

**ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ**  
**ԱԼԻԵՊԱՅԻՆ ԿՐՈՑԵԱՆՆԵՐԻ տեսուչյան և ֆիզիկայի ամբիոն**

**Գ.Բ. ԱԼԱՎԵՐԴՅԱՆ**

**ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԵՎ ՔԵՆՁՈՐԱԿԱՆ ՀԱՇՎԻ**  
**Խ Ն Դ Ր Ա Գ Ի Ր Զ**

**ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱՆԿՈՒԹՅՈՒՆ**

**ԵՐԵՎԱՆ - 1984**

Չեռնարկում տեղ են գտել խնդիրներ և վարժույթյուններ , Վեկտորական և թենզորական հաշիվ, , առարկայի՝ համալսարանական, ներկայումս գործող, ծրագրի շրջանակներում:

Յուրաքանչյուր բաժնի սկզբում տրվում են խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ հիմնական տեսական դրույթները, սահմանումներն ու բանաձևերը: Բոլոր խնդիրների համար բերվում են պատասխաններ, իսկ հաճախ նաև մանրամասն լուծումներ կամ լուծման վերաբերյալ քուզումներ:

Նախատեսված է ուսդիոֆիզիկայի և ֆիզիկայի Ֆակուլտետների ուսանողների համար:

Алавердян Григор Бахшиевич

ЗАДАЧНИК ПО ВЕКТОРНОМУ И

ТЕНЗОРНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

(На армянском языке)

Издательство Ереванского университета

Ереван - 1984

տեղի ունի վեկտորի հետևյալ ներկայացումը՝

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \hat{e}_k$$

Պայմանավորվենք գումարման նշանը չզրեւել բոլոր այն դեպքերում, երբ գումարում է կատարվում ըստ կրկնվող ինդեքսի: Այսպիսի պայմանում անվորվածության դեպքում՝

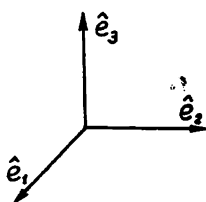
$$\vec{a} = \alpha_k \hat{e}_k \quad /1.5/$$

Կոորդինատական համակարգը կոչվում է օրթոգոնալ, եթե  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  օրթոնորմալ փոխադարձաբար ուղղահայաց են: Այս դեպքում՝

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_k = \delta_{ik} \quad /1.6/$$

որտեղ  $\delta_{ik}$  -ն, այսպես կոչված, Կրոնեկերի սիմվոլն է, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{եթե } i=k \\ 0, & \text{եթե } i \neq k \end{cases} \quad /1.7/$$



Նկ.2

Վեկտորական արտադրյալի սահմանումից հետևում է, որ  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  օրթոգոնալ բազիսի դեպքում /Նկ.2/ տեղի ունեն

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \times \hat{e}_1 &= 0, & \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 &= \hat{e}_3, & \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 &= -\hat{e}_2, \\ \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 &= -\hat{e}_3, & \hat{e}_2 \times \hat{e}_2 &= 0, & \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 &= \hat{e}_1, \\ \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 &= \hat{e}_2, & \hat{e}_3 \times \hat{e}_2 &= -\hat{e}_1, & \hat{e}_3 \times \hat{e}_3 &= 0 \end{aligned}$$

առնչությունները: Այս արտահայտությունները կարելի է գրել

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad /1.8/$$

տեսքով, որտեղ  $\varepsilon_{ijk}$  -ն Լեւի-Չիվիտի սիմվոլն է, որը սահմանվում է այսպես.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{եթե } i, j, k \text{ հաջորդականությունն ստացվում է } \\ & 1, 2, 3\text{-ից՝ գույզ թվով տեղափոխությունների} \\ & \text{օգնությամբ:} \\ 0, & \text{եթե առնվազն երկու ինդեքսներ իրար հավա-} \\ & \text{սար են:} \\ -1, & \text{եթե } i, j, k \text{ հաջորդականությունն ստացվում է } \\ & 1, 2, 3\text{-ից՝ կենտ թվով տեղափոխությունների օգ-} \\ & \text{նությամբ:} \end{cases} \quad /1.9/$$

Օգտվելով /1.5/ և /1.6/ արտահայտություններից, սկալյար արտադրյալը կարելի է ներկայացնել

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \hat{e}_i b_k \hat{e}_k = a_i b_k \delta_{ik} = a_k b_k \quad /1.10/$$

տեսքով:

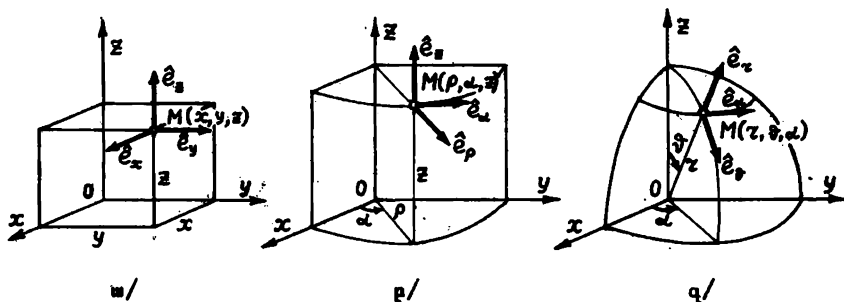
Վեկտորական արտադրյալի բաղադրիչներն արտահայտվում են բազմա-  
պատկիչ վեկտորների բաղադրիչներով

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad /1.11/$$

տոնչության օգնությամբ: Վեկտորական արտադրյալի համար համախառն  
է լինում օգտագործել հետևյալ համաբնականությունը՝

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad /1.12/$$

Դեկարտյան կոորդինատական համակարգում կետի դիրքը արվում է  
 $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$ ,  $\hat{e}_z$  փոխուղղահայաց դեկարտյան բազիսային օրթերի ուղ-  
ղությունների վրա  $\vec{r}$  շառավիղ վեկտորի  $x$ ,  $y$ ,  $z$  պոլյակցիաների  
օգնությամբ /տվ. 3. ա/:



տվ. 3.

Երկարության և ծավալի տարրերը այս համակարգում ունեն  
հետևյալ տեսքը.

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad dV = dx dy dz \quad /1.13/$$

Գլանային կոորդինատական համակարգում կետի դիրքը տրվում է  $xOy$  հարթության վրա շառավիղ վեկտորի  $\rho$  պրոյեկցիայի,  $\alpha$  անկյան և  $Oz$  առանցքի վրա շառավիղ վեկտորի  $z$  պրոյեկցիայի միջոցով: Այս կոորդինատական համակարգն ունի օրթոգոնալ  $\hat{e}_\rho$ ,  $\hat{e}_\alpha$ ,  $\hat{e}_z$  բազիս, ինչպես այդ պատկերված է Յբ նկարում: Երկարության և ծավալի տարրերի համար այս դեպքում ունենք՝

$$d\ell^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\alpha^2 + dz^2, \quad dV = \rho d\rho d\alpha dz \quad /1.14/$$

Ինկարտյան և գլանային կոորդինատները միմյանց հետ կապված են

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \alpha \\ y &= \rho \sin \alpha \\ z &= z \end{aligned} \quad /1.15/$$

առնչությունների միջոցով:

Գնդային կոորդինատական համակարգում կետի դիրքը տրվում է  $\tau$ ,  $\vartheta$ ,  $\alpha$  երեք կոորդինատների օգնությամբ, ինչպես այդ ցույց է տրված Յգ նկարում: Նկարում միաժամանակ պատկերված է համապատասխան  $\hat{e}_\tau$ ,  $\hat{e}_\vartheta$ ,  $\hat{e}_\alpha$  օրթոգոնալ բազիսը: Գնդային համակարգում երկարության և ծավալի տարրերի համար իրավացի են

$$d\ell^2 = d\tau^2 + \tau^2 d\vartheta^2 + \tau^2 \sin^2 \vartheta d\alpha^2, \quad dV = \tau^2 \sin \vartheta d\tau d\vartheta d\alpha \quad /1.16/$$

առնչությունները: Ինկարտյան կոորդինատների հետ գնդային կոորդինատների կապն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} x &= \tau \sin \vartheta \cos \alpha \\ y &= \tau \sin \vartheta \sin \alpha \\ z &= \tau \cos \vartheta \end{aligned} \quad /1.17/$$

Կոորդինատական համակարգի պտույտների ժամանակ կետի հին և նոր դեկարտյան կոորդինատների կապը կարելի է ներկայացնել

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k \quad /1.18/$$

տեսքով, որտեղ  $\alpha_{ik} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k$  գործակիցներն արտահայտվում են հին և նոր կոորդինատների փոխադարձ կողմնորոշումը ընդլայնված անկյուններով:

$\alpha_{ik}$  գործակիցները

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad /1.19/$$

համախումբի անվանում են ձևափոխության մատրից:

Մատրիցը կոչվում է անկյունագծային, եթե զրոյից տարբեր են նրա միայն անկյունագծային տարրերը, այսինքն

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{կամ} \quad \alpha_{ik} = \lambda_k \delta_{ik}: \quad /1.20/$$

/Այստեղ ըստ  $K$  կրկնվող ինդեքսի գումարում չկա/:

Միավոր կոչվում է այն անկյունագծային մատրիցը, որի բոլոր անկյունագծային տարրերը հավասար են 1-ի:

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{կամ} \quad \hat{1}_{ik} = \delta_{ik} \quad /1.21/$$

$\hat{\alpha}^{-1}$  մատրիցը, որը բավարարում է

$$\hat{\alpha} \hat{\alpha}^{-1} = \hat{\alpha}^{-1} \hat{\alpha} = \hat{1} \quad /1.22/$$

պայմանին, կոչվում է  $\hat{\alpha}$  մատրիցի հակադարձ մատրից: Այն նկատագրում է հակադարձ ձևափոխությունը, այսինքն, եթե  $x'_i = \alpha_{ik} x_k$  ապա  $x_k = \alpha^{-1}_{ki} x'_i$ :

$\tilde{\alpha}$  մատրիցը, որն ստացվում է  $\hat{\alpha}$  -ից բոլոր տողերը համապատասխան սյուներիով փոխարինելու ճանապարհով, կոչվում է տրանսպոնանցված մատրից.

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{կամ} \quad \tilde{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki} \quad /1.23/$$

Եթե մատրիցի տարրերը բավարարում են

$$\alpha_{ik} \alpha_{im} = \delta_{km} \quad /1.24/$$

պայմաններին, ապա այն կոչվում է օրթոգոնալ, իսկ նրան համապատասխանող ձևափոխությունը՝ օրթոգոնալ ձևափոխություն:

$\hat{\alpha}$  մատրիցի դետերմինանտը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$\det(\alpha) = \epsilon_{ijk} \alpha_{1i} \alpha_{2j} \alpha_{3k} \quad /1.25/$$

որտեղ  $\epsilon_{ijk}$  -ն Լեի-Չիվիտի /1.9/ սիմվոլն է:

Տված դետերմինանտի  $\alpha_{ij}$  տարրին համապատասխանող  $\Delta_{ij}$  միտոր կոչվում է այն նոր դետերմինանտը, որն ստացվում է հիդ  $i$  - ող

տողը և  $j$  - ընդ սյունը ընթերցում են առանձին:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \quad /1.26/$$

մեծությունը կոչվում է  $\alpha_{ij}$  տարրին համապատասխանող հանրահաշվական լրացում: Այն կարելի է սահմանել նաև հետևյալ կերպ.

$$A_{ij} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{ij}} \det(\hat{\alpha}) \quad /1.27/$$

Դետերմինանտի և համապատասխան հանրահաշվական լրացման համար տեղի ունեն

$$A_{ij} \alpha_{kj} = \delta_{ik}, \quad /1.28/$$

$$A_{ij} \alpha_{im} = \delta_{jm}$$

առնչությունները:

1. Ապացուցել Լագրանժի նույնությունը՝

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{pmatrix}$$

2. Օգտվելով Լագրանժի նույնությունից /տես խոդիր 1-ը/, գտնել  $(\vec{a} \times \vec{b})^2$  և ստացված բանաձևը գրել կոորդինատական տեսքով:

3. Ապացուցել հետևյալ նույնությունները.

$$\begin{aligned} \text{ա/ } (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})] \vec{c} - [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})] \vec{d} = \\ &= [\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})] \vec{b} - [\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d})] \vec{a}, \end{aligned}$$

$$\text{բ/ } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0,$$

$$\text{գ/ } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = 0:$$

4. Դիցուք  $\vec{a}$  -ն և  $\vec{b}$  -ն երկու վեկտորներ են, որոնք որոշում են  $\vec{a} + \vec{b}$  և  $\vec{a} - \vec{b}$  անկյունագծերով զուգահեռագիծ: Յուրաքանչյուր, որ.

ա/ անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է կողմերի քառակուսիների գումարին,

բ/ զուգահեռագծի անկյունագծերը փոխողոմաբաց են այն և

միայն այն դեպքում, երբ այդ զուգահեռագիծը հավասարակողմ է,

զ/ անկյունագծերի վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը երկու անգամ մեծ է նախնական զուգահեռագծի մակերեսից:

5.  $\hat{n}$  և  $\hat{n}'$  երկու ուղղությունները սփերիկ կոորդինատական համակարգում որոշվում են  $\vartheta$ ,  $\alpha$  և  $\vartheta'$ ,  $\alpha'$  անկյուններով: Գտնել այդ ուղղություններով կազմված անկյան կոսինուսը:

6. Որոշ դեպքերում հարմար է լինում վեկտորի  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  դեկարտյան կոորդինատների փոխարեն քննարկել նրա ցիկլիկ բաղադրիչները, որոնք սահմանվում են

$$a_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x \pm i a_y), \quad a_0 = a_z$$

քանադներով: Երկու վեկտորների սկալյար և վեկտորական արտադրյալները արտահայտել նրանց ցիկլիկ բաղադրիչներով:

7. Կազմել բազիսային օրթերի մեափոխության մատրիցը՝

ա/ դեկարտյան կոորդինատներից գնդայինին անցնելու դեպքում և հսկառակը,

բ/ դեկարտյան կոորդինատներից գլանայինին անցնելու դեպքում և հսկառակը:

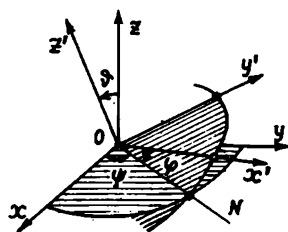
8. Գտնել վեկտորի բաղադրիչների մեափոխության մատրիցը՝

ա/ կոորդինատական երեք առանցքների արտացոլման դեպքում,

բ/  $Z$  առանցքի շուրջը դեկարտյան կոորդինատական համակարգը  $\alpha$  անկյունով պտտելու դեպքում:

9. Գտնել վեկտորի բաղադրիչների մեափոխության մատրիցը էյլերի  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  անկյուններով որոշվող պտույտի դեպքում

/նկ.4/, պատկերացնելով այն որպես  $Z$  առանցքի շուրջը  $\psi$  անկյունով,  $ON$  հանգուցային գծի շուրջը  $\vartheta$  անկյունով և  $Z'$  առանցքի շուրջը  $\varphi$  անկյունով հաջորդական պտույտներին համապատասխանող երեք մատրիցների արտադրյալ:



նկ. 4.



10. Եռւյց տն<sup>3</sup>, որ կոորդինատական համակարգի անվերջ փոքր պտույտի մատրիցը կարող է ներկայացվել  $\hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{\varepsilon}$  տեսքով, որտեղ  $\hat{\varepsilon}$  -ը հակահամաչափ մատրից է: Պարզել  $\varepsilon_{ik}$  -ի երկրորդ աստիճանի իմաստը:
11. Ապացուցել, որ կոորդինատական համակարգի պտույտների կամ զույգ թվով կոորդինատական առանցքների արտացոլումների դեպքում ձևափոխության մատրիցի դետերմինանտը հավասար է 1-ի, իսկ կենտ թվով կոորդինատական առանցքների արտացոլումների դեպքում այն հավասար է -1-ի:
12. Ապացուցել, որ

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{և} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

մատրիցներն օրթոգոնալ են:

13. Ապացուցել, որ Լորենցի ձևափոխության

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

մատրիցը /տես /1.42/ և /1.44/ բանաձևերը/, որտեղ  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ , բավարարում է օրթոգոնալության պայմանին:

14. Ապացուցել, որ եթե  $\hat{\alpha}$ -ն օրթոգոնալ ձևափոխության մատրից է, ապա նրա արանսպոնցված  $\hat{\alpha}^T$  մատրիցը համընկնում է հակադարձ ձևափոխության  $\hat{\alpha}^{-1}$  մատրիցի հետ:
15.  $\hat{\alpha}$  և  $\hat{\beta}$  վեկտորների սկալյար արտադրյալը գրել Վրոնեկների  $\delta_{ik}$  սիմվոլի օգնությամբ:
16. Գրել  $\hat{\alpha}$  և  $\hat{\beta}$  վեկտորների վեկտորական արտադրյալի բաղադրիչները, օգտագործելով Լևի-Չիվիտի  $\varepsilon_{ijk}$  սիմվոլը:
17. Ապացուցել, որ  $\hat{\alpha}$  մատրիցի դետերմինանտ ( $\det \hat{\alpha}$ ) և  $a_{ij}$  տարրի հանրահաշվական լրացման ( $A_{ij}$ ) համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները.

$$u/ \det \hat{a} = 1/3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqz} a_{ip} a_{jq} a_{kz}$$

$$e/ A_{ij} = 1/2 \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jpr} a_{kr} a_{lp}$$

18.  $[\hat{a}(\vec{b} \times \vec{c})][\hat{a}'(\vec{b}' \times \vec{c}')] =$  արտադրյալը բերել միայն վեկտորների սկալյար արտադրյալներ պարունակող տրամանների գումարի տեսքի:

19. Ցուլյց տալ, որ եթե  $\frac{d^2 \tilde{z}}{dt^2} = \tilde{z} f(z)$ , ապա

$$\tilde{z} \times \frac{d\tilde{z}}{dt} = \tilde{\ell} = \text{const}:$$

20. Ցուլյց տալ, որ եթե նյութական կետի վրա ազդող ուժը միշտ ուղղված է հետագծի շոշափողով, ապա կետի հետագիծը ուղիղ գիծ է:

21. Ցուլյց տալ, որ նյութական մզողության ուժի ազդեցությամբ շարժվող նյութական կետի հետագիծը կոնական հատույթ է /էլիպս, հիպերբոլ, պարաբոլ/:

§ 2. Թեքզորի հասկացությունը և նրա բաղադրիչների  
ձևափոխության օրենքը

Եռաչափ տարածության մեջ  $T_{i_1 i_2 \dots i_r} (i_1, i_2, \dots, i_r = 1, 2, 3)$   $3^r$  մեծությունների համախումբը կոչվում է  $r$ -րդ կարգի թեքզոր, եթե կոորդինատների համակարգի  $\mathcal{X}'_i = \alpha_{ik} \mathcal{X}_k$  օրենքով նկարագրվող պտույտի դեպքում այդ մեծությունները ձևափոխվում են

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_r} = \alpha_{i_1 k_1} \alpha_{i_2 k_2} \dots \alpha_{i_r k_r} T_{k_1 k_2 \dots k_r} \quad /1.29/$$

օրենքով:

Ելնելով այս ընդհանուր սահմանումից կարելի է տալ սկալյար և վեկտորական մեծությունների սահմանումները: Ջրո կարգի թեքզոր, կամ ուղղակի սկալյար, կոչվում է այն մեծությունը, որը կոորդինատական համակարգի պտույտների ժամանակ չի փոխվում իր արժեքը:

Առաջին կարգի թեքզոր, կամ ուղղակի վեկտոր, եռաչափ տարածության մեջ կոչվում է  $(A_1, A_2, A_3)$  մեծությունների համախումբը, որը կոորդինատական համակարգի  $\mathcal{X}'_i = \alpha_{ik} \mathcal{X}_k$  օրենքով նկարագրվող պտույտի դեպքում ձևափոխվում է

$$A'_i = \alpha_{ik} A_k \quad /1.30/$$

օրենքով:

Մեծությունները, որոնք կոորդինատական համակարգի պտույտների ժամանակ ձևափոխվում են որպես թենզորներ, կոորդինատական համակարգի արտացոլման ժամանակ ( $\mathcal{X}'_i = -\mathcal{X}_i$ ) կարող են ձևափոխվել երկու ձևով.  $T_{i_1 i_2 \dots i_r}$  թենզորը կոչվում է պարզապես թենզոր, եթե կոորդինատական համակարգի  $\mathcal{X}'_i = -\mathcal{X}_i$  արտացոլման դեպքում այն ձևափոխվում է

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_r} = (-1)^r T_{i_1 i_2 \dots i_r} \quad /1.31/$$

օրենքով, և կոչվում է փակդոթենզոր, եթե արտացոլման ժամանակ տեղի ունի

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_r} = (-1)^{r+1} T_{i_1 i_2 \dots i_r} \quad /1.32/$$

առնչությունը:

Սկալյարները, որոնք կոորդինատական համակարգի արտացոլման ժամանակ չեն փոխվում, կոչվում են իրական սկալյարներ կամ պարզապես սկալյարներ: Սկալյարները, որոնք կոորդինատական համակարգի արտացոլման ժամանակ փոխվում են իրենց նշանը, կոչվում են փակդոսկալյարներ:

Վեկտորները, որոնք բաղադրիչները կոորդինատական համակարգի արտացոլման ժամանակ փոխվում են իրենց նշանը, կոչվում են բևեռային վեկտորներ կամ, պարզապես, վեկտորներ: Վեկտորները, որոնք բաղադրիչները կոորդինատական համակարգի արտացոլման ժամանակ մնում են անփոփոխ, կոչվում են փակդովեկտորներ կամ զբսիալ վեկտորներ:

Երկրորդ կարգի  $S_{ik}$  թենզորը կոչվում է համաչափ, եթե  $S_{ik} = S_{ki}$ : Երկրորդ կարգի  $A_{ik}$  թենզորը կոչվում է հակահամաչափ, եթե  $A_{ik} = -A_{ki}$ : Երկրորդ կարգի կամայական թենզոր կարելի է ներկայացնել համաչափ և հակահամաչափ երկու թենզորների գումարի տեսքով.

$$T_{ik} = S_{ik} + A_{ik} \quad /1.33/$$

որտեղ  $S_{ik} = 1/2 (T_{ik} + T_{ki})$ ,  $A_{ik} = 1/2 (T_{ik} - T_{ki})$

Եթե երկրորդ կարգի  $T_{ik}$  թենզորի համար գոյություն ունեն  $\vec{A}$  վեկտորներ, որոնք բավարարում են

$$T_{ik} A_k = \lambda A_i \quad /1.34/$$

հավասարումների համակարգին, ապա այդ վեկտորներով որոշվող ուղղությունները կոչվում են  $T_{ik}$  թենզորի գլխավոր /սեփական/ ուղղություններ, իսկ նրանց համապատասխանող առանցքները՝ գլխավոր առանցքներ: Հավասարումների /1.34/ համակարգը ոչ զրոյական լուծում կունենա  $\lambda$  -ի այնպիսի արժեքների համար, որոնք բավարարում են

$$\det(T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0 \quad /1.35/$$

բնութագրական հավասարման: Այս հավասարումը ընդհանուր դեպքում ունի  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  արմատներ, որոնք  $T_{ik}$  թենզորի անկյունագծային տարրերն են գլխավոր առանցքների կոորդինատական համակարգում և կոչվում են  $T_{ik}$  թենզորի գլխավոր /սեփական/ արժեքներ: Հավասարումների /1.34/ համակարգը յուրաքանչյուր  $\lambda_k$  գլխավոր արժեքի համապատասխանության մեջ է դնում  $\vec{A}^{(\mu)}$  վեկտոր, որով տարածության մեջ որոշվում է  $\mu$ -րդ գլխավոր առանցքի ուղղությունը:

Երկրորդ կարգի յուրաքանչյուր  $S_{ik}$  համաչափ թենզորի համապատասխանում է

$$S_{ik} x_i x_k = 1 \quad /1.36/$$

հավասարումով որոշվող երկրորդ կարգի մակերևույթ, որը կոչվում է թենզորի բնութագրական մակերևույթ:

Կախված  $S_{ik}$  թենզորի  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  գլխավոր արժեքներից /1.36/ մակերևույթը կունենա տարբեր տեսքեր: Եթե բոլոր գլխավոր արժեքներն էլ դրական են, ապա բնութագրական մակերևույթը իրենից կներկայացնի  $1/\sqrt{\lambda_1}, 1/\sqrt{\lambda_2}, 1/\sqrt{\lambda_3}$  գլխավոր կիսաառանցքներով էլիպսոիդ: Եթե  $\lambda_i$  թվերից երկուսը դրական են, իսկ մեկը՝ բացասական, ապա բնութագրական մակերևույթը կլինի միախոռոչ հիպերբոլոիդ: Եթե  $\lambda_i$  թվերից մեկը դրական է, իսկ երկուսը բացասական, ապա բնութագրական մակերևույթն իրենից կներկայացնի երկխոռոչ հիպերբոլոիդ: Եվ, վերջապես, եթե բոլոր երեք գլխավոր արժեքներն էլ բացասական են, ապա բնութագրական մակերևույթը կլինի կեղծ էլիպսոիդ: Եթե զրոյական գլխավոր արժեքներից որևէ երկուսն ունեն նույն արժեքը, ապա բնութագրական մակերևույթն իրենից կներկայացնի պտտման մակերևույթ: Եթե  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , ապա բնութագրական մակերևույթը գնդաձև է: Թենզորը, որի համար  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , կոչվում է գնդային:

Փիզիկայում հանդիպող երկրորդ կարգի թենզորները ունեն դրական գլխավոր արժեքներ և, հետևաբար, նրանց բնութագրական մակերե-

վույթները թենզորական էլիպսոիդներ են:

Նյութական կետերի համակարգի ինտեգրալի մոմենտների թենզոր անվանում են.

$$I_{ik} = \sum m^{(l)} (\delta_{ik} \tau^{(l)2} - x_i^{(l)} x_k^{(l)}) \quad /1.37/$$

արտահայտությամբ որոշվող մեծություններ:

Երկրորդ կարգի  $T_{ik}$  յուրաքանչյուր թենզոր ունի երեք ինվարիանտներ

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{inv},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \text{inv}, \quad /1.38/$$

$$I_3 = \det \hat{T} = \text{inv},$$

որոնք համապատասխանաբար կոչվում են գծային, քառակուսային և երրորդ կարգի ինվարիանտներ և արտահայտվում են թենզորի  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  գլխավոր արժեքներով հետևյալ կերպ.

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \quad /1.39/$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Գծային ինվարիանտը, որ իրենից ներկայացնում է թենզորի անկյունագծային տարրերի գումարը, հաճախ անվանվում է նաև թենզորի հետք կամ շարունակում  $I_1 = T_{ii} = \text{Sp}(\hat{T})$  սիմվոլով:

Որոշ դեպքերում  $I_2$  ինվարիանտի փոխարեն օգտագործվում է

$$I_2' = I_1^2 - 2 I_2 = T_{ik} T_{ik} \quad /1.40/$$

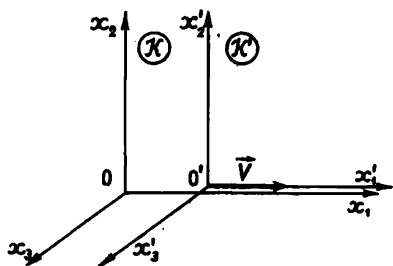
ինվարիանտը:

Թենզորները, որոնց գծային ինվարիանտը զրո է, կոչվում են դեվիատորներ:

Ք ա ո ա չ ա փ թ ե ն գ ո ռ ն ե ռ ֆիզիկայի շատ օրենքների մաթեմատիկական նկարագրության համար անհրաժեշտ է լինում գործ ունենալ քառաչափ թեթևագրների հետ: Բայն այն է, որ ֆիզիկական պատահարի լրիվ բնութագրության համար այդ պատահարի տարածական կոորդինատների հետ միասին անհրաժեշտ է նշել նաև ժամանակի այն պահը, երբ տեղի է ունեցել այդ պատահարը: Այդ պատճառով ֆիզիկական պատահարը բնութագրվում է  $x, y, z$  երեք տարածական կոորդինատներով և է ժամանակով: Եռաչափ տարածության նմանությամբ կարելի է ասել, որ  $x, y, z, t$  չորս մեծությունների համախումբը բնութագրում է կես քառաչափ տարածա-ժամանակային աշխարհում:

Քառաչափ տարածա-ժամանակային աշխարհում կոորդինատական մեկ համակարգից մյուսին անցնելը իրականացվում է Լորենցի ձևափոխությունների միջոցով: Որպեսզի այդ ձևափոխություններն ունենան /1.18/ -ի նման տեսք, հարմար է որպես ժամանակը բնութագրող կոորդինատ օգտագործել  $ict$  կեղծ կոորդինատը, այսպես որ

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, \\ x_3 &= z, & x_4 &= ict \end{aligned} \quad /1.41/$$



Նկ. 5.

համընկել են իրար /Նկ.5/: Եթե  $K'$  համակարգը  $K$ -ի նկատմամբ շարժվում է  $x_1$  առանցքով ուղղված  $\vec{V}$  արագությամբ, ապա Լորենցի ձևափոխություններն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\begin{aligned} x_1' &= \gamma(x_1 + i\beta x_4), & x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3, & x_4' &= \gamma(x_4 - i\beta x_1), \end{aligned} \quad /1.42/$$

որտեղ  $\beta = V/c$ , իսկ  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  :

Եթե պայմանավորվենք հունական տառերով ( $\mu, \nu, \sigma, \rho$ ) նշանակել այն ինդեքսները, որոնք ընդունում են 1, 2, 3, 4 արժեքներ, ապա /1.42/ ձևափոխությունները կքերվեն

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu \quad /1.43/$$

տեսքի, որտեղ

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad /1.44/$$

մեծությունը Հորենցի ձևափոխություններին համապատասխանող մատրիցն է:

$A_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) մեծությունների համախումբը կոչվում է քառաչափ վեկտոր, եթե կոորդինատների /1.43/ զծային ձևափոխության դեպքում նրա բաղադրիչները ձևափոխվում են

$$A_\mu = \Lambda_{\mu\nu} A_\nu \quad /1.45/$$

օրենքով:

Նման ձևով,  $T_{\mu\nu}$  16 մեծությունների համախումբը կոչվում է երկրորդ կարգի քառաչափ թենզոր, եթե կոորդինատների /1.43/ ձևափոխությունների դեպքում նրա բաղադրիչները ձևափոխվում են

$$T'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\sigma} \Lambda_{\nu\rho} T_{\sigma\rho} \quad /1.46/$$

օրենքով:

Գալիլեյի ձևափոխություններն ունեն

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt & y' &= y, \\ z' &= z & t' &= t \end{aligned} \quad /1.47/$$

տեսքը և ստացվում են Հորենցի ձևափոխություններից  $V \ll c$  դեպքում:

22. Բոլոր դեկարտյան կոորդինատական համակարգերում տրված է  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) երեք մեծությունների համախումբ և հայտնի է, որ պտույտների և արտացոլումների նկատմամբ  $\alpha_i \beta_i = i\hbar$  : Ապացուցել, որ եթե  $\beta_i$  -ն վեկտոր /փսևդովեկտոր/ է, ապա  $\alpha_i$  -ն նույնպես վեկտոր /փսևդովեկտոր/ է:

23. Ապացուցել, որ եթե  $T_{ik}$ -ն երկրորդ կարգի թենզոր է, իսկ  $\beta_k$  -ն վեկտոր, և յուրաքանչյուր կոորդինատական համակարգում  $\alpha_i = T_{ik} \beta_k$ , ապա  $\alpha_i$ -ն նույնպես վեկտոր է:
24. Ապացուցել, որ  $\partial \alpha_i / \partial x_k$ -ն երկրորդ կարգի թենզոր է:
25. Ապացուցել, որ  $\partial^2 \varphi / \partial x_\mu \partial x_\nu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) չորս մեծությունների համախումբը քառաչափ վեկտոր է:
26. Ապացուցել, որ եթե  $T_{ik}$ -ն երկրորդ կարգի թենզոր է, իսկ  $P_{ik}$  -ն՝ երկրորդ կարգի փակղոթենզոր, ապա  $T_{ik} P_{ik}$ -ն փակղոթական է:
27. Ապացուցել, որ թենզորական տեսքով գրված հավասարումներն ինվարիանտ են, այսինքն, եթե որևէ  $\mathcal{K}$  կոորդինատական համակարգում տեղի ունի  $T'_{i_1 i_2 \dots i_r} = 0$  թենզորական հավասարումը, ապա  $\mathcal{K}'$  համակարգում տեղի ունի  $T'_{i_1 i_2 \dots i_r} = 0$  հավասարումը:
28. Ցույց տալ, որ թենզորի համաչափությունը ինվարիանտ հատկություն է պտույտների ձևափոխության նկատմամբ, այսինքն որևէ կոորդինատական համակարգում համաչափ / հակահամաչափ / թենզորը մնում է համաչափ / հակահամաչափ / նաև մյուս ցուրր համակարգերում, որոնք պտտված են սկզբնականի նկատմամբ:
29. Ցույց տալ, որ եթե  $S_{ik}$ -ն համաչափ թենզոր է, իսկ  $A_{ik}$ -ն հակահամաչափ, ապա  $A_{ik} S_{ik} = 0$ :
30. Ելնելով երկրորդ կարգի թենզորի  $S_{ik} x_i x_k = 1$  բնութագրական մակերևույթից, տալ թենզորի  $I_1, I_2, I_3$  ինվարիանտների երկրաչափական մեկնաբանությունը:
31. Գտնել երկրորդ կարգի հեռայալ թենզորների բնութագրական մակերևույթները:

$$\text{ա/ } \alpha_{ij} = \lambda \delta_{ij}, \quad (\lambda > 0),$$

$$\text{բ/ } \alpha_{ij} = 1/2 (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i)$$

32. Ապացուցել, որ երկրորդ կարգի թենզորի անկյունագծային բաղադրիչների գումարը ինվարիանտ մեծություն է:
33. Գտնել հեռայալ թենզորների զլիսավոր առանցքները և զլիսավոր առժեքները:

$$\text{ա/ } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{բ/ } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{գ/ } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



34. Յուլյց տալ, որ նյութական կետերի համակարգի համաչափության առանցքը հանդիսանում է ինտերցիայի մոմենտների թեքագործի գլխավոր առանցքը:
35. Գտնել  $T_{ik}$  թեքագործի հակադարձ  $T_{ik}^{-1}$  թեքագործի բաղադրիչները: Մասնավորապես քննարկել այն դեպքը, երբ  $T_{ik}$  -ն գլխավոր առանցքների բերված համաչափ թեքագործ է:
36. Դիցուք բոլոր կոորդինատական համակարգերում  $\vec{a}$  վեկտորի բաղադրիչները զծայնորեն արտահայտվում են  $\vec{b}$  վեկտորի բաղադրիչներով՝  $a_i = \varepsilon_{ik} b_k$ : Ապացուցել, որ  $\varepsilon_{ik}$  մեծությունները համախոլմբը երկրորդ կարգի թեքագործ է, եթե  $\vec{a}$  -ն և  $\vec{b}$  -ն երկուսն էլ բեռնային վեկտորներ կամ փսևդովեկտորներ են, և փսևդոթեքագործ է, եթե վեկտորներից մեկը փսևդովեկտոր է, իսկ մյուսը՝ բեռնային վեկտոր:
37. Ապացուցել, որ  $A_{ikl}$  և  $B_{ik}$  թեքագործների  $A_{ikl} B_{lk}$  փաթույթը վեկտոր է:
38. Յուլյց տալ, որ  $V = \iiint dx_1 dx_2 dx_3$  մեծությունը կոորդինատների համակարգի ձևափոխության ժամանակ իրեն պահում է ինչպես զրո կարգի փսևդոթեքագործ, այսինքն՝ փսևդոսկալյար:
39. Գտնել  $T_{ik} = \int x_i x_k dV$  ծավալային ինտեգրալների համախմբի ձևափոխության օրենքը տարածական պտույտների և արտացոլումների դեպքում  $/ x_i$  -ն և  $x_k$  -ն դեկարտյան կոորդինատներն են/:
40. Յուլյց տալ, որ քառաչափ ծավալի  $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$  տարրը ինվարիանտ է Լորենցի ձևափոխությունների նկատմամբ:
41. Ապացուցել, որ  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$  մեծությունն ինվարիանտ է Լորենցի ձևափոխությունների նկատմամբ:
42. Յուլյց տալ, որ երկրորդ կարգի  $T_{ij}$  թեքագործն այն և միայն այն դեպքում է երկու վեկտորների արտադրյալ, երբ նրա բաղադրիչները բավարարում են  $T_{ki} T_{lj} - T_{li} T_{kj} = 0$  հավասարումներին:
43. Ապացուցել, որ եթե  $T_{ijk}$  թեքագործը համաչափ է  $i$  և  $j$  ինդեքսների նկատմամբ և հակահամաչափ  $j$  և  $k$  ինդեքսների նկատմամբ, ապա այն հավասար է զրոյի:
44. Ապացուցել, որ եթե  $T_{ijk}$  թեքագործը համաչափ է առաջին երկու ինդեքսների նկատմամբ, և  $\vec{x} = x_i \vec{e}_i$  կամայական վեկտորի համար տեղի ունի  $T_{ijk} x_i x_j x_k = 0$  առնչությունը, ապա  $T_{ijk} + T_{jki} +$

$$+ T_{kij} = 0$$

45. Յուլյց տալ, որ եթե երկու վեկտորների համապատասխան բաղադրիչները համեմատակալ են մի որևէ կոորդինատական համակարգում /այսինքն՝ վեկտորները զուգահեռ են/, ապա նրանք համեմատական կլինեն մյուս բոլոր համակարգերում:
46. Յուլյց տալ, որ Լևի-Չիվիտի  $\varepsilon_{ijk}$  սիմվոլը երրորդ կարգի լրիվ հակահամաչափ փսևդոթենզոր է, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր դեկարտյան կոորդինատական համակարգերում:
47. Ապացուցել, որ երկրորդ կարգի հակահամաչափ թենզորի բաղադրիչները պտույտների դեպքում ձևափոխվում են ինչպես վեկտորի բաղադրիչներ:
48. Ապացուցել, որ երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալը փսևդովեկտոր է:
49. Ապացուցել նույնությունները.

$$a/ \quad \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{lmn} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}$$

$$բ/ \quad \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{klm} = 2 \delta_{im}$$

50. Հետևյալ արտահայտությունները բերել ինվարիանտ վեկտորական տեսքի.

$$a/ \quad \varepsilon_{inl} \varepsilon_{izs} \varepsilon_{lmp} \varepsilon_{stp} a_n a_z b_m c_t$$

$$բ/ \quad \varepsilon_{inl} \varepsilon_{kzs} \varepsilon_{lmp} \varepsilon_{stp} a_z a'_n b_k b'_i c_t c'_m$$

51. Յուլյց տալ, որ  $T_{ik} a_i b_k - T_{ik} a_k b_i = 2 \vec{\omega} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ , որտեղ  $T_{ik}$ -ն երկրորդ կարգի կամայական թենզոր է,  $\vec{a}$  -ն և  $\vec{b}$  -ն վեկտորներ են, իսկ  $\vec{\omega}$  -ն  $T_{ik}$  թենզորի հակահամաչափ մասին համարժեք վեկտորն է:

52. Յուլյց տալ, որ.

ա/ միակ վեկտորը, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր կոորդինատական համակարգերում, զրոյական վեկտորն է,

բ/ երկրորդ կարգի մեծ մի թենզոր, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր համակարգերում, համեմատական է  $\delta_{ik}$  -ին;

գ/ երրորդ կարգի մեծ մի թենզոր, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր կոորդինատական համակարգերում, համեմատական է  $\varepsilon_{ijk}$  -ին,

դ/ չորրորդ կարգի ամեն մի թենզոր, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր կոորդինատական համակարգերում, ունի

$$A \delta_{ik} \delta_{jm} + B \delta_{il} \delta_{km} + C \delta_{im} \delta_{kl} \quad \text{տեսք:}$$

53. Դիցուք  $\vec{n}$  -ը միավոր վեկտոր է, որի բոլոր ուղղությունները տարածության մեջ հավասար հավանական են: Գտնել հետևյալ մեծությունների միջին արժեքները, օգտվելով վերջիններիս փոխակերպումային /տրանսֆորմացիոն/ հատկություններից.

$$\omega / \overline{n_i} \quad \text{բ/} \quad \overline{n_i n_k}, \quad \text{գ/} \quad \overline{n_i n_k n_l}, \quad \text{դ/} \quad \overline{n_i n_k n_l n_m}$$

54. Գտնել հետևյալ արտահայտությունների միջինացված արժեքները ըստ բոլոր ուղղությունների.

$$\omega / \overline{(\vec{a} \cdot \vec{n})^2}, \quad \text{բ/} \quad \overline{(\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{b} \cdot \vec{n})}, \quad \text{գ/} \quad \overline{(\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{n}},$$

$$\text{դ/} \quad \overline{(\vec{a} \times \vec{n})^2}, \quad \text{ե/} \quad \overline{(\vec{a} \times \vec{n}) \cdot (\vec{b} \times \vec{n})}, \quad \text{զ/} \quad \overline{(\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{b} \cdot \vec{n})(\vec{c} \cdot \vec{n})(\vec{d} \cdot \vec{n})},$$

եթե  $\vec{n}$  -ը միավոր վեկտոր է, որի բոլոր ուղղությունները տարածության մեջ հավասար հավանական են, իսկ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  և  $\vec{d}$  վեկտորները հաստատուն են:

55.  $\vec{n}$  և  $\vec{n}'$  բևեռային վեկտորներով և  $\vec{\ell}$  ֆսկդովեկտորով կազմել բոլոր հնարավոր անկախ ինվարիանտները:

56. Ինչպիսի՞ անկախ ֆսկդոսկալյարներ կարելի է կառուցել.

$$\omega / \vec{n} \text{ և } \vec{n}' \text{ երկու բևեռային վեկտորներով և } \vec{\ell} \text{ ֆսկդովեկտորով,}$$

$$\text{բ/ } \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3 \text{ երեք բևեռային վեկտորներով:}$$

57. Եռլյց տալ, որ նյութառնի  $m \frac{d^2 \vec{z}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{z}, t)$  օրենքն ինվարիանտ է Գալիլեյի /1.47/ ձևափոխությունների նկատմամբ:

58. Ապացուցել, որ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  կոորդինատների համար զրված Լորենցի ձևափոխությունները համարժեք են  $x$ ,  $t$  հարթության մեջ  $\vartheta$  անկյունով պտույտի, որտեղ  $\vartheta$  -ն մաքուր կեղծ թիվ է: Գտնել  $\vartheta$  անկյան և  $V$  արագության կապը:

59. Եռլյց տալ, որ

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

ալիքային հավասարումն ինվարիանտ է Լորենցի ձևափոխությունների նկատմամբ և ինվարիանտ չէ Գալիլեյի ձևափոխությունների նկատմամբ:

## ԳԼՈՒԽ 2. ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

### § 1. Սկալյար դաշտ: Ածանցյալ ըստ ուղղության: Գրադիենտ

Եթե  $V$  տիրույթի յուրաքանչյուր կետի համապատասխանության մեջ է դրված  $\varphi$  սկալյար մեծության որոշակի արժեք, ապա ասում են, որ այդ տիրույթում տված է  $\varphi$  սկալյար դաշտը: Տալ սկալյար դաշտ, նշանակում է յուրաքանչյուր  $M \in V$  կետում ունենալ  $\varphi(M) = \varphi(\vec{r})$  սկալյար ֆունկցիան:

Սկալյար դաշտերի օրինակներ են՝ ջերմաստիճանային դաշտը, լուսավորվածության, էլեկտրական լիցքերի խտության, զանգվածի խտության դաշտերը և այլն:

Սկալյար դաշտը կոչվում է ստացիոնար, եթե դիտարկվող մեծությունը կախված է միայն տարածական կոորդինատներից, բայց ոչ ժամանակից: Իսկ եթե այդ մեծությունը կախված է նաև ժամանակից, ապա համապատասխան դաշտը կոչվում է ոչ ստացիոնար:

Բոլոր  $M$  կետերի բազմությունը, որոնցում  $\varphi(M)$  սկալյար դաշտը ընդունում է միատեսակ  $C$  արժեք՝  $\varphi(M) = C$ , կոչվում է  $C$  քվի համապատասխանող մակերևույթ:

Դիցուք  $V$  տիրույթում որոշված է  $\varphi(M)$  սկալյար դաշտը: Դիտարկենք  $M \in V$  կետը և որևէ սկզբված ուղղություն, որը բնութագրվում է  $\vec{\ell}$  վեկտորով: Եթե գոյություն ունի

$$\frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{MM_1}$$

հարաբերության սահմանը, երբ  $M_1$  կետը շարժվելով  $\vec{\ell}$  ուղիղով ձգվում է  $M$  կետին, ապա այն կոչվում է  $\varphi$  սկալյար դաշտի ածանցյալ  $M$  կետում ըստ  $\vec{\ell}$  ուղղության և նշանակվում է  $\partial\varphi/\partial\vec{\ell}$  սիմվոլով՝

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\ell}} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{MM_1} \quad /2.1/$$

$\partial\varphi/\partial\vec{\ell}$  ածանցյալը բնութագրում է  $\varphi$  դաշտի փոփոխման արագությունը  $\vec{\ell}$  ուղղությամբ: Դեկարտյան կոորդինատական համակարգում՝

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{\ell}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos\gamma \quad /2.2/$$

որտեղ  $\alpha$ ,  $\beta$  և  $\gamma$  -ն  $\vec{r}$  վեկտորի կազմած անկյուններն են համապատասխանաբար  $x$ ,  $y$  և  $z$  առանցքների հետ:

$\varphi$  սկալյար դաշտի գրադիենտը դեկարտյան կոորդինատական համակարգում սահմանվում է

$$\text{grad } \varphi = \hat{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \hat{e}_\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x_\kappa} \quad /2.3/$$

բանաձևով, որտեղ  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$ ,  $\hat{e}_z$ -ը դեկարտյան օրթերն են:

Համիլտոնի օպերատոր, կամ, ինչպես նաև ընդունված է անվանել, նաքլա օպերատոր կոչվում է

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad /2.4/$$

սիմվոլիկ վեկտորը: Ելնելով այս սահմանումից  $\varphi$  սկալյար դաշտի գրադիենտը կարող ենք ներկայացնել  $\vec{\nabla}$  օպերատորի և  $\varphi$  ֆունկցիայի արտադրյալի տեսքով.

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi \quad /2.5/$$

Օգտվելով գրադիենտի /2.3/ սահմանումից  $\varphi$  սկալյար դաշտի /2.2/ տեսնցյալը կարող ենք ներկայացնել

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r} \text{grad } \varphi = |\text{grad } \varphi| \cos(\vec{r} \wedge \text{grad } \varphi) \quad /2.6/$$

տեսքով, որտեղից պարզ է, որ  $\partial \varphi / \partial \vec{r}$  տեսնցյալը իր մեծագույն արժեքն ընդունում է  $\text{grad } \varphi$  վեկտորի ուղղությամբ: /2.6/ առնչություներից միաժամանակ հետևում է, որ  $\text{grad } \varphi$  վեկտորն ուղղված է մակարդակի մակերևույթի ուղղահայացով՝  $\varphi(M)$  ֆունկցիայի սմման ուղղությամբ: Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ եթե  $\varphi(M) = C$  -ն սկալյար դաշտի մակարդակի մակերևույթն է, իսկ  $\hat{n}$  -ը այդ մակերևույթի արտաքին նորմալի միավոր վեկտորը  $M$  կետում, ապա

$$\hat{n} = \pm \text{grad } \varphi / |\text{grad } \varphi| \quad /2.7/$$

որտեղ "±" նշանի ընտրությունը կախած է մակարդակի մակերևույթի կողմնորոշումից:

Գլխալին կոորդինատական համակարգում գրադիենտն ունի

$$\text{grad } \varphi = \hat{e}_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{e}_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \hat{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad /2.8/$$

տեսքը, իսկ գնդայինում՝

$$\text{grad } \varphi = \hat{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{e}_\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \hat{e}_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \quad /2.9/$$

տեսքը:

60. Գտնել հեռեյալ սկալյար դաշտերի մակարդակի մակերևույթները.

ա/  $\varphi = x^2 + y^2 - z$

բ/  $\varphi = \exp(x + 2y - z)$ ,

գ/  $\varphi = \ln |\vec{r}|$

61. Գտնել  $\varphi = xyz$  սկալյար դաշտի սծանցյալը  $M_0(1, -1, 1)$  կետում  $\vec{M}_0 \vec{M}_1$  ուղղությամբ, եթե  $M_1$  կետի կոորդինատներն են  $M_1(2, 3, 1)$ :

62. Գտնել  $\varphi = \sin z$  սկալյար դաշտի սծանցյալը  $\vec{r}$  շառավիղ-վեկտորի ուղղությամբ:

63. Գտնել  $\varphi = x^2 + y^2 - z$  սկալյար դաշտի մակարդակի մակերևույթի առաջին նորմալի միավոր  $\hat{n}$  վեկտորը:

64. Ցույց տալ, որ

ա/  $\text{grad } z = \vec{r} / r$ ,

բ/  $\text{grad } z^n = n z^{n-2} \vec{r}$

գ/  $\text{grad } \ln z = \vec{r} / z^2$

65. Օգտվելով դեկարտյան, գնդային և գլանային կոորդինատային համակարգերից՝ հաշվել  $\text{grad}(\vec{r} \cdot \vec{r})$ ,  $(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{r}$  մեծությունները, որտեղ  $\vec{r}$  -ը շառավիղ-վեկտորն է, իսկ  $\vec{r}$  -ը հաստատուն վեկտոր է:

66. Ապացուցել  $\text{grad}(\varphi \psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi$  նույնություներ:

67. Գլանային կոորդինատային համակարգում արված է  $f(\rho) = 1/\rho$  սկալյար դաշտը, որտեղ  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ : Գտնել  $\text{grad } f$  -ը:

68. Ցույց տալ, որ  $\text{grad } \varphi(\alpha) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \text{grad } \alpha$ , որտեղ  $\alpha(x, y, z)$  -ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է, իսկ  $\varphi(\alpha)$  ֆունկցիան ունի սծանցյալ ըստ  $\alpha$  -ի:

69. Հաշվել  $\text{grad } \varphi(r)$ ,  $(\vec{r} \cdot \vec{r}) \varphi(r) \vec{r}$  մեծությունները:

70. Հաշվել  $grad(\vec{A}(z) \cdot \vec{z})$ ,  $grad(\vec{A}(z) \cdot \vec{B}(z))$ ,  $(\vec{l} \cdot \vec{\nabla}) \varphi(z) \vec{A}(z)$  մեծությունները:
71. Հաշվել  $grad(\frac{\vec{p} \cdot \vec{z}}{z^3})$  ( $\vec{p} = const$ ) մեծությունը, օգտվելով գնդային կոորդինատական համակարգից:
72. Գտնել այն կետերը, որոնցում  $\varphi = \sin(x+y)$  սկալյար դաշտի գրադիենտը հավասար է  $\hat{e}_x + \hat{e}_y$  վեկտորին:

## § 2. Վեկտորական դաշտ

Եթե  $V$  տիրույթի յուրաքանչյուր կետի համապատասխանության մեջ է դրված  $\vec{A}$  վեկտորական մեծության որոշակի արժեք, ապա ասում են, որ այդ տիրույթում տված է  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտը: Տալ վեկտորական դաշտ, նշանակում է յուրաքանչյուր  $M \in V$  կետում ունենալ  $\vec{A}(M) = \vec{A}(\vec{r})$  վեկտորական փունկցիան, կամ  $A_x(\vec{r})$ ,  $A_y(\vec{r})$  և  $A_z(\vec{r})$  երեք սկալյար փունկցիաները, այնպես որ

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_x(\vec{r}) \hat{e}_x + A_y(\vec{r}) \hat{e}_y + A_z(\vec{r}) \hat{e}_z \quad /2.10/$$

Վեկտորական դաշտը կոչվում է ստացիոնար, եթե այն կախված է միայն տարածական կոորդինատներից, բայց ոչ ժամանակից: Եթե վեկտորական դաշտը կախված է նաև ժամանակից, ապա այն կոչվում է ոչ ստացիոնար:

Վեկտորական դաշտերի օրինակներ են՝ շարժվող հեղուկի արագությունները, գրավիտացիոն, էլեկտրաստատիկ դաշտերը և այլն:

### 2.1. Վեկտորական գծեր: Հոսք: Դիվերգենցիա:

$\vec{A}$  վեկտորական դաշտի վեկտորական գիծ կոչվում է այն կորը, որի յուրաքանչյուր  $M$  կետում  $\vec{A}$  վեկտորը ուղղված է այդ կետում կորին տարած շոշափողի ուղղությամբ: Վեկտորական գծերի դիֆերենցիալ հավասարումը դեկարտյան կոորդինատական համակարգում ունի հետևյալ տեսքը

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad /2.11/$$

Գլանային կոորդինատների դեպքում վեկտորական զոմերի հավասարումը գրվում է այսպես

$$\frac{d\rho}{A_\rho} = \frac{\rho d\alpha}{A_\alpha} = \frac{dz}{A_z}, \quad /2.12/$$

իսկ գնդային կոորդինատների դեպքում՝

$$\frac{dr}{A_r} = \frac{r d\vartheta}{A_\vartheta} = \frac{r \sin\vartheta d\alpha}{A_\alpha} : \quad /2.13/$$

$\vec{A}$  վեկտորի փոքր  $S$  մակերևույթով, որի կողմնորոշումը քնուկադրվում է մակերևույթին ուղղահայաց  $\hat{n} = \hat{n}(M)$  միավոր վեկտորով, կոչվում է առաջին սեռի ֆեակայլ մակերևույթային ինտեգրալը

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \hat{n} dS = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad /2.14/$$

որտեղ  $d\vec{S} = \hat{n} dS$  -ը մակերևույթի մակերեսի վեկտորական տարրն է:

Քիչ  $S$  մակերևույթը քնուկադրվում է  $\Psi(\vec{r})=0$  հավասարումով, ապա փոքրի համար կունենանք՝

$$\Phi = \pm \iint_S \frac{\vec{A} \cdot \text{grad} \Psi}{|\text{grad} \Psi|} dS, \quad /2.15/$$

որտեղ "  $\pm$  " նշանի ընտրությունը կախած է մակերևույթի կողմնորոշումից:

$\vec{A}(M)$  վեկտորական դաշտի դիվերգենցիան  $M$  կետում որոշվում է որպես սահման, որին ձգտում է  $M$  կետը շրջափակող  $S$  փակ մակերևույթով փոքրի և այդ մակերևույթով սահմանափակված  $V$  ծավալի հարաբերությունը, երբ այդ ծավալի տրամագիծը ձգտում է զրոյի՝

$$\text{div} \vec{A} = \lim_{\substack{S \rightarrow M \\ (V \rightarrow 0)}} \frac{1}{V} \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad /2.16/$$

Դիվերգենցիայի այս սահմանումը կախած չէ կոնկրետ կոորդինատական համակարգի ընտրությունից: Դեկարտյան կոորդինատական համակարգում՝

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} : \quad /2.17/$$

Գլանային կոորդինատական համակարգում այն ունի ֆեակայլ տեսքը.

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad /2.18/$$



իսկ գնդայինում՝

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(\sin \vartheta A_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} : /2.19/$$

Օգտագործելով նախև օպերատորը /2.4/ վեկտորական դաշտի դի-վերգենցիան կարելի է ներկայացնել որպես  $\vec{\nabla}$  օպերատորի և վեկտորի սկալյար արտադրյալ՝

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad /2.20/$$

Տարածական այն կետերը, որոնցում  $\operatorname{div} \vec{A} > 0$  կոչվում են վեկտորական  $\vec{A}$  դաշտի սղբյուրներ, իսկ կետերը, որոնցում  $\operatorname{div} \vec{A} < 0$ , կոչվում են աղբյուր կետեր:

73. Գտնել  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  վեկտորական դաշտի վեկտորական զտերը և հաշվել  $\operatorname{div} \vec{V}$  -ն, եթե  $\vec{\omega}$  -ն հաստատուն վեկտոր է:

74. Գտնել հետևյալ վեկտորական դաշտերի վեկտորական զտերը.

ա/  $\vec{a} = f(\vec{r}) \vec{r}$

բ/  $\vec{a} = (\vec{p} \vec{r}) \vec{q}$

որտեղ  $\vec{p}$  -ն և  $\vec{q}$  -ն հաստատուն վեկտորներ են:

75. Գտնել  $\vec{A} = \hat{e}_x$  վեկտորի հոսքը  $Ox$  առանցքին ուղղահայաց  $\Delta y = 1$ ,  $\Delta z = 2$  կողմեր ունեցող ուղղանկյունաձև մակե-րեսով, որպես դրական ուղղութիւն վերցնելով  $Ox$  առանցքի դրական ուղղութիւնը:

76. Հայտնի է, որ  $\vec{Z}$  առանցքով ուղղված զծային անվերջ հաղորդիչով հոսող  $I$  հաստատուն հոսանքը ստեղծում է

$$\vec{H} = \frac{2I}{x^2 + y^2} (-y \hat{e}_x + x \hat{e}_y)$$

մագնիսական դաշտ: Գտնել այդ դաշտի վեկտորական զտերը:

77. Օգտվելով դեկարտյան, զլանային և գնդային կոորդինատներից հաշվել  $\operatorname{div} \vec{r}$ ,  $\operatorname{div}(\varphi(r) \vec{r})$ ,  $\operatorname{div}(\varphi(r) \vec{A}(r))$  մեծությունները:

78. Գտնել  $\operatorname{div}(\varphi(r) \vec{r}) = 0$  հավասարմանը բավարարող  $\varphi(r)$  ֆունկցիան:

79. Գտնել հետևյալ վեկտորների դիվերգենցիաները.

$$(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{b}, (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}, \vec{a} \times \vec{r}, \varphi(r) (\vec{a} \times \vec{r}), \vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r}),$$

որտեղ  $\vec{a}$  -ն,  $\vec{b}$  -ն հաստատուն վեկտորներ են:

80. Ապացուցել  $\operatorname{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \operatorname{grad} \varphi$  նույնություներ:

81. Ցույց տալ, որ

$$\text{a/ } \operatorname{div}(\tau^n \vec{a}) = n \tau^{n-2} (\vec{\tau} \cdot \vec{a}) \quad n \neq 2,$$

$$\text{բ/ } \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{\tau}) = 0$$

$$\text{գ/ } \operatorname{div}(\vec{\tau} / \tau^3) = 0$$

$$\text{դ/ } \operatorname{div}(\tau^n \vec{\tau}) = (n+3) \tau^n$$

որտեղ  $\vec{a}$  -ն հաստատուն վեկտոր է:

82. Գտնել  $\vec{A} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y - 3z \hat{e}_z$  վեկտորական դաշտի հոսքը  $z = 4$  հարթությանը հասկած  $z = x^2 + y^2$  պարաբոլոիդի արտաքին մակերևույթով:

83. Գտնել  $\vec{A} = z \hat{e}_x + \hat{e}_y - x \hat{e}_z$  վեկտորական դաշտի հոսքը  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  գնդիկի արտաքին մակերևույթով:

84. Հաշվել  $\vec{A} = (x-1)^3 \hat{e}_x + (y+2) \hat{e}_y + (z-2)^3 \hat{e}_z$  վեկտորական դաշտի հոսքը  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = R^2$  գնդիկի արտաքին մակերևույթով:

85. Հաշվել  $\vec{A} = \vec{r}$  վեկտորական դաշտի հոսքը  $V$  ծավալը սահմանափակող մակերևույթով:

86. Հաշվել  $\vec{A} = 4xz \hat{e}_x - y^2 \hat{e}_y + yz \hat{e}_z$  վեկտորական դաշտի հոսքը  $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$  հարթություններով սահմանափակված միավոր խորանարդի արտաքին մակերևույթով:

2.2. Վեկտորական դաշտի գծային ինտեգրալ:

Շրջապատված: Թուոր

$\vec{A}$  վեկտորական դաշտի գծային ինտեգրալ կոչվում է

$$I_L = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{\tau} \quad /2.21/$$

առաջին սեռի կորագծի ինտեգրալը, որտեղ  $L$  -ը ողորկ կողմնորոշված կոր է, որի յուրաքանչյուր կետում որոշված է  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտը, իսկ  $d\vec{\tau}$  -ն այդ կորի շոշափողով ուղղված միավոր վեկտոր է: Հաշվի առնելով, որ  $d\vec{\tau} = d\vec{\tau}$   $I_L$  գծային ինտեգրալը կենսականացնենք

$$I_L = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{\tau} \quad /2.22/$$

տեսքով կամ դեկարտյան կոորդինատական համակարգում՝

$$I_L = \int A_x dx + A_y dy + A_z dz \quad /2.23/$$

եթե  $L$  կորն ունի  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  վեկտորական ներկայա-  
ցում, ապա

$$I_L = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{A}(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t) dt \quad /2.24/$$

Ֆիզիկայում վեկտորական դաշտի զեմային ինտեգրալի օրինակ է արտաքին  
ուժաղաշում շարժվող մասնիկի վրա արտաքին ուժի կատարած աշխատան-  
քը:

Վեկտորական դաշտի զեմային ինտեգրալը  $L$  փակ կորով կոչվում  
է այդ դաշտի շրջապատությամբ  $L$  կորի երկայնքով

$$C = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad /2.25/$$

Շրջապատության զաղափարի հետ սերտորեն կապված է վեկտորական դաշտի  
ռոտորի կամ մրրկի զաղափարը: Դիցուք  $M$  կետում և նրա շրջակայքում  
որոշված է անընդհատ  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտը:  $M$  կետով անցնող  
ավան  $\hat{n}$  միավոր վեկտորին ուղղահայաց հարթություն և այդ հարթու-  
թյան վրա վերցնենք  $M$  կետը շրջագծով  $L$  փակ եզրագիծը, որի շրջ-  
անցման դրական ուղղությունը  $\hat{n}$  ուղղության հետ կազմում է աջ  
պտուտակային համակարգ /նկ.6/: Ասում ենք, որին ձգում է  $\vec{A}$  վեկտո-  
րական դաշտի  $L$  եզրագծով շրջապատության և այդ եզրագծով ասում-  
ափակված  $S$  մակերեսի հարաբերությունը, երբ  $L$  եզրագիծը ձգում  
է  $M$  կետին ( $S \rightarrow 0$ ), կոչվում է  
 $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի ռոտորի պրո-  
յեկցիա  $\hat{n}$  ուղղության վրա

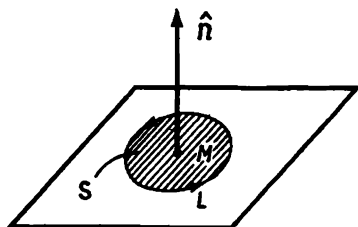
$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{A})_{\hat{n}} &= \quad /2.26/ \\ &= \lim_{\substack{L \rightarrow M \\ (S \rightarrow 0)}} \frac{1}{S} \int_L \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Ռոտորի այս սահմանումը կախված չէ  
կոնկրետ կոորդինատական համակարգի  
ընտրությունից:

Դեկարտյան կոորդինատական համա-  
կարգում  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի

ռոտորը որոշվում է

$$\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z \quad /2.27/$$



նկ.6.

բանաձևով: Օգտագործելով  $\varepsilon_{ijk}$  սիմվոլը, այն կարելի է ներկայացնել

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad /2.28/$$

սեսքով, որտեղից երևում է, որ  $\vec{A}$  վեկտորի ռոտորը  $\vec{\nabla}$  օպերատորի և  $\vec{A}$  վեկտորի վեկտորական արտադրյալն է

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \det \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \quad /2.29/$$

Գլանային կոորդինատական համակարգում՝

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \det \begin{pmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\alpha & \hat{e}_z \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \alpha & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\alpha & A_z \end{pmatrix}, \quad /2.30/$$

իսկ գնդայինում՝

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \det \begin{pmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\vartheta & \hat{e}_\alpha \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \vartheta & \partial/\partial \alpha \\ A_r & r A_\vartheta & r \sin \vartheta A_\alpha \end{pmatrix}. \quad /2.31/$$

87. Գտնել  $\vec{A} = y \hat{e}_x + z \hat{e}_y + x \hat{e}_z$  վեկտորական դաշտի գծային ինտեգրալը  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = \beta t$  պարամետրային գծի  $0 < t < 2\pi$  առաջին զալարի երկայնքով:

88. Գտնել հեռեւել վեկտորական դաշտերի գծային ինտեգրալները  $A(\vec{r}_1)$  և  $B(\vec{r}_2)$  կետերով սահմանափակված ուղղաձիծ հասվածի երկայնքով.

ա/  $\vec{A} = \vec{r}$

բ/  $\vec{A} = \vec{r}/r^2$

գ/  $\vec{A} = \vec{r}/r^3$

89. Ապացուցել, որ  $\oint_{AB} \operatorname{grad} \varphi(\vec{r})$  վեկտորական դաշտի գծային ինտեգրալի համար տեղի ունի հեռեւել նույնությունը.

$$\int_{AB} \operatorname{grad} \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A):$$

90. Յուլյց տալ, որ  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի զծային ինտեգրալը դաշտի յուրաքանչյուր վեկտորական զծի երկայնքով զրոյից տարբեր է:
91. Գտնել  $\vec{A} = -y^2 \hat{e}_x + x^3 \hat{e}_y$  վեկտորական դաշտի շրջապտույտը  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  էլիպսի երկայնքով:
92. Յուլյց տալ, որ եթե վեկտորական դաշտում վեկտորի շրջապտույտը կամայական փակ եզրագծով զրո է, ապա այդպիսի դաշտում չեն կարող լինել փակ վեկտորական զծեր:
93. Հեղուկի հավասարակշռության հավասարումն ունի  $\vec{\nabla}P = \rho \vec{f}$  տեսքը, որտեղ  $P$ -ն ճնշումն է,  $\rho$ -ն հեղուկի խտությունը, իսկ  $\vec{f}$ -ը զանգվածային ուժերի ինտենսիվությունը /ծանրույթյան ուժի դաշտում  $\vec{f} = \vec{g}$ /: Յուլյց տալ, որ հեղուկի հավասարակշռությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այնպիսի ուժային դաշտում, որի ուժագծերն ուղղահայաց են  $\text{rot } \vec{f}$  դաշտի վեկտորական զծերին:
94. Գտնել  $\vec{\omega}$  հաստատուն անկյունային արագության պտտվող պինդ մարմնի արագությունների դաշտի ռոտորը:
95. Գտնել անշարժ առանցքի շուրջը պտտվող պինդ մարմնի  $\vec{\omega}$  անկյունային արագությունը, եթե նրա զծային արագությունը որոշվում է  $\vec{v} = 2x \hat{e}_x + y^2 \hat{e}_y + xz \hat{e}_z$  առնչությամբ:
96. Ինչպիսի՞ն պեսք է լինի  $f(x, z)$  Ֆունկցիան, որպեսզի  $\vec{A} = yz \hat{e}_x + f(x, z) \hat{e}_y + xy \hat{e}_z$  վեկտորական դաշտի ռոտորը համընկնի  $\hat{e}_x - \hat{e}_z$  վեկտորի հետ:
97. Ապացուցել, որ  $\text{rot } \varphi \vec{A} = \varphi \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \times \text{grad } \varphi$
98. Օգտվելով դեկարտյան, գնդային և գլանային կոորդինատներից, հաշվել  $\text{rot } \vec{r}$ ,  $\text{rot } (\varphi(r) \vec{r})$  մեծությունները:
99. Գտնել հետևյալ Ֆունկցիաների ռոտորները  $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{b}$ ,  $(\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}$ ,  $\vec{a} \times \vec{r}$ ,  $\varphi(r) (\vec{a} \times \vec{r})$ ,  $\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})$ , որտեղ  $\vec{a}$ -ն և  $\vec{b}$ -ն հաստատուն վեկտորներ են:
100. Հաշվել  $\text{rot } [\varphi(r) \vec{A}(r)]$  մեծությունը:
101. Օգտվելով գնդային կոորդինատական համակարգից հաշվել  $\text{rot } [(\vec{r} \times \vec{r})/r^3]$  մեծությունը, որտեղ  $\vec{r}$ -ն հաստատուն վեկտոր է:
102. Գտնել  $\vec{A} = (x + z) \hat{e}_x + (y + z) \hat{e}_y + (x^2 + z) \hat{e}_z$  վեկտորի ռոտորը:

103. Գտնել զնդային կոորդինատական համակարգում տրված

$$\vec{A} = \frac{\cos \vartheta}{r^2} \hat{e}_r + \frac{\sin \vartheta}{r^2} \hat{e}_\vartheta, \text{ վեկտորական դաշտի ռոտորը:}$$

2.3. Դիֆերենցիալ օպերատորների համառոտ  
կիրառություններ

104. Ապացուցել, որ կամայական  $\varphi$  սկալյար դաշտի համար  $\text{rot grad } \varphi = 0$ :

105. Ցույց տալ, որ կամայական  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի համար  $\text{div rot } \vec{A} = 0$ :

106. Օգտվելով  $\vec{\nabla}$  օպերատորից և վեկտորների բազմապատկման ու դիֆերենցիալ կանոններից և չդիմելով կոորդինատական առանցքների վրա նրանց բաղադրիչներին ապացուցել հետևյալ նույնու - թյունները

$$\text{a/ } \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B},$$

$$\text{բ/ } \text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \text{ div } \vec{B} - \vec{B} \text{ div } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B},$$

$$\text{գ/ } \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}:$$

107. Ապացուցել նույնությունները.

$$\text{ա/ } \vec{C} \cdot \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B}(\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A},$$

$$\text{բ/ } (\vec{C} \cdot \vec{\nabla})(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A},$$

$$\text{գ/ } (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} \text{ div } \vec{A},$$

$$\text{դ/ } (\vec{A} \times \vec{B}) \text{ rot } \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{C} - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{C},$$

$$\text{ե/ } (\vec{A} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} - \vec{A} \text{ div } \vec{B},$$

$$\text{զ/ } (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \text{ div } \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \times \text{rot } \vec{A}:$$

108. Ապացուցել, որ  $\vec{A}^2 = \text{const.}$  դեպքում տեղի ունի

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = -\vec{A} \times \text{rot } \vec{A} \quad \text{նույնություններ:}$$

109. Ցույց տալ, որ  $\text{rot rot } \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \text{grad div } \vec{A}$ :

110. Ապացուցել, որ  $\vec{A} = \varphi \text{ grad } \psi$  վեկտորն օրթոգոնալ է  $\text{rot } \vec{A}$  վեկտորին:

111. Ցույց տալ, որ  $\vec{\nabla}(\varphi/\psi) = (\psi \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \psi)/\psi^2$ :

2.4. Սուլենոիդային վեկտորական դաշտ:  
վեկտորական պոտենցիալ

$\vec{A}$  վեկտորական դաշտը կոչվում է սուլենոիդային  $V$  տիրույթում, եթե այդ տիրույթի յուրաքանչյուր կետում նրա դիվերգենցիան զրո է.

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad /2.32/$$

Այսպիսով, սահմանման համաձայն, սուլենոիդային դաշտը չունի աղբյուրներ և առհասի կետեր:

Եթե սուլենոիդային դաշտը տրված է միակապ տիրույթում, ապա վեկտորի հոսքը այդ տիրույթին պատկանող կամայական փակ մակերևույթով հավասար է զրոյի

$$\oint \vec{A} d\vec{S} = 0 \quad /2.33/$$

Բազմակապ տիրույթում տրված սուլենոիդային դաշտի համար, ընդհանրապես, նման պնդումը ճիշտ չէ:

Սուլենոիդային դաշտում վեկտորական գծերը չեն կարող ոչ սկսել և ոչ էլ վերջանալ դաշտի ներսում. նրանք կամ փակ են, կամ ունեն ծայրեր դաշտի եզրի վրա, կամ էլ ունեն անվերջ մյուսդեր, եթե տիրույթը, որտեղ որոշված է դաշտը, սահմանափակ չէ:

Սուլենոիդային դաշտերի համար կարելի է մտցնել վեկտորական պոտենցիալի գաղափարը:  $\vec{W}(M)$  վեկտորական դաշտը կոչվում է  $\vec{A}$  սուլենոիդային վեկտորական դաշտի վեկտորական պոտենցիալ, եթե անդի ունի

$$\vec{A}(M) = \operatorname{rot} \vec{W}(M) \quad /2.34/$$

առնչությունը:

Զանի որ կամայական  $\varphi$  սկալյար ֆունկցիայի համար  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ , ապա անհայտ է, որ /2.34/ առնչությամբ սահմանված  $\vec{W}$  վեկտորական պոտենցիալը որոշվում է կամայական  $\varphi$  սկալյար ֆունկցիայի զրադիենտի մշտությամբ: Այսինքն, եթե  $\vec{W}$  -ն  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի վեկտորական պոտենցիալն է, ապա այդ դաշտի վեկտորական պոտենցիալը կլինի նաև  $\vec{W} + \operatorname{grad} \varphi$  վեկտորը, որտեղ  $\varphi$  -ն կամայական սկալյար ֆունկցիա է:

Դեկարտյան կոորդինատական համակարգում  $\vec{W}$  վեկտորական պոտենցիալի և համապատասխան  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի բաղադրիչների կապը

սովորում է

$$A_x = \frac{\partial W_x}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x}, \quad A_z = \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \quad /2.35/$$

դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի միջոցով:

112. Ցույց տալ, որ  $\vec{A} = q\vec{r}/r^3$  ( $q = \text{const.}$ ) վեկտորական դաշտը սուլենոիդային է տարածության բոլոր կետերում, բացառությամբ կոորդինատների սկզբնակետի:

113. Ցույց տալ, որ եթե  $\vec{\omega}$  -ն հաստատուն վեկտոր է, ապա  $\vec{A} = \vec{r}(\vec{\omega} \times \vec{r})$  դաշտը սուլենոիդային է: Գտնել այդ դաշտի վեկտորական պոտենցիալներից որևէ մեկը:

114. Գտնել  $\varphi(r)$  ֆունկցիայի ընդհանուր տեսքը, որի դեպքում  $\vec{A} = \varphi(r)\vec{r}$  դաշտը կլիսի սուլենոիդային:

115. Ցույց տալ, որ սուլենոիդային դաշտում  $\vec{A}$  վեկտորի հոսքը կախված է միայն  $L$  եզրագծի տեսքից, բայց ոչ նրա վրա հենված մակերևույթից:

116. Ապացուցել, որ  $\text{rot } \vec{A}$  վեկտորական դաշտը սուլենոիդային է:

117. Ցույց տալ, որ  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \kappa^2 \vec{A} = 0$  հավասարման ցանկացած լուծում, որը բավարարում է սուլենոիդային պայմանին, բավարարում է նաև Հելմհոլցի վեկտորական  $\nabla^2 \vec{A} + \kappa^2 \vec{A} = 0$  հավասարմանը:

118. Ցույց տալ, որ եթե  $\varphi(\vec{r})$ -ը Լապլասի հավասարմանը բավարարող ֆունկցիա է, ապա  $\vec{\nabla}\varphi$  վեկտորական դաշտը սուլենոիդային է:

## 2.5. Պոտենցիալային վեկտորական դաշտ:

Ակալյաբ պոտենցիալ

$\vec{A}$  վեկտորական դաշտը  $V$  տիրույթում կոչվում է պոտենցիալային, եթե գոյություն ունի այնպիսի  $\varphi(M)$  սկալյար դաշտ, որի գրադիենտը այդ տիրույթի յուրաքանչյուր կետում համընկնում է  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի հետ, այսինքն՝

$$\vec{A}(M) = \text{grad } \varphi(M): \quad /2.36/$$



Այդ դեպքում  $\varphi(M_0)$  -ը կոչվում է  $\vec{A}(M)$  վեկտորական դաշտի սկալյար պոտենցիալ կամ պարզապես պոտենցիալ:

Վեկտորական տեսքով գրված /2.36/ հավասարումը դեկարտյան բաղադրիչների դեպքում կունենա

$$A_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad A_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad A_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad /2.37/$$

տեսքը:

Պոտենցիալային դաշտը վեկտորական դաշտի պարզագույն օրինակներն են, քանի որ այն լրիվությամբ որոշվում է մեկ սկալյար ֆունկցիայի միջոցով, այն դեպքում, երբ կամայական  $\vec{A}(M)$  վեկտորական դաշտ ընդհանրապես որոշվում է  $A_x, A_y, A_z$  երեք սկալյար դաշտերով:

$\vec{A}$  պոտենցիալային դաշտի  $\varphi$  սկալյար պոտենցիալը որոշվում է կամայական հաստատուն զուամրելիի զտություններ:

Որպեսզի  $V$  միակապ տիրույթում արված  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտը լինի պոտենցիալային, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի այդ տիրույթի յուրաքանչյուր կետում բավարարվի

$$\text{rot } \vec{A} = 0 \quad /2.38/$$

պայմանը:

Եթե  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտը պոտենցիալային է  $V$  տիրույթում, ապա նրա զեռային ինտեգրալը կախված չէ կորի տեսքից և հավասար է վերջնական և սկզբնական կետերում սկալյար պոտենցիալի արժեքների տարբերությանը՝

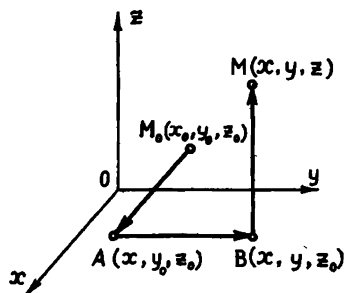
$$\int_{M_0}^M \vec{A} \cdot d\vec{z} = \varphi(M) - \varphi(M_0) \quad /2.39/$$

/2.39/ արաֆայությունը կարող է միաժամանակ օգտագործվել տված պոտենցիալային դաշտի  $\varphi$  սկալյար պոտենցիալի հաշվման նպատակով՝

$$\varphi(M) = \varphi(M_0) + \int_{M_0}^M \vec{A} \cdot d\vec{z} \quad /2.40/$$

որտեղ  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  -ն դաշտի որևէ սկզբակետ կետ է, իսկ  $M(x, y, z)$  -ը կամայական ընթացիկ կետ է:

Քանի որ  $\vec{A}$  պոտենցիալային դաշտի զեռային ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման նախադրի ձևից, ապա նպատակահարմար է լինում սկալյար պոտենցիալի հաշվման ժամանակ վերցնել  $x, y, z$  առանցքների զուգահեռ երեք ուղղագիծ հատվածներից բաղկացած  $M_0(x_0, y_0, z_0)$



Նկ. 7.

կետը  $M(x, y, z)$  կետին միացնող բեկյալ,  
ինչպես այդ պատկերված է Նկ. 7-ում:  
ինտեգրման մասնաարհի այսպիսի ընտ-  
րության դեպքում կունենանք

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \varphi(x_0, y_0, z_0) + \\ & + \int_{x_0}^x A_x(x, y_0, z_0) dx + \\ & + \int_{y_0}^y A_y(x, y, z_0) dy + \\ & + \int_{z_0}^z A_z(x, y, z) dz : \quad /2.41/ \end{aligned}$$

119. Ստուգել, որ  $\vec{A} = (3yz + x^2) \hat{e}_x + (2y^2 + 3xz) \hat{e}_y + (z^2 + 3xy) \hat{e}_z$  դաշտը պոտենցիալային է և գտնել նրա սկալյար պոտենցիալը:
120. Դիցուք  $\vec{F} = -Gm\vec{r}/r^3$  զրավիտացիոն դաշտն է, որն իրենից ներկայացնում է կոորդինատների համակարգի սկզբնակետում տեղակայված կետային  $m$  զանգվածի կողմից  $\vec{r}$  շառավիղ-վեկտորով կետում գտնվող միավոր զանգվածի վրա ազդող ուժը: Ցույց տալ, որ  $\vec{F}$  դաշտը պոտենցիալային է ամենուրեք, բացառաբայմբ կոորդինատների համակարգի սկզբնակետի և գտնել նրա սկալյար պոտենցիալը:
121. Համոզվել, որ գլխային կոորդինատական համակարգում տրված  $\vec{A} = 2\rho z \sin\alpha \hat{e}_\rho + \rho z \cos\alpha \hat{e}_\alpha + \rho^2 \sin\alpha \hat{e}_z$  դաշտը պոտենցիալային է և գտնել նրա սկալյար պոտենցիալը:
122. Ապացուցել, որ  $\vec{A} = \varphi(r)\vec{r}$  դաշտը պոտենցիալային է:
123. Ապացուցել, որ  $\vec{A} = \text{grad}\varphi$  պոտենցիալային դաշտի վեկտորական գծերը ուղղահայաց են  $\varphi$  մակերևույթի մակերևույթին:
124. Ապացուցել հետևյալ վեկտորական դաշտերի պոտենցիալային լինելը և գտնել նրանց սկալյար պոտենցիալները.  
ա/  $\vec{A} = \vec{r}/r$ ,  
բ/  $\vec{A} = \vec{r}/r^2$ ,  
գ/  $\vec{A} = \vec{r}/r^3$
125. Ցույց տալ, որ  $\vec{A}$  պոտենցիալային վեկտորական դաշտի գծային

ինտեգրալը  $M_0$  և  $M_1$  կետերը միացնող կորով կախված չէ այդ կորի տեսքից, այլ կախված է միայն  $M_0$  և  $M_1$  կետերի դիրքերից:

## 2.6. Վեկտորական անալիզի ինտեգրալ թեորեմները

Գաուսի-Օստրոգրադսկու թեորեմը պնդում է, որ եթե  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտը և նրա դիվերգենցիան անընդհատ են, ողորկ կամ կտրուկ կառուցված  $S$  մակերևույթով սահմանափակված  $V$  տիրույթի բոլոր կետերում, ապա  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի հոսքը  $S$  փակ մակերևույթի արտաքին կողմով հավասար է դիվերգենցիայի ծավալային ինտեգրալին ըստ  $V$  ծավալի.

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV \quad /2.42/$$

Այս առնչությունից հետևում է, որ  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի հոսքը  $S$  փակ մակերևույթով հավասար է զրոյի այն և միայն այն ժամանակ, երբ դաշտը սուլենոիդային է այդ մակերևույթով սահմանափակված  $V$  տիրույթում /իհարկե, ամբողջ  $V$  տիրույթում դիվերգենցիայի անընդհատություն պայմանի դեպքում/:

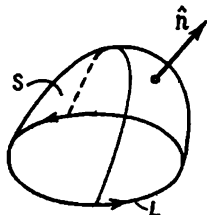
Գաուսի-Օստրոգրադսկու /2.42/ բանաձևը կախված չէ կոորդինատական համակարգի ընտրությունից: Այն կտրելի է օգտագործել վեկտորական դաշտի հոսքը փակ մակերևույթով հաշվելու համար:

Ենթադիշտ  $V$  տիրույթը կոչվում է մակերևութային-միակապ, եթե այդ տիրույթի մեջ ընկած յուրաքանչյուր  $L$  փակ եզրագծի համար գոյություն ունի այդ եզրագծին հենված և լրիվությամբ  $V$  տիրույթի մեջ ընկած  $S$  մակերևույթ:

Ս ա ո ճ ա ի թ ե ո ռ ե մ ը պնդում է, որ եթե  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտը և նրա ռոտորը անընդհատ են, մակերևութային-միակապ  $V$  տիրույթում, ապա այդ դաշտի շրջապատյալ  $V$  տիրույթի մեջ ընկած  $L$  կառուցված կառուցված ողորկ փակ եզրագծով հավասար է ռոտ  $\vec{A}$  դաշտի հոսքին այդ եզրագծի վրա հենված և ամբողջությամբ  $V$  տիրույթի մեջ ընկած  $S$  մակերևույթով

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{\tau} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} \quad /2.43/$$

ենթադրվում է, որ  $S$  մակերևույթի կողմնորոշումը համաժայտեցված է  $L$  եզրագծի շրջանցման ուղղության հետ այնպես, որպեսզի  $S$  մակերևույթին ուղղահայաց  $\hat{n}$  միավոր վեկտորի ծայրից նայելու



Նկ.8.

դեպքում եզրագծի շրջանցումը երևա ժամացույցի սլաքի շարժմանը հեռահալ ուղղությամբ, կամ, ինչպես այլ կերպ ընդունված է ստել,  $L$  եզրագծի շրջանցման ուղղությունը և  $\hat{n}$  վեկտորը կազմեն աջ պտուտակային համակարգ /Նկ.8/:

Ստորսի /2.43/ բանաձևից երևում է, որ այն բանի համար, որպեսզի  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի գծային ինտեգրալը կախված չլինի ինտեգրման ճանապարհի ձևից, անհրաժեշտ է

և բավարար, որպեսզի  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտը լինի ոչ մրկային՝ շտ  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , այսինքն պոտենցիալային դաշտ:

126. Օգտվելով Գաուսի-Օստրոգոթսկու թեորեմից, հաշվել  $\vec{A} = x^2 \hat{e}_x + y^2 \hat{e}_y + z^2 \hat{e}_z$  վեկտորական դաշտի հոսքը  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , ( $z > 0$ ),  $z = 0$  փակ մակերևույթով:

127.  $\iiint \text{grad rot } \vec{A} dV$  ծավալային ինտեգրալը ձևափոխել մակերևույթային:

128. Հաշվել  $\oint \vec{r} (\vec{a} \cdot \hat{n}) dS$  և  $\oint (\vec{a} \cdot \vec{r}) \hat{n} dS$  ինտեգրալները, որտեղ  $\vec{a}$  -ն հաստատուն վեկտոր է,  $\hat{n}$  -ը մակերևույթին ուղղահայաց օրթն է:

129. Փակ մակերևույթային հեռայալ ինտեգրալները ձևափոխել ծավալայինի, եթե  $\vec{a}$  -ն և  $\vec{b}$  -ն հաստատուն վեկտորներ են, իսկ  $\hat{n}$  -ը մակերևույթին ուղղահայաց օրթն է:

ա/  $\oint \hat{n} \varphi dS,$

բ/  $\oint (\hat{n} \times \vec{a}) dS,$

գ/  $\oint (\hat{n} \cdot \vec{b}) \vec{a} dS:$

130. Հեղուկի մեջ ընկղմված մարմնի մակերևույթի տարրի վրա կիրառված ճնշման ուժերի առիժական գումարման եղանակով ստանալ Արքիմեդի օրենքը:

131. Ապացուցել, որ կամայական  $\vec{A}$  վեկտորական և  $\varphi$  սկալյար դիֆերենցիալի դաշտերի համար տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները.

$$ա/ \iiint_V \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) dV = \oint_S \varphi(\vec{r}) d\vec{S},$$

$$բ/ \iiint_V \vec{\nabla} \vec{A}(\vec{r}) dV = \oint_S \vec{A}(\vec{r}) d\vec{S},$$

$$գ/ \iiint_V [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] dV = \oint_S (d\vec{S} \times \vec{A}(\vec{r})),$$

$$դ/ \iint_S d\vec{S} \times \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = \oint_L \varphi(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$ե/ \iint_S [(d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \times \vec{A}(\vec{r})] = - \oint_L [\vec{A}(\vec{r}) \times d\vec{r}]$$

132. Դիցուք  $f(\vec{a}, \vec{r})$  -ը դիֆերենցիալի ֆունկցիա է  $\vec{r}$  -ից և բավարարում է

$$f(c, \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2, \vec{r}) = c_1 f(\vec{a}_1, \vec{r}) + c_2 f(\vec{a}_2, \vec{r})$$

պայմանին, որտեղ  $c_1$  և  $c_2$  -ը կամայական հաստատուններ են: Ապացուցել, որ եթե  $V$  -ն կամայական ծավալ է,  $S$  -ը այն սահմանափակող մակերևույթը, իսկ  $\hat{n}$  -ը այդ մակերևույթի արտաքին նորմալի օրթն է, ապա տեղի ունի Գաուսի-Օստրոգրադսկու ընդհանրացված թեորեմը.

$$\oint_S f(\hat{n}, \vec{r}) d\vec{S} = \iiint_V f(\vec{\nabla}, \vec{r}) dV$$

Ենթադրելով  $f(\vec{\nabla}, \vec{r})$  ֆունկցիայի մեջ հանդես եկող օպերատորը ազդում է  $\vec{r}$  -ի վրա և զանվում է բոլոր ֆոփոխականներից ավելի ժառանգական:

Ց ու ե գ ու մ .  $\hat{n}$  -ը վերլուծել ըստ դեկարտյան կոորդինատական օրթերի և օգտվել Գաուսի-Օստրոգրադսկու թեորեմից

$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial x} dV = \oint_S \varphi \hat{n}_x dS$$

133. Օգտվելով նախորդ խնդրում ապացուցած Գաուսի-Օստրոգրադսկու ընդհանրացված թեորեմից, լուծե՛ք 120 և 121 խնդիրները :

134.  $\oint_L \varphi d\vec{r}$  ֆակ եզրագծով ինտեգրալը ձևափոխել այդ եզրագծի վրա հենված մակերևույթով ինտեգրալի:

135.  $\oint_L \varphi d\vec{\psi}$  ֆակ եզրագծով ինտեգրալը ձևափոխել այդ եզրագծի վրա հենված մակերևույթով ինտեգրալի, եթե  $\varphi$  -ն և  $\vec{\psi}$  -ն կոորդինատ-

ների սկալյար ֆունկցիաներ են.

136. Ապացուցել նույնությունը.

$$\iiint_V (\vec{A} \cdot \text{rot rot } \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{rot rot } \vec{A}) dV = \oint_S (\vec{B} \times \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \times \text{rot } \vec{B}) d\vec{S};$$

137.  $V$  ծավալի ներսում  $\vec{A}$  վեկտորը բավարարում է  $\text{div } \vec{A} = 0$  պայմանին, իսկ այդ ծավալը սահմանափակող  $S$  մակերևույթի վրա՝ նրա նորմալ բաղադրիչը զրո է ( $A_n = 0$ )։ Ապացուցել, որ  $\iiint_V \vec{A} dV = 0$ ։

138. Ապացուցել, որ  $\text{div}_R \iiint_V \frac{\vec{A}(\vec{r}) dV}{|\vec{R} - \vec{r}|} = 0$ , որտեղ  $\vec{A}(\vec{r})$ -ը նախորդ խնդրում սահմանված վեկտորն է։

## 2.7. Լապլասի օպերատորը Լապլասյան դաշտեր

Պաշտերի զրադիենսը, դիվերգենցիան և ռոտորը գտնելու գործողությունները կարելի է անվանել առաջին կարգի դիֆերենցիալ գործողություններ։ Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ գործողություններից ֆիզիկայում առավել մեծ կիրառություն ունի նաբլա օպերատորի սկալյար քառակուսին, այսինքն

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \quad /2.44/$$

որն ստացել է Լապլասի օպերատոր կամ Լապլասիան անվանումը և նշանակվում է  $\Delta$  սիմվոլով։

Գլանային կոորդինատական համակարգում Լապլասի օպերատորը տրվում է

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad /2.45/$$

աբառայությունաբ, իսկ գնդային համակարգում՝

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} : /2.46/$$

Լապլասի սիմվոլիկ օպերատորը կարող է կիրառվել ինչպես  $\varphi(M)$  սկալյար դաշտի, այնպես էլ  $\vec{A}(M)$  վեկտորական դաշտերի վրա։ Այդ կիրառությունն առկա հասկացվում են հետևյալ հավասարությունները՝

$$\Delta \varphi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad /2.47/$$

և

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \hat{e}_x + \Delta A_y \hat{e}_y + \Delta A_z \hat{e}_z : /2.47/$$

$\vec{A}$  վեկտորական դաշտը կոչվում է լապլասյան, եթե նա միաժամանակ պոտենցիալային է և սոլենոիդային: Պոտենցիալայնությունից հետևում է, որ  $\vec{A}$  դաշտի համար գոյություն ունի ալիպսի  $\varphi$  սկալյար դաշտ, որ  $\vec{A} = \text{grad} \varphi$ : Սոլենոիդային լինելը նշանակում է  $\text{div} \vec{A} = 0$  պայմանի բավարարվածություն: Հետևաբար, լապլասյան դաշտերի համար

$$\text{div grad} \varphi = 0,$$

կամ լապլասի օպերատորի միջոցով

$$\Delta \varphi = 0 : /2.48/$$

ի տարբերություն կամայական  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի, որը որոշվում է երեք սկալյար մեծություններով, լապլասյան վեկտորական դաշտը որոշվում է մեկ սկալյար ֆունկցիայի օգնությամբ, այն է  $\varphi$  պոտենցիալի օգնությամբ, որը լապլասի  $\Delta \varphi = 0$  հավասարման լուծումն է:

Մինչև երկրորդ կարգի անընդհատ մասնական ածանցյալներ ունեցող  $\varphi$  սկալյար ֆունկցիան, որը բավարարում է լապլասի /2.48/ հավասարմանը, կոչվում է հարմոնիկ ֆունկցիա:

Լապլասյան վեկտորական դաշտի օրինակ է նյութական կետի զրավիտացիոն դաշտը ( $\vec{F} = -Gm\vec{r}/r^3$ ), որը պոտենցիալային է և ունի  $\varphi = Gm/r$  պոտենցիալ: Քանի որ  $\varphi = Gm/r$  ֆունկցիան հարմոնիկ է ամբողջ տարածությունում, քաղաքությամբ  $r = 0$  կետի, ուստի զրավիտացիոն դաշտը լապլասյան դաշտ է ամենուրեք, քաղաքությամբ  $r = 0$  կետի:

Միակապ տիրույթում տրված  $\vec{A}$  լապլասյան դաշտի համար, ինչպես այդ հետևում է սահմանումից, միաժամանակ բավարարվում են

$$\text{div} \vec{A} = 0, \quad \text{rot} \vec{A} = 0 \quad /2.49/$$

հավասարությունները:

139. Ցույց տալ, որ  $\Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\psi$

140. Ցույց տալ, որ եթե  $\vec{r}$  -ը շառավիղ վեկտորն է, ապա  $\Delta r = 2/r$ :

141. Պարզել, թե հետևյալ սկալյար դաշտերից որոնք են հարմոնիկ.

ա/  $\varphi = x^2 + 2xy - y^2$

բ/  $\varphi = x^2y + y^2z + z^2x$ ,

գ/  $\varphi = x^2 - y^2$

142. Գտնել սկալյար ֆունկցիայի համար Լապլասի հավասարման ընդհանուր լուծումը, որը կախված է միայն ա/  $\tau$ , բ/  $\vartheta$ , գ/  $\alpha$  զնդային կոորդինատներից:

143. Գտնել սկալյար ֆունկցիայի համար Լապլասի հավասարման ընդհանուր լուծումը, որը կախված է միայն ա/  $\rho$ , բ/  $\alpha$ , գ/  $z$  զլանային կոորդինատներից:

144. Գտնել բոլոր հարմոնիկ դաշտերը, որոնք կախված են միայն  $x$  կոորդինատից:

145. Գտնել Պուասսոնի  $\Delta\varphi = \tau^{n-1}$  հավասարման ընդհանուր լուծումը զնդային կոորդինատական համակարգում, եթե  $\varphi = \varphi(\tau)$ :

146. Ցույց տալ, որ եթե  $\psi$  սկալյար ֆունկցիան  $\Delta\psi + \kappa^2\psi = 0$  հավասարման լուծումն է, իսկ  $\vec{A}$ -ն հաստատուն վեկտոր է, ապա  $\vec{L} = \text{grad}\psi$ ,  $\vec{M} = \tau \text{ot}(\vec{A}\psi)$  և  $\vec{N} = \tau \text{ot}\vec{M}$  վեկտորական դաշտերը բավարարում են  $\Delta\vec{A} + \kappa^2\vec{A} = 0$  հավասարմանը:



Հ ա վ ե լ վ ա ծ  
Դ ի ի՞նչ է  $\delta$  - ֆունկցիան

Դիտարկենք  $\delta$  - ֆունկցիան /դելտա-ֆունկցիան/ սահմանվում է

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx =$$

$$= \begin{cases} f(x_0), & \text{եթե } a < x_0 < b, \\ 1/2 f(x_0), & \text{եթե } x_0 = a \text{ կամ } x_0 = b, \quad (a < b) \\ 0, & \text{եթե } x_0 < a \text{ կամ } x_0 > b \end{cases} \quad /2.1/$$

պայմանի միջոցով, որտեղ  $f(x)$  -ը կամայական ֆունկցիա է, որն ան-  
ընդհատ է  $x_0$  կետում:

Այս սահմանումից հետևում է, որ Դիրակի  $\delta$  - ֆունկցիայի հա-  
մար տեղի ունեն

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad (x \neq x_0), \quad /2.2/$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1, & \text{եթե } a < x_0 < b, \\ 1/2, & \text{եթե } x_0 = a \text{ կամ } x_0 = b, \quad (a < b) \\ 0, & \text{եթե } x_0 < a \text{ կամ } x_0 > b \end{cases} \quad /2.3/$$

առնչությունները: Համաք որպես  $\delta(x)$  ֆունկցիայի սահմանում օգտա-  
գործվում են /2.2/ և /2.3/ պայմանները:

Ելնելով, որ Դիրակի  $\delta(x)$  ֆունկցիան ֆունկցիա չէ սովորական  
իմաստով, այլ սիմվոլիկ ֆունկցիա է, որը խաղում է  $\int \mathcal{K}(x, x_0) f(x) dx = f(x_0)$   
գծային ինտեգրալ ձևափոխության կորիզի դեր և ձևականորեն իրականաց-  
նում է  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  ձևափոխությունը:

Ենապես  $\delta$  - ֆունկցիան սահմանվում է

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad /2.4/$$

առնչությամբ և բավարարում է

$$\int_V f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) dV = \begin{cases} f(\vec{r}_0), & \text{եթե } \vec{r}_0 \in V \\ 0 & \text{եթե } \vec{r}_0 \notin V \end{cases} \quad /2.5/$$

պայմանին:

Կարելի է բազմաթիվ օրինակներ բերել, երբ ֆիզիկական այս կամ այն մեծությունն արտահայտվում է Դիրակի  $\delta$ -ֆունկցիայի օգնությամբ: Այդպիսի մեծություններից են  $\vec{r}_0$  կետում տեղավորված  $e$  կետային լիցքի

$$\rho = e \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad /2.6/$$

խտությունը և  $\vec{r}_0(t)$  օրենքով շարժվող  $e$  կետային լիցքի

$$j = e \dot{\vec{r}}_0(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \quad /2.7/$$

հոսանքի խտությունը:

Դիրակի դելտա-ֆունկցիայի  $\tau$ -րդ կարգի տեսնյալը սահմանվում է

$$\int_a^b f(x) \delta^{(\tau)}(x - x_0) dx = \begin{cases} (-1)^\tau f^{(\tau)}(x_0), & \text{եթե } a < x_0 < b \\ 1/2 (-1)^\tau f^{(\tau)}(x_0), & \text{եթե } x_0 = a \text{ կամ } x_0 = b \text{ (} a < b \text{)} \\ 0, & \text{եթե } x_0 < a \text{ կամ } x_0 > b \end{cases} \quad /2.8/$$

առնչության միջոցով, որտեղ  $f(x)$  -ը կամայական ֆունկցիա է, որը անընդհատ է  $x_0$  կետում:

$\delta^{(\tau)}(x)$  ֆունկցիայի համար կարելի է գրել

$$\delta^{(\tau)}(x) = (-1)^\tau \tau! \frac{\delta(x)}{x^\tau} \quad (\tau = 0, 1, \dots) \quad /2.9/$$

սիմվոլիկ արտահայտությունը:

Չնայած նշգրտորեն /2.1/ հասկություններով օժտված ֆունկցիաներ գոյություն չունեն, սակայն  $\delta(x)$  ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել սովորական ֆունկցիաների սահմանային ֆունկցիայի տեսքով:

Դիրակի  $\delta$  - ֆունկցիայի վերը նշված եղանակով ստացվող բացահայտ ներկայացումները, ինչպես նաև նրա այլ հատկությունները ստորև ձևակերպված են որպես ինքնուրույն խնդիրներ:

147. Ապացուցել  $\delta$  - ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունները.

ա/  $\delta(ax) = \delta(x)$

բ/  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$

գ/  $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \{ \delta(x+a) + \delta(x-a) \}$

148. Դիցուք  $f(x)$  -ը միաբերան դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ սեղի ունի

$$\delta(f(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|}$$

առնչությունը, որտեղ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  մեծությունները  $f(x) = 0$  հավասարման արմատներն են:

149. Ցույց տալ, որ  $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$  ֆունկցիայի ածանցյալը

Դիրակի  $\delta$  - ֆունկցիան է՝  $\varphi'(x) = \delta(x)$ :

150. Ցույց տալ, որ Դիրակի  $\delta(x)$  ֆունկցիայի համար իրավացի են հետևյալ առհասարակ ներկայացումները.

ա/  $\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = \delta(x)$

բ/  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{L \rightarrow \infty} L e^{-L^2 x^2} = \delta(x)$

գ/  $\frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin Lx}{L} = \delta(x)$

դ/  $\frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 Lx}{Lx^2} = \delta(x)$

151. Ապացուցել նույնությունները.

ա/  $\delta'(-x) = -\delta'(x)$

բ/  $x \delta(x) = 0$ ,

գ/  $x \delta'(x) = -\delta(x)$

152. Ապացուցել, որ  $\delta$  - ֆունկցիայի համար տեղի ունի

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k = \delta(\vec{r})$$

ինտեգրալ ներկայացումը:

153. Գրել  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$  Դիրակի եռա-  
չափ ֆունկցիայի տեսքը գնդային և գլանային կոորդինատական հա-  
մակարգերում:

154. Ապացուցել, որ եթե  $\vec{r}'$ -ը շառավիղ-վեկտորն է, ապա տեղի ունի

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$$

հավասարումը:

155. Ցույց տալ, որ  $\vec{A} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div} \vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$  վեկտորական

դաշտի դիվերգենցիան հավասար է զրոյի:

ԳԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ԼՈՒԾՈՒԴՆԵՐ

Գլուխ 1. ԹԵՆԱՌՈՂԱԿԱՆ ՀԱՇԻՎ

§ 1. Հիմնական տեղեկություններ վեկտորական հանրաժողովրդի:  
Կոորդինատական համակարգեր: Օրթոգոնալ ձևափոխություններ

$$5. \cos \vartheta = \vec{n} \cdot \vec{n}' = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\alpha - \alpha') :$$

$$6. \vec{a} \cdot \vec{b} = -a_x b_x - a_y b_y + a_z b_z ,$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_0 = i(a_x b_y - a_y b_x) , (\vec{a} \times \vec{b})_{\pm} = \pm i(a_0 b_{\pm} - a_{\pm} b_0) :$$

7.  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  բազիսից  $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  նոր բազիսի անցնելու ձևափոխություններն ունեն  $\hat{e}'_i = \alpha_{ik} \hat{e}_k$  տեսքը, որտեղ  $\alpha_{ik}$  գործակիցները որոշվում են  $\alpha_{ik} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_k$  սկալյար արտադրյալներով, այսինքն իրենցից ներկայացնում են հին օրթերի պրոյեկցիաները նոր օրթերի ուղղություններով: Գնդային կոորդինատական համակարգի  $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$  օրթերը պրոյեկտելով  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  դեկարտյան օրթերի ուղղություններով /Նկ.3գ/, կառուցելով դեկարտյան կոորդինատական համակարգից գնդայինի անցնելու մատրիցը.

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \alpha & \sin \vartheta \sin \alpha & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \alpha & \cos \vartheta \sin \alpha & -\sin \vartheta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix} :$$

Հակադարձ ձևափոխության մատրիցը կլինի

$$\hat{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \alpha & \cos \vartheta \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \vartheta \sin \alpha & \cos \vartheta \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} :$$

Դեկարտյան կոորդինատներից գնդայինի և հակադարձ անցնելու դեպքում համապատասխանաբար կունենանք /Նկ.3բ/

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{և} \quad \hat{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

8.  $\vec{A}$  վեկտորի բաղադրիչները հին ( $A_k$ ) և նոր ( $A'_i$ ) կոորդինատական համակարգերում իրար հետ կապված են  $A'_i = g_{ik} A_k$  մեափոխություններով, որտեղ

$$w/ \hat{g}_- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e/ \hat{g}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

9. Օգտվելով նախորդ խնդրի բ/ դեպքի արդյունքից, կստանանք

$$\hat{g}(\psi, \vartheta, \varphi) = \hat{g}(\varphi) \hat{g}(\vartheta) \hat{g}(\psi) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix} :$$

10. Քանի որ պտույտի մեափոխության մաթրիցն անընդհատ փոփոխվում է անկյուններից / տես 8 բ և 9 խնդիրների պատասխանները / և զրո անկյունով պտույտի դեպքում հավասար է  $\hat{1}$  -ի, ուստի փոքր անկյուններով պտույտների համար  $\hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{\varepsilon}$ , որտեղ  $|\varepsilon_{ik}| \ll 1$  :  $\varepsilon_{ik}$ -ի հակահամաչափությունը ապացուցելու համար օգտվենք  $\tau^2$  մեծության ինվարիանտությունից: Քանի որ  $x'_i = x_i + \varepsilon_{ik} x_k$ , ապա

$$x_i'^2 = x_i^2 + 2 \varepsilon_{ik} x_i x_k + \varepsilon_{ik} \varepsilon_{im} x_k x_m$$

Արհամարհելով  $\varepsilon_{ik}$ -ի նկատմամբ երկրորդ կարգի անվերջ փոքր անդամները, կստանանք  $\tau'^2 = \tau^2 + 2 \varepsilon_{ik} x_i x_k$ , որտեղից հետևում է, որ  $\varepsilon_{ik} x_i x_k = 0$  կամայական  $x_i$ -ի համար: Դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, եթե  $\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$  :  $\varepsilon_{ik}$  հակահամաչափ մաթրիցի փոխարեն կարելի է մտնել նրան համապատասխանող անվերջ փոքր  $\delta\vec{\varphi}$  վեկտոր, որի հետ  $\varepsilon_{ik}$  -ն կապված է  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ikl} \delta\varphi_l$  / կամ  $\delta\varphi_l = 1/2 \varepsilon_{lik} \varepsilon_{ik}$  / առնչությամբ, որտեղ  $\varepsilon_{ikl}$ -ը Լևի-Չիվիայի սիմվոլն է: Հաշվի առնելով այս հանգամանքը, կունենանք  $x'_i = x_i + \varepsilon_{ik} x_k \delta\varphi_l$ , կամ վեկտորական տեսքով՝  $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{x} \times \delta\vec{\varphi}$ , որտեղից երևում է, որ  $\delta\vec{\varphi}$  -ն անվերջ փոքր պտույտի անկյան վեկտորն է:

11. Դիցուք  $\hat{\alpha}$  -ն մեափոխության մաթրիցն է: Օրթոգոնալության  $\alpha_{ik} \alpha_{im} = \delta_{km}$  պայմանը զրելով  $\hat{\alpha} \hat{\alpha}^{-1} = \hat{1}$  մաթրիցական տեսքով, կունենանք  $\det(\hat{\alpha} \hat{\alpha}) = 1$ , որտեղից կհետևի, որ  $\det(\hat{\alpha} \hat{\alpha}) = \det \hat{\alpha} \cdot \det \hat{\alpha} = (\det \hat{\alpha})^2 = 1$

Այսպիսով  $\det \hat{\alpha} = 1$

Ապացուցենք, որ պտույտների ձևափոխության դեպքում  $\det \hat{\alpha} = +1$ :  
 Իրոք,  $\det \hat{\alpha}$  -ն պատման անկյան անընդհատ փոփոխիչ է, որը պտույտի անկյան զրո արժեքի դեպքում /նույնական ձևափոխություններ/ ունի  $+1$  արժեք: Հետևաբար, վերջավոր անկյունով պտույտի դեպքում ևս տեղի կունենա  $\det \hat{\alpha} = +1$  առնչությունը  $-1$  արժեք ընդունելու դեպքում  $\det \hat{\alpha}$  փոփոխիչի անապաքան իրականությունը:

Կոորդինատական առանցքների արտացոլմանը համապատասխանող  $\hat{\alpha}$  մատրիցը կլինի անկյունագծային, որը կունենա  $+1$  կամ  $-1$  անկյունագծային տարրեր՝ կախված այն բանից, թե տվյալ կոորդինատական առանցքը արտացոլվել է  $(-1)$ , թե ոչ  $(+1)$ : Այնպես որ դետերմինանտը կլինի  $\det \hat{\alpha} = (-1)^{\tau}$ , որտեղ  $\tau$  -ը արտացոլված կոորդինատական առանցքների թիվն է: Հասկանալի է, որ  $\det \hat{\alpha} = +1$ ՝ զույգ թվով առանցքների արտացոլման դեպքում և  $\det \hat{\alpha} = -1$ ՝ կենտ թվով առանցքների արտացոլման դեպքում:

17ա/ Դետերմինանտի սահմանման համաձայն  $\det \hat{a} = \sum (-1)^{\tau\{i,j,k\}} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$ , որտեղ  $\tau\{i,j,k\}$  -ը  $i, j, k$  եռյակի խախտումների թիվն է 1, 2, 3 հաջորդականության համեմատությամբ: Լեի-2րվիտի սիմվոլի օգնությամբ այն կներկայացվի  $\det \hat{a} = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$  տեսքով, որտեղից ելնելով է, որ  $\varepsilon_{ijk} a_{ip} a_{jq} a_{kr} = \varepsilon_{pqr} \det \hat{a}$ : Եթե այժմ բազմապատկենք ստացված արտահայտությունը  $\varepsilon_{pqr}$ -ով և զուգամարենք  $p, q, r$  ինդեքսներով, հաշվի առնելով, որ  $\varepsilon_{pqr} \varepsilon_{pqr} = 3!$ , ապա կստանանք  $\det \hat{a} = 1/3! \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}$

$$\begin{aligned} & p/ \text{ Հանրահաշվական լրացման սահմանումից } A_{mn} = \frac{\partial}{\partial a_{mn}} \det \hat{a} = \\ & = 1/3! \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \left[ a_{jq} a_{kr} \frac{\partial a_{ip}}{\partial a_{mn}} + a_{ip} a_{kr} \frac{\partial a_{jq}}{\partial a_{mn}} + a_{ip} a_{jq} \frac{\partial a_{kr}}{\partial a_{mn}} \right] = \\ & = 1/3! \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} [a_{jq} a_{kr} \delta_{im} \delta_{pn} + a_{ip} a_{kr} \delta_{jm} \delta_{qr} + a_{ip} a_{jq} \delta_{km} \delta_{in}] = \\ & = 1/2! \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} a_{jq} a_{kr}: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18. & (\vec{a} \cdot \vec{a}')(\vec{b} \cdot \vec{b}')(\vec{c} \cdot \vec{c}') + (\vec{a} \cdot \vec{b}')(\vec{b} \cdot \vec{c}')(\vec{c} \cdot \vec{a}') + (\vec{b} \cdot \vec{a}')(\vec{c} \cdot \vec{b}')(\vec{a} \cdot \vec{c}') - \\ & - (\vec{a} \cdot \vec{c}')(\vec{c} \cdot \vec{a}')(\vec{b} \cdot \vec{b}') - (\vec{a} \cdot \vec{b}')(\vec{b} \cdot \vec{a}')(\vec{c} \cdot \vec{c}') - (\vec{b} \cdot \vec{c}')(\vec{c} \cdot \vec{b}')(\vec{a} \cdot \vec{a}'): \end{aligned}$$

19. •  $d^2 \vec{r} / dt^2 = \vec{r} f(r)$  հավասարման երկու կողմերը վեկտորապես բազմապատկելով  $\vec{r}$  վեկտորով, կունենանք

$$\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times \vec{r} f(r) = 0:$$

Հաշվի առնելով, որ  $\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$ , կատանանք  
 $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\ell} = \text{const.}$

20. Նյուտոնի երկրորդ օրենքի համաժայն ուժը հավասար է  
 $\vec{F} = m d\vec{v}/dt$  : Եթե այն ուղղված է հեռագծի շոշափողի ուղղությամբ,  
 ապա զուգահեռ կլինի նաև արագության վեկտորին, այսինքն՝

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha \vec{v}$$

Համեմատականության  $\alpha$  գործակիցը ընդհանուր դեպքում ժամանակի  
 ֆունկցիա է։ Այս հավասարման լուծումը կլինի  $\vec{v} = \vec{C} \varphi(t)$ , որտեղ  
 $\vec{C}$  -ն հաստատուն վեկտոր է, իսկ  $\varphi(t)$  ֆունկցիան  $\dot{\varphi} - \alpha(t)\varphi = 0$   
 հավասարման լուծումն է։ Ինտեգրելով մեկ անգամ ևս, կատանանք  
 $\vec{r} = \vec{C} f(t) + \vec{B}$ , որտեղ  $\vec{B}$  -ն հաստատուն վեկտոր է, իսկ  
 $f(t)$  -ն  $\dot{f} - \alpha(t)f = 0$  հավասարման լուծումն է։  $\vec{r} = \vec{C} f(t) + \vec{B}$   
 հավասարումից երևում է, որ նյութական կետի հեռագիծը  $\vec{C}$  հաստատուն  
 վեկտորի ուղղությամբ ունեցող ուղիղ գիծ է։

21. Նյութական կետի շարժման հավասարումը այս դեպքում ունի  
 $d\vec{v}/dt = -\alpha \vec{r}/r^3$  տեսքը, որտեղ  $\alpha = \text{const.}$ ,  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  -ն արագու-  
 թյունն է, իսկ  $\vec{r}$  -ը՝ շառավիղ վեկտորը։

Բազմապատկելով այս հավասարումը վեկտորապես  $\vec{r}$  -ով և ինտեգ-  
 րելով ըստ  $t$  -ի, կատանանք  $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{\ell} = \text{const}$  : Շարժման  $\vec{\ell}$  ին-  
 տեգրալը ներկայացնելով  $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{v} = r \hat{n} \times d\vec{r}\hat{n}/dt = r^2 \hat{n} \times d\hat{n}/dt$   
 տեսքով, որտեղ  $\hat{n} = \vec{r}/r$  շառավղային ուղղության միավոր վեկտորն է,  
 և հաշվի առնելով, որ  $\hat{n} \cdot d\hat{n} = 1/2 d\hat{n}^2$ , կունենանք

$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\ell} = -\frac{\alpha}{r^2} \hat{n} \times \vec{\ell} = -\alpha \hat{n} \times (\hat{n} \times \frac{d\hat{n}}{dt}) = \alpha \frac{d\hat{n}}{dt}$   
 Զանի որ  $\vec{\ell} = \text{const.}$ , ապա  $\alpha \frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{\ell})$ , և, հետևաբար,

$$\vec{v} \times \vec{\ell} = \alpha \hat{n} + \vec{P}$$

որտեղ  $\vec{P}$  -ն հաստատուն վեկտոր է։ Այստեղից կունենանք

$$(\vec{v} \times \vec{\ell}) \cdot \vec{r} = \alpha r + P r \cos \vartheta$$

որտեղ  $\vartheta$  -ն  $\vec{r}$  շառավիղ վեկտորի կազմած անկյունն է  $\vec{P}$  հաստատուն  
 վեկտորի հետ։ Նկատելով, որ  $(\vec{v} \times \vec{\ell}) \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{\ell} = \ell^2$ ,  
 վերջնականապես կատանանք

$$\vec{r} = \frac{\ell^2/\alpha}{1 + \frac{P}{\alpha} \cos \vartheta}$$



որը, ինչպես հայտնի է վերլուծական երկրաչափության դասընթացից, իրենից ներկայացնում է կոնական հատույթի /էլիպս, պարաբոլա, հիպերբոլա/ հավասարումը քանոային կոորդինատներով:

## § 2. Թեկտորի հասկացությունը և նրա բաղադրիչները ձևափոխության օրենքը

22. Քանի որ  $\{b_i\}$  -ն վեկտոր է, ապա կոորդինատների համակարգի պտույտների ժամանակ նրա բաղադրիչները կձևափոխվեն  $b'_k = \alpha_{ik} b_i$  օրենքով: Տեղադրելով  $b_k$  -ն  $\alpha_k b_k = \alpha'_i b'_i = inv$ : ինվարիանտության պայմանի մեջ, կստանանք  $\alpha_{ik} \alpha_k b'_i = \alpha'_i b'_i$  : Այստեղից հետևվում է, որ  $\alpha'_i = \alpha_{ik} \alpha_k$ , այսինքն  $\{\alpha_i\}$  համախումբը պտույտների ժամանակ ձևափոխվում է որպես վեկտոր:

Արտացոլման ձևափոխության ժամանակ  $b_i$  բաղադրիչները ձևափոխվում են  $b'_i = (-1)^q b_i$  օրենքով, որտեղ  $q = 1$ , եթե  $b_i$  -ն քանոային վեկտոր է, և  $q = 0$ , եթե  $b_i$  -ն փակղովեկտոր է:

$\alpha_i b_i = \alpha'_i b'_i = inv$ : պայմանից կունենանք  $(-1)^q \alpha'_i b_i = \alpha_i b_i$ , այսինքն  $\alpha'_i = (-1)^q \alpha_i$ : Հետևաբար  $\alpha_i$  -ն և  $b_i$  -ն կամ երկուսն էլ քանոային վեկտորներ են, կամ փակղովեկտորներ:

30. Երկրորդ կարգի  $S_{ik}$  համաչափ թեկտորի երկրաչափական պատկերը  $S_{ik} x_i x_k = 1$  էլիպսոիդն է, որը կամայական ձևով կոդմտորոշված է  $x_1, x_2, x_3$  առանցքների նկատմամբ: Եթե  $a, b, c$  -ն էլիպսոիդի կիսաառանցքներն են  $x_1, x_2, x_3$  առանցքների ուղղություններով, ապա  $x_2 = x_3 = 0$  դեպքում կունենանք  $x_1 = a$  և  $S_{ik} a^2 = 1$ , որտեղից  $a = 1/\sqrt{S_{11}}$ : Նման ձևով կստանանք  $b = 1/\sqrt{S_{22}}$  և  $c = 1/\sqrt{S_{33}}$ :

$S_{ik}$  թեկտորի առաջին ինվարիանտը՝

$$I_1 = Sp \hat{S} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = inv.$$

Այսպիսով, թեկտորական էլիպսոիդի երեք փոխուղղահայաց կիսաառանցքների քառակուսիների հակադարձների գումարը կախված չէ կոորդինատական համակարգի կոդմտորոշումից և իրենից ներկայացնում է թեկտորի առաջին կամ գծային ինվարիանտը:

Երկրորդ կամ քառակուսային ինվարիանտը որոշվում է

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{31} & S_{33} \end{pmatrix}$$

առնչությամբ: Պարզենք վերջինիս երկրաչափական իմաստը: Թենզորական էլիպսոիդի  $x_3 = 0$  էլիպսական հատույթի հավասարումը կունենա  $S_{11} x_1^2 + 2 S_{12} x_1 x_2 + S_{22} x_2^2 = 1$  տեսքը: Այդ էլիպսի զլխավոր կիսա-առանցքները կլինեն  $1/\sqrt{\chi_1}$  և  $1/\sqrt{\chi_2}$ , որտեղ  $\chi_1$  և  $\chi_2$  -ը.

$$\det \begin{pmatrix} S_{11} - \lambda & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

հավասարման լուծումներն են, այսինքն որ  $\chi_1, \chi_2 = \det \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$

Այդ հատույթի մակերեսը կլինի  $\sigma_3 = \pi/\sqrt{\chi_1 \chi_2}$ : Նման ձևով  $x_1 = 0$  և  $x_2 = 0$  հորթությունները էլիպսոիդից կհատեն համապատասխանաբար  $\sigma_1 = \pi/\sqrt{\chi_2 \chi_3}$  և  $\sigma_2 = \pi/\sqrt{\chi_1 \chi_3}$  մակերեսներ ունեցող էլիպսներ: Հետևաբար

$$I_2 = \chi_2 \chi_3 + \chi_1 \chi_3 + \chi_1 \chi_2 = \pi^2 \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} \right) = inv:$$

Այսպիսով, Թենզորական էլիպսոիդի կենտրոնով անցնող երեք փոխուղղահայաց կոորդինատական հորթությունների հատույթից առաջացած էլիպսների մակերեսների քառակուսիների հակադարձների գումարը կախված չէ կոորդինատական համակարգի կողմնորոշումից և որոշվում է Թենզորի երկրորդ ինվարիանտով:

Երրորդ ինվարիանտը սահմանվում է որպես  $I_3 = \det(S_{ik})$ : Եթե  $\lambda_1, \lambda_2$  և  $\lambda_3$  -ը  $S_{ik}$  Թենզորի զլխավոր արժեքներն են, իսկ  $a_0, b_0$  և  $c_0$  -ն զլխավոր կիսաառանցքները, ապա  $\lambda_1 = 1/a_0^2$ ,  $\lambda_2 = 1/b_0^2$  և  $\lambda_3 = 1/c_0^2$ : Հետևաբար՝

$$I_3 = \det(S_{ik}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{1}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}$$

Հիշելով, որ էլիպսոիդի ծավալը  $V = 4/3 \pi a_0 b_0 c_0$ , կունենանք  $I = (4/3 \pi)^2 / V^2$ : Այսպիսով, Թենզորի երրորդ ինվարիանտը կապված է Թենզորական էլիպսոիդի ծավալի հետ, որը նույնն է բոլոր կոորդինատական համակարգերում:

31. Բնութագրական մակերևույթները կլինեն,  $m/1/\sqrt{\lambda}$  շառավիղով  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1/\lambda$  գնդաձևեր, որոնց կենտրոնները համընկնում են կոորդինատական համակարգի սկզբնակետի հետ:  $e/a_i b_j x_i x_j = 1$ : Կոորդինատների ձևափոխության միջոցով այս հավասարումը կարելի է բերել  $x_1' x_2' = 1$  տեսքի, այսինքն այն հիպերբոլական գլանի մակերևույթի հավասարումն է:

33.  $m/T_{ik}$  Թենզորի զլխավոր արժեքները և զլխավոր առանցքները որոշվում են  $(T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) A_k = 0$  հավասարումների համակարգից:

Ոչ զրոյական լուծում կունենա այս համակարգը, եթե  $\det(T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0$  կամ, տվյալ դեպքում  $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda - 1) = 0$  : Այս բնութագրական հավասարումից կորոշվեն  $\lambda^{(1)} = 1$ ,  $\lambda^{(2)} = 3 - \sqrt{10}$ ,  $\lambda^{(3)} = 3 + \sqrt{10}$  զլիավոր արժեքները :  $\lambda^{(1)}$  զլիավոր արժեքի համար  $(T_{ik} - \lambda^{(1)} \delta_{ik}) A_k^{(1)} = 0$  հավասարումների համակարգը կառ  $\vec{A}^{(1)} = (A_1^{(1)}, 0, 0)$  լուծում զլիավոր առանցքի համար, այսինքն նախնական կոորդինատական համակարգի  $x_1$  առանցքը զլիավոր առանցք է : Մյուս երկու զլիավոր առանցքների համար կստացվեն

$$\vec{A}^{(2)} = (0, A_2^{(2)}, -\frac{\sqrt{10}-1}{3} A_2^{(2)})$$

$$\vec{A}^{(3)} = (0, A_2^{(3)}, \frac{\sqrt{10}+1}{3} A_2^{(3)})$$

որտեղ  $A_1^{(1)}$ ,  $A_2^{(2)}$ ,  $A_2^{(3)}$  մեծությունները կամայական են :

Նկատենք, որ թեւզորի  $x_1'$ ,  $x_2'$ ,  $x_3'$  զլիավոր առանցքների համակարգը, այս դեպքում, ստացվում է  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  ինչ համակարգը  $x_1$  առանցքի շուրջը  $\varphi$  անկյունով պտտելու դեպքում, որտեղ  $\varphi \sim$  է  $\frac{1}{3} \varphi = -(\sqrt{10}-1)/3$  հավասարման լուծումն է :

$$\text{բ/ } \lambda^{(1)} = (3 - \sqrt{17})/2, \lambda^{(2)} = (3 + \sqrt{17})/2, \lambda^{(3)} = 3$$

$$\vec{A}^{(1)} = (A_1^{(1)}, -\frac{\sqrt{17}-1}{4} A_1^{(1)}, 0), \vec{A}^{(2)} = (A_1^{(2)}, \frac{\sqrt{17}+1}{4} A_1^{(2)}, 0)$$

$$\vec{A}^{(3)} = (0, 0, A_3^{(3)}), \text{ որտեղ } A_1^{(1)}, A_1^{(2)} \text{ և } A_3^{(3)} - \text{ը}$$

կամայական մեծություններ են :

$$\text{գ/ } \lambda^{(1)} = 1, \lambda^{(2)} = 1 - \sqrt{3}, \lambda^{(3)} = 1 + \sqrt{3} :$$

$$\vec{A}^{(1)} = (A_1^{(1)}, -A_1^{(1)}, A_1^{(1)}), \vec{A}^{(2)} = (A_1^{(2)}, (2 - \sqrt{3})A_1^{(2)}, (1 - \sqrt{3})A_1^{(2)}),$$

$$\vec{A}^{(3)} = (A_1^{(3)}, (2 + \sqrt{3})A_1^{(3)}, (1 + \sqrt{3})A_1^{(3)}) \text{ որտեղ } A_1^{(1)}, A_1^{(2)} \text{ և}$$

$A_1^{(3)}$  -ը կամայական մեծություններ են :

34. Դիցուք  $x_3$  առանցքը նյութական կետերի համակարգի համաշափույթան առանցքն է : Դա նշանակում է, որ  $m_i$  զանգված և  $x_i^{(1)}$ ,

$$x_i^{(2)}, x_i^{(3)}$$
 կոորդինատներ ունեցող յուրաքանչյուր կետի

համար համակարգում կզանվի մեկ այլ կետ, որն ունի նույն  $m_j = m_i$  զանգվածը և  $x_i^{(j)} = -x_i^{(1)}$ ,  $x_i^{(2)} = -x_i^{(1)}$ ,  $x_i^{(3)} = x_i^{(1)}$  կոորդինատները : Այս դեպքում իներցիայի մոմենտների  $I_{pq} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^{(p)})^2 \delta_{pq} - x_i^{(p)} x_i^{(q)}$  թեւզորի  $I_{11}$  բաղադրիչը կլինի  $I_{11} = -\sum_{i=1}^n m_i x_i^{(1)} x_i^{(2)}$  : Ըստ բոլոր նյութական կետերի տարվող զումարը բաժանենք  $x_3$  առանցքի նկատմամբ համա-

չափ կետերով տարվող երկու զուամրների

$$I_{13} = - \sum_{i=1}^{N/2} m_i x_i^{(i)} x_3^{(i)} - \sum_{j=1}^{N/2} m_j x_1^{(j)} x_3^{(j)}$$

վերն ասվածից երևում է, որ այս երկու զուամրները մեծությամբ հավասար են իրար, իսկ նշանով հակառակ: Հետևաբար,  $I_{13} = 0$  : ժիշտ նման ձևով կստանանք  $I_{23} = 0$  Այսպիսով, նշված համաչափությունն ունեցող նյութական կետերի համակարգի ինտեգրայի մոմենտների թեքությունը կունենա

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

տեսքը, որտեղից երևում է, որ  $x_3$  առանցքը նրա գլխավոր առանցքն է:

35.  $T_{ik}$  թենզորի հակադարձ  $T_{ik}^{-1}$  թենզորը բավարարում է  $T_{ij} T_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$  առնչություններին: Բազմապատկելով այս հավասարումը  $T_{mi}$  տարրի  $A_{mi}$  հանրահաշվական լրացումով և օգտվելով հանրահաշվական լրացման  $A_{mi} T_{ij} = \delta_{mj} \det \hat{T}$  հայտնի հատկությունից, կստանանք  $\delta_{mj} \det \hat{T} T_{jk}^{-1} = A_{mi} \delta_{ik}$ , որտեղից կունենանք

$$T_{mk}^{-1} = A_{mk} / \det \hat{T}$$

Այստեղից հետևում է, որ հակադարձ թենզորի գոյության համար անհրաժեշտ է, որպեսզի  $\det \hat{T} \neq 0$  : Մասնավորապես, եթե  $T_{ik}$ -ն գլխավոր առանցքների բերված համաչափ թենզոր է, այսինքն  $T_{ik} = \lambda_i \delta_{ik}$  /այստեղ  $i$  կրկնվող ինդեքսով զուամրում չկա/, ապա  $A_{mk} = \delta_{mk} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_m}$  իսկ  $\det \hat{T} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , այնպես որ  $T_{mk}^{-1} = \frac{1}{\lambda_m} \delta_{mk} / m$  ինդեքսով զուամրում չկա/:

38. Կոորդինատների այլ համակարգի անցնելու ժամանակ ծավալի տարրը ձևափոխվում է  $dx'_1 dx'_2 dx'_3 = J dx_1 dx_2 dx_3$ , որինքով, որտեղ

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

ձևափոխության Յակոբիանն է: Կոորդինատների  $x'_i = \alpha_{ik} x_k$  ձևավորության ժամանակ  $J = \det \hat{\alpha}$  : Այսպիսով՝

$$V' = \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 = J \iiint dx_1 dx_2 dx_3 = \det \hat{\alpha} V$$

Համաձայն 11 խնդրի արդյունքների  $\det \hat{\alpha} = +1$  պտույտների ձևափոխության ժամանակ և  $\det \hat{\alpha} = -1$  կոորդինատական երեք առանցքների միաժամանակյա արտացոլման ժամանակ, իսկ դա նշանակում է, որ  $V$  մեծությունը զրո կարգի փակղոթենզոր է, կամ ուղղակի, փակղոսկալյար:

39.  $T'_{ik} = \hat{\alpha}_{im} \hat{\alpha}_{kn} \det \hat{\alpha} T_{mn}$ , այսինքն  $\{T_{ik}\}$  հափոխումը երկրորդ կարգի փակղոթենզոր է:

43. Խնդրում նշված համաչափության հատկությունից հետևում է, որ  $T_{ijk} = T_{jik} = -T_{jki} = -T_{kji} = T_{kij} = T_{ikj} = -T_{ij k}$  այսինքն  $T_{ijk} = 0$ :

44. Նկատելով, որ  $x_i x_j x_k$  արտադրյալը համաչափ է  $i, j, k$  ինդեքսների կամայական անդափոխության նկատմամբ և  $T_{ijk} x_i x_j x_k = 0$  առնչության մեջ միասեռակ  $x_i x_j x_k$  անդամներ պարունակող զումարելիներից ընդհանուր հանելով այն, կունենանք

$$(T_{jik} + T_{ijk} + T_{kij} + T_{jki} + T_{kji} + T_{kij}) x_i x_j x_k = 0:$$

Քանի որ  $T_{ijk}$  -ն համաչափ է առաջին երկու ինդեքսների նկատմամբ, ապա

$$(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}) x_i x_j x_k = 0:$$

Հաշվի առնելով  $\{x_i\}$  վեկտորի կամայական լինելը, կստանանք

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0$$

46. Այն, որ  $\hat{E}_{ijk}$  -ն երրորդ կարգի փակղոթենզոր է, հետևում է, օրինակ, երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի հետևյալ ներկայացումից  $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \hat{E}_{ijk} a_j b_k$  : Իրոք, եթե  $\vec{a}$  -ն և  $\vec{b}$  -ն վեկտորներ են,  $\vec{a} \times \vec{b}$  -ն կլինի փակղովեկտոր, իսկ  $\hat{E}_{ijk}$  -ն երրորդ կարգի փակղոթենզոր:

Այժմ ցույց տանք, որ  $\hat{E}_{ijk}$  -ն բոլոր դեկարտյան կոորդինատական համակարգերում ունի նույն բաղադրիչները:  $\hat{E}_{ijk}$  մեծությունները ձևափոխվում են  $\hat{E}_{ijk} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} \hat{E}_{pqr}$  օրենքով, որտեղից կունենանք  $\hat{E}_{123} = \alpha_{1p} \alpha_{2q} \alpha_{3r} \hat{E}_{pqr} = \det \hat{\alpha}$  /տես 17 խնդրի լուծումը/: Քանի որ պտույտի ձևափոխությունների ժամանակ  $\det \hat{\alpha} = +1$  /տես 11 խնդրի լուծումը/, ուստի կունենանք

$$\varepsilon'_{123} = \varepsilon'_{231} = \varepsilon'_{312} = -\varepsilon'_{132} = -\varepsilon'_{213} = -\varepsilon'_{321} = 1$$

Այսպիսով,  $\varepsilon'_{ijk}$  բաղադրիչները համընկնում են  $\varepsilon_{ijk}$  բաղադրիչներին հետ:

47. Երկրորդ կարգի  $A_{ik}$  հակահամաչափ թենզորն ունի զրոյից տարբեր 6 բաղադրիչներ, որոնցից միայն երեքն են իրարից անկախ /  $A_{ik} = -A_{ki}$  պայմանի շնորհիվ/:  $a_1 = A_{23}$ ,  $a_2 = A_{31}$ ,  $a_3 = A_{12}$  երեք մեծությունների համախումբը կարելի է ներկայացնել Լեի-Չիվիտի սիմվոլի օգնությամբ՝  $a_i = 1/2 \varepsilon_{ijk} A_{jk}$ : Քանի որ  $A_{jk}$  -ն երկրորդ կարգի թենզոր է, իսկ  $\varepsilon_{ijk}$  -ն երրորդ կարգի փակդոթենզոր, ապա  $a_i$  -ն կլինի փակդոթենզոր կամ աքսիալ վեկտոր: Այսպիսով  $A_{ik}$  հակահամաչափ թենզորը համարժեք է աքսիալ վեկտորին:  $a_i$  -ն կոչվում է  $A_{ik}$  թենզորի դուալ վեկտոր:

$$50. \text{ ա/ } \alpha^2(\vec{\beta} \cdot \vec{\epsilon}) + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})(\vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon}),$$

$$\text{բ/ } [(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\epsilon}][(\vec{\alpha}' \times \vec{\beta}') \times \vec{\epsilon}']:$$

52. ա/ Քանի որ խնդրի պայմանի համաժայն վեկտորի բաղադրիչները բոլոր կոորդինատական համակարգերում պետք է նույնը լինեն, ապա կամայական պտույտի ժամանակ  $A'_i = A_i$ , այսինքն  $A'_x = A_x$ ,  $A'_y = A_y$ ,  $A'_z = A_z$ : Կոորդինատական համակարգը  $\Sigma$  առանցքի շուրջը  $\pi$  անկյունով պտտելու դեպքում կունենանք  $A'_x = -A_x$ ,  $A'_y = -A_y$ ,  $A'_z = A_z$ , որտեղից կհետևի, որ  $A_x = A_y = 0$ : Նման ձևով  $\Sigma$  առանցքի շուրջը  $\pi$  անկյունով պտույտ կատարելու դեպքում կունենանք  $A_y = A_z = 0$ , այսինքն  $\vec{A} = 0$ : Այսպիսով, միակ վեկտորը, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր կոորդինատական համակարգերում, զրոյական վեկտորն է:

բ/ Երկրորդ կարգի  $T_{ik}$  կամայական թենզոր կարելի է ներկայացնել  $T = 1/2(T_{ik} + T_{ki}) + 1/2(T_{ik} - T_{ki})$  տեսքով, որտեղ առաջին անդամը համաչափ թենզոր է, իսկ երկրորդը՝ հակահամաչափ: Քանի որ երկրորդ կարգի հակահամաչափ թենզորը համարժեք է փակդոթենզորի, իսկ բոլոր կոորդինատական համակարգերում միևնույն բաղադրիչներն ունեցող վեկտորը /փակդոթենզորը/ զրոյական վեկտորն է, ապա երկրորդ կարգի միակ հակահամաչափ թենզորը, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր կոորդինատական համակարգերում, կլինի զրոյական թենզորը: Մնում է գտնել երկրորդ կարգի այնպիսի համաչափ  $S_{ik}$  թենզոր, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր կոորդինատական համակարգերում:

Յուրաքանչյուր  $S_{ik}$  համաչափ թենզորի համապատասխանում է  $S_{ik} x_i x_k = 1$  հավասարումով բնութագրվող մակերևույթ

/թենզորական էլիպսոիդ/։ Թենզորի բաղադրիչները նույնը կլինեն բո-  
լոր կոորդինատական համակարգերում, եթե թենզորական էլիպսոիդը  
ունենա կենտրոնական համաչափություն կոորդինատական համակարգի  
ստույանների նկատմամբ։ Դա կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում,  
եթե էլիպսոիդը իրենից ներկայացնի սփերա, այսինքն  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \lambda^{-1}$   
Այս հավասարումը ներկայացնելով  $\lambda \delta_{ik} x_i x_k = 1$  տեսքով և համեմա-  
տելով թենզորական մակերևույթի հավասարման ընդհանուր տեսքի հետ,  
կունենանք  $S_{ik} = \lambda \delta_{ik}$ ։

զ/ Երրորդ կարգի թենզորի ձևափոխության  $T'_{ijk} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} T_{pqr}$   
օրենքից օգտվելով, կարելի է ցույց տել, որ բոլոր կոորդինատական  
համակարգերում միատեսակ բաղադրիչներ ունեցող երրորդ կարգի թեն-  
զորը անպայման կլինի լրիվ հակահամաչափ։ Իրոք, կոորդինատական  
համակարգի  $\Sigma$  առանցքի շուրջը  $\pi/2$  անկյունով պտույտի

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

մատրիցի դեպքում  $T'_{ijk} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{kr} T_{pqr}$  պայմանը  $T_{123}$  բաղադրի-  
չի համար կբերի  $T_{123} = \alpha_{1p} \alpha_{2q} \alpha_{3r} T_{pqr} = \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} T_{213} = -T_{213}$  առնչության։  
ժիշտ նման ձևով օգտվելով  $x$  և  $y$  առանցքների շուրջը  $\pi/2$  անկ-  
յունով պտույտների ձևափոխություններից կարելի է ցույց տալ մյուս  
ինդեքսների տեղափոխության նկատմամբ  $T'_{ijk}$  ռի հակահամաչափությու-  
նը։ Այսպիսով, բոլոր համակարգերում նույն բաղադրիչներն ունեցող  
երրորդ կարգի թենզորի համար  $T_{123} = -T_{213} = T_{231} = -T_{321} = T_{312} = -T_{132}$ ։  
Յուրյց տանք, որ երկու ինդեքսների հավասարության դեպքում  $T_{ijk}$  ռն  
զրո է։  $T_{112}$  բաղադրիչի զրո լինելը ցույց տալու համար օգտվենք  $\Sigma$   
առանցքի շուրջը  $\pi$  անկյունով պտույտի ձևափոխությունից, որի հա-  
մար

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Այս դեպքում  $T'_{112} = \alpha_{11} \alpha_{11} \alpha_{22} T_{112} = -T_{112} = 0$ ։ Նման ձևով  
կարելի է ապացուցել կրկնակի ինդեքսներ ունեցող մյուս բաղադրիչ-  
ների զրո լինելը։ Նշանակելով  $T_{123} \equiv A$  մեծությունը, կունենանք  
 $T_{ijk} = A \varepsilon_{ijk}$ , այն ինչ պահանջվում էր ապացուցել։

դ/ Կարելի է ցույց տալ, որ չորրորդ կարգի  $T'_{ijkl}$  թենզորը,  
որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր կոորդինատական համակարգերում,  
ունի զրոյից տարբեր միայն այնպիսի բաղադրիչներ, որոնցում չորս ին-  
դեքսները զույգ առ զույգ իրար հավասար են։ Այդ պայմանին բավարա-  
րող թենզորները կունենան  $\delta_{ik} \delta_{lm}$ ,  $\delta_{il} \delta_{km}$ ,  $\delta_{im} \delta_{kl}$  կառուց -

վածք: Ընդհանուր դեպքում

$$T_{ik\ell m} = A \delta_{ik} \delta_{\ell m} + B \delta_{i\ell} \delta_{km} + C \delta_{im} \delta_{k\ell},$$

որտեղ  $A, B, C$  - ն կամայական հաստատուններ են:

53. Միջին արժեքի սահմանման համաձայն

$$\bar{n}_i = \frac{1}{4\pi} \int n_i d\Omega, \quad \overline{n_i n_k} = \frac{1}{4\pi} \int n_i n_k d\Omega$$

և այլն: Այս ինտեգրալների անմիջական հաշվարկման փոխարեն այստեղ պետք է օգտվել նշված մեծությունների փոխակերպումային հասկոնթյուններից: Նկատենք, որ  $\bar{n}_i$ ,  $\overline{n_i n_k}$ ,  $\overline{n_i n_k n_\ell}$ ,  $\overline{n_i n_k n_\ell n_m}$  մեծությունները համապատասխանաբար առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ կարգի թենզորներ են, որոնք նույնն են բոլոր կոորդինատական համակարգերում:

ա/ Օգտվելով 52ա/ խնդրի արդյունքից, կգրենք  $\bar{n}_i = 0$ , քանի որ միայն զրոյական վեկտորն է, որ ունի նույն բաղադրիչները բոլոր կոորդինատական համակարգերում:

բ/  $\overline{n_i n_k}$  թենզորը համաչափ թենզոր է, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր համակարգերում, ուրեմն՝  $\overline{n_i n_k} = \lambda \delta_{ik}$ : Նկատելով, որ  $\overline{n_i n_i} = \overline{n^2} = 1 = 3\lambda$ , վերջնականապես կստանանք  $\overline{n_i n_k} = 1/3 \delta_{ik}$ :

գ/ Քանի որ  $\overline{n_i n_k n_\ell}$  մեծությունը երրորդ կարգի համաչափ թենզոր է, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր համակարգերում, իսկ երրորդ կարգի միակ ոչ զրոյական թենզորը, որի բաղադրիչները նույնն են բոլոր համակարգերում  $\mathcal{E}_{ik\ell}$  լրիվ հակահամաչափ թենզորն է, ուստի

$$\overline{n_i n_k n_\ell} = 0$$

դ/ Օգտվելով 52 դ/ խնդրի պատասխանից, կգրենք

$$\overline{n_i n_k n_\ell n_m} = A \delta_{ik} \delta_{\ell m} + B \delta_{i\ell} \delta_{km} + C \delta_{im} \delta_{k\ell},$$

որտեղ  $A, B, C$  - ն առայժմ անհայտ հաստատուններ են: Քանի որ

ծախ կողմը լրիվ համաչափ թենզոր է, ապա այս դեպքում  $A=B=C$ :

Ուրեմն՝  $\overline{n_i n_k n_\ell n_m} = A (\delta_{ik} \delta_{\ell m} + \delta_{i\ell} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{k\ell})$ :  $A$  հաստատունը կորոշենք մեկ մասնավոր դեպքի արդյունքից օգտվելով՝

$$\overline{n^2 n^2} = (\overline{n^2})^2 = 1 = A (\delta_{ii} \delta_{\ell\ell} + \delta_{i\ell} \delta_{i\ell} + \delta_{i\ell} \delta_{i\ell})$$

$$= A (9 + 3 + 3) = 15A:$$

Այսպիսով՝  $\overline{n_i n_k n_\ell n_m} = 1/15 (\delta_{ik} \delta_{\ell m} + \delta_{i\ell} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{k\ell})$ :

$$54. \text{ ա/ } 1/3 \alpha^2, \text{ բ/ } 1/3 \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}, \text{ գ/ } 1/3 \vec{\alpha}, \text{ դ/ } 2/3 \alpha^2,$$

$$\text{ե/ } 2/3 \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \quad \text{զ/ } 1/15 [(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})(\vec{\epsilon} \cdot \vec{\delta}) + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\epsilon})(\vec{\beta} \cdot \vec{\delta}) + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta})(\vec{\beta} \cdot \vec{\epsilon})]:$$



$$55. \vec{n}^2, \vec{n}'^2, \vec{l}^2, \vec{n} \cdot \vec{n}', (\vec{n} \cdot \vec{l})^2, (\vec{n}' \cdot \vec{l})^2, (\vec{n} \times \vec{n}') \cdot \vec{l}, (\vec{n} \cdot \vec{l})(\vec{n}' \cdot \vec{l});$$

$$56. \omega / \vec{n} \cdot \vec{l}, \vec{n}' \cdot \vec{l}, \text{ և } \vec{n}_1 \cdot (\vec{n}_2, \vec{n}_3);$$

$$58. \vartheta = \operatorname{arctg}(iV) = i \operatorname{arctgh}(V);$$

## ԳԼՈՒԽ 2. ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

§ 1. Սկալյար դաշտ: Ածանցյալ ըստ ուղղություն:

Գրադիենտ

$$60. \omega / x^2 + y^2 - z = C \quad - \text{պարաբոլոիդների ընտանիք},$$

$$\text{ը/ } x + 2y - z = C \quad - \text{զուգահեռ հարթությունների ընտանիք},$$

$$\alpha / x^2 + y^2 + z^2 = C^2 \quad - \text{համակենտրոն գնդաձևերի ընտանիք}:$$

61. Ք սկալյար ֆունկցիայի ածանցյալ ըստ  $\vec{l}$  ուղղության անվանում են  $\partial\varphi/\partial l = \vec{l}/l \operatorname{grad}\varphi$ : Այս խնդրի դեպքում  $\vec{l} = \vec{M}_0\vec{M}_1 = (1, 4, 0)$ , այնպես որ  $\vec{l}/l = \hat{e}_x/1/\sqrt{17} + \hat{e}_y/4/\sqrt{17}$ : Հաշվի առնելով, որ

$$\operatorname{grad}(xyz) = y\hat{e}_x + x\hat{e}_y + z\hat{e}_z, \quad M(1, -1, 1) \text{ կետում կունենանք}$$

$$\operatorname{grad}(xyz)|_{M_0} = -\hat{e}_x + \hat{e}_y - \hat{e}_z: \text{ Այսպիսով } \frac{\partial\varphi}{\partial l}|_{M_0} = -1/\sqrt{17} + 4/\sqrt{17} = 3/\sqrt{17}$$

$\partial\varphi/\partial l|_{M_0}$  ածանցյալի դրական լինելուց հետևում է, որ  $\vec{M}_0\vec{M}_1$  ուղղությամբ  $\varphi = xyz$  սկալյար դաշտը աճում է:

$$62. \partial\varphi/\partial z = \vec{z}/z \operatorname{grad} \sin z = \vec{z}/z (\sin z)' \operatorname{grad} z = \cos z:$$

63. Օգտվելով այն հանգամանքից, որ սկալյար դաշտի գրադիենտը միշտ ուղղված է ավյալ դաշտի մակարդակի մակերևույթին ուղղահայաց ունի այդ դաշտի ժամանակ ուղղությունը, կգրենք:

$$\hat{n} = \operatorname{grad}\varphi / |\operatorname{grad}\varphi| = (2x\hat{e}_x + 2y\hat{e}_y - \hat{e}_z) / \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}:$$

$$65. \operatorname{grad}(\vec{l} \cdot \vec{z}) = \vec{l}, \quad (\vec{l} \cdot \vec{z})\vec{z} = \vec{l}:$$

$$67. \operatorname{grad}(1/\rho) = -\vec{\rho}/\rho^3 = -(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y)/(x^2 + y^2)^{3/2}$$

$$69. \operatorname{grad}\varphi(\vec{z}) = \vec{z}/z \varphi'(z),$$

$$(\vec{l} \cdot \vec{z})\varphi(z)\vec{z} = \vec{l} \varphi(z) + \frac{\vec{z}(\vec{l} \cdot \vec{z})}{z} \varphi'(z):$$

$$70. \operatorname{grad}(\vec{A}(r) \vec{r}) = \vec{A} + \vec{r}/r (\vec{r} \cdot \vec{A}'),$$

$$\operatorname{grad}(\vec{A}(r) \vec{B}(r)) = \vec{r}/r (\vec{A}' \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{B}'),$$

$$(\vec{\ell} \cdot \vec{v}) \varphi(r) \vec{A}(r) = (\vec{\ell} \cdot \vec{r})/r (\varphi' \vec{A} + \varphi \vec{A}').$$

$$71. \operatorname{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{p}}{r^3} (2 \hat{e}_r \cos \vartheta + \hat{e}_\vartheta \sin \vartheta):$$

$$72. y = -x + 2\pi n, \quad \text{որտեղ } n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm \dots$$

§ 2. Վեկտորական դաշտ

2.1. Վեկտորական զծեր: Հոսք: Դիվերգենցիա

73.  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտի վեկտորական զծերի դիվերգենցիալ հավասարումներն ունեն

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

տեսքը, որտեղից հետևում է, որ տեղի ունի  $d\vec{r} = \vec{A} dt$  առնչությունը: Այս խնդրի դեպքում  $d\vec{r} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt$  : Վերջին հավասարման երկու կողմերը բազմապատկելով սկալյար ձևով  $\vec{\omega}$  վեկտորով և օգտագործելով խառը արտադրյալի հատկությունը, կունենանք

$$\vec{\omega} \cdot d\vec{r} = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt = \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) dt = 0:$$

Նկատի ունենալով, որ  $\vec{\omega} = \text{const.}$ , կստանանք  $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \text{const.}$  : Նման ձևով բազմապատկելով նախնական հավասարման երկու կողմերը սկալյար ձևով  $\vec{r}$  վեկտորով, կունենանք  $\vec{r} \cdot \vec{r} = \text{const.}$  :

Այսպիսով,  $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \text{const.}$  հարթությունների և  $r^2 = \text{const.}$  գնդաձևերի համան զծերը իրենցից կներկայացնեն  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  վեկտորական դաշտի վեկտորական զծերը:  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ :

$$74. \text{ա/ } x = C_1 y, \quad x = C_2 z$$

$$\text{բ/ } \left. \begin{aligned} \frac{x}{q_1} &= \frac{y}{q_2} + C_3 \\ \frac{x}{q_1} &= \frac{z}{q_3} + C_4 \end{aligned} \right\}:$$

Այստեղ  $C_1, C_2, C_3, C_4$  -ը կամայական հաստատուններ են:

$$75. 2:$$

$$76. \left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= C_1 \\ z &= C_2 \end{aligned} \right\}:$$

Այսինքն, վեկտորական զանգված  $\vec{z}$  առանցքին ուղղահայաց հարթությունների մեջ ընկած շրջանագծեր են, որոնց կենտրոնները գտնվում են այդ առանցքի վրա:

$$77. \operatorname{div} \vec{z} = 3, \quad \operatorname{div}(\varphi(z) \vec{z}) = 3 \varphi + z \varphi',$$

$$\operatorname{div}(\varphi(z) \vec{A}(z)) = \frac{\varphi'}{z} (\vec{z} \cdot \vec{A}) + \frac{\varphi}{z} (\vec{z} \cdot \vec{A}')$$

$$78. \varphi(z) \stackrel{!}{=} C/z^3$$

$$79. \operatorname{div}(\vec{a} \cdot \vec{z}) \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \operatorname{div}(\vec{a} \cdot \vec{z}) \vec{z} = 4(\vec{a} \cdot \vec{z}),$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{z}) = 0, \quad \operatorname{div}[\varphi(z)(\vec{a} \times \vec{z})] = 0,$$

$$\operatorname{div}[\vec{z} \times (\vec{a} \times \vec{z})] = -2(\vec{a} \cdot \vec{z})$$

82.  $x^2 + y^2 - z = 0$  պարաբոլոիդի արտաքին նորմալի միավոր վեկտորը որոշվում է  $\vec{n} = (2x \hat{e}_x + 2y \hat{e}_y - \hat{e}_z) / \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$  առնչությամբ /տես. 63 խնդրի լուծումը/:  $\vec{A} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z$  վեկտորի հոսքի համար կունենանք

$$\Phi = \int_S \frac{2x^2 + 2y^2 + 3z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} dS$$

Օգտագործելով մակերևույթի տարրի համար  $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$  արտահայտությունը, մակերևութային ինտեգրալը կբերենք  $\Phi = 5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (x^2 + y^2) dx dy$  կրկնակի ինտեգրալի, որտեղ ինտեգրման  $G$  տիրույթը  $x^2 + y^2 \leq 4$  շրջանն է:

Քեռային կոորդինատական համակարգում այդ ինտեգրալը կբերվի  $\Phi = 5 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr$  տեսքի, որտեղից կստանանք  $\Phi = 40\pi$

$$83. \Phi = \pi/2$$

$$84. \Phi = 12\pi R^5/5$$

$$85. \Phi = 3V$$

$$86. \Phi = 3/2$$

2.2. Վեկտորական դաշտի զեռային ինտեգրում:

Երջապտույտ : Ռոտոր

87.  $-\pi a^2$ :

88.  $w/(z_2^2 - z_1^2)/2$ ,  $p/$   $\ln z_2/z_1$ ,  $q/4z(1/z_1^2 - 1/z_2^2)$ :

91. Երջապտույտի առհասարակ իմաստային

$$C = \oint \vec{A} d\vec{r} = \oint (-y^2 dx + x^2 dy):$$

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  էլիպսի պարամետրական հավասարումներն ունեն  
հետևյալ տեսքը

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

որտեղից  $dx = -a \sin t dt$ ,  $dy = b \cos t dt$ . Հաշվի առնելով վե-  
րոհիշյալը, երջապտույտի իմաստը կստանանք

$$C = ab \int_0^{2\pi} (b^2 \sin^4 t + a^2 \cos^4 t) dt = 3/4 \pi ab (a^2 + b^2):$$

93. Հեղուկի հավասարակշռության  $\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}$  հավասարման երկու  
կողմերի վրա կիրառենք ռոտ օպերատորը՝

$$\text{rot grad } p = \text{rot } \rho \vec{f}$$

Քանի որ ցանկացած  $\varphi$  սկալյար ֆունկցիայի իմաստը  $\text{rot grad } \varphi = 0$ ,  
ապա կունենանք

$$\text{rot } \rho \vec{f} = \rho \text{rot } \vec{f} + \text{grad } \rho \times \vec{f} = 0:$$

Բազմապատկելով ստացված հավասարման երկու կողմերը  $\vec{f}$  վեկտորով  
սկալյար ձևով և հաշվի առնելով, որ  $\vec{f} \cdot (\vec{\nabla} p \times \vec{f}) = 0$ , կստանանք  
 $\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{f} = 0$ :

Այսպիսով, հեղուկի հավասարակշռությանը կարող է տեղի ունե-  
նել միայն այնպիսի  $\vec{f}$  ուժադաշտում, որի ուժագծերը ուղղահայաց են  
ռոտ  $\vec{f}$  վեկտորական դաշտի վեկտորական զեռերին:

94.  $\vec{\omega}$  անկյունային արագությանը պատկող պինդ մարմնի արա-  
գությունների դաշտը որոշվում է  $\vec{\nabla} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  բաժանով: Հաշվի առ-  
նելով, որ այս ինդուկցիայի  $\vec{\omega} = \text{const.}$ , ռոտ  $\vec{\nabla}$  մեծության իմաստը կստա-  
նանք  $\text{rot } \vec{\nabla} = \text{rot } (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\omega}$ :

95.  $\vec{\omega} = 1/2 \text{ rot } \vec{\nabla} = -z/2 \hat{e}_z$ ,

96.  $f(x, z) = xz + x + z + \text{const.}$ :

98.  $\text{rot } \vec{r} = 0$ ,  $\text{rot } (\varphi(r) \vec{r}) = 0$ ;
99.  $\text{rot } (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$ ,  $\text{rot } (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r} = \vec{a} \times \vec{r}$ ,  
 $\text{rot } (\vec{a} \times \vec{r}) = 2 \vec{a}$ ,  $\text{rot } \varphi(r) (\vec{a} \times \vec{r}) = 0$ ,  
 $\text{rot } [\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{r})] = 3 (\vec{r} \times \vec{a})$ ;
100.  $\text{rot } [\varphi(r) \vec{A}(r)] = \varphi'(r) (\vec{r} \times \vec{A}) + \varphi(r) (\vec{r} \times \vec{A}')$ ;
101.  $\text{rot } \frac{\vec{p} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{p}{r^3} (2 \hat{e}_r \cos \vartheta + \hat{e}_\vartheta \sin \vartheta)$ ;
102.  $\text{rot } \vec{A} = -\hat{e}_x - (2x - 1) \hat{e}_y$ ;
103.  $\text{rot } \vec{A} = 0$ ;

### 2.3. Դիֆերենցիալ օպերատորների համառոտ կիրառություններ

108. Օգտվելով 106զ/ խնդրի նույնությունից,  $\vec{B} = \vec{A}$  դեպքում  
կունենանք

$$\text{grad } A^2 = 2 \vec{A} \times \text{rot } \vec{A} + 2 (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$$

Բանի որ  $A^2 = \text{const.}$  դեպքում  $\text{grad } A^2 = 0$ , ապա

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = -\vec{A} \times \text{rot } \vec{A}:$$

110. Օգտվելով  $\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \times \text{grad } \varphi$  նույնությունից  
/տես խնդիր 97/, կունենանք

$$\text{rot}(\varphi \text{grad } \psi) = \varphi \text{rot grad } \psi - \text{grad } \psi \times \text{grad } \varphi$$

Բանի որ կամայական  $\psi$  սկալյար ֆունկցիայի համար  $\text{rot grad } \psi = 0$ ,  
ապա  $\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{A}$  սկալյար արտադրյալի համար կստանանք

$$\vec{A} \cdot \text{rot } \vec{A} = \varphi \text{grad } \psi (\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi) = 0,$$

այսինքն  $\vec{A} = \varphi \text{grad } \psi$  վեկտորը օրթոգոնալ է  $\text{rot } \vec{A}$  վեկտորին:

### 2.4. Սովորական և վեկտորական դաշտ: Վեկտորական պոտենցիալ

113. Օգտագործելով  $\vec{\nabla}$  օպերատորի հատկությունները, կունենանք

$$\begin{aligned} \text{div } [\tau (\vec{\omega} \times \vec{r})] &= (\vec{\nabla} \tau) (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \tau \vec{\nabla} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \\ &= \vec{r} / \tau (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \tau \vec{\omega} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{r}) = 0, \end{aligned}$$

այսինքն,  $\vec{A} = \tau (\vec{\omega} \times \vec{r})$  դաշտը սուրբնոդային է: Այժմ զտնենք այդ դաշտի վեկտորական պոտենցիալներից որևէ մեկը: Վեկտորական պոտենցիալի սահմանման համաձայն

$$\text{rot } \vec{W} = \tau (\vec{\omega} \times \vec{r}):$$

Եթե կոորդինատական  $x$  առանցքը ուղղենք  $\vec{\omega}$  վեկտորի ուղղու-  
թյամբ, ապա կունենանք

$$\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial W_y}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial y} = \tau \omega y,$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} = \tau \omega x:$$

Քանի որ  $\vec{W}$  վեկտորական պոտենցիալը որոշվում է կամայական  $f$  սկալյար ֆունկցիայի զրոգիենտի նշտությամբ, ուստի կարելի է ընդունել, որ  $W_y = 0$ , և այդ դեպքում կունենանք

$$\frac{\partial W_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W_z}{\partial y} = -\tau \omega y, \quad \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} = \tau \omega x:$$

Առաջին հավասարումից կունենանք  $W_x = \psi_1(x, z)$ , իսկ երկրորդից՝

$$\begin{aligned} W &= -\omega \int y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dy + \psi_2(x, z) = \\ &= \omega \tau^2/3 + \psi_2(x, z): \end{aligned}$$

Այսպիսի տեսք ունեցող  $W_x$  և  $W_z$  ֆունկցիաները պետք է բավարարեն երրորդ հավասարմանը: Այդ պահանջը կբերի

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0$$

հավասարման: Մասնավորապես, ընդունելով  $\psi_1(x, z) = \psi_2(x, z) = 0$ , կստանանք վեկտորական պոտենցիալներից մեկը

$$\vec{W} = -\vec{\omega} \tau^2/3$$

$$114. \quad \varphi(\tau) = C/\tau^3, \quad C = \text{const.}:$$

2.5. Պոտենցիալային վեկտորական դաշտ:

Ակալյար պոտենցիալ

119. Համոզվելու համար, որ  $\vec{A}$  դաշտը պոտենցիալային է, հաշվենք

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3y\bar{x}+x^3 & 2y^2+3x\bar{z} & \bar{z}^2+3xy \end{vmatrix} = \\ &= \hat{e}_x(3x-3x) + \hat{e}_y(3y-3y) + \hat{e}_z(3\bar{z}-3\bar{z}) = 0: \end{aligned}$$

Նշանակում է  $\vec{A}$  վեկտորական դաշտը պոտենցիալային է ամբողջ տարածությունում: Օգտվելով սկալյար պոտենցիալի սահմանումից կգրենք

$$\varphi(M) = \int_{M_0}^M \vec{A} d\vec{r} + \text{const.}:$$

Որպես  $M_0$  կես վերցնելով կոորդինատների սկզբնակետը և ընտրելով նկ. 7-ում պատկերված ինտեգրման նախադրյալը, կունենանք

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, \bar{z}) &= \int_0^{\bar{x}} A_x(x, 0, 0) dx + \int_0^y A_y(x, y, 0) dy + \int_0^{\bar{z}} A_z(x, y, \bar{z}) d\bar{z} + \text{const} = \\ &= \int_0^{\bar{x}} x^3 dx + \int_0^y 2y^2 dy + \int_0^{\bar{z}} (\bar{z}^2 + 3xy) d\bar{z} + \text{const} = \\ &= 1/3 (x^3 + 2y^3 + \bar{z}^3) + 3xy\bar{z} + \text{const.}: \end{aligned}$$

120. Անհիշական հաշվարկով կտրելի է ցույց տալ, որ  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$  կամայական  $\tau \neq 0$  կեսի համար: Այստեղից կհետևի, որ  $\vec{F}$  դաշտը պոտենցիալային է ամենուրեք, բացառությամբ  $\tau = 0$  կեսի: Ակալյար պոտենցիալի համար կունենանք

$$\varphi(\bar{r}) = - \int \frac{Gm\bar{r}}{\bar{r}^3} d\vec{r} = -Gm \int \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^2} = G \frac{m}{\bar{r}} + \text{const.}:$$

$$121. \quad \varphi(\bar{r}) = \bar{r} \rho^2 \sin \alpha + \text{const.}$$

$$124. \quad \omega/\varphi = \tau + \text{const.}, \quad p/\varphi = \rho \tau + \text{const.}, \quad q/\varphi = 1/3 \tau^3 + \text{const.}$$

2.6. Վեկտորական անալիզի ինտեգրալ  
թեորեմները

126.  $\pi R^4/2$

127.  $\iiint \text{grad} \varphi \text{rot} \vec{A} \, dV = \oint \vec{A} \times \text{grad} \varphi \, dS = \oint \varphi \text{rot} \vec{A} \, d\vec{S}$

128. Բազմապատկենք աված ինտեգրալը կամայական  $\vec{C}$  հաստ-  
առն վեկտորով և օգտվենք վեկտորական հաշվի հայտնի ֆունկցիոնա-  
լներից

$$\begin{aligned} \vec{C} \oint \vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{n}) \, dS &= \oint (\vec{C} \cdot \vec{r}) \vec{a} \, d\vec{S} = \iiint \text{div} [(\vec{C} \cdot \vec{r}) \vec{a}] \, dV = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{C} \iiint dV = \vec{a} \cdot \vec{C} V: \end{aligned}$$

Քանի որ  $\vec{C}$ -ն կամայական վեկտոր է, ապա

$$\oint \vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{n}) \, dS = \vec{a} V$$

ժիշա նման ձևով կստանանք

$$\oint (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{n} \, dS = \vec{a} V:$$

129. ա/  $\oint \vec{n} \varphi \, dS = \iiint \text{grad} \varphi \, dV,$

բ/  $\oint (\vec{n} \times \vec{a}) \, dS = \iiint \text{rot} \vec{a} \, dV,$

գ/  $\oint (\vec{n} \cdot \vec{b}) \vec{a} \, dS = \iiint (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} \, dV,$

134.  $\oint \varphi \, d\vec{r} = \iint (d\vec{S} \times \text{grad} \varphi):$

135.  $\oint \varphi \, d\psi = \iint (\text{grad} \varphi \times \text{grad} \psi) \, d\vec{S}:$

2.7. Լապլասի օպերատորը: Լապլասյան դաշտեր

141. ա/ Հարմոնիկ է, բ/ հարմոնիկ չէ, գ/ հարմոնիկ է:

142. ա/  $C_1 + C_2 \tau$ , բ/  $C_1 + C_2 \ln \lg 3/2$ , գ/  $C_1 + C_2 \alpha$ ,  
որտեղ  $C_1 = \text{const.}$ ,  $C_2 = \text{const.}$ :

143. ա/  $C_1 + C_2 \ln \rho$ , բ/  $C_1 + C_2 \alpha$ , գ/  $C_1 + C_2 z$ , որտեղ  
 $C_1 = \text{const.}$ ,  $C_2 = \text{const.}$ :

144.  $\varphi = C_1 x + C_2$ , որտեղ  $C_1 = \text{const.}$ ,  $C_2 = \text{const.}$ :



145.

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + \frac{C_1}{\tau} + C_2, & n \neq 1, n \neq 2 (\tau \neq 0) \\ \ln \tau + \frac{C_1}{\tau} + C_2, & n = -1 (\tau \neq 0) \\ -\frac{\ln \tau}{\tau} + \frac{C_1}{\tau} + C_2, & n = -2 (\tau \neq 0) \end{cases}$$

Հ Ա Վ Ե Լ Վ Ա Ծ

Ֆիզիկի  $\delta$  - ֆունկցիան

147.  $q/$  Աստիճանային ֆունկցիան  $\delta(x^2 - a^2) = \begin{cases} \infty, & \text{եթե } x \neq \pm a \\ 0, & \text{եթե } x = \pm a \end{cases}$

Այնպես որ  $\delta(x^2 - a^2) = A \delta(x+a) + B \delta(x-a)$  և հետևաբար

$$\int_0^\infty \delta(x^2 - a^2) dx = \int_0^\infty [A \delta(x+a) + B \delta(x-a)] dx = \begin{cases} B, & \text{եթե } a > 0 \\ A, & \text{եթե } a < 0 \end{cases}$$

Մյուս կողմից  $\int_0^\infty \delta(x^2 - a^2) dx = \int_0^\infty \delta(y - a^2) \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2|a|}$ , որտեղից երևում է, որ  $A = B = \frac{1}{2|a|}$ ;

Այսպիսով  $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x+a) + \delta(x-a)]$

148.  $\delta$  - ֆունկցիայի աստիճանային ֆունկցիան

$$\delta(f(x)) = \begin{cases} \infty, & \text{եթե } f(x) = 0 \\ 0, & \text{եթե } f(x) \neq 0 \end{cases}$$

եթե  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ռ  $f(x) = 0$  ֆակտորների արմատներն են, ապա

$$\delta(f(x)) = \begin{cases} \infty, & \text{եթե } x = x_1, x_2, \dots, x_n \\ 0, & \text{եթե } x \neq x_1, x_2, \dots, x_n \end{cases}$$

Այստեղից հետևում է, որ  $\delta(f(x)) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta(x - x_k)$  : Մնում է որոշել  $\alpha_k$  գործակիցները: Օգտվենք  $\delta$  - ֆունկցիայի նորմավորման պայմանից՝

$$\int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} \delta(x - x_k) dx = \delta_{nk},$$

որտեղ  $\delta_{nk}$  -ն Կրոնեկերի սիմվոլն է, իսկ  $\varepsilon$  անվերջ փոքր մեծությունն ընտրված է այնպես, որպեսզի  $[x_n - \varepsilon; x_n + \varepsilon]$  տիրույթի մեջ ընկնի միայն մեկ արմատ ( $x_n$ ) :

Մյուս կողմից  $\alpha = \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} \delta(f(x)) dx = \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} \delta(f(x)) \frac{f'(x) dx}{f'(x)} =$

$$= \int_{f(x_n - \varepsilon)}^{f(x_n + \varepsilon)} \delta(y) \frac{dy}{y'} = \text{Sgn}\{f'(x_n)\} / f'(x_n) = 1/|f'(x_n)| :$$

Հաշվի առնելով վերջինս, կուսենանք

$$\delta(f(x)) = \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k) / |f'(x_k)| :$$

153. Գնդային կոորդինատական համակարգում՝

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\alpha - \alpha_0) :$$

Գլանային կոորդինատական համակարգում՝

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(z - z_0) :$$

154. Օգտվելով Լապլասի ֆունկցիոնի շառավղային մասի բացահայտ անցքից, կուսենանք

$$\Delta(1/r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \frac{1}{r} = 0 \quad (r \neq 0) :$$

Հաշվենք  $\Delta(1/r)$  ֆունկցիայի ինտեգրալը  $R$  շառավղով գնդի ծավալով

$$\begin{aligned} \int_V \Delta(1/r) dV &= \int_V \operatorname{div} \operatorname{grad}(1/r) dV = \oint_S \operatorname{grad}(1/r) d\vec{S} = \\ &= - \oint_S \vec{r} / r^3 d\vec{S} = \int d\Omega = -4\pi : \end{aligned}$$

Սկսելով  $t$ , որ  $\Delta(1/r) = -4\pi \delta(\vec{r})$  :

155. Օգտվել նախորդ խնդրի արդյունքից և հաշվի առնել դելտա ֆունկցիայի  $/\Delta \cdot 5/$  հավելությունը:

Գ Ր Ա Ն Ա Ն Ո Ւ Յ Ց Ո Ւ Ն

1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление, Наука, 1972.
2. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике, Наука, 1970.
3. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления, ВШ, 1966.
4. Будаг Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды, Наука, 1967.
5. Гольдфайн И.А., Векторный анализ и теория поля, Наука, 1968.
6. Ефимов А.В., Золотарев Д.Г., Терпигорева В.М. Математический анализ (специальные разделы), ч. II, ВШ, 1980.
7. Краснов М.Л., Киселев И.Е., Макаренко Г.И. Векторный анализ, Наука, 1978.
8. Несис Е.И. Методы математической физики, Просвещение, 1977.
9. Очан Д.С. Сборник задач по методам математической физики, Наука, 1970.

# Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Յ Ց Ո Ւ Ն

|                                                                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Գլուխ 1. ԹԵՆՑՈՐԱԿԱՆ ՀԱՇԻՎ                                                                                           | 3  |
| § 1. Հիմնական տեղեկություններ վեկտորական հանրահաշվից:<br>Կոորդինատական համակարգեր: Օրթոգոնալ ձևափոխություններ ..... | 3  |
| § 2. Թենզորի հասկացությունը և նրա բաղադրիչների ձևափոխությունները .....                                              | 11 |
| Գլուխ 2. ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ .....                                                                                    | 21 |
| § 1. Ակալյար դաշտ: Ածանցյալ ըստ ուղղություն: Գրադիենտ ...                                                           | 21 |
| § 2. Վեկտորական դաշտ .....                                                                                          | 24 |
| 2.1. Վեկտորական գծեր: Հոսք: Դիվերգենցիա .....                                                                       | 24 |
| 2.2. Վեկտորական դաշտի գծային ինտեգրալ: Շրջապատւյտ: Ռոտոր .....                                                      | 27 |
| 2.3. Դիֆերենցիալ օպերատորների համատեղ կիրառություններ .....                                                         | 31 |
| 2.4. Աղի ենոիդային վեկտորական դաշտ: Վեկտորական պոտենցիալ .....                                                      | 32 |
| 2.5. Դոտենցիալային վեկտորական դաշտ: Ակալյար պոտենցիալ .....                                                         | 33 |
| 2.6. Վեկտորական անալիզի ինտեգրալ թեորեմները .....                                                                   | 36 |
| 2.7. Լապլասի օպերատորը: Լապլասյան դաշտեր .....                                                                      | 39 |
| Հավելված. ԴԻՐԱԿԻ Ծ- ՖՈՒՐԿԵԻԱՆ .....                                                                                 | 42 |
| ԴԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ԼՈՒԻՅՈՒՄՆԵՐ .....                                                                                    | 46 |
| ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ .....                                                                                                 | 68 |