի վեր:

Քանի որ $M$ կետի հետագիծը հարթ կոր գիծ է, գտնվում է (հորիզոնական հարթության մեջ, և նրա արագությունը հաստատուն է, ապա $M$ կետը կունենա արագացման միայն նորմալ բաղադրիչ՝ ուղղված հետագծի նորմալով (գծ. 11): Այդ նորմալ արագացման մեծությունը հավասար կլինի

$$w_n = \frac{v^2}{R}, \tag{2}$$

Եթե պրոյեկտենք (1) վեկտորական հավասարումը $x$ և $y$ կոորդինատական առանցքների վրա, ապա կստանանք առաջին դեպքի համար

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R}\sin\alpha &= N - P\cos\alpha, \\ -\frac{mv^2}{R}\cos\alpha &= T - P\sin\alpha \end{aligned} \tag{3}$$

և երկրորդ դեպքի համար՝

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R}\sin\alpha &= N - P\cos\alpha, \\ -\frac{mv^2}{R}\cos\alpha &= -T - P\sin\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

*Երկու դեպքում էլ շփման ուժի ամենամեծ արժեքը կորոշվի*

$$T = fN \tag{5}$$

*Կուլոնի բանաձևով։*

*Տեղադրելով* T-*ի այս արժեքը (3) և (4) հավասարումների համակարգի մեջ և արտաքսելով* N-*ը, կստանանք*

*ա) դեպքում՝*

$$f\left(g\cos\alpha+\frac{v^2}{R}\sin\alpha\right)=g\sin\alpha-\frac{v^2}{R}\cos\alpha\,, \tag{6}$$

*բ) դեպքում՝*

$$f\left(g\cos\alpha+\frac{v^2}{R}\sin\alpha\right)=\frac{v^2}{R}\cos\alpha-g\sin\alpha։ \tag{7}$$

*Լուծելով (6) և (7) հավասարումները* v-*ի նկատմամբ, կորոշենք արագության կրիտիկական արժեքները՝*

$$v_{min}=\sqrt{gR\frac{\operatorname{tg}\alpha-f}{1+\operatorname{tg}\alpha}},$$

$$v_{max}=\sqrt{gR\frac{\operatorname{tg}\alpha+f}{1-\operatorname{tg}\alpha}},$$

Երկրորդ եղանակ։ *Հեծանվորդի՝ ճանուղուց ցած չսահելու կամ դեպի վեր չբարձրանալու պայմանը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$|\overline{T}|\leqslant fN։ \tag{8}$$

*Վեկտորական (1)հավասարումը, երբ* $\overline{T}$ *ունի կամայական արժեք, պրոյեկտենք* x *և* y *կոորդինատական առանցքների վրա։ Կստանանք*

$$|\overline{T}|=\left|P\sin\alpha-\frac{mv^2}{R}\cos\alpha\right|, \tag{9}$$

$$N=P\cos\alpha+\frac{mv^2}{R}\sin\alpha։ \tag{10}$$

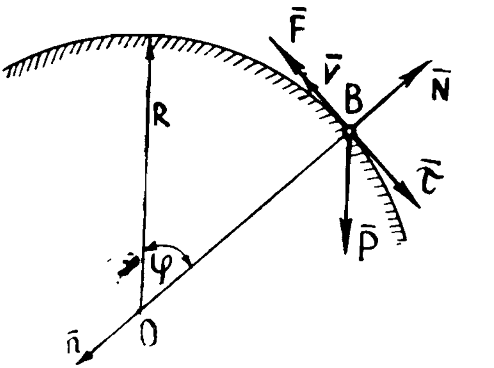
*Տեղադրելով* $|\overline{T}|$-*ի և* N-*ի արժեքները (9)-ից և (10)-ից (8)-ի մեջ, կստանանք*

$$\left|P\sin\alpha-\frac{mv^2}{R}\cos\alpha\right|\leqslant f\left(P\cos\alpha+\frac{mv^2}{R}\sin\alpha\right)։ \tag{11}$$

*Լուծելով (11) անհավասարությունը* v*-ի նկատմամբ, երբ* v*-ն ստանում է իր կրիտիկական արժեքները, կստանանք* $v_{min}$*-ի և* $v_{max}$*-ի արժեքները։*

**Պատ.** $v_{min} = \sqrt{gR\frac{tg\,\alpha - f}{1 + tg\,\alpha}}$, $v_{max} = \sqrt{gR\frac{tg\,\alpha + f}{1 - tg\,\alpha}}$։

**Խնդիր 15։** P *կշիռ ունեցող մոտոցիկլը շարժվում է մի ճանապարհով, որի պրոֆիլը իրենից ներկայացնում է* R *շառավիղ ունեցող շրջանագծի աղեղ (գծ. 13)։ Որոշել մոտոցիկլի նորմալ հակազդումը ճանապարհի կամայական* B *կետում, եթե մոտոցիկլի շարժման արագությունն է* v, *իսկ* B *կետի դիրքը որոշվում է ուղղաձիգի հետ նրա շառավղի կազմած* φ *անկյունով։*




*Գծ. 13*

Լուծում: *Մոտոցիկլը դիտարկենք որպես նյութական կետ։ Վերացնենք կապը և այն փոխարինենք* $\bar{N}$ *հակազդումով։ Կետի վրա ազդում են երկու ակտիվ ուժեր՝ մոտոցիկլի* $\bar{P}$ *կշիռը և շոշափողով ուղղված քարշող* $\bar{F}$ *ուժը։ Կետի դինամիկայի հիմնական օրենքի համաձայն*

$$m\bar{W} = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N}\ ։ \qquad (1)$$

*Քանի որ շարժման հետագիծը հայտնի է, ապա հարմար է օգտվել կետի շարժման տրման բնական եղանակից։ Կապի* $\bar{N}$ *անհայտ հակազդումը ուղղված կլինի նորմալով։ Դրա համար էլ (1) վեկտորական հավասարումը պրոյեկտենք բնական եռանիստի գլխավոր նորմալի ուղղության վրա։ Կստանանք*

$$mw_n = P\cos\varphi - N$$

*կամ*

$$\frac{P}{g}\,\frac{v^2}{R} = P\cos\varphi - N\ ։$$

*Այստեղից ստացվում է, որ*

$$N = P\left(\cos\varphi - \frac{v^2}{gR}\right)\ ։$$

Նկատենք, որ եթե

$$\frac{v^2}{gR} > \cos\varphi,$$

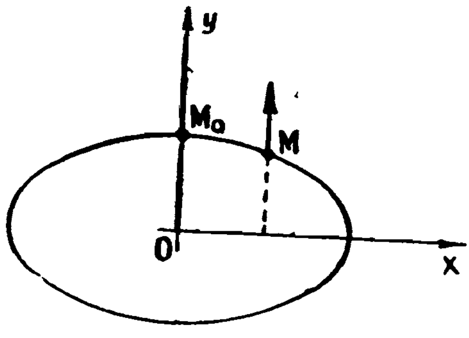
ապա հակազդումը ստացվում է բացասական, այսինքն՝ կապը պետք է ձգի մոտոցիկլին, որպեսզի նա չպոկվի ճանապարհից։ Բայց քանի որ իրականում կապի հակազդումը չի կարող բացասական լինել, ապա մոտոցիկլը կպոկվի ճանապարհից այն պահին, երբ հակազդումը դառնա զրո։ Տված v-ի և R-ի դեպքում անջատումը տեղի կունենա այն կետում, որի դիրքը որոշվում է

$$\cos\varphi_0 = \frac{v^2}{gR}$$

պայմանով։

Պատ. $N = P\left(\cos\varphi - \frac{v^2}{gR}\right)$։

**Խնդիր 16 (672)**։ m մասսա ունեցող կետը շարժվում է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսով։ Կետի արագացումը զուգահեռ է y առանցքին։ $t=0$ մոմենտում կետի կոորդինատները եղել են $x=0$, $y=b$, իսկ սկզբնական արագությունը՝ $v_0$։ Որոշել այն ուժը, որը ազդում է կետի վրա նրա հետագծի յուրաքանչյուր կետում (գծ.14)։




Գծ. 14

Լուծում։ Խնդրի պայմանի համաձայն կետի արագացումը զուգահեռ է Oy առանցքին, հետևաբար, նրա պրոյեկցիան Ox առանցքի վրա կլինի զրո, այսինքն՝

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad (1)$$

Ինտեգրելով այս հավասարումը, կստանանք

$$x = c_1t + c_2, \qquad (2)$$

որտեղ $c_1$ և $c_2$-ը ինտեգրման հաստատուններն են։

Նախնական պայմանների համաձայն, երբ $t=0$, ունենք

$$x = 0, \qquad \dot{x} = v_o \tag{3}$$

Տեղադրելով (3)-ը (2)-ի և նրա ածանցյալի արտահայտության մեջ, կորոշենք $c_1$ և $c_2$ հաստատունները՝

$$c_1 = v_o, \quad c_2 = 0:$$

Այդ դեպքում (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x = v_c t \tag{4}$$

Շարժվող կետի արագացման մեծությունը որոշելու համար (4)-ից x-ի արժեքը տեղադրենք հետագծի հավասարման մեջ, կստանանք

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2} \tag{5}$$

Ածանցենք (5) հավասարումը երկու անգամ ըստ t-ի, կստանանք

$$\ddot{y} = -\frac{b^4 v_0^2}{a^2 y^3} \tag{6}$$

Եթե գրենք կետի դինամիկայի հավասարումը վեկտորական տեսքով և այն պրոյեկտենք դեկարտյան x, y կոորդինատական առանցքների վրա և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ (1)-ի հետևանքով $F_x=0$, կունենանք

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \tag{7}$$

Տեղադրելով $\ddot{y}$-ի արժեքը (6)-ից (7)-ի մեջ, կստանանք $F_y$-ի արտահայտությունը:

Պատ. $F_y = -\dfrac{m v_0^2 b^4}{a^2 y^3}$:

**Խնդիր 17:** $P=3{,}27$ կԳ կշիռ ունեցող B մարմինը իջնում է ցած ոչ ողորկ թեք հարթությամբ

$$l = 3\ln(1 - t_o + t) \tag{1}$$

օրենքով, որտեղ $l$-ը չափվում է մետրերով, t-ն՝ վայրկյաններով, իսկ $t_o$-ն մարմնի սկզբնական շարժման մոմենտն է: Որոշել AB պարանի լարումը, եթե $\alpha = 60°$, շփման գործակիցը՝ $f = 0{,}1$ (գծ. 15ա):

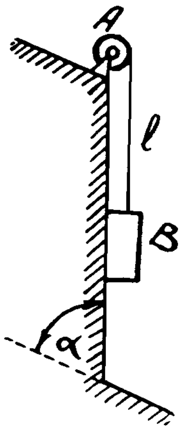
Լուծում: B մարմինը կարելի է դիտել որպես նյութական կետ, քանի որ նա կատարում է համընթաց շարժում։ Կետի վրա ազդող ակտիվ ուժը կլինի մարմնի P կշիռը։ Ազատենք B մարմինը կապերից։ Այստեղ կապերը կլինեն ոչ ողորկ թեք հարթությունը և AB պարանը։ Ոչ ողորկ հարթության հակազդումը կազմված կլինի երկու բաղադրիչներից՝ $\bar{N}$ նորմալ հակազդումից և $\bar{F}$ սահքի շփման ուժից։ $\bar{F}$-ը ուղղված կլինի պարանով (գծ. 15բ)։

Ընտրենք կոորդինատական սիստեմը այնպես, ինչպես նշված է 15ա և 15բ գծագրերում։

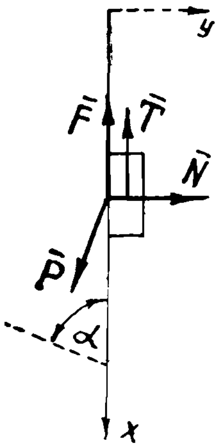
Կետի տված (1) շարժման օրենքի համաձայն արագացման պրոյեկցիաները կլինեն

$$w_x = \ddot{x} = -\frac{3}{(1-t_0+t)^2},$$

$$w_y = 0 \quad (2)$$




Գծ. 15ա




Գծ. 15բ

Գրենք կետի դինամիկայի հիմնական հավասարումը՝

$$m\bar{W} = \bar{F} + \bar{N} + \bar{T}\,։$$

Պրոյեկտելով այս վեկտորական հավասարումը դեկարտյան կոորդինատական x և y առանցքների վրա, կստանանք

$$mw_x = P\sin\alpha - T - F, \quad (3)$$
$$0 = -P\cos\alpha + N\,։$$

Նկատի ունենալով, որ $F = fN$, (3)-ի երկրորդ հավասարումից կարելի է ստանալ, որ $F = fP\cos\alpha$։ Տեղադրելով F-ի և $w_x$-ի արժեքները (2)-ից (3)-ի առաջին հավասարման մեջ, կըստանանք

$$-\frac{3P}{g(1-t_0+t)^2} = P(\sin\alpha - f\cos\alpha) - T\,։$$

Լուծենք այս հավասարումը T-ի նկատմամբ՝

$$T = P(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \frac{3P}{g(1-t_0+t)^2} = \Big[\ 2{,}67 +$$

$$+\frac{1}{(1-t_0+t)^2}\Bigg]\ \text{կԳ} ,$$

$$\text{Պատ.}\quad T=\left[\,2{,}67+\frac{1}{(t-t_0+t)^2}\right]\ \text{կԳ} ,$$

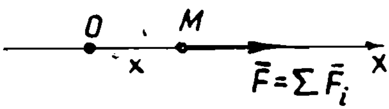
## § 3. ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

(Ուղղագիծ շարժում)

**1. Կետի ուղղագիծ շարժումը:** *Նյութական կետի ուղղագիծ շարժման անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է, որ կետի վրա ազդող ուժն ունենա հաստատուն ուղղություն և սկզբնական արագությունը ուղղված լինի այդ ուժով։*

**2. Կետի ուղղագիծ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը:** *Դիտարկենք M ազատ նյութական կետը, որը կատարում է ուղղագիծ շարժում նրա վրա կիրառված $\bar{F}=\sum \bar{F}_i$ ուժերի ազդեցության տակ։ Եթե M կետի հետագիծը ընդունենք որպես OX առանցք, ապա նրա դիրքը կորոշվի x կոորդինատով (գծ. 16)։ Այդ կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x , \tag{I}$$



Գծ. 10

*(I)-ը կոչվում է ազատ նյութական կետի ուղղագիծ շարժման դիֆերենցիալ հավասարում։ Այն ստացվում է § 1-ի (III)-ից, եթե նրանում ընդունենք $y=z=0$։*

*Այս դեպքում դինամիկայի հիմնական խնդրի լուծումը բերվում է (I) հավասարումից կետի շարժման օրենքի որոշմանը, երբ տված է կետի վրա ազդող ուժը։ Դրա համար պետք է ինտեգրել (I) դիֆերենցիալ հավասարումը։*

*Ընդհանուր դեպքում (I) հավասարման աջ մասում գտնվող ուժը կարող է կախված լինել t ժամանակից, կետի x կոորդինատից և $v_x=\frac{dx}{dt}$ արագությունից։ Հետևաբար, ընդհանուր դեպքում, (I) հավասարումը իրենից ներկայացնում է*

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right) \tag{II}$$

տեսքի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում, որը ընդհանուր դեպքում հնարավոր չէ ինտեգրել վերջավոր տեսքով։ Այն կարելի է ինտեգրել միայն մասնավոր դեպքերում, հատկապես, երբ ուժը կախված է միայն մեկ փոփոխականից։ Եթե հաջողվի որևէ ձևով ինտեգրել (II) դիֆերենցիալ հավասարումը, ապա նրա ընդհանուր լուծման մեջ կմասնակցեն ինտեգրման երկու հաստատուններ։ (II)-ի ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x = f(t, c_1, c_2)\,։ \qquad (III)$$

Ամեն մի կոնկրետ խնդրի լուծման ժամանակ պետք է որոշել ինտեգրման $c_1$, $c_2$ հաստատունները։ Դրանց որոշման համար խնդրում պետք է տված լինեն լրացուցիչ տվյալներ, որոնք կոչվում են շարժման նախնական պայմաններ։ Ինչպես հայտնի է, նյութական կետի շարժման նախնական պայմանները որոշում են կետի դիրքը և արագությունը որևէ ֆիքսված ժամանակամիջոցում։

Եթե սկզբնական պայմանների միջոցով որոշենք ինտեգրըման $c_1$, $c_2$ հաստատունները և դրանց արժեքները տեղադրենք (III)-ի մեջ, ապա կստանանք կետի շարժման օրենքը՝

$$x = f_1(t, x_0, v_0)\,։ \qquad (IV)$$

**3. Կետի ուղղագիծ շարժման դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրման մի քանի դեպքեր:** Եթե կետի վրա կիրառված ուժն ունի հաստատուն մեծություն կամ կախված է միայն մի փոփոխականից, ապա այդ կետի ուղղագիծ շարժման դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրումը բերվում է կվադրատուրայի։ Հատուկ հետաքրքրություն են ներկայացնում հետևյալ չորս դեպքերը.

ա) ուժը ունի հաստատուն մեծություն (օրինակ, ծանրության ուժը),

բ) ուժը կախված է միայն $t$ ժամանակից (օրինակ, պարբերաբար փոփոխվող ուժերը),

գ) ուժը կախված է միայն կետի դիրքից (օրինակ, ձգող և վանող ուժերը, զսպանակի առաձգական ուժը),

դ) ուժը կախված է միայն կետի արագությունից (օրինակ, կետի շարժման դիմադրության ուժերը)։

Վերոհիշյալ դեպքերը պարզաբանելու համար լուծենք մի քանի խնդիրներ։

**Խ ն դ ի ր 18։** Կետը ցած է ընկնում ոչ շատ մեծ բարձրությունից (համեմատած երկրագնդի շառավղի հետ) $v_0$ սկզբնական *արագությամբ։ Գտնել կետի արագությունը և շարժման օրենքը, երբ հաշվի չի առնվում միջավայրի դիմադրությունը։*

Լուծում: $ox$ *առանցքը ուղղենք կետի շարժման ուղղությամբ, իսկ կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք կետի սկզբնական դիրքում։ Կետի վրա ազդում է միայն նրա* $mg$ *ծանրության ուժը, որը կարելի է ընդունել հաստատուն։*

*Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \tag{1}$$

*կամ*

$$\frac{dv}{dt} = g։$$

*Մի անգամ ինտեգրելով այս դիֆերենցիալ հավասարումը, կստանանք*

$$v = gt + c_1 ։ \tag{2}$$

*Նախնական պայմաններից հայտնի է, որ* $v|_{t=0} = v_0$։ *Սրա հիման վրա կստանանք* $c_1 = v_0$, *և (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$v = v_0 + gt։ \tag{3}$$

*(3)-ը հաճախ անվանում են կետի արագության օրենք։*

*Եթե (3)-ում* $v$-*ն փոխարինենք* $\frac{dx}{dt}$-*ով և ինտեգրենք, կստանանք*

$$x = v_0 t + \frac{gt^2}{2} + c_2 ։ \tag{4}$$

*Նախնական պայմաններից ունենք* $x|_{t=0} = 0$։ *Սրա հիման վրա կստանանք* $c_2 = 0$, *և (4)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$x = v_0 t + \frac{gt^2}{2}։ \tag{5}$$

*Սա կլինի կետի շարժման օրենքը։ Այս դեպքում կետը կատարում է հավասարաչափ արագացող շարժում։*

*Եթե (3)-ից և (5)-ից արտաքսենք* $t$ *ժամանակը, ապա կստանանք կետի արագության և հեռավորության միջև եղած կապը, որը կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gx} ։ \tag{6}$$

*Մասնավոր դեպքում, երբ* $v_0=0$, *(6)-ից կստանանք Գալիլեյի բանաձևը՝*

$$v = \sqrt{2gx}\,։$$

Պատ. $v = v_0+gt$, $v = \sqrt{v_0^2 + 2gx}\,։$

**Խնդիր 19։** m *մասսա ունեցող նյութական կետը շարժվում է* OX *առանցքով*

$$F = \frac{mk}{a^2 + t^2}$$

*ուժի ազդեցության տակ, որտեղ* a-*ն և* k-*ն հաստատուններ են։ Տված է, որ* $t=0$ *մոմենտում կետը գտնվել է* $x_0$ *դիրքում, և նրա արագությունը եղել է* $v_0$։ *Պահանջվում է գտնել կետի շարժման օրենքը։*

Լուծում: *Կետը կատարում է ուղղագիծ շարժում* OX *առանցքի ուղղությամբ և նրա վրա ազդում է միայն* $F=\frac{mk}{a^2+t^2}$ *ուժը։ Հետևաբար, այդ կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mk}{a^2+t^2}$$

*կամ*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{a^2+t^2}, \tag{1}$$

*(1)-ը գրենք*

$$dv = \frac{k}{a^2+t^2}\,dt \tag{2}$$

*տեսքով։ Ինտեգրենք (2)-ը և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ երբ* $t=0$, $v=v_0$։ *Կստանանք*

$$v = v_0 + \frac{k}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a}$$

*կամ*

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{k}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a}\,, \tag{3}$$

*Մնում է ինտեգրել այս դիֆերենցիալ հավասարումը։ Դրա համար այն գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$dx = v_0\, dt + \frac{k}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{a}\, dt\,։ \qquad (4)$$

*Եթե ինտեգրենք (4)-ը և միաժամանակ նկատի ունենանք նախնական պայմանները, կստանանք*

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{k}{a} \int_0^t \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{t}{a}\right) dt\,։ \qquad (5)$$

*Այս ինտեգրալի արժեքը որոշելու համար պետք է կատարել մասերով ինտեգրում։ Կստացվի*

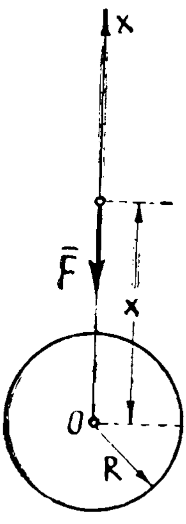
$$\int_0^t \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{t}{a}\right) dt = t \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{t}{a}\right) - \frac{a}{2} \ln\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)\,։ \qquad (6)$$

*Մնում է (6)-ը տեղադրել (5)-ի մեջ և ստանալ կետի շարժման օրենքը։*

Պատ. $x = x_0 + v_0 t + \frac{kt}{a} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{t}{a}\right) - \frac{k}{2} \ln\left(1 + \frac{t^2}{a^2}\right)$։

**Խնդիր 20**։ *Դիցուք նյութական կետը ընկնում է երկրի մակերևույթի վրա շատ մեծ բարձրությունից* $v_0$ *սկզբնական արագությամբ։ Գտնել այդ կետի արագությունը, երբ հաշվի չի առնվում միջավայրի դիմադրությունը։*

Լուծում։ *Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք երկրի կենտրոնում, իսկ* OX *առանցքը ուղղենք կետի շարժման հակառակ ուղղությամբ (գծ. 17)։ Կետի վրա ազդում է միայն երկրագնդի ձգողության ուժը, որը ըստ Նյուտոնի տիեզերական ձգողության օրենքի, համեմատական է կետի մասսային և հակադարձ համեմատական ձգողության կենտրոնից, նրա ունեցած հեռավորության քառակուսուն։ Հետևաբար, այդ ուժը կունենա հետևյալ տեսքը՝*




*Գծ. 17*

$$F(x) = -\mu \cdot \frac{m}{x^2}, \qquad (1)$$

*որտեղ* $\mu$-*ն հաստատուն մեծություն է։*

*Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\mu \cdot \frac{m}{x^2}\,։ \qquad (2)$$

Եթե կետը գտնվում է երկրի մակերևույթի վրա, որտեղ $x=R$ ($R$-ը երկրագնդի շառավիղն է), ապա (1)-ից կունենանք

$$-mg=-\mu\cdot\frac{m}{R^2},$$

Այստեղից ստացվում է, որ $\mu=gR^2$։ Տեղադրելով այս արժեքը (2)-ի մեջ, կստանանք

$$m\frac{dv_x}{dt}=-gR^2\frac{m}{x^2}, \qquad (3)$$

(3) հավասարման ինտեգրման համար կատարենք հետևյալ տեղադրումը՝

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{dv_x}{dx}\,\frac{dx}{dt}=v_x\,\frac{dv_x}{dx},$$

Այդ դեպքում (3)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$v_x dv_x=-gR^2\frac{dx}{x^2}, \qquad (4)$$

Ինտեգրելով (4) դիֆերենցիալ հավասարումը, կստանանք

$$\frac{v_x^2}{2}=\frac{gR^2}{x}+c, \qquad (5)$$

որտեղ $c$-ն ինտեգրման հաստատունն է։ Նախնական պայմանների համաձայն, երբ $v_x=v_0$, $x=x_0$։ Դրա հիման վրա (5)-ից կունենանք

$$c=\frac{v_0^2}{2}-\frac{gR^2}{x_0},$$

Տեղադրելով $c$-ի այս արժեքը (5)-ի մեջ, կստանանք կետի արագության համար հետևյալ արտահայտությունը՝

$$v_x^2=v_0^2+2gR^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right), \qquad (6)$$

Եթե ընդունենք $v_0=0$, ապա (6)-ից կունենանք

$$v_x=-R\sqrt{2g\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}, \qquad (6')$$

Այժմ ենթադրենք, որ կետը ընկնում է երկրի մակերևույթի վրա անվերջ մեծ բարձրությունից։ Այդ դեպքում կետի արագու-

*թյունը երկրի մակերևույթի վրա որոշելու համար պետք է (6′)-ի մեջ տեղադրել* $x_0=\infty$ *և* $x=R$։ *Կստացվի*

$$v_x^* = -\sqrt{2gR}\,. \tag{7}$$

*Կամ ընդունելով* $g=9{,}81$ մ/վրկ² *և* $R=6370$ կմ, *(7)-ից կունենանք*

$$v_x^* = -11{,}2 \text{ կմ/վրկ}\,. \tag{8}$$

*Մոտավորապես այսպիսի արագությամբ են ընկնում երկնային քարերը երկրի մակերևույթի վրա։* $v=11{,}2$ կմ/վրկ *արագությունն անվանում են երկրորդ կոսմիկական արագություն։*

Պատ. $\quad v_x = -R\sqrt{2g\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}$, *եթե* $x_0=\infty$, $x=R$,

*ապա* $v_x^* = -\sqrt{2gR}\,.$

**Խնդիր 21։** *Մարմինը կատարում է ազատ անկում ոչ շատ մեծ բարձրությունից (համեմատած երկրի շառավղի հետ) առանց սկզբնական արագության։ Օդի դիմադրության ուժը համեմատական է արագության քառակուսուն և ունի* $R = \alpha\rho S v^2$ *տեսքը, որտեղ* $\alpha$*-ն չափում չունեցող գործակից է,* $\rho$*-ն՝ օդի խտությունն է, իսկ* $S$*-ը՝ արագությանը ուղղահայաց հարթության վրա մարմնի պրոյեկցիայի մակերեսը։ Գտնել՝ 1) մարմնի արագությունը, 2) մարմնի շարժման օրենքը և 3) արագության ու հեռավորության միջև եղած կապը։*

Լուծում։ *Մարմինը ընդունենք որպես նյութական կետ,* $OX$ *առանցքը ուղղենք ուղղաձիգ դեպի ցած, կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք կետի սկզբնական դիրքում (գծ. 18)։ Ժամանակի կամավոր* $t$ *մոմենտում կետի կոորդինատը նշանակենք* $x$*-ով։ Մարմնի վրա ազդում են նրա* $m\overline{g}$ *կշիռը և միջավայրի դիմադրության* $\overline{R}$ *ուժը (գծ. 18)։*

*Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \alpha\rho S v^2 \tag{1}$$

*կամ*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{c^2}(c^2 - v^2)\,, \tag{2}$$

*որտեղ*

$$c^2 = \frac{mg}{\alpha\rho S}\,. \tag{3}$$

*Կատարենք փոփոխականների անջատում: Կունենանք*

$$\frac{dv}{c^2-v^2}=\frac{g}{c^2}\,dt, \tag{4}$$

*Ինտեգրելով (4) հավասարումը, կստանանք*

$$\frac{1}{2c}\ln\frac{c+v}{c-v}=\frac{g}{c^2}t+c_1: \tag{5}$$

*Քանի որ ըստ նախնական պայմանների,*

*երբ* $t=0$, $v=0$,

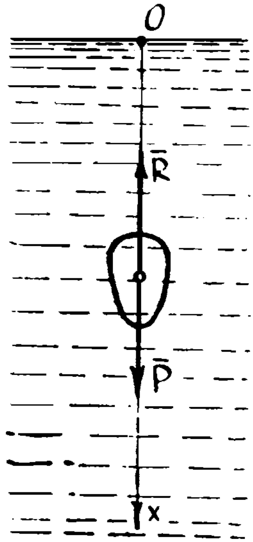
*ուրեմն* $c_1$*-ը կլինի զրո, և (5)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\ln\frac{c+v}{c-v}=\frac{2g}{c}t, \tag{6}$$

*Լուծելով (6)-ը արագության նկատմամբ, կունենանք*

$$v=c\cdot\operatorname{th}\left(\frac{gt}{c}\right), \tag{7}$$

*(7)-ը հաճախ անվանում են կետի արագության օրենք:*



*Գծ. 18*

*Կետի շարժման օրենքը որոշելու համար* $v$*-ն փոխարինենք* $\frac{dx}{dt}$*-ով և ինտեգրենք (7) հավասարումը:*

*Կստանանք*

$$x=\frac{c^2}{g}\ln\left|c_2\operatorname{ch}\left(\frac{gt}{c}\right)\right|, \tag{8}$$

*որտեղ* $c_2$*-ը ինտեգրման հաստատունն է: Նախնական պայմաններից ունենք՝ երբ* $t=0$, $x=0$*: Սրա հիման վրա (8)-ից կստանանք* $c_2=1$*, և (8)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$x=\frac{c^2}{g}\ln\operatorname{ch}\left(\frac{gt}{c}\right), \tag{9}$$

*(9)-ը կլինի կետի շարժման օրենքը:*

*Կետի արագության և հեռավորության միջև եղած կապը գտնելու համար պետք է (7) և (9) հավասարումներից արտաքսել* $t$ *ժամանակը: (9)-ից ունենք*

$$\mathrm{ch}\left(\frac{gt}{c}\right) = e^{\frac{g}{c^2}x}, \tag{10}$$

*Քանի որ*

$$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1,$$

*ուստի (10)-ի հիման վրա կունենանք*

$$\mathrm{sh}\left(\frac{gt}{c}\right) = \sqrt{e^{\frac{2gx}{c^2}} - 1}, \tag{11}$$

*Տեղադրելով* $\mathrm{ch}\left(\frac{gt}{c}\right)$ *և* $\mathrm{sh}\left(\frac{gt}{c}\right)$*-ի արժեքները (10) և (11)-ից (7)-ի մեջ, կստանանք*

$$v = c\sqrt{1 - e^{-\frac{2gx}{c^2}}}, \tag{12}$$

*Այս արդյունքը կարելի է ստանալ անմիջականորեն (2) հավասարումից, եթե նրանում* $\frac{dv}{dt}$*-ն փոխարինենք* $v\frac{dv}{dx}$*-ով։ Այդ դեպքում կունենանք*

$$\frac{vdv}{c^2 - v^2} = \frac{c^2}{g}dx, \tag{13}$$

*Եթե ինտեգրենք (13) հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք նախնական պայմանները, կստանանք (12) բանաձևը։*

*(7) հավասարությունից ունենք*

$$v_{սահմ.} = c \cdot \lim_{t \to \infty} \mathrm{th}\left(\frac{gt}{c}\right) = c, \quad \left(\lim_{x \to \infty} \mathrm{th}\, x = 1\right)։ \tag{14}$$

*Տեղադրելով* $c$*-ի արժեքը (3)-ից, կունենանք*

$$v_{սահմ.} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha\rho S}},$$

*Այս արդյունքը կարելի էր անմիջականորեն ստանալ կետի շարժման (1) հավասարումից, եթե նկատի ունենանք, որ երբ* $v = v_{սահմ.}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$։

**Պատ.** $v = c \cdot \mathrm{th}\left(\frac{gt}{c}\right)$, $x = \frac{c^2}{g}\ln \mathrm{ch}\left(\frac{gt}{c}\right)$,

$$v = c\sqrt{1 - e^{-\frac{2g}{c^2}x}}, \quad v_{սահմ.} = c, \text{ որտեղ } c = \sqrt{\frac{mg}{\alpha\rho S}} :$$

**4. Կետի ուղղագիծ շարժման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը:** *Կետի ուղղագիծ շարժման վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ քայլերը։*

**I. Շարժման դիֆերենցիալ հավասարման կազմումը:** *Դրա համար անհրաժեշտ է՝ ա) ընտրել կոորդինատների սկզբնակետը. սովորաբար այն նպատակահարմար է տեղավորել կետի սկզբնական դիրքում, բ) տանել կոորդինատական առանցքը, ուղղելով այն կետի շարժման ուղղությամբ, գ) ժամանակի կամավոր* t *մոմենտում ֆիքսել շարժվող կետի դիրքը, դ) նշել կետի վրա ազդող ուժերը և կազմել այդ ուժերի պրոյեկցիաների գումարը ընտրված կոորդինատական առանցքի վրա։ Փոփոխական ուժերի առկայության դեպքում պետք է նշել, թե ինչպե՞ս են այդ ուժերն արտահայտվում իրենց արգումենտների* (t, x, v) *միջոցով։ Այնուհետև պետք է կազմել կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։*

**II. Շարժման դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրումը:** *Ինտեգրումը կատարվում է սովորական ձևով, կախված* (II) *հավասարման աջ մասի տեսքից։ Այն բոլոր դեպքերում, երբ կետի վրա բացի հաստատուն ուժերից ազդում են նաև փոփոխական ուժեր՝ կախված միայն մի փոփոխականից, այն է՝* t *ժամանակից, կամ* x *հեռավորությունից և կամ* v *արագությունից, ապա ուղղագիծ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կարելի է ինտեգրել վերջավոր տեսքով։*

*Եթե խնդրում պահանջվում է գտնել կետի արագությունը կախված ոչ թե* t *ժամանակից, այլ* x *կոորդինատից, ապա*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx}$$

*տեղադրման օգնությամբ օգտակար է կետի ուղղագիծ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը գրել*

$$mv\frac{dv}{dx} = F_x$$

*տեսքով և ապա նոր կատարել ինտեգրումը։*

**III. Ինտեգրման հաստատունների որոշումը:** *Ինտեգրման հաստատունները որոշելու համար անհրաժեշտ է տված խնդրի հիման վրա կազմել սկզբնական պայմանները։ Ինտեգրման հաս-*

տատունները կարելի է որոշել անմիջապես ամեն մի ինտեգրումից հետո։ Եթե ինտեգրումը կատարվում է փոփոխականների անջատման եղանակով, ապա ինտեգրման հաստատունները մուծելու փոխարեն կարելի է վերցնել հավասարման երկու մասերից որոշյալ ինտեգրալներ։

IV. **Խնդրում եղած անհայտ մեծությունների որոշումը և ստացված արդյունքների հետազոտումը:** *Նպատակահարմար է խնդրի ամբողջ լուծումը կատարել ընդհանուր ձևով (տառային արտահայտություններով) և միայն վերջում տեղադրել թվային արժեքները։*

## 5. ԽՆԴԻՐՆԵՐ

*Ստորև բերվում են կետի ուղղագիծ շարժման վերաբերյալ մի քանի խնդիրների լուծումները։ Ինչպես նախկինում, Ի. Վ. Մեշչերսկու «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու» գրքից վերցված խնդիրների համարները դրված են փակագծերում։*

Զ4.Դ. Խնդիր **22 (675)**։ *Ծանր մարմինը իջնում է ողորկ հարթության վրայով, որը թեքված է հորիզոնի նկատմամբ 30° անկյան տակ։ Գտնել որքա՞ն ժամանակում մարմինը կանցնի 9,6 մ ճանապարհ, եթե սկզբնական մոմենտում նրա արագությունը հավասար է եղել 2 մ/վրկ։*

Լուծում: *Մարմինը ընդունենք որպես նյութական կետ, իսկ նրա շարժման հետագիծը՝* x *առանցք։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք այն կետում, որտեղից մարմնի շարժումը կատարվել է 2 մ/վրկ արագությամբ։*

*Ժամանակի կամավոր* t *մոմենտում ֆիքսենք մարմնի դիրքը և նրա կոորդինատը այդ մոմենտում նշանակենք* x*։ Մարմնի վրա ազդում է միայն մի ակտիվ ուժ՝ նրա* P *կշիռը, որը ուղղված կլինի ուղղաձիգ դեպի ներքև և* x *առանցքի հետ կկազմի 60°-ի անկյուն։ Հարթության* $\bar{N}$ *հակազդումը ուղղահայաց կլինի* x *առանցքին։*

*Մարմնի վրա ազդող ուժերի պրոյեկցիաների գումարը* x *առանցքի վրա կլինի*

$$F_x = P\cos 60°։$$

*Հետևաբար, կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\cos 60^\circ$$

կամ

$$\frac{dv}{dt} = g\cos 60^\circ = 9{,}8\cdot 0{,}5։ \qquad (1)$$

Քանի որ սկզբնական մոմենտում կետը գտնվել է կոորդինատների սկզբնակետում, և նրա արագությունը եղել է 2 մ/վրկ, ուրեմն

$$x\Big|_{t=0} = 0, \qquad v\Big|_{t=0} = 2 \text{ մ/վրկ}։ \qquad (2)$$

Եթե մի անգամ ինտեգրենք (1) դիֆերենցիալ հավասարումը և նկատի ունենանք (2)-ը, ապա կստանանք

$$v = 2 + 4{,}9\,t \qquad (3)$$

կամ

$$\frac{dx}{dt} = 2 + 4{,}9\,t։$$

Եթե ինտեգրենք այս հավասարումը և նկատի ունենանք (2)-ը, ապա կստանանք

$$x = 2t + \frac{4{,}9}{2}t^2 ։ \qquad (4)$$

t-ի պահանջվող արժեքը որոշելու համար պետք է (4)-ի մեջ x-ը փոխարինել 9,6 մ-ով։ Այդ դեպքում կստանանք

$$49t^2 + 40t - 192 = 0$$

քառակուսի հավասարումը, որի լուծումից կստացվի $t = 1{,}61$ վրկ։

Պատ. $t = 1{,}61$ վրկ։

**Խնդիր 23 (678)։** *Ինչքա՞ն ժամանակում և ինչպիսի՞ հեռավորության վրա կարող է կանգնեցվել հորիզոնական ճուղեմասով 36 կմ/ժամ արագությամբ շարժվող տրամվայի վագոնը արգելակելով, եթե արգելակման ժամանակ առաջացած շարժման դիմադրությունը կազմում է 300 կգ՝ վագոնի կշռի յուրաքանչյուր տոննայի համար։*

Լուծում: Վագոնը ընդունենք որպես նյութական կետ, իսկ նրա շարժման հետագիծը՝ x առանցք։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք այն կետում, որտեղից սկսվում է վագոնի դանդաղեցումը։

Ժամանակի կամավոր t մոմենտում ֆիքսենք վագոնի դիր-

*քը և այդ մոմենտում նրա կոորդինատը նշանակենք* x։ *Վագոնի շարժիչը կանգնեցնելուց հետո դանդաղեցումը տեղի է ունենում հաստատուն ուժի ազդեցության տակ, և այդ ուժը կամավոր* t *մոմենտում հավասար կլինի*

$$F_1 = 0{,}3\,Q, \qquad (1)$$

*որտեղ* Q*-ն վագոնի կշիռն է՝ արտահայտված կիլոգրամներով։ Բացի դրանից, վագոնի վրա ազդում է վագոնի* Q *կշիռը և ռելսերի* N *նորմալ հակազդումը։*

*Քանի որ սկզբնական մոմենտում վագոնը գտնվել է կոորդինատների սկզբնակետում, և նրա արագությունը մինչև դանդաղեցումը եղել է 36* կմ/ժամ=*10* մ/վրկ, *ապա կունենանք*

$$x\Big|_{t=0} = 0, \qquad \dot{x}\Big|_{t=0} = 10 \text{ մ/վրկ։} \qquad (2)$$

*Պրոյեկտելով բոլոր ուժերը* x *առանցքի վրա և օգտվելով (1)-ից, կստանանք վագոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը հետևյալ տեսքով՝*

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,0{,}3\,mg\text{։} \qquad (3)$$

*(3) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$x = -\,\frac{0{,}3\,gt^2}{2} + c_1 t + c_2, \qquad (4)$$

*որտեղ* $c_1$ *և* $c_2$*-ը ինտեգրման հաստատուններն են։ (2) նախնական պայմանների հիման վրա կունենանք*

$$\dot{x}\Big|_{t=0} = c_1 = 10, \qquad x\Big|_{t=0} = c_2 = 0\text{։}$$

*Տեղադրելով* $c_1$ *և* $c_2$*-ի արժեքները (4)-ի մեջ, կստանանք*

$$x = (10\,t - 0{,}15\,gt^2)\text{ մ։} \qquad (5)$$

*Այժմ պետք է գտնել դանդաղեցման ժամանակամիջոցը։ Այդ ժամանակամիջոցը նշանակենք* $t_1$*-ով։ Քանի որ* $t = t_1$ *մոմենտում վագոնը կանգ է առել, ուստի, եթե (5)-ի ածանցյալի արտահայտության մեջ* t*-ի փոխարեն տեղադրենք* $t_1$, *կստանանք*

$$\dot{x} = 10 - 0{,}3\,gt_1 = 0\text{։}$$

*Այստեղից ստացվում է՝*

$$t_1 = \frac{10}{0{,}3\ g} = 3{,}4 \text{ վրկ։}$$

*Մնում է գտնել այն ճանապարհի երկարությունը, որի վրա տեղի է ունեցել վագոնի դանդաղեցումը, այսինքն՝ վագոնի դանդաղեցման մոմենտից մինչև նրա կանգնելը։ Դրա համար պետք է (5) հավասարության մեջ* $t$*-ն փոխարինել* $t_1 = 3{,}4$ վրկ*-ով։ Դրանից կստացվի*

$$x_1 = x|_{t=t_1} = 10\,t_1 - 0{,}15\,t_1^2 g = 16{,}9 \text{ մ։}$$

Պատ. $t_1 = 3{,}4$ վրկ, $x_1 = 16{,}9$ մ։

**Խնդիր 24 (681)**։ *Երկու երկրաչափորեն հավասար և համասեռ գնդեր պատրաստված են տարբեր նյութերից։ Այդ նյութերի տեսակարար կշիռները համապատասխանաբար հավասար են* $\gamma_1$ *և* $\gamma_2$*։ Երկու գնդերն էլ ընկնում են օդում։ Ընդունելով միջավայրի դիմադրությունը համեմատական արագության քառակուսուն, որոշել գնդերի մաքսիմալ արագությունների հարաբերությունը։*

Լուծում: *Եթե գնդերն ընդունենք որպես նյութական կետեր, ապա 21-րդ խնդրի համաձայն կարող ենք գրել, որ այդ գնդերի մաքսիմալ արագությունները կլինեն*

$$v_{1max} = \sqrt{\frac{m_1 g}{\alpha\rho S}}, \qquad (1)$$

$$v_{2max} = \sqrt{\frac{m_2 g}{\alpha\rho S}}, \qquad (2)$$

*Կազմենք (1) և (2)-ի հարաբերությունը՝*

$$\frac{v_{1max}}{v_{2max}} = \frac{\sqrt{\dfrac{m_1 g}{\alpha\rho S}}}{\sqrt{\dfrac{m_2 g}{\alpha\rho S}}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}},$$

Պատ. $\dfrac{v_{1max}}{v_{2max}} = \sqrt{\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}}$,

**Խնդիր 25**։ $m$ *մասսա ունեցող կետը շարժվում է մի ուժի ազդեցության տակ, որը ձգում է նրան դեպի անշարժ* O *կետը համեմատական հեռավորության խորանարդին։ Համեմատականության գործակիցը հավասար է* $\alpha m$*-ի։ Սկզբնական մո-*

մենտում, երբ $t=0$, տված է $x_0=2\alpha S$ և $v_0=0{,}5$ մ/վրկ։ Գտնել կետի շարժման օրենքը։

Լուծում: O կետը ընդունենք որպես կոորդինատների սկզբնակետ, OX առանցքը ուղղենք կետի շարժման հետագծով։

Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\frac{\alpha^2 m}{x^3}, \qquad (1)$$

Օգտագործելով

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v\,\frac{dv}{dx}$$

տեղադրումը, կարող ենք (1)-ին տալ հետևյալ տեսքը՝

$$v\,dv = -\,\frac{\alpha^2 dx}{x^3},$$

Ինտեգրելուց հետո կստանանք

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^{\,2}}{2} = \frac{\alpha^2}{2x^2} - \frac{\alpha^2}{2x_0^{\,2}},$$

Եթե տեղադրենք $x_0$ և $v_0$-ի թվային արժեքները, կունենանք

$$v = \frac{\alpha}{x},$$

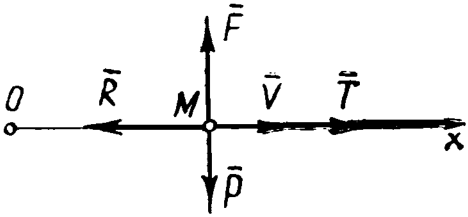
Մնում է v-ն փոխարինել $\frac{dx}{dt}$-ով և ինտեգրել. կստացվի շարժման օրենքը։

Պատ. $x = \sqrt{4\alpha^2 + 2\alpha t}$ մ։

**Խնդիր 26։** Նավը շարժվում է հաղթահարելով ջրի դիմադրությունը, որը համեմատական է արագության քառակուսուն և 1 մ/վրկ արագության դեպքում հավասար է 0,12 տ։ Պտուտակների հենման ուժը ուղղված է արագությամբ, դեպի շարժման կողմը և փոփոխվում է ըստ $T = T_0\left(1 - \frac{v}{v_s}\right)$ օրենքի։

Այստեղ $T_0=120$ տ պտուտակների հենման ուժն է այն մոմենտում, երբ նավը գտնվում է հանգստի վիճակում. $v_s = \mathrm{const} = 33$ մ/վրկ։ Որոշել այն ամենամեծ արագությունը, որը կարող է զարգացնել նավը, ինչպես նաև արագության փոփոխման օրենքը՝ կախված ժամանակից։

Լուծում: Նավը դիտենք որպես ուղղագիծ շարժում կատարող նյութական կետ։ Շարժման ուղղությունը ընդունենք որպես OX առանցք, կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք նավի անշարժ դիրքում։ Նավի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ 1) նավի քարշի $\bar{T}$ ուժը, 2) ջրի դիմադրության $\bar{R}$ ուժը, որը որոշվում է $R=\alpha v^2$ բանաձևով և ուղղված է արագության վեկտորի հակառակ ուղղությամբ, 3) ջրի վերամբարձ $\bar{F}$ ուժը և 4) նավի $\bar{P}$ կշիռը (գծ. 19)։




Գծ. 19

Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\frac{dv}{dt}=T_0\left(1-\frac{v}{v_s}\right)-\alpha v^2\text{։} \qquad (1)$$

Արագությունը ստանում է իր ամենամեծ արժեքը, երբ արագացումը դառնում է զրո։ Դրա հիման վրա (1)-ից կունենանք

$$\alpha v_{max}^2+T_0\frac{v_{max}}{v_s}-T_0=0\text{։}$$

Այստեղից ստացվում է

$$v_{max}=\sqrt{\frac{T_0}{\alpha}\left(1+\frac{T_0}{4\alpha v_s^2}\right)}-\frac{T_0}{2\alpha v_s}\text{,}$$

(1) հավասարման հիման վրա կարող ենք որոշել նավի արագության փոփոխությունը՝ կախված t ժամանակից։ Դրա համար (1)-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$dt=\frac{m\,dv}{T_0+T_1^2-(T_1+\sqrt{\alpha}\,v)^2}\text{,} \qquad (2)$$

որտեղ

$$T_1=\frac{T_0}{2\sqrt{\alpha}\,v_s}\text{,}$$

(2) դիֆերենցիալ հավասարումը գրենք այսպես՝

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{m\,du}{a^2-u^2}, \tag{3}$$

*որտեղ*

$$u = T_1 + \sqrt{\alpha}\,v, \quad a = \sqrt{T_0 + T_1^2}. \tag{4}$$

*Եթե ինտեգրենք (3) դիֆերենցիալ հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք* $v|_{t=0}=0$ *նախնական պայմանը և* $u=T_1+\sqrt{\alpha}\,v$ *նշանակումը, կստանանք*

$$t = \frac{m}{\sqrt{\alpha}} \int_{T_1}^{T_1+\sqrt{\alpha}\,v} \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{m}{2a\sqrt{\alpha}}\left[\ln\frac{a+T_1+\sqrt{\alpha}\,v}{a-T_1-\sqrt{\alpha}\,v} - \ln\frac{a+T_1}{a-T_1}\right].$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$\frac{a+T_1+\sqrt{\alpha}\,v}{a-T_1-\sqrt{\alpha}\,v} = \frac{a+T_1}{a-T_1}\, e^{\frac{2a\sqrt{\alpha}}{m}t}, \tag{5}$$

*Լուծելով (5)-ը* v*-ի նկատմամբ, կունենանք*

$$v = \frac{a^2-T_1^2}{\sqrt{\alpha}}\;\frac{e^{2at\sqrt{\alpha}/m}-1}{a-T_1+(a+T_1)e^{2a\sqrt{\alpha}\,t/m}}$$

*կամ*

$$v = \frac{T_0}{\sqrt{\alpha}}\;\frac{e^{\frac{2}{m}t\sqrt{\alpha}\sqrt{T_0+T_1^2}}-1}{\sqrt{T_0+T_1^2}-T_1+e^{\frac{2}{m}\sqrt{\alpha}\sqrt{T_0+T_1^2}\,t}\cdot\left(\sqrt{T_0+T_1^2}+T_1\right)}, \tag{6}$$

*(3)-ից հետևում է, որ*

$$\lim_{t\to\infty} v = v_{max} = \frac{2v_s}{1+\sqrt{1+\frac{4\alpha v_s^2}{T_0}}} = 20 \text{ մ/վրկ}.$$

**Պատ.** $\quad v_{max} = 20$ մ/վրկ $= 72$ կմ/ժամ,

$$v = \frac{T_0}{\sqrt{\alpha}}\;\frac{e^{\frac{2}{m}t\sqrt{\alpha}\sqrt{T_0+T_1^2}}-1}{\sqrt{T_0+T_1^2}-T_1+e^{\frac{2}{m}t\sqrt{\alpha}\sqrt{T_0+T_1^2}}\cdot\left(\sqrt{T_0+T_1^2}+T_1\right)}.$$

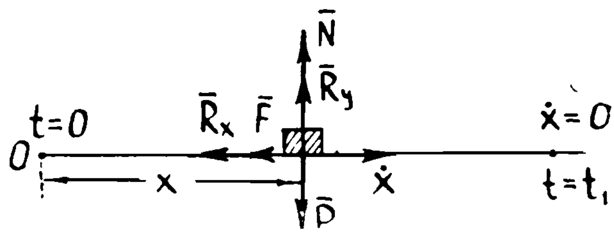
*որտեղ*

$$T_1 = \frac{T_0}{2\sqrt{\lambda}\, v_s},$$

**Խնդիր 27։** *Դահուկավոր ինքնաթիռը վայրէջք է կատարում հորիզոնական դաշտում 75* կմ/ժամ *արագությամբ, ընդորում վայրէջքի պահին ինքնաթիռի ուղղաձիգ արագությունը հավասար է եղել զրոյի։ Ինքնաթիռի դահուկների և ձյան շփման գործակիցը՝* $f = 0{,}08$։ *Օդի դիմադրության ուժը համեմատական է օդանավի արագության քառակուսուն։ 1* մ/վրկ *արագության դեպքում դիմադրող ուժի հորիզոնական բաղադրիչը՝ 0,09* կԳ, *իսկ դեպի վեր ուղղված բաղադրիչը՝ 0,7* կԳ։ *Ինքնաթիռի կշիռը հավասար է 2000* կԳ։ *Որոշել ինքնաթիռի վազքի երկարությունը և ժամանակը մինչև նրա կանգ առնելը։*

**Լուծում:** *Ինքնաթիռն ընդունենք որպես նյութական կետ, իսկ նրա շարժման հետագիծը՝* x *առանցք։ Որպես կոորդինատների սկզբնակետ ընդունենք ինքնաթիռի այն դիրքը, երբ նա կպչում է գետնին։*

*Ժամանակի կամավոր* t *պահին ֆիքսենք ինքնաթիռի դիրքը և*




*Գծ. 20*

*նրա կոորդինատը այդ պահին նշանակենք* x *(գծ. 20)։ Ինքնաթիռի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ 1) նրա* $\bar{P} = m\bar{g}$ *կշիռը, 2)* $\bar{N}$ *նորմալ հակազդումը, 3)* $F = fN = 0{,}08N$ *շփման ուժը, որտեղ* f*-ը շփման գործակիցն է և 4) միջավայրի դիմադրության ուժը, որն ունի երկու բաղադրիչ՝* $R_x = 0{,}09\,\dot{x}^2$, $R_y = 0{,}7\,\dot{x}^2$։

*Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -fN - 0{,}09\,\dot{x}^2, \tag{1}$$

*Դժվար չէ նկատել, որ* N *նորմալ հակազդման համար կունենանք*

$$N = P - 0{,}7\,\dot{x}^2,$$

Տեղադրելով այս արժեքը (1)-ի մեջ, կստանանք

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a - b\dot{x}^2, \tag{2}$$

որտեղ $a=0{,}8$, $b=1{,}7 \cdot 10^{-4}$։

Եթե (2) դիֆերենցիալ հավասարման մեջ $\frac{dx}{dt}$-ն փոխարինենք $v$-ով և հավասարումը մի անգամ ինտեգրենք, կստանանք

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{b}{a}}\, v = -t + c_1, \tag{3}$$

որտեղ $c_1$-ը ինտեգրման հաստատունն է։

(3)-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\, dx = \operatorname{tg} \sqrt{ab}\,(c_1 - t)\, dt\,։ \tag{4}$$

Ինտեգրելով այս դիֆերենցիալ հավասարումը, կստանանք

$$\sqrt{\frac{b}{a}}\, x + c_2 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln\cos \sqrt{ab}\,(c_1 - t)\,։ \tag{5}$$

Ինտեգրման $c_1$, $c_2$ հաստատունները որոշելու համար օգտվենք նախնական պայմաններից։ Այդ պայմանները կլինեն՝

$$\text{երբ}\ t=0, \qquad x=0, \qquad \dot{x} = 20\,\frac{5}{6}\ \text{մ/վրկ}, \tag{6}$$

Տեղադրելով $\dot{x}$-ի և $x$-ի արժեքները (6)-ից (3)-ի և (5)-ի մեջ, կորոշենք $c_1$, $c_2$-ի արժեքները։ Կստանանք

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{b}{a}}\, v_0, \quad \text{որտեղ} \quad v_0 = 20\,\frac{5}{6}\ \text{մ/վրկ},$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln\cos \sqrt{ab}\, c_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln\cos\left[\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{b}{a}}\, v_0\right] = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln\cos\left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{b}{a}}\, v_0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + bv_0^2}},$$

Խնդրում պահանջվում է գտնել ինքնաթիռի գետնին կպչելուց մինչև կանգ առնելու ժամանակամիջոցը և անցած ճանապարհը։

*Եթե (3)-ի մեջ v-ն հավասարեցնենք զրոյի, ապա կստանանք այդ $t_1$ ժամանակամիջոցը։ $t_1$-ի համար կունենանք*

$$t_1 = c_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}}\, v_0 \text{ ։}$$

*Եթե $t_1$-ի արժեքը տեղադրենք (5)-ի մեջ, կստանանք անցած ճանապարհը, որը կլինի*

$$x_1 = -\sqrt{\frac{a}{b}}\, c_2 = -\frac{1}{b} \ln \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+bv_0^{\,2}}} \text{ ։}$$

*Այժմ տեղադրենք թվային արժեքները։ Կստանանք*

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}}\, v_0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0{,}78 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-4}}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1{,}67 \cdot 10^{-4}}{0{,}78}}\, 20\frac{5}{6} \right) =$$

$$= 87{,}566 \operatorname{arctg} 0{.}3037 = 0{,}87566 \cdot 0{,}295 = 25{,}8 \text{ վրկ,}$$

$$x_1 = -\frac{1}{1{,}67 \cdot 10^{-4}} \ln \frac{\sqrt{0{,}78}}{\sqrt{0{,}78 + 1{,}67 \cdot 10^{-4} \left(20\frac{5}{6}\right)^2}} = 258{,}1 \text{ մ։}$$

Պ ա տ. $t_1 = 25{,}8$ վրկ, $x_1 = 258{.}1$ մ։

**Խ ն դ ի ր 28 (688)**։ *Ինքնաթիռը սկսում է վարընթացը առանց սկզբնական ուղղաձիգ արագության։ Օդի դիմադրության ուժը համեմատական է արագության քառակուսուն։ Գտնել տրված պահին ուղղաձիգ արագության, անցած ճանապարհի և վարընթացի մաքսիմալ արագության միջև եղած կախվածությունը։*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ։ Առաջին եղանակ։ *Ինքնաթիռը դիտենք որպես նյութական կետ, իսկ նրա շարժման հետագիծը՝* OX *առանցքը։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք այն կետում, որտեղից ինքնաթիռը սկսում է վայրէջքը։ Ժամանակի կամավոր* $t$ *պահին ֆիքսենք ինքնաթիռի դիրքը և նրա կոորդինատը այդ պահին նշանակենք* $x$։ *Ինքնաթիռի վրա ազդում են նրա* $mg$ *կշիռը, որը ուղղված է* OX *առանցքով դեպի ներքև և դիմադրության* $R = kv^2$ *ուժը՝ ուղղված* $x$ *առանցքի հակառակ ուղղությամբ։ Այստեղ* $k$*-ն համեմատականության գործակիցն է։*

*Ինքնաթիռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \text{ ,} \tag{1}$$

*Այս խնդիրը լուծելու համար կարելի է կիրառել 21-րդ խնդրի լուծման ժամանակ օգտագործված եղանակը։*

Երկրորդ եղանակ: *Կարելի է նշել այս խնդրի լուծման ավելի պարզ եղանակ։ (1)-ից հետևում է, որ ինքնաթիռը ստանում է իր ամենամեծ արագությունը, երբ նրա արագացումը հավասարվում է զրոյի։ Այդ դեպքում (1)-ից կստանանք, որ*

$$v_{max}^2 = \frac{mg}{k}, \tag{2}$$

*Օգտվելով*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\,\frac{dv}{ds}$$

*բանաձևից, (1)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$ds = \frac{1}{g}\,\frac{vdv}{1 - v^2/v^2_{max}}, \tag{3}$$

*Ինտեգրելով այս դիֆերենցիալ հավասարումը, ստանում ենք*

$$s = -\frac{v^2_{max}}{2g}\ln\left(1 - \frac{v^2}{v^2_{max}}\right) + c, \tag{4}$$

*Նախնական պայմանների հիման վրա ինտեգրման* $c$ *հաստատունը հավասարվում է զրոյի և լուծելով (4)-ը* $v$*-ի նկատմամբ, որոշում ենք* $v$*-ն՝ կախված* $s$*-ից։*

Պատ. $v = v_{max}\sqrt{1 - e^{-\frac{2gs}{v^2_{max}}}}$ ,

**Խնդիր 29 (27. 28)***։ *Նյութական կետը ընկնում է երկրի մակերևույթի վրա* $v_0 = 0$ *սկզբնական արագությամբ։ Գտնել այդ կետի շարժման օրենքը, եթե նրա մասսան հավասար է* $m$*-ի, իսկ օդի դիմադրության ուժը ուղիղ համեմատական է արագության քառակուսուն։ Համեմատականության գործակիցը հավասար է* $k$*-ի։*

Ցուցում: *Տես 21-րդ խնդրի լուծումը։*

Պատ. $x = \frac{m}{k}\ln \operatorname{ch}\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t$ ,

---

*) *Այսպիսի աստղանիշ կրող խնդիրները վերցված են* И. В. Мещерский, „Сборник задач по теоретической механике“ *գրքի 32-րդ հրատարակությունից։*

Խ ն դ ի ր 30։ $v=100$ մ/վրկ արագությամբ ուղղաձիգ դեպի վեր նետված 2 կԳ կշիռ ունեցող մարմինը ենթարկվում է օդի դիմադրությանը, որը հավասար է $0{,}03\,v$ կԳ-ի։ Գտնել՝ քանի՞ վայրկյանում մարմինը կհասնի իր ամենաբարձր դիրքին և թռիչքի բարձրությունը։

Լ ու ծ ու մ: Մարմինը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք մարմնի թռիչքի սկզբնական դիրքում, իսկ $x$ առանցքը ուղղենք ուղղաձիգ դեպի վեր։ Ժամանակի կամավոր $t$ պահին ֆիքսենք մարմնի դիրքը և նրա կոորդինատը այդ պահին նշանակենք $x$։ Մարմնի վրա ազդում են երկու ուժեր, որոնցից մեկը նրա $P=2$ կԳ կշիռն է, իսկ մյուսը՝ $k=0{,}03v$ դիմադրության ուժը, ընդ որում այս երկու ուժերն էլ ուղղված են դեպի ներքև՝ $x$-երի բացասական ուղղությամբ։ Քանի որ կետը սկզբնական պահին գտնվել է կոորդինատների սկզբնակետում, և արագությունը եղել է $v_0=100$ մ/վրկ, ապա սկզբնական պայմանները կլինեն

երբ $t=0 \mid x=0, \quad v=v_0=100$ մ/վրկ։

Այժմ գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Այն կլինի

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{P+0{,}03v}{m}, \tag{1}$$

Եթե կատարենք փոփոխականների անջատում և ինտեգրենք (1) հավասարումը, կստանանք

$$\frac{m}{0{,}03}\ln(P+0{,}03v)=-t+c_1\,։ \tag{2}$$

Ինտեգրման $c_1$ հաստատունը որոշելու համար օգտվենք նախնական պայմաններից։ Դրանից կստացվի

$$c_1=\frac{m}{0{,}03}\ln(P+3)։ \tag{3}$$

Տեղադրելով $c_1$-ի արժեքը (3)-ից (2)-ի մեջ, կստանանք

$$t=\frac{m}{0{,}03}\ln(P+3)-\frac{m}{0{,}03}\ln(P+0{,}03v)։ \tag{4}$$

Մարմնի շարժման ժամանակամիջոցը, մինչև նրա կանգ առնելը, որոշելու համար պետք է $t$-ի արտահայտության մեջ ընդունել $v=0$։ Եթե այդ ժամանակամիջոցը նշանակենք $T$, ապա կունենանք

$$T=\frac{m}{0{,}03}\ln(P+3)-\frac{m}{0{,}03}\ln P=\frac{2}{9{,}81\cdot 0{,}03}(\ln 5-\ln 2)=$$

$$=6{,}23 \text{ վրկ}\,։$$

*Մարմնի թռիչքի բարձրությունը որոշելու համար կետի շարժման (1) դիֆերենցիալ հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$mv\frac{dv}{dx} = -(P+0{,}03v)$$

*կամ, նկատի ունենալով, որ* $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$, *կարող ենք այն գրել նաև այսպես՝*

$$\frac{mv\,dv}{P+0{,}03v} = -dx\ ։$$

*Եթե ինտեգրենք այս դիֆերենցիալ հավասարումը և օգտվենք տված նախնական պայմաններից, ապա թռիչքի* H *բարձրության համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը.*

$$H = \frac{mv_0}{0{,}03} + \frac{mP}{(0{,}03)^2}\ln\frac{P}{P+0{,}03v_0}\ ։$$

*Տեղադրենք թվական տվյալները՝*

$$H = \frac{2\cdot 100}{9{,}81\cdot 0{,}03} + \frac{2\cdot 2}{9{,}81\cdot(0{,}03)^2}(\ln 2 - \ln 5) = 264{,}4\ մ։$$

Պատ. $T=6{,}23$ վրկ, $H=264{,}4$ մ։

**Խնդիր 81 (696)**։ *10000* տ *ջրատարողություն ունեցող նավը շարժվում է 16* մ/վրկ *արագությամբ։ Ջրի դիմադրությունը համեմատական է նավի արագության քառակուսուն և արագության 1* մ/վրկ *արժեքի դեպքում հավասար է 30* տ։ *Ինչպիսի՞ հեռավորություն է անցնում նավը, երբ արագությունը դառնում է 4* մ/վրկ։ *Ինչքա՞ն ժամանակում նավը կանցնի այդ հեռավորությունը* ($g\approx 10$ մ/վրկ²)։

Լուծում: *Նավը կատարում է համընթաց-ուղղագիծ շարժում։ Հետևաբար, այն կարող ենք ընդունել որպես նյութական կետ։ Նավի վրա ազդում են՝ 1) նրա* $\bar{P}$ *կշիռը, 2) ջրի դիմադրության* $\bar{R}$ *ուժը և 3) նորմալ* $\bar{N}$ *հակազդումը։*

*Կոորդինատական* x *առանցքն ուղղենք նավի արագության ուղղությամբ։ Նավի սկզբնական դիրքն ընդունենք որպես կոորդինատների սկզբնակետ։ Նավի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$\frac{P}{g}\,\frac{dv}{dt} = -30v^2\ ,\qquad (1)$$

*Եթե ինտեգրենք (1) հավասարումը և նկատի ունենանք*

$$v|_{t=0}=v_0= 16 \text{ մ/վրկ}$$

*նախնական պայմանը, ապա t-ի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$t=\frac{P}{30g}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}\right)\text{։} \tag{2}$$

*Այժմ տեղադրելով թվային արժեքները, կստանանք*

$$T=\frac{10000}{30\cdot 9{,}8}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)=6{,}25 \text{ վրկ։}$$

*Հեռավորությունը որոշելու համար (2)-ը լուծենք v-ի նկատմամբ։ Կստանանք*

$$v=\frac{400}{12t+25}$$

*կամ*

$$\frac{ds}{dt}=\frac{400}{12t+25}\text{։} \tag{3}$$

*Եթե ինտեգրենք (3) հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք*

$$s\Big|_{t=0}=0$$

*նախնական պայմանը, ապա կունենանք*

$$s=\frac{100}{3}\ln\frac{12t+25}{25}\text{։} \tag{4}$$

*Մնում է (4)-ի մեջ տեղադրել* t=T=6,38 *վայրկյան և կատարել նշված գործողությունները։*

Պատ. $T=6{,}25$ վրկ, $s=47{,}1$ մ ։

**Խնդիր 32 (698)**։ *Տրամվայի վարորդը, աստիճանաբար միացնելով ռեոստատը, մեծացնում է վագոնի շարժիչի հզորությունը այնպես, որ քարշող ուժը մեծանում է զրոյից սկսած, ժամանակին համեմատական, մեծանալով յուրաքանչյուր վայրկյանի ընթացքում 120 կԳ-ով։ Գտնել վագոնի շարժման s հեռավորությունների կորը հետևյալ տվյալների դեպքում՝ վագոնի կշիռը 10 տ է, շփման դիմադրությունը հաստատուն է և հավասար 0,2 տ, իսկ սկզբնական արագությունը զրո է։*

Լուծում: *Վագոնը շարժվում է համընթաց։ Հետևաբար,* *այն կարելի է ընդունել որպես նյութական կետ։ Վագոնի վրա ազդում են հետևյալ չորս ուժերը՝ 1) վագոնի կշիռը, 2) քարշող* $\bar{F}$ *ուժը, 3) դիմադրության* $\bar{R}$ *ուժը և 4)* $\bar{N}$ *նորմալ հակազդումը։*

OX *առանցքը ուղղենք վագոնի շարժման ուղղությամբ, իսկ կոորդինատական սիստեմի սկզբնակետը տեղավորենք այն կետում, որտեղից սկսվում է վագոնի շարժումը։ Ակնհայտ է, որ վագոնի շարժումը կսկսվի այն պահից, երբ վագոնի քարշող* $\bar{F}$ *ուժը մեծությամբ կհավասարվի* $\bar{R}$ *դիմադրության ուժին։ Վագոնի քարշող ուժը հավասար է 0,12* t *տոննայի, իսկ դիմադրության ուժը՝ 0,2 տոննայի։ Եթե* $t_1$*-ով նշանակենք այն ժամանակամիջոցը, որից սկսած վագոնը սկսում է շարժվել, ապա այն կբավարարի հետևյալ հավասարմանը՝*

$$0{,}12\,t_1 - 0{,}2 = 0\text{։}$$

*Այստեղից ստացվում է* $t_1 = \dfrac{5}{3}$ վրկ։ *Նշանակում է, երբ* $t_1 = \dfrac{5}{3}$ վրկ, $s = 0$, $v = 0$։

*Վագոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{dv}{dt} = F - R$$

*կամ*

$$\frac{10}{9{,}8}\,\frac{dv}{dt} = 0{,}12t - 0{,}2\text{։} \qquad (1)$$

*(1)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{dv}{dt} = 0{,}1176\left(t - \frac{5}{3}\right)\text{։} \qquad (2)$$

*Եթե մի անգամ ինտեգրենք (2) դիֆերենցիալ հավասարումը, կստանանք*

$$v = 0{,}0588\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + c_1\text{։} \qquad (3)$$

*Վերն ասածի հիման վրա, երբ* $t = \dfrac{5}{3}$ վրկ, $v = 0$։ *Նշանակում է* $c_1 = 0$։ *Եթե (3)-ում* v*-ն փոխարինենք* $\dfrac{ds}{dt}$*-ով և ինտեգրենք, ապա կստանանք*

$$s=0{,}01962\left(t-\frac{5}{3}\right)^{3}+c_2\text{։}$$

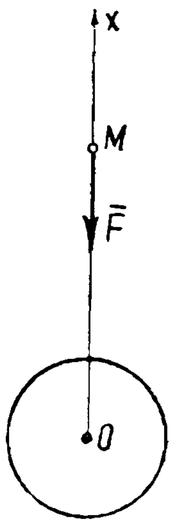
*Դժվար չէ նկատել, որ*

$$s\Big|_{t=\frac{5}{3}}=0$$

*պայմանի հետևանքով* $c_2$*-ը հավասարվում է զրոյի։*

**Պատ.** *Շարժումը սկսվում է հոսանքի միացումից* $\frac{5}{3}$ *վայրկյան հետո, այդ պահից սկսած* $s=0{,}01962\left(t-\frac{5}{3}\right)^{3}$ մ։

**Խնդիր 33 (700)։** *Մարմինը ընկնում է երկրի վրա* h *բարձրությունից, առանց սկզբնական արագության։ Օդի դիմադրությունը անտեսում ենք, իսկ երկրի ձգողության ուժը համարում ենք հակադարձ համեմատական մարմնի՝ երկրի կենտրոնից ունեցած հեռավորության քառակուսուն։ Գտնել այն* T *ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում մարմինը հասնում է երկրի մակերևույթին։ Ինչպիսի՞ արագություն է նա ձեռք բերում այդ ժամանակամիջոցում։ Երկրի շառավիղը հավասար է* R*-ի, ծանրության ուժի արագացումը երկրի մակերևույթի վրա հավասար է* g*-ի։*




Գծ. 21

**Լուծում։** *Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք երկրի կենտրոնում, իսկ* OX *առանցքը ուղղենք կետի շարժման հակառակ ուղղությամբ (գծ. 21)։ Մարմինը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Ժամանակի կամավոր պահին ֆիքսենք կետի դիրքը և նրա կոորդինատը նշանակենք* x*։ Կետի վրա ազդում է միայն երկրագնդի ձգողության ուժը, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$F(x)=-\mu\frac{m}{x^{2}},$$

*որտեղ* $\mu$*-ն հաստատուն մեծություն է։ Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{dv}{dt}=-\mu\frac{m}{x^{2}}\text{,}\qquad(1)$$

Երբ կետը գտնվում է երկրի մակերևույթի վրա, որտեղ $x=R$, ապա (2)-ից կունենանք

$$-mg = -\mu \frac{m}{R^2},$$

Այստեղից ստացվում է $\mu=gR^2$: Տեղադրելով այս արժեքը (2)-ի մեջ, կստանանք

$$\frac{dv}{dt} = -gR^2 \frac{1}{x^2}, \tag{2}$$

Եթե կատարենք

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

տեղադրումը, ապա (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$vdv = -gR^2\frac{dx}{x^2}, \tag{3}$$

Ինտեգրենք (3) դիֆերենցիալ հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք

$$t=0 \left| \begin{array}{l} x = R+h \\ v = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

նախնական պայմանները: Կստանանք

$$v^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R+h}\right), \tag{5}$$

Արագությունը երկրի մակերևույթի վրա ստանալու համար պետք է (5) բանաձևի մեջ վերցնել $x=R$: Հետևաբար, ընկնող կետի արագությունը երկրի մակերևույթի վրա կլինի

$$v = -\sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}, \tag{6}$$

Այդ ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում ընկնող մարմինը հասնում է երկրի մակերևույթին, նշանակենք $T$: Այս $T$ անհայտը որոշելու համար պետք է նախ (5)-ից որոշել $v$-ի արտահայտությունը, այնուհետև $v$-ն փոխարինել $\frac{dx}{dt}$-ով և ինտեգրել ստացված հավասարումը: Դրանից կստացվի

$$T = -\frac{1}{R\sqrt{2g}}\int_{R+h}^{R}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{R+h}}} \tag{7}$$

կամ

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\int\limits_{R}^{R+h}\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{R+h-x}}, \tag{7}$$

Այս ինտեգրալը հաշվելու համար կատարենք

$$\sqrt{x} = \sqrt{R+h}\cos\varphi$$

տեղադրումը։ Այդ դեպքում (7)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$T = \frac{(R+h)^{3/2}}{R\sqrt{2g}}\int\limits_{0}^{\arccos\sqrt{R/(R+h)}} 2\cos^2\varphi\, d\varphi\,,$$

Ինտեգրումից հետո կստանանք

$$T = \frac{(R+h)^{3/2}}{R\sqrt{2g}}\left|\arccos\sqrt{\frac{R}{R+h}} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arccos\sqrt{\frac{R}{R+h}}\right)\right|, \tag{8}$$

Եթե նկատի ունենանք, որ

$$\sin\left(2\arccos\sqrt{\frac{R}{R+h}}\right) = \frac{2\sqrt{Rh}}{R+h},$$

կստանանք

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left[\sqrt{Rh} + (R+h)\arccos\sqrt{\frac{R}{R+h}}\right], \tag{9}$$

Դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$\arccos\sqrt{\frac{R}{R+h}} = \frac{1}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}, \tag{10}$$

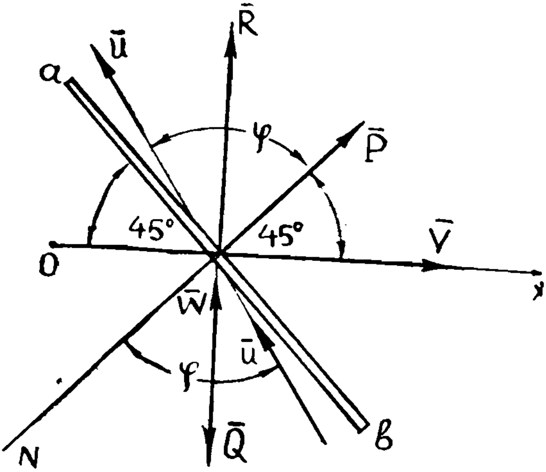
(10)-ի հիման վրա (9)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right),$$

Պ ա տ. $v = -\sqrt{\dfrac{2gRh}{R+h}}$;

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right):$$

**Խնդիր 34 (705)**։ *Առագաստասահնակը ուղևորների հետ միասին կշռում է* Q = 196,2 կԳ *և շարժվում է ուղղագիծ, սառույցի հարթ հորիզոնական մակերևույթով, շնորհիվ առագաստի վրա քամու ճնշման։ Առագաստի* ab *հարթությունը շարժման ուղղության հետ կազմում է 45°-ի անկյուն։ Քամու* w *բացարձակ արագությունը ուղղահայաց է շարժման ուղղությանը։ Քամու ճնշման* P *մեծությունը արտահայտվում է Նյուտոնի բանաձևով՝* $P = ksu^2\cos^2\varphi$, *որտեղ* φ*-ն քամու* u *հարաբերական արագության և առագաստի հարթության* N *ուղղահայացի միջև կազմված անկյունն է,* s = 5 մ² *առագաստի մակերեսի մեծությունն է,* k = 0,113 *փորձից ստացված գործակից է։* P *ճնշումը ուղղահայաց է* ab *հարթությանը։ Անտեսելով շփումը, գտնել՝ 1) ինչպիսի՞ ամենամեծ* $v_{max}$ *արագություն կարող է ստանալ առագաստասահնակը, 2) այդ արագության դեպքում ինչպիսի՞* α *անկյուն է կազմում կայմի վրա տեղավորված հողմացույցը առագաստի հարթության հետ, 3) ինչպիսի՞* x *ճանապարհ պետք է անցնի առագաստասահնակը, որպեսզի ձեռք բերի* $v = \frac{2}{3}w$ *արագություն, եթե նրա սկզբնական արագությունը հավասար է զրոյի (գծ. 22)։*




Գծ. 22

Լուծում: *Առագաստասահնակը ընդունենք որպես նյութական կետ, իսկ նրա շարժման հետագիծը՝* x *առանցքը։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք այն կետում, որտեղից սկսվում է առագաստասահնակի շարժումը։ Ժամանակի կամավոր* t *պահին ֆիքսենք առագաստասահնակի դիրքը և նրա կոորդինատը այդ պահին նշանակենք* x *(գծ. 22)։ Առագաստասահնակի վրա ազդում են՝ 1) իր* Q *կշիռը, 2) քամու ճնշման ուժը, որը* կիրառված է առագաստի վրա և 3) բացարձակ հարթ հենարանի հակազդումը։

Գրենք առագաստանավակի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Այն կլինի

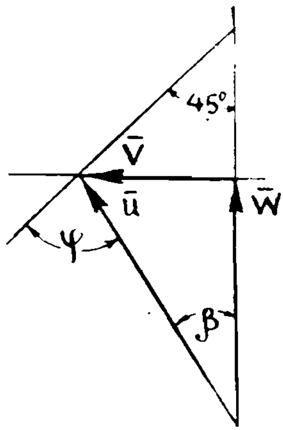
$$\frac{Q}{g}\frac{dv}{dt} = P\cos 45°, \tag{1}$$

Մինչև այս հավասարման ինտեգրմանն անցնելը նախ որոշենք քամու հարաբերական արագությունը, որը հավասար կլինի առագաստանավակի w բացարձակ և u փոխադրական արագությունների տարբերությանը։ Գծ. 23-ից երևում է, որ

$$\cos\varphi = \cos(45° + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\beta - \sin\beta), \tag{2}$$

ընդ որում

$$\cos\beta = \frac{w}{u}, \quad \sin\beta = \frac{v}{u}. \tag{3}$$



Գծ. 23

Միացնելով (2) և (3) բանաձևերը, կստանանք

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{u}(w - v). \tag{4}$$

Տեղադրելով (1)-ի մեջ P-ի արժեքը և միաժամանակ նկատի ունենալով (4)-ը, կարող ենք (1)-ին տալ հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{Q}{g}\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{4}ks(w - v)^2. \tag{5}$$

$v_{max}$ ստանալու համար $\frac{dv}{dt}$-ն պետք է հավասարեցնել զրոյի։ Կստացվի

$$v_{max} = w,$$

ինչպես նաև

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v}{w} = 1, \quad \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Սա նշանակում է, որ քամու հարաբերական արագությունը զուգահեռ է առագաստին։

*Եթե առագաստի լայնի վրա տեղավորենք հողմացույց, ապա այն կընդունի քամու հարաբերական արագության ուղղությունը։ Հետևաբար, հողմացույցի և առագաստի հարթությունների միջև կազմված անկյունը հավասար կլինի զրոյի* ($\alpha=0°$)։

*Մնում է պարզել, թե առագաստանավը շարժվելով առանց սկզբնական արագության, ինչքա՞ն ճանապարհ պետք է անցնի, որպեսզի ձեռք բերի* $v=\frac{2}{3}w$ *արագություն։ Դրա համար*

$$\frac{dv}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

*բանաձևի օգնությամբ (5) հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{v\,dv}{(w-v)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{ksg}{Q}dx\text{։}$$

*Ինտեգրելով այս հավասարումը, կստանանք*

$$\ln(w-v)+\frac{w}{w-v}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{ksg}{Q}x+c_1\text{։}\tag{6}$$

*Եթե օգտագործենք*

$$x=0,\quad \dot{x}=0,\quad \text{երբ}\quad t=0$$

*նախնական պայմանները, ապա կստանանք* $c_1=\ln w+1$, *և (6)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{w}{w-v}-1+\ln\frac{w-v}{w}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{ksg}{Q}x\text{։}\tag{7}$$

*Տեղադրելով (7)-ի մեջ* $v=\frac{2}{3}w$, *կստանանք*

$$x_1=100\,(2-\ln3)=90\ \text{մ},\quad \text{քանի որ}\ \ln3=1{,}0986\text{։}$$

Պ ա տ. 1) $v_{max}=w$, 2) $\alpha=0°$, $x_1=90$ մ։

**Խ ն դ ի ր 85 (707)**։ $P=1500$ տ *ջրատարողությամբ նավը հաղթահարում է ջրի* $R=\alpha v^2$ տ *դիմադրությունը, որտեղ* $\alpha=0{,}12$ տ $\frac{\text{վրկ}^2}{\text{մ}^2}$, *իսկ* v-*ն նավի արագությունն է։ Պտուտակի հենման ուժը ուղղված է շարժման արագության ուղղությամբ, փոփոխվում է* $T=T_0\left(1-\frac{v}{v_s}\right)$ *օրենքով, որտեղ* $T_0=120$ տ *պտուտակի հենման ուժն է, երբ նավը գտնվում է հանգստի վի-*

*ճակում, իսկ* $v_s = \text{const} = 33$ մ/վրկ։ *Գտնել անցած ճանապարհի կախումը արագությունից։*

**Լուծում:** *Նավն ընդունենք որպես նյութական կետ, իսկ շարժման հետագիծը՝* x *առանցք։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք նավի շարժման սկզբնական դիրքում։ Ժամանակի կամավոր* t *պահին ֆիքսենք նավի դիրքը և նրա կոորդինատը այդ պահին նշանակենք* x։ *Նավի վրա ազդում են պտուտակի*

$$T = T_0\left(1 - \frac{v}{v_s}\right) \tag{1}$$

*և ջրի դիմադրության*

$$R = \alpha v^2 \tag{2}$$

*ուժերը, ընդ որում այդ ուժերից առաջինը ուղղված է նավի շարժման ուղղությամբ, իսկ երկրորդը՝ շարժման հակառակ ուղղությամբ։*

*Գրենք նավի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Այն կլինի*

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = T_0\left(1 - \frac{v}{v_s}\right) - \alpha v^2\,\text{։} \tag{3}$$

*Նավի անցած ճանապարհի կախվածությունը արագությունից գտնելու համար (3)-ը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով*

$$mv\,\frac{dv}{dx} = T_0\left(1 - \frac{v}{v_s}\right) - \alpha v^2\,\text{։} \tag{4}$$

*Այժմ կատարենք փոփոխականների անջատում և ինտեգրենք ստացված հավասարումը, կստանանք*

$$c - x = \frac{m}{2\alpha}\ln\left[1 - \left(\frac{\varphi + v}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right] + \frac{m\varphi\sqrt{\varepsilon}}{2\alpha\varepsilon}\ln\left[\frac{1 + \dfrac{\varphi + v}{\sqrt{\varepsilon}}}{1 - \dfrac{\varphi + v}{\sqrt{\varepsilon}}}\right], \tag{5}$$

*որտեղ*

$$\varphi = \frac{T_0}{2\alpha v_s} = 15 \text{ մ/վրկ}, \quad \varepsilon = \frac{T_0}{\alpha}\left(1 + \frac{T_0}{4\alpha v_s^2}\right) = 1225\,\frac{\text{մ}^2}{\text{վրկ}^2}\,\text{։}$$

*Տեղադրելով այս արժեքները (5)-ի մեջ, կստանանք*

$$c - x = 637{,}5\ln\left[1 - \left(\frac{15 + v}{35}\right)^2\right] + 273{,}9\ln\left(\frac{50 + v}{20 - v}\right)\text{։} \tag{6}$$

*Մնում է այստեղից որոշել ինտեգրման* c *հաստատունը։*

*Խնդրի տվյալներից հետևում են հետևյալ նախնական պայման-ները.*

$$\text{երբ} \quad t=0 \mid x=0, \quad \dot{x}=v_0 \text{ ։} \tag{7}$$

*(7)-ի հիման վրա* c*-ի համար կունենանք հետևյալ արտա-հայտությունը՝*

$$c = 637{,}5 \ln\left[1-\left(\frac{15+v_0}{35}\right)^2\right] + 273{,}9 \ln\left(\frac{50+v_0}{20-v_0}\right) \text{ ։} \tag{8}$$

*Եթե* c*-ի այս արժեքը տեղադրենք (6)-ի մեջ և կատարենք որոշ ձևափոխություններ, կստանանք խնդրի պատասխանը։*

**Պատ.**
$$x = \left\{ 637{,}5 \ln\left(\frac{v_0^2+30v_0-1000}{v^2+30v-1000}\right) + 273{,}9 \ln\frac{(v_0-20)(v+50)}{(v-20)(v_0+50)} \right\} \text{ մ},$$

*որտեղ* $v$ *և* $v_0$*-ն արտահայտված են մ/վրկ-ով։*

**Խնդիր 36 (27. 37)։** $m$ *մասսա ունեցող նյութական կետը շարժվում է ուղիղ գծով (OX առանցքով)* $x=\beta$ *դիրքից* $v_0=0$ *սկզբնական արագությամբ իր վրա ազդող մի ուժի ազդեցության տակ, որը ձգում է նրան դեպի կոորդինատների սկզբնակետը։ Այդ ուժը փոփոխվում է* $R=\frac{\alpha}{x^2}$ *օրենքով։ Որոշել ժամանակի այն պահը, երբ կետը կգտնվի* $x_1=\frac{1}{2}\beta$ *դիրքում և այդ դիրքում կետի արագությունը։*

Լուծում: *Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{x^2}, \tag{1}$$

*Օգտվելով*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

*բանաձևից, կարելի է (1) հավասարումը գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$mv\,dv = -\frac{\alpha}{x^2}\,dx, \tag{2}$$

*Եթե ինտեգրենք այս հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք նախնական պայմանները, այսինքն՝*

$$\text{երբ } t=0 \;\Big|\; x = \beta, \qquad v = 0, \tag{3}$$

ապա կստանանք

$$v^2 = \frac{2\alpha}{m}\,\frac{\beta - x}{\beta x}$$

կամ

$$v = -\sqrt{\frac{2\alpha}{m\beta}}\,\sqrt{\frac{\beta - x}{x}}, \tag{4}$$

Այստեղ քառակուսի արմատ հանելիս վերցված է մինուս նշան, քանի որ կետի արագությունը ուղղված է $x$ առանցքի բացասական ուղղությամբ։

Եթե (4)-ում $v$-ն փոխարինենք $\frac{dx}{dt}$-ով, կատարենք փոփոխականների անջատում, ինտեգրենք ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը և օգտագործենք տված նախնական պայմանները, կստանանք

$$t = -\sqrt{\frac{m\beta}{2\alpha}}\int_{\beta}^{x}\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{\beta - x}}, \tag{5}$$

Այս ինտեգրալը հաշվելու համար կատարենք

$$x = \beta \sin^2 y$$

տեղադրումը։ Եթե $t_1$-ով նշանակենք այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում կետը կգտնվի $x_1 = \frac{1}{2}\beta$ դիրքում, ապա (5) հավասարումից կստանանք

$$t_1 = -\beta\sqrt{\frac{2m\beta}{\alpha}}\int_{\pi/2}^{\pi/4}\sin^2 y\,dy = -$$

$$-\beta\sqrt{\frac{2m\beta}{\alpha}}\int_{\pi/2}^{\pi/4}\frac{1-\cos 2y}{2}\,dy, \tag{6}$$

Մնում է հաշվել այս ինտեգրալը և տեղադրել սահմանները։ Կստացվի

$$t_1 = \frac{\beta^{3/2}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

Որոնելի արագությունը գտնելու համար պետք է (4)-ի մեջ x-ը փոխարինել $x_1 = \frac{1}{2}\beta$-ով։

Պատ. $t_1 = \frac{\beta^{3/2}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$, $v_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\beta}}$,

**Խնդիր 37 (27. 39)**։ *m մասսա ունեցող կետը կատարում է ուղղագիծ շարժում։ Նրա անցած ճանապարհի և արագության միջև եղած կապն արտահայտվում է*

$$x = a\sqrt{v} - b \tag{1}$$

*բանաձևով։ Գտնել այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում կետի սկզբնական արագությունը կմեծանա երկու անգամ։*

Լուծում: *Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ընդունել, որ սկզբնական պահին, երբ* $t=0$, $x=0$։ *Եթե այդ պահին կետի սկզբնական արագությունը նշանակենք* $v_0$, *ապա (1)-ից կունենանք*

$$0 = a\sqrt{v_0} - b\text{։}$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$v_0 = \frac{b^2}{a^2}\text{։} \tag{2}$$

*Նախ որոշենք կետի այն անցած ճանապարհը, որից հետո նրա արագությունը կկրկնապատկվի։ Դրա համար (1)-ի մեջ* $v$-*ի փոխարեն տեղադրենք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$v = 2v_0 = 2\frac{b^2}{a^2}\text{։} \tag{3}$$

*Այդ դեպքում կստանանք*

$$x_1 = a\frac{b}{a}\sqrt{2} - b = b(\sqrt{2}-1)\text{։} \tag{4}$$

*Այժմ (1) հավասարումը լուծենք* $v$-*ի նկատմամբ և* $v$-*ն փոխարինենք* $\frac{dx}{dt}$-*ով։ Կունենանք*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(x+b)^2}{a^2}, \tag{5}$$

*Այստեղ արմատ հանելիս գրված է դրական նշան, քանի որ (1)-ից հետևում է, որ* $v$-*ն բացասական լինել չի կարող։*

$t_1$-*ով նշանակենք այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում կետի սկզբնական արագությունը կկրկնապատկվի։ Եթե ինտեգ-*

րենք (5) հավասարումը և նկատի ունենանք, որ երբ $x = x_1$, $t=t_1$, կստանանք

$$t_1 = a^2 \int_0^{x_1} \frac{dx}{(x+b)^2}.$$

Մնում է հաշվել այս ինտեգրալը և տեղադրել սահմանները։

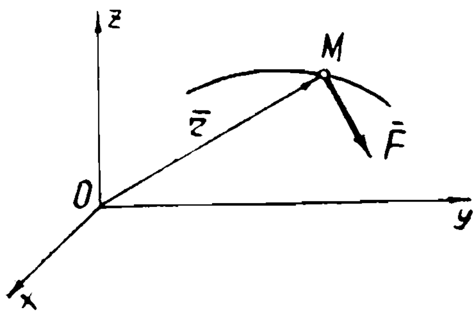
Պատ. $t_1 = \frac{a^2}{b}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

## § 4. ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

### (Կետի կորագիծ շարժում)

**1. Կետի կորագիծ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները:** Դիցուք M ազատ նյութական կետը շարժվում է տարածության մեջ իր վրա կիրառված $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ......, $\bar{F}_n$ ուժերի ազդեցության տակ (գծ. 24)։ Եթե այդ կետի վրա կիրառված ուժերի համազորը նշանակենք $\bar{F}$ և շառավիղ-վեկտորը՝ $\bar{r}$, ապա նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաձայն M կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}. \qquad (I)$$




Գծ. 24

(I)-ը ազատ նյութական կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումն է վեկտորական տեսքով։

Պրոյեկտելով (I) հավասարման երկու մասերը OXYZ սիստեմի առանցքների վրա, կստանանք ազատ նյութական կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներով՝

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \qquad (II)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z,$$

կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կարելի է գրել նաև ցանկացած կորագիծ կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ: Օրինակ, կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները բնական եռանիստի առանցքների նկատմամբ կլինեն

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau,$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_n, \qquad \text{(III)}$$

$$0 = F_b,$$

որտեղ $\rho$-ն կետի հետագծի կորության շառավիղն է. $F_\tau$, $F_n$, $F_b$՝ $\bar{F}$ ուժի պրոյեկցիաները կետի հետագծի բնական եռանիստի առանցքների վրա ($\tau$՝ շոշափող, $n$՝ գլխավոր նորմալ, $b$՝ բինորմալ):

Եթե կետը շարժվում է հարթության վրա, ապա նրա շարժման դիֆերենցիալ հավասարումների թիվը կլինի երկու: $(xy)$ հարթության վրա շարժվելիս կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն (III)-ի առաջին երկու հավասարումները: Նյութական կետի հարթ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները բևեռային կոորդինատներով կլինեն՝

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r,$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi,$$

որտեղ $r$-ը կետի շառավիղ-վեկտորն է, իսկ $\varphi$-ն՝ բևեռային անկյունը:

Այսպիսով, կետի կորագիծ շարժման դեպքում դինամիկայի հիմնական խնդրի լուծումը դեկարտյան կոորդինատական սիստեմում բերվում է (II) դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի ինտեգրմանը, իսկ բնական կոորդինատական սիստեմի դեպքում՝ (III) սիստեմի ինտեգրմանը: Ընդհանուր դեպքում $\bar{F}$ ուժը կարող է կախված լինել $t$ ժամանակից, կետի $\bar{r}$ շառավիղ-վեկտորից և $v$ արագությունից: Հետևաբար, ընդհանուր դեպքում (II) սիստեմը իրենից ներկայացնում է

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \qquad (IV)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$$

տեսքի երկրորդ կարգի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմ, որի ինտեգրումը կապված է լուրջ դժվարությունների հետ և հաճախ հնարավոր չէ բերել կվադրատուրայի։ Այդ դեպքերում (IV) սիստեմը պետք է ինտեգրել մոտավոր մեթոդներով։ Այդ նպատակի համար կարելի է օգտագործել հաշվային մեքենաները։

Եթե հաջողվի որևէ ձևով ինտեգրել (IV). դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմը, ապա նրա ընդհանուր լուծման մեջ կմասնակցեն ինտեգրման վեց հաստատուններ։ (IV)-ի ընդհանուր լուծումը կլինի

$$\begin{aligned} x&=f_1(t,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6),\\ y&=f_2(t,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6),\\ z&=f_3(t,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6), \end{aligned} \qquad (V)$$

որտեղ $c_1$, $c_2$, ..., $c_6$ ինտեգրման հաստատուններն են։ Սրանց որոշման համար խնդրում պետք է տված լինեն լրացուցիչ տըվյալներ, որոնք կոչվում են շարժման նախնական պայմաններ։ Ինչպես հայտնի է, նյութական կետի շարժման նախնական պայմանները որոշում են կետի դիրքը և արագությունը որևէ ֆիքսըված ժամանակամիջոցում։ Դեկարտյան կոորդինատական սիստեմում կետի դիրքը տրվում է (x, y, z) կոորդինատների միջոցով, իսկ արագությունը՝ նրա երեք պրոյեկցիաներով $(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$։ Այսպիսով, նախնական պայմանները ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\text{երբ}\ t=t_0 \quad \left|\ \begin{aligned} &x=x_0,\quad y=y_0,\quad z=z_0\\ &\dot{x}=\dot{x}_0,\quad \dot{y}=\dot{y}_0,\quad \dot{z}=\dot{z}_0, \end{aligned}\right. \qquad (VI)$$

Հաճախ (VI) պայմանները տրվում են ժամանակի սկզբնական մոմենտի համար, երբ $t=0$։

Այս (VI) նախնական պայմանների միջոցով որոշվում են ինտեգրման $c_1$, $c_2$, ..., $c_6$ հաստատունները։ Դրա համար պետք է կազմել (V) արտահայտությունների ածանցյալները ըստ ժամանակի՝

$$\begin{aligned} \dot{x}&=\dot{f}_1(t,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6),\\ \dot{y}&=\dot{f}_2(t,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_6), \end{aligned} \qquad (VII)$$

$$\dot{z} = \dot{f}_3 (t, c_1, c_2, \ldots, c_6),$$

*այնուհետև (VI) և (VII) հավասարումների մեջ տեղադրել նախնական պայմանները։ Կստացվեն վեց հանրահաշվական հավասարումներ, որոնք ձախ մասերում կպարունակեն $x_0$, $y_0$, $z_0$, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ մեծությունները, իսկ աջ մասերում՝ տված $t_0$ մեծությունը և $c_1, c_2, \ldots, c_6$ անհայտները։ Լուծելով այս հավասարումների սիստեմը, կարող ենք որոշել ինտեգրման վեց հաստատունները։ Սիստեմը կարելի է լուծել, քանի որ ընդունում ենք*

$$\Delta = \frac{\partial (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{\partial (c_1, c_2, \ldots, c_6)}$$

*ֆունկցիոնալ որոշիչը տարբեր զրոյից։ Եթե լիներ $\Delta = 0$, ապա կետի սկզբնական դիրքը և սկզբնական արագությունը իրարից անկախ չէին լինի, նրանց միջև գոյություն կունենար գոնե մեկ առնչություն։ Տեղադրելով $c_1, c_2, \ldots, c_6$-ի համար ստացված արժեքները (V)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման օրենքը՝*

$$\begin{aligned} x &= f_1 (t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= f_2 (t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= f_3 (t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \end{aligned} \qquad \text{(VIII)}$$

(VIII) *հավասարումները տալիս են դինամիկայի հիմնական խնդրի լուծումը, երբ տված է կետի վրա ազդող ուժը և կետի շարժման նախնական պայմանները։*

*Եթե կետի շարժումը տեղի ունի* xy *հարթության վրա, ապա դիֆերենցիալ հավասարումների թիվը կլինի երկու, իսկ նախնական պայմանների թիվը՝ չորս։ Այդ դեպքում կունենանք*

$$\text{երբ } t = t_0 \; \left| \; \begin{aligned} x &= x_0, \quad y = y_0, \\ \dot{x} &= \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0. \end{aligned} \right. \qquad \text{(IX)}$$

*Դինամիկայի հիմնական խնդրի լուծումը կարելի է բերել նաև* (IV) *դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի առաջին ինտեգրալները գտնելուն, այսինքն՝*

$$\Phi (t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, c) = 0$$

*կամ*

$$f (t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = c$$

*տեսքի առնչությունները գտնելուն, որոնք* (IV) *հավասարումների ուժի տակ տեղի ունեն ցանկացած նախնական պայմանների դեպքում և տալիս են առնչություն ժամանակի, կետի կոորդի-*

ճառների, կետի արագությունների և կամայական հաստատունի միջև:

Եթե հայտնի է (IV) սիստեմի ընդհանուր լուծումը, այսինքն՝ հայտնի են (V) և (VII)-ը, ապա լուծելով այդ հավասարումները $c_i$ $(i=1, 2, \ldots, 6)$ կամայական հաստատունների նկատմամբ, կարելի է ստանալ շարժման վեց առաջին ինտեգրալները՝

$$f_i(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = c_i \quad (i=1, 2, \ldots, 6):$$

Ընդհանրապես, եթե որևէ ձևով մեզ հաջողվի գտնել իրարից անկախ վեց առաջին ինտեգրալները, կարող ենք դրանցից ստանալ շարժման հավասարումների լուծումը (VIII) տեսքով: Առաջին ինտեգրալների գտնելը կարևոր է նաև նրանով, որ մեխանիկայի մի շարք կոնկրետ խնդիրներ լուծելու ժամանակ անհրաժեշտ է լինում գտնել այդ ինտեգրալներից միայն մի քանիսը (երբեմն միայն մեկը), որը էապես հեշտացնում է լուծման պրոցեսը:

Շատ դեպքերում շարժման հավասարումների առաջին ինտեգրալները կարելի է գտնել դինամիկայի ընդհանուր թեորեմներից, որոնք կետի դեպքում դինամիկայի ընդհանուր օրենքի հետևանքներն են:

**2. Կետի կորագիծ շարժման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը:** Կետի կորագիծ շարժման վերաբերյալ խնդիրների լուծման քայլերը հիմնականում նույնն են, ինչ ուղղագիծ շարժման դեպքում: Համառոտակի նշենք այդ քայլերը:

ա) Ընտրել հաշվառքի սիստեմը, եթե այն չի նշված խնդրի պայմաններում:

բ) Ժամանակի կամավոր t մոմենտում ֆիքսել շարժվող կետի դիրքը:

գ) Նշել կետի վրա ազդող ուժերը և կազմել այդ ուժերի պրոյեկցիաների գումարը ընտրված հաշվառքի սիստեմի առանցքների նկատմամբ:

դ) Կազմել կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները:

ե) Կազմել կետի շարժման նախնական պայմանները:

զ) Նախնական պայմանների միջոցով որոշել ինտեգրման հաստատունները և ստացած արժեքները տեղադրել սիստեմի ընդհանուր լուծման մեջ:

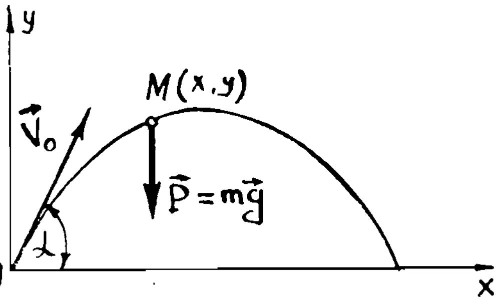
է) Որոշել խնդրում եղած անհայտ մեծությունները և կատարել ստացված արդյունքների հետազոտումը:

Այստեղ նույնպես նպատակահարմար է խնդրի լուծումը կատարել ընդհանուր ձևով (տառային արտահայտություններով) և միայն վերջում տեղադրել թվային արժեքները։

## 3. ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ստորև բերվում են կետի կորագիծ շարժման վերաբերյալ մի քանի խնդիրների լուծումները։

**Խնդիր 38։** Մարմինը նետված է հորիզոնի նկատմամբ $\alpha$ անկյան տակ $v_0$ արագությամբ։ Որոշել մարմնի շարժման օրենքը և հետագծի հավասարումը։ Դիմադրության ուժերը արհամարհել (գծ. 25)։




Գծ. 25

Լուծում: Մարմինը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Հայտնի է, որ կետը կկատարի հարթ շարժում։ Տանենք xoy կոորդինատական սիստեմը, ինչպես ցույց է տրված գծագրում։ Ժամանակի կամայական $t$ մոմենտում ֆիքսենք կետի դիրքը և նրա կոորդինատները այդ մոմենտում նշանակենք $(x, y)$։ Մարմնի վրա ազդում է միայն իր $\bar{P} = m\bar{g}$ ծանրության ուժը։ Գրենք շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները $x$ և $y$ առանցքների նկատմամբ։ Դրանք կլինեն

$$m\ddot{x} = 0,$$
$$m\ddot{y} = -mg, \qquad (1)$$

որտեղ $m$-ը մարմնի մասսան է։

Սկզբնական մոմենտում կետը գտնվել է կոորդինատների սկզբնակետում, և նրա $v_0$ արագությունը $ox$ առանցքի հետ կազմել է $\alpha$ անկյուն։ Հետևաբար, կետի շարժման սկզբնական պայմանները կլինեն

$$\text{երբ } t = 0 \;\left|\; \begin{array}{l} x = 0, \quad y = 0, \\ v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha \text{։} \end{array}\right. \qquad (2)$$

Հաջորդաբար ինտեգրելով (1) դիֆերենցիալ հավասարումները, կստանանք

$$\dot{x} = c_1, \quad \dot{y} = -gt + c_2, \qquad (3)$$

$$x = c_1 t + c_3, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + c_2 t + c_4, \tag{4}$$

*որտեղ* $c_1$, $c_2$, $c_3$ *և* $c_4$*-ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։*

*Եթե (3)-ի և (4)-ի մեջ տեղադրենք (2) նախնական պայմանները և լուծենք ստացված չորս հավասարումները, կստանանք*

$$c_1 = v_0 \cos\alpha, \quad c_2 = v_0 \sin\alpha, \quad c_3 = c_4 = 0։$$

*Տեղադրելով* $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$*-ի այս արժեքները (4)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման օրենքը՝*

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \tag{5}$$

*Այս հավասարումից արտաքսելով* $t$ *ժամանակը, կստանանք հետագծի հավասարումը՝*

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}։$$

*Նշանակում է, հետագիծը կլինի պարաբոլ։*

Պատ. $x = x_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2։$$

27.40.

**Խնդիր 39 (711)**։ A *ինքնաթիռը* $v_1$ *հորիզոնական արագությամբ թռչում է երկրից* $h$ *բարձրության վրա։ Այն պահին, երբ ինքնաթիռը և հրանոթը գտնվում էին միևնույն ուղղաձիգի վրա, հրանոթից դեպի ինքնաթիռը կրակ արձակեցին։ Գտնել՝ 1) ինչպիսի՞ պայմանի պետք է բավարարի արկի* $v_0$ *սկզբնական արագությունը, որպեսզի նա դիպչի ինքնաթիռին, 2) հորիզոնի նկատմամբ ինչպիսի՞* $\alpha$ *անկյան տակ պետք է կրակել։ Օդի դիմադրությունը արհամարհվում է։*

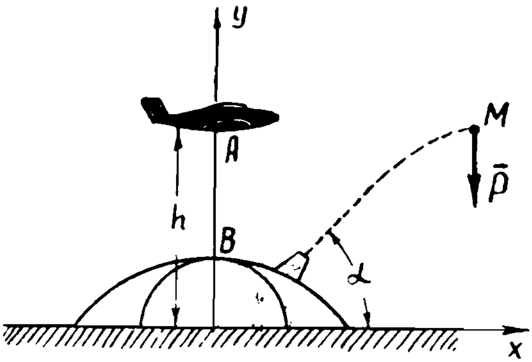
Լուծում: *Կոորդինատական* $x$ *առանցքը ուղղենք հորիզոնական ուղղությամբ, իսկ* $y$ *առանցքը՝ այն ուղղաձիգով, որի վրա գտնվում են ինքնաթիռը և հրանոթը (գծ. 26)։ Հրանոթի արկը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Արկի վրա ազդում է միայն իր* $m\bar{g}$ *ծանրության ուժը։ Գրենք արկի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները՝*

$$m\ddot{x} = 0 \qquad (1)$$
$$m\ddot{y} = -mg,$$

որտեղ m-ը արկի մասսան է։

Սկզբնական մոմենտում արկը գտնվել է կոորդինատների սկզբնակետում, և նրա $v_0$ սկզբնական արագությունը OX առանցքի հետ կազմել է α անկյուն։ Հետևաբար, արկի շարժման սկզբնական պայմանները կլինեն

$$\text{երբ } t = 0 \;\Big|\; \begin{array}{l} x = y = 0, \\ v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha \end{array} \qquad (2)$$




Գծ. 26

Պահանջվում է գտնել (1) դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի լուծումը, որը բավարարի (2) նախնական պայմաններին։ Ինտեգրելով (1) դիֆերենցիալ հավասարումները մեկ անգամ, կստանանք

$$\dot{x} = c_1, \quad \dot{y} = -gt + c_2. \qquad (3)$$

Ինտեգրենք (3)-ը երկրորդ անգամ։ Կունենանք

$$x = c_1 t + c_3,$$
$$y = -\frac{gt^2}{2} + c_2 t + c_4. \qquad (4)$$

Այստեղ $c_1$, $c_2$, $c_3$ և $c_4$-ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։

Եթե (3) և (4)-ի մեջ տեղադրենք (2) նախնական պայմանները և լուծենք ստացված չորս հավասարումները $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$-ի նկատմամբ, կստանանք

$$c_1 = v_0 \cos\alpha, \quad c_2 = v_0 \sin\alpha, \quad c_3 = c_4 = 0 ։ \tag{5}$$

*Տեղադրելով* $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$*-ի այս արժեքները (4)-ի մեջ, կստանանք արկի շարժման օրենքը հետևյալ տեսքով՝*

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\alpha, \\ y &= v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} ։ \end{aligned} \tag{6}$$

*Այն մոմենտին, երբ արկը կպչում է ինքնաթիռին, պետք է տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝*

$$x = x_1, \quad y = h, \tag{7}$$

*որտեղ* $x_1 = v_1 T$։ $T$*-ն արկի շարժման ժամանակամիջոցն է մինչև ինքնաթիռին կպչելը, իսկ* $x_1$*-ը ինքնաթիռի անցած ճանապարհն է* $T$ *ժամանակամիջոցում։*

*(6)-ի և (7)-ի առաջին առնչություններից և* $x_1 = v_1 T$*-ից հետևում է, որ*

$$v_0 T \cos\alpha = v_1 T ։$$

*Այստեղից ստացվում է* $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0}$։ *Նույն ձևով (6)-ի և (7)-ի երկրորդ առնչություններից, կստանանք*

$$v_0 T \sin\alpha - \frac{gT^2}{2} = h ։ \tag{8}$$

*(8)-ը* $T$*-ի նկատմամբ քառակուսի հավասարում է։ Լուծելով այն, կստանանք արկի շարժման* $T$ *ժամանակամիջոցի համար հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$T = \frac{1}{g}\left(v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}\right) ։ \tag{9}$$

*(9)-ից հետևում է, որ արկի կպչելը ինքնաթիռին հնարավոր է միայն*

$$v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh \geqslant 0 \tag{10}$$

*պայմանի դեպքում։*

*Միացնելով (10) պայմանը* $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0}$ *առնչության հետ, կստանանք*

$$v_0^2\left(1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}\right) - 2gh \geqslant 0$$

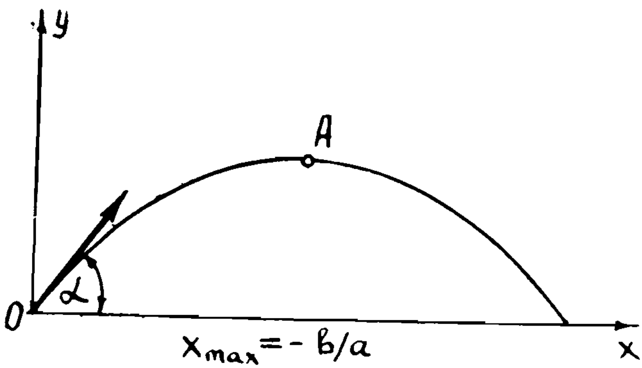
*կամ*

$$v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh\,$$

Պատ. *1)* $v_0^2 \geqslant v_1^2 + 2gh$, *2)* $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_0}$։

Խնդիր **40 (714)**։ *Գտնել արկի թռիչքի հեռավորությունը, եթե նրա հետագծի ամենաբարձր կետի կորության շառավիղը* $\rho = 16$ կմ *է, իսկ հրանոթի փողի թեքության անկյունը հորիզոնի նկատմամբ՝* $\alpha = 30°$։ *Օդի դիմադրությունը անտեսել (գծ. 27)։*

Լուծում: *Արկն ընդունենք որպես նյութական կետ: Կոորդինատական սիստեմը տանենք գծագրում ցույց տրված ձևով։ Քանի որ կետը կատարում է ազատ շարժում, ապա 38-րդ խնդրի համաձայն արկի հետագիծը կլինի կոորդինատական սիստեմի սկզբնակետով անցնող պարաբոլ։ Գրենք այդ պարաբոլի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝*




Գծ. 27

$$y = ax^2 + bx, \tag{1}$$

*որտեղ* $a < 0$ *և* $-\frac{b}{a} > 0$։

*Հայտնի է, որ (1) պարաբոլի ամենաբարձր կետի աբսցիսը որոշվում է* $x_1 = -\frac{b}{2a}$ *բանաձևով։ Գրենք կորության շառավղի արտահայտությունը՝*

$$\rho = \pm\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \tag{2}$$

*Եթե (2)-ի մեջ տեղադրենք* y-*ի արժեքը (1)-ից և կատարենք նշված բոլոր գործողությունները, կստանանք*

$$\rho = \pm \frac{[1+(2ax_1+b)^2]^{3/2}}{2a}, \tag{3}$$

*Այժմ մնում է (3)-ի մեջ* $x_1$*-ը փոխարինել* $-\frac{b}{2a}$ *արժեքով և վերցնել այն նշանը, որը ապահովում է* ρ*-ի դրական լինելը։ Այստեղից ստացվում է*

$$\rho = -\frac{1}{2a}, \tag{4}$$

*(4)-ից հետևում է*

$$a = -\frac{1}{2\rho}: \tag{5}$$

*Մյուս կողմից հայտնի է, որ*

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \operatorname{tg}\alpha : \tag{6}$$

*(1)-ի հիման վրա (6)-ից կստանանք*

$$b = \operatorname{tg}\alpha , \tag{7}$$

*Գծագրից երևում է, որ*

$$x_{max} = -\frac{b}{a} , \tag{8}$$

*(8)-ի մեջ տեղադրելով* a *և* b*-ի արժեքները (5)-ից և (7)-ից, կստանանք խնդրի պատասխանը։*

Պատ. $x_{max} = 2\rho \operatorname{tg}\alpha = 18480$ մ։

49 **Խնդիր 41 (720)։** $v_0$ *սկզբնական արագությամբ և հորիզոնի նկատմամբ* α *անկյան տակ նետված* P *կշիռ ունեցող մարմինը շարժվում է ծանրության ուժի և օդի* R *դիմադրության ազդեցության տակ։ Որոշել մարմնի ամենամեծ* h *բարձրությունը նրա սկզբնական դիրքի մակարդակի նկատմամբ, ընդունելով, որ դիմադրությունը համեմատական է արագության առաջին աստիճանին՝* R=kPv։

Լուծում։ *Տանենք կոորդինատական սիստեմն այնպես, ինչպես ցույց է տրված 28-րդ գծագրում։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք կետի նետման դիրքում։ Ակնհայտ է, որ կետը կկատարի հարթ շարժում։ Արագության* $\bar{V}$ *վեկտորը կգտնվի* xy *հարթության վրա։*

*Կետի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ 1) կետի* $\bar{P}$ *կշիռը և 2) օդի դիմադրության* $\bar{R}$ *ուժը, որն ուղղված է կետի արագու-*

թյանը հակառակ։ Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն

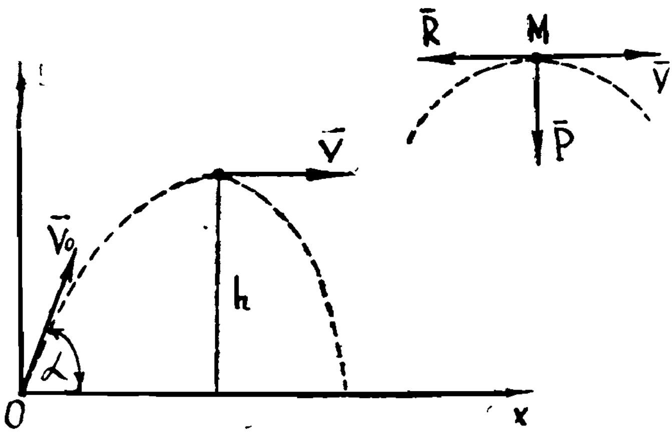
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kPv\cos\alpha,$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -P - kPv\sin\alpha, \qquad (1)$$

Քանի որ

$$v\cos\alpha = \frac{dx}{dt}, \quad v\sin\alpha = \frac{dy}{dt},$$

ապա (1)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kg\frac{dx}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + kg\frac{dy}{dt} = -g, \qquad (2)$$




Գծ. 28

Այստեղ ունենք հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ, որի ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x = c_1 + c_2 e^{-kgt},$$
$$y = c_3 + c_4 e^{-kgt} - \frac{1}{k}t, \qquad (3)$$

որտեղ $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք *որոշվում են նախնական պայմաններից։ Խնդրի նախնական պայմանները կլինեն*

$$\text{երբ } t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = y = 0, \\ v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha \text{ ։} \end{array} \right. \tag{4}$$

*(3)-ի և նրանց ածանցյալների մեջ տեղադրելով այս արժեքները, կստանանք*

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_2 = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg}, \\ c_3 &= -c_4 = \frac{kv_0 \sin \alpha + 1}{k^2 g} \text{ ։} \end{aligned} \tag{5}$$

*Տեղադրելով* $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$*-ի արժեքները (3)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման օրենքը հետևյալ տեսքով՝*

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} \left(1 - e^{-kgt}\right), \\ y &= \frac{1}{k^2 g} \left(1 + kv_0 \sin \alpha\right)\left(1 - e^{-kgt}\right) - \frac{1}{k} t \text{ ։} \end{aligned} \tag{6}$$

$h = y_{max}$ *գտնելու համար կազմենք* $\frac{dy}{dt}$*-ի արտահայտությունը, այնուհետև այն հավասարեցնենք զրոյի, կստանանք*

$$\left(\frac{1}{k} + v_0 \sin \alpha\right) e^{-kgt} - \frac{1}{k} = 0 \text{ ։}$$

*Լուծելով այս հավասարումը* $t$*-ի նկատմամբ, ստանում ենք*

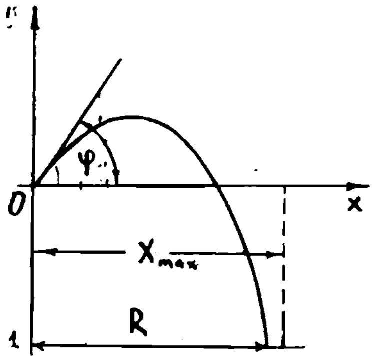
$$t_1 = \frac{1}{kg} \ln \left(1 + kv_0 \sin \alpha\right) \text{ ։}$$

*Մնում է* $t_1$*-ի այս արժեքը տեղադրել (6)-ում* $y$*-ի արտահայտության մեջ և կատարել նշված գործողությունները։*

Պ ա տ. $\quad h = \frac{v_0 \sin \alpha}{kg} - \frac{1}{k^2 g} \ln \left(1 + kv_0 \sin \alpha\right)$ ։

**Խ ն դ ի ր 42 (723)**։ *Շրջանաձև ավազանի կենտրոնում տեղավորված է վերևից փակ ուղղաձիգ խողովակ։ Խողովակի կողմնային մակերևույթին, 1 մ բարձրության վրա կան անցքեր, որոնցից դուրս են ցայտում ջրի թեք շիթեր հորիզոնի նկատ-*

ժամբ տարբեր φ անկյունների տակ $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$։ Շիթի սկզբնական արագությունը՝ $v = \sqrt{\frac{4g}{3\cos\varphi}}$ մ/վրկ, որտեղ g-ն ծանրության ուժի արագացումն է։ Որոշել ավազանի այն ամենափոքր R շառավիղը, որի դեպքում խողովակից դուրս ցայտած ջուրը կթափվի ավազանի մեջ, որքան էլ փոքր լինի ավազանի պատերի բարձրությունը (գծ. 29)։




Գծ. 29

Լուծում։ Կոորդինատական սիստեմն ընդունենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում։ Այստեղ ջրի շիթը կատարում է ազատ շարժում։ Քանի որ ջրի շիթերը հորիզոնի նկատմամբ կազմում են φ անկյուն, և նրանց սկզբնական արագությունը հավասար է $v_0$-ի, ուստի ջրի կաթիլի շարժման օրենքը 38-րդ խնդրի համաձայն կլինի

$$x = v_0 t \cos\varphi,$$
$$y = v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2}, \qquad (1)$$

Եթե (1)-ից արտաքսենք t-ն, կստանանք

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\varphi}, \qquad (2)$$

(2)-ի մեջ տեղադրելով $y = -1$ և $v = \sqrt{\frac{4g}{3\cos\varphi}}$ արժեքները, կունենանք

$$3x^2 - 8x\sin\varphi - 8\cos\varphi = 0։ \qquad (3)$$

Եթե (3)-ը ածանցենք ըստ φ-ի և $\frac{dx}{d\varphi}$-ի արտահայտությունը հավասարեցնենք զրոյի, կստանանք

$$x = \operatorname{tg}\varphi։ \qquad (4)$$

(4)-ից կարելի է ստանալ, որ

$$\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}。 \qquad (5)$$

*(5)-ի հիման վրա (3)-ին կարելի է տալ հետևյալ տեսքը.*

$$\sqrt{1+x^2}\,(3x^2-8\sqrt{1+x^2}) = 0։$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$x_{max} = \sqrt{8}։$$

*Մյուս կողմից ունենք*

$$x_{max} = r_{min} = R։$$

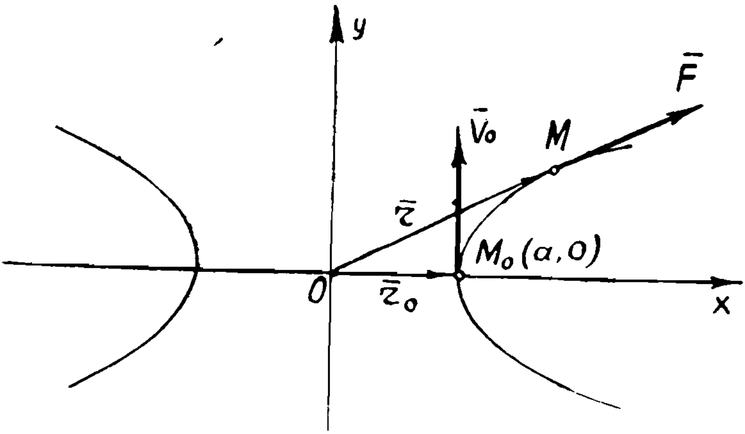
*Այսպիսով, ստացվում է*

$$R = \sqrt{8} = 2{,}83 \text{ մ}։$$

Պատ. $R = 2{,}83$ մ։

7.54

**Խնդիր 43 (725)։** m *մասսա ունեցող կետը շարժվում է* O *անշարժ կետից վանող ուժի ազդեցության տակ, որը փոփոխվում է* $F=k^2mr$ *օրենքով, որտեղ* r*-ը կետի շառավիղ-վեկտորն է։ Սկզբնական մոմենտում կետը գտնվել է* $M_0(a, o)$ *դիրքում և ունեցել է* $v_0$ *արագություն՝ ուղղված* y *առանցքին զուգահեռ։ Որոշել կետի հետագիծը (գծ. 30)։*




*Գծ. 30*

Լուծում։ *Կոորդինատական սիստեմի ընտրությունը ցույց է տրված գծագրում։ Ժամանակի կամավոր* t *մոմենտում ֆիքսենք կետի դիրքը և նրա կոորդինատները նշանակենք* M(x, y)։

կետի վրա ազդում է միայն $\bar{F}=k^2m\bar{r}$ ուժը, որտեղ $\bar{r}$-ը կետի շառավիղ-վեկտորն է։ Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը վեկտորական տեսքով կլինի

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=k^2m\bar{r}\,։ \tag{1}$$

Պրոյեկտելով (1) հավասարումը կոորդինատական x և y առանցքների վրա, կստանանք

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k^2mx\,,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=k^2my$$

կամ

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}-k^2x=0,\\&\frac{d^2y}{dt^2}-k^2y=0\,։\end{aligned} \tag{2}$$

Այստեղ ունենք հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ, որի ընդհանուր լուծումը կլինի

$$\begin{aligned}&x=c_1e^{kt}+c_2e^{-kt},\\&y=c_3e^{kt}+c_4e^{-kt},\end{aligned} \tag{3}$$

որտեղ $c_1$, $c_2$, $c_3$ և $c_4$-ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են խնդրի նախնական պայմաններից։ Խնդրի նախնական պայմանները կլինեն

$$\text{երբ } t=0 \;\left|\; \begin{aligned}&x=a, \quad y=0,\\&\dot{x}=0, \quad \dot{y}=v_0\,։\end{aligned}\right. \tag{4}$$

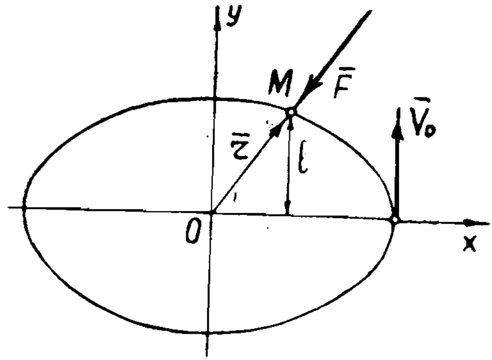
Եթե (3)-ի հիման վրա կազմենք $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ածանցյալները և ստացած արտահայտությունների ու (3)-ի մեջ տեղադրենք (4) նախնական պայմանները, կստանանք չորս հավասարումների համակարգ, որից կորոշենք $c_1$, $c_2$, $c_3$ և $c_4$ ինտեգրման հաստատունները։ Տեղադրելով $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$-ի համար ստացած արժեքները (3)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման օրենքը հետևյալ տեսքով՝

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right),$$
$$y = \frac{v_0}{2k}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right), \qquad (5)$$

*Մնում է (5) հավասարումներից արտաքսել* t *ժամանակը և ստանալ կետի շարժման հետագծի հավասարումը։*

Պ ա տ. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$ *հիպերբոլ։*

**Խ ն դ ի ր 44։** m *մասսա ունեցող նյութական կետը շարժվում է հարթության վրա ձգողության* $\bar{F}$ *ուժի ազդեցության տակ, որը անցնում է անշարժ* O *կետով և փոփոխվում է* $\bar{F} = -mk^2\bar{r}$ *օրենքով, որտեղ* $\bar{r}$*-ը շարժվող կետի շառավիղ-վեկտորն է (գծ. 31), իսկ* k*-ն՝ հաստատուն գործակից։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորված է* O *անշարժ կետում։ Սկզբնական մոմենտում, երբ* $t = 0$, *տրված է* $x = l$, $y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = v_0$։ *Գտնել կետի շարժման օրենքը և հետագծի հավասարումը։*




Գծ. 31

Լ ու ծ ու մ: *Շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk^2r\cos\varphi,$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mk^2r\sin\varphi. \qquad (1)$$

*Նկատի ունենալով, որ*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

*(1) հավասարումներին կարող ենք տալ հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = 0,$$

*Այստեղ ունենք հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ։ Այս համակարգի ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cos kt + c_2 \sin kt, \\ y &= c_3 \cos kt + c_4 \sin kt, \end{aligned} \qquad (3)$$

*որտեղ* $c_1$, $c_2$, $c_3$ *և* $c_4$*-ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։ Խնդրի տվյալների համաձայն նախնական պայմանները կլինեն*

$$\text{երբ } t = 0 \quad \left| \begin{array}{ll} x = l, & y = 0, \\ v_x = 0, & v_y = v_0 , \end{array} \right. \qquad (4)$$

*Եթե (3)-ի հիման վրա կազմենք* $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ *ածանցյալները և ստացված արտահայտությունների ու (3)-ի մեջ տեղադրենք (4) նախնական պայմանները, կստանանք*

$$c_1 = l, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{v_0}{k}. \qquad (5)$$

*Տեղադրելով այս արժեքները (3)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման օրենքը հետևյալ տեսքով՝*

$$x = l \cos kt, \quad y = \frac{v_0}{k} \sin kt. \qquad (6)$$

*(6)-ից արտաքսելով* $t$ *ժամանակը, կունենանք*

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{k^2y^2}{v_0^2} = 1.$$

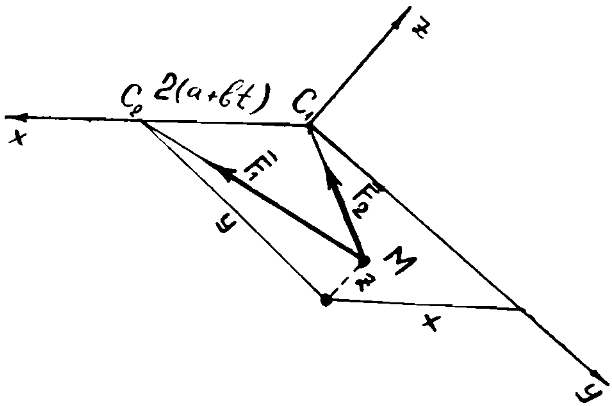
*Սա կլինի կետի շարժման հետագիծը։*

Պ ա տ. *1) Շարժման օրենքը՝* $x = l \cos kt$, $y = \frac{v_0}{k} \sin kt$ .

*2) Հետագիծը՝* $\frac{x^2}{l^2} + \frac{k^2y_2}{v_0^2} = 1$.

**Խնդիր 45 (728)։** M *կետը ձգվում է դեպի* $C_1$ *և* $C_2$ *կենտրոնները հեռավորություններին համեմատական ուժերով՝* $km \cdot MC_1$ *և* $km \cdot MC_2$*։* $C_1$ *կենտրոնը անշարժ է և գտնվում է* *կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ* $c_2$ *կենտրոնը շարժվում է հավասարաչափ,* ox *առանցքով ըստ* $x_2=2(a+bt)$ *օրենքի։ Գտնել* M *կետի հետագիծը, ենթադրելով, որ* $t=0$ *մոմենտում* M *կետը գտնվում է* xy *հարթության վրա։ Նրա կոորդինատներն են* $x=y=a$, *արագության պրոյեկցիաները՝* $\dot{x} = \dot{z} = b$, $\dot{y} = 0$։

Լուծում: *Քանի որ խնդրի պայմաններից նախօրոք չի երևում, որ հետագիծը գտնվում է հարթության վրա, ուստի շարժումը դիտարկենք տարածական կոորդինատական սիստեմի նըկատմամբ։ Առանցքները կարելի է ընտրել կամավոր, բայց խնդրի պայմանից հետևում է, որ նպատակահարմար կլինի կո-*




*Գծ. 32*

*որդինատների սկզբնակետը տեղավորել* $c_1$ *անշարժ կետում,* x *առանցքը ուղղել* $c_2$ *կետով՝ հորիզոնական ուղղությամբ,* y *առանցքը՝ նույնպես հորիզոնական ուղղությամբ, իսկ* z *առանցքը՝ ուղղաձիգ դեպի վեր (գծ. 32)։*

*Ժամանակի կամավոր* t *մոմենտում ֆիքսենք* M *կետի դիրքը և նրա կոորդինատները այդ մոմենտում նշանակենք* (x, y, z)*։ Այդ կետի վրա ազդում են ձգողության* $\bar{F}_1$ *և* $\bar{F}_2$ *ուժերը, որոնցից առաջինը ուղղված է դեպի* $c_1$ *կետը, իսկ երկրորդը՝ դեպի* $c_2$ *կետը։ Այդ ուժերի մեծությունները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝*

$$
\begin{aligned}
F_1 &= km \cdot Mc_1 = km\, r_1, \\
F_2 &= km \cdot Mc_2 = km\, r_2.
\end{aligned} \tag{1}
$$

*Գրենք* M *կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները։ Դրանք կլինեն*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{1x} + F_{2x},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_{1y} + F_{2y}, \tag{2}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_{1z} + F_{2z}.$$

*$\bar{F}_1$-ի և $\bar{F}_2$ ուժերի պրոյեկցիաների համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունները՝*

$$F_{1x} = -F_1 \cos\alpha_1 = -F_1\frac{x_1}{r_1} = -kmr_1\frac{x_1}{r_1} = -kmx_1,$$

$$F_{2x} = F_2 \cos\alpha_2 = F_2\frac{x_2 - x_1}{r_2} = kmr_2\frac{x_2 - x_1}{r_2} = km(x_2 - x_1),$$

$$F_{1y} = -kmy, \quad F_{1z} = -kmz, \quad F_{2y} = -kmy, \quad F_{2z} = -kmz.$$

*Տեղադրելով այս արժեքները (2) դիֆերենցիալ հավասարումների մեջ, կունենանք*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 2k(a + bt),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2ky = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2kz = 0.$$

*(3) դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$x = A_1 \cos\sqrt{2k}\,t + A_2 \sin\sqrt{2k}\,t + a + bt,$$

$$y = A_3 \cos\sqrt{2k}\,t + A_4 \sin\sqrt{2k}\,t, \tag{4}$$

$$z = A_5 \cos\sqrt{2k}\,t + A_6 \sin\sqrt{2k}\,t,$$

*որտեղ* $A_1, A_2, \ldots, A_6$ *ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։ Այդ պայմանները կլինեն*

$$\text{երբ } t = 0 \;\left|\; \begin{array}{lll} x = a, & y = a, & z = 0, \\ \dot{x} = b, & \dot{y} = 0, & \dot{z} = b. \end{array}\right. \tag{5}$$

*Եթե (4)-ի հիման վրա կազմենք* $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ *ածանցյալ-*

ները և ստացած արտահայտությունների ու (4)-ի մեջ տեղադրենք (5) նախնական պայմանները, կստանանք վեց հավասարումների սիստեմ, որից կորոշենք $C_1$, $C_2$, ..., $C_6$ ինտեգրման հաստատունները։ Տեղադրելով $C_1$, $C_2$, ..., $C_6$-ի համար ստացած արժեքները (4)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման օրենքը հետևյալ տեսքով՝

$$x = a + bt,$$
$$y = a\cos\sqrt{2k}\,t, \tag{6}$$
$$z = \frac{b}{\sqrt{2k}}\sin\sqrt{2k}\,t\text{։}$$

Սա տարածական կորի պարամետրական հավասարումն է։ Վերջին երկու հավասարումներից արտաքսելով t պարամետրը, կստանանք

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{2z^2k}{b^2} = 1\text{։} \tag{7}$$

(6)-ի առաջին հավասարումից հետևում է, որ կետի պրոյեկցիան x առանցքի ուղղությամբ շարժվում է հաստատուն b արագությամբ։

Պտուտակի h քայլը որոշելու համար պետք է գտնել (6)-ի y և z ֆունկցիաների ընդհանուր պարբերությունը։ Այդ պարբերությունը կլինի

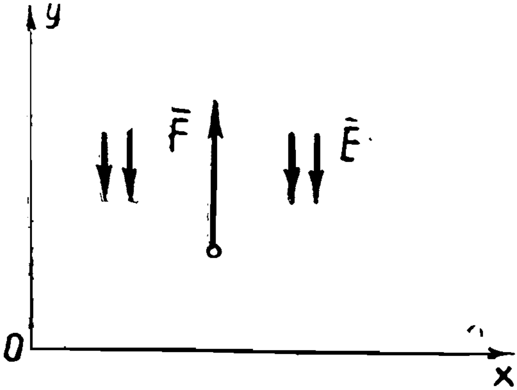
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2k}}\text{։} \tag{7}$$

(6)-ի առաջին հավասարումից և (7)-ից կստանանք պտուտակագծի h քայլի համար հետևյալ արտահայտությունը՝

$$h = b\,\frac{2\pi}{\sqrt{2k}} = \pi b\sqrt{\frac{2}{k}}\text{։}$$

Պ ա տ. Պտուտակագիծ, որը գտնվում է OX առանցքը ունեցող էլիպսական գլանի վրա, որի հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը՝ $\frac{y^2}{a^2} + \frac{2kz^2}{b^2} = 1$, պտուտակի քայլը հավասար է $\pi b\sqrt{\frac{2}{k}}$։

**Խնդիր 46 (781)։** Որոշել m մասսա ունեցող և e էլեկտրական լիցք կրող մասնիկի շարժման հետագիծը, եթե մասնիկը մուտք է գործում $E=A\cos kt$ ($A$ և $k$-ն տրված հաստատուններ են) փոփոխական լարվածությամբ համասեռ էլեկտրական դաշտը $v_0$ արագությամբ, որը ուղղահայաց է դաշտի լարվածության ուղղությանը (գծ. 33)։ Էլեկտրական դաշտում մասնիկի վրա ազդում է $\bar{F}=-e\bar{E}$ ուժը։ Ծանրության ուժի ազդեցությունը անտեսվում է։




Գծ. 33

Լուծում: Տանենք $xy$ կոորդինատական սիստեմը գծագրում ցույց տրված ձևով։

Քանի որ $e$ էլեկտրական լիցք կրող $m$ մասսա ունեցող մասնիկի վրա ազդում է $F=-eE$ ուժ, որտեղ $E=A\cos kt$, ապա այդ մասնիկի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն՝

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2}&=0,\\
m\frac{d^2y}{dt^2}&=eA\cos kt
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Հաջորդաբար ինտեգրելով (1) հավասարումների սիստեմը, կստանանք՝

$$\frac{dx}{dt}=c_1,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{eA}{mk}\sin kt+c_2, \tag{2}$$

$$x=c_1t+c_3,\quad y=-\frac{eA}{mk^2}\cos kt+c_2t+c_4, \tag{3}$$

որտեղ $c_1$, $c_2$, $c_3$ և $c_4$-ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։ Խնդրի տվյալների համաձայն նախնական պայմանները կլինեն

$$\text{երբ } t=0 \quad \left|\begin{array}{l} x=0,\quad y=0, \\ \dfrac{dx}{dt}=v_0,\quad \dfrac{dy}{dt}=0, \end{array}\right. \tag{4}$$

*(4)-ի հիման վրա ինտեգրման հաստատունների համար կստանանք հետևյալ արժեքները՝*

$$c_1 = v_0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{eA}{mk^2}\text{։} \tag{5}$$

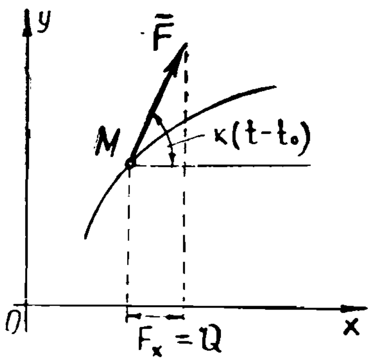
*Տեղադրելով այս արժեքները (3)-ի մեջ, կստանանք մասնիկի շարժման օրենքը հետևյալ տեսքով՝*

$$x = v_0 t,$$
$$y = \frac{eA}{mk^2}(1 - \cos kt)\text{։} \tag{6}$$

*Մասնիկի շարժման հետագծի հավասարումը որոշելու համար պետք է (6) սիստեմից արտաքսել* $t$ *ժամանակը։*

Պ ա տ. $\quad y = \dfrac{eA}{mk^2}\left(1 - \cos\dfrac{k}{v_0}x\right)$։

**Խ ն դ ի ր 47։** $m$ *մասսա ունեցող նյութական կետը շարժվում է հարթ կորով* $\bar{F}$ *ուժի ազդեցության տակ։* $\bar{F}$ *ուժի պրոյեկցիան* $x$ *առանցքի վրա հաստատուն է և հավասար* $Q$*-ի (գծ. 34)։ Որոշել կետի արագության մեծությունը, եթե* $\measuredangle(\bar{F}, \bar{x}_0) = k(t - t_0)$*, որտեղ* $k$*-ն տված հաստատուն մեծություն է, իսկ* $t_0$*-ն՝ կետի շարժման սկզբնական մոմենտը։ Տված է նաև, որ* $t = t_0$ *մոմենտում* $v = 0$։




*Գծ. 34*

Լ ու ծ ու մ։ *Գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կոորդինատական* $x$ *և* $y$ *առանցքների նկատմամբ։ Դրանք կլինեն*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Q,$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \tag{1}$$

*որտեղ* $F_y$*-ը անհայտ է և պետք է այն որոշել։ Խնդրի պայմանի համաձայն ունենք*

$$F_x = F\cos(\widehat{\bar{F}, \bar{x}^\circ}) = F\cos k(t-t_0) = Q: \tag{2}$$

*Օգտվելով (2)-ից, կստանանք*

$$F_y = Q\,\mathrm{tg}\,k(t-t_0): \tag{3}$$

*(2) և (3)-ի հիման վրա կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները ընդունում են հետևյալ տեսքը՝*

$$m\frac{dv_x}{dt} = Q, \tag{4}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = Q\,\mathrm{tg}\,k(t-t_0): \tag{5}$$

*Ինտեգրելով (4) և (5) հավասարումների սիստեմը, կստանանք կետի արագության պրոյեկցիաները՝*

$$v_x = \frac{Q}{m}t + c_1,$$

$$v_y = -\frac{Q}{mk}\ln|\cos k(t-t_0)| + c_2, \tag{6}$$

*որտեղ* $c_1$ *և* $c_2$ *ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից: Խնդրի տվյալների համաձայն նախնական պայմանները կլինեն*

$$\text{երբ } t = t_0 \left|\begin{array}{l} v_x = 0, \\ v_y = 0: \end{array}\right. \tag{7}$$

*Եթե (7) նախնական պայմանները տեղադրենք (6)-ի մեջ, կստանանք* $c_1 = -\frac{Q}{m}t_0$, $c_2 = 0$: *Հետևաբար, (6)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$v_x = \frac{Q}{m}(t-t_0),$$

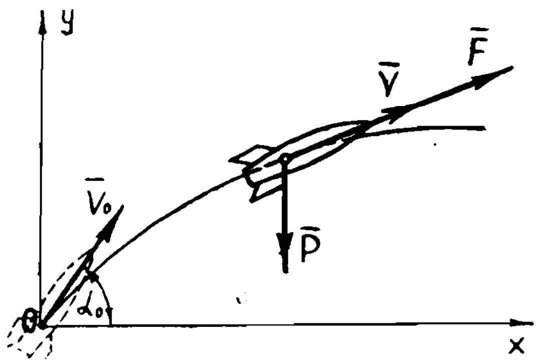
$$v_y = -\frac{Q}{km}\ln|\cos k(t-t_0)|: \tag{8}$$

*Արագության մեծության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$v^2 = \frac{Q^2}{m^2}\left\{(t-t_0)^2 + \frac{1}{k^2}\ln^2|\cos k(t-t_0)|\right\}: \tag{9}$$

Պատ. $v^2 = \frac{Q^2}{m^2}\left\{(t-t_0)^2 + \frac{1}{k^2}\ln^2|\cos k(t-t_0)|\right\}$,

**Խնդիր 48։** *Հրթիռը շարժվում էր հորիզոնի հետ $\alpha_0$ անկյուն կազմող $v_0$ արագությամբ, երբ նրա վրա սկսեց ազդել ռեակտիվ ուժը։ Ռեակտիվ ուժը ուղղված է հրթիռի արագության ուղղությամբ։ Այդ ուժի փոփոխությունը կարգավորվում է այնպես, որ հրթիռի արագությունը մեծությամբ միշտ մնա հաստատուն։ Որոշել հրթիռի հետագծի հավասարումը։ Ծանրության դաշտը համարել համասեռ, հրթիռի մասսան՝ հաստատուն, աէրոդինամիկական վերամբարձ ուժը և օդի դիմադրությունը արհամարհել։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորել հրթիռի սկզբնական դիրքում,*



Գծ. 35

*ox առանցքն ուղղել հորիզոնական ուղղությամբ, իսկ oy առանցքը՝ ուղղահայաց դեպի վեր (գծ. 35)։*

Լուծում։ *Հրթիռը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Նրա վրա ազդում են երկու ուժեր՝ ծանրության $P=mg$ ուժը՝ ուղղված oy առանցքի հակառակ ուղղությամբ և ռեակտիվ ուժը, որն ըստ խնդրի պայմանի կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$\bar F = m\lambda\bar v\,, \tag{1}$$

*Այստեղ $\lambda$-ն անհայտ մեծություն է։ Հրթիռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն՝*

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x, \quad m\frac{dv_y}{dt} = F_y - mg\,. \tag{2}$$

*Եթե $F_x$ և $F_y$ ուժի արժեքները (1)-ից տեղադրենք (2)-ի մեջ, կստանանք*

$$\frac{dv_x}{dt} = \lambda v_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = \lambda v_y - g\,, \tag{3}$$

v-ի արժեքը որոշելու համար օգտվենք

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_o^2 = \mathrm{const} \qquad (4)$$

պայմանից։

Եթե (4)-ը ածանցենք ըստ t ժամանակի և ստացած արտահայտության մեջ տեղադրենք (3)-ից $\frac{dv_x}{dt}$ և $\frac{dv_y}{dt}$-ի արժեքները, կստանանք

$$\lambda (v_x^2 + v_y^2) - g v_y = 0$$

կամ

$$\lambda v_o^2 = g v_y\text{։}$$

Այստեղից ստացվում է

$$\lambda = \frac{g}{v_o^2} v_y\text{։} \qquad (5)$$

Այժմ λ-ի (5) արժեքը տեղադրենք (3)-ի երկրորդ հավասարման մեջ և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v_x\,\frac{dv_y}{dx} = \sqrt{v_o^2 - v_y^2}\,\frac{dv_y}{dx}\text{։}$$

Դրանից կստացվի

$$\frac{dv_y}{dx} = -\frac{g}{v_o^2}\sqrt{v_o^2 - v_y^2}$$

կամ

$$\frac{dv_y}{\sqrt{v_o^2 - v_y^2}} = -\frac{g}{v_o^2}\,dx\text{։} \qquad (6)$$

Նախնական պայմաններից ունենք

$$\text{երբ} \quad t=0 \quad | \quad x=0, \quad v_y = v_o \sin \alpha_o\text{։} \qquad (7)$$

Եթե ինտեգրենք (6) դիֆերենցիալ հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք (7) նախնական պայմանը, կստանանք

$$\int_{v_o \sin\alpha_0}^{v_y} \frac{dv_y}{\sqrt{v_o^2 - v_y^2}} = -\frac{g}{v_o^2}\,x$$

կամ

$$\arcsin\frac{v_y}{v_o} - \arcsin(\sin\alpha_0) = -\frac{g}{v_o^2}\,x\text{։} \qquad (8)$$

(8) հավասարումից $v_y$-ը որոշելու համար այդ հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\arcsin \frac{v_y}{v_0} = \arcsin (\sin \alpha_0) - \frac{g}{v_0^2} x \text{ ։} \tag{9}$$

Վերցնենք (9) հավասարման երկու մասերի սինուսը, կստանանք

$$v_y = v \sin \left[ \arcsin (\sin \alpha_0) - \frac{g}{v_0^2} x \right] \text{ ։}$$

Այստեղից էլ ստացվում է

$$v_y = v_0 \sin \left( \alpha_0 - \frac{g}{v_0^2} x \right) \text{ ։} \tag{10}$$

(4)-ի և (10)-ի հիման վրա $v_x$-ի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$v_x = \sqrt{v_0^2 - v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - v_0^2 \sin^2 \left(\alpha_0 - \frac{g}{v_0^2} x\right)} =$$

$$= v_0 \cos \left( \alpha_0 - \frac{g}{v_0^2} x \right) \text{,} \tag{11}$$

(10) և (11) արտահայտությունների օգնությամբ կարող ենք հաշվել $\frac{dy}{dx}$-ը՝

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg} \left( \alpha_0 - \frac{g}{v_0^2} x \right) \text{ ։} \tag{12}$$

Մնում է ինտեգրել այս դիֆերենցիալ հավասարումը։ Դրանից կստացվի

$$y = \int_0^x \frac{\sin \left(\alpha_0 - \frac{g}{v_0^2} x\right)}{\cos \left(\alpha_0 - \frac{g}{v_0^2} x\right)} dx = \frac{v_0^2}{g} \ln \left| \frac{\cos \left(\alpha_0 - \frac{g}{v_0^2} x\right)}{\cos \alpha_0} \right| \text{ ։}$$

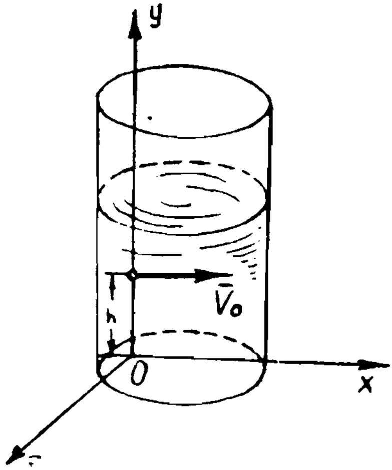
**Պատ.** $y = \frac{v_0^2}{g} \ln \left| \frac{\cos \left(\alpha_0 - \frac{g}{v_0^2} x\right)}{\cos \alpha_0} \right|$ ։

**Խնդիր 49։** *m զանգված ունեցող նյութական կետը շարժվում է ճածուցիկ հեղուկով լցված անոթում հորիզոնական $v_0$ սկզբնական արագությամբ։ Շարժումը սկսվում է (0, h, 0) դիր-*

քից (գծ. 36)։ Կետի վրա ազդում է նրա ծանրության ուժը և հեղուկի դիմադրության ուժը՝ $\bar{R}=-km\bar{v}$, որտեղ k-ն համեմատականության գործակիցն է։ Գտնել կետի շարժման օրենքը։

Լուծում։ Տանենք կոորդինատական սիստեմն այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում (կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորված է անոթի հատակի վրա, y առանցքը ուղղված է ուղղաձիգ դեպի վեր, իսկ xz հարթությունը համընկնում է հատակի հարթության հետ)։

Կետի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ 1) կետի $\bar{P}=m\bar{g}$ ծանրության ուժը և 2) հեղուկի դիմադրության $\bar{R}=-km\bar{v}$ ուժը, որն ուղղված է կետի արագությանը հակառակ։ Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն՝




Գծ. 36

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-km\frac{dx}{dt},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-km\frac{dy}{dt}-mg,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-km\frac{dz}{dt}.$$

Այս դիֆերենցիալ հավասարումները գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}=0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+k\frac{dy}{dt}=-g, \qquad (1)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+k\frac{dz}{dt}=0.$$

(1) սիստեմի ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x=c_1+c_2e^{-kt},$$
$$y=c_3+c_4e^{-kt}-\frac{g}{k}t, \qquad (2)$$
$$z=c_5+c_6e^{-kt},$$

որտեղ $c_1, c_2, \dots, c_6$ ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։ Տվյալ խնդրի նախնական պայմանները կլինեն

$$\text{երբ } t=0 \quad \left| \begin{array}{l} x=0, \quad y=h, \quad z=0 \\ v_x=v_0, \quad v_y=0, \quad v_z=0 \text{ ։} \end{array} \right. \tag{3}$$

(2)-ը ըստ t-ի ածանցելով, կստանանք

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -c_2 k\, e^{-kt}, \\ \frac{dy}{dt} &= -c_4 k\, e^{-kt} - \frac{g}{k}, \\ \frac{dz}{dt} &= -c_6 k\, e^{-kt} \text{ ։} \end{aligned} \tag{4}$$

Եթե (2) և (4)-ի մեջ տեղադրենք (3) նախնական պայմանները և լուծենք ստացված վեց հավասարումները $c_1, c_2, \dots, c_6$ անհայտների նկատմամբ, կստանանք

$$c_1 = \frac{v_0}{k}, \quad c_2 = -\frac{v_0}{k}, \quad c_3 = h + \frac{g}{k^2},$$

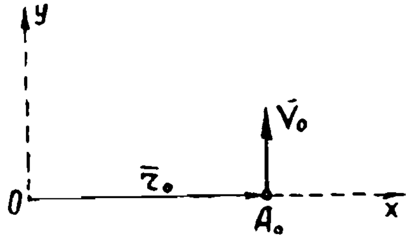
$$c_4 = -\frac{g}{k^2}, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 0 \text{ ։}$$

Մնում է $c_1, c_2, \dots, c_6$-ի այս արժեքները տեղադրել (2)-ի մեջ և որոշել կետի շարժման օրենքը։

Պ ա տ. $\quad x = v_0 \dfrac{1-e^{-kt}}{k}, \quad y = h + g\dfrac{1-e^{-kt}-kt}{k^2}, \quad z=0,$

շարժումը տեղի կունենա ուղղաձիգ հարթության վրա։

**Խ ն դ ի ր 50 (27.66)**։ $m$ մասսա ունեցող $A$ կետը սկըսում է շարժվել $\bar{r}=\bar{r}_0$ դիրքից $\bar{V}_0$ սկզբնական արագությամբ, ընդ որում $\bar{V}_0$-ն ուղղահայաց է $\bar{r}_0$-ին (այստեղ $\bar{r}$-ը կետի շառավիղ-վեկտորն է)։ Կետի վրա ազդում է ձգողականության ուժը, որն ուղղված է դեպի O կենտրոնը և համեմատական է կենտրոնից ունեցած հեռավորությանը։ Համեմատականության գործակիցը հավասար է $mc_1$-ի։ Բացի այդ ուժից, կետի վրա ազդում է նաև $mc\bar{r}_0$ հաստատուն ուժը։



Գծ. 37

*Գտնել կետի շարժման օրենքը և հետագիծը։ Ինչպիսին պետք է լինի $\frac{c_1}{c}$ հարաբերությունը, որպեսզի կետի հետագիծը անցնի O կենտրոնով։ Ինչ արագությամբ կետը կանցնի O կենտրոնը (գծ. 37)։ Կետի կշիռն անտեսել։*

Լուծում: *Կետի շառավիղ-վեկտորը ժամանակի կամավոր* $t$ *մոմենտում նշանակենք* $\bar{r}$ *(գծ. 37)։ Նրա վրա ազդում են երկու ուժեր՝ 1) ձգողականության* $-mc_1\bar{r}$ *ուժը, որն ուղղված է դեպի O կենտրոնը և 2) հաստատուն* $mc\bar{r}_0$ *ուժը։ Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը վեկտորական տեսքով կլինի*

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -mc_1\bar{r} + mc\bar{r}_0, \tag{1}$$

*(1)-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + c_1\bar{r} = c\bar{r}_0, \tag{2}$$

*Դժվար չէ ցույց տալ, որ (2) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$\bar{r} = \bar{A}\sin\sqrt{c_1}\,t + \bar{B}\cos\sqrt{c_1}\,t + \frac{c}{c_1}\bar{r}_0\,, \tag{3}$$

*որտեղ* $\bar{A}$ *և* $\bar{B}$*-ն հաստատուն անհայտ վեկտորներ են, որոնք որոշվում են խնդրի հետևյալ պայմաններից՝*

$$\bar{r}\,|_{t=0} = \bar{r}_0, \quad \bar{V}\,|_{t=0} = \bar{V}_0\,, \tag{4}$$

*Գրենք* $\bar{V}$ *արագության արտահայտությունը։ Դրա համար ածանցենք (3) արտահայտությունը ըստ* $t$ *ժամանակի։ Կստանանք*

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{A}\sqrt{c_1}\cos\sqrt{c_1}\,t - \sqrt{c_1}\,\bar{B}\sin\sqrt{c_1}\,t\,, \tag{5}$$

*Եթե (3)-ի և (5)-ի մեջ տեղադրենք (4) նախնական պայմանները և լուծենք ստացված երկու վեկտորական հավասարումները, կստանանք*

$$\bar{A} = \frac{1}{\sqrt{c_1}}\bar{V}_0, \quad \bar{B} = \left(1 - \frac{c}{c_1}\right)\bar{r}_0\,, \tag{6}$$

*Տեղադրելով* $\bar{A}$ *և* $\bar{B}$ *վեկտորների համար ստացած այս ար-*

ժեքները (3)-ի մեջ, կստանանք կետի շառավիղ-վեկտորի արտահայտությունը՝

$$\bar{r} = \frac{c}{c_1}\bar{r}_0 + \frac{\bar{V}_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}\,t + \bar{r}_0\left(1-\frac{c}{c_1}\right)\cos\sqrt{c_1}\,t\text{։} \tag{7}$$

Սա կլինի կետի շարժման օրենքը վեկտորական տեսքով։

Պրոյեկտենք (7) վեկտորական հավասարումը կոորդինատական $x$ և $y$ առանցքների վրա։ Կստանանք

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{c_1}r_0 + \left(1-\frac{c}{c_1}\right)r_0\cos\sqrt{c_1}\,t\,, \\ y &= \frac{v_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}\,t\text{։} \end{aligned} \tag{8}$$

(8) հավասարումից արտաքսելով $t$ ժամանակը, կստանանք կետի շարժման հավասարումը՝

$$\left[\frac{x-\frac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1-\frac{c}{c_1}\right)}\right]^2 + \left(\frac{\sqrt{c_1}}{v_0}\,y\right)^2 = 1\text{։} \tag{9}$$

Ակնհայտ է, որ (8) հավասարումները կարելի է ստանալ նաև կոորդինատական եղանակով։ Դրա համար պետք է՝ 1) կետի շարժման (1) դիֆերենցիալ հավասարումը պրոյեկտել կոորդինատական $x$ և $y$ առանցքների վրա, 2) ինտեգրել ստացված երկու դիֆերենցիալ հավասարումները, 3) նախնական (4) պայմանները գրել պրոյեկցիաների միջոցով, 4) նախնական պայմանների օգնությամբ ստացված լուծումից որոշել ինտեգրման չորս հաստատունները և 5) այդ հաստատունների արժեքները տեղադրել ստացված լուծման մեջ։ Դրանից հետո կստացվի կետի շարժման օրենքը (8) տեսքով։

Որպեսզի կետի հետագիծը անցնի O կենտրոնով, պետք է O կենտրոնի $x=0$, $y=0$ կոորդինատները բավարարեն (8) հավասարումներին։ (8)-ի մեջ տեղադրելով $x=0$, $y=0$, կստանանք

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{c}{c_1}r_0 + \left(1-\frac{c}{c_1}\right)r_0\cos\sqrt{c_1}\,t\,, \\ 0 &= \frac{v_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}\,t\text{։} \end{aligned} \tag{10}$$

(10)-ից ստացվում է, որ պետք է տեղի ունենա հետևյալ պայմանը.

$$\frac{c}{c_1} = \frac{1}{2}, \tag{11}$$

Տեղադրելով $\frac{c}{c_1}$-ի արժեքը (11)-ից (7)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենալով, որ $x = y = 0$-ից հետևում է $\bar{r} = 0$, կստանանք

$$\frac{\bar{V}_0}{\sqrt{c_1}} \sin \sqrt{c_1}\, t + \frac{1}{2} \bar{r}_0 (1 + \cos \sqrt{c_1}\, t) = 0, \tag{12}$$

Քանի որ $\bar{r}_0$ և $\bar{V}_0$ վեկտորները ուղղահայաց են իրար, ուստի պետք է (12)-ում $\bar{r}_0$ և $\bar{V}_0$ վեկտորների գործակիցները լինեն զրո։ Դրանից կստացվի

$$\sin \sqrt{c_1}\, t = 0, \quad 1 + \cos \sqrt{c_1}\, t = 0, \tag{13}$$

(13)-ից պարզ է, որ t ժամանակը պետք է ունենա

$$t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}} \tag{14}$$

արժեքը։

Ածանցելով $\bar{r}$-ի (4) արտահայտությունը ըստ t ժամանակի և ստացված արտահայտության մեջ t-ն փոխարինելով $t_1$-ով, կստանանք

$$\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_0 = -\bar{V}_0,$$

Այստեղ $\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_0$-ով նշանակված է A կետի արագությունը, երբ նա անցնում է O կենտրոնով։

**Պատ.**

1) $\bar{r} = \frac{c}{c_1} \bar{r}_0 + \frac{\bar{V}_0}{\sqrt{c_1}} \sin \sqrt{c_1}\, t + \bar{r}_0 \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) \cos \sqrt{c_1}\, t,$

2) էլիպս, որի հավասարումն է $\left[\frac{x - \frac{c}{c_1} r_0}{r_0 \left(1 - \frac{c}{c_1}\right)}\right]^2 +$

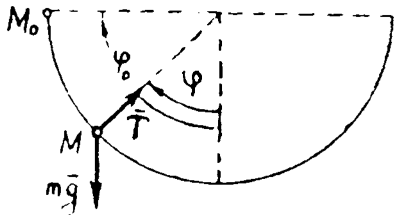
$$+ \left(\frac{\sqrt{c_1}}{v_0}\, y\right)^2 = 1,$$

*3) A կետը կանգնի O կենտրոնում, եթե* $\frac{c_1}{c}=2$,

*4) A կետը կանգնի O կենտրոնում* $\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)_0=-\bar{V}_0$ *արագու-*

*թյամբ* $t_1=\frac{\pi}{\sqrt{c_1}}$ *պահին։*

**Խնդիր 51 (27 . 68)։** *m մասսա ունեցող M կետը շարժվում է ծանրության ուժի ազդեցության տակ r շառավղով ողորկ անամեջ գլանի ներքին մակերևույթով (գծ. 38)։ Սկզբնական մոմենտում եղել է* $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$, *իսկ արագությունը՝* $v_0=0$։ *Որոշել M կետի արագությունը և գլանի մակերևույթի հակազդումը, երբ* $\varphi=30°$։




*Գծ. 38*

**Լուծում:** *M կետը դիտարկենք որպես ազատ նյութական կետ, նրա վրա դրված կապը փոխարինելով* $\bar{T}$ *հակազդումով։ Կետի վրա ազդում է մեկ ակտիվ ուժ՝ նրա* $m\bar{g}$ *ծանրության ուժը և մեկ պասսիվ ուժ՝ մակերևույթի* $\bar{T}$ *հակազդումը, որն ուղղված է գլանի շառավղով դեպի նրա կենտրոնը։*

*Գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը վեկտորական տեսքով՝*

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\bar{T}+m\bar{g}\text{։} \tag{1}$$

*Եթե պրոյեկտենք այս հավասարումը բևեռային կոորդինատական սիստեմի* $\bar{r}$ *և* $\bar{P}$ *ուղղությունների վրա, կստանանք*

$$\begin{aligned} m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]&=-T+mg\cos\varphi,\\ m\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)&=-mg\sin\varphi, \end{aligned} \tag{2}$$

*որտեղ r-ը կետի շառավիղ-վեկտորն է, իսկ φ-ն՝ բևեռային անկյունը։*

Քանի որ r-ը կախված չէ t ժամանակից, ապա (2)-ից կունենանք

$$mr\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = T - mg\cos\varphi,$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{r}\sin\varphi \quad (3)$$

(3) հավասարումների սիստեմը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$T = mg\cos\varphi + mr\,\omega^2,$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{r}\sin\varphi, \quad (4)$$

որտեղ $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$։

Եթե (5)-ը ձևափոխենք, օգտագործելով

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt} = \omega\,\frac{d\omega}{d\varphi} \quad (5)$$

բանաձևը, կատարենք փոփոխականների անջատում և ինտեգրենք ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը, կստանանք

$$\omega^2 = 2\,\frac{g}{r}\cos\varphi\,։ \quad (6)$$

Այստեղ օգտագործված է $\omega=0$, երբ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ նախնական պայմանը։

Մնում է (6)-ի մեջ տեղադրել $\varphi=30^\circ$ և կատարել նշված գործողությունները։ Դրանից կստացվի

$$\omega\Big|_{\varphi=30^\circ} = \sqrt[4]{3}\,\sqrt{\frac{g}{r}}\,։ \quad (7)$$

Բայց քանի որ $v=\omega r$, ապա կունենանք՝

$$v = \sqrt[4]{3}\,\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot r = \sqrt[4]{3}\,\sqrt{gr}\,։$$

(4)-ի մեջ տեղադրելով $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$-ի արժեքը (7)-ից և միաժամանակ ընդունելով $\varphi=30^\circ$, կստանանք T-ի արտահայտությունը՝

$$T = \frac{3\sqrt{3}}{2} mg :$$

Պատ. $v = \sqrt{3}\sqrt{gr}$, $T = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot mg :$

## § 5. ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՔԱՆԱԿԻ ԵՎ ՇԱՐԺ- ՔԱՆԱԿԻ ՄՈՄԵՆՏԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ

**1. Նյութական կետի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը:** *Նյութական կետի մասսայի և նրա արագության վեկտորի արտադրյալը կոչվում է այդ կետի շարժման քանակ և նշանակվում է* $\bar{Q} = m\bar{v}$: *Կետի շարժման քանակը ուղղված է կետի շարժման հետագծի շոշափողով դեպի շարժման կողմը:*

*Ուժի և* dt *ժամանակամիջոցի արտադրյալը, այսինքն՝* $\bar{F}dt$ *վեկտորը, կոչվում է ուժի էլեմենտար իմպուլս: Ուժի էլեմենտար իմպուլսը ունի ուժի ազդման ուղղությունը:*

*Եթե*

$$m\bar{W} = \bar{F} \tag{I}$$

*դինամիկայի հիմնական հավասարման մեջ նկատի ունենանք, որ* $m = const$, *իսկ* $\bar{W} = \frac{d\bar{v}}{dt}$, *ապա կարող ենք այն գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$d(m\bar{v}) = \bar{F}\,dt : \tag{II}$$

*Սա նյութական կետի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմն է դիֆերենցիալ տեսքով: Այն կարելի է ձևակերպել այսպես. նյութական կետի շարժման քանակի էլեմենտար փոփոխությունը հավասար է այդ կետի վրա կիրառված ուժի էլեմենտար իմպուլսին*:*

*Եթե ընդունենք, որ* $t=0$ *մոմենտում կետի արագությունը հավասար է* $\bar{v}_0$*-ի, իսկ* t *մոմենտում՝* $\bar{v}$*-ի, ապա ինտեգրելով* (II) *հավասարումը, կստանանք*

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_0^t \bar{F}\,dt : \tag{III}$$

*Սա նյութական կետի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմն է*

*) *Եթե կետի վրա կիրառված են մի քանի ուժեր, ապա «ուժ» ասելով պետք է հասկանալ այդ կետի վրա կիրառված ուժերի համազորը, այսինքն՝* $\bar{F} = \Sigma \bar{F}_i$ :

*վերջավոր տեսքով։ Այն կարելի է ձևակերպել այսպես. նյութական կետի շարժման քանակի փոփոխությունը վերջավոր ժամանակամիջոցում հավասար է նույն ժամանակամիջոցում կետի վրա կիրառված ուժի իմպուլսին։*

*Խնդիրներ լուծելիս հաճախ* (III) *վեկտորական հավասարումը փոխարինում են երեք սկալյար հավասարումներով։* (III) *հավասարումը պրոյեկտելով կոորդինատական առանցքների վրա, կստանանք*

$$
\begin{aligned}
mv_x - mv_{ox} &= \int_0^t F_x\,dt\,,\\
mv_y - mv_{oy} &= \int_0^t F_y\,dt\,,\\
mv_z - mv_{oz} &= \int_0^t F_z\,dt\,.
\end{aligned}
\tag{IV}
$$

*Այստեղ* $(v_x, v_y, v_z)$ *և* $(v_{ox}, v_{oy}, v_{oz})$*-ով նշանակված են համապատասխանաբար* $\bar{v}$ *և* $\bar{v}_o$ *արագությունների պրոյեկցիաները, իսկ* $(F_x, F_y, F_z)$*-ով՝* $\bar{F}$ *ուժի պրոյեկցիաները.*

*Եթե ուժը հանդիսանում է միայն* t *ժամանակի ֆունկցիա, ապա* (IV) *հավասարումների ձախ մասում եղած ինտեգրալները կարելի է հաշվել։ Այդ դեպքում կստանանք շարժման առաջին երեք ինտեգրալները հետևյալ տեսքով.*

$$
\begin{aligned}
mv_x - mv_{ox} &= \Phi_1(t),\\
mv_y - mv_{oy} &= \Phi_2(t),\\
mv_z - mv_{oz} &= \Phi_3(t),
\end{aligned}
\tag{V}
$$

*որտեղ* $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ *և* $\Phi_3(t)$*-ն հանդիսանում են ուժի վերջավոր իմպուլսները կոորդինատական առանցքների վրա։*

(V) *հավասարումների հետագա ինտեգրումը սկզբունքային դժվարություն չի ներկայացնում։ Ինտեգրելով այն, կստանանք*

$$
\begin{aligned}
x - x_o &= v_{ox}t + \frac{1}{m}\int_0^t \Phi_1(t)\,dt,\\
y - y_o &= v_{oy}t + \frac{1}{m}\int_0^t \Phi_2(t)\,dt,
\end{aligned}
\tag{VI}
$$

$$z - z_o = v_{oz}t + \frac{1}{m}\int_0^t \Phi_3(t)\,dt.$$

*Եթե ուժը հաստատուն է, այսինքն՝* $F_x=a_1$, $F_y=a_2$, $F_z=a_3$ ($a_1$, $a_2$, $a_3$ *հաստատուն մեծություններ են), ապա* (IV)-*ից կունենանք*

$$mv_x - mv_{ox} = a_1t, \quad mv_y - mv_{oy} = a_2t, \quad mv_z - mv_{oz} = a_3t, \qquad \text{(VII)}$$

*իսկ* (VI)-*ից՝*

$$x = x_o + v_{ox}t + \frac{a_1t^2}{2m}, \quad y = y_o + v_{oy}t + \frac{a_2t^2}{2m},$$

$$z = z_o + v_{oz}t + \frac{a_3t^2}{2m}. \qquad \text{(VIII)}$$

*Մասնավոր դեպքում, եթե լինի* $F_x=F_y=F_z=0$, *այսինքն՝* $\bar{F}=0$, *ապա* (VII) *և* (VIII)-*ից կունենանք*

$$v_x = v_{ox}, \quad v_y = v_{oy}, \quad v_z = v_{oz}, \qquad \text{(IX)}$$

$$x = x_o + v_{ox}t, \quad y = y_o + v_{oy}t, \quad z = z_o + v_{oz}t. \qquad \text{(X)}$$

*Դիցուք կետի վրա ազդող ուժն ունի հաստատուն ուղղություն, օրինակ, այն միշտ զուգահեռ է մնում* z *առանցքին։ Այդ դեպքում* $F_x=F_y=0$ *և ստացվում են հետևյալ առաջին ինտեգրալները.*

$$v_x = v_{ox}, \quad v_y = v_{oy},$$

*որտեղից հետևում է, որ*

$$x = x_o + v_{ox}t, \quad y = y_o + v_{oy}t.$$

*Եթե ուժը միշտ ուղղահայաց է մնում որևէ առանցքի, օրինակ,* OX *առանցքին, ապա ստացվում է միայն մի ինտեգրալ, այն է՝*

$$v_x = v_{ox} \quad \text{կամ} \quad x = x_o + v_{ox}t.$$

**Խնդիր 52։** P *կշիռ ունեցող նյութական կետը շարժվում է հորիզոնական ուղիղ գծով* $\bar{F}$ *հաստատուն ուժի ազդեցության տակ։ Գտնել այն* T *ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում կետի սկզբնական* $v_0$ *արագությունը մեծանում է* n *անգամ։*

Լուծում: *Այն ուղիղը, որով շարժվում է կետը, ընդունենք որպես* x *առանցք։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք կետի շարժման սկզբնական դիրքում։ Այդ դեպքում* (VII)-*ի առաջին հավասարման հիման վրա կունենանք*

$$mn\,v_0 - mv_0 = FT$$

կամ

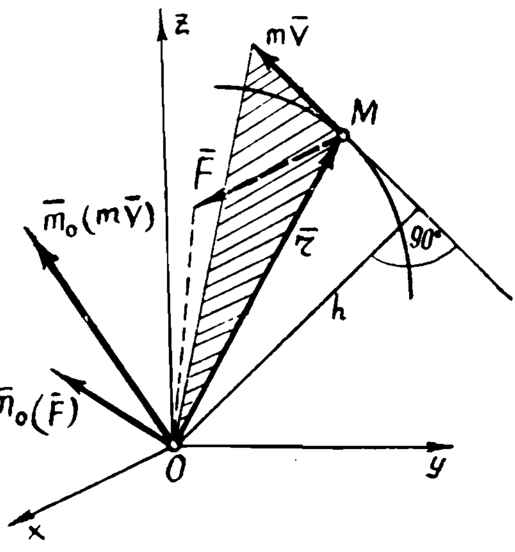
$$\frac{P}{g}(n-1)\,v_0 = FT։$$

Պատ. $T = \frac{Pv_0}{Fg}(n-1)$։

**2. Կետի շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմը:** *Կետի շարժման ուսումնասիրության ժամանակ երբեմն օգտակար է $m\bar{V}$ վեկտորի փոփոխության փոխարեն դիտարկել այդ վեկտորի մոմենտի փոփոխությունը։ $m\bar{V}$ վեկտորի մոմենտը տըված O կենտրոնի նկատմամբ կոչվում է կետի շարժման քանակի մոմենտ կամ կինետիկ մոմենտ O կենտրոնի նկատմամբ։ Այն ընդունված է նշանակել $\bar{m}_0(m\bar{V})$ տեսքով։ $\bar{m}_0(m\bar{V})$ վեկտորի մոդուլը որոշվում է*

$$|\bar{m}_0(m\bar{V})| = mvh$$

*բանաձևով, որտեղ h-ը O կետից $m\bar{V}$ վեկտորի վրա իջեցված ուղղահայացի երկարությունն է (գծ. 39)։*




**Գծ. 39**

*Եթե՝ M կետը շարժվում է $\bar{F}$ ուժի ազդեցության տակ (գծ. 39), ապա ուժի մոմենտի սահմանման նման կարող ենք գրել, որ*

$$\bar{m}_o(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}, \tag{XI}$$

*որտեղ $\bar{r}$-ը M կետի շառավիղ-վեկտորն է։ Այստեղ* $\bar{m}_o(m\bar{V})$ *վեկտորը ուղղահայաց է* O *կետով և* $m\bar{V}$ *վեկտորով անցնող հարթությանը։*

*Եթե դիֆերենցենք* $\bar{m}_o(m\bar{V})$ *արտահայտությունը ըստ* t *ժամանակի և նկատի ունենանք, որ* $\bar{V} \times m\bar{V} = 0$, *իսկ* $m\bar{W} = \bar{F}$, *կստանանք*

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) = \bar{r} \times \bar{F} \tag{XII}$$

*կամ*

$$\frac{d}{dt}[\bar{m}_o(m\bar{V})] = \bar{m}_o(\bar{F}) \tag{XIII}$$

*Ստացանք կետի շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմը* O *կենտրոնի նկատմամբ։ Այն կարելի է ձևակերպել այսպես. որևէ կենտրոնի նկատմամբ կետի շարժման քանակի մոմենտի ածանցյալը ըստ ժամանակի հավասար է նյութական կետի վրա կիրառված ուժի մոմենտին նույն կենտրոնի նկատմամբ։*

*Հաճախ օգտակար է լինում դիտարկել շարժման քանակի մոմենտը որևէ առանցքի նկատմամբ։* $m\bar{V}$ *վեկտորի մոմենտը որևէ* z *առանցքի նկատմամբ նշանակվում է* $m_z(m\bar{V})$։ *Ստատիկայում շարադրվածի հիման վրա կարող ենք գրել (գծ. 39), որ*

$$m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x, \quad m_z(m\bar{V}) = m(xv_y - yv_x)։$$

*Պրոյեկտելով* (XII) *կամ* (XIII) *վեկտորական հավասարումը դեկարտյան կոորդինատական սիստեմի առանցքների վրա, կստանանք հետևյալ երեք սկալյար հավասարումները.*

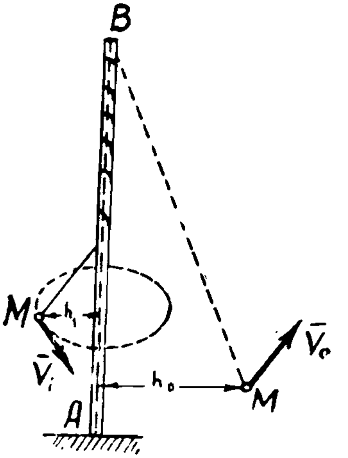
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(y\dot{z} - z\dot{y}) &= yF_z - zF_y, \\ \frac{d}{dt} m(z\dot{x} - x\dot{z}) &= zF_x - xF_z, \\ \frac{d}{dt} m(x\dot{y} - y\dot{x}) &= xF_y - yF_x, \end{aligned} \tag{XIV}$$

*որտեղ* $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$, $\dot{z} = v_z$։ (XIV)-*ը կարելի է ձևակերպել այսպես. որևէ առանցքի վրա կետի շարժման քանակի մոմենտի պրոյեկցիայի ածանցյալը ըստ ժամանակի հավասար է նյութա-*

*կան կետի վրա կիրառված ուժի մոմենտին նույն առանցքի նը-կատմամբ։*

*Կետի շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմը հնարավորություն է տալիս որոշ դեպքերում լուծելու կետի դի-նամիկայի մի շարք խնդիրներ։ Հատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում այն դեպքը, երբ նյութական կետի վրա կիրառ-ված ուժի ազդման գիծը ամբողջ շարժման ընթացքում անցնում է մեկ անշարժ կետով։ Այդպիսի ուժը կոչվում է կենտրոնական։*

**Խնդիր 53։** BM *թելից կախված* M *գնդիկը ստանում է* $v_0$ *սկզբնական արագություն՝ ուղղահայաց* ABM *հարթությանը։ Գնդիկը շարժվում է այնպես, որ թելը փաթաթվում է բարակ ուղղաձիգ ձողին (գծ. 40)։ Գնդիկի սկզբնական հեռավորությունը ձողից հավասար է* $h_0$*-ի։ Գտնել գնդիկի արագությունը այն մոմենտում, երբ նրա հեռավորությունը ձողից հա-վասարվում է* $h_1$*-ի։ Ձողի հաստու-թյունը արհամարհել։*




*Գծ. 40*

**Լուծում։** *Գնդիկի վրա ազդում են նրա* $\bar P$ *կշիռը և թելի* $\bar T$ *հակազդումը։ Գրենք գնդիկի շարժման քանակի մոմենտի թեորեմը* z *առանցքի նկատմամբ՝*

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\bar v)] = m_z(\bar P) + m_z(\bar T)։ \quad (1)$$

*Այստեղ* $\bar P$ *և* $\bar T$ *ուժերի մոմենտները* z *առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի* ($\bar P \parallel z$, *իսկ* $\bar T$*-ն հատում է* z *առանցքը)։ Հետևաբար, (1)-ից կունենանք*

$$\frac{d}{dt}[m_z(m\bar v)] = 0$$

*կամ*

$$m_x(m\bar v) = mvh = \text{const}։$$

*Քանի որ մասսան հաստատուն է, հետևաբար,* $vh = \text{const}$։ *Այստեղից հետևում է՝*

$$v_0 h_0 = v_1 h_1$$

*կամ*

$$v_1 = \frac{h_0}{h_1} v_0 \text{ ։}$$

**Պատ.** $v_1 = \dfrac{h_0}{h_1} v_0$ ։

**3. Կետի շարժումը կենտրոնական ուժի ազդեցության տակ:**
*Դիցուք կետը շարժվում է* $\bar{F}$ *կենտրոնական ուժի ազդեցության տակ։ Այդ դեպքում* $\bar{r}$ *և* $\bar{F}$ *վեկտորների կոլինեարության հետևանքով կունենանք*

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = 0 \text{ ։} \tag{XV}$$

(XV)*-ի հիման վրա կետի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմից կստանանք*

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{m}_0(m\bar{V})\right] = 0$$

*կամ* (XVI)

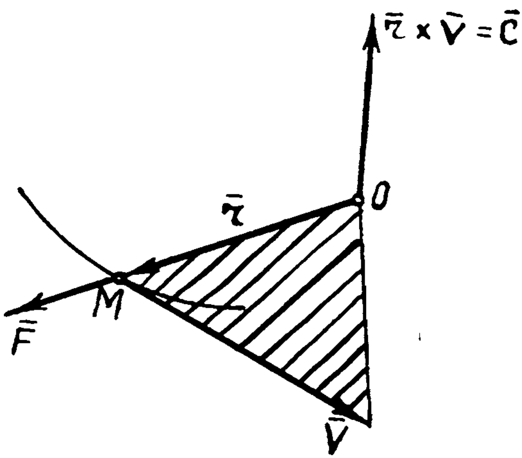
$$\bar{m}_0(m\bar{V}) = \overline{\text{const}} \text{ ։}$$

*Այսպիսով, եթե նյութական կետի վրա կիրառված է կենտրոնական ուժ, ապա ուժերի կենտրոնի նկատմամբ կետի շարժման քանակի մոմենտը մեծությամբ և ուղղությամբ մնում է հաստատուն ամբողջ շարժման ընթացքում։*

(XVI) *հավասարությունը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$\bar{r} \times \bar{V} = \bar{c}, \tag{XVII}$$

*որտեղ* $\bar{c}$*-ն հաստատուն վեկտոր է։*




**Գծ. 41**

Քանի որ $\bar r \times \bar V$ վեկտորը ուղղահայաց է $\bar r$ և $\bar V$ վեկտորներով անցնող հարթությանը և միաժամանակ (XVII)-ի հիման վրա ունի հաստատուն ուղղություն, ուստի $\bar r$ և $\bar V$ վեկտորները միշտ կգտնվեն մի հարթության վրա, որն անցնում է O կետով (գծ. 41)։ Հետևաբար, կենտրոնական ուժի ազդեցության տակ կետը շարժվում է հարթ կոր գծով։

Այս արդյունքը կարող ենք ստանալ նաև անալիտիկորեն։ Եթե (XVII)-ը պրոյեկտենք կոորդինատական առանցքների վրա և ստացված հավասարությունները բազմապատկենք համապատասխանաբար x, y, z-ով և գումարենք, կստանանք O կետով անցնող հարթության հավասարումը։

Կինեմատիկայից հայտնի է, որ $\bar V$ արագության մոմենտը հավասար է սեկտորյալ արագության կրկնապատիկին, այսինքն՝

$$\bar m_o(\bar V) = \bar r \times \bar V = 2\frac{d\bar\sigma}{dt}, \qquad \text{(XVIII)}$$

Քանի որ $\bar r$ և $\bar V$ վեկտորները գտնվում են միևնույն անշարժ հարթության մեջ, ապա (XVII) և (XVIII)-ից հետևում է, որ

$$2\frac{d\sigma}{dt} = c, \qquad \text{(XIX)}$$

այսինքն՝ սեկտորյալ արագությունը տվյալ դեպքում հաստատուն է։ Ինտեգրելով (XIX) հավասարումը, կստանանք

$$\sigma = \frac{c}{2}t + \sigma_0 \,։$$

Նշանակում է, կետի շառավիղ-վեկտորի գծած մակերեսները համեմատական են ժամանակին։

Այսպիսով, կենտրոնական ուժի ազդեցության տակ կետը շարժվում է հարթ կորով, և նրա շառավիղ-վեկտորի գծած մակերեսները համեմատական են համապատասխան ժամանակներին։ Այս արդյունքը հաճախ անվանվում է մակերեսների օրենք։

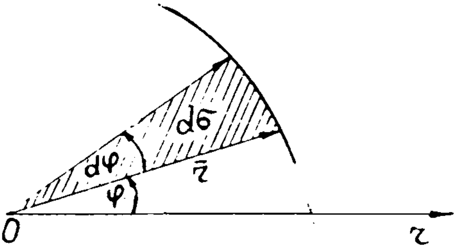
(XVII) և (XIX) բանաձևերում եղած c-ն կոչվում է մակերեսների հաստատուն։ c-ի արժեքը որոշվում է նախնական պայմաններից։ Եթե սկզբնական մոմենտում $\bar r = \bar r_0$ և $\bar V = \bar V_0$, ապա c-ի համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$c = |\bar m_o(\bar V_o)| = r_0 v_0 \sin(\widehat{\bar r_o \bar V_o}) \,, \qquad \text{(XX)}$$

Քանի որ կենտրոնական ուժի ազդեցության տակ կետը շարժվում է հարթ կորով, ուստի կետի շարժման ուսումնասիրության համար նպատակահարմար է օգտվել բևեռային կոորդինատներից։

Եթե կետի բևեռային կոորդինատները նշանակենք $(r, \varphi)$ (գծ. 42), ապա կունենանք

$$d\sigma = \frac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

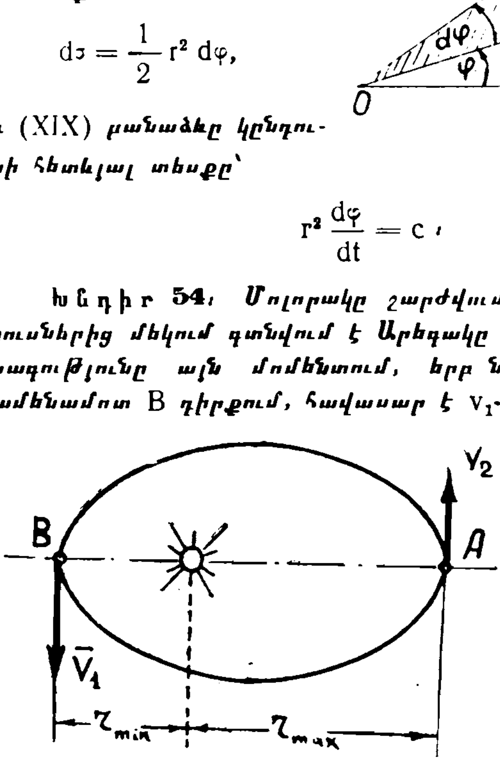


Գծ. 42

և (XIX) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c \quad \text{։} \qquad \text{(XXI)}$$

**Խ ն դ ի ր 54**։ *Մոլորակը շարժվում է էլիպսով, որի ֆոկուսներից մեկում գտնվում է Արեգակը (գծ. 43)։ Մոլորակի արագությունը այն մոմենտում, երբ նա գտնվում է Արեգակին ամենամոտ B դիրքում, հավասար է $v_1$-ի։ Պահանջվում է գտնել մոլորակի $v_2$ արագությունը, երբ նա գտնվել է էլիպսի հակադիր A դիրքում։*



Գծ. 44

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: Դիցուք էլիպսի մեծ կիսաառանցքը հավասար է a-ի, իսկ կիսաֆոկուսային հեռավորությունը՝ $c_1$-ի։ Այդ դեպքում կունենանք

$$c_1 = ea,$$

որտեղ e-ն էլիպսի էքսցենտրիսիտետն է։ Քանի որ կետի վրա կիրառված ուժը կենտրոնական է, ապա (XVII)-ից հետևում է, որ A և B կետերում $\bar{r} \times \bar{V}$ վեկտորական արտադրյալը նույնն է։ Այդ վեկտորական արտադրյալի մոդուլը B կետում կլինի

$$v_1 \cdot SB = v_1 (a - ae),$$

իսկ A կետում՝

$$v_2 \cdot SA = v_2(a+ae)։$$

Հետևաբար, կունենանք

$$v_1(a-ae) = v_2(a+ae)։$$

*Լուծելով այս հավասարումը $v_2$-ի նկատմամբ, կստանանք պատասխանը։*

Պատ. $v_2 = \dfrac{1-e}{1+e} v_1$։

**4. Բինեի բանաձևը:** *Եթե կետը շարժվում է $\bar{F}$ կենտրոնական ուժի ազդեցության տակ, և $\bar{F}$-ը բացահայտորեն կախված չէ $t$ ժամանակից, ապա այդ կետի հետագծի դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$mc^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right) = -F_r, \qquad \text{(XXII)}$$

*որը և կոչվում է Բինեի բանաձև։ Այստեղ $c$-ն մակերեսների հաստատունն է և որոշվում է (XX) բանաձևով, $(r, \varphi)$-ն կետի բևեռային կոորդինատներն են, $u=\dfrac{1}{r}$, $F_r=F$, երբ ուժը վանող է և $F_r=-F$, երբ ուժը ձգող է։*

*Բինեի բանաձևը հնարավորություն է տալիս որոշելու կենտրոնական ուժը, երբ տրված է կետի շարժման հետագիծը (օրբիտը) և ընդհակառակը՝ որոշելու կետի շարժման հետագիծը, երբ տրված է կենտրոնական ուժը։*

**Խնդիր 55։** *Նյութական կետը շարժվում է կենտրոնական ուժի ազդեցության տակ*

$$r = ae^{-\lambda\varphi}$$

*լոգարիթմական պարուրագծով, որտեղ $a$ և $\lambda$-ն հաստատուններ են։ Գտնել կենտրոնական ուժի փոփոխման օրենքը։*

Լուծում: *Խնդիրը լուծելու համար պետք է օգտվել Բինեի բանաձևից։ Գրենք այդ բանաձևը $u$-ն փոխարինելով $\dfrac{1}{r}$-ով։ Կունենանք*

$$\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}+\frac{1}{r}\right] = -F_r։ \qquad \text{(XXIII)}$$

*Լոգարիթմական պարուրագծի հավասարումը գրենք*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} e^{\lambda\varphi} \qquad \text{(XXIV)}$$

*տեսքով։ Եթե* $\frac{1}{r}$*-ի և* $\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$*-ի արժեքները տեղադրենք* (XXIII) *բանաձևի մեջ, կստանանք*

$$F_r = -\frac{4mc^2(1+\lambda^2)}{r^3}, \qquad \text{(XXV)}$$

(XXV)*-ի մինուս նշանը ցույց է տալիս, որ այն ուժը, որի ազդեցության տակ կետը գծում է լոգարիթմական պարուրագիծ, ձգող ուժ է։*

**Պատ.** $F_r = -\frac{A}{r^3}$, *որտեղ* $A=4mc^2(1+\lambda^2)$ ։

**5. Խնդիրների լուծման մասին:** *Կետի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմի օգնությամբ հեշտությամբ լուծվում են այն խնդիրները, որոնցում*

*ա) կետի վրա ազդող ուժերը հաստատուն են կամ կախված են միայն ժամանակից,*

*բ) տված և որոնելի մեծությունների մեջ մտնում են միայն ազդող ուժերը, շարժման քանակը, կետի սկզբնական և վերջնական արագությունները։*

*Այս պարագրաֆի խնդիրների լուծումը նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդականությամբ։*

*ա) Տված խնդրի պայմանների համաձայն որոշել, թե ո՞ր թեորեմի օգնությամբ կարելի է լուծել տվյալ խնդիրը։*

*բ) Գծագրի վրա նշել շարժվող կետը կամավոր դիրքում և ցույց տալ նրա վրա ազդող ակտիվ և պասիվ ուժերը։*

*գ) Համապատասխան բանաձևերի օգնությամբ հաշվել շարժման ընթացքում բոլոր իմպուլսները և մոմենտները։*

*դ) Օգտվելով* (II)—(X) *և* (XI)—(XV) *բանաձևերից, կազմել համապատասխան հավասարումներ և դրանցից որոշել որոնելի մեծությունները։*

## 6. Խնդիրներ

*Ստորև բերվում են կետի շարժման քանակի և շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմների վերաբերյալ խնդիրների լուծումները։*

**Խնդիր 56 (733)**: *Երկաթուղային գնացքը շարժվում է հորիզոնական ուղղագիծ ուղեմասով։ Արգելակման ժամանակ առաջանում է դիմադրող ուժ, որը հավասար է գնացքի կշռի 0,1 մասին։ Արգելակման սկզբում գնացքի արագությունը հավասար է 72* կմ/ժամ։ *Գտնել արգելակման ժամանակամիջոցը և արգելակման ճանապարհը։*

Լուծում: *Գնացքը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Կետը կատարում է ուղղագիծ շարժում։* OX *առանցքը ուղղենք կետի շարժման հետագծով։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք կետի սկզբնական դիրքում։ Կետի վրա ազդում են նրա* $\bar{P}$ *կշիռը,* $\bar{N}$ *հակազդումը և* $\bar{R}$ *դիմադրության ուժը։* $\bar{P}$ *և* $\bar{N}$ *ուժերը իրար հավասարակշռում են, մնում է դիմադրության ուժը, որը հավասար է 0,1* P-*ի և ուղղված է կետի շարժման հակառակ ուղղությամբ։ Գրենք կետի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով՝*

$$mv - mv_0 = -\int_0^t 0{,}1\,P\,dt\,, \tag{1}$$

*Եթե նկատի ունենանք, որ կետի սկզբնական արագությունը* $v_0 = 72$ կմ/ժամ$=20$ մ/վրկ. *վերջնական արագությունը՝* $v=0$ *և* $P=\mathrm{const}$, *ապա (1)-ից կունենանք*

$$mv_0 = 0{,}1\,Pt\,,$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$t = \frac{mv_0}{0{,}1\,P} = \frac{20}{0{,}1g} = \frac{20}{0{,}1 \cdot 9{,}81} = 20{,}4 \text{ վրկ։} \tag{2}$$

*Սա կլինի արգելակման ժամանակամիջոցը։*

*Եթե (1)-ում* v-*ն փոխարինենք* $\frac{ds}{dt}$-*ով, կստանանք*

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - 0{,}1\,gt\,, \tag{3}$$

*Ինտեգրենք (3) հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ երբ* $t=0$, s-*ը նույնպես զրո է։ Այդ դեպքում (3)-ից կունենանք*

$$s = v_0 t - \frac{0{,}1\,gt^2}{2}\,, \tag{4}$$

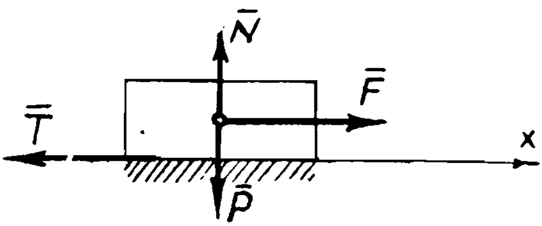
*Եթե* t*-ի արժեքը (2)-ից տեղադրենք (4)-ի մեջ, կստա-նանք*

$$s = 20 \cdot 20{,}4 - \frac{0{,}1 \cdot 9{,}81}{2}(20{,}4)^2 = 204 \text{ մ}$$

**Պատ.** t=20,4 վրկ, s=204 մ։

**Խնդիր 57 (737)**։ *Բեռնված երկաթուղային գնացքի կշի-ռը որոշելու համար շոգեքարշի և վագոնների միջև տեղավորե-ցին դինամոմետր։ Դինամոմետրի միջին ցուցումը 2 րոպեի ըն-թացքում 100,8* տ *է։ Այդ ժամանակամիջոցում գնացքը ձեռք բերեց* v=57,6 կմ/ժամ *արագություն (սկզբում գնացքը կանգնած էր տեղում)։ Շփման գործակիցը՝* f=0,02։ *Գտնել գնացքի կշիռը։*

**Լուծում:** *Գնացքը կատարում է ուղղագիծ շարժում (գծ. 44)։ Վագոնների վրա կիրառված են հետևյալ ուժերը՝ 1) դինա-մոմետրի ձգող* $\bar{F}$ *ուժը, 2) շփման* $\bar{T}$ *ուժը, 3) ծանրության* $\bar{P}$ *ու-ժը և 4)* $\bar{N}$ *նորմալ հակազդումը։*




*Գծ. 44*

*Գրենք կետի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը վեր-ջավոր տեսքով՝*

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \int_0^t (\bar{F}+\bar{T})\,dt, \qquad (1)$$

*Եթե (1) հավասարումը պրոյեկտենք* x *առանցքի վրա և նկատի ունենանք, որ* $v_0=0$, *իսկ* $T=kP$, *կստանանք*

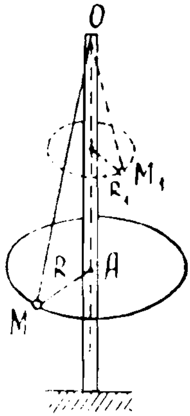
$$\frac{P}{g}v = (F-kP)\,t, \qquad (2)$$

*Մնում է (2)-ի մեջ տեղադրել* v, g, F, k *և* t*-ի թվային արժեքները և որոշել գնացքի* P *կշիռը։ Կունենանք*

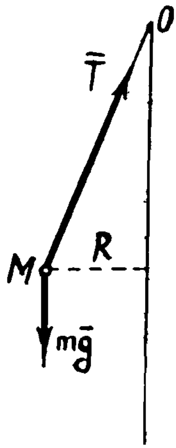
$$P = \frac{Fgt}{v+kgt} = \frac{100{,}8 \cdot 120 \cdot 9{,}81}{16+0{,}02 \cdot 9{,}81 \cdot 120} = 3000 \text{ տ}$$

**Պատ.** $P = 3000$ ն։

**Խնդիր 58։** M կշռաքարը կախված է MOA չձգվող թելի ծայրից, որի AO մասը անց է կացված ուղղաձիգ խողովակով։ Կշռաքարը շարժվում է խողովակի առանցքի շուրջը $MA=R$ շառավիղ ունեցող շրջանագծով. Դանդաղորեն քաշելով OA թելը խողովակի մեջ, կարճացնում են թելի արտաքին մասը մինչև $OM_1$ երկարությունը, որի դեպքում կշռաքարը գծում է $\frac{R}{2}$ շառավղով շրջանագիծ։ Ինչպիսի՞ն է կշռաքարի $v_1$ արագությունը $M_1$ դիրքում, եթե կշռաքարի արագությունը M դիրքում հավասար է v-ի (գծ. 45ա)։




Գծ. 45ա




Գծ. 45բ

**Լուծում:** Կշռաքարը դիտենք որպես նյութական կետ։ Նրա վրա ազդում են երկու ուժ՝ ծանրության $m\bar{g}$ ուժը և թելի $\bar{T}$ հակազդումը (գծ. 45բ)։ Այս ուժերը գտնվում են այն հարթության վրա, որն անցնում է շարժվող կետով և OA ուղղաձիգով։ OA-ն ընդունենք որպես z առանցք և գրենք կետի շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմը z առանցքի նկատմամբ՝

$$\frac{d}{dt}\left[m_z(m\bar{v})\right] = m_z(\bar{F})\,, \qquad (1)$$

$m\bar{g}$ ուժի և $\bar{T}$ հակազդման մոմենտները z առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի, քանի որ $m\bar{g}$-ն զուգահեռ է z առանցքին, իսկ $\bar{T}$-ն հատում է այդ առանցքը։ Դրա հետևանքով (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{d}{dt}\left[m_z(m\bar{v})\right] = 0$$

կամ

$$m_z(m\bar{v}) = \text{const}\,. \qquad (2)$$

Կետի շարժման քանակի մոմենտը z առանցքի նկատմամբ կլինի.

ա) M դիրքի համար

$$m_z(m\bar{V}) = mvR,$$

բ) $M_1$ դիրքի համար

$$m_z(m\bar{V}) = mv_1\frac{R}{2}։$$

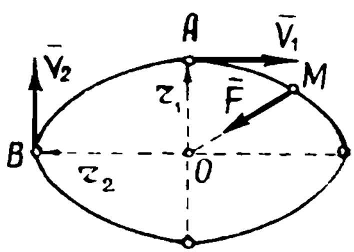
(2)-ի հիման վրա կունենանք

$$mv_1\frac{R}{2} = mvR։$$

Այստեղից ստացվում է $v_1=2v$։

Պ ա տ. $v_1=2v$։

288 **Խնդիր 59 (740)**։ M կետը շարժվում է անշարժ կենտրոնի շուրջը դեպի այդ կենտրոնը ձգող ուժի ազդեցության տակ։ Գտնել հետագծի կենտրոնից ամենամեծ հեռավորության վրա գտնվող կետում նրա $v_2$ արագությունը, եթե նրան ամենամոտ գտնվող կետում արագությունը՝ $v_1=30$ սմ/վրկ, իսկ $r_2$-ը հինգ անգամ մեծ է $r_1$-ից (գծ. 46)։




Գծ. 46

Լուծում: Քանի որ $\bar{F}$ ուժը կենտրոնական է, ապա կունենանք

$$\bar{m}_o(m\bar{v}) = \overline{const}$$

կամ

$$\bar{r}_1 \times \bar{V}_1 = \bar{r}_2 \times \bar{V}_2 ։ \qquad (1)$$

O կենտրոնից ամենափոքր հեռավորության վրա գտնվող A և ամենամեծ հեռավորության վրա գտնվող B կետերում (1)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$r_1v_1 = r_2v_2 ։$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$v_2 = \frac{r_1v_1}{r_2} = \frac{1}{5}\cdot 30 = 6 \text{ սմ/վրկ}։$$

Պ ա տ. $v_2 = 6$սմ/վրկ։



8—89

Խ ն դ ի ր **61**։ *Պլուտոն մոլորակի Արեգակի շուրջը կատարած շարժման հետագիծը էլիպս է, ընդ որում Պլուտոնի հեռավորությունը Արեգակից փոփոխվում է* 4,46 · 10$^9$ կմ-*ից մինչև* 7,40 · 10$^9$ կմ *(գծ. 43)*։ *Գտնել Պլուտոնի ամենամեծ և ամենափոքր արագությունների հարաբերությունը*։

Ցուցում: *Նախորդ խնդրի համաձայն*

$$v_{max}\, r_{min} = v_{min}\, r_{max}$$

*կամ*

$$v_{max} : v_{min} = r_{max} : r_{min}\,։$$

Պ ա տ. $v_{max} : v_{min} = 1,66$ ։

Խ ն դ ի ր **62**։ m *մասսա ունեցող* M *նյութական կետը* $\bar{F}$ *կենտրոնական ուժի ազդեցության տակ գծում է* a *և* b *կիսաառանցքներով էլիպս, որի կենտրոնը համընկնում է ուժի* O *կենտրոնի հետ։ Որոշել* $\bar{F}$ *ուժի մեծությունը,* M *կետի և ուժի կենտրոնի միջև եղած* r *հեռավորության կախումը։ Սկզբնական մոմենտում* $x_0=a$, $y_0=0$, *և* $v_0$ *սկզբնական արագությունը զուգահեռ է* oy *առանցքին*։

Լ ու ծ ու մ: *Գրենք էլիպսի հավասարումը* xoy *կոորդինատական սիստեմում։ Այն կլինի*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,։ \tag{1}$$

*Էլիպսի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով գրելու համար կատարենք*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

*տեղադրումը։ Այդ դեպքում (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1$$

*կամ*

$$r = \frac{b}{\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}}, \tag{2}$$

*որտեղ*

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{3}$$

*հանդիսանում է էլիպսի էքսցենտրիսիտետը։*

*Նկատի ունենալով, որ*

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}}{b}, \tag{4}$$

*կստանանք*

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{e^2}{2b}(1-e^2\cos^2\varphi)^{-1/2}\sin 2\varphi\,,$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{e^2}{2b}\left[2\cos 2\varphi\,(1-e^2\cos^2\varphi)^{-1/2} - \frac{e^2}{2}\sin^2 2\varphi\,(1 - e^2\cos^2\varphi)^{-3/2}\right], \tag{5}$$

*Այժմ գրենք Բինեի բանաձևը՝*

$$mc^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = -F \tag{6}$$

*և նրանում տեղադրենք* $u$ *և* $\frac{d^2u}{d\varphi^2}$*-ի արժեքները (4) և (5) բանաձևերից։ Կունենանք*

$$mc^2 \cdot \frac{1-e^2\cos^2\varphi}{b^2}\left[\frac{(1-e^2\cos^2\varphi)^{1/2}}{b} + \frac{e^2\cos 2\varphi\,(1-e^2\cos^2\varphi)^{-1/2}}{b} - \frac{e^4\sin^2 2\varphi\,(1-e^2\cos^2\varphi)^{-3/2}}{4b}\right] = -F, \tag{7}$$

*(7)-ում նշված գործողությունները կատարելուց հետո կըստանանք*

$$\frac{mc^2(1-e^2)\,r}{b^4} = -F, \tag{8}$$

*Այստեղ* $c$*-ն մակերեսների հաստատունն է և որոշվում է* $M$ *կետի շարժման նախնական պայմաններից։ Քանի որ*

$$\text{երբ } t=0 \;\Big|\; r = a,\quad v=v_0,\quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

*ուստի* (XX) *բանաձևի համաձայն կունենանք* $c=av_0$։ *Տեղադրելով* $c$*-ի համար ստացած այս արժեքը (8)-ի մեջ, կստանանք խնդրի պատասխանը։*

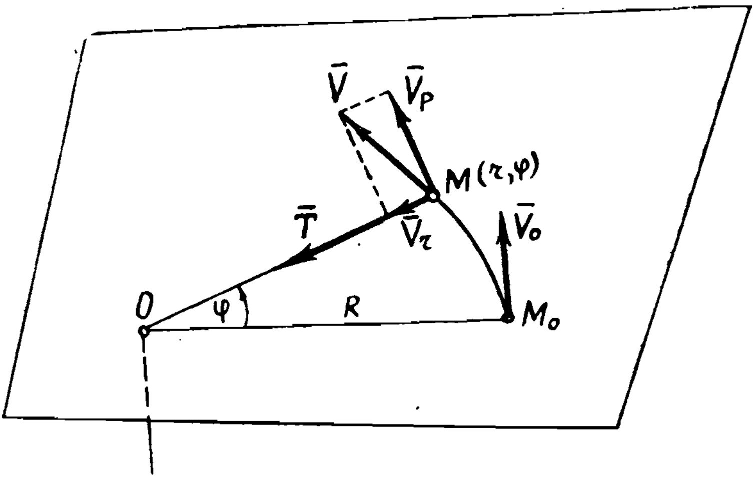
**Պատ.** $F = -\dfrac{ma^2v_0^2(1-e^2)\,r}{b^4}$.

28, 14 **Խնդիր 63 (746)**։ *Չձգվող թելից կապված* P *կշիռ ու-*

նեցող գնդիկը սահում է ողորկ հորիզոնական հարթության վրայով։ Թելի մյուս ծայրը a հաստատուն արագությամբ ձգվում է հարթության վրա արված անցքով։ Որոշել գնդիկի շարժումը և թելի T լարումը, եթե հայտնի է, որ սկզբնական մոմենտում թելը դասավորված է ուղղով, գնդիկի և անցքի միջև եղած հեռավորությունը հավասար է R-ի, իսկ գնդիկի սկզբնական արագության պրոյեկցիան թելի ուղղության ուղղահայացի վրա հավասար է $v_0$։

**Լուծում:** *Տանենք բևեռային կոորդինատական սիստեմը (գծ. 47)։* M *կետի կոորդինատները նշանակենք* (r, φ)։ *Քանի որ* $\bar{F}$ *ուժն անցնում է* O *կետով, ապա*

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = 0$$




Գծ. 47

և շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմից կունենանք

$$\bar{m}_0(m\bar{V}) = \overline{\text{const}}\text{ ։} \tag{1}$$

$\bar{V}$ արագությունը վերածենք ռադիալ և տրանսվերսալ բաղադրիչների՝

$$\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_p\text{ ։} \tag{2}$$

Եթե (2)-ը տեղադրենք (1)-ի մեջ և նկատի ունենանք, որ արագության $\bar{V}_r$ ռադիալ բաղադրիչը անցնում է O կետով, կստանանք

$$\overline{m}_0(mv_p) = \overline{const} \tag{3}$$

կամ

$$\bar{r} \times \bar{v}_p = \overline{const}. \tag{4}$$

(4)-ը պրոյեկտենք կետի շարժման հարթությանը ուղղահայաց ուղղության վրա։ Կունենանք

$$v_p \cdot r = c_1,$$

որտեղ $c_1$-ը հաստատուն մեծություն է։ Նախնական պայմանների համաձայն

$$(v_p)_{t=0} = v_0, \quad (r)_{t=0} = R. \tag{5}$$

(5)-ի հիման վրա կստանանք $c_1 = v_0 R$, և (4)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$v_p r = v_0 R. \tag{6}$$

Խնդրի պայմանի համաձայն

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -a. \tag{7}$$

Այստեղ դրված է մինուս նշան, քանի որ r-ը, կախված t-ից, նվազում է։ Եթե ինտեգրենք (7) հավասարումը և նկատի ունենանք (5) նախնական պայմանները, կստանանք

$$r = R - at. \tag{8}$$

Եթե r-ի արժեքը (8)-ից տեղադրենք (6)-ի մեջ, միաժամանակ նկատի ունենանք, որ $v_p = r\frac{d\varphi}{dt}$ և կատարենք փոփոխականների անջատում, կունենանք

$$d\varphi = \frac{v_0 R}{(R-at)^2}\, dt. \tag{9}$$

Այստեղից էլ կստացվի

$$\varphi = \frac{v_0 t}{R-at}. \tag{10}$$

(10)-ը ստանալիս օգտագործված է $\varphi|_{t=0} = 0$ նախնական պայմանը։

Մնում է որոշել թելի T լարումը։ Ակնհայտ է, որ $\overline{T}$-ն կենտրոնական ուժ է, հետևաբար այն կարելի է որոշել Բինեի բանաձևի օգնությամբ։ Քանի որ T-ն ձգող ուժ է, ապա Բինեի բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$T = \frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right], \tag{11}$$

*Եթե (8) և (10) բանաձևերից արտաքսենք* t *ժամանակը, կստանանք*

$$r = \frac{v_0 R}{a\varphi + v_0}. \tag{12}$$

*Այստեղից ստացվում է*

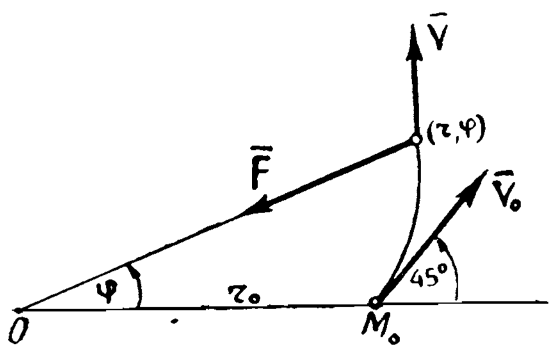
$$\frac{1}{r} = \frac{a}{v_0 R}\varphi + \frac{1}{R}, \quad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} = \frac{a}{v_0}R, \quad \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} = 0.$$

*Տեղադրելով այս արժեքները (11)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենալով, որ* $c = R_0 v_0$, *կստանանք*

$$T = \frac{mR^2 v_0^2}{(R - at)^3},$$

Պատ. $r = R - at$, $\varphi = \frac{v_0 t}{R - at}$, $T = \frac{Pv_0^2 R^2}{g(R - at)^3}$.

**Խնդիր 64 (750)։** *Որոշել 1 Գ մասսա ունեցող կետի շարժման օրենքը, հետագիծը, եթե այն շարժվում է կետից մինչև ուժի կենտրոնը եղած հեռավորության խորանարդին հակադարձ համեմատական կենտրոնական ձգողության ուժի ազդեցու-*




Գծ. 48

*թյան տակ։ Տված է*։ Նաև, որ 1* սմ *հեռավորության վրա ուժը հավասար է 1* դին, *սկզբնական մոմենտում կետի հեռավորու-*

*թյունը կենտրոնից* $r_0=2$ սմ, *արագությունը՝* $v_0=0{,}5$ սմ/վրկ *և կազմում է ուժի կենտրոնից դեպի կետը տարված ուղղի հետ 45°-ի անկյուն (գծ. 48)։*

Լուծում: Առաջին եղանակ: *Տանենք բևեռային կոորդինատական սիստեմը։* M *կետի բևեռային կոորդինատները նշանակենք* (r, φ)։

*Խնդրի պայմանի համաձայն* F *ուժն ունի*

$$F=\frac{\mu}{r^3} \tag{1}$$

*տեսքը, որտեղ* μ-*ն համեմատականության գործակիցն է։ Քանի որ 1* սմ *հեռավորության վրա ուժը հավասար է 1* դին, *ուստի (1)-ից կստանանք* $\mu=1$։ *Հետևաբար,* F *ուժը հայտնի է։*

*Գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը վեկտորական տեսքով՝*

$$\frac{d\overline{V}}{dt}=-\frac{1}{r^3}\cdot r_0, \tag{2}$$

*Եթե (2) հավասարումը պրոյեկտենք արագության ուղղության վրա, կստանանք*

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{r^3}\cos(\overline{V},\widehat{\ r^0}), \tag{3}$$

*Օգտվելով* $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$ *և* $\frac{dr}{dt}=v_r=v\cos(\overline{V},\widehat{\ r^0})$ *առնչություններից, (3)-ը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$vdv=-\frac{dr}{r^3}, \tag{4}$$

*Եթե (4)-ը ինտեգրենք և միաժամանակ նկատի ունենանք նախնական պայմանները, կստանանք*

$$\frac{v^2}{2}\Bigg|_{0,5}^{v}=\frac{1}{2r^2}\Bigg|_{2}^{r};$$

*Տեղադրումները կատարելուց հետո կունենանք*

$$v^2=\frac{1}{r^2}, \tag{5}$$

*Քանի որ* $\overline{F}$ *ուժը կենտրոնական է, ուստի մակերեսների օրենքի համաձայն կարող ենք գրել, որ*

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c, \tag{6}$$

որտեղ $c = r_0 v_0 \sin(\widehat{\bar{r}_0, \bar{V}_0}) = 2 \cdot 0{,}5 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$։ Հետևաբար, (6)-ից կունենանք

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{r^2}, \tag{7}$$

Այժմ գրենք արագության արտահայտությունը բևեռային կոորդինատներով՝

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{8}$$

Եթե օգտվենք

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

նույնությունից, ապա կարող ենք (8)-ը գրել հետևյալ տեսքով՝

$$v^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{9}$$

(5)-ի և (7)-ի հիման վրա (9)-ից կստանանք

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^2,$$

Այստեղից ստացվում է

$$\frac{dr}{d\varphi} = r, \tag{10}$$

Այստեղ վերցված է դրական նշան, քանի որ $d\varphi > 0$ և $dr > 0$։

Եթե (10)-ը գրենք

$$\frac{dr}{r} = d\varphi$$

տեսքով, ինտեգրենք այն և միաժամանակ օգտագործենք

$$r\Big|_{\varphi=0} = 2$$

պայմանը, կստանանք

$$r = 2e^{\varphi}, \tag{11}$$

*Այժմ գտնենք* r-*ի և* t-*ի միջև եղած կապը։ Դրա համար (9)-ի մեջ տեղադրենք* $v^2$-*ու և* $\frac{d\varphi}{dt}$-*ի արժեքները (3) և (5)-ից, կստանանք*

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{r}, \qquad (12)$$

*Եթե ինտեգրենք (12)-ը և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ* $r_0 = 2$ սմ, *կունենանք*

$$r^2 = 4 + \sqrt{2}\,t.$$

Երկրորդ եղանակ: *Լուծենք այս խնդիրը՝ օգտագործելով Բինեի բանաձևը։ Եթե նկատի ունենանք, որ* $F = \frac{1}{r^3}$, $m=1$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *ապա Բինեի բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 2u$$

*կամ*

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} - u = 0, \qquad (13)$$

*(13)-ը հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի լուծումը կլինի*

$$u = c_1e^{\varphi} + c_2e^{-\varphi}, \qquad (14)$$

*որտեղ* $c_1$ *և* $c_2$-*ը ինտեգրման հաստատուններն են։ Դրանք որոշելու համար օգտվենք խնդրի նախնական պայմաններից՝*

$$t = 0 \left|\begin{array}{l} \varphi = 0, \quad v_r = \frac{dr}{dt} = 0{,}5\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ r = 2, \quad v_p = r\frac{d\varphi}{dt} = 0{,}5\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}, \end{array}\right. \qquad (15)$$

*(15) նախնական պայմաններից ստանում ենք, որ*

$$\text{երբ}\quad t=0, \quad \frac{dr}{d\varphi} = 2.$$

*Այսպիսով,* $c_1$ *և* $c_2$ *հաստատունները որոշելու համար կունենանք հետևյալ նախնական պայմանները՝*

$$\varphi = 0 \quad \left| \begin{aligned} & u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}, \\ & \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\,\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{2}, \end{aligned} \right. \tag{16}$$

*Եթե ածանցենք (14)-ը, կստանանք*

$$\frac{du}{d\varphi} = c_1 e^{\varphi} - c_2 e^{-\varphi}, \tag{17}$$

*(14), (17) և (16)-ից կունենանք*

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{2},$$

$$c_1 - c_2 = -\frac{1}{2},$$

*Այստեղից ստացվում է* $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$։ *Տեղադրելով այս արժեքները (14)-ի մեջ, կստանանք*

$$u = \frac{1}{2} e^{-\varphi}$$

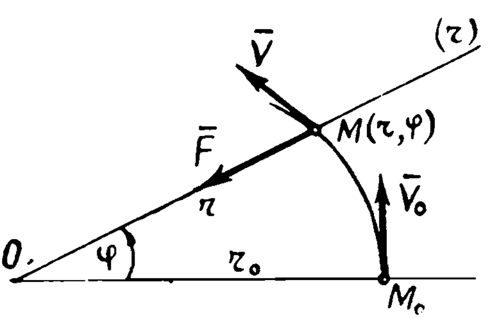
*կամ*

$$r = 2e^{\varphi}\text{։}$$

*Սրանից հետո լուծումը նույնն է, ինչ առաջին եղանակի դեպքում։*

Պատ. $r = 2e^{\varphi}$, $r^2 = 4 + \sqrt{2}\,t$։

**Խնդիր 65 (753)**։ *1 Գ մասսա ունեցող* M *մասնիկը ձգվում է դեպի անշարժ* O *կենտրոնը մի ուժով, որը հակադարձ համեմատական է հեռավորության հինգերորդ աստիճանին. այդ ուժը հավասար է 8* դին *1* սմ *հեռավորության դեպքում։ Սկզբնական մոմենտում մասնիկը գտնվել է* $OM_0 = 2$ սմ *հեռավորության վրա և ունեցել է* $OM_0$*-ին ուղղահայաց* $v_0 = 0.5$ սմ/վրկ *արագություն։ Որոշել մասնիկի հետագիծը։*




*Գծ. 49*

**Լուծում**: Առաջին եղանակ: *Տանենք բևեռային կոորդինա-*

*տական սիստեմ (գծ. 49)։* M *կետի կոորդինատները նշանակենք* (r, φ)։ *Քանի որ ձգող ուժը հակադարձ համեմատական է հեռավորության հինգերորդ աստիճանին, ուստի այն կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$F = -\frac{\mu}{r^5}, \tag{1}$$

*որտեղ* μ-*ն համեմատականության գործակիցն է։*

*Նախնական պայմաններից ունենք՝ երբ* r=1 սմ, F=8 դին։ *Տեղադրելով այս տվյալները (1)-ի մեջ, կստանանք, որ* μ = 8։ *Հետևաբար, (1)-ը կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$F = -\frac{8}{r^5}, \tag{2}$$

F *ուժի կենտրոնական լինելու հետևանքով տեղի կունենա մակերեսների օրենքը և դրա հիման վրա կարող ենք գրել, որ*

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c\, , \tag{3}$$

*Այստեղ*

$$c = r_0v_0\sin(\widehat{\bar{r}_0, \bar{v}_0}) = 2\cdot 0{,}5\sin\frac{\pi}{2} = 1\, ,$$

*Հետևաբար, (3)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r^2}, \tag{4}$$

*Եթե գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը (պրոյեկտված արագության ուղղության վրա)*

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{8}{r^5}\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{r}^0})$$

*և օգտվենք*

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\,\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}\cos(\widehat{\bar{v}, \bar{r}^0})$$

*հատկությունից, ապա կունենանք*

$$vdv = -\frac{8dr}{r^5}, \tag{5}$$

*Ինտեգրենք (5) դիֆերենցիալ հավասարումը, օգտագործելով երբ* $r=r_0=2$ սմ, $v=v_0=0{,}5$ սմ/վրկ *նախնական պայմանը։ Այդ դեպքում կունենանք*

$$v^2 = \frac{4}{r^4}\text{։} \tag{6}$$

*Գրենք կետի արագությունը բևեռային կոորդինատներով՝*

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{7}$$

*Եթե նկատի ունենանք, որ*

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt},$$

*ապա (7)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$v^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \tag{8}$$

*(8)-ի մեջ տեղադրենք* $\frac{d\varphi}{dt}$ *և* $v^2$*-ու արժեքները (4) և (6) բանաձևերից։ Կստանանք*

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = 4$$

*կամ* (9)

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\sqrt{4 - r^2}\text{։}$$

*Արմատի առաջ վերցված է մինուս նշան, քանի որ* $t = 0$ *մոմենտում* $d\varphi > 0$, *իսկ* $dr < 0$։ *Վերջինս հետևում է նրանից, որ սկզբնական արագությունը ուղղահայաց է շառավիղ-վեկտորին և ուժի ձգող լինելու հետևանքով կետը* $t = 0$ *մոմենտից հետո մոտենում է ուժի* O *կենտրոնին։*

*Եթե (9) դիֆերենցիալ հավասարման մեջ կատարենք փոփոխականների անջատում, ինտեգրենք ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը և տեղադրենք նախնական պայմանները, կստանանք*

$$r = 2\cos\varphi\text{։} \tag{10}$$

*Հետագծի տեսքը որոշելու համար անցնենք դեկարտյան կոորդինատներին՝*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = 2\cos^2\varphi, \\ y &= r\sin\varphi = \sin 2\varphi\text{։} \end{aligned} \tag{11}$$

*Քանի որ*

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1,$$

*ուստի (11)-ը կարող ենք գրել այսպես՝*

$$x-1=\cos 2\varphi, \quad y=\sin 2\varphi\text{։} \tag{12}$$

*(12)-ից արտաքսելով* $\varphi$ *անկյունը, կստանանք հետագծի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝*

$$(x-1)^2 + y^2 = 1\text{։} \tag{13}$$

Երկրորդ եղանակ: *Լուծենք այս խնդիրը՝ օգտագործելով Բինեի բանաձևը։ Եթե նկատի ունենանք, որ* F*-ը որոշվում է (2) բանաձևով,* $m=1$, $c=1$, *ապա Բինեի բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 8u^3, \tag{14}$$

*(14) դիֆերենցիալ հավասարումը ինտեգրելու համար կատարենք*

$$\frac{du}{d\varphi} = P \tag{15}$$

*տեղադրումը։ Այդ դեպքում (14)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$PdP = (8u^3 - u)\,du\text{։} \tag{16}$$

*Ինտեգրելով (16)-ը, կստանանք*

$$P^2 = 4u^4 - u^2 + c_1, \tag{17}$$

*որտեղ* $c_1$*-ը ինտեգրման հաստատունն է։*

$c_1$*-ը որոշելու համար հաշվենք* $P = \frac{du}{d\varphi}$*-ի արժեքը* $t = 0$ *մոմենտում։ Խնդրի պայմանի համաձայն սկզբնական մոմենտում արագությունը ուղղահայաց է շառավղին, որի հետևանքով*

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = 0\text{։} \tag{18}$$

*Մյուս կողմից, խնդրի պայմանի համաձայն, արագության տրանսվերսալ բաղադրիչը սկզբնական մոմենտում հավասար չէ զրոյի, այսինքն՝*

$$v_p = r\frac{d\varphi}{dt} \neq 0, \tag{19}$$

*(18) և (19)-ից հետևում է, որ*

$$\frac{1}{u^2}\,\frac{d\varphi}{dt} \neq 0,$$
$$\frac{du}{d\varphi} = 0\text{։} \tag{20}$$

*(15), (17), (20) և* $r_0=2$ սմ *նախնական պայմանից հետևում է, որ* $c_1=0$ *և կունենանք*

$$P = \frac{du}{d\varphi} = \pm\, u\sqrt{4u^2-1}\text{ ։} \tag{21}$$

*Կատարենք փոփոխականների անջատում։ Կստանանք*

$$\frac{du}{u\sqrt{4u^2-1}} = \pm\, d\varphi \tag{22}$$

*կամ*

$$\int \frac{du}{u\sqrt{4u^2-1}} = \pm\,\varphi + c_2\text{։} \tag{23}$$

*Եթե* $u=\frac{1}{r}$ *բանաձևով* u-*ից անցնենք* r-*ին, կունենանք*

$$\int \frac{dr}{\sqrt{4-r^2}} = \mp\,\varphi - c_2\text{ ։} \tag{24}$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$\arccos\frac{r}{2} = \mp\,\varphi - c_2\text{ ։} \tag{25}$$

*Նախնական պայմաններից ունենք՝ երբ* $\varphi=0$, $r=2$։ *Հետևաբար,* $c_2=0$։ *(25)-ից ստացվում է*

$$r = 2\cos\varphi,$$

*որից հետո լուծումը պարզ է։*

**Պ ա տ.** $(x-1)^2+y^2=1$։

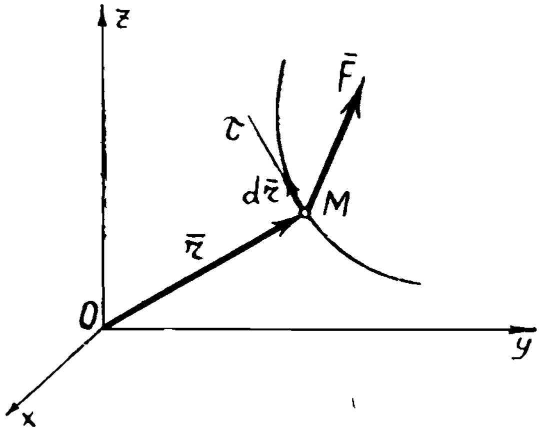
## § 6. ԱՇԽԱՏԱՆՔ ԵՎ ՀԶՈՐՈՒԹՅՈՒՆ

**1. Ուժի էլեմենտար աշխատանքը:** *Դիցուք* M *նյութական կետը* $\bar{F}$ *ուժի ազդեցության տակ կատարում է* $d\bar{r}$ *էլեմենտար տեղափոխություն (գծ. 50)։ Այդ դեպքում* $\bar{F}$ *ուժի էլեմենտար աշխատանքը* $d\bar{r}$ *տեղափոխության վրա կոչվում է*

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = F\,ds\cos(\bar{F},\, d\bar{r}) \qquad (|d\bar{r}| = ds) \qquad (1)$$

*սկալյար արտադրյալը։*

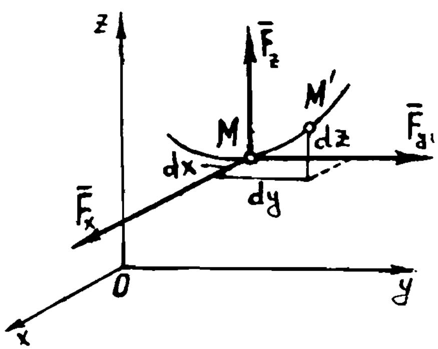
*Այսպիսով, ուժի էլեմենտար աշխատանքը հավասար է ուժի մոդուլի, էլեմենտար* ds *տեղափոխության և ուժի ու տեղափոխության միջև կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալին։*




*Գծ. 50*

*Եթե* $\alpha = \measuredangle(\bar{F},\, \widehat{d\bar{r}})$ *սուր է, ապա աշխատանքը դրական է, մասնավոր դեպքում, երբ* $\alpha = 0$, *էլեմենտար աշխատանքը կլինի* $\bar{F}\cdot d\bar{r} = F\,ds$, *իսկ* $\alpha$ *անկյունը բութ լինելու դեպքում աշխատանքը դառնում է բացասական, երբ* $\alpha = 90^\circ$, *այսինքն՝ ուժը ուղղահայաց է տեղափոխման ուղղությանը, ապա ուժի էլեմենտար աշխատանքը հավասար կլինի զրոյի։*

*Եթե* $\bar{F}$ *ուժի պրոյեկցիաները դեկարտյան կոորդինատական առանցքների վրա նշանակենք* $F_x$, $F_y$, $F_z$ *(գծ. 51), իսկ* $d\bar{r}$*-ի պրոյեկցիաները՝* $dx$, $dy$, $dz$, *որտեղ* $x$, $y$, $z$*-ը* M *կետի կոորդինատներն են, ապա ուժի*




*Գծ. 51*

*էլեմենտար աշխատանքի համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$\bar{F} \cdot d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \, . \qquad \text{(II)}$$

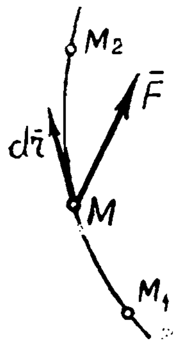
**2. Ուժի աշխատանքը վերջավոր տեղափոխության վրա:** *Եթե* $\bar{F}$ *ուժի ազդեցության տակ կետը շարժվում է որևէ կորով* $M_1$ *դիրքից* $M_2$ *դիրքը, ապա* $M_1M_2$ *(գծ. 52) վերջավոր ճանապարհի վրա ուժի աշխատանքը հավասար կլինի*

$$A = \int_{\overset{\frown}{M_1M_2}} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{\overset{\frown}{M_1M}} F \, ds \cos(\bar{F}, d\bar{r}) = \int_{\overset{\frown}{MM_1}} F_\tau ds \qquad \text{(III)}$$

*կամ*

$$A = \int_{\overset{\frown}{M_1M_2}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz), \qquad \text{(IV)}$$

*որտեղ ինտեգրալը վերցվում է* $\overset{\frown}{M_1M_2}$ *կորագիծ ճանապարհի երկարությամբ։*



Գծ. 52

*Ընդհանուր դեպքում* $F_x$, $F_y$, $F_z$*-ը կախված են* t *ժամանակից, կետի* (x, y, z) *կոորդինատներից և* ($\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$) *արագություններից: Հետևաբար,* (IV) *ինտեգրալը հաշվելու համար պետք է հայտնի լինի կետի շարժման օրենքը, այսինքն՝* x, y, z*-ը որպես* t *ժամանակի ֆունկցիաներ: Այսպիսով, ընդհանուր դեպքում ուժի աշխատանքը կախված է կետի շարժման օրենքից և հետագծի տեսքից։*

*Միավորների տեխնիկական սիստեմում ուժի աշխատանքը չափվում է կիլոգրամոմետրերով, այսինքն՝ որպես աշխատանքի միավոր ընդունվում է մեկ կիլոգրամ ուժի կատարած աշխատանքը մեկ մետր ճանապարհի վրա։*

*Միավորների ֆիզիկական սիստեմում որպես աշխատանքի միավոր ընդունված է էրգը, որը հավասար է մեկ դին ուժի աշխատանքին մեկ սանտիմետր ճանապարհի վրա։*

*Գործնականում հաճախ աշխատանքը չափում են ջոուլներով՝ 1 ջոուլ* $= 10^7$ էրգ $= 0{,}102$ կԳմ։

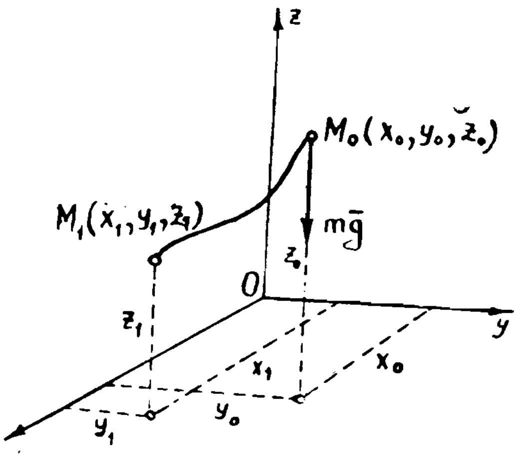
**3. Աշխատանքի հաշվման վերաբերյալ օրինակներ: ա) Ծանրության ուժի աշխատանքը:** *Դիցուք* m *մասսա ունեցող նյութա-*

կան կետի վրա ազդում է միայն $\bar{P}=m\bar{g}$ ծանրության ուժը։ Հաշվենք այս ուժի աշխատանքը, երբ կետը $M_0(x_0, y_0, z_0)$ դիրքից տեղափոխվում է $M_1(x_1, y_1, z_1)$ դիրքը (գծ. 53)։ Գծագրից երևում է, որ $P_x=0$, $P_y=0$, $P_z=-P$։ Տեղադրելով այս արժեքները (IV)-ի մեջ, կստանանք

$$A=-\int\limits_{\overset{\frown}{M_0M_1}} mg\,dz=-mg\int\limits_{z_0}^{z_1} ds=mg\,(z_0-z_1)\text{։}$$

Եթե $M_0$ կետը ավելի բարձր է, քան $M_1$ կետը, ապա $z_0-z_1=h$, որտեղ $h$-ը կետի ուղղաձիգ տեղափոխման մեծությունն է, իսկ եթե $M_0$ կետը գտնվում է ավելի ցածր, քան $M_1$ կետը, ապա կունենանք $z_0-z_1=-(z_1-z_0)=-h$։ Հետևաբար, ծանրության ուժի աշխատանքը կլինի

$A=\pm mgh$։



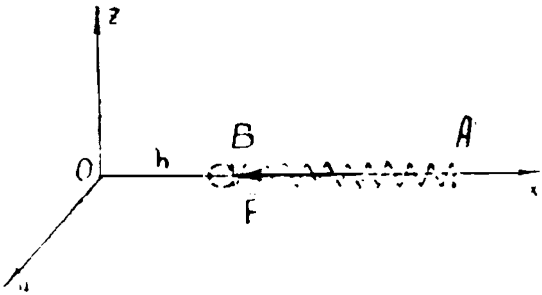

Գծ. 53

Այսպիսով, ծանրության ուժի աշխատանքը հավասար է կետի կշռի և կետի ուղղաձիգ տեղափոխման արտադրյալին՝ վերցրած դրական կամ բացասական նշանով։ Աշխատանքը դրական է, երբ կետի սկզբնական դիրքը բարձր է վերջնական դիրքից և բացասական՝ երբ սկզբնական դիրքը ցածր է վերջնական դիրքից։

Ստացված արդյունքից հետևում է, որ ծանրության ուժի աշխատանքը կախված չէ այն կորի տեսքից, որով շարժվում է կետը։ Այսպիսի հատկություն ունեցող ուժը կոչվում է պոտենցիալ ուժ։

բ) **Առաձգական ուժի աշխատանքը։** Դիցուք տված է AO զսպանակը, որի ծայրը ամրացված է A անշարժ կետում։ Զսպանակը վերցնենք չձգված վիճակում և կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք O կետում (գծ. 54)։ Զսպանակի O ծայրի շեղման դեպքում, օրինակ, դեպի աջ, x հեռավորության վրա կառաջանա առաձգական ուժ, որը հավասար է $-cx\cdot\bar{i}$, որտեղ c-ն զսպանակի կոշտությունն է։ Այստեղ $F_x = -cx$, $F_y = F_z = 0$, որի հետևանքով, եթե O կետը շեղվում է $h = OB$ հեռավորության վրա, ապա այդ տեղափոխության վրա աշխատանքը կլինի

$$A = -\int_{OB} cx\,dx = -c\int_0^h x\,dx = -\frac{ch^2}{2},$$

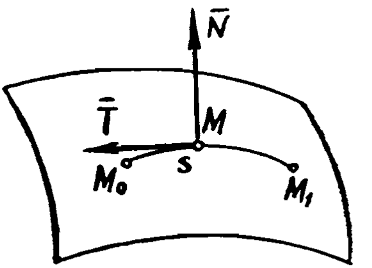



Գծ. 54

Այսպիսով, առաձգական ուժի աշխատանքը հավասար է կոշտության գործակցի և սեղմման (կամ երկարացման) քառակուսու արտադրյալի կեսին։

Առաձգական ուժի աշխատանքը կլինի բացասական, երբ զսպանակի ծայրը հեռանում է հավասարակշռության դիրքից և դրական՝ երբ զսպանակի ծայրը տեղափոխվում է դեպի հավասարակշռության դիրքը։

**գ) Շփման ուժի աշխատանքը:** Դիցուք կետը շարժվում է ոչ իդեալական հարթ մակերևույթով (գծ. 55) կամ կոր գծով։ Կետի վրա կիրառված շփման ուժի մեծությունը կլինի $T = fN$, որտեղ $f$-ը շփման գործակիցն է, իսկ $N$-ը՝ մակերևույթի նորմալ հակազդումը։ Շփման ուժը ունի կետի տեղափոխման հակառակ ուղղությունը։ Հետևաբար, շփման ուժի աշխատանքը, (III) բանաձևի համաձայն, կլինի




Գծ. 55

$$A = -\int_{M_0}^{M_1} T\,ds = \int_{M_0}^{M_1} fN\,ds \text{ ։}$$

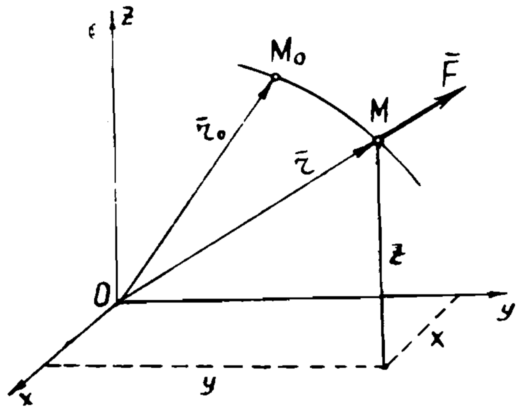
*Եթե շփման ուժի մեծությունը հաստատուն է, ապա* $A = -Ts$, *որտեղ* $s$*-ը* $M_0M_1$ *աղեղի երկարությունն է։*

*Այսպիսով, շփման ուժի աշխատանքը միշտ բացասական է։ Այս ուժի աշխատանքը կախված է* $M_0M_1$ *աղեղի տեսքից։ Հետևաբար, շփման ուժը պոտենցիալ ուժ չէ։*

**դ) Ձգողության ուժի աշխատանքը:** *Դիցուք* $M$ *նյութական կետի վրա ազդում է կենտրոնական ուժ, որի մեծությունը ուժերի կենտրոնից կետի ունեցած հեռավորության որևէ ֆունկցիա է, այսինքն՝*

$$F = f(r), \qquad (1)$$

*որտեղ* $r$*-ը* $M$ *կետի շառավիղ-վեկտորն է,* $\bar{r} = \overline{OM}$*։ Այստեղ ուժի կենտրոնը ընտրված է որպես կոորդինատների սկզբնակետ։*




Գծ. 56

*Եթե կենտրոնական ուժը վանող է, ապա նա կունենա նույն ուղղությունը, ինչ* $M$ *կետի շառավիղ-վեկտորը (գծ. 56)։*

*Ենթադրենք* $M$ *կետը տեղափոխվել է* $M_0$ *դիրքից մինչև* $M$ *դիրքը։* $M_0$ *դիրքի շառավիղ-վեկտորը նշանակենք* $\bar{r}_0$*։ Պահանջվում է գտնել* $\bar{F}$ *կենտրոնական ուժի աշխատանքը, երբ կետը կատարում է նշված տեղափոխությունը։*

*Նախ գտնենք* $\bar{F}$ *ուժի պրոյեկցիաները։ Դրանք կլինեն՝*

$$F_x = F\cos(\widehat{\bar{F}, x}) = f(r)\cos(\widehat{r, x}) = f(r)\frac{x}{r},$$

$$F_y = F\cos(\widehat{\bar{F}, y}) = f(r)\cos(\widehat{r, y}) = f(r)\frac{y}{r}, \qquad (2)$$

$$F_z = F\cos(\widehat{\bar{F}, z}) = f(r)\cos(\widehat{r, z}) = f(r)\frac{z}{r} \text{ ։}$$

Տեղադրելով $F_x$, $F_y$, $F_z$-ի այս արժեքները ուժի էլեմենտար աշխատանքի արտահայտության մեջ, կստանանք

$$\bar{F}\cdot d\bar{r}=F_x dx+F_y dy+F_z dz=\frac{f(r)}{r}(x\,dx+y\,dy+z\,dz)\,: \tag{3}$$

Քանի որ

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

ապա կունենանք

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=\frac{1}{2}d(r^2)=\frac{1}{2}2r\,dr=r\,dr\,:$$

Հետևաբար, (3)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\bar{F}\,d\bar{r}=f(r)\,dr\,: \tag{4}$$

Եթե ինտեգրենք (4)-ը և միաժամանակ ընդունենք, որ f(r) ֆունկցիայի նախնական ֆունկցիան Φ(r)-ն է, կստանանք

$$A=\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr=\Phi(r)-\Phi(r_0)\,: \tag{5}$$

Եթե կենտրոնական ուժը լինի ձգողության ուժ, ապա (5)-ի փոխարեն կունենանք

$$A=-\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr=\Phi(r_0)-\Phi(r)\,: \tag{6}$$

Ստացված արդյունքից երևում է, որ կենտրոնական ուժի աշխատանքը կախված չէ ճանապարհի ձևից:

**4. Հզորություն:** Ուժի աշխատանքը, վերագրված ժամանակի միավորին, կոչվում է հզորություն: Հզորությունը տվյալ մոմենտում հաշվվում է էլեմենտար աշխատանքի և ժամանակի աճի հարաբերությունը*, այսինքն՝

$$W=\frac{d^*A}{dt}=\bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{F}\cdot\bar{V}, \tag{1}$$

որտեղ W-ն հզորությունն է: (1) բանաձևից հետևում է, որ հը-

---

* Ուժի էլեմենտար աշխատանքի արտահայտության համար ընդունված է $d^*A$ սիմվոլը $dA$-ի փոխարեն, քանի որ $F_x dx+F_y dy+F_z dz$ եռանդամը ընդհանուր դեպքում լրիվ դիֆերենցիալ չի հանդիսանում: $d^*A$ սիմվոլը պետք է հասկանալ որպես էլեմենտար աշխատանքի նշանակում և չպետք է շփոթել այն ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալի հետ:

*զորությունը տվյալ մոմենտում հավասար է կետի վրա կիրառված ուժի և այդ կետի արագության սկալյար արտադրյալին։*

*Եթե աշխատանքը կատարվում է հավասարաչափ, ապա հզորությունը հավասար կլինի*

$$W = \frac{A}{t_1}, \qquad (2)$$

*որտեղ* $t_1$*-ը այն ժամանակամիջոցն է, որի ընթացքում կատարված է աշխատանքը։*

*Միավորների տեխնիկական սիստեմում հզորության չափման միավորն է՝*

$$[W] = \text{կգ մ/վրկ}։$$

*Տեխնիկայում որպես հզորության միավոր հաճախ օգտագործվում է ձիաուժը, որը հավասար է 75* կգմ/վրկ։ *Միավորների ֆիզիկական սիստեմում հզորությունը չափվում է կիլովատտերով, ընդ որում 1 ձիաուժը հավասար է 0,736 կիլովատտի։*

*Աշխատանքի և հզորության վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս հաճախ օգտագործում են օգտակար գործողության գործակիցը։ Օգտակար աշխատանքի կամ հզորության հարաբերությունը փաստական կատարված աշխատանքին կամ հզորությանը կոչվում է օգտակար գործողության գործակից և նշանակվում է* $\eta$ *տառով։ Ըստ սահմանման ունենք*

$$\eta = \frac{A_{\text{օգտ.}}}{A_{\text{ծախս.}}} = \frac{A_{\text{օգտ.}}}{A_{\text{ծախս.}}},$$

*Քանի որ վնասակար դիմադրության հետևանքով* $A_{\text{օգտ.}} \leqslant A_{\text{ծախս.}}$, *ուստի* $\eta \leqslant 1$։

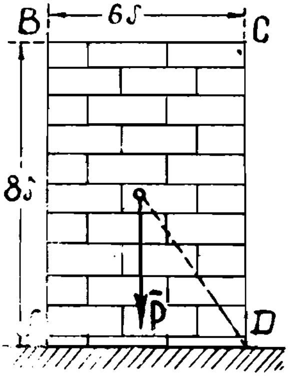
## 5. Խնդիրներ

*Ստորև բերվում են աշխատանքի և հզորության վերաբերյալ մի քանի խնդիրների լուծումները։*

**Խնդիր 66 (755)**։ ABCD *համասեռ զանգվածը, որի չափերը ցույց են տրված գծագիր 57-ում, կշռում է* P=4000 կԳ։ *Որոշել այն աշխատանքը, որը անհրաժեշտ է ծախսել նրան շրջելու համար՝ պտտեցնելով* D *կողի շուրջը։*

Լուծում։ *Պատը* D *կողի շուրջը պտտելու միջոցով շրջե-*

*լու վրա ծախսված աշխատանքը որոշելու համար անհրաժեշտ է պատի ծանրության ուժը, որը կիրառված է նրա երկրաչափական կենտրոնում, բազմապատկել AD հիմքից ծանրության կենտրոնի ունեցած հեռավորությունների տարբերությունով։ Տված վիճակում ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը AD հիմքից 4 մ է։ Շրջելու համար պետք է պատը այնքան պտտել D կետի շուրջը, որ ծանրության կենտրոնով անցնող ուղղաձիգը անցնի D կետով։ Այդ դեպքում ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը AD-ից կլինի՝*




Գծ. 57

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ մ} ,$$

*Հետևաբար, վերը նշված հեռավորությունների տարբերությունը կլինի*

$$5 \text{ մ} - 4 \text{ մ} = 1 \text{ մ}։$$

*Մնում է որոշել աշխատանքը։ Այն կլինի*

$$A = 4000 \cdot 1 = 4000 \text{ կԳմ}։$$

Պատ. 4000 կԳմ։

**Խնդիր 67 (758)**։ *Ինչպիսի՞ հզորություն (արտահայտված ձիաուժերով և կիլովատտերով) ունի այն մեքենան, որը 200 կԳ կշիռ ունեցող մուրճը 1 րոպեում բարձրացնում է 84 անգամ, 0,75 մ բարձրության վրա։ Մեքենայի օգտակար գործողության գործակիցը հավասար է 0,7-ի։*

Լուծում: *200 կԳ կշիռ ունեցող մուրճը 0,75 մ բարձրացնելու համար մեքենան կատարում է*

$$A = 200 \cdot 0{,}75 = 150 \text{ կԳմ}$$

*աշխատանք։ Մեքենայի օգտակար հզորության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$W_{\text{օգտ.}} = \frac{150 \cdot 84}{60} = 210 \text{ կԳմ/վրկ}։$$

*Մեքենայի ծախսած հզորությունը կլինի*

$$W_{\text{ծախս.}} = \frac{210}{\eta} = \frac{210}{0{,}7} = 300 \text{ կԳմ/վրկ}։$$

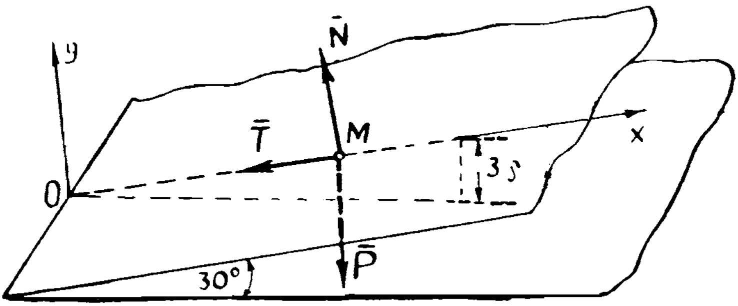
*Մեքենայի օգտակար հզորությունը ձիաուժերով գրելու հա-*

*մար պետք է 300-ը բաժանել 75-ի վրա, իսկ կիլովատներով հաշվելու համար՝ ձիաուժերով արտահայտված թիվը բազմապատկել 0,736-ով։*

Պատ. *4 ձ. ու.* = *2,94* կվտ։

**Խնդիր 68 (762)**։ *Հաշվել այն աշխատանքը, որ կատարվում է 20* կԳ *բեռը թեք հարթության վրայով 6* մ *բարձրացնելու համար, եթե հարթության և հորիզոնի միջև կազմված անկյունը հավասար է 30°-ի, իսկ շփման գործակիցը հավասար է 0,01։*

Լուծում: *Բեռը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Տանենք* xoy *կոորդինատական սիստեմը գծագիր 58-ում ցույց տրված ձևով։ Թեք հարթության վրայով շարժվող* M *կետի վրա ազդում են կետի* $\bar{P}$ *ծանրության և շփման* $\bar{T}$ *ուժերը, ինչպես նաև* $\bar{N}$ *նորմալ հակազդումը։*




*Գծ. 58*

$\bar{N}$ *նորմալ հակազդման աշխատանքը հավասար է զրոյի, քանի որ* $\bar{N}$*-ը ուղղահայաց է կետի տեղափոխման ուղղությանը։*

*Ծանրության ուժի աշխատանքը հաշվելու համար պետք է նկատի ունենալ, որ*

$$\cos(\widehat{\bar{P}, ds}) = \cos 120° = -\frac{1}{2}.$$

*Հետևաբար, ծանրության ուժի աշխատանքը կլինի*

$$A_1 = \int_0^6 P \cos 120° \, ds = -20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = -60 \text{ կԳմ}, \quad (1)$$

Շփման ուժի աշխատանքի համար ունենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$A_2 = -\int_0^6 f N\, ds = -0{,}01 \int_0^6 N ds, \tag{2}$$

Մնում է որոշել N նորմալ հակազդման մեծությունը։ Գծագրից երևում է, որ $N = P \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} P$։ Այս արժեքը տեղադրելով (2)-ի մեջ, կստանանք

$$A_2 = -0{,}01 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 20 \cdot 6 = -1{,}04 \text{ կԳմ}.$$

Ամբողջ աշխատանքը կլինի

$$A = A_1 + A_2 = -60 - 1{,}04 = -61{,}04 \text{ կԳմ}.$$

Այս արդյունքը փաստորեն ծանրության և շփման ուժերի կատարած աշխատանքն է, որի հետևանքով աշխատանքը ստացվել է բացասական։ Բայց այն աշխատանքը, որը ծախսվել է 20 կԳ բեռը թեք հարթության վրա 6 մ բարձրացնելու համար, հավասար կլինի վերը նշված նույն աշխատանքին՝ միայն վերցրած դրական նշանով։

Պ ա տ. $A = 61{,}04$ կԳմ$=598$ ջ։

**Խ ն դ ի ր 69 (768)**։ Առաձգական զսպանակի ծայրին կախված է P կշիռ ունեցող բեռը։ Զսպանակը 1 սմ ձգելու համար հարկավոր է կիրառել c Գ ուժ։ Կազմել սիստեմի լրիվ մեխանիկական էներգիայի արտահայտությունը։

Լ ու ծ ու մ: Այստեղ սիստեմի լրիվ մեխանիկական էներգիան կազմված է բեռի կինետիկ էներգիայից և զսպանակի առաձգական ուժի ու բեռի ծանրության ուժի պոտենցիալ էներգիաներից։

Բեռը ընդունենք որպես նյութական կետ, կոորդինատների x առանցքը ուղղենք ուղղաձիգ դեպի ցած, իսկ կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք չձգված զսպանակի ծայրում։ Այդ դեպքում բեռի կինետիկ էներգիան կլինի

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{x}^2 ,$$

Զսպանակի առաձգական $F = -cx$ ուժի պոտենցիալ էներգիան կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$v_1 = \int_0^x cx\,dx = \frac{1}{2} cx^2,$$

*Բեռի ծանրության ուժի աշխատանքը կլինի*

$$v_2 = -\int_0^x p\,dx = -px = -mgx,$$

*Եթե սիստեմի լրիվ մեխանիկական էներգիան նշանակենք* E, *կունենանք*

$$E = T + v_1 + v_2 = \frac{1}{2}\,\frac{P}{g}x^2 + \frac{1}{2}cx^2 - mgx,$$

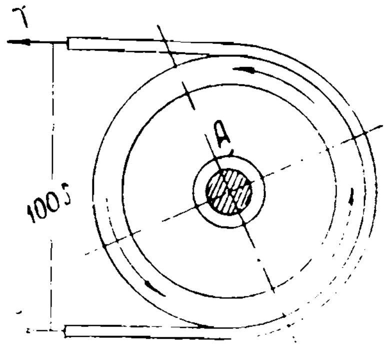
*Քանի որ ծանրության և առաձգական ուժերը ունեն պոտենցիալ (տե՛ս § 7), ուստի կունենանք*

$$E = E_0 = \text{const},$$

*որտեղ* $E_0$*-ն սիստեմի լրիվ մեխանիկական էներգիան է սկզբնական մոմենտում։*

Պ ա տ. $\frac{1}{2}\,\frac{P}{g}x^2 + \frac{1}{2}cx^2 - mgx = \text{const}$, *որտեղ* $x$*-ը հաշվվում է չձգված զսպանակի ծայրից դեպի ներքև։*

**Խ ն դ ի ր 70 (772)**։ *Փոկի օգնությամբ փոխանցվում է 20 ձ. ու. հզորություն։ Փոկանիվի շառավիղը 50* սմ *է, անկյունային արագությունը հավասար է 150* պտ/րոպ։ *Ենթադրելով, որ փոկի տանող ճյուղի* T *լարումը երկու անգամ մեծ է տարվող ճյուղի* t *լարումից, որոշել* T *և* t *լարումները (գծ. 59)։*




Գծ. 59

Լ ու ծ ու մ: *Քանի որ աշխատանքը կատարվում է հավասարաչափ, ուստի հզորությունը կլինի*

$$W = (T - t)\,v \qquad (1)$$

*Դժվար չէ նկատել, որ այստեղ* $v = 2\pi Rn$, *որտեղ* $R$*-ը փոկանիվի շառավիղն է, իսկ* $n$*-ը՝ պտույտների թիվը 1 րոպեում։ Այդ դեպքում, եթե (1)-ի մեջ տեղադրենք* $v$*-ի այս արժեքը և միաժամանակ նկատի ունե-*

նանք, որ թվային հաշվումներ կատարելիս պետք է բոլոր մեծությունները արտահայտել միավորների միևնույն սիստեմով և $T=2t$, կստանանք

$$t=\frac{W}{2\pi Rn}=\frac{20\cdot75\cdot60}{2\pi\cdot0{,}5\cdot150}=\frac{600}{\pi}=191 \text{ կԳ}։$$

Պ ա տ. $T=382$ կԳ, $t=191$ կԳ։

## § 7. ԿԵՏԻ ԿԻՆԵՏԻԿ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

**1. Կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը դիֆերենցիալ տեսքով:** *Նյութական կետի կինետիկ էներգիա կոչվում է* $T=\frac{mv^2}{2}$ *արտահայտությունը, որտեղ* m-*ը կետի մասսան է, իսկ* v-*ն՝ արագությունը։*

*Եթե*

$$m\overline{W}=\overline{F}$$

*դինամիկայի հիմնական հավասարման մեջ նկատի ունենանք, որ* $m=\text{const}$, *իսկ* $\overline{W}=\frac{d\overline{v}}{dt}$, *ապա կարող ենք այն գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\overline{F}\cdot d\overline{r}\ ։ \qquad \text{(I)}$$

*Սա նյութական կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմն է դիֆերենցիալ տեսքով։ Այն կարելի է ձևակերպել այսպես. նյութական կետի կինետիկ էներգիայի դիֆերենցիալը հավասար է կետի վրա կիրառված ուժի էլեմենտար աշխատանքին։** 

*Եթե* $\overline{F}$ *ուժի պրոյեկցիաները դեկարտյան կոորդինատական սիստեմի առանցքների վրա նշանակենք* $(F_x, F_y, F_z)$, *իսկ* $d\overline{r}$-*ի պրոյեկցիաները՝* $(dx, dy, dz)$, *ապա* (I)-*ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz\ ։ \qquad \text{(II)}$$

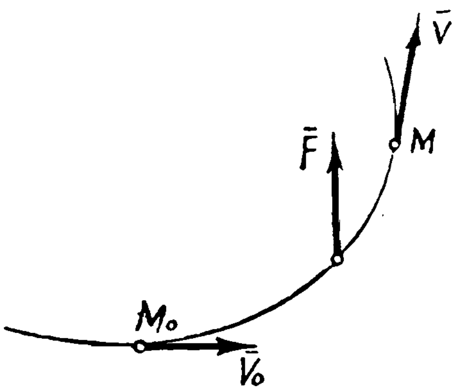
**2. Կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով:** *Եթե ինտեգրենք* (I) *հավասարությունը շարժվող նյութա-*

* *Եթե կետի վրա կիրառված են մի քանի ուժեր, ապա «ուժ» ասելով պետք է հասկանալ այդ կետի վրա կիրառված ուժերի համազորը, այսինքն՝* $\overline{F}=\Sigma\overline{F}_i$։

կան կետի $M_0$ և $M$ երկու դիրքերին համապատասխանող սահմաններում (գծ. 60), կունենանք

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{1} = \int\limits_{\widehat{M_0 M}} \bar{F} \cdot d\bar{r} \,, \qquad \text{(III)}$$

Այստեղ $v$-ն արագությունն է $M$ դիրքում, իսկ $v_0$-ն՝ $M_0$ դիրքում։ (III)-ը նյութական կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմն է վերջավոր տեսքով։ Այն կարելի է ձևակերպել այսպես. նյութական կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը որևէ վերջավոր տեղափոխության վրա հավասար է այդ կետի վրա կիրառված ուժի աշխատանքին նույն տեղափոխության վրա։

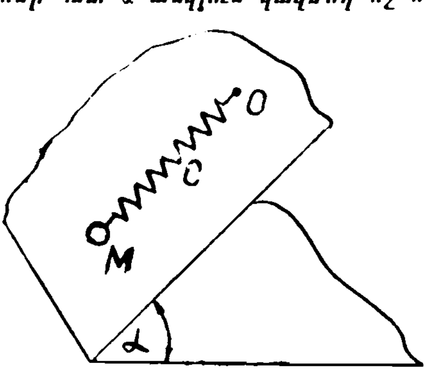


Գծ. 60

(III)-ը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int\limits_{\widehat{M_0 M}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \,. \qquad \text{(IV)}$$

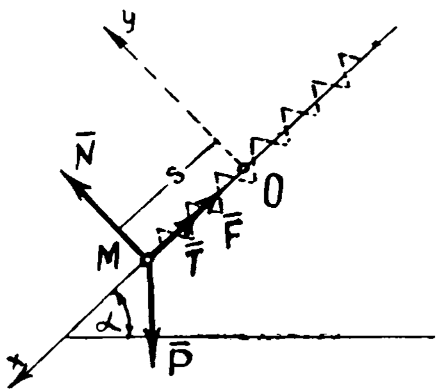
**Խնդիր 71։** $m$ մասսա ունեցող բեռը գտնվում է հորիզոնի հետ $\alpha$ անկյուն կազմող ոչ ողորկ թեք հարթության վրա։ Բեռը ամրացված է $c$ կոշտություն ունեցող զսպանակի ծայրին, իսկ զսպանակի մյուս ծայրը անշարժ է։ Որոշել զսպանակի առավելագույն $s$ երկարացումը, եթե սկզբնական մոմենտում զսպանակը դեֆորմացիայի ենթարկված չի եղել, իսկ բեռը բաց է թողնված առանց սկզբնա-



Գծ. 61

կան արագության։ Շփման գործակիցը հավասար է f-ի, ընդ որում $f < \operatorname{tg} \alpha$ (գծ. 61)։

Լուծում․ Բեռն ընդունենք որպես նյութական կետ։ xy կոորդինատական սիստեմը տանենք գծագրում ցույց տրված ձևով։ M բեռի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ 1) $\bar{P}$ կշիռը, 2) առաձգական $\bar{F}$ ուժը, 3) հարթության $\bar{N}$ նորմալ հակազդումը և 4) $\bar{T}$ շփման ուժը (գծ. 62)։ Եթե պրոյեկտենք այս ուժերը x առանցքի վրա և գրենք կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով, կստանանք




Գծ. 62

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^s (P\sin\alpha - fP\cos\alpha - cx)\,dx \qquad (1)$$

Քանի որ ըստ պայմանի . . .

$$v = v_0 = 0,$$

ապա (1)-ից կունենանք

$$Ps\sin\alpha - Psf\cos\alpha - \frac{cs^2}{2} = 0$$

կամ

$$P(\sin\alpha - f\cos\alpha) = \frac{cs}{2},$$

Մնում է լուծել (2)-ը s-ի նկատմամբ։

Պատ. $s = \frac{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{c}$,

**3. Ոչ ազատ կետի շարժման դեպքը։** Եթե կետը կատարում է ոչ ազատ շարժում, ապա (III) և (IV) հավասարությունների աջ մասերում բացի ակտիվ ուժերի աշխատանքից կմտնի նաև կապի հակազդումների աշխատանքը։ Եթե կետը շարժվում է անշարժ բացարձակ իդեալական մակերևույթով կամ կոր գծով, ա-այս կապի հակազդումը կունենա կետի հետագծի նորմալի ուղղությունը ($N_\tau=0$)։ Այս դեպքում կապի հակազդման աշխատանքը կետի ցանկացած տեղափոխման վրա հավասար կլինի զրոյի և (III) ու (IV) բանաձևերի աջ մասերում կմտնեն միայն ակտիվ ուժերի կատարած աշխատանքները։ Եթե մակերևույթը (կամ կոր գիծը) բացարձակ ողորկ չէ, ապա ակտիվ ուժերի աշխատանքին պետք է ավելացնել նաև շփման ուժերի աշխատանքը (§ 6)։ Բացի դրանից, եթե մակերևույթը (կամ կոր գիծը) շարժվում է, ապա շարժվող կետի բացարձակ տեղափոխությունը կարող է ուղղահայաց չլինել $\overline{N}$-ին, կապի հակազդմանը, և այդ դեպքում $\overline{N}$ հակազդման աշխատանքը հավասար չի լինի զրոյի (օրինակ, վերելակի հարթամասի հակազդման աշխատանքը)։

**4. Ուժային կամ պոտենցիալ ֆունկցիա։** *Դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ (IV)-ի ընդինտեգրալ արտահայտությունը հանդիսանում է որևէ U(x, y, z) ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ, այսինքն՝*

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU(x,\ y,\ z)։ \qquad \text{(V)}$$

*Այն U(x, y, z) ֆունկցիան, որի լրիվ դիֆերենցիալը հավասար է կետի վրա ազդող ուժի էլեմենտար աշխատանքին, կոչվում է ուժային կամ պոտենցիալ ֆունկցիա։ Այն ուժը, որի համար գոյություն ունի այդպիսի ֆունկցիա, կոչվում է պոտենցիալ ուժ։*

*(V)-ից հետևում է, որ պոտենցիալ ֆունկցիայի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանները կլինեն*

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{(VI)}$$

*կամ*

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x},\quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y},\quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}, \qquad \text{(VI)}$$

*Այսպիսով, ուժի էլեմենտար աշխատանքը որևէ U(x, y, z) ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է, որ այդ ուժի պրոյեկցիաները լինեն U(x, y, z) ֆունկցիայի մասնական ածանցյալները ըստ համապատասխան կոորդինատների։*

*Հայտնի է, որ պոտենցիալ էներգիան կամավոր (x, y, z) կետում հավասար է նույն կետում պոտենցիալ ֆունկցիային՝ վերցրած հակադիր նշանով, այսինքն՝*

$$V(x, y, z) = -U(x, y, z)\text{։} \tag{VII}$$

**5. Էներգիայի ինտեգրալը:** *Եթե նյութական կետի վրա ազդող ուժն ունի պոտենցիալ, ապա կունենանք*

$$\bar{F} \cdot d\bar{r} = dU = -dV\text{։}$$

*Այդ դեպքում կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը* (I) *կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -dV\text{,} \tag{VIII}$$

(VIII) *հավասարումը ինտեգրելով, կստանանք*

$$\frac{mv^2}{2} + V(x, y, z) = h, \tag{IX}$$

*որտեղ* h*-ը ինտեգրման հաստատունն է։* (IX) *առնչությունը կոչվում է էներգիայի ինտեգրալ։ Այն բնութագրում է մեխանիկական էներգիայի պահպանման հետևյալ օրենքը. եթե կետը շարժվում է պոտենցիալ ուժերի ազդեցության տակ, ապա կետի կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաների գումարը, այսինքն՝ կետի լրիվ մեխանիկական էներգիան, մնում է հաստատուն ամբողջ շարժման ընթացքում։ Սրա հետևանքով այն ուժային դաշտը, որի համար տեղի ունի այս օրենքը, կոչվում է կոնսերվատիվ դաշտ։*

(IX)*-ը կոչվում է նաև կետի շարժման հավասարումների առաջին ինտեգրալ։ Այսպիսով, եթե կետի վրա ազդող ուժը ունի պոտենցիալ, ապա կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը հնարավորություն է տալիս ստանալու կետի շարժման հավասարումների առաջին ինտեգրալներից մեկը, որը կոչվում է նաև էներգիայի ինտեգրալ։*

h *հաստատունի արժեքը որոշվում է նախնական պայմաններից։ Եթե որևէ* $(x_0, y_0, z_0)$ *դիրքում կետը ունի* $v_0$ *սկզբնական արագություն, ապա* (IX)*-ից կունենանք*

$$h = \frac{mv_0^2}{2} + V(x_0, y_0, z_0)\text{։} \tag{X}$$

*Նշանակում է,* h *հաստատունը կետի սկզբնական լրիվ մեխանիկական էներգիան է։ Դրա համար* h *հաստատունը անվանում են «էներգիայի հաստատուն»։*

**6. Խնդիրների լուծման մասին:** *Կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմի օգնությամբ հեշտությամբ լուծվում են այն խնդիրները, որոնցում*

*ա) կետի վրա ազդող ուժերը հաստատուն են կամ կախված են միայն հեռավորությունից,*

*բ) տված և որոնելի մեծությունների մեջ մտնում են միայն ազդող ուժերը, կետի տեղափոխությունը, կետի սկզբնական և վերջնական արագությունները։*

*Այս պարագրաֆի խնդիրների լուծումը նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդականությամբ։*

*ա) Ընտրել կոորդինատական սիստեմը։*

*բ) Գծագրի վրա նշել շարժվող կետը կամավոր դիրքում և ցույց տալ նրա վրա ազդող ուժերը։ Ոչ ազատ կետի շարժման դիրքում նախօրոք կետը ազատել կապերից, դրանք փոխարինելով համապատասխան հակազդումով։*

*գ) Համապատասխան բանաձևերի օգնությամբ հաշվել կետի կինետիկ էներգիան կետի շարժման սկզբնական և վերջնական դիրքերում, ինչպես նաև կետի վրա կիրառված ուժերի աշխատանքները վերջավոր տեղափոխության դեպքում։*

*դ) Օգտվելով* (I)—(IV) *և* (VI)—(X) *բանաձևերից, կազմել համապատասխան հավասարումներ և դրանցից որոշել որոնելի մեծությունները։*

## 7. Խնդիրներ

*Ստորև բերվում են կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմի վերաբերյալ խնդիրների լուծումները։*

**Խնդիր 72։** $m$ *մասսա ունեցող նյութական կետը, ստանալով* $v_0$ *սկզբնական արագություն, շարժվում է հորիզոնական բացարձակ ողորկ հարթության վրայով։ Միջավայրի դիմադրությունը որոշվում է* $R=km\sqrt{v}$ *բանաձևով, որտեղ* $v$*-ն կետի արագությունն է, իսկ* $k$*-ն՝ համեմատականության գործակիցը։ Գտնել կետի շարժման օրենքը և այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում տեղի է ունենում կետի շարժումը։*

**Լուծում:** *Կետի սկզբնական դիրքը ընդունենք որպես կոորդինատների սկզբնակետ, իսկ* $Ox$ *առանցքը ուղղենք կետի շարժման ուղղությամբ։ Գրենք կետի շարժման քանակի փոփոխման և կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմները դիֆերենցիալ տեսքերով։ Դրանք կլինեն*

$$d(mv) = -km\sqrt{v}\,dt.$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -km\sqrt{v}\,dx.$$

*Ինտեգրելով այս հավասարումները, կստանանք*

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k\int_0^t dt,$$

$$\int_{v_0}^{v} \sqrt{v}\,dv = -k\int_0^x dx$$

*կամ*

$$\sqrt{v} - \sqrt{v_0} = -\frac{kt}{2}, \tag{1}$$

$$v^{3/2} - v_0^{3/2} = -\frac{3k}{2}k\,, \tag{2}$$

*Կետի շարժման օրենքը գտնելու համար պետք է (1) և (2) հավասարումներից արտաքսել* t *ժամանակը։ Եթե (1)-ից որոշենք* $\sqrt{v}$*-ն և այն տեղադրենք (2)-ի մեջ, կստանանք*

$$x = \frac{2}{3k}\left[v_0\sqrt{v_0} - \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2}\right)^3\right]. \tag{3}$$

*Սա կլինի կետի շարժման օրենքը։*

*Այժմ որոշենք այն* T *ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում տեղի է ունենում կետի շարժումը։ Եթե (1)-ի մեջ ընդունենք* $t=T$, *իսկ* $v=0$, *կստանանք*

$$T = \frac{2}{k}\sqrt{v_0}.$$

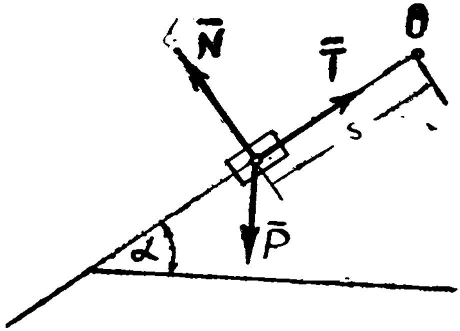
Պատ. $x = \frac{2}{3k}\left[v_0^{3/2} - \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2}\right)^3\right]$, $T = \frac{2}{k}\sqrt{v_0}$.

30.3 Խնդիր **73 (30.3)**։ K *մարմինը գտնվում է խորդուբորդ թեք հարթության վրա անշարժ վիճակում։ Հարթության թեքության անկյունը հորիզոնականի նկատմամբ հավասար է* α*-ի և* $f_0 > \mathrm{tg}\,\alpha$, *որտեղ* $f_0$*-ն հանգստի վիճակի շփման գործակիցն է։ Ժամանակի որևէ մոմենտում մարմնին հաղորդվում է* $v_0$ *սկզբնական արագություն՝ ուղղված թեք հարթությունով դեպի ներքև։*

*Որոշել այն s ճանապարհը, որը կանցնի մարմինը մինչև կանգ առնելը, եթե շարժման դեպքում շփման գործակիցը f է (գծ. 63)։*

Լուծում: K *մարմինը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Տանենք* OX *առանցքը՝ ուղղված թեք հարթությունով դեպի ներքև,* O *սկզբնակետը տեղավորենք կետի անշարժ դիրքում։ Մարմնի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝*

*1) մարմնի* $\bar{P}$ *կշիռը, 2) թեք հարթության* $\bar{N}$ *նորմալ հակազդումը և 3) շփման* $\bar{T}$ *ուժը, որի մեծությունը հավասար է* $T = fN = fP\cos\alpha$։ *Եթե պրոյեկտենք այս ուժերը* $\bar{O}X$ *առանցքի վրա և գրենք կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով, ապա կստանանք*




Գծ. 63

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^s (P\sin\alpha - Pf\cos\alpha)\,dx \tag{1}$$

*Քանի որ ըստ պայմանի կետի վերջնական արագությունը հավասար է զրոյի* $(v=0)$, *ուստի (1)-ից կունենանք*

$$\frac{P}{g}\,\frac{v_0^2}{2} = P(f\cos\alpha - \sin\alpha)s \tag{2}$$

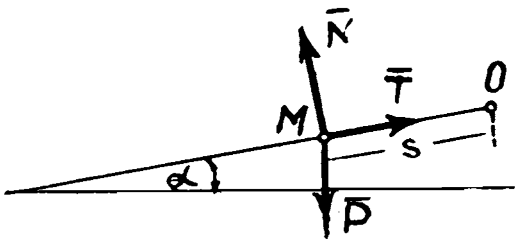
*Լուծելով այս հավասարումը s-ի նկատմամբ, կստանանք պատասխանը։*

Պ ա տ. $s = \dfrac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$,

Դիտողություն: *Խնդրի լուծման մեջ չօգտագործվեց հանգիստ վիճակի շփման գործակիցը, բայց* $f_0 > \operatorname{tg}\alpha$ *պայմանը նրա համար է, որ ապահովի մարմնի կանգ առնելը։*

30.7 **Խ ն դ ի ր 74 (776)**։ *Գնացքը շարժվում է 36* կմ/ժամ *արագությամբ* $\alpha = 0{,}008$ *ռադիան թեքությամբ հարթության վրայով։ Մի որևէ մոմենտում մեքենավարը վտանգ նկատելով, սկսում է արգելակել գնացքը։ Արգելակումից և առանցքակալներում* *եղած շփումից դիմադրությունը կազմում է գնացքի կշռի 0,1 մասը։ Ի՞նչ հեռավորության վրա և արգելակման սկզբից ինչքա՞ն ժամանակից հետո գնացքը կանգ կառնի (ընդունել* $\sin \alpha = \alpha$)։

Լուծում: *Գնացքը դիտենք որպես նյութական կետ, ընդունելով նրա ամբողջ մասսան կենտրոնացած նրա մասսաների կենտրոնում (գծ. 64)։*




*Գծ. 64*

*Թեք հարթությունով շարժվող գնացքի վրա (*M *կետի վրա) ազդում են հետևյալ ուժերը՝ 1)* $\overline{P}$ *ծանրության ուժը, 2)* $\overline{T}$ *դիմադրության ուժը և 3)* $\overline{N}$ *նորմալ հակազդումը։* M *կետի վրա ազդող ուժերը հաստատուն լինելու հետևանքով կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից կունենանք՝*

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = (P \sin \alpha - T)\, s, \qquad (1)$$

*Այստեղ* $v_1 = 0$, *քանի որ գնացքը վերջում կանգ է առնում,* $v_0 = 36$ կմ/ժամ $= 10$ մ/վրկ, *իսկ* s*-ը արգելակումից հետո գնացքի անցած ճանապարհն է, որ պետք է որոշել։ Նկատի ունենալով, որ*

$$m = \frac{P}{g}, \quad P_1 = P \sin \alpha = 0{,}008P, \quad T = 0{,}1P,$$

*(1)-ից կստանանք*

$$s = \frac{10^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}092} = 55{,}3 \text{ մ}։$$

*Արգելակման ժամանակամիջոցը որոշելու համար օգտվենք կետի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմից։ Այդ թեորեմի համաձայն կունենանք*

$$mv_1 - mv_0 = (P \sin \alpha - T)\, t$$

*կամ*

$$-\frac{P}{g} v_0 = (0{,}008 - 0{,}1)\, Pt ։$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$t = \frac{10}{9{,}81 \cdot 0{,}092} = 11{,}06 \text{ վրկ։}$$

Պատ. $s = 55{,}3$ մ, $t = 11{,}06$ վրկ։

**Խնդիր 75 (30.9)։** *P կշիռ ունեցող հեծանը սկսում է շարժվել $v_0$ սկզբնական արագությամբ խորդուբորդ հորիզոնական հարթության վրայով և մինչև կանգ առնելը անցնում է s ճանապարհ։ Որոշել շփման գործակցի մեծությունը, ընդունելով շփման ուժը համեմատական նորմալ ճնշմանը։*

Լուծում: *Հեծանը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Տանենք OX առանցքը՝ ուղղված մարմնի շարժման ուղղությամբ, O սկզբնակետը տեղավորենք կետի անշարժ վիճակում գրաված դիրքում։ Մարմնի վրա ազդում են նրա $\bar{P}$ կշիռը և $\bar{T}$ շփման ուժը, որի մեծությունը հավասար է $T = fN = fP$։ Շփման ուժն ունի շարժման հակառակ ուղղություն, իսկ մարմնի կշռի աշխատանքը հորիզոնական տեղափոխության դեպքում հավասար է զրոյի, որի հետևանքով կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\int_0^s fP\,dx\text{։} \qquad (1)$$

*Քանի որ վերջնական արագությունը հավասար է զրոյի* ($v=0$), *ապա (1)-ից կունենանք*

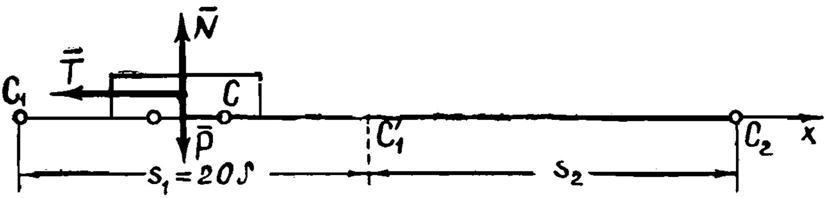
$$\frac{P}{g}\,\frac{v_0^2}{2} = fPs\text{,} \qquad (2)$$

*Լուծելով (2)-ը f-ի նկատմամբ, կստանանք պատասխանը։*

Պատ. $f = \frac{v_0^2}{2gs}$։

**Խնդիր 76 (779)։** *Երկաթուղային պլատֆորմի կրած դիմադրությունը շարժման և առանցքակալներում առաջացած շփման շնորհիվ հավասար է 15 կԳ, պլատֆորմի կշիռը 6 տ է։ Բանվորը հենվեց անշարժ վիճակում գտնվող պլատֆորմին և հրեց նրան հորիզոնական ճանապարհի ուղղագիծ մասով՝ գործադրելով 25 կԳ ճնշում։ Անցնելով 20 մ, նա հնարավորություն տվեց պլատֆորմին գլորվելու ինքն իրեն։ Անտեսելով օդի դիմադրությունը և շփումը անիվների ու ռելսերի միջև, հաշվել* պլատֆորմի ամենամեծ $v_{max}$ արագությունը շարժման ժամանակ, ինչպես նաև նրա մինչև կանգ առնելն անցած ամբողջ $s$ ճանապարհը։

Լուծում։ Պլատֆորմը դիտենք որպես նյութական կետ, ընդունելով նրա ամբողջ մասսան կենտրոնացված $C$ ծանրության կենտրոնում (գծ. 65)։ $x$ առանցքը ուղղենք պլատֆորմի շարժման ուղղությամբ, իսկ կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք այն $C_1$ դիրքում, որտեղ գտնվել է $C$ կետը շարժման սկզբ-




Գծ. 65

նական մոմենտում։ Պլատֆորմը սկսել է շարժվել առանց սկզբնական արագության ($v_0=0$) և շարժման վերջում կանգ է առել ($v_1=0$)։ Դրա հետևանքով ուժերի աշխատանքը անցած ճանապարհի վրա հավասար կլինի զրոյի։

Այստեղ անհրաժեշտ է խնդրի լուծումը բաժանել երկու մասի։ Դիտարկենք խնդրի լուծումը $s_1=20$ մ ճանապարհի վրա (գծագրի վրա $C_1C_1'$ ճանապարհը), երբ $C$ կետի վրա ազդում է մարդու ուժը, և երբ $C$ կետը շարժվում է ինքն իրեն մինչև կանգ առնելը (գծագրի վրա $C'_1C_2$ ճանապարհը)։ Գրենք $C_1C'_1$ ճանապարհի վրա կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը (III) տեսքով։ Կունենանք

$$\frac{mv^2}{2}\Bigg|_0^{v_{max}}=\int_0^{s_1}(25-15)\,ds$$

կամ

$$\frac{mv^2_{max}}{2}=10\,s_1, \qquad (1)$$

(1)-ի մեջ տեղադրելով $m$-ի և $s_1$-ի արժեքները և լուծելով ստացված հավասարումը, կստանանք

$$v_{max}=\sqrt{\frac{2\cdot10\cdot20\cdot9{,}81}{6000}}\approx0{,}808\ \text{մ/վրկ}\ ։$$

*Այժմ գրենք կինետիկ էներգիայի թեորեմը* $C'_1C_2$ *ճանապարհի համար՝*

$$\frac{mv^2}{2}\Bigg|_{v_{max}}^{0} = -\int_{20}^{s} 15\,ds$$

*կամ*

$$\frac{mv^2_{max}}{2} = 15\,(s-20),$$

*Այստեղից ստացվում է*

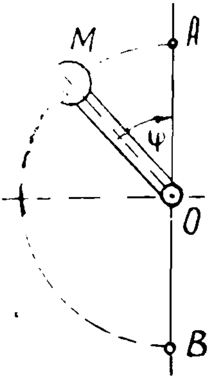
$$s = 20 + \frac{mv^2_{max}}{2\,.\,15} = 20 + \frac{6000}{2\cdot 9{,}81\,.\,15}\,\cdot$$

$$\cdot\;\frac{2\,.\,10\,.\,20\,.\,9{,}81}{6000} = 33\frac{1}{3}\ \text{մ}:$$

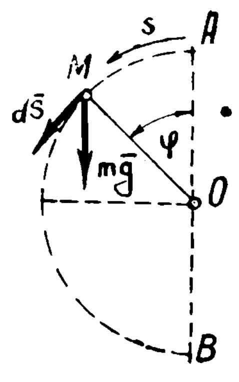
Պ ա տ. $v_{max} = 0{,}808$ մ/վրկ, $s = 33\frac{1}{3}$ մ,

**Խ ն դ ի ր 77 (783)**, *Նյութերը հարվածով փորձարկելու համար օգտագործվող սարքավորման գլխավոր մասը կազմում է ծանր պողպատյա* M *ձուլվածքը, որը միացված է* O *հորիզոնական անշարժ առանցքի շուրջը համարյա առանց շփման պտտվող ձողին։ Անտեսելով ձողի մասսան,* M *ձուլվածքը դիտում ենք որպես նյութական կետ, որի համար հեռավորությունը՝* $OM = 0{,}981$ մ։ *Որոշել այդ կետի* v *արագությունը ամենացածր* B *դիրքում, եթե նա ընկնում է ամենաբարձր* A *դիրքից բավականաչափ փոքր արագությամբ (գծ. 66ա)։*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Խնդրի պայմանի հիման վրա կարելի է շփումը արհամարհել և ընկղընական արագությունը ընդունել հավասար զրոյի։ Պողպատյա* M *ձուլվածքը ընդունենք որպես նյութական կետ, որի վրա կազդի միայն իր* mg *կշիռը։ Գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով։ Այն կլինի*




Գծ. 66ա




Գծ. 66բ

$$\frac{mv^2}{2} = \int\limits_{\smile AMB} F\cos(\widehat{\bar{F}, d\bar{S}})\, ds, \tag{1}$$

*որտեղ ինտեգրումը կատարվում է* AMB *կիսաշրջանագծով։ Գծագրից (գծ. 66բ) երևում է, որ*

$$\cos(\widehat{\bar{F}, d\bar{S}}) = \cos(\widehat{m\bar{g}, \tau^0}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi\,։ \tag{2}$$

*(2)-ի հիման վրա (1)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{mv^2}{2} \int_0^{\pi} mg \cdot OM \sin\varphi\, d\varphi\,։ \tag{3}$$

*Այստեղից ստացվում է*

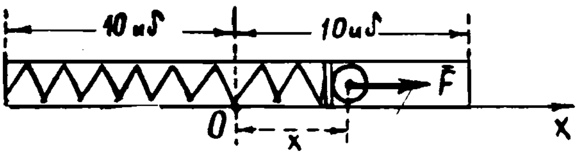
$$v = 2\sqrt{g \cdot OM} = 2\sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}981} = 1{,}962\sqrt{10} = 6{,}2 \text{ մ/վրկ}։$$

Պ ա տ.  $v = 6{,}2$ մ/վրկ։

**Խ ն դ ի ր 78 (785)։** *Ինքնակրակիչի զսպանակը չլարված վիճակում ունի 20* սմ *երկարություն։ Նրա երկարությունը 1* սմ-*ով փոփոխելու համար անհրաժեշտ ուժը հավասար է 0,2* կԳ։ *Ինչպիսի՞* v *արագությամբ է դուրս թռչում 30 Գ կշիռ ունեցող գնդակը ինքնակրակիչից, եթե զսպանակը սեղմված է 10* սմ-*ով։ Ինքնակրակիչը դասավորված է հորիզոնական ուղղությամբ (գծ. 67ա)։*

Գծ. 67ա

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Ինքնակրակիչի առանցքն ընդունենք որպես* OX *առանցք, սկզբնակետը տեղավորենք գնդակի սկզբնական դիրքում, այսինքն՝ ինքնակրակիչի սկզբից 10* սմ *հեռավորության վրա (գծ. 67բ)։ Երբ զսպանակի ազդեցության տակ գնդակը ինքնա-*




Գծ. 67բ

*կրակիչի մեջ կսկսի շարժվել, ապա զսպանակի ազդեցությունը գնդակի վրա կսկսի նվազել, քանի որ զսպանակի երկարությունը կմեծանա։ Նախ պետք է որոշել* F *ուժի մեծությունը՝ կախված գնդակի* x *աբսցիսից։*

*Տված է, որ զսպանակի երկարությունը 1* սմ-*ով կարճացնելու համար պետք է կիրառել 2* կԳ *ուժ։ Այսպիսի ուժով էլ կճնշի զսպանակը գնդակին, եթե նա կարճացած լինի 1* սմ-*ով։ Իսկ եթե զսպանակը սեղմված է $l$* սմ-*ով, ապա նա կճնշի գնդակին 0,2 $l$ ուժով։ Եթե գնդակը ունի* x *աբսցիս, ապա զսպանակը սեղմված կլինի (*10—x) սմ-*ով։ Հետևաբար, զսպանակը կճնշի գնդակին*

$$0{,}2\,(10-x) \tag{1}$$

*ուժով։ Երկարության միավոր ընդունելով մետրը, (1)-ի փոխարեն կունենանք*

$$20\,(0{,}1-x), \tag{2}$$

*քանի որ զսպանակը 1* մ-*ով երկարացնելու համար պահանջվում է 20* կԳ *ուժ։*

*Գրենք կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով։ Այն կլինի*

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=20\int_0^{0,1}(0{,}1-x)\,dx\,. \tag{3}$$

*Նկատի ունենալով, որ* $v_0=0$, *(3)-ից կստանանք*

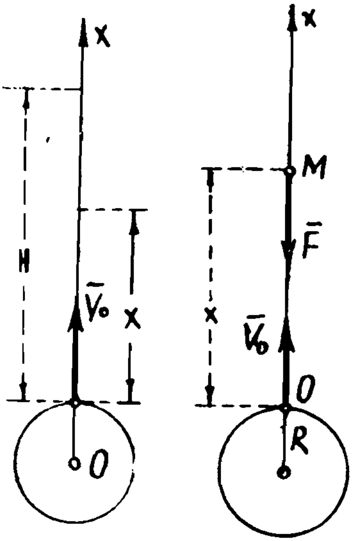
$$\frac{0{,}03}{9{,}81}\,\frac{v^2}{2}=0{,}1\,,\quad v=8{,}1\ \text{մ/վրկ}.$$

**Պատ.** v = 8,1 մ/վրկ։

**Խնդիր 79 (793)։** *Մարմինը նետված է երկրի մակերևույթից դեպի վեր ուղղաձիգ* $v_0$ *սկզբնական արագությամբ։ Որոշել մարմնի* H *բարձրացումը, նկատի ունենալով, որ ծանրության ուժը փոփոխվում է երկրի կենտրոնից ունեցած հեռավորության քառակուսուն հակադարձ համեմատական օրենքով։ Օդի դիմադրությունը անտեսում ենք։ Երկրի շառավիղը՝* R = =6370 կմ, $v_0$=1 կմ/վրկ։

**Լուծում:** *Մարմինը ընդունենք որպես նյութական կետ, նրա մասսան նշանակենք* m*։ Կոորդինատական* ox *առանցքը ուղղենք ուղղաձիգ դեպի վեր, իսկ* O *սկզբնակետը տեղավորենք երկրի մակերևույթի վրա (գծ. 68)։ Կետի աբսցիսը ժամանակի* կամավոր t մոմենտում նշանակենք x: Կետի վրա ազդում է $\bar{F}$ ուժը, որը նրան ձգում է դեպի երկրի կենտրոնը: $\bar{F}$ ուժը երկրի մակերևույթի վրա հավասար է $m\bar{g}$-ի, իսկ երկրի կենտրոնից $x+R$ հեռավորության վրա՝

$$F = -\frac{k}{(x+R)^2}, \qquad (1)$$




Գծ. 68

որտեղ k-ն համեմատականության գործակիցն է: Երկրի մակերևույթի վրա (O կետում) $F = -mg$ և $x = 0$: Տեղադրելով այս արժեքները (1)-ի մեջ, կըստանանք $k = mgR^2$: Այդ դեպքում (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$F = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}, \qquad (2)$$

Գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը դիֆերենցիալ տեսքով՝

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}dx: \qquad (3)$$

Եթե ինտեգրենք (3) հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք խնդրի նախնական պայմանները, կստանանք

$$\frac{mv^2}{2}\Big|_{v_0}^{0} = mgR^2 \frac{1}{R+x}\Big|_{0}^{H}$$

կամ

$$-\frac{v_0^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right):$$

Լուծելով այս հավասարումը H-ի նկատմամբ, ստանում ենք

$$H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}, \qquad (4)$$

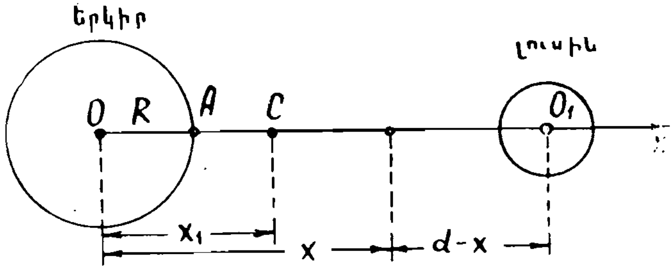
Եթե (4)-ի մեջ տեղադրենք $R=6370$ կմ, $v_0=1$ կմ/վրկ, $g=0{,}0098$ կմ/վրկ², կստանանք

$$H = 51 \text{ կմ}:$$

**Պատ.** $H = \dfrac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2} = 51$ կմ:

**Խնդիր 80 (796)։** *Գտնել, թե ինչպիսի՞* $v_0$ *արագությամբ պետք է նետել արկը երկրի մակերևույթից լուսնի ուղղությամբ, որպեսզի նա, հասնելով այն կետը, որտեղ երկրի և լուսնի ձգողության ուժերը հավասար են, մնա այդ կետում հավասարակշռության մեջ։ Երկրի ու լուսնի շարժումները, ինչպես նաև օդի դիմադրությունը արհամարհում ենք։ Ծանրության ուժի արագացումը երկրի մակերևույթի վրա* $g=9{,}81$ մ/վրկ$^2$*։ Լուսնի և երկրի մասսաների հարաբերությունները՝* $m : M = 1 : 80$, *նրանց միջև եղած հեռավորությունը՝* $d = 60\,R$, *որտեղ ընդունում ենք* $R=6000$ կմ *(երկրի շառավիղը)։*

Լուծում։ *Տանենք* OX *առանցքը՝ ուղղված երկրի և լուսնի կենտրոնները միացնող* $OO_1$ *ուղղով. սկզբնակետը տեղավորենք երկրի կենտրոնում։ Արկը ընդունենք որպես նյութական կետ, նրա աբսցիսը կամավոր* t *ժամանակում նշանակենք* x *(գծ. 69)։ Այն կետը, որտեղ երկրի և լուսնի ձգողության ուժերը իրար*




*Գծ. 69*

*հավասար են, նշանակենք* C, *հեռավորությունը երկրի կենտրոնից՝* $x_1$*։ Տիեզերական ձգողության օրենքի համաձայն* C *կետում տեղի կունենա հետևյալ հավասարությունը՝*

$$f\,\frac{m_1 M}{x_1^2} = f\,\frac{m_1 m}{(d-x_1)^2}, \qquad (1)$$

*որտեղ* M, m *և* $m_1$*-ը համապատասխանաբար երկրի, լուսնի և արկի մասսաներն են,* f*-ը տիեզերական ձգողության ուժի հաստատունն է։ Այս հաստատունը որոշելու համար օգտվում ենք հետևյալ հավասարումից՝*

$$m_1 g = f\,\frac{m_1 M}{R^2} - f\,\frac{m_1 m}{(d-R)^2}, \qquad (2)$$

*որը տեղի ունի երկրի մակերևույթի* A *կետում։*

Լուծելով (1) և (2) հավասարումները $x_1$ և f-ի նկատմամբ, ստանում ենք

$$x_1 = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{m}{M}}}, \quad f = \frac{gR^2(d-R)^2}{M(d-R)^2-mR^2}. \qquad (3)$$

Այժմ գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը դիֆերենցիալ տեսքով։ Այն կլինի

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -f\frac{m_1M}{x^2}dx + f\frac{m_1m}{(d-x)^2}dx. \qquad (4)$$

Ինտեգրենք (4) հավասարումը, երբ արկը A կետից տեղափոխվում է C կետը։ A կետում $x=R$, իսկ C կետում $x=x_1$, $v=0$։ Հետևաբար, կունենանք

$$\frac{v^2}{2}\Bigg|_{v_0}^{0} = f\left(\frac{M}{x}+\frac{m}{d-x}\right)\Bigg|_{R}^{x_1}.$$

Այստեղից ստացվում է

$$v_0^2 = -2f\left[\frac{m}{x_1}\left(\frac{M}{m}+\frac{x_1}{d-x_1}\right)-\left(\frac{M}{m}+\frac{m}{d-R}\right)\right]. \qquad (5)$$

Եթե (5)-ի մեջ տեղադրենք $x_1$-ի արժեքը (3)-ից, կստանանք

$$v_0^2 = -2f\left[\frac{m}{d}\left(1+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)\left(\frac{M}{m}+\sqrt{\frac{M}{m}}\right)-\left(\frac{M}{R}+\frac{m}{d-R}\right)\right]. \qquad (6)$$

Որոշ նույնական ձևափոխություններից հետո (6)-ին կարելի է տալ հետևյալ տեսքը՝

$$v_0^2 = 2f\frac{[\sqrt{M}(d-R)-\sqrt{m}R]^2}{R(d-R)d}. \qquad (7)$$

f-ի արժեքը (3)-ից տեղադրենք (7)-ի մեջ և կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բաժանենք m-ի վրա, կստանանք

$$v_0^2 = \frac{2gR(d-R)}{d}\,\frac{\left[\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)-R\right]^2}{\frac{M}{m}(d-R)^2-R^2},$$

կամ

$$v_0^2 = \frac{2gR(d-R)}{d} \, \frac{\sqrt{\frac{M}{m}}\,(d-R) - R}{\sqrt{\frac{M}{m}}\,(d-R) + R}, \tag{8}$$

*(8)-ը գրենք*

$$v_0^2 = 2gR\left(1 - \frac{R}{d}\right) \frac{\sqrt{\frac{M}{m}}\,\frac{d-R}{R} - 1}{\sqrt{\frac{M}{m}}\,\frac{d-R}{R} + 1}$$

*տեսքով և նրանում տեղադրենք*

$$\frac{M}{m} = 80, \quad \frac{d}{R} = 60, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{80}\,.\,59},$$

*Այդ դեպքում կունենանք*

$$v_0^2 = 2gR\left(1 - \frac{1}{60}\right) \frac{\sqrt{80}\,.\,59 - 1}{\sqrt{80}\,.\,59 + 1} = dR\,.\,\frac{59}{30}\,\frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{\frac{1}{\alpha} + 1} =$$

$$= \frac{59}{30}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,gR,$$

*Այստեղից ստացվում է* $v_0 = 10{,}75$ կմ/վրկ։

Պ ա տ. $$v_0^2 = \frac{2gR(d-R)}{d} \,.\, \frac{\sqrt{\frac{M}{m}}\,(d-R) - R}{\sqrt{\frac{M}{m}}\,(d-R) - R} =$$

$$= \frac{59}{60}\,\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\,gR, \quad \text{որտեղ} \quad \alpha = \frac{1}{59\sqrt{80}}$$

*կամ* $v_0 = 10{,}75$ կմ/վրկ։

## § 8. ՈՉ ԱԶԱՏ ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ

**1. Ոչ ազատ կետ։ Կապերի դասակարգումը։** *Եթե նյութական կետը չի կարող տարածության մեջ գրավել ամեն մի կամավոր դիրք, ապա այդպիսի կետը կոչվում է ոչ ազատ։ Կետի շարժման ազատությունը սահմանափակող պայմանները կոչվում են կապեր։ Կետի վրա դրված կապերը կարող են կետին պահել որևէ* կոր գծի կամ մակերևույթի վրա։ Ոչ ազատ նյութական կետի շարժումն ուսումնասիրելիս օգտվում ենք կապերի աքսիոմից, ըստ որի ոչ ազատ կետը կարելի է դիտել որպես ազատ կետ, նրա վրա դրված կապերը փոխարինելով համապատասխան հակազդումներով։ Նյութական կետի վրա դրված կապի ազդեցության էֆեկտին փոխարինող ուժը կոչվում է կապի հակազդման ուժ կամ պասսիվ ուժ։ Այսպիսով, ազատ և ոչ ազատ կետերի միջև եղած հիմնական տարբերությունը կայանում է նրանում, որ ոչ ազատ կետի վրա, նրա շարժման ժամանակ, բացի ակտիվ ուժերից ազդում են նաև պասսիվ ուժեր։

ա) **Իդեալական և իրական կապեր:** Եթե նյութական կետի ազատությունը սահմանափակող կապի հակազդումը ուղղված է մակերևույթի կամ գծի նորմալով, ապա այդպիսի կապը կոչվում է իդեալական, իսկ մակերևույթը կամ կորը՝ իդեալական ողորկ։ Եթե կապի հակազդումը ուղղված է մակերևույթի ուսումնասիրվող կետում նորմալի նկատմամբ որևէ անկյան տակ, ապա կապը կոչվում է իրական, իսկ մակերևույթը կամ կոր գիծը՝ ոչ իդեալական կամ խորդուբորդ։

Ոչ իդեալական ողորկ մակերևույթի հակազդման պրոյեկցիան շարժվող կետի հետագծի շոշափողի վրա կոչվում է շփման ուժ։

բ) **Ազատող և չազատող կապեր:** Եթե նյութական կետի վըրա դրված կապերն այնպիսին են, որ կետը ամբողջ շարժման ընթացքում պետք է ենթարկվի այդ կապերին, մնալով որևէ մակերևույթի կամ գծի վրա, ապա կապը կոչվում է չազատող։ Եթե շարժման ժամանակ նյութական կետը կարող է ազատվել մակերևույթից կամ գծից, ապա կապը կոչվում է ազատող։

Մաթեմատիկորեն չազատող կապերն արտահայտվում են հավասարումներով, իսկ ազատող կապերը՝ անհավասարություններով։

գ) **Ստացիոնար և ոչ ստացիոնար կապեր:** Եթե նյութական կետի վրա դրված կապը բացահայտորեն կախված չէ ժամանակից, այսինքն՝ չի փոխում իր ձևը և իր դիրքը տարածության մեջ, կախված ժամանակից, ապա այն կոչվում է ստացիոնար կամ սկլերոնում կապ։ Օրինակ,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

էլիպսով շարժվող կետը ենթարկված է ստացիոնար կապի։

*Եթե նյութական կետի վրա դրված կապը բացահայտորեն կախված է ժամանակից, ապա նա կոչվում է ոչ ստացիոնար կամ ռեոնոմ կապ։ Օրինակ,*

$$A^2 (t-t_0)^2 - \frac{(x-v_0t)^2}{a^2} - \frac{y_2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

*հավասարումով արտահայտվող կապը ցույց է տալիս, որ կետը պետք է գտնվի էլիպսոիդի մակերևույթի վրա, որի կենտրոնը շարժվում է* OX *առանցքով* $v_0$ *հաստատուն արագությամբ, իսկ կիսաառանցքները մնում են ժամանակին համեմատական։*

**2. Տված կորով շարժվող կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները դեկարտյան կոորդինատներով։** *Դիցուք նյութական կետը շարժվում է բացարձակ ողորկ*

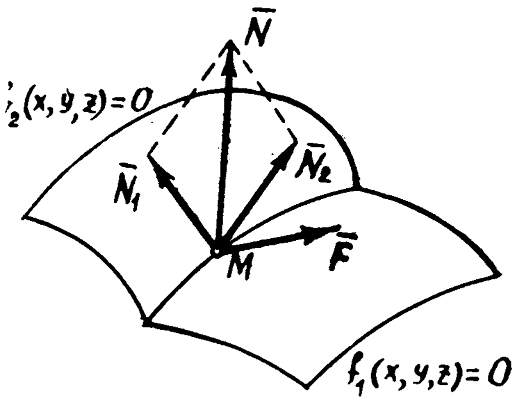
$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$
$$f_2(x, y, z) = 0$$

*տված կոր գծով։ Այստեղ* $f_1(x, y, z) = 0$ *և* $f_2(x, y, z) = 0$ *այն մակերևույթների հավասարումներն են, որոնց հատման գըծով շարժվում է կետը (գծ. 70)։*

*Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը վեկտորական տեսքով կլինի*

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} + \bar{N}, \quad (1)$$

*որտեղ* $\bar{N}$*-ը կորի հակազդման ուժն է՝ ուղղված կորի նորմալներից մեկով (գծ. 70)։ Այս դեպքում (2) հավասարման մեջ* $\bar{N}$ *հակազդման ուժը կարելի է դիտել որպես երկու հակազդումների գումար, այսինքն՝*




*Գծ. 70.*

$$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2, \qquad (2)$$

*որտեղ* $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$*-ը ունեն* $f_1=0$ *և* $f_2=0$ *մակերևույթների նորմալների ուղղությունները (գծ. 70)։ Քանի որ* $f_1=0$ *և* $f_2=0$ *մակերևույթների նորմալներն ունեն համապատասխանաբար* grad $f_1$ *և* grad $f_2$ վեկտորների ուղղությունները, ուստի կարող ենք գրել, որ

$$\bar{N}_1 = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1, \quad \bar{N}_2 = \lambda_2 \operatorname{grad} f_2, \tag{4}$$

որտեղ $\lambda_1$, $\lambda_2$-ը անհայտ սկալյար մեծություններ են։ (3) և (4)-ի հիման վրա կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 \tag{5}$$

Պրոյեկտելով այս հավասարումը դեկարտյան կոորդինատական սիստեմի առանցքների վրա, կստանանք

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{aligned} \tag{6}$$

Դիֆերենցիալ հավասարումների (6) սիստեմը և (1) կապի հավասարումները միասին կազմում են հինգ հավասարումների սիստեմ, որից կարելի է որոշել $x$, $y$, $z$, $\lambda_1$, $\lambda_2$-ը որպես $t$ ժամանակի ֆունկցիաներ։ Այսպիսով, ոչ ազատ կետի դինամիկայի հիմնական խնդիրը կայանում է նրանում, որ իմանալով կետի վրա ազդող ուժերը և նախնական պայմանները, որոշում են կետի շարժման օրենքն ու կապի հակազդումները։

(4)-ի հիման վրա $\lambda_1$ և $\lambda_2$ անհայտ մեծությունների համար ստացվում են հետևյալ արտահայտությունները՝

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{\Delta_1 f_1}, \quad \lambda_2 = \frac{N_2}{\Delta_1 f_2}, \tag{7}$$

որտեղ

$$\Delta_1 f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = |\operatorname{grad} f| \tag{8}$$

(7)-ից հետևում է, որ $\lambda_1$ և $\lambda_2$ բազմապատկիչները հավասար են համապատասխան նորմալ հակազդումներին՝ բաժանած կապի առաջին դիֆերենցիալ պարամետրի վրա։

**3. Կետի շարժման բնական հավասարումները, երբ կետը շարժվում է տրված կորագծով:** Եթե նյութական կետը շարժվում է տված կոր գծով, և այդ կոր գիծը անշարժ է, այսինքն՝ կապը ստացիոնար է, ապա նպատակահարմար է կետի շարժման հավասարումները գրել բնական եռանիստի առանցքների նկատմամբ։

Դիցուք կետը շարժվում է անշարժ կոր գծով և այդ կետի վրա ազդում են ակտիվ $\bar{F}$ և պասսիվ $\bar{N}$ ուժերը։ Այդ կետի շարժման հավասարումը վեկտորական տեսքով կլինի

$$m\bar{W} = \bar{F} + \bar{N}\,\text{։} \tag{1}$$

Եթե պրոյեկտենք այս հավասարումը բնական եռանիստի առանցքների՝ կորի շոշափողի, գլխավոր նորմալի և բինորմալի ($\tau^0$, $n^0$, $b^0$) վրա, կստանանք

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau + N_\tau, \\ \frac{mv^2}{\rho} &= F_n + N_n, \\ 0 &= F_b + N_b\,\text{։} \end{aligned} \tag{2}$$

Այստեղ $F_\tau$, $F_n$, $F_b$ և $N_\tau$, $N_n$, $N_b$-ով նշանակված են համապատասխանաբար $\bar{F}$ և $\bar{N}$ ուժերի պրոյեկցիաները $\tau^0$, $n^0$ և $b^0$ վեկտորների ուղղությունների վրա։ (2) հավասարումները կոչվում են տված կորով նյութական կետի շարժման բնական հավասարումներ։ Եթե այն կորը, որով շարժվում է նյութական կետը, բացարձակ ողորկ է (շփումը բացակայում է), ապա $N_\tau=0$, և (2) հավասարումներն ընդունում են հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= F_\tau, \\ \frac{mv^2}{\rho} &= F_n + N_n, \\ 0 &= F_b + N_b\,\text{։} \end{aligned} \tag{3}$$

(3) հավասարումներից առաջինը հնարավորություն է տալիս որոշելու կետի շարժման օրենքը, իսկ երկրորդ և երրորդ հավասարումները՝ կապի նորմալ հակազդումը։

Այսպիսով, օգտվելով կետի շարժման բնական հավասարումներից, կարելի է որոշել ոչ ազատ կետի շարժման օրենքը, առանց որոշելու կապի հակազդումը, որը հնարավոր չէ կատարել, երբ օգտվում ենք կետի շարժման դեկարտյան կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ գրված հավասարումներից։

Բացարձակ ողորկ կորով նյութական կետի շարժման ժամանակ կունենանք

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau ,$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_n + N_n , \tag{4}$$

$$0 = F_b + N_b ։$$

**4. Կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը, երբ կետը շարժվում է տված կոր գծով:** *Դիցուք նյութական կետը շարժվում է իդեալական ողորկ կոր գծով։ Եթե այդ կետի վրա ազդող ակտիվ ուժը նշանակենք* $\bar{F}$, *իսկ պասսիվ ուժը՝* $\bar{N}$, *ապա կարող ենք այդ կետը դիտել որպես ազատ կետ և գրել կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը հետևյալ տեսքով՝*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}\cdot d\bar{r} + \bar{N}\cdot d\bar{r}$$

*կամ*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}\cdot d\bar{r} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 \cdot d\bar{r} + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2\, d\bar{r} ։ \tag{1}$$

*Եթե կապը ստացիոնար է, ապա*

$$\operatorname{grad} f_1 \cdot d\bar{r} = 0, \quad \operatorname{grad} f_2 \cdot d\bar{r} = 0$$

*և (1)-ից կունենանք*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}\cdot d\bar{r} ։ \tag{2}$$

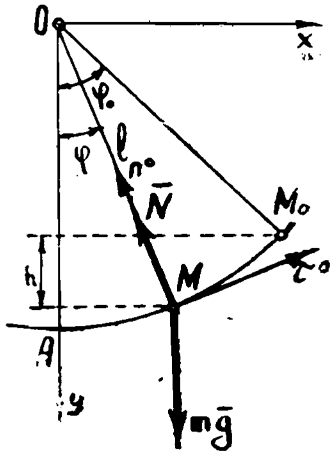
*Այսպիսով, եթե կետը շարժվում է իդեալական ողորկ կոր գծով, և կապը ստացիոնար է, ապա այդ կետի համար կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը ձևակերպվում է այնպես, ինչպես ազատ կետի համար, այսինքն՝ նյութական կետի կինետիկ էներգիայի դիֆերենցիալը հավասար է այդ կետի վրա կիրառված բոլոր ակտիվ ուժերի էլեմենտար աշխատանքների գումարին։*

*Այստեղից հետևում է, որ ազատ կետի դեպքում կետի կինետիկ էներգիայի համար ստացված բոլոր հատկությունները տեղի ունեն նաև ոչ ազատ կետի դեպքում, եթե միայն կոր գիծը, որով շարժվում է կետը, լինի բացարձակ ողորկ և ստացիոնար։*

**5. Մաթեմատիկական ճոճանակ։** *Այն նյութական կետը, որը շարժվում է ծանրության ուժի ազդեցության տակ ուղղաձիգ հարթության վրա գտնվող շրջանագծով, կոչվում է մաթեմատի-*

կական ճոճանակ։ Որպես մաթեմատիկական ճոճանակ կարելի է դիտել ճկուն և անձգելի թելի ծայրից կախված փոքր չափեր ունեցող ծանրոցը, երբ թելի մյուս ծայրը ամրացված է։ Թելի ծայրից կախված ծանրոցի սկզբնական արագությունը պետք է գտնվի ուղղաձիգ հարթության վրա՝ ուղղահայաց շրջանագծի շառավղին։

Դիտարկենք մաթեմատիկական ճոճանակի շարժումը։ Շրջանագծի շառավիղը, որով շարժվում է կետը, նշանակենք $l$, իսկ շրջանագծի կենտրոնը տեղավորենք xy կոորդինատական սիստեմի սկզբնակետում։ M կետի դիրքը շրջանագծի վրա լիովին որոշվում է OM թելի և ուղղաձիգի միջև կազմված $\varphi$ անկյունով։ $\tau^\circ$ վեկտորը ուղղենք շրջանագծի M կետի շոշափողով, $\varphi$ անկյան հաշվարկի դրական ուղղությամբ։ Այդ դեպքում $n^\circ$ վեկտորը ուղղված կլինի շրջանագծի շառավղով դեպի շրջանագծի կենտրոնը (գծ. 71)։




Գծ. 71

Մաթեմատիկական ճոճանակի շարժման բնական հավասարումները կլինեն՝

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi, \qquad (1)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = N - mg\cos\varphi,$$

որտեղ N-ը կապի հակազդումն է՝ ուղղված թելով դեպի O կենտրոնը։

Եթե նկատի ունենանք, որ մաթեմատիկական ճոճանակի դեպքում $\rho = l$ և $v = l\omega = l\frac{d\varphi}{dt}$, ապա (1) հավասարումները կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{mv^2}{l} = N - mg\cos\varphi։ \qquad (3)$$



11—89

*Առաջին հավասարումից որոշում ենք կետի շարժման օրենքը, իսկ երկրորդ հավասարումից կապի հակազդումը։*

*Դիցուք* M *կետը սկսում է շարժումը առանց սկզբնական արագության* ($v_0=0$), *իսկ սկզբնական շեղման* $\varphi$ *անկյունը հավասար է* $\varphi_0$*-ի (գծ. 71)։*

*Ճոճանակի փոքր տատանումների դեպքում կարող ենք ընդունել, որ* $\sin\varphi=\varphi$։ *Այդ դեպքում (2) հավասարումը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0\,\text{։} \tag{4}$$

*Վերը նշված նախնական պայմանների դեպքում այս հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$\varphi=\varphi_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\,\text{։} \tag{5}$$

*Սա մաթեմատիկական ճոճանակի շարժման օրենքն է, երբ մաթեմատիկական ճոճանակը կատարում է փոքր տատանումներ։*

*Մաթեմատիկական ճոճանակի փոքր տատանումների պարբերությունը կլինի*

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\text{։} \tag{6}$$

*Ճոճանակի թելի հակազդումը որոշելու համար պետք է գտնել* v *արագության արտահայտությունը՝ արտահայտված* $\varphi$ *անկյան միջոցով և տեղադրել այն (3) հավասարման մեջ ու դրանից որոշել* N *հակազդումը։*

*Քանի որ այս դեպքում կապը ստացիոնար է (շրջանագիծը անշարժ է), ապա կինետիկ էներգիայի թեորեմը կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=mg\,dy$$

*կամ*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=mg\,d\,(l\cos\varphi)\,\text{։} \tag{7}$$

*Եթե ինտեգրենք (7) հավասարումը, ընդունելով, որ* $t=0$ *պահին* $v=v_0$ *և* $\varphi=\varphi_0$, *կստանանք*

$$v^2=v_0^2+2gl\,(\cos\varphi-\cos\varphi_0)\,\text{։} \tag{8}$$

*(8)-ից (3)-ի մեջ տեղադրելով* $v^2$*-ու արժեքը և լուծելով ստացված հավասարումը* N*-ի նկատմամբ, կունենանք*

$$N = \frac{mv_0^2}{l} + 3mg\left(\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi_0\right)։ \qquad (9)$$

*(9) բանաձևը հնարավորություն է տալիս որոշելու* $\varphi = \varphi_1$ *անկյունը, որի դեպքում տված նախնական պայմանների համար կապը դադարում է չազատող լինելուց։*

*Սա տեղի կունենա այն դեպքում, երբ* $N \leqslant 0$։ $\varphi$*-ի այն* $\varphi_1$ *արժեքը, որի համար* $N$*-ը դառնում է զրո, կորոշվի հետևյալ հավասարումից՝*

$$\frac{mv_0^2}{l} + 3mg\left(\cos\varphi_1 - \frac{2}{3}\cos\varphi_0\right) = 0։$$

*Այստեղից ստացվում է՝*

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{3}\left(2\cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{gl}\right)։$$

*Որպեսզի կապը լինի չազատող մինչև* $\varphi_1 = \pi$ *արժեքների համար, սկզբնական արագությունը պետք է ունենա հետևյալ արժեքը՝*

$$v_0 = \sqrt{(3+2\cos\varphi_0)\,gl}\ ,$$

*այս դեպքում մաթեմատիկական ճոճանակը կկատարի լրիվ շրջանային շարժում։ Մասնավոր դեպքում, եթե լինի* $v_0=0$, *իսկ* OM *թելի փոխարեն լինի ձող, ապա (9)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$N = 3mg\left(\cos\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi_0\right)։ \qquad (10)$$

*Այս բանաձևից հետևում է, որ եթե սկզբնական պահին կետը գտնվի* A *դիրքում, որտեղ* $\varphi_0=\pi$, *իսկ վերջնական պահին՝* B *դիրքում, որտեղ* $\varphi=0$, *ապա հակազդման համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$N = 5mg։$$

*Նշանակում է, որ այս դեպքում դինամիկական հակազդումը հինգ անգամ մեծ է ստատիկական հակազդումից։*

*Եթե (8) բանաձևում ընդունենք* $v_0=0$, *կստանանք*

$$v^2 = 2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)։ \qquad (11)$$

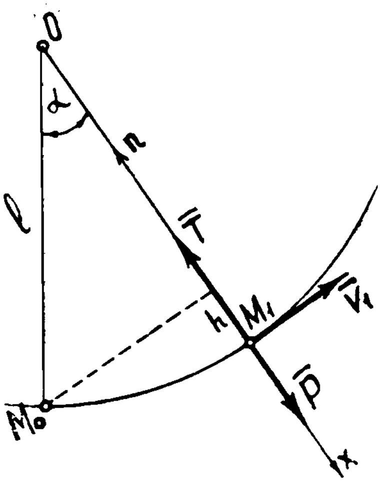
*Այստեղից հետևում է, որ ամբողջ շարժման ընթացքում պետք է տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$\cos\varphi \geqslant \cos\varphi_0$$

*կամ*

$$\varphi \leqslant \varphi_0 \text{ ։}$$

**Խնդիր 81**։ P *կշիռ ունեցող բեռը կախված է l երկարություն ունեցող թելից։ Բեռը սկզբնական պահին գտնվում է* $M_0$ *դիրքում և շեղված է ուղղաձիգից* $\alpha$ *անկյան տակ (գծ. 72)։ Բեռը բաց է թողնվում* $M_0$ *դիրքից առանց սկզբնական արագության։ Որոշել թելի լարվածության մեծությունը այն պահին, երբ բեռը հասնում է ամենացածր* $M_1$ *դիրքին։*




*Գծ. 72*

Լուծում։ *Բեռը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Բեռի վրա ազդում են* $\bar{P}$ *կշիռը և* $\bar{T}$ *լարումը։ Տանենք* $M_1n$ *նորմալը՝ ուղղված հետագծի գոգավորության կողմը։ (3) հավասարումը տվյալ դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{mv_1^2}{l} = T - P\,, \qquad (1)$$

*որտեղ* $v_1$*-ը բեռի արագությունն է* $M_1$ *դիրքում։* $v_1$ *արագությունը որոշելու համար գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով։ Այն կլինի*

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int\limits_{\widetilde{M_0M}} (P - T)\, dx \text{ ։} \qquad (2)$$

*Դժվար չէ նկատել, որ* $\bar{T}$ *լարման աշխատանքը* $M_0M_1$ *տեղափոխման դեպքում հավասար է զրոյի, իսկ* $\bar{P}$ *ուժի աշխատանքը այդ նույն տեղափոխման դեպքում կլինի* $Ph = Pl(1 - \cos\alpha)$*։ Տեղադրելով այս արժեքը (1)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենալով, որ* $v_0 = 0$, *կստանանք*

$$mv_1^2 = 2Pl\,(1 - \cos\alpha) \text{ ։} \qquad (3)$$

*(3)-ի հիման վրա (1)-ից կունենանք*

$$T = 3P\left(1 - \frac{2}{3}\cos\alpha\right) \text{ ։} \qquad (4)$$

*Այս նույն արդյունքը կարելի է անմիջականորեն ստանալ (9) բանաձևից, նրանում տեղադրելով* $\varphi_0=\alpha$ *և* $\varphi=0$ ($v_0=0$)։

Պատ. $T=3P\left(1-\dfrac{2}{3}\cos\alpha\right)$։

**6. Նյութական կետի շարժման հավասարումները, երբ կետը շարժվում է մակերևույթով:** *Դիցուք նյութական կետը շարժվում է բացարձակ ողորկ մակերևույթով, որի հավասարումը դեկարտյան կոորդինատներով ունի հետևյալ տեսքը՝*

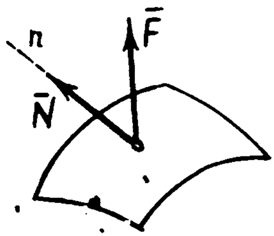
$$f(x, y, z)=0 \qquad (1)$$

*Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի՝*

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\bar{F}+\bar{N},$$

*որտեղ* $\bar{F}$*-ը ազդող ակտիվ ուժն է,* $\bar{N}$*-ը՝ կապի հակազդումը։ Քանի որ կապը իդեալական է, ապա* $\bar{N}$ *հակազդումը ուղղված կլինի մակերևույթի նորմալով (գծ. 73)։ Այստեղ* $\bar{N}$ *հակազդման ուժը և* grad f*-ը կոլինեար վեկտորներ են, ուստի կարող ենք գրել*

$$\bar{N}=\lambda \operatorname{grad} f, \qquad (2)$$



Գծ. 73

*որտեղ* $\lambda$*-ն առայժմ անորոշ բազմապատկիչ է։ (2)-ի հիման վրա (1)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\bar{F}+\lambda \operatorname{grad} f \qquad (3)$$

*Պրոյեկտելով (3) վեկտորական հավասարման երկու մասը դեկարտյան կոորդինատական սիստեմի առանցքների վրա, կստանանք (1) մակերևույթով շարժվող նյութական կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները հետևյալ տեսքով՝*

$$\begin{aligned} m\ddot{x}&=F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\\ m\ddot{y}&=F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\\ m\ddot{z}&=F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\end{aligned} \qquad (4)$$

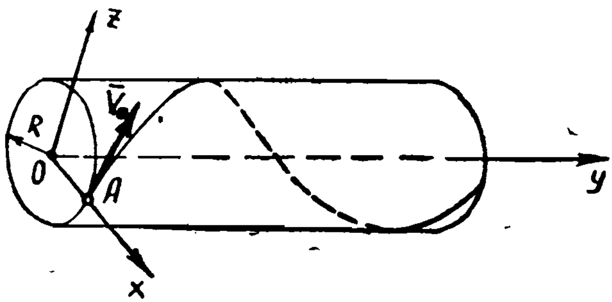
*Այս հավասարումներից պետք է որոշել* x, y, z *և* λ*-ն որպես ժամանակի ֆունկցիաներ։ Դրա համար (4)-ի երեք հավասարումներին անհրաժեշտ է միացնել նաև (1) հավասարումը։*

*(2)-ի հիման վրա* λ*-ի համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$\lambda = \frac{N}{|\operatorname{grad} f|} = \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \qquad (5)$$

*Նշանակում է,* λ *բազմապատկիչը կապի հակազդման ուժին համեմատական մեծություն է։* λ *բազմապատկիչի իմանալը հնարավորություն է տալիս որոշելու մակերևույթի նորմալ հակազդումը։*

**Խնդիր 82**։ m *մասսայով կետը շարժվում է* R *շառավիղ ունեցող* $x^2+z^2=R^2$ *(գծ. 74) գլանային մակերևույթով։ Կետի վրա կիրառված ակտիվ ուժերի համազորը հավասար է զրոյի։ Որոշել կետի հետագիծը և մակերևույթի հակազդումը, եթե շարժման սկզբնական պահին կետը գտնվել է* A *դիրքում և ունեցել է*




Գծ. 74

$\bar{V}_0$ *արագություն, որի պրոյեկցիաները* Oy *և* Oz *առանցքների վրա համապատասխանաբար հավասար են* $v_1$ *և* $v_2$*-ի։*

Լուծում։ *Ըստ խնդրի տված պայմանների կարող ենք գրել՝*

$$F_x = F_y = F_z = 0 \quad \text{և} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z։$$

*Այդ դեպքում կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն*

$$m\ddot{x} = 2\lambda x, \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = 0, \tag{2}$$

$$m\ddot{z} = 2\lambda z: \tag{3}$$

*Ինտեգրենք այս հավասարումները, օգտագործելով հետևյալ նախնական պայմանները՝*

$$t = 0 \left| \begin{array}{lll} x = R, & y = 0, & z = 0, \\ v_x = 0, & v_y = v_1, & v_z = v_2: \end{array} \right. \tag{4}$$

*(2)-ի ինտեգրումից կստանանք* $y = v_1 t$: *Իսկ (1) և (3) հավասարումներից արտաքսելով* $\lambda$ *բազմապատկիչը, կունենանք*

$$-\ddot{x}z + \ddot{z}x = 0$$

*կամ*

$$\frac{d}{dt}\left(-\dot{x}z + \dot{z}x\right) = 0: \tag{5}$$

*Եթե ինտեգրենք (5) հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք (4) պայմանները, կստանանք*

$$x\dot{z} - z\dot{x} = Rv_2: \tag{6}$$

*Անցնենք բևեռային կոորդինատներին, ընդունելով*

$$x = R\cos\varphi, \quad z = R\sin\varphi: \tag{7}$$

*Այդ դեպքում (6)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$R\frac{d\varphi}{dt} = v_2 \tag{8}$$

*կամ*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_2}{R} = \mathrm{const} = \omega:$$

*Այստեղից ստացվում է, որ* $\varphi = \omega t$: *Տեղադրելով* $\varphi$*-ի համար ստացած այս արժեքը (7)-ի մեջ, կստանանք նյութական կետի շարժման հավասարումները՝*

$$x = R\cos\omega t, \quad z = R\sin\omega t, \quad y = v_1 t:$$

*(1)-ից կարող ենք գրել՝*

$$\lambda = \frac{m\ddot{x}}{2x} = -\frac{mR\omega^2 \cdot \sin\omega t}{2R\cos\omega t} = -\frac{m}{2}\omega^2,$$

$\bar{N}$ *հակազդման մեծության համար կունենանք*

$$N=\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}=-m\omega^2R\text{։}$$

$\bar{N}$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսների որոշման միջոցով կհամոզվենք, որ նորմալ հակազդումը միշտ կհատի $Oy$ առանցքը ուղիղ անկյան տակ։

**Պատ.** Կետը շարժվում է պտուտակագծով, որի հավասարումներն են $x=R\cos\omega t$, $z=R\sin\omega t$, $y=v_1t$։ Հակազդման ուժի մեծությունը՝ $N=-m\omega^2R$ և կհատի $Oy$ առանցքը ուղիղ անկյան տակ։

**7. Նյութական կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը, երբ կետը շարժվում է մակերևույթով:** Դիցուք $m$ մասսա ունեցող նյութական կետը շարժվում է իդեալական ողորկ մակերևույթով։ Եթե այդ կետի վրա ազդող ակտիվ ուժը նշանակենք $\bar{F}$, իսկ պասսիվ ուժը՝ $\bar{N}$, ապա կարող ենք այդ կետը դիտել որպես ազատ կետ և գրել կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը հետևյալ տեսքով՝

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\bar{F}\cdot d\bar{r}+\bar{N}\cdot d\bar{r} \tag{1}$$

կամ

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\bar{F}\cdot d\bar{r}+\lambda\,\mathrm{grad}\,f\cdot d\bar{r}\text{։} \tag{2}$$

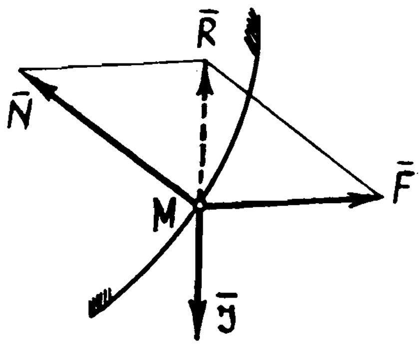
Եթե կապը ստացիոնար է, ապա $\mathrm{grad}\,f\cdot d\bar{r}=0$ և (2)-ից կունենանք

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\bar{F}\cdot d\bar{r}\text{։} \tag{3}$$

Հետևաբար, եթե կետը շարժվում է իդեալական ողորկ մակերևույթով, և կապը ստացիոնար է, ապա այդ կետի համար կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը ձևակերպվում է այնպես, ինչպես ազատ կետի համար, այսինքն՝ նյութական կետի կինետիկ էներգիայի դիֆերենցիալը հավասար է այդ կետի վրա կիրառված բոլոր ակտիվ ուժերի էլեմենտար աշխատանքների գումարին։

Այստեղից հետևում է, որ ազատ կետի դեպքում կետի կինետիկ էներգիայի համար ստացված բոլոր հատկությունները տեղի ունեն նաև ոչ ազատ կետի դեպքում, եթե կապը լինի ստացիոնար և մակերևույթը, որով շարժվում է կետը, իդեալական ողորկ։

**8. Դալամբերի սկզբունքը:** *Դիցուք M նյութական կետը շարժվում է տված անշարժ կորով կամ մակերևույթով (գծ. 75)։ Կետի վրա կիրառված ակտիվ ուժերի գումարը նշանակենք $\bar{F}$։ Եթե կապի ազդեցությունը փոխարինենք $\bar{N}$ հակազդումով, ապա կարող ենք M կետը դիտել ազատ, որի վրա կիրառված են $\bar{F}$ և $\bar{N}$ ուժերը։ Այժմ գտնենք այն ուժը, որը հավասարակշռում է $\bar{F}$ և $\bar{N}$ ուժերին։ Եթե $\bar{F}$ և $\bar{N}$ ուժերի համազորը նշանակենք $\bar{R}$, ապա ակնհայտ է, որ որոնելի ուժը կլինի $\bar{J} = -\bar{R}$։ Արտահայտենք $\bar{J}$ ուժը կետի շարժման արագացումով։ Քանի որ դինամիկայի հիմնական օրենքի համաձայն $\bar{R} = m\bar{W}$, ապա կունենանք*



Գծ. 75

$$\bar{J} = -m\bar{W}.$$

*Այն $\bar{J}$ ուժը, որի մեծությունը հավասար է կետի մասսայի և արագացման արտադրյալին և ունի արագացման վեկտորի հակառակ ուղղությունը, կոչվում է կետի իներցիայի ուժ։*

*Այսպիսով, եթե $\bar{F}$ և $\bar{N}$ ուժերին ավելացնենք $\bar{J}$ իներցիայի ուժը, ապա այդ ուժերը կհավասարակշռվեն, այսինքն՝*

$$\bar{F} + \bar{N} + \bar{J} = 0. \qquad (1)$$

*(1)-ը իրենից ներկայացնում է Դալամբերի սկզբունքը ոչ ազատ կետի համար։ Այն կարելի է ձևակերպել այսպես. եթե ժամանակի յուրաքանչյուր պահին կետի վրա կիրառված ակտիվ և պասիվ ուժերին ավելացնենք իներցիայի ուժը, ապա ստացված ուժասիստեմը կգտնվի հավասարակշռության մեջ, և այդ սիստեմի նկատմամբ տեղի կունենան ստատիկայի բոլոր հավասարումները։*

*Դալամբերի սկզբունքը հնարավորություն է տալիս դինամիկայի վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս կազմել շարժման հավասարումները՝ հավասարակշռության տեսքով։ Այս սկզբունքի կարևորությունը հատկապես պարզ է դառնում սիստեմի դինամիկայում։ Դալամբերի սկզբունքը օգտագործելիս պետք է միշտ նկատի ունենալ, որ փաստորեն կետի վրա կիրառված են միայն*

$\bar{F}$, $\bar{N}$ ուժերը, և կետը գտնվում է շարժման մեջ։ Իներցիայի ուժը շարժվող կետի վրա չի ազդում, այն մուծվում է միայն նրա համար, որ հնարավոր լինի կազմել դինամիկայի հավասարումները ստատիկայի ավելի պարզ մեթոդներով։

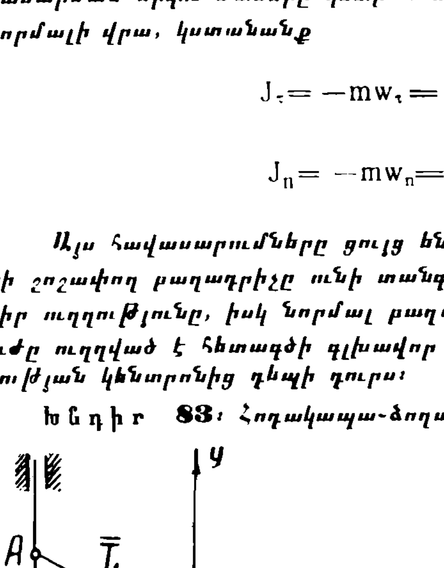
Խնդիրներ լուծելիս իներցիայի ուժը պատկերելու համար անհրաժեշտ է իմանալ կետի արագացումը։ Կորագիծ շարժման դեպքում իներցիայի ուժը կարելի է ներկայացնել նրա շոշափող և նորմալ բաղադրիչների միջոցով։ Պրոյեկտելով $\bar{J}=-m\bar{W}$ հավասարման երկու մասերը կետի հետագծի շոշափողի և գլխավոր նորմալի վրա, կստանանք

$$J_\tau = -mw_\tau = -m\frac{dv}{dt},$$

$$J_n = -mw_n = -\frac{mv^2}{\rho}։$$

Այս հավասարումները ցույց են տալիս, որ իներցիայի ուժի շոշափող բաղադրիչը ունի տանգենցիալ արագացման հակադիր ուղղությունը, իսկ նորմալ բաղադրիչը կամ կենտրոնախույս ուժը ուղղված է հետագծի գլխավոր նորմալի ուղղությամբ՝ կորության կենտրոնից դեպի դուրս։

**Խնդիր 83**։ Հողակապա-ձողային սիստեմը պտտվում է AB ուղղաձիգ առանցքի շուրջը $\omega$ անկյունային արագությամբ (գծ. 76)։ MA և MB ձողերից յուրաքանչյուրի երկարությունը հավասար է $l$-ի։ Որոշել ձողերում առաջացած լարումները, եթե M կետում կենտրոնացված է m մասսա և $\measuredangle AMB=2\alpha$։ Ձողերի կշիռները անտեսել։




Գծ. 76

Լուծում։ Քանի որ $\omega=\text{const}$, ապա M կետում կենտրոնացված m մասսայի արագացման մեծությունը կլինի $\omega^2 l\cos\alpha$ և այն ուղղված կլինի հորիզոնական ուղղությամբ, դեպի AB առանցքը։ Հետևաբար, համապատասխան իներցիայի ուժի մեծության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝ $J = m\omega^2 l \cos\alpha$, ընդ որում այն ուղղված կլինի M կետի արագացման հակառակ ուղղությամբ։ Լարումները MA և MB ձողերում նշանակենք $\bar{T}_1$ և $\bar{T}_2$։ Դալամբերի սկզբունքի համաձայն կունենանք

$$m\bar{g} + \bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{J} = 0 \qquad (1)$$

Եթե տանենք xy կոորդինատական սիստեմը գծագրում ցույց տրված ձևով և (1) վեկտորական հավասարումը պրոյեկտենք կոորդինատական x և y առանցքների վրա, կստանանք

$$-T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\alpha + m\omega^2 l \cos\alpha = 0,$$
$$-mg + T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha = 0.$$

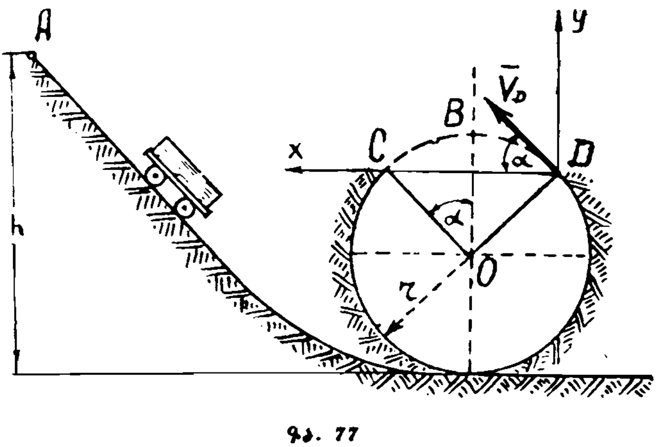
Լուծելով այս հավասարումների սիստեմը, կորոշենք $T_1$ և $T_2$ անհայտները։

Պ ա տ. $T_1 = \dfrac{m\omega^2 l}{2} + \dfrac{mg}{2\sin\alpha}$, $T_2 = \dfrac{m\omega^2 l}{2} - \dfrac{mg}{2\sin\alpha}$.

## 9. Խ Ն Դ Ի Ր Ն Ե Ր

Ստորև բերվում են ոչ ազատ կետի շարժման վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումներ։

31.4 **Խնդիր 84 (801)**։ Ճանապարհը, որով գլորվում է վագոնիկը, իջնելով A կետից ցած, կազմում է այնուհետև r շառավիղով բաց օղակ, ինչպես ցույց է տրված գծագրում, $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOD = \alpha$։ Գտնել ինչպիսի՞ h բարձրությունից պետք է գը-




Գծ. 77

ջրվի վագոնիկը, առանց սկզբնական արագության, որպեսզի կարողանա անցնել ամբողջ օղակը, ինչպես նաև α անկյան այն արժեքը, որի դեպքում այդ բարձրությունը ամենափոքրն է (գծ. 77)։

Լուծում: Հետագծի DC հատվածում վագոնիկը շարժվում է որպես P կշիռ ունեցող ազատ նյութական կետ։ Տանենք կոորդինատական xy սիստեմը, ինչպես ցույց է տրված գծագրում։ Գտնենք այն $v_D$ արագությունը, որի դեպքում կետը D-ից կհասնի C դիրքը։ Դիտարկվող կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն՝

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0, \qquad (1)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg։$$

Ինտեգրելով այս հավասարումները, կստանանք

$$\frac{dx}{dt}=c_1, \quad \frac{dy}{dt}=c_2-gt։ \qquad (2)$$

Այստեղից էլ ստացվում է

$$x=c_1t+c_3, \quad y=c_2t+c_4-\frac{gt^2}{2}, \qquad (2)$$

որտեղ $c_1$, $c_2$, $c_3$ և $c_4$-ը ինտեգրման հաստատուններն են։ Ժամանակի այն պահը, երբ կետը գտնվել է D դիրքում, ընդունենք $t=0$։ Այդ դեպքում նախնական պայմանները կլինեն

$$t=0 \left| \begin{array}{l} x=0, \quad y=0, \\ \dfrac{dx}{dt}=v_D\cos\alpha, \quad \dfrac{dy}{dt}=v_D\sin\alpha։ \end{array} \right. \qquad (4)$$

(4) պայմանների համաձայն (2) և (3)-ից կունենանք

$$c_3=c_4=0, \quad c_1=v_D\cos\alpha, \quad c_2=v_D\sin\alpha։ \qquad (5)$$

Տեղադրելով այս արժեքները (5)-ից (3)-ի մեջ, կստանանք CD մասում կետի (վագոնիկի) շարժման օրենքը հետևյալ տեսքով՝

$$x=v_Dt\cos\alpha,$$

$$y=v_Dt\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}։ \qquad (6)$$

(6)-ը կարելի էր միանգամից գրել, օգտվելով § 4-ի № 28 խնդրից։

Այստեղ $v_D$ արագությունը անհայտ է և այն պետք է որոշել։ Գծագրից երևում է, որ C կետի կոորդինատները կլինեն

$$x = 2r \sin \alpha, \quad y = 0 \text{։} \tag{7}$$

Դիցուք $t = t_1$ պահին կետը գտնվել է C' դիրքում։ Այդ դիրքում (6) և (7)-ից կունենանք

$$\begin{aligned} 2r \sin \alpha &= v_D t_1 \cos \alpha, \\ 0 &= v_D t_1 \sin \alpha - \frac{g t_1^2}{2} \text{։} \end{aligned} \tag{8}$$

Լուծելով (8) հավասարումների սիստեմը $v_D$ և $t_1$-ի նկատմամբ, կստանանք

$$v_D = \frac{gr}{\cos \alpha}, \quad t_1 = 2r \operatorname{tg} \alpha \text{։} \tag{9}$$

Այժմ որոշենք կետի (վագոնիկի) h բարձրությունը։ Դրա համար գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը, երբ կետը շարժվում է հետագծի AD մասում։ § 6-ում մենք տեսանք, որ ծանրության ուժի աշխատանքը հավասար է կետի կշռի և կետի ուղղաձիգ տեղափոխման արտադրյալին, այսինքն՝ $A = mg(z_0 - z_1)$։ Մեր օրինակում կունենանք

$$A = mg(z_A - z_D) = mg[h - r(1 + \cos \alpha)] \text{։} \tag{10}$$

Կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից ունենք

$$\frac{m v_D^2}{2} = mg[h - r(1 + \cos \alpha)] \text{։} \tag{11}$$

(11) բանաձևը ստանալիս նկատի ենք ունեցել, որ վագոնիկի արագությունը A կետում եղել է զրո, և ճանապարհի նորմալ հակազդման աշխատանքը նույնպես հավասար է զրոյի, քանի որ հետագծի յուրաքանչյուր կետում հակազդումը ուղղահայաց է արագության վեկտորին։

Եթե (11)-ի մեջ տեղադրենք $v_D$-ի արժեքը և լուծենք ստացված հավասարումը h-ի նկատմամբ, կստանանք

$$h = r\left(1 + \cos \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \text{։} \tag{12}$$

h բարձրության ամենափոքր արժեքը գտնելու համար կազմենք

$$\frac{dh}{d\alpha}=0 \tag{13}$$

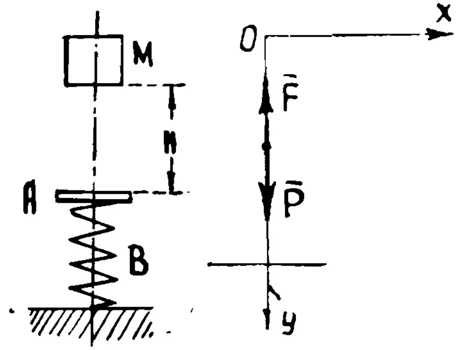
արտահայտությունը։ *(12)*-ից և *(13)*-ից կստանանք

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\alpha=0։ \tag{14}$$

*(14)*-ից ստացվում է $\alpha=45^\circ$ և $\alpha=90^\circ$ (այստեղ $\alpha$-ն վերցվում է $0<\alpha<90^\circ$)։ $\alpha=90^\circ$-ը համապատասխանում է $h_{max}$-ին, իսկ $\alpha=45^\circ$-ը՝ $h_{min}$-ին։

**Պատ.** $h=r\left(1+\cos\alpha+\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)$։ Երբ $\alpha=45^\circ$, ստացվում է $h=h_{min}$։

**Խնդիր 85 (808)**։ P կշիռ ունեցող M բեռը առանց սկզբնական արագության ընկնում է H բարձրությունից B սպիրալաձև զսպանակի վրա գտնվող A սալի վրա։ Ընկնող M բեռի ազդեցության տակ զսպանակը սեղմվում է h մեծությամբ։ Անտեսելով A սալի կշիռը և դիմադրությունը, հաշվել այն T ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում զսպանակը սեղմվում է h մեծությամբ և առաձգական ուժի S իմպուլսը նույն T ժամանակամիջոցում (գծ. 78)։




Գծ. 78

**Լուծում**։ Ընտրենք կոորդինատական xy սիստեմն այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում։ M բեռը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Զսպանակին հարվածելուց հետո բեռի վրա՞ կազդեն երկու ուժեր՝ բեռի P կշիռը և զսպանակի առաձգական $F=-cy$ ուժը։ Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-cy$$

կամ

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{c}{m}y = g, \tag{1}$$

որտեղ c-ն զսպանակի կոշտությունն է և առայժմ անհայտ։ Քանի որ բեռը ընկնում է ցած H բարձրությունից, առանց ըսկըզբնական արագության, ապա O կետում բեռի համար կունենանք հետևյալ պայմանները՝

$$t=0 \text{ պահին } y=0, \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{2gH}. \tag{2}$$

Այստեղ $t=0$ ընդունվում է այն պահը, երբ բեռը կպչում է զըսպանակին։

(1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$y = c_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \frac{P}{c}, \tag{3}$$

որտեղ $c_1$ և $c_2$-ը ինտեգրման հաստատուններն են։

(2) պայմանների հիման վրա (3)-ից կունենանք

$$c_1 = -\frac{P}{c}, \qquad c_2 = \sqrt{\frac{2PH}{c}}. \tag{4}$$

Տեղադրելով $c_1$ և $c_2$-ի արժեքները (3)-ի մեջ, կստանանք

$$y = \frac{P}{c}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right) + \sqrt{\frac{2PH}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t. \tag{5}$$

Այժմ որոշենք այն T ժամանակամիջոցը, երբ զսպանակը կսեղմվի h մեծությամբ։ Դա տեղի կունենա այն պահին, երբ բեռը կանգ առնի, այսինքն՝ $\frac{dy}{dt}$ լինի զրո։ (5)-ից կստանանք

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{c}{m}}\left[\frac{P}{c}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,T\right) + \sqrt{\frac{2PH}{c}}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,T\right)\right] = 0. \tag{6}$$

Այստեղից ստացվում է

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,T\right) = -\sqrt{\frac{2cH}{P}}. \tag{7}$$

(7) հավասարումից կարելի է որոշել T-ն, եթե հայտնի լինի զսպանակի c կոշտությունը։ Վերջինը որոշելու համար բավական է նկատի ունենալ, որ այն T պահին, երբ զսպանակը սեղմըվում է h մեծությամբ, $v=0$, տեղի ունի հետևյալ պայմանը՝

$$\int_0^{H+h} P\,dy = \int_0^h cy\,dy\text{։}$$

*Ինտեգրելուց հետո կստանանք*

$$P(H+h) = \frac{ch^2}{2},$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$c = \frac{2P(H+h)}{h^2},\tag{8}$$

*Տեղադրելով (8)-ը (7)-ի մեջ, կունենանք*

$$\operatorname{tg} kT = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

*կամ*

$$\operatorname{tg} kT = \operatorname{ctg}\alpha,\tag{9}$$

*որտեղ*

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}},\quad k = \frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h},\tag{10}$$

*(9)-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$\operatorname{tg} kT - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0\text{։}$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$T = \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{h}{\sqrt{2g(H+h)}}\left\{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}}\right\},\tag{11}$$

*Այժմ հաշվենք զսպանակի առաձգականության ուժի իմպուլսը։ Ունենք*

$$S = \int_0^T F\,dt = \int_0^T cy\,dt\text{։}\tag{12}$$

*Եթե տեղադրենք (5)-ից* y*-ի արժեքը (12)-ի մեջ, ինտեգրենք և օգտագործենք (7)-ը, կստանանք*

$$S = \left[P\left(t - \sqrt{\frac{m}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right) - m\sqrt{2gH}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right]_0^T =$$

$$= \frac{P}{\sqrt{2g(H+h)}} \Big\{ (h+2H)[\cos\alpha - \cos(kT+\alpha)] + \qquad (13)$$

$$+ T\sqrt{2g(H+h)} \Big\},$$

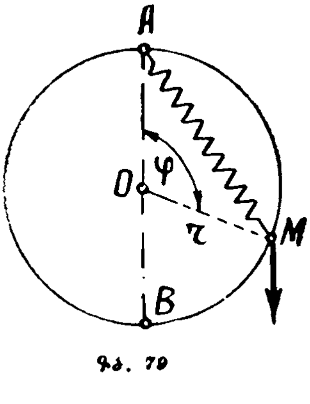
**Պատ.** $T = \dfrac{h}{\sqrt{2g(H+h)}} \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \dfrac{h}{2\sqrt{H(H+h)}} \right\},$

$$S = \frac{P}{\sqrt{2g(H+h)}} \Big\{ (h+2H)[\cos\alpha - \cos(kT+\alpha)] +$$

$$+ T\sqrt{2g(H+h)} \Big\},$$ *որտեղ* $\operatorname{tg}\alpha =$

$$= -\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}}, \qquad k = \frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h},$$

**Խնդիր 86 (810)**։ *Ուղղաձիգ հարթության մեջ գտնվող կլոր օղակի վերին* A *կետում ամրացված զսպանակից կախված* M *բեռը սահելով ընկնում է օղակով առանց շփման։ Գտնել, թե ինչպիսին պետք է լինի զսպանակի կոշտությունը, որպեսզի բեռի ճնշումը օղակի ստորին* B *կետում հավասար լինի զրոյի հետևյալ տվյալների դեպքում. օղակի շառավիղը 20* սմ *է, բեռի կշիռը՝ 5* կԳ, *բեռի սկզբնական դիրքում* AM *հեռավորությունը հավասար է 20* սմ-*ի, և զսպանակը ունի բնական երկարություն։ Բեռի սկզբնական արագությունը հավասար է զրոյի։ Զսպանակի կշիռը անտեսում ենք (գծ. 79)։*




**Գծ. 79**


**Գծ. 80**

Լուծում: B կետում M բեռի վրա ազդում են զսպանակի $\bar{F}$ առաձգական ուժը և բեռի $\bar{P}$ ծանրության ուժը։ Եթե այս ուժերին միացնենք $\bar{J}_n$ իներցիայի ուժը (գծ. 80), ապա այդ ուժերի սիստեմը կգտնվի հավասարակշռության մեջ, այսինքն՝

$$\bar{F} + \bar{J}_n + \bar{P} = 0 \qquad (1)$$

Եթե պրոյեկտենք այս վեկտորական հավասարումը ուղղաձիգ ուղղության վրա (գծ. 80), կստանանք

$$F - J_n - P = 0 \qquad (2)$$

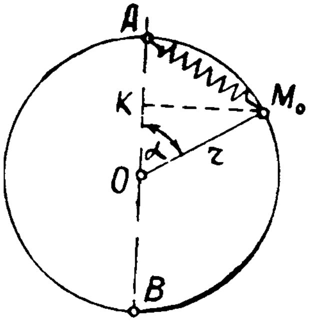
Զսպանակի երկարացումը հավասար է r շառավղին, որի հետևանքով F-ի համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$F = cr \qquad (3)$$

Այստեղ c-ն զսպանակի կոշտությունն է, որն անհայտ է և պետք է որոշել։

Եթե բեռի արագությունը նշանակենք v, ապա իներցիայի ուժը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$J_n = \frac{mv^2}{r} \qquad (4)$$




Գծ. 81

v արագությունը որոշելու համար օգտվենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից։ Դրա համար նախ հաշվենք առաձգական և ծանրության ուժերի կատարած աշխատանքը, երբ բեռը $M_0$ սկզբնական դիրքից հասնում է B դիրքը (գծ. 81)։ Այդ աշխատանքը կլինի

$$A = -\frac{cr^2}{2} + Pr(1 + \cos\alpha) \qquad (5)$$

Խնդրի պայմանների համաձայն α անկյունը կլինի 60°, քանի որ $AM_0 = AO = OM_0 = r = 20$ սմ։ Հետևաբար, (5)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$A = -\frac{cr^2}{2} + Pr(1 + \cos 60^\circ)$$

կամ

$$A = \frac{1}{2} r(-cr + 3P) \qquad (6)$$

*Գրենք կինետիկ էներգիայի թեորեմը վերջավոր տեսքով և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ բեռի սկզբնական արագությունը հավասար է զրոյի, և առաձգական ու ծանրության ուժերի աշխատանքը որոշվում է (6) բանաձևով։ Կունենանք*

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{1}{2}r\,(-cr+3P)\text{։}$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$\frac{mv^2}{r}=-cr+3P\text{,} \qquad (7)$$

*(4)-ի և (7)-ի հիման վրա* $J_n$*-ի համար ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$J_n=-cr+3P\text{,} \qquad (8)$$

*Եթե* F*-ի և* $J_n$*-ի արժեքները (3)-ից և (8)-ից տեղադրենք (2)-ի մեջ, կստանանք*

$$cr+cr-3P-P=0$$

*կամ*

$$c=\frac{2P}{r}=0{,}5\ \text{կգ/սմ}\text{։}$$

Պատ. $c=0{,}5$ կգ/սմ։

**Խնդիր 87 (813)**։ *1* կԳ *կշիռ ունեցող բեռը կախված է O անշարժ կետից 50* սմ *երկարությամբ թելով։ Սկզբնական* $M_0$ *դիրքում բեռը շեղված է ուղղաձիգից 60°-ի անկյունով և նրան հաղորդված է թելին ուղղահայաց դեպի ցած, ուղղաձիգ հարթության մեջ գտնվող* $v_0=350$ սմ/վրկ *արագություն։*

*1) Գտնել բեռի այն* M *դիրքը և այդ դիրքում* $v_1$ *արագությունը, որտեղ թելի լարումը հավասար կլինի զրոյի։*

*2) Որոշել բեռի հետագա շարժման հետագիծը մինչև այն մոմենտը, երբ թելը կրկին կձգվի, և այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում կետը կանցնի այդ հետագիծը։*

Լուծում: *Ընտրենք կոորդինատական* xy *և* $(\tau^\circ, n^\circ)$ *սիստեմները այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծ. 82 և գծ. 83-ում։* M *բեռը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները բնական եռանիստի առանցքների նկատմամբ (շփումը բացակայում է).*

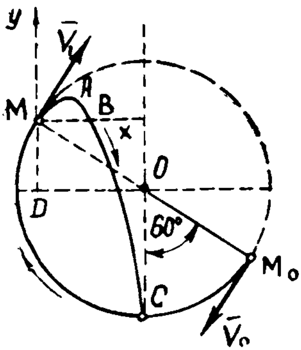
$$m\frac{dv}{dt}=F_\tau\text{,} \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{l} = F_n + N: \qquad (2)$$

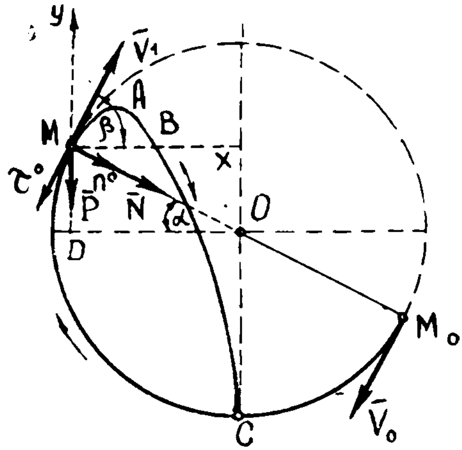
*Գծագիր 83-ից երևում է, որ*

$$F_\tau = P\cos\alpha, \qquad (3)$$

$$F_n = P\sin\alpha: \qquad (4)$$




Գծ. 82




Գծ. 83

*Տեղադրելով* $F_\tau$*-ի և* $F_n$*-ի արժեքները (3)-ից և (4)-ից (1)-ի ու (2)-ի մեջ և նկատի ունենալով, որ* $v = l\dfrac{d\alpha}{dt}$, *կստանանք*

$$ml\frac{d^2\alpha}{dt^2} = P\cos\alpha,$$

$$\frac{mv_0^2}{l} = P\sin\alpha + N$$

*կամ*

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{g}{l}\cos\alpha = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{mv^2}{l} = P\sin\alpha + N: \qquad (6)$$

*Բեռի այն դիրքը, որի դեպքում թելի լարումը հավասարվում է զրոյի, իսկ բեռի արագությունը* $v_1$*-ի, նշանակենք* $M_1$: $v_1$ *արագությունը որոշելու համար նախ պետք է ինտեգրել (5) հա-*

*վասարումը և այնուհետև (6)-ում տեղադրել* N=0։ *Բայց քանի որ (5)-ը ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարում է և դրա ինտեգրումը դժվար է, ուստի նպատակահարմար է* $v_1$ *արագությունը գտնել կինետիկ էներգիայի փոփոխման*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -mgdy \tag{7}$$

*թեորեմից։ Ինտեգրելով այս հավասարումը, կստանանք*

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg(y_1 - y_0)\text{։} \tag{8}$$

*Գծագիր 83-ից երևում է, որ*

$$y_0 = -(l\cos 60^\circ + l\sin\alpha),\quad y_1 = 0\text{։} \tag{9}$$

*Տեղադրելով* $y_0$*-ի և* $y_1$*-ի արժեքները (8)-ի մեջ, կստանանք*

$$v_1^2 = v_0^2 - 2gl\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right)\text{։} \tag{10}$$

*Մյուս կողմից հայտնի է, որ* $M_1$ *դիրքում թելի լարումը հավասար է զրոյի։ Ուստի, (6)-ի մեջ տեղադրելով* N = 0, *կունենանք*

$$v_1^2 = gl\sin\alpha\text{։} \tag{11}$$

*Եթե (10) և (11) հավասարումներից նախ արտաքսենք* α *անկյունը և այնուհետև ստացված հավասարումից որոշենք* $v_1$ *արագությունը, կստանանք*

$$v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2 - gl}{3}} = \sqrt{\frac{350^2 - 981\cdot 50}{3}} = 157\ \text{սմ/վրկ։} \tag{12}$$

*Այժմ որոշենք* MD *հեռավորությունը։ Գծագիր 83-ից երևում է, որ*

$$MD = l\sin\alpha\text{։} \tag{13}$$

*(11)-ի և (12)-ի հիման վրա (13)-ից կստանանք*

$$MD = \frac{v_1^2}{g} = \frac{v_0^2 - gl}{3g} = \frac{350^2 - 981\cdot 50}{3\cdot 981} = 25\ \text{սմ։} \tag{14}$$

M *կետը, հասնելով* $M_1$ *դիրքին, կսկսի շարժվել որպես ազատ կետ։ Եթե կետը նետված է հորիզոնի նկատմամբ* β *անկյան տակ* $v_1$ *սկզբնական արագությամբ, ապա § 4-ի № 28 խնդրի համաձայն այդ կետի շարժման հավասարումները կլինեն*

$$x = v_1 t \cos\beta,$$
$$y = v_1 t \sin\beta - \frac{gt^2}{2}, \tag{15}$$

*(15)-ից արտաքսելով* t *ժամանակը, կստանանք կետի շարժման հետագիծը հետևյալ տեսքով՝*

$$y = x \operatorname{tg}\beta - \frac{gx^2}{2v_1^2\cos^2\beta}, \tag{16}$$

*(16)-ի մեջ* β *անկյունը անհայտ է։ Գծագիր 83-ից երևում է, որ*

$$\beta = 90^\circ - \alpha, \tag{17}$$

*իսկ (13) և (14)-ից բխում է, որ*

$$\sin\alpha = \frac{MD}{l} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}։ \tag{18}$$

*Այստեղից ստացվում է* $\alpha = \frac{\pi}{6}$։ *Հետևաբար,* $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$։ *Տեղադրելով* β*-ի համար ստացած այս արժեքները (16)-ի մեջ, կստանանք* M *կետի շարժման հետագիծը մինչև այն պահը, երբ թելը կրկին կձգվի՝*

$$y = \sqrt{3}\,x - 0{,}08x^2։ \tag{19}$$

*Այժմ որոշենք այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում* M *կետը կանցնի այդ հետագիծը։ Դրա համար նախ (15)-ից որոշենք* t*-ն* x*-ի միջոցով։ Կունենանք*

$$t = \frac{x}{v_1\cos\beta}։ \tag{20}$$

*Գծագիր 82-ից երևում է, որ*

$$x_c = l\cos 30^\circ = 25\sqrt{3}։ \tag{21}$$

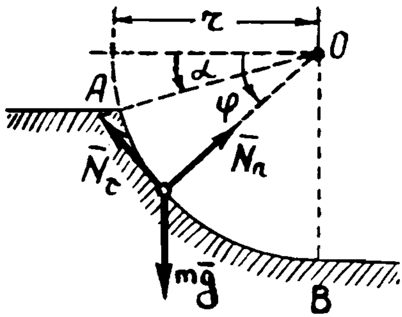
*Տեղադրելով (20)-ի մեջ* $x = x_c$, *կստանանք այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում կետը անցնում է* MABC *պարաբոլը.*

$$T = \frac{x_c}{v_1\cos\beta} = \frac{50\sqrt{3}}{157} = 0{,}55 \text{ վրկ։}$$

Պատ. *1)* M *դիրքը գտնվում է* O *կետի հորիզոնականից վերև* MD=25 սմ *հեռավորության վրա,* $v_1$=157սմ/վրկ։
*2)* MABC *պարաբոլը, որի հավասարումը* Mx *և* My

առանցքների նկատմամբ կլինի $y = x\sqrt{3} - 0{,}08x^2$, կետը գծում է 0,55 վրկ ընթացքում։

**Խնդիր 88։** Դահուկորդը իջնում է բարձունքից, ընդ որում նրա հետագիծը կարելի է ընդունել որպես r շառավիղ ունեցող շրջանագիծ (գծ. 84)։ Սահքի շփման գործակիցը հավասար է f-ի։ Գտնել դահուկորդի արագությունը և նորմալ հակազդումը B կետում, եթե սկզբնական A կետում նրա արագությունը հավասար է եղել զրոյի։




Գծ. 84

Լուծում: Դահուկորդը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Կետի վրա ազդում են՝ 1) $\bar F = m\bar g$ ծանրության ուժը, 2) $\bar N_n$ նորմալ հակազդումը, ուղղված շառավղով դեպի շրջանագծի կենտրոնը և 3) $-fN_n \cdot \tau^\circ$ շփման ուժը, ուղղված $\bar V$-ի հակառակ ուղղությամբ։ Գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները բնական եռանիստի առանցքների նկատմամբ՝

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau + N_\tau, \qquad \frac{mv^2}{\rho} = F_n + N_n \tag{1}$$

Գծագրից երևում է, որ

$$\rho = r, \quad F_\tau = mg\cos\varphi, \quad F_n = -mg\sin\varphi, \quad N_\tau = -fN_n.$$

Սրա հիման վրա (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$m\frac{dv}{dt} = mg\cos\varphi - fN_n, \qquad \frac{mv^2}{r} = -mg\sin\varphi + N_n \tag{2}$$

(2)-ից $N_n$-ը արտաքսելու համար երկրորդ հավասարումը բազմապատկենք f-ով և գումարենք առաջինին։ Կստանանք

$$\frac{dv}{dt} + f\,\frac{v^2}{r} = g(\cos\varphi - f\sin\varphi). \tag{3}$$

Եթե նկատի ունենանք, որ $v=r\frac{d\varphi}{dt}$ և միաժամանակ օգտըվենք

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt}=\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d(\dot{\varphi}^2)}{d\varphi}$$

բանաձևից, կարող ենք (3)-ը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d(\dot{\varphi}^2)}{d\varphi}+2f\,\dot{\varphi}^2=\frac{2g}{r}(\cos\varphi-f\sin\varphi)։ \qquad (4)$$

Սա $\dot{\varphi}^2$-ու նկատմամբ առաջին կարգի անհամասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումը կազմված է երկու մասից։ Առաջին մասը համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ երկրորդ մասը՝ (4) հավասարման մի մասնավոր լուծում։

(4)-ի համասեռ մասի, այսինքն՝ $\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi}+2f\dot{\varphi}^2=0$ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$\dot{\varphi}^2=ce^{-2f\varphi}, \qquad (5)$$

որտեղ c-ն ինտեգրման հաստատուն է։

(4) հավասարման մասնավոր լուծումը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\dot{\varphi}_1^2=A\cos\varphi+B\sin\varphi։ \qquad (6)$$

A և B անհայտ գործակիցները որոշելու համար (6)-ը տեղադրենք (4)-ի մեջ ու հավասարեցնենք ստացված նույնության աջ և ձախ մասերում $\sin\varphi$, $\cos\varphi$-ի գործակիցները։ Կստանանք A-ի և B-ի նկատմամբ երկու հավասարումների սիստեմ, որից կորոշենք A-ի և B-ի արժեքները՝

$$A=\frac{6gf}{r(1+4f^2)}, \quad B=\frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)}։ \qquad (7)$$

Այսպիսով, որոնելի մասնավոր լուծումը կլինի

$$\dot{\varphi}_1^2=\frac{6gf}{r(1+4f^2)}\cos\varphi+\frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)}\sin\varphi։ \qquad (8)$$

Գումարելով (5) և (8) լուծումները, կստանանք (4) հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$\dot{\varphi}^2 = ce^{-2f\varphi} + \frac{6gf}{r(1+4f^2)}\cos\varphi + \frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)}\sin\varphi, \tag{9}$$

*Քանի որ սկզբնական պահին կետը գտնվել է A դիրքում, և նրա արագությունը եղել է զրո, ուստի $\varphi=\alpha$-ի դեպքում կունենանք $\dot{\varphi}=0$։ Սրա հիման վրա (9)-ից կունենանք*

$$ce^{-2f\varphi} + \frac{6gf}{r(1+4f^2)}\cos\alpha + \frac{2g(1-2f^2)}{r(1+4f^2)}\sin\alpha = 0,$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$c = -\frac{2g}{r(1+4f^2)} \cdot e^{2f\alpha}\left[3f\cos\alpha + (1-2f^2)\sin\alpha\right], \tag{10}$$

*Տեղադրելով c-ի արժեքը (10)-ից (8)-ի մեջ և նկատի ունենալով, որ $v=r\dot{\varphi}$, կստանանք արագության արտահայտությունը՝*

$$v^2 = -\frac{2gr}{1+4f^2}e^{2f(\alpha-\varphi)} \cdot \left[3f\cos\alpha + (1-2f^2)\sin\alpha\right] +$$

$$+ \frac{2gr}{1+4f^2}\left[3f\cos\varphi + (1-2f^2)\sin\varphi\right], \tag{11}$$

*(2)-ի երկրորդ հավասարումից որոշենք $N_n$ նորմալ հակազդումը։ Կունենանք՝*

$$N_n = \frac{mv^2}{r} + mg\sin\varphi = -\frac{2mg}{1+4f^2}e^{-2f(\varphi-\alpha)} \cdot \left[3f\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + (1-2f^2)\sin\alpha\right] + \frac{2mg}{1+4f^2}\left[3f\cos\varphi + (1-2f^2)\sin\varphi\right] + \tag{12}$$

$$+ mg\sin\varphi.$$

*Խնդրում պահանջվում է գտնել կետի արագությունը և նորմալ հակազդումը, երբ կետը գտնվում է B դիրքում, որտեղ $\varphi = \frac{\pi}{2}$։ Մնում է (11) և (12)-ի մեջ տեղադրել $\varphi = \frac{\pi}{2}$ և ստանալ պատասխանը։*

**Պատ.**

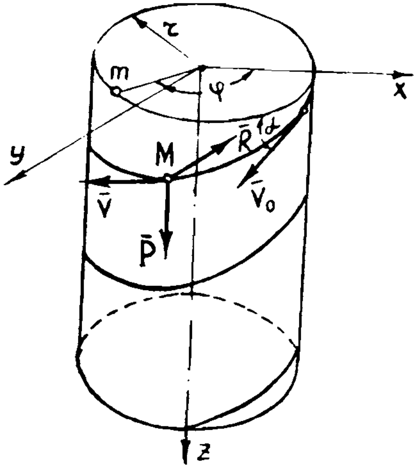
$$v^2 = -\frac{2gr}{1+4f^2}e^{-2f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \cdot \left[3f\cos\alpha + (1-2f^2)\sin\alpha\right] + $$

$$+ \frac{2gr}{1+4f^2}(1-2f)^2,$$

$$N_n = -\frac{2mg}{1+4f^2}e^{-2f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \cdot \left[3f\cos\alpha + (1-2f^2)\sin\alpha\right] +$$

$$+ \frac{2mg}{1+4f^2}(1-2f^2) + mg.$$

**Խնդիր 89 (816)**։ m մասսա ունեցող կետը շարժվում է r շառավիղ ունեցող շրջանային գլանի ներքին մակերևույթով։ Ընդունելով գլանային մակերևույթը բացարձակ ողորկ, գլանի առանցքը՝ ուղղաձիգ և հաշվի առնելով ծանրության ուժի ազդեցությունը, որոշել կետի ճնշումը գլանի վրա։ Կետի սկզբնական արագության մեծությունը հավասար է $v_0$-ի և հորիզոնի հետ կազմում է α անկյուն (գծ. 85)։



Գծ. 85

Լուծում։ M կետի վրա ազդում է mg ծանրության ուժը և գլանի $\bar{N}$ նորմալ հակազդումը։ Կոորդինատական սիստեմը նշված է գծագրում։ Գրենք M կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները դեկարտյան կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ։ Այդ հավասարումները կլինեն՝

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x},\\
m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\\
m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

որտեղ λ-ն անհայտ բազմապատկիչ է, իսկ $f(x, y, z)=x^2+y^2-r^2=0$ գլանի հավասարումն է, որի ներքին մակերևույթով շարժվում է M կետը։

Գծագիր 85-ից երևում է, որ

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = mg. \tag{2}$$

Բացի դրանից նաև ունենք

$$\lambda = \frac{-N}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = -\frac{N}{2\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= -\frac{N}{2r}\,\text{։} \tag{3}$$

(2) և (3)-ի հիման վրա (1)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{r}, \tag{4}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{r}, \tag{5}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg\,\text{։} \tag{6}$$

Եթե (4) և (5) հավասարումների երկու մասերը բարձրացնենք քառակուսի, գումարենք և ապա հանենք քառակուսի արմատ, կստանանք

$$N = m\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}\,\text{։} \tag{7}$$

Մնում է որոշել $\frac{d^2x}{dt^2}$ և $\frac{d^2y}{dt^2}$ արտահայտությունները և տեղադրելով (7)-ի մեջ, որոշել N-ը։ Դրա համար (4)-ը բազմապատկենք y-ով, իսկ (5)-ը՝ x-ով ու երկրորդից հանենք առաջինը, կստանանք

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

կամ

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = 0\,\text{։} \tag{8}$$

Այժմ դեկարտյան կոորդինատներից անցնենք գլանային կոորդինատներին, ընդունելով

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi\,\text{։} \end{aligned} \tag{9}$$

Այդ դեպքում (8)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0\,\text{։}$$

Այստեղից ստացվում է

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c, \tag{10}$$

*որտեղ c-ն ինտեգրման հաստատունն է։ (10)-ը կարելի է ստանալ նաև կետի շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմից։*

*Քանի որ*

$$r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega = v_\varphi, \tag{11}$$

*որտեղ ω-ն գլանի առանցքի շուրջը կետի պտտման անկյունային արագությունն է, ապա (10)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$rv_\varphi = c։ \tag{12}$$

*Խնդրի նախնական պայմանների համաձայն* $t=0$ *պահին*

$$v_\varphi = v_0 \cos \alpha։ \tag{13}$$

*(13)-ի հիման վրա (12)-ից կստանանք*

$$c = rv_0 \cos \alpha։ \tag{14}$$

*Եթե c-ի արժեքը (14)-ից տեղադրենք (11)-ի մեջ, որոշենք* $\frac{d\varphi}{dt}$*-ն, ինտեգրենք ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը, նկատի ունենալով, որ* $t=0$ *պահին* $\varphi=0$*, կունենանք*

$$\varphi = \frac{v_0 \cos \alpha}{r} \cdot t։ \tag{15}$$

*Տեղադրենք φ-ի արժեքը (15)-ից (9)-ի մեջ, կստանանք*

$$\begin{aligned} x &= r \cos \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{r} t\right), \\ y &= r \sin \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{r} t\right)։ \end{aligned} \tag{16}$$

*Կազմենք x-ի և y-ի երկրորդ ածանցյալները ըստ t ժամանակի՝*

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{r} \cos \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{r} t\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{r} \sin \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{r} t\right)։ \end{aligned} \tag{17}$$

*Մնում է այս արժեքները տեղադրել (7)-ի մեջ և որոշել N-ը։*

Դիտողություն: *Այս արդյունքը կարելի է ստանալ նաև այլ կերպ՝ եթե $\bar{V}$ արագությունը վերածենք $v_\varphi$ և $v_z$ բաղադրիչների և նկատի ունենանք, որ*

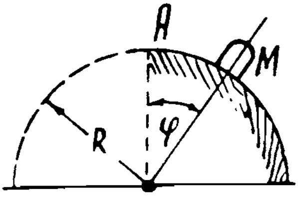
$$v_\varphi = r\varphi',$$

$$N = \frac{mv_\varphi^2}{2},$$

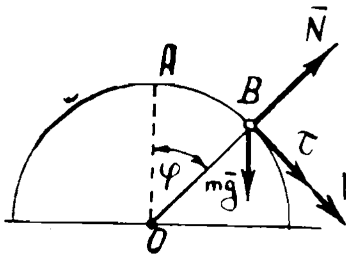
*կստանանք (13) ը։*

Պատ. $N = \dfrac{Pv_0^2 \cos^2\alpha}{gr}$։

31.22 **Խնդիր 90 (818)։** *R շառավղով կիսասֆերիկ սահուն գմբեթի A գագաթում գտնվող M քարը ստանում է սկզբնական հորիզոնական $v_0$ արագություն։ Որտե՞ղ քարը կանջատվի գմբեթից։ $v_0$-ի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում քարը կանջատվի գմբեթից սկզբնական մոմենտում։ Քարի գմբեթի վրայով շարժման ժամանակ դիմադրությունը անտեսել (գծ. 86)։*




Գծ. 86




Գծ. 87

Լուծում: *Քարը դիտենք որպես նյութական կետ։ Նրա վրա կիրառված կապը փոխարինենք համապատասխան $\bar{N}$ հակազդումով։ Այդ դեպքում կետի վրա կազդեն նրա $m\bar{g}$ կշիռը և կիսագնդի $\bar{N}$ հակազդումը։ Դիտարկենք M կետի կամայական B դիրքը, նրա արագությունը այդ դիրքում նշանակենք $\bar{V}$ (գծ. 87)։ Գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները բնական եռանիստի առանցքների նկատմամբ՝*

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\varphi, \tag{1}$$

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\varphi - N\text{։} \tag{2}$$

*կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից ունենք*

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgR\,(\cos 0 - \cos\varphi)$$

*կամ* (3)

$$v^2 = v_0^2 + 2gR\,(1 - \cos\varphi)\,։$$

*Եթե* $v^2$*-ու արժեքը (3)-ից տեղադրենք (2)-ի մեջ, կստանանք կիսագնդի հակազդման մեծությունը՝*

$$N = mg\left(3\cos\varphi - 2 - \frac{v_0^2}{gR}\right)։ \qquad (4)$$

*Այս դեպքում քարի վրա դրված է ազատող իդեալական կապ։ Հետևաբար, եթե քարը գտնվում է կիսագնդի վրա, պետք է լինի* $N \geqslant 0$։ *Այն պահին, երբ քարը սկսի պոկվել կապից,* $N$*-ը պետք է դառնա զրո և (4)-ից կստանանք*

$$3\cos\varphi - 2 - \frac{v_0^2}{gR} = 0։$$

*Այստեղից էլ ստացվում է, որ*

$$\cos\varphi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}$$

*կամ*

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)։$$

*Մնում է որոշել այն* $v_0$ *արագությունը, որի դեպքում քարը հենց սկզբնական պահին կանջատվի կիսագնդից։ Ակնհայտ է, որ դա տեղի կունենա, եթե* $N \leqslant 0$, *երբ* $\varphi = 0$։ *Տեղադրելով այս արժեքները (4)-ի մեջ, կունենանք*

$$N = mg\left(1 - \frac{v_0^2}{gR}\right) \leqslant 0։$$

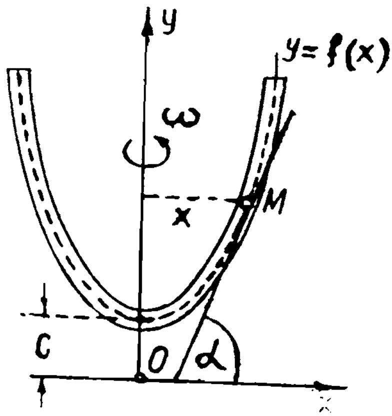
*Այստեղից ստացվում է*

$$v_0 \geqslant \sqrt{gR}\,։$$

**Պատ.** $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)$, $v_0 \geqslant \sqrt{gR}$։

**Խնդիր 91 (821)**։ *Ինչպիսի՞ հարթ կորով պետք է ծռել խողովակը, որպեսզի նրա մեջ ցանկացած տեղում տեղավորված գնդիկը խողովակի նկատմամբ մնա հավասարակշռության մեջ,* *եթե խողովակը պտտվում է* Oy *առանցքի շուրջը* ω *հաստատուն անկյունային արագությամբ։*

Լուծում։ Առաջին եղանակ։ *Դիցուք խողովակը ծռված է* $y=f(x)$ *կորի տեսքով, որտեղ* $f(x)$*-ը զույգ անհայտ ֆունկցիա է։ Քանի որ գնդիկը պետք է մնա խողովակի նկատմամբ անշարժ վիճակում, ապա նրա հետագիծը կլինի* x *շառավղով շրջանագիծ (գծ. 88), ըստ որում կետը կշարժվի այդ շրջանագծով հաստատուն* $\omega x$ *արագությամբ։ Գրենք նշված հետագծով շարժվող կետի շարժման բնական հավասարումները՝*




*Գծ. 88*

$$m\frac{dv}{dt}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{x}=N\sin\alpha, \qquad (2)$$

$$0=-N\cos\alpha+mg\text{։} \qquad (3)$$

*Եթե (2)-ի մեջ տեղադրենք* $v=\omega x$ *և* N*-ի համար ստացած արժեքը տեղադրենք (3)-ի մեջ, կստանանք*

$$g=\omega^2 x\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

*կամ*

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\omega^2}{g}\cdot x\text{։} \qquad (4)$$

*Մյուս կողմից հայտնի է, որ* $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{dy}{dx}$*։ Տեղադրելով այս արժեքը (4)-ի մեջ և ինտեգրելով, կստանանք պատասխանը։*

Երկրորդ եղանակ։ *Խնդիրը լուծենք օգտագործելով Դալամբերի սկզբունքը։ Գնդիկի վրա ազդում են նրա* $m\bar{g}$ *կշիռը,* $\bar{N}$ *հակազդումը, որը ուղղված է* $y=f(x)$ *կորի նորմալով և* $-\frac{mv^2}{x}$ *իներցիայի ուժը՝ ուղղված* Ox *առանցքով։ Դալամբերի սկզբունքի համաձայն կունենանք*

$$m\bar{g}+\bar{N}+\left(-\frac{mv^2}{x}\right)x^0=0, \qquad (1)$$

*որտեղ* $x^0$*-ն* $x$ *առանցքի միավոր վեկտորն է։*

*(1) հավասարումը պրոյեկտենք* $y=f(x)$ *կորի շոշափողի ուղղության վրա (գծ. 88)։ Կստանանք*

$$-mg\sin\alpha+mx\,\omega^2\cos\alpha=0$$

*կամ* (2)

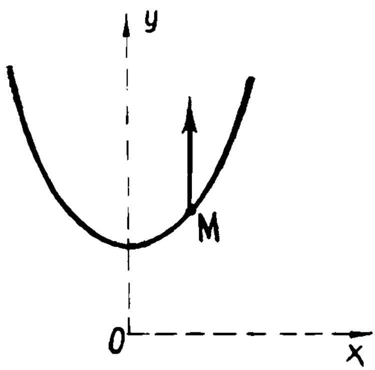
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\omega^2}{g}x\,։$$

*Սրանից հետո լուծումը պարզ է։*

**Պատ.** $y=\frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{g}x^2+c$ ։

**Խնդիր 92 (820)**։ $m$ *մասսա ունեցող կետը շարժվում է*

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$




*Գծ. 89*

*շղթայագծով, Oy առանցքին զուգահեռ և դեպի վեր ուղղված վանող ուժի ազդեցության տակ, որի մեծությունը հավասար է* $kmy$*-ի (գծ. 89)։* $t=0$ *պահին* $x=1$ մ, $\dot{x}=1$ մ/վրկ։ *Որոշել կետի ճնշումը կորի վրա և կետի շարժումը, երբ* $k=1$ վրկ$^{-2}$, $a=1$ մ *(ծանրության ուժը անտեսել)։*

**Լուծում**: *Կետի ճնշումը կորի վրա կորի հակազդումն է՝ վերցրած հակադիր նշանով։ Հետևաբար, խնդիրը կարելի է ձևակերպել սովորական ձևով՝ գտնել կորի հակազդումը և կետի շարժումը։*

*Եթե նկատի ունենանք, որ*

$$f(x,\ y)=y-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=1,\quad F_x=0,\quad F_y=y,$$

*ապա կարող ենք* M *կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2}\lambda(e^{x}-e^{-x}) \tag{1}$$

$$\ddot{y} = y + \lambda\text{։} \tag{2}$$

*(1)-ը բազմապատկենք* $\dot{x}$*-ով, (2)-ը՝* $\dot{y}$*-ով և գումարենք։ Կստանանք*

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = -\frac{1}{2}\lambda(e^{x}-e^{-x})\,\dot{x} + y\dot{y} + \lambda\dot{y}\text{։} \tag{3}$$

*Քանի որ*

$$\dot{y} = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\,\dot{x},$$

*ապա (3)-ից կունենանք*

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = y\dot{y}$$

*կամ* (4)

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{dy^2}{dt}\text{։}$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = y^2 + c,$$

*կամ, որ նույնն է,*

$$v^2 = y^2 + c\text{։} \tag{5}$$

*Դժվար չէ նկատել, որ*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + \frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})^2\dot{x}^2 = \dot{x}^2\left[1 + \frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\dot{x}^2(e^{x}+e^{-x})^2,$$

*այսինքն՝*

$$v^2 = \dot{x}^2y^2\text{։} \tag{6}$$

*Ըստ տված նախնական պայմանի, երբ* $t=0$, $\dot{x}=1$։ *Այդ դեպքում (6)-ից կունենանք*

$$v^2 = y^2\text{։} \tag{7}$$

*(5)-ից և (7)-ից հետևում է, որ* $c=0$։

*Նշանակում է, կամայական* t*-ի համար կունենանք*

$$v^2 = y^2\text{։} \tag{8}$$

*Բայց քանի որ*

$$v^2 = \dot{x}^2 y^2, \tag{9}$$

*ապա (8) և (9)-ից կստանանք*

$$\dot{x} = 1: \tag{10}$$

*Եթե ինտեգրենք (10)-ը և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ երբ* $t=0$, $x=1$, *ապա կստանանք*

$$x = t+1: \tag{11}$$

*Քանի որ (11)-ից ստացվում է*

$$\ddot{x} = 0,$$

*ապա (2)-ի հիման վրա կստանանք*

$$\lambda = 0: \tag{12}$$

*Նկատի ունենալով, որ*

$$N = \lambda \operatorname{grad} f, \tag{13}$$

*ստանում ենք, որ կորի հակազդումը, նշանակում է նաև կետի ճնշումը կորի վրա, հավասար է զրոյի:*

*Այն հանգամանքը, որ կորի հակազդումը հավասար է դառնում զրոյի, կարիք ունի հատուկ պարզաբանման: Այս երևույթին կարելի է տալ այն միակ պարզաբանումը, որ շղթայագիծը, որով սահում է շարժվելու կետը, միաժամանակ նրա ազատ շարժման հետագիծն է, եթե, իհարկե, կետի վրա ազդող ուժը և նախնական պայմանները համընկնում են տված խնդրում եղածի հետ:*

Սա ապացուցենք: *Այսպիսով, պահանջվում է գտնել* $m$ *մասսա ունեցող կետի այն շարժումը, որի վրա ազդում է* $Oy$ *առանցքին զուգահեռ և դեպի վեր ուղղված վանող ուժ, որի մեծությունը հավասար է* $y$*-ի: Տված է, որ* $t=0$ *պահին*

$$x=1, \quad \dot{x}=1, \quad y=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right), \quad \dot{y}=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right):$$

*Ակնհայտ է, որ այս դեպքում խնդրի լուծումը բերվում է*

$$\ddot{x} = 0, \tag{14}$$

$$\ddot{y} = y \tag{15}$$

*դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրմանը, երբ տեղի ունեն հետևյալ նախնական պայմանները՝*

$$t=0 \left| \begin{array}{l} x=1, \quad \dot{x}=1 \\ y=\dfrac{1}{2}\left(e+\dfrac{1}{e}\right), \quad \dot{y}=\dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right), \end{array} \right. \tag{16}$$

*(14) և (15) դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները կլինեն*

$$\begin{aligned} x &= c_1 t + c_2, \\ y &= c_3 e^{t} + c_4 e^{-t}\text{։} \end{aligned} \tag{17}$$

*Եթե (17)-ի հիման վրա կազմենք* $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ *ածանցյալները և դրանց համար ստացած արտահայտությունների ու (17)-ի մեջ տեղադրենք (16) նախնական պայմանները, ապա կորոշենք* $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ *ինտեգրման հաստատունները։* $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$*-ի համար ստացած արժեքները տեղադրելով (17)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման հավասարումները՝*

$$\begin{aligned} x &= t+1 \\ y &= \frac{1}{2}\left(e^{t+1}+e^{-(t+1)}\right)\text{։} \end{aligned} \tag{18}$$

*Եթե (18)-ից արտաքսենք* t *ժամանակը, կստանանք կետի շարժման հետագծի հավասարումը՝*

$$y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right), \tag{19}$$

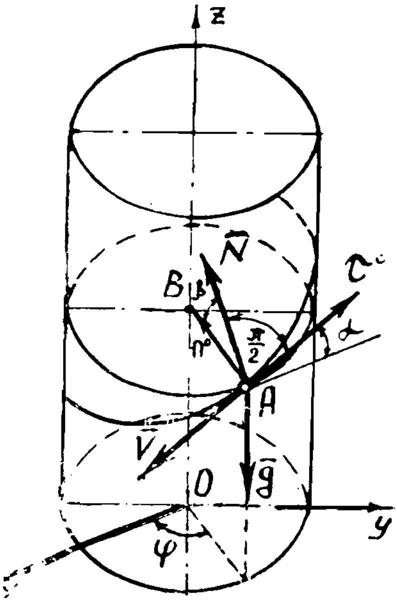
*Այսպիսով, ստացվում է, որ կարիք չկա սպասելու, որպեսզի կետը շարժվի շղթայագծով, առանց այդ էլ նրա հետագիծը շղթայագիծ է։*

Պատ. $N=0$, $x=(t+1)$ մ, $y=\frac{1}{2}\left(e^{t+1}+e^{-(t+1)}\right)$։

**Խնդիր 93 (824)**։ A *նյութական կետը ծանրության ուժի ազդեցության տակ շարժվում է ոչ ողորկ պտտական մակերևույթով, որի* Oz *առանցքը ուղղաձիգ է. մակերևույթը տրված է* $z=a\varphi+f(r)$ *հավասարումով, կետի և մակերևույթի միջև շփման գործակիցը հավասար է* k*-ի։ Գտնել այն պայմանը, որի դեպքում կետի շարժումը տեղի է ունենում* $AB=r_0$ *առանցքից հաստատուն հեռավորության վրա, այսինքն՝ տեղի է ունենում պտուտակագծով, ինչպես նաև գտնել այդ շարժման արագությունը, ենթադրելով, որ* $a=\text{const}$ *(գծ. 90)։*

**Լուծում**։ A *կետը դիտենք որպես ազատ կետ, նրա վրա* կիրառված կապերը փոխարինելով համապատասխան հակազդումներով։ Այդ դեպքում կետի վրա կազդեն հետևյալ ուժերը՝ 1) $m\bar{g}$ ծանրության ուժը, 2) $\bar{F}$ շփման ուժը և 3) $\bar{N}$ նորմալ հակազդումը։ Գրենք այդ կետի շարժման հավասարումը վեկտորական տեսքով՝

$$m\bar{w}=m\bar{g}+\bar{F}+\bar{N}. \tag{1}$$




Գծ. 90

Այստեղ $\bar{F}$-ը ունի պտուտակագծի A կետում տարած շոշափողի ուղղությունը, և նրա թվային արժեքը հավասար է kN-ի, որտեղ N-ը նորմալ հակազդման մեծությունն է։ $\bar{N}$-ը ունի պտուտակային մակերևույթի A կետում տարած նորմալի ուղղությունը։ β-ով նշանակենք պտուտակային մակերևույթի նորմալի և պտուտակագծի գլխավոր նորմալի կազմած անկյունը։ Պրոյեկտելով (1) վեկտորական հավասարումը պտուտակագծի A կետում տարած շոշափողի գլխավոր նորմալի և բինորմալի վրա, կստանանք

$$-m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\alpha+kN$$

$$\frac{mv^2}{\rho}=N\cos\beta \tag{2}$$

$$0=-mg\cos\alpha+N\sin\beta.$$

(2)-ի առաջին հավասարման ձախ կողմում դրված է բացասական նշան, քանի որ կետի $\bar{V}$ արագությունը ունի գծագրում նշված $\tau^{\circ}$-ի հակառակ ուղղությունը։ α-ն պտուտակագծի շոշափողի և xOy հարթության կազմած անկյունն է, ρ-ն՝ պտուտակագծի կորության շառավիղը։

Այժմ որոշենք α և β անկյունները։ Գծագրից երևում է, որ

$$\cos\beta=(N^{\circ}\cdot n^{\circ})\big|_{r=r_0} \tag{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_{r=r_0} = \frac{a}{r_0}, \tag{4}$$

*Այստեղ* $N^\circ$ *և* $n^\circ$*-ն համապատասխանաբար պտուտակային մակերևույթի նորմալի և պտուտակագծի գլխավոր նորմալի միավոր վեկտորներն են։*

$N^\circ$ *և* $n^\circ$ *միավոր վեկտորները որոշելու համար նախ գրենք պտուտակագծի և պտուտակային մակերևույթի հավասարումները գլանային կոորդինատներով՝*

$$\begin{aligned} z &= a\varphi + f(r_0) \\ r &= r_0 \end{aligned} \tag{5}$$

*և*

$$\Phi(\varphi, r, z) = z - a\varphi - f(r) = 0. \tag{6}$$

*Հայտնի է, որ մակերևույթի նորմալի միավոր վեկտորը որոշվում է*

$$N^\circ \Big|_{r=r_0} = \frac{\operatorname{grad} \Phi}{|\operatorname{grad} \Phi|}\Big|_{r=r_0} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} z^\circ + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \varphi^0 + \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} r^0}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2}}\Bigg|_{r=r_0}$$

*բանաձևով։*

*Տեղադրելով* $\Phi$*-ի արժեքը (6)-ից և կատարելով համապատասխան գործողությունները, կստանանք*

$$N^\circ \Big|_{r=r_0} = \frac{z^\circ - \dfrac{a}{r_0}\varphi^\circ - f'(r_0)\, r^\circ}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{a}{r_0}\right)^2 + f'^2(r_0)}}, \tag{7}$$

*Այժմ որոշենք (5) կորի շոշափողի միավոր վեկտորը։ Դիֆերենցիալ երկրաչափությունից ունենք*

$$\tau^\circ = \frac{d\bar{R}}{dS}, \tag{8}$$

*որտեղ* $\bar{R}$*-ը կետի շառավիղ-վեկտորն է կոորդինատական սիստեմի* O *սկզբնակետի նկատմամբ (*$\bar{r}$*-ը* $\bar{R}$*-ի պրոյեկցիան է* xoy *հարթության վրա)։ Եթե նկատի ունենանք, որ*

$$d\bar{R} = z^\circ dz + \varphi^\circ r_0\, d\varphi + r^\circ dr, \quad ds = \sqrt{dz^2 + r_0^2\, d\varphi^2 + dr^2}, \tag{9}$$

*(5)-ի հիման վրա կստանանք*

$$\tau^\circ = \frac{r_0\varphi^\circ + az^\circ}{\sqrt{a^2 + r_0^2}}, \tag{10}$$

*Մյուս կողմից, եթե*

$$\frac{d\tau^\circ}{ds} = \frac{n^\circ}{\rho} \tag{11}$$

*բանաձևում տեղադրենք* ds*-ի և* $d\tau^\circ$*-ի արժեքները (9)-ից և (10)-ից, կունենանք*

$$\frac{n^\circ}{\rho} = -\frac{r_0 r^\circ}{a^2 + r_0^2}, \tag{12}$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$n^\circ = -r^\circ \quad \text{և} \quad \rho = \frac{r_0^2 + a^2}{r_0}, \tag{13}$$

$\cos\beta$*-ն հաշվելու համար (3)-ի մեջ տեղադրենք* $N^\circ$*-ի և* $n^\circ$*-ի արժեքները (7)-ից և (13)-ից՝ կստանանք*

$$\cos\beta = \frac{f'(r_0)}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r_0}\right)^2 + f'^2(r_0)}}: \tag{14}$$

*Որոշենք* $\sin\beta$*-ն, օգտագործելով (4) բանաձևը.*

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(r_0)\cos^2\alpha}}, \tag{15}$$

*Տեղադրենք* $\cos\beta$ *և* $\sin\beta$*-ի արժեքները (14) և (15) բանաձևերից (2)-ի երկրորդ և երրորդ հավասարումների մեջ՝ կստանանք երկու հավասարումների սիստեմ, որից կորոշենք* N*-ի և* $v^2$*-ու արժեքները՝*

$$N = mg\cos\alpha\sqrt{1 + f'^2(r_0)\cos^2\alpha}, \tag{16}$$

$$v^2 = r_0 g f'(r_0). \tag{17}$$

*Տեղադրելով* N*-ի և* $v^2$*-ու արժեքները (16) և (17)-ից (2)-ի առաջին հավասարման մեջ, կստանանք*

$$\sin\alpha = k\cos\alpha\sqrt{1 + f'^2(r_0)\cos^2\alpha}.$$

**Պ ա տ.** *Շարժումը պտուտակագծով հնարավոր է հետևյալ պայմանի դեպքում՝*

$$\operatorname{tg}\alpha - k\sqrt{1 + f'^2(r_0)\cos^2\alpha} = 0, \text{ որտեղ } \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{r_0}։$$

Կետի արագությունը կլինի $v = \sqrt{g r_0 f'(r_0)}$։

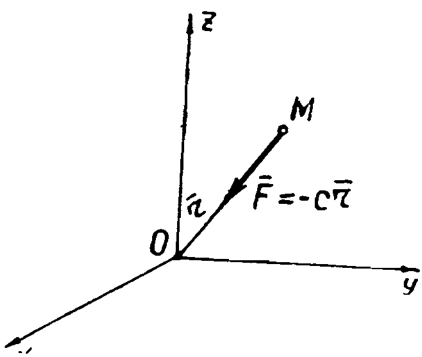
## § 9. ՏԱՏԱՆՈՂԱԿԱՆ ՇԱՐԺՈՒՄ

*Տատանումների տեսությունը կազմում է տեսական մեխանիկայի հիմնական բաժիններից մեկը։ Մեծ է նրա դերը ժամանակակից տեխնիկայում։ Առանց տատանումների ճշգրիտ հաշվարկման հնարավոր չէ կառուցել գերձայնային ինքնաթիռներ, արբանյակներ արձակող հրթիռներ և այլն։*

*Այս պարագրաֆում դիտարկվում են նյութական կետի գծային, ինչպես նաև ոչ գծային փոքր տատանումների պարզագույն խնդիրներ։ Տրվում են ոչ գծային տատանումների վերաբերյալ եղած խնդիրների միայն մոտավոր լուծումները, երբ այդ խնդիրների լուծումը կարելի է բերել գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրմանը։*

### 1. Ազատ տատանումներ

*Դիցուք* $m$ *մասսա ունեցող* $M$ *կետի վրա ազդում է* $\bar{F} = -c\bar{r}$ *կենտրոնական ուժը, որը ուղղված է դեպի անշարժ* $O$ *կենտրոնը և համեմատական է այդ կենտրոնից կետի ունեցած հեռավորությանը (գծ. 91ա)։*

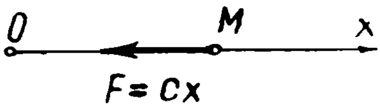



Գծ. 91ա

*Այդպիսի ուժերի թվին են պատկանում առաձգական ուժերը, որոնց հաճախ անվանում են վերականգնող ուժեր։ Սրանք կոչվում են վերականգնող, քանի որ ձգտում են կետին վերադարձնել հավասարակշռության* $O$ *դիրքը, այսինքն՝ վերականգնել հավասարակշռությունը։ Սովորաբար մեխանիկայի խնդիրներում դիտարկվող վերականգնող ուժը փոփոխվում է գծային օրենքով (Հուկի օրենքով)։ Զսպանակի ձգման դեպքում ուժը ուղիղ համե-*

մատական է երկարացմանը՝ $\bar{F} = -c\bar{\Delta}$, որտեղ Δ-ն զսպանակի ծայրի տեղափոխումն է չլարված վիճակից, իսկ c-ն՝ առաձգականության գործակից է (կոշտության գործակից), որի մեծությունը հավասար է այն ուժին, որը անհրաժեշտ է կիրառել զսպանակի վրա, որպեսզի նրա երկարությունը մեծանա մեկ միավորով։

Եթե M կետի սկզբնական արագությունը հավասար է զրոյի կամ ուղղված է OM ուղղով, ապա $\bar{F} = -c\bar{r}$ կենտրոնական ուժի ազդեցության տակ կետը կկատարի ուղղագիծ շարժում։ Այս դեպքում կետի շարժումը կլինի պարզ ներդաշնակ տատանում։



Գծ. 91բ

Եթե ox առանցքը ուղղենք OM ուղղով (գծ. 91 բ), ապա կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$$

կամ (I)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

որտեղ

$$k^2 = \frac{c}{m},$$

(I)-ը կոչվում է ազատ ներդաշնակ տատանումների դիֆերենցիալ հավասարում։ Սա հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի համասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt, \tag{II}$$

որտեղ $c_1$ և $c_2$-ը ինտեգրման հաստատուններն են։ Հաճախ $c_1$ և $c_2$ հաստատուններին-փոխարեն մուծում են $a$ և $\varepsilon$ նոր հաստատուններ, ընդունելով

$$c_1 = a\cos\varepsilon, \quad c_2 = a\sin\varepsilon\ ։$$

Այդ դեպքում (II)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x = a\sin(kt+\varepsilon)\ ։ \tag{III}$$

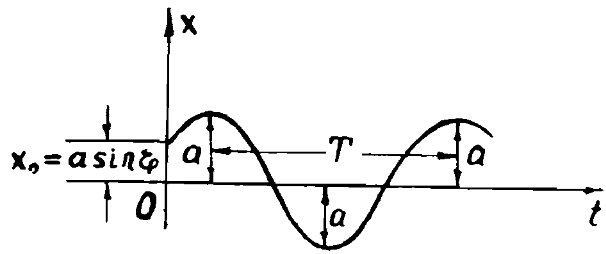
$a$ և $\varepsilon$ հաստատունները (կամ $c_1$ և $c_2$ հաստատունները) որոշվում են տված նախնական պայմաններով։

Եթե կետի շարժումը որոշվում է (III) հավասարումով, ապա ասում են, որ կետը կատարում է պարզ ներդաշնակ տատանումներ։ Գծագիր 92-ում պատկերված է կետի պարզ ներդաշնակ տատանումների գրաֆիկը։

(III) հավասարումից երևում է, որ նյութական կետի ամենամեծ շեղումը հավասարակշռության դիրքից հավասար է $a$-ի։ $a$-ն կոչվում է տատանման ամպլիտուդ։ Սինուսի $kt+\varepsilon$ արգումենտը կոչվում է տատանման փուլ, իսկ $\varepsilon$-ը՝ սկզբնական փուլ։

$k$ մեծությունը կոչվում է տատանումների շրջանային հաճախականություն և որոշում է կետի տատանումների թիվը $2\pi$ վայրկյանում։ $k$-ն որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \tag{IV}$$




Գծ. 92

Տատանումների ամպլիտուդը և սկզբնական փուլը որոշելու համար պետք է տված լինեն նախնական պայմանները (հակառակ դեպքում կետի տատանողական շարժումը լրիվ որոշված չի լինի)։ Դիցուք սկզբնական $t=0$ պահին տված են կետի կոորդինատը և արագությունը, այսինքն՝

$$\text{երբ} \quad t=0 \mid x=x_0, \ \dot{x} = v_0 \ ։ \tag{V}$$

Այդ դեպքում տեղադրելով (V) նախնական պայմանները (III)-ի և նրա ածանցյալի արտահայտության մեջ, կստանանք $a$ և $\varepsilon$ հաստատունների որոշման համար հետևյալ երկու հավասարումները՝

$$x_0=a\sin\varepsilon, \quad v_0=ak\cos\varepsilon ։ \tag{VI}$$

Լուծելով այս հավասարումները, կունենանք

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}},\quad \operatorname{tg}\varepsilon=\frac{kx_0}{v_0},$$

Հետևաբար, կետի շարժման օրենքը կորոշվի հետևյալ հավասարումով՝

$$x=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}}\sin\left(kt+\operatorname{arctg}\frac{kx_0}{v_0}\right), \qquad \text{(VII)}$$

(VII) հավասարությունից հետևում է, որ եթե կետի սկզբնական արագությունը հավասար է զրոյի ($v_0=0$), ապա տատանման ամպլիտուդը հավասար կլինի սկզբնական $x_0$ հեռավորությանը, իսկ $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$։ Այդ դեպքում կետի շարժման օրենքը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x=x_0\cos kt\,.$$

Այն ամենափոքր T ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում կետը վերադառնում է իր նախկին դիրքը նույն արագությամբ, կոչվում է տատանման պարբերություն։ Տատանման պարբերությունը որոշվում է

$$T=\frac{2\pi}{k} \qquad \text{(VIII)}$$

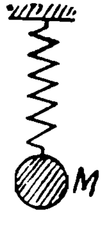
բանաձևով։ Պարբերության հակադարձ

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{k}{2\pi} \qquad \text{(IX)}$$

մեծությունը, որը որոշում է տատանումների թիվը մեկ վայրկյանում, կոչվում է տատանումների հաճախականություն։ (IX) բանաձևից երևում է, որ k մեծությունը տարբերվում է $\nu$-ից $2\pi$ հաստատուն արտադրիչով։ Դրա համար էլ հաճախ k-ն անվանում են տատանումների հաճախականություն։

Անհրաժեշտ է նշել, որ ներդաշնակ տատանումներն ունեն հետևյալ հատկությունները՝ 1) տատանումների ամպլիտուդը և սկզբնական փուլը կախված են նախնական պայմաններից, 2) տատանումների k հաճախականությունը և T պարբերությունը կախված չեն նախնական պայմաններից։ Այստեղից մասնավորապես հետևում է, որ եթե խնդրում պահանջվում է որոշել տատանումների միայն հաճախականությունը (կամ պարբերությունը), ապա անհրաժեշտ է կազմել շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը և բերել այն (I) տեսքի։ Դրանից հետո T պարբերությունը որոշվում է (VIII) բանաձևով, առանց (I) հավասարումը ինտեգրելու։

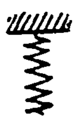
Դիտարկենք m մասսա ունեցող M նյութական կետի տատանումները, երբ M կետը կախված է զսպանակի ստորին ծայրից, իսկ զսպանակի վերին ծայրը ամրացված է անշարժ առաստաղին (գծ. 93)։ M կետը հավասարակշռության դիրքից դեպի ներքև շարժվելիս $\bar{F}$ ուժը ուղղված կլինի դեպի վեր։ Գծագիր 94ա-ում պատկերված է դեֆորմացիայի չենթարկված զսպանակը, երբ նրանից կախված չէ նյութական կետը։ Գծագիր 94բ-ում x առանցքը ուղղված է զսպանակի առանցքի երկարությամբ դեպի ներքև։ O սկզբնակետը տեղավորված է զսպանակից կախված M կետի ստատիկական հավասարակշռության դիրքում։ Այս դիրքում զսպանակի ստորին ծայրը $\bar{P}=m\bar{g}$ ուժի ազդեցության տակ երկարում է



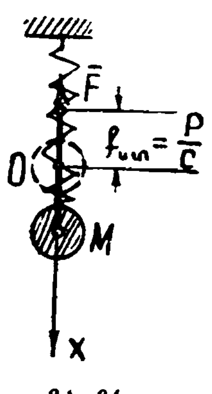

Գծ. 93

$$f_{ստ}=\frac{P}{c} \tag{X}$$

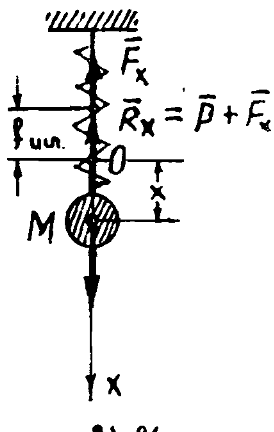
չափով, որտեղ c-ն զսպանակի կոշտության գործակիցն է։



Գծ. 94ա




Գծ. 94բ




Գծ. 94գ

Գծագիր 94գ-ում M նյութական կետը պատկերված է շարժման ժամանակ, երբ այդ կետը O սկզբնակետի նկատմամբ տեղափոխված է x-ով։ Դրա հետևանքով առաձգական $\bar{F}$ ուժի պրոյեկցիան x առանցքի վրա հավասար կլինի

$$F_x = -c\Delta = -c\,(f_{\text{ստ}} + x)\text{։} \qquad \text{(XI)}$$

*Այս դեպքում* M *կետի վրա ազդում են նրա* P *կշիռը և* $F_x$ *առաձգական ուժը՝*

$$R_x = P + F_x = P - c\,(f_{\text{ստ}} + x)\text{։} \qquad \text{(XII)}$$

(X)-*ի հիման վրա* (XII)-*ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$R_x = -cx\text{։} \qquad \text{(XIII)}$$

*Կետի ազատ ներդաշնակ տատանումների վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը։*

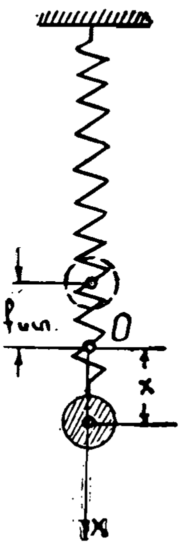
*1) Ընտրել կոորդինատական սիստեմը։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորել կետի ստատիկական հավասարակշռության դիրքում, իսկ* x *առանցքը ուղղել կետի շարժման ուղղությամբ։*

*2) Առանձնացնել կետի վրա ազդող ակտիվ և պասիվ ուժերը։*

*3) Կազմել կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։*

*4) Ինտեգրել դիֆերենցիալ հավասարումը և նախնական պայմաններից որոշել ինտեգրման հաստատունները։*

*5) Տատանումների հաճախականությունը և պարբերությունը որոշելու համար կարիք չկա ինտեգրելու շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Դրա համար բավական է կազմել շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը և որոշել կոորդինատի* $k^2$ *գործակիցը։*




Գծ. 95.

*Ստորև բերվում են ազատ տատանումների վերաբերյալ մի քանի խնդիրների լուծումները։*

**Խնդիր 94։** *Զսպանակը ամրացված է* A *կետում, իսկ նրա մյուս ծայրից կախված է* P=4 կգ *բեռը։ Զսպանակի ստատիկական երկարացումը* $f_{\text{ստ}}=6$ սմ։ *Որոշել բեռի շարժման օրենքը, եթե բեռը սկզբնական պահին եղել է անշարժ և դեֆորմացիայի չենթարկված։ Դիմադրության ուժը արհամարհել (գծ. 95)։*

Լուծում: *Բեռը կատարում է համընթաց շարժում։ Հետևաբար, այն կարելի է ընդունել որպես նյութական կետ։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք բեռի ստատիկական հավասարակշռության դիրքում,* x *առանցքն* ուղղենք ուղղաձիգ դեպի ներքև։ Ժամանակի $t$ պահին ֆիքսենք կետի դիրքը և նրա կոորդինատը նշանակենք $x$։ Բեռի վրա ազդում են 1) նրա $P$ կշիռը և 2) զսպանակի $F_1=c\,|f_{\text{ստ}}+x|$ առաձգական ուժը, որտեղ $c$-ն զսպանակի կոշտությունն է, իսկ $f_{\text{ստ}}$-ը՝ զսպանակի ստատիկական երկարացումը։

Բեռի վրա ազդող ուժերի պրոյեկցիաների գումարը $x$ առանցքի վրա կլինի

$$F_x=-cx\,։$$

Այս դեպքում բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx$$

կամ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0\,,$$

որտեղ

$$k^2=\frac{c}{m},$$

Այս դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$x=a\sin(kt+\alpha), \tag{1}$$

որտեղ $a$-և $\alpha$-ն ինտեգրման հաստատուններն են և որոշվում են նախնական պայմաններից։ Խնդրի նախնական պայմանները կլինեն

$$x\big|_{t=0}=-f_{\text{ստ}}\,,\quad \dot{x}\big|_{t=0}=0\,։$$

Տեղադրելով նախնական պայմանները

$$x=a\sin(kt+\alpha),$$
$$\dot{x}=ak\cos(kt+\alpha)$$

արտահայտությունների մեջ, կստանանք

$$-f_{\text{ստ}}=a\sin\alpha,$$
$$0=a\cos\alpha\,։$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\alpha=\frac{3}{2}\pi,\quad a=f_{\text{ստ}}\,։$$

Տեղադրելով այս արժեքները (1)-ի մեջ, կունենանք

$$x = -6\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t = -6\cos\sqrt{\frac{g}{f_{\text{ст}}}}\,t = -6\cos\sqrt{\frac{981}{6}}\,t =$$

$$= -6\cos 12{,}8\,t\text{:}$$

**Պ ա տ.** $x = -6\cos 12{,}8\,t$։

**Խ ն դ ի ր 95 (825)**։ AB *զսպանակը, որի մի ծայրը ամրացված է A կետում, այնպիսին է, որ 1 սմ երկարացման համար անհրաժեշտ է B կետում ստատիկական բեռնվածության ժամանակ կիրառել 20 գ ուժ։ Մի որևէ պահի դեֆորմացիայի չենթարկված զսպանակի ներքևի B ծայրից կախում են 100 գ կշիռ ունեցող կշռաքարը և բաց են թողնում նրան առանց սկզբնական արագության։ Անտեսելով զսպանակի մասսան, գրել կշռաքարի հետագա շարժման հավասարումը, որոշել նրա տատանման ամպլիտուդը և պարբերությունը, կշռաքարի շարժումը դիտելով նրա ստատիկական հավասարակշռության վիճակից դեպի ներքև տարված առանցքի նկատմամբ (գծ. 96)։*

Գծ. 96

**Լ ո ւ ծ ո ւ մ:** C *կշռաքարը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք կշռաքարի ստատիկական հավասարակշռության* B *դիրքում,* x *առանցքն ուղղենք ուղղաձիգ դեպի ներքև։ Ժամանակի* t *պահին ֆիքսենք կետի դիրքը և նրա կոորդինատը նշանակենք* x։ *Կշռաքարի վրա ազդում են նրա* P *կշիռը և զսպանակի* $F_1 = c\,|f_{\text{ст}} + x|$ *ուժը, որտեղ* c*-ն զսպանակի կոշտությունն է, իսկ* $f_{\text{ст}}$*-ը՝ զսպանակի ստատիկական երկարացումը։ Եթե հաշվի առնենք, որ ստատիկական հավասարակշռության դիրքում* $P = cf_{\text{ст}}$, *ապա կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx\,,$$

*կամ* (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

*որտեղ* $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$։

*(1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$x = A\cos kt + B\sin kt, \tag{2}$$

որտեղ A և B-ն ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։ Նախնական պայմանները կլինեն

$$\text{երբ } t=0 \;\Big|\; x = -f_{\text{ստ}}, \quad \dot{x} = 0\,։ \tag{3}$$

Տեղադրելով այս նախնական պայմանները (2)-ի և նրա

$$\frac{dx}{dt} = -Ak\sin kt + Bk\cos kt$$

ածանցյալի արտահայտության մեջ, կստանանք

$$A = -f_{\text{ստ}}, \quad B = 0\,։$$

Տեղադրելով այս արժեքները (2)-ի մեջ, կունենանք

$$x = -f_{\text{ստ}}\cos kt\,։ \tag{4}$$

Քանի որ զսպանակի B կետում 20 գրամ ուժ կիրառելուց զսպանակը երկարում է 1 սմ-ով, ուստի զսպանակի կոշտության համար կստանանք c=20 գ/սմ։ Հետևաբար, տատանումների հաճախականությունը կլինի

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{20\cdot 980}{100}} = \sqrt{196} = 14\,։ \tag{5}$$

Մյուս կողմից, $P = c f_{\text{ստ}}$ բանաձևից հետևում է, որ

$$f_{\text{ստ}} = \frac{P}{c} = \frac{100}{20} = 5\,։ \tag{6}$$

Տեղադրելով k-ի և $f_{\text{ստ}}$-ի արժեքները (4)-ի մեջ, կստանանք

$$x = -5\cos 14t\,։ \tag{7}$$

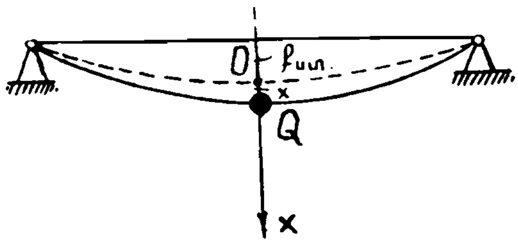
(5) բանաձևի հիման վրա տատանումների պարբերության համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{14} = \frac{\pi}{7} \cong 0{,}45 \text{ վ}\,։$$

(7)-ից հետևում է, որ տատանումների ամպլիտուդը կլինի a=5 սմ։

Պատ. $x = -5\cos 14t$, $a = 5$ սմ, $T = 0{,}45$ վ։

**Խնդիր 96 (828)**։ Q բեռը, ընկնելով h=1 մ բարձրությունից առանց սկզբնական արագության, կպչում է հորիզոնական առաձգական հեծանի մեջտեղին։ Հեծանի ծայրերը ամրացված են։ Գրել հեծանի վրա բեռի հետագա շարժման հավասարումը, շարժումը դիտելով հեծանի վրա բեռի ստատիկական հավասարակշռության դիրքից ուղղաձիգ դեպի ներքև տարված առանցքի նկատմամբ, եթե հեծանի մեջտեղում ստատիկական ճկվածքը նշված բեռնվածության դեպքում հավասար է 0,5 սմ։ Հեծանի մասսան անտեսել։




Գծ. 97

**Լուծում:** Q բեռի ուղղաձիգ հետագիծը ընդունենք որպես OX առանցք և բեռի X տեղափոխությունը հաշվենք հեծանի վրա բեռի ստատիկական հավասարակշռության դիրքից (գծ. 97)։ Բեռըն ընդունենք որպես նյութական կետ։

Q բեռի վրա ազդում են երկու ուժեր՝ նրա $\bar{Q}$ կշիռը և հեծանի $\bar{F}$ առաձգական ուժը, որոնց պրոյեկցիաների գումարը OX առանցքի վրա հավասար է CX-ի և ուղղված է OX-ի բացասական ուղղությամբ։ Հետևաբար, Q բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$\frac{Q}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -cx, \tag{1}$$

Քանի որ $c = \frac{Q}{f_{ստ}}$, (1)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{f_{ստ}}\cdot x = 0, \tag{2}$$

(2) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x = A\cos\sqrt{\frac{g}{f_{ստ}}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{g}{f_{ստ}}}\,t, \tag{3}$$

որտեղ A և B-ն ինտեգրման հաստատուններն են։ Դրանց որոշման համար ունենք հետևյալ նախնական պայմանները՝

երբ $t=0 \left| \begin{array}{l} x=x_0=-f_{ст}=-0{,}5 \text{ սմ} \\ \dot{x}=v_0=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 981\cdot 100}=443 \text{ սմ/վրկ} \end{array}\right.$ (4)

*Տեղադրելով այս (4) նախնական պայմանները x-ի և նրա $\frac{dx}{dt}$ ածանցյալի արտահայտությունների մեջ, կստանանք երկու հավասարումներ, որոնցից կորոշենք A և B հաստատունների արժեքները։ A-ի և B-ի արժեքները կլինեն*

$$A=-0{,}5, \quad B=10. \tag{5}$$

*(5)-ի հիման վրա (3)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$x=-0{,}5\cos\sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}\,t+10\sin\sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}\,t. \tag{6}$$

*Խնդրի պայմանների համաձայն ունենք*

$$\sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}=\sqrt{\frac{981}{0{,}5}}=44{,}3 \ ^1/\text{վրկ}.$$

*Մնում է (7)-ը տեղադրել (6)-ի մեջ և ստանալ խնդրի պատասխանը։*

**Պատ.** $x=(-0{,}5\cos 43{,}3\,t+10\sin 43{,}3\,t)$ սմ։

2.6 **Խնդիր 97 (830)**։ *Որոշել առաձգական գետնի վրա դրված մեքենայի հիմքի սեփական տատանումների պարբերությունը, եթե մեքենայի կշիռը հիմքի հետ միասին $Q=9$ տ, հիմքի հատակի մակերեսը $s=15$ մ², գետնի կոշտության գործակիցը $c=\lambda s$, որտեղ $\lambda=3$ կԳ/սմ³, այսպես կոչված, գետնի տեսակարար կոշտությունն է։*

**Լուծում**։ *Մեքենան ընդունենք որպես նյութական կետ։ Տանենք կոորդինատական x առանցքը՝ ուղղված ուղղաձիգ դեպի ներքև։*

*Նյութական կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx$$

*կամ*

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0,$$

*որտեղ*

$$k=\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

*Տատանումների պարբերության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}=2\pi\sqrt{\frac{Q}{\lambda sg}}=\sqrt{\frac{9000}{15\,.\,3000\,.\,980}}\,\pi=$$

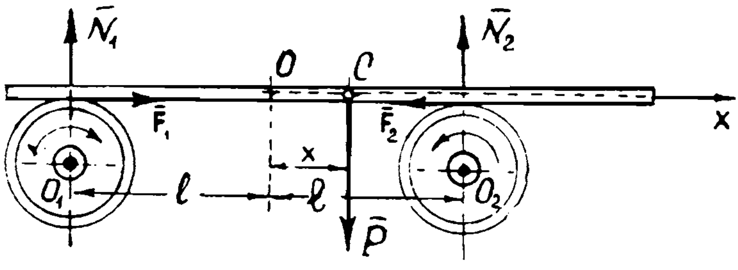
$$=\frac{2\pi}{70}=0{,}09 \text{ վրկ։}$$

Պ ա տ. $T=0{,}09$ վրկ։

**Խ ն դ ի ր 98 (837)։** *Գծագրում ցույց տրված երկու հակադիր ուղղություններով պտտվող միևնույն շառավղով երկու գլանային փոկանիվների վրա ազատ դրված է համասեռ ձողը. փոկանիվների $O_1$ և $O_2$ կենտրոնները գտնվում են $O_1O_2$ հորիզոնական ուղղի վրա, $O_1O_2=2l$։ Ձողը շարժման մեջ է դրվում շփման ուժերով, որոնք առաջանում են նրա և փոկանիվների շոշափման կետերում։ Այդ ուժերը համեմատական են փոկանիվների վրա ձողի ճնշմանը, ընդ որում համեմատականության գործակիցը (շփման գործակիցը) հավասար է* f։

*1) Որոշել ձողի շարժումը, երբ նրան դուրս ենք բերում սիմետրիկ դիրքից* $x_0$*-ով,* $v_0=0$ *դեպքում։*

*2) Գտնել* f *շփման գործակիցը, իմանալով, որ* $l=25$ սմ *երկարություն ունեցող ձողի տատանման* T *պարբերությունը հավասար է 2* վրկ *(գծ. 98)։*




*Գծ. 98*

Լ ո ւ ծ ո ւ մ: *Ձողի ծանրության կենտրոնը (*C *կետը) շարժվում է ուղիղ գծով, որը և ընդունենք որպես* x *առանցք, կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք* O *կետում (գծ. 98)։ Ձողի ծանրության կենտրոնի կոորդինատը ժամանակի կամավոր* t *պահին նշանակենք* x։

*Ձողի վրա ազդող ակտիվ և պասսիվ ուժերը կլինեն՝ 1) ձողի* $\bar{P}$ *կշիռը, 2) փոկանիվների* $\bar{N}_1$ *և* $\bar{N}_2$ *նորմալ հակազդումները և 3) փոկանիվների* $\bar{F}_1$*,* $\bar{F}_2$ *շոշափող հակազդումները (շփման ուժե-*

րը)։ Շփման ուժերի մեծությունները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$F_1 = fN_1, \quad F_2 = fN_2, \tag{1}$$

որտեղ f-ը շփման գործակիցն է։

$N_1$ և $N_2$ նորմալ հակազդումները որոշելու համար կազմենք ձողի հավասարակշռության երկու հավասարումները։ Դրա համար բոլոր ուժերի պրոյեկցիաների գումարը x առանցքին ուղղահայաց ուղղության վրա և բոլոր ուժերի մոմենտների գումարը C կետի նկատմամբ հավասարեցնենք զրոյի։ Կստանանք

$$\begin{gathered} N_1+N_2-P=0, \\ -N_1(l+x)+N_2(l-x)=0 \end{gathered} \tag{2}$$

Լուծելով (2) հավասարումների սիստեմը, կունենանք

$$N_1 = P \cdot \frac{l-x}{2l}, \quad N_2=P \cdot \frac{l+x}{2l} \tag{3}$$

Եթե $N_1$-ի և $N_2$-ի արժեքները (3)-ից տեղադրենք (1)-ի մեջ և լուծենք ստացված հավասարումները, կստանանք

$$F_1 = fP \cdot \frac{l-x}{2l}, \quad F_2 =fP \cdot \frac{l+x}{2l} \tag{4}$$

Ձողի վրա ազդող բոլոր ուժերի պրոյեկցիաների գումարը x առանցքի վրա կլինի

$$F_x = fP \cdot \frac{l-x}{2l} - fP \cdot \frac{l+x}{2l}=-fP \cdot \frac{x}{l} \tag{5}$$

(5)-ի հիման վրա ձողի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -fP \cdot \frac{x}{l}$$

կամ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{fg}{l}x=0 \tag{6}$$

(6) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$x= A\cos\sqrt{\frac{fg}{l}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{fg}{l}}\,t, \tag{7}$$

որտեղ A և B-ն ինտեգրման հաստատուններն են։

Եթե x-ի և նրա $\frac{dx}{dt}$ ածանցյալի մեջ տեղադրենք

$$x\,|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}\,|_{t=0} = 0$$

նախնական պայմանները և լուծենք ստացված երկու հավասարումները, կստանանք

$$A = x_0, \quad B = 0։ \tag{8}$$

(8)-ի հիման վրա (7)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{fg}{l}}\, t\,։$$

Ջողի տատանումների պարբերության համար ունենք

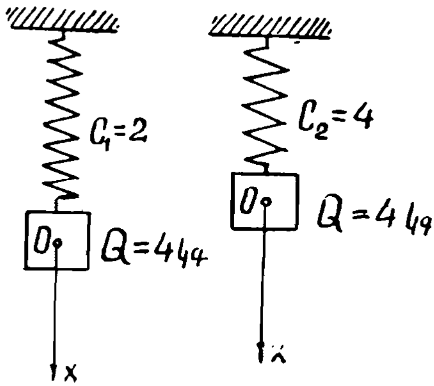
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{fg}},$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$f = \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{l}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 25}{981 \cdot 2^2} = 0{,}25։$$

**Պատ.** $x = x_0 \cos \sqrt{\frac{fg}{l}}\, t, \quad f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = 0{,}25։$

**Խնդիր 99 (32.15)։** *4 կԳ կշիռ ունեցող բեռը սկզբում կախված է $c_1 = 2$ կԳ/սմ կոշտություն ունեցող զսպանակից, իսկ այնուհետև՝ $c_2 = 4$ կԳ/սմ կոշտություն ունեցող զսպանակից (գծ. 99)։ Որոշել բեռի տատանումների հաճախականությունների հարաբերությունը և պարբերությունների հարաբերությունը։*




Գծ. 99

**Լուծում։** Բեռն ընդունենք որպես նյութական կետ։ Նախ դիտարկենք $c_1$ կոշտություն ունեցող զսպանակից կախված բեռի տատանումները։ Տանենք x առանցքն այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծ. 99-ում։

Գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Այն կլինի

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c_1 x$$

կամ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k_1^2 x = 0, \tag{1}$$

որտեղ

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} = \sqrt{\frac{gc_1}{P}}, \tag{2}$$

(1)-ից երևում է, որ բեռը կատարում է պարզ ներդաշնակ տատանումներ, որի պարբերությունը (VIII) բանաձևի հիման վրա կլինի

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{gc_1}}, \tag{3}$$

Նույն ձևով, դիտարկելով բեռի տատանումները, երբ բեռը կախված է $c_2$ կոշտություն ունեցող զսպանակից, կստանանք բեռի տատանումների հաճախականության և պարբերության համար հետևյալ արտահայտությունները՝

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}} = \sqrt{\frac{gc_2}{P}}, \tag{4}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{k_2} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{gc_2}}, \tag{5}$$

(2)—(5) բանաձևերից հետևում է, որ

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = 0{,}706\ ,$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = 1{,}41,$$

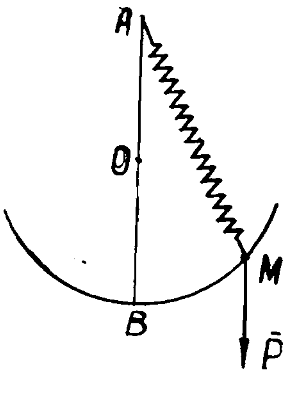
Պ ա տ. $\frac{k_1}{k_2} = 0{,}706, \quad \frac{T_1}{T_2} = 1{,}41,$

**Խ ն դ ի ր 100 (840)**։ A անշարժ կետում զսպանակից կախված M բեռը կատարում է փոքր տատանումներ ուղղաձիգ հարթության մեջ, սահելով AB = $l$ տրամագիծ ունեցող շրջանային աղեղով առանց շփման։ Զսպանակի բնական երկարությունն է a, իսկ կոշտությունն այնպիսին է, որ M բեռի կշռին հավասար ուժի ազդեցության դեպքում նա ստանում է b երկարացում։ Որոշել տատանման T պարբերությունն այն դեպքում, երբ $l$=a + b։

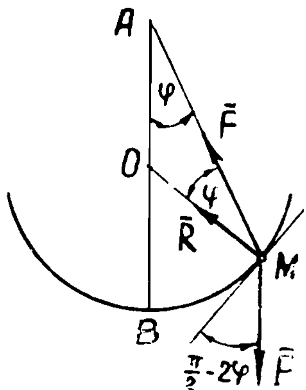
Զսպանակի մասսան անտեսում ենք և ընդունում, որ տատանման ժամանակ այն մնում է ձգված (գծ. 100)։

Լուծում: Դիցուք զսպանակի տատանման ընթացքը որոշվում է $\varphi$ անկյունով (գծ. 101)։ Որոշենք $\varphi$ անկյունը որպես t ժամանակի ֆունկցիա։ Այդ նպատակի համար նախ հաշվենք զսպանակի երկարացումը։ Այն կլինի

$$d=(a+b)\cos\varphi-a=b\cos\varphi-2a\sin^2\frac{\varphi}{2}\text{։} \qquad (1)$$




Գծ. 100




Գծ. 101

Առաձգական ուժը ուղղված է MA-ով (գծ. 101)։ Նրա մեծության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$F=cd=c\left(b\cos\varphi-2a\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\text{։} \qquad (2)$$

Բեռը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Նրա վրա ազդում է $\bar{P}$ կշիռը և (2) բանաձևով որոշվող $\bar{F}$ առաձգական ուժը։

Գրենք M կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը՝ պրոյեկտված M կետի հետագծի շոշափողի ուղղության վրա։ Այն կլինի

$$m\frac{dv}{dt}=F\sin\varphi-P\sin 2\varphi\text{։} \qquad (3)$$

Եթե F-ի արժեքը (2)-ից տեղադրենք (3)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ $v=l\frac{d\varphi}{dt}$, ապա կստանանք

$$\frac{P}{g} l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{cb}{2}\sin 2\varphi - 2ac\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi - P\sin 2\varphi\text{։} \quad (4)$$

*Հավասարակշռության դիրքում* $P=cb$, *որի հետևանքով (4)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{l}{g}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{1}{2}\sin 2\varphi - 2\cdot\frac{a}{b}\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\text{։} \quad (5)$$

*Քանի որ բեռը կատարում է փոքր տատանումներ, ուստի* $\varphi$ *անկյունը կլինի փոքր, որի հետևանքով կարող ենք ընդունել, որ* $\sin\varphi \approx \varphi$։ *Այդ դեպքում (5)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0, \quad (6)$$

*որտեղ*

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}\text{։} \quad (7)$$

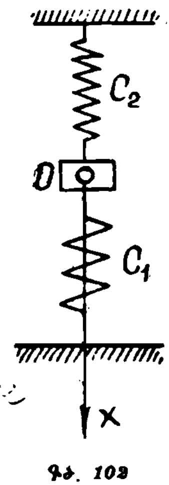
*(6) հավասարումը ստանալիս* $\varphi^3$ *պարունակող արտահայտությունը* $\varphi$*-ի նկատմամբ արհամարհված է։*

*(6)-ից երևում է, որ* M *կետը կատարում է պարզ ներդաշնակ տատանումներ, որի պարբերությունը կլինի*

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\text{։}$$

Պատ. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$։

**Խնդիր 101 (32.27)**։ $c_1$ *և* $c_2$ *կոշտության գործակիցներ ունեցող զսպանակների միջև սեղմված է* Q *կշիռ ունեցող բեռը (գծ. 102), որը կատարում է ազատ տատանումներ։ Որոշել բեռի շարժման հավասարումը, եթե նրան հավասարակշռության վիճակում հաղորդված է դեպի ներքև ուղղված* $v_0$ *արագություն։*



*Գծ. 102*

Լուծում։ *Տանենք* OX *առանցքն այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագիր 102-ում։ Եզրային պայմանների համաձայն ունենք*

$$\text{երբ } t=0 \,/\, x=0, \quad \dot{x}=v_0\text{։} \quad (1)$$

*Ակնհայտ է, որ բեռը կատարում է տատանողական շարժում*

$$F_1 = -c_1 x \quad (2)$$

$$F_2 = -c_2x$$

առաձգական ուժերի գումարի ազդեցության տակ։

Գրենք բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Այն կլինի

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c_1x - c_2x$$

կամ (3)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

որտեղ

$$k = \sqrt{\frac{c_1+c_2}{m}}, \tag{4}$$

(3) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը (III)-ի համաձայն կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$x = a\sin(kt+\varepsilon), \tag{5}$$

որտեղ a և ε-ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են (1) նախնական պայմանների օգնությամբ։ Եթե (5)-ի և նրա $\frac{dx}{dt}$ ածանցյալի մեջ տեղադրենք (1) նախնական պայմանները, ապա կստանանք երկու հավասարումներ, որոնցից կարող ենք որոշել a և ε անհայտները։ a և ε-ի համար ստացած արժեքները տեղադրելով (5)-ի մեջ, կստանանք բեռի շարժման հավասարումը։

Պատ. $x = v_0\sqrt{\frac{Q}{(c_1+c_2)g}}\sin\left[\sqrt{\frac{(c_1+c_2)}{Q}g}\cdot t\right]$։

**Խնդիր 102 (32.31)**։ m մասսա ունեցող A մարմինը կարող է տեղափոխվել հորիզոնական ուղղով։ Մարմնին ամրացված է c կոշտություն ունեցող զսպանակ։ Զսպանակի մյուս ծայրը ամրացված է B անշարժ կետին։ $\alpha = \alpha_0$-ի դեպքում զսպանակը դեֆորմացիայի չի ենթարկված։ Որոշել մարմնի փոքր տատանումների հաճախականությունը և պարբերությունը (գծ. 103ա)։

Լուծում։ Դիցուք մարմինը $A_0$ դիրքից տեղափոխվել է A դիրքը։ Որոշենք $\overline{A_0A}$-ն՝ կախված α անկյունից։ $\Delta A_0BC$ և $\Delta ABC$-ից (գծ. 103բ) կարող ենք գրել, որ

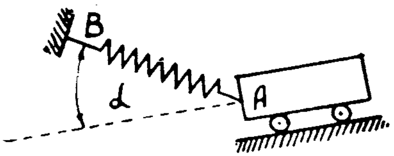
$$AA_0 = h(\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha_0)։ \tag{1}$$

Զսպանակի ձգվածության չափը կլինի

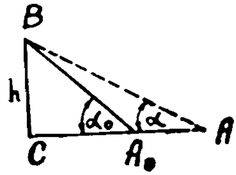
$$AB - A_0B = h\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha_0}\right)\text{։} \tag{2}$$

*Քանի որ զսպանակի ձգվածության չափը շատ փոքր է, ուստի զսպանակի առաձգականության ուժը կարող ենք դիտել որպես այդ ձգվածության չափի գծային ֆունկցիա, այսինքն՝*

$$F = c\,(AB - A_0B) = ch\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha_0}\right)\text{։} \tag{3}$$




*Գծ. 103ա*




*Գծ. 103բ*

*Այս* $\bar{F}$ *ուժը ուղղված է* AB*-ով, բայց շարժումը կատարվում է* AC *ուղղով։ Դրա հետևանքով անհրաժեշտ է* $\bar{F}$ *ուժը պրոյեկտել* AC *ուղղության վրա։ Եթե* A *մարմինը ընդունենք որպես նյութական կետ և գրենք նրա շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը, կստանանք*

$$m\frac{d^2(A_0A)}{dt^2} = -cF\cdot\cos\alpha\text{։} \tag{4}$$

*Տեղադրելով* $A_0A$*-ի և* F*-ի արժեքները (1)-ից և (3)-ից (4)-ի մեջ, կունենանք*

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha_0) = -c\left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha_0}\right)\text{։} \tag{5}$$

*Այժմ (5) հավասարման մեջ կատարենք*

$$\alpha = \alpha_0 - \varphi \tag{6}$$

*տեղադրում, որտեղ* $\varphi$*-ն փոքր անկյուն է։*

*(6)-ի հիման վրա ձևափոխենք հետևյալ արտահայտությունները՝*

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha_0 = \operatorname{ctg}(\alpha_0 - \varphi) - \operatorname{ctg}\alpha_0 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha_0\operatorname{ctg}\varphi + 1}{\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\alpha_0} - \operatorname{ctg}\alpha_0 =$$

$$\frac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha_0}{\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\alpha_0} = \frac{1}{\sin^2\alpha_0(\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\alpha_0)}, \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha_0}=\operatorname{ctg}(\alpha_0-\varphi)-\frac{\cos(\alpha_0-\varphi)}{\sin\alpha_0}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha_0\operatorname{ctg}\varphi+1}{\operatorname{ctg}\varphi-\operatorname{ctg}\alpha_0}-$$
$$-\operatorname{ctg}\alpha_0\cos\varphi-\sin\varphi\text{։}$$

*$\varphi$ անկյան փոքր լինելու հետևանքով կարող ենք ընդունել, որ*

$$\sin\varphi\approx\varphi,\quad \cos\varphi\approx 1,\quad \operatorname{ctg}\varphi=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\approx\frac{1}{\varphi}\text{։}$$

*Սրա հիման վրա (7)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha_0=\frac{1}{\sin^2\alpha_0\left(\frac{1}{\varphi}-\operatorname{ctg}\alpha_0\right)}=\frac{\varphi}{\sin^2\alpha_0(1-\varphi\operatorname{ctg}\alpha_0)}=$$
$$=\frac{\varphi}{\sin^2\alpha_0},\qquad (8)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha_0}=\frac{\frac{1}{\varphi}\operatorname{ctg}\alpha_0+1}{\frac{1}{\varphi}-\operatorname{ctg}\alpha_0}-\operatorname{ctg}\alpha_0-\varphi=\frac{\operatorname{ctg}\alpha_0+\varphi}{1-\varphi\operatorname{ctg}\alpha_0}-$$
$$-\operatorname{ctg}\alpha_0-\varphi=\frac{\operatorname{ctg}\alpha_0+\varphi-\operatorname{ctg}\alpha_0-\varphi+\varphi\operatorname{ctg}^2\alpha_0+\varphi^2\operatorname{ctg}\alpha_0}{1-\varphi\operatorname{ctg}\alpha_0}=$$
$$=\varphi\operatorname{ctg}^2\alpha_0\text{։}$$

*Այս արդյունքը կարելի է ստանալ, եթե*

$$\operatorname{ctg}(\alpha_0-\varphi)-\operatorname{ctg}\alpha_0 \quad \text{և} \quad \operatorname{ctg}(\alpha_0-\varphi)-\frac{\cos(\alpha_0-\varphi)}{\sin\alpha_0}$$

*արտահայտությունները վերածենք շարքի $\varphi=0$ կետի շրջակայքում և վերցնենք $\varphi$-ի նկատմամբ միայն առաջին կարգի անդամները։*

*Տեղադրելով (8)-ը (5)-ի մեջ, կստանանք*

$$\frac{m}{\sin^2\alpha_0}\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-c\varphi\operatorname{ctg}^2\alpha_0$$

*կամ* (9)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k^2\varphi=0,$$

*որտեղ*

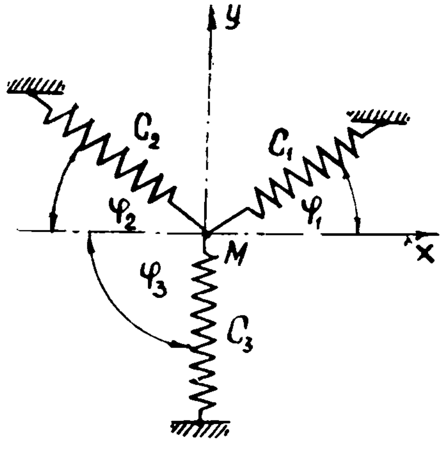
$$k=\sqrt{\frac{c}{m}}\cos\alpha_0\text{,}\qquad (10)$$

Հետևաբար, տատանումների պարբերությունը կլինի

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}\ \frac{1}{\cos\alpha_0},$$

Պատ. $k=\sqrt{\frac{c}{m}}\cos\alpha_0,\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}\ \frac{1}{\cos\alpha_0},$

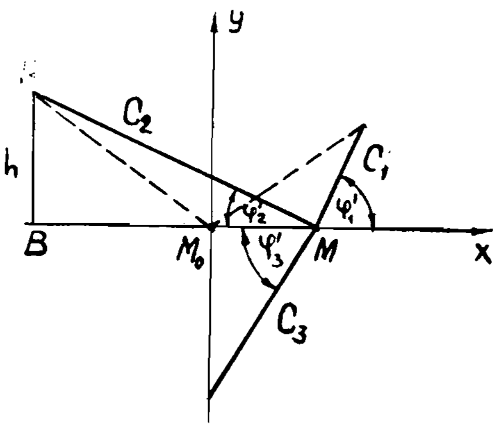
**Խնդիր 103 (32.33)**։ *Որոշել գծագրում ցույց տրված երեք զսպանակներին համարժեք զսպանակի կոշտությունը, երբ M կետը կատարում է տատանողական շարժում x առանցքի երկարությամբ դրված բացարձակ հարթ ուղղորդներով։ Լուծել այս նույն խնդիրը, երբ ուղղորդները դրված են y առանցքի երկարությամբ (գծ. 104)։ Սկզբնական պահին զսպանակները լարված չեն, և M կետը գտնվում է հավասարակշռության մեջ։*



Գծ. 104

Լուծում։ *Դիցուք կետը $M_0$ դիրքից տեղափոխվել է M դիրքը (գծ. 105), որի հետևանքով $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ անկյունները ստացել են համապատասխանաբար $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ աճեր, այսինքն՝*

$$\varphi'_1=\varphi_1+\psi_1,\quad \varphi'_2=\varphi_2+\psi_2,\quad \varphi'_3=\varphi_3+\psi_3, \tag{1}$$



Գծ. 105

*Կետը M դիրքը տեղափոխվելու դեպքում համարժեք զսպանակում կառաջանա* $cx$ *ճիգ, որտեղ c-ն նրա կոշտությունն է, իսկ* $x=MM_0$։

*Այժմ որոշենք* $c_1$ *կոշտության զսպանակի երկարացման մեծությունը՝ արտահայտված x-ի միջոցով։* $ABM_0$ *և* $ABM$ *եռանկյուններից ունենք*

$$M_0M = x = h \operatorname{ctg} \varphi - h \operatorname{ctg}(\varphi_1 + \psi_1), \tag{2}$$

$$AM - AM_0 = h\left[\frac{1}{\sin \varphi_1} - \frac{1}{\sin(\varphi_1 + \psi_1)}\right],$$

*Այժմ անհրաժեշտ է ձևափոխել* $M_0M$ *և* $AM - AM_0$*-ի արտահայտությունները։ Դրա համար նախ ձևափոխենք (2)-ի մեջ մտնող արտահայտությունները։ Կստանանք*

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 - \operatorname{ctg}(\varphi_1+\psi_1) = \operatorname{ctg}\varphi_1 - \frac{\operatorname{ctg}\varphi_1 \operatorname{ctg}\psi_1 - 1}{\operatorname{ctg}\varphi_1 + \operatorname{ctg}\psi_1} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\varphi_1(\operatorname{ctg}\varphi_1 + \operatorname{ctg}\psi_1)}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sin\varphi_1} - \frac{1}{\sin(\varphi_1+\psi_1)} = \frac{1}{\sin\varphi_1} - \frac{1}{\sin\varphi_1\cos\psi_1 + \cos\varphi_1\sin\psi_1} =$$

$$= \frac{\cos\psi_1 + \operatorname{ctg}\varphi_1 \sin\psi_1 - 1}{\sin\varphi_1\cos\psi_1 + \cos\varphi_1\sin\psi_1},$$

$\psi_1$ *անկյան փոքր լինելու հետևանքով կարող ենք ընդունել, որ*

$$\sin\psi_1 \approx \psi_1, \quad \cos\psi_1 \approx 1, \ \operatorname{ctg}\psi_1 \approx \frac{1}{\psi_1},$$

*Սրա հիման վրա (3)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 - \operatorname{ctg}(\varphi_1+\psi_1) = \frac{1}{\sin^2\varphi_1\left(\operatorname{ctg}\varphi_1 + \frac{1}{\psi_1}\right)} = \frac{\psi_1}{\sin^2\varphi_1}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sin\varphi_1} - \frac{1}{\sin(\varphi_1+\psi_1)} = \frac{1+\psi_1\operatorname{ctg}\varphi_1 - 1}{\sin\varphi_1 + \psi_1\cos\varphi_1} = \frac{\cos\varphi_1}{\sin^2\varphi_1}\cdot\psi_1 :$$

*Այս արդյունքը կարելի է ստանալ, եթե*

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 - \operatorname{ctg}(\varphi_1+\psi_1) \text{ և } \frac{1}{\sin\varphi_1} - \frac{1}{\sin(\varphi_1+\psi_1)}$$

*արտահայտությունները վերածենք շարքի* $\psi_1 = 0$ *կետի շրջակայքում և վերցնենք* $\psi_1$*-ի նկատմամբ միայն առաջին կարգի անդամները։*

*Տեղադրելով (4)-ը (2)-ի մեջ, կստանանք*

$$x = \frac{h}{\sin^2\varphi_1}\psi_1, \tag{5}$$

$$AM - AM_0 = h\frac{\cos\varphi_1}{\sin^2\varphi_1}\psi_1 ։$$

*(5)-ից հետևում է, որ* $c_1$ *կոշտություն ունեցող զսպանակի երկարացումը, արտահայտված* $x$*-ի միջոցով, կլինի*

$$l_1 = AM - AM_0 = x\cos\varphi_1 ։ \qquad (6)$$

*Նույն ձևով երկրորդ և երրորդ զսպանակների երկարացումների համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունները՝*

$$l_2 = x\cos\varphi_2, \quad l_3 = x\cos\varphi_3 ։ \qquad (7)$$

*Քանի որ զսպանակները առաձգական են, ապա նրանց մեջ առաջացած ճիգերը Հուկի օրենքի համաձայն կլինեն*

$$\begin{aligned} F_1 &= c_1 x\cos\varphi_1, \\ F_2 &= c_2 x\cos\varphi_2, \\ F_3 &= c_3 x\cos\varphi_3 ։ \end{aligned} \qquad (8)$$

*Համարժեք զսպանակի* $cx$ *ճիգը որոշելու համար պետք է* $F_1$, $F_2$, $F_3$ *ուժերը պրոյեկտել* $x$ *առանցքի վրա և վերցնել դրանց գումարը։ Կստացվի*

$$\begin{aligned} cx = c_1 x\cos\varphi_1 \,.\, \cos(\varphi_1+\psi_1) + c_2 x\cos\varphi_2\cos(\varphi_2+\psi_2) + \\ + c_3 x\cos\varphi_3\cos(\varphi_3+\psi_3) ։ \end{aligned} \qquad (9)$$

*Քանի որ* $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ *անկյունները* $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$*-ի նկատմամբ փոքր են, ուստի կարող ենք գրել, որ*

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1+\psi_1) = \cos\varphi_1\cos\psi_1 - \sin\varphi_1\sin\psi_1 = \cos\varphi_1 - \psi_1\sin\varphi_1 = \\ = \cos\varphi_1, \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\cos(\varphi_2+\psi_2) = \cos\varphi_2,$$

$$\cos(\varphi_3+\psi_3) = \cos\varphi_3 ։$$

*Եթե (9)-ը բաժանենք* $x$*-ի վրա և միաժամանակ նկատի ունենանք (10)-ը, կստանանք*

$$c = c_1\cos^2\varphi_1 + c_2\cos^2\varphi_2 + c_3\cos^2\varphi_3 ։$$

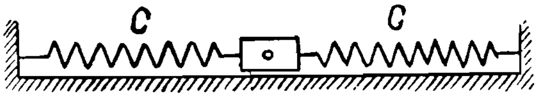
*Նույն ձևով կարելի է ստանալ համարժեք զսպանակի կոշտությունը, երբ ուղղորդները դրված են* $y$ *առանցքի երկարությամբ։*

**Պ ա տ.** $c_x = c_1\cos^2\varphi_1 + c_2\cos^2\varphi_2 + c_3\cos^2\varphi_3,$

$c_y = c_1\sin^2\varphi_1 + c_2\sin^2\varphi_2 + c_3 ։$

**Խնդիր 104 (32.35)**։ *Բացարձակ ողորկ հորիզոնական հարթության վրա գտնվող 10 կԳ կշիռ ունեցող ծանրոցը սեղմըված է երկու միատեսակ զսպանակների միջև, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի* c=2 կԳ/սմ *կոշտություն։ Ժամանակի որևէ պահին ծանրոցը շեղվել է հավասարակշռության դիրքից դեպի աջ 4* սմ-*ով և բաց է թողնվել առանց սկզբնական արագության։ Գտնել շարժման հավասարումը, տատանումների պարբերությունը և ծանրոցի ամենամեծ արագությունը (գծ. 106)։*

Լուծում: *Ծանրոցը ընդունենք որպես նյութական կետ։*




*Գծ. 106*

OX *առանցքը ուղղենք հորիզոնական ուղղությամբ դեպի աջ,* O *սկզբնակետը տեղավորենք ծանրոցի ստատիկական հավասարակշռության դիրքում։ Ծանրոցը կշարժվի երկու զսպանակների առաձգական ուժերի ազդեցության տակ։ Եթե ժամանակի կամայական* t *պահին ծանրոցը հավասարակշռության դիրքից շեղված է* x-*ով, ապա զսպանակներից յուրաքանչյուրում առաջացած առաձգական ուժը մեծությամբ հավասար կլինի* cx-*ի, և այդ ուժերը ուղղված կլինեն* x *շեղման հակառակ ուղղությամբ։ Դրա հիման վրա ծանրոցի (կետի) շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2cx$$

*կամ* (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

*որտեղ*

$$k^2 = \frac{2gc}{P}, \qquad (2)$$

*(2) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$x = a \sin(kt + \varepsilon), \qquad (3)$$

*որտեղ* a *և* ε *ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։ Նախնական պայմանները կլինեն*

$$\text{երբ } t=0 \mid x=4 \text{ սմ}, \quad \dot{x}=0։ \tag{4}$$

*Եթե (3)-ի և* $\frac{dx}{dt}$ *ածանցյալի մեջ տեղադրենք (4) նախնական պայմանները, ստացված երկու հավասարումներից որոշենք a և ε անհայտները և դրանց արժեքները տեղադրենք (3)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման օրենքը՝*

$$x=4\cos 19{,}8\,t։ \tag{5}$$

(VIII) *բանաձևի համաձայն տատանման պարբերությունը կլինի*

$$T=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{19{,}8}=0{,}317 \text{ վրկ}։$$

*(5)-ը ածանցելով, կստանանք*

$$\frac{dx}{dt}=79{,}2 \sin 19{,}8\,t։$$

*Այստեղից էլ հետևում է, որ*

$$\dot{x}_{max}=72{,}2 \text{ սմ/վրկ}։$$

Պատ. *1)* $x=4\cos 19{,}8t$ սմ, *2)* $T=0{,}317$ վրկ,
*3)* $\dot{x}_{max}=79{,}2$ սմ/վրկ։

**Խնդիր 105։** P *կշիռ ունեցող նյութական կետը կախված է դեֆորմացիայի չենթարկված զսպանակի ծայրից։ Զսպանակի կոշտությունը հավասար է* c Գ/սմ-*ի։ Հավասարակշռության դիրքից հանված կետը սկսում է շարժվել դեպի ներքև՝ ուղղված* $v_0$ սմ/վրկ *սկզբնական արագությամբ։ Այն պահին, երբ կետը գտնվել է իր ամենաստորին դիրքում, նրա վրա կիրառվել է դեպի ներքև ուղղված* $Q=\text{const}$ *ուժը։ Որոշել կետի շարժման հավասարումը և տատանումների պարբերությունը։*

Լուծում: *Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք կետի ստատիկական հավասարակշռության դիրքում,* x *առանցքն ուղղենք ուղղաձիգ դեպի ներքև։ Կետի վրա ազդում են նրա* P *կշիռը և զսպանակի* $F_1=c\,|f_{ст}+x|$ *առաձգական ուժը, որտեղ* c-*ն զսպանակի կոշտությունն է, իսկ* $f_{ст}$-*ը՝ զսպանակի ստատիկական երկարացումը, որը հավասար է* $\frac{P}{c}$-*ի։*

M *կետի վրա ազդող ուժերի պրոյեկցիաների գումարը* Ox *առանցքի վրա կլինի*

$$F_x=P-c\,(f_{ст}+x)=-cx։$$

Հետևաբար, M կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0, \tag{1}$$

որտեղ

$$k=\sqrt{\frac{c}{m}}, \tag{2}$$

(1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x=A\cos kt+B\sin kt, \tag{3}$$

որտեղ A-ն և B-ն ինտեգրման հաստատուններն են։ A և B-ի որոշման համար ունենք

$$\text{երբ } t=0 \mid x_0=-f_{\text{ստ}}, \quad \dot{x}=v_0 \tag{4}$$

նախնական պայմանները։ Եթե (3)-ի և $\frac{dx}{dt}$ ածանցյալի մեջ տեղադրենք այս նախնական պայմանները և ստացված երկու հավասարումներից որոշենք ինտեգրման A և B հաստատունները ու դրանց արժեքները տեղադրենք (3)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$x=-\frac{g}{k^2}\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt, \tag{5}$$

Եթե (5)-ի մեջ կատարենք

$$\frac{g}{k^2}=a\sin\varepsilon, \qquad \frac{v_0}{k}=a\cos\varepsilon \tag{6}$$

տեղադրումը, ապա այն կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x=a\sin(kt-\varepsilon), \tag{7}$$

(6)-ից հետևում է, որ (7)-ը կարելի է գրել այսպես՝

$$x=\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2+\left(\frac{g}{k^2}\right)^2}\sin(kt-\varepsilon), \tag{8}$$

որտեղ

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{Pk}{cv_0}, \tag{9}$$

Այժմ գտնենք կետի հավասարակշռության դիրքից մինչև նրա վրա Q ուժը կիրառվելու ժամանակամիջոցը։

Դիցուք $t=\tau$ պահին, երբ նրա վրա կիրառվել է Q ուժը, կետը գտնվել է իր ամենասորին դիրքում։ Այդ դեպքում կունենանք

$$x=x_{max}=\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2+\left(\frac{P}{c}\right)^2}, \tag{10}$$

(10)-ի հիման վրա (8)-ից կստանանք, որ

$$\sin(k\tau-\varepsilon)=1$$

կամ (11)

$$k\tau-\varepsilon=\frac{\pi}{2},$$

Տեղադրելով (11)-ից ε-ի արժեքը (8)-ի մեջ, կստանանք

$$x=\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2+\left(\frac{g}{k^2}\right)^2}\cos k(t-\tau), \tag{12}$$

Կետի հետագա շարժման ուսումնասիրության համար նպատակահարմար է որպես շարժման սկիզբ ընդունել Q ծանրոցի կախման մոմենտը։ Դրա համար կատարենք

$$\bar{t}=t-\tau \tag{13}$$

տեղադրումը։ Այդ դեպքում (12) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x=\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2+\left(\frac{g}{k^2}\right)^2}\cos k\bar{t}, \tag{14}$$

Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\frac{d^2x}{d\bar{t}^2}=-cx+Q, \tag{15}$$

(15) հավասարումը պետք է ինտեգրել, օգտագործելով

$$\bar{t}=0,\quad x_0=\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2+\left(\frac{g}{k^2}\right)^2},\quad \dot{x}=0 \tag{16}$$

նախնական պայմանները։ Այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x=\frac{Q}{c}+A\cos k\bar{t}+B\sin k\bar{t}, \tag{17}$$

Եթե (16)-ի հիման վրա որոշենք A և B ինտեգրման հաստատունների մեծությունները և դրանց արժեքները տեղադրենք (17)-ի մեջ, կստանանք

$$x = \frac{Q}{c} + \left[ \sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2 + \left(\frac{g}{k^2}\right)^2} - \frac{Q}{c} \right] \cos k\tau \text{ ։} \qquad (18)$$

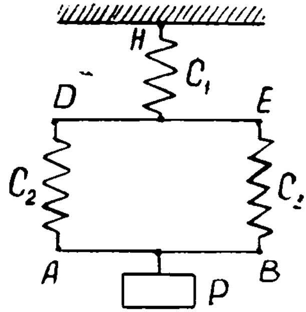
*(17) հավասարումից հետևում է, որ կետը կատարում է ներդաշնակ տատանումներ* $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$ *պարբերությամբ։*

**Պատ.**

$$x = \frac{Q}{c} + \left[ \sqrt{\left(\frac{v_0}{k}\right)^2 + \left(\frac{g}{k^2}\right)^2} - \frac{Q}{c} \right] \cos k\,(t - \tau),$$

*որտեղ* $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}$, $k\tau = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{kP}{v_0 c}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{P}{cg}}$ ։

**Խնդիր 106 (32.37)**։ *P ծանրոցը կախված է AB անկշիռ ձողից, որը* $c_1$ *և* $c_2$ *կոշտություն ունեցող երկու զսպանակներով միացված է DE անկշիռ ձողին։ Վերջինս ամրացված է առաստաղին H կետում* $c_1$ *կոշտություն ունեցող զսպանակի միջոցով։ Տատանումների ժամանակ AB և DE ձողերը մնում են հորիզոնական։ Որոշել այն համարժեք զսպանակի կոշտությունը, որի դեպքում P ծանրոցը կտատանվի նույն հաճախականությամբ։ Գտնել ծանրոցի ազատ տատանումների պարբերությունը (գծ. 107)։*




*Գծ. 107*

**Լուծում**։ *Դիցուք P ծանրոցը ուղղաձիգ ուղղությամբ տեղափոխվել է x-ով, իսկ AB և DE ձողերը՝ համապատասխանաբար* $x_2$*-ով և* $x_1$*-ով։ Ակնհայտ է, որ*

$$x = x_1 + x_2, \qquad (1)$$

*Եթե համարժեք զսպանակի կոշտությունը նշանակենք c-ով, ապա համարժեք զսպանակում առաջացած ճիգը հավասար կլինի* $c_1$ *կոշտություն ունեցող զսպանակում առաջացած ճիգին, այսինքն՝*

$$cx = c_1 x_1, \qquad (2)$$

*Մյուս կողմից* $c_2$ *և* $c_3$ *կոշտություններ ունեցող զսպանակների զուգահեռ միացման հետևանքով նրանցում առաջացած* $c_2 x_2$ *և* $c_3 x_2$ *ճիգերը կբավարարեն հետևյալ պայմանին՝*

$$c_2 x_2 + c_3 x_2 = c_1 x_1, \qquad (3)$$

*Լուծելով (1), (2) և (3) հավասարումները, կստանանք*

$$c = \frac{c_1 (c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}\text{։} \qquad (4)$$

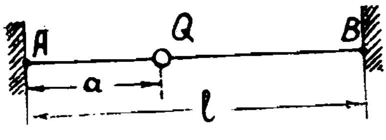
*Ակնհայտ է, որ ծանրոցի ազատ տատանումների պարբերությունը* (VIII)*-ի հիման վրա կլինի*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{cg}} = 2\pi \sqrt{\frac{P (c_1 + c_2 + c_3)}{gc_1 (c_2 + c_3)}}\text{։}$$

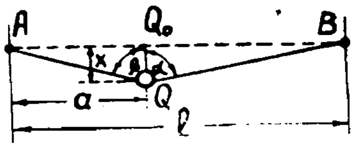
Պ ա տ. $\quad c = \dfrac{c_1 (c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}, \quad T = 2\pi \sqrt{\dfrac{P (c_1 + c_2 + c_3)}{gc_1 (c_2 + c_3)}}$։

**Խ ն դ ի ր 107 (32 . 40)։** *Q ծանրոցը ամրացված է* $AB = l$ *երկարություն ունեցող հորիզոնական ճոպանից։ Ծանրոցի փոքր ուղղաձիգ տատանումների դեպքում ճոպանի* S *ճիգը կարելի է ընդունել հաստատուն։ Որոշել ծանրոցի սեփական տատանումների հաճախականությունը, եթե ծանրոցի հեռավորությունը ճոպանի ծայրից հավասար է* a *(գծ. 108)։*

Լ ու ծ ու մ: *Դիցուք* Q *ծանրոցը ուղղաձիգ ուղղությամբ հավասարակշռության դիրքից իջել է* x*-ի չափով (ենթադրվում է, որ* x*-ը* $l$*-ի հետ համեմատած փոքր մեծություն է)։ Այդ դեպ-*




*Գծ. 108*




*Գծ. 109*

*քում գծ. 109-ից երևում է, որ ծանրոցի վրա կազդի* $s(\cos\alpha + \cos\beta)$ *ուժ՝ ուղղված* $QQ_0$*-ով դեպի վեր։ Եթե ճոպանի փոխարեն տեղադրված լիներ* c *կոշտություն ունեցող համարժեք զսպանակ, ապա կստացվեր*

$$cx = s(\cos\alpha + \cos\beta)\text{։} \qquad (1)$$

*Գծագրից հետևում է* $(x < l)$*, որ*

$$\cos\alpha = \frac{x}{l - a}, \quad \cos\beta = \frac{x}{a}\text{։} \qquad (2)$$

*Տեղադրելով* $\cos\alpha$ *և* $\cos\beta$*-ի արժեքները (2)-ից (1)-ի մեջ, կստանանք*

$$c = \frac{sl}{a (l - a)}\text{։}$$

Եթե ծանրոցի սեփական տատանումների հաճախականությունը նշանակենք k, ապա (IV) բանաձևի հիման վրա կունենանք

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{Q}} = \sqrt{\frac{sgl}{Qa(l-a)}}.$$

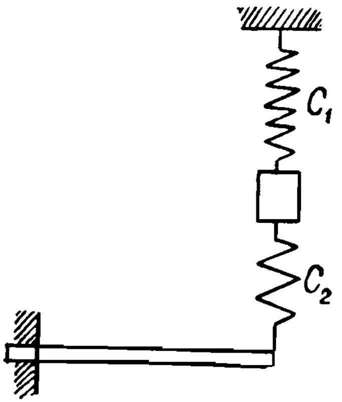
Պատ. $k = \sqrt{\frac{sgl}{Qa(l-a)}}$ վրկ$^{-1}$,

Խնդիր **108 (32.44)**։ Q կշիռ ունեցող ծանրոցը սեղմված է երկու ուղղաձիգ զսպանակների մեջ, որոնց կոշտությունները են $c_1$ և $c_2$։ Առաջին զսպանակի վերին ծայրը ամրացված է։ Երկրորդ զսպանակի ներքևի ծայրը ամրացված է հեծանի ազատ ծայրին, ընդ որում հեծանի մյուս ծայրը ամրացված է պատին։ Հայտնի է, որ ամրացված հեծանի ազատ ծայրը P ուժի ազդեցության տակ տալիս է

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

ճկվածք, որտեղ EJ-ն հեծանի կոշտությունն է ծռման դեպքում։

Որոշել հեծանի $l$ երկարությունը, որի դեպքում ծանրոցը կտատանվի տված T պարբերությամբ։ Գտնել ծանրոցի շարժման հավասարումը, եթե սկզբնական պահին նա կախված է եղել չձգված զսպանակների ծայրերից և բաց է թողնվել առանց սկզբնական արագության (գծ. 110)։




Գծ. 110

Լուծում: Եթե առաձգական հեծանը փոխարինենք իրեն համարժեք զսպանակով, ապա այդ զսպանակի կոշտությունը կլինի

$$c_3 = \frac{3EJ}{l^3}. \qquad (1)$$

Այժմ ենթադրենք, որ երեք զսպանակներ փոխարինված են մեկ համարժեք զսպանակով։ Այդ զսպանակի կոշտությունը նշանակենք c-ով և այն հաշվենք կախված $c_1$, $c_2$ և $c_3$-ից։

Եթե ծանրոցը շեղենք հավասարակշռության դիրքից x-ով և ենթադրենք, որ երկրորդ և երրորդ զսպանակները փոխել են *իրենց երկարությունները համապատասխանաբար $x_2$ և $x_3$-ով, ապա (32.37) խնդրի լուծման մեջ շարադրվածի համաձայն կարող ենք գրել*

$$x=x_2+x_3, \quad c_2x_2=c_3x_3, \quad cx=c_1x+c_2x_2. \qquad (2)$$

*(2) հավասարումների սիստեմից որոշենք* $c$-*ն՝*

$$c=c_1+\frac{c_2c_3}{c_2+c_3}. \qquad (3)$$

*Հեծանի $l$ երկարությունը որոշելու համար գրենք ժանրոցի տատանումների* $T$ *պարբերության արտահայտությունը։ Այն* (VIII)-*ի համաձայն կլինի՝*

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}=2\pi\sqrt{\frac{mg}{cg}}=2\pi\sqrt{\frac{Q}{cg}}. \qquad (4)$$

*Եթե (4)-ի մեջ տեղադրենք* $c$-*ի արժեքը (3)-ից և ստացված հավասարումը լուծենք $l$-ի նկատմամբ, կստանանք*

$$l=\sqrt[3]{\frac{3EJ\left(c_1+c_2-\frac{4\pi^2Q}{T^2g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2Q}{T^2g}-c_1\right)}}.$$

*Եթե ժանրոցը ընդունենք որպես նյութական կետ, ապա նրա շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$\frac{Q}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-cx$$

*կամ* (5)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0,$$

*որտեղ*

$$k^2=\frac{cg}{Q}.$$

*(5) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը* (III)-*ի հիման վրա կլինի*

$$x=a\cos(kt+\varepsilon), \qquad (6)$$

*որտեղ* $a$ *և* $\varepsilon$-*ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։*

*Դիցուք ժանրոցը չձգված զսպանակներից կախելուց հետո* իջել է $x_0$ չափով։ Ակնհայտ է, որ այդ $x_0$-ն կորոշվի հետևյալ առնչությունից՝

$$cx_0 = Q \qquad (7)$$

Ծանրոցի շարժման նախնական պայմանները կլինեն

$$\text{երբ } t=0 \quad \Big| \quad x = x_0 = -\frac{Q}{c}, \quad \dot{x} = 0 \qquad (8)$$

Եթե (6)-ի և նրա ածանցյալի մեջ տեղադրենք (8) նախնական պայմանները և միաժամանակ նկատի ունենանք (1) և (3) առնչությունները, կստանանք ինտեգրման $a$ և $\varepsilon$ հաստատունների արժեքները՝

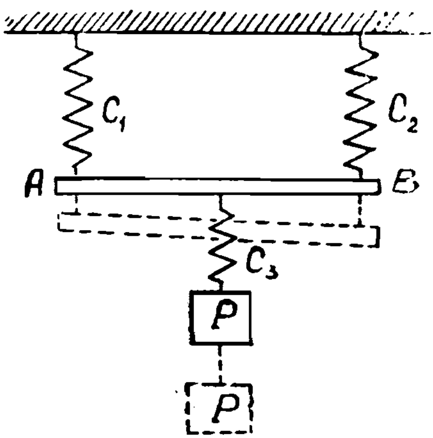
$$a = Q \cdot \frac{c_2 l^3 + 3EJ}{c_1 c_2 l^3 + 3(c_1 + c_2)EJ}, \quad \varepsilon = 0 \qquad (9)$$

Մնում է $a$ և $\varepsilon$-ի արժեքները (9)-ից տեղադրել (6)-ի մեջ և ստանալ ծանրոցի շարժման հավասարումը։

**Պատ.** 1) $$l = \sqrt[3]{\frac{3EJ\left(c_1 + c_2 - \frac{4\pi^2}{T^2}\,\frac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot\frac{Q}{g} - c_1\right)}},$$

2) $$x = -Q \cdot \frac{c_2 l^3 + 3EJ}{c_1 c_2 l^3 + (c_1 + c_2)\,3EJ} \cos\sqrt{\frac{[c_1 c_2 l^3 + (c_1 + c_2)3EJ]g}{(c_2 l^3 + 3EJ)Q}} \cdot t$$

**Խնդիր 109 (32.49)։** AB անկշիռ ձողին ամրացված են երեք զսպանակներ։ $c_1$ և $c_2$ կոշտություններ ունեցող երկու զսպանակները պահում են ձողը և տեղավորված են նրա ծայրերում: $c_3$ կոշտություն ունեցող զսպանակը ամրացված է ձողի մեջտեղում և կրում է P ծանրոցը։ Որոշել ծանրոցի սեփական տատանման հաճախականությունը (գծ. 111)։



Գծ. 111

Լուծում: AB հեծանը և նրա ծայրերում ամրացված երկու զսպանակները փոխարինենք $\tilde{c}$ կոշտություն ունեցող մի զսպանակով, ընդունելով, որ այն տեղավորված է ձողի մեջտեղում:

Դիցուք, երբ $\tilde{c}$ կոշտություն ունեցող զսպանակը ստանում է $\tilde{x}$ տեղափոխություն, ապա $c_1$ և $c_2$ կոշտություններ ունեցող զսպանակներն ստանում են համապատասխանաբար $x_1$ և $x_2$ տեղափոխություններ: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$c_1x_1=c_2x_2,\quad \tilde{c}\tilde{x}=c_1x_1+c_2x_2,\quad 2\tilde{x}=x_1+x_2: \tag{1}$$

(1) հավասարումից ստացվում է

$$\tilde{c}=\frac{4c_1c_2}{c_1+c_2}, \tag{2}$$

Քանի որ $c_3$ և $\tilde{c}$ կոշտություններ ունեցող զսպանակները միացված են, ապա նրանց համարժեք զսպանակի կոշտությունը կլինի

$$c=\frac{\tilde{c}c_3}{\tilde{c}+c_3}: \tag{3}$$

Այժմ անցնենք ծանրոցի սեփական տատանումների հաճախականության որոշմանը: (IV) բանաձևի համաձայն ունենք

$$k=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{gc}{P}}, \tag{4}$$

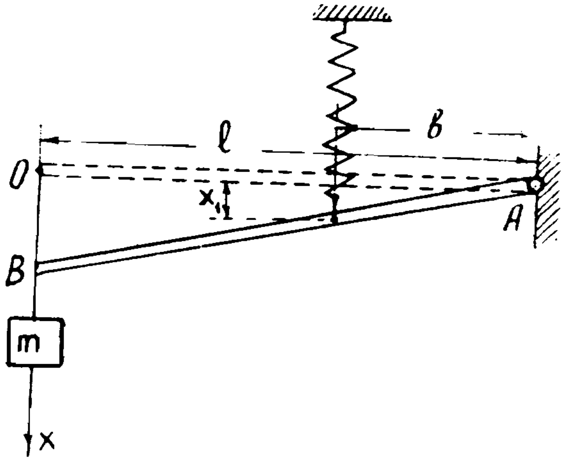
Եթե $\tilde{c}$-ի արժեքը (2)-ից տեղադրենք (3)-ի մեջ և այնուհետև $\tilde{c}$-ի համար ստացած արժեքները տեղադրենք (4)-ի մեջ, ապա կստանանք ծանրոցի սեփական տատանումների հաճախականության արտահայտությունը:

Պատ. $k=\sqrt{\dfrac{g\cdot 4c_1c_2c_3}{P(4c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3)}}$ 1/վրկ:

Խնդիր **110**: $AB=l$ երկարություն ունեցող պինդ ձողը A կետում հոդակապով ամրացված է, իսկ B ծայրում կա m կետային մասսա: A կետից b հեռավորության վրա ձողին ամրացված է $c_1$ կոշտություն ունեցող զսպանակ, որը պահում է ձողին հորիզոնական հավասարակշռության մեջ (գծ. 112): Որոշել B կետի փոքր տատանումների պարբերությունը:

Լուծում: $Ox$ առանցքը ուղղենք ուղղաձիգ դեպի ցած, իսկ սկզբնակետը տեղավորենք B կետում, երբ այն գտնվում է հավասարակշռության մեջ (գծ. 112)։ Եթե B կետը հանենք հավասարակշռության դիրքից և տանք նրան շատ փոքր տեղափոխություն, ապա ձողը կպտտվի շատ փոքր անկյունով, որի մեծությունը կլինի

$$\varphi = \frac{x}{l}\text{ ։} \tag{1}$$




Գծ. 112

Հետևաբար, զսպանակի շեղման չափը հավասարակշռության դիրքից կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով՝

$$x_1 = b\,\mathrm{tg}\,\varphi\text{ ։} \tag{2}$$

Եթե նկատի ունենանք, որ $\varphi$ անկյունը շատ փոքր է, ապա (2)-ը կարող ենք գրել այսպես՝

$$x_1 \approx \frac{b}{l}\,x\text{ ։} \tag{3}$$

Այդ շեղման ժամանակ զսպանակը կազդի ձողի վրա

$$c_1x_1 = c_1\,\frac{b}{l}\,x \tag{4}$$

ուժով։

B կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը ստանալու համար օգտվենք Դալամբերի սկզբունքից։ Եթե ձողի վրա ազդող բոլոր ուժերի մոմենտների գումարը A կետի նկատմամբ հավասարեցնենք զրոյի, ընդունելով B կետի շարժումը ուղղաձիգ, իսկ իներցիայի ուժը ուղղված OX առանցքի հակառակ ուղղությամբ, ապա x>0-ի դիրքում կունենանք

$$l m \frac{d^2x}{dt^2} - mgl + c_1(f + x_1)b = 0: \qquad (5)$$

Այստեղ f-ը զսպանակի երկարացումն է հավասարակշռության դիրքում, ընդ որում հավասարակշռության հավասարումը կլինի

$$fc_1b = mgl: \qquad (6)$$

(4)-ի և (6)-ի հիման վրա (5)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c_1}{m} \cdot \frac{b^2}{l^2} \cdot x = 0: \qquad (7)$$

(7)-ից հետևում է, որ B կետի փոքր տատանումների պարբերությունը կլինի

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c_1}{m} \cdot \frac{b^2}{l^2}}} = 2\pi \cdot \frac{l}{b}\sqrt{\frac{m}{c_1}},$$

Պատ. $T = 2\pi \cdot \frac{l}{b}\sqrt{\frac{m}{c_1}}$,

**Խնդիր 111**։ H բարձրությամբ և $\gamma_1$ տեսակարար կշիռ ունեցող կոնը խորասուզված է $\gamma_2$ տեսակարար կշիռ ունեցող հեղուկի մեջ ($\gamma_2 > \gamma_1$) այնպես, որ կոնի գագաթը գտնվում է հեղուկի մակերևույթից վեր, իսկ հիմքը զուգահեռ է հեղուկի մակերևույթին։ Որոշել կոնի ուղղաձիգ սեփական փոքր տատանումների պարբերությունը, արհամարհելով հեղուկի դիմադրությունը։

Լուծում: Ենթադրենք, կոնը չի տատանվում։ Նշանակենք կոնի հիմքի շառավիղը R-ով, հավասարակշռության վիճակում նրա դուրս մնացած մասի բարձրությունը՝ h-ով, չընկղմված մասի շառավիղը՝ r-ով։ Այդ վիճակի համար կունենանք

$$\left(\frac{\pi R^2 H}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3}\right)\gamma_2 = \gamma_1 \frac{\pi R^2 H}{3} \qquad (1)$$

կամ

$$R^2H(\gamma_2 - \gamma_1) = r^2 h \gamma_2, \qquad (2)$$

x առանցքն ուղղենք ուղղաձիգ դեպի ցած, իսկ O-սկզբնակետը տեղավորենք հավասարակշռության վիճակում կոնի ծանրության կենտրոնում։ Կոնը ընկղմենք հեղուկի մեջ այնքան, որ *նրա ծանրության կենտրոնի կոորդինատը դառնա* x *(*x*-ը բավականաչափ փոքր է), դուրս մնացած մասի շառավիղը՝* $r_1$, *իսկ բարձրությունը՝* $h_1$*։ Այնուհետև թողնենք, որ կոնը տատանվի։ Ընդունելով կոնը որպես նյութական կետ, գրենք նրա շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Այն կլինի*

$$\frac{\gamma_1}{g} \cdot \frac{\pi R^2 H}{3} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \gamma_1 \frac{\pi R^2 H}{3} - \left(\frac{\pi R^2 H}{3} - \frac{\pi r_1^2 h_1}{3}\right) \gamma_2$$

*կամ* (3)

$$\gamma_1 \frac{R^2 H}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -R^2 H (\gamma_2 - \gamma_1) + r_1^2 h_1 \gamma_2,$$

*Ակնհայտ է, որ*

$$h_1 = h - x, \quad \frac{R}{H} = \frac{r}{h} = \frac{r_1}{h_1}, \tag{4}$$

*(4)-ի հիման վրա (3)-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$\gamma_1 \cdot \frac{H}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -H (\gamma_2 - \gamma_1) + \frac{(h-x)^3}{H^2} \gamma_2, \tag{5}$$

*(5) հավասարման աջ մասը գրենք ըստ* x*-ի աճման աստիճանների։ Կունենանք*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{H\gamma_1} \left[ -H (\gamma_2 - \gamma_1) + \frac{h^3}{H^2} \gamma_2 - \frac{3h^2}{H^2} \gamma_2 x + \frac{3h}{H^2} \gamma_2 x^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{H^2} \gamma_2 x^3 \right], \tag{6}$$

*(2)-ից և (4)-ից հետևում է, որ*

$$-H (\gamma_2 - \gamma_1) + \frac{h^3}{H^2} \gamma_2 = 0, \tag{7}$$

*(7)-ի հիման վրա (6)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{3h^2}{H^3} \cdot \frac{g\gamma_2}{\gamma_1} x + \frac{3hg\gamma_2}{H^3\gamma_1} x^2 - \frac{g\gamma_2}{H^3\gamma_1} x^3, \tag{8}$$

*Փոքր տատանումների դեպքում* x*-ը փոքր մեծություն է, որի հետևանքով (8) հավասարման մեջ* $x^2$ *և* $x^3$ *պարունակող անդամները կարելի է արհամարհել և (8)-ը գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3h^2}{H^3} \cdot \frac{g\gamma_2}{\gamma_1} \cdot x = 0, \tag{9}$$

(9) հավասարումից երևում է, որ սեփական տատանումների պարբերությունը կլինի

$$T = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\frac{3h^2}{H^3} \cdot \frac{g\gamma_2}{\gamma_1}}}, \qquad (10)$$

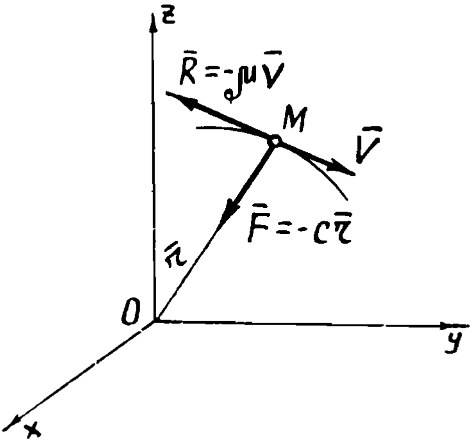
Այժմ մնում է (2)-ից և (4)-ից h-ը արտահայտել $\gamma_1$, $\gamma_2$ և H-ի միջոցով ու ստացած արժեքը տեղադրել (10)-ի մեջ։

Պ ա տ. $T = 2\pi \sqrt{\frac{H\gamma_1}{3g\gamma_2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}}$,

## 2. Դիմադրության ազդեցությունը ազատ տատանումների վրա (Մարող տատանումներ)

Կետի ազատ ներդաշնակ տատանումների ուսումնասիրության ժամանակ հաշվի չէին առնվում միջավայրի դիմադրության ուժերը, որոնք սովորական պայմաններում միշտ գոյություն ունեն։ Այդ ուժերի ազդեցության տակ կետի տատանողական շարժման ամպլիտուդը ժամանակի ընթացքում մարում է։

Այստեղ դիտարկվում են միայն այն դիմադրության ուժերը, որոնք համեմատական են շարժվող կետի արագության առաջին աստիճանին։ Այդպիսին է, օրինակ, օդի դիմադրության ուժը, երբ կետի շարժման արագությունը փոքր է 0,2 մ/վրկ-ից։ Փոքր արագությունների դեպքում դիմադրության ուժը կարելի է դիտել համեմատական կետի արագության առաջին աստիճանին։



Գծ. 113

Դիցուք m մասսա ունեցող M կետի վրա, բացի $\bar{F} = -c\bar{r}$ վերադարձնող ուժից, որն ուղղված է դեպի անշարժ O կենտրոնը, ազդում է նաև $\bar{R} = -\mu\bar{V}$ դիմադրության ուժը, որը համեմատական է արագության առաջին ատտիճանին և ուղղված է շարժման հակառակ ուղղությամբ (գծ. 113)։

Մասնավոր դեպքում, երբ շարժումը կատարվի x առանցքով, այդ ուժերի պրոյեկցիաները կլինեն

$$F_x = -cx, \quad R_x = -\mu\dot{x}\,।$$

Դրա հետևանքով կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}$$

կամ (XIV)

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0,$$

որտեղ

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2b\,। \tag{XV}$$

Այստեղ նպատակահարմար է դիտարկել երեք դեպք՝ 1) $b < k$ (փոքր դիմադրության դեպք), 2) $b > k$ (մեծ դիմադրության դեպք) և 3) $b = k$ (սահմանային դեպք)։

1) Նախ դիտարկենք փոքր դիմադրության դեպքը, երբ $b < k$։ Այդ դեպքում (XIV) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x = e^{-bt}a\sin(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\alpha), \tag{XVI}$$

որտեղ $a$ և $\alpha$-ն ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։ Դիցուք սկզբնական $t=0$ պահին տրված են կետի կոորդինատը և արագությունը, այսինքն՝

$$\text{երբ } t=0 \mid x = x_0, \quad \dot{x} = v_0\,। \tag{XVII}$$

Տեղադրելով այս արժեքները (XVI)-ի և նրա

$$\dot{x} = e^{-bt}[-ba\sin(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\alpha) + \\ + \sqrt{k^2-b^2}\,a\cos(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\alpha)]$$

ածանցյալի արտահայտության մեջ, ստանում ենք երկու հավասարումներ, որոնցից կարելի է որոշել $a$ և $\alpha$ անհայտ մեծությունները։ $a$ և $\alpha$-ի արժեքները կլինեն

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0^2 + bx_0)^2}{k^2-b^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0\sqrt{k^2-b^2}}{v_0 + bx_0}\,।$$

(XVI) հավասարումով որոշվող շարժումը կլինի տատանողական, քանի որ սինուսը պարբերական ֆունկցիա է։ Բայց այդ շարժումը պարբերական չի լինի, նրա ամպլիտուդը փոփոխական է և ժամանակի ընթացքում մոնոտոն կերպով նվազում է, ձգտելով զրոյի։ Այդ պատճառով այս դեպքում կետի շարժումը անվանում են մարող տատանողական շարժում։

Մարող տատանողական շարժման դեպքում ևս մուծվում են տատանումների պարբերության և հաճախականության հասկացությունները։

Կետի մարող տատանումների $T_1$ պարբերություն կոչվում է (XVI) բանաձևի մեջ մտնող եռանկյունաչափական ֆունկցիայի պարբերությունը։ Ակնհայտ է, որ

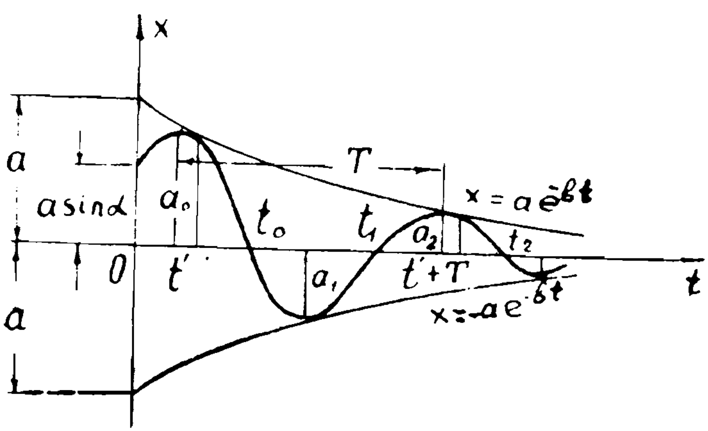
$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}, \tag{XVIII}$$

Քանի որ դիմադրության ուժի բացակայության դեպքում $T = \frac{2\pi}{k}$, ուստի

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (b/k)^2}} \cdot T։$$

Հետևաբար, մարող տատանումների $T_1$ պարբերությունը միշտ մեծ է համապատասխան ներդաշնակ տատանումների $T$ պարբերությունից։ Այսպիսով, դիմադրության ուժը մեծացնում է տատանումների պարբերությունը։

Կետի մարող տատանումների $k_1$ հաճախականությունը որոշվում է




Գծ. 114

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} \qquad \text{(XIX)}$$

*բանաձևով, ընդ որում* $k_1 < k$։ *Այսպիսով, դիմադրության ուժը նվազեցնում է տատանումների հաճախականությունը։*

*Մարող տատանողական շարժման բնորոշ մեծություններից է այսպես կոչված մարման դեկրեմենտը* ($q$) *կամ լոգարիթմական դեկրեմենտը* ($\ln q$)։ *Տատանումների* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *ամպլիտուդները նվազում են յուրաքանչյուր կիսապարբերության համար (գծ. 114) երկրաչափական պրոգրեսիայի օրենքով, որի քանորդը՝*

$$q = \frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{-\frac{bT_1}{2}}, \qquad \text{(XX)}$$

*Տատանումների լոգարիթմական դեկրեմենտը կոչվում է երկու հարևան (որոնց ժամանակամիջոցները տարբերվում են* $\frac{T_1}{2}$*-ով) ամպլիտուդների հարաբերության լոգարիթմը, այսինքն՝*

$$\ln \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{bT_1}{2},$$

*2) Այժմ դիտարկենք մեծ դիմադրության դեպքը, երբ* $b > k$։ *Այդ դեպքում* (XIV) *դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$x = e^{-bt}\left(c_1 e^{nt} + c_2 e^{-nt}\right)$$

*կամ* (XXI)

$$x = e^{-bt}(A \operatorname{ch} nt + B \operatorname{sh} nt),$$

*որտեղ* $c_1$, $c_2$*-ը (կամ* $A$ *և* $B$*-ն) ինտեգրման հաստատուններն են, իսկ* $n = \sqrt{b^2 - k^2}$։ *Քանի որ* $n < b$, *ապա* (XXI)*-ից երևում է, որ* $x$*-ը ժամանակի ընթացքում նվազում է, ձգտելով զրոյի, այսինքն՝ կետը ասիմպտոտիկորեն մոտենում է ձգող կենտրոնին։ Այս դեպքում կետը կատարում է մարող ոչ տատանողական շարժում։ Շարժման բնույթը կախված է նախնական պայմաններից, այսինքն՝ կետի սկզբնական շեղման մեծությունից ու նշանից և սկզբնական* $v_0$ *արագությունից։ Գծագիր 115-ում բերվում է կետի շարժման հնարավոր դեպքերի գրաֆիկը, երբ* $x = x_0 > 0$։ *Այս երեք դեպքերում էլ շարժումը արագ մարում է։*

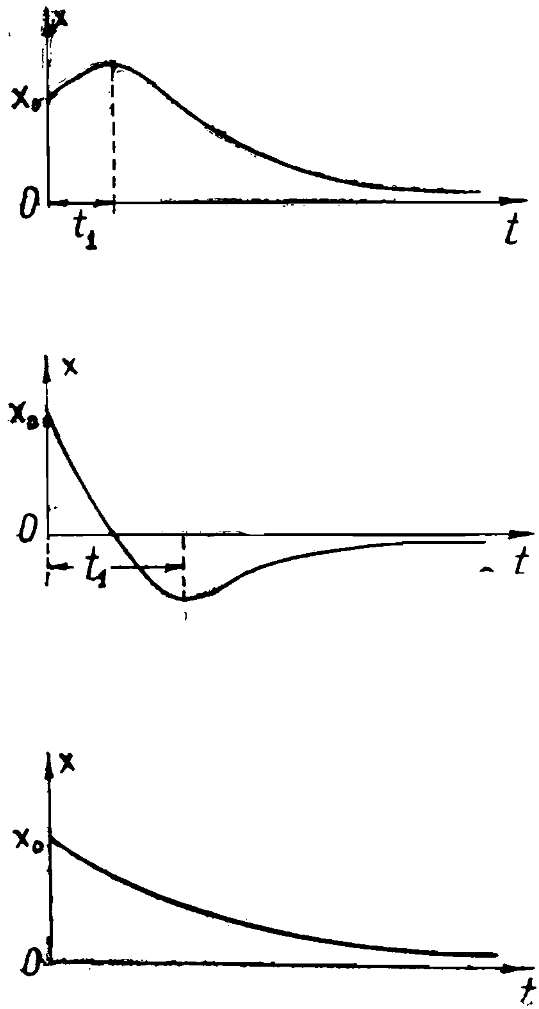
*3) Դիտարկենք սահմանային դեպքը, երբ* $b = k$։ *Այդ դեպքում* (XIV) *դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$x = e^{-bt}(c_1 + c_2 t),$$

որտեղ $c_1$ և $c_2$-ը ինտեգրման հաստատուններն են։

Քանի որ $e^{-bt}$ արտադրիչը ավելի արագ է նվազում, քան $t$-ն աճում է, ապա շարժման պատկերը այս դեպքում կլինի նույնը, ինչ պատկերված է գծագիր 115-ում։ Կետը կկատարի մարող ոչ տատանողական շարժում։

Մարող տատանումների վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս հիմնականում պետք է կատարել նույն հաջորդական քայլերը.



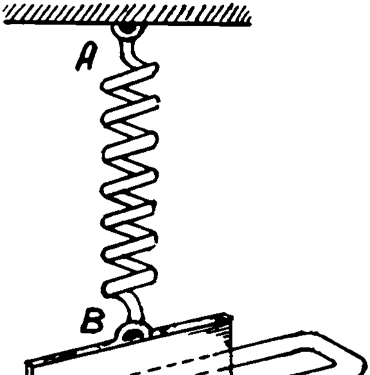

Գծ. 115

*ինչ որ ազատ ներդաշնակ տատանումների դեպքում։ Այստեղ նույնպես տատանումների $T_1$ պարբերությունը և $k_1$ հաճախականությունը որոշելու համար կարիք չկա ինտեգրելու շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։*

*Մենք տեսանք, որ ազատ ներդաշնակ տատանումների վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս կարելի է խնդիրը մինչև վերջ լուծել ընդհանուր ձևով և ապա վերջում նոր տեղադրել թվային արժեքները։ Սակայն մարող տատանումների դեպքում կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կազմելիս նախ պետք է տեղադրել թվային տվյալները, որոշել* b *և* k *գործակիցների արժեքները և ապա նոր անցնել դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը, քանի որ հավասարման լուծումը եռանկյունաչափական թե հիպերբոլական ֆունկցիաների տեսքով ներկայացնելը կախված է* b *և* k *գործակիցների միջև եղած առնչությունից։*

*Ստորև բերվում են կետի մարող տատանումների վերաբերյալ մի քանի խնդիրների լուծումները։*

**Խնդիր 112 (843)։** A *անշարժ կետում* AB *զսպանակից կախված 100* Գ *կշիռ ունեցող* D *թիթեղը շարժվում է մագնիսական բևեռների միջև։ Մրրկային հոսանքների հետևանքով շարժումը արգելակվում է արագությանը համեմատական ուժով։ Շարժման դիմադրության ուժը հավասար է* $kv\Phi^2$ դին, *որտեղ* $k=0{,}0001$, $v$-*ն արագությունն է՝ արտահայտված* սմ/վրկ, *իսկ* $\Phi$-*ն* N *և* S *բևեռների միջև մագնիսական հոսանքն է։ Սկզբնական պահին թիթեղի արագությունը հավասար է զրոյի, և զսպանակը ձգված չէ։ Նրա երկարացումը 1* սմ-*ով ստացվում է* B *կետում կիրառված 20* Գ *ուժի ստատիկական ազդեցության դեպքում։ Որոշել թիթեղի շարժումը այն դեպքում, երբ* $\Phi=1000\sqrt{5}$ CGS *միավոր (գծ. 116)։*




*Գծ. 116*

Լուծում: *Թիթեղի ծանրության կենտրոնը շարժվում է* ուղղաձիգ ուղղով, որն ընդունենք որպես $x$ առանցք։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք ստատիկական հավասարակշռության դիրքում, այսինքն՝ դեֆորմացիայի չենթարկված զսպանակի ծայրից $f_{ստ}=5$ սմ հեռավորության վրա։ Ժամանակի կամավոր $t$ պահին ֆիքսենք թիթեղի ծանրության կենտրոնը։ Նրա կոորդինատը նշանակենք $x$, իսկ արագությունը՝ $\dot{x}$։ Այդ կետի վրա կազդեն երեք ուժեր՝ 1) թիթեղի $P$ կշիռը, 2) զսպանակի $F_1 = c\,|x + f_{ստ}|$ առաձգական ուժը և 3) $F_2 = k_1 \Phi^2 |\dot{x}|$ միջավայրի դիմադրությունը։ Այստեղ $F_1$ և $F_2$ ուժերի արտահայտությունների մեջ դրված է բացարձակ արժեքի նշանը, քանի որ $F_1$-ը և $F_2$-ը դիտարկվում են որպես զսպանակի առաձգական ուժի մոդուլներ։

Թիթեղը կախված է դեֆորմացիայի չենթարկված զսպանակից և բաց է թողնված առանց սկզբնական արագության, հետևաբար, սկզբնական պայմանների համար կունենանք

$$\text{երբ } t=0 \mid x=-5 \text{ սմ}, \quad \dot{x}=0\text{։}$$

Թիթեղի վրա ազդող ուժերի պրոյեկցիաների գումարը $x$ առանցքի վրա կլինի

$$F_x = P - c\,(x + f_{ստ}) - k\Phi^2 \dot{x}\text{։} \tag{1}$$

Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ թիթեղի հավասարակշռության դիրքում

$$P = c f_{ստ},$$

ապա (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$F_x = -cx - k_1\Phi^2 \dot{x}\text{։} \tag{2}$$

(2)-ի հիման վրա շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - k_1\Phi^2\frac{dx}{dt}$$

կամ (3)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = 0,$$

որտեղ

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{20 \cdot 980}{100} = 196; \quad b = \frac{k_1\Phi^2}{2m} =$$

$$= \frac{0{,}0001 \cdot 5 \cdot 1000^2 \cdot 980}{2 \cdot 100 \cdot 980} = 2{,}5 \text{ 1/վրկ}\text{։}$$

*Քանի որ*

$$b^2-k^2=6,25-196<0,$$

*ապա (3) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$x=e^{-bt}\left(A\cos\sqrt{k^2-b^2}\,t+B\sin\sqrt{k^2-b_2}\,t\right)\ \text{սմ}։\qquad(4)$$

*Տված պայմանների համաձայն*

$$\sqrt{k^2-b^2}=\sqrt{196-2,5^2}=\sqrt{189,75}=13,78։$$

*Տեղադրելով այս արժեքը (4)-ի մեջ, կստանանք*

$$x=e^{-2,5\,t}\left(A\cos 13,78\,t+B\sin 13,78\,t\right)\ \text{սմ},\qquad(5)$$

*որտեղ* A *և* B-*ն ինտեգրման հաստատուններն են։*

*Օգտագործելով նախնական պայմանները, կստանանք*

$$A=-5,\quad B=-0,907։$$

*Տեղադրելով* A *և* B-*ի արժեքները (5)-ի մեջ, կստանանք թիթեղի շարժման հավասարումը վերջնական տեսքով։*

Պատ. $x=-e^{-2,5t}(5\cos 13,78\,t+0,907\sin 13,78\,t)$ սմ,

*որտեղ* x-*ը թիթեղի ծանրության կենտրոնի հեռավորությունն է այդ կենտրոնի հավասարակշռության դիրքից՝ ուղղաձիգով դեպի ներքև։*

Խնդիր **113**։ *Նյութական կետը շարժվում է ուղիղ գծի երկարությամբ, դիմադրող միջավայրում։ Տված է, որ վերականգնող ուժը հեռավորության գծային ֆունկցիա է, իսկ դիմադրության ուժը համեմատական է արագությանը։ Փորձով հաստատված է, որ մարող տատանումների պարբերությունը և դեկրեմենտը համապատասխանաբար հավասար են* $T_1=2$ վրկ, $D=\frac{1}{2}$։ *Գրել կետի շարժման հավասարումը, եթե նրա հավասարակշռության դիրքում նրան հաղորդված է* $v_0=1$ սմ/վրկ *սկզբնական արագություն։*

Լուծում: *Ակնհայտ է, որ այս դեպքում կետը կատարում է մարող տատանումներ։ Այդ տատանումների պարբերության համար ունենք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$T_1=\frac{2\pi}{k_1}=2։$$

*Այստեղից ստացվում է, որ տատանման հաճախականությունը՝* $k_1=\pi$։ *Մարման* n *գործակիցը կարելի է գտնել տված* D *և* $T_1$ *արժեքների միջոցով։ Իրոք, ունենք*

$$D=e^{-\frac{nT_1}{2}}=\frac{1}{2},$$

Քանի որ $T_1=2$, ապա $e^{-n}=\frac{1}{2}$, Այստեղից ստացվում է $n=\ln 2$։

Ստացված n և $k_1$-ի արժեքները տեղադրելով մարող տատանումների

$$x=a_1 e^{-nt}\sin(k_1 t+\alpha_1)$$

ընդհանուր լուծման մեջ, կստանանք կետի շարժման օրենքը

$$x=a_1 e^{-t\ln 2}\sin(\pi t+\alpha_1)$$

տեսքով։

Բայց եթե նկատի ունենանք, որ

$$e^{-t\ln 2}=2^{-t},$$

ապա կստանանք

$$x=2^{-t}a_1\sin(\pi t+\alpha_1)\text{։} \tag{1}$$

Մնում է որոշել $a_1$ և $\alpha_1$ ինտեգրման հաստատունները։ Դրա համար օգտագործենք նախնական պայմանները, որոնք կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\text{երբ } t=0 \mid x=0, \quad \dot{x}=v_0\text{։}$$

Եթե (1)-ի և նրա ածանցյալի մեջ տեղադրենք այս նախնական պայմանները, ապա կստանանք

$$0=a_1\sin\alpha_1$$

$$1=-a_1\ln 2\sin\alpha_1+a_1\pi\cos\alpha_1\text{։}$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\alpha_1=0, \quad a_1=\frac{1}{\pi}\text{։}$$

Մնում է $\alpha_1$-ի և $a_1$-ի այս արժեքները տեղադրել (1)-ի մեջ և կատարել նշված գործողությունները։

**Պատ.** $x=\frac{2^{-t}}{\pi}\sin\pi t$։

**Խնդիր 114 (32.58)**։ $R=\alpha v$ դիմադրող ուժի ազդեցության տակ m մասսա ունեցող մարմինը, որը կախված է c կոշտություն ունեցող զսպանակից, կատարում է մարող տատանումներ։ Քանի՞ անգամ մարող տատանումների T պարբերությունը *մեծ կլինի չմարող տատանումների* $T_0$ *պարբերությունից, եթե տված է* $\frac{n}{k}=0{,}1$ $\left(k^2=\frac{c}{m},\ n=\frac{a}{2m}\right)$։

Լուծում: *Մարմինը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Նրա մարող տատանումների պարբերությունը կլինի*

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}, \tag{1}$$

*իսկ չմարող տատանումների պարբերությունը՝*

$$T_0=\frac{2\pi}{k}, \tag{2}$$

*(1) և (2)-ից հետևում է, որ*

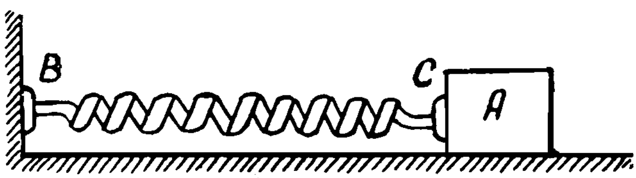
$$\frac{T}{T_0}=\frac{k}{\sqrt{k^2-n^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n}{k}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}01}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0{,}99}}\approx 1{,}005։$$

Պատ. $T\approx 1{,}005\,T_0$։

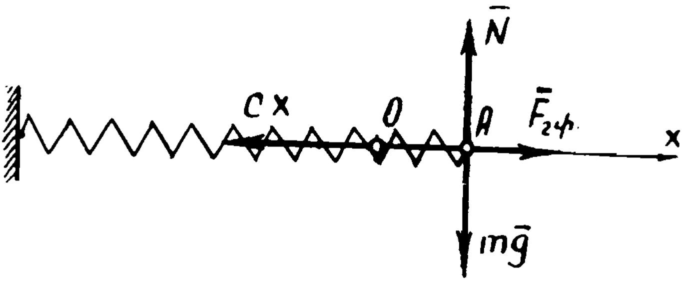
Խնդիր **115** (**847**)։ *0,5* կԳ *կշիռ ունեցող* A *մարմինը դրված է ոչ ողորկ հորիզոնական հարթության վրա և միացված է անշարժ* B *կետի հետ* BC *հորիզոնական առանցք ունեցող զսպանակով։ Շփման գործակիցը հավասար է 0,2-ի։ Զսպանակը* 1 սմ-*ով երկարացնելու համար պահանջվում է 0,25* կԳ *ուժ։* A *մարմինը հեռացված է* B *կետից այնպես, որ զսպանակը ձգվում է 3* սմ-*ով և այնուհետև բաց է թողնվում առանց սկզբնական արագության։ Գտնել՝ 1) ճոճման թափերի թիվը, որը կկատարի* A *մարմինը, 2) ճոճման թափերի մեծությունները և 3) նրանցից յուրաքանչյուրի* T *տևողությունը (գծ. 117)։*

Լուծում: *Ծանրոցը ընդունենք որպես նյութական կետ, կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք չձգված զսպանակի*




*Գծ. 117*

աջ ծայրակետում, իսկ OX առանցքն ուղղենք զսպանակի ուղղությամբ դեպի աջ (գծ. 118)։ Բեռի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ 1) ծանրության $mg$ ուժը և հարթության $N$ նորմալ հակազդումը. այս ուժերը իրար հավասարակշռում են, 2) զսպանակի առաձգական $-cx$ ուժը և 3) $\pm fmg$ շփման ուժը, որտեղ $f$-ը շփման գործակիցն է շարժման ժամանակ։ Այստեղ դրական նըշան պետք է վերցնել այն դեպքում, երբ ծանրոցը շարժվում է դեպի ձախ, իսկ բացասական նշան, երբ շարժվում է դեպի աջ։ Շփման ուժի ընդհանուր անալիտիկ արտահայտության բացակա-




Գծ. 118

յության հետևանքով անհրաժեշտ է դիտարկել կետի շարժման հաջորդական փուլերը (թափերը) առանձին-առանձին։

**Առաջին թափ: Կետը շարժվում է դեպի ձախ:** Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\ddot{x} = -cx + fmg$$

կամ

$$\ddot{x} + k^2 x = fg, \tag{1}$$

որտեղ

$$k^2 = \frac{c}{m}.$$

(1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt + \frac{fg}{k^2}, \tag{2}$$

որտեղ $A_1$ և $B_1$-ն ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։ Առաջին թափի նախնական պայմանները կլինեն

$$\text{երբ } t=0 \mid x = x_0 = 3 \text{ սմ}, \quad \dot{x} = v_0 = 0. \tag{3}$$

*Եթե (2)-ի և նրա ածանցյալի մեջ տեղադրենք (3) նախնական պայմանները, ապա $A_1$ և $B_1$ անհայտների համար կստանանք հետևյալ արժեքները՝*

$$A_1 = x_0 - \frac{fg}{k_2}, \quad B_1 = 0\text{։} \qquad (4)$$

*(4)-ի հիման վրա (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$x = \left(x_0 - \frac{fg}{k^2}\right) \cos kt + \frac{fg}{k^2}\text{։} \qquad (5)$$

*(5)-ը կետի շարժման օրենքն է առաջին թափի ընթացքում։ Առաջին թափը վերջանում է այն մոմենտին, երբ կետի արագությունը դառնում է զրո, այսինքն՝*

$$\dot{x} = -k\left(x_0 - \frac{fg}{k^2}\right) \sin kt = 0\text{։}$$

*Այստեղից ստացվում է, որ*

$$kt_1 = \pi, \quad t_1 = \frac{\pi}{k}\text{։} \qquad (6)$$

*Հետևաբար, առաջին թափի տատանումների տևողությունը հավասար կլինի*

$$T = t_1 = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{c}{m}}} = \pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5}{0{,}25 \cdot 980}} =$$

$$= 0{,}141 \text{ վրկ։}$$

*(5)-ից հետևում է, որ $t_1$ պահին կետի կոորդինատը կլինի*

$$x_1 = \left(x_0 - \frac{fg}{k^2}\right)\cos\pi + \frac{fg}{k^2} = -x_0 + \frac{2fg}{k^2} = -x_0 + \frac{2fg}{\frac{c}{m}} =$$

$$= -x_0 + \frac{2fP}{c} = -3 + \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}25} = -3 + \frac{4}{5} = -2{,}2 \text{ սմ։} \qquad (7)$$

*Առաջին թափի երկարության բացարձակ արժեքը կլինի* 3+2,2=5,2 սմ։

*Առաջին թափի վերջում զսպանակի առաձգական ուժը կդառնա*

$$F_1 = 0{,}25 \cdot 2{,}2 = 0{,}55 \text{ կԳ}$$

*և ուղղված կլինի դեպի աջ, իսկ շփման ուժը կլինի*

$$0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1 \text{ կԳ}$$

*և ուղղված դեպի ձախ։ Քանի որ զսպանակի առաձգական ուժը գերազանցում է շփման ուժին, ուստի մարմինը կշարժվի դեպի աջ։*

**Երկրորդ թափ:** *Կետը շարժվում է դեպի աջ։ Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\ddot{x} = -cx - fmg$$

*կամ* (8)

$$\ddot{x} + k^2x = -fg\text{։}$$

*Գրենք (8) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը։ Այն կլինի*

$$x = A_2\cos kt + B_2\sin kt - \frac{fg}{k}, \tag{9}$$

*որտեղ* $A_2$ *և* $B_2$*-ը ինտեգրման հաստատուններն են։ Երկրորդ թափի նախնական պայմանները կլինեն*

$$\text{երբ}\quad t = t_1 = \frac{\pi}{k} \quad \Big| \quad x = x_1 = -2{,}2 \text{ սմ}, \quad v_0 = 0\text{։} \tag{10}$$

*Եթե (9)-ի և նրա ածանցյալի մեջ տեղադրենք (10) նախնական պայմանները և լուծենք ստացված երկու հավասարումները, ապա* $A_2$ *և* $B_2$*-ի համար կստանանք հետևյալ արժեքները՝*

$$A_2 = x_0 - \frac{3fg}{k^2}, \quad B_2 = 0\text{։} \tag{11}$$

*(11)-ի հիման վրա (9)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$x = \left(x_0 - \frac{3fg}{k^2}\right)\cos kt - \frac{fg}{k^2}\text{։} \tag{12}$$

*Սա կլինի կետի շարժման օրենքը երկրորդ թափի դեպքում։ Այս թափը վերջանում է այն պահին, երբ կետի արագությունը դառնում է զրո, այսինքն՝*

$$\dot{x} = -k\left(x_0 - \frac{3fg}{k^2}\right)\sin kt = 0\text{։} \tag{13}$$

*Այստեղից դարձյալ ստացվում է, որ երկրորդ թափի տևողությունը՝*

$$T = \frac{\pi}{k} = 0{,}141 \text{ վրկ։}$$

*(12)-ից հետևում է, որ երկրորդ թափի վերջում կետի կոորդինատը կլինի*

$$x_2 = \left(x_0 - \frac{3fg}{k^2}\right)\cos 2\pi - \frac{fg}{k^2} = x_0 - \frac{4fg}{k^2} = 3 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5} = 1,4 \text{ սմ։}$$

*Երկրորդ թափի երկարության բացարձակ արժեքը կլինի*

$$2,2 + 1,4 = 3,6 \text{ սմ։}$$

*Երկրորդ թափի վերջում զսպանակի առաձգական ուժը կըդառնա*

$$F_2 = 0,25 \cdot 1,4 = 0,35 \text{ կԳ}$$

*և ուղղված կլինի դեպի ձախ, իսկ շփման ուժը կլինի*

$$0,5 \cdot 0,2 = 0,1 \text{ կԳ}$$

*և ուղղված դեպի աջ։ Քանի որ զսպանակի առաձգական ուժը գերազանցում է շփման ուժին, ապա մարմինը կշարժվի դեպի ձախ։*

**Երրորդ թափ։ Կետը շարժվում է դեպի ձախ։** *Շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\ddot{x} = -cx + fmg\text{։} \qquad (14)$$

*Եթե ինտեգրենք (14) հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք*

$$\text{երբ } t = t_2 = \frac{2\pi}{k} \;\Big|\; x = x_2 = 1,4 \text{ սմ}, \quad \dot{x} = v_0 = 0$$

*նախնական պայմանները, ապա կետի շարժման օրենքը երրորդ թափի դեպքում կլինի*

$$x = \left(x_0 - \frac{5fg}{k^2}\right)\cos kt + \frac{fg}{k^2}\text{։} \qquad (15)$$

*Եթե (15)-ը ածանցենք և այն հավասարեցնենք զրոյի, ապա կհամոզվենք, որ երրորդ թափի տևողությունը նույնպես կլինի* $T = 0,141$ վրկ։

*(15)-ից հետևում է, որ երրորդ թափի վերջում կետի կոորդինատը կլինի*

$$x_3 = \left(x_0 - \frac{5fg}{k^2}\right)\cos 3\pi + \frac{fg}{k^2} = -x_0 + \frac{6fg}{k^2} = -3 + \frac{12}{5} = -0,6 \text{ սմ։}$$

*Երրորդ թափի երկարության բացարձակ արժեքը կլինի*

$$1{,}4 + 0{,}6 = 2 \text{ սմ։}$$

*Երրորդ թափի վերջում զսպանակի առաձգական ուժը կդառնա*

$$F_3 = 0{,}25 \cdot 0{,}6 = 0{,}15 \text{ կԳ}$$

*և ուղղված կլինի դեպի աջ, իսկ շփման ուժը հավասար կլինի* $0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$ կԳ *և ուղղված դեպի ձախ։ Դարձյալ առաձգական ուժը գերազանցում է շփման ուժին, որի հետևանքով շարժումը կշարունակվի։*

**Չորրորդ թափ։ Կետը շարժվում է դեպի աջ։** *Շարժման հավասարումը կլինի (8)-ը։ Եթե գրենք այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը և օգտագործենք*

$$\text{երբ } t = t_3 = \frac{3\pi}{k} \quad \Big| \quad x = x_3 = -0{,}6 \text{ սմ}, \quad \dot{x} = v_0 = 0$$

*նախնական պայմանները, ապա չորրորդ թափի շարժման օրենքը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$x = \left(x_0 - \frac{7fg}{k^2}\right)\cos kt - \frac{fg}{k^2}, \qquad (16)$$

*(16)-ից հետևում է, որ երրորդ թափի տևողությունը նույնպես հավասար է* $T = 0{,}141$ վրկ։ *Չորրորդ թափի վերջում կետի կոորդինատը կլինի*

$$x_4 = \left(x_0 - \frac{7fg}{k^2}\right)\cos 4\pi - \frac{fg}{k^2} = x_0 - \frac{8fg}{k^2} = 3 - \frac{16}{5} = -0{,}2 \text{ սմ։}$$

*Չորրորդ թափի երկարության բացարձակ արժեքը կլինի*

$$0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4 \text{ սմ։}$$

*Չորրորդ թափի վերջում զսպանակի առաձգական ուժը կդառնա*

$$F_4 = 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}05 \text{ կԳ}$$

*և ուղղված կլինի դեպի աջ, իսկ շփման ուժը հավասար է* $0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$ կԳ *և ուղղված է դեպի ձախ։ Այս դեպքում մարմինը կանգ կառնի, քանի որ առաձգական ուժը ավելի փոքր է, քան շփման ուժը։*

Պատ. *1) Չորս թափ, 2) 5,2* սմ, *3,6* սմ, *2* սմ, *0,4* սմ. *3)* $T = 0.141$ վրկ։

**Խնդիր 116 (849)**։ *Հեղուկի մածուցիկությունը որոշելու համար կուլոնը օգտագործել է հետևյալ մեթոդը՝ կախելով զսպանակից A բարակ թիթեղ, նա ստիպեց նրան տատանվել սկզբում օդում, իսկ այնուհետև այն հեղուկում, որի մածուցիկությունը պետք է որոշել և գտավ, որ I թափի ժամանակամիջոցը առաջին դեպքում $T_1$ է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ $T_2$։ Թիթեղի և հեղուկի միջև շփման ուժը կարող է արտահայտվել $2skv$ բանաձևով, որտեղ $2s$-ը թիթեղի մակերևույթն է, $v$-ն՝ նրա արագությունը, $k$-ն՝ մածուցիկության գործակիցը։ Անտեսելով թիթեղի և օդի միջև շփումը, որոշել $k$ գործակիցը փորձից գտնված $T_1$ և $T_2$ մեծություններով, եթե թիթեղի կշիռը $P$ է։*

Լուծում: *Քանի որ թիթեղը կատարում է համընթաց շարժում, ապա այն կարելի է ընդունել որպես նյութական կետ։ Կոորդինատական առանցքը ուղղենք ուղղաձիգ դեպի ներքև։*

*Առաջին դեպքում, երբ թիթեղը տատանվում է օդում, նրա վրա ազդում է միայն $F = -cx$ առաձգական ուժը, որտեղ $c$-ն զսպանակի կոշտությունն է, իսկ երկրորդ դեպքում, երբ թիթեղը սուզվում է հեղուկի մեջ, նրա վրա, բացի առաձգական ուժից, կազդի նաև թիթեղի և հեղուկի միջև եղած*

$$F_{շփ.} = -2sk\frac{dx}{dt}$$

*շփման ուժը։*

*Դժվար չէ նկատել, որ առաջին դեպքում թիթեղի տատանման կիսապարբերությունը կլինի*

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \qquad (1)$$

*իսկ երկրորդ դեպքում՝*

$$T_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{sk}{m}\right)^2}}: \qquad (2)$$

*Խնդրի պայմանների համաձայն $T_1$ և $T_2$-ի արժեքները տրված են։ Մնում է (1) և (2)-ից որոշել $k$ անհայտ մեծությունը։*

Պատ. $k = \frac{\pi P}{gsT_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$։

**Խնդիր 117 (851)**։ *Զսպանակից կախված 5,88 կԳ կշիռ ունեցող մարմինը դիմադրության բացակայության դեպքում տա-*

*տանվում է* T=0,4 π վրկ *պարբերությամբ, իսկ արագության առաջին աստիճանին համեմատական դիմադրության առկայության դեպքում՝* $T_1 = 0{,}5\pi$ վրկ *պարբերությամբ։ Գտնել դիմադրության* $\mu_1$ *ուժը 1* սմ/վրկ *արագության դեպքում և որոշել շարժումը, եթե սկզբնական պահին զսպանակը ձգված է եղել հավասարակշռության վիճակից 4* սմ*-ով և մարմինը մընացել է ազատ։*

**Լուծում:** *Խնդրի պայմաններից ունենք՝ ներդաշնակ տատանումների պարբերության համար* T=0,4π վրկ, *մարմնի մարող տատանումների համար* $T_1=0{,}5\pi$ վրկ*։ Հաշվենք ներդաշնակ տատանումների*

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}4\pi} = 5 \ ^1/\text{վրկ} \tag{1}$$

*և մարող տատանումների*

$$k_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4 \ ^1/\text{վրկ} \tag{2}$$

*հաճախականությունները։*

*Եթե դիմադրության գործակիցը նշանակենք* b, *ապա կունենանք*

$$b = \sqrt{k^2 - k_1^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{։} \tag{3}$$

*Մյուս կողմից ունենք*

$$\mu_1 = 2mb = 2 \cdot 3 \cdot \frac{5{,}88}{9{,}81} = 0{,}036\text{։}$$

*Մարմնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \tag{4}$$

*որտեղ* b *և* k *գործակիցները որոշվում են (1) և (3)-ով։*

*Քանի որ այս դեպքում*

$$b^2 - k^2 = 9 - 25 < 0,$$

*ապա (4) հավասարման ընդհանուր լուծումը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1t + \varepsilon), \tag{4}$$

*որտեղ* a *և* ε*-ը ինտեգրման հաստատուններն են, իսկ* $k_1$ *գործակիցը որոշվում է (2)-ով։* a *և* ε *մեծությունների որոշման համար ունենք հետևյալ բանաձևերը՝*

$$a = \frac{1}{k_1}\sqrt{k_1^2 x_0^2 + (v_0 + n x_0)^2}\,, \tag{6}$$

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{k_1 x_0}{v_0 + n x_0}\,։$$

*Նախնական պայմաններից ունենք*

$$\textit{երբ}\ \ t = 0 \ \ | \ \ x_0 = 4\ \text{սմ},\ v_0 = 0։$$

*Տեղադրելով այս արժեքները (6)-ի մեջ, կստանանք*

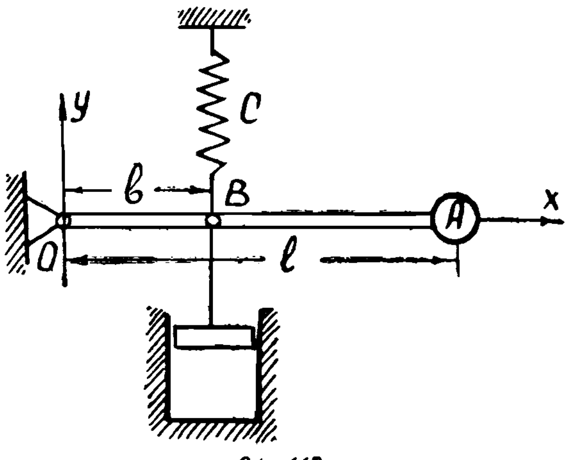
$$a = \frac{1}{4}\sqrt{4^2 \cdot 4^2 + (3 \cdot 4)^2} = 5\ \text{սմ}, \quad \mathrm{tg}\,\varepsilon = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{3},$$

$$\varepsilon = \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}\,։$$

*Տեղադրելով* a *և* ε *արժեքները (5)-ի մեջ, կստանանք մարմնի շարժման հավասարումը։*

**Պատ.** $\mu_1 = 0{,}036$, $\quad x = 5e^{-3t}\sin\left(4t + \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}\right)։$

**Խնդիր 118 (32 . 72)**։ *Կազմել* A *ծանր կետի փոքր տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումը, երբ* A *կետը գտնվում է անկշիռ ձողի ծայրին, և այդ ձողը հոդակապով ամրացված է* O *կետում։ Տրված է, որ միջավայրի դիմադրության ուժը համեմատական է արագության առաջին աստիճանին, ընդ որում համեմատականության գործակիցը հավասար է* α*-ի։ Որոշել նաև մարող տատանումների հաճախականությունը։*




*Գծ. 119*

*Տված է, որ A կետի կշիռը հավասար է P-ի, զսպանակի կոշտության գործակիցը՝ c-ի, ձողի երկարությունը՝ l-ի, իսկ OB երկարությունը՝ b-ի: Ձողի մասսան արհամարհել: Ընդունել, որ հավասարակշռության դիրքում ձողն ունի հորիզոնական դիրք: Միաժամանակ որոշել, թե α գործակցի ինչպիսի արժեքի դեպքում շարժումը կլինի ոչ պարբերական (գծ. 119):*

Լուծում: *Դիցուք A կետը շեղվել է իր հավասարակշռության դիրքից y-ի չափով (գծ. 119): Այդ դեպքում B կետը կտեղափոխվի $y_1 = \frac{b}{l}y$-ի չափով: c կոշտություն ունեցող զսպանակի $y_1$ տեղափոխության հետևանքով նրանում կառաջանա $cy_1 = c\frac{b}{l}y$ ճիգ: Եթե A կետի արագությունը լինի $\dot{y}$, ապա դիմադրության ուժի մեծության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$\alpha \dot{y}_1 = \alpha \frac{b}{l} \dot{y}:$$

*Զսպանակի կողմից A կետի վրա ազդող ուժը որոշելու համար զսպանակի $c\frac{b}{l}y$ ճիգը վերլուծենք երկու զուգահեռ բաղադրիչների՝ կիրառված A և O կետերում: A կետում կիրառված բաղադրիչի մեծությունը կլինի*

$$c\frac{b}{l}y \cdot \frac{b}{l} = c\frac{b^2}{l^2}y: \qquad (1)$$

*Նույն ձևով միջավայրի դիմադրության շնորհիվ A կետի վրա կազդի*

$$\alpha\frac{b}{l}\dot{y} \cdot \frac{b}{l} = \alpha\frac{b^2}{l^2}\dot{y} \qquad (2)$$

*դիմադրության ուժը:*

*Հետևաբար, A կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$\frac{P}{g}\ddot{y} = -c\frac{b^2}{l^2}y - \alpha\frac{b^2}{l^2}\dot{y}$$

*կամ* (3)

$$\ddot{y} + \frac{\alpha g}{P} \cdot \frac{b^2}{l^2}\dot{y} + \frac{cg}{P} \cdot \frac{b^2}{l^2}y = 0:$$

*Նախ դիտարկենք փոքր դիմադրության դեպքը, այսինքն՝*

$$\frac{cg}{P}\cdot\frac{b^2}{l^2}-\left(\frac{\alpha b^2 g}{2Pl^2}\right)^2>0, \tag{4}$$

*Այդ դեպքում (3) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$y=e^{-nt}(A\sin kt+B\cos kt), \tag{5}$$

*որտեղ*

$$n=\alpha\frac{b^2g}{2Pl^2},\quad k_1^2=\frac{cgb^2}{Pl^2}-\left(\frac{\alpha b^2 g}{2Pl^2}\right)^2, \tag{6}$$

*(5) և (6)-ից հետևում է, որ* A *կետի փոքր տատանումների հաճախականությունը կորոշվի*

$$k_1=\sqrt{\frac{cb^2g}{Pl^2}-\left(\frac{\alpha b^2g}{2Pl^2}\right)^2}=\frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P}-\left(\frac{\alpha bg}{2Pl}\right)^2}$$

*բանաձևով։*

A *կետի շարժումը ոչ պարբերական լինելու համար անհրաժեշտ է, որ տեղի ունենա*

$$\frac{cg}{P}\cdot\frac{b^2}{l^2}-\left(\frac{\alpha b^2 g}{2Pl^2}\right)^2\leqslant 0 \tag{7}$$

*պայմանը։ Լուծելով (7) անհավասարությունը* $\alpha$*-ի նկատմամբ, կստանանք*

$$\alpha\geqslant\frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}},$$

Պատ. *1)* $\frac{P}{g}\ddot{y}+\alpha\frac{b^2}{l^2}\dot{y}+c\frac{b^2}{l^2}y=0,$

*2)* $k_1=\frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P}-\left(\frac{\alpha bg}{2pl}\right)^2},$

*3)* $\alpha\geqslant\frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}},$

### 3. Ստիպողական տատանումներ

*Նյութական կետի շարժումը կոչվում է ստիպողական, երբ նրա վրա բացի վերականգնող* $\overline{F}$ *ուժից ազդում է նաև ժամանակից կախված որևէ* $\overline{Q}(t)$ *ուժ։ Հատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում այն դեպքը, երբ այդ ուժը հանդիսանում է ժամանակի պարբերական ֆունկցիա։ Դիցուք* $\overline{Q}$ *ուժն ունի*

$$\overline{Q}=\overline{Q}_0\sin pt$$

տեսքը։ Այս ուժը կոչվում է գրգռող ուժ, p-ն՝ գրգռող ուժի հաճախականություն, իսկ $Q_0$-ն՝ գրգռող ուժի ամպլիտուդ։

Եթե ընդունենք

$$F_x = -cx, \quad Q_{0x} = Q_0,$$

ապա m մասսա ունեցող նյութական կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt$$

կամ

$$\ddot{x} + k^2 x = P \sin pt, \tag{XXII}$$

որտեղ

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{Q_0}{m} = P.$$

(XXII)-ը հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի ոչ համասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումը տրվում է $x = x_1 + x_2$ բանաձևով, որտեղ $x_1$-ը համապատասխան համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ $x_2$-ը՝ անհամասեռ հավասարման մի մասնավոր լուծում։ (XXII) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի $(k \neq p)$

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{P}{k^2 - p^2} \sin pt, \tag{XXIII}$$

որտեղ a և $\alpha$-ն ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։

(XXIII) բանաձևից հետևում է, որ եթե կետի վրա ազդում է գրգռող ուժ, ապա կետը կատարում է բարդ տատանողական շարժում, կազմված 1) k հաճախականություն ունեցող սեփական տատանումներից և 2) p հաճախականություն ունեցող ստիպողական տատանումներից։ Ստիպողական տատանումների հաճախականությունը հավասար է գրգռող ուժի հաճախականությանը։

Ստիպողական տատանումների ամպլիտուդը կլինի

$$A = \frac{P}{|k^2 - p^2|} = \frac{\delta_0}{\left|1 - \left(\frac{P}{k}\right)^2\right|}, \tag{XXIV}$$

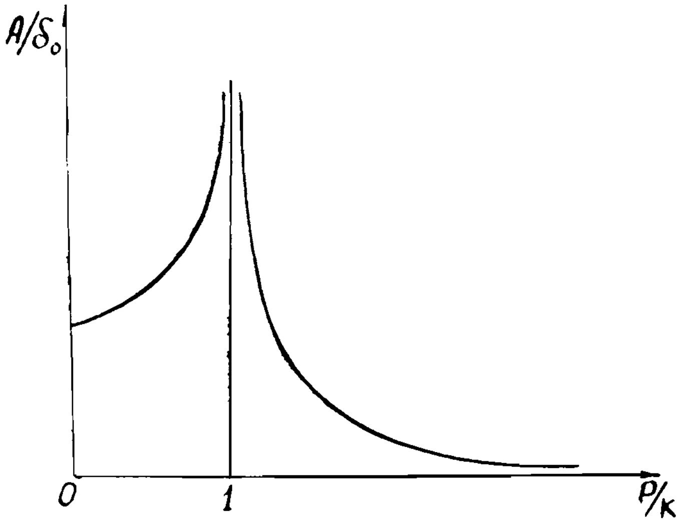
որտեղ

$$\delta_0 = \frac{P}{k^2} = \frac{Q_0}{c}$$

կետի ստատիկական շեղումն է $Q_0$ ուժի ազդեցության տակ։ (XXIV) բանաձևից երևում է, որ ստիպողական տատանումների ամպլիտուդը կախված է գրգռող ուժի P և սեփական տատանումների k հաճախականությունների հարաբերությունից (գծ. 120)։

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ գրգռող ուժի հաճախականությունը համընկնում է սեփական տատանումների հաճախականության հետ, այսինքն՝ $p=k$։ Այս դեպքում (XXII) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x=a \sin (kt+\alpha)-\frac{Pt}{2k}\cos kt, \qquad \text{(XXV)}$$




Գծ. 120

Այստեղից հետևում է, որ այն դեպքում, երբ գրգռող ուժի հաճախականությունը հավասարվում է սեփական տատանումների հաճախականությանը, ստիպողական տատանումների ամպլիտուդը ժամանակի ընթացքում անվերջ աճում է։ Այս երևույթը կոչվում է ռեզոնանսի երևույթ և մեծ դեր է խաղում տեխնիկայում։ Ռեզոնանսի դեպքում ստիպողական տատանումների գրաֆիկը կարելի է ներկայացնել աճող սինուսոիդով, որը հաջորդաբար շոշափում է $x=\frac{P}{2k}t$ և $x=-\frac{Pt}{2k}$ ուղիղները (գծ. 121)։

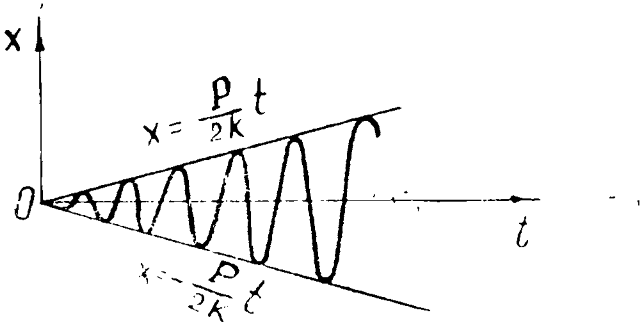
(XXV) բանաձևում եղած $a$ և $\alpha$ ինտեգրման հաստատունները որոշվում են տված նախնական պայմաններից։

Կետի ստիպողական տատանումների վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ քայլերը։

1) Ընտրել կոորդինատական սիստեմը, սկզբնակետը տեղավորելով կետի ստատիկական հավասարակշռության դիրքում։

2) Գծագրի վրա նշել կետի վրա կիրառված ուժերը։

3) Կազմել կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։




Գծ. 121

4) Ինտեգրել դիֆերենցիալ հավասարումը և նախնական պայմաններից որոշել ինտեգրման հաստատունները։

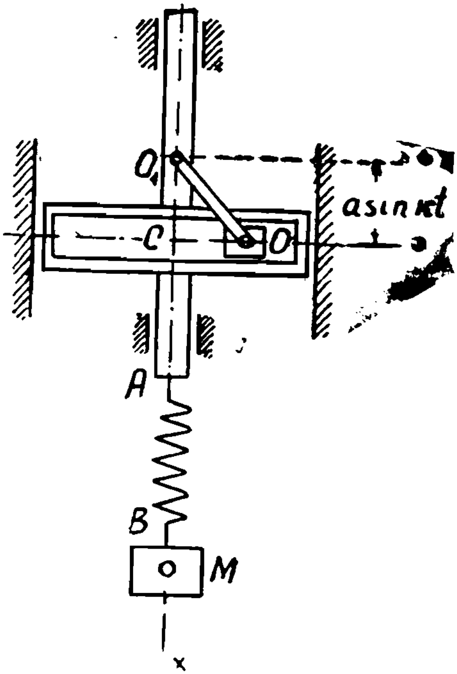
Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կազմելիս անհրաժեշտ է օգտվել նյութական կետի ստատիկական հավասարակշռության պայմանից։ Սա հաճախ հնարավորություն է տալիս շարժման դիֆերենցիալ հավասարման աջ մասում վերացնել որոշ հաստատուններ։

Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը ինտեգրելիս անհրաժեշտ է նախ որոշել հավասարման $k$ և $p$ գործակիցների թվային արժեքները, քանի որ դիֆերենցիալ հավասարման մասնավոր լուծման տեսքը կախված է այդ գործակիցների միջև եղած առնչությունից։

Խնդիրներ լուծելիս, եթե պահանջվում է գտնել այն պայմանը, որի դեպքում տեղի կունենա ռեզոնանսի երևույթ, ապա կարիք չկա ինտեգրելու շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Դրա համար բավական է որոշել գրգռող ուժի և սեփական տատանումների հաճախականությունները և դրանք հավասարեցնել իրար։

*Ստորև բերվում են կետի ստիպողական տատանումների վերաբերյալ մի քանի խնդիրների լուծումները։*

**Խնդիր 119 (856)**։ *Որոշել* M *կշռաքարի շարժումը, որը կախված է* AB *զսպանակից։ Զսպանակի վերին* A *ծայրը կատարում է ուղղաձիգ ուղղությամբ ներդաշնակ տատանումներ* a *ամպլիտուդով և* k *հաճախականությամբ։ Զսպանակի ստատիկ երկարացումը կշռաքարի կշռի ազդեցության տակ հավասար է* δ-*ի։ Սկզբնական պահին* A *կետը գրավում է իր միջին դիրքը, իսկ* M *կշռաքարը գտնվում է հանգստի վիճակում. կշռաքարի սկզբնական դիրքը ընդունել որպես կոորդինատների սկզբնակետ, իսկ* OX *առանցքը ուղղել ուղղաձիգով դեպի ներքև (գծ. 122)։*




*Գծ. 122*

**Լուծում**։ *Քանի որ* mg *ուժի դեպքում զսպանակը երկարում է* δ սմ-*ով, ուստի զսպանակի կոշտությունը կլինի* $c = \frac{mg}{\delta}$, *իսկ վերականգնող ուժը՝* $F_x = -\frac{mg}{\delta}x$։ *Դժվար չէ նկատել, որ գրգռող ուժը կլինի*

$$Q_{ox} \sin kt = ca \sin kt = \frac{mg}{\delta} a \sin kt\text{։}$$

*Գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Այն կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{\delta}x + \frac{mg}{\delta}a \sin kt$$

*կամ* (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{\delta}x = \frac{g}{\delta}a \sin kt\text{։}$$

*(1) հավասարման մեջ k-ն գրգռող ուժի հաճախականությունն է, իսկ $\sqrt{\frac{g}{\delta}}$-ն՝ սեփական տատանումների հաճախականությունը։ Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ* $k \neq \sqrt{\frac{g}{\delta}}$։ *Այդ դեպքում, եթե (1) հավասարման ընդհանուր լուծումը ներկայացնենք $x=x_1+x_2$ տեսքով, որտեղ $x_1$-ը համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ $x_2$-ը՝ անհամասեռ հավասարման մի մասնավոր լուծում, ապա կունենանք*

$$x_1=c_1 \cos \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t + c_2 \sin \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t, \tag{2}$$

*Այստեղ $c_1$ և $c_2$-ը ինտեգրման հաստատուններն են։ (1) դիֆերենցիալ հավասարման մասնավոր լուծումը ներկայացնենք*

$$x_2 = B \sin kt \tag{3}$$

*տեսքով, որտեղ B-ն անհայտ է։ Եթե (3)-ը տեղադրենք (2)-ի մեջ և պահանջենք, որ այդ հավասարումը բավարարի, ապա դրանից կստանանք*

$$B = \frac{ag}{g-\delta k^2}, \tag{4}$$

*Տեղադրելով B-ի արժեքը (4)-ից (3)-ի մեջ, կստանանք $x_2$ մասնավոր լուծումը հետևյալ տեսքով՝*

$$x_2 = \frac{ag}{g-\delta k^2} \sin kt։$$

*Հետևաբար, (1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը այս դեպքում կլինի*

$$x=c_1 \cos \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t + c_2 \sin \sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t + \frac{ag}{g-\delta k^2} \sin kt\,։ \tag{5}$$

M *կետի շարժման նախնական պայմանները կլինեն*

$$\text{երբ} \quad t=0 \;\mid\; x=0, \quad \dot{x}=0։ \tag{6}$$

*Եթե (6) նախնական պայմանները տեղադրենք (5)-ի և նրա ածանցյալի արտահայտության մեջ և լուծենք ստացված երկու հավասարումները, կստանանք*

$$c_1=0, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\delta}{g}} \cdot \frac{agk}{\delta k^2-g}, \tag{7}$$

Տեղադրելով $c_1$ և $c_2$-ի արժեքները (7)-ից (5)-ի մեջ, կունենանք

$$x = \frac{ag}{\delta k^2 - g}\left[ k\sqrt{\frac{\delta}{g}} \sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t - \sin kt \right], \quad \text{երբ} \quad k \gtrless \sqrt{\frac{g}{\delta}},$$

Եթե $k = \sqrt{\frac{g}{\delta}}$, առաջանում է ռեզոնանսի դեպք, և (4) մասնավոր լուծումը իմաստ չի ունենա։ Այս դեպքում մասնավոր լուծումը որոնենք հետևյալ տեսքով՝

$$x_2 = t\,(A \cos kt + B \sin kt), \tag{8}$$

որտեղ A և B-ն անհայտ մեծություններ են։ Տեղադրելով (8)-ը (1) հավասարման մեջ և հավասարեցնելով $\cos kt$ և $\sin kt$-ի գործակիցները, կստանանք A և B անհայտների արժեքները՝

$$A = -\frac{a}{2}\sqrt{\frac{g}{\delta}}, \quad B = 0, \tag{9}$$

Հետևաբար, (8) մասնավոր լուծումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$x_2 = -\frac{a}{2}\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t \cos kt. \tag{10}$$

Այս (10) արդյունքը կարելի է ստանալ անմիջականորեն (XXV) բանաձևից, նրա աջ մասում տեղադրելով

$$P = \frac{g}{\delta} a, \quad k = \sqrt{\frac{g}{\delta}},$$

Հետևաբար, ռեզոնանսի դեպքում (1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x = c_1 \cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t \cos kt. \tag{11}$$

Մնում է (11)-ի և նրա ածանցյալի մեջ տեղադրել (6) նախնական պայմանները և ստացված երկու հավասարումներից որոշել $c_1$ և $c_2$ անհայտները։

**Պ ա տ.**

$$x = \frac{ag}{k^2\delta - g}\left[ k\sqrt{\frac{\delta}{g}} \sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t - \sin kt \right], \quad \text{երբ} \quad k \gtrless \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

$$x = \frac{a}{2}\left[ \sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t - \sqrt{\frac{g}{\delta}}\,t \cos kt \right], \quad \text{երբ} \quad k = \sqrt{\frac{g}{\delta}},$$

**Խնդիր 120 (32.77)**։ *Գտնել P կշիռ ունեցող կետի ուղղագիծ շարժման օրենքը, երբ այդ կետի վրա ազդում են $Q = -cx$ վերականգնող և $F = F_0 e^{-\alpha t}$ ուժերը։ Սկզբնական պահին կետը գտնվել է հավասարակշռության դիրքում։*

Լուծում։ *Եթե կոորդինատական OX առանցքն ուղղենք կետի շարժման հետագծով, իսկ սկզբնակետը տեղավորենք կետի հավասարակշռության դիրքում, ապա կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = -cx + F_0 e^{-\alpha t}$$

*կամ* (1)

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{F_0 g}{P} e^{-\alpha t},$$

*որտեղ*

$$k^2 = \frac{cg}{P}.$$

*(1) հավասարման լուծումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$x = x_1 + x_2, \tag{2}$$

*որտեղ $x_1$-ը համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ $x_2$-ը՝ ոչ համասեռ հավասարման մի մասնավոր լուծում։ Ակընհայտ է, որ*

$$x_1 = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt, \tag{3}$$

*որտեղ $c_1$ և $c_2$-ը ինտեգրման հաստատուններն են։ $x_2$ մասնակի լուծումը փնտրենք*

$$x_2 = Ae^{-\alpha t} \tag{4}$$

*տեսքով, որտեղ A-ն անհայտ մեծություն է։*

*Եթե (4)-ը տեղադրենք (1)-ի մեջ և պահանջենք, որ նա այդ հավասարմանը բավարարի, կստանանք*

$$A\alpha^2 + k^2 A = \frac{gF_0}{P}.$$

*Այստեղից էլ ստացվում է, որ*

$$A = \frac{gF_0}{P(\alpha^2 + k^2)}. \tag{5}$$

*(2)—(5) առնչություններից հետևում է, որ (1) հավասարման ընդհանուր լուծումը կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt + \frac{gF_0}{P(\alpha^2+k^2)} e^{-\alpha t}, \tag{6}$$

$c_1$ և $c_2$ ինտեգրման հաստատունները որոշելու համար օգտվենք խնդրի նախնական պայմաններից։ Այդ պայմանները կլինեն

$$\text{երբ } t=0 \mid x=0, \quad \dot{x}=0. \tag{7}$$

Եթե (7) նախնական պայմանները տեղադրենք (6)-ի և նրա $\frac{dx}{dt}$ ածանցյալի մեջ և ստացված երկու հավասարումներից որոշենք $c_1$ և $c_2$ անհայտները, կստանանք

$$c_1 = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{F_0 g}{P(\alpha^2+k^2)}, \quad c_2 = -\frac{F_0 g}{P(\alpha^2+k^2)}. \tag{8}$$

Մնում է $c_1$ և $c_2$-ի արժեքները (8)-ից տեղադրել (6)-ի մեջ և ստանալ կետի շարժման օրենքը։

Պատ. $x = \frac{F_0 g}{P(\alpha^2+k^2)} \cdot \left(e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{k}\sin kt - \cos kt\right),$

$$\text{որտեղ } \quad k = \sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

**Խնդիր 121 (858)**։ Բեռնավորված ապրանքատար վագոնի զսպանակի ստատիկական ճկվածքը՝ $\Delta l_{ст}=5$ սմ։ Որոշել վագոնի շարժման կրիտիկական արագությունը, որի դեպքում սկսվում է վագոնի «արշավումը», եթե վագոնը ռելսերի կցատեղում կրում է հարվածներ, որոնք առաջացնում են վագոնի ստիպողական տատանումներ զսպանների վրա։ Ռելսերի երկարությունը՝ $L=12$ մ։

Լուծում: Վագոնը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Կոորդինատական Ox առանցքը ուղղենք ռելսին ուղղահայաց, ուղղված դեպի վեր։ Վագոնի վրա, Ox առանցքի ուղղությամբ, ազդում են՝ 1) $-cx$ առաձգական ուժը և 2) $F(t)$ ուժը, որն առաջանում է ռելսերի միացման տեղերում առաջացող հարվածներից։ Ox առանցքով շարժվող վագոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\ddot{x} = -cx + F(t)$$

կամ $\hfill (1)$

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{1}{m} F(t),$$

*որտեղ* $k^2 = \frac{c}{m}$։ *(1) հավասարումից հետևում է, որ վագոնի ուղղաձիգ տատանումների պարբերությունը կլինի*

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \tag{2}$$

c *կոշտության որոշման համար ունենք*

$$c\Delta l_{ստ} = mg։$$

*Այստեղից էլ ստացվում է*

$$c = \frac{mg}{\Delta l_{ստ}}։ \tag{3}$$

*Տեղադրելով* c-*ի արժեքը (3)-ից (2)-ի մեջ, կստանանք*

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l_{ստ}}{g}}, \tag{4}$$

*Վագոնի շարժման կրիտիկական արագության դեպքում պետք է տեղի ունենա*

$$T_1 = T \tag{5}$$

*պայմանը, որտեղ* $T = \frac{L}{V}$։ *Այստեղ* L-*ը ռելսի երկարությունն է, իսկ* V-*ն՝ վագոնի կրիտիկական արագությունը։*

*Տեղադրելով* $T_1$ *և* T-*ի արժեքները (5)-ի մեջ, կստանանք*

$$2\pi\sqrt{\frac{\Delta l_{ստ}}{g}} = \frac{L}{V},$$

*Այստեղից ստացվում է՝*

$$V = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta l_{ստ}}} = \frac{12}{2\cdot 3,14}\sqrt{\frac{9,8}{0,05}} = \frac{84}{3,14}\ \text{մ/վրկ} =$$
$$= 96\ \text{կմ/ժամ}։$$

Պ ա տ. 96 կմ/ժամ։

**Խ ն դ ի ր 122 (32 . 87)**։ Q=200 Գ *կշիռ ունեցող ծանրոցը կախված է* c=1 կԳ/սմ *կոշտության գործակից ունեցող զսպանակից։ Զսպանակը գտնվում է* S=H sin pt *ուժի ազդեցության տակ, որտեղ* H=2 կԳ, p=70 1/վրկ։ *Սկզբնական պահին* $x_0 = 2$ սմ, $\dot{x}_0 = 10$ սմ/վրկ, *կոորդինատների սկզբնակետը ընտրված է ստատիկ հավասարակշռության դիրքում։ Գտնել ծանրոցի շարժման օրենքը։*

Լուծում: *Ծանրոցը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Դրենք այդ կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Այն կլինի*

$$\frac{Q}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=-cx+H\sin pt$$

*կամ* (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=P_0\sin pt,$$

*որտեղ*

$$k^2=\frac{cg}{Q},\quad P_0=\frac{Hg}{Q}, \tag{2}$$

*Քանի որ*

$$k=\sqrt{\frac{1000\cdot 980}{200}}=\sqrt{4900}=70\ ^1/\text{վրկ},\ \ P=70\ ^1/\text{վրկ}.$$

*տեղի ունի ռեզոնանսի երևույթ* ($p=k$)։

*Այս դեպքում (1) հավասարման ընդհանուր լուծումը կարելի է ներկայացնել*

$$x=x_1+x_2 \tag{3}$$

*տեսքով, որտեղ* $x_1$*-ը համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ* $x_2$*-ը՝ անհամասեռ հավասարման մի մասնավոր լուծում։ Ակնհայտ է, որ*

$$x_1=c_1\cos kt+c_2\sin kt, \tag{4}$$

*որտեղ* $c_1$ *և* $c_2$*-ը ինտեգրման հաստատուններն են։* $x_2$ *մասնակի լուծումը ռեզոնանսի դեպքում ունի*

$$x_2=-\frac{P_0t}{2k}\cos kt \tag{5}$$

*տեսքը։ Հետևաբար, (3)—(5) առնչությունների հիման վրա (1) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt-\frac{Hg}{2Qk}t\cos kt\text{։} \tag{6}$$

*Տեղադրելով* x*-ի և նրա ածանցյալի արժեքները (6)-ից*

$$x\,|_{t=0}=2,\quad \dot{x}\,|_{t=0}=10 \tag{7}$$

*նախնական պայմանների մեջ, կստանանք երկու հավասարումներ, որոնցից կորոշենք* $c_1$ *և* $c_2$ *ինտեգրման հաստատունները.*

$$c_1=2,\quad c_2=1{,}14\text{։} \tag{8}$$

*Մնում է $c_1$ և $c_2$-ի արժեքները (8)-ից տեղադրել (6)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենալ, որ* $k=70$ 1/վրկ։

Պատ. $x=(2\cos 70t+1{,}14\sin 70t-70t\cos 70t)$ մմ։

**Խնդիր 123**։ *4 տ կշիռ ունեցող տակառը գտնվում է ջրի մակերևույթի վրա, որի մակարդակը տակառի տեղում փոփոխվում է ալեկոծման հետևանքով ըստ հետևյալ օրենքի՝*

$$s=\frac{4}{9}\sin\frac{3t}{2}$$

*(t-ն վայրկյաններով, s-ը մետրերով)։ Համարելով տակառի հորիզոնական հատույթը հաստատուն ըստ բարձրության և հավասար 5 մ², որոշել տակառի շարժման օրենքը հետևյալ նախնական պայմանների դեպքում՝*

*երբ* $t=0 \mid x=0,\quad \dot{x}=\dot{x}_0=7$ մ/վրկ։

Լուծում: *Եթե տակառը հավասարակշռության դիրքից* x *մետրով խորասուզենք ջրի մեջ, ապա նրա վրա կազդեն հետևյալ ուժերը՝ 1) տակառի 4 տ կշիռը, 2) ջրի վերամբարձ* $(4+5x)$ տ *ուժը և 3) ջրի տատանումից առաջացած* $\frac{4000}{g}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$ կԳ *ուժը։*

*Եթե տակառը ընդունենք որպես նյութական կետ, ապա նրա շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$\frac{4000}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=4000-(4+5x)\cdot 1000-\frac{4000}{g}\sin\frac{3t}{2}$$

*կամ* (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{5g}{4}x=-\sin\frac{3t}{2}\,,$$

*(1)-ը երկրորդ կարգի անհամասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի լուծումը կլինի*

$$x=c_1\sin\frac{7}{2}t+c_2\cos\frac{7}{2}t-\frac{1}{10}\sin\frac{3}{2}t\,, \tag{2}$$

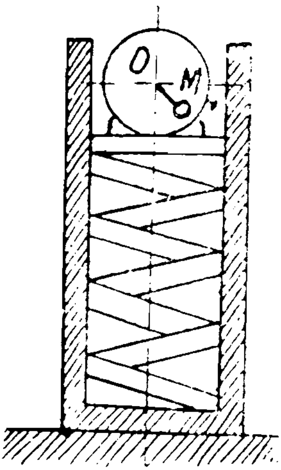
*որտեղ* $c_1$ *և* $c_2$*-ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են տված նախնական պայմաններից։ Եթե (2)-ի և նրա ածանցյալի մեջ տեղադրենք տված նախնական պայմանները, ապա կստանանք* $c_1$ *և* $c_2$*-ի նկատմամբ երկու հավասարումների սիստեմ, որի լուծումից կստանանք*

$$c_1=2{,}04, \quad c_2=0։ \qquad (3)$$

*Մնում է այս $c_1$ և $c_2$-ի արժեքները (3)-ից տեղադրել (2)-ի մեջ և որոշել տակառի շարժման օրենքը։*

Պատ. $x = \left(2{,}04 \sin \frac{7}{2} t - 0{,}1 \sin \frac{3}{2} t \right)$ մ։

**Խնդիր 124 (860)**։ *Էլեկտրական շարժիչը դրված է սպիրալաձև զսպանակով պահվող M հարթակի վրա. շարժիչի և հարթակի ընդհանուր կշիռը հավասար է 32,7* կԳ։ *Զսպանակն այնպիսին է, որ նրա բարձրության 1* սմ *կրճատումը ստացվում է 30* կԳ *բեռի դեպքում։ Շարժիչի լիսեռի վրա դրված է 200* Գ *կշիռ ունեցող $M_1$ բեռը, որը լիսեռի O առանցքից գտնըվում է 1,3* սմ *հեռավորության վրա։ Շարժիչի անկյունային արագությունը հավասար է 30* 1/վրկ։ *Որոշել հարթակի ստիպողական տատանումները, ենթադրելով, որ նա սկզբնական պահին գտնվել է հանգստի վիճակում։ Ընդունել, որ* $g=981$ սմ/վրկ$^2$ *(գծ. 123)։*




*Գծ. 123*

Լուծում: *Շարժիչի ծանրության կենտրոնը շարժվում է ուղղաձիգ ուղղով, որը ընդունենք որպես x առանցք։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք ստատիկական հավասարակշռության դիրքում։*

*Ժամանակի կամավոր t պահին ֆիքսենք շարժիչի ծանրության կենտրոնի դիրքը և նրա հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից նշանակենք x։ Շարժիչի վրա ազդում են՝ 1) նրա P կշիռը, 2) զսպանակի առաձգականության* $F_1=c\,|x-f_{ст}|$ *ուժը և 3) ձգումը բեռի կողմից, որը կունենա* $s=\frac{P_1}{g}\omega^2 a$ *տեսքը (վերջինս ուղղված է ձողով, որը միացնում է շարժիչի կենտրոնը բեռի հետ)։ Ձողը կազմում է x-ի դրական ուղղության հետ* $\pi-\omega t$ *անկյուն։ Դրա հետևանքով ուղղաձիգ ուղղությամբ ազդող ուժը կլինի*

$$F_2=S\cos(\pi-\omega t)։$$

*Շարժիչը սկզբում գտնվել է հավասարակշռության մեջ,* հետևաբար նրա ծանրության կենտրոնը նախնական պահին գտնվել է կոորդինատների սկզբնակետում, և արագությունը եղել է զրո, այսինքն՝

$$\text{երբ } t=0 \quad | \quad x=0, \quad \dot{x}=0։$$

Բոլոր ուժերի պրոյեկցիաների գումարը x առանցքի վրա կլինի

$$F_x=P-c(x-f_{ст})+\frac{P_1}{g}\omega^2 a\cos(\pi-\omega t)=-cx-\frac{P_1}{g}\omega^2 a\cos\omega t \text{ *})։$$

Հետևաբար, շարժիչի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx-\frac{P_1}{g}\omega^2 a\cos\omega t$$

կամ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=-h\sin(\omega t+\delta),$$

որտեղ

$$k^2=\frac{c}{m}=\frac{30\cdot 981}{32{,}7}=30^2, \quad k=30\ 1/\text{վրկ}, \quad \delta=\frac{\pi}{2},$$

$$h=\frac{P_1\omega^2 g}{gP}=a\frac{P_1}{P}\omega^2=0{,}79\cdot 10^{-2}\cdot 30^2=7{,}2\ \text{սմ/վրկ}^2։$$

Հետևաբար, $\omega=k$ և ստացվում է ռեզոնանսի դեպք։ Իսկ ռեզոնանսի ժամանակ հարկադրական տատանումները ունենում են հետևյալ տեսքը՝

$$x_1=-\frac{h}{2k}t\cos(kt+\delta)=\frac{7{,}2}{2\cdot 30}t\sin 30t=0{,}12t\sin 30t\ \text{սմ}։$$

**Պ ա տ.** $x=0{,}12t\sin 30t$ սմ։

**Խ ն դ ի ր 125։** *Էլեկտրաշարժիչը դրված է առաձգական հեծանի վրա, որի ստատիկ ճկվածքը հավասար է f-ի։ Շարժիչի ռոտորի ծանրության կենտրոնը շեղված է նրա պտտման առանցքից r չափով։ Որոշել էլեկտրաշարժիչի ստիպողական տա-*

---

*) Առաձգական ուժի առաջ դրված է բացասական նշան, քանի որ ուժի պրոյեկցիայի նշանը և $(x-f_{ст})$ ուժի անալիտիկ արտահայտության նշանը հակադիր են։ Եթե $x-f_{ст}>0$, ապա զսպանակը ձգված է, ուժը ուղղված է դեպի ներքև (դեպի O կետը), և առաձգական ուժի պրոյեկցիան x առանցքի վրա բացասական է, իսկ եթե $x-f_{ст}<0$, ապա զսպանակը սեղմված է, առաձգական ուժը ուղղված է դեպի վեր (դեպի O կետը), և առաձգական ուժը դրական է։

տանումների a ամպլիտուդը, եթե շարժիչի ռոտորի կշիռը հավասար է P-ի, և ռոտորը պտտվում է ω անկյունային արագությամբ: Շարժիչի կշիռը ռոտորի հետ միասին հավասար է Q-ի։ Հեծանի կշիռը արհամարհել։ Անկյունային արագության ի՞նչ արժեքի դեպքում տեղի կունենա ռեզոնանս։

Լուծում: *Ռոտորը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Կոորդինատական սիստեմի* OX *առանցքն ուղղենք ուղղաձիգ դեպի վեր,* O *սկզբնակետը տեղավորելով ռոտորի առանցքի վրա, նրա ստատիկ հավասարակշռության դիրքում։*

*Շարժիչը հանենք հավասարակշռության դիրքից, բարձրացնելով նրա ծանրության կենտրոնը, որից հետո նա կսկսի շարժվել ուղղաձիգ ուղղությամբ։ Այդ շարժման ժամանակ շարժիչի վրա կազդեն հետևյալ ուժերը՝ 1) հեծանի* $F_1 = -cx$ *առաձգական ուժը, որտեղ* $c = \frac{Q}{f}$ *և 2) ռոտորի պտտումից առաջացած*

$$F_2 = \frac{P}{g}\,\omega^2 r \cos\varphi$$

*ուժը, որտեղ* $\omega = \dot{\varphi}$*։ Այստեղից ստացվում է*

$$\varphi = \omega t + c_1,$$

*որտեղ* $c_1$*-ը ինտեգրման հաստատուն է։*

*Ռոտորի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$\frac{Q}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Q}{f}\,x + \frac{Q}{g}\,\omega^2 r \cos(\omega t + c_1)$$

*կամ*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{f}\,x = \frac{P}{Q}\,\omega^2 r \cos(\omega t + c_1)\text{։} \qquad (1)$$

*Ռոտորի ստիպողական տատանումների* a *ամպլիտուդը գտնելու համար անհրաժեշտ է որոշել (1) անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման որևէ մասնավոր լուծման* $\cos(\omega t + c_1)$ *ֆունկցիայի գործակիցը։ Դրա համար այդ մասնավոր լուծումը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝*

$$x = A\cos(\omega t + c_1), \qquad (2)$$

*որտեղ* A*-ն անհայտ մեծություն է։ Եթե (2)-ը տեղադրենք (1)-ի մեջ և պահանջենք, որ այդ հավասարումը բավարարի, ապա կստանանք*

$$A\omega^2 - \frac{g}{f}A + \frac{P}{Q}\omega^2 r = 0\text{։}$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$A = \frac{P\omega^2 rf}{(g - f\omega^2)Q}\text{։} \qquad (3)$$

*Տեղադրելով* A-*ի արժեքը (2)-ի մեջ, կստանանք*

$$x = \frac{P\omega^2 rf}{(g - f\omega^2)Q}\cos(\omega t + c_1)\text{։} \qquad (4)$$

*Հետևաբար, ստիպողական տատանումների ամպլիտուդը կլինի*

$$a = \frac{P\omega^2 rf}{(g - f\omega^2)Q}\text{։} \qquad (5)$$

*Այժմ պարզենք, թե* ω-*ի ինչպիսի՞ արժեքի դեպքում կառաջանա ռեզոնանս։ Հայտնի է, որ ռեզոնանս առաջանում է այն դեպքում, երբ գրգռող ուժերի հաճախականությունը համընկնում է սեփական տատանումների հաճախականության հետ։ (1) դիֆերենցիալ հավասարումից երևում է, որ սեփական տատանումների հաճախականությունը հավասար է* $k = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{f}}$, *իսկ գրգռող ուժի հաճախականությունը՝* $p = \frac{\omega}{2\pi}$։ *Հետևաբար, ռեզոնանսի երևույթ տեղի կունենա, եթե լինի*

$$\frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{g}{f}} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

*կամ*

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f}}\text{։}$$

Պատ. $a = \frac{Pr\omega^2 f}{(g - f\omega^2)Q}$, *ռեզոնանս տեղի կունենա, եթե լինի* $\omega = \sqrt{\frac{g}{f}}$։

**Խնդիր 126։** m *մասսա ունեցող նյութական կետի վրա ազդում է* $F_x = -cx$ *վերականգնող ուժը և*

$$Q_{ox} = m\varphi(t)$$

ուժը, որտեղ $\varphi(t)$-ն ժամանակից կախված ինտեգրալի ֆունկցիա է։ Գտնել կետի շարժման օրենքը։

Լուծում: Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=\varphi(t), \quad \left(k^2=\frac{c}{m}\right)։ \tag{1}$$

Այս հավասարման լուծումը գտնելու համար օգտագործենք կամայական հաստատունների վարիացիայի մեթոդը։ (1) հավասարման ընդհանուր լուծումը ներկայացնենք

$$x=c_1(t)\cos kt+c_2(t)\sin kt$$

տեսքով, որտեղ $c_1(t)$ և $c_2(t)$-ն անհայտ ֆունկցիաներ են։

Նախ կազմենք

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dc_1}{dt}\cos kt+\frac{dc_2}{dt}\sin kt-kc_1(t)\sin kt+kc_2(t)\cos kt \tag{3}$$

ածանցյալը և ապա պահանջենք, որ $\frac{dx}{dt}$-ն ունենա նույն տեսքը, ինչ այն դեպքում, երբ $c_1$ և $c_2$-ը հաստատուն են։ Դրանից կըստացվի

$$\frac{dc_1}{dt}\cos kt+\frac{dc_2}{dt}\sin kt=0։ \tag{4}$$

(4)-ի հիման վրա (3)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{dx}{dt}=-kc_1(t)\sin kt+kc_2(t)\cos kt։ \tag{5}$$

Այժմ կազմենք (5)-ի ածանցյալը ըստ $t$-ի, կստանանք

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dc_1}{dt}\sin kt+k\frac{dc_2}{dt}\cos kt-k^2c_1(t)\cos kt-$$
$$-k^2c_2(t)\sin kt։ \tag{6}$$

Եթե տեղադրենք $x$, $\frac{dx}{dt}$ և $\frac{d^2x}{dt^2}$-ի արժեքները (2), (5) և (6)-ից (1)-ի մեջ, կունենանք

$$-k\frac{dc_1}{dt}\sin kt+k\frac{dc^2}{dt}\cos kt=\varphi(t)։ \tag{7}$$

Այսպիսով, $c_1(t)$ և $c_2(t)$ անհայտ ֆունկցիաների որոշման համար ստանում ենք (4) և (7) հավասարումները։ Լուծելով այս հավասարումները, կստանանք

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{1}{k}\varphi(t)\sin kt, \quad \frac{dc_2}{dt} = \frac{1}{k}\varphi(t)\cos kt\text{։} \tag{8}$$

Այստեղից էլ ստացվում է որ

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{1}{k}\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\sin k\tau\, d\tau + A, \\ c_2(t) &= \frac{1}{k}\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\cos k\tau\, d\tau + B, \end{aligned} \tag{9}$$

որտեղ A և B-ն ինտեգրման հաստատուններն են։

Տեղադրելով $c_1(t)$ և $c_2(t)$-ի արժեքները (9)-ից (2)-ի մեջ, կստանանք

$$x = A\cos kt + B\sin kt + \frac{\sin kt}{k}\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\cos k\tau\, d\tau -$$

$$-\frac{\cos kt}{k}\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\sin k\tau\, d\tau$$

կամ

$$x = a\sin(kt+\varepsilon) + \frac{1}{k}\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\sin k(t-\tau)\, d\tau\text{։}$$

Պատ. $x = a\sin(kt+\varepsilon) + \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\sin k(t-\tau)\, d\tau,$

որտեղ $a$-ն և $\varepsilon$-ը ինտեգրման հաստատուններ են։

## 4. Դիմադրության ազդեցությունը ստիպողական տատանումների վրա

Դիցուք $m$ մասսա ունեցող M կետի վրա ազդում են $\bar F = -c\bar r$ վերադարձնող, $\bar R = -\mu\bar v$ դիմադրության և $\bar Q = \bar Q_0 \sin pt$ գրգռող ուժերը (գծ. 124)։ Այդ դեպքում կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը, պրոյեկտված x առանցքի վրա, կլինի

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_0 \sin pt$$

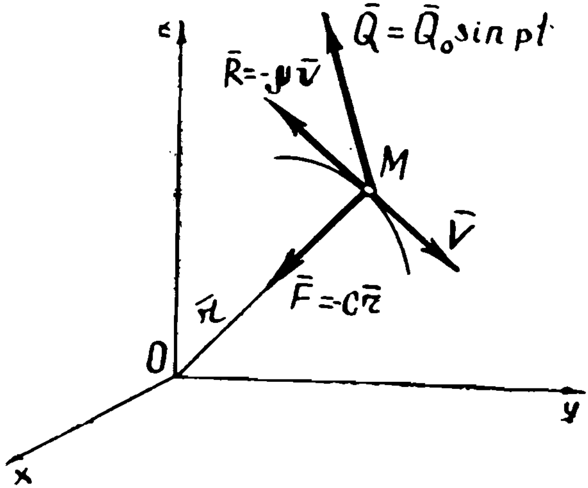
կամ (1)

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = P\sin pt,$$

որտեղ

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2b = \frac{\mu}{m}, \quad P = \frac{Q_0}{m}. \tag{2}$$

*(1)-ը հաստատուն գործակիցներով ոչ համասեռ երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում է։ Նրա լուծումը կարելի է ներկայացնել*




*Գծ. 124*

$$x = x_1 + x_2 \tag{3}$$

*տեսքով, որտեղ* $x_1$*-ը*

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0 \tag{4}$$

*համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ* $x_2$*-ը՝ (1)-ի մի մասնավոր լուծում։*

*Մենք տեսանք, որ (4)-ի ընդհանուր լուծումը, երբ* $k > b$, *կլինի*

$$x_1 = ae^{-bt}\sin(k_1t + \alpha), \tag{5}$$

*որտեղ* $a$ *և* $\alpha$*-ն ինտեգրման հաստատուններն են, իսկ*

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}. \tag{6}$$

*Եթե (1) հավասարման* $x_2$ *մասնավոր լուծումը որոնենք*

$$x_2 = A \sin(pt - \beta) \tag{7}$$

*տեսքով, որտեղ A և β-ն անհայտ մեծություններ են, ապա կըստանանք*

$$A = \frac{P}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4p^2b^2}}, \quad \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{2bp}{k^2-p^2}, \tag{8}$$

*Տեղադրելով A և β-ի արժեքները (8)-ից (7)-ի մեջ, կստանանք (1) հավասարման մասնավոր լուծումը հետևյալ տեսքով՝*

$$x_2 = \frac{P}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4p^2b^2}} \sin(pt-\beta)։ \tag{9}$$

*(3), (5) և (9)-ի հիման վրա (1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1t+\alpha) + \frac{P}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4p^2b^2}} \sin(pt-\beta), \tag{10}$$

*որտեղ a և α-ն ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են խնդրի նախնական պայմաններից։ Եթե տրված են*

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = v_0 \tag{11}$$

*նախնական պայմանները, ապա (10)-ի և նրա ածանցյալի արտահայտության մեջ տեղադրելով (11) նախնական պայմանները, կստանանք երկու հավասարումներ, որոնցից կորոշենք a և α անհայտները։*

*(10)-ից հետևում է, որ եթե կետի վրա միաժամանակ ազդում են վերականգնող և գրգռող ուժեր, ապա կետը կատարում է բարդ տատանողական շարժում, կազմված կետի սեփական և ստիպողական տատանումներից։ Կետի սեփական տատանումների հաճախականությունն է* $k_1 = \sqrt{k^2-b^2}$, *իսկ ստիպողական տատանումների հաճախականությունը՝ գրգռող ուժի p հաճախականությունը։ Ժամանակի ընթացքում կետի սեփական տատանումները մարում են և կարելի է համարել, որ որոշ ժամանակ անցնելուց հետո կետը կատարում է միայն ստիպողական տատանումներ։ Այսպիսով, նյութական կետի շարժումը բնորոշող հիմնական տատանումները A ամպլիտուդ և p հաճախականություն ունեցող զուտ ստիպողական տատանումներ են։*

*Ստիպողական տատանումները մարող չեն, նրանց A ամպլիտուդը և β մեծությունը որոշվում են (8) բանաձևով և կախված չեն նախնական պայմաններից։*

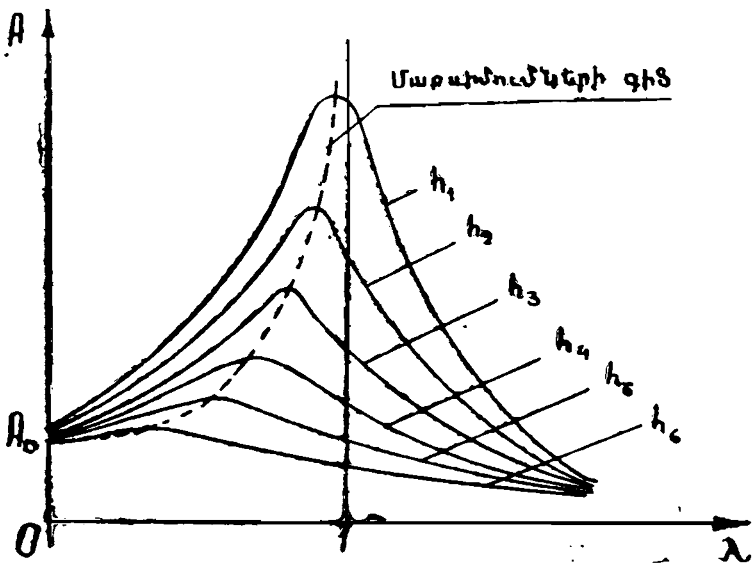
Կատարենք

$$\frac{P}{k} = \lambda, \quad \frac{b}{k} = h, \quad \frac{P}{k^2} = \frac{Q_0}{c} = A_0 \tag{11}$$

նշանակումները, որտեղ $\lambda$-ն կետի գրգռող ուժի և սեփական տատանումների հաճախականությունների հարաբերությունն է, $h$-ը մի մեծություն է, որը համեմատական է դիմադրության $\mu$ գործակցին, իսկ $A_0$-ն $Q_0$ ուժի ազդեցության տակ կետի ստատիկական շեղման մեծությունն է (օրինակ, երբ ծանրոցը կախված է զսպանակից, ճոճվում է, $A_0$-ն հավասար է $Q_0$ ուժի ազդեցության տակ զսպանակի ստատիկական երկարացմանը)։ Այդ դեպքում (8)-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2 h^2}}, \quad \beta = \frac{2\lambda h}{1-\lambda^2}, \tag{12}$$

(12)-ից երևում է, որ $A$ և $\beta$-ն կախված են $\lambda$ և $h$ չափում չունեցող երկու պարամետրերից։ $\lambda=0$ արժեքի դեպքում $A$ ամպլիտուդը ստանում է իր $A=A_0$ մինիմում արժեքը, իսկ $\lambda = \sqrt{1-2h^2}$ արժեքի դեպքում՝ իր մաքսիմում արժեքը, այսինքն՝ $\lambda=\lambda_2$ արժեքի դեպքում տեղի է ունենում ռեզոնանսի դեպքը։ Եթե $\lambda>\lambda_2$, ապա $\lambda$-ի աճման հետ $A$ ամպլիտուդը նվա-

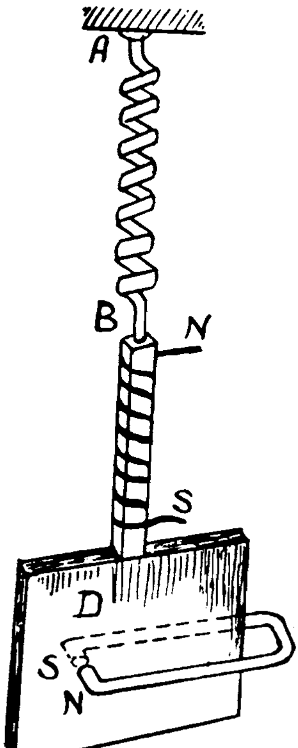



Գծ. 125

գում է, ձգտելով զրոյի։ (12)-ից հետևում է, որ տված λ-ի դեպքում A ամպլիտուդը h-ի աճման հետ նվազում է։ h-ի տարբեր արժեքների դեպքում $A(\lambda)$ ֆունկցիան ներկայացված է գծ. 125-ի միջոցով։

Ստորև բերվում են ստիպողական տատանումների վերաբերյալ մի քանի խնդիրների լուծումները, երբ գոյություն ունի դիմադրության ուժ՝ ուղիղ համեմատական արագության առաջին աստիճանին։

**Խնդիր 127 (854)**։ $c=20$ Գ/սմ կոշտություն ունեցող զսպանակից կախված են սոլենոիդի միջով անցնող 50 Գ կշռով մագնիսական ձողը և մագնիսական բևեռների միջով անցնող 50 Գ կշիռ ունեցող պղնձյա թիթեղը։ Սոլենոիդով անցնում է $I=20\sin\pi t$ ամպեր հոսանքը և մագնիսական ձողի հետ առաջացնում է $F=16\pi I$ դին փոխազդեցության ուժ։ Մրրկային հոսանքների պատճառով պղնձյա թիթեղի արգելակող ուժը հավասար է $kv\Phi^2$, որտեղ $k=10^{-4}$, $\Phi=1000\sqrt{5}$ CGS միավոր, իսկ v-ն թիթեղի արագությունն է։ Որոշել թիթեղի ստիպողական տատանումները (գծ. 126)։



Գծ. 126

Լուծում: Թիթեղն ընդունենք որպես նյութական կետ։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք թիթեղի ստատիկական հավասարակշռության դիրքում և x առանցքը ուղղենք դեպի ներքև։

Ժամանակի կամավոր t պահին ֆիքսենք կետի դիրքը և նրա կոորդինատը նշանակենք x։ Թիթեղի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ 1) թիթեղի կշիռը, 2) զսպանակի առաձգական ուժը, որը որոշվում է $F_1=c|x+f_{ст}|$ բանաձևով, որտեղ c-ն զսպանակի կոշտությունն է, իսկ $f_{ст}$-ը՝ զսպանակի ստատիկական երկարացումը, 3) դիմադրության R և գրգռող $F_2$ ուժերը, որոնց մեծությունները տրված են խնդրի պայմաններում։

*Թիթեղի վրա ազդող ուժերի պրոյեկցիաների գումարը* x *առանցքի վրա կլինի*

$$F_x = P - c\,(x + f_{\text{ստ}}) - R + F_2\text{։} \qquad (1)$$

*Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ թիթեղի հավասարակշռության դեպքում* $P = cf_{\text{ստ}}$, *ապա (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$F_x = -cx - R + F_2\text{։}$$

*Այդ դեպքում թիթեղի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + R + F_2, \qquad (2)$$

*որտեղ* $R = k\Phi^2\dfrac{dx}{dt}$ դին, $F_2 = 16\pi \cdot 20 \sin 8\pi t$։

R *և* $F_2$ *ուժերն արտահայտենք տեխնիկական միավորներով։ Կունենանք*

$$R = \frac{k\Phi^2}{981}\cdot\frac{dx}{dt}\ \text{Գ}, \quad F_2 = \frac{320\pi}{981}\sin 8\pi t\ \text{Գ}\text{։}$$

*Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝*

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2b = \frac{k\Phi^2}{m\cdot 981}, \quad h = \frac{320\pi}{m\cdot 981}\text{։}$$

*Այդ դեպքում (2) դիֆերենցիալ հավասարումը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = h\sin 8\pi t\text{։} \qquad (3)$$

*Հաշվենք* k, n, h, p-*ի թվային արժեքները։ Կունենանք*

$$k^2 = \frac{20\cdot 981}{100} = 196, \quad 2b = \frac{10^6\cdot 5\cdot 981}{10^4\cdot 981\cdot 100} = 5,$$

$$h = \frac{320\cdot 3{,}14\cdot 981}{100\cdot 981} = 10{,}1, \quad p = 8\pi\text{։}$$

*Այստեղից հետևում է, որ* $k \neq p$։ *Այդ դեպքում թիթեղի ստիպողական տատանումները կարտահայտվեն հետևյալ հավասարումով՝*

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\sin(pt - \varepsilon)\text{։}$$

ε-ն որոշելու համար ունենք հետևյալ բանաձևը՝

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2},$$

Տեղադրելով թվային արժեքները, կստանանք

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 8 \cdot 3{,}14}{196-(8 \cdot 3{,}14)^2} = -0{,}288,$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}(-0{,}288) = (180^\circ - 16^\circ 40') = 0{,}91\,\pi\text{։}$$

Թիթեղի ստիպողական տատանումները կարտահայտվեն հետևյալ բանաձևով՝

$$x = \frac{10{,}1}{[196-(8 \cdot 3{,}14)^2] + 4 \cdot 2{,}5^2\,(8 \cdot 3{,}14)^2} \sin(8\pi t - 0{,}91\,\pi) =$$

$$= 0{,}022 \sin(8\,\pi t - 0{,}91\,\pi)\ \text{սմ}\text{։}$$

Պատ. $x = 0{,}022 \sin(8\pi t - 0{,}91\pi)$ սմ։

**Խնդիր 128 (857)**։ $Q=2$ կԳ կշիռ ունեցող նյութական կետը կախված է $c=4$ կԳ/սմ կոշտության գործակից ունեցող զսպանակից։ Կետի վրա ազդում են $S=12 \sin(pt+\delta)$ կԳ ստիպողական ուժը և շարժման դիմադրության $R$ ուժը, որը համեմատական է արագության առաջին աստիճանին և հավասար է $R = 0{,}5\sqrt{mc}\,\dot{x}$ կԳ։ Ինչի՞ է հավասար ստիպողական տատանումների ամպլիտուդի ամենամեծ $A_{max}$ արժեքը։ Ինչպիսի՞ $p$ հաճախականության դեպքում ստիպողական տատանումների ամպլիտուդը կհասնի իր ամենամեծ արժեքին։

Լուծում։ Կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորենք բեռի ստատիկական հավասարակշռության դիրքում և $x$ առանցքը ուղղենք դեպի ներքև։

Ժամանակի կամավոր $t$ պահին ֆիքսենք բեռի դիրքը և նրա կոորդինատը նշանակենք $x$։ Բեռի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ 1) բեռի $Q$ կշիռը, 2) զսպանակի առաձգականության ուժը, որը որոշվում է

$$F_1 = c\,|\,x + f_{\text{ստ}}\,|$$

բանաձևով, որտեղ $c$-ն զսպանակի կոշտությունն է, իսկ $f_{\text{ստ}}$-ը՝ զսպանակի ստատիկական երկարացումը, 3) դիմադրության $R = 0{,}5\sqrt{mc}\,\dot{x}$ ուժը և գրգռող $S=12 \sin(pt+\delta)$ ուժը։

Բեռի վրա ազդող ուժերի պրոյեկցիաների գումարը $x$ առանցքի վրա կլինի

$$F_x = Q - c\,(x + f_{\text{ст}}) - R + S \qquad (1)$$

*Նկատի ունենալով, որ զսպանակի վրա բեռի հավասարակշռության դիրքում* $Q = cf_{\text{ст}}$, *(1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$F_x = -cx - R + S$$

*Այդ դեպքում բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - R + S$$

*կամ*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = P\sin(pt + \delta),$$

*որտեղ*

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad 2b = \frac{0{,}5\sqrt{mc}}{m} = 0{,}5\ k, \quad P = \frac{12}{m}$$

*Հաստատված ռեժիմի դեպքում հավասարակշռության դիրքի շուրջը բեռը կկատարի ստիպողական տատանումներ։ Պետք է գտնել այդ տատանումների ամպլիտուդի ամենամեծ արժեքը։ Մենք ունենք, որ*

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2h^2}}, \qquad (2)$$

*որտեղ*

$$A_0 = \frac{P}{k^2}, \quad \lambda = \frac{P}{k}, \quad h = \frac{b}{k}$$

*Հայտնի է, որ* $A(\lambda)$ *ֆունկցիան կստանա իր ամենամեծ արժեքը, երբ*

$$\lambda = \lambda_2 = \sqrt{1 - 2h^2} \qquad (3)$$

*Տեղադրելով λ-ի այս արժեքը (2)-ի մեջ, կստանանք*

$$A_{max} = \frac{A_0}{\sqrt{(2h^2)^2 + 4h^2(1-2h^2)}} = \frac{A_0}{2h\sqrt{2(1-h^2)}} =$$

$$= \frac{A_0}{2\dfrac{b}{k}\sqrt{2(1-b^2/k^2)}} \qquad (4)$$

*(4) բանաձևը կարելի է ստանալ A-ի (2) արտահայտության ածանցելու միջոցով։*

*Հաշվենք* k, b, P *և* $A_0$*-ի թվային արժեքները։ Կունենանք*

$$k=\sqrt{\frac{4\cdot 981}{2}}=44{,}3,\quad 2b=0{,}5\cdot 44{,}3=22{,}15,$$

$$P=\frac{12\cdot 981}{2}=5886,\quad A_0=\frac{5886}{44{,}3^2}=3։$$

*Տեղադրելով այս արժեքները (4)-ի մեջ, կստանանք*

$$A_{max}=\frac{3}{0{,}5\sqrt{2\left(1-\frac{11{,}075^2}{44{,}3^2}\right)}}=6{,}21\text{ սմ}։$$

*Վերն ասածի հիման վրա ստիպողական տատանումներն իրենց ամենամեծ ամպլիտուդը ստանում են այն դեպքում, երբ տեղի ունի (3) պայմանը։ Այս պայմանից ստացվում է*

$$p=\sqrt{k^2-2b^2}\,,\tag{5}$$

*(5)-ի մեջ տեղադրելով* p, k, b-*ի թվային արժեքները, կստանանք*

$$p=\sqrt{(44{,}3)^2-2(11{,}075)^2}=41{,}5\ ^1/\text{վրկ}։$$

**Պատ.** $A_{max}=6{,}21$ սմ,, $p=41{,}5\ ^1/$վրկ։

**Խնդիր 129 (32 . 94)։** c=4 կԳ/սմ *կոշտություն ունեցող զսպանակից կախված է* Q=392 կԳ *կշռով մարմինը։ Մարմնի վրա ազդում են* S=H sin pt կԳ *ուժը, որտեղ* H = 4 կԳ, p = =50 $^1/$վրկ *և* R=αv *դիմադրության ուժը, որտեղ* α=25 Գ վրկ/սմ, *իսկ* v-*ն մարմնի արագությունն է։ Սկզբնական պահին մարմինը գտնվել է ստատիկական հավասարակշռության դիրքում, և ըսկզբնական արագությունը եղել է զրո։ Գտնել մարմնի շարժման հավասարումը և որոշել շրջանային* p *հաճախականությունը, երբ ստիպողական տատանումների ամպլիտուդը ստանում է իր ամենամեծ արժեքը։*

**Լուծում:** *Մարմինը ընդունենք որպես նյութական կետ։* ox *առանցքը ուղղենք կետի շարժման հետագծով, իսկ սկզբնակետը տեղավորենք կետի հավասարակշռության դիրքում։ Գրենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Այն կլինի*

$$\frac{Q}{g}\ddot{x}=-cx-\alpha\dot{x}+H\sin pt$$

*կամ*

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=h\sin pt,\tag{1}$$

*որտեղ*

$$2b=\frac{\alpha g}{Q},\quad k^2=\frac{gc}{Q},\quad h=\frac{gH}{Q},$$

*(1) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$x=ae^{-bt}\sin\left(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\beta\right)-A\sin(pt-\varepsilon), \tag{2}$$

*որտեղ*

$$\varepsilon=\operatorname{arctg}\frac{2bp}{k^2-b^2},\quad A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}, \tag{3}$$

*a և β-ն ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են*

$$x\big|_{t=0}=0,\quad \dot{x}\big|_{t=0}=0 \tag{4}$$

*նախնական պայմաններից։ Տեղադրելով (4) նախնական պայմանները (2)-ի և նրա ածանցյալի մեջ, կստանանք երկու հավասարումներ, որոնցից կորոշենք* a *և* β *անհայտները։ Կստանանք*

$$a=\frac{ph}{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}\sqrt{4b^2+\frac{(2b^2+p^2-k^2)^2}{k^2-b^2}}, \tag{5}$$

$$\beta=\operatorname{arctg}\frac{2b\sqrt{k^2-b^2}}{2b^2+p^2-k^2},$$

*Տեղադրելով* a *և* β*-ի արժեքները (5)-ից (2)-ի մեջ, կստանանք կետի շարժման հավասարումը (օրենքը)։ Մնում է կազմել* $\frac{dA}{dt}$ *ածանցյալը և այն հավասարեցնել զրոյի։ Լուծելով այդ հավասարումը* p*-ի նկատմամբ, կստանանք*

$$p=\sqrt{k^2-2b^2},$$

**Պատ.** $x=ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\beta)-A\sin(pt-\varepsilon)$, *որտեղ*

$$a=\frac{ph}{(k^2-p^2)+4b^2p^2}\sqrt{4b^2+\frac{(2b^2+p^2-k^2)^2}{k^2-b^2}}=0{,}647 \text{ սմ},$$

$$\beta=\operatorname{arctg}\frac{2b\sqrt{k^2-b^2}}{2b^2+p^2-k^2}=-1{,}07,$$

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}=1{,}23,$$

$$\varepsilon=\operatorname{arctg}\frac{2bp}{k^2-p^2}=0{,}416,$$

$$b = 31{,}25\ ^1/\text{վրկ},$$
$$\sqrt{k^2-b^2} = 95\ ^1/\text{վրկ}։$$

*Ամենամեծ ամպլիտուդը ստացվում է, երբ շրջանային հաճախականությունը հավասար է*

$$p = \sqrt{k^2-2b^2}\ ։$$

Խնդիր **130 (32.99)**։ *200 Գ կշիռ ունեցող ծանրոցը կախված է* $c=20$ Գ/սմ *կոշտություն ունեցող զսպանակից։ Ծանրոցի վրա ազդում են* $S=0{,}2 \sin 14t$ Գ *գրգռող և* $R=50v$ Գ *դիմադրության ուժերը։ Որոշել ստիպողական տատանումների և գրգռող ուժի փուլերի տարբերությունը։*

Լուծում: *Ծանրոցը ընդունենք որպես նյութական կետ։* OX *առանցքը ուղղենք կետի շարժման հետագծով, իսկ սկզբնակետը տեղավորենք կետի հավասարակշռության դիրքում։ Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$\frac{200}{980}\ddot{x}+50\dot{x}+20x=0{,}2\sin 14t$$

*կամ* (1)

$$\ddot{x}+245\dot{x}+98x=\frac{49}{50}\sin 14t\ ։$$

*(1) հավասարման մասնավոր լուծումը փնտրենք*

$$x = A\sin(14t-\varepsilon) \qquad (2)$$

*տեսքով, որտեղ* A *և* ε-*ն անհայտ մեծություններ են։ Տեղադրելով* x-*ի արժեքը (2)-ից (1)-ի մեջ և հավասարեցնելով* cos 14t-*ի գործակիցները, կստանանք*

$$40\sin\varepsilon+700\cos\varepsilon-20\sin\varepsilon = 0։$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$\operatorname{tg}\varepsilon = -35, \qquad \varepsilon = 91°38'\ ։$$

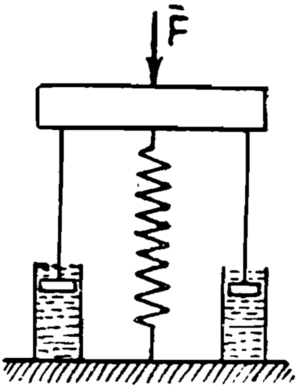
ε *անկյունը կլինի ստիպողական տատանումների և գրգռող ուժի փուլերի տարբերությունը։*

Պատ. $\varepsilon = 91°38'$։

Խնդիր **131 (32.101)**։ m *մասսա ունեցող կետի վրա կիրառված* $F=F_0\sin(pt+\delta)$ *գրգռող ուժի ազդեցությունը փոքրացնելու համար տեղադրված է հեղուկային դեմպֆերով զսպանակավոր ամորտիզատոր։ Զսպանակի կոշտության գործակիցը հավասար է* c-*ի։ Ընդունելով, որ դիմադրության ուժը համեմա-*

*տական է արագության առաջին աստիճանին* $(R=\alpha v)$, *գտնել ամբողջ սիստեմի ամենամեծ դինամիկական ճնշումը հիմքի վրա հաստատված տատանումների դեպքում (գծ. 127)։*

**Լուծում։** $OX$ *առանցքը ուղղենք զսպանակով դեպի ցած, իսկ սկզբնակետը տեղավորենք կետի հավասարակշռության դիրքում։*




*Գծ. 127*

*Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} = F_0 \sin(pt+\delta) \tag{1}$$

*կամ*

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = \frac{F_0}{m}\sin(pt+\delta),$$

*որտեղ*

$$2b = \frac{\alpha}{2m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}:$$

*(1) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$x = x_1 + x_2, \tag{2}$$

*որտեղ* $x_1$*-ը համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ* $x_2$*-ը՝ (1)-ի մի մասնավոր լուծում։ Հայտնի է, որ*

$$x_1 = a\sin(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\varepsilon), \tag{3}$$

*որտեղ* $a$ *և* $\varepsilon$*-ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։* $x_2$ *մասնավոր լուծումը փնտրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$x_2 = A\sin(pt+\beta), \tag{4}$$

*որտեղ* $A$ *և* $\beta$*-ն անհայտ են։ Այդ մեծությունները որոշելու համար* $x_2$*-ի արժեքը (4)-ից տեղադրենք (1)-ի մեջ և հավասարեցնենք ստացված նույնության ձախ և աջ մասերի* $\sin pt$ *և* $\cos pt$*-ի գործակիցները։ Դրանից կստացվի երկու հավասարում։ Լուծելով այդ հավասարումները* $A$ *և* $\beta$ *անհայտների նկատմամբ, կստանանք*

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}, \quad \beta = \mathrm{arctg}\,\frac{2bp}{k^2-p^2}: \tag{5}$$

*Տեղադրելով (3) և (4)-ը (2)-ի մեջ, կստանանք (1) դիֆե-*

*րենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը հետևյալ տեսքով՝*

$$x = ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\varepsilon)+A\sin(pt+\beta), \tag{6}$$

*որտեղ* A *և* β-*ն որոշվում են (5) բանաձևերով։*

*Այժմ որոշենք սիստեմի ամենամեծ դինամիկական ճնշումը հիմքի վրա, երբ շարժումը կայունացված է։ Եթե* N-*ով նշանակենք սիստեմի դինամիկական ճնշումը հիմքի վրա, ապա կունենանք*

$$N|_{t\to\infty} = (cx+\alpha\dot{x})|_{t\to\infty}\,։ \tag{7}$$

*(7)-ը գրելիս նկատի ենք ունեցել, որ հիմքի վրա ազդում են* c *կոշտություն ունեցող զսպանակը և հեղուկային դեմպֆերը։*

*Տեղադրելով* x *և* $\dot{x}$-*ի արժեքները (6)-ից (7)-ի մեջ, կստանանք*

$$N|_{t\to\infty} = cA\sin(pt+\beta)+\alpha pA\cos(pt+\beta)\,։ \tag{8}$$

*Այստեղից հետևում է, որ*

$$N_{max} = A\sqrt{c^2+\alpha^2p^2}\,։ \tag{9}$$

*Տեղադրելով (9)-ի մեջ* A-*ի արժեքը, կստանանք պատասխանը։*

Պատ. $N_{max} = F_0\sqrt{\dfrac{k^4+4b^2p^2}{(k^2-p^2)^2+4p^2b^2}}$,

*որտեղ* $k^2 = \dfrac{c}{m}, \quad b = \dfrac{\alpha}{2m}$։

**Խնդիր 132։** m *մասսա ունեցող կետի վրա ազդում են* $F_x = -cx$ *վերականգնող,* $R_x = \mu\dot{x}$ *դիմադրության և* $Q_{ox} = m\varphi(t)$ *արտաքին ուժերը, ընդ որում* φ(t)-*ն ժամանակի կամայական ֆունկցիա է։ Գտնել կետի շարժման հավասարումը։*

Լուծում։ *Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\ddot{x} = -cx+\mu\dot{x}+m\varphi(t)$$

*կամ* (1)

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x = \varphi(t),$$

*որտեղ*

$$2b = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}\,։$$

*(1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու համար կատարենք տեղադրում՝*

$$x=e^{-bt}u, \tag{2}$$

*որտեղ* $u$*-ն* $t$*-ի որևէ անհայտ ֆունկցիա է։ Այդ դեպքում (2)-ը տեղադրելով (1)-ի մեջ, կստանանք*

$$\frac{d^2u}{dt^2}+(k^2-b^2)\,u=e^{bt}\varphi(t)\,; \tag{3}$$

*Եթե (3)-ում* $k^2$*-ն փոխարինենք* $k^2-b^2$*-ով,* $\varphi(t)$*-ն՝* $e^{-bt}\varphi(t)$*-ով, ապա կստանանք № 126 խնդրի (1) դիֆերենցիալ հավասարումը։ Հետևաբար, (3) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի*

$$u=a\sin\left(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\varepsilon\right)+\frac{1}{\sqrt{k^2-b^2}}\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t}e^{b\tau}\varphi(\tau)\sin\left[\sqrt{k^2-b^2}\,(t-\tau)\right]d\tau, \tag{4}$$

*որտեղ* $a$ *և* $\varepsilon$*-ը ինտեգրման հաստատուններն են։*

*Մնում է (2)-ից տեղադրել* $u$*-ի արժեքը։*

Պատ. $x=ae^{-bt}\sin\left(\sqrt{k^2-b^2}\,t+\varepsilon\right)+\dfrac{e^{-bt}}{\sqrt{k^2-b^2}}\times$

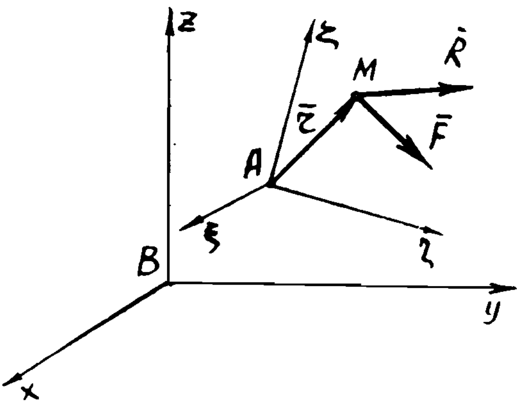
$$\times\int_{t_0}^{t}e^{b\tau}\varphi(\tau)\sin\left[\sqrt{k^2-b^2}\,(t-\tau)\right]d\tau\,;$$

## § 10. ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ԿԵՏԻ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ՇԱՐԺՈՒՄԸ

*Կետի հարաբերական շարժման հիմնական հասկացությունները հանգամանորեն շարադրված են մեր «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների լուծման ուղեցույց» ձեռնարկի երկրորդ պրակի (կինեմատիկայի) երրորդ գլխում։ Այդ պատճառով նպատակահարմար չէ այստեղ նորից անդրադառնալ այդ հարցին։*

**1. Հաշվարկի իներցիոն և ոչ իներցիոն սիստեմներ:** *Իներցիոն կոչվում է այն հաշվարկի սիստեմը, որի նկատմամբ տեղի ունեն դինամիկայի հիմնական օրենքները։ Եթե նյութական կետի վրա ոչ մի ուժ չի ազդում, ապա նա այդ սիստեմի նկատմամբ կատարում է իներցիոն շարժում, այսինքն՝ հավասարաչափ ուղղագիծ շարժում։ Հաշվարկի իներցիոն սիստեմը պայմանականորեն անվանում են նաև անշարժ սիստեմ, իսկ շարժումը այդ* սիստեմի նկատմամբ՝ բացարձակ։ Եթե հաշվառքի սիստեմը կատարում է իներցիոն սիստեմի նկատմամբ համընթաց ուղղագիծ և հավասարաչափ շարժում, ապա այդպիսի սիստեմը նույնպես կլինի իներցիոն, այսինքն՝ նրա նկատմամբ տեղի կունենան դինամիկայի հիմնական օրենքները։ Իսկ եթե տվյալ սիստեմի շարժումը իներցիոն սիստեմի նկատմամբ համընթաց, ուղղագիծ և հավասարաչափ չէ, ապա այդպիսի սիստեմը հանդիսանում է ոչ իներցիոն և նրանում դինամիկայի հիմնական օրենքները, մասնավորապես իներցիայի օրենքը, տեղի չունեն։ Դինամիկայի բոլոր հավասարումները ոչ իներցիոն հաշվառքի սիստեմների վրա տարածելու համար մուծվում են իներցիայի ուժեր, ինչպես այդ կատարվեց Դալամբերի սկզբունքի ժամանակ։

**2. Կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները:** Դիցուք $M$ կետը շարժվում է $A\xi\eta\zeta$ սիստեմի նկատմամբ $\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$ ուժերի ազդեցության տակ, իսկ $A\xi\eta\zeta$ սիստեմն իր հերթին կատարում է ոչ իներցիոն շարժում $Bxyz$ անշարժ սիստեմի նկատմամբ (գծ. 128)։ Այս դեպքում ասում են, որ $M$ կետը կատարում է $A\xi\eta\zeta$ սիստեմի նկատմամբ հարաբերական շարժում։




Գծ. 128

Կազմենք $M$ կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը։ Դրա համար նախ գրենք $M$ կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները $Bxyz$ իներցիոն սիստեմի նկատմամբ՝

$$m\bar W_a = \bar F + \bar R, \tag{I}$$

որտեղ $\bar W_a$-ն M կետի բացարձակ արագացումն է, այսինքն՝ M կետի արագացումը Bxyz սիստեմի նկատմամբ, m-ը կետի մասսան է, իսկ $\bar R$-ը՝ պասսիվ ուժերի համազորը։

Կինեմատիկայից հայտնի է, որ կետի բացարձակ արագացումը հավասար է նրա հարաբերական, փոխադրական և Կորիոլիսի արագացումների գումարին, այսինքն՝

$$\bar W_a = \bar W + \bar W_e + \bar W_c. \tag{II}$$

Այստեղ $\bar W$-ն կետի հարաբերական արագացումն է, այսինքն՝ արագացումը հաշվառքի A սիստեմի նկատմամբ, $\bar W_e$-ն՝ կետի փոխադրական արագացումը, իսկ $\bar W_c$-ն՝ Կորիոլիսի արագացումը։ Հայտնի է, որ

$$\bar W_c = 2(\bar\omega \times \bar V),$$

որտեղ $\bar\omega$-ն A հաշվառքի սիստեմի պտտական շարժման անկյունային արագությունն է B անշարժ սիստեմի նկատմամբ, իսկ $\bar V$-ն՝ կետի հարաբերական արագությունը, այսինքն՝ կետի շարժման արագությունը հաշվառքի $A\xi\eta\zeta$ սիստեմի նկատմամբ։

Տեղադրենք $\bar W_a$-ի արժեքը (II)-ից (I)-ի մեջ և այն գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$m\bar W = \bar F + \bar R + (-m\bar W_e) + (-m\bar W_c). \tag{III}$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$\bar J_e = -m\bar W_e, \qquad \bar J_c = -m\bar W_c. \tag{IV}$$

Այստեղ $\bar J_e$ և $\bar J_c$ վեկտորների մեծությունները ունեն ուժի չափում, և այդ վեկտորները համապատասխանաբար կոչվում են փոխադրական և Կորիոլիսի իներցիայի ուժեր։ (IV)-ի հիման վրա (III) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$m\bar W = \bar F + \bar R + \bar J_e + \bar J_c. \tag{V}$$

(V)-ը իրենից ներկայացնում է կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը վեկտորական տեսքով։ (V) և (II) հավասարումներից հետևում է, որ կետի հարաբերական շարժման հավասարումը կարելի է կազմել նույն ձևով, ինչ որ բացարձակ շարժման դեպքում, միայն այս դեպքում անհրաժեշտ է կետի վրա ազդող ակտիվ և պասսիվ ուժերին ավելացնել նաև փոխադրական և Կորիոլիսի իներցիայի ուժերը։

*Այսպիսով, $\bar{J}_e$ և $\bar{J}_c$ իներցիոն ուժերի մուծումը հնարավորություն է տալիս կետի հարաբերական շարժման հավասարումը կազմել նույն ձևով, ինչ որ կետի բացարձակ շարժման դեպքում։ Այլ ձևով կարելի է ասել, որ $\bar{J}_e$ և $\bar{J}_c$ իներցիոն ուժերի միջոցով հաշվի է առնվում շարժական հաշվանքի սիստեմի շարժման ազդեցությունը կետի հարաբերական շարժման վրա։*

*Եթե* (V) *հավասարման մեջ* $\bar{W}$*-ն փոխարինենք* $\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$*-ով, որտեղ* $\bar{r}$*-ը* M *կետի շառավիղ-վեկտորն է* $A\xi\eta\zeta$ *սիստեմի նկատմամբ և պրոյեկտենք այդ հավասարման երկու մասերը հաշվանքի* A *սիստեմի առանցքների վրա, ապա կստանանք կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները դեկարտյան ուղղանկյուն կոորդինատական առանցքների նկատմամբ։ Այդ հավասարումները կլինեն*

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= F_\xi + R_\xi + J_{e\xi} + J_{c\xi}, \\
m\frac{d^2\eta}{dt^2} &= F_\eta + R_\eta + J_{e\eta} + J_{c\eta}, \\
m\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= F_\zeta + R_\zeta + J_{e\zeta} + J_{c\zeta}.
\end{aligned}
\qquad \text{(VI)}
$$

*Դիտարկենք հետևյալ մասնավոր դեպքերը։*

*Դիցուք շարժական սիստեմը անշարժ սիստեմի նկատմամբ կատարում է համընթաց շարժում* ($\omega=0$)։ *Այդ դեպքում Կորիոլիսի իներցիայի ուժը կլինի զրո* ($\bar{J}_c=0$), *և հարաբերական շարժման* (V) *հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$m\bar{W} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{J}_e.$$

*Եթե փոխադրական շարժումը իրենից ներկայացնում է պտտում անշարժ առանցքի շուրջը, ապա* $\bar{J}_e$ *փոխադրական իներցիայի ուժը հանդիսանում է պտտական և առանցքաձիգ* $\bar{J}_{en}$ *և* $\bar{J}_{e\tau}$ *իներցիայի ուժերի գումարը (գծ. 129), այսինքն՝*

$$\bar{J}_e = \bar{J}_{en} + \bar{J}_{e\tau},$$

*որտեղ*

$$\bar{J}_{e\tau} = -m\bar{W}_{e\tau}, \qquad \bar{J}_{en} = -m\bar{W}_{en}.$$

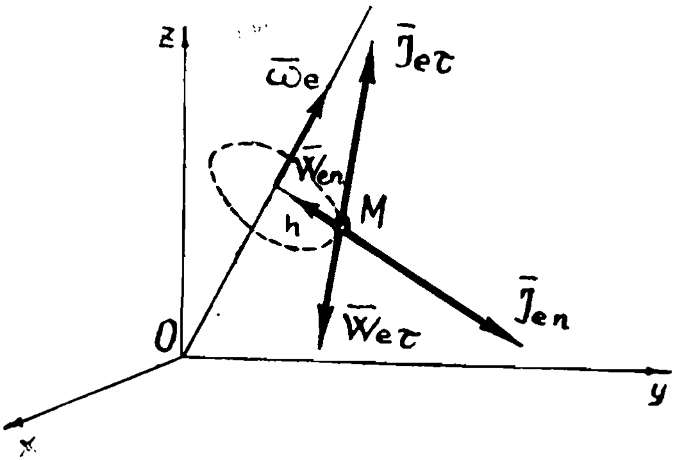
*Սրանց մոդուլները կլինեն*

$$J_{e\tau} = mh\varepsilon, \qquad J_{en} = mh\omega^2,$$

որտեղ h-ը նյութական կետի հեռավորությունն է անշարժ առանցքից, իսկ ω և ε-ը՝ շարժական սիստեմի անկյունային արագությունը և արագացումը անշարժ առանցքի նկատմամբ:

Այս դեպքում կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\bar{W} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{J}_{en} + \bar{J}_{e\tau} + \bar{J}_{c},$$




Գծ. 129

Եթե շարժական սիստեմը կատարում է համընթաց շարժում, ապա Կորիոլիսի իներցիայի ուժը կհավասարվի զրոյի, և կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$m\bar{W} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{J}_{e},$$

Եթե շարժական սիստեմը կատարում է համընթաց, հավասարաչափ ու ուղղագիծ շարժում, ապա փոխադրական և Կորիոլիսի իներցիայի ուժերը կդառնան զրո։ Այս դեպքում կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կհամընկնի կետի բացարձակ շարժման հավասարման հետ։

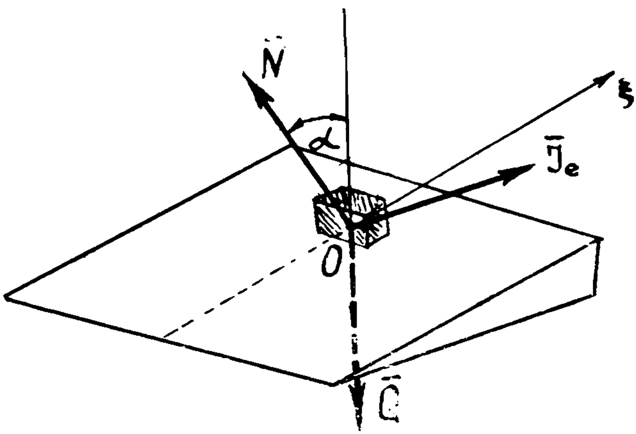
**3. Կետի հարաբերական հավասարակշռության հավասարումը:** Եթե կետը գտնվում է հաշվառքի շարժական A սիստեմի նկատմամբ անշարժ վիճակում, ապա կետի հարաբերական արագությունը և հարաբերական արագացումը դառնում են զրո ($\bar{v}=0$, $\bar{W}=0$), հետևաբար, Կորիոլիսի իներցիայի ուժը նույնպես հավա-

*սարվում է զրոյի (քանի որ $\bar{V}=0$)։ Դրա հետևանքով կետի հարաբերական շարժման (V) հավասարումից ստացվում է, որ կետի հարաբերական հավասարակշռության հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը՝*

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{J}_e = 0։ \qquad \text{(VII)}$$

*Այստեղից հետևում է, որ կետի հարաբերական հավասարակշռության հավասարումը կազմելու համար պետք է նրա վրա ազդող ակտիվ և պասսիվ ուժերին ավելացնել իներցիայի փոխադրական ուժը և գումարը հավասարեցնել զրոյի։*

**Խնդիր 133։** *Գտնել հորիզոնական հարթության վրա դրված եռանկյուն պրիզմայի ուղղագիծ շարժման արագացումը, երբ այդ պրիզմայի կողմնային նիստի վրա գտնվող* Q *կշիռ ունեցող բեռը գտնվում է անշարժ վիճակում։ Պրիզմայի կողմնային նիստը հորիզոնական հարթության հետ կազմում է* $\alpha$ *անկյուն։ Շփումը արհամարհել (գծ. 130)։*




*Գծ. 130*

Լուծում: *Բեռն ընդունենք որպես նյութական կետ, որը գտնվում է պրիզմայի նկատմամբ հավասարակշռության մեջ։ Այստեղ պրիզման հաշվարկի շարժական սիստեմ է։ Բեռի հարաբերական հավասարակշռության հավասարումը կազմելու համար պետք է նրա վրա կիրառված* $\bar{Q}$ *ուժին և* $\bar{N}$ *նորմալ հակազդմանը ավելացնել փոխադրական իներցիայի ուժը։ Հարաբերական հավասարակշռության հավասարումը կլինի*

$$\bar{Q} + \bar{N} + \bar{J}_e = 0։ \qquad (1)$$

*Եթե պրոյեկտենք այս հավասարումը գծագրում ցույց տըր-ված առանցքի վրա, կստանանք*

$$Q_\xi + J_{e\xi} = 0, \tag{2}$$

*որտեղ*

$$Q_\xi = -Q\sin\alpha, \quad J_{e\xi} = \frac{Q}{g} W_e \cos\alpha \tag{3}$$

*Տեղադրելով* $Q_\xi$ *և* $J_{e\xi}$*-ի արժեքները (3)-ից (2)-ի մեջ, կունենանք*

$$-Q\sin\alpha + \frac{Q}{g} W_e \cos\alpha = 0 \tag{3}$$

*Այստեղ* $W_e$*-ն բեռի փոխադրական արագացումն է, այսինքն՝ եռանկյուն պրիզմայի ուղղագիծ շարժման արագացումը։*

Պատ. $W_e = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$։

**4. Կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը կետի հարաբերական շարժման դեպքում։** *Կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը, երբ կետը կատարում է հարաբերական շարժում, կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}\cdot d\bar{r} + \bar{J}_e\cdot d\bar{r} + \bar{J}_c\cdot d\bar{r}\ , \tag{VIII}$$

*որտեղ* $\bar{r}$*-ը կետի շառավիղ-վեկտորն է հաշվարքի* A *շարժական սիստեմի նկատմամբ։ Այս* (VIII) *բանաձևը ստացվում է կետի հարաբերական շարժման* (V) *հավասարումից, եթե այն սկալյար-որեն բազմապատկենք* $d\bar{r}$*-ով։ Դժվար չէ նկատել, որ* $\bar{J}_c\cdot d\bar{r} = 0$*։ Իրոք,*

$$\bar{J}_c\cdot d\bar{r} = -2m(\bar{\omega}\times\bar{v})\cdot d\bar{r} = -2m\left(\bar{\omega}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)\cdot d\bar{r} = 0։$$

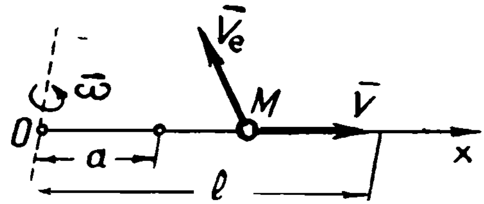
*Այդ դեպքում* (VIII) *հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F}\cdot d\bar{r} + \bar{J}_e\cdot d\bar{r}\ ։ \tag{IX}$$

*Նշանակում է, հարաբերական շարժման դեպքում նյութական կետի կինետիկ էներգիայի դիֆերենցիալը հավասար է կետի վրա կիրառված ակտիվ և պասսիվ ուժերի ու փոխադրական շարժումից առաջացած իներցիոն ուժի էլեմենտար աշխատանքների գումարին։*

Խնդիր **134**։ *Օղակը շարժվում է իդեալական ողորկ ձո-*

ղով, ընդ որում այդ ձողը հավասարաչափ պտտվում է հորիզոնական հարթության վրա իր ծայրերից մեկի շուրջը $\omega=2\ 1/\text{վրկ}$ անկյունային արագությամբ։ Ձողի երկարությունն է $l=5$ սմ։ $t=0$ պահին օղակը գտնվել է անշարժ վիճակում, և նրա հեռավորությունը այն ծայրից, որի շուրջը նա պտտվում է, եղել է $a=1$ սմ։ Գտնել օղակի բացարձակ արագությունը այն պահին, երբ նա դուրս է գալիս ձողից (գծ. 131)։




Գծ. 131

Լուծում: *Օղակը ընդունենք որպես նյութական կետ։ OX առանցքը ուղղենք ձողի երկարությամբ, O սկզբնակետը տեղավորենք ձողի այն ծայրում, որի շուրջը կատարվում է պտտական շարժումը (գծ. 131)։ Կետի $\bar{V}$ հարաբերական արագությունը որոշելու համար օգտվենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից, երբ կետը կատարում է հարաբերական շարժում։ Այդ թեորեմից ունենք*

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\bar{F}\cdot d\bar{r}+\bar{N}\cdot d\bar{r}+\bar{J}_e\cdot d\bar{r}, \tag{1}$$

*Այս հավասարումը կազմելու համար անհրաժեշտ է հաշվել օղակի $\bar{P}$ կշռի, ձողի $\bar{N}$ հակազդման և փոխադրական $\bar{J}_e$ իներցիոն ուժի էլեմենտար աշխատանքները։ Դժվար չէ նկատել, որ $\bar{P}$ և $\bar{N}$ ուժերի աշխատանքները հավասար են զրոյի, քանի որ այդ ուժերը ուղղահայաց են օղակի տեղափոխմանը։ Ըստ պայմանի $\bar{\omega}=\overline{\text{const}}$։ Հետևաբար, փոխադրական իներցիոն ուժի մոդուլը կլինի*

$$J_e = m\omega^2 x,$$

*որտեղ* $x=OM$։ *Փոխադրական իներցիոն ուժի աշխատանքի համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$A_{M_0M_1}=\int_{(M_0)}^{(M_1)} J_e dx = m\omega^2\int_a^l x\,dx=\frac{m\omega^2}{2}\left(l^2-a^2\right), \tag{2}$$

*Նկատի ունենալով, որ օղակի սկզբնական հարաբերական արագությունը հավասար է զրոյի, (1) և (2)-ից կստանանք*

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{m\omega^2}{2}\,(l^2-a^2)\text{։} \qquad (3)$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$v=\omega\sqrt{l^2-a^2}\text{։} \qquad (4)$$

*Փոխադրական արագությունը այդ նույն մոմենտում կլինի*

$$v_e=l\cdot\omega\text{։} \qquad (5)$$

*Հետևաբար, օղակի բացարձակ արագությունը այն մոմենտում, երբ օղակը դուրս է ընկնում ձողից, կլինի*

$$v_a=\sqrt{v^2+v_e^2}=\omega\sqrt{2l^2-a^2}=2\sqrt{2\cdot 25-1}=14 \text{ սմ/վրկ։}$$

**Պատ.** $v_a=14$ սմ/վրկ։

**5. Կետի հարաբերական շարժման վերաբերյալ խնդիրների լուծումը:** *Կետի հարաբերական շարժման վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը։*

*1. Ընտրել շարժական* $A\xi\eta\zeta$ *և անշարժ* $Bxyz$ *հաշվառքի սիստեմները։*

*2. Գտնել կետի* $\overline{W}_e$ *փոխադրական և* $\overline{W}_c$ *Կորիոլիսի արագացումները։*

*3. Որոշել կետի փոխադրական* $\bar{J}_e=-m\overline{W}_e$ *և* $\bar{J}_c=-m\overline{W}_c$ *Կորիոլիսի իներցիայի ուժերը։*

*4. Ոչ ազատ կետը ազատել կապերից, կապերը փոխարինելով համապատասխան հակազդումներով։ Դրանից հետո նշել այն ուժերը, որոնք ազդում են կետի վրա։*

*5. Գրել շարժման նախնական պայմանները։*

*6. Գրել կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները* (VI) *տեսքով և ինտեգրել այդ հավասարումները։*

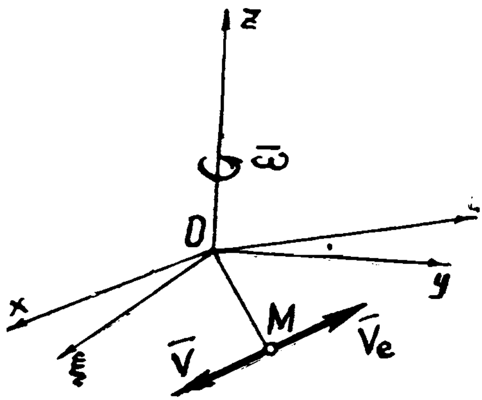
*7. Նախնական պայմանների հիման վրա որոշել ինտեգրման հաստատունները։*

*8. Կետի հարաբերական հավասարակշռության վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս օգտվել հարաբերական հավասարակշռության* (VII) *հավասարումներից։*

*9. Խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ անշարժ սիստեմի համար գոյություն ունեցող դինամիկայի հիմ-*

*նական թեորեմները կարելի է ձևակերպել կետի հարաբերական շարժման համար, միայն անհրաժեշտ է այս դեպքում կետի վրա կիրառված ակտիվ և պասսիվ ուժերին ավելացնել փոխադրական և Կորիոլիսի իներցիայի ուժերը։*

**Խնդիր 135։** M *կետը գտնվում է հավասարակշռության մեջ անշարժ* oxy *կոորդինատական սիստեմի* O *սկզբնակետից* OM *հեռավորության վրա։* Oξηζ *շարժական կոորդինատական սիստեմը կատարում է հավասարաչափ պտտական շարժում* oz *առանցքի շուրջը* ω *անկյունային արագությամբ, ընդ որում պտտումը կատարվում է ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ։ Կազմել* M *կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը (գծ. 132)։*




*Գծ. 132*

**Լուծում:** *Հայտնի է, որ*

$$\bar{V}_a = \bar{V} + \bar{V}_e, \tag{1}$$

*որտեղ* $\bar{V}_a$*-ն* M *կետի բացարձակ արագությունն է,* $\bar{V}$*-ն՝ հարաբերական, իսկ* $\bar{V}_e$*-ն՝ փոխադրականը։ Քանի որ* M *կետը* oxyz *սիստեմի նկատմամբ անշարժ է, ապա* $\bar{V}_a = 0$*։ Կետի փոխադրական արագությունը կլինի* $\bar{V}_e = \bar{\omega} \times \overline{OM}$*։ Հետևաբար, (1)-ից կունենանք*

$$\bar{V} = -\bar{V}_e = -\bar{\omega} \times \overline{OM}\text{։} \tag{2}$$

*Այսպիսով, հարաբերական շարժման դեպքում կետը կատարում է պտտական շարժում* O *կենտրոն ունեցող շրջանագծով,* Oξη *շարժական սիստեմի շարժման հակառակ ուղղությամբ (գծ. 132)։*

*Դժվար չէ նկատել, որ* M *կետի փոխադրական արագացման պտտական բաղադրիչը հավասար է զրոյի* ($W_{e\tau} = 0$), *քանի որ շարժական սիստեմը կատարում է հավասարաչափ պտտական շարժում* ($\varepsilon = 0$), *իսկ առանցքաձիգ բաղադրիչը տարբեր է զրոյից։ Սրա մեծությունը հավասար է* $W_e = \omega^2 R$*-ի և ուղղված է* դեպի O կենտրոնը։ Հետևաբար, փոխադրական իներցիայի ուժի մեծությունը կլինի $J_e = m\omega^2 R$ և ուղղված կլինի O կենտրոնից դեպի դուրս։

*Այժմ մնում է որոշել Կորիոլիսի իներցիայի ուժը։ Քանի որ անկյունային արագության վեկտորը ուղղահայաց է xoy հարթությանը և ուղղված է դեպի վեր, ապա Կորիոլիսի*

$$\bar{W}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{V})$$

*արագացումը կունենա փոխադրական իներցիայի ուժի ուղղությունը, այսինքն՝ ուղղված կլինի O կետից դեպի դուրս։ Բայց Կորիոլիսի իներցիայի ուժը ունի Կորիոլիսի արագացման վեկտորի հակադիր ուղղությունը, որի հետևանքով Կորիոլիսի իներցիայի ուժը ուղղված կլինի դեպի O կենտրոնը։ Կորիոլիսի իներցիայի ուժի մեծության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$J_c = 2m\,|\bar{\omega} \times \bar{V}| = 2m\,\omega v \sin\frac{\pi}{2} = 2m\,\omega v = 2m\,\omega^2 R. \qquad (3)$$

*Այսպիսով, Կորիոլիսի իներցիայի ուժը ունի փոխադրական իներցիայի ուժի հակադիր ուղղությունը, և նրա մեծությունը որոշվում է (3) բանաձևով։ Փոխադրական և Կորիոլիսի իներցիայի ուժերի համազորը ուղղված է դեպի O կենտրոնը և մեծությամբ հավասար է* $m\omega^2R$*-ի։ Կետի հարաբերական դիֆերենցիալ շարժման հավասարումը կլինի*

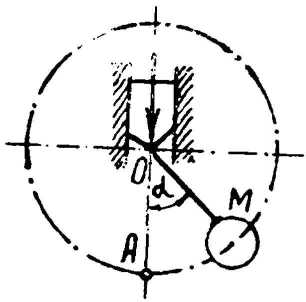
$$m\bar{W} = -m\omega^2\bar{R}.$$

**Պատ.** $m\bar{W} = -m\omega^2\bar{R}$, *որտեղ* $\bar{R}$*-ը ուղղված է* $\overline{MO}$*-ով։*

**Խնդիր 136 (864)**։ *l երկարություն OM մաթեմատիկական ճոճանակը սկզբնական պահին շեղված է OA հավասարակշռության դիրքից որևէ σ անկյունով և ունի զրոյի հավասար արագություն։ Այդ պահին նրա կախման կետի արագությունը նույնպես հավասար է զրոյի։ Բայց այնուհետև նա իջնում է* $p \geqslant g$ *հաստատուն արագացումով։ Որոշել շրջանագծի այն աղեղի s երկարությունը, որը գծում է M կետը O կետի շուրջը հարաբերական շարժման ժամանակ (գծ. 133)։*

**Լուծում**: *Ճոճանակի վրա ազդում են՝ իր կշիռը, ուղղված դեպի ներքև և ձողի հակազդումը, ուղղված ձողով։ Ճոճանակի հարաբերական շարժման հավասարումը ստանալու համար անհրաժեշտ է այս ուժերին ավելացնել փոխադրական և Կորիոլիսի* *իներցիայի ուժերը։ Փոխադրական իներցիայի ուժը ուղղված է ուղղաձիգ դեպի վեր և մեծությամբ հավասար է* mp*-ի։ Քանի որ փոխադրական շարժումը ուղղագիծ է, ուստի Կորիոլիսի իներցիայի ուժը հավասար կլինի զրոյի։*

*Եթե գրենք ճոճանակի հարաբերական շարժման վեկտորական հավասարումը և այն պրոյեկտենք ճոճանակի հարաբերական շարժման հետագծի շոշափողի ուղղության վրա, կստանանք*



*Գծ. 133*

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi + mp\sin\varphi, \qquad (1)$$

*որտեղ* $\overline{V}$*-ն ճոճանակի հարաբերական արագությունն է, իսկ* $\varphi$*-ն՝ շեղման անկյունը ուղղաձիգից։ (1)-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{d^2s}{dt^2} + (g-p)\sin\varphi = 0։ \qquad (2)$$

*Այժմ դիտարկենք երկու դեպք.*

*1)* $p=g$։ *Այս դեպքում (2)-ից կստանանք*

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 0։ \qquad (3)$$

*Նախնական պայմաններից ունենք*

$$\text{երբ } t=0 \mid s=0, \quad \dot{s}=0։ \qquad (4)$$

*(3) հավասարման լուծումը (4) նախնական պայմանների հիման վրա կլինի*

$$s = 0։$$

*2)* $p > g$։ *Եթե ճոճանակի երկարությունը նշանակենք* $l$, *ապա* $s$*-ը հավասար կլինի* $l(\varphi-\alpha)$, *և (2) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{p-g}{l}\sin\varphi = 0։ \qquad (5)$$

$s=l(\varphi-\alpha)$*-ի հիման վրա (4) նախնական պայմանները կլինեն*

$$t=0, \quad \varphi=\alpha, \quad \dot{\varphi}=0։ \qquad (6)$$

*Այժմ (5) հավասարումը բազմապատկենք dφ-ով և ինտեգրենք, միաժամանակ նկատի ունենալով (6) նախնական պայմանները։ Կստացվի*

$$\dot{\varphi}^2 = 2\cdot\frac{p-g}{l}(\cos\alpha-\cos\varphi)\text{։} \tag{7}$$

s *աղեղի էքստրեմալ արժեքները որոշելու համար նախ կազմենք* $\frac{ds}{dt}$ *ածանցյալը, այնուհետև (7)-ից տեղադրենք* $\dot{\varphi}$*-ի արժեքը և ստացածը հավասարեցնենք զրոյի։ Կստանանք*

$$\cos\alpha-\cos\varphi=0\text{։} \tag{8}$$

*Այստեղից ստացվում է*

$$\varphi=-\alpha+2k\pi \text{ և } \varphi=\alpha+2\pi n \quad (k, n=0, \pm1, \pm2, \ldots)\text{։} \tag{9}$$

*Խնդրի պայմաններից երևում է, որ* $\varphi$ *անկյունը փոփոխվում է* $\alpha\leqslant\varphi<2\pi$ *սահմաններում։ Հետևաբար, (9)-ից կստանանք*

$$\varphi=\alpha \text{ և } \varphi=2\pi-\alpha\text{։} \tag{10}$$

*Այստեղ* $\varphi=\alpha$ *համապատասխանում է* $s=0$ *արժեքին, իսկ* $\varphi=2\pi-\alpha$*-ի դեպքում* s*-ը ստանում է իր ամենամեծ արժեքը՝* $s_{max}=l(2\pi-\alpha-\alpha)=2l(\pi-\alpha)$։

Պատ. *1) երբ* $p=g$, $s=0$, *2) երբ* $p>g$, $s=2l(\pi-\alpha)$։

**Խնդիր 137 (867)**։ *Ուղիղ հորիզոնական ճանապարհով շարժվող վագոնում ճոճանակը կատարում է փոքր ներդաշնակ տատանումներ, ընդ որում նրա միջին դիրքը մնում է ուղղաձիգից շեղված 6° անկյունով։ 1) Որոշել վագոնի* W *արագացումը, 2) գտնել ճոճանակի տատանումների* T *և* $T_1$ *պարբերությունների տարբերությունը, որտեղ* T*-ն ճոճանակի պարբերությունն է անշարժ վագոնի դեպքում, իսկ* $T_1$*-ը՝ պարբերությունը վագոնի տվյալ շարժման դեպքում։*

Լուծում: *Ճոճանակի շարժումը վագոնի նկատմամբ կլինի հարաբերական շարժում։ Ճոճանակի թելից կախված* M *բեռը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Նրա վրա ազդում է իր* $m\bar{g}$ *կշիռը և թելի* $\bar{N}$ *հակազդումը, որն ուղղված է թելով դեպի* O *կետը (գծ. 134)։* M *կետի հարաբերական շարժման հավասարումը կազմելու համար պետք է նրա վրա ազդող այս* $m\bar{g}$ *և* $\bar{N}$ *ուժերին ավելացնել փոխադրական և Կորիոլիսի իներցիայի ուժերը։ Կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի*

$$m\bar{W} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{J}_e + \bar{J}_c, \tag{1}$$

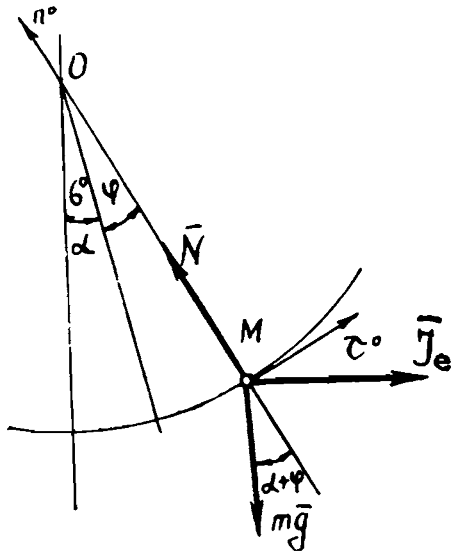
*որտեղ* $\bar{W}$*-ն կետի հարաբերական արագացումն է, իսկ* $\bar{J}_e$ *և* $\bar{J}_c$*-ն՝ փոխադրական և Կորիոլիսի իներցիայի ուժերը։ Քանի որ վագոնը (շարժական սիստեմը) կատարում է համընթաց շարժում, ապա Կորիոլիսի իներցիայի ուժը հավասար կլինի զրոյի՝*

$$\bar{J}_c = -2m(\bar{\omega} \times \bar{v}) = 0 \tag{2}$$

*Փոխադրական իներցիայի ուժի համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$\bar{J}_e = -m\bar{W}_e, \tag{3}$$

*որտեղ* $\bar{W}_e$*-ն վագոնի արագացումն է։*




*Գծ. 134*

*(2)-ի և (3)-ի հիման վրա* M *կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝*

$$m\bar{W} = m\bar{g} + \bar{N} - m\bar{W}_e \tag{4}$$

M *կետում տանենք* $M\tau$ *շոշափողը* φ *անկյան հաշվման ուղղությամբ, և (4) վեկտորական հավասարումը պրոյեկտենք* $M\tau$ *շոշափողի ուղղության վրա։ Կստանանք*

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin(\alpha+\varphi) + mW_e\cos(\alpha+\varphi), \tag{5}$$

*որտեղ* $\alpha=6^\circ$*, իսկ* φ*-ն ճոճանակի շեղումն է հավասարակշռության դիրքից, երբ ճոճանակը կատարում է տատանողական շարժում։*

*Եթե նկատի ունենանք, որ* $v=l\dot{\varphi}$*, որտեղ* $l$*-ը ճոճանակի թելի երկարությունն է, ապա (5)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin(\alpha+\varphi) = \frac{1}{l}W_e\cos(\alpha+\varphi) \tag{6}$$

Դիցուք ճոճանակը տատանողական շարժում չի կատարում ($\varphi=0$)։ Այդ դեպքում (6)-ից կունենանք

$$\frac{g}{l}\sin\alpha=\frac{1}{l}W_e\cos\alpha\text{։}\tag{7}$$

Այստեղից ստացվում է

$$W_e=g\,\mathrm{tg}\,\alpha=980\cdot\mathrm{tg}\,6^\circ=980\cdot0{,}105=103\ \text{սմ/վրկ}^2\text{։}\tag{8}$$

Եթե նկատի ունենանք, որ $\varphi$ անկյունը շատ փոքր է, ապա կարող ենք գրել, որ

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\varphi)&=\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi\approx\sin\alpha+\varphi\cos\alpha,\\ \cos(\alpha+\varphi)&=\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi\approx\cos\alpha-\varphi\sin\alpha\text{։}\end{aligned}\tag{9}$$

Տեղադրելով այս արժեքները (6)-ի մեջ, կստանանք

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}(\sin\alpha+\varphi\cos\alpha)=\frac{1}{l}W_e(\cos\alpha-\varphi\sin\alpha)\text{։}\tag{10}$$

(7)-ի հիման վրա (10)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l\cos\alpha}\varphi=0\text{։}\tag{11}$$

Դժվար չէ նկատել, որ այս դեպքում ճոճանակի տատանման պարբերությունը կլինի

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos6^\circ}\text{։}$$

Իսկ եթե վագոնը անշարժ է, ապա ճոճանակի T պարբերության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\text{։}$$

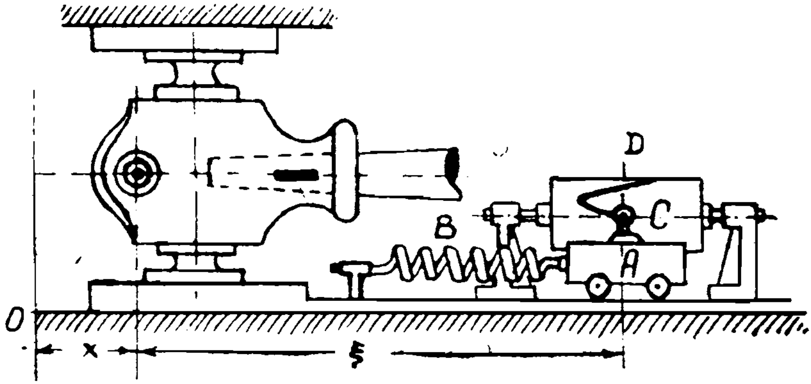
Հետևաբար,

$$T-T_1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}-2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos6^\circ}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,(1-\sqrt{\cos6^\circ})=T\,(1-\sqrt{\cos6^\circ})=0{,}0028T\text{։}$$

Պատ. *1)* $W_e=103$ սմ/վրկ², *2)* $T-T_1=0{,}0028T$։

**Խնդիր 138 (869)**։ *Շոգեմեքենայի մխոցի արագացումները չափելու համար օգտագործվում է մի սարքավորում, որը բաղկացած է A շարժական սայլակից և կրեյցկոպֆի հետ կոշտ ամրացված հավասարաչափ պտտվող D թմբուկից։ Սայլակը, որի*

կշիռն է Q, շնորհիվ հատուկ ուղղորդների կատարում է համըն-
թաց շարժում, որի դեպքում սայլակի վրա ամրացված E մա-
տիտի ծայրը գծում է ուղիղ գիծ զուգահեռ կոթի առանցքին։ A
սայլակը միացված է կրեյցկոպֆին c կոշտությունն ունեցող B
զսպանակով։ Ժամացույցի մեխանիզմը պտտում է r շառավիղ




Գծ. 135

ունեցող թմբուկին $\omega$ անկյունային արագությամբ։ Գտնել թմբու-
կի ժապավենի վրա մատիտով գծված կորի հավասարումը, եթե
կրեյցկոպֆի շարժումը նրա ուղղորդների նկատմամբ արտա-
հայտվում է $x = a + l \cos \Omega t$ հավասարումով, որտեղ $a$-ն որևէ
հաստատուն է՝ կախված անշարժ կոորդինատական սիստեմի
սկզբնակետի ընտրությունից, $l$-ը մխոցի քայլն է, $\Omega$-ն՝ շոգեմե-
քենայի թափանիվի անկյունային արագությունը (գծ. 135)։

Լուծում։ Տանենք շարժական $O\xi\eta$ կոորդինատական սիս-
տեմը, տեղավորելով նրա սկզբնակետը կրեյցկոպֆի չեզոք դիր-
քում (գծ. 135)։ Կրեյցկոպֆի փոխադրական համընթաց շարժու-
մը որոշվում է $x$ կոորդինատով։ Սայլակի վրա կիրառված են
զսպանակի

$$F = c\,(\xi - \xi_0)$$

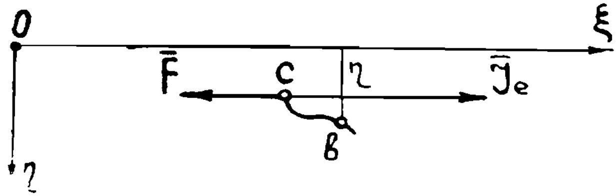
առաձգական ուժը (գծ. 136) և հենարանային հակազդումները։
$\xi_0$-ն c կետի $\xi$ օրդինատն է զսպանակի չլարված վիճակում։

Գրենք D թմբուկի c կետի հարաբերական շարժման դիֆե-
րենցիալ հավասարումը վեկտորական տեսքով։ Այն կլինի

$$m\overline{W} = \overline{F} + \overline{N} + \overline{J}_e, \qquad (1)$$

որտեղ $\overline{W}$-ն թմբուկի c կետի հարաբերական արագացումն է,

$\bar{F}$-ը՝ զսպանակի առաձգական ուժը, $\bar{N}$-ը՝ հենարանային հակազդումը, իսկ $\bar{J}_e$-ն՝ փոխադրական իներցիայի ուժը։ Դժվար չէ նկատել, որ փոխադրական իներցիայի ուժի մեծությունը (գծ. 136) կլինի




Գծ. 136

$$J_e = \frac{Q}{g}\,\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{2}$$

որտեղ ըստ պայմանի,

$$x = a + l\cos\Omega t։$$

Պրոյեկտելով (1) վեկտորական հավասարումը շարժական սիստեմի $O\xi$ և $O\eta$ առանցքների վրա, կստանանք

$$\frac{Q}{g}\,\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{Q}{g}\,\frac{d^2x}{dt^2} - c\,(\xi - \xi_0), \tag{3}$$

$$\frac{Q}{g}\,\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0։ \tag{4}$$

(3) հավասարման մեջ տեղադրենք x-ի արժեքը և հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{cg}{Q}\,\xi = l\Omega^2\cos\Omega t + \frac{cg}{Q}\,\xi_0, \tag{5}$$

Սա հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումը կլինի.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \tag{6}$$

որտեղ $\xi_1$-ը համասեռ մասի ընդհանուր լուծումն է, իսկ $\xi_2$-ը՝ (5)-ի մի մասնավոր լուծում։ Ինչպես հայտնի է,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{cg}{Q}\,\xi = 0$$

համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$\xi_1 = A\cos\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t, \tag{7}$$

որտեղ A և B-ն ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։

(5) հավասարման մասնավոր լուծումը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\xi_2 = A_1\cos\Omega t + B_1, \tag{8}$$

որտեղ $A_1$-ը և $B_1$-ը անհայտ մեծություններ են։ $\xi_2$-ի արժեքը (8)-ից տեղադրենք (5)-ի մեջ և որոշենք $A_1$-ը և $B_1$-ը։ Կստացվի

$$A_1 = \frac{Ql\,\Omega^2}{cg - Q\Omega^2}, \quad B_1 = \xi_0\text{։} \tag{9}$$

Այսպիսով, (6)-ի և (9)-ի հիման վրա (5) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$\xi = A\cos\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + \frac{Ql\,\Omega^2}{cg - Q\Omega^2}\cos\Omega t + \xi_0\text{։} \tag{10}$$

(4) հավասարումը ինտեգրելով, կստանանք

$$\frac{dr}{dt} = \text{const}\text{։} \tag{11}$$

Նկատի ունենալով, որ D թմբուկի C կետի արագությունը հավասար է $r\omega$-ի, կունենանք

$$\eta = r\omega t + \text{const}\text{։} \tag{12}$$

Ընդունելով, որ $t=0$ պահին կետը գտնվում է $O\xi$ առանցքի վրա, (12)-ից կստացվի

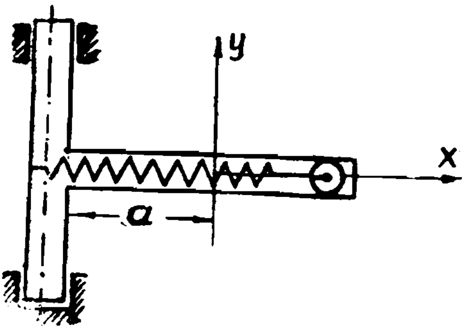
$$\eta = r\omega t\text{։} \tag{13}$$

Պատ.

$$\xi = A\cos\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{cg}{Q}}\,t + \frac{Ql\,\Omega^2}{cg - Q\Omega^2}\cos\Omega t + \xi_0,$$

$\eta = r\omega t$, որտեղ A և B-ն հաստատուններն են, որոնք որոշվում են սկզբնական պայմաններից։ Սա պահանջվող կորի պարամետրական հավասարումն է։

**Խնդիր 189 (33.9)**։ C կոշտությամբ զսպանակի ծայրին ամրացված m մասսա ունեցող գնդիկը գտնվում է խողովակի մեջ հավասարակշռության վիճակում, ուղղաձիգ առանցքից a հեռավորության վրա։ Որոշել գնդիկի հարաբերական շարժման օրենքը, եթե առանցքի հետ ուղիղ անկյուն կազմող խողովակը պտտվում է ուղղաձիգ առանցքի շուրջը $\omega$ հաստատուն անկյունային արագությամբ (գծ. 137)։




Գծ. 137

Լուծում: Ընտրենք կոորդինատական սիստեմը այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում, ըսկըզբնակետը տեղավորելով գնդիկի հավասարակշռության դիրքում։

Գնդիկը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Նրա վրա ազդում է զսպանակի առաձգական ուժը, որը ուղղված է x առանցքի հակառակ ուղղությամբ և մեծությամբ հավասար է cx-ի։ Գնդիկի հարաբերական շարժման հավասարումը կազմելու համար անհրաժեշտ է այս ուժին ավելացնել փոխադրական և Կորիոլիսի իներցիայի ուժերը։ Քանի որ $\overline{\omega} = \overline{const}$, ապա փոխադրական արագացումը կունենա միայն առանցքաձիգ բաղադրիչ։ Հետևաբար, փոխադրական իներցիայի ուժի մեծությունը կլինի

$$J_e = m\omega^2 (a+x)$$

ուղղված OX առանցքով։ Դժվար չէ նկատել, որ Կորիոլիսի իներցիայի ուժը ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը։

Եթե գրենք կետի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը վեկտորական տեսքով և այն պրոյեկտենք x առանցքի վրա, կստանանք

$$m\ddot{x} = -cx + m\omega^2 (a+x)$$

կամ

$$\ddot{x} - (\omega^2 - k^2)\, x = a\omega^2, \tag{1}$$

որտեղ

$$k^2 = \frac{c}{m}, \tag{2}$$

Խնդրի տվյալների համաձայն նախնական պայմանները կլինեն

$$երբ\ t=0 \mid x=0, \quad \dot{x}=0: \tag{3}$$

*Այժմ դիտարկենք երկու դեպք. 1) Եթե* $k>\omega$, *ապա (1) հավասարման լուծումը (3) նախնական պայմանների դեպքում կլինի՝*

$$x=2\frac{a\omega^2}{k^2-\omega^2}\sin^2\frac{\sqrt{k^2-\omega^2}}{2}t,$$

*2) Եթե* $k<\omega$, *ապա լուծումը կլինի՝*

$$x=\frac{a\omega^2}{\omega^2-k^2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2-k^2}\,t-1\right):$$

$k=\omega$ *դեպքը հատուկ քննարկման կարիք չունի, քանի որ այս դեպքում հավասարման լուծումից ստացված արդյունքը չի համապատասխանում խնդրի ֆիզիկական դրվածքին։*

**Պատ.** *1)* $x=2\frac{\omega^2 a}{k^2-\omega^2}\sin^2\frac{\sqrt{k^2-\omega^2}}{2}t,$

$$երբ\ k=\sqrt{\frac{c}{m}}>\omega,$$

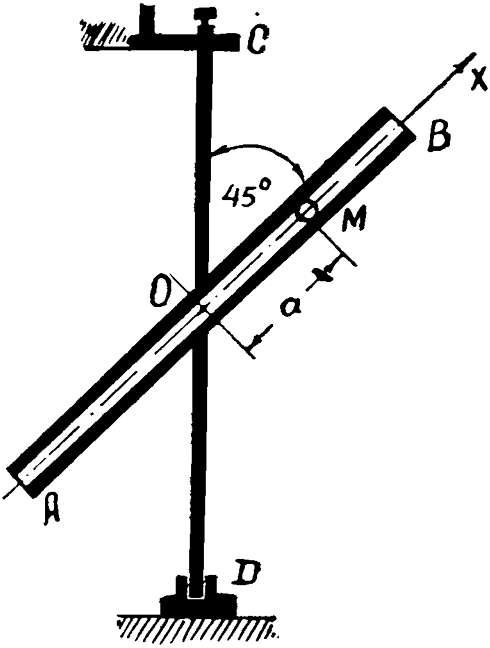
*2)* $x=\frac{\omega^2 a}{\omega^2-k^2}\left(\operatorname{ch}\sqrt{\omega^2-k^2}\,t-1\right),$

$$երբ\ k=\sqrt{\frac{c}{m}}<\omega:$$

**Խնդիր 140 (871)**։ AB *խողովակը պտտվում է* $\omega$ *հաստատուն անկյունային արագությամբ* CD *ուղղաձիգ առանցքի շուրջը, կազմելով նրա հետ 45°-ի անփոփոխ անկյուն։ Խողովակում գտնվում է* M *ծանր գնդիկը։ Որոշել այդ գնդիկի շարժումը, եթե նրա սկզբնական արագությունը հավասար է զրոյի, իսկ սկզբնական հեռավորությունը* O *կետից հավասար է* a*-ի։ Շփումը անտեսել (գծ. 138)։*

Լուծում: *Գնդիկը դիտենք որպես նյութական կետ։ Տանենք շարժական սիստեմը՝ ամրացված* AB *խողովակին, սկզբնակետը տեղավորենք* O *կետում, իսկ* ox *առանցքը ուղղենք* AB *խողովակով՝* O *կետից դեպի* B *կետը (գծ. 138)։ Նյութական կետի վրա ազդում են նրա* $\bar{P}$ *կշիռը և խողովակի* $\bar{N}$ *հակազդումը, որն ուղղահայաց է* ox *առանցքին։ Կետի հարաբերական շարժման հավասարումը կազմելու համար անհրաժեշտ է այս ուժերին ավելացնել փոխադրական և Կորիոլիսի իներցիայի ուժերը։ Քանի* որ $\omega=\text{const}$, ուստի $J_e$ փոխադրական իներցիայի ուժը ուղղահայաց կլինի փոխադրական պտտական շարժման CD առանցքին և ուղղված դեպի աջ, ընդ որում նրա մեծությունը կլինի

$$J_e = J_{en} = \frac{P}{g}\,\omega^2 x\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$




Գծ. 138

Կորիոլիսի արագացման

$$\bar{W}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{v})$$

արտահայտությունից երևում է, որ Կորիոլիսի իներցիայի ուժը ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը և ուղղված է ընթերցողից դեպի գծագրի հարթությունը։

Եթե պրոյեկտենք կետի հարաբերական շարժման վեկտորական հավասարումը OX առանցքի վրա, կստանանք

$$\frac{P}{g}\,\frac{d^2x}{dt^2} = -P\,\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{P}{g}\,\omega^2 x, \qquad (1)$$

քանի որ Կորիոլիսի իներցիայի ուժի և խողովակի $\bar{N}$ հակազդման պրոյեկցիաները x առանցքի վրա հավասար են զրոյի։

(1) հավասարումը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{2}\,\omega^2 x = -g\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \qquad (2)$$

Այս դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի

$$x = c_1 e^{\sqrt{2}\,\omega t/2} + c_2 e^{-\sqrt{2}\,\omega t/2} + \frac{g}{\omega^2}\sqrt{2}\,, \qquad (3)$$

որտեղ $c_1$ և $c_2$-ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։ Տված խնդրի համաձայն նախնական պայմանները կլինեն

$$\text{երբ } t=0 \;\Big|\; x=a, \quad \frac{dx}{dt}=0。 \tag{4}$$

Եթե կազմենք (3)-ի ածանցյալը ըստ t-ի, այսինքն՝

$$\frac{dx}{dt} = c_1\omega\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t} - c_2\omega\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t} \tag{5}$$

և (2) ու (5) հավասարումներում տեղադրենք (4) նախնական պայմանները, կստանանք

$$\begin{aligned} a &= c_1 + c_2 + \frac{g}{\omega^2}\sqrt{2}, \\ 0 &= c_1\omega\frac{\sqrt{2}}{2} - c_2\omega\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Լուծելով (6)-ը $c_1$ և $c_2$-ի նկատմամբ, կունենանք

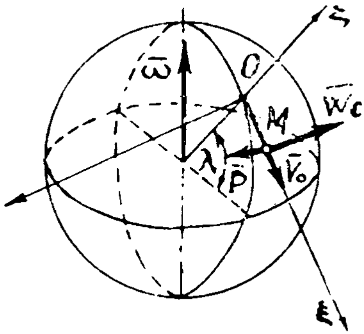
$$c_1 = c_2 = \frac{a}{2} - \frac{g}{\omega^2}\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{7}$$

Մնում է $c_1$ և $c_2$-ի արժեքը (7)-ից տեղադրել (3)-ի մեջ և ստանալ x-ը։

Պատ. $$OM = x = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega t}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$$

**Խնդիր 141 (876)**։ Հրետանային արկը շարժվում է գետնամերձ հետագծով (այսինքն՝ հետագիծը մոտավորապես կարելի է ընդունել որպես ուղիղ)։ Շարժման ժամանակ արկի հորիզոնական արագությունը $v_0=900$ մ/վրկ։ Արկը պետք է հարվածի նշանակետին, որը գտնվում է կրակման տեղից 18 կմ հեռավորության վրա։ Անտեսելով օդի դիմադրությունը, որոշել, թե ինչքանո՞վ կշեղվի արկը նշանակետից երկրի պտույտի պատճառով։ Կրակումը տեղի է ունենում $\angle\lambda=60°$ հյուսիսային լայնության վրա։

Լուծում։ Տանենք շարժական կոորդինատական $O\xi\eta\zeta$ սիստեմը գծագրում ցույց տրված ձևով, տեղավորելով կոորդինատական սկզբնակետը արկի սկզբնական դիրքում (գծ. 139ա, բ)։ Արկը ընդունենք որպես նյութական կետ, որը շարժվում է $\bar{P}$ ծանրության ուժի ազդեցության տակ։ Արկը կատարում է հարաբերական շարժում, քանի որ հաշվի է առնվում երկրի պտույտը իր առանցքի շուրջը։ Գրենք արկի հարաբերական շարժման վեկտորական հավասարումը։ Այն կլինի



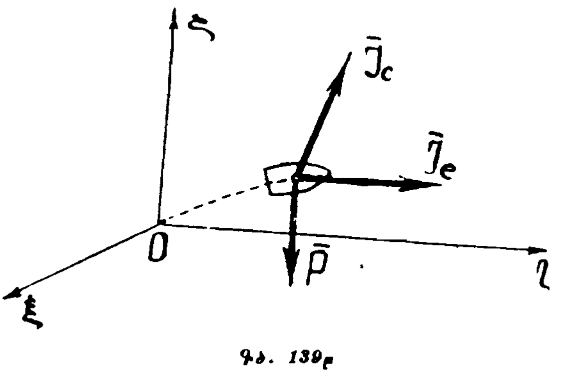

Գծ. 139ա

$$m\bar{W} = \bar{P} + \bar{J}_e + \bar{J}_c, \qquad (1)$$

որտեղ $\bar{W}$-ն արկի հարաբերական արագացումն է, այսինքն՝ արագացումը $O\xi\eta\zeta$ շարժական կոորդինատական սիստեմի նկատմամբ, իսկ $\bar{J}_e$ և $\bar{J}_c$-ն փոխադրական և Կորիոլիսի իներցիայի ուժերն են։ Քանի որ $O\xi\eta\zeta$ շարժական սիստեմը ամրացված է երկրի մակերևույթին, և երկիրը կատարում է պտտական շարժում իր առանցքի շուրջը $\omega$ անկյունային արագությամբ, ուստի Կորիոլիսի արագացման վեկտորը կլինի

$$\bar{W}_c = 2\,(\bar{\omega} \times \bar{V}), \qquad (2)$$

որտեղ $\bar{V}$-ն արկի հարաբերական արագությունն է, այսինքն՝ արկի արագությունը շարժական սիստեմի նկատմամբ։ $\bar{W}_c$ վեկ-




Գծ. 139բ

տորը ուղղահայաց է միջօրեականի հարթությանը, որով տեղի է ունենում արկի շարժումը։ Քանի որ $\bar{\omega}$ և $\bar{V}$ վեկտորները կազմում են $\lambda$ անկյուն, ուստի Կորիոլիսի արագացման մեծությունը հավասար կլինի

$$W_C = 2\omega v \sin\lambda: \tag{3}$$

Եթե պրոյեկտենք (1) հավասարումը $O\eta$ առանցքի վրա և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ փոխադրական իներցիայի և ծանրության ուժերը ուղղահայաց են այդ առանցքին, կստանանք

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2} = 2m\,\omega v \sin\lambda: \tag{4}$$

Ինտեգրելով այս հավասարումը, կունենանք

$$\eta = \omega v t^2 \sin\lambda: \tag{5}$$

(5) արդյունքը ստանալիս նկատի են առնված նախնական պայմանները։ Ըստ այդ պայմանների սկզբնական պահին արկը գտնվել է կոորդինատների սկզբնակետում, և սկզբնական արագությունը եղել է զրո։

Արկի անցած ճանապարհը $O\xi$ առանցքով կլինի

$$l = v_0 t: \tag{8}$$

Սրա հիման վրա կստանանք

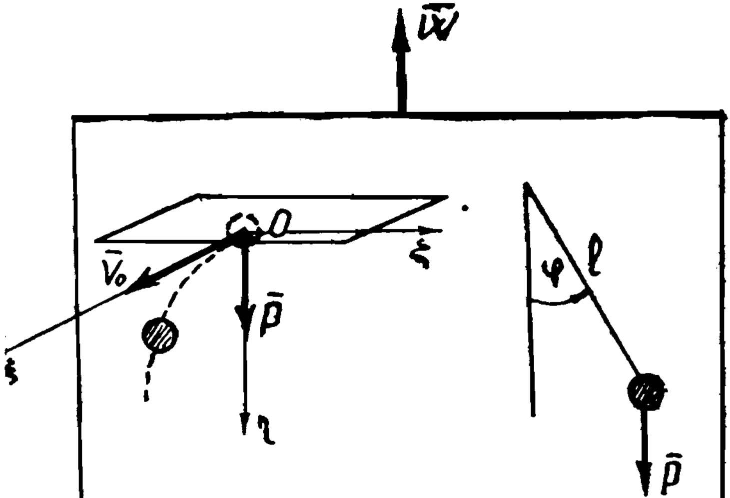
$$s = \eta = \frac{\omega l^2}{v_0}\sin\lambda = \frac{2\pi\cdot 18^2\cdot 10^6\cdot\sqrt{3}}{24\cdot 36\cdot 9\cdot 2\cdot 10^4} \approx 22{,}66 \text{ մ}:$$

Պ ա տ. *Արկը կշեղվի աջ (եթե նայենք վերևից) արագության ուղղահայաց* $s=\omega v_0 t^2 \sin\lambda = 22{,}66$ մ *մեծությամբ, անկախ կրակման ուղղությունից։*

**Խ ն դ ի ր 142։** *Խցիկը շարժվում է ուղղաձիգ դեպի վեր հաստատուն արագացումով։ Խցիկում գտնվող գնդիկը գլորվում է հորիզոնական դարակից $V_0$ սկզբնական հարաբերական արագությամբ (գծ. 140)։ Գտնել այդ գնդիկի հարաբերական շարժման հետագիծը, եթե գնդիկի կշիռն է P։ Այդ նույն խցիկում անկշռելի և անձգելի թելից կախված է P կշիռ և $l$ երկարություն ունեցող հարթ մաթեմատիկական ճոճանակը։ Պահանջվում է կազմել այդ ճոճանակի հարաբերական շարժման հավասարումը և որոշել նրա փոքր տատանումների պարբերությունը։*

Լ ու ծ ու մ: Գնդիկը ընդունենք որպես նյութական կետ։ Տանենք $O\xi\eta\zeta$ շարժական կոորդինատական սիստեմը, որը կապված է խցիկի հետ գծագրում ցույց տրված ձևով ($O\eta$ առանցքը

ուղղված է ուղղաձիգ դեպի ցած և անցնում է գնդիկի սկզբնա-
կան դիրքով, $O\xi$ առանցքը ուղղված է հորիզոնական ուղղությամբ՝
$\bar{V}_0$ սկզբնական հարաբերական արագության երկարությամբ, իսկ
$O\zeta$ առանցքը ուղղված է ուղղահայաց գծագրի հարթությանը):
$\bar{J}_e$ փոխադրական իներցիայի ուժը ուղղված է դեպի ցած և մե-
ծությամբ հավասար է $\dfrac{P}{g}$ W-ի: Քանի որ խցիկը կատարում է
համընթաց շարժում, ապա $\bar{J}_c$ Կորիոլիսի ուժը հավասար կլինի
զրոյի: Բացի դրանից, քանի որ գնդիկը կատարում է ազատ




Գծ. 140

շարժում, ապա կապի $\bar{N}$ հակազդումը նույնպես կլինի զրո: Հե-
տևաբար, գնդիկի հարաբերական* շարժման դիֆերենցիալ հավա-
սարումները կլինեն

$$\frac{P}{g}\,\frac{d^2\xi}{dt^2}=0\,,$$

$$\frac{P}{g}\,\frac{d^2\eta}{dt^2}=P+\frac{P}{g}\,W, \qquad (1)$$

$$\frac{P}{g}\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0\,:$$

Հաջորդաբար ինտեգրելով այս հավասարումները, կստա-
նանք

$$\frac{d\xi}{dt}=c_1,\quad \frac{d\eta}{dt}=(g+W)\,t+c_2,\quad \frac{d\zeta}{dt}=c_3\,, \tag{2}$$

$$\xi=c_1t+c_4,\quad \eta=(g+W)\,\frac{t^2}{2}+c_2t+c_5,\quad \zeta=c_3t+c_6, \tag{3}$$

*որտեղ* $c_1$, $c_2$, ..., $c_6$ *ինտեգրման հաստատուններն են, որոնք որոշվում են նախնական պայմաններից։ Խնդրի պայմանների համաձայն նախնական պայմանները կլինեն*

$$t=0 \left| \begin{array}{l} \xi=0,\quad \eta=0,\quad \zeta=0, \\ \dfrac{d\xi}{dt}=v_0,\quad \dfrac{d\eta}{dt}=0,\quad \dfrac{d\zeta}{dt}=0 \end{array} \right. \tag{4}$$

*(4)-ը տեղադրելով (2) և (3)-ի մեջ, կստանանք վեց հավասարումներ, որոնցից կորոշենք* $c_1$, $c_2$, ..., $c_6$ *հաստատունները։ Ստացած այդ արժեքները տեղադրելով (3)-ի մեջ, կստանանք կետի հարաբերական շարժման հավասարումները հետևյալ տեսքով՝*

$$\xi=v_0t,\quad \eta=\frac{1}{2}(g+W)t^2,\quad \zeta=0\,, \tag{5}$$

*(5)-ից երևում է, որ կետի հարաբերական շարժման հետագիծը գտնվում է ուղղաձիգ* $\xi O \eta$ *հարթության վրա։ (5)-ի առաջին և երկրորդ հավասարումներից արտաքսելով* t *ժամանակը, կստանանք հարաբերական շարժման հետագծի հավասարումը՝*

$$\eta=\frac{g+W}{2v_0^2}\,\xi^2\,, \tag{6}$$

*Սա պարաբոլի հավասարում է։ Եթե խցիկը շարժվեր հավասարաչափ, ապա W-ն կլիներ զրո, և կետի հարաբերական շարժման հետագիծը դարձյալ կլիներ պարաբոլ, միայն նրա պարամետրը այլ տեսք կունենար։*

*Այժմ դիտարկենք մաթեմատիկական ճոճանակի հարաբերական շարժումը։ Մաթեմատիկական ճոճանակի հարաբերական շարժման հավասարումը կազմելու համար անհրաժեշտ է ճոճանակի* $\bar{P}$ *կշռին և* $\bar{N}$ *հակազդմանը ավելացնել փոխադրական իներցիայի ուժը, որը տվյալ դեպքում ունի* $\bar{J}_e=-\dfrac{P}{g}\bar{W}$ *տեսքը։*

*Վերը նշվածի համաձայն Կորիոլիսի արագացման իներցիայի ուժը հավասար է զրոյի։ Եթե գրենք մաթեմատիկական ճոճա-*

*նակի հարաբերական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը վեկտորական տեսքով և այն պրոյեկտենք գնդիկի հետագծի շոշափողի ուղղության վրա, կստանանք*

$$\frac{P}{g}\ \frac{d^2s}{dt^2} = -P\sin\varphi - \frac{P}{g} W \sin\varphi, \tag{7}$$

*Եթե ընդունենք* $s = l\varphi$ *և* $\sin\varphi \approx \varphi$, *ապա (7)-ը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝*

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0, \tag{8}$$

*որտեղ*

$$k^2 = \frac{g+W}{l},$$

*Այստեղից հետևում է, որ մաթեմատիկական ճոճանակի հարաբերական շարժման (տատանումների) պարբերությունը կլինի*

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+W}},$$

Պատ. *1) Գնդիկի հարաբերական շարժման հետագիծը՝*

$$\eta = \frac{g+W}{2v_0^2}\xi^2,$$

*2) Մաթեմատիկական ճոճանակի հարաբերական շարժման հավասարումը՝* $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g+W}{l}\varphi = 0$,

*պարբերությունը՝* $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+W}}$,

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ, Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

# ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՈՒՂԵՑՈՒՅՑ

Գիրք երրորդ

## ԿԵՏԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

Հրատարակության է ներկայացրել մեխանիկայի ամբիոնը

*Խմբագիր՝* Գ. Գ. Գյոնջյան
*Հրատ. խմբագիր՝* Գ. Հ. Աղամյան
*Գեղ. խմբագիր՝* Ն. Ա. Թովմասյան
*Տեխն. խմբագիր՝* Ժ. Խ. Հայրումյան
*Վերստ. սրբագրիչ՝* Ս. Հ. Դեմիրճյան