ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մ.Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ, Վ.Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ,
Մ.Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Մ.Մ. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՈՒՂԵՑՈՒՅՑ

ՊՐԱԿ ՉՈՐՐՈՐԴ

ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

*Գրքի հրատարակությունը հովանավորել է
Անուշավան Աբրահամյանը՝ ի նվիրում իր սիրելի մայրիկին՝ Լուսիկին,
և ի հիշատակ իր անմոռանալի հայրիկին՝ Միհրան Աբրահամյանին:*

Հեղինակները իրենց երախտագիտությունն են հայտնում
ամերիկահայ ճարտարագետների և գիտնականների ընկերությանը,
որի նախաձեռնությամբ է տպագրվել գիրքը:

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2001

ԴՄՀ 514.85
ԳՄԴ 22.2
Մ – 340

Մանուկյան Մ.Մ., Սարգսյան Վ.Ս., Գաբրիելյան Մ.Ս., Մինասյան Մ.Մ.

Մ - 340 Տեսական մեխանիկայի խնդիրների լուծման ուղեցույց. պրակ չորրորդ, Համակարգի դինամիկա. ուսումնական ձեռնարկ, Եր., Երևանի համալս. հրատ., 2001, 320 էջ:

Ժողովածուի չորրորդ պրակը (Համակարգի դինամիկա) նվիրված է մեխանիկական համակարգերի շարժման ուսումնասիրությանը: Ընտրված են այնպիսի խնդիրներ, որոնք հետաքրքրություն են ներկայացնում մաթեմատիկայի տեսանկյունից, ինչպես նաև ունեն կոնկրետ կիրառություններ.

Մ $\frac{1603030000}{704(02)\ 2001}$ 2001

ԳՄԴ 22.2

ISBN 5-8084-0353-7

© Հեղ. կոլեկտիվ, 2001 թ.:

ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

1. Մեխանիկական համակարգ: «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների լուծման ուղեցույց»-ի* երրորդ պրակում դիտարկված է նյութական կետի շարժումը: Բայց փորձնականում հաճախ պատահում են ավելի բարդ դեպքեր, երբ մեկ նյութական կետի կամ մարմնի շարժումը հնարավոր չէ ուսումնասիրել՝ մեկուսացված այլ կետերի (մարմինների) շարժումներից: Օրինակ՝ Լուսնի շարժումը երկրագնդի նկատմամբ կախված է Արեգակի շուրջը երկրի կատարած շարժումից, ներքին այրման շարժիչի ծնկաձև լիսեռի շարժումը՝ նրա մխոցի շարժումից և այլն: Այս և բազմաթիվ այլ օրինակներ ստիպում են մեզ նյութական կետի շարժման ուսումնասիրությունից անցնելու նյութական կետերի համակարգի շարժման ուսումնասիրությանը:

Նյութական կետերի համակարգ կամ մեխանիկական համակարգ կոչվում է նյութական կետերի այն համախումբը (բազմությունը), որի յուրաքանչյուր կետի շարժումը կախված է մյուս կետերի դիրքերից և շարժումներից: Նյութական մարմինը նույնպես կարելի է դիտել որպես նյութական մասնիկների (կետերի) համակարգ: Մեխանիկական համակարգի դասական օրինակ է հանդիսանում արեգակնային համակարգը, որի բոլոր մարմինների միջև գոյություն ունեն փոխադարձ ձգողության ուժեր: Այն մեքենաները կամ մեխանիզմները, որոնց մեջ գտնվող մարմինները իրար հետ կապված են երկրաչափական կապերով (հոդակապերով, ձողերով, փոկերով և այլն), կլինեն նույնպես մեխանիկական համակարգեր: Իսկ եթե համախմբություն կազմող մարմինների միջև ոչ մի փոխազդեցություն գոյություն չունի, ապա այդպիսի համախմբությունը մեխանիկական համակարգ համարել չի կարելի: Հետագայում մենք դիտարկելու ենք միայն նյութական կետերից և մարմիններից կազմված մեխանիկական համակարգեր և դրանք անվանելու ենք պարզապես մեխանիկական համակարգեր:

---

* ***Մ.Մ.Մանուկյան, Վ.Ս.Սարգսյան, Մ.Ս.Գաբրիելյան,*** Տեսական մեխանիկայի խնդիրների լուծման ուղեցույց, պրակ III (կետի դինամիկա), Երևանի համալսարանի հրատարակչություն, 1974:

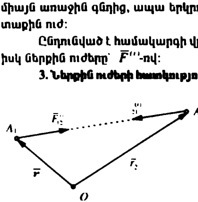
Եթե մեխանիկական համակարգի կամայական երկու կետերի միջև եղած հեռավորությունը, անկախ համակարգի դիրքից և շարժումից, մնում է հաստատուն, ապա այդպիսի համակարգը կոչվում է անփոփոխ մեխանիկական համակարգ: Իսկ եթե, բացի դրանից, համակարգի կետերը բաշխված են անընդհատ կերպով, այսինքն հոծ կերպով լցնում են որևէ տարածամաս, ապա այդպիսի անփոփոխ մեխանիկական համակարգը կոչվում է բացարձակ պինդ մարմին (ավելի կարճ՝ պինդ մարմին):

2. Ներքին և արտաքին ուժեր: Սովորաբար մեխանիկական համակարգի վրա ազդող ուժերը բաժանվում են երկու մասի՝ ներքին և արտաքին ուժերի: Մեխանիկական համակարգի կետերի (մարմինների) միջև եղած փոխազդեցության ուժերը կոչվում են այդ համակարգի համար ***ներքին*** ուժեր: ***Արտաքին*** կոչվում են այն ուժերը, որոնք ազդում են տրված համակարգի կետերի (մարմինների) վրա և պայմանավորված են այդ համակարգին չպատկանող կետերով կամ մարմիններով: Օրինակ՝ արեգակնային համակարգի համար աստղերի ձգողության ուժերը կլինեն արտաքին ուժեր, իսկ մոլորակների միջև եղած ձգողության ուժերը՝ ներքին ուժեր:

Ուժերի վերոհիշյալ բաժանումը պայմանական բնույթ է կրում և կախված է նրանից, թե կետերի կամ մարմինների ինչպիսի համակարգ է դիտարկվում: Օրինակ, եթե դիտարկենք ամբողջ արեգակնային համակարգի շարժումը, ապա Արեգակի կողմից երկրագնդին ձգող ուժը կլինի ներքին, իսկ եթե դիտարկենք երկրագնդից և Լուսնից կազմված մեխանիկական համակարգի շարժումը, ապա այն ուժը, որով Արեգակը ձգում է երկրագնդին, այս նոր համակարգի համար կլինի արտաքին ուժ: Մի այլ օրինակ. եթե ունենք հպվող գնդերից կազմված համակարգ, ապա առաջին գնդի ճնշումը երկրորդի վրա և երկրորդի ճնշումը առաջինի վրա կլինեն ներքին ուժեր: Իսկ եթե դիտարկենք համակարգ կազմված միայն առաջին գնդից, ապա երկրորդ գնդի ճնշումը առաջինի վրա կլինի արտաքին ուժ:

Ընդունված է համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերը նշանակել $\overline{F}^{(e)}$ իսկ ներքին ուժերը՝ $\overline{F}^{(i)}$-ով:

3. Ներքին ուժերի հատկությունները: Նյուտոնի երրորդ օրենքի համաձայն մեխանիկական համակարգի ցանկացած երկու կետերի միջև եղած փոխազդեցության ուժերը մեծությամբ հավասար են, ուղղված են այդ կետերը միացնող ուղղով և ունեն հակադիր ուղղություններ (գծ.1), այսինքն՝ $\overline{F}_{12}^{(i)} = -\overline{F}_{21}^{(i)}$ Այստեղից հետևում են համակարգի ներքին ուժերի հետևյալ երկու հատկությունները:



Գծ. 1

Առաջին հատկություն: Մեխանիկական համակարգի բոլոր ներքին ուժերի վեկտորական գումարը (ներքին ուժերի գլխավոր վեկտորը) հավասար է զրոյի՝

$$\sum_i \overline{F}_i^{(i)} = 0$$

որտեղ $\overline{F}_i^{(i)}$-ով նշանակված է համակարգի *k*-րդ կետի վրա ազդող ներքին ուժերի համազորը:

Երկրորդ հատկություն: Տարածության կամայական կետի նկատմամբ մեխանիկական համակարգի բոլոր ներքին ուժերի մոմենտների գումարը (ներքին ուժերի գլխավոր մոմենտը) հավասար է զրոյի՝

$$\sum_i \bar{r}_i \times \overline{F}_i^{(i)} = 0$$

որտեղ $\bar{r}_i$ -ն համակարգի *k*-րդ կետի շառավիղ-վեկտորն է կամայական կետի նկատմամբ:

Այս հատկությունից չի հետևում, որ մեխանիկական համակարգի ներքին ուժերը, փոխադարձաբար իրար հավասարակշռելով հանդերձ, չեն ազդում նրա շարժման վրա: Իրոք, քանի որ այդ ուժերը կիրառված են տարբեր նյութական կետերի կամ մարմինների վրա, ուստի կարող են առաջ բերել այդ կետերի կամ մարմինների փոխադարձ տեղափոխումներ: Բացարձակ պինդ մարմնի մեջ առաջացած ներքին ուժերը չեն առաջացնի մեխանիկական համակարգի տեղափոխումներ:

4. Ազատ և ոչ ազատ մեխանիկական համակարգեր: Եթե մեխանիկական համակարգի շարժումների վրա ոչ մի սահմանափակում չի դրված, ապա այդպիսի համակարգը կոչվում է ազատ, իսկ եթե նրա վրա դրված են պայմաններ, որոնք սահմանափակում են նրա կետերի շարժումների ազատությունը, ապա այդպիսի համակարգը կոչվում է ոչ ազատ, իսկ կետերի շարժումները սահմանափակող պայմանները՝ կապեր: Եթե կապերը սահմանափակում են միայն համակարգի դիրքը, կոչվում են հոլոնոմ, իսկ այլ տիպի կապերը ոչ հոլոնոմ:

2. ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Մեխանիկական համակարգի շարժումը, բացի նրա վրա ազդող ուժերից, կախված է նաև համակարգի մեջ զանգվածների բաշխումից: Համակարգի դինամիկայի այն բաժինը, որն ուսումնասիրում է զանգվածների բաշխումը մեխանիկական համակարգում, կոչվում է զանգվածների երկրաչափություն:

ա) Մեխանիկական համակարգի ***զանգվածների կենտրոն կամ իներցիայի կենտրոն*** կոչվում է այն երկրաչափական կետը, որի $\bar{r}_c$ շառավիղ-վեկտորը որոշվում է

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_k m_k \bar{r}_k}{M}$$

բանաձևով, որտեղ $\bar{r}_k$ -ն համակարգի k-րդ կետի շառավիղ-վեկտորն է, m_k -ն՝ k-րդ կետի զանգվածը, իսկ M -ը՝ համակարգի ամբողջ զանգվածը:

Մեխանիկական համակարգի զանգվածների կենտրոնի դեկարտյան x_c, y_c, z_c կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$x_c = \frac{\sum_k m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_k m_k y_k}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_k m_k z_k}{M}, \qquad \text{(II)}$$

որտեղ x_k, y_k, z_k -ն համակարգի k-րդ կետի կոորդինատներն են:

Պինդ մարմնի ծանրության կենտրոնի շառավիղ-վեկտորը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_k p_k \bar{r}_k}{P}, \qquad \text{(III)}$$

որտեղ p_k -ն k-րդ կետի կշիռն է, P -ն՝ ամբողջ մարմնի կշիռը: Եթե մարմինը գտնվում է ծանրության ուժի համասեռ դաշտում, ապա $p_k = m_k g$, $P = Mg$ և (III) բանաձևը համընկնում է (I)-ի հետ: Հետևաբար, համակարգի զանգվածների կենտրոնը համընկնում է ծանրության ուժի համասեռ դաշտում գտնվող մարմնի ծանրության կենտրոնի հետ: Սակայն ծանրության կենտրոն և զանգվածների կենտրոն հասկացությունները նույնական չեն: Ծանրության կենտրոնի հասկացությունը՝ որպես մի կետ, որով անցնում է ծանրության ուժերի համազորի ազդման գիծը համակարգի ցանկացած դիրքում, իմաստ ունի միայն համասեռ ծանրության ուժի դաշտում գտնվող պինդ մարմնի համար: Իսկ զանգվածների կենտրոն հասկացությունը, որպես համակարգում զանգվածների բաշխումը բնութագրող մեծություն, իմաստ ունի ամեն մի մեխանիկական համակարգի կամ մարմնի համար, ընդ որում այդ հասկացությունը իր իմաստը պահպանում է անկախ նրանից՝ համակարգի վրա ուժեր ազդում են, թե ոչ:

Այժմ դիտարկենք խնդիրներ, երբ պահանջվում է գտնել համակարգի զանգվածների կենտրոնի հետագծի հավասարումը: Դրա համար նպատակահարմար է կատարել հետևյալ քայլերը.

ա) Ընտրել կոորդինատական համակարգը:

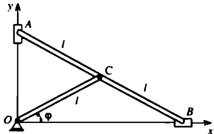
բ) Գտնել նյութական համակարգի առանձին մասերի զանգվածների կենտրոնների կոորդինատները՝ որպես ժամանակի ֆունկցիաներ:

գ) (II) բանաձևի հիման վրա որոշել համակարգի զանգվածների կենտրոնի x_c, y_c, z_c կոորդինատները:

դ) Զանգվածների կենտրոնի հետագծի հավասարումը ստանալու համար ստացված հավասարումներից արտաքսել t ժամանակը:

Խնդիր 1 [34.5 (950)]: Որոշել էլիպսոգրաֆի ծանրության կենտրոնի հետագիծը, որը կազմված է *A* և *B* կցորդիչներից, որոնցից յուրաքանչյուրի կշիռը հավասար է *Q*-ի, *OC* մեղեխից, որի կշիռն է *P*, և 2*P* կշիռ ունեցող *AB* քանոնից: Տված է $OC = AC = CB = l$:

Ընդունել, որ քանոնը և մեղեխը համասեռ ձողեր են, իսկ կցորդիչները՝ նյութական կետեր (գծ.2):



Գծ. 2

Լուծում: Տանենք կոորդինատական *Oxy* համակարգը այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում: Էլիպսոգրաֆի զանգվածների կենտրոնի դիրքը որոշելու համար պետք է որոշել նրա (x_c, y_c) կոորդինատները՝ կախված *t* ժամանակից (φ անկյունից): Դրա համար պետք է օգտվել (II) բանաձևերից:

Քանի որ համակարգը (էլիպսոգրաֆ) կազմված է *A* և *B* կցորդիչներից, *OC* մեղեխից և քանոնից, ուստի (II) բանաձևերի հիման վրա կունենանք՝

$$x_c = \frac{\frac{Q}{g}x_1 + \frac{Q}{g}x_2 + \frac{P}{g}x_3 + \frac{2P}{g}x_4}{\frac{Q}{g} + \frac{Q}{g} + \frac{P}{g} + \frac{2P}{g}} \qquad (1)$$

$$y_c = \frac{\frac{Q}{g}y_1 + \frac{Q}{g}y_2 + \frac{P}{g}y_3 + \frac{2P}{g}y_4}{\frac{Q}{g} + \frac{Q}{g} + \frac{P}{g} + \frac{2P}{g}} \qquad (2),$$

որտեղ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ կետերը համապատասխանաբար *A*, *B* կցորդիչների, *OC* մեղեխի և *AB* քանոնի զանգվածների կենտրոնների կոորդինատներն են:

Գծագրից երևում է, որ

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2l\cos\varphi, \quad x_3 = \frac{l}{2}\cos\varphi,$$

$$y_1 = 2l\sin\varphi, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = \frac{l}{2}\sin\varphi, \quad y_4 = l\sin\varphi:$$

Տեղադրելով այս արժեքները (1)-ի և (2)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$x_c = \frac{4Q+5P}{2Q+3P}\cdot\frac{l}{2}\cos\varphi, \qquad y_c = \frac{4Q+5P}{2Q+3P}\cdot\frac{l}{2}\sin\varphi:$$

Արտաքսելով φ-ն՝ կստանանք հետագծի հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$x_c^2 + y_c^2 = \left(\frac{4Q+5P}{2Q+3P}\frac{l}{2}\right)^2$$

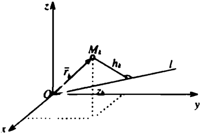
Պատ. Շրջանագիծ O կենտրոնով և $\dfrac{5P+4Q}{3P+2Q}\cdot\dfrac{l}{2}$ շառավղով:

բ) **Իներցիայի մոմենտներ:** Զանգվածների կենտրոնի դիրքը ոչ լրիվ կերպով է բնութագրում զանգվածների բաշխումը համակարգի մեջ: Զանգվածների բաշխումը համակարգի մեջ ավելի ճշգրիտ բնութագրելու համար մուծվում է իներցիայի մոմենտի հասկացությունը: Իներցիայի մոմենտները էական նշանակություն ունեն մեխանիկայի տարբեր բաժիններում (տեսական մեխանիկայում, հոծ միջավայրի մեխանիկայում և այլն):

Պինդ մարմնի դինամիկայում հատկապես մեծ կիրառություն ունեն իներցիայի երկրորդ կարգի մոմենտները (իներցիայի մոմենտները առանցքի, հարթության և կետի նկատմամբ, իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները):

1. Իներցիայի մոմենտը առանցքի նկատմամբ: Համակարգի իներցիայի մոմենտ որևէ l առանցքի նկատմամբ կոչվում է նրա կետերի զանգվածների և այդ առանցքից նրանց ունեցած հեռավորությունների քառակուսիների արտադրյալների գումարը, այսինքն՝

$$J_l = \sum_k m_k h_k^2$$



որտեղ m_k -ն համակարգի k-րդ կետի զանգվածն է, իսկ h_k -ն՝ նույն կետի հեռավորությունը l առանցքից (գծ.3):

Համակարգի դինամիկայում մեծ մասամբ օգտագործվում են իներցիայի մոմենտները կոորդինատական առանցքների նկատմամբ: Եթե տանենք $Oxyz$ կոորդինատական համակարգը (գծ.3), ապա մեխանիկական համակարգի իներցիայի մոմենտները կոորդինատական Ox, Oy և Oz առանցքների նկատմամբ կլինեն.

$$J_x = \sum_k m_k\left(y_k^2 + z_k^2\right),$$

$$, = \sum_k m_k\left(z_k^2 + x_k^2\right),$$

$$J_z = \sum_k m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right)$$

Եթե մեխանիկական համակարգում զանգվածները բաշխված են անընդհատ կերպով, ապա (1)-ում եղած գումարները փոխարինվում են ինտեգրալներով, այսինքն՝

$$\int_{(M)}\left(y^2+z^2\right)dm, \qquad , = \int_{(M)}\left(z^2+x^2\right)dm, \qquad \int_{(M)}\left(x^2+y^2\right)dm$$

Այս բանաձևերում ինտեգրալները տարածված են համակարգի ամբողջ վանգվածով:

Եթե մեխանիկական համակարգը իրենից ներկայացնում է համասեռ մարմին, ապա նրա խտությունը կլինի հաստատուն՝ $\gamma = const$, և մարմնի իներցիայի մոմենտների բանաձևերը կոորդինատական առանցքների նկատմամբ կրնդունեն հետևյալ տեսքեր՝

$$J_x = \gamma\iiint_V\left(y^2+z^2\right)dxdydz\ ,$$

$$= \gamma\iiint_V\left(z^2+x^2\right)dxdydz\ ,$$

$$J_z = \gamma\iiint_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz\ ,$$

որտեղ ինտեգրումը կատարվում է ամբողջ մարմնի ծավալով:

Եթե մարմինը իրենից ներկայացնում է համասեռ թիթեղ, ապա նրա իներցիայի մոմենտներն արտահայտվում են հետևյալ ինտեգրալներով՝

$$, = \gamma'\iint_{(S)}\left(y^2+z^2\right)dS, \qquad , = \gamma'\iint_{(S)}\left(x^2+z^2\right)dS, \qquad , = \gamma'\iint_{(S)}\left(y^2+x^2\right)dS.$$

որտեղ ինտեգրումը կատարվում է թիթեղի մակերեսով, իսկ γ'-ը թիթեղի մակերևութային խտությունն է*

Նույն ձևով, եթե ունենք համասեռ բարակ լար, որի լայնական կտրվածքի մակերեսը հաստատուն է, ապա նրա իներցիայի մոմենտները Ox , Oy , Oz առանցքների նկատմամբ կարտահայտվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$, = \gamma''\int_{(l)}\left(y^2+z^2\right)dl, \qquad , = \gamma''\int_{(l)}\left(x^2+z^2\right)dl, \qquad , = \gamma''\int_{(l)}\left(x^2+y^2\right)dl.$$

որտեղ ինտեգրումը կատարվում է l կորով, իսկ γ -ը լարի գծային խտությունն է:

2. Իներցիայի մոմենտը կետի նկատմամբ: Համակարգի իներցիայի մոմենտ կետի նկատմամբ կամ իներցիայի բևեռային մոմենտ կոչվում է համակարգի կետերի զանգվածների և տրված կետից նրանց ունեցած հեռավորությունների

---

* Եթե մարմինը իրենից ներկայացնում է համասեռ թաղանթ, ապա (2) բանաձևերում կրկնապատիկ ինտեգրալները պետք է փոխարինել մակերևութային ինտեգրալներով՝ տարածված թաղանթի միջին մակերևույթով:

քառակուսիների արտադրյալների գումարը: Իներցիայի մոմենտը կոորդինատական համակարգի սկզբնակետի նկատմամբ կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$J_O = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right)$$

Համասեռ մարմնի դեպքում (1)-ը կարելի է ներկայացնել

$$J_O = \gamma \iiint_{(V)} \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) dxdydz$$

տեսքով, որտեղ ինտեգրումը կատարվում է ամբողջ մարմնի ծավալով:

Իներցիայի մոմենտը առանցքի նկատմամբ կարող է դառնալ զրո միայն մի մասնավոր դեպքում, եթե համակարգի բոլոր նյութական կետերը դասավորված են այն առանցքի վրա, որի նկատմամբ որոշվում է իներցիայի մոմենտը:

Իներցիայի մոմենտների վերը նշված սահմանումներից հետևում է, որ

ա) $J_x + J_y + J_z = 2J_O$,

բ) $J_x + J_y > J_z \quad J_y + J_z > J_x$.

3. Իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները: Համակարգի իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտներ կոչվում են համակարգի կետերի զանգվածների և երկու կոորդինատական հարթություններից նրանց ունեցած հեռավորությունների արտադրյալների գումարը, այսինքն՝

$$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i , \qquad = \sum_i m_i y_i z_i , \qquad _{zx} = \sum_i m_i z_i \quad ,$$

Համասեռ մարմնի դեպքում այս բանաձևերը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$J_{xy} = \gamma \iiint_{(V)} xydV , \qquad = \gamma \iiint_{(V)} yz \qquad J_{zx} = \gamma \iiint_{(V)} zxdV$$

որտեղ dV -ն ծավալի էլեմենտն է և ինտեգրալը տարածվում է մարմնի V ծավալով:

Եթե համասեռ մարմինը իրենից ներկայացնում է թիթեղ, ապա նրա կենտրոնախույս մոմենտները կլինեն՝

$$J_{xy} = \gamma' \iint_{(S)} xydS , \quad J_{zx} = \gamma' \iint_{(S)} xzdS , \quad J_{yz} = \gamma' \iint_{(S)} yzdS ,$$

որտեղ γ-ը թիթեղի խտությունն է: Այստեղ ինտեգրումը կատարվում է թիթեղի ամբողջ S մակերեսով:

Իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները կարող են ունենալ թե դրական և թե բացասական նշաններ, ինչպես նաև հավասար լինել զրոյի:

4. Իներցիայի շառավիղ: Հաճախ օգտակար է համակարգի իներցիայի մոմենտը տրված Ox առանցքի նկատմամբ ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$J_x = M\rho^2$$

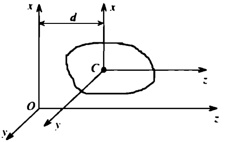
որտեղ M-ը համակարգի զանգվածն է, իսկ ρ-ն՝ գծային մեծություն է, որը կոչվում է համակարգի իներցիայի շառավիղ տրված Ox առանցքի նկատմամբ: Այս սահմանումից հետևում է, որ իներցիայի շառավիղը մի երկարություն է, որը հավասար է տրված x առանցքի և այն կետի միջև եղած հեռավորությանը, որտեղ պետք է կենտրոնացնել ամբողջ համակարգի զանգվածը, որպեսզի ստացվի J_x իներցիայի մոմենտը: Եթե հայտնի է իներցիայի մոմենտը x առանցքի նկատմամբ, ապա նրա իներցիայի շառավիղը այդ առանցքի նկատմամբ կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$\rho = \sqrt{J_x / M}$$

5. Հյուգենսի թեորեմը: Եթե հայտնի է մարմնի իներցիայի մոմենտը զանգվածների կենտրոնով անցնող առանցքի նկատմամբ, ապա իներցիայի մոմենտը այդ առանցքին զուգահեռ ցանկացած առանցքի նկատմամբ որոշելու համար անհրաժեշտ է օգտվել Հյուգենսի թեորեմից, ըստ որի՝ մարմնի իներցիայի մոմենտը որևէ առանցքի նկատմամբ հավասար է տրված առանցքին զուգահեռ և զանգվածների կենտրոնով անցնող առանցքի նկատմամբ մարմնի իներցիայի մոմենտին գումարած մարմնի զանգվածը՝ բազմապատկած այդ առանցքների միջև եղած հեռավորության քառակուսով, այսինքն՝

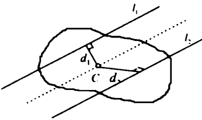
$$J_x = J_{x'} + Md^2$$

Այստեղ J_x-ը մարմնի իներցիայի մոմենտն է Ox առանցքի նկատմամբ, $J_{x'}$-ն՝ իներցիայի մոմենտը զանգվածների կենտրոնով անցնող և Ox առանցքին զուգահեռ առանցքի նկատմամբ, d-ն՝ զանգվածների կենտրոնի հեռավորությունը Ox առանցքից, իսկ M-ը՝ մարմնի զանգվածը (գծ.4):



Գծ. 4

Եթե տված է իներցիայի մոմենտը որևէ առանցքի նկատմամբ, ապա Հյուգենսի թեորեմի հիման վրա կարելի է գտնել իներցիայի մոմենտը այդ առանցքին զուգահեռ ցանկացած առանցքի նկատմամբ: Դիցուք տված է J_1 իներցիայի մոմենտը l_1 առանցքի նկատմամբ և պահանջվում է գտնել J_2 իներցիայի մոմենտը l_1 առանցքին զուգահեռ որևէ l_2 առանցքի

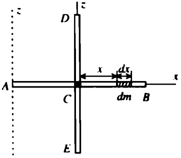


նկատմամբ (գծ.5): Դրա համար բավական է Հյուգենսի թեորեմի հիման վրա գրել J_1 J_2-ի արտահայտությունները և դրանցից արտաքսել J -ն: Կստացվի J_2-ի համար հետևյալ արտահայտությունը՝

$$J_2 = J_1 + M\left(d_2^2 - d_1^2\right),$$

որտեղ d_1, d_2 -ը զանգվածների կենտրոնի հեռավորություններն են l_1, l_2 առանցքներից:

(IV)-ից հետևում է, որ $J_1 > J$, այսինքն՝ եթե տրված է զուգահեռ ուղիղների փունջ, ապա մարմնի իներցիայի մոմենտը կունենա ամենափոքր արժեքը այն առանցքի նկատմամբ, որն անցնում է զանգվածների կենտրոնով:



Գծ. 6

Խնդիր 2: l երկարությամբ և M զանգվածով AB և DE բարակ համասեռ ձողերը միացված են իրար հետ փոխուղղահայաց իրենց ընդհանուր C միջնակետում: Որոշել այդ համակարգի իներցիայի մոմենտը ձողերից մեկի ծայրով անցնող և մյուս ձողին զուգահեռ առանցքի նկատմամբ (գծ.6):

Լուծում: AB ձողի A ծայրով սւսենենք Cz առանցքին զուգահեռ Az' առանցքը: Նախ հաշվենք իներցիայի մոմենտը Cz առանցքի նկատմամբ: Քանի որ DE ձողի իներցիայի մոմենտը այդ առանցքի նկատմամբ զրո է, ուստի՝

$$= \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dm = \gamma \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{\gamma l^3}{12} = \frac{Ml^2}{12}$$

Կիրառելով Հյուգենսի թեորեմը, որում $d = l/2$, կունենանք՝

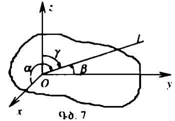
$$J_A = J + 2M\left(l/2\right)^2 = \frac{7}{12}Ml^2$$

Խնդիրը, անշուշտ, կարելի է լուծել նաև ուղղակի հաշվելով J_A -ն: Այս դեպքում

$$J_A = \gamma\int_0^l x^2 dx + M(l/2)^2 = \frac{\gamma l^3}{3} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{7}{12}Ml^2$$

$$J_A = \frac{7}{12}Ml^2$$

6. Մարմնի իներցիայի մոմենտը կոորդինատների սկզբնակետով անցնող կամայական առանցքի նկատմամբ: Տանենք դեկարտյան կոորդինատական $Oxyz$ համակարգը և նրա սկզբնակետով անցնող որևէ l առանցք (գծ.7): Դիցուք l առանցքը կոորդինատական Ox, Oy, Oz առանցքների հետ կազմում է α, β, γ անկյունները: Այդ դեպքում մարմնի իներցիայի մոմենտը l առանցքի նկատմամբ որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝



Գծ. 7

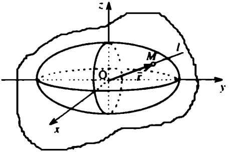
$$_l = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma -$$
$$-2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

որտեղ J_x, -ը մարմնի իներցիայի մոմենտներն են առանցքների նկատմամբ, իսկ J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} -ը մարմնի իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները: Նշանակում է, մարմնի իներցիայի մոմենտը կոորդինատների սկզբնակետով անցնող և կամայական ուղղություն ունեցող որևէ առանցքի նկատմամբ որոշելու համար բավական է իմանալ $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$ վեց մեծությունները, որոնք կոչվում են իներցիայի թենզորի բաղադրիչներ (կոմպոնենտներ): Սրանց հետ միասին, իհարկե, պետք է տված լինեն l առանցքի և կոորդինատական x, y, z առանցքների միջև կազմված α, β, γ անկյունները:

7. Իներցիայի էլիպսոիդ: Համակարգի իներցիայի մոմենտը կոորդինատների սկզբնակետով անցնող l առանցքի նկատմամբ որոշվում է (V) բանաձևով: Դիտարկենք J_l իներցիայի մոմենտի փոփոխությունը, կախված l առանցքի ուղղությունից, այսինքն՝ α, β, γ անկյունների փոփոխությունից: Այս փոփոխությունը ակներև ձևով ներկայացնելու համար l առանցքի վրա վերցնենք մի OM հատված (գծ.8), որի երկարությունը լինի

$$OM = 1/\sqrt{J_l} \qquad (1)$$

l առանցքի ուղղության փոփոխման դեպքում (1) պայմանին բավարարող M կետերի երկրաչափական տեղը տարածության մեջ մի երկրորդ կարգի մակերևույթ է, որի հավասարումն է՝



Գծ. 8

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{yz}yz - 2J_{xz}xz - 2J_{xy}xy - \qquad (2)$$

(2) մակերևույթն իրենից ներկայացնում է էլիպսոիդ* և կոչվում է մարմնի կամ համակարգի տրված O կետի համար կառուցած իներցիայի էլիպսոիդ: Այսպիսով՝ ստացվում է, որ մարմնի յուրաքանչյուր կետի համար կարելի է կառուցել իներցիայի էլիպսոիդ:

Հայտնի է, որ յուրաքանչյուր էլիպսոիդ ունի երեք փոխուղղահայաց գլխավոր առանցքներ: Եթե կոորդինատական x, y, z առանցքները ուղղենք էլիպսոիդի այդ առանցքներով, ապա էլիպսոիդի հավասարումը կբերվի կանոնական տեսքի

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1$$

Այս հավասարումը բնորոշ է նրանով, որ բացակայում են իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները, այսինքն՝

$$J_{yz} = J_{zx} = J_{xy} = 0$$

8. Իներցիայի գլխավոր առանցքներ: Մարմնի տվյալ O կետի համար կառուցած իներցիայի էլիպսոիդի առանցքները կոչվում են այդ կետի իներցիայի գլխավոր առանցքներ: Հետևաբար, մարմնի յուրաքանչյուր կետում գոյություն ունեն առնվազն երեք գլխավոր առանցքներ, որոնք համապատասխան էլիպսոիդի գլխավոր առանցքներն են:

Իներցիայի կենտրոնական էլիպսոիդի գլխավոր առանցքները կոչվում են մարմնի իներցիայի կենտրոնական առանցքներ:

Եթե կոորդինատական առանցքները համընկնում են իներցիայի գլխավոր առանցքների հետ, ապա իներցիայի բոլոր կենտրոնախույս մոմենտները դառնում են զրո՝ $J_{xz} = J_{yz} = J_{xy} = 0$ Այս դեպքում J_x, J_y, J_z մոմենտները կոչվում են իներցիայի գլխավոր մոմենտներ:

Եթե կոորդինատական x, y, z առանցքները գլխավոր առանցքներ են, ապա մարմնի իներցիայի մոմենտը սկզբնակետով անցնող ցանկացած l առանցքի նկատմամբ ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$J_l = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma,$$

որտեղ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ -ն առանցքի ուղղորդ կոսինուսներն են:

9. Իներցիայի գլխավոր առանցքների հատկությունները: ա) x առանցքի իներցիայի գլխավոր առանցք լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայման է, որ x ինդեքս պարունակող իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները լինեն զրո, այսինքն՝

---

* Մասնավոր դեպքում, երբ համակարգի բոլոր կետերը դասավորված լինեն O կետով անցնող այն առանցքի վրա, որի նկատմամբ որոշվում է իներցիայի մոմենտը, կստացվի գլան:

բ) Եթե համակարգն ունի սիմետրիայի առանցք, ապա այն կլինի իներցիայի գլխավոր առանցք այդ առանցքի բոլոր կետերի համար:

գ) Եթե համակարգն ունի սիմետրիայի հարթություն, ապա այդ հարթության բոլոր կետերի համար իներցիայի գլխավոր առանցքներից մեկը կլինի այդ հարթությանն ուղղահայաց:

դ) Մարմնի իներցիայի գլխավոր կենտրոնական առանցքների վրա գտնվող բոլոր կետերի իներցիայի գլխավոր առանցքները զուգահեռ են իներցիայի գլխավոր կենտրոնական առանցքներին, այսինքն՝ զուգահեռ են իրար:

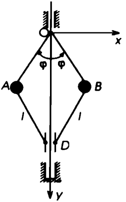
10. Մի քանի համասեռ մարմինների իներցիայի մոմենտները: Կանոնավոր երկրաչափական տեսք ունեցող մարմինների իներցիայի մոմենտների հաշվման համար սովորաբար օգտվում են ինտեգրալ հաշվի մեթոդներից: Ստորև բերվում են մի քանի համասեռ պարզագույն մարմինների իներցիայի մոմենտների արժեքները (աղյուսակ 1):

11. Խնդիրներ: Ստորև բերվում են զանգվածների երկրաչափության (մեխանիկական համակարգի զանգվածների կենտրոնի, պինդ մարմնի իներցիայի մոմենտների) վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումներ: И.В.Мещерский՝ Сборник задач по теоретической механике գրքից վերցված խնդիրների համարները դրված են փակագծերի մեջ:

Խնդիր 3 (34.4): Որոշել գծագիր 9-ում պատկերված կենտրոնախույս կանոնավորիչի զանգվածների կենտրոնի դիրքը, եթե *A* և *B* գնդերից յուրաքանչյուրի կշիռը հավասար է P_2 -ի, իսկ *D* կցորդիչի կշիռը՝ P_1 -ի: *A* և *B* գնդերը համարել կետային զանգվածներ: Ձողերի զանգվածները արհամարհել:

Լուծում: Համակարգի զանգվածների *C* կենտրոնի դիրքը որոշելու համար անհրաժեշտ է որոշել նրա (x_C, y_C) կոորդինատները՝ կախված φ անկյունից: Դրա համար պետք է օգտվել (II) բանաձևերից:

Քանի որ դիտարկվող համակարգը կազմված է *A*, *B* հավասար գնդերից և *D* կցորդիչից (ձողերի զանգվածները արհամարհված են), ուստի (II) բանաձևերի համաձայն կունենանք՝



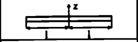
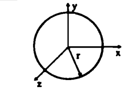
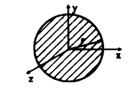
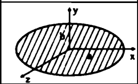
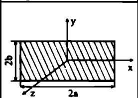
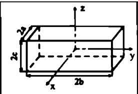
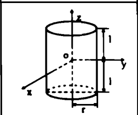
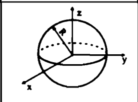
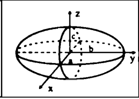
Գծ. 9

$$= \frac{\frac{P_2}{g}x_1 + \frac{P_2}{g}x_2 + \frac{P_1}{g}x_3}{\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g} + \frac{P_2}{g}},$$

$$= \frac{\frac{P_2}{g}y_1 + \frac{P_2}{g}y_2 + \frac{P_1}{g}y_3}{\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g} + \frac{P_2}{g}},$$

Աղյուսակ 1

ՄԻ ՔԱՆԻ ՊԱՐԶ ՀԱՄԱՍԵՌ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԻՆԵՐՑԻԱՅԻ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐ

1	Բարակ համասեռ ձող		$J_{xx} = J_{yy} = 0$ $J_{zz} = \frac{Ml^2}{3}$
2	Օղակ (նյութական շրջանագիծ)		$J_{xx} = J_{yy} = 0$ $J_{zz} = Mr^2$
3	Բարակ շրջանային սկավառակ		$J_{xx} = J_{yy} = \frac{Mr^2}{4}$ $J_{zz} = \frac{Mr^2}{2}$
4	Էլիպս		$J_{xx} = \frac{M}{4} b^2$ $J_{yy} = \frac{M}{4} a^2$ $J_{zz} = \frac{M}{4}(a^2+b^2)$
5	Բարակ ուղղանկյուն թիթեղ		$J_{xx} = \frac{M}{3} b^2$ $J_{yy} = \frac{M}{3} a^2$ $J_{zz} = \frac{M}{3}(a^2+b^2)$
6	Ուղղանկյուն զուգահեռանիստ		$J_{xx} = \frac{M}{3}(b^2+c^2)$ $J_{yy} = \frac{M}{3}(a^2+c^2)$ $J_{zz} = \frac{M}{3}(a^2+b^2)$
7	Շրջանային գլան		$J_{xx} = J_{yy} = M\left(\frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right)$ $J_{zz} = \frac{Mr^2}{2}$
8	Գունդ		$J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = \frac{2}{5} MR^2$
9	Էլիպսոիդ		$J_{xx} = M\left(\frac{b^2+c^2}{5}\right)$ $J_{yy} = M\left(\frac{a^2+c^2}{5}\right)$ $J_{zz} = M\left(\frac{a^2+b^2}{5}\right)$

որտեղ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ -ը համապատասխանաբար *A*, *B* գծերի և *D* կցորդիչի զանգվածների կենտրոնների կոորդինատներն են:

Գծագրից երևում է, որ

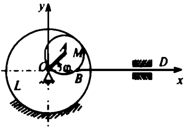
$$_1 = -l\sin\varphi,\ x_2 = l\sin\varphi,\ x_3 = \qquad\qquad = l\cos\varphi,\ y_3 =$$

Տեղադրելով այս արժեքները (1)-ի մեջ կստանանք

$$= \frac{P_2 l\sin\varphi - P_2 l\sin\varphi}{2P_2 + P_1} = 0^{\bullet},\quad y_C = 2\frac{P_1 + P_2}{P_1 + 2P_2} l\cos\varphi$$

$$y_C = 2\frac{P_1 + P_2}{P_1 + 2P_2} l\cos\varphi$$

Խնդիր 4 (34.7): Գծագիր 10-ում պատկերված մեխանիզմում *r* շառավիղ ունեցող *M* ատամնանիվը շարժման մեջ է դրվում *r* երկարություն ունեցող *OA* մեղեխի միջոցով, ընդ որում *M* ատամնանիվը շարժվում է *L* անշարժ ատամնանիվի ներսում՝ նրա հետ ունենալով ներքին կառչում: *OA* մեղեխի կշիռը հավասար է P_1 -ի, իսկ *M* ատամնանիվինը՝ P_2 -ի: *M* ատամնանիվին հոդակապով ամրացված է P_3 կշիռ և *l* երկարություն ունեցող *BD* ձողը, որը շարժվում է ուղղագիծ հորիզոնական ուղղությամբ: *OA* մեղեխը և *BD* ձողը ընդունել որպես համասեռ ձողեր: *M* ատամնանիվի ծանրության կենտրոնը գտնվում է *A* կետում: Որոշել մեխանիզմի զանգվածների կենտրոնը:



Գծ. 10

Լուծում: Մեխանիզմի զանգվածների *C* կենտրոնի դիրքը որոշելու համար պետք է գտնել նրա (x_C, y_C) կոորդինատները՝ կախված φ անկյունից: Մեխանիզմը կազմված է *OA* մեղեխից, *M* ատամնանիվից և *BD* ձողից: Հետևաբար, մեխանիզմի զանգվածների կենտրոնի կոորդինատները, (II) բանաձևերի հիման վրա, կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$x_C = \frac{\frac{P_1}{g}x_1 + \frac{P_2}{g}x_2 + \frac{P_3}{g}x_3}{\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g} + \frac{P_3}{g}},\qquad y_C = \frac{\frac{P_1}{g}y_1 + \frac{P_2}{g}y_2 + \frac{P_3}{g}y_3}{\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g} + \frac{P_3}{g}} \qquad (1)$$

• Այս արդյունքը անմիջապես հետևում է խնդրի համաչափությունից (սիմետրիայից):

որտեղ $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ -ը համապատասխանաբար OA մեղեխի, M ատամնանիվի և BD ձողի ծանրության կենտրոնների կոորդինատներն են: Գծագրից երևում է, որ

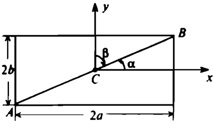
$$x_1 = \frac{r}{2}\cos\varphi,$$

$$y_1 = \frac{r}{2}\sin\varphi, \quad y_2 = r\sin\varphi,$$

Տեղադրելով այս արժեքները (1)-ի մեջ կստանանք պատասխանը:

$$x_c = \frac{P_1 l + (P_1 + 2P_2 + 4P_3) r\cos\varphi}{2(P_1 + P_2 + P_3)}, \qquad = \frac{P_1 + 2P_2}{2(P_1 + P_2 + P_3)} r\sin$$

Խնդիր 5: Տված է M զանգված և $2a$, $2b$ չափեր ունեցող համասեռ ուղղանկյուն թիթեղը: Գտնել թիթեղի իներցիայի մոմենտը անկյունագծի նկատմամբ (գծ.11):



Գծ. 11

Լուծում: Թիթեղի C զանգվածների կենտրոնը ընդունենք սկզբնակետ և տանենք $Cxyz$ կոորդինատական համակարգը, ընդ որում x առանցքն ուղղենք զուգահեռ $2a$ երկարությամբ կողմին, y առանցքը՝ զուգահեռ $2b$ երկարությամբ կողմին, իսկ z առանցքը՝ ուղղահայաց թիթեղի հարթությանը (գծագրի վրա z առանցքը չի նշված): Քանի որ թիթեղը սիմետրիկ է x,y,z առանցքների նկատմամբ, ուստի x,y,z կոորդինատական առանցքները կլինեն իներցիայի գլխավոր առանցքներ և կենտրոնախույս մոմենտները կդառնան զրո, այսինքն՝

$$J_{xy} = J_{yz} = \qquad (1)$$

Գծագրից երևում է, որ

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\gamma = \cos 90^\circ = 0 \qquad (2)$$

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակում ուղղանկյուն քառանկյան իներցիայի մոմենտների համար եղած բանաձևերի համաձայն ունենք

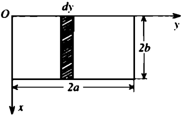
$$J_x = \frac{1}{3}Mb^2, \qquad = \frac{1}{3}Ma^2$$

Եթե (1), (2) և (3) արտահայտությունները տեղադրենք (V)-ի մեջ, կստանանք թիթեղի իներցիայի մոմենտի արտահայտությունը նրա AB անկյունագծի նկատմամբ: Այն կլինի՝

$$=\frac{1}{3}Mb^2\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{3}Ma^2\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

$$J_{AB}=\frac{2}{3}M\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Խնդիր 6 (34.10): Հաշվել գծ.12-ում պատկերված P կշիռ ունեցող համասեռ ուղղանկյուն թիթեղի J_x, J_y իներցիայի մոմենտները x և y առանցքների նկատմամբ:



Լուծում: Վերցնենք ուղղանկյան ներսում Ox առանցքին զուգահեռ մի բարակ շերտ $2b$ երկարությամբ և dy լայնությամբ: Շերտի մակերեսը կլինի $2bdy$, իսկ զանգվածը $dm=2b\gamma dy$ որտեղ g-ն մակերևութային խտությունն է: Իներցիայի մոմենտը x առանցքի նկատմամբ կլինի՝

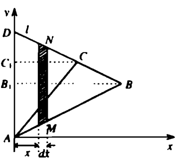
$$\int_{(M)}(y^2+z^2)dm=\int_{(M)}y^2dm=\int_0^{2a}2b\gamma y^2dy=$$

$$=2b\gamma\frac{8a^3}{3}=-\ {}^2S\gamma=\frac{4a^2}{3}M=\frac{4a^2}{3}\frac{P}{g}:$$

Նույն ձևով կարելի է հաշվել J_y-ը:

$$J_x=\frac{4}{3}\frac{P}{g}a^2\qquad J_y=\frac{4}{3}\frac{P}{g}b^2$$

Խնդիր 7: Որոշել գծ.13-ում պատկերված ABC համասեռ եռանկյան իներցիայի մոմենտը նրա հարթության վրա գտնվող և նրա գագաթով անցնող l առանցքի նկատմամբ:



Գծ. 13

Լուծում: Նախ դիտարկենք ABD եռանկյունը, որի AD կողմը գտնվում է l առանցքի վրա: Վերցնենք այդ եռանկյան ներսում մի բարակ MN շերտ, որը զուգահեռ է AD հիմքին և նրանից հեռացված է x-ով: Եթե

ABD եռանկյան BB_1 բարձրությունը նշանակենք h_B, ապա ABD և BMN եռանկյունների նմանությունից կունենանք՝

$$\frac{MN}{AD} = \frac{h_B - x}{h_B}:$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$MN = AD\left(1 - \frac{x}{h_B}\right)$$

Հետևաբար, շերտի մակերեսը կլինի՝

$$MNdx = AD\left(1 - \frac{x}{h_B}\right)dx$$

ABD եռանկյան իներցիայի մոմենտը l առանցքի նկատմամբ կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$\int_0^{h_B} x^2\gamma AD\left(1 - \frac{x}{h_B}\right)dx = \gamma AD\int_0^{h_B}\left(x^2 - \frac{x^3}{h_B}\right)dx = \frac{1}{12}\gamma ADh_B^3$$

Նույն ձևով կստանանք ACD եռանկյան իներցիայի մոմենտը l առանցքի նկատմամբ: Այն կլինի՝

$$\frac{1}{12}\gamma ADh_C^3$$

որտեղ h_C-ն ACD եռանկյան CC_1 բարձրությունն է: Այստեղից հետևում է, որ ABC եռանկյան իներցիայի մոմենտը l առանցքի նկատմամբ հավասար կլինի ստացված իներցիայի մոմենտների տարբերությանը, այսինքն՝

$$J_l = \frac{1}{12}\gamma ADh_B^3 - \frac{1}{12}\gamma ADh_C^3 = \frac{1}{12}\gamma AD(h_B - h_C)(h_B^2 + h_Bh_C + h_C^2)$$

Բայց, քանի որ

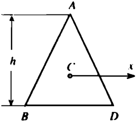
$$\frac{1}{2}AD(h_B - h_C) = \frac{1}{2}ADh_B - \frac{1}{2}ADh_C$$

իսկ S_{ABC} մակերեսը՝ բազմապատկած γ խտությունով՝ կստացվի M զանգվածը, ուստի կունենանք՝

$$J_l = M\frac{h_B^2 + h_Bh_C + h_C^2}{6}$$

Պատ. $\quad {}_l = M\dfrac{h_B^2 + h_Bh_C + h_C^2}{6}$

Խնդիր 8 (34.13): Հաշվել P կշիռ ունեցող հավասարասրուն եռանկյունաձև բարակ համասեռ թիթեղի իներցիայի մոմենտը նրա ծանրության կենտրոնով անցնող և հիմքին զուգահեռ առանցքի նկատմամբ: Եռանկյան բարձրությունը հավասար է h-ի (գծ.14):



Լուծում: Հյուգենսի թեորեմի համաձայն,

$$J_{BD} = J_C + \frac{P}{g}\frac{h^2}{9}$$

որտեղ J_C -ն թիթեղի իներցիայի մոմենտն է զանգվածների C կենտրոնով անցնող և հիմքին զուգահեռ x առանցքի նկատմամբ, իսկ J_{BD} -ն՝ BD առանցքի նկատմամբ: Նախորդ խնդրի համաձայն

$$J_{BD} = \frac{P}{g}\frac{h^2}{6}$$

Մնում է J_{BD} -ի արժեքը (2)-ից տեղադրել (1)-ի մեջ և որոշել J_C -ն:

Պատ. $\quad = \frac{1}{18}\frac{P}{g}h^2$

Խնդիր 9: Գծագիր 15-ում պատկերված ճոճանակը կազմված է l երկարություն ու m_1 զանգված ունեցող համասեռ բարակ ձողից և R շառավիղ ու m_2 զանգված ունեցող համասեռ շրջանային սկավառակից: Որոշել ճոճանակի J իներցիայի մոմենտը նրա պտտման z առանցքի նկատմամբ, եթե Oz առանցքն ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը:

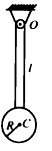
Լուծում: Ճոճանակը կազմված է երկու մարմիններից՝ ձողից և սկավառակից: Հետևաբար, ճոճանակի իներցիայի մոմենտը կլինի՝

$$J = J_1 + J_2 , \qquad (1)$$

որտեղ J_1-ը և J_2-ը համապատասխանաբար ձողի և սկավառակի իներցիայի մոմենտներն են z առանցքի նկատմամբ:

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից ունենք՝

$${}_1 = \frac{1}{3}m_1 l^2 \qquad (2)$$



Գծ. 15

Համաձայն Հյուգենսի թեորեմի՝ սկավառակի իներցիայի մոմենտի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$J_2 = J_C + m_2 d^2 \qquad (3)$$

որտեղ J_C -ն սկավառակի իներցիայի մոմենտն է այն առանցքի նկատմամբ, որն անցնում է իր զանգվածների C կենտրոնով և զուգահեռ է z առանցքին, իսկ d-ն՝ սկավառակի կենտրոնի հեռավորությունն է Oz առանցքից:

Հայտնի է, որ

$$_C = \frac{1}{2}m_2R^2 \qquad d = l + R$$

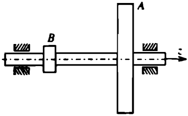
Տեղադրելով J_C -ի և d-ի արժեքները (4)-ից (3)-ի մեջ կստանանք

$$= \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2(l + R)^2$$

Մնում է J_1 -ի և J_2 -ի արժեքները (2)-ից և (5)-ից տեղադրել (1)-ի մեջ և կատարել նշված գործողությունները:

Պատ. $$= \frac{1}{3}m_1l^2 + m_2\left[\frac{1}{2}R^2 + (l + R)^2\right]$$

Խնդիր 10 (34.20): 60 կգ կշիռ ունեցող լիսեռից ամրացված 1. 1 տ կշռով *A* թափանիվը և 10 կգ կշռով *B* ատամնանիվը: Լիսեռի շառավիղը հավասար է 5 սմ-ի, թափանիվինը՝ 1 մ-ի, ատամնանիվինը՝ 10 սմ-ի: Հաշվել համակարգի իներցիայի մոմենտը նրա պտտման *z* առանցքի նկատմամբ: Լիսեռն ընդունել որպես հոծ համասեռ գլան, իսկ ատամնանիվը՝ հոծ համասեռ սկավառակ: Թափանիվի զանգվածը հավասարաչափ է բաշխված նրա ամբողջ շրջանակով (գծ.16):



Գծ. 16

Լուծում: Տրված համակարգը կազմված է երեք մարմիններից՝ *A* թափանիվից, *B* ատամնանիվից և լիսեռից: Համակարգի իներցիայի մոմենտը պտտման *z* առանցքի նկատմամբ կլինի

(1)

որտեղ J_1, J_2, J_3 -ը համապատասխանաբար *A* թափանիվի, *B* ատամնանիվի և լիսեռի իներցիայի մոմենտներն են *z* առանցքի նկատմամբ:

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակում բարակ նյութական օղակի, սկավառակի և գլանի իներցիայի մոմենտների համար եղած բանաձևերի և խնդրում տված թվային արժեքների հիման վրա կունենանք՝

$$J_1 = M_1R_1^2 = \frac{P_1}{g}R_1^2 = \frac{5000}{49} \qquad \text{կգ·մ·վրկ}^2,$$

$$_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}R_2^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{49} \qquad \text{կգ·մ·վրկ}^2,$$

$$_3 = \frac{1}{2}M_3R_3^2 = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}R_3^2 = \frac{3}{8}\frac{1}{49} \qquad \text{կգ·մ·վրկ}^2:$$

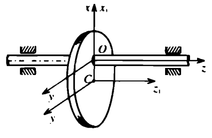
Տեղադրելով J_1, , -ի արժեքները (1)-ի մեջ կստանանք

$$J_z = 102 \quad \text{կգ·մ·վրկ}^2$$

Պատ. 102 կգ·մ·վրկ²:

Խնդիր 11 (34.25): P կշիռ ունեցող համասեռ սկավառակն ամրացված է իր հարթության ուղղահայաց z առանցքին կենտրոնից դուրս գտնվող O կետում: Սկավառակի շառավիղը հավասար է r-ի, էքսցենտրիսիտետը $OC = a$, որտեղ C-ն սկավառակի ծանրության կենտրոնն է: Հաշվել սկավառակի առանցքային J_x, J_y, J_z և կենտրոնախույս J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} իներցիայի մոմենտները: Կոորդինատական առանցքները նշված են գծագիր 17-ում:

Լուծում: Գծագրի վրա տանենք $Cx_1y_1z_1$ նոր կոորդինատական համակարգ, որի սկզբնակետը գտնվի սկավառակի ծանրության C կենտրոնում, իսկ առանցքները զուգահեռ լինեն տրված $Oxyz$ կոորդինատական համակարգի առանցքներին: Քանի որ սկավառակը համասեռ է և x_1, y_1, z_1 առանցքները նրա համար սիմետրիայի առանցքներ են ու անցնում են սկավառակի ծանրության կենտրոնով, ուստի x_1, y_1, z_1 -ը կլինեն իներցիայի գլխավոր կենտրոնական առանցքներ, որի հետևանքով կունենանք՝



Գծ. 17

$$J_{x_1y_1} = J_{y_1z_1} = J_{x_1z_1} = 0$$

Դժվար չէ նկատել, որ x, y, z -ը կլինեն իներցիայի գլխավոր առանցքներ, քանի որ նրանց O սկզբնակետը գտնվում է իներցիայի գլխավոր կենտրոնական x_1 առանցքի վրա, իսկ x, y, z առանցքները զուգահեռ են x_1, y_1, z_1 իներցիայի գլխավոր կենտրոնական առանցքներին (գծ.17): Հետևաբար՝

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0 \tag{2}$$

Իներցիայի մոմենտները x, y, z առանցքների նկատմամբ որոշելու համար օգտվենք Հյուգենսի թեորեմից: Քանի որ սկավառակի ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը y և z առանցքներից հավասար է a-ի, ուստի Հյուգենսի թեորեմի համաձայն կունենանք՝

$$J_y = J_{y_1} + \frac{P}{g}a^2, \quad J_z = J_{z_1} + \frac{P}{g}a^2$$

-ը սկավառակի իներցիայի մոմենտներն են

առանցքների նկատմամբ: Քանի որ x և x_1 առանցքները համընկնում են, ուստի $J_x = J_{x_1}$

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակում բարակ սկավառակի իներցիայի մոմենտների համար եղած բանաձևերի համաձայն կունենանք

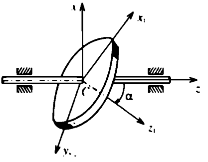
$$= \frac{P}{g}\frac{r^2}{4}, \qquad = \frac{P}{g}\frac{r^2}{2}$$

Մնու -ի և J_{z_1} -ի արժեքները (4)-ից տեղադրել (3)-ի մեջ և որոշել J_x -ը և J_z -ը:

$$= \frac{Pr^2}{4g}, \quad J_x = \frac{P}{g}\left(\frac{r^2}{4} + a^2\right),$$

$$= \frac{P}{g}\left(\frac{r^2}{2} + a^2\right)$$

Խնդիր 12 (34.28): *P* կշիռ ունեցող համասեռ շրջանային սկավառակն ամրացված է իր ծանրության *C* կենտրոնով անցնող *z* առանցքին: Սկավառակի սիմետրիայի առանցքը գտնվում է սիմետրիայի *xz* ուղղաձիգ հարթության վրա և *z* առանցքի հետ կազմում է α անկյուն: Սկավառակի շառավիղը հավասար է *r*-ի: Հաշվել սկավառակի J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները (կոորդինատական առանցքները ցույց են տրված գծագիր 18-ի վրա):



Գծ. 18

Լուծում: Հայտնի է, որ եթե համասեռ բացարձակ պինդ մարմինն ունի սիմետրիայի հարթություն, ապա այդ հարթության բոլոր կետերի համար իներցիայի գլխավոր առանցքներից մեկը կլինի այդ հարթությանը ուղղահայաց: Քանի որ *xz*-ը սիմետրիայի հարթություն է, ապա *y*-ը կլինի իներցիայի գլխավոր առանցք և *y* պարունակող կենտրոնախույս մոմենտները կլինեն զրո, այսինքն՝

$$_{yz} = 0$$

Մնում է հաշվել J_{xz} իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտը, որը ըստ սահմանման կլինի՝

$$= \sum_k m_k x_k z_k$$

կոորդինատները արտահայտենք x_{1k} կոորդինատների միջոցով: Դրա համար օգտվենք կոորդինատների ձևափոխման հետևյալ բանաձևերից

$$z = z_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha,$$

$$x = z_1 \sin\alpha + x_1 \cos\alpha$$

Այս բանաձևերը արտածված են, ընդունելով, որ պտույտը կատարված է ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ, ուստի անհրաժեշտ է (2) բանաձևում α անկյունը փոխարինել $(-\alpha)$-ով: Դրա հետևանքով (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$z_k = z_{1k} \cos\alpha + x_{1k} \sin\alpha, \quad x_k = -z_{1k} \sin\alpha + x_{1k} \cos\alpha$$

(1)-ի մեջ տեղադրելով z_k -ի և x_k -ի արժեքները (3)-ից՝ կստանանք

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k (-z_{1k} \sin\alpha + x_{1k} \cos\alpha)(z_{1k} \cos\alpha + x_{1k} \sin\alpha)$$

Նշված գործողությունները կատարելուց հետո J_{xz} -ի արտահայտությանը կարելի է տալ հետևյալ տեսքը՝

$$= \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_{1k}^2 - \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k}^2\right) + \cos 2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k x_{1k} z_{1k}$$

Եթե գումարենք և հանենք $\sum_{k=1}^{n} m_k y_{1k}^2$ կստանանք

$$= \frac{\sin 2\alpha}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_{1k}^2 + y_{1k}^2\right) - \sum_{k=1}^{n} m_k \left(z_{1k}^2 + y_{1k}^2\right)\right] + \cos 2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k} x_{1k}$$

Այստեղ $x_{1k}^2 + y_{1k} = d_{kz_1}^2$ և $z_{1k}^2 + y_{1k} = d_{kx_1}^2$ մեծությունները k կետի հեռավորությունների քառակուսիներն են x_1 առանցքներից: Հետևաբար՝

$$= \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k d_{kz_1}^2 - \sum_{k=1}^{n} m_k d_{kx_1}^2\right) + \cos 2\alpha \sum_{k=1}^{n} m_k x_{1k} z_{1k}$$

Բայց ըստ սահմանման՝

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \qquad \sum_{k=1}^{n} m_k d_{kx_1}^2 = \qquad \sum_{k=1}^{n} m_k z_{1k} x_{1k} =$$

Խնդրի պայմանում տված է, որ z_1 -ը սկավառակի համար սիմետրիայի առանցք է, այսինքն՝ այն կլինի իներցիայի գլխավոր առանցք: Հետևաբար, $J_{x_1z_1} = 0$, որից հետևում է

$$J_{xz} = (J_{z_1} - J_{x_1})\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

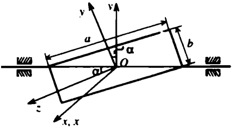
Իներցիայի մոմենտների աղյուսակում շրջանային սկավառակի իներ-ցիայի մոմենտների համար եղած բանաձևերի համաձայն կունենանք

$$= \frac{P}{g}\cdot\frac{r^2}{2}, \qquad = \frac{P}{g}\cdot\frac{r^2}{4}$$

Այս արժեքները տեղադրելով (6)-ի մեջ կստանանք պատասխանը.

$$= \frac{Pr^2}{8g}\sin 2\alpha,$$

Խնդիր 13 (34.31): *P* կշիռ ունեցող համասեռ ուղղանկյուն թիթեղը ամ-րացված է նրա անկյունագծերից մեկով անցնող *z* առանցքին: Թիթեղի կողմերի երկարությունները են *a* և *b*: Հաշվել թիթեղի J_{yz} իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտը, եթե *y*, *z* առանցքները և թիթեղը գտնվում են գծագրի հարթության մեջ:



Կոորդինատական համակարգի սկզբնակետը համընկնում է թիթեղի ծանրության կենտրոնի հետ (գծ.19):

Լուծում: Տանենք yOz հարթության վրա $y'Oz'$ կոորդինատական համակարգը, որի առանցքները համընկնեն ուղղանկյան սիմետրիայի առանցքների հետ. Գրենք J_{yz}-ի արտահայտությունը.

$$= \sum_k m_k y_k z_k$$

y_k և z_k կոորդինատները արտահայտենք y'_k և z'_k կոորդինատների միջոցով: Դրա համար օգտվենք կոորդինատների ձևափոխման հետևյալ բանաձևերից`

$$y_k = y'_k\cos\alpha - z'_k\sin\alpha,$$
$$z_k = y'_k\sin\alpha + z'_k\cos\alpha: \qquad (2)$$

Տեղադրելով y_k-ի և z_k-ի արժեքները (2)-ից (1)-ի մեջ` կստանանք`

$$J_{yz} = \sum_k m_k(y'_k\cos\alpha - z'_k\sin\alpha)(y'_k\sin\alpha + z'_k\cos\alpha) =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(\sum_k m_k y'^2_k - \sum_k m_k z'^2_k\right) + \cos 2\alpha\sum_k m_k y'_k z'_k:$$

Քանի որ թիթեղը համասեռ է, և y', z'-ը նրա համար սիմետրիայի առանցքներ են, ուստի`

$$_{y'z'} = \sum_k m_k y'_k z'_k =$$

Մնում է հաշվել $\sum\limits_k m_k y_k'^2$ և $\sum\limits_k m_k z_k'^2$ արտահայտությունների արժեքնե-րը: Սրանցից առաջինը հաշվենք ինտեգրման միջոցով.

$$\sum_k m_k y_k'^2 = \frac{P}{gab}\int_{-a/2}^{a/2}dz'\int_{-b/2}^{b/2}y'^2dy' = \frac{1}{3}\frac{P}{gab}\left(\frac{b}{2}\right)^3\cdot 2a = \frac{Pb^2}{12g}: \qquad (5)$$

Նույն կերպ կստանանք՝

$$\sum_k m_k z_k'^2 = \frac{Pa^2}{12g}: \qquad (6)$$

Օգտվելով (4), (5) և (6) արտահայտություններից՝ J_{yz}-ի համար կունենանք՝

$$J_{yz} = \frac{1}{12}\frac{P}{g}(b^2 - a^2)\sin\alpha\cos\alpha \qquad (7)$$

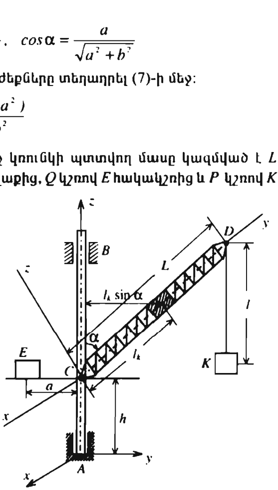
Գծագրից ունենք՝

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Մնում է $\sin\alpha$-ի և $\cos\alpha$-ի արժեքները տեղադրել (7)-ի մեջ:

Պատ. $$J_{yz} = \frac{1}{12}\frac{P}{g}\frac{ab(b^2-a^2)}{a^2+b^2}$$

Խնդիր 14 (34.34): Ամբարձիչ կռունկի պտտվող մասը կազմված է L երկարություն և G կշիռ ունեցող CD սլաքից, Q կշռով E հակակշռից և P կշռով K ծանրոցից: Որոշել կռունկի J_z իներցիայի մոմենտը պտտման ուղղաձիգ z առանցքի նկատմամբ և կենտրոնախույս մոմենտները կռունկին ամրացված կոորդինատական x, y, z առանցքների նկատմամբ, եթե կռունկի CD սլաքը համասեռ բարակ հեծան է, իսկ E հակակշիռը ու K ծանրոցը՝ կետային զանգվածներ: Ամբողջ համակարգի ծանրության կենտրոնը գտնվում է պտտման z առանցքի վրա, իսկ CD սլաքը՝ yz հարթության մեջ: Կոորդինատական առանցքները և երկրաչափական չափերը ցույց են տրված գծագիր 20-ի վրա:



Գծ. 20

Լուծում: *CD* սլաքը, *E* հակակշիռը և *K* ծանրոցը միասին դիտենք որպես մի մեխանիկական համակարգ: Եթե համակարգի իներցիայի մոմենտը պտտման z առանցքի նկատմամբ նշանակենք J_z, ապա կունենանք

$$J_z = J_z^{CD} + J_z^{E} + J_z^{K} \qquad (1)$$

Քանի որ *E* հակակշիռը և *K* ծանրոցը կետային զանգվածներ են, ուստի կարող ենք գրել.

$$J^{E} = \frac{Q}{g}a^2 \qquad J_z^{K} = \frac{P}{g}L^2\sin^2\alpha$$

C կետը սկզբնակետ ընդունելով՝ տանենք $x'y'z'$ կոորդինատական համակարգը, ընդ որում y'-ը ուղղենք *CD* հեծանի առանցքով: J_z^{CD} -ը հաշվելու համար օգտվենք առանցքի նկատմամբ իներցիայի մոմենտի սահմանումից՝

$$J_z^{CD} = \sum_k (l_k \sin\alpha)^2 \Delta m_k \qquad (3)$$

որտեղ l_k -ն *CD* սլաքի Δm_k զանգվածով տարրի հեռավորությունն է *C* կետից: (3) բանաձևում անցնելով ինտեգրալի և հաշվի առնելով, որ սլաքը բարակ համասեռ ձող է, կստանանք՝

$$J_z^{CD} = \int_{(CD)} l^2\sin^2\alpha\, dm \qquad (4)$$

Քանի որ $dm = \gamma dl$, որտեղ $\gamma = \frac{G}{gL}$ -ն սլաքի գծային խտությունն է, ապա

$$J_z^{CD} = \int_0^L \gamma l^2\sin^2\alpha\, dl = \frac{\gamma L^3}{3}\sin^2\alpha = \frac{1}{3}\frac{GL^2}{g} \qquad (5)$$

Եթե (2)-ը և (5)-ը տեղադրենք (1)-ի մեջ, կստանանք J_z-ի արտահայտությունը հետևյալ տեսքով՝

$$J_z = \frac{Q}{g}a^2 + \frac{L^2}{g}\left(\frac{G}{3} + P\right)\sin^2\alpha$$

Քանի որ ամբողջ համակարգը գտնվում է yz հարթության մեջ, ուստի x պարունակող իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները կլինեն զրո, այսինքն՝

$$J_{xy} = \sum_k m_k x_k y_k = 0, \qquad J_{xz} = \sum_k m_k x_k z_k = 0$$

Նկատի ունենալով, որ համակարգը կազմված է երեք մարմիններից, կունենանք՝

E և K կետային զանգվածների համար ունենք

$${}^{E} = -\frac{Q}{g}ah, \quad J^{K}_{yz} = \frac{P}{g}(h -$$

կենտրոնախույս մոմենտը որոշենք ինտեգրման միջոցով: Դրա համար անջատենք dy' տարր, որի զանգվածն է $dm = \frac{G}{gL}dy'$: Այս տարրի կոորդինատները արտահայտվում են y'-ի միջոցով հետևյալ ձևով՝

$$y = y' \sin\alpha, \quad z = z' \cos\alpha + h.$$

Այստեղ y'-ը C կետի հեռավորությունն է dy'-ից: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\int_{(CD)} yzdm = \frac{G}{gL}\int_0^L (h + y'\cos\alpha)y'\sin\alpha dy' = \frac{GL}{g}\sin\alpha\left(\frac{h}{2} + \frac{L}{3}\cos\alpha\right).$$

Տեղադրելով $J^{E}_{yz}, J^{K}_{yz}, J^{CD}_{yz}$ -երի արժեքները (7)-ից և (8)-ից (6)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$= \frac{L\sin\alpha}{g}\left[\frac{GL}{3}\cos\alpha + P(L\cos\alpha - l)\right] + \frac{h}{g}\left(PL\sin\alpha - Qa + \frac{LG}{2}\sin\alpha\right)$$

Քանի որ համակարգի զանգվածների կենտրոնը գտնվում է z առանցքի վրա (C կետում), ուստի (II)-ից կունենանք՝

$$y_c = \frac{PL\sin\alpha - Qa + \frac{1}{2}GL\sin\alpha}{P + Q + G} = 0$$

Այստեղից ստացվում է

$$PL\sin\alpha + \frac{GL}{2}\sin\alpha - Qa = 0$$

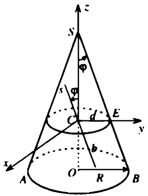
Այսինքն՝ J_{yz} -ի արտահայտությունը պարզվում է և ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$${}_{yz} = \frac{L\sin\alpha}{g}\left[\frac{GL}{3}\cos\alpha + P(L\cos\alpha - l)\right],$$

$${}_{z} = \frac{1}{g}\left[Qa^2 + \left(P + \frac{1}{3}G\right)L^2\sin^2\alpha\right],$$

$$= \frac{P + \frac{1}{3}G}{2g}L^2\sin 2\alpha - \frac{P}{g}Ll\sin\alpha, \quad J_{xx} =$$

Խնդիր 15: Գտնել ուղիղ շրջանային կոնի իներցիայի մոմենտը SB ծնիչի նկատմամբ, եթե կոնի բարձրությունը հավասար է H-ի, իսկ հիմքի շառավիղը՝ R-ի (գծ.21):



Լուծում: Տանենք $Cxyz$ կոորդինատական համակարգը: Կոնի զանգվածների C կենտրոնը գտնվում է կոնի OS բարձրության վրա, ընդ որում $OC = \frac{1}{4}OS = \frac{H}{4}$: z առանցքն ուղղենք կոնի առանցքով, y առանցքը տանենք այնպես, որ նա հատի SB ծնիչը և զուգահեռ լինի հիմքին, իսկ x առանցքն ուղղահայաց լինի yz հարթությանը: yz և xz կոորդինատական հարթությունները համաչափության հարթություններ են: Դրա հետևանքով x, y, z -ը կլինեն կոնի իներցիայի գլխավոր կենտրոնական առանցքներ: C կետով տանենք sb ուղիղը, զուգահեռ SB ծնիչին: Այդ դեպքում sb ուղղի և x, y, z առանցքների միջև կազմված անկյունները կլինեն

$$\alpha = 90^\circ, \ \beta = 90^\circ + \varphi, \ \gamma = \varphi ,$$

որտեղ φ-ն կոնի ծնիչի և բարձրության միջև կազմված անկյունն է: Տեղադրելով α, β, γ անկյունների արժեքները (VI) բանաձևի մեջ՝ կստանանք՝

$$J_1 = J_y \sin^2\varphi + J_z \cos^2\varphi \qquad (1)$$

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակում կոնի իներցիայի մոմենտների համար եղած բանաձևերի համաձայն ունենք՝

$$= \frac{3}{20}M\left(\frac{1}{4}H^2 + R^2\right), \qquad J = \frac{3}{10}MR^2 \qquad (2)$$

Գծագրից երևում է, որ

$$\sin\varphi = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}}$$

Հաշվի առնելով (2)-ը և (3)-ը՝ (1)-ից կունենանք՝

$$_1 = \frac{3}{20}M\frac{R^2}{H^2 + R^2}\left(\frac{9}{4}H^2 + R^2\right)$$

Կոնի զանգվածների C կենտրոնի հեռավորությունը SB ծնիչից կարելի է որոշել CES եռանկյունուց: Եթե այդ հեռավորությունը նշանակենք d-ով, կունենանք՝

$$d = CS\sin\varphi = \frac{3}{4}H\frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}}$$

Եթե կոնի իներցիայի մոմենտը SB ծնիչի նկատմամբ նշանակենք J, ապա Հյուգենսի թեորեմի համաձայն կարող ենք գրել՝

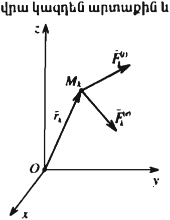
$$J = J_1 + Md^2 = \frac{3}{20} M \frac{R^2}{H^2 + R^2}\left(\frac{9}{4}H^2 + R^2\right) + \frac{9}{16}\frac{MH^2R^2}{H^2 + R^2} =$$

$$= \frac{3}{20} M \frac{R^2}{H^2 + R^2}(6H^2 + R^2):$$

Պատ. $J = \dfrac{3}{20} M \dfrac{R^2}{H^2 + R^2}(6H^2 + R^2)$

3. ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Դիցուք ունենք n կետից կազմված մեխանիկական համակարգ, որի կետերի զանգվածներն են $m_1, m_2, \ldots, m_n$, իսկ շառավիղ-վեկտորները անշարժ կոորդինատական $Oxyz$ համակարգի նկատմամբ՝ $\bar r_1, \bar r_2, \ldots, \bar r_n$: Դիտարկենք այդ համակարգի որևէ M_k կետ, որի զանգվածն է m_k, իսկ շառավիղ-վեկտորը՝ $\bar r_k$ (k-ն կետի համարն է): Ընդհանուր դեպքում այս կետի վրա կազդեն արտաքին և ներքին ուժեր, ընդ որում այդ ուժերը կլինեն թե՛ ակտիվ և թե՛ պասիվ (կապի հակազդումներ): Համակարգի k-րդ կետի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի գումարը (թե՛ ակտիվ և թե՛ պասիվ) նշանակենք $\bar F_k^{(e)}$, իսկ ներքին ուժերի գումարը (թե՛ ակտիվ և թե՛ պասիվ)՝ $\bar F_k^{(i)}$ (գծ.22): Համաձայն կապերի աքսիոմի M_k կետը կարելի է դիտել որպես ազատ կետ: Քանի որ նրա վրա, բացի ակտիվ ուժերից, ազդում են նաև պասիվ ուժեր (կապի հակազդումներ), ապա այդ կետի, ինչպես նաև համակարգի մնացած բոլոր կետերի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն՝



Գծ. 22

$$m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = \bar F_k^{(e)} + \bar F_k^{(i)}, \quad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

Պրոյեկտելով այս հավասարումները դեկարտյան կոորդինատական համակարգի առանցքների վրա՝ կստանանք հետևյալ $3n$ հավասարումների համակարգը.

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = F_{kx}^{(e)} + F_{kx}^{(i)}$$

$$m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} =$$

$$m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = F_{kz}^{(e)}$$

(I) հավասարումները կոչվում են մեխանիկական համակարգի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներ վեկտորական տեսքով, իսկ (II)-ը՝ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներ դեկարտյան կոորդինատական առանցքների նկատմամբ:

(II) հավասարումներում ուժերի պրոյեկցիաները ընդհանուր դեպքում կարող են կախված լինել ժամանակից, համակարգի կետերի կոորդինատներից և այդ կետերի արագություններից: Հետևաբար, (II) հավասարումները իրենցից ներկայացնում են երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ x_k, y_k, z_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ փոփոխականների նկատմամբ:

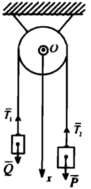
Համակարգի դինամիկայի հիմնական խնդիրը կայանում է նրանում, որ ունենալով համակարգի կետերի զանգվածները և այդ կետերի վրա ազդող ուժերը՝ պետք է գտնել նրա յուրաքանչյուր կետի շարժման օրենքը, այսինքն՝ գտնել կետերի կոորդինատները՝ կախված ժամանակից:Այս խնդրի լուծումը հանգում է (II) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ինտեգրմանը: Ինտեգրումից կստացվեն $6n$ կամայական հաստատուններ, որոնց արժեքները կարելի է որոշել շարժման սկզբնական պայմաններից: Մեխանիկական համակարգի համար սկզբնական պայմանները կետերի կոորդինատների և արագությունների պրոյեկցիաների արժեքներն են ժամանակի որոշակի պահին:

Մեխանիկական համակարգի սահմանումից հետևում է, որ որևէ կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները չեն կարող ինտեգրվել անկախ մնացած կետերի շարժման հավասարումներից, քանի որ այդ դեպքում տվյալ կետի շարժումը կախված չէր լինի համակարգի մնացած կետերի շարժումներից և դիրքերից:

Եթե հաջողվի ինտեգրել (II) համակարգը, ապա կստացվի խնդրի լրիվ և վերջնական լուծումը: Սակայն համակարգի այդպիսի ուսումնասիրություն կարելի է կատարել միայն որոշ մասնավոր դեպքերում, երբ համակարգը կազմված է փոքր թվով կետերից և, առանձնապես, երբ (II) հավասարումների աջ մասերում տրված ֆունկցիաները ունեն շատ պարզ տեսք: Սակայն մեխանիկական համակարգի շարժումն ուսումնասիրելիս շատ հաճախ անհրաժեշտ չի լինում որոշել համակարգի յուրաքանչյուր կետի շարժումը, բավական է միայն որոշել համակարգի, որպես մի ամբողջության, շարժումը բնորոշող մի քանի մեծությունների փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում: Այդ մեծությունները որոշվում են համակարգի դինամիկայի հիմնական թեորեմներով: Հատկապես կարևոր նշանակություն ունեն համակարգի դինամիկայի հիմնական թեորեմների հետևանքները, որոնք ստացվում են ազդող ուժերի նկատմամբ որոշ ենթադրությունների դեպքում և տալիս են համակարգի շարժման առաջին ինտեգրալներ: Այս ինտեգրալները համակարգի դինամիկայի խնդիրներ լուծելու համար ունեն էական նշանակություն:

Համակարգի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կազմելու և ինտեգրելու վերաբերյալ դիտարկենք մի պարզագույն օրինակ:

Խնդիր 16: Q և P կշիռներ ունեցող երկու մարմիններ միացած են իրար ճախարակի վրայով գցված ճոպանով (գծ.23): Որոշել այդ բեռների (մարմինների) արագացումների մեծությունները և ճոպանի T լարումը՝ անտեսելով շփման ուժերը և ճախարակի ու ճոպանի զանգվածները:



Լուծում: Տանենք Ox առանցքը՝ ուղղված ուղղաձիգ դեպի ներքև (գծ.23): Համակարգը կազմված է երկու նյութական կետերից (երկու մարմինների շարժումներն էլ համընթաց են), որոնք շարժվում են Ox առանցքին զուգահեռ: Հետևաբար, կունենանք շարժման երկու դիֆերենցիալ հավասարումներ՝ պրոյեկտած x առանցքի վրա: Ենթադրենք, որ $\bar{P}$ բեռը շարժվում է դեպի ներքև $\ddot{x}_1$ արագացումով: Այդ դեպքում $\bar{Q}$ բեռը կշարժվի դեպի վերև՝ $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$ արագացումով: Մտքով ազատվենք կապից (ճոպանից)՝ այն փոխարինելով $\bar{T}_1$ և $\bar{T}_2$ հակազդումներով: Այժմ կարելի է P և Q բեռները ընդունել որպես ազատ կետեր և գրել նրանց շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները՝ պրոյեկտած x առանցքի վրա: Այդ հավասարումները կլինեն՝

$$m_1\ddot{x}_1 = Q - T_1, \tag{1}$$

Եթե նկատի ունենանք, որ

$$m_1 = \frac{Q}{g}, \quad m_2 = \frac{P}{g},$$

(1)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{Q}{g}\ddot{x}_1 = Q - T \qquad -\frac{P}{g}\ddot{x}_1 =$$

Լուծելով այս հավասարումները $\ddot{x}_1$ արագացման և ճոպանի T լարման նկատմամբ՝ կունենանք՝

$$\ddot{x}_1 = \frac{Q-P}{Q+P}g, \quad T = \frac{2PQ}{P+Q} \tag{2}$$

(2)-ից հետևում է, որ առաջին բեռը հաստատուն արագացումով շարժվում է դեպի ցած, եթե $Q > P$, և դեպի վեր, եթե $Q < P$: Եթե $Q = P$, ապա երկու բեռներն էլ գտնվում են հավասարակշռության մեջ կամ շարժվում են հավասարաչափ (սա կախված է նախնական պայմաններից): Անհրաժեշտ է նշել, որ եթե $Q \neq P$, ապա ճոպանի լարումը հավասար չէ համապատասխան բեռի կշռին:

$$= \frac{Q -. P}{Q + P} g, \qquad = \frac{2PQ}{P + Q}$$

4. ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԶԱՆԳՎԱԾՆԵՐԻ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

Մի շարք դեպքերում մեխանիկական համակարգի շարժման բնույթը որոշելու համար անհրաժեշտ է լինում օգտվել զանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմից:

1. Զանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմը: Եթե գումարենք համակարգի շարժման § 3-ի (I) հավասարումները, օգտագործենք § 2-ի զանգվածների կենտրոնի (I) բանաձևը և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ համակարգի վրա ազդող բոլոր ներքին ուժերի գումարը հավասար է զրոյի, կստանանք՝

$$M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = \sum_k \bar{F}_k^{(e)}$$

(I)-ը իրենից ներկայացնում է համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմը: Սա իր տեսքով նման է նյութական կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարմանը, որի զանգվածը հավասար է M-ի, իսկ ազդող ուժը $\sum_k \bar{F}_k^{(e)}$-ի: (I) բանաձևը կարելի է ձևակերպել այսպես.

Համակարգի զանգվածների կենտրոնը շարժվում է որպես մի նյութական կետ, որի զանգվածը հավասար է ամբողջ համակարգի զանգվածին, և որի վրա ազդում է համակարգի վրա կիրառված բոլոր արտաքին ուժերի գումարը:

Պրոյեկտելով (I) հավասարումը դեկարտյան անշարժ կոորդինատային առանցքների վրա՝ կունենանք՝

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_k F_{kx}^{(e)}$$

$$M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_k F_{ky}^{(e)} \qquad \text{(II)}$$

$$M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum_k F_{kz}^{(e)}$$

(II) հավասարումները կոչվում են համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներ: Եթե (II) հավասարումների համակարգի աջ մասերը կախված լինեն միայն զանգվածների կենտրոնի կոորդինատներից, արագությունից և ժամանակից, ապա (I) և (II) հավասարումներից բխում է, որ համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման ուսումնասիրության խնդիրը բերվում է կետի դինամիկայի խնդրին: Մասնավորապես, եթե մարմինը շարժվում է համընթաց, ապա նրա շարժումը լիովին որոշվում է զանգվածների կենտրոնի շարժումով: Այսպիսով, համընթաց շարժվող մարմինը միշտ կարելի է դիտել որպես նյութական կետ, որի զանգվածը հավասար է մարմնի զանգվածին:

(I) և (II) հավասարումներից հետևում է, որ ներքին ուժերն անմիջականորեն չեն մասնակցում նրանց մեջ: Այս հանգամանքն էապես հեշտացնում է խնդիրների լուծումը, քանի որ համակարգի ներքին ուժերը մեծ մասամբ անհայտ են լինում:

2. Համակարգի զանգվածների կենտրոնի արագության պահպանման օրենքը: Համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմից կարելի է ստանալ երկու հետևանք:

ա) Դիցուք համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի գումարը հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$\sum_i \overline{F}_i^{(e)} = 0$$

Այդ դեպքում (I) հավասարումից հետևում է, որ $\overline{W}_C = 0$, այսինքն՝ $\overline{V}_C = const$: Հետևաբար, եթե համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի գումարը հավասար է զրոյի, ապա այդ համակարգի զանգվածների կենտրոնը շարժվում է հաստատուն մեծությամբ և ուղղությամբ ունեցող արագությամբ, այսինքն՝ կատարում է հավասարաչափ ուղղագիծ շարժում: Մասնավորապես, եթե սկզբնական պահին զանգվածների կենտրոնը գտնվել է հավասարակշռության մեջ, ապա նա կմնա հավասարակշռության մեջ նաև հետագայում: Ներքին ուժերը զանգվածների կենտրոնի շարժումը փոխել չեն կարող:

բ) Դիցուք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի գումարը հավասար չէ զրոյի, բայց նրանց պրոյեկցիաների գումարը որևէ առանցքի վրա (օրինակ՝ Ox առանցքի) հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$\sum_i F_{ix}^{(e)} = 0$$

Այդ դեպքում (II)-ի առաջին հավասարումներից կունենանք

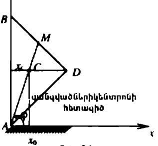
$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0 \quad \text{կամ} \quad \frac{dx_C}{dt} = \quad _{C_1} = const$$

Հետևաբար, եթե համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի պրոյեկցիաների գումարը որևէ առանցքի վրա հավասար է զրոյի, ապա համակարգի զանգվածների կենտրոնի արագության պրոյեկցիան այդ առանցքի վրա հաստատուն մեծություն է: Մասնավորապես, եթե սկզբնական պահին $V_{C_x} = 0$, ապա հետագա պահերին նույնպես $V_{C_x} = 0$, այսինքն՝ այս դեպքում համակարգի զանգվածների կենտրոնը x առանցքի ուղղությամբ շարժվել չի կարող ($x_C = const$):

Համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմի այս երկու հետևանքները կոչվում են համակարգի շարժման քանակի պահպանման օրենք: Որպես այս օրենքի կիրառություն՝ դիտարկենք արեգակնային համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժումը: Եթե արհամարհենք աստղերի ձգողության ուժերը, ապա արեգակնային համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժեր չեն ազդի, և նրա զանգվածների կենտրոնը անշարժ աստղերի նկատմամբ կկատարի հավասարաչափ ուղղագիծ շարժում:

Խնդիր 17: Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան տեսք ունեցող բարակ թիթեղը, որի ներքնաձիգը հավասար է 12 սմ-ի, A գագաթով դրված է բացարձակ ողորկ հարթության վրա այնպես, որ սկզբնական պահին AB ներքնաձիգը համընկնում է A_y ուղղաձիգի հետ: Այնուհետև ազատ թողնված թիթեղն ընկնում է ծանրության ուժի ազդեցության տակ: Որոշել, թե ինչպիսի՞ կոր կգծի BD լցի M միջնակետը (գծ.24):

Լուծում: Եռանկյուն թիթեղը դիտենք որպես մի մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում է միայն մեկ արտաքին ուժ՝ իր ծանրության ուժը, որը կիրառված է եռանկյան զանգվածների կենտրոնում և ուղղված է ուղղաձիգ դեպի ներքև: Սրա հետևանքով թիթեղի վրա ազդող արտաքին ուժի պրոյեկցիան հորիզոնական A_x առանցքի վրա հավասար կլինի զրոյի: Հետևաբար, համաձայն համակարգի զանգվածների կենտրոնի արագության պահպանման օրենքի՝ թիթեղի զանգվածների կենտրոնի արագության հորիզոնական բաղադրիչը պետք է լինի հաստատուն, այսինքն՝ $V_{C_x} = const$: Քանի որ սկզբնական պահին թիթեղի զանգվածների կենտրոնի արագությունը հավասար է եղել զրոյի, ապա



Գծ. 24

$$V_{C_x} = \frac{dx_C}{dt} =$$

Այստեղից էլ ստացվում է, որ

ամբողջ շարժման ընթացքում:

Այսպիսով ստացվում է, որ թիթեղի զանգվածների C կենտրոնը շարժվում է ուղղաձիգով և, հետևաբար, BD լծի M միջնակետի x, y ընթացիկ կոորդինատների համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունները

$$x = x_0 + CM\cos\varphi\ ,$$
$$y = AM\sin\varphi$$

Քանի որ C կետը գտնվում է եռանկյան միջնագծերի հատման կետում, ապա

$$AM^2 = 72 + 18 = 90,\quad AM = \sqrt{90}\ ,$$
$$CM = \frac{1}{3}\sqrt{90} = \sqrt{10},\quad x_0 = \frac{1}{3}DK = 2$$

Հետևաբար, M կետի ընթացիկ կոորդինատները կլինեն՝

$$x = 2 + \sqrt{10}\cos\varphi\ ,$$
$$y = \sqrt{90}\sin\varphi\ ,$$

կամ՝

$$\cos\varphi = \frac{x-2}{\sqrt{10}},\quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{90}}$$

Վերջին երկու հավասարումների ձախ և աջ մասերը բարձրացնելով քառակուսի և գումարելով՝ կստանանք

$$\frac{(x-2)^2}{10} + \frac{y^2}{90} = 1$$

Պատ. Էլիպս, որի կիսառանցքներն են՝ $a = \sqrt{10}$ սմ, $b = 3\sqrt{10}$ սմ

3. Համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմի վերաբերյալ խնդիրների լուծում: Համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմի օգնությամբ կարելի է որոշել զանգվածների կենտրոնի շարժումը, երբ տրված են համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերը, և ընդհակառակը, որոշել համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը, երբ տրված է համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժումը:

Համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

ա) առանձնացնել մեխանիկական համակարգը,

բ) նշել մեխանիկական համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերը,

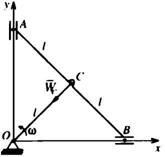
գ) ընտրել կոորդինատական համակարգը,

դ) կազմել համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման (II) դիֆերենցիալ հավասարումները՝ ընտրված կոորդինատական համակարգի նկատմամբ, ե) եթե տրված է համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժումը, ապա անհրաժեշտ է որոշել համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը, իսկ եթե տրված են համակարգի վրա ազդող ուժերը, ապա անհրաժեշտ է որոշել համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժումը,

զ) զանգվածների կենտրոնի շարժումը որոշելու համար պետք է ինտեգրել ստացված դիֆերենցիալ հավասարումները՝ օգտագործելով տրված նախնական և եզրային պայմանները: Որից հետո որոշել խնդրում պահանջվող անհայտ մեծությունները:

4. Խնդիրներ: Ստորև բերվում են մեխանիկական համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումներ:

Խնդիր 18 (35.2): Որոշել էլիպսոգրաֆի AB քանոնի վրա կիրառված արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը (գծ.25), եթե OC մեղեխը պտտվում է ω հաստատուն անկյունային արագությամբ: AB քանոնի կշիռը հավասար է P-ի, $OC = AC = BC = l$:



Լուծում: C կետը AB քանոնի զանգվածների կենտրոնն է: Քանի որ մեղեխը պտտվում է ω հաստատուն անկյունային արագությամբ, ուստի C կետի արագացման $\overline{W}_C$ վեկտորը կլինի

$$\overline{W}_C = -\omega^2 \overline{OC} = \omega^2 l \bar{l}^0$$

որտեղ $\bar{l}^0$ -ն $\overline{CO}$ վեկտորի միավոր վեկտորն է:

Եթե $\overline{W}_C$ -ի այս արժեքը տեղադրենք զանգվածների կենտրոնի շարժման

$$M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = \sum_i \overline{F}_i^{(e)}$$

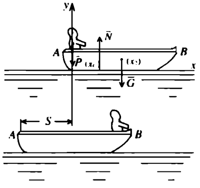
դիֆերենցիալ հավասարման մեջ, ապա կստանանք AB քանոնի վրա ազդող արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորի արտահայտությունը հետևյալ տեսքով՝

$$\sum_i \overline{F}_i^{(e)} = \frac{P}{g} \omega^2 l \bar{l}^0$$

Արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորն ուղղված է $\overline{CO}$ -ով և բացարձակ արժեքով հավասար է $\frac{P}{g}\omega^2 l$

Խնդիր 19: Հանգստի վիճակում գտնվող նավակի A ծայրում կանգնած մարդը տեղափոխվում է նավակի մյուս՝ B ծայրը: Որոշել, թե ինչ S ճանապարհ կանգնի նավակը մինչև այն պահը, երբ մարդը *B* կետում կանգ կառնի: Տված է նավակի կշիռը *G*, մարդու կշիռը *P*, նավակի երկարությունը *l*: Ջրի դիմադրությունն արհամարհել (գծ.26):

Լուծում: Տանենք *Axy* կոորդինատական համակարգը՝ սկզբնակետը տեղավորելով *A* կետի սկզբնական դիրքում, *Ax* առանցքն ուղղենք մարդու շարժման ուղղությամբ, իսկ *Ay*-ը՝ ուղղահայաց *Ax*-ին և ուղղված դեպի վեր: Նավակը և մարդը միասին դիտենք որպես մի մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են



Գծ. 2

հետևյալ ակտիվ ուժերը՝ նավակի և մարդու $\bar{G}$ և $\bar{P}$ կշիռները և ջրի $\bar{N}$ վերամբարձ ուժը, որն ուղղված է ուղղաձիգ դեպի վեր: Այս բոլոր ուժերի պրոյեկցիաների գումարը հորիզոնական *Ox* առանցքի վրա հավասար է զրոյի: Հետևաբար, համաձայն համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման պահպանման օրենքի՝ տված համակարգի զանգվածների կենտրոնի հորիզոնական արագությունը կլինի հաստատուն ($V_{C_x} = const$): Քանի որ սկզբնական պահին համակարգը եղել է անշարժ ($V_{C_x} = 0$), ապա նրա զանգվածների կենտրոնը կմնա անշարժ նաև մարդու տեղափոխման ժամանակ ($x_C = const$)

Հաշվենք համակարգի զանգվածների կենտրոնի աբսցիսը: Այն կլինի

$$= \frac{Px_1 + Gx_2}{P+G}$$

Եթե մարդը նավակի *A* ծայրից տեղափոխվում է *B* ծայրը, ապա մարդու $\bar{P}$ կշռի կիրառման կետի x_1 աբսցիսը կաճի: Քանի որ $x_C = const$, ուստի նավակի $\bar{G}$ կշռի կիրառման կետի x_2 աբսցիսը պետք է նվազի: Իսկ դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ նավակը շարժվի դեպի ձախ:

Եթե համակարգի զանգվածների կենտրոնի աբսցիսը սկզբնական պահին, երբ մարդը գտնվում է *A* դիրքում, նշանակենք $(x_C)_A$ և նկատի ունենանք, որ $x_1 = 0,\ x_2 = l/2$, ապա կունենանք՝

$$(x_C)_A = \frac{Gl/2}{P+G}$$

Դիցուք, երբ մարդը *A* դիրքից տեղափոխվում է *B* դիրքը, նավակը տեղափոխվում է դեպի ձախ՝ անցնելով *S* ճանապարհ: Այդ դեպքում կունենանք՝

$${}_1 = l - S, \quad x_2 = l/2 - S$$

Եթե $(x_C)_B$ -ով նշանակենք համակարգի վանգվածների կենտրոնի աբսցիսը, երբ մարդը տեղափոխվել է B դիրքը, ապա կստանանք՝

$$(x_C)_B = \frac{P(l-S)+G(l/2-S)}{P+G}$$

Քանի որ համակարգի զանգվածների կենտրոնը մնում է անշարժ ամբողջ շարժման ընթացքում, ապա

$$G\frac{l}{2} = P(l-S)+G\left(\frac{l}{2}-S\right)$$

Լուծելով այս հավասարումը S -ի նկատմամբ՝ կստանանք՝

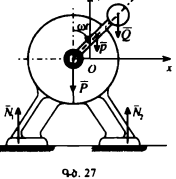
$$S = \frac{Pl}{P+G} = \frac{l}{1+\dfrac{G}{P}} < l$$

Նշանակում է, նավակի տեղափոխությունը չի կարող գերազանցել նրա երկարությանը:

Պատ. $S = \dfrac{l}{1+G/P}$.

Խնդիր 20 [35.10 (962)]: P կշիռ ունեցող էլեկտրական շարժիչը դրված է հարթ հորիզոնական հիմքի վրա, առանց ամրացման: Շարժիչի լիսեռի վրա, ուղիղ անկյան տակ, մի ծայրով ամրացված է $2l$ երկարությամբ և p կշռով համասեռ ձողը, ձողի մյուս ծայրին դրված է կետային Q բեռը: Լիսեռի անկյունային արագությունը հավասար է ω-ի: Որոշել՝ 1) շարժիչի հորիզոնական շարժումը, 2) հեղույսների վրա ազդող ամենամեծ R ճիգը, եթե նրանցով ամրացվի էլեկտրաշարժիչի պատյանը հիմքին (գծ.27):

Լուծում: Էլեկտրական շարժիչը, ձողը և ծանրոցը դիտենք որպես մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ էլեկտրաշարժիչի $\bar{P}$, ձողի $\bar{p}$, ծանրոցի $\bar{Q}$ կշիռները և հիմքի $\bar{N}_1$ ու $\bar{N}_2$ նորմալ հակազդումները (գծ.27): Տանենք Oxy կոորդինատական համակարգը՝ կոորդինատների սկզբնակետը տեղավորելով էլեկտրաշարժիչի լիսեռի կենտրոնում, երբ ձողն ունի ուղղաձիգ դեպի վեր ուղղված դիրք: Ox առանցքն ուղղենք հորիզոնական ուղղությամբ, իսկ Oy -ը՝ նրան ուղղահայաց: Քանի որ համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի պրոյեկցիա-



Գծ. 27

ների գումարը Ox առանցքի վրա հավասար է զրոյի, ապա համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը Ox առանցքի նկատմամբ, համաձայն (II)-ի առաջին հավասարման, կլինի՝

$$\frac{P+p+Q}{g}\frac{d^2x_c}{dt^2}=0$$

Այստեղից ստացվում է, որ $\dot{x}_c = const$ ։ Ընդունելով, որ սկզբնական պահին համակարգի զանգվածների կենտրոնի արագությունը հավասար է եղել զրոյի, այսինքն՝ էլեկտրաշարժիչը սկսել է շարժվել անշարժ վիճակից, կստանանք $\dot{x}_c = 0$ Այստեղից էլ ստացվում է, որ $x_c = const$, այսինքն՝ համակարգի զանգվածների կենտրոնը Ox առանցքի ուղղությամբ չի շարժվում։ Բայց, քանի որ սկզբնական պահին համակարգի զանգվածների կենտրոնը գտնվել է Oy առանցքի վրա, ապա $x_c = 0$, ուստի $x_c = 0$ ժամանակի յուրաքանչյուր պահին։ Համակարգի զանգվածների կենտրոնի x_c կոորդինատի համար, համաձայն § 2-ի (II) բանաձևերի, կունենանք

$$x_c = \frac{Px_1 + px_2 + Qx_3}{P+p+Q}$$

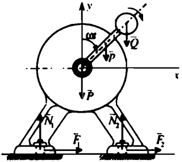
որտեղ x_1 -ը էլեկտրաշարժիչի կենտրոնի տեղափոխումն է Ox առանցքի ուղղությամբ, իսկ $x_2 = x_1 + l\sin\omega t$, $x_3 = x_1 + 2l\sin\omega t$ համապատասխանաբար ձողի և ծանրոցի կենտրոնների կոորդինատներն են։

Եթե (I)-ի մեջ տեղադրենք x_2, x_3 -ի արժեքները և լուծենք ստացված հավասարումը x_1 -ի նկատմամբ, միաժամանակ նկատի ունենալով, որ $x_c = 0$, կստանանք՝

$$x_1 = -\frac{l(P+2Q)}{P+p+Q}\sin\omega t$$

Այսպիսով, էլեկտրաշարժիչի կենտրոնը կատարում է ներդաշնակ տատանումներ $a = \dfrac{l(p+2Q)}{P+p+Q}$ ամպլիտուդով և $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ պարբերությամբ։

Այժմ անցնենք խնդրի երկրորդ մասի լուծմանը։ Դիցուք էլեկտրաշարժիչի պատյանն ամրացված է հիմքին հեղույսների միջոցով։ Ընտրենք Oxy կոորդինատական համակարգն այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագիր 28-ում։ Այդ դեպքում դիտարկվող համակարգի վրա, բացի վերը նշված արտաքին ուժերից, կազդեն նաև հեղույսների F_1 և $\bar{F}_2$ հորիզոնական հակազդումները։



Գծ. 28

Ox առանցքի ուղղությամբ համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի՝

$$\frac{P+p+Q}{g}\ddot{x}_c =$$

որտեղ $R = F_1 + F_2$ -ը հեղույսների հորիզոնական հակազդումների գումարն է: Գրենք համակարգի զանգվածների կենտրոնի x_c կոորդինատի արտահայտությունը: Այն կլինի.

$${}_c = \frac{Px_1 + px_2 + Qx_3}{P+p+Q} = \frac{pl\sin\omega t + 2lQ\sin\omega t}{P+p+Q},$$

կամ՝

$$x_c = \frac{l(p+2Q)}{P+p+Q}\sin\omega t$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\ddot{x}_c = -\frac{(p+2Q)\omega^2 l}{P+p+Q}\sin\omega t$$

Տեղադրելով $\ddot{x}_c$ -ի արժեքը (3)-ից (2)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$-\frac{P+p+Q}{g}\cdot\frac{(p+2Q)\omega^2 l}{P+p+Q}\sin\omega t = R$$

$$R = -\frac{(p+2Q)l\omega^2}{g}\sin\omega t$$

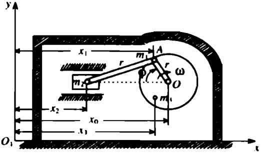
Այսպիսով, հեղույսների վրա ազդող հորիզոնական ամենամեծ ճիգը կլինի

$$R_{max} = \frac{(p+2Q)l\omega^2}{g}$$

1) ներդաշնակ տատանումներ $l(p+2Q)/(P+p+Q)$ ամպլիտուդով և $T = \frac{2\pi}{\omega}$ պարբերությամբ, 2) $R_{max} = (p+2Q)l\omega^2/g$

Խնդիր 21: Հորիզոնական մխոցով շարժիչը տեղադրված է հորիզոնական հարթ հիմքի վրա առանց ամրացման (գծ.29): r երկարություն ունեցող OA մեղեխը պտտվում է ω հաստատուն անկյունային արագությամբ: Ընդունելով, որ շարժաթևի երկարությունը հավասար է մեղեխի երկարությանը և մեղեխի ու շարժաթևի m_1 զանգվածը կենտրոնացված է մեղեխի մատում, իսկ մխոցի m_2 զանգվածը՝ մխոցի կենտրոնում, որոշել շարժիչի իրանի հորիզոնական շարժումը, եթե նրա զանգվածը հավասար է m_3-ի: Սկզբնական պահին մխոցը գրավել է ամենածախ դիրքը, իսկ շարժիչի իրանը գտնվել է անշարժ վիճակում:

Լուծում: Շարժիչը դիտենք որպես մեխանիկական համակարգ, որը կազմված է համապատասխանաբար m_1, m_2, m_3 զանգվածներ ունեցող մեղեխից, մխոցից և շարժիչի իրանից: Համակարգի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ մեղեխի, մխոցի, շարժիչի իրանի $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ ծանրության ուժերը և հարթ հիմքի $\overline{N}$ նորմալ հակազդումը: Քանի որ համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերն ուղղված են ուղղաձիգ ուղղությամբ, ուստի նրանց պրոյեկցիաները O_1x առանցքի վրա կլինեն զրո և համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը O_1x առանցքի նկատմամբ կունենա հետևյալ տեսքը.



Գծ. 29

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = \qquad (1)$$

որտեղ $M = m_1 + m_2 + m_3$ ամբողջ համակարգի զանգվածն է, իսկ x_c-ն՝ համակարգի զանգվածների կենտրոնի աբսցիսը:

Եթե ժամանակի կամայական t պահին մեղեխի, մխոցի և շարժիչի իրանի ծանրության կենտրոնների աբսցիսները նշանակենք համապատասխանաբար x_1, x_2, x_3, ապա § 2-ի (II) բանաձևերի համաձայն կունենանք՝

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} \qquad (2)$$

աբսցիսներն արտահայտվում են x_3 անհայտ աբսցիսի միջոցով հետևյալ բանաձևերի օգնությամբ (գծ.29).

$$x_1 = x_3 + l - r\cos\omega t,$$
$$x_2 = x_3 + l - 2r\cos\omega t,$$

որտեղ $l = x_0 - x_3 = const$

x_1-ի և x_2-ի արժեքները (3)-ից տեղադրելով (2)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$_c = x_3 + \frac{m_1 + m_2}{M}l - \frac{(m_1 + 2m_2)r}{M}\cos\omega t \qquad (4)$$

Օգտվելով (4)-ից, եթե կազմենք $\dot{x}_C$ -ի արտահայտությունը և այն տեղադրենք (1)-ի մեջ, կստանանք շարժիչի իրանի պանգվածների կենտրոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} = -\frac{(m_1 + 2m_2)\omega^2 r}{m_1 + m_2 + m_3} \cos\omega t$$

Ինտեգրելով (5)-ը, կունենանք՝

$$\dot{x}_3 = -r(m_1 + 2m_2)(m_1 + m_2 + m_3)^{-1} \omega \sin\omega t + C_1$$

$$x_3 = (m_1 + 2m_2)(m_1 + m_2 + m_3)^{-1} r \cos\omega t + C_1 t + C_2$$

Նկատի ունենալով շարժիչի իրանի շարժման խնդրում տրված $(x_3)_{t=0} = x_{3,0}$, $(\dot{x}_3)_{t=0} = 0$ նախնական պայմանները՝ (6)-ից և (7)-ից կունենանք

$$_{3,0} - \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r$$

$_1$ -ի և C_2 -ի արժեքները (8)-ից տեղադրելով (7)-ի մեջ կունենանք՝

$$_{3,0} - (m_1 + 2m_2)(m_1 + m_2 + m_3)^{-1} r(1 - \cos\omega t)$$

Սա կլինի իրանի շարժման որոնելի հավասարումը:

Պատ. Շարժիչի իրանը կատարում է ներդաշնակ տատանումներ

$$a = (m_1 + 2m_2)(m_1 + m_2 + m_3)^{-1} r$$

ամպլիտուդայով և ω անկյունային հաճախականությամբ:

Խնդիր 22: Օգտագործելով նախորդ խնդրի պայմանները և միաժամանակ ընդունելով, որ շարժիչի իրանը հեղույսների միջոցով ամրացված է հիմքին, որոշել հեղույսների վրա ազդող հորիզոնական ճիգերի գումարը և շարժիչի ճնշումը հիմքի վրա:

Լուծում: Համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները x և y առանցքների նկատմամբ կլինեն՝

$$M\frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_k F_{kx}^{(e)} \qquad M\frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_k F_{ky}^{(e)}$$

որտեղ (x_C, y_C) -ն համակարգի զանգվածների կենտրոնի կոորդինատներն են:
Գրենք x_C, y_C -ի արտահայտությունները: Օգտվելով § 2-ի (II) բանաձևերից՝ կունենանք՝

$$_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M}, \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{M} \qquad (2)$$

Գծագիր 29-ից երևում է, որ

$$x_1 = x_{1,0} + r - r\cos\omega t,$$

$$x_2 = x_{2,0} + 2r - 2r\cos\omega t,$$

որտեղ $x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}$ -ն համապատասխանաբար y_2, y_3 -ի արժեքներն են սկզբնական պահին:

Կազմենք x_C-ի և y_C-ի երկրորդ կարգի ածանցյալները ըստ t-ի (ժամանակի).

$$\ddot{x}_C = \frac{m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + m_3\ddot{x}_3}{M}, \qquad = \frac{m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_3}{M}$$

Տեղադրելով $x_1, x_2,$ $_2, v_3$ -ի արժեքները (3)-ից՝ կստանանք՝

$$\ddot{x}_C = \frac{(m_1 + 2m_2)r\omega^2}{M}\cos\omega t, \qquad = -\frac{m_1 r\omega^2}{M}\sin\omega t$$

Այնուհետև, (1)-ի հիման վրա կունենանք՝

$$\sum_k F_{kx}^{(e)} = (m_1 + 2m_2)r\omega^2\cos\omega t, \quad \sum_k F_{ky}^{(e)} = -m_1 r\omega^2\sin\omega t$$

Շարժիչի վրա ազդող արտաքին ուժերի գումարը y առանցքի ուղղությամբ կլինի

$$\sum_k F_{ky}^{(e)} = N - (m_1 + m_2 + m_3)g\,, \tag{7}$$

որտեղ N-ը ճնշումն է հիմքի վրա: Հետևաբար, (6)-ից և (7)-ից կունենանք.

$$N = (m_1 + m_2 + m_3)g - m_1 r\omega^2\sin\omega t$$

Եթե հեղույսների հորիզոնական ճիգերի գումարը նշանակենք R-ով, ապա նախորդի նման կունենանք.

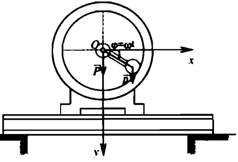
$$R = \sum_k F_{kx}^{(e)} = (m_1 + 2m_2)r\omega^2\cos\omega t$$

$$N = (m_1 + m_2 + \ \ )g - m_1 r\omega^2\sin\omega t\ ,$$

$$R = (m_1 + 2m_2)r\omega^2\cos\omega t$$

Խնդիր 23 [35.13 (872)]: 30 կգ կշիռ ունեցող էլեկտրական շարժիչը տեղադրված է c=300 կգ/սմ կոշտություն ունեցող հեծանի վրա: Շարժիչի լիսեռի առանցքից 1,3 սմ հեռավորության վրա գտնվում է 200 գ կշիռ ունեցող բեռը: Շարժիչի անկյունային արագությունը՝ $\omega = const$ = 90 վրկ$^{-1}$: Որոշել շարժիչի ստիպողական տատանումների ամպլիտուդը և նրա՝ մեկ րոպեում կատարած պտույտների թվի կրիտիկական արժեքը՝ անտեսելով հեծանի զանգվածն ու շարժման դիմադրությունը (գծ.30):

Լուծում: Տանենք Oy առանցքն ուղղված ուղղաձիգ դեպի ցած, O սկզբնակետը տեղավորենք էլեկտրական շարժիչի ստատիկական հավասարակշռության վիճակում լիսեռի առանցքի և գծագրի հարթության հատման կետում (գծ.30):



Գծ. 30

Էլեկտրական շարժիչը և նրա լիսեռի վրա դրված բեռը դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ էլեկտրաշարժիչի $P = 30$ կգ ու բեռի $p = 200$ գ կշիռները և հեծանի առաձգական ուժը:

Եթե համակարգի զանգվածների կենտրոնի օրդինատը նշանակենք ապա կունենանք՝

$$= \frac{Py_1 + py_2}{P + p}$$

որտեղ y_1 -ը և -ը էլեկտրաշարժիչի և բեռի զանգվածների կենտրոնների կոորդինատներն են Oy առանցքի նկատմամբ: Այս բանաձևում հեծանի զանգվածն ու նրա զանգվածների կենտրոնի կոորդինատը չեն մասնակցում, քանի որ տված խնդրում հեծանի զանգվածն անտեսված է:

Գծագրից հետևում է, որ

$$y_2 = y_1 + r\sin(\omega t + \varphi_0)\,, \qquad (2)$$

որտեղ r-ը բեռի հեռավորությունն է լիսեռի առանցքից, իսկ φ_0 -ն լիսեռի սկզբնական շեղումն է: y_2 -ի արժեքը (2)-ից տեղադրելով (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$y_C = \frac{Py_1 + p(y_1 + r\sin(\omega t + \varphi_0))}{P + p} = y_1 + \frac{pr\sin(\omega t + \varphi_0)}{P + p}$$

Այժմ կազմենք համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը: Այն կլինի՝

$$\frac{P + p}{g}\frac{d^2 y_C}{dt^2} = P + p - c(\Delta_{st} + y_1)\,,$$

որտեղ Δ_{st} -ը հեծանի սկզբնական ճկվածքն է, իսկ c-ն՝ հեծանի կոշտությունը:

Քանի որ y առանցքի O սկզբնակետն ընտրված է էլեկտրաշարժիչի ստատիկական հավասարակշռության վիճակում լիսեռի առանցքի և գծագրի հարթության հատման կետում, ուստի էլեկտրաշարժիչի և բեռի $(P+p)$ կշիռները հավասարակշռված են հեծանի սկզբնական ճկվածքի հետևանքով առաջացած առաձգական ուժի հետ, այսինքն՝ $P+p=c\Delta_{ստ}$, որի հետևանքով (4) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{P+p}{g}\frac{d^2y_t}{dt^2}=-cy_1$$

-ի արժեքը (3)-ից տեղադրենք (5)-ի մեջ և կատարենք

$$\frac{cg}{P+p}= \qquad \frac{p\omega^2r}{P+p}=h$$

նշանակումները, ապա կստանանք հետևյալ հավասարումը՝

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+n^2y_1=h\sin(\omega t+\varphi_0)$$

(6)-ը հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի ոչ համասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումը կլինի երկու լուծումների գումար, որոնցից մեկը համապատասխան համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ մյուսը՝ անհամասեռ հավասարման որևէ մասնավոր լուծում:

Տվյալ խնդրի լուծման համար բավական է գտնել (6) հավասարման միայն մասնավոր լուծումը: Ընդունենք, որ $\omega\neq n$ և (6) հավասարման մասնավոր լուծումը փնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\tilde{y}_1=A\sin(\omega t+\varphi_0), \qquad (7)$$

որտեղ A-ն անհայտ մեծություն է:

Եթե $\tilde{y}_1$ -ի արժեքը (7)-ից տեղադրենք (6)-ի մեջ, ապա A-ի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը.

$$A=\frac{h}{n^2-\omega^2}$$

Այսպիսով, կստանանք՝

$$\tilde{y}_1=\frac{h}{n^2-\omega^2}\sin(\omega t+\varphi_0):$$

(8)-ից հետևում է, որ էլեկտրաշարժիչի ստիպողական տատանումների ամպլիտուդը հավասար կլինի՝

$$= \frac{h}{n^2 - \omega^2} = \frac{pr\omega^2}{cg - (P+p)\omega^2} = \frac{0.2 \quad 1.3 \quad 90^2}{300 \cdot 981 - 30.2 \quad 90^2} = 0.0042 \text{ մ} \quad 0.42$$

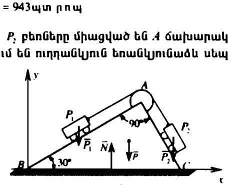
Լիսեռի կրիտիկական անկյունային արագությունը հաշվելու համար անհրաժեշտ է որոշել նրա սեփական տատանումների անկյունային հաճախությունը: (6) հավասարումից հետևում է, որ լիսեռի սեփական տատանումների անկյունային հաճախությունը կլինի $n = \sqrt{\frac{cg}{P+p}}$ 1/վրկ

Լիսեռի՝ պտտման կրիտիկական անկյունային արագությունը կստացվի, եթե լիսեռը պտտվի $n = \sqrt{\frac{cg}{P+p}}$ անկյունային արագությամբ, այսինքն տեղի ունենա ռեզոնանս: Լիսեռի մեկ րոպեում կատարած պտույտների թվի կրիտիկական արժեքը որոշելու համար բավական է n-ը բազմապատկել $\frac{60}{2\pi}$ -ով, այսինքն՝

$$n_{\text{կրիտ}} = \sqrt{\frac{cg}{P+p}} \frac{60}{2\pi} = 943 \text{պտ/րոպ}:$$

Պատ. $\qquad n_{\text{կրիտ}} = 943$պտ րոպ

Խնդիր 24 [35.20 (954)]: P_1 և P_2 բեռները միացված են A ճախարակի վրայով գցված չձգվող թելով և սահում են ուղղանկյուն եռանկյունաձև սեպի հղկված կողմնային կողերով, որը BC հիմքով հենվում է ողորկ հորիզոնական հարթության վրա: Գտնել սեպի տեղափոխումը հորիզոնական հարթությամբ, երբ P_1 բեռը իջնում է h = 10 սմ բարձրությունից: Սեպի կշիռը՝ $P = 4P_1 = 16P_2$: Թելի և ճախարակի զանգվածները անտեսել (գծ.31):



Գծ. 31

Լուծում: B կետը սկզբնակետ ընդունելով՝ տանենք Bxy կոորդինատական համակարգը: x առանցքն ուղղենք հորիզոնական ուղղությամբ դեպի աջ, իսկ y առանցքը՝ Bx -ին ուղղահայաց, ուղղված դեպի վեր:

Սեպը և երկու բեռները միասին դիտենք որպես մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ սեպի և երկու բեռների P, P_1, P_2 ծանրության ուժերը և ողորկ հորիզոնական հարթության $\bar{N}$ նորմալ հակազդումը: Քանի որ այս արտաքին ուժերն ունեն ուղղաձիգ ուղղություն, ուստի նրանց պրոյեկցիաների գումարը x առանցքի վրա կլինի զրո, այսինքն՝ $\sum_k F_{kx}^{(e)} = 0$: Հետևաբար, եթե գրենք (11) համակարգի երկրորդ դիֆերենցիալ հավասարումը, ինտեգրենք այն և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ սկզբնական պահին համակարգը գտնվել է հավասարակշռության մեջ, կստանանք՝

$$x_C = const \qquad (1)$$

Հաշվենք x_C -ի արժեքը ժամանակի երկու պահերի համար, երբ $t=$ այն պահին, երբ P_1 բեռն իջել է ցած $h = 10$ սմ-ով:

Եթե $t = 0$ պահին x_C -ի արժեքը նշանակենք $(x_C)_0$ -ով, ապա § 2-ի (II) բանաձևերի հիման վրա կունենանք՝

$$(x_C)_0 = \frac{\frac{P_1}{g}x_1 + \frac{P_2}{g}x_2 + \frac{P}{g}x}{\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g} + \frac{P}{g}} = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + Px}{P_1 + P_2 + P}$$

որտեղ x_1, x_2, x -ը համապատասխանաբար P_1, P_2 բեռների և P սեպի զանգվածների կենտրոնի կոորդինատներն են Bx առանցքի նկատմամբ:

Դիցուք, երբ P_1 բեռն իջել է ցած $h = 10$ սմ-ով, ամբողջ համակարգը տեղափոխվել է դրական Ax ուղղությամբ l սմ-ով: Քանի որ բեռները սեպի հետ միասին տեղափոխվել են l սմ-ով դեպի աջ, իսկ սեպի ուղղությամբ առաջին բեռը տեղափոխվել է Bx -ի բացասական ուղղությամբ $h\,ctg30^\circ$ երկարությամբ, երկրորդը՝ նույն ուղղությամբ $h\,ctg60^\circ$ -ով, ապա կունենանք՝

$$(x_C)_t = \frac{P_1(x_1 + l - h\,ctg30^\circ) + P_2(x_2 + l - h) + P(x + l)}{P_1 + P_2 + P} \qquad (3)$$

որտեղ $(x_C)_t$ -ով նշանակված է x_C -ի արժեքը այն պահին, երբ P_1 բեռը $h = 10$ սմ-ով իջել է ցած: Համաձայն (1) արտահայտության՝

$$(x_C)_0 = (x_C)_t \qquad (4)$$

$(x_C)_0$ -ի և $(x_C)_t$ -ի արժեքները (2)-ից և (3)-ից տեղադրելով (4)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$P_1x_1 + P_2x_2 + Px - P_1(x_1 + l - h\,ctg30^\circ) - P_2(x_2 + l - h) - P(x + l) = 0\ ,$$

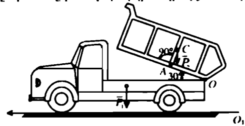
կամ՝

$$P_1(l - \sqrt{3}h) + P_2(l - h) + Pl = 0\ :$$

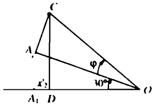
Այստեղից ստացվում է, որ

$$l = \frac{P_1\sqrt{3} + P_2}{P + P_1 + P_2}h = \frac{\frac{1}{16}\sqrt{3} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} \cdot 10 = \frac{2\sqrt{3} + 3}{12 + 3 + 2} \cdot 10 = 3.77$$

Խնդիր 25 (35.22): Որոշել չարգելակված վիճակում գտնվող ինքնաթափ բեռնատարի տեղափոխությունը, եթե սկզբնական պահին նա գտնվել է անշարժ վիճակում և նրա 4 տ կշռով թափքը հորիզոնական դիրքից պտտվել է գծագրի հարթությանն ուղղահայաց O առանցքի շուրջը 30°-ով: Բեռնատարի կշիռը առանց թափքի հավասար է 1.5 տոննայի: Թափքի C ծանրության կենտրոնի դիրքը ցույց է տրված գծագրում, ընդ որում OA = 2 մ, AC = 50 սմ: Բեռնատարի շարժմանը խանգարող դիմադրությունն արհամարհել (գծ.32):



Գծ. 32



Գծ. 33

Լուծում: Տանենք հորիզոնական ուղղությունն ունեցող Ox առանցքը. Բեռնատարը և նրա թափքը միասին դիտարկենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը բեռնատարի (առանց թափքի) P_1 , թափքի P_2 կշիռները և գետնի հակազդումը: Քանի որ համակարգի վրա հորիզոնական ուղղությամբ արտաքին ուժեր չեն ազդում, ուստի, համաձայն (II) համակարգի առաջին հավասարման, կունենանք

$$\frac{P_1 + P_2}{g}\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0$$

Այստեղ $_c$-ն համակարգի զանգվածների կենտրոնի աբսցիսն է ժամանակի կամայական t պահին: (1)-ից հետևում է, որ $\dot{x}_c = const$: Բայց, քանի որ սկզբնական պահին համակարգը գտնվել է անշարժ վիճակում, ուստի $\dot{x}_c = 0$ ժամանակի ցանկացած պահին: Այստեղից էլ ստացվում է, որ $_c = const$

Կազմենք x_c-ի արժեքը սկզբնական $t = 0$ պահին և այն պահին, երբ թափքը կատարել է պտույտ 30° անկյան տակ: $t = 0$ պահին կունենանք.

$$(x_c)_0 = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}$$

որտեղ x_1, $_2$ -ը բեռնատարի (առանց թափքի) և թափքի զանգվածների կենտրոնների կոորդինատներն են հորիզոնական Ox առանցքի նկատմամբ. Իսկ եթե թափքը կատարել է պտույտ, ապա -ի համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը

$$(x_C)_t = \frac{P_1(x_1 - a) + P_2(x_2 + x_2' - a)}{P_1 + P_2}, \quad (3)$$

որտեղ a-ն բեռնատարի տեղափոխման չափն է դեպի ձախ, իսկ x_2'-ը քարշի տեղափոխումը բեռնատարի նկատմամբ:

Քանի որ ամբողջ շարժման ընթացքում $x_c = const$,

$$(x_c)_0 = (x_c),$$

(2), (3)-ի համաձայն (4)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2} = \frac{P_1(x_1 - a) + P_2(x_2 + x_2' - a)}{P_1 + P_2}$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$= \frac{\quad _2 \quad '_2}{P_1 + P_2}$$

Մնում է որոշելx_2' -ի արժեքը: Գծագիր 33-ից հետևում է, որ

$$x_2' = OA_1 - OD = OA_1 - OC\,cos(30^\circ + \varphi) : \qquad (6)$$

-ից որոշենք

$$\sin\varphi = \frac{AC}{OC}, \qquad \cos\varphi = \frac{AO}{OC}$$

արժեքները և տեղադրենք (6)-ի մեջ, կունենանք՝

$$x_2' = OA_1 - AO\cos 30^\circ + AC\,sin\,30^\circ =$$

$$= 2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \qquad - \sqrt{3}$$

x_2'-ի արժեքը (7)-ից տեղադրելով (5)-ի մեջ՝ կստանանք

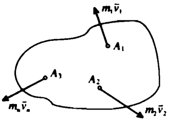
$$a = \frac{4\cdot(2.25 - \sqrt{3})}{4 + 1.5} \approx 0.38 \text{ մ} = 38 \text{ սմ}$$

Դեպի ձախ՝ a – 38 սմ:

5. ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՔԱՆԱԿԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

1. Համակարգի շարժման քանակը: Դիցուք ունենք n կետերից կազմված մեխանիկական համակարգ, որի կետերի զանգվածներն են $m_1, m_2, \dots, m_n$, իսկ արագությունները՝ $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ Այդ դեպքում համակարգի կետերի շարժման քանակները կլինեն $m_1 v_1, m_2 v_2, \dots, m_n v_n$ (գծ.34):

Համակարգի շարժման քանակ կոչվում է այն վեկտորը, որը հավասար է



Գծ. 34

համակարգի բոլոր կետերի շարժման քանակների երկրաչափական գումարին, այսինքն՝

$$\bar{Q} = \sum_i m_i \bar{v}_i \qquad \text{(I)}$$

Եթե համակարգի կետերի թիվը շատ մեծ է (օրինակ՝ պինդ մարմնի դեպքում), ապա $\bar{Q}$ վեկտորի որոշումը (I) բանաձևով շատ դժվար է: Դրա համար էլ (I) բանաձևին տալիս են այնպիսի տեսք, որ հեշտ լինի որոշել $\bar{Q}$ -ն և միաժամանակ պարզել նրա իմաստը:

Եթե (I)-ը գրենք

$$\bar{Q} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \bar{r}_i\right)$$

տեսքով և § 2-ի (I) բանաձևից տեղադրենք $\sum m_i \bar{r}_i$ -ի արժեքը, կստանանք

$$\bar{Q} = \frac{d}{dt}\left(M\bar{r}_C\right) = M\bar{v}_C$$

Նշանակում է՝ համակարգի շարժման քանակը հավասար է ամբողջ համակարգի զանգվածի և նրա զանգվածների կենտրոնի արագության արտադրյալին:

(II) բանաձևից հետևում է, որ եթե համակարգը շարժվում է այնպես, որ նրա զանգվածների կենտրոնը մնում է անշարժ, ապա համակարգի շարժման քանակը հավասար կլինի զրոյի: Օրինակ, եթե պինդ մարմինը պտտվում է իր զանգվածների կենտրոնով անցնող առանցքի շուրջը, ապա նրա շարժման քանակը հավասար կլինի զրոյի, քանի որ $\bar{v}_C = 0$: Այստեղից հետևում է, որ համակարգի շարժման քանակը հաճախ չի կարող բնորոշել համակարգի պտտական շարժումը:

Համակարգի շարժման քանակի պրոյեկցիաները դեկարտյան կոորդինատական առանցքների վրա որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$Q_x = \sum_i m_i \dot{x}_i, \quad Q_y = \sum_i m_i \dot{y}_i, \quad Q_z = \sum_i m_i \dot{z}_i$$

Համակարգի շարժման քանակի վեկտորի մեծությունը և ուղղությունը որոշվում են

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}$$

$$\cos\left(x, \bar{Q}\right) = \frac{Q_x}{Q}, \quad \cos\left(y, \bar{Q}\right) = \frac{Q_y}{Q}, \quad \cos\left(z, \bar{Q}\right) = \frac{Q_z}{Q}$$

բանաձևերով:

2. Համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը: Այս թեորեմը կապ է հաստատում $\bar{Q}$ վեկտորի փոփոխության և համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի միջև:

Եթե գումարենք համակարգի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները (§3, (I)), նկատի ունենալով, որ համակարգի վրա ազդող ներքին ուժերի գումարը հավասար է զրոյի և օգտվենք հետևյալ ձևափոխություններից՝

$$\sum_i m_i \frac{d^2\bar{r}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\bar{v}_i = \frac{d\bar{Q}}{dt}$$

ապա կստանանք համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը դիֆերենցիալ տեսքով.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_i^{(e)} \tag{III}$$

(III)-ը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. համակարգի շարժման քանակի վեկտորի ածանցյալն ըստ ժամանակի հավասար է համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի գումարին:

Պրոյեկտելով (III)-ը դեկարտյան կոորդինատական առանցքների վրա, կստանանք՝

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x}{dt} &= \sum_i F_{ix}^{(e)} \\ \frac{dQ_y}{dt} &= \sum_i F_{iy}^{(e)} \\ \frac{dQ_z}{dt} &= \sum_i F_{iz}^{(e)} \end{aligned} \tag{IV}$$

այսինքն՝ որևէ անշարժ առանցքի վրա համակարգի շարժման քանակի պրոյեկցիայի ածանցյալն ըստ ժամանակի հավասար է համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի պրոյեկցիաների գումարին այդ նույն առանցքի վրա:

Եթե համակարգի շարժման քանակը $t = 0$ պահին նշանակենք $\bar{Q}_0$, իսկ որևէ t պահին՝ $\bar{Q}_t$, ապա (III)-ից կստանանք՝

$$\bar{Q}_t - \bar{Q}_0 = \sum_i \int_0^t \bar{F}_i^{(e)} \tag{V}$$

(V)-ը համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմն է ինտեգրալ տեսքով: Այն կարելի է ձևակերպել այսպես. համակարգի շարժման քանակի փոփոխությունը ժամանակի որևէ վերջավոր միջակայքում հավասար է համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի իմպուլսների գումարին նույն ժամանակահատվածում*: Այստեղ $\sum\limits_k \int\limits_0^t \overline{F}_k^{(e)} dt$ արտահայտությունը կոչվում է համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի իմպուլսների գումար:

(V)-ը պրոյեկտելով դեկարտյան կոորդինատական առանցքների վրա՝ կստանանք՝

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_k \int_0^t F_{kx}^{(e)}$$

$$Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_k \int_0^t F_{ky}^{(e)} dt$$

$$Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_k \int_0^t F_{kz}^{(e)}$$

Համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման և համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմները փաստորեն միևնույն թեորեմի տարբեր ձևակերպումներն են: Եթե դիտարկվում է պինդ մարմնի շարժումը, ապա կարելի է օգտվել թե առաջին և թե երկրորդ թեորեմից, ընդ որում զանգվածների կենտրոնի թեորեմից օգտվելն ավելի հարմար է: Հոծ միջավայրի (հեղուկ, գազ) դեպքում նպատակահարմար է օգտվել համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմից:

3. Շարժման քանակի պահպանման օրենքը: Համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը հնարավորություն է տալիս ստանալու երկու կարևոր արդյունքներ:

ա) Դիցուք համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի գումարը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $\sum \overline{F}_k^{(e)} = 0$ Այդ դեպքում (III)-ից ստացվում է $\overline{Q} = \overline{const}$

Ինտեգրման վեկտորական հաստատունը որոշվում է նախնական պայմաններից: Այսպիսով, եթե համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի գումարը հավասար է զրոյի, ապա համակարգի շարժման քանակի վեկտորն ամբողջ շարժման ընթացքում մնում է հաստատուն թե՛ մեծությամբ և թե՛ ուղղությամբ:

բ) Դիցուք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի գումարը հավասար

---

* Ինչպես հայտնի է,

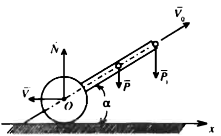
$$\overline{} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{F} dt$$

մեծությունը կոչվում է $\overline{F}$ ուժի իմպուլս $t_2 - t_1$ ժամանակամիջոցում:
Ուժի իմպուլսի պրոյեկցիաները դեկարտյան կոորդինատական առանցքների վրա կլինեն՝ $S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt$, $S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt$, $S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt$

չէ զրոյի, բայց նրա պրոյեկցիաների գումարը որևէ առանցքի (օրինակ՝ Ox-ի) վրա հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $\sum_k F_{kx}^{(e)} = 0$ Այդ դեպքում (IV) համակարգի առաջին հավասարումից ստացվում է, որ $Q_x = const$:Այսպիսով, եթե համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի գումարի պրոյեկցիան որևէ առանցքի վրա հավասար է զրոյի, ապա համակարգի շարժման քանակի պրոյեկցիան այդ առանցքի վրա հաստատուն է:

Այս երկու արդյունքներն իրենցից ներկայացնում են համակարգի շարժման քանակի պահպանման օրենքը:

Խնդիր 26: 11000կգ կշիռ ունեցող հրանոթի փողը հորիզոնի հետ կազմում է 30° անկյուն: Արկի կշիռը հավասար է 54կգ. Արկի արագությունը փողի ծայրային կտրվածքում՝ $V_0 = 900$ մ/վրկ Որոշել հրանոթի փողի ազատ հետհրման արագությունը արկի դուրս թռչելու պահին (գծ.35):



Լուծում: Հրանոթի փողը և արկը միասին դիտենք որպես մի մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ հրանոթի փողի ու արկի $\bar{P}$, $\bar{P}_1$ (P=11000 կգ, P_1=54 կգ) կշիռները և $\bar{N}$ կապի հակազդումը (գծ.35):

Քանի որ բոլոր արտաքին ուժերն ուղղահայաց են Ox առանցքին, ուստի տեղի ունի համակարգի շարժման քանակի պահպանման օրենքը Ox առանցքի նկատմամբ, այսինքն՝

$$Q_x = Q_{0x} = const$$

որտեղ Q_x -ը համակարգի շարժման քանակի պրոյեկցիան է x առանցքի վրա կամայական t պահին, իսկ Q_{0x} -ը՝ սկզբնական $t = 0$ պահին:

Սկզբնական պահին, մինչև հրանոթի կրակելը, համակարգի կետերի արագությունները հավասար են եղել զրոյի, որի հետևանքով՝ $Q_{0x} = 0$ Այդ դեպքում (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$Q_x = 0$$

Եթե հրանոթի փողի հետհրման արագությունը արկի դուրս թռչելու պահին նշանակենք $\bar{V}$, իսկ արկի արագությունը՝ $\bar{V}_0$, ապա (2)-ից կունենանք՝

$$Q_x = \frac{P}{g} V_{1x} + \frac{P_1}{g} V_{2x} =$$

որտեղ V_{1x} և V_{2x} -ը համապատասխանաբար հրանոթի փողի հետհրման և արկի շարժման արագությունների պրոյեկցիաներն են x առանցքի վրա: Գծագրից երևում է, որ

$$_{1x} = -V, \qquad _{2x} = V_0 \cos 30^\circ$$

Հետևաբար, (3)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$-\frac{P}{g}V + \frac{P_1}{g}V_0 \cos 30^\circ = 0 \,:$$

Այստեղից ստացվում է

$$V = \frac{P_1 V_0}{P}\cos 30^\circ \qquad (5)$$

(5)-ի մեջ տեղադրելով թվային արժեքները՝ կստանանք՝

$$V = \frac{54 \cdot 900 \cdot 1.73}{11000 \cdot 2} = 3.82 \text{ մ / վրկ}$$

Պատ. $V = 3.82$ մ / վրկ

4. Շարժման քանակի փոփոխման թեորեմի կիրառությունները: Դիցուք մեխանիկական համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերը միայն ժամանակից կախված հայտնի ֆունկցիաներ են, այսինքն՝

$$\sum_k F_{kx}^{(e)} = \varphi_1(t), \quad \sum_k F_{ky}^{(e)} = \varphi_2(t), \quad \sum_k F_{kz}^{(e)} = \varphi_3(t)$$

որտեղ $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ և $\varphi_3(t)$ -ն տված ֆունկցիաներ են: Այդ դեպքում (IV) հավասարումները կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{dQ_x}{dt} = \varphi_1(t), \quad \frac{dQ_y}{dt} = \varphi_2(t), \quad \frac{dQ_z}{dt} = \varphi_3(t)$$

Ինտեգրելով այս հավասարումները՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} Q_x - Q_{0x} &= \int_0^t \varphi_1(t)dt \,, \\ Q_y - Q_{0y} &= \int_0^t \varphi_2(t)dt \,, \\ Q_z - Q_{0z} &= \int_0^t \varphi_3(t)dt \end{aligned} \qquad (1)$$

որտեղ Q_{0x}, Q_{0y}, Q_{0z} -ը $\overline{Q}_0$ վեկտորի պրոյեկցիաներն են կոորդինատական առանցքների վրա: Քանի որ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ -ը տված ֆունկցիաներ են, ապա (1) բանաձևերը հնարավորություն են տալիս հաշվելու համակարգի շարժման քանակը ժամանակի ցանկացած պահին:

$_x = const =$ $\qquad\qquad = b$, $\varphi_y = const = c$, ապա (1)-ից կունենանք.

$$Q_x = Q_{0x} + at, \quad Q_y = Q_{0y} + bt, \quad Q_z = Q_{0z} + ct \qquad (2)$$

Մասնավոր դեպքում (2) բանաձևերից ստացվում է համակարգի շարժման քանակի պահպանման օրենքը: Իրոք, եթե $a = b = c = 0$, ապա (2)-ից ստացվում է $Q_x = Q_{0x}$, $Q_y = Q_{0y}$, $Q_z = Q_{0z}$, իսկ եթե $a = 0$, իսկ $b \neq 0, c \neq 0$, ստացվում է $Q_x = Q_{0x}$.

5. Համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմի վերաբերյալ խնդիրների լուծումը: Այս պարագրաֆի վերաբերյալ խնդիրները նպատակահարմար է լուծել հետևյալ հաջորդականությամբ.

ա) ընտրել մեխանիկական համակարգը,

բ) առանձնացնել մեխանիկական համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերը, համակարգն ազատել կապերից կապերը փոխարինելով համապատասխան հակազդումներով,

գ) ընտրել հաշվարկի համակարգը, եթե այն չի նշված խնդրի պայմաններում,

դ) կազմել համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմի հավասարումները պրոյեկտած կոորդինատական առանցքների վրա,

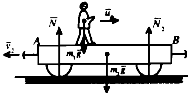
ե) կազմել խնդրի նախնական պայմանները,

զ) ինտեգրել ստացված դիֆերենցիալ հավասարումները,

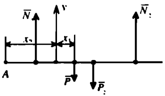
է) նախնական պայմանների միջոցով որոշել ինտեգրման հաստատունները և ստացված արժեքները տեղադրել դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների մեջ,

ը) ստացված հավասարումներից որոշել անհայտ մեծությունները:

Խնդիր 27: Հորիզոնական ռելսերի վրա անշարժ վիճակում գտնվող վագոնիկի A ծայրում կանգնած է մի մարդ, որը որոշ ժամանակից հետո սկսում է շարժվել վագոնիկի երկարությամբ u_0 հաստատուն հարաբերական արագությամբ: Որոշել մարդու բացարձակ v_1 արագությունը և x_1 տեղափոխությունը, ինչպես նաև վագոնիկի բացարձակ v_2 արագությունը և x_2 տեղափոխությունը ժամանակի t պահին, եթե մարդու զանգվածը m_1 է, իսկ վագոնիկինը՝ m_2 (գծ.36):



Գծ. 36



Գծ. 37

Լուծում: Տանենք Ox առանցքը՝ ուղղելով հորիզոնական ուղղությամբ դեպի աջ, իսկ սկզբնակետը տեղավորենք A կետի սկզբնական դիրքում (գծ.37):

Վագոնիկը և մարդը միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ մարդու և վագոնիկի $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ կշիռները և ռելսերի $\overline{N}_1$ ու $\overline{N}_2$ նորմալ հակազդումները (շփման ուժերն արհամարհվում են): Քանի որ համակարգի վրա ազդող ուժերը ունեն ուղղաձիգ ուղղություն, ուստի $\sum_k F_{kx}^{(e)} = 0$ և համակարգի շարժման քանակի պահպանման օրենքի համաձայն կունենանք՝

$$Q_x = Q_{0x}$$

կամ՝

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20} \ ,$$

որտեղ v_{10} և v_{20} -ն մարդու և վագոնիկի սկզբնական արագություններն են:

Խնդրի պայմանի համաձայն՝ սկզբնական պահին մարդը և վագոնիկը եղել են անշարժ, հետևաբար, (1)-ից կստանանք՝

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 :$$

Արագությունների գումարման թեորեմի համաձայն կարող ենք գրել՝

$$v_1 - v_2 = u_0 \qquad (3)$$

Եթե (3)-ից v_2 -ի արժեքը տեղադրենք (2)-ի մեջ, կստանանք՝

$$m_1 v_1 + m_2 (v_1 - u_0) = 0$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_0$$

Եթե գրենք $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$ և նկատի ունենանք, որ (4)-ից կստանանք՝

$$_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_0 t$$

Եթե v_1 -ի արժեքը տեղադրենք (2)-ի մեջ, կունենանք՝

$$m_1 (v_2 + u_0) + m_2 v_2 = 0 :$$

(5)-ից որոշելով v_2 -ը և ինտեգրելով այն $t =$ $= 0$ նախնական պայմանով՝ կստանանք՝

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} u_0, \qquad x_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} u_0 t$$

Պատ. $v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_0$, $x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_0 t$

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} u_0, \quad x_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} u_0 t$$

6. Համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմի կիրառությունը հոծ միջավայրի նկատմամբ: Մեխանիկական համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը կարևոր և հետաքրքիր կիրառություն ունի հոծ միջավայրի (հեղուկների, գազերի) մեխանիկայում: Դիտարկենք այդ կիրառություններից մեկը:

Դիցուք որևէ հոծ միջավայր (հեղուկ, գազ) շարժվում է խողովակով: Ընդունենք, որ միջավայրն անսեղմելի է: Խողովակից անջատենք մի որոշ ծավալ, որը սահմանափակված է խողովակի կողմնային մակերևույթով և երկու հարթ լայնական 1 և 2 հատույթներով, որոնք ուղղահայաց են խողովակի պատերին: Նշանակենք այդ հատույթների մակերեսները համապատասխանաբար σ_1, σ_2 հատույթներով հոսող միջավայրի (հեղուկի) մասնիկների արագությունները՝ $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, իսկ միջավայրի խտությունը՝ ρ Հեղուկի (միջավայրի) ստացիոնար շարժման դեպքում միավոր ժամանակամիջոցում խողովակի ցանկացած լայնական հատույթով անցնող հեղուկի M_c զանգվածը հաստատուն է՝

$$M_c = \rho\sigma_1 v_1 = \rho\sigma_2 v_2$$

Հետևաբար, dt ժամանակամիջոցում σ_1 կամ σ_2 մակերեսներով կանցնեն $M_c dt$ զանգվածները: Այստեղից էլ հետևում է, որ σ_1 և σ_2 մակերեսներով dt ժամանակամիջոցում հոսող հեղուկների շարժման քանակները համապատասխանաբար կլինեն

$$M_c dt\ \bar{v}_1 \quad \text{և} \quad M_c dt \cdot \bar{v}_2$$

Այս նույն dt ժամանակամիջոցում համակարգի շարժման քանակի փոփոխությունը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$d\bar{Q} = M_c dt \cdot \bar{v}_2 - M_c dt \cdot \bar{v}_1 ,$$

որտեղից ստացվում է, որ

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = M_c \bar{v}_2 - M_c \bar{v}_1 \qquad (1)$$

Այստեղ $M_c \bar{v}_1$ և $M_c \bar{v}_2$ -ը միավոր ժամանակամիջոցում σ_1 և σ_2 հատույթներով հոսող հեղուկի շարժման քանակի վեկտորներն են:

Դիտարկվող հեղուկի ծավալի վրա ազդող արտաքին ուժերը բաժանվում են երկու մասի՝ ծավալային և մակերևութային:

Ծավալային կոչվում են այն ուժերը, որոնք ազդում են դիտարկվող ծավալի յուրաքանչյուր մասնիկի վրա, անկախ նրանից, թե այդ մասնիկները գտնվում են ծավալի ներսում, թե նրա մակերևույթի վրա (օրինակ՝ ծավալի մասնիկների ծանրության ուժերը):

Մակերևութային կոչվում են այն ուժերը, որոնք ազդում են դիտարկվող ծավալի արտաքին մակերևույթի վրա գտնվող կետերի վրա (օրինակ՝ խողովակի պատերի հակազդումները):

Եթե բոլոր արտաքին ծավալային ուժերի գումարը նշանակենք $\overline{F}_{\text{ծավ}}$, իսկ բոլոր արտաքին մակերևութային ուժերի գումարը՝ $\overline{F}_{\text{մակ}}$, ապա դիտարկվող ծավալի համար համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{F}_{\text{ծավ}} + \overline{F}_{\text{մակ}}$$

(1) և (2) առնչություններից կստանանք՝

$$\overline{F}_{\text{ծավ}} + \overline{F}_{\text{մակ}} + M_c\overline{v}_1 - M_c\overline{v}_2 = 0$$

Սա իրենից ներկայացնում է Էյլերի հավասարումը (գծ.38):

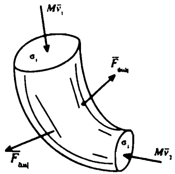
Պրոյեկտելով Էյլերի հավասարումը դեկարտյան անշարժ կոորդինատական առանցքների վրա՝ կստանանք

$$X_{\text{ծավ}} + X_{\text{մակ}} + M_c v_{1x} - M_c v_{2x} = 0\,,$$

$$Y_{\text{ծավ}} + Y_{\text{մակ}} + M_c v_{1y} - M_c v_{2y} = 0\,,$$

$$Z_{\text{ծավ}} + Z_{\text{մակ}} + M_c v_{1z} - M_c v_{2z} = 0$$

Էյլերի թեորեմը նպատակահարմար է կիրառել այն դեպքերում, երբ պահանջվում է լուծել հոծ միջավայրի վերաբերյալ խնդիրներ, որոնց մեջ տրված և որոնելի մեծություններն են դիտարկվող ծավալը սահմանափակող հարթ լայնական հատույթների σ_1, σ_2 մակերեսները, այդ մակերեսներով հոսող հեղուկի (գազի) ρ խտությունը, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ արագությունները և ծավալային ու մակերևութային ուժերը:



Էյլերի թեորեմի օգնությամբ խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ քայլերը.

ա) առանձնացնել խողովակում հեղուկի (գազի) որոշ ծավալ,

բ) նշել անջատված ծավալի վրա ազդող ծավալային և մակերևութային ուժերը, ինչպես նաև այդ ծավալը սահմանափակող երկու լայնական հատույթներով միավոր ժամանակամիջոցում հոսող հեղուկի շարժման քանակի վեկտորները՝ ուղղելով այդ վեկտորները դեպի անջատված ծավալի ներսը,

գ) ընտրել կոորդինատական համակարգը,

դ) գրել Էյլերի հավասարումը՝ պրոյեկտված կոորդինատական առանցքների վրա,

ե) ստացված հավասարումներից որոշել անհայտները:

Խնդիր 28: Որոշել խողովակի ծնկի ճնշումը *A* հենարանի վրա, եթե խողովակի առանցքը գտնվում է հորիզոնական հարթության մեջ (գծագրում ցույց է տրված տեսքը վերևից): Ջրի արագությունը խողովակ մտնելիս $v_1 = 2$ մ/վրկ, խողովակից դուրս գալիս՝ $v_2 = 3$ մ/վրկ, հատույթի տրամագիծը 30 սմ է, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ (գծ.39):

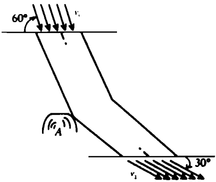
Լուծում: Անջատենք խողովակի *BCDK* ծավալը (գծ.40): Ծավալային ուժը կլինի խողովակի ծնկի կշիռը և ծնկի մեջ եղած ջրի ծանրության ուժը, իսկ մակերևութային ուժը՝ *A* հենարանի $\bar{R}_A$ հակազդումը: Խողովակի ծնկի ճնշումը *A* հենարանի վրա հավասար է R_A հակազդմանը և ուղղված է նրան հակառակ:

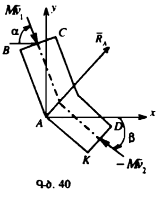
BCDK ծավալը սահմանափակող լայնական երկու հատույթներով միավոր ժամանակամիջոցում հոսող ջրի շարժման քանակների վեկտորները, որոնք ուղղված են դեպի նշված ծավալի ներսը, կլինեն՝ $M_c\bar{v}_1$ և $-M_c\bar{v}_2$ (գծ.40):

Ընտրենք կոորդինատական համակարգն այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում (գծ.40):

Եթե ծավալային և մակերևութային ուժերն ու $M_c\bar{v}_1$ և $-M_c\bar{v}_2$ վեկտորները պրոյեկտենք կոորդինատական *x* և *y* առանցքների վրա, կստանանք՝

$$R_{Ax} + M_c v_1 \cos\alpha - M_c v_2 \cos\beta = 0,$$
$$R_{Ay} - M_c v_1 \sin\alpha + M_c v_2 \sin\beta = 0, \qquad (1)$$





Գծ. 40

որոնք էյլերի հավասարումներն են՝ պրոյեկտված x և y առանցքների վրա: (1) հավասարումների մեջ ծավալային ուժերը չեն մասնակցում, քանի որ դրանք ուղղահայաց են (xy) հարթությանը:

(1)-ի մեջ M_C -ով նշանակված է խողովակի լայնական հատույթով միավոր ժամանակամիջոցում անցնող ջրի զանգվածը, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$M_C = \frac{\pi d^2}{4g}\gamma v_1 \ ,$$

որտեղ γ -ն ջրի տեսակարար կշիռն է, իսկ v_1 -ը՝ խողովակ մտնող ջրի արագությունը:

Եթե (1)-ից որոշենք R_{Ax} և R_{Ay} անհայտները, կստանանք՝

$$R_{Ax} = M_C(v_2 \cos\beta - v_1 \cos\alpha),$$

$$R_{Ay} = M_C(v_1 \sin\alpha - v_2 \sin\beta)$$

Տեղադրելով M_C -ի արժեքը (2)-ից (3)-ի մեջ կունենանք՝

$$R_{Ax} = \frac{\pi d^2}{4g}\gamma(v_1 v_2 \cos\beta - v_1^2 \cos\alpha),$$

$$R_{Ay} = \frac{\pi d^2}{4g}\gamma(v_1^2 \sin\alpha - v_1 v_2 \sin\beta) \tag{4}$$

Խնդրի պայմանների համաձայն՝ γ = 1 կգ/դմ^3, d =3 դմ, g = 98.1 դմ/վրկ^2, v_1= 20 դմ/վրկ, v_2 = 30 դմ/վրկ, α = 60°, β = 30°: Տեղադրելով այս արժեքները (4)-ի մեջ՝ կստանանք R_{Ax} և R_{Ay} -ի թվային արժեքները:

Պատ. R_{Ax} = 23.3 կգ, R_{Ay} = 3.27 կգ:

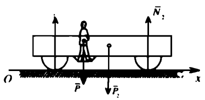
Էյլերի հավասարման օգնությամբ լուծվում են Մեշչերսկու խնդրագրքի 36.13 (975) - 36.18 (980) խնդիրները:

7. Խնդիրներ

Ստորև բերվում են մեխանիկական համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմի վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումներ: Մեշչերսկու խնդրագրքից վերցված խնդիրների համարները գրված են փակագծերում:

Խնդիր 29: 240կգ կշիռ ունեցող սայլակը շարժվում է ուղղագիծ v_0=3,6 կմ/ ժ արագությամբ: 50 կգ կշռով մարդը բարձրանում է սայլակի ոտնատեղին նրա շարժման ընթացքում: Որոշել սայլակի արագությունը մարդու հետ միասին (գծ.41):

Լուծում: Սայլակը և մարդը միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ սայլակի և մարդու $\bar{P}_1$ և $\bar{P}_2$ կշիռները (P_1 = 50 կգ, P_2 = 240 կգ), անիվների և գետնի $\bar{N}_1$ և $\bar{N}_2$



նորմալ հակազդումները (չփման ուժերն արհամարհվում են): Քանի որ այս ուժերն ուղղահայաց են x առանցքին, ուստի $\sum_k F_{kx}^{(e)} = 0$ և, համակարգի շարժման քանակի պահպանման օրենքի համաձայն, կունենանք՝

$$Q_x = Q_{0x} = const$$

որտեղ Q_{0x}-ը համակարգի շարժման քանակի արժեքն է շարժման սկզբնական պահին:

Մինչև մարդու բարձրանալը սայլակի վրա համակարգի շարժման քանակը եղել է

$$Q_{0x} = \frac{P_1 v_0}{g} = \frac{240 v_0}{g}$$

Եթե մարդու բարձրանալուց հետո սայլակի արագությունը նշանակենք u, ապա կունենանք՝

$$Q_x = (240+50)u/g \qquad (2)$$

Հավասարեցնելով (1) և (2)-ի ձախ մասերը՝ կստանանք՝

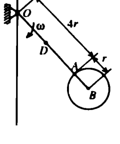
$$\frac{240}{g}\cdot 3,6 = \frac{240+50}{g}u.$$

Մնում է (3)-ից որոշել u անհայտը:

Պատ. $u = 2,98$ կմ/ժ

Խնդիր 30 (36.3): Որոշել ճոճանակի շարժման քանակի գլխավոր վեկտորը, եթե ճոճանակը կազմված է P_1 կշիռ ու $4r$ երկարություն ունեցող OA համասեռ ձողից և P_2 կշիռ ու r շառավիղ ունեցող B համասեռ սկավառակից: Ճոճանակի պտտման անկյունային արագությունը տվյալ պահին հավասար է ω-ի (գծ.42):

Լուծում: OA ձողը և B սկավառակը միասին դիտենք որպես մեխանիկական համակարգ, որի շարժման քանակը կլինի.



$$\overline{Q} = \frac{P_1}{g}\bar{v}_D + \frac{P_2}{g}\bar{v}_B \qquad (1)$$

որտեղ $\bar{v}_D$-ն OA ձողի D զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, իսկ $\bar{v}_B$-ն՝ B սկավառակի զանգվածների կենտրոնի արագությունը: Քանի որ ճոճանակը կատարում է պտտական շարժում O կենտրոնի շուրջը ω անկյունային արագությամբ, ուստի

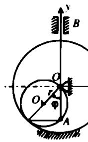
$$\bar{v}_D = 2r\omega\bar{\tau}^0, \quad \bar{v}_B = 5r\omega\bar{\tau}^0 \qquad (2)$$

որտեղ $\bar{\tau}^0$ -ն գծագրի հարթության վրա գտնվող և OA -ին ուղղահայաց միավոր վեկտոր է: Տեղադրելով $\bar{v}_D$ -ի և $\bar{v}_B$ -ի արժեքները (2)-ից (1)-ի մեջ կստանանք

$$\bar{Q} = \frac{2P_1 + 5P_2}{g} r\omega\bar{\tau}^0$$

Պատ. Շարժման քանակի գլխավոր վեկտորն ուղղահայաց է OA -ին և բացարձակ արժեքով հավասար է $(2P_1 + 5P_2)r\omega/g$

Խնդիր 31 [36.7 (969)]: Գծագրում պատկերված մեխանիզմում r շառավիղ ունեցող շարժվող անիվն ունի P կշիռ, ընդ որում անիվի ծանրության կենտրոնը գտնվում է O_1 կետում: Անիվի հետ A կետում օղակով ամրացված AB ուղղաձիգ ձողը k անգամ ծանր է շարժվող անիվից, որի ծանրության կենտրոնը տեղադրված է միջնակետում: OO_1 մեղեխը պտտվում է O առանցքի շուրջը հաստատուն ω անկյունային արագությամբ: Հաշվել համակարգի շարժման քանակը՝ անտեսելով մեղեխի զանգվածը (գծ.43):



Գծ. 43

Լուծում: OO_1 մեղեխը, r շառավիղ ունեցող անիվը և AB ձողը դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ: Եթե համակարգի շարժման քանակի վեկտորը նշանակենք $\bar{Q}$, ապա կունենանք

$$\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2$$

որտեղ $\bar{Q}_1$ -ն ու $\bar{Q}_2$ -ը համապատասխանաբար անիվի և ձողի շարժման քանակի վեկտորներն են (մեղեխի զանգվածն անտեսված է): Համակարգի շարժման քանակի (II) բանաձևի համաձայն կունենանք՝

$$\bar{Q} = \frac{P}{g}\bar{v}_{O_1} + \frac{kP}{g}\bar{v}_{C_2} \qquad (1)$$

որտեղ $\bar{v}_{O_1}$ և $\bar{v}_{C_2}$ -ը համապատասխանաբար անիվի O և ձողի ծանրության կենտրոնի արագություններն են: Քանի որ O կետը պատկանում է մեղեխին, որը պտտվում է O առանցքի շուրջը ω անկյունային արագությամբ, ուստի v_{O_1} -ը ուղղահայաց կլինի OO_1-ին և կունենա $v_{O_1} = r\omega$ մեծություն: AB ձողը կատարում է համընթաց շարժում, հետևաբար $v_C = v_A$, ընդ որում $\bar{v}_A$ -ն զուգահեռ է AB -ին: A կետի արագությունը գտնելու համար պետք է նկատի ունենալ, որ այն պատկանում է r շառավիղ ունեցող անիվին: Պտտվող անիվի պտտման ակնթարթային կենտրոնը գտնվում է շարժական և անշարժ անիվների շոշափման C կետում: Հետևաբար՝

$$\frac{v_A}{v_{O_1}} = \frac{AC}{O_1C} = \frac{2r\sin\varphi}{r} = 2\sin\varphi \ , \qquad (2)$$

որտեղ $\varphi=\omega t$ -ն մեղեխի պտտման անկյունն է: (2)-ից ստացվում է, որ

$$v_A = 2v_{d_1}\sin\varphi = 2r\omega\sin\omega t \qquad (3)$$

Եթե նկատի ունենանք, որ $\bar{v}_{O_1}$ վեկտորը Ox և Oy առանցքների հետ կազմում է համապատասխանաբար $(\pi-\varphi)$ և $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ անկյուններ, իսկ $\bar{v}_A$ -ը՝ $\frac{\pi}{2}$ և 0 անկյուններ, ապա (1)-ի պրոյեկցիաները կոորդինատական առանցքների վրա կլինեն

$$Q_x = -\frac{P}{g}v_{O_1}\cos\varphi, \qquad Q_y = \frac{P}{g}v_{O_1}\sin\varphi + \frac{kP}{g}v_A$$

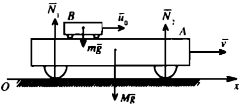
Եթե (4)-ի մեջ տեղադրենք v_{O_1} -ի և v_A -ի արժեքները, կստանանք

$$Q_x = -\frac{P}{g}r\omega\cos\varphi, \qquad Q_y = \frac{P}{g}r\omega(1+2k)\sin\varphi$$

Պատ. $\quad Q_x = -\frac{P}{g}r\omega\cos\omega t, \qquad Q_y = \frac{P}{g}r\omega(1+2k)\sin\omega t$

Խնդիր 32 (36.11): Հորիզոնական A հարթակը շարժվում է v_0 հաստատուն արագությամբ, իսկ նրա վրա գտնվող B սայլակը շարժվում է u_0 հաստատուն հարաբերական արագությամբ: Որոշ պահից հետո սայլակը կանգ է առնում: Գտնել հարթակ-սայլակի v արագությունն այն պահին, երբ սայլակը կանգ է առնում: Հարթակի զանգվածը հավասար է M-ի, իսկ սայլակինը՝ m-ի (գծ.44):

Լուծում: Հարթակը և սայլակը միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ: Եթե արհամարհենք օդի դիմադրությունը և ռելսերի ու հարթակի միջև եղած շփման ուժերը, ապա համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերը կլինեն հարթակի ու սայլակի $M\bar{g}$ և $m\bar{g}$ կշիռները և ռելսերի $\bar{N}_1$ ու $\bar{N}_2$ նորմալ հակազդումները: Այս ուժերի պրոյեկցիաների գումարը Ox առանցքի վրա հավասար է զրոյի՝ $\sum_k F_{kx}^{(e)}=0$, որի հետևանքով, համակարգի շարժման քանակի պահպանման օրենքի համաձայն կունենանք՝



Գծ. 44

$$Q_x = Q_{0x} = const$$

Սկզբնական պահին հարթակի շարժման քանակը կլինի $M\bar{v}_0$, իսկ սայլակինը՝ $m(\bar{v}_0+\bar{u}_0)$, ընդ որում $\bar{v}_0$ և $\bar{u}_0$ արագությունները ուղղված են Ox առանցքով: Հետևաբար՝

$$Q_{0x} = Mv_0 + m(v_0+u_0) \qquad (2)$$

Սայլակի կանգ առնելու պահին հարթակ-սայլակի ընդհանուր արագությունը նշանակենք $\vec{v}$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$Q_{0x} = (M+m)v \qquad (3)$$

Q_{0x} և Q_x -ի արժեքները (2) և (3)-ից տեղադրելով (1)-ի մեջ՝ կստանանք

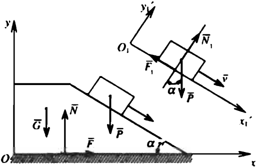
$$(M+m)v = Mv_0 + m(v_0+u_0)$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$v = v_0 + \frac{m}{M+m}u_0$$

$$v = v_0 + \frac{m}{M+m}u_0$$

Խնդիր 33: P = 3 տ կշիռ ունեցող բեռը սահում է դեպի ցած՝ գետնին ազատ հենված թեք էստակադի վրայով: Էստակադի կշիռն է G = 2տ, բեռի և էստակադի միջև եղած սահքի շփման գործակիցը՝ f = 0.2, թեքության անկյունը՝ $\alpha = 30^\circ$: Ի՞նչ պայմանի պետք է բավարարի էստակադի և հորիզոնական հարթության միջև եղած f_0 գործակիցը, որպեսզի էստակադը մնա անշարժ (գծ. 45ա):



Գծ. 45

Լուծում: Էստակադը կգտնվի հավասարակշռության մեջ, քանի դեռ գետնի և էստակադի միջև եղած F շփման ուժը չի հասել իր սահմանային f_0N արժեքին, որտեղ N-ը գետնի նորմալ հակազդումն է: Գտնենք N և f_0 մեծությունները:

Բեռը և էստակադը դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ բեռի և էստակադի P և G ծանրության ուժերը, գետնի $\vec{N}$ նորմալ հակազդումը և գետնի ու էստակադի միջև եղած $\vec{F}$ շփման ուժը (գծ.45ա):

Բեռի շարժման արագությունը նշանակենք $\vec{v}$ Այն ուղղված է թեք հարթությամբ: Քանի որ էստակադն անշարժ է, ապա համակարգի շարժման քանակի պրոյեկցիաները x և y կոորդինատական առանցքների վրա կլինեն՝

$$Q_x = \frac{P}{g}v\cos\alpha,$$

$$Q_y = -\frac{P}{g}v\sin\alpha$$

Եթե Q_x, Q_y -ի այս արժեքները տեղադրենք

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_k F_{kx}^{(e)}, \qquad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_k F_{ky}^{(e)}$$

հավասարումների մեջ և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ խնդրի պայմանների համաձայն՝

$$\sum_k F_{kx}^{(e)} = F \quad \text{և} \quad \sum_k F_{ky}^{(e)} = - \tag{2}$$

ապա կստանանք՝

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}\cos\alpha = F, \qquad -\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}\sin\alpha = - \tag{3}$$

(3)-ի երկրորդ հավասարումից ստանում ենք, որ

$$N = G + P - \frac{P}{g}\frac{dv}{dt}\sin\alpha \tag{4}$$

Էստակադը կգտնվի հավասարակշռության մեջ, եթե F շփման ուժը չի գերազանցում իր սահմանային $f_0 N$ արժեքին, այսինքն՝ $F < f_0 N$: Այս անհավասարության մեջ տեղադրելով F և N-ի արժեքները (3) և (4) հավասարումներից՝ կստանանք՝

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}\cos\alpha < f_0\left(G + P - \frac{P}{g}\frac{dv}{dt}\sin\alpha\right)$$

կամ՝

$$f_0 > \frac{\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}\cos\alpha}{G + P - \frac{P}{g}\frac{dv}{dt}\sin\alpha} \tag{5}$$

Խնդիրը լրիվ լուծելու համար անհրաժեշտ է որոշել $\frac{dv}{dt}$ արագացումը, որի համար դիտարկում ենք միայն բեռի շարժումը (գծ.45 բ): Բեռի վրա ազդում են $\bar{P}$ ծանրության ուժը, թեք հարթության ռեակցիան $\bar{N}_1$ նորմալ բաղադրիչը և շփման $\bar{F}_1$ ուժը, որի բացարձակ արժեքը հավասար է fN_1

Կազմենք բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները x' և y' կոորդինատական առանցքների նկատմամբ.

$$\begin{aligned} &\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = \\ &0 = N_1 - P\cos\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

(6)-ի երկրորդ հավասարումից ստանում ենք $N_1 = P\cos\alpha$: Հետևաբար՝

$F_1 = fN_1 = fP\cos\alpha$ Եթե այս արժեքը տեղադրենք (6)-ի առաջին հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\frac{dv}{dt} = (\sin\alpha - f\cos\alpha)g$$

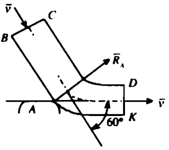
$\frac{dv}{dt}$ -ի համար ստացած այս արժեքը (7)-ից տեղադրելով (5)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$f_0 > \frac{P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha}{G + P\cos\alpha(\cos\alpha + f\sin\alpha)}$$

Այս պայմանին պետք է բավարարի շփման f_0 գործակիցը, որպեսզի էստակադը մնա անշարժ: Մնում է (8)-ի մեջ տեղադրել տված մեծությունների թվային արժեքները՝ G=2 տ, P=3 տ, f=0.5 և $\alpha=30^\circ$:

Պատ. $f_0 > 0.19$:

Խնդիր 34 [36.16 (987)]: Որոշել 20 սմ տրամագծով խողովակի ծնկի ճնշումը A հենարանի վրա. որն առաջանում է ջրի շարժման հետևանքով: Խողովակի առանցքը դասավորված է հորիզոնական հարթության մեջ (գծագրում ցույց է տրված տեսքը վերևից): Խողովակով հոսում է ջուր 4 մ/վրկ արագությամբ, ջրի արագությունը խողովակ մուտք գործելիս կազմում է 60°-ի անկյուն խողովակից դուրս եկող ջրի արագության ուղղության հետ (գծ.46):



Գծ. 46

Լուծում: Օգտագործենք Էյլերի հավասարումը՝ կիրառված հոծ միջավայրի նկատմամբ: Անջատված $BCDK$ ծավալի վրա ազդող ծավալային ուժը կլինի ջրի ծանրության ուժը, որն ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը, իսկ մակերևութային ուժը՝ A հենարանի $\bar{R}_A$ հակազդումը: Խողովակի ծնկի ճնշումը A հենարանի վրա բացարձակ արժեքով հավասար է R_A հակազդմանը և ուղղված է նրան հակառակ ուղղությամբ (գծ.46):

Նշված ծավալը սահմանափակող երկու լայնական հատույթով միավոր ժամանակամիջոցում հոսող ջրի շարժման քանակի վեկտորները կլինեն $M_c v_1$ և $-M_c\bar{v}_2$, որտեղ

$$M_c = \frac{\gamma}{g}\sigma v$$

Այստեղ γ-ն ջրի տեսակարար կշիռն է, s-ն՝ խողովակի լայնական հատույթի մակերեսը, իսկ v-ն՝ խողովակով հոսող ջրի արագության մեծությունը:

Գրենք Էյլերի հավասարումը վեկտորական տեսքով՝

$$F_{ծավ} + F_{մակ} + M_c v_1 + M_c v_2 = 0$$

Քանի որ $\overline{F}_{դին}$, $\overline{v}_1$ և $\overline{v}_2$ -ը գտնվում են գծագրի հարթության մեջ, իսկ $\overline{F}_{դին}$-ը ուղղահայաց է այդ հարթությանը, ապա (1)-ը պրոյեկտելով գծագրի հարթության վրա՝ կստանանք՝

$$\overline{F}_{դին} + M_c\overline{v}_1 - M_c\overline{v}_2 =$$

որտեղից՝

$$F_{դին} = M_c(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) \qquad (2)$$

Համաձայն խնդրի պայմանի՝ $|\overline{v}_1|=|\overline{v}_2|=v$, հետևաբար, $\overline{F}_{դին}$ -ի բացարձակ արժեքը կլինի

$$|\overline{F}_{դին}| = M_c\sqrt{v_2^2 - 2v_1v_2\cos 60^\circ + v_1^2} = M_c v\sqrt{1 - 2\cdot\frac{1}{2} + 1} = M_c v \qquad (3)$$

Տեղադրելով M_c -ի արժեքը (3)-ի մեջ՝ կստանանք՝

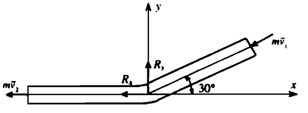
$$R = \gamma\frac{\sigma}{g}v^2 = \gamma\frac{\pi d^2}{4g}v^2 \qquad (4)$$

Խնդրի պայմանի համաձայն՝ $\gamma = 1$ կգ/դմ^3, $d = 2$ դմ, $v = 40$ դմ/վրկ, $g = 98.1$ դմ/վրկ^2: Տեղադրելով այս արժեքները (4)-ի մեջ՝ կստանանք՝ R=51.2 կգ:

Պատ. R = 51.2 կգ:

Խնդիր 35: Խողովակով, որի առանցքը գտնվում է հորիզոնական հարթության վրա, հոսում է ջուր 8մ/վրկ արագությամբ: Նրա ուղղագիծ մասերը իրար հետ կազմում են 150° անկյուն (գծ.47): Խողովակի կտրվածքը 10 սմ շառավիղ ունեցող շրջան է: Որոշել խողովակի պատերի հակազդումների գլխավոր վեկտորի պրոյեկցիաները հորիզոնական x և y առանցքների վրա:

Լուծում: Օգտագործենք Էյլերի հավասարումը՝ կիրառված հոծ միջավայրի նկատմամբ:



Գծ. 47

Խողովակով հոսող ջրի համար ծավալային ուժ կլինի ջրի ծանրության ուժը, իսկ մակերևութային ուժեր կլինեն խողովակի պատերի հակազդումները:

Եթե մակերևութային ուժերի գլխավոր վեկտորի պրոյեկցիաները նշանակենք R_x և R_y, ապա Էյլերի հավասարման համաձայն կունենանք (գծ.47)՝

$$-R_x + M_c v_{1x} + M_c v_{2x} = 0,$$
$$R_y + M_c v_{1y} + M_c v_{2y} = 0.$$

որտեղ՝

$$M_c = \frac{\gamma}{g}\sigma v:$$

Այստեղ γ-ն ջրի տեսակարար կշիռն է, s-ն՝ խողովակի լայնական հատույթի մակերեսը, v-ն՝ խողովակով հոսող ջրի արագության մեծությունը: (1) հավասարումների մեջ ծավալային ուժեր չեն մտնում, քանի որ դրանք ուղահայաց են x և y առանցքներին:

Գծագրից երևում է, որ

$$v_{1x} = -v_1 \cos 30^\circ,$$
$$v_{1y} = -v_1 \cos 60^\circ, \qquad v_{2x} = 0: \qquad (3)$$

(3)-ի հիման վրա (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$-R_x - M_c v_1 \cos 30^\circ + M_c v_2 = 0,$$
$$R_y M_c v_1 \cos 60^\circ = 0:$$

Քանի որ $|v_1| = |v_2| = v$, ապա

$$R_x = M_c v\left(1 - \cos 30^0\right), \quad R_y = M_c v \cos 60^0:$$

Եթե տեղադրենք թվային արժեքները, կստանանք՝

$$R_x = \gamma\frac{\pi d^2}{4g}v^2\left(1-\cos 30^0\right) = 1000\frac{3{,}14\cdot 0{,}01}{4\cdot 9{,}81}\cdot 64\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6{,}9 \text{ կգ},$$

$$R_y = \gamma\frac{\pi d^2}{4g}v^2\cos 60^0 = 1000\frac{3{,}14\cdot 0{,}01}{4\cdot 9{,}81}\cdot 64\cdot 0{,}5 = 25{,}6 \text{ կգ}:$$

Պատ. $R_x = 6{,}9$ կգ, $R_y = 25{,}6$ կգ:

Խնդիր 36 [36.18(980)]: 10,35տ կշիռ ունեցող շոգեկաթսան լցված է 15տ ջրով, որի ազատ մակերևույթի վրա գոյություն ունի P_0=10մթն ճնշում ըստ մանոմետրի: Ժամանակի մի որևէ պահի հեղույսները, որոնցով A կափարիչը ամրացված է ֆլանեցային միացումով B խողովակին, կտրվում են (գծ. 48): A կափարիչի պոկման հետևանքով տաք ջուրը կհոսի դուրս: Տված է H=1մ, d=0,4մ, տաք ջրի հարաբերական տեսակարար կշիռը՝ γ=0,9: Անտեսելով հիդրավլիկական դիմադրությունները, կաթսայի ներսում հեղուկի մասնիկների արագությունները և B խողովակից ջրի դուրս գալու ժամանակ շոգեառաջացման երևույթը՝ հաշվել կաթսայի ճնշումը հենարանների վրա A կափարիչի պոկման պահին: Ջրի միջին արագությունը, որով նա դուրս է գալիս կափարիչի պոկման ժամանակ, հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

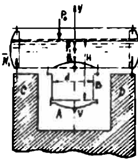
$$v = \sqrt{2g\left(H + \frac{P_0}{\gamma}\right)}:$$

Լուծում: Տված է, որ հեղուկը խողովակից դուրս է հոսում v արագությամբ: Այդ դեպքում dt ժամանակամիջոցում շոգեկաթսայից դուրս է հոսում

$$dm = \gamma \frac{\pi d^2}{4g} v dt$$

զանգված ունեցող հեղուկ: Այս զանգվածի շարժման քանակն ուղղված կլինի ուղղաձիգ դեպի ներքև և կորոշվի հետևյալ արտահայտությամբ՝

$$d\overline{Q} = \gamma \frac{\pi d^2}{4g} v dt \cdot \overline{v}: \qquad (1)$$



Գծ. 48

Եթե տանենք Oy առանցքն ուղղված դեպի վեր և (1)-ը պրոյեկտենք յդ առանցքի վրա, կստանանք՝

$$\frac{dQ_y}{dt} = \gamma \frac{\pi d^2}{4g} v^2: \qquad (2)$$

Եթե ջրով լցված շոգեկաթսան դիտենք որպես մեխանիկական համակարգ, ապա նրա վրա ազդող արտաքին ուժերը կլինեն՝ շոգեկաթսայի և ջրի $\overline{P}_1$ ու $\overline{P}_2$ կշիռները, շոգեկաթսայի $\overline{N}_1$ ու $\overline{N}_2$ նորմալ հակազդումները: Այդ դեպքում, օգտվելով

$$\frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^{(e)}$$

հավասարումից՝ կունենանք՝

$$\frac{dQ_y}{dt} = P_1 + P_2 - N, \qquad (3)$$

$$N = N_1 + N_2:$$

(2) և (3) հավասարումներից կստանանք՝

$$P_1 + P_2 - N = \gamma \frac{\pi d^2}{4g} v^2$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$N = P_1 + P_2 - \gamma \frac{\pi d^2}{4g} v^2 \qquad (4)$$

(4)-ի մեջ տեղադրելով v-ի արժեքը՝ կունենանք՝

$$N = P_1 + P_2 - \frac{\pi d^2}{2}(H\gamma + P_0):$$

Եթե տված թվային արժեքները տեղադրենք, կստանանք $N = 0$:

Պատ. Ճնշումը հենարանների վրա հավասար է զրոյի:

6. ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՔԱՆԱԿԻ ՄՈՄԵՆՏԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

1. Համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը: Համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտ կամ կինետիկ մոմենտ տրված կենտրոնի նկատմամբ կոչվում է այն վեկտորը, որը հավասար է նույն կենտրոնի նկատմամբ համակարգի բոլոր կետերի շարժման քանակների մոմենտների վեկտորական գումարին, այսինքն՝

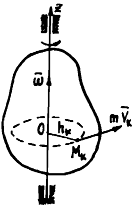
$$\overline{K}_0 = \sum_k mom_o(m_k \bar{v}_k) = \sum_k (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k): \qquad \text{(I)}$$

Համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտները դեկարտյան կոորդինատական առանցքների նկատմամբ որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$K_x = \sum_k mom_x(m_k \bar{v}_k) = \sum_k m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k),$$

$$\quad = \sum_k mom_y(m_k \bar{v}_k) = \sum_k m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k),$$

$$K_z = \sum_k mom_z(m_k \bar{v}_k) = \sum_k m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k):$$



Գծ. 49

Այստեղ K_x, K_y, K_z-ը $\overline{K}_0$ վեկտորի պրոյեկցիաներն են կոորդինատական առանցքների վրա:

Համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի ֆիզիկական իմաստը պարզելու համար դիտարկենք անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող պինդ մարմնի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ:

Դիցուք պինդ մարմինը պտտվում է Oz առանցքի շուրջը ω_z անկյունային արագությամբ: Եթե m_k զանգված ունեցող կետի հեռավորությունը Oz առանցքից նշանակենք h_k (գծ. 49), ապա նրա շարժման քանակը կլինի $m_k v_k$, իսկ շարժման քանակի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ՝

$$m_z(m_k \bar{v}_k) = h_k m_k v_k = m_k \omega_z h_k^2:$$

Այս դեպքում ամբողջ մարմնի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$K_z = \sum m_z(m_k \bar{v}_k) = \omega_z \sum m_k \;\; {}_k^2$$

Բայց, քանի որ $\sum m_k h_k^2 = J_z$, ապա վերջնականապես կունենանք

(III)

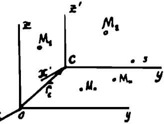
Այսպիսով, պտտական շարժում կատարող պինդ մարմնի շարժման քանակի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ հավասար է մարմնի իներցիայի մոմենտին նույն առանցքի նկատմամբ, բազմապատկած մարմնի անկյունային արագության պրոյեկցիայով այդ առանցքի վրա:

(III) բանաձևը կարելի է ստանալ նաև (II) համակարգի երրորդ հավասարումից: Դրա համար անհրաժեշտ է դեկարտյան կոորդինատներից անցնել բևեռային կոորդինատներին $x_k = h_k\, cos\varphi_k$, $y_k = h_k\, sin\varphi_k$ բանաձևերի օգնությամբ:

Համակարգի շարժման քանակի մոմենտը հաշվելիս հաճախ օգտակար է լինում այն ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$_0 = \bar{r}_c \times M\bar{v}_c + \bar{K}_c\, ,$$

որը կարելի է ձևակերպել այսպես. համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը որևէ անշարժ կենտրոնի նկատմամբ հավասար է նույն կենտրոնի նկատմամբ համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման քանակի մոմենտին (ընդունելով, որ զանգվածների կենտրոնում կենտրոնացված է ամբողջ համակարգի զանգվածը), գումարած համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը համակարգի զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ: Շարժումը զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ ասելով հասկանում ենք շարժում մի շարժական կոորդինատական համակարգի



Գծ. 50

նկատմամբ, որի սկզբնակետը գտնվում է համակարգի զանգվածների կենտրոնում, իսկ առանցքները զուգահեռ են հիմնական անշարժ կոորդինատական առանցքներին (գծ. 50):

2. Համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի փոփոխման թեորեմը:

Թեորեմ: Անշարժ կենտրոնի նկատմամբ համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի ածանցյալն ըստ ժամանակի հավասար է համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի մոմենտների գումարին այդ նույն կենտրոնի նկատմամբ, այսինքն՝

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum_{(k)} mom_o \bar{F}_k^{(e)}$$

§ 1-ում նշվեց, որ տարածության կամավոր կետի նկատմամբ մեխանիկական համակարգի վրա ազդող ներքին ուժերի մոմենտների գումարը հավասար է զրոյի, որի հետևանքով (V) հավասարման մեջ համակարգի վրա ազդող ներքին ուժերը չեն մասնակցում:

Պրոյեկտելով (V) վեկտորական հավասարումը դեկարտյան կոորդինատական առանցքների վրա՝ կստանանք՝

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_k mom_x\left(\overline{F}_k^{(e)}\right),$$

$$\frac{dK_y}{dt} = \sum_k mom_y\left(\overline{F}_k^{(e)}\right),$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right):$$

Նշանակում է՝ համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի որևէ անշարժ առանցքի վրա ունեցած պրոյեկցիայի ածանցյալը ըստ ժամանակի հավասար է համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի մոմենտների պրոյեկցիաների գումարին նույն առանցքի նկատմամբ:

Ակնհայտ է, որ (V) և (VI) հավասարումները տեղի ունեն նաև այն կոորդինատական առանցքների նկատմամբ, որոնք շարժվում են համընթաց (զուգահեռ են անշարժ համակարգի առանցքներին), իսկ նրա սկզբնակետը գտնվում է համակարգի զանգվածների կենտրոնում: Այս դեպքում (V) հավասարումը գրվում է հետևյալ կերպ՝

$$\frac{d\overline{K}_c}{dt} = \sum_{(k)} mom_c \overline{F}_k^{(e)} \qquad \text{(VII)}$$

Նշանակում է՝ զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի ածանցյալը ըստ ժամանակի հավասար է համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի մոմենտների գումարին զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ, երբ կոորդինատական առանցքները կատարում են համընթաց շարժում:

Վերցնենք դեկարտյան *Cxyz* կոորդինատական համակարգը, որի սկզբնակետը համընկնում է համակարգի զանգվածների կենտրոնի հետ, ըստ որում *Cxyz* համակարգը կատարում է համընթաց շարժում: Պրոյեկտելով (VII) հավասարումը *Cxyz* կոորդինատական համակարգի առանցքների վրա՝ կստանանք՝

$$\frac{dK_{cx}}{dt} = \sum_{(k)} mom_{cx}\left(\overline{F}_k^{(e)}\right),\ \frac{dK_{cy}}{dt} = \sum_{(k)} mom_{cy}\left(\overline{F}_k^{(e)}\right),\ \frac{dK_{cz}}{dt} = \sum_{(k)} mom_{cz}\left(\overline{F}_k^{(e)}\right):$$

3.Համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի պահպանման օրենքը: Համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի փոփոխման թեորեմն ունի երկու հետևանքներ, որոնք կարևոր նշանակություն ունեն խնդիրներ լուծելիս:

ա) Դիցուք համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտը O կենտրոնի նկատմամբ հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$\sum_k mom_O\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = 0:$$

Այդ դեպքում (V)-ից հետևում է, որ $\overline{K}_0 = const$: Այսպիսով, եթե համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի մոմենտների գումարը տրված կենտրոնի նկատմամբ հավասար է զրոյի, ապա համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը նույն կենտրոնի նկատմամբ կլինի հաստատուն թե մեծությամբ և թե ուղղությամբ:

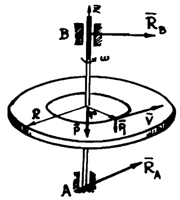
բ) Դիցուք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտն անշարժ Oz առանցքի նկատմամբ հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$\sum_{(k)} mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = 0\cdot$$

Այդ դեպքում (VI) հավասարումներից ստացվում է $K_z = const$: Այսպիսով, եթե համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի մոմենտների գումարը որևէ առանցքի նկատմամբ հավասար է զրոյի, ապա համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտն այդ նույն առանցքի նկատմամբ կլինի հաստատուն:

Այս արդյունքներն իրենցից ներկայացնում են համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի պահպանման օրենքը:

Խնդիր 37: R շառավիղ և P կշիռ ունեցող համասեռ հորիզոնական սկավառակը կարող է առանց շփման պտտվել ուղղաձիգ առանցքի շուրջը: Ինչպիսի՞ փոփոխություն կկրի սկավառակի անկյունային արագությունը, եթե նրա առանցքից r հեռավորության վրա գտնվող մարդը հանգիստ վիճակից սկսի շարժվել հարթակի վրայով r շառավիղ ունեցող շրջանագծով v հարաբերական արագությամբ: Մարդու կշիռը P_1 է (գծ. 51):



գծ. 51

Լուծում: Սկավառակն ու մարդը միասին ընդունենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը. սկավառակի և մարդու $\overline{P}$, $\overline{P}_1$ ծանրության ուժերը, որոնք զուգահեռ են Oz առանցքին և $\overline{R}_A, \overline{R}_B$ հակազդումները, որոնք հատում են Oz առանցքը: Հետևաբար, արտաքին ուժերի մոմենտների գումարը Oz առանցքի նկատմամբ կլինի զրո, այսինքն՝

$$\sum_{(k)} mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = 0:$$

Համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի պահպանման օրենքի համաձայն կունենանք՝

$$K_z = const:$$

Դիցուք սկավառակի անկյունային արագությունը սկզբնական պահին եղել է ω_0, իսկ կամայական t պահին՝ ω: Կազմենք K_z-ի արտահայտությունը ժամանակի երկու պահերի համար և հավասարեցնենք իրար:

Սկզբնական պահին, երբ մարդը գտնվել է անշարժ վիճակում, համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի արտահայտությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$K_z = \left(J_z + \frac{P_1}{g} r^2\right)\omega_0,$$

որտեղ J_z-ը սկավառակի, իսկ $\frac{P_1}{g}r^2$-ն՝ մարդու իներցիայի մոմենտներն են Oz առանցքի նկատմամբ: Այստեղ մարդը դիտարկվում է որպես նյութական կետ:

Եթե մարդը շարժվում է սկավառակի նկատմամբ v արագությամբ, ապա նրա բացարձակ արագությունը կլինի $v+\omega r$, որտեղ ω-ն սկավառակի անկյունային արագությունն է ժամանակի t պահին: Հետևաբար, ժամանակի t պահին մարդու շարժման քանակի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ կլինի $\frac{P_1}{g}(v+\omega r)r$, իսկ սկավառակի շարժման քանակի մոմենտը՝ $J_z\omega$: Այսպիսով, ժամանակի t պահին համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը z առանցքի նկատմամբ ունի հետևյալ տեսքը՝

$$= J_z\omega + \frac{P_1}{g}r^2\omega + \frac{P_1}{g}rv:$$

Հավասարեցնելով (1) և (2)-ի աջ մասերը՝ կստանանք՝

$$\left(J_z + \frac{P_1}{g}r^2\right)\omega + \frac{P_1}{g}rv = \left(J \ + \frac{P_1}{g}r^2\right)\omega_0:$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\omega = \frac{\left(J \ + \frac{P_1}{g}r^2\right)\omega_0 - \frac{P_1}{g}rv}{J_z + \frac{P_1}{g}r^2}:$$

Քանի որ սկավառակը համասեռ է, ուստի կունենանք՝

$$= \frac{P}{g}\frac{R^2}{2}:$$

Մնում է J_t - ի արժեքը (4)-ից տեղադրել (3)-ի մեջ և ստացված հավասարումից որոշել ω -ի արժեքը:

Պատ. $\omega = \dfrac{\left(PR^2 + 2P_1 r^2\right)\omega_0 - 2P_1 rv}{PR^2 + 2P_1 r^2}$

4. Շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի փոփոխման թեորեմի կիրառությունները:

Այժմ նշենք այն խնդիրների դասերը, որոնց ուսումնասիրությունը կարելի է կատարել (V) և (VI) հավասարումների օգնությամբ:

Դիցուք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտը կախված է միայն ժամանակից, այսինքն՝

$$\sum_{(k)} mom_o\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = \overline{\Phi}(t)\,.$$

Այդ դեպքում (V) հավասարումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{\Phi}(t) \qquad (1)$$

Ինտեգրելով (1)-ը 0-ից մինչև t և ընդունելով, որ երբ $t = 0$, $K = K_0$, կստանանք՝

$$\overline{K} - \overline{K}_0 = \int_0^t \overline{\Phi}(t)dt \qquad (2)$$

(2)-ից կարելի է որոշել համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը ցանկացած պահին:

Մասնավոր դեպքում, եթե

$$\overline{\Phi}(t) = \overline{const} = \overline{A}\ ,$$

ապա (2) բանաձևից ստացվում է՝

$$\overline{K} = \overline{K}_0 + \overline{A}t \qquad (3)$$

Եթե $\overline{A} = 0$, ապա (3)-ից կստացվի համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի պահպանման օրենքը, այսինքն՝

$$\overline{K} = \overline{K}_0 = \overline{const}$$

5. Համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտի փոփոխման թեորեմի վերաբերյալ խնդիրների լուծումը: Այս խնդիրները լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

ա) առանձնացնել մեխանիկական համակարգը,

բ) նշել մեխանիկական համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերը,

գ) ընտրել կոորդինատական համակարգը, նրա առանցքներից մեկն ուղղելով պտտման անշարժ առանցքով, դ) կազմել (VI) հավասարումների համակարգը: Լուծման պարզեցման համար նախ հաշվել հավասարումների աջ մասերը,

ե) ինտեգրման հաստատունները որոշելու համար կազմել խնդրի նախնական պայմանները,

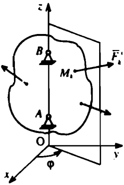
զ) ինտեգրել ստացված դիֆերենցիալ հավասարումները,

է) նախնական պայմաններից որոշել ինտեգրման հաստատունները,

ը) ստացված հավասարումներից որոշել խնդրում պահանջվող անհայտները:

6. Անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող պինդ մարմնի դիֆերենցիալ հավասարումը: Եթե պինդ մարմինը պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը, ապա նրա շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը, երբ անշարժ առանցքը համընկնում է Oz -ի հետ, կլինի

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right),$$



Գծ. 52

որտեղ φ-ն պինդ մարմնի պտտման անկյունն է, J_z -ը՝ պինդ մարմնի իներցիայի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ, $mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$-ն՝ k-րդ կետի վրա ազդող արտաքին ուժի մոմենտը z առանցքի նկատմամբ (գծ.52): (IX) հավասարման միջոցով կարելի է լուծել դինամիկայի թե ուղիղ և թե հակադարձ խնդիրները:

Ուղիղ խնդիրները լուծելիս պինդ մարմնի պտտման առանցքի նկատմամբ տված J_z իներցիայի մոմենտի և պինդ մարմնի պտտման $\varphi = f(t)$ օրենքի օգնությամբ որոշվում է պինդ մարմնի վրա կիրառված արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտը z առանցքի նկատմամբ: Հակադարձ խնդիրներում անշարժ առանցքի նկատմամբ պինդ մարմնի տված J_z իներցիայի մոմենտի և այդ առանցքի նկատմամբ պինդ մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտի օգնությամբ որոշվում է մարմնի պտտման $\varphi = f(t)$ օրենքը: Այս դեպքում պետք է տրված լինեն շարժման սկզբնական պայմանները, այսինքն՝

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0, \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0: \end{cases}$$

Խնդիրների լուծման ժամանակ (IX) հավասարումից կարելի է օգտվել միայն այն դեպքում, երբ համակարգը կազմված է միայն մեկ պտտվող մարմնից:

Պինդ մարմնի անշարժ առանցքի շուրջը կատարած պտտական շարժման վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ քայլերը. ա) կոորդինատական առանցքներից մեկն ուղղել պինդ մարմնի պտտման առանցքով, բ) առանձնացնել մարմնի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերը, գ) հաշվել բոլոր արտաքին ուժերի մոմենտների գումարը պտտման առանցքի նկատմամբ, դ) կազմել (IX) դիֆերենցիալ հավասարումը, ե) խնդրի պահանջի համաձայն լուծել ուղիղ կամ հակադարձ խնդիրը:

Խնդիր 38: Պինդ մարմինը պտտվում է անշարժ ուղղաձիգ առանցքի շուրջը ω_0 սկզբնական անկյունային արագությամբ: Մարմնի վրա կիրառված է հաստատուն պտտող M մոմենտ, որն ուղղված է սկզբնական անկյունային արագությունով: Պտտման դեպքում առաջանում է մարմնի անկյունային արագության առաջին աստիճանին համեմատական դիմադրող մոմենտ, որի մեծությունը՝ $L = k\omega$ (k-ն հաստատուն մեծություն է): Մարմնի իներցիայի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ հավասար է J-ի: Գտնել մարմնի շարժման օրենքը:

Լուծում: Կազմենք մարմնի պտտական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը: Մարմնի սկզբնական անկյունային արագության ուղղությունը ընդունենք որպես պտտման դրական ուղղություն: (IX) բանաձևի համաձայն կունենանք՝

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M - k\omega\ ,$$

կամ՝

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - k\omega \qquad (1)$$

(1) դիֆերենցիալ հավասարումը անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում է, հետևաբար այն գրենք

$$\frac{d\omega}{M - k\omega} = \frac{1}{J}dt$$

տեսքով:

Ինտեգրելով ստացված հավասարումը՝ կստանանք՝

$$-\frac{1}{k}\ln(M - k\omega) = \frac{t}{J} + C \qquad (2)$$

C ինտեգրման հաստատունը կորոշենք $\omega = \omega_0$, երբ $t = 0$ սկզբնական պայմանից: Կունենանք

$$C = -\frac{1}{k}\ln(M - k\omega_0)\ :$$

Տեղադրելով C-ն (2)-ի մեջ և լուծելով այն ω-ի նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$\omega = \frac{M}{k} + \left(\omega_0 - \frac{M}{k}\right)e^{-\frac{kt}{J}} \qquad (3)$$

Հաշվի առնելով, որ $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ և ինտեգրելով (3) հավասարումը կունենանք

$$\varphi = \frac{Mt}{k} - \frac{J}{k}\left(\omega_0 - \frac{M}{k}\right)e^{-\frac{kt}{J}} + C_1$$

C_1 հաստատունը կորոշենք $\varphi = 0$, երբ $t = 0$ սկզբնական պայմանից: Կունենանք՝

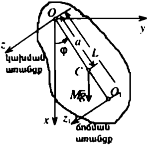
$${}_1 = \frac{J}{k}\left(\omega_0 - \frac{M}{k}\right):$$

Տեղադրելով C_1 -ի արժեքը (4)-ի մեջ՝ կստանանք մարմնի պտտման օրենքը:

Պատ. $$\varphi = \frac{Mk}{t} + \frac{J}{k}\left(\omega_0 - \frac{M}{k}\right)\left(1 - e^{\frac{k}{J}t}\right)$$

7. Ֆիզիկական ճոճանակ: Ֆիզիկական ճոճանակ կոչվում է այն ծանր պինդ մարմինը, որը կարող է պտտվել անշարժ հորիզոնական առանցքի շուրջը: Այդ առանցքը կոչվում է ճոճանակի կախման առանցք:

Տանենք մարմնի զանգվածների կենտրոնով անցնող և անշարժ առանցքին ուղղահայաց xOy հարթությունը (գծ.53):



Ճոճանակի առանցքի հատման կետը տվյալ հարթության հետ կոչվում է ճոճանակի կախման կետ: Կախման կետի և զանգվածների կենտրոնի միջև եղած հեռավորությունը նշանակենք a-ով: Ճոճանակի դիրքը որոշվում է OC գծի և Ox ուղղաձիգի միջև կազմված φ անկյունով:

Ֆիզիկական ճոճանակի պտտման դիֆերենցիալ հավասարումը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Mga}{J_z}\sin\varphi = 0\,, \qquad \text{(X)}$$

որտեղ J_z -ը ճոճանակի իներցիայի մոմենտն է պտտման Oz առանցքի նկատմամբ:

Ֆիզիկական ճոճանակի փոքր տատանումների դեպքում (1) հավասարումը ընդունում է

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Mga}{J_z}\varphi = 0 \qquad \text{(XI)}$$

տեսքը, որի լուծումը կլինի՝

$$\varphi = A\sin\left(\sqrt{\frac{Mag}{J_z}}t + \varepsilon\right).$$

այստեղ A-ն և e-ը ինտեգրման հաստատուններն են և որոշվում են սկզբնական պայմաններից:

Ֆիզիկական ճոճանակի փոքր տատանումների պարբերությունը կախված չէ սկզբնական պայմաններից:

Ֆիզիկական ճոճանակի փոքր տատանումների պարբերությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mga}} \qquad \text{(XII)}$$

Ֆիզիկական և մաթեմատիկական ճոճանակների պարբերությունների համեմատությունից հետևում է, որ ֆիզիկական ճոճանակը տատանվում է նույն օրենքով, ինչ որ $L = \frac{J_z}{Ma}$ երկարություն ունեցող մաթեմատիկական ճոճանակը: L երկարությունը կոչվում է ֆիզիկական ճոճանակի բերված երկարություն: Այսպիսով, ֆիզիկական ճոճանակի բերված երկարությունը այնպիսի մաթեմատիկական ճոճանակի երկարություն է, որը տատանվում է նույն պարբերությամբ, ինչ պարբերությամբ տատանվում է տրված ֆիզիկական ճոճանակը:

Ֆիզիկական ճոճանակի L բերված երկարությունը կարելի է ներկայացնել

$$L = a + \frac{\rho_c^2}{a} \qquad \text{(XIII)}$$

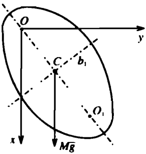
տեսքով, որտեղ ρ_c -ն ճոճանակի իներցիայի շառավիղն է Cz առանցքի նկատմամբ, իսկ a-ն՝ ծանրության C կենտրոնի հեռավորությունը պտտման առանցքից: (XIII) բանաձևից հետևում է, որ ֆիզիկական ճոճանակի բերված L երկարությունը միշտ մեծ է a հեռավորությունից:

OC գծի վրա տեղադրենք $OO_1 = L$ հատվածը: O_1 կետը կոչվում է ճոճման կենտրոն: Եթե ճոճանակի կախման կետը տեղավորենք ճոճման O_1 կենտրոնում, ապա ճոճման կենտրոնը կգտնվի սկզբնական կախման կետում, այլ կերպ ասած՝ O և O_1 կետերը փոխադարձ են, այսինքն՝ այդ կետերում կախելուց ստացված ֆիզիկական ճոճանակները կունենան նույն բերված երկարությունները:

Խնդիր 39: a_1 և b_1 կիսառանցքներ ունեցող էլիպսաձև համասեռ ծանր թիթեղը ճոճվում է ուղղաձիգ հարթության մեջ էլիպսի ֆոկուսով անցնող առանցքի շուրջը: Հայտնի է, որ ճոճման կենտրոնը գտնվում է էլիպսի մյուս ֆոկուսում: Որոշել էլիպսի կիսառանցքների հարաբերությունը և նրա էքսցենտրիսիտետը (գծ.54):

Լուծում: Տրված խնդրում էլիպտական թիթեղը կարելի է դիտել որպես ֆիզիկական ճոճանակ: Ֆիզիկական ճոճանակի բերված L երկարությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$= \frac{J_z}{Ma}\,. \qquad (1)$$



Գծ. 54

որտեղ J_z -ը թիթեղի իներցիայի մոմենտն է z առանցքի նկատմամբ (z -ը ուղղահայաց է էլիպսի հարթությանը), իսկ a-ն կախման O կետի (ֆոկուսի) հեռավորությունն է թիթեղի մասսաների C կենտրոնից, այսինքն՝ $a = OC$

Հյուգենսի թեորեմի հիման վրա (1)-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$L = \frac{J_c + Ma^2}{Ma} = a + \frac{J_c}{Ma},$$

որտեղ J_C -ն էլիպսական թիթեղի իներցիայի մոմենտն է զանգվածների կենտրոնով անցնող և թիթեղի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ: Քանի որ ճոճման կենտրոնը գտնվում է էլիպսի մյուս՝ O_1 ֆոկուսում, իսկ, համաձայն խնդրի պայմանի, $OO_1 = L$, ուստի կունենանք՝

$$L = OO_1 = 2\cdot$$

(2) և (3)-ից հետևում է, որ

$$a + \frac{J_C}{Ma} = 2a$$

Այստեղից՝

$$= Ma^2 \qquad (4)$$

Անալիտիկ երկրաչափությունից հայտնի է, որ

$$a = OC = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \qquad (5)$$

a-ի արժեքը (5)-ից տեղադրելով (4)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$J_C = M\left(a_1^2 - b_1^2\right) \qquad (6)$$

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից էլիպսական թիթեղի իներցիայի մոմենտի համար ունենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$J_C = \frac{1}{4}\left(a_1^2 + b_1^2\right) \qquad (7)$$

J_C -ի արժեքը (7)-ից տեղադրելով (6)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\frac{1}{4} M\left(a_1^2 + b_1^2\right) = a_1^2 -$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$3a_1^2 = 5b_1^2$$

կամ՝

$$\frac{b_1}{a_1} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

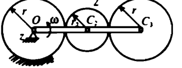
Էլիպսի էքսցենտրիսիտետի համար կունենանք՝

$$= \frac{OC}{a_1} = \frac{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a_1} = \frac{\sqrt{a_1^2 - \frac{3}{5}a_1^2}}{a_1} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Պատ. $\frac{b_1}{a_1} = \sqrt{\frac{3}{5}} \qquad e = \sqrt{\frac{2}{5}}$

8. Խնդիրներ: Ստորև բերվում են համակարգի շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմի վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումներ: Մեշչերսկու խնդրագրքից վերցրած խնդիրների համարները դրված են փակագծերի մեջ:

Խնդիր 40 (37.3): Հաշվել պլանետար մեխանիզմի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտն այն անշարժ z առանցքի նկատմամբ, որը համընկնում է OC_3 մեղեխի պտտման առանցքի հետ: Անշարժ 1 անիվն ու շարժական 3 անիվն ունեն միևնույն r շառավիղը: 3 անիվի զանգվածը հավասար է m-ի: 2 անիվի զանգվածը m_2 է, իսկ շառավիղը՝ r_2 Մեղեխը պտտվում է այնպիսի ω անկյունային արագությամբ, որի պրոյեկցիան z առանցքի վրա հավասար է ω_z -ի: Մեղեխի զանգվածն անտեսել: Անիվներն ընդունել որպես համասեռ սկավառակներ (գծ.55):



Գծ. 55

Լուծում: 1, 2 և 3 անիվները միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ (մեղեխը չի դիտարկվում, քանի որ նրա զանգվածն անտեսված է): Համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ նշանակենք K_{Oz} : Այդ դեպքում

$$K_{Oz} = K_{Oz}^{(1)} + K_{Oz}^{(2)} \qquad (1)$$

որտեղ $K_{Oz}^{(1)}$ -ը 2 անիվի շարժման քանակի մոմենտն է Oz առանցքի նկատմամբ, իսկ $K_{Oz}^{(2)}$ -ը՝ 3 անիվի շարժման քանակի մոմենտը նույն առանցքի նկատմամբ (1 անիվն անշարժ է):

Նախ հաշվենք $K_{Oz}^{(1)}$ -ը: Դրա համար օգտվենք (IV) բանաձևից: Կունենանք՝

$$K_{Oz}^{(1)} = \left(\bar{r}_{C_2} \times m_2 \bar{v}_{C_2}\right)_z + J_{C_2}\omega_{C_2z} \ , \qquad (2)$$

որտեղ $\bar{r}_C$ -ը 2 անիվի զանգվածների C_2 կենտրոնի շառավիղ-վեկտորն է O կենտրոնի նկատմամբ, իսկ $\bar{v}_{C_2}$ -ը՝ C_2 կենտրոնի արագության վեկտորը: J_{C_2} -ը

2 անիվի իներցիայի մոմենտն է Cz առանցքի նկատմամբ, իսկ ω_{C_2z}-ը՝ 2 անիվի Cz առանցքի շուրջը կատարած պտտական շարժման անկյունային արագությունը:

Քանի որ $\bar{r}_{C_2} \times m_2\bar{v}_{C_2}$ վեկտորը զուգահեռ է z առանցքին և ուղղված է դեպի նույն կողմը, ապա (2)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$K_{Oz}^{(1)} = m_2 r_{C_2} v_{C_2} + J_{C_2z}\omega_{C_2z} \tag{3}$$

Գծագրից երևում է, որ

$$r_{C_2} = r + r_2, \quad v_{C_2} = \omega_z(r + r_2), \quad v_{C_2} = \omega_{C_2z} r_2 \tag{4}$$

(4)-ի երկրորդ և երրորդ առնչություններից ստացվում է, որ

$$\omega_{C_2z} = \frac{r + r_2}{r_2}\omega_z \tag{5}$$

2 անիվը համասեռ սկավառակ է, որի հետևանքով կունենանք՝

$$J_{C_2} = \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \tag{6}$$

$r_{C_2}, v_{C_2}, \omega_{C_2z}$ և J_{C_2z}-ի արժեքները (4), (5) և (6)-ից տեղադրելով (3)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$K_{Oz}^{(1)} = \frac{1}{2}m_2(r + r_2)(2r + 3r_2)\omega_z \tag{7}$$

Այժմ հաշվենք $K_{Oz}^{(2)}$-ը: 3 անիվի զանգվածների C_3 կենտրոնը, որպես OC_3 մեղեխին պատկանող կետ, պտտվում է Oz առանցքի շուրջը մի անկյունային արագությամբ, որի պրոյեկցիան z առանցքի վրա հավասար է ω_z-ի: Հետևաբար՝

$$v_{C_3} = (2r + 2r_2)\omega_z \tag{8}$$

Քանի որ $\omega_{C_3z} = 0$, ապա

$$K_{Oz}^{(2)} = mr_{C_3}v_{C_3} \tag{9}$$

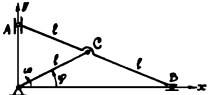
Եթե տեղադրենք (9)-ի մեջ r_{C_3} և v_{C_3}-ի արժեքները, կստանանք՝

$$K_{Oz}^{(2)} = m(2r + 2r_2)(2r + 2r_2)\omega_z = 4m(r + r_2)^2\omega_z \tag{10}$$

Մնում է $K_{Oz}^{(1)}$ և $K_{Oz}^{(2)}$-ի արժեքները (9) և (10)-ից տեղադրել (1)-ի մեջ և կատարել նշված գործողությունները:

Պատ. $K_{Oz} = \dfrac{m_2(2r + 3r_2) + 8m(r + r_2)}{2}(r + r_2)\omega_z$

Խնդիր 41: Էլիպսոգրաֆը կազմված է A և B սողնակներից, որոնցից յուրաքանչյուրի կշիռը հավասար է P-ի, P կշիռ ունեցող OC մեղեխից և $2P$ կշիռ ունեցող AB քանոնից: OC մեղեխը պտտվում է գծագրի հարթությանն ուղղահայաց z անշարժ առանցքի շուրջը ω անկյունային արագությամբ: Գտնել էլիպսոգրաֆի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը z առանցքի նկատմամբ՝ ընդունելով AB քանոնը և OC մեղեխը որպես բարակ համասեռ ձողեր, իսկ A և B սողնակները՝ նյութական կետեր: Տված է $OC = AC = CB = l$ (գծ.56):



Գծ. 56

Լուծում: OC մեղեխը, AB քանոնը և A ու B սողնակները միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը z առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$K_z = K_{1z} + K_{2z} + K_{3z} + K_{4z}, \qquad (1)$$

որտեղ K_{1z}, K_{2z}, K_{3z}, K_{4z}-ը համապատասխանաբար մեղեխի, քանոնի և A ու B սողնակների շարժման քանակների մոմենտներն են z առանցքի նկատմամբ:

(III) բանաձևի համաձայն OC մեղեխի շարժման քանակի մոմենտը z առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$K_{1z} = \quad _z \qquad (2)$$

որտեղ J_z-ը մեղեխի իներցիայի մոմենտն է z առանցքի նկատմամբ: Քանի որ մեղեխը բարակ համասեռ ձող է, ուստի $J_z = \frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2$: Հետևաբար, (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$K_{1z} = \frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2\omega: \qquad (3)$$

A և B սողնակների $\overline{V}_A$ և $\overline{V}_B$ արագությունները ուղղված են համապատասխանաբար Ox և Oy առանցքներով: Քանի որ այդ արագությունները հատում են Oz առանցքը, ապա կունենանք՝

$$K_{3z} = K_{4z} = 0: \qquad (4)$$

Մնում է հաշվել K_{2z}-ը: Համաձայն (II)-ի վերջին բանաձևի՝

$$\sum_k mom_z\left(m_k \overline{V}_k\right) = \sum_k m_k\left(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k\right): \qquad (5)$$

AB ձողը բաժանենք անվերջ փոքր հավասար էլեմենտների և k-րդ էլեմենտի զանգվածը նշանակենք m_k, իսկ կոորդինատները՝ x_k և y_k:

Գծագրից երևում է, որ

$$x_k = (2l - S_k)\cos\varphi, \quad y_k = S_k \sin\varphi, \qquad (6)$$

որտեղ S_k-ն k-րդ էլեմենտի հեռավորությունն է B կետից: (6)-ը ածանցելով ըստ ժամանակի՝ կունենանք՝

$$_k = -(2l - S_k)\,\omega\cdot\sin\varphi, \quad \dot{y}_k = S_k\,\omega\cdot\cos\varphi: \qquad (7)$$

(5) բանաձևի մեջ տեղադրելով $x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k$-ի արժեքները (6) և (7)-ից կստանանք K_{2z}-ի համար հետևյալ արտահայտությունը՝

$$K_{2z} = \sum_k m_k\left[(2l - S_k)S_k\omega\cos^2\varphi + (2l - S_k)S_k\omega\sin^2\varphi\right] =$$

$$= \sum_k m_k(2l - S_k)S_k\omega = \omega\left(2l\sum_k m_k S_k - \sum_k m_k S_k^2\right): \qquad (8)$$

Այստեղ

$$\sum_k m_k S_k = M_2 S_c = \frac{2P}{g}l, \qquad (9)$$

իսկ $\sum_k m_k S_k^2$ -ն իրենից ներկայացնում է AB ձողի իներցիայի մոմենտը Bz առանցքի նկատմամբ: Հետևաբար՝

$$\sum_k m_k S_k^2 = M_2\frac{AB^2}{3} = \frac{8P}{3g}l^2 \qquad (10)$$

Համաձայն (9)-ի և (10)-ի՝ (8)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով.

$$K_{2z} = \frac{4P}{3g}l^2\omega:$$

Մնում է K_{1z}, K_{2z}, K_{3z}, K_{4z}-ի արժեքները (3), (4) և (5)-ից տեղադրել (1)-ի մեջ և ստանալ պատասխանը:

Պատ. $\quad K_z = \dfrac{5P}{3g}l^2\omega:$

Խնդիր 42: Առանցքակալներում շփման ուժերի մոմենտը գտնելու համար լիսեռի վրա հագցված է P=0,5 տ կշիռ ունեցող թափանիվ և նրան հաղորդված է n=240 պտ/րոպե անկյունային արագություն: t_1=20 վրկ անցնելուց հետո թափանիվը կանգ է առնում: Թափանիվի իներցիայի շառավիղը հավասար է r =1,5 մ: Որոշել շփման մոմենտը՝ ընդունելով այն հաստատուն:

Լուծում: Թափանիվի պտտական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը (IX) բանաձևի համաձայն կլինի՝

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = -M_{շփ}, \qquad (1)$$

որտեղ J_z-ը թափանիվի իներցիայի մոմենտն է պտտման z առանցքի նկատմամբ, ω-ն՝ թափանիվի անկյունային արագությունը, իսկ $M_{շփ}$-ը՝ շփման ուժերի մոմենտը: Եթե (1) հավասարման մեջ տեղադրենք թափանիվի իներցիայի մոմենտի

$$J_z = \frac{P}{g}\rho^2$$

արժեքը, ապա կստանանք՝

$$\frac{P}{g}\rho^2\frac{d\omega}{dt} = -M_{շփ}: \qquad (2)$$

Եթե ինտեգրենք (2) դիֆերենցիալ հավասարումը և օգտագործենք $\omega|_{t=0} = \omega_0$ նախնական պայմանը, կստանանք.

$$\frac{P}{g}\rho^2(\omega - \omega_0) = -M_{շփմ}\, t: \qquad (3)$$

Խնդրի պայմանի համաձայն՝ $t_1 = 20$ վրկ անցնելուց հետո թափանիվը կանգ է առնում, այսինքն՝ ω-ն դառնում է զրո: Եթե միաժամանակ նկատի ունենանք, որ թափանիվի սկզբնական անկյունային արագությունը $\omega_0 = \frac{\pi n}{30}$, ապա (3)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$-\frac{P}{g}\rho^2\frac{\pi n}{30} = -M_{շփմ}\, t$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$M_{շփմ} = \frac{P\rho^2\pi n}{30 g t_1} = \frac{500(1,5)^2\ 3,14\cdot 240}{30\cdot 9,81\cdot 20} = 144 \text{ կգմ}:$$

Պատ. $M_{շփմ} = 144$ կգմ:

Խնդիր 43 (37.7; 993): Մեծ թափանիվները արագ արգելակելու համար կիրառվում է էլեկտրական արգելակ՝ բաղկացած երկու տրամագծորեն հակառակ դասավորված բևեռներից, որը կրում է իր վրա հաստատուն հոսանքով սնվող փաթաթվածք: Բևեռների մոտիկ թափանիվի շարժման ժամանակ նրա զանգվածների մեջ ինդուկցված հոսանքները ստեղծում են M_1 արգելակող մոմենտը, որը համեմատական է թափանիվի շրջանակի կետերի արագությանը՝ $M_1 = kV$, որտեղ k -ն մագնիսական հոսքից և թափանիվի չափերից կախված գործակից է: Առանցքակալներում շփումից առաջացած M_2 մոմենտը կարելի է ընդունել հաստատուն: Թափանիվի տրամագիծը D է, պտտման առանցքի նկատմամբ նրա իներցիայի մոմենտը՝ J: Գտնել, թե որքա՞ն ժամանակից հետո ω_0 անկյունային արագությամբ պտտվող թափանիվը կանգ կառնի:

Լուծում: Թափանիվը դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ: Թափանիվի վրա ազդող արտաքին ուժերի մոմենտները պտտման Oz առանցքի նկատմամբ կլինեն՝ M_1 արգելակող մոմենտը (որի մեծությունը հավասար է $k\frac{d}{2}\omega$-ի, որտեղ ω-ն պտտման անկյունային արագությունն է) և առանցքակալներում առաջացած M_2 մոմենտը, որը կարելի է ընդունել հաստատուն: Հետևաբար, թափանիվի վրա ազդող արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտը պտտման z առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$\sum mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = -k\frac{D}{2}\omega - M \qquad (1)$$

Այստեղ (1)-ի աջ մասում վերցված է բացասական նշան, քանի որ երկու անդամներն էլ դիմադրող ուժերի մոմենտներ են:

(III) բանաձևից ունենք՝

$$K_z = J\omega: \qquad (2)$$

Եթե գրենք (VI) համակարգի երրորդ հավասարումը՝

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$$

և նրա մեջ տեղադրենք K_z-ի և $\sum\limits_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$-ի արժեքները (1) և (2)-ից, կստանանք.

$$J\frac{d\omega}{dt} = -k\frac{D}{2}\omega - M_2: \qquad (3)$$

(3) հավասարման մեջ անջատելով փոփոխականները՝ կունենանք՝

$$\frac{d\omega}{M_2 + \frac{kD}{2}\omega} = -\frac{dt}{J}: \qquad (4)$$

Ինտեգրելով (4)-ը, կստանանք՝

$$\frac{2}{kD}ln\left(M_2 + \frac{kD}{2}\omega\right) = -\frac{t}{J} + C_1, \qquad (5)$$

որտեղ C_1-ը ինտեգրման հաստատունն է և որոշվում է

$$\omega\big|_{t=0} = \omega_0 \qquad (6)$$

նախնական պայմանից: Տեղադրելով (6)-ը (5)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$C_1 = \frac{2}{kD}ln\left(M_2 + \frac{kD}{2}\omega_0\right): \qquad (7)$$

Օգտվելով (7)-ից՝ (5)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$ln\frac{M_2 + \frac{kD}{2}\omega}{M_2 + \frac{kD}{2}\omega_0} = -\frac{kD}{2J}$$

կամ՝

$$\frac{M_2 + \frac{kD}{2}\omega}{M_2 + \frac{kD}{2}\omega_0} = e^{-\frac{kD}{2J}}$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\omega = \left(\omega_0 + \frac{2M_2}{kD}\right)e^{-\frac{kD}{2J}t} - \frac{2M_2}{kD}: \qquad (8)$$

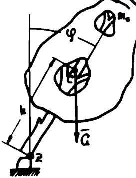
Դիցուք $t = T$ պահին թափանիվը կանգ է առնում, այսինքն՝ $\omega=0$, երբ $t = T$: Եթե այս արժեքները տեղադրենք (8)-ի մեջ, այն կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\left(\omega_0 + \frac{2M_2}{kD}\right)e^{\frac{kD}{2J}T} - \frac{2M_2}{kD} = 0:$$

Մնում է այստեղից որոշել T-ի մեծությունը:

Պատ. $$T = \frac{2J}{kD}\ln\left(1+\frac{kD}{2M_2}\omega_0\right):$$

Խնդիր 44 (37.11): Որոշել, թե ինչպիսի ω անկյունային արագությամբ կընկնի գետնին G կշիռ ունեցող ուղղած ծառը, եթե նրա C ծանրության կենտրոնը գտնվում է հիմքից h բարձրության վրա, իսկ օդի դիմադրության ուժերը առաջացնում են m_c դիմադրող մոմենտ, ընդ որում $m_{cz} = -\alpha\dot{\varphi}^2$, որտեղ $\alpha = const$: Ծառի իներցիայի մոմենտը z առանցքի նկատմամբ, որի շուրջը պտտվելով ընկնում է ծառը, հավասար է J-ի (գծ. 57):



Գծ. 57

Լուծում: Ծառը դիտենք որպես մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը. ծառի ծանրության ուժը, որը կիրառված է C կետում և օդի դիմադրության ուժերը: Այս ուժերի մոմենտները z առանցքի նկատմամբ համապատասխանաբար հավասար կլինեն

$$Gh\sin\varphi \quad \text{և} \quad -\alpha\,\omega^2: \qquad (1)$$

բանաձևից կունենանք՝

$$K_z = J\omega: \qquad (2)$$

(VI) համակարգի երրորդ հավասարումը, համաձայն (1) և (2)-ի, կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$J\frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega^2 + Gh\sin\varphi:$$

Եթե (3) հավասարման մեջ կատարենք

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\varphi}$$

տեղադրում, ապա կստանանք՝

$$\frac{J}{2}\frac{d\omega^2}{d\varphi} + \alpha\omega^2 = Gh\sin\varphi: \qquad (4)$$

(4)-ը ω^2-ի նկատմամբ առաջին կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումը հավասար է համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման և (4)-ի որևէ մասնակի լուծման գումարին: Դիցուք ω_1^2 -ն համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ ω_2^2-ն՝ անհամասեռ հավասարման մասնակի լուծումը: $\frac{J}{2}\frac{d\omega^2}{d\varphi}+\alpha\omega^2=0$ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$\omega_1^2=Ae^{-\frac{2\alpha}{J}\varphi},$$

որտեղ A-ն ինտեգրման հաստատուն է: ω_2^2-ն փնտրենք

$$\omega_2^2=B\sin\varphi+C\cos\varphi$$

տեսքով և B ու C հաստատունները որոշենք այնպես, որ ω_2^2-ն բավարարի (4) հավասարմանը: Կստանանք՝

$$B=\frac{4Gh\alpha}{J^2+4\alpha^2},\ C=\frac{-2GhJ}{J^2+4\alpha^2}:$$

Այսպիսով, (4) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$\omega^2=Ae^{-\frac{2\alpha\varphi}{J}}+\frac{4Gh\alpha}{J^2+4\alpha^2}\sin\varphi-\frac{2GhJ}{J^2+4\alpha^2}\cos\varphi: \qquad (6)$$

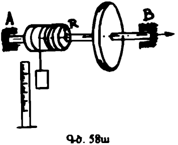
$\omega^2\big|_{\varphi=0}=0$ նախնական պայմանից որոշելով A ինտեգրման հաստատունը՝ կստանանք՝

$$A=\frac{2JGh}{J^2+4\alpha^2}:$$

Եթե A-ի արժեքը տեղադրենք (6)-ի մեջ և ընդունենք $\varphi=\frac{\pi}{2}$(քանի որ այն պահին, երբ ծառը հասնում է գետնին, $\varphi=\frac{\pi}{2}$), կստանանք ծառի վերջնական անկյունային արագությունը:

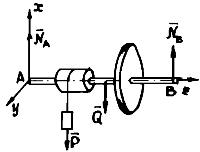
Պատ. $\qquad \omega=\sqrt{\frac{2GhJ}{J^2+4\alpha^2}\left(e^{-\frac{\alpha\pi}{J}}+2\frac{\alpha}{J}\right)}:$

Խնդիր 45: Տվյալ դետալի իներցիայի մոմենտը փորձով որոշելու համար այն ամրացվում է AB առանցքին, որի վրա գտնվում է R շառավղով թմբուկը: Թմբուկի վրա փաթաթված է թել, որի ծայրին ամրացված է m զանգված ունեցող բեռ: Որոշել դետալի իներցիայի մոմենտը, եթե առանց սկզբնական արագության բաց թողնված բեռը t ժամանակամիջոցում անցնում է h հեռավորություն: Լիսեռի (թմբուկի հետ միասին) իներցիայի մոմենտը հավասար է J_0-ի: Ընդունել, որ դետալի ծանրության C կենտրոնը գտնվում է առանցքի առանցքի վրա: Շփումը և օդի դիմադրությունն անտեսել (գծ. 58ա):



Գծ. 58ա

Լուծում: Բեռը, դետալը, լիսեռը և թմբուկը միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են բեռի $\overline{P}$, դետալի, լիսեռի, թմբուկի $\overline{Q}$ կշիռները, A և B առանցքակալների $\overline{N}_A$ և $\overline{N}_B$ հակազդումները (գծ. 58բ): Գծագրից երևում է, որ



$$mom_z\left(\overline{N}_A\right) = mom_z\left(\overline{N}_B\right) =$$
$$= mom_z\left(\overline{Q}\right) = 0,\ mom_z\left(\overline{P}\right) = PR:$$

Հետևաբար կունենանք.

$$\sum mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = PR: \qquad (1)$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{mgR^2}{J + J_0 + mR^2} = const$$

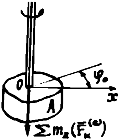
Եթե երկու անգամ ինտեգրենք (5) հավասարումը և նկատի ունենանք, որ բեռի սկզբնական արագությունը հավասար է եղել զրոյի և t ժամանակամիջոցում անցել է h հեռավորություն, ապա կստանանք՝

$$h = \frac{mgR^2t^2}{2\left(J + J_0 + mR^2\right)}: \qquad (6)$$

Մնում է (6)-ից որոշել J -ն՝

Պատ. $\quad J = \dfrac{mgR^2t^2}{2h} - \left(J_0 + mR^2\right):$

Խնդիր 46 [37.17, (1016)]: A մարմնի J_z իներցիայի մոմենտը Oz ուղղաձիգ առանցքի նկատմամբ որոշելու համար նրան ամրացնում են OO_1 առաձգական ուղղաձիգ ձողին, ոլորում են ձողը՝ պտտելով A մարմինը Oz առանցքի շուրջը φ_0 փոքր անկյունով և թողնում, որ մարմինը տատանվի: 100 թափերի տևողությունը հավասար է 2 րոպեի: Առաձգական ուժերի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ՝ $m_z = -c\varphi$ է: Առաձգականության գործակիցը որոշելու համար կատարում են երկրորդ փորձը. ձողի O կետում ամրացնում են $r = 15$սմ և $P = 1{,}6$կգ կշիռ ունեցող մի կլոր սկավառակ: Այդ դեպքում մեկ թափի տևողությունը ստացվում է 1,5վրկ: Որոշել մարմնի J_z իներցիայի մոմենտը (մեկ թափի տևողությունը ընդունել հավասար կես պարբերությանը) (գծ.59):



Գծ. 59

Լուծում: Մարմինը դիտենք որպես մեկ մեխանիկակաճ համակարգ: Նրա վրա ազդում են առաձգական ուժերը, որոնց մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ կլինի $m_z = -c\varphi$: Հետևաբար՝

$$\sum mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = -c\varphi:$$

Միաժամանակ, (III) բանաձևից կարող ենք գրել, որ $K_z = J_z \dfrac{d\varphi}{dt}$ Եթե (VI) համակարգի երրորդ հավասարման մեջ տեղադրենք $\sum mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$ և K_z-ի արժեքները, կստանանք՝

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0: \qquad (1)$$

Եթե նկատի ունենանք, որ սկավառակի իներցիայի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ՝

$$= \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2$$

ապա երկրորդ փորձի համար հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0: \qquad (2)$$

(1) և (2)-ը ներդաշնակ տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումներն են, հետևաբար (1)-ի լուծման կիսապարբերությունը կլինի՝

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{J_z}{c}},$$

իսկ (2)-ի լուծման կիսապարբերությունը՝

$$T_2 = \pi\sqrt{\frac{\frac{P}{2g}r^2}{c}}: \qquad (4)$$

(3) և (4) հավասարումներից արտաքսելով c մեծությունը՝ կստանանք J_z-ի որոշման համար հետևյալ հավասարումը՝

$$T_1^2\left(\frac{P}{2g}r^2\right) = T_2^2 J_z:$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$_z = \frac{P}{2g}r^2\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \qquad (5)$$

Մնում է (5)-ի մեջ տեղադրել թվային արժեքները՝ P=1,6, T_1=1,2վրկ, T_2=1,5վրկ, g=981սմ/վրկ^2 և կատարել նշված գործողությունները:

$$= \frac{P}{2g}r^2\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = 0{,}117\,\text{կգմ/վրկ}^2:$$

Խնդիր 47 (37.22): Առաձգական լարից կախված պինդ մարմինը կատարում է ոլորման տատանումներ $m_{\text{ք}}$ արտաքին մոմենտի ազդեցության տակ, ընդ որում $m_{\text{ք}z}=m_1\sin\omega t + m_3 sin3\omega t$, որտեղ m_1, m_3 և ω-ն հաստատուն մեծություններ են, իսկ z առանցքն ուղղված է լարով: Լարի առաձգական մոմենտը հավասար է $m_{\text{առաձգ}}$, ընդ որում $m_{\text{առաձգ}} = -c\varphi$, որտեղ c-ն առաձգականության գործակիցն է, իսկ φ-ն՝ ոլորման անկյունը: Որոշել պինդ մարմնի ստիպողական ոլորման տատանումների օրենքը, եթե նրա իներցիայի մոմենտը z առանցքի նկատմամբ հավասար է J_z-ի: Շարժման դիմադրող ուժերն արհամարհել: Ընդունել, որ $\sqrt{\frac{c}{J_z}} \neq \omega$ և $\sqrt{\frac{c}{J}} \neq 3\omega$:

Լուծում: Մարմինը դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ: Նրա վրա ազդող արտաքին ուժերի մոմենտները պտտման z առանցքի նկատմամբ կլինեն՝

$$m_{\text{ք}z}=m_1 sin\,\omega t + m_3 sin3\,\omega t \qquad \text{և} \qquad m_{\text{առաձգ}} = -c\varphi:$$

Հետևաբար, մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտը պտտման z առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$\sum mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = -c\varphi + m_1 sin\omega t +$$

(III) բանաձևից կունենանք՝

$$K_z = J_z\omega = J_z\frac{d\varphi}{dt}:$$

Եթե գրենք (VI) համակարգի երրորդ հավասարումը՝

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$$

և տեղադրենք K_z-ի և $\sum mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$-ի արժեքները (1)-ից և (2)-ից, կստանանք՝

$$J\;\frac{d^2\varphi}{d^2t} + c\varphi = m_1 sin\,\omega t + m_3 sin3\,\omega t: \qquad (3)$$

(3)-ը երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է, որի համապատասխան համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\varphi = Asin(kt+\varepsilon), \qquad (4)$$

որտեղ $k = \sqrt{\frac{c}{J_z}}$, իսկ A-ն և ε-ը ինտեգրման հաստատուններն են: Խնդրի պայմանի համաձայն $k = \sqrt{\frac{c}{J_z}} \neq \omega$ և $k \neq 3\omega$: Հետևաբար, (3) դիֆերենցիալ հավասարման մասնավոր լուծումը կարելի է փնտրել

$$\varphi = C_1 sin\,\omega t + C_3 sin3\,\omega t \qquad (5)$$

տեսքով: Եթե φ-ի արժեքը (5)-ից տեղադրենք (3)-ի մեջ և պահանջենք, որ այն տեղի ունենա t-ի ցանկացած արժեքի համար, կստանանք՝

$$C_1 = \frac{m_1}{\left(k^2 - \omega^2\right)J_z}, \quad C_3 = \frac{m_3}{\left(k^2 - 9\omega^2\right)J_z}:$$

C_1 և C_3-ի արժեքները (6)-ից տեղադրելով (5)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$\varphi = \frac{m_1}{\left(k^2 - \omega^2\right)J_z} \sin \omega t + \frac{m_3}{\left(k^2 - 9\omega^2\right)J_z} \sin 3\omega t:$$

$$\varphi = \frac{h_1}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{h_3}{k^2 - 9\omega^2} \sin 3\omega t, \text{ որտեղ}$$

$$^2 = \frac{c}{J_z}, h_1 = \frac{m_1}{J_z}, h_3 = \frac{m_3}{J}:$$

Խնդիր 48 [37.27(1003)]: Ծանրության ուժի արագացումը որոշելու համար օգտվում են շրջադարձային ճոճանակից, որն իրենից ներկայացնում է երկու A և B եռանիստ սայրերով ձող: Սայրերից մեկն անշարժ է, իսկ երկրորդը կարող է տեղափոխվել ձողի երկարությամբ: Կախելով ձողը մեկ առաջին, մեկ երկրորդ սայրից և փոփոխելով նրանց միջև AB հեռավորությունը՝ կարելի է հասնել յուրաքանչյուր սայրի շուրջը ճոճանակի տատանումների պարբերությունների հավասարեցմանը:


Գծ. 60

Ինչի՞ է հավասար ծանրության ուժի արագացումը, եթե սայրերի միջև հեռավորությունը, որի դեպքում տատանումների պարբերությունները հավասար են T-ի, կլինի $AB=l$ (գծ. 60):

Լուծում: Տված պայմանի դեպքում A և B կետերը կլինեն համապատասխանաբար ճոճման կենտրոն և կախման կետ, իսկ նրանց միջև եղած հեռավորությունը կլինի ճոճանակի l բերված երկարությունը: Հայտնի է, որ ֆիզիկական ճոճանակի բերված l երկարությունը որոշվում է

$$l = \frac{J_z}{Ma},$$

իսկ փոքր տատանումների պարբերությունը՝

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mga}} \qquad (2)$$

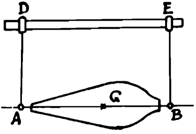
բանաձևերով: Եթե (2)-ը բարձրացնենք քառակուսի և ստացված հավասարման մեջ (1)-ից տեղադրենք J_z-ի արժեքը, կստանանք՝

$$T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g}: \qquad (3)$$

Մնում է (3)-ից որոշել g-ն:

Պատ. $g = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$:

Խնդիր 49 [37.30 (1006)]: Տված մարմնի C_1 ծանրության կենտրոնով անցնող AB առանցքի նկատմամբ J իներցիայի մոմենտը որոշելու համար այն կախեցին AB առանցքի հետ կոշտ միացած AD և BE ձողերով, որոնք ազատ հագցված են անշարժ հորիզոնական DE առանցքին այնպես, որ AB առանցքը զուգահեռ լինի DE-ին: Այնուհետև մարմինը տատանելով՝ որոշեցին մեկ թափի T տևողությունը: Ինչպիսի՞ մեծություն ունի J իներցիայի մոմենտը, եթե մարմնի կշիռը P է, իսկ AB ու DE առանցքների միջև հեռավորությունը՝ h: Ձողերի զանգվածները անտեսում ենք (գծ. 61):



Գծ. 61

Լուծում: Տված մարմինը կատարում է պտտական շարժում DE հորիզոնական առանցքի շուրջը ծանրության ուժի ազդեցության տակ: Հետևաբար, այդ մարմինը կարելի է դիտել որպես ֆիզիկական ճոճանակ: Այդ դեպքում DE առանցքի շուրջը մարմնի փոքր տատանումների կիսապարբերությունը, (X) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T = \pi\sqrt{\frac{J_{DE}}{Mgh}}, \qquad (1)$$

որտեղ h-ը DE և AB առանցքների միջև եղած հեռավորությունն է:

Հյուգենսի թեորեմի համաձայն՝

$$J_{DE} = J + M h^2, \qquad (2)$$

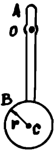
որտեղ J-ն մարմնի իներցիայի մոմենտն է AB առանցքի նկատմամբ, իսկ M-ը՝ ամբողջ մարմնի զանգվածը: J_{DE}-ի արժեքը (2)-ից (1)-ի մեջ տեղադրելով՝ կունենանք

$$T = \pi\sqrt{\frac{J + Mh^2}{Mgh}}:$$

Լուծելով (3)-ը J-ի նկատմամբ՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $= hP\left(\frac{T^2}{\pi^2} - \frac{h}{g}\right)$:

Խնդիր 50 [37. 33(1008)]: Ճոճանակը բաղկացած է AB ձողից, որին միացված է r շառավիղ և m զանգված ունեցող համասեռ գունդը: Գնդի C կենտրոնը գտնվում է ձողի շարունակության վրա: Անտեսելով ձողի զանգվածը՝ որոշել, թե ձողի որ կետում պետք է տեղավորել կախման A առանցքը, որպեսզի մեկ թափի տևողությունը փոքր տատանումների դեպքում հավասար լինի T-ի (գծ. 62):


Գծ. 62

Լուծում: Տվյալ խնդրում ունենք ֆիզիկական ճոճանակ, որի մեկ թափի տևողությունը, համաձայն (X) բանաձևի, կլինի՝

$$T = \pi\sqrt{\frac{J_{ox}}{Mgx}}, \qquad (1)$$

որտեղ $x=OC$ գնդի ծանրության կենտրոնի որոնելի հեռավորությունն է կախման Oz առանցքից, իսկ J_{oz}-ը՝ ճոճանակի իներցիայի մոմենտը կախման Oz առանցքի նկատմամբ (գծ. 62):

Հյուգենսի թեորեմի համաձայն՝

$$J_{oz} = J_{cz} + Mx^2: \qquad (2)$$

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից գնդի իներցիայի մոմենտի համար ունենք հետևյալ արտահայտությունը.

$$J_{cz} = \frac{2}{5}Mr^2, \qquad (3)$$

որտեղ M-ը գնդի զանգվածն է, իսկ r-ը՝ շառավիղը:

Օգտվելով (2) և (3)-ից՝ (1)-ին կարելի է տալ հետևյալ տեսքը.

$$T = \pi\sqrt{\frac{2}{5}\frac{r^2}{gx} + \frac{x}{g}}: \qquad (4)$$

(4) հավասարումից որոշենք x հեռավորությունը.

$$x = \frac{1}{2\pi^2}\left(gT^2 \pm \sqrt{g^2T^4 - 1{,}6\pi^4r^2}\right):$$

Որպեսզի x-ը լինի իրական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$g^2T^4 - 1{,}6\pi^4r^2 \geq 0,$$

կամ՝

$$T^2 \geq \frac{2\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{\pi^2 r}{g}: \qquad (6)$$

Ցույց տանք, որ

$$x = \frac{1}{2\pi^2}\left(gT^2 - \sqrt{g^2T^4 - 1{,}6\pi^4r^2}\right) \qquad (7)$$

լուծումը չի բավարարում:

(7)-ի աջ մասը բազմապատկելով և բաժանելով $\left(gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - 1{,}6\pi^4r^2}\right)$ արտահայտությունով՝ կստանանք՝

$$x = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1{,}6\pi^4r^2}{gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - 1{,}6\pi^4r^2}}: \qquad (8)$$

(6) պայմանի դեպքում (8)-ից ստացվում է, որ

$$x \leq 0{,}4r:$$

Այսպիսով, (7) լուծումը չի բավարարում խնդրի պայմանին:

Այժմ վերցնենք

$$x = \frac{1}{2\pi^2}\left(gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - 1{,}6\pi^4 r^2}\right) \qquad (9)$$

լուծումը, որից (6) պայմանի հիման վրա կստանանք՝

$$x \geq r:$$

Հետևաբար, (9) լուծումը բավարարում է խնդրի պայմանին և այն կլինի տված խնդրի լուծումը:

Պատ. $\quad OC = x = \frac{1}{2\pi^2}\left(gT^2 + \sqrt{g^2T^4 - 1{,}6\pi^4 r^2}\right)$

Խնդիր 51 [37.35(1010)]: Ճոճանակը բաղկացած է ձողից և նրան ամրացված երկու բեռներից, որոնց միջև հեռավորությունը հավասար է l-ի: Վերին բեռն ունի m_1 զանգված, իսկ ստորինը՝ m_2 զանգված: Որոշել, թե ստորին բեռից ինչպիսի՞ x հեռավորության վրա պետք է տեղավորել կախման առանցքը, որպեսզի ճոճանակի փոքր տատանումների պարբերությունը լինի ամենափոքրը: Ձողի զանգվածն անտեսել, իսկ բեռներն ընդունել որպես նյութական կետեր:

Լուծում: Ֆիզիկական ճոճանակի փոքր տատանումների պարբերությունը որոշվում է

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_\alpha}{Mga}} \qquad (1)$$

բանաձևով, որտեղ J_α-ը ճոճանակի իներցիայի մոմենտն է կախման Oz առանցքի նկատմամբ, իսկ a-ն՝ մարմնի ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը կախման կետից:

Եթե ֆիզիկական ճոճանակի բերված երկարության

$$L = \frac{J_\alpha}{Ma}$$

արտահայտության մեջ տեղադրենք $J_\alpha = Mr_\alpha^2$, որտեղ r_α-ը ճոճանակի իներցիայի շառավիղն է Oz առանցքի նկատմամբ, ապա կստանանք՝

$$L = \frac{\rho_\alpha^2}{a}: \qquad (2)$$

Հետևաբար, (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}: \qquad (3)$$

Նշանակում է, T-ի փոքրագույն արժեքը գտնելու խնդիրը բերվում է L-ի փոքրագույն արժեքի գտնելուն: Գրենք L-ի արտահայտությունը հետևյալ տեսքով՝

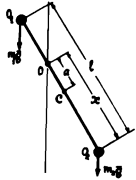
$$L = a + \frac{\rho_{cz}^2}{a}:$$

Այստեղ r_α-ը ճոճանակի իներցիայի շառավիղն է այն առանցքի նկատմամբ, որը զուգահեռ է կախման առանցքին և անցնում է զանգվածների կենտրոնով:

Կազմենք L-ի ածանցյալն ըստ a-ի և այն հավասարեցնենք զրոյի:

$$\frac{dL}{da} = -\frac{\rho_{cz}^2}{a^2} + 1 = 0:$$

Այստեղից ստացվում է $a = r_{cz}$: Մնում է գտնել r_{cz}-ն: Այն գտնելու համար նախ գտնենք ճոճանակի ծանրության կենտրոնի դիրքը: Դրա համար օգտվենք այն հատկությունից, որ զուգահեռ ուժերի ծանրության կենտրոնը ուժերի կիրառման կետերի միջև եղած հեռավորությունը բաժանում է ուժերին հակադարձ համեմատական մասերի, այսինքն (գծ. 63)՝



Գծ. 63

$$\frac{CO_1}{m_2} = \frac{CO_2}{m_1} = \frac{l}{m_1 + m_2}$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$CO_1 = x_c = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \quad CO_2 = x_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}:$$

Եթե J_{cz}-ով նշանակենք ճոճանակի իներցիայի մոմենտը զանգվածների կենտրոնով անցնող z առանցքին զուգահեռ առանցքի նկատմամբ, ապա իներցիայի մոմենտի սահմանման համաձայն կունենանք՝

$$= m_1 x_c^2 + m_2 x_2^2 = m_1\left(\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\right)^2 +$$

$$+ m_2\left(\frac{m_1 l}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2:$$

Մյուս կողմից ունենք՝

$$J_{cz} = (m_1 + m_2)\rho_{cz}^2:$$

(4) և (5)-ից հետևում է, որ

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 = (m_1 + m_2)\rho_{cz}^2:$$

Այստեղից ստացվում է՝

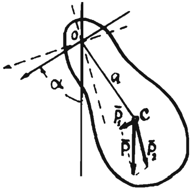
$$\rho_{cz} = \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} l = \qquad (6)$$

Ճոճանակի կախման կետի հեռավորությունը ստորին բեռից ստանալու համար պետք է a-ին գումարել զանգվածների կենտրոնի հեռավորությունը նրանից (գծ. 63), այսինքն՝

$$x = \rho_{cz} + CO_2 = a + CO_2 = \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{m_1 + m_2} l + \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = \sqrt{m_1}\,\frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2} l:$$

$$x = \sqrt{m_1}\,\frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2} l$$

Խնդիր 52 [37.39 (1013)]: Երկրաշարժերը գրանցող սարքերում (սեյսմոգրաֆներում) կիրառվում է ֆիզիկական ճոճանակ, որի կախման առանցքն ուղղաձիգի հետ կազմում է α անկյուն: Կախման առանցքի հեռավորությունը ճոճանակի ծանրության կենտրոնից հավասար է a-ի, կախման առանցքին զուգահեռ և ճոճանակի ծանրության կենտրոնով անցնող առանցքի նկատմամբ ճոճանակի իներցիայի մոմենտը հավասար է J_c-ի, ճոճանակի կշիռը հավասար է P: Որոշել ճոճանակի տատանման պարբերությունը (գծ.64):



Գծ. 64

Լուծում: P կշիռը վերածենք երկու բաղադրիչների՝ մեկն ուղղված Oz_1 առանցքով, իսկ մյուսը՝ նրան ուղղահայաց ուղղությամբ: Oz_1 առանցքի ուղղությամբ բաղադրիչը նշանակենք P_1-ով: Այն կլինի $P_1 = P\cos\alpha$, որը ճոճանակի տատանման ժամանակ հավասարակշռվում է կետի հակազդման հետ: P-ի մյուս բաղադրիչը կլինի՝ $P_2=P\sin\alpha$: Այսպիսով, կունենանք մի ֆիզիկական ճոճանակ, որի վրա ազդում է $P_2=P\sin\alpha$ ծանրության ուժը: Հետևաբար, ճոճման հարթության մեջ ֆիզիկական ճոճանակի տատանումների դիֆերենցիալ հավասարումը, համաձայն (X) բանաձևի, կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$J_{oz_1}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+P_2 a\sin\varphi=0, \qquad (1)$$

որտեղ J_{oz_1}-ը ճոճանակի իներցիայի մոմենտն է Oz_1 առանցքի նկատմամբ: Ֆիզիկական ճոճանակի փոքր տատանումների դեպքում (1) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{P_2 a}{J_{oz_1}}\varphi=0, \qquad (2)$$

իսկ փոքր տատանումների պարբերությունը որոշվում է

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_{oz_1}}{P_2 a}} \qquad (3)$$

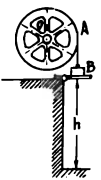
բանաձևով: Հյուգենսի թեորեմի համաձայն՝

$$J_{oz_1}=J_c+\frac{P}{g}a^2 \qquad (4)$$

Եթե J_{oz_1}-ի արժեքը (4)-ից տեղադրենք (3)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ $P_2= P\sin\alpha$, կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $$T=2\pi\sqrt{\frac{gJ_c+Pa^2}{Pag\sin\alpha}}$$

Խնդիր 53 [37.43 (1002)]: R=50սմ շառավիղ ունեցող A թափանիվի ծանրության կենտրոնով անցնող առանցքի նկատմամբ J իներցիայի մոմենտը որոշելու համար անիվը փաթաթում են բարակ մետաղալարով, որին կապված է P_1=8 կգ կշիռ ունեցող B կշռաքարը և չափում են բեռի անկման T_1=16վրկ տևողությունը h=2մ բարձրությունից: Առանցքակալների շփումը արտաքսելու նպատակով կատարում են երկրորդ փորձը P_2=4 կգ կշիռ ունեցող կշռաքարով, ընդ որում անկման տևողությունը նախկին բարձրությունից ստացվում է հավասար T_2=25 վրկ: Հաշվել J իներցիայի մոմենտը՝ ենթադրելով, որ շփման ուժի մոմենտը հաստատուն է և անկախ է կշռաքարի կշռից (գծ.65):



Գծ. 65

Լուծում: Կշռաքարերը և թափանիվը միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը կշռաքարի $\overline{P}_1$ (հետևաբար, նաև P_2) կշիռը, առանցքակալներում եղած շփման ուժը (գծագրի վրա չի նշված), թափանիվի Q կշիռը և առանցքի $\overline{N}$ հակազդումը: Գծագրից երևում է, որ այս արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտը z առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$\sum mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = P_1R - M_{\text{շփմ}},$$

որտեղ $M_{\text{շփմ}}$-ը շփման ուժի մոմենտն է: $\overline{Q}$ -ն և $\overline{N}$ -ը անցնում են z առանցքով, որի հետևանքով նրանց մոմենտները z առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի: Առաջին փորձի ժամանակ դիտարկվող համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը z առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$K_z = J\omega + \frac{P_1}{g}R\omega R,$$

որտեղ w-ն թափանիվի անկյունային արագությունն է տվյալ պահին: (VI) համակարգի երրորդ հավասարումից կունենանք՝

$$\frac{d}{dt}\left[\omega\left(J + \frac{P_1}{g}R^2\right)\right] = P_1R - M_{\text{շփմ}}$$

Եթե ինտեգրենք (3) դիֆերենցիալ հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք

$$\omega|_{t=0} =$$

նախնական պայմանը, ապա կստանանք՝

$$\omega\left(J + \frac{P_1}{g}R^2\right) = (P_1R - M_{\text{շփմ}})t: \qquad (4)$$

Եթե (4) հավասարման մեջ ω-ն փոխարինենք $\frac{d\varphi}{dt}$-ով, ինտեգրենք ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ $\varphi|_{t=0}=0$, կունենանք՝

$$\varphi\left(J+\frac{P_1}{g}R^2\right)=(P_1R-M_{\text{շփմ}})\frac{t^2}{2} \qquad (5)$$

Քանի որ $t=T_1$ պահին $\varphi=\frac{h}{R}$, ապա

$$\frac{h}{R}\left(J+\frac{P_1}{g}R^2\right)=(P_1R-M_{\text{շփմ}})\frac{T_1^2}{2} \qquad (6)$$

Երկրորդ փորձի համար (6) արտահայտությունը կլինի

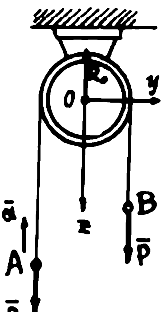
$$\frac{h}{R}\left(J+\frac{P_2}{g}R^2\right)=(P_2R-M_{\text{շփմ}})\frac{T_2^2}{2} \qquad (7)$$

Եթե (6) և (7) հավասարումներից արտաքսենք $M_{\text{շփմ}}$-ը և լուծենք ստացված հավասարումը J անհայտի նկատմամբ, կստանանք պատասխանը:

Պատ. $$J=R^2\frac{\frac{1}{2h}(P_1-P_2)-\frac{1}{g}\left(\frac{P_1}{T_1^2}-\frac{P_2}{T_2^2}\right)}{\frac{1}{T_1^2}-\frac{1}{T_2^2}}=108 \text{ կգմվրկ}^2:$$

Խնդիր 54 [37.49 (982)]: Ճախարակի վրայով, որի զանգվածն անտեսում ենք, գցված է պարան: Պարանի A կետից բռնում է P կգ կշիռը ունեցող մարդը: B կետում կապված է նույն կշիռ ունեցող բեռը: Ի՞նչ կկատարվի բեռի հետ, եթե մարդը սկսի բարձրանալ պարանով, նրա նկատմամբ a արագությամբ (գծ. 66):

Լուծում: Մարդը և բեռը միասին ընդունենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ մարդու $\bar{P}$ և բեռի $\bar{P}$ կշիռները, ինչպես նաև առանցքի O կետի $\bar{R}_0$ հակազդումը: O կետը սկզբնական կետ ընդունելով՝ տանենք $Oxyz$ կոորդինատական համակարգը (գծ. 66):



Գծ. 66

Դժվար չէ նկատել, որ համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի մոմենտների գումարը Ox առանցքի նկատմամբ հավասար է զրոյի, քանի որ $\bar{R}_0$-ն հատում է x առանցքը, իսկ մարդու և բեռի մոմենտները x առանցքի նկատմամբ թվային արժեքով իրար հավասար են և ունեն հակառակ նշաններ: Հետևաբար՝

$$\sum_k m_x\left(\bar{F}_k^{(e)}\right)=0:$$

Այդ դեպքում (VI)-ի առաջին հավասարումից կստանանք.

$$K_x=const: \qquad (1)$$

Քանի որ սկզբնական պահին մարդն ու բեռը եղել են անշարժ, ուստի սկզբնական պահին համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը x առանցքի նկատմամբ հավասար է զրո և (1)-ից կստացվի, որ

$$K_x = 0:$$

Այժմ կազմենք K_x-ի արտահայտությունը համակարգի շարժման կամայական պահի համար:

Եթե մարդու բացարձակ արագությունը նշանակենք $\overline{V}_1$, ապա կունենանք $V_1 = a - V_2$, որտեղ V_2-ը մարդու փոխադրական արագությունն է, այսինքն՝ պարանի արագությունը: Մարդու շարժման քանակը կլինի մի վեկտոր, որն ուղղված է Oz առանցքով դեպի վեր և ունի $\frac{P}{g}(a - V_2)$ մեծությունը: Եթե K_{1x}-ով նշանակենք մարդու շարժման քանակի մոմենտը x առանցքի նկատմամբ, ապա կունենանք՝

$$K_{1x} = -\frac{P}{g}(a - V_2)r: \qquad (2)$$

Բեռի բացարձակ արագությունը հավասար կլինի պարանի արագությանը, քանի որ բեռը պարանի նկատմամբ անշարժ է: Պարանի շարժման քանակը կլինի մի վեկտոր, որն ուղղված է Oz առանցքով դեպի վեր և կունենա $\frac{P}{g}V_2$ մեծություն: Եթե բեռի շարժման քանակի մոմենտը x առանցքի նկատմամբ նշանակենք K_{2x}-ով, ապա կունենանք՝

$$K_{2x} = \frac{P}{g}V_2 r: \qquad (3)$$

Տեղադրելով K_{1x} և K_{2x}-ի արժեքները (2) և (3)-ից (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$K_x = K_{1x} + K_{2x} = -\frac{P}{g}(a - V_2)r + \frac{P}{g}V_2 r = 0:$$

Այստեղից ստացվում է՝ $V_2 = \frac{a}{2}$:

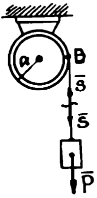
Պատ. Բեռը կբարձրանա պարանի հետ $\frac{a}{2}$ արագությամբ:

Խնդիր 55: M զանգված և a շառավիղ ունեցող շրջանային ճախարակը կարող է ազատ պտտվել Oz առանցքի շուրջը (գծ. 67): Ճախարակի վրա փաթաթված է բարակ թել, որի A ծայրին ամրացված է P բեռը: Բեռը բաց թողնելիս ճախարակը սկսում է պտտվել: Որոշել ճախարակի անկյունային արագացումը և թելի լարումը (թելի կշիռն անտեսել):

Լուծում: Եթե ճախարակի շարժման ժամանակ թելի լարումը նշանակենք $\overline{S}$, ապա ճախարակի պտտման դիֆերենցիալ հավասարումը, (IX) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = aS, \qquad (1)$$

որտեղ J_z-ը ճախարակի իներցիայի մոմենտն է Oz առանցքի նկատմամբ (Oz առանցքն ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը): (1) հավասարման մեջ O կետի հակազդումը չի մասնակցում, քանի որ նրա մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ հավասար է զրոյի:



Գծ. 67

P բեռը կշարժվի դեպի ներքև համընթաց: Բեռի զանգվածների կենտրոնի շարժման հավասարումը կլինի՝

$$MW_c = Mg - S, \qquad (2)$$

որտեղ W_c-ն զանգվածների կենտրոնի արագացումն է: Դժվար չէ նկատել, որ բեռի զանգվածների կենտրոնի արագացումը հավասար է B կետի տանգենցիալ արագացմանը, հետևաբար՝

$$W_c = a\frac{d\omega}{dt} = a\frac{d^2\varphi}{dt^2}: \qquad (3)$$

W_c-ի արժեքը տեղադրելով (2)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$Ma\frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mg - S \qquad (4)$$

Այստեղից՝

$$= Mg - Ma\frac{d^2\varphi}{dt^2}: \qquad (5)$$

Եթե S-ի արժեքը (5)-ից տեղադրենք (1)-ի մեջ, կունենանք՝

$$J_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = aM\left(g - a\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right):$$

Լուծելով ստացված հավասարումը $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ մեծության նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{Mga}{J_z + Ma^2}: \qquad (6)$$

Եթե նկատի ունենանք, որ ճախարակի իներցիայի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ ունի հետևյալ արժեքը՝

$$J_z = \frac{1}{2}Ma^2,$$

ապա (6)-ին կարելի է տալ հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2}{3}\frac{g}{a}: \qquad (7)$$

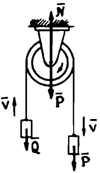
Նշանակում է՝ ճախարակը կատարում է հավասարաչափ արագացող պտտական շարժում:

Եթե (7)-ը տեղադրենք (5)-ի մեջ, կստանանք թելի լարման համար հետևյալ արտահայտությունը՝

$$= \frac{1}{3} Mg :$$

Պատ. $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2}{3}\frac{g}{a}$, $\quad S = \frac{1}{3} Mg$

Խնդիր 56: P կշիռ ունեցող հոծ անշարժ ճախարակի վրայով գցված է ճկուն, անձգելի թել, որի ծայրերից կախված են P և Q կշիռներ ունեցող բեռներ: Որոշել բեռների արագացումը համակարգի շարժման ժամանակ՝ արհամարհելով թելի կշիռն ու առանցքակալներում եղած շփումը (գծ. 68):



Գծ. 68

Լուծում: Գրենք (VI) համակարգի երրորդ հավասարումը՝

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_k m_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right),$$

որտեղ z առանցքն անցնում է O կետով և ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը (գծագրում այն չի նշված), իսկ K_z ը ճախարակի և P ու Q բեռների շարժման քանակի գլխավոր մոմենտն է z առանցքի նկատմամբ.

$$K_z = J_z\omega + \frac{P}{g}VR + \frac{Q}{g}VR,$$

այստեղ ω-ն ճախարակի անկյունային արագությունն է, R-ը նրա շառավիղը, իսկ V-ն՝ բեռների արագությունները: Նկատի ունենալով, որ $J = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2$ և $\omega = \frac{V}{R}$, (2)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$K_z = \left(\frac{P}{2} + P + Q\right)\frac{R}{g}V :$$

Համակարգը կազմված է ճախարակից և P ու Q բեռներից (թելի զանգվածն արհամարհված է): Համակարգի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը ճախարակի $\bar{P}$ և բեռների $\bar{P}$ ու $\bar{Q}$ կշիռները, ինչպես նաև $\bar{N}$ հակազդումը: $\bar{P}$ կշռի և $\bar{N}$ հակազդման մոմենտները z առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի, քանի որ նրանք հատում են z առանցքը, իսկ $\bar{P}$ և $\bar{Q}$ մոմենտները z առանցքի նկատմամբ համապատասխանաբար կլինեն PR և $-QR$ (ուժի մոմենտը ընդունում ենք դրական այն ուղղությամբ, ինչ որ շարժման քանակի մոմենտը):

Ընդունենք նաև, որ $P > Q$: Հետևաբար համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի մոմենտների գումարը z առանցքի նկատմամբ կլինի

$$\sum_k m_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) = PR - QR :$$

Տեղադրելով K_z -ի և $\sum_k m_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$-ի արժեքները (2) և (3)-ից (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

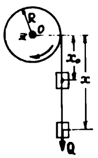
$$(p+2P+2Q)\frac{R}{2g}\frac{dV}{dt}=(P-Q)R:$$

Այստեղից ստացվում է

$$\frac{dV}{dt}=\frac{2(P-Q)}{p+2P+2Q}g$$

$$W=\frac{2(P-Q)}{p+2P+2Q}g:$$

Խնդիր 57: P կշիռ և R շառավիղ ունեցող համասեռ ուղիղ գլանը կարող է պտտվել իր հորիզոնական առանցքի շուրջը: Գլանի վրա փաթաթված է l երկարություն և G կշիռ ունեցող շղթա, իսկ շղթայի ծայրին ամրացված է Q կշռով բեռը: Որոշել գլանի պտտման օրենքը ծանրության ուժի ազդեցության տակ, եթե սկզբնական պահին շղթայի կախված մասի երկարությունը հավասար է x_0-ի, և ամբողջ համակարգը գտնվել է հավասարակշռության վիճակում (գծ. 69):



Գծ. 69

Լուծում: Գլանը, շղթան և Q բեռը միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ գլանի, շղթայի ու բեռի $\overline{P}$, $\overline{G}$ և $\overline{Q}$ կշիռները, ինչպես նաև O կետի $\overline{N}$ հակազդումը: Քանի որ z առանցքն անցնում է O կետով և ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը, ապա նշված ուժերի մոմենտների գումարը Oz առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$\sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)=QR+\frac{G}{l}Rx:$$

$\overline{P}$ և $\overline{N}$ ուժերի մոմենտները z առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի, հետևաբար, նրանք (1)-ի մեջ չեն մասնակցի:
(VI)-ի երրորդ հավասարումը (1)-ի դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{dK_z}{dt}=QR+\frac{G}{l}Rx,$$

որտեղ K_z-ը համակարգի շարժման քանակի մոմենտն է z առանցքի նկատմամբ: Այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$K_z=K_{1z}+K_{2z}+K_{3z}, \qquad (3)$$

որտեղ K_{1z}, K_{2z}, K_{3z}-ը համապատասխանաբար գլանի, շղթայի և Q բեռի շարժման քանակի մոմենտներն են z առանցքի նկատմամբ: Հոծ գլանի համար

$$K_{1z} = J_z\omega = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\omega,$$

իսկ շղթայի և բեռի համար

$$K_{2z} = \frac{G}{g}(R\omega)R, \quad K_{3z} = \frac{Q}{g}(R\omega)R:$$

K_{1z}, K_{2z}, K_{3z}-ի արժեքները տեղադրելով (3)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$K_z = \frac{P+2G+2Q}{2g}R^2\omega: \tag{4}$$

Օգտվելով (4)-ից՝ (2)-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{P+2G+2Q}{2g}R\frac{d\omega}{dt} = Q + \frac{G}{l}x: \tag{5}$$

Քանի որ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = R\frac{d\omega}{dt},$$

ապա (5)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{P+2G+2Q}{2g}\frac{d^2x}{dt^2} = Q + \frac{G}{l}x$$

կամ՝

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a^2x = b,$$

որտեղ

$$a^2 = \frac{2gG}{l(P+2G+2Q)}, \quad b = \frac{2gQ}{P+2G+2Q}: \tag{7}$$

(6)-ը հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի անհամասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումը կարելի է ներկայացնել

$$x = x_1 + x_2 \tag{8}$$

տեսքով, որտեղ x_1-ը

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a^2x = 0 \tag{9}$$

հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ x_2-ը՝ (6)-ի որևէ մասնավոր լուծում: (9)-ի ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$x_1 = C_1e^{at} + C_2e^{-at}, \tag{10}$$

որտեղ C_1, C_2-ը ինտեգրման հաստատուններն են:

(6)-ի մասնավոր լուծումը փնտրենք $x_2 = A$ տեսքով, որտեղ A-ն անհայտ հաստատուն մեծություն է, տեղադրենք այն (6)-ի մեջ և պահանջենք, որ բավարարի հավասարմանը: Կստանանք՝

$$x_2 = A = -\frac{b}{a^2} = -\frac{Q}{G}l: \tag{11}$$

x_1 և x_2-ի արժեքները (10) և (11)-ից տեղադրելով (8)-ի մեջ՝ կստանանք (6) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը հետևյալ տեսքով՝

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t} - \frac{Q}{G} l :$$

C_1 և C_2 ինտեգրման հաստատունները որոշենք

$$x\big|_{t=0} = x_0,\ \dot{x}\big|_{t=0} = 0$$

նախնական պայմաններից: Կստանանք՝

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{Q}{G} l \right): \qquad (13)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{Q}{G} l \right)\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right) - \frac{Q}{G} l :$$

Եթե նկատի ունենանք, որ

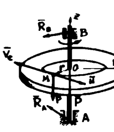
$$x = x_0 + R\varphi,$$

և այն տեղադրենք (14)-ի մեջ, ապա կստանանք գլանի պտտման օրենքը:

$$\varphi = \frac{1}{R}\left(x_0 + \frac{Q}{G} l \right)\left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} - 1 \right), \text{ որտեղ}$$

$$^2 = \frac{2gG}{l(P + 2G + 2Q)}$$

Խնդիր 58 [37. 51 (984)]: Կլոր հորիզոնական հարթակը առանց շփման կարող է պտտվել իր O կենտրոնով անցնող ուղղաձիգ Oz առանցքի շուրջը: Հարթակի վրայով, Oz առանցքից r անփոփոխ հեռավորության վրա, քայլում է p կշիռ ունեցող մարդը հաստատուն u հարաբերական արագությամբ: Ինչպիսի՞ w անկյունային արագությամբ կպտտվի հարթակը առանցքի շուրջը, եթե նրա P կշիռը հավասարաչափ է բաշխված R շառավիղ ունեցող շրջանի մակերեսով, իսկ սկզբնական պահին հարթակի և մարդու արագությունները հավասար են եղել զրոյի (գծ. 70):



Գծ. 70

Լուծում: Հարթակն ու մարդը միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ հարթակի և մարդու $\overline{P}$ և $\overline{p}$ կշիռները, որոնք ուղղված են Oz առանցքին զուգահեռ և կրնկակալի $\overline{R}_A$ ու առանցքակալի $\overline{R}_B$ հակազդումները, որոնք հատում են Oz առանցքը (գծ. 70): Հետևաբար, համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի մոմենտների գումարը Oz առանցքի նկատմամբ հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$\sum_k m_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = 0$: Այդ դեպքում (VI)-ի երրորդ հավասարումից՝

$$K_z = const: \qquad (1)$$

Քանի որ սկզբնական պահին թե՛ հարթակը և թե՛ մարդը եղել են անշարժ, ապա K_z-ը եղել է զրո, որից կհետևի, որ K_z-ը հավասար է զրոյի համակարգի ամբողջ շարժման ընթացքում՝

$$K_z = 0: \qquad (2)$$

Այժմ որոշենք համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ, այսինքն՝ K_z-ը: Եթե K_{1z} և K_{2z}-ով նշանակենք համապատասխանաբար մարդու և հարթակի շարժման քանակների մոմենտները z առանցքի նկատմամբ, ապա կունենանք՝

$$K_z = K_{1z} + K_{2z}: \qquad (3)$$

Եթե մարդը շարժվում է հարթակի վրայով ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ (Oz առանցքի ուղղությամբ դիտելիս), ապա հարթակը կսկսի շարժվել ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ: Դրա հետևանքով մարդու V_a բացարձակ արագությունը հավասար կլինի $(u - V_e)$, որտեղ $V_e = \omega r$ մարդու փոխադրական արագությունն է, այսինքն՝ հարթակի M կետի շրջանային շարժման արագությունը: Այստեղից ստացվում է, որ մարդու շարժման քանակի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$K_{1z} = \frac{p}{g} V_a r = \frac{p}{g}\left(u - V_e\right) r = \frac{p}{g}\left(u - r\omega\right) r: \qquad (4)$$

Հարթակի շարժման քանակի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ ներկայացնենք

$$K_{2z} = -J_1 \omega \qquad (5)$$

տեսքով, որտեղ J_1-ը հարթակի իներցիայի մոմենտն է z առանցքի նկատմամբ ((5)-ում դրված է բացասական նշան, քանի որ հարթակը պտտվում է ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ):

Եթե հարթակը դիտենք որպես համասեռ շրջանային գլան, ապա նրա իներցիայի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$J_1 = \frac{P}{g} \frac{R^2}{2}: \qquad (6)$$

J_1 -ի արժեքը (6)-ից (5)-ի մեջ տեղադրելով, կունենանք՝

$$K_{2z} = -\frac{PR^2}{2g}\omega: \qquad (7)$$

Համաձայն (4) և (7)-ի, (3)-ին կարելի է տալ հետևյալ տեսքը՝

$$K_z = \frac{p}{g}\left(u - r\omega\right) r - \frac{PR^2}{2g}\omega:$$

K_r-ի արժեքը (8)-ից տեղադրելով (2)-ի մեջ՝ կստանանք հետևյալ հավասարումը.

$$\frac{p}{g}(u - r\omega)r - \frac{PR^2}{2g}\omega = 0,$$

որտեղից պետք է որոշել ω-ի արժեքը:

Պատ. $$\omega = \frac{2pr}{PR^2 + 2pr^2}u:$$

Խնդիր 59 [37.55 (988)]: Երկու պինդ մարմիններ իրարից անկախ պտտվում են միևնույն անշարժ առանցքի շուրջը հաստատուն ω_1 և ω_2 անկյունային արագություններով: Պինդ մարմինների իներցիայի մոմենտները այդ առանցքի նկատմամբ համապատասխանաբար հավասար են J_1 և J_2: Ինչպիսի՞ անկյունային արագությամբ կպտտվեն երկու մարմինները, եթե նրանք պտտման ժամանակ միանան:

Լուծում: Երկու մարմինները միասին ընդունենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ: Տանենք Oz առանցքն ուղղված մարմինների պտտման առանցքով: Քանի որ համակարգի վրա արտաքին ուժեր չեն ազդում, ապա

$$\sum mom_z\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) = 0:$$

Այդ դեպքում (VI) համակարգի երրորդ հավասարումից կստանանք՝

$$K_z = const: \qquad (1)$$

Մինչև մարմինների միանալը, այսինքն՝ լրացուցիչ կապերի կիրառումը, համակարգի շարժման քանակի մոմենտների գումարը Oz առանցքի նկատմամբ եղել է

$$K_{z0} = J_1\omega_1 + J_2\omega_2. \qquad (2)$$

Եթե պտտվող մարմինները միանան իրար, ապա նրանց շարժման քանակի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$K_{1z} = (J_1 + J_2)\,\omega, \qquad (3)$$

որտեղ ω-ն միացած մարմինների անկյունային արագությունն է միանալուց հետո: Քանի որ դրված կապերը ստացված համակարգի համար ներքին ուժեր են, իսկ ներքին ուժերը շարժման քանակի մոմենտի թեորեմի մեջ չեն մասնակցում, ապա (1), (2) և (3)-ի հիման վրա կունենանք՝

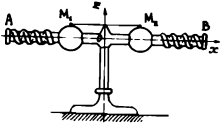
$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\,\omega: \qquad (4)$$

Լուծելով (4)-ը ω-ի նկատմամբ՝ կստանանք պատասխանը:

Պատ. $$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}:$$

Խնդիր 60 [37.57 (989)]: $2L$ =180 սմ երկարություն և Q=2 կգ կշիռ ունեցող AB համասեռ ձողը դրված է կայուն հավասարակշռության վիճակում սրածայր հենարանի վրա այնպես, որ նրա առանցքը հորիզոնական է: Ձողի երկարությամբ կարող են շարժվել յուրաքանչյուրը P=5 կգ կշռով M_1 և M_2 երկու գնդերը, որոնք ամրացված են երկու միատեսակ զսպանակների ծայրերին: Ձողին հաղորդվում է պտտական շարժում ուղղաձիգ առանցքի շուրջը n_1 = 64 պտ/րոպ անկյունային արագությամբ, ընդ որում գնդերը դասավորված են պտտման առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ, և նրանց կենտրոնները թելի օգնությամբ պահվում են իրարից $2l_1$=72 սմ հեռավորության վրա: Այնուհետև թելը այրում են, և գնդերը, կատարելով որոշ թվով տատանումներ, զսպանակների և շփման ուժերի ազդեցության տակ, գալիս են մի հավասարակշռության դիրքի, որի դեպքում նրանք գտնվում են միմյանցից $2l_2$ = 108 սմ հեռավորության վրա: Անտեսելով զսպանակների զանգվածները և դիտելով գնդերը որպես նյութական կետեր որոշել ձողի նոր՝ n_2 պտույտների թիվը մեկ րոպեում (գծ. 71):

Լուծում: AB ձողը և երկու գնդերը միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը. ձողի $\overline{Q}$ և գնդերի $\overline{P}$ ու $\overline{P}$ կշիռները, ինչպես նաև պտտման առանցքի $\overline{N}$ նորմալ հակազդումը: Տանենք Oxz կոորդինատական համակարգը գծագրում ցույց տրված ձևով: Համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի մոմենտների գումարը z առանցքի նկատմամբ հավասար է զրոյի, այսինքն՝



Գծ. 71

$$\sum_i mom_z\left(\overline{F}_i^{(e)}\right) = 0.$$

Այդ դեպքում (VI)-ի եռրորդ հավասարման համաձայն կունենանք

$$K_z = const \qquad (1)$$

կամ՝

$$K_{1z} = \ _{2z}, \qquad (2)$$

որտեղ K_{1z} և K_{2z}-ը համապատասխանաբար համակարգի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտներն են գնդերի առաջին և երկրորդ դիրքերում: Եթե ձողի իներցիայի մոմենտը z առանցքի նկատմամբ նշանակենք J_z -ով և գնդերն ընդունենք որպես նյութական կետեր, ապա կունենանք՝

$$K_{1z} = J_z\omega_1 + 2\frac{P}{g}l_1^2\omega_1, \quad K_{2z} = J_z\omega_2 + 2\frac{P}{g}l_2^2$$

որտեղ ω_1 և ω_2-ը համակարգի անկյունային արագություններն են գնդերի երկու տարբեր դիրքերում:

Եթե K_{1r} և K_{2r}-ի արժեքները (3)-ից տեղադրենք (2)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ $J = \frac{1}{3}\frac{Q}{g}L^2$, ապա կստանանք.

$$\frac{1}{3}\frac{Q}{g}L^2\omega_1 + 2\frac{P}{g}l_1^2 \quad _1 = \frac{1}{3}\frac{Q}{g}L^2\omega_2 + 2\frac{P}{g}l_2^2$$

կամ՝

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}\left(QL^2 + 6Pl_1^2\right) = QL^2 + 6Pl_2^2 \tag{4}$$

Եթե նկատի ունենանք, որ

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

ապա (4)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{n_1}{n_2}\left(QL^2 + 6Pl_1^2\right) = QL^2 + 6Pl_2^2 \tag{5}$$

Լուծելով (5)-ը n_2-ի նկատմամբ՝ կստանանք պատասխանը:

Պատ. $\quad _2 = \frac{L^2Q + 6Pl_1^2}{L^2Q + 6Pl_2^2}n_1 = 34$ պտ/րոպ :

Խնդիր 61: Նավի պտուտակն ունի J իներցիայի մոմենտ և անշարժ վիճակից սկսում է շարժվել M պտտող մոմենտի ազդեցության տակ: Պտուտակի վրա ազդում են ջրի դիմադրության ուժերը, որոնց մոմենտը համեմատական է անկյունային արագության քառակուսուն, այսինքն՝ $M_{\text{դիմ}}=k\omega^2$, որտեղ k-ն հաստատուն գործակից է: Որոշել պտուտակի միջին անկյունային արագությունը այն ժամանակամիջոցում, որի ընթացքում նրա անկյունային արագությունը դառնում է ω_1:

Լուծում: Գրենք անշարժ առանցքի շուրջը պինդ մարմնի շարժման (IX) դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right): \tag{1}$$

Պտուտակի վրա ազդում են M և $M_{\text{դիմ}}$ արտաքին մոմենտները, հետևաբար, (1)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - k\omega^2: \tag{2}$$

Որոնելի ω_* միջին անկյունային արագությունը կարելի է որոշել

$$\omega_* = \frac{\varphi_1}{t_1} \tag{3}$$

բանաձևի միջոցով, որտեղ t_1-ը այն ժամանակամիջոցն է, որի ընթացքում պտուտակի անկյունային արագությունը հավասար է ω_1-ի, իսկ φ_1-ը՝ պտտման անկյունը: φ_1-ն ու t_1-ը որոշելու համար պետք է ինտեգրել (2) դիֆերենցիալ հավասարումը: Եթե (2)-ում կատարենք փոփոխականների անջատում և միաժամանակ ընդունենք $\frac{M}{k} = \;^2$, ապա կստանանք՝

$$\frac{Jd\omega}{k\left(a^2-\omega^2\right)} = dt : \qquad (4)$$

Ինտեգրելով (4)-ը $\omega\big|_{t=0} = 0,\ \omega\big|_{t=t_1} = \omega_1$ նախնական պայմաններով՝ կունենանք՝

$$\frac{J}{2ak}\ln\frac{a+\omega}{a-\omega}\Bigg|_{\omega=0}^{\omega=\omega_1} = t_1 :$$

Այստեղից ստացվում է

$$t_1 = \frac{J}{2ak}\ln\frac{a+\omega_1}{a-\omega_1} : \qquad (5)$$

Եթե (2)-ը բազմապատկենք $d\varphi$-ով և կատարենք փոփոխականների անջատում, կունենանք՝

$$\frac{J\omega d\omega}{M-k\omega^2} = d\varphi : \qquad (6)$$

Ինտեգրելով (6) դիֆերենցիալ հավասարումը $\omega\big|_{\varphi=0} = 0,\ \omega\big|_{\varphi=\varphi_1} = \omega_1$ նախնական պայմաններով՝ կստանանք՝

$$\varphi_1 = \frac{J}{2k}\ln\frac{a^2}{a^2-\omega_1^2} : \qquad (7)$$

Մնում է t_1-ի և φ_1-ի արժեքները (5) և (7)-ից տեղադրել (3)-ի մեջ:

$$. = a\frac{\ln\dfrac{a^2}{a^2-\omega_1^2}}{\ln\dfrac{a+\omega_1}{a-\omega_1}},\ \text{որտեղ}\ a^2 = \frac{M}{k} :$$

Խնդիր 62: Ինքնաթիռի շարժիչը պտտեցնում է օդային պտուտակը: Շարժիչի մոմենտը, որը հաղորդվում է պտուտակին, որոշվում է $M_{շարժ} - M_0 + a\sin\frac{n\varphi}{2}$ բանաձևով, որտեղ φ-ն պտուտակի պտտման անկյունն է, իսկ M_0, a և n մեծությունները հայտնի են: Պտուտակի շարժմանը դիմադրող օդի դիմադրության ուժը առաջացնում է $M_c = \gamma\,\omega^2$ մոմենտ, որտեղ γ-ն հաստատուն գործակից է: Պտուտակի իներցիայի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ հավասար է J-ի: Գտնել պտուտակի շարժման օրենքը:

Լուծում: Պտուտակի պտտման դիֆերենցիալ հավասարումը, (IX) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_{շարժ} - M_c$$

կամ՝

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_0 + a\sin\frac{n\varphi}{2} - \gamma\,\omega^2: \qquad (1)$$

Կատարենք հետևյալ ձևափոխությունը՝

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\omega = \frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\varphi}: \qquad (2)$$

Եթե $\frac{d\omega}{dt}$-ի արժեքը (2)-ից տեղադրենք (1)-ի մեջ և միաժամանակ կատարենք $y = \omega^2$ տեղադրում, կստանանք՝

$$\frac{J}{2}\frac{dy}{d\varphi} + \gamma y = M_0 + a\sin\frac{n\varphi}{2}: \qquad (3)$$

Վերջինս առաջին կարգի անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է, որի ընդհանուր լուծումը փնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$y = y_1 + y_2, \qquad (4)$$

որտեղ y_1-ը

$$\frac{J}{2}\frac{dy}{d\varphi} + \gamma y = 0 \qquad (5)$$

հավասարման ընդհանուր լուծում է, իսկ y_2-ը՝ (3) հավասարման որևէ մասնավոր լուծումը: (5)-ի ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y_1 = Ce^{-k\varphi}, \qquad (6)$$

որտեղ $k = \frac{2\gamma}{J}$: (3) հավասարման ընդհանուր լուծումը նպատակահարմար է փնտրել հետևյալ տեսքով՝

$$y_2 = \lambda_0 + \lambda_1\sin\frac{n\varphi}{2} + \lambda_2\cos\frac{n\varphi}{2}, \qquad (7)$$

որտեղ $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$-ը անհայտ գործակիցներ են:

Դիֆերենցենք y_2-ը և y_2-ի ու $\frac{dy_2}{d\varphi}$-ի արժեքները տեղադրենք (3) դիֆերենցիալ հավասարման մեջ, կստանանք.

$$\gamma\lambda_0 + \left(\frac{Jn}{4}\lambda_1 + \gamma\lambda_2\right)\cos\frac{n\varphi}{2} + \left(-\frac{Jn}{4}\lambda_2 + \gamma\lambda_1\right)\sin\frac{n\varphi}{2} \equiv M_0 + a\sin\frac{n\varphi}{2}:$$

Քանի որ $\cos x$ և $\sin x$ ֆունկցիաները անկախ են, ապա կունենանք՝

$$\gamma\lambda_0 = M_0,\ \frac{Jn}{4}\lambda_1 + \gamma\lambda_2 = 0,\ -\frac{Jn}{4}\lambda_2 + \gamma\lambda_1 = a:$$

Լուծելով այս հավասարումները $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$-ի նկատմամբ՝ կստանանք.

$$\lambda_0 = \frac{M_0}{\gamma},\ \lambda_1 = \frac{a\gamma}{\left(\frac{Jn}{4}\right)^2 + \gamma^2},\ \lambda_2 = -\frac{aJn}{4\left[\left(\frac{Jn}{4}\right)^2 + \gamma^2\right]}:$$

Տեղադրելով $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$-ի արժեքները (7)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$y_2 = \frac{M_0}{\gamma} + \frac{a}{\gamma^2 + \left(\frac{Jn}{4}\right)^2}\left(\gamma \sin\frac{n\varphi}{2} - \frac{Jn}{4}\cos\frac{n\varphi}{2}\right): \qquad (8)$$

Եթե y_1 և y_2-ի արժեքները (6) և (8)-ից տեղադրենք (4)-ի մեջ, կստանանք y-ի արտահայտությունը հետևյալ տեսքով՝

$$y = Ce^{-\gamma\varphi} + \frac{M_0}{\gamma} + \frac{a}{\gamma^2 + \left(\frac{Jn}{4}\right)^2}\left(\gamma \sin\frac{n\varphi}{2} - \frac{Jn}{4}\cos\frac{n\varphi}{2}\right): \qquad (9)$$

Եթե մուծենք օժանդակ ψ անկյուն

$$tg\psi = \frac{nJ}{4\gamma}$$

բանաձևով, ապա (9)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\gamma\omega^2 = M_0 + a\cos\psi\sin\left(\frac{n\varphi}{2} - \psi\right) + Ce^{-\gamma\varphi} \qquad (10)$$

Դիցուք պտուտակը կատարում է մեծ թվով պտույտներ: Այդ դեպքում

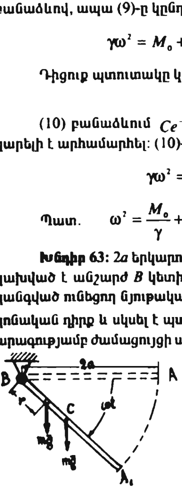
$$e^{-\gamma\varphi} \approx 0:$$

(10) բանաձևում $Ce^{-\gamma\varphi}$ անդամը մյուս անդամների հետ համեմատած կարելի է արհամարհել: (10)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\gamma\omega^2 = M_0 + a\cos\psi\sin\left(\frac{n\varphi}{2} - \psi\right):$$

Պատ. $\omega^2 = \frac{M_0}{\gamma} + \frac{a}{\gamma}\cos\psi\sin\left(\frac{n\varphi}{2} - \psi\right)$, որտեղ $tg\psi = \frac{nJ}{4\gamma}$:

Խնդիր 63: $2a$ երկարություն և m զանգված ունեցող AB ձողը հոդակապով կախված է անշարժ B կետից: Ձողի B ծայրից սկսում է շարժվել նույնպիսի m զանգված ունեցող նյութական կետը: Ձողը սկզբնական պահին ունեցել է հորիզոնական դիրք և սկսել է պտտվել ուղղաձիգ հարթության մեջ ω անկյունային արագությամբ ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ: Որոշել, թե ինչքան ժամանակից հետո կետը կհասնի ձողի A ծայրը, եթե այն շարժվում է այնպես, որ ձողի անկյունային արագությունը մնում է հաստատուն (գծ. 72):



Գծ. 72

Լուծում: Ձողը և նյութական կետը միասին դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են ձողի և նյութական կետի ծանրության ուժերը, ինչպես նաև B կետի հակազդումը:

Դիցուք ժամանակի t պահին շարժվող կետի հեռավորությունը ձողի B ծայրից հավասար է r-ի: Այդ դեպքում, քանի որ ձողի անկյունային արագությունը հաստատուն է, ապա A_1BA պտտման անկյունը կլինի ωt: Հետևաբար, համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի մոմենտների գումարը z առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$\sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = -mga\cos\omega t - mgr\cos\omega t \qquad (1)$$

(Bz առանցքն ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը): (1)-ում վերցված է միևնույն նշան, քանի որ z առանցքի դրական ուղղությունից նայելիս պտույտը կատարվում է ժամացույցի սլաքի պտտման ուղղությամբ:

Եթե շարժման քանակի մոմենտը Bz առանցքի նկատմամբ նշանակենք K_z, ապա կունենանք՝

$$K_z = K_{1z} + K_{2z}, \qquad (2)$$

որտեղ K_{1z}-ը և K_{2z}-ը համապատասխանաբար ձողի և նյութական կետի շարժման քանակի մոմենտներն են Bz առանցքի նկատմամբ: Ձողի համար ունենք՝

$$K_{1z} = J_{1z}\omega_z = -\frac{1}{3}(2a)^2\omega = -\frac{4}{3}ma^2\omega, \qquad (3)$$

իսկ նյութական կետի համար՝

$$K_{2z} = -m\omega r\cdot r = -m\omega r^2: \qquad (4)$$

K_{1z} և K_{2z}-ի արժեքները (3) և (4)-ից տեղադրելով (2)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$K_z = -\frac{4}{3}ma^2\omega - mr^2\omega: \qquad (5)$$

Եթե (VI) համակարգի երրորդ հավասարման մեջ տեղադրենք $\sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$ և K_z-ի արժեքները (1) և (5)-ից, կստանանք՝

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}ma^2\omega + mr^2\omega\right) = mg(a+r)\cos\omega t$$

կամ

$$g(a+r)\cos\omega t\,dt = 2r\omega dr: \qquad (6)$$

Ինտեգրելով (6)-ը՝ կունենանք՝

$$\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t = C + r - a\ln(a+r): \qquad (7)$$

Օգտվելով

$$r\big|_{t=0} = 0$$

նախնական պայմանից՝ (7)-ից կստանանք $C = a\ln a$: Եթե C-ի համար ստացած այս արժեքը տեղադրենք (7)-ի մեջ, կստանանք՝

$$r + a\ln\frac{a}{a+r} = \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t: \qquad (8)$$

Երբ նյութական կետը հասնում է ձողի A ծայրին, ապա ստացվում է $r = 2a$: Մնում է այս արժեքը տեղադրել (8)-ի մեջ և ստացված հավասարումից որոշել t-ի արժեքը:

Պատ. $$t = \frac{1}{\omega} \arcsin\left[\frac{2a\omega^2}{g}(2-\ln 3)\right]:$$

(Որպեսզի շարժումը լինի իրական, a-ն և ω-ն պետք է բավարարեն $\frac{2a\omega^2}{g}(2-\ln 3) \le 1$ անհավասարությանը):

7. ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԿԻՆԵՏԻԿ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

1.Համակարգի կինետիկ էներգիայի սահմանումը և հաշվումը: Համակարգի կինետիկ էներգիա կոչվում է համակարգի բոլոր կետերի կինետիկ էներգիաների գումարը:

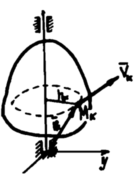
Եթե համակարգի k-րդ կետի զանգվածը նշանակենք m_k, իսկ արագությունը անշարժ կոորդինատական համակարգի նկատմամբ՝ V_k, ապա այդ կետի կինետիկ էներգիան կլինի $\frac{m_k V_k^2}{2}$, իսկ համակարգի կինետիկ էներգիան՝

$$T = \sum_k \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_k m_k V_k^2 \qquad (\mathrm{I})$$

Եթե համակարգը կատարում է համընթաց շարժում, ապա նրա բոլոր կետերը շարժվում են միևնույն արագությամբ, և այդ արագությունը հավասար է զանգվածների կենտրոնի շարժման արագությանը, այսինքն՝ $\bar{V}_k = \bar{V}_c$: Այդ դեպքում (I) -ից կստանանք.

$$T = \frac{1}{2} MV_c^2: \qquad (\mathrm{II})$$

Այսպիսով, եթե համակարգը շարժվում է համընթաց, ապա նրա կինետիկ էներգիան հավասար է զանգվածների կենտրոնի կինետիկ էներգիային, որում կենտրոնացված է ամբողջ համակարգի զանգվածը:



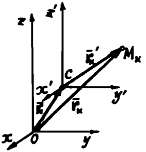
Գծ. 73

Եթե մարմինը պտտվում է որևէ oz առանցքի շուրջը ω անկյունային արագությամբ (գծ.73), ապա նրա կամայական կետի արագությունը կլինի $V_k = \omega h_k$, որտեղ h_k- ն կետի հեռավորությունն է պտտման առանցքից: Տեղադրելով V_k- ի արժեքը կինետիկ էներգիայի (I) արտահայտության մեջ՝ կստանանք.

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \qquad (\mathrm{III})$$

այսինքն՝ մարմնի պտտական շարժման ժամանակ նրա կինետիկ էներգիան հավասար է պտտման առանցքի նկատմամբ մարմնի իներցիայի մոմենտի և անկյունային արագության քառակուսու արտադրյալի կեսին:

Ընդհանուր դեպքում համակարգի կինետիկ էներգիան հաշվելու համար նպատակահարմար է նրանից անջատել այն մասը, որը պայմանավորված է համակարգի համընթաց շարժումով: Դրա համար բավական է (I) - ի մեջ կատարել



Գծ. 74

տեղադրում, որտեղ $\bar{r}_i$-ն ու $\bar{r}_c$-ն համակարգի k-րդ կետի և զանգվածների կենտրոնի շառավիղ վեկտորներն են անշարժ կոորդինատական համակարգի նկատմամբ, իսկ $\bar{r}_i'$- ը՝ k-րդ կետի շառավիղ վեկտորն է այն շարժական կոորդինատական համակարգի նկատմամբ, որի սկզբնակետը գտնվում է զանգվածների կենտրոնում, իսկ առանցքները զուգահեռ են անշարժ համակարգի առանցքներին (գծ. 74): Այդ դեպքում՝

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + T_c, \quad \left(T_c = \sum_i \frac{m_i (V_i')^2}{2} \right),$$

որը կարելի է ձևակերպել այսպես. համակարգի կինետիկ էներգիան հավասար է զանգվածների կենտրոնի կինետիկ էներգիային, որում կենտրոնացված է ամբողջ համակարգի զանգվածը, գումարած համակարգի կինետիկ էներգիան, որն առաջանում է զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ նրա կատարած շարժումից (Կյոնիգի թեորեմ):

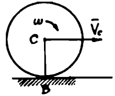
Կյոնիգի թեորեմի համաձայն՝ պինդ մարմնի հարթ-զուգահեռական շարժման դեպքում նրա կինետիկ էներգիան արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2, \qquad \text{(V)}$$

որտեղ J_{cz}-ը մարմնի իներցիայի մոմենտն է մասսաների կենտրոնով անցնող և շարժման հարթությանը ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, իսկ ω-ն՝ պտտման անկյունային արագությունը:

Եթե մեխանիկական համակարգը կազմված է մի քանի պինդ մարմիններից, ապա անհրաժեշտ է որոշել յուրաքանչյուր մարմնի կինետիկ էներգիան և այնուհետև գումարել իրար:

Խնդիր 64: Որոշել առանց սահքի գլորվող հոծ գլանային անիվի կինետիկ էներգիան, եթե նրա զանգվածը հավասար է M - ի, իսկ կենտրոնի արագությունը՝ V_c - ի (գծ.75):



Գծ. 75

Լուծում: Անիվը կատարում է հարթ-զուգահեռական շարժում: (V) բանաձևի համաձայն՝ նրա կինետիկ էներգիան կլինի՝

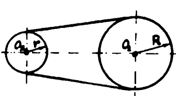
$$T = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} J_{cz}\omega^2,$$

որտեղ J_{cz}-ը հոծ համասեռ գլանի իներցիայի մոմենտն է պտտման cz առանցքի նկատմամբ (cz-ը անցնում է զանգվածների կենտրոնով և ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը): Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից ունենք $J_{cz} = \frac{1}{2} MR^2$, որտեղ R-ը անիվի շառավիղն է: Քանի որ B կետը անիվի համար պտտման ակնթարթային կենտրոն է, ապա $V_c = \omega BC = \omega R$: Այստեղից՝ $\omega = \frac{V_c}{R}$ Տեղադրելով J_{cz}-ի և ω-ի արժեքները (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$= \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{4} MR^2 \frac{V^2}{R^2} = \frac{3}{4} MV$$

$$= \frac{3}{4} MV_c^2 :$$

Խնդիր 65 (1040): Շղթայավոր փոխանցման մեծ փոկանիվը պտտվում է ω_1 անկյունային արագությամբ: Փոկանիվի շառավիղն R է, իսկ իներցիայի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ՝ J_1: Փոքր փոկանիվի շառավիղը r է, իսկ պտտման առանցքի նկատմամբ իներցիայի մոմենտը՝ J_2: Փոկանիվներով ձգված շղթայի կշիռը հավասար է Q-ի: Հաշվել ամբողջ համակարգի կինետիկ էներգիան (գծ.76):



Լուծում: Համակարգը կազմված է երեք մարմիններից՝ մեծ ու փոքր փոկանիվներից և փոկանիվներով ձգված շղթայից: Համակարգի կինետիկ էներգիան՝

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (1)$$

որտեղ T_1-ն ու T_2-ը մեծ և փոքր փոկանիվների կինետիկ էներգիաներն են, իսկ T_3-ը՝ շղթայի կինետիկ էներգիան:

Համաձայն (III) բանաձևի՝ մեծ և փոքր փոկանիվների կինետիկ էներգիաները կլինեն՝

$$_1 = \frac{1}{2} J_1\omega_1^2, \qquad _2 = \frac{1}{2} J_2\omega_2^2,$$

որտեղ ω_2-ը փոքր փոկանիվի անկյունային արագությունն է: Քանի որ $\omega_1 R = \omega_2 r$, ապա $\omega_2 = \frac{R}{r}\omega_1$: Տեղադրելով ω_2-ի այս արժեքը T_2-ի արտահայտության մեջ կստանանք

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \omega_1^2 :$$

Եթե շղթայի տարրական մասի կշիռը նշանակենք Δq_k և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ նրա բոլոր էլեմենտների մասերի արագությունները նույնն են և հավասար $R\omega_1$-ի, ապա (II) բանաձևի համաձայն կունենանք`

$$T_3 = \frac{1}{2} \sum_k \frac{\Delta q_k}{g} \left(R\omega_1\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} R^2 \omega_1^2 :$$

Տեղադրելով T_1, T_2, և T_3-ի արժեքները (1)-ի մեջ` կստանանք

$$= \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{Q}{g} R^2 \omega_1^2$$

$$T = \frac{\omega_1^2}{2} \left[J_1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 J_2 + \frac{Q}{g} R^2 \right] :$$

2.Մեխանիկական համակարգի վրա կիրառված ուժերի աշխատանքը: Դիցուք մեխանիկական համակարգը մի դիրքից տեղափոխվում է մի այլ դիրք: A-ով նշանակենք այն աշխատանքը, որը կատարում են այդ տեղափոխման ժամանակ համակարգի վրա կիրառված արտաքին և ներքին ուժերը:

Համակարգի k-րդ կետի վրա կիրառված արտաքին և ներքին ուժերի կատարած աշխատանքները, երբ համակարգը մի դիրքից տեղափոխվում է մի այլ դիրք, համապատասխանաբար նշանակենք $A_k^{(e)}$ և $A_k^{(i)}$-ով, կունենանք`

$$A^{(e)} = \sum_k A_k^{(e)}, \quad A^{(i)} = \sum_k A_k^{(i)}$$

Եթե արտաքին և ներքին ուժերի աշխատանքներր նշանակենք համապատասխանաբար $A_k^{(e)}$ և $A_k^{(i)}$-ով, ապա կունենանք

$$A = A^{(e)} + A^{(i)}$$

Ընդհանուր դեպքում մեխանիկական համակարգի ներքին ուժերի կատարած աշխատանքը հավասար չէ զրոյի: Օրինակ` առաձգական մարմնի ներքին ուժերի կատարած աշխատանքը տարբեր է զրոյից:

Անփոփոխ մեխանիկական համակարգի (օրինակ` բացարձակ պինդ մարմնի) ներքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը հավասար է զրոյի, այսինքն`

$$^{(i)} = \sum_k A_k^{(i)} = 0 :$$

3.Աշխատանքի և հզորության հաշվման մի քանի օրինակներ: Ուժերի աշխատանքը որոշվում է «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների լուծման ուղեցույց» գրքի երրորդ պրակի § 6-ում բերված բանաձևերով: Այստեղ դիտարկվում են միայն ուժերի կատարած աշխատանքը և հզորության հաշվման մի քանի լրացուցիչ դեպքեր:

ա) *Համընթաց շարժվող պինդ մարմնի վրա ազդող ուժերի կատարած աշխատանքը և հզորությունը:* Եթե պինդ մարմնի վրա ազդում են $F_1^{(e)}, F_2^{(e)}, \ldots, F_n^{(e)}$ արտաքին ուժեր, և այդ ուժերի ազդեցության տակ մարմինը կատարում է համընթաց շարժում, ապա այդ ուժերի տարրական աշխատանքների գումարը կլինի՝

$$\sum_k d' A_k^{(e)} = \sum_k \overline{F}_k^{(e)} dr = \overline{R}^{(e)} dr, \qquad \text{(VI)}$$

որտեղ $d\bar{r}$ -ը տարրական տեղափոխությունն է, որն ընդհանուր է մարմնի բոլոր կետերի համար, իսկ $\overline{R}^{(e)} = \sum_k \overline{F}_k^{(e)}$ -ն՝ մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը:[1]

Այսպիսով, համընթաց շարժում կատարող պինդ մարմնի վրա կիրառված արտաքին ուժերի կատարած տարրական աշխատանքը հավասար է արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորի կատարած տարրական աշխատանքին, երբ այդ վեկտորը կիրառված է մարմնի կամայական կետում:

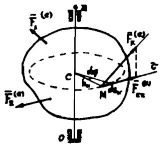
Համընթաց շարժում կատարող համակարգի վրա կիրառված արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքը, երբ համակարգը մի դիրքից տեղափոխվում է մեկ այլ դիրք, որոշվում է

$$A^{(e)} = \int_{CC_1} \overline{R}^{(e)} d\bar{r} \qquad \text{(VII)}$$

բանաձևով, որտեղ $\breve{CC_1}$-ը համակարգի վրա կիրառված արտաքին ուժերի բերման կենտրոնի տեղափոխման աղեղն է:

Դիտարկվող դեպքում հզորության համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$W = \sum_k \overline{F}_k^{(e)} \overline{V} = \overline{R}^{(e)} \overline{V}, \qquad \text{(VIII)}$$



Գծ. 77

որտեղ $\overline{V}$ արագությունը ընդհանուր է համակարգի բոլոր կետերի համար:

բ) *Անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող պինդ մարմնի վրա ազդող ուժերի կատարած աշխատանքը և հզորությունը:* Դիցուք oz առանցքի շուրջը պտտվող մարմնի վրա կիրառված են $\overline{F}_1^{(e)}, \overline{F}_2^{(e)}, \ldots, \overline{F}_n^{(e)}$ արտաքին ուժերը (գծ. 77): Նախ հաշվենք մարմնի k-րդ կետի վրա կիրառված $\overline{F}_k^{(e)}$ ուժի կատարած

---

[1] Ուժի էլեմենտար աշխատանքի համար ընդունված է $d'A$ սիմվոլը dA-ի փոխարեն, քանի որ $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ եռանդամը ընդհանուր դեպքում լրիվ դիֆերենցիալ չէ: $d'A$ սիմվոլը պետք է հասկանալ որպես տարրական աշխատանքի նշանակում և չպետք է շփոթել ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալի հետ:

տարրական աշխատանքը: Եթե մարմինը կատարում է տարրական պտույտ oz առանցքը շուրջը, ապա φ անկյունը ստանում է $d\varphi$ աճ, իսկ k-րդ կետի տեղափոխությունը՝ $dS_k = h_k d\varphi$ աճ, որտեղ h_k-ն k-րդ կետի հեռավորությունն է z առանցքից: Այդ դեպքում $\overline{F}_k^{(e)}$ ուժի կատարած տարրական աշխատանքը կլինի

$$d^{\bullet}A_k^{(e)} = F_{k\tau}^{(e)}dS_k = F_{k\tau}^{(e)}h_k d\varphi, \qquad (1)$$

որտեղ $F_{k\tau}^{(e)}$-ն $F_k^{(e)}$ ուժի պրոյեկցիան է k-րդ կետի հետագծի շոշափողի ուղղության վրա: Գծագրից երևում է, որ

$$F_{k\tau}^{(e)}h_k = mom_z\left(\overline{F}_{k\tau}^{(e)}\right) = mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right), \qquad (2)$$

ըստ որի (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$d^{\bullet}A_k^{(e)} = mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)d\varphi: \qquad (3)$$

Պինդ մարմնի վրա կիրառված բոլոր արտաքին ուժերի կատարած տարրական աշխատանքների գումարը կլինի՝

$$d^{\bullet}A_k^{(e)} = \sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)d\varphi = \sum_k d^{\bullet}A_k^{(e)}$$

կամ՝

$$d^{\bullet}A_k^{(e)} = \sum_k d^{\bullet}A_k^{(e)} = M_z^{(e)}d\varphi: \qquad (IX)$$

Այստեղ $M_z^{(e)} = \sum mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$-ն մարմնի վրա կիրառված արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտն է z առանցքի նկատմամբ, որին կանվանենք պտտող մոմենտ:

Նշանակում է՝ անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող մարմնի վրա կիրառված արտաքին ուժերի կատարած տարրական աշխատանքը հավասար է պտտող մոմենտի և մարմնի տարրական պտտման անկյան արտադրյալին:

Եթե մարմինը պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը վերջնական անկյունով, ապա արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$A^{(e)} = \int M_z^{(e)}d\varphi, \qquad (X)$$

որտեղ φ_0 և φ_1-ը մարմնի դիրքը որոշող φ անկյան սկզբնական և վերջնական արժեքներն են:

Եթե մարմնի պտտման ժամանակ արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտը (պտտող մոմենտը) չի փոխվում, այսինքն՝ $M_z^{(e)} = const$, ապա

$$A^{(e)} = M_z^{(e)}\left(\varphi_1 - \varphi_0\right): \qquad (XI)$$

Եթե մարմնի վրա ազդում է ուժազույգ, որի հարթությունը ուղղահայաց է պտտման առանցքին, ապա (IX)-(XI) բանաձևերում M_z-ը իրենից կներկայացնի այդ զույգի մոմենտը:

Բաժանելով (IX) հավասարությունը dt-ի վրա՝ կստանանք անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող պինդ մարմնի վրա ազդող ուժերի հզորության արտահայտությունը.

$$W^{(e)} = M_z^{(e)}\omega_z, \qquad (XII)$$

որտեղ $W^{(e)}$-ն արտաքին ուժերի հզորությունն է, այսինքն արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքը միավոր ժամանակամիջոցում: Այսպիսով, պտտվող մարմնի վրա կիրառված ուժերի հզորությունը հավասար է պտտող մոմենտի և մարմնի անկյունային արագության արտադրյալին:

գ) Համակարգի վրա ազդող ծանրության ուժերի կատարած աշխատանքը:

Եթե մեխանիկական համակարգը գտնվում է համասեռ ծանրության դաշտում, ապա նրա k-րդ կետի վրա ազդող $\overline{P}_i$ ծանրության ուժի կատարած տարրական աշխատանքը կլինի $\overline{P}_i d\overline{r}_i$: Եթե z առանցքն ուղղենք ուղղաձիգ դեպի վեր, ապա $\overline{P}_i$ ուժի կատարած տարրական աշխատանքը կլինի $dA_i^{(e)} = -P_i dz_i$ Հետևաբար, համակարգի վրա ազդող բոլոր ծանրության ուժերի տարրական աշխատանքների գումարը կլինի՝

$$\sum_i dA_i^{(e)} = -\sum_i P_i dz_i = -\sum_i m_i g dz_i = -gd\sum_i m_i z_i \qquad (1)$$

Բայց, քանի որ

$$\sum_k m_k z_k = Mz_c,$$

որտեղ M-ը ամբողջ համակարգի զանգվածն է, իսկ z_c-ն համակարգի ծանրության կենտրոնի z կոորդինատը, ապա (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_i dA_i^{(e)} = -Mgdz_c \qquad (2)$$

Համակարգի վրա ազդող բոլոր ծանրության ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը, երբ համակարգը մի դիրքից տեղափոխվում է մեկ այլ դիրք, կլինի՝

$$A^{(e)} = \sum_i A_i^{(e)} = -P\int_{z_{c_0}}^{z_c} dz_c = -P(z_c - z_{c_0}) = \pm Ph_c \qquad \text{(XII)}$$

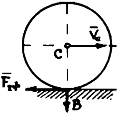
որտեղ z_c և z_{c_0}-ն որոշում են համակարգի ծանրության կենտրոնի սկզբնական և վերջնական դիրքերը, իսկ h_c-ն ծանրության կենտրոնի ուղղաձիգ տեղափոխության չափն է:

Հետևաբար, համակարգի վրա ազդող ծանրության ուժերի կատարած աշխատանքը հավասար է այդ ուժերի P համազորի և համակարգի ծանրության կենտրոնի ուղղաձիգ տեղափոխության արտադրյալին՝ վերցված դրական կամ բացասական նշանով: Աշխատանքը դրական է, երբ ծանրության կենտրոնի սկզբնական դիրքը բարձր է վերջնական դիրքից և բացասական, երբ սկզբնական դիրքը ցածր է վերջնական դիրքից:

դ) Գլորվող մարմնի վրա ազդող շփման ուժերի կատարած աշխատանքը: Դիցուք որևէ հարթության (մակերևույթի) վրայով առանց սահքի գլորվող R շառավիղ ունեցող անիվի վրա ազդում է $F_{շփ}$ շփման ուժը, որը խանգարում է շոշափման B կետի սահքը հարթության վրայով (գծ.78): Այդ ուժի կատարած տարրական աշխատանքը կլինի՝

$$d'A = -F_{շփ} dS_B:$$

Բայց տվյալ դեպքում B կետը պտտման ակնթարթային կենտրոն է, հետևաբար, $V_B = 0$: Քանի որ $dS_B = V_B dt$, ապա $dS_B = 0$ Այդ դեպքում (1)-ից ստացվում է, որ ամեն մի տարրական տեղափոխման համար $d'A = 0$: Հետևաբար, մարմնի առանց սահքի գլորման դեպքում սահքի խանգարող շփման ուժի աշխատանքը մարմնի ամեն մի տեղափոխման համար հավասար է զրոյի: Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ, որ N նորմալ հակազդման աշխատանքը մարմնի ամեն մի տեղափոխման համար նույնպես հավասար է զրոյի:



Գծ. 78

Համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը: Այս թեորեմը կապ է հաստատում կինետիկ էներգիայի փոփոխման և համակարգի վրա ազդող ուժերի կատարած աշխատանքի միջև:

Դիցուք մեխանիկական համակարգի յուրաքանչյուր կետի վրա, բացի նրա վրա ազդող ակտիվ ուժերից, ազդում են նաև կապերի հակազդումները: Այդ դեպքում համակարգի կետերը կարելի է դիտել որպես ազատ կետեր, հետևաբար, նրանցից յուրաքանչյուրի համար տեղի կունենա կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը: Եթե բաժանենք կետի վրա կիրառված արտաքին և ներքին ուժերը, ապա կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \bar{F}_k^{(e)} \cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_k^{(i)} \cdot d\bar{r}_k \qquad (k = 1,2,\ldots,n): \qquad (1)$$

Գումարելով ստացված n հավասարումները՝ կստանանք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը դիֆերենցիալ տեսքով.

$$dT = \sum_k \bar{F}_k^{(e)} \cdot d\bar{r}_k + \sum_k \bar{F}_k^{(i)} \cdot d\bar{r}_k \qquad \text{(XIV)}$$

Այսինքն՝ համակարգի կինետիկ էներգիայի դիֆերենցիալը հավասար է համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին և ներքին ուժերի կատարած տարրական աշխատանքների գումարին:

Բաժանելով (XIV) հավասարման երկու մասերը dt-ի վրա՝ կստանանք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k W_k^{(e)} + \sum_k W_k^{(i)} \qquad \text{(XV)}$$

այսինքն՝ համակարգի կինետիկ էներգիայի ածանցյալն ըստ ժամանակի հավասար է համակարգի վրա ազդող ներքին և արտաքին ուժերի հզորությունների գումարին:

(1) հավասարումներից յուրաքանչյուրը ներկայացնենք

$$\frac{m_k V_k^2}{2} - \left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right)_0 = \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

վերջավոր տեսքով, որտեղ $A_k^{(e)}$ և $A_k^{(i)}$-ն $\overline{F}_k^{(e)}$ և $\overline{F}_k^{(i)}$ ուժերի կատարած աշխատանքներն են, երբ համակարգի կետը սկզբնական դիրքից տեղափոխվում է վերջնական դիրք: Գումարելով (2) հավասարումները՝ կստանանք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր (ինտեգրալ) տեսքով.

$$T - T_0 = \sum_k A_k^{(e)} + \sum_k A_k^{(i)} \qquad \text{(XVI)}$$

Վերջինս կարելի է ձևակերպել այսպես. համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը նրա սկզբնական դիրքից վերջնական դիրքին տեղափոխման ժամանակ հավասար է համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին և ներքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարին նույն տեղափոխության վրա:

Քանի որ ոչ բոլոր մեխանիկական համակարգերի ներքին ուժերի կատարած աշխատանքն է հավասար զրոյի, ապա կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից, ընդհանուր դեպքում, ներքին ուժերի կատարած աշխատանքը արտաքսել հնարավոր չէ:

Այժմ դիտարկենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը անփոփոխ մեխանիկական համակարգի համար:

Անփոփոխ մեխանիկական համակարգ: Անփոփոխ մեխանիկական համակարգի, մասնավորապես բացարձակ պինդ մարմնի դեպքում համակարգի ներքին ուժերի կատարած տարրական աշխատանքների գումարը հավասար է զրոյի, և (XIV) բանաձևն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$dT = \sum_k \overline{F}_k^{(e)} \cdot d\overline{r}_k : \qquad \text{(XVII)}$$

Նշանակում է՝ անփոփոխ մեխանիկական համակարգի կինետիկ էներգիայի դիֆերենցիալը հավասար է համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի կատարած տարրական աշխատանքների գումարին:

Բաժանելով (XVII) հավասարությունը dt-ի վրա՝ կստանանք անփոփոխ համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k W_k^{(e)} \qquad \text{(XVIII)}$$

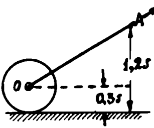
այսինքն՝ անփոփոխ համակարգի կինետիկ էներգիայի ածանցյալն ըստ ժամանակի հավասար է համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի հզորությունների գումարին:

Կարելի է ցույց տալ, որ անփոփոխ համակարգի ներքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը ամեն մի վերջավոր տեղափոխության վրա

հավասար է զրոյի, այսինքն՝
$$\sum_i A_i^{(i)} =$$
և (XVI) բանաձևը կընդունի
$$T - T_0 = \sum_i A_i^{(e)} \qquad \text{(XIX)}$$
տեսքը: Այլ կերպ ասած՝ անփոփոխ համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը նրա սկզբնական դիրքից վերջնական դիրք տեղափոխման ժամանակ հավասար է համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարին նույն տեղափոխության վրա:

(XI)- (XVI) բանաձևերում որպես արտաքին և ներքին ուժեր մտնում են ինչպես ակտիվ, նույնպես և պասսիվ ուժերը (կապերի հակազդումները): Եթե կապ հանդիսացող մակերևույթները, որոնց վրայով սահում են մարմինները, ողորկ են և ստացիոնար, ապա, ինչպես նշվեց վերևում, այդպիսի կապերի հակազդումների աշխատանքները համակարգի ցանկացած տեղափոխման դեպքում հավասար են զրոյի և այդ հակազդումները (XIV)- (XIX) հավասարումներում հանդես գալ չեն կարող:

Խնդիր 66 (1060): Q = 392 կգ կշիռ և 60 սմ տրամագիծ ունեցող գլանային գլդոնը շարժման մեջ է դրվում մարդու կողմից, որը ճնշում է AO բռնակի վրա P հաստատուն ուժով: AO երկարությունը հավասար է 1,5 մ-ի, իսկ A կետի բարձրությունը հորիզոնից 1,2 մ: Անտեսելով առանցքակալներում շփումը՝ որոշել այն P ուժը, որի դեպքում մարդը, անցնելով 2 մ, կհաղորդի գլդոնի առանցքին 80 սմ/վրկ արագություն (գծ. 79):



Գծ. 79

Լուծում: Գլդոնը դիտենք որպես մեխանիկական համակարգ. Գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը (XIX) տեսքով և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ սկզբնական պահին գլդոնը գտնվել է անշարժ վիճակում: Այդ դեպքում կունենանք՝
$$T = \sum_i A_i^{(e)} \qquad (1)$$
Գլդոնը կատարում է հարթ-զուգահեռական շարժում: Հետևաբար, (V) բանաձևի համաձայն, համակարգի կինետիկ էներգիան կունենա հետևյալ տեսքը՝
$$T = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V_c^2 + \frac{1}{2}J_{oz}\omega^2 \qquad (2)$$
որտեղ V_c-ն գլդոնի զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, J_{oz}-ը՝ գլդոնի իներցիայի մոմենտը oz առանցքի նկատմամբ (O-ն գլդոնի զանգվածների կենտրոնն է, իսկ oz-ը ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը): Գծագրից երևում

է, որ $\omega = \frac{V_c}{R}$, իսկ իներցիայի մոմենտների առյուսակից ունենք՝

$$J_{oz} = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2: \tag{3}$$

ω-ի և J_{oz}-ի արժեքները տեղադրելով (2)-ի մեջ կստանանք

$$T = \frac{3}{4}\frac{Q}{g}V_c^2: \tag{4}$$

Այժմ հաշվենք համակարգի վրա կիրառված արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքը: Արտաքին ուժերից աշխատանք է կատարում միայն P ուժը, իսկ գլդոնի ծանրության ուժի, գէ·ոնի նորմալ հակազդման և շփման ուժերի կատարած աշխատանքները հավասար են զրոյի, քանի որ ծանրության ուժը և նորմալ հակազդումը ուղղահայաց են կիրառման կետի տեղափոխությանը, իսկ շփման ուժը անցնում է պտտման ակնթարթային առանցքով:

P ուժի կատարած աշխատանքը, երբ գլդոնի վանգվածների կենտրոնը տեղափոխվում է $S = 2$ մ հեռավորությամբ, նշանակենք A_1: Այդ դեպքում, ուժի կատարած աշխատանքի սահմանման համաձայն, կունենանք՝

$$A_1 = PS\cos\alpha,$$

որտեղ a -ն $\overline{P}$ ուժի և $\overline{S}$ տեղափոխման կազմած անկյունն է: Հետևաբար՝

$$\sum_k A_k^{(e)} = A_1 = PS\cos\alpha: \tag{5}$$

Տեղադրելով T-ի և $\sum_k A_k^{(e)}$-ի արժեքները (4) և (5)-ից (1)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\frac{3}{4}\frac{Q}{g}V_c^2 = SP\cos\alpha: \tag{6}$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$P = \frac{3QV_c^2}{4gS\cos\alpha}: \tag{7}$$

Գծագրից երևում է, որ

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(1{,}5)^2 - (0{,}9)^2}}{1{,}5} = \frac{1{,}2}{1{,}5} = \frac{4}{5}:$$

(7)-ի մեջ տեղադրելով թվային արժեքները՝ կունենանք՝

$$P = \frac{3\cdot 392\cdot 80^2\cdot 5}{4\cdot 980\cdot 200\cdot 4} = 12{,}1\text{կգ}:$$

Պատ. $P = 12{,}1$ կգ:

5.Համակարգի լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքը: Դիցուք համակարգի վրա ազդող բոլոր ուժերը (արտաքին և ներքին) ունեն պոտենցիալ: Այդ դեպքում

$$\sum_k \overline{F}_k^{(r)}\cdot d\overline{r}_k = dU^{(r)} = -dV^{(r)}, \tag{XX}$$

$$\sum_i \overline{F}_i^{(i)} \cdot d\overline{r}_i = dU^{(i)} = -dV^{(i)},$$

որտեղ $V^{(e)}$ և $V^{(i)}$-ն համակարգի արտաքին և ներքին ուժերի պոտենցիալ էներգիաներն են:

Եթե գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը (XIV) տեսքով և օգտվենք (XX) բանաձևից, կստանանք՝

$$dT = -dV^{(e)} - dV^{(i)}$$

կամ՝

$$d\left(T + V^{(e)} + V^{(i)}\right) = 0:$$

Այստեղից ստացվում է, որ

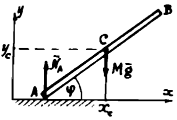
$$\tag{2}$$

կամ

$$E = h: \tag{3}$$

Այստեղ E-ն համակարգի լրիվ մեխանիկական էներգիան է, իսկ h-ը՝ էներգիայի հաստատունը, ընդ որում՝ $h=E_0$: (2) կամ (3)-ը կոչվում են էներգիայի ինտեգրալ և արտահայտում համակարգի լրիվ մեխանիկական էներգիայի պահպանման օրենքը, որը կարելի է ձևակերպել այսպես. եթե շարժվող համակարգի վրա ազդող բոլոր ուժերը ունեն պոտենցիալ, ապա համակարգի կինետիկ և պոտենցիալ էներգիաների գումարը (լրիվ մեխանիկական էներգիան) մնում է հաստատուն:

Խնդիր 67: l երկարություն ունեցող AB համասեռ բարակ ձողը շարժվում է ուղղաձիգ հարթության մեջ ծանրության ուժի ազդեցության տակ և A ծայրով սահում է ողորկ հորիզոնական գծով (գծ. 80): Որոշել ձողի պտտման անկյունային արագությունը $\omega|_{t=0} = \omega_0$ և $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$ նախնական պայմաններով:



Գծ. 80

Լուծում: Ձողը դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ, որի վրա ազդում են $\overline{M}g$ կշիռը և $\overline{N}_A$ հակազդումը (գծ.80): Քանի որ կապը իդեալական է և ստացիոնար, ապա $\overline{N}_A$ հակազդման կատարած աշխատանքը հավասար է զրոյի: $\overline{M}g$ ծանրության ուժը ունի պոտենցիալ: Հետևաբար, տեղի ունի էներգիայի ինտեգրալը, այսինքն՝

$$T + V^{(e)} = h: \tag{1}$$

Տվյալ խնդրում ձողը դիտարկվում է որպես անփոփոխ համակարգ: (XX) բանաձևի համաձայն կունենանք՝

$$dV^{(e)} = -\sum_k \overline{F}_k^{(e)} \cdot d\overline{r}_k = Mg\,dy_c, \tag{2}$$

որտեղ y_c -ն ձողի ծանրության կենտրոնի օրդինատն է: Գծագրից երևում է, որ

$$y_c = \frac{1}{2} l \sin\varphi : \qquad (3)$$

Տեղադրելով y_c -ի արժեքը (3) -ից (2)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$dV^{(e)} = \frac{1}{2} Mgl \cos\varphi d\varphi : \qquad (4)$$

Եթե ինտեգրենք (4) դիֆերենցիալ հավասարումը և ընդունենք, որ $V^{(e)}\big|_{\varphi=0}=$
ապա կստանանք՝

$$^{(e)} = \frac{1}{2} Mgl \sin\varphi : \qquad (5)$$

Ձողը կատարում է հարթ շարժում, հետևաբար, համաձայն (V) բանաձևի, կունենանք՝

$$T = \frac{1}{2} MV_c^2 + \frac{1}{2} J_{cz}\omega^2 , \qquad (6)$$

որտեղ V_c-ն ձողի զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, J_{cz}- ը՝ ձողի իներցիայի մոմենտը այն առանցքի նկատմամբ, որն անցնում է զանգվածների C կենտրոնով և ուղղահայաց է շարժման հարթությանը, իսկ ω-ն՝ ձողի որոնելի անկյունային արագությունը:

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից ունենք՝

$$J_{cz} = \frac{1}{12} Ml^2 : \qquad (7)$$

Քանի որ շարժումը հարթ է, ապա

$$V_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 ,$$

որտեղ x_c- ն ձողի զանգվածների կենտրոնի աբսցիսն է, իսկ y_c- ն որոշվում է (3) բանաձևով: Հետևաբար, կունենանք՝

$$V_c^2 = \dot{x}_c^2 + \left(\frac{1}{2} l \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \qquad (8)$$

V_c և J_{cz}- ի արժեքները (7) և (8)-ից (6)-ի մեջ տեղադրելով՝ կստանանք՝

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_c^2 + \frac{Ml^2}{24}\left(1 + 3\cos^2\varphi\right)\omega^2 : \qquad (9)$$

$$\frac{1}{2} M \dot{x}_c^2 + \frac{Ml^2}{24}\left(1 + 3\cos^2\varphi\right)\omega^2 + \frac{1}{2} Mgl \sin\varphi = h , \qquad (10)$$

որտեղ h -ը էներգիայի հաստատունն է և որոշվում է

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0 , \qquad \omega\big|_{t=0} = \omega_0 , \qquad \dot{x}_c\big|_{t=0} = \dot{x}_{c0} \qquad (11)$$

տված նախնական պայմաններով: Այստեղ $\dot{x}_{c0}$-ը ձողի զանգվածների կենտրոնի սկզբնական արագության պրոյեկցիան է x առանցքի վրա (այս մեծությունը խնդրի պայմանում տրված չէ):

Տեղադրելով (11) նախնական պայմանները (10)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$h = \frac{1}{2} M \dot{x}_{\alpha} + \frac{Ml^2}{24}\left(1 + 3cos^2 \varphi_0\right)\omega_0{}^2 + \frac{1}{2} Mgl \sin\varphi_0 \qquad (12)$$

h-ի արժեքը (12)-ից տեղադրելով (10) մեջ, ստացած հավասարությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\dot{x}_c^2 + \frac{l^2}{12}\left(1 + 3cos^2 \varphi\right)\omega^2 + gl \sin\varphi =$$

$$= \dot{x}_{\alpha+}^2 + \frac{l^2}{12}\left(1 + 3cos^2 \varphi_0\right)\omega_0{}^2 + gl \sin\varphi_0 : \qquad (13)$$

Եթե գրենք ձողի զանգվածների կենտրոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը x առանցքի նկատմամբ, կունենանք՝

$$M\frac{d\dot{x}_c}{dt} = \sum_k \overline{F}_{kx}^{(e)} =$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\dot{x}_c = \dot{x}_{\alpha} : \qquad (14)$$

(14)-ի համաձայն (13) -ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{l}{12}\left(1 + 3cos^2 \varphi\right)\omega^2 + g \sin\varphi = \frac{l}{12}\left(1 + 3cos^2 \varphi_0\right)\omega_0{}^2 + g \sin\varphi_0 , \qquad (15)$$

որտեղից կստանանք՝

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(1 + 3cos^2 \varphi_0\right)l\omega_0^2 + 12g\left(\sin\varphi_0 - \sin\varphi\right)}{l\left(1 + 3cos^2 \varphi\right)}} :$$

Այն պահին, երբ ձողն ընկնում է հորիզոնական հարթության վրա *(φ = 0)*, նրա անկյունային արագությունը կլինի՝

$$\omega\Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + 3cos^2 \varphi_0\right)\omega_0^2 + 12\frac{g}{l}\sin\varphi_0} :$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(1 + 3cos^2 \varphi_0\right)l\omega_0^2 + 12g\left(\sin\varphi_0 - \sin\varphi\right)}{l\left(1 + 3cos^2 \varphi\right)}} ,$$

$$\omega\Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + 3cos^2 \varphi_0\right)\omega_0^2 + 12\frac{g}{l}\sin\varphi_0} :$$

6.Խնդիրների լուծումը: Կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը նպատակահարմար է կիրառել այն դեպքերում, երբ դիտարկվում է անփոփոխ մեխանիկական համակարգի շարժումը[1]: Փոփոխական համակարգի դեպքում այս թեորեմը տալիս է խնդրի լուծումը, երբ նախօրոք հայտնի են համակարգի վրա ազդող ներքին ուժերը, իսկ եթե այդ ուժերը հայտնի չեն, ապա միայն կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմի միջոցով ստանալ խնդրի լուծումը հնարավոր չէ:

(XIX) բանաձևը հնարավորություն է տալիս հեշտությամբ լուծելու այն խնդիրները, որոնց մեջ տրված և որոնելի մեծություններում մտնում են՝ ա) համակարգի վրա ազդող ուժերը, բ) համակարգի տեղափոխությունները, գ) մարմնի սկզբնական և վերջնական արագությունները (գծային կամ անկյունային): Այդ դեպքում ազդող ուժերը պետք է լինեն հաստատուն կամ կախված միայն տեղափոխությունից:

Անհրաժեշտ է նշել, որ կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմի միջոցով կարելի է կազմել համակարգի շարժման մեկ դիֆերենցիալ հավասարում, մասնավորապես՝ ստանալ շարժվող մարմիններից մեկի արագացումը: Դրա համար պետք է կազմել (XIX) հավասարումը, նրա երկու մասերը դիֆերենցել ըստ t ժամանակի և ստացվածից արտաքսել արագությունը: Եթե ազդող ուժերը կամայական են, ապա նպատակահարմար է օգտվել (XIV) հավասարումից:

Համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմի վերաբերյալ խնդիրները լուծելիս անհրաժեշտ է՝ ա) նշել համակարգը կազմող մարմինը կամ մարմինները, բ) գրել համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը դիֆերենցիալ կամ ինտեգրալ տեսքով, գ) հաշվել համակարգի կինետիկ էներգիան նրա սկզբնական և վերջնական դիրքերի համար, դ) նշել համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերը (անփոփոխ համակարգի դեպքում), ե) հաշվել բոլոր արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը համակարգի կետերի տեղափոխությունների վրա, զ) տեղադրել համակարգի կինետիկ էներգիայի և արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքի համար ստացած արտահայտությունները կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմի մեջ և որոշել անհայտ մեծությունը:

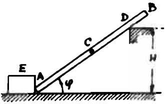
7. Խնդիրներ

Ստորև բերվում են համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմի վերաբերյալ խնդիրների լուծումներ:

Խնդիր 68 (38.2): P կշիռ ունեցող AB համասեռ բարակ ձողը հենված է D անկյան վրա և A ծայրով սահում է հորիզոնական ուղղորդով: E հենակը սահում է դեպի աջ V հաստատուն արագությամբ: Որոշել ձողի կինետիկ էներգիան՝

[1] Անփոփոխ մեխանիկական համակարգ կոչվում է բացարձակ պինդ մարմիններից բաղկացած մեխանիկական համակարգը, որի օղակները իրար հետ միացված են իդեալական և ստացիոնար կապերով: Այդպիսի համակարգերում ներքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը հավասար է լինում զրոյի:

կախված φ անկյունից, եթե ձողի երկարությունը $2l$ է, իսկ D անկյան բարձրությունը հորիզոնական ուղղորդից՝ H (գծ.81):

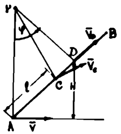


Գծ. 81

Լուծում: Ձողի կինետիկ էներգիան, (V) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}V_c^2+\frac{1}{2}J_{c}\omega^2, \qquad (1)$$

որտեղ V_c -ն ձողի զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, J_c-ը՝ ձողի իներցիայի մոմենտը զանգվածների կենտրոնով անցնող և գծագրի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, իսկ ω -ն՝ ձողի պտտման անկյունային արագությունը: Որոշենք V_c, J_c և ω մեծությունները:



Գծ. 82

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից ունենք՝

$$J_c=\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2: \qquad (2)$$

AB ձողը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Նրա պտտման ակնթարթային կենտրոնը կլինի p կետը (գծ. 82): Հետևաբար, ω-ի և V_c-ի համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունները՝

$$\omega=\frac{V}{pA}=V\cdot\frac{\sin\varphi}{AD}=V\cdot\frac{\sin^2\varphi}{H}, \qquad (3)$$

$$V_c=\omega\cdot pC=\frac{V\sin^2\varphi}{H}\cdot\sqrt{l^2+pA^2-2l\cdot pA\sin\varphi}=\frac{V\sin^2\varphi}{H}\times$$

$$\times\sqrt{l^2+\frac{H^2}{\sin^4\varphi}-2l\frac{H}{\sin\varphi}}=\frac{V}{H}\sqrt{l^2\sin^4\varphi+H^2-2lH\sin^3\varphi}: \qquad (4)$$

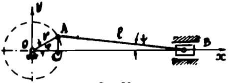
Տեղադրենք J_c, ω և V_c-ի արժեքները (2), (3) և (4)-ից (1)-ի մեջ, կստանանք՝

$$T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2\left(\frac{l^2\sin^4\varphi}{H^2}+1-\frac{2l\sin^3\varphi}{H}+\frac{1}{3}l^2\frac{\sin^4\varphi}{H^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2\times$$

$$\times\left(1-\frac{2l\sin^3\varphi}{H}+\frac{4l^2\sin^4\varphi}{3H^2}\right):$$

Պատ. $T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2\left(1-2\frac{l}{H}\sin^3\varphi+\frac{4}{3}\frac{l^2}{H^2}\sin^4\varphi\right):$

Խնդիր 69 [38. 5 (1044)]: Հաշվել մեղխա-շարժաթևային մեխանիզմի կինետիկ էներգիան, եթե մեղխի զանգվածը հավասար է m_1-ի, մեղխի երկարությունը՝ r-ի, սողնակի զանգվածը՝ m_2-ի, շարժաթևի երկարությունը՝ l-ի: Շարժաթևի զանգվածն անտեսել: Մեղեխն ընդունել որպես համասեռ ձող: Մեղեխի պտտման անկյունային արագությունն ω է (գծ. 83):



Գծ. 83

Լուծում: Տանենք xOy կոորդինատական համակարգը գծագրում ցույց տրված ձևով: A կետից Ox առանցքի վրա իջեցնենք ուղղահայաց, որի հատման կետը x-ի հետ նշանակենք C: $\Delta\ OAC$ և $\Delta\ ABC$-ից որոշենք A կետի կոորդինատները և CB հատվածը, կունենանք՝

$$x_A = r\cos\varphi, \quad y_A = r\sin\varphi, \quad CB = l\cos\psi :$$

ψ անկյունը φ-ով արտահայտելու համար վերը նշված երկու եռանկյուններից հաշվենք AC հատվածը: Կունենանք՝

$$r\sin\varphi = l\sin\psi :$$

Այստեղից էլ ստացվում է, որ

$$\cos\psi = \sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\varphi} : \qquad (2)$$

$\cos\psi$-ի արժեքը (2)-ից տեղադրելով (1)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$x_A = r\cos\varphi, \quad CB = l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\varphi} \qquad (3)$$

AB կետի արագությունը ստանալու համար օգտվենք

$$V_B = \frac{d}{dt}\left(x_A + CB\right)$$

բանաձևից: Նշված գործողությունները կատարելուց հետո կստանանք՝

$$V_B = -r\omega\left[\sin\varphi + \frac{r}{2l}\,\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\varphi}}\right], \qquad (4)$$

որտեղ $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$:

Համակարգը կազմված է սողնակից և մեղեխից (շարժաթևի զանգվածն անտեսված է): Եթե սողնակն ընդունենք որպես կետային զանգված, ապա նրա կինետիկ էներգիան, (4) բանաձևի համաձայն, կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$_{2} = \frac{1}{2} m_2 V_B^2 = \frac{m_2 r^2 \omega^2}{2} \left[\sin\varphi + \frac{r}{2l} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\varphi}} \right]^2$$

Մեղեխը կատարում է պտտական շարժում ω անկյունային արագությամբ: Հետևաբար, նրա կինետիկ էներգիան, (III) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{oz} \omega^2, \qquad (6)$$

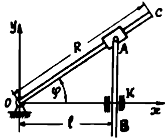
որտեղ $J_{oz} = \frac{1}{3} m_1 r^2$:

Գումարելով T_1 և T_2-ի արժեքները՝ կստանանք համակարգի կինետիկ էներգիան՝

$$_{2} = \frac{1}{6} m_1 r^2 \omega^2 + \frac{m_2 r^2 \omega^2}{2} \left[\sin\varphi + \frac{r}{l} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\varphi}} \right]^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} m_1 + m_2 \left[\sin\varphi + \frac{r}{2l} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\varphi}} \right]^2 \right\} r^2 \omega^2 :$$

Խնդիր 70 |38.9 (1048)|: Կուլիսավոր մեխանիզմում գծագրի հարթությանն ուղղահայաց O առանցքի շուրջը OC մեղեխի ճոճման ժամանակ A սողնակը, շարժվելով OC մեղեխի երկարությամբ, շարժման մեջ է դնում K ուղղաձիգ ուղղորդներով շարժվող AB ձողը: R երկարությամբ OC մեղեխն ընդունել որպես m_1 զանգված ունեցող համասեռ ձող, սողնակի զանգվածը m_2 է, AB ձողի զանգվածը՝ m_3, $OK=l$: Որոշել մեխանիզմի կինետիկ էներգիան՝ կախված OC մեղեխի պտտման անկյունից և անկյունային արագությունից: Սողնակն ընդունել որպես կետային զանգված (գծ. 84):



Գծ. 84

Լուծում: Տանենք Oxy կոորդինատական համակարգը, ինչպես ցույց է տրված գծագրում: Եթե A կետի կոորդինատները նշանակենք (x_A, y_A), ապա գծագրից կունենանք՝

$$x_A = l, \qquad y_A = l\,tg\,\varphi :$$

A կետի արագությունը կլինի՝

$$V_A = l\omega sec^2\varphi, \quad (1)$$

որտեղ $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$: Հետևաբար, սողնակի կինետիկ էներգիան կլինի

$$T_1 = \frac{1}{2}m_2V_A^2 = \frac{1}{2}m_2l^2 sec^4\varphi\cdot\omega^2: \quad (2)$$

Քանի որ AB ձողը կատարում է համընթաց շարժում V_A արագությամբ, ապա նրա կինետիկ էներգիան, (II) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T_2 = \frac{1}{2}m_3V_A^2 = \frac{1}{2}m_3l^2\omega^2 sec^4\varphi. \quad (3)$$

OC մեղեխը կատարում է պտտական շարժում ω անկյունային արագությամբ, հետևաբար, (III) բանաձևի համաձայն, նրա կինետիկ էներգիան կլինի

$$T_3 = \frac{1}{2}J_0\omega^2$$

որտեղ $J_0 = \frac{1}{3}m_1R^2$ (որպես համասեռ ձողի իներցիայի մոմենտ ծայրակետի նկատմամբ):

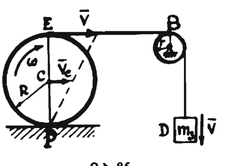
Մեխանիզմի կինետիկ էներգիան հավասար կլինի սողնակի, AB ձողի և OC մեղեխի կինետիկ էներգիաների գումարին, այսինքն՝

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}m_2l^2\omega^2 sec^4\varphi + \frac{1}{2}m_3l^2\omega^2 sec^4\varphi + \frac{1}{6}m_1R^2\omega^2 =$$

$$= \frac{\omega^2}{6cos^4\varphi}\left[m_1R^2cos^4\varphi + 3l^2(m_2+m_3)\right]:$$

Պատ. $\quad T = \frac{\omega^2}{6cos^4\varphi}\left[m_1R^2cos^4\varphi + 3l^2(m_2+m_3)\right]:$

Խնդիր 71: m_1 զանգված ունեցող գլանը գտնվում է հորիզոնական հարթության վրա: Գլանը փաթաթված է ճոպանով, որը գցված է r շառավիղ ունեցող B ճախարակի վրայով: Ճոպանի ազատ ծայրին ամրացված է m_3 զանգված ունեցող D բեռը: Բեռը V արագությամբ ցած իջնելիս ճոպանը բացվում է և շարժման մեջ է դնում գլանին, որը գլորվում է առանց սահելու (գծ. 85): Որոշել համակարգի կինետիկ էներգիան, եթե ճախարակի իներցիայի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ հավասար է J-ի: Գլանն ընդունել որպես համասեռ շրջանային գլան, ճոպանի զանգվածն արհամարհել:



Գծ. 85

Լուծում: Դիտարկվող համակարգը կազմված է երեք մարմիններից՝ գլանից, ճախարակից և բեռից: Հետևաբար, համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T=T_1+T_2+T_3\,, \qquad (1)$$

որտեղ T_1, T_2, T_3-ը համապատասխանաբար գլդոնի, ճախարակի և բեռի կինետիկ էներգիաներն են:

Գլդոնը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Հետևաբար, նրա կինետիկ էներգիան, (V) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T_1=\frac{1}{2}m_1V^2+\frac{1}{2}J_{cz}\omega^2$$

որտեղ V_c-ն գլդոնի արագությունն է, ω-ն՝ գլդոնի անկյունային արագությունը, J_{cz}-ը նրա իներցիայի մոմենտը cz առանցքի նկատմամբ (cz-ն ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը և ուղղված է դեպի մեզ):

Գլդոնի վերին E կետի արագությունը հավասար է բեռի V արագությանը: Գլդոնի և հորիզոնական հարթության շոշափման p կետը կլինի արագությունների ակնթարթային կենտրոն: Այդ դեպքում կունենանք $V_c=\frac{V}{2}$ (տե՛ս գծ. 85-ը):

Գլդոնի անկյունային արագությունը որոշվում է

$$V_c=\omega R$$

բանաձևով, որտեղ R-ը գլդոնի շառավիղն է: Այստեղից ստացվում է՝

$$\omega=\frac{V_c}{R}=\frac{V}{2R}:$$

Քանի որ գլդոնը համասեռ շրջանային գլան է, ապա նրա իներցիայի մոմենտը cz առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$J_{cz}=\frac{1}{2}m_1R^2:$$

Տեղադրելով V_c, , J_{cz}-ի արժեքները (2)-ի մեջ կստանանք՝

$$T_1=\frac{3}{16}m_1V^2: \qquad (3)$$

Ճախարակը պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը, հետևաբար, նրա կինետիկ էներգիան (III) բանաձևի համաձայն կլինի՝

$$T_2=\frac{1}{2}J\omega_1\,, \qquad (4)$$

որտեղ ω_1-ը ճախարակի անկյունային արագությունն է:

Ճախարակի և ճոպանի շոշափման կետի արագությունը հավասար է բեռի V արագությանը, հետևաբար, $\omega_1=\frac{V}{r}$: Եթե ω_1-ի արժեքը տեղադրենք (4)-ի մեջ, կստանանք՝

$${}_2=\frac{1}{2}J\,\frac{V^2}{r^2}: \qquad (5)$$

Բեռը շարժվում է համընթաց V արագությամբ, հետևաբար, նրա կինետիկ էներգիան, (II) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V^2$$

T_1, T_2, T_3-ի արժեքները (3), (4) և (6)-ից տեղադրելով (1)-ի մեջ՝ կստանանք համակարգի կինետիկ էներգիայի արտահայտությունը՝

$$= \frac{3}{16} m_1 V^2 + \frac{1}{2} J \frac{V^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_3 V^2$$

Պատ. $T = \frac{1}{2} M_{բերվ} \cdot V^2$, որտեղ $M_{բերվ} = \frac{3}{8} m_1 + \frac{J}{r^2} + m_3$:

Խնդիր 72 (38.11): P կշիռ ունեցող ավտոմեքենան շարժվում է V արագությամբ ուղղագիծ հորիզոնական ճանապարհով: Ավտոմեքենայի անիվների և ճանապարհի միջև եղած գլորման շփման գործակիցը հավասար է f_k-ի, օդի աերոդինամիկական դիմադրության R_c ուժը համեմատական է արագության քառակուսուն՝ $R_c = \mu PV^2$, որտեղ μ-ն ավտոմեքենայի ձևից կախված գործակից է: Որոշել շարժիչի W հզորությունը, որը փոխանցվում է տանող անիվների առանցքին, ընթացքի կայունացված ռեժիմի դեպքում:

Լուծում: Ավտոմեքենայի ընթացքի կայունացված ռեժիմով շարժման ժամանակ նրա շարժիչի հզորությունը ծախսվում է օդի դիմադրության և գլորման շփման հաղթահարման վրա: Հետևաբար, ավտոմեքենայի շարժիչի հզորությունը հավասար կլինի այդ ուժերի հզորությունների գումարին, այսինքն՝

$$W = W_1 + W_2 = R_c V + F_{գլ} V = (R_c + F_{գլ}) V,$$

որտեղ V-ն ավտոմեքենայի արագությունն է, $R_c = \mu PV^2$, իսկ $F_{գլ} = f_k \frac{P}{r}$: Տեղադրելով R_c-ի և $F_{գլ}$-ի արժեքները (1)-ի մեջ՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $W = P\left(\mu V^2 + \frac{f_k}{r}\right)V$:

Խնդիր 73: Մաքսվելի ճոճանակում R շառավիղ և P կշիռ ունեցող գլանը իջնում է ցած առանց սկզբնական արագության՝ քանդելով թելը: Որոշել գլանի առանցքի V_c արագությունը՝ կախված նրա ցած իջնելու h մեծությունից (գծ. 86):

Լուծում: Գլանը դիտենք որպես մեխանիկական համակարգ: Եթե գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով և նկատի ունենանք, որ նրա սկզբնական արագությունը եղել է զրո, կունենանք՝

$$T = \sum_k A_k^{(e)} \qquad (1)$$

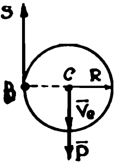
Գլանը կատարում է հարթ-զուգահեռական շարժում: Հետևաբար, նրա կինետիկ էներգիան, (V) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 + \frac{1}{2}J_{c_z}\omega^2$$

$$J \;\; = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2, \text{ իսկ } \omega = \frac{V_c}{R}: \qquad (3)$$

Տեղադրելով J_{cz}-ի և ω-ի արժեքները (3)-ից (2)-ի մեջ կստանանք՝

$$= \frac{3}{4}\frac{P}{g}V^2$$



Գծ. 86

Գլանի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ գլանի $\bar{P}$ կշիռը և թելի $\bar{S}$ լարումը: $\bar{P}$ կշռի կատարած աշխատանքը, (XIII) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$A_1^{(e)} = Ph: \qquad (5)$$

S լարման կատարած աշխատանքը հավասար է զրոյի, քանի որ այն կիրառված է գլանի արագությունների ակնթարթային B կենտրոնում, որի արագությունը տվյալ պահին հավասար է զրոյի:

Հետևաբար՝

$$\sum_i A_i^{(e)} = A_1 = Ph:$$

T և $\sum_i A_i^{(e)}$-ի արժեքները (4) և (6)-ից տեղադրելով (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

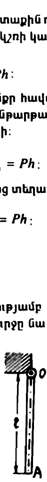
$$\frac{3}{4}\frac{P}{g}V_c^2 = Ph: \qquad (7)$$

Մնում է (7)-ից որոշել V_c - ի արժեքը:

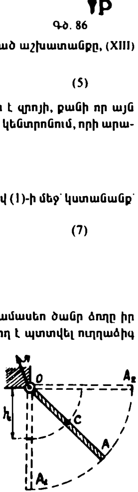
Պատ. $v = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$

Խնդիր 74 (1054): l=3,27 մ երկարությամբ OA համասեռ ձողը իր ծայրով միացված է O առանցքին, որի շուրջը նա կարող է պտտվել ուղղաձիգ հարթության մեջ՝ գտնվելով կայուն հավասարակշռության վիճակում: Ինչպիսի՞ արագություն պետք է հաղորդել ձողի մյուս A ծայրին, որպեսզի նա կատարի մեկ քառորդ պտույտ (գծ. 87):

Լուծում: Դիցուք սկզբնական պահին OA ձողին հաղորդվել է ω անկյունային արագություն: Ձողի վերջնական՝ OA_1 դիրքում ω անկյունային արագությունը դառնում է զրո (գծ. 88):



Գծ. 87



Գծ. 88

OA ձողը դիտենք որպես մեկ մեխանիկական համակարգ: Գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը (XIX) տեսքով՝

$$T - T_0 = \sum_k A_k^{(e)} \qquad (1)$$

որտեղ T-ն ձողի կինետիկ էներգիան է նրա OA_2 դիրքում, իսկ T_0-ն՝ նրա OA_1 դիրքում (գծ.88): Քանի որ OA_1 դիրքում ձողի անկյունային արագությունը դառնում է զրո, ապա T=0: Ձողը կատարում է պտտական շարժում, որի հետևանքով նրա կինետիկ էներգիան, (III) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T_0 = \frac{1}{2} J_{oz} \omega^2, \qquad (2)$$

որտեղ J_{oz}-ը ձողի իներցիայի մոմենտն է O կետով անցնող և գծագրի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, իսկ ω-ն՝ ձողի պտտման անկյունային արագությունը, ընդ որում՝ $\omega = \dfrac{V}{l}$: Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից ունենք՝

$$J_{oz} = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 : \qquad (3)$$

Եթե J_{oz}-ի և ω-ի արժեքները տեղադրենք (2)-ի մեջ,կստանանք՝

$$T_0 = \frac{1}{6} \frac{P}{g} V^2 : \qquad (4)$$

Այժմ հաշվենք ձողի վրա կիրառված արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքը: Ձողի վրա ազդում են նրա $\overline{P}$ կշիռը և O կետի $\overline{N}$ հակազդումը: $\overline{N}$ հակազդման կատարած աշխատանքը հավասար է զրոյի, քանի որ O կետն անշարժ է:

Եթե ձողի $\overline{P}$ կշռի կատարած աշխատանքը, երբ ձողը OA_1 դիրքից տեղափոխվում է OA_2 դիրքը, նշանակենք $A_1^{(e)}$, ապա, (XIII) բանաձևի համաձայն, կունենանք՝

$$A_1^{(e)} = -Ph_c = -P\frac{l}{2},$$

որտեղ h_c-ն ձողի ծանրության կենտրոնի ուղղաձիգ տեղափոխությունն է, որը հավասար է $\dfrac{l}{2}$-ի, իսկ բացասական նշանը ցույց է տալիս, որ C կետի տեղափոխությունը ունի այդ կետում կիրառված $\overline{P}$ ծանրության ուժի հակառակ ուղղությունը:

Հետևաբար՝

$$\sum A_k^{(e)} = A_1^{(e)} = -P\frac{l}{2} : \qquad (5)$$

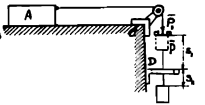
Տեղադրելով T, T_0 և $\sum A_k^{(e)}$-ի համար ստացված արժեքները (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$-\frac{1}{6}\frac{P}{g}V^2 = -P\frac{l}{2} :$$

Մնում է այստեղից որոշել V-ի արժեքը:

Պատ. $V = \sqrt{3gl} = 9{,}81$ մ/վրկ

Խնդիր 75[38.17 (1057)]: P բեռը, նրա վրա դրված P_1 բեռնվածքի հետ միասին ճախարակի վրայով գցված քուղի միջոցով շարժման մեջ է դնում ոչ ողորկ հորիզոնական BC հարթության վրա գտնվող A մարմնին: Q կշիռ ունեցող A մարմինը սկսում է շարժվել հանգստի վիճակից: P բեռն իջնելով S_1 հեռավորություն, անցնում է D օղակի միջով, որը նրանից հանում է P_1 բեռնվածքը, որից հետո P բեռը, իջնելով S_2 հեռավորություն, կանգ է առնում: Որոշել A մարմնի և հարթության միջև դինամիկական շփման f գործակիցը՝ անտեսելով քուղի և ճախարակի զանգվածները, ինչպես նաև շփումը ճախարակում: Տված է $Q = 0{,}8$կգ, $P = 0{,}1$կգ, $P_1 = 0{,}1$կգ, $S_1 = 50$սմ, $S_2 = 50$սմ (գծ.89):



Գծ. 89

Լուծում: Քանի որ շարժման ընթացքում առաջանում է լրացուցիչ կապ, ապա նպատակահարմար է շարժումը բաժանել երկու մասի՝ պահանջելով կոորդինատների և արագությունների անընդհատությունը բաժանման պահին: Այն $t_2 - t_1$ ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում P բեռն անցնում է S_1+S_2 ճանապարհը, կարելի է վերածել երկու միջակայքերի՝ ա) $t' - t_1$, որի ընթացքում P բեռը և P_1 բեռնվածքը միասին անցնում են S_1 ճանապարհ և բ) $t - t'$, որի ընթացքում P բեռն անցնում է S_2 ճանապարհ: Դիտարկենք համակարգի շարժումն այս երկու միջակայքերից յուրաքանչյուրում առանձին-առանձին:

$t' - t_1$ ժամանակամիջոցում համակարգը կազմված է A մարմնից, P բեռից և P_1 բեռնվածքից: $t = t_1$ պահին այս համակարգը գտնվել է հանգստի վիճակում, իսկ t պահին համակարգը կազմող մարմինների արագությունը եղել է V, և, հետևաբար, համակարգի կինետիկ էներգիան t' պահին եղել է

$$T' = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 + \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}V^2 = \frac{1}{2g}(Q + P + P_1)V^2:$$

Այսպիսով՝ համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը t' - ժամանակամիջոցում եղել է՝

$$= \frac{1}{2g}(Q + P + P_1)V^2$$

Այժմ հաշվենք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը: A մարմնի $\overline{Q}$ կշռի և $\overline{N}$ հակազդման կատարած աշխատանքները հավասար են զրոյի, քանի որ այդ ուժերն ուղղահայաց են իրենց ազդման կետերի տեղափոխություններին: C ճախարակի հակազդման կատարած աշխատանքը նույնպես հավասար է զրոյի, քանի որ այն տեղափոխություն չի կատարում: Մնում է հաշվել $\overline{P}$, $\overline{P}_1$ կշիռների և $\overline{F}_{շփ}$ ուժի կատարած աշխատանքները: Մարմնի ծանրության ուժի կատարած աշխատանքի $A = \pm Ph$ բանաձևի համաձայն՝ P կշռի կատարած աշխատանքը կլինի՝ $A^{(e)} = PS_1$, P_1 կշռինը՝ $A_1^{(e)} = P_1S_1$, իսկ $\overline{F}_{շփ} = -fN = -fQ$ ուժի կատարած աշխատանքը կորոշենք հետևյալ բանաձևով՝

$$A_{շփ} = -f\int_0^{s_1} NdS = -fQS_1:$$

Հետևաբար, համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի աշխատանքների գումարը $t' - t_1$ ժամանակամիջոցում կլինի՝

$$\sum_k A_k^{(e)} = (P + P_1 - fQ)S_1 \qquad (2)$$

Ներքին ուժերի կատարած աշխատանքը հավասար է զրոյի, քանի որ թելն անձգելի է, իսկ կապերը՝ ստացիոնար:

Եթե գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով (XIX) և նրանում տեղադրենք (1) և (2)-ում $t' - t_1$ ժամանակամիջոցում համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխության և արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարի համար ստացած արժեքները, կստանանք՝

$$\frac{1}{2g}(Q + P + P_1)V^2 = (P + P_1 - fQ)S_1:$$

$t_2 - t'$ ժամանակամիջոցում համակարգը կազմված կլինի միայն A մարմնից և P բեռից: t' պահին համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T_1' = \frac{1}{2g}(Q + P)V^2,$$

իսկ t_2 պահին $T_2 = 0$, քանի որ, խնդրի պայմանի համաձայն, t_2 պահին համակարգը կանգ է առնում: Հետևաբար՝

$$T_2 - T_1' = -\frac{1}{2g}(Q + P)V^2: \qquad (3)$$

Համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը $t_2 - t_1'$ ժամանակամիջոցում կլինի՝

$$\sum_k A_k^{(e)} = (P_1 - fQ)S_2: \qquad (4)$$

Տեղադրելով (3) և (4)-ը (XIX) բանաձևի մեջ՝ կստանանք՝

$$\frac{1}{2g}(Q + P)V^2 = (fQ - P)S_2: \qquad (5)$$

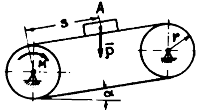
Բաժանելով (3)-ը (5)-ի վրա՝ կունենանք՝

$$\frac{Q + P + P_1}{Q + P} = \frac{(P + P_1 - fQ)S_1}{(fQ - P)S_2}:$$

Մնում է (6)-ից որոշել f-ը:

Պատ. $$f = \frac{S_1(P+P_1)(P+Q)+S_2P(P+P_1+Q)}{Q\left[S_1(P+Q)+S_2(P+P_1+Q)\right]} = 0{,}2\text{:}$$

Խնդիր 76 [38.20 (1064)]: Փոխադրիչը իր հանգստի վիճակից շարժման մեջ է դրվում ստորին B փոկանիվին միացված հաղորդակի միջոցով: Հաղորդակը փոկանիվին հաղորդում է M պտտող մոմենտ: Որոշել փոխադրիչի ժապավենի V արագությունը՝ կախված նրա S տեղափոխությունից, եթե A բարձրացվող բեռի կշիռը հավասար է P -ի, իսկ յուրաքանչյուր Q կշիռ և r շառավիղ ունեցող B և C փոկանիվները համասեռ շրջանային գլաններ են: Փոխադրիչի ժապավենը, որի վանգվածը կարելի է անտեսել, հորիզոնի հետ կազմում է α անկյուն: Ժապավենի և փոկանիվի միջև սահքը բացակայում է (գծ. 90):



Գծ. 90

Լուծում: Համակարգը կազմված է P բեռից և փոխադրիչի B ու C փոկանիվներից (փոխադրիչի ժապավենի զանգվածն անտեսված է): Համակարգի կինետիկ էներգիան գրենք

$$T = T_1 + 2T_2 \qquad (1)$$

տեսքով, որտեղ T_1-ը P բեռի կինետիկ էներգիան է, իսկ T_2-ը՝ B ու C փոկանիվներից յուրաքանչյուրի կինետիկ էներգիան: Քանի որ P բեռը կատարում է համընթաց շարժում, ապա նրա կինետիկ էներգիան, (II) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 \qquad (2)$$

որտեղ V-ն բեռի տեղափոխման արագությունն է, որը համընկնում է փոխադրիչի ժապավենի արագության հետ:

Փոկանիվի կինետիկ էներգիան կարելի է ներկայացնել

$$T_2 = \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (3)$$

տեսքով, որտեղ $J = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q}{g}r^2$ (որպես համասեռ գլանի իներցիայի մոմենտ պտտման առանցքի նկատմամբ):

Եթե T_1 և T_2 -ի արժեքները տեղադրենք (1)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ $V=\omega r$, կստանանք՝

$$T = \frac{P+Q}{2g}V^2\text{:} \qquad (4)$$

Եթե գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով և ճկատի ունենանք, որ փոխադրիչի շարժումը սկսվել է դադարի վիճակից, այսինքն՝ $T = 0$, ապա կստանանք՝

$$T = \sum A_k^{(e)} : \qquad (5)$$

Այժմ հաշվենք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը: Համակարգի վրա ազդում են M պտտող մոմենտը և P ծանրության ուժը: Հաստատուն M մոմենտի կատարած աշխատանքը, (XI) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$A_1^{(e)} = M\varphi, \qquad (6)$$

որտեղ φ-ն փոկանիվների պտտման անկյունն է ($\varphi_0=0$): Եթե ժապավենի վրայով P բեռի տեղափոխումը նշանակենք S, ապա փոկանիվը կկատարի $\varphi=S/r$ պտույտ: Ուստի (6)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$A_1^{(e)} = M\frac{S}{r}:$$

Գծագրից երևում է, որ բեռի $\bar{P}$ ծանրության ուժի կատարած աշխատանքը, երբ բեռը ժապավենի վրա կատարում է S տեղափոխություն, (XIII) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$A_2^{(e)} = -PS\sin\alpha:$$

Հետևաբար, (7) և (8)-ից կունենանք՝

$$\sum_k A_k^{(e)} = A_1 + A_2 = M\frac{S}{r} - PS\,si$$

Եթե T-ի և $\sum_k A_k^{(e)}$-ի արժեքները (4) և (9)-ից տեղադրենք (5)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\frac{P+Q}{2g}V^2 = M\frac{S}{r} - PS\sin\alpha: \qquad (10)$$

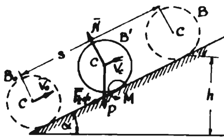
Մնում է (10)-ից որոշել V-ի արժեքը:

$$= \sqrt{\frac{2g(M - Pr\sin\alpha)}{r(P+Q)}S}$$

Խնդիր 77 [38.25 (1062)]: Ծեք հարթության ամենամեծ թեքության ուղղությամբ ինչ-որ սկզբնական արագություն պետք է հաղորդել r շառավիղով անիվի առանցքին, որպեսզի նա առանց սահելու, գլորվելով հորիզոնի հետ α անկյուն կազմող թեք հարթությունով, բարձրանա h բարձրության վրա: Գլորման շփման գործակիցը հավասար է δ-ի: Անիվն ընդունել որպես համասեռ սկավառակ (գծ. 91):

Լուծում: Անիվը դիտենք որպես մեխանիկական համակարգ: Դիցուք

B_0-ն և B-ն անիվի սկզբնական և վերջնական դիրքերն են (գծ. 91), իսկ B'-ը՝ կամայական միջին դիրք: Անիվի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ անիվի $\overline{P}$ կշիռը, սահքի շփման $\overline{F}_{շփ}$ ուժը, հարթության $\overline{N}$ նորմալ հակազդումը և գլորման $\overline{M}$ մոմենտը:



Գծ. 91

Գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով.

$$T - T_0 = \sum_i A_i^{(e)} \qquad (1)$$

քանի որ, ինչպես կպարզվի հետագայում, բոլոր ուժերն ունեն պոտենցիալ:

Անիվը B դիրքում կանգ է առնում, որի հետևանքով նրա կինետիկ էներգիան կլինի զրո (T=0): Անիվը մինչև կանգ առնելը կատարել է հարթ զուգահեռական շարժում: Հետևաբար, նրա կինետիկ էներգիան, (V) բանաձևի համաձայն, կլինի

$$T_0 = \frac{1}{2}MV_0 + \frac{1}{2}J_{cz}\omega_0^2\ , \qquad (2)$$

որտեղ V_0-ն անիվի կենտրոնի արագությունն է B_0 դիրքում, J_{cz}-ը անիվի իներցիայի մոմենտն է պտտման Cz առանցքի նկատմամբ, իսկ ω_0-ն անիվի պտտման անկյունային արագությունն է, երբ անիվը գտնվում է B_0 դիրքում:

Քանի որ անիվը գլորվում է առանց սահելու, ապա նրա և անշարժ թեք հարթության շփման կետի արագությունը հավասար է զրոյի: Այսինքն՝ այդ կետը արագությունների ակնթարթային կենտրոնն է, հետևաբար՝ $V_0=R\omega_0$: Մյուս կողմից, անիվը դիտելով որպես հոծ համասեռ սկավառակ, կունենանք՝

$$J_{cz} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2$$

Տեղադրելով V_0- ի և J_{cz}-ի արժեքները (2)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$T_0 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V_0^2 + \frac{1}{2\cdot 2}\frac{P}{g}V_0^2 = \frac{3}{4}\frac{P}{g}V_0^2: \qquad (3)$$

Այժմ հաշվենք անիվի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը, երբ անիվը B_0 դիրքից տեղափոխվում է B դիրքը: $\overline{N}$ հակազդումը ուղղահայաց է իր կիրառման կետի տեղափոխությանը, հետևաբար, նրա կատարած աշխատանքը հավասար կլինի զրոյի: $\overline{F}_{շփ}$ ուժի կատարած աշխատանքը նույնպես կլինի հավասար զրոյի, քանի որ անիվը գլորվում է առանց սահելու, որի հետևանքով այդ ուժի կիրառման կետը ժամանակի յուրաքանչյուր պահին կլինի անշարժ: Մնում է հաշվել անիվի $\overline{P}$ կշռի և գլորման շփման մոմենտի աշխատանքները: Եթե $\bar{P}$ կշռի կատարած աշխատանքը նշանակենք $A_1^{(e)}$, ապա, (XIII) բանաձևի համաձայն, կունենանք՝

$$A_1^{(e)} = -Ph: \qquad (4)$$

Գլորման շփման $\overline{M}$ մոմենտի կատարած աշխատանքը հաշվելու համար օգտվենք (XI) բանաձևից, որի համաձայն կստանանք՝

$$A_2^{(e)} = -M\varphi, \qquad (5)$$

որտեղ φ-ն պտտման անկյունն է: Այստեղ, գլորման շփման մոմենտի աշխատանքը հաշվելիս, վերցված է բացասական նշան, քանի որ գլորման շփման զույգի մոմենտն ունի անիվի պտտման ուղղությանը հակառակ ուղղություն:

Անիվը գլորվում է առանց սահելու, որի հետևանքով կունենանք՝

$$\varphi = \frac{S}{R} = \frac{h}{R\sin\alpha} \qquad (6)$$

Գլորման շփման մոմենտի արտահայտությունը կլինի՝

$$M = \delta P\cos\alpha:$$

(6) և (7)-ի համաձայն՝ $A_2^{(e)}$-ն կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$^{(e)}_{2} = -\frac{\delta Ph}{R}ctg\alpha:$$

Հետևաբար՝

$$\sum_k A_k^{(e)} = A_1 + A_2 = -Ph - \frac{\delta Ph}{R}ctg\alpha: \qquad (9)$$

Տեղադրելով T_{II}-ի և $\sum_k A_k^{(e)}$-ի արժեքները (3) և (9)-ից (1)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենալով, որ $T|_B = 0$, կստանանք՝

$$-\frac{3}{4}\frac{P}{g}V_0^2 = -Ph - \frac{\delta Ph}{R}ctg\alpha:$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$V_0^2 = \frac{4}{3}gh(1 + \frac{\delta}{R}ctg\alpha):$$

Պատ. $V_0 = \sqrt{3gh(1 + \frac{\delta}{R}ctg\alpha)}$:

Խնդիր 78 [38.30(1069)]: Ինքնաթիռը օդանավակայանում վայրէջք կատարելու ժամանակ ուներ 20 մ/վրկ արագություն: Որոշել ինքնաթիռի անցած ճանապարհը մինչև կանգ առնելը, եթե օդի դիմադրության ուժը հավասար է 60 կգ, երկու անիվներից յուրաքանչյուրի կշիռը՝ 100 կգ, անիվների շառավիղը՝ 0,5մ, ինքնաթիռի կշիռը առանց անիվների՝ 1100 կգ, անիվների և գետնի միջև եղած գլորման շփման գործակիցը՝ 1 սմ: Անիվներն ընդունել որպես համասեռ սկավառակներ: Վերջին անիվի զանգվածն արհամարհել, իսկ արգելակների գոյությունը հաշվի չառնել:

Լուծում: Դիտարկվող համակարգը կազմված է օղանավից (առանց անիվների) և նրա առջևի երկու անիվներից (հետևի անիվի զանգվածն արհամարհված է):

Եթե գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը ինտեգրալ տեսքով և նկատի ունենանք, որ համակարգը շարժման վերջնական պահին կանգ է առնում, ապա կունենանք՝

$$-T_0 = \sum_i A_i^{(e)} \tag{1}$$

Համակարգի կինետիկ էներգիան գրենք

$$T_0 = T_{01} + T_{02} \tag{2}$$

տեսքով, որտեղ T_{01}-ը օղանավի այն մասի կինետիկ էներգիան է, որը կատարում է համընթաց շարժում, իսկ T_{02}-ը առջևի երկու անիվների կինետիկ էներգիան է: Քանի որ T_{01} -ը համընթաց շարժման կինետիկ էներգիան է, ապա

$$T_{01} = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}v^2, \tag{3}$$

որտեղ P_1-ը օղանավի (առանց առջևի երկու անիվների) կշիռն է, իսկ v-ն՝ օղանավի արագությունը:

Օղանավի առջևի անիվները կատարում են հարթ զուգահեռական շարժում, հետևաբար, (V) բանաձևի համաձայն, կունենանք

$$T_{02} = 2\left(\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}v_C^2 + \frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2\right), \tag{4}$$

որտեղ P_2-ը օղանավի առջևի մեկ անիվի կշիռն է, v_C-ն՝ անիվի կենտրոնի արագությունը, որը հավասար է v-ի, J_{Cz}-ը առջևի անիվի իներցիայի մոմենտն է անիվի կենտրոնով անցնող և անիվի շրջանակի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, իսկ ω-ն՝ անիվի պտտման անկյունային արագությունը: Քանի որ անիվները համասեռ սկավառակներ են, ապա նրանցից յուրաքանչյուրի իներցիայի մոմենտը կլինի՝

$$J_{Cz} = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r^2 \tag{5}$$

որտեղ r-ը անիվի շառավիղն է: Հետևաբար, T_{02}-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$T_{02} = \frac{3}{2}\frac{P_2}{g}v^2: \tag{6}$$

T_{01} և T_{02} -ի արժեքները (3) և (6)-ից տեղադրելով (2)-ի մեջ՝ կստանանք

$$T_0 = \frac{v^2}{2g}(P_1 + 3P_2):$$

Համակարգի վրա կիրառված են օդի դիմադրության և անիվների ու գետնի միջև եղած գլորման շփման ուժերը, ընդ որում՝ օդի դիմադրության ուժը՝ $F = 60$ կգ, իսկ գլորման շփման ուժը՝ $F_{գլ} = \frac{\delta}{r}N$, որտեղ $N = P_1 + 2P_2$-ը անիվների ճնշումն է գետնի վրա, $\delta = 0{,}01$ մ, իսկ r-ը՝ անիվի շառավիղն է: Եթե F ուժի կատարած աշխատանքը նշանակենք A_1, իսկ $F_{գլ}$ աշխատանքը՝ A_2, ապա կունենանք՝

$$A_1 = -FS, \qquad (8)$$

$$A_2 = -\delta N\varphi = -\delta N\frac{S}{r}: \qquad (9)$$

(8) և (9)-ից կստանանք՝

$$\sum_k A_k^e = -\left(F + \frac{\delta}{r}N\right)S$$

T_0 և $\sum_k A_k^{(e)}$ -ի արժեքները (7) և (10)-ից տեղադրելով (1) -ի մեջ կստանանք

$$\frac{V^2}{2g}(P_1 + 3P_2) = \left(F + \frac{\delta}{r}N\right)S$$

Այստեղից ստացվում է, որ

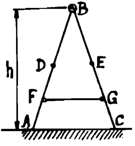
$$S = \frac{V^2(P_1 + 3P_2)r}{2g\left[Fr + (P_1 + 2P_2)\delta\right]}: \qquad (12)$$

Մնում է (12)-ի մեջ տեղադրել թվային արժեքները՝

$$S = \frac{20^2(1100 + 3\cdot 100)0{,}5}{2\cdot 9{,}81\cdot(60\cdot 0{,}5 + 0{,}01\cdot 1300)} = 332{,}1\text{ մ}:$$

Պատ. 332,1 մ:

Խնդիր 79 [38.34(1071)]: *B* հոդակապով *ABC* ձեռնասանդուղքը կանգնած է հարթ հորիզոնական հատակի վրա: Տված է $AB = BC = 2l$, ձողերի ծանրության կենտրոնները գտնվում են նրանց *D* և *E* միջնակետերում, յուրաքանչյուր սանդուղքի իներցիայի շառավիղը ծանրության կենտրոնով անցնող ուղղի նկատմամբ հավասար է ρ -ի, *B* հոդակապի հեռավորությունը հատակից հավասար է *h*-ի: Ժամանակի որևէ պահին ձեռնասանդուղքն սկսում է ընկնել *FG* թելի կտրման պատճառով: Անտեսելով շփումը հոդակապում՝ որոշել՝ 1) *B* կետի *V* արագությունը նրա՝ հատակին հարվածելու պահին, 2) *B* կետի *V* արագությունն այն պահին, երբ նրա հեռավորությունը հատակից կլինի $\frac{1}{2}h$ (գծ.92):



Գծ. 92

Լուծում: Սիմետրիայի հետևանքով B-ն կըշարժվի OB ուղղագիծ ուղղով: Ձեռնասանդուղքի յուրաքանչյուր կեսի կշիռը նշանակենք P: Դիտարկենք համակարգը որևէ t պահին, երբ OB հեռավորությունը հավասար է y-ի: Այդ պահին ձեռնասանդուղքի կինետիկ էներգիան նշանակենք $2T$ (T-ն նրա յուրաքանչյուր կեսի կինետիկ էներգիան է): (V) բանաձևի համաձայն՝

$$=\frac{1}{2}\frac{P}{g}V_E^2+\frac{1}{2}\frac{P}{g}\rho^2\omega^2,$$

որտեղ $V_E=V_r$ ձեռնասանդուղքի կեսի զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, իսկ ω -ն՝ նրա ակնթարթային անկյունային արագությունը: V_E և ω մեծությունները որոշելու համար գտնենք ձեռնասանդուղքի աջ կեսի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը (գծ.93ա): Գծագրից երևում է, որ դա կլինի K կետը, և քանի որ

$$KE=l,$$

$$=\sqrt{4l^2-y^2},$$

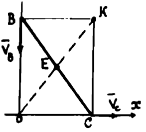
$$_{E}=V_B\cdot\frac{KE}{BK}=V_B\cdot\frac{l}{\sqrt{4l^2-y^2}},\quad \omega=\frac{V_B}{BK}=\frac{V_B}{\sqrt{4l^2-y^2}}:$$

Այսպիսով՝

$$=\frac{P}{2g}V_B^2\left(\frac{l^2}{4l^2-y^2}+\frac{\rho^2}{4l^2-y^2}\right)=\frac{P}{2g}\frac{l^2+\rho^2}{4l^2-y^2}V_B^2:$$

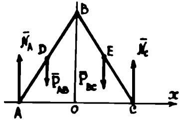
Հետևաբար, համակարգի (ձեռնասանդուղքի) կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$2T=\frac{P}{g}\frac{l^2+\rho^2}{4l^2-y^2}V_B^2: \qquad (2)$$



Գծ. 93ա

Այժմ որոշենք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը: Համակարգի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ $\bar N_A$, $\bar N_c$ նորմալ հակազդումները (գծ. 93բ) և $\bar P_{AB}, \bar P_{BC}$ կշիռները: Դժվար չէ նկատել,



Գծ. 93բ

որ $\bar N_A$ և $\bar N_C$ նորմալ հակազդումների աշխատանքները հավասար են զրոյի, իսկ ծանրության ուժի կատարած աշխատանքը, (XIII) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$A_{AB} = P\left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2}\right) = P\frac{h - y}{2},$$

$$A_{BC} = P\frac{h - y}{2}:$$

$$\sum_i A_i^{(e)} = P(h - y):$$

Եթե տեղադրենք (2) և (3)-ը կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմի (XIX) բանաձևի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ համակարգը շարժման մեջ է դրվում հանգստի վիճակից, կստանանք՝

$$\frac{P}{g}\frac{l^2 + \rho^2}{4l^2 - y^2}V_B^2 = P(h - y):$$

Այստեղից ստացվում է, որ

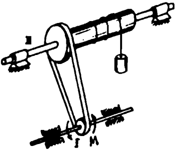
$$V_B = \sqrt{\frac{g(h - y)(4l^2 - y^2)}{l^2 + \rho^2}}$$

Եթե (4)- ի մեջ տեղադրենք $y = 0$, ապա կստանանք B կետի արագությունը գետնին դիպչելու պահին, իսկ եթե (4)-ի մեջ տեղադրենք $y = \frac{h}{2}$, կստանանք B կետի արագությունը այն պահին, երբ նրա հեռավորությունը հատակից հավասար է $h/2$:

Պատ. 1) $V = 2l\sqrt{\frac{gh}{l^2 + g^2}}$, 2) $V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(16l^2 - h^2)gh}{2(l^2 + \rho^2)}}$

Խնդիր 80 [38.37 (1074)] Ոլորակը շարժման մեջ է դրվում փոկային փոխանցման միջոցով, որը միացնում է ոլորակի լիսեռի վրա հագցված II փոկանիվը շարժիչի լիսեռի վրա հագցված I փոկանիվի հետ: r շառավիղ և P_1 կշիռ ունեցող I փոկանիվի վրա կիրառված է հաստատուն M պտտող մոմենտը: II փոկանիվի կշիռը հավասար է P_2, շառավիղը՝ R, ոլորակի թմբուկի կշիռը՝ P_3, իսկ շառավիղը՝ r, բարձրացող բեռի կշիռը՝ P_4: Ոլորակը շարժման մեջ է դրվում հանգստի վիճակից: Գտնել P_4 բեռի արագությունն այն պահին, երբ այն բարձրանում է h չափով: Փոկի, մետաղալարի զանգվածները և շփումը առանցքակալներում անտեսել: Փոկանիվներն ու թմբուկը ընդունել համասեռ շրջանային գլաններ (գծ.94):

Լուծում: Դիտարկվող համակարգը կազմված է երկու փոկանիվներից, թմբուկից և բեռից (մետաղալարի զանգվածն արհամարհված է):



Գծ. 94

Քանի որ կապերն իդեալական են և ստացիոնար, ապա համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը կարելի է գրել վերջավոր տեսքով: Նկատի ունենալով, որ համակարգը շարժման մեջ է դրվում հանգստի վիճակից, կունենանք՝

$$T = \sum_k A_k^{(e)} \qquad (1)$$

Համակարգի կինետիկ էներգիան գրենք

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \qquad (2)$$

տեսքով, որտեղ T_1, T_2, T_3, T_4 -ը համապատասխանաբար I և II փոկանիվների, թմբուկի և բեռի կինետիկ էներգիաներն են: Քանի որ երկու փոկանիվները և թմբուկը կատարում են պտտական շարժում, իսկ բարձրացող բեռը՝ համընթաց շարժում, ուստի, (III) և (II) բանաձևերի համաձայն, կունենանք՝

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1\omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_2\omega_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} J_3\omega_2^2, \qquad (3)$$

$$_4 = \frac{1}{2}\frac{P_4}{g} V^2 : \qquad (4)$$

Այստեղ J_1, J_2, J_3 -ը համապատասխանաբար I, II փոկանիվների և թմբուկի իներցիայի մոմենտներն են իրենց պտտման առանցքների նկատմամբ, ω_1-ը՝ առաջին փոկանիվի, իսկ ω_2-ը՝ երկրորդ փոկանիվի և թմբուկի անկյունային արագությունները, V-ն՝ բարձրացող բեռի արագությունը:

Խնդրի պայմանի համաձայն՝ փոկանիվները և թմբուկը համասեռ շրջանային գլաններ են: Հետևաբար, նրանց իներցիայի մոմենտները կլինեն՝

$$_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g} r^2, \quad J_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g} R^2, \quad _3 = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g} r^2 : \qquad (5)$$

Քանի որ փոխանցումը փոկային է, ապա

$$\omega_2 r = V, \quad \omega_1 r = \omega_2 R : \qquad (6)$$

(6)-ից ստացվում է, որ

$$\omega_2 = \frac{V}{r}, \quad \omega_1 = \frac{R}{r^2} V : \qquad (7)$$

Եթե J_1, J_2, J_3 -ի և ω_1, ω_2-ի արժեքները (5) և (7)-ից տեղադրենք (3)-ի մեջ և այնուհետև՝ T_1, T_2, T_3, T_4 - ի արժեքները՝ (2)-ի մեջ, կստանանք՝

$$= \frac{1}{4g}\left[P_1\left(\frac{R}{r}\right)^2 + P_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 + P_3 + 2P_4\right]V^2:$$

Այժմ հաշվենք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքը: Համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերից աշխատանք են կատարում միայն երկուսը՝ առաջին փոկանիվի վրա կիրառված M հաստատուն մոմենտը և բարձրացող բեռի P_4 կշիռը: Եթե մոմենտի կատարած աշխատանքը նշանակենք A_1, իսկ P_4 բեռինը՝ A_2, ապա կունենանք՝

$$A_1 = M\varphi,$$

որտեղ φ-ն I փոկանիվի պտտման անկյունն է,

$$A_2 = -P_4 h: \qquad (10)$$

(9) արտահայտության մեջ մասնակցող φ անկյունը արտահայտենք h տեղափոխության միջոցով: Երբ բեռը բարձրանում է h բարձրությամբ, II լիսեռը կպտտվի $\psi = \frac{h}{r}$ անկյունով: Քանի որ սահքը բացակայում է, ապա I փոկանիվի պտտման φ անկյունը կլինի $\varphi = \frac{\psi R}{r}$, որտեղից կստանանք՝

$$\varphi = \frac{h}{r}\cdot\frac{R}{r} = \frac{hR}{r^2}:$$

Եթե φ-ի արժեքը տեղադրենք (9)-ի մեջ և A_1 - ի համար ստացված արտահայտությունը գումարենք A_2 -ի համար ստացված արտահայտության հետ, կստանանք՝

$$\sum_k A_k^{(e)} = M\frac{hR}{r^2} - P_4 h: \qquad (11)$$

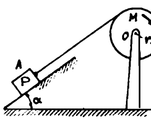
T-ի և $\sum_k A_k^{(e)}$ -ի արժեքները (8) և (11)-ից տեղադրենք (1)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\frac{1}{4g}\left[P_1\left(\frac{R}{r}\right)^2 + P_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 + P_3 + 2P_4\right]V^2 = M\frac{hR}{r^2} - P_4 h: \qquad (12)$$

Մնում է (12)-ից որոշել V-ն:

$$V = 2\sqrt{\frac{gh\left(M\frac{R}{r^2} - P_4\right)}{P_1\left(\frac{R}{r}\right)^2 + P_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 + P_3 + 2P_4}}:$$

Խնդիր 81: P կշիռ ունեցող բեռը բարձրանում է ոչ ողորկ թեք հարթության վրայով Q կշիռ ունեցող թմբուկի և նրա վրա փաթաթված պարանի միջոցով: Թմբուկը սկսում է պտտվել O հորիզոնական առանցքի շուրջը M մոմենտ ունեցող ուժազույգի ազդեցության տակ: Որոշել A մարմնի արագությունը՝ կախված իր անցած S հեռավորությունից, եթե թեք հարթությունով բեռի շարժման սահքի շփման գործակիցը f է, հարթության կազմած անկյունը հորիզոնի հետ՝ α, թմբուկի շառավիղը՝ r, թմբուկի իներցիայի շառավիղը պտտման առանցքի նկատմամբ 0,5r: Համակարգը սկզբում եղել է անշարժ, պարանի զանգվածն անտեսել (գծ.95):



Գծ. 95

Լուծում: Համակարգը կազմված է A բեռից և B թմբուկից (պարանի զանգվածն անտեսված է):

Եթե գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը ինտեգրալ տեսքով և նկատի ունենանք, որ սկզբնական պահին համակարգը եղել է անշարժ, ապա կունենանք՝

$$T = \sum_i A_i^{(e)}$$

Համակարգը կազմված է պինդ մարմիններից և ճկուն անձգելի պարանից, որի հետևանքով էլ ընդունված է, որ

$$\sum_i A_i^{(i)} =$$

Համակարգի կինետիկ էներգիան գրենք

$$T = T_1 + T_2 \qquad (2)$$

տեսքով, որտեղ T_1 և T_2-ը համապատասխանաբար A բեռի և B թմբուկի կինետիկ էներգիաներն են:

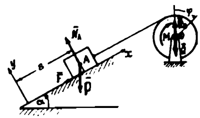
Բեռի և թմբուկի կինետիկ էներգիաները, (II) և (III) բանաձևերի համաձայն, կլինեն՝

$$_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2, \qquad (3)$$

որտեղ V-ն բեռի անհայտ արագությունն է, իսկ ω-ն՝ թմբուկի անկյունային արագությունը: Խնդրի պայմանի համաձայն՝ $J_{oz} = \frac{Q}{g}(0{,}5r)^2 = \frac{1}{4}\frac{Q}{g}r^2$, իսկ գծագրից երևում է, որ $V = \omega r$: Եթե այս արժեքները տեղադրենք T_2-ի արտահայտության մեջ և այնուհետև T_1 և T_2-ի արժեքները՝ (2)-ի մեջ, կստանանք համակարգի կինետիկ էներգիայի համար հետևյալ արտահայտությունը՝

$$T = \left(P + \frac{Q}{4} \right) \frac{V^2}{2g} :$$

Այժմ հաշվենք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը: Համակարգի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը բեռի և թմբուկի $\bar{P}, \bar{Q}$ կշիռները և $\bar{N}, \bar{R}_0$ հակազդումները, թմբուկի վրա կիրառված ուժազույգի $\bar{M}$ մոմենտը և բեռի ու թեք հարթության միջև եղած $\bar{F}$ շփման ուժը (գծ. 96): Այս ուժերից թմբուկի Q կշռի և R_0 հակազդման աշխատանքները հավասար են զրոյի, քանի որ նրանց կիրառման O կետը անշարժ է: $\bar{N}$ հակազդումը ուղղահայաց է բեռի տեղափոխությանը, որի հետևանքով նրա կատարած աշխատանքը նույնպես կլինի զրո:



Գծ. 96

Եթե թմբուկի վրա կիրառված ուժազույգի M մոմենտի կատարած աշխատանքը նշանակենք $A_1^{(e)}$, ապա, (XI) բանաձևի համաձայն, կունենանք

$$A_1^{(e)} = M\varphi, \qquad (5)$$

որտեղ φ-ն թմբուկի պտտման անկյունն է երբ բեռն անցնում է S ճանապարհ: Քանի որ $r\varphi = S$, հետևաբար, (5)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$A_1^{(e)} = M\frac{S}{r} :$$

P կշռի և $F_{շ}$ ուժի կատարած աշխատանքները նշանակենք համապատասխանաբար $A_2^{(e)}$ և $A_3^{(e)}$: Այդ դեպքում, (XIII)-ի համաձայն, կունենանք

$${}_2^{(e)} = -Ph = -PS\sin\alpha, \qquad (7)$$

$$A_3^{(e)} = FS\cos(\bar{F}, \bar{V}) = FS\cos 180^0 = -FS = -fNS : \qquad (8)$$

$\bar{P}$ կշռի կատարած աշխատանքը ստացվում է բացասական, քանի որ բեռի զանգվածների կենտրոնի սկզբնական դիրքը ցածր է վերջնական դիրքից: Մնում է որոշել N հակազդման մեծությունը: Դրա համար կազմենք A բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը և պրոյեկտենք y առանցքի վրա (y-ը զուգահեռ է $\bar{N}$-ին): Կունենանք՝

$$m\ddot{y} = N - P\cos\alpha : \qquad (9)$$

Բայց, քանի որ $y = 0$, ապա (9)-ից ստացվում է, որ $N = P\cos\alpha$: N-ի արժեքը տեղադրելով (8)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$A_1^{(e)} = -fPS\cos\alpha : \qquad (10)$$

Հետևաբար, (6), (7) և (10)-ից համակարգի արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը կլինի՝

$$\sum_k A_k^{(e)} = \left[\frac{M}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right]S$$

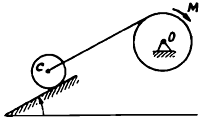
Տեղադրելով T և $\sum\limits_k A_k^{(e)}$ -ի արժեքները (4)-ից և (11)-ից (1)-ի մեջ, կստանանք

$$\left(P + \frac{Q}{4}\right)\frac{V^2}{2g} = \left[\frac{M}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right]S$$

Մնում է այստեղից որոշել V-ն:

Պատ. $V = 2\sqrt{\dfrac{2gS}{(4P+Q)r}\left[M - Pr(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right]}$:

Խնդիր 82 (38.41): Գլորակի r_1 շառավիղ և P_1 կշիռ ունեցող թմբուկի վրա ազդում է հաստատուն M պտտող մոմենտը: Թմբուկի վրա փաթաթված ճոպանի ծայրին ամրացված է P_2 կշիռ ունեցող C անիվի առանցքը: Անիվը գլորվում է դեպի վեր հորիզոնի հետ α անկյուն կազմող թեք հարթության վրայով, առանց սահելու: Ինչպիսի՞ անկյունային արագություն ձեռք կբերի թմբուկը, եթե կատարի n պտույտ: Թմբուկն ու անիվը ընդունել որպես համասեռ շրջանային գլաններ: Սկզբնական պահին համակարգը գտնվել է հանգստի վիճակում: Ճոպանի զանգվածը և շփումը արհամարհել (գծ. 97):



Գծ. 97

Լուծում: Դիտարկվող համակարգը կազմված է թմբուկից և անիվից (ճոպանի զանգվածն արհամարհված է):

Եթե գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը (XIX) տեսքով և նկատի ունենանք, որ սկզբնական պահին համակարգը գտնվել է հավասարակշռության մեջ, ապա կունենանք՝

$$T = \sum_k A_k^{(e)} \qquad (1)$$

Համակարգի կինետիկ էներգիան գրենք

$$T = T_1 + T_2 \qquad (2)$$

տեսքով, որտեղ T_1 և T_2-ը համապատասխանաբար թմբուկի և C անիվի կինետիկ էներգիաներն են: Քանի որ թմբուկը պտտվում է իր անշարժ առանցքի շուրջը ω

անկյունային արագությամբ, ապա նրա կինետիկ էներգիան, (III) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$ {}_{1} = \frac{1}{2} J_{1} \omega^{2} : \qquad (3)$$

Թմբուկը համասեռ շրջանային գլան է, հետևաբար՝

$$J_{1} = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} r_1^2 : \qquad (4)$$

Վերջինս տեղադրելով (3)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$T_1 = \frac{1}{4} \frac{P_1}{g} r_1^2 \omega^2 :$$

C անիվը գլորվում է առանց սահելու: Հետևաբար, նրա կինետիկ էներգիան, (V) բանաձևի համաձայն, կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} V^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega_2 \ , \qquad (6)$$

որտեղ V_c-ն C անիվի զանգվածների կենտրոնի արագությունն է և հավասար է թմբուկի շրջանակի կետերի արագությանը, այսինքն՝ $V = \omega r_1$, J_{cz}-ը՝ C անիվի իներցիայի մոմենտն է զանգվածների կենտրոնով անցնող և գծագրի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, իսկ ω_2-ը՝ C անիվի պտտման անկյունային արագությունը: Քանի որ C անիվը համասեռ շրջանային գլան է, ապա նրա իներցիայի մոմենտը կլինի՝

$$= \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r_2^2 , \qquad (7)$$

որտեղ r_2-ը C անիվի շառավիղն է: Եթե նկատի ունենանք, որ C անիվի և թեք հարթության հպման կետը անիվի համար պտտման ակնթարթային կենտրոն է, ապա կունենանք՝

$$\omega_2 r_2 = {}_{c} = \omega r_1 : \qquad (8)$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega :$$

Եթե V_c-ի, J_{cz}-ի և ω_2-ի արժեքները տեղադրենք (6)-ի մեջ, կստանանք՝

$$T_2 = \frac{3}{4} \frac{P_2}{g} \omega^2 r_1^2 : \qquad (10)$$

T_1 և T_2-ի արժեքները (5) և (10)-ից տեղադրելով (2)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$T = \frac{1}{4g} (P_1 + 3P_2) \omega^2 r_1^2 :$$

Այժմ մնում է հաշվել համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը: Համակարգի վրա ազդող ուժերից աշխատանք են կատարում թմբուկի վրա ազդող հաստատուն M մոմենտը և C անիվի P_2 կշռի $P_2 \sin\alpha$ բաղադրիչը: M մոմենտի կատարած աշխատանքը, երբ թմբուկը կատարում է n պտույտ, (XI) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$A_1^{(e)} = M 2\pi n ,$$

իսկ $P_2 \sin\alpha$ բաղադրիչի կատարած աշխատանքը, (XIII) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$A_2^{(e)} = -P_2 r_1 \sin\alpha \cdot 2\pi n :$$

Հետևաբար,

$$\sum_k A_k^{(e)} = A_1^{(e)} + A_2^{(e)} = M \cdot 2\pi n - P_2 r_1 \sin\alpha \cdot 2\pi n : \qquad (12)$$

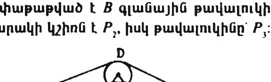
T և $\sum_k A_k^{(e)}$-ի արժեքները (11) և (12)-ից տեղադրելով (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\frac{1}{4g}(P_1 + 3P_2)\omega^2 r_1^2 = (M - P_2 r_1 \sin\alpha) 2\pi n :$$

Մնում է այստեղից որոշել ω-ն:

Պատ. $\omega = \dfrac{2}{r_1}\sqrt{2\pi n g \dfrac{M - P_2 r_1 \sin\alpha}{P_1 + 3P_2}}$:

Խնդիր 83 (38.45): P_1 կշիռ ունեցող A բեռին ամրացված և D ճախարակի վրայով գցված է անձգելի թել, որը փաթաթված է B գլանային թավալակի կողմնային մակերևույթի վրա: Ճախարակի կշիռն է P_2, իսկ թավալակինը՝ P_3: Երբ բեռը դեպի ցած է շարժվում հորիզոնի հետ α անկյուն կազմող թեք հարթությունով, D ճախարակը պտտվում է, իսկ B թավալակն առանց սահելու գլորվում է հորիզոնի հետ β անկյուն կազմող թեք հարթությունով դեպի վեր: Որոշել A բեռի արագությունը՝ կախված նրա անցած ճանապարհից, եթե սկզբնական պահին համակարգը գտնվել է հանգստի վիճակում: D ճախարակը և B թավալակը համարել շրջանային համասեռ գլաններ: Շփման ուժերը և թելի կշիռն արհամարհել (գծ. 98):



Գծ. 98

Լուծում: Դիտարկվող համակարգը կազմված է A բեռից, D ճախարակից և B թավալակից (թելի կշիռն արհամարհված է): Քանի որ կապերն իդեալական են և ստացիոնար, ապա համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը կարելի է գրել վերջավոր տեսքով:

Նկատի ունենանք, որ համակարգը սկզբնական պահին գտնվել է անշարժ վիճակում: Կունենանք՝

$$T = \sum_i A_i'$$

Համակարգի կինետիկ էներգիան գրենք

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad (2)$$

տեսքով, որտեղ T_1, T_2, T_3-ը համապատասխանաբար բեռի, ճախարակի և թավալուկի կինետիկ էներգիաներն են:

Բեռը կատարում է համընթաց շարժում, ճախարակը՝ պտտական, իսկ թավալուկը հարթ զուգահեռական: Հետևաբար, (II), (III), և (V) բանաձևերի համաձայն, նրանց կինետիկ Լներգիաները կլինեն՝

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}V^2 \quad T_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2, \quad {}_3 = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}V_3^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2:$$

Այստեղ V-ն բեռի շարժման արագությունն է, V_3-ը՝ թավալուկի զանգվածների C կենտրոնի արագությունը, J_2 և J_3-ը՝ ճախարակի և թավալուկի իներցիայի մոմենտներն իրենց պտտման առանցքների նկատմամբ, ընդ որում այդ առանցքներն ուղղահայաց են գծագրի հարթությանը, իսկ ω_2, ω_3-ը ճախարակի և թավալուկի անկյունային արագություններն են իրենց պտտման առանցքների շուրջը:

Խնդրի պայմանի համաձայն՝ ճախարակն ու թավալուկը համասեռ շրջանային գլաններ են, հետևաբար, նրանց իներցիայի մոմենտները կլինեն՝

$${}_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r_2^2, \quad J_3 = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g}r_3^2, \qquad (4)$$

որտեղ r_2 և r_3-ը համապատասխանաբար ճախարակի և թավալուկի շառավիղներն են:

Գծագրից երևում է, որ թավալուկի և թելի հպման B_1 կետի արագությունը հավասար է բեռի V արագությանը: Թավալուկի և թեք հարթության շոշափման B_2 կետը կլինի թավալուկի պտտման ակնթարթային կենտրոն: Դժվար չէ նկատել, որ

$${}_3 = r_3\omega_3, \quad V = 2r_3\omega_3, \qquad (5)$$

որտեղ ω_3-ը թավալուկի B_2 ակնթարթային կենտրոնի շուրջը կատարած պտտական շարժման անկյունային արագությունն է: (5)-ից հետևում է, որ

$$V_3 = \frac{V}{2} \qquad (6)$$

Օգտվելով (2), (3), (4) և (6) բանաձևերից՝ կունենանք՝

$$T = \frac{1}{16g}\left(8P_1 + 4P_2 + 3P_3\right)V^2:$$

Համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերից աշխատանք են կատարում միայն բեռի P_1 և թավալուկի P_3 կշիռները: Եթե P_1-ի կատարած աշխատանքը նշանակենք A_1, իսկ P_3-ինը A, ապա (VII) բանաձևի համաձայն, կունենանք

$$A_1 = P_1 S \sin\alpha, \quad A_3 = -P_3 S_3 \sin\beta = -P_3 \frac{S}{2} \sin\beta:$$

A_3-ի արտահայտությունը ստանալիս օգտագործվել է (6)-ը և խնդրի նախնական պայմանները:

Այսպիսով՝

$$\sum_i A_i^{e} = P_1 S \sin\alpha - \frac{1}{2} P_3 S \sin\beta:$$

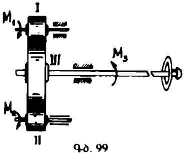
Եթե A-ի և $\sum_i A_i^{e}$-ի արժեքները (7) և (8)-ից տեղադրենք (1)-ի մեջ, կստանանք

$$\frac{V^2}{16g}(8P_1 + 4P_2 + 3P_3) = \frac{S}{2}(2P_1 \sin \qquad {}_3 \sin\beta):$$

Մնում է այս հավասարումը լուծել V-ի նկատմամբ՝

$$V = 2\sqrt{2gS\frac{2P_1 \sin\alpha - P_3 \sin\beta}{8P_1 + 4P_2 + 3P_3}}$$

Խնդիր 84: Նավի տուրբինային շարժիչի փոխանցիչը կազմված է I, II, III անիվներից, որոնց շառավիղները համապատասխանաբար հավասար են r_1, r_2, r_3: Շարժիչից տանող I և II անիվներին հաղորդվում են M_1 և M_2 մոմենտներ: Որոշել նավի պտուտակի անկյունային արագացումը, եթե նրա վրա ազդում է դիմադրող M_3 մոմենտը: Ընդունել տանող անիվների իներցիայի մոմենտները J_1 և J_2, իսկ III անիվի իներցիայի մոմենտը լիսեռի և պտուտակի հետ միասին՝ J_3 (գծ. 99):



Գծ. 99

Լուծում: Դիտարկվող համակարգը կազմված է I, II, III անիվներից: Գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը (XVIII) տեսքով՝

$$W = \frac{dT}{dt},$$

որտեղ W-ն համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի հզորությունն է:

Համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (2)$$

որտեղ T_1, T_2, T_3-ը համապատասխանաբար I, II, III անիվների կինետիկ էներգիաներն են: Հետևաբար, նրանց կինետիկ էներգիաները, (III) բանաձևի համաձայն, կլինեն՝

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2, \qquad {}_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2, \qquad {}_3 = \frac{1}{2}J_3\omega_3^2$$

որտեղ ω_1, ω_2, ω_3-ը անիվների անկյունային արագություններն են պտտման առանցքների նկատմամբ, ընդ որում ω_3-ը անհայտ է, և պահանջվում է որոշել նրա ածանցյալը:

Քանի որ

ուստի՝

$$\omega_1 = \frac{r_3}{r_1} \tag{4}$$

Օգտվելով (3) և (4)-ից՝ (2)-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$T = \frac{1}{2}\left[J_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 + J_2\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 + J_3\right]\omega_3^2: \tag{5}$$

(XII) բանաձևի համաձայն՝ համակարգի վրա ազդող մոմենտների հզորությունը արտահայտենք հետևյալ տեսքով՝

$$W = M_1\omega_1 + M_2\omega_2 - M_3\omega_3: \tag{6}$$

Այստեղ M_3-ը դիմադրող մոմենտն է, հետևաբար, նրա հզորությունը կունենա բացասական նշան: Եթե ω_1 և ω_2-ի արժեքները տեղադրենք (6)-ի մեջ, կունենանք՝

$$W = \left(M_1\frac{r_3}{r_1} + M_2\frac{r_3}{r_2} - M_3\right)\omega_3: \tag{7}$$

Ածանցելով (5)-ը ըստ t-ի՝ կստանանք՝

$$\frac{dT}{dt} = \left[J_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 + J_2\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 + J_3\right]\omega_3\varepsilon_3, \tag{8}$$

որտեղ $\varepsilon_3 = \dfrac{d\omega_3}{dt}$-ն նավի պտուտակի անկյունային արագացումն է:

$\dfrac{dT}{dt}$ և W-ի արժեքները (7) և (8)-ից տեղադրելով (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\left[J_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 + J_2\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 + J_3\right]\omega_3\varepsilon_3 = \left(M_1\frac{r_3}{r_1} + M_2\frac{r_3}{r_2} - M_3\right)\omega_3:$$

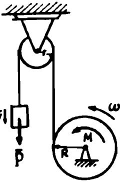
Մնում է այստեղից որոշել ε_3-ը:

$$_{1} = \frac{M_1 \frac{r_3}{r_1} + M_2 \frac{r_3}{r_2} - M_3}{J_1\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2 + J_2\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 + J_3}:$$

Խնդիր 85: *P* կշիռ ունեցող բեռը բարձրանում է վեր էլեկտրական կայապիկի միջոցով: Թմբուկը պտտվում է էլեկտրաշարժիչի միջոցով, որն առաջ է բերում

$$M_{պտ} = M_0 - k\omega$$

պտտող մոմենտ (M_0 և k-ն դրական հաստատուններ են և բնորոշում են շարժիչը, իսկ ω-ն թմբուկի անկյունային արագությունն է): Ճախարակի և թմբուկի իներցիայի մոմենտներն իրենց պտտման առանցքների նկատմամբ համապատասխանաբար հավասար են J_2 և J_1-ի: Ճախարակի շառավիղը հավասար է r-ի, իսկ թմբուկի շառավիղը՝ R: Որոշել բեռի շարժման օրենքը և ճոպանի լարումը: Սկզբնական պահին համակարգը գտնվել է անշարժ վիճակում: Ճոպանի կշիռն արհամարհել (գծ. 100):



Գծ. 100

Լուծում: Դիտարկվող համակարգը կազմված է թմբուկից, ճախարակից և բեռից (ճոպանի զանգվածն արհամարհված է):

Գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{dT}{dt} = W^{(e)} = \sum_k W_k^{(e)} \qquad (1)$$

Համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad (2)$$

տեսքով, որտեղ T_1, T_2, T_3-ը համապատասխանաբար թմբուկի, ճախարակի և բեռի կինետիկ էներգիաներն են:

Թմբուկը և ճախարակը պտտվում են անշարժ առանցքների շուրջը: Հետևաբար, (III) բանաձևի համաձայն, կունենանք՝

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_1^2, \qquad (3)$$

որտեղ ω_1-ը ճախարակի պտտման անկյունային արագությունն է: Ակնհայտ է,

$_1 = \frac{R}{r}\omega$, հետևաբար՝

$$= \frac{1}{2}J_2\frac{R^2}{^2}\omega^2: \qquad (4)$$

Քանի որ բեռը շարժվում է ուղղագիծ և համընթաց $V=R\omega$ արագությամբ, ապա նրա կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T_3=\frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2\omega^2: \qquad (5)$$

Եթե T_1, T_2, T_3-ի արժեքները տեղադրենք (2)-ի մեջ, կստանանք համակարգի կինետիկ էներգիայի արտահայտությունը՝

$$T=\frac{1}{2}J_{\text{բերվ.}}\omega^2, \qquad (6)$$

որտեղ $J_{\text{բերվ.}}$-ն իներցիայի մոմենտի «բերված» մեծությունն է, ընդ որում

$$J_{\text{բերվ.}}=J_1+\frac{R^2}{r^2}J_2+\frac{P}{g}R^2 \qquad (7)$$

Այժմ որոշենք արտաքին ուժերի հզորությունները: Թմբուկի և ճախարակի ծանրության ուժերի և հակազդումների հզորությունները հավասար են զրոյի, քանի որ այդ ուժերի կիրառման կետերն անշարժ են: Բեռի P կշռի հզորությունը, (VIII) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$W_1=\overline{P}\,\overline{V}=PV\cos 180^0=-PV=-PR\omega: \qquad (8)$$

$M_{\text{պտ}}$ մոմենտն առաջացնող ուժերի հզորությունը հաշվենք (XII) բանաձևով: Կունենանք՝

$$W_2=M_{\text{պտ}}\omega=(M_0-k\omega)\omega: \qquad (9)$$

Այսպիսով, ստանում ենք, որ

$$W^{(e)}=\sum_k W_k^{(e)}=\left(M_0-PR-k\omega\right)\omega: \qquad (10)$$

Եթե T և $W^{(e)}$-ի արժեքները (6) և (10)-ից տեղադրենք (1)-ի մեջ, կստանանք՝

$$J_{\text{բերվ.}}\frac{d\omega}{dt}=M_0-PR-k\omega: \qquad (11)$$

Եթե (11)-ը գրենք

$$\frac{J_{\text{բերվ.}}d\omega}{M_0-PR-k\omega}=dt$$

տեսքով, ինտեգրենք ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը և օգտվենք $\omega|_{t=0}=0$ նախնական պայմանից, կունենանք՝

$$\omega=\frac{M_0-PR}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{J_{\text{բերվ.}}}t}\right): \qquad (12)$$

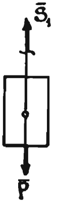
Բեռի վեր բարձրանալու արագությունը կլինի՝

$$V=\omega R=\frac{M_0-PR}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{J_{\text{բերվ.}}}t}\right): \qquad (13)$$

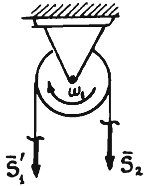
Որոշ ժամանակից հետո (13)-ում $e^{-\frac{k}{J_{բերվ}}t}$ անդամը մեկի նկատմամբ դառնում է շատ փոքր, և բեռը սկսում է շարժվել հաստատուն արագությամբ՝

$$V^{*} = R\frac{M_0 - PR}{k}:$$

Այժմ որոշենք ճոպանի լարման ուժը բեռ-ճախարակ մասում: Դրա համար ճոպանը մտքով կտրենք և նրա ազդեցությունը փոխարինենք $\bar{S}_1$ ուժով: Այդ դեպքում բեռը կշարժվի իր $\bar{P}$ կշռի և ճոպանի $\bar{S}_1$ լարման ուժի ազդեցության տակ (գծ.101ա): Ընդ որում նա դեպի վեր կշարժվի $W = \dfrac{dV}{dt}$ արագացմամբ:



Գծ. 101ա



Գծ. 101բ

Կազմենք բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը՝ պրոյեկտված ուղղագիծ ուղղություն ունեցող y առանցքի վրա.

$$\frac{P}{g}\frac{dV}{dt} = S_1 - P: \qquad (14)$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$S_1 = P\left(1 + \frac{1}{g}\frac{dV}{dt}\right): \qquad (15)$$

Եթե օգտվելով (12)-ից՝ հիշվենք $\dfrac{dV}{dt}$ ածանցյալը և տեղադրենք (15)-ի մեջ, ապա կստանանք՝

$$S_1 = P\left(1 + \frac{R}{g}\,\frac{M_0 - PR}{J_{բերվ.}}e^{-\frac{k}{J_{բերվ}}t}\right): \qquad (16)$$

Ճոպանի լարման ուժը թմբուկ-ճախարակ մասում որոշելու համար ճոպանը մտքով կտրենք երկու կետերում (թմբուկ-ճախարակ և ճախարակ-բեռ մասերում) և նրա ազդեցությունը փոխարինենք S_1' և S_2 հակազդումներով (գծ.101բ): Կազմենք անշարժ առանցքի շուրջը ճախարակի կատարած պտտական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը: Այն կլինի՝

$$J_2\frac{d\omega_1}{dt} = S_2 r - S_1' r: \qquad (17)$$

Նկատի ունենալով, որ $S_1' = S_1$, (17)-ից կունենանք՝

$$S_2 = S_1 + \frac{J_2}{r}\frac{d\omega_1}{dt}: \qquad (18)$$

$\dot{\cdot}$ չվենք $\dfrac{d\omega_1}{dt}$-ն: Դրա համար $\omega_1 = \dfrac{}{r}$

տեղադրենք ω-ի արժեքը (12)-ից, կստանանք

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{R}{r}\,\frac{M_0 - PR}{J_{\text{բերվ}}}\,e^{\frac{k}{J}t}:$$

$_1$-ի և $\dfrac{d\omega_1}{dt}$-ի արժեքները (16) և (19)-ից տեղադրելով (18)-ի մեջ կորոշենք

$$_2 = P + R\left(\frac{P}{g} + \frac{J_2}{r_2}\right)\frac{M_0 - PR}{J_{\text{բերվ.}}}\,e^{\frac{k}{J}t}:$$

Որոշ ժամանակից հետո $e^{\frac{k}{J}t}$ արտադրիչը ձգտում է զրոյի և ստեղծվում է հաստատված ռեժիմ, որի դեպքում

$$S_1^* = S_2^* =$$

$$)\ \omega = \frac{M_0 - PR}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{J}t}\right),\quad J_{\text{բերվ.}} = J_1 + \frac{R^2}{r^2}J_2 + \frac{P}{g}R^2.$$

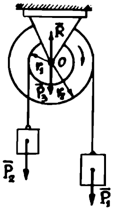
բ) Բեռը վեր է բարձրանում $V = R\dfrac{M_0 - PR}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{J}t}\right)$ արագությամբ, հաստատված ռեժիմի դեպքում՝ $V^* = R\dfrac{M_0 - PR}{k}$, գ) ճոպանի լարումը բեռ-ճախարակ մասում՝ $S_1 = P\left(1 + \dfrac{R}{g}\,\dfrac{M_0 - PR}{J_{\text{բերվ.}}}\,e^{-\frac{k}{J}t}\right)$, իսկ թմբուկ-ճախարակ մասում՝ $S_2 = P + R$, հաստատված ռեժիմի դեպքում՝ $S_1^* =$

Խնդիր 86: P_1 և P_2 բեռները կախված են r_1 և r_2 շառավիղներ ունեցող աստիճանային փոկանիվի վրա փաթաթված երկու ճոպաններից: Փոկանիվի իներցիայի մոմենտը պտտման անշարժ O առանցքի նկատմամբ հավասար է J_0-ի: Ընդունելով, որ բեռները շարժվում են ծանրության ուժի ազդեցության տակ և արհամարհելով շփումն ու ճոպանների զանգվածները՝ որոշել բեռների արագացումները և O կետի հակազդումը (գծ.102):

Լուծում: Դիտարկվող համակարգը կազմված է երկու բեռներից և փոկանիվից: Քանի որ համակարգն անփոփոխ է, ապա, (XVIII) բանաձևի համաձայն, նրա կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը դիֆերենցիալ տեսքով կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k W_k^{(e)}, \tag{1}$$

որտեղ $\sum_k W_k^{(e)}$ -ն համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի հզորությունների գումարն է:



Համակարգի կինետիկ էներգիան գրենք

$$T=T_1+T_2+T_3 \qquad (2)$$

տեսքով, որտեղ T_1, T_2, T_3-ը համապատասխանաբար P_1 և P_2 կշիռներ ունեցող բեռների ու փոկանիվի կինետիկ էներգիաներն են: Քանի որ բեռները շարժվում են համընթաց, ապա, (II) բանաձևի համաձայն, նրանց կինետիկ էներգիաները կլինեն

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}V_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}V_2^2, \qquad (3)$$

որտեղ V_1 և V_2-ը բեռների արագություններն են: Փոկանիվը կատարում է պտտական շարժում ω անկյունային արագությամբ, հետևաբար, նրա կինետիկ էներգիան, (III) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$, = \frac{1}{2}J_0\omega^2:$$

Եթե T_1, T_2, T_3-ի արժեքները (3) և (4)-ից տեղադրենք (2)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ

$$V_1 = r_1 \qquad (5)$$

կստանանք՝

$$= \frac{1}{2g}\left(P_1r_1^2 + P_2r_2^2 + J_0g\right)\omega^2: \qquad (6)$$

Ածանցելով (6) հավասարությունը ըստ t ժամանակի կունենանք՝

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\omega}{g}\left(P_1r_1^2 + P_2r_2^2 + J_0g\right)\varepsilon, \qquad (7)$$

որտեղ $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ -ն փոկանիվի անկյունային արագացումն է:

Համակարգի վրա ազդում են երկու բեռների և փոկանիվի $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ և $\bar{P}_3$ կշիռները, ինչպես նաև O կետի $\bar{R}$ հակազդումը: Քանի որ O կետն անշարժ է, ապա այդ կետում կիրառված $\bar{P}_3$ և $\bar{R}$ ուժերի հզորությունները կլինեն զրո: Եթե $\bar{P}_1$ և $\bar{P}_2$ ուժերի հզորությունները նշանակենք W_1 և W_2 ու միաժամանակ նկատի ունենանք, որ $\bar{P}_1$ և $\bar{V}_1$-ը ունեն նույն ուղղությունները, իսկ $\bar{P}_2$ և $\bar{V}_2$-ը՝ հակադիր ուղղություններ (գծ. 102), ապա կստանանք՝

$$W_1 = P_1V_1, \qquad W_2 = -$$

$$\sum_k W_k^{(e)} = P_1V_1 - P_2V_2 = (P_1r_1 - P_2r_2)\omega: \qquad (8)$$

$\frac{dT}{dt}$ և $\sum_i W_i^{(e)}$ -ի արժեքները (7) և (8)-ից տեղադրելով (1)-ի մեջ՝ կունենանք

$$\frac{1}{g}\left(P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2 + J_0 g\right)\varepsilon = P_1 r_1 .$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\varepsilon = \frac{g\left(P_1 r_1 - P_2 r_2\right)}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2 + J_0 g}:$$

Հետևաբար, բեռների որոնելի արագացումները կլինեն՝

$$W_1 = r_1\varepsilon = \frac{r_1 g\left(P_1 r_1 - P_2 r_2\right)}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2 + J_0 g}, \quad W_2 = \frac{r_2 g\left(P_1 r_1 - P_2 r_2\right)}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2 + J_0 g} \qquad (10)$$

Այժմ որոշենք O կետի $\bar{R}$ հակազդումը: Դրա համար գրենք համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը վեկտորական տեսքով: Այն կլինի՝

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_i \bar{F}_i^{(e)} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{R}: \qquad (11)$$

Եթե (11)-ը պրոյեկտենք անշարժ կոորդինատական x և y առանցքների վրա, կստանանք

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x, \quad \frac{dQ_y}{dt} =$$

որտեղ R_x և R_y-ը $\bar{R}$ վեկտորի պրոյեկցիաներն են:

Քանի որ փոկանիվի ծանրության կենտրոնը գտնվում է պտտման առանցքի վրա, ապա նրա շարժման քանակը կլինի զրո, և Q_x, Q_y -ի համար կունենանք հետևյալ արժեքները՝

$$Q_x = 0, \qquad Q_y = -\frac{P_1}{g}V_1 + \frac{P_2}{g}V_2:$$

Ածանցելով ստացված արտահայտությունները ըստ t ժամանակի կստանանք՝

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0, \qquad \frac{dQ_y}{dt} = -\frac{P_1}{g}W_1 + \frac{P_2}{g}W_2:$$

Օգտվելով (12) և (13)-ից՝ կունենանք՝

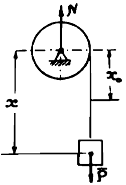
$$R_x = 0, \quad R_y = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1}{g}W_1 + \frac{P_2}{g}W_2: \qquad (14)$$

Մնում է (14)-ի մեջ տեղադրել W_1 և W_2-ի արժեքները (10)-ից և կատարել նշված գործողությունները:

Պատ. $W_1 = \frac{r_1 g\left(P_1 r_1 - P_2 r_2\right)}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2 + J_0 g}, \quad W_2 = \frac{r_2 g\left(P_1 r_1 - P_2 r_2\right)}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2 + J_0 g},$

$$, -\frac{\left(P_1 r_1 - P_2 r_2\right)^2}{P_1 r_1^2 + P_2 r_2^2 + J_0 g}:$$

Խնդիր 87|38.47 (1080)|: P կշռով բեռը կախված է l երկարություն ունեցող չձգվող համասեռ մետաղալարից, որը փաթաթված է հորիզոնական պտտման առանցք ունեցող գլանային թմբուկի վրա: Պտտման առանցքի նկատմամբ թմբուկի իներցիայի մոմենտը հավասար է J-ի, թմբուկի շառավիղը՝ R-ի, մետաղալարի միավոր երկարության կշիռը՝ p: Որոշել բեռի արագությունն այն պահին, երբ մետաղալարի կախված մասի երկարությունը հավասար է x-ի, եթե սկզբնական պահին բեռի արագությունը՝ $V_0 = 0$, իսկ մետաղալարի կախված մասի երկարությունը հավասար է եղել x_0: Թմբուկի առանցքի վրա շփումը, մետաղալարի հաստությունը և թմբուկի վրա փաթաթված մետաղալարի պոտենցիալ էներգիայի փոփոխությունն անտեսել (գծ. 103):



Լուծում: Դիտարկվող համակարգը կազմված է թմբուկից, բեռից և մետաղալարից: Համակարգի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ թմբուկի, բեռի և կախված մետաղալարի կշիռները, ինչպես նաև առանցքակալի $\bar{N}$ հակազդումը (գծ. 103):

Եթե գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը (XIX) տեսքով և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ համակարգը սկզբնական պահին գտնվել է հավասարակշռության մեջ, կունենանք՝

$$T = \sum_i A_i^{(e)} :$$

Համակարգի կինետիկ էներգիան գրենք

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \tag{2}$$

տեսքով, որտեղ T_1, T_2, T_3-ը համապատասխանաբար թմբուկի, բեռի և կախված մետաղալարի կինետիկ էներգիաներն են:

Թմբուկի կինետիկ էներգիան, (III) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T_1 = \frac{1}{2} J\,\omega^2, \tag{3}$$

որտեղ ω-ն թմբուկի անկյունային արագությունն է, երբ բեռն իջնում է ցած $h = x - x_0$ մեծությամբ: Այդ նույն տեղափոխության դեպքում բեռի կինետիկ էներգիան կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 \tag{4}$$

որտեղ V-ն բեռի որոնելի արագությունն է:

Մետաղալարի կինետիկ էներգիան կլինի

$$T_3 = \frac{1}{2}\frac{pl}{g}V^2 \tag{5}$$

Քանի որ մետաղալարն անձգելի է, ապա $\omega = \frac{V}{R}$, հետևաբար թմբուկի կինետիկ էներգիան ((3)-ը) կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$_{\,1} = \frac{1}{2} J \; \frac{V^2}{R^2}$$

T_1, T_2, T_3-ի արժեքները (6), (4), և (5) բանաձևերից տեղադրելով (2)-ի մեջ կստանանք՝

$$= \frac{V^2}{2}\left(\frac{J}{R^2} + \frac{P}{g} + \frac{pl}{g}\right)$$

Եթե թմբուկի առանցքն՝ առանցքակալներում բացակայում է շփման ուժը, ապա աշխատանք կկատարեն միայն բեռի և մետաղալարի կախված մասի կշիռները, իսկ $\bar{N}$ հակազդման և թմբուկի կշռի կատարած աշխատանքները հավասար կլինեն զրոյի, քանի որ կետերը, որոնցում կիրառված են այդ ուժերը, անշարժ են:

Բեռի կատարած աշխատանքը, երբ բեռն իջնում է ցած $h = x - x_0$ մեծությամբ, (XIII) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$A_1 = Ph = P(x - x_0), \qquad (8)$$

իսկ մետաղալարի աշխատանքը այդ նույն տեղափոխման դեպքում՝

$$A_2 = \int_{x_0}^{x} p(x - x_0)dx = \frac{p}{2}(x - x_0)^2$$

$$\sum_k A_k^e = P(x - x_0) + \frac{p}{2}(x - x_0)^2 : \qquad (9)$$

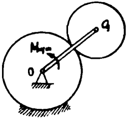
Տեղադրելով T և $\sum_k A_k^e$ -ի արժեքները (7) և (9)-ից (1)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\frac{V^2}{2}\left(\frac{J}{R^2} + \frac{P}{g} + \frac{pl}{g}\right) = P(x - x_0) + \frac{p}{2}(x - x_0)^2 \qquad (10)$$

Մնում է (10)-ից որոշել V-ի արժեքը:

$$= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{g\left[2P + p(x - x_0)\right](x - x_0)}{Jg + (P + pl)R^2}}$$

Խնդիր 88 (38. 51) Հորիզոնական հարթության մեջ գտնվող էպիցիկլիկ մեխանիզմի OO_1 մեղեխի վրա կիրառված է $M_{պտ} = M_0 - \alpha\,\omega$ հաստատուն պտտող մոմենտ, որտեղ M_0-ն և α-ն դրական հաստատուններ են, իսկ ω-ն մեղեխի անկյունային արագությունն է: Մեղեխի զանգվածը հավասար է m-ի, սատելիտի (շարժական անիվի) զանգվածը՝ M-ի: Ընդունելով մեղեխը որպես բարակ համասեռ ձող, իսկ սատելիտը՝ r շառավիղ ունեցող համասեռ շրջանային սկավառակ, որոշել մեղեխի անկյունային արագությունը կախված ժամանակից: Սկզբնական պահին համակարգը գտնվել է հանգստի վիճակում: Անշարժ ատամնանիվի շառավիղը հավասար է R-ի: Դիմադրության ուժերն արհամարհել (գծ.104):



Գծ. 104

Լուծում: Համակարգը կազմված է OO_1 մեղեխից և սատելիտից (շարժական անիվից):

Գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը դիֆերենցիալ տեսքով.

$$dT = \sum_i \bar{F}_i^{(e)} d\bar{r}_i \,, \qquad (1)$$

որտեղ աջ մասում եղած արտահայտությունը իրենից ներկայացնում է համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած էլեմենտար աշխատանքների գումարը:

Համակարգի կինետիկ էներգիան գրենք

$$T = T_1 + T_2$$

տեսքով, որտեղ T_1 և T_2-ը համապատասխանաբար OO_1 մեղեխի և սատելիտի կինետիկ էներգիաներն են: Քանի որ OO_1 մեղեխը պտտվում է ω անկյունային արագությամբ, ապա նրա կինետիկ էներգիան, (III) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{o_1} \omega^2 \qquad (3)$$

որտեղ J_{o_1}-ը մեղեխի իներցիայի մոմենտն է O կետով անցնող և գծագրի հարթությանը ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ.

$$J_{o_1} = \frac{1}{3} m (OO_1)^2 = \frac{1}{3} m (R + r)^2 : \qquad (4)$$

Այսպիսով՝

$$T_1 = \frac{1}{6} m (R + r)^2 \omega^2 : \qquad (5)$$

Սատելիտը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Հետևաբար, նրա կինետիկ էներգիան, (V) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T_2 = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J_{o_2} \omega_1^2 , \qquad (6)$$

որտեղ V_c-ն շարժական անիվի զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, J_{o_2} -ը՝ անիվի իներցիայի մոմենտը O_1 կետով անցնող ու գծագրի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, իսկ ω_1-ը՝ անիվի O_1 կենտրոնի շուրջը կատարած շարժման անկյունային արագությունը: Քանի որ OO_1 մեղեխը պտտվում է ω անկյունային արագությամբ, ապա

$$V = \omega(R+r): \qquad (7)$$

Տված պայմանի համաձայն՝ շարժական անիվը r շառավիղ ունեցող սկավառակ է, հետևաբար, նրա իներցիայի մոմենտը O_1z առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$J_{O_1z} = \frac{1}{2}Mr^2: \qquad (8)$$

Շարժական և անշարժ անիվների հպման կետը կլինի պտտման ակնթարթային կենտրոն, հետևաբար՝

$$_1 r = \omega(R+r):$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\omega_1 = \frac{R+r}{r}\omega:$$

Եթե V_c և ω_1-ի արժեքները (7) և (8)-ից տեղադրենք (6)-ի մեջ, կստանանք.

$$_2 = \frac{3}{4}M(R+r)^2\omega^2:$$

Այսպիսով՝ (5) և (10)-ից համակարգի կինետիկ էներգիայի համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 J_{բեր.} \ ,$$

$$J_{բեր.} = \left(\frac{m}{3}+\frac{3M}{2}\right)(R+r)^2 \qquad (12)$$

Այժմ հաշվենք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած էլեմենտար աշխատանքների գումարը: Համակարգի վրա ազդում է

$$M_{պտ} = M_0 - \alpha\,\omega$$

մոմենտը, որի կատարած էլեմենտար աշխատանքը կլինի

$$d^*A = Md\varphi = (M_0 - \alpha\omega)d\varphi:$$

$$\sum_k \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k = (M_0 - \alpha\omega)d\varphi. \qquad (13)$$

Տեղադրելով T և $\sum_k \bar{F}_k^{(e)}\ \bar{r}_k$ -ի արժեքները (11) և (13)-ից (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$J_{բեր.}\,\omega d\omega = (M_0 - \alpha\omega)d\varphi \ , \qquad (14)$$

Քանի որ $d\varphi = \omega\ dt$, ապա (14)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{d\omega}{M_0 - \alpha\omega} = \frac{1}{J_{բեր.}}dt: \qquad (15)$$

Եթե ինտեգրենք (15) դիֆերենցիալ հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ $\omega_{t=0} = 0$, կստանանք

$$ln\frac{|M - \alpha\omega|}{M_0} = -\frac{\alpha}{J_{\text{բերվ}}}t:$$

Այստեղից էլ ստացվում է, որ

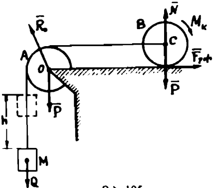
$$-\frac{\alpha}{M_0}\omega =$$

կամ

$$\omega = \frac{M_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{\text{բերվ}}}t}\right):$$

$$\omega = \frac{M_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{\text{բերվ}}}t}\right), \text{ որտեղ } J_{\text{բերվ}} = \left(\frac{m}{3} + \frac{3M}{}\right)(R + r)^2$$

Խնդիր 89: Q կշիռ ունեցող M բեռը A ճախարակի վրայով գցված թելի օգնությամբ շարժման մեջ է դնում B գլոնը, որը գլորվում է հորիզոնական հարթությունով, առանց սահքի: A ճախարակը և B գլոնը R շառավիղ ունեցող սկավառակներ են, որոնցից յուրաքանչյուրի կշիռը հավասար է P-ի: Գլոնի գլորման շփման գործակիցը k է. Գլոնի և ճախարակի առանցքներում եղած շփման ուժերը, ինչպես նաև թելի զանգվածը արհամարհել: Որոշել M բեռի արագությունը կախված նրա իջեցման չափից: Սկզբնական պահին համակարգը գտնվել է հավասարակշռության մեջ (գծ. 105):



Գծ. 105

Լուծում: Դիտարկվող համակարգը կազմված է բեռից, ճախարակից և գլոնից (թելի զանգվածը արհամարհված է):

Եթե գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը ինտեգրալ տեսքով և նկատի ունենանք, որ սկզբնական պահին համակարգը եղել է անշարժ, այսինքն՝ $T_0 = 0$, ապա կունենանք

$$T = \sum_k A_k'$$

Համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

որտեղ T_1, T_2, T_3-ը համապատասխանաբար բեռի, ճախարակի և գլդոնի կինետիկ էներգիաներն են: Համաձայն (II), (III) և (V) բանաձևերի`

$$=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}V^2, \quad {}_2=\frac{1}{2}J_{or}\omega_A^2, \quad {}_3=\frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2+\frac{1}{2}J_{ct}\omega_B^2$$

Քանի որ ճախարակը և գլդոնը համասեռ սկավառակներ են, ապա նրանց իներցիայի մոմենտների համար կունենանք հետևյալ արտահայտությունը`

$$=J_{ct}=\frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2: \qquad (4)$$

Գծագրից երևում է, որ

$${}_A=\frac{V}{R},\ V_c=V,\ \omega_B=\frac{V_c}{R}=\frac{V}{R}:$$

Եթե (4)-ից J_{or} և J_{ct}-ի արժեքները, իսկ (5)-ից V_c-ի, ω_A-ի և ω_B-ի արժեքները տեղադրենք (3)-ի մեջ և այնուհետև T_1, T_2, T_3-ի համար ստացած արժեքները (2)-ի մեջ, կստանանք`

$$=\frac{1}{2}\frac{V^2}{g}(Q+2P):$$

Այժմ հաշվենք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքները: Համակարգի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը` բեռի, ճախարակի և գլդոնի ծանրության ուժերը, ճախարակի և գլդոնի $\overline{R}_0$ և $\overline{N}_0$ հակազդումները, գլդոնի գլորմանը խանգարող $\overline{F}_{շփ}$ ուժը, ինչպես նաև թելի լարումը:

Ճախարակի $\overline{P}$ կշիռը և $\overline{R}_0$ հակազդումը կիրառված են անշարժ O կետում, որի հետևանքով նրանց կատարած աշխատանքը հավասար կլինի զրոյի:

Քանի որ գլդոնի $\overline{P}$ կշիռն ուղղահայաց է գլդոնի տեղափոխմանը, իսկ $\overline{N}$ և $\overline{F}_{շփ}$ ուժերը կիրառված են գլդոնի արագությունների ակնթարթային կենտրոնում (գլդոնի և հարթության շոշափման կետում), ապա նրանց կատարած աշխատանքները ևս կլինեն զրո: Ակնհայտ է, որ թելի լարման կատարած աշխատանքը նույնպես հավասար է զրոյի:

Բեռի $\overline{Q}$ կշռի կատարած աշխատանքը, (XIII) բանաձևի համաձայն, կլինի`

$$A_1=Qh,$$

իսկ M_k մոմենտ ունեցող ուժազույգի կատարած աշխատանքը, (XI) բանաձևի համաձայն`

$$A_2=-M_k\varphi:$$

Այստեղ φ-ն գլդոնի պտտման անկյունն է, երբ M բեռն իջնում է ցած h

մեծությամբ: Քանի որ ուժազույգի M_1 մոմենտն ունի գլանի պտտման հակառակ ուղղությունը, ապա նրա կատարած աշխատանքը կունենա բացասական նշան:

Հետևաբար, համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը կլինի

$$\sum_i A_i^{(e)} = Qh - M_1\varphi:$$

Քանի որ

$$M_1 = kN = kP = const,$$

ապա (7)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_i A_i^{(e)} = Qh - kP\frac{h}{R}$$

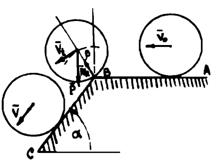
T-ի և $\sum_i A_i^{(e)}$-ի արժեքները (6) և (8)-ից տեղադրելով (1)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$\frac{1}{2}\frac{V^2}{g}(Q+2P) = h\left(Q - \frac{k}{R}P\right):$$

Մնում է այստեղից որոշել V-ն:

$$= \sqrt{\frac{2gh\left(Q - \frac{k}{R}P\right)}{Q+2P}}:$$

Խնդիր 90: R շառավիղ ունեցող գլանն առանց սահելու գլորվում է հորիզոնական հարթության վրայով V_0 հաստատուն արագությամբ: Այնուհետև գլանը տեղափոխվում է հորիզոնի հետ α անկյուն կազմող BC թեք հարթություն և շարժվում այդ հարթության վրայով: Որոշել α-ի այն ամենամեծ արժեքը, որի դեպքում գլանը փոխադրվում է թեք հարթության վրա առանց թռիչքի (գծ.106):



Գծ. 106

Լուծում: Դիցուք գլանը AB հարթությունից տեղափոխվում է BC հարթություն առանց թռիչքի: Դա նշանակում է, որ B կետին հասնելով՝ նա սկսում է պտտվել այդ կետով անցնող առանցքի շուրջը և, α անկյունով պտտվելուց հետո, սկսում է շարժվել թեք հարթությունով:

Գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը այն ժամանակամիջոցի համար, որի ընթացքում գլանը պտտվում է α անկյունով: Այն կլինի

$$T - T_0 = \sum_i A_i^{(e)}$$

Այդ ժամանակամիջոցի սկզբում գլանի զանգվածների կենտրոնի արագությունը հավասար է եղել V_0-ի, իսկ անկյունային արագությունը՝ $\omega_0 = \dfrac{V_0}{R}$:
Հետևաբար, $t=t_0$ սկզբնական պահին գլանի կինետիկ էներգիան եղել է՝

$$T_0 = \frac{1}{2} M V_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2,$$

$$J_0 = \frac{1}{2} MR^2 \qquad \omega_0 = \frac{V_0}{R}:$$

Այսպիսով, (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$T_0 = \frac{3}{4} M V_0^2$$

Եթե վերը նշված ժամանակամիջոցի վերջում, այսինքն՝ այն պահին, երբ գլանը սկսում է շարժվել BC թեք հարթությունով, գլանի զանգվածների կենտրոնի արագությունը նշանակենք V-ով, ապա գլանի կինետիկ էներգիայի արտահայտությունը կլինի

$$= \frac{3}{4} M V^2:$$

(3) և (4)-ից հետևում է, որ

$$T - T_0 = \frac{3}{4} M\left(V^2 \quad {}_0^2\right):$$

Այժմ հաշվենք գլանի վրա ազդող $\bar{N}$ հակազդման և գլանի $\bar{P}$ կշռի կատարած աշխատանքները: $\bar{N}$ հակազդման կատարած աշխատանքը հավասար է զրոյի, քանի որ նրա կիրառման կետը գլանի պտտման ժամանակ մնում է անշարժ, իսկ գծագրից երևում է, որ գլանի $\bar{P}$ կշռի կատարած աշխատանքը կլինի՝ $Ph = PR(1-\cos\alpha)$, որտեղ h-ը գլանի զանգվածների կենտրոնի դեպի ցած տեղափոխման մեծությունն է, երբ գլանը պտտվում է α անկյունով: Հետևաբար՝

$$\sum_k A_k^{(e)} = PR(1-\cos\alpha):$$

Տեղադրելով $T - T_0$ և $\sum_k A_k^{(e)}$-ի արժեքները (5) և (6)-ից (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\frac{3}{4} M\left(V^2 - V_0^2\right) = PR(1-\cos\alpha):$$

Այժմ կազմենք գլանի զանգվածների կետրոնի շարժման հավասարումը՝ պրոյեկտած նրա հետագծի նորմալի վրա: Քանի որ գլանի զանգվածների կենտրոնի հետագիծը շրջանագիծ է, որի կենտրոնը գտնվում է B կետում, իսկ շառավիղը հավասար է R-ի, ուստի կունենանք՝

$$M\frac{V_1^2}{R} = P\cos\beta - N_B,$$

որտեղ β-ն գլանի պտտման ընթացիկ անկյունն է, N_n-ը $\bar{N}$ հակազդման ուղիղ բաղադրիչը, իսկ V_1-ն գլանի զանգվածների կենտրոնի արագությունը կամայական պահին: α-ի սահմանային արժեքը, որի դեպքում տեղի է ունենում գլանի սահում (առանց թռիչքի) տեղափոխությունը դեպի թեք հարթություն, կլինի այն արժեքը, որի համար N_n հակազդումը դառնում է զրո: Հետևաբար, եթե (8) հավասարության մեջ ընդունենք $V_1=V$, $\beta=\alpha$ և $N_n=0$, ապա կունենանք

$$V^2 = Rg\cos\alpha:$$

Տեղադրելով այս արժեքը (7)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\frac{3}{4}\left(Rg\cos\alpha - V_0^2\right) = gR(1-\cos\alpha):$$

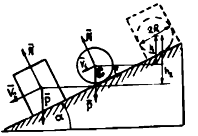
Այստեղից ստացվում է՝

$$\alpha = \arccos\frac{1}{7}\left(4+3\frac{V_0^2}{Rg}\right):$$

Այսպիսով, ստացվում է, որ a-ի սահմանային արժեքը կախված է V_0-ից և այն ստանում է իր ամենամեծ արժեքը, երբ $V_0=0$:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{7}+\frac{3V_0^2}{7Rg}\right), \quad \left(0\le V_0\le\sqrt{Rg}\right).$$

Խնդիր 91: Թեք հարթությունով առանց սկզբնական արագության իջնում են բոլորովին միատեսակ երկու շրջանային գլաններ: Նրանցից մեկը հենվում է հարթությանը իր կողմնային մակերևույթով և գլորվում է նրա վրայով առանց սահելու, իսկ մյուսը հենվում է հարթությանն իր հիմքով և սահում է նրա վրայով առանց շփման (գծ.107): Որոշել միևնույն ժամանակամիջոցում առաջին և երկրորդ գլանների ծանրության կենտրոնների բարձրությունների դեպի ցած տեղափոխությունների հարաբերությունը:



Գծ. 107

Լուծում: Այս գլաններից յուրաքանչյուրը դիտարկենք որպես առանձին համակարգ: Առաջին գլանի վրա ազդող արտաքին ուժերը կլինեն՝ գլանի $\bar{P}$ կշիռը և $\bar{F}_{շփ}$ ուժը, իսկ երկրորդ գլանի վրա կազդի միայն գլանի կշիռը:

Եթե գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը ինտեգրալ տեսքով առաջին գլանի համար և նկատի ունենանք, որ գլանը սկզբնական պահին գտնվել է անշարժ վիճակում, ապա կունենանք՝

$$T=\sum_i A_i^{(e)}$$

Քանի որ առաջին գլանը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում, ուստի նրա կինետիկ էներգիան, (V) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$T = \frac{1}{2} MV_1^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

Այստեղ M-ը գլանի զանգվածն է, V_1-ը՝ գլանի զանգվածների C կենտրոնի արագությունը, ω-ն՝ գլանի անկյունային արագությունը, իսկ J-ն՝ գլանի-իներցիայի մոմենտը նրա պտտման առանցքի նկատմամբ:

Ընդունելով գլանը որպես համասեռ մարմին՝ կունենանք

$$= \frac{1}{2} MR^2$$

որտեղ R-ը գլանի հիմքի շառավիղն է: Մյուս կողմից, քանի որ B կետը առաջին գլանի համար պտտման ակնթարթային կենտրոնն է, ապա $V_1 = \omega \cdot BC = \omega R$

Այստեղից էլ ստացվում է, որ $\omega = \frac{V_1}{R}$

J և ω-ի համար ստացված արժեքները տեղադրելով (2)-ի մեջ՝ կստանանք առաջին գլանի կինետիկ էներգիան հետևյալ տեսքով՝

$$= \frac{3}{4} \frac{P}{g} V_1^2 :$$

Առաջին գլանի վրա ազդող $F_{շփ}$ ուժի կատարած աշխատանքը հավասար է զրոյի, քանի որ այդ ուժը միշտ կիրառված է գլանի B կետում, որի արագությունը տվյալ պահին հավասար է զրոյի: Հետևաբար, աշխատանք կատարում է միայն գլանի $\overline{P}$ կշիռը, որի կատարած աշխատանքը, (XIII) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$A_1 = Ph_1,$$

որտեղ h_1-ը առաջին գլանի ծանրության կենտրոնի բարձրության իջեցման չափն է:

Այսպիսով, ստանում ենք, որ

$$\sum_k A_k^{(e)} = Ph_1 :$$

Եթե T և $\sum_k A_k^{(e)}$-ի արժեքները (4) և (5)-ից տեղադրենք (1)-ի մեջ, կունենանք՝

$$\frac{3}{4} \frac{P}{g} V_1^2 \ldots$$

Նույն դատողություններով՝ երկրորդ գլանի համար կունենանք՝

$$\frac{1}{2} \frac{P}{g} V_2^2 = Ph_2,$$

որտեղ V_2-ը երկրորդ գլանի ծանրության կենտրոնի արագությունն է, իսկ h_2-ը նույն կենտրոնի իջեցման չափը:

Բաժանելով (6)-ը (7)-ի վրա՝ կստանանք՝

$$\frac{3}{2}\frac{V_1^2}{V_2^2} = \frac{h_1}{h_2}:$$

Այժմ որոշենք V_2/V_1 հարաբերությունը: Դրա համար գրենք առաջին գլանի զանգվածների կենտրոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը՝ պրոյեկտած թեք հարթության վրա, կունենանք՝

$$\frac{P}{g}\frac{dV_c}{dt} = P\sin\alpha - F_{շփ}$$

Եթե ինտեգրենք այս հավասարումը և միաժամանակ նկատի ունենանք $V_c|_{t=0} = 0$ նախնական պայմանը, ապա կստանանք

$$\frac{P}{g}V_c = (P\sin\alpha - F_{շփ})\,t$$

Բայց , քանի որ $V_c = V_1$, ապա (10)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{P}{g}V_1 = (P\sin\alpha - F_{շփ})\,t: \qquad (11)$$

Այժմ գրենք առաջին գլանի համար շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմը՝պրոյեկտած z առանցքի վրա: Այն կլինի՝

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right), \qquad (12)$$

որտեղ z առանցքն անցնում է C կետով և ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը: Այդ դեպքում առաջին գլանի համար կունենանք՝

$$K_z = J\omega, \qquad \sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = F_{շփ}R: \qquad (13)$$

Եթե K_z և $\sum_k mom_z\left(\overline{F}_k^{(e)}\right)$-ի արժեքները (13)-ից տեղադրենք (12)-ի մեջ, ինտեգրենք ստացված հավասարումը և նկատի ունենանք $\omega|_{t=0} = 0$ պայմանը, ապա կստանանք՝

$$J\omega = F_{շփ}R\,t\,, \qquad (14)$$

որտեղ J-ն որոշվում է (3) բանաձևով: (3) և (14)-ից ստացվում է, որ

$$F_{շփ}t = \frac{J\omega}{R} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V_1,$$

որի համաձայն (11)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{3}{2}\frac{P}{g}V_1 = P\,t\sin\alpha: \qquad (16)$$

Գրենք երկրորդ գլանի զանգվածների կենտրոնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը պրոյեկտած թեք հարթության վրա: Այն կլինի

$$\frac{P}{g}\frac{dV_c}{dt} = P\sin\alpha : \qquad (17)$$

Եթե ինտեգրենք և նկատի ունենանք, որ $V_c\big|_{t=0} = 0$ և $V_c = V_2$, ապա կստանանք`

$$\frac{P}{g}V_2 = Pt\sin\alpha : \qquad (18)$$

(16) և (18) հավասարություններից հետևում է, որ

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3} : \qquad (19)$$

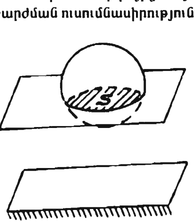
Մնում է (19)-ից $\frac{V_1}{V_2}$-ի արժեքը տեղադրել (8)-ի մեջ և ստանալ $\frac{h_1}{h_2}$ հարաբերության մեծությունը:

Պատ. $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{2}{3}$

8. ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱՐԹ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆ ՇԱՐԺՈՒՄ

Հարթ զուգահեռական կամ հարթ կոչվում է պինդ մարմնի այն շարժումը, որի դեպքում մարմնի բոլոր կետերը տեղափոխվում են որևէ անշարժ հարթությանը զուգահեռ:

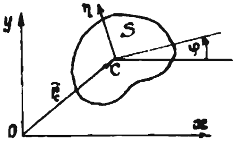
Կինեմատիկայից հայտնի է, որ պինդ մարմնի հարթ զուգահեռական շարժման ուսումնասիրությունը բերվում է հարթ պատկերի իր հարթության մեջ շարժման ուսումնասիրությանը (գծ. 108): Հայտնի է նաև, որ հարթ զուգահեռական շարժում կատարող պինդ մարմնի դիրքը ժամանակի յուրաքանչյուր պահին որոշվում է նրա բևեռի դիրքով և այդ բևեռի շուրջը մարմնի պտույտով: Դինամիկայի խնդիրների լուծումը ավելի պարզ է դառնում, երբ որպես բևեռ ընդունվում է մարմնի զանգվածների C կենտրոնը:



Գծ. 108

Տանենք անշարժ հարթությանը զուգահեռ և զանգվածների կենտրոնով անցնող հարթություն: Վերցնենք այդ հարթության վրա xOy

կոորդինատական համակարգը և S հատույթին ամրացված ու նրա զանգվածների կենտրոնով անցնող $C\xi$ և $C\eta$ առանցքները, որոնք S հատույթի հետ շարժվում են անշարժ կոորդինատական Oxy համակարգի նկատմամբ (գծ. 109): Հարթ պատկերի դիրքը, կամ շարժական Cxy համակարգի դիրքը անշարժ Oxy համակարգի նկատմամբ որոշվում է զանգվածների C կենտրոնի $\bar{r}_c(x_c, y_c)$ շառավիղ-վեկտորով և անշարժ Ox ու շարժական Cx առանցքների միջև կազմված φ անկյունով: Հետևաբար, հարթ զուգահեռական շարժում կատարող մարմինն ունի ազատության երեք աստիճան:



Գծ. 109

Դիցուք մարմնի վրա կիրառված են $\bar{F}_1^{(e)}, \bar{F}_2^{(e)}, \ldots, \bar{F}_n^{(e)}$ արտաքին ուժերը: Զանգվածների C կենտրոնի շարժման հավասարումները կազմելու համար կիրառենք համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմը, որն այս դեպքում կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$M\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = \sum_k \bar{F}_k^{(e)} \qquad \text{(I)}$$

որտեղ M-ը մարմնի զանգվածն է, իսկ $\sum\limits_k \bar{F}_k^{(e)}$-ն՝ մարմնի վրա կիրառված արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը:

Պրոյեկտելով (I) վեկտորական հավասարումը Oxy անշարժ կոորդինատական առանցքների վրա՝ կստանանք՝

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = \sum_k F_{kx}^{(e)}, M\frac{d^2y_c}{dt^2} = \sum_k F_{ky}^{(e)} \qquad \text{(II)}$$

Մարմնի շարժումը զանգվածների կենտրոնի շուրջը կարելի է դիտել որպես պտույտ զանգվածների կենտրոնով անցնող և xOy հարթությանն ուղղահայաց հաստատուն ուղղություն ունեցող առանցքի շուրջը: Քանի որ համակարգի շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմը կարելի է կիրառել զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ համակարգի կատարած շարժման համար, նույն տեսքով, ինչ որ անշարժ համակարգի համար, ապա, այդ թեորեմի համաձայն, կունենանք՝

$$J_{cz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_k mom_{cz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right), \qquad \text{(III)}$$

որտեղ J_{cz}-ը մարմնի իներցիայի մոմենտն է զանգվածների կենտրոնով անցնող և xOy հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ:

(II) -ը և (III)-ը պինդ մարմնի հարթ զուգահեռական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներն են: Այս հավասարումների օգնությամբ կարելի է որոշել մարմնի շարժման օրենքը, երբ տված են մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժերը կամ որոշել ազդող արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը, երբ տված է մարմնի շարժման օրենքը:

Ինտեգրելով (II) և (III) հավասարումների համակարգը կստանանք պինդ մարմնի հարթ զուգահեռական շարժման օրենքը.

$$x_c = f_1(t),\ y_c = f_2(t),\ \varphi = f_3(t):$$

Այստեղ առաջին երկու հավասարումները որոշում են զանգվածների կենտրոնի շարժումը, իսկ երրորդ հավասարումը՝ մարմնի պտույտը զանգվածների կենտրոնով անցնող և շարժման հարթությանն ուղղահայաց առանցքի շուրջը: Ինտեգրման հաստատուններր որոշվում են տված նախնական պայմաններից: Նախնական պայմաններում պետք է տված լինեն մարմնի զանգվածների կենտրոնի սկզբնական դիրքի կոորդինատները և սկզբնական արագության պրոյեկցիաները կոորդինատական առանցքների վրա, ինչպես նաև պտտման սկզբնական անկյունը և սկզբնական անկյունային արագությունը:

Եթե մարմինը կատարում է ոչ ազատ շարժում և զանգվածների կենտրոնի շարժման հետագիծը հայտնի է, ապա C կետի շարժման հավասարումները կազմելու համար նպատակահարմար է (I) վեկտորական հավասարումը պրոյեկտել C կետի հետագծի շոշափողի և գլխավոր նորմալի վրա: Այդ դեպքում (II), (III) համակարգի փոխարեն կունենանք հետևյալ համակարգը.

$$M\frac{dv_c}{dt} = \sum_k F_{k\tau}^{(e)},\quad M\frac{v_c^2}{\rho_c} = \sum_k F_{kn}^{(e)},\quad J_{cz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_k mom_{cz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right),$$

որտեղ ρ_c-ն զանգվածների կենտրոնի հետագծի կորության շառավիղն է:

Պինդ մարմնի հարթ զուգահեռական շարժման վերաբերյալ կոնկրետ խնդիրներ լուծելիս երբեմն նպատակահարմար է (II), (III) համակարգի հավասարումներից մեկը փոխարինել համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից ստացվող հավասարումով:

Կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմի կիրառությունը: Կյոնինգի թեորեմի համաձայն՝ պինդ մարմնի հարթ զուգահեռական շարժման դեպքում համակարգի կինետիկ էներգիան կունենա

$$T = \frac{M}{2}\left[\left(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2\right) + \rho_{cz}^2\dot{\varphi}^2\right] \tag{1}$$

տեսքը, որտեղ $v_c = \sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}$ -ն զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, ρ_{cz}-ը՝ մարմնի իներցիայի շառավիղը cz առանցքի նկատմամբ, որն անցնում է զանգվածների կենտրոնով և ուղղահայաց է անշարժ հարթությանը:

Եթե գրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը դիֆերենցիալ տեսքով՝

$$dT = \sum_k \bar{F}_k^{(e)} d\bar{r}_k$$

և (I)-ից տեղադրենք T-ի արժեքը, կստանանք

$$d\frac{M}{2}\left[\left(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2\right)+\rho_{cz}^2\dot{\varphi}^2\right]=\sum_k F_k^{(e)}$$

հավասարումը, որով կարելի է փոխարինել (II), (III) կամ (IV) հավասարումներից որևէ մեկը:

Եթե համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը ներկայացնենք ինտեգրալ տեսքով՝

$$T-T_0=\sum_k A_k^{(e)}$$

ապա (V)-ի փոխարեն կունենանք հետևյալ հավասարումը՝

$$\frac{M}{2}\left[\left(\dot{x}_c^2-\dot{x}_{c0}^2\right)+\left(\dot{y}_c^2-\dot{y}_{c0}^2\right)+\rho_{cz}^2\left(\dot{\varphi}^2-\dot{\varphi}_0^2\right)\right]=\sum_k A_k^{(e)}$$

Եթե մարմինը կատարում է ոչ ազատ շարժում, ապա մարմնի վրա ազդող ակտիվ ուժերին պետք է ավելացնել նաև կապի հակազդումները: Այդ դեպքում մարմնի շարժման (II) և (III) հավասարումները կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned}M\frac{d^2x_c}{dt^2}&=\sum_k F_{kx}^{(e)}+\sum_k N_{kx}^{(e)}\\ M\frac{d^2y_c}{dt^2}&=\sum_k F_{ky}^{(e)}+\sum_k N_{ky}^{(e)}\\ J_{cz}\frac{d^2\varphi}{dt^2}&=\sum_k mom_{cz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right)+\sum_k mom_{cz}\left(\bar{N}_k^{(e)}\right),\end{aligned}\tag{VII}$$

որտեղ $\sum_k N_{kx}^{(e)}$ $\sum_k N_{ky}^{(e)}$-ը բոլոր կապերի հակազդումների պրոյեկցիաների գումարներն են x և y առանցքների վրա, իսկ $\sum_k mom_{cz}\left(\bar{N}_k^{(e)}\right)$-ն կապերի հակազդումների գլխավոր մոմենտն է cz առանցքի նկատմամբ:

(VII) հավասարումների համակարգում անհայտների թիվը մեծ է երեքից: Մարմնի վրա կիրառված կապերը հնարավորություն են տալիս կազմելու համապատասխան լրացուցիչ հավասարումներ: Եթե կապերն իդեալական են և կախված չեն ժամանակից, ապա (V) և (VI) հավասարումների մեջ կապերի անհայտ հակազդումները չեն մտնի, քանի որ այդ կապերի հակազդումների աշխատանքը դառնում է զրո:

Մարմնի հարթ զուգահեռական շարժման վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

ա) ընտրել անշարժ կոորդինատական համակարգը,

բ) նշել մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժերը (ոչ ազատ մարմինն ազատել կապերից՝ կապերը փոխարինելով համապատասխան հակազդումներով), գ) որոշել (VII) հավասարումների աջ մասերը,

դ) որոշել շարժման նախնական պայմանները,

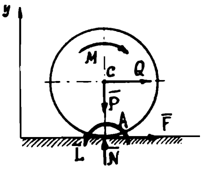
ե) կազմել մարմնի շարժման (VII) հավասարումները,

զ) որոշել կապերի հակազդումները,

է) ինտեգրել ստացված դիֆերենցիալ հավասարումները:

Նախնական պայմանների օգնությամբ գտնել ինտեգրման հաստատունները և ապա որոշել անհայտ մեծությունները: Եթե տված են մարմնի վրա կիրառված արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը, ապա պետք է որոշել մարմնի շարժման օրենքը, իսկ եթե տված է մարմնի շարժման օրենքը, ապա պետք է որոշել մարմնի վրա կիրառված արտաքին ուժերի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը:

Խնդիր 92: P կշիռ և r շառավիղ ունեցող համասեռ շրջանային սկավառակը գլորվում է հորիզոնական հարթությամբ: Սկավառակի վրա կիրառված են իր հարթության մեջ գտնվող M պտտող մոմենտը և սկավառակի կենտրոնում հորիզոնական Q ուժը: Սկավառակի և հարթության միջև եղած սահքի շփման գործակիցը f է, իսկ գլորման շփման գործակիցը՝ k: Որոշել սկավառակի շարժման օրենքը, եթե սկզբնական $t = 0$ պահին նրա պտտման անկյունը և անկյունային արագությունը հավասար են եղել զրոյի (գծ. 110):



Գծ. 110

Լուծում: Սկավառակը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում, քանի որ նրա շարժումը տեղի է ունենում անշարժ վիճակից իր հարթության մեջ գտնվող ուժերի ազդեցության տակ: Սկավառակը կարող է գլորվել ինչպես առանց սահելու, նույնպես և սահելով: Սկավառակի առանց սահքի գլորումը տեղի է ունենում այն դեպքում, երբ սկավառակի և հարթության միջև առաջանում է դրա համար անհրաժեշտ շփման ուժ:

Սկավառակի և հարթության միջև եղած սահքի շփման ամենամեծ ուժը $F_{max} = fN$, որտեղ N-ը նորմալ հակազդումն է: Այն շփման $\bar{F}$ ուժը, որն անհրաժեշտ է առանց սահքի գլորման համար, պարտադիր չէ, որ հավասար լինի ամենամեծ ուժին: Այն կարելի է գտնել սկավառակի հարթ զուգահեռական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներից: Դրա համար էլ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կազմում ենք՝ ընդունելով, որ գլորումը տեղի է ունենում առանց սահքի:

Սկավառակի շարժման հարթության վրա տանենք Oxy կոորդինատական համակարգը, ընդ որում Ox առանցքը վերցնենք հորիզոնական հարթության վրա, Q ուժին զուգահեռ, իսկ Oy առանցքը տանենք այնպես, որ այն անցնի սկավառակի կենտրոնի սկզբնական դիրքով և ուղղահայաց լինի Ox-ին: Գծագիր 110-ում պատկերված է սկավառակը կամայական t պահին: Սկավառակի վրա ազդում են՝ սկավառակի $\bar{P}$ կշիռը, հորիզոնական $\bar{Q}$ ուժը, $\bar{M}$ մոմենտը, որը պտտեցնում է սկավառակը ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ, հարթության $\bar{N}$ նորմալ հակազդումը, սահքի շփման $\bar{F}$ ուժը և գլորման շփման ուժազույգի $\bar{L}$ մոմենտը, որն ունի $\bar{M}$-ին հակառակ ուղղություն:

Սահքի շփման $\bar{F}$ ուժը պետք է ուղղել սկավառակի ստորին կետի արագության հակառակ ուղղությամբ: Բայց շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կազմում են գլորման համար, երբ սահքը բացակայում է: Այս դեպքում սկավառակի ստորին կետի արագությունը հավասարվում է զրոյի, որի հետևանքով սահքի շփման $\bar{F}$ ուժի ուղղությունը դառնում է անհայտ: $\bar{F}$ ուժն ուղղենք Ox-ի դրական ուղղությամբ: Լուծելով խնդիրը՝ կորոշենք $\bar{F}$ ուժի մեծությունը և ուղղությունը: Ուժերի մոմենտների, անկյան և անկյունային արագության դրական ուղղություն ընդունենք ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությունը:

Սկավառակի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները, (II)-ի և (III)-ի համաձայն, կլինեն

$$\frac{P}{\ }\ddot{x}_c = Q + F, \qquad \frac{P}{g}\ddot{y}_c$$

$$J_{c z}\ddot{\varphi} = F \cdot r - M + L. \tag{3}$$

Դիֆերենցիալ հավասարումների այս համակարգը պարունակում է 6 անհայտներ՝ x_c, y_c, φ, F, N, L:

Մարմնի հարթ զուգահեռական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումների այս համակարգը բավարար է միայն ազատ պինդ մարմնի հարթ զուգահեռական խնդրի լուծման համար: Ոչ ազատ պինդ մարմնի դեպքում նշված հավասարումների մեջ մտնում են նաև կապի անհայտ հակազդումներ, որի հետևանքով անհայտների թիվը ավելի մեծ է դառնում երեքից: Մարմնի վրա կիրառված կապերի բնույթը հնարավորություն է տալիս կազմելու համապատասխան թվով լրացուցիչ հավասարումները: Կազմենք այդ հավասարումները:

Քանի որ սկավառակը գլորվում է հորիզոնական հարթության վրայով, ապա կունենանք

$$y_c = const = r. \tag{4}$$

Առանց սահքի գլորման դեպքում սկավառակի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը գտնվում է նրա ստորին A կետում: Հետևաբար, սկավառակի C կենտրոնի արագությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$v_c = r\omega = r$$

$\bar{v}_c$ վեկտորի պրոյեկցիան x առանցքի վրա կլինի՝

$$\dot{x}_c = -r\dot{\varphi}, \tag{5}$$

քանի որ սկավառակը դեպի աջ գլորվելիս նրա կենտրոնի արագության պրոյեկցիան x-ի վրա դրական է, իսկ $\dot{\varphi}$-ը՝ բացասական: Անհրաժեշտ է նշել, որ $\dot{x}_c = -r\dot{\varphi}$ տեղի ունի նաև այն դեպքում, երբ սկավառակը շարժվում է դեպի ձախ, քանի որ այդ դեպքում $\dot{x}_c < 0$, իսկ $\dot{\varphi} > 0$:

Վերջին լրացուցիչ հավասարումը ստանում ենք՝ օգտվելով այն փաստից, որ գլորման դեպքում գլորման շփման զույգի մոմենտը ստանում է իր ամենամեծ արժեքը, այսինքն՝

$$L = L_{max} = kN,$$

որտեղ N-ը հարթության նորմալ հակազդումն է:

Ստացվեց 6 անհայտով 6 հավասարում: Շարժման բնույթը որոշելու համար պետք է գտնել սահքի շփման F ուժը:

(2) և (4)-ից հետևում է, որ

$$\ddot{y}_c = 0, \ N = P: \tag{7}$$

Հետևաբար, (6)-ից կունենանք՝

$$L = kP: \tag{8}$$

Եթե (3)-ից որոշենք $\ddot{\varphi}$-ը և ստացածի մեջ տեղադրենք J_{cz}-ի արժեքը՝

$$J_{cz} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2$$

ապա կստանանք՝

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g(Fr - M + N)}{Pr^2}: \tag{9}$$

(5) հավասարումն ածանցենք ըստ t ժամանակի և ստացած հավասարման աջ մասում տեղադրենք $\ddot{\varphi}$-ի արժեքը (9)-ից, կունենանք՝

$$\ddot{x}_c = -\frac{2g}{P}\left(F - \frac{M}{r} + \frac{L}{r}\right): \tag{10}$$

Եթե $\ddot{x}_c$-ի արժեքը (10)-ից տեղադրենք (1)-ի մեջ և ստացված հավասարումից որոշենք շփման F ուժը, կստանանք՝

$$F = \frac{2M}{3r} - \frac{2L}{3r} - \frac{Q}{3}: \tag{11}$$

Վերջինիս մեջ տեղադրելով $L = kP$ արժեքը՝ կունենանք՝

$$F = \frac{2M}{3r} - \frac{2kP}{3r} - \frac{Q}{3}: \tag{12}$$

Այսպիսով, առանց սահքի գլորման դեպքում սահքի գլորման շփման F ուժի մեծությունը որոշվում է (12) բանաձևով: F-ը կարող է լինել թե դրական և թե բացասական: Եթե այն դրական է, ապա շփման $\bar{F}$ ուժն ուղղված կլինի այնպես, ինչպես ենթադրված է, այսինքն x-ի դրական ուղղությամբ: Բացասական արժեքի դեպքում F-ը ուղղված կլինի ենթադրված ուղղությանը հակառակ, այսինքն՝ x-ի բացասական ուղղությամբ:

Սկավառակի շարժման բնույթը որոշելու համար պետք է F-ի այն արժեքը, որի դեպքում տեղի է ունենում առանց սահքի գլորում, համեմատել սահքի շփման ուժի ամենամեծ ($F_{max} = fN = fP$) արժեքի հետ:

Առանց սահքի գլորում տեղի կունենա, երբ $|F| \le F_{max}$ և սահքով գլորում, երբ $|F| > F_{max}$: Այստեղ վերցված է F-ի բացարձակ արժեքը, քանի որ F-ը, (12) բանաձևի համաձայն, կարող է լինել նաև բացասական: $F = F_{max}$ -ի դեպքում սկավառակի շարժումը համարում ենք առանց սահքի գլորում, քանի որ տեղի ունի $\dot{x}_c = -r\dot{\varphi}$ հավասարումը:

Եթե F-ի արժեքը (12)-ից տեղադրենք (9) և (10)-ի մեջ և կատարենք նշված գործողությունները, կստանանք

$$\ddot{x}_c = \frac{2g}{3rP}\left(M + 2kP + Qr - 3L\right), \qquad (13)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2g}{3r^2P}\left(Qr + M + 2kP - 3L\right):$$

(13) և (14) հավասարումների աջ մասերը հաստատուն են: Եթե ինտեգրենք այդ հավասարումները և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ

$$x_c\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}_c\big|_{t=0} = 0,$$

$$\varphi\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{\varphi}\big|_{t=0} = 0$$

նախնական պայմանները, ապա կստանանք խնդրի պատասխանը:

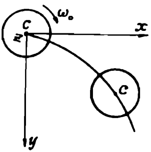
Պատ. $$X_c = \frac{g}{3rP}\left(M + 2kP + Qr - 3L\right)t^2$$

$$\varphi = \frac{g}{3r^2P}\left(M + 2kP + Qr - 3L\right)t^2:$$

Խնդիրներ

Ստորև բերվում են հարթ զուգահեռական շարժման վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումներ:

Խնդիր 93 (39.2): Սկավառակը ընկնում է ուղղաձիգ հարթության մեջ ծանրության ուժի ազդեցության տակ: Սկզբնական պահին սկավառակին հաղորդվել է ω_0 անկյունային արագություն, իսկ կոորդինատների սկզբնակե-



տում գտնվող նրա ծանրության C կենտրոնն ունեցել է Ox առանցքով ուղղված V_0 սկզբնական արագություն: Գտնել սկավառակի շարժման հավասարումները: x, y առանցքները պատկերված են գծագրի վրա: Դիմադրության ուժերն արհամարհել (գծ. 111):

Լուծում: Սկավառակը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Սկավառակի վրա ազդում է միայն մի արտաքին ուժ՝ նրա $M\bar{g}$ կշիռը: Սկավառակի հարթ զուգահեռական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները. (II)-ի և (III)-ի համաձայն, կլինեն՝

$$M\ddot{x}_c = 0, \quad (1) \qquad M\ddot{y}_c = Mg, \quad (2) \qquad J_{Cz}\ddot{\varphi} = mom_{Cz}\left(M\bar{g}\right),$$

որտեղ J_{Cz}-ը սկավառակի իներցիայի մոմենտն է զանգվածների C կենտրոնով անցնող և C_{xy} հարթությանն ուղղահայաց Cz առանցքի նկատմամբ, իսկ $mom_{Cz}\left(M\bar{g}\right)$-ն $M\bar{g}$ ուժի մոմենտն է Cz առանցքի նկատմամբ: Այստեղ φ-ն սկավառակի սկզբնական պահին հորիզոնական դիրք ունեցող տրամագծի և x առանցքի կազմած անկյունն է:

Դժվար չէ նկատել, որ

$$mom_{Cz}\left(Mg\right) = 0,$$

քանի որ $M\bar{g}$-ն անցնում է C կետով: Եթե $mom_{Cz}\left(M\bar{g}\right)$-ի արժեքը տեղադրենք (3)-ի մեջ, ապա (1), (2), (3) հավասարումները կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\ddot{x}_c = 0, \ \ddot{y}_c = g, \ \ddot{\varphi} = 0:$$

Ինտեգրելով (5) համակարգը և նկատի ունենալով

$$\dot{x}|_{t=0} = v_0, \ \dot{y}|_{t=0} = 0, \ \dot{\varphi}|_{t=0} = \omega_0,$$

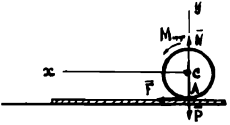
$$_{t=0} = 0, \quad \varphi_{t=0} = 0$$

սկզբնական պայմանները՝ կստանանք $x_c = v_0 t, y_c = \frac{gt^2}{2}, \varphi = \omega_0 t:$

Պատ. $x_c = v_0 t, y_c = \frac{gt^2}{2}, \varphi = \omega_0 t$, որտեղ φ-ն սկավառակի սկզբնական պահին հորիզոնական դիրք ունեցող տրամագծի և x առանցքի կազմած անկյունն է:

Խնդիր 94 (39.9): r շառավիղ ունեցող անիվը գլորվում է ուղղագիծ հորիզոնական ռելսի վրայով $M_{պտ} = \frac{5}{2} f Pr$ պտտող մոմենտի ազդեցության տակ, որտեղ f-ը սահքի շփման գործակիցն է, իսկ P-ն՝ անիվի կշիռը: Որոշել անիվի այն կետի արագությունը, որը հպվում է ռելսին: Անիվի զանգվածը նրա շրջանակի վրա բաշխված է հավասարաչափ: Գլորման շփումն արհամարհել: Սկզբնական պահին անիվը գտնվել է հանգստի վիճակում (գծ.112):

Լուծում: Անիվը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Տանենք Axy կոորդինատական համակարգը գծագրում ցույց տրված ձևով: Անիվի վրա ազդում են՝ անիվի $\overline{P}$ կշիռը, $M_{\text{պտ}}$ մոմենտը, որը պտտեցնում է անիվը ժամացույցի սլաքի հակառակ ուղղությամբ, ռելսի $\overline{N}$ նորմալ հակազդումը և սահքի շփման $\overline{F}$ ուժը, որն ուղղված է x-ի դրական ուղղությամբ (A կետի արագությունն ուղղված է x առանցքի բացասական ուղղությամբ):



Գծ. 112

Անիվի հարթ զուգահեռական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները, (II) և (III) բանաձևերի համաձայն, կլինեն՝

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = F \quad (1) \qquad \frac{P}{g}\ddot{y}_c = N - P, \qquad J_c\ddot{\varphi} = \sum_k mom_c\left(F_k^{(e)}\right),$$

որտեղ J_c -ն անիվի իներցիայի մոմենտն է զանգվածների C կենտրոնով և (xy) հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, իսկ (3)-ի աջ մասը անիվի վրա ազդող արտաքին ուժերի մոմենտների գումարն է այդ նույն առանցքի նկատմամբ: $\overline{P}$ կշռի և $\overline{N}$ հակազդման մոմենտները C առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի , քանի որ նրանց ազդման գծերը հատում են այդ առանցքը: Հետևաբար, կունենանք՝

$$\sum_k mom_c\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) = \qquad (4)$$

Այստեղ որպես մոմենտի դրական ուղղություն ընդունված է ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությունը:

Բարակ շրջանային օղակի իներցիայի մոմենտի համար ունենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$J_c = \frac{P}{g}r^2 :$$

(4)-ի և (5)-ի համաձայն՝ (3)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{P}{g}r^2\ddot{\varphi} = M_{\text{պտ}} - Fr : \qquad (6)$$

Եթե (1)-ի և (6)-ի մեջ տեղադրենք

$$M_{\text{պտ}} = \frac{5}{2}fPr, \quad F = fP$$

արժեքները, կստանանք՝

$$\ddot{x}_c = fg, \quad \ddot{\varphi} = \frac{3fg}{2r}:$$

Անիվի կանգվածների C կենտրոնը շարժվում է ուղղագիծ, ուստի՝

$$y_c = r = const: \qquad (8)$$

Եթե մեկ անգամ ինտեգրենք (7) հավասարումները, նկատի ունենալով

$$\dot{x}_c\big|_{t=0} = v_c\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{\varphi}_{t=0} = \omega_{t=0} = 0$$

նախնական պայմանները՝ կստանանք՝

$$v_c = fgt, \quad \omega = \frac{3}{2}\cdot\frac{fgt}{r}:$$

Անիվի և ռելսի հպման կետի արագությունը որոշելու համար օգտվենք հարթ պատկերի կետերի արագությունների որոշման հետևյալ բանաձևից՝

$$(10)$$

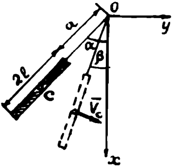
որտեղ $\bar{v}_{AC}$-ն A կետի՝ C բևեռի շուրջը պտույտից առաջացած արագության վեկտորն է: Քանի որ $\bar{v}_C$-ն և $\bar{v}_{AC}$-ն ունեն հակառակ ուղղություններ (գծ. 112), ընդ որում՝

$$v_c = fgt, \qquad r = -\frac{3}{2}fgt,$$

$$v_A = fgt - \frac{3}{2}fgt = -\frac{1}{2}fgt:$$

Պատ. Անիվի և ռելսի հպման կետը շարժվում է անիվի կենտրոնի շարժման հակառակ ուղղությամբ $\frac{1}{2}fgt$ արագությամբ:

Խնդիր 95: M զանգված և $2l$ երկարություն ունեցող համասեռ ձողն իր մի ծայրով a երկարություն ունեցող թելի միջոցով կախված է O անշարժ կետից:



Գծ. 113

Ձողը և թելը միասին շեղվում են ուղղաձիգ դիրքից α անկյունով և բաց թողնվում առանց սկզբնական արագության: Ձողն սկսում է շարժվել դեպի աջ: Որոշ ժամանակ անց, երբ ձողն ուղղաձիգի հետ կազմում է β ($\beta<\alpha$) անկյուն, թելը կտրվում է: Որոշել ձողի շարժման օրենքը թելի կտրվելուց հետո: Թելի զանգվածն արհամարհել (գծ. 113):

Լուծում: Ձողը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Ձողի վրա ազդում է միայն մի արտաքին ուժ՝ ձողի ծանրության $M\bar{g}$ ուժը:

Տանենք կոորդինատական Oxy անշարժ համակարգը գծագրում ցույց տրված ձևով:

Ձողի հարթ զուգահեռական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները, (II) և (III) բանաձևերի համաձայն, կլինեն՝

$$M\ddot{x}_c = Mg,\ M\ddot{y}_c = 0,\ J_{cz}\ddot{\varphi} = 0: \qquad (1)$$

Ինտեգրելով այս դիֆերենցիալ հավասարումները՝ կստանանք՝

$$\dot{x}_c = gt + C_1,\ \dot{y}_c = C_2,\ \dot{\varphi} = C_3, \qquad (2)$$

$$x_c = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_4,\ y_c = C_2 t + C_5,$$

$$\varphi = C_3 t + C_6 \qquad (3)$$

որտեղ $C_1, C_2, \dots, C_6$-ը ինտեգրման հաստատուններն են, որոնց որոշելու համար անհրաժեշտ է օգտվել նախնական պայմաններից: Դրա համար գտնենք ձողի անկյունային արագությունը, զանգվածների կենտրոնի կոորդինատները և արագության պրոյեկցիաները կոորդինատական x, y առանցքների վրա, թելի կտրվելու պահին:

Եթե գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ ձողի սկզբնական արագությունը եղել է զրո, ապա կունենանք՝

$$T = \sum_k A_k^{(e)} \qquad (4)$$

որտեղ $\sum_k A_k^{(e)}$-ն արտաքին ուժերի աշխատանքների գումարն է: Ձողի վրա ազդում է միայն նրա $M\bar{g}$ կշիռը, հետևաբար կունենանք՝

$$\sum_k A_k^{(e)} = Mg(a+l)(\cos\beta - \cos\alpha): \qquad (5)$$

Ձողը կատարում է պտույտ Oz առանցքի շուրջը: Հետևաբար, ձողի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T = \frac{1}{2} J_{oz}\omega^2, \qquad (6)$$

որտեղ J_{oz}-ը ձողի իներցիայի մոմենտն է O կենտրոնով անցնող և Oxy հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, իսկ ω-ն՝ ձողի պտտման անկյունային արագությունն է թելի կտրման պահին: Հյուգենսի թեորեմի համաձայն կունենանք՝

$$J_{oz} = J_{cz} + M(a+l)^2: \qquad (7)$$

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից ձողի համար ունենք՝

$$J_{cz} = \frac{1}{3} Ml^2: \qquad (8)$$

Օգտվելով (6)-ից, (7)-ից և (8)-ից՝ կստանանք՝

$$T = \frac{1}{6} M\omega^2\left[l^2 + 3(a+l)^2\right]: \qquad (9)$$

Եթե $\sum_k A_k^{(e)}$ -ի և T-ի արժեքները (5)-ից և (9)-ից տեղադրենք (4)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\frac{1}{6} M\omega^2\left[l^2 + 3(a+l)^2\right] = Mg(a+l)(\cos\beta - \cos\alpha):$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\omega_0 = \dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{6g(a+l)(\cos\beta - \cos\alpha)}{l^2 + (a+l)^2}}$$

Ձողի զանգվածների կենտրոնի կոորդինատները թելի կտրվելու պահին կլինեն՝

$$x_{c0} = (a+l)\cos\beta, \ y_{c0} = (a+l)\sin\beta, \qquad (12)$$

իսկ արագության պրոյեկցիաները՝

$$\dot{x}_{c0} = -(a+l)\omega\sin\beta, \ \dot{y}_{c0} = (a+l)\omega\cos\beta: \qquad (13)$$

Ձողի և x առանցքի կազմած անկյունը թելը կտրվելու պահին եղել է

$$\varphi_0 = \beta: \qquad (14)$$

Այսպիսով՝ $C_1, C_2, \quad , C_6$ ինտեգրման հաստատունները որոշելու համար կարող ենք օգտվել հետևյալ նախնական պայմաններից՝

$$x_c\big|_{t=0} = x_{c0}, \ y_c\big|_{t=0} = y_{c0}, \ \varphi\big|_{t=0} = \beta,$$

$$\dot{x}_c\big|_{t=0} = \dot{x}_{c0}, \ \dot{y}_c\big|_{t=0} = \dot{y}_{c0}, \ \dot{\varphi}\big|_{t=0} = \omega_0 , \qquad (15)$$

որտեղ $x_{c0}, y_{c0}, \dot{x}_{c0}, \dot{y}_{c0}, \omega_0$ հաստատունների արժեքները որոշվում են (11)-(13) բանաձևերով: Տեղադրելով (11)-(13) և (15) բանաձևերը (2)-ի և (3)-ի մեջ՝ կստանանք ինտեգրման հաստատունները՝

$$C_1 = -(a+l)\omega\sin\beta, \ C_2 = (a+l)\omega\cos\beta, \ C_3 = \omega,$$

$$C_4 = (a+l)\cos\beta, \ C_5 = (a+l)\sin\beta, \ C_6 = \beta:$$

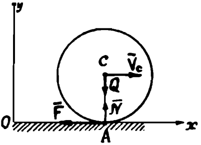
Տեղադրելով $C_1, C_2, \quad , C_6$ հաստատունների արժեքները (3)-ի մեջ՝ կստանանք ձողի շարժման օրենքը թելի կտրվելուց հետո:

Պատ. $x_c = \frac{gt^2}{2} - (a+l)(\omega t\sin\beta - \cos\beta),$

$$y_c = (a+l)(\omega t\cos\beta + \sin\beta), \ \varphi = \omega t + \beta,$$

որտեղ՝ $\omega = \sqrt{\frac{6g(a+l)(\cos\beta - \cos\alpha)}{l^2 + (a+l)^2}}:$

Խնդիր 96: Համասեռ սկավառակն իր կողով դրված է ոչ ողորկ հորիզոնական հարթության վրա: Սկավառակին հաղորդվում է այդ հարթությանը զուգահեռ $\bar{v}_0$ արագությամբ համընթաց շարժում: Որոշել սկավառակի կենտրոնի արագությունը այն պահին, երբ այն սկսում է գլորվել առանց սահքի (գծ. 114):



Գծ. 114

Լուծում: Սկավառակը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Նրա վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ սկավառակի $\bar{Q}$ կշիռը, հարթության $\bar{N}$ նորմալ հակազդումը և սահքի շփման $\bar{F}$ ուժը:

Սկավառակի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները նրան հրելուց անմիջապես հետո կլինեն՝

$$m\ddot{x}_C = -F, \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = Q - N, \qquad (2)$$

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = -Fr, \qquad (3)$$

որտեղ J_{Cz}-ը սկավառակի իներցիայի մոմենտն է զանգվածների C կենտրոնով անցնող և xy հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ: Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից ունենք՝

$$J_{Cz} = \frac{1}{2}mr^2: \qquad (4)$$

Սկավառակի զանգվածների կենտրոնը կատարում է ուղղագիծ շարժում, հետևաբար՝

(5)

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\ddot{y}_C = 0:$$

(6)-ից և (2)-ից կստանանք $N = Q$: Հետևաբար շփման ուժը կլինի՝

$$F = fQ, \qquad (7)$$

որտեղ f-ը սկավառակի և հորիզոնական հարթության շփման գործակիցն է:

Օգտվելով (4), (7) առնչություններից և $N = Q$ հավասարությունից՝ (1) և (3) հավասարումները կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\ddot{x}_C = -fg, \ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2fg}{r}$$

Մեկ անգամ ինտեգրելով ստացված հավասարումները՝ կստանանք՝

$$\dot{x}_C = -fgt + v_0,\quad \omega = -\frac{2fgt}{r} + \omega_0, \qquad (9)$$

որտեղ v_0-ն սկավառակի կենտրոնի սկզբնական արագությունն է, իսկ ω_0-ն՝ սկավառակի սկզբնական անկյունային արագությունը:

Այն պահից սկսած, երբ սկավառակը կատարում է առանց սահքի գլորում, նրա և հարթության շոշափման A կետի արագությունը կլինի զրո: Հետևաբար

$$v_A = \dot{x}_C + \omega r = 0: \qquad (10)$$

$\dot{x}_C$ և ω-ի արժեքները (9)-ից տեղադրելով (10)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$-3fgt + 2v_0 = 0 \qquad (11)$$

հավասարումը, որտեղից՝

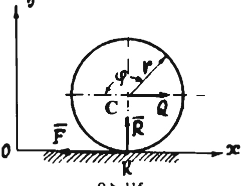
$$t_1 = \frac{2v_0}{3fg} \qquad (12)$$

t_1-ն այն ժամանակամիջոցն է, որից հետո սկավառակն սկսում է գլորվել առանց սահքի: t_1-ի արժեքը (12)-ից տեղադրելով (9)-ի առաջին հավասարման մեջ, կորոշենք սկավառակի կենտրոնի արագությունն այն պահին, երբ նա սկսում է գլորվել առանց սահքի՝

$$v_C\Big|_{t=t_1} = \dot{x}_C\Big|_{t=t_1} = -fgt_1 + v_0 = \frac{1}{3}v_0$$

Պատ. $\frac{1}{3}v_0$:

Խնդիր 97: P կշիռ և r շառավիղ ունեցող ավտոմեքենայի անիվը շարժվում է հավասարաչափ և ուղղագիծ: Անիվի առանցքի վրա կիրառված է $\overline{Q}$ հորիզոնական ուժը: Անիվի իներցիայի շառավիղը, անիվի ծանրության կենտրոնով անցնող և նրա հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ հավասար է ρ-ի: Անիվի և գետնի միջև սահքի շփման գործակիցը հավասար է f-ի: Ի՞նչ պայմանի պետք է բավարարի Q ուժը, որպեսզի անիվը գլորվի առանց սահելու: Գլորման դիմադրությունն անտեսել (գծ. 115):



Գծ. 115

Լուծում: Անիվը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Կոորդինատական Oxy առանցքները տանենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում:

Անիվի վրա կիրառված են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ անիվի $\overline{P}$ կշիռը, հորիզոնական $\overline{Q}$ ուժը, գետնի $\overline{R}$ նորմալ հակազդումը և շփման $\overline{F}$ ուժը, որը կիրառված է անիվի և գետնի շոշափման k կետում և ուղղված է անիվի պտտման հակառակ ուղղությամբ:

Անիվի հարթ զուգահեռական շարժման հավասարումները, (II) և (III) բանաձևերի համաձայն կլինեն

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = Q - F,$$

$$\frac{P}{g}\ddot{y}_c = \qquad (2)$$

$$\frac{P}{g}\rho^2\ddot{\varphi} = \sum_k mom_{cz}\left(\bar{F}_k^{(e)}\right) \qquad (3)$$

որտեղ (3)-ի աջ մասը անիվի վրա կիրառված արտաքին ուժերի մոմենտների գումարն է զանգվածների կենտրոնով անցնող և գծագրի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ: Դժվար չէ նկատել, որ $\bar{R}$ հակազդման, $\bar{P}$ կշռի և $\bar{Q}$ ուժի մոմենտները Cz առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի, քանի որ նրանց ազդման գծերն անցնում են C կետով: Շփման $\bar{F}$ ուժի մոմենտը Cz առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$mom_{cz}(\bar{F}) = F\cdot r:$$

Այստեղ որպես դրական ուղղություն ընդունված է անիվի պտտման ուղղությունը: Հետևաբար, կունենանք՝

$$\sum_k mom_{cz}(\bar{F}_k^{(e)}) = F\cdot r:$$

(4) -ի համաձայն՝ (3)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{P}{g}\rho^2\ddot{\varphi} = Fr \qquad (5)$$

Խնդիրը լուծելու համար (1), (2) և (5) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգին անհրաժեշտ է ավելացնել լրացուցիչ հավասարումներ: Կազմենք այդ հավասարումները:

Անիվի զանգվածների կենտրոնը կատարում է ուղղագիծ շարժում, հետևաբար՝

$$y_c = r:$$

Քանի որ անիվը գլորվում է առանց սահելու, ապա անիվի և գետնի հպման կետը կլինի պտտման ակնթարթային կենտրոն: Զանգվածների կենտրոնով անցնող և գծագրի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի շուրջը անիվի կատարած պտտման անկյունը նշանակենք φ -ով: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$x_c = r\varphi:$$

(6), (7)-ի համաձայն՝ (1) և (2) հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը

$$\frac{P}{g} r \ddot{\varphi} = Q - F \qquad (8)$$

$$R = P:$$

Եթե (5)-ից $\ddot{\varphi}$-ի արժեքը տեղադրենք (8)-ի մեջ, կստանանք՝

$$Fr^2 = Q\rho^2 - F\rho^2:$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$Q = F\frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2}:$$

Անիվն առանց սահքի գլորվելու համար պետք է անիվի և գետնի միջև եղած շփման ուժի մեծությունը չգերազանցի սահքի շփման ամենամեծ ուժին, այսինքն՝

$$F \le fN,$$

որտեղ N-ը նորմալ ճնշման ուժն է: Դժվար չէ նկատել, որ մեծությամբ $N = R$-ի, իսկ (9)-ի համաձայն՝ $R = P$: Հետևաբար, $N = P$: Եթե N-ի արժեքը տեղադրենք (11)-ի մեջ, կունենանք՝

$$F \le fP:$$

(12)-ի համաձայն՝ (10)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

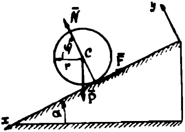
$$Q \le fP\frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2}:$$

Պատ. Որպեսզի անիվը գլորվի առանց սահելու, Q ուժը պետք է բավարարի $Q \le fP\dfrac{r^2 + \rho^2}{\rho^2}$ պայմանին:

Խնդիր 98 (39.11(1087)): Հորիզոնական առանցք ունեցող համասեռ գլանը գլորվում է սեփական կշռի ազդեցության տակ, f շփման գործակից ունեցող թեք հարթության վրայով: Որոշել հորիզոնի նկատմամբ հարթության թեքության անկյունը և գլանի առանցքի արագացումը նրա շարժման ժամանակ, սահքի բացակայության պայմաններում: Գլորման դիմադրությունն անտեսել:

Լուծում: Գլանը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Կոորդինատական համակարգի O սկզբնակետը տեղավորենք գլանի հավասարակշռության դիրքում՝ նրա և թեք հարթության շոշափման կետում: Ox առանցքն ուղղենք թեք հարթությունով, իսկ Oy առանցքը՝ ուղղահայաց նրան (գծ. 116):

Դիտարկենք գլանի դիրքը ժամանակի կամայական պահին և նշենք նրա վրա ազդող ուժերը: Գլանի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ գլանի $\bar{P}$



Գծ. 116

կշիռը, թեք հարթության $\bar{N}$ հակազդումը, որի ազդման գիծն անցնում է գլանի ծանրության C կենտրոնով, սահքի շփման F ուժը, որն ուղղված է թեք հարթությունով դեպի շարժման հակառակ կողմը:

Եթե արհամարհենք գլորման դիմադրությունը և որպես $\bar{F}$ ուժի մոմենտի դրական ուղղություն ընդունենք գլանի պտտման ուղղությունը, ապա գլանի հարթ զուգահեռական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները, (II) և (III) բանաձևերի համաձայն, կլինեն.

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = P\sin\alpha - F, \qquad -\ddot{y}_c = -P\cos\alpha + N, \quad (2)$$

$$J_{c}\phi = Fr: \quad (3)$$

Այստեղ J_{C}-ը գլանի իներցիայի մոմենտն է նրա ծանրության կենտրոնով անցնող և xoy հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ: Այս երեք դիֆերենցիալ հավասարումներում կան հինգ անհայտներ՝ x_c, y_c, φ, N, F: Հետևաբար, անհրաժեշտ է ունենալ ևս երկու լրացուցիչ հավասարումներ:

Քանի որ գլանը գլորվում է առանց սահելու, ուստի կունենանք՝

$$v_c = \dot{x}_c = r\dot{\phi}: \quad (4)$$

Եթե նկատի ունենանք

$$x_c\big|_{t=0} = 0, \quad \varphi\big|_{t=0} = 0$$

նախնական պայմանները, ապա (4)-ից կստանանք՝

$$x_c = r\varphi$$

Այս լրացուցիչ պայմանին կարելի է ավելացնել նաև

$$y_c = r \quad (6)$$

պայմանը:

(6)-ից հետևում է, որ $\ddot{y}_c = 0$: Եթե այս արժեքը տեղադրենք (2)-ի մեջ և ստացված հավասարումը լուծենք N-ի նկատմամբ, կստանանք՝

$$N = P\cos\alpha: \quad (7)$$

Քանի որ առանց սահքի գլորման դեպքում $x_c = r\varphi$, ուստի $\ddot{x} = r\ddot{\phi}$, որը տեղադրելով (3) հավասարման մեջ և միաժամանակ նկատի ունենալով, որ $= \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2$, կունենանք՝

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}\ddot{x}_c = \quad (8)$$

Տեղադրելով F -ի արժեքը (8)-ից (1)-ի մեջ՝ կորոշենք գլանի ծանրության կենտրոնի անհայտ արագացումը՝

$$\ddot{x}_c = W = \frac{2}{3} g \sin\alpha :$$

$_c$ -ի արժեքը (9)-ից տեղադրելով (8)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$F = \frac{1}{3} P \sin\alpha : \qquad (10)$$

Սա կլինի սահքի շփման այն ուժը, որը պետք է կիրառված լինի գլանի վրա, որպեսզի այն գլորվի առանց սահելու:

Որպեսզի գլանը գլորվի թեք հարթության վրայով առանց սահելու, անհրաժեշտ է, որ շփման F ուժը բավարարի հետևյալ պայմանին՝

$$F \le fN, \qquad (11)$$

որտեղ f -ը շփման գործակիցն է: Եթե այս անհավասարության մեջ տեղադրենք N -ի և F -ի արժեքները (7) և (11)-ից, կստանանք, որ գլանը միայն կգլորվի, երբ տեղի ունենա հետևյալ պայմանը՝

$$\frac{1}{3} P \sin\alpha \le fP\cos\alpha$$

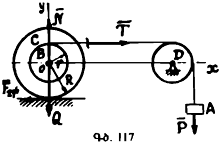
կամ՝

$$f \ge \frac{1}{3} tg\alpha,$$

որտեղից՝ $\alpha \le arg\, tg 3f$

Պատ. $\alpha \le arg\, tg 3f$, $W = \frac{2}{3} g \sin\alpha$:

Խնդիր 99(1091): B թմբուկին փաթաթված անձգելի թելը գցված է անշարժ D ճախարակի վրայով: Թելի ծայրին ամրացված P կշիռ ունեցող A բեռն իջնելով ցած՝ ստիպում է C անիվին գլորվել հորիզոնական ռելսի վրայով առանց սահելու: r շառավիղ ունեցող B թմբուկը կոշտ միացված է R շառավղով C անիվին, նրանց ընդհանուր կշիռը հավասար է Q -ի, իսկ իներցիայի շառավիղը Oz առանցքի նկատմամբ՝ ρ -ի: Որոշել A բեռի արագացումը՝ անտեսելով թելի կշիռը (գծ.117):



Գծ. 117

Լուծում: Թմբուկը անիվի հետ կատարում է հարթ-զուգահեռական շարժում: Նրանց վրա կիրառված են՝ $\bar{Q}$ կշիռը, սահքի շփման $\bar{F}$ ուժը, $\bar{N}$ նորմալ հակազդումը և թելի լարման $\bar{T}$ ուժը:

Թմբուկի հարթ-զուգահեռական շարժման դիֆերենցիալ հավասարում-ները, (II) և (III) բանաձևերի համաձայն, կլինեն՝

$$\frac{Q}{g}\ddot{x}_c = -F + T,$$

$$\frac{Q}{g}\ddot{y}_c = N - Q, \qquad (2)$$

$$\frac{Q}{g}\rho^2\ddot{\varphi} = \sum_k mom_{oz}(\overline{F}_k^{(e)}), \qquad (3)$$

որտեղ (3)-ի աջ մասը անիվի վրա կիրառված արտաքին ուժերի մոմենտների գումարն է թմբուկի O կենտրոնով անցնող և գծագրի հարթությանն ուղղահայաց oz առանցքի նկատմամբ (z առանցքը գծագրի վրա չի նշված): Ակնհայտ է, որ $\overline{Q}$ կշռի և $\overline{N}$ հակազդման մոմենտները oz առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի, քանի որ նրանց ազդման գծերն անցնում են O կետով: Սահքի շփման F և թելի լարման $\overline{T}$ ուժերի մոմենտներն oz առանցքի նկատմամբ կլինեն՝

$$mom_{oz}(F) = F \cdot R,$$

$$mom_{oz}(\overline{T}) = T \cdot r:$$

$$\sum_k mom_{oz}(\overline{F}_k^{(e)}) = F \cdot R + Tr \qquad (4)$$

Այստեղ որպես դրական ուղղություն ընդունված է ժամացույցի սլաքի պտտման ուղղությունը:

Թմբուկի զանգվածների կենտրոնը կատարում է ուղղագիծ շարժում, այսինքն՝

$$y_c = 0$$

Առանց սահքի գլորման դեպքում C անիվի արագությունների ակնթար-թային կենտրոնը գտնվում է նրա ստորին K կետում: Հետևաբար, անիվի կենտրոնի արագությունը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$v_c = R\omega = r|\dot{\varphi}|$$

v_c վեկտորի պրոյեկցիան x առանցքի վրա կորոշվի

$$x_c = R\varphi \qquad (6)$$

բանաձևով, քանի որ անիվի կենտրոնի արագության պրոյեկցիան X -ի վրա դրական է, - φ -ը՝ դրական:

(4), (5) և (6)-ի հիման վրա (1), (2) և (3) հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{Q}{g}R\dot{\varphi} = -$$

$$N - Q = 0,$$

$$\frac{Q}{g}\rho^2\varphi = FR + Tr:$$

Եթե (7)-ից որոշենք շփման F ուժը և տեղադրենք (9)-ի մեջ, կստանանք

$$\frac{Q}{g}(R^2 + \rho^2)\varphi = (R + r)T:$$

Այստեղից ստացվում է

$$T = \frac{Q}{g}\frac{R^2 + \rho^2}{R + \rho}\varphi:$$

Եթե նկատի ունենանք, որ թմբուկի պտտական շարժման տանգենցյալ արագացումը հավասար է A բեռի արագացմանը, ապա կունենանք

$$W_A = (R + r)\varphi,$$

$$T = \frac{Q}{g}\frac{R^2 + \rho^2}{(R + r)^2}W_A:$$

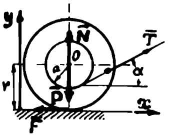
Գրենք բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{P}{g}W_A = P - T:$$

Մնում է T-ի արժեքը (12)-ից տեղադրել (13)-ի մեջ և կատարել նշված գործողությունները:

Պատ. $W_A = g\dfrac{P(R + r)^2}{Q(R^2 + \rho^2) + P(R + r)^2}:$

Խնդիր 100 [39.16 (1090)]: Հորիզոնական ոչ ողորկ հատակի վրա գտնվող r շառավիղ և P կշիռ ունեցող համասեռ գլդոնի թմբուկի վրա փաթաթված է թել, որի վրա կիրառված է հորիզոնի հետ α անկյուն կազմող ուժը: Թմբուկի շառավիղը a է, գլդոնի իներցիայի շառավիղը՝ ρ: Որոշել գլդոնի O առանցքի շարժման օրենքը և հակազդումը: Սկզբնական պահին գլդոնը գտնվել է հանգստի վիճակում և այնուհետև գլորվել է առանց սահելու (գծ.118):



Գծ. 118

Լուծում: Գլդոնը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Տանենք կոորդինատական Oxy համակարգը: Ox-ը վերցնենք հորիզոնական ուղղությամբ՝ ուղղված դեպի աջ, իսկ Oy-ը՝ ուղղահայաց Ox-ին և ուղղված դեպի վեր: Գլդոնի վրա կիրառված են հետևյալ արտաքին ուժերը գլդոնի $\bar{P}$ կշիռը, հատակի $\bar{N}$ հակազդումը, թմբուկի վրա կիրառված $\bar{T}$ ուժը և հատակի ու գլդոնի շփման $\bar{F}$ ուժը, որն ուղղված է x առանցքի բացասական ուղղությամբ:

Գլդոնի հարթ զուգահեռական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները, (II)-ի և (III) -ի համաձայն, կլինեն՝

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_o =$$

$$\frac{P}{g}\ddot{y}_o = \qquad (2)$$

$$\frac{P}{g}\rho^2\ddot{\varphi} = \sum_k mom_{oz}(\bar{F}_k^{(e)}) \qquad (3)$$

Այստեղ որպես դրական ուղղություն ընդունված է ժամացույցի սլաքի պտտման ուղղությունը:

Թմբուկի զանգվածների կենտրոնը կատարում է ուղղագիծ շարժում, այսինքն՝

$$y_c = 0:$$

Առանց սահքի գլորման դեպքում C անիվի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը գտնվում է նրա ստորին K կետում: Հետևաբար, անիվի կենտրոնի արագությունը կարտահայտվի հետևյալ բանաձևով՝

$$v_c = R\omega = r\dot{\varphi}$$

$\bar{v}_c$ վեկտորի պրոյեկցիան x առանցքի վրա կորոշվի

$$x_c = R\varphi \qquad (6)$$

բանաձևով, քանի որ անիվի կենտրոնի արագության պրոյեկցիան X -ի վրա դրական է, $\dot{\varphi}$ -ը՝ դրական:

(4), (5) և (6)-ի հիման վրա (1), (2) և (3) հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{Q}{g}R\ddot{\varphi} = - \qquad (7)$$

$$N - Q = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{Q}{g}\rho^2\ddot{\varphi} = FR + Tr: \qquad (9)$$

Եթե (7)-ից որոշենք շփման F ուժը և տեղադրենք (9)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\frac{Q}{g}(R^2 + \rho^2)\ddot{\varphi} = (R + r)T:$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$T = \frac{Q}{g}\frac{R^2+\rho^2}{R+\rho}\dot{\varphi}:$$

Եթե նկատի ունենանք, որ թմբուկի պտտական շարժման արագացումը հավասար է A բեռի արագացմանը, ապա կունենանք՝

$$W_A = (R+r)$$

$$T = \frac{Q}{g}\frac{R^2+\rho^2}{(R+r)^2}W_A:$$

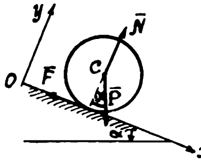
Գրենք բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{P}{g}W_A = P - T:$$

Մնում է T-ի արժեքը (12)-ից տեղադրել (13)-ի մեջ և կատարել նշված գործողությունները:

Պատ. $W_A = g\dfrac{P(R+r)^2}{Q(R^2+\rho^2)+P(R+r)^2}$:

Խնդիր 101: P կշիռ և R շառավիղ ունեցող շրջանային գլանը գլորվում է ոչ ողորկ թեք հարթության վրայով, դադարի վիճակից առանց սահելու: Հարթության թեքության անկյունը հորիզոնի նկատմամբ հավասար է α-ի: Գտնել գլանի զանգվածների կենտրոնի շարժման օրենքը (գծ.119):



Գծ. 119

Լուծում: Գլանը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Տանենք անշարժ կոորդինատական Oxy համակարգը: Ox առանցքն ուղղենք թեք հարթությունով, իսկ Oy առանցքը՝ նրան ուղղահայաց (գծ.119): Որոշակիության համար ընդունենք, որ $t = 0$ պահին գլանի զանգվածների կենտրոնը գտնվել է Oy առանցքի վրա, և φ անկյունը հավասար է եղել զրոյի: Գլանի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ գլանի $\overline{P}$ կշիռը, թեք հարթության $\overline{N}$ հակազդումը և շփման $\overline{F}$ ուժը, որն ուղղված է թեք հարթությունով դեպի վեր, շարժման հակառակ ուղղությամբ: Գլանի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները, (II)-ի և (III)-ի համաձայն, կլինեն՝

$$\frac{}{g}\ddot{y}_c = N - P\cos \qquad (2)$$

$$J_{cz}\ddot{\varphi} = \sum_k mom_{cz}(\bar{F}_k^{(e)} \qquad (3)$$

որտեղ J_{cz} -ը իներցիայի մոմենտն է այն առանցքի նկատմամբ, որն անցնում է գլանի զանգվածների կենտրոնով և ուղղահայաց է Oxy հարթությանը, իսկ (3)-ի աջ մասը գլանի վրա կիրառված արտաքին ուժերի մոմենտների գումարն է cz առանցքի նկատմամբ: Ակնհայտ է, որ $\bar{P}$ կշռի և $\bar{N}$ հակազդման մոմենտները cz առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի, քանի որ այդ ուժերն անցնում են c կետով:Հետևաբար՝

$$\sum_k mom_{cz}(\bar{F}_k^{(e)}) = FR:$$

Այստեղ որպես դրական ուղղություն ընդունված է գլանի պտտման ուղղությունը:

Եթե գլանի իներցիայի շառավիղը cz առանցքի նկատմամբ նշանակենք ρ_{cz} ապա կունենանք՝

$$J_{cz} = \frac{P}{g}\rho_{cz}^2: \qquad (5)$$

Օգտվելով (4)-ից և (5)-ից՝ (3)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{P}{g}\rho_{cz}^2\ddot{\varphi} = FR: \qquad (6)$$

Խնդիրը լուծելու համար (1), (2) և (6) հավասարումներից պետք է ավելացնել երկու լրացուցիչ հավասարումներ: Կազմենք այդ հավասարումները:

Քանի որ թեք հարթության ուղղությամբ գլանի ամբողջ շարժման ընթացքում $y_c = R$, ուստի կունենանք՝

$$\dot{y}_c = \ddot{y}_c = 0: \qquad (7)$$

Գլանը գլորվում է թեք հարթությունով առանց սահելու, որի հետևանքով գլանի պտտման ակնթարթային առանցքն ուղղված կլինի գլանի այն ծնիչով, որով շոշափում է թեք հարթությունը:Հետևաբար՝

$$v_c = R\dot{\varphi}: \qquad (8)$$

(7)-ի համաձայն (8)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\dot{x}_c = R\dot{\varphi}: \qquad (9)$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\ddot{x}_c = R\ddot{\varphi} \qquad (10)$$

Եթե (6)-ից որոշենք շփման $\bar{F}$ ուժը և նրա համար ստացված արտահայտության մեջ տեղադրենք $\ddot{\varphi}$ -ի արժեքը (10)-ից, կունենանք՝

$$F = \frac{P}{g}\frac{\rho_{cz}^2}{R^2}\ddot{x}_c: \qquad (11)$$

F-ի արժեքը (11)-ից տեղադրելով (1)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = P\sin\alpha - \frac{P}{g}\frac{\rho_{cz}^2}{R^2}\ddot{x}_c$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$\ddot{x}_c = \frac{g\sin\alpha}{1+\dfrac{\rho_{cz}^2}{R^2}}:$$

Եթե նկատի ունենանք, որ

$$J = \frac{P}{g}\rho_{cz}^2 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2, \tag{13}$$

ապա կստանանք՝

$$\rho_{cz}^2 = \frac{R^2}{2}:$$

Տեղադրելով այս արժեքը (12)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\ddot{x}_c = \frac{2}{3}g\sin\alpha: \tag{14}$$

Վերջինս կարելի է ստանալ նաև կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից ստացվող (V) առնչությունից: Գրենք այդ առնչությունը՝

$$d\frac{P}{2g}\left[\left(\dot{x}_c^{\,2}+\dot{y}_c^{\,2}\right)+\rho_{cz}^2\,\dot{\varphi}^{\,2}\right] = \sum_k \overline{F}_k^{(e)} d\overline{r}_k,$$

որտեղ (15)-ի աջ մասը գլանի վրա կիրառված արտաքին ուժերի աշխատանքների գումարն է: $\overline{N}$ հակազդման և $\overline{F}$ շփման ուժի տարրական աշխատանքների գումարը հավասար է զրոյի, քանի որ այդ ուժերի կիրառման կետերը գտնվում են գլանի պտտման ակնթարթային առանցքի վրա: Գլանի $\overline{P}$ կշռի տարրական աշխատանքը հավասար է $Pdx_c\sin\alpha$: Հետևաբար՝

$$\sum_k F_k^{(e)} dr_k = Pdx_c\sin\alpha: \tag{16}$$

Օգտվելով (7), (9) (13) և (16) առնչություններից՝ (15)-ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$3d\left(\dot{x}_c^{\,2}\right) = 4gdx_c\, si \tag{17}$$

որտեղից՝

$$3\dot{x}_c\, d\dot{x}_c = 2gdx_c\sin\alpha:$$

Այստեղից էլ ստացվում է, որ

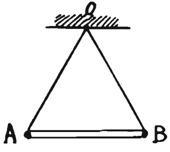
Գլանի զանգվածների կենտրոնի շարժման օրենքը գտնելու համար բավական է ինտեգրել (14) հավասարումը

$$x_c\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}_c\big|_{t=0} = 0$$

նախնական պայմաններով:

Պատ. $x_c = \frac{1}{3} g t^2 \sin\alpha, \quad y_c = R$

Խնդիր 102 [39.18 (1093)]: P կշիռ ունեցող AB համասեռ ձողը կախված է O կետից երկարությամբ նրան հավասար երկու թելերով: Որոշել թելերից մեկի լարումը մյուսի կտրման պահին (գծ.120):



Գծ. 120

Լուծում: *OB* թելը կտրվելուց հետո *AB* ձողը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում, որի դիֆերենցիալ հավասարումները, (II)-ի և (III)-ի համաձայն, կլինեն՝

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = \sum_{\nu} F_{\nu x}, \tag{1}$$

$$\frac{P}{g}\ddot{y}_c = \sum_{\nu} F_{\nu y}, \tag{2}$$

$$J_{cz}\ddot{\varphi} = \sum_{\nu} mom_{cz} F_{\nu}, \tag{3}$$

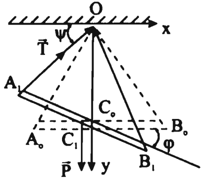
որտեղ x_c, y_c -ն ձողի զանգվածների կենտրոնի կոորդինատներն են՝ ընտրված (xy) համակարգում (գծ.120ա) և φ -ն ձողի պտույտի անկյունն է՝ հաշված սկզբնական դիրքից: Ձողի վրա ազդում են *OA* թելի *T* լարումը և ձողի *P* կշիռը:

Սկզբնական պայմաններն են՝

$$\dot{x}_c(0) = \dot{y}_c(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{\psi}(0) = 0, \tag{4}$$

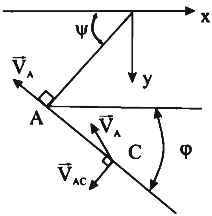
$$y_c(0) = \frac{l\sqrt{3}}{2}, \quad x_c(0) = 0,$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = \frac{\pi}{3}, \tag{5}$$



Գծ. 120ա

որտեղ ψ -ն *OA* թելի ընթացիկ դիրքի կազմած անկյունն է x -առանցքի հետ: Քանի որ ձողի ազատության աստիճանների թիվը



Գծ. 120բ

2-ն է (φ-ն և ψ-ն անկախ են), ուստի գոյություն ունի երկու կապ $\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{\varphi}$ և $\dot{\psi}$ փոփոխականների միջև: Այն հարմար է ներկայացնել կինեմատիկական տեսքով (գծ.120բ)՝

$$\bar{v}_c = \bar{v}_A + \bar{v}_{CA}. \qquad (6)$$

որտեղ $v_A = l\dot{\psi},\ v_{CA} = \frac{l}{2}\dot{\varphi}$:

Պրոյեկտելով (6) վեկտորական առնչությունը x և y առանցքների վրա կունենանք՝

$$\dot{x}_c = -l\dot{\psi}\sin\psi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\dot{y}_c = -l\dot{\psi}\cos\psi + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi: \qquad (7)$$

Ածանցելով այս կապերն ըստ ժամանակի՝ կստանանք՝

$$\ddot{x}_c = -l\ddot{\psi}\sin\psi - l\dot{\psi}^2\cos\psi - \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi,$$

$$\ddot{y}_c = -l\ddot{\psi}\cos\psi + l\dot{\psi}^2\sin\psi + \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi: \qquad (8)$$

Հաշվի առնելով (4) և (5) սկզբնական պայմանները՝ (8) առնչություններից կհետևի՝

$$\ddot{x}_c(0) = -l\ddot{\psi}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \ddot{y}_c(0) = -\frac{l}{2}\ddot{\psi}(0) + \frac{l}{2}\ddot{\varphi}(0): \qquad (9)$$

Այժմ գրենք (1), (2) և (3) հավասարումները սկզբնական պահին՝

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c(0) = \frac{T}{2},$$

$$\frac{P}{g}\ddot{y}_c(0) = P - T\frac{\sqrt{3}}{2},$$

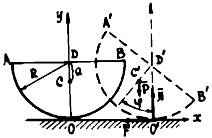
$$\frac{1}{12}\frac{P}{g}l^2\ddot{\varphi}(0) = \frac{l}{2}T\frac{\sqrt{3}}{2}: \qquad (10)$$

Դիտելով (9)-ը և (10)-ը որպես համակարգ $\ddot{x}_c(0), \ddot{y}_c(0), \ddot{\varphi}(0), \ddot{\psi}(0)$ և T-ի նկատմամբ՝ հեշտությամբ կարող ենք հաշվել T-ն: Կստանանք $T = \frac{2P\sqrt{3}}{13} \approx 0{,}266P$:

Պատ. $T \cong 0{,}266P$:

Խնդիր 103|39.23(1098)|: Որոշել R շառավիղ ունեցող համասեռ կիսաշրջանային սկավառակի փոքր տատանումների պարբերությունը, որը ճոճվում է անհարթ հորիզոնական հարթության վրա առանց սահելու (գծ.121):

Լուծում: Կիսաշրջանային սկավառակը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Այն պահին, երբ սկավառակը գտնվել է հավասարակշռության վիճակում (AOB դիրքում), նրա և թեք հարթության շոշափման O կետը ընդունենք որպես կոորդինատական համակարգի սկզբնակետ, իսկ կոորդինատական առանցքները ուղղենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված գծագրում: Դիտարկենք սկավառակի դիրքը ժամանակի կամայական պահին ($A'O'B'$ դիրքը) և նշենք նրա վրա ազդող ուժերը:



Գծ. 121

Սկավառակի վրա կիրառված են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ սկավառակի $\bar{P}$ կշիռը, սահքի շփման $\bar{F}$ ուժը և O կետում կիրառված հարթության N նորմալ հակազդումը: Սկավառակի հարթ զուգահեռական շարժման համար (II) և (III) դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն՝

$$M x_c = -F, \qquad (1)$$

$$M y_c = -Mg + N, \qquad (2)$$

$$J_{Cz'}\varphi = F(R - a\cos\varphi) - Na\sin\varphi, \qquad (3)$$

որտեղ $J_{Cz'}$-ը կիսաշրջանային սկավառակի իներցիայի մոմենտն է Cz' առանցքի նկատմամբ, որն անցնում է ծանրության C' կենտրոնով և ուղղահայաց է սկավառակի հարթությանը $a = D'C'$ (կամ DC), որը ծանրության C' կենտրոնի հեռավորությունն է $A'B'$ տրամագծի D' միջնակետից (այստեղ $A'O'B'$-ը սկավառակի դիտարկվող դիրքն է, φ-ն այն $C'D'O'$ անկյունն է, որով պտտվել է սկավառակը իր հավասարակշռության AOB դիրքի շուրջը):

Եթե (1) և (2) հավասարումներից որոշենք F և N ու արժեքները տեղադրենք (3)-ի մեջ, կստանանք՝

$$J_{Cz'}\ddot{\varphi} = -(R - a\cos\varphi)M\ddot{x}_c - a\sin\varphi(M\ddot{y}_c + Mg): \qquad (4)$$

Քանի որ սկավառակը գլորվում է առանց սահելու, ապա կունենանք՝

$$OO' = R\varphi, \quad x_c = R\varphi - a\sin\varphi, \quad y_c = R - a\cos\varphi: \qquad (5)$$

Տատանումների փոքր լինելու պատճառով x_c և y_c-ի արտահայտություններում ընդունենք՝

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

Այդ դեպքում (5)-ից x_c և y_c-ի համար կունենանք՝

$$x_c = (R-a)\varphi, \qquad y_c = R-a$$

կամ՝

$$x_c = (R-a)\varphi, \qquad y_c = 0: \tag{7}$$

Տեղադրելով x, y -ի արժեքները (7)-ից (4)-ի մեջ և միաժամանակ նկատի ունենալով (6)-ը՝ կստանանք՝

$$J_{cz'}\ddot{\varphi} = -M(R-a)^2\ddot{\varphi} - Mga\varphi$$

կամ՝

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{J_{cz'} + (R-a)^2 M}\varphi = 0 \tag{8}$$

Հետևաբար, սկավառակի փոքր տատանումների պարբերությունը կլինի՝

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{cz'} + (R-a)^2 M}{Mga}}$$

Ստատիկայից հայտնի է, որ կիսաշրջանային սկավառակի ծանրության կենտրոնի դիրքը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$a = D'C' = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$$

Այժմ հաշվենք $J_{cz'}$ -ը: Դրա համար նախ որոշենք կիսաշրջանային սկավառակի իներցիայի մոմենտը D կետով անցնող և գծագրի հարթությանն ուղղահայաց Dz' առանցքի նկատմամբ: Բայց իներցիայի մոմենտի սահմանման համաձայն՝ M զանգված ունեցող կիսաշրջանային սկավառակի մոմենտը Dz' առանցքի նկատմամբ հավասար է $2M$ զանգված ունեցող շրջանային սկավառակի իներցիայի մոմենտի կեսին նույն առանցքի նկատմամբ: Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից $2M$ զանգված ունեցող շրջանային սկավառակի իներցիայի մոմենտը Dz' առանցքի նկատմամբ կլինի $\frac{1}{2}2MR^2$
Հետևաբար, կիսաշրջանային սկավառակի համար կունենանք՝

$$J_{Dz'} = \frac{1}{2}MR^2 \tag{11}$$

Հյուգենսի թեորեմի համաձայն ունենք՝

$$J_{Dz'} = J_{cz'} + Ma^2: \tag{12}$$

Եթե $J_{Dz'}$ -ի արժեքը (11)-ից տեղադրենք (12)-ի մեջ, կստանանք՝

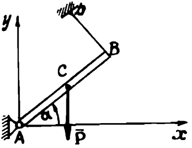
$$= \frac{1}{2}MR^2 - Ma^2: \tag{13}$$

Մնում է a և $J_{CZ'}$-ի արժեքը (10) և (13)-ից տեղադրել (9)-ի մեջ և ստանալ փոքր տատանումների պարբերության արտահայտությունը:

Պատ. $T = \dfrac{\pi}{2g}\sqrt{2g(9\pi-16)R}$

Խնդիր 104: l երկարություն և P կշիռ ունեցող համասեռ ձողը իդեալական հոդակապի միջոցով ամրացված է A կետում, իսկ մյուս ծայրը պահվում է ձողի հետ 90° անկյուն կազմող BD թելի միջոցով: Ձողը հորիզոնի հետ կազմում է α անկյուն: Որոշել, թե ինչքանով կփոխվի ձողի ճնշումը A հոդակապի վրա այն պահին, երբ BD թելը հանկարծակի կտրվի (գծ.122):

Լուծում: Մինչև BD թելի կտրվելը ձողը գտնվել է հավասարակշռության մեջ: Ձողն ազատենք կապերից՝ այն փոխարինելով համապատասխան հակազդումներով: A հոդակապի հակազդման պրոյեկցիաները անշարժ կոորդինատական առանցքների վրա նշանակենք X_A-ով և Y_A-ով, իսկ թելի լարումը R_B-ով: Հետևաբար, ձողի վրա կազդեն հետևյալ արտաքին ուժերը ձողի $\bar{P}$ կշիռը, X_A, Y_A և $\bar{R}_B$ հակազդումները: Քանի որ մինչև BD թելի կտրվելը ձողը գտնվել է հավասարակշռության մեջ, ապա X_A, Y_A, R_B անհայտները գտնելու համար պետք է օգտվել հարթ ուժահամակարգի հավասարակշռության հավասարումներից՝



Գծ. 122

$$\sum_k F_{kx}=0,\quad \sum_k F_{ky}=0,\quad \sum_k mom_B(F_k)=0:$$

Խնդրի պայմանների համաձայն՝ (1) հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} &X'_A - \\ &Y'_A + \\ &-\frac{Pl}{2}\cos\alpha + \end{aligned} \qquad (2)$$

որտեղ X'_A և Y'_A-ով նշանակված են X_A, Y_A-ի արժեքները, երբ ձողը գտնվել է հավասարակշռության մեջ, այսինքն՝ BD թելը դեռ կտրված չէ:

(2)-ից ստացվում է, որ

$$X'_A=\frac{P}{4}\sin 2\alpha,\quad Y'_A=\frac{P}{2}\left(1+\sin^2\alpha\right),\quad R_b=\frac{P}{2}\cos \qquad (3)$$

Եթե թելը կտրվում է, ապա ձողը սկսում է կատարել պտտական շարժում

A հոդակապի շուրջը: Այդ դեպքում ձողի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները, (II)-ի և (III) -ի համաձայն, կլինեն`

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = X_A'', \tag{4}$$

$$\frac{P}{g}y_c = \;{}_A'' - P, \tag{5}$$

$$J_{AZ}\ddot{\varphi} = -\frac{Pl}{2}\cos\varphi. \tag{6}$$

որտեղ X_A'', ${}_A''$ -ները X_A, Y_A -երի արժեքներն են այն պահին, երբ թելը կտրվում է, և ձողն սկսում է շարժվել, J_{AZ} -ը ձողի իներցիայի մոմենտն է *A* կետով անցնող և *xy* հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, իսկ φ-ն *x* առանցքի և *AB* ձողի կազմած անկյունն է թելը կտրվելուց հետո: Գծագրից երևում է, որ ձողի զանգվածների *C* կենտրոնի կոորդինատները արտահայտվում են φ անկյան միջոցով հետևյալ կերպ`

$$x_c = \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad y_c = \frac{l}{2}\sin\varphi: \tag{7}$$

Այստեղից ստացվում է`

$$x_c = -\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi, \quad {}_c = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\, si \tag{8}$$

Քանի որ *BD* թելի կտրման պահին

$$\varphi = \alpha, \quad \dot{\varphi} = 0, \tag{9}$$

ապա (8)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը`

$${}_c = -\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\sin\alpha, \quad y_c = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\alpha \tag{10}$$

Երբ $\ddot{x}_c$ և y_c -ի արժեքները (10)-ից, իսկ $\ddot{\varphi}$ -ի արժեքը (6)-ից տեղադրենք (4)-ի և (5)-ի մեջ, ապա կստանանք`

$$X_A'' = \frac{3P}{8}\sin 2\alpha, \quad {}_A'' = P - \frac{3P}{4}\cos^2\alpha: \tag{11}$$

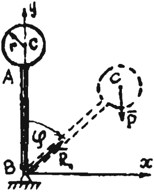
Հետևաբար, հակազդումների փոփոխությունը հավասար կլինի

$$X_A'' - X_A' = \frac{P}{8}\sin 2\alpha, \quad Y_A'' - Y_A' = -\frac{P}{4}\cos^2\alpha:$$

Պատ. Ձողի ճնշման փոփոխությունը *A* հոդակապի վրա այն պահին, երբ *BD* թելը հանկարծակի կտրվում է, կլինի`

$$X_A'' - X_A' = \frac{P}{8}\sin 2\alpha, \quad Y_A'' - Y_A' = -\frac{P}{4}\cos^2\alpha:$$

Խնդիր 105: l երկարությամբ AB ձողի B ծայրակետը հոդակապով միացված է անշարժ հենարանին: Ձողի մյուս ծայրին ամրացված է r շառավիղով մի համասեռ ծանր սկավառակ: Սկզբնական պահին ձողը գրավում է ուղղաձիգ դիրք և ստանալով շատ փոքր սկզբնական արագություն սկսում է պտտվել հոդակապի շուրջը: Որոշել սկավառակի անկյունային արագությունը և ուղղաձիգի ու ձողի միջև կազմած անկյունը այն պահին, երբ հոդակապի հակազդման ձողով ուղղված բաղադրիչը դառնում է զրո: Ձողի կշիռն արհամարհել (գծ. 123):



Գծ. 123

Լուծում: Սկավառակի զանգվածների կենտրոնը շարժվում է $l + r$ շառավիղ ունեցող շրջանագծով, որի կենտրոնը գտնվում է B կետում: Այս դեպքում նպատակահարմար է զանգվածների կենտրոնի շարժման վեկտորական հավասարումը պրոյեկտել զանգվածների կենտրոնի հետագծի նորմալի վրա: Գրենք (IV) համակարգի երկրորդ հավասարումը՝

$$M\frac{v_c^2}{\rho_c} = \sum_k F_{kn}^{(e)} \qquad (1)$$

Տրված խնդրում $\rho_c = r + l$, $M = \dfrac{P}{g}$, իսկ գծագրից երևում է, որ

$$\sum_k F_{kn}^{(e)} = P\cos\varphi + R_n,$$

որտեղ R_n-ը նորմալ հակազդումն է, որն ուղղված է B կետով ձողի երկարությամբ: ρ_c-ի և $\sum_k F_{kn}^{(e)}$-ի արժեքները (1)-ի մեջ տեղադրելով՝ կստանանք

$$\frac{P}{g}\frac{v_c^2}{l+r} = P\cos\varphi + R_n: \qquad (2)$$

(2)-ից ստացվում է, որ

$$R_n = \frac{P}{g}\frac{v_c^2}{l+r} - P\cos\varphi: \qquad (3)$$

Սկավառակի զանգվածների կենտրոնի v_c արագությունը որոշելու համար կիրառենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը: Եթե գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը վերջավոր տեսքով (§ 7, (XIX)) և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ սկզբնական պահին կինետիկ էներգիան հավասար է եղել զրոյի, կունենանք՝

$$T = \sum_k A_k^{(e)} \qquad (4)$$

Քանի որ ձողը պտտվում է B կետով անցնող հորիզոնական առանցքի շուրջը, ապա, § 7-ի (III) բանաձևի համաձայն, կինետիկ էներգիան կլինի

$$T = \frac{1}{2} J_{BZ} \omega^2, \tag{5}$$

որտեղ J_{BZ}-ը սկավառակի իներցիայի մոմենտն է Bz առանցքի նկատմամբ: Հյուգենսի թեորեմի համաձայն՝ J_{BZ}-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$J_{BZ} = \frac{1}{2}\frac{P}{g} r^2 + \frac{P}{g}(r+l)^2 = \frac{P}{2g}(r+l)^2\left[2 + \left(\frac{r}{r+l}\right)^2\right]$$

Եթե J_{BZ}-ի արժեքը տեղադրենք (5)-ի մեջ, կստանանք՝

$$T = \frac{P}{4g}(r+l)^2\left[2 + \left(\frac{r}{r+l}\right)^2\right]\omega^2 : \tag{6}$$

Գծագրից երևում է, որ

$$\sum_k A_k^{(e)} = P(l+r)(1-\cos\varphi) \tag{7}$$

Եթե T-ի և $\sum\limits_k A_k^{(e)}$-ի արժեքները (6) և (7)-ից տեղադրենք (4)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\frac{P}{4g}(r+l)^2\left[2 + \left(\frac{r}{r+l}\right)^2\right]\omega^2 = P(l+r)(1-\cos\varphi)$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$\omega^2 = \frac{4g(1-\cos\varphi)}{(r+l)n}, \tag{8}$$

որտեղ

$$n = 2 + \left(\frac{r}{r+l}\right)^2 \tag{9}$$

Դժվար չէ նկատել, որ

$$v_c^2 = (l+r)^2\omega^2 : \tag{10}$$

(8)-ի համաձայն՝ (10)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$v_c^2 = \frac{4g(r+l)(1-\cos\varphi)}{n} \tag{11}$$

Եթե (11)-ը տեղադրենք (3)-ի մեջ, ապա R_n-ի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$R_n = \frac{P}{n}\left[4-(4+n)\cos\varphi\right] \tag{12}$$

Դիցուք, այն պահին, երբ $R_n = 0, \varphi = \alpha$: (12)-ը կընդունի

$$4-(4+n)\cos\alpha = 0$$

տեսքը, որտեղից ստացվում է՝

$$\cos\alpha = \frac{4}{4+n}:$$

$\cos\alpha$-ի արժեքը տեղադրելով (8)-ի մեջ՝ կստանանք ω-ի արժեքն այն պահին, երբ $R_n = 0$:

$$\text{Պատ. } \omega = 2\sqrt{\frac{g}{(4+n)(l+r)n}}, \quad \cos\alpha = \frac{4}{4+n}, \text{ որտեղ } n = 2+\left(\frac{r}{r+l}\right)^2$$

9. ԺԻՐՈՍԿՈՊԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ժիրոսկոպ կոչվում է այն ծանր պինդ մարմինը, որն ունի դինամիկական սիմետրիայի առանցք* և պտտվում է այդ առանցքին պատկանող որևէ կետի շուրջը (գծ.124):

Եթե անշարժ կետը համընկնում է զանգվածների կենտրոնի հետ, և մարմնի վրա ծանրության ուժերից բացի ուրիշ ուժ (մոմենտ) չի ազդում, ապա մարմնի շարժումը կլինի ռեգուլյար պրեցեսիա, որի մանրամասն կինեմատիկական տեսությունը բերված է սույն գրքի կինեմատիկական բաժնում (պրակ II): Իսկ երբ զանգվածների կենտրոնը չի համընկնում անշարժ կետի հետ, ապա Էյլերի դինամիկական և կինեմատիկական հավասարումները կամայական նախնական պայմանների դեպքում չեն ինտեգրվում:

Գծ. 124

$$p = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi,$$

$$q = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \qquad \text{(I)}$$

$$r = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi,$$

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = L_x,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (B-A)pr = L_y, \qquad \text{(II)}$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = L_z,$$

* Կամայական մարմնի իներցիայի կենտրոնական էլիպսոիդը պտտման մակերևույթ չէ:

որտեղ p, q, r-ը մարմնի պտտման $\overline{\omega}$ անկյունային արագության պրոյեկցիաներն են մարմնի հետ ամրացված և անշարժ կետում կառուցված իներցիայի էլիպսոիդի գլխավոր առանցքներով ուղղված շարժական համակարգի x, y, z առանցքների վրա, φ, ψ, θ-ն Էյլերի անկյուններն են (տես պրակ II, Կինեմատիկա), A, B, C -ն մարմնի իներցիայի մոմենտներն են x, y, z առանցքների նկատմամբ, L_x, L_y, L_z-ը մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժերի մոմենտների գումարի պրոյեկցիաներն են համապատասխանաբար x, y, z առանցքների վրա:

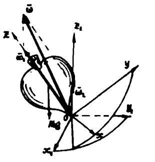
Ժիրոսկոպի դեպքում, սովորաբար, z առանցքն ուղղում են դինամիկական սիմետրիայի առանցքով, հետևաբար՝ $A = B$:

Սովորաբար, ժիրոսկոպները դինամիկական սիմետրիայի առանցքի շուրջը պտտվում են շատ մեծ անկյունային արագություններով, մյուս անկյունային արագությունների հետ համեմատած:

Արագ պտտվող ժիրոսկոպների շարժումն ուսումնասիրելիս նպատակահարմար է օգտվել շարժման քանակի թեորեմից.

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{L}_0$$

Դիցուք ունենք համասեռ սիմետրիկ մարմին, որն ունի սիմետրիայի առանցքի վրա գտնվող անշարժ կետ, և որի վրա ազդում է միայն ծանրության ուժը (գծ.125): z առանցքն ուղղենք մարմնի սիմետրիայի առանցքով և անվանենք ժիրոսկոպի սիմետրիայի առանցք: Եթե ժիրոսկոպի առանցքն անշարժ է, ապա շարժման քանակի $K = J\omega$ մոմենտը նույնպես անշարժ է և ուղղված է Oz առանցքով: Հետևաբար, անշարժ առանցքի շուրջը պտտվելիս առանցքասիմետրիկ մարմնի սիմետրիայի առանցքի (Oz), պտտման ակնթարթային արագության ($\overline{\omega}$) և շարժման քանակի մոմենտի վեկտորի ($\overline{K}$) ուղղությունները համընկնում են: Այժմ ենթադրենք, որ ժիրոսկոպը $\overline{\omega}_1$ անկյունային արագությամբ պտտվում է իր սիմետրիայի առանցքի շուրջը, իսկ սիմետրիայի առանցքն իր հերթին $\overline{\omega}_2$ անկյունային արագությամբ պտտվում է անշարժ Oz_1 առանցքի շուրջը: Ժիրոսկոպի ակնթարթային անկյունային արագությունը կլինի՝



Գծ. 125

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 : \qquad \text{(IV)}$$

Այս դեպքում շարժման քանակի $\overline{K}_0$ մոմենտի ուղղությունը չի համընկնի $\overline{\omega}$-ի ուղղության հետ:

Եթե ենթադրենք, որ $|\overline{\omega}_2| << |\overline{\omega}_1|$, ապա մոտավորապես կարող ենք ընդունել, որ սիմետրիայի առանցքը (Oz), ակնթարթային անկյունային արագությունը ($\overline{\omega}$) և շարժման քանակի մոմենտը ($\overline{K}_0$) ունեն միևնույն ուղղությունը:

Սրանք են այն ենթադրությունները, որոնք դրված են ժիրոսկոպի մոտավոր տեսության հիմքում:

Եթե C-ն A-ի հետ համեմատած փոքր մեծություն չէ, ապա ընդունված մոտավորության պայմաններում կարող ենք գրել, որ $\overline{K}_0 = C\overline{\omega}_1$: Եթե ժիրոսկոպի վրա ազդում է միայն ծանրության ուժը, որի կիրառման կետի շառավիղ վեկտորը անշարժ կետի նկատմամբ հավասար է $\overline{a}$-ի, ապա շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմից կունենանք՝

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{a} \times \overline{P}: \qquad \text{(V)}$$

$\overline{a} \times \overline{P}$-մոմենտը կոչվում է ժիրոսկոպի շրջող մոմենտ: (V) հավասարումը կարելի է արտագրել հետևյալ տեսքով՝

$$\overline{a} \times \overline{P} + \left(-\frac{d\overline{K}_0}{dt} \right) = 0:$$

Քանի որ հոլի շարժման ժամանակ, չնայած $\overline{a} \times \overline{P}$ շրջող մոմենտի գոյությանը, այն չի ընկնում, ապա ասում են, որ շարժման հետևանքով առաջանում է մեկ այլ մոմենտ, շրջման մոմենտին հավասարակշռող, որը կոչվում է վերականգնող մոմենտ: (VI) բանաձևի համաձայն՝ վերականգնող մոմենտը կլինի՝

$$\overline{L}_{\text{վեր.}} = -\frac{d\overline{K}_0}{dt}:$$

Այսպիսով, ժամանակի յուրաքանչյուր պահին ժիրոսկոպի շրջող և վերականգնող մոմենտները հավասարակշռվում են:

Քանի որ $\overline{K}_0 = C\overline{\omega}_1 / C$-ն և $\overline{\omega}_1$-ը հաստատուններ են, ապա $\dfrac{d\overline{K}_0}{dt}$ ածանցյալը կարելի է հաշվել Էյլերի բանաձևով՝ $\dfrac{d\overline{A}}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{A}$, հաշվի առնելով, որ $\overline{\omega}_1$ վեկտորը պտտվում է O կետի շուրջը ω_2 անկյունային արագությամբ

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{\omega}_2 \times C\overline{\omega}_1: \qquad \text{(VIII)}$$

Տեղադրելով $\dfrac{d\overline{K}_0}{dt}$-ի արժեքը (VIII)-ից (V)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\overline{\omega}_2 \times C\overline{\omega}_1 = \overline{a} \times \overline{P}: \qquad \text{(IX)}$$

Եթե Oz_1 առանցքըն ուղղենք ուղղաձիգով դեպի վեր ($\overline{P}$ ծանրության ուժին հակառակ), իսկ $\overline{\omega}_2$-ը ուղղենք Oz_1-ով (գծ.125), ապա (IX)-ից կստանանք՝

$$\omega_2 . \omega_1 . C \sin\alpha = aP \sin\alpha,$$

որտեղ α-ն ω_1-ի և $\overline{\omega}_2$-ի կազմած անկյունն է:

Բաժանելով ստացված արտահայտության երկու մասերը $\sin\alpha$-ի վրա՝

կստանանք՝

$$C\omega_1\omega_2 = a \cdot P: \qquad (X)$$

2. Ժիրոսկոպի վերաբերյալ խնդիրների լուծումը: Ժիրոսկոպի վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հերթական քայլերը.

ա) Ժիրոսկոպի կամ ժիրոսկոպիական համակարգի շարժումը ներկայացնել պարզ պտույտների տեսքով,

բ) Ընտրել շարժական և անշարժ կոորդինատական համակարգ, շարժական համակարգի Oz առանցքն ուղղել ժիրոսկոպի դինամիկական սիմետրիայի առանցքով,

գ) Գծագրի վրա նշել ժիրոսկոպի վրա կիրառված արտաքին ուժերը կամ նրանց մոմենտները,

դ) Որոշել արտաքին ուժերի գլխավոր մոմենտը անշարժ կետի նկատմամբ,

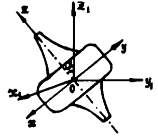
ե) Գտնել ժիրոսկոպի շարժման քանակի մոմենտը անշարժ կետի նկատմամբ,

զ) Օգտվել (I-X) բանաձևերից, որոշել խնդրում պահանջվող անհայտ մեծությունները:

3. Խնդիրներ:

Ստորև բերվում են ժիրոսկոպի մոտավոր տեսությանը վերաբերվող տիպական խնդիրների լուծումներ:

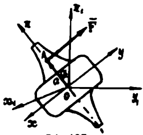
Խնդիր 106: Զանգվածների կենտրոնի հետ համընկնող O անշարժ կետ ունեցող սիմետրիկ համասեռ մարմինը $\omega_1 = 100$վրկ$^{-1}$ անկյունային արագությամբ պտտվում է իր սիմետրիայի Oz առանցքի շուրջը, որը Oz_1 առանցքի հետ կազմում է $\alpha = 45^0$ անկյուն: Մարմնի վրա Oz առանցքին պատկանող A կետում նրան ուղղահայաց, ժամանակի որևէ պահին, ակնթարթորեն ազդում է Oz_1 առանցքով անցնող $F = 60$կգ հաստատուն ուժը, որի շնորհիվ մարմինը սկսում է պրեցեսել Oz_1 առանցքի շուրջը ω_2 անկյունային արագությամբ: Որոշել պրեցեսիայի անկյունային ω_2 արագության մեծությունը, եթե $OA = 0{,}2$ մ, իսկ մարմնի իներցիայի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ՝ $C = 12$կգ•մ•վրկ^2



Գծ. 126

Լուծում: Քանի դեռ մարմնի վրա չի ազդել $\bar{F}$ ուժը, նրա շարժումը ռեգուլյար պրեցեսիա է $\omega_2 = 0$ անկյունային արագությամբ, այսինքն՝ մարմինը կպտտվի Oz անշարժ առանցքի շուրջը ω_1 անկյունային արագությամբ (գծ.126):

$\overline{F}$ ուժի ազդեցության շնորհիվ պտտման ժամանակ կառաջանա ժիրոսկոպիկ մոմենտ, որը մարմնին կստիպի պտտվել նաև Oz_1 առանցքի շուրջը (գծ.127):


Գծ. 127

Oz_1 առանցքի շուրջը մարմնի պտտման ω_2 անկյունային արագությունը որոշելու համար օգտվենք (IX) բանաձևից՝

$$C\cdot\overline{\omega}_2\times\overline{\omega}_1=\overline{a}\times\overline{F} \qquad (1)$$

Հավասարեցնելով (1) վեկտորական հավասարման աջ և ձախ մասերի մեծությունները՝ կստանանք՝

$$C\cdot\omega_1\cdot\omega_2$$

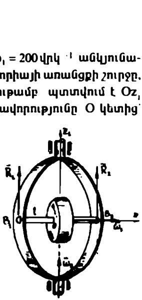
որտեղից՝

$$\omega_2=\frac{aF}{C\cdot\omega_1\sin\alpha}:$$

Քանի որ $\overline{F}$ ուժն ազդում է ակնթարթորեն, ապա այն չի առաջացնի նուտացիայի անկյան փոփոխություն, այսինքն՝ մարմինը կկատարի ռեգուլյար պրեցեսիա $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1+\overline{\omega}_2$ անկյունային արագությամբ: (2)-ում տեղադրելով հայտնի մեծությունների թվային արժեքները՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

$$\text{Պատ.}\ \omega_2=\frac{\sqrt{2}}{100}\approx 0{,}014\ \text{վրկ}^{-1}:$$

Խնդիր 107: P կշիռ ունեցող համասեռ հոլը $\omega_1=200$ վրկ$^{-1}$ անկյունային արագությամբ պտտվում է Oz դինամիկական սիմետրիայի առանցքի շուրջը, իսկ Oz առանցքը $\omega_2=0{,}1$ վրկ$^{-1}$ անկյունային արագութամբ պտտվում է Oz_1 առանցքի շուրջը: Հոլի C ծանրության կենտրոնի հեռավորությունը O կետից՝ $a=10$ սմ է: Որոշել հոլի իներցիայի շառավիղը Oz առանցքի նկատմամբ (գծ.128.):


Գծ. 128

Լուծում: Քանի որ Oz առանցքը հոլի համար դինամիկական սիմետրիայի առանցք է, O անշարժ կետը գտնվում է այդ առանցքի վրա և ω_2-ը, համեմատած ω_1-ի հետ, շատ փոքր է, ուստի խնդիրը լուծելու համար կարող ենք օգտվել ժիրոսկոպի մոտավոր տեսությունից:

Հոլի i_z իներցիայի շառավիղը Oz առանցքի նկատմամբ որոշելու համար նախ հաշվենք նրա C իներցիայի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ:

(X) բանաձևի համաձայն՝

$$C \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 =$$

Այստեղից՝

$$= \frac{aP}{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

Իներցիայի շառավղի բանաձևից՝

$$= \frac{C}{m} = \frac{Cg}{P}:$$

Տեղադրելով C-ի արժեքը (2)-ից (3)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$i_z^2 = \frac{ag}{\omega_1 \cdot \omega_2},$$

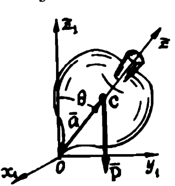
որտեղից՝

$$= \sqrt{\frac{ag}{\omega_1 \cdot \omega_2}}. \qquad (4)$$

Մնում է (4) արտահայտության մեջ տեղադրել հայտնի մեծությունների թվային արժեքները:

Պատ. $i_z = 22$ սմ:

Խնդիր 108: P կշիռ ունեցող ժիրոսկոպը $\overline{\omega}_1$ անկյունային արագությամբ պտտվում է $B_1B_2(Oz)$առանցքի շուրջը, որն իր հերթին $2l$ շառավիղ ունեցող օղակի հետ $\overline{\omega}_2$ անկյունային արագությամբ պտտվում է Oz_1 առանցքի շուրջը (գծ.129): Որոշել B_1 և B_2 կետերում հակազդումները, եթե $\omega_1 = 150$ վրկ$^{-1}$, $\omega_2 = 0{,}05$ վրկ$^{-1}$, $l = 20$սմ, $P = 1$կգ, իսկ ժիրոսկոպի իներցիայի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ՝ $C = 25$ կգ•մ•վրկ^2 (օղակի և B_1 B_2 ձողի զանգվածները անտեսել):



Գծ. 129

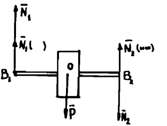
Լուծում: Ժիրոսկոպի շարժման ժամանակ B_1 և B_2 կետերում կառաջանան $\overline{R}_1$ և $\overline{R}_2$ հակազդումները, որոնք բաղկացած կլինեն ($\overline{N}_1$ ստ), $\overline{N}_2$(ստ) ստատիկական հակազդումներից և $\overline{N}_1$ ու $\overline{N}_2$ դինամիկական հակազդումներից (գծ.130):

Ստատիկական $\overline{N}_1$(ստ) և $\overline{N}_2$(ստ) հակազդումներիը որոշելու համար ենթադրենք, որ շարժում չկա, այսինքն՝ $\omega_1 = \omega_2 = 0$: B_1 B_2 ժիրոսկոպի հավասարակշռությունից կստանանք՝

$$N_1(\text{ստ}) = N_2(\text{ստ}) = \frac{P}{2},$$

որոնք ուղղված կլինեն ուղղաձիգով դեպի վեր:

$\overline{N}_1$ և $\overline{N}_2$ դինամիկական հակազդումնե-րը որոշելու համար օգտվենք ժիրոսկոպի մո-տավոր տեսությունից: Դրա համար ստուգենք այդ տեսությունը կառուցելիս ընդունված ենթա-դրությունը:



Գծ. 130

B_1 B_2 ժիրոսկոպի անշարժ O կետը գտնվում է դինամիկական սիմետրիայի առանցքի վրա և համընկնում է նրա զանգված-ների կենտրոնի հետ: ω_1 սեփական պտույտների անկյունային արագությունը շատ մեծ է պրեցեսիայի ω_2 անկյունային արագության հետ համեմատած:

Այսպիսով՝ տրված խնդիրը մինչև վերջ լուծելու համար կարող ենք օգտվել (IX) բանաձևից, որը տվյալ դեպքում կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$C \cdot \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2 = \overline{L}_0,$$

որտեղ $\overline{L}_0$-ն $\overline{\omega}_2, \overline{N}_1$և $\overline{N}_2$ հակազդումներից առաջացած մոմենտն է O կետի նկատմամբ: Խնդրի սիմետրիկությունից հետևում է, որ $\left|\overline{N}_1\right| = \left|\overline{N}_2\right|$: Քանի որ $\overline{\omega}_2 \times \overline{\omega}_1$ վեկտորական արտադրյալը ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը և ուղղված է դեպի այն (գծ.129), ապա $\overline{N}_1$և $\overline{N}_2$ուժազույգի մոմենտը նույնպես պետք է ուղղված լինի նույն ուղղությամբ:

Այսպիսով՝ $\overline{N}_1$-ը ուղղված կլինի ուղղաձիգով դեպի վեր, իսկ $\overline{N}_2$-ը դեպի ցած (գծ. 130):

(2) վեկտորական հավասարումներից կունենանք՝

$$C \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 = lN_1 + lN_2:$$

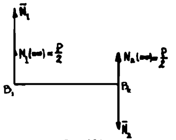
N_1և $\overline{N}_2$ հակազդումների հավասար լինելուց կստանանք.

$$N_1 = N_2 = \frac{C\omega_1\omega_2}{2l}:$$

Այժմ որոշենք $\overline{R}_1$ և $\overline{R}_2$ հակազդումների մեծությունները: $\overline{R}_1$-ի համար կունենանք՝

$$\overline{R}_1 = N_1(\text{ստ}) + N_1 = \frac{P}{2} + \frac{C \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{2l} \qquad (4)$$

և ուղղված կլինի ուղղաձիգով դեպի վեր (գծ.131):



Գծ. 131

$\overline{R}_2$ հակազդման համար կունենանք՝

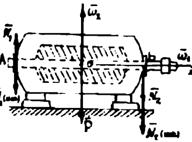
$$\overline{R}_2 = \frac{C \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{2l} - \frac{P}{2} \qquad (5)$$

և ուղղված կլինի ուղղաձիգով դեպի ցած (գծ.131):

Անում է (4)-ում և (5)-ում տեղադրել տառային մեծությունների տված թվային արժեքները:

Պատ. $R_1 = 5{,}2$ կգ և ուղղված է ուղղաձիգով դեպի վեր, $R_2 = 4{,}2$ կգ և ուղղված է դեպի ցած:

Խնդիր 109: Ամբարձիչին ուղղաձիգ առանցքի շուրջը պտտող շարժիչի P կշիռ ունեցող համասեռ շրջանային ռոտորը պտտվում է հորիզոնական առանցքի շուրջը ω_1 անկյունային արագությամբ, որի շնորհիվ ամբարձիչը շարժիչի հետ պտտվում է ռոտորի վանգվածների կենտրոնով անցնող ուղղաձիգ առանցքի շուրջը $\omega_2 = k\omega_1$ անկյունային արագությամբ, որտեղ k-ն շարժիչի ռոտորից ամբարձիչին պտույտների փոխանցման գործակիցն է ($k<<1$): Ռոտորի առանցքակալների միջև եղած հեռավորությունը հավասար է $2a$-ի, իսկ իներցիայի մոմենտը սիմետրիայի առանցքի նկատմամբ



Գծ. 132

J-ի: Որոշել ω_1 անկյունային արագության այն արժեքը, որի դեպքում առանցքակալներից մեկում ուղղաձիգ հակազդումը հավասար կլինի զրոյի, եթե

$P = 300$ կգ, $k = \dfrac{1}{2400}$, $J = 30$ կգ•մ•վրկ^2 (գծ.132):

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար ընտրենք կոորդինատական համակարգ՝ ուղղելով Oz առանցքը ռոտորի դինամիկական սիմետրիայի առանցքով, իսկ Oz_1-ը $\bar{\omega}_2$-ի ուղղությամբ: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, որ $\bar{\omega}_1$ և $\bar{\omega}_2$ վեկտորները ունեն գծագրում ցույց տրված ուղղությունները (գծ.132), քանի որ $\bar{\omega}_1$-ի և $\bar{\omega}_2$-ի այլ ուղղություններ ունենալու դեպքում խնդրի լուծումը ոչնչով չի փոխվի:

Շարժիչի ռոտորը, ունենալով դինամիկական սիմետրիայի առանցք, պտտվում է իր վանգվածների կենտրոնի շուրջը, որը համընկնում է անշարժ O կետի հետ: Հետևաբար, նրա ծանրության ուժը O կենտրոնի նկատմամբ մոմենտ չի առաջացնի:

Ռոտորի պտտման ժամանակ նրա վրա կազդեն $\bar{N}_1$(ստ) և $\bar{N}_2$(ստ) ուժերը՝ կիրառված նրա A և B կետերում, որոնք համարժեք են P կշռին, և N_1 ու $\bar{N}_2$ ժիրոսկոպիկ ուժերին (գծ.132): Դժվար չէ նկատել, որ

$$N_1(\text{ստ}) = N_2(\text{ստ}) = \frac{P}{2},$$

Այժմ հաշվենք $\bar{N}_1$ և $\bar{N}_2$ ժիրոսկոպիկ ուժերը: Այս ուժերը O կենտրոնի նկատմամբ կառաջացնեն $\bar{L}_0$ մոմենտ, որը կարելի է հաշվել՝ օգտվելով (IX) բանանից: Գծագրից երևում է, որ $\overline{L}_0$-ն ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը և

$$\overline{L}_0 = O\overline{A} \times \overline{N}_1 + O\overline{B} \times \overline{N}_2 = \overline{\omega}_2 + J\overline{\omega}_1, \qquad (2)$$

որտեղից կստանանք՝

$$_2\,) = Jk\omega_1^2$$

$$_1 = \overline{N}_1,\ N_2 = \overline{N}_2\ ):$$

Խնդրի սիմետրիկությունից հետևում է, որ $\overline{N}_1$ և $\overline{N}_2$ ուժերը կազմում են ուժազույգ, հետևաբար՝ $N_1 = N_2$:

$\overline{\omega}_1$ և $\overline{\omega}_2$ անկյունային արագությունների վերը նշված ուղղությունների դեպքում $\overline{N}_1$ և $\overline{N}_1$(ստ) ուժերը կունենան հակառակ ուղղություններ (գծ.132), հետևաբար, զրո կարող է լինել A առանցքակալի ուղղածիգ հակազդումը: (3) հավասարումներից՝

$$N_1 = \frac{Jk\omega_1^2}{2a}:$$

Հավասարեցնելով $\overline{N}_1$(ստ) և $\overline{N}_1$ հակազդումների մեծությունները՝ կստանանք ω_1-ի այն արժեքը, որի դեպքում A առանցքակալի ուղղածիգ հակազդումը հավասար կլինի զրոյի:

$$\frac{Jk\omega_1^2}{2a} = \frac{P}{\ },$$

որտեղից

$$\omega_1^2 = \frac{aP}{Jk}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{aP}{Jk}}: \qquad (4)$$

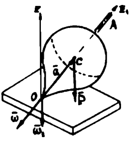
Վերջինիս մեջ տեղադրելով հայտնի մեծությունների արժեքները՝ կստա-

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 300 \cdot 2400}{30}} = 120\,\text{վրկ}$$

Պատ. $\omega_1 = 120\,\text{վրկ}^{-1}$:

Խնդիր 110 (40.1,1027) : Հոլը պտտվում է ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ իր OA առանցքի շուրջը հաստատուն $\omega = 600\,\text{վրկ}^{-1}$ անկյունային արագությամբ: Նրա C ծանրության կենտրոնը գտնվում է OA առանցքի վրա O անշարժ կետից $OC = 30\,\text{սմ}$ հեռավորության վրա, հոլի իներցիայի շառավիղը OA առանցքի նկատմամբ հավասար է 10 սմ: Որոշել հոլի OA առանցքի շարժումը՝ ընդունելով, որ բավականաչափ մեծ ω անկյունային արագության դեպքում հոլի շարժման քանակի գլխավոր մոմենտն ուղղված է OA առանցքով և հավասար է $J\omega$ (գծ.133):

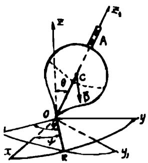
Լուծում: Ընտրենք շարժական $Ox_1y_1z_1$ և անշարժ $Oxyz$ կոորդինատական համակարգերը գծագիր 134-ում ցույց տրված ձևով: Շարժման քանակի մոմենտի թեորեմը, համաձայն խնդրի պայմանի $\overline{K} = J\overline{\omega}$, կընդունի հետևյալ տեսքը



Գծ. 133

$$\overline{\omega}_1 \times J\overline{\omega} = \overline{a} \times \overline{P}, \qquad (1)$$

որտեղ $\overline{\omega}_1$-ը OA առանցքի պտտման անկյունային արագությունն է O անշարժ կետի շուրջը: $\overline{a} \times \overline{P}$ վեկտորն ուղղահայաց է zz_1 առանցքով անցնող հարթությանը ժամանակի ցանկացած պահին, հետևաբար $\overline{\omega}_1 \times J\overline{\omega}$ վեկտորը նույնպես ուղղահայաց է նույն հարթությանը ժամանակի ցանկացած պահին: Այստեղից հետևում է, որ $\overline{\omega}_1$ վեկտորը նույնպես կգտնվի zz_1 առանցքով տարված հարթության մեջ:



Գծ. 134

Էյլերի դինամիկական հավասարումների (II) համակարգի 3-րդ հավասարումից հետևում է, որ $r = const$, քանի որ $L_z = 0$, $A = B$:

Հավասարեցնելով (1) հավասարման աջ և ձախ մասերի վեկտորների մեծությունները կստանանք

ω_1

որտեղից

$$\omega_1 = \frac{aP}{J \cdot \omega} = const: \qquad (2)$$

Էյլերի կինեմատիկական հավասարումների (I) համակարգի 3-րդ հավասարումից

$$r = \psi \cos\theta + \varphi,$$

հետևում է, որ $\theta = const$, քանի որ $\varphi = \omega = const$, $\psi = \omega_1 = const$, $r = const$

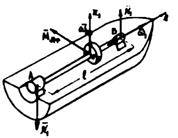
Այսպիսով՝ հոլի վերոհիշյալ շարժման ժամանակ նրա OA դինամիկական սիմետրիայի առանցքը կպտտվի ω_1 հաստատուն անկյունային արագությամբ Oz ուղղաձիգ առանցքի շուրջը:

(2)-ից որոշենք ω_1-ի մեծությունը

$$\omega_1 = \frac{a \cdot mg}{m\rho^2\omega} = \frac{a \cdot g}{\rho^2\omega} = \frac{0{,}3 \cdot 9{,}81}{0{,}1 \cdot 600} = 0{,}49\,վրկ^{-1}$$

OA առանցքը կպտտվի Oz ուղղաձիգ առանցքի շուրջը $\omega_1 = 0{,}49\,վրկ^{-1}$ հաստատուն անկյունային արագությամբ՝ գծելով շրջանային կոն:

Խնդիր 111[40.3, (1029)]: Նավի երկայնական առանցքին զուգահեռ լիսեռ ունեցող տուրբինը կատարում է 1500 պտ/րոպ: Պտտվող մասերի կշիռը 6տ է, իներցիայի շառավիղը $\rho = 0{,}7$մ: Որոշել ժիրոսկոպիկ ճնշումները առանցքակալների վրա, եթե նավը կատարում է պտույտ ուղղաձիգ առանցքի շուրջը պտտվելով 10^{0} անկյամբ մեկ վայրկյանում: Առանցքակալների միջև հեռավորությունը $l = 2{,}7$մ է (գծ.135):



Գծ. 135

Լուծում: Տանենք կոորդինատական առանցքները ուղղելով Oz առանցքը տուրբինի լիսեռի ուղղությամբ, իսկ Oz_1 առանցքը ուղղաձիգով դեպի վեր, վերցնելով O կետը տուրբինի զանգվածների կենտրոնում:

z առանցքը կլինի տուրբինի համար դինամիկական սիմետրիայի առանցք:

Քանի որ $\omega_1 = 1500$ պտ/րոպ մեծ է $\omega_2 = \dfrac{5}{2}$ պտ/րոպ անկյունային արագությունից, ապա խնդիրը լուծելու համար կարելի է օգտվել ժիրոսկոպի մոտավոր տեսությունից: ω_2 անկյունային արագությամբ նավի պտտվելուց տուրբինի վրա կազդի ժիրոսկոպիկ մոմենտ, որը, (IX) բանաձևի համաձայն, կլինի

$$\bar{L}_0 = \bar{\omega}_2 \times J\bar{\omega}_1 :$$

$\bar{L}_0$ մոմենտը հավասարակշռում է N_1 և N_2 հակազդումների զույգի հետ (գծ.135), հետևաբար

$$\left|\bar{L}_0\right| = \left|mom(\bar{N}_1, \bar{N}_2)\right| \qquad (2)$$

Տեղադրելով (2)-ի մեջ $\bar{L}_0$-ի արտահայտությունը (1)-ից կստանանք

$$J\omega_1\omega_2 = lN, \qquad (3)$$

որտեղ $N = \left|\bar{N}_1\right| = \left|\bar{N}_2\right|$:

(3)-ից որոշենք N-ի արժեքը հաշվի առնելով, որ $J = m \cdot \rho^2$, $N = \dfrac{m\rho^2\omega_1\omega_2}{l}$:

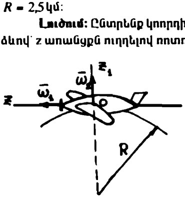
Տեղադրելով ստացված արտահայտության մեջ հայտնի մեծությունների թվային արժեքները կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $N = 3090$կգ:

Խնդիր 112: Տուրբոպտուտակավոր ինքնաթիռի շրջադարձի ժամանակ տուրբինի ռոտորի ժիրոսկոպիկ մոմենտը կարող է առաջացնել ինքնաթիռի շեղում հորիզոնական դիրքից: Որպեսզի հավասարակշռվի այդ մոմենտի ազդեցությունը, ինքնաթիռի օդաչուն թեքում է հորիզոնական ղեկը, որի ժամանակ առաջացող աերոդինամիկական ուժերը պահում են ինքնաթիռին հորիզոնական դիրքում:

Որոշել ժիրոսկոպիկ ուժերի մոմենտը (ուղղությունը և մեծությունը), երբ ռոտորի առանցքը զուգահեռ է ինքնաթիռի երկայնական առանցքին, ռոտորը պտտվում է 3000պտ/րոպ անկյունային արագությամբ, նրա իներցիայի մոմենտը սիմետրիայի առանցքի նկատմամբ հավասար է J=400կգ·մ^2, ինքնաթիռի արագությունը v = 100 մ/վրկ, իսկ ինքնաթիռի գծած շրջանագծի շառավիղը R = 2,5կմ:

Լուծում: Ընտրենք կոորդինատական համակարգ գծ. 136-ում ցույց տված ձևով՝ z առանցքն ուղղելով ռոտորի դինամիկական սիմետրիայի առանցքով, z_1 առանցքն՝ ուղղահիգով դեպի վեր: Դիցուք z և z_1 առանցքները հատվում են ռոտորի զանգվածների O կենտրոնում:



Գծ. 136

Դիցուք, $\bar{\omega}_1$ անկյունային արագությունն ուղղված է ինքնաթիռի շարժման ուղղությամբ, իսկ ինքնաթիռը կատարում է ձախ շրջադարձ հորիզոնական հարթության մեջ (այս դեպքում $\bar{\omega}_2$-ն ուղղված կլինի ուղղահիգով դեպի վեր): Հաշվենք $\bar{\omega}_2$ անկյունային արագության մեծությունը՝

$$\omega_2 = \frac{v}{R} = \frac{100}{2500} = 0{,}04\text{վրկ}^{-1}:$$

Մյուս կողմից

$$\omega_1 = 3000\,\text{պտ/րոպ} = \frac{3000 \cdot 2\pi}{60}\ \text{վրկ}^{-1} = 100\pi\ \text{վրկ}^{-} \qquad (2)$$

Քանի որ ω_1-ը խիստ մեծ է ω_2-ից, ապա խնդիրը լուծելու համար կարող ենք օգտվել ժիրոսկոպի մոտավոր տեսությունից:

Համաձայն (XI) բանաձևի

$$\bar{L}_0 = \bar{\omega}_2 \times J\bar{\omega}_1 \qquad (3)$$

(3) վեկտորական հավասարումներից հետևում է, որ $\bar{L}_0$-ն վերոհիշյալ պտույտների դեպքում ուղղված կլինի դեպի ինքնաթիռի աջ կողմը:

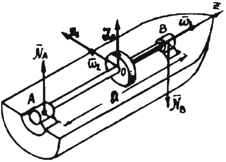
Այժմ հաշվենք $\bar{L}_0$ մոմենտի մեծությունը: (3)-ից կստանանք՝

$$L_0 = J\omega_1\omega_2 = 400 \cdot 100 \cdot \pi \cdot 0{,}004 = 5030\,\text{կգ·մ}^2/\text{վրկ}^2 = 5030\ \text{Ն.մ}:$$

Եթե ինքնաթիռը կատարեր աջ շրջադարձ, $\bar{L}_0$ մոմենտն ուղղված կլիներ դեպի ինքնաթիռի ձախ կողմը:

Պատ. L_0 = 5030 Ն.մ: Եթե ինքնաթիռը կատարում է աջ շրջադարձ, $\bar{L}_0$-ն ուղղված է դեպի ինքնաթիռի ձախ կողմը, իսկ եթե այն կատարում է ձախ շրջադարձ, $\bar{L}_0$-ն ուղղված է դեպի աջ կողմը:

Խնդիր 113[40.4 (1030)]: Նավը կատարում է ողնուցային ճոճումներ 9° ամպլիտուդով և 15վրկ պարբերությամբ իր արագընթաց տուրբինի ռոտորին ուղղահայաց առանցքի շուրջը: Որոշել տուրբինի առանցքակալների վրա առավելագույն ժիրոսկոպիկ ճնշումը, եթե ռոտորի կշիռը 3500կգ է, իներցիայի շառավիղը սիմետրիայի առանցքի նկատմամբ՝ 0,6մ, անկյունային արագությունը՝ 3000պտ/րոպ:



Գծ. 137

Տուրբինի առանցքակալների միջև եղած հեռավորությունը 2մ է:

Լուծում: Նավի տուրբինի ռոտորը պտտվում է իր դինամիկական սիմետրիայի առանցքի շուրջը $\omega_1 = 3000$պտ/րոպ $= 100\pi$ վրկ$^{-1}$ անկյունային արագությամբ: Ընտրենք կոորդինատական համակարգ ուղղելով Oz առանցքը ռոտորի դինամիկական սիմետրիայի առանցքով, իսկ Oz_1-ը՝ ուղղահայաց նրան և ընկած հորիզոնական հարթության մեջ (գծ.137):

Քանի որ նավը կատարում է ողնուցային տատանումներ, ապա տատանումներից առաջացած անկյունային արագությունը ուղղված կլինի Oz_1 առանցքով: Հաշվենք տատանումների շնորհիվ առաջացած անկյունային արագությունը:

Տատանման օրենքը կլինի՝

$$\varphi = 9^0 \sin\left(\frac{2\pi}{15}\cdot t\right) = \frac{9\cdot 2\pi}{360}\sin\left(\frac{2\pi}{15}\cdot t\right),$$

հետևաբար, ω_2 անկյունային արագությունը կլինի՝

$$\omega_2 = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{9\cdot 2\pi}{360}\cdot\frac{2\pi}{15}\cos\left(\frac{2\pi}{15}\cdot t\right) = \frac{\pi^2}{150}\cos\left(\frac{2\pi}{15}\cdot t\right) \text{ վրկ}^{-1} \qquad (1)$$

Այժմ (X) բանաձևով հաշվենք տուրբինի առանցքակալների վրա ազդող ժիրոսկոպիկ ուժերի մոմենտը, կստանանք՝

$$L_0 = J\omega_1\omega_2 = J\cdot\omega_1\frac{\pi^2}{150}\cos\left(\frac{2\pi}{15}\cdot t\right): \qquad (2)$$

$\bar{L}_0$ մոմենտը կունենա ուղղաձիգի ուղղությունը (գծ.137), իսկ նրա ճշգրիտ ուղղությունը կախված կլինի տատանման փուլից:

$\bar{L}_0$ ժիրոսկոպիկ մոմենտը A և B առանցքակալներում կառաջացնի N_A և N_B ժիրոսկոպիկ ճնշումներ, որոնք կորոշվեն հետևյալ բանաձևով՝

$$N_A = N_B = \frac{L_0}{a} = \frac{J\omega_1\pi^2}{150a}\cos\left(\frac{2\pi}{15}\cdot t\right): \qquad (3)$$

N_A և N_B ժիրոսկոպիկ ճնշումների առավելագույն արժեքը կստացվի, եթե (3) արտահայտության մեջ $cos\left(\frac{2\pi}{15}\cdot t\right)=1$:

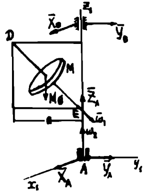
Այսպիսով

$$N_{A_{max}} = N_{B_{max}} = \frac{J\omega_1\pi^2}{150a} = \frac{m\cdot\rho^2\cdot\omega_1\cdot\pi^2}{150a} = \frac{P\rho^2\cdot\omega_1\cdot\pi^2}{150ag}: \qquad (4)$$

Մնում է (4)-ում տեղադրել հայտնի մեծությունների թվային արժեքները:

Պատ. $N_{A_{max}} = N_{B_{max}} = 1320$ կգ:

Խնդիր 114(40.10): $a = 20$ սմ կողմով քառակուսի շրջանակը պտտվում է AB ուղղաձիգ առանցքի շուրջը $\omega_2 = 2$ վրկ $^{-1}$ անկյունային արագությամբ: $r = 10$ սմ շառավղով M սկավառակը պտտվում է շրջանակի DE անկյունագծի հետ համընկնող առանցքի շուրջը $\omega_1 = 3000$ վրկ $^{-1}$ անկյունային արագությամբ: Որոշել A և B հենարաններում առաջացած դինամիկական և ստատիկական հակազդումների մեծությունների հարաբերությունը: Սկավառակի զանգվածն ընդունել հավասարաչափ բաշխված շրջանակով (գծ.138):



Գծ. 138

Լուծում: Ընտրենք շարժական և անշարժ կոորդինատական համակարգերը՝ շարժական համակարգի z առանցքն ուղղելով M սկավառակի պտտման DE առանցքով (գծ.138): M սկավառակը պտտվում է իր դինամիկական սիմետրիայի առանցքի շուրջը: Քանի որ ω_1 -ը մեծ է ω_2 -ի հետ համեմատած, ապա խնդիրը լուծելու համար կարող ենք օգտվել ժիրոսկոպի մոտավոր տեսությունից: Սկավառակի և շրջանակի միաժամանակ պտտման դեպքում կառաջանա ժիրոսկոպիկ մոմենտ՝ կիրառված E կետում, որը կարելի է հաշվել օգտվելով (IX) բանաձևից.

$$\overline{L}_E = \overline{\omega}_2 \times J\overline{\omega}_1 \qquad (1)$$

$\overline{L}_E$ մոմենտն ուղղված կլինի քառակուսի շրջանակի հարթակին ուղղահայաց (x_1 -ի հակառակ ուղղությամբ):

Հաշվենք այն P_1 ուժը, որի մոմենտը E կետի նկատմամբ նույնպես կլինի $\overline{L}_E$: Այդ ուժը կունենա $M\overline{g}$ -ի ուղղությունը (գծ.138), իսկ մեծությամբ հավասար կլինի՝

$${}_1 = \frac{\overline{L}_E}{a/2} = \frac{2J\omega_1\omega_2\cdot sin45^0}{a} = \frac{J\omega_1\omega_2\sqrt{2}}{a}: \qquad (2)$$

$\overline{P}_1$ ուժի առաջացրած հակազդումները A և B կետերում հավասար կլինեն դինամիկական հակազդումներին այդ կետում: Քանի որ խնդրում տված չեն A

և B կետերի դիրքերը z_1 առանցքի վրա, ապա թե դինամիկական և թե ստատիկական հակազդումները ճշգրիտ որոշել չենք կարող, սակայն նրանց հարաբերությունը կարելի է որոշել այլ ճանապարհով: Սույն ուղեցույցի ստատիկա բաժնի (I պրակ) 99 խնդրի (4) և (5) բանաձևերից հետևում է, որ A և B կետերում առաջացած ստատիկական հակազդումները, երբ $Q = 0$, գծային համասեռ ֆունկցիաներ են՝ $\overline{P}_1$-ից կախված: Հետևաբար, այս խնդիրներում ևս A և B կետերում ստատիկական հակազդումները կլինեն գծային համասեռ ֆունկցիաներ կախված $M\overline{g}$-ից:

Մյուս կողմից, դինամիկական հակազդումները նույնպես կլինեն գծային համասեռ ֆունկցիաներ՝ կախված P_1-ից նույն գործակիցներով: Այստեղից հետևում է, որ A և B կետերում դինամիկական և ստատիկական հակազդումների հարաբերությունը կլինի՝

$$k = \frac{P_1}{Mg}: \qquad (3)$$

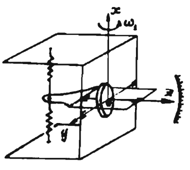
Տեղադրելով (3)-ում P_1-ի արժեքը (2)-ից և նկատի ունենալով, որ $J = M \cdot r^2$, կստանանք

$$k = \frac{Mr^2\omega_1\omega_2\sqrt{2}}{a\ Mg} = \frac{r^2\omega_1\omega_2\sqrt{2}}{ag}:$$

Մնում է (4)-ում տեղադրել հայտնի մեծությունների թվային արժեքը:

Պատ. 4,32:

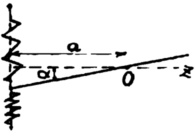
Խնդիր 115 (40.13): Պարզ ժիրոտախոմետրը կազմված է ժիրոսկոպից, որի շրջանակը պահվում է սահքի իրանին ուղղահայաց երկու զսպանակներով: Ժիրոսկոպի իներցիայի մոմենտը սեփական պտտման առանցքի նկատմամբ J է, անկյունային արագությունը՝ ω: Որոշել այն α անկյունը, որով կպտտվի ժիրոսկոպն իր շրջանակի հետ միասին, եթե սարքը դրվի շրջանակի պտտման y առանցքին ուղղահայաց x առանցքի շուրջը ω_1 անկյունային արագությամբ պտտվող հարթակի վրա: Զսպանակների կոշտությունը c է, α անկյունը համարել փոքր: Շրջանակի պտտման առանցքից զսպանակների եղած հեռավորությունը հավասար է a-ի (գծ.139):



Գծ. 139

Լուծում: Տանենք կոորդինատական համակարգը գծ.139-ում ցույց տրված ձևով: Հարթակի պտտման պատճառով կառաջանա $\overline{L}_0$ ժիրոսկոպիկ մոմենտ, որն ուղղված է oy առանցքով: $\overline{L}_0$ մոմենտի մեծությունը (X) բանաձևի համաձայն կլինի՝

$$L_0 = J\omega\omega_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \approx J\omega\omega_1: \qquad (1)$$



Գծ. 140

Այդ մոմենտը կհավասարակշռվի զսպանակներում առաջացած ճիգերի մոմենտների գումարի հետ:

Հաշվենք զսպանակներում առաջացած ճիգերի մոմենտների գումարը: Եթե ժիրոսկոպի սիմետրիայի առանցքը շեղվի α անկյունով (գծ.140), ապա զսպանակներից մեկը կերկարի, իսկ մյուսը կկարճանա $a \cdot \alpha$ չափով (որովհետև, խնդրի պայմանի համաձայն, α-ն փոքր անկյուն է): Հետևաբար՝ զսպանակներում առաջացած ճիգերի գումարը կլինի՝ $2ac\alpha$:

Զսպանակներում առաջացած ճիգերի մոմենտների գումարը O կենտրոնի նկատմամբ կլինի՝

$$L_0' = 2c\alpha a^2:$$

Հավասարեցնելով L_0-ի և L_0'-ի արժեքները (1)-ից և (2)-ից՝ կստանանք

$$J\omega\omega_1 = 2c\alpha a^2: \qquad (3)$$

(3)-ից որոշելով α-ի արժեքը՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $\alpha = \dfrac{J\omega}{2ca^2}\omega_1$:

10. ԿԻՆԵՏՈՍՏԱՏԻԿԱՅԻ ԵՂԱՆԱԿ

Կինետոստատիկայի եղանակը հնարավորություն է տալիս շարժման հավասարումները գրել հավասարակշռության հավասարումների տեսքով:

1.Դալամբերի սկզբունքը: Դիցուք ունենք n կետերից կազմված մեխանիկական համակարգ, որի կետերի զանգվածներն են $m_1, m_2, \dots, m_n$: Դիտարկենք այդ համակարգի որևէ կետ, որի զանգվածը m_k է: Այդ կետի վրա կիրառված արտաքին (թե՛ պասիվ և թե՛ ակտիվ) ուժերի համազորը նշանակենք $\overline{F}_k^{(e)}$-ով, իսկ բոլոր ներքին ուժերի համազորը՝ $\overline{F}_k^{(i)}$-ով: Եթե այդ կետի վրա կիրառենք նաև իներցիայի $\overline{J}_k$ ուժը, որը մեծությամբ հավասար է m_k կետի զանգվածի և նրա արագացման մեծության արտադրյալին և ուղղված է կետի W_k արագացմանը հակառակ (այսինքն՝ $\overline{J}_k = -m_k\overline{W}_k$), ապա Նյուտոնի օրենքի համաձայն կունենանք՝

$$\overline{}_k^{(e)} \qquad\qquad (k = 1,2,\dots,n)^*: \qquad (1)$$

* Նույնը կարելի է գրել նաև համակարգի մնացած կետերի համար:

(I) -ը կլինի Դալամբերի սկզբունքը:

Այդ արդյունքը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. եթե ժամանակի ցանկացած պահին մեխանիկական համակարգի վրա կիրառված արտաքին և ներքին ուժերին ավելացնենք համապատասխան իներցիայի ուժերը, ապա կստանանք մի ուժահամակարգ, որը գտնվում է հավասարակշռության մեջ և որի նկատմամբ կարելի է կիրառել ստատիկայի բոլոր օրենքները:

Եթե անդամ առ անդամ գումարենք (I) հավասարումները և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ մեխանիկական համակարգի վրա ազդող բոլոր ներքին ուժերի վեկտորական գումարը հավասար է զրոյի, ապա կստանանք՝

$$\sum_k F_k^{(e)} + \sum_k \bar{J}_k = 0. \qquad \text{(II)}$$

Ընտրենք կամայական O կենտրոն և m_k զանգված ունեցող կետի շառավիղ-վեկտորը O կետի նկատմամբ նշանակենք $\bar{r}_k$: Եթե (I) հավասարումներից յուրաքանչյուրը վեկտորապես բազմապատկենք համապատասխանաբար $\bar{r}_k$ շառավիղ-վեկտորներով և գումարենք ստացված արտադրյալը և միաժամանակ նկատի ունենանք, որ համակարգի վրա ազդող բոլոր ներքին ուժերի մոմենտների գումարը կամայական O կենտրոնի նկատմամբ հավասար է զրոյի, կստանանք հետևյալ վեկտորական հավասարումը՝

$$\sum_k \left(\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}\right) + \sum_k \left(\bar{r}_k \times \bar{J}_k\right) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Եթե m_k զանգված ունեցող կետի վրա ազդող բոլոր ակտիվ ուժերի համազորը նշանակենք F_k, իսկ բոլոր կապերի հակազդումների համազորը՝ $\bar{N}_k$, ապա (II) և (III) հավասարումները կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\sum_k \bar{F}_k + \sum_k \bar{N}_k + \sum_k \bar{J}_k = 0,$$

$$\sum_k \left(\bar{r}_k \times \bar{F}_k\right) + \sum_k \left(\bar{r}_k \times \bar{N}_k\right) + \sum_k \left(\bar{r}_k \times \bar{J}_k\right) = 0$$

կամ՝

$$\begin{aligned} &\bar{F} + \bar{N} + \bar{J} = 0, \\ &\bar{M}_0 + \bar{M}_0^{(N)} + \bar{M}_o^{(J)} = 0. \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

Այստեղ $\bar{F}, \bar{N}$ և $\bar{J}$ -ն համակարգի վրա կիրառված ակտիվ, պասիվ և իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորներն են, իսկ $\bar{M}_0, \bar{M}_0^{(N)}$ և $\bar{M}_0^{(J)}$ -ն ակտիվ, պասիվ և իներցիայի ուժերի գլխավոր մոմենտներն են O կենտրոնի նկատմամբ: Անհրաժեշտ է նկատի ունենալ, որ $\bar{F}, \bar{N}, \bar{M}_0$ և $\bar{M}_0^{(N)}$ վեկտորների մեջ ներքին ուժերը չեն մասնակցում:

(IV)-ից հետևում է, որ ժամանակի ցանկացած պահին մեխանիկական համակարգի վրա կիրառված արտաքին ակտիվ ուժերը, կապի հակազդումները և իներցիայի ուժերը բավարարում են ստատիկայի հիմնական հավասարումներին, այսինքն` այդ բոլոր ուժերի գումարը և ցանկացած կենտրոնի նկատմամբ այդ ուժերի մոմենտների գումարը հավասար է զրոյի:

Այսպիսով, իներցիայի ուժերի ներմուծումը հնարավորություն է տալիս կազմելու համակարգի շարժման հավասարումները ստատիկայի եղանակներով: Անհրաժեշտ է նշել, որ Դ'Ալամբերի սկզբունքը դինամիկայի խնդիրը չի բերում ստատիկայի խնդրին, այլ միայն տալիս է պարզ եղանակ ստատիկայի եղանակով դինամիկայի հավասարումներ կազմելու համար:

Պրոյեկտելով (IV) հավասարումները դեկարտյան կոորդինատական առանցքների վրա` կստանանք հետևյալ վեց հավասարումները`

$$F_x + N_x + J_x = 0,$$

$$F_y + N_y + J_y = 0,$$

$$F_z + N_z + J_z = 0,$$

$$M_x + M_x^{(N)} + M_x^{(J)} = 0,$$

$$M_y + M_y^{(\ \ )} + M_y^{(J)} = 0,$$

$$M_z + M_z^{(\ \ )} + M_z^{(J)} = 0:$$

Պինդ մարմնի շարժումը լիովին որոշվում է կինետոստատիկայի այս վեց հավասարումներով: Եթե դիտարկվում է մի քանի պինդ մարմիններից կազմված համակարգ, ապա կարելի է կազմել յուրաքանչյուր մարմնի համար համապատասխան կինետոստատիկայի հավասարումներն առանձին-առանձին:

Եթե մարմնի վրա ազդող բոլոր ուժերը գտնվում են հարթության վրա, զուգահեռ են կամ զուգամիտվում են մի կետում, ապա (V) հավասարումների թիվը համապատասխանաբար պակասում է:

Կարելի է ցույց տալ, որ (IV) հավասարումները իրենցից ներկայացնում են մեխանիկական համակարգի շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմը: (IV) կամ (V) հավասարումներն օգտագործելու համար անհրաժեշտ է նախօրոք գտնել իներցիայի ուժերի $\sum\limits_k \bar{J}_k$ գլխավոր վեկտորի և $\sum\limits_k mom_0(\bar{J}_k)$ գլխավոր մոմենտի որոշման բանաձևերը:

2. Պինդ մարմնի իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը: Պինդ մարմնի կետերի իներցիայի ուժերի համակարգը կարելի է տեղափոխել որևէ կետ, որը կոչվում է բերման կենտրոն: Դինամիկայում որպես իներցիայի ուժերի բերման կենտրոն ընդունվում է զանգվածների կենտրոնը: Պինդ մարմնի իներցիայի ուժերի համակարգը բերման C կենտրոն տեղափոխելիս ստացվում է մի ուժ, որը հավասար է մարմնի կետերի իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորին, այսինքն`

$$\bar{J} = \sum_k \bar{J}_k = -\sum_k m_k \overline{W}_k \qquad (1)$$

և մի ուժազույգ, որի մոմենտը հավասար է իներցիայի ուժերի գլխավոր մոմենտին զանգվածների C կենտրոնի նկատմամբ՝

$$\overline{M}_c^{(J)} = \sum_k (\bar{r}_k \times \bar{J}_k), \qquad (2)$$

այստեղ $\bar{r}_k$-ն k-րդ կետի շառավիղ-վեկտորն է C զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ: Ինչպես հայտնի է, ուժահամակարգի գլխավոր վեկտորը կախված չէ բերման կենտրոնի ընտրությունից և այն կարելի է հեշտությամբ որոշել: Իրոք, եթե համակարգի շարժման քանակը գրենք

$$\sum_k m_k \bar{V}_k = M\bar{V}_c$$

բանաձևով, այն ածանցենք ըստ t ժամանակի և ստացված արտահայտությունը տեղադրենք (1)-ի մեջ, կստանանք

$$\bar{J} = -\sum_k m_k \overline{W}_k = -M\overline{W}_c, \qquad (VI)$$

որտեղ M-ը համակարգի զանգվածն է, $\overline{W}_c$-ն՝ զանգվածների կենտրոնի արագացումը, իսկ $\bar{J}$-ն՝ համակարգի իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորը:

Հետևաբար, ցանկացած շարժում կատարող պինդ մարմնի իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորը հավասար է մարմնի զանգվածի և նրա զանգվածների կենտրոնի արագացման արտադրյալին և ուղղված է այդ արագացմանը հակառակ, ընդ որում այն կիրառված է բերման կենտրոնում կամ, մասնավորապես, զանգվածների կենտրոնում:

Եթե $\overline{W}_c$ արագացումը վերլուծենք զանգվածների կենտրոնի հետագծի շոշափողի և նորմալի ուղղությամբ բաղադրիչների, ապա (VI)-ից կունենանք՝

$$\bar{J}_\tau = -M\overline{W}_{c\tau}, \quad \bar{J}_n = -M\overline{W}_{cn}. \qquad (VII)$$

Իներցիայի ուժերի գլխավոր մոմենտի հաշվումը զգալի չափով դժվար է: Հաշվենք այն պինդ մարմնի միայն պարզագույն շարժումների համար:

ա) ***Համընթաց շարժում:*** Համընթաց շարժման դեպքում մարմնի բոլոր կետերի արագացումները հավասար են զանգվածների կենտրոնի արագացմանը, հետևաբար կունենանք՝

$$\sum_k (\bar{r}_{ck} \times \bar{J}_k) = -\sum_k (\bar{r}_{ck} \times m_k \overline{W}_k) =$$
$$= -\sum_k (m_k \bar{r}_{ck} \times \overline{W}_c) = M\bar{r}_c \times \overline{W}_c = 0, \qquad (3)$$

որտեղ $\bar{r}_{ck}$-ն k-րդ կետի շառավիղ վեկտորն է զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ:

(3)-ը հավասար է զրոյի, որովհետև զանգվածների կենտրոնի $\bar{r}_c$ շառավիղ-վեկտորը զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ հավասար է զրոյի:

Այս դեպքում պինդ մարմնի կետերի իներցիայի ուժերը բերվում են $\bar{J}$ համազորի, որը կիրառված է զանգվածների կենտրոնում և հավասար է իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորին՝

$$\bar{J} = -M\bar{W}_c : \qquad \text{(VIII)}$$

Այսպիսով, համընթաց շարժման դեպքում մարմնի իներցիայի ուժերը բերվում են մի համազոր ուժի, որը կիրառված է զանգվածների կենտրոնում, մեծությամբ հավասար է մարմնի զանգվածի և արագացման մեծության արտադրյալին և ուղղված է այդ արագացմանը հակառակ:

բ) *Հարթ զուգահեռական շարժում:* Քանի որ հարթ զուգահեռական շարժման ժամանակ մարմնի բոլոր կետերի հետագծերը, արագությունները և արագացումները մնում են զուգահեռ որևէ անշարժ հարթությանը, ապա առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է անշարժ հարթությունը տանել զանգվածների կենտրոնով:

Այդ դեպքում մարմնի կետերի իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորը, արդյունարար ուժազույգը, ինչպես նաև մարմնի զանգվածների C կենտրոնը կգտնվեն այդ հարթության մեջ: Բերման կենտրոնը տեղադրելով C կետում, (III) -ի համաձայն, կստանանք՝

$$\sum_k (\bar{r}_k \times \bar{J}_k) = -\sum_k (\bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)}) = -\sum_k mom_c(\bar{F}_k^{(e)}), \qquad (4)$$

որտեղ $\bar{F}_k^{(e)}$-ի մեջ մտնում են թե՛ պասիվ և թե՛ ակտիվ ուժերը, ընդ որում $\bar{r}_k$-ն համակարգի k-րդ կետի շառավիղ-վեկտորն է զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ:

Մյուս կողմից՝ մարմնի հարթ զուգահեռական շարժման դեպքում ունենք

$$\sum_k mom(\bar{F}_k^{(e)}) = J_c \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \qquad (5)$$

որտեղ J_c-ն մարմնի իներցիայի մոմենտն է C կենտրոնով անցնող և անշարժ հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ:

(4)-ից և (5)-ից հետևում է, որ

$$\bar{M}_c^{(J)} = \sum_k (\bar{r}_k \times \bar{J}_k) = -J_c\bar{\varepsilon}, \qquad \text{(IX)}$$

որտեղ $\bar{\varepsilon}$-ը մարմնի անկյունային արագացումն է:

Այսպիսով, մարմնի հարթ զուգահեռական շարժման դեպքում իներցիայի ուժերի համակարգը բերվում է մի արդյունարար ուժի, որը կիրառված է զանգվածների C կենտրոնում և ունի

$$\bar{J} = -M\bar{W}_c \qquad \text{(VIII)}$$

արժեքը, և մի ուժազույգի, որը որոշվում է (IX) բանաձևով: Այս բանաձևում եղած բացասական նշանը ցույց է տալիս, որ ուժազույգի մոմենտն ունի մարմնի անկյունային արագացմանը հակառակ ուղղություն:

գ) ***Մարմնի պտույտը զանգվածների C կենտրոնով անցնող առանցքի շուրջը:*** Սա նախորդի մասնավոր դեպքն է: Այս դեպքում $\overline{W}_c = 0$, և հետևաբար $\bar{J}_c = 0$:

Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում իներցիայի ուժերի համակարգը բերվում է մի ուժազույգի, որը գտնվում է նախորդ դեպքում նշված անշարժ հարթության մեջ և որի մոմենտը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

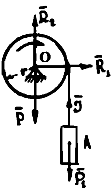
$$\overline{M}_{oz}^{(J)} = \sum_k mom_{oz}\left(\bar{J}_k\right) = -J_z\bar{\varepsilon}: \qquad \text{(X)}$$

Խնդիրների լուծման ժամանակ (VIII) և (X) բանաձևերով որոշվում են համապատասխան մեծությունների բացարձակ արժեքները, իսկ նրանց ուղղությունները նշվում են գծագրի վրա:

Կինետոստատիկայի եղանակը իր պարզության հետևանքով լայնորեն կիրառվում է պրակտիկայում, հատկապես դինամիկայի խնդիրները լուծելիս: Այս եղանակը մեծ մասամբ կիրառվում է կապերի դինամիկական հակազդումների, ինչպես նաև համակարգերի մեջ մտնող մարմինների արագացումները որոշելու համար: Միաժամանակ անհրաժեշտ է նշել, որ դինամիկայի բոլոր խնդիրները կարելի է լուծել առանց կինետոստատիկայի եղանակի կիրառման, ընդհանրապես առանց օգտվելու իներցիայի ուժերի հասկացություններից:

Եթե պահանջվում է որոշել անհայտ ներքին հակազդումները, ապա անհրաժեշտ է մեխանիկական համակարգը բաժանել մասերի այնպես, որ այդ մասերի նկատմամբ որոնելի հակազդումները դառնան արտաքին ուժեր:

Խնդիր 116: Անշարժ O առանցք ունեցող թմբուկը իրենից ներկայացնում է r շառավիղ և P կշիռ ունեցող համասեռ հոծ գլան, որին փաթաթված թելի ծայրից կախված է P_1 կշռով A բեռը: Գտնել թմբուկի անկյունային արագացումը և թելի լարումը: Շփման ուժը թմբուկի առանցքակալում և թելի զանգվածն արհամարհել (գծ.141):



Գծ. 141

Լուծում: Համակարգը կազմված է համընթաց շարժվող A բեռից և անշարժ O առանցքի շուրջը պտտվող թմբուկից: Համակարգի մարմինների վրա ազդում են թմբուկի և բեռի $\overline{P}$ և $\overline{P}_1$ կշիռները: Թմբուկը ազատենք կապից (O առանցքակալից)՝ այն փոխարինելով հորիզոնական և ուղղաձիգ $\overline{R}_1$ և $\overline{R}_2$ հակազդումներով: Մնում է այս ակտիվ և պասիվ ուժերին ավելացնել իներցիայի ուժերը: Քանի որ բեռը կատարում է համրնթաց շարժում, ապա նրա իներցիայի ուժերը բերվում են մի համազոր ուժի, որը կիրառված է բեռի զանգվածների կենտրոնում, մեծությամբ հավասար է բեռի զանգվածի և զանգվածների կենտրոնի արագացման արտադրյալին, ուղղված է այդ արագացմանը հակառակ: Եթե բեռի իներցիայի ուժերի համազորի մեծությունը նշանակենք J-ով, ապա կունենանք $J=\frac{P}{g}W_c$, որտեղ W_c-ն զանգվածների կենտրոնի արագացման մեծությունն է: Բայց քանի որ թելն անձգելի է և միաժամանակ չի սահում թմբուկի վրայով, ապա թմբուկի շրջանակի կետերի շոշափող արագացումը հավասար է A բեռի (թելի) W_c արագացման մեծությանը, հետևաբար, A բեռի իներցիայի ուժերի համազորի մեծությունը կլինի՝

$$J=\frac{P_1}{g}r\varepsilon \qquad (1)$$

$\bar{J}$ վեկտորի ուղղությունը ցույց է տրված գծագրում:

Մնում է որոշել թմբուկի կետերի իներցիայի ուժերը: Թմբուկի կետերի արագացումները կազմված են $W_{k\tau}$ տանգենցիալ և W_{kn} նորմալ արագացումներից, որի հետևանքով այդ կետերի իներցիայի ուժերը հանդիսանում են $J_{k\tau}$ տանգենցիալ և J_{kn} նորմալ իներցիայի ուժերի համազորը, ընդ որում $J_{k\tau}$ և J_{kn}-ը ուղղված են համապատասխանաբար $W_{k\tau}$ և W_{kn} արագացումներին հակառակ: Եթե թմբուկի k-րդ կետի զանգվածը նշանակենք m_k-ով և նրա հեռավորությունը պտտման առանցքից՝ r_k-ով, ապա $\bar{J}_{k\tau}$ և $\bar{J}_{kn}$ վեկտորների մեծությունները կունենան հետևյալ տեսքը

$$\begin{aligned} J_{k\tau} &= m_k W_{k\tau} = m_k r_k \varepsilon, \\ J_{kn} &= m_k W_{kn} = m_k r_k \omega^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

այստեղ ε-ը և ω-ն թմբուկի անկյունային արագացումն ու անկյունային արագությունն են:

Դալամբերի սկզբունքի համաձայն՝ մեխանիկական համակարգի վրա ազդող ակտիվ, պասիվ և իներցիայի ուժերի համակարգը համարժեք է զրոյի: Եթե այս ուժահամակարգի բոլոր ուժերի մոմենտների գումարը Oz առանցքի նկատմամբ (Oz-ն ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը) հավասարեցնենք զրոյի, կստանանք՝

$$P_1 r - Jr - \sum_k r_k J_{k\tau} = 0$$

կամ՝

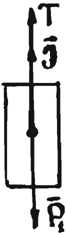
$$P_1 r - \frac{P_1}{g} r^2 \varepsilon - \varepsilon \sum_k m_k r_k^2 = 0: \qquad (3)$$

(3)-ը գրելիս նկատի ենք ունեցել, որ թմբուկի P կշռի, O առանցքակալի $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ հակազդումների և թմբուկի իներցիայի նորմալ ուժերի մոմենտները Oz

առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի: (3)-ի մեջ թելի T լարումը չի մասնակցում, քանի որ տվյալ համակարգի համար $\bar{T}$-ն ներքին ուժ է:

(3)-ի մեջ $\sum_k m_k r_k^2 = J_{oz}$-ը թմբուկի իներցիայի մոմենտն է Oz առանցքի նկատմամբ: Հայտնի է, որ հոծ համասեռ գլանի իներցիայի մոմենտը՝ $J_{oz} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2$ է, որի հետևանքով (3)-ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$P_1 r - \frac{P_1}{g}r^2\varepsilon - \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\varepsilon = 0:$$



Գծ. 141ա

Այստեղից ստացվում է, որ

$$\varepsilon = \frac{2P_1 g}{(P + 2P_1)r}:$$

Թելի լարումը որոշելու համար տրված մեխանիկական համակարգից անջատենք A բեռը, որի վրա կիրառված կլինեն նրա $\bar{P}_1$ կշիռը, $\bar{J}$ իներցիայի ուժը և $\bar{T}$ թելի լարումը (գծ.141ա): Դալամբերի սկզբունքի համաձայն՝ $\bar{P}$, $\bar{J}$ և $\bar{T}$ ուժերի համակարգը համարժեք է զրոյի: Դրա հետևանքով այս ուժահամակարգի համար կարելի է գրել հավասարակշռության հավասարումը՝

$$P_1 - T - J = 0:$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$T = P_1 - J = P_1 - \frac{P_1}{g}r\varepsilon = \frac{PP_1}{P + 2P_1}:$$

Պատ. $\varepsilon = \frac{2P_1 g}{(P + 2P_1)r}$, $T = \frac{PP_1}{P + 2P_1}$

Կինետոստատիկայի եղանակով խնդիրների լուծումը: Կինետոստատիկայի եղանակով խնդիրները նպատակահարմար է լուծել հետևյալ հաջորդականությամբ.

ա) պատկերել մեխանիկական համակարգի կետերի վրա կիրառված ակտիվ ուժերը,

բ) եթե դիտարկվում է ոչ ազատ մեխանիկական համակարգ, ապա անհրաժեշտ է համակարգը ազատել կապերից՝ դրանք փոխարինելով համապատասխան հակազդումներով,

գ) համակարգի վրա ազդող ակտիվ և պասիվ ուժերին ավելացնել իներցիայի ուժերը,

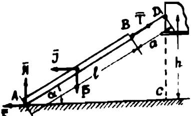
դ) ընտրել կոորդինատական համակարգ,

ե) գրել համակարգի շարժման հավասարումները (IV) կամ (V) տեսքով.

զ) ստացված հավասարումներից տալ պարզ տեսք և դրանցից որոշել անհայտ մեծությունները:

Խնդիրներ: Ստորև բերվում են կինետոստատիկայի եղանակի վերաբերյալ մի շարք խնդիրների լուծումներ: Մեշչերսկու խնդրագրքից վերցված խնդիրների համարները դրված են փակագծերի մեջ:

Խնդիր 117(880): l երկարություն ունեցող AB գերանը A ծայրով հենված է AC հորիզոնական ճանապարհի վրա: Գերանի B ծայրը a երկարություն ունեցող BD պարանով կապված է հորիզոնական ուղղությամբ հաստատուն արագացումով շարժվող բեռնատար մեքենայի D կետից, ընդ որում՝ CD=h: Անտեսելով գերանի լայնական չափերը գտնել, թե բեռնատար մեքենայի ինչպիսի՞ W արագացման դեպքում պարանը և գերանը կկազմեն մեկ ուղիղ (գծ.142):



Գծ. 142

Լուծում: Համակարգն իրենից ներկայացնում է բացարձակ պինդ մարմին, որը կատարում է համընթաց շարժում: Գերանի վրա ազդում են հետևյալ ուժերը՝ ա) գերանի ծանրության $\overline{P}$ ուժը, բ) բեռի $\overline{T}$ լարումը, որն ուղղված է բեռով, գ) հորիզոնական ուղեմասի $\overline{N}$ հակազդումը՝ կիրառված նրա A կետում, դ) սահքի շփման $\overline{F}$ ուժը և ե) գերանի կետերի իներցիայի ուժերի համազորը կիրառված գերանի զանգվածների կենտրոնում, որն (VIII)-ի համաձայն, որոշվում է $\bar{J} = -\dfrac{P}{g}\overline{W}$, բանաձևով:

Այստեղ $\overline{W}$,-ն գերանի զանգվածների կենտրոնի արագացումն է և հավասար է գերանի կետերի արագացմանը, քանի որ գերանը կատարում է համընթաց շարժում:

Դալամբերի սկզբունքի համաձայն՝ գերանի վրա ազդող ուժերը իրար հավասարակշռում են: Եթե գրենք այդ ուժերի մոմենտների գումարը Az առանցքի նկատմամբ, կունենանք՝

$$0{,}5lP\cos\alpha - 0{,}5l\frac{P}{g}W\sin\alpha = 0:$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$W = g\,ctg\alpha: \qquad (1)$$

Գծագրից երևում է, որ

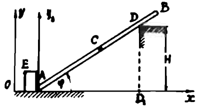
$$ctg\alpha = \frac{AC}{DC} = \frac{\sqrt{(l+a)^2 - h^2}}{h}:$$

Մնում է $ctg\alpha$-ի արժեքը տեղադրել (1)-ի մեջ:

Պատ. $W = \frac{g}{h}\sqrt{(l+a)^2 - h^2}$

Խնդիր 118 (41.5): $2l$ երկարություն և G կշիռ ունեցող AB համասեռ բարակ ձողի A ծայրակետը տեղափոխվում է հորիզոնական ուղղությամբ E հենման կետի օգնությամբ հաստատուն V արագությամբ, ընդ որում ձողն ամբողջ շարժման ժամանակ հենվում է D անկյան վրա:

Որոշել ձողի իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը ձողի ծանրության C կենտրոնով անցնող և շարժման հարթությանը ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ կախված φ անկյունից (գծ.143):



Գծ. 143

Լուծում: Ձողի իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորը և գլխավոր մոմենտը որոշելու համար օգտվենք (VIII) և (IX) բանաձևերից`

$$^{-} = -M\overline{W}_c, \quad \overline{M}^{(J)} = -J_c\bar{\varepsilon},$$

կամ`

$$J_x = -M\ddot{x}_c, \quad {}_{,} = -M\ddot{y}_c, \quad M_{cz}^{(J)} = - \qquad (1)$$

Այստեղ x_c-ն և y_c-ն C ծանրության կենտրոնի կոորդինատներն են ժամանակի t պահին (գծ. 143):

Քանի որ A կետը շարժվում է հաստատուն V արագությամբ, ապա նրա կոորդինատները կլինեն`

$$x_A = Vt + x_0, \quad y_A = 0:$$

C կետի կոորդինատները x_1Ay_1 շարժական համակարգի նկատմամբ կլինեն`

$$x_{1C} = l\cos\varphi, \quad y_{1C} = l\sin\varphi:$$

$${}_{0} + Vt + x_0,$$

$$y_C = y_{1C} + y_A = l\sin\varphi: \qquad (2)$$

Մյուս կողմից`

$$x_D = x_A + Hctg\varphi = Vt + x_0 + Hctg\varphi: \qquad (3)$$

Եթե ածանցենք (3) արտահայտությունը և որոշենք $\dot{\varphi}$-ն ու $\ddot{\varphi}$-ը, կստանանք`

$$\dot{\varphi} = \frac{V}{H}\sin^2\varphi,$$

$$\ddot{\varphi} = 2\left(\frac{V}{H}\right)^2 \sin^3\varphi\cos\varphi :$$

Եթե կազմենք x_c, y_c-ի երկրորդ կարգի ածանցյալներն ըստ ժամանակի և օգտվենք (4) առնչությունից, կստանանք՝

$$\ddot{x}_c = -3l\frac{V^2}{H^2}\sin^4\varphi\cos\varphi,\ \ \ddot{y}_c = l\frac{V^2}{H^2}\left(3\cos^2\varphi - 1\right)\sin^3\varphi : \qquad (5)$$

Տեղադրելով $\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$-ի արժեքները (5)-ից առաջին երկու առնչությունների մեջ և միաժամանակ նկատի ունենալով, որ $M = \frac{G}{g}$, կստանանք՝

$$J_x = 3\frac{G}{g}\frac{V^2}{H^2}l\sin^4\varphi\cos\varphi,\ \ J_y = \frac{G}{g}\frac{V^2}{H^2}l\left(1 - 3\cos^2\varphi\right)\sin^3\varphi :$$

Եթե այժմ (1)-ի երրորդ առնչության մեջ տեղադրենք $J_{cz} = \frac{1}{3}\frac{G}{g}l^2$ և $\ddot{\varphi}$-ի արժեքը (4)-ից, ապա կունենանք՝

$$M_{cz}^{(J)} = -\frac{2}{3}\frac{G}{g}\frac{V^2}{H^2}\sin^3\varphi\cos\varphi :$$

$$_x = 3\frac{G}{g}\frac{V^2}{H^2}l\sin^4\varphi\cos\varphi,\ \ J_y = \frac{G}{g}\frac{V^2}{H^2}l\left(1 - 3\cos^2\varphi\right)\sin^3\varphi,$$

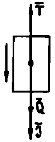
$$M_{cz}^{(J)} = -\frac{2}{3}\frac{G}{g}\frac{V^2}{H^2}\sin^3\varphi\cos\varphi :$$

Խնդիր 119[41.11(883)]: Մետաղական չորսուի վրա իրար արագ հաջորդող ձգող ու սեղմող ուժերի ազդեցությունը ուսումնասիրելու համար փորձակվող A չորսուն վերին ծայրով ամրացնում են BCO մեղեխավոր մեխանիզմի B սողնակին, իսկ ստորին ծայրից կախում են Q կշիռ ունեցող բեռը: Գտնել չորսուն ձգող ուժն այն դեպքում, երբ OC մեղեխը պտտվում է O առանցքի շուրջը հաստատուն ω անկյունային արագությամբ (գծ.144):

Գծ. 144

Ցուցում: $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\varphi}$ արտահայտությունը պետք է վերածել շարքի և արհամարհել այն բոլոր անդամները, որոնք պարունակում են $\frac{r}{l}$ հարաբերության երկրորդից բարձր աստիճանները:

Լուծում: Եթե $\overline{Q}$ կշիռ ունեցող բեռն ազատենք կապերից, կապը փոխարինելով $\overline{T}$ հակազդումով և միաժամանակ ավելացնենք $\overline{J}$ իներցիայի ուժը, ապա, համաձայն Դալամբերի սկզբունքի, $\overline{Q}$, $\overline{T}$ և $\overline{J}$ ուժերը կգտնվեն հավասարակշռության մեջ: Չնայած բեռն իջնում է ցած, այնուհանդերձ շարժման արագացումն ուղղված կլինի դեպի վեր (գծ.145), իսկ իներցիայի ուժն իր ուղղությամբ կհամընկնի $\overline{Q}$ ուժի ուղղության հետ: Կազմելով նշված ուժերի հավասարակշռության հավասարումը՝ կունենանք՝



Գծ. 145

$$T - Q - J = 0:$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$T = Q + \frac{Q}{g}W: \qquad (1)$$

Q բեռի ցանկացած կետի արագացումը հավասար է B կետի արագացմանը, իսկ B կետի շարժման օրենքն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$x_B = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - \left(r\sin\omega t\right)^2}$$

կամ՝

$$x_B = r\cos\omega t + l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2} \qquad (2)$$

Եթե $\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2}$ արտահայտությունը վերածենք շարքի, կունենանք՝

$$\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2} = \left(1-\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t\right)^{1/2} = 1-\frac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t + \frac{1}{4}\frac{r^4}{l^4}\sin^4\omega t - \ldots$$

Համաձայն խնդրի ցուցումի՝ արհամարհենք շարքի այն բոլոր անդամները, որոնք պարունակում են $\frac{r}{l}$ հարաբերության երկրորդից բարձր աստիճանները, ապա կստանանք՝

$$\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\omega t\right)^2} \cong 1-\frac{1}{2}\frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t, \qquad (3)$$

որի համաձայն (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x_B = r\cos\omega t + l - \frac{r^2}{2l}\sin^2\omega t: \qquad (4)$$

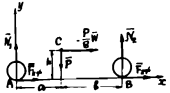
Կազմենք (4)-ի երկրորդ կարգի ածանցյալն ըստ ժամանակի՝

$$\frac{d^2x_B}{dt^2} = -r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right): \qquad (5)$$

Մնում է $W_B = \frac{d^2x_B}{dt^2}$ արժեքը (5)-ից տեղադրել (1)-ի մեջ և կատարել նշված գործողությունները:

Պատ. $T = Q + \frac{Q}{g}r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right):$

Խնդիր 120 [41.15(886)]: P կշիռ ունեցող ավտոմեքենան շարժվում է ուղղագիծ W արագացումով: Որոշել ավտոմեքենայի առջևի և հետևի անիվների ուղղածիգ ճնշումները, եթե նրա C ծանրության կենտրոնը գտնվում է գետնի մակերևույթից h բարձրության վրա: Ավտոմեքենայի առջևի և հետևի անիվների առանցքների հեռավորությունը ծանրության կենտրոնով անցնող ուղղաձիգից հավասար են a-ի և b-ի: Անիվների պտտման իներցիայի ուժերի մոմենտներն անտեսել: Ինչպիսի՞ արագացումով պետք է շարժվի ավտոմեքենան, որպեսզի առջևի և հետևի անիվների ճնշումները լինեն հավասար:



Գծ. 146

Լուծում: Տանենք կոորդինատական xy համակարգ՝ սկզբնակետն ընտրելով առջևի անիվի և գետնի հպման A կետում: Ավտոմեքենայի առջևի և հետևի անիվների ուղղաձիգ հակազդումները նշանակենք $\bar N_1$-ով և $\bar N_2$-ով (գծ.146), իսկ անիվների շփման ուժերը՝ $\bar F_1$-ով և $\bar F_2$-ով: Շփման ուժերն ուղղված կլինեն x-ի դրական ուղղությամբ: Ավտոմեքենայի իներցիայի ուժը մեծությամբ հավասար կլինի $\dfrac{P}{g}W$-ի և ուղղված ավտոմեքենայի արագացմանը հակառակ:

Եթե ավտոմեքենայի վրա ազդող բոլոր արտաքին և իներցիայի ուժերի պրոյեկցիաների գումարը y առանցքի վրա և մոմենտների գումարը Az առանցքի նկատմամբ հավասարեցնենք զրոյի, կստանանք

$$N_1 + N_2 - P = 0\,,$$

$$N_2(a+b) - Pa - \frac{P}{g}Wh = 0. \qquad (1)$$

Լուծելով այս հավասարումների համակարգը N_1 և N_2 հակազդումների նկատմամբ՝ կստանանք

$$N_1 = \frac{P(bg - Wh)}{g(a+b)}, \quad N_2 = \frac{P(ag + Wh)}{g(a+b)}: \qquad (2)$$

Ավտոմեքենայի պահանջվող արագացումը որոշելու համար հավասարեցնենք N_1 և N_2 հակազդումները: Կստանանք

$$W = g\,\frac{a-b}{2h}:$$

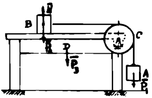
Ավտոմեքենայի ուղղաձիգ ճնշումները գետնի վրա թվապես հավասար կլինեն N_1 և N_2 հակազդումների մեծություններին և կունենան դրանց հակառակ ուղղությունները:

Պատ. $\quad N_1 = \dfrac{P(bg - Wh)}{g(a+b)},\; N_2 = \dfrac{P(ag + Wh)}{g(a+b)}$;

ավտոմեքենայի արգելակման դեպքում ավտոմեքենան կշարժվի $W = g\dfrac{a-b}{2h}$ դանդաղեցումով:

Խնդիր 121 [41.18 (889)]: P_1 կշռով A բեռն իջնելով ներքև անկշիռ և չձգվող թելի օգնությամբ շարժման մեջ է դնում C անշարժ ճախարակի վրայով գցված P_2 կշիռ ունեցող B բեռը: Որոշել D սեղանի ճնշումը հատակի վրա, եթե սեղանի կշիռը հավասար է P_3 -ի (գծ.147):

Լուծում: Համակարգը կազմված է A, B բեռներից, սեղանից և ճախարակի վրայով գցված թելից, ընդ որում թելի և ճախարակի կանգվածները արհամարհված են: Համակարգի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը բեռների և սեղանի P_1, P_2, P_3 կշիռները և սեղանի $\overline{N}$ հակազդումը: Օգտվելով Դալամբերի սկզբունքից կազմենք համակարգի շարժման հավասարումները: A և B բեռների իներցիայի ուժերի մեծությունները կլինեն P_1W/g և P_2W/g (բեռների արագացումները իրար հավասար են, քանի որ բեռներ միացնող թելն անձգելի է): Բոլոր ուժերի ուղղությունները ցույց են տրված գծագրի վրա (գծ. 147):



Գծ. 147

Եթե համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին և իներցիայի ուժերի պրոյեկցիաների գումարը ուղղաձիգ առանցքի վրա և նրանց մոմենտների գումարը Cz առանցքի նկատմամբ (Cz -ն ուղղահայաց է գծագրի հարթությանը) հավասարեցնենք զրոյի և հաշվի առնենք, որ սեղանն անշարժ է, կստանանք`

$$-P_1 - P_2 - P_3 + \frac{P_1}{g}W + N = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{P_1}{g}Wr + \frac{P_2}{g}Wr - P_1 r = 0, \qquad (2)$$

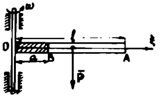
այստեղ r-ը ճախարակի շառավիղն է:

Եթե (2) հավասարումից որոշենք W -ն և նրա արժեքը տեղադրենք (1) -ի մեջ, կստանանք հակազդման մեծությունը:

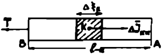
Սեղանի ճնշումը հատակի վրա թվապես հավասար կլինի N հակազդման մեծությանը և կունենա նրա հակառակ ուղղությունը:

Պատ. $\quad N = P_1 + P_2 + P_3 - \dfrac{P_1^2}{P_1 + P_2}$:

Խնդիր 122 [41.21 (893)]: P կշիռ և l երկարություն ունեցող համասեռ ձողը պտտվում է հաստատուն ω անկյունային արագությամբ անշարժ ուղղաձիգ առանցքի շուրջը, որն ուղղահայաց է ձողին և անցնում է նրա ծայրակետով: Որոշել ձողի պտտման առանցքից a հեռավորության վրա գտնվող լայնական կտրվածքում առաջացող ձգող ուժը (գծ.148):



Գծ. 148



Գծ. 149

Լուծում: Որոնելի $\bar{T}$ ուժը ներքին ուժ է: Այն որոշելու համար OA ձողը B կետում կտրենք և դիտարկենք (l - a) երկարություն ունեցող BA մասի շարժումը (գծ.149): Դեն գցված OB մասի ազդեցությունը փոխարինվում է B կետում կիրառված որոնելի $\bar{T}$ ձգող ուժով: $\bar{T}$ ուժը պետք է հավասարակշռվի BA մասի իներցիայի ուժի $\bar{J}$ գլխավոր վեկտորով`

$$\bar{T} - \bar{J} = 0: \qquad (1)$$

OA ձողը պտտվում է հաստատուն ω անկյունային արագությամբ, հետևաբար, BA մասի կետերի շոշափող արագացումները, ինչպես նաև նրանց իներցիայի շոշափող ուժերը հավասար կլինեն զրոյի, իսկ իներցիայի նորմալ ուժերը կունենան հետևյալ արժեքները.

$$\bar{J}_{kn} = -m_k\overline{W}_{kn}, \quad \Delta J_{kn} = \gamma\Delta\xi_k\omega^2\xi_k, \quad = \frac{P}{gl}, \qquad (2)$$

որտեղ γ -ն ձողի միավոր երկարության խտությունն է:

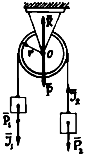
(2)-ից հետևում է, որ BA մասի իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորի մեծությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով`

$$= \int_a^l \gamma\omega^2\xi d\xi = \frac{P\omega^2}{2gl}\left(l^2 - a^2\right):$$

Մնում է J -ի արժեքը (3) -ից տեղադրել (1) -ի մեջ և որոշել ձգող T ճիգի մեծությունը:

Պատ. $\quad T = \dfrac{P\omega^2\left(l^2 - a^2\right)}{2gl}$:

Խնդիր 123: Ճախարակի վրայով գցված է անձգելի թել, որի ծայրերից կախված են P_1 և P_2 կշիռներ ունեցող բեռներ, ընդ որում` $P_2 > P_1$: Ճախարակի կշիռը $P$ է, շառավիղը` r: Որոշել բեռների արագացումը` արհամարհելով թելի զանգվածը և ընդունելով ճախարակը որպես նյութական շրջանագիծ (գծ.150):



Գծ. 150

Լուծում: Համակարգը կազմված է բեռներից և ճախարակից (թելի զանգվածը արհամարհված է): Համակարգի նկատմամբ կիրառենք Դալամբերի սկզբունքը: Համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերին ավելացնենք իներցիայի ուժերը և դիտարկենք այդ ուժերի հավասարակշռությունը: Քանի որ $P_2 > P_1$, ուստի P_2 բեռը կշարժվի որոշ արագացումով դեպի ներքև` հաղորդելով ճախարակին անկյունային արագացում` ուղղված ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ: P_1 և P_2 բեռների իներցիայի ուժերի մեծությունները կլինեն՝

$$_1 = \frac{P_1}{g}W, \qquad _2 = \frac{P_2}{g}W,$$

որտեղ W -ն բեռների արագացումն է: Խնդրի պայմանի համաձայն՝ P_1 և P_2 բեռները միացված են անձգելի թելով, հետևաբար նրանք կշարժվեն միևնույն արագացումով (իներցիայի ուժերի ուղղությունները ցույց են տրված գծագրի վրա): Քանի որ պտտվող մարմնի իներցիայի ուժերի մոմենտն ունի մարմնի անկյունային արագացմանը հակառակ ուղղություն, ուստի, (X) բանաձևի համաձայն, պտտման առանցքի նկատմամբ ճախարակի կետերի իներցիայի ուժերի մոմենտների գումարը կլինի՝

$$\sum_k mom_0\left(\bar{J}_k\right) = J_0\varepsilon = \frac{Pr^2}{g}\varepsilon = \frac{Pr^2}{g}\frac{W}{r} = \frac{P}{g}Wr: \qquad (2)$$

Դալամբերի սկզբունքի համաձայն՝ համակարգի վրա ազդող ակտիվ ուժերը, կապերի հակազդումները և իներցիայի ուժերը գտնվում են հավասարակշռության մեջ: Հավասարեցնելով զրոյի այդ ուժերի մոմենտների գումարը Oz առանցքի նկատմամբ՝ կստանանք՝

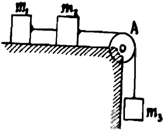
$$P_1r + J_1r + P_2r + \frac{P}{g}Wr - P_2r = 0: \qquad (3)$$

Ճախարակի $\bar{P}$ կշռի և նրա առանցքի $\bar{R}$ հակազդման մոմենտները Oz առանցքի նկատմամբ հավասար են զրոյի, որի պատճառով նրանք (3) հավասարության մեջ չեն մասնակցում:

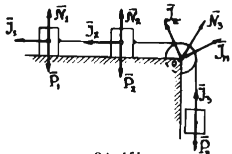
Մնում է J_1 և J_2 -ի արժեքները (1)-ից տեղադրել (3) -ի մեջ և ստացված հավասարումը լուծել W -ի նկատմամբ:

Պատ. $\quad W = \dfrac{(P_2 - P_1)g}{P_1 + P_2 + P}$:

Խնդիր 124: m_1, m_2, m_3 զանգվածներ ունեցող երեք բեռներ իրար հետ միացված են անշարժ A ճախարակի վրայով գցված անկշռելի և անձգելի թելով: Երկու բեռներ գտնվում են ողորկ հորիզոնական հարթության վրա, իսկ երրորդ բեռը շարժվում է ուղղաձիգի ուղղությամբ: Որոշել բեռների արագացումները և M_1 ու M_2 բեռները միացնող թելի լարումը, եթե ճախարակը m զանգված ունեցող համասեռ սկավառակ է (գծ.151ա):



Գծ. 151ա



Գծ. 151բ

Լուծում: Համակարգը կազմված է երեք բեռներից և ճախարակից: Արտաքին ուժեր հանդիսանում են բեռների $\bar P_1$, $\bar P_2$, $\bar P_3$ կշիռները, ճախարակի $\bar P$ կշիռը, հարթության $\bar N_1$ և $\bar N_2$ հակազդումները, ամրացման A կետի $\bar N_3$ հակազդումը (գծ.151բ): Այս ուժերին ավելացնենք բեռների $\bar J_1$, $\bar J_2$, $\bar J_3$ իներցիայի ուժերը, որոնց մեծությունները կլինեն՝

$$J_1 = \frac{P_1}{g}W, \quad J_2 = \frac{P_2}{g}W, \quad J_3 = \frac{P_3}{g}W: \qquad (1)$$

Քանի որ բեռները միացնող թելն անձգելի է, ուստի նրանց արագացումները կլինեն իրար հավասար: W արագացումը որոշելու համար կազմենք բոլոր արտաքին և իներցիայի ուժերի մոմենտների գումարը Oz առանցքի նկատմամբ և հավասարեցնենք զրոյի, կստանանք՝

$$mom_0(\bar P_3) + mom_0(\bar J_1) + mom_0(\bar J_2) + mom_0(\bar J_3) + \bar M_0^{(J)} = 0, \qquad (2)$$

որտեղ $\bar M_0^{(J)} = \sum_k mom_0(\bar J_k)$-ն A ճախարակի կետերի իներցիայի ուժերի մոմենտների գումարն է O կենտրոնի նկատմամբ: (2) հավասարումը կազմելիս նկատի ենք ունեցել, որ

$$mom_0(\bar N_1) + mom_0(\bar P_1) = 0, \quad mom_0(\bar N_2) + mom_0(\bar P_2) = 0,$$

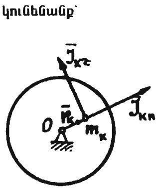
$$mom_0(\bar P) = 0, \; mom_0(\bar N_3) = 0:$$

Եթե նկատի ունենանք, որ ճախարակի կետերի համար

$$\bar J_k = \bar J_{k\tau} + \bar J_{kn}$$

և $\bar J_{kn}$-ի մոմենտը O կետի նկատմամբ հավասար է զրոյի (գծ. 151գ), ապա կունենանք՝

$$M_0^{(J)} = \sum_i m_i r_i \varepsilon r_i = \varepsilon \sum_i m_i r_i^2 = J_z \varepsilon, \qquad (3)$$



Գծ. 151գ

որտեղ J_z-ը ճախարակի իներցիայի մոմենտն է Oz առանցքի նկատմամբ:

(2)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$-P_3 r + r(J_1 + J_2 + J_3) + J_z \varepsilon = 0: \qquad (4)$$

Նկատի ունենալով, որ

$$\varepsilon = \frac{W}{r}, J_1 = m_1 W_1,$$

(4)-ը կարող ենք գրել հետևյալ ձևով՝

$$-m_3gr + rW(m_1 + m_2 + m_3) + \frac{mrW}{2} = 0:$$

Այստեղից ստացվում է

$$W = \frac{2m_3g}{m + 2(m_1 + m_2 + m_3)}:$$

M_2 և M_3 բեռները միացնող թելի լարումը որոշելու համար կտրենք այդ թելը և առանձին դիտարկենք M_3 բեռի շարժումը (գծ. 151դ): Այդ բեռի վրա կիրառված արտաքին ուժերը կլինեն բեռի P_3 կշիռը և թելի $\bar{T}_{23}$ լարումը, որն ուղղված է դեպի վեր: Եթե այս ուժերին ավելացնենք $\bar{J}_3$ իներցիայի ուժը, բոլոր ուժերը պրոյեկտենք y առանցքի վրա և գումարը հավասարեցնենք զրոյի, կստանանք՝

$$T_{23} - P_3 + J_3 =$$

Այստեղից ստացվում է, որ

$$T_{23} = P_3 - J_3 = m_3(g - W): \qquad (6)$$

Գծ. 151դ

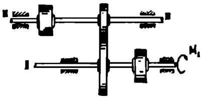
W-ի արժեքը (5)-ից տեղադրելով (6)-ի մեջ՝ կստանանք T_{23}-ը:

Պատ. $W = \dfrac{2m_3g}{m + 2(m_1 + m_2 + m_3)}$, $T_{23} = \dfrac{gm_3[m + 2(m_1 + m_2)]}{m + 2(m_1 + m_2 + m_3)}$

Խնդիր125: I և II լիսեռները, նրանց վրա հագցված փոկանիվների և ատամնանիվների հետ միասին ունեն համապատասխանաբար J_1 = 500կգ.սմ.վրկ^2, J_2 =400կգ.սմ.վրկ^2 իներցիայի մոմենտներ: Ատամնավոր փոխանցման թիվը՝ k_{12}=2/3: Քանի* պտույտից հետո II լիսեռը կունենա n_2=120պտ/րոպ անկյունային արագություն, եթե համակարգը շարժման մեջ է դրվում հանգստի վիճակից առաջին լիսեռի վրա կիրառված M_1=50 կգ.մ մոմենտով: Առանցքակալներում շփումն անտեսել (գծ. 152):

Լուծում: Նախ դիտարկենք առաջին լիսեռի պտույտն իր առանցքի շուրջը: Լիսեռի վրա ազդում են M_1 =50 կգ.մ պտտող մոմենտը և երկրորդ լիսեռի դիմադրության ուժի $-F r_1$ մոմենտը: Սրանց ավելացնենք իներցիայի ուժերի մոմենտը, որը, (VII) բանաձևի համաձայն, կլինի՝

$$\sum_k mom_x(J_k) = -$$



Գծ. 152

Դալամբերի սկզբունքի համաձայն՝ կունենանք՝

$$M_1 - Fr_1 - \qquad (1)$$

Այժմ դիտարկենք երկրորդ լիսեռի պտույտն իր առանցքի շուրջը: II լիսեռի վրա ազդում է առաջին լիսեռի դիմադրության Fr_2 մոմենտը: Սրան ավելացնենք $-J_2\varepsilon_2$ իներցիայի ուժը և, Դալամբերի սկզբունքի համաձայն, գրենք հավասարակշռության հավասարումը՝

$$Fr_2 - J_2\varepsilon_2 = 0: \qquad (2)$$

Երե (2)-ից որոշենք F-ը և տեղադրենք (1)-ի մեջ, կստանանք

$$M_1 - J_2\varepsilon_2\frac{r_1}{r_2} - J_1\varepsilon_1 = 0: \qquad (3)$$

Եթե նկատի ունենանք, որ

$$= \frac{2}{3}\varepsilon_2,\ \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2},\ M_1 = 50\text{կգ.մ},\ J_1 = 5\text{կգ.մ.վրկ}^2;\ J_2 = 4\ \text{կգ.մ.վրկ}^2,$$

(3)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$50 - 4\varepsilon_2\frac{3}{2} - 5\cdot\frac{2}{3}\varepsilon_2 =$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$\varepsilon_2 = 50/9{,}33 = 5{,}369\ \text{վրկ}^{-2}:$$

Հայտնի է, որ եթե ε_2=const և շարժումն սկսվում է անշարժ վիճակից, ապա կունենանք՝

$$\omega_2 = \qquad \varphi_2 = \frac{\varepsilon_2 t^2}{2}: \qquad (4)$$

Խնդրի պայմանի համաձայն՝

$$\omega_2 = 4\pi = \varepsilon_2 t_1 \qquad \varphi_2 = \frac{\varepsilon_2 t_1^2}{2} = 2\pi t_1$$

(t_1-ը ժամանակի այն պահն է, երբ II լիսեռի անկյունային արագությունը դառնում է n_2'):

Այժմ (5) բանաձևից հաշվենք՝

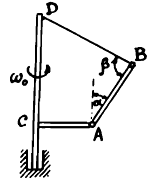
$$t_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon_2} = 2{,}334\ ,\ n_2' = \frac{\varphi_2}{2\pi} = \frac{2\pi t_1}{2\pi} = t_1 = 2{,}334\ \text{պտույտ}:$$

Պատ. n_2'=2,334 պտույտ:

Խնդիր 126: l երկարություն և m զանգված ունեցող AB համասեռ ձողը հոդակապով ամրացված է CA հորիզոնական ձողին, որն իր հերթին կոշտ կերպով ամրացված է հաստատուն ω_0 անկյունային արագությամբ պտտվող ուղղաձիգ լիսեռի հետ: Որոշել AB ձողն ուղղաձիգի նկատմամբ α անկյան տակ պահող BD թելի T լարումը, եթե $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, իսկ $CA = a$ (գծ. 153ա):

Լուծում: AB ձողի վրա ազդում են հետևյալ արտաքին ուժերը՝ ձողի $\overline{P}$

կշիռը, թելի $\bar{T}$ լարումը և A կետի $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ հակազդումները (գծ.153բ): Այս ուժերին պետք է ավելացնել ձողի իներցիայի ուժերի համազորը: Ձողը պտտվում է հաստատուն ω_0 անկյունային արագությամբ, հետևաբար, նրա կետերի շոշափող արագացումները, ինչպես նաև իներցիայի շոշափող ուժերը հավասար կլինեն զրոյի: Մնում է հաշվել ձողի իներցիայի նորմալ բաղադրիչը: Ձողի $\Delta\xi$ փոքր մասի իներցիայի նորմալ ուժի մեծությունը կորոշվի հետևյալ բանաձևով`

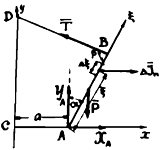


Գծ. 153ա

$$\Delta J = (a+\xi\sin\alpha)\omega_0^2\frac{m}{l}\Delta\xi,$$

որտեղ ξ-ն ձողի $\Delta\xi$ մասի հեռավորությունն է A կետից (գծ. 153բ):

Եթե ձողի վրա ազդող արտաքին և իներցիայի ուժերի մոմենտների գումարը գծագրի հարթությանն ուղղահայաց Az առանցքի նկատմամբ հավասարեցնենք զրոյի, կստանանք`



$$-\frac{mgl}{2}\sin\alpha + Tl - \int_0^l (a+\xi\sin\alpha)\frac{m\omega_0^2\cos\alpha}{l}\xi\, d\xi = 0$$

Այստեղից ստացվում է, որ

Գծ. 153բ

$$= \frac{m}{2}\left[g\sin \qquad\qquad + \frac{l\omega_0^2\sin 2\alpha}{3}\right] \qquad (2)$$

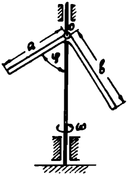
Եթե α -0, ապա (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը`

$$T = \frac{ma\omega_0^2}{2}$$

$$T = \frac{m}{2}\left[g\sin\alpha + a\omega_0^2\cos\alpha + \frac{l\omega_0^2\sin 2\alpha}{3}\right]$$

եթե $\alpha = 0$, ապա $T = \frac{ma\omega_0^2}{2}$

Խնդիր 127[41.25(900)]: a և b երկարություններ ունեցող երկու բարակ համասեռ ուղղագիծ ձողեր կոշտ միացված են ուղիղ անկյան տակ, որի O գագաթը հոդակապով միացված է ուղղաձիգ լիսեռին: Լիսեռը պտտվում է հաստատուն ω անկյունային արագությամբ: Գտնել ω-ի և շեղման φ անկյան միջև եղած առնչությունը, որտեղ φ -ն a երկարություն ունեցող ձողի և ուղղաձիգի կազմած անկյունն է (գծ 154):



Գծ. 154

Լուծում: Համակարգը կազմված է իրար հետ կոշտ միացված երկու համասեռ ուղղագիծ հատվածներից: Համակարգի վրա ազդում են ձողերի կշիռները, որոնց մեծությունները համեմատական են նրանց a և b երկարություններին: Ձողերը պտտվում են ω հաստատուն անկյունային արագությամբ, հետևաբար, նրանց շոշափող արագացումները, ինչպես նաև շոշափող իներցիայի ուժերը կլինեն զրո, իսկ ձողերի փոքր մասերի իներցիայի նորմալ ուժերի մեծությունները կորոշվեն հետևյալ բանաձևերով՝

$$\Delta J_1 = r\gamma\Delta r\omega^2 \sin\varphi,$$

$$\Delta J_2 = r\gamma\Delta r\omega^2 \cos\varphi,$$

որտեղ γ-ն ձողի միավոր երկարության խտությունն է, r-ը ձողի Δr մասի հեռավորությունը O կետից:

Եթե ձողի վրա ազդող բոլոր արտաքին և իներցիայի ուժերի մոմենտների գումարը գծագրի հարթությանն ուղղահայաց Oz առանցքի նկատմամբ հավասարեցնենք զրոյի, կստանանք՝

$$\gamma a g\frac{a}{2}\sin\varphi - \gamma b g\frac{b}{2}\cos\varphi - \int_0^a \gamma\omega^2 r\sin\varphi r\cos\varphi dr + \int_0^b \gamma\omega^2 r\cos\varphi r\sin\varphi dr =$$

Այստեղից ստացվում է՝

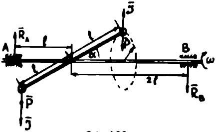
$$\frac{g}{2}\left(a^2\sin\varphi - b^2\cos\varphi\right) + \frac{\omega^2}{6}\left(b^3 - a^3\right)\sin 2\varphi = 0:$$

Մնում է այս հավասարումից որոշել ω^2-ն:

Պատ. $\omega^2 = 3g\dfrac{b^2\cos\varphi - a^2\sin\varphi}{\left(b^3 - a^3\right)\sin 2\varphi}$:

Խնդիր 128: $2l$ երկարություն ունեցող CD ձողը, որի երկու ծայրերին կան P կշռով բեռներ, կոշտ կերպով ամրացված է $3l$ երկարություն ունեցող հորիզոնական AB լիսեռին, որը հենվում է A և B առանցքակալների վրա և պտտվում հաստատուն ω անկյունային արագությամբ: Լիսեռի առանցքի և ձողի կազմած անկյունը հավասար է α-ի: Ձողի և լիսեռի ամրացման տեղը ցույց է տրված գծագրում: Գտնել A և B առանցքակալների $\overline{R}_A$ և $\overline{R}_B$ հակազդումները, երբ ձողը գտնվում է ուղղաձիգ հարթության մեջ՝ արհամարհելով լիսեռի և ձողի կշիռները (գծ 155):

Լուծում: Եթե AB լիսեռը չի պտտվում, ապա առաջանում են ստատիկական հենարանային հակազդումներ, որոնք հավասարակշռում են լիսեռի վրա կիրառված արտաքին ակտիվ ուժերին: Լիսեռի պտտման ժամանակ առաջանում են բեռների իներցիայի ուժեր, որոնք ազդում են A և B առանցքակալների վրա, իսկ առանցքակալների կողմից առաջանում են լրացուցիչ հենարանային $\bar{R}_A$ և $\bar{R}_B$ հակազդումներ, որոնք ազդում են լիսեռի վրա:



Գծ. 155

$\bar{R}_A$ և $\bar{R}_B$ հակազդումները որոշելու համար օգտվենք Դալամբերի սկզբունքից: C և D բեռների վրա կիրառենք $\bar{J}_1$ և $\bar{J}_2$ իներցիայի նորմալ ուժերը, որոնք ուղղված կլինեն բեռների պտտման շառավիղներով և մեծությամբ հավասար կլինեն՝

$$J_1 = J_2 = J = \frac{P}{g} l\omega^2 \sin\alpha:$$

Այստեղ r-ը բեռների պտտման շառավիղն է: Անհրաժեշտ է նշել, որ բեռների շոշափող արագացումները, հետևաբար և իներցիայի շոշափող ուժերը հավասար են զրոյի, քանի որ C և D բեռները պտտվում են հաստատուն անկյունային արագությամբ: Եթե բեռների կշիռներին և հակազդումներին ավելացնենք բեռների իներցիայի ուժերը, կազմենք դրանց մոմենտների գումարը A և B կետերի նկատմամբ և, Դալամբերի սկզբունքի համաձայն, դրանք հավասարեցնենք զրոյի, կստանանք

$$(P + J)(l - l\cos\alpha) + (P - J)(l + l\cos\alpha) + 3R_B l =$$

$$(J - P)(2l - l\cos\alpha) - (P + J)(2l + l\cos\alpha) + 3R_A l = 0:$$

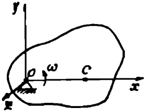
Մնում է այս հավասարումների համակարգից որոշել R_A և R_B անհայտ մեծությունները:

Պատ. $R_A = \dfrac{P}{3}\left(\dfrac{l\omega^2}{g}\sin 2\alpha + 4\right)$, $R_B = \dfrac{P}{3}\left(\dfrac{l\omega^2}{g}\sin 2\alpha - 2\right)$:

Խնդիր 129: m զանգված և վերջավոր չափեր ունեցող թիթեղը պտտվում է Oz առանցքի շուրջը $\varphi = \varphi(t)$ օրենքով: Թիթեղի իներցիայի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ հավասար է J_0-ի, զանգվածների կենտրոնի հեռավորությունը պտտման առանցքից՝ $OC = c$: Որոշել թիթեղի իներցիայի ուժերի համազորի մեծությունը, ուղղությունը և կիրառման գծի հավասարումը (գծ. 156ա), (թիթեղի համասեռությունը և միակապությունը պարտադիր չէ):

Լուծում: Տանենք $Oxyz$ կոորդինատական համակարգը, Ox առանցքն ուղղենք այնպես, որ այն անցնի զանգվածների C կենտրոնով, իսկ Oz առանցքն՝ ուղղահայաց գծագրի հարթությանը (գծ. 156ա): Թիթեղի պտույտի հետևանքով կառաջանա իներցիայի ուժ, որը կորոշվի հետևյալ բանաձևով՝

$$\bar{J} = \iint_S \left(\omega^2 \bar{r} - \bar{\varepsilon} \times \bar{r}\right)\gamma\, ds, \qquad (1)$$



Գծ. 156ա

որտեղ S-ը թիթեղի զբաղեցրած տիրույթն է xOy հարթության վրա, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$-ն՝ թիթեղի պտտման անկյունային արագությունը, $\bar{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\bar{z}^0$-ն՝ անկյունային արագացումը, γ-ն՝ թիթեղի մակերևութային խտությունը, r-ը՝ թիթեղի ds մակերես ունեցող մասի շառավիղ վեկտորը: Հաշվենք իներցիայի ուժերի գլխավոր մոմենտն O կենտրոնի նկատմամբ.

$$\overline{M}_o = \iint_s \left(\omega^2 \bar{r} \times \bar{r} - \bar{r} \times \bar{\varepsilon} \times \bar{r}\right) \gamma\, ds = -\bar{\varepsilon} \iint_s r^2 \gamma\, ds = -\bar{\varepsilon} J_0 , \qquad (2)$$

որտեղ J_0-ն թիթեղի իներցիայի մոմենտն է O կենտրոնի նկատմամբ: Քանի որ թիթեղը գտնվում է xOy հարթության մեջ, ապա $J_0 = J_z(z = 0)$: (2) հավասարությունից հետևում է, որ $\overline{M}_o$ մոմենտն ունի $\bar{\varepsilon}$ վեկտորի ուղղությունը, այսինքն ուղղված է Oz առանցքով:

Քանի որ ուժահամակարգը հարթ է, ապա այդ հարթության վրա գոյություն կունենա մի O' կետ, որտեղ ուժահամակարգը կբերվի համազորի, այսինքն $\overline{M}_{o'} = 0$: Գտնենք O' կետի կոորդինատները: Գլխավոր մոմենտի բանաձևի համաձայն՝

$$\overline{M}_{o'} = \overline{M}_o + \overline{O'O} \times J = \overline{M}_o - \bar{R} \times J , \qquad (3)$$

որտեղ $\bar{R}$-ը O' կետի շառավիղ վեկտորն է O կենտրոնի նկատմամբ: (1)-ից հաշվենք $\bar{J}$ վեկտորը.

$$\bar{} = \omega^2 \iint_s \bar{r}\,\gamma\, ds - \bar{\varepsilon} \times \iint_s \bar{r} \gamma\, ds = \omega^2 \bar{S}_o - \bar{\varepsilon} \times \bar{S}_o :$$

Այստեղ $\overline{S_0}$-ն թիթեղի ստատիկ մոմենտն է O կենտրոնի նկատմամբ: Քանի որ զանգվածների C կենտրոնը գտնվում է Ox առանցքի վրա, ապա $\overline{S_0}$ ստատիկ մոմենտը հավասար կլինի՝

$$\overline{S_0} = mc\bar{x}^0 :$$

Այսպիսով

$$\bar{J} = m\omega^2 c\bar{x}^0 - mc\varepsilon\bar{y}^0 : \qquad (4)$$

Հավասարեցնելով զրոյի $\overline{M}_{o'}$ մոմենտի (3)-ում ստացված արժեքը և տեղադրելով $\bar{J}$-ի արժեքը (4)-ից՝ կստանանք՝

$$\overline{M}_{o'} = 0 - \bar{\varepsilon} J_0 - \begin{vmatrix} \bar{x}^0 & \bar{y}^0 & \bar{z}^0 \\ x & y & z \\ m\omega^2 c & -mc\varepsilon & 0 \end{vmatrix} = -mc\varepsilon z\bar{x}^0 - zm\omega^2 c\bar{y}^0 +$$

$$+ \left(mc\varepsilon x + m\omega^2 cy - \varepsilon J_0\right)\bar{z}^0 = 0 : \qquad (5)$$

Քանի որ $\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{z}^0$-ն համապատասխանաբար x, y, z առանցքների միավոր վեկտորներն են, ապա (5)-ից կստանանք՝

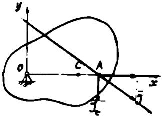
$$mcz\varepsilon = 0;\quad zm\omega^2 c = 0;\quad mc\varepsilon x + m\omega^2 cy - \varepsilon J_0 = 0, \qquad (6)$$

որտեղ x, y, z-ը R վեկտորի կոորդինատներն են: Լուծելով (6) հավասարումները կստանանք՝

$$\begin{cases} z = 0, \\ \varepsilon mcx + m\omega^2 cy - \varepsilon J_0 = 0 \end{cases}$$

Այսպիսով՝ իներցիայի ուժերի համազորի կիրառման գծի հավասարումը կլինի (գծ. 156բ)՝

$$\varepsilon mcx + m\omega^2 cy - \varepsilon J_0 = 0:$$



Գծ. 156բ

Իներցիայի ուժերի գլխավոր վեկտորի մեծությունը (4)-ից կլինի՝

$$J = mc\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

իսկ նրա կազմած անկյունները x և y ների հետ՝

$$\cos\alpha = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} \qquad \cos\beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}$$

$$J = mc\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \qquad \cos\alpha = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} \qquad \cos\beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}},$$

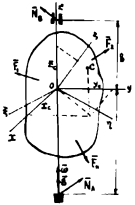
համազորի կիրառման գծի հավասարումը՝

$$\varepsilon mcx + m\omega^2 cy - \varepsilon J_0 = 0:$$

11. ՊՏՏՎՈՂ ԲԱՑԱՐՁԱԿ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՃՆՇՈՒՄԸ ՊՏՏՄԱՆ ԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ

Բացարձակ պինդ մարմինը կպտտվի անշարժ առանցքի շուրջը, եթե այդ մարմնից և անշարժ առանցքից պատկանող որևէ երկու կետեր ամբողջ շարժման ընթացքում լինեն անշարժ (գծ. 157):

Դիցուք առանցքի անշարժ կետերն են A-ն և B-ն, մարմնի վրա ազդող ակտիվ ուժերը՝ $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \ldots, \bar{F}_n$, A և B կետերի հակազդումները $\bar{N}_A, \bar{N}_B$, որոնց պրոյեկցիաները x, y, z առանցքների վրա համապատասխանաբար հավասար են $N_{AX}, N_{AY}, N_{AZ}, N_{BX}, N_{BY}, N_{BZ}$, իսկ մարմնի ծանրության C կենտրոնի կոորդինատներն են x_c, y_c, z_c: A և B անշարժ կետերի հեռավորությունը կոորդինատների O սկզբնակետից նշանակենք համապատասխանաբար a-ով և b-ով: Երբ մարմինը պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը,



Գծ. 157

նա կունենա ազատության մեկ աստիճան: Սովորաբար, խնդիրներ լուծելիս Oz առանցքն ուղղում են պտտման առանցքով, որի նկատմամբ պտտման անկյունային արագությունը նշանակում են $\bar{\omega}$ -ով, իսկ անկյունային արագացումը` $\bar{\varepsilon}$ -ով:

Հայտնի է, որ $\bar{\omega}$ -ն և $\bar{\varepsilon}$ -ը ուղղված են պտտման Oz առանցքով, ընդ որում

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}:$$

Տեսությունից հայտնի է, որ այսպիսի շարժման ժամանակ մարմնի շարժման օրենքը և A ու B կետերի հակազդումները որոշվում են համակարգի շարժման քանակի փոփոխման և շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմների միջոցով.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_i \bar{F}_i + \bar{N}_A + \overline{} \qquad (I)$$

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_i mom_O \bar{F}_i + mom_O \bar{N}_A + mom_O \bar{N}_B$$

Պրոյեկտելով (I) և (II) վեկտորական հավասարումները x, y, z ների վրա` կստանանք

$$\begin{aligned} - Mx_C\omega^2 - My_C\dot{\omega} &= \sum_i F_{iX} + N_{AX} + N_{BX} \\ - My_C\omega^2 + Mx_C\,\dot{\omega} &= \sum_i F_{iY} + N_{AY} + \qquad (III) \\ 0 &= \sum_i F_{iZ} + N_{AZ} + N_{BZ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{YZ}\omega^2 - J_{XZ}\dot{\omega} &= (\sum_i mom_O(\bar{F}_i))_X + aN_{AY} - \\ - J_{XZ}\omega^2 - J_{YZ}\dot{\omega} &= (\sum_i mom_O(F_i))_Y - aN_{AX} + bN_{BX} \qquad (IV) \\ J_{ZZ}\dot{\omega} &= (\sum_i mom_O(F_i))_Z : \end{aligned}$$

(IV) համակարգի վերջին հավասարումը չի պարունակում անհայտ հակազդում, հետևաբար, այն շարժման օրենքի որոշման դիֆերենցիալ հավասարումն է: (III) համակարգի վերջին հավասարումը N_{AZ} և N_{BZ} հակազդումների որոշման համար է (որովհետև մյուս հավասարումները չեն պարունակում N_{AZ} և N_{BZ} հակազդումները):

Հայտնի է, որ միայն (III) համակարգի վերջին հավասարումից երկու անհայտներ միարժեք որոշել չի կարելի, այդ պատճառով A և B հոդակապերից մեկը փոխարինում են գլանային կապով:

(IV) համակարգի առաջին և երկրորդ հավասարումներում մասնակցում են Jxz և Jyz իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները, որոնց հաշվման համար իներցիայի մոմենտների ցուցակում բանաձևեր չկան:

Այդ իներցիայի մոմենտները հաշվելու համար նպատակահարմար է դրանք արտահայտել O անշարժ կետի իներցիայի գլխավոր մոմենտների միջոցով:

Եթե O կետի գլխավոր առանցքները նշանակենք ξ, η, ζ-ով, ապա հայտնի

$$J_{\xi\eta} = \sum_i m_i \xi_i \eta_i =$$

$$J_{\xi\zeta} = \sum_i m_i \xi_i \zeta_i =$$

$$J_{\eta\zeta} = \sum_i m_i \eta_i \xi_i =$$

Դիցուք $Oxyz$ և $O\xi\eta\zeta$ կոորդինատական համակարգերի ձևափոխության բանաձևերը ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$x = \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\zeta,$$

$$= \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23}\zeta,$$

$$z = \alpha_{31}\xi + \alpha_{32}\eta + \alpha_{33}\zeta:$$

Քանի որ $Oxyz$ և $O\xi\eta\zeta$ համակարգերը օրթոգոնալ են, ապա նպատակահարմար է օգտվել օրթոգոնալ ձևափոխություններից: Հայտնի է, որ օրթոգոնալ ձևափոխությունների դեպքում (V) ձևափոխության մատրիցայի էլեմենտները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + {}_{i3}^2 = 1 \quad (i = 1,2,3) \qquad \text{(VI)}$$

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \alpha_{i3}\alpha_{j3} = 0 \; (i \neq j; i,j = 1,2,3): \qquad \text{(VII)}$$

Այժմ հաշվենք J_{xz}, J_{yz} և J_{xy} իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները.

$$J_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i = \sum_i m_i (\alpha_{11}\xi_i + \alpha_{12}\eta_i + \alpha_{13}\zeta_i)(\alpha_{31}\xi_i + \alpha_{32}\eta_i + \alpha_{33}\zeta_i) =$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{31}\sum_i m_i\xi_i^2 + \alpha_{12}\alpha_{32}\sum_i m_i\eta_i^2 + \alpha_{13}\alpha_{33}\sum_i m_i\zeta_i^2 + (\alpha_{11}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{31})\times$$

$$\times \sum_i m_i\xi_i\eta_i + (\alpha_{11}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{31})\sum_i m_i\xi_i\zeta_i + (\alpha_{12}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{32})\sum_i m_i\eta_i\zeta_i:$$

Ստացված արտահայտության մեջ վերջին երեք գումարելիները հավասար են զրոյի, որովհետև ξ, η, ζ առանցքները գլխավոր առանցքներ են, հետևաբար՝

$$J_{xz} = \alpha_{11}\alpha_{31}\sum_i m_i\xi_i^2 + \alpha_{12}\alpha_{32}\sum_i m_i\eta_i^2 + \alpha_{13}\alpha_{33}\sum_i m_i\zeta_i^2 =$$

$$\times\sum_i m_i\left(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2-\eta_i^2-\zeta_i^2\right)+\alpha_{13}\alpha_{32}\sum_i m_i\left(\eta_i^2+\xi_i^2+\zeta_i^2-\xi_i^2-\zeta_i^2\right)+\alpha_{11}\dot{\alpha}_{33}\times$$

$$\times\sum_i m_i\left(\zeta_i^2+\xi_i^2+\eta_i^2-\xi_i^2-\eta_i^2\right)=\left(\alpha_{11}\alpha_{11}+\alpha_{12}\alpha_{32}+\alpha_{13}\alpha_{33}\right)\sum_i m_i\left(\xi_i^2+\eta_i^2+\zeta_i^2\right)-$$

$$-\alpha_{11}\alpha_{11}\times\sum_i m_i\left(\eta_i^2+\zeta_i^2\right)-\alpha_{12}\alpha_{32}\sum_i m_i\left(\xi_i^2+\zeta_i^2\right)-\alpha_{13}\alpha_{33}\sum_i m_i\left(\xi_i^2+\eta_i^2\right):$$

Օգտվելով (VII) բանաձևից՝ կստանանք՝

$${}_{xz} = -\alpha_{11}\alpha_{31}\sum m_i\left(\eta_i^2+\zeta_i^2\right)-\alpha_{12}\alpha_{32}\sum m_i\left(\xi_i^2+\zeta_i^2\right)-\alpha_{13}\alpha_{33}\sum m_i\left(\xi_i^2+\eta_i^2\right)=$$

$$=-\alpha_{11}\alpha_{31}J_{\xi\xi}-\alpha_{12}\alpha_{32}J_{\eta\eta}-\alpha_{13}\alpha_{33}J_{\zeta\zeta}:$$

Նման ձևով որոշելով Jxy և Jyz իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները՝ վերջնականապես կստանանք՝

$$J_{xy} = -\alpha_{11}\alpha_{21}J_{\xi\xi}-\alpha_{12}\alpha_{22}J_{\eta\eta}-\alpha_{13}\alpha_{23}J_{\zeta\zeta},$$

$$J_{yz} = -\alpha_{21}\alpha_{31}J_{\xi\xi}-\alpha_{22}\alpha_{32}J_{\eta\eta}-\alpha_{23}\alpha_{33}$$

$$J_{xz} = -\alpha_{11}\alpha_{31}J_{\xi\xi}-\alpha_{12}\alpha_{32}J_{\eta\eta}-\alpha_{13}\alpha_{33}J_{\zeta\zeta}:$$

(III) և (IV) համակարգերում մասնակցող հակազդումները պարունակում են այսպես կոչված դինամիկական տարրեր $(\omega, \dot{\omega})$, այդ պատճառով նպատակահարմար է դրանք բաժանել երկու մասի՝ ստատիկական և դինամիկական:

Ստատիկական կոչվում են այն հակազդումները, որոնք ստացվում են (III) և (IV) հավասարումներից, երբ $\omega = \dot{\omega} = 0$, այսինքն՝ մարմինն անշարժ է: Իսկ դինամիկական հակազդումներ կոչվում են այն հակազդումները, որոնք հանդիսանում են (III) և (IV) հավասարումներից ստացվող հակազդումների (երբ $\omega^2 + \dot{\omega}^2 \neq 0$) և ստատիկական հակազդումների տարբերությունը:

Եթե ստատիկական հակազդումները նշանակենք $\bar{N}'_A$ և $\bar{N}'_B$-ով, իսկ դինամիկական հակազդումները՝ $\bar{N}''_A$ և $\bar{N}''_B$-ով, ապա կունենանք՝

$$\bar{N}_A = \bar{N}'_A + \bar{N}''_A, \quad \bar{N}_B = \bar{N}'_B + \bar{N}''_B: \qquad \text{(IX)}$$

Պտտման առանցքի վրա պինդ մարմնի ճնշման որոշման վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

ա) ընտրել կոորդինատական $Oxyz$ համակարգ z առանցքն ուղղելով պտտման առանցքով, իսկ xOy հարթությունը ցանկալի է տանել այնպես, որ այն անցնի մարմնի զանգվածների կենտրոնով,

բ) կոորդինատական առանցքների O սկզբնակետի համար տանել մարմնի իներցիայի գլխավոր $O\xi$ $O\eta$, $O\zeta$ առանցքները,

գ) կազմել նշված կոորդինատական համակարգերի ձևափոխության մատրիցան և (VIII) բանաձևի օգնությամբ հաշվել խնդրում պահանջվող իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները՝ $J_{\xi\xi}$, $J_{\eta\eta}$, $J_{\zeta\zeta}$ իներցիայի գլխավոր մոմենտների արժեքները որոշելով իներցիայի մոմենտների աղյուսակից,

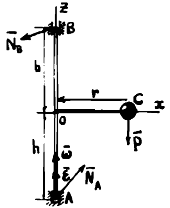
դ) օգտվելով (III) և (IV) բանաձևերից՝ որոշել խնդրում պահանջվող անհայտ մեծությունները:

Խնդիրներ:

Խնդիր 130: ε հաստատուն անկյունային արագացմամբ պտտվող ուղղաձիգ AB ձողին նրա O միջնակետում r երկարություն ունեցող OC ձողի միջոցով ամրացված է P կշիռ ունեցող C բեռը: Որոշել A հոդակապի և B գլանային կապի դինամիկական և ստատիկական հակազդումները, եթե սկզբնական պահին համակարգը գտնվել է հանգստի վիճակում:

Ox առանցքն ամրացված է OC ձողին, $OA=OB=h$: Ձողերի կշիռներն արհամարհել (գծ. 158):

Լուծում: $N'_{AX}, N'_{AY}, N'_{BX}, N'_{BY} N''_{AX}, N''_{AY}, N''_{BX}, N''_{BY}$ ստատիկական և դինամիկական հակազդումները որոշելու համար գրենք (III) և (IV) հավասարումների համակարգերը.



գծ. 158

$$-Mx_c\omega^2 - My_c\varepsilon = N_{Ax} + N_{Bx}$$

$$-My_c\omega^2 + Mx_c\varepsilon = N_{Ay} + N_{By}$$

$$0 = -P + N_{Az} + \quad _{Bz}$$

$$-hN_{Ay} - hN_{By}$$

$$= rP - hN_{Ax} + hN_{Bx}$$

$$J_{zz}\varepsilon = L_z :$$

Քանի որ B կետում դրված կապը գլանային է, ապա $N_{BZ}=0$, և համակարգի երրորդ հավասարումից կստանանք՝

$$N_{AZ} = P$$

Համակարգի երրորդ հավասարումը չենք քննարկում, քանի որ այն հակազդում չի պարունակում: Խնդրի պայմանների համաձայն՝ $M = \frac{P}{g}$, $x_c = r, y_c = 0$: Քանի որ x, y, z առանցքները O կետի համար գլխավոր առանցքներ են, ապա

$$= 0:$$

Հայտնի է, որ $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, մյուս կողմից, քանի որ շարժումը հավասարաչափ արագացող է, ապա $\varepsilon = const$, հետևաբար՝ $\omega = \varepsilon t + c_0$: Համաձայն խնդրի պայմանի՝ $\omega = 0$, երբ $t = 0$, այսինքն՝ $c_0 = 0$, $\omega = \varepsilon t$: Տեղադրելով M-ի, x_c-ի, y_c-ի, ω-ի, J_{xz}-ի և J_{yz}-ի արժեքները (1) և (2) համակարգերի առաջին երկու հավասարումների մեջ՝ կստանանք՝

$$
\begin{aligned}
&-\frac{P}{g} r\varepsilon^2 t^2 = \\
&\frac{P}{g} r\varepsilon = N_{Ay} + N_{By}, \\
&0 = hN_{Ay} - hN_{By}, \\
&0 = rP - hN_{Ax} + hN_{Bx}:
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Լուծելով (3) համակարգը N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Bx}, N_{By} անհայտների նկատմամբ՝ կունենանք՝

$$_{Ax} = \frac{rP\left(g - \varepsilon^2 t^2 h\right)}{2gh}, \quad N_{Bx} = -\frac{rP\left(g + \varepsilon^2 t^2 h\right)}{2gh},$$

$$N_{Ay} = N_{By} = \frac{P}{2g} r\varepsilon:$$

Այժմ որոշենք A և B կետերի ստատիկական հակազդումները: Դրա համար (4) բանաձևերում ընդունենք $\varepsilon = 0$, կստանանք՝

$$N'_{Ax} = \frac{rP}{2h}, \quad N'_{Bx} = -\frac{rP}{2h}, \quad N'_{Ay} = N'_{By} = 0:$$

Համաձայն (IX) բանաձևերի՝ դինամիկական հակազդումները կորոշվեն հետևյալ ձևով՝

$$N''_{Ax} = N_{Ax} - N'_{Ax} = -\frac{rP\varepsilon^2 t^2}{2g},$$

$$N''_{Ay} = N_{Ay} - N'_{Ay} = \frac{P}{2g} r\varepsilon$$

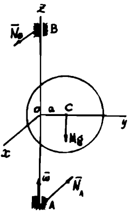
$$N''_{Bx} = N_{Bx} - N'_{Bx} = -\frac{rP\varepsilon^2 t^2}{2g},$$

$$N''_{By} = N_{By} - N'_{By} = \frac{P}{2g} r\varepsilon:$$

$$= -N'_{Bx} = \frac{rP}{2h};\ N'_{Ay} = N'_{By} = 0;\ N''_{Ax} = \quad '' = -\frac{rP}{2g}\varepsilon^2 t^2;$$

$$'' = N''_{By} = \frac{P}{2g} r\varepsilon;$$

Խնդիր 131(42.2): *M* զանգված ունեցող համասեռ սկավառակը ω հաստատուն անկյունային արագությամբ պտտվում է իր հարթության մեջ գտնվող և իր ծանրության կենտրոնից $OC=a$ հեռավորություն ունեցող *AB* առանցքի շուրջը: Որոշել *A* հողակապի և *B* առանցքակալի դինամիկական ճնշումները, եթե $OA=OB$: *x* և *y* առանցքներն անշարժ ամրացված են սկավառակի հետ (գծ. 159):



Գծ. 159

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար օգտվենք (III) և (IV) համակարգերից: Քանի որ (III) և (IV) համակարգերի երրորդ հավասարումները չեն պարունակում դինամիկական հակազդումներ, ապա խնդիրը լուծելիս այդ հավասարումները չենք քննարկում:

Խնդրի պայմանի համաձայն՝ $x_C=0$, $y_C=$ $\varepsilon=\dfrac{d\omega}{dt}=0$: Քանի որ *x*, *y*, *z* առանցքները *O* կետի համար գլխավոր առանցքներն են, ապա $J_{xz}=J_{yz}=0$:

Այսպիսով՝ (III) և (IV) համակարգերի առաջին երկու հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} 0 &= N_{Ax}+N_{Bx} \\ Ma\omega^2 &= N_{Ay}+N_{By} \\ 0 &- -aMg+OA\cdot N_{Ay}-OB\cdot N_{By}, \\ 0 &= -OA\cdot N_{Ax}+OB\cdot N_{Bx}: \end{aligned} \qquad (1)$$

Լուծելով (1) համակարգը՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} N_{Ax} &= N_{Bx} = 0, \\ N_{Ay} &= \frac{Mga}{2\cdot OA} - \frac{Ma\omega^2}{2}, \\ &= -\frac{Mga}{2\cdot OA} - \frac{Ma\omega^2}{2}: \end{aligned} \qquad (2)$$

Այժմ որոշենք ստատիկական հակազդումները: Դրա համար (2) բանաձևերում ընդունենք $\omega=0$, կստանանք՝

$$N'_{Ax}=N'_{Bx}=0,\; N'_{Ay}=\frac{Mga}{2\cdot OA},\; N'_{By}=-\frac{Mga}{2\cdot OA}.$$

(3)-ից տեղադրելով ստատիկական հակազդումների արժեքները (IX) բանաձևերի մեջ՝ կստանանք դինամիկական հակազդումների արժեքները

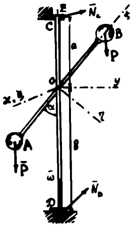
$$N''_{Ax}=N_{Ax}-N'_{Ax}=0,\qquad N''_{Bx}=N_{Bx}-N'_{Bx}=0\;,$$

$$N''_{Ay}=N_{Ay}-N'_{Ay}=-\frac{Ma\omega^2}{2},\quad N''_{By}=N_{By}-N'_{By}=-\frac{Ma\omega^2}{2}$$

A հոդակապում և B առանցքակալում դինամիկական ճնշումները որոշելու համար բավական է (4) բանաձևերում փոխել համապատասխան դինամիկական հակազդումների նշանները:

Պատ. $X_A=X_B=0,\; Y_A=Y_B=\dfrac{Ma\omega^2}{2}$:

Խնդիր 132 [42.4(1101)]: $2l$ երկարությամբ AB ձողը, որի ծայրերում գտնվում են միևնույն P կշռով բեռներ, հավասարաչափ ω անկյունային արագությամբ պտտվում է ձողի O միջնակետով անցնող Oz առանցքի շուրջը: O կետի հեռավորությունը C առանցքակալից հավասար է a-ի, D կրնկակալից՝ b-ի: AB ձողի և Oz առանցքի միջև կազմած անկյունը հավասար է α-ի: Անտեսելով ձողի կշիռը և բեռների չափերը՝ որոշել C առանցքակալի և D կրնկակալի վրա ճնշումն այն պահին, երբ ձողը գտնվում է Oyz հարթության մեջ (գծ. 160):



Գծ. 160

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար օգտվենք (III) և (IV) համակարգերից ((IV) համակարգի երրորդ հավասարումը չենք դիտարկում, որովհետև այն չի պարունակում անհայտ հակազդում):

Քանի որ համակարգի զանգվածների կենտրոնը համընկնում է O կետի հետ, ապա $x_C=y_C=0$: Համաձայն խնդրի պայմանի՝ $N_{Cz}=0$ (C կետում դրված է գլանային կապ): Քանի որ AB ձողը պտտվում է հաստատուն ω անկյունային արագությամբ, ապա $\varepsilon=\dfrac{d\omega}{dt}=0$:

Վերոհիշյալ պայմանների դեպքում (III) և (IV) համակարգերը կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$0=N_{Cx}+N_{Dx},$$

$$0=N_{Cy}+N_{Dy},$$

$$0 = -2P + N_{DZ},\qquad (1)$$
$$J_{YZ}\omega^2 = bN_{DY} - aN_{CY},$$
$$-J_{XZ}\omega^2 = -bN_{DX} + aN_{CX}:$$

(1) հավասարումների համակարգը լուծելու համար հաշվենք J_{YZ} և J_{XZ} իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները: Դրա համար տանենք O կետի իներցիայի գլխավոր ξ, η, ζ առանցքները: Մարմնի տրված դիրքում երկրաչափական սիմետրիայի առանցքները կհամընկնեն իներցիայի գլխավոր առանցքների հետ: Գծագիր 160-ից երևում է, որ սիմետրիայի առանցքները կլինեն $O\xi$-ը, $O\eta$-ն և $O\zeta$-ն: Գրենք $Oxyz$ և $O\xi\eta\zeta$ համակարգերի կապը.

$$x = \xi,$$
$$y = \eta\cos\alpha + \zeta\sin\alpha \qquad (2)$$
$$z = -\eta\sin\alpha + \zeta\cos\alpha:$$

Տեղադրելով (2)-ից x, y, z-ի արժեքները (VII) բանաձևի մեջ՝ կստանանք՝

$$J_{XZ} = 0$$
$$J_{YZ} = \cos\alpha\sin\alpha J_{\eta\eta} - \sin\alpha\cos\alpha J_{\zeta\zeta} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(J_{\eta\eta} - J_{\zeta\zeta}\right): \ (3)$$

Քանի որ համակարգը կազմված է իրար հավասար երկու կետային զանգվածներից, որոնք գտնվում են Oz առանցքի վրա, ընդ որում՝ $OA = OB = l$, ապա $J_{\eta\eta} = \dfrac{2Pl^2}{g}$, $J_{\zeta\zeta} = 0$:

Հետևաբար՝

$$J_{YZ} = \frac{P}{g} l^2 \sin 2\alpha: \qquad (4)$$

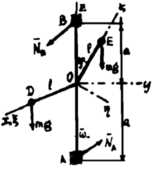
Տեղադրելով (3)-ից և (4)-ից J_{XZ}-ի և J_{YZ}-ի արժեքները (1) համակարգի մեջ և այն լուծելով $N_{CX}, N_{CY}, N_{DX}, N_{DY}, N_{DZ}$ անհայտների նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$N_{CX} = N_{DX} = 0.$$
$$N_{DY} = -N_{CY} = \frac{Pl^2\omega^2}{(a+b)g}\sin 2\alpha$$
$$N_{DZ} = 2P:$$

Համապատասխան ճնշումները որոշելու համար բավական է փոխել ստացված հակազդումների նշանները:

Պատ. $X_C = X_D = 0,\ Y_C = -Y_D = \dfrac{Pl^2\omega^2}{(a+b)g}\sin 2\alpha,\ Z_D = -2P:$

Խնդիր 133(42.2): Հաստատուն ω անկյունային արագությամբ պտտվող ուղղաձիգ AB լիսեռին անշարժ ամրացված են ձողեր: OE ձողը լիսեռի հետ կազմում է φ անկյուն, իսկ OD ձողն ուղղահայաց է AB լիսեռին և OE ձողը պարունակող հարթությանը: Տրված են՝ $OE=OD=l$, $AB=2a$: Ձողերի ծայրերին ամրացված են յուրաքանչյուրը m զանգված ունեցող E և D երկու գնդեր: Որոշել լիսեռի դինամիկական ճնշումները A և B հենարաններում: D և E գնդերն ընդունել կետային զանգվածներ, ձողերի զանգվածներն արհամարհել (գծ.161):



Գծ. 161

Լուծում: A և B հենարաններում դինամիկական ճնշումները որոշելու համար օգտվենք (III) և (IV) հավասարումների համակարգից: Այդ նպատակով հաշվենք զանգվածների կենտրոնի x_c, y_c կոորդինատները և J_{xz} ու J_{yz} իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները:

$$ {}_c = \frac{ml + o\cdot m}{2m} = \frac{l}{2}; \qquad y_c = \frac{o\cdot m + ml\sin\varphi}{2m} = \frac{l}{2}\sin\varphi : $$

Իներցիայի J_{xz}, J_{yz} կենտրոնախույս մոմենտները հաշվելու համար օգտվենք (VIII) բանաձևերից: O կենտրոնի համար իներցիայի գլխավոր առանցքները կլինեն՝ $O\xi$-ն (որը կհամընկնի Ox-ի հետ), $O\eta$-ն (ուղղահայաց DOE հարթությանը) և $O\zeta$-ն (ուղղված OE ձողով): Հետևաբար, ձևափոխության բանաձևերը կլինեն՝

$$ x = \xi, \quad y = \eta\cos\varphi + \zeta\sin\varphi, \quad z = -\eta\sin\varphi + \zeta\cos\varphi : \qquad (2) $$

Այստեղից հետևում է, որ

$$ \alpha_{11} = 1,\ \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \ {}_{31} = $$
$$ \alpha_{22} = \alpha_{33} = \cos\varphi, \quad \alpha_{23} = -\alpha_{32} = \sin\varphi : \qquad (3) $$

Տեղադրելով α_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ գործակիցների արժեքները (VIII) բանաձևի մեջ՝ կստանանք՝

$$ J_{xz}=0,\ J_{yz} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\left(J_{\eta\eta} - J_{\zeta\zeta}\right): \qquad (4) $$

Հաշվենք $J_{\eta\eta}$ և $J_{\zeta\zeta}$ իներցիայի գլխավոր մոմենտները.

$$ J_{\eta\eta}=ml^2+ml^2=2ml^2 $$

$$ J_{\zeta\zeta}=m\cdot 0+ml^2= \qquad (5) $$

Տեղադրելով $J_{\eta\eta}$-ի և $J_{\zeta\zeta}$-ի արժեքները (5)-ից (4)-ի մեջ՝ կունենանք՝

$$= 0$$

$$J_{yz} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \cdot ml^2 : \qquad (6)$$

(1)-ից տեղադրելով x_c, y_c-ի արժեքները, իսկ (6)-ից՝ J_{xz} և J_{yz}-ի արժեքները (III) և (IV) հավասարումների մեջ և հաշվի առնելով, որ $\omega = const$, $\dot{\omega} = 0$, կստանանք՝

$$\begin{aligned}
&-ml\omega^2 = N_{Ax} + N_{Bx},\\
&-ml\sin\varphi\,\omega^2 = N_{Ay} + N_{By},\\
&0 = N_{Az} + N_{Bz},\\
&\frac{1}{2}\sin 2\varphi\, ml^2\omega^2 = aN_{Ay} - aN_{By}, \qquad (7)\\
&0 = -a\,N_{Ax} + a\,N_{Bx}:
\end{aligned}$$

Լուծելով հավասարումների (7) համակարգը N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Bx}, N_{By} անհայտների նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$N_{Ax} = N_{Bx} = -\frac{ml\omega^2}{2},$$

$$N_{Ay} = \frac{ml\omega^2 \sin\varphi(l\cos\varphi - a)}{2a},\ N_{By} = -\frac{ml\omega^2 \sin\varphi(l\cos\varphi + a)}{2a}: \qquad (8)$$

Դինամիկական ճնշումների մեջ N_{Az} և N_{Bz} հակազդումները չեն մասնակցում, դրա համար (7) համակարգի երրորդ հավասարումը չի քննարկվում: Քանի որ համակարգի վրա ակտիվ ուժեր չեն ազդում, ապա ստատիկական հակազդումները հավասար են զրոյի, հետևաբար, (8) բանաձևերով որոշվող հակազդումները կլինեն դինամիկական հակազդումներ: Մյուս կողմից դինամիկական հակազդումները համապատասխան դինամիկական ճնշումներից տարբերվում են միայն ուղղությամբ: Այսպիսով, խնդրի պատասխանը ստանալու համար բավական է (8) բանաձևերում փոխել N_{Ax}, N_{Bx}, N_{Ay}, N_{By} հակազդումների նշանները:

Պատ. $\quad {}_A = X_B = \dfrac{ml\omega^2}{2},\ Y_A = \dfrac{ml\omega^2(a - l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a},$

$$Y_B = \frac{ml\omega^2(a + l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}:$$

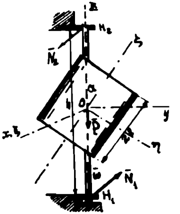
Խնդիր 134 [42.10 (1105)]: r շառավիղ, $2l$ բարձրություն և P կշիռ ունեցող համասեռ շրջանային գլանը հաստատուն ω անկյունային արագությամբ պտտվում է իր ծանրության O կենտրոնով անցնող Oz ուղղաձիգ առանցքի շուրջը: Գլանի $O\zeta$ առանցքի և Oz առանցքի միջև կազմված անկյունը հավասար է

α-ի: Կրնկակալի և առանցքակալի միջև H_1H_2 հեռավորությունը հավասար է h-ի, ըստ որում $OH_1 = OH_2$: Որոշել կրնկակալի և առանցքակալի վրա կողմնային N_1 և N_2 ճնշումները (գծ.162):

Լուծում: Խնդրում պահանջվող N_1 և N_2 կողմնային ճնշումները հաշվելու համար օգտվենք (III) և (IV) բանաձևերի առաջին երկու հավասարումներից: Քանի որ գլանի զանգվածների կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, ապա

$$\ldots = 0;\ \sum_i F_{ix} = \sum_i F_{iy} = 0,\ \left(\sum_i mom_o(\bar{F}_i)\right)_x = \left(\sum_i mom_o(\bar{F}_i)\right)_y$$

Այսպիսով, (III) և (IV) բանաձևերի առաջին երկու հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝



Գծ. 162

$$0 = N_{H_1x} + N_{H_2x},$$
$$0 = N_{H_1y} + N_{H_2y},$$
$$\ldots^2 = \frac{h}{2}N_{H_1y} - \frac{h}{2}N_{H_2y}, \qquad (1)$$
$$\ldots^2 = -\frac{h}{2}N_{H_1x} + \frac{h}{2}N_{H_2x}:$$

((III) և (IV) բանաձևերում մասնակցող $\dot{\omega}$-ը ընդունված է հավասար զրոյի, որովհետև $\omega = const$):

(1)-ից որոնելի հակազդումները որոշելու համար անհրաժեշտ է հաշվել J_{yz} և J_{xz} իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները: Տանենք O կենտրոնին համապատասխան գլխավոր առանցքները. $O\zeta$-ն ուղղված կլինի գլանի առանցքով, իսկ $O\xi$ և $O\eta$ առանցքները ընտրենք գծագրում ցույց տրված ձևով (գծ.162): Գծագրից երևում է, որ կոորդինատական համակարգերի ձևափոխության բանաձևերը կլինեն՝

$$x = \xi,$$
$$y = \eta\cos\alpha + \zeta\sin\alpha,$$
$$z = -\eta\sin\alpha + \zeta\cos$$

(2) ձևափոխության մատրիցը կլինի՝

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}:$$

(VIII) բանաձևերի համաձայն՝

$$J_{xz} = 0 \qquad (3)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(J_{\eta\eta} - J_{\zeta\zeta}\right):$$

Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից գլանի համար ունենք՝

$$J_{\eta\eta} = \frac{1}{4}\frac{P}{g}\left(\frac{4}{3}l^2 + r^2\right), \qquad J_{\zeta\zeta} = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2 \qquad (4)$$

Այսպիսով՝

$$= 0,$$

$$J_{yz} = \frac{P}{2g}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{1}{4}r^2\right): \qquad (5)$$

Տեղադրելով J_{xz} և J_{yz}-ի արժեքները (5)-ից (1) համակարգի մեջ և լուծելով այն N_{H_1x}, N_{H_2x}, N_{H_1y}, N_{H_2y} հակազդումների նկատմամբ՝ կստանանք՝

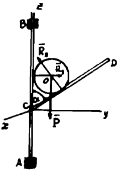
$$N_{H_1x} = \qquad N_{H_1y} = -N_{H_2y} = \frac{\omega^2 P}{2gh}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{1}{4}r^2\right):$$

Կողմնային N_1 և N_2 ճնշումները որոշելու համար մնում է փոխել ստացված հակազդումների նշանները:

$$N_1 = -\frac{\omega^2 P}{2gh}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{1}{4}r^2\right),$$

$$N_2 = \frac{\omega^2 P}{2gh}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{3}l^2 - \frac{1}{4}r^2\right):$$

Խնդիր 135: *AB* լիսեռը *CD* ուղղորդի հետ միասին պտտվում է ուղղաձիգ առանցքի շուրջը ω հաստատուն անկյունային արագությամբ: Լիսեռի և գլանային մակերևույթի ձև ունեցող ուղղորդի միջև գտնվում է *r* շառավիղ ունեցող համասեռ գունդը: Որոշել ω անկյունային արագության այն փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում գունդը կսկսի դուրս սահել ուղղորդով: Լիսեռի և ուղղորդի կազմած անկյունը հավասար է α-ի: Լիսեռի և ուղղորդի հաստությունները արհամարհել (գծ.163):



Գծ. 163

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նախ որոշենք գնդի $\overline{R}_1$ և $\overline{R}_2$ հակազդումները՝ կախված ω անկյունային արագությունից: Դրա համար օգտվենք գնդի շարժման քանակի (I) թեորեմից.

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{P} + \overline{R}_1 + \overline{}$$

Եթե (1) հավասարումը պրոյեկտենք y z առանցքների վրա (գծ.163), ապա կստանանք՝

$$-\frac{P}{g}r\omega^2 = R_1 - R_2\cos\alpha,$$

$$0 = -P + R_2\sin\alpha: \qquad (2)$$

(2) բանաձևերը կարելի է ստանալ նաև (III) համակարգի վերջին երկու հավասարումներից: (2) համակարգից որոշենք R_1 և R_2 հակազդումները, կստանանք

$$R_1 - P ctg\alpha - \frac{P}{g}r\omega^2$$

$$R_2 = \frac{P}{\sin\alpha}$$

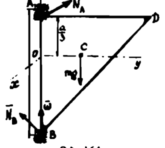
Քանի որ գունդը կշարժվի ուղղորդով, երբ R_1 հակազդումը չունենա դրական նշան, ապա ω-ի փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում գունդը կսկսի դուրս սահել CD ուղղորդով, կստանանք, եթե վերցնենք R_1 հակազդումը հավասար զրոյի: Այսինքն՝

$$0 = Pctg\alpha - \frac{P}{g}r\omega_{min}^2: \qquad (4)$$

Մնում է (4)-ից որոշել ω_{min}-ի արժեքը:

Պատ. $\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{r}ctg\alpha}$:

Խնդիր 136 [42.13(1109)]: *AB=a* լծի շուրջը ինչպիսի՝ անկյունային արագությամբ պետք է պտտվի հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ձև ունեցող *ABD* համասեռ թիթեղը, որպեսզի *B* հենարանի վրա կողմնային ճնշումը հավասար լինի զրոյի: Հենարանների միջև հեռավորությունը ընդունել հավասար *AB* լծի երկարությանը (գծ.164):



Գծ. 164

Լուծում: Ընտրենք կոորդինատական *Oxyz* առանցքները գծագրում ցույց տրված ձևով: Գրենք (III) և (IV) համակարգերի առաջին երկու հավասարումները՝ նկատի ունենալով, որ

$$_c = 0, y_c = \frac{1}{3}a, \dot{\omega} = 0,$$

$$\sum_i F_{ix} = \sum_i F_{ix}$$

$$\left(\sum_i mom_o(\overline{F}_i)\right)_x = \frac{1}{3}amg,$$

$$\left(\sum_i mom_o(\bar{F}_i)\right)_y$$

$$0 = N_{Ax} + N_{Bx},$$

$$-\frac{1}{3}\, ma\omega^2 = N_{Ay} + N_{By}, \tag{1}$$

$$J_{yz}\omega^2 = \frac{2}{3}aN_{By} - \frac{1}{3}aN_{Ay} + \frac{1}{3}mga,$$

$$^2 = -\frac{2}{3}aN_{Bx} + \frac{1}{3}aN_{Ax}:$$

(1) համակարգը N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Bx}, N_{By} հակազդումների նկատմամբ լուծելու համար հաշվենք J_{xz} և J_{yz} իներցիայի կենտրոնախույս մոմենտները:

$$J_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i = 0, \tag{2}$$

քանի որ թիթեղի բոլոր կետերի x_i աբսցիսը հավասար է 0-ի:

Այժմ հաշվենք J_{yz} -ը: Քանի որ թիթեղը հոծ մարմին է, ապա J_{yz}-ը պետք է հաշվել ինտեգրալի օգնությամբ.

$$J_{yz} = \iint_S \frac{m}{S}\, yzdydz:$$

Այստեղ $S = \dfrac{a^2}{2}$ -ը թիթեղի մակերեսն է, m-ը՝ նրա զանգվածը, S-ը՝ թիթեղի զբաղեցրած տիրույթը yoz հարթության վրա: Այսպիսով՝

$$J_{yz} = \iint_S \frac{m}{S}\, yzdydz = \frac{2m}{a^2}\int_0^a ydy \int_{y-\frac{2}{3}a}^{\frac{1}{3}a} zdz =$$

$$= \frac{2m}{a^2}\int_0^a y\,\frac{\frac{1}{9}a^2 - \left(y - \frac{2}{3}a\right)^2}{2}dy = \frac{ma^2}{36}: \tag{3}$$

Տեղադրելով J_{xz}-ի և J_{yz}-ի արժեքները (2)-ից և (3)-ից (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$0 = N_{Ax} + N_{Bx},$$

$$-\frac{1}{3}\, ma\omega^2 = N_{Ay} + N_{By},$$

$$\frac{ma^2\omega^2}{36} = \frac{2}{3}aN_{By} - \frac{1}{3}aN_{Ay} + \frac{1}{3}amg, \tag{4}$$

$$0 = -\frac{2}{3}aN_{Bx} + \frac{1}{3}aN_{Ax}:$$

Լուծելով (4) համակարգը N_{Ax}, N_{Ay}, N_{Bx}, N_{By} անհայտ հակազդումների նկատմամբ՝ կունենանք՝

$$N_{Ax}=N_{Bx}=0;\ N_{Ay}=\frac{4amg-9ma\omega^2}{36};$$

$$N_{By}=\frac{ma\omega^2-4mg}{9}: \qquad (5)$$

Խնդրում պահանջվող կրիտիկական անկյունային արագությունը որոշելու համար բավական է (5) բանաձևից N_{By}-ը հավասարեցնել զրոյի: Կստանանք՝

$$m\omega^2a-4mg=0;\ \omega=2\sqrt{\frac{g}{a}}$$

Պատ. $\omega=2\sqrt{\frac{g}{a}}$:

12. ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Այս պարագրաֆում դիտարկվում են խնդիրներ, որոնց լուծման համար օգտագործվում են մեխանիկական համակարգի և բացարձակ պինդ մարմնի շարժման վերաբերյալ նախորդ պարագրաֆներում շարադրված թեորեմները:

Համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման օրենքը (§ 4; (I)) կիրառվում է համընթաց շարժման ուսումնասիրության ժամանակ, իսկ շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը (§ 5; (III)) ժամանակի ընթացքում ուժի ազդեցության էֆեկտն ուսումնասիրելիս: Համակարգի շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմը (§ 6; (I)) օգտագործվում է համակարգի կամ մարմնի պտտական շարժման ուսումնասիրության ժամանակ: Ուժերի ազդեցության էֆեկտը այդ ուժերի կիրառման կետերի անցած ճանապարհի հատվածի վրա ուսումնասիրելու, ինչպես նաև համակարգի կետերի ներքին ուժերը որոշելու համար օգտագործվում է համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը (§ 7; (XIV), (XVI)):

Այս պարագրաֆի խնդիրները լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

ա) ընտրել կոորդինատական համակարգը,

բ) առանձնացնել մարմնի կամ համակարգի այն կետերը, որոնց շարժումն ուսումնասիրվում է առաջին հերթին,

գ) ցույց տալ մեխանիկական համակարգի վրա կիրառված ակտիվ և պասիվ ուժերի համախմբությունը,

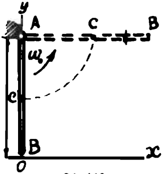
դ) նշել մարմնի շարժման տեսակը և ընտրել մեխանիկայի այն թեորեմը, որի օգնությամբ կարելի է լուծել տվյալ խնդիրը,

ե) մեխանիկայի տվյալ թեորեմի հիման վրա կազմել համակարգի շարժման

դիֆերենցիալ հավասարումները կամ առաջին ինտեգրալներ հանդի-
սացող վերջավոր հավասարումները,

գ) այդ հավասարումներից որոշել անհայտ մեծությունները:

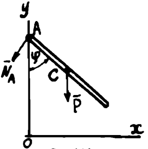
Խնդիր 137 [43.3 (1113)]: *2a* երկարությամբ *AB* ձողը կախված է *A* կետից, իսկ նրա *B* ծայրը գտնվում է հատակին շատ մոտ: Հաղորդելով ձողին ω_0 սկզբնական անկյունային արագություն՝ նրա *A* ծայրն ազատում են այն պահին, երբ ձողն ընդունում է հորիզոնական դիրք: Ազատ ձողի հետագա շարժումը տեղի է ունենում միայն ծանրության ուժի ազդեցության տակ: Գտնել ինչպիսի՞ ω_0 սկզբնական անկյունային արագության դեպքում ձողը հատակին կընկնի ուղղաձիգ դիրքով (գծ.165):



Գծ. 165

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նախ որոշենք ձողի *C* ծանրության կենտրոնի արագությունը և պտտման անկյունային արագությունը (քանի որ ձողը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում): Դրա համար գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը դիֆերենցիալ տեսքով: Քանի որ *A* հոդակապը իդեալական և ստացիոնար կապ է, ապա նրա հակազդումը կինետիկ էներգիայի թեորեմի մեջ չի մասնակցի (գծ.165): Այսպիսով, կունենանք՝

$$dT = -Pa\sin\varphi\, d\varphi: \qquad (1)$$



Գծ. 166

Ինտեգրելով (1) հավասարումը՝ կստանանք՝

$$T = Pa\cos\varphi + C_1: \qquad (2)$$

Քանի որ ձողը պտտվում է *A* կետի շուրջը, ապա

$$= \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\frac{P}{g}a^2\omega^2 = \frac{2}{3}\frac{P}{g}a^2\omega^2\cdot$$

Տեղադրելով *T*-ի այս արժեքը (2)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\frac{2}{3}\frac{P}{g}a^2\omega^2 = Pa\cos\varphi + C_1:$$

C_1 հաստատունը որոշելու համար օգտվենք խնդրում տված $\omega|_{\varphi=0} = \omega_0$ նախնական պայմանից: Կունենանք՝

$$C_1 = \frac{2P}{3g}\omega_0^2 a^2 -$$

հետևաբար՝

$$\frac{2}{3}\frac{P}{g}a^2\omega^2 = Pa\cos\varphi + \frac{2}{3}\frac{P}{g}\omega_0^2 a^2 - Pa,$$

կամ՝

$$\frac{2}{3}\frac{a^2}{g}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) = a\left(\cos\varphi - 1\right): \qquad (4)$$

(4)-ից որոշենք ω^2-ու արժեքը, երբ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, այսինքն՝ ձողը գրավում է հորիզոնական AB_1 դիրքը (գծ.165).

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{3g}{2a}: \qquad (5)$$

Որոշենք C կետի արագությունը ձողի AB_1 դիրքում:

$$V_{cx} = 0, \quad V_{cy} = \omega_1 a: \qquad (6)$$

Այժմ ուսումնասիրենք AB ձողի շարժումը, երբ նրա A ծայրը ազատված է A հողակապից և այն շարժվում է միայն ծանրության ուժի ազդեցության տակ: Ձողի կատարած հարթ զուգահեռական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = 0,$$
$$\frac{P}{g}\ddot{y}_c = -P, \qquad (7)$$
$$J_c\dot{\Omega} = 0:$$

Այստեղ x_c-ն և y_c-ն C կետի կոորդինատներն են, J_c-ն՝ ձողի իներցիայի մոմենտը C զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ, Ω-ն՝ նրա պտտման անկյունային արագությունը զանգվածների կենտրոնի շուրջը:

Ինտեգրելով (7) կստանանք՝

$$\dot{x}_c = c_2,$$
$$\dot{y}_c = -gt + c_3, \qquad (8)$$
$$\Omega = c_4:$$

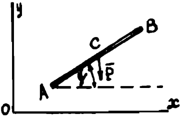
c_4, c_2, c_3 հաստատունները որոշելու համար օգտվենք (6) և $\Omega|_{t=0} = \omega_1$ նախնական պայմաններից: Կունենանք՝

$$c_2 = 0, \quad c_3 = \omega_1 a, \quad c_4 = \omega_1,$$

այսինքն՝

$$\dot{x}_c = 0,$$
$$\dot{y}_c = -gt + \omega_1 a, \qquad (9)$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \Omega = \omega_1,$$

որտեղ ψ -ն ձողի Ox առանցքի հետ կազմած անկյունն է (գծ.167): Եթե (9) համակարգը ինտեգրենք ևս մեկ անգամ



Գծ. 167

$$x\big|_{t=0} = a, \quad y\big|_{t=0} = 0, \quad \psi\big|_{t=0} = 0$$

նախնական պայմանների դեպքում, կստանանք՝

$$\begin{aligned} x_c &= a \\ y_c &= -\frac{gt^2}{2} + \\ \psi &= \omega_1 t \, : \end{aligned} \qquad (10)$$

Որպեսզի ձողը հատակին ընկնի ուղղաձիգ դիրքով, անհրաժեշտ է, որ

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \text{երբ} \ y_c = -a \quad (k = 0, 1, 2, \ldots): \qquad (11)$$

(10) -ի վերջին երկու հավասարումներից արտաքսելով t-ն և օգտվելով (11) պայմաններից՝ կստանանք՝

$$\omega_1^2 = \frac{g\pi^2(2k+1)^2}{4a\left(2+\pi(2k+1)\right)}:$$

Տեղադրելով ω_1^2-ի արժեքը (5)-ից (12)-ի մեջ և լուծելով ստացված հավասարումը ω_0^2-ու նկատմամբ՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{4a}\left[6 + \frac{\pi^2(2k+1)^2}{2+\pi(2k+1)}\right],$$

որտեղ $k = 0, 1, 2, \ldots$:

Խնդիր 138 (43.8): Երկու սկավառակներ պտտվում են միևնույն առանցքի շուրջը ω_1 և ω_2 անկյունային արագություններով: Սկավառակների իներցիայի մոմենտները պտտման առանցքի նկատմամբ հավասար են J_1 -ի և J_2 -ի: Որոշել կինետիկ էներգիայի կորուստն այն դեպքում, երբ սկավառակները հանկարծակի միանում են կցորդիչի միջոցով: Կցորդիչի զանգվածն արհամարհել:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար դիտարկենք սկավառակների շարժման երկու վիճակներ.

1) երբ սկավառակները պտտվում են առանձին-առանձին,

2) երբ նրանք պտտվում են իրար հետ միացված:

Առաջին վիճակում համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T = T_1 + T_2 .$$

որտեղ $T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2$, $_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$ մեծությունները սկավառակների կինետիկ էներգիաներն են: Հետևաբար`

$$T = \frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2\right). \qquad (1)$$

Հաշվենք համակարգի շարժման քանակի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ առաջին վիճակում: Այն կլինի.

$$K = J_1\omega_1 + J_2\omega_2: \qquad (2)$$

Քանի որ համակարգի վրա առաջին վիճակից երկրորդին անցնելիս արտաքին ուժեր չեն ազդում, ապա համակարգի շարժման քանակի մոմենտը պտտման առանցքի նկատմամբ կմնա հաստատուն:

Երկրորդ վիճակում համակարգի շարժման քանակի մոմենտը կլինի

$$K' = \left(J_1 + J_2\right)\omega, \qquad (3)$$

որտեղ ω-ն սկավառակների միացումից հետո նրանց պտտման անկյունային արագությունն է

Երկրորդ վիճակում կինետիկ էներգիան կլինի`

$$T' = \frac{1}{2}\left(J_1 + J_2\right)\omega^2:$$

Կինետիկ էներգիայի կորուստը կլինի

$$\Delta T = T - T' = \frac{1}{2}\left[J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 - \left(J_1 + J_2\right)\omega^2\right]:$$

ω -ի արժեքը որոշելու համար հավասարեցնենք K -ի և K' -ի արժեքները (2)-ից և (3)-ից: Կունենանք`

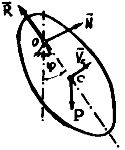
$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = \left(J_1 + J_2\right)\omega; \quad \omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}:$$

Խնդրի պատասխանը ստանալու համար բավական է (6)-ից ω -ի արժեքը տեղադրել (5) -ի մեջ:

Պատ. $\Delta T = \frac{1}{2}\frac{J_1J_2\left(\omega_2 - \omega_1\right)^2}{J_1 + J_2}$:

Խնդիր 139(43.10): M զանգվածով պինդ մարմինը տատանվում է գծագրի հարթությանն ուղղահայաց հորիզոնական O առանցքի շուրջը: Մարմնի զանգվածների C կենտրոնի հեռավորությունը կախման առանցքից հավասար է a -ի, նրա իներցիայի շառավիղը զանգվածների կենտրոնով անցնող և գծագրի հարթությանն ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ հավասար է ρ -ի: Սկզբնական պահին մարմինը շեղվել է հավասարակշռության դիրքից φ_0 անկյունով և բաց է թողնվել առանց սկզբնական արագության: Որոշել առանցքի հակազդման R և

N բաղադրիչները՝ կախված մարմնի ուղղաձիգից շեղման φ անկյունից: R հակազդումն անցնում է կախման կետով և զանգվածների կենտրոնով, N-ն ուղղահայաց է նրան (գծ.168):



Գծ. 168

Լուծում: $\bar{R}$ և $\bar{N}$ անհայտ հակազդումները որոշելու համար նախ օգտվենք շարժման քանակի փոփոխման թեորեմից (§5, (III)): Տվյալ դեպքում այն կլինի՝

$$M\frac{d\bar{V}_c}{dt} = \bar{R} + \bar{N} + \bar{P}, \qquad (1)$$

որտեղ $\bar{V}$ -ն C զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, $\bar{P} = M\bar{g}$ -ն՝ մարմնի կշիռը: Քանի որ C կետը պտտվում է O կետի շուրջը $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ անկյունային արագությամբ, ապա նրա $\bar{W}_c = \dfrac{d\bar{V}_c}{dt}$ արագացումը կունենա երկու բաղադրիչ տանգենցիալ արագացում՝ ուղղված $\bar{N}$ հակազդման ուղղությամբ և նորմալ արագացում՝ ուղղված $\bar{R}$ -ով: Տանգենցիալ արագացման մեծությունը կլինի $\dfrac{d\omega}{dt}a$, իսկ նորմալ արագացմանը՝ $a\omega^2$:

Պրոյեկտելով (1) վեկտորական հավասարումը R և $\bar{N}$ հակազդումների ուղղությունների վրա և նկատի ունենալով վերը շարադրվածը՝ կունենանք՝

$$Ma\omega^2 = R - Mg\cos\varphi$$

$$Ma\frac{d\omega}{dt} = N - Mg\sin\varphi:$$

$\dfrac{d\omega}{dt}$ -ն որոշելու համար գրենք մարմնի շարժման քանակի մոմենտի թեորեմը պտտման առանցքի նկատմամբ (§6 (I)).

$$J\frac{d\omega}{dt} = -Mga\sin\varphi,$$

որտեղից՝

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Mga\sin\varphi}{J}:$$

Այստեղ J -ն մարմնի իներցիայի մոմենտն է պտտման առանցքի նկատմամբ: Հյուգենսի թեորեմի համաձայն՝

$$i_0^2 = i_c^2 + a^2,$$

$$J = Mi_0^2 = M(\rho^2 + a^2):$$

Տեղադրելով J -ի արժեքը (4) -ից (3) -ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{ag\sin\varphi}{\rho^2 + a^2}: \qquad (5)$$

Տեղադրելով $\frac{d\omega}{dt}$ -ի արժեքը (5)-ից (2)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$N = Mg\sin\varphi - \frac{Ma^2 g\sin\varphi}{\rho^2 + a^2} = Mg\frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi:$$

ω անկյունային արագությունը φ պտտման անկյունից կախված որոշելու համար օգտվենք կինետիկ էներգիայի թեորեմից: Այն կլինի՝

$$d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right) = -Mga\sin\varphi d\varphi:$$

Ինտեգրելով (6) հավասարումը $\omega|_{\varphi=\varphi_0} = 0$ նախնական պայմանով կստանանք՝

$$^2 = Mga(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

որտեղից՝

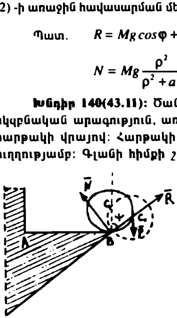
$$\omega^2 = \frac{2Mga}{J}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = \frac{2ga}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0): \qquad (7)$$

R -ի արժեքը որոշելու համար մնում է ω^2-ու արժեքը (7)-ից տեղադրել (2) -ի առաջին հավասարման մեջ:

Պատ. $$R = Mg\cos\varphi + \frac{2Mga^2}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

$$N = Mg\frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}\sin\varphi:$$

Խնդիր 140(43.11): Ծանր համասեռ գլանը, ստանալով շատ փոքր սկզբնական արագություն, առանց սահելու գլորվում է AB հորիզոնական հարթակի վրայով: Հարթակի B եզրը սրված է գլանի ծնիչին զուգահեռ ուղղությամբ: Գլանի հիմքի շառավիղը հավասար է r -ի: Հորիզոնական հարթակից գլանի պոկվելու պահին B եզրով և գլանի առանցքով անցնող հարթությունն ուղղաձիգի հետ կազմում է $CBC_1 = \alpha$ անկյուն: Որոշել α անկյունը և գլանի անկյունային արագությունը հարթակից պոկվելու պահին: Գլորման շփումն ու օդի դիմադրությունը արհամարհել (գծ.169):



Գծ. 169

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նշենք գլանի վրա ազդող ակտիվ և պասիվ ուժերը ($\overline{P}, \overline{R}, \overline{N}$): $\overline{R}, \overline{N}$ հակազդումները և գլանի պտտման անկյունային արագությունը որոշվում է նույն ձևով, ինչ № 139 խնդրում: Այդ բանաձևերն են`

$$\omega^2 = \frac{2ga}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0), \qquad (1)$$

$$R = Mg\cos\varphi + \frac{2Mga^2}{\rho^2 + a^2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0): \qquad (2)$$

ψ -ով նշանակենք B եզրով և գլանի առանցքով անցնող հարթության և ուղղաձիգի կազմած անկյունը մինչև գլանի ընկնելը: ψ -ի և №139 խնդրում մասնակցող φ անկյան կապը կլինի`

$$\psi = \pi - \varphi \qquad (3)$$

Քանի որ այն պահին, երբ գլանը հասնում է B եզրին, $\psi = 0$, ապա (1) -ում և (2) -ում մասնակցող φ_0 -ի համար կունենանք`

$$\varphi_0 = \pi:$$

Այս խնդրում $a = r$, $\rho^2 = \frac{1}{2}r^2$, քանի որ գլանը հոծ համասեռ մարմին է:

Գլանը կպոկվի AB հարթակից այն պահին, երբ R հակազդումը հավասարվում է զրոյի: Այդ պահին ψ -ի արժեքը կլինի խնդրում պահանջվող α անկյունը, հետևաբար, α -ի որոշման համար կունենանք`

$$0 = -Mg\cos\alpha + \frac{2Mgr^2}{\frac{1}{2}r^2 + r^2}(-\cos\alpha + 1): \qquad (4)$$

Լուծելով (4) հավասարումը α -ի նկատմամբ` կունենանք`

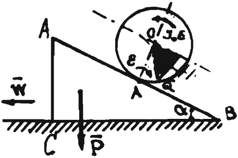
$$\cos\alpha = \frac{7}{4}; \quad \alpha = \arccos\frac{7}{4}: \qquad (5)$$

(1) -ի մեջ տեղադրելով ρ -ի, a -ի, φ -ի և φ_0 -ի արժեքները` կստանանք`

$$\omega^2 = \frac{2Mgr}{M\left(r^2 + \frac{r^2}{2}\right)}\left(-\frac{4}{7} + 1\right) = \frac{4g}{7a}; \quad \omega = 2\sqrt{\frac{g}{7a}}:$$

Պատ. $\alpha = \arccos\frac{7}{4}$: $\omega = 2\sqrt{\frac{g}{7a}}$:

Խնդիր 141(1120): Հղկված հորիզոնական հարթության վրա տեղավորված է P կշռով ABC եռանկյուն պրիզման, որը կարող է սահել այդ հարթության վրայով առանց շփման: Պրիզմայի AB կողի վրայով առանց սահելու գլորվում է Q կշիռ ունեցող համասեռ շրջանային գլանը: Որոշել պրիզմայի արագացումը (գծ.170):



Գծ. 170

Լուծում: Մեխանիկական համակարգը բաղկացած է ABC եռանկյուն պրիզմայից և համասեռ շրջանային գլանից: Համակարգի վրա ազդում են $\overline{P}$ և $\overline{Q}$ արտաքին ուժերը: Համակարգն ազատենք կապից՝ այն փոխարինելով համապատասխան $\overline{R}$ հակազդումով: Ox առանցքն ուղղենք հորիզոնական ուղղությամբ: Համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմի համաձայն՝

$$\frac{P+Q}{g}\dot{V}_{cx}=0: \qquad (1)$$

Այստեղից հետևում է, որ զանգվածների կենտրոնի արագության վեկտորի հորիզոնական բաղադրիչը մնում է հաստատուն: Եթե ընդունենք, որ սկզբնական պահին պրիզման և գլանը գտնվել են հավասարակշռության մեջ, ապա (1) -ից կհետևի, որ

$$V_{cx}=0: \qquad (2)$$

Գլանի զանգվածների կենտրոնի արագությունը նշանակենք $\overline{V}_{0}$ -ով: Երբ գլանը դադարի վիճակից սկսում է շարժվել, ապա, որպեսզի համակարգի զանգվածների կենտրոնի x բաղադրիչը մնա հաստատուն, պետք է պրիզման նույնպես շարժվի, ընդ որում՝ գլանի շարժմանը հակառակ ուղղությամբ:

Համընթաց շարժվող պրիզմայի զանգվածների կենտրոնի արագությունը նշանակենք $\overline{u}$ -ով:

Պրիզման գլանին հաղորդում է փոխադրական շարժում, հետևաբար, գլանի զանգվածների կենտրոնի բացարձակ արագության պրոյեկցիան Ox առանցքի վրա կլինի՝

$$V_{ox}=V_{o}cos\alpha-u, \qquad (3)$$

որտեղ $\alpha=<ABC$:

Եթե համակարգի շարժման քանակի վեկտորի պրոյեկցիան Ox առանցքի վրա նշանակենք K_{ox} -ով, ապա կունենանք՝

$$K_{ox}=-\frac{P}{g}u+\frac{Q}{g}(V_{o}cos\alpha-u): \qquad (4)$$

(2) -ի համաձայն $K_{ox}=0$: Այդ դեպքում լուծելով (4) -ը V_{o} -ի նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$V_{0}=\frac{(P+Q)u}{Qcos\alpha}: \qquad (5)$$

Խնդիրը մինչև վերջ լուծելու համար օգտվենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից: Նախ կազմենք համակարգի կինետիկ էներգիայի արտահայտությունը, որը կլինի պրիզմայի և գլանի կինետիկ էներգիաների գումարը:

Պրիզման կատարում է համընթաց շարժում, հետևաբար նրա կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$ {}_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}u^2 : \qquad (6)$$

Գլանը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում: Նրա կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$ {}_2 = \frac{MV_0^2}{2} + J_c\frac{\omega^2}{2}, \qquad (7)$$

որտեղ V_o -ն գլանի զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, իսկ J_c -ն՝ գլանի իներցիայի մոմենտը իր առանցքի նկատմամբ:

Գլանի զանգվածների կենտրոնը, բացի արագության հորիզոնական (3) բաղադրիչից, ունի նաև ուղղաձիգ

$$V_{oy} = V_o \sin\alpha \qquad (8)$$

բաղադրիչ: Գլանի իներցիայի մոմենտն առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$J_c = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2 : \qquad (9)$$

Եթե V_{ox} -ի, V_{oy} -ի և J_c -ի արժեքները (3), (8) և (9) -ից տեղադրենք (7) -ի մեջ, կստանանք՝

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\left[(V_0\cos\alpha - u)^2 + V_0^2\sin^2\alpha\right] + \frac{Qr^2\omega^2}{4g} : \qquad (10)$$

Նկատի ունենալով, որ գլանը գլորվում է առանց սահելու, կունենանք՝

$$r\omega = V_0 = \frac{(P+Q)u}{Q\cos\alpha} : \qquad (11)$$

(6), (10) և (11) -ի համաձայն՝ համակարգի կինետիկ էներգիայի համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$T = \frac{P+Q}{4Qg\cos^2\alpha}\left[3(P+Q) - 2Q\cos^2\alpha\right]u^2 : \qquad (12)$$

Համակարգի վրա կիրառված արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքը կլինի

$$A' = Qr\varphi\sin\alpha, \qquad (13)$$

որտեղ φ -ն գլանի պտտման անկյունն է զանգվածների կենտրոնի շուրջը:

Եթե նկատի ունենանք, որ համակարգը սկզբնական պահին գտնվել է հավասարակշռության մեջ, ապա համակարգի վերջավոր տեսքով կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից կունենանք՝

$$\frac{P+Q}{4Qg\cos^2\alpha}\left[3(P+Q)-2Q\cos^2\alpha\right]u^2 = Qr\varphi\sin$$

Եթե (14)-ը ածանցենք ըստ ժամանակի և նկատի ունենանք (11)-ը, ապա կստանանք՝

$$\frac{P+Q}{2Qg\cos^2\alpha}\left[3(P+Q)-2Q\cos^2\alpha\right]uW = Q\frac{P+Q}{Q\cos\alpha}u\sin\alpha:$$

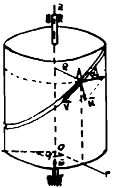
(15)-ից որոշելով W-ն՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. Պրիզման շարժվում է դեպի ձախ հաստատուն

$$W=\frac{Qg\sin2\alpha}{3(P+Q)-2Q\cos^2\alpha}$$ արագացումով:

Խնդիր 142 [43.12(1121)]: Շրջանային գլանը կարող է պտտվել ուղղաձիգ առանցքի շուրջը առանց շփման: Նրա կողմնային մակերևույթի վրա փորված է հարթ պտուտակային ակոս α վերելքի անկյունով: Սկզբնական պահին գլանը գտնվել է հանգստի վիճակում: Ակոսով բաց են թողնում ծանր գնդիկը, որն ընկնում է առանց սկզբնական արագության և ստիպում գլանին պտտվել: Գլանի զանգվածը M է, նրա շառավիղը՝ R, գնդիկի զանգվածը՝ m, գնդիկի հեռավորությունը առանցքից՝ R, իսկ գլանի իներցիայի մոմենտը՝ $J=\frac{1}{2}MR^2$: Որոշել գլանի անկյունային արագությունն այն պահին, երբ գնդիկը կիջնի h բարձրությամբ (գծ. 171):

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նպատակահարմար է օգտվել $(r,\ \varphi,\ z)$ գլանային կոորդինատական համակարգից (գծ. 171):



Գծ. 171

Մեխանիկական համակարգի վրա ազդում են P արտաքին ուժը և հողակապերի հակազդումները: Քանի որ $\overline{P}$ ուժը զուգահեռ է z առանցքին, իսկ հողակապերի հակազդումները հատում են z առանցքը, ապա նրանցից յուրաքանչյուրի մոմենտը Oz առանցքի նկատմամբ հավասար կլինի զրոյի, հետևաբար, շարժման քանակի մոմենտի պրոյեկցիան Oz առանցքի նկատմամբ կլինի հաստատուն՝

$$K_z = const:$$

Քանի որ սկզբնական պահին գլանը և գնդիկը եղել են անշարժ, ապա

$$K_z = 0: \qquad (1)$$

K_z-ը հաշվելու համար որոշենք գնդիկի արագությունը՝ կախված գլանի պտտման անկյունային արագությունից և գնդիկի գլանի նկատմամբ ունեցած արագությունից: Փաստորեն գնդիկը կկատարի հարաբերական շարժում:

Գնդիկի արագությունը գլանի նկատմամբ (հարաբերական արագությունը) նշանակենք v -ով: Այն ուղղված կլինի գլանի վրա արված ակոսով: Եթե գլանի պտտման անկյունային արագությունը նշանակենք ω -ով, ապա նրա A կետի արագությունը կլինի $\omega \cdot R$ և ուղղված կլինի այդ կետում գլանի առանցքին ուղղահայաց հատույթի շոշափողով (գնդիկի փոխադրական արագությունը):

Գնդի բացարձակ արագությունը նշանակենք $\bar{u}$ -ով: Հաշվենք $\bar{u}$ վեկտորի պրոյեկցիաները r, φ , z առանցքների վրա (գծ.171):

$$u_r = 0, \; u_\varphi = -v\cos\alpha + R\omega, \; u_z = -v\sin\alpha \tag{2}$$

(φ առանցքն ուղղված է A կետում գլանի առանցքին ուղղահայաց հատույթի շոշափողով):

Գլանի շարժման քանակի մոմենտը z առանցքի նկատմամբ կլինի $J\omega$, իսկ գնդիկի շարժման քանակի մոմենտը՝ mRu_φ:

Եթե շարժման քանակի մոմենտների ստացված արժեքները տեղադրենք (1)-ի մեջ, կստանանք

$$J\omega + mRu_\varphi = 0: \tag{3}$$

Տեղադրելով (3)-ի մեջ u_φ-ի արժեքը, նկատի ունենալով, որ գլանի համար $J = \frac{1}{2}MR^2$ և լուծելով v-ի նկատմամբ՝ կստանանք

$$v = \frac{(M + 2m)R\omega}{2m\cos\alpha}: \tag{3'}$$

Գլանի պտտման ω անկյունային արագությունը որոշելու համար օգտվենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից.

$$d(T_1 + T_2) = -mgdz, \tag{4}$$

որտեղ T_1-ը գլանի կինետիկ էներգիան է, իսկ T_2-ը՝ գնդիկի:

Ինտեգրելով (4) հավասարումը և նկատի ունենալով, որ $z_1 - z_2 = -h$, $v_0 = \omega_0 = 0$, կստանանք՝

$$T_1 + T_2 = mgh: \tag{5}$$

Քանի որ

$$T_1 = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega^2 \tag{6}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mu^2 = -\frac{1}{2}m\left[(-V\cos\alpha + R\omega)^2 + (-V\sin\alpha)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[R^2\omega^2 + V^2 - 2Vr\omega\cos\alpha\right],$$

ապա (6)-ից T_1 - ի և T_2 -ի արժեքները տեղադրելով (5)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\frac{1}{4}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}m(R^2\omega^2 + v^2 - 2vr\omega\cos\alpha) = mgh \qquad (7)$$

(7)-ում տեղադրելով v-ի արժեքը (3)-ից և լուծելով այն ω-ի նկատմամբ կստանանք պատասխանը:

Պատ. $\omega = \dfrac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\dfrac{2gh}{(M+2m)(M+2m\sin^2\alpha)}}$

13. ՀԱՐՎԱԾ

Այն երևույթները, որոնց ընթացքում մեխանիկական համակարգի վրա շատ փոքր ժամանակամիջոցում ազդում են շատ մեծ ուժեր, կոչվում են հարվածային երևույթներ:

Հարվածային երևույթները (կամ ուղղակի հարվածը) ուսումնասիրելու համար բավական է օգտվել դինամիկայի հիմնական թեորեմներից:

1. Հարված՝ կիրառված նյութական կետի վրա: Դիցուք, ունենք նյութական կետ, որի վրա ազդում է $\overline{F}$ ուժը և ժամանակի t պահին կիրառվում է շատ մեծ $\overline{F}_1$ ուժը $[t;\ t+\tau]$ ժամանակահատվածում, որտեղ τ-ն շատ փոքր է: Այսպիսի երևույթը հարված է նյութական կետի վրա, որի ուսումնասիրության համար բավական է օգտվել շարժման քանակի թեորեմից: Գրենք այն հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{dm\bar{v}}{dt} = \overline{F} + \overline{F}_1: \qquad (1)$$

Քանի որ $F_1 >> F$ և τ-ն շատ փոքր է, ապա հարվածի երևույթը նկարագրելու համար նպատակահարմար է ինտեգրել (1)-ը $[t;\ t+\tau]$ միջակայքում:

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \int_t^{t+\tau}\overline{F}dt + \int_t^{t+\tau}\overline{F}_1 dt, \qquad (2)$$

որտեղ $\bar{u}$-ն կետի արագությունն է հարվածից հետո, իսկ $\bar{v}$-ն՝ հարվածից առաջ:

$\int_t^{t+\tau}\overline{F}dt$ մեծությունը կլինի շատ փոքր (τ-ն շատ փոքր է, իսկ F-ը՝ վերջավոր), իսկ $\int_t^{t+\tau}\overline{F}_1 dt$-ն՝ վերջավոր:

$\int_t^{t+\tau}\overline{F}_1 dt = \overline{P}$ -կոչվում է հարվածի իմպուլս:

Այսպիսով՝ (2)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \overline{P}: \qquad (I)$$

Պրոյեկտելով (I) վեկտորական հավասարումը դեկարտյան $x,\ y,\ z$

կոորդինատական առանցքների վրա՝ կստանանք՝

$$
\begin{aligned}
mu_x - mv_x &= P_x, \\
mu_y - mv_y &= P_y, \\
mu_z - mv_z &= P_z:
\end{aligned}
\qquad \text{(II)}
$$

Եթե բերված դատողությունները կրկնենք շարժման քանակի մոմենտի թեորեմի նկատմամբ, կստանանք՝

$$mom_O(m\bar{u}) - mom_O(m\bar{v}) = mom_O\bar{P}: \qquad \text{(III)}$$

Պրոյեկտելով (III) վեկտորական հավասարումը դեկարտյան կոորդինատական առանցքների վրա՝ կստանանք՝

$$
\begin{aligned}
mom_x(m\bar{u}) - mom_x(m\bar{v}) &= mom_x(\;\bar{}\;), \\
mo\;\;_y(m\bar{u}) - mom_y(m\bar{v}) &= mom_y(\bar{P}), \\
mom_z(m\bar{u}) - mom_z(m\bar{v}) &= mom_z(\bar{P}):
\end{aligned}
\qquad \text{(IV)}
$$

Եթե կետի վրա միաժամանակ ազդեն մի քանի իմպուլսային ուժեր, ապա (II) և (IV) բանաձևերի աջ մասերը համապատասխանաբար կլինեն ազդող իմպուլսների գումարի և իմպուլսների մոմենտների գումարի պրոյեկցիաները:

2. Գնդի հարվածն անշարժ մակերևույթին: Դիցուք M զանգված և $\bar{v}$ արագություն ունեցող գունդը (գնդի շառավիղն ընդունում ենք փոքր, այսինքն՝ գունդն ընդունում ենք որպես նյութական կետ) հանդիպում է անշարժ մակերևույթին (գծ. 172): Այդ ժամանակ տեղի կունենա հարված, որի հետևանքով մակերևույթը կհակազդի գնդի շարժմանը $\bar{N}$ իմպուլսով: Համաձայն (1) բանաձևի՝ $\bar{N}$ իմպուլսը կորոշվի

$$\bar{N} = m\bar{u} - m\bar{v} \qquad (3)$$

բանաձևով: Պրոյեկտենք (3) հավասարումը կապի մակերևույթի նորմալի և շոշափող հարթության վրա, կունենանք՝

$$N_n = mu_n - mv_n, \qquad (4)$$

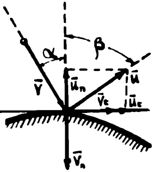
$$N_\tau = mu_\tau - mv_\tau : \qquad (5)$$

Եթե ընդունենք, որ կապն իդեալական է (այսինքն՝ $\bar{N}$ հակազդումն ուղղված է մակերևույթի նորմալով), ապա (4) և (5) բանաձևերը կընդունեն հետևյալ տեսքերը՝

$$N = mu_n - mv_n\,, \qquad (4')$$

$$u_\tau = v_\tau \qquad (5')$$

Սովորաբար հարվածի ընթացքում տեղի է ունենում արագության նվազում, այսինքն՝ $u_n \le v_n$: Արագության անկման չափը պայմանավորված է ինչպես գնդի, այնպես էլ մակերևույթի առաձգական հատկություններով: Այն բնութա-



Գծ. 172

գրելու համար ներմուծում են վերականգնման k գործակից, որի միջոցով v_n և u_n արագությունների կապը որոշվում է հետևյալ առնչությամբ.

$$u_n = kv_n:$$

Քանի որ $u_n \le v_n$:

$0 \le k \le 1$

Սովորաբար դիտարկվում է երեք տարբեր դեպք.

1) $k=0$: $u_n=0$ բացարձակ ոչ առաձգական հարված,

2) $k=1$: $u_n=v_n$ – բացարձակ առաձգական հարված,

3) $0<k<1$ ոչ լրիվ առաձգական հարված:

Դիցուք $\bar{v}$ արագությունը կապի մակերևույթի նորմալի հետ կազմում է անկյուն, իսկ $\bar{u}$ արագությունը՝ β անկյուն: Գծ. 172-ից հետևում է, որ

$$tg\alpha = \frac{v_\tau}{v_n},\ tg\beta = \frac{u_\tau}{u_n}:$$

Նկատի ունենալով (5) և (6) հավասարումները՝ կունենանք՝

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{u_n}{v_n} = k: \qquad (7)$$

$k=0$ դեպքում կստանանք $\beta = \frac{\pi}{2}$, $k=1$ դեպքում՝ $\alpha = \beta$, իսկ $0<k<1$ դեպքում՝

$tg\alpha < tg\beta$, այսինքն՝ $\alpha < \beta$; $(0 \le \alpha \le \beta;\ 0 \le \beta \le \frac{\pi}{2})$:

Երբ գնդի արագությունն ուղղված է կապի մակերևույթի նորմալով, հարվածը կոչվում է ուղիղ հարված, իսկ հակառակ դեպքում՝ շեղ հարված:

3. Համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը: Դիցուք $m_1, m_2, \ldots, m_n$ զանգվածներ ունեցող նյութական կետերից կազմված մեխանիկական համակարգի վրա ազդում են $\overline{P}_1^{(\ )}, \overline{P}_2^{(\ )}, \ldots, \overline{\ }_n^{(\ )}$ արտաքին և $\overline{P}_1^{(ն)}$, $\overline{P}_2^{(ն)}, \ldots, \overline{P}_n^{(ն)}$ ներքին հարվածային իմպուլսները: Եթե համակարգից հանենք i-րդ կետը և նրա համար կիրառենք նույն դատողությունները, ինչ-որ 1 կետում, ապա կունենանք

$$m_i\bar{u}_i - m_i\bar{v}_i = \overline{\ }^{(ա)} \qquad (8)$$

Գումարելով ըստ i ինդեքսի (8) հավասարությունները՝ կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{u}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i^{(ա)} + \sum_{i=1}^{n} P_i^{(ն)}: \qquad (9)$$

Համաձայն Նյուտոնի երրորդ օրենքի $\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^{(ն)}=0$, հետևաբար, հարված-ների դեպքում համակարգի շարժման քանակի թեորեմը կընդունի հետևյալ տեսքը

$$\sum_i m_i \bar{u}_i - \sum_i m_i \bar{v}_i = \sum_i \bar{F}_i^{(}$$

Հայտնի է, որ $\sum_i m_i \bar{u}_i = M\bar{u}_c$, $\sum_i m_i \bar{v}_i = M\bar{v}_c$, որտեղ M-ը ամբողջ համակարգի զանգվածն է $\bar{u}_c$-ն՝ համակարգի զանգվածների կենտրոնի արագությունը հարվածներից հետո, $\bar{v}_c$-ն՝ հարվածներից առաջ: Հետևաբար, վեկտորական (V) հավասարումները կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$M\bar{u}_c - M\bar{v}_c = \sum_i \bar{F}_i^{()}: \qquad \text{(VI)}$$

Այսպիսով, համակարգի շարժման քանակի փոփոխությունը հարվածներից հետո հավասար է նրա վրա կիրառված արտաքին հարվածների իմպուլսների գումարին: Հարկ է նշել, որ այս դեպքում ևս համակարգի վրա կիրառված թե արտաքին, թե ներքին սահմանափակ ուժերը չեն մասնակցում:

Պրոյեկտելով (VI) վեկտորական հավասարումները դեկարտյան կոորդինատական առանցքների վրա կստանանք

$$Mu_{cx} - Mv_{cx} = \sum_i P_{ix}$$

$$Mu_{cy} - Mv_{cy} = \sum_i P_{iy}^{(}$$

$$Mu_{cz} - Mv_{cz} = \sum_i P_{iz}^{(ա)}:$$

4.Համակարգի շարժման քանակի մոմենտի փոփոխման թեորեմը: Դիցուք համակարգի կետերի զանգվածներն են $m_1, m_2, \ldots, m_n$; շառավիղ վեկտորները $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$; արագությունները հարվածներից առաջ $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots, \bar{V}_n$; արագությունները հարվածից հետո՝ $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$; արտաքին ուժերը $\bar{F}_1^{(ա)}, \bar{F}_2^{(ա)}, \ldots, \bar{F}_n^{(ա)}$; ներքին ուժերը՝ $\bar{F}_1^{(ն)}, \bar{F}_2^{(ն)}, \ldots, \bar{F}_n^{(ն)}$; արտաքին հարվածային ուժերը $\bar{Q}_1^{(ա)}, \bar{Q}_2^{(ա)}, \ldots, \bar{Q}_n^{(ա)}$; ներքին հարվածային ուժերը՝ $\bar{Q}_1^{(ն)}, \bar{Q}_2^{(ն)}, \ldots, \bar{Q}_n^{(ն)}$, ապա համակարգի շարժման քանակի մոմենտի թեորեմը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{d}{dt}\sum_i \bar{r}_i \times m_i\bar{V}_i = \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{(ա)} + \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i^{(ն)} + \sum_i \bar{r}_i \times \bar{Q}_i^{(ա)} + \sum_i \bar{r}_i \times \bar{Q}_i^{(ն)}:$$

Ինտեգրելով (10) վեկտորական հավասարումը $[t, t+\tau]$ միջակայքում, որտեղ τ-ն հարվածի տևողությունն է, կստանանք՝

$$\sum_i \bar{r} \times m_i\bar{u}_i - \sum_i \bar{r}_i \times m_i\bar{V}_i = \int_t^{t+\tau}\sum_i \bar{r}_i \times \bar{Q}_i^{(ա)}dt + \int_t^{t+\tau}\sum_i \bar{r}_i \times \bar{Q}_i^{(ն)}$$

Արտաքին և ներքին ուժերի մոմենտները (11)-ում չեն մասնակցում, քանի որ նրանք սահմանափակ են, իսկ τ-ն շատ փոքր մեծություն է: Նույն ձևով, ինչ համակարգի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմն ապացուցելիս, կարելի է ցույց տալ, որ

$$\int_{t}^{t+\tau}\sum_{i}\bar{r}_i \times \bar{Q}_i^{(b)} dt = 0:$$

Հետևաբար, համակարգի շարժման քանակի մոմենտի (11) թեորեմը հարվածների դեպքում կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_i \bar{r}_i \times m_i\bar{u}_i - \sum_i \bar{r}_i \times m_i\bar{V}_i = \sum_i r_i \times \bar{P}_i^{(ա)}$$

Այստեղ $\bar{P}_i^{(ա)} = \int_{t}^{t+\tau} \bar{Q}_i^{(\ )} dt$

Եթե շարժման քանակի մոմենտը հարվածից առաջ նշանակենք $\bar{K}_0$-ով, իսկ հարվածից հետո՝ $\bar{K}_1$-ով, ապա (VIII) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\bar{K}_0 - \bar{K}_1 = \sum_i mom_0\left(\bar{P}_i^{(ա)}\right):$$

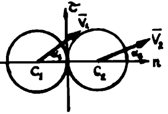
(IX) հավասարումը պրոյեկցիաներով կլինի՝

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum_i mom_x\left(\bar{P}_i^{(ա)}\right),$$

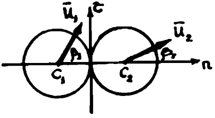
$$K_{1y} - \quad {}_{0y} = \sum_i mom_y\left(\bar{P}_i^{(ա)}\right),$$

$$K_{1z} \qquad = \sum_i mom_z\left(\bar{P}_i^{(ա)}\right):$$

5.Երկու գնդերի հարվածը: Դիտարկենք երկու համասեռ իդեալական ողորկ մակերևույթներ և m_1 ու m_2 զանգվածներ ունեցող գնդերի հարվածը: Դիցուք գնդերը, ունենալով $\bar{V}_1$ և $\bar{V}_2$ արագություններ, ժամանակի t պահին հարվածում են իրար: Բնականաբար, հարց է առաջանում, ինչպիսի՞ն կլինեն գնդերի $\bar{u}_1$ և $\bar{u}_2$ արագությունները հարվածից հետո: Որոշակիության համար ենթադրենք գնդերի արագությունները նրանց կենտրոնները միացնող ուղղի հետ գտնվում են միևնույն հարթության մեջ: Դիցուք գնդերի $\bar{V}_1$ և $\bar{V}_2$ արագությունները նրանց կենտրոնները միացնող ուղղի հետ կազմում են α_1 և α_2 անկյուններ (գծ. 173), իսկ $\bar{u}_1$ և $\bar{u}_2$ արագությունները՝ β_1 և β_2 անկյուններ (գծ. 174):



գծ. 173



գծ. 174

Երբ α_1 և α_2 անկյունները հավասար են լինում զրոյի կամ 180^0-ի, այդ դեպքում հարվածը կոչվում է ուղիղ հարված: Քանի որ գնդերի հարվածի ժամանակ արտաքին ուժերի իմպուլսը հավասար է զրոյի, ապա տեղի կունենա շարժման քանակի պահպանման օրենքը՝

$$m_1\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2 = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2: \qquad \text{(X)}$$

Պրոյեկտենք (X) վեկտորական հավասարումը գնդերի կենտրոնները միացնող ուղղի n նորմալի և նրան ուղղահայաց τ շոշափողի վրա, կստանանք՝

$$m_1V_{1n} + m_2V_{2n} = m_1u_{1n} + m_2u_{2n},$$

$$m_1V_{1\tau} + m_2V_{2\tau} = m_1u_{1\tau} + m_2u_{2\tau}: \qquad (12)$$

Քանի որ գնդերի մակերևույթները բացարձակ ողորկ են, ապա հարվածից առաջ և հետո τ շոշափողի ուղղությամբ արագությունները չեն փոխվի, այսինքն՝

$$V_{1\tau} = u_{1\tau},\ V_{2\tau} = u_{2\tau}: \qquad (13)$$

Ընդհանուր դեպքում հարվածը կլինի ոչ լրիվ առաձգական, դիցուք, k վերականգնման գործակցով: Այդ դեպքում գնդերի հարաբերական արագությունների նորմալ բաղադրիչները հարվածից հետո k անգամ փոքր կլինեն նրանց հարաբերական արագության նորմալ բաղադրիչից հարվածից առաջ՝

$$_{1n} - u_{2n} = k\left(V_{2n} - V_{1n}\right) \quad (0 \le k \le 1): \qquad \text{(XI)}$$

Այսպիսով, $u_{1n}, u_{2n}, u_{1\tau}, u_{2\tau}$ 4 անհայտ արագությունները որոշելու համար ստանում ենք (12), (13), (XI) 5 հավասարումները, որոնցից մեկը՝ (12)-ի երկրորդ հավասարումը, ստացվում է որպես հետևանք (13) հավասարումից: Այժմ դիտարկենք բացարձակ ոչ առաձգական և բացարձակ առաձգական հարվածների դեպքեր: Եթե հարվածը բացարձակ ոչ առաձգական է (k=0), ապա արագությունների կապը հարվածից առաջ և հետո կլինի՝

$$m_1V_{1n} + m_2V_{2n} = m_1u_{1n} + m_2u_{2n}$$

$$u_{1\tau} = V_{1\tau},\ u_{2\tau} = V_{2\tau}, u_{2n} = u_{1n}: \qquad (14)$$

Եթե հարվածը բացարձակ առաձգական է (k=1), ապա արագությունների կապը կլինի՝

$$m_1V_{1n} + m_2V_{2n} = m_1u_{1n} + m_2u_{2n}$$

$$u_{1\tau} = V_{1\tau},\ u_{2\tau} = u_{2\tau}, u_{1\tau} - u_{2n} = \qquad (15)$$

Տեղադրելով (12)-(15) հավասարումների մեջ

$$V_{1n} = V_1 \cos\alpha_1,\ V_{2n} = V_2 \cos\alpha_1,\ u_{1n} = u_1 \cos\beta_1,$$

$$u_{2n} = u_2 \cos\beta_2,\ V_{1\tau} = \qquad\qquad = u_1 \sin\beta_1, \qquad (16)$$

$$V_{2\tau} = V_2 \sin\alpha_2 = u_{2\tau} = u_2 \sin\beta_2$$

արագությունների պրոյեկցիաների (16) արժեքները՝ կստանանք՝

1) ոչ լրիվ առաձգական հարվածի դեպքում՝

$$m_1V_1\cos\alpha_1 + m_2V_2\cos\alpha_2 = m_1u_1\cos\beta_1 + m_2u_2\cos\beta_2,$$
$$V_1\sin\alpha_1 = u_1\sin\beta_1,\ V_2\sin\alpha_2 = u_2\cos\beta_2, \qquad \text{(XII)}$$
$$u_1\cos\beta_1 - u_2\cos\beta_2 = k(V_2\cos\alpha_2 - V_1\cos\alpha_1);$$

2) բացարձակ ոչ առաձգական հարվածի դեպքում՝

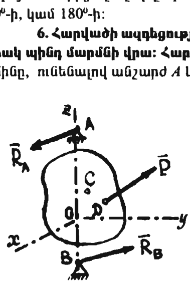
$$m_1V_1\cos\alpha_1 + m_2V_2\cos\alpha_2 = m_1u_1\cos\beta_1 + m_2u_2\cos\beta_2,$$
$$V_1\sin\alpha_1 = u_1\sin\beta_1,\ V_2\sin\alpha_2 = u_2\cos\beta_2, \qquad \text{(XIII)}$$
$$u_1\cos\beta_1 = u_2\cos\beta_2;$$

3) բացարձակ առաձգական հարվածի դեպքում՝

$$m_1V_1\cos\alpha_1 + m_2V_2\cos\alpha_2 = m_1u_1\cos\beta_1 + m_2u_2\cos\beta_2, \qquad \text{(XIV)}$$
$$V_1\sin\alpha_1 = u_1\sin\beta_1,\ V_2\sin\alpha_2 = u_2\cos\beta_2,$$
$$u_1\cos\beta_1 - u_2\cos\beta_2 = V_2\cos\alpha_2 - V_1\cos\alpha_1:$$

Ուղիղ հարվածի դեպքում արագությունների կապը հարվածից առաջ և հարվածից հետո գտնելու համար բավական է (XII)-(XIV) համակարգում խնդրի պայմաններից ելնելով՝ ընդունել α_1, α_2, β_1, β_2 անկյունները հավասար կամ 0^0-ի, կամ 180^0-ի:

6. Հարվածի ազդեցությունը անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող բացարձակ պինդ մարմնի վրա: Հարվածի կենտրոն: Դիցուք բացարձակ պինդ մարմինը, ունենալով անշարժ *A* և *B* կետեր, պտտվում է այդ կետերը միացնող *Oz* առանցքի շուրջը (գծ. 175) և դիցուք ժամանակի *t* պահին պտտվող մարմնի վրա *D* կետում ազդում է $\overline{P}$ իմպուլսով հարված: Այդ դեպքում մարմնի $\overline{\omega}$ անկյունային արագությունը կկրի $\Delta\overline{\omega}$ աճ, որի պրոյեկցիաները *x*, *y*, *z* առանցքի վրա թող լինեն համապատասխանաբար Δp, Δq, Δr:



Գծ. 175

Շարժման քանակի և շարժման քանակի մոմենտի թեորեմները այս դեպքում վեկտորապես կգրվեն՝

$$\Delta\overline{Q} = \overline{P} + \Delta\overline{R}_A + \Delta\overline{R}_B, \qquad (17)$$

$$\Delta\overline{K}_0 = mom_0\overline{P} + mom_0\Delta\overline{R}_A + mom_0\overline{R}_B\,, \qquad (18)$$

որտեղ ΔR_A-ն և ΔR_B-ն A և B կետերում հակազդումների աճերն են հարվածից հետո: Հաշվենք $\Delta\overline{Q}$ և $\Delta\overline{K}_0$ վեկտորները:

$$\Delta\overline{Q} = \Delta\sum_i m_i\overline{V}_i = \Delta\sum_i\left(m_i\overline{\omega}\times\bar{r}_i\right) = \Delta\overline{\omega}\times\sum_i m_i\bar{r}_i =$$

$$= \Delta\overline{\omega}\times M\bar{r}_c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Delta\omega \\ Mx_c & My_c & Mz_c \end{vmatrix}, \qquad (19)$$

Այստեղ ընդունված է $\Delta p = \Delta q = 0$, $\Delta r = \Delta\omega$:

Հայտնի է, որ

$$\overline{K}_0 = \sum_i\left(\bar{r}_i\times m_i\overline{V}_i\right) = \left(pJ_{xx} - qJ_{xy} - rJ_{xz}\right)i + \left(-pJ_{yx} + qJ_{yy} - rJ_{yz}\right)j +$$

$$+\left(-pJ_{zx} - qJ_{zy} + rJ_{zz}\right)k.$$

Հետևաբար, շարժման քանակի մոմենտների աճի պրոյեկցիաները հարվածից հետո կլինեն՝

$$\Delta K_{0x} = \Delta pJ_{xx} - \Delta qJ_{xy} - \Delta rJ_{xz} = -\Delta\omega J_{xz},$$

$$\Delta K_{0y} = -\Delta pJ_{yx} + \Delta qJ_{yy} - \Delta rJ_{yz} = -\Delta\omega J_{yz} \qquad (20)$$

$$\Delta K_{0z} = -\Delta pJ_{zx} - \Delta qJ_{zy} + \Delta rJ_{zz} = \Delta\omega J_{zz}:$$

(19)-ից հաշվենք $\Delta\overline{Q}$ վեկտորի պրոյեկցիաները.

$$\Delta Q_x = -\Delta\omega My_c\,,$$

$$\Delta Q_y = \Delta\omega Mx_c\,, \qquad (21)$$

$$\Delta Q_z = 0:$$

Այստեղ M-ը մարմնի զանգվածն է, x_c, y_c, z_c-ն նրա զանգվածների կենտրոնի կոորդինատներն են, իսկ J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, ..., J_{yz}-ը՝ իներցիայի մոմենտները:

Եթե (20) և (21) հավասարումներից տեղադրենք շարժման քանակի և շարժման քանակի մոմենտի աճերի պրոյեկցիաների արժեքները (17) և (18)-ի մեջ և պրոյեկտենք այդ հավասարումները x, y, z առանցքների վրա, կստանանք՝

$$-\Delta\omega My_c = P_x + \Delta R_{Ax} + \Delta R_{Bx}\,,$$

$$\Delta\omega Mx_c = P_y + \Delta R_{Ay} + \Delta R_{By}\,, \qquad (XV)$$

$$0 = P_z + \Delta R_{Az} + \Delta R_{Bz}\,,$$

$$-\Delta\omega J_{xz} = mom_x(\overline{P}) + mom_x(\Delta\overline{R}_A) + mom_x(\Delta\overline{R}_B),$$
$$-\Delta\omega J_{yz} = mom_y(\overline{P}) + mom_y(\Delta\overline{R}_A) + mom_y(\Delta\overline{R}_B), \qquad (XV')$$
$$\Delta\omega J_z = mom_z(\overline{P}):$$

Այս հավասարումների համակարգերից որոշում ենք $\Delta\omega$, ΔR_{Ax}, ΔR_{Ay}, ΔR_{Bx}, ΔR_{By} անհայտները և $\Delta R_{Az} + \Delta R_{Bz}$ գումարը:

Այժմ որոշենք այն պայմանները, որոնց դեպքում հարվածի ընթացքում A և B կետերում լրացուցիչ հակազդումներ չեն առաջանա: Դրա համար (XV) և (XV′) համակարգերում տեղադրենք $\Delta R_{Ax} = \Delta R_{Ay} = \Delta R_{Bx} = \Delta R_{By} = \Delta R_{Az} = \Delta R_{Bz} = 0$: Կստանանք

$$-\Delta\omega M y_c = P_x,$$
$$\Delta\omega M x_c = P_y, \qquad (22)$$
$$0 = P_z,$$
$$-\Delta\omega J_{xz} = mom_x(\overline{P})$$
$$-\Delta\omega J_{yz} = mom_y(\overline{P}) \qquad (23)$$
$$\Delta\omega J_z = mom_z(\overline{P}):$$

(22) համակարգի երրորդ հավասարումից հետևում է, որ P իմպուլսը պետք է ուղղահայաց լինի Oz առանցքին: Քանի որ Oxy կոորդինատային հարթության դիրքը ֆիքսված չէ, ապա կարող ենք այն ընտրել այնպես, որ P իմպուլսն ունենա Ox առանցքի ուղղությունը, այսինքն՝ P_y=0: Նշանակենք S-ով P իմպուլսի հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից (կամ Oz առանցքից): Այդ դեպքում (22) և (23) հավասարումների համակարգերը կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$-\Delta\omega M y_c = P$$
$$\Delta\omega M x_c = 0$$
$$-\Delta\omega J_{xz} = 0$$
$$-\Delta\omega J_{yz} = 0 \qquad (24)$$
$$\Delta\omega J_z = SP$$

Այս հավասարումներից հետևում է, որ $x_C = J_{xz} = J_{yz} = 0$, այսինքն՝ մարմնի զանգվածների կենտրոնն ընկած է Oyz հարթության մեջ, իսկ z առանցքը O կետի համար գլխավոր առանցք է: Մնացած երկու հավասարումները կընդունեն հետևյալ տեսքը՝

$$-\Delta\omega M y_c = P,$$
$$\Delta\omega J_z = -SP: \qquad (25)$$

Քանի որ S -ը կախված չէ $\Delta\omega$ -ից, հետևաբար նաև P -ից, ապա արտաքսելով $\Delta\omega$ -ն և լուծելով (25) հավասարումները S -ի նկատմամբ՝ կստանանք

$$S = \frac{J_u}{My_c} = \frac{Mi_u^2}{My_c} = \frac{i_u^2}{y}: \qquad \text{(XVI)}$$

Այսպիսով, որպեսզի ցանկացած իմպուլսով հարվածի դեպքում պտտվող մարմնի առանցքակալներում չառաջանան լրացուցիչ (իմպուլսային) հակազդումներ, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի տեղի ունենան հետևյալ պայմանները.

1) Պտտման առանցքը պետք է լինի իրեն պատկանող կետերից որևէ մեկի (O կետի) համար գլխավոր առանցք:
2) Հարվածային իմպուլսը պետք է գտնվի z առանցքին ուղղահայաց և O կետով անցնող հարթության մեջ:
3) Հարվածային իմպուլսը պետք է ուղղահայաց լինի զանգվածների կենտրոնով և պտտման առանցքով անցնող հարթությանը:
4) P իմպուլսի և yoz հարթության հատման կետը պետք է գտնվի z առանցքի նույն կողմում, ինչ զանգվածների C կենտրոնը և z առանցքից ունենա (XVI) բանաձևով որոշվող S հեռավորությունը:

P իմպուլսի ազդման կետը կոչվում է հարվածի կենտրոն:

Հայտնի է, որ հարվածի ժամանակ տեղի է ունենում կինետիկ էներգիայի կորուստ: Այն կարելի է հաշվել հարվածից առաջ և հարվածից հետո համակարգի կինետիկ էներգիաների տարբերության միջոցով: Գրականության մեջ վերջինս հայտնի է Կարնոյի թեորեմ անվանմամբ:

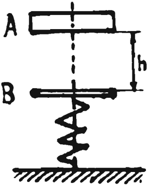
7. Հարվածի վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

1) Ընտրել կոորդինատական համակարգ, որը նպատակահարմար է ընտրել այնպես, որ առանցքներից մեկն ուղղված լինի հարվածող մակերևույթների նորմալով, իսկ մյուսը ընկած լինի շոշափող հարթության մեջ (վերջինս ընտրվում է խնդրի պայմաններին համար ձևով);
2) Օգտվել շարժման քանակի և շարժման քանակի մոմենտների փոփոխման թեորեմներից՝ հաշվի չառնելով սահմանափակ ակտիվ և պասիվ ուժերը;
3) Գրել արագությունների աճի կապը՝ ելնելով խնդրի պայմաններից, ընդունելով ժամանակի պահը ֆիքսված, իսկ ժամանակից կախված մեծությունները (զանգվածների կենտրոն, իներցիայի մոմենտներ և այլն)՝ հաստատուններ:
4) Օգտագործելով (I)-(IV), (XII) -(XIV), (XVI) բանաձևերը՝ որոշել խնդրում պահանջվող անհայտ մեծությունները:

8. Խնդիրներ

Ստորև բերվում են հարվածի վերաբերյալ խնդիրների լուծումներ:

Խնդիր 143(44.2): M_1 զանգվածով A բեռն առանց սկզբնական արագության h բարձրությունից ընկնում է C կոշտության գործակից ունեցող զսպանակին ամրացված M_2 զանգվածով B սալի վրա: Գտնել հարվածից հետո զսպանակի սեղմման S մեծությունը՝ ընդունելով, որ վերականգնման գործակիցը հավասար է զրոյի (գծ.176):



Գծ. 176

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար A բեռի շարժումը դիտարկենք երեք փուլերով:

1) A բեռը հանգստի վիճակից կատարում է ազատ անկում մինչև B սալը (այսինքն՝ ազատ իջնում է h բարձրությամբ): A բեռի արագությունը B սալին հասնելիս կլինի

$$V_1 = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

2) A բեռի և B սալի հարվածը կարելի է դիտել որպես երկու գնդերի ուղիղ հարված, քանի որ նրանց արագությունները անցնում են իրենց ծանրության կենտրոնները միացնող ուղղով և ուղղահայաց են նրանց հպվող մասերի մակերևույթին:

Հարվածից հետո A բեռի և B սալի արագությունները որոշելու համար օգտվենք շարժման քանակի փոփոխման թեորեմից (X)՝

$$M_1V_1 + M_2V_2 = M_1u_1 + M_2u_2, \qquad (2)$$

որտեղ V_2-ը B սալի արագությունն է հարվածից առաջ ($V_2=0$), u_1 և u_2-ը համապատասխանաբար A բեռի և B սալի արագություններն են հարվածից հետո: Քանի որ վերականգնման գործակիցը հավասար է զրոյի, ապա ընդունված է, որ A և B հարվածող մարմինները բացարձակ ոչ առաձգական են, հետևաբար $K=0$ (բանաձև (XII)) $u_1=u_2\equiv u$: (2)-ից կստանանք

$$u = \frac{M_1V_1}{M_1+M_2}: \qquad (3)$$

3) Հարվածից հետո A բեռը և B սալը միասին շարժելով՝ կունենան

$$T = \frac{M_1+M_2}{2}u^2 = \frac{M_1^2V_1^2}{2(M_1+M_2)} \qquad (4)$$

կինետիկ էներգիա:

Քանի որ B սալի կշիռը հավասարակշռվում է զսպանակի սկզբնական ճկվածքից առաջացած առաձգական ուժի հետ, ապա զսպանակի S սեղմման դեպքում B սալի կշիռը աշխատանք չի կատարի, իսկ A բեռի կատարած աշխատանքը կլինի

$$A_1 = M_1gS: \qquad (5)$$

(4) բանաձևով որոշվող կինետիկ էներգիայի և (5) բանաձևով որոշվող աշխատանքի գումարը հավասարվում է զսպանակի առաձգական էներգիային, երբ նա սեղմվում է S չափով, այսինքն՝

$$T + A_1 = \frac{CS^2}{2}; \quad \frac{M_1^2 V_1^2}{2(M_1 + M_2)} + M_1 g S = \frac{CS^2}{2}, \qquad (6)$$

(1)-ից տեղադրելով V_1-ի արժեքը (6)-ի մեջ և այն լուծելով S-ի նկատմամբ կստանանք՝

$$= \frac{M_1 g}{C} \pm \sqrt{\frac{M_1^2 g^2}{C^2} + \frac{2M_1^2 gh}{C(M_1 + M_2)}} \qquad (7)$$

(7) արտահայտության մեջ պետք է վերցնել դրական նշանը, որովհետև հակառակ դեպքում կստանանք S սեղմումը բացասական նշանով:

$$= \frac{M_1 g}{C} + \sqrt{\frac{M_1^2 g^2}{C^2} + \frac{2M_1^2 gh}{C(M_1 + M_2)}}$$

Խնդիր 144 (44.4): Առաձգական գնդիկը h բարձրությունից ուղղաձիգով ընկնում է հորիզոնական սալի վրա, ետ է թռչում նրանից դեպի վեր, նորից ընկնում է սալի վրա և այդպես շարունակ: Գտնել գնդիկի անցած ճանապարհը մինչև նրա կանգնելը, եթե հարվածի վերականգնման գործակիցը հավասար է k-ի:

Լուծում: Քանի որ հատակն անշարժ է և գնդիկի հարվածի ժամանակ արագությունն ուղղահայաց է հատակին, ապա գնդիկի անկման և անդրադարձման արագությունները կապված կլինեն

$$u = kV$$

բանաձևով:

Հաշվենք n-րդ հարվածից հետո գնդիկի արագությունը: Եթե նշանակենք $_{n+1}$-ով գնդիկի արագությունը n-րդ հարվածից հետո, ապա կունենանք՝

$$V_{n+1} = kV_n: \qquad (1)$$

Հայտնի է, որ ազատ անկման դեպքում $V = \sqrt{2gh}$, հետևաբար՝

$$V_n = \sqrt{2gh_n}: \qquad (2)$$

Այստեղ h_n-ը n-րդ հարվածից առաջ գնդիկի անկման բարձրությունն է: որոշենք գնդիկի բարձրությունների փոփոխության օրինաչափությունը:

Օգտվելով (1) և (2) բանաձևերից՝ կստանանք՝

$$h_{n+1} = k^2 h_n: \qquad (3)$$

Քանի որ $k \in [0,1]$ հաստատուն մեծություն է, ապա h_n բարձրությունները կկազմեն անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա $h_1 = h$ առաջին անդամով և $q = k^2$ հայտարարով: Առաջին հարվածից հետո գնդիկը կբարձրանա

h_2 բարձրություն և կիջնի h_3 բարձրությունից: Երկրորդ հարվածից հետո այն կբարձրանա h_3 չափով և կիջնի h_3 չափով և այդպես շարունակ, հետևաբար, գնդիկի անցած ճանապարհը կլինի՝

$$S = h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \ldots = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + (h_2 + h_3 + \ldots) = S_1 + S_2: \qquad (4)$$

Օգտվելով անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի $= \dfrac{b_1}{1-q}$ բանաձևից՝ կունենանք՝

$$S_1 = \frac{h}{1-k^2}, \quad S_2 = \frac{hk^2}{1-k^2}:$$

Տեղադրելով S_1 -ի և S_2 -ի արժեքները (5)-ից (4)-ի մեջ՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $S = \dfrac{1+k^2}{1-k^2}h$:

Խնդիր 145 (44.7): m_1=10 կգ զանգվածով մուրճը տափակեցնում է կիսահումքը մինչև անհրաժեշտ չափերի 70 հարվածի ընթացքում: Քանի՞ հարվածի ընթացքում կկատարի այդ գործողությունը m_2= 100 կգ զանգվածով մուրճը, եթե շարժման մեջ դնող մեխանիզմը նրան հաղորդում է նույնպիսի արագություն, ինչ-որ առաջին մուրճին: Զնդանի զանգվածը M =200 կգ է: Հարվածն ընդունել բացարձակ ոչ առաձգական:

Լուծում: Մուրճերի արագությունները հարվածից առաջ կնշանակենք V_1-ով, իսկ հարվածից հետո՝ համապատասխանաբար u_1-ով և u_2-ով: Քանի որ հարվածի ժամանակ համակարգի շարժման քանակը մնում է հաստատուն, և հարվածը ոչ առաձգական է (հարվածից հետո հարվածող երկու մարմինները էլ ունենում են միևնույն արագությունը), ապա շարժման քանակի պահպանման օրենքը առաջին մուրճով հարվածելիս կլինի՝

$$m_1V_1 = (M + m_1)u_1,$$

իսկ երկրորդ մուրճով հարվածելիս՝

$$m_2V_1 = (M + m_2)u_2: \qquad (2)$$

Հաշվենք առաջին և երկրորդ մուրճերով հարվածելիս մեկ հարվածի իմպուլսի մեծությունը: Առաջին դեպքում՝

$$P_1 = m_1(V_1 - u_1), \qquad (3)$$

երկրորդ դեպքում՝

$$P_2 = m_2(V_1 - u_2) \qquad (4)$$

(1) -ից և (2) -ից որոշելով u_1 և u_2 արագությունների արժեքները և տեղադրելով (3) -ի և (4) -ի մեջ՝ կստանանք՝

$$P_1 = m_1V_1 - \frac{m_1^2V_1}{M + m_1}, \qquad (5)$$

$$, - \frac{m_2^2 V_1}{M + m_2} : \quad (6) $$

Քանի որ երկու դեպքում էլ հարվածը ոչ առաձգական է, ապա յուրաքանչյուր հարվածից հետո մուրճի տեղափոխությունը կիսահումքի մեջ համեմատական կլինի հարվածի իմպուլսին, այսինքն՝

$$ S_1 = \lambda P_1, \quad S_2 = \lambda P_2, \quad (7) $$

որտեղ S_1-ը առաջին մուրճով մեկ անգամ հարվածելիս մուրճի տեղափոխությունն է կիսահումքի մեջ, S_2-ը՝ երկրորդ մուրճի տեղափոխությունը կիսահումքի մեջ, իսկ λ-ն համեմատականության գործակիցն է:

Եթե x-ով նշանակենք երկրորդ մուրճի հարվածների այն թիվը, որի դեպքում կիսահումքը տափակում է այնքան, որքան առաջին մուրճով 70 անգամ հարվածելիս, ապա

$$ 70 S_1 = x S_2 : \quad (8) $$

Տեղադրելով (5) -ից և (6) -ից P_1 -ի և P_2 -ի արժեքները (7) -ի մեջ, իսկ S_1, S_2 -ի համար ստացված արժեքները (8) -ի մեջ, կստանանք՝

$$ 70\left(m_1 - \frac{m_1^2}{M + m_1} \right)\lambda V_1 = x\left(m_2 - \frac{m_2^2}{M + m_2} \right)\lambda V_1 : \quad (9) $$

Լուծելով (9) հավասարումը x -ի նկատմամբ և տեղադրելով m_1, m_2 և M -ի թվային արժեքները կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $x = 10$ հարված:

Խնդիր 146 (44.9): A և B երկու միատեսակ առաձգական գնդեր շարժվում են իրար հանդեպ: Մինչև հարվածն ունեցած արագությունների ինչպիսի՞ հարաբերության դեպքում A գունդը հարվածից հետո կանգ կառնի: Հարվածի վերականգնման գործակիցը հավասար է k -ի:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար օգտվենք շարժման քանակի (X) թեորեմից և Նյուտոնի (XI) բանաձևից:

$$ M\left(V_A + V_B\right) = M\left(u_A + u_B\right), \quad (1) $$

$$ u_B - u_A = k\left(V_A - V_B\right), \quad (2) $$

որտեղ V_A -ն և V_B -ն համապատասխանաբար A և B գնդերի արագություններն են հարվածից առաջ, u_A-ն և u_B-ն՝ նրանց արագությունները հարվածից հետո, իսկ M-ը՝ գնդերից յուրաքանչյուրի զանգվածը:

(1) և (2) հավասարումները գրված են պրոյեկցիաներով, որովհետև բոլոր արագություններն ուղղված են միևնույն ուղիղ գծով:

Քանի որ հարվածից հետո A գնդիկը կանգնում է, ապա $u_A=0$, (1) և (2) հավասարումներում ընդունելով $u_A = 0$՝ կստանանք՝

$$V_A + V_B = u_B,$$
$$k(V_A - V_B) = u_B,$$

Այստեղից՝ $V_A + V_B = k(V_A - V_B)$:

Լուծելով (3) հավասարումը $\frac{V_A}{V_B}$ հարաբերության նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$\frac{V_A}{V_B} = -\frac{1+k}{1-k}:$$

Քանի որ V_A և V_B արագությունները ունեն տարբեր ուղղություններ, ապա նրանց բացարձակ արժեքների հարաբերությունը կլինի՝ $\frac{1+k}{1-k}$:

Պատ. $\left|\frac{V_A}{V_B}\right| = \frac{1+k}{1-k}$:

Խնդիր 147 (44.12): m_1, m_2 և m_3 զանգվածներով երեք բացարձակ առաձգական գնդեր գտնվում են ողորկ փողրակում: Որոշ սկզբնական արագությամբ բաց թողնված առաջին գունդը հարվածում է հանգստի մեջ գտնվող երկրորդ գնդին, որը սկսելով շարժվել՝ իր հերթին հարվածում է հանգստի մեջ գտնվող երրորդ գնդին: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի երկրորդ գնդի m_2 զանգվածը, որպեսզի երրորդ գունդը ստանա ամենամեծ արագություն:

Լուծում: Նշանակենք V_1 -ով առաջին գնդի արագությունը հարվածից առաջ, V_2 -ով՝ երկրորդ գնդի արագությունն առաջին հարվածից հետո, իսկ V_3-ով՝ երրորդ գնդի արագությունը երկրորդ հարվածից հետո: Քանի որ երկու հարվածները բացարձակ առաձգական են, ապա առաջին գնդի արագությունը առաջին հարվածից հետո կդառնա զրո, իսկ երկրորդ գնդի արագությունը զրո կդառնա երկրորդ հարվածից հետո: Այսպիսով, հարվածներից հետո շարժման քանակի պահպանման (X) թեորեմից կունենանք՝

$$\begin{aligned} m_1V_1 &= (m_1 + m_2)V_2, \\ m_2V_2 &= (m_2 + m_3)V_3; \end{aligned} \tag{1}$$

(1) հավասարումներից արտաքսելով V_2 -ը՝ կստանանք՝

$$V_3 = \frac{m_2m_1V_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}: \tag{2}$$

Այժմ V_3 -ի համար ստացված (2) արտահայտությունը դիտարկենք որպես ֆունկցիա $m_2 = x$ փոփոխականից:

$$V_3(x) = \frac{m_1V_1x}{(m_1 + x)(m_3 + x)}: \tag{3}$$

Ակնհայտ է, որ $x > 0$:

$V_3(x)$ ֆունկցիան $0 < x < \infty$ տիրույթում դրական ֆունկցիա է, ըստ որում > 0; $V_3(x) = 0$ և $\lim_{x\to\infty} V_3(x) = 0$, հետևաբար $V_3(x)$ -ը կստանա իր մեծագույն արժեքը $(0;\infty)$ տիրույթի այն կետում, որտեղ $\dfrac{dV_3(x)}{dx} = 0$: Կազմենք $V_3(x)$ -ի ածանցյալն ըստ x-ի և այն հավասարեցնենք 0 -ի.

$$\frac{dV_3}{dx} = \frac{m_1 V_1\left[(m_1 + x)(m_3 + x) - x(m_1 + m_3 + 2x)\right]}{(m_1 + x)^2 (m_3 + x)^2} = 0,$$

կամ

$$x^2 + (m_1 + m_3)x + m_1 m_3 - \qquad - (m_1 + m_3)x = 0:$$

Լուծելով (4) հավասարումը x -ի նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$x = \pm\sqrt{m_1 m_3}: \qquad (5)$$

Այստեղ պետք է վերցնել դրական նշանը, որովհետև $x>0$:

Այսպիսով, $x = \sqrt{m_1 m_3}$ կետը միակ Լքստրեմումի կետն է $V_3(x)$ ֆունկցիայի համար $(0;\infty)$ միջակայքում: Ցույց տանք, որ այն կլինի մաքսիմումի կետ, դրա համար (4) -ը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{dV_3}{dx} = \frac{m_1 m_3 - x^2}{(m_1 + x)^2 (m_3 + x)^2} m_1 V_1. \qquad (6)$$

(6) արտահայտությունից հետևում է, որ $\dfrac{dV_3}{dx} > 0$, երբ $x < \sqrt{m_1 m_3}$ և $\dfrac{dV_3}{dx} < 0$, $x > \sqrt{m_1 m_3}$, հետևաբար՝ $x = \sqrt{m_1 m_3}$ միակ մաքսիմումի կետն է:

Պատ. $\quad = \sqrt{m_1 m_3}$

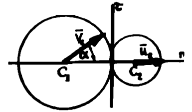
Խնդիր 148 (44.13): m_1 զանգված ունեցող և v_1 արագությամբ համընթաց շարժվող գունդը հանդիպում է m_2 զանգվածով անշարժ գնդին: Հարվածի պահին առաջին գնդի արագությունը գնդերի կենտրոնները միացնող ուղղի հետ կազմում է α անկյուն: Որոշել՝

1) առաջին գնդի արագությունը հարվածից հետո հարվածն ընդունելով բացարձակ ոչ առաձգական,
2) գնդերից յուրաքանչյուրի արագությունը հարվածից հետո, եթե հարվածն առաձգական է k վերականգնման գործակցով:

Լուծում: Քանի որ 1) դեպքը 2)-ի մասնավոր դեպքն է, երբ k=0 ապա նպատակահարմար է սկզբում հետազոտել 2) դեպքը: Նշանակենք $\bar{u}_1$-ով առաջին գնդի արագությունը հարվածից հետո, իսկ $\bar{u}_2$-ով՝ երկրորդ գնդի արագությունը հարվածից հետո: Շարժման քանակի պահպանման օրենքից կունենանք՝

$$m_1\overline{V}_1 = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2: \qquad (1)$$

Պրոյեկտենք (1) վեկտորական հավասարումը գնդերի կենտրոնները միացնող ուղղի (գնդերի մակերևույթների ընդհանուր $\overline{n}$ նորմալի) և գծագրի հարթության մեջ գտնվող τ ընդհանուր շոշափողի վրա (գծ. 177), կստանանք՝



Գծ. 177

$$m_1V_{1n} = m_1u_{1n} + m_2u_{2n}, \qquad (2)$$

$$m_1V_{1\tau} = m_1u_{1\tau} + m_2u_{2\tau}: \qquad (3)$$

Քանի որ հարվածի ժամանակ մակերևույթների շոշափողի ուղղությամբ արագության փոփոխություն տեղի չի ունենում, ապա

$$V_{1n} = V_1\cos\alpha,\ u_{2\tau} = 0,\ V_{1\tau} = V_1\sin\alpha = u_{1\tau},\ u_2 = u_{2n}: \quad (4)$$

Քանի որ գնդերի հարվածը առաձգական է k վերականգնման գործակցով, ապա (XI) բանաձևի համաձայն՝

$$u_{1n} - {}_{2n} = k\left(V_{2n} - V_{1n}\right): \qquad (5)$$

Տեղադրելով $V_{1n}, u_{1n}, u_{2\tau}, V_{1\tau}, u_{1\tau}$ արագությունների արժեքները (4)-ից (2)-ի և (5)-ի մեջ ((3) պայմանն օգտագործված է (4) - ում)՝ կստանանք՝

$$m_1V_1\cos\alpha = m_1u_{1n} + m_2u_{2n}, \qquad (6)$$

$$u_{1n} = u_2 - kV_1\cos\alpha: \qquad (7)$$

Այժմ (6) և (7) հավասարումներից որոշենք u_{1n} և u_2-ը:

$${}_{1n} = \left(\frac{(1+k)m_1}{m_1+m_2} - k\right)V_1\cos\alpha, \qquad (8)$$

$${}_2 = \frac{m_1V_1(1+k)\cos\alpha}{m_1+m_2}:$$

u_1-ի արժեքը որոշելու համար $u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2}$ արտահայտության մեջ տեղադրենք $u_{1\tau}$-ի արժեքը (4)-ից և u_{1n}-ի արժեքը (8)-ից, կստանանք՝

$$u_1 = V_1\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\alpha}: \qquad (10)$$

Առաջին գնդի արագությունը բացարձակ ոչ առաձգական հարվածից հետո ստանալու համար բավական է (10) բանաձևում ընդունել $k = 0$, կունենանք՝

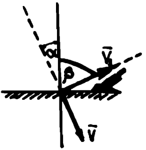
$$u_1 = V_1\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\alpha}:$$

$$1)\ u_1 = V_1\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\alpha};$$

$$_1 = V_1\sqrt{\sin^2\alpha + \left(\frac{m_1-km_2}{m_1+m_2}\right)^2\cos^2\alpha},$$

$$_2 = \frac{m_1V_1(1+k)\cos\alpha}{m_1+m_2}:$$

Խնդիր149(44.16): Գնդիկը թեքությամբ ընկնում է անշարժ հորիզոնական հարթության վրա V արագությամբ և հարթությունից անդրադառնում է $V_1 = \frac{V\sqrt{2}}{2}$ արագությամբ: Որոշել անկման α անկյունը և անդրադարձման β անկյունը, եթե հարվածի դեպքում վերականգնման գործակիցը՝ $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (գծ. 178):



Գծ. 178

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար օգտվենք (5′) և (6) բանաձևերից (տես՝ կետ 2).

$$V\sin\alpha = V_1\sin\beta, \qquad (1)$$

$$kV\cos\alpha = V_1\cos\beta: \qquad (2)$$

(1) և (2) հավասարումների մեջ տեղադրենք k-ի և V_1-ի արժեքները, կստանանք՝

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta, \qquad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta: \qquad (4)$$

(4) արտահայտություններից արտաքսելով α անկյունը՝ կստանանք

$$3\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\beta\right) = \frac{9}{2}\cos^2\beta: \qquad (5)$$

(5)-ի մեջ տեղադրելով $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta$ և այն լուծելով $\sin\beta$-ի նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$\sin\beta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}:$$

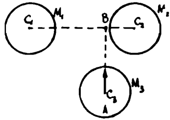
Քանի որ $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$, ապա

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \beta = \frac{\pi}{4}: \qquad (6)$$

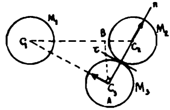
Տեղադրելով β-ի արժեքը (3)-ի մեջ և հաշվի առնելով, որ $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ կստանանք՝ $\alpha = \frac{\pi}{6}$:

Պատ. $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$:

Խնդիր 150 (44.18): Միևնույն R շառավղով M_1, M_2, M_3 միատեսակ գնդերը գտնվում են միևնույն հարթության վրա այնպես, որ առաջին և երկրորդ գնդերի կենտրոնների C_1C_2 հեռավորությունը հավասար է a-ի: Որոշել, թե C_1C_2 գծին ուղղահայաց ինչպիսի AB ուղղի վրա պետք է գտնվի երրորդ գնդի C_3 կենտրոնը, որպեսզի AB ուղղությամբ մի որոշ արագություն ստանալուց հետո M_3 գունդը, հարվածելով M_2 գնդին, M_1 գնդին հասցնի կենտրոնական (ուղիղ) հարված: Գնդերն ընդունել բացարձակ առաձգական, իսկ նրանց շարժումները համընթաց (գծ. 179):



Գծ. 179



Գծ. 180

Լուծում: Նշանակենք $\bar{V}_3$-ով երրորդ գնդի արագությունը M_2 գնդին հարվածելուց առաջ, իսկ u_3-ով՝ հարվածելուց հետո: Երկրորդ գնդի արագությունը հարվածից հետո նշանակենք $\bar{u}_2$-ով: Քանի որ գնդերը բացարձակ առաձգական են, ապա, (XI) բանաձևի համաձայն, կունենանք՝

$$\bar{V}_3 = \qquad (1)$$

Պրոյեկտենք (1) վեկտորական հավասարումը C_2C_3 ընդհանուր n նորմալի և M_2 ու M_3 գնդերի τ շոշափողի վրա (գծ. 180).

$$V_{3n} = u_{3n} + u_{2n}, \qquad (2)$$

$$V_{3\tau} = u_{3\tau} + u_{2\tau}: \qquad (3)$$

Քանի որ հարվածից առաջ M_2 գունդը եղել է անշարժ, ապա $u_{2\tau} = 0$: Համաձայն Նյուտոնի բանաձևի (XI)՝

$$V_{3n} = \qquad (4)$$

(2)-ից և (4)-ից հետևում է, որ

$$u_{3n} = 0,\ u_{2n} = V_{3n}:$$

Որպեսզի M_1 և M_3 գնդերի հարվածը լինի կենտրոնական, անհրաժեշտ է, որ $u_{3\tau}$ արագությունն ուղղված լինի C_3C_1 ուղղով (քանի որ $u_{1n} = 0$):

τ շոշափողը զուգահեռ է C_3C_1 ուղղին և ուղղահայաց C_2C_3 ընդհանուր նորմալին, հետևաբար՝ $\angle C_1C_2C_3 = 90^\circ$: Այդ դեպքում $\Delta C_1C_2C_3$ նման է

ΔC_1BC_2-ին:

$$\frac{BC_2}{C_2C_3}=\frac{C_2C_3}{C_1C_2},$$

կամ՝

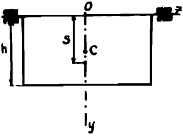
$$BC_2=\frac{(C_2C_3)^2}{C_1C_2}=\frac{4R^2}{a}:$$

Պատ. AB ուղղի հեռավորությունը C_2 կենտրոնից հավասար է

$$BC_2=\frac{4R^2}{a}:$$

Խնդիր 151 (44.22): Որոշել հրաձգության համար օգտագործվող համասեռ թիթեղից պատրաստված ուղղանկյուն թիրախի հարվածի կենտրոնի դիրքը: Թիրախի բարձրությունը հավասար է h-ի (գծ. 181):

Լուծում: Գծագրից երևում է, որ Oy առանցքը պտտվող թիրախի համար կենտրոնական առանցք է, իսկ Oz և Ox առանցքները գլխավոր առանցքներ են (Ox առանցքն ուղղում ենք գծագրի հարթությանն ուղղահայաց ուղղությամբ):



Գծ. 181

Հարվածի կենտրոնը կգտնվի Oy առանցքի վրա և նրա հեռավորությունը պտտման առանցքից կորոշվի (XVI) բանաձևի օգնությամբ՝

$$=\frac{J_z}{My_c}, \qquad (1)$$

որտեղ J_z-ը թիրախի իներցիայի մոմենտն է z առանցքի նկատմամբ, M-ը՝ նրա զանգվածը, իսկ y_c-ն՝ թիրախի զանգվածների կենտրոնի օրդինատը:

Քանի որ թիրախը համասեռ ուղղանկյուն թիթեղ է, ապա J_z-ը իներցիայի մոմենտների աղյուսակից կլինի՝

$$=\frac{Mh^2}{2}$$

Ուղղանկյուն թիթեղի համար $y_c=\frac{h}{2}$:

Տեղադրելով J_z-ի և y_c-ի արժեքները (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$=\frac{Mh^2/3}{Mh/2}=\frac{2}{3}h:$$

Խնդիր 152 (44.24): Երկու փոկանիվներ պտտվում են միևնույն հարթության մեջ իրենց առանցքների շուրջը ω_{10} և ω_{20} անկյունային արագություններով: Ընդունելով փոկանիվները միևնույն խտության R_1 և R_2 շառավիղներով սկավառակներ և անտեսելով սահքն ու փոկի զանգվածը՝ որոշել նրանց ω_1 և ω_2 անկյունային արագություններն այն բանից հետո, երբ փոկանիվների վրա կգցվի փոկ:

Լուծում: Քանի որ փոկանիվների վրա փոկը գցվում է շատ կարճ ժամանակամիջոցում, ապա տեղի է ունենում հարված, ընդ որում համակարգի շարժման քանակի մոմենտը հարվածից առաջ և հետո մնում է անփոփոխ՝

$$J_1\omega_{10} + J_2\omega_{20} = J_1\omega_1 + J_2\omega_2, \qquad (1)$$

որտեղ J_1-ը և J_2-ը համապատասխանաբար R_1 և R_2 շառավիղներով սկավառակների իներցիայի մոմենտներն են նրանց կենտրոնների նկատմամբ: Իներցիայի մոմենտների աղյուսակից՝

$$J_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2 \qquad J_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2 \qquad (2)$$

Քանի որ փոկը գցելուց հետո սկավառակների շրջանակների կետերի գծային արագությունները հավասարվում են, ապա

$$\omega_1R_1 = \omega_2R_2 \qquad (3)$$

Տեղադրելով J_1-ի և J_2-ի արժեքները (1) -ի մեջ՝ կունենանք

$$\frac{1}{2}M_1R_1^2\omega_{10} + \frac{1}{2}M_2R_2^2\omega_{20} = \frac{1}{2}M_1R_1^2\omega_1 + \frac{1}{2}M_2R_2^2\omega_2: \qquad (4)$$

Լուծելով (3) և (4) հավասարումները ω_1-ի և ω_2-ի նկատմամբ՝ կստանանք

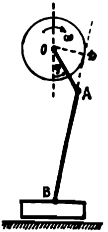
$$\omega_1 = \frac{M_1R_1^2\omega_{10} + M_2R_2^2\omega_{20}}{M_1R_1^2 + M_2R_1R_2}, \ \omega_2 = \frac{M_1R_1^2\omega_{10} + M_2R_2^2\omega_{20}}{M_1R_1R_2 + M_2R_2^2}: \qquad (5)$$

Քանի որ փոկանիվները միևնույն խտության համասեռ սկավառակներ են, ապա $M_1 = \pi R_1^2\rho$, $M_2 = \pi R_2^2\rho$, որտեղ ρ-ն սկավառակների մակերևութային խտությունն է: Տեղադրելով M_1-ի և M_2-ի արժեքները (5)-ի մեջ՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $$\omega_1 = \frac{R_1^4\omega_{10} + R_2^4\omega_{20}}{R_1^3(R_1 + R_2)}, \ \omega_2 = \frac{R_1^4\omega_{10} + R_2^4\omega_{20}}{R_2^3(R_1 + R_2)}:$$

Խնդիր 153: Հարվածային մամլիչը բաղկացած է J իներցիայի մոմենտ ունեցող և ω անկյունային արագությամբ պտտվող թափանիվից, l երկարություն ունեցող շարժաքևից և ուղղաձիգ ուղղությամբ տեղափոխվող M զանգված ունեցող հարվածող մուրճից: Մուրճը և շարժաքևը միացված են մեղխով, որի S երկարությունը շարժաքևի երկարության հետ համեմատած շատ մեծ է:

Թափանիվի պտտման ժամանակ հատուկ բռնիչների միջոցով շարժաքեն ակնթարթորեն միանում է թափանիվին, որը մեղեխի միջոցով շարժում է հարվածող մուրճին (գծ. 182): Որոշել 1) շարժաքեի և ուղղաձիգի կազմած φ անկյան այն արժեքը, որի դեպքում հարվածող մուրճի իմպուլսը կստանա իր մեծագույն արժեքը, 2) մուրճի իմպուլսի այն արժեքը, որը կստացվի, եթե մուրճի տեղափոխությունը մինչև մամլվող դետալը հավասար լինի h -ի: Շարժաքեի և մեղեխի զանգվածները արհամարհել, շարժաքեի ցանկացած դեպքում մեղեխն ընդունել ուղղված ուղղաձիգով (այս ենթադրության իմաստ ունի, որովհետև $S >> l$): Հարվածները ընդունել բացարձակ ոչ առաձգական:



Գծ. 182

Լուծում: Մամլիչի աշխատանքի ժամանակ տեղի են ունենում երկու հաջորդական հարվածներ. առաջինը տեղի է ունենում, երբ շարժաքեին միացված բռնիչները բռնում են թափանիվին, իսկ երկրորդը երբ մուրճը հարվածում է մշակվող դետալին: Շարժաքեի և թափանիվի միացման պահին տեղի կունենա հարված, որի ժամանակ շարժման քանակի մոմենտի թեորեմը պրոյեկտված գծագրին ուղղահայաց z առանցքի վրա կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$J\omega = J\omega_1 + \left(M \cdot \overline{OD} \times \overline{V}_B\right). \qquad (1)$$

Այստեղ $\overline{V}_B$-ն B կետի արագությունն է հարվածից հետո, որն ուղղված կլինի մեղեխով, OD-ն՝ AB մեղեխի հեռավորությունը O կետից, իսկ ω_1-ը՝ թափանիվի անկյունային արագությունը հարվածից հետո:

Հետևաբար՝ $OD = OA\sin\varphi = l\sin\varphi$, $V_B = OD\omega_1 = \omega_1 l\sin$

Տեղադրելով V_B-ի և OD-ի արժեքը (1)-ի մեջ, կստանանք՝

$$J\omega = J\omega_1 + M\omega_1 l^2\sin^2\varphi :$$

(2)-ից որոշենք ω_1-ը: Այն կլինի

$$\omega_1 = \frac{J\omega}{J + Ml^2\sin^2\varphi} :$$

Այժմ հաշվենք երկրորդ հարվածի P իմպուլսը, որը կիրառված է B մուրճի վրա՝ օգտվելով շարժման քանակի մոմենտի թեորեմից (IV), պրոյեկտված z առանցքի վրա:

$$_1 + M\omega_1 l^2\sin^2\varphi = Pl\sin\varphi : \qquad (4)$$

(4) հավասարման աջ մասը P իմպուլսի մոմենտն է z առանցքի նկատմամբ: Տեղադրելով ω_1-ի արժեքը (3)-ից (4)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$= \frac{J\omega}{l\sin\varphi}:$$

(5) բանաձևից երևում է, որ P-ն իր մեծագույն արժեքը կստանա, եթե φ անկյունը հավասար լինի 0-ի: Այդ դեպքում (5)-ից կստացվի P իմպուլսի արժեքն անվերջ մեծ: Սովորաբար մեկ հարվածից հետո հարվածի իմպուլսի մեծությունը լինում է սահմանափակ: Այստեղ երկու հարվածների միաժամանակ տեղի ունենալու հետևանքով երկրորդ հարվածի P իմպուլսը ստանում է անվերջ մեծ արժեք: Հաշվենք մուրճի իմպուլսի այն արժեքը, որը կստացվի, եթե մուրճն առաջին հարվածից հետո տեղափոխվի h չափով, մինչև մշակվող դետալին հարվածելը:

Դիցուք առաջին հարվածը տեղի է ունենում այն պահին, երբ $\varphi = 0$: Այդ ժամանակ, մինչև երկրորդ հարվածը, մուրճը կիջնի

$$h = l(1 - \cos\varphi)$$

չափով, այսինքն՝ երկրորդ հարվածը տեղի կունենա շարժաթևի այն դիրքում, երբ

$$\cos\varphi = 1 - \frac{h}{l}: \qquad (6)$$

(5)-ում տեղադրելով $\cos\varphi$-ի համար ստացված արժեքը (6)-ից՝ կստանանք՝

$$P = \frac{J\omega}{l\sqrt{1-\left(1-\dfrac{h}{l}\right)^2}} = \frac{J\omega}{\sqrt{(2l-h)h}}:$$

Այս դեպքում (եթե $h \neq 0$) երկրորդ հարվածի P իմպուլսը կլինի սահմանափակ մեծություն: Այն կստանա իր ամենափոքր արժեքը, երբ $h = l$, որը կլինի՝

$$P = \frac{J\omega}{l}:$$

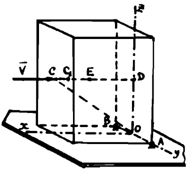
1) $\varphi =$

2) $P = \dfrac{J\omega}{\sqrt{(2l-h)h}}:$

Խնդիր 154 (44.27): Քառակուսի հիմքով ուղիղ համասեռ պրիզման դրված է հորիզոնական հարթության վրա և կարող է պտտվել այդ հարթության վրա գտնվող AB կողի շուրջը: Պրիզմայի հիմքի կողը հավասար է a-ի, նրա բարձրությունը $3a$ է, զանգվածը՝ $3m$: AB կողի դիմացն ընկած կողմնային նիստի C մեջտեղում հորիզոնական V արագությամբ հարվածում է m զանգվածով գունդը: Ենթադրելով հարվածը ոչ առաձգական և գնդի զանգվածը կենտրոնացված նրա կենտրոնում, որը հարվածից հետո մնում է C կետում, որոշել $\overline{V}$ արագության այն ամենափոքր արժեքը, որի դեպքում պրիզման կշրջվի (գծ. 183):

Լուծում: Նախ որոշենք պրիզմայի անկյունային արագությունը հարվածից հետո:

Քանի որ հարվածը բացարձակ ոչ առաձգական է, ապա գնդի արագությունը և պրիզմայի C կետի արագությունը հարվածից հետո կլինեն նույնը: Շարժման քանակի մոմենտի թեորեմը y առանցքի նկատմամբ կընդունի հետևյալ տեսքը՝



Գծ. 183

$$J\omega + m\omega(OC)^2 = mV \cdot OD: \qquad (1)$$

Գծ.184-ից երևում է, որ

$$(OC)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + a^2 = a^2\left(1+\frac{9}{4}\right) = \frac{13}{4}a^2$$

$$OD = \frac{3}{2}a:$$

$$\omega = \frac{6mVa}{4J + 13ma^2} \qquad (2)$$

Հաշվենք J իներցիայի մոմենտը: Օգտվելով իներցիայի մոմենտների աղյուսակից և օգտագործելով Հյուգենսի թեորեմը՝ կունենանք՝

$$J = 10ma^2: \qquad (3)$$

Տեղադրելով J-ի արժեքը (3)-ից (2)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\omega = \frac{6V}{53a}: \qquad (4)$$

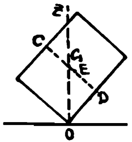
V արագության այն ամենափոքր արժեքը, որի դեպքում պրիզման կշրջվի, որոշելու համար պահանջենք, որ հարվածի հետևանքով համակարգի ստացած կինետիկ էներգիան հավասարվի պրիզմայի և գնդի պոտենցիալ էներգիաների գումարին, երբ համակարգի զանգվածների կենտրոնը հասնում է իր ամենաբարձր դիրքին: Համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T = \frac{1}{2}\left[J + (OC)^2 \cdot m\right]\omega^2 = \frac{1}{2}\left[10ma^2 + \frac{13}{4}ma^2\right]\omega^2 = \frac{53}{8}ma^2\omega^2:$$

Տեղադրելով ω-ի արժեքը (4)-ից՝ կստանանք՝

$$T = \frac{9mV^2}{106}: \qquad (5)$$

Հաշվենք համակարգի պոտենցիալ էներգիան զանգվածների կենտրոնի ամենաբարձր դիրքի համար (գծ. 184): Դրա համար նախ հաշվենք համակարգի զանգվածների կենտրոնի x_C աբսցիսը: Համակարգը բաղկացած է m զանգված ունեցող գնդից, որը հարվածից հետո կգտնվի C կետում և $3m$ զանգված ունեցող պրիզմայից, որի զանգվածների կենտրոնը E կետն է, հետևաբար՝



Գծ. 184

$$x_{c_1} = \frac{3m\cdot DE + m\cdot DC}{m+3m} = \frac{3\cdot\frac{a}{2}+a}{4} = \frac{5}{8}a:$$

Պրիզմայի պտտվելու ժամանակ C_1 կետի ամենաբարձր դիրքում z_{c_1}-ը կլինի՝

$$z_{c_1} = OC_1 = \sqrt{(OD)^2+(DC_1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}a^2+\frac{25}{64}a^2} = \frac{13}{8}a:$$

Նախքան հարվածը z_{c_1} բարձրությունը եղել է $\frac{3}{2}a$, հետևաբար զանգվածների կենտրոնը կբարձրանա

$$= \frac{13}{8}a - \frac{3}{2}a = \frac{}{8}$$

չափով, հետևաբար՝

$$\Pi = 4gm\cdot\frac{a}{8} = \frac{mga}{2}: \qquad (7)$$

Հավասարեցնելով կինետիկ էներգիայի արժեքը (5)-ից պոտենցիալ էներգիայի (7) արժեքի հետ կստանանք՝

$$\frac{9mV^2}{106} = \frac{mga}{2}$$

Լուծելով ստացված հավասարումը V-ի նկատմամբ՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $V = \frac{1}{3}\sqrt{53ga}$

14. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԶԱՆԳՎԱԾՈՎ ԿԵՏԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

Ժամանակակից գրեթե բոլոր թռչող սարքերում օգտագործվում են շարժիչներ, որոնք աշխատում են փոփոխական զանգվածով մարմինների մեխանիկայի օրենքներով: Փոփոխական զանգվածով մարմնի շարժման օրինաչափությունների ուսումնասիրման բնագավառում մեծ ավանդ ունի ներդրած Ի.Վ. Մեշչերսկին:

Փոփոխական զանգվածով կետ անվանում են այն նյութական կետը, որի զանգվածը շարժման ընթացքում մեծանում է կամ փոքրանում: Պարզության համար ենթադրենք, որ զանգվածի փոփոխության (աճման կամ նվազման) օրենքը անընդհատ է կախված ժամանակից: Ավելին, որպեսզի հետագայում օգտագործվող ածանցման և դիֆերենցման գործողությունները համապատասխանեն բուհական ծրագրում շարադրվող մաթեմատիկական ապարատին, ենթադրենք, որ զանգվածի փոփոխությունն արտահայտվում է անընդհատ ածանցյալ ունեցող ֆունկցիաների միջոցով:

Փոփոխական զանգվածով կետի շարժման ուսումնասիրության հիմքում ընկած է Մեշչերսկու հավասարումը՝

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \frac{dm}{dt}(\bar{u} - \bar{v}), \qquad \text{(I)}$$

որտեղ $m = m(t)$-ն կետի զանգվածն է ժամանակի t պահին, $\bar{v}$-ն՝ արագությունը, $\bar{F}$-ը կետի վրա ազդող արտաքին ուժերի համազորն է, $\bar{u}$-ն անջատվող մասնիկի բացարձակ արագությունն է, իսկ $(\bar{u} - \bar{v})$-ն կլինի նրա հարաբերական արագությունը: $m\frac{d\bar{v}}{dt}(\bar{u} - \bar{v}) = \bar{\Phi}$ գումարելին կոչվում է ռեակտիվ ուժ: Երբ $\bar{u} = 0$, շարժման հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - v \cdot \frac{dm}{dt}: \qquad \text{(II)}$$

(II) հավասարումն օգտագործվում է այն դեպքում, երբ անջատվող մասնիկների բացարձակ արագությունն անջատվելուց հետո հավասար է զրոյի: Երբ $\bar{u} = \bar{v}$, այսինքն, երբ անջատվող մասնիկների հարաբերական արագությունը հավասարվում է զրոյի, շարժման (I) հավասարումն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}: \qquad \text{(III)}$$

Շատ կիրառական խնդիրներում $\bar{u} - \bar{v} = \bar{v}_r = const$ (որը համապատասխանում է հաստատուն հարաբերական արագությամբ մասնիկների անջատման դեպքին), այդ դեպքում (I) հավասարումը գրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{v}_r\frac{dm}{dt}: \qquad \text{(IV)}$$

Երբ փոփոխական զանգվածով կետը կատարում է ուղղագիծ շարժում, ապա (I) հավասարումը կընդունի

$$m\frac{dv}{dt} = \bar{F} + (v - u)\frac{dm}{dt}, \qquad \text{(V)}$$

կամ՝

$$m\ddot{x} = F_x + (\dot{x} - u)\cdot\dot{m}:$$

(II)-ը կընդունի

$$m\frac{dv}{dt} = F - v\frac{dm}{dt} \qquad \text{(VI)}$$

կամ՝

$$m\ddot{x} = F - \dot{x}\dot{m}$$

$$m\frac{dv}{dt} = F, \quad \text{կամ} \quad m\ddot{x} = F \qquad \text{(VII)}$$

տեսքը, իսկ (IV)-ը՝

$$m\frac{dv}{dt} = F + v_r\frac{dm}{dt} \qquad \text{կամ} \quad m\ddot{x} = F + v_r$$

տեսքը:

Փոփոխական զանգվածով կետի դինամիկայի վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս անհրաժեշտ է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

ա) Խնդրի պայմաններից որոշել արդյո՞ք այն վերաբերում է փոփոխական զանգվածով կետի դինամիկային:

բ) Եթե խնդիրը վերաբերում է փոփոխական զանգվածով կետի դինամիկային, ապա, օգտագործելով Մեշչերսկու հավասարման համապատասխան տարբերակը՝ կազմել փոփոխական զանգվածով կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը և ինտեգրել այն տրված նախնական պայմաններով:

Խնդիրներ:

Ստորև բերվում են փոփոխական զանգվածով կետի դինամիկայի վերաբերյալ խնդիրների լուծումներ:

Խնդիր 155 (45.2): Կազմել հրթիռի վերընթաց շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը: Հրթիռի զանգվածը փոփոխվում է $m = m_0 \cdot f(t)$ օրենքով (այրման օրենք): Օդի դիմադրության ուժը տված ֆունկցիա է՝ կախված հրթիռի արագությունից և դիրքից՝ $R = R(x, \dot{x})$: Գազերի արտահոսման v_r հարաբերական արդյունավետ արագությունն ընդունել հաստատուն:

Լուծում: Ընտրենք կոորդինատական համակարգ՝ Ox առանցքն ուղղելով հրթիռի շարժման ուղղությամբ, ուղղածիգով դեպի վեր: Հրթիռի վրա նրա շարժման ժամանակ ազդում են հետևյալ ուժերը. ծանրության mg ուժը՝ ուղղված ուղղածիգով դեպի ցած, օդի դիմադրության $R(x, \dot{x})$ ուժը՝ ուղղված հրթիռի շարժմանը հակառակ, այսինքն՝ ուղղածիգով դեպի ցած և $v_r\dot{m}$ ռեակտիվ ուժը, նույնպես ուղղված դեպի ցած:

Համաձայն (VIII) բանաձևի՝ հրթիռի շարժման հավասարումը կլինի՝

$$m\ddot{x} = -mg - R(x, \dot{x}) - v_r\dot{m}: \qquad (1)$$

Տեղադրելով (1)-ում $m = m_0 \cdot f(t)$ արժեքը և այն լուծելով $\ddot{x}$-ի նկատմամբ՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $\quad \ddot{x} = -g - \dfrac{R(x, \dot{x})}{m_0 f(t)} - \dfrac{v_r \dot{f}(t)}{f(t)}:$

Խնդիր 156 (45.3): Ինտեգրել նախորդ խնդրի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը $m = m_0(1-\alpha t)$ և $R = 0$ դեպքում: Հրթիռի սկզբնական արագությունը Երկրի մակերևույթի մոտ հավասար է զրոյի: Ի՞նչ բարձրության վրա կգտնվի հրթիռը t=10; 30; 50 վրկ. պահերին v_e=2000մ/վրկ և α=0,01վրկ$^{-1}$ դեպքում:

Լուծում: Նախորդ խնդրում ստացանք, որ հրթիռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\ddot{x} = -g - \frac{R(x,\dot{x})}{m_0 f(t)} - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}\cdot v_e: \qquad (1)$$

Համաձայն խնդրի պայմանների՝ $R(x,\dot{x}) = 0$, $m = m_0(1- \quad t)$: Տեղադրելով R-ի և m-ի արժեքները (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\ddot{x} = -g + \frac{\alpha v_e}{1-\alpha t} \qquad (2)$$

(2) հավասարումը երկրորդ կարգի սովորական անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է x-ի նկատմամբ, ընդ որում աջ մասը կախված է միայն ժամանակից, հետևաբար, այն ինտեգրելու համար բավական է (2) հավասարման աջ և ձախ մասերը երկու անգամ ինտեգրել ըստ ժամանակի՝ օգտագործելով խնդրում տված $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ նախնական պայմանները: Կունենանք՝

$$\dot{x}(t) = -gt - v_e\, ln(1-\alpha t),$$

$$x(t) = -\frac{gt^2}{2} + \frac{v_e}{\alpha}\left[(1-\alpha t)ln(1-\alpha t) + \alpha t\right]$$

(3) հավասարումը կլինի հրթիռի շարժման օրենքը:

Հրթիռի բարձրությունը ժամանակի t =10, 30, 50 վրկ. պահերին որոշելու համար (3)-ում տեղադրենք v_e=2000մ/վրկ., α =0,01մ/վրկ., իսկ t-ն 10; 30 և 50.: Կստանանք

$x(10)$=0,54 կմ; $x(30)$=5,05 կմ; $x(50)$=18,4 կմ:

$$x(t) = \frac{v_e}{\alpha}\left[(1-\alpha t)ln(1-\alpha t) + \alpha t\right] - \frac{gt^2}{2};$$

$x(10)$=0, 54 կմ; $x(30)$=5, 05 կմ; $x(50)$=18,4 կմ:

Խնդիր 157 (45. 5): 45. 2 խնդրում նկարագրված հրթիռի զանգվածը մինչև t=t_0 պահը փոփոխվում է m=$m_0 e^{-\alpha t}$ օրենքով: Անտեսելով դիմադրության ուժը՝ գտնել հրթիռի շարժման օրենքը: Ընդունելով, որ ժամանակի t_0 պահին ամբողջ վառելանյութը գործնականորեն այրվել է, որոշել հրթիռի բարձրացման առավելագույն բարձրությունը: Սկզբնական պահին հրթիռը գտնվել է Երկրի վրա և նրա արագությունը եղել է զրո:

Լուծում: Ընդհանուր դեպքում հրթիռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը որոշել ենք 155 (45.2) խնդրի լուծման ժամանակ: Այն ուներ հետևյալ տեսքը՝

$$\ddot{x} = -g - \frac{R(x,\dot{x})}{m_0 f(t)} - \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} \cdot v_e : \qquad (1)$$

Այս խնդրի պայմանների համաձայն՝ R=0, $f(t)= e^{-\alpha t}$, (m=$m_0 e^{-\alpha t}$): Տեղադրելով R-ի և f-ի արժեքները (1)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$\ddot{x} = -g + \alpha v_e : \qquad (2)$$

Քանի որ $-g + \alpha v_e$-ն հաստատուն մեծություն է, ապա հրթիռը դեպի վեր կբարձրանա՝ կատարելով հավասարաչափ արագացող շարժում: Քանի որ, ըստ խնդրի պայմանների,

$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$, ապա հրթիռի արագությունը և դիրքը կորոշվեն

$$v(t) = \dot{x}(t) = (\alpha v_e - g)t ,$$

$$x(t) = (\alpha v_e - g)\frac{t^2}{2} \qquad (3)$$

բանաձևերով:

Ժամանակի t=t_0 պահին, երբ հրթիռի ամբողջ վառելանյութը գործնականորեն այրվել է, հրթիռը կհասնի $x(t_0)$ բարձրության և կունենա $v(t_0)$ արագություն, որտեղ

$$v(t_0) = (\alpha v_e - g)t_0$$

$$x(t_0) = (\alpha v_e - g)\frac{t_0^2}{2} : \qquad (4)$$

Վառելիքի վերջանալուց հետո հրթիռը, ունենալով ուղղածիգ դեպի վեր ուղղված $v(t_0)$ արագություն, կշարժվի միայն ծանրության ուժի ազդեցության տակ, հետևաբար, նրա բարձրացման չափը $x(t_0)$ դիրքից մինչև արագության զրո դառնալը կորոշվի Արքիմեդի բանաձևով՝ $h_1 = \dfrac{v^2(t_0)}{2g}$: Այսպիսով, հրթիռի բարձրությունը Երկրի մակերևույթից կլինի՝

$$H = x(t_0) + h_1 = x(t_0) + \frac{v^2(t_0)}{2g} : \qquad (5)$$

Տեղադրելով (5)-ի մեջ $x(t_0)$ և $v(t_0)$-ի արժեքները (4)-ից՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $\quad H = \dfrac{\alpha^2 v_e^2 t_0^2}{2g}\left(1 - \dfrac{g}{\alpha v_e}\right)$:

Խնդիր 158 (45.6): Նախորդ խնդրի պայմաններում որոշել հրթիռի հնարավոր առավելագույն H_{max} բարձրությանը համապատասխանող α արժեքը և հաշվել H_{max}-ը (μ=αt_0=$ln(m_0/m_1)$ մեծությունն անհրաժեշտ է ընդունել հաստատուն, որտեղ m_1-ը հրթիռի զանգվածն է t_0 պահին):

Լուծում: Նախորդ խնդրում հրթիռի թռիչքի H բարձրության համար ստացանք

$$H=\frac{\alpha^2 v_r^2 t_0^2}{2g}\left(1-\frac{g}{\alpha v_r}\right) \qquad (1)$$

արժեքը:

Բարձրությունը, կախված α-ից, իր առավելագույն արժեքը կստանա, երբ $\frac{g}{\alpha v_r}$ հավասար լինի զրոյի, այսինքն՝ α-ն լինի անվերջ մեծ: Քանի որ, մյուս կողմից $\alpha t_0-\mu$-ն հաստատուն մեծություն է, ապա t_0 պետք է լինի անվերջ փոքր մեծություն: Այսպիսով, H-ը կստանա իր առավելագույն արժեքը, եթե ամբողջ վառելիքն այրվի մեկ ակնթարթում: Տեղադրելով (1)-ի մեջ $\alpha t_0=\mu$, $\frac{g}{\alpha v_r}=0$՝ կստանանք՝

$$H_{max}=\frac{\mu^2 v_r^2}{2g}:$$

Պատ. $\qquad \alpha=\infty$; $H_{max}=\dfrac{\mu^2 v_r^2}{2g}$:

Դիտողություն: Ի.Վ. Մեշչերսկու «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու» խնդրագրքի 45.7 խնդրի լուծման համար բավական է 157 (45.5) խնդրի պատասխանում $\frac{\alpha v_r}{g}$-ի փոխարեն վերցնել k և 157 (45.5) ու 158 (45.6) խնդրի պատասխաններից H-ն արտահայտել H_{max}-ի միջոցով:

Խնդիր 159 (45.9): Հրթիռը շարժվում է ծանրության ուժի համասեռ դաշտում դեպի վեր w հաստատուն արագացումով: Անտեսելով մթնոլորտի դիմադրությունը և ընդունելով գազերի արտահոսման v_r արդյունավետ արագությունը հաստատուն՝ որոշել այն T ժամանակը, որի ընթացքում հրթիռի զանգվածը կփոքրանա երկու անգամ:

Լուծում: Հրթիռը կատարում է ուղղագիծ շարժում ուղղաձիգի ուղղությամբ: Հրթիռի վրա ազդում են $m\bar{g}$ ծանրության ուժը և $\bar{v}_r\frac{dm}{dt}$ ռեակտիվ ուժը, որոնք ուղղված են հրթիռի շարժման հակառակ ուղղությամբ: Համաձայն (VIII) բանաձևի հրթիռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումն այս դեպքում կլինի՝

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-v_r\frac{dm}{dt}: \qquad (1)$$

Քանի որ $\frac{dv}{dt}=w$ արագացումը, համաձայն խնդրի պայմանի, հաստատուն է, ապա (1) հավասարումը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{m(w+g)}{v_r}:$$

Տրված է նաև, որ գազերի արտահոսման v_r արդյունավետ արագությունը նույնպես հաստատուն է: Հետևաբար, ինտեգրելով (2) հավասարումը $t=0$, $m=m_0$ նախնական պայմանների դեպքում՝ կստանանք՝

$$ln\frac{m}{m_0}=-\frac{w+g}{v_r}t: \qquad (3)$$

Քանի որ խնդրում պահանջվում է որոշել այն ժամանակամիջոցը, որի ընթացքում հրթիռի զանգվածը փոքրանում է երկու անգամ, ապա խնդրի պատասխանը ստանալու համար բավական է (3)-ի մեջ տեղադրել $\frac{m}{m_0}=\frac{1}{2}$ և որոշել t-ն:

Պատ. $\quad T=\frac{v_r}{w+g}\cdot ln2:$

Խնդիր 160 (45.13): Փոփոխական զանգվածով մարմինը, ունենալով զրոյի հավասար սկզբնական արագություն, w հաստատուն արագացումով շարժվում է հորիզոնական ուղղորդներով: Մարմնի վրա ազդում է սահքի շփման ուժը f շփման գործակցով: Գազերի արտահոսման v_r արդյունավետ արագությունը հաստատուն է: Անտեսելով դիմադրությունը՝ որոշել մարմնի անցած ճանապարհը մինչև այն պահը, երբ նրա զանգվածը կփոքրանա k անգամ:

Լուծում: Քանի որ հրթիռը կատարում է ուղղագիծ շարժում և նրա վրա ազդում են $fm\bar{g}$ շփման և $v_r\frac{dm}{dt}$ ռեակտիվ ուժերը, որոնք ուղղված են շարժմանը հակառակ, ապա հրթիռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի

$$m\frac{dv}{dt}=-v_r\frac{dm}{dt}-fmg: \qquad (1)$$

Քանի որ $w=\frac{dv}{dt}$ արագացումը հաստատուն է և $t=0$ պահին $m=m_0$, ապա ինտեգրելով (1) հավասարումը՝ կստանանք՝

$$m=m_0e^{-\frac{w+fg}{v_r}t} \qquad (2)$$

(2)-ից որոշենք t-ն, կստանանք՝

$$t=\frac{v_r}{w+fg}ln\frac{m_0}{m}: \qquad (3)$$

Որոշենք այն ժամանակահատվածը, որի ընթացքում մարմնի զանգվածը կփոքրանա k անգամ: Դրա համար (3)-ի մեջ տեղադրենք $\frac{m_0}{m}=k$: Կունենանք՝

$$t_1=\frac{v_r}{w+fg}lnk: \qquad (4)$$

Քանի որ մարմինը շարժվում է հաստատուն արագացումով առանց սկզբնական

t_1 ժամանակահատվածում կանցնի

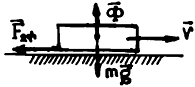
$$S = \frac{wt_1^2}{2} \qquad (5)$$

ճանապարհ: Տեղադրելով t_1-ի արժեքը (4)-ից (5)-ի մեջ՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $$= \frac{wv_r^2}{2(w+fg)}(\ln k)^2$$

Դիտողություն: Ի.Վ. Մեշչերսկու «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու» խնդրագրքի 45.12 խնդրի պատասխանը կստացվի, եթե 160(45.13) խնդրի պատասխանում վերցնենք f=0:

Խնդիր 161 (45.16): Մարմինը սահում է հորիզոնական ռելսերով: Գազերի արտահոսքը տեղի է ունենում ուղղաձիգ դեպի ներքև v_r արդյունավետ արագությամբ: Մարմնի սկզբնական արագությունը հավասար է v_0-ի: Գտնել մարմնի արագության փոփոխության օրենքը և նրա շարժման օրենքը, եթե զանգվածի փոփոխությունը տեղի է ունենում m=m_0-at օրենքով: Սահքի շփման գործակիցը հավասար է f-ի:



Գծ. 185

Լուծում: Մարմինը կատարում է ուղղագիծ շարժում հորիզոնական ուղղությամբ: Նրա վրա ազդող ուժերն են $m\,g$ ծանրության ուժը, $\overline{\Phi}$ ռեակտիվ ուժը, շփման $\overline{F}_{շփ}$ ուժը և կապի $\overline{N}$ հակազդումը (գծ.185): Կապի $\overline{N}$ հակազդումը մեծությամբ հավասար կլինի $m\overline{g}$ ծանրության ուժի և $\overline{\Phi}$ ռեակտիվ ուժի տարբերությանը՝ $N = mg - \Phi$:

Տեղադրելով ռեակտիվ ուժի $\Phi = -v_r \dfrac{dm}{dt}$ արժեքը՝ կստանանք՝

$$N = mg + v_r \frac{dm}{dt}: \qquad (1)$$

Այսպիսով, մարմնի շարժման ուղղությամբ կազդի միայն շփման ուժը, որի մեծությունը կլինի՝ $F_{շփ}=fN=f\,(mg + v_r \dfrac{dm}{dt})$ և ուղղված՝ շարժմանը հակառակ: Հետևաբար, մարմնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի՝

$$m\frac{dv}{dt} = -f\,(mg + v_r \frac{dm}{dt}),$$

կամ՝

$$\frac{dv}{dt} = -gf - v_r\ f \cdot \frac{d\ln m}{dt}: \qquad (2)$$

Ինտեգրելով (2) հավասարումը $v(0)=v_0$, $m(0)=m_0$ նախնական պայմանների դեպքում՝ կունենանք՝

$$v = v_0 - f\left(gt - v_r \ln\frac{m_0}{m}\right): \qquad (3)$$

Տեղադրելով (3)-ի մեջ $m=m_0-at$ և ինտեգրելով այն $S(0)=0$ նախնական պայմանի դեպքում՝ կստանանք՝

$$S = v_0 t - \frac{fgt^2}{2} + tv_r f \ln m_0 - v_r f\int_0^t \ln(m_0 - \alpha t)dt =$$

$$= v_0 t - f\left[\frac{gt^2}{2} - v_r\left(t\ln m_0 + \frac{m_0 - at}{a}\left(\ln(m_0 - at) - 1\right)\right)\right]:$$

$$v = v_0 - f\left[gt - v_r \ln\frac{m_0}{m_0 - at}\right],$$

$$S = vt - f\left\{\frac{gt^2}{2} - v_r\left[t\ln m_0 + \frac{m_0 - at}{a}\left(\ln(m_0 - at) - 1\right)\right]\right\}:$$

Խնդիր 162 (45.17): Լուծել նախորդ խնդիրը, եթե վառելանյութի փոփոխությունը տեղի է ունենում $m=m_0e^{-\alpha t}$ օրենքով: Որոշել, թե ինչպիսի α-ի դեպքում մարմինը կշարժվի v_0 հաստատուն արագությամբ:

Լուծում: Այս խնդիրը լուծելու համար բավական է նախորդ խնդրի (3) բանաձևի մեջ տեղադրել $m=m_0e^{-\alpha t}$: Կստանանք՝

$$v = v_0 + f(v_r\alpha - g)t: \qquad (1)$$

Եթե ինտեգրենք $\frac{dS}{dt} = v$ հավասարումը $S(0)=0$ նախնական պայմանի դեպքում, կունենանք՝

$$S = v_0 t + f(v_r\alpha - g)\frac{t^2}{2}:$$

Եթե արագության համար ստացված (1) արտահայտության մեջ վերցնենք $\alpha = \frac{g}{v_r}$, ապա կստանանք՝ $v=v_0=const$:

Պատ. $v = v_0 + f(v_r\alpha - g)t$; $S = v_0 t + f(v_r\alpha - g)\frac{t^2}{2}$; $\alpha = \frac{g}{v_r}$:

Խնդիր 163 (45.20): Դատարկության մեջ ծանրության ուժի բացակայության դեպքում դադարի վիճակից v_r հաստատուն արտյունավետ արագությամբ ուղղագիծ շարժվող հրթիռի m_0 սկզբնական և m_1 վերջնական զանգվածների ինչպիսի* z հարաբերության դեպքում նրա մեխանիկական օ.գ.գ.-ն ունի ամենամեծ արժեքը: Օ.գ.գ.-ը վառելանյութի այրումից հետո հրթիռի կինետիկ էներգիայի հարաբերությունն է քարշի ուժի կատարած աշխատանքին:

Լուծում: Նախ հաշվենք հրթիռի էներգիան, երբ նրա զանգվածը m_0-ից դարձել է m: Քանի որ հրթիռի սկզբնական արագությունը հավասար է եղել զրոյի, ապա

$$T = \frac{1}{2} m v^2 : \qquad (1)$$

Շարժման քանակի թեորեմի (IV) համաձայն՝

$$m \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dm}{dt} : \qquad (2)$$

Ինտեգրելով (2) հավասարումը $v(0)=0$, $m(0)=m_0$ նախնական պայմաններով՝ կստանանք՝

$$_r \cdot ln \frac{m_0}{m} : \qquad (3)$$

Եթե նշանակենք $z = \frac{m_0}{m}$, ապա (3)-ը կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$v = v_r ln z : \qquad (4)$$

Տեղադրելով (4)-ը (1)-ի մեջ՝ կինետիկ էներգիայի համար կստանանք՝

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_0}{z} v_r^2 \, ln^2 z : \qquad (5)$$

Այժմ հաշվենք քարշի ուժի կատարած աշխատանքը: Համաձայն խնդրի պայմանի՝ քարշի ուժի կատարած աշխատանքը կորոշվի

$$A = \int_0^S \left(-v_r \frac{dm}{dt} \right) dx \qquad (6)$$

բանաձևով, որտեղ S-ը հրթիռի անցած ճանապարհն է: Ձևափոխենք (6) բանաձևը և հաշվենք քարշի ուժի կատարած աշխատանքը՝

$$= -\int v_r \qquad = -\int v_r^2 \, ln \, z dm = \int_1^z \frac{m_0 v_r^2 \, ln \, z}{z^2} dz =$$

$$_0 v_r^2 \left(-\frac{ln \, z}{z} + \int_1^z \frac{1}{z^2} dz \right) = \frac{v_r^2 m_0}{z} (z - 1 - ln \, z) \qquad (7)$$

Քանի որ $\eta = \frac{T}{A}$, ապա օգտվելով (5)-ից և (7)-ից՝ կունենանք՝

$$\eta = \frac{ln^2 z}{2(z - 1 - ln \, z)} : \qquad (8)$$

Քանի որ $z = \frac{m_0}{m_1}$, ապա $z > 1$ ($m_0 > {}_1$): Մյուս կողմից՝ $m_1 > 0$, հետևաբար՝ $z \in (1; +\infty)$: $z \in (1; \infty)$ տիրույթում $\eta(z)$ (8) ֆունկցիան մոնոտոն նվազող է և $\eta \to 0$, երբ $z \to \infty$: Մյուս կողմից, դժվար չէ ստուգել, որ $\eta \to 1$, երբ $z \to 1$:

Հետևաբար, սա նշանակում է, որ η-ի մեծագույն արժեքը կստացվի, երբ $z \to 1$, որն իմաստ չունի ֆիզիկական տեսակետից:

Այսպիսով, նշված խնդրի պայմաններով օ.գ.գ.-ի մեծագույն արժեքը որոշելն անիմաստ է:

Խնդիր 164 (45.23): Ընդունելով, որ եռաստիճան հրթիռի բոլոր երեք աստիճանների համար Ցիալկովսկու թվերը և արտահոսման v_e արդյունավետ արագությունները նույնն են, գտնել Ցիալկովսկու թիվը v_e=2,4 կմ/վրկ դեպքում, եթե ամբողջ վառելանյութի այրումից հետո հրթիռի արագությունը հավասար է 9 կմ/վրկ (ծգողության դաշտի ազդեցությունը և մթնոլորտի դիմադրությունն անտեսել):

Լուծում: Եռաստիճան հրթիռի բոլոր երեք հրթիռների շարժման ժամանակ տեղի ունի

$$m\frac{dv}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt} \qquad (1)$$

հավասարումը: Ինտեգրենք այն նախ առաջին աստիճանի համար: Քանի որ հրթիռի սկզբնական արագությունը հավասար է զրոյի, ապա (1) հավասարումն անհրաժեշտ է ինտեգրել $v(0)=0$, $m(0)=m_0$ սկզբնական պայմանների դեպքում: Կստանանք՝

$$v = v_e \cdot \ln\frac{m_0}{m}: \qquad (2)$$

Դիցուք, խնդրում պահանջվող Ցիալկովսկու թիվը (որը նույնն է եռաստիճան հրթիռի երեք աստիճանների համար) z է: Այդ դեպքում $z = \frac{m_0}{m_1}$, որտեղ m_1-ը առաջին աստիճանի հրթիռի վերջնական զանգվածն է: Այսպիսով, առաջին աստիճանի հրթիռի վերջնական արագությունը կլինի՝

$$v_1 = v_e \cdot \ln\frac{m_0}{m_1} = v_e \cdot \ln z: \qquad (3)$$

Այս արագությունը, խնդրի պայմանի համաձայն, կլինի հրթիռի երկրորդ աստիճանի համար սկզբնական արագություն: Հետևաբար, (1) հավասարման լուծումը երկրորդ աստիճանի համար կլինի՝

$$v = v_1 + v_e \ln\frac{m_1}{m} \qquad (4)$$

Երկրորդ աստիճանի հրթիռի վերջնական արագությունը կլինի՝

$$v_2 = v_1 + v_e \ln\frac{m_1}{m_2}, \qquad (5)$$

որտեղ m_2-ը երկրորդ աստիճանի հրթիռի վերջնական զանգվածն է և $\frac{m_1}{m_2} = z$: Տեղադրելով v_1-ի արժեքը (3)-ից (5)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$v_2 = 2v_e \ln z \qquad (6)$$

Նույնպիսի դատողություններով կարող ենք հաշվել, որ եռաստիճան հրթիռի երրորդ աստիճանի վերջնական արագությունը կլինի

$$v_3 = v_2 + v_e \ln z = 3v_e \ln z : \qquad (7)$$

Խնդրի պատասխանը ստանալու համար (7) հավասարումը լուծենք z-ի նկատմամբ և տեղադրենք $v_3 = 9$կմ/վրկ, $v_e = 2{,}4$կմ/վրկ:

Պատ. $\quad z = e^{1{,}25} = 3{,}49$:

Խնդիր 165 (45.26): Գտնել զրոյական սկզբնական արագությամբ ուղղաձիգ դեպի վեր շարժվող հրթիռի զանգվածի փոփոխման օրենքը, եթե նրա w արագացումը հաստատուն է, իսկ միջավայրի դիմադրությունը համեմատական է արագության քառակուսուն (b-ն համեմատականության գործակիցն է): Ծանրության ուժի դաշտն ընդունել համասեռ: Գազերի արտահոսման v_e արդյունավետ արագությունը հաստատուն է:

Լուծում: Հրթիռի շարժման ժամանակ նրա վրա ազդում են ծանրության mg ուժը, միջավայրի դիմադրության bv^2 ուժը, որոնք ուղղված են նրա շարժմանը հակառակ ուղղությամբ և ռեակտիվ $-v_e \dfrac{dm}{dt}$ ուժը՝ ուղղված հրթիռի շարժման ուղղությամբ: Հետևաբար, նրա շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը, համաձայն (VIII) բանաձևի, կլինի՝

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - bv^2 - v_e \frac{dm}{dt} : \qquad (1)$$

Քանի որ $\dfrac{dv}{dt} = \ \cdot = const$, $v(0) = 0$, ապա (1) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$mw = -mg - bw^2t^2 - v_e \frac{dm}{dt}$$

կամ՝

$$\frac{dm}{dt} + \frac{w+g}{v_e} \cdot m = -\frac{bw^2}{v_e} \cdot t^2 \qquad (2)$$

(2) հավասարումն առաջին կարգի գծային հաստատուն գործակիցներով անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է, հետևաբար, նրա լուծումը ներկայացվում է համասեռի ընդհանուր լուծման և անհամասեռի որևէ մասնավոր լուծման գումարի տեսքով՝

$$(2')$$

որտեղ m_1-ը համասեռ

$$\frac{dm_1}{dt} + \frac{w+g}{v_e} \cdot m_1 = 0 \qquad (3)$$

հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ m_2-ը՝ (2) հավասարման որևէ մասնավոր լուծումը:

(3) հավասարման լուծումը կլինի՝

$$m_1 = Ce^{-\frac{w+g}{v_r}t} \qquad (4)$$

Եթե m_2 լուծումը փնտրենք

$$m_2 = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \qquad (5)$$

տեսքով, ապա, տեղադրելով m_2-ի արժեքը (2)-ի մեջ, a_1, a_2, a_3 գործակիցների համար կստանանք հետևյալ արժեքները՝

$$a_1 = -\frac{bw^2}{w+g},\ a_2 = \frac{2bv_r w^2}{(w+g)^2},\ a_3 = -\frac{2bv_r^2 w^2}{(w+g)^3}:$$

Տեղադրելով այս արժեքները (5)-ի մեջ, իսկ m_2-ը և m_1-ը (5)-ից և (4)-ից (2՛)-ի մեջ՝ կստանանք՝

$$m = Ce^{-\frac{w+g}{v_r}t} - \frac{bw^2}{w+g}t^2 + \frac{2bv_r w^2}{(w+g)^2}t - \frac{2bv_r^2 w^2}{(w+g)^3}: \qquad (6)$$

Ինտեգրման C հաստատունը որոշելու համար օգտվենք $m(0)=m_0$ սկզբնական պայմանից, կստանանք՝

$$m_0 = C - \frac{2bv_r^2 w^2}{(w+g)^3}, \qquad C = m_0 + \frac{2bv_r^2 w^2}{(w+g)^3}:$$

Տեղադրելով C-ի ստացված արժեքը (6)-ի մեջ՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ. $$m = \left(m_0 + \frac{2bv_r^2 w^2}{(w+g)^3}\right)e^{-\frac{w+g}{v_r}t} - \frac{bw^2}{wg}t^2 + \frac{2bv_r w^2}{(w+g)^2}t - \frac{2bv_r^2 w^2}{(w+g)^3}:$$

Խնդիր 166 (45.29): Q կշռով օդապարիկը բարձրանում է ուղղաձիգ և իր հետևից տանում է Երկրի վրա դրված ճոպանը: Օդապարիկի վրա ազդում են P վերամբարձ ուժը, ծանրության ուժը և արագության քառակուսուն համեմատական դիմադրության ուժը՝ $R = -\beta\dot{x}^2$: Ճոպանի միավոր երկարության կշիռը γ է: Կազմել օդապարիկի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծում: Օդապարիկի շարժման ժամանակ նրա վրա կազդեն P վերամբարձ ուժը, $Q_1 = Q + \gamma x$ օդապարիկի և բացված ճոպանի կշիռները, $R = -\beta\dot{x}^2$ դիմադրության ուժը և $\overline{F} = (\overline{u} - \overline{v})\dfrac{dm}{dt}$ ռեակտիվ ուժը (գծ.186): Քանի որ ճոպանի շարժվող մասի արագությունը օդապարիկի նկատմամբ հավասար է զրոյի, ապա $\overline{u} = 0$ և ռեակտիվ ուժը կլինի՝

$$\overline{F} = -\overline{v}\frac{dm}{dt}:$$

Համաձայն (II) բանաձևի, օդապարիկի և պարանի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի՝

$$m\ddot{x} = P - (Q + \gamma x) - \beta\dot{x}^2 - v\frac{dm}{dt}:$$

Այժմ հաշվենք $\frac{dm}{dt}$ մեծությունը: Քանի որ օդապարիկի և ճոպանի կշիռը հավասար է $Q + \gamma x$, ապա օդապարիկի և բարձրացող ճոպանի զանգվածը կլինի՝

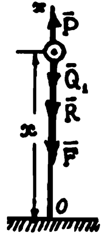
$$m = \frac{Q_1}{g} = \frac{Q}{g} + \frac{\gamma x}{g}: \qquad (2)$$

Այստեղից՝

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\gamma}{g}\dot{x}:$$

Հետևաբար, օդապարիկի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի՝

$$m\ddot{x} = P - (Q + \gamma x) - \beta\dot{x}^2 - \frac{\gamma}{g}\dot{x}^2: \qquad (3)$$



Գծ. 186

Բաժանելով (3) հավասարման երկու մասերը m-ի վրա և տեղադրելով m-ի արժեքը (2)-ից՝ կստանանք՝

$$\ddot{x} = \frac{Pg}{Q + \gamma x} - g - \frac{\beta g + \gamma}{Q + \gamma x}\dot{x}^2$$

$$\ddot{x} = -g + \frac{Pg}{Q + \gamma x} - \frac{\beta g + \gamma}{Q + \gamma x}\dot{x}^2:$$

Խնդիր 167 (45.30): Նախորդ խնդրի պայմաններով որոշել օդապարիկի բարձրացման արագությունը: Սկզբնական պահին օդապարիկն անշարժ է և գտնվում է H_0 բարձրության վրա:

Լուծում: Այս խնդիրը լուծելու համար անհրաժեշտ է նախորդ խնդրում ստացված դիֆերենցիալ հավասարումն ինտեգրել մեկ անգամ: Դա հնարավոր է, քանի որ հավասարումը t անկախ փոփոխականներից բացահայտ կախված չէ: Քանի որ $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{dx}{v}$, ապա շարժման դիֆերենցիալ հավասարումից արտաքսելով t ժամանակը և որպես անկախ փոփոխական ընդունելով x-ը՝ կստանանք՝

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dv^2}{dx}:$$

Տեղադրելով $\dot{x}$ և $\ddot{x}$-ի համար ստացված արտահայտությունները շարժման դիֆերենցիալ հավասարման մեջ՝ կունենանք՝

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx} = \frac{Pg}{Q + \gamma x} - g - \frac{\beta g + \gamma}{Q + \gamma x}v^2: \qquad (1)$$

(1)-ը v^2-ու նկատմամբ առաջին կարգի փոփոխական գործակիցներով գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է:

Դիֆերենցիալ հավասարումների դասընթացից հայտնի է, որ

$$\frac{dy}{dx}+A(x)y=B(x)$$

հավասարման ընդհանուր լուծումը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$y=Ce^{-\int_{x_0}^{x}A(t)dt}+\int_{x_0}^{x}B(\tau)e^{\int_{x_0}^{\tau}A(t)dt}d\tau: \qquad (2)$$

(1) հավասարման լուծումը գրելու համար բավական է (2)-ի մեջ տեղադրել

$$A(x)=2\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma x}, \quad B(x)=2g\left(\frac{P}{Q+\gamma x}-1\right),$$

կստանանք՝

$$v^2=Ce^{-2\int_{x_0}^{x}\frac{P}{Q+\gamma t}dt}+\int_{x_0}^{x}2g\left(\frac{P}{Q+\gamma\tau}-1\right)e^{2\int^{\tau}\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma t}dt}d\tau: \qquad (3)$$

Օգտվելով $v^2(H_0)=0$ $(H_0=x_0)$ սկզբնական պայմաններից՝ կունենանք՝

$$v^2=\int_{H_0}^{x}2g\left(\frac{P}{Q+\gamma\tau}-1\right)e^{2\int^{\tau}\frac{\beta g+\gamma}{Q+\gamma t}dt}d\tau:$$

Հաշվելով (4)-ում եղած ինտեգրալները՝ կստանանք խնդրի պատասխանը:

Պատ.

$$v^2=\frac{Pg}{\gamma+\beta g}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{2(1+\beta g/\gamma)}\right]-\frac{2g}{3\gamma+2\beta g}\left[1-\left(\frac{Q+\gamma H_0}{Q+\gamma x}\right)^{3+2\beta g/\gamma}\right](Q+\gamma x):$$

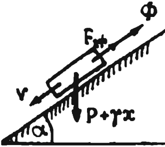
Խնդիր 168 (45.34): Շղթան դարսված է գետնի վրա և մի ծայրով ամրակցված է հորիզոնի հետ α անկյուն կազմող ճանապարհի թեք մասում կանգնած վագոնիկին: Շղթայի և գետնի միջև շփման գործակիցը f է: Շղթայի միավոր երկարության կշիռը γ է, վագոնիկի կշիռը՝ P: Սկզբնական պահին վագոնիկի արագությունը եղել է v_0: Որոշել վագոնիկի արագությունը ժամանակի ցանկացած պահին և գտնել այն անհրաժեշտ պայմանը, որի դեպքում վագոնիկը կարող է կանգ առնել:

Լուծում: Ենթադրենք՝ ժամանակի t պահին վագոնիկի արագությունը դարձել է v, իսկ շղթայի շարժվող մասի երկարությունը՝ (վագոնի հետ) x: t պահին շարժվող մասի կշիռը կլինի $P+\gamma x$: Հետևաբար, այդ պահին շարժվող մասի (վագոնի և շղթայի հատվածի) զանգվածը կլինի՝

$$m=\frac{P+\gamma x}{g}: \qquad (1)$$

Քանի որ հետագայում անհրաժեշտ է լինելու հաշվել ռեակտիվ ուժը, որի մեջ մասնակցում է $\frac{dm}{dt}$ ածանցյալը, ապա այն հաշվենք, օգտվելով (1)-ից: Կունենանք՝

$$\frac{dm}{dt}=\frac{\gamma\dot{x}}{g}: \qquad (2)$$



Գծ. 187

Այժմ նշենք վագոնիկի և շղթայի շարժվող մասի ուժերը (գծ.187): Վագոնիկի և շղթայի շարժվող մասի վրա կազդեն $(P+\gamma x)$ ծանրության ուժը՝ ուղղված դեպի ցած, $fx\gamma\cos\alpha$ շփման ուժը՝ ուղղված շարժմանը հակառակ և $-\dot{x}\frac{dm}{dt}$ ռեակտիվ ուժը՝ ուղղված շարժման ուղղությամբ:

Օգտվենք (II) հավասարումից՝

$$m\frac{d\overline{v}}{dt}=\sum_i\overline{F}_i-\overline{v}\frac{dm}{dt} \qquad (3)$$

Վագոնիկի և շղթայի շարժման ժամանակ x առանցքի ուղղությամբ ազդող ուժերը կլինեն՝ $(P+\gamma x)\sin\alpha$ ծանրության ուժի պրոյեկցիան և $-fx\gamma\cos\alpha$ շփման ուժը: Տեղադրելով նշված ուժերի, m-ի և $\frac{dm}{dt}$-ի արժեքները (3)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\frac{P+\gamma x}{g}\frac{dv}{dt}=-\frac{\gamma\dot{x}^2}{g}-\gamma xf\cos\alpha+\left(P+\gamma x\right)\sin\alpha: \qquad (4)$$

Եթե (4)-ի մեջ տեղադրենք $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$, կունենանք՝

$$\frac{dv^2}{dx}+\frac{2\gamma}{P+\gamma x}v^2=2g\sin\alpha-\frac{2\gamma fgx\cos\alpha}{P+\gamma x}: \qquad (5)$$

Այս հավասարումը v^2-ու նկատմամբ առաջին կարգի փոփոխական գործակիցներով գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է: Հետևաբար, այն ինտեգրելով նախորդ խնդիրներում շարադրված ձևով և օգտվելով $v^2(0)=v_0^2$ նախնական պայմանից՝ կստանանք՝

$$v^2=\frac{P^2v_0^2}{(P+\gamma x)^2}+\frac{2Pg}{3\gamma}\sin\alpha\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]+\frac{2}{3}gx\sin\alpha+$$

$$+\frac{fPg}{3\gamma}\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]\cos\alpha-\frac{2}{3}fgx\cos\alpha: \qquad (6)$$

v^2-ու համար ստացված (6) արտահայտությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$v^2 = gx\left[\frac{P^2 v_0^2}{gx(P+\gamma x)^2} + \frac{2P}{3\gamma x}\sin\alpha\left(1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right) + \frac{fP}{3\gamma x}\cos\alpha\left(1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right) - \frac{2}{3}\cos\alpha(f-tg\alpha)\right]: \quad (7)$$

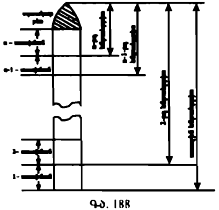
$\frac{P^2 v_0^2}{gx(P+\gamma x)^2} + \frac{2P}{3\gamma x}\sin\alpha\left(1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right) + \frac{fP}{3\gamma x}\cos\alpha\left(1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right)$ գումարելին, $x\in(0;\infty)$ միջակայքում միշտ դրական է և ձգտում է զրոյի, երբ x-ը ձգտում է անվերջության: Հետևաբար, x-ի ինչ-որ արժեքի դեպքում այն կլինի հավասար $\frac{2}{3}\cos\alpha(f-tg\alpha)$-ին, եթե վերջինս դրական է: Հակառակ դեպքում v^2-ին միշտ կլինի դրական:

Այսպիսով, v^2-ու զրո արժեք ընդունելու պայմանը ինչ-որ x-ի դեպքում կլինի $\frac{2}{3}\cos\alpha(f-tg\alpha)$ արտահայտության դրական լինելը կամ $f>tg\alpha$:

Պատ. $$v^2 = \frac{P^2 v_0^2}{(P+\gamma x)^2} + \frac{2Pg\sin\alpha}{3\gamma}\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right] + \frac{2}{3}gx\sin\alpha + \frac{fPg}{3}\left[1-\frac{P^2}{(P+\gamma x)^2}\right]\cos\alpha - \frac{2}{3}fgx\cos\alpha:$$

Վագոնը կարող է կանգնել, եթե տեղի ունենա $f>tg\alpha$ անհավասարությունը:

Խնդիր 169 (45.38): Բազմաստիճան հրթիռը բաղկացած է օգտակար բեռից և աստիճաններից: Վառելանյութի սպառվելուց հետո յուրաքանչյուր աստիճան անջատվում է մնացած կառուցվածքից: Ենթահրթիռ ասելով հասկացվում է չաշխատող բոլոր աստիճանների և օգտակար բեռի համակցությունը, ընդ որում տվյալ աստիճանի համար իրեն համապատասխան ենթահրթիռը դառնում է «օգտակար բեռ»: Նկար 188-ում նշված են բազմաստիճան հրթիռի տարբեր աստիճանների և նրանց համապատասխան ենթահրթիռների համարակալումները: q-ն օգտակար բեռի կշիռն է, P_i-ն i-րդ աստիճանում վառելանյութի կշիռը, Q_i-ն i-րդ



Գծ. 188

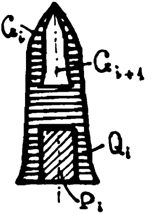
աստիճանի մաքուր կշիռը (առանց վառելանյութի և ենթահրթիռի), G_i-ն՝ i-րդ ենթահրթիռի լրիվ կշիռը: Մուծելով յուրաքանչյուր ենթահրթիռի համար Ցիոլկովսկու թիվը՝

$$z_i = \frac{G_i}{G_i - P_i}$$

և յուրաքանչյուր աստիճանի համար կառուցվածքային բնութագրիչը՝ (աստիճանի ամբողջ կշռի հարաբերությունը նրա մաքուր կշռին)

$$S_i = \frac{Q_i + P_i}{Q_i},$$

որոշել ամբողջ հրթիռի մեկնարկային լրիվ կշիռը, k-րդ ենթահրթիռի կշիռը, k-րդ աստիճանի մաքուր կշիռը, k-րդ աստիճանի վառելանյութի կշիռը:



Գծ. 189

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նպատակահարմար է սկզբից որոշել k-րդ աստիճանի վառելանյութի կշիռը և k-րդ աստիճանի մաքուր կշիռը: Դրա համար խնդրում տրված

$$z_i = \frac{G_i}{G_i - P_i} \quad \text{և} \quad S_i = \frac{Q_i + P_i}{Q_i}$$

արտահայտություններից որոշենք P_i-ն և Q_i-ն, կստանանք

$$P_i = \frac{z_i - 1}{z_i} \cdot G_i; \qquad Q_i = \frac{P_i}{S_i - 1} \qquad (1)$$

Համաձայն խնդրի պայմանի՝ i-րդ աստիճանը կազմված է օգտակար բեռից (i+1-րդ ենթահրթիռ), որի կշիռն է G_{i+1}, P_i կշիռ ունեցող վառելանյութից և Q_i կշիռ ունեցող չոր հրթիռից (նկ.189), հետևաբար՝

$$G_i = G_{i+1} + P_i + Q_i: \qquad (2)$$

Տեղադրելով P_i-ի և Q_i-ի արժեքները (1)-ից՝ արտահայտված G_i-ի միջոցով, (2)-ից կստանանք՝

$${}_i = G_{i+1} + \frac{z_i - 1 + (z_i - 1)(S_i - 1)}{z_i(S_i - 1)} \cdot G_i:$$

Լուծելով ստացված հավասարումը G_i-ի նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$G_i = z_i \frac{S_i - 1}{S_i - z_i} \cdot G_{i+1} \qquad (3)$$

n-րդ աստիճանի համար օգտակար բեռը դառնում է բազմաստիճան հրթիռի օգտակար բեռը, հետևաբար՝

$$G_{n+1} = q: \qquad (4)$$

Այժմ հաշվենք G_n-ը: Դրա համար (3)-ում տեղադրենք $i = n$, $G_{n+1} = q$, կստանանք՝

$$G_n = z_n \frac{S_n - 1}{S_n - z_n} q: \qquad (5)$$

Այժմ որոշենք G_{n-1}-ը: Դրա համար (3)-ի մեջ վերցնենք $i = n-1$, G_{n+1}-ը՝ G_n (5): Կունենանք՝

$$G_{n-1} = q \cdot z_n \frac{S_n - 1}{S_n - z_n} \cdot z_{n-1} \frac{S_{n-1} - 1}{S_{n-1} - z_{n-1}}: \qquad (6)$$

Նույն ձևով շարունակելով՝ կստանանք՝

$$G_k = q \cdot z_n \frac{S_n - 1}{S_n - z_n} \cdot \ldots \cdot z_k \frac{S_k - 1}{S_k - z_k} = q \cdot \prod_{i=k}^{n} z_i \frac{S_i - 1}{S_i - z_i}: \qquad (7)$$

(7)-ի մեջ վերցնելով $k = 1$՝ կստանանք՝

$$G_1 = q \cdot \prod_{i=1}^{n} z_i \frac{S_i - 1}{S_i - z_i}:$$

Պատ. $\quad P_k = \frac{z_k - 1}{z_k} \cdot G_k, \; Q_k = \frac{P_k}{S_k - 1};$

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

Մանուկյան Միքայել Մանուկի
Սարգսյան Վլադիմիր Սարգսի
Գաբրիելյան Միշա Սարգսի
Մինայան Մելս Մնացականի

Տեսական մեխանիկայի խնդիրների լուծման ուղեցույց

Գիրք չորրորդ

Համակարգի դինամիկա

Հրատ. խմբագիր **Դ.Վ. Պետրոսյան**
Տեխն. խմբագիր **Վ.Զ. Բդոյան**
Համակարգչային շարվածքը **Օ.Բաղդասարյան**
Համակարգչային ձևավորումը **Ն.Կարապետյան**

Ստորագրված է տպագրության 03. 05. 2001թ. Չափսը 60x84 1/16: Թուղթ տպագր. N1: Տպագրության եղանակը օֆսեթ: Հրատ. 18,5 մամուլ, տպագր. 20,0 մամուլ = 18,6 պայմ. մամուլի: Տպաքանակը 300: Պատվեր 54

Երևանի համալսարանի հրատարակչություն,
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1

Երևանի համալսարանի տպարան,
Երևան, Աբովյան 52