MATHEMATICAL LOGIC

STEPHEN COLE KLEENE
Cyrus C. MacDuffee Professor of Mathematics
The University of Wisconsin, Madison

JOHN WILEY & SONS, INC.
New York · London · Sydney
1967

С. К. Клини

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Перевод с английского
Ю. А. Гастева

Под редакцией
Г. Е. Минца

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1973

УДК 517. 11. 51712

Имя одного из крупнейших современных специалистов в области математической логики С. К. Клини знакомо советскому читателю по русскому переводу его фундаментального труда «Введение в метаматематику» (ИЛ, 1957), ставшего настольной книгой для всех, кто занимается математической логикой, рекурсивными функциями и основаниями математики. Новая его книга представляет собой существенно усовершенствованный, расширенный и приближенный к нуждам университетского преподавания вариант «чисто логической» части этой всемирно известной монографии. Тщательно продуманные иллюстративные упражнения помогают читателю усвоить излагаемый материал.

Книга может быть использована как учебное пособие по курсу математической логики в университетах и пединститутах; таким образом, она адресована прежде всего преподавателям, аспирантам и студентам. Она привлечет также внимание всех занимающихся или интересующихся математической логикой.

Редакция литературы по математическим наукам

К $\frac{0223\text{-}036}{041(01)\text{-}73}$

С. Клини
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редактор Г. М. Цукерман. Художник К. П. Сиротов. Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор Г. Б. Алюлина

Сдано в набор 7/VI 1973 г. Подписано к печати 26/X 1973 г. Бум. тип. № 3 $60 \times 90^1/_{16}$ = =15бум. л. Печ. л. 30. Уч.-изд. л. 33,24. Изд. № 1/6846. Цена 2 р. 50 к. Зак. 865

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, Ленинград, Измайловский проспект, 29 с матриц ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии им. А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валовая, 28

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Имя автора этой книги не нуждается в рекомендации. На его «Введении в метаматематику» выросло не одно поколение специалистов по математической логике и основаниям математики. Отличия настоящей книги от классического «Введения» достаточно ясны из авторского предисловия. В двух словах они сводятся к тому, что перед нами теперь не руководство, претендующее (и не без оснований) на полноту освещения обширного комплекса проблем, а университетский учебник. С другой стороны, в этот учебник, несмотря на его скромный объем, попали многие вопросы, не нашедшие места в большой книге Клини (например, иерархия степеней неразрешимости, интерполяционная теорема, теоремы Бета и Робинсона).

Существенно и то, что характерный для «большого Клини» финитный, метаматематический, теоретико-доказательственный подход здесь часто заменяется теоретико-множественным, модельным. Как и во «Введении в метаматематику», автор тщательно различает конструктивные и неконструктивные доказательства. И все-таки трудно отделаться от ощущения, что в этой книге он охотно отдает предпочтение вторым. Считая излишним загромождать подобное издание ссылками и комментариями, мы предпочитали следовать автору, отсылая читателя в нужных случаях за разъяснениями к «Введению в метаматематику».

Исключение сделано лишь для теорем Генцена и Эрбрана. По разным причинам представляется желательным иметь метаматематические доказательства этих теорем, играющих вместе со своими обобщениями столь важную роль в современной теории доказательств. Этим доказательствам посвящены небольшие добавления редактора перевода.

При переводе мы, как правило, следовали при выборе терминологии русскому изданию «Введения в метаматематику», ставшему в известном смысле уже классическим. (В частности, мы сохранили закрепившееся написание фамилии автора, хотя сам он произносит ее «Клейни».) Для большей гибкости стиля и максимального согласования с появившейся с тех пор литературой мы позволили себе, впрочем, в некоторых случаях вводить равноправные синонимы («схема аксиом» и «аксиомная схема», «таблица истинности» и «истинностная таблица» и т. п.).

Мы выражаем искреннюю признательность автору, любезно приславшему список опечаток и исправлений к английскому изданию (французский перевод, изданный в 1970 г., оказался практически калькой с английского и дополнительных изменений не вызвал), а также Р. И. Пименову и В. А. Лившицу за помощь при переводе.

Ю. А. Гастев
Г. Е. Минц

Посвящается Нэнси

ПРЕДИСЛОВИЕ

После выхода в свет моего «Введения в метаматематику» (1952), предназначенного для студентов старших курсов [1]), я не собирался писать другую книгу. Но в силу различных обстоятельств мне пришлось размышлять о необходимости краткого изложения отдельных разделов «Введения», рассчитанного на более широкую аудиторию или на менее подготовленных читателей. Эти размышления привели меня к новым вариантам изложения [2]), и благоприятный прием, который они встретили, в конечном счете и склонил меня к тому, чтобы подготовить теперешнюю книгу, рассчитанную на начинающих [3]).

Во «Введении в метаматематику» (в дальнейшем цитируется как [ВМ]) изложение математической логики как таковой начиналось лишь с пятой главы (на основе некоторых определений, данных в гл. IV). Подготовленные студенты могут пройти вводный материал первых глав [ВМ] достаточно быстро. Но для менее подготовленных студентов или в условиях, когда на курс отведено меньше времени, трата времени на столь подробное введение является ненужной роскошью. И теперь я пришел к убеждению, что как с педагогической, так и с научной точек зрения более разумно с самого начала приступать непосредственно к изучению логики, даже если и не все мотивы и не все критерии выбора того или иного способа изложения выявлены заблаговременно. А соответствующее «введение» можно сделать и позже.

---

[1]) В оригинале: «for students at the first-year graduate level».—*Прим. перев.*

[2]) См. последние пять моих публикаций из списка литературы на стр. 457—458.

[3]) В оригинале: «for undergraduate students in the Junior year».— *Прим. перев.*

Исходя из этих соображений, я отвел часть I (гл. I—III) настоящей книги достаточно подробному, хотя и элементарному рассмотрению математической логики (узкому исчислению предикатов), что по существу соответствует материалу гл. V—VII и § 73 [ВМ]. Изложение здесь не исчерпывается каким-либо одним вариантом формулировки логической теории и приобретением должных навыков в этом направлении, что можно было бы сделать даже и на более элементарном уровне. Для работ современных логиков характерно весьма гибкое изложение материала, использующее различные формулировки одних и тех же идей, с переходами от одной формулировки к другой, более соответствующей конкретным целям данного момента. В соответствии со сказанным читатель в части I книги встретится сначала с более полным, нежели в [ВМ], изложением теории моделей (основанном на истинностных таблицах), затем с гильбертовской теорией доказательств (основанной на системах постулатов с правилом modus ponens) и, наконец, с теорией доказательств, пользующейся и производными правилами вывода. Эти производные правила по существу очень близки к правилам, принятым в генценовских системах натурального вывода, которыми я пользуюсь при преподавании логики начиная с 1936 г. (В гл. VI вводится четвертая формулировка логики в виде генценовских секвенциальных систем.)

Вторая часть книги задумана как дополнение к первой (в предположении, что та усвоена достаточно основательно) и как введение в некоторые новые идеи и более глубокие результаты логических исследований нашего времени. В части II изложение носит менее элементарный характер, чем в части I. В зависимости от времени, отводимого на курс, и степени подготовки аудитории часть II можно проходить в обзорном порядке или же более подробно. Я никогда не считал, что среднему студенту полезно пропускать весь трудный материал, полностью овладеть которым могут лишь самые сильные студенты. Все же мой опыт преподавания показывает, что если опускать более специальные параграфы, отмеченные звездочками, то в течение одного семестра удается пройти часть материала гл. VI.

Если говорить о содержании части II более конкретно, то гл. IV служит запоздалым «введением» (сокращенным вариантом гл. I—III [ВМ]) и содержит также введение и в общий очерк формальной арифметики (гл. IV и VIII [BM]). Глава V содержит обзор знаменитых результатов Гёделя, Чёрча и др., касающихся неполноты и неразрешимости; изложение ведется в терминах машин Тьюринга, зачастую без подробных доказательств. (Обзор этот касается основных результатов § 42 и части III [BM], но не касается подробностей развитой там теории.) Эти главы посвящены не столько чистой логике, сколько основаниям математики.

В гл. VI основное внимание вновь уделяется логике. Теорема Гёделя о полноте и теорема Генцена (а также теоремы Лёвенгейма, Скулема, Эрбрана, Генкина, Бета, Крейга и А. Робинсона) доказываются здесь с помощью методов, получивших распространение лишь начиная с 1955 г. Имеются более компактные доказательства теоремы Гёделя о полноте. Избранный здесь способ изложения основ предмета удобен, по-видимому, тем, что почти с самого начала ясно общее направление движения, а кроме того, можно надеяться, что, проявив достаточно терпения при рассмотрении деталей, мы в конце концов достигнем цели. Кроме того, такой подход позволяет быстро (хотя и неконструктивно) доказать теорему Генцена. (Глава эта соответствует части IV [BM], но сильно отличается от нее по общему подходу и отбору результатов.)

Прохождение всего материала гл. VI в течение одного семестра может быть облегчено за счет того, что гл. IV и V полностью исключаются из курса, который, таким образом, минуя вопросы оснований математики, полностью сосредоточивается на проблемах логики. (Из материала гл. IV и V лишь очень немногое используется затем в гл. VI, так что, опуская эти две главы, мы пожертвуем очень немногим из содержания последней главы.)

В книге довольно много упражнений, но они не покрывают всех рассматриваемых в ней вопросов (особенно это относится к части II).

Книга не предназначена быть пособием для решения задач. При ее чтении следует отказаться от психологии первокурсника, полагающего, что учебник только для того и нужен, чтобы помогать в решении упражнений. Для настоящего понимания духа предмета особенно важно овладение определениями.

Благодарю X. Уильяма Оливера и Эдварда Полса за предоставление мне записей моих лекций, которые читались в летних

школах, организованных Национальным научным фондом, в Уильямстауне в 1956 г. и в Брунсвике в 1961 г. Лекции и конспекты в 1961 г. были переработаны, а в настоящей книге подверглись дальнейшей переработке и изложены значительно более подробно. При переработке были использованы предложения Х. Джерома Кислера, Георга Крайзеля и Джулиуса Р. Вайнберга. Кислер на основе своего опыта преподавания по рукописи книги предложил дальнейшие усовершенствования, а также добавил в нее восемь упражнений. Вайнберг, Уильям У. Бун, Бартон Дребен и Ян ван Хейеноорт помогли мне в составлении библиографии. Дребен и ван Хейеноорт, кроме того, помогли оценить результаты Лёвенгейма, Скулема и Эрбрана более точно, нежели это обычно делается. В заключение благодарю Уильяма Э. Риттера, читавшего корректуру книги параллельно со мной и внесшего в нее ряд исправлений.

С. К. Клини

Часть I

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Глава I

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1. Лингвистические соображения; формулы

Математическая логика (называемая также *символической логикой*) — это логика, развиваемая с помощью математических методов. Этот термин имеет и другой смысл: изучать математическую логику — значит изучать логику, используемую в математике.

Логика выполняет важное назначение: она говорит нам, чтó из чего следует. Излагая математическую теорию, мы всякий раз пользуемся логикой. Общеизвестным примером служит изложение геометрии в «Началах» Евклида (330—320 гг. до н. э.), где с помощью логики теоремы выводятся из аксиом (постулатов). Да и любой другой математический текст демонстрирует нам логические связи. И не только математический — логика используется точно так же для систематизации научного знания вообще, да и в повседневной жизни она служит инструментом рассуждений и доказательств.

Итак, мы собираемся изучать логику, и притом с помощью математических методов. Но тут мы встречаемся с парадоксом: разве для того, чтобы *изучать* логику с помощью математики (да и вообще любым систематическим методом), нам не придется *пользоваться* самой логикой?

Этот парадокс решается просто, но чтобы до конца понять, как это делается, потребуется некоторое время. Основная идея здесь состоит в том, что мы будем тщательно различать логику, *которую* мы изучаем, и логику, *с помощью которой* это делается. Но тогда нам придется различать и соответствующие *языки*: изучаемая нами логика формулируется на некотором языке, который мы будем называть *предметным языком* (или *языком-объектом*), поскольку этот язык — так же как и связанная с ним логика — является предметом (объектом) нашего изучения. Язык же, в рамках которого мы исследуем предметный язык (употребляя при этом те логические средства, которые могут понадобиться), мы так и назовем *языком исследователя*[1]). Соответственно можно говорить о *предметной* (или *объектной*) *логике* и *логике исследователя*.

Необходимо все время помнить об этом различии между изучаемой (предметной) логикой и логикой как средством такого изучения (т. е. логикой исследователя). Тому, кто не готов к этому, стоит сразу же закрыть эту книгу и подыскать себе другое занятие по вкусу (скажем, составление шарад или пчеловодство).

Логика — подобно, например, физике или истории — насыщена весьма богатым и разнообразным материалом. И по примеру других наук мы начнем со сравнительно ограниченного и нетрудного ее раздела, чтобы затем иметь возможность продвигаться вширь и вглубь.

Раздел логики, с которого мы начнем, посвящен изучению связей между *высказываниями* — связей, определяемых исключительно тем, каким образом одни высказывания строятся из других, «элементарных», играющих при этом роль строительных блоков. Эту часть логики называют *логикой высказываний*, или *исчислением высказываний*[2]).

Мы воспринимаем высказывания через выражающие их повествовательные предложения некоторого языка (предметного языка). Высказывания суть смыслы этих предложений[3]). Повествовательные предложения выражают высказывания (в то время как вопросительные предложения выражают вопросы, а повелительные предложения — приказания, команды). Одно и то же высказывание может быть выражено разными (повествовательными) предложениями. Например, предложения «Джон играет с Джейн» и «Джейн играет с Джоном» выражают одно и то же высказывание, а предложение «Джон играет с Мери» — некоторое другое высказывание. Если отношение $<$ обычным образом связано с отношением $>$, то предложения «$5<3$» и «$3>5$» вы-

---

[1]) Такой язык обычно называют «метаязыком» (или, иногда, «синтаксисом»). Однако такая терминология подразумевает дополнительные смысловые оттенки, характеризующие область исследования или используемые методы. Ср. стр. 62—65, особенно конец стр. 63, нашего «Введения в метаматематику» (стр. 61—63 русского издания. — *Перев.*), которое в дальнейшем будет кратко обозначаться «[ВМ]» (всюду в дальнейшем ссылки даются на русское издание [ВМ]; то же относится ко всем цитируемым изданиям, имеющимся в русском переводе. — *Перев.*).

В учебнике французского языка, написанном по-английски, французский язык является предметным, а английский — языком исследователя.

[2]) Строго говоря, эти термины — не синонимы (и уж, во всяком случае, слова «логика» и «исчисление» имеют различный смысл), но такое различение в этой книге будет играть роль лишь в части II. — *Прим. перев.*

[3]) Поэтому некоторые авторы называют эту часть логики «логикой предложений», или «исчислением предложений».

ражают одно и то же высказывание (причем ложное), а именно, что после прибавления к 5 некоторого положительного числа получается 3; предложение же «$5^2-4^2=10$» выражает некоторое другое высказывание (также ложное). Каждое из этих трех предложений выражает утверждение относительно результата некоторой математической процедуры; в двух первых предложениях говорится об одной и той же процедуре, в третьем — о другой. Предложения «$3-2=1$» и «$(481-581)+101=1$» выражают два разных высказывания (оба истинные). Чтобы сэкономить время и обеспечить себе гибкость в приложениях, мы не станем сейчас описывать никакие конкретные предметные языки (примеры будут даны позже).

В этой главе мы будем предполагать только, что рассматривается тот или иной предметный язык, в котором выделен некий класс (повествовательных) предложений, причем этот класс состоит из некоторых определенных предложений (упомянутых выше «строительных блоков»), а все прочие предложения могут быть построены из них посредством некоторых операций описываемым ниже способом. Эти предложения мы будем называть *формулами*, поскольку они — или хотя бы их названия — будут выражаться с помощью математической символики.

Прежде всего в нашем языке нам понадобятся однозначно построенные предложения, внутренняя структура которых нас совершенно не будет интересовать (пока мы остаемся в пределах исчисления высказываний), — нам надо лишь уметь распознавать и различать их. Мы назовем эти предложения *элементарными формулами*, или *атомами*, и будем обозначать их прописными буквами конца латинского алфавита: «P», «Q», «R»,... ..., «P_1», «P_2», «P_3», ... Различные буквы будут представлять различные атомы, а каждая из них на протяжении любого конкретного рассуждения должна обозначать один и тот же атом.

Кроме того, нам будут нужны пять конкретных операций (конструкций), позволяющих из данных предложений строить новые предложения. Исходя из элементарных формул (атомов), мы можем использовать эти операции снова и снова для построения других предложений — *сложных формул*, или *молекул*[1]). *Формулами* мы будем называть элементарные формулы и сложные формулы. Если A и B — какие-либо данные *формулы* (т. е. либо атомы, либо уже построенные сложные формулы), то $A\sim B$, $A\supset B$, $A\&B$, $A\vee B$ также являются (*сложными*) *формулами*. Если A — данная *формула*, то $\neg A$ — также (*сложная*) *формула*.

---

[1]) Аналогия с химией достаточно поверхностна: здесь мы называем «молекулой» только ту формулу, которая не является атомом, тогда как в химии бывают и одноатомные молекулы (например, He (гелий)).

Первые четыре операции — бинарные (двуместные), пятая — унарная (одноместная).

Символы «$\sim$», «$\supset$», «&», «$\vee$» и «$\neg$» называют *пропозициональными связками*[1]) (или *связками исчисления высказываний*). Их можно читать, пользуясь словами, приведенными в правой части следующей таблицы, но с символами легче манипулировать[2]), их удобнее писать.

Эквивалентность[3])	$\sim$	«эквивалентно», «равносильно», «тогда и только тогда»
Импликация	$\supset$	«влечет», «если..., то...», «только если»
Конъюнкция	&	«и»
Дизъюнкция	$\vee$	«или», «... или ... или оба», «и/или»
Отрицание	$\neg$	«не», «неверно, что»

Отметим, что в естественных («словесных») языках, например в русском, имеются двусмысленности (об этом пойдет речь ниже). Поэтому логики склонны создавать специальные символические языки. И наш неуточненный предметный язык можно рассматривать как символический язык этого рода, имеющий символы «$\sim$», «$\supset$», «&», «$\vee$» и «$\neg$», играющие роли, которые точно будут описаны ниже, но приблизительно описываются с помощью приведенных выше словосочетаний. Наш предметный язык также можно воспринимать как надлежащим образом ограниченную и регламентированную часть естественного языка (например, русского); тогда «$\sim$», «$\supset$», «&», «$\vee$» и «$\neg$» можно понимать как имена в языке исследователя для выражений, фигурирующих в правой части приведенной выше таблицы[4]).

Названия, приведенные в левой части таблицы, применяются как к пропозициональным связкам, так и к построенным с их

---

[1]) Вместо употребляемого нами знака «$\sim$» иногда пишут «$\equiv$», «$\leftrightarrow$» или «$\rightleftarrows$», вместо «$\supset$» пишут «$\rightarrow$», вместо «&» — «$\wedge$» или «$\cdot$» (точку часто опускают), вместо «$\neg$» — «$-$» или «$\bar{\ }$» (например, $\bar{A}$). Символы «$\vee$» и «$\neg$» по типографским причинам иногда набирают другого размера.

[2]) Тому, кто сомневается в пользе символов, мы предлагаем решить уравнение $x^2+3x-2=0$, дополняя его до полного квадрата, как учат в школе, но используя исключительно слова, а не символы. Для начала вот это уравнение, переведенное на словесный язык: «Квадрат неизвестного, к которому прибавлено утроенное неизвестное, минус два равен нулю».

Тому, кто сомневается в том, что выбор адекватного математического символизма играет столь важную роль в развитии математики и точных наук, мы предлагаем перемножить 416 и 144, выполняя все действия с помощью римских цифр (т. е. перемножить CDXVI и CXLIV).

[3]) Эту связку часто называют (ср., например, Карри [1969]) *эквиваленцией*; см. примечание на стр. 31. — *Прим. перев.*

[4]) Если «$\sim$», «$\supset$» и т. д. считать символами предметного языка, то, написав «$A \sim B$», «$A \supset B$» и т. п., мы смешаем два языка, ибо «A» и «B» являются именами, данными в языке исследователя формулам предметного языка, тогда как «$\sim$», «$\supset$» — символы самого предметного языка. Правда, при этом

помощью формулам. Например, «&» есть символ конъюнкции, а выражение A&B — конъюнкция A и B. Точно так же $A \supset B$ есть импликация и т. п.

Во избежание путаницы в вопросе о том, какие формулы являются атомами, условимся, что никакой атом не имеет вида $A \sim B$ или $A \supset B$, или A&B, или $A \vee B$, или $\neg A$; такой вид разрешается иметь только молекулам[1]). Таким образом, атомами могут быть высказывания: «Сократ — человек», «Джон играет с Мери», «Джон играет с Джейн», «$5 < 3$», «$3 > 5$», «$a + b = c$» и «$a > 0$» (здесь «a», «b», «c» обозначают числа); напротив, такие высказывания, как «Джон играет с Мери или Джон играет с Джейн», «$\neg 5 < 3$» и «$5 < 3 \sim 3 > 5$», должны считаться молекулами.

Мы будем пользоваться большими латинскими буквами начала алфавита: «A», «B», «C», ..., «A_1», «A_2», «A_3», ... для обозначения произвольных формул (не обязательно атомов). Различные такие буквы «A», «B», «C», ..., «A_1», «A_2», «A_3»... *не обязательно* обозначают различные формулы (в противоположность буквам P, Q, R, P_1, P_2, P_3, ..., которые обозначают *различные* атомы).

Прочтение сложных формул может стать неоднозначным, если не ввести скобок, указывающих, в каком порядке связываются символы между собой. Поэтому мы будем писать «$(A \supset B) \supset C$»

все-таки ясно, как понимать формулу «$A \supset B$»: это имя, данное в языке исследователя той формуле из предметного языка, которая получается, если вставить символ «$\supset$» из предметного языка между двумя формулами того же предметного языка, обозначаемыми в языке исследователя через «A» и «B» соответственно. Смешение двух языков исчезает, если мы согласимся, что «$\supset$» может служить именем самому себе (в контекстах такого рода и, более общо, во всех тех случаях, когда в языке исследователя возникает потребность в имени для символа «$\supset$» из предметного языка). В таких случаях мы говорим, что «$\supset$» употребляется *автонимно* (Карнап [1934]). (См. прим. 1 на стр. 19). Мы будем употреблять автонимно лишь такие знаки, как «$\sim$», «$\supset$» и вообще *отдельные символы* символического или частично символического предметного языка, причем будем это делать только тогда, когда ясно, что мы говорим *о выражениях* этого языка.

Обычные русские слова не будут пониматься автонимно. Поэтому, когда они будут встречаться не в кавычках, их надлежит понимать как относящиеся к языку исследователя. Так, желая дать имя высказыванию $A \supset B$, используя слова «если ..., то ...» вместо символа $\supset$ (здесь «$\supset$» используется автонимно), мы должны были бы написать: ««если A, то B»» (имя высказывания — то, что содержится внутри внешних кавычек, а все вместе — имя имени). Тут еще остается смешение языков (внутри внутренних кавычек), но смысл ясен: названное высказывание — это то, которое получается при замене букв «A» и «B» высказываниями, именами которых являются эти буквы.

[1]) Если какое-нибудь из высказываний, которые мы сначала хотели взять в качестве атомов, имеет уже один из названных видов, то мы разложим его на составляющие, не имеющие этого вида, и уже эти составляющие добавим к нашему перечню атомов.

или «$A \supset (B \supset C)$», а не «$A \supset B \supset C$»[1]). Впрочем, число скобок можно уменьшить, приписав нашим связкам убывающие «ранги» в следующем «порядке старшинства»[2]):

$$\sim,\ \supset,\ \&,\ \vee,\ \neg.$$

Там, где возможны были бы два способа построения формулы, связка более высокого ранга имеет большую область действия. Так, «$A \supset B \& C$» означает $A \supset (B \& C)$, а «$C \sim A \& B \supset C$» означает $C \sim ((A \& B) \supset C)$. Унарный оператор $\neg$ имеет наименьший ранг, так что, например, «$\neg A \vee B$» означает $(\neg A) \vee B$, а не $\neg(A \vee B)$, а «$\neg\neg A \supset A$» означает $(\neg(\neg A)) \supset A$. Подобная практика привычна по школьной алгебре, где «$a + bc^2 = d$» читается как $(a + (b(c^2))) = d$.

Пример 1. В «$A \supset (B \supset C)$» буквы «A», «B», «C» обозначают формулы, построенные из P, Q, R, ..., P_1, P_2, P_3, ... (т. е. из атомов, обозначаемых буквами «P», «Q», «R», ..., «P_1», «P_2», «P_3») с использованием знаков $\sim$, $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$ и (если нужно) скобок. Например, $A \supset (B \supset C)$ может, в частности, оказаться формулой $P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$, так что A — это P, B — это $Q \vee R$, а C — это $R \supset \neg P$. Здесь появилась вторая пара скобок, однако наши соглашения о порядке старшинства между связками сделали излишними скобки вокруг $Q \vee R$. Скобки показывают нам, как строится эта формула из атомов P, Q, R в пять шагов, на которых вводятся пронумерованные нами *вхождения* связок:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & P \\
 & & Q & & R & & R & & \neg_2 & P \\
 & & Q & \vee_1 & R & & R & \supset_3 & \neg_2 & P \\
P & & Q & \vee_1 & R & \supset_4 & (R & \supset_3 & \neg_2 & P) \\
P & \supset_5 & (Q & \vee_1 & R & \supset_4 & (R & \supset_3 & \neg_2 & P)) \\
 & & \text{—1} & & \text{—1} & & & & & \text{—2} \\
 & & & & & & \text{—3} & & & \text{——3} \\
 & & & & \text{———4} & & & & & \text{————4} \\
\text{—5} & & & & & & & & & \text{——————5}
\end{array}$$

[1]) Таким образом, окончательное определение формул принимает вид: a) всякий атом есть формула; b) если A и B — формулы, то $(A) \sim (B)$, $(A) \supset (B)$, $(A) \& (B)$, $(A) \vee (B)$, $\neg(A)$ — также формулы. Некоторые выражения, содержащие недостаточное количество скобок и потому не являющиеся формулами, употребляются в качестве сокращенных обозначений для формул. В следующих фразах автор поясняет правила восстановления недостающих скобок. — *Прим. ред.*

[2]) Некоторые авторы помещают $\vee$ перед $\&$; так поступают в Алголе и в некоторых других языках программирования. Мы лишь изредка будем пользоваться соглашением, что $\&$ «старше» $\vee$ (это соглашение восходит к Гильберту и Бернайсу [1934] и [BM]). Некоторые авторы (Уайтхед и Рассел [1910]—[13]) заменяют часть скобок точками «.», «:», «:.», употребляемыми в роли «знаков пунктуации».

Когда мы говорим (см. далее в тексте), что в силу порядка старшинства «$A \supset B \& C$» обозначает $A \supset (B \& C)$, то мы имеем в виду, что «$A \supset B \& C$» становится именем формулы $A \supset (B \& C)$, причем это «$A \supset (B \& C)$» уже названо.

Скобки или построение формулы очевидным образом показывают, как каждое вхождение связки «связывает между собой» одну или две части формулы («действует» на эти части или «применяется» к ним); эти части («подформулы») образуют *область действия* (данного вхождения) этой связки. Мы изобразили области действия связок горизонтальными линиями, проведенными под формулами и снабженными номерами относящихся к ним связок. Например, область действия связки $\supset_4$ состоит из двух частей $Q \vee R$ и $R \supset \neg P$.

Упражнение 1.1. Указать область действия (каждого вхождения) каждой пропозициональной связки в следующих формулах:

(a) $P \supset \neg P \sim \neg P$.

(b) $\neg P \& Q \sim R \& \neg\neg (P \vee Q) \supset S$.

§ 2. Теория моделей; таблицы истинности, общезначимость

В этой главе мы ограничиваемся изучением логики высказываний. Более того, в ней и в последующих главах мы в первую очередь будем заниматься некоторой определенной частью логики: так называемой *классической логикой*.

Со времени открытия неевклидовых геометрий Лобачевским (1829 г.) и Бойяи (1833 г.) стало ясно, что мысленно равновозможны различные системы геометрий. (Мы еще скажем кое-что об этом в § 36.) Точно так же имеются и различные логики. На базе одних и тех же математических постулатов можно построить разные теории, различия в которых обусловливаются той логической системой, с помощью которой осуществляется вывод. Подобно евклидовой геометрии (по сравнению с другими геометриями), классическая логика является самой простой и наиболее употребительной логической системой (в математике, точных науках и в повседневной жизни). В этой книге мы лишь вкратце коснемся других логик [1]).

До сих пор о наших атомах предполагалось лишь то, что мы умеем их идентифицировать, т. е. всякий раз, как мы встретим атом, мы сумеем его узнать и отличить от других атомов.

Сейчас мы введем дополнительное допущение, характерное для классической логики: мы предположим, что всякий атом (или высказывание, которое он выражает) является либо *истинным*, либо *ложным* (но не тем и другим одновременно).

---

[1]) Некоторые другие виды логик требуют иных пропозициональных связок, нежели те пять, что введены в § 1. См., например, конец § 12, где упоминаются связки $\Box$ и $\Diamond$. (Впрочем, эти «модальные операторы» не являются пропозициональными связками в определенном выше смысле.— *Перев.*)

Мы не предполагаем, что относительно каждого атома *мы знаем*, истин он или ложен. Чтобы знать это, надо было бы проникнуть внутрь атомов или же рассматривать те факты, с которыми они соотносятся при принятой интерпретации слов или символов,— все это не входит в компетенцию *исчисления высказываний*.

Итак, мы предполагаем, что для каждого атома есть ровно две возможности: он может быть истинным, он может быть ложным.

Тогда возникает следующий вопрос: как зависит истинность или ложность (*значение истинности*, или *истинностное значение*) сложной формулы (молекулы) от истинностных значений тех простых формул (атомов), которые ее составляют? Это будет установлено с помощью пяти определений, данных в следующих таблицах. Эти таблицы соотносят истинностное значение каждой молекулы с истинностными значениями каждой из ее *непосредственных составляющих*. В левых их столбцах мы помещаем все возможные *распределения* значений «истина» $\mathfrak{t}$ и «ложь» $\mathfrak{f}$ для непосредственных составляющих молекулы. Тогда на соответствующей горизонтали мы находим истинностное значение, принимаемое рассматриваемой молекулой при данном распределении (оно располагается в столбце для этой молекулы):

A	B	A $\sim$ B	A $\supset$ B	A & B	A $\vee$ B
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

A	$\neg$A
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$

Таким образом, A $\sim$ B истинно тогда и только тогда, когда A и B имеют одинаковые истинностные значения (почему $\sim$ и называют «эквивалентностью»: ведь «эквивалентны» как раз и означает «равнозначны», «принимают одни и те же значения»); A $\supset$ B ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно; A & B истинно тогда и только тогда, когда и A, и B истинны; A $\vee$ B ложно тогда и только тогда, когда и A, и B ложны; наконец, $\neg$A истинно тогда и только тогда, когда A ложно.

Слово «импликация» и[1]) чтение нашего символа $\supset$ как «влечет» вызывают некоторые споры. Так, пусть A — это высказывание «луна сделана из зеленого сыра», а B — «$2+2=5$». Тогда, согласно нашей таблице, раз A ложно, формула A $\supset$ B будет истинной, хотя между A и B нет никакой связи по смыслу. Точно так же если B — это «$2+2=4$», то A $\supset$ B истинна, ибо B истинна, причем

[1]) Эту часть фразы (и относящиеся к ней места дальнейшего текста) при переводе можно было бы игнорировать, поскольку английское «implication» может переводиться русским словом «следование», но это значение вовсе не подразумевается русским термином «импликация».— *Прим. перев.*

совершенно независимо от вопроса, есть ли связь между А и «$2+2=4$». Некоторые авторы считают это парадоксом (Льюис [1912], [1917], Льюис и Лэнгфорд [1932])[1]).

В современной математике слово «умножение» часто обозначает различные математические операции, обладающие свойствами, более или менее похожими на свойства арифметического «умножения». С тем же правом мы называем «импликацией» ту операцию, которая была определена выше второй таблицей истинности; и в наших разговорах о логике мы будем читать $A \supset B$ как «А влечет В», хотя, быть может, чтение «Если А, то В» или же «А, только если В» лучше передает наш замысел в разговорном языке. Эту «импликацию» и нашу «эквивалентность» называют также, чтобы оттенить их смысловую специфику, «материальной импликацией» и «материальной эквивалентностью»[2]).

Сам по себе вопрос о других смыслах термина «импликация» интересен, но тогда ее надо определять не посредством таблицы с двумя истинностными значениями. Наше определение—единственное, разумно согласующееся с двузначной таблицей[3]).

С этим связан и вопрос о том, надо ли нам утверждать материальную импликацию $A \supset B$ в том случае, когда мы можем проще обосновать В, если известно, что А истинно (или же, если собеседники не знают, что А истинно, мы можем сообщить им и об этом, утверждая $A \& B$), а если А ложно, то не утверждать ничего

[1]) Дата в квадратных скобках вслед за фамилией отсылает к библиографии в конце тома.

[2]) В разговорном языке выражения «Если..., то...» грамматически функционируют как союзы, такие же, как «и» или «или», т.е. связывают между собой предложения. Слово же «влечет» является переходным глаголом, т. е. связывает между собой существительные. С этой точки зрения, употребляя выражения «Если А, то В» и «А влечет В» как равнозначащие, нужно относиться к последнему высказыванию как к сокращению для ««А» влечет «В»» или же «Утверждение о том, что истинно А, влечет утверждение о том, что истинно В».

[3]) В этом случае повседневное словоупотребление, конечно, предполагает, что «Если А, то В» истинно, когда А и В истинны, и ложно, когда А истинно, а В ложно. Поэтому под сомнение могут быть поставлены разве лишь третья и четвертая строки нашей таблицы. Если заменить t на f в обеих этих строках, то получится просто синоним для &; если это сделать только в третьей строке, получится синоним для $\sim$. Если заменить t на f только в четвертой строке, то утратится полезное свойство импликации: высказывания «Если А, то В» и «Если $\neg B$, то $\neg A$» истинны при одних и тех же обстоятельствах (пункт *12a теоремы 2).

[Еще одна причина выбора последних двух строк в таблице для импликации, отмеченная Расселом, связана с истолкованием общих суждений. Если мы хотим, чтобы высказывание «Любое натуральное число n, делящееся на 6, делится на 3» имело тот же смысл, что и высказывание «Если натуральное число n делится на 6, то оно делится на 3» при табличном понимании импликации, то выбор определяется однозначно. Достаточно рассмотреть частные случаи наших высказываний (первое из которых истинно) при $n=3$ и $n=5$.— *Ред.*]

вообще. Ведь обычно мы высказываем утверждения вида «Если А, то В» в случаях, когда не знаем, истинно А или ложно. Например, я могу сказать перед выборами: «Если наш кандидат в президенты наберет в этом штате 500 000 голосов, то пройдет и наш кандидат в Сенат» [1]. Высказывания такого вида позволяют мне заявить, что́ произойдет в случае *такой-то* возможности — не больше. Если наш кандидат не наберет 500 000 голосов, все равно мое пророчество не назовут ложным. А поскольку мы рассматриваем логику с двумя значениями, мое высказывание надо в этом случае считать истинным, хотя, быть может, и неинтересным. Если статистические данные в то самое время, как я говорю, покажут, что наш кандидат имеет обеспеченных 500 000 голосов, то я, вероятно, скажу: «Наш кандидат в Сенат пройдет» [1a] или же «Так как наш кандидат в президенты наберет 500 000 голосов в этом штате, то и наш кандидат в Сенат пройдет» [1b]. Тем не менее [1] не сделается ложным, оно просто станет избыточным или менее естественным (разве что я не слышал последних данных о голосовании).

Вот похожий математический пример. Допустим, вы написали на клочке бумаги некоторое целое положительное число $n > 1$ и засунули бумажку в *свой* карман, не показав мне. Я могу решительно утверждать: «Если n — нечетное, то $x^n + y^n$ разлагается на множители» [2]. Говоря это, я заявляю, что если вы извлечете свою бумажку с числом n, то я смогу разложить на множители $x^n + y^n$ при этом значении n, если окажется, что n — нечетное (я *не заявляю* ничего о разложении $x^n + y^n$ на множители в противном случае). Если вы идете на спор, что я ошибаюсь, то для разрешения пари вы показываете мне число n. Если, например, это 3, то я вам указываю разложение $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ и вы проиграли. Если, например, это 4 или 6, то я выигрываю автоматически.

Примеры эти должны свидетельствовать, что материальная импликация $A \supset B$ («Если А, то В») является полезным и естественным способом выражения мысли [1]). Аналогичные замеча-

[1]) Мы говорим об использовании конструкции «Если ..., то ...» с глаголами в изъявительном наклонении. Грамматика позволяет также использовать условное наклонение (в контрфактической (несбыточной) форме, «если бы»). Это высказывания вида «Если бы А, то В», где (заведомой) ложности А недостаточно для того, чтобы независимо от содержания В сделать всё высказывание истинным. Допустим, что я знаю уже величину $n > 1$ в вашем кармане и она равна 4. Я могу сделать верное высказывание: «Если бы это n было нечетным, я мог бы разложить $x^n + y^n$ на множители» [2′], но высказывание «Если бы n было нечетным, я мог бы разложить на множители $x^{n+1} + y^{n+1}$» [2″] уже не было бы верным, ибо при нечетном n выражение $x^{n+1} + y^{n+1}$ не всегда разлагается на множители. Контрфактическое условное «Если бы А, то В» является высказыванием относительно гипотетической ситуации, похожей на ту, которая реализовалась на деле, но отличной от нее тем, что А оказалось в ней истинным.

ния можно сделать относительно материальной эквивалентности $A \sim B$.

Точно так же, пока мы не знаем, истинно A или нет и истинно B или нет, может быть полезным утверждать «A или B» (символически $A \vee B$). Если бы мы уже знали, что A истинно, было бы проще и содержательнее сказать просто «A» и т.п. Определенная нами в четвертой истинностной таблице дизъюнкция $A \vee B$ является *включительной*, или *неразделительной*, дизъюнкцией; она истинна, если A истинно или же B истинно, или же если A и B оба истинны. Она употребительнее, чем разделительная (исключающая) дизъюнкция (словами: «A или B, но не оба вместе»), для которой в первой строчке стояло бы $\mathfrak{f}$. Русский язык в этом пункте допускает двоякое понимание союза «или», а латынь имеет союз «vel» для включительной дизъюнкции и «aut» для разделительной дизъюнкции. Символ $\vee$ происходит от первой буквы союза «vel».

Мы отложим дальнейшее обсуждение соотношения между нашими символами и обычным языком до конца главы.

Проиллюстрируем, как многократно применять приведенные выше таблицы истинности, на примере вычисления таблицы истинности для формулы $P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$. В (1) сначала приведен окончательный результат, а подробности вычисления показаны ниже на примере вычисления третьей строки. Чтобы подсчитать ее, начнем с того, что подставим вместо атомов P, Q, R соответственно значения $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$, приписанные им в этой строке. Затем вычислим значения подформул, начиная изнутри. Так, в силу таблицы для дизъюнкции $\mathfrak{f} \vee \mathfrak{t}$ есть $\mathfrak{t}$; согласно таблице для отрицания, $\neg \mathfrak{t}$ есть $\mathfrak{f}$; по таблице для импликации $\mathfrak{t} \supset \mathfrak{f}$ есть $\mathfrak{f}$ (этот факт мы используем троекратно). Последовательные этапы вычисления показаны в строках, которые ради наглядности помещены друг под другом, а затем сведены в одну строку.

Окончательная таблица:

(1)

	P	Q	R	$P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$
1.	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
2.	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
3.	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
4.	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
5.	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
6.	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
7.	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
8.	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$

Вот вычисление третьей строки:

$$\begin{array}{l}
P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P)) \\
\mathfrak{t} \supset (\ \mathfrak{f} \vee \mathfrak{t} \ \supset (\mathfrak{t} \supset \neg\, \mathfrak{t})) \\
\mathfrak{t} \supset (\quad \mathfrak{t} \quad \supset (\mathfrak{t} \supset \mathfrak{f} \ )) \\
\mathfrak{t} \supset (\quad \mathfrak{t} \quad \supset \quad \mathfrak{f} \quad) \\
\mathfrak{t} \supset \qquad\quad \mathfrak{f} \\
\quad \mathfrak{f} \\
\hline
\mathfrak{t}\ \mathfrak{f}\ \ \mathfrak{f}\ \mathfrak{t}\ \mathfrak{t}\ \ \mathfrak{f}\ \ \mathfrak{t}\ \mathfrak{f}\ \mathfrak{f}\ \ \mathfrak{t}
\end{array}$$

Проиллюстрированный нами процесс вычисления — чисто механическая процедура, посредством которой можно вычислить таблицу истинности любой формулы E, точнее таблицу истинности формулы E при заданном на (вертикальных) входах списке $P_1, \ldots, P_n$ элементарных составляющих формулы E. (В (1) мы пользовались списком P, Q, R, но мы могли бы пользоваться также набором Q, P, R или Q, R, P, и т.п. и получили бы различные перестановки *одной и той же* совокупности окончательных результатов вычисления.) В том тривиальном случае, когда E является атомом P, вычисление содержит нуль этапов и столбец значений тождествен столбцу для P.

На практике вовсе не обязательно полностью придерживаться описанной процедуры. Достаточно заметить, что формула $A \supset B$ истинна всегда, когда A ложна (независимо от значений истинности для B), и сразу же можно поставить $\mathfrak{t}$ в последние четыре строчки описанной выше таблицы. Имеются такие формулы, в таблицах которых столбец значений содержит только $\mathfrak{t}$, например

$$P \,\&\, \neg P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P)), \quad P \supset \neg P \sim \neg P \text{ и } P \supset P,$$

как может проверить читатель (упр. 2.2). Тут порядок, в котором предъявляют список атомов, становится безразличным. (Почему?) Такие формулы истинны всегда независимо от истинности или ложности их элементарных подформул. Даже не зная истинностных значений элементарных составляющих, мы можем сказать, что составленная из них формула истинна. Такие формулы называют *общезначимыми*, или *тождественно истинными*, или (по Витгенштейну [1921]) *тавтологиями* (в исчислении высказываний или в силу исчисления высказываний).

Вот словесный пример такого высказывания: «Если я пойду слишком быстро, то я пойду слишком быстро». Оно истинно в силу исчисления высказываний, ибо имеет вид $P \supset P$. Высказывание же «Я пойду слишком быстро», если оно и верно, верно в силу иных оснований.

Общезначимые формулы (тавтологии) могут показаться неинтересными, ибо, в некотором смысле, они не несут никакой информации. То, что я считаю высказывание «Если я пойду слишком быстро, то я пойду слишком быстро» истинным, едва ли покажется вам достаточным поводом для его рассмотрения. Но из дальнейшего чтения будет видно, что общезначимые формулы важны.

Упражнения. 2.1. Найдите истинностные таблицы формул:

(a) $\neg P \vee Q$ (сравните с таблицей для $P \supset Q$).

(b) $(\neg P \vee Q) \& (R \supset (P \sim Q))$.

(c) $Q \supset P \vee Q$. Верно ли, что одна из этих формул общезначима?

2.2. Проверьте, что формулы $P \& \neg P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$, $P \supset \neg P \sim \neg P$ и $P \supset P$ общезначимы.

2.3. Покажите, что следующие формулы общезначимы. Чтобы уменьшить труд, заметьте, что импликация $A \supset B$ лишь тогда оказывается не тавтологией, когда можно подыскать для P, Q (или же для P, Q, R, S) такие истинностные значения, которые делают B ложным, а A истинным. Рассмотрите все системы истинностных значений, при которых B ложно, и удостоверьтесь, что ни при одной из них A не принимает значения $\mathfrak{t}$.

(a) $((P \supset Q) \supset P) \supset P$ (закон Пирса [1885]).

(b) $(P \supset R) \& (Q \supset S) \& (\neg R \vee \neg S) \supset \neg P \vee \neg Q$.

(c) $(P \supset Q) \supset (\neg Q \supset \neg P)$[1]).

2.4. Вычислив одну лишь подходящую строку в таблице истинности, покажите, что следующие формулы не общезначимы:

(a) $P \vee Q \supset P \& Q$.

(b) $(P \supset Q) \supset (Q \supset P)$[1]).

2.5. Найдите формулы, где фигурируют атомы P, Q и R и столбцы значений которых имеют вид

(a) $\mathfrak{ffftfff}$ (используйте такой метод, который применим для всякой истинностной таблицы, содержащей ровно одно $\mathfrak{t}$);

(b) $\mathfrak{tffftftf}$ (начните с использования метода, применимого ко всякой таблице, содержащей больше чем одно $\mathfrak{t}$; можете ли вы найти более короткую формулу с той же таблицей истинности?);

(c) $\mathfrak{fffffff}$.

§ 3. Теория моделей; правило подстановки, совокупность общезначимых формул

Определение общезначимости дает нам автоматическую процедуру установления того, является ли какая-либо формула тождественно истинной: достаточно вычислить ее истинностную таблицу и установить, что мы всегда получаем лишь значение $\mathfrak{t}$.

---

[1]) Формула $\neg Q \supset \neg P$ является *контрапозицией* формулы $P \supset Q$, а $Q \supset P$ — *обратной* к $P \supset Q$.

Это удачный случай, и надо без колебания пользоваться этой процедурой, если возникают сомнения.

Однако вычисление истинностных таблиц для произвольных формул было бы чересчур медленным средством нахождения (общезначимых) формул. Человек, не знающий простых примеров (общезначимых) формул и не умеющий получать из них другие общезначимые формулы (независимо от того, является ли его официальным занятием изучение логики), рискует прослыть интеллектуально отсталым.

Вот один простой принцип. *Определяя* общезначимость, мы использовали истинностную таблицу, на входах которой фигурируют атомарные составляющие, чтобы полностью использовать анализ формулы на уровне исчисления высказываний. Но чтобы *установить* общезначимость, нам не всегда нужно до конца разлагать формулу на ее элементарные составляющие. Если, помещая на входах таблицы все значения некоторых (не обязательно атомарных) составляющих, мы будем на выходе всегда получать t, то мы можем быть уверенными, что эта формула общезначима. Например, $P \& \neg P \supset P \& \neg P$ имеет вид $A \supset A$. Приведенная ниже таблица (a), на входах которой помещены значения A, дает только t, следовательно, наша формула общезначима. Действительно, при вычислении строк таблицы (b), имеющей на входе P (как предписывается определением общезначимости), первый этап вычисления состоит в нахождении значения формулы $P \& \neg P$, т. е. A. Оставшаяся часть вычисления состоит в нахождении значения формулы в целом, исходя из значения A (подчеркнуто в таблице (b)); но это уже было проделано в соответствующей строке таблицы (a), и в результате получилось t.

(a)

A	A	⊃	A
t	t	t	t
f	$\underline{f}$	$\underline{t}$	$\underline{f}$

(b)

P	P	&	¬	P	⊃	P	&	¬	P
t	t	$\underline{f}$	f	t	$\underline{t}$	t	$\underline{f}$	f	$\underline{t}$
f	f	$\underline{f}$	t	f	$\underline{t}$	f	$\underline{f}$	t	f

(c)

P	P	⊃	P
t	t	t	t
f	f	t	f

Таблица (a) совпадает с таблицей (c) с точностью до обозначений: вместо того чтобы говорить о построении таблицы для $A \supset A$ с входом A, мы можем сказать, что проверяем общезначимость формулы $P \supset P$, а затем подставляем A, т. е. $P \& \neg P$, вместо P в $P \supset P$. Это рассуждение дает следующую теорему, где мы пишем «$\models E$» в качестве сокращения для выражения: «E общезначима»[1]).

[1]) Выражения, содержащие «$\models$» (здесь «$\models E$», в § 7 «$A_1, \ldots, A_n \models B$»), не являются формулами предметного языка, а суть выражения языка исследователя; их используют для сжатой записи некоторых высказываний, относящихся к формулам. Определение «формулы», поскольку это касается исчис-

Теорема 1. (Подстановка вместо атомов.) *Пусть* E—*формула, в которую входят только атомы* $P_1, \ldots, P_n$, *а* E^*—*формула, полученная из* E *одновременной подстановкой формул* $A_1, \ldots, A_n$ *вместо* $P_1, \ldots, P_n$ *соответственно. Если* $\models E$, *то* $\models E^*$.

С другой стороны, чтобы показать, пользуясь методом истинностных таблиц, что некая формула не является тождественно истинной, на входах таблицы нужно в общем случае поместить *атомы* этой формулы. Например, $P \& \neg P \supset Q$ имеет вид $A \supset B$. Таблица для $A \supset B$ при A и B на входах принимает не только значение t (иными словами, $P \supset Q$ не общезначима). Но $P \& \neg P \supset Q$ тождественно истинна. Этот пример показывает, что утверждение «Если $\models E^*$, то $\models E$», обратное теореме 1, не верно.

Вернемся к примеру, предшествовавшему теореме 1. Поскольку таблица (a) с входом A дает только t (или же, поскольку таблица (c) дает только t), постольку во *всех* формулах вида $A \supset A$ у нас должно быть t (а не только в тех, где на место A подставлено $P \& \neg P$). Это содержится в теореме 1, ибо при фиксированной формуле E, коль скоро установлено «$\models E$», можно применять теорему к какому угодно набору формул $A_1, \ldots, A_n$.

В приводимой ниже теореме мы используем это соображение для получения некоторого списка общезначимых формул[1]).

Например, только что найденный результат получит номер *1.

Пункт 5b утверждает, что при любом выборе в качестве A и B формул, построенных из P, Q, R, ..., $P_1, P_2, P_3, \ldots$, формула $B \supset A \vee B$ общезначима. Действительно, в упр. 2.1 (c) мы видели, что $Q \supset P \vee Q$ общезначима, следовательно, по теореме 1 формула $B \supset A \vee B$ общезначима.

Точно так же каждый из результатов теоремы 2 можно установить автоматически, начиная с проверки общезначимости конкретной формулы, получаемой замещением A, B, C атомами P, Q, R, с дальнейшим использованием теоремы 1 (или же, что то же самое, строя истинностную таблицу с входами A, B, C).

ления высказываний, было раз навсегда дано в § 1 и допускает лишь знаки $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ (в качестве символов предметного языка), с помощью которых можно строить формулы, исходя из атомов P, Q, R, ..., P_1, P_2, P_3, ... Так как «$\models$» является символом языка исследователя, он стоит вне всякой формулы и, следовательно, разделяет сильнее, чем $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$; например, «$\models A \sim B$» надо читать как «$\models (A \sim B)$», а не «$(\models A) \sim B$».

[1]) Большая часть этих результатов содержится также в [BM], причем, за несколькими исключениями, с той же нумерацией. Так легче пользоваться [BM] как справочником, дополняющим настоящую книгу, или же пользоваться этой книгой как введением в [BM]. (Этим объясняются пропуски и другие неправильности в нумерации пунктов теоремы 2. Номера 9a, 10a 10б, *4a, *12a, *55c, *63a не отвечают тем же номерам [BM]; *55a и *55b фигурируют в [BM] под номерами *63 и *62, здесь же им приданы другие номера, чтобы поместить их в списке раньше.) Смысл значка «°» в номерах 8, *12a и т. п. будет объяснен в конце § 12.

Читатель может принять весь список и на веру, как он принимает на веру таблицу квадратных корней, тригонометрических функций или интегралов.

Надеемся, что читатель сможет применять эти результаты. Большое число из них придется знать на память, чтобы иметь возможность работать, не возвращаясь все время к теореме 2. Мы не требуем, чтобы читатель сейчас же выучил этот список наизусть, но рекомендуем почаще обращаться к нему, чтобы ознакомиться с теми из пунктов, которые чаще всего используются[1]).

Теорема 2. *При любом выборе формул* A, B, C

1a. $\models A \supset (B \supset A)$.

1b. $\models (A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$.

3. $\models A \supset (B \supset A \& B)$.

4a. $\models A \& B \supset A$.

4b. $\models A \& B \supset B$.

5a. $\models A \supset A \vee B$.

5b. $\models B \supset A \vee B$.

6. $\models (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$.

7. $\models (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$.

8°. $\models \neg\neg A \supset A$.

9a. $\models (A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \sim B))$.

10a. $\models (A \sim B) \supset (A \supset B)$.

10b. $\models (A \sim B) \supset (B \supset A)$.

(Введение и удаление логических символов.)

*1. $\models A \supset A$.

*2. $\models (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$.

*3. $\models A \supset (B \supset C) \sim (B \supset (A \supset C))$.

*4a. $\models A \supset (B \supset C) \sim A \& B \supset C$.

(Принцип тождества, цепное заключение, перестановка посылок, импортация, экспортация.)

*10a. $\models \neg A \supset (A \supset B)$.

*12a°. $\models A \supset B \sim \neg B \supset \neg A$.

(Отрицание антецедента, контрапозиция.)

[1]) Последующее изложение должно облегчить задачу ознакомления с этими и другими результатами. Мы будем их по-разному применять и установим взаимозависимости, которые помогут сохранить их в памяти. Некоторым результатам мы дадим и другие доказательства, так что они приобретут больший смысл.

Следуя Чёрчу [1956], стр. 95, *49 можно точнее назвать «полным законом двойного отрицания», 8 — просто «законом двойного отрицания», обратное утверждение к 8 — «обратным законом двойного отрицания». Точно так же *12a — это «полный закон контрапозиции», при замене $\sim$ на $\supset$ — «закон контрапозиции», при замене $\supset$ на $\subset$ — «обратный закон контрапозиции». 1a есть «закон утверждения консеквента» (ср. *10a), а 7 — «закон приведения к нелепости». При замене $\sim$ на $\supset$ *4a — это «закон внесения (импортации)», при замене $\sim$ на $\subset$ — «закон вынесения (экспортации)». (Так как тут убирают знак «$\sim$», то прибавляются скобки.)

*19. $\models A \sim A$. *20. $\models (A \sim B) \sim (B \sim A)$.
*21. $\models (A \sim B) \& (B \sim C) \supset (A \sim C)$.

(Рефлексивность, симметричность и транзитивность эквивалентности.)

*31. $\models (A \& B) \& C \sim A \& (B \& C)$. *32. $\models (A \vee B) \vee C \sim$ $\sim A \vee (B \vee C)$.
*33. $\models A \& B \sim B \& A$. *34. $\models A \vee B \sim B \vee A$.
*35. $\models A \& (B \vee C) \sim$ $\sim (A \& B) \vee (A \& C)$. *36. $\models A \vee (B \& C) \sim$ $\sim (A \vee B) \& (A \vee C)$.
*37. $\models A \& A \sim A$. *38. $\models A \vee B \sim A$.
*39. $\models A \& (A \vee B) \sim A$. *40. $\models A \vee (A \& B) \sim A$.

(Законы ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности, идемпотентности и элиминации.)

*49°. $\models \neg\neg A \sim A$. *50. $\models \neg (A \& \neg A)$.
*51°. $\models A \vee \neg A$.

(Закон двойного отрицания, отрицание противоречия, закон исключенного третьего.)

*55a. $\models \neg (A \vee B) \sim$ $\sim \neg A \& \neg B$. *55b°. $\models \neg (A \& B) \sim$ $\sim \neg A \vee \neg B$.
*55c°. $\models \neg (A \supset B) \sim A \& \neg B$.

(Законы Де Моргана [1847] [1]), отрицание импликации.)

*56°. $\models A \vee B \sim$ $\sim \neg (\neg A \& \neg B)$. *57°. $\models A \& B \sim$ $\sim \neg (\neg A \vee \neg B)$.

*58°. $\models A \supset B \sim \neg (A \& \neg B)$. *59°. $\models A \supset B \sim \neg A \vee B$.
*60°. $\models A \& B \sim \neg (A \supset \neg B)$. *61°. $\models A \vee B \sim \neg A \supset B$.
*63a. $\models (A \sim B) \sim (A \supset B) \& (B \supset A)$.

(Выражение одних связок через другие.)

Упражнения. 3.1. Переделайте пример, предшествующий теореме 1 (с таблицами (a), (b), (c)), для доказательства того, что $P \vee \neg Q \supset P \vee \neg Q$ общезначима (возьмите в качестве A не $P \& \neg P$, а $P \vee \neg Q$).

3.2. Установите общезначимость формул из 1a, 4a, 6, 7, *50, *51 посредством указанного выше автоматического метода, но пользуясь, когда сможете, в вычислениях их истинностных таблиц сокращениями.

---

[1]) В словесной форме они восходят по крайней мере к Оккаму («Summa logicae» [1323—9]). См. Лукасевич [1934], Бохенский [1956].

3.3. Докажите, что если таблица некоторой формулы, вычисленная для входов, не обязательно являющихся атомарными составляющими, содержит в столбце значений только значение f, то эта формула не может быть тождественно истинной (см. первое замечание после теоремы 1).

§ 4. Теория моделей; импликация и эквивалентность

Допустим, что таблица истинности некоторой формулы E построена, как в § 2, с использованием всех ее атомов $P_1, \ldots, P_n$, и пусть построена еще другая таблица для E с использованием дополнительных атомов $P_{n+1}, \ldots, P_{n+m}$, которые не входят в E. Новая таблица отличается от первоначальной только тем, что ее столбец значений разбивается на 2^m частей, отвечающих 2^m распределениям t и f между атомами $P_{n+1}, \ldots, P_{n+m}$, не входящими в E. Каждая из этих 2^m частей дублирует столбец значений первоначальной таблицы, поскольку принят один и тот же порядок вычисления (определяемый распределением значений атомов $P_1, \ldots, P_n$). Например, для $n=2$, $m=1$ строятся таблицы (e), (f), (g) с тремя атомами на входах, хотя формулы двухатомны

	P_1	P_2	P_3	(d) $(P_1 \vee P_2) \& (P_1 \supset P_3)$	(e) $P_2 \vee P_3$	(f) $P_1 \& P_3$	(g) $P_2 \supset P_2 \vee P_3$
1.	t	t	t	t	t	t	t
2.	t	t	f	f	t	f	t
3.	t	f	t	t	t	t	t
4.	t	f	f	f	f	f	t
5.	f	t	t	t	t	f	t
6.	f	t	f	t	t	f	t
7.	f	f	t	f	t	f	t
8.	f	f	f	f	f	f	t

В таблицах (e) и (g) строки 5—8 (где P_1 имеет значение f) дублируют соответственно строки 1—4 (где P_1 имеет значение t), а в таблице (f) строки 3, 4, 7, 8 (P_2 есть f) дублируют соответственно строки 1, 2, 5, 6 (P_2 есть t).

В частности, если истинностная таблица некоторой формулы E при заданных на входах ее атомах содержит только t, то же самое будет верно при задании на ее входах дополнительных атомов, и наоборот. (Это иллюстрируется таблицей (g).) Таким образом, $\models$E тогда и только тогда, когда таблица для E дает t, каков бы ни был список атомов $P_1, \ldots, P_n$, лишь бы он содержал все атомы, входящие в E.

В теоремах 3 и 4 мы будем сравнивать таблицы A и B, а также таблицы для $A \supset B$ или $A \sim B$. Чтобы облегчить сравнение, мы поместим на входе каждой таблицы единый перечень атомов $P_1, \ldots, P_n$, содержащий все атомы, входящие в A или в B. Поэтому в том случае, когда A и B не состоят из одних и тех же атомов, таблица для A (соответственно для B) будет содержать на входе больше атомов, чем их входит в эту формулу. Как мы установили, ничто не меняется от того, что перечень $P_1, \ldots, P_n$ содержит еще и другие атомы.

Теорема 3. *Если* $\models A$ *и* $\models A \supset B$, *то* $\models B$.

Доказательство. Пусть некоторому перечню атомов $P_1, \ldots, P_n$ указанным выше образом приписана какая-нибудь система истинностных значений. Вычисление значения для $A \supset B$ для этой системы состоит в том, что сначала вычисляются значения A и B, а затем $A \supset B$ согласно таблице для $\supset$ (в начале § 2). Согласно предположению о том, что $\models A$ и $\models A \supset B$, получаем, что значение для A и окончательное значение для $A \supset B$ есть t. По таблице для $\supset$ это возможно только в случае, когда применялась первая строка таблицы для $\supset$, а там значение B также есть t. Поскольку это должно быть так для всякой системы истинностных значений, приписанной атомам $P_1, \ldots, P_n$, то B получает значение t при всех системах истинностных значений, т. е. $\models B$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. (a) *При всех распределениях истинностных значений формула* $A \sim B$ *имеет значение* t *тогда и только тогда, когда* A *и* B *имеют одинаковые значения. Следовательно,* (b)° $\models A \sim B$ *тогда и только тогда, когда* A *и* B *имеют одинаковые истинностные таблицы.*

Доказательство. Пусть A и B — произвольные формулы. (a) Первый этап в вычислении значения для $A \sim B$ при фиксированной системе истинностных значений для $P_1, \ldots, P_n$ состоит в том, чтобы вычислить значения A и B, а затем прочесть значение в основной таблице для $A \sim B$ (§ 2), исходя из полученных значений для A и B. Но в этой таблице мы видим, что $A \sim B$ принимает значение t тогда и только тогда, когда вычисленные для A и B значения тождественны. (b) Поэтому таблица нашей формулы $A \sim B$ содержит (в столбце значений) лишь значение t в том и только в том случае, когда A и B принимают одинаковые истинностные значения при *любых* значениях атомов.

Пример 2°. В силу части (b) теоремы с учетом результата упр. 2.1(a) $\models P \supset Q \sim \neg P \vee Q$ (и $\models \neg P \vee Q \sim P \supset Q$). Отсюда подстановкой (теорема 1) получаем $\models A \supset B \sim \neg A \vee B$ (и $\models \neg A \vee B \sim A \supset B$). Итак, мы по-новому доказали пункт *59 теоремы 2. (Доказательство это отличается от предложенного в § 3 тем, что сейчас мы принимаем во внимание общий принцип, установленный в виде теоремы 4(b), вместо непосредственного механического вычисления $P \supset Q \sim \neg P \vee Q$ в каждой строке.)

Теорема 5. (Теорема о замене.) *Пусть* C_A — *формула, содержащая некоторую формулу* A *в качестве своей выделенной (составной) части, и пусть* C_B — *формула, получаемая из* C_A *заменой этой составляющей* A *на формулу* B. *Если* $\models A \sim B$, *то* $\models C_A \sim C_B$.

Доказательство. Пусть $\models A \sim B$. Согласно теореме 4(b), A и B имеют одинаковые таблицы. Следовательно, если при вычислении заданной строки таблицы для C_A мы заменим вычисление выделенной части формулы A вычислением формулы B, то результат останется неизменным. Следовательно, C_B имеет такую же таблицу, как C_A. Значит, по теореме 4 (b) $\models C_A \sim C_B$.

Пример 3°. В силу примера 2 по теореме 5

$$\models \neg P \vee Q \supset (P \supset \underline{\neg P \vee Q}) \sim \neg P \vee Q \supset (P \supset (P \supset Q)).$$

Здесь подчеркнута часть A формулы C_A. При написании C_B нужна лишняя пара скобок по сравнению с C_A. Мы понимаем под «составной» частью A формулы C_A такую часть A, которая образуется до удаления скобок и значение которой вычисляется поэтому в ходе нашего вычисления значения всей формулы C_A. Поэтому, например, $P \vee Q$ не является составной частью формулы $\neg P \vee Q \supset (P \supset \neg P \vee Q)$, как можно видеть, восстанавливая некоторые пары скобок: $(\neg P) \vee Q \supset (P \supset (\neg P \vee Q))$.

Следствие. (Правило замены, или свойство замены для эквивалентности.) *Если* $\models C_A$ *и* $\models A \sim B$, *то* $\models C_B$.

Доказательство. В силу того, что $\models A \sim B$, и по теореме 5 имеем $\models C_A \sim C_B$. Следовательно, по теореме 4 (b) C_A и C_B имеют одинаковую таблицу. По предположению $\models C_A$, значит, таблица эта содержит только $\mathfrak{t}$.

Упражнения. 4.1. Передокажите *31, *34, *49, *55a, *55b теоремы 2 в стиле примера 2.

4.2°. Точно так же установите, что

(a) $\models (A \sim B) \sim (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$.

(b) $\models \neg (A \sim B) \sim (A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$.

4.3. Проиллюстрируйте доказательство теоремы 5, вычисляя вторую строку таблиц формул $\neg P \vee Q \supset (P \supset \neg P \vee Q)$ и $\neg P \vee Q \supset$ $\supset (P \supset (P \supset Q))$; во второй строке атомам P и Q приписываются значения $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$. Подчеркните общие части, как в таблицах (a), (b).

4.4°. Используйте теорему 5 и формулу *55a теоремы 2 для того, чтобы установить, что $\models \neg\neg(\neg A \vee \neg B) \sim \neg(\neg\neg A \& \neg\neg B)$. Заметьте, что, каковы бы ни были атомы P, Q, R, ..., P_1, P_2, P_3, ..., из которых построены «A» и «B» в этой формуле, *55a истинна для случая, когда *ее* A и B — это *наши* $\neg A$ и $\neg B$.

4.5. Используя $\models \neg A \vee B \sim A \supset B$ (пример 2), выведите *10a из 5a.

4.6. Дайте три доказательства того, что *если* $\models A$ *и* $\models A \sim B$, *то* $\models B$. (С помощью теоремы 4 (b); с помощью следствия теоремы 5; используя 10a и теорему 3.)

4.7. Покажите на примере, что следствие теоремы 5 не верно, если написать «$\supset$» вместо «$\sim$».

4.8. Установите следующие утверждения, считая B произвольной формулой, а относительно A предполагая, что в нее не входит $\neg$:

(a) Первая строка истинностной таблицы A состоит из $\mathfrak{t}$.

(b) Если $\models \neg B$, то B содержит по крайней мере одно вхождение связки $\neg$.

(c) Если $\models B \sim \neg A$, то B содержит по крайней мере одно вхождение $\neg$.

§ 5. Теория моделей; цепи эквивалентностей

Часто бывает полезно знать, что две формулы A и B имеют одну и ту же истинностную таблицу, или же нужно уметь преобразовывать заданную формулу A в формулу B некоторого специального вида, но с той же самой таблицей. В силу теоремы 4 (b) формулы A и B имеют одну и ту же таблицу тогда и только тогда, когда $\models A \sim B$, т. е. если тождественно истинна формула, выражающая материальную эквивалентность формул A и B. Мы можем сказать в таком случае, что A и B *(логически) эквивалентны (в исчислении высказываний)*. Таким образом, 26 из 45 результатов теоремы 2 являются результатами об эквивалентностях, верных в исчислении высказываний[1]).

Сейчас мы изложим метод цепей, который полезен для установления таких эквивалентностей.

Сначала заметим, что (α) $\models A \& B$ *тогда и только тогда, когда одновременно* $\models A$ *и* $\models B$. Это видно непосредственно из таблицы для & (или же можно вывести это из теоремы 3, пользуясь пп. 3, 4 и 4b теоремы 2).

Затем заметим, что в исчислении высказываний эквивалентность рефлексивна, симметрична и транзитивна[2]): (β) $\models A \sim A$; (γ) *Если* $\models A \sim B$, *то* $\models B \sim A$; (δ) *Если* $\models A \sim B$ *и* $\models B \sim C$, *то* $\models A \sim C$.

---

[1]) Таким образом, (логическая) эквивален*тность*—это *отношение*, определенное на множество формул (каждой паре формул A и B оно ставит в соответствие $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$), а (материальная) эквивален*ция*—это *операция* (сопоставляющая паре формул A и B третью формулу $A \sim B$). Но поскольку по определению эквивалентность формул A и B имеет место тогда и только тогда, когда эквиваленция $A \sim B$ истинна (общезначима), употребление одного и того же термина «equivalence» для обоих этих понятий может разве лишь повлиять на смысл какого-либо утверждения (но не на истинностное его значение).— *Прим. перев.*

[2]) Второе из этих свойств (γ) можно было бы называть также *коммутативностью эквиваленции.— Прим. перев.*

Все эти три высказывания следуют непосредственно из теоремы 4 (b). (А именно, (β) — это *19, (γ) вытекает из *20 в силу упр. 1.6, (δ) следует из *21 с помощью (α) и теоремы 3.)

Используя (β) — (δ), получаем: (ε) *Если* $\models A_0 \sim A_1$ *и* $\models A_1 \sim A_2$ *и* $\models A_2 \sim A_3$, *то* $A_i \sim A_j$ *для любой из* 16 *пар индексов* i, j (i, $j = 0$, 1, 2, 3); это значит, что $\models A_0 \sim A_0$, $\models A_0 \sim A_1$, $\models A_0 \sim A_2$, $\models A_0 \sim A_3$, $\models A_1 \sim A_0$, ..., $\models A_3 \sim A_0$, $\models A_3 \sim A_1$, $\models A_3 \sim A_2$, $\models A_3 \sim A_3$. Например, $\models A_0 \sim A_0$ получаем из (β). Чтобы получить $\models A_3 \sim A_1$, используем $\models A_1 \sim A_2$ и $\models A_2 \sim A_3$, применяя (δ), а к полученному результату применяем (γ) и т. п. Можно получить (ε) и непосредственно из теоремы 4 (b), ибо три посылки в (ε) утверждают, что каждая из формул A_0, A_1, A_2, A_3 имеет такую же таблицу, как и предыдущая, а заключение утверждает, что любые две формулы из этого списка имеют одну и ту же таблицу.

Условимся теперь писать «$A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3$» в качестве сокращения для формулы $((A_0 \sim A_1) \& (A_1 \sim A_2)) \& (A_2 \sim A_3)$. Дважды применяя ($\alpha$), получаем: ($\zeta$) *Предположение в* ($\varepsilon$) *равносильно* $\models A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3$.

Назовем $A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3$ «цепью (трех) эквивалентностей». Цепь обладает тем свойством, что мы можем установить ее общезначимость, устанавливая общезначимость всех (трех) ее «звеньев», а если устанавливается общезначимость цепи, то можно вывести эквивалентность любых двух из формул A_0, A_1, A_2, A_3, участвующих в цепи.

Все сказанное нами относительно (ε) с формулами A_0, A_1, A_2, A_3 применимо к любому перечню A_0, ..., A_n при $n \geqslant 2$ (и тривиально при $n = 0$, 1).

Заметим теперь, что, коль скоро установлены пункты *49, *55а и 55с теоремы 2 (методом, предложенным в § 3 или в упр. 4.1), формулы *55b и *56 — *61 получаются методом цепей. Например:

*55b. В силу п. *49 (поскольку А из *49 может быть произвольной формулой, например, в нашем случае формулой $\neg A \vee \neg B$) и (γ)

(1) $\models \neg A \vee \neg B \sim \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$. По теореме 5 и *55а (как в упр. 4.4):

(2) $\models \underline{\neg\neg(\neg A \vee \neg B)} \sim \neg(\neg\neg A \& \neg\neg B)$. В силу теоремы 5 и *49:

(3) $\models \neg(\underline{\neg\neg A} \& \neg\neg B) \sim \neg(A \& \neg\neg B)$,

(4) $\models \neg(A \& \underline{\neg\neg B}) \sim \neg(A \& B)$. Из (1)—(4) в силу ($\varepsilon$) при $n = 4$: $\models \neg(A \& B) \sim \neg A \vee \neg B$, что и требовалось доказать.

Используя (ζ), мы можем сократить это доказательство: $\models \neg A \vee \neg B \sim \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ [*49] $\sim \neg(\neg\neg A \& \neg\neg B)$ [*55а] $\sim \neg(A \& B)$ [*49].

*57. $\models A \& B \sim \neg\neg(A \& B)$ [*49] $\sim \neg(\neg A \vee \neg B)$ [*55b].

*60. $\models A \& B \sim A \& \neg\neg B$ [*49] $\sim \neg(A \supset \neg B)$ [*55c].

Так как в § 3 мы можем считать, что результаты теоремы 2 уже установлены кем-то, кто проделал все вычисления, то в этих новых доказательствах существенно то, как упрощается вывод прочих результатов, если помнить *49 и какие-нибудь два из *55a—*61, содержащие все три символа $\supset$, &, $\vee$.

Мы применим метод цепей для получения нового результата:

Теорема 6°. *Пусть* B — *некоторая формула, построенная с помощью атомов* $P_1, \ldots, P_n$ *и их отрицаний* $\neg P_1, \ldots, \neg P_n$ *с применением только* & *и* $\vee$. *Пусть* $E^\dagger$ — *формула, полученная из* E *заменой* & *на* $\vee$, $\vee$ *на* & *и каждого атома* (*без отрицания*) *на его отрицание* (см. пример в доказательстве)[1]. *Тогда* $\models \neg E \sim E^\dagger$.

Доказательство. Используя *55a и *55b (вместе с методом цепей), мы можем перемещать в формуле $\neg E$ начальное вхождение символа $\neg$ последовательно направо (внутрь) через все & и $\vee$; при этом & меняется на $\vee$, а $\vee$ — на &. Затем мы можем использовать *49, чтобы удалить появляющиеся (в результате того, что атомы заменяются на их отрицания) двойные отрицания. Вот пример, который иллюстрирует это доказательство:

$$
\begin{array}{lllll}
\models & \neg(\neg Q \,\& & (\neg P \vee Q)) \sim & & \\
\sim & \neg\neg Q \vee \neg & (\neg P \vee Q) & [*55b] \sim \\
\sim & \neg\neg Q \vee & (\neg\neg P \,\&\, \neg Q) & [*55a] \sim \\
\sim & Q \vee & (P \,\&\, \neg Q) & [*49].
\end{array}
$$

Следствие°. *Всякая формула* E *эквивалентна некоторой формуле* F (т. е. $\models E \sim F$), *в которой* $\neg$ *встречается только непосредственно перед атомами.*

Доказательство. Сначала удалим $\sim$ и $\supset$ из E по *63a и *58 или *59 (либо *55c, *60 или *61). Затем исключим все двойные отрицания по *49. Наконец, теорема 6 применяется для последовательного удаления каждого $\neg$, который не находится непосредственно перед каким-нибудь атомом. Используя ее, мы всякий раз выбираем самое внутреннее вхождение (т. е. такое, что его область действия не содержит иных $\neg$). Вот пример, проясняю-

[1]) Если в записи формулы E опущены скобки, согласно старшинству & над $\vee$ (см. § 1), то перед выполнением операции † теоремы 6 или операции ′ теоремы 7 их надо восстановить.

щий это:

$$\models \neg\{\neg P \supset \neg(\neg\neg P \vee \neg Q) \& R\} \sim$$
$$\sim \neg\{\neg\neg P \vee (\neg(\neg\neg P \vee \neg Q) \& R)\}$$ [удаление $\supset$ по *59] $\sim$
$$\sim \neg\{P \vee (\neg(P \vee \neg Q) \& R)\}$$ [снятие двойного отрицания по *49] $\sim$
$$\sim \neg\{P \vee (\neg P \& Q \& R)\}$$ [теорема 6 применяется к $\neg(P \vee \neg Q)$] $\sim$
$$\sim \neg P \& (P \vee \neg Q \vee \neg R)$$ [теорема 6 применяется ко всей формуле].

Удаляя знак $\supset$, мы добавляем пару скобок, бывших до того излишними, ибо $\supset$ старше &. В четвертой и заключительной формулах мы опускаем пару скобок (подобно тому, как мы пишем в математике «$a+b+c$»), ибо, согласно *31 и *32, безразлично (для нашей нынешней цели), каков порядок построения трехчленной конъюнкции или дизъюнкции [1]).

Упражнения. 5.1. Используйте метод цепей для вывода *56, *58, *59, *61 (считая *49 или *55a—*55c уже установленными).

5.2. Найдите эквивалентные формулы, в которых $\neg$ фигурирует только перед атомами:

(a) $\neg((P \& \neg Q) \vee R \vee (S \& \neg P))$.

(b) $\neg(P \vee \neg Q \supset (R \& \neg\neg S) \vee Q)$.

(c) $\neg(\neg(P \& Q) \sim P$.

5.3°. Установите следующие формулы, используя по возможности не таблицы истинности, а установленные выше результаты:

(a) $\models (A \sim B) \sim (A \supset B) \& (B \supset A) \sim (\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B) \sim$
$\sim (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$.

(b) $\models \neg(A \sim B) \sim (A \& \neg B) \vee (\neg A \& B) \sim (A \vee B) \& (\neg A \vee \neg B) \sim$
$\sim (A \vee B) \& \neg(A \& B)$ [выражение для разделительной дизъюнкции] $\sim (\neg A \supset B) \& (A \supset \neg B) \sim (\neg B \supset A) \& (B \supset \neg A) \sim (\neg A \sim$
$\sim B) \sim (A \sim \neg B)$.

*§ 6. Теория моделей; двойственность [2])

Теорема 7°. (Принцип двойственности.) *Пусть* E *и* F*—формулы того же вида, что и в теореме* 6. *Пусть* E′ *и* F′*—формулы,*

[1]) Хотя, согласно *31, этот порядок, вообще говоря, безразличен, можно уточнить, что при $m > 3$ «$A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_m$» является сокращением для $(\ldots((A_1 \& A_2) \& A_3) \ldots \& A_{m-1}) \& A_m$. При $m = 1$ «$A_1 \& \ldots \& A_m$» означает просто A_1. Аналогично для $\vee$ согласно *32 (Относительно случая $m = 0$ см. примечание на стр. 374.)

[2]) Параграфы, отмеченные звездочкой, могут быть опущены без ущерба для логической связности материала; ссылки на них имеют второстепенное значение. Настоящий параграф не используется и в последующих параграфах, отмеченных звездочкой (за исключением конца § 19).

получаемые из E *и* F *заменой* & *на* $\vee$, *а* $\vee$ *на* & (см. примечание на стр. 33). *Тогда*

(a) *Если* $\models \neg E$, *то* $\models E'$. (b) *Если* $\models E$, *то* $\models \neg E'$.

(c) *Если* $\models E \sim F$, *то* $\models E' \sim F'$. (d) *Если* $\models E \supset F$, *то* $\models F' \supset E'$.

Доказательство. (a) Пусть $\models \neg E$. Согласно теореме 6 с учетом следствия теоремы 5 (или же упр. 4.6), $\models E^{\dagger}$. Следовательно, по теореме 1 $\models E^{\dagger *}$, где * обозначает одновременную подстановку $\neg P_1, \ldots, \neg P_n$ вместо атомов $P_1, \ldots, P_n$. Наконец, в силу *49 и следствия теоремы 5 $\models E^{\dagger * \overset{+}{+}}$, где $\overset{+}{+}$ обозначает удаление двойных отрицаний перед каждой элементарной подформулой, которой в E не предшествовало отрицание. Но $E^{\dagger * \overset{+}{+}}$ есть E', что поясняется следующим примером:

$$\begin{array}{llr}
\models \neg E. & \models \neg (& P \& \neg P). \\
\models E^{\dagger}. & \models & \neg P \vee \;\; P. \\
\models E^{\dagger *}. & \models & \neg\neg P \vee \neg P. \\
\models E^{\dagger * \overset{+}{+}}, \text{ т. е. } \models E'. & \models & P \vee \neg P.
\end{array}$$

(b) Допустим, что $\models E$. Тогда в силу *49 и следствия теоремы 5 $\models \neg\neg E$. Отсюда по теореме 6 и следствию теоремы 5 $\models E^{\dagger}$. Поэтому $\models \neg E^{\dagger *}$, откуда $\models \neg E^{\dagger * \overset{+}{+}}$, т. е. $\neg E'$.

(c) Пусть $\models E \sim F$. По теореме 5 $\models \neg E \sim \neg F$, откуда по теореме 6 $\models E^{\dagger} \sim F^{\dagger}$. Значит, $\models E^{\dagger *} \sim F^{\dagger *}$, откуда $\models E^{\dagger * \overset{+}{+}} \sim F^{\dagger * \overset{+}{+}}$, т. е. $\models E' \sim F'$.

Если мы уже установили 4a, 4b, *31, *33, *35, *37, *39, *50 и принципы двойственности (теорема 7), но еще не установили 5a, 5b, *32, *34, *36, *38, *40, *51, то последние вытекают из принципа двойственности и теоремы о подстановке (теорема 1). Например, в силу *50, приняв за A атом E, имеем $\models \neg (P \& \neg P)$, откуда по двойственности $\models P \vee \neg P$, а отсюда посредством подстановки $\models A \vee \neg A$, т. е. *51.

Суть применения теоремы 1 (о подстановке) в сочетании с теоремой 7 состоит в разрешении применять преобразования по двойственности к разложению E (или E, F) на ее (не обязательно атомарные) составляющие $A_1, \ldots, A_n$, сохраняя при этом их целостность (т. е. трактуя их как атомарные части); то же относится к теореме 6 и ее следствию.

Вообразим себе, что марсианин, растерявшись от того, что узрел на нашей Земле, принимает наше «t», обозначающее истину, за «F», обозначающее ложь, а наше «f», обозначающее ложь, за «T», обозначающее истину, т. е. пусть F = t и T = f.

Тогда он читает нашу таблицу для &, как мы таблицу для $\vee$, и наоборот.

Чтобы установить это, воспользуемся более обозримыми квадратными таблицами (для бинарных операций это всегда возможно):

(1) $A \,\&\, B$

$A \backslash B$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

(2) $A \,\&\, B$

$A \backslash B$	F	T
F	F	T
T	T	T

(3) $A \,\&\, B$

$A \backslash B$	T	F
T	T	T
F	T	F

(4) $A \vee B$

$A \backslash B$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$

Таблица (1) — это наша таблица для &; (2) — то же самое, написанное при $\mathsf{F} = \mathfrak{t}$ и $\mathsf{T} = \mathfrak{f}$; (3) — это (2), но приведенная в нормальный вид, где T предшествует F (как и должно быть с точки зрения марсианина). Заметим, что таблица (3) совершенно похожа на нашу таблицу (4) для $\vee$, с той лишь разницей, что пишутся прописные T и F вместо строчных $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$. Таблица для $\neg$, написанная относительно T и F в нормальном марсианском порядке, в точности совпадает с нашей таблицей для $\neg$, написанной относительно $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$; это читатель легко проверит.

Эти замечания подсказывают новое доказательство теорем 6 и 7[1]). Они также указывают средство избежать исключения $\sim$ и $\supset$ из формул E и F, упоминаемого в этих теоремах (да и наше ограничение касательно $\neg$ было несущественно).

Достаточно прибавить к нашему символизму две новые пропозициональные связки $\leftthreetimes$ и $\not\subset$, выбрав такие таблицы для $A \leftthreetimes B$ и $A \not\subset B$, чтобы марсианин воспринимал их так, как мы воспринимаем таблицы для $A \sim B$ и $A \supset B$ соответственно. Читатель может проверить, что это получится, если $A \leftthreetimes B$ имеет ту же таблицу, что $\neg(A \sim B)$, а $A \not\subset B$ — ту же, что $\neg(B \supset A)$. Мы можем, если хотим, рассматривать эти связки как вре́менные добавки к нашей символике, используемые, пока мы изучаем двойственность, и устраняемые впоследствии путем переписывания каждой подформулы $A \leftthreetimes B$ в виде $\neg(A \sim B)$ (или же $A \sim \neg B$ согласно упр. 5.3 (b)), а $A \not\subset B$ в виде $\neg(B \supset A)$ (или же $B \,\&\, \neg A$).

Теперь докажем теорему 6a° (т. е. теорему 6, в которой E считается произвольной формулой, содержащей и $\leftthreetimes$ и $\not\subset$, а † — операция, состоящая в замене $\sim$ на $\leftthreetimes$, $\supset$ на $\not\subset$, & на $\vee$ и в изменении на единицу числа знаков $\neg$ перед каждым атомом). В силу теоремы 4 (b) достаточно доказать, что $\neg E$ и $E^{\dagger}$ имеют

[1]) Предыдущее доказательство в основном совпадает с [BM] § 27, а там оно заимствовано у Гильберта и Аккермана [1928], гл. I § 5. Вторая трактовка подсказана Чёрчем [1956], § 16, стр. 99—101. Логическая двойственность впервые отмечена Шрёдером [1877].

одинаковые истинностные таблицы. Вычисляя значение (произвольной строки) таблицы для $\neg E$, мы вычисляем сначала значение E (исходя из системы значений, приписываемых атомам $P_1, \ldots, P_n$), пользуясь нашими таблицами для $\sim$, $\not\sim$, $\supset$, $\not\subset$, &, $\vee$, $\neg$ и, наконец (поскольку в $\neg E$ входит знак $\neg$), заменяя получаемое $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$ соответственно на T или F. Вычисляя $E^{\dagger}$, мы начинаем с замены значений $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$, приписываемых атомам $P_1, \ldots, P_n$, на T и на F (изменяя на единицу число символов $\neg$ перед $P_1, \ldots, P_n$), а затем (в силу замены $\sim$ на $\not\sim$, $\supset$ на $\not\subset$ и & на $\vee$), используя марсианские таблицы с их буквами T и F, мы проделываем то же самое вычисление, которое мы производим с нашими обычными таблицами с $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$. Следовательно, эти вычисления различаются только тем, что в одном из них мы заменяем $\mathfrak{t}$ на T и $\mathfrak{f}$ на F в конце, а в другом—в начале.

Докажем, наконец, теорему 7а° (т. е. теорему 7, обобщенную аналогичным образом).

(a) $\{\models \neg E\} \equiv$ {все строки таблицы для $\neg E$ дают $\mathfrak{t}$} $\equiv$ {все строки таблицы для $\neg E'$ дают T} $\equiv$ {все строки таблицы для $\neg E'$ дают $\mathfrak{f}$} $\equiv$ {все строки таблицы E' дают $\mathfrak{t}$} $\equiv \{\models E'\}$[1]).

(c) $\{\models E \sim F\} \rightarrow \{\models \neg (E \sim F)'\}$ [(b)] $\rightarrow \{\models \neg (E' \not\sim F')\} \rightarrow$ $\rightarrow \{\models \neg\neg (E' \sim F')\}$ [теорема 4, таблица $\not\sim$, следствие теоремы 5] $\rightarrow \{\models E' \sim F'\}$ [п. 8 теоремы 2 и теорема 3].

Упражнения. 6.1. (a) Докажите теорему 7 (d). (b) Из доказательства теоремы 7а (а) выведите (b). (с) Докажите теорему 7а (d).

6.2. Пользуясь теоремой 7а (с) (при P, Q в качестве A, B), увеличьте перечень «эквивалентов» для $A \sim B$ в упр. 5.3 (а).

§ 7. Теория моделей; отношение следования

Мы начали эту главу с заявления, что существенной функцией логики является устанавливать, что из чего следует, а тем самым указывать, какие предложения являются теоремами при заданных аксиомах. До сих пор мы имели дело только с тавто-

[1]) Пользуясь методом цепей, мы для краткости пользуемся в языке исследователя вместо слов «равносильно» или «тогда и только тогда» символом «$\equiv$»; мы предпочитаем пользоваться этим символом, а не знаком «$\sim$», чтобы отчетливее подчеркнуть различие между языком исследователя и предметным языком. Аналогично в пункте (с), где использование метода цепей «несимметрично» (т. е. из $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$ следует $A_i \rightarrow A_j$ только при $i \leqslant j$), мы вместо «влечет» или «только если» используем в языке исследователя сокращение «$\rightarrow$», а не «$\supset$», который является символом предметного языка.

(Именно об этом различии между *отношениями*, описываемыми языком исследователя, и *операциями*, знаки которых входят в предметный язык, шла речь в наших предыдущих примечаниях по этому поводу. Кстати, именно отношению, обозначаемому в языке исследователя знаком «$\rightarrow$» и вскользь упомянутому в этом примечании автора, посвящен следующий параграф книги.— *Перев.*)

логиями (общезначимыми формулами), истинность которых логика приемлет и берется утверждать, не используя никаких гипотез внелогического происхождения.

Помня, что в рамках исчисления высказываний мы не анализируем внутреннюю структуру атомов (или не знаем, какие предложения они выражают), вообразим, что нам сообщили из некоторого источника, постороннего для исчисления высказываний, что некоторая формула A верна на самом деле или по предположению. Например, она может быть указана нам как аксиома какой-нибудь абстрактной теории (геометрии или теории групп); она тем самым истинна «по законам данной теории». Формула A может быть, скажем, предложением, верным в силу физических данных, или же следствием интуитивных математических рассуждений. В какой мере включение в рассмотрение формулы A изменяет наше отношение к формулам, истинность которых мы можем устанавливать, не используя ничего, *кроме* исчисления высказываний?

Рассмотрим пример. Пусть A — это $(P \supset Q) \& (P \vee R)$ (таблица (h)).

	P Q R	(h) $(P \supset Q) \& (P \vee R)$	(i) $Q \vee R$	(j) $P \supset R$	(k) $P \vee \neg Q \supset R$	(l) $P \& \neg Q$
1.	t t t	t	t	t	t	f
2.	t t f	t	t	f	f	f
3.	t f t	f	t	t	t	t
4.	t f f	f	f	f	f	t
5.	f t t	t	t	t	t	f
6.	f t f	f	t	t	t	f
7.	f f t	t	t	t	t	f
8.	f f f	f	f	t	f	f

Чем являются P, Q и R, держится в абсолютной тайне, и те, кто работает в исчислении высказываний, не имеют к ней допуска. Тем не менее, лишь только нам указали, что формула $(P \supset Q) \& (P \vee R)$ истинна, нам уже кое-что сообщили. Мы уже знаем, что система истинностных значений, приписываемых атомам P, Q, R, должна быть одной из четырех систем (строки 1, 2, 5, 7), при которых $(P \supset Q) \& (P \vee R)$ получает значение t в таблице (h). Поэтому, когда нам надо решать, какие еще формулы B истинны, пользуясь при этом исчислением высказываний вместе с информацией об истинности формулы A, нам достаточно рассматривать только эти четыре набора значений. Например, зная, что A истинна, мы знаем, что $Q \vee R$ истинна, ибо таблица этой последней формулы (i) имеет t в каждой из строк 1, 2, 5 и 7. Напротив, у нас еще не хватает данных решить, истинна ли формула $P \supset R$, ибо ее таблица (j) дает f в строке 2.

Так мы подходим к следующему определению. Рассмотрим две формулы A и B, и пусть $P_1, \ldots, P_n$ — атомы, входящие в A или в B. Говорят, что B *следует из* A или является *следствием из* A (в исчислении высказываний или в силу исчисления высказываний), и пишут $A \models B$, если в таблицах истинности для A и B, на входах которых указаны атомы $P_1, \ldots, P_n$, формула B имеет значение t во всех тех строках, где A имеет значение t.

Например, как мы уже отмечали, $(P \supset Q) \& (P \vee R) \models Q \vee R$, но $(P \supset Q) \& (P \vee R) \models P \supset R$ не имеет места.

Подчеркнем, что «$A \models B$» *является более сильным утверждением, нежели* «Если $\models A$, то $\models B$»: из первого всегда следует второе; между тем второе может оказаться верным, и когда первое неверно. Чтобы убедиться, что из первого утверждения всегда вытекает второе, допустим, что первое имеет место, и добавим посылку «$\models A$» второго высказывания. Тогда, поскольку «$A \models B$», формула B дает t во всех тех строках, где A дает t, а раз $\models A$, то A дает t во всех строках. Следовательно, $\models B$.

Если A — это $(P \supset Q) \& (P \vee R)$, а B — это $P \supset R$, то второе высказывание «Если $\models A$, то $\models B$» имеет место как материальная импликация (§ 2), антецедент которой (т. е. «$\models A$») ложен, но, как мы отметили выше, «$A \models B$» не имеет места. Причина состоит в том, что если неверно $\models A$, то ложно утверждение, что A дает t во всех строках, а тогда «Если $\models A$, то $\models B$» выполняется автоматически, в то время как «$A \models B$» выполняется только тогда, когда B дает t во всех строках, в которых A дает t.

Пусть теперь нам даны m формул $A_1, \ldots, A_m$. Переходя от случая $m=1$ к общему, говорим, что «B является *следствием* формул $A_1, \ldots, A_m$ (в исчислении высказываний или в силу исчисления высказываний)», и пишем $A_1, \ldots, A_m \models B$, если в таблицах истинности, на входах которых находится перечень $P_1, \ldots, P_n$ атомов, входящих в одну или более из формул $A_1, \ldots, A_m$, B, формула B дает t во всех строках, в которых $A_1, \ldots, A_m$ одновременно дают t. Символ «$\models$» можно читать «влечет» («влекут»).

Порядок атомов $P_1, \ldots, P_n$, входящих в формулы $A_1, \ldots A_m$, B, очевидно, безразличен. Более того, как видно из начала § 4, результат останется тем же самым, если на входе таблиц для $A_1, \ldots, A_m$, B поместить перечень $P_1, \ldots, P_n$ с добавкой еще каких-нибудь атомов.

Из рассмотрения таблиц видно, что (i), (j)$\models$(k) (строки 1, 3, 5, 6, 7); (i), (j), (l)$\models$(k) (строка 3); (h), (l)$\models$(i) (*нет* строк, где надо было бы проверять, что значение формулы (i) есть t); однако из строки 3 видно, что, вообще говоря, неверно (i), (j)$\models$(h).

Теорема 8. (a) $A \models B$ *тогда и только тогда, когда* $\models A \supset B$.

(b) *Более общо, при* $m \geqslant 1$: $A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m \models B$ *тогда и только тогда, когда* $A_1, \ldots, A_{m-1} \models A_m \supset B$.

Доказательство. (a) Рассмотрим таблицы для A, B, $A \supset B$ с перечнем всех фигурирующих в них атомов $P_1, \ldots, P_n$ на входах этих таблиц. Для выяснения, имеет ли место $A \models B$, надо пренебречь строками, в которых A дает f, ибо в них формула $A \supset B$ всегда принимает значение t (в силу таблицы для импликации). Рассмотрим прочие строки, т. е. строки, где A дает t. Если $A \models B$, то B дает t в этих строках, а по таблице для импликации и $A \supset B$ дает t. В остальных же строках она и так истинна. Следовательно, $\models A \supset B$. Обратно, если $\models A \supset B$, то $A \supset B$ дает t во всех строках, где A дает t (и, конечно, во всех остальных строках). Следовательно, по таблице для импликации B должна давать t во всех тех строках, где A дает t, а это значит, что $A \models B$.

(b) Рассмотрим случай $m \geqslant 2$. Возьмем таблицы для $A_1, \ldots, A_m$, B, $A \supset B$. Рассуждаем, как и выше, но на этот раз в качестве A фигурирует A_m; мы ограничиваемся рассмотрением тех строк, где $A_1, \ldots, A_{m-1}$ дают t.

Следствие. *При* $m \geqslant 1$ $A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m \models B$ *тогда и только тогда, когда* $\models A_1 \supset (\ldots (A_{m-1} \supset (A_m \supset B)) \ldots)$.

Доказательство проводится m-кратным применением теоремы.

В силу следствия теоремы 8 задача установления того, какие формулы являются следствиями данных формул $A_1, \ldots, A_m$, сводится к задаче выяснения, какие формулы общезначимы. В этом, в частности, и заключается важная роль тавтологий.

Можно, конечно, сказать, что, наоборот, именно поэтому отношение следования не представляет интереса. Однако отношение следования ближе отвечает нашему привычному способу пользоваться логикой: порой преобразования проще проводить с его помощью, чем с помощью кратных импликаций, к которым оно сводится в силу следствия теоремы 8.

По причинам, которые скоро станут ясны, мы предпочитаем рассматривать эти преобразования в другом контексте, в контексте теории доказательств, изучение которой мы начнем в § 9. Дальнейшее изучение отношения следования мы вынесем в упражнения. Они помогут осмыслить эти преобразования, когда мы займемся ими в теории доказательств.

Упражнения. 7.1. (a) Найдите все истинные высказывания «$h \models B$» и «(h), (j)$\models B$», где B — одна из формул (h) — (l). (Считая и тривиальные соотношения, вроде «(h)$\models$(h)», их шесть штук.)

(b) Докажите, что для любой формулы B: (h), (l)$\models B$.

(c) Докажите, что для всякой формулы B: (i), (j)$\models B$ тогда и только тогда, когда (k)$\models B$.

7.2. Проверьте посредством таблиц истинности: (a) $P, P \supset Q \models Q$. (b) $P, Q \models P \& Q$. (c) $P \& Q \models P$. (d) $P \& Q \models Q$. (e) $P, \neg P \models Q$. (f) Не $(P \supset Q \models Q \supset P)$.

7.3. Докажите, что в обозначениях теоремы 1 (при $m+1$ формулах) *если* $A_1, \ldots, A_m \models B$, *то* $A_1^*, \ldots, A_m^* \models B^*$. (*Указание*: используйте следствие теоремы 8.)

7.4. (a) Примените упр. 7.3 для обобщения упр. 7.2 (a)—(e) путем замены P, Q на A, B.

(b) Отсюда с помощью теоремы 8 и ее следствия заново выведите пп. 3, 4a, 4b и *10a теоремы 2.

7.5. Докажите, что при $m \geqslant 1$: (a) $A_1, \ldots, A_m \models B$ *тогда и только тогда, когда* $A_1 \& \ldots \& A_m \models B$ (см. примечание 1 на стр. 34). Отсюда по теореме 8: (b) $A_1, \ldots, A_m \models B$ *тогда и только тогда, когда* $\models A_1 \& \ldots \& A_m \supset B$ (это вторая версия следствия теоремы 8).

7.6. Установите следующие соотношения:

(i) *При* $m \geqslant 1$:

$A_1, \ldots, A_m \models A_1$,

$\ldots,$

$A_1, \ldots, A_m \models A_m$.

(ii) *При* $m, p \geqslant 0$:

если $A_1, \ldots, A_m \models B_1$,

$\ldots,$

$A_1, \ldots, A_m \models B_p$ *и* $B_1, \ldots, B_p \models C$,

то $A_1, \ldots, A_m \models C$.

7.7. Докажите, исходя непосредственно из определения отношения следования:

(a) Если $A \models B$ и $A \models \neg B$, то $\models \neg A$. (Приведение к нелепости.)

(b) Если $A \models C$ и $B \models C$, то $A \vee B \models C$. (Доказательство разбором случаев.)

7.8. Выполните упр. 7.7 с помощью теорем 2,8 и 3.

7.9. Заметьте, что рассуждения § 4, 5, касающиеся метода цепей, сохраняют силу, поскольку мы ограничимся теми системами истинностных значений (строками таблиц истинности), для которых все формулы из списка $A_1, \ldots, A_m$ дают t. Таким образом, теорема 3, теорема 5 со следствием, (α)—(ζ) и, значит, метод цепей сохраняют силу, если заменить повсюду «$\models$» на «$A_1, \ldots, A_m \models$». Теперь докажите, что

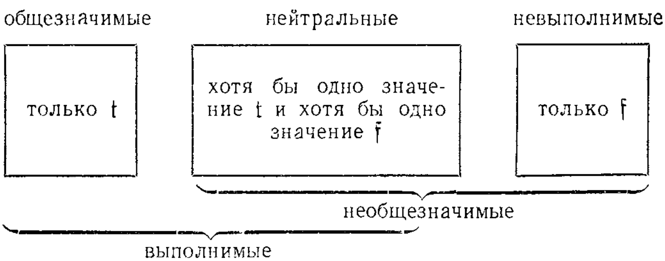
(a) $P \sim \neg Q \models P \& \neg Q \sim P$. (*Указание*: см. теорему 2.)

(b) $(P \vee Q) \sim \neg (P \& Q) \models (P \vee Q) \vee (\neg (P \& Q) \& P) \sim (P \vee Q)$.

§ 8. Теория моделей; сокращенные таблицы истинности

Мы воспользовались понятием истинностной таблицы для определения условий, при которых некоторая формула E общезначима (символически $\models E$), и условий, при которых формула B следует из формул $A_1, \ldots, A_m$ (символически $A_1, \ldots, A_m \models B$). Сами таблицы (часто вместе с другими приемами, как в упр. 2.3) использовались для иллюстрации в первоначальном доказательстве теоремы 2 и некоторых других результатов. Однако для установления того, что $\models E$ или $A_1, \ldots, A_m \models B$, часто оказывается проще применять теоремы, относящиеся к общезначимости и к отношению следования, чем вычислять таблицы истинности. Эту технику мы начали развивать в § 4 и 5, прибегая к результатам такого рода вместо истинностных таблиц; продолжим теперь начатое. Если мы хотим доказать, что не $\models E$ или неверно, что $A_1, \ldots, A_m \models B$, то нам нет нужды вычислять более одной удачно подобранной строки таблицы (таблиц). И часто такую строку удается быстро нащупать, не вычисляя прочих.

Говорят, что формула E *невыполнима*, или *противоречива*, или *тождественно ложна*, если столбец значений в ее таблице истинности состоит только из $\mathfrak{f}$. Если формула ни общезначима, ни невыполнима, то ее называют *нейтральной*. Таким образом, формулы распадаются на три класса, смотря по тому, как входят $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ в их истинностные таблицы:



Формула E невыполнима или выполнима в зависимости от того, является ли формула $\neg E$ общезначимой. Для установления того, что формула нейтральна, достаточно вычислить две подходящие строки.

Если все же приходится проводить много вычислений по истинностным таблицам, то и тогда полезно уметь сэкономить время, используя некоторые сокращения в записи и в вычислениях[1]). Ведь для формулы из трех атомов требуется таблица из 8 строк, а для формулы с 12 атомами понадобилось бы 4096 строк.

Рассмотрим таблицу (1) из § 2 для $P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$. Так как последние четыре строки имеют одно и то же значение $\mathfrak{t}$, их можно заменить одной строкой. Точно так же можно объединить первую и третью, вторую и четвертую строки. Итак, в со-

---

[1]) Если число таблиц и их сложность очень велики, то можно подумать о применении вычислительных машин. Способы постановки таких задач на машинах должны учитывать специфику машин; их разработка относится к так называемой «информатике». Ср. Ван [1960].

кращенной форме таблица (1) принимает вид

(2)

P	R	$P\supset(Q\vee R\supset(R\supset\neg P))$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{f}$		$\mathfrak{t}$

В § 2 мы отметили некоторый прием, за счет которого при вычислении таблицы формулы $P\supset(Q\vee R\supset(R\supset\neg P))$ сразу получается $\mathfrak{t}$ в последних четырех строках. Это пример общего плодотворного метода. Он состоит в том, что мы приписываем значение $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$ одной-единственной букве, а затем вычисляем, исходя из этого, всевозможные подформулы, приписываем значение другой какой-нибудь букве и т. д. (вместо того чтобы сразу приписывать значения всем буквам, а потом вычислять). Возьмем исходную таблицу, задающую какую-нибудь *бинарную* связку $\circ$. Если мы уже приписали формуле A какое-либо значение ($\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$), то при этом фиксированном значении для A таблица для $A\circ B$ оказывается таблицей *унарной* связки, примененной к B. Для унарной же связки возможны только четыре таблицы: столбец значений либо (i) $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}$, либо (ii) $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ (такой же, как у B), либо (iii) $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$ (такой же, как $\neg B$), либо (iv) $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}$. Итак, по выборе некоторого значения для A формула $A\circ B$ может принять значения $\mathfrak{t}$, B, $\neg B$ или $\mathfrak{f}$. Рассматривая интересующие нас случаи, получаем следующие таблицы:

(I)

A	$B\sim A$ $A\sim B$	$A\supset B$	$B\supset A$	$B\,\&\,A$ $A\,\&\,B$	$B\vee A$ $A\vee B$	$\neg A$
$\mathfrak{t}$	B	B	$\mathfrak{t}$	B	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$	$\neg B$	$\mathfrak{t}$	$\neg B$	$\mathfrak{f}$	B	$\mathfrak{t}$

Вот применение этой процедуры к предыдущему примеру:

$$P\supset(Q\vee R\supset(R\supset\neg P))$$

(3)

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{t}\supset(Q\vee R\supset(R\supset\neg\mathfrak{t})) & \mathfrak{f}\supset(Q\vee R\supset(R\supset\neg\mathfrak{f})) \\
Q\vee R\supset(R\supset\mathfrak{f}) & \mathfrak{t} \\
Q\vee R\supset\neg R & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
Q\vee\mathfrak{t}\supset\neg\mathfrak{t} & Q\vee\mathfrak{f}\supset\neg\mathfrak{f} \\
\mathfrak{t}\supset\mathfrak{f} & Q\supset\mathfrak{t} \\
\mathfrak{f} & \mathfrak{t}
\end{array}$$

В первой строке находится формула до того, как ее буквам приписаны значения. Во второй строке мы приписали P значение $\mathfrak{t}$ (левый столбец) и значение $\mathfrak{f}$ (правый столбец). С помощью таблиц (I) тогда можно упростить выражения, стоящие во второй строке: левый столбец свести к $Q \vee R \supset \neg R$ тремя последовательными упрощениями, а правый столбец в один шаг свести к $\mathfrak{t}$. Затем (четвертая строка левого столбца) мы приписываем R значение $\mathfrak{t}$ в левом подстолбце и значение $\mathfrak{f}$ в правом подстолбце. Схемы типа (3) называют, следуя Куайну [1950], *анализом по истинности*. По-видимому, он первый заметил, насколько удобнее вычислять значение формулы буква за буквой. Таблицу (2) можно восстановить по анализу (3) (Куайн [1950] вообще не писал таблиц вида (2))[1].

Хорошим эвристическим приемом является правило выбирать в качестве буквы, которой приписывается значение $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$, ту букву, которая чаще всего встречается в рассматриваемой формуле. Тогда быстро достигается упрощение, ибо всякая двухбуквенная подформула, в которую эта буква входит, обречена на исчезновение. После нескольких прикидок уже можно угадать, какой выбор следует сделать для получения наилучших результатов.

Отдельные этапы можно устранить посредством *49 (и теорем 4, 5), удаляя двойные отрицания, имевшиеся в начальной формуле или возникшие в ней в силу (I). Например, если B — это $\neg C$, то $\mathfrak{f} \sim B$ упрощается, согласно (I), до вида $\neg\neg C$, что упрощается затем до C по *49.

Метод анализа по истинности не гарантирует нам того, что мы сразу получим максимально сокращенную истинностную таблицу, подобную таблице (2). Если, например, в схеме (3) мы будем на втором этапе заменять истинностными значениями формулу Q, а не R, то получим 5-строчную таблицу.

Таблице (2) удовлетворяет и формула $(P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P)))\ \&$ $\&\ (((Q \supset P) \supset Q) \supset Q)$, но никакой порядок замены ее подформул истинностными значениями не приведет нас непосредственно к трехстрочной таблице истинности. Но, конечно, потом мы сможем объединять строки, как это мы делали, получая из таблицы (1) таблицу (2). Например, если мы сразу обратим внимание на то, что формула $((Q \supset P) \supset Q) \supset Q$ общезначима (упр. 2.3(a)), то сможем перейти к формуле $P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$, а затем и к (2).

На самом деле метод анализа по истинности никогда не приводит к истинностной таблице, содержащей менее двух строк, так как этот метод предполагает, чтобы хотя бы одной из входящих

[1]) Таблицы (I) появляются в другом виде как пп. *40a, *48 теоремы 22 из § 24. (Ср. *41—*48 [BM], стр. 109, написанные, когда автор не знал книги Куайна [1950]. Но в [BM] не подчеркивалось использование этих сокращенных таблиц, как, например, на стр. 419.)

в рассматриваемую формулу букв были приписаны значения $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$. Но, например, формула $((Q \supset P) \supset Q) \supset Q$, являющаяся тавтологией, допускает и однострочную таблицу

$$\frac{((Q \supset P) \supset Q) \supset Q}{\quad \mid \quad \mathfrak{t}}$$

Полные истинностные таблицы (предпочтительно, чтобы они были записаны в сокращенной форме) можно использовать в целях упрощения формул. Пусть, например, какая-нибудь формула E связана с некоторой задачей, и мы хотим исследовать, какие эта формула имеет следствия, или же, более общо, исследовать, какие из отношений $A_1, \ldots, A_m \models B$ (где E есть одна из формул $A_1, \ldots$ $\ldots, A_m$, B или подформула одной из этих формул) имеют место. Для этой цели мы можем заменить E любой формулой F с той же самой таблицей истинности (т. е. такой, что $\models E \sim F$, как следует из теоремы 4) или же, иначе, формулой F, *эквивалентной* E *в исчислении высказываний* (§ 5). И если мы сумеем найти формулу F, эквивалентную E, но более простую, то мы продвинемся в изучении поставленной задачи.

Например, пусть E — это формула $P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$ или же $\{P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))\} \& \{((Q \supset P) \supset Q) \supset Q\}$; обе они имеют истинностную таблицу (2). Исходя из таблицы (2), поищем, какие еще формулы имеют эту же таблицу истинности; таковыми оказываются более простые формулы: $(P \& \neg R) \vee \neg P$ (она выбрана так, чтобы иметь точно два значения $\mathfrak{t}$ в (2)), $\neg(P \& R)$ (где $P \& R$ выбрана потому, что она имеет одно-единственное значение $\mathfrak{f}$ в (2)), $\neg P \vee \neg R$ (которая получается по правилу Де Моргана *55 b) и $P \supset \neg R$ (получается по *59). Формула $(P \& \neg R) \vee \neg P$ сводит выяснение вопроса об истинности формулы E к двум непересекающимся случаям (а именно P, R есть $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ соответственно; P есть $\mathfrak{f}$), а $\neg P \vee \neg R$ сокращает ее еще больше, позволяя обоим случаям пересечься. Следовательно, мы могли бы взять $\neg P \vee \neg R$, не проходя через $\neg(P \& R)$.

Стоит заметить, что объединять и перегруппировывать эти случаи можно было бы по методу цепей эквивалентностей, если суметь воспользоваться той гибкостью преобразований, которую этот метод допускает. Кроме результатов теоремы 2, могут понадобиться также такие результаты (см. примечание 1 на стр. 34):

*52°. $\models A \& (B \vee \neg B) \sim A$. *53. $\models A \vee (B \& \neg B) \sim A$.
*54. $\models A \& B \& \neg B \sim B \& \neg B$. *55°. $\models A \vee B \vee \neg B \sim B \vee \neg B$.

Проиллюстрируем сказанное, исходя из эквивалента формулы $P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$, полученного путем объединения последних четырех строк таблицы (1) из § 2[1]):

$$\models (P \& Q \& \neg R) \vee (P \& \neg Q \& \neg R) \vee \neg P \sim$$
$$\sim (P \& \neg R) \& (Q \vee \neg Q) \vee \neg P \quad [*35 \text{ вместе с } *33 \text{ (и } *31)] \sim$$
$$\sim (P \& \neg R) \vee \neg P \quad [*52] \sim (P \vee \neg P) \& (\neg P \vee \neg R) \quad [*36, *34] \sim$$
$$\sim \neg P \vee \neg R \ [*52, *33].$$

Пусть для формулы E мы нашли таблицу истинности в $p+q$ строк (сокращенную или нет) с p значениями t и q значениями f. Как видно из приведенного выше примера, тогда можно написать эквивалентную формуле E формулу D, имеющую вид $D_1 \vee \ldots \vee D_p$ (которая сводится к одному D_1, если $p=1$, и, скажем, к $P_1 \& \neg P_1$ при $p=0$), где члены $D_1, \ldots, D_p$ отвечают соответствующим t, и можно написать другую эквивалентную E формулу C, имеющую вид $C_1 \& \ldots \& C_q$ (которая сводится к C_1 при $q=1$, и, скажем, к $P_1 \vee \neg P_1$ при $p=0$), в которой члены $C_1, \ldots, C_q$ отвечают соответствующим f.

Еще один пример: если E — это $P \sim Q$, то D — это $(P \& Q) \vee \vee (\neg P \& \neg Q)$, а C есть $(\neg P \vee Q) \& (P \vee \neg Q)$ (которая получается из $\neg \{(P \& \neg Q) \vee (\neg P \& Q)\}$ применением теоремы 6. Такая формула D (дизъюнкция конъюнкций атомов или отрицаний атомов), эквивалентная E, называется *дизъюнктивной нормальной формой* формулы E. Формула C (конъюнкция дизъюнкций атомов или их отрицаний) называется *конъюнктивной нормальной формой*.

Говоря, что некоторая формула F «проще», чем другая формула E, мы будем иметь в виду практическую точку зрения: с F легче оперировать, ее легче понять, независимо от того, короче она или нет. Простота — это вопрос привычки и зависит от облика часто встречаемых формул (так, нам редко нужно упрощать $P \sim Q$). Дизъюнктивные нормальные формы для E полезны, когда хотят вывести какие-нибудь следствия из E (ср. упр. 7.7 (b)) или из E и других формул; конъюнктивные нормальные формы E оказываются полезными, когда мы хотим вывести E из других формул (ср. упр. 7.2 (e)).

Упражнения. 8.1. Установите *52—*55 относительно P, Q (до того, как подставлять A и B по теореме 1), используя (I) в сочетании с *50, *51 (и теоремой 4).

---

[1]) На самом деле формула $P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$ сводится к $\neg P \vee \neg R$ просто троекратным применением *59, затем *55a, *38 и *40 (в сочетании с *32—*34). Вообще же упростить формулы можно так: сначала применить *63a (или упр. 5.3) для удаления $\sim$ и *58 или *59 (либо *55c, *60 или *61) для удаления $\supset$; затем использовать теорему 6; потом с помощью *35 (или двойственной ей *36) раскрыть скобки (как $a(b+c)=ab+ac$ в алгебре); в заключение, пользуясь *31—*35, как показано в примере, перегруппировать члены. Техника эта, по сути, восходит к Булю [1857], см. [BM], стр. 124—125.

8.2. Упростите:

(a) $(P \vee S \sim \neg Q) \& (R \vee Q) \& \neg S \supset \neg ((S \supset R \vee Q) \vee P)$.

(b) $\neg \{(P \supset R) \& S \sim \neg R \vee \neg (R \supset Q)\} \& (Q \supset \neg P) \& P$ (напишите более простую, но эквивалентную формулу, рассмотрев только R и Q).

(c) $(P \supset Q) \& (\neg (Q \& R) \vee P) \& \neg (R \& P)$. (Сначала займитесь Q, а затем используйте *55b и *36 + *53 или *34 + *39.)

§ 9. Теория доказательств; доказуемость и выводимость.

Математики доказывают теоремы, т. е. выводят следствия из определенных допущений, типично евклидовским способом: высказывания размещаются в некий их список, называемый «доказательством», или «выводом». Мы будем говорить о «доказательстве» и называть допущения «аксиомами», если они сохраняют свой статус (т. е. предполагаются истинными) во всей рассматриваемой теории; будем говорить о «выводе» (или «дедукции»), если мы не предполагаем, что все допущения сохраняют свой статус. Каждый переход от одного высказывания в рассматриваемом списке к другому в этом же списке обоснован логически, как проанализировано выше в случае логики высказываний. Например, высказывание вытекает из других высказываний, если оно является их следствием (в исчислении высказываний), а это отношение между высказываниями уже определено с помощью истинностных таблиц в § 7. Некоторое высказывание может быть помещено в список без ссылок на другие высказывания, предшествующие ему, только тогда, когда оно является допущением или же является общезначимым. В своих определениях «следования» и общезначимости мы остаемся вне языка, в котором формулируются сами высказывания (предметный язык); для выяснения, каким образом высказывания (или формулы) составлены из атомов, у нас есть другой язык (язык исследователя). Именно в языке исследователя мы получаем различные результаты относительно общезначимости и отношения следования, которые зачастую удобнее в приложениях, нежели непосредственное использование истинностных таблиц.

Такое рассмотрение логики мы называем «теорией моделей»: заменяя атомы истинностными значениями $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ во всевозможных сочетаниях, мы получаем, так сказать, «модели», конкретные «реализации», воплощения того, что могут выражать высказывания.

Сейчас мы переходим к другому способу построения логики. Способ этот, называемый «теорией доказательств», изучает вопрос, нельзя ли описать логические доказательства и выводы так, как это делается в геометрии. Но поскольку на этот раз сама логика делается предметом аксиоматико-дедуктивной трактовки, выводы не должны больше основываться на «логических критериях»: они должны опираться лишь на точно сформулированные аксиомы и правила. В теории доказательств некоторые высказывания или формулы принимаются за «аксиомы», а для получения новых высказываний устанавливаются некоторые «правила вывода».

Изложим же формулировку теории доказательств для классического исчисления высказываний как ради него самого, так и с целью его приложения к выводу из допущений. Позднее мы увидим, что обе формулировки — теория моделей и теория доказательств — дают эквивалентные результаты.

Аксиомами нашей (теоретико-доказательственной) системы (классического) исчисления высказываний мы объявляем все формулы, имеющие один из видов, указанных после знака «$\models$» в пп. 1a — 10b теоремы 2 (см. их также в списке постулатов на стр. 468). Сами эти виды мы будем называть *схемами аксиом*, или *аксиомными схемами*. Каждая схема аксиом содержит бесконечное число аксиом: при каждом конкретном выборе формул, обозначенных через «A», «B», «C», получается одна из аксиом. Например, п. 1a теоремы 2 отвечает схема аксиом 1a $A \supset (B \supset A)$. Примеры отдельных аксиом по этой схеме:

$$P \supset (P \supset P),\ P \supset (Q \supset P),\ Q \supset (P \supset Q),\ \neg P \supset (Q \& R \supset \neg P),$$
$$(P \supset (\neg R \supset P)) \supset [R \supset (P \supset (\neg R \supset P))] \text{ и т. д.}$$

В качестве единственного *правила вывода*, называемого $\supset$*-правилом*, или modus ponens (сокращенно MP), или *правилом отделения*, мы принимаем процедуру перехода от двух формул вида A и $A \supset B$ к одной формуле B, каковы бы ни были формулы A и B (см. теорему 3). В *выводе* по этому правилу (в *применении* этого правила) A и $A \supset B$ являются *посылками*, а B — *заключением*.

Определим *(формальное) доказательство* (в исчислении высказываний) как конечный список (вхождений) формул $B_1, \ldots, B_l$, каждая из которых или является некоторой аксиомой исчисления высказываний, или получена по $\supset$-правилу из некоторой пары формул, предшествующих ей в этом списке. Доказательство является доказательством своей *последней формулы* B_l. Если формула B имеет доказательство, то мы говорим, что B *(формально) доказуема* или что B является *(формальной) теоремой*; записываем мы это так: $\vdash B$.

Пример 4. Какова бы ни была формула A, следующий список из пяти формул $B_1, \ldots, B_l$ является доказательством формулы $A \supset A$ ($l = 5$ и B_1 — это $A \supset (A \supset A)$, ..., B_5 — это $A \supset A$)[1]:
1. $A \supset (A \supset A)$ — схема аксиом 1a.

[1]) То, что мы на самом деле выпишем, является «схемой доказательств», превращающейся в конкретное доказательство при том или ином выборе формулы, обозначенной через «A».

2. $\{A \supset (A \supset A)\} \supset \{[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]\}$ — схема аксиом 1b.
3. $[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]$ — MP, 1,2.
4. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ — схема аксиом 1a.
5. $A \supset A$ — MP, 4,3.

Одновременно с самим доказательством, т. е. с формулами $B_1, \ldots, B_l$, мы слева нумеруем эти формулы, а справа обосновываем включение формул $B_1, \ldots, B_l$ в доказательство (это «анализ» доказательства). Так, на первом этапе мы применили схему аксиом 1a с A в качестве A и B (т. е. с формулой, обозначаемой через «A», в качестве формул, обозначаемых через «A» и «B» в формулировке схемы). На втором этапе A — это формула A схемы 1b, $A \supset A$ — это B, A есть также формула C схемы 1b. Применяя modus ponens к формулам 1 и 2 на третьем этапе, мы берем в качестве A для этого правила формулу $A \supset (A \supset A)$ (т. е. 1), а в качестве B — формулу 3. Поскольку формулы 1—5 образуют доказательство (для произвольной заданной формулы A), мы можем сказать, что $A \supset A$ доказуема, и написать $\vdash A \supset A$. Точно так же $\vdash A \supset (A \supset A)$ и т. д. (Почему?)

Несколько замечаний помогут лучше уяснить разумность такой трактовки исчисления высказываний как аксиоматико-дедуктивной теории. Каждая схема аксиом дает бесконечное число аксиом. Этого можно было бы избежать, договорившись, что язык, к которому принадлежат атомы, содержит конкретные буквы в качестве «пропозициональных переменных», и добавив второе правило вывода — «правило подстановки», — условившись, что E* можно получать из E в условиях теоремы 1, если $P_1, \ldots, P_n$ — пропозициональные переменные. Но такая трактовка представляется нам менее согласованной с обычным математическим языком, чем описанная выше (восходящая к фон Нейману [1927])[1].

Список из тринадцати схем аксиом может показаться удивительно длинным. Однако для всякой пропозициональной связки нужны характеризующие ее аксиомы, т. е. аксиомы, обеспечивающие те дедуктивные свойства, которые мы хотим иметь у этой связки.

Мы имеем дело только с двумя или тремя схемами аксиом для каждого из символов $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\sim$: одна или две (левый

---

[1]) В любом случае правило вывода должно иметь характер схемы с латинскими прописными буквами «A», «B», обозначающими произвольные формулы, чтобы оно обеспечило возможность бесконечного числа применений. Наши схемы аксиом можно рассматривать как правила вывода с нулевым числом посылок. Именно поэтому Карнап [1934] применил для схем аксиом и правил вывода общее название «правила преобразования». Правила, определяющие класс формул (§ 1), похожие на синтаксические правила грамматик естественных языков, называют «правилами образования».

столбец теоремы 2) дают нам возможность доказывать формулы, в которые входит этот символ («вводить» этот символ); одна или две (это не относится к $\supset$) дают нам возможность выводить формулы, куда этот символ не входит (или входит в меньшем числе экземпляров), из формул, содержащих его (они служат для «удаления» его; правый столбец теоремы 2). Применительно же к $\supset$ правилом удаления служит правило MP. Эта (по нашему мнению) изящная классификация схем аксиом восходит по существу к Генцену [1934—5].

Мы могли бы обойтись меньшим числом схем аксиом, отказавшись от провозглашения некоторых из связок &, $\vee$, $\sim$ полноправными членами алфавита предметного языка. Так, например, если бы мы при написании «$A \sim B$» подразумевали всякий раз, что это лишь сокращение для формулы $(A \supset B) \& (B \supset A)$, то можно было бы вычеркнуть из нашего списка схемы аксиом 9a, 10a, 10b [1]).

Если исчисление высказываний применяется для вывода формул из допущений $A_1, \ldots, A_m$, то формулы $A_1, \ldots, A_m$ фактически функционируют и как аксиомы. Однако мы не станем называть их так, а будем и дальше именовать их *допущениями* (гипотезами), если вообще понадобится их как-то именовать. При $m > 0$ мы назовем список $B_1, \ldots, B_l$ не «доказательством», а «выводом» из $A_1, \ldots, A_m$. Конечный список (вхождений) формул $B_1, \ldots, B_l$ является (*формальным*) *выводом* (формулы B_l) *из* $A_1, \ldots, A_m$ (в исчислении высказываний или средствами исчисления высказываний), если всякая формула этого списка либо является одной из формул $A_1, \ldots, A_m$, либо — одной из аксиом (исчисления высказываний, т. е. получается по одной из схем аксиом 1a—10b), либо же получена по $\supset$-правилу из двух формул, расположенных в списке раньше нее. Если существует вывод данной формулы B из $A_1, \ldots, A_m$, то говорим, что B *выводима из* $A_1, \ldots, A_m$, и пишем $A_1, \ldots, A_m \vdash B$. Знак «$\vdash$» можно читать «выводится». При использовании такой терминологии для $m \geqslant 0$ «доказательство» и «доказуемость» являются частным случаем «вывода» и «выводимости» при $m = 0$) [2]).

Пример 5. Каков бы ни был выбор формул A, B, C, следующие 8 формул являются выводом формулы C из $A \supset (B \supset C)$,

[1]) Именно так делалось в [BM]. Если считать «$A \& B$», «$A \vee B$», «$A \sim B$» сокращениями формул $\neg(A \supset \neg B)$, $\neg A \supset B$, $\neg((A \supset B) \supset \neg(B \supset A))$ соответственно, то нужны всего четыре схемы аксиом 1a, 1b, 7, 8. Можно поступать и иначе многими способами. Ср. Чёрч [1956], стр. 130—132 и 142—145.

[2]) Символ «$\vdash$» восходит к Фреге [1879]; его современное использование — к Россеру [1935] и Клини [1934]. (Россер предложил использовать его для выражения выводимости посредством правил вывода, а Клини — включать также выводимость из предложений, принятых за аксиомы.) Параллельное использование «$\models$» (§ 2, 7), по-видимому, впервые ввел Клини [1956a].

A&B:

1. A&B — второе допущение,
2. $A\&B \supset A$ — схема аксиом 4a.
3. A — MP, 1,2.
4. $A \supset (B \supset C)$ — первое допущение.
5. $B \supset C$ — MP, 3,4.
6. $A\&B \supset B$ — схема аксиом 4b.
7. B — MP, 1,6.
8. C — MP, 7,5.

Следовательно, можно говорить, что существует вывод формулы C из $A \supset (B \supset C)$, A&B; короче, $A \supset (B \supset C),\ A\&B \vdash C$.

В приведенных выше определениях мы говорили о «формальном доказательстве» и «формальном выводе» (но обычно мы будем опускать слово «формальный»), чтобы подчеркнуть, что эти доказательства и выводы развертываются в предметном языке, который мы изучаем с помощью языка исследователя (§ 1). Ведь с точки зрения языка исследователя мы рассматриваем только *вид* формул (а не их конкретные значения или смыслы), устанавливая с помощью наших определений, является ли данная последовательность формул $B_1, \ldots, B_l$ (формальным) доказательством или выводом из данных допущений $A_1, \ldots, A_m$. Последовательность формул $B_1, \ldots, B_l$ является (формальным) доказательством или выводом из $A_1, \ldots, A_m$, только если она в точности подпадает под определение (как в примерах 4 и 5)[1]). Эта стандартизация процедур, которые можно выполнять при построении формального доказательства и вывода, делает структуру доказательства или вывода (в предметном языке) настолько четкой, что она может стать предметом нашего исследования.

В процессе нашего исследования (в языке исследователя) мы тоже будем доказывать теоремы, выводить следствия из допущений и т. п. Это будет иметь место в теории доказательств в той же мере, в какой прежде имело место в теории моделей. В этих *неформальных* (содержательных) доказательствах и выводах мы поступаем более гибко, основываясь на смысле высказываний и используя любые убедительные умозаключения. (Конечно, может случиться, что некоторые из этих умозаключений являются неформальными двойниками тех операций, которые мы совершаем

[1]) Говорить, что формула доказуема, если она общезначима, не стоило бы, равно как не стоило бы давать определение так, чтобы всякая формула, следующая из других формул, оказывалась бы тем самым формально выводимой за один шаг из этих формул. В таком случае не нужно было бы доказательств, содержащих более одной формулы, и выводов из $A_1, \ldots, A_m$, состоящих более чем из $m+1$ формул, но зато этот единственный шаг стал бы чрезмерно сложным. Мы же, напротив, стараемся в теории доказательств расчленить выводы на такие простые умозаключения, какие на самом деле встречаются в рассуждениях. (Мы еще затронем этот вопрос ниже в § 15.)

в формальных доказательствах, но в таких рассуждениях мы пользуемся не только ими.)[1])

Тому, кто помнит, что есть два языка, что доказательства, выводы и формулы первого (предметного) языка изучаются во втором с использованием (по необходимости) содержательных доказательств и выводов, проводимых во втором языке, будет нетрудно уяснить подлинное положение вещей. В теории моделей предметный язык рассматривался только как набор формул, для которых установлены некие таблицы истинности, а поэтому не так чувствовалось раздвоение терминологии.

В заключение этого параграфа сформулируем на языке исследователя две легкие (неформальные) теоремы. Они относятся к формальным доказательствам и выводам в предметном языке.

Теорема 9.

(i) *При* $m \geqslant 1$
$A_1, \ldots, A_m \vdash A_1,$
$\ldots,$
$A_1, \ldots, A_m \vdash A_m.$

(ii) *При* $m, p \geqslant 0$
Если $A_1, \ldots, A_m \vdash B_1,$
$\ldots,$
$A_1, \ldots, A_m \vdash B_p$ *и* $B_1, \ldots, B_p \vdash C,$
то $A_1, \ldots, A_m \vdash C.$

Доказательство. (i) В определении того, что означает «$B_1, \ldots$ $\ldots, B_l$ является выводом», не сказано, что каждое из допущений $A_1, \ldots, A_m$ фактически входит в список $B_1, \ldots, B_l$. Поэтому при всяком i между 1 и m (включительно) само A_i представляет собой вывод формулы A_i из $A_1, \ldots, A_m$. (ii) В заданном выводе формулы C из $B_1, \ldots, B_p$ можно заменить вхождение каждого из допущений $B_1, \ldots, B_p$ на вывод его из $A_1, \ldots, A_m$. Тем самым мы получаем вывод формулы C из $A_1, \ldots, A_m$.

Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — заданный список формул. Исследуем класс формул B, выводимых из $A_1, \ldots, A_m$. Согласно теореме 9(i), формулы $A_1, \ldots, A_m$ сами принадлежат этому классу, а, согласно теореме 9(ii), всякая формула C, выводимая из каких-нибудь формул $B_1, \ldots, B_p$, которые уже принадлежат этому классу, также принадлежит ему.

С этой точки зрения роль теоремы 9 ясна. Однако мы вернемся к ней в § 13, когда получим некоторый навык применений теоремы 9 в частных случаях.

Прежде чем переходить к дальнейшему, уместно сравнить смысл четырех фраз:

«$\models A \supset B$» означает, что формула $A \supset B$ общезначима, т. е. что ее истинностная таблица содержит столбец из одних t.

[1]) Это не означает, конечно, что наши неформальные доказательства и выводы в языке исследователя не согласуются с законами логики. Но мы не пытаемся кодифицировать их или изучать их в качестве образцов логического рассуждения.

«$A \models B$» означает, что B является следствием формулы A, т. е. что B дает t во всех тех строках, где A дает t.

«$\vdash A \supset B$» означает, что $A \supset B$ доказуема, т. е. что существует некоторая конечная последовательность таких формул, что каждая из них является либо аксиомой, либо формулой, получаемой из двух предшествующих формул посредством MP, а последняя формула в этой последовательности — это $A \supset B$.

«$A \vdash B$» означает, что B выводима из A, т. е. что существует конечная последовательность формул, каждая из которых является либо формулой A, либо аксиомой, либо получается из двух предшествующих формул с помощью MP, а последняя формула в этой последовательности — это B.

В конце § 12 мы узнаем, что эти четыре фразы равносильны: если верна одна из них, то верны и три другие. (Что касается двух первых, то это содержится уже в теореме 8.)

Мы увидим также, что равносильны выражения: «Если $\models A$, то $\models B$» и «Если $\vdash A$, то $\vdash B$»; они слабее, нежели четыре вышеупомянутых (по поводу первого из них мы уже отмечали это в § 7).

Теорема 10. (a) *Если* $\vdash A \supset B$, *то* $A \vdash B$.

(b) *Более общо, при любом* $m \geqslant 1$: *Если* $A_1, \ldots, A_{m-1} \vdash A_m \supset B$, *то* $A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m \vdash B$.

Доказательство. (b) Согласно условию теоремы, существует вывод формулы $A_m \supset B$ из $A_1, \ldots, A_{m-1}$. Пусть число формул этого вывода равно k. Построим вывод формулы B из $A_1, \ldots, A_m$ следующим образом:

1. ... k. $A_m \supset B$ — вывод формулы $A_m \supset B$ из $A_1, \ldots, A_{m-1}$ согласно условию нашей теоремы.

$k+1$. A_m — m-е допущение.

$k+2$. B — MP, $k+1$, k.

Следствие. *Если* $\vdash A_1 \supset (\ldots (A_{m-1} \supset (A_m \supset B)) \ldots)$, *то* $A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m \vdash B$.

Упражнения. 9.1. Дополните доказательство из примера 4, чтобы получить доказательство формулы $A \sim A$.

9.2. Ниже дается вывод формулы C из A, B, $A \supset (B \supset C)$. Укажите основания (проанализируйте вывод) и запишите результат с использованием знака «$\vdash$».

1. A.
2. $A \supset (B \supset C)$.
3. $B \supset C$.
4. B.
5. C.

9.3. Покажите путем построения подходящих выводов, что (a) $A, A \supset B \vdash B$. (b) $A, B \vdash A \& B$. (c) $A \& B \vdash A$. (d) $A \& B \vdash B$. (e) $A \vdash A \vee B$. (f) $B \vdash A \vee B$. (g) $\neg\neg A \vdash A$. (h) $A \supset B, B \supset A \vdash A \sim B$. (i) $A \sim B \vdash A \supset B$. (j) $A \sim B \vdash B \supset A$.

9.4. Восполните отсутствующие гипотезы и обоснуйте их или добавьте заключения в следующих применениях теоремы 9 (ii):
(a) $A, \neg A \vdash \neg\neg B$ и $\neg\neg B \vdash B$, значит ——. ($m=2$, $p=1$.)
(b) —— и $A \& B \vdash A$, значит $A \supset (B \supset C), A \& B \vdash A$. ($m=2$, $p=1$.)
(c) $A \supset (B \supset C), A \& B \vdash A$ и $A \supset (B \supset C), A \& B \vdash B$ и —— и $A, B, A \supset (B \supset C) \vdash C$, значит $A \supset (B \supset C), A \& B \vdash C$. ($m=2$, $p=3$.)
(d) —— и —— и $A, A \supset B \vdash B$, значит $A, \neg B, A \supset B \vdash B$. ($m=3$, $p=2$.)

9.5. Используйте упр. 9.4 (c) для иллюстрации доказательства теоремы 9(ii), комбинируя выводы из упр. 9.3 (c) и (d) (их надо построить как выводы из $A \supset (B \supset C), A \& B$) с упр. 9.2. Сравните результат с примером 5.

9.6. Выпишите явно случай $m=0$ и $p=0$ в теореме 9 (ii) и упростите доказательство для этого случая.

9.7. Покажите, что результат упр. 9.1 (т. е. $\vdash A \sim A$) получается из $\vdash A \supset A$ (пример 4) и из упр. 9.3 (h) с использованием теоремы 9 (примите $m=0$).

9.8. Докажите: *Если* $\vdash A_1 \& \ldots \& A_m \supset B$, *то* $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ (см. примечание 1 на стр. 34).

§ 10. Теория доказательств; теорема о дедукции

То свойство (формального) вывода, которое выражено в следующей теореме, соответствует хорошо известному способу неформального рассуждения. Чтобы установить импликацию «Если A, то B», вводят допущение A «в качестве необходимой посылки» и пытаются вывести B. Точно так же поступают при дополнительных допущениях $A_1, \ldots, A_{m-1}$.

Доказательство длиннее, чем в предыдущих теоремах (кроме, пожалуй, теоремы 2, если буквально проводить все подразумеваемые там вычисления). Но оно построено по простому плану, да и само сводится к рассмотрению четырех простых случаев.

Теорема 11. (Теорема о дедукции, Эрбран [1930][1].) (a) *Если* $A \vdash B$, *то* $\vdash A \supset B$. (b) *Если* $A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m \vdash B$, *то* $A_1, \ldots, A_{m-1} \vdash A_m \supset B$.

[1]) Теорема о дедукции как неформальная теорема, относящаяся к специальным системам (вроде исчисления высказываний и исчисления предикатов, см. гл. 2), впервые явно сформулирована у Эрбрана [1930], а без дока-

Доказательство. (b) Прежде всего надо отчетливо уяснить, что означают в силу определения символа «$\vdash$» предположение теоремы и ее заключение: и то и другое утверждают существование некоторого вида конечных списков формул, скажем

$$B_1, \ldots, B_l \text{ и } B'_1, \ldots, B'_p.$$

Между ними есть два различия. В первый список (но не во второй) формула может входить с обоснованием: m-е допущение A_m. В первом списке последняя формула — это B, а во втором списке последняя формула — это $A_m \supset B$.

Надо доказать, что всякий раз, как дан какой-нибудь вывод формулы B из $A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$ (*данный вывод*), можно найти вывод формулы $A_m \supset B$ из $A_1, \ldots, A_{m-1}$. В действительности существует единый метод, позволяющий всегда по данному выводу находить вывод формулы $A_m \supset B$ из $A_1, \ldots, A_{m-1}$ (*результирующий вывод*). Мы опишем этот метод, а затем проиллюстрируем его на примере 6.

Пусть

$$(\alpha) \qquad B_1, \ldots, B_l$$

— данный вывод, где B_l — это B. (В примере 6 (α) — это левый столбец, состоящий из формул 1—5.) На первом шаге нахождения результирующего вывода припишем спереди к каждой из формул заданного вывода (α) символы $A_m \supset$, добавляя, если надо, скобки. Тогда получим

$$(\beta) \qquad A_m \supset B_1, \ldots, A_m \supset B_l$$

с последней формулой $A_m \supset B$, которая и должна быть последней в получаемом выводе. (В примере 6 (β) — это 3′, 8′, 11′, 14′, 17′ правого столбца.) Однако, вообще говоря, эта последовательность (β) не является выводом из $A_1, \ldots, A_{m-1}$. Тем не менее можно перед каждой формулой $A_m \supset B_i$ ($i = 1, \ldots, l$) вставить дополнительные формулы так, чтобы превратить ее в вывод (γ) из $A_1, \ldots, A_{m-1}$. Выбор дополнительных формул при каждом i зависит от того, чем оправдывается наличие формулы B_i в заданном выводе (α)[1].

зательства — у Эрбрана [1928]. Как общий методологический принцип, относящийся к аксиоматико-дедуктивным системам, она появилась у Тарского [1930]. Тарский сообщает ([1956], примечание на стр. 32), что он знал ее и применял с 1921 г.

[1]) Следовательно, этот общий метод применяется к данному выводу $B_1, \ldots, B_l$, снабженному — при каждом i — высказыванием, оправдывающим включение B_i в эту последовательность. Мы назвали эти оправдания *анализом* вывода. Вообще говоря, возможны различные анализы. Так, в примере 6 (где A, B, C — *произвольные* (не обязательно различные) формулы), если, например, C совпадает с A, то формулу 3 оправдывает и другой анализ, ибо тогда она может порождаться схемой аксиом 1a.

Случай 1. Пусть B_i — это одно из первых $m-1$ допущений $A_1, \ldots, A_{m-1}$, которые и в получаемом выводе остаются допущениями; для определенности пусть B_i — это A_j $(j < m)$. В этом случае вставим первые две из следующих формул перед третьей, $A_m \supset B_i$,

k'. A_j — j-е допущение.

$k+1'$. $A_j \supset (A_m \supset A_j)$ — схема аксиом 1a.

$k+2'$. $A_m \supset A_j$ — MP, k', $k+1'$.

(В примере 6 это иллюстрируется строками $1'$—$3'$ при $k' = 1'$ и строками $9'$—$11'$ при $k' = 9'$.)

Случай 2. Пусть B_i — последнее допущение, т. е. A_m, которое в результирующем выводе не остается допущением (кроме случаев, когда A_m совпадает с одной из формул $A_1, \ldots, A_{m-1}$). Вставим четыре первые формулы из доказательства формулы $A \supset A$ (пример 4), в которых заменим A на A_m. (В примере 6 этому отвечают строки $4'$—$8'$, но, поскольку A_m — это A, вставленные строки в точности совпадают со строками из доказательства формулы $A \supset A$.)

Случай 3. Пусть B_i — некоторая аксиома. Поступаем так же, как в случае 1. (В примере 6 этот случай не иллюстрируется.)

Случай 4. Пусть B_i выводится из двух предшествующих формул B_g и B_h $(g, h < i)$ посредством MP. Предоставляем читателю рассмотреть этот случай в качестве упражнения, а также заполнить строки $12'$, $13'$, $15'$, $16'$ в примере 6 (упр. 10.1).

Пример 6. Для иллюстрации *доказательства* теоремы о дедукции приведем: (α) в левом столбце вывод формулы C из $A \supset (B \supset C)$, B, A и (γ) в правом столбце результирующий вывод формулы $A \supset C$ из $A \supset (B \supset C)$, B, который получается из данного вывода применением общего метода, описанного в доказательстве теоремы.

1. B — второе допущение.	$1'$. B — второе допущение.
	$2'$. $B \supset (A \supset B)$ — схема аксиом 1a.
	$3'$. $A \supset B$ — MP, $1'$, $2'$.
	$4'$. $A \supset (A \supset A)$ — схема аксиом 1a.
	$5'$. $\{A \supset (A \supset A)\} \supset \{[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]\}$ — схема аксиом 1b.
	$6'$. $[A \supset ((A \supset A) \supset A)] \supset [A \supset A]$ — MP, $4'$, $5'$.
	$7'$. $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ схема аксиом 1a.
2. A — третье допущение.	$8'$. $A \supset A$ — MP, $7'$, $6'$.
	$9'$. $A \supset (B \supset C)$ — первое допущение.

	10′. $\{A \supset (B \supset C)\} \supset \{A \supset (A \supset (B \supset C))\}$ — схема аксиом 1а.
3. $A \supset (B \supset C)$ — первое допущение.	11′. $A \supset (A \supset (B \supset C))$ — MP, 9′, 10′.
	12′.
	13′.
4. $B \supset C$ — MP, 2, 3.	14′. $A \supset (B \supset C)$ — MP, 11′, 13′.
	15′.
	16′.
5. C — MP, 1, 4.	17′. $A \supset C$ — MP, 14′, 16′.

(К этому частному примеру можно применить упрощение, получив более короткий вывод формулы $A \supset C$ из $A \supset (B \supset C)$, B. В самом деле, достаточно 7 формул — 1′, 2′, 3′, 9′, 15′, 16′, 17′ — вместо тех 17, которые возникают в силу общего метода.)

Если, приняв 1′—17′ за заданный вывод, снова применить общий метод, то получится вывод 1″—53″ формулы $B \supset (A \supset C)$ из $A \supset (B \supset C)$; еще раз применяя метод, получим доказательство 1‴—161‴ формулы $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$ (ср. упр. 10.2).

Мы полностью выписали 17 формул, составляющих вывод формулы $A \supset C$ из $A \supset (B \supset C)$, B, получающийся применением общего метода к формулам 1—5, чтобы дать читателю возможность обозреть доказательство теоремы о дедукции. Поскольку теперь эта теорема установлена, мы будем применять ее для установления *существования* некоторых выводов и доказательств, не прибегая к эффективному построению их. Построение вывода 1—5 (левый столбец) позволяет заключить, что $A \supset (B \supset C), B, A \vdash C$. Отсюда, трижды применяя теорему 11, заключаем, что $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$, далее, что $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$, затем, что $\vdash (A \supset (B \supset C)) \supset \supset (B \supset (A \supset C))$, т. е. что существует доказательство формулы $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$. Этого нам достаточно. Нам вовсе не интересно смотреть на само это доказательство, а тем более на то доказательство, которое получается тремя последовательными применениями нашего общего метода к пяти строкам левого столбца примера 6 и содержит 161 строку. (Есть и более короткие доказательства формулы $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$: так, пользуясь упомянутым выше упрощением, а лишь затем применяя общий метод, получим доказательство, состоящее из 71 строки.) Хотя наш единый метод может быть неэкономным при построении выводов и доказательств, он дает эффективное доказательство теоремы 11, а сама теорема 11 весьма эффективно устанавливает их существование. Отталкиваясь же только от примера 5, читателю, наверное, было бы довольно трудно построить доказательство формулы $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$ (или хотя бы установить, что оно существует).

Изменив буквы предыдущего примера (что возможно, ибо A, B, C — произвольные формулы и могут быть формулами B, A, C следующего примера), получим $\vdash (B \supset (A \supset C)) \supset (A \supset (B \supset C))$. Пользуясь схемой аксиом 9a и дважды применяя MP, получим $\vdash A \supset (B \supset C) \sim B \supset (A \supset C)$ (ср. *3).

Пример 7. Применяя теорему о дедукции к результату примера 5, имеем $A \supset (B \supset C) \vdash A \& B \supset C$ и $\vdash (A \supset (B \supset C)) \supset (A \& B \supset C)$.

Следствие. *Если* $A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m \vdash B$, *то* $A_1 \supset (\ldots (A_{m-1} \supset (A_m \supset B)) \ldots)$.

Упражнения. 10.1. Разберите случай 4 и выпишите формулы 12′, 13′, 15′, 16′ правого столбца примера 6.

10.2. Покажите, что если данный вывод имеет l формул, то результирующий вывод имеет $3l+2$ формул, если формула A_m фактически используется в качестве допущения в заданном выводе, и $3l$ формул, если она не используется.

10.3. Покажите, что $A \& B \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$ (начните с построения вывода $A \& B \supset C, A, B \vdash C$), а затем (используя пример 7) получите, что $\vdash A \supset (B \supset C) \sim A \& B \supset C$ (ср. *4a).

10.4. Докажите, что $\vdash (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ (ср. *2).

10.5. Покажите, что: *Если* $A_1, \ldots, A_m \vdash B$, *то* $A_1 \& \ldots \& A_m \supset B$.

§ 11. Теория доказательств; непротиворечивость, правила введения и удаления

Следствия из теорем 10 и 11 сводят понятие выводимости «$A_1, \ldots, A_m \vdash B$» к понятию доказуемости «$\vdash E$» подобно тому, как следствие из теоремы 8 сводит отношение следования «$A_1, \ldots, A_m \models B$» к понятию общезначимости «$\models E$».

Если же мы окажемся в состоянии доказать, что «$\vdash E$» и «$\models E$» равносильны, то мы завершим установление эквивалентности теории моделей и теории доказательств на уровне исчисления высказываний как при рассмотрении «абсолютных логических истин», так и в случае допущений $A_1, \ldots, A_m$. Именно в этом суть теорем 12 и 14.

Теорема 12. *Всякая доказуемая формула общезначима; в наших обозначениях: Если* $\vdash E$, *то* $\models E$.

Доказательство. В силу пунктов 1a—10b теоремы 2 все аксиомы исчисления высказываний общезначимы. В силу теоремы 3 если общезначимы две посылки A и $A \supset B$ правила MP, то общезначима B. Следовательно, когда мы строим доказательство $B_1, \ldots, B_l$ формулы E, каждая из последовательно вводимых формул $B_1, B_2, B_3, \ldots$ общезначима, ибо она либо является аксиомой, либо же получена из общезначимых формул применением MP. Следовательно, последняя формула B_l, совпадающая с E, общезначима.

Следствие. *Не существует формулы* B, *такой, что доказуемы формулы* B *и* $\neg$B; *в наших обозначениях: ни для какой формулы* B *не выполняется одновременно* $\vdash$ B *и* $\vdash \neg$B.

Доказательство. Пусть для некоторой формулы B имеет место $\vdash$ B и $\vdash \neg$B. Тогда в силу теоремы 12 $\models$B и $\models\neg$B, т. е. в столбцах значений таблиц для B и $\neg$B стоят только $\mathfrak{t}$. Этого быть не может, ибо таблица для $\neg$ устроена так, что если B дает только $\mathfrak{t}$, то $\neg$B должна давать только $\mathfrak{f}$.

В общем случае под «свойством непротиворечивости» некоторой аксиоматико-дедуктивной системы (как мы будем говорить в § 37, «формальной системы») мы понимаем то, что *только* некоторые определенные формулы являются теоремами (например, только те, которые обладают неким желательным признаком или которые не обладают каким-то нежелательным свойством), а под «свойством полноты» — то, что *хотя бы* некоторые определенные формулы являются теоремами (например, все те, которые обладают таким-то желательным признаком).

Теорема 12 устанавливает «непротиворечивость исчисления высказываний относительно общезначимости», а ее следствие устанавливает так называемую «простую непротиворечивость».

Прежде чем доказать обращение теоремы 12 (т. е. теорему 14, которая устанавливает полноту исчисления высказываний относительно общезначимости), нам придется поосновательнее развить теорию доказательств для исчисления высказываний.

Весьма полезным орудием для этого послужит нам теорема о дедукции. Начнем (в теореме 13) со списка из 14 правил, полученных модификацией правил Генцена [1934—5], которые мы назовем правилами «введения» и «удаления» логических символов. Полноты ради в их число мы включим и саму теорему о дедукции под названием «$\supset$-введение» и некоторую модификацию MP с «$\vdash$» под названием «$\supset$-удаление». Все прочие правила (за исключением «слабого $\neg$-удаления») сводятся по существу к переформулировке схем аксиом в свете этих двух правил. Ради экономии места, будем обозначать через «Г» любой список формул (возможно, пустой), так что запись «Г, A $\vdash$ B» означает «$A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m \vdash$ B», где A_m есть A (Г пуст, если $m=1$).

Правило $\neg$-введения (предпоследнее в левом столбце) соответствует содержательному методу приведения к нелепости: для доказательства того, что «не-A», т. е. что A ложно, допускают A («от противного») и выводят противоречие B и «не-B». Так рассуждать можно и при наличии дополнительных допущений Г.

Правило $\vee$-удаления отвечает содержательному приему разбора «частных случаев». Если установлено или допущено «A $\vee$ B», то для доказательства C достаточно доказать, что C получается в обоих случаях, т. е. как в случае, когда имеет место A, так и в случае, когда имеет место B. Иными словами, чтобы вывести C из $A \vee B$, «удаляют» дизъюнкцию и строят два различных вывода, один — выводя C из A, другой — C из B. (Именно в этом смысле мы можем считать разбираемое правило правилом удаления[1].)

Теорема 13. *Каков бы ни был конечный список* Γ (*из не менее чем нуля*) *формул и каковы бы ни были формулы* A, B, C:

	Введение	Удаление
$\supset$	*Если* $\Gamma, A \vdash B$, *то* $\Gamma \vdash A \supset B$.	$A, A \supset B \vdash B$.
&	$A, B \vdash A \& B$.	$A \& B \vdash A$. $A \& B \vdash B$.
$\vee$	$A \vdash A \vee B$. $B \vdash A \vee B$.	*Если* $\Gamma, A \vdash C$ *и* $\Gamma, B \vdash C$, *то* $\Gamma, A \vee B \vdash C$. (Доказательство разбором случаев.)
$\neg$	*Если* $\Gamma, A \vdash B$ *и* $\Gamma, A \vdash \neg B$, *то* $\Gamma \vdash \neg A$. (Приведение к нелепости, или reductio ad absurdum.)	$\neg\neg A \vdash A$. (Снятие (удаление, устранение) двойного отрицания.)° $A, \neg A \vdash B$. (Слабое удаление отрицания.)
$\sim$	$A \supset B, B \supset A \vdash A \sim B$.	$A \sim B \vdash A \supset B$. $A \sim B \vdash B \supset A$.

Доказательства. $\supset$-введение оправдано теоремой 11. $\supset$-удаление, &-введение, &-удаление, удаление двойного отрицания и три правила, относящиеся к $\sim$, фигурируют в упр. 9.3.

$\vee$-удаление (доказательство разбором случаев):

1. $\Gamma, A \vdash C$ — допущение.
2. $\Gamma, B \vdash C$ — допущение.
3. $\Gamma \vdash A \supset C$ — $\supset$-введ. (теорема о дедукции), 1.
4. $\Gamma \vdash B \supset C$ — $\supset$-введ., 2.
5. $A \supset C, B \supset C, A \vee B \vdash C$ — по схеме аксиом 6 с троекратным использованием MP. (Точнее, мы можем построить такой вывод: 1′. $A \supset C$. 2′. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$. 3′. $(B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)$. 4′. $B \supset C$. 5′. $A \vee B \supset C$. 6′. $A \vee B$. 7′. C. Анализ предоставляется читателю.)

---

[1]) Более естественно вписывается в схему «правил удаления» другая формулировка, предложенная Генценом:

Если $\Gamma \vdash A \vee B$ *и* $\Gamma, A \vdash C$ *и* $\Gamma, B \vdash C$, *то* $\Gamma \vdash C$.

Здесь $\vee$ действительно удаляется из первой посылки. — *Прим. ред.*

6. Г, $A \vee B \vdash C$ — применяя теорему 9 к 3, 4, 5. (В самом деле, Г, $A \vee B \vdash A \supset C$ [используя 3; ср. упр. 11.1], Г, $A \vee B \vdash B \supset C$ [используя 4], Г, $A \vee B \vdash A \vee B$ [теорема 9(i)] и $A \supset C$, $B \supset C$, $A \vee B \vdash C$ [по 5], откуда Г, $A \vee B \vdash C$ [теорема 9(ii) при $m = 2$, $p = 3$].)

Слабое $\neg$-удаление:

1. $A, \neg A, \neg B \vdash A$ — (теорема 9 (i)).
2. $A, \neg A, \neg B \vdash \neg A$ — (теорема 9 (i)).
3. $A, \neg A \vdash \neg\neg B \vdash B$ — $\neg$-введ., 1, 2; $\neg$-удал.[1]).

Согласно этому правилу, из противоречия A, $\neg A$ можно вывести любую формулу B. Основная идея доказательства, данного выше, состоит в том, чтобы вывести некоторое противоречие из A, $\neg A$, $\neg B$ и отвергнуть на этом основании $\neg B$.

Упражнения. 11.1 Выведите «Г, $A \vee B \vdash A \supset C$» из строки 3 доказательства $\vee$-удаления, и притом двумя способами: непосредственно из определения «формального вывода» и с помощью теоремы 9 (как в упр. 9.4 (b) и (d)).

11.2. Докажите правило $\neg$-введения, т. е. правило приведения к нелепости.

§ 12. Теория доказательств; полнота

Докажем полноту исчисления высказываний методом Кальмара [1934—5]. Теореме предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Для каждого входа (строки) истинностной таблицы для любой из пяти основных связок исчисления высказывания, введенных в § 2, справедливо соответствующее соотношение выводимости.*

Вот для примера таблицы для $\supset$ и $\neg$; рядом помещены в соответствующих строках отвечающие им соотношения выводимости:

A	B	$A \supset B$		
t	t	t	$A, B \vdash A \supset B$	(1)
t	f	f	$A, \neg B \vdash \neg(A \supset B)$	(2)
f	t	t	$\neg A, B \vdash A \supset B$	(3)
f	f	t	$\neg A, \neg B \vdash A \supset B$	(4)

[1]) «$\Gamma \vdash A_1 \vdash A_2$» является сокращением для «$\Gamma \vdash A_1$ и $A_1 \vdash A_2$», откуда следует «$\Gamma \vdash A_2$» в силу теоремы 9 (ii). Ср. упр. 9.4 (a). Аналогично и для более длинных цепей (только *после* каждого «$\vdash$» нельзя ставить более одной формулы). [То обстоятельство, что доказательство дано в виде, похожем на вид формального доказательства, который проиллюстрирован в примерах 5 и 6, не должно заставить читателя забыть, что на самом деле это содержательное доказательство в языке исследователя. — *Перев.*]

A	$\neg$ A
t	f
f	t

$$A \vdash \neg\neg A \qquad (5)$$
$$\neg A \vdash \neg A \qquad (6)$$

(*Эта лемма утверждает существование в общей сложности* 18 *отношений выводимости.*)

Доказательство. Для иллюстрации установим три из четырех указанных соотношений выводимости для $\supset$:

(1) 1. $A, B, A \vdash B$ — (теорема 9 (i)).
2. $A, B \vdash A \supset B$ — $\supset$-введ. (теорема о дедукции), 1.
(2) 1. $A, \neg B, A \supset B \vdash B$ — $\supset$-удал. (и теорема 9, ср. упр. 9.4 (d)).
2. $A, \neg B, A \supset B \vdash \neg B$ — (теорема 9 (i)).
3. $A, \neg B \vdash \neg(A \supset B)$ — $\neg$-введ., 1,2.
(4) 1. $\neg A, \neg B, A \vdash B$ — слабое $\neg$-удал. (и теорема 9).
2. $\neg A, \neg B \vdash A \supset B$ — $\supset$-введение (теорема о дедукции), 1.

Лемма 2. *Пусть дана истинностная таблица некоторой формулы* E, *содержащей* (*разве лишь*) *атомы* $P_1, \ldots, P_n$. *Тогда справедливо соотношение выводимости, соответствующее каждому из* 2^n *входов* (*строк*) *этой таблицы.*

Например, пусть E — это формула $P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$. Согласно нашей лемме, строке 3 со значением f из таблицы этой формулы (§ 2) должно отвечать соотношение выводимости

$$P, \neg Q, R \vdash \neg\{P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))\}.$$

Доказательство. Поясним метод на конкретном примере. Согласно лемме 1, первому шагу вычисления значения формулы, состоящему в приписывании атому Q значения f, а атому R значения t и получении для формулы $Q \vee R$ значения t, отвечает отношение выводимости $\neg Q, R \vdash Q \vee R$, откуда тривиально (или, если угодно, в силу теоремы 9)

1. $P, \neg Q, R \vdash Q \vee R$.

Тому шагу, который состоит в получении значения f для $\neg P$ из значения t для P, отвечает в силу пункта (5) леммы 1 выводимость $P \vdash \neg\neg P$, откуда

2. $P, \neg Q, R \vdash \neg\neg P$.

Шагу, состоящему в получении для $R \supset \neg P$ значения f из значения t для R и значения f для $\neg P$, отвечает в силу (2) леммы 1 (при R и $\neg P$ вместо A и B соответственно) $R, \neg\neg P \vdash \neg(R \supset \neg P)$; в сочетании с п. 2 по теореме 9 получаем

3. $P, \neg Q, R \vdash \neg(R \supset \neg P)$.

Продолжая, получаем последовательно $P, \neg Q, Q \vdash D$ либо $P, \neg Q, R \vdash \neg D$ для каждой подформулы D формулы E в зависимости от того, принимает D значение $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$ при приписывании P, Q, R значений $\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{t}$ соответственно. Окончательно, поскольку E в целом принимает значение $\mathfrak{f}$, имеем

5. $P, \neg Q, R \vdash \neg\{P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))\}$.

Этим завершается рассмотрение конкретного случая[1]), иллюстрирующего доказательство леммы 2.

Поучительно взглянуть на приводимую ниже схему из двух «деревьев», чтобы понять, как каждый этап вычисления истинностного значения (горизонтальная строка левого дерева) отвечает отношению выводимости из леммы 1 (горизонтальная строка правого дерева). Левое дерево—это те вычисления, которые делались в § 2, но без повторений. Согласно теореме 9, всякая формула, возникающая в правом дереве, выводима из различных формул, расположенных в вершинах ветвей, под которыми она находится (или из любого большего множества формул).

$$P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P)) \qquad\qquad P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))$$

$$\dfrac{\mathfrak{t} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{f} \quad \mathfrak{t}}{\mathfrak{t}} \qquad \dfrac{\mathfrak{t} \quad \dfrac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{f}}}{\mathfrak{f}}}{\mathfrak{f}}}{\mathfrak{f}} \qquad\qquad \dfrac{P \qquad \dfrac{\dfrac{\neg Q \quad R}{Q \vee R} \qquad \dfrac{R \quad \dfrac{P}{\neg\neg P}}{\neg(R \supset \neg P)}}{\neg(Q \vee R \supset (R \supset \neg P))}}{\neg\{P \supset (Q \vee R \supset (R \supset \neg P))\}}$$

Лемма 3. *Если формула* E *леммы* 2 *общезначима* (*т. е.* $\models E$), *то* $P_1 \vee \neg P_1, \ldots, P_n \vee \neg P_n \vdash E$.

Доказательство. Пусть, например, $n = 2$. Тогда, согласно лемме 2 и условию леммы 3,

$P_1, \quad P_2 \vdash E$.
$P_1, \neg P_2 \vdash E$.
$\neg P_1, \quad P_2 \vdash E$.
$\neg P_1, \neg P_2 \vdash E$.

Дважды применяя $\vee$-удаление, получаем

$P_1, P_2 \vee \neg P_2 \vdash E$.
$\neg P_1, P_2 \vee \neg P_2 \vdash E$.

---

[1]) Само собой разумеется, проверка одного какого-либо примера теоремы (или леммы) не является доказательством этой общей теоремы (леммы). Доказательство же состоит в том, что метод, использованный в этом частном случае, оказывается общим, т. е. приложимым ко всем случаям. Таким образом, иллюстрация на частном случае демонстрирует некоторый тип рассмотрения, применимый ко всем случаям. В тех случаях, когда это будет очевидно, можно опускать проведение доказательства в общих терминах, как мы тут и поступаем.

Третье применение $\vee$-удаления дает

$$P_1 \vee \neg P_1,\ P_2 \vee \neg P_2 \vdash E.$$

Лемма 4°. *Какова бы ни была формула* A, *имеем* $\vdash A \vee \neg A$ (закон исключенного третьего; ср. *51 из теоремы 2).

Доказательство предоставляем читателю в качестве упражнения (упр. 12.2)[1]).

Теорема 14°. *Всякая общезначимая формула доказуема; символически: Если* $\models E$, *то* $\vdash E$.

Доказательство. Лемма 3, лемма 4 и теорема 9(ii) при $m=0$.

Этим завершается доказательство равносильности теории доказательств и теории моделей на уровне исчисления высказываний. Прежде чем установить эту равносильность, нам пришлось установить в теории доказательств некоторые результаты, уже полученные в теории моделей. Теперь же мы можем заимствовать у теории моделей все ее результаты (§ 2—8), заменяя повсюду «$\models$» на «$\vdash$»[2]). Таким образом, все формулы, перечисленные в теореме 2, сохраняют силу при замене «$\models$» на «$\vdash$». До доказательства теоремы 14 мы могли это утверждать явно только о формулах 1a—10b (ибо они приняты за схемы аксиом), *1 (пример 4 в § 9), *2, *3, *4a (см. конец § 10), *19 (упр. 9.1) и *51 (лемма 4).

Сколь бы естественным ни казалось излагать исчисление высказываний посредством таблиц истинности, исторически такое изложение возникло позднее, по крайней мере если говорить о систематическом изложении. Первыми это проделали Пост [1921] (который доказал теоремы 12 и 14) и Лукасевич [1921]. Частично это изложение восходит к Фреге [1879] и Пирсу [1885]. Хотя уже Буль [1847] и Де Морган [1847] заложили основы алгебры логики, собственно теория доказательств для исчисления высказы-

1) Хотя при том уровне развития теории, на котором мы находимся, доказательство дается в 8 строк ([ВМ], стр. 110, *51), оно требует некоторой изобретательности. Позже (конец § 13) оно станет легким. Мы воздержимся здесь от приведения этого доказательства, чтобы не лишить читателя удовольствия самому найти его. (Одно из возможных доказательств неявно содержится в обосновании *51 ($\models A \vee \neg A$) с использованием двойственности по теореме 7 § 6; совершаемые при этом шаги легко пересказать в терминах теории доказательств).

2) Такая замена—*в простых контекстах*—сводится к применению *в языке исследователя* того правила замены, которое установлено для предметного языка в следствии из теоремы 5. Коль скоро доказано, что «$A_1, \ldots, A_m \models B$ ($m \geqslant 0$) тогда и только тогда, когда $A_1, \ldots, A_m \vdash B$», можно пользоваться этим утверждением так же, как эквивалентностью $A \sim B$ в следствии из теоремы 5.

ваний появилась только у Фреге [1879] и Рассела, в основном в «Principia Mathematica» Уайтхеда и Рассела [1910—13] [1]).

Другие варианты исчисления высказываний. Чтобы раскрыть наше замечание (§ 2) о существовании разных логических систем, упомянем, что Лукасевич [1920] ввел *трехзначное исчисление высказываний*, теория моделей которого основана на применении трех истинностных значений вместо наших двух. В [1921] независимо от Лукасевича Пост обобщил классическое (=2-значное) исчисление высказываний до *n-значного исчисления высказываний* с любым целым $n \geqslant 2$. Вопрос о том, не является ли n-значная логика при $n > 2$ лишь интеллектуальным упражнением, все еще остается спорным [2]).

Модальные исчисления высказываний оперируют такими понятиями, как «А необходимо» (символически $\Box$ А) и «А возможно» ($\Diamond$ А или $\neg \Box \neg$ А). Эти понятия возникают в тех областях мышления, где допускаются два вида «истинности», одна из которых имеет более универсальный и «принудительный» характер, чем другая. Например, невозможно, чтобы $2+2=5$ (это противоречит принципам математики), но возможно, чтобы посреди Тихого океана оказался целый материк (это противоречит только географическим фактам). Зоолог может утверждать, что существование саламандр или других живых существ, которые могли бы жить в огне, невозможно; однако возможно (хотя и неверно), что существуют единороги; возможно также (хотя неправдоподобно), что существует пресловутый снежный человек. Изучение модальной логики современными средствами началось с работ Льюиса [1912], [1917], Льюиса и Лэнгфорда [1932]. Одним из их предшественников был Мак-Колл [1896—7] [3]).

Другим примером неклассического исчисления высказываний является *интуиционистское исчисление высказываний*, в котором принципы исключенного третьего (А $\vee \neg$ А) и двойного отрицания ($\neg\neg$ А $\supset$ А) не имеют места. Точку зрения, породившую интуиционистскую логику, и то, чем она интересна, мы рассмотрим позже (§ 36). Здесь мы не будем пытаться описывать формулировку интуиционистского исчисления высказываний в терминах теории моделей. Его формулировка в терминах теории доказательств получается, если в нашей теории доказательств заменить схему аксиом 8 ($\neg\neg$ А $\supset$ А) на 8^{I} $\neg$ А $\supset$ (А $\supset$ В). Так как всякая аксиома, получающаяся из этой схемы, доказуема классически (ср. *10a), то интуиционистское исчисление высказываний является *подсистемой* классического, т. е. все тео-

---

1) См. Чёрч [1956] § 29 (стр. 148 и далее).
2) См. Россер и Тюркетт [1952].
3) См. фон Райт [1951], Фейс [1965].

ремы интуиционистской системы являются теоремами классической системы.

Те из установленных нами результатов для «$\vdash$» (включая те, которые сначала были установлены для «$\models$»), для которых не видно, как их установить интуиционистски, помечены знаком «°»[1]).

Упражнения. 12.1. Установите соотношения выводимости леммы 1, которые отвечают двум первым строкам таблицы для & и двум последним строкам таблицы для V.

12.2*. Докажите лемму 4 (см. примечание 1 на стр. 64).

12.3. Укажите, какие из следующих высказываний ложны и какие истинны, и объясните, почему:

a) «Для любой формулы A, если $\vdash \neg A$, то не $\vdash A$.»

b) «Для любой формулы A, если не $\vdash A$, то $\vdash \neg A$.»

c) «Для любых формул A и B, если $\vdash A \vee B$, то $\vdash A$ или $\vdash B$.»

d) «Для любых формул A и B, если $\vdash A$ или $\vdash B$, то $\vdash A \vee B$.»

12.4°*. Рассмотрите какую-нибудь формулу, не являющуюся теоремой, например $P \supset Q$. Добавьте соответствующую схему аксиом $A \supset B$ к списку 1a—10b. Покажите, что в полученной системе любая формула является теоремой (полнота в смысле Поста [1921], [BM], стр. 123, следствие 2).

12.5°*. Докажите, что одни и те же формулы выводимы в системе, содержащей 4 схемы аксиом, которая описана в § 9, примечание 29 (причем &, V, $\sim$ введены как сокращения, а не как исходные связки), и в нашей системе.

12.6. Докажите правило слабого $\neg$-удаления (теорема 13) в интуиционистском исчислении высказываний. (Прочие 12 правил теоремы 13, *за исключением* удаления двойного отрицания, сохраняют силу в интуиционистской логике вместе с приведенными выше доказательствами.)

12.7[2]). Докажите, что $\{\models \neg (A_1 \& \ldots \& A_m)\} \equiv \{A_1, \ldots, A_m$ не дают одновременно t ни при каких распределениях истинностных значений$\} \equiv \{$существует формула B, такая, что $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ и $A_1, \ldots, A_m \vdash \neg B\} \equiv \{$какова бы ни была формула B, всегда $A_1, \ldots, A_m \vdash B\}$. Поэтому если S — аксиоматико-дедуктивная система, полученная добавлением формул $A_1, \ldots, A_m$ к исчислению высказываний, то $\{A_1 \& \ldots \& A_m$ выполнима (§ 8)$\} \equiv \{A_1, \ldots, A_m$ одновременно выполнимы$\} \equiv \{$S просто непротиворечива$\} \equiv \{$не всякая формула из S доказуема в S$\}$.

---

[1]) В действительности помеченные так в этой книге и в [BM] результаты не верны для интуиционистской системы. Однако сейчас мы не можем этого доказать. Ниже в § 54 приводятся указания об одном методе доказательства. Его достаточно, чтобы опровергнуть все результаты, помеченные в этой книге знаками «°», кроме теоремы 27; соответствующие доказательства можно найти в [BM], § 80.

[2]) Относительно символа «$\equiv$» см. примечание 1 на стр 37.

§ 13. Теория доказательств; употребление выводимых правил

На вопрос: «Какие формулы E должны иметь место в классической пропозициональной логике?» — мы в теории моделей ответили: «Те, в истинностных таблицах которых стоит только t, или, символически, такие формулы E, что $\models E$». В теории же доказательств мы отвечали: «Те, для которых существуют формальные доказательства, использующие только аксиомы по схемам 1a—10b и MP, или, символически, такие формулы E, что $\vdash E$». В § 11—12 мы узнали, что два эти ответа равносильны.

Точно так же на вопрос: «Какие формулы B следуют в (классической) пропозициональной логике из некоторого списка формул $A_1, \ldots, A_m$?» — мы дали два ответа, оказавшиеся равносильными: это те формулы B, для которых $A_1, \ldots, A_m \models B$ (теория моделей) или же $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ (теория доказательств).

Ни в теории моделей, ни в теории доказательств мы не ограничились одними этими ответами. Мы вывели различные свойства отношений «$\models$» или «$\vdash$», часто более удобные для применений, нежели непосредственное использование определений. На протяжении этого параграфа мы подробнее обсудим, как применять эти результаты, особенно правила введения и удаления (теорема 13). Изложение будет вестись применительно к теории доказательств (т. е. применительно к «$\vdash$»), хотя с тем же успехом можно было бы пересказать его применительно к теории моделей (ср. упр. 7.4 (a), 7.6, 7.7).

Мы называем те правила, которые даны в теореме 13, и другие похожие результаты *выводимыми правилами*. Ведь мы «вывели» эти результаты, относящиеся к аксиоматико-дедуктивной системе, зафиксировав ее путем выбора («постулирования») исходного правила вывода (modus ponens) и схем аксиом 1a—10b.

При использовании такого рода правил и вообще при доказательстве существования выводов нам часто будет удобно выписывать списки формул, относительно которых мы последовательно выясняем, что они выводимы из данных допущений $A_1, \ldots, A_m$. Пример такого списка — не считая самих выводов — дается четырьмя формулами $A \supset C$, $B \supset C$, $A \vee B$, C, которые выписываются после «$\Gamma, A \vee B \vdash$» при объяснении 6-го шага доказательства правила $\vee$-удаления в теореме 13. Другой пример приводится ниже.

Пример 8. При допущении A&B мы используем &-удаление, и &-введение для построения следующего списка, составленного из формул 1—4, выводимых из A&B (левый столбец):

1. A & B — допущение.	1′. A&B — допущение.
2. A — &-удал., 1.	2′. $A\&B \supset A$ — схема аксиом 4a.
3. B — &-удал., 1.	3′. A — MP, 1′, 2′.

4. B&A — &-введ., 3, 2.

4′. $A\&B \supset B$ — схема аксиом 4b.
5′. B — MP, 1′, 4′.
6′. $B \supset (A \supset B\&A)$ — схема аксиом 3.
7′. $A \supset B\&A$ — MP, 5′, 6′.
8′. B&A — MP, 3′, 7′.

Из списка 1—4 мы можем заключить, что $A\&B \vdash B\&A$, т. е. что имеется вывод формулы B&A из A&B. Сам по себе список 1—4 не является выводом B&A из A&B, потому что он не подпадает под *точное* определение понятия вывода из § 9. Выводом является список 1′—8′ в правом столбце.

Как видно из примера 8, использование &-удаления (т. е. двух правил) и &-введения позволяет достичь некоторого упрощения по сравнению с непосредственным построением вывода. Правила такого рода как бы дают готовые блоки вывода. Эти три правила (и 8 других) в теореме 13 имеют вид «$B \vdash C$» или «$B_1, B_2 \vdash C$». Они утверждают, что мы можем построить вывод C, ведущий «прямо» из B (или B_1 и B_2); назовем поэтому их *прямыми правилами* (то же относится к правилам вида «$B_1, \ldots, B_p \vdash C$» при любом $p \geqslant 0$).

Остальные три правила теоремы 13 ($\supset$-введ., $\vee$-удал., $\neg$-введ.) позволяют нам, *исходя из* существования одного или двух «данных выводов» или «вспомогательных выводов», сделать заключения о существовании некоторого другого вывода («результирующего вывода»); поэтому мы назовем их *правилами вспомогательного вывода* (то же относится к произвольному числу $s \geqslant 1$ вспомогательных выводов). Применение этих правил проиллюстрировано для $\supset$-введ. в примерах 6 и 7 § 10. Достигаемая при этом экономия сравнительно с фактическим построением вывода весьма внушительна.

Теорема 9 указывает два общих принципа, касающихся построения списков формул, последовательно признаваемых за выводимые из данных допущений $A_1, \ldots, A_m$. Согласно (i), каждое из допущений $A_1, \ldots, A_m$ само можно поместить в такой список. Согласно (ii), если C выводима из каких-нибудь формул $B_1, \ldots, B_p$, уже фигурирующих в этом списке, то C также можно поместить в список.

В примере 8 (левый столбец) мы использовали (i) на шаге 1, а (ii) — на шаге 4 при $p=2$.

Частный случай использования (ii) вместе с (i): Если $B_1, \ldots, B_p \vdash C$ и если каждая из формул $B_1, \ldots, B_p$ является членом списка $A_1, \ldots, A_m$, то $A_1, \ldots, A_m \vdash C$ (ибо тогда в силу (i) $A_1, \ldots, A_m \vdash B_i$ при $i = 1, \ldots, p$). Таким образом, любая формула C, выводимая из некоторого заданного списка допущений $B_1, \ldots, B_p$, выводима также из любого списка $A_1, \ldots, A_m$, который содержит все $B_1, \ldots, B_p$ и, возможно, еще добавочные формулы.

Пользуясь этим при $p=0$, видим, что всякая общезначимая формула C выводима из какого угодно перечня допущений $A_1, \ldots, A_m$. Пользуясь тем же рассуждением «в обе стороны», заключаем, что истинность или ложность высказывания $A_1, \ldots, A_m \vdash C$ зависит лишь от того, какие формулы встречаются (возможно, с повторениями) в списке $A_1, \ldots, A_m$, C.

Эти следствия теоремы 9 достаточно очевидны и непосредственно на основании определения «$\vdash$». Мы называем теорему 9 и ее следствия «*общими* свойствами символа $\vdash$», ибо эти свойства не зависят от нашего конкретного выбора «постулатов» (схемы аксиом 1a—10b и $\supset$-правило). Читателю надо научиться свободно пользоваться этими свойствами, опираясь либо непосредственно на смысл символа «$\vdash$», либо на теорему 9.

В правилах вспомогательного вывода теоремы 13 список допущений вспомогательного вывода (или каждого из вспомогательных выводов) отличается от списка допущений результирующего вывода. Поэтому нельзя пользоваться этими правилами, просто составляя список формул, последовательно признаваемых за выводимые из некоего единого множества формул $A_1, \ldots, A_m$. Можно было бы построить и больше таких списков, выбирая разные множества допущений. Можно поступить и иначе, а именно строить единый список выводимых формул, изменяя в определенных местах перечень «действующих» допущений, т. е. множество тех предположений, исходя из которых, как утверждается, выводимы эти формулы. Поясним сказанное на примере.

Пример 9. Приведенный ниже перечень (A) из 19 высказываний является новым доказательством формулы *55a теоремы 2 с заменой «$\models$» на «$\vdash$». (Конечно, результат этот уже получен в силу теорем 2 и 14, ср. конец § 12.) Читателю не представит никакого труда проверить (A) шаг за шагом. (Здесь мы уже не упоминаем больше теорему 9 при всяком использовании общих свойств символа $\vdash$, как мы делали в § 11 и 12.)

1. $\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B$ — $\vee$-введ.
2. $\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)$.
3. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ — $\neg$-введ., 1, 2.
4. $\neg(A \vee B), B \vdash A \vee B$ — $\vee$-введ.
5. $\neg(A \vee B), B \vdash \neg(A \vee B)$.
6. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$ — $\neg$-введ., 4, 5.
7. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \& \neg B$ — &-введ., 3, 6.
8. $\vdash \neg(A \vee B) \supset \neg A \& \neg B$ — $\supset$-введ., 7.
9. $\neg A \& \neg B, A \vdash A$.

(A) 10. $\neg A \& \neg B, A \vdash \neg A$ — &-удал.

11. $\neg A \& \neg B, A \vdash \neg(A \vee B)$ — слабое $\neg$-удал., 9, 10.
12. $\neg A \& \neg B, B \vdash B$.
13. $\neg A \& \neg B, B \vdash \neg B$ — &-удал.

14. $\neg A \& \neg B,\ B \vdash \neg(A \vee B)$—слабое $\neg$-удал., 12, 13.
15. $\neg A \& \neg B,\ A \vee B \vdash \neg(A \vee B)$—$\vee$-удал., 11, 14.
16. $\neg A \& \neg B,\ A \vee B \vdash A \vee B$.
17. $\neg A \& \neg B \vdash \neg(A \vee B)$—$\neg$-введ., 16, 15.
18. $\vdash \neg A \& \neg B \supset \neg(A \vee B)$—$\supset$-введ., 17.
19. $\vdash \neg(A \vee B) \sim \neg A \& \neg B$—$\sim$-введ., 8, 18.

Однако мы хотим не только научить читателя пониманию этого вида (неформальных) доказательств, но и научить его самостоятельно находить такие доказательства. Посмотрим, как мы пришли к этому доказательству. Нам нужно установить эквивалентность $\neg(A \vee B) \sim \neg A \& \neg B$ (строка 19). Просматривая правила теоремы 13, видим, что здесь естественно прибегнуть к $\sim$-введ. Для этого надо сначала установить две импликации (строки 8 и 18). Для получения первой напрашивается $\supset$-введ. (теорема о дедукции). Так как эта импликация имеет вид $\neg(A \vee B) \supset \neg A \& \neg B$ (строка 8), то нам надо установить строку 7, т. е. доказать выводимость формулы $\neg A \& \neg B$ из $\neg(A \vee B)$. За счет &-введения для этого достаточно вывести порознь $\neg A$ и $\neg B$. Следовательно, эта часть нашей задачи сводится к получению строк 3 и 6. Что касается строки 3, то очевидный путь для получения $\neg A$—это $\neg$-введение (приведение к нелепости), а поэтому мы добавляем A к допущению $\neg(A \vee B)$, которое у нас уже есть, и стараемся вывести противоречие, т. е. получить $\neg(A \vee B),\ A \vdash C$, $\neg(A \vee B),\ A \vdash \neg C$ для какой-нибудь формулы C. (Посылки правила $\neg$-введения из теоремы 13 записаны в виде «$\Gamma,\ A \vdash B$» и «$\Gamma,\ A \vdash \neg B$», но так как формула B из этого правила не обязательно совпадает с формулой B в рассматриваемом выводе, то мы пишем «C».) Нетрудно видеть, что мы достигнем цели, если в качестве C возьмем формулу $A \vee B$ (строки 1 и 2). Точно так же строк 4 и 5 достаточно, чтобы получить строку 6. Теперь мы должны заняться оставшимся свободным концом (строка 18). Надо, чтобы читатель сам попробовал проследить, как мы приходим к строкам 9—17 для получения строки 18. В этой части вывод менее непосредственный. Для получения строки 17 нам надо получить $\neg A \& \neg B,\ A \vee B \vdash C$ и $\neg A \& \neg B,\ A \vee B \vdash \neg C$ при какой-нибудь формуле C. Не сразу видно, какую формулу взять в качестве C, но ясно, что надо использовать $A \vee B$ с помощью правила $\vee$-удаления (т. е. разбора случаев). Поэтому рассмотрим оба случая (т. е. «$\Gamma,\ A \vdash C$» и «$\Gamma,\ B \vdash C$» в соответствии с правилом $\vee$-удал., т. е. заменим $A \vee B$ в качестве допущения сначала на A, потом на B и посмотрим, что можно отсюда вывести. Если бы мы получили противоречие в обоих случаях, то могли бы вывести все, что угодно, по правилу слабого $\neg$-удал.

Мы пронумеровали список (A) в логическом порядке 1—19 в той последовательности, в которой эти высказывания выводятся (или проверяются), но, как мы только что видели, мы фактически находим их скорее снизу вверх в зависимости от того результата, который хотим получить (в порядке 19, 8, 18, 7, 3, 6, 1, 2, 4, 4, 17, ...).

Надо, чтобы читатель попрактиковался в нахождении снизу вверх неформальных доказательств таких результатов, касающихся формальной доказуемости и выводимости. После небольшой тренировки он научится заранее видеть, какие правила нужны.

Теперь дадим то же доказательство в более сжатом виде (B_1). В нем мы опустим символ «$\vdash$». Когда мы захотим использовать какую-нибудь формулу A в качестве допущения, будем просто говорить: «Допустим A». Это будет означать, что к списку допущений в построении вывода мы добавили A. В рассматриваемом примере все допущения вводятся в предвидении применения какого-нибудь правила вспомогательного вывода ($\supset$-введ., $\vee$-удал., $\neg$-введ.). После такого применения допущение «устраняется»; иными словами, от него избавляются, оно перестает «действовать». Предполагается, что читатель достаточно хорошо знаком с этими правилами и знает, когда в выводе происходит такое устранение того или иного допущения. Для облегчения восприятия перед формулами по мере их введения (т. е. тогда, когда они либо допускаются, либо выводятся) ставятся номера. Нумерация обновляется, когда формула вводится при новом наборе допущений.

I. Подготавливая $\supset$-введ., допустим ${}_1\neg(A \vee B)$. Подготавливая $\neg$-введ., допустим ${}_2A$. Тогда по правилу $\vee$-введ. ${}_3A \vee B$, что противоречит $\neg(A \vee B)$. В силу запланированного нами $\neg$-введ. ${}_4\neg A$. Подготавливая другое $\neg$-введ., допустим ${}_5B$. С помощью $\vee$-введ. получаем ${}_6A \vee B$, что противоречит $\neg(A \vee B)$. $\neg$-введ. дает ${}_7\neg B$. &-введ. дает ${}_8\neg A \& \neg B$. $\supset$-введ. дает ${}_9\neg(A \vee B) \supset \neg A \& \neg B$.

(B_1) II. Подготавливая $\supset$-введ., допустим ${}_{10}\neg A \& \neg B$. Подготавливая $\neg$-введ., допустим ${}_{11}A \vee B$. Случай 1: ${}_{12}A$. Из $\neg A \& \neg B$ по &-удал. ${}_{13}\neg A$, что противоречит допущению, характеризующему данный случай. В силу слабого $\neg$-удал. ${}_{14}\neg(A \vee B)$. Случай 2: ${}_{15}B$. Из $\neg A \& \neg B$ по &-удал. ${}_{16}\neg B$. Снова по слабому $\neg$-удал. ${}_{17}\neg(A \vee B)$. Разбором случаев ($\vee$-удал.) получаем ${}_{18}\neg(A \vee B)$, что противоречит $A \vee B$. По $\neg$-введ. ${}_{19}\neg(A \vee B)$. По $\supset$-введ. ${}_{20}\neg A \& \neg B \supset \neg(A \vee B)$.

Из I и II по $\sim$-введ. ${}_{21}\neg(A \vee B) \sim \neg A \& \neg B$.

Мы нашли список (B_1) по существу так же, как (A), но записан он иначе. Мы знаем, что для получения нужной эквивалентности (по $\sim$-введ.) надо доказать две импликации, и нумеруем цифрами I и II части, описывающие вывод каждой из этих двух импликаций. Чтобы получить первую, надо применить $\supset$-введ.; поэтому мы допускаем антецедент $\neg(A \vee B)$ нашей импликации. Мы стараемся вывести $\neg A \& \neg B$ из $\neg A$ и $\neg B$ по &-введ. Чтобы получить первую из этих формул по $\neg$-введ., мы допускаем A и т. д. Конечно, не всегда удается написать такое неформальное доказательство без черновика.

(B_1) — это сокращенная, но удобная запись последовательных применений правил из теоремы 13 (совместно с теоремой 9). Чтобы иметь уверенность, что не сделано никакой ошибки, мы должны уметь переводить (B_1) в другую форму, где правила теоремы 13 применяются явно. Сделаем это, используя идею о списке формул, которые последовательно признаются выводимыми, в то время как набор допущений, из которых выводимы эти формулы, подвергается изменению.

Сначала перепишем 21 формулу из (B_1) в виде списка (B_2) таким образом:

(B_2)

1. $\neg(A \vee B)$ — допущение.
2. A — допущение.
3. $A \vee B$ — $\vee$-введ., 2.
4. $\neg A$ — $\neg$-введ., 3,1.
5. B — допущение.
6. $A \vee B$ — $\vee$-введ., 5.
7. $\neg B$ — $\neg$-введ., 6,1.
8. $\neg A \& \neg B$ — &-введ., 4, 7.
9. $\neg(A \vee A) \supset \neg A \& \neg B$ — $\supset$-введ., 8.
10. $\neg A \& \neg B$ — допущение.
11. $A \vee B$ — допущение.
12. A — допущение.
13. $\neg A$ — &-удал., 10.
14. $\neg(A \vee B)$ — слабое $\neg$-удал., 12, 13.
15. B — допущение.
16. $\neg B$ — &-удал., 10.
17. $\neg(A \vee B)$ — слабое $\neg$-удал., 15, 16.
18. $\neg(A \vee B)$ — $\vee$-удал., 14, 17.
19. $\neg(A \vee B)$ — $\neg$-введ., 11, 18.
20. $\neg A \& \neg B \supset \neg(A \vee B)$ — $\supset$-введ., 19.
21. $\neg(A \vee B) \sim \neg A \& \neg B$ — $\sim$-введ., 9, 20.

Помещенные слева стрелки указывают, до каких пор сохраняет силу каждое допущение. Например, ${}_1\neg(A \vee B)$ введено в (B_1) для подготовки $\supset$-введения, которое дает результат ${}_9\neg(A \vee B) \supset \neg A \& \neg B$ (с освобождением от этого допущения); поэтому стрелка, начинающаяся в 1, кончается в 8, в последней из тех формул, для которых ${}_1\neg(A \vee B)$ является допущением.

Теперь заменим стрелки, вставляя в каждую строку списка (B_2) соответствующие допущения, за которым следует знак «$\vdash$». Номера строк сохраняются, они даны слева, а объяснение « — допущение» опускается. В результате таблица (B_2) переходит в (B_3), которая в основном походит на (A). Каждая строка (B_3) является применением какого-нибудь правила теоремы 13 (в сочетании с теоремой 9) или же применением пункта (i) теоремы 9. Путь, проделанный нами от (B_1) через (B_2) к (B_3), обусловливает незначительные различия между точными списками высказываний в (B_3) и (A). Мы отметим ниже два таких различия.

	1.	$\neg(A \vee B)$	$\vdash \neg(A \vee B)$.
	2.	$A, \neg(A \vee B)$	$\vdash A$.
	3.	$A, \neg(A \vee B)$	$\vdash A \vee B$ — $\vee$-введ., 2.
	4.	$\neg(A \vee B)$	$\vdash \neg A$ — $\neg$-введ., 3, 1.
	5.	$B, \neg(A \vee B)$	$\vdash B$.
	6.	$B, \neg(A \vee B)$	$\vdash A \vee B$ — $\vee$-введ., 5.
	7.	$\neg(A \vee B)$	$\vdash \neg B$ — $\neg$-введ., 6, 1.
	8.	$\neg(A \vee B)$	$\vdash \neg A \& \neg B$ — &-введ., 4, 7.
	9.		$\vdash \neg(A \vee B) \supset \neg A \& \neg B$ — $\supset$-введ., 8.
	10.	$\neg A \& \neg B$	$\vdash \neg A \& \neg B$.
(B_3)	11.	$A \vee B, \neg A \& \neg B$	$\vdash A \vee B$.
	12.	$A, A \vee B, \neg A \& \neg B$	$\vdash A$.
	13.	$A, A \vee B, \neg A \& \neg B$	$\vdash \neg A$ — &-удал., 10.
	14.	$A, A \vee B, \neg A \& \neg B$	$\vdash \neg(A \vee B)$ — слабое $\neg$-удал., 12, 13.
	15.	$B, A \vee B, \neg A \& \neg B$	$\vdash B$.
	16.	$B, A \vee B, \neg A \& \neg B$	$\vdash \neg B$ — &-удал., 10.
	17.	$B, A \vee B, \neg A \& \neg B$	$\vdash \neg(A \vee B)$ — слабое $\neg$-удал., 15, 16.
	18.	$A \vee B, \neg A \& \neg B$	$\vdash \neg(A \vee B)$ — $\vee$-удал., 14, 17.
	19.	$\neg A \& \neg B$	$\vdash \neg(A \vee B)$ — $\neg$-введ., 11, 18.
	20.		$\vdash \neg A \& \neg B \supset \neg(A \vee B)$ — $\supset$-введ., 19.
	21.		$\vdash \neg A \& \neg B \sim \neg(A \vee B)$ — $\sim$-введ., 9, 20.

В рассуждении (B_1) можно пользоваться любым предшествующим результатом, который зависит только от допущений, сохраняющих силу в данный момент (т. е. в (B_2) это такой результат, который не находится рядом с началом какой-либо другой стрелки). Так, к $\neg(A \vee B)$ из строки 1 можно применять $\neg$-введ. из строки 4 в (B_2). Чтобы удовлетворить условиям $\neg$-введ. из теоремы 13, мы должны были бы считать, что в (B_3) строка 1 переписана до $\neg$-введ. в виде $A, \neg(A \vee B) \vdash \neg(A \vee B)$ в согласии с общими свойствами символа $\vdash$. (Из-за тех же общих свойств не имеет значения изменение порядка допущений сравнительно с указанным в теореме 13.)

В (B_1) само собой приходит на ум ввести допущение $A \vee B$ на 11-м шаге, подготовляя $\neg$-введ. на 19-м шаге. Можно было бы отложить это до момента, когда будет закончен разбор случаев (строки 12—14 и 15—17 в (B_2)). Но проще (и безвредно) сохранить это допущение до того момента, когда оно снимается. Таким образом, мы можем выразить длительность действия каждого допущения в (B_2) посредством единственной стрелки. При таких условиях $\vee$-удал. в строке 18 непосредственно дает $A \vee B$, $A \vee B, \neg A \& \neg B \vdash \neg(A \vee B)$, что непосредственно упрощается до $A \vee B, \neg A \& \neg B \vdash \neg(A \vee B)$ в силу общих свойств знака $\vdash$.

На этом заканчивается пример 9. Мы думаем, что читатель, уяснивший теорему 13 (и общие свойства $\vdash$), найдет наиболее удобным метод (B_1) (при гибком его применении). Применяя этот метод, следует все время мысленно отчетливо рисовать себе соответствующую картину типа (B_2), т. е. помнить, на каких строках какое допущение действует (и где какие формулы вводятся при новых допущениях). Отсюда можно автоматически написать (B_3), каждый шаг которого состоит из корректного применения теоремы 13 (и общих свойств $\vdash$). Всегда, когда возникают сомнения, надо явно выписать (B_3) или (A).

При решении новых логических задач читатель, конечно, должен использовать все уже установленные и имеющиеся в его распоряжении результаты (за исключением тех случаев, когда мы просим его забыть, что все результаты теоремы 2 уже установлены в конце § 12; это нужно, чтобы иметь набор примеров и упражнений).

Непосредственным использованием правил теоремы 13 по образцу примера 9 удается доказать не все результаты, собранные в теореме 2. Так можно получить все те, которые не отмечены знаком «°», и некоторые из отмеченных.

Пример 10. Для *55b со знаком «$\vdash$» легко получить импликацию $\neg A \vee \neg B \supset \neg(A \& B)$. Но для получения $\neg(A \& B) \supset \supset \neg A \vee \neg B$ нужна некоторая изобретательность. Допустив $\neg(A \& B)$, попробуем доказать $\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$, чтобы перейти к $\neg A \vee \neg B$ по $\neg\neg$-удал. Подготавливая $\neg$-введ., допустим далее $\neg(\neg A \vee \neg B)$. Отсюда, пользуясь результатом, а скорее способом рассуждения, примера 9 (*55a), можно вывести $\neg\neg A \& \neg\neg B$, а остальное получается непосредственно.

В отличие от «прямых методов», использованных в примере 9, здесь мы в решающем пункте использовали «косвенный метод», состоящий в выведении противоречия из отрицания рассматриваемой формулы.

Вместо того чтобы рассматривать *55b, как выше (в качестве упражнения), можно было бы добавить к нашим средствам теории доказательств теорему о замене (теорему 5) и метод цепей эквивалентностей. Мы можем сделать это благодаря тому, что в теории моделей уже имеются эти средства по отношению к «$\models$» (§ 4, 5), а $\vdash$ равносильно $\models$ (§ 11, 12). Как мы уже видели в § 5, если *49, *55a и *55c уже установлены, то можно установить и все остальные формулы *55a—*61.

В частности, предполагая установленной формулу *49, имеем $\vdash \neg A \vee \neg B \sim \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$[*49] $\sim \neg(\neg\neg A \& \neg\neg B)$[*55a] $\sim$ $\sim \neg(A \& B)$ [*49].

Тот читатель, который хорошо научился применять метод цепей эквивалентностей и правила теоремы 13 (по образцу примера 9) и который в трудных случаях умеет прибегать к косвенным методам (начало примера 10), может считать себя хорошо подготовленным к решению задач доказуемости и выводимости в классическом исчислении высказываний.

В интуиционистском исчислении высказываний (конец § 12) нет устранения двойного отрицания, а потому косвенный метод неприменим. При пользовании же цепями эквивалентностей допустимы только те эквивалентности, которые имеют место для интуиционистской системы.

Упражнения. 13.1. Укажите, пользуясь теоремой 9 (i) и (ii), те общие свойства символа «$\vdash$», которые оправдывают в примере 9 (A) шаги 1, 2, 7.

13.2. Покажите, что если $\vdash A_{m+1}$, то $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ тогда и только тогда, когда $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1} \vdash B$.

13.3. Покажите, что $B \vdash C$ тогда и только тогда, когда для всякого списка формул $A_1, \ldots, A_m$ имеет место $A_1, \ldots, A_m \vdash B$, влечет $A_1, \ldots, A_m \vdash C$.

13.4. Следующее доказательство п. *59 использует ранее появившиеся в теореме 2 результаты (мы считаем их доказанными относительно «$\vdash$»). Некоторые очевидные шаги подразумеваются неявно. Восстановите эти шаги и придайте полученному результату типа (B_2) вид (B_3), как в примере 9, а затем проверьте (B_3).

I. Допустим $A \supset B$. В силу *51 имеем $A \vee \neg A$. Случай 1: A. Тогда (по $\supset$-удал. из $A \supset B$) B, откуда по $\vee$-введ. $\neg A \vee B$. Случай 2: $\neg A$. По $\vee$-введ. $\neg A \vee B$.

II. Допустим $\neg A \vee B$. Случай 1: $\neg A$. В силу *10a $A \supset B$. Случай 2: B. В силу схемы аксиом 1a $A \supset B$.

13.5. Установите *12a, *35, *40, *49, *55c с помощью правил теоремы 13, заменяя «$\models$» на «$\vdash$».

13.6. Используя *55a для «$\vdash$» (пример 9), установите косвенным доказательством *51 для «$\vdash$».

13.7. Истинны или ложны следующие утверждения и почему?

(a) «$Q \vee P,\ Q \supset \neg R \vdash Q \vee (\neg R \sim P)$.»

(b) «$S \sim T,\ T \supset (S \supset Q),\ \neg R \supset \neg P \vdash P \vee S \supset R \vee Q$.»

13.8. Какие из следующих четырех утверждений верны при любом выборе формул A, B, C (здесь каждый из знаков $\bigcirc$ и $\triangle$ может означать & или $\vee$): «$\vdash A \bigcirc B \supset C \sim (A \supset C) \triangle (B \supset C)$»? Тот же вопрос о четырех высказываниях

$$«\vdash C \supset A O B \sim (C \supset A) \triangle (C \supset B)».$$

13.9.° Установите, что

(a) $\Gamma \vdash A_1 \supset (\ldots (A_m \supset B) \ldots)$ тогда и только тогда, когда существует какая-нибудь формула C, для которой одновременно $\Gamma, A_1, \ldots, A_m, \neg B \vdash C$ и $\Gamma, A_1, \ldots, A_m, \neg B \vdash \neg C$;

(b) $A \& B \supset C, \neg D \supset \neg(E \supset F), C \supset (E \supset F) \vdash A \supset (B \supset D)$;

(c) $A \supset B, C \supset \neg B, (D \supset \neg A) \supset C \vdash \neg E \vee A \supset (E \supset D)$.

*§ 14. Применения к естественному языку; анализ рассуждений

Этот параграф посвящен разным вопросам, касающимся использования классического исчисления высказываний в рассуждениях, проводимых средствами естественного языка.

Полностью решить логические проблемы, возникающие в «словесных» языках, можно было бы только, переведя все фразы в символику исчисления высказываний[1]), а затем использовав теорию и аппарат этого исчисления (как они обрисованы выше) применительно к полученным формулам.

В *несложных* рассуждениях можно пользоваться исчислением высказываний без явного перевода связок. & читается как «и», $\supset$ — как «влечет», «если ..., то ...» или же «только если», $\neg$ — как «не»; пользоваться простыми свойствами логических связок $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ можно почти автоматически, применяя эти свойства к их логическим эквивалентам. Все мы не раз применяли эти свойства, поскольку пользуемся исчислением высказываний с того момента, как начинаем говорить. Но формулировка этих логических принципов в сжатой символической форме поможет нам четче использовать их в качестве составной части нашего умственного арсенала. Формальное изучение логики помогает укрепить и расширить наши врожденные способности.

Пример 11. Рассмотрим пример из обычного языка. Буквы в прямых скобках служат для обозначения атомов, из которых составлены сложные фразы. «Я заплатил бы за работу по ремонту телевизора (З), только если бы он стал работать (Р). Он же не работает. Поэтому я платить не буду». Рассуждение это символически можно записать так:

$$(1) \qquad З \supset Р, \ \neg Р \ \therefore \neg З.$$

Сказать, что это *рассуждение* верно (не задаваясь вопросом, верны ли *на самом деле* обе посылки $З \supset Р$ и $\neg Р$), значит сказать, что из верности обеих посылок $З \supset Р$ и $\neg Р$ немедленно следует вер-

[1]) Или строя эти фразы непосредственно в нашем символизме, если предметный язык состоит из слов (ср. § 1, примечание 4 к стр. 14).

ность заключения $\neg З$. Именно это выразили мы в более точной форме в § 7, говоря, что $\neg З$ является следствием из $З \supset Р$ и $\neg Р$, и записали так:

(2) $$З \supset Р,\ \neg Р \models \neg З.$$

В этом случае мы сказали бы, что рассуждение (1) *общезначимо*. В силу результатов § 11 и 12 утверждение (2) равносильно

(3) $$З \supset Р,\ \neg Р \vdash \neg З.$$

Устанавливая общезначимость, мы обычно используем форму (3) с $\vdash$, молчаливо опираясь на теорему о непротиворечивости (теорема 12). (Для установления же необщезначимости обычно пользуются непосредственно формой (2) с $\models$.) Теперь мы установим (3), выписывая последовательно формулы, выводимые из $З \supset Р$, $\neg Р$, начиная с них самих, до тех пор, пока не наткнемся на $\neg З$ (как в примере 8): 1. $З \supset Р$. 2. $\neg Р$ 3. $\neg Р \supset \neg З$ (из 1 контрапозицией, т. е. по закону *12a (совместно со следствием теоремы 4 или пользуясь $\sim$- и $\supset$-удал.)). 4. $\neg З$ (из 2 и 3 по MP, т. е. по $\supset$-удал.).

Пример 12. «Если бы он ей не сказал [$\neg С$], она ни за что не узнала бы [$\neg У$]. А не спроси она его [$\neg В$], он бы и не сказал ей. Но она узнала. Значит, она его спросила». Символически:

(1) $$\neg С \supset \neg У,\quad \neg В \supset \neg С,\ У\ \therefore\ В.$$

Установим, что это рассуждение общезначимо, т. е. что

(3) $$\neg С \supset \neg У,\quad \neg В \supset \neg С,\ У \vdash В.$$

В самом деле: 1. $\neg С \supset \neg У$. 2. $\neg В \supset \neg С$ 3. $У$. 4. $У \supset С$ [контрапозиция *12a, 1]. 5. $С \supset В$ (*12a,2). 6. $С$ (MP, 3,4). 7. $В$ [MP, 6,5]. Другой вариант: 4. $\neg В \supset \neg У$ [транзитивность импликации, *2, 2, 1 (и дважды MP)][1]. 5. $У \supset В$ (*12a, 4). 6. $В$ [MP, 3, 5].

Пример 13. «Профсоюзы штата будут продолжать поддерживать губернатора [П] только в том случае, если он подпишет данный билль [Б]. Фермеры окажут ему поддержку [Ф] только в том случае, если он наложит на него вето [В]. Очевидно, что он либо не подпишет билля, либо не наложит на него вето. Следовательно, губернатор потеряет либо голоса рабочих, объединенных в профсоюзы, либо голоса фермеров».

(1) $$П \supset Б,\ Ф \supset В,\ \neg Б \vee \neg В\ \therefore\ \neg П \vee \neg Ф.$$

[1]) Цепочка импликаций ($А \supset В,\ В \supset С \vdash А \supset С$) в традиционной логике называется «гипотетическим силлогизмом».

Чтобы установить

(3) $\quad П \supset Б,\ Ф \supset В,\ \neg Б \vee \neg В \vdash \neg П \vee \neg Ф$

разбором случаев ($\vee$-удал. из теоремы 13), достаточно установить приведенные ниже выводимости (3a) и (3b); мы делаем это в скобках (последовательно выписывая формулы, вытекающие из подчеркнутых допущений):

(3a) $\quad П \supset Б,\ Ф \supset В,\ \neg Б \vdash \neg П \vee \neg Ф$

($\underline{П \supset Б}$, $\underline{\neg Б}$, $\neg Б \supset \neg П$, $\neg П$, $\neg П \vee \neg Ф$).

(3b) $\quad П \supset Б,\ Ф \supset В,\ \neg В \vdash \neg П \vee \neg Ф$

($\underline{Ф \supset В}$, $\underline{\neg В}$, $\neg В \supset \neg Ф$, $\neg Ф$, $\neg П \vee \neg Ф$).

Доказательства утверждения (3) в примерах 11 и 12 могут показаться длинными, потому что мы полностью выписали обоснования каждого шага; мы опустили их в доказательствах (3a) и (3b) примера 13. Мы надеемся, что читатель уже настолько освоился с материалом, что может, не колеблясь, написать список формул, непосредственно обосновывающий нужное соотношение выводимости (если такое прямое доказательство несложно).

Не осмелимся утверждать, что узнав формулировку контрапозиции в виде «логического закона» (*12a), мы можем намного легче и увереннее, чем раньше, разбираться в ситуациях, описанных тремя предшествующими примерами. Все зависит от прошлого опыта и навыков. Однако не исключено, что тот, кто еще не изучал логику, усмотрит в результатах, собранных вместе в теоремах 2 и 13, *кое-какие* логические принципы, которые будут ему полезны и которыми он не пользовался до тех пор.

Конечно, наши списки логических принципов можно продолжить. Результат примера 11 дает правило умозаключения ($A \supset B$, $\neg B \vdash \neg A$), известное в традиционной логике под именем «modus (tollendo) tollens». Умозаключение $A \vee B$, $\neg A \vdash B$ (получаемое с использованием *61 для замены $A \vee B$ на $\neg A \supset B$ и последующим применением modus (ponendo) ponens) называется «дизъюнктивным силлогизмом». Результат примера 13 ($A \supset C$, $B \supset D$, $\neg C \vee \neg D \vdash \neg A \vee \neg B$) называют «гибельной дилеммой» (destructive dilemma), что легко понять губернатору. Мы не включили эти принципы в наши списки только потому, что они являются непосредственными следствиями уже выписанных ранее принципов. Читатель сумеет сам прибавить их и им подобные к своему рабочему списку принципов и правил. Развитая нами теория (особенно § 13) облегчит доказательство такого рода результатов. У разных людей могут быть свои привычки; они могут предпочитать те или иные принципы в качестве первичных или производных в зависимости от обстоятельств. Ведь эти предпочтения сильно зависят от ситуации и рассматриваемой задачи.

Как бы ни относиться к вопросу, возрастают ли наши способности *находить* верные доводы в результате изучения логики или нет, бесспорно, что в результате изучения логики увеличивается возможность *проверять* правильность предложенных рассуждений. Ведь логика дает методы анализа рассуждений: в терминах моделей (теория моделей) и путем фиксации вида корректных рассуждений (теория доказательств). Поэтому к формальной логике можно прибегать для установления справедливости нашего рассуждения или с тем, чтобы найти в нем ошибки, если есть риск запутаться. Даже если мы не считаем, что сами можем ошибиться в своих рассуждениях, то все же не сомневаемся, что есть немало склонных ошибаться (особенно среди несогласных с нами).

Пример 14. «Он сказал, что придет [П], если не будет дождя [$\neg$Д] (а на его слова можно полагаться). Но идет дождь. Значит, он не придет». Символически:

(1) $$\neg Д \supset П,\ Д \mathrel{.\because.} \neg П.$$

Для того чтобы переделать это рассуждение в виде $\neg Д \supset П$, $Д \vdash \neg П$, хочется испробовать MP. Но для его применения посылку надо бы иметь в виде $\neg Д$. Если подвергнуть $\neg Д \supset П$ контрапозиции (*12a) и упростить затем $\neg\neg Д$ до Д согласно *49, то получим $\neg П \supset Д$, что опять же не дает нам ничего. Таким образом, довод, который зачастую выдается за тривиальное умозаключение в один шаг («значит»), не получается ни по какому очевидному логическому принципу. Если бы мы даже не знали про истинностные таблицы, мы могли бы все же сказать тому, кто так рассуждает, что мы не видим, откуда следует его заключение, и подозреваем, что оно вообще не следует из его посылок. А мы изучили еще и таблицы истинности! Придадим Д и П значение $\mathfrak{t}$. Тогда обе посылки (допущения) принимают значение $\mathfrak{t}$, а предлагаемое заключение $\neg П$ принимает значение $\mathfrak{f}$. Следовательно, $\neg Д \supset П,\ Д \models \neg П$ не верно. Заключение на самом деле не следует из посылок. «Может быть, он все-таки придет, несмотря ни на что. Или же он на самом деле сказал: я приду, только если не будет дождя?»[1]).

В приведенных выше примерах мы трудились, чтобы получить очевидный результат. Однако, когда имеют дело с *длинными* цепочками дедуктивных рассуждений, уже не так легко сохранить уверенность, что не сбился в сторону. А во время спора гово-

---

[1]) В словесных примерах мы отказываемся от нашего соглашения обозначать элементарные формулы (атомы) лишь буквами P, Q, R, ..., P_1, P_2, P_3, ... с тем, чтобы русские или латинские буквы, обозначающие атомы, соответствовали нужным словам (например, «П» для обозначения «он придет» в только что разобранном примере).

рящий может и умышленно пытаться склонить своих слушателей к заключению, которое не вполне оправдано его посылками.

Если рассуждение четко сформулировано, то не представляет труда удостовериться в правильности каждого отдельного его этапа (если это действительно так). Перевод в логическую символику (частичный или полный — как удобнее) предусматривает устранение всех темных мест или двусмысленностей естественного языка. Исчерпывающее исследование проблемы аргументации в естественных языках выходит за рамки этой книги[1]). Отметим все же некоторые ее аспекты.

Принципы, которые мы сформулируем здесь, повторятся при обсуждении исчисления предикатов (гл. II), где очень велики шансы ошибиться при малейшей неясности или неточности.

Вот пример простого рассуждения, которое мы не можем тут проанализировать с надлежащей полнотой (но сможем сделать это в рамках исчисления предикатов): «Все люди смертны. Сократ — человек. Следовательно, Сократ смертен». Напомним, что исчисление *высказываний* занимается только теми логическими соотношениями, которые возникают из факта построения одних высказываний из других (называемых *элементарными формулами*, или *атомами*), которые уже не анализируются. В рассматриваемом примере мы можем сказать только, что рассуждение имеет вид $P,\ Q \therefore R$, а $P,\ Q \models R$ не общезначимо. Пример этот мы приводим для того, чтобы показать, во что не надо вникать на нынешней стадии изучения логики.

Напомним, что в *классическом* исчислении высказываний принято, что всякое не анализируемое высказывание (атом) истинно либо ложно, но не то и другое вместе; и мы не должны пользоваться ничем сверх этого (§ 2). В *классической* математике предполагается, что это строго выполняется (§ 36). В повседневной жизни, как известно, высказывания не так хорошо укладываются в эти категории — истинных и ложных. Мы, например, можем сказать трем десяткам коллег, которых мы приглашаем на пикник: «Если погода будет хорошей [X], мы поедем за город в ближайшее воскресенье [B], а в противном случае в первое из следующих воскресений, когда погода будет хорошей [C]». Наступает воскресенье, погода ужасна, и каждый заключает: $(X \supset B)\ \&$ $\&\ (\neg X \supset C),\ \neg X \vdash C$. К несчастью, чаще дело обстоит не так просто. Например, с утра в воскресенье погода неустойчива. Тогда мы должны решить, будем ли мы обедать на воздухе (рискуя промокнуть) или вернемся (и тогда семья должна будет полнедели питаться тем, что мы припасли к пикнику).

Тем не менее классическое исчисление высказываний весьма полезно в обыденной жизни. Оно позволяет нам быть точными в

---

[1]) Ср. Кларк и Уэлш [1962].

своей логике, даже если приходится признать, что в наших допущениях есть элемент произвола. И не будучи совершенно уверенными в их истинности, мы можем высказать ряд утверждений, описывающих с максимально доступной нам точностью какие-нибудь обстоятельства. После этого нам, может быть, захочется точно узнать, что из этого следует. Или же мы захотим рассмотреть много альтернативных наборов гипотез, приписывая, возможно, им различные вероятности. Тогда, прежде чем чтобы то ни было предпринимать, найдем с помощью двузначной логики те следствия, которые точно вытекают из этих наборов гипотез.

Эти довольно банальные замечания преследуют цель внушить, что ни в какой интеллектуальной проблеме не следует пренебрегать логикой. Наши же ссылки (конец § 12) на модальную и интуиционистскую логики дают понять, что в некоторых ситуациях нужна иная, не классическая логика.

В случае сомнения относительно того или иного словесного рассуждения его стоит перевести в символику исчисления высказываний.

Вот (не исчерпывающий) список выражений (справа), которые могут быть заменены (во всяком случае, часто) символом, стоящим слева:

$A \sim B$.	A, если и только если B. Если A, то B, и обратно. A, если B, и B, если A. Для A необходимо и достаточно B. A материально эквивалентно B. A равносильно B [иногда].	A тогда и только тогда, когда B.
$A \supset B$.	Если A, то B. Коль скоро A, то B. В случае A имеет место B. Для B достаточно A. Для A необходимо B. A (материально) влечет B.	A, только если B. B, если A. A (материально) имплицирует B.
$A \& B$.	A и B. Не только A, но и B. B, хотя и A. B, несмотря на A.	Как A, так и B. A вместе с B. A, в то время как B.
$A \vee B$	A или B или оба. A или B [обычно]. A, если не B [обычно].	A и/или B (в юридических текстах).

$(A \vee B) \& \neg(A \& B)$ (и эквиваленты этого из упр. 5.3 (в): $\neg(A \sim B)$, $\neg A \sim B$, $A \sim \neg B$).	А либо В, но не оба. Или А, или В [обычно]. А или В [иногда]. Либо А, либо В [иногда]. А, если не В [иногда]. А, кроме случая, когда В [иногда].
$\neg(A \vee B)$ и эквивалент по *55а $\neg A \& \neg B$.	Ни А, ни В.
$\neg A$	Не А [или то, что получится в результате вставки в А частицы «не» перед глаголом — основным или вспомогательным]. А не имеет места. А не верно.

Переводя выражения обычного языка с помощью табличных пропозициональных связок, мы лишаемся некоторых оттенков смысла, но зато выигрываем в точности.

Хотя в исчислении высказываний $A \& B$ равносильно $B \& A$, фразы «У Джейн родился ребенок и она вышла замуж» и «Джейн вышла замуж и у нее родился ребенок» будут пониматься знакомыми Джейн по-разному [1]). В этом примере порядок высказываний в конъюнкции наводит на мысль о следовании во времени или о причинно-следственной связи. Следование во времени можно выразить с помощью классической логики, если пользоваться символизмом исчисления предикатов. Перевод же посредством $A \& B$ проще и достаточен для логического анализа, если в нем не участвует идея времени (или причинности). Выражения вроде «А, но и В», «А, несмотря на В», «А, хотя и В» содержат смысловые оттенки, отличающие их от «А и В» и исчезающие при переводе «$A \& B$». Молодой человек по-разному воспримет слова своей подруги, говорящей: «Я люблю тебя и люблю почти так же твоего брата» или «Я люблю тебя, но люблю почти так же твоего брата» [2]).

Хотя мы предлагаем переводить «А, если не В» как $A \vee B$, что эквивалентно $B \vee A$ (т. е. переводу «В, если не А»), высказывание «Я не приду, если она не извинится» отличается от «Она не извинится, если я не приду» [3]) — еще пример того, как разговорный язык выражает идею временно́го или причинного следования.

Другая трудность перевода состоит в двусмысленности определенных терминов, когда их надо переводить связками. Если в меню ресторана указано: «Чай или кофе бесплатно», мы не удивимся, если, потребовав и то и другое, получим увеличенный счет. Но если

[1]) Пример Строусона [1952].
[2]) Пример Суппеса [1957].
[3]) Пример Кларка и Уэлша [1962].

объявление гласит, что книжные пожертвования принимаются в церкви или в школе, мы не думаем, что принесенное нами в церковь отвергнут только потому, что мы уже пожертвовали что-то в школу. Из-за того, что включительное «или», формализуемое посредством $\vee$, оказывается наиболее полезным, мы лично привыкли употреблять «или» во включительном смысле (не заботясь о добавлении «или и то и другое»); в сомнительных случаях, когда мы хотим выразить исключительное «или», мы добавляем «но не то и другое» или какой-нибудь равносильный оборот.

Если A и B таковы, что известно или неявно предполагается $\neg(A \& B)$, то включительное и исключительное «A или B» равносильны и естественно употреблять наиболее простой перевод, т. е. $A \vee B$. (Действительно, $\neg(A \& B) \vdash (A \vee B) \& \neg(A \& B) \sim A \vee B$.) Точно так же если я в лекции перед математической аудиторией говорю «n — четное [A] или нечетное простое число [B]», то безразлично, имею ли я в виду $A \vee B$ или $(A \vee B) \& \neg(A \& B)$. Но если я выступаю перед теми, кто не знает, что число не может быть четным и нечетным простым числом одновременно, это перестает быть безразличным. И хотя трудно предположить, чтобы такая публика пригласила меня рассказывать об этом n, подобные ситуации достаточно правдоподобны. Может случиться, что мы должны будем анализировать рассуждение, в котором фигурирует высказывание «n четное [A] или n — простое нечетное число [B]». Если в посылках недостаточно информации о числовой системе, чтобы вывести $\neg(A \& B)$, может оказаться необходимым ради сохранения корректности доказательства использовать перевод $(A \vee B) \& \neg(A \& B)$ вместо $A \vee B$ или добавить к посылкам $\neg(A \& B)$, или добавить какое-нибудь высказывание, из которого $\neg(A \& B)$ вытекало бы (с тем, чтобы из них было выводимо $(A \vee B) \& \neg(A \& B) \sim A \vee B)$.

Выражениям «A, если не B» и «A, кроме случая, когда B» мы преимущественно придаем тот смысл, что B является «запасным пунктом», освобождающим нас от обязанности утверждать A, если B верно. Иными словами, говоря «A, если не B», я намерен утверждать A, если $\neg B$, и ничего не утверждать в случае, когда верно B. Адекватным переводом в этом случае является $\neg B \supset A$, т. е. $A \vee B$. Однако надо прислушаться, не утверждает ли еще говорящий, что верно $\neg A$, если B. Ведь в этом случае переводом будет $(\neg B \supset A) \& (B \supset \neg A)$, что равносильно $(A \vee B) \& \neg(A \& B)$. (Ср. упр. 5.3 (b).) В этом контексте «если не» и «кроме как» передаются разделительной дизъюнкцией.

В обычном языке мы не употребляем скобок для указания того, как нужно сочетать различные части сложной фразы, используя иногда взамен довольно тонкие средства. «Если Джонс присутствует [Д] или если Уильямс выскажется за наше предложение [У] и Старк не станет возражать [С], то наше предложение будет принято [П]». Как надо переводить? Так ли: (a) $(Д \vee У) \& \neg С \supset П$ или так: (b) $Д \vee (У \& \neg С) \supset П$. В письменном языке отсутствие запятой перед «и» решит в пользу (b); в устной же речи, чтобы выразить именно (a), надо заменить «и» на «ну и конечно, если». Словом, перевод обычного языка в логические символы не является механическим делом. Переводчик прежде всего должен как следует понять переводимый текст. Если автором является он сам, он должен выбрать такую интерпретацию, какую имел в виду. Если же автором является кто-то другой, то при наличии сомнительных слов надлежит восстановить намерения автора, руководствуясь тем, что подсказывает контекст: иногда даже полезно сделать и сравнить несколько различных переводов, дабы уяснить, какой же ближе к смыслу.

В переводе с символического языка на обычный мы едва ли ошибемся в выборе связок, если будем выбирать самый верхний вариант в нашей таблице, но надо быть внимательным в указании областей действия, без чего могут возникнуть недоразумения. В этом случае двусмысленности не получится, но возможны конфликты с духом языка и со стилистикой.

Упражнения. 14.1. Переведите каждое из следующих рассуждений в логическую символику и проанализируйте результат по типу примеров 11—14.

(a) Если он принадлежит к нашей компании [К], то он храбр и на него можно положиться [Х & П]. Он не принадлежит к нашей компании. Значит, он не храбр или же на него нельзя положиться.

(b) В бюджете возникнет дефицит [Д], если не повысят пошлины [П]. Если в бюджете имеется дефицит, то государственные расходы на общественные нужды сократятся [О]. Значит, если повысят пошлины, то государственные расходы на общественные нужды не сократятся.

(c) Если он автор этого слуха, то он глуп или беспринципен. Он не глуп и не лишен принципов, значит, не он автор этого слуха.

(d) Если подозреваемый совершил эту кражу, то либо она была тщательно подготовлена, либо он имел соучастника. Если бы кража была подготовлена тщательно, то, если бы был соучастник, украдено было бы гораздо больше. Значит, подозреваемый невиновен.

(e) Если наступит мир, то возникнет депрессия, разве что страна проведет программу перевооружения либо осуществит грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью и т. п. Невозможно договориться о целях такой грандиозной программы внутренних капиталовложений. Значит, если наступит мир и не будет депрессии, то непременно будет осуществляться программа перевооружения.

(f) Намеченная атака удастся, только если захватить противника врасплох или же если позиции его плохо защищены. Захватить его врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Значит, атака не удастся.

(g) Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику, то продолжится перепроизводство, разве что мы прибегнем к контролю над производством. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то будет продолжаться перепроизводство.

(h) Если

(1) $$x+3=\sqrt{3-x},$$

то $x^2+6x+9=3-x$. Но $x^2+6x+9=3-x$ тогда и только тогда, когда $(x+6)(x+1)=0$, что имеет место в том и только в том случае, когда $x=-6$ или $x=-1$. Значит, только -6 и -1 могут быть корнями уравнения (1), т. е. $x+3=\sqrt{3-x}$ влечет $x=-6$ или $x=-1$.

(i) То же, что (h), с заменой заключения на «значит, -6 и -1 суть корни уравнения (1), т. е. $x=-6$ влечет $x+3=\sqrt{3-x}$ и $x=-1$ влечет $x+3=\sqrt{3-x}$».

14.2. (Задача Кислера.) Браун, Джонс и Смит обвиняются в подделке сведений о подлежащих налоговому обложению доходах. Они дают под присягой[1]) такие показания:

Браун: Джонс виновен, а Смит невиновен.

Джонс: Если Браун виновен, то виновен и Смит.

Смит: Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен.

Обозначим через Б, Д и С высказывания: «Браун невиновен», «Джонс невиновен», «Смит невиновен». Выразите показания каждого из обвиняемых формулой в нашем символизме. Постройте истинностные таблицы трех полученных формул (расположите их по той же схеме, как в (h)—(l) из § 7). Затем ответьте на следующие вопросы:

(a) Совместимы ли показания всех троих заподозренных (т. е. могут ли они быть верны одновременно)? (Ср. упр. 12.7.)

---

[1]) Формула «показания под присягой» в англосаксонском судопроизводстве означает такие показания, которые должны быть приняты в качестве бесспорных, коль скоро против данного лица не возбуждается дело по обвинению в лжесвидетельстве (признание же виновным в лжесвидетельстве приводит к автоматическому устранению этого лица из деловой и общественной жизни).— *Прим. перев.*

(b) Показания одного из обвиняемых следуют из показаний другого; о чьих показаниях идет речь?

(c) Если все трое невиновны, то кто совершил лжесвидетельство?

(d) Предполагая, что показания всех обвиняемых верны, укажите, кто невиновен, а кто виновен?

(e) Если невиновный говорит истину, а виновный лжет, то кто невиновен, а кто виновен?

*§ 15. Применения к естественному языку; неполные рассуждения

В повседневной жизни и в политике часто бывает так, что не все посылки рассуждения приводятся в явном виде. И было бы неуместно критиковать за неубедительность вывода того, кто говорит, что $A_1, \ldots, A_p \models B$, только из-за того, что он молчаливо подразумевает еще некие посылки $A_{p+1}, \ldots, A_m$. Доводы, опирающиеся на молчаливо подразумеваемые гипотезы $A_{p+1}, \ldots, A_m$, можно назвать *энтимемами*; именно так в традиционной силлогистической логике именуется этот тип умозаключений. Поскольку сейчас сама логика стала более гибкой, естественно расширить и смысл этого термина, обозначив так всякий довод, в котором одна или несколько посылок или само заключение не формулируются явно.

Энтимемы почти неизбежны. Без них существенно замедлился бы обмен мыслями, сделавшись невыносимо скучным. С полным правом можно опускать то, что очевидно. В противном случае наши слушатели разбегутся. Есть такие посылки, которые очевидны в данном доводе потому, что они хорошо известны и общеприняты, или потому, что мы о них уже только что говорили. Обратно, если действительно можно опустить какую-либо посылку без ущерба для ясности, то оставшаяся часть доказательства должна более или менее сразу подсказывать, что именно подразумевается. Поэтому и можно ее подразумевать молча. Например, я могу сказать хозяйке пансиона, еще не знающей, что я собираюсь рано лечь спать: «Если я выпью кофе [К], я не смогу заснуть [$\neg$З]. Поэтому, с вашего позволения, я не стану пить кофе.». Эта энтимема выглядит до восстановления пропущенной посылки так:

$$К \supset \neg З \therefore \neg К.$$

Ясно, что это сокращение рассуждения

$$К \supset \neg З,\ З \therefore \neg К.$$

Искусные ораторы пользуются энтимемами для того, чтобы отвлечь внимание слушателя от той посылки, истинность которой он мог бы поставить под сомнение.

Вот пример энтимемы с подразумеваемым заключением: если мне только что предложили чашку кофе, $К \supset \neg З$ является достаточно ясным сокращением для $К \supset \neg З,\ З \therefore \neg К$. Когда мы сообщаем высказывания, образующие (как правило, вместе с другими, очевидными) посылки для вывода заключения, которое мы предпочитаем не высказывать прямо, тогда мы ступаем на почву *намеков*.

Следовательно, логический анализ включает в себя поиски недостающих посылок (и заключений) неполных умозаключений. В иных случаях вид рассуждения не оставляет никаких сомнений в том, что надо добавить. В других случаях можно по-разному добавлять невысказанные посылки $A_{p+1}, \ldots, A_m$, пытаясь получить набор, достаточный для полного доказательства; само собой разумеется, такой набор может не быть единственным.

Рассмотрим внимательнее вопрос: что же такое довод типа «$A_1, \ldots, A_m \therefore B$»? Когда кто-либо говорит «$A_1, \ldots, A_m \therefore B$», он хочет не просто сказать, что B является следствием допущений $A_1, \ldots, A_m$ (символически $A_1, \ldots, A_m \models B$). Он хочет также сказать, что $A_1, \ldots, A_m$ истинны (или по крайней мере ими можно пользоваться как истинными). Поэтому в сильном смысле «$A_1, \ldots, A_m \therefore B$» означает «(i) $A_1, \ldots, A_m$ истинны и (ii) $A_1, \ldots, A_m \models B$, а значит, B истинно». Цель рассуждения состоит именно в том, чтобы убедить собеседника, что B истинно на основе (i) и (ii). Если и (i) и (ii) *оба верны*, то мы говорим, что рассуждение не только правильно, но и «надежно».

Являются допущения $A_1, \ldots, A_m$ истинными или нет — это вопрос или эмпирических данных, или доверия, или же это может зависеть от истинности предыдущих гипотез, в силу которых мы получаем право пользоваться высказываниями $A_1, \ldots, A_m$ в данном доказательстве. Таким образом, «надежность» относительна и связана с теми критериями или мерками, которые подразумеваются в утверждении об истинности высказываний $A_1, \ldots, A_m$. Полное изложение оснований, по которым некое рассуждение признается надежным, должно содержать ссылки на все это. Иногда полезно вводить промежуточную ступеньку и называть рассуждение *правдоподобным*, если оно правильно, а $A_1, \ldots, A_m$ правдоподобны.

Когда имеется несколько возможных способов восполнения подразумеваемых посылок, важно определить, при каком из них все посылки будут истинны (или по крайней мере правдоподобны). Установление этого, конечно, не относится, вообще говоря, к компетенции логики.

Если $\models \neg(A_1 \& \ldots \& A_m)$ (т. е. $A_1 \& \ldots \& A_m$ *невыполнимо*, начало § 8), то «$A_1, \ldots, A_m \therefore B$» не является надежным просто по логическим основаниям (см. упр. 12.7). Доводы противника лишаются силы, если удалось показать, что его посылки несовместны или не совместимы с фактами, т. е. что они становятся противоречивыми, когда к ним добавляют другие высказывания, про которые известно, что они истинны.

Точно так же если $\models A_1 \& \ldots \& A_m$ ($A_1 \& \ldots \& A_m$ *общезначимо*), то $A_1, \ldots, A_m$ все истинны по логическим причинам, а значит, если умозаключение «$A_1, \ldots, A_m \therefore B$» правильно, то $\models B$.

Только в оставшихся случаях, т. е. когда ни $\models \neg(A_1 \& \ldots \& A_m)$, ни $\models (A_1 \& \ldots \& A_m)$, иными словами, когда $A_1 \& \ldots \& A_m$ *случайно* (ср. начало § 8), надежность общезначимого довода «$A_1, \ldots, A_m \therefore B$» зависит от внелогических соображений.

В рассуждении не всегда бывает ясно, что подразумевается некое доказательство (может быть, энтимематическое). Мы перечислим некоторые выражения, которые, если их подставить на место ___ в «$A_1, \ldots, A_m$ ___ B», дадут выражение, означающее «$A_1, \ldots, A_m \therefore B$»:

поэтому, значит, следовательно, откуда, таким образом, вытекает, умозаключаем, выводим, отсюда, а тогда, это означает, таким образом.

То же самое для «B ___ $A_1, \ldots, A_m$» обеспечивается словами:

следует из, является следствием, так как, ибо, потому что, выводится из, поскольку, в силу.

Слово «влечет» требует отдельного замечания. В зависимости от контекста и от того, кто говорит, «A влечет B» может означать: (I) «Если A, то B», т. е. символически $A \supset B$, либо (II) «Из A логически следует B», т. е. символически «$A \models B$», что равносильно «$A \vdash B$», «$\models A \supset B$» и «$\vdash A \supset B$». Короче, «влечет» можно переводить то знаком $\supset$ как в (I), то знаком «$\vdash$» или «$\models$», как в (II). Ясно, что импликация в смысле (I) является высказыванием предметного языка, тогда как в смысле (II) — это высказывание в языке исследователя (см. примечание 2 на стр. 19[1])).

Согласно смыслу (I), истинность высказывания «A влечет B» обычно зависит от внелогических обстоятельств, т. е. определяется эмпирическими фактами; потому-то $A \supset B$ и называют «материальной импликацией». Согласно же (II), «A влечет B» есть «логическая импликация» («логическое следование»[2])) — утверждение, истинное тогда и только тогда, когда $A \supset B$ есть $\mathfrak{t}$ для всех распределений истинностных значений $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ по элементарным компонентам формулы $A \supset B$; в последующих главах нам предстоит обобщить такое понимание утверждения «$\vdash A \supset B$» на другие системы, могущие оказаться предметом рассмотрения. Некоторые авторы (на-

---

[1]) А также примечание на стр. 18.— *Прим. перев.*

[2]) Или «семантическое следование»; оба эти синонима введены при переводе (см. следующее примечание).— *Прим. перев.*

чиная с Куайна [1940]) избегают понимания (I) и предпочитают вместо «импликация» говорить «условное предложение» (conditional)[1]).

Аналогично «А эквивалентно В» может быть понимаемо в смысле (I) $A \sim B$ («А материально эквивалентно В») или же (II) как «$\models A \sim B$» или «$\vdash A \sim B$» («А эквивалентно В *в той системе, к которой* относится $\models$ или $\vdash$»). Те, кто предпочитает называть $A \supset B$ условным предложением, соответственно называют $A \sim B$ «биусловным предложением» (biconditional)[2]).

В этой книге мы, как правило, избегаем интерпретировать «влечет» в соответствии с (II) (полагая более уместным просто употреблять символы «$\models$» и «$\vdash$»). Но иногда мы пользуемся прочтением (II) для интерпретации термина «эквивалентно», точно оговаривая (если это и так не видно из контекста), о какой системе идет речь (ср. начало § 5 и конец § 8).

Более или менее общепринято в определениях в значении «если и только если» или «эквивалентно» писать просто «если», «когда» или «в этом случае». (Мы поступали так, определяя понятия «следования» и «следствия» в § 7, «непротиворечивости» и «нейтральности» в § 8, «доказуемости», «вывода» и «выводимости» в § 9, а также по существу определяя понятие «общезначимости» в § 2, где вместо «такое и только такое» мы говорили просто «такое».)

Приведенные выше словесные примеры все приводят к совершенно тривиальным логическим задачам после того, как они записаны в символическом языке.

Легко построить задачи, логическая часть которых более тонка. Для этого достаточно рассмотреть какую-нибудь цепочку доводов (в которых заключение предшествующего довода становится посылкой следующего за ним) и взять от нее только исходные посылки (т. е. те, которые не являются заключением ни в каком промежуточном «звене») и окончательное заключение. Этого рода задачи, являющиеся упражнениями на сообразительность и предметом развлечения, предлагались многими логиками, особенно Ч. Л. Доджсоном (Льюисом Кэрролом) [1887], [1897]. Относятся

---

[1]) Как уже отмечалось выше (см. примечание на стр. 18), при переводе на русский язык терминология, связанная с этим комплексом понятий, порождает несколько иные трудности, которые можно разрешить, тщательно различая *операцию* (материальной) импликации $\supset$ и *отношения* (семантического) следования $\models$ и (формальной) выводимости $\vdash$. —*Прим. перев.*

[2]) Точно так же по мотивам, высказанным в примечаниях на стр. 14 и 31 (и в примечании к предыдущему абзацу), можно различать (кроме случаев, где такое различение не нужно и лишь порождало бы псевдопроблемы) *операцию* (материальной) эквиваленции $\sim$ и *отношения* (семантической) равносильности и (дедуктивной) эквивалентности. (Впрочем, оба последних в этой книге обозначаются символом $\equiv$, прочтение которого всегда ясно из контекста.) — *Прим. перев.*

ли они к серьезному изучению логики или только к разделу математических развлечений и головоломок, зависит от индивидуальной «педагогической философии».

Вот наши собственные соображения на этот счет, которые не претендуют на окончательное решение проблемы.

Сначала рассмотрим роль логики в *проверке* правильности уже построенных рассуждений (в § 14 мы поставили это на второе место). Когда кто-то выдвигает некий довод, будь то в разговоре, в дискуссии или в математическом тексте, употребляя выражение «значит», то мы имеем право считать, что делается такой шаг, который его слушатели или читатели легко могут обосновать. *Отдельно взятый довод* должен быть простым (или, если он ошибочен, он может представляться простым). И тот, кто всерьез взялся доказывать что бы то ни было, должен так расчленить свое доказательство на части, чтобы каждая из них легко воспринималась. Если эти отдельные доводы, или аргументы (части доказательства), слишком сложны, мы можем обвинить доказывающего в том, что он не предъявил доказательства. Естественно, длина того шага, который обосновывается посредством «значит», зависит от опытности слушателей в области логики и от их знакомства с предметом, о котором идет речь. Каждый отдельно взятый довод в данной цепочке может быть выражен энтимематически. Если изложение очень длинно (например, в учебнике), то некоторые часто встречающиеся последовательности отдельных доводов сами могут быть объединены в новые отдельные доводы, когда читатель или слушатель привыкнет к ним. Однако мы полагаем, что если «довод» состоит из перечня посылок, сопровождаемых заключением, которое вводится посредством «значит», но обосновать которое удается лишь посредством *длинной* последовательности шагов, относительно которых предполагается, что они хорошо знакомы читателю или слушателю, то такой довод представляется весьма искусственным. «Доводы» такого типа не возникают естественным образом.

Само собой разумеется, доказывающий может решить не всегда давать полные доказательства. Он может опускать и отдельные шаги, которые аудитория сумеет легко восстановить (такие пропуски мы не расцениваем как энтимематические); при этом он говорит: «Можно доказать, что ...» (говорить в таких случаях «Очевидно, что ...» было бы проявлением дурного стиля). Возникает вопрос, должен ли читатель или слушатель пытаться восполнить отсутствующие доказательства, ибо это может привести к необходимости решать серьезные логические задачи того же рода, что и обсуждаемая проблема.

Сходная ситуация возникает и тогда, когда один из так называемых простых доводов, фигурирующих в данной цепочке, является ошибочным. Даже если мы опровергнем именно *этот* довод, выбрав надлежащие истинностные значения, все равно мы не решим вопроса, верно ли рассматриваемое доказательство в целом, от исходных посылок до окончательного заключения. Можно ли исправить это рассуждение или же исправление невозможно? Разумеется, если для исправления достаточно небольшого изменения, то было бы глупо не заметить этого.

Усилия, которых можно ждать от нас в различных ситуациях, пропорциональны интересу, испытываемому нами к рассматриваемому предмету. И в первую очередь тот, кто хочет что-то доказать, должен изложить свое доказательство с подразделениями на «блоки» разумной длины, каждый из которых был бы правилен.

Так мы приходим к другому назначению логики, состоящему в нахождении доказуемых результатов и их доказательств. Мы ищем не просто общезначимые формулы и правильные доводы. Мы интересуемся тем, является ли высказывание $P \supset P$ общезначимым, но мало интересуемся каждой из бесконечного набора формул типа

$$\neg\neg\neg\neg(P \supset P) \& (P \supset P) \& \neg\neg(P \supset P) \& \neg\neg\neg\neg\neg\neg(P \supset P).$$

Вряд ли кто-либо купил бы каталог всех общезначимых формул заданной длины. Интерес к общезначимости некоторой формулы или к правильности доказательства зависит от того, какое отношение она имеет или какую роль она играет в той или иной математической или логической теории, что в свою очередь связано с некими практическими или теоретическими интересами. Вопрос, верно ли высказывание, что $\models E$ или $A_1, \ldots, A_m \models B$, возбудит наше любопытство только в том случае, когда у нас есть причины желать, чтобы это было верно или неверно. Такой причиной может быть возможность применения настоящего высказывания к интересующему нас предмету или интересный вид этого высказывания, или же предчувствие, что с помощью этого результата мы сумеем развить плодотворные методы. Такого рода мотивы могут дать указание и на причины, по которым это высказывание должно быть верным, и что предпринять, пытаясь доказать это предположение.

Поэтому мы не думаем, что сложные логические задачи, сформулированные на пустом месте, имеют непосредственное отношение к использованию логики, даже к ее использованию для нахождения весьма сложных доказательств. Напротив, очень важно твердо овладеть отдельными логическими правилами, простыми принципами, из которых за счет повторения и составляются сложные доказательства. Практическое применение этих принципов приводит к открытию других логических принципов, оказывающихся в свою очередь полезными, к использованию их для вывода интересных результатов в математике, в точных науках и в повседневной жизни, а не состоит в решении искусственно сконструированных логических задач. Теорию и применения, которые развиваются в последующих главах, мы рассматриваем как частичную замену недостающих здесь упражнений.

Закончим главу примером, иллюстрирующим ту область, в которой сложные проблемы могут возникать естественно. Это относится к упрощению логических формул. Мы используем теорию, изложенную в § 8.

Пример 15. (Венн [1881], стр. 261.) Существовал клуб с такими правилами: (1) Члены финансового комитета должны избираться среди членов общей дирекции. (2) Нельзя быть одновременно членом общей дирекции и членом библиотечного совета, не будучи членом финансового комитета. (3) Ни один член библиотечного совета не может быть членом финансового комитета. Упростите правила.

Решения. Пусть x — любое лицо (считаемое членом клуба). Пусть P означает «x является членом финансового правления», Q — «x является членом общей дирекции», а R — «x является членом библиотечного совета». Тогда (1)—(3) выражаются формулой $(P \supset Q) \,\&\, (\neg(Q \,\&\, R) \vee P) \,\&\, \neg(R \,\&\, P)$ (упр. 8.2c), конъюнктивной нормальной формой (§ 8) которой служит $(\neg Q \vee \neg R) \,\&\, (Q \vee \neg R)$, что эквивалентно $(Q \supset \neg R) \,\&\, (P \supset Q)$. Значит, правила попросту таковы: (1) и (2′) Ни один член общей дирекции не может быть членом библиотечного совета.

Упражнение 15.1. В приводимых ниже рассуждениях могут отсутствовать посылки (или заключения). Восстановите их, чтобы получился правильный довод. Расцениваете ли вы восполненные доводы как надежные или хотя бы правдоподобные?

(a) Обвиняемого нельзя признать виновным, если он не был в Нью-Йорке в 18 ч. первого января. Однако установлено, что в это время он был в Вашингтоне. Значит, он не виновен.

(b) У нас нет никаких доказательств его виновности. Поэтому он должен быть оправдан.

(c) У нас нет никаких доказательств его виновности. Поэтому он невиновен.

(d) Если будет идти снег, машину будет трудно вести. Если будет трудно вести машину, то я опоздаю, если не выеду пораньше. Идет снег. Значит я должен выехать пораньше.

(e) Пользуйтесь «Антикомарином», и вас не укусит ни один комар!

Глава II

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

§ 16. Лингвистические соображения; формулы, свободные и связанные вхождения переменных

В исчислении высказываний мы изучали логические отношения, зависящие от способа, каким высказывания составлены из определенных блоков посредством операций, выражаемых символами $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$. Сами эти блоки дальше не анализировались. В *исчислении предикатов* мы продвинемся в своем анализе на ступеньку глубже с тем, чтобы рассмотреть то, что в грамматике называют «субъектно-предикатной структурой»[1]). Для этого мы введем две новые операции $\forall$ («для любого») и $\exists$ («для некоторых» или «существует»), зависящие от этой грамматической структуры. (Исчисление же высказываний входит в исчисление предикатов как составная часть.)

Возьмем высказывание (выражаемое предложением): «Сократ есть человек». Часть этого высказывания (выражаемая конструкцией «——— есть человек» или «x есть человек») — это то, что называется *предикатом*, или *сказуемым*; «Сократ» же — это *субъект (подлежащее)*. Если читать «x есть человек», имея в виду математическое понятие переменной, то предикат-сказуемое выступает в роли *пропозициональной функции* (т. е. функции, областью значений которой служат высказывания); каждому значению (неза-

---

[1]) Термин традиционной логики. В грамматике же можно было бы говорить о «структуре подлежащее — сказуемое» (хотя это выражение и не употребительно): англ. «subject» переводится и как «субъект», и как «подлежащее», «predicate» — как «предикат» и «сказуемое». Как будет видно из дальнейшего, в математической логике приняты понимания этих терминов, более широкие, чем в лингвистике и традиционной логике: «субъектами» (в дальнейшем «термами») здесь называют не только подлежащие, но и дополнения, а также некоторые обстоятельства, выраженные существительными и местоимениями (одним словом, все, «о чем говорится в предложении»), «предикатами», кроме сказуемых,— еще и определения, а также обстоятельства, выраженные наречиями (то, «что говорится» о субъектах). Таким образом, если учесть, что грамматические связки выражаются в описываемых языках посредством пропозициональных связок, кванторные обороты (см. ниже в этом же параграфе) — посредством кванторов (а для числительных более чем естественно воспользоваться обычной арифметической символикой, также, как мы увидим, включаемой в язык изучаемого типа), то, действительно, структура высказываний сводится по существу к схеме «субъект(ы) — предикат(ы)».— *Прим. перев.*

висимой) переменной «x» она ставит в соответствие некоторое высказывание (принимает его в качестве значения), которое будет истинно, например, если x — это Сократ, и ложно (согласно мифологии), если x — это Хирон[1]); ложно оно и если x — это неодушевленный предмет. Вот другой пример: «Джон любит Джейн» — это высказывание, которое можно рассматривать как значение одной из трех пропозициональных функций: «x любит Джейн», «Джон любит y» или «x любит y». Грамматически предикатом является только форма «x любит Джейн»[2]), но не формы «Джон любит y» и тем более «x любит y»: с точки зрения грамматики x есть *подлежащее*, а y — дополнение. Для нас же эти нюансы не имеют никакого значения. Мы будем называть *предикатом* всякую пропозициональную функцию $P(x_1, \ldots, x_n)$ с любым числом $n \geqslant 0$ (независимых) переменных[3]). Такая терминология коротка и удобна. *Объектом*, или *индивидом*, мы будем называть значения любой из этих переменных. Если $n=0$, то предикат оказывается *высказыванием* (предельный случай); если $n=1$, то предикат соответствует тому, что называют *свойством*; если $n=2$, то предикат — это *(бинарное) отношение*; если $n=3$, то это *тернарное отношение* и т. д.

Так объясняется название «исчисление предикатов», которое дано логике пропозициональных функций. Более точным (но громоздким) названием было бы «*исчисление пропозициональных функций*[4]).

---

[1]) Хирон, как известно, был кентавром. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь опять речь идет не столько о грамматическом, сколько о традиционно-логическом понимании подобных выражений: «предикатом» в этой фразе является то, что в грамматике принято называть «группой сказуемого» (т. е. «любит Джейн»); собственно же сказуемым служит глагол «любит». Смысл следующей фразы автора пояснен в примечании на стр. 93, а уже в следующей за ней фразе точно фиксируется значение термина «предикат» для всего дальнейшего изложения. — *Прим. перев.*

[3]) Термин «*независимая переменная*» восходит к математической привычке записывать функции вроде x^2+3x+1 или $\sin x$ в виде «$y=x^2+3x+1$», «$y=\sin x$», считая «y» новой *(зависимой)* переменной, принимающей те значения, которые указаны данной функцией. Здесь мы не будем этого делать.

[4]) Весьма распространено название «функциональное исчисление». Оно кажется нам несколько неудачным (хотя его можно оправдать определенными ссылками на историю), ибо в нем отсутствует указание на то важное обстоятельство, что рассматриваемые функции пропозициональны. Возникает риск смешения их с числовыми функциями (вроде x^2+3x+1 или $\sin x$, где при каждом x выражения x^2+3x+1 и $\sin x$ оказываются числами); обычно такие функции называются просто «функциями», тогда как пропозициональные функции — «предикатами». Другой опасностью является смешение с функционалами, т. е. функциями, аргументами которых служат числовые функции, а значениями — числа (например, определенный интеграл $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, который является числом, когда f принимает значения среди функций определенного вида, к

Обозначение «x есть человек» несколько более сжато, чем «——— есть человек». Преимущество переменных перед пустыми местами, которые надлежит заполнить, лучше всего видно из рассмотрения таких примеров: «$—_1$ любит $—_2$», «$—_1$ любит $—_1$» (синоним «$—_1$ любит сам себя») и «$—_1$ есть отец $—_2$ или $—_1$ есть мать $—_2$» (синоним «$—_1$ есть родитель $—_2$»).

Выражения «$—_1$ любит $—_2$» и «x любит y» сами по себе не употребляются в обыденном языке[1]). Чтобы перекинуть мостик между ними и привычным языком, можно рассматривать их как «окошечки» для подстановки слов, обозначающих объекты. Само собой, слова, подставляемые в эти окошечки, не должны непременно быть именами собственными вроде «Джон» и «Джейн». Например, допустимо и такое: (a_1) «Кто-то любит Джейн», (a_2) «Есть некто, кто любит Джейн», (b) «Никто не любит Джейн», (c) «Все любят Джейн», (d) «Каждый кого-нибудь любит», (e) «Кого-то любят все», (f) «Всяк любит себя», (g) «Не существует никого, кто не любил бы себя». Обозначим через $\mathrm{L}(x, y)$ выражение «x любит y»; считая временно, что значения переменных «x» и «y» пробегают область человеческих индивидуумов, мы можем перевести эти фразы с помощью $\forall$ и $\exists$ так: (a′) $\exists x \mathrm{L}(x,$ Джейн$)$, (b′) $\neg \exists x \mathrm{L}(x,$ Джейн$)$, (c′) $\forall x \mathrm{L}(x,$ Джейн$)$, (d′) $\forall x \exists y \mathrm{L}(x, y)$, (e′) $\exists y \forall x \mathrm{L}(x, y)$, (f′) $\forall x \mathrm{L}(x, x)$, (g′) $\neg \exists x \neg \mathrm{L}(x, x)$.

С помощью этих символов мы сумели передать фразы, выражающие указанные высказывания, не переставляя и вообще не тревожа переменных «x» и «y». В частности, обратите внимание на то, что в (a′), выражающем (a_2) (впрочем, это синоним (a_1)), два вхождения «некто» и «кто» передаются вхождением переменной «x»; три различных слова из g переданы в (g′) переменной «x».

Оказывается, удобнее думать о переменных не как об окошечках, а скорее как о некоем запасе имен (существительных или местоимений), с помощью которых можно обозначать разные объекты. Что это за объекты, зависит от способа, которым они вводятся во фразы, или от контекста, в котором появляются эти фразы.

Таким образом, употребление переменных не столь существенно отличается от некоторых конструкций обычного языка. «Кто-то» и «каждый» служат именами неопределенных людей; ведь даже и имя собственное «Джейн» не принадлежит единственному лицу, разве только мы условимся, что имеем в виду Джейн Грей,

---

которым относятся и x^2+3x+1 и $\sin x$); это предмет раздела математики, называемого функциональным анализом.

[1]) Разве что изредка, когда практика математического словоупотребления переносится на обороты вроде «A любит B», «Если A сделает то-то, то B сделает то-то»; здесь «A» и «B» — переменные, значениями которых являются имена людей.

Джейн Адамс или Джейн, живущую на этой улице. Точно так же и стандартное «Джон Доу»[1]) есть имя, эквивалентное некоторой переменной (пробегающей множество людей), значение которой остается нефиксированным.

В исчислении высказываний мы изучали логические отношения, имеющиеся между высказываниями, не рассматривая, какие именно высказывания выражены атомами. Это значит, что с точки зрения занимавших нас там логических отношений высказывания, обозначенные через «P», «Q», «R» и т. п., совершенно произвольны. Точно так же мы не станем приписывать никакой специфики тем объектам (индивидам), которые могут быть значениями наших переменных. Желая максимально упростить символику, мы в этой главе не станем предполагать никакого иного перечня имен индивидов, кроме единственного списка переменных. Таким образом, чтобы выразить (a_1) «Кто-то любит Джейн» надо писать $\exists x\, \mathrm{L}(x, y)$ (или же $\exists x\, \mathrm{L}(x, j)$), и мы будем считать, что «y» (или «j») является именем индивида Джейн. Это не чрезмерная жертва, ибо в данной главе мы имеем в виду только общие логические соотношения, в которых не фигурируют личные достоинства Джейн (а если и фигурируют, то лишь постольку, поскольку они перечислены, а следовательно, логические соотношения между выражениями, в которых фигурирует «Джейн», равным образом справедливы применительно ко всякой другой даме, обладающей тем же перечнем достоинств). Далее (в § 28) будут введены некоторые символы, не являющиеся переменными, которые могут служить именами отдельных индивидов.

Вернемся к обозначению предикатов. Заимствуя пример из математики, мы видим, что «$x < y$» можно использовать для обозначения предиката. Когда пара (x, y) принимает значение (2, 7) или (5, 100), $x < y$ оказывается истинным высказыванием (или принимает в качестве значения истинное высказывание). Когда (x, y) принимает значение (7, 7) или (100, 5), $x < y$ становится ложным высказыванием. Если же мы скажем теперь (h) «По любому (действительному) числу x найдется такое число y, что $x < y$» (или, в наших обозначениях, (h′) $\forall x\, \exists y\, (x < y)$), то «$x < y$» как часть записи (h) или (h′) употребляется не для обозначения предиката, а для того, чтобы сказать нечто относительно двух чисел, из которых первое, названное «x», произвольно (т. е. совершенно не фиксировано); второе же, названное «y», подбирается надлежащим образом (и зависит от числа, обозначенного через «x»). Этот пример показывает, что необходимо (и легко) проводить различие между использованием записи «$x < y$» для обозначения предиката и для выражения того высказывания, которое является значением этого предиката, когда «x» и «y» считаются

[1]) Нарицательное имя персонажа «логического фольклора».— *Прим. перев.*

именами конкретных объектов[1]). Надо усвоить, что предикат $P(x, y)$ является не высказыванием, а *соответствием* (или *соотношением*), с помощью которого возникают высказывания, когда в качестве значений «x» и «y» выбраны некоторые пары объектов.

Поэтому, коль скоро «$x < y$» лишь обозначает предикат, вполне достаточно рассматривать «x» и «y» как окошечки для подстановки, которые не обозначают (или еще не обозначают) объектов. Математики же зачастую, не меняя ничего в записи, переходят отсюда к той интерпретации, в которой «x» и «y» обозначают объекты. Тогда, как мы видели, выражение для предиката «$x < y$» переходит при изменении интерпретации в выражение для некоторого высказывания. Как раз легкость такого перехода отчасти обусловила популярность обозначений с помощью переменных.

Предикат (пропозициональная функция), обозначенный через «$x < y$», может быть обозначен также просто через «$<$». Точно так же функция «$\sin x$» может быть названа «sin» или «sinus». Однако для функции x^2+3x+1 нет распространенного имени (обозначения), которое не содержало бы «x» (или другую переменную). Большинство предикатов, которые нам придется рассматривать, не имеет общепринятых имен, не содержащих переменных.

Можно назвать обозначение предиката с помощью переменных *называющей формой* предиката. Переменные, входящие в это обозначение, употребляются в качестве *переменных этой называющей формы*, и мы говорим, что они обладают *предикатной интерпретацией*, или *интерпретацией называющей формы*. Мы отложим пока дальнейшее обсуждение вопроса об использовании переменных для выражения высказываний.

Мы начали изучение исчисления высказываний в § 1 с предположения, что рассматривается некий предметный язык, в котором имеются (повествовательные) предложения (выражающие высказывания), не меняющиеся на всем протяжении исследования в рамках этого исчисления и не анализируемые.

Теперь, чтобы начать изучение логики предикатов, мы должны предположить, что предметный язык содержит выражения (лингвистические конструкции) для предикатов (с заданным числом переменных) и что эти выражения сохраняются в течение всего времени, пока их исследуют в рамках исчисления предикатов, и далее не анализируются. Выражения эти мы назовем *элементарными предикатными выражениями*, или *ионами*, и обозначим через «P», «P (—)», «P (—, —)», «P (—, —, —)», ..., «Q», «Q (—)», «Q (—, —)», «Q (—, —, —)», ..., «R», ..., прибегая также (в слу-

---

[1]) Если объекты эти не конкретизированы, то высказывание, выраженное через «$x < y$», можно назвать «общим значением» предиката (ср. [BM], стр. 73).

чае надобности) к индексам[1]). Любую прописную латинскую букву (не курсивную) конца алфавита мы будем использовать в качестве имени для элементарного *n-местного* предикатного выражения или иона при любом числе $n \geqslant 0$ переменных. Так, P, P(—), P(—, —), P(—, —, —) — четыре разных иона (выражающие соответственно 0-местный, 1-местный, 2-местный и 3-местный предикаты), а Q, Q(—), Q(—, —), Q(—, —, —) — это четыре других иона. Включением случая $n = 0$ мы достигаем того, что P, Q, R, ... могут выражать высказывания, как и в исчислении высказываний; иными словами, все имевшиеся у нас атомы, которые мы оставляем еще нерасщепленными, предстают в виде n-местных ионов при $n = 0$.

Как и в § 1, мы ничего не говорим о природе предметного языка как потому, что мы не хотим его описывать, так и потому что мы хотим оставить открытыми широкие возможности применений. Предметный язык может быть символическим языком, построенным логиками, включающим логические символы и, быть может, математические символы; он может быть надлежаще ограниченной и нормированной частью русского или другого естественного языка с добавлением математических символов или без них. В любом случае нам нужно оперировать с переменными. Условимся использовать строчные латинские буквы «a», «b», «c»,... ..., «x», «y», «z», «a_1», «a_2», «a_3», ..., «x_1», «x_2», «x_3»... в качестве обозначений переменных (либо их эквивалентов, как выше в примерах (a_1)—(g)) из предметного языка. Будем считать также, что различные строчные латинские буквы обозначают *различные* переменные (или их эквиваленты) предметного языка, *кроме тех случаев, когда* мы уточняем, что они не обязательно различны[2]).

Порой бывает целесообразно считать, что предикаты, выраженные ионами (с прочерками в качестве окошечек для подстановки), обозначены посредством выражений с переменными (как выше мы имели выбор между «$—_1$ любит $—_2$» и «x любит y»). Будем называть P(x, y, z), P(y, z, x), P(u, v, w) и т. п. различными *называющими формами* для одного и того же элементарного трехместного

---

[1]) Мы руководствуемся аналогией с химией, в которой ионами называются атомы, у которых отняты некоторые электроны. Как только места, предназначенные для этих электронов, фактически занимаются электронами, ионы превращаются в атомы. Точно так же, когда места имен в элементарных предикатных выражениях заполняются именами объектов, возникают атомарные формулы. (Пока что наши единственные имена — это переменные.)

[2]) В действительности мы резервируем обозначения «r», «r_1», «r_2», «r_3» для обозначения переменных, которые могут совпадать между собой и с другими переменными в данном рассмотрении. Однако, соблюдая принятое соглашение, мы всюду в этой главе будем явно оговаривать такие случаи.

Позже (§ 28, 38, 57) нам придется использовать строчные латинские буквы и не для обозначения переменных.

предикатного выражения (иона) P(—, —, —); говорят, что переменные x, y, z, u, v, w употребляются в качестве *переменных этих называющих форм*, и они должны быть различны (как в наших трех примерах). Назовем P(x, y, z), P(y, z, x), P(u, v, w) *элементарными предикатными выражениями (ионами) с приданными переменными (в называющей форме)*. В конкретном логическом анализе нам может потребоваться не более одной называющей формы для данного иона. Однако может случиться, что нам надо выбирать переменные называющей формы так, чтобы не спутать их с уже использованными переменными (см. упр. 19.1). P(x, x, y) и P(x, y, x) не являются называющими формами для элементарного двуместного предикатного выражения, ибо они не элементарны, а, наоборот, показывают, что называемые ими предикаты получены в результате отождествления двух из трех переменных трехместного предиката, выраженного ионом P(—, —, —). Так как в 3-местном элементарном предикатном выражении не рассматривается его внутренняя структура (в противном случае оно не было бы для нас элементарным), то прочерки в P(—, —, —) должны заполняться независимо. Поэтому их незачем нумеровать с помощью индексов, скажем P($—_1$, $—_2$, $—_3$). Аналогично при записи в виде *элементарного* предикатного выражения «—— любит ——» перейдет в «$——_1$ любит $——_2$», а «—— < ——» (или просто «<»)[1]) перейдет в «$——_1 < ——_2$».

Сейчас мы в состоянии описать некий класс предложений, существование которого в предметном языке мы постулируем, а именно класс *формул* (как это делали мы и в § 1 сразу же после введения атомов). Правда, здесь мы глубже проникаем в структуру предметного языка. Иными словами, мы предполагаем, что предметный язык наделен не только той минимальной структурой, которая предполагалась у него в исчислении высказываний; здесь мы начинаем с ионов.

Каков бы ни был n-местный ион P(—, ..., —) и каков бы ни был выбор *не обязательно различных* переменных $r_1, \ldots, r_n$, выражение P($r_1, \ldots, r_n$) назовем *элементарной формулой*, или *атомом*. Например, исходя из иона P(—, —, —), мы получаем атомы P(x, y, z), P(y, z, x), P(u, v, w), P(x, x, y), P(x, y, x) и т. д. Исходя из иона P, мы получаем лишь атом P. Исходя из иона Q(—), мы получаем атомы Q(x), Q(y), Q(u) и т. п. Атомы исчисления высказываний снова попадают в число атомов с $n=0$. При $n>1$ атомы образуют более обширный класс, чем называющие формы для ионов, ибо переменные, заполняющие в эле-

---

[1]) Ибо «<» — это фиксированное обозначение определенного предиката. Точно так же, когда речь идет о P(—, —), причем ни P, ни P(—), ни P(—, —, —) ..., не встречаются, можно писать просто «P» вместо «P(—, —)», так как никакой путаницы не возникает.

ментарных формулах пустые места, не обязаны быть различными [1]).

Класс формул содержит все элементарные формулы (атомы) и другие формулы (называемые *составными формулами*, или *молекулами*), следующим образом построенные из элементарных формул многократным применением *логических символов* $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. Если A и B — *формулы* (элементарные или уже построенные), то $A \sim B$, $A \supset B$, $A \& B$, $A \vee B$ и $\neg A$ являются (*составными*) *формулами*. Если A — *формула*, а x — некоторая переменная, то $\forall x A$ (читается: «при всяком x имеет место A») и $\exists x A$ (читается: «хотя бы при одном x (имеет место) A» или «существует такой x, что A») являются (*составными*) *формулами*.

$\forall x$ называется *квантором* (*все*) *общности*, а $\exists x$ — *квантором существования*. При построении формул кванторы действуют в качестве унарных операторов, как и ранее известный нам оператор $\neg$. По старшинству (в отношении расстановки скобок) кванторы располагаются последними, т. е. «$\forall x\, A \supset B$» следует читать $(\forall x\, A) \supset B$, а не $\forall x (A \supset B)$ [2]).

Чтобы избежать какой бы то ни было двусмысленности в отношении атомов, потребуем, чтобы ни один атом не имел ни одного из видов $A \sim B$, $A \supset B$, $A \& B$, $A \vee B$, $\neg A$, $\forall x A$, $\exists x A$, которые имеют молекулы. Кроме того, любой атом однозначно получается в точности из одного иона. Короче говоря, внутренняя структура ионов (какова бы она ни была) должна быть такой, чтобы ее нельзя было бы спутать со структурой, возникающей при построении формул из ионов.

Например, «—— есть человек», «—— любит ——», «—— = = ——», «—— < ——», «—— + —— = ——», «$2 \cdot 2 = 4$» могут быть ионами (соответственно 1-, 2-, 2-, 2-, 3- и 0-местными). Тогда «x есть человек», «x любит y», «x любит x», «$x = x$», «$y = y$»,

---

[1]) Пока речь будет идти только об исчислении предикатов, как в этой главе, можно упростить выражения «P (x)», «P (x, y)», «Q (x, y, z)», ... и им подобные «A (x)», «A (x, y)», «B (x, y, z)», ... (с буквами из начала алфавита), опуская скобки и запятые: «Px», «Pxy», «Qxyz», «Ax», «Axy», «Bxyz». Мы бы так и писали, если бы собирались долго задерживаться на исчислении предикатов. Однако мы хотим как можно скорее продвинуться к более сложным системам, в которых «аргументами» оказываются не только простые переменные, вроде x, y, z, но и, например, 5, 12, xy ($= x \cdot y$); при отсутствии скобок и запятых обозначения стали бы двусмысленными и трудно читаемыми. Поэтому мы предпочитаем сохранять запятые и скобки, которые принимают (обычно, но не всегда) в качестве части обозначения функций в математике. (Читатель может опускать их в этой главе, если ему не составит труда вернуться впоследствии к их употреблению.)

[2]) Исчисление предикатов (точнее то, что есть в нем сверх исчисления высказываний) часто называют «теорией квантификации». Наш знак «$\forall x$» в литературе заменяют также на «$(\forall x)$», «(x)», «Λ_x», «Π_x», а «$\exists x$» — на «$(\exists x)$», «(Ex)», «V_x», «Σ_x».

«$x+y=z$», «$x+x=y$», «$2\cdot 2=4$» суть атомы. Атомами будут и «Сократ есть человек», «Хирон есть человек», «Джон любит Джейн», если мы интерпретируем «x» и «y» как имена Сократа, Хирона, Джона, Джейн и т. д. Примерами молекул тогда будут «x есть человек и x любит y», «x любит y или x любит z», «хотя бы один x любит y» или $\exists x\mathrm{L}(x, y)$, и т. д., как в (a′)—(h′).

В § 1 мы подчеркивали различие между употреблением букв P, Q, R, ... и A, B, C, ..., т. е. букв, обозначающих различные элементарные формулы, и букв, обозначающих произвольные, не обязательно различные или элементарные формулы. Будем пользоваться здесь буквами A, B, C, ... в том же смысле, добавив к ним A(x), A(y), B(x, y), ... Эти начальные буквы алфавита, сопровождаемые (или нет) индивидными переменными, будут именами формул, построенных из P, Q, R, ..., индивидных переменных, скобок, знаков пунктуации и логических знаков $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$; они могут обозначать одинаковые или различные формулы такого рода.

В анализе величина $\int\limits_0^y x^2y\,dx$ не зависит от x; она зависит только от y. Точно так же $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ не зависит от n, хотя зависит от x. Мы можем выразить это, сказав, что в первом из выражений «x» является *связанной*[1]) переменной, а «y» — *свободной*[2]) переменной. Во втором же «n» — связанная, а «x» — свободная переменная. В «$3x+\int\limits_0^y x^2y\,dx$» первое вхождение переменной «x» свободно, два других связаны, а «y» свободна во всех вхождениях. (Обозначения третьего примера не вводят в заблуждение, хотя некоторые предпочитают писать «$3x+\int\limits_0^y t^2y\,dt$».) Вот пример не из анализа: «наименьшее y, такое, что $2y\geqslant x$»; здесь «x» — свободная переменная, а «y» — связанная.

Точно так же мы встречаем *связанные* и *свободные* переменные или их вхождения в исчислении предикатов; здесь операторы, связывающие переменные, — это кванторы $\forall$x и $\exists$x (вместо $\int \ldots dx$ или $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$, или «наименьшее y, такое, что»)[3]).

---

[1]) Иногда говорят «кажущейся». — *Прим. перев.*

[2]) Иногда говорят «действительной». — *Прим. перев.*

[3]) Гильберт и Бернайс [1934], [1939] и другие авторы используют для обозначения свободных и связанных переменных разные буквы; например, «a», «b», «c», ... применяются только для свободных вхождений, а «x», «y», «z», ... —

Рассмотрим формулу

(1) $\forall x (P(x) \& \exists x Q(x, z) \supset \exists y R(x, y)) \vee Q(z, x)$.

В ее подформуле $\exists x Q(x, z)$ все вхождения x связаны квантором $\exists x$. Это можно отметить, приписав этим двум вхождениям x индекс $_1$. Индексами $_2$ и $_3$ можно пометить вхождения переменных, связанных кванторами $\exists y$ и $\forall x$ соответственно. Заметим, что, поскольку переменная x из $Q(x, z)$ уже связана квантором $\exists x$, она не свободна в подформуле $P(x) \& \exists x Q(x, z) \supset \exists y R(x, y)$, на которую действует $\forall x$ (эту подформулу называем *областью действия* квантора $\forall x$; ср. пример 1 § 1), и, значит, $\forall x$ не может ее связать. Расставляя индексы, мы должны поэтому всегда начинать изнутри, продвигаясь наружу в соответствии с построением формулы из ее атомов $P(x)$, $Q(x, z)$, $R(x, y)$, $Q(z, x)$. Ради стандартизации нумерации согласимся на каждом шаге рассматривать самый левый из «подходящих кванторов», т. е. самый левый квантор, область действия которого не содержит еще не рассмотренных кванторов. Получаем

(1a) $\forall x_3 (P(x_3) \& \exists x_1 Q(x_1, z) \supset \exists y_2 R(x_3, y_2)) \vee Q(z, x)$.

Вхождения переменных, оставшихся без индексов (два z и одно x), свободны. Другой пример:

(2) $\forall y (P(y) \& \exists x Q(x, z) \supset \exists z R(y, z)) \vee Q(z, x)$.

Расставив индексы, получаем

(2a) $\forall y_3 (P(y_3) \& \exists x_1 Q(x_1, z) \supset \exists z_2 R(y_3, z_2)) \vee Q(z, x)$.

Стирая связанные вхождения переменных в (1a) и (2a), получаем одно и то же выражение:

(1b), (2b) $\forall\ _3 (P(\ _3) \& \exists_1 Q(\ _1, z) \supset \exists_2 R(\ _3, \ _2)) \vee Q(z, x)$.

Этим иллюстрируется *конгруэнтность* формул (1) и (2). Они не конгруэнтны приведенным ниже формулам (3), (4) или (5), ибо, расставляя индексы и стирая связанные вхождения переменных, получаем выражения (3b), (4b) и (5b), каждое из которых отличается от (1b). Когда формулы не слишком длинны, удобно вместо индексов пользоваться чертой сверху и снизу для указания, какой квантор связывает какие вхождения переменных:

для связанных вхождений (вопреки традициям содержательной математики). Мы следовали этому правилу в течение десятилетия при обучении материалу, составившему вторую часть [BM], вплоть до 1946 г. Сейчас же мы твердо убеждены, что использование единого списка переменных для свободных и связанных вхождений дает небольшое, но чувствительное преимущество.

(1) $\forall x (P(x) \& \exists x Q(x, z) \supset \exists y R(x, y)) \vee Q(z, x).$

(2) $\forall y (P(y) \& \exists x Q(x, z) \supset \exists z R(y, z)) \vee Q(z, x).$

(3) $\forall x (P(x) \& \exists x Q(x, z) \supset \exists x R(x, x)) \vee Q(z, x).$

(4) $\forall z (P(z) \& \exists x Q(x, z) \supset \exists y R(z, y)) \vee Q(z, x).$

(5) $\forall x (P(x) \& \exists x Q(x, z) \supset \exists y R(x, y)) \vee Q(z, y).$

Уже по этим схемам можно установить, конгруэнтны ли формулы; для этого следует пренебречь связанными вхождениями или представить, что они стерты. В (3) седьмое вхождение переменной (вхождение буквы «x») связано третьим квантором (второй $\exists$x в нашей формуле), тогда как в (1) седьмое вхождение переменной (вхождение «x») связано первым квантором ($\forall$x). В (4) пятое вхождение переменной (вхождение z) связано первым квантором ($\forall$z), тогда как в (1) пятое вхождение переменной свободно. Между (5) и (1) нет разницы в связанных вхождениях, но зато в (5) y входит свободно там, где в (1) свободно входит x.

Конечно, если две формулы не тождественны с точностью до выбора переменных, то они не конгруэнтны.

Любая формула выражает некий предикат, зависящий от числа свободно входящих в нее переменных (они играют тогда ту же роль, что и переменные называющей формы). Например, «x есть человек», «$x+x=x$», $\mathrm{L}(x, x)$, $\exists x \mathrm{L}(x, y)$ выражают предикаты от одной переменной; «$x<y$», «$x<y \vee x=y$», $\mathrm{L}(x, y)$, $\forall x (P(x) \& \exists x Q(x, z) \supset \exists y R(x, y)) \vee Q(z, x)$ выражают предикаты от двух переменных, а «$2 \cdot 2=4$» выражает предикат от 0 переменных, т. е. высказывание. (Можно считать также, что формулы выражают предикаты с *большим числом переменных*. Так, «$2 \cdot 2=4$» выражает постоянный предикат от одной или двух переменных и т. д., $\mathrm{L}(x, x)$ выражает предикат от двух переменных x и y, который является постоянным по своей второй переменной y, и т. д.).

Но, как указывалось выше при обсуждении обозначений предикатов, если переменные интерпретируются как обозначения для конкретных объектов, то формулы выражают не предикаты, а те высказывания, которые становятся их значениями. (Как мы увидим в § 20, 38, есть и другие способы интерпретировать формулу со свободными переменными как выражение для высказывания.)

Формулы (1) и (2) выражают один и тот же предикат с z и x в качестве переменных называющей формы, тогда как (3) и (4) выражают два других предиката тоже с z и x в качестве переменных называющей формы. (Эти три предиката зависят от тех предикатов, которые выражаются посредством ионов P(—), Q(—, —) и R(—, —).) Это видно из нашего чтения кванторов; мы вернемся к этому в § 17. Формула (5) выражает тот же предикат, что (1) и (2), но переменными называющей формы являются z и y. Если приписать спереди к формулам (1), (2) и (5) квантор ∀x, взяв каждую из них в скобки (так, чтобы областью действия квантора ∀x оказалась вся формула), то третья из полученных формул будет не конгруэнтна двум другим, ибо обе первые выразят предикат от одной переменной, а третья — от двух. Если интерпретировать x, y и z как имена объектов, то (5) будет выражать высказывание, отличное от (1) и (2), если только объекты, обозначенные через x и y, различны.

Упражнение. 16.1. Покажите индексами (или подчеркиваниями), какие вхождения переменных связаны какими кванторами. Отметьте пары конгруэнтных формул.

(a) $\forall z \exists y (P(z, y) \& \forall z Q(z, x) \supset R(z))$.
(b) $\forall x \exists y (P(x, y) \& \forall y Q(y, x) \supset R(x))$.
(c) $\forall y \exists z (P(y, z) \& \forall z Q(z, x) \supset R(y))$.
(d) $\forall z \exists x (P(z, x) \& \forall z Q(z, y) \supset R(z))$.
(e) $\forall y \exists z (P(z, y) \& \forall z Q(z, x) \supset R(y))$.
(f) $\exists z \forall x (P(z, x) \vee \forall z Q(x, y, z))$.
(g) $\exists z \forall x (P(z, x) \vee \forall z Q(x, y, z))$.
(h) $\exists y \forall x (P(y, x) \vee \forall x Q(x, y, z))$.
(i) $\exists y \forall x (P(z, x) \vee \forall x Q(x, u, y))$.
(j) $\exists x \forall z (P(x, z) \vee \forall u Q(u, y, x))$.

§ 17. Теория моделей; предметные области, общезначимость

Теперь мы достигли уровня, соответствующего началу § 2 гл. I. Там мы говорили, что в исчислении высказываний всякий атом (т. е. элементарная формула) считается выражающим некоторое высказывание, которое либо истинно, либо ложно, но не то и другое сразу. (Однако в исчислении высказываний не задано, какой из этих случаев имеет место.)

Аналогичное предположение мы делаем в *классическом* исчислении предикатов относительно каждого иона (или элементарного предикатного выражения). Но чтобы сказать что-либо осмысленное относительно n-местного предиката (т. е. пропозициональной функции от n переменных), выражаемого n-местным ионом, надо сначала указать, какие объекты являются значениями его переменных, т. е., говоря математическим языком, надо указать *область значений* этих переменных. В таких случаях, как «x есть человек», «x любит y», при подстановке произвольных существительных на место x или на места x и y не обязательно получаются правильно построенные фразы, т. е. такие фразы, которые выражают высказывания, могущие иметь классическое истинностное значение. Можно спорить, будет ли выражение «x любит y» ложным или лишенным смысла, если подставить на место «x» и «y» названия растений. В обычных языках имеются пограничные случаи, когда не ясно, является ли то или иное выражение действительным обозначением чего бы то ни было. Все споры на этот счет мы отсечем, по крайней мере в этом месте, предположив, что существует некоторое выделенное непустое множество, т. е. набор объектов, называемое *предметной областью* D, которую и пробегает каждая из (независимых) переменных наших пропозициональных функций. Иными словами, элементы множества D — это и есть объекты, допустимые в качестве значений переменных. Это отнюдь не тривиальное допущение, ибо в обыденных разговорах далеко не всегда удается удовлетворить ему естественным образом. Также и в математике логическое рассуждение может стать ненадежным, если не указано (явно или неявно) никакой области D либо же указание это слишком расплывчато.

Условившись, что D является областью значений каждой переменной наших пропозициональных функций, мы тем самым считаем, что предикат, выраженный ионом $\mathrm{P}(—, —)$ или его называющей формой $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, является высказыванием (или, как говорят математики, определен) для любых значений переменных x и y, выбранных в множестве D.

Аналогично для $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ при любом $n > 0$. (При $n = 0$ множество D не используется.) Например, нельзя пользоваться предикатом $x < y$, если D является множеством комплексных чисел $a + bi$, так как $x < y$ определено (имеет смысл) не для всех пар x, y из этого множества D. Предикатом $x < y$ можно пользоваться, если D является множеством вещественных или натуральных чисел[1]) 0, 1, 2, ... Но тогда предикат $\sqrt{x} = y$ «определен не везде». Ни в одной из трех названных областей D не определен повсюду предикат $x : y = z$ (он не определен при $y = 0$)[2]).

---

[1]) На самом деле в множестве комплексных чисел, конечно, можно задать предикат «<», причем разными способами; автор подразумевает, по-видимому, что там нельзя ввести нетривиальное отношение «<», согласующееся с алгебраической структурой поля комплексных чисел.— *Прим. перев.*

[2]) В ситуациях такого рода математики часто обходят трудности, вводя в рассмотрение (расширение) области D или распространяя предикат на первоначальное D.

Для общего (т. е. без введения дополнительных ограничений) изучения исчисления предикатов примем соглашение, что нас не интересует конкретная природа элементов непустого множества D. Иными словами, мы строим логику предикатов, применимую к какому угодно непустому множеству D. Значит, мы исключаем только случаи, когда множество D пусто: в области значений наших переменных должен быть хотя бы один объект (например, D не может быть множеством вещественных корней уравнения $x^2+1=0$)[1]).

В математике бывает, что разным переменным приписываются разные области значений; например, x, y, z пробегают вещественные, а m, n, p, ... —целые числа. Для максимального упрощения изложения мы не станем делать предположений такого рода. Все наши переменные должны иметь одну и ту же область изменения D, хотя в зависимости от приложений последняя может варьироваться. Было бы не трудно, отталкиваясь от трактовки исчисления предикатов как исчисления *с одним сортом* переменных, перейти к исчислению предикатов *с двумя сортами* переменных: с областью значений D_1 и с областью значений D_2. Можно рассмотреть и произвольное число сортов переменных[2]).

Другой подход к исчислению предикатов трактует ионы как переменные, которые можно связывать кванторами, причем $\forall P$, $\forall Q$, $\exists P$, $\exists Q$, ... становятся элементами символизма. Это дает более значительное расширение исчисления предикатов, а именно то, что называется исчислением предикатов *второй ступени* (*второго порядка*); обобщая, переходят к исчислениям предикатов *высших ступеней* (*порядков*)[2]). Чтобы отличать рассматриваемое нами исчисление предикатов от других трактовок, можно называть его *узким* исчислением предикатов или исчислением предикатов *первой ступени*[3]).

Введем теперь еще одно допущение, относящееся к *классическому* исчислению предикатов. Аналогично соглашению, принятому в § 2 применительно к исчислению высказываний, допущение это состоит в том, что высказывание P(x, y), которое получается

---

[1]) Если в исчислении предикатов допускаются пустые предметные области, то возникают некоторые отличия (в целом не дающие никаких выгод) по сравнению с данной здесь трактовкой (см. Мостовский [1951a] и Яськовский [1934]).

[2]) См. [ВМ], стр. 163, и данные там ссылки (относительно исчислений высших порядков см. Гильберт и Аккерман [1949], Чёрч [1956]).

[3]) Наш единственный сорт переменных называется «индивидными», «объектными» или «предметными» переменными, дабы подчеркнуть, что они пробегают область D, состоящую из индивидов, или объектов. Ему противопоставляются «предикатные переменные» в исчислении второго порядка, а также в исчислении первого порядка с правилом подстановки вместо таких переменных.

при любой паре значений из D переменных x и y, непременно является либо истинным ($\mathfrak{t}$), либо ложным ($\mathfrak{f}$), но не тем и другим сразу. (Однако там не сказано, что именно имеет место.) Это значит, что с ионом P(—, —), или (что то же самое) с его называющей формой P(x, y), связывается некоторая функция $\mathfrak{l}$(x, y), которая для любой пары значений x, y, взятых из D, принимает значение $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$. (На языке математики это функция из $D \times D$ в $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\}$)[1]. Такая функция $\mathfrak{l}(x, y)$ называется (*2-местной*) *логической функцией*. Аналогично, всякому иону P $(x_1, \ldots, x_n)$ с n переменными сопоставляется некоторая логическая n-местная функция $\mathfrak{l}(x_1, \ldots, x_n)$. При $n=0$, т. е. для атома P, логическая функция $\mathfrak{l}(x_1, \ldots, x_n)$ — это просто $\mathfrak{t}$ или $\mathfrak{f}$, как в исчислении высказываний. Те таблицы истинности, которые были даны для $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ в исчислении высказываний (§ 2), сохраняют силу и здесь. Надо еще определить процедуру вычисления значения $\forall x$A и $\exists x$A. Вычислять их значение мы сможем только в случае, когда можем вычислить значение A при любом выборе элемента из D в качестве значения, приписываемого x в его свободных вхождениях в A, короче говоря, только в случае, когда мы умеем приписывать формуле A в качестве ее значения некую логическую функцию от x. По определению положим, что $\forall x$A истинна ($\mathfrak{t}$), если логическая функция, приписанная A, всегда принимает значение $\mathfrak{t}$; в противном случае считаем, что $\forall x$A ложна ($\mathfrak{f}$). Будем считать, что $\exists x$A дает $\mathfrak{t}$, если среди значений ее логической функции имеется $\mathfrak{t}$, а в противном случае $\mathfrak{f}$.

Можем ли мы теперь вычислить таблицу истинности для произвольной формулы E? Прежде всего, хотя область D и предполагается фиксированной, она остается неизвестной. На самом

---

[1]) Тут мы уклоняемся от наших обычных обозначений, в соответствии с которыми следовало бы писать (как мы и будем иногда делать): функция $\mathfrak{l}(x, y)$, которая для любых x, y из D (или для каждой пары значений «x» и «y» из D) принимает значение $\mathfrak{t}$ или значение $\mathfrak{f}$.

В нашем имени «$\mathfrak{l}$(x, y)» для логической функции удобно пользоваться теми же переменными x и y, что и в называющей форме P(x, y) иона P(—, —), которому сопоставляется или приписывается в качестве значения эта логическая функция. Поскольку переменные формулы P(x, y) не конкретизированы, как и обстоит дело у нас, мы пользуемся для их обозначения в нашем имени логической функции «$\mathfrak{l}$(x, y)» их именами «x» и «y». То же соглашение используется в случае $P(x_1, \ldots, x_n)$ и «$\mathfrak{l}(x_1, \ldots, x_n)$» (и изредка при назывании предикатов, выражаемых формулами).

Также и в последующих оценках (ниже) и вычислениях мы довольствуемся простой подстановкой в формулы предметного языка (или в наши имена этих формул) наших имен логических функций («$\mathfrak{l}_1(x)$», «$\mathfrak{l}_2(x)$», «$\mathfrak{l}_1(x, y)$» и т. д.), значений истинности («$\mathfrak{t}$» и «$\mathfrak{f}$») и элементов из D («1», «2» и т. п.). Таким образом, в этих вычислениях мы будем оперировать предметным языком, обогащенным добавлением «$\mathfrak{l}_1(x)$», «$\mathfrak{t}$», «1» и т. п. (Мы уже поступали так с «$\mathfrak{t}$» и «$\mathfrak{f}$» в гл. I и будем так поступать в гл. III, § 28, 29, причем и с функциями, принимающими значения в D.)

же деле существенно лишь (неизвестное нам) число элементов $\overline{\overline{D}}$ (>0) этой предметной области D[1]).

Пример 1. Пусть D — область, состоящая из двух объектов, которые мы для удобства обозначим «1» и «2», т. е. $D=\{1, 2\}$. За E принимаем формулу $P(y) \vee \forall x (P(x) \supset Q)$. При вычислении ее истинностных значений нам надо исходить из некоторого *распределения*, состоящего из некоторой логической функции одной переменной, пробегающей D (эта логическая функция является логическим значением иона P(—) или его называющей формы P(x)), некоторого значения истинности, т. е. 0-местной логической функции (это значение формулы Q) и элемента из D (это значение свободной переменной y). Иначе говоря, нам надо вычислить таблицу с этими тремя величинами на входах. Прежде чем вычислять ее, выпишем список четырех (2^2) логических функций одной переменной, заданных на $D=\{1, 2\}$:

x	$I_1(x)$	$I_2(x)$	$I_3(x)$	$I_4(x)$
1	t	t	f	f
2	t	f	t	f

Вот таблица для $P(y) \vee \forall x (P(x) \supset Q)$:

		$P(x)$	Q	y	$P(y) \vee \forall x (P(x) \supset Q)$
	1.	$I_1(x)$	t	1	t
	2.	$I_1(x)$	t	2	t
	3.	$I_1(x)$	f	1	t
	4.	$I_1(x)$	f	2	t
	5.	$I_2(x)$	t	1	t
	6.	$I_2(x)$	t	2	t
	7.	$I_2(x)$	f	1	t
(1)	8.	$I_2(x)$	f	2	f
	9.	$I_3(x)$	t	1	t
	10.	$I_3(x)$	t	2	t
	11.	$I_3(x)$	f	1	f
	12.	$I_3(x)$	f	2	t
	13.	$I_4(x)$	t	1	t
	14.	$I_4(x)$	t	2	t
	15.	$I_4(x)$	f	1	t
	16.	$I_4(x)$	f	2	t

[1]) Как мы увидим дальше (§ 34), можно говорить о числе $\overline{\overline{D}}$, даже если D бесконечно.

Вот вычисление для строки 8 (пояснения ниже):

$$
\begin{array}{ll}
 & P(y) \vee \forall x\,(P(x) \supset Q) \\
\text{(i)} & \mathfrak{l}_2(2) \vee \forall x\,(\mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{f}) \\
\text{(ii)} & \mathfrak{f} \vee \mathfrak{f} \\
\text{(iii)} & \mathfrak{f}
\end{array}
$$

Первый шаг состоит в том, что мы подставляем распределение, помещенное на входе строки 8, в формулу, значение которой вычисляем; получаем (i). Затем на шаге (ii) в качестве значения $\mathfrak{l}_2(2)$ в силу таблицы для $\mathfrak{l}_2(x)$ получаем $\mathfrak{f}$. Но прежде чем мы получим возможность вычислить другую часть $\forall x\,(\mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{f})$ формулы (i), надо вычислить $\mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{f}$ как логическую функцию от x; внизу слева выписан в виде таблицы результат, а справа мы привели вычисление обеих ее строк:

x	$\mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{f}$
1	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$

$$
\begin{array}{cc}
\mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{f} & \mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{f} \\
\mathfrak{l}_2(1) \supset \mathfrak{f} & \mathfrak{l}_2(2) \supset \mathfrak{f} \\
\mathfrak{t} \supset \mathfrak{f} & \mathfrak{f} \supset \mathfrak{f} \\
\mathfrak{f} & \mathfrak{t}
\end{array}
$$

Продолжая основное вычисление, получаем для $\forall x\,(\mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{f})$ значение $\mathfrak{f}$, поскольку вспомогательная таблица содержит не только $\mathfrak{t}$. Таким образом, получаем строку (ii), откуда окончательно вытекает (iii) по таблице для $\vee$.

Сказанным иллюстрируется определение истинностной таблицы произвольной формулы E при заданной области D. Как и выше, возможны разные сокращения. В нашем примере достаточно заметить, что $A \supset B$ дает $\mathfrak{t}$, если B есть $\mathfrak{t}$, чтобы заключить, что раз Q есть $\mathfrak{t}$, то вспомогательная таблица для $P(x) \supset Q$ состоит из одного столбца $\mathfrak{t}$, так что по нашему правилу вычисления $\forall x\, A$ значение $\forall x\,(P(x) \supset Q)$ будет $\mathfrak{t}$, откуда по таблице для $\vee$ получаем $\mathfrak{t}$ для формулы $P(y) \vee \forall x\,(P(x) \supset Q)$. Следовательно, мы без всяких хлопот можем поместить $\mathfrak{t}$ в строки 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14 таблицы (1)[1].

Пример 2. Считая по-прежнему $D = \{1, 2\}$, выпишем некоторые строки таблицы для $\forall x\,(\exists x\, P(x) \supset P(x))\, \&\, P(x)$:

	P(x)	x	$\forall x\,(\exists x\, P(x) \supset P(x))\, \&\, P(x)$
1.	$\mathfrak{l}_1(x)$	1	$\mathfrak{t}$
2.	$\mathfrak{l}_1(x)$	2	$\mathfrak{t}$
3.	$\mathfrak{l}_2(x)$	1	$\mathfrak{f}$
	...		...
8.	$\mathfrak{l}_4(x)$	2	$\mathfrak{f}$

[1]) Тот метод анализа по истинности, который описывался в (3) § 8, можно применить к каждой пропозициональной букве высказывания E (в нашем примере — к букве Q и только к ней).

Вот вычисление строки 3:

$$\begin{array}{ll}
 & \forall x (\exists x P(x) \supset P(x)) \& P(x) \\
\text{(i)} & \forall x (\exists x \mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{l}_2(x)) \& \mathfrak{l}_2(1) \\
\text{(ii)} & \qquad\qquad\quad \mathfrak{f} \qquad\qquad \mathfrak{t} \\
\text{(iii)} & \qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{f}
\end{array}$$

Значение 1 переменной x в (i) подставляется только на месте ее свободных вхождений (а таково только последнее) в $\forall x (\exists x P(x) \supset P(x)) \& P(x)$. Для получения (ii) нужна вспомогательная таблица для $\exists x \mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{l}_2(x)$ как функции от x; при ее нахождении нам не надо принимать во внимание значение 1, которое только что приписано x во всей формуле $\forall x (\exists x P(x) \supset P(x)) \& P(x)$. Вспомогательная таблица дана слева, а вычисления, с помощью которых находятся обе ее строки,— справа:

x	$\exists x \mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{l}_2(x)$
1	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$

$$\begin{array}{ccc}
\exists x \mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{l}_2(x) & \qquad & \exists x \mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{l}_2(x) \\
\exists x \mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{l}_2(1) & & \exists x \mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{l}_2(2) \\
\mathfrak{t} \quad \supset \mathfrak{t} & & \mathfrak{t} \quad \supset \mathfrak{f} \\
\mathfrak{t} & & \mathfrak{f}
\end{array}$$

Для проведения двух последних вычислений нам требуется еще раз вспомогательная таблица для $\mathfrak{l}_2(x)$; здесь мы опять не принимаем во внимание значение, уже приписанное при вычислении строки вспомогательной таблицы. Однако эта новая таблица совпадает с таблицей $\mathfrak{l}_2(x)$, данной перед (i) в примере 1.

Эти (и последующие) примеры ясно показывают, что коль скоро выбирается конечная область D, можно вычислить таблицу для произвольно заданной формулы E (по крайней мере в принципе; практически такое вычисление могло бы оказаться нереальным). Конечно, при больших конечных $\overline{\overline{D}}$ или при малых $\overline{\overline{D}}$, но очень сложных формулах E вычисление может оказаться, если не прибегать к сокращениям, невероятно длинным. Если же область D бесконечна, истинностная таблица перестает быть конечным объектом, который теоретически можно вычислить, хотя сама идея этой таблицы остается совершенно ясной (с классической точки зрения) и о ней можно рассуждать. Когда область D может быть бесконечной, мы вместо того, чтобы «вычислять» (calculate) истинностную таблицу, будем иногда ее «определять» (determine) или «оценивать» (evaluate).

В каких случаях можно сказать, что формула E верна в силу одного только исчисления предикатов? Принимая во внимание, что ни D (или $\overline{\overline{D}}$), ни логические функции на D как значения ионов из E (или значения истинности, если имеются ионы от 0 переменных), ни элементы из D как значения свободных переменных E не обязаны быть известными, следует ответить так: формула E верна в силу исчисления предикатов тогда и только тогда, когда при всяком выборе области D (числа $\overline{\overline{D}}$ ее элементов) в таблице истинности для E столбец значений содержит только t. Тогда говорят, что E *общезначима (в исчислении предикатов)*, и пишут $\models$E. (В этой главе подразумевается, что «общезначимый» и «$\models$» относятся к исчислению предикатов, если не оговорено противное.)

Часто бывает интересно также рассматривать исчисление предикатов при фиксации области D (или числа $\overline{\overline{D}}$ ее элементов); тогда говорят, что E *общезначима в области* D либо что E *$\overline{\overline{D}}$-общезначима* (символически $\overline{\overline{D}}$-$\models$E) в том и только в том случае, когда таблица истинности для E при выбранной области D дает только t. Особенно интересными являются случаи, когда $\overline{\overline{D}}=k$ (k — некоторое целое положительное число) и D — множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Имеется огромная разница между теперешней ситуацией и той, которая имелась в исчислении высказываний, где на любой вопрос, касавшийся общезначимости любой формулы E, можно было в принципе ответить механическим вычислением истинностной таблицы. Сейчас в определении общезначимости упоминается бесконечное семейство истинностных таблиц по одной для каждого $\overline{\overline{D}}$, и при бесконечной области D даже теоретически невозможно вычислить истинностную таблицу формулы. Ведь для установления общезначимости формулы надо, чтобы каждая из ее таблиц содержала бы только t. Однако эта трудность не мешает весьма значительному развитию логической теории в решении задач исчисления предикатов.

Чтобы доказать необщезначимость некоторой формулы E, достаточно предъявить какую-либо область D и какую-нибудь строку таблицы для E над этой областью, где E дает f. Так, мы уже знаем, что P(y) $\vee$ $\forall$x(P(x) $\supset$ Q) не общезначима, ибо в строке 8 таблицы (1) при $\overline{\overline{D}}=2$ мы нашли f.

Понятие общезначимости, например применительно к формуле E примера 1, предполагает, что E выражает некое высказывание, причем ее свободная переменная y обозначает некоторый элемент из D. Так как мы находимся в неведении не только о природе области D, значений P(—) и Q, но и о том, какой именно элемент из D обозначен через y, то мы можем утверждать, что E истинна (в силу только исчисления предикатов, без использования чего-либо еще), только если таблица для E содержит исключительно t при всякой области D.

Но формулы являются также именами предикатов, как мы подчеркивали в § 16. Именно с этой точки зрения, а вовсе не потому, что хотели выяснить, ложное или истинное высказывание выражает $P(x) \supset Q$, строили мы вспомогательную таблицу для $\mathfrak{l}_2(x) \supset \mathfrak{f}$. При выбранной области D и при приписанных формулам $P(x)$ и Q значениях вспомогательная таблица указывает ту логическую функцию, которой интерпретируется подформула $P(x) \supset Q$, когда она рассматривается как обозначение некоторого предиката, зависящего от x[1]).

Если мы станем смотреть на всю формулу E как на выражение предиката, а не высказывания, то нас будет интересовать не столько факт, состоит ли столбец ее значений целиком из $\mathfrak{t}$ или нет, сколько распределение $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ в ее таблице. Это можно проиллюстрировать, построив формулы $\forall y\, E$ и $\exists y\, E$, исходя из формулы E примера 1. Если принять $D = \{1, 2\}$, то каждая из формул $\forall y\, E$ и $\exists y\, E$ имеет таблицу в 8 строк, ибо на входе помещаются только $P(x)$ и Q (y исчезает, так как она связана). Те вспомогательные таблицы, которые нам нужны на предпоследнем шаге вычислений, появляются как подтаблицы (1): их дают попарно прежние строки 1—2, 3—4, ..., 15—16. Поэтому просмотр таблицы (1) непосредственно позволяет нам написать таблицы для $\forall y\, E$ и $\exists y\, E$:

(2)

	$P(x)$	Q	$\forall y(P(y) \vee \forall x(P(x) \supset Q))$	$\exists y(P(y) \vee \forall x(P(x) \supset Q))$
1.	$\mathfrak{l}_1(x)$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
2.	$\mathfrak{l}_1(x)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
3.	$\mathfrak{l}_2(x)$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
4.	$\mathfrak{l}_2(x)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
5.	$\mathfrak{l}_3(x)$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
6.	$\mathfrak{l}_3(x)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
7.	$\mathfrak{l}_4(x)$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
8.	$\mathfrak{l}_4(x)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$

[1]) Можно сравнить истинностные значения и логические функции с «рентгенограммой» высказываний и предикатов. Например, «$1 < 2$», «$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = 1$», «Сократ есть человек», «Нью-Йорк — портовый город» — все это фразы с разными содержанием и смыслом, а на рентгенограмме мягкие ткани невидимы и остается только костяк: $\mathfrak{t}$. Точно так же «$2 < 2$», «$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = 2$», «Хирон есть человек», «Мадисон — портовый город» представляют другие четыре высказывания, от которых при просвечивании остается только $\mathfrak{f}$. Если мы примем за D область $\{1, 2\}$ и рассмотрим высказывания «$x < 2$», «$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = x$», считая, что 1 и 2 соответственно совпадают с целыми числами 1 и 2, а также «x есть человек», где 1 — Сократ, а 2 — Хирон, и, наконец, «x — портовый город», где 1 — Нью-Йорк, а 2 — Мадисон, то получим четыре разных предиката (значениями которых являются соответственно 8 указанных выше высказываний). Рентгенологическое исследование даст одну и ту же логическую функцию $\mathfrak{l}_2(x)$. См. также примечание на стр. 107.

Согласно (2), формула $\forall y\,(P(y) \vee \forall x\,(P(x) \supset Q))$ не общезначима, тогда как $\exists y\,(P(y) \vee \forall x\,(P(x) \supset Q))$ по крайней мере 2-общезначима.

Пример 3. В качестве другого примера покажем, что $\forall x\,\exists y\,P(x, y) \supset \exists y\,\forall x\,P(x, y)$ не общезначима, вычислив надлежащую строку ее таблицы для области $D = \{1, 2\}$. На входе этой таблицы (в каждой строке) находится логическая функция, т. е. значение, приписанное предикату $P(x, y)$. Сначала выпишем все 16 $(=2^4)$ логических функций, определенных на D:

x	y	$\mathfrak{l}_1(x, y)$	$\mathfrak{l}_2$	$\mathfrak{l}_3$	$\mathfrak{l}_4$	$\mathfrak{l}_5$	$\mathfrak{l}_6$	$\mathfrak{l}_7$	$\mathfrak{l}_8$	$\mathfrak{l}_9$	$\mathfrak{l}_{10}$	$\mathfrak{l}_{11}$	$\mathfrak{l}_{12}$	$\mathfrak{l}_{13}$	$\mathfrak{l}_{14}$	$\mathfrak{l}_{15}$	$\mathfrak{l}_{16}$
1	1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
1	2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
2	1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
2	2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$

Вот часть истинностной таблицы нашей формулы, в которой появляется ее значение при входе строки 10. То обстоятельство, что этим значением оказывается $\mathfrak{f}$, свидетельствует, что формула не общезначима:

	$P(x, y)$	$\forall x\,\exists y P(x, y) \supset \exists y\ \forall x\,P(x, y)$
	...	...
10.	$\mathfrak{l}_{10}(x, y)$	$\mathfrak{f}$
	...	...

К результату, указанному в столбце значений формулы в строке 10, мы приходим следующим образом:

	$\forall x\,\exists y\,P(x, y) \supset \exists y\,\forall x\,P(x, y)$
(i)	$\forall x\,\exists y\,\mathfrak{l}_{10}(x, y) \supset \exists y\,\forall x\,\mathfrak{l}_{10}(x, y)$
(ii)	$\mathfrak{t} \quad \supset \quad \mathfrak{f}$
(iii)	$\mathfrak{f}$

Объяснение таково: первый шаг состоит в подстановке распределения, отвечающего строке 10, в вычисляемую формулу; получаем (i).

Прежде чем вычислять значение истинности $\forall x\,\exists y\,\mathfrak{l}_{10}(x, y)$, надо вычислить $\exists y\,\mathfrak{l}_{10}(x, y)$ как логическую функцию от x. Протабулируем ее в виде таблицы (a):

(a)

x	$\exists y\,\mathfrak{l}_{10}(x, y)$
1	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{t}$

Объяснение: чтобы вычислить истинностные значения, приведенные в (a), нужно построить вспомогательные таблицы: (b) для случая, когда x есть 1, и (c) для случая, когда x есть 2:

(b)

y	$\mathfrak{l}_{10}(1, y)$
1	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$

(c)

y	$\mathfrak{l}_{10}(2, y)$
1	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$

Значения же в (b) и (c) получаются очевидным образом, исходя из нашей таблицы всевозможных логических функций двух переменных на D (столбец $\mathfrak{l}_{10}$). В (b) имеется одно $\mathfrak{t}$, так что, согласно правилу вычисления $\exists y$, получаем $\mathfrak{t}$ в строке 1 таблицы (a). В (c) также есть $\mathfrak{t}$, так что опять имеем $\mathfrak{t}$ в строке 2 таблицы (a).

Значит, в таблице (a) стоят только $\mathfrak{t}$, откуда по правилу вычисления $\forall$ нужно в строку (ii) для $\forall x \exists y \mathfrak{l}_{10}(x, y)$ поставить $\mathfrak{t}$.

Точно так же вычислим $\exists y \forall x \mathfrak{l}_{10}(x, y)$, начиная с вычисления $\forall x \mathfrak{l}_{10}(x, y)$ как логической функции от y. Сведем эти значения в таблицу (a′):

(a′)

y	$\forall x \mathfrak{l}_{10}(x, y)$
1	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{f}$

Для определения истинностных значений, приведенных в (a′), строим дополнительно две вспомогательные таблицы (b′) и (c′):

(b′)

x	$\mathfrak{l}_{10}(x, 1)$
1	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$

(c′)

x	$\mathfrak{l}_{10}(x, 2)$
1	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$

В каждой из них имеется хотя бы одно $\mathfrak{f}$, так что по правилу вычисления $\forall$ в каждой строке таблицы (a′) должно стоять $\mathfrak{f}$. Поскольку в столбце значений этой таблицы нет $\mathfrak{t}$, по правилу вычисления $\exists$ получаем в (ii) для $\exists y \forall x \mathfrak{l}_{10}(x, y)$ значение $\mathfrak{f}$.

Завершив (ii), переходим к (iii) и пишем для всей формулы значение $\mathfrak{f}$ в строке 10 ее таблицы.

Пример 4. Сейчас мы покажем, что формула $P(y) \supset \exists x P(x)$ общезначима. При этом нельзя обойтись без общих рассуждений, ибо мы должны доказать, что таблица этой формулы содержит только $\mathfrak{t}$, каково бы ни было $\overline{\overline{D}}$. Однако, чтобы получить более конкретную картину, начнем с того, что примем $D = \{1, 2, 3\}$. На D имеется $8 (= 2^3)$ логических одноместных функций:

x	$\mathfrak{l}_1(x)$	$\mathfrak{l}_2(x)$	$\mathfrak{l}_3(x)$	$\mathfrak{l}_4(x)$	$\mathfrak{l}_5(x)$	$\mathfrak{l}_6(x)$	$\mathfrak{l}_7(x)$	$\mathfrak{l}_8(x)$
1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
3	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$

и в таблице для $P(y) \supset \exists x P(x)$ будет 24 ($=8\cdot 3$) строк, ибо надо придать $P(x)$ в качестве значений восемь функций, комбинируя каждую из них с каждым из 3 элементов области D. Возьмем для образца две строки:

	$P(x)$	y	$P(y) \supset \exists x P(x)$
14.	$\mathfrak{l}_5(x)$	2	$\mathfrak{t}$
22.	$\mathfrak{l}_8(x)$	1	$\mathfrak{t}$

Относительно строки 14 надо заметить, что $\mathfrak{l}_5(x)$ имеет в своей таблице $\mathfrak{t}$ (например, при $x=2$). По правилу вычисления $\exists x$ подформула $\exists x P(x)$ принимает значение $\mathfrak{t}$, откуда по определению $\supset$ вся формула имеет значение $\mathfrak{t}$. Этого хватит для того, чтобы покончить со всеми 21 первыми строками таблицы, ибо в каждой из них функция $\mathfrak{l}(x)$ принимает хотя бы раз значение $\mathfrak{t}$. Иными словами, этого достаточно для всех $\mathfrak{l}(x)$, кроме $\mathfrak{l}_8(x)$. В строке 22 $\mathfrak{l}_8(1)$ дает $\mathfrak{f}$, и по определению $\supset$ вся формула дает $\mathfrak{t}$. Так мы справляемся с тремя последними строками, ибо $\mathfrak{l}_8(x)$ принимает только значение $\mathfrak{f}$, а значит, $\mathfrak{l}_8(y)$ и $P(y)$ тоже дают $\mathfrak{f}$, каково бы ни было y. Теперь уже ясно, что при произвольной, даже бесконечной, области D таблица истинности для $P(y) \supset \exists x P(x)$ не даст ничего, кроме $\mathfrak{t}$. Доказывается это классификацией распределений для $P(x)$ и y, т.е. «строк». Допустим сначала, что функция $\mathfrak{l}(x)$, приписываемая предикату $P(x)$, не всюду принимает значение $\mathfrak{f}$. Тогда $\exists x P(x)$ дает $\mathfrak{t}$, а значит, вся формула принимает значение $\mathfrak{t}$. Пусть теперь мы имеем дело со строкой, где $\mathfrak{l}(x)$ принимает только значение $\mathfrak{f}$. Тогда $P(y)$ дает $\mathfrak{f}$ при любом y, так что вся формула опять дает $\mathfrak{t}$.

Аналогичное рассуждение показывает общезначимость формулы $P(x) \supset \exists x P(x)$. Значение, приписываемое переменной x, не принимается во внимание при вычислении значения $\exists x P(x)$ для логической функции, приписываемой иону $P(-)$ (ср. пример 2).

Эти результаты доказывают, что $\models P(r) \supset \exists x P(x)$, каковы бы ни были переменные x и r, причем r не обязательно отлична от x.

Упражнения. 17.1. Пусть $D=\{1,2\}$. Сколько строк в таблицах истинности следующих формул? Вычислите подробно указанные строки:

(a) $\forall z (P(x) \supset \neg Q \vee P(z))$, где $P(x)$, Q, x суть $\mathfrak{l}_3(x)$, $\mathfrak{t}$, 2 соответственно.

(b) $P(x, y) \supset \forall x (P(x, y) \supset \exists x P(x, x))$, где $P(x, y)$, x, y суть $\mathfrak{l}_{14}(x, y)$, 2, 1.

17.2. Докажите, что $\forall x \exists y P(x, y) \supset \exists y \forall x P(x, y)$ 1-общезначима, полностью вычислив ее таблицу при $D=\{1\}$. (Как видно из примера 3, эта формула не 2-общезначима.)

17.3. Докажите, что ни одна из следующих формул не общезначима:

(a) $\neg [\forall x \exists y P(x, y) \supset \exists y \forall x P(x, y)]$.
(b) $\exists x \exists y P(x, y) \supset \exists x P(x, x)$.
(c) $\exists x P(x) \& \exists x Q(x) \supset \exists x (P(x) \& Q(x))$.

17.4. Докажите разбором случаев (классифицируя распределения значений), что формула $\forall x P(x) \supset P(y)$ (и $\forall x P(x) \supset P(x)$) общезначима.

17.5. Общезначимы ли следующие формулы? Почему?

(a) $P(x) \supset \forall x P(x)$ (b) $\exists x P(x) \supset P(x)$.
(c) $\forall x P(x) \supset \exists x P(x)$ (d) $\exists x P(x) \supset \forall x P(x)$.
(e) $\exists y (P(y) \vee \forall x (P(x) \supset Q))$.

(См. правый столбец в (2).)

17.6. Покажите, что, каковы бы ни были переменная x и формула A, $\models A$ тогда и только тогда, когда $\models \forall x A$. Обобщите на произвольное число переменных.

17.7*. Найдите: (a) формулу, которая была бы 1-общезначимой и 2-общезначимой, но не 3-общезначимой; (b) формулу, которая была бы 1-, 2-, 3-общезначимой, но не 4-общезначимой.

§ 18. Теория моделей; основные результаты об общезначимости

Перенесение теоремы 1 § 3 на исчисление предикатов требует некоторых хлопот, и мы займемся этим только в § 19 (теорема 17), но в том частном случае, когда формула, в которую производится подстановка, — это формула исчисления высказываний, достаточно рассуждений § 2. Таким образом, теорема 1 справедлива (с «$\models$», относящимся к исчислению предикатов), когда E — любая формула исчисления высказываний, в которую входят только атомы (т. е. 0-местные ионы) $P_1, \ldots, P_n$, а $A_1, \ldots, A_n$ — произвольные формулы исчисления предикатов. Следовательно, теорема 2 оказывается верной, когда A, B, C — произвольные формулы исчисления предикатов. Тем же рассуждением, что и раньше, устанавливаем, что теорема 3 верна при произвольных формулах A, B исчисления предикатов. Обобщения теорем 4—7a мы отложим до § 19.

В ближайшей теореме (теорема 15) мы обобщим результаты примера 4 и упр. 17.4. Это будет обобщением теоремы 1 на исчисление предикатов, но составляет лишь простейший частный случай окончательного обобщения (теорема 17).

Чтобы обобщить результат $\models P(r) \supset \exists x P(x)$ (пример 4), мы заменим два элементарных высказывания P(x) и P(r) двумя произвольными формулами, находящимися между собой в таком отношении, чтобы рассуждения из примера 4 по-прежнему проходили. С этой целью рассмотрим формулу, которую обозначим «A(x)», а не «A». Через «A(r)» обозначим результат подстановки r вместо свободных вхождений x в A(x). Пусть, например, A(x) — это $\forall z(Q(x) \vee \forall x P(x, y) \vee P(z, x))$, а r — это y; тогда A(r) — это $\forall z(Q(y) \vee \forall x P(x, y) \vee P(z, y))$. В таких обозначениях наше обобщение утверждения «$\models P(r) \supset \exists x P(x)$» выглядит так: «$\models A(r) \supset \exists x A(x)$», т. е. как будто «P» просто заменяется на «A». Но не следует забывать, что таится за этими обозначениями.

Можно ли посредством тех рассуждений, которыми в примере 4 мы установили общезначимость высказывания $P(r) \supset \exists x P(x)$, установить общезначимость формулы $A(r) \supset \exists x A(x)$? Да, *если* A(r) *и* A(x) *различаются только одним: там, где в* A(x) *имеется свободное вхождение* x, *в* A(r) *находится свободное вхождение* r *(и наоборот)*. Действительно, в этом случае, какова бы ни была область D и каково бы ни было распределение (т.е. строка таблицы), для D соответствующее значение формулы A(r) фигурирует среди значений во вспомогательной таблице для A(x), используемой для нахождения значения $\exists x A(x)$, ибо значение A(r) — это и есть значение A(x), получаемое, когда переменной x приписывается тот же самый объект, что и r. А только это и было существенно в наших рассуждениях в примере 4 (см. конкретную иллюстрацию ниже).

Способ, которым получается формула A(r) из A(x), таков, что A(r) отличается от A(x) тем и только тем, что всюду, где в A(x) свободно входит x, в A(r) входит r. Но все ли *эти* вхождения r свободны в A(r)? Это зависит от того, что́ представляют собой переменные x и r, и от строения формулы A(x). Если эти вхождения (т.е. вхождения r в A(r), которые получаются *в результате* подстановки r вместо свободных вхождений x в A(x)) все свободны, то говорят, что r *свободна для* x в A(x), или, иначе, что *свободна* подстановка r вместо x в A(x) (с результатом A(r)). Тогда, как уже указывалось, можно переделать рассуждения примера 4 так, чтобы получить общий результат $\models A(r) \supset \exists x A(x)$.

Итак, пункт (b) теоремы 15 получен. Что касается пункта (a), то он является аналогичным обобщением упр. 17.4. Повторим соглашения об обозначениях и определения. Если для некоторой формулы вводится обозначение «A(x)», в котором явно указан x, то под «A(r)» мы будем понимать результат подстановки r вместо свободных вхождений x в A(x). (Не требуется, чтобы формула, обозначенная через «A(x)», на самом деле содержала x свободно: если A(x) не содержит свободно x, то A(r) — это сама A(x). Не исключено также и то, что A(x) содержит свободно другие переменные, кроме x.) Мы говорим, что r *свободна для* x *в* A(x) или же что подстановка r вместо x *свободна*, если те вхождения r в A(r), которые возникают в результате подстановки, свободны.

Теорема 15. *Пусть* x — *произвольная переменная*, A(x) — *произвольная формула*, r — *произвольная переменная, не обязательно отличная от* x, *и* A(r) — *результат подстановки* r *вместо свободных вхождений* x *в* A(x). *Тогда если* r *свободна для* x *в* A(x), *то*

$$\text{(a)}\ \models \forall x\, A(x) \supset A(r). \qquad \text{(b)}\ \models A(r) \supset \exists x\, A(x).$$

Доказательство уже намечено, но мы проиллюстрируем его на примере. Заодно покажем, как может рухнуть доказательство (вместе с заключением), если не удовлетворяется последнее условие теоремы (пример 6).

Пример 5. Пусть A(x) — это $\forall z\,(Q(x) \vee \forall x\, P(x, y) \vee P(z, x))$, а r — это y. Тогда A(r) есть $\forall z\,(Q(y) \vee \forall x\, P(x, y) \vee P(z, y))$, где первое и третье вхождения y составляют полный список вхождений, возникших в результате постановки y вместо свободных вхождений x в A(x). Оба эти новых вхождения y сами свободны. Значит, r свободна для x в A(x). При этих условиях теорема применима и гарантирует общезначимость формулы $A(r) \supset \exists x\, A(x)$, т. е. формулы

$$\forall z\,(Q(y) \vee \forall x\, P(x, y) \vee P(z, y)) \supset \exists x\, \forall z\,(Q(x) \vee \forall x\, P(x, y) \vee P(z, x)).$$

Для иллюстрации доказательства теоремы на примере этой формулы возьмем область $D = \{1, 2\}$ и распределение, которое приписывает функцию $\mathfrak{l}_4(x)$ формуле Q(x), $\mathfrak{l}_7(x, y)$ формуле P(x, y) и значение 2 переменной y (см. примеры 1 и 3). Обе строки вспомогательной таблицы для A(x), на входах которой помещаются значения, приписываемые x (как требуется для вычисления $\exists x\, A(x)$), получаются при вычислении двух выражений:

$$A(1):\qquad \forall z\,(\mathfrak{l}_4(1) \vee \forall x\, \mathfrak{l}_7(x, 2) \vee \mathfrak{l}_7(z, 1)),$$
$$A(2):\qquad \forall z\,(\mathfrak{l}_4(2) \vee \forall x\, \mathfrak{l}_7(x, 2) \vee \mathfrak{l}_7(z, 2)),$$

а значение A(r) дается выражением

$$A(r):\qquad \forall z\,(\mathfrak{l}_4(2) \vee \forall x\, \mathfrak{l}_7(x, 2) \vee \mathfrak{l}_7(z, 2)),$$

причем последнее тождественно второму из тех двух выражений, которые надо вычислить во вспомогательной таблице. Во вспомогательной же таблице стоят только $\mathfrak{f}$ (как во втором случае, рассмотренном в примере 4). И так как истинностное значение A(r) — это одно из двух значений вспомогательной (второй) таблицы, то оно есть $\mathfrak{f}$, так что значение $A(r) \supset \exists x\, A(x)$ есть $\mathfrak{t}$. Если мы изменим распределение значений и возьмем, например, $\mathfrak{l}_6(x, y)$ вместо $\mathfrak{l}_7(x, y)$, то вспомогательная таблица даст $\mathfrak{t}$ (первая строка в A(1)), значит, $\exists x\, A(x)$ примет значение $\mathfrak{t}$ и $A(r) \supset \exists x\, A(x)$ даст $\mathfrak{t}$ в любом случае. Точно так же, каковы бы ни были область D и выбираемые распределения, $A(r) \supset \exists x\, A(x)$ дает $\mathfrak{t}$ в силу одного из приведенных соображений.

Пример 6. Возьмем A(x) как в примере 5, но в качестве r возьмем z. Тогда A(r) — это $\forall z(Q(z) \vee \forall x P(x, y) \vee P(z, z))$. Второе и четвертое вхождения z возникают в результате подстановки, и оба не являются свободными. Следовательно, подстановка не свободная, и теорема неприменима. Чтобы посмотреть, где здесь нарушается ход рассуждений, приводивший нас к доказательству теоремы, рассмотрим пример, получаемый, когда в качестве D взято множество $\{1, 2\}$, а в качестве распределения значений — функции $\mathfrak{l}_4(x)$, $\mathfrak{l}_7(x, y)$, 2. Те значения истинности, которые мы теперь ищем во вспомогательной таблице A(x), — это значения A(1) и A(2), как было в примере 5, но значение истинности A(r) теперь таково:

$$A(r): \qquad \forall z(\mathfrak{l}_4(z) \vee \forall x\, \mathfrak{l}_7(x, 2) \vee \mathfrak{l}_7(z, z)).$$

Это последнее выражение не совпадает ни с одним из двух предыдущих (A(1) и A(2)). Оно равно $\mathfrak{t}$, тогда как A(1) и A(2) оба (как и выше) дают $\mathfrak{f}$, так что $\exists x A(x)$ дает $\mathfrak{f}$. Значит, $A(r) \supset \exists x A(x)$ принимает значение $\mathfrak{f}$, и, таким образом, $A(r) \supset \exists x A(x)$ не общезначима.

В следующей теореме мы обозначаем некоторую формулу через «A(x)», указывая x явно. (Формула, обозначенная через «A(x)», не обязана содержать x свободно и может содержать свободно другие переменные.) В данном случае мы делаем это, чтобы противопоставить A(x) другой формуле, обозначаемой «C», куда x свободно не входит. (Обычно, когда одни формулы обозначают символами, содержащими переменную x, а другие — не содержащими, это делают для того, чтобы напомнить, что последние формулы должны не содержать x, тогда как первые могут (но не обязаны) содержать x свободно.)

Теорема 16. *Пусть* x — *произвольная переменная,* A(x) — *произвольная формула,* C — *произвольная формула, в которой нет свободных вхождений* x. *Тогда:*

(a) *Если* $\models C \supset A(x)$, *то* $\models C \supset \forall x A(x)$;   (b) *Если* $\models A(x) \supset C$, *то* $\models \exists x A(x) \supset C$.

Доказательство. (a) Пусть $\models C \supset A(x)$. Надо доказать, что $\models C \supset \forall x A(x)$. Выберем произвольную область D. Для нее рассмотрим произвольное распределение логических функций и элементов из D по всем ионам и свободным переменным, входящим в $C \supset \forall x A(x)$ (т. е. рассмотрим вход произвольной строки таблицы этой формулы, причем на входе расположены только ее ионы и ее свободные переменные). Назовем его «заданным распределением». Так как x не входит свободно в C, то заданное распределение не содержит значения для переменной x. Случай 1: при данном распределении C принимает значение $\mathfrak{f}$. Тогда, согласно таблице для $\supset$, формула $C \supset \forall x A(x)$ дает $\mathfrak{t}$. Случай 2: при данном распределении C дает t. Тогда, даже если мы продолжим наше распределение добавлением к нему *произвольного* значения для переменной x, формула C не изменит своего значения t (ведь C не зависит от изменения x; см. сказанное перед теоремой 3). Значит, раз $C \supset A(x)$ дает t (в силу условия, что $\models C \supset A(x)$), то A(x) дает t по определению $\supset$. Так как это получается при продолжении заданного распределения посредством приписывания произвольного значения переменной x, то $\forall x A(x)$ дает t при заданном распределении согласно правилу вычисления значения $\forall$. Значит, в силу таблицы для $\supset$ формула $C \supset \forall x A(x)$ дает t при заданном распределении. Пункт (b) рассматривается с помощью аналогичного разбора случаев (упр. 18.2).

Упражнения. 18.1. Позволяет ли теорема 15 прийти к выводу, что следующие формулы общезначимы (если нет, то укажите, почему тут не применима теорема 15; попробуйте другими способами установить, общезначимы ли все-таки эти формулы):

(a) $\forall x \exists y P(x, y) \supset \exists y P(y, y)$.
(b) $\forall x \exists z P(x, z) \supset \exists z P(y, z)$.
(c) $\exists y P(y, y) \supset \exists x \exists y P(x, y)$.
(d) $P(x, x) \supset \exists y P(x, y)$.
(e) $P(x, x) \supset \exists y P(y, y)$.
(f) $\forall y P(x, y) \supset P(y, y)$.

18.2. Докажите теорему 16 (b).

18.3. Докажите, что теорема 16, вообще говоря, не верна, если не выполняется условие, что C не содержит x свободно. (*Указание*: возьмите в качестве A(x) и C одну и ту же формулу P(x).)

*§ 19. Теория моделей; дальнейшие результаты об общезначимости[1])

Рассмотрим теперь, при каких условиях сохраняет силу для исчисления предикатов то рассуждение, которое привело нас к теореме 1 § 3 (читателю рекомендуется перечитать доказательство теоремы 1).

Сначала рассмотрим процесс подстановки вместо иона. Так как ион (например, P(—)) обозначает пропозициональную функцию, то процесс подстановки вместо P(—) скорее аналогичен математической практике замещения функциональной, а не числовой переменной. Например, рассмотрим высказывание

(a) $$\forall x\, [f(-x) + f(x) = 2f(0)],$$

которое верно для некоторых функций f и ложно для других. (Пока мы заняты только процессом подстановки, действительное

[1]) Некоторые из результатов этого параграфа не будут использоваться в дальнейшем, а другие будут независимо получены в теории доказательств.

истинностное значение формулы не принимается в расчет.) Для описания подстановок в (a) целесообразно зафиксировать называющую форму для функции f, скажем «$f(w)$». Если в (a) вместо «$f(w)$» подставить «$\cos w$» или «$w^3 - w$», то соответственно получим

(b) $$\forall x\,[\cos(-x) + \cos x = 2\cos 0],$$

(c) $$\forall x\,[((-x)^3 - (-x)) + (x^3 - x) = 2(0^3 - 0)].$$

При выполнении этих подстановок аргументы «$-x$», «x», «0» функции «f», фигурирующие в (a), подставляются вместо переменной «w» в называющих формах «$\cos w$» и «$w^3 - w$». Применительно к (b) возможен более простой анализ: можно рассматривать произведенную подстановку как замену «f» на «cos». В случае же (c) эта возможность исключена, ибо единственное постоянное имя для обозначения подставляемой функции — это «$w^3 - w$», а оно содержит «w». Конечно, мы могли бы ввести имя для $w^3 - w$, в котором не было бы «w», например «g», положив $g(w) = w^3 - w$. Тогда при простой замене «f» на «g» в (a) получим

(c′) $$\forall x\,[g(-x) + g(x) = 2g(0)].$$

Но мы не хотим использовать «g» в качестве имени функции $w^3 - w$: ведь нам надо явно указать значения «$g(-x)$», «$g(x)$» и «$g(0)$» в (c′). И мы тем самым возвращаемся к (c), где вместо «w» в «$w^3 - w$» подставлены «$-x$», «x» и «0».

Второй пример похож на те, которые будут часто встречаться в исчислении предикатов и с которыми мы будем поступать подобным же способом. Пусть, скажем, мы должны подставить нечто вместо подформулы $\mathrm{P(w)}$ в $\mathrm{P(y) \supset \exists x P(x)}$. (Здесь мы слегка изменим пример, предшествующий теореме 15.) Мы подставляем какую-то формулу, которая, вообще говоря (но не обязательно), содержит свободно w; обозначим ее временно «$\mathrm{A(w)}$». Результат подстановки можно записать так: $\mathrm{A(y) \supset \exists x\, A(x)}$ (попросту поменяв «P» на «A»), но при удалении временного обозначения «$\mathrm{A(w)}$» в $\mathrm{P(y) \supset \exists x P(x)}$ на места *свободных вхождений* w в той формуле, которая сокращенно обозначена «$\mathrm{A(w)}$», подставляются аргументы y и x иона P. Здесь мы используем то соглашение об обозначениях, которое введено как раз перед теоремой 15, причем роль x играет w, а роль r играют y и x по очереди. Возьмем пять разных выражений для $\mathrm{A(w)}$ и посмотрим, какие результаты дает подстановка их вместо $\mathrm{P(w)}$ в $\mathrm{P(y) \supset \exists x P(x)}$; вот они:

	$\mathrm{A(w)}$	$\mathrm{A(y) \supset \exists x A(x)}$
I.	$\mathrm{\forall z Q(w, z, w)}$	$\mathrm{\forall z Q(\underline{y}, z, \underline{y}) \underline{\supset \exists x} \forall z Q(\underline{x}, z, \underline{x})}$
II.	$\mathrm{\forall y Q(w, y, w)}$	$\mathrm{\forall y Q(\underline{y}, y, \underline{y}) \underline{\supset \exists x} \forall y Q(\underline{x}, y, \underline{x})}$

III. $Q(w, u, w)$ $\qquad Q(\underline{y}, u, \underline{y}) \underline{\supset \exists x Q}(\underline{x}, u, \underline{x})$

IV. $Q(w, x, w)$ $\qquad Q(\underline{y}, x, \underline{y}) \underline{\supset \exists x Q}(\underline{x}, x, \underline{x})$

V. $\forall w P(w) \vee Q(w)$ $\qquad \forall w P(w) \vee Q(\underline{y}) \underline{\supset \exists x} (\forall w P(w) \vee Q(\underline{x}))$

Из этих пяти подстановок мы только I, III и V считаем «свободными». В примерах же II и IV вычисление строки истинностной таблицы формулы $A(y) \supset \exists x A(x)$ (при заданной D) не всегда будет распадаться на две части: одну, заключающуюся в определении некоторой логической функции (описываемой вспомогательной таблицей, на входах которой стоят значения, приписываемые w) как значения $A(w)$, и вторую, совпадающую с вычислением истинностного значения формулы $P(y) \supset \exists x P(x)$, исходя из этой логической функции, приписанной в качестве значения $P(w)$. Однако такая расчлененность вычислений необходима для рассуждений, обобщающих теорему 1. Коротко говоря, затруднение с формулой II состоит в том, что свободное вхождение y в $P(y)$ связывается квантором $\forall y$ в $A(w)$; затруднение с формулой IV состоит в том, что свободное вхождение x в $A(w)$ связывается квантором $\exists x$ в $\exists x P(x)$. Проанализируем эти явления глубже.

Мы подчеркнули в примерах I—V применительно к $A(y) \supset \exists x A(x)$ те части формул, которые происходят из $P(y) \supset \exists x P(x)$, оставив неподчеркнутыми те части, которые происходят от соответствующих $A(w)$. Так, второе и четвертое вхождения y происходят от y из $P(y) \supset \exists x P(x)$, тогда как первое, третье, пятое и шестое происходят из вхождений y в $A(w)$, т. е. в $\forall y Q(w, y, w)$. Неприятность, возникающая в II, состоит в том, что первый квантор $\forall y$, происходящий из $A(w)$, связывает не только первое и третье вхождения y (что было бы нормально), но также второе и четвертое. Точно так же в IV квантор $\exists x$, происходящий из $P(y) \supset \exists x P(x)$, связывает не только второе, третье и пятое x (что было бы нормально), но и четвертое (происходящее из $A(w)$).

Мы хотели бы от «свободной» подстановки, чтобы она не порождала такого рода чехарды в связывании переменных. И мы будем говорить, что подстановка *свободна*, если в формуле, получаемой в результате подстановки: (А) ни один неподчеркнутый квантор не связывает никакой подчеркнутой переменной; (В) ни один подчеркнутый квантор не связывает неподчеркнутой переменной.

Теперь опишем процедуру подстановки вместо ионов в общем случае. Пусть E — формула, содержащая различные ионы с называющими формами

(1) $\qquad P_1(w_1, \ldots, w_{p_1}), \ \ldots, \ P_n(w_1, \ldots, w_{p_n}),$

где $n \geqslant 1$, а $p_1, \ldots, p_n \geqslant 0$, и только эти ионы. Это значит, что каждая элементарная составляющая E имеет вид $P_i(r_1, \ldots, r_{p_i})$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, а $r_1, \ldots, r_{p_i}$ — список переменных, не обязательно различных и не обязательно отличных от переменных $w_1, w_2, w_3, \ldots$. *Подстановка* формул

(2) $\qquad A_1(w_1, \ldots, w_{p_1}), \ldots, A_n(w_1, \ldots, w_{p_n})$

вместо (1) *в* E (*с результатом* E*) выполняется посредством одновременного замещения каждой элементарной составляющей $P_i(r_1, \ldots, r_{p_i})$ формулы E на $A_i(r_1, \ldots, r_{p_i})$, где (в духе обозначений, введенных в § 18) выражение $A_i(r_1, \ldots, r_{p_i})$ является результатом одновременной подстановки $r_1, \ldots, r_{p_i}$ вместо свободных вхождений переменных $w_1, \ldots, w_{p_i}$ (если они имеются) в $A_i(w_1, \ldots, w_{p_i})$.

«Правило подчеркивания», которое служило нам для выражения определения «свободной подстановки», выглядит так: Сначала подчеркнуть полностью E за вычетом тех частей $P_i(r_1, \ldots, r_{p_i})$, которые должны быть замещены при переходе к E*. Затем в тех формулах $A_i(r_1, \ldots, r_{p_i})$, которыми замещаются эти части, подчеркнуть вхождения $r_1, \ldots, r_{p_i}$, попадающие на места свободных вхождений $w_1, \ldots, w_{p_i}$ в $A_i(w_1, \ldots, w_{p_i})$ (т. е. подчеркнуть вхождения $r_1, \ldots, r_{p_i}$ в $A_i(r_1, \ldots, r_{p_i})$, получающиеся от подстановки на место $w_1, \ldots, w_{p_i}$ в $A_i(w_1, \ldots, w_{p_i})$)[1].

В случае когда E* получена из E путем свободной подстановки, вычисление произвольной строки в таблице для E* (при заданной области D) можно разложить на два этапа: сначала определить логические функции

(3) $\qquad \mathfrak{l}_1(w_1, \ldots, w_{p_1}), \ldots, \mathfrak{l}_n(w_1, \ldots, w_{p_n})$

как значения, приписываемые формулам (2); затем — другие шаги, на которых надо заниматься подчеркнутыми операторами из E* (в нашем примере это $\exists x$ и $\supset$). Этапы эти совпадают с вычислением истинностного значения E, исходя из функций (3), которые приписываются в качестве значений формулам (1), и из тех значений свободных переменных формулы E, которые приписывались в этой строке таблицы E*. Значит, если $\models$ E, то $\models$ E*. Итак,

Теорема 17. (Подстановка вместо ионов, обобщение теоремы 1.) *Пусть* E* — *формула, полученная из* E *с помощью подстановки* (2) *вместо* (1), *как это описано выше. Если эта подстановка свободна, то: Если* $\models$ E, *то* $\models$ E*.

[1]) Чтобы определить, является ли подстановка (2) в (1) свободной, нам не нужно подчеркивать ничего, кроме вхождений переменных. (Другие части формул подчеркнуты исключительно для облегчения проведения следующего ниже доказательства.) Разумеется, можно сформулировать определение «свободной подстановки» без упоминания о подчеркивании. Ср. [ВМ], стр. 142 и 75.

Ограничиваясь лишь частью предыдущего рассуждения применительно к $A(w_1, \ldots, w_p)$ и $A(r_1, \ldots, r_p)$ (при $n=1$ нет надобности в индексе «i»), получаем следующую далее теорему. В самом деле, при высказанном условии в произвольной строке таблицы для $A(r_1, \ldots, r_p)$ значение этой формулы получается указанием сначала логической функции $\mathfrak{l}(w_1, \ldots, w_p)$, приписываемой $A(w_1, \ldots, w_p)$, а затем использованием таблицы значений этой функции, когда переменным $w_1, \ldots, w_p$ придаются те же значения, что и переменным $r_1, \ldots, r_p$.

Теорема 18. (Подстановка вместо индивидных переменных; см. примечание 4 на стр. 106.) *Пусть* $w_1, \ldots, w_p$ — *произвольные различные переменные*, $A(w_1, \ldots, w_p)$ — *произвольная формула*, $r_1, \ldots$ $\ldots, r_p$ — *произвольные переменные, не обязательно отличные друг от друга или от переменных* $w_1, \ldots, w_p$, *и, наконец*, $A(r_1, \ldots, r_p)$ — *результат одновременной подстановки* $r_1, \ldots, r_p$ *вместо свободных вхождений* $w_1, \ldots, w_p$ *соответственно в* $A(w_1, \ldots, w_p)$. *Если подстановка свободна* (т. е. если те вхождения $r_1, \ldots, r_p$ в $A(r_1, \ldots, r_p)$, которые получаются в результате этой подстановки, свободны), *то*: *Если* $\models A(w_1, \ldots, w_p)$, *то* $\models A(r_1, \ldots, r_p)$.

Продолжим изучение вопроса, какие результаты исчисления высказываний, касающиеся теории общезначимости (из § 6), можно перенести на исчисление предикатов.

Теорема 19. (Теорема 4 применительно к исчислению предикатов.) (a) *Для любой области* D *и любого распределения значений* $A \sim B$ *принимает значение* $\mathfrak{t}$ *тогда и только тогда, когда* A *и* B *имеют одинаковые истинностные значения. Отсюда:* (b)° $\models A \sim B$ *тогда и только тогда, когда для всякой предметной области* D *формулы* A *и* B *имеют одинаковые таблицы.*

Теорема 5, ее следствие и (α)—(ζ) из § 5 (а тем самым и метод цепей) переносятся на исчисление предикатов без каких бы то ни было изменений в их тексте. (Результаты эти верны для всякой области D, в частности вместо «$\models$» можно писать «$\overline{\overline{D}}$-$\models$».)

Две конгруэнтные формулы (см. конец § 16) имеют одинаковые таблицы истинности во всякой заданной области D. Ведь различия в обозначениях связанных переменных не сказываются на определении таблицы этих формул. Отсюда по теореме 19(b) следует

Теорема 20. *Если* A *конгруэнтна* B, *то* $\models A \sim B$.

Теперь мы могли бы выписать перечень схем общезначимых формул, аналогичный данному в теореме 2 для исчисления высказываний. Но мы подождем того момента, когда сможем установить эти результаты в теории доказательств (теорема 26 § 25).

Здесь же мы дадим две из них, нужные нам для обобщения теорем 6 и 7 на исчисление предикатов:

*82a. $\models \neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$. *82b°. $\models \neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$.

Доказательства. *82a. Возьмем произвольную область D и в ней произвольное распределение значений по ионам и свободным переменным формулы $\neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$. Рассмотрим вспомогательную таблицу для $A(x)$ как логическую функцию от x. Случай 1: таблица эта в одной из строк имеет $\mathfrak{t}$. Тогда $\exists x A(x)$ принимает значение $\mathfrak{t}$, а $\neg \exists x A(x)$ — значение $\mathfrak{f}$. Вспомогательная таблица $\neg A(x)$ имеет, следовательно, $\mathfrak{f}$ в одной из своих строк, той самой, где $A(x)$ дает $\mathfrak{t}$. Следовательно, $\forall x \neg A(x)$ также принимает значение $\mathfrak{f}$. Отсюда, пользуясь таблицей связки $\sim$ (или же теоремой 19(a)), видим, что $\neg \exists x \forall A(x) \sim \forall x \neg A(x)$ принимает значение $\mathfrak{t}$. Случай 2: вспомогательная таблица для $A(x)$ дает только $\mathfrak{f}$. Тогда и $\neg \exists x A(x)$ и $\forall x \neg A(x)$ имеют значение $\mathfrak{t}$, а следовательно, $\neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$ снова дает $\mathfrak{t}$.

*82b. По методу цепей: $\models \exists x \neg A(x) \sim \neg \neg \exists x \neg A(x)$ [*49] $\sim$ $\sim \neg \forall x \neg \neg A(x)$ [*82a] $\sim \neg \forall x A(x)$ [*49].

Теперь можно обобщить на исчисление предикатов теоремы 6 (с ее следствием), 7, 6a и 7a; для этого надо включить в описание операций † и $'$ замену $\forall$ на $\exists$ и обратно. Формулы *82a и *82b участвуют в доказательстве обобщенной теоремы 6: с их помощью можно перемещать $\neg$ вправо через кванторы. Для теоремы 7 уже есть нужное правило подстановки (в виде теоремы 17); одновременная подстановка $\neg P_i(w_1, \ldots, w_{p_i})$ вместо каждого иона $P_i(w_1, \ldots, w_{p_i})$ ($i = 1, \ldots, n$) свободна (тривиальным образом). Переходя к теоремам 6a и 7a, замечаем, что правило оценки для $\forall$, если записать его марсианскими буквами T и F, в точности совпадает с нашим правилом оценки для $\exists$ с буквами $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$, и наоборот. В той сводке результатов, которая дается в теореме 26, отчетливо видны многочисленные пары формул, которые следуют друг из друга (в смысле $\models$) по двойственности (обобщение теорем 7 и 7a).

Упражнения. 19.1. Выполните указанные подстановки. Про каждую установите, свободна она или нет; в последнем случае объясните, почему:

(a) $\exists z P(z, w, y)$, Q вместо $P(w)$, Q в $P(z) \supset Q$.
(b) $\exists x P(x, w, y)$, $Q(w)$ вместо $P(w)$, $Q(w)$ в $\forall y (P(z) \supset Q(y))$.
(c) $\exists z P(z, w, y)$, $Q(w)$ вместо $P(w)$, $Q(w)$ в $\forall x (P(x) \supset Q(x))$.
(d) $P(w, v, x)$, Q вместо $P(v, w)$, $Q(w)$ в $\forall x (P(x, y) \vee Q(x) \supset P(y, x))$.
(e) $\exists z Q(z, w, w, y)$, $\forall x P(v, w, x)$ вместо $P(w)$, $Q(v, w)$ в $\forall x (P(x) \supset Q(x, x))$.
(f) $\exists z Q(z, w, w, y)$, $\forall x (P, v, w, x)$ вместо $P(w)$, $Q(v, w)$ в $\forall x (P(x) \supset$ $\supset \forall y Q(y, y))$.

(g) $\exists z \forall w P(z, w, y)$, $Q(z, w) \& \exists w R(w)$ вместо $P(w)$, $Q(w)$ в $\exists z P(z) \supset Q(z)$.

19.2. Проанализируйте пример 5, рассматривая его как применение теоремы 17 к $\models P(r) \supset \exists x P(x)$, и покажите, почему эту теорему нельзя применить к примеру 6.

19.3. (a) Докажите (классифицируя распределения значений), что $\models P \& \exists x Q(x) \sim \exists x (P \& Q(x))$. (b) При каких условиях можно заключить, что $\models A \& \exists x B(x) \sim \exists x (A \& B(x))$, где A и B(x) — произвольные формулы? (c) Докажите, что $\models A \& \exists x B(x) \sim \exists x (A \& B(x))$ верно не при любом выборе формул A и B(x).

19.4. Найдите эквивалентные формулы, в которых $\neg$ действует только непосредственно на атомы:

(a) $\neg \forall x \{(P(x) \vee \exists y \neg Q(x, y)) \& \forall y R(y)\}$.
(b) $\neg \{\neg (\exists x P(x) \supset \forall x Q(x, y)) \vee \forall x \neg P(x)\}$.

§ 20. Теория моделей; следование

В § 7 мы ввели «следование» в исчислении высказываний. Очевидным образом приспосабливая это определение к исчислению предикатов, будем говорить, что B является *следствием* из $A_1, \ldots, A_m$ $(m \geqslant 1)$ в исчислении предикатов (или в силу исчисления предикатов) (и пишем $A_1, \ldots, A_m \models B$) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: в таблице истинности, на входах которой помещен список всех ионов и свободных переменных, входящих в $A_1, \ldots, A_m$, B, формула B дает $\mathfrak{t}$ во всех тех строках, в которых $A_1, \ldots, A_m$ одновременно дают $\mathfrak{t}$, и это выполняется при любой области D. Как и ранее, порядок ионов и свободных переменных в этом списке безразличен. (Аналогично определяется «$A_1, \ldots, A_m$ $\overline{\overline{D}}$-$\models$B», если речь идет об области D с $\overline{\overline{D}}$ элементами. Ср. § 17.)

Пример 7. Какие из четырех формул $\neg P(x)$, $\neg P(y)$, $\forall x \neg P(x)$, $\neg \forall x P(x)$ являются следствиями формулы $\neg P(x)$? Иначе, в символической форме: какие из четырех утверждений «$\neg P(x) \models \neg P(x)$», «$\neg P(x) \models \neg P(y)$», «$\neg P(x) \models \forall x \neg P(x)$», «$\neg P(x) \models \neg \forall x P(x)$» верны? Надо сравнить таблицы истинности этих четырех формул с таблицей истинности допущения $\neg P(x)$ (выписанного в начале). Начнем с того, что построим таблицы истинности логических функций при $D = \{1, 2\}$, пользуясь, как и ранее, символами $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \mathfrak{l}_4$:

x	$\mathfrak{l}_1(x)$	$\mathfrak{l}_2(x)$	$\mathfrak{l}_3(x)$	$\mathfrak{l}_4(x)$
1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$

Удобства ради поместим P(x), x и y на входах всех четырех таблиц (a)—(d), хотя y появляется только при изучении «$\neg P(x) \models \neg P(y)$».

$P(x)$	x	y	(a) $\neg P(x)$	(b) $\neg P(y)$	(c) $\forall x \neg P(x)$	(d) $\neg \forall x P(x)$
1. $\mathfrak{I}_1(x)$	1	1	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
2. $\mathfrak{I}_1(x)$	1	2	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
3. $\mathfrak{I}_1(x)$	2	1	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
4. $\mathfrak{I}_1(x)$	2	2	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
5. $\mathfrak{I}_2(x)$	1	1	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
6. $\mathfrak{I}_2(x)$	1	2	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
7. $\mathfrak{I}_2(x)$	2	1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
8. $\mathfrak{I}_2(x)$	2	2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
9. $\mathfrak{I}_3(x)$	1	1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
10. $\mathfrak{I}_3(x)$	1	2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
11. $\mathfrak{I}_3(x)$	2	1	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
12. $\mathfrak{I}_3(x)$	2	2	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$
13. $\mathfrak{I}_4(x)$	1	2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
14. $\mathfrak{I}_4(x)$	2	1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
15. $\mathfrak{I}_4(x)$	2	1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
16. $\mathfrak{I}_4(x)$	2	2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$

Надо рассмотреть те строки, где в столбце (a) стоит $\mathfrak{t}$, т. е. строки 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16. В каждой из них (a) и (d) дают $\mathfrak{t}$. Значит, «$\neg P(x) \models \neg P(x)$» и «$\neg P(x) \models \neg \forall x Px$» являются верными утверждениями при области $D = \{1, 2\}$. Чтобы доказать, что они верны и без ограничений на число элементов, надо убедиться, что тот же самый результат получается, какова бы ни была непустая область D. Предоставляем это выполнить читателю в качестве упр. 20.1. В строке 7 формулы (b) и (c) дают $\mathfrak{f}$. Значит (уже без рассмотрения других областей D), заключаем, что «$\neg P(x) \models \neg P(y)$» и «$\neg P(x) \models \forall x \neg P(x)$» неверны.

Как и прежде (§ 7), «$A \models B$» является более сильным утверждением, чем «Если $\models A$, то $\models B$».

При этом определении «следования» теорема 8 и ее следствие обобщаются на исчисление предикатов. Доказательства по сути совпадают с ранее данными.

Остается заметить, что это определение «следования» (назовем его «(I)») не является единственно известным в исчислении предикатов (и вообще в математике).

В этом определении мы рассматривали ионы и свободные переменные формул $A_1, \ldots, A_m$ точно так же, как в § 7 мы рассматривали пропозициональные атомы (ныне 0-местные ионы). Это значит, что каждый ион рассматривался как обозначение для какого-то предиката, а каждая переменная (в своих свободных вхождениях) — как обозначение для какого-то элемента из D. Этот предикат, или элемент из D, должен в течение всего рассуждения (в исчислении предикатов), касающегося $A_1, \ldots, A_m$, B, оставаться одним и тем же, хотя и неизвестным нам; для рассуждений в исчислении предикатов их и не надо знать точно. Руководствуясь этим, мы помещаем на входе все ионы и свободные переменные из $A_1, \ldots, A_m$, B, когда нужно проверить, что B принимает значение t всегда, когда $A_1, \ldots, A_m$ одновременно имеют значение t.

При другом определении «следования», которое мы дадим ниже (обозначим его «(II)»), свободные переменные или некоторые из них трактуются иначе. В частности, мы не будем требовать, чтобы те элементы из D, которые обозначены свободными переменными, оставались бы одними и теми же во всех рассуждениях, касающихся $A_1, \ldots, A_m$, B, а разрешим им быть различными в разных формулах или в разных вхождениях одной и той же формулы.

Чтобы увидеть, чему на практике отвечают эти две возможные трактовки свободных переменных, рассмотрим примеры из языка неформальной математики. Оттенок этот уже известен каждому, кто знаком с алгеброй и различает *условное равенство* (I) (уравнение) и *тождественное равенство* (II). Вот примеры условных равенств: (1) $x^2-2x-3=0$ и (2) $y=x+1$; тождественных равенств: (3) $x+y=y+x$ и (4) $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Из (1) нельзя вывести ни что $2^2-2\cdot 2-3=0$, ни что $y^2-2y-3=0$, но можно вывести $(x-3)(x+1)=0$, откуда $x-3=0 \vee x+1=0$ и окончательно $x=3 \vee x=-1$. Из (3) можно вывести $3+1=1+3$, как и $(x+z)+2x=2x+(x+z)$.

Будем говорить, что в (1) и (2) для переменных имеется *условная интерпретация* (I), а в (3) и (4) — *интерпретация всеобщности* (II). При условной интерпретации переменной x в допущении A(x), содержащем x свободно, всякое заключение, извлекаемое из этого допущения, должно относиться к тому же самому элементу из D, который фигурирует в A(x), выражающем «условие на x». Когда x имеет интерпретацию всеобщности, мы вправе умозаключать все, что следует из предположения об истинности A(x) при всех x, т. е. о «тождественной» истинности, или истинности «в общем случае». При извлечении следствий из (1) можно говорить, что переменная «x» «фиксирована», ибо она выражает одно и то же число на всем протяжении вывода. При извлечении следствий из (3) «x» и «y» «разрешено варьироваться», ибо их значения могут меняться[1]).

[1]) В математике буквы часто подразделяются на «константы» и «переменные». При более внимательном рассмотрении оказывается, что это различие *в употреблении* символов всегда зависит от контекста (какова бы ни была

Такого различия между двумя интерпретациями не приходилось бы проводить, если бы использовались только связанные переменные. Однако использование свободных переменных весьма удобно, как показывает, например, их частое использование в математических текстах.

Мы можем следующим образом записать наши выводы из (1), связывая x и удаляя допущение (1):

(a) $$\forall x\,(x^2-2x-3=0 \supset x=3 \vee x=-1).$$

В (3) мы могли бы использовать связанные переменные в самом допущении, записывая $\forall x\,\forall y\,(x+y=y+x)$; тогда после удаления допущения результат получил бы вид

(b) $$\forall x\,\forall y\,(x+y=y+x) \supset 3+1=1+3.$$

Заметьте, что в (a) скобка закрыта *после* $\supset$, а в (b) — *перед* $\supset$.

В каждом случае, когда мы извлекаем следствия из допущений, мы должны решать, какой из интерпретаций (I) или (II) пользоваться, в зависимости от роли, которую хотим приписать нашим допущениям. Выбор этот может быть сделан порознь для каждой свободной переменной каждого допущения.

Неудачный выбор не повлечет ошибки, если мы будем записывать именно то, что мы сделали. Например, придавая x в (1) интерпретацию всеобщности (которая здесь не подходит), можно вывести $2^2-2\cdot 2-3=0$ и тем самым установить

(c) $$\forall x\,(x^2-2x-3=0) \supset 2^2-2\cdot 2-3=0,$$

что верно, но не интересно. Мы сделаем ошибку только в случае, если будем утверждать, что $2^2-2\cdot 2-3=0$ выводится из (1) при условной интерпретации и, таким образом, что установлено

(d) $$\forall x\,(x^2-2x-3=0 \supset 2^2-2\cdot 2-3=0).$$

терминология; ср. [BM], стр. 137). Данная буква используется в качестве имени некоторого объекта, и на всем протяжении некоторого контекста каждое вхождение этой буквы используется как имя именно этого объекта. Вне этого контекста нам указано, что этот объект может являться элементом некоторой совокупности или множества D. Следовательно, рассматриваемая буква «фиксирована» внутри этого контекста, тогда как вне контекста она может «меняться».

Важно точно знать пределы этого контекста независимо от того, насколько часто рассматриваемая буква входит в него. Например, $\forall x\,(A(x) \supset B)$ и $\forall x\,A(x) \supset B$ — вовсе не одно и то же, даже если x не входит свободно в B. Как мы показали на примерах, в логических, как и в математических формулах свободная переменная обозначает произвольный элемент из D, но относительно пределов контекста остаются две возможности: (I) контекстом является рассуждение в целом, в нашем случае — весь вывод; (II) контекст — это в точности вся формула.

Квантор всеобщности $\forall x$ нужен в логике именно для того, чтобы иметь возможность сузить на часть формулы тот контекст, на протяжении которого переменная x обозначает один и тот же элемент из D.

Придавая в (d) переменной x значение 3, получаем после упрощений $0=0 \supset -3=0$, откуда $-3=0$.

Отношение следования (I), определенное в начале этого параграфа и проиллюстрированное примером 7, соответствует условной интерпретации всех свободных переменных, входящих в допущения $A_1, \ldots, A_m$. Другое отношение (II), которое будет определено ниже, отвечает интерпретации всеобщности для некоторых или всех этих переменных $x_1, \ldots, x_q$. Ради простоты предположим, что переменные $x_1, \ldots, x_q$, имеющие интерпретацию всеобщности в каком-либо из предложений $A_1, \ldots, A_m$, имеют одну и ту же интерпретацию во всех допущениях $A_1, \ldots, A_m$, куда они входят свободно [1]).

Из проведенных выше рассуждений ясно, что для получения (II) из (I) надо только связать допущения $A_1, \ldots, A_m$ кванторами всеобщности $\forall x_1, \ldots, \forall x_q$ (область действия каждого из $\forall x_1, \ldots, \forall x_q$ — одна из формул $A_1, \ldots, A_m$ целиком), а затем пользоваться определением (I), т. е. строить истинностные таблицы, упомянутые в этом определении.

Формулируя строго определение в смысле (II), мы будем использовать сжатое обозначение кванторов всеобщности.

Будем говорить, что формула A *замкнута*, если она не содержит свободных переменных (т. е. переменные в нее входят разве лишь связанно). В противном случае называем ее *открытой*. *Замыканием* формулы A, коротко «$\forall$A», назовем замкнутую формулу $\forall z_1 \ldots \forall z_p A$ (т. е. $\forall z_1 \ldots \forall z_p (A)$), где $z_1, \ldots, z_p$ — все различные свободные переменные из A, взятые для определенности в порядке их первых вхождений. Если A замкнута, то $\forall$A — это просто A; «$\forall A \supset B$» означает «$(\forall A) \supset B$» и т. д.

Пусть теперь $\forall'$ (т.е. $\forall x_1 \ldots \forall x_q$) — операция *замыкания только по* $x_1, \ldots, x_q$, получающаяся из $\forall$ опусканием в «префиксе» $\forall z_1 \ldots \forall z_p$ всех кванторов по переменным, отличным от $x_1, \ldots, x_q$. Например, если $x_1, \ldots, x_q$ — это x_1, x_2, x_3 $(q=3)$, а A свободно содержит (в порядке первых вхождений) различные переменные y_1, x_3, y_2, y_3, x_1 и только их, то $\forall$A — это формула $\forall y_1 \forall x_3 \forall y_2 \forall y_3 \forall x_1 A$, а $\forall'$A — это формула $\forall x_3 \forall x_1 A$. Таким образом, $\forall'$ состоит в приписывании $\forall x_1 \ldots \forall x_q$ с точностью до порядка кванторов и отбрасывания кванторов по переменным, не входящим свободно в область действия префикса. Когда это не будет приводить к недоразумениям (а так обычно и будет), мы не станем проводить различия между $\forall'$ и $\forall x_1 \ldots \forall x_q$.

Будем говорить, что B является *следствием* из $A_1, \ldots, A_m$ (в исчислении предикатов или в силу исчисления предикатов) *при фиксации всех переменных, кроме* $x_1, \ldots, x_q$, или же *при варьиро-*

[1]) В [BM], § 22—24, (II) рассматривается в теории доказательств без этого ограничения (см. ниже примечание на стр. 134).

вании переменных $x_1, \ldots, x_q$, или же *при* $x_1, \ldots, x_q$ *в интерпретации всеобщности*, и писать $A_1, \ldots, A_m \models^{x_1 \ldots x_q} B$ тогда и только тогда, когда $\forall' A_1, \ldots, \forall' A_m \models B$. Следовательно, $A_1, \ldots, A_m \models^{x_1 \ldots x_q} B$ имеет место тогда и только тогда, когда при всякой области D истинностная таблица формулы B, на входах которой стоят ионы и свободные переменные из $\forall' A_1, \ldots, \forall' A_m$, B, дает t во всех тех строках, в которых $\forall' A_1, \ldots, \forall' A_m$ одновременно принимают значения t[1]).

Это определение и запись не обязательно связаны со случаем, когда каждая из переменных $x_1, \ldots, x_q$ входит свободно в одну из формул $A_1, \ldots, A_m$; можно, не меняя смысла, добавлять или удалять любую переменную, которая не имеет вхождений такого рода. Точно так же не имеют значения порядок индексов и наличие или отсутствие повторений.

Пример 8. Вот четыре утверждения: «$\neg P(x) \models^{x} \neg P(x)$», «$\neg P(x) \models^{x} \neg P(y)$», «$\neg P(x) \models^{x} \forall x \neg P(x)$», «$\neg P(x) \models^{x} \neg \forall x P(x)$». Какие из них верны? Иными словами, какие из формул $\neg P(x)$, $\neg P(y)$, $\forall x \neg P(x)$, $\neg \forall x P(x)$ являются следствием из $\neg P(x)$, когда x имеет интерпретацию всеобщности? Мы должны сравнить таблицы (a)—(d) с таблицей замыкания $\forall x \neg P(x)$ допущения $\neg P(x)$, т. е. с формулой в столбце (c). Затем мы должны рассмотреть те строки, в которых (c) дает t, т. е. строки 13, 14, 15 и 16. В каждой из них (a), (b), (c) и (d) дают t. Это выполнено при $D = \{1, 2\}$, но легко убедиться, что то же самое было бы при произвольной области D. Следовательно, «$\neg P(x) \models^{x} \neg P(x)$», «$\neg P(x) \models^{x} \neg (y)$», «$\neg P(x) \models^{x} \forall x \neg P(x)$» и «$\neg P(x) \models^{x} \neg \forall x P(x)$» являются верными утверждениями.

Допустим, что формула A содержит свободно только x. *Утверждение* «$A \models B$» *сильнее, чем* «$A \models^{x} B$», т. е. если $A \models B$, то $A \models^{x} B$, тогда как обратное, вообще говоря, не верно. Чтобы установить это, возьмем какую-нибудь область D и таблицы, на входе которых стоят x и другие символы, которые нужны для определения значений A и B. Для установления $A \models^{x} B$ требуется только, чтобы B давала t во всех тех строках, в которых $\forall x A$ дает t при произвольных значениях всех символов, кроме x, т. е. в тех строках, где эти значения дают для A значение t при *всяком* значении x. (В примере 8, где A есть $\neg P(x)$, это отвечает строкам 13, 14, 15 и 16.) Для того же, чтобы $A \models B$, надо, чтобы B давало t во всех строках, на входе которых стоят значение x и значения других символов, входящих в A, и где A принимает значение t именно при *этом* значении x; это значит, что мы

[1]) Добавление «кроме $x_1, \ldots, x_q$» делается только ради того, чтобы снять с переменных $x_1, \ldots, x_q$ требование, которое наложено на все переменные,— оставаться фиксированными. Оно не исключает ни возможности, что B является следствием из A, когда все переменные фиксированы, ни промежуточных возможностей.

должны рассматривать все те строки, которые рассматривали для установления $A \models^{x} B$, и, вообще говоря, еще дополнительно некоторые строки (в примере 7 это были бы строки 7, 8, 9, 10).

Обобщим на случай произвольного числа допущений и переменных: *Если* $A_1, \ldots, A_m \models^{x_1 \ldots x_q} B$, *то* $A_1, \ldots, A_m \models^{x_1 \ldots x_q x_{q+1} \ldots x_r} B$; *обратное, вообще говоря, неверно*; само собой разумеется, *обратное верно, если* $x_{q+1}, \ldots, x_r$ *не входят свободно ни в одну из формул* $A_1, \ldots, A_m$.

Отношение следования (I) («$A_1, \ldots, A_m \models B$») является основным предметом изучения в данной книге. Говоря «B является следствием $A_1, \ldots, A_m$», мы имеем в виду именно смысл (I), хотя иногда, возможно, мы будем уточнять это, добавляя: «B является следствием $A_1, \ldots, A_m$ при фиксации всех переменных (свободно входящих в $A_1, \ldots, A_m$)».

Упражнения. 20.1.. Восполните опущенные рассуждения из примера 7 (a) и (d).

20.2. Докажите, что:

(a) Неверно, что $R \supset P(x) \models R \supset \forall x P(x)$.

(b) $R \supset P(x) \models^{x} R \supset \forall x P(x)$.

(c) Неверно, что $P(x) \supset R \models \exists x P(x) \supset R$.

(d) $P(x) \supset R \models^{x} \exists x P(x) \supset R$.

20.3. Докажите, что $\forall' A_1, \ldots, \forall' A_m \models B$ тогда и только тогда, когда $\forall' A_1, \ldots, \forall' A_m \models \forall' B$.

20.4. Заметьте, что результаты упр. 7.6 верны в исчислении предикатов. Используйте упр. 20.3, чтобы доказать, что они верны и при «$\models^{x_1 \ldots x_q}$» вместо «$\models$».

20.5. Докажите, что при произвольных x и A:

(a) $\forall x A \models A$.

(b) $A \models^{x} \forall x A$.

(c) $A \models \forall x A$, вообще говоря, не имеет места.

20.6. Докажите, что $A \models^{x} B$ тогда и только тогда, когда $\models \forall x A \supset B$, тогда и только тогда, когда $\models \forall x (\forall x A \supset B)$, тогда и только тогда, когда $\models \forall x A \supset \forall x B$, но что $A \models B$ тогда и только тогда, когда $\models A \supset B$, и тогда и только тогда, когда $\models \forall x (A \supset B)$ (ср. упр. 17.6).

20.7. Докажите, что если x не входит свободно в C, то $A(x) \models^{x} C$ тогда и только тогда, когда $\models \forall x A(x) \supset C$, но что $A(x) \models C$ тогда и только тогда, когда $\models \exists x A(x) \supset C$.

20.8*. Верна ли теорема 5 § 4 для исчисления предикатов, если заменить «$\models$» на «$A_1, \ldots, A_m \models$»? (Что касается $m=0$, ср. конец § 19.)

§ 21. Теория доказательств; доказуемость и выводимость

Для построения теории доказательств исчисления предикатов мы начнем со схем аксиом и правила вывода исчисления высказываний (т. е. схем аксиом 1a—10b и MP ($\supset$-правило); ср. § 9). Конечно, применять эти схемы и правило надо для нового понятия формулы (§ 16).

К этому добавим две новые схемы аксиом: $\forall x A(x) \supset A(r)$ ($\forall$-*схема*) и $A(r) \supset \exists x A(x)$ ($\exists$-*схема*), где r свободно для x в A(x) (ср. теорему 15 § 18). Это значит, что всякая формула, имеющая один из указанных видов, является аксиомой.

Добавим также два новых правила вывода: $\forall$-*правило* позволяет переходить от $C \supset A(x)$ к $C \supset \forall x A(x)$, а $\exists$-*правило* позволяет переходить от $A(x) \supset C$ к $\exists x A(x) \supset C$, если x не входит свободно в C (ср. теорему 16)[1]).

Определения отношения «$B_1, \ldots, B_l$ *является доказательством* (*формулы* B_l)» и понятия «B *доказуема*» (символически $\vdash B$) аналогичны определению, данному в § 9, с точностью до добавления двух новых схем и правил.

Определение отношения «$B_1, \ldots, B_l$ *является выводом* (*формулы* B_l) *из* $A_1, \ldots, A_m$» также аналогично ранее данному определению.

Кроме того, будем говорить, что в выводе *все (свободные) переменные* (*формул* $A_1, \ldots, A_m$) *остаются фиксированными*, если $\forall$- и $\exists$-правила не применяются ни к какой переменной (в качестве x этого правила), входящей свободно в $A_1, \ldots, A_m$, кроме случаев, когда заключение $\forall$- или $\exists$-правила находится раньше первого вхождения формул $A_1, \ldots, A_m$ (в качестве допущений) в наш вывод. (Мы можем не обращать внимания на те вхождения $A_1, \ldots, A_m$, которые обосновываются не как допущения.)[2])

Таким образом, говоря, что в выводе $B_1, \ldots, B_l$ из допущений $A_1, \ldots, A_m$ все переменные остаются фиксированными, мы имеем в виду следующее: пусть B_k—это первая из формул $B_1, \ldots, B_l$, которая обосновывается как допущение; в противном случае B_k не существует и B_{k-1}—это B_l. В части $B_1, \ldots, B_{k-1}$ нашего вывода (если она существует) любая переменная может быть переменной x $\forall$- или $\exists$-правила (заключение которого принадлежит этой части). В части $B_{k+1}, \ldots, B_l$ вывода (если она существует) лишь переменная, не входящая свободно в $A_1, \ldots, A_m$, может оказаться переменной x $\forall$- и $\exists$-правил (заключение которого принадлежит этой части).

---

[1]) Эти четыре простых постулата для кванторов принадлежат Бернайсу (согласно Гильберту и Аккерману [1928], стр. 99). Но, как и в § 9 (следуя фон Нейману [1927]), мы пользуемся схемами аксиом, вместо того чтобы использовать отдельные аксиомы, постулируя еще правило подстановки (все ранние формулировки правила подстановки в исчислении предикатов имели дефекты; см. Чёрч [1956], стр. 279—280).

[2]) Наше определение относится к выводу $B_1, \ldots, B_l$, рассматриваемому совместно с его анализом, т. е. с основаниями, оправдывающими каждую из формул вывода. Ср. примечание на стр. 55.

Если имеется вывод B из $A_1, \ldots, A_m$, все переменные которого остаются фиксированными, то мы говорим, что B *выводима из* $A_1, \ldots, A_m$ (*с фиксированными переменными*), и пишем $A_1, \ldots, A_m \vdash B$. Как правило, в этой книге мы будем опускать условие «с фиксированными переменными».

Будем говорить, что B *выводима из* $A_1, \ldots, A_m$ *при фиксировании всех переменных, кроме* $x_1, \ldots, x_q$ (или *с варьированием разве лишь переменных* $x_1, \ldots, x_q$, или *при* $x_1, \ldots, x_q$ *в интерпретации всеобщности*), и писать $A_1, \ldots, A_m \vdash^{x_1 \ldots x_q} B$, если имеет место $\forall' A_1, \ldots, \forall' A_m \vdash B$, согласно предыдущему определению; здесь $\forall'$ (т. е. $\forall x_1 \ldots \forall x_q$) обозначает замыкание относительно $x_1, \ldots, x_q$. Значение этого понятия должно стать очевидным в силу аналогии между «$\vdash$» и «$\models$», изученной в § 20. Мы редко будем пользоваться в этой книге записью «$\vdash^{x_1 \ldots x_q}$» иначе как сокращением для приписывания кванторов $\forall x_1 \ldots \forall x_q$ перед каждым допущением[1]).

Мы можем автоматически перенести на исчисление предикатов бо́льшую часть результатов, установленных в теории доказательств для исчисления высказываний. Ведь все доказательства и выводы (с формулами, понимаемыми в новом смысле), которые мы можем построить или существование которых можем доказать *в исчислении высказываний* (т. е. с использованием лишь схем аксиом 1a—10b и $\supset$-правила), являются также доказательствами и выводами в исчислении предикатов (с фиксированными переменными), ибо в исчислении предикатов сохраняют силу все те основания, которые оправдывают шаги вывода в исчислении высказываний (и не используются $\forall$- и $\exists$-правила). В частности, если $\vdash B$ в исчислении высказываний, то $\vdash B$ в исчислении предикатов.

---

[1]) В [BM], § 22 и след., выводимые правила сформулированы так, чтобы можно было преобразовывать высказывания, содержащие «$\vdash$» с верхними индексами. Здесь мы отказались от этого по соображениям простоты.

Кое-где в [BM] знак «$\vdash$» используется с «систематической двусмысленностью» для выражения нашего «$\vdash^{x_1 \ldots x_q}$» при различных списках переменных $x_1, \ldots, x_q$ ($q \geqslant 0$); то же относится к термину «выводимая». Поэтому те правила, в которых в посылки и заключения входит «$\vdash$», могут применяться при условии, что к «$\vdash$» приписываются верхние индексы, а к заключениям этих правил также добавляются те же индексы. Ср. [BM], стр. 94. Там, где $\vdash$-утверждения рассматриваются сами по себе, эти индексы обычно указаны явно (если они есть) как в [BM], так и здесь.

В [BM] вместо введения единого списка $x_1, \ldots, x_q$ переменных, имеющих интерпретацию всеобщности во всех допущениях $A_1, \ldots, A_m$, можно вводить различные списки $x_{i1}, \ldots, x_{iq_i}$ таких переменных для каждого из допущений A_i ($i = 1, \ldots, m$). Чтобы сделать то же самое здесь, можно использовать запись $\forall'_1 A_1, \ldots, \forall'_m A_m$ (где $\forall'_i \simeq \forall x_{i1} \ldots \forall x_{iq_i}$) вместо $\forall' A_1, \ldots, \forall' A_m$.

Эквивалентность нашей нынешней трактовки переменных, имеющих интерпретацию всеобщности, с трактовкой в [BM] следует из [BM] (лемма 8a, стр. 96—97).

Если $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ в исчислении высказываний, то $A_1, \ldots$ $\ldots, A_m \vdash B$ в исчислении предикатов. (В терминологии § 13 прямые правила, установленные для исчисления высказываний, сохраняют тем самым силу в исчислении предикатов.)

Но из того что «Если $A \vdash B$, то $\vdash A \supset B$» верно в исчислении высказываний (теорема 11 (a)), нельзя еще непосредственно заключить, что это верно в исчислении предикатов; можно лишь заключить, что «Если $A \vdash B$ в исчислении высказываний, то $\vdash A \supset B$ в исчислении предикатов»: правила вспомогательного вывода не переносятся автоматически.

Пример 9. Ниже приводится вывод $R \supset \forall x Px$ из $\forall y (R \supset P(y))$.

1. $\forall y P(y) \supset P(x)$ — $\forall$-схема.
2. $\forall y P(y) \supset \forall x P(x)$ — $\forall$-правило, 1.
3. $\forall y (R \supset P(y))$ — допущение.
4. $\forall y (R \supset P(y)) \supset (R \supset P(y))$ — $\forall$-схема.
5. $R \supset P(y)$ — $\supset$-правило, 3,4.
6. $R \supset \forall y P(y)$ — $\forall$-правило, 5.
7. $(\forall y P(y) \supset \forall x P(x)) \supset \{R \supset (\forall y P(y) \supset \forall x P(x))\}$ — схема аксиом, 1a.
8. $R \supset (\forall y P(y) \supset \forall x P(x))$ — $\supset$-правило, 2,7.
9. $\{R \supset \forall y P(y)\} \supset \{\{R \supset (\forall y P(y) \supset \forall x P(x))\} \supset \{R \supset \forall x P(x)\}\}$ — схема аксиом 1b.
10. $\{R \supset (\forall y P(y) \supset \forall x P(x))\} \supset \{R \supset \forall x P(x)\}$ — $\supset$-правило, 6,9.
11. $R \supset \forall x P(x)$ — $\supset$-правило, 8,10.

Поскольку в $\forall y (R \supset P(y))$ нет свободных переменных, в этом выводе все переменные остаются фиксированными. Значит, $\forall y (R \supset P(y)) \vdash R \supset \forall x P(x)$.

Если удалить из 1—11 формулы 3 и 4 и ввести 5 как допущение, то получится вывод $R \supset \forall x P(x)$ из $R \supset P(y)$, но нельзя уже будет сказать, что все переменные остаются фиксированными. Действительно, $\forall$-правило применяется к строке 6 для переменной y, и y входит свободно в допущение $R \supset P(y)$, введенное в строке 5, т. е. раньше строки 6. Значит, мы не имеем права сказать «$R \supset P(y) \vdash R \supset \forall x P(x)$». Да это и неверно, так как для того, чтобы это выполнялось, как будет видно из дальнейшего (§ 22, 23), необходимо, чтобы «$R \supset P(y) \models R \supset \forall x P(x)$». Согласно же упр. 20.2, последнее соотношение не имеет места (то, что там свободная переменная обозначена x, а не y, не имеет значения).

Пример 10. Ниже приводится вывод A из $\forall x \forall y A$; здесь A — произвольная формула. (В соответствии с нашим соглашением в § 16 x и y — различные переменные.)

1. $\forall x \forall y A$ — допущение.
2. $\forall x \forall y A \supset \forall y A$ — $\forall$-схема, где в качестве указанных в схеме x, A(x) и r фигурируют x, $\forall y A$ и x.
3. $\forall y A$ — $\supset$-правило, 1, 2.

4. $\forall y A \supset A$ — $\forall$-схема, где за x, $A(x)$ и r приняты y, A и y.
5. A — $\supset$-правило, 3, 4.

$\forall$- или $\exists$-правило не применяется, так что все свободные переменные остаются фиксированными. Значит, $\forall x \forall y A \vdash A$. Вообще для произвольных переменных $x_1, \ldots, x_q$ имеет место $\forall x_1 \ldots \ldots \forall x_q A \vdash A$.

В исчислении предикатов при каждом применении $\forall$- или $\exists$-схемы нужно следить, чтобы r была свободна для x в $A(x)$ (ср. теорему 15), а при использовании $\forall$- или $\exists$-правила следить, чтобы x не входила свободно в C (теорема 16).

Пример 10 (окончание). В обоих применениях $\forall$-схемы переменная r свободна для x в $A(x)$, ибо в обоих случаях r — это x: вхождения r в $A(r)$, получающиеся в результате подстановки, — это просто первоначальные свободные вхождения x в $A(x)$. На шаге 2 r и x — это x, а на шаге 4 — это y.

Пример 11. В левом столбце ниже мы даем доказательство формулы $\forall x \exists w P(x, w, z) \sim \forall y \exists w P(y, w, z)$, откуда $\vdash \forall x \exists w P(x, w, z) \sim \sim \forall y \exists w P(y, w, z)$. Справа это доказательство обобщается в доказательство для $\forall x A(x) \sim \forall y A(y)$ при надлежащих условиях, налагаемых на формулу $A(x)$ и переменные x и y; их мы укажем чуть позже. Основания, оправдывающие шаги, одинаковы для обоих столбцов. Начинать надо с проверки их для левого столбца (упр. 21.1).

1. $\forall x \exists w P(x, w, z) \supset \exists w P(y, w, z)$ — $\forall$-схема.	1. $\forall x A(x) \supset A(y)$.
2. $\forall x \exists w P(x, w, z) \supset \forall y \exists w P(y, w, z)$ — $\forall$-правило, 1.	2. $\forall x A(x) \supset \forall y A(y)$.
3. $\forall y \exists w P(y, w, z) \supset \exists w P(x, w, z)$ — $\forall$-схема.	3. $\forall y A(y) \supset A(x)$.
4. $\forall y \exists w P(y, w, z) \supset \forall x \exists w P(x, w, z)$ — $\forall$-правило, 3.	4. $\forall y A(y) \supset \forall x A(x)$.
. . . .	. . . .
7. $\forall x \exists w P(x, w, z) \sim \forall y \exists w P(y, w, z)$ — используя схему аксиом 9а совместно с 2,4 и $\supset$-правилом.	7. $\forall x A(x) \sim \forall y A(y)$.

В столбце справа x — произвольная переменная, $A(x)$ — произвольная формула, y — любая переменная, не обязательно отличная от x, но такая, что

(i) y свободна для x в $A(x)$,

(ii) y не входит свободно в $A(x)$ (кроме случая, когда y есть x), а $A(y)$ является результатом подстановки y вместо свободных вхождений x в $A(x)$ (напомним, что, согласно (i), ни одно из получаемых при подстановке вхождений y не связано).

Чтобы убедиться, что правый столбец является доказательством, проверим, что 1—7 удовлетворяет всем надлежащим условиям. Это легко сделать, если y есть x. Рассмотрим теперь случай, когда y отлична от x. В строке 1, применяя $\forall$-схему, примем y за r, а A(y) за A(r); согласно (i), условия применения $\forall$-схемы выполнены. В строке 2 возьмем $\forall x A(x)$ в качестве C, а y в качестве x $\forall$-правила; в силу (ii) x не входит свободно в C, так что нужные условия снова выполнены. В строке 3 надо проверить, что $\forall y A(y) \supset A(x)$ имеет вид $\forall y B(y) \supset B(r)$, где B(r) получается подстановкой r вместо свободных вхождений y в формулу B(y), причем r свободна для y в B(y) (тогда y и B(y) можно взять в качестве x и A(x) $\forall$-схемы). Мы получили A(y), подставляя y вместо свободных вхождений x в A(x). В силу (i) всякое вхождение y в A(y), получаемое в результате этой подстановки, свободно, а, согласно (ii), в A(x) нет свободных вхождений y. Следовательно, y входит в A(y) свободно точно в тех местах, в которых A(x) имеет свободные вхождения x, значит, A(x) получается подстановкой x (x играет роль r) вместо свободных вхождений y в A(y) (играющую роль B(y)). Более того, ни одно из вхождений x в A(x), получаемых при этой подстановке, не связано, ибо это просто первоначальные свободные вхождения x в A(x). Следовательно, строка 3 оправдана. В строке 4 надо только проверить, что $\forall y A(y)$ не содержит свободных вхождений x. Это так, ибо A(y) получается подстановкой y вместо *всех* свободных вхождений x в A(x).

Левый столбец этого примера иллюстрирует правый столбец при $\exists w P(x, w, z)$ в роли A(x).

Пример 12. Пусть теперь A(x) в правом столбце имеет вид $\exists y P(x, y, z)$ (с ее x и y в роли x и y). Тогда (i) не выполнено, так что к строке 1 нельзя применить $\forall$-схему. В строке 1 формула $\forall x A(x) \supset A(y)$ приняла бы вид $\forall x \exists y P(x, y, z) \supset \exists y P(y, y, z)$. Однако эта формула недоказуема, так как ее таблица истинности при $D = \{1, 2\}$ показывает, что она не общезначима, а в силу обобщения теоремы 12 на исчисление предикатов (ср. § 23) она и недоказуема.

Похожие примеры были приведены в § 18, где проверка условий теоремы 15 совпадает, как мы сейчас видим, с проверкой применимости $\forall$- или $\exists$-схемы.

Пример 13. Пусть A(x) — это $\exists w P(x, w, y)$. Тогда не выполнено (ii). Строка 1 оправдана, $\forall$-схема применима. Но в строке 2 применение $\forall$-правила с результатом $\forall x \exists w P(x, w, y) \supset \forall y \exists w P(y, w, y)$ некорректно, ибо роль x и C из $\forall$-правила тут играли бы y и $\forall x \exists w P(x, w, y)$, а y входит свободно в последнюю формулу. На самом деле $\forall x \exists w P(x, w, y) \supset \forall y \exists w P(y, w, y)$ недоказуема.

Теорему 10a и ее следствие из § 9 можно теперь передоказать без каких бы то ни было существенных изменений в их формулировке или в доказательстве; относительно теорем 9 и 10b см. конец § 22.

Упражнения. 21.1. Проверьте корректность левого столбца примера 11.

21.2. Являются ли выводами (из первой формулы) следующие списки формул? Если нет, то найдите и объясните ошибку.

(a) 1. $\exists z \forall x P(y, x, z)$—допущение.
2. $\forall x P(y, x, z) \supset \exists w \forall x P(w, x, z)$—$\exists$-схема.
3. $\exists z \forall x P(y, x, z) \supset \exists w \forall x P(w, x, z)$—$\exists$-правило, 2.
4. $\exists w \forall x P(w, x, z)$—$\supset$-правило, 1, 3.

(b) 1. $\exists x \forall y P(x, y, z)$—допущение.
2. $\forall y P(x, y, z) \supset \exists w \forall y P(w, y, z)$—$\exists$-схема.
3. $\exists x \forall y P(x, y, z) \supset \exists w \forall y P(w, y, z)$—$\exists$-правило, 2.
4. $\exists w \forall y P(w, y, z)$—$\supset$-правило, 1, 3.

(c) 1. $\exists y \forall y P(y, y, x)$—допущение.
2. $\forall y P(y, y, x) \supset \exists z \forall y P(z, y, x)$—$\exists$-схема.
3. $\exists y \forall y P(y, y, x) \supset \exists z \forall y P(z, y, x)$—$\exists$-правило, 2.
4. $\exists z \forall y P(z, y, x)$—$\supset$-правило, 1, 3.

21.3. Найдите, при каких условиях на x, A(x), y, A(y), C можно обобщить результат примера 9 до $\forall y (C \supset A(y)) \vdash C \supset \forall x A(x)$.

21.4. Дополните написанное с тем, чтобы получить вывод $\exists x P(x) \supset \exists x Q(x)$ из $\forall x (P(x) \supset Q(x))$ (проверьте, что на каждом шаге выполнены все нужные условия):

. . .

k. $(P(x) \supset Q(x)) \supset [(Q(x) \supset \exists x Q(x)) \supset (P(x) \supset \exists x Q(x))]$—доказывается по *2 теоремы 2 и теореме 14.

Запишите, пользуясь символом «$\vdash$», результат, который получается при таком построении. Верен ли он, если заменить P(x), Q(x) на произвольные формулы A(x), B(x)?

21.5. Докажите, что в условиях теоремы 15

(a) $\forall x A(x) \vdash A(r)$, (b) $A(r) \vdash \exists x A(x)$.

§ 22. Теория доказательств; теорема о дедукции

Докажем теперь теорему о дедукции (теорема 11 § 10) для исчисления предикатов. При этом существенно используется то, что в данном выводе

$$(\alpha) \qquad B_1, \ldots, B_l$$

формулы B из $A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$ все переменные остаются фиксированными; это условие включено теперь в наше понимание суждения «$A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m \vdash B$». Используем – с некоторыми модификациями и добавлениями—старое доказательство из § 10 (иллюстрация дана в примере 14).

Если последнее допущение A_m не применяется (в качестве допущения) в данном выводе (α), то мы построим результирующий вывод, просто добавляя к заданному выводу следующие формулы:

$l+1'$. $B_l \supset (A_m \supset B_l)$ — схема аксиом 1а.

$l+2'$. $A_m \supset B_l$ — МР, l', $l+1'$.

Поэтому предположим, что последнее допущение A_m используется (как таковое) в данном выводе (α); первое его вхождение обозначим B_n; это значит, что B_n — первая из формул $B_1, \ldots, B_l$, появление которой в (α) обосновано тем обстоятельством, что она является последним допущением A_m. Припишем спереди ко всем формулам $B_n, \ldots, B_l$ данного вывода символы «$A_m \supset$»; получим

(β) $\qquad B_1, \ldots, B_{n-1}, A_m \supset B_n, \ldots, A_m \supset B_l.$

Вставлять формулы перед $A_m \supset B_i$ потребуется только при $i=n, \ldots \ldots, l$, а не при $i=1, \ldots, l$, как в § 10. Снова рассмотрим порознь частные случаи, ибо они зависят от того, каким образом оправдывается присутствие B_i в (α) при каждом i, и опишем, какие вставки нужны в каждом случае.

В случаях 1—3 доказательство из § 10 остается неизменным. В случае 4, когда B_i ($i > n$) получается из B_g и B_h ($g, h < i$) по $\supset$-правилу, раньше надо было добавить шаги, приводящие от $A_m \supset B_g$ и $A_m \supset B_h$ к $A_m \supset B_i$, где B_g, B_h и B_i соответственно имеют вид A, $A \supset B$, B. (В § 10 мы предоставили это читателю (упр. 10.1), здесь же соответствующие шаги проиллюстрированы в примере 14 строками 12'—14' и 17'—19'.) Теперь же если $g < n$, то мы должны сначала добавить следующие два шага для получения $A_m \supset B_g$:

$B_g \supset (A_m \supset B_g)$ — схема аксиом 1а.
$A_m \supset B_g$ — МР, g',—.

Точно так же поступаем, если $h < n$ (показано в строках 15' и 16' примера 14). Как только это проделано, можно разбирать случай 4 так же, как раньше[1]).

Случай 5. B_i ($i > n$) получается из какой-либо предшествующей формулы B_g ($g < i$) посредством $\forall$-правила, т. е. B_g и B_i соответственно имеют вид $C \supset A(x)$, $C \supset \forall x A(x)$, причем x не входит свободно в C. Если $g < n$, то сначала добавим два шага для получения $A_m \supset B_g$, как в случае 4. Напомним, что $i > n$, т. е. это применение $\forall$-правила находится после первого использования A_m (под именем B_n) в качестве допущения. Следовательно, x не входит свободно в A_m ввиду условия, что все переменные в данном выводе (α) остаются фиксированными. Согласно огра-

[1]) Те изменения, которые выше вносились в этот план по сравнению с § 10, могли бы пригодиться и в исчислении высказываний. С их помощью часто можно сократить длину доказательств.

ничению в $\forall$-правиле, переменная x не входит свободно в С. Значит, x не входит свободно в $A_m \& C$. Используем это для обоснования нового применения $\forall$-правила на (k_2+1')-м шаге:

k_1'. $A_m \supset B_g$, т. е. $A_m \supset (C \supset A(x))$ . . . k_2'. $A_m \& C \supset A(x)$	вывод из примера 7 § 10.
k_2+1'. $A_m \& C \supset \forall x A(x)$ — $\forall$-правило, k_2' k_3'. $A_m \supset (C \supset \forall x A(x))$, т. е. $A_m \supset B_i$	вывод из упр. 10.3.

Случай 6. B_i $(i > n)$ получается из предшествующей формулы B_g $(g < i)$ применением $\exists$-правила. Рассмотрение предоставим читателю (упр. 22.1).

Итак, мы видели, как строить конкретный вывод $A_m \supset B$ из $A_1, \ldots, A_{m-1}$. Применения $\forall$- и $\exists$-правил в этом «результирующем выводе» находятся в соответствии с применениями тех же правил в данном выводе: переменные x соответствующих друг другу применений совпадают, а сами эти применения расположены одинаково по отношению к $A_1, \ldots, A_{m-1}$. И так как все переменные в данном выводе остаются фиксированными, то все они фиксированы в результирующем выводе. Значит, $A_1, \ldots, A_{m-1} \vdash A_m \supset B$, что и требовалось доказать.

Пример 14. Левый столбец показывает, что $\forall x(P(x) \supset Q(x))$, $\forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$. Согласно теореме, отсюда следует $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \vdash \forall x P(x) \supset \forall x Q(x)$. Правый столбец и дает вывод $\forall x P(x) \supset \forall x Q(x)$ из $\forall x(P(x) \supset Q(x))$, построенный в соответствии с нашим общим методом из левого столбца. Так как второе допущение появляется только в строке 4, приписывание «$\forall x P(x) \supset$» начинается только с этой строки.

1. $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ — 1-е доп.	1′. $\forall x(P(x) \supset Q(x))$ — то же.
2. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (P(x) \supset$ $\supset Q(x))$ — $\forall$-схема.	2′. $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (P(x) \supset$ $\supset Q(x))$ — то же.
3. $P(x) \supset Q(x)$ — МР, 1, 2.	3′. $P(x) \supset Q(x)$ — то же.
	. . . пример 4 § 9.
4. $\forall x P(x)$ — 2-е. доп.	8′. $\forall x P(x) \supset \forall x P(x)$
	9′. $\forall x Px \supset P(x)$ — $\forall$-схема.
	10′. $\{\forall x P(x) \supset P(x)\} \supset$ $\supset \{\forall x P(x) \supset (\forall x P(x) \supset$ $\supset P(x))\}$ — схема аксиом 1a.
5. $\forall x P(x) \supset P(x)$ — $\forall$-схема.	11′. $\forall x P(x) \supset (\forall x P(x) \supset P(x))$ — МР, 9′, 10′.
	12′. $\{\forall x P(x) \supset \forall x P(x)\} \supset$ $\supset \{\{\forall x P(x) \supset (\forall x P(x) \supset$ $\supset P(x))\} \supset \{\forall x P(x) \supset$ $\supset P(x)\}\}$ — схема аксиом 1b.

	13′. $\{\forall x P(x) \supset (\forall x P(x) \supset P(x))\} \supset \{\forall x P(x) \supset P(x)\}$ — MP, 8′, 12′.
6. $P(x)$ — MP, 4, 5.	14′. $\forall x P(x) \supset P(x)$ — MP, 11′, 13′.
	15′. $\{P(x) \supset Q(x)\} \supset \{\forall x P(x) \supset (P(x) \supset Q(x))\}$ — схема аксиом 1a.
	16′. $\forall x P(x) \supset (P(x) \supset Q(x))$ — MP, 3′, 15′.
	17′. $\{\forall x P(x) \supset P(x)\} \supset \{\{\forall x P(x) \supset (P(x) \supset Q(x))\} \supset \{\forall x P(x) \supset Q(x)\}\}$ — схема аксиом 1b.
	18′. $\{\forall x P(x) \supset (P(x) \supset Q(x))\} \supset \{\forall x P(x) \supset Q(x)\}$ — MP, 14, 17.
7. $Q(x)$ — MP, 6, 3.	19′. $\forall x P(x) \supset Q(x)$ — MP, 16′, 18′.
8. $Q(x) \supset ((P \supset P \vee P) \supset Q(x))$ — схема аксиом 1a.	. . . 22′. $\forall x P(x) \supset \{Q(x) \supset ((P \supset P \vee P) \supset Q(x))\}$ — аналогично 9′—11′.
9. $(P \supset P \vee P) \supset Q(x)$ — MP, 7, 8.	. . . 25′. $\forall x P(x) \supset \{(P \supset P \vee P) \supset Q(x)\}$ — аналогично 12′—14′. . . . k_1'. $\forall x P(x) \,\&\, (P \supset P \vee P) \supset Q(x)$ — пример 7 § 10.
	k_1+1'. $\forall x P(x) \,\&\, (P \supset P \vee P) \supset \forall x Q(x)$ — $\forall$-правило, k_1'
10. $(P \supset P \vee P) \supset \forall x Q(x)$ — $\forall$-правило, 9.	. . . k_2'. $\forall x P(x) \supset \{(P \supset P \vee P) \supset \forall x Q(x)\}$ — упр. 10.3.
11. $P \supset P \vee P$ — схема аксиом 5a.	. . . k_2+3'. $\forall x P(x) \supset (P \supset P \vee P)$ — аналогично 9′—11′.
12. $\forall x Q(x)$ — MP, 11, 10.	. . . k_2+6'. $\forall x P(x) \supset \forall x Q(x)$ — аналогично 12′—14′.

Следствие теоремы 11 получается, как и в исчислении высказываний. Следует заметить, что утверждения (i) и (ii) теоремы 9 остаются без изменений.

Однако для (ii) нужен другой метод доказательства. Если, как в § 9, просто соединить данные выводы, то может оказаться, что некоторые применения $\forall$- или $\exists$-правил к переменным, входящим свободно в $A_1, \ldots, A_m$, окажутся после первого использования допущений $A_1, \ldots, A_m$ в результирующем выводе. Производя очевидную перестановку, можно исправить положение в отношении тех применений, которые происходят от p данных выводов формул $B_1, \ldots, B_p$ из $A_1, \ldots, A_m$. Более серьезная трудность состоит в том, что применения этих правил к тем переменным, которые свободно входят в $A_1, \ldots, A_m$, но не в $B_1, \ldots, B_p$, могли находиться ниже первого вхождения формул $B_1, \ldots, B_p$ (в качестве допущений) в заданный вывод формулы C. Эту трудность мы преодолеем за счет теоремы о дедукции.

Предположениями в (ii) служили: (1) $A_1, \ldots, A_m \vdash B_i$ $(i=1, \ldots, p)$ и (2) $B_1, \ldots, B_p \vdash C$. Следствие теоремы[1]) 11_{Pd}, примененное к (2), дает: (3) $\vdash B_1 \supset (\ldots(B_p \supset C)\ldots)$. Строим теперь вывод C из $A_1, \ldots, A_m$, взяв p выводов $B_1, \ldots, B_p$ из $A_1, \ldots, A_m$; последние существуют согласно (1). Помещаем их один за другим, а затем в начало всей последовательности передвигаем ту часть каждого из них, которая предшествует первому использованию допущений (как таковых). Перед полученной последовательностью пишем существующее согласно (3) доказательство формулы $B_1 \supset (\ldots(B_p \supset C)\ldots)$. В заключение помещаем в самом конце применения MP, нужные для перехода от $B_1 \supset (\ldots(B_p \supset C)\ldots)$, $B_1, \ldots, B_p$ к C.

В построенном таким образом выводе C из $A_1, \ldots, A_m$ все применения $\forall$- или $\exists$-правила в строках, расположенных ниже тех формул, которые являются допущениями (и используются в качестве таковых), происходят от таких же применений этих правил в данных выводах из (1). В силу условия, что все переменные в этих выводах остаются фиксированными (оно выражено неявно отсутствием у «$\vdash$» верхних индексов), переменные, к которым применяются эти правила, не входят свободно в $A_1, \ldots, A_m$. Значит, в нашем выводе все переменные остаются фиксированными, так что $A_1, \ldots, A_m \vdash C$.

---

[1]) Цитируя те теоремы исчисления высказываний, которые переносятся в исчисление предикатов (почти) без переформулировки, мы пользуемся их старыми номерами с индексом «$_{Pd}$» (например, здесь «Теорема 11_{Pd}»). Одновременно если «$\models$» заменяется на «$\vdash$» и т. п., то мы прибавляем индекс «$\vdash$» (например, «Теорема 6_{Pd}» в конце § 19, «Теорема $6_{Pd\vdash}$» в конце § 25, «Теорема $12_{Pd=}$» в § 29).

Установив заново теорему 9, мы имеем право пользоваться всеми общими свойствами $\vdash$ (*без* верхних индексов), описанными в § 13.

Упражнения. 22.1. Рассмотрите случай 6 из доказательства теоремы о дедукции.

22.2. Можно ли применить теорему о дедукции к строкам 3—12 примера 14, взяв их в качестве данного вывода и считая 3 допущением?

22.3. Докажите теорему 10_{Pd}(b).

§ 23. Теория доказательств; непротиворечивость, правила введения и удаления

Следствия теорем 10_{Pd} и 11_{Pd} (см. примечание на стр. 142) в § 21, 22 сводят понятие выводимости «$A_1, \ldots, A_m \vdash B$» к понятию доказуемости «$\vdash E$» точно так же, как следование «$A_1, \ldots, A_m \models B$» сводилось к общезначимости «$\models E$». Точно так же, используя $\forall'$, получаем редукции для «$A_1, \ldots, A_m \vdash^{x_1 \ldots x_q} B$» и «$A_1, \ldots, A_m \models^{x_1 \ldots x_q} B$». Для доказательства того, что теория моделей и теория доказательств для исчисления предикатов равносильны, осталось показать, что $\models E$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash E$.

Достаточность (*если* $\vdash E$, *то* $\models E$) получается легко. Ведь теорема 12 и ее следствие из § 11 сохраняют силу. Доказательства остаются теми же самыми, причем, кроме пунктов 1а—10b теоремы 2_{Pd}, надо использовать еще теоремы 3_{Pd}, 15 и 16 § 18. Для новой редакции следствия нет необходимости в полном использовании теоремы, где утверждается общезначимость для всех D. Следствие можно получить при «1-$\models$» вместо «$\models$», т. е. при $D = \{1\}$. Именно таким путем Гильберт и Аккерман в [1928] впервые доказали простую непротиворечивость исчисления предикатов.

Необходимость же ($\models E$, *только если* $\vdash E$), т. е. перенесение на исчисление предикатов теоремы 14, не столь элементарна, как теоремы, данные до сих пор. Она содержится в теореме Гёделя [1930] о полноте; мы отложим ее до гл. VI (теорема 37 § 51).

В *классической* логике (которая интересует нас в первую очередь) мы заинтересованы в общезначимых формулах, ибо они выражают всеобщие логические законы, и в доказуемых формулах, ибо они общезначимы.

В (классическом) исчислении *высказываний* построение истинностных таблиц (т. е. анализ по истинности, § 8) давало безотказный метод доказательства общезначимости, исходя непосредственно из ее определения в теории моделей. Однако практически этот метод не всегда удобен и обычно не походит на наши действительные мыслительные процессы, которые на деле гораздо более экономны. Отчасти именно поэтому мы ввели теорию доказательств. Конечно, мы не ограничились определениями, а перешли от них к производным правилам (§ 13). Первоначальные определения теории доказательств можно рассматривать как удобную пересадочную станцию на пути от теории моделей (общезначимость и т. п.) к производным правилам вывода теории доказательств[1]).

В (классическом) исчислении *предикатов* непосредственное применение определения общезначимости уже не является простым делом. Доказательства общезначимости с помощью истинностных таблиц перестают быть механической процедурой; они нуждаются в общих рассуждениях относительно таблиц истинности для произвольных (непустых) областей D, а для бесконечной области D таблица истинности становится бесконечным объектом.

В результате в исчислении предикатов теория доказательств обладает рядом преимуществ перед теорией моделей: она удобнее и конкретнее. Устанавливая доказуемость на основе ее определения в § 21 с помощью элементарных теорем вроде теоремы о дедукции и результатов, основанных на теории доказательств для исчисления высказываний, мы оказываемся на более твердой почве, чем устанавливая общезначимость, исходя из определений § 17. А если установлена доказуемость некоторой формулы, то в силу теоремы 12_{Pd} установлена и ее общезначимость, по крайней мере для того, кто принимает рассуждение, представленное в качестве ее доказательства[2]).

---

[1]) То, что мы придали теории доказательств для исчисления высказываний вид правил установления логической истинности (§ 3, абзац 2), отнюдь не обязательно; можно было бы формулировать *производные* правила только как утверждения о теории моделей, начав с 1a—10b теоремы 2 и теоремы 3 (ср. § 13, абзац 3).

Тогда в теории доказательств для исчисления предикатов можно было бы принять сразу все тавтологии (общезначимые формулы) исчисления высказываний в качестве аксиом (вместо того, чтобы постулировать наши схемы аксиом 1a—10b или другие формулы).

Имеются основания не менять таким образом первоначальный вид теории доказательств для исчисления высказываний. Некоторые результаты, устанавливаемые в теории доказательств для исчисления предикатов и более сложных систем, получаются легче, если их рассматривать сначала на уровне исчисления высказываний. Во всяком случае, хорошо сначала освоиться с теорией доказательств в простейшей ситуации. А в интуиционистском исчислении высказываний (конец § 12) простой метод истинностных таблиц вообще неприменим.

[2]) Другая возможность состояла бы в том, чтобы в качестве отправной точки взять постулаты, не пытаясь обосновывать их наподобие рассуждений в доказательствах теорем 2_{Pd}, 3_{Pd}, 15, 16. Ведь в любом случае в эти интуитивные доказательства должно входить что-то весьма похожее на эти постулаты. С другой стороны, выписывание этих доказательств в явном виде должно помешать возникновению ошибок, похожих на те, которые были допущены в формулировках правила подстановки в первых вариантах исчисления предикатов (см. примечание 1 на стр. 133).

Теорема Гёделя для исчисления предикатов означает, что этот метод достаточен для установления общезначимости всех общезначимых высказываний. Благодаря ей мы избегаем необходимости вести рассуждения с помощью понятия общезначимости после того, как мы получили результаты, касающиеся некоторых частных случаев, необходимых для доказательства теоремы 12_{Pd}. Доказательства всех других верных утверждений, касающихся общезначимости, можно скомпоновать, повторяя рассуждения, использованные при рассмотрении этих частных случаев.

Мы предпочли теоретико-доказательственный подход к исчислению предикатов ввиду его большей конкретности. Поэтому мы получим некоторые новые результаты в рамках теории доказательств, а также пересмотрим на этом пути некоторые уже полученные в теории моделей в гл. I или § 19 результаты.

Теорема 13 снова имеет место: согласно замечанию, сделанному в § 21, прямые правила автоматически переносятся из исчисления высказываний в исчисление предикатов, а три правила вспомогательного вывода из теоремы 13 обосновываются теперь с использованием теоремы 11_{Pd} § 22 точно так же, как прежде это делалось с помощью теоремы 11. Нам остается добавить еще четыре выводимых правила.

Теорема 21. *Пусть* x — *произвольная переменная*, A(x) — *произвольная формула*, r — *произвольная переменная*, *не обязательно отличная от* x, *и* A(r) — *результат подстановки* r *вместо свободных вхождений* x *в* A(x). *Пусть* Γ — *некоторый список формул (может быть, пустой), а* C — *произвольная формула. Тогда, при условии, что*

(A) *в* ∀-*удалении и* ∃-*введении* r *свободна для* x *в* A(x);

(B) *в* ∀-*введении и* ∃-*удалении* x *не входит свободно в* Γ;

(C) *в* ∃-*удалении* x *не входит свободно в* C,

имеют место следующие правила:

	Введение	Удаление
∀	*Если* $\Gamma \vdash A(x)$, *то* $\Gamma \vdash \forall x A(x)$.	$\forall x A(x) \vdash A(r)$.
∃	$A(r) \vdash \exists x A(x)$.	*Если* $\Gamma, A(x) \vdash C$, *то* $\Gamma, \exists x A(x) \vdash C$.

Доказательства. Относительно ∀-удаления и ∃-введения см. упр. 21.5. Рассмотрим ∀-введение. Пусть C — какая-нибудь аксиома, в которую x не входит свободно.

1. $\Gamma \vdash A(x)$ — посылка правила.
2. $\Gamma, C \vdash A(x)$ — упр. 13.2, 1.

И всегда остается некий произвол в выборе множества постулатов. Для того, кто в качестве отправного пункта принял бы только постулаты, не имела бы смысла проблема полноты (решенная, например, Гёделем для постулатов, приведенных в этой книге).

3. $\Gamma \vdash C \supset A(x)$ — теорема 11_{Pd}, 2.
4. $\Gamma \vdash C \supset \forall x\, A(x)$ — получается из 3 применением $\forall$-правила. Подробнее: пусть $B_1, \ldots, B_l$ — заданный вывод $C \supset A(x)$ из Γ при фиксации всех переменных; можно добавить к нему в качестве строки B_{l+1} формулу $C \supset \forall x\, A(x)$, считая B_l посылкой в применении $\forall$-правила, ибо x не входит в C свободно; в получаемом выводе из Γ все переменные остаются фиксированными, ибо новое применение $\forall$-правила производится над x, которая в силу условия (B) не входит свободно в Γ.
5. $\Gamma, C \vdash \forall x\, A(x)$ — теорема 10_{Pd} (или MP), 4.
6. $\Gamma \vdash \forall x\, A(x)$ — упр. 13.2, 5.

Рассмотрим $\exists$-удаление.

1. $\Gamma, A(x) \vdash C$ — посылка правила.
2. $\Gamma \vdash A(x) \supset C$ — теорема 11_{Pd}, 1.
3. $\Gamma \vdash \exists x\, \forall(x) \supset C$ — исходя из 2, с использованием $\exists$-правила с учетом условий (B) и (C).
4. $\Gamma, \exists x, A(x) \vdash C$ — теорема 10_{Pd}, 3.

Ниже в упр. 23.1 мы проиллюстрируем важность условий (B) и (C) при применении этих правил. Значение (A) видно из примеров, данных в § 21 и 18, относящихся по существу к тому же вопросу.

Правило $\forall$-введения отличается от прочих правил вспомогательного вывода тем, что допущения в данном и результирующем выводах одни и те же. Оно сформулировано в виде правила вспомогательного вывода из-за условия (B). Если бы мы отбросили (B), то, согласно упр. 13.3, получили бы «$A(x) \vdash \forall x\, A(x)$», что не имеет места, ибо, согласно теоремам 12_{Pd}, 11_{Pd} и 8_{Pd}, тогда имело бы место также «$A(x) \models \forall x A(x)$», а это, вообще говоря, неверно (например, если $A(x)$ есть $P(x)$ или $\neg P(x)$; ср. пример 7 § 20).

Следствие 1. *Пусть* $w_1, \ldots, w_p$ — *различные переменные*, $A(w_1, \ldots, w_p)$ — *некоторая формула*, $r_1, \ldots, r_p$ — *переменные, не обязательно отличные друг от друга или от* $w_1, \ldots, w_p$. *Пусть* $A(r_1, \ldots, r_p)$ — *результат одновременной подстановки* $r_1, \ldots, r_p$ *вместо свободных вхождений* $w_1, \ldots, w_p$ *соответственно в* $A(w_1, \ldots, w_p)$. *Если подстановка свободна (т. е. если результирующие вхождения* $r_1, \ldots, r_p$ *в* $A(r_1, \ldots, r_p)$ *свободны), то:*

(a) $\forall w_1, \ldots, \forall w_p A(w_1, \ldots, w_p) \vdash A(r_1, \ldots, r_p)$ (p-кратное $\forall$-удаление);

(b) $A(r_1, \ldots, r_p) \vdash \exists w_1 \ldots \exists w_p\, (A w_1, \ldots, w_p)$ (p-кратное $\exists$-введение).

Доказательства при $p > 1$. (При $p = 0$ утверждения (a) и (b) просто совпадают с теоремой 9_{Pd} (i) при $m = 1$. При $p = 1$ (a) и (b) содержатся в теореме 21.) (a) Для иллюстрации будем считать, что $p = 2$, что w_1 и w_2 — это x и y, $A(w_1, w_2)$ — это $\exists w P(w, x, y)$, а r_1 и r_2 — это y и z. Тогда подстановка свободна. (Она не была бы свободна, если бы r_1 и r_2 были бы w и z.) Надо доказать, что $\forall x \forall y \exists w P(w, x, y) \vdash \exists w P(w, y, z)$. Очевидно, что надлежит использовать $\forall$-удаление, но нужны некоторые предосторожности. Так, нельзя сначала удалить $\forall x$, взяв в качестве r переменную y, ибо в этом случае мы получили бы $\forall y \exists w P(w, y, y)$, где новое (второе) вхождение y связано. Здесь целесообразно использовать стандартную процедуру, состоящую в том, что выбираются различные новые переменные, т. е. переменные, отличные друг от друга и от всех других переменных, фигурирующих в рассматриваемой формуле, в данном случае x_1 и x_2. После двух последовательных $\forall$-удалений (пользуясь теоремой 9_{Pd}(ii)), получаем: (1) $\forall x \forall y \exists w P(w, x, y) \vdash \exists w P(w, x_1, x_2)$. Отсюда за счет двух последовательных $\forall$-введений имеем: (2) $\forall x \forall y \exists w P(w, x, y) \vdash \forall x_1 \forall x_2 \exists w P(w, x_1, x_2)$. Двумя последовательными $\forall$-удалениями получим: (3) $\forall x_1 \forall x_2 \exists w P(w, x_1, x_2) \vdash \exists w P(w, y, z)$. Сочетая (2) и (3) по теореме 9_{Pd}(ii), получим: (4) $\forall x \forall y \exists w P(w, x, y) \vdash \exists w P(w, y, z)$.

(b) Предоставляется читателю (упр. 23.2(b)).

Следствие 2. (Подстановка вместо индивидных переменных: см. примечание 3 на стр. 106.) *В условиях теоремы или предыдущего следствия, если* Γ *не содержит свободных вхождений* x *(соответственно* $w_1, \ldots, w_p$*), имеют место следующие выводимости:*

(c) *Если* $\Gamma \vdash A(x)$, *то* $\Gamma \vdash A(r)$.

(d) *Если* $\Gamma \vdash A(w_1, \ldots, w_p)$, *то* $\Gamma \vdash A(r_1, \ldots, r_p)$.

Доказательство вынесено в упражнения (упр. 23.3).

Упражнения. 23.1. В каждом из приводимых ниже списков формул последняя не общезначима (как видно из упр. 17.3, 17.5), а значит (согласно теореме 12_{Pd}), недоказуема, вопреки тому, что о ней утверждается. Найдите ошибку.

I. «1. $P(x) \vdash P(x)$ — (i) (из теоремы 9_{Pd}).
2. $P(x) — \forall x P(x)$ — $\forall$-введ., 1.
3. $\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)$ — $\exists$-удал., 2.
4. $\vdash \exists x P(x) \supset \forall x P(x)$ — $\supset$-введ., 3.».

II. «1. $P(x), Q(x) \vdash \exists x (P(x) \& Q(x))$ — &- и $\exists$-введ.
2. $P(x), \exists x Q x \vdash \exists x (P(x) \& Q(x))$ — $\exists$-удал., 1.
3. $\exists x P(x), \exists x Q(x) \vdash \exists x (P(x) \& Q(x))$ — $\exists$-удал., 2.
4. $\exists x P(x) \& \exists x Q(x) \vdash \exists x (P(x) \& Q(x))$ — &-удал. 3 (и (ii)).
5. $\vdash \exists x P(x) \& \exists x Q(x) \supset \exists x (P(x) \& Q(x))$ — $\supset$-введ., 4.».

III. «1. $P(x) \vdash P(x)$ — (i).
2. $\exists x P(x) \vdash P(x)$ — $\exists$-удал., 1.
3. $\vdash \exists x P(x) \supset P(x)$ — $\supset$-введ., 2.».

23.2. (a) Напишите со всеми подробностями те шесть $\forall$-удалений и введений, которые использовались в примере, иллюстрировавшем доказательства следствия 1 (а), и проверьте, что надлежащие условия выполнены. (b) Проиллюстрируйте доказательство следствия 1 (b) на том же примере.

23.3. Докажите следствие 2. Упростите его формулировку для того случая, когда список Г пуст.

23.4. Докажите, что для всякой переменной x и всякой формулы A утверждение $\vdash$ A равносильно $\vdash \forall x$A и, следовательно, что $\vdash$ A равносильно $\vdash \forall$A (относительно «$\forall$» см. § 20).

23.5. Докажите, что $\forall' A_1, \ldots, \forall' A_m \vdash B$ равносильно $\forall' A_1, \ldots$ $\ldots, \forall' A_m \vdash \forall' B$ ($\forall' \simeq \forall x_1 \ldots \forall x_q$, как в § 20).

23.6. Истинны или ложны следующие предложения и почему?

(a) «$\forall z \exists y \forall x P(x, y, z) \vdash \forall x \exists y \forall z P(x, y, z)$.»

(b) «$\exists x \forall y \forall z P(x, y, z) \vdash \forall z \exists x P(x, x, z)$.»

23.7. Какая из двух импликаций $\{\vdash E\} \rightleftarrows \{\models E\}$ (теорема 12_{Pd} и гл. VI) остается справедливой для любой формулы E при следующих модификациях в исчислении предикатов и почему?

(a) Добавляется новая схема аксиом: $\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$.

(b) Добавляется новая схема аксиом: $\exists x A x \supset \forall x A(x)$.

(c) Устраняются $\forall$-схема, $\forall$-правило, $\exists$-схема и $\exists$-правило.

§ 24. Теория доказательств; замена, цепи эквивалентностей

Теорема 22. *Пусть* x — *любая переменная*, A, B, C, A(x), B(x) — *произвольные формулы, и, кроме того, в* *69a — *72a *список* Г *(возможно, пустой) таков, что* x *не входит свободно в формулы из* Г[1]).

*6. $A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)$.	*7. $A \supset B \vdash (C \supset A) \supset (C \supset B)$.
*8a. $A \supset B \vdash A \& C \supset B \& C$.	*8b. $A \supset B \vdash C \& A \supset C \& B$.
*9a. $A \supset B \vdash A \vee C \supset B \vee C$.	*9b. $A \supset B \vdash C \vee A \supset C \vee B$.
*12. $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$.	*13. $A \supset \neg B \vdash B \supset \neg A$.
*14°. $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$.	*15°. $\neg A \supset \neg B \vdash B \supset A$.

*69a. *Если* $\Gamma \vdash A(x) \supset B(x)$, *то* $\Gamma \vdash \forall x A(x) \supset \forall x B(x)$.

*70a. *Если* $\Gamma \vdash A(x) \supset B(x)$, *то* $\Gamma \vdash \exists x A(x) \supset \exists x B(x)$.

(Введение логического символа в импликацию, включая случай контрапозиции с удалением двойного отрицания.)

*25a. $A \sim B \vdash (A \sim C) \sim (B \sim C)$.	*25b. $A \sim B \vdash (C \sim A) \sim$ $\sim (C \sim B)$.
*26. $A \sim B \vdash A \supset C \sim B \supset C$.	*27. $A \sim B \vdash C \supset A \sim C \supset B$.
*28a. $A \sim B \vdash A \& C \sim B \& C$.	*28b. $A \sim B \vdash C \& A \sim C \& B$.
*29a. $A \sim B \vdash A \vee C \sim B \vee C$.	*29b. $A \sim B \vdash C \vee A \sim C \vee B$.

*30. $A \sim B \vdash \neg A \sim \neg B$.

[1]) Как и выше (теорема 2), наша нумерация формул соответствует нумерации [BM] (*69a — *72a являются модификациями формул *69 — *72 из [BM]; формулы *25a, *25b, *40a, *40b не имеют в [BM] номеров; ср. примечание 1 на стр. 50).

*71a. *Если* $\Gamma \vdash A(x) \sim B(x)$, *то* $\Gamma \vdash \forall x A(x) \sim \forall x B(x)$.
*72a. *Если* $\Gamma \vdash A(x) \sim B(x)$, *то* $\Gamma \vdash \exists x A(x) \sim \exists x B(x)$.
(Введение логического символа в эквивалентность.)

*40a. $A \vdash (A \sim B) \sim (B \sim A) \sim B$. *40b. $\neg A \vdash (A \sim B) \sim \sim (B \sim A) \sim \neg B$.
*41. $A \vdash A \supset B \sim B$. *43. $\neg A \vdash A \supset B \sim \neg A$.
*42. $A \vdash B \supset A \sim A$. *44. $\neg A \vdash B \supset A \sim \neg B$.
*45. $A \vdash A \& B \sim B \& A \sim B$. *47. $\neg A \vdash A \& B \sim B \& A \sim A$.
*46. $A \vdash A \vee B \sim B \vee A \sim A$. *48. $\neg A \vdash A \vee B \sim B \vee A \sim B$.
(Упрощение бинарных пропозициональных связок.)

Доказательства. Все эти результаты, исключая четыре относящихся к кванторам (*69a—*72a), можно установить в рамках исчисления высказываний. Они автоматически доказываются с $\models$ путем вычисления истинностной таблицы для P, Q, R с последующей подстановкой, как в примере 7.3[1]). Затем в силу полноты заменяем $\models$ на $\vdash$ (теорема 14, теоремы 8, 10). Можно вместо этого воспользоваться еще правилами теоремы 13, используя *6—*12 в доказательствах *26—*30. Затем их можно перенести в исчисление предикатов, как говорилось в начале § 21 (упр. 24.1).

*69a и *70a. *70a получается из упр. 21.4, если применить вывод $A(x) \supset B(x)$ из Γ вместо вывода из $\forall x(A(x) \supset B(x))$. *69a получается так же или путем обобщения примера 14, где $P(x)$ и $Q(x)$ заменяются на $A(x)$, $B(x)$, а первые три строки заменяются выводом $A(x) \supset B(x)$, существование которого предполагается. Можно также использовать правила теорем 13 и 21 (упр. 24.2).

*71a и *72a. *71a устанавливается так:

1. $\Gamma \vdash A(x) \sim B(x) \vdash A(x) \supset B(x)$—предположение; $\sim$-удал. (ср. примечание на стр. 61).
2. $\Gamma \vdash \forall x A(x) \supset \forall x B(x)$—*69a, 1.
3. $\Gamma \vdash \forall x B(x) \supset \forall x A(x)$—аналогично.
4. $\Gamma \vdash \forall x A(x) \sim \forall x B(x)$—$\sim$-введ., 2, 3.

Аналогично устанавливается и *72a.

Теперь мы можем перенести на исчисление предикатов теорему 5 с заменой «$\models$» на «$\Gamma \vdash$» (это обобщение для «$\models$» было уже проделано для исчисления предикатов в § 19).

Теорема 23. (Теорема о замене.) *Пусть* C_A — *некоторая формула, в которой выделено вхождение формулы* A, а C_B — *формула, получаемая из* C_A *заменой этого вхождения на формулу* B. *Пусть* $x_1, \ldots, x_q$ — *свободные переменные формул* A *или* B, *затрагиваемые кванторами формулы* C_A, *в области действия которых содержится рассматриваемое вхождение (т. е.* $x_1, \ldots, x_q$ — *переменные, имеющие в* A *или* B *свободные вхождения, которые оказыва-*

[1]) С помощью таблиц (I) § 8 можно сократить вычисления для *40a—*48.

ются связанными в C_A *или в* C_B*). Пусть* Γ *— список (возможно, пустой) формул, ни в одну из которых* $x_1, \ldots, x_q$ *не входят свободно. Тогда:*

$$\textit{Если}\ \Gamma \vdash A \sim B, \quad \textit{то}\ \Gamma \vdash C_A \sim C_B.$$

Доказательство. Проиллюстрируем доказательство на четырех примерах.

Пример 15. Возьмем в качестве C_A формулу $R \supset \forall z(\underline{\neg \exists x P(x, y, z)} \vee Q(z))$, в которой выделенное вхождение формулы A подчеркнуто. Пусть «$\Gamma \vdash A \sim B$» имеет вид «$\vdash \neg \exists x P(x, y, z) \sim \forall x \neg P(x, y, z)$» (т. е. список Γ пуст), что верно в силу *82a теоремы 26. Это значит, что доказуема формула в строке 1 ниже. Пользуясь *29a, *71a и *27, последовательно получаем, что 2—4 также доказуемы:

$$\begin{array}{lrcl}
1. & \neg \exists x P(x, y, z) & \sim & \forall x \neg P(x, y, z) \\
2. & \neg \exists x P(x, y, z) \vee Q(z) & \sim & \forall x \neg P(x, y, z) \vee Q(z) \\
3. & \forall z(\neg \exists x P(x, y, z) \vee Q(z)) & \sim & \forall z(\forall x \neg P(x, y, z) \vee Q(z)) \\
4. & R \supset \forall z(\neg \exists x P(x, y, z) \vee Q(z)) & \sim & R \supset \forall z(\forall x \neg P(x, y, z) \vee Q(z))
\end{array}$$

Значит, $\vdash R \supset \forall z(\neg \exists x P(x, y, z) \vee Q(z)) \sim R \supset \forall z(\forall x \neg P(x, y, z) \vee Q(z))$, что и утверждает теорема в данном случае.

Пример 16. Возьмем в качестве C_A формулу $P(x) \vee \forall x \exists y(\underline{P(x)} \supset Q(y))$, в которой подчеркнуто выделенное вхождение формулы A. Пусть «$\Gamma \vdash A \sim B$» имеет вид «$\forall x \forall y[P(x) \sim \exists z R(x, y, z)] \vdash P(x) \sim \exists z R(x, y, z)$», что получается посредством двойного $\forall$-удаления; значит, формула в строке 1 ниже выводима из списка Γ. Пользуясь *26, *72a (это можно, так как список Γ не содержит y свободно), *71a (так как x не входит свободно в Γ), *29b, заключаем последовательно, что 2—5 также выводимы из Γ.

$$\begin{array}{lrcl}
1. & P(x) & \sim & \exists z R(x, y, z) \\
2. & P(x) \supset Q(y) & \sim & \exists z R(x, y, z) \supset Q(y) \\
3. & \exists y(P(x) \supset Q(y)) & \sim & \exists y(\exists z R(x, y, z) \supset Q(y)) \\
4. & \forall x \exists y(P(x) \supset Q(y)) & \sim & \forall x \exists y(\exists z R(x, y, z) \supset Q(y)) \\
5. & P(x) \vee \forall x \exists y(P(x) \supset Q(y)) & \sim & P(x) \vee \forall x \exists y(\exists z R(x, y, z) \supset Q(y))
\end{array}$$

Значит,

$$\forall x \forall y[P(x) \sim \exists z R(x, y, z)] \vdash P(x) \vee \forall x \exists y(P(x) \supset Q(y)) \sim$$
$$\sim P(x) \vee \forall x \exists y(\exists z R(x, y, z) \supset Q(y)),$$

а это и утверждает теорема в данном случае.

Пример 17. В примере 16 заменим B на $\exists z R(x, w, z)$. Так как w не делается связанной, когда подформула $P(x)$ замещается формулой $\exists z R(x, w, z)$, переменная w имеет право свободно входить в Γ. Значит,

$$\forall x[P(x) \sim \exists z R(x, w, z)] \vdash P(x) \vee \forall x \exists y(P(x) \supset Q(y)) \sim$$
$$\sim P(x) \vee \forall x \exists y(\exists z R(x, w, z) \supset Q(y))$$

Пример 18. Будем считать выделенным вхождением формулы $P(x)$ в примере 16 ее первое вхождение в эту формулу. Тогда $C_A \sim C_B$ выводимо из $P(x) \sim B$ (достаточно просто воспользоваться *29a), какова бы ни была формула B.

Следствие 1. *Если* C_A, C_B, $x_1, \ldots, x_q$ *удовлетворяют условиям теоремы, то*

$$A \sim B \vdash^{x_1 \ldots x_q} C_A \sim C_B.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему, приняв за список Γ формулу $\forall x_1 \ldots \forall x_q (A \sim B)$, и поступать, как в примерах 16, 17, помня, что «$A \sim B \vdash^{x_1 \ldots x_q}$» означает

$$«\forall x_1 \ldots \forall x_q (A \sim B) \vdash».$$

Следствие 2. (Свойство замены для эквивалентности.) *Аналогичным образом:*

(a) *Если* $\Gamma \vdash A \sim B$, *то* $\Gamma, C_A \vdash C_B$.

(b) $A \sim B, C_A \vdash^{x_1, \ldots, x_q} C_B$.

Теперь мы можем вернуться к (α)—(ζ) § 5 и проверить, что эти утверждения верны, если заменить «$\models$» на «$\Gamma \vdash$» (упр. 24.3). Учитывая теорему 23 (или ее следствие 1), мы в состоянии теперь неограниченно пользоваться цепочками эквивалентностей в теории доказательств, ставя перед этими цепочками «$\Gamma \vdash$» (вместо «$\models$», как в § 5, 19). Формулы Γ не должны содержать свободно переменных $x_1, \ldots, x_q$, относящихся к кванторам, в области действия которых совершаются замены (или если они содержат свободно такие переменные, то эти переменные следует указать в качестве верхних индексов при знаке «$\vdash$»). В большинстве приложений (например, в доказательствах теорем 25 и 26) список Γ пуст (как в примере 15), и эквивалентности оказываются доказуемыми формулами, так что нам не надо беспокоиться насчет $x_1, \ldots, x_q$.

Пусть (в обозначениях теоремы 23) выделенное вхождение A в C_A не находится в области действия связки $\sim$ (т. е. A не расположена в части D никакой подформулы, имеющей вид $D \sim E$ или $E \sim D$). Говорят, что выделенное вхождение A *положительно* или *отрицательно* в зависимости от того, расположено оно в области действия четного или соответственно нечетного числа отрицаний и посылок импликаций[1]). Например,

---

[1]) Вот более точное определение. 1. Вхождение A в A считается положительным. 2. Вхождение A в $C \odot D$ (где $\odot$ — любой из знаков &, V), происходящее от некоторого вхождения A в C (в D), имеет тот же знак, что и это вхождение A в C (в D) 3. Вхождение A в QxD (где Q есть $\forall$ или $\exists$) или в $C \supset D$, происходящее от некоторого вхождения в D, имеет тот же знак, что и это вхождение. 4. Вхождение A в $\neg D$ или $D \supset C$, происходящее от некоторого вхождения в D, имеет знак, противоположный знаку этого вхождения в D.— *Прим. ред.*

в $\overline{\underline{\neg}}\,\exists x\,((P(x) \underline{\supset} Q) \vee R) \overline{\underline{\supset}}\, \forall y\, P(y)$ часть $P(x)$ отрицательна (надо подсчитать число подчеркнутых операторов), тогда как часть Q положительна (надо подсчитать число надчеркнутых операторов).

Теорема 24. *В условиях теоремы 23, предполагая дополнительно, что выделенное вхождение формулы* A *не расположено в области действия никакой связки* $\sim$, *имеем:*

$$\text{Если } \Gamma \vdash A \supset B, \text{ то } \Gamma \vdash \begin{cases} C_A \supset C_B \\ C_B \supset C_A, \end{cases}$$

$$\text{если выделенное вхождение } A \begin{cases} \text{положительно} \\ \text{отрицательно.} \end{cases}$$

Следствие.

$$A \supset B \vdash^{x_1 \ldots x_q} \begin{cases} C_A \supset C_B \\ C_B \supset C_A \end{cases}, \text{ если это вхождение } A \begin{cases} \text{положительно} \\ \text{отрицательно.} \end{cases}$$

Доказательства предоставляются читателю в качестве упражнения (упр. 24.4).

Лемма 5. *Пусть* x — *некоторая переменная*, A (x) — *произвольная формула, а* y — *произвольная переменная, не обязательно отличная от* x, *такая, что:*

(i) y *свободна для* x *в* A (x),

(ii) y *не входит свободно в* A (x) (*кроме случая, когда* y — *это* x),

а A (y) — *результат подстановки* y *вместо свободных вхождений* x *в* A (x). *Тогда*

*73. $\vdash \forall x\, A(x) \sim \forall y\, A(y)$. *74. $\vdash \exists x\, A(x) \sim \exists y\, A(y)$.

Доказательства. *73. Вытекает из правого столбца примера 11. Аналогично доказывается *74.

Теорема 25. *Если* A *конгруэнтна* B, *то* $\vdash A \sim B$.

Утверждение теоремы можно проиллюстрировать на примерах (1) и (2) конгруэнтных формул в конце § 16. Стандартный метод, применимый всегда (хотя порой можно пользоваться некоторыми сокращениями), состоит в том, что берется набор новых переменных x_1, x_2, x_3, соответствующих трем кванторам каждой из этих формул. Последовательно заменяя вхождения переменных, связанных каждым из этих кванторов, преобразуем строку 1 (= (1) из § 16) в 4 (ср. (1b) (2b)), а затем 4 в 7 (= (2) из § 16):

1. $\forall x\, (P(x) \mathbin{\&} \exists x\, Q(x, z) \supset \exists y\, R(x, y)) \vee Q(z, x)$.
2. $\forall x\, (P(x) \mathbin{\&} \exists x_1\, Q(x_1, z) \supset \exists y\, R(x, y)) \vee Q(z, x)$.
3. $\underline{\forall x\, (P(x) \mathbin{\&} \exists x_1\, Q(x_1, z) \supset \exists x_2\, R(x, x_2))} \vee Q(z, x)$.
4. $\underline{\forall x_3\, (P(x_3) \mathbin{\&} \exists x_1\, Q(x_1, z) \supset \exists x_2 R(x_3, x_2))} \vee Q(z, x)$.

5. $\forall y (P(y) \& \exists x_1 Q(x_1, z) \supset \exists x_2 R(y, x_2)) \vee Q(z, x)$.
6. $\forall y (P(y) \& \exists x_1 Q(x_1, z) \supset \exists z R(y, z)) \vee Q(z, x)$.
7. $\forall y (P(y) \& \exists x Q(x, z) \supset \exists z R(y, z)) \vee Q(z, x)$.

Доказательство того, что $\vdash A \sim B$ (здесь A — формула (1), а B — это (2)), дается методом цепей. Например, для третьего звена условия леммы 5 выполнены при x, $P(x) \& \exists x_1 Q(x_1 z) \supset \exists x_2 R(x, x_2)$, x_3 в ролях x, $A(x)$, y. Следовательно, в силу *73 подчеркнутые части строк 3 и 4 эквивалентны (т. е. доказуема формула $\forall x A(x) \sim \forall y A(y)$, выражающая их эквивалентность). Отсюда в силу теоремы 23 строка 3 эквивалентна строке 4.

Упражнения. 24.1. Проведите все шаги доказательств утверждений *6, *7 и *26, пользуясь один за другим всеми указанными в тексте методами.

24.2. Установите *69а и *70а посредством правил теорем 13 и 21.

24.3. Проверьте, что (α)—(ζ) из § 5 сохраняют силу в исчислении предикатов при приписывании «$\Gamma \vdash$». (Относительно (β)—(δ) см. *19—*21 теоремы 2.)

24.4. Докажите теорему 24 и ее следствие.

24.5. Обоснуйте следующие утверждения. В (b) использована запись типа (B_1) из § 13.

(a) 1. $\forall x (P(x) \supset M(x)) \vdash P(x) \supset M(x)$.

2. $\forall x (P(x) \supset M(x)) \vdash \exists x (S(x) \& \neg M(x)) \supset$
$\supset \exists x (S(x) \& \neg P(x))$.

3. $\forall x (P(x) \supset M(x)), \exists x (S(x) \& \neg M(x)) \vdash$
$\vdash \exists x (S(x) \& \neg P(x))$.

Последняя строка выражает силлогизм классической аристотелевской логики, называемый «Baroco»: Все P суть M. Некоторые же S не суть M. Значит, некоторые S не суть P.

(b) Пусть $\forall x (P(x) \supset \neg M(x))$. Тогда $P(x) \supset \neg M(x)$, откуда $M(x) \supset \neg P(x)$, значит, $\exists x (S(x) \& M(x)) \supset \exists x (S(x) \& \neg P(x))$. Следовательно, $\forall x (P(x) \supset \neg M(x))$, $\exists x (S(x) \& M(x)) \vdash \exists x (S(x) \& \neg P(x))$ («Festino»)[1]).

§ 25. Теория доказательств; изменения кванторов, предваренная форма

Ниже мы используем доказательства теоремы 26 для иллюстрации и усовершенствования аппарата выводимых правил. Будем пользоваться схемами «(A)», «(B_1)», «(B_2)», «(B_3)», как в § 13. Те-

[1]) Перевод в нашу символику объяснен далее, в § 26. Можно установить еще 13 других аристотелевских силлогизмов; четыре же из классических силлогизмов оказываются неверными, если переводить их согласно тем же принципам. См. пример 23 из § 27 и Гильберт — Аккерман [1928], гл. 2, § 3.

перь мы дополнительно располагаем четырьмя правилами введения и удаления кванторов (теорема 21). Как и всегда, надо тщательно следить за выполнением ограничений, указанных в формулировках этих правил.

Правило $\forall$-введения было сформулировано в теореме 21 как правило вспомогательного вывода, когда допущения одинаковы во вспомогательном и в результирующем выводах. В результате при перечислении формул, выводимых из допущений Γ, *не содержащих свободно* x, мы можем переходить от A(x) к $\forall$x A(x) посредством $\forall$-введения.

Правило $\exists$-удаления служит для удаления $\exists$x из $\exists$x A(x) в качестве подготовки к тому, чтобы вывести из $\exists$x A(x) (и, может быть, еще других допущений Γ, *в которые* x *не входит свободно*) некоторое следствие C, *в которое* x *не входит свободно*. Эта процедура отвечает известному интуитивному способу рассуждения в математике: «Имеется x, такое, что $A(x)$; возьмем это x ...» или: «Существует число, удовлетворяющее условию A; назовем его x ...». Если в конце некоторой цепи рассуждений, зависящих от x, удается прийти к заключению, не содержащему x, то можно считать, что это заключение установлено независимо от допущений, касавшихся x.

Одной из целей формального изучения логики является увеличение надежности наших логических рассуждений. Такое увеличение надежности основано на том, что в сомнительных случаях мы в состоянии показать, как осуществляется наше (или других людей) рассуждение шаг за шагом в согласии с изученными нами законами; короче говоря, мы можем показать, как можно «формализовать» наше рассуждение. Случается (см. гл. IV), что мы делаем это для прояснения основания наших рассуждений независимо от того, сомневаемся мы в его правильности или нет.

Поэтому одна из целей формального изучения логики — максимально приблизить методы распознавания доказуемости формул (в строгом смысле теории доказательств § 9 и 21) к методам, используемым в неформальных рассуждениях.

Мы не утверждаем, что этого можно достичь раз и навсегда для всех видов рассуждения. Все же правила введения и удаления логических символов, на наш взгляд, достаточно хорошо реализуют эту программу в отношении интуитивного использования логики предикатов, причем не только для доказательства результатов в логике (см. непосредственно ниже), но и в применении логики к математике или к другим областям. Надо иметь в виду также замечания в конце § 13 о возможности дополнения правил другими вспомогательными приемами.

Правила введения и удаления в основном восходят к Генцену [1932], [1934—5], [1936] (он использовал более раннюю работу Герца [1929]) и Яськовскому [1934] [1]). Эти авторы в основном занимались формулировкой логики, в которой такие правила были постулированы, тогда как у нас они выводятся. Наша схема (B_2) довольно близко примыкает к «натуральному выводу» Генцена и Яськовского [1934].

Высказываются противоположные взгляды насчет того, что лучше: начинать с аксиоматической формулировки логики, пользуясь правилом MP (логические системы «гильбертовского типа», см. § 50 и 54), выводя затем правила введения и удаления, либо принять эти правила в качестве постулированных правил (логические системы «генценовского типа»).

Не существует формулировки, самой удобной для всех целей. Формулировка с аксиомами и правилами необходима, чтобы дать прочную исходную базу для теории доказательств. Однако мы думаем, что, какова бы ни была исходная формулировка, ею не ограничиваются, а рано или поздно пробуют выйти за ее пределы; это вызывается тем, что ищут сокращений, при доказательстве теорем вводятся новые методы и т. п. История математики — это непрерывная история слияния поначалу разрозненных открытий в единые системы конструкций.

Ввиду этого мы предпочли в § 9 и 21 начать с систем гильбертовского типа: ведь структурно они проще и очень хорошо приспособлены к пополнению их математическими аксиомами и схемами аксиом. Мы остановимся на этом подробнее в гл. IV [2]).

Теорема 26. *Пусть* x *и* y — *произвольные различные переменные,* A(x), B(x), A(x, y) — *произвольные формулы, а* A, B — *формулы, в которые* x *не входит свободно. В формулах* *79 *и* *80 A(x, x) *является результатом подстановки* x *вместо свободных вхождений* y *в* A(x, y), *причем* x *свободно для* y *в* A(x, y) (*т. е. все вхождения* x *в* A(x, x), *которые получаются в результате этой подстановки, свободны*) [3]).

*75. $\vdash \forall x A \sim A$. *76. $\vdash \exists x A \sim A$.
*77. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y)$. *78. $\vdash \exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x, y)$.
*79. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \supset \forall x A(x, x)$. *80. $\vdash \exists x A(x, x) \supset \exists x \exists y A(x, y)$.

---

[1]) Правила эти содержат теорему о дедукции, которая появилась в 1930 г. или ранее у Эрбрана и Тарского (см. примечание на стр. 54—55).

[2]) В гл. VI нам нужны будут также генценовские системы, относительно которых будет доказано, что они эквивалентны гильбертовским системам, используемым здесь.

[3]) Нумерация отвечает нумерации в [BM] (формулы *82a, *82b — это *86 и *85 из [BM], их номера изменены, чтобы поместить их раньше; формулы *99b нет в [BM]).

*81. $\vdash \forall x A(x) \supset \exists x A(x)$.
*82. $\vdash \exists x \forall y A(x, y) \supset \forall y \exists x A(x, y)$.
(Изменения кванторов.)

*82a. $\vdash \neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$. *82b°. $\vdash \neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$.
*83°. $\vdash \exists x A(x) \sim \neg \forall x \neg A(x)$. *84°. $\vdash \forall x A(x) \sim \neg \exists x \neg A(x)$.
(Отрицание и кванторы.)

*87. $\vdash \forall x A(x) \& \forall x B(x) \sim \forall x (A(x) \& B(x))$.
*88. $\vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \sim \exists x (A(x) \vee B(x))$.
*89. $\vdash A \& \forall x B(x) \sim \forall x (A \& B(x))$.
*90. $\vdash A \vee \exists x B(x) \sim \exists x (A \vee B(x))$.
*91. $\vdash A \& \exists x B(x) \sim \exists x (A \& B(x))$.
*92°. $\vdash A \vee \forall x B(x) \sim \forall x (A \vee B(x))$.
*93. $\vdash \exists x (A(x) \& B(x)) \supset \exists x Ax \& \exists x B(x)$.
*94. $\vdash \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \supset \forall x (A(x) \vee B(x))$.
(Конъюнкция или дизъюнкция и кванторы.)

*95. $\vdash A \supset \forall x B(x) \sim \forall x (A \supset B(x))$
*97°. $\vdash A \supset \exists x B(x) \sim \exists x (A \supset B(x))$.
*98°. $\vdash \forall x A(x) \supset B \sim \exists x (A(x) \supset B)$.
*96. $\vdash \exists x A(x) \supset B \sim \forall x (A(x) \supset B)$.
*99°. $\vdash \forall x A(x) \supset \exists x B(x) \sim \exists x (A(x) \supset B(x))$.
*99b. $\vdash (\exists x A(x) \supset \forall x B(x)) \supset \forall x (A(x) \supset B(x))$.
(Импликация и кванторы.)

Доказательства.

*75. 1. $\forall x A \vdash A$ — $\forall$-удал. (здесь x играет роль x и r, а A играет роль A (x), так что r тривиально свободна для x в A (x)).
2. $\vdash \forall x A \supset A$ — $\supset$-введ., 1.
(A) 3. $A \vdash A$.
4. $A \vdash \forall x A$ — $\forall$-введ., 3 (можно, так как A не содержит свободно x).
5. $\vdash A \supset \forall x A$ — $\supset$-введ., 4.
6. $\forall x A \sim A$ — $\sim$-введ., 2, 5.

(B$_1$) I. Допустим, что $_1\forall x A$ (подготавливая $\supset$-введ.). По $\forall$-удал. имеем $_2A$.
II. Допустим $_4A$, куда не входит свободно x. По $\forall$-введ. имеем $_5\forall x A$.

(B$_2$)
1. $\forall x A$ — допущение.
2. A — $\forall$-удал., 1.
3. $\forall x A \supset A$ — $\supset$-введ., 2.
4. A — допущение.
5. $\forall x A$ — $\forall$-введ., 4.
6. $A \supset \forall x A$ — $\supset$-введ., 5.
7. $\forall x A \sim A$ — $\sim$-введ., 3, 6.

(B$_3$)
1. $\forall x\, A \vdash \forall x\, A$.
2. $\forall x\, A \vdash A$ — $\forall$-удал., 1.
3. $\vdash \forall x\, A \supset A$ — $\supset$-введ., 2.
4. $A \vdash A$.
5. $A \vdash \forall x\, A$ — $\forall$-введ., 4.
6. $\vdash A \supset \forall x\, A$ — $\supset$-введ., 5.
7. $\vdash \forall x\, A \sim A$ — $\sim$-введ., 3, 6.

*76. 1. $A \vdash A$.
2. $\exists x\, A \vdash A$ — $\exists$-удал., 1 (заметим, что формула A, играющая роль C, не содержит свободно x).
(A)
3. $\vdash \exists x\, A \supset A$ — $\supset$-введ., 2.
4. $A \supset \exists x\, A$ — $\exists$-введ. (x играет роль r).
5. $\vdash A \supset \exists x\, A$ — $\supset$-введ., 4.
6. $\vdash \exists x\, A \sim A$ — $\sim$-введ., 3, 5.

*80. 1. $A(x, x) \vdash \exists x \exists y\, A(x, y)$ — двойное $\exists$-введ. (первый раз с y в роли x, а x в роли r, используя то, что x свободен для y в $A(x, y)$; второй раз x играет роль и x и r) или в силу следствия 1 (b) теоремы 21.
(A) 2. $\exists x\, A(x, x) \vdash \exists x \exists y\, A(x, y)$ — $\exists$-удал., 1 (если в качестве C взять $\exists x \exists y\, A(x, y)$, то в C не входит свободно x).
3. $\vdash \exists x\, A(x, x) \supset \exists x \exists y\, A(x, y)$ — $\supset$-введ., 2.

*82a. 1. $\neg \exists x\, A(x),\ A(x) \vdash \neg \exists x\, A(x)$.
2. $\neg \exists x\, A(x),\ A(x) \vdash \exists x\, A(x)$ — $\exists$-введ. (x в роли r).
3. $\neg \exists x\, A(x) \vdash \neg A(x)$ — $\neg$-введ., 2, 1.
4. $\neg \exists x\, A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$ — $\forall$-введ., 3 (так как $\neg \exists x\, A(x)$ не содержит свободно x и может рассматриваться как Γ).
5. $\vdash \neg \exists x\, A(x) \supset \forall x \neg A(x)$ — $\supset$-введ., 4.
(A) 6. $\forall x \neg A(x),\ A(x) \vdash A(x)$.
7. $\forall x \neg A(x),\ A(x) \vdash \neg A(x)$ — $\forall$-удал.
8. $\forall x \neg A(x),\ A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ — слабое $\neg$-удал., 6, 7.
9. $\forall x \neg A(x),\ \exists x A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ — $\exists$-удал., 8 (замечая, что ни $\neg \forall x \neg A(x)$ в роли C, ни $\forall x \neg A(x)$ в роли Γ не содержат свободно x).
10. $\forall x \neg A(x),\ \exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.
11. $\forall x \neg A(x) \vdash \neg \exists x A(x)$ — $\neg$-введ., 10, 9.
12. $\vdash \forall x \neg A(x) \supset \neg \exists x A(x)$ — $\supset$-введ., 11.
13. $\vdash \neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$ — $\sim$-введ., 5, 12.

I. Пусть $_1\neg \exists x A(x)$. Подготавливая $\neg$-введ., допустим $_2A(x)$. По $\exists$-введ. $_3\exists x A(x)$, что противоречит $\neg \exists x A(x)$. Значит, $_4\neg A(x)$ в силу $\neg$-введ. (освобождаясь от допущения $A(x)$). По $\forall$-введ. (которое возможно, ибо оставшееся допущение $\neg \exists x A(x)$ не содержит x свободно) $_5\forall x \neg A(x)$.
(B$_1$) II. Пусть $_7\forall x \neg A(x)$. Подготавливая $\neg$-введ., допустим $_8\exists x A(x)$. Подготавливая $\exists$-удал., допустим $_9A(x)$. Исходя

из $\forall x \neg A(x)$, получаем по $\forall$-удал. ${}_{10}\neg A(x)$, что противоречит $A(x)$. По слабому $\neg$-удал. ${}_{11}\neg \forall x \neg A(x)$. Так как ни эта формула, ни допущения $\forall x \neg A(x)$, $\exists x A(x)$, отличные от $A(x)$, не содержат свободно x, мы можем теперь завершить $\exists$-удал., а затем $\neg$-введ. (учтя противоречие с $\forall x \neg A(x)$) и получаем ${}_{13}\neg \exists x A(x)$:

1. $\neg \exists x A(x)$ — допущение.
2. $A(x)$ — допущение.
3. $\exists x A(x)$ — $\exists$-введ., 2.
4. $\neg A(x)$ — $\neg$-введ., 3, 1.
5. $\forall x \neg A(x)$ — $\forall$-введ., 4.

(B_2) 6. $\neg \exists x A(x) \supset \forall x \neg A(x)$ — $\supset$-введ., 5.

7. $\forall x \neg A(x)$ — допущение.
8. $\exists x A(x)$ — допущение.
9. $A(x)$ — допущение.
10. $\neg A(x)$ — $\forall$-удал., 7.
11. $\neg \forall x \neg A(x)$ — слабое $\neg$-удал., 9, 10.
12. $\neg \forall x \neg A(x)$ — $\exists$-удал., 11.
13. $\neg \exists x A(x)$ — $\neg$-введ., 7, 12.
14. $\forall x \neg A(x) \supset \neg \exists x A(x)$ — $\supset$-введ., 13.
15. $\neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$ — $\sim$-введ., 6, 14.

1. $\neg \exists x A(x) \vdash \neg \exists x A(x)$.
2. $A(x),\ \neg \exists x A(x) \vdash A(x)$.
3. $A(x),\ \neg \exists x A(x) \vdash \exists x A(x)$ — $\exists$-введ., 2.
4. $\neg \exists x A(x) \vdash \neg A(x)$ — $\neg$-введ., 3, 1.
5. $\neg \exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$ — $\forall$-введ., 4.
6. $\vdash \neg \exists x A(x) \supset \forall x \neg A(x)$ — $\supset$-введ., 5.
7. $\forall x \neg A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$.

(B_3) 8. $\exists x A(x),\ \forall x \neg A(x) \vdash \exists x A(x)$.

9. $A(x),\ \exists x A(x),\ \forall x \neg A(x) \vdash A(x)$.
10. $A(x),\ \exists x A(x),\ \forall x \neg A(x) \vdash \neg A(x)$ — $\forall$-удал., 7.
11. $A(x),\ \exists x A(x),\ \forall x \neg A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ — слабое $\neg$-удал., 9, 10.
12. $\exists x A(x),\ \forall x \neg A(x) \vdash \neg \forall x \neg A(x)$ — $\exists$-удал., 11.
13. $\forall x \neg A(x) \vdash \neg \exists x A(x)$ — $\neg$-введ., 7, 12.
14. $\vdash \forall x \neg A(x) \supset \neg \exists x A(x)$ — $\supset$-введ., 13.
15. $\vdash \neg \exists x A(x) \sim \forall x \neg A(x)$ — $\sim$-введ., 6, 14.

На каждом шаге рассуждений (B_2) можно использовать те результаты, которые не расположены напротив других стрелок. Так, для строки 4 можно в целях $\neg$-введ. использовать строку 1, которую мы рассматриваем как один из двух «данных выводов», ибо соотношение $\neg \exists x A(x) \vdash \neg \exists x A(x)$ дает нам (в силу общих свойств $\vdash$) $A(x)$, $\neg\exists xA(x) \vdash \neg\exists xA(x)$. Хотя мы можем в строках 9—11 устранить допущение $\exists xA(x)$, мы предпочитаем его сохранить в силе со строки 8 до строки 12 с тем, чтобы $\exists$-удал., примененное к строке 11, непосредственно дало бы $\exists xA(x)$, $\exists xA(x)$, $\forall x\neg A(x) \vdash \neg\forall x\neg A(x)$. (Ср. 12—17 из (B_3) примера 9 § 13.)

*82b. Используем метод цепей, которым мы уже располагаем в силу § 24. $\vdash \exists x\neg A(x) \sim \neg\neg\exists x\neg A(x)$ [*49] $\sim \neg\forall x\neg\neg A(x)$ [*82a] $\sim \neg\forall xA(x)$ [*49].

*87—*94. Эти результаты можно устанавливать попарно, как будет показано для *91 и *92 (*88, *90, *94 можно установить также прямыми методами, аналогично *91):

(B_1) *91. I. Допустим ${}_1A\&\exists xB(x)$, подготавливая $\supset$-введ. Отсюда по &-удал. ${}_2A$ и ${}_3\exists xB(x)$. Подготавливая $\exists$-удал., допустим ${}_4B(x)$. По &-введ. ${}_5A\&B(x)$, по $\exists$-введ. ${}_6\exists x(A\&B(x))$. Теперь завершаем $\exists$-удал., а затем $\supset$-введ.

II. Пусть ${}_9\exists x(A\&B(x))$. Подготавливая $\exists$-удал., допустим ${}_{10}A\&B(x)$. По &-удал. ${}_{11}A$ и ${}_{12}B(x)$. По $\exists$-введ. ${}_{13}\exists xB(x)$. По &-введ. ${}_{14}A\&\exists xB(x)$. Завершаем $\exists$-удал. и $\supset$-введ.

*92. $\vdash A\vee\forall xB(x) \sim \neg(\neg A\&\neg\forall xB(x))$ [*56] $\sim$
$\sim \neg(\neg A\&\exists x\neg B(x))$ [*82b] $\sim \neg\exists x(\neg A\&\neg B(x))$ [*91] $\sim$
$\sim \forall x\neg(\neg A\&\neg B(x))$ [*82a] $\sim \forall x(A\vee B(x))$ [*56].

*95—*99b. Все эти результаты можно получить методом цепей из *90, *92, *94, пользуясь *59 ($\vdash A\supset B \sim \neg A\vee B$), *82a, *82b (и *34). При некоторой практике эти преобразования можно делать в уме, поэтому ими можно пользоваться, когда нужно вспомнить 95—99b, если помнить *88—*94. (Некоторые из этих формул можно также получить прямыми методами.)

Нужно заметить, что *87 и *88 являются теоремами, тогда как аналогичные формулы с $\forall$ и $\vee$ или с $\exists$ и & теоремами не являются (ими будут только *94 и *93) Это происходит потому, что квантор $\forall$ родствен связке & (можно мыслить $\forall$ как конъюнкцию, распространенную на область D; например, если $D=\{1, 2, 3\}$, то $\forall x P(x)$ означает то же, что $P(1)\&P(2)\&P(3)$, в том расширении исчисления предикатов, которое получается присоединением символов «1», «2», «3» в качестве имен элементов из D). Аналогичное родство есть между $\exists$ и $\vee$.

Теорема 6° и ее следствие° обобщаются на исчисление предикатов с $\vdash$ (вместо $\models$), причем в операцию† теперь включаем также взаимную замену $\forall$ и $\exists$ [1]). Доказательство проводится, как и раньше, только дополнительно используются *82a и *82b.

[1]) Единственное, чего недостает для обобщения теоремы 7 (принципа двойственности) на исчисление предикатов с $\vdash$ (операция ′ включает теперь и взаимную замену кванторов),— это простого частного случая правила подста-

Формула называется *предваренной*, если все ее кванторы находятся вначале, а областью их действия является вся остальная часть формулы. Так, $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$ является предваренной, а $\forall x (\exists y P(x) \vee Q(y))$ — нет. Если E эквивалентна F (т. е. если $\vdash E \sim F$) и F — предваренная, то F называется *предваренной формой* формулы E.

Теорема 27°. *У всякой формулы* E *есть предваренная форма.*

Доказательство. Пусть, например, E — это $\neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)$. Преобразуем E в предваренную формулу F посредством цепочки эквивалентностей:

$$\begin{aligned}
&\vdash \neg \exists x\, P(x) \vee \forall x Q(x) \sim \\
&\sim \forall x \neg P(x) \vee \forall x Q(x) && [*82a] \sim \\
&\sim \forall x (\neg P(x) \vee \forall x Q(x)) && [*92 \text{ и } *34] \sim \\
&\sim \forall x (\neg P(x) \vee \forall y Q(y)) && [\text{теорема 25, т. е. } *73] \sim \\
&\sim \forall x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y)) && [*92].
\end{aligned}$$

При первом применении *92 (совместно с *34) $\forall x Q(x)$ (не содержащая x свободно) играет роль A, а $\neg P(x)$ — роль $B(x)$. Теорема 25 позволяет нам заменить в этом случае $\forall x Q(x)$ на $\forall y Q(y)$ так, что на заключительном этапе (применение *92 с y в роли x) x не входит свободно в A.

Интуиционистское исчисление предикатов. (См. конец § 12.) Чтобы получить *интуиционистское исчисление предикатов*, достаточно заменить схему аксиом 8 на схему аксиом 8^{I}, иными словами, опираться в построении исчисления предикатов на интуиционистское, а не на классическое исчисление высказываний.

новки (теорем 1, 17) в исчислении предикатов с $\vdash$ (дающего возможность получать $\vdash E^{\dagger *}$ из $\vdash E^{\dagger}$).

При рассмотрении подстановки вместо атомов в исчислении высказываний и вместо ионов в исчислении предикатов (а также некоторых других правил подстановки, являющихся правилами вспомогательного вывода) в теории доказательств мы опираемся на идею проведения рассматриваемой подстановки сразу во всем доказательстве; затем мы пытаемся установить, что результат все еще является доказательством. Это непосредственно ясно в исчислении высказываний (кроме случая, когда подстановка вызывает изменение в самом языке; тогда она должна распространиться на те атомы, которые входят в доказательство, но не в доказываемую формулу); ср. [ВМ], теорема 3, стр. 101 и дальше. В исчислении предикатов имеется риск, что осуществляемая в процессе доказательства подстановка вводит свободные вхождения x в формулу C из применения $\forall$- или $\exists$-правила (чем разрушается это применение) или она вводит кванторы внутрь $A(x)$ из аксиомы, задаваемой $\forall$- и $\exists$-схемами, так что r перестает быть свободной для x (чем разрушается эта аксиома); ср. [ВМ], стр. 145 и след. (на стр. 145 строка 11 снизу, надо добавить: «или свободных переменных»). Ни одно из этих усложнений не может возникнуть в простых случаях подстановки вместо ионов, встречающихся в этой книге (например, при подстановке вместо ионов их отрицаний). Подстановку в $\vdash$-соотношения можно рассматривать аналогично, а можно использовать теорему о дедукции по образцу упр. 7.3.

Сохраняют силу те результаты, которые установлены с использованием только выводимых правил теорем 13 и 21, за исключением правила удаления двойного отрицания[1]).

Упражнения. 25.1. Для указанных доказательств преобразуйте выводы вида (B_1) в выводы вида (B_2) и вида (B_3). Проверьте, что все шаги в (B_3) корректны.

(a) Данное выше доказательство *91.

(b) Следующее доказательство *96: I. Допустим (подготавливая $\supset$-введ.) $\exists x A(x) \supset B$. Допустим (для $\supset$-введ.) $A(x)$. По $\exists$-введ. $\exists x A(x)$, а по $\supset$-удал. B. По $\supset$-введ. (удаляя допущение $A(x)$) получаем $A(x) \supset B$. По $\forall$-введ. $\forall x(A(x) \supset B)$. II. Допустим $\forall x(A(x) \supset B)$ и $\exists x A(x)$. Из первого по $\forall$-удал. $A(x) \supset B$. Допустим $A(x)$, подготавливая $\exists$-удал. По $\supset$-удал. B.

25.2. Дайте доказательства *82 и *90 прямыми методами, приняв схему (B_1), и перепишите их по схемам (B_2) и (B_3).

25.3. В (a) и (b) ниже попробуйте рассуждать аналогично и найдите ошибку. (Сведите сомнительный шаг к явному применению одного из правил введения или удаления и покажите, что переменные не удовлетворяют надлежащим условиям.)

(a) Обратное к *82 ($\forall y \exists x A(x, y) \supset \exists x \forall y A(x, y)$) (ср. пример 3).

(b) *92 [2]).

25.4. Докажите *83, *95, *98, исходя из предыдущих результатов и используя метод цепей.

25.5. Докажите *99b, исходя из *94, а также прямым доказательством типа (B_1).

25.6. Проведите доказательства типа (B_1):

(a) $\vdash \exists x \neg A(x) \supset \neg \forall x A(x)$ (ср. *82b).

(b) $\vdash \forall x A(x) \& \exists x B(x) \supset \exists x(A(x) \& B(x))$.

25.7°. Установите $\vdash \forall x(A(x) \vee B(x)) \supset \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$.

25.8. Докажите, что *80, вообще говоря, не сохраняет силы без того ограничения, которое высказано во второй фразе теоремы.

25.9. Докажите, что *91, вообще говоря, не имеет силы, если x входит свободно в A.

25.10. Проделайте 19.4, считая, что «A эквивалентно B» означает «$\vdash A \sim B$».

25.11. Приведите к предваренной форме:

(a) $(\neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)) \& (R \supset \forall x S(x))$.

(b) $\neg\{(\neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)) \& (R \supset \forall x S(x))\}$. (Для уменьшения числа шагов воспользуйтесь теоремой $6_{\mathrm{pd}\vdash}$ применительно к результату (a).)

---

[1]) Более полные перечни интуиционистски верных результатов (записываемые без «°») в стиле теоремы 2 (но применительно к «$\vdash$»), теорем 22 и 26 даны в [BM], теоремы 5, 7, 17 и следствие (стр. 104, 109, 148, 151).

[2]) Формула $P \vee \forall x Q(x) \sim \forall x(P \vee Q(x))$ представляет интерес как формула, которая не содержит $\neg$, но не может быть доказана без использования схемы аксиом 8 (см. [BM], § 80).

(c) $(\neg\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)) \& (R \supset \exists x S(x))$. Обойдитесь двумя кванторами.

(d) $\forall x P(x) \sim \exists x Q(x)$. Начните с использования формулы *63a.

25.12°*. (a) Докажите следующую теорему (см. примечание на стр. 109): *Какова бы ни была формула* E *и* 0-*местный ион* P, *всегда* $\vdash E \sim (P\&F_1) \vee (P\&F_2)$, *где* F_i *есть* P, *или* $\neg P$, *или некоторая формула, не содержащая* P $(i=1, 2)$. *Указание:* использовать *49, *40a—*48 (§ 24), *75, *76 с тем, чтобы найти такие F_1 и F_2 с описанными выше свойствами, что $P \vdash E \sim F_1$, а $\neg P \vdash E \sim F_2$.

(b) В теореме возникают 9 $(=3\cdot 3)$ случаев, ибо каждая из формул F_1, F_2 имеет три возможных вида. Упростите $(P\&F_1) \vee \vee (\neg P\&F_2)$ для 8 из этих случаев.

(c) Сформулируйте и докажите аналогичную теорему, в которой речь идет о 0-местных ионах P_1 и P_2 вместо одного иона P.

*§ 26. Применения к естественному языку; множества, аристотелевские категорические силлогизмы

Мы продолжаем тему § 14, 15. Для использования логического анализа мы располагаем теперь более богатой системой, а именно исчислением предикатов, точнее, ограниченным односортным классическим исчислением предикатов (§ 16, 17).

При переводе словесных выражений в логическую символику надо, как и прежде в § 14, иметь четкое представление об интерпретации или возможных моделях этой символики.

Поэтому, когда мы обнаруживаем, что ресурсов исчисления высказываний для целей перевода недостаточно, мы должны рассматривать все те высказывания, к которым мы пожелаем применить исчисление предикатов, как относящиеся к элементам некоторой непустой области D. После перевода мы проверяем общезначимость переведенных доводов, уже не предполагая, что мы знаем что-то о D. Поэтому перед переводом мы не обязаны уточнять вид области D, надо лишь договориться, что существует непустое множество D, которому принадлежат все рассматриваемые объекты и которое будет служить областью значений переменных в высказываниях, где фигурируют «все», «некоторые» и т. п.

Задавшись областью D, надо суметь выбрать перечень предикатов (т. е. пропозициональных функций, каждая от некоторого числа $n \geqslant 0$ переменных), которые будут служить основными независимыми предикатами, участвующими в формулировках. В нашем логическом анализе ни один из них не будет рассматриваться как составленный из других предикатов. Каждый из них становится некоторым высказыванием (или принимает некоторое высказывание в качестве значения), когда все его переменные становятся элементами из D (или принимают их в качестве значений); получаемое высказывание должно быть истинным или ложным, но не то и другое одновременно. Затем мы установим символику, необходимую для применения исчисления предикатов, выбирая элементарные предикатные выражения (ионы) и, как правило, записывая их с самого начала с помощью приданных переменных называющей формы.

Сделав это, т. е. выбрав D и предикаты на D, принимающие значения «истина», «ложь», мы представляем то, что считаем реальной ситуацией, или делаем упрощающие допущения, чтобы дальше можно было рассуждать точно.

Сделаем небольшое отступление, чтобы ввести часть обычной теоретико-множественной терминологии. Мы не собираемся критически рассматривать понятия «множества», «набора», «совокупности», «собрания», «класса» C, составленного из мысленно объединенных объектов, о которых говорится, что они «принадлежат» C или являются «элементами» C. Мы предполагаем, что читатель имеет об этих терминах достаточное представление. Мы пишем «$x \in C$» для указания того, что x является элементом из C, и «$x \notin C$» для указания того, что x не является элементом C (иными словами, «$x \notin C$» является сокращением $\neg x \in C$).

Множество должно полностью определяться заданием тех объектов, которые являются его элементами. Множества C_1 и C_2 совпадают тогда и только тогда, когда им принадлежат одни и те же элементы; символически: $C_1 = C_2$ тогда и только тогда, когда $\forall x (x \in C_1 \sim x \in C_2)$.

Множество C *содержится* в множестве D (иначе, C является *частью*, или *подмножеством*, множества D) тогда и только тогда, когда каждый элемент C является элементом D; символически: $C \subseteq D$ тогда и только тогда, когда $\forall x (x \in C \supset x \in D)$. (Отсюда следует, что $C = D$ тогда и только тогда, когда $C \subseteq D \& D \subseteq C$.) Согласно этому определению, всякое множество D является подмножеством самого себя; говорят, что D является *несобственным подмножеством* D. Всякое другое подмножество C множества D, т. е. C, такое, что $C \subseteq D \& C \neq D$ (всякий элемент из C является элементом из D, но имеются элементы из D, не являющиеся элементами из C), называется *собственным подмножеством* множества D, что записывается в виде $C \subset D$. Множество $\varnothing$, не имеющее элементов, называется *пустым множеством* и является подмножеством всякого множества D[1]).

Предположим, например, что D является множеством из трех элементов a, b, c; символически: $D = \{a, b, c\}$. Множество D имеет

[1]) Кое-где, в частности в [ВМ], пишут «$\subset$» вместо нашего «$\subseteq$». В [ВМ] вместо «$\varnothing$» пишется «O».

восемь подмножеств:

$$\{\ \},\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}.$$

Первое — это пустое множество $\varnothing$. Последнее — это несобственное подмножество множества D. Второе, третье и четвертое — *единичные* множества, т. е. множества, состоящие ровно из одного элемента каждое.

В приложениях исчисления предикатов область D можно называть *универсальным множеством* (или *универсумом*, или *универсумом рассуждения, универсумом рассмотрения*). Это просто некоторое множество, фиксированное в рамках предполагаемого применения и содержащее в качестве элементов все объекты, которые нам придется рассмотреть *в этом применении*. Например, если некоторое рассуждение касается натуральных чисел 0, 1, 2, ... и только их, то D будет множеством всех натуральных чисел и не должно содержать туфель, лодок, сургуча, королей и капусты. В следующем примере, который мы не могли полностью проанализировать в § 14, множество натуральных чисел не подошло бы в качестве D.

Пример 19. «Все люди смертны. Сократ есть человек. Следовательно, Сократ смертен». Если D, содержащее Сократа, о котором идет речь в этом рассуждении, — это в точности множество людей, то вторая посылка не нужна для рассуждения. Если бы множество D всех объектов, о которых идет речь, включая Сократа, *по определению* состояло в точности из смертных объектов, то само по себе рассуждение было бы излишним. Следовательно, лучше мыслить D состоящим из всех «существ», включая людей, животных и, возможно, еще кого-нибудь (например, богов из греческой мифологии). *D могло бы* включать и натуральные числа, и минералы, если «x смертен» истолковывается так, что может иметь какое-нибудь истинностное значение, когда x является натуральным числом или минералом, но это кажется слишком искусственным. Введя обозначения «Ч(x)» вместо «x есть человек», «С(x)» вместо «x смертен» и «с» вместо «Сократ», можем переписать наш довод так[1]):

---

[1]) Мы согласились для обозначения лингвистических объектов (формул и переменных) пользоваться прямым шрифтом (строчным и прописным), а для обозначения математических или эмпирических объектов (предикатов, множеств, элементов области D) — курсивом.

Здесь нам кажется уместнее писать «Ч (x)» в качестве имени для «x есть человек» (тем самым делая «x» именем для «x»), чем смешивать прямой шрифт и курсив в записи «Ч (x)». Но можно было бы написать и «*Ч* (x)» в качестве сокращенного обозначения предиката «x есть человек», а тогда «Ч (x)» стало бы именем для любого из выражений: «*Ч* (x)» и «x есть человек» по нашему выбору.

(1) $\forall x (Ч(x) \supset C(x)),\ Ч(c) \,.\,\cdot\,.\, C(c).$

Сказать, что это верное рассуждение, означает сказать, что

(2) $\forall x (Ч(x) \supset C(x)),\ Ч(c) \models C(c)$

(ср. § 20). Мы написали (2), а не

$$\forall x (Ч(x) \supset C(x)),\ Ч(c) \models^{c} C(c),$$

потому что при переводе предложенного рассуждения посредством (1) предполагается, что переменная c обозначает в Ч(c) и С(c) один и тот же элемент из D, т. е. Сократа. Читатель без труда установит (2) непосредственно или переходя к виду

(3) $\forall x (Ч(x) \supset C(x)),\ Ч(c) \vdash C(c)$

и используя конец § 23.

Так как до сих пор мы обходились переменными, не вводя отдельно «констант», то нужно в (1) и, следовательно, в (2) придать c условную интерпретацию ((I) § 20). Мы могли бы избежать всякой неопределенности насчет статуса свободных переменных в допущениях, записывая их в виде $\forall' A_1, \ldots, \forall' A_m$, где $\forall'$ обозначает замыкание относительно всех переменных, которые не считаются фиксированными. Это, пожалуй, ближе к практике обычного (*нематематического*) языка, в котором редко встречаются конструкции со свободными переменными, которые не остаются фиксированными. В математике же допущения часто формулируются со свободными переменными, имеющими интерпретацию всеобщности ((II) § 20), например когда пишут $x+y=y+x$ или $x<y \,\&\, y<z \supset x<z$. Мы не видим оснований запрещать здесь эту практику. Во избежание недоразумений будем записывать переменные $x_1, \ldots, x_q$, которые не обязательно остаются фиксированными, в виде верхних индексов над «.$\cdot$.», как поступали с «$\models$» в начале § 20 и с «$\vdash$» в § 21.

Требование, чтобы все объекты принадлежали некоторому непустому множеству D, называемому *предметной областью*, не помешает нам говорить об элементах других множеств $F_1, F_2, F_3, \ldots$, лишь бы эти последние содержались в D (т. е. при условии, что $F_1 \subseteq D$, $F_2 \subseteq D$, $F_3 \subseteq D$, ...). Так, можно считать, что в примере 19 рассматриваются три множества: $D = \{$существа$\}$, $Ч = \{$человеческие индивидуумы$\} = \{$те x из D, для которых $Ч(x)\} = \hat{x}Ч(x)$, $C = \{$смертные$\} = \{$те x из D, для которых $C(x)\} = \hat{x}C(x)$ (см. предыдущее примечание). Это показывает, что для любого одноместного предиката $F(x)$, свободная переменная x которого пробегает D, можно определить подмножество F множества D, элементы которого — это в точности те x, для которых $F(x)$ является верным высказыванием. Символически: $F = \hat{x}F(x)$[1]).

Обратно, если у нас уже введено некоторое подмножество C множества D, то мы можем определить предикат $F(x)$, положив $F(x) \equiv x \in F$. В частности, если множества $Ч$ (человеческих индивидуумов) и C (смертных) введены ранее как подмножества множества D, то можно определить «Ч(x)» и «С(x)» как обозначения для $x \in Ч$ и $x \in C$ соответственно[2]).

Заметим, что в (1)—(3) подмножества $Ч$ и C множества D уже упоминались с помощью ионов Ч(—) и С(—). Само же D явно не упоминалось. Оно входит неявно как область значений переменной x, а также область, откуда берется с, если изучают общезначимость вообще, отвлекаясь от той специальной интерпретации, в которой эта буква обозначает Сократа.

Пример 20. «Всякое нечетное натуральное число является разностью двух квадратов. 5 является нечетным натуральным числом. Значит, 5 является разностью двух квадратов». Для разбора этого рассуждения не потребуется ничего, кроме натуральных чисел. Поэтому возьмем $D = \{$натуральные числа$\}$. Через Н(x) обозначим «x нечетно», а через Р(x) — «x является разностью двух квадратов». Обозначая, наконец, через п число «5», получаем символическую запись:

(1) $$\forall x\,[\mathrm{H}(x) \supset \mathrm{P}(x)],\ \mathrm{H}(п)\ .\cdot.\ \mathrm{P}(п).$$

С точностью до обозначений это совпадает с (1) из примера 19, следовательно, это рассуждение верно. (Приведенное там доказа-

---

[1]) Другие обозначения для $\hat{x}F(x)$ таковы: «$\{x{:}F(x)\}$» и «$\{x \mid F(x)\}$».

[2]) Мы считаем, что два предиката $F_1(x)$ и $F_2(x)$ одинаковы тогда (и только тогда), когда при каждом x высказывания $F_1(x)$ и $F_2(x)$ оказываются одинаковыми, т. е. имеют один и тот же смысл. Следовательно, может случиться, что $F_1(x)$ и $F_2(x)$ будут *разными предикатами*, но при всех $x \in D$ высказывание $F_1(x)$ истинно тогда и только тогда, когда истинно $F_2(x)$, т. е. когда $\hat{x}F_1(x)$ и $\hat{x}F_2(x)$ — *одно и то же множество*.

Если мы станем на эту точку зрения, то, определяя предикат $F(x)$ посредством $F(x) \equiv x \in F$, мы должны представлять себе, что множество F задается вместе с некоторым способом его описания, позволяющим определить тот смысл, который приписывается высказыванию $x \in F$.

Различие это не имеет значения в *классической* логике: когда проверяется, выполнено ли некоторое логическое соотношение, предикаты подвергаются «рентгеноскопии», не оставляющей от них ничего, кроме логических функций (примечание на стр. 112, § 17).

Множество $F = \hat{x}F(x)$ можно назвать *экстенсионалом* (или *объемом*) предиката $F(x)$. Предикат в нашем понимании является *интенсиональным* [Extension — «объем», «протяженность» (в данном случае — объем множества тех x, для которых верно $F(x)$), intension — «смысл» (буквально «намерение», т. е. «то, что имеется в виду»). — *Ред.*] объектом, поскольку он определяет *интенсионал* (содержание) описываемого понятия, а логическая функция является экстенсиональным объектом.

тельство относится и к рассуждению, относящемуся к Сократу, и к рассуждению о числе 5.) Область D этого применения очень четко определена (по крайней мере математики обычно думают так), тогда как область примера 19 очерчена довольно-таки смутно.

Пример этот напоминает вторую иллюстрацию [2] материальной импликации из § 2. Там мы не могли еще явно говорить об области D (скажем, о целых числах > 1) и не могли пользоваться квантором $\forall$x. Мы говорили, что n — определенное число, которое написано на бумажке, лежащей в вашем кармане, и неизвестное мне. Мое утверждение надлежало рассматривать как $\mathrm{H} \supset M$, где H — «n нечетно», а M — «$x^n + y^n$ разлагается на множители» для этого фиксированного n. Но так как я не знал этого конкретного числа n в вашем кармане, я должен был рассматривать все возможности. При наших нынешних обозначениях я могу сказать, что прежде чем держать пари с вами, я убедился, что $\forall \mathrm{x}\, [\mathrm{H}(\mathrm{x}) \supset M(\mathrm{x})]$, где $D = \{$целые числа $> 1\}$, H(x) — «x нечетно», а M(x) — «$x^n + y^n$ разлагается на множители». Исходя из этого, я получаю $\mathrm{H}(\mathrm{x}) \supset M(\mathrm{x})$ (или, короче, $\mathrm{H} \supset M$) за счет $\forall$-удаления; здесь x обозначает то значение n, которое записано на вашей бумажке.

В этом конкретном примере материальная импликация $\supset$, используемая совместно с квантором всеобщности, позволяет записать утверждение $\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{H}(\mathrm{x}) \supset M(\mathrm{x}))$, относящееся к целым положительным числам > 1, с помощью переменной x, пробегающей множество всех целых чисел > 1. Это можно сделать потому, что таблица для $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ дает $\mathfrak{t}$ всегда, когда A дает $\mathfrak{f}$. Отношение между пропозициональными функциями $H(x)$ и $M(x)$ (а не только между высказываниями), выражаемое в виде $\forall \mathrm{x}\, [\mathrm{H}(\mathrm{x}) \supset M(\mathrm{x})]$, называется «формальной импликацией». Точно так же $\forall \mathrm{x}\, (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \sim \mathrm{Q}(\mathrm{x}))$ выражает «формальную эквивалентность» пропозициональных функций $P(x)$ и $Q(x)$.

В логике Аристотеля (384—322 до н. э.) и его последователей вплоть до конца XIX столетия основная роль приписывалась четырем видам суждений, называемых «категорическими». Ниже мы опишем их в правом столбце, давая слева наш символический перевод. S(x) пишется вместо «x обладает свойством S», а P(x) — вместо «x обладает свойством P». Две первые посылки примеров 19 и 20 иллюстрируют форму A[1]). Если S выражается единственным числом, то сказуемое тоже ставится в единственном числе:

---

[1]) Буквы «A», «E», «I», «O» восходят к гласным (отмеченным курсивом) в латинских словах: «*a*ff*i*rmo — » (утверждаю) и «n*e*g*o*» (отрицаю). Формы A и I — общеутвердительное и частноутвердительное. Формы E и O — общеотрицательное и частноотрицательное. Буквы «S» и «P» напоминают о членах предложения, которые называют «subject» (подлежащее) и «predicat» (сказуемое).

«всякий», «каждый» иногда заменяется словом «все».

A	$\forall x(S(x) \supset P(x))$.	Все S суть P. (Только P являются S.)
E	$\neg \exists x(S(x) \& P(x))$ (эквивалентно $\forall x(S(x) \supset \neg P(x))$, согласно *82a, *55b, *59).	Никакое S не является P. (Все S суть не P.)
I	$\exists x(S(x) \& P(x))$.	Некоторые S суть P.
O	$\exists x(S(x) \& \neg P(x))$.	Некоторые S не суть P.

Мы согласились, что областью значений наших переменных (здесь переменная одна — x) является некоторое непустое множество D. Однако при символическом изображении двух первых из этих четырех форм наше внимание из-за наличия «$S(x) \supset$» сосредоточивается на той части области D, которая лежит внутри множества S, так что истинность $P(x)$ (первая форма, A) или его ложность (вторая форма, E) утверждается только для $x \in S$.

Если мы временно введем еще один вид переменных, то суждение $\forall x(S(x) \supset P(x))$, где x пробегает D, станет равносильно $\forall \xi P(\xi)$, где ξ пробегает S ($S \subseteq D$), а $\forall x(S(x) \supset \neg P(x))$ равносильно $\forall \xi \neg P(\xi)$. Аналогично в третьей форме $\exists x(S(x) \& P(x))$ будет равносильно $\exists \xi P(\xi)$; в четвертой $\exists x(S(x) \& \neg P(x))$ равносильно $\exists \xi \neg P(\xi)$.

Не стоит загромождать символику введением переменных нового сорта, если мы не станем их часто использовать. (В этой книге ради простоты мы будем избегать такого загромождения.) Вернемся к односортному исчислению предикатов, где мы можем достичь того же эффекта, что и с помощью переменной, пробегающей некоторое подмножество $S = \hat{x} S(x)$ исходной области D, если к области действия квантора $\forall$ припишем спереди $S(x) \supset$, а к области действия квантора $\exists$ припишем спереди $S(x) \&$.

Мы исключили случай пустого множества D. Это означает лишь, что область значений наших переменных, рассматриваемая в целом, не будет никогда пустой; x имеет хотя бы одно значение. Если же мы ограничим наше внимание подмножеством $S = \hat{x} S(x)$ множества D, используя $\forall x(S(x) \supset \ldots)$ или $\exists x(S(x) \& \ldots)$, то это подмножество S может оказаться пустым. Так, например, если я хочу с помощью символики исчисления предикатов изложить теорию ангелов, но сомневаюсь в их существовании, то мне сначала надо погрузить множество ангелов в некоторую совокупность D, относительно которой я уверен, что она не пуста.

При нашем переводе, если S пусто, то суждения «Все S суть P» и «Все S суть не P» истинны, тогда как «Некоторые S суть P» и «Некоторые S суть не P» ложны. Например, в случае, если ангелов не существует, мы можем утверждать, что истинны оба суждения: «У всех ангелов есть крылья» и «Все ангелы бескрылы» (что равносильно «Ни один ангел не имеет крыльев»).

Как раз в этом пункте обычный язык допускает двусмысленность, как и в обыденном употреблении «или» то для обычной, то для разделительной дизъюнкции. Люди не склонны говорить «Все S суть P», если они знают заранее, что S пусто. Однако они говорят так в тех случаях, когда они не знают, что S пусто, или когда они просто не подумали об этой возможности. Когда же затем они сталкиваются с тем обстоятельством, что S пусто, или с такой возможностью, могут возникнуть различные мнения о том, надо ли в этом случае считать высказывание «Все S суть P» истинным (как поступаем мы) или ложным. Аристотель избрал последнее. Он истолковывал высказывание «Все S суть P» как утверждение, подразумевающее существование хотя бы одного элемента из S. При аристотелевской интерпретации мы должны были бы перевести «Все S суть P» в нашу символику посредством $\exists x\, S(x) \& \forall x (S(x) \supset P(x))$[1]. Когда S непусто, т. е. когда $\exists x\, S(x)$ истинно, это равносильно нашему $\forall x (S(x) \supset P(x))$. (В силу *45 § 24 $\exists x\, S(x) \vdash \exists x\, S(x) \& \forall x (S(x) \supset P(x)) \sim \forall x (S(x) \supset P(x))$.)

Основание, по которому мы предпочитаем использовать «Все S суть P» и «Все S суть не P» в смысле $\forall x (S(x) \supset P(x))$ и $\forall x (S(x) \supset \neg P(x))$ соответственно, заключается в том, что смысл этот проще и потому полезнее. (При переводе с разговорного языка мы должны ставить префикс $\exists x\, S(x) \&$, если имелось в виду именно это.) Простота нашего перевода выявляется при записи в терминах теории множеств, ибо $\forall x (S(x) \supset P(x))$ примет вид «$S \subseteq P$», а $\forall x (S(x) \supset \neg P(x))$ примет вид «$S \subseteq \overline{P}$», где $\overline{P} = \hat{x} \neg P(x)$. Говорят, что $\overline{P}$ является *дополнением множества P (относительно нашего универсального множества D)*.

Введем еще некоторые обозначения теории множеств:

$S \cap P = \hat{x} (S(x) \& P(x))$ (*пересечение* множеств S и P)

и

$S \cup P = \hat{x} (S(x) \vee P(x))$ (*объединение* множеств S и P)[2].

Вспоминая, что $\varnothing = \{$пустое множество$\} = \hat{x} [S(x) \& \neg S(x)]$, можем

---

[1]) Если некто говорит «Все S суть P» и мы высказываем сомнение в том, что $\exists x\, S(x)$, то он может ответить двумя способами: (1) «Сказанное мной обусловлено существованием хотя бы одного S; т. е. я имел в виду, что к моему высказыванию надо было приписать $\exists x\, S(x) \supset$». (2) «Я имел в виду, что существует хотя бы одно S; т. е. надо было приписать $\exists x\, S(x) \&$». Это ведет соответственно к следующим переводам: (1′) $\exists x\, S(x) \supset \forall x [S(x) \supset P(x)]$ и (2′) $\exists x\, S(x) \& \forall x [S(x) \supset P(x)]$. Но (1′) эквивалентен нашему переводу $\forall x [S(x) \supset P(x)]$.

[2]) Иногда $S \cap P$ называют *произведением* множеств, а $S \cup P$—*суммой*. По-английски используют также термины «meet» и «join».

выразить $\exists x\,(S(x) \& P(x))$ посредством $S \cap P \neq \varnothing$, а $\exists x\,(S(x) \& \neg P(x))$ посредством $S \cap P \neq \varnothing$.

И Аристотель, и мы, и человек с улицы обычно согласны между собой в том, что высказывание «Некоторые S суть P» надо переводить как $\exists x\,(S(x) \& P(x))$, а «Некоторые S суть не P» — как $\exists x\,(S(x) \& \neg P(x))$. Если ангелов нет, то утверждения «Некоторые ангелы имеют крылья» и «Некоторые ангелы крыльев не имеют» одинаково ложны по разумению всякого человека.

Бывает, что в обыденной речи слово «некоторые», особенно если его подчеркивают, носит оттенок «некоторые, но не все». Когда политик произносит: «Некоторые политики — мошенники», он имеет в виду: «Неверно, будто все политики — мошенники, но некоторые — мошенники», т. е. $\neg \forall x\,(\Pi(x) \supset M(x)) \& \exists x\,(\Pi(x) \& M(x))$, причем он наиболее заинтересован в сообщении именно первого члена конъюнкции.

В повседневной речи слова «все» и «некоторые» порой опускаются. Фраза «Люди смертны» обозначает: «Все люди смертны», а «Люди взошли на Эверест» означает: «Некоторые люди взошли на Эверест».

*§ 27. Применения к естественному языку; еще о переводе слов символами [1])

Как уже много говорилось в § 16 и далее, кванторы сочетаются друг с другом и пропозициональными связками многими способами; современная логика далеко ушла в изучении высказываний от четырех аристотелевских форм суждений A, E, I, O.

Как и в § 14, справа мы приводим перечень тех выражений, которые обычно переводятся или могут быть переведены так, как указано слева. Перевод тех выражений, в которых фигурируют местоимения вроде «всякий», «некоторый» и т. п., побуждает ввести переменную. Это пояснено нашими примерами (a) — (g) в начале § 16.

$\forall x\, A(x)$	Для любого x (имеет место) A(x). A(x) при произвольном x. Для всех x (верно) A(x). A(x), каково бы ни было x. Для каждого x (верно) A(x). Всегда имеет место A(x). Каждый обладает свойством A. Свойство A присуще всем. Все удовлетворяет A. Любой объект является A. Всякая вещь обладает свойством A.

[1]) В этом параграфе часть примеров, специфичных именно для английского языка, при переводе опущена. — *Прим. перев.*

$\exists x A(x)$	Для некоторых x (имеет место) A (x). Для подходящего x (верно) A (x). Существует x, для которого (такой, что) A (x). Имеется x, для которого (такой, что) A (x). Найдется x, для которого (такой, что) A (x). У некоторых вещей есть признак A. Хотя бы для одного x (верно) A (x). Кто-нибудь относится к (есть) A. По крайней мере один объект есть A[1]).

Когда отрицание и кванторы появляются во фразах совместно, то надо наблюдать за надлежащим их порядком. В последующих примерах (список которых может быть продолжен, если обратиться к другим способам словесного выражения кванторов) отрицание перед квантором или после него, по-видимому, не порождает двусмысленности

$\neg \forall x A(x)$	Не для каждого x (верно) A (x). Не при всяком x (верно) A (x). A (x) оказывается истинным не для всех x. Не все обладает свойством A. Не все суть A. A не всегда верно.
$\forall x \neg A(x)$	Для всякого x неверно A (x). A (x) всегда ложно. Ничто не обладает свойством A. Все суть не A.
$\neg \exists x A(x)$	Не существует x, такого, что A (x). Нет никакого x, такого, что A (x). Нет x, такого, что A (x). A (x) не выполняется ни для какого x. Ничто не обладает свойством A. Никто не есть A.
$\exists x \neg A(x)$	Для некоторого x не (верно) A (x). Что-то не обладает свойством A. Кто-то есть не A.
$\neg \exists x A(x)$	Ни для какого x не верно A (x). Неверно, что для некоторых x A (x). Ничто не обладает свойством A. Никто не есть A.

[1]) Чтобы иметь возможность переводить фразы «Не более одного объекта обладает свойством A», «Точно один объект является A», «Хотя бы два объекта суть A» и т. п., нам придется подождать до гл. III.

$\exists x S(x) \supset P$	Если S(x) для какого-нибудь x, то P. Если имеется x, для которого S, то P. Если хоть что-нибудь есть S, то P.
$S \supset \exists x Px$	Если S, то для некоторого x (верно) P(x).

Абстрактно употребленное слово может означать и «любой», и «какой-нибудь». Например: «Ребенку нужна ласка» — $\forall x (P(x) \supset Л(x))$. «Здесь есть человек» — $\exists x (Ч(x) \& З(x))$ (см. конец § 26).

Обычно области действия кванторов в импликации очевидны: «Для любого x, если S(x), то P(x)» и «Для любого x S(x), только если P(x)» переводятся $\forall x (S(x) \supset P(x))$. «Если для всех x S(x), то P(x)» и «P(x), если для всех x S(x)» переводятся $\forall x S(x) \supset P(x)$.

Вот некоторые примеры перевода кванторов с & и $\vee$:

$\exists x (S(x) \& P(x))$.	Нечто есть и S, и P.
$\exists x S(x) \& \exists x P(x)$	Что-то удовлетворяет S, а что-то — P.
$\forall x (S(x) \vee P(x))$	Все суть S или P. Все, кроме S, суть P.
$\forall x S(x) \vee \forall x P(x)$	Все суть S или все суть P.

«Выгул кошек или собак воспрещен», очевидно, переводится $\neg \exists x ((К(x) \vee C(x)) \& B(x))$, что равносильно $\forall x (К(x) \vee C(x) \supset \neg B(x))$. Но было бы ошибкой переводить «На всех кошек и собак надлежит получить разрешение» через $\forall x (К(x) \& C(x) \supset P(x))$, ибо множество $\hat{x}(К(x) \& C(x))$ пусто. Правильный перевод — это $\forall x (К(x) \supset P(x)) \& \forall x (C(x) \supset P(x))$ или (что равносильно, согласно* 87 и упр. 13.8) $\forall x (К(x) \vee C(x) \supset P(x))$.

Бывает, что слово «все» применяется не как квантор, а для описания множества: «Все королевские конники и все королевские ратники не могут Шалтая-Болтая поднять», очевидно, означает не только то, что никто из королевских конников и ратников не может в одиночку поднять Шалтая-Болтая, как следовало бы из перевода $\forall x (К(x) \vee P(x) \supset П(x))$. Аналогичные затруднения возникают и с переводом союза «и»[1]). «Джон и Уильям не сумеют вытащить машину из канавы» можно перевести в виде $\neg P(\{j, w\})$, где P(x) — это «*x* могут вытащить машину из канавы» или, строго в символике исчисления предикатов, $\neg P(t)$, где t означает команду из Джона плюс Уильяма. Высказывание же «Джон и Уильям

[1]) Отмеченная выше особенность выражения «кошки и собаки» связана с частым употреблением «и» в смысле объединения двух множеств: {кошки и собаки} $= \hat{x}(C(x) \vee D(x)) = C \cup D$. В следующем примере (Джон и Уильям) можно было бы перевести фразу с помощью двуместного предиката P(j, w), но тогда нам пришлось бы ввести трехместный предикат для «Джон, Уильям и Генри не могут вытащить машину».

сдадут экзамены» — это $P(j) \& P(w)$, где $P(x)$ — это «x сдаст экзамены». Это высказывание не следует понимать в том смысле, что Джон и Уильям экзаменуются сообща.

Соображения, которые мы высказали в начале этого параграфа относительно выбора области D, привели нас естественным образом к рассмотрению подмножеств области D вроде $\hat{x}\, S(x)$ и $\hat{x}\, P(x)$, затем к категорическим силлогизмам Аристотеля и, наконец, к изучению перевода в категорические силлогизмы. Но после того, как выбрана область D, и до того, как вводятся кванторы и связки, надо выбрать основные предикаты и ионы или элементарные предикатные выражения, которые их обозначают.

Пример 21. «Когда я устал и голоден, я хочу вернуться домой. Сейчас я устал и голоден. Значит, я хочу вернуться домой». Пусть $У(x)$ — это «В момент x я устал и голоден», $В(x)$ — это «В момент x я хочу вернуться», а c означает «сейчас».

Умозаключение

$$(1) \qquad \forall x\,(У(x) \supset В(x)),\ У(c)\ .\because.\ В(c)$$

правильно (как уже отмечалось в примерах 19 и 20).

Пример 22. «Когда я устал, я хочу вернуться домой. Когда я голоден, я хочу вернуться домой или отправиться в ресторан. Сейчас я устал и голоден. Поэтому сейчас я хочу вернуться домой.»

Умозаключение.

$$(1) \quad \forall x\,(У(x) \supset В(x)),\ \forall x\,(Г(x) \supset В(x) \vee Р(x)),\ У(c) \,\&\, Г(c)\ .\because.\ В(c)$$

также правильно, а вторая посылка *излишня* (т. е. заключение выполняется и без нее).

В примере 21 оказывается достаточным взять один ион $У(x)$ для представления сложного понятия «устал и голоден», так как довод оказывается верным даже без дальнейшего анализа. В примере же 22 так поступать нельзя. Из примера 21 видно, что для установления справедливости какого-либо довода вовсе не обязательно анализировать его до последних мелочей. Напротив, для того чтобы установить, что некоторое рассуждение не верно в рамках данной логической системы (тут — исчисления предикатов, а в гл. I — исчисления высказываний), надо разобрать это рассуждение самым тщательным образом, какой только допускается данной системой (что мы уже отмечали в § 3, доказывая теорему 3 и опровергая обратную ей).

Возвращаясь теперь к примеру 15 конца § 15, обозначим предикаты буквами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$; с помощью квантора $\forall$ мы могли бы записать заключение в виде

$$\models \forall x\,(P(x) \supset Q(x)) \,\&\, \forall x\,(\neg Q(x) \,\&\, R(x)) \vee P(x)) \,\&$$
$$\& \forall x \neg (R(x) \,\&\, P(x)) \sim \forall x\,(P(x) \supset Q(x)) \,\&\, \forall x\,(Q(x) \supset \neg R(x)).$$

Однако мы уже успешно проанализировали его (см. упр. 17.6), считая, что x означает имя фиксированного, хотя и произвольного члена клуба.

Пример 23. Рассмотрим силлогизм, называемый «Barbara», т. е. «Все M суть P. Все S суть M. Значит, все S суть P» — в A-форме:

(1) $\forall x (M(x) \supset P(x)),\ \forall x (S(x) \supset M(x)) \therefore \forall x (S(x) \supset P(x))$,

иначе говоря,

(2) $\forall x (M(x) \supset P(x)),\ \forall x (S(x) \supset M(x)) \models \forall x (S(x) \supset P(x))$,

поскольку, согласно *2, из теоремы $2_{\vdash}$ и MP

(3a) $M(x) \supset P(x),\ S(x) \supset M(x) \vdash S(x) \supset P(x)$,

верно в исчислении высказываний, можно получить

(3b) $\forall x (M(x) \supset P(x)),\ \forall x (S(x) \supset M(x)) \vdash \forall x (S(x) \supset P(x))$

посредством нескольких $\forall$-удал. и введ.

В примере 19 и в упр. 24.5 (силлогизмы Baroco и Festino) исчисление предикатов и кванторы использованы более существенным образом, но удается обойтись одноместными предикатами.

Рассмотрим теперь пример, где существенно рассмотрение двуместных предикатов. Это уже выходит за рамки традиционной аристотелевской логики, которая привязана к силлогизмам и другим вопросам, которые мы выражали с помощью одноместных предикатов.

Пример 24. «Отношение $x < y$ транзитивно и антирефлексивно. Значит, оно несимметрично». Символически:

(1) $$\forall x \forall y \forall z (x < y \,\&\, y < z \supset x < z),$$
$$\forall x \neg x < x \therefore \forall x \forall y (x < y \supset \neg y < x),$$

что можно переписать в эквивалентной формулировке со свободными переменными, как поступают в учебниках математики, но все же с указанием (с помощью верхних индексов) того, что переменные x, y, z имеют интерпретацию всеобщности:

(1′) $x < y \,\&\, y < z \supset x < z,\ \neg x < x \therefore^{xyz} x < y \supset \neg y < x$.

Для того чтобы установить (1) и (1′), достаточно (в силу теоремы 12_{Pd} и начала § 13) установить, что

(3′) $x < y \,\&\, y < z \supset x < z,\ \neg x < x \vdash^{xyz} x < y \supset \neg y < x$

(где «$x < y \,\&\, y < z \supset x < z,\ \neg x < x \vdash^{xyz}$» означает «$\forall x \forall y \forall z (x < y \,\&\, y < z \supset x < z),\ \forall x \neg x < x \vdash$»). Поступим по схеме ($B_1$) § 13, 25. Пусть $\forall x \forall y \forall z (x < y \,\&\, y < z \supset x < z),\ \forall x \neg x < x$. По $\forall$-удал. $x < y \,\&\, y < x \supset x < x$ и $\neg x < x$, откуда в силу исчисления высказываний $x < y \supset \neg y < x$. Здесь мы пользуемся удобным и кратким обозначением «$<$».

Упражнения. 27.1. Переведите каждый из данных доводов в логическую символику и установите общезначимость или необщезначимость полученной формулы:

(a) Каждый любит сам себя. Значит, кого-то кто-нибудь любит.

(b) Все любят Джейн. Значит, все любимы кем-то.

(c) Ни одно животное не бессмертно. Кошки — животные. Значит, некоторые кошки не бессмертны.

(d) Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, все млекопитающие лишены перьев.

(e) Имеются прилежные студенты. Ни один студент не лишен способностей. Значит, некоторые студенты, лишенные способностей, не прилежны.

(f) Все политики — лицедеи. Некоторые лицедеи — лицемеры. Значит, некоторые политики — лицемеры.

(g) Ничто плодотворное не легко. Некоторые легкие вещи общедоступны. Значит, некоторые общедоступные вещи не плодотворны.

(h) У нее только преданные друзья. Некоторые из ее друзей — лицемеры. Ни один лицемер не может быть преданным. Значит, все ее друзья — проходимцы.

(i) Этому никто не поверит. Значит, судья этому не поверит.

(j) Глупец был бы способен на это. Я на это не способен. Значит, я не глупец.

(k) Если бы кто-нибудь мог решить эту задачу, то и какой-нибудь математик мог бы. Кэбот — математик, а не может ее решить. Значит, проблема неразрешима.

(l) Всякий математик может решить эту задачу, если кто-нибудь может ее решить. Кэбот — математик, а не может ее решить. Значит, задача неразрешима.

(m) Всякий, кто может решить эту задачу, — математик. Кэбот не может ее решить. Значит, Кэбот — не математик.

(n) Всякий, кто может решить эту задачу, — математик. Ни один математик не может решить этой задачи. Значит, она неразрешима.

(o) Если какое-нибудь из чисел, лежащих (строго) между 1 и 101, делит 101, то простое число, меньшее 11, делит 101. Ни одно простое число, меньшее 11, не делит 101. Значит, ни одно число между 1 и 101 не делит 101.

(p) Тот, кто распускает этот слух, должен быть и ловким, и беспринципным. Кэбот не ловок. Лоувелл не беспринципен. Значит, ни Кэбот, ни Лоувелл не распускают этот слух.

(q) Никто не поймет этого сообщения, если кто-нибудь не разгадает кода. Значит, имеется кто-то, кто может понять это сообщение, только если разгадает код.

(r) Любой радикал является сторонником общественного прогресса. Иные консерваторы недолюбливают всех сторонников общественного прогресса. Значит, иные консерваторы недолюбливают всех радикалов.

(s) Человек — это животное. Значит, голова человека является головой животного. (Пусть Ч(x), Ж(x), Г(y, x) означают соответственно «x есть человек», «x есть животное» и «y есть голова x»[1])).

(t) Отношение «быть отцом» антисимметрично, т. е. для произвольных лиц x и y, если x является отцом y, то y не является отцом x. Значит, ни один человек не является собственным отцом.

(u)* Если два человека являются родственниками третьего, то первый — родственник второго. Каждый — чей-нибудь родственник. Значит, если Джон — родственник Уильяма, а Уильям — родственник Эдит, то Джон — родственник Эдит[2]).

(v) Пусть x и y — любые лица. Говорим, что x является братом y тогда и только тогда, когда x и y — оба мужского пола, x отличен от y и x и y имеют общих родителей. Тогда, если x — брат y, то y — брат x.

(w) Надежда еще не потеряна. Значит, еще не все потеряно.

27.2. Попробуйте восстановить в следующих энтимемах (где отсутствуют посылки или заключения, ср. § 15) пропущенное, чтобы получились правильные рассуждения.

(a) Только храбрецы достойны любви. Ему везет в любви. Он не храбрец.

(b) Взрослых пускали только с детьми. Меня пустили. Значит, я либо ребенок, либо пришел с ребенком.

(c) Джон ниже Сюзанны. Сюзанна ниже Питера. Значит, Джон ниже Питера.

(d) Сан-Франциско лежит к западу от Нью-Йорка. Токио лежит к западу от Сан-Франциско. Лондон лежит к западу от Токио. Значит, Лондон лежит к западу от Нью-Йорка.

---

[1]) Приводится Де Морганом [1847], стр. 114, как рассуждение, выходящее за рамки аристотелевских силлогизмов.

[2]) Решение по существу совпадает с решением упр. 29.3 (f).

Глава III

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ С РАВЕНСТВОМ[1])

*§ 28. Функции, термы

В этой главе мы двояким образом расширим наш предметный язык (или рассматриваемую нами его часть); можно осуществлять расширения порознь или совместно. Собственно говоря, речь идет не о расширении языка, а об увеличении изучаемой здесь части языка.

Прежде всего (именно это делается в данном параграфе) мы добавим выражения для *функций*, значения которых принадлежат той же области D, что и их *аргументы* (т. е. значения их независимых переменных); эти функции отличаются от предикатов, ибо у последних, являющихся пропозициональными функциями, значениями являются высказывания (см. примечание 4 на стр. 94 в § 16). Такого рода функции играют важную роль в математике. Например, если D является множеством натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$, то в качестве таких функций мы используем $x+1$, $x+y$, xy, x^y и т. д. Если D — множество вещественных чисел, мы используем также $x-y$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sin x$, e^x и т. д. Индивиды (элементы из D) понимаются как функции от нуля переменных (0-местные функции); ими будут, например, 0 и 1 в случае множества целых чисел, а также π и e в случае множества вещественных чисел (это аналогично рассмотрению высказываний как 0-местных предикатов).

Чтобы провести это обобщение, предположим, что в предметном языке имеются выражения для таких функций; эти выражения не анализируются глубже. Назовем их *элементарными функциональными выражениями*, или *мезонами* [2]), и будем записывать так:

---

[1]) Исчисление предикатов с равенством само по себе составляет важную главу логики. Однако то, что нам отсюда понадобится в части 2, будет там повторено или процитировано. Если у читателя мало времени, он может пропустить эту главу

[2]) Термин «мезон» выбран ради краткости и из-за его явного родства с терминами «атом», «молекула», «ион», но без каких-либо претензий на аналогию с химией или физикой.

«f», «f (—)», « f (—, —) », «f (—, —, —)», ..., «g», «g (—)»,«g (—,—)», «g (—, —, —)». При вписывании индивидных переменных на место черточек получаются *называющие формы функций*, или *элементарные функциональные выражения (мезоны) с приданными переменными*. Не будем говорить об этом подробнее, ибо рассмотрение таких выражений аналогично рассмотрению предикатных элементарных выражений в § 16.

Сейчас мы опишем более широкий класс выражений, называемых «термами» и используемых для описания функций (в них входят переменные, кроме «0-местных функций», т. е. индивидов[1]). *Термы* определяются следующим образом: это индивидные переменные и добавочные *термы*, получаемые так: для любого $n \geqslant 0$, для любого n-местного мезона f (—, ..., —) и для любой n-ки $r_1, \ldots, r_n$ уже построенных *термов* выражение $f(r_1, \ldots, r_n)$ также является *термом*.

Мы заимствуем определение *формулы* из § 16, но в определении «элементарной формулы» («атома») разрешаем $r_1, \ldots, r_n$ обозначать произвольные термы, а не одни только переменные. Ведь если бы мезоны не допускались, то данное выше определение понятия «терм» свелось бы к определению переменной, а наше определение формулы — к определению § 16.

Когда фиксирована непустая область D, то с каждым термом ассоциируется таблица со значениями в D, а с каждой формулой — ее таблица истинности. У таблицы формулы на входе должны находиться все n-местные функции, аргументы и значения которых лежат в D; эти функции являются возможными значениями для каждого n-местного мезона (при $n = 0$ возможными значениями будут все элементы из D).

Пример 1. Зададим таблицу терма f (f (x)) и таблицу формулы $\forall x (P(f(f(x))) \supset \neg P(f(x)))$ при $D = \{1, 2\}$. Начнем с того, что выпишем все 1-местные функции со значениями в D, а из примера 1 § 17 позаимствуем список одноместных логических функций (см. примечание на стр. 107).

x	f_1(x)	f_2(x)	f_3(x)	f_4(x)	$\mathfrak{l}_1$(x)	$\mathfrak{l}_2$(x)	$\mathfrak{l}_3$(x)	$\mathfrak{l}_4$(x)
1	1	1	2	2	t	t	f	f
2	1	2	1	2	t	f	t	f

[1]) Когда переменные интерпретируются элементами из D, то формулы выражают высказывания (см. примечание на стр. 97), а термы — элементы из D. Но мы не вводим здесь для термов аналога интерпретации всеобщности свободных переменных $x_1, \ldots, x_q$ в формулах, при которой формула A может выражать высказывание $\forall'$A (§ 20).

	f(x)	x	f(f(x))
1.	$f_1(x)$	1	1
2.	$f_1(x)$	2	1
3.	$f_2(x)$	1	1
4.	$f_2(x)$	2	2
5.	$f_3(x)$	1	1
6.	$f_3(x)$	2	2
7.	$f_4(x)$	1	2
8.	$f_4(x)$	2	2

	P(x)	f(x)	$\forall x[P(f(f(x)))\supset\neg P(f(x))]$
1.	$\mathfrak{l}_1(x)$	$f_1(x)$	$\mathfrak{f}$
2.	$\mathfrak{l}_1(x)$	$f_2(x)$	$\mathfrak{f}$
3.	$\mathfrak{l}_1(x)$	$f_3(x)$	$\mathfrak{f}$
4.	$\mathfrak{l}_1(x)$	$f_4(x)$	$\mathfrak{f}$
5.	$\mathfrak{l}_2(x)$	$f_1(x)$	$\mathfrak{f}$
6.	$\mathfrak{l}_2(x)$	$f_2(x)$	$\mathfrak{f}$
7.	$\mathfrak{l}_2(x)$	$f_3(x)$	$\mathfrak{t}$
8.	$\mathfrak{l}_2(x)$	$f_4(x)$	$\mathfrak{t}$
9.	$\mathfrak{l}_3(x)$	$f_1(x)$	$\mathfrak{t}$
10.	$\mathfrak{l}_3(x)$	$f_2(x)$	$\mathfrak{f}$
11.	$\mathfrak{l}_3(x)$	$f_3(x)$	$\mathfrak{t}$
12.	$\mathfrak{l}_3(x)$	$f_4(x)$	$\mathfrak{f}$
13.	$\mathfrak{l}_4(x)$	$f_1(x)$	$\mathfrak{t}$
14.	$\mathfrak{l}_4(x)$	$f_2(x)$	$\mathfrak{t}$
15.	$\mathfrak{l}_4(x)$	$f_3(x)$	$\mathfrak{t}$
16.	$\mathfrak{l}_4(x)$	$f_4(x)$	$\mathfrak{t}$

Вот подробности вычисления строки 5 из левой таблицы:

$$\begin{array}{c} f(f(x)) \\ f_3(f_3(1)) \\ f_3(2) \\ 1 \end{array}$$

Вычислим значение строки 7 правой таблицы (таблицы истинности формулы). Для этого нужно вычислить следующую вспомогательную таблицу:

x	$\mathfrak{l}_2(f_3(f_3(x)))\supset\neg\mathfrak{l}_2(f_3(x))$
1	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{t}$

Вот подробности вычисления этой вспомогательной таблицы[1]:

$$\begin{array}{lcl} \mathfrak{l}_2(f_3(f_3(1))) & \supset & \neg\,\mathfrak{l}_2(f_3(1)) \\ \mathfrak{l}_2(1) & \supset & \neg\,\mathfrak{l}_2(2) \\ \mathfrak{t} & \supset & \neg\,\mathfrak{f} \\ \mathfrak{t} & \supset & \mathfrak{t} \\ & \mathfrak{t} & \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \mathfrak{l}_2(f_3(2))) & \supset & \neg\,\mathfrak{l}_2(f_3(2)) \\ \mathfrak{l}_2(2) & \supset & \neg\,\mathfrak{l}_2(1) \\ \mathfrak{f} & \supset & \neg\,\mathfrak{t} \\ \mathfrak{f} & \supset & \mathfrak{f} \\ & \mathfrak{t} & \end{array}$$

Так как эта таблица содержит столбец из одних лишь $\mathfrak{t}$, то $\forall x[P(f(f(x)))\supset\neg P(f(x))]$ дает $\mathfrak{t}$ в строке 7.

---

[1]) Мы сэкономили один шаг, использовав таблицу для f(f(x)) (слева). Совершенно очевидно, что необязательно сначала задаваться таблицами для термов, фигурирующих в наших формулах.

Определения *общезначимости* и *следования* (обозначаемых по-прежнему с помощью «$\models$») остаются теми же, что и ранее (и та же самая модификация нужна, чтобы получить «$\overline{\overline{D}}$-$\models$»).

Легко видеть, что такое обобщение языка сохраняет все установленные выше результаты теории моделей для исчисления предикатов. Буква r в теореме 15 может теперь обозначать любой терм (а не только произвольную переменную), лишь бы он был *свободен для* x *в* A(x); при этом, обобщая старое понятие (см. § 18), мы называем вхождение терма в формулу *свободным*, если каждое вхождение переменной внутри этого (вхождения) терма свободно в данной формуле. Короче, r свободен для x в A(x), если ни одно (свободное) вхождение переменной из r не делается связанным, когда r подставлен вместо свободных переменных x из A(x). Точно так же в определениях, предшествующих теоремам 17 и 18, буквы $r_1, \ldots, r_{p_i}$ или $r_1, \ldots, r_p$ могут быть произвольными термами, лишь бы они удовлетворяли тем условиям, которым подчинены в этих теоремах переменные.

Единственным изменением теории доказательств при переходе от исчисления предикатов к исчислению предикатов с функциями является то, что теперь мы разрешаем букве r в $\forall$- и $\exists$-схемах быть произвольным термом, свободным для x в A(x). Затем вносятся соответствующие изменения в правила $\forall$-удаления и $\exists$-введения в теореме 21 и ее следствиях.

Так как допускаются 0-местные мезоны (обозначающие индивиды, т. е. элементы из D), то мы можем употребить их в примерах (a)—(c) начала § 16 вместо «Джейн», а в примерах 19 и 20 § 26—вместо «Сократ» и «пять». Единственное различие по сравнению с использованием для тех же целей переменных (остающихся фиксированными в соотношениях, выражающих выводимость и следование) состоит в том, что эти переменные (в отличие от 0-местных мезонов) можно было употреблять и в связанных вхождениях. Это использование переменных для обозначения индивидов не затруднило бы нашего логического исследования, хотя применительно к обычным языкам оно кажется неестественным, ибо, как правило, в таких случаях мы прибегаем к именам собственным и т. п. Выгода от употребления функций делается особенно заметной, когда функции от $n > 0$ переменных используются вместе с предикатом равенства (§ 29, 30).

Упражнения. 28.1. Сколько строк имеют таблицы следующих формул при $D=\{1,2\}$? Вычислите указанную строку.

(a) g(f(g(x,f(h))), x), где f(x), g(x, y), h, x суть соответственно $f_4(x)$, $f_7(x, y)$, 1, 2, причем $f_7(1, 1)=f_7(2, 2)=1$, $f_7(1, 2)=$ $=f_7(2, 1)=2$.

(b) $\forall$xP(g(f(g(x, f(h))), x)) $\vee$ Q, когда предшествующее распределение значений дополнено значениями $\mathfrak{t}_2(x)$, $\mathfrak{f}$ для P(x), Q.

28.2. Какие из следующих термов свободны для x в формуле $\forall w (P(x, y) \vee \exists z Q(y, x) \supset R(w))$? (a) x. (b) $g(z, f(x, y))$. (c) $f(x, y)$. (d) $g(w, y)$. (e) $g(y, f(h, x))$.

28.3. Видоизмените доказательство теоремы 15 (b) применительно к рассмотрениям настоящего параграфа.

*§ 29. Равенство

Исчисление предикатов с равенством (или *тождеством*) можно рассматривать как систему, возникающую из исчисления предикатов (гл. II или § 28), когда один из двуместных ионов рассматривается некоторым специальным образом. Мы записываем этот ион в виде «— = —» и читаем «— равно —».

В рамках теории моделей значением $x = y$ всегда является логическая функция $\mathfrak{l}(x, y)$, равная по определению $\mathfrak{t}$, когда x и y имеют одно и то же значение, и $\mathfrak{f}$ в прочих случаях. Например, если $D = \{1, 2\}$, то значением $x = y$ является логическая функция $\mathfrak{l}_7(x, y)$ из примера 3 § 17. Поэтому если в исчислении предикатов с равенством приходится строить таблицы истинности, то они не содержат входа для $x = y$, ибо это значение предопределено заранее, как заранее известны значения логических символов $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. Любой ион, отличный от — = —, называется в исчислении высказываний с равенством *собственным ионом*.

Пример 2. Вот таблица истинности для формулы $\forall x [P(f(x)) \vee \exists y x = f(f(y))]$ над областью $D = \{1, 2\}$:

	P(x)	f(x)	$\forall x [P(f(x)) \vee \exists y x = f(f(y))]$
1.	$\mathfrak{l}_1(x)$	$f_1(x)$	$\mathfrak{t}$
2.	$\mathfrak{l}_1(x)$	$f_2(x)$	$\mathfrak{t}$
3.	$\mathfrak{l}_1(x)$	$f_3(x)$	$\mathfrak{t}$
4.	$\mathfrak{l}_1(x)$	$f_4(x)$	$\mathfrak{t}$
5.	$\mathfrak{l}_2(x)$	$f_1(x)$	$\mathfrak{t}$
6.	$\mathfrak{l}_2(x)$	$f_2(x)$	$\mathfrak{t}$
7.	$\mathfrak{l}_2(x)$	$f_3(x)$	$\mathfrak{t}$
8.	$\mathfrak{l}_2(x)$	$f_4(x)$	$\mathfrak{f}$
9.	$\mathfrak{l}_3(x)$	$f_1(x)$	$\mathfrak{f}$
10.	$\mathfrak{l}_3(x)$	$f_2(x)$	$\mathfrak{t}$
11.	$\mathfrak{l}_3(x)$	$f_3(x)$	$\mathfrak{t}$
12.	$\mathfrak{l}_3(x)$	$f_4(x)$	$\mathfrak{t}$
13.	$\mathfrak{l}_4(x)$	$f_1(x)$	$\mathfrak{f}$
14.	$\mathfrak{l}_4(x)$	$f_2(x)$	$\mathfrak{t}$
15.	$\mathfrak{l}_4(x)$	$f_3(x)$	$\mathfrak{t}$
16.	$\mathfrak{l}_4(x)$	$f_4(x)$	$\mathfrak{f}$

Вот вычисление строки 7:

$$\begin{array}{ll} & \forall x\,[P(f(x)) \vee \exists y\, x = f(f(y))] \\ \text{(i)} & \forall x\,[\mathfrak{P}_2(f_3(x)) \vee \exists y\, x = f_3(f_3(y))] \\ \text{(ii)} & \mathfrak{t} \end{array}$$

При получении (ii) нужна следующая вспомогательная таблица:

(a)

x	$\mathfrak{P}_2(f_3(x)) \vee \exists y\; x = f_3(f_3(y))$
1	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{t}$

вычисление которой осуществляется следующим образом (объяснения ниже):

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{P}_2(f_3(1)) \vee \exists y\, 1 = f_3(f_3(y)) & \qquad & \mathfrak{P}_2(f_3(2)) \vee \exists y\, 2 = f_3(f_3(y)) \\ \mathfrak{P}_2(\;\;2) \vee \;\mathfrak{t} & & \mathfrak{P}_2(\;\;1) \vee \;\mathfrak{t} \\ \mathfrak{f} \qquad\quad \vee \;\mathfrak{t} & & \mathfrak{t} \qquad\quad \vee \;\mathfrak{t} \\ \qquad\quad \mathfrak{t} & & \qquad\quad \mathfrak{t} \end{array}$$

Для нахождения $\mathfrak{t}$ во второй строке под $\exists y$ нужны еще две вспомогательные таблицы:

(b_1)

y	$1 = f_3(f_3(y))$
1	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$

(b_2)

y	$2 = f_3(f_3(y))$
1	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$

которые вычисляются так:

$$\begin{array}{llll} 1 = f_3(f_3(1)) & 1 = f_3(f_3(2)) & 2 = f_3(f_3(1)) & 2 = f_3(f_3(2)) \\ 1 = 1 & 1 = 2 & 2 = 1 & 2 = 2 \\ \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{f} & \mathfrak{t} \end{array}$$

На последнем шаге каждого из этих четырех вычислений применяется правило вычисления $=$. Так как каждая из таблиц (b_1) и (b_2) дает $\mathfrak{t}$, мы получаем $\mathfrak{t}$ при вычислении каждой строки таблицы (a) в силу правила вычисления $\exists$. Затем по правилу вычисления $\forall$ получаем $\mathfrak{t}$ в строке (ii) той таблицы, которую мы построили для вычисления искомой строки 7.

Пример 3. Построим таблицы для $\exists x \forall y (P(y) \supset x = y)$ и $\exists x\,[P(x) \,\&\, \forall y (P(y) \supset x = y)]$ при $D = \{1, 2, 3\}$. Начнем со списка возможных значений $P(x)$, как в примере 4 § 17.

x	$\mathfrak{P}_1(x)$	$\mathfrak{P}_2(x)$	$\mathfrak{P}_3(x)$	$\mathfrak{P}_4(x)$	$\mathfrak{P}_5(x)$	$\mathfrak{P}_6(x)$	$\mathfrak{P}_7(x)$	$\mathfrak{P}_8(x)$
1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
3	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$

$\mathfrak{I}(x)$	(a) $\exists x \forall y (P(y) \supset x = y)$	(b) $\exists x\, [P(x) \,\&\, \forall y (P(y) \supset x = y)]$
$\mathfrak{I}_1(x)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{I}_2(x)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{I}_3(x)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{I}_4(x)$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{I}_5(x)$	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
$\mathfrak{I}_6(x)$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{I}_7(x)$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
$\mathfrak{I}_8(x)$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$

Вычислим строку 6 в (a) и (b). Вот вспомогательные таблицы:

x	(a′) $\forall y (\mathfrak{I}_6(y) \supset x = y)$	(b′) $\mathfrak{I}_6(x) \,\&\, \forall y (\mathfrak{I}_6(y) \supset x = y)$
1	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$
2	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
3	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{f}$

Чтобы вычислить их, нужны новые вспомогательные таблицы:

y	(a_1'') $\mathfrak{I}_3(y) \supset 1 = y$	(a_2'') $\mathfrak{I}_6(y) \supset 2 = y$	(a_3'') $\mathfrak{I}_6(y) \supset 3 = y$
1	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$
2	$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{f}$
3	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{t}$

Подробности вычислений (a_1''), (a_2'') и (a_3'') почти одинаковы:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{I}_6(1) \supset 1 = 1 & \mathfrak{I}_6(2) \supset 1 = 2 & \mathfrak{I}_6(3) \supset 1 = 3 \\ \mathfrak{f} \supset \mathfrak{t} & \mathfrak{t} \supset \mathfrak{f} & \mathfrak{f} \supset \mathfrak{f} \\ \mathfrak{t} & \mathfrak{f} & \mathfrak{t} \end{array}$$

Правило вычисления $\forall$, примененное к таблицам (a_1'') — (a_3''), дает в качестве значений для (a′) те, которые мы привели выше в этой таблице; значения (b′) те же самые, ибо

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{I}_6(1) \,\&\, \forall y (\mathfrak{I}_6(y) \supset 1 = y) & \mathfrak{I}_6(2) \,\&\, \forall y (\mathfrak{I}_6(y) \supset 2 = y) \\ \mathfrak{f} \;\&\; \mathfrak{f} & \mathfrak{t} \;\&\; \mathfrak{t} \\ \mathfrak{f} & \mathfrak{t} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathfrak{I}_6(3) \,\&\, \forall y (\mathfrak{I}_6(y) \supset 3 = y) \\ \mathfrak{f} \;\&\; \mathfrak{f} \\ \mathfrak{f} \end{array}$$

Поскольку и (a′), и (b′) содержат $\mathfrak{t}$, то по правилу вычисления $\exists$ столбцы (a) и (b) истинностной таблицы исходной формулы дают $\mathfrak{t}$ в строке 6.

Заметим, что в таблице (а) формула $\exists x \forall y (P(y) \supset x = y)$ принимает значение $\mathfrak{t}$ в точности для тех логических функций $\mathfrak{l}(x)$, которые дают значение $\mathfrak{t}$ не более одного раза. В таблице же (b) формула $\exists x [P(x) \& \forall y (P(y) \supset x = y)]$ принимает значение $\mathfrak{t}$ в точности для тех логических функций $\mathfrak{l}(x)$, которые дают $\mathfrak{t}$ один раз. Желательно, чтобы читатель сумел убедиться, что это имеет место не только при $D = \{1, 2, 3\}$, но и для всякой непустой области D. Именно поэтому формула $\exists x \forall y (P(y) \supset x = y)$ выражает высказывание: «Существует не более одного x, такого, что $P(x)$», а формула $\exists x [P(x) \& \forall y (P(y) \supset x = y)]$ — высказывание: «Существует единственный x, такой, что $P(x)$», или, иначе, «Объект x, такой, что $P(x)$, существует и единствен».

Последнее понятие столь широко распространено, что мы применяем сокращение $\exists! x P(x)$ вместо $\exists x [P(x) \& \forall y (P(y) \supset x = y)]$. Более общо, $\exists! x A(x)$ является сокращением для $\exists x [A(x) \& \& \forall y (A(y) \supset x = y)]$, и при несокращенной записи в качестве y надо брать переменную, свободную для x в $A(x)$, отличную от x и от других свободных переменных в $A(x)$. (Все законные способы записи «$\exists! x A(x)$» в несокращенном виде конгруэнтны друг другу; см. конец § 16.) Еще одно удобное сокращение: писать «$x \neq y$» вместо $\neg x = y$ и, более общим образом, «$r \neq s$» вместо $\neg r = s$, где r и s — произвольные термы.

Те результаты, которые мы получили ранее в теории моделей для исчисления предикатов, сохраняют силу в исчислении предикатов с равенством (список (1) в § 19 следует понимать теперь как перечень, в который входят только различные собственные ионы и который содержит все такие ионы, участвующие в E). Имеются и другие результаты, которые мы объединим в теореме:

Теорема 28. (a) $\models x = x$. (b) $\models x = y \supset (x = z \supset y = z)$.

(Открытые аксиомы равенства для $=$.)

$(c_1^2) \models x = y \supset (P(x, a_2) \supset P(y, a_2))$. $(c_2^2) \models x = y \supset (P(a_1, x) \supset P(a_1, y))$.

(Открытые аксиомы равенства для собственного иона $P(a_1, a_2)$.)

$(d_1^2) \models x = y \supset (f(x, a_2) = f(y, a_2)$. $(d_2^2) \models x = y \supset f(a_1, x) = f(a_1, y)$.

(Открытые аксиомы равенства для мезона $f(a_1, a_2)$.)

Точно так же при каждом n имеется n «открытых аксиом равенства» $(c_1^n), \ldots, (c_n^n)$ *для каждого собственного n-местного иона* $P(a_1, \ldots, a_n)$ *и n других аксиом* $(d_1^n), \ldots, (d_n^n)$ *для каждого n-местного мезона* $f(a_1, \ldots, a_n)$.

Доказательства. (c_1^2) Согласно следствию теоремы $8_{\text{Pd}=}$, достаточно доказать, что $x = y, P(x, a_2) \models P(y, a_2)$. Берем произвольную область D и произвольное распределение значений, при котором $x = y$ и $P(x, a_2)$ получают значение $\mathfrak{t}$. Поскольку $x = y$ дает $\mathfrak{t}$, значение, приписанное переменной y этим распределением, совпадает со значением, приписанным x, а так как $P(x, a_2)$ принимает значение t, то и $P(y, a_2)$ дает t.

В теории доказательств для исчисления предикатов с равенством мы начнем с уже имеющихся схем аксиом и правил вывода (§ 21, а если разрешены и функциональные символы, то § 28), добавляя в качестве новых аксиом те формулы, которые, согласно теореме 28, общезначимы. Это и предусмотрено их названием «открытые аксиомы равенства». (Замкнутые аксиомы равенства — это замыкания открытых аксиом; см. § 20.) В силу теоремы 28 сохраняются теорема 12 и ее следствие.

Все ранее установленные результаты относительно доказуемости и выводимости для исчисления предикатов сохраняют силу. Это очевидно в случае прямых правил (как было и при переходе от исчисления высказываний к исчислению предикатов, см. § 21). Более того, в доказательстве теоремы о дедукции (§ 10, 22) можно включить использование новых аксиом в прежний случай 3. Затем мы получаем также и правила вспомогательного вывода, основанные на теореме о дедукции и содержащиеся среди правил введения и удаления теорем 13 и 21.

Теорема 29. (a) $\vdash x=x$. (e) $\vdash x=y \supset y=x$. (f) $\vdash x=y \& y=z \supset x=z$. (Рефлексивность, симметричность и транзитивность равенства.) *Для любых термов* r, s, t, t_1, t_2 *и т. д.:*

$(g_1)\ r=s \vdash r=t \sim s=t$. $(g_2)\ r=s \vdash t=r \sim t=s$.
$(h_1^2)\ r=s \vdash P(r, t_2) \sim P(s, t_2)$. $(h_2^2)\ r=s \vdash P(t_1, r) \sim P(t_1, s)$.
$(i_1^2)\ r=s \vdash f(r, t_2)=f(s, t_2)$. $(i_2^2)\ r=s \vdash f(t_1, r)=f(t_1, s)$.

Точно так же при любом $n>0$ *имеем* n *аналогичных результатов* (h_1^n), ..., (h_n^n) *для каждого собственного* n*-местного иона и* n *других* (i_1^n), ..., (i_n^n) *для каждого* n*-местного мезона.*

(Результаты о замене равных.)

Доказательство. (Относительно используемого здесь доказательства по схеме (B_1) см. § 13, 25.) (e) Пусть $x=y$. Согласно (a), $x=x$. Подставим x вместо z в (b) (используем следствие 2 (c) теоремы 21 при пустом Г): $x=y \supset (x=x \supset y=x)$. Дважды применяя $\supset$-удал., получаем $y=x$.

(h_1^2) Пусть $r=s$. I. Пусть $P(r, t_2)$. Подставляя r, s, t_2 вместо x, y, a_2 в (c_1^2), получаем $r=s \supset (P(r, t_2) \supset P(s, t_2))$. Двукратное $\supset$-удал. дает $P(s, t_2)$. II. Пусть $P(s, t_2)$. Подставляя в (e), имеем $r=s \supset s=r$, а удаляя $\supset$, получаем $s=r$. Подставляя в (c_1^2), получаем $s=r \supset (P(s, t_2) \supset P(r, t_2))$, что после двукратного $\supset$-удал. дает $P(r, t_2)$.

Теорема 30. (Теорема о замене.) (I) *Пусть* r, s — *произвольные термы,* t_r — *терм, содержащий некоторое вхождение* r, *а* t_s *получен из* t_r *заменой этого вхождения* r *на* s. *Тогда* $r=s \vdash t_r=t_s$.

(II) *Пусть* r, s*—произвольные термы, а* C_r*—формула, содержащая некоторое вхождение* r *(но это не должна быть переменная при знаке квантора). Пусть* C_s*—результат замены этого вхождения* r *на* s, *а* $x_1, \ldots, x_q$*—переменные, фигурирующие внутри* r *или* s, *которые связаны теми кванторами из* C_r, *в области действия которых находится рассматриваемое вхождение* r. *Пусть* Γ*—произвольный список (возможно, пустой) формул, не содержащих свободно ни одной из переменных* $x_1, \ldots, x_q$. *Тогда: Если* $\Gamma \vdash r = s$, *то* $\Gamma \vdash C_r \sim C_s$.

Доказательство проводится так же, как показано ниже на примере.

Пример 4. В приведенном ниже списке каждая из формул 2 и 3 выводима из предшествующей в силу (i_1^1), (i_2^2).

$$
\begin{array}{lrcl}
1. & f(x, y) & = & g(x)\\
2. & h(f(x, y)) & = & h(g(x))\\
3. & f(z, h(f(x, y))) & = & f(z, h(g(x)))\\
4. & f(z, h(f(x, y))) = g(z) & \sim & f(z, h(g(x))) = g(z)\\
5. & \forall z f(z, h(f(x, y))) = g(z) & \sim & \forall z (f(z, h(g(x))) = g(z)\\
6. & \exists y \forall z f(z, h(f(x, y))) = g(z) & \sim & \exists y \forall z f(z, h(g(x))) = g(z)
\end{array}
$$

Значит, $f(x, y) = g(x) \vdash f(z (h(f, x, y))) = f(z, h(g(x)))$, что и утверждалось теоремой в (I).

Теперь последовательно установим, что каждая из формул 1—6 выводима из $\forall y f(x, y) = g(x)$; это делается применением $\forall$-удаления, (i_1^1), (i_2^2), (g_1), *71a (так как z не входит свободно в $\forall y f(x, y) = g(x)$), *72a (так как y не входит свободно в $\forall y f(x, y) = g(x)$). Значит,

$$\forall y f(x, y) = g(x) \vdash \exists y \forall z f(z, h(f(x, y))) = g(z) \sim \exists y \forall z f(z, h(g(x))) = g(z),$$

как и утверждает п. (II) теоремы.

Следствие 1. *Если* C_r, C_s, $x_1, \ldots, x_q$ *удовлетворяют условиям п.* (II) *теоремы* 30, *то*

$$r = s \vdash^{x_1 \ldots x_q} C_r \sim C_s.$$

Следствие 2. (Свойство замены для равенства.) *При тех же условиях:*

(a) *Если* $\Gamma \vdash r = s$, *то* $\Gamma, C_r \vdash C_s$. (b) $r = s, C_r \vdash^{x_1 \ldots x_q} C_s$.

Сохраняют силу и (α)—(ζ) § 5, если вместо «$\models$» подставить «$\Gamma \vdash$», вместо «$\sim$» подставить «$=$», а вместо формул A, B, C, A_0, A_1, A_2, ... (кроме (α))—термы r, s, t, r_0, r_1, r_2, ... Значит, в исчислении предикатов с равенством можно пользоваться методом цепей как применительно к эквивалентностям, так и применительно к равенствам. Полезность этого будет проиллюстрирована в § 38, 39.

Теорема 31. *Если* $\vdash$ E, *то существует такое доказательство формулы* E, *что всякий собственный ион или мезон, участвующий в доказательстве, входит также в* E.

Доказательство. Возьмем произвольное доказательство формулы E. В нем могут участвовать собственные ионы или мезоны, которые не входят в E. Возьмем те атомарные части или целые формулы, которые входят в рассматриваемое доказательство и образованы с использованием этих ионов[1]), и заменим их на $\forall x (x = x)$. Затем возьмем те термы, которые входят как части формул в полученную фигуру, содержат эти мезоны в качестве внешних символов[2]) и максимальны, т. е. не являются частями никаких других термов того же вида. Заменим их одной и той же переменной v, не фигурирующей в заданном доказательстве. Обе эти операции не портят ни окончательную формулу E, ни аксиомы равенства для $=$, для собственных ионов и для мезонов из E, ни аксиомы и правила вывода исчисления предикатов (см. конец абзаца 2 примечания на стр. 159 § 25). Однако аксиомы равенства для заменяемых ионов заменяются на $x = y \supset (\forall x (x = x) \supset \forall x (x = x))$, а для заменяемых мезонов — на $x = y \supset v = v$. Но любая из этих формул доказуема с помощью *1 или (a) и схемы аксиом 1a. Проделав все описанное и заменяя в получившейся фигуре указанные формулы их доказательствами, получим такое доказательство формулы E, где встречаются лишь те собственные ионы и мезоны, которые входят в E.

Следствие. $\vdash$ E *в исчислении предикатов с равенством тогда и только тогда, когда* $Q_0, \ldots, Q_s \vdash$ E *в исчислении предикатов, где* $Q_0, \ldots, Q_s$ *суть замкнутые аксиомы равенства для* $=$ *и собственных ионов и мезонов, входящих в* E[3]).

Доказательство. Достаточность. Используя $\forall$-введ., доказываем замкнутые аксиомы равенства $Q_0, \ldots, Q_s$ в исчислении предикатов с равенством, исходя из соответствующих открытых аксиом. Необходимость. Используя $\forall$-удал., выводим открытые аксиомы равенства в исчислении предикатов из замкнутых аксиом.

Упражнения. 29.1. Проведите вычисление строки 9 примера 2.

29.2. Напишите формулы исчисления предикатов с равенством,

---

[1]) То есть формулы вида $P(r_1, \ldots, r_k)$, где $P(x_1, \ldots, x_k)$ — «плохой» ион. — *Прим. ред.*

[2]) То есть термы вида $f(r_1, \ldots, r_k)$, где $f(x_1, \ldots, x_k)$ — «плохой» мезон. — *Прим. ред.*

[3]) *Если* E *не содержит* $=$, *то* $\vdash$ E *в исчислении предикатов с равенством тогда и только тогда, когда* $\vdash$ E *в исчислении предикатов.* Но доказать это труднее (ср. упр. 52.3 и конец примечания 2 на стр. 410 § 55).

которые выражали бы следующие высказывания:

(a) Существует не более двух x, таких, что P(x).

(b) Существует точно два x, таких, что P(x).

(c) Число x, таких, что P(x), находится между 2 и 5.

29.3. Установите пункт (b) теоремы 28 и (f) и (g_1) теоремы 29. (*Указание*: для установления (f) сначала надо выполнить надлежащую подстановку в (b).)

29.4. Дайте теоретико-модельное доказательство теоремы о замене равных аналогично теоремам 19 и 5_{Pd} (обобщение теоремы 5 § 19).

*§ 30. Равенство как эквивалентность; экстенсиональность

Мы установили (и в теории моделей, и в теории доказательств) четыре основных свойства равенства: рефлексивность (пункт (a) теорем 28 и 29), симметричность (пункт (e) теоремы 29), транзитивность (пункт (f) теоремы 29) и свойство замены (следствие 2 теоремы 30)[1]).

Часто бывает, что последнее из этих четырех свойств, а именно свойство замены, не указывается при перечислении основных свойств равенства. В теории моделей оно имеет место из-за нашей интерпретации, в которой «x = y» понимается как «x и y являются одним и тем же объектом» (упр. 29.4). Такое истолкование воплощается в правиле вычисления значения x = y, когда определяют значение формул по таблицам истинности.

Иногда термин «равенство» понимается иначе, а именно как название отношения, обладающего только тремя первыми свойствами (рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью), тогда как свойство замены, вообще говоря, не предполагается (кроме некоторых особо подобранных контекстов). Какой бы терминологией и какими бы обозначениями мы ни пользовались, важно отдавать себе отчет в том, что отношение, удовлетворяющее только трем первым аксиомам, не является «равенством» в описанном выше

---

[1]) Согласно теореме $12_{Pd=}$, из того, что некоторые результаты получены в теории доказательств, следует, что соответствующие результаты имеют место в теории моделей.

При описании теории доказательств можно было бы исходить из этих четырех свойств. Выводя три последних, мы следовали традиции теории доказательств, согласно которой стараются использовать наименьшее возможное число аксиом наиболее простого вида. Такая трактовка теории доказательств в основном восходит к Гильберту и Бернайсу [1934], стр. 164 и далее.

Другой (довольно распространенный) метод состоит в том, что используют аксиому (a) и схему аксиом $x = y \supset (A(x) \supset A(y))$ вместо прочих наших аксиом равенства; здесь $A(z)$ — произвольная формула, z — произвольная переменная, x и y — тоже произвольные (различные, но не обязательно отличные от z) переменные, свободные для z в $A(z)$ ($A(x)$ и $A(y)$ являются результатами подстановки x и y соответственно вместо свободных вхождений z в $A(z)$).

смысле. В этом случае мы предпочитаем говорить только про «эквивалентность» или «отношение эквивалентности»[1]).

В качестве примера рассмотрим множество D всех дробей $\frac{p}{q}$, где p и q—целые и $q \neq 0$. Таким образом, D состоит из элементов $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{17}{1}$, $\frac{5}{-15}$, $\frac{-6}{-12}$ и т. п. Две такие дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ равны (т. е. являются одной и той же дробью) тогда и только тогда, когда $p = r$ и $q = s$ (т. е. (p, q) и (r, s) суть одна и та же упорядоченная пара целых чисел).

Однако мы обычно интересуемся дробями не самими по себе, а дробями как способом выражения рациональных чисел. Дроби вроде $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{-6}{-12}$ и т. п. хоть и различны, но обозначают одно и то же рациональное число. Дроби $\frac{-1}{3}$, $\frac{5}{-15}$ обозначают другое рациональное число и т. д. Часто этот факт выражают, говоря, что мы «задаем равенство» между дробями (предполагая, что заданы умножение и равенство для целых чисел), полагая $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \equiv$ $\equiv ps = qr$. (Напоминаем читателю, что правая часть получена перемножением «крест-накрест» левой части.)

По-видимому, школьники и, вообще, неспециалисты не очень-то заботятся о том, чем являются «на самом деле» «пропорции» (введенные Евклидом) или рациональные числа; им важно лишь получить в свое распоряжение «настоящие» рациональные числа, с «нужными» соотношениями между ними. Наше естественное понятие о рациональном числе, по-видимому, формируется так: в множестве дробей вроде $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{10}, \frac{-6}{-12}, \ldots\right\}$ мы производим абстракцию отождествления, т. е. пренебрегаем всем, чем эти дроби различаются, сохраняя лишь то, что у них есть общего. Та теория, которую мы будем описывать, ставит своей целью доказать со всей строгостью, что действительно существует система объектов, обладающая нужными свойствами.

---

[1]) Речь идет об отношении эквивалентности между элементами области D. Раньше (§ 2, 4, 5, 15 и др.) мы уже встречались с другим отношением эквивалентности $\sim$ («материальной эквивалентности»), определенным для высказываний. Не только рефлексивность, симметричность и транзитивность (*19—*21 теоремы 2 или (β)—(δ) § 5), но и свойство замены в рассматриваемых формулах (теоремы 5 и 23) имели для него место. Все же мы не считаем отношение $\sim$ равенством между высказываниями, потому что при нашей интерпретации разные (не равные) высказывания могут быть эквивалентными. Достаточно, чтобы они обладали одинаковыми таблицами; см. примечание на стр. 112.

Один из способов построения этих объектов состоит в следующем: мы говорим, что рациональное число $\frac{1}{2}$ является множеством $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{10}, \frac{-6}{-12}, \ldots\right\}$, что $-\frac{1}{3}$ является множеством $\left\{\frac{-1}{3}, \frac{5}{-15}, \ldots\right\}$ и т. п. Другой способ состоит в том, что в каждом из этих классов выбирается некоторая специальная дробь, например та, числитель и знаменатель которой наименьшие, причем знаменатель положителен. В этом смысле говорят, что $\frac{1}{2}$ — рациональное число, а $\frac{5}{10}$, $\frac{-6}{-12}$ и т. п. являются выражениями, которые описывают рациональное число $\frac{1}{2}$. Первый путь — более модный в наше время, ибо включается в современную практику математиков, стремящихся брать за основу словарь теории множеств. Именно следуя ему, мы дадим строгую теорию рациональных чисел, предполагая, что теория положительных и отрицательных целых чисел уже дана.

Дабы избежать малейшей возможности спутать дробь $\frac{p}{q}$, понимаемую как дробь, с тем рациональным числом, которое она представляет, будем записывать дроби $\frac{p}{q}$ в виде упорядоченных пар (p, q). После того как построение теории будет закончено, мы вернемся к записи «$\frac{p}{q}$», используемой школьниками и профессионалами-математиками. Уравнения, которые мы будем писать, надо читать с «$=$» в смысле равенства между рациональными числами, понимая дроби как имена рациональных чисел.

До сих пор мы неявно предполагали, что множество D дробей распадается на непустые непересекающиеся классы $D_1, D_2, D_3, \ldots$; например, $D_1 = \{(1, 2), (5, 10), (-6, -12), \ldots\}$, $D_2 = \{(-1, 3), (5, -15), \ldots\}$ и т. д., причем принадлежность элементов к классам определяется таким правилом: (p, q) и (r, s) принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда $ps = qr$ в теории целых чисел. Именно это мы и постараемся обосновать.

Сначала заметим следующее: (A) *Рассмотрим разбиение непустого множества D на непустые непересекающиеся классы. Тогда отношение «x и y принадлежат одному и тому же классу нашего разбиения» является отношением эквивалентности. Обозначаем его $x \simeq y$. Утверждение состоит в том, что $\simeq$ рефлексивно ($x \simeq x$), симметрично ($x \simeq y \to y \simeq x$) и транзитивно ($x \simeq y \& y \simeq z \to$ $\to x \simeq z$).* Это настолько очевидно, что мы не станем задерживаться на доказательстве.

Обратно: (B) *Если некоторое бинарное отношение $\simeq$ в области D является отношением эквивалентности (т. е. если оно рефлек-*

сивно, симметрично и транзитивно), то D разбивается на непересекающиеся непустые классы, такие, что произвольные элементы x и y из D принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда выполняется $x \simeq y$.

Доказательство. Для любого x из D обозначим через x^* класс всех тех элементов u из D, для которых $x \simeq u$.

I. В силу рефлексивности $\simeq$ сам x принадлежит x^*. Значит, каков бы ни был элемент x из D, любой класс x^* непуст, и всякий элемент x из D принадлежит хотя бы одному из этих классов, т. е. классы x^* покрывают D.

II. Пусть x и y — произвольные элементы из D. Случай 1: $x \simeq y$. Докажем, что тогда x^* и y^* совпадают (а значит, в силу I этот класс содержит и x, и y), т. е. всякий элемент u из x^* является элементом из y^* и наоборот. Пусть u является элементом x^* (символически $u \in x^*$), т. е. $x \simeq u$. Согласно предположению, $x \simeq y$, откуда $y \simeq x$ в силу симметричности, а по транзитивности $y \simeq u$, что означает $u \in y^*$. Точно так же если $v \in y^*$, т. е. $y \simeq v$, то по предположению данного случая и по транзитивности $x \simeq v$, т. е. $v \in x^*$. Случай 2: $\neg(x \simeq y)$. Тогда x^* и y^* не имеют общих элементов. В самом деле, пусть z — их общий элемент. Тогда $x \simeq z$ и $y \simeq z$, откуда по симметрии и транзитивности $x \simeq y$, что противоречит предположению данного случая.

Когда переходят от множества D и отношения эквивалентности $\simeq$ на D к непересекающимся подмножествам множества D (что возможно в силу (В)), то эти подмножества называют *классами эквивалентности множества D по отношению $\simeq$ (или по модулю $\simeq$)*.

В частности, если множество D состоит из ранее описанных дробей, то с помощью (В) можно заключить, что существует некоторое разбиение множества D на непересекающиеся непустые подмножества, которые мы и считаем рациональными числами. Для этой цели мы вводим определение $(p, q) \simeq (r, s) \equiv ps = qr$ и проверяем, что получается отношение эквивалентности (упр. 30.1 (а)). Значит, можно применить (В).

Переходя от дробей к рациональным числам, мы заменяем область D дробей новой областью D^* классов эквивалентности по только что определенному отношению эквивалентности. При таком переходе отношение эквивалентности на D переходит в (а точнее, порождает) отношение равенства $=$ на D^*, т. е. два рациональных числа x^* и y^* одинаковы $(x^* = y^*)$ тогда и только тогда, когда для любых пар $(p, q) \in x^*$ и $(r, s) \in y^*$ имеет место $(p, q) \simeq (r, s)$. Почему мы исходим из дробей D для построения рациональных чисел D^*? Да потому, что числа p, q в дроби (p, q) дают нам возможность определить и выполнять те операции, которые нам нужны применительно к рациональным числам.

Например, мы привыкли считать суммой двух рациональных чисел результат следующих действий: $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}=\frac{ps+qr}{qs}$ (что можно еще сократить в некоторых случаях). Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что операция эта совершается именно применительно к дробям, запишем определение в виде $(p, q)+(r, s)=(ps+qr, qs)$. При этом нам нужна такая операция, которая действует на классах эквивалентности дробей, ибо рациональные числа суть такие классы, а не сами дроби. Для того чтобы гарантировать, что такое сложение дробей $(p, q)+(r, s)$ дает операцию на рациональных числах x^*+y^*, надо доказать, что тот класс эквивалентности, которому принадлежит $(ps+qr, qs)$, зависит только от классов эквивалентности x^* и y^*, которым принадлежат (p, q) и (r, s); иными словами, надо доказать, что

$$(p, q)\simeq(p_1, q_1)\,\&\,(r, s)\simeq(r_1, s_1)\rightarrow(ps+qr, qs)\simeq(p_1s_1+q_1r_1, q_1s_1)$$

(упр. 30 (b)). Тогда сложение классов эквивалентности x^* и y^* определено и в качестве значения дает единственный класс эквивалентности z^*. В самом деле, берем произвольный элемент (p, q) из x^* и произвольный элемент (r, s) из y^*, складываем их по указанному правилу и в качестве z^* берем тот класс эквивалентности, которому принадлежит сумма $(ps+qr, qs)$.

Точно так же можно ввести предикат $x^*<y^*$ для рациональных чисел x^* и y^*, положив $(p, q)<(r, s)\equiv(ps<qr$, если $qs>0$; $ps>qr$, если $qs<0)$ и доказав затем, что истинность или ложность утверждения $(p, q)<(r, s)$ зависит только от классов эквивалентности, которым принадлежат (p, q) и (r, s) (упр. 30.1 (d)).

Не все операции над дробями, т. е. парами целых чисел (p, q) при $q\neq 0$, не зависят ни от чего, кроме как от классов эквивалентности этих дробей. Например, операция (функция) $(p, q)\circ(r, s)=(p+r, q+s)$ вполне определена на дробях, но не индуцирует операции на рациональных числах.

Вообще говоря, эквивалентность (между элементами D) не обладает — в отличие от равенства — свойством замены. Например, из $(p, q)+(r, s)=(t, u)$ и $(p, q)\simeq(p_1, q_1)$ не следует, что $(p_1, q_1)+(r, s)=(t, u)$ (но следует, что $(p_1, q_1)+(r, s)\simeq(t, u)$).

Резюмируем то, что мы столь подробно изучили в нашем примере с рациональными числами: если мы берем некий набор предметов и добавляем «определим «равенство» между этими предметами», то мы имеем в виду, что определяется некоторое отношение эквивалентности. Определение равенства не произвольно, оно задается сразу, как только определяются объекты области D, т. е. сама эта область. Отношение же эквивалентности — это равенство в новой области D^*, состоящей из классов эквивалентности области D, т. е., говоря наглядно и нестрого, из объектов, которые мы можем изобрести или придумать, отвлекаясь от всех различий, имеющихся между членами одного и того же класса эквивалентности.

Пример 5. В § 29 мы видели, что формула $\exists x [P(x) \& \forall y (P(y) \supset \supset x = y)]$ выражает высказывание: «Существует единственный x, такой, что P(x)», если иметь в виду теорию моделей исчисления предикатов с равенством. В теории моделей исчисления предикатов без равенства выразить это высказывание невозможно (гл. II). Для доказательства предположим, что формула E исчисления предикатов без равенства с единственным ионом P(—) такова, что E истинна тогда и только тогда, когда P(x) интерпретируется некоторой логической функцией $\mathfrak{l}(x)$, истинной в точности для одного элемента из D. Отсюда, в частности, следует, что при $D = \{1, 2, 3\}$ формула E дает $\mathfrak{t}$, если P(x) принимает в качестве значения логическую функцию $\mathfrak{l}_6(x)$ (с таблицей $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$). Теперь возьмем в качестве D область из 4 элементов $\{1, 2_1, 2_2, 3\}$, а в качестве P(x)—функцию $\mathfrak{l}(x)$, такую, что $\mathfrak{l}(1) = \mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}_2(2_1) = \mathfrak{l}_2(2_2) = \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}(3) = \mathfrak{f}$. На этот раз 2_1 и 2_2 ведут себя так, как раньше 2, поэтому E по-прежнему дает $\mathfrak{t}$. Но это противоречит нашему предположению, ибо такая функция $\mathfrak{l}(x)$ оказывается истинной для двух разных значений, приписанных переменной x.

Как видно из этого примера, правила вычисления истинностных значений в исчислении предикатов без равенства не препятствуют разбиению любого элемента из произвольной области D на несколько элементов, которые будут вести себя совершенно одинаково при вычислении истинностных значений. (Процесс этот противоположен объединению элементов в классы эквивалентности, становящиеся новыми элементами.)

Обсудим теперь проблемы перевода обычного языка в логическую символику в том случае, когда налицо равенство. Основная предпосылка нашей трактовки равенства в теории моделей состоит в том, что мы задались некоторой совокупностью или множеством в качестве области D. Область D мы представляем себе состоящей из «различных и точно определенных предметов» [1]). Поэтому если x и y суть элементы из D, то либо это один и тот же элемент (т. е. справедливо $x = y$), либо x и y—различные элементы (т. е. неверно $x = y$). Короче говоря, наше понятие области D уже предполагает некоторый предикат равенства на ней.

Во всех применениях исчисления предикатов, на этот раз с равенством, мы должны начинать с выбора в качестве области некоторого множества D; мы либо его строим, либо вводим допущение, что оно существует, чтобы пользоваться им при доказательстве. «Область» в нашем смысле может с точки зрения

[1]) Кантор [1895], стр. 481. Кантор создал теорию множеств между 1874 и 1897 гг. Мы говорим о ней в § 32—35 гл. IV.

чувственного опыта показаться довольно сложной или даже сомнительной абстракцией.

Например, рассмотрим случай температуры и цвета. В этом случае наши ощущения расплывчаты, ибо между соседними температурами и ощущениями цвета имеется постепенный переход, отчего становится трудно говорить, обладают ли в заданных условиях два объекта одной и той же температурой или одинаковым цветом. Физика же и психология построили математические модели, в которых температуры «точно» изображаются вещественными числами (неотрицательными относительно абсолютного нуля), а цвет описывается точками из некоторой области в трехмерном пространстве (т. е. тройками вещественных чисел, подчиненными определенным ограничениям). В классической математике равенство двух произвольных вещественных чисел x и y определяется следующей процедурой: каждое число записывается в виде бесконечной десятичной дроби[1]), например $\pi = 3{,}14159\ldots$; $2/3 = 0{,}666\ldots$; $75/2 = 37{,}50000\ldots = 37{,}49999\ldots$; $-3/4 = -0{,}75000\ldots = -0{,}74999\ldots$. Иногда оказывается, что для одного и того же числа имеются два десятичных представления: первое с бесконечным числом нулей, а второе с бесконечным числом девяток. Давайте условимся в таком случае всегда выбирать второе представление. Тогда $x = y$, если x и y имеют одно и то же десятичное разложение, и $x \neq y$, если между их десятичными разложениями имеется разница хотя бы в одном знаке[2]).

Если исходить из нашего понятия области D и образовать всевозможные одноместные предикаты над D (т. е. попросту все логические одноместные функции $\mathfrak{f}(x)$ на D; см. примечание на стр. 112), то $x = y$ можно определить так: $x = y \equiv$ {для всякого P имеет место $P(x) \sim P(y)$}. Ведь если x и y — один и тот же элемент области D, то в силу нашего понятия предиката при любом P выражения $P(x)$ и $P(y)$ будут одним и тем же высказыванием, откуда $P(x) \sim P(y)$. С другой стороны, если x и y — различные элементы из D, то найдутся предикаты P, которые их «разделяют», т. е. такие, что $P(x)$ истинно, когда $P(y)$ ложно, и наоборот, так что $P(x) \sim P(y)$ будет иметь место не при любом P.

Определение это воплощает принцип Лейбница о *тождестве неразличимых* [1685] (воспроизведен у Льюиса [1918], стр. 373—387):

---

[1]) В оригинале описано другое, мало распространенное в литературе представление действительного числа десятичными дробями (по характеристике и положительной мантиссе). — *Прим. перев.*

[2]) Имеются другие теории действительных чисел, равносильные описанной, но более изящные (см., в частности, [ВМ], стр. 33—36). Интуиционисты (§ 36) их не признают, ср. Гейтинг [1934], [1956].

если нельзя указать никакого свойства P, по отношению к которому x и y различны, то x и y тождественны. В исчислении предикатов второго порядка (см. § 17) мы могли бы рассматривать $x = y$ как сокращение для $\forall \mathrm{P} (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \sim \mathrm{P}(\mathrm{y}))$ вместо того, чтобы вводить его в качестве первоначального предиката. Но идея равенства уже подразумевается в *нашем* понятии области и предикатов на этой области; поэтому представляется, что вводить равенство так, как мы это сделали, будет проще и непосредственнее, нежели определять его с помощью ссылки на всевозможные предикаты. И, само собой разумеется, лейбницево определение применимо лишь в логике второго порядка.

Для того чтобы лейбницево определение оказалось естественным средством *введения* идеи равенства (т. е. чтобы оно годилось для объяснения смысла равенства, а не только для того, чтобы выписать некоторое необходимое и достаточное условие того, что равенство имеет место), надо исходить совсем из другой точки зрения, нежели та, что принята в нашей теории моделей, ибо лейбницева точка зрения заставляет говорить о применимости свойств P к предметам x, т. е. рассматривать истинность или ложность значений $P(x)$ некоторого предиката до того, как сами предметы x отчетливо выделены.

В нашей теории, начинающейся с предположения о существовании некоторой предметной области D, вопрос о том, равны предметы или нет, зависит от той картины мира, исходя из которой построена область D.

Равна ли утренняя звезда x (тождественна ли, является ли той же самой) вечерней звезде y? (Символически: $x = y$?) Равенство имеет место, если область D^{**} является областью небесных объектов, изучаемых астрономией, где утренняя звезда, так же, как и вечерняя, есть Венера (наблюдаемая в разные моменты). Для пастухов же, не знающих астрономии, звезда, наблюдаемая утром, и звезда, наблюдаемая вечером (в разные даты), представляют два совершенно различных природных явления; тут речь идет о другой области D^*. Для ребенка вечерняя звезда, видимая вчера, и вечерняя звезда, видимая сегодня, могут представлять два разных явления, и здесь возникает еще одна область D^{**}. Можно мыслить себе множество D^* состоящим из классов эквивалентности множества D, а D^{**} — состоящим из классов эквивалентности множества D^* (или из бо́льших классов эквивалентности множества D). В каждом из этих случаев абстракция состоит в том, что мы обнаруживаем, что различные элементы некоторого множества связаны каким-либо отношением эквивалентности или что о них надо мыслить как о различных проявлениях одной и той же «глубинной сущности».

Очевидная при лейбницевом определении экспликация равенства, согласно которой $x = y$ означает $\forall P (P(x) \sim P(y))$, несколько иначе выражает то, что мы назвали «свойством замены для равенства» (следствие 2 теоремы 30). Принцип наш установлен по отношению к классу рассматриваемых формул и включает замену в области действия кванторов. Иногда это же самое свойство называют *экстенсиональностью*, для того чтобы характеризовать те контексты, в которых равенство $x = y$ позволяет заменять x на y. Контекст, в котором такая замена законна, называется *экстенсиональным*. Контекст, где она незаконна, называется *неэкстенсиональным*, или (иногда) *интенсиональным*. Это согласуется с нашим предыдущим использованием слов «экстенсиональный» и «интенсиональный», когда речь шла о возможности замены для отношения «$\sim$».

Рассмотрим такое рассуждение: «Пусть n — число планет Солнечной системы. Кеплер не знал, что $n > 6$. На самом же деле $n = 9$ (согласно нынешним научным данным). Значит, Кеплер не знал, что $9 > 6$»[1]). Контекст, образованный фразой «Кеплер не знал, что $— > 6$», интенсиональный, ибо истинностное значение получаемой фразы зависит от смысла слова, представляемого вместо прочерка, а не от значения этого слова (как элемента области D). Поэтому замена «n» на «9» на основании равенства «$n = 9$» в фразе «Кеплер не знал, что $n > 6$» является незаконной.

Пример этот показывает, что к примерам, уже данным в § 12, мы можем добавить логику знания, веры и т. п. контекстов, в которых недостаточно равенства значений истинности для оправдания замены. Так, исходя из «$n = 9$», мы можем корректной заменой получить «$n > 6 \sim 9 > 6$» (теорема 30 (II)), но не имеем права заменить «$n > 6$» на «$9 > 6$» в «Кеплер не знал, что $n > 6$».

Если контекст неэкстенсионален относительно замены равных, это значит, что было принято во внимание что-то такое, что не учтено при построении элементов области D. Разбивая эти элементы, мы получаем новую область D'; при этом равенство в D станет отношением эквивалентности на D' и экстенсиональность восстановится.

Например, если строить D' как вселенную объектов, мыслимых Кеплером, а не как вселенную вещественных чисел, то «$n = 9$» не будет истинным, так как n и 9 — различные мысленные предметы. Таким образом, наличие неэкстенсиональных контекстов является в некотором смысле еще одним способом подчеркнуть разницу между равенством и отношением эквивалентности. Стоит, однако, признаться, что в тех случаях, когда речь идет о знании

---

[1]) Кеплер, прославившийся открытием законов движения планет, умер в 1630 г. Уран, Нептун и Плутон открыты соответственно в 1791, 1846 и 1930 гг.

или о вере, бывает довольно трудно дать точное описание какой-нибудь области D', для которой имела бы место экстенсиональность.

Поскольку изменение точки зрения на предметную область D может повлечь за собой изменение в соотношении между равенством и эквивалентностью, не удивительно, что терминология на этот счет порой туманна. Вот таблица переводов:

x = y	x и y — один и тот же предмет.
	x тождественно с y.
	x равно y (обычное словоупотребление).
	x есть y (распространенное словоупотребление).

Наименее двусмысленны два первых варианта. Но, как правило, «=» читается как «равно», ибо это короче и именно так читается знак «=» в математике. Однако математики часто используют «=» и «равно» в том смысле, как мы понимаем отношение эквивалентности. Авторы учебников по планиметрии часто пишут «$AB = CD$», чтобы сообщить, что отрезки AB и CD имеют одну и ту же длину. В этом случае нельзя заменить «AB» на «CD» в «$AB \perp EF$» («AB перпендикулярен EF»). Поэтому при переводе в логические символы надо следить за тем, является ли «равно» нашим «=» или нашим отношением эквивалентности. Конечно, четким переводом «$AB = CD$» в рассматриваемом примере было бы «(длина AB) = (длина CD)», что можно было бы записать в виде «$AB \simeq CD$». Кроме основного отношения равенства или тождества, математикам нужны и другие типы эквивалентности, что видно из наличия выражений «равносильно», «эквивалентно», «конгруэнтно», «подобно», «гомологично» (и, как мы видели, для той же цели часто употребляется слово «равно»).

В заключение перейдем к словам «есть», «является» и к подобным выражениям. Не считая таких не относящихся к делу значений, как «является = приходит», эти выражения имеют следующие три значения: (1) Если A и B — два предмета, рассматриваемые как элементы одной и той же области D, то «A является B» или «A есть B» (почти всегда) означает наше «$A = B$», т. е. то, что A и B — это один и тот же элемент из D. Примеры: «Число планет есть девять», «Дважды два есть четыре». (2) Если A — предмет, который мы считаем элементом области D, а B — некоторое подмножество области D, то «A есть B» означает, что A является элементом B и формализуется записью $A \in B$ или $\mathrm{B(A)}$. Примеры: «Сократ есть человек», «Снег белый», «Джейн — красавица». (3) Если A и B являются подмножествами множества D, то «A есть B» означает, что подмножество A содержится в B (является его подмножеством), что записывается в виде $A \subseteq B$ или $\forall \mathrm{x} (\mathrm{A(x)} \supset \mathrm{B(x)})$. Примеры: «Люди являются смертными», «Кошки суть животные», Чтобы не предварять своими обозначениями перевода, мы во всех трех примерах пользовались заглавными буквами «A» и «B». Если же согласовать символику со сказанным ранее, то случаи (1)—(3) различаются тем, что для обозначения элементов множеств применяются строчные буквы, а для обозначения множеств—прописные: (1) «a есть b» записывается как $a=b$. (2) «a есть B» записывается $a \in B$ или B(a). (3) «A есть B» записывается $A \subseteq B$ или $\forall x (A(x) \supset B(x))$. Тогда при переводе с обычного языка вопрос формулируется так: «Какие слова соответствуют строчным, а какие—прописным буквам?»

Однако соглашение это невозможно соблюдать, если рассматривается множество, элементы которого сами являются множествами, элементы которых мы хотим называть. Например, фраза «Люди многочисленны» записывается в виде «$M \in N$», где M—множество людей, а N—множество множеств с большим числом элементов.

Излишне подчеркивать, что смешение разных смыслов слов «есть», «является» может привести к ошибкам.

В смыслах (1) и (3) слово «есть» транзитивно ($a=b \wedge b=c \rightarrow a=c$ и $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$) (Barbara, пример 23 § 27). Смысл же (2) не обладает свойством транзитивности (вот ошибочное рассуждение: «Сократ есть человек. Люди многочисленны. Значит, Сократ многочислен»)[1]). Смысл (1) обладает свойствами рефлексивности и симметричности, смысл (2) несимметричен и нерефлексивен (по крайней мере при обычном понимании теории множеств), смысл (3) рефлексивен, но несимметричен.

Упражнения. 30.1. (a) Покажите, что $(p, q) \simeq (r, s) \equiv ps = qr$ является отношением эквивалентности между парами целых чисел (p, q) при $q \neq 0$. (b) Покажите, что операция $(p, q)+(r, s)= =(ps+qr, qs)$ является операцией, зависящей только от классов эквивалентности (см. подробности в тексте). (c) Рассмотрите тот же вопрос для операции $(p, q)\cdot(r, s)=(pr, qs)$. (d) То же для $(p, q) < (r, s)$ согласно данному выше определению.

30.2. Пусть $D=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, а $x \cong y \equiv (x-y$ или $y-x$ является четным натуральным числом). Покажите, что $\cong$ является отношением эквивалентности на D, и перечислите классы эквивалентности.

30.3. Переведите в логическую символику, а потом проверьте, истинны или нет полученные высказывания:

(a) Все любят Джейн. Джейн любит кого-то. Значит, есть два человека, которые любят друг друга.

(b) Все любят Джейн. Джейн любит кого-то, кроме самой себя. Значит, есть два человека, которые любят друг друга.

[1]) Пример заимствован у Суппеса [1957], стр. 183.

(c) π — это отношение длины окружности к ее диаметру; π заключено между 3,1415 и 3,1416. Значит, отношение длины окружности к ее диаметру заключено между 3,1415 и 3,1416.

(d) Сэмюэль Клеменс написал «Гекльбери Финна». Марк Твен написал «Гекльбери Финна». «Гекльбери Финн» является произведением одного автора. Значит, Марк Твен и Сэмюэль Клеменс — одно и то же лицо.

(e) У Джейн не больше одного мужа. Джейн замужем за Томасом. Томас худощав. Уильям не худощав. Значит, Джейн не замужем за Уильямом.

(f) Том — брат Дика. Дик — брат Гарри. Никто не является своим собственным братом. Значит, Том и Гарри — разные лица.

(g)* В этой пьесе у каждого участника есть брат и сестра, также участвующие в этой же пьесе. Никто не является своим собственным братом или сестрой. Брат не может быть сестрой. Значит, либо в этой пьесе нет вовсе действующих лиц, либо же их не меньше четырех.

(h) Сегодня луна круглая. Луна, которую мы видели неделю назад, была серповидная. Луна, которую мы видим сегодня и которую видели неделю назад, — это один и тот же предмет. Значит, существует предмет, одновременно и круглый, и серповидный.

(i) Розы красные. Красный — это цвет. Значит, розы — это цвет.

(j) Гну — это антилопа. Антилопа — млекопитающее. Значит, гну — млекопитающее.

(k) Соль и сахар белые. Ничто не может сразу быть и солью и сахаром. Значит, ничто не белое.

*§ 31. Описательные определения[1])

Завершая изучение логики первого порядка (см. § 17), надо коснуться употребления выражений вида «тот предмет w, для которого $F(w)$» и «один из предметов w, для которых $F(w)$».

Предметы могут указываться не их именами, а *описаниями* вроде следующих: (a) «нынешняя королева Англии», (b) «нынешний король Франции», (c) «сестра икса», (d) «отец икса», (e) «то число, которое по прибавлении к x даст y», (f) «То число, квадрат которого равен x», (g) «Наибольший общий делитель x и y», (h) «Третье простое число по порядку величины», (i) «Наибольшее простое число», (j) «Такое число w, что при всех x имеет место

---

[1]) Перевод этого параграфа местами существенно отходит от английского оригинала, поскольку русский язык в отличие от английского (и большинства других европейских языков) не имеет артиклей, одной из функций которых является как раз выражение «описаний» (определенных и неопределенных).— *Прим. перев.*

$x+w=x$». Хотя внешне эти выражения не все имеют вид «Тот предмет, для которого», но легко видеть, что именно такова их логическая структура. В нашей теории моделей под «предметами» мы понимаем элементы области D («универсума»), на которую в данный момент направлено наше внимание.

Некоторые из тех предметов, которые мы назвали выше, имеют другие имена, не содержащие конструкции «такой, что»; например: (a_1) «Елизавета II» (на 1966), (e_1) «$x-y$», (h_1) «5», (j_1) «0». С лингвистической точки зрения определенное описание «такой, что» полезно тем, что позволяет получить средство построить (обычно временно) имя для предмета, имени которого у нас еще нет, но для описания и характеристики которого имеется весь необходимый словарь.

При обычном понимании языка описание «такой, что» используется только в том случае, когда с его помощью описывается единственный объект либо, если в описание входят свободные переменные, такой объект, который оказывается единственным при всяком выборе значений переменных. Общая форма определенного описания: «то w, для которого $F(w)$». Если $F(w)$ является предикатом от единственной переменной w, то описание называется *собственным* тогда и только тогда, когда в области D имеется ровно один объект w, такой, что $F(w)$. Условие это переводится в нашей символике формулой $\exists! \mathrm{w} (\mathrm{F}) (\mathrm{w})$ (ср. § 29). Если $F(w)$ — предикат, зависящий от других переменных $x_1, \ldots, x_n$, например «$F(x_1, \ldots, x_n, w)$», то (если мы не ограничиваемся рассмотрением лишь некоторых конкретных значений $x_1, \ldots, x_n$) описание называется *собственным* тогда и только тогда, когда при всяком наборе $x_1, \ldots, x_n$ из D существует в D единственное w, для которого $F(x_1, \ldots, x_n, w)$; символически $\forall \mathrm{x}_1 \ldots \forall \mathrm{x}_n \exists! \mathrm{w} \mathrm{F}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$. Такое описание служит для обозначения некоторой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ (и ее значений) (см. примечание на стр. 178). В такое понимание включается и предыдущий случай, который соответствует $n=0$, когда получается обозначение индивида (объекта).

Описание (b) является несобственным начиная с 1848 г.[1]) Если считать за D совокупность всех людей, то (c) является несобственным описанием, ибо не каждый человек имеет точно одну сестру; описание (c) определяет некоторую функцию $f(x)$ только для меньших областей D. Напротив, (d) является собственным описанием, хотя пословица гласит, что только бог может знать значение функции $f(x)$. Если D — множество положительных вещественных чисел, то описание (e) несобственное (ни одно положительное число, будучи прибавлено к 5, не даст 3), тогда как (f) — собственное. Если D — множество всех вещественных чисел, то (e)

---

[1]) Точнее, с 1830 г., ибо Луи-Филиппа называли «королем французов», а не «королем Франции»

собственное, тогда как (f) — несобственное (у числа «4» есть два квадратных корня: 2 и —2). Согласно известной теореме Евклида, (i) — несобственное описание.

В обычных рассуждениях редко встречаются несобственные описания. Если кто-либо говорит о w, таком, что $F(w)$, в то время как такого w не существует или же такое w не единственно, то обычно считается, что он ошибается или стремится ввести нас в заблуждение. Можно было бы объявить ложным всякое высказывание А, содержащее несобственное описание. Но такой критерий привел бы к тому, что при том же А и $\neg$ А и А $\supset$ В оказались бы также ложными, а наши таблицы истинности для $\neg$ и $\supset$ требуют, чтобы $\neg$ А и А $\supset$ В были истинными, если А ложно. Уайтхед и Рассел [1910], стр. 69—75 (в издании 1925 г. стр. 66—71, см. также ван Хейеноорт [1967]), решают эту проблему, требуя, чтобы та часть высказывания, которая признается ложной из-за того, что содержит несобственное описание, отмечалась специальным образом. Истинность же или ложность содержащего ее контекста определяется по обычным правилам. Это несколько неудобно, но задача отыскания лучшего решения проблемы описаний, а точнее несобственных описаний, все еще не решена [1]). Несобственные описания, частично определенные функции (и, в другой связи, многозначные функции) порой встречаются и в математике. Но мы будем избегать несобственных описаний.

Тогда возникает другая трудность: мы не всегда сможем определить по каждому выражению, является ли оно высказыванием (в логике — формулой), непосредственно по тому способу, каким оно построено из своих компонент (как в нашем определении формулы § 1, 16, 28, 29); иногда это будет зависеть от результатов, касающихся общезначимости либо доказуемости (или следования, или выводимости). Пусть, например, А содержит такую часть: «то w, для которого F(w)». Согласно критериям § 28, 29, А явится формулой, если эта часть является термом, и мы не можем сказать, что А — формула, до того, как мы установили $\exists!\, \mathrm{w}F(\mathrm{w})$.

За отказ от несобственных описаний пришлось бы поплатиться [2]). Цена не слишком высока, поскольку в обычных рассуждениях, как и в математике, мы, как правило, употребляем определенные описания только после того, как уже проверили, что $\exists!\, \mathrm{w}F(\mathrm{w})$ или $\forall \mathrm{x}_1 \ldots \forall \mathrm{x}_n \exists!\, \mathrm{w}F(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w})$.

[1]) См. Скотт [1967], где указаны и другие ссылки.

[2]) Трудность эта в нашей трактовке несколько маскируется (теорема 32) тем, что в исчислении предикатов с равенством и функциями мы еще ничего не сказали относительно тех ограничений, которые налагаются на запас используемых мезонов. Однако если Г — это перечень замкнутых формул, выражающих аксиомы некоторой теории, в которой разрешено использовать только ионы и мезоны из Г, то введение f означает расширение класса формул, к которому мы приступаем, только получив сначала формулу

$$\forall \mathrm{x}_1 \ldots \forall \mathrm{x}_n \exists!\, \mathrm{w}F(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n, \mathrm{w}).$$

Можно было бы ввести описания и в символику, если добавить оператор «ιw» (читается «w, такой, что»), связывающий переменные в термах $\iota w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ и в тех термах и формулах, которые содержат такие термы (как $\forall x$ и $\exists x$ связывают в формулах).

Мы предпочитаем остаться в пределах символики описанного выше исчисления предикатов с функциями и равенством. Нужные нам описания мы сможем получить с помощью введения новых функциональных символов f [1]). Так, если выполняется

$$\text{(i)} \qquad \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists!\, w F(x_1, \ldots, x_n, w),$$

то мы можем ввести новый функциональный символ f с формулой

$$\text{(ii)} \qquad \forall x_1 \ldots \forall x_n F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$$

и, если угодно, даже читать $f(x_1, \ldots, x_n)$ как «тот w, для которого $F(x_1, \ldots, x_n, w)$». Однако свойства f полностью заданы формулами (ii) и (i). Ниже приводится точная теорема на этот счет. Таким образом, можно построить произвольную конечную последовательность описаний, каждое из которых (начиная со второго) может использовать предыдущее, не создавая нагромождений связанных переменных внутри термов. Так обычно и поступают в математике, за исключением очень простых случаев.

При таком подходе определения утрачивают то преимущество, что они сами себя объясняют, поскольку каждый раз, когда вводится новый функциональный символ f, нужно запоминать соответствующую формулу (ii), сопровождающую введение этого символа. Если функция, которая обозначается символом f, используется часто, то мы быстро привыкаем к его употреблению и обозначение $f(x_1, \ldots, x_n)$ становится удобнее, нежели громоздкое $\iota w F(x_1, \ldots, x_n, w)$. В разговорах предпочтительнее пользоваться оператором «w, такое, что» или «ιw», чем вводить новые функциональные символы. В логическом же анализе рассуждений, встречающихся в обычном языке, легко восстановить (или вообразить, что мы восстанавливаем) те функциональные символы, которые соответствуют описательным именам, использованным в этом языке.

Таким образом, эффект, достигаемый введением определенных описаний, можно получить также с помощью теории, описывающей

---

[1]) Мы говорим «функциональный символ f», а не «мезон $f(—, \ldots, —)$», потому что на практике мы мыслим мезон состоящим из одного нового символа («функциональный символ f»), за которым следуют места для аргументов (если $n > 0$). Однако последующее можно читать, пользуясь терминологией «мезон $f(—, \ldots, —)$» вместо «функциональный символ f», что дает возможность использовать некоторые удобные обозначения. Ведь на самом деле мезон $f(—, \ldots, —)$ для данного описания может даже иметь вид $\iota w F(—, \ldots, —, w)$, лишь бы термы, полученные из различных мезонов такого рода, не путались, а связанные переменные w выбирались так, чтобы совершаемые вместо $x_1, \ldots, x_n$ в $\iota w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ подстановки оказывались свободными. См. [BM], стр. 141.

присоединение новых функциональных символов, если только установлено (абсолютно или при некоторых предположениях), что такие функции могут быть заданы описательно. Мы рассматриваем этот вопрос только в теории моделей, где он почти тривиален. Разбор его в теории доказательств (по образцу Гильберта — Бернайса [1934]) был бы более трудоемок, и здесь он неуместен[1]).

Теорема 32. *Пусть* Γ — *некоторый (возможно, пустой) список формул исчисления предикатов с функциями и равенством*; $F(x_1, \ldots, x_n, w)$ — *некоторая формула, в которую свободно входят только различные переменные* $x_1, \ldots, x_n, w\ (n \geqslant 0)$; *пусть* f — *какой-нибудь функциональный символ, который не входит ни в одну из формул списка* Γ, $F(x_1, \ldots, x_n, w)$; *наконец*, C — *произвольная формула, не содержащая* f. *В этих условиях: Если* $\Gamma \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ *и если* $\Gamma, \forall x_1 \ldots \forall x_n F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \models C$, *то* $\Gamma \models C$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную область D и распределение значений в D для свободных переменных, ионов и мезонов формул из Γ, $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ и C, при котором все формулы списка Γ получают значение t. Надо доказать, что при этом C также дает t. В силу предположения $\Gamma \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! w F(x_1, \ldots, x_n, w)$, а значит, формула $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ дает t. В силу примера 3 § 29 и правила вычисления для ∀ это означает, что при всяком выборе элементов $x_1, \ldots, x_n$ из D, которые приписываются переменным $x_1, \ldots, x_n$, существует единственный элемент w из D, такой, что $F(x_1, \ldots, x_n, w)$ дает t, когда переменная w получает значение w. Следовательно, при этих w и $x_1, \ldots, x_n$ можно написать $w = f(x_1, \ldots, x_n)$, где f — некоторая n-местная функция, аргументы и значения которой лежат в D. Расширяя данное распределение и приписывая символу $f(x_1, \ldots, x_n)$ значение $f(x_1, \ldots, x_n)$, видим, что $\forall x_1 \ldots \forall x_n F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ принимает значение t. Так как, согласно предположению, $\Gamma, \forall x_1 \ldots \forall x_n F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \models C$, то заключаем, что формула C должна давать t. Это верно применительно к расширенному распределению, но поскольку f не входит в C, то формула C дает t и при данном распределении, что и требовалось доказать.

Значение этой теоремы состоит в том, что если $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ является следствием допущений Γ, то мы имеем право добавить к нашему символизму еще символ $f(x_1, \ldots, x_n)$ для выражения «того w, при котором $F(x_1, \ldots, x_n, w)$ дает t, если переменной w приписывается в качестве значения предмет w»,

[1]) См. [ВМ], § 74. Наша трактовка теории моделей совместно с теоремой Гёделя (§ 52) дает некоторые результаты из теории доказательств (но не теми элементарными средствами, которые желательны в теории доказательств; ср. § 37).

а к нашим допущениям мы можем добавить формулу $\forall x_1 \ldots \ldots \forall x_n F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$. Тогда всякая формула C, не содержащая f, окажется следствием начальных допущений, коль скоро она является следствием расширенного списка допущений. Для установления, является ли C следствием, мы можем пользоваться дополнительным допущением $\forall x_1 \ldots \forall x_n F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$. На практике это может дать значительное увеличение эффективности, так как можно пользоваться функциональным символом $f(x_1, \ldots, x_n)$ совместно с теоремой о замене (теорема 30 § 29).

Пример 6. Построим формулы, как в § 29, взяв в качестве мезонов $1, -\cdot-$ (а также $-^{-1}$). В исчислении предикатов с равенством имеем

$$(1)\quad \forall x \forall y \forall z\,(xy)z = x(yz),\ \forall x\, x1 = x,\ \forall x\, xx^{-1} = 1 \vdash xz = yz \supset x = y$$

(упр. 31.2). Отсюда по теореме 32 совместно с теоремами $9_{Pd=}$ и $12_{Pd=}$

$$(2)\quad \forall x \forall y \forall z\,(xy)z = x(yz),\ \forall x\, x1 = x,\ \forall x \exists!\, w\, xw = 1 \models xz = yz \supset x = y.$$

Пример 7. В примере 6 соотношение (2) не верно, если опустить $\forall x \exists!\, w\, xw = 1$; обозначим остаток через (2′). Обе посылки (2′) дают t, если D — множество рациональных чисел, а 1, xy, 0, 1, 0 — значения, приписанные выражениям 1, xy, x, y, z соответственно; при этом заключение в (2′) дает f. (В самом деле, если бы было $xz = yz \supset x = y$, то мы могли бы доказать $0 = 1$, деля $0\cdot 0 = 1\cdot 0$ на 0.)

Следствие. *Если* $\Gamma \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists!\, w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ *и если список* Γ *непротиворечив, то* Γ, $\forall x_1 \ldots \forall x_n F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$ *также непротиворечив. Непротиворечивость* Γ *означает, что ни для одной формулы* A *нельзя одновременно получить* $\Gamma \models A$ *и* $\Gamma \models \neg A$.

Заметим, что теорема 32 и ее следствие истинны, даже если вместо «$\exists!\, w$» справедливо только «$\exists w$» (в этом случае будем называть ее теоремой 32а). Единственное изменение, которое теперь придется сделать в доказательстве, состоит в том, что при каждом комплекте значений $x_1, \ldots, x_n$, приписываемых переменным $x_1, \ldots, x_n$, соответствующие w не определены полностью, а надо дополнительно выбирать w в классе тех w, для которых $F(x_1, \ldots, x_n, w)$ дает t, когда переменной w приписывается значение w[1]).

---

[1]) Принцип, утверждающий, что если $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists w F(x_1, \ldots, x_n, w)$ принимает значение t, то можно при всяком выборе объектов $x_1, \ldots, x_n$ из D выбрать в D некоторое w в качестве значения определенной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, является одной из разновидностей аксиомы выбора (см. § 35).

Теорема 32a позволяет применять «собственные неопределенные описания», т. е. выражения вида «некоторое w, такое, что $F(x_1, \ldots, x_n, w)$», если мы обладаем формулой

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists w F(x_1, \ldots, x_n, w) \quad (n \geqslant 0).$$

В хоть сколько-нибудь длинном рассуждении надо быть очень внимательным, принимая $f(x_1, \ldots, x_n)$ в качестве перевода выражения «некоторое w, такое, что $F(x_1, \ldots, x_n, w)$». Ведь при всяком комплекте значений, приписываемых переменным $x_1, \ldots, x_n$, и при всех употреблениях в рамках предположения (II) терм $f(x_1, \ldots, x_n)$ должен обозначать один и тот же из тех объектов w, для которых $F(x_1, \ldots, x_n, w)$. (Это отражено в аксиомах равенства для f, § 29.) В обычном же словоупотреблении при всяком хоть сколько-нибудь длительном использовании выражения «некоторое w, такое, что $F(x_1, \ldots, x_n, w)$» значения w могут быть разными в разных местах. Дело в том, что употребление слова «некоторый» для описания какого-нибудь элемента из множества $\hat{w}F(x_1, \ldots, x_n, w)$ оказывается обычно настолько изменчивым, что точный перевод может быть дан только посредством введения переменной для обозначения описываемого объекта. Например: «Сократ есть человек» ($\exists x[c = x \& Ч(x)]$, здесь $Ч(c)$ — то же, что в примере 19 § 26), «Ребенку нужна ласка» ($\forall x[P(x) \supset Л(x)]$ как в § 27), «Здесь был человек» ($\exists x[Ч(x) \& З(x)]$).

Упражнения. 31.1. Докажите следствие теоремы 32.

31.2*. Установите формулу (1) примера 6[1]).

31.3. Докажите, что

$$\forall x \exists! w F(x, w),\ \forall x F(x, f(x)) \vdash F(x, w) \sim f(x) = w.$$

Следовательно, $F(x, w)$ и $f(x) = w$ эквивалентны при использовании собственных описаний.

31.4. Разберите следующие доводы:

(a) Генри и Джейн — брат и сестра ($F(h, j)$). Значит, Джейн — это сестра Генри ($j = f(h)$; ср. упр. 31.3). Генри и Эдит — брат и сестра ($F(h, e)$). Значит, Эдит — сестра Генри ($e = f(h)$). Значит (в силу пунктов (e) и (f) § 29), Эдит и Джейн — это одно и то же лицо ($e = j$).

(b) Согласно смыслу выражения «сестра Джона», Джон и сестра Джона являются братом и сестрой ($F(j, f(j))$). Значит (по $\exists$-введ.), у Джона есть сестра ($\exists w F(j, w)$).

При $n = 0$ теорема 32a почти не отличается от правила $\exists$-удаления, когда вместо $\vdash$ стоит $\models$, а вместо $A(x)$ стоит $F(w)$. В этом случае индивидуальный символ f в (ii) занимает место переменной w, которая остается фиксированной в «$\Gamma, F(w) \models C$».

[1]) По существу решение состоит в доказательстве формулы T11 в § 39. (Прямое доказательство (2) при «$\vdash$» ненамного длиннее. Выигрыш от применения теоремы 32 или ее вариантов в теории доказательства становится значительнее, когда мы имеем дело с более сложными случаями.)

Часть II

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Глава IV

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

§ 32. Счетные множества

В настоящее время исследования по математической логике и исследования по основаниям математики тесно связаны между собой. Задачи и идеи из области оснований математики внесли существенный вклад в развитие математической логики; логика же в свою очередь явилась основным инструментом в исследовании проблем оснований математики. Во второй части книги мы дадим обзор этой общей для двух дисциплин области исследований. Нам предстоит здесь и познакомиться с современным состоянием исследований, и рассмотреть более внимательно некоторые понятия, обсуждение которых было начато в первой части книги.

Начнем наш обзор с некоторых моментов канторовской теории множеств, начало которой было положено открытиями, содержащимися в первых публикациях Кантора (1874 г.), относящихся к сравнению бесконечных совокупностей.

Пусть нас интересует вопрос, являются ли какие-либо две совокупности равночисленными или же какая-нибудь одна из них многочисленнее другой (в этом случае—какая именно). В случае конечных совокупностей мы можем выяснить этот вопрос, попытавшись «спарить» члены этих множеств (в каждой паре по одному члену из каждого множества), или, как мы будем отныне говорить, установить между данными множествами *взаимно-однозначное*, или, иначе, *одно-однозначное соответствие* (еще короче: 1—1-*соответствие*). Если между двумя множествами можно установить 1—1-соответствие, то эти множества «равночисленны», или имеют *одно и то же кардинальное число.* Впрочем, идея такого соответствия имеет более первоначальный, более элементарный характер, нежели идея «кардинального числа». Это хорошо видно из следующего примера.

Члены одного племени умеют считать только до двадцати. Когда племени предстоит выбирать себе вождя из двух кандидатов A и B, предпочтение оказывают тому, кто владеет бо́льшим стадом. Животных заставляют проходить через ворота парами, по одному из каждого стада в паре, до тех пор, пока одно из стад (или оба) не будет исчерпано. Если стадо, принадлежащее A, исчерпается раньше, вождем становится B, и, наоборот, выигрывает A, если в его стаде еще остались животные, в то время как последнее животное из стада B уже прошло через ворота. (Если последние животные из каждого стада пройдут через ворота одновременно, приходится искать другую методику выборов или же устанавливать двоевластие.) Хотя в каждом из стад может быть больше чем по двадцати голов скота, т. е. заведомо больше предела, до которого могут досчитать члены племени, этот метод попарного соответствия прекрасно работает.

В 1638 г. Галилей отметил «парадокс», состоящий в том, что между квадратами целых положительных чисел и самими целыми положительными числами можно установить 1—1-соответствие, а это вступает в противоречие с евклидовой аксиомой, согласно которой целое больше любой из своих *собственных* частей (собственная часть — это часть, не совпадающая со всем целым)[1]).

Таким образом, в случае бесконечных совокупностей наличие 1—1-соответствия между какой-либо совокупностью и собственной частью некоторой другой совокупности отнюдь не исключает возможности, что соответствие, установленное каким-нибудь другим способом между первой совокупностью и всей второй совокупностью, также будет одно-однозначным. В случае двух стад такого быть не может: если уж B одержал победу в «выборах», то A может быть уверен (хотя он и не владеет математическим доказательством этого факта), что никакой другой порядок прохождения стада через ворота не обеспечит ему победы в выборах или хотя бы ничейного их исхода.

Мы будем предполагать известной (данной) последовательность *натуральных чисел* (иначе называемых *неотрицательными целыми числами*)[2])

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots .$$

Совокупность будем называть *счетно-бесконечной* или *перечислимо-бесконечной*, если можно установить 1—1-соответствие

---

[1]) Тот факт, что между бесконечной совокупностью и ее собственной частью может быть установлено 1—1-соответствие, отмечался уже задолго до Галилея. Стил (в историческом введении к своему переводу [1950] книги Больцано [1851], который также отмечал это обстоятельство) цитирует по этому поводу Плутарха (46? — 125? гг. н. э.) и Прокла (412—485 гг. н. э.). Томас [1958] цитирует Адама Бальзамского (Парвипонтануса, 1132 г.), а Пьер Дюгем в своей «Системе мироздания» (Duhem P., Le système du monde, 1954 г., т. 7, стр. 123) — Роберта Холкота (умер в 1349 г.). Вейнберг сообщает об этих источниках, а также об умозаключении (conclusio) 17 из книги «Centiloquium theologicum» (ошибочно приписываемой Уильяму Оккаму, умершему в 1349? г.).

[2]) Некоторые авторы употребляют термин «натуральные числа» как синоним термина «положительные (целые) числа», т. е. 1, 2, 3, ..., оставляя для обозначения совокупности 0, 1, 2, ... более неуклюжий термин «неотрицательные целые числа». Нам представляется более предпочтительным рассматривать число 0 в одной числовой совокупности с рядом 1, 2, 3, ...

между ней и множеством всех натуральных чисел. Чтобы убедиться в счетности некоторого бесконечного множества, надо лишь задать его элементы в виде бесконечного перечня, т. е., как мы говорили выше, установить 1—1-соответствие между этим множеством и рядом натуральных чисел. Каждый конкретный такой перечень (1—1-соответствие с множеством натуральных чисел) мы будем называть *пересчетом* данного множества. Примерами счетно-бесконечных множеств, кроме самого множества *натуральных чисел*, служат, как мы можем убедиться из рассмотрения следующих пересчетов, множество *целых положительных чисел*, множество *квадратов целых положительных чисел*, множество всех *целых чисел*:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots,$$
$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots,$$
$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ \ldots.$$

Счетное множество — это множество, являющееся либо счетно-бесконечным, либо конечным. Под *конечными* множествами мы здесь понимаем множества, для которых можно установить 1—1-соответствие с каким-либо начальным отрезком натурального ряда $0, \ldots, n-1$, быть может пустым ($n=0$). Такое определение равносильно тому, что конечным множеством мы будем называть множество, «кардинальное число» которого есть натуральное число n, и именно такое употребление натуральных чисел совпадает с обычным их пониманием[1]).

Другой пример счетно-бесконечного множества — это множество *рациональных чисел*. Этот факт представляется удивительным, если сравнивать рациональные числа с целыми в их обычном алгебраическом порядке. Точки действительной оси с целочисленными координатами расположены на ней изолированно, а точки с рациональными координатами — «всюду плотно», т. е. между любыми такими сколь угодно близкими точками всегда находятся другие точки с рациональными координатами. И тем не менее мы можем пересчитать множество рациональных чисел при помощи следующего приема. Отметим прежде всего, что каждое рациональное число может быть записано в виде дроби с целым числителем и целым положительным знаменателем. Расположим все такие дроби в виде следующей бесконечной матрицы (таблицы):

[1]) Это, конечно, наиболее согласующееся с интуицией определение конечности множества. Поскольку, однако, свойство множества целых положительных чисел, отмеченное в «парадоксе» Галилея, является характеристическим для бесконечных множеств, можно, следуя Пирсу [1885] и Дедекинду [1888], определить конечное множество и по-другому: это такое множество, что нельзя установить 1—1-соответствия между ним и какой-либо его собственной частью. (Ср. [ВМ], стр. 20 (после чтения следующего ниже § 34).)

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{-1}{1} & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{-2}{1} & \frac{3}{1} \ \dots \\
\downarrow & & & & & & & \\
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & & \frac{-1}{2} & \frac{2}{2} & & \frac{-2}{2} & \frac{3}{2} \ \dots \\
\frac{0}{3} & \frac{1}{3} & & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & & \frac{-2}{3} & \frac{3}{3} \ \dots \\
\downarrow & & & & & & & \\
\frac{0}{4} & \frac{1}{4} & & \frac{-1}{4} & \frac{2}{4} & & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} \ \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Мы можем пересчитать эти дроби в порядке, указанном стрелками. В заключение мы можем двигаться вдоль полученного пересчета, вычеркивая из него каждую дробь, равную по величине (если интерпретировать эти дроби как рациональные числа) некоторой предыдущей дроби из того же пересчета. В результате мы получаем следующий пересчет множества всех рациональных чисел:

$$0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ 2,\ -2,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots .$$

Еще одно счетно-бесконечное множество — это множество всех *действительных алгебраических чисел*, т. е. множество действительных корней алгебраических (полиномиальных) уравнений с одним неизвестным с целыми коэффициентами; примером может служить хотя бы уравнение

$$4x^5 - 17x^3 + 2x^2 + 5 = 0.$$

Общий вид алгебраического уравнения n-й степени ($n \geqslant 1$) таков:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0).$$

Если мы сможем пересчитать множество алгебраических уравнений, то сможем пересчитать и действительные алгебраические числа. Для этого в пересчете уравнений мы сможем заменить каждое уравнение совокупностью его различных действительных корней (а их для каждого уравнения конечное число — не больше его степени), в результате чего получим «пересчет с повторениями» всех действительных алгебраических чисел. Теперь остается только устранить из этого пересчета все повторения.

Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами можно пересчитать также, исходя из того обстоятельства, что мы можем в их записях, не опасаясь двусмысленности, писать показатели степени просто в строку, на одном уровне со всеми остальными символами (так: $4x5 - 17x3 + 2x2 + 5 = 0$). Тогда уравнения оказываются конечными последовательностями, составленными из следующих четырнадцати различных символов:

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ x\ +\ -\ =$$

Первый символ в записи уравнения не есть 0. Мы можем теперь рассматривать перечисленные четырнадцать символов как цифры в четырнадцатеричной системе счисления, т. е. в системе счисления, основанной на числе 14 точно таким же образом, каким десятичная система основана на числе 10. В результате этого каждое уравнение оказывается записью некоторого натурального (причем положительного) числа в этой системе счисления. Разумеется, не все целые положительные числа, записанные в четырнадцатеричной системе счисления с 14 перечисленными выше символами в качестве цифр, должны восприниматься как записи некоторых алгебраических уравнений. Выкидывая теперь числа, не являющиеся таковыми, из последовательности целых положительных чисел, записанных в четырнадцатеричной системе (и читая затем эту последовательность «подряд», без учета получившихся «пропусков»), мы получаем пересчет множества алгебраических уравнений; иными словами, алгебраические уравнения могут быть пересчитаны в порядке возрастания величины целых положительных чисел, записями которых они оказываются при интерпретации входящих в уравнения символов как цифр четырнадцатеричной системы счисления.

Назовем метод, только что использованный для пересчета алгебраических уравнений, *методом цифр*. Мы применим его теперь для установления следующего общего принципа:

(А) *Если все элементы некоторого множества S могут быть однозначным образом обозначены посредством непустых конечных последовательностей (вхождений) символов из некоторого фиксированного конечного списка символов (алфавита)* $s_0, \ldots, s_{p-1}$ *(или даже из счетно-бесконечного алфавита* $s_0, s_1, s_2, \ldots$*), то это множество S счетно.*

Для случая конечного алфавита $s_0, \ldots, s_{p-1}$ мы можем получить требуемое утверждение в точности, как выше (там было $p=14$, а $s_0, \ldots, s_{p-1}$ суть четырнадцать перечисленных символов), если не считать следующей детали. Воспринимая конечную последовательность (вхождений) символов $s_0, \ldots, s_{p-1}$ как запись некоторого натурального числа в p-ичной системе счисления, мы не можем усмотреть из такого числа *самого по себе*, сколько начальных символов s_0 входит в данную последовательность. Например, в четырнадцатеричной системе с указанными выше цифрами посредством каждого из уравнений $4x5-17x3+2x2+5=0$, $04x5-17x3+2x2+5=0$, $004x5-17x3+2x2+5=0$ и т. д. будет выражено одно и то же число. Эта неоднозначность не играла роли в интересующем нас случае, так как мы могли исключить из рассмотрения (и так и сделали) алгебраические уравнения, записи которых начинаются с цифры 0. В тех же случаях, когда такая неоднозначность числа начальных цифр могла бы играть существенную роль, мы можем, во изменение предыдущего, интерпретировать символы $s_0, \ldots, s_{p-1}$ как цифры $1, \ldots, p$ в $p+1$-ичной системе счисления, в которой сверх того имеется еще отличный от указанных символ для цифры 0.

Заметим еще, что совершенно несущественно, получает ли каждый элемент множества S единственное обозначение или же несколько различных обозначений, использующих алфавит $s_0, \ldots$ $\ldots, s_{p-1}$. Если элементы из S могут получать по нескольку различных обозначений, то при вычеркивании из натурального ряда всех чисел, не являющихся обозначениями элементов множества S, мы заодно можем вычеркнуть и все обозначения каждого элемента, кроме наименьшего по величине.

Случай счетно-бесконечного алфавита $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ можно свести к случаю конечного алфавита, заменяя каждый символ счетно-бесконечного алфавита некоторой подходящей комбинацией символов, принадлежащих некоторому конечному алфавиту. Мы можем, например, выбрать два символа a и b и заменить $s_0, s_1,$ $s_2, s_3, \ldots$ соответственно на a, ab, abb, abbb, ... В результате, скажем, обозначение $s_0 s_3 s_1 s_1$ перейдет в aabbbabab, причем из этого нового обозначения можно однозначным образом извлечь $s_0 s_3 s_1 s_1$. Теперь метод цифр можно применить к новому двухбуквенному алфавиту a, b; например, мы можем интерпретировать знакосочетание aabbbabab как обозначение некоторого числа в троичной системе счисления, в которой знаки 0, a, b играют роль цифр 0, 1, 2. Конечно, для различных конкретных случаев могут найтись и более удобные способы сведéния алфавита $s_0, s_1, s_2, s_3 \ldots,$ к конечному алфавиту.

Верно и обратное утверждение: (B) *Если множество S счетно, то его элементы могут быть однозначным образом обозначены посредством непустых последовательностей (вхождений) символов из некоторого фиксированного конечного алфавита.* Действительно, если S бесконечно и $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — некоторый конкретный его пересчет, то a_0 можно обозначить посредством 0, a_1 — посредством 1, a_2 — посредством 2 и т. д., используя 10 символов $0, 1, \ldots, 9$. Короче говоря, каждый элемент a_i множества S можно обозначить посредством (цифры для) его *номера (индекса)* i в данном пересчете $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ множества S. Аналогично проводится рассуждение и для случая конечного множества.

Предложения (A) и (B) в совокупности дают по существу ясный критерий того, какие множества являются счетными (т. е. конечными или счетно-бесконечными). Для фактического же установления счетности множеств часто применяются и другие методы, отличные от метода цифр.

Упражнения. 32.1. Покажите, что при применении метода цифр для случая конечного алфавита $s_0, \ldots, s_{p-1}$ обозначения элементов множества S пересчитываются попросту таким образом, что вначале берутся все однобуквенные «слова» (обозначения), затем двухбуквенные слова, затем трехбуквенные и т. д. в алфавитном порядке в пределах каждой группы слов.

32.2. Используйте метод цифр для доказательства счетности множества рациональных чисел. Приведите первые шесть рациональных чисел в полученном вами пересчете.

32.3. Докажите счетность следующих множеств (использовав при этом как идею, использованную выше в рассуждении о рациональных числах, так и метод цифр)[1]:

(a) Множество упорядоченных троек (a, b, c) натуральных чисел (или элементов произвольного данного счетно-бесконечного множества).

(b) Множество всех конечных последовательностей элементов счетно-бесконечного множества.

(c) Множество всех конечных множеств элементов счетно-бесконечного множества.

(d) Множество конечных последовательностей конечных последовательностей элементов счетно-бесконечного множества.

32.4. Найдите изъян в следующем рассуждении: «Каждое действительное число x может быть однозначным образом записано посредством некоторого целого числа и некоторой бесконечной десятичной дроби $X+0,x_1x_2x_3\ldots$ $\left(\text{например, } \pi=3+0{,}14159\ldots,\right.$ $\left.-\frac{3}{4}=-1+0{,}24999\ \ldots \text{ и т. п.}\right)$. В этих обозначениях используется лишь конечное множество символов $\{0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ +\ -\ ,\}$. Поэтому метод цифр (или предложение (A)) приводит к выводу, что множество всех действительных чисел счетно».

§ 33. Канторовский диагональный метод

Приведенные в предыдущем параграфе результаты относительно применения понятия 1—1-соответствия к бесконечным множествам могли бы остаться в истории математики как любопытные курьезы, не замеченные до Кантора (или замеченные, но затем забытые) и никому особенно не нужные и после него, если бы оказалось, что 1—1-соответствие можно установить между любыми двумя бесконечными множествами. Идея сравнения бесконечных множеств

---

[1] (1, 2, 3), (2, 1, 3) и (2, 1, 1, 3) суть различные конечные последовательности. Однако множества, состоящие из тех же элементов, а именно $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 1, 3\}$ и $\{2, 1, 1, 3\}$ (для обозначения последовательностей мы пользуемся круглыми скобками, для обозначения множеств — фигурными), совпадают.

посредством 1—1-соответствия оказалась бы в таком случае не столь уж плодотворной. Однако, как мы сейчас увидим, существуют и *несчетные* множества, т. е. бесконечные множества, которые нельзя поставить в 1—1-соответствие с множеством натуральных чисел.

Рассмотрим прежде всего множество всех *одноместных арифметических функций*—так мы будем называть функции от одной переменной a, пробегающей множество натуральных чисел, значения которых (функций) также суть натуральные числа. Примеры: a^2, $3a+1$, 5 (константная функция, все значения которой равны), a (тождественная функция, равная своему аргументу), $[\sqrt{a}]$ (наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{a}$) и т. п. [1])

Чтобы доказать несчетность множества (всех) таких функций, предположим, что нам дан некоторый пересчет $f_0(a)$, $f_1(a)$, $f_2(a)$, ... одноместных арифметических функций (не обязательно всех). Тогда мы сможем построить одноместную арифметическую функцию $f(a)$, отличную от каждой функции из данного пересчета. Тем самым мы докажем, что данный пересчет не может быть пересчетом всех одноместных функций. Чтобы сделать построение функции $f(a)$ более наглядным, составим бесконечную таблицу, строками которой будут служить последовательности значений функций $f_0(a)$, $f_1(a)$, $f_2(a)$, ...:

a	0	1	2	...
$f_0(a)$	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	...
(1) $f_1(a)$	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	...
$f_2(a)$	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	...
...	...	...	...	...

Определим теперь функцию $f(a)$ как функцию, последовательность значений которой получается из последовательности значений, стоящих в нашей таблице на диагонали (указана стрелками) увеличением каждого из них, скажем, на единицу, т. е.

$$f(a) = f_a(a) + 1.$$

Эта функция не входит в данный пересчет $f_0(a)$, $f_1(a)$, $f_2(a)$, ... В самом деле, она отличается от $f_0(a)$ своим значением для аргумента 0, от $f_1(a)$—значением для аргумента 1 и т. д.

---

[1]) Для этих функций у нас есть формулы (т. е. конечные обозначения). Но в данный класс включаются и функции, последовательные значения которых задаются правилами, не связанными ни с какими общеупотребительными обозначениями, и даже функции, последовательные значения которых определяются «нерегулярно», каким-либо «случайным» образом.

(Скажем, если

$$f_0(a)=a^2,\ f_1(a)=3a+1,\ f_2(a)=5,$$
$$f_3(a)=a,\ f_4(a)=[\sqrt{a}],\ \ldots,$$

то

$$f_0(0)=0,\ f_1(1)=4,\ f_2(2)=5,\ f_3(3)=3,\ f_4(4)=2,\ \ldots,$$

а

$$f(0)=1,\ f(1)=5,\ f(2)=6,\ f(3)=4,\ f(4)=3,\ \ldots.)$$

Допустим, оформляя то же рассуждение иначе, что функция $f(a)$ занимает определенное место в пересчете $f_0(a), f_1(a), f_2(a), \ldots$, т. е. что для некоторого натурального числа p

$$f(a)=f_p(a)$$

для каждого натурального числа a. Подставляя вместо переменной a число p в это и предыдущее равенство, получим

$$f(p)=f_p(p)=f_p(p)+1,$$

что невозможно, так как натуральное число $f_p(p)$ не может равняться самому себе, увеличенному на 1.

Метод, который мы использовали в этом рассуждении, называют *канторовским диагональным методом*. Накладывая на множество функций, к которому мы применяем этот метод, различные ограничения, мы получим некоторые другие примеры несчетных множеств.

Мы можем, например, ограничиться рассмотрением таких арифметических функций, которые принимают лишь значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причем не равные нулю значения встречаются как угодно далеко. Тогда строки нашей таблицы (1) можно интерпретировать как бесконечные десятичные дроби, являющиеся записями *действительных чисел x из интервала* $0<x\leqslant 1$. Каждое такое действительное число записывается посредством бесконечной десятичной дроби однозначным образом; например, $\frac{3}{4}=0{,}74999\ldots$ (дробь $0{,}75000\ldots=0{,}75$ мы не используем ввиду ее «конечности»), $1/\sqrt{2}=0{,}20711\ldots$, $1=0{,}999\ldots$, $\pi-3=0{,}14159\ldots$, $2/3=0{,}666\ldots$. Процедура изменения десятичных знаков, предписываемая диагональным методом, не выводит нас за пределы рассматриваемого класса функций. Можно, скажем, заменить каждый десятичный знак (стоящий на диагонали таблицы (1)), не равный 5, на цифру 5, а если он равен 5, то на цифру 6:

$$f(a)=\begin{cases}5, & \text{если } f_a(a)\neq 5,\\ 6, & \text{если } f_a(a)=5.\end{cases}$$

(Если, скажем, $x_0=\frac{3}{4}$, $x_1=1/\sqrt{2}$, $x_2=1$, $x_3=\pi-3$, $x_4=\frac{2}{3}, \ldots$, то мы получим действительное число x, десятичное разложение которого (непременно бесконечное) начинается с 0,55565 . . . .) Это рассуждение, проведенное нами с помощью диагонального метода, показывает, что множество действительных чисел из $0<x\leqslant 1$ несчетно.

Отсюда почти немедленно следует и несчетность множества всех *действительных чисел* (упр. 33.1(a)).

Интересно в историческом плане отметить, как открытия Кантора, сделанные в 1874 г., представили в новом свете более ранний результат Лиувилля (1844 г.). Лиувиллю удалось с помощью некоторого специального весьма сложного метода построить некоторые конкретные *трансцендентные* (т. е. неалгебраические) действительные числа. Канторовский диагональный метод делает существование трансцендентных чисел очевидным уже в силу тех весьма общих соображений, которые были только что высказаны. В самом деле, диагональный метод позволяет получить конкретные трансцендентные числа из любого фиксированного пересчета множества алгебраических чисел [1]).

В заключение этого параграфа применим диагональный метод к множеству одноместных арифметических функций, принимающих лишь значения 0 и 1. В этом случае [2]) у нас не остается свободы выбора в процедуре изменения «диагональных» элементов: 0 мы должны заменять всюду на 1, а 1 — на 0. Таким образом, «диагональная функция» определяется в этом случае так:

$$f(a)=\begin{cases}1, & \text{если } f_a(a)=0,\\ 0, & \text{если } f_a(a)=1.\end{cases}$$

Каждую функцию мы можем здесь понимать как описание некоторого множества натуральных чисел, а именно множества тех значений аргумента, для которых данная функция принимает значение 0. Назовем такие функции *представляющими функциями* соответствующих множеств. Приведем несколько примеров (слева указаны множества натуральных чисел, справа, в той же строке,— последовательности значений их представляющих функций):

---

[1]) Причем каждый конкретный пересчет алгебраических чисел дает возможность построить даже несчетное множество различных трансцендентных чисел (читатель может доказать это в качестве упражнения).— *Прим. перев.*

[2]) В отличие от ситуации, о которой шла речь в предыдущем примечании.— *Прим. перев.*

	0	1	2	3	4	...
S_0 — множество всех натуральных чисел $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$	0	0	0	0	0	...
S_1 — множество четных чисел $\{0, 2, 4, \ldots\}$	0	1	0	1	0	...
S_2 — множество квадратов $\{0, 1, 4, \ldots\}$	0	0	1	1	0	...
S_3 — множество простых чисел $\{2, 3, \ldots\}$	1	1	0	0	1	...
S_4 — пустое множество $\{\ \}$	1	1	1	1	1	...
...	.	.	.	.	.	...

Для последовательности, начинающейся с этих множеств S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, ..., диагональный метод дает множество $S=\{1, 2, 4, \ldots\}$, последовательность значений представляющей функции которого начинается со значений 1, 0, 0, 1, 0, ... Мы видим, что 0 не является элементом множества S, хотя и является элементом множества S_0; 1 является элементом S, но не является элементом S_1 и т. д. Таким образом, S не совпадает ни с S_0, ни с S_1, ни с S_2, ... Так с помощью диагонального метода мы убеждаемся в том, что множество всех *множеств натуральных чисел* несчетно (в отличие от результата упр. 32.3 (с)).

Между множествами, несчетность которых установлена в настоящем параграфе (и упражнениях к нему), можно установить 1—1-соответствие (они «эквивалентны» друг другу)[1]). Более близкое знакомство с диагональным методом, которое предстоит нам в § 34, покажет, что он дает множества, не являющиеся ни счетными, ни «эквивалентными» несчетным множествам из этого параграфа.

Упражнение 33.1. Докажите несчетность следующих множеств:

(а) Множество действительных чисел.

(b) Множество трансцендентных чисел[2]).

(с) Множество одноместных логических функций (§ 17), для которых $D=\{0, 1, 2, \ldots\}$.

§ 34. Абстрактные множества

Отправляясь от описанных выше открытий, Кантор построил теорию *абстрактных множеств*, в рамках которой развил соответствующий аппарат и предпринял попытки обсудить свойства

[1]) Доказательства (использующие понятия и результаты § 34) можно найти в [BM], стр. 23—24.

[2]) Ср. примечание 1 к стр. 215.—*Прим. перев.*

множеств максимально общего вида[1]). Здесь мы сможем дать лишь самые краткие сведения по теории абстрактных множеств[2]).

Кантор [1895] (стр. 481) следующим образом определяет *множество*: «Под «множеством» мы понимаем любое объединение в одно целое M определенных вполне различаемых объектов m нашего восприятия или мысли (которые называются «элементами» M)». Чтобы выразить тот факт, что m есть *элемент* (или *член*) множества M, или, что то же самое, что m *принадлежит* M, мы пишем $m \in M$; запись $m \notin M$ означает, что m не принадлежит M[3]). Два множества M_1 и M_2 совпадают ($M_1 = M_2$), если они имеют одни и те же элементы. Конечное множество можно задать, перечислив его элементы (порядок перечисления не играет роли) и заключив этот перечень в фигурные скобки; этот способ может быть применен и для бесконечных множеств, но тогда «перечень» должен заканчиваться многоточием. Например, $\{1, 2, 3\}$—это множество из трех элементов, а $\{0, 1, 2, \ldots\}$ есть множество натуральных чисел. Мы говорим, что множество M_1 есть *подмножество* множества M, если каждый элемент множества M_1 есть в то же время элемент множества M; это обозначается так: $M_1 \subseteq M$ (или $M \supseteq M_1$). Например, трехэлементное множество $\{1, 2, 3\}$ имеет восемь подмножеств:

$$\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}.$$

Первое из них $\{\}$—это *пустое* множество (обозначаемое часто через $\varnothing$), далее идут три одноэлементных (или *единичных*) множества; перечень заканчивается *несобственным подмножеством* $\{1, 2, 3\}$.

Кардинальное число $\overline{\overline{M}}$ множества M есть понятие, которое мы получаем в результате абстрагирования от множества M и других множеств, для которых можно установить 1—1-соответствие с M. Именно так, например, ребенок получает представление о понятии «два», абстрагируясь от двух родителей, двух глаз, двух яблок, двух котят и т. п. Вполне возможно, что при

[1]) Кантор построил также теорию *точечных множеств*; значительная часть этой теории в настоящее время известна в качестве теоретико-множественной топологии.

[2]) Работа Кантора [1895—7] вполне доступна; она переведена на английский язык (см. библиографию в конце книги). Превосходный и весьма полный обзор дан Френкелем [1961]. Сжатое изложение предмета имеется в книге Бахмана [1955]. (Из литературы на русском языке см., например, книгу Куратовского и Мостовского [1970] и библиографию к ней; подробнейшая библиография предмета—в русском переводе книги Френкеля и Бар-Хиллела [1958].— *Перев.*)

[3]) Желая сделать эту главу по возможности независимой от остальных, мы идем на некоторые повторения материала из § 26; см. примечания на стр. 163 и 166.

этом ему нет никакого дела до того, что́ же собственно представляет собой это «два». Кантор [1895] пишет по этому поводу: «То общее понятие, которые мы получаем с помощью нашей интеллектуальной активности, когда, отправляясь от множества M, мы абстрагируемся от природы его различных элементов и от порядка, в котором они нам даны, мы называем «мощностью», или «кардинальным числом», множества M». Эта двойная абстракция и подсказывает канторовское обозначение «$\overline{\overline{M}}$» для кардинального числа множества M. Фреге [1884] и Рассел [1902] определяют кардинальное число $\overline{\overline{M}}$ как множество всех множеств N, для которых можно установить 1—1-соответствие с M; тем самым для самих кардинальных чисел находится место в качестве предметов некоторой области, состоящей только из множеств. Желая выразить сказанное с помощью понятий, описанных в § 30, мы скажем, что множество M *эквивалентно* множеству N (символически: $M \sim N$), если можно установить 1—1-соответствие между M и N. Отношение $\sim$ есть отношение эквивалентности (оно рефлексивно, симметрично и транзитивно), а $\overline{\overline{M}}$ есть содержащий M класс эквивалентности в разбиении, индуцируемом отношением $\sim$ на совокупности всевозможных множеств (ср. (B) в § 30).

Независимо от того, какой онтологический статус приписывается кардинальным числам, $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ в том и только в том случае, когда $M \sim N$.

Множество всех подмножеств произвольного множества M мы будем обозначать через «2^M». В этих обозначениях наш последний результат из § 33 можно сформулировать так: если $M = \{0, 1, 2, \ldots\}$, то 2^M несчетно, или $\overline{\overline{2^M}} \neq \overline{\overline{M}}$. Аналогичным рассуждением можно и для произвольного множества M доказать, что $\overline{\overline{M}} \neq \overline{\overline{2^M}}$. Воспроизведем, например, это рассуждение для случая $M = \{1, 2, 3\}$. Какое бы мы ни взяли множество $M_1 \subseteq 2^M$, находящееся в 1—1-соответствии с самим множеством M, диагональный метод позволяет получить подмножество множества M (т. е. элемент множества 2^M), не принадлежащее M_1. Если, например, $M_1 = \{\{2\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}\}$, то таблица пересчета выглядит следующим образом:

	1	2	3
$\{2\}$	1	0	1
$\{2, 3\}$	1	0	0
$\{1, 2\}$	0	0	1

Заменяя на диагонали 0 на 1, а 1 на 0, мы получаем множество $\{1, 3\}$, являющееся элементом множества 2^M (состоящего из перечисленных выше восьми множеств), но не принадлежащее множеству M_1. Отправляясь от множества $M_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{1\}, \{3\}\}$, мы получим множество $\{2\}$, также не принадлежащее M_1, и т. п. Конечно, поскольку 2^M состоит из восьми элементов, т. е. $\overline{\overline{2^M}} = 8$, в то время как $\overline{\overline{M}} = 3$, мы можем сказать, что мы и так знали, что $\overline{\overline{M}} \neq \overline{\overline{2^M}}$ для множества $M = \{1, 2, 3\}$,— просто в силу принятых нами допущений о последовательности натуральных чисел. Но проведенное рассуждение, а также заключительный пример из § 33 для множества $M = \{0, 1, 2, \ldots\}$ представляют собой частные случаи общего метода доказательства (пригодного *для всякого множества* M) того факта, что $\overline{\overline{M}} \neq \overline{\overline{2^M}}$.

Этот результат можно усилить. Прежде всего мы положим по определению $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ (или $\overline{\overline{N}} > \overline{\overline{M}}$) тогда и только тогда, когда M эквивалентно некоторому подмножеству множества N, но N не эквивалентно никакому подмножеству множества M (т. е. существует такое множество N_1, что $M \sim N_1 \subseteq N$, но не существует такого M_1, что $N \sim M_1 \subseteq M$). Здесь необходимо удостовериться в том, что результат не зависит от выбора множеств M и N с соответствующими кардинальными числами, т. е., в терминах § 30, от того, какие представители M и N взяты из классов эквивалентности $\overline{\overline{M}}$ и $\overline{\overline{N}}$ (упр. 34.1). Мы видим почти непосредственно, что отношение порядка $<$ между кардинальными числами иррефлексивно (т. е. $\overline{\overline{M}} \nless \overline{\overline{M}}$) и транзитивно (т. е. из $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ и $\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{P}}$ следует $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{P}}$) (упр. 34.2).

Как мы уже отмечали в § 32, предполагая знакомство с последовательностью натуральных чисел, натуральное число n есть кардинальное число начального отрезка $\{0, \ldots, n-1\}$ натурального ряда. Таким образом, канторовское определение отношения порядка $<$ между кардинальными числами приложимо, в частности, и к натуральным числам, рассматриваемым в качестве кардинальных. Можно показать (хотя и не без некоторой возни), что *это* отношение порядка $<$ между натуральными числами как конечными кардинальными числами совпадает с обычным отношением «меньше» для натуральных чисел, которое мы предполагаем известным[1]).

Посредством небольшого уточнения приведенного выше рассуждения мы можем доказать теорему Кантора:

(C) *Для каждого множества M имеет место* $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{2^M}}$.

[1]) Эти вопросы разобраны в [ВМ], стр. 19 (а также пример 1 из § 7, стр. 28).

В другой легко доказываемой теореме идет речь об объединении $\bigcup M$ некоторого множества M, элементами которого служат множества. Элементами $\bigcup M$ являются все элементы элементов множества M. Скажем, если $M = \{\{2\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}\}$, то $\bigcup M = \{2, 3, 5\}$. Вот эта теорема: (D) *Если M есть множество множеств, среди кардинальных чисел которых нет наибольшего* (т. е. для каждого элемента A множества M найдется такой элемент A' из M, что $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{A'}}$), *то $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\bigcup M}}$ для любого элемента A из M.*

Будем обозначать кардинальное число множества всех натуральных чисел через $\aleph_0$ (читается «алеф-нуль»). Для каждого натурального числа n имеет место $n < \aleph_0$. Это следует из предложения (D), равенства $n = \overline{\overline{\{0, 1, \ldots, n-1\}}}$ и того обстоятельства, что отношение порядка для натуральных чисел, понимаемых как кардинальные числа, совпадает с обычным отношением порядка на натуральном ряде.

Вместо $\overline{\overline{2^M}}$ мы будем писать $2^{\overline{\overline{M}}}$. Такое написание оправдывается тем, что для случая конечного множества M оно согласуется с обычной арифметикой; например, мы уже видели, что для $\overline{\overline{M}} = 3$ $\overline{\overline{2^M}} = 8 = 2^3$.

Результаты этого параграфа позволяют утверждать существование следующей возрастающей последовательности кардинальных чисел:

$$0 < 1 < 2 < \ldots \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots .$$

Поскольку же, согласно (D), существует кардинальное число, превышающее все члены этой [1]) последовательности, то ряд кардинальных чисел возрастает неограниченно. Таким образом, применение идеи сравнения множеств посредством одно-однозначного соответствия привело Кантора к открытию, что существует не одна-единственная бесконечность, а целая иерархия различных бесконечных (или «трансфинитных») кардинальных чисел.

Упражнения. 34.1. Обоснуйте определение отношения «$\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$», показав, что если $M \sim M'$ и $N \sim N'$, то утверждение (α) верно тогда и только тогда, когда верно (α'):

(α) Для некоторого N_1 $M \sim N_1 \subseteq N$, но ни для какого M_1 не имеет места $N \sim M_1 \subseteq M$.

(α') Для некоторого N_1 $M' \sim N_1 \subseteq N'$, но ни для какого M_1 не имеет места $N' \sim M_1 \subseteq M'$.

[1]) И любой другой.— *Прим. перев.*

34.2. Покажите, что отношение $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ иррефлексивно и транзитивно.

34.3*. Докажите (C) и (D).

34.4. (a) Каково кардинальное число множества из упр. 33.1 (c)? (b) Каково кардинальное число множества всех одноместных логических функций, определенных на множестве всех множеств натуральных чисел?

§ 35. Парадоксы

Взаимоотношения между канторовской теорией множеств и математикой подобны течению настоящей любви: они никогда не протекали гладко.

Канторовская теория множеств имеет дело с «актуальной» («завершенной») бесконечностью. Вначале это вызывало значительные возражения у математиков, восходившие отчасти к знаменитому заявлению Гаусса (1831 г.): «Я возражаю... против употребления бесконечной величины как чего-либо завершенного, что никогда не позволительно в математике: можно говорить о пределах, к которым некоторые величины приближаются как угодно близко, или о неограниченно возрастающих величинах» (Werke, VIII, стр. 216). Гаусс говорил о бесконечных величинах; Кантор же использовал в своей теории бесконечные совокупности.

И как раз тогда, когда идеи Кантора стали завоевывать умы математиков и получать признание—в 90-х годах XIX в.,— в высших разделах его теории множеств были обнаружены противоречия. Впрочем, с тех пор теория множеств (соответствующим образом переработанная) даже укрепила свое положение в математике, парадоксы же сконцентрировали внимание на проблемах оснований теории множеств и вообще оснований математики.

В 1897 г. был открыт парадокс Бурали-Форти (Кантору он был известен еще в 1895 г.), возникший в канторовской теории порядковых чисел; теория эта в настоящей книге не рассматривалась[1]).

Парадокс Рассела [1902a] связан с множеством всех множеств, которые не являются элементами самих себя. Обозначим это множество через S. *Пусть* (a) S содержит само себя. Тогда, согласно определению S, оно не содержит самого себя. Таким образом, по правилу приведения к нелепости (позволяющему отвергнуть допущение (a)) мы *доказали*: **(b)** S не содержит самого себя. Но отсюда по определению S получаем: **(c)** S содержит

[1]) См. ниже примечание на стр. 304.

само себя. Доказанные утверждения (b) и (c) вместе образуют противоречие, парадокс.

Рассел [1919] предложил также следующий популярный вариант этого парадокса: парикмахер, живущий в некоторой деревне, бреет всех тех и только тех жителей этой деревни, которые не бреются сами. Вопрос: бреет ли он самого себя?

Рассмотрим теперь подробно еще один парадокс теории множеств — парадокс Кантора (открытый им в 1899 г.) Пусть T есть множество всех множеств. Тогда 2^T есть некоторое множество множеств, откуда $2^T \subseteq T$. По определению отношения $<$ для кардинальных чисел (§ 34) если $M \subseteq N$, то $\overline{\overline{M}} \not> \overline{\overline{N}}$. (Почему?) Отсюда $\overline{\overline{2^T}} \not> \overline{\overline{T}}$. Но по теореме Кантора (C) $\overline{\overline{2^T}} > \overline{\overline{T}}$. Итак, мы получили противоречие.

Можно попытаться избавиться от этого противоречия, заявив, что совокупность T всех множеств «не образует множества». Но что́ же в таком случае представляет собой область M изменения переменной (которую мы в гл. II называли областью D) в теореме Кантора: «Для каждого множества M $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{2^M}}$»?

Несколько иной характер имеет парадокс Ришара [1905], формулируемый следующим образом.

Будем понимать под «фразой» любую конечную последовательность, каждый из членов которой есть либо одна из 33 букв русского алфавита, либо пробел (для разделения слов), либо запятая, причем эта последовательность не начинается и не оканчивается пробелом. Например, фразами являются: «абракадабра», «королей и капусты», «а в квадрате», «дыр бул щыл, убещур». Мы можем пересчитать эти фразы с помощью метода цифр (§ 32), пользуясь 35-ичной или 36-ичной системой счисления для записи натуральных чисел. Некоторые фразы — скажем, приведенная выше фраза «а в квадрате» — являются описаниями одноместных арифметических функций на русском языке. Вычеркнем теперь из нашего пересчета все фразы, не являющиеся такого рода описаниями функций; в результате получим пересчет $P_0, P_1, P_2, \ldots$ всех таких описаний. Обозначим функции, описываемые этими фразами, соответственно через $f_0(a), f_1(a), f_2(a), \ldots$

Рассмотрим теперь следующую фразу: «Функция, значение которой для любого данного натурального числа a в качестве аргумента равно увеличенному на единицу значению для этого же аргумента той функции, которая определяется фразой, соответствующей в только что упомянутом пересчете этому натуральному числу». Мы могли бы заменить в этой фразе ее кусок «в только что упомянутом пересчете» исчерпывающим описанием точной конструкции этого самого пересчета, так что в результате из всей нашей фразы получилась бы некоторая другая фраза P, *полностью* описывающая ту же самую функцию.

Эта фраза P описывает некоторую арифметическую функцию, а именно

$$f(a)=f_a(a)+1.$$

Следовательно, P входит в пересчет P_0, P_1, P_2, ... Но это невозможно, так как функция, описываемая фразой P, отличается от функции, описываемой фразой P_0, своим значением для $a=0$; от функции, описываемой P_1, значением для $a=1$; от функции, описываемой P_2, значением для $a=2$ и т. д. Оформим это рассуждение иначе. Поскольку фраза P входит в пересчет P_0, P_1, P_2, ..., то она имеет в нем некоторый номер p. Значит,

$$f(a)=f_p(a).$$

Подставляя сюда p вместо a и сравнивая с предыдущим равенством, приходим к противоречию. (В изложении самого Ришара речь шла не об одноместных арифметических функциях, а о действительных числах.)

Этот парадокс тесно связан с тем обстоятельством, что, с одной стороны, посредством данного языка можно описать лишь счетно-бесконечное множество арифметических функций (поскольку множество фраз данного языка лишь счетно-бесконечно, см. § 32), а с другой — множество всех арифметических функций несчетно (доказывается канторовским диагональным методом, § 33).

Парадокс, похожий на этот, предложил Берри (см. Рассел [1906], стр. 645): рассмотрим выражение «наименьшее натуральное число, которое нельзя назвать посредством меньше чем тридцати трех слогов». Это выражение называет некоторое определенное натуральное число — обозначим его через n, — ибо каждое непустое множество натуральных чисел (в данном случае речь идет о множестве натуральных чисел, которые нельзя назвать посредством меньше чем тридцати трех слогов) имеет наименьший элемент. Согласно своему определению, n нельзя назвать посредством меньше чем тридцати трех слогов. Но ведь наше выражение определяет n, причем с помощью ровно тридцати двух слогов!

Эти современные парадоксы родственны известному еще в древности парадоксу «Лжец» [1]). Критскому философу Эпимениду (шестой век до н. э.) приписывается высказывание «все критяне — лжецы». Мы будем исходить из допущения, что под «лжецами» Эпименид имеет в виду людей, которые никогда не говорят правду.

Допустим, что высказывание Эпименида истинно; тогда в силу своего смысла и того обстоятельства, что сам Эпименид—критянин,

[1]) По поводу исторических подробностей и дальнейших ссылок см. Вейль [1949], стр. 228, примечание 2.

оно оказывается ложным, т. е. мы получили противоречие. Отсюда приведением к нелепости мы получаем, что данное высказывание не является истинным, т. е. оно ложно. Это означает, что некий критянин некогда сказал правду или еще скажет когда-нибудь. Это, однако, означало бы, что вопрос решается ссылкой на некоторый исторический факт, наступление которого, во всяком случае, нельзя доказать чисто логическим путем, вопреки тому, что наше рассуждение претендовало именно на логический статус.

Прямая форма парадокса «Лжец» предложена Эвбулидом (четвертый век до н.э.). Ее можно сформулировать следующим образом: «Высказывание, которое я сейчас произношу, ложно». Очевидно, что заключенное в кавычки высказывание не может быть ни истинным, ни ложным.

В древней «дилемме крокодила» крокодил украл ребенка, но обещал вернуть его отцу, если тот отгадает, вернет ли ему крокодил ребенка. Неразрешимая дилемма встает перед крокодилом, если отец скажет ему, что он не вернет ребенка.

Миссионер, очутившийся среди людоедов, обнаруживает, что он угодил как раз к обеду. Они разрешают ему произнести какое-нибудь высказывание с условием, что, если высказывание окажется истинным, его сварят, а если оно окажется ложным, его зажарят. Что надо сказать миссионеру?

Канторовскую теорию множеств в том виде, как она исторически возникла и как мы с ней знакомились в § 32—34, называют «наивной» теорией множеств. Пользуясь канторовским «определением» понятия множества (§ 34), мы вслед за Кантором при решении вопроса, какие объекты являются множествами, руководствовались исключительно собственной интуицией.

Парадокс Кантора и другие теоретико-множественные парадоксы демонстрируют трудности, неизбежно связанные с попытками построить теорию множеств на интуитивной основе, исходя из канторовской концепции множества. Эти трудности ставят проблему: как видоизменить теорию множеств, чтобы в ней не возникали парадоксы? На самом же деле проблема эта идет дальше: она вынуждает нас задаться вопросом, в чем же собственно подвели нас методы образования понятий и методы рассуждений, казавшиеся нам столь убедительными, пока не выяснилось, что они приводят к парадоксам? В математическом мире полного согласия в вопросе о происхождении парадоксов и способах избавления от них нет до сих пор (1967 г.[1]), и весьма сомнительно, чтобы оно когда-либо наступило.

Оставшуюся часть этого параграфа мы посвятим краткому описанию того минимального (по степени радикальности) комп-

[1]) Сказанное сохраняет силу и в 1973 г.— *Прим. перев.*

лекса мер по переформулировке математики, который позволяет избежать таких парадоксов, как парадоксы Бурали-Форти, Кантора и Рассела. (Рамсей [1926] разделил известные парадоксы на две категории: три только что названные получили наименование «логических», другие, в том числе парадоксы Ришара, Берри и «Лжец», —«эпистемологических», или «семантических».)

Эта переформулировка математики исходит из наблюдения, согласно которому парадоксы теории множеств (логические парадоксы) связаны с использованием «слишком больших» множеств, вроде множества T всех множеств из парадокса Кантора. Поскольку свободное пользование понятиями, исходящими из канторовского определения понятия множества, приводит к трудностям, Цермело [1908] предложил ограничиться рассмотрением множеств, предусмотренных некоторым списком аксиом. Эти аксиомы сформулированы так, что не видно, как можно было бы вывести из них известные парадоксы. В то же время аксиомы эти достаточны для вывода из них обычного запаса предложений классической математики, в том числе и абстрактной теории множеств, но без парадоксов.

Приведем теперь (в своей формулировке) список аксиом (принципов) по книге Френкеля [1961] (с указанием страниц этого издания, на которых они сформулированы) [1]. (Отнюдь не предполагается, что читатель этой книги должен запомнить их. Они приводятся здесь лишь как пример одного из употребительных списков аксиом.) Выбор именно этой конкретной аксиоматики оправдывается хотя бы наличием прекрасного и подробного ее изложения у Френкеля [1961] и Френкеля и Бар-Хиллела [1958]. Другая система аксиом описана в книге Бернайса и Френкеля [1958].

I. (Аксиома объемности, Френкель [1961], стр. 14 [2].) *Два множества A и B равны, если (и только если) они состоят из одних и тех же элементов:* $A = B \equiv (A \subseteq B$ *и* $B \subseteq A)$.

II. (Аксиома выделения, стр. 16 [3].) *Для любого множества A и предиката $P(x)$, имеющего смысл для всех элементов множества A* (т. е. такого, что для любого $x \in A$ $P(x)$ либо истинно,

---

[1]) В издании 1953 г. аксиомы (I)—(VII) находятся на стр. 21, 22, 24, 28, 42, 97, 123, но (VIII) не приводится. В издании 1958 г. (I)—(VII) переформулированы и переставлены и, кроме того, появляются (VIII) и (приводимая ниже) (IX).

IX. (Аксиома фундирования.) *Любое непустое множество A содержит такой элемент b, что A и b не имеют общих элементов.* [См. Френкель и Бар-Хиллел [1958], стр. 118.— *Перев.*]

[2]) Френкель и Бар-Хиллел [1958], стр. 48.— *Прим. перев.*

[3]) Френкель и Бар-Хиллел [1958], стр. 55; терминологии этого издания мы, как правило, придерживаемся и здесь (у автора axiom of subsets).— *Прим. перев.*

либо ложно), *существует множество* $\hat{x}[x \in A \,\&\, P(x)]$, *состоящее в точности из тех элементов* A, *для которых* $P(x)$ *истинно* [1]).

III. (Аксиома пары, стр. 18 [2]).) *Если* a *и* b — *различные объекты, то существует множество* $\{a, b\}$, *состоящее в точности из* a *и* b.

IV. (Аксиома объединения, стр. 20 [3]).) *Для любого множества множеств* A *существует множество* $\bigcup A$, *состоящее в точности из всех элементов, принадлежащих элементам множества* A.

V. (Аксиома бесконечности, стр. 32 [4]).) *Существует по крайней мере одно бесконечное множество — множество* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *натуральных чисел*. (Френкель говорит о множестве $\{1, 2, 3, \ldots\}$) [5]).

VI. (Аксиома множества-степени, стр. 72 [6]).) *Для любого множества* A *существует множество* 2^A *всех подмножеств* A.

VII. (Аксиома выбора, стр. 90 [7]).) *Для любого непустого множества* S *попарно непересекающихся множеств существует некоторое* [8]) *множество* C, *содержащее в качестве своих элементов ровно по одному элементу из каждого элемента множества* S.

VIII. (Аксиома подстановки, стр. 199 [9]).) *Для каждого множества* A *и однозначной функции* f, *определенной на* A, *существует множество, содержащее в точности объекты* $f(x)$, *для* $x \in A$.

Одна из форм аксиомы выбора была впервые ясно сформулирована в качестве допущения в данных Цермело [1904], [1908a] доказательствах «теоремы о вполне упорядочении», из которой следует, что любые два кардинальных числа $\overline{\overline{A}}$ и $\overline{\overline{B}}$ сравнимы

---

1) Здесь опущена фраза в скобках, перечисляющая другие названия этой аксиомы (axiom of selection, axiom of segregation и *Aussonderungsaxiom*), как раз и соответствующие нашему переводу (ср. предыдущее примечание).—*Прим. перев.*

2) Френкель и Бар-Хиллел [1958], стр. 50.— *Прим. перев.*

3) Френкель и Бар-Хиллел [1958], стр. 51.— *Прим. перев.*

4) Френкель и Бар-Хиллел [1958], стр. 107—108; см., однако, следующее примечание.— *Прим. перев.*

5) Поскольку никакой предварительной аксиоматики для арифметики не предполагается, то, строго говоря, выражение в фигурных скобках здесь лишено смысла. Френкель же вводит натуральные числа *по определению*, полагая $1 = \{\varnothing\}$, $2 = \{\{\varnothing\}\}$, ..., $n = \overbrace{\{\{\ldots\{}^{n \text{ раз}}\varnothing\}\ldots\}\}$, ...— *Прим. перев.*

6) Френкель и Бар-Хиллел [1958], стр. 53.— *Прим. перев.*

7) Френкель и Бар-Хиллел [1958], стр. 65.— *Прим. перев.*

8) В оригинале здесь неопределенный артикль (*a* set), указывающий на то обстоятельство, что множество C, существование которого утверждается этой аксиомой, не определено однозначно (и вообще как-либо эффективно). В формулировках же всех предыдущих аксиом перед словом set стоял определенный артикль *the* (в русском переводе книги Френкеля и Бар-Хиллела [1958] переводившийся словосочетанием «вполне определенное»).— *Прим. перев.*

9) Френкель и Бар-Хиллел [1958], стр. 11.

(т. е. что либо $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, либо $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, либо $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$). Из приведенной нами формулировки аксиомы выбора, близкой к «мультипликативной аксиоме» Рассела [1906а], можно вывести цермеловскую ее модификацию (и обратно).

Аксиома выбора явилась предметом многочисленных исследований, посвященных задачам ограничения ее использования, выявления ее следствий или (Гёдель [1938], [1939], [1940]) отстаивания ее как допущения, которое можно без противоречия присоединить к другим аксиомам теории множеств при условии, что эти аксиомы непротиворечивы[1]). Коэн [1963—4] показал, что к аксиомам теории множеств без противоречия можно присоединить и отрицание аксиомы выбора (подробное изложение имеется в книге Коэна [1966]). Другой вариант решения этой проблемы дан в работе Скотта [1966].

Приведенная только что система аксиом (так же как и система, описанная Цермело [1908а]) в одном пункте является недостаточно определенной. Речь идет об аксиоме II, утверждение которой связано с понятием предиката $P(x)$, *имеющего смысл* для элементов $x \in A$. Эта недостаточная определенность была впервые устранена Френкелем [1922], а затем, несколько иным способом, Скулемом [1922—3]. Класс допустимых предикатов $P(x)$ здесь должен быть описан более точно. Согласно методу Сколема, правила образования таких $P(x)$ формулируются просто в ходе уточнения символического языка, на котором записываются аксиомы.

Уточнение символического языка, необходимое для придания достаточной точности логической дедукции, фактически должно предполагаться и при строгом изложении логики (как в гл. I—III). Какими заботами это чревато̀, видно из рассмотрения семантических парадоксов (парадоксы Ришара и Берри, «Лжец»). Иными словами, язык математической теории должен быть снабжен правилами образования предложений, в некотором роде аналогичными перечисленным выше правилам, позволяющим утверждать существование множеств. Нам придется еще с этим столкнуться.

В некоторых системах аксиоматической теории множеств (например, в системе Гёделя [1940]) явным образом рассматриваются два вида совокупностей объектов: совокупности первого вида, именуемые «множествами», могут не только содержать элементы, но и сами быть элементами других совокупностей; совокупности же второго вида — «классы» — не могут входить в качестве элементов в другие совокупности. Каждое «множество»

---

[1]) Весьма доступное изложение содержится в работе Гёделя [1947].

является в то же время «классом»[1]). Совокупность всех «множеств» образует «класс», но попытка получения парадокса Кантора пресекается тем обстоятельством, что этот «класс» «множеством» не является.

В определении понятия общезначимости в исчислении предикатов (§ 17) мы просто говорили, что область D предполагается «непустым множеством» («непустой совокупностью»). Тогда мы еще не были готовы к различению «множеств» и «классов» в только что упомянутом смысле. Теперь же мы можем чуть ослабить формулировку теории моделей, допустив в качестве D любой непустой «класс»: дело в том, что в определении понятия общезначимости нам ни разу не бывает нужно предполагать D элементом чего бы то ни было. Трудности, вызываемые рассмотрением «слишком больших» совокупностей в качестве элементов, не возникают, если мы разрешаем использовать произвольные совокупности лишь в качестве областей изменения переменных. Это позволяет дать ответ на поставленный выше вопрос о том, какой может быть предметная область для самой теории множеств (этот вопрос вставал по отношению к области изменения переменной M в теореме Кантора, $\overline{\overline{M}} < 2^{\overline{\overline{M}}}$). (Кроме ссылок на эти два абзаца, мы будем в дальнейшем продолжать употреблять термин «класс» обычным образом, т. е. как синоним термина «множество».)

§ 36. Математика аксиоматическая и математика интуитивная

Отчасти в связи с разнообразными аспектами проблем, вызванных открытием парадоксов (§ 35), мы рассмотрим теперь повнимательнее вопрос о природе математики и применяемых в ней методов.

Аксиоматико-дедуктивный метод в математике приобрел известность благодаря «Началам» Евклида (появившимся около 330—320 гг. до н. э.), но традиция приписывает открытие этого метода Пифагору (VI в. до н. э.). С помощью аксиоматического метода была систематизирована совокупность геометрических знаний. Евклидову аксиоматическую систему в общих словах можно охарактеризовать следующим образом. Даются «определения» некоторых *первоначальных* (исходных) *терминов*, таких,

---

[1]) Очевидное несоответствие между этой и предыдущей фразами легко устраняется посредством следующего исправления неточности авторского словоупотребления: в с е «множества» могут быть элементами, так же как и н е к о т о р ы е «классы», причем именно те, которые являются «множествами»; «классы», не являющиеся «множествами» (т. е. не могущие быть элементами), именуются «собственно классами». — *Прим. перев.*

как «точка», «прямая», «плоскость»; определения эти преследуют цель объяснить читателю значения данных терминов. Затем в качестве *аксиом (постулатов)* принимаются некоторые предложения об этих первоначальных терминах; имеется в виду, что эти предложения непосредственно очевидны на основе понимания первоначальных терминов, которое подсказывается определениями. Затем через первоначальные термины определяются новые термины, а из аксиом логически выводятся новые предложения, называемые *теоремами*. Аксиоматику, подобную евклидовой, где значения исходных терминов предполагаются данными с самого начала, называют *материальной*[1] *аксиоматикой*.

Один из постулатов Евклида — пятый постулат, или «постулат о параллельных»[2], — кажется менее очевидным, нежели остальные. Евклид использовал этот постулат для доказательства теоремы о том, что через данную точку P, не лежащую на данной прямой l, можно провести в точности одну прямую, параллельную l (т. е. не пересекающую ее ни в какой точке). Начиная с времен самого Евклида было предпринято множество попыток доказать этот постулат как теорему, выведя его из остальных постулатов евклидовой системы. Как мы знаем теперь, попытки эти были обречены на неудачу.

Дело в том, что Лобачевский в 1829 г. и Бойаи в 1833 г. построили геометрическую систему, в которой через данную точку P, не лежащую на данной прямой l, можно провести бесконечно много прямых, параллельных l. Очевидно, что осмысление первоначальных терминов евклидовой геометрии на языке понятий физического пространства не достаточно для решения вопроса о том, какой же из постулатов о параллельных верен: постулат Евклида или постулат Лобачевского — Бойаи. Различия в получающихся при этом геометрических системах могут быть слишком малыми для того, чтобы обнаружить их посредством каких бы то ни было измерений в доступной нам части вселенной — точно так же, как в былые времена люди полагали, что Земля плоская, на основании наблюдений над доступной непосредственному обозрению частью земной поверхности.

Поэтому истинность какого-либо предложения евклидовой геометрии должна быть свойством самой этой геометрии как логической системы. Но если евклидова геометрия — это корректная логическая структура, то это же можно сказать и о геометрии Лобачевского — Бойаи. В самом деле, как показал в 1871 г. Клейн, все аксиомы планиметрии Лобачевского оказываются

---

[1]) Иначе, *содержательной*, или *неформальной*. — *Прим. перев.*

[2]) Постулат этот гласит: если две прямые на плоскости пересекаются некоторой другой прямой той же плоскости, причем сумма внутренних односторонних углов с какой-либо стороны от этой прямой меньше двух прямых углов, то данные прямые пересекаются с той же стороны от третьей прямой

истинными, если входящие в них первоначальные термины переинтерпретировать таким образом, чтобы «плоскость» понималась как внутренность некоторого круга в евклидовой плоскости, «точка» понималась как точка внутри этого круга, «прямая» — как хорда его окружности, а расстояния и углы вычислялись согласно формулам, предложенным[1]) в 1859 г. Кэли. (Другая евклидова модель, пригодная для интерпретации ограниченной части неевклидовой плоскости, была предложена в 1868 г. Бельтрами, который интерпретировал отрезки прямых как отрезки «геодезических» (т. е. кратчайших путей, соединяющих две точки) на некоторой «поверхности постоянной отрицательной кривизны».)

В этих моделях с аксиомами происходит нечто новое по сравнению с прежними аксиоматическими концепциями: смысл первоначальных терминов варьируется, а дедуктивная структура рассматриваемой теории остается фиксированной. Это обстоятельство знаменует возникновение *формальной аксиоматики*, в рамках которой значения первоначальных терминов не предполагаются определенными с самого начала, а так и остаются неопределенными при выводе теорем из аксиом. Поэтому мы вольны выбирать значения этих первоначальных терминов любым образом, лишь бы аксиомы оставались истинными. Эту точку зрения мы и отразили в своем определении понятий «следования» и «следствия» (§ 7, 20). Особенно плодотворной она оказывается в современной алгебре для получения следствий из рассматриваемых чисто формально систем аксиом, скажем из аксиом абстрактной теории групп (ср. § 39). Результаты, выводимые из аксиом теории групп, в которых множество элементов, на котором задана групповая операция умножения, и сама эта операция остаются неопределенными (нефиксированными), составляют теоретическую систему, пригодную для самых различных приложений.

В рамках формальной аксиоматики система аксиом может быть исследована на предмет наличия таких свойств, как независимость какой-либо аксиомы от других (посредством попыток отыскания такой интерпретации ее первоначальных терминов, при которой данная аксиома оказывалась бы ложной, а все остальные — истинными), категоричность (заключающаяся в том, что элементы двух произвольных интерпретаций можно поставить в 1—1-соответствие с сохранением всех определенных для них свойств[2]) и т. п.[3])).

---

[1]) Для другой цели и по другому поводу.— *Прим. перев.*

[2]) Короче, категоричность—это *изоморфизм* любых двух интерпретаций данной системы аксиом.— *Прим. перев.*

[3]) Этот тип исследования аксиоматических систем хорошо описан Янгом [1911]. Некоторые из кратко упомянутых здесь вопросов будут впоследствии освещаться подробнее: доказательства независимости в § 57, категоричность в § 53, доказательства непротиворечивости посредством интерпретаций в § 52.

При таком подходе к аксиоматике возникает ряд вопросов. Почему мы выбираем именно эти аксиомы и почему получающаяся в результате система должна нас интересовать? Ответ, очевидно, состоит в том, что такая система приложима к любым объектам, заданным извне в качестве интерпретации первоначальных терминов. Бывает, что система аксиом допускает существенно различные интерпретации (в этом случае она некатегорична); типичным примером могут служить аксиомы абстрактной теории групп. Мы не хотели бы рассматривать системы аксиом, которым не удовлетворяет никакая интерпретация; такие системы мы назовем *вырожденными*. Одна из проблем, встающих в формальной аксиоматике, как раз состоит в установлении того, что данная система не является вырожденной. Впрочем, система объектов, служащая интерпретацией какой-либо системы аксиом, часто берется из какой-нибудь другой аксиоматической теории; в этом случае налицо некоторая редукция: стоявший перед нами вопрос лишь заменяется вопросом о значении этой другой аксиоматической теории. Если ни на какой стадии процесса результаты не прилагаются за пределами формальной аксиоматики, то все эти построения кажутся бесплодными. Поэтому — если не становиться на позицию математического нигилизма — мы приходим к выводу, что формально аксиоматизированная математика — это еще не вся математика: определенное место в математике должны занимать такие понятия, как смысл, истина, ложь. Когда мы утверждаем, что такое-то предложение данной формальной аксиоматической теории является теоремой, то мы уж, во всяком случае, должны считать само наше утверждение истинным в том смысле, что предложение, о котором идет речь, вытекает из аксиом, хотя вопрос о том, истинно ли это предложение в действительности, остается открытым, поскольку в формальной аксиоматике формальные выводы проводятся до какого бы то ни было приписывания значений первоначальным терминам (или безотносительно к такому приписыванию).

В качестве примера математического высказывания, относительно которого отнюдь не предполагается, что оно является чисто формальным, но бессмысленным следствием из аксиом, рассмотрим теорему (доказываемую в теории чисел) о том, что для любых данных целых чисел a, b, c мы можем узнать, существуют ли такие целые числа x и y, что $ax+by+c=0$, т. е. теорему о существовании общего метода, позволяющего решить вопрос, разрешимо ли в целых числах произвольное данное уравнение $ax+by+c=0$ (a, b, c — целые). Хотя теория чисел (арифметика целых чисел) может быть построена аксиоматически, доказательство этой теоремы следует понимать в том смысле, что для любых конкретных a, b, c мы *можем узнать*, разрешимо ли данное уравнение. Ученик, научившийся лишь доказывать, исходя из аксиом, теорему о том, что всегда можно узнать, существует ли искомое решение, но не научившийся фактически узнавать это, вряд ли усвоил то, чему хотел его научить учитель. В то же время если имелся в виду лишь вывод этой теоремы в формальной аксиоматике, то такой ученик сделает все, что от него требуется.

В конце § 35 мы в качестве одного из наиболее скромных методов разрешения ситуации, сложившейся в связи с парадоксами, описали некоторую систему аксиоматической теории множеств. В этом контексте аксиоматика должна пониматься в формальном смысле, если только мы не станем пытаться каким-либо образом сохранить как раз ту интуитивную концепцию множества, которая должна была быть заменена именно этой системой аксиом. Однако рассмотрения настоящего параграфа показывают, что прибежище, предоставляемое формальной аксиоматикой, хотя и может обеспечить значительные удобства, оставляет открытыми такие проблемы, как выбор аксиом и приложимость их к описанию каких-либо систем объектов, кроме таких, существование которых постулировано какой-нибудь другой аксиоматической теорией.

За решение такого рода проблем взялся Гильберт. Он исходил из того, что *классическая* математика (т. е. обычная математика, использующая классическую логику) содержит много такого, что выходит за рамки непосредственно осмысливаемого и обосновываемого на интуитивной основе. И действительно, математикам пришлось осознать это, когда в теории множеств они зашли слишком далеко и натолкнулись на парадоксы. Гильберт предложил программу спасения классической математики, ставящую своей целью избавление ее (математики) от парадоксов. Программа эта в общих чертах описывается следующим образом. Классическая математика должна быть сформулирована в виде формальной аксиоматической теории, после чего следует доказать ее непротиворечивость, т. е. установить, что в этой формальной аксиоматической теории нельзя доказать противоречие.

До этого предложения (оно было впервые высказано в 1904 г., но Гильберт и его сотрудники по-настоящему занялись им лишь к 1920 г.) доказательства непротиворечивости формальных аксиоматических теорий проводились с помощью построения моделей (интерпретаций), в которых все аксиомы данной теории оказывались истинными, когда входящие в них первоначальные термины интерпретировались посредством некоторой другой теории. Выше мы приводили один пример такого рода, который показывает, что неевклидова планиметрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива планиметрия Евклида [1]). В каждом таком случае доказательство непротиворечивости с помощью мо-

[1]) См. подробнее, например, Янг [1911].

дели показывает лишь, что данная теория непротиворечива, если непротиворечива некоторая другая теория. Аналитическая геометрия Декарта (1619 г.) легко сводит вопрос о непротиворечивости геометрии к вопросу о непротиворечивости теории действительных чисел, т. е. к вопросу о непротиворечивости анализа. Но как установить непротиворечивость анализа? Разумеется, не при помощи геометрической модели: это привело бы к порочному кругу. Согласно Гильберту и Бернайсу [1934], для этой цели нельзя обратиться и к физическому миру. Дело в том, что ограниченная точность физических измерений не позволяет нам заявить, что континуум действительно дан нам в опыте; правильнее будет сказать, что континуум—это идея, полученная путем экстраполяции (или идеализации) того, что действительно является данными опыта[1]).

В силу сказанного предложение Гильберта доказать непротиворечивость классической математики, построенной в виде формальной системы, непременно предполагало использование некоторого нового метода взамен метода построения модели. Этот метод состоит в непосредственном использовании идеи непротиворечивости, сводящейся к отсутствию противоречия (парадокса), т. е. двух теорем, являющихся отрицаниями друг друга. Чтобы показать, что такой ситуации возникнуть не может, Гильберт предложил сделать доказательства в аксиоматической теории предметом специальной математической дисциплины, названной им *метаматематикой*, или *теорией доказательств*. Конечно, убедительность такого доказательства непротиворечивости должна зависеть от используемых в метаматематике методов. По этой причине Гильберт решил использовать в метаматематике лишь интуитивно убедительные методы, которые он называл «финитными»[2]). В особенности такие методы должны избегать использования «актуальной» («завершенной») бесконечности. Новый подход Гильберта позволяет избежать использования актуальной бесконечности и в самой формулировке проблемы доказательства непротиворечивости. Дело в том, что в любой данной теории имеется лишь счетно-бесконечное множество доказательств, а в утверждении о ее непротиворечивости говорится лишь о произвольной паре доказательств, а не обо всем множестве доказательств как о завершенном объекте. Предполагаемые объекты рассмотрения самой теории могут быть значительно менее элементарными. Таким образом, казалось правдоподобным, что проблема непротиворечивости, сформулированная в финитных терминах, может быть и решена финитными методами.

---

[1]) Гильберт и Бернайс [1934], стр. 15—17; цитируется на стр. 55 [ВМ].

[2]) Более подробная мотивировка выбора терминов: немецких — у Гильберта, английских у — Клини и их русских эквивалентов—на стр. 61 [ВМ].—*Прим. перев.*

В следующих трех параграфах мы подробнее обсудим, каким образом некоторые разделы математики могут быть представлены в виде формальных аксиоматических теорий и изучены в метаматематике.

Если Гильберт был в некотором роде лидером аксиоматического направления в математике, то Брауэр явился идеологом интуитивного подхода. Брауэровский и гильбертовский подходы могут быть соответственно охарактеризованы как «генетический» («конструктивный») и «экзистенциальный».

Согласно Вейлю [1946], «Брауэр выяснил и, как мне кажется, не оставил никакого сомнения о том, что не существует доводов, поддерживающих веру в экзистенциальный характер совокупности всех натуральных чисел... Этот ряд чисел, который растет, не останавливаясь ни на какой стадии, за счет перехода к следующему числу, представляет собой многообразие возможностей, открытых для бесконечности; он вечно остается в состоянии становления, а не является замкнутым царством вещей, существующих в себе».

В то время как Гильберт рассчитывал укрепить структуру классической математики посредством доказательства ее непротиворечивости, Брауэр был готов совсем отказаться от тех частей математики, где математики злоупотребляли словами, превышающими возможности точного осмысления. Брауэр предложил взамен построить «интуиционистскую» математику, простирающуюся лишь до тех пределов, до которых ведет интуиция. Согласно Брауэру, системы математических объектов должны формироваться на основе некоторых принципов построения, а не вводиться в обращение с самого начала целиком как множества, удовлетворяющие некоторому перечню аксиом.

Поскольку Брауэр признает в качестве интуитивной лишь «потенциальную» («незавершенную») бесконечность, он отказывается от признания логических принципов, требующих для своего обоснования использования представлений о бесконечных множествах как о чем-то завершенном. Так, в своей статье «Недостоверность логических принципов» [1908] он оспаривает мнение, согласно которому законы классической логики имеют абсолютную приложимость, не зависящую от содержания предмета обсуждения. Он подвергает, в частности, критике закон исключенного третьего: $P \vee \neg P$. Рассмотрим предикат $P(x)$, где областью изменения переменной x является некоторое множество D. В применении к $\exists x P(x)$ в качестве P закон исключенного третьего гласит, что либо в D существует такой x, что $P(x)$, либо в D нет такого x, что $P(x)$; символически: $\exists x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$. В случае когда D есть конечное множество (а $P(x)$ — такой предикат, что для любого значения x из D мы можем проверить, верно $P(x)$ или нет), Брауэр считает высказывание $\exists x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$ истинным. В самом деле, мы можем узнать $\exists x P(x)$ или же $\neg \exists x P(x)$, проверяя поочередно для каждого элемента x из D, выполняется для него $P(x)$ или нет. Поскольку D конечно, процесс этой проверки (по крайней мере в принципе) заканчивается. Но если D есть бесконечное множество, например счетное, как множество натуральных чисел, такая процедура проверки никогда не может закончиться. Если нам повезет, мы найдем такой x, что $P(x)$, проделав часть пути. Но если такого x вообще нет или же он есть, но расположен слишком далеко в натуральном ряду, а день страшного суда наступит слишком скоро, мы будем продолжать наши поиски до этого самого дня и так и не получим ответа на интересующий нас вопрос. Поэтому-то Брауэр и не находит оснований для признания утверждения $\exists x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$ всегда истинным, если D бесконечно. Цитируем Вейля [1946]: «Согласно его взглядам и пониманию истории, классическая логика была абстрагирована от математики конечных множеств и их подмножеств... . Забывая об этом ее ограниченном происхождении, впоследствии эту логику приняли ошибочно за нечто высшее и первичное по отношению ко всей математике и в конце концов стали применять без какого бы то ни было оправдания к математике бесконечных множеств».

Избранная Брауэром стезя чревата трудностями (мы далее увидим, что это относится и к позиции Гильберта). Начиная с 1918 г. развивается *интуиционистская математика*, частично (если говорить о полученных результатах) как усеченный вариант классической математики, а частично в ином направлении. В части, общей для классической и интуиционистской математики, интуиционистские («конструктивные»)[1]) доказательства зачастую оказываются труднее, но зато несут больше информации. Интуиционист настаивает, чтобы доказательство экзистенциального утверждения $\exists x A(x)$ непременно включало указание, как именно найти такое x, что $A(x)$. «Косвенное доказательство», показывающее, что допущение $\neg \exists x A(x)$ приводит к противоречию, не расценивается им как доказательство утверждения $\exists x A(x)$; по мнению интуициониста, такое доказательство устанавливает лишь $\neg \neg \exists x A(x)$[2]).

Коснемся теперь спора между Брауэром и Гильбертом. Брауэр считал, что даже если бы Гильберт преуспел в получении дока-

---

[1]) Обсуждение соотношения между интуиционистской и конструктивной математикой в задачи этой книги не входит, и автор, как правило, употребляет эти эпитеты как синонимы. По этому поводу см., например, Марков [1950], [1972], Шанин [1958] или комментарии А. А. Маркова к русскому изданию книги Гейтинга [1956].— *Прим. перев.*

[2]) Несколько более полное обсуждение вопроса дается в [ВМ], § 13. Превосходные введения в предмет—у Гейтинга [1934, 1955, 1956]. Книга Клини и Весли [1965] предполагает знакомство читателя с гл. I — XII (или, как минимум, IV—VIII) [ВМ] или с чем-либо эквивалентным.

зательства непротиворечивости классической математики, это не сделало бы классическую математику корректной. Так, он писал: «Неправильная теория, не натолкнувшаяся на противоречие, не становится от этого менее неправильной, подобно тому как преступное поведение, не остановленное правосудием, не становится от этого менее преступным» (Брауэр [1923]). Гильберт [1928] возражал: «Отнять у математиков закон исключенного третьего — это то же, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксерам пользоваться кулаками»[1]). Эта дискуссия между «формалистами», представляемыми Гильбертом, и «интуиционистами», представляемыми Брауэром, привела в конечном счете к тому, что интуиционисты согласились снять возражения против программы Гильберта, но при том лишь условии, что формалисты не будут считать, что доказательства непротиворечивости оправдывают приписывание содержательного смысла тем разделам математики, которые интуиционисты отвергают на том основании, что они не имеют интуитивной основы (Брауэр [1928]).

Но если формалисты согласятся, что классическая математика выходит за рамки интуитивной очевидности, им предстоит объяснить, в чем же тем не менее может состоять ценность ее неинтуиционистской части. Обращаясь к этой проблеме, Гильберт [1926], [1928] проводит различие между *действительными предложениями* математики, имеющими содержательный (интуитивный) смысл, и *идеальными предложениями* (использующими актуальную бесконечность), не имеющими такового. Присоединение «идеальных элементов» к некоторой системе для достижения определенных теоретических целей (упрощение доказательств теорем, уяснение их смысла с некоторой единой точки зрения и т. п.) достаточно обычно для современной математики. В качестве примера можно упомянуть проективную геометрию, где к «конечной» части плоскости присоединяется еще бесконечно удаленная прямая, в результате чего любые две (различные) параллельные прямые пересекаются в некоторой точке этой прямой. Таким образом, в проективной геометрии не только две различные точки принадлежат некоторой единственной прямой (проходящей через них), но верно и двойственное утверждение: две различные прямые принадлежат некоторой единственной точке (в которой они пересекаются). Согласно аргументации Гильберта, аналогичные цели преследует и присоединение идеальных предложений к действительным предложениям классической математики: именно благодаря этой процедуре достигаются присущие классической математике сила и изящество.

[1]) Такая аргументация безусловно заслуживает комментариев, которые читатель сможет найти в примечаниях к соответствующим местам русского издания [ВМ].— *Прим. перев.*

В результате математика оказывается теоретической конструкцией, от которой, как говорит Гильберт, неразумно теперь ожидать, что каждое ее отдельное предложение имеет реальный смысл. Ситуация в данном случае оказывается такой же, как в теоретической физике, где отнюдь не каждое предложение допускает непосредственную экспериментальную проверку: здесь с опытом согласуется вся теория в целом.

Конкретный пример теоретических выгод, доставляемых введением идеальных предложений в ходе доказательства действительных предложений, дает нам *аналитическая теория чисел*, где теоремы о целых числах доказываются средствами теории действительных или комплексных чисел. Таким путем получены доказательства многих предложений элементарной теории чисел, для которых либо вообще не известно неаналитических доказательств, либо они гораздо более сложны.

С этой защитой классической математики как простой и изящной систематизирующей схемы тесно связаны доводы, отстаивающие удобство классической математики для приложений к теоретическому естествознанию, особенно к физике. Как отметил Вейль [1926], математик сочтет правым Гильберта, если ему (математику) придется вместе с физиком вплотную заняться теоретическим построением мира; если же предоставить его самому себе, то он примет сторону Брауэра и ограничится интуитивными истинами [1]).

§ 37. Формальные системы, метаматематика

В § 36 при обсуждении проблемы формальной аксиоматики мы подчеркивали, что при выводе теорем из аксиом первоначальные термины рассматриваются как лишенные смысла: либо им вообще не приписывается никакого значения, либо же значение, которое они имеют, не принимается во внимание. Сказать же, что они обладают некоторым смыслом, играющим роль в процессе доказательства теорем, значит сказать, что для этих теорем важны некоторые свойства первоначальных терминов, помимо тех, что фигурируют в аксиомах. Но тогда описания этих дополнительных свойств следует сформулировать как дополнительные аксиомы.

Евклиду в «Началах» не удалось описать в его «аксиомах и постулатах» все свойства, используемые им в действительности. Его доказательства сопровождаются многочисленными чертежами. И понадобилось немало времени, чтобы прийти к очевидной для нас мысли, что на самом деле чертежи не должны быть существенной частью самого процесса доказательства: они либо облегчают процесс поиска доказательства, либо помогают следить за

---

[1]) См. Вейль [1949], стр. 50—62.

ходом доказательства, либо, наконец, способствуют запоминанию доказательств. На практике, однако, чертежи иногда служат источником информации, существенной для самого доказательства.

Последнее обстоятельство можно проиллюстрировать на печальном примере «теоремы», в которой «доказывается», что каждый треугольник — равнобедренный [1]). От многих доказательств Евклида такие «доказательства» отличаются лишь использованием чуть искаженных чертежей.

Используемые Евклидом «скрытые» допущения были выявлены уже в новейшее время и зафиксированы в виде аксиом Пашем [1882], Гильбертом [1899] и другими. Скажем, среди аксиом системы Гильберта имеется следующая (сформулированная впервые Пашем): *Если прямая, лежащая в плоскости некоторого треугольника и пересекающая одну из его сторон, не проходит через вершину треугольника, противолежащую данной стороне, то она пересекает одну из остальных сторон этого треугольника.* На наших чертежах это так, но в тексте Евклида нет ничего, что позволило бы доказать, что это обязательно должно быть так. Изящное изложение евклидовой геометрии средствами формальной аксиоматики с явной формулировкой всех принимаемых допущений дано Гильбертом в его «Основаниях геометрии» [1899].

Обратившись снова к формальной аксиоматике, мы видим, что, кроме *первоначальных терминов*, самих по себе смысла не имеющих, в проведении выводов используется еще смысл *слов естественного языка*. Но мы уже видели, что различные теории могут отличаться друг от друга не только принятыми в них математическими допущениями, но и логическими средствами. Поэтому, чтобы понятие теоремы данной теории стало совершенно точным, нам придется в качестве следующего шага проделать процедуру, примененную ранее к первоначальным терминам, и по отношению ко всем словам, используемым в доказательствах. Иными словами, проводя точку зрения формальной аксиоматики, мы должны отвлечься от смысла всех входящих в доказательства слов и проводить выводы исключительно на основе точно сформулированных правил, относящихся лишь к форме (а не к содержанию) предложений. Логика, используемая в процессе вывода в формальной аксиоматике, как раз и должна быть зафиксирована в виде таких правил, по крайней мере частично; частично же эта логика может быть выражена посредством логических аксиом.

Такая полная формализация была бы неосуществимой, если бы формализуемая теория формулировалась на естественном языке (скажем, на русском или английском): нерегулярности и

[1]) Болл [1892] (стр. 80—81 издания 1939 г.). «Доказательство» это воспроизведено Янгом [1911], стр. 143—145.

неоднозначности, присущие словам и выражениям естественных языков, сильно осложнили бы эту задачу.

Фактически современная математика с большой выгодой пользуется специальными символизмами, но, как правило, часть ее предложений, в том числе используемых в процессе логического вывода, выражена обычными языковыми средствами. Символическая запись равенств не только весьма экономна, но и представляет значительные удобства для различных преобразований (скажем, из $x+5=2$ получаем $x=2-5$, а затем и $x=-3$), которые, хотя и имеют содержательное обоснование, но на практике обычно производятся быстро, без задержек на обдумывание и обоснование каждого шага. Фактически это полуформальный способ рассуждений, в значительной мере обусловливающий мощь современной математики.

Полная формализация, которую мы собираемся провести, чтобы осуществить замыслы Гильберта и достичь некоторых других целей, получается путем сочетания обычной символики, принятой в современной математике, с символическим построением логики, идущим от работ Буля, Пирса, Фреге, Уайтхеда и Рассела и других авторов. Пользуясь обеими этими идеями, мы строим полностью символический язык для формализуемой теории. Для этого языка мы точно определяем *синтаксис* (посредством «правил образования») и *логику* (посредством «правил вывода», или «правил преобразования»). См. примечание на стр. 49. То, что получается в результате, мы будем называть *формальной системой*, или *формализмом*, или *логистической системой* [1]). Сам этот метод, приводящий к уточнению понятия теории, иногда называют *логистическим методом*.

Обсуждение свойств некоторой формальной системы, в том числе точное ее описание (т. е. определение правил образования и преобразования) и исследование относящихся к ней результатов, мы производим в некоторой другой теории (средствами другого языка), которую назовем ее *метатеорией* (а этот другой язык — *метаязыком*). Саму же формальную систему мы будем называть *предметной* (или *объектной*) *теорией* (и соответственно употреблять термины «*предметный язык*» или «*язык-объект*»). Изучение свойств формальной системы, проводимое содержательными математическими методами в рамках метаязыка, мы будем называть *метаматематикой*, или *теорией доказательств*.

В качестве метаязыка мы будем пользоваться обычным русским языком, причем пользоваться содержательным образом, т. е. на основе смысла слов, а не с помощью формальных правил (введение и употребление которых потребовало бы создания мета-

---

[1]) На стр. 60 [ВМ] в качестве синонимов приводятся также термины «формальная теория» и «формальная математика».— *Прим. перев.*

метаязыка). Поскольку в обслуживающей метаматематику части русского языка предметом обсуждения являются только такие «осязаемые материи», как символы, последовательности символов и т. п. элементы предметного языка, то эта часть языка в интересующих нас контекстах оказывается свободной от тех присущих естественному языку неясностей, которые и обусловили потребность в формализации.

Поскольку формальная система получается (как правило) в результате формализации некоторых разделов обычной неформальной или полуформальной математики, то символы, формулы и прочие элементы такой формальной системы истолковываются (интерпретируются) в терминах соответствующей неформальной или полуформальной математики. Совокупность значений, приписанных таким образом символам, формулам и прочим элементам формальной системы, мы будем называть ее (*подразумеваемой*, или *естественной*, или *стандартной*) *интерпретацией*[1]). Если мы не знаем этой интерпретации, данная формальная система не представляет для нас интереса. Но в метаматематике, в соответствии с ее задачами, формальная система должна изучаться именно как таковая, т. е. просто как система символов, лишенных всякого смысла, а ее интерпретация не должна приниматься во внимание. Когда мы говорим об интерпретации, мы не занимаемся метаматематикой.

Кроме того, как мы уже говорили в предыдущем параграфе, согласно программе Гильберта, метаматематика должна пользоваться лишь так называемыми «финитными» методами, которые являются интуитивно убедительными.

Соотнесем нашу теперешнюю терминологию с той, что была введена в первой части книги. Мы рассматриваем изучаемый нами язык как «формальную систему», только если это символический язык (а не часть какого-либо естественного языка, скажем русского или английского) и если для него определены точно аксиомы и правила вывода (а не просто введены такие теоретико-модельные понятия, как «общезначимость» и «следование»). Мы называем язык, используемый при изучении какого-либо предметного языка, «метаязыком» (или «синтаксисом»), только если в нем используются лишь финитные методы (хотя некоторые авторы и придерживаются более расширительного понимания термина «метаязык», не связывая его непременно

---

[1]) Если этой неформальной или полуформальной математической теории свойственна неопределенность, допускающая различные интерпретации (примером может служить абстрактная теория групп), мы можем употреблять термин «интерпретация» в единственном или во множественном числе в зависимости от того, на чем мы концентрируем наше внимание: на самой полуформальной математике как продукте творчества математиков или же на ее различных интерпретациях.

с указанным ограничением). Таким образом, введенные в первой части термины «предметный язык» и «язык исследователя» имеют более широкое значение, чем соответственно «формальная система» и «метаязык».

В первой части мы применяли термин «теория доказательств» в несколько более широком смысле, чем имел в виду Гильберт, которому мы далее намерены следовать; фактически в первой части мы не фиксировали точно никакого символического языка [1]).

Пользуясь подходящими определениями (сформулированными применительно к символическому языку) понятий «элементарной формулы» («атома») исчисления высказываний, «элементарного предикатного выражения» («иона») исчисления предикатов или «элементарного функционального выражения» («мезона») исчисления предикатов с функциональными символами (§ 28) в качестве основы для определения понятия «формулы» из § 1, 16 или 29 (или определений понятий «терма» и «формулы» из § 28 и 29), мы придем к формальной системе исчисления высказываний, исчисления предикатов или исчисления предикатов с равенством [2]). В результате этой процедуры все доказанные в первой части книги теоремы становятся метаматематическими теоремами, за исключением тех, в чьих формулировках используются понятия «общезначимости» и «следования» для исчисления предикатов (с равенством или без), определения которых нефинитны. (Впрочем, следствие из теоремы 12, распространенное в § 23, 28 и 29 на исчисление предикатов с использованием в доказательстве финитного отношения $1\text{-}\models$, относится к метаматематике, хотя обобщение самой теоремы 12 на исчисление предикатов не является метаматематической теоремой.)

Объявленная Гильбертом цель спасти классическую математику от парадоксов с помощью доказательства ее непротиворечивости (§ 36) предполагала создание формальных систем, охва-

[1]) В нашей «теории доказательств» в первой части мы пользовались только финитными методами, хотя и не оговаривали этого явно. В «теории моделей» мы не ограничивались одними финитными методами. В современной «теории моделей» часто имеют дело с чисто символическим языком. «Теорию доказательств» мы излагаем здесь (с некоторыми видоизменениями), следуя ее создателю Гильберту. Основоположником же значительной части современной теории моделей является Тарский [1938], [1935] и др.. Некоторые вопросы, близкие к проблематике работы Тарского [1933], рассматриваются в статье Карнапа [1935]. Вместо «теория доказательств» иногда говорят «синтаксис», а вместо «теория моделей» — «семантика». Обширную библиографию по теории моделей см. в сборнике работ под редакцией Аддисона, Генкина и Тарского [1965]. (Из литературы на русском языке с этой же целью можно воспользоваться статьей Ершова и др. [1965], последующими публикациями в новосибирском издании «Алгебра и логика» и докторской диссертацией Ю. Ш. Гуревича (Свердловск, 1967). — *Перев.*)

[2]) Как будет видно из содержания § 38, при этом могут понадобиться некоторые дополнительные уточнения, связанные с употреблением скобок.

тывающих (элементарную) арифметику (т. е. теорию натуральных чисел, а также, быть может, аналогичных «систем» из $\aleph_0$ объектов), анализ (т. е. теорию действительных чисел и т. п.) и, по-видимому, также более широкие разделы математики. Однако уже метаматематические проблемы, связанные с арифметикой, оказались столь трудными, что именно к арифметическим (и подобным им) системам было обращено главное внимание Гильберта и его школы на протяжении двух десятилетий (1920—1940 гг.). Одну из таких формальных систем **N** мы опишем в следующем параграфе, причем она также будет служить основным объектом приложений для результатов гл. V. Некоторые другие формальные системы мы опишем в § 39.

Разумеется, в метаматематике есть интересные проблемы и кроме проблемы непротиворечивости; здесь в различных направлениях было получено немало замечательных открытий, среди которых оказались и весьма неожиданные. О некоторых из них мы еще поговорим ниже.

Помимо прочего, у метаматематических исследований есть еще поле приложений, связанных с построением и изучением «машинных языков» (и «языков программирования») для использования в современных быстродействующих вычислительных машинах. Информация должна вводиться в вычислительную машину в виде абсолютно стандартных последовательностей символов, записанных на ленте, перфокартах или еще как нибудь и не требующих для своего прочтения ни малейшего размышления. Для формирования таких последовательностей символов надо разработать точные синтаксические правила, подобные тем правилам, которые впервые стали объектом математического исследования в рамках гильбертовской метаматематики.

§ 38. Формальная арифметика

Опишем теперь одну конкретную формальную систему **N**, предназначенную для формализации элементарной теории чисел (арифметики натуральных чисел[1])). Мы начнем наше описание с введения *формальных символов*, играющих роль букв алфавита нашего формального языка (хотя бо́льшая их часть интерпретируется целыми словами обычного русского языка). Вот эти символы:

$$\sim,\ \supset,\ \&,\ \vee,\ \neg,\ \forall,\ \exists,\ =,\ +,\ \cdot,\ ',\ 0,\ a,\ b,\ c,\ \ldots,\ |,\ (,).$$

Запятые в этой строке, многоточие и точка в конце не относятся к числу формальных символов: это обычные знаки пунктуации,

[1]) В оригинале всюду просто «number theory»; ср. [BM], начало § 9.— *Прим. перев.*

используемые нами для разделения формальных символов при печати.

Символы a, b, c, ... — это «переменные»; нам нужно, чтобы их совокупность была (потенциально) счетно-бесконечной. Но, поскольку в латинском алфавите всего 26 букв, мы будем для определенности полагать, что *переменные* — это любая из этих 26 букв, а также любая из них, снабженная справа одним или несколькими вхождениями символа $_|$; например, a, $a_|$, $a_{||}$, $a_{|||}$, b, $b_|$, $b_{||}$, $b_{|||}$ и т. п. суть переменные[1]). Таким образом, переменные, отличные от 26 строчных букв латинского алфавита, — это не одиночные формальные символы, а некоторые конечные последовательности формальных символов. Всего в алфавит нашей формальной системы **N** входит, следовательно, в точности 41 формальный символ.

Отметим, что здесь и ниже a, b, c, ..., $a_|$, $a_{||}$, $a_{|||}$, ... и т. п. символы, потроенные с помощью рукописных латинских букв, — это переменные самого предметного языка, а не их обозначения в метаязыке вроде «a», «b», «c», ..., «x», «y», «z», «x_1», «x_2», «x_3», ..., построенные с помощью прямых латинских букв (следуя практике, начатой в § 16). Иначе говоря, теперь у нас a — это именно a, в то время как x может обозначать любую из переменных a, b, c, $a_|$ и т. п. в различных метаматематических высказываниях о переменной x[2]).

Конечные последовательности (вхождений) формальных символов мы будем называть *формальными выражениями*. Так же как роль формальных символов в символическом языке аналогична роли букв в обычном языке, роль формальных выражений в символическом языке со структурной точки зрения аналогична роли слов обычного языка, хотя при интерпретации многие из них могут представлять целые фразы. Большинство формальных выражений, вроде, скажем, $))a0=$ или aaa, не будут представлять для нас никакого интереса. Но сейчас мы определим два конкретных класса действительно важных формальных выражений: «термы», интерпретируемые как имена существительные[3]) из естественного языка, и «формулы», интерпретируемые как повествовательные предложения. Каждое из этих определений состоит из нескольких пунктов.

---

[1]) Если на практике нам окажется удобнее писать «a_1», «a_2», «a_3» и т. д. вместо соответственно «$a_|$», «$a_{||}$», «$a_{|||}$» и т. д., то мы можем рассматривать первые обозначения как метаматематические сокращения для последних.

[2]) По поводу всех формальных символов (включая переменные) здесь можно повторить сказанное в § 1 (примечание 1 на стр. 15) относительно символов $\sim$, $\supset$ &, V и $\neg$, которые там (как и здесь) были символами предметного языка. Желая как-то обозначить формальные символы (ввести для них имена) в метаязыке, мы просто пользуемся экземплярами этих символов для обозначения их самих («автонимно»).

[3]) И заменяющие их местоимения.— *Прим. перев.*

Определение «терма». 1. 0 есть *терм*. 2. Переменные a, b, c, … суть *термы*. 3—5. Если r и s — термы, то $(r)'$, $(r)+(s)$ и $(r)\cdot(s)$ — *термы*. 6. Никаких других *термов*, кроме определенных согласно 1—5, нет.

В этом определении «r» и «s» — не формальные символы, а метаматематические переменные, используемые в метаязыке для представления некоторых формальных выражений (в данном случае — ранее построенных термов). Таким образом, «$(r)+(s)$» — это не формальное выражение, а выражение метаязыка, становящееся формальным выражением в результате подстановки термов вместо «r» и «s».

Примеры термов: 0, a, b, c, $a_{|}$, $a_{||}$, $(0)'$, $((0)')+(a)$, $(((0)')+(a))\cdot(b)$.

Определение «формулы». 1. Если r и s — термы, то $(r)=(s)$ — *формула*. 2—6. Если A и B — *формулы*, то $(A)\sim(B)$, $(A)\supset(B)$, $(A)\,\&\,(B)$, $(A)\vee(B)$ и $\neg(A)$ — *формулы*. 7—8. Если A — *формула*, а x — переменная, то $\forall x(A)$ и $\exists x(A)$ — *формулы*. 9. Никаких *формул*, кроме определенных согласно 1—8, нет[1].

Так же как «r» и «s» в определении терма, здесь «A» и «B» суть метаматематические переменные, представляющие (заменяющие) произвольные формулы, а «x» — метаматематическая переменная, представляющая произвольную формальную переменную. Например, выражение «$\forall x(A)$» становится формулой после замены «x» произвольной переменной, скажем a, а «A» — произвольной формулой, например $(a)=(b)$, в результате чего мы получаем формулу $\forall a((a)=(b))$. Если мы вместо a возьмем какую-нибудь другую переменную, например b, то получим другую формулу: $\forall b((a)=(b))$. Сказанное объясняет, зачем в п. 7 нашего определения формулы понадобилось пользоваться метаматематической переменной «x»: если бы вместо нее там стояла, скажем, переменная a, то мы бы могли получить описанным

[1]) Важно помнить, что формулами формальной системы являются не любые формулы содержательной математики и не произвольные конечные последовательности (вхождений) формальных символов данной системы, а лишь в точности те конечные последовательности формальных символов, которые построены согласно правилам, определяющим понятие «формулы» (в нашем определении имеется девять таких правил).

Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, многие авторы пользуются термином «правильно построенная формула», или «ппф». (Будучи последовательными, в этом случае надо было бы тогда уж говорить также «правильно построенный терм», или «ппт», а также «правильно построенное доказательство», или «ппд».) Находя термин «правильно построенная формула» громоздким и потому несколько неудобным, мы предпочитаем, после многократных разъяснений и оговорок, говорить (следуя Гильберту и Бернайсу [1934, 1939]) просто «формула». В тех же сравнительно редких случаях, когда нам понадобится говорить о произвольных конечных последовательностях формальных символов, мы можем пользоваться введенным выше более длинным (нежели «формула». — *Перев.*) термином «формальные выражения».

здесь образом лишь формулу $\forall a\,((a)=(b))$ (но не $\forall b\,((a)=(b))$, $\forall c\,((a)=(b))$ и т. п.).

Данное здесь определение «терма» в основном согласуется со сказанным в § 28 для случая четырех мезонов 0, $(—)'$, $(—)+(—)$ и $(—)\cdot(—)$, построенных с помощью *индивидного символа* (*0-местного функционального символа*) 0, *1-местного функционального символа* $'$ и двух *2-местных функциональных символов* $+$ и $\cdot$. Определение же «формулы» согласуется со сказанным в § 28 (в развитие § 16) для случая одного иона $— = —$, построенного с помощью *2-местного предикатного символа* $=$[1]).

Если нам дано некоторое формальное выражение, как мы можем определить, является ли оно термом или формулой? Рассмотрим пример:

$$(1)\qquad (\exists c\,((((c)')+(a))=(b)))\supset(\neg\,((a)=(b))).$$

Прежде всего мы видим, что каждый из символов c, a, b является термом. Двигаясь далее изнутри формулы и руководствуясь расположением скобок, мы последовательно убеждаемся в том, что $(c)'$ и $((c)')+(a)$ суть термы, так что $(((c)')+(a))=(b)$, $\exists c\,((((c)')+(a))=(b))$, $(a)=(b)$, $\neg\,((a)=(b))$ и, наконец, само выражение (1) — формулы. На практике, проверяя, являются ли какие-нибудь очень длинные формальные выражения термами или формулами, мы можем предварительно следующим образом разбить на пары все входящие в это выражение скобки. Начинаем с какой-нибудь пары, состоящей из левой скобки «(» и стоящей справа от нее правой скобки «)», причем между ними нет ни одной скобки; снабдим каждую из скобок этой пары нижним индексом $_1$. Повторяем теперь эту же процедуру, приписывая каждый раз паре скобок, еще не снабженных индексами, последовательно индексы $_2$, затем $_3$ и т. д. В результате применения всей этой процедуры к выражению (1) получится следующее:

$$({}_7\exists c\,({}_6({}_4({}_2({}_1c)_1')_2+({}_3a)_3)_4=({}_5b)_5)_6)_7\supset({}_{11}\neg\,({}_{10}({}_8a)_8=({}_9b)_9)_{10})_{11}.$$

А теперь, следуя порядку нумерации скобок, мы можем осуществить шаг за шагом проверку того обстоятельства, что формальное выражение (1) является формулой. Назовем *собственным спариванием* $2n$ скобок, n из которых — левые, а n — правые, такое 1—1-соответствие («спаривание») между ними[2]), при котором каждой левой скобке ставится в соответствие некоторая правая скобка, причем никакие две полученные пары не разделяют друг друга, т. е. не расположены так: $(_i\,(_j\,)_i\,)_j$. Можно доказать, что любые

[1]) См. примечание 2 на стр. 241.

[2]) При этом «спаренные» скобки снабжаются одинаковыми индексами.— *Прим. перев.*

$2n$ скобок допускают не более одного собственного спаривания. Можно также доказать, что в любом терме или формуле всегда существует собственное спаривание скобок, посредством которого мы в действительности всегда можем найти, в каком порядке строится данный терм или формула согласно пунктам соответствующего индуктивного определения[1]).

Как видит читатель, здесь мы требуем, чтобы скобки вводились каждой из операций, посредством которых из термов и формул строятся другие содержащие их термы и формулы. Этим наше теперешнее изложение отличается от сказанного в § 1 и 16, где назначение скобок было чисто вспомогательное и сводилось к тому, чтобы избежать двусмысленности при определении области действия каждой из операций. Впрочем, мы устроимся так, чтобы можно было действовать, как раньше. Для этого мы введем некоторые соглашения, касающиеся сокращений в наших метаматематических записях: а именно мы будем опускать скобки всякий раз, когда их можно восстановить (как это делалось в § 1 и 16), пользуясь соглашением: рассматриваемые операторы имеют ранги, понижающиеся слева направо в следующем порядке:

$$\sim,\ \supset,\ \&,\ \vee,\ \neg,\ \forall x,\ \exists x, =,\ +,\ \cdot,\ '.$$

В соответствии с этим соглашением формула (1) может быть сокращена до $\exists c(c'+a=b)\supset\neg a=b$ или даже до $\exists cc'+a=b\supset\neg a=b$. Такие вычеркивания ненужных скобок мы будем применять только для удобства изложения метаматематики, строгие же определения понятий «терм» и «формула» оставим неизменными. Такой подход позволит оставить эти фундаментальные метаматематические определения более простыми, чем если бы мы ввели в них дополнительные явные правила об избирательном употреблении скобок. Разумеется, наш логистический метод требует полнейшей точности в формулировке таких фундаментальных определений. Заметим еще, что иногда для удобства чтения формул мы будем заменять круглые скобки квадратными или фигурными[2]).

Введем также новые метаматематические символы, позволяющие внести дальнейшие сокращения в запись термов и формул. Так, «$a\neq b$» есть сокращение для $\neg a=b$, а «$a<b$» — для $\exists c(c'+a=b)$ или $\exists d(d'+a=b)$ и т. п. Здесь «$\neq$» и «$<$» — символы, используемые лишь для сокращений; формальными символами они не являются. В случае сокращения «$a<b$» возникает некоторая неопределенность, какую переменную приписать к квантору, применяемому для восстановления сокращения. Общее правило здесь будет гласить, что «$\mathrm{r}<\mathrm{s}$» есть сокращение записи $\exists \mathrm{x}(\mathrm{x}'+\mathrm{r}=\mathrm{s})$,

[1]) См. [BM], стр. 26—29, 70—71.

[2]) Также, разумеется, не внося изменений в определения понятий «терм» и «формула». — *Прим. перев.*

где x может быть любой переменной, не входящей ни в r, ни в s. Согласно этому правилу, два правильных сокращения записи «$r < s$» будут конгруэнтны (§ 16), так что для наших обычных целей совершенно несущественно, какое именно из допустимых сокращений мы выбрали. (Действительно, во-первых, две конгруэнтные формулы имеют один и тот же смысл при интерпретации символизма. Во-вторых, в метаматематике, согласно сохраняющим здесь силу теореме 25 и следствию 2 из теоремы 23 из § 24, из доказуемости одной из двух конгруэнтных формул следует доказуемость другой. Наконец, в-третьих, любая формула, фигурирующая в соотношении выводимости, может быть заменена любой конгруэнтной ей.) В результате всех этих соглашений формула (1) может быть теперь записана в виде $a < b \supset a \neq b$. Дальнейшие употребительные сокращения — это «$a > b$» вместо $b < a$, «$a < b < c$» вместо $a < b \& b < c$ и т. п., а также «1» вместо $0'$ (т. е. вместо $(0)'$), «2» вместо $1'$ (т. е. вместо $((0)')'$), «3» вместо $2'$ и т. д.

Перечень формальных символов и определения «терма» и «формулы» вместе составляют *правила образования* нашей формальной системы[1]) (аналогичные синтаксическим правилам обычной грамматики). Теперь мы приведем определения, придающие нашей системе некоторую дедуктивную структуру (*правила преобразования*, или *дедуктивные правила*). Начнем мы со списка схем аксиом, конкретных аксиом и правил вывода (для всех этих объектов мы будем употреблять общий термин «постулаты»). После того как мы приведем этот список, мы определим для **N**, исходя из этого списка, следующие понятия: «(формальное) доказательство (формулы B_l)», «B доказуема» (символически: «$\vdash$B»), «(формальный) вывод (формулы B_l) из формул $A_1, \ldots, A_m$ (с фиксированными переменными)», «B (формально) выводима из $A_1, \ldots, A_m$ (с фиксированными переменными)» и др. так же, как ранее это делалось, исходя из соответствующих списков постулатов, для исчисления высказываний (§ 9) и исчисления предикатов (§ 21).

Мы снова (как и в § 9) считаем необходимым подчеркнуть, что (формальное) доказательство некоторой формулы B есть объект предметного языка (§ 1, 37), а именно определенного рода конечная последовательность формул, в свою очередь являющихся определенного рода конечными последовательностями формальных символов, причем выражение «определенного рода»

[1]) В [BM] автор (§ 16, 17) не включает «алфавит» формальных символов в число «правил образования» Впрочем, как видно из сказанного ниже о возможности включения аксиом (как и в [BM], § 19) в число «правил преобразования», это несущественно, тем более что здесь терминология выдерживается последовательнее, поскольку уже в числе формальных символов имеются не «однобуквенные».— *Прим. перев.*

понимается здесь в точном соответствии с данными выше определениями. Чтобы говорить о таких доказательствах, мы должны их построить или «доказать» их существование. Когда мы здесь говорим «доказать» и заключаем это слово в кавычки, то понимаем его просто как слово из обычного русского языка, в обычном интуитивном смысле (как *содержательное* доказательство), принятом в языке исследователя, который мы теперь называем метаязыком. *Формальное* доказательство есть доказательство некоторой формулы, которая (для метаматематики) есть лишенная всякого содержательного смысла конечная последовательность символов. *Содержательное* же (неформальное) доказательство (в метаматематике) есть доказательство некоторого вполне осмысленного утверждения о бессмысленных формальных объектах, причем это содержательное доказательство должно убеждать нас в истинности этого утверждения. Таким образом, «доказательство того, что $\vdash$ B» (или «доказательство доказуемости B»)—это содержательное доказательство факта существования формального доказательства формулы B. Мы могли бы попробовать называть неформальные (содержательные) доказательства каким-нибудь другим словом, отличным от слова «доказательство», но нам представляется это неудобным, так что будем уж просто усматривать из контекста, где идет речь о формальном доказательстве (в предметном языке), а где—о содержательном (в метаязыке)[1].

Обратимся теперь к постулатам формальной системы **N**. Прежде всего—это все постулаты исчисления предикатов, а именно три правила вывода: $\supset$-правило (называемое также MP, § 9 и теорема 3), $\forall$-правило (§ 21 и теорема 16) и $\exists$-правило (§ 21 и теорема 16), а также схемы аксиом 1a—10b (§ 9 и теорема 2), $\forall$-схема и $\exists$-схема (§ 21 и теорема 15), так что все формулы, имеющие тот же вид, что эти схемы, являются аксиомами системы **N**. В отличие от § 21, где r в $\forall$- и $\exists$-схемах означало непременно переменную, мы здесь примем более общую позицию § 28, согласно которой r в этих схемах может быть любым таким термом, что его можно подставлять вместо свободных вхождений переменной x в A(x), так что никакое вхождение никакой переменной в *результирующие* вхождения r в формулу A(r) не окажется связанным. Мы будем называть такие термы r *свободными для* x *в* A(x) (обобщая тем самым определение, данное в § 18 для переменных, на термы, как это сделано в § 28). Например, беря в качестве x переменную a, в качестве r—терм $d'+e$, а в качестве A(x)—формулу $\exists c(c'+a=b) \& \neg a=0$, мы

[1]) Это решение представляется чрезвычайно облегчающим перевод книги: в английском языке как раз есть два достаточно распространенных термина для различения формальных и содержательных доказательств (proof и demonstration), но различать их по-русски было бы действительно неудобно.— *Прим. перев.*

удовлетворим данному условию; но оно не будет выполнено, если значения x и r будут те же самые, а значением A(x) будет формула $\exists d\,(d' + a = b)\,\&\,\neg a = 0$.

Следовательно, все утверждения вида «$\vdash$B», «$A_1, \ldots, A_m \vdash$ B» или «$A_1, \ldots, A_m \vdash^{x_1 \ldots x_q}$ B» (прямые правила), верные для исчисления предикатов, оказываются верными и для системы **N** (ср. § 21). Кроме того (как и в § 28), r в прямых правилах теоремы 21 может быть любым термом в принятом теперь смысле, а в следствиях этой теоремы $r_1, \ldots, r_p$ может быть любым перечнем термов, не обязательно различных, в каждом конкретном случае удовлетворяющих соответствующим условиям свободности.

Кроме постулатов исчисления предикатов (с указанным выше обобщением относительно терма r в $\forall$- и $\exists$-схемах), в системе **N** имеется еще одна схема аксиом 13 и восемь конкретных аксиом 14—21. В схеме аксиом 13 x есть произвольная переменная, A(x) — произвольная формула, а A(0) и A(x′) — соответственно результаты подстановки термов 0 и x′ вместо свободных вхождений x в A(x). (Эти подстановки автоматически свободны.)

13. $A(0)\,\&\,\forall x\,(A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$.

14. $a' = b' \supset a = b$.	15. $\neg a' = 0$.
16. $a = b \supset (a = c \supset b = c)$.	17. $a = b \supset a' = b'$.
18. $a + 0 = a$.	19. $a + b' = (a + b)'$.
20. $a \cdot 0 = 0$.	21. $a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Таким образом, формальная система **N** состоит из исчисления предикатов плюс некоторые «нелогические аксиомы» («математические аксиомы»), а именно восемь конкретных аксиом 14—21 и $\aleph_0$ аксиом по схеме аксиом 13[1]).

На систему **N** распространяется теорема о дедукции (теорема 11, § 10, 22). Действительно (как в § 29), мы можем рассмотреть новые аксиомы в рамках прежнего случая 3. Поэтому для **N** имеют место все правила введения и удаления из теорем 13 и 21 (5 правил вспомогательного вывода, основанных на теореме о дедукции, и 13 прямых правил).

Как уже говорилось в § 37, формальная система, представляющая собой результат формализации некоторого фрагмента содержательной математики, имеет «подразумеваемую» (иначе: «естественную», или «стандартную») интерпретацию. (Когда мы

---

[1]) Большинство идущих далее замечаний (вплоть до утверждений (A) и (B)) относится по существу к любой формальной системе, состоящей из исчисления предикатов (или исчисления предикатов с равенством), дополненного некоторыми нелогическими аксиомами. В частности, это относится и к самому исчислению предикатов с равенством как исчислению, основанному на исчислении предикатов без равенства (§ 29). Для систем же, основанных на исчислении предикатов с равенством, «нелогическими аксиомами» мы будем называть те аксиомы, которые добавлены к исчислению предикатов с равенством.

обсуждаем подобные вопросы — и вообще любые вопросы теории моделей, — мы выходим за рамки метаматематики.) Фрагмент содержательной математики, формализация которого была нашей целью при построении системы **N**, — это арифметика натуральных чисел. Поэтому при подразумеваемой интерпретации переменные пробегают натуральные числа $\{0, 1, 2, \ldots\}$, т. е. предметной областью этой системы служит натуральный ряд. Логические символы $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$ и $\exists$ интерпретируются, как в гл. I и II (в классической логике). Функциональный символ $'$ представляет функцию перехода к следующему натуральному числу (т. е. функцию прибавления единицы), а 0 («нуль»), $+$ («прибавить»), $\cdot$ («умножить») и $=$ («равно») имеют те самые значения, которые выражаются этими символами в обычной содержательной математике[1]). Все термы системы **N** — это обозначения (имена) для натуральных чисел, определенных или неопределенных, а формулы **N** выражают высказывания о натуральных числах[2]).

Нелогические аксиомы при интерпретации играют ту же роль, что допущения в определении отношения следования (II) в § 20, причем все входящие в эти аксиомы свободные переменные имеют интерпретацию всеобщности. Например, беря аксиому 14 в качестве постоянного допущения (аксиомы) элементарной арифметики, мы имеем в виду, что для любой пары натуральных чисел a и b из $a+1=b+1$ следует $a=b$. Иначе говоря, эта аксиома считается выражающей тот же смысл, что ее замыкание $\forall a \forall b (a'=b' \supset a=b)$.

С этой интерпретацией согласуются и дедуктивные правила системы **N**. Действительно, с помощью правила $\forall$-введения теоремы 21 (с пустой Г, так что условие (В) здесь не играет роли) замыкание каждой аксиомы выводимо из соответствующей аксиомы. Обратно, если в качестве нелогических аксиом нам даны замыкания нынешних нелогических аксиом, то последние оказываются выводимыми из первых посредством $\forall$-удаления. Таким образом, для **N** не играет существенной роли, берутся в качестве нелогических аксиом формулы со свободными переменными или их замыкания. Открытые аксиомы (и доказуемые формулы) удобнее писать, и пользование ими соответствует обычной математической практике[3]). Теперь мы естественным образом

---

[1]) Мы исходим из того, что каждый раз из контекста ясно, когда 0, $'$, $+$, $\cdot$ и $=$ употребляются как формальные символы, а $\neq$, $<$, $>$, $1, 2, 3, \ldots$ — как сокращения некоторых формальных выражений, а когда все эти символы употребляются неформально.

[2]) См. примечания к стр. 97 и к стр. 178.

[3]) Тарский ([1933], книга Тарского, Мостовского и Робинсона [1953] и др.) называет замкнутую формулу *предложением*. Мы же пользуемся этим термином просто для наименования лингвистических объектов (повествовательных предложений) в неформальном языке, формализуемых формулами (как открытыми, так и замкнутыми).

обобщим терминологию, принятую в связи с (временными) допущениями в § 20, и будем говорить, что свободные переменные в аксиомах системы **N** (так же как и в любых доказуемых формулах; ср. упр. 23.4) имеют «интерпретацию всеобщности». (В соотношениях выводимости системы **N** свободные переменные исходных формул, имеющие условную интерпретацию, обозначают в заключении B те же натуральные числа, что и в исходных формулах $A_1, \ldots, A_m$, т. е. те самые числа, которые удовлетворяют условиям, выраженным формулами $A_1, \ldots, A_m$; все же остальные свободные переменные формулы B имеют интерпретацию всеобщности; ср. упр. 23.5, где можно считать, что список $x_1, \ldots, x_q$ содержит все свободные переменные формулы B, не свободные в $A_1, \ldots, A_m$.)

С помощью $\forall$-введения и $\forall$-удаления доказывается следующее утверждение: (A) $\vdash$ B *в формальной системе* **N** *тогда и только тогда, когда для некоторого перечня* $A_1, \ldots, A_m$ *нелогических аксиом системы* **N** $\forall A_1, \ldots, \forall A_m \vdash B$ *в исчислении предикатов*. Относительно второй части утверждения («только тогда») заметим, что в качестве $A_1, \ldots, A_m$ можно взять (конечный) список нелогических аксиом, фактически используемых в какомлибо конкретном доказательстве формулы B[1]).

При рассмотрении логики (гл. II и III) мы не имели в виду никакой конкретной предметной области и никакой конкретной интерпретации ионов и мезонов (за исключением выражений вида — = — в § 29). Посмотрим, каким образом введенные тогда теоретико-модельные понятия общезначимости и «следования» (символически «$\models$») применяются к теперешней ситуации. Нам понадобится обратиться к исчислению предикатов с функциями (§ 28), поскольку в **N** в качестве мезонов имеются функциональные символы $+$, $\cdot$, $'$ и 0. Мы можем воспользоваться понятиями, описанными в § 29, в котором имеются и функции, и равенство, причем предикатный символ = имеет значение равенства (тождества), которое он как раз и имеет в подразумеваемой интерпретации системы **N**. Действительно, хотя мы строили **N** в рамках теории доказательств на базе исчисления предикатов без равенства, постулаты этого исчисления хороши и для исчисления предикатов с равенством.

[1]) Доказательство формулы B в **N**, использующее в качестве нелогических аксиом лишь формулы $A_1 \ldots A_m$, не является, вообще говоря, выводом B из $A_1, \ldots, A_m$ в исчислении предикатов, в котором (выводе) все переменные остаются фиксированными. В таком выводе $\forall$- и $\exists$-правила можно применять лишь (по отношению к первым вхождениям $A_1, \ldots, A_m$) к переменным, не входящим свободно в исходные формулы. В доказательстве в системе **N**, где $A_1, \ldots, A_m$ рассматриваются не как исходные формулы с фиксированными переменными, а как аксиомы, это ограничение отпадает. Поэтому в формулировке (A) нам не обойтись без кванторов всеобщности.

По самому смыслу термина «нелогические аксиомы» системы **N** не общезначимы (или если общезначимость понимается, как в § 29, то, кроме аксиом 16 и 17, все остальные все равно не будут общезначимыми). Таким образом, теорема 12 не переносится механически на систему в виде «Если $\vdash$ E, то $\models$ E». Вместо этого мы, пользуясь предложением (A), следствием из теоремы 11 (распространенным на **N**), теоремой 12 и следствием из теоремы 8 (в любой из формулировок § 28 или 29), получим следующее предложение: (B) *Если* $\vdash$B *в* **N**, *то для некоторого перечня* $A_1, \ldots, A_m$ *нелогических аксиом системы* **N** $\forall A_1, \ldots . \forall A_m \models$ B. Таким образом, если $\vdash$ B в **N**, то B принимает значение t в любой непустой области D и при каждом распределении значений в D, при котором замыкания всех нелогических аксиом получают значение t.

Что же это за области D и распределения в них? Или, говоря менее специальным языком, при каких интерпретациях все нелогические аксиомы системы **N** оказываются истинными при интерпретации всеобщности их свободных переменных? Одна из таких интерпретаций — это уже описанная подразумеваемая интерпретация **N**. Могут ли нелогические аксиомы этой системы оказаться истинными и при других ее интерпретациях, — это вопрос, требующий специального изучения; мы сможем ответить на него в гл. VI (§ 53).

Рассмотрим теперь значение каждой из нелогических аксиом системы **N** в подразумеваемой ее интерпретации.

Аксиомы 14 и 15 и аксиомная схема 13 представляют собой формализации третьей, четвертой и пятой аксиом из списка, состоящего из пяти аксиом, предложенного Пеано [1889] в качестве аксиоматики для арифметики натуральных чисел [1]). Роль первой пеановской аксиомы, согласно которой 0 есть натуральное число, играет в **N** правило образования, согласно которому 0 есть терм, а роль второй аксиомы этой аксиоматики («если n есть натуральное число, то и $n+1$ есть натуральное число») — правило образования, по которому если r есть терм, то и r′ есть терм: ведь все термы в нашей системе интерпретируются как выражения для натуральных чисел.

Аксиомы 16 и 17 — это аксиомы для отношения равенства. Мы не постулируем здесь рефлексивность равенства ($a=a$), так как она выводима (как мы ниже увидим) из аксиом 16 и 18 в исчислении предикатов, а следовательно, доказуема в **N**. С помощью $a=a$ и аксиомы 16 доказываются симметричность и

[1]) Сам Пеано рассматривал положительные целые числа. Исчерпывающее разъяснение этих аксиом есть в [BM], § 6 и 7 (и § 8, перекрывающий наш § 36). Для целей настоящего обзора это разъяснение не существенно. Роль пятой аксиомы Пеано (нашей схемы аксиом 13) иллюстрируется ниже в примере 2, а роль третьей и четвертой его аксиом — в упр. 38.5.

транзитивность равенства (см. ниже). Аксиома 17 требует, чтобы значение функции непосредственного следования $'$ полностью определялось значением переменной, к которой она применяется. Согласно терминологии § 29, мы можем назвать эту аксиому «(открытой) аксиомой равенства для $'$». Как мы покажем ниже, две аксиомы равенства для $+$ и две аксиомы равенства для $\cdot$ в **N** доказуемы..

Аксиомы 18—19 и 20—21 играют роль «рекурсивных определений» (или «определений по индукции») соответственно функций $+$ (сложения) и $\cdot$ (умножения). Каким же образом они «определяют» эти функции? Во всяком случае, это не определения, попросту вводящие некоторые сокращенные обозначения для каких-то уже имеющихся комбинаций символов. Здесь слово «определение» имеет другой смысл. Два равенства 18 и 19 позволяют нам для любого фиксированного значения a (например, 3) определить значение терма $a+b$ последовательно для значений b, равных 0, 1, 2, ..., следующим образом (здесь мы воспользуемся неформальным способом записи):

A_0^3) $3+0=3$ [по аксиоме 18],
A_1^3) $3+1=3+0'=(3+0)'$ [по аксиоме 19] $=3'$ [по (A_0^3)] $=4$,
A_2^3) $3+2=3+1'=(3+1)'$ [по аксиоме 19] $=4'$ [по (A_1^3)] $=5$,

. . . .

Теперь с помощью равенств (A_b^a), дающих возможность получить значение $a+b$ для любых данных значений a и b, мы можем аналогичным образом определить и значения $a \cdot b$ (скажем, для значения a, равного 3):

(M_0^3) $3\cdot 0=0$ [аксиома 20],
(M_1^3) $3\cdot 1=3\cdot 0'=3\cdot 0+3$ [аксиома 21] $=0+3$ $[(M_0^3)]=3$ $[(A_3^0)]$,
(M_2^3) $3\cdot 2=3\cdot 1'=3\cdot 1+3$ [аксиома 21] $=3+3$ $[(M_1^3)]=6$ $[(A_3^3)]$,

. . . .

Пример 1. Ниже приводится некоторое (формальное) доказательство в **N**. Строго говоря, само доказательство — это приведенная ниже последовательность из 17 формул; слева от этих формул стоят (не входящие в доказательство) их номера, а справа — пояснения к каждому шагу (также не относящиеся к самому доказательству).

1. $a=b\supset(a=c\supset b=c)$ — аксиома 16.
2. $0=0\supset(0=0\supset 0=0)$ — схема аксиом 1a.
3. $\{a=b\supset(a=c\supset b=c)\}\supset\{[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset$ $\supset[a=b\supset(a=c\supset b=c)]\}$ — схема аксиом 1a.
4. $[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$ — MP, 1, 3.
5. $[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset\forall c\,[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$ — $\forall$-прав., 4.
6. $[0=0\supset(0=0\supset 0=0)]\supset\forall b\forall c\,[a=b\supset(a=c\supset b=c)]$ — $\forall$-прав., 5.

7. $[0=0 \supset (0=0 \supset 0=0)] \supset \forall a \forall b \forall c\, [a=b \supset (a=c \supset b=c)]$ — $\forall$-прав., 6.
8. $\forall a \forall b \forall c\, [a=b \supset (a=c \supset b=c)]$ — MP, 2, 7.
9. $\forall a \forall b \forall c\, [a=b \supset (a=c \supset b=c)] \supset \forall b \forall c\, (a+0=b \supset$ $\supset (a+0=c \supset b=c)]$ — $\forall$-схема.
10. $\forall b \forall c\, [a+0=b \supset (a+0=c \supset b=c)]$ — MP, 8, 9.
11. $\forall b \forall c\, [a+0=b \supset (a+0=c \supset b=c)] \supset$ $\supset \forall c\, [a+0=a \supset (a+0=c \supset a=c)]$ — $\forall$-схема.
12. $\forall c\, [a+0=a \supset (a+0=c \supset a=c)]$ — MP, 10, 11.
13. $\forall c\, [a+0=a \supset (a+0=c \supset a=c)] \supset [a+0=a \supset (a+0=a \supset$ $\supset a=a)]$ — $\forall$-схема.
14. $a+0=a \supset (a+0=a \supset a=a)$ — MP, 12, 13.
15. $a+0=a$ — аксиома 18.
16. $a+0=a \supset a=a$ — MP, 15, 14.
17. $a=a$ — MP, 15, 16.

Итак, $a=a$ (рефлексивность равенства) доказуема в **N**; символически: $\vdash a=a$. (Это «$\vdash a=a$» — не формула, а записанное с помощью нашей «метаматематической стенографии» утверждение о том, что формула $a=a$ формально доказуема.)

Приведем теперь два образца (A) и (B_1) (ср. § 13, 25) неформального доказательства того факта, что $\vdash a=a$ (т. е. что существует формальное доказательство формулы $a=a$).

(A)
1. $\vdash a=b \supset (a=c \supset b=c)$ — истинно, поскольку эта формула совпадает с аксиомой 16.
2. $\vdash a+0=a \supset (a+0=a \supset a=a)$ — получается из 1 подстановкой $a+0$ вместо a, a вместо b и a вместо c (следствие 2(d) из теоремы 21 для пустой Г).
3. $\vdash a+0=a$ — истинно, поскольку эта формула совпадает с аксиомой 18.
4. $\vdash a=a$ — из 3 и 2, дважды применяя $\supset$-удал.

(B_1) Подставляя в аксиому 16 $a+0$ вместо a, a вместо b и a вместо c, получим $a+0=a \supset (a+0=a \supset a=a)$. Отсюда и из аксиомы 18, два раза применив $\supset$-удал., получим $a=a$.

Как и в гл. I и II (особенно в § 10, 13, 25), мы можем отметить, что формальные доказательства даже простых формул получаются довольно-таки длинными (см. хотя бы пример 1). Нас интересует, какие формулы имеют формальные доказательства, т. е. какие формулы являются теоремами. Мы вполне удовлетворяемся, узнав о существовании формальных доказательств этих формул, и, зная это, как правило, вовсе не стремимся непременно посмотреть на сами формальные доказательства. Поэтому, когда получить неформальное доказательство того, что формальное доказательство существует, оказывается легче, чем привести само формальное доказательство, и к тому же это неформальное доказательство удается провести «финитными» методами (§ 36, 37), мы склонны им вполне довольствоваться[1]). Если в поисках формального доказательства нам удается доказать его существование, то мы сможем, если потребуется, предъявить его. Продолжая в том же духе, мы можем довольно тесно сблизить наши методы неформальных доказательств (в метаматематике) существования формальных доказательств (на сей раз уже в системе **N**) и методы рассуждения обычного математика, работающего в области теории чисел (арифметики). И все же не следует забывать, что мы делаем нечто иное: мы не должны терять из виду возможность перестройки наших неформальных метаматематических доказательств в формальные доказательства системы **N**.

Приведем еще несколько элементарных примеров построения арифметики средствами **N**, давая метаматематические (неформальные) доказательства того, что некоторые формулы, представляющие теоремы элементарной арифметики, имеют формальные доказательства в **N**.

Из рефлексивности равенства $\vdash a=a$ (*100) и аксиомы 16 мы легко получаем симметричность и транзитивность равенства: $\vdash a=b \supset b=a$ (*101), $\vdash a=b \& b=c \supset a=c$ (*102)[2]). (Если сразу не видно, как это сделать, воспользуйтесь теоремой 29 § 29.)

Имея рефлексивность, симметричность и транзитивность равенства, мы можем теперь пользоваться цепями равенств, подобно тому как пользовались цепями эквивалентностей в § 5, если не считать того, что у нас пока нет общей теоремы о замене (теоремы 30, аналогичной теореме 5), позволяющей обосновывать отдельные звенья таких цепей. Мы используем метод цепей для упрощения изложения в следующем примере.

Пример 2. Докажем, что $\vdash a=b \supset a+c=b+c$ (*104). (Если придерживаться терминологии § 29, это одна из двух открытых аксиом равенства для $+$.) Подготавливая $\supset$-введ., допустим, что (a) $a=b$. Подготавливая применение схемы аксиом 13 («математической индукции») с c в качестве x и $a+c=b+c$

---

[1]) Если речь идет о применении вычислительных машин к проблемам поиска или проверки доказательств, то уместен еще один шаг. Некоторый набор более быстрых и удобных методов из тех, что уже известны в метаматематике, или же (для задачи машинного поиска вывода) возможных новых методов, специально приспособленных к машинным возможностям и быстродействию, фиксируется в качестве новой формальной системы, в рамках которой вычислительная машина должна осуществлять поиск или проверку доказательств. Сказанное относится не только к формальной арифметике, но также к исчислению предикатов и другим системам, получаемым из него добавлением математических аксиом. См. Ван Хао [1960], Девис и Путнам [1960], Дж. А. Робинсон [1963, 1965]. (А также Маслов [1968]. — *Перев.*)

[2]) В скобках мы приводим номера, под которыми эти результаты фигурируют в [ВМ].

в качестве A(x), мы должны вывести (из $a=b$) две формулы: $a+0=b+0$ и $\forall c(a+c=b+c\supset a+c'=b+c')$. I. (Базис.) $a+0=a$ (аксиома 18) $=b$ [(a)] $=b+0$ [аксиома 18 с подстановкой; это дает $b+0=b$ (ср. пример 1 (A), шаг 2), откуда по симметричности равенства $b=b+0$]. Отсюда (пользуясь транзитивностью равенства, подразумеваемой в методе цепей) $a+0=b+0$. II. (Индукционный шаг.) Подготавливая $\supset$-введ., допустим, что (**b**) $a+c=b+c$. Тогда $a+c'=(a+c)'$ [аксиома 19 с подстановкой] $=(b+c)'$ [пользуясь (b) и аксиомой 17 с подстановкой и $\supset$-удал.] $=b+c'$ [аксиома 19 с подстановкой]. По запланированному $\supset$-введ. (устраняя допущение (b)) $a+c=b+c\supset a+c'=$ $=b+c'$. Отсюда по $\forall$-введ. (поскольку наше оставшееся допущение (a) не содержит свободно c) $\forall c(a+c=b+c\supset a+c'=$ $=b+c')$. III. По схеме аксиом 13 вместе с результатами I и II и &-введ. с $\supset$-удал. $a+c=b+c$. По $\supset$-введ. (устраняя (a)) $a=b\supset a+c=b+c$.

Теперь нам уже посильно установление (доказуемости) другой аксиомы равенства для $+$, а именно $a=b\supset c+a=c+b$ (*105), хотя это все еще не так просто (упр. 38.2). Доказуемость двух аксиом равенства для $\cdot$ показывается аналогично. Тогда в нашем распоряжении будут все аксиомы исчисления предикатов с равенством (§ 29) в символизме системы **N**. Отсюда по теореме 30 § 29 мы получим общее свойство замены для равенства; после этого можно будет строить цепи равенств, использующие любые замены, основанные на имеющихся равенствах. (До этого нам приходилось заботиться о том, чтобы каждый используемый шаг замены имел специальное обоснование — как, например, аксиома 17 в II примера 2.) Теперь (или даже раньше, сразу после установления аксиом равенства для $+$) мы можем доказать ассоциативность сложения $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*117; упр. 38.3) и т. д.

Всех этих примеров только-только хватит, чтобы составить самое первое впечатление о том, как же можно средствами **N** строить арифметику. Но неделя-другая занятий позволит продвинуться в таком построении достаточно далеко.

После же того как это построение действительно продвинется достаточно — частично путем непосредственного накопления материала, а частично путем исследований более общей природы — можно будет сказать уже с достаточным основанием, что система **N** подходит для изложения обычной элементарной теории чисел, излагаемой в стандартных учебниках (но не аналитической теории чисел, ср. конец § 36). Под этим мы понимаем, во-первых, что предикаты и предложения, употребительные в обычной элементарной арифметике, выразимы некоторыми формулами системы **N**, и, во-вторых, что те предложения, которые обычно доказываются в неформальной арифметике как теоремы, выражаются формулами, формально доказуемыми в N (это мы сейчас и покажем на нескольких примерах).

Первая часть предыдущей фразы требует некоторых пояснений. Мы уже видели, что хотя выражение $a < b$ не входит непосредственно в формальный символизм, зато формула $\exists c (c' + a = b)$, входящая в N, при (подразумеваемой) интерпретации этой системы как раз выражает $a < b$. Поэтому, введя символ «$<$» в качестве сокращения, мы можем выразить в N неравенства. То, что a есть делитель b, выражается формулой $\exists c (a \cdot c = b)$, которую мы сокращенно обозначим «$a \mid b$». То, что a есть простое число, может быть выражено формулой $1 < a \& \neg \exists c (1 < c \& \& c < a \& c \mid a)$, которую мы обозначим сокращенно «$\Pr(a)$». Теперь теорема Евклида о том, что существует бесконечно много простых чисел, может быть выражена формулой $\exists b (\Pr(b) \& a < b)$ или $\forall a \exists b (\Pr(b) \& a < b)$. Доказуемость этой формулы установлена в [ВМ], стр. 172—174 (*161), где она появляется примерно на 60 формул позже, чем наше упр. 38.3. (Хотя не все эти 60 формул используются в ее доказательстве.)

Поскольку никаких других функций, кроме 0, $'$, $+$ и $\cdot$, в N нет, а, помимо этих функций, система N располагает лишь переменными, то никакие функции, кроме полиномов, не выразимы термами этой системы. Это, разумеется, ограничивает возможности символизма N, но ограничение это можно обойти. Действительно, функции, употребляемые в арифметике неформальным образом, можно выразить с помощью некоторой переформулировки посредством предикатов. А именно, пусть, скажем, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая арифметическая функция от n переменных; тогда пусть $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ — это предикат от $n+1$ переменных, истинный в точности для тех наборов $(x_1, \ldots, x_n, y)$, для которых $f(x_1, \ldots, x_n) = y$. Такой $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ мы будем называть *представляющим предикатом функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$. Все, что можно высказать с помощью функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, можно пересказать, используя $F(x_1, \ldots, x_n, y)$. Рассмотрим, например, функцию $x!$ (полагая по определению $0! = 1$, а $(x+1)! = = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (x+1)$ — всего $x+1$ сомножитель). Пусть предикат $F(x, y)$ выражает $x! = y$. Возьмем предложение $(x+1)! = x!(x+1)$, являющееся (неформальной) теоремой о функции-факториале. Теорема эта переформулируется в терминах предиката $F(x, y)$, например, следующим образом: $\exists u \exists v [F(x+1, u) \& F(x, v) \& \& u = v \cdot (x+1)]$.

Таким образом, хотя непосредственно термами системы N выразимы лишь полиномы, оказывается, что посредством представляющих предикатов в этой системе выразим значительно более широкий класс функций[1]).

[1]) Этот факт следует из работ Гёделя [1931] и Клини [1936] (см. [ВМ], § 48, 49 и 57, особенно теорему VII (b) на стр. 254).

Более того, с использованием представляющих предикатов удается выразить в **N** не только все предложения о функциях, но и воспроизвести «параллельным» образом все рассуждения, проводимые с использованием функций[1]).

Таким образом, несмотря на явную бедность по части функциональных символов, система **N** оказывается достаточно адекватным формализмом для обычной арифметики.

Может возникнуть вопрос: а не проще было бы излечиться от этой бедности, попросту построив новую формальную систему с бо́льшим количеством функциональных символов? Конечно, можно поступить и так, но для проблем обоснования часто бывает удобнее иметь дело с системой возможно более простой структуры. Впрочем, только что высказанные соображения позволяют пользоваться и такими более богатыми по части функций системами, формулируя все результаты в терминах системы **N**.

Возникает и такой вопрос: а нельзя ли все результаты, получаемые средствами системы **N**, получить и средствами систем, еще более бедных функциональными символами? Например, нельзя ли обойтись без формального символа $\cdot$, опустить относящиеся к нему аксиомы 20 и 21, а затем получить все относящиеся к этому символу результаты таким же образом, скажем, как в **N** мы получаем результаты, относящиеся к функции $x!$ и т. п.? Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным[2]).

До сих пор, рассматривая систему **N**, мы пользовались идеей Гильберта об изучении формальных систем извне с помощью «финитных» методов (в метаматематике) главным образом на пути разработки сокращенных методов, с помощью которых мы доказывали метаматематически (неформально), что различные формулы формально доказуемы. Гильберт, конечно, предполагал, что метаматематика должна заниматься и такими общими вопросами, касающимися формальных систем, как вопросы об их непротиворечивости и полноте. (С обеими этими проблемами для исчисления высказываний мы имели дело в § 11 и 12, а с непротиворечивостью исчисления предикатов — в § 23.)

Аккерман [1924—5] полагал, что ему удалось метаматематически доказать непротиворечивость системы **N**. Однако фон Ней-

1) Решающим шагом здесь является устранение «собственных определенных описаний» (§ 31), основанное на одной теореме Гильберта и Бернайса [1934] (стр. 422—457, 460 и след.). Вопрос этот разобран в [BM], стр. 359—372. Упомянутая теорема непосредственно дает условия, при выполнении которых наличие в системе предиката $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ гарантирует тот же эффект, что и наличие $f(x_1, \ldots, x_n)$. Эта теорема представляет собой теоретико-доказательственный аналог нашей теоремы 32 § 31.

2) Это следует из результата Пресбургера [1930] и теоремы IV § 43. (Ср. [BM], стр. 184, 361.)

ман [1927] указал, что доказательство Аккермана проходит лишь для некоторой подсистемы N, в которой использование схемы аксиом 13 (аксиомы индукции) ограничено случаем таких A(x), которые не содержат свободных вхождений x в область действия квантора (т. е. в некоторую подформулу B, входящую в состав подформулы вида ∀yB или ∃yB); в той же работе фон Нейман предложил другое метаматематическое доказательство непротиворечивости этой же подсистемы.

На причины неудач в получении метаматематического доказательства непротиворечивости системы N был пролит свет несколько лет спустя, с появлением результатов Гёделя [1931], которые мы изложим в общих чертах в следующей главе (§ 43, 44). Эти результаты начинаются с ответа на вопрос о полноте системы N (т. е. на вопрос, достаточно ли системы N для *всей* арифметики, а не только для ее обычно излагаемой части).

В следующих главах наименование N всегда можно понимать как обозначение конкретной формальной системы, описанной в настоящем параграфе (это и есть простейший способ чтения этих глав), но в некоторых (специально оговоренных) случаях это же наименование N мы будем применять в более общем смысле по отношению к любым системам с аналогичными свойствами.

Упражнения. 38.1. Переведите пример 2 (данный в форме (B_1)) в утверждения, использующие символ $\vdash$ (в форме (B_3)), и проверьте справедливость этого перевода (ср. § 13, 25).

38.2*. Покажите, что $\vdash a = b \supset c + a = c + b$.

38.3. В предположении результата упр. 38.2 и используя общий метод примера 2, покажите, что $\vdash (a + b) + c = a + (b + c)$.

38.4. Покажите, что $\vdash 3 + 0 = 3$, $\vdash 3 + 1 = 4$, $\vdash 3 + 2 = 5$, ..., иначе говоря, установите формальную доказуемость соответствующих предложений (A_0^3), (A_1^3), (A_2^3), ...

38.5. Покажите, используя, кроме исчисления предикатов, лишь аксиомы 14 и 15: $\vdash 1 \neq 0$, $\vdash 2 \neq 0$, $\vdash 2 \neq 1$, $\vdash 3 \neq 0$, $\vdash 3 \neq 1$, $\vdash 3 \neq 2$, ...

*§ 39. Некоторые другие формальные системы

В этом параграфе мы приведем дальнейшие примеры формальных систем; примеры эти мы будем обозначать номерами в квадратных скобках: от [2] до [50] (через [1] будет обозначаться система N из предыдущего параграфа).

Через [2] мы обозначим систему G, являющуюся формализацией элементарной теории произвольной «группы» (пояснение ниже).

Формальные символы системы **G**:

$$\sim,\ \supset,\ \&,\ \vee,\ \neg,\ \forall,\ \exists,\ =,\ \cdot,\ ^{-1},\ 1,\ a,\ b,\ c,\ \ldots,\ |,\ (,).$$

Переменные этой системы строятся так же, как переменные системы **N** (§ 38). (Единственное отличие правил образования **G** от правил образования **N** состоит в том, что вместо $+$, $\cdot$, $'$, 0 здесь берутся $\cdot$, $^{-1}$, 1.)

Определение «терма». 1. 1 есть *терм*. 2. Переменные a, b, c, ... суть *термы*. 3—4. Если r и s—*термы*, то (r)·(s) и $(\mathrm{r})^{-1}$—*термы*. 5. Никаких *термов*, кроме определенных согласно 1—4, нет.

Коль скоро определение «терма» дано, определение понятия «формулы» (через понятие «терма») совпадает с соответствующим определением из § 38.

Скобки опускаются на основании таких же соглашений, как и в предыдущем случае. Кроме того (это мы могли сделать и в § 38), вместо r·s (т. е. вместо (r)·(s)) мы будем писать сокращенно просто rs (опуская точку).

В качестве постулатов мы возьмем постулаты исчисления предикатов с учетом теперешних определений «терма» и «формулы» (§ 21, 28); как и в **N**, r в $\forall$- и $\exists$-схемах может быть любым термом, свободным для x в A(x). Кроме того, в этой системе имеется еще следующие шесть конкретных аксиом:

E1. $a=b\supset(a=c\supset b=c)$. E2. $a=b\supset ac=bc$. E3. $a=b\supset ca=cb$.

G1. $(ab)c=a(bc)$. (Ассоциативный закон.)

G2. $a1=a$. (Правая единица.)

G3. $aa^{-1}=1$. (Правый обратный элемент a.)

Для этой формальной системы **G** мы не имеем в виду единственной интерпретации (в отличие от **N**). Система **G** может быть интерпретирована посредством любой «группы» G (что это такое, мы сейчас поясним и проиллюстрируем), именами (обозначениями) элементов которой (определенных или неопределенных) служат термы системы **G**. (Как мы сейчас увидим, точнее будет говорить, что термы—это имена элементов не группы G, а некой совокупности G_0.)

Аксиомы E1—E3 фиксируют те свойства равенства (тождества), которые нам необходимо постулировать[1]).

Так называемые групповые аксиомы G1—G3 хорошо известны. Коротко говоря, «группа» G—это любая «система» объектов, «удовлетворяющая» этим трем аксиомам (с переменными, имею-

---

[1]) Мы могли бы исходить и непосредственно из исчисления предикатов с равенством (§ 29), постулируя тем самым пять открытых аксиом равенства (или какие-либо их эквиваленты, см. примечание к стр. 188), к которым затем добавляются три аксиомы G1—G3.

щими интерпретацию всеобщности, § 20 и 38, и с символом $=$, выражающим «равенство» или «тождество», как в § 29).

Точнее говоря, *группа* G состоит из непустого множества G_0, 2-местной функции $a \cdot b$ с аргументами и значениями из G_0, 1-местной функции a^{-1} с аргументами и значениями из G_0 и некоторого элемента (0-местной функции) 1 из G_0, таких, что все замыкания формул G1—G3 принимают значение $\mathfrak{t}$ в нашей теории моделей для исчисления предикатов с равенством из § 29, если областью служит G_0, а $a \cdot b$, a^{-1} и 1 суть соответственно значения термов $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^{-1}$ и 1[1]).

Если интересоваться более конкретными интерпретациями, то G может быть **(1)** множеством положительных рациональных чисел с $\cdot$, $^{-1}$ и 1 в их обычных значениях. (Читатель без труда удостоверится в том, что аксиомы G1—G3 выполняются в каждой из упоминаемых интерпретаций.) Или, например, G может быть **(2)** множеством рациональных чисел, не равных нулю, или **(3)** множеством положительных действительных чисел, или **(4)** множеством не равных 0 действительных чисел, или **(5)** множеством не равных 0 комплексных чисел, причем в каждом из этих случаев $\cdot$, $^{-1}$ и 1 имеют свои обычные значения. Еще примеры: G может быть **(6)** множеством всех целых чисел, **(7)** — множеством всех рациональных чисел, **(8)** — множеством всех действительных чисел или же, наконец, **(9)** — множеством всех комплексных чисел; в случаях (6)—(9) в роли $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^{-1}$ и 1 выступают соответственно $a+b$, $-a$ и 0.

Если мы хотим иметь интерпретацию нечисловой природы, то в качестве G можно взять **(10)** множество всевозможных вращений некоторого квадрата в плоскости, в которой он лежит, или же **(11)** в трехмерном пространстве, причем в обоих случаях в результате вращения квадрат переходит сам в себя. Точнее говоря, вращения эти таковы, что в результате их квадрат занимает то же положение, что и до вращения, хотя его углы могут занять и новые положения; скажем, в результате вращения некоторого квадрата $ABCD$ вершина A может перейти в положение D, вершина B — в положение A и т. д. Условимся, что повороты квадрата вокруг перпендикуляра к его плоскости, проходящего через его центр, на $-90°$, $270°$,

---

[1]) В качестве руководств по (неформальной) теории групп см., например, Холл [1959] и Ротман [1965] (а также Курош [1970].— *Перев.*).

Символы «$\cdot$», «$^{-1}$» и «1» часто пишут по-другому. В частности, «$\cdot$» часто пишут в виде «$\circ$» (различным образом интерпретируя эту операцию, в том числе и не как обычное умножение), а «1» — как «i».

«Теория групп» включает и неэлементарные (т. е. не могущие быть построенными на базе узкого исчисления предикатов.— *Перев.*) разделы, к которым относятся, например, понятия подгруппы, изоморфизма и представления, не формализуемые посредством системы **G**.

630° и т. д. рассматриваются как одно и то же вращение (таким образом, мы фактически под «вращением» понимаем «результат вращения»). В примерах (10) и (11) $a \cdot b$ интерпретируется в смысле (результата) вращения b вслед за вращением a. Дальнейшие детали мы предоставляем читателю (упр. 39.1).

Аналогично в качестве G можно взять **(12)** (или **(13)**) всевозможные вращения круга, переводящие его в себя в плоскости (в пространстве), или **(14)** всевозможные вращения куба в трехмерном пространстве, переводящие его в себя, или **(15)** всевозможные вращения некоторой сферы.

Теперь мы установим (неформально) формальную доказуемость нескольких формул (знаком «Т» обозначаются теоремы). Опущенные доказательства можно восстановить в качестве упражнений. Как уже было отмечено в § 38 по поводу системы **N**, все прямые правила исчисления предикатов, а также все правила введения и удаления из теорем 13 и 21 сохраняют свою силу и для **G**.

T1. $\vdash a = a$. (Рефлексивность равенства.)

Доказательство (в форме (B_1)). Подставляя $a1$ вместо a, a вместо b и a вместо c в аксиому E1, получим $a1 = a \supset (a1 = a \supset a = a)$. Отсюда с помощью G2 и $\supset$-удал. (примененного дважды) получим $a = a$. Следующие два утверждения получаются аналогично *101 и *102 из § 38.

T2. $\vdash a = b \supset b = a$. (Симметричность равенства.)
T3. $\vdash a = b \,\&\, b = c \supset a = c$. (Транзитивность равенства.)

Имея в распоряжении рефлексивность, симметричность и транзитивность равенства, мы можем теперь пользоваться цепями равенств (пока, правда, лишь с ограниченной заменой; ср. § 38).

T4. $\vdash a^{-1}a = 1$. (Левый обратный элемент к a есть правый обратный.)

Доказательство (с помощью цепи равенств). $a^{-1}a = (a^{-1}a)\,1$ [аксиома G2 (и подстановка)] $= (a^{-1}a)\,(a^{-1}\,(a^{-1})^{-1})$ [G3, E3] $= a^{-1}\,(a\,(a^{-1}\,(a^{-1})^{-1}))$ [G1] $= a^{-1}\,((aa^{-1})\,(a^{-1})^{-1})$ [G1, E3] $= a^{-1}(1\,(a^{-1})^{-1})$ [G3, E2, E3] $= (a^{-1}1)(a^{-1})^{-1}$ [G1] $= a^{-1}(a^{-1})^{-1}$ [G2, E2] $= 1$ [G3].

T5. $\vdash 1a = a$. (Левая единица есть правая единица.)

Доказательство. $1a = (aa^{-1})\,a$ [G3, E2] $= a\,(a^{-1}a)$ [G1] $= a1$ [T4, E3] $= a$ [G2].

T6. $\vdash ax = a \supset x = 1$. (Единственность правой единицы.)

Доказательство. Допустим, подготавливая $\supset$-введ., $ax=a$. Далее $x=1x$ [T5] $=(a^{-1}a)x$ [T4, E2] $=a^{-1}(ax)$ [G1] $=a^{-1}a$ [по допущению $ax=a$ с E3] $=1$ [T4].

T7. $\vdash xa=a \supset x=1$. (Единственность левой единицы.)

T8. $\vdash ax=1 \supset x=a^{-1}$. (Единственность правого обратного элемента к a.)

Доказательство. Допустим $ax=1$. Тогда $x=1x$ [T5] $=(a^{-1}a)x$ [T4, E2] $=a^{-1}(ax)$ [G1] $=a^{-1}1$ [по допущению $ax=1$ с E3] $=a^{-1}$ [G2].

T9. $\vdash xa=1 \supset x=a^{-1}$. (Единственность левого обратного элемента к a.)

T10. $\vdash a=b \supset a^{-1}=b^{-1}$. (Аксиома равенства для $^{-1}$.)

Доказательство. Допустим $a=b$. Тогда $ba^{-1}=aa^{-1}$ [по допущению $a=b$ с E2] $=1$ [G3]. Отсюда с помощью T8 $a^{-1}=b^{-1}$.

Теперь у нас есть аксиомы равенства для всех символов нашей теории (а именно T1, E1, E2, E3 и T10). Поэтому мы можем далее опираться на свойства равенства уже без всяких ограничений (теорема 30 § 29).

А поскольку у нас есть теперь и свойство замены для равенства, и ассоциативность (G1), мы будем отныне вместо (rs) t и r (st) писать просто «rst» (так что применение G1 становится неявным).

T11. $\vdash ac=bc \supset a=b$. (Правое сокращение.)

Доказательство. Допустим $ac=bc$. Тогда $a=a1=acc^{-1}=bcc^{-1}=b1=b$.

T12. $\vdash ca=cb \supset a=b$. (Левое сокращение.)

T13. $\vdash (a^{-1})^{-1}=a$. (Обратный к обратному элементу.)

Доказательство. $(a^{-1})^{-1}=1(a^{-1})^{-1}=aa^{-1}(a^{-1})^{-1}=a1=a$.

T14. $\vdash (ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$. (Обратный элемент к произведению.)

Указание к доказательству: воспользуйтесь T8.

Опишем теперь [3] несколько более простую формальную систему **Gp** теории групп. Для этого мы из списка формальных символов системы G вычеркнем функциональный символ $^{-1}$ и индивидный символ 1, соответственно упростив определение «терма», а тем самым и «формулы». Аксиомы G2 и G3 мы заменим следующими двумя аксиомами:

Gp2. $\exists b\, ab=c$. (Существование правого частного.)

Gp3. $\exists a\, ab=c$. (Существование левого частного.)

Таким образом, постулатами системы Gp служат постулаты исчисления предикатов и шесть аксиом: E1—E3, G1, Gp2 и Gp3.

Это соответствует определению *группы* G как системы, удовлетворяющей аксиомам G1, Gp2 и Gp3.

Th1. $\vdash a = a$. (Рефлексивность равенства.)

Доказательство. Подставляя в Gp2 a вместо c, получим $\exists b\, ab = a$. Подготавливая $\exists$-удал., допустим $ab = a$. Подстановкой в E1 получим $ab = a \supset (ab = a \supset a = a)$. Теперь дважды применяя $\supset$-удал., получим $a = a$. Рассуждение завершается $\exists$-удалением.

Th2. $\vdash a = b \supset b = a$. (Симметричность равенства.)
Th3. $\vdash a = b \,\&\, b = c \supset a = c$. (Транзитивность равенства.)
Th4. $\vdash \exists i \forall a\, ai = a$. (Существование правой единицы.)

Доказательство (неявно использующее E2, E3 и G1). Имея в виду применить $\exists$-удал. к формулам, полученным из Gp2 и Gp3 переименованием связанных переменных (*74 из § 24) и подстановками, допустим: **(1)** $\underline{i}b = b$, **(2)** $a\underline{j} = a$, **(3)** $\underline{k}j = i$, **(4)** $\underline{l}a = k$, **(5)** $i\underline{m} = j$, **(6)** $\underline{b}n = m$. (Роль x в каждом $\exists$-удал. будут играть подчеркнутые переменные.) Тогда $i = kj$ [(3)] $= laj$ [(4)] $= la$ [(2)] $= k$ [(4)], откуда по (3) получим **(7)** $ij = i$. Аналогично $j = im$ [(5)] $= ibn$ [(6)] $= bn$ [(1)] $= m$ [(6)], откуда по (5) получим **(8)** $ij = j$. Из (7) и (8) получим $i = j$, откуда по (2) получим **(9)** $ai = a$. Доказательство завершается пятью $\exists$-удалениями, последовательно устраняющими допущения (6)—(2), применением $\forall$- и $\exists$-введ., что даст $\exists i \forall a\, ai = a$, и, наконец, устранением (1) посредством шестого $\exists$-удал.

Теперь мы можем наметить доказательство того, что **Gp** формализует по существу ту же теорию, что и **G**. Поскольку аксиомы системы **Gp** (отличные от аксиом системы **G**) симметричны по отношению к $\cdot$, мы можем немедленно написать Th5.

Th5. $\vdash \exists j \forall b\, jb = b$. (Существование левой единицы.)
Th6. $\vdash \forall a\, ai = a \,\&\, \forall b\, jb = b \supset i = j$. (Совпадение правой и левой единиц.)
Th7. $\vdash \forall a\, ai = a \,\&\, \forall a\, ax = a \supset i = x$. (Единственность правой единицы.)

(*Указание*: воспользуйтесь Th5 и Th6.) По поводу сокращения «$\exists! x A(x)$» см. § 29.

Th8. $\vdash \exists i\, [\forall a\, ai = a \,\&\, \forall x (\forall a\, ax = a \supset i = x)]$, или, в сокращенной записи, $\exists! i \forall a\, ai = a$. (Существование и единственность правой единицы.)

(*Указание*: воспользуйтесь Th4 и Th7.) Формула $\forall a\, ai = a$ выражает представляющий предикат $1 = i$ для правой единицы 1, рассматриваемой как 0-местная функция (ср. конец § 38), а доказуемая формула Th8 гласит, что $\forall a\, ai = a$ является представляющим предикатом. Таким образом, теперь выполнены условия применимости элиминационной теоремы, упомянутой в примечании 1 на стр. 258 (§ 38). Согласно этой теореме, мы можем пополнить символизм системы **Gp** индивидным символом 1, а список ее аксиом—формулой $\forall a a1 = a$ (или же, что приведет к тому же результату, аксиомой G2), причем полученная система $\mathbf{Gp}_1$ будет обладать следующими свойствами: любая ее формула, не содержащая символа 1, доказуема в ней тогда и только тогда, когда она доказуема в **Gp**; каждая же доказуемая формула $\mathbf{Gp}_1$, содержащая 1, может быть переформулирована таким образом (описанным в конце § 38), что в результате получится доказуемая формула системы **Gp**.

Теперь мы аналогичным образом введем в систему $\mathbf{Gp}_1$ обратный элемент a^{-1}.

$\mathrm{Th}_1\,9.$ $\vdash 1a = a$.
$\mathrm{Th}_1 10^{\cdot}$ $\vdash \exists b ab = 1$.
$\mathrm{Th}_1 11^{\cdot}$ $\vdash \exists c ca = 1$.
$\mathrm{Th}_1 12^{\cdot}$ $\vdash ab = 1 \,\&\, ca = 1 \supset b = c$.
$\mathrm{Th}_1 13^{\cdot}$ $\vdash ab = 1 \,\&\, ax = 1 \supset b = x$.
$\mathrm{Th}_1 14^{\cdot}$ $\vdash \exists! b ab = 1$. (Существование и единственность правого обратного элемента.)

Формула $ab = 1$ выражает представляющий предикат $a^{-1} = b$ функции a^{-1}. Вторично применяя элиминационную теорему, мы можем пополнить систему $\mathbf{Gp}_1$ функциональным символом $^{-1}$ и аксиомой G3, в результате чего получим систему $\mathbf{Gp}_2$. Но, согласно результату упр. 39.2, аксиомы Gp2 и Gp3 излишни в $\mathbf{Gp}_2$ (будучи доказуемыми в ее «подсистеме» **G**), так что их можно исключить из числа аксиом $\mathbf{Gp}_2$, в результате чего мы придем к системе **G**.

В итоге мы приходим к заключению, что все доказуемые формулы системы **G**, не содержащие ни $^{-1}$, ни 1, доказуемы в ней тогда и только тогда, когда они доказуемы в системе **Gp**; каждая же доказуемая формула **G**, содержащая хотя бы один из этих символов, может быть переформулирована так, что в результате получится доказуемая формула системы **Gp**. Таким образом, система **G** находится в точности в том же отношении к системе **Gp**, в каком более богатые системы арифметики, упомянутые в конце § 38, находятся к системе **N**.

Приведенные выше примеры конкретных групп, за исключением (11), (13), (14) и (15), удовлетворяют еще одной дополнительной аксиоме:

G4. $ab = ba$. (Коммутативный закон.)

Такие группы называются *коммутативными*, или *абелевыми*. Добавляя G4 к постулатам систем **G** и **Gp**, мы получим соответственно формальные системы [4] **AG** и [5] **AGp**.

Чтобы убедиться в том, что группа вращений (11) не удовлетворяет аксиоме G4, представим, что вращаемый квадрат расположен на горизонтальной плоскости и стороны его ориентированы на север и на восток. Пусть a—поворот нашего квадрата по часовой стрелке на 90° вокруг вертикальной оси, проходящей через центр квадрата, а b—поворот на 180° вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр квадрата и ориентированной на восток. Читатель может проверить, что результаты ab и ba последовательного осуществления этих поворотов в различном порядке различны. То же относится к примерам (13), (14) и (15).

Все приведенные выше примеры групп (за исключением конечных групп (10), (11) и (14)) бесконечны, т. е. их множества G_0 содержат бесконечно много элементов.

Как отмечалось в § 37, в зависимости от различных определений «атома» и «иона» (или «иона» и «мезона») мы получаем различные модификации формальных систем исчисления высказываний и исчисления предикатов.

Рассмотрим вначале [6] *чистое исчисление высказываний* **Pp**. Для этого мы введем новый вид формальных символов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... (рукописные прописные латинские буквы), называемых *пропозициональными буквами*[1]). Проблема, что делать, если не хватит двадцати шести букв алфавита, решается так же, как ранее, в случае формальной арифметической системы **N**: мы вводим еще один формальный символ $_|$, приписывание которого к пропозициональным буквам позволяет получать новые пропозициональные буквы. Чаще всего при построении исчисления высказываний просто говорят, что имеется потенциально бесконечный перечень пропозициональных букв (и аналогично о переменных формальной арифметики). Остальные формальные символы—это $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$ и скобки. «Формулы» определяются, как в § 1, только в роли атомов теперь выступают пропозициональные буквы (при этом употребление скобок подчиняется каким-либо подходящим точно описанным правилам, например —

[1]) В системах с конкретными аксиомами и постулированным правилом подстановки (в отличие от применяемых нами систем со схемами аксиом, где правило подстановки является выводимым правилом, см. примечание на стр. 159) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... называют *пропозициональными переменными*. Ср. § 9 (текст, идущий непосредственно после примера 4).

В аналогичных построениях исчисления предикатов наши «предикатные буквы» называют «предикатными переменными» (а авторы, называющие исчисление предикатов «функциональным исчислением»,—«функциональными переменными»; см. примечание 4 к стр. 94); то же относится и к исчислениям с функциональными символами, где в зависимости от способа описания системы говорят о «функциональных буквах» или о «функциональных переменных». (И не применяют уж тогда, конечно, этот термин для именования предикатных букв (переменных).—*Перев.*)

но не обязательно — как в § 38). Если нам пришлось бы говорить в пределах одного и того же контекста и о формулах в только что определенном смысле, и о формулах формальной арифметики **N**, то мы могли бы различать их, называя первые *формулами исчисления высказываний* (или *пропозициональными формулами*), а вторые *арифметическими формулами*. В качестве постулатов берутся, естественно, схемы аксиом 1a—10b и $\supset$-правило (modus ponens).

Аналогично мы приходим к [7] *чистому исчислению предикатов* **Pd**, употребляя в качестве ионов символы $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}(-)$, $\mathscr{A}(-, -)$, ..., $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}(-)$, $\mathscr{B}(-, -)$, ..., которые мы будем называть *предикатными буквами*[1]). Для любого числа $n \geqslant 0$ пустых мест их имеется бесконечно много: этого можно достичь как с помощью допущения о бесконечном алфавите таких рукописных заглавных букв, так и употреблением индекса $_{\mathsf{I}}$, приписываемого по мере надобности к любой из реально имеющихся 26 букв. Прочие формальные символы системы — это $\sim$, $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, переменные a, b, c, ... (бесконечно много или 26 плюс индекс $_{\mathsf{I}}$, позволяющий получать новые переменные), запятая и скобки. Теперь «формула» (можно сказать более точно: «предикатная формула») определяется, как в § 16, с предикатными буквами в роли ионов (и каким-либо точным соглашением об употреблении скобок). Постулаты: схемы аксиом 1a—10b, $\forall$- и $\exists$-схемы (как раз в том виде, как они были введены в § 21 — с переменными в качестве термов), а также $\supset$-, $\forall$- и $\exists$-правила.

Добавляя к ионам исчисления **Pd** (предикатным буквам) еще ионы вида $(-) = (-)$ (что читается: «— равно —»), а к его постулатам — открытые аксиомы равенства для $=$ и для каждой предикатной буквы с $n > 0$ пустыми местами, мы получим [8] *чистое исчисление предикатов с равенством* **Pd=**.

Возьмем теперь в качестве мезонов (§ 28) выражения f, $f(-)$, $f(-, -)$, ..., g, $g(-)$, $g(-, -)$, ... — так называемые *функциональные переменные*[1]). Здесь f, g, h, ... — строчные рукописные буквы из середины латинского алфавита, не используемые в качестве переменных данного исчисления. (Как и по отношению к последним, мы можем либо считать, что таких букв у нас бесконечно много, либо фиксировать какое-либо конечное их число и формировать по мере надобности новые символы с помощью индекса $_{\mathsf{I}}$.) Используя правила образования и постулаты, предложенные в § 28 или 29, мы получим в первом случае [9] *чистое исчисление предикатов с функциями* **Pdf**, а во втором [10] *чистое исчисление предикатов с функциями и равенством* **Pdf=**.

---

[1]) См. предыдущее примечание.

В этих «чистых» системах атомы, ионы и мезоны понимаются в предельно широком смысле: без указания на какое-либо конкретное применение логики.

Но мы также можем рассматривать формальные системы исчисления высказываний и исчисления предикатов (с равенством или без), использующие правила образования каких-либо более сложных или более частных систем. Скажем, определяя «формулу», как для **Pd**, **Pd=**, **Pdf**, **Pdf=**, **N**, **G** или **Gp**, и используя только постулаты исчисления высказываний (схемы аксиом 1a — 10b и $\supset$-правило), мы получим соответствующие системы [11] — [17] исчисления высказываний. Определяя «формулу» (или «терм» и «формулу»), как для **Pd=**, **Pdf=**, **N**, **G** или **Gp**, а в качестве постулатов беря постулаты исчисления предикатов **Pd** или **Pdf**, мы получим различные системы [18] — [22] исчисления предикатов. Определяя «терм» и «формулу», как для **N**, **G** или **Gp**, мы получим, исходя из постулатов исчисления предикатов с равенством **Pdf=**, три его системы [23] — [25]. Наше построение исчисления высказываний, исчисления предикатов и исчисления предикатов с равенством в первой части настоящей книги велось так, чтобы его с равным успехом можно было применить к любой из этих (и других) систем.

Системы логики [15] — [17], [20] — [22] и [23] — [25], использующие правила образования систем **N**, **G** или **Gp**, служат примерами *прикладных* систем логики, поскольку правила образования в них выбраны с расчетом на приложение их к некоторой системе, посвященной более или менее специальному предмету. Вообще *прикладное исчисление предикатов* (примером может служить «арифметическое исчисление предикатов» [20]) содержит некоторое множество из $s \geqslant 1$ предикатных символов или, быть может, других ионов $\mathrm{P}_1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{P}_s$ (каждый с точно определенным числом $p_i \geqslant 0$ пустых мест) и множество из $t \geqslant 0$ функциональных символов или, быть может, других мезонов $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_t$ (каждый с точно определённым числом $q_i \geqslant 0$ пустых мест)[1]. Определения «терма» и «формулы» здесь те же, что описывались выше (§ 16 или, когда $t > 0$, § 28, а с точно регламентированным употреблением скобок в § 38). В случае арифметического исчисления предикатов $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$ есть попросту $(-)=(-)$ $(s=1, p_1=2)$, а $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_t$ — это $(-)+(-)$, $(-)\cdot(-)$, $(-)'$ и 0 $(t=4, q_1=q_2=2, q_3=1, q_4=0)$. В прикладном исчислении предикатов предикатные и функциональные символы и другие обозначения обладают одной или несколькими «естественными» («подразумеваемыми», «стандартными») интерпретациями. (Разу-

[1]) Это наиболее распространенное понимание термина «прикладное исчисление предикатов». Можно также рассматривать системы с бесконечным множеством предикатных и (или) функциональных символов, а также системы со смешанными обозначениями: только что описанного типа и обозначениями, принятыми в чистых системах.

меется, они не могут играть никакой роли в метаматематике.) Прикладные системы логики представляют собой формализации логики, используемой в какой-либо конкретной области (например, в арифметике), непосредственно на используемом в этой области языке. Это близко соответствует использованию логики в математике и в жизни.

Заменяя схему аксиом 8 интуиционистской схемой аксиом 8^I, мы получим интуиционистские системы **[26]** — **[50]**, соответствующие классическим системам [1]—[25] [1]). (Ср. конец § 12, и 25.)

Упражнения. 39.1. Докажите, что группа вращений, переводящих квадрат в себя, состоит из 4 или из 8 элементов в зависимости от того, остается ли квадрат при движении в плоскости, в которой он лежит, или может выходить из нее. Как интерпретируются для этой группы 1 и $^{-1}$?

39.2. Используя T1—T5, докажите, что $\vdash \exists bab = c$ и $\vdash \exists aab = c$.

39.3. Докажите T7, T9, T12, T14.

39.4. Часть доказательства теоремы Th4, заканчивающаяся равенством (9), показывает, что (1), (2), (3), (4), (5), (6) $\vdash$ (9). Выпишите в явном виде оставшиеся шаги доказательства (после (9)) в форме B_3 и удостоверьтесь в допустимости каждого применения $\exists$-удаления и $\forall$-введения.

39.5. Докажите Th6 — Th8 и Th_I9—Th_I14.

---

1) Предлагаемая терминология весьма условна и, возможно, неприемлема (в целом) для интуиционистов. Как видно даже из § 36, эпитет «интуиционистская» связан не столько с выбором формальной системы (хотя ссылка автора на § 12 и 25 и оправдана достаточно общепринятой терминологией), сколько с особенностями ее интерпретации — как в общелогической части, так и в математической. (То же относится и к эпитету «конструктивная».) Поэтому замена одного постулата не делает еще автоматически классическую систему «интуиционистской»: для этого необходима еще интуиционистская приемлемость всех остальных постулатов (здесь это относится к нелогическим аксиомам), утверждение о которой может быть лишь результатом специального исследования. См. по этому поводу разделы, посвященные интуиционистской логике и математике, в [BM], а также Гейтинг [1956], Клини и Весли [1956], Марков [1972], Шанин [1955], [1958].— *Прим. перев.*

Глава V

ВЫЧИСЛИМОСТЬ И РАЗРЕШИМОСТЬ

§ 40. Разрешающие и вычислительные процедуры

Рассмотрим некоторый данный счетно-бесконечный класс математических или логических вопросов, каждый из которых требует ответа «да» или «нет».

Существует ли метод (процедура), с помощью которого мы можем ответить на любой вопрос из этого класса за конечное число шагов?

Говоря подробнее, мы интересуемся тем, можно ли для данного класса вопросов раз и навсегда описать процедуру или перечислить набор правил (предписаний), который можно было бы использовать следующим образом. Если (*после* того, как процедура описана) мы возьмем *любой* вопрос из данного класса, то процедура скажет нам, как выполнить последовательные шаги, после конечного числа которых мы получим ответ на рассматриваемый нами вопрос. При выполнении шагов нам придется только механически следовать предписаниям, как если бы мы были роботами: от нас не потребуется ни понимания, ни искусства, ни изобретательности. После каждого шага, если мы еще не получили окончательного ответа, предписания в сочетании с имеющейся ситуацией скажут нам, что делать дальше [1]). Предписания позволят нам узнать, когда последовательность шагов заканчивается, и «считать» с получившейся в конце ситуации ответ на рассматриваемый вопрос: «да» или «нет»?

В частности, поскольку никакой человек-исполнитель не может использовать более чем конечное количество информации, описание процедуры с помощью списка правил или предписаний должно быть конечным.

Если такая процедура существует, она называется *разрешающей процедурой*, или *разрешающим алгорифмом* (или *алгоритмом*) для данного класса вопросов. Проблема разыскания разрешающей процедуры называется *проблемой разрешения* для этого класса.

---

[1]) На практике такие процедуры часто описываются неполно, так что нам могут представиться некоторые несущественные альтернативы. Например, если нужно перемножить несколько чисел, нам может быть предоставлено решить, в каком порядке их перемножать.

Например, имеется разрешающая процедура для класса вопросов: «Делится ли b на a?» (или «Является ли a делителем b?»), где a и b — произвольные целые положительные числа. Она состоит в выполнении обычного деления «углом» b на a и проверке того, равен ли остаток 0.

Аналогично существует алгорифм для определения того, имеются ли рациональные корни у данного алгебраического уравнения

$$(1)\qquad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0,\ n > 0)$$

с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Он основан на теореме, утверждающей, что если такое уравнение (1) имеет рациональный корень p/q (p, q — целые), то p должно быть делителем числа a_n, а q — делителем a_0. Поэтому корнями может быть лишь конечное количество рациональных чисел p/q, и мы можем проверить по очереди все эти числа.

В качестве третьего примера укажем, что существует разрешающая процедура для выяснения того, имеет ли решения в целых числах x, y уравнение $ax + by + c = 0$ при данных целых a, b и c. По поводу этой процедуры, основанной на евклидовом «алгорифме разыскания наибольшего общего делителя», мы отсылаем читателя к учебникам по элементарной теории чисел (например Мак-Даффи [1954] § 9).

Для некоторой данной формальной системы **S** рассмотрим следующие три общих вопроса, т. е. три (счетно-бесконечных) класса частных вопросов: «Является ли данное формальное выражение формулой?», «Является ли данная конечная последовательность формул доказательством?», «Является ли данная формула доказуемой?».

Как было объяснено в § 38, можно ответить на любой частный вопрос из первого класса, попытавшись найти собственное спаривание скобок в данном выражении. Если оно найдено, то с его помощью мы можем попытаться проследить шаги, по которым это выражение, если оно является формулой, было построено в соответствии с определением «терма» и «формулы». Делая это, мы выясним, существует ли такое построение в действительности. Чтобы ответить на любой данный вопрос из второго класса, мы просто рассматриваем по порядку все формулы данной последовательности и проверяем, является ли рассматриваемая формула аксиомой и следует ли она из встречавшихся ранее формул по одному из правил вывода. Объекты, которые приходится рассмотреть, чтобы ответить на вопрос, принадлежащий одному из этих двух классов, являются частями того конечного объекта, к которому относится вопрос.

Третий класс вопросов существенно иной. Чтобы показать прямо по определению, что формула доказуема, нужно представить ее доказательство. Но доказательство, если оно имеется, вовсе не обязательно составлено из частей самой этой формулы. Чтобы ответить на наш вопрос, нужно смотреть, следовательно, не только внутрь данного объекта. Определение доказательства данной формулы не устанавливает никакой границы для длины доказательства. В случае когда формула недоказуема, проверка всевозможных доказательств без какой-либо границы на их длины не ведет к ответу на наш вопрос за конечное число шагов. Следовательно, эта третья проблема разрешения, т. е. проблема разрешения для доказуемости в системе S, в отличие от двух первых, нетривиальна. Если разрешающая процедура и существует, она такова, что не получается почти непосредственно из определения «доказуемой формулы». Кроме того, эта проблема разрешения для системы S особенно интересна. Поэтому ее часто называют без дополнительных пояснений просто «проблемой разрешения»[1]) данной формальной системы.

Для доказуемости в исчислении высказываний имеется разрешающая процедура, найденная Постом в 1921 году: чтобы определить, верно ли $\vdash$E, достаточно вычислить истинностную таблицу для E и посмотреть, состоит ли она из одних «t» (поскольку по теоремам 14 и 12 $\vdash$E тогда и только тогда, когда $\models$E).

Постановка проблем разрешения для формальных систем восходит к Шрёдеру [1895], Лёвенгейму [1915] и Гильберту [1918].

Было бы особенно важно иметь разрешающую процедуру для системы N элементарной теории чисел (§ 38). Ведь тогда решение многих старых частных проблем элементарной теории чисел можно было бы получить механически. Например, мы могли бы тогда решить проблему «великой теоремы» Ферма. Около 1637 г. Ферма заявил, что он располагает доказательством следующего факта: уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в положительных целых числах x, y, z, n при $n > 2$. Никому с тех пор не удалось ни доказать, ни опровергнуть это предложение. «Великая теорема» Ферма может быть выражена в N формулой

$$\mathrm{F}: \neg \exists x \exists y \exists z \exists n\, [x > 0 \,\&\, y > 0 \,\&\, z > 0 \,\&\, n > 2 \,\&\, \mathrm{A}(x, y, z, n)],$$

где $\mathrm{A}(x, y, z, n)$ есть запись формулы $x^n + y^n = z^n$, не содержащая показательной функции (ср. конец § 38). Таким образом, чтобы получить $\mathrm{A}(x, y, z, n)$, мы сначала находим известными методами (подстрочные примечания к стр. 257 и 258 § 38) формулу $\mathrm{E}(x, n, u)$, выражающую $x^n = u$; тогда в качестве $\mathrm{A}(x, y, z, n)$ можно взять

$$\exists u \exists v \exists w\, [\mathrm{E}(x, n, u) \,\&\, \mathrm{E}(y, n, v) \,\&\, \mathrm{E}(z, n, w) \,\&\, u + v = w].$$

Если «великая теорема» Ферма неверна, этот факт может быть установлен вычислением с подходящей четверкой (x, y, z, n) в качестве контрпримера. В соответствии с этим неформальным замечанием может быть доказано, что в таком случае формула $\neg$F доказуема в

[1]) Или проблемой разрешения *в узком смысле*; см. [BM], стр. 126.—*Прим. перев.*

N. В этом сжатом изложении мы не можем вдаваться в детали; указанный факт согласуется с высказанной нами в § 38 претензией на то, что **N** адекватна обычной элементарной теории чисел. Если «великая теорема» Ферма верна, то по принимаемому нами здесь допущению, что в **N** доказуемы лишь истинные формулы, $\neg F$ недоказуема. Поэтому разрешающая процедура для доказуемости в **N** дала бы нам возможность решить с помощью конечного числа механических шагов, истинна или ложна «великая теорема» Ферма, путем выяснения с помощью этой процедуры, недоказуема или доказуема формула $\neg F$[1]).

Усилия, прилагавшиеся в течение столетий к поискам решения этой и других знаменитых проблем теории чисел, делают неправдоподобным существование разрешающей процедуры для **N**. Настолько же неправдоподобной могла казаться в 1918 г. возможность математического *доказательства* того, что разрешающая процедура для **N** невозможна. Но именно это было сделано Чёрчем в 1936 г. с помощью его тезиса, который мы представим на обсуждение в § 41.

Мы начнем с того наблюдения, что так же, как мы можем иметь разрешающую процедуру (алгорифм) для счетно-бесконечного класса вопросов, каждый из которых требует ответа «да» или «нет», мы можем иметь и *вычислительную* (*или вычисляющую*[2])) *процедуру* (иначе: *вычислительный алгорифм*) для счетно-бесконечного класса вопросов, требующих в качестве ответа представления некоторого объекта.

Например, имеется вычислительная процедура для класса вопросов: «Чему равна сумма двух натуральных чисел a и b?». Мы научились этой процедуре в начальной школе, когда учились складывать. Процесс деления «углом» составляет алгорифм для класса вопросов: «Для данных целых положительных чисел a и b чему равны натуральные числа q (частное) и r (остаток), такие, что $a = bq + r$ и $r < b$?». Имеется, далее, алгорифм, носящий имя Евклида, для класса вопросов «Чему равен наибольший общий дели-

---

[1]) Это составило бы по меньшей мере значительный *теоретический* успех в нынешней (1967 г.) ситуации, когда неизвестно никакой последовательности механических шагов, которая привела бы после конечного числа шагов к ответу на вопрос, истинна или ложна «великая теорема» Ферма.

Практически получение ответа на этот вопрос описанными средствами могло бы оказаться еще недоступным для нас. В самом деле, применение данной разрешающей процедуры для системы **N** к формуле $\neg F$ могло бы потребовать больше, чем у нас имеется, места и времени для выполнения того конечного числа шагов, которое ведет к решению.

Для вещей, которыми мы занимаемся в этой книге, несущественно, может ли данная разрешающая процедура для некоторого класса вопросов быть практически использована для получения ответа на те или иные вопросы из этого класса. Это относится к области «машинной математики».

[2]) См. [ВМ], стр. 267.—*Прим. перев.*

тель двух положительных целых чисел a и b?». Имеется также алгорифм для класса вопросов: «Для данной формулы E исчисления высказываний и для данного списка $P_1, \ldots, P_n$ всех различных атомов, входящих в E, какова истинностная таблица для E, входы которой соответствуют этим атомам?». Последние три из этих алгорифмов для вопросов типа «чему равно?» входят в три из упомянутых выше алгорифмов для вопросов типа «да или нет?».

Проблема разыскания вычислительной процедуры (алгорифма) для класса вопросов типа «чему равно?» есть *проблема вычисления* для этого класса вопросов.

Мы предпочли здесь сформулировать понятия проблемы разрешения и проблемы вычисления только для счетно-бесконечных классов вопросов (типа «да или нет?» и типа «чему равно?» соответственно).

Для конечного класса вопросов проблема разрешения или вычисления (сформулированная аналогично) с классической точки зрения тривиальна. Ведь (по крайней мере теоретически) ее можно было бы решить, просто приготовив список ответов на все вопросы из этого класса.

«Чему равно кратчайшее расстояние по автострадам между любыми двумя из больших городов Соединенных Штатов?» Если нет разногласий по поводу того, что считается автострадами и что — большими городами, то ответ на любой вопрос этого класса можно найти с помощью таблиц, приводимых на некоторых картах автомобильных дорог.

«Для данной допустимой шахматной позиции могут ли выиграть белые (независимо от игры черных)?» Как все знают, хотя теоретически и существует конечный список ответов на этот вопрос для всех позиций, для практических целей он непригоден. Будь это не так, удовольствие от шахмат было бы потеряно.

«Является ли истинным данное предложение из некоторого конечного множества $\{A, B, C, D, E\}$?» Здесь предполагается, что A, B, C, D, E — это пять фиксированных предложений, так что наш класс содержит только пять вопросов. Правильный список из пяти «да» и «нет» дал бы нужный алгорифм. Этот алгорифм был бы коротким и простым. Однако если A есть «великая теорема» Ферма, то никто в настоящее время не может дать такой алгорифм. Только математик-классик считает установленным, что такой алгорифм «существует». Интуиционист считал бы, что вопрос о «существовании» такого алгорифма остается открытым до тех пор, пока кто-нибудь не решит проблему «великой теоремы» Ферма. (Ср. § 36.)

Результаты, излагаемые в остальной части этой главы, не зависят от таких различий во мнениях между классиками и интуиционистами по вопросу о том, когда алгорифм существует.

Возвращаясь к нашему случаю алгорифмов для счетно-бесконечных классов вопросов, заметим, что и они подобным же образом всегда существовали бы с классической точки зрения, если бы мы допустили, чтобы алгорифмы (описания алгорифмов) были бесконечными объектами; мы опять могли бы просто перечислить все ответы. Но мы сказали, что алгорифм должен быть методом (процедурой, набором правил), который может быть использован и который, следовательно, должен быть описан конечным образом. Должен быть дан *конечный* набор предписаний, которого будет достаточно, чтобы привести к ответу на любой из *бесконечного* множества вопросов.

Обсуждение алгорифмов для несчетно-бесконечных классов вопросов выходит за рамки этой книги.

Когда у нас имеется счетно-бесконечный класс вопросов, различные вопросы из этого класса будут обычно получаться в результате придания различных значений («аргументов») одной или нескольким переменным, или «параметрам», в данной общей формулировке (класса) вопросов. В нескольких приведенных выше примерах a и b (или a, b и c) играют роль этих переменных. В нашем втором примере разрешающей процедуры $a_0, \ldots, a_n$ являются такими же переменными, но их число n тоже меняется.

Поскольку наш класс вопросов всегда (за исключением сделанного выше отступления) счетно-бесконечен, мы всегда можем перечислить все эти вопросы, скажем в виде $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_a, \ldots$. Тогда переменной, или параметром, может быть a. В случае вопросов типа «да или нет?», полагая $P(a) \equiv$ {ответ на вопрос Q_a есть «да»}, мы превратим бесконечный класс вопросов типа «да или нет?» в одноместный теоретико-числовой предикат (арифметический [1])) $P(a)$.

Предположим теперь, напротив, что рассматриваемые вопросы — это вопросы типа «чему равно?». Допустим далее, что объекты, которые должны быть предъявлены в ответах на вопросы, берутся из некоторого счетно-бесконечного класса, который мы можем перечислить в виде $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_b, \ldots$. Полагая $f(a) = b$, если ответ на вопрос Q_a есть y_b, мы превратим бесконечный класс вопросов типа «чему равно?» в одноместную теоретико-числовую функцию $f(a)$.

Так с помощью нумерации любой счетно-бесконечный класс вопросов типа «да или нет?», который нам нужно рассмотреть, может быть приведен к виду «принимает ли теоретико-числовой предикат $P(a)$ значение «истина» для аргумента a?», а класс вопросов типа «чему равно?» — к виду «чему равно значение b теоретико-числовой (арифметической [1])) функции $f(a)$ для аргумента a?».

В случаях когда класс вопросов уже задан с помощью фиксированного числа переменных с подходящими областями изменения, часто удобнее передавать его с помощью теоретико-числового предиката или функции непосредственно. Например, вопрос «Делится ли b на a?» можно передать предикатом $P(a, b)$, обычно запи-

[1]) См. [ВМ], начало § 9.— *Прим. перев.*

сываемым как «$a|b$». Для стандартизации в последующем изложении мы положим, что наши переменные $a, b, c, \ldots, x, y, z$ принимают в качестве значений любые натуральные числа. Для последнего примера мы можем расширить отношение «делится», включив 0 ($a|0$ истинно для любого a; $0|b$ ложно, кроме случая $b=0$). Вопрос: «Чему равна сумма чисел a и b?» очевидным образом передается функцией $a+b$.

Обратно, отправляясь от произвольного теоретико-числового предиката $P(a_1, \ldots, a_n)$, мы получаем счетно-бесконечный класс вопросов: «Для данных $a_1, \ldots, a_n$ истинно ли $P(a_1, \ldots, a_n)$?». Отправляясь от произвольной теоретико-числовой функции $f(a_1, \ldots, a_n)$, мы получаем вопросы: «Для данных $a_1, \ldots, a_n$ чему равно значение $f(a_1, \ldots, a_n)$?».

Таким образом, безразлично, говорим ли мы о счетно-бесконечных классах вопросов или о теоретико-числовых предикатах и функциях. Если для предиката (или для получающегося из него класса вопросов) существует разрешающая процедура, мы называем этот предикат (или класс вопросов) *разрешимым*. Подобным образом, если для некоторой функции имеется процедура вычисления, мы называем эту функцию *вычислимой*.

Далее, случай предиката можно свести к случаю функции, если следующим образом определить *представляющую функцию* $f(a_1, \ldots, a_n)$ предиката $P(a_1, \ldots, a_n)$:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } P(a_1, \ldots, a_n) \text{ истинно}, \\ 1, & \text{если } P(a_1, \ldots, a_n) \text{ ложно}. \end{cases}$$

В одноместном случае $f(a)$ — та самая функция, которую в § 33 мы назвали «представляющей функцией» множества тех a, для которых истинно $P(a)$ (символически: множества $\hat{a}P(a)$). Безразлично, вычислять ли значение $f(a_1, \ldots, a_n)$ и смотреть, равно оно 0 или нет, или решать, истинно или ложно $P(a_1, \ldots, a_n)$. Другими словами, мы можем трактовать разрешающую процедуру как вычислительную, употребляя 0 вместо «да» и 1 вместо «нет»[1]).

Чтобы отчетливее подчеркнуть идею алгорифма, рассмотрим еще некоторые случаи, когда не ясно, возможен ли алгорифм. Мы

[1]) Поскольку мы занимаемся здесь только вопросом о том, истинны или ложны предложения, получаемые в качестве значений предикатов, мы трактуем предикаты в этой теории экстенсионально, т. е. не отличаем их от соответствующих логических функций, становящихся их представляющими функциями в результате замены $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ на 0, 1 (см. примечание 2 на стр. 166).

Ниже мы подчеркиваем, что иногда определение предиката или функции не дает для них алгорифма непосредственно, но алгорифм может даваться какой-то теорией, связанной с этой функцией или предикатом. Что касается предикатов, если мы возвращаемся к интенсиональному их пониманию, то мы могли бы тогда говорить, что (интенсиональный) предикат P может быть неразрешимым, в то время как эквивалентный ему предикат P_1 разрешим.

уже упоминали, что имеется алгорифм для вопроса: «Разрешимо ли в целых числах уравнение $ax + by + c = 0$?» или, если записать его в виде предиката, для $(Ex)(Ey)[ax + by + c = 0]$. Здесь мы используем «$(Ex)$» и «$(Ey)$» в том же смысле, в котором использовали $\exists x$ и $\exists y$ в гл. II: мы хотим, чтобы впредь логический символизм, который мы используем вне рамок какой-либо данной формальной системы, отличался, насколько это возможно, от символизма, используемого в формальных системах [1]). Существование такого алгорифма неочевидно с самого начала (в отличие от случая $a|b$ и $a+b$). Этот алгорифм основан на определенной теории, принадлежащей Евклиду.

Обобщим этот пример и рассмотрим вместо уравнения первой степени $ax + by + c = 0$ уравнение второй степени $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (a, b, c не все равны 0) или даже произвольное алгебраическое уравнение (полиномиальное уравнение) любой степени $n > 0$ от любого числа $m > 0$ переменных $x_1, \ldots, x_m$ и построим наш класс вопросов: «Разрешимо ли в целых числах любое данное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами?». Проблема разрешения для этого класса вопросов есть «десятая проблема Гильберта», включенная в его знаменитый список 23 важнейших нерешенных проблем математики [1900a]. Эта проблема не решена до сих пор [2]).

Чтобы упростить ситуацию, рассмотрим некоторый двуместный предикат $P(a, x)$, алгорифм для которого у нас имеется. Отсюда непосредственно не вытекает, что существует алгорифм для $(Ex)P(a,x)$. Единственная процедура, которую *непосредственно* дает определение этого предиката, состоит в том, чтобы, выбрав некоторое значение a, начать проверять высказывания $P(a, 0)$, $P(a, 1)$, $P(a, 2)$, $\ldots$, надеясь найти среди них истинное. Мы не можем рассчитывать, что с помощью этой процедуры узнаем за конечное число шагов, истинно ли $(Ex)\,P(a, x)$. Ведь (как мы уже отмечали относительно «$\exists x P(x)$» в § 36) если после некоторого конечного количества шагов мы не нашли x, делающего $P(a, x)$ истинным, то мы не будем знать, произошло ли это оттого, что $(Ex)\,P(a, x)$ ложно для рассматриваемого a, или оттого, что мы не зашли еще достаточно далеко в нашей процедуре поиска.

Чтобы сформулировать этот пример в терминах теоретико-числовых функций вместо предикатов (т. е. вместо пропозициональных функций), допустим, что у нас имеется вычислительная процедура для $f(a, x)$. Мы не можем сразу сказать, существует ли такая про-

---

[1]) Начиная с этой главы (и в нескольких случаях ранее, см. примечание на стр. 37) мы используем следующий неформальный логический символизм: $\equiv$ («эквивалентно»), $\rightarrow$ («влечет»), $\wedge$ («и»), $\vee$ («или»), $\bar{\ }$ (так: $\bar{A}$; «не»), (x) («для всех x»), (Ex) («существует x (такой, что)»).

[2]) Матиясевич [1970] дал отрицательное решение десятой проблемы Гильберта.— *Прим. ред.*

цедура для функции

$$f(a) = \begin{cases} 0, \text{ если } (Ex)\, f(a, x) = 0, \\ 1 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Если $f(a, x)$ — представляющая функция для $P(a, x)$, то $f(a)$ — представляющая функция для $(Ex)\ P\ (a, x)$.

Осознание того, что для некоторых (счетно-бесконечных) классов математических вопросов у нас имеются алгорифмы, а для других они нам по меньшей мере неизвестны, относится к далекому прошлому математической истории. Греки, включая Евклида, искали алгорифмы; сам термин «алгорифм» происходит от имени арабского математика девятого века аль-Хорезми.

Напомним, что все проблемы вычисления и разрешения, как мы видели, могут быть сведены к проблемам вычисления для теоретико-числовых функций.

Поэтому, чтобы продвинуться к нашей цели (к теореме Чёрча), нам нужно будет заняться вопросом: для каких теоретико-числовых функций имеются вычисляющие их процедуры (алгорифмы)? Короче: каков класс «вычислимых» функций?

Чем мы располагаем сейчас, чтобы продолжить рассмотрение этого вопроса? Несколько расплывчатым интуитивным представлением о том, что представляет собой вычислительная процедура. Вычислительная процедура может состоять просто в прямом применении определения функции или в чем-то совсем ином, что, как показывает математическая теория, должно вести к тем же значениям функции, которых требует исходное определение.

Хотя наше интуитивное понятие вычислительной процедуры расплывчато, оно тем не менее реально, как показывают следующие два обстоятельства. Во-первых, оно не оставляет у математиков никаких сомнений и не приводит их ни к каким расхождениям в вопросе о том, что они располагают вычислительными процедурами для многих конкретных функций, например $a+1$, $a+b$, $a \cdot b$, a^b, $a!$, $\max(a, b)$ (равной максимуму из a и b, т. е. большему из них, если $a \neq b$, и их общему значению, если $a = b$), $\min(a, b)$ (равной минимуму из a и b), $a \dot{-} 1$ (равной $a - 1$, если $a \geqslant 1$, и 0, если $a = 0$), $a \dot{-} b$ (равной $a - b$, если $a \geqslant b$, и 0, если $a < b$), $[a/b]$ (равной частному от деления a на b, если $b \neq 0$, и 0, если $b = 0$), $[\sqrt{a}]$ (равной наибольшему натуральному числу, квадрат которого $\leqslant a$), $[e^a]$ (равной наибольшему натуральному числу $\leqslant e^a$) и т. д. Во-вторых, подобным же образом в других частных случаях нет сомнений в том, что определение некоторой функции или данный эквивалент ее определения не позволяет непосредственно указать вычислительную процедуру. Например, мы согласны с тем, что представленное выше определение функции $f(a)$ не дает для нее вычислительной процедуры.

Мы лишь напоминаем то, что не ставилось математиками под сомнение на протяжении более чем двух тысячелетий (если мы правильно понимаем историю математики).

Это интуитивное понятие вычислительной процедуры, которое достаточно реально, чтобы отделить те многие случаи, когда мы знаем, что имеем перед глазами вычислительную процедуру, от многих других случаев, когда мы знаем, что такой процедуры у нас нет, оказывается, однако, расплывчатым, когда мы пытаемся извлечь из него картину совокупности всех возможных вычислимых функций. А нам необходимо иметь такую картину, описанную в точных терминах, прежде чем мы сможем надеяться доказать, что для некоторой конкретной функции вообще не существует процедуры вычисления, или, короче, доказать, что некоторая функция невычислима. Для создания такой картины нужно нечто большее.

Большинство математиков-логиков сходятся на том, что это «нечто большее» было найдено в 1935 г. (опубликовано в 1936 г.), см. следующий параграф.

Начиная с этого места мы будем иногда позволять себе говорить, что нечто может быть сделано «эффективно», или что некоторая операция или процесс «эффективны», чтобы кратко выразить тот факт, что для этого имеется алгорифм (т. е. разрешающая или вычислительная процедура).

Упражнения. 40.1. Для следующих предикатов и функций (классов вопросов) располагаем ли мы алгорифмом или его у нас нет (по крайней мере, если не привлекать никаких дополнительных сведений)? В (a) и (b) предполагается, что $P(a, x)$ разрешим.

(a) $f(a) = \begin{cases} \text{наименьшее } x, \text{ такое, что } P(a, x), \text{ если } (Ex)\, P(a, x), \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

(b) $f(a, b) = \begin{cases} \text{наименьшее } x \leqslant b, \text{ такое, что } P(a, x), \text{ если } (Ex)\,[x \leqslant b \wedge P(a, x)], \\ b+1 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

(c) Является ли a простым числом?

(d) Чему равно n-е простое число? (Считайте известной теорему Евклида о существовании бесконечно многих простых чисел, § 38.)

(e) $f(a) = \begin{cases} a+1, \text{ если «великая теорема» Ферма истинна,} \\ a, \text{ если «великая теорема» Ферма ложна.} \end{cases}$

(f) Для данных формул $A_1, \ldots, A_m$, B исчисления высказываний выполняется ли в исчислении высказываний $A_1, \ldots, A_m \vdash B$?

(g) Для данных формул $A_1, \ldots, A_m$, B исчисления предикатов выполняется ли в исчислении предикатов $A_1, \ldots, A_m \vdash B$?

(h) Для данных формул $A_1, \ldots, A_m$ исчисления предикатов является ли данная конечная последовательность формул выводом из $A_1, \ldots, A_m$ в исчислении предикатов, в котором все переменные фиксированы?

(i) Для данной конечной области D и данной формулы Е исчисления предикатов выполняется ли $\overline{\overline{D}}$-$\models$ E? (Ср. § 17.)

(j) Для данной формулы Е исчисления предикатов выполняется ли $\models$ E?

(k) Имеет ли данная элементарная функция (скажем, построенная из рациональных чисел и переменной x с помощью конечного количества сложений, умножений, делений, возведений в степень, извлечений корня, тригонометрических и экспоненциальной функций и обратных им) неопределенный интеграл, являющийся элементарной функцией?

(l) Имеет ли решения данная система m линейных уравнений с n неизвестными, коэффициенты которой — целые числа?

40.2. Покажите, что функция $[\sqrt{a}]$ вычислима.

40.3*. Покажите, что функция $[e^a]$ вычислима. (Используйте результат Эрмита 1873 г., согласно которому e трансцендентно; ср. § 33.)

§ 41. Машины Тьюринга, тезис Чёрча

В 1935 г. возникло такое положение: свойства, обнаруженные у некоторого точно определенного класса вычислимых теоретико-числовых функций, изучавшихся Чёрчем и Клини в 1932—1935 гг. и названных «λ-определимыми функциями», упорно подсказывали мысль, что этот класс, может быть, охватывает все функции, которые в соответствии с нашим интуитивным представлением можно рассматривать как вычислимые. Этот результат был несколько неожиданным, поскольку первоначально не было даже ясно, содержит ли этот класс конкретную вычислимую функцию $a \dot{-} 1$, упоминавшуюся выше, и доказательство (1932 г., опубликовано в 1935 г.) того, что содержит, было первой математической работой автора этой книги. Другой класс вычислимых функций, называемых «общерекурсивными функциями», определенный в 1934 г. Гёделем на основе одной идеи Эрбрана, обладал похожими свойствами. Чёрчем [1936] и Клини [1936a] было доказано, что эти два класса совпадают, т. е. что каждая λ-определимая функция является общерекурсивной, и наоборот.

При этих обстоятельствах Чёрч выдвинул тезис (опубликован в 1936 г.), что все функции, которые интуитивно мы можем рассматривать как вычислимые, или, говоря его словами, как «эффективно вычислимые», являются λ-определимыми, или, эквивалентным образом, общерекурсивными. Это не теорема, а именно тезис: в нем предлагается отождествить несколько расплывчатое интуитивное понятие с понятием, сформулированным в точных математических терминах, и потому *доказать* его невозможно. Но в поддержку этого тезиса Чёрчем, а впоследствии и другими были приведены очень веские доводы.

Несколько позже, но независимо появилась статья Тьюринга [1936 — 7], в которой был введен еще один точно определенный класс интуитивно вычислимых функций, которые мы будем называть «функциями, вычислимыми по Тьюрингу», и относительно этого класса было высказано такое же утверждение; это утверждение мы называем *тезисом Тьюринга.* Вскоре Тьюрингом [1937] было показано, что его вычислимые функции — это то же самое, что λ-определимые функции, и, следовательно, то же самое, что и общерекурсивные функции. Поэтому тезисы Тьюринга и Чёрча эквивалентны. Мы будем обычно ссылаться на оба эти тезиса как на *тезис Чёрча*, а в связи с тем из трех его вариантов, в котором идет речь о «машинах Тьюринга»,— как на *тезис Чёрча — Тьюринга.* В 1936 г. Пост независимо от Тьюринга опубликовал в довольно сжатом изложении формулировку, в основе ту же, что у Тьюринга. В 1943 г., основываясь на своей неопубликованной работе 1920—1922 гг., он опубликовал четвертый эквивалент [1]). Еще одну эквивалентную формулировку дает теория алгорифмов Маркова [1951с].

Понятие машины Тьюринга возникает в результате прямой попытки разложить интуитивно известные нам вычислительные процедуры на элементарные операции. Тьюринг привел ряд доводов в пользу того, что повторения его элементарных операций было бы достаточно для проведения любого возможного вычисления. Поскольку вычислимость в смысле Тьюринга приводит к тезису Чёрча более непосредственно, чем другие эквивалентные понятия, мы выбираем для нашего изложения именно ее.

Тьюринг описал некоторого рода теоретическую вычислительную машину. От человека-вычислителя, выполняющего данные ему предписания, или от существующих *цифровых* вычислительных машин (таких, как настольный арифмометр или быстродействующая вычислительная машина с электронными лампами или транзисторами) она отличается в двух отношениях. В этих двух отношениях мы идеализируем людей-вычислителей и физические машины, отвлекаясь от имеющихся у них практических ограничений.

Во-первых, «машина Тьюринга» не может ошибаться, т. е. она без всяких отклонений выполняет правила, установленные для ее работы.

Во-вторых, «машина Тьюринга» снабжена потенциально бесконечной памятью. Это значит, что, хотя в каждый момент количество накопленной ею информации конечно, для него нет никакой верхней грани. Накапливаемая информация может включать (в тот или иной момент времени) формулировку конкретного заданного машине вопроса, черновую работу, выполненную машиной в процессе получения ответа, и сам ответ. Чтобы сделать возможным неогра-

---

[1]) Сообщение об этой работе Поста 20-х годов (написанное им в 1941 г.) было опубликовано после смерти автора Дэвисом [1965] (стр. 338—433).

ниченное накопление такой информации, мы будем рассматривать отдельно друг от друга саму машину и внешний накопитель, в качестве которого мы возьмем бесконечную «ленту».

Собственно машина, которая осуществляет вычисление и, таким образом, определяет, какая функция вычисляется, имеет только фиксированное конечное число возможных «состояний». Она представляет собой конечный список правил или конечное описание процедуры в нашем интуитивном понимании алгорифма (§ 40). (При этом информация, но только в пределах некоторого фиксированного количества, может быть мгновенно накоплена машиной переходом ее в то или другое из ее «состояний».)

Теперь мы сформулируем наше понятие *машины Тьюринга* подробно. Мы занумеруем моменты времени, в которые будет действовать машина, числами 0, 1, 2, ... В каждый данный момент машина будет находиться в одном из $k+1$ *состояний*, которые мы нумеруем числами 0, 1, ..., k. *Состояние* 0 мы назовем *пассивным состоянием*, остальные состояния — *активными*. *Линейная лента*, разделенная на *клетки*, пропущена через машину (когда машина подготовлена для работы). Лента потенциально бесконечна вправо. Каждая клетка содержит либо *пробел* s_0, либо напечатанный в нем *символ* из данного конечного списка $s_1, \ldots, s_j$; таким образом, $s_0, \ldots, s_j$ — это возможное *содержание клеток*. Но в каждый данный момент времени символы могут быть напечатаны только в конечном числе клеток. В каждый момент, начиная с момента 0, одна из клеток ленты *обозревается* машиной.

Теперь рассмотрим любой момент времени, когда машина находится в одном из своих активных состояний 1, ..., k. Между этим и следующим моментами машина совершает *действие*, состоящее из трех последовательных операций (a), (b), (c), каждая из которых принадлежит соответствующему типу, а именно: (a) напечатать в обозреваемой клетке один из символов $s_1, \ldots, s_j$ (если в данный момент клетка была пустой) или стереть содержимое обозреваемой клетки (если в данный момент в клетке было что-то напечатано), или стереть символ, находящийся в обозреваемой клетке, и напечатать один из символов $s_1, \ldots, s_j$ (если в данный момент в клетке было что-то напечатано), или не производить в обозреваемой клетке никаких изменений; (b) сдвинуть ленту таким образом, чтобы в следующий момент обозревалась клетка, ближайшая к обозревавшейся клетке слева (короче, сдвинуться влево) или не двигать ленту (остаться на месте), или сдвинуть ленту таким образом, чтобы в следующий момент обозревалась клетка, ближайшая к обозревавшейся клетке справа (короче, сдвинуться вправо); (c) перейти в другое состояние или остаться в прежнем состоянии. Какое действие (из этих возможных действий) выполняется между данным моментом, в котором состояние машины активно (т. е. является одним из состояний 1, ..., k), и следующим моментом, определяется состоянием машины и содержимым обозреваемой клетки (одним из $s_0, \ldots, s_j$) в данный момент, за одним исключением, которое сейчас будет объяснено. Мы называем состояние машины вместе с содержимым обозреваемой клетки в данный момент *конфигурацией*. В отличие от этого состояние машины вместе с указанием, какая клетка обозревается, и всего того, что напечатано на ленте, мы называем *ситуацией* (*машины и ленты*).

Исключительный случай, когда конфигурация в данный момент не определяет действие,— это случай, когда конфигурация потребовала бы движения влево, в то время как обозреваемая клетка уже является самой левой клеткой на ленте. Тогда части (b) и (c)действия заменяются на «остаться на месте и прийти в пассивное состояние» (короче, остановиться). Машина «застопоривается». Мы могли бы избежать этого исключения, предположив, что лента бесконечна в обе стороны [1]).

Если в данный момент машина находится в пассивном состоянии 0, то между этим и следующим моментом не совершается никакого действия, т. е. машина не печатает и не стирает, не сдвигается и не изменяет своего состояния 0.

Сейчас мы проиллюстрируем, как работает машина Тьюринга. Сначала, однако, давайте определим, как использовать такую машину для вычисления теоретико-числовой функции. (Тьюринг первоначально использовал свои машины для постепенного вычисления разложений вещественных чисел в десятичные дроби.) Для этого мы должны условиться, как представлять на ленте аргумент (аргументы), т. е. значение (значения) независимой переменной (переменных), и как машина должна выдавать нам получающееся в результате значение функции. Мы сделаем предположение, что все машины, которые мы будем здесь рассматривать, имеют одним из своих символов палочку «|»; скажем, пусть она есть s_1. Мы будем представлять натуральные числа последовательностями палочек: 0 — последовательностью «|», 1 — последовательностью «||», 2 — последовательностью «|||», ... Чтобы подготовить машину и ленту к вычислениям для данного аргумента a, мы сделаем так: в момент 0 установим систему, состоящую из машины и ленты, в начальное положение, в котором самая левая клетка на ленте — пустая, a представлено палочками в следующих $a+1$ клетках, все клетки справа от них — пустые, машина обозревает самую правую из заполненных клеток и находится в первом из своих активных состояний 1. В этой ситуации мы говорим, что машина *применяется*

[1]) Мы делаем так в [ВМ], стр. 317; но результаты оказываются по существу такими же. (См. также примечания на стр. 284 и 287.)

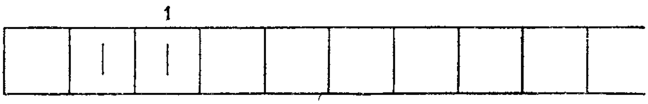
Наше описание машин Тьюринга (начиная с обсуждения на нашем семинаре по основаниям математики в Висконсине в 1941 г.) следует Тьюрингу [1936—7] (во всем, что касается общей концепции поведения машины, но не в подробностях формулировки и изложения). Ср. [ВМ], стр. 322.

к а как к аргументу. Мы говорим, что машина *вычисляет значение с для а в качестве аргумента*, если, исходя из этой ситуации в момент 0, машина в некоторый последующий момент приходит в пассивное состояние 0 («останавливается»), причем на ленте, после $a+1$ палочек, представляющих аргумент, и одного пробела, напечатаны $c+1$ палочек, на остальной части ленты ничего не напечатано, и машина опять обозревает самую правую из заполненных клеток [1]).

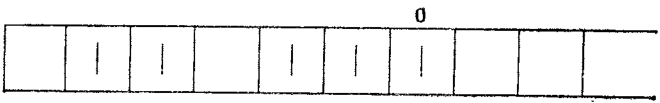
Данная машина может вычислять значение для каждого натурального числа a в качестве аргумента или только для некоторых a или не вычислять значение ни для какого a. Если для каждого a она вычисляет значение c, где $c = f(a)$, мы говорим, что машина *вычисляет* функцию $f(a)$ и что $f(a)$ *вычислима по Тьюрингу.*

Аналогично для функций более чем одной переменной.

Например, машина применяется к 1 как к аргументу, если в момент 0 она находится в следующей ситуации:



где «1», написанная над третьей клеткой, показывает, что эта клетка обозревается и что машина находится в состоянии 1, а все клетки справа от показанных на рисунке — пустые. Машина вычисляет значение 2 для 1 в качестве аргумента, если, будучи установлена в момент 0 в изображенную выше ситуацию, она придет в некоторый последующий момент x в ситуацию



где, как и выше, все клетки справа от показанных на рисунке — пустые. Если подобным же образом каждый раз, когда машина начинает работу с $a+1$ палочками на ленте, она в конце концов останавливается, имея на ленте после этих палочек пробел и еще $a+2$ палочек (причем обозревается последняя из них), то машина вычисляет функцию $f(a) = a+1$; сказанное выше иллюстрирует это для $a = 1$.

Теперь мы опишем машину $\mathfrak{S}$, которая вычисляет эту функцию $f(a) = a+1$ (функцию следования), и проследим за ее работой при вычислении для аргумента $a = 1$. У этой машины будет только один

[1]) В этом случае не может случиться, что машина в процессе вычисления попытается сдвинуться влево от самой левой на ленте клетки, потому что тогда машина пришла бы в состояние 0, не обозревая последнюю палочку в двух последовательностях палочек, разделенных пробелом.

символ « | ». Чтобы избавить себя от необходимости каждый раз рисовать ленту, мы будем использовать последовательности цифр «0» и «1», причем «0» будет изображать пустую клетку, а «1» — клетку, на которой напечатана палочка. Так, в приведенном выше примере мы могли бы записать начальную ситуацию в виде

$$0\ 1\ 1^{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots,$$

а ситуацию в момент, когда вычисление закончено, в виде

$$0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1^{0}\ 0\ 0 \ldots .$$

Чтобы описать машину, мы должны просто указать для каждого из ее активных состояний $1, \ldots, k$ и каждого из $j+1$ состояний обозреваемой клетки (пробела s_0 или одного из символов $s_1, \ldots, s_j$), какое действие она должна совершить. У машины, которую мы сейчас описываем, будет 11 активных состояний и 2 возможных содержимых обозреваемой клетки — она может быть пустой или в ней может быть напечатана палочка «|» (или, как нам будет удобнее записывать, «0» и «1»). Действия, которые нужно выполнить для каждой из этих конфигураций, определяемых 11 активными состояниями машины и 2 содержимыми обозреваемой клетки, можно показать на таблице машины, изображенной на стр. 286 слева. В этой таблице «P» означает «напечатать», «E» — «стереть»; «L», «C», «R» — «влево», «в центре» (т. е. не сдвигаться) и «вправо», а число в конце каждой табличной записи — номер состояния, в которое машина должна перейти в следующий момент.

Справа от таблицы мы прослеживаем работу машины $\mathfrak{S}$ при вычислении $a+1$ для аргумента $a=1$. В момент 0 мы видим справа, что в состоянии 1 обозревается непустая клетка (т. е. 1), поэтому мы находим в таблице машины на пересечении первой строки и второго столбца запись «$R2$», т. е. инструкцию «сдвинуться вправо и перейти в состояние 2». Получившаяся в результате ситуация показана справа в строке (для момента) 1. Теперь в состоянии 2 обозревается пустая клетка, так что мы находим в таблице на пересечении второй строки и первого столбца «$R3$», т. е. инструкцию «сдвинуться вправо и перейти в состояние 3». Результат показан в строке (для момента) 2. Теперь обозреваемая клетка по-прежнему пуста, но машина находится в состоянии 3, так что, согласно таблице (третья строка, первый столбец, где стоит «$PL4$»), машина печатает «|», сдвигается влево и переходит в состояние 4 с результатом, показанным в строке (для момента) 3. Продолжая, мы находим, что в момент 23 машина вычислила требуемое значение 2 ($=a+1$ для $a=1$), изображенное тремя палочками. Чтобы увидеть, что машина вычисляет $f(a)=a+1$, мы должны убедиться в том, что она вычислит значение $a+1$ для каждого значения a в качестве аргумента. Мы проделали это только для $a=1$, но читателю, вероятно, нетрудно понять «общую линию» работы машины, чтобы увидеть, что она делает это для каждого a.

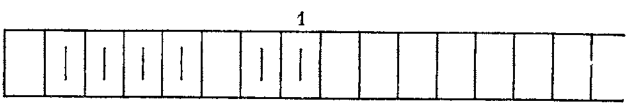
Таблица для машины $\mathfrak{S}$, вычисляющей $f(a) = a + 1$

Состояние машины	Содержимое обозреваемой клетки 0	1
1	$C0$	$R2$
2	$R3$	$R9$
3	$PL4$	$R3$
4	$L5$	$L4$
5	$L5$	$L6$
6	$R2$	$R7$
7	$R8$	$ER7$
8	$R8$	$R3$
9	$PR9$	$L10$
10	$C0$	$ER11$
11	$PC0$	$R11$

Вычисление, производимое машиной $\mathfrak{S}$ для $a = 1$

Момент	Ситуация машины и ленты						
0	0	1	1^{1}	0	0	0	0
1	0	1	1	0^{2}	0	0	0
2	0	1	1	0	0^{3}	0	0
3	0	1	1	0^{4}	1	0	0
4	0	1	1^{5}	0	1	0	0
5	0	1^{6}	1	0	1	0	0
6	0	1	1^{7}	0	1	0	0
7	0	1	0	0^{7}	1	0	0
8	0	1	0	0	1^{8}	0	0
9	0	1	0	0	1	0^{3}	0
10	0	1	0	0	1^{4}	1	0
11	0	1	0	0^{4}	1	1	0
12	0	1	0^{5}	0	1	1	0
13	0	1^{5}	0	0	1	1	0
14	0^{6}	1	0	0	1	1	0
15	0	1^{2}	0	0	1	1	0
16	0	1	0^{9}	0	1	1	0
17	0	1	1	0^{9}	1	1	0
18	0	1	1	1	1^{9}	1	0
19	0	1	1	1^{10}	1	1	0
20	0	1	1	0	1^{11}	1	0
21	0	1	1	0	1	1^{11}	0
22	0	1	1	0	1	1	0^{11}
23	0	1	1	0	1	1	1^{0}
24	0	1	1	0	1	1	1^{0}

Чтобы проиллюстрировать вычисление функции от двух переменных, заметим, что машина, вычисляющая $f(a, b) = a + b$, начиная (для $a = 3$, $b = 1$) в ситуации



должна затем остановиться (т. е. прийти в состояние 0) в ситуации

Машина, вычисляющая $a+1$, достаточно сложна, так что у читателя может возникнуть вопрос: как находить машины, вычисляющие сложные эффективно вычислимые функции? Конечно, *здесь* мы интересуемся только теоретической возможностью нахождения машины, вычисляющей любую данную эффективно вычислимую функцию, а не тем, экономно ли работает эта машина. Работу по нахождению машин можно систематизировать, исходя из теории рекурсивных функций [1]). В этой теории рассматриваются рекурсивные определения функций, такие, как

$$\begin{cases} a+0=a, \\ a+b'=(a+b)', \end{cases} \qquad \begin{cases} a\cdot 0=0, \\ a\cdot b'=a\cdot b+a, \end{cases} \qquad \begin{cases} a^0=1, \\ a^{b'}=a^b\cdot a. \end{cases}$$

Каким образом эти определения определяют функции, объяснялось в § 38. Функции, обычно используемые в теории чисел, могут быть определены с помощью таких рекурсий, и, исходя из этих рекурсивных определений, можно систематически находить соответствующие машины Тьюринга после того, как сначала построены машины Тьюринга для таких простых операций, как заполнение палочками всех пустых клеток, кроме самой правой, между двумя палочками, как повторение последовательности палочек и т. д.

Задавая машинам аргументы и получая значения функций, мы использовали, кроме пробела, только один символ «|» (т. е. два содержимых клетки «0» и «1»), и так же обстояло дело в процессе всей работы машины $\mathfrak{S}$. Определение «машины Тьюринга» позволяет использовать и другие символы. Чтобы записать *таблицу машины* с j символами $s_1, \ldots, s_j$, нужно $j+1$ столбцов. При $j>1$ «P» уже не имеет однозначного смысла; тогда вместо «P», или «E», или отсутствия того и другого мы можем записать десятичное обозначение числа i, выразив этим, что содержимое клетки в следующий момент должно стать s_i $(0\leqslant i\leqslant j)$.

Хотя мы оставляем, таким образом, открытой возможность использования $j+1>2$ содержимых клеток вместо 2, оказывается, что мы в результате этого не получаем более широкого класса вычислимых функций [2]).

---

[1]) См., например, [ВМ], часть III. Приведенные ниже три определения — это «примитивные рекурсии» ([ВМ], гл. IX); но наша теория охватывает и более сложные виды рекурсии, определяющие упомянутые выше «общерекурсивные функции» ([ВМ], гл. XI).

[2]) Это показано в гл. XIII [ВМ], поскольку там в доказательстве вычислимости по Тьюрингу любой общерекурсивной функции использован только один символ |, в то время как в доказательстве общерекурсивности каждой вычислимой по Тьюрингу функции допускаются j символов $s_1, \ldots, s_j$ для любого $j\geqslant 1$.

Тот же метод позволяет доказать, что, используя ленту, бесконечную в обе стороны, мы не получили бы больше (или меньше) вычислимых функций.

Может показаться несколько странным, что, после того как мы утверждали возможность выполнения любого интуитивного вычисления с помощью только тех операций, которые допускает машина Тьюринга, оказалось несколько затруднительным убедиться в вычислимости по Тьюрингу такой простой функции, как $a+1$. Однако мы начали сейчас с самого начала и делали это с помощью машины Тьюринга с единственным символом «|» (кроме пробела), хотя это не было необходимым. Использование большего числа символов сделало бы работу машины Тьюринга более сходной с неформальным вычислением.

Далее, наш пример может внушить несправедливое подозрение, что вычислительная машина ограничена своим муравьиным взглядом на работу, устремленным каждый раз на одну клетку. Но, когда, кроме символа «|» (и пробела), разрешаются и другие символы, можно понимать «символы» более либерально. Ничто не мешает нам считать отдельные клетки ленты соответствующими целым листам бумаги, разделенным на конечное количество клеток, в каждой из которых может находиться один из конечного множества первичных символов. То, что может быть написано на целом листе, может тогда рассматриваться как единый символ для машины Тьюринга. Если листы разлинованы в двадцать столбцов и тридцать строк и допускаются 100 первичных символов, то получается 101^{600} содержимых клетки $s_0, \ldots, s_j$ ($j = 101^{600} - 1$) и мы впадаем в противоположную крайность. Школьник, занимающийся арифметикой на листах бумаги «в клетку» стандартного формата (16×20 см), никогда не будет нуждаться в таком многообразии. Он будет обычно действовать, изменяя лишь состояние находящегося перед ним листа бумаги (обозреваемой клетки), только иногда перенося цифры на следующий или предыдущий лист в своей стопке бумаги (сдвиг влево или вправо).

С этой точки зрения клетка ленты представляет то, на что в данный момент смотрят и что может и не быть малым.

На самом деле школьник в каждый данный момент непосредственно воспринимает только часть того, что имеется на листе бумаги; все остальное в той степени, в которой оно влияет на его действия между данным моментом и следующим, он должен помнить в виде состояния своего ума. Так что психологически то, что играет роль клетки на ленте машины Тьюринга, есть нечто промежуточное между маленькими клеточками на бумаге и целым листом.

Другой образец ленты машины Тьюринга — это колода перфокарт для ЭВМ, причем каждая перфокарта составляет отдельную клетку для машины Тьюринга.

Возвращаясь к примеру со школьником, заметим, что для нашей концепции необходимо, чтобы бумага была разделена на клетки (по крайней мере на воображаемые клетки) и чтобы символы брались из некоторого данного конечного списка, так чтобы зафиксировать всю конечную область имеющихся возможностей. Иначе говоря, должно иметься только конечное количество возможных состояний листа бумаги или клетки на ленте машины Тьюринга. Подобным же образом должно иметься только конечное количество состояний ума человека-вычислителя или состояний машины Тьюринга. Как писал Тьюринг, «количество состояний ума, которые должны приниматься во внимание, конечно. ... Если мы допустили бесконечное количество состояний ума, то некоторые из них будут «произвольно близки» и будут смешиваться». Конечные количества возможных содержимых клетки и состояний ума могут быть, разумеется, очень велики. Мы рассматриваем *цифровое* вычисление, где данные являются дискретными. Оно противопоставляется *аналоговому* вычислению вроде вычисления на логарифмической линейке или с помощью дифференциального анализатора, где данные являются положениями на шкале или на шкалах, представляющими вещественные числа лишь с некоторой степенью точности. Входными данными для наших вычислений должны быть натуральные числа или же еще что-нибудь аналогичное, вроде слов естественного языка или формальных выражений в некоторой формальной системе; таковы же и результаты. Дискретность должна сохраняться на протяжении всего вычисления. В каждый момент имеющаяся (конечная) конфигурация, представляющая и содержимое листа бумаги (или клетки на ленте), и состояние ума вычислителя (или состояние машины), должна полностью определять следующее действие, которое надо выполнить. Только в этом случае вычисление приведет к дискретному результату, а не к чему-то приближенному, причем к такому результату, который полностью предопределен (когда он вообще существует) начальной ситуацией и имеющимися у вычислителя предписаниями (или таблицей машины).

Существует, однако, одна подлинная трудность, с которой должна столкнуться наша теория вычисления. Она возникает в связи с тем, что мы называем функцию $f(a)$ вычислимой в точности тогда, когда существует машина, которая вычислит ее значение для *любого* выбранного a. Таким образом, мы должны быть готовы проводить вычисления для произвольно больших значений a. От школьника, занимающегося вычислениями на листах бумаги, обычно не требуют, чтобы он работал с числами, настолько большими, что они не помещаются на одном листе. Если бы ему пришлось этим заниматься, он был бы вынужден работать «ощупью», как наша машина $\mathfrak{S}$ при вычислении значений функции $a+1$.

За дальнейшим обсуждением тезиса Чёрча или тезиса Чёрча — Тьюринга мы отсылаем читателя к литературе[1]). В следующих параграфах мы будем заниматься следствиями этого тезиса.

[1]) В [ВМ] сделана попытка собрать все доводы в пользу тезиса Чёрча: в § 62 дано общее резюме, дополненное на стр. 314; в § 70 изложена часть доводов, дополняющая данное обсуждение и связанная с машинами Тьюринга.

Упражнения. 41.1. (а) Выпишите вычисление, производимое машиной $\mathfrak{S}$, когда аргумент есть 0, т. е. начиная из ситуации $0\ 1^1\ 0\ 0\ 0\ \ldots$.

(b) Объясните, как работает машина $\mathfrak{S}$, так чтобы стало ясно, что $\mathfrak{S}$ действительно вычисляет функцию $a+1$.

41.2. Постройте таблицу для машины $\mathfrak{E}$, которая решает, является ли аргумент a четным, т. е. $\mathfrak{E}$ должна вычислять функцию

$$f(a)=\begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ четно,} \\ 1, & \text{если } a \text{ нечетно.}\end{cases}$$

В [ВМ], стр. 314, приведен следующий аргумент. Относительно большого набора интуитивно вычислимых функций (а именно относительно всех, которые были исследованы в этой связи) известно, что они вычислимы по Тьюрингу. Аналогично, у нас имеется большой набор методов или операций (для получения новых интуитивно вычислимых функций из уже имеющихся), которым соответствуют операции для построения новых машин Тьюринга из данных машин Тьюринга (или аналоги таких операций в терминах рекурсивности). Если бы существовала функция, интуитивно вычислимая, но не вычислимая по Тьюрингу, она была бы «недостижимой» при помощи какого бы то ни было процесса построения с помощью набора уже построенных функций и операций. В § 66 [ВМ] приведена теорема о рекурсии (Клини [1938]), относящаяся к процессам построения вообще. Трудно представить себе, как можно было бы дать описание вычислительной процедуры или набор предписаний, которому мог бы следовать человек-вычислитель, иначе, чем составив это описание из уже известных более простых элементов, а тогда оно подпало бы под эту теорему.

Об аргументах против тезиса Чёрча и ответах на них см. Кальмар [1959] и Мендельсон [1963]. Читая такие обсуждения, следует не упускать из виду наше интуитивное понятие алгорифма, или вычислительной процедуры (§ 40). Алгорифм в нашем смысле должен быть полностью и конечным образом описан до того, как выбран некоторый конкретный вопрос, к которому он применяется. Когда вопрос выбран, все шаги должны быть предопределены, и их должно быть возможно выполнять без какого-либо проявления искусства или математической изобретательности со стороны лица, производящего вычисление. Никто из скептически относящихся к тезису Чёрча не выступил с правдоподобным предположением относительно того, как мог бы выглядеть алгорифм (в нашем смысле), не механизируемый по способу Тьюринга. (Конечно, тезис Чёрча был бы опровергнут, если бы кто-нибудь описал конкретную функцию, относительно которой наше интуитивное понимание безошибочно свидетельствовало бы, что она «эффективно вычислима», но можно было бы в то же время доказать, что она не общерекурсивна.)

Мы приняли без пристального изучения тезис, обратный тезису Чёрча: если некоторая функция вычислима по Тьюрингу (или общерекурсивна, или λ-определима), она интуитивно вычислима (эффективно вычислима). Защищая эту импликацию перед интуиционистом или перед конструктивистом любого другого рода, который считает алгорифм существующим только тогда, когда доказано в соответствии с его критериями, что он всегда срабатывает, мы только попросим его признать следующее: если предположение, что функция вычислима по Тьюрингу, имеет место по его критериям, то по тем же критериям имеет место и заключение. Трудно представить, как с этим можно спорить в такой формулировке. Тезис, обратный к тезису Чёрча, окажется под сомнением, только если допустить неконструктивное понимание посылки и все же настаивать на конструктивном понимании заключения. (Иногда это обратное утверждение включают в «тезис Чёрча», поскольку Чёрч [1936] утверждал в действительности обе импликации, предлагая отождествить эффективно вычислимые функции с общерекурсивными или λ-определимыми функциями.)

41.3. Измените таблицу машины $\mathfrak{S}$, так чтобы получилась:

(a) машина $\mathfrak{J}$, вычисляющая тождественную функцию $f(a) = a$ (т. е. просто копирующая a),

(b) машина $\mathfrak{P}$, вычисляющая функцию предшествования $f(a) = a \dot{-} 1$ (конец § 40).

41.4 *. Покажите, что если функции $f(a)$ и $g(a)$ вычислимы по Тьюрингу, то функция $h(a) = f(g(a))$ также вычислима по Тьюрингу.

41.5. Покажите, что ни одна функция не была бы вычислима по Тьюрингу, если бы данное выше определение было изменено так, чтобы допускалась только конечная лента.

41.6*. Покажите, что никакие новые функции не стали бы вычислимыми по Тьюрингу, если бы данное выше определение было изменено так, чтобы не требовалось стирать всю черновую работу.

§ 42. Теорема Чёрча (в терминах машин Тьюринга)[1]

Мы видели, что поведение данной машины Тьюринга определяется ее таблицей; если мы знаем таблицу, мы знаем по существу и машину.

Как мы заметили в § 41, использование буквы «P», обозначающей «печатать», приводит к неоднозначности, когда имеется не только один символ «|» или s_1 ($j = 1$). Мы будем теперь записывать таблицы с помощью другого метода (объясненного в § 41), который пригоден для любого числа $j \geqslant 1$ символов $s_1, \ldots, s_j$. Согласно этому методу, табличная запись «$7R3$» означала бы, что обозреваемая в данный момент t клетка должна в следующий момент $t+1$ иметь содержимое s_7 (т. е. в ней должен быть напечатан символ s_7) и (как раньше) машина должна между моментами t и $t+1$ сдвинуть ленту так, чтобы в момент $t+1$ обозревалась клетка, ближайшая справа к обозревавшейся в момент t, и в момент $t+1$ машина должна находиться в состоянии с номером 3. Эта табличная запись могла бы появиться только в таблице машины не менее чем с 7 символами и 3 активными состояниями.

Таблица для нашей машины $\mathfrak{S}$, переписанная по этому способу, станет такой:

Состояние машины	Содержимое обозреваемой клетки	
	0	1
1	$0C0$	$1R2$
2	$0R3$	$1R9$
3	$1L4$	$1R3$
. . . .	. . . .	. . . .
10	$0C0$	$0R11$
11	$1C0$	$1R11$

[1]) В этом и следующих двух параграфах мы следуем изложению Клини [1958], стр. 145—147 (часть которого появилась ранее в [1956a], [1957b]).

Таблица машины может быть записана в закодированном виде. Рассмотрим таблицу для машины $\mathfrak{S}$, первоначально данную в § 41 и повторенную здесь. Используя последний способ записи, вставим точки с запятой в конце каждой строки табличных записей и запятые между записями в одной строке, после чего вытянем всю таблицу в одну последовательность символов:

$$0C0,\ 1R2;\ 0R3,\ 1R9;\ 1L4,\ 1R3;\ \ldots;\ 0C0,\ 0R11;\ 1C0,\ 1R11.$$

Эта последовательность символов есть *код* машины $\mathfrak{S}$.

Код любой машины может быть, таким образом, напечатан на пишущей машинке со следующими 15 символами:

$$L\ C\ R, ;\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9.$$

Такой код никогда не начинается с символа L. Интерпретируя эти символы как цифры числа, записанного в системе по основанию 15, мы получим целое положительное число, описывающее таблицу машины и, следовательно, ее поведение; назовем это число *индексом* данной машины [1]).

Пусть теперь $T(i, a, x)$ обозначает следующее:

i есть индекс машины Тьюринга (назовем ее «машина $\mathfrak{M}_i$»), которая, будучи применена к a в качестве аргумента, в момент x (но не раньше) закончит вычисление значения (назовем его «$\varphi_i(a)$»).

Этот предикат (т. е. пропозициональная функция) $T(i, a, x)$ «разрешим». Действительно, пусть даны значения i, a, x. Тогда мы можем определить, описывает ли число i, записанное в пятнадцатеричной системе счисления, таблицу некоторой машины. Если нет, то $T(i, a, x)$ ложно. Если да, то мы можем проследить за работой, совершаемой этой машиной $\mathfrak{M}_i$, когда она начинает вычислять в момент 0 для a в качестве аргумента вплоть до момента x. Наконец, в этом случае мы сможем посмотреть, не в *тот ли самый* момент машина $\mathfrak{M}_i$ заканчивает вычисление значения. Если это так, то $T(i, a, x)$ истинно; если нет — ложно. (Например, если i — число, записанное выше в пятнадцатеричной системе, то $T(i, 1, 23)$ истинно, а $T(i, 1, x)$ для каждого $x \neq 23$ ложно.)

Это рассуждение должно ясно показать, что предикат $T(i, a, x)$ разрешим в расплывчатом интуитивном смысле (§ 40). Тогда из тезиса Чёрча (или из тезиса Чёрча — Тьюринга, § 41) вытекает,

[1]) Мы используем «метод цифр» из конца § 32 (из § 1 [ВМ]), не заботясь о заполнении пробелов между получающимися числами (это не нужно нам для наших теперешних целей).

В изложениях после [1956а] мы используем этот метод индексации, поскольку его легко объяснить. Если бы нам нужно было сейчас рассматривать обсуждаемые ниже вопросы более подробно, было бы выгодно выбрать метод, по возможности облегчающий работу. Некоторые другие методы используются в литературе чаще. Но работа, проделанная Шмульяном [1961] (в связи с несколько иными вопросами), показывает, что использовать данную систему не сложнее.

что он *разрешим* (*по Тьюрингу*) в том строгом смысле, что существует машина Тьюринга, которая его разрешает, т. е. вычисляет его представляющую функцию $\tau(i, a, x)$, значение которой есть 0, если $T(i, a, x)$ истинно, и 1, если $T(i, a, x)$ ложно (§ 40). Полное рассмотрение предмета потребовало бы доказательства этого без обращения к тезису Чёрча. Это следует делать не на пустом месте, а на основе теории, построенной для данной цели, которая упоминалась в § 41. На таком пути мы установили бы часть (А) следующей теоремы. (В этой главе мы даем только очерк, в котором сможем лишь описать те соображения, на которых основаны полные доказательства.)

Теорема I. (А) *Предикат* $T(i, a, x)$ *разрешим.*

(В) $\varphi_i(a)$ *как частичная функция от* i *и* a *вычислима.*

Чтобы объяснить часть (В) теоремы, заметим сначала, что «величина» $\varphi_i(a)$ в определении $T(i, a, x)$ определена не для всех i и a; на самом деле она определена для данных i и a в точности тогда, когда существует x, такое, что $T(i, a, x)$, или, символически, когда $(Ex)\, T(i, a, x)$. В гл. II мы записали бы это в виде «$\exists x\, T(i, a, x)$», но здесь мы предпочитаем оставить «$\exists x$» для использования в формальных системах, используя «(Ex)» неформально в обсуждении этих систем (см. примечание 1 на стр. 277).

Для значения i, являющегося индексом машины Тьюринга, вычисляющей некоторую одноместную теоретико-числовую функцию, φ_i есть вычисляемая функция. Такие значения i описываются предикатом $(a)\,(Ex)\, T(i, a, x)$, где «(a)» значит «для любого a» (см. примечание 1 на стр. 227).

В качестве функции от двух переменных i и a $\varphi_i(a)$, как мы замечали, определена в точности тогда, когда $(Ex)\, T(i, a, x)$. Таким образом, она является частично определенной теоретико-числовой функцией от двух переменных i и a, или, короче, *частичной функцией.*

Однако для тех i и a, для которых она определена, мы можем найти ее значение следующим образом: если даны i и a, из i мы находим таблицу машины $\mathfrak{M}_i$, затем применяем $\mathfrak{M}_i$ (имитируем ее), совершая ее шаги, начав в момент 0 с a в качестве аргумента, вплоть до того момента x, для которого $T(i, a, x)$ истинно, и, наконец, «считываем» с конечной ситуации вычисленное значение. Этот процесс является алгорифмом, или разрешающей процедурой, в смысле § 40; здесь счетно-бесконечным классом вопросов является класс вопросов «чему равно значение $\varphi_i(a)$?», где (i, a) пробегает не все пары натуральных чисел, а в точности те, для которых $(Ex)\, T(i, a, x)$.

Мы расширим определение, данное в § 41 для «полных» теоретико-числовых функций, и будем говорить теперь, что частичная теоретико-числовая функция от двух переменных вычисляется машиной Тьюринга, если эта машина вычисляет значения этой функции для всех тех пар аргументов, для которых эта функция определена, и не вычисляет никакого значения для остальных пар аргументов. Аналогично для n-местных и частичных функций для любого n. Тезис Чёрча — Тьюринга применим и к частичным функциям на тех же основаниях, что и в случае полных функций (§ 41) [1].

На основании этого расширения тезиса Чёрча — Тьюринга из того, что у нас есть алгорифм для отыскания значений $\varphi_i(a)$, вытекает, что существует машина Тьюринга $\mathfrak{U}$, вычисляющая $\varphi_i(a)$ как частичную функцию от i и a. Тьюринг доказал непосредственно, без ссылки на этот тезис, что такая машина $\mathfrak{U}$ существует, хотя и в несколько иной ситуации (он занимался разложениями вещественных чисел в десятичные дроби), и мы могли бы проделать это в нашей ситуации, что и дало бы полное доказательство теоремы I (B).

Машина $\mathfrak{U}$, вычисляющая $\varphi_i(a)$ как частичную функцию от i и a, называется *универсальной машиной*, поскольку ее можно использовать для вычисления любой вычислимой функции $\varphi(a)$. Чтобы использовать ее для вычисления $\varphi(a)$, допустим, что $\varphi(a)$ вычисляется, скажем, машиной $\mathfrak{M}_i$; тогда применим $\mathfrak{U}$ к паре аргументов i, a. Таким образом, i играет роль набора *предписаний*, или *программы*, для $\mathfrak{U}$, который говорит машине $\mathfrak{U}$, какую функцию от a вычислять.

Следующую теорему мы можем доказать подробно.

Теорема II. *Функция $\psi(a)$, определяемая условием*

$$\psi(a) = \begin{cases} \varphi_a(a)+1, & \textit{если } (Ex)\, T(a, a, x), \\ 0 & \textit{в противном случае}, \end{cases}$$

невычислима.

Доказательство. Допустим, что $\psi(a)$ вычислима; пусть, скажем, машина $\mathfrak{M}_p$ вычисляет ее, так что $\psi(a) = \varphi_p(a)$ для всех a. Подставляя p вместо a, получим

$$\psi(p) = \varphi_p(p).$$

Но, поскольку $\mathfrak{M}_p$ вычисляет $\psi(a)$, для всех a имеет место $(Ex)\, T(p, a, x)$ и, в частности, $(Ex)\, T(p, p, x)$. Используя это в определении функции $\psi(a)$, получим

$$\psi(p) = \varphi_p(p)+1.$$

Два полученных равенства противоречат одно другому.

Чтобы представить это доказательство несколько иначе, мы можем рассмотреть произвольную машину Тьюринга $\mathfrak{M}_p$ и следующим образом убедиться в том, что она не сможет верно вычислить $\psi(a)$ для $a = p$. Начать с того, что $\mathfrak{M}_p$ может вообще не вычислить никакого значения для p в качестве аргумента. Но если $\mathfrak{M}_p$ вычислит какое-то значение для p в качестве аргумента, то это значение

[1]) Более полное обсуждение см. в [BM], стр. 295—296 и § 68.

есть $\varphi_p(p)$ по определению $\varphi_i(a)$; кроме того, в этом случае $(Ex)T(p, p, x)$, так что правильное значение $\psi(p)$ есть $\varphi_p(p)+1$ по определению $\psi(a)$.

Важность этого результата обусловлена тезисом Чёрча — Тьюринга, согласно которому вычислимость в смысле Чёрча — Тьюринга согласуется с интуитивным понятием вычислимости. Приняв этот тезис, как его приняли большинство исследователей в области оснований математики, мы должны ожидать, что руководитель вычислительного центра неизбежно потерпит неудачу, если он предпримет разработку процедуры, которой нужно следовать, чтобы вычислять функцию $\psi(a)$, или попытается построить машину, которая будет это делать. Это опровергает представление о том, что машины могут все, которое внедряется в общественное мнение нынешними сообщениями о современных достижениях в области быстродействующих вычислительных машин. Теорема вовсе не утверждает того, что существует какое-либо конкретное значение функции $\psi(a)$, которое мы не можем узнать. Но, какую бы мы ни зафиксировали конструкцию вычислительной процедуры или машины Тьюринга, мы не получим такой процедуры или машины, которая сможет вычислить все значения функции $\psi(a)$. Если значения, которые она вычисляет, правильны, то должны быть некоторые значения, которые она вычислить не может: в частности, она не сможет вычислить значение $\psi(p)$, где p есть ее собственный индекс (или, если речь идет о процедуре, индекс какой-нибудь машины, которая механизирует эту процедуру). Чтобы улучшить эту процедуру или машину, нужна изобретательность, т. е. вещь, которую нельзя встроить в машину.

Как только мы встретились с тезисом Чёрча — Тьюринга в § 41, нам должно было стать ясно, что обязательно существуют невычислимые теоретико-числовые функции, ибо в силу этого тезиса множество различных возможных машин счетно-бесконечно, поскольку каждую машину можно описать конечной таблицей в определенном символизме (ср. § 32). Раз множество машин счетно, то и множество функций, вычислимых на машинах, счетно, в то время как множество всех теоретико-числовых функций несчетно (§ 33). Но все еще интересно, насколько простые примеры невычислимых функций мы можем дать. Наш пример ($\psi(a)$ в теореме II) действительно очень прост, поскольку получен дополнением определения (условием «0 в противном случае») подходящей вычислимой частичной функции.

Почему мы не можем вычислить $\psi(a)$, исходя из ее определения? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема III. *Предикат* $(Ex)\,T(a, a, x)$ *неразрешим, т. е. функция*

$$\chi(a)=\begin{cases}0, & \text{если } (Ex)\,T(a, a, x),\\ 1 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

невычислима,

Доказательство. Если бы мы могли разрешить предикат $(Ex)\ T(a, a, x)$, то мы могли бы вычислить функцию $\psi(a)$ из теоремы II следующим образом: когда дано a, решить, выполняется ли $(Ex)\ T(a, a, x)$. Если решение дает ответ «да», то, имитируя поведение машины $\mathfrak{M}_a$ для a в качестве аргумента, вычислить $\varphi_a(a)$ и прибавить к результату 1. Если решение дает ответ «нет», просто написать 0.

Снова, как и при доказательстве теоремы I, мы даем идею доказательства, но не даем всех технических деталей. Добавлено должно быть гипотетическое построение машины, вычисляющей $\psi(a)$, из (данной по предположению) машины, вычисляющей $\chi(a)$. Это легко сделать, когда уже достигнута та стадия в развитии теории, которая нужна для полного доказательства теоремы I.

Обсуждение. Теорема III — это и есть по существу теорема Чёрча, появившаяся вместе с его тезисом в его статье 1936 г., озаглавленной «Неразрешимая проблема элементарной теории чисел». Различие состоит в том, что мы сформулировали пример с помощью вычислимости по Тьюрингу, в то время как пример Чёрча сформулирован с помощью «λ-определимости» (начало § 41). Проблема, являющаяся «неразрешимой», состоит в том, чтобы найти разрешающую процедуру для предиката $(Ex)\ T(a, a, x)$. Конечно, эта проблема решена в другом смысле, а именно доказана невозможность требуемой разрешающей процедуры. Проблема трисекции произвольного угла с помощью циркуля и линейки в некотором смысле неразрешима; но в другом смысле она решена тем, что показано несуществование требуемого построения.

Отметим особенно простую логическую форму неразрешимого предиката, а именно $(Ex)\ T(a, a, x)$, где, как почти непосредственно следует из теоремы I (A), $T(a, a, x)$ — разрешимый предикат. Именно в этом состоит достижение, имеющееся в теореме Чёрча по сравнению с простым сопоставлением несчетности множества всех (экстенсиональных) теоретико-числовых предикатов (доказываемой диагональным методом Кантора) со счетностью всех вычислимых теоретико-числовых предикатов (доказываемой с помощью тезиса Чёрча) (см. примечание на стр. 276).

Упражнения. 42.1. Покажите, что не существует алгорифма для решения вопроса о том, остановится ли когда-нибудь данная машина Тьюринга, начинающая работу в данной ситуации («проблема остановки» для машины Тьюринга).

42.2. Найдите неразрешимый предикат вида $(x)\ P(a, x)$, где $P(a, x)$ разрешим. (Напоминаем, что «(x)» значит «для каждого x».)

42.3. Покажите, что функция $f(a)$ из упр. 40.1 (a) (часто записываемая в виде «$\varepsilon x\ P(a, x)$») невычислима, когда $P(a, x) \equiv T(a, a, x)$.

42.4*. Покажите, что невозможен алгорифм, который говорил бы для данных i и j, являются ли $\varphi_i(a)$ и $\varphi_j(a)$ одной и той же частичной функцией (т. е. верно ли, что для каждого a обе функции либо принимают одно и то же значение, либо не определены).

42.5*. Покажите, что вычислимая частичная функция $\varphi_i(a)$ из теоремы I (B) не может быть продолжена до вычислимой полной функции, т. е. что не существует всюду определенной теоретико-числовой функции $\varphi(i, a)$, такой, что

$$(i)(a)\ [(Ex)\,T(i, a, x) \longrightarrow \varphi(i, a) = \varphi_i(a)]$$

и φ вычислима по Тьюрингу[1]).

§ 43. Применения к формальной арифметике; неразрешимость (теорема Чёрча) и неполнота (теорема Гёделя)

Напомним, что в предшествующем изложении мы использовали термины «разрешающая процедура» и «разрешимость» (т. е. «существование разрешающей процедуры») по отношению к некоторому данному счетно-бесконечному классу вопросов (§ 40). Так, в теореме I(A) — это вопросы «истинно ли $T(i, a, x)$?» для различных значений i, a, x ($i, a, x = 0, 1, 2, \ldots$), а в теореме III — это вопросы «истинно ли $(Ex)\,T(a, a, x)$?» для различных значений a ($a = 0, 1, 2, \ldots$). Ниже в теореме IV мы выведем из теоремы Чёрча (теоремы III), что проблема разрешения для системы **N** формальной теории чисел из § 38 «неразрешима» (или решается отрицательно); здесь рассматриваются вопросы «доказуемо ли A в **N**?», где A пробегает все формулы системы **N**. В теореме II, в которой идет речь о «вычислительной процедуре» и о «вычислимости», рассматриваются вопросы «чему равно значение $\psi(a)$?» для разных значений a ($a = 0, 1, 2, \ldots$).

Следует также напомнить, что слова «разрешимость» и «вычислимость» имеют как расплывчатый интуитивный смысл (§ 40), так и точный смысл, который мы определили через машины Тьюринга (§ 41). Тезис Чёрча — Тьюринга и обратный к нему, утверждающий, что каждая вычислимая по Тьюрингу функция интуитивно вычислима, утверждают, что эти два смысла эквивалентны. Мы теперь понимаем, что наши теоремы доказаны с использованием второго смысла, который требует от нас большего, чем первый, когда мы устанавливаем разрешимость или вычислимость, и который является тем единственным смыслом, в котором они могут быть доказаны, когда мы устанавливаем неразрешимость или невычислимость. Но по тезису Чёрча — Тьюринга теоремы этого последнего рода сохраняют свое значение и при интуитивном понимании данных терминов.

[1]) Решение, использующее рекурсивность, с $\Phi(i, a)$, соответствующей нашей $\varphi_i(a)$, имеется в [BM], стр. 304, после теоремы XXII.

Теперь мы в состоянии достичь нашей цели (§ 40) — доказать, что для **N** не существует разрешающей процедуры (теорема IV). Продолжая исследование несколько дальше, мы получим знаменитую теорему Гёделя о неполноте в обобщенной форме, так же как и его вторую теорему (в § 44), которая прояснит ситуацию, описанную в конце § 38.

Мы неформально определили предикат $T(i, a, x)$ (§ 42) в совершенно элементарных терминах, хотя его определение, полностью выписанное (вместе с описанием соответствующих машин Тьюринга), и займет много места. Нас бы поэтому разочаровало, если бы предикат $T(i, a, x)$ не был выразим в символизме **N**. Если бы он не был выразим, то первая часть нашего утверждения об адекватности **N** обычной элементарной теории чисел (§ 38) была бы, конечно, ложной. Действительно, хотя $T(i, a, x)$ не включается обычно в книги по теории чисел, ничто не мешает включить в них его определение. На самом деле результаты, упомянутые в § 38, действительно дают возможность известными методами найти в символизме **N** формулу $\mathrm{T}(\mathrm{i}, \mathrm{a}, \mathrm{x})$ (содержащую свободно в точности три различные переменные i, a, x), которая при подразумеваемой интерпретации символов выражает $T(i, a, x)$ [1]. То же должно было бы иметь место в соответствии с высказанными здесь доводами для любой формальной системы **N**, которую мы рассматривали бы как адекватную обычной элементарной теории чисел.

В **N** конкретные натуральные числа 0, 1, 2, ... выражаются соответствующими термами 0, $(0)'$, $((0)')'$, ... (обозначенными в § 38 сокращенно «0», «1», «2», ...); эти термы мы называем *цифрами* (*для соответствующих натуральных чисел* 0, 1, 2, ...). Для любого натурального числа a мы обозначаем цифру для a посредством «$\boldsymbol{a}$». Теперь для каждого $a = 0, 1, 2, \ldots$ предложение $(Ex)\, T(a, a, x)$ выражается при нашей интерпретации символизма системы **N** посредством формулы $\exists \mathrm{x} \mathrm{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \mathrm{x})$. Назовем эту формулу «$\mathrm{C}_a$». Аналогично в *любой* адекватной формальной системе элементарной теории чисел, если дано некоторое значение a, мы можем эффективно (конец § 40) найти замкнутую формулу C_a, выражающую при подразумеваемой интерпретации предложение $(Ex)\, T(a, a, x)$.

Если для данного a предложение $(Ex)\, T(a, a, x)$ истинно, то мы можем доказать его неформально, при помощи механического

---

[1] Чтобы дать здесь более конкретную ссылку, чем в подстрочном примечании на стр. 257 § 38, заметим, что можно показать, что предикат $T(i, a, x)$ примитивно рекурсивен (гл. IX), используя методы из § 69 [ВМ], после чего применить следствие теоремы I (стр. 218). Предикат, записанный как «$(Ey)\, T_1(x, x, y)$» в гл. XI на стр. 251—252 [ВМ], играет для общерекурсивности роль, аналогичную той, которую предикат $(Ex)\, T(a, a, x)$ из настоящей книги играет для вычислимости по Тьюрингу. (В некоторых статьях «T_1» записывается просто как «T»; это обозначение восходит к работе Клини [1936], которая появилась чуть раньше работы Тьюринга [1936—7].)

процесса предъявления шагов вычисления, выполняемого машиной $\mathfrak{M}_a$, примененной к a, вплоть до момента x, когда значение будет вычислено. Это докажет $T(a, a, x)$ для этого x, и $(Ex)\ T(a, a, x)$ будет следовать отсюда по неформальному $\exists$-введению. Теперь это неформальное доказательство может быть проведено в рамках **N** (т. е. может быть формализовано в **N**). Таким образом,

(a) $$(Ex)\,T(a, a, x) \rightarrow \{\vdash C_a \text{ в } \mathbf{N}\}.$$

Конечно, доказательство этого потребовало бы подробного исследования теории доказательств системы **N**, которого мы в этой книге не даем. Но если бы это было не так, то дедуктивный аппарат системы **N** (т. е. список ее аксиом, схем аксиом и правил вывода) был бы неадекватен обычной элементарной теории чисел в противоречие со второй частью нашего утверждения из § 38[1]).

Теперь предположим, что в системе **N** доказуемы только истинные формулы. Поскольку при нашей интерпретации C_a выражает $(Ex)\ T(a, a, x)$, это дает, в частности,

(b) $$\{\vdash C_a \text{ в } \mathbf{N}\} \rightarrow (Ex)\,T(a, a, x).$$

В следующем параграфе мы увидим, почему на этой стадии мы просто *допускаем*, что имеет место (b). Ясно, что, если бы (b) было неверно, мы отвергли бы **N** как формальную систему теории чисел. Мы, несомненно, верим в (b); конечно, можно следующим образом дать доказательство этого утверждения, хотя оно не будет финитным (§ 36) и в силу этого не принадлежит метаматематике. При обычной интерпретации аксиомы системы **N** истинны, и каждое из правил вывода, примененное к одной или двум истинным формулам как к посылкам, дает в качестве заключения истинную формулу. Поэтому все доказуемые формулы истинны. Следовательно, имеет место (b). (Ср. § 38 (B).)

Теорема IV. *Не существует разрешающей процедуры для доказуемости в формальной системе* **N** *из* § 38; *короче*, **N** *неразрешима*.

Более общим образом, это относится не только к формальной системе **N** *из* § 38, *но и к любой формальной системе* **N**, *в которой для каждого а может быть эффективно найдена замкнутая формула* C_a, *такая, что имеют место* (a) *и* (b).

Доказательство. Предположим, что существует разрешающая процедура для доказуемости в **N**. Тогда в противоречие с теоремой III мы можем по данному a следующим образом решить, верно ли $(Ex)\ T(a, a, x)$. По данному a найдем (что мы можем сделать эффективно) формулу C_a и с помощью предполагаемой разрешающей

[1]) Если используется метод отыскания T (i, a, x), предложенный в предыдущем примечании, то (a) получится по следствию из теоремы 27 [BM], стр. 219, и $\exists$-введению.

процедуры для доказуемости в **N** выясним, доказуема ли эта формула C_a. Согласно (b) и (a), в соответствии с тем, доказуема или нет формула C_a, $(Ex)\ T\ (a, a, x)$ истинно или ложно.

Подготавливая следующую теорему, применим далее наше предположение, что в **N** доказуемы только истинные формулы, к формулам $\neg C_a$ ($a = 0, 1, 2, \ldots$). Таким образом, мы предположим, что

$$\text{(c)} \qquad \{\vdash \neg C_a \text{ в } \mathbf{N}\} \rightarrow \overline{(Ex)}\ T\ (a, a, x)$$

(«$\bar{\ }$» обозначает «не», см. примечание 1 на стр. 277). Относительно (c) можно повторить замечания, сделанные выше относительно (b).

Мы теперь спрашиваем, можем ли мы доказать утверждение $\neg C_a$, когда оно истинно; т. е. верно ли обратное к (c), а именно

$$(*) \qquad \overline{(Ex)}\ T\ (a, a, x) \rightarrow \{\vdash \neg C_a \text{ в } \mathbf{N}\}.$$

Если бы это было верно, мы следующим образом получили бы в противоречие с теоремой III разрешающую процедуру для $(Ex)\ T\ (a, a, x)$. Прежде всего заметим, что все доказательства в системе **N** из § 38 могут быть напечатаны на пишущей машинке с 41 формальным символом из **N** и запятой для отделения последовательных формул в доказательстве — всего с 42 символами. Поэтому доказательства можно перечислить (скажем, с помощью метода цифр, конец § 32) и, конечно, эффективно (поскольку имеется разрешающая процедура для распознавания доказательств, § 40). Поэтому, когда дано a, мы могли бы начать искать в нумерации доказательств в системе **N** доказательство какой-либо из формул C_a или $\neg C_a$. По классическому закону исключенного третьего вместе с (a) и (*) мы найдем доказательство одной из этих формул. Согласно (b) и (c), в соответствии с тем, доказательство какой из них будет найдено, мы сможем сказать, истинно или ложно $(Ex)\ T\ (a, a, x)$.

Таким образом, (*) верно не для всех a, что дает нам следующее:

Теорема V. *В системе* **N** *из* § 38 *существует замкнутая формула* C_p, *такая, что* (i) $\neg C_p$ *истинно*, (ii) *не* $\vdash C_p$ *в* **N** *и* (iii) *не* $\vdash \neg C_p$ *в* **N**. *Более общим образом, это относится к любой формальной системе* **N**, *в которой для любого* a *можно эффективно найти замкнутую формулу* C_a (*выражающую* $(Ex)\ T\ (a, a, x)$), *такую, что имеют место* (a) — (c) (*или* (b) — (d) *ниже*).

Первое доказательство, окончание. Поскольку (*) верно не для всех a, существует некоторое число p, такое, что $\overline{(Ex)}\ T\ (p, p, x)$ (т. е. (i), выражающее $\neg C_p$), но $\vdash \neg C_p$ неверно в **N** (т. е. (ii)). Используя $\overline{(Ex)}\ T\ (p, p, x)$ и (b), получаем, что $\vdash C_p$ неверно в **N** (т. е. (iii)).

Замечания. Это дает знаменитую теорему Гёделя о неполноте [1931], обобщенную таким образом, что она относится к любой формальной системе **N**, удовлетворяющей очень общим условиям и содержащей «формально неразрешимое предложение» C_p, выражающее значение заранее указанного предиката $(Ex)\ T\ (p, p, x)$ для аргумента p, зависящего от данной системы. Эта обобщенная форма теоремы Гёделя (с предикатом «$(Ex)\ T\ (a, a, x)$») дана Клини [1943] [1]).

В формальной системе с символикой, подобной символике системы **N**, мы говорим, что формула E *формально разрешима*, если $\vdash$E или $\vdash \neg$E, и что эта система *просто полна*, если каждая замкнутая формула E формально разрешима. Таким образом, по пунктам (iii) и (ii) теоремы V **N** просто неполна, причем C_p есть пример замкнутой формально неразрешимой формулы. Это понятие «формальной разрешимости» относится к конкретной формуле, в то время как разрешимость в смысле § 40 или § 41 относится к бесконечному классу вопросов (или предложений). Мы ограничиваемся в определении простой полноты замкнутыми формулами E, потому что, например, вовсе не имели в виду $\vdash 2|a$ или $\vdash \neg 2|a$ (ср. § 38). Действительно, при интерпретации всеобщности (которая применима к свободным переменным доказуемых формул, § 38) $2|a$ как доказуемая формула гласила бы: «все натуральные числа четные», а $\neg 2|a$ говорила бы: «все натуральные числа нечетные». Аналогичным образом мы ограничиваемся в этом определении системами, символизм которых подобен символизму системы **N**, исключая системы вроде исчисления высказываний и исчисления предикатов, поскольку, например, в этих исчислениях ни $\vdash$P$\supset$Q, ни $\vdash \neg$(P$\supset$Q). Хотя P$\supset$Q — замкнутая формула, ее атомы P и Q функционируют в определении общезначимости как переменные, имеющие интерпретацию всеобщности и пробегающие при этом любые предложения.

Изложенное выше доказательство теоремы V — непрямое, поскольку в нем существование p выводится из абсурдности предположения о том, что (*) выполняется для всех a. Сейчас мы дадим прямое доказательство.

Второе доказательство теоремы V. Пусть $\mathfrak{M}_p$— машина Тьюринга, которая, будучи применена к a как к аргументу, ищет в нумерации доказательств в **N** доказательство формулы $\neg C_a$ и, найдя, печатает 0, а не найдя, не вычисляет никакого значения (никогда не останавливается). Из рассмотрений, проведенных выше в подобных ситуациях, ясно, что такая машина $\mathfrak{M}_p$ существует. Детальное доказательство этого для конкретной системы **N** из § 38 может быть получено на основе того развития теории машин Тьюринга, на которое мы ссылались в конце § 41 и в начале § 42. Из описания того, что делает машина $\mathfrak{M}_p$, и определения $T\ (i, a, x)$ вытекает

(d) $$(Ex)\ T\ (p, a, x) \equiv \{\vdash \neg C_a \text{ в } \mathbf{N}\}.$$

1) Клини использовал «общерекурсивные функции» (§ 41) вместо машин Тьюринга. Первое использование тезиса Чёрча для получения обобщенного варианта теоремы Гёделя имеется в работе Клини [1936].

Теперь (b) — (d) следующим образом дают нам все три части теоремы Гёделя:

(i) Допустим, что $(Ex)\, T\,(p, p, x)$; тогда по (d)

$$\vdash_{\mathrm{N}} \neg C_p.$$

Отсюда по (c)

$$\overline{(Ex)}\, T\,(p, p, x).$$

Это противоречит $(Ex)\, T\,(p, p, x)$; поэтому с помощью приведения к нелепости получаем $\overline{(Ex)}\, T\,(p, p, x)$, т. е. $\neg C_p$ истинно.

(ii) По (i) $\neg C_p$ истинно, т. е. $\overline{(Ex)}\, T\,(p, p, x)$. Тогда по (d)

неверно, что $\vdash_{\mathrm{N}} \neg C_p$.

(iii) Допустим $\vdash_{\mathrm{N}} C_p$; тогда по (b)

$$(Ex)\, T\,(p, p, x),$$

т. е. C_p истинно. Это противоречит (i); поэтому неверно $\vdash_{\mathrm{N}} C_p$.

Обсуждение. Здесь мы использовали ту черту формальных систем, существенную с точки зрения целей, для которых они предназначены, что доказательства формулы могут эффективно распознаваться как таковые (а также, что C_a может быть эффективно найдена по a). Не будь этого, мы бы получили тривиальный контрпример к теореме V, взяв в качестве аксиом системы **N** все истинные замкнутые формулы. При наличии же этой черты мы для любой такой системы на основании тезиса Чёрча заключаем, что машина $\mathfrak{M}_p$ существует [1]). Здесь понятие вычислимости может относиться прямо к языковым объектам системы или ее символизм может быть преобразован в натуральные числа, например, с помощью метода цифр с учетом замечания из примечания к стр. 292, как это было сделано выше с таблицами машин Тьюринга. Числа, отвечающие языковым объектам, называют их *гёделевыми номерами*, а соответствие между числами и языковыми объектами называется *гёделевой нумерацией* в честь Гёделя, который ввел этот прием в 1931 г. [2]). Для конкретной системы можно избежать применения тезиса Чёрча, с помощью которого мы получили теорему V для любых систем **N**,

---

[1]) В частности, не играет никакой роли природа интуитивной очевидности дедуктивных процессов, формализованных в системе.

«Вообразим себе всеведущего теоретико-числовика, от которого мы ожидали бы, что благодаря своей способности усматривать сразу бесконечно много фактов он сможет строить гораздо более сильные системы, чем те, которые смогли бы изобрести мы. Любая корректная система, которую он мог бы нам открыть, сказав, как она работает, но не говоря, почему, была бы в равной степени подвержена гёделевой неполноте». (Клини [1943], стр. 65.)

[2]) Гёдель в [1931] использовал другой способ нумерации; Гильберт и Бернайс в [1939] и [BM] используют третий метод. В [1931—2] Гёдель использовал то, что мы назвали «методом цифр». Нумерация этого типа подробно изучена Шмульяном [1961], где содержится оригинальный подход к формальным системам, исходящий из идей Поста [1943].

фактически построив для нее машину $\mathfrak{M}_p$. *В сущности* это сделал Гёдель [1931], доказав свою теорему для конкретной системы еще до появления тезиса Чёрча (1936 г.) [1]; это, как мы уже указывали, может быть сделано известными методами для конкретной системы **N** из § 38, так что мы можем получить нашу теорему для этой системы, не опираясь на тезис Чёрча.

Подставляя в (d) p вместо a и переходя в обеих частях к отрицанию (как мы уже сделали, доказывая (ii)), получим

$$(\bar{\mathrm{d}}) \qquad (\overline{Ex})\, T(p, p, x) \equiv \{\text{неверно, что } \vdash \neg C_p \text{ в } \mathbf{N}\}.$$

Вспоминая, что при подразумеваемой интерпретации $\neg C_p$ выражает $(\overline{Ex})\ T\ (p, p, x)$, мы получим, что $\neg C_p$ *есть формула, выражающая при подразумеваемой интерпретации свою собственную недоказуемость* (*предложение, эквивалентное своей собственной недоказуемости*). Это было отправной точкой первоначального доказательства Гёделя или по крайней мере эвристическим объяснением, которое он дал, а именно Гёдель построил некоторую формулу, выражающую свою собственную недоказуемость. Это очень близко к парадоксу лжеца (§ 35), в котором мы встречаем предложение, выражающее свою собственную ложность. Но теперь из-за сделанной Гёделем замены «ложности» на недоказуемость появляется выход. Мы хотим, чтобы все доказуемые формулы были истинными (и в случае системы **N** верим, что это так). Тогда, если бы все истинные формулы были доказуемы, получилось бы, что «ложно = недоказуемо», и возник бы парадокс лжеца. Выход состоит теперь в том, что не все истинные формулы доказуемы; в частности, формула $\neg C_p$ недоказуема, хотя и истинна [2].

Первая часть программы Гильберта (§ 36, 37) требовала формализации теории чисел, анализа и подходящей части теории множеств в некоторой формальной системе **S**. Теорема Гёделя показывает, что это не может быть полностью выполнено даже для теории чисел. Действительно, $\neg C_p$ выражает теоретико-числовое предложение, которое по теореме Гёделя истинно, но не доказуемо при условии, конечно, что **S** удовлетворяет предположениям этой теоремы относительно **N**. Однако выполнение этих предположений связано с целями, для которых придумываются формальные системы, так что у нас нет никакой перспективы их избежать. Эти предположения являются просто следствиями обсуждавшихся выше

---

[1] Первое время после появления работы Гёделя у логиков были некоторые колебания: нельзя ли обойти отмеченные Гёделем препятствия, пользуясь какой-нибудь другой конкретной системой, совершенно отличной в деталях от системы, использованной Гёделем.

[2] Нагель и Ньюмен [1956, 1958] дали популярное изложение теоремы Гёделя, следуя его первоначальному доказательству [1931]. Тем самым они создают ошибочное впечатление, что обобщенная теорема Гёделя получается рассуждениями из работы Гёделя [1931] и, таким образом, без помощи тезиса Чёрча — Тьюринга. У Поппера [1954] Теэтет объясняет теорему Гёделя Сократу.

структурных черт формальных систем и допущения о том, что **N** корректна и адекватна некоторой элементарной теории чисел.

Теорема V не означает, как мы считаем, что нам следует перестать придавать формальным системам такое большое значение. Причины, по которым формальная система становится единственным точным способом явно высказать, какие предположения используются в доказательствах, остаются в силе. Теорема V скорее отмечает тот факт, что в противоречие с программой Гильберта путь математических завоеваний (даже внутри уже зафиксированной области арифметики) будет состоять не только в открытии новых выводов из данных аксиом по данным правилам вывода, но также и во введении новых аксиом или правил. Остается еще вопрос, смогут ли математики прийти между собой к согласию относительно корректности новых аксиом или правил.

В теореме V мы можем быть уверены в недоказуемости формулы $\neg C_p$ только тогда, когда мы знаем, что она истинна, так что мы можем расширить систему **N** (обозначим расширение через «$\mathbf{N}_0$»), добавив $\neg C_p$ в качестве новой аксиомы. Но тогда теорема Гёделя будет применима к расширенной системе $\mathbf{N}_1$, и в этой системе у нас будет истинная, но недоказуемая формула $\neg C_{p_1}$. Этот процесс может быть многократно повторен, в результате чего будут получаться все более сильные формальные системы $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, ... Мы можем объединить их и образовать новую формальную систему, если только эти системы образовываются достаточно систематично, так что после их объединения будет разрешим вопрос, какие формулы являются аксиомами и, таким образом, какие конечные последовательности формул являются доказательствами (без чего мы не могли бы рассматривать результат как формальную систему). Тогда, начав с этой системы, мы можем опять использовать процесс расширения, основанный на теореме Гёделя. Этот процесс не позволяет избежать последствий теоремы Гёделя [1]).

[1]) Классы таких систем называются «ординальными логиками», поскольку индексами этих систем являются конечные и бесконечные (или «трансфинитные») «ординальные числа». Ординальные логики изучались Тьюрингом [1939], Феферманом [1958] (резюме), [1962] и Крайзелем [1958c].

Обычные натуральные числа исполняют функции как конечных кардиналов (например, «на этой улице 10 домов»), так и конечных ординалов (например, «он живет в доме 10 по Даунинг-стрит»). Кантор построил теорию, в которой *ординальные числа* могут быть определены как классы эквивалентности «вполне упорядоченных множеств» по отношению существования 1—1-соответствия, сохраняющего упорядоченность. *Вполне упорядоченное множество* — это «линейно упорядоченное» множество, каждое непустое подмножество которого содержит наименьший элемент. *Линейно упорядоченное множество* — это множество S вместе с отношением «порядка» $<$, которое иррефлексивно, транзитивно и всюду определено (для каждых a и b из S $a<b \vee a=b \vee a>b$). При очевидном определении отношения $<$ для ординальных чисел они и сами оказываются вполне упорядоченными. Ординальные логики используют теорию ординальных чисел в конструктивном, или вычислимом, варианте, разработанном Чёрчем и Клини [1936], Чёрчем [1938] и Клини [1938].

§ 44. Применения к формальной арифметике; доказательства непротиворечивости (вторая теорема Гёделя)

Устанавливая утверждение (i) теоремы V, мы доказали, что $\neg C_p$ истинно, хотя, согласно (ii), не может быть доказано в **N**. Ситуация прояснится, если посмотреть, в каком месте наше интуитивное доказательство (истинности) утверждения $\neg C_p$ выходит за пределы возможностей системы **N**.

Во втором доказательстве утверждения (i) теоремы V мы использовали условие (c), рассматривавшееся как допущение. С помощью (a) это допущение (c) может быть выведено из предположения, что система **N** *просто непротиворечива*, т. е. что ни для какой формулы E в **N** не имеет место одновременно $\vdash$ E и $\vdash \neg$E (упр. 44.1(A)).

Иначе говоря, мы можем следующим образом изменить второе доказательство пункта (i) так, чтобы прямо использовать простую непротиворечивость вместо (c):

(i) Допустим $(Ex)\, T(p, p, x)$; тогда по (a) и (d)

$$\vdash_{\mathbf{N}} C_p \quad \text{и} \quad \vdash_{\mathbf{N}} \neg C_p,$$

что противоречит простой непротиворечивости. Поэтому с помощью приведения к нелепости получаем

$$\overline{(Ex)}\, T(p, p, x), \text{ т. е. } \neg C_p \text{ истинно.}$$

В обоих вариантах второго доказательства утверждения (i) часть, выписанная здесь подробно, совершенно элементарна; она, конечно, состоит всего лишь в неформальном использовании исчисления предикатов. Рассуждения, с помощью которых утверждения (a) и (d) могут быть установлены для **N** из § 38 или для аналогичной конкретной системы, тоже элементарны на уровне неформальной теории чисел, хотя проведенные со всеми подробностями они довольно длинны. Утверждение (c), или простая непротиворечивость, остается единственной компонентой, относительно которой неизвестно, что она является элементарной.

В целом наше неформальное доказательство утверждения (i) вполне элементарно, за исключением того, что в нем нам пришлось использовать (c) или простую непротиворечивость системы **N**.

Готовясь сформулировать это более тщательно, отметим для дальнейших ссылок, что совершенно элементарно можно доказать следующее:

(1) $\{\mathbf{N} \text{ просто непротиворечива}\} \to \overline{(Ex)}\, T(p, p, x)$.

Утверждение, что **N** просто непротиворечива, можно выразить в символизме **N**. Пусть $\mathfrak{M}_r$ — машина Тьюринга, которая, будучи применена к какому-либо числу a, ищет в нумерации доказательств в системе **N** доказательство формулы вида E & $\neg$ E и, найдя, печатает 0, а не найдя, не вычисляет никакого значения. Для любого a непротиворечивость системы **N** эквивалентна $(\overline{Ex})\ T(r, a, x)$, и, в частности, эквивалентна $(\overline{Ex})\ T(r, r, x)$, выражаемому в **N** формулой $\neg C_r$. Назовем эту формулу «Consis» [1]).

Теперь неформальная импликация (1) может быть переведена в символизм системы **N** формулой

$$\text{Consis} \supset \neg C_p,$$

поскольку $\neg C_p$ выражает $(\overline{Ex})\ T(p, p, x)$.

Теорема VI. (Вторая теорема Гёделя.) *В системе* **N** *из* § 38 *не* $\vdash$Consis, *т. е. формула* Consis, *выражающая в* **N** *непротиворечивость* **N**, *недоказуема в* **N**.

Более общим образом, это относится к любой просто непротиворечивой формальной системе **N** *и произвольному выбору формулы* Consis, *выражающей в* **N** *непротиворечивость* **N**, *таким, что для каждого* a *можно эффективно найти замкнутую формулу* C_a *и число* p, *для которых выполнены* (a), (d) *и формулируемое ниже* (2)[2]).

Доказательство (окончание). Поскольку (1) установлено элементарным интуитивным рассуждением, наша вера в адекватность системы **N** из § 38 элементарной арифметике дает нам основания верить, что формула $\text{Consis} \supset \neg C_p$, выражающая (1), доказуема в **N**, т. е. что неформальное доказательство (1) в элементарной теории чисел формализуемо в **N**. Читатель, в какой-то степени знакомый с развитием в **N** элементарной арифметики (дальше, чем мы зашли в § 38), нашел бы, что в этом трудно усомниться. Гильберт и Бернайс действительно проверили, что это так [3]). Таким образом,

$$(2) \qquad \vdash_{\mathbf{N}} \text{Consis} \supset \neg C_p.$$

Теперь допустим $\vdash_{\mathbf{N}}$Consis. По $\supset$-удалению (MP) из (2) тогда $\vdash_{\mathbf{N}} \neg C_q$ в противоречие с утверждением (ii) теоремы V.

Обсуждение. Вторая часть программы Гильберта в области оснований состояла в доказательстве при помощи финитного мета-

[1]) Или мы могли бы связать с объектами в символизме **N** гёделевы номера (конец § 42) и взять в качестве Consis формулу, *прямо* переводящую свойство непротиворечивости в утверждение о гёделевых номерах. (Ср. [BM], стр. 189.)

[2]) В предположения обобщенного варианта этой теоремы (второй абзац) включено так много, что он сводится к применению modus ponens, к (2) и тому факту, что простая непротиворечивость, (a) и (d) влекут теорему V (ii). Значение этого второго абзаца состоит в том, что эти предположения были бы выполнены для любой системы теории чисел и любого выбора формулы Consis для этой системы, которые мы бы обычно рассматривали. Более полное исследование области применимости второй теоремы Гёделя было впервые проведено Феферманом [1960].

[3]) Гильберт и Бернайс [1939], стр. 283 и далее, особенно стр. 300—324. Их работа проделана в системе, по существу эквивалентной системе **N** из § 38, хотя они используют несколько иной выбор Consis и $\neg C_p$, чем сделанный нами на основе машин Тьюринга.

математического рассуждения, что формальная система, выбранная в качестве формализации классической математики, непротиворечива. Поскольку математика, формализуемая в **N**, не вся финитна, следовало бы надеяться, что даже части методов, формализованных в **N**, получаемой исключением нефинитных методов, достаточно для доказательства непротиворечивости. Вторая теорема Гёделя показывает, что даже всех методов, формализуемых в **N**, т. е. в метаязыке, изоморфном самой системе **N**, недостаточно для доказательства непротиворечивости системы **N**, если она непротиворечива (как мы предположили).

Некоторые математики считают, что эта теорема окончательно лишает нас перспективы установить надежность классической математики при помощи метаматематического доказательства непротиворечивости.

Другие считают возможным, что будут найдены методы, которые можно было бы рассматривать как финитные, несмотря на то что они неформализуемы в **N**. Тогда можно было бы изобразить множество финитных методов **F** и множество методов, формализуемых в **N**, двумя перекрывающимися кругами; закон исключенного третьего для счетно-бесконечных множеств (§ 36) имел бы место в **N**, но не в **F**, в то время как какой-то новый финитный метод имел бы место в **F**, но не в **N**.

После того как Аккерман в [1924—5] доказал непротиворечивость некоторой подсистемы системы **N** (конец § 38), движение по направлению к доказательству непротиворечивости **N** приостановилось. Фон Нейманом в [1927], Эрбраном в [1931—2] и Генценом в [1934—5] были даны новые интересные доказательства, но попрежнему для подсистемы системы **N** — по существу той же самой. С момента появления в 1931 г. второй теоремы Гёделя, которая раскрыла необходимость использования какого-то неэлементарного метода, прошло не слишком много времени до появления доказательства непротиворечивости системы **N**, принадлежащего Генцену [1936]. Методом, применяемым в этом доказательстве и не формализуемым в **N**, является индукция по некоторому отрезку канторовских порядковых (ординальных) чисел, позволяющих распространить процессы счета и упорядочения (в связи с «вполне упорядоченными» множествами) за пределы натурального ряда (аналогично введению трансфинитных кардинальных чисел в связи с неупорядоченными множествами, § 34). (См. примечание на стр. 304.) Индукция проводилась по ординалам, меньшим, чем ординал, обозначенный Кантором через «ε_0» [1]). Другое доказательство непротиворечивости для **N** было дано Аккерманом в 1940 г. тоже с помощью трансфинитной индукции по ординалам $< \varepsilon_0$. Шютте в [1960] придал таким доказательствам новую, особенно ясную форму.

[1]) Дальнейшие указания см. в [BM], стр. 421—423.

Дентон и Дребен в [1966] значительно упростили доказательство Аккермана с помощью идей работы Эрбрана [1930].

Должны ли мы после этих доказательств чувствовать себя более уверенными в системе **N**, чем просто на основе того, что ее аксиомы истинны, а правила вывода сохраняют истинность при интерпретации («определении истинности»), которую мы, по-видимому, принимаем в классической математике (см. § 43, после (b)),— довольно субъективно. С помощью простого свед́ения классической логики к интуиционистской, данного Гёделем [1932—3], Генценом [1936] и Бернайсом, доказательство непротиворечивости с помощью определения истинности может быть проведено даже интуиционистски [1]). Когда Тарского спросили, чувствует ли он бо́льшую уверенность относительно классической математики после генценовского доказательства непротиворечивости, он ответил: «Да, на эпсилон». (Изучающие анализ знают, что эпсилон «ε» обычно используется в качестве обозначения малого положительного числа.)

Ясно, что доказательства непротиворечивости индукцией по ординалам, меньшим ординала ε_0, с большим трудом добиваются чего-то, но менее ясно, чего именно.

Крайзель ([1951—2], [1958]) видит значение доказательств непротиворечивости трансфинитной индукцией вплоть до ε_0 в их побочных результатах. Допустим, что для данного натурального числа i доказуема формула $\forall a \exists x T(\boldsymbol{i}, a, x)$, где $\boldsymbol{i}$ — цифра для i. Тогда в предположении, что в **N** доказуемы только истинные формулы, имеет место $(a)(Ex)T(i, a, x)$, и, таким образом, $\varphi_i(a)$ — вычислимая всюду определенная функция (ср. § 42). Нетрудно видеть, что вычислимые (всюду определенные) функции, существование которых в этом смысле может быть доказано в **N**, образуют собственный подкласс класса вычислимых функций (т. е. не составляют класса всех вычислимых функций, упр. 44.2). В действительности Клини [1936] дал доказательство теоремы Гёделя о неполноте, основываясь на этой идее (см. примечание на стр. 301). Крайзель, однако, извлек из доказательства непротиворечивости Аккермана [1940] другую характеризацию (не исходящую непосредственно из **N**) этого подкласса вычислимых функций. Таким образом, возникает возможность, что недоказуемость в **N** некоторой истинной формулы $\forall a \exists x T(\boldsymbol{i}, a, x)$ может быть выведена из того факта, что для рассматриваемого i функция $\varphi_i(a)$ не принадлежит этому подклассу.

Генцен уже утверждал в первом [1936] варианте своего доказательства непротиворечивости, что он установил свойство доказуемых формул классической формальной теории чисел **N**, которое можно рассматривать как их интуитивную интерпретацию. Но это

---

[1]) См. [BM], § 81. Близкое свед́ение дано Колмогоровым [1924—5].

свойство было сложным, а после того как доказательство Генцена появилось в новом варианте [1938a], более легком для понимания и не использующем этого свойства, оно привлекло мало внимания.

Чтобы показать, что проблема интерпретации действительно возникает, напомним, что, как отмечалось в § 36, Гильберт ([1926], [1928]) различал «реальные» предложения, имеющие ясный интуитивный смысл, и остальные предложения, называемые «идеальными». В классической математике «идеальные» предложения употребляются наряду с «реальными». Можно было бы предположить, что к числу «реальных» относятся все предложения элементарной теории чисел (арифметики).

Однако картина оказывается не столь простой. Действительно, в элементарной теории чисел имеются предложения, доказуемые классически, но не являющиеся истинными в том смысле, который им придает интуиционист. Клини [1943] обосновывал это следующим образом.

Согласно интуиционистскому пониманию экзистенциального предложения $(Ey)\,P(y)$, оно означает, что можно фактически найти y, такое, что $P(y)$. Что с этой точки зрения могло бы означать $(a)\,(Ey)\,P(a, y)$? Только то, что существует эффективная процедура, с помощью которой по данному a можно найти y, такое, что $P(a, y)$. По тезису Чёрча — Тьюринга это должно означать, что y есть вычислимая функция от a. Таким образом, мы приходим к тезису, что интуиционистски $(a)\,(Ey)\,P\,(a, y)$ имеет место только тогда, когда существует вычислимая функция $g(a)$, такая, что $(a)\,P\,(a, g(a))$.

По классическому закону исключенного третьего (который интуиционисты отказываются признать) для каждого a

$$(Ex)\,T\,(a, a, x) \vee \overline{(Ex)}\,T\,(a, a, x).$$

Следовательно,

$$[(Ex)\,T\,(a, a, x) \wedge 0=0] \vee [\overline{(Ex)}\,T\,(a, a, x) \wedge 1=1].$$

Следовательно,

$$(Ey)\,\{[(Ex)\,T\,(a, a, x) \wedge y=0] \vee (Ey)\,[\overline{(Ex)}\,T\,(a, a, x) \wedge y=1].\}$$

Следовательно,

$$(Ey)\,\{[(Ex)\,T\,(a, a, x) \wedge y=0] \vee [\overline{(Ex)}\,T\,(a, a, x) \wedge y=1]\}.$$

Это имеет место для каждого a, так что мы доказали классически

$$(\alpha) \qquad (a)\,(Ey)\,\{[(Ex)\,T\,(a, a, x) \wedge y=0] \vee \vee [\overline{(Ex)}\,T\,(a, a, x) \wedge y=1]\}.$$

Мы представили это доказательство неформально, но его нетрудно формализовать в системе **N** из § 38, так что мы получим

$$(\beta)\qquad \vdash_{\mathrm{N}} \forall a \exists y \{[\exists x T(a,\ a,\ x) \& y = 0] \vee \vee [\exists x T(a,\ a,\ x) \& y = 1]\}.$$

Сокращенно запишем (α) в виде $(a)(Ey)P(a,\ y)$. По высказанному выше тезису (α) выполняется интуиционистски, только если $(a)P(a,\ g(a))$ для некоторой вычислимой функции $g(a)$. Из того, чем в этом примере является $P(a,\ y)$, видно, что единственной функцией $g(a)$, для которой имеет место $(a)P(a,\ g(a))$, является представляющая функция предиката $(Ex)T(a,\ a,\ x)$, но по теореме III из § 42 эта функция $g(a)$ невычислима.

Подведем итоги: (α) имеет место в классической неформальной теории чисел и переводится формулой, которая (как устанавливает (β)) доказуема в **N**, но нельзя утверждать, что (α) истинна интуиционистски.

Шпеккер в [1949] привел аналогичные примеры, в которых предложения (α), имеющие место классически, но не интуиционистски (если принять сформулированный выше тезис из работы Клини [1943]), являются частными случаями известных теорем анализа, например теоремы о том, что ограниченная монотонная последовательность рациональных чисел сходится. Для определенности возьмем монотонно неубывающую последовательность. Используя переменные n, b, m, n_1, n_2, пробегающие натуральные числа, и записывая произвольную последовательность рациональных чисел в виде $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., можно сформулировать эту теорему в виде:

Если

(A) $(n)f(n) \leqslant f(n+1)$ (f монотонно неубывающая)

и

(B) $(Eb)(n)f(n) \leqslant b$ (f ограничена),

то

(C) $(m)(En)(n_1)(n_2)\{n_1,\ n_2 \geqslant n \to |f(n_1)-f(n_2)| < 1/2^m\}$ (f сходится).

Должно быть достаточно ясно, что понятие вычислимости по Тьюрингу можно применить к функциям $f(n)$, значениями которых являются рациональные числа, либо непосредственно, либо говоря о натуральных числах, являющихся индексами рассматриваемых рациональных чисел в некоторой фиксированной нумерации всех рациональных чисел, § 32. Шпеккер указал конкретную последовательность $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., для которой функция f вычислима по Тьюрингу[1]) и такую, что и (A) и (B) имеют

[1]) На самом деле, если использовать индексы в стандартной нумерации рациональных чисел, то f будет примитивно рекурсивна. См. [BM], гл. IX.

место, но ни для какой вычислимой функции g не выполнено условие

(C′) $(m)(n_1)(n_2)\{n_1,\ n_2 \geqslant g(m) \rightarrow |f(n_1)-f(n_2)| < 1/2^m\}$.

Таким образом, для этой конкретной функции f (A)—(C) выразимы в элементарной теории натуральных и рациональных чисел (которая содержится в общей части классического и интуиционистского языков математики), предположения (A), (B) истинны и классически, и интуиционистски, но заключение (C) истинно только классически.

Крайзель использует доказательство непротиворечивости Аккермана для системы **N**, чтобы утверждению (α) на основе (β) поставить в соответствие значительно более сложное предложение, осмысленное и истинное для «финитиста». «Финитист»—это если не совсем интуиционист, то по крайней мере кто-то весьма к нему близкий[1]).

Для исследования оснований интуиционистской математики можно использовать формальные системы, как это сделал Гейтинг в [1930], [1930a], хотя интуиционисты на философских основаниях всегда считали (начиная еще со времени, когда теорема Гёделя не была известна), что такие системы не могут быть полными. (Ср. концы § 12, 25, 39.) Клини, Нельсон и другие начиная с 1941 г. использовали вычислимые (или общерекурсивные) функции для разъяснения различий между интуиционистскими и классическими формальными системами[2]).

Упражнения. 44.1. Используя (a), покажите, что (A) простая непротиворечивость **N** влечет (c) и что (B) обратное тоже верно. (Воспользуйтесь слабым $\neg$-удалением, § 11.)

44.2. Покажите, что $\vdash_{\mathrm{N}} \forall \mathrm{a} \exists \mathrm{x} \mathrm{T}(\boldsymbol{i}, \mathrm{a}, \mathrm{x})$ выполняется не для всех вычислимых всюду определенных функций $\varphi_i(a)$. (Предполагайте, что в **N** доказуемы только истинные формулы.)

44.3*. Предполагая, что система **N** просто непротиворечива, покажите, что существует формальная система **M** теории чисел, которая просто непротиворечива, но в которой не все доказуемые формулы истинны при обычной интерпретации даже классически[3]).

44.4*. Пусть **S**—система, удовлетворяющая предположениям второй теоремы Гёделя (кроме предположения о простой непротиворечивости). Пусть **T** есть **S** без некоторых ее постулатов.

---

[1]) Введением в эти идеи Крайзеля являются его работы [1953], [1958]. Нынешние размышления Крайзеля о широкой области проблем оснований изложены в [1965].

[2]) Ср. [BM], § 82, и Клини и Весли [1965].

[3]) Решение см. ниже в § 47.

Какова была бы в 1930 г. реакция логика на следующее сообщение одного из его коллег? А в 1932 г.?

(a) «Я доказал в **S**, что **S** непротиворечива.»

(b) «Я доказал в **T**, что **S** непротиворечива.»

*§ 45. Применения к исчислению предикатов (Чёрч, Тьюринг)

Теорема VII. *Не существует разрешающей процедуры для доказуемости в (чистом) исчислении предикатов; короче, исчисление предикатов* **Pd** *неразрешимо.* (Чёрч [1936a], Тьюринг [1936—7].)

Доказательство. Мы получили теорему IV из теоремы III благодаря тому, что теория предиката $(Ex)T(a, a, x)$ до некоторой степени может быть формализована в **N**: для каждого натурального числа a можно эффективно найти формулу C_a, которая доказуема в **N** тогда и только тогда, когда $(Ex)T(a, a, x)$ ((a) и (b) из §43).

Теорема VII получится из теоремы III благодаря тому, что теория предиката $(Ex)T(a, a, x)$ может быть аналогичным образом формализована просто в чистом исчислении предикатов **Pd** (конец § 39). Наше обоснование возможности формализации теории предиката $(Ex)T(a, a, x)$ в **Pd** будет состоять из трех частей. (α) К исчислению предикатов с предикатным символом $=$ нужно добавить только *конечное* число функциональных символов $f_1, \ldots, f_k$ и («нелогических») аксиом, чтобы получить формальную систему $\mathbf{S}_k$, в которой теория предиката $(Ex)T(a, a, x)$ может быть в требуемой степени формализована. (β) Эта система $\mathbf{S}_k$ может быть преобразована в эквивалентную ей по существу систему **S** в символизме чистого исчисления предикатов, содержащую по-прежнему конечное количество нелогических аксиом. (γ) Замкнутые нелогические аксиомы системы **S** могут рассматриваться как допущения для выводов в **Pd**, к которым можно применить теорему о дедукции.

(α) Чтобы дать набросок первой части доказательства, начнем с того факта, что представляющая функция (§ 40)

$$\tau(i, a, x) = \begin{cases} 0, \text{ если } T(i, a, x), \\ 1 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

предиката $T(i, a, x)$ может быть определена последним из конечного списка (примитивно-)рекурсивных определений, начинающегося с определений $+$ и $\cdot$ (§ 38, 41). В том, что касается этой части подробного доказательства, читателю придется поверить нам на слово[1]).

[1]) В построении этого списка рекурсивных определений полезно использовать ряд методов вроде изложенных в гл. IX, X и XIII [ВМ].

Теперь мы опишем систему $\mathbf{S}_k$. Мы начинаем с исчисления предикатов, использующего символизм системы **N** из § 38 (т. е. с системы [20] из § 39). К нему мы добавим функциональные символы, выражающие функции, определения которых следуют за определениями $+$ и $\cdot$ в ряде рекурсивных определений, заканчивающемся определением функции τ. Пусть (индивидные и) функциональные символы, выражающие 0, $'$, $+$, $\cdot$, ..., τ, суть f_1, ..., f_k (так что «f_1» есть имя 0, «f_2» — имя $'$ и т. д.). В качестве аксиом A_1^k, ..., $A_{m_k}^k$, которые мы добавляем к аксиомам исчисления предикатов, мы возьмем последние шесть аксиом 16—21 системы **N**, пары равенств из дополнительных рекурсивных определений и, наконец, открытые аксиомы равенства для функциональных символов f_3, ..., f_k (§ 29). Для f_3 (т. е. для $+$) этими аксиомами являются две формулы, доказанные в **N** в примере 2 из § 38 и в упр. 38.2, но теперь их приходится взять в качестве аксиом.

В $\mathbf{S}_k$ будут доказуемы все равенства, выражающие значения функций $+$, $\cdot$, ..., τ, как показано для $+$ в упр. 38.4. Таким образом, если i, a, x — натуральные числа, такие, что имеет место $T(i, a, x)$, то формула $f_k(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$ будет доказуема в $\mathbf{S}_k$. Поэтому если имеет место $(Ex)T(a, a, x)$, то мы можем доказать в $\mathbf{S}_k$ равенство $f_k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$ для подходящего x и, следовательно, с помощью $\exists$-введения доказать $\exists x f_k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, x) = 0$; обозначим эту формулу через «D_a^k». Таким образом,

$$(1)\qquad (Ex)T(a, a, x) \rightarrow \{\vdash D_a^k \text{ в } \mathbf{S}_k\}.$$

Утверждение, обратное импликации (1), легко доказать, применяя теорию следования в исчислении предикатов с функциями (§ 20, 28). Действительно, аналогично (B) из § 38, если $\vdash D_a^k$ в $\mathbf{S}_k$, то $\forall A_1^k$, ..., $\forall A_{m_k}^k \models D_a^k$. Теперь возьмем в качестве области D натуральный ряд $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и рассмотрим распределение в D, в котором $=$, $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_k$ интерпретируются как предикат $=$, натуральное число 0, функции $'$, $+$, $\cdot$, ..., τ соответственно. При этом распределении все $\forall A_1^k$, ..., $\forall A_{m_k}^k$ принимают значение t, вследствие чего (поскольку $\forall A_1^k$, ..., $\forall A_{m_k}^k \models D_a^k$) D_a^k также принимает значение t. Но тот факт, что при этом распределении D_a^k есть t, означает, что $(Ex)T(a, a, x)$. Таким образом,

$$(2)\qquad \{\vdash D_a^k \text{ в } \mathbf{S}_k\} \rightarrow (Ex)T(a, a, x).$$

Это доказательство утверждения (2) не является метаматематическим (ср. § 37). Можно дать и метаматематическое доказательство этого факта[1]). Объединяя (1) и (2), получаем

(3_k) $$\{\vdash \mathrm{D}_a^k \text{ в } \mathbf{S}_k\} \equiv (Ex)\, T(a, a, x).$$

(β) Существует метод, с помощью которого, начиная с $\mathbf{S}_k$, мы можем последовательно заменять функциональные символы $\mathrm{f}_k, \ldots, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_1$, выражающие $\tau, \ldots, \cdot, +, ', 0$, соответствующими предикатными символами $\mathrm{F}_k, \ldots, \mathrm{F}_4, \mathrm{F}_3, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_1$, выражающими представляющие предикаты функций $\tau, \ldots, \cdot, +, ', 0$ (ср. конец § 38). Мы дадим представление об этом методе, рассмотрев шаг, на котором заменяется f_4 (т. е. $\cdot$), в предположении, что функциональные символы $\mathrm{f}_k, \ldots, \mathrm{f}_5$ уже заменены предикатными символами $\mathrm{F}_k, \ldots, \mathrm{F}_5$. (Описанием этого шага мы можем проиллюстрировать процесс, не вводя сложных обозначений.)

Итак, предположим, что в результате предыдущих шагов замены мы получили систему $\mathbf{S}_4$, содержащую лишь функциональные символы $\mathrm{f}_4, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_1$ (т. е. $\cdot, +, ', 0$), в которой имеется лишь конечное число нелогических аксиом $\mathrm{A}_1^4, \ldots, \mathrm{A}_{m_4}^4$. Далее, для каждого натурального числа a в $\mathbf{S}_4$ имеется формула D_a^4, такая, что

(3_4) $$\{\vdash \mathrm{D}_a^4 \text{ в } \mathbf{S}_4\} \equiv (Ex)\, T(a, a, x).$$

Мы ищем систему $\mathbf{S}_3$, содержащую лишь функциональные символы $\mathrm{f}_3, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_1$, в которой имеется лишь конечное число нелогических аксиом $\mathrm{A}_1^3, \ldots, \mathrm{A}_{m_3}^3$ и в которой для каждого a имеется формула D_a^3, такая, что

(3_3) $$\{\vdash \mathrm{D}_a^3 \text{ в } \mathbf{S}_3\} \equiv (Ex)\, T(a, a, x).$$

Чтобы получить из системы $\mathbf{S}_4$ систему $\mathbf{S}_3$, мы изменяем ее символизм, заменяя 2-местный функциональный символ $\cdot$ 3-местным предикатным символом, который мы также будем обозначать через $\cdot$ (обозначая, таким образом, при помощи $\cdot$ как f_4, так и F_4). Мы исключаем из правил образования пункт, говорящий, что если r, s — термы, то (r)·(s) — терм, и добавляем пункт, говорящий, что если r, s, t — термы, то ·(r, s, t) — формула. Что касается интерпретации, то формула ·(r, s, t) системы $\mathbf{S}_3$ означает то же, что и формула (r)·(s) = (t) системы $\mathbf{S}_4$. Таким

---

[1]) Метаматематическое доказательство утверждения (2) и детали, пропущенные в нашем очерке данного рассуждения, содержатся, например, у Клини в [ВМ], часть IV, вместе с некоторыми результатами из частей II и III (ср. замечание 2 на стр. 384), хотя и для предиката $T(i, a, x)$, отличающегося от рассматриваемого здесь. (Там изложение основано не на вычислимости по Тьюрингу, а на общерекурсивности; ср. § 41.)

Таким образом, для теоремы VII нам не нужны такие неэлементарные допущения, как (b) в теореме IV.

образом, $\cdot(a, b, c)$ выражает представляющий предикат $a \cdot b = c$ умножения $a \cdot b$ (ср. конец § 38).

Чтобы получить аксиомы системы S_3 из аксиом системы S_4, заменим 20 и 21 на

(A) $\cdot(a, 0, 0)$, (B) $\exists c(\cdot(a, b, c) \& \cdot(a, b', c+a))$.

Две аксиомы равенства для $\cdot$ в S_4 заменим на

(C) $a = b \supset (\cdot(a, c, d) \supset \cdot(b, c, d))$, (D) $a = b \supset (\cdot(c, a, d) \supset \cdot(c, b, d))$.

Добавим две аксиомы:

(E) $a = b \supset (\cdot(c, d, a) \supset \cdot(c, d, b))$,

(F) $\exists c(\cdot(a, b, c) \& \forall d(\cdot(a, b, d) \supset c = d))$.

Здесь (C)—(E)—открытые аксиомы равенства для предикатного символа $\cdot$, выражающие, что $\cdot(a, b, c)$ правильно определено как предикат, а аксиома (F) (которую, согласно § 29, можно сокращенно записать в виде «$\exists! c \cdot(a, b, c)$»), выражает для данных a и b, что $\cdot(a, b, c)$ истинно для одного и только одного c, т. е. что $\cdot(a, b, c)$ есть представляющий предикат некоторой функции. Наконец, заменим каждую из остальных аксиом системы S_4, содержащих функциональный символ $\cdot$, ее переформулировкой, использующей предикатный символ $\cdot$. Уже формулы (A) и (B) являются такими переформулировками аксиом 20 и 21; метод переформулировки иллюстрируется также в конце § 38 для функционального символа !.

Теперь в системе S_3, построенной нами, исходя из системы S_4, относительно функции $\cdot$ возникает то же положение, что и в системе **N** из § 38 относительно функций вроде !. По общей теории, упомянутой в подстрочном примечании 1 на стр. 258, в S_3 можно рассуждать о функции $\cdot$ с помощью переформулировок[1]). На этом пути из (3_4) можно вывести, что имеет место (3_3), когда в качестве D_a^3 взята переформулировка D_a^4, в которой функциональный символ $\cdot$ заменен на предикатный символ $\cdot$. (На самом деле D_a^4 не будет содержать $\cdot$, так что D_a^3 есть D_a^4. Но D_a^{k-1} будет отличаться от D_a^k, D_a^1—от D_a^2 и D_a^0—от D_a^1.)

Последовательные замены (проиллюстрированные на шаге, ведущем от S_4 к S_3) приведут к системе S_0, которая не содержит никаких функциональных символов, но зато содержит предикатные символы, и в которой имеется лишь конечное число аксиом $A_1^0, \ldots, A_{m_0}^0$. В S_0 для каждого a существует формула D_a^0, такая, что

$$(3_0) \qquad \{\vdash D_a^0 \text{ в } S_0\} \equiv (Ex)\, T(a, a, x).$$

[1]) Применение результатов, упомянутых в этом примечании, для замены функционального символа на предикатный обсуждается в общем виде у Гильберта и Бернайса [1934], стр. 460—467, и в [BM], стр. 369—371; для случая умножения (но не в точности для системы S_4) в [BM], пример 11 на стр. 371.

От системы S_0 мы перейдем теперь к системе **S**, имеющей ту же символику, что и чистое исчисление предикатов **Pd**, заменяя предикатные символы $=$, $F_1, \ldots, F_k$ системы S_0 на соответствующие предикатные буквы $P_0, \ldots, P_k$ (используемые с тем же количеством аргументов соответственно). Пусть $A_1, \ldots, A_m$ $(m = m_0)$ и D_a получаются в результате этого изменения обозначений из $A_1^0, \ldots, A_{m_0}^0$ и D_a^0; таким образом, $A_1, \ldots, A_m$ — нелогические аксиомы системы **S**. Ясно, что доказательство формулы D_a^0 в S_0 в результате такого изменения обозначений превратится в доказательство формулы D_a в системе **S** (ни для какого шага доказательства не является существенным, используем ли мы предикатные символы или соответствующие предикатные буквы). Таким образом[1]),

$$(4)\qquad \{\vdash D_a^0 \text{ в } S_0\} \rightarrow \{\vdash D_a \text{ в } \mathbf{S}\}.$$

Доказать обратное чуть сложнее, поскольку данное доказательство D_a в **S** могло содержать предикатные буквы, отличные от $P_0, \ldots, P_k$. (В **S** имеется бесконечно много предикатных символов от любого числа переменных, но в S_0 имеется только $k+1$ предикатных символов $=$, $F_1, \ldots, F_k$.) Однако доказательство формулы D_a в системе **S** останется доказательством этой формулы, если все входящие в него атомы, построенные с помощью других предикатных букв, заменить на $\forall x P_1(x)$. Получившееся в результате доказательство формулы D_a в **S** станет доказательством D_a^0 в S_0, если $P_0, \ldots, P_k$ заменить на $F_1, \ldots, F_k$. Таким образом[1]),

$$(5)\qquad \{\vdash D_a \text{ в } \mathbf{S}\} \rightarrow \{\vdash D_a^0 \text{ в } S_0\}.$$

Сопоставляя (4) и (5) с (3_0), получаем

$$(6)\qquad \{\vdash D_a \text{ в } \mathbf{S}\} \equiv (Ex)\,T(a,\ a,\ x).$$

(γ) Теперь $\{\vdash D_a \text{ в } \mathbf{S}\} \equiv \{\forall A_1, \ldots, \forall A_m \vdash D_a \text{ в } \mathbf{Pd}\}$ [аналогично (A) из §38, стр. 254] $\equiv \{\vdash \forall A_1 \supset (\forall A_2 \supset \ldots (\forall A_m \supset D_a) \ldots) \text{ в } \mathbf{Pd}\}$

(по следствиям теорем 11_{Pd} и 10_{Pd}). Используя это в (6), получаем

$$(7)\qquad \{\vdash \forall A_1 \supset (\forall A_2 \supset \ldots (\forall A_m \supset D_a) \ldots) \text{ в } \mathbf{Pd}\} \equiv (Ex)\,T(a,\ a,\ x).$$

Теперь мы, как и собирались, завершим доказательство применением теоремы III. Итак, предположим, что разрешающая процедура для доказуемости в **Pd** существует. Тогда по данному a мы можем в противоречие с теоремой III следующим

---

[1]) Импликации (4) и (5) представляют собой применения теоретико-доказательственного правила подстановки, упомянутого в примечании на стр. 160.

образом решить, истинно или ложно $(Ex)\, T(a, a, x)$. По a найдем формулу $\forall A_1 \supset (\forall A_2 \supset \ldots (\forall A_m \supset D_a) \ldots)$. Применим предполагаемую разрешающую процедуру для доказуемости в **Pd** к вопросу о том, доказуема ли эта формула. Согласно (7), утверждение $(Ex)\, T(a, a, x)$ истинно (ложно) в точности тогда, когда ответ на этот вопрос есть «да» («нет»).

Интересное новое доказательство теоремы VII (основанное на идеях, изложенных ниже в гл. VI) содержится в работе Бюхи [1962].

Результаты о неразрешимости, ставшие возможными благодаря тезису Чёрча—Тьюринга (§ 41), впервые возникли в непосредственной связи с новыми понятиями λ-определимости, общерекурсивности и вычислимости по Тьюрингу (как теорема III), а затем (как теоремы IV и VII) в связи с проблемами разрешения для формальных систем.

Чёрч писал автору 19 мая 1936 г., вскоре после того как был сформулирован его тезис и получены его первые результаты (в частности, теоремы III, IV и VII): «В действительности мне хотелось бы видеть, как мои или Ваши результаты используются для доказательства неразрешимости каких-либо математических проблем этого рода, внешне не связанных с логикой». Эта надежда стала сбываться начиная с 1947 г., когда Пост и А. А. Марков (младший) независимо один от другого доказали неразрешимость «проблемы тождества» для полугрупп [1]). Это привело к неразрешимости «проблемы тождества» для полугрупп с сокращением в работе Тьюринга [1950] (и Буна [1958]), а затем к неразрешимости «проблемы тождества» для групп в 143-страничной статье Новикова [1955] [2]). Более простые доказательства результата Новикова были даны впоследствии, исходя из других соображений, Буном [1954—7], [1959] (работа 1957 г.), Бриттоном [1956—8], [1963] (работа 1958 г.) и (в качестве следствия другой теоремы) Хигманом [1961] [3]). В [1958] Марков установил неразрешимость «проблемы гомеоморфии» для четырехмерных многообразий в топологии. Эта теорема переработана и расширена Буном, Хакеном и Поэнару [**1968**]. К числу других важнейших публикаций в этой области относятся работы Рабина [1958], Клепхема [**1964**], Шефердсона [**1965**], Буна [**1966**], [**1966а**] и [**1968**] (с полной библиографией). В статьях, выделенных здесь жирным шрифтом, проводится более тонкое исследование, затрагивающее не только вопрос о разрешимости и неразрешимости, но также и о «степенях неразрешимости» (§ 46).

---

[1]) Изложение этого имеется в [ВМ], § 71.

[2]) Относительно этой задачи см. Ден [1912], стр. 117.

[3]) Доказательство Бриттона [1963] включено в учебник: Ротман [1965], гл. 12.

Результаты о неразрешимости стали появляться и в теории функций действительного переменного: Скарпеллини [1963], Ричардсон [1966] (резюме). В последней работе рассматривается вариант проблемы интегрируемости из упр. 40.1 (k).

Результаты о неразрешимости получены также в связи с грамматическими проблемами для языков, связанных с вычислительными машинами и конечными автоматами: Рабин и Скотт [1959], Бар-Хиллел, Перлес и Шамир [1961].

*§ 46. Степени неразрешимости (Пост), иерархии (Клини, Мостовский)

Мы можем кратко охарактеризовать наши доказательства теорем IV и VII следующим образом. Сначала в теореме III мы установили неразрешимость предиката $(Ex)\,T(a,\ a,\ x)$. Затем «свели» проблему разрешения (P) для этого предиката к проблеме разрешения (Q) для доказуемости в **N** или для доказуемости в исчислении предикатов **Pd**.

Выскажем это подробнее для случая **Pd** (теорема VII). Мы показали, что если бы у нас был способ ответить на любой вопрос из класса (Q): «Доказуема ли данная формула Е в **Pd**?», то мы могли бы ответить на любой вопрос из класса (P): «Обладает ли данное натуральное число a свойством $(Ex)\,T(a,\ a,\ x)$?». Но в теореме III мы уже доказали, исходя из понятия машины Тьюринга и тезиса Чёрча—Тьюринга, что алгорифм, позволяющий ответить на все вопросы из класса (P), невозможен. Следовательно, не может быть и алгорифма, позволяющего ответить на все вопросы из класса (Q).

Мы сводили (P) к (Q), потому что (P)—класс вопросов, относительно которого мы смогли непосредственно показать, что он неразрешим. Некоторый интерес представляет, однако, и то, что, обратно, (Q) может быть сведен к (P). Это утверждение (и аналогичное с заменой **Pd** на **N**) содержится в следующем предложении.

(A) *Для каждого предиката вида* $(Ex_1)\ldots(Ex_m)\,R(a_1,\ldots$ $\ldots,\ a_n,\ x_1,\ldots,x_m)$, *где* $R(a_1,\ldots,a_n,\ x_1,\ldots,x_m)$ — *данный разрешимый предикат* $(m,\ n>0)$, *существует вычислимая функция* $\theta(a_1\ldots,a_n)$, *такая, что* $(Ex_1)\ldots(Ex_m)\,R(a_1,\ldots,a_n,\ x_1,\ldots,x_m)\equiv$ $\equiv(Ex)\,T(\theta(a_1,\ \ldots,\ a_n),\ \theta(a_1,\ \ldots,\ a_n),\ x)$.

Аналогично для $n=0$, *когда* $\theta(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ *становится просто натуральным числом* h.

(Доказательство следует ниже.) Таким образом, любой вопрос из класса «Истинно ли $(Ex_1)\ \ldots\ (Ex_m)\,R(a_1,\ \ldots,\ a_n,\ x_1,\ \ldots,\ x_m)$?» сводится к соответствующему вопросу из класса «Истинно ли $(Ex)\,T(b,\ b,\ x)$?», а именно к такому вопросу с $b=\theta(a_1,\ \ldots,\ a_n)$

(поскольку θ вычислима, по любым $a_1, \ldots, a_n$ мы можем эффективно найти соответствующее b)[1]).

Чтобы доказать (A), возьмем произвольные фиксированные $a_1, \ldots, a_n$ и рассмотрим следующую интуитивную вычислительную процедуру. Допустим прежде всего, что все m-ки натуральных чисел $(x_1, \ldots, x_m)$ перечислены, т. е. расположены в виде бесконечного списка (§ 32). Теперь с помощью машины Тьюринга, разрешающей предикат $R(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m)$ (которая, как предполагается, дана), будем проверять m-ки в том порядке, в котором они расположены в списке, и искать среди них такую, для которой истинно $R(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m)$, и напишем 0, когда такая m-ка найдена, но будем продолжать процесс поиска до бесконечности, если такой m-ки нет.

Теперь мы утверждаем (и в том, что касается деталей, читателю придется поверить нам на слово), что можно построить машину Тьюринга, которая, будучи применена к *произвольному* числу b как к аргументу, осуществит описанный выше процесс и напечатает 0, если найдет m-ку $(x_1, \ldots, x_m)$, для которой истинно $R(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m)$, а в противном случае не вычислит никакого значения. Машина, которую мы построим, будет зависеть от чисел $a_1, \ldots, a_n$, с которых мы начали. Мы утверждаем далее, что эти различные машины можно построить таким образом, что их индексы могут быть заданы вычислимой по Тьюрингу функцией $\theta(a_1, \ldots, a_n)$. Таким образом, учитывая, что делают упомянутые машины и определение предиката $T(i, a, x)$ из § 42, получаем

$$(Ex_1) \ldots (Ex_m) R(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m) \equiv (Ex) T(\theta(a_1, \ldots, a_n), b, x)$$

для всех $a_1, \ldots, a_n, b$. Полагая здесь $b = \theta(a_1, \ldots, a_n)$, получаем эквивалентность из (A).

Чтобы с помощью (A) убедиться в возможности сведе́ния проблемы разрешения (Q) для доказуемости в исчислении предикатов **Pd** (или в **N**) к проблеме разрешения (P) для $(Ex) T(a, a, x)$, мы можем сначала эффективным образом поставить в соответствие формулам исчисления предикатов гёделевы номера (см. обсуждение в § 43). Теперь утверждение «A доказуема» может быть выражено как $(Ex) \Pr(a, x)$, где a — гёделев номер формулы A, а $\Pr(a, x)$ — разрешимый предикат, выражающий то обстоятельство, что x есть гёделев номер доказательства

---

[1]) Пост в [1944] дал первый результат такого рода, используя предикат, отличный от $(Ex) T(b, b, x)$. (Первые параграфы статьи Поста [1944] являются менее техническими, чем бо́льшая часть статей по этим вопросам.) Соответствующий результат для предиката, аналогичного предикату $(Ex) T(b, b, x)$ в теории общерекурсивных функций, появился в [BM], стр. 306. Несколько расширяя терминологию Поста, $(Ex) T(b, b, x)$ можно назвать *полным* предикатом для класса предикатов $(Ex_1) \ldots (Ex_m) R(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m)$.

формулы с гёделевым номером a. Теперь остается применить (A) к Pr в качестве R (с $n=m=1$).

Итак, утверждение (A) и доказательства теорем IV и VII показывают, что все наши три примера неразрешимых предикатов (или неразрешимых проблем разрешения) сводимы один к другому.

В канторовской теории множеств, начав сравнивать между собой бесконечные множества с помощью взаимно-однозначных соответствий, мы открыли, что не все бесконечные множества являются равночисленными; в действительности мы нашли целую иерархию возрастающих кардинальных чисел. Теперь аналогичным образом возникает вопрос, все ли неразрешимые теоретико-числовые предикаты являются «равнонеразрешимыми» в том смысле, что проблема разрешения для любого из них сводима к проблеме разрешения для любого другого. Как и в теории множеств, ответ на этот вопрос отрицателен; в действительности некоторые предикаты «более неразрешимы», или (их проблемы разрешения) имеют «более высокую степень неразрешимости», чем другие.

До сих пор мы рассматривали только некоторые конкретные пары неразрешимых предикатов, которые были «равнонеразрешимыми» (проблема разрешения для каждого из них просто сводилась к проблеме разрешения для другого). Теперь нам нужно более общее понятие того, когда один предикат сводим к другому (проблема разрешения для одного сводима к проблеме разрешения для другого). Это требует распространения тезиса Чёрча или тезиса Чёрча—Тьюринга на разрешимость или вычислимость относительно данного предиката.

Понятие, которое мы здесь используем, введено Тьюрингом [1939] и использовано для определения «степени (неразрешимости)» Постом [1948] (резюме, отчасти предвосхищенное в [1944] [1]). Рассмотрим «Q-машину», сходную с обычной, или «абсолютной», машиной Тьюринга, за исключением того, что она снабжена второй (актуально) бесконечной лентой («Q-лентой»), на которой напечатаны ответы на все вопросы о том, истинно или ложно $Q(b)$ (для $b=0, 1, 2, \ldots$). (Тьюринг говорил вместо этого о машине, снабженной «оракулом», отвечающим на любой вопрос относительно истинности $Q(b)$, который задаст ему машина.) Если подходящая Q-машина может ответить на любой вопрос о том, истинно ли $P(a)$ (для $a=0, 1, 2, \ldots$), мы говорим, что предикат $P(a)$ *сводим (по Тьюрингу)* к предикату $Q(b)$ (или что проблема разрешения для $P(a)$ *сводима* к проблеме

[1]) В [BM], стр. 280—282, изложение основано не на вычислимости по Тьюрингу, а, эквивалентным образом, на теории общерекурсивных функций (релятивизованной Клини [1943]).

разрешения для $Q(b)$. Если $P(a)$ сводим к $Q(b)$ и обратно, мы говорим, что $P(a)$ и $Q(b)$ (или их проблемы разрешения) имеют одну и ту же *степень (неразрешимости)*. Если $P(a)$ сводим к $Q(b)$, но не наоборот, мы говорим, что $P(a)$ — предикат *более низкой степени*, чем $Q(b)$, или что $Q(b)$ — предикат *более высокой степени*, чем $P(a)$. Следовательно, если $P(a)$ сводим к $Q(b)$, то $P(a)$ — той же или более низкой степени, чем $Q(b)$.

Здесь понятия более низкой, той же и более высокой степени для предикатов $P(a)$ и $Q(b)$ соответствуют понятиям меньшей, равной или большей мощности для множеств M и N. Чтобы придать теории более совершенную форму, нам следовало бы определить степени сами по себе, а не использовать просто слово «степень» для выражения указанных выше отношений между предикатами $P(a)$ и $Q(b)$. Мы можем использовать здесь тот же метод, что и при определении «кардинального числа» по Фреге — Расселу в § 34. Мы начинаем с проверки (упр. 46.1) того, что описанное выше отношение «равенства степеней» («$P(a)$ сводимо к $Q(b)$ и обратно») есть отношение эквивалентности, т. е. что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно (как и отношение «равномощности»: «между множествами M и N может быть установлено взаимно-однозначное соответствие», § 34). Это позволяет нам определить *степень* любого теоретико-числового предиката $P(a)$ как класс, к которому принадлежит $P(a)$ по этому отношению эквивалентности (§ 30). Тогда для оправдания данного выше определения того, когда один предикат более низкой степени, чем другой (что теперь мы выскажем так: «степень $P(a)$ меньше степени $Q(b)$»), необходимо проверить (упр. 46.2), что результат не зависит от того, какие конкретные предикаты $P(a)$ и $Q(b)$ выбраны из соответствующих классов эквивалентности.

Отношение $<$ между степенями иррефлексивно и транзитивно (упр. 46.3).

Чтобы упростить обозначения, мы говорили здесь только об одноместных теоретико-числовых предикатах $P(a)$ и $Q(b)$. Но отношение сводимости применимо и к теоретико-числовым предикатам или функциям от любого числа $\geqslant 1$ аргументов; классы эквивалентности можно строить и в этой более широкой совокупности.

На все вопросы относительно конкретных значений разрешимого предиката $P(a)$ можно ответить с помощью подходящей абсолютной машины Тьюринга. Поэтому и подходящая Q-машина может ответить на все эти вопросы, не заглядывая на свою Q-ленту. Следовательно, каждый разрешимый предикат $P(a)$ имеет степень $\leqslant$ степени любого предиката $Q(b)$. Степень любого разрешимого предиката мы обозначаем через **0** (поскольку любые два разрешимых предиката сводимы один к другому, разрешимые предикаты действительно образуют степень); она, как мы видим, является низшей из степеней неразрешимости («разрешимостью»).

По теореме III предикат $(Ex)T(a, a, x)$ не может быть разрешен с помощью абсолютной машины Тьюринга. Поэтому $(Ex)T(a, a, x)$ не может быть разрешен и Q-машиной, где $Q(b)$ — разрешимый предикат. Действительно, значения предиката $Q(b)$, записанные на Q-ленте, оказывают машине помощь, не являющуюся необходимой, подходящая абсолютная машина могла бы вычислять их сама.

Следовательно, предикат $(Ex)T(a, a, x)$ имеет более высокую степень, чем разрешимые предикаты. Обозначим степень предиката $(Ex)T(a, a, x)$ через $\mathbf{0}'\ (=\mathbf{1})$. Таким образом, $\mathbf{0}' > \mathbf{0}$.

Теперь легко понять, как можно получить степени, более высокие, чем $\mathbf{0}'$. Хотя мы не высказали точно, как используется Q-лента Q-машины, должно быть вполне очевидно, что можно сделать это и построить предикат $T^Q(i, a, x)$ (относительно данного предиката $Q(b)$), играющий для Q-машин ту же роль, какую предикат $T(i, a, x)$ играет для абсолютных машин. Тогда (аналогично теореме I (A)) $T^Q(i, a, x)$ разрешим при помощи Q-машины, и $\varphi_i^Q(a)$ как частичная функция от i и a вычислима при помощи Q-машины.

Используя Q-машины вместо абсолютных машин в доказательстве утверждения (A), мы можем установить следующее:

(B) *Для любого предиката Q имеет место* (A), *где* $R(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m)$ *может быть произвольным предикатом, разрешимым при помощи Q-машин, а* $T(a, a, x)$ *заменен на* $T^Q(a, a, x)$.

Аналогично, переходя к Q-машинам в доказательствах теорем II и III, получим, что предикат $(Ex)T^Q(a, a, x)$ не разрешим при помощи Q-машин. Но поскольку $Q(a) \equiv (Ex)(Q(a) \,\&\, x = x)$, согласно (B), то Q сводим к $(Ex)T^Q(a, a, x)$. Следовательно, $(Ex)T^Q(a, a, x)$ имеет более высокую степень, чем Q. Мы можем высказать этот результат в следующей форме:

(C) *Если* $Q(b)$ — *предикат степени* $\mathbf{d}$, *то* $(Ex)T^Q(a, a, x)$ — *предикат степени* $\mathbf{d}' > \mathbf{d}$.

Использование здесь обозначения $\mathbf{d}'$ подразумевает, что степень предиката $(Ex)T^Q(a, a, x)$ зависит только от степени $\mathbf{d}$ предиката Q и, далее, что, когда Q разрешим, степень предиката $(Ex)T^Q(a, a, x)$ та же, что и степень предиката $(Ex)T(a, a, x)$, обозначенная нами ранее через $\mathbf{0}'$. Эти дополнительные факты легко доказываются с помощью (B) и (A) (упр. 46.4).

Повторно используя (C), мы получим последовательность возрастающих степеней

$$\mathbf{0} < \mathbf{0}' < \mathbf{0}'' < \ldots < \mathbf{0}^{(n)} < \ldots .$$

Как легко видеть:

(D) *Если $P_0(a)$, $P_1(a)$, $P_2(a)$, ... — предикаты, степени которых возрастают, и $P(n, a) \equiv P_n(a)$, то $P(n, a)$ как 2-местный предикат имеет более высокую степень, чем любой из предикатов $P_0(a)$, $P_1(a)$, $P_2(a)$, ...* .

(C) и (D) в порождении возрастающих степеней играют роль, подобную той, какую играют (C) и (D) из § 34 в порождении возрастающих кардинальных чисел. Этот метод порождения теоретико-числовых предикатов все более высоких степеней предложен Дэвисом [1950] и независимо Клини и Постом.

Иерархии теоретико-числовых предикатов были впервые открыты, исходя из другой точки зрения, Клини в [1943] (резюме [1940]) и независимо (несколько иным методом) Мостовским в [1947]. Используя подход Клини, мы доказываем сначала следующее:

(E) *Для каждого разрешимого предиката $R(a, x)$ существует число f, такое, что*

$$(Ex)\, R(a, x) \equiv (Ex)\, T(f, a, x).$$

Аналогично для каждого разрешимого предиката $R(a_1, \ldots, a_n, x)$ существует число f, такое, что

$$(Ex)\, R(a_1, \ldots, a_n, x) \equiv (Ex)\, T(f, a_1, \ldots, a_n, x),$$

где $T(i, a_1, \ldots, a_n, x)$ играет ту же роль для вычисления на машинах Тьюринга n-местных функций, что $T(i, a, x)$ для 1-местных. (Теорема о нумерации.)[1])

Чтобы доказать (E) для случая одной переменной a, нужно только взять машину Тьюринга $\mathfrak{M}_f$, которая, будучи применена к a, ищет число x, такое, что $R(a, x)$, и печатает 0, если такое число найдено, но не вычисляет никакого значения в противном случае.

(F_1) *Предикат $(x)\, \overline{T}(a, a, x)$ не выразим в форме $(Ex)\, R(a, x)$ с разрешимым $R(a, x)$. Предикат $(Ex)\, T(a, a, x)$ не выразим в форме $(x)\, R(a, x)$ с разрешимым предикатом $R(a, x)$. Вследствие этого $(x)\, \overline{T}(a, a, x)$ и $(Ex)\, T(a, a, x)$ неразрешимы.*

Действительно, допустим, в противоречие с доказываемым утверждением, что $(x)\, \overline{T}(a, a, x) \equiv (Ex)\, R(a, x)$ для некоторого разрешимого предиката $R(a, x)$. Тогда

$$\overline{(x)}\, \overline{T}(a, a, x) \equiv \overline{(Ex)}\, R(a, x) \equiv \overline{(Ex)}\, T(f, a, x) \ [\text{используя (E)}] \equiv$$
$$\equiv (x)\, \overline{T}(f, a, x).$$

---

[1]) $(Ex)\, T(0, a, x)$, $(Ex)\, T(1, a, x)$, $(Ex)\, T(2, a, x)$, ... — это перечисление с повторениями всех предикатов вида $(Ex)\, R(a, x)$ с разрешимым $R(a, x)$ (причем «перечисляющий предикат» $(Ex)\, T(i, a, x)$ имеет ту же форму, за исключением наличия необходимой добавочной переменной i).

Подставляя f вместо a, получаем $(\bar{x})\bar{T}(f, f, x) \equiv (x)\bar{T}(f, f, x)$, что абсурдно ($\vdash \neg(\neg P \sim P)$ в исчислении высказываний).

Аналогично допустим, что $(Ex)T(a, a, x) \equiv (x)R(a, x)$ для некоторого разрешимого предиката $R(a, x)$. Тогда

$$(Ex)T(a, a, x) \equiv (x)\bar{\bar{R}}(a, x) \equiv (\overline{Ex})\bar{R}(a, x) \equiv (\overline{Ex})T(f, a, x)$$

(используем (E) с $\bar{R}(a, x)$ в качестве $R(a, x)$). Подставляя f вместо a, получаем $(Ex)T(f, f, x) \equiv (\overline{Ex})T(f, f, x)$, что абсурдно.

Чтобы вывести, что предикат $(Ex)T(a, a, x)$ не разрешим, допустим, что $(Ex)T(a, a, x) \equiv R(a)$ с разрешимым $R(a)$. Тогда $(Ex)T(a, a, x) \equiv (x)(R(a) \,\&\, x = x)$, что противоречит второй части утверждения (F_1), поскольку предикат $R(a) \& x = x$ разрешим. Аналогично или с помощью эквивалентности $(x)\bar{T}(a, a, x) \equiv \equiv (\overline{Ex})T(a, a, x)$ получаем, что не разрешим и $(x)\bar{T}(a, a, x)$.

(F_2) Предикат $(Ex)(y)\bar{T}(a, a, x, y)$ *не выразим в форме* $(x)(Ey)R(a, x, y)$ *с разрешимым* $R(a, x, y)$. *Предикат* $(x)(Ey)T(a, a, x, y)$ *не выразим в форме* $(Ex)(y)R(a, x, y)$ *с разрешимым* $R(a, x, y)$. *Вследствие этого* $(Ex)(y)\bar{T}(a, a, x, y)$ *и* $(x)(Ey)T(a, a, x, y)$ *не выразимы с помощью одного или нуля кванторов, примененных к разрешимому предикату.*

Это доказывается аналогично утверждению (F_1). Подобным же образом мы получаем предложения (F_3), (F_4), (F_5), ... относительно предикатных форм с 3, 4, 5, ... кванторами (попеременно то существования, то всеобщности), примененными к разрешимым предикатам[1]). Предложения (F_1), (F_2), (F_3), ... объединены в теореме Клини об иерархии [1943] (резюме [1940]):

(F) *Рассмотрим предикатные формы*

$$\begin{array}{llll} & (Ex)R(a, x) & (x)(Ey)R(a, x, y) & (Ex)(y)(Ez)R(a, x, y, z) \ \ldots \\ R(a) & & & \\ & (x)R(a, x) & (Ex)(y)R(a, x, y) & (x)(Ey)(z)R(a, x, y, z) \ \ldots \end{array}$$

где в каждой форме R — *разрешимый предикат. Для каждой из этих форм, кроме первой, существует предикат, выразимый в этой форме, но не выразимый в двойственной (т. е. в получающейся из нее заменой кванторов существования на кванторы всеобщности*

---

[1]) Поскольку $R(a, x)$ разрешим, $R(a, x) \equiv \bar{\bar{R}}(a, x)$ имеет место интуиционистски. Кроме того, $(\overline{Ex})T(f, a, x) \equiv (x)\bar{T}(f, a, x)$ и $(x)\bar{\bar{R}}(a, x) \equiv (\overline{Ex})\bar{R}(a, x)$ являются (неформальными) применениями *82a, имеющего место интуиционистски. Таким образом, наше доказательство утверждения (F_1) проходит и при ограничении интуиционистской логикой. Для (F_2), (F_3), (F_4), ... нужна классическая логика.

и наоборот), а также ни в одной из форм с меньшим числом кванторов.

С помощью теоремы из резюме Поста [1948] ([ВМ], теорема XI на стр. 261) можно показать, что степени разрешимого предиката и предикатов $(Ex)T(a, a, x)$, $(x)(Ey)T(a, a, x, y)$, $(Ex)(y)(Ez)T(a, a, x, y, z)$, ... — это те самые $\mathbf{0}, \mathbf{0}', \mathbf{0}'', \mathbf{0}''', \ldots$, которые являются степенями предикатов, получаемых в результате многократного применения (С) к разрешимым предикатам.

Рассмотрим формальную систему $\mathbf{N}$ (подобную системе из § 38), в которой для каждого a можно найти формулу, выражающую $(x)\overline{T}(a, a, x)$; в действительности, поскольку $(x)\overline{T}(a, a, x) \equiv \overline{(Ex)}T(a, a, x)$, такой формулой может быть $\neg C_a$ для C_a из § 43. Пусть гёделев номер формулы $\neg C_a$ есть, скажем, $\alpha(a)$, где α — вычислимая функция.

Используя предикат $\Pr(a, x)$ для $\mathbf{N}$, упомянутый в начале этого параграфа, получаем $\{\vdash \neg C_a \text{ в } \mathbf{N}\} \equiv (Ex)\Pr(\alpha(a), x)$. Здесь $\Pr(\alpha(a), x)$ — разрешимый предикат от a и x; запишем его просто как $R(a, x)$. Таким образом,

$$\text{(e)} \qquad \{\vdash \neg C_a \text{ в } \mathbf{N}\} \equiv (Ex)R(a, x).$$

Теперь из первой части утверждения (F_1) непосредственно следует, что $\mathbf{N}$ не может быть и корректной, и полной, так чтобы формула $\neg C_a$ была доказуема в $\mathbf{N}$ тогда и только тогда, когда она истинна, т. е. так, чтобы имела место эквивалентность

$$(\ast\ast) \qquad \{\vdash \neg C_a \text{ в } \mathbf{N}\} \equiv (x)\overline{T}(a, a, x).$$

Действительно, объединяя ($\ast\ast$) с (e), мы получили бы $(x)\overline{T}(a, a, x) \equiv (Ex)R(a, x)$, что противоречит ($F_1$). Таким образом, ($\ast\ast$) не может иметь место для всех a. Предположим, что система $\mathbf{N}$ корректна,

$$\text{(c)} \qquad \{\vdash \neg C_a \text{ в } \mathbf{N}\} \to (x)\overline{T}(a, a, x),$$

что представляет собой одну из импликаций, содержащихся в эквивалентности ($\ast\ast$). Тогда другая импликация

$$(\ast) \qquad (x)\overline{T}(a, a, x) \to \{\vdash \neg C_a \text{ в } \mathbf{N}\}$$

не может быть верна для всех a. Поскольку $(x)\overline{T}(a, a, x) \equiv \overline{(Ex)}T(a, a, x)$, эти утверждения (c) и ($\ast$) совпадают с так же обозначенными утверждениями из § 43, а из корректности системы $\mathbf{N}$ мы получаем также и (b). Таким образом (продолжая рассуждения, как в первом доказательстве теоремы V), мы видим, что теорема Гёделя о неполноте для системы $\mathbf{N}$ из § 38 или для любой системы $\mathbf{N}$, которая является корректной и удовлетворяет очень общему структурному условию, выражаемому утверждением (e) для некоторого разрешимого предиката R, неявно содержится в первой части предложения (F_1).

Эти рассуждения используют классическую логику для доказательства существования значения p переменной a, для которого (*) ложно. (Теория иерархий является в значительной степени классической.) Если (вместо того, чтобы предполагать ($^*_*$) для приведения к нелепости) мы применим (E) (как в доказательстве (F_1)), то получим число f, такое, что

$$\text{(f)} \qquad (Ex)\,R(f,\ x) \equiv (Ex)\,T(f,\ f,\ x).$$

Теперь теорема V(i)—(iii) с f в качестве p следует интуиционистски из (b), (c), (e), (f).

Теорема Чёрча (теорема III) есть третья часть утверждения (F_1).

Короче говоря, теоремы Чёрча и Гёделя соответствуют двум формам $R(a)$ и $(Ex)\,R(a,\ x)$ в (F). С этой точки зрения (подчеркнутой Клини [1943]) теорема об иерархии может рассматриваться как обобщение теорем Чёрча и Гёделя. При другом построении, использующем (C), иерархия получается с помощью итерирования релятивизированной формы теоремы Чёрча [1]).

Пост в [1944] поставил вопрос о том, существует ли предикат вида $(Ex)\,R(a,\ x)$, где R разрешим, имеющий степень (строго) между $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$. В [1954] Клини и Пост показали, что существуют предикаты, имеющие степени между $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$; но их метод не показывал, имеют ли какие-либо из этих предикатов форму $(Ex)\,R(a,\ x)$ с разрешимым R. В 1956 г. Фридберг (США), которому тогда было только 20 лет, и Мучник (СССР), примерно такого же возраста, независимо друг от друга, усовершенствовав конструкцию Клини—Поста, показали, что существует предикат вида $(Ex)\,R(a,\ x)$ с разрешимым R, степень которого расположена между $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$, решив тем самым проблему Поста [1944][2]).

Существуют несравнимые степени (т. е. степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, такие, что ни $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, ни $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, ни $\mathbf{a} > \mathbf{b}$). Совокупность всех степеней, которыми могут обладать теоретико-числовые предикаты, включающая степени, через которые перепрыгивают и мимо которых проходят описанные выше иерархии, имеет очень сложную структуру [3]).

---

[1]) Некоторые дальнейшие указания по поводу теории иерархий имеются у Клини [1958], § 2. Мостовский [1954] и Клини [1955] дают более полное, но в то же время более техническое изложение результатов, имевшихся к тому времени.

[2]) Фридберг [1956], [1957] (резюме [1956]), Мучник [1956], [1958].

[3]) Первые результаты в этом направлении получены Клини и Постом [1954]. После этого большая работа была проделана Спектором, Лакомбом, Шёнфилдом, Заксом и др. См. Закс [1963].

Упражнения. 46.1. Покажите, что отношение «$P(a)$ сводим к $Q(b)$ и наоборот» рефлексивно, симметрично и транзитивно.

46.2. Покажите, что если $P_1(a)$ и $Q_1(b)$ имеют те же степени, что и $P(a)$ и $Q(b)$ соответственно, то $\{P(a)$ сводим к $Q(b)$, но не наоборот$\} \equiv \{P_1(a)$ сводим к $Q_1(b)$, но не наоборот$\}$.

46.3. Докажите, что для любых степеней **a**, **b**, **c** (a) неверно, что $\mathbf{a} < \mathbf{a}$, (b) если $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} < \mathbf{c}$, то $\mathbf{a} < \mathbf{c}$.

46.4. Покажите, что (a) если Q_1 и Q_2 имеют одну и ту же степень, то $(Ex)T^{Q_1}(a, a, x)$ и $(Ex)T^{Q_2}(a, a, x)$ тоже имеют одну и ту же степень; (b) если Q имеет степень **0**, то $(Ex)T^{Q}(a, a, x)$ имеет ту же степень, что и $(Ex)T(a, a, x)$.

46.5. Докажите утверждение, аналогичное (E), но с кванторами всеобщности вместо кванторов существования.

46.6. Покажите, что для любого разрешимого предиката R предикат $(x_1)\ldots(x_m)R(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m)$ имеет степень $\leqslant \mathbf{0}'$.

46.7. Докажите (D) и (F_2).

46.8.* Покажите, что каждый из предикатов, выразимых в символизме системы **N** из § 38 при обычной интерпретации (такие предикаты называются «арифметическими» по Гёделю [1931]), выразим в одной из форм (F)[1]).

46.9* Предположите известным тот факт, что каждый разрешимый предикат выразим в символизме системы **N** из § 38[2]). Докажите следующее:

(a) утверждение, обратное к утверждению из упр. 46.8,

(b) для каждой фиксированной гёделевой нумерации формул системы **N** (конец § 43) предикат «a есть гёделев номер истинной замкнутой формулы системы **N**» не выразим в символизме системы **N**.

*§ 47. Теоремы о неразрешимости и неполноте, использующие лишь простую непротиворечивость (Россер)

В теоремах IV—VI мы сделали два неэлементарных предположения (b) и (c) относительно системы **N**, потому что они облегчают доказательство этих теорем и потому что мы вряд ли усомнимся в справедливости этих предположений для системы **N** из § 38 или для какой-либо другой системы, которую мы захотели бы использовать вместо нее.

Однако, чтобы сформулировать теоремы IV—VI как элементарные метаматематические теоремы, необходимо включить в пред-

---

[1]) Решение в [BM], стр. 254, теорема VII (d), с использованием общерекурсивности вместо вычислимости по Тьюрингу.

[2]) Содержится в теореме VII (b) [BM] стр. 254. Используя это для обобщения упр. 46.8 на случай, когда допускаются символы для произвольных разрешимых предикатов, мы получим предложение, которое привело Клини в резюме [1940] к рассмотрению именно списка предикатных форм из (F).

положения этих теорем (b) и (c) или что-нибудь, играющее ту же роль. Это сделано во вторых абзацах формулировок упомянутых теорем.

Теорему VI мы вывели из теоремы V, заметив, что (c) можно заменить на простую непротиворечивость и (a).

Остается предположение (b), которое было использовано в доказательствах теорем IV и V (iii). Рассмотрим произвольную систему $\mathbf{N}$ (подобную системе из § 38), в которой $\mathrm{C}_{\boldsymbol{a}}$ имеет вид $\exists \mathrm{x} \mathrm{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \mathrm{x})$, где $T(a, a, x) \rightarrow \{\vdash \mathrm{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \text{ в } \mathbf{N}\}$, откуда (a), и

$$\text{(g)} \qquad \overline{T}(a, a, x) \rightarrow \{\vdash \neg \mathrm{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \text{ в } \mathbf{N}\}.$$

Мы можем тогда заменить (b) в доказательстве теоремы V (iii) на предположение, что $\mathbf{N}$ «ω-непротиворечива» в следующем смысле, введенном Гёделем [1931]. Система $\mathbf{S}$, среди выражений которой имеются цифры (§ 43), *ω-непротиворечива*, если в ней не существует переменной x и формулы A(x), для которых было бы $\vdash \mathrm{A}(0)$, $\vdash \mathrm{A}(1)$, $\vdash \mathrm{A}(2)$, ... и $\vdash \neg \forall \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x})$ (в противном случае $\mathbf{S}$ *ω-противоречива*). (ω-непротиворечивая система $\mathbf{S}$ просто непротиворечива, что видно, если записать произвольную формулу E в виде A(x), где x — переменная, не входящая в E, так что A(0), A(1), A(2), ... все совпадают с E, а $\neg \forall \mathrm{x} \mathrm{A}(\mathrm{x})$ эквивалентна $\neg \mathrm{E}$ в силу *75.) Чтобы доказать (iii) исходя из ω-непротиворечивости (вместе с (a), (d) и (g)), предположим, что $\vdash \mathrm{C}_{\boldsymbol{p}}$, т. е. что $\vdash \exists \mathrm{x} \mathrm{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, \mathrm{x})$, откуда $\vdash \neg\neg \exists \mathrm{x} \mathrm{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, \mathrm{x})$, из чего получаем (используя *82a) $\vdash \neg \forall \mathrm{x} \neg \mathrm{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, \mathrm{x})$. Но по (i) (уже доказанному в § 44 исходя из (a), (d) и простой непротиворечивости) $(\overline{Ex})\, T(p, p, x)$, откуда $(x)\, \overline{T}(p, p, x)$, из чего следует по (g) $(x)\{\vdash \neg \mathrm{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\}$, т. е. $\vdash \neg \mathrm{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, 0)$, $\vdash \neg \mathrm{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, 1)$, $\vdash \neg \mathrm{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, 2)$, ... Это вместе с доказанным выше $\vdash \neg \forall \mathrm{x} \neg \mathrm{T}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}, \mathrm{x})$ противоречит предположению об ω-непротиворечивости [1]).

---

[1]) С помощью (g) ω-непротиворечивость влечет

$$\text{(b}'\text{)} \qquad \{\vdash \mathrm{C}_{\boldsymbol{a}} \text{ в } \mathbf{N}\} \rightarrow \overline{\overline{(Ex)}}\, T(a, a, x)$$

и поэтому классически (b). Действительно, допустим, что $\vdash \mathrm{C}_{\boldsymbol{a}}$ и $(\overline{Ex})\, T(a, a, x)$. Тогда $(x)\, \overline{T}(a, a, x)$, откуда по (g) имеет место (A) $(x)\{\vdash \neg \mathrm{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\}$. Кроме того (как для $a = p$ в тексте), (B) $\vdash \neg \forall \mathrm{x} \neg \mathrm{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \mathrm{x})$. Но ω-непротиворечивость утверждает, что (A) и (B) не могут оба иметь место; поэтому, используя приведение к нелепости, получаем $\overline{\overline{(Ex)}}\, T(a, a, x)$.

Доказательство теоремы IV из § 43 можно следующим образом переработать интуиционистски, чтобы оно исходило из (b′) вместо (b). Допустим, что имеется разрешающая процедура для доказуемости в $\mathbf{N}$. Мы можем использовать ее для построения машины $\mathfrak{M}_p$, которая, будучи применена к a, пытается (с успехом, если $(Ex)\, T(a, a, x)$) вычислить $\varphi_a(a)+1$, если $\vdash \mathrm{C}_{\boldsymbol{a}}$ (случай 1), и печатает 0, если неверно, что $\vdash \mathrm{C}_{\boldsymbol{a}}$ (случай 2). Тогда, как и для теоремы *II*, мы можем вывести противоречие из $(Ex)\, T(p, p, x)$ (после

Ясно, что ω-противоречивая система несовместима с интерпретацией x как переменной, пробегающей натуральные числа, которые выражаются цифрами 0, 1, 2, ...

Из теоремы V (ii) следует, что существуют просто непротиворечивые, но ω-противоречивые системы теории чисел. (В этом по существу состоит упр. 44.3, которое мы теперь проделываем.) Действительно, пусть **N** — арифметическая система из § 38, которую мы предполагаем непротиворечивой (основываясь на ее интерпретации или на доказательстве Генцена). Пусть **M** получается из **N** в результате присоединения C_p в качестве аксиомы. Тогда, как показывают приведенные выше рассуждения (использующие (g) и теорему V (i) для **N**), **M** ω-противоречива. Но **M** просто непротиворечива; действительно, если $\vdash E$ и $\vdash \neg E$ в **M**, то $C_p \vdash E$ и $C_p \vdash \neg E$ в **N**, откуда по $\neg$-введению $\vdash \neg C_p$ в **N**, в противоречие с теоремой V (ii).

Таким образом, кроме того, что вторая теорема Гёделя показывает трудность доказательства простой непротиворечивости теории чисел, его первая теорема показывает в дополнение к этому, что простая непротиворечивость — не единственное свойство типа непротиворечивости, которое было бы естественно хотеть видеть у формальных арифметических систем. Доказательства Генцена и последующие для **N** из § 38 на самом деле устанавливают ω-непротиворечивость. В то же время приобретает особое значение проблема интерпретации, упомянутая в конце § 44, поскольку у нас нет никаких причин останавливаться на обеспечении только простой непротиворечивости и ω-непротиворечивости.

Между тем Россер в [1936] нашел другой способ доказательства теорем IV и V с другим числом q вместо p, при котором единственным неэлементарным предположением, нужным для получения всех результатов, является простая непротиворечивость. Мы получим сейчас эти результаты как следствия одной более общей теоремы (теоремы VIII).

Назовем непустое множество или класс S натуральных чисел *рекурсивно перечислимым*, если существует вычислимая функция φ, такая, что φ(0), φ(1), φ(2), ... есть перечисление (возможно,

---

использования (a) для вывода $\vdash C_p$), а также и из $(\overline{Ex})\, T(p, p, x)$ (после использования (b′) для вывода того, что не $\vdash C_p$). Поэтому с помощью неформального использования слабого $\neg$-удал. § 11 получаем: (C) $(Ex)\, T(p, p, x) \to 0 \neq 0$, (D) $(\overline{Ex})\, T(p, p, x) \to 0 \neq 0$. Из (C) двукратной контрапозицией (*13, *12 из § 24) получаем (E) $(\overline{\overline{Ex}})\, T(p, p, x) \to 0 \neq 0$. Теперь получаем противоречие разбором случаев (как и выше, для $a = p$). В случае 1 по (b′) $(\overline{\overline{Ex}})\, T(p, p, x)$, откуда по (E) имеем $0 \neq 0$, что противоречит равенству $0 = 0$. В случае 2 по (a) и контрапозиции $(\overline{Ex})\, T(p, p, x)$, откуда по (D) $0 \neq 0$.

с повторениями) множества S [1]). Два множества S_0 и S_1 *дизъюнктны*, если они не имеют общих элементов, или, символически, если $S_0 \cap S_1 = \varnothing$ (см. § 26).

Теорема VIII. *Существуют два (непустых) дизъюнктных рекурсивно перечислимых множества C^0 и C^1, обладающих следующим свойством. Если даны любые два дизъюнктных рекурсивно перечислимых множества D^0 и D^1, содержащих соответственно C^0 и C^1, т. е. два рекурсивно перечислимых множества D^0 и D^1, таких, что*

$$(1)\ D^0 \cap D^1 = \varnothing,$$
$$(2^0)\ C^0 \subseteq D^0, \quad (2^1)\ C^1 \subseteq D^1,$$

то можно найти число f, не принадлежащее ни D^0, ни D^1, т. е. такое, что

$$(3^0)\ f \notin D^0, \quad (3^1)\ f \notin D^1.$$

(Симметричная форма теоремы Гёделя, Клини [1950].) [2])

Доказательство, использующее идею Лакомба (сообщенную у Рабина [1958], примечание 6). Пусть

$$C^0 = \hat{a}\,\{\varphi_a(a) \text{ определено и } \varphi_a(a) = 0\},$$
$$C^1 = \hat{a}\,\{\varphi_a(a) \text{ определено и } \varphi_a(a) \neq 0\},$$

где $\varphi_i(a)$ понимается как в § 42 и «$\hat{a}$» означает «те a, для которых» (§ 26). Ясно, что C^0 и C^1 дизъюнктны (и непусты).

Пусть даны рекурсивно перечислимые множества D^0 и D^1, удовлетворяющие условиям (1), (2^0) и (2^1). Пусть построена машина Тьюринга $\mathfrak{M}_f$ (включающая в себя машины, которые вычисляют функции φ^0 и φ^1, перечисляющие D^0 и D^1 соответственно), выполняющая следующую операцию. Будучи применена к a, $\mathfrak{M}_f$ ищет в нумерациях φ^0 и φ^1 множеств D^0 и D^1 соответственно число a. ($\mathfrak{M}_f$ работает попеременно то с φ^0, то с φ^1, так что если поиск продолжается до бесконечности, то в конце концов

---

[1]) Такие множества впервые рассматривались Клини [1936] с помощью общерекурсивных функций (относительно которых впоследствии было доказано, что они эквивалентны функциям, вычислимым по Тьюрингу, см. § 41). Термин «рекурсивно перечислимое» стал в литературе стандартным (Россер [1936], Пост [1944], Шмульян [1959] и т. д.) Ср. [ВМ], стр. 272—273. Пустое множество также часто считают «рекурсивно перечислимым» (Пост [1944]).

[2]) В § 61 [ВМ] уточняется, в каком смысле это утверждение является формой теоремы Гёделя о неполноте; там приведено первоначальное доказательство (Клини [1950]).

Множества C^0 и C^1 — это дизъюнктные рекурсивно перечислимые множества, являющиеся «рекурсивно неотделимыми» в следующем смысле: не существует рекурсивного множества D, такого, что $C^0 \subseteq D$, $C^1 \subseteq \overline{D}$ (где $\overline{D}$ — дополнение D).

он зайдет произвольно далеко в обеих нумерациях.) Если машина $\mathfrak{M}_f$ находит a в нумерации φ^0 множества D^0, то она печатает 1 и останавливается. Если $\mathfrak{M}_f$ находит a в нумерации φ^1 множества D^1, она печатает 0 и останавливается. Если не происходит ни одно из этих событий, то $\mathfrak{M}_f$ продолжает поиск до бесконечности и, таким образом, не вычисляет никакого значения.

Чтобы доказать (3^0), допустим, что $f \in D^0$. Тогда по (1) $f \notin D^1$. Поэтому f встречается в нумерации φ^0 множества D^0, но не встречается в нумерации φ^1 множества D^1. Значит, машина $\mathfrak{M}_f$, будучи применена к f, найдет f в нумерации φ^0 (не может случиться такого, чтобы ей сначала встретилось f в нумерации φ^1, что помешало бы ей дойти до f в φ^0). Поэтому $\varphi_f(f)$ (значение, вычисляемое машиной $\mathfrak{M}_f$, примененной к f как к аргументу) определено, и $\varphi_f(f) = 1$ ввиду того, как действует $\mathfrak{M}_f$. Следовательно, по определению C^1 $f \in C^1$. Отсюда по (2^1) $f \in D^1$, что противоречит соотношению $f \notin D^1$ (доказанному выше). С помощью приведения к нелепости получаем $f \notin D^0$, т. е. имеет место (3^0).

Доказательство утверждения (3^1) симметрично приведенному выше доказательству утверждения (3^0).

Формальная система $\mathbf{S}'$ есть *расширение* формальной системы $\mathbf{S}$, а $\mathbf{S}$ есть *подсистема* $\mathbf{S}'$, если каждая формула системы $\mathbf{S}$ есть формула системы $\mathbf{S}'$ и каждая доказуемая формула системы $\mathbf{S}$ есть доказуемая формула системы $\mathbf{S}'$. (Каждая формальная система $\mathbf{S}$ есть «несобственное» расширение себя самой.)

Следствие 1. *Предположим, что система* $\mathbf{N}$ *из § 38 просто непротиворечива. Для любого просто непротиворечивого расширения* $\mathbf{N}'$ *системы* $\mathbf{N}$ *(включая саму систему* $\mathbf{N}$*) существует замкнутая формула* C_f^0 *системы* $\mathbf{N}$, *такая, что* (i) *формула* $\neg \mathrm{C}_f^0$ *истинна,* (ii) *неверно, что* $\vdash \neg \mathrm{C}_f^0$ *в* $\mathbf{N}'$, (iii) *неверно, что* $\vdash \mathrm{C}_f^0$ *в* $\mathbf{N}'$.

Более общим образом, это справедливо для любой просто непротиворечивой формальной системы $\mathbf{N}$, *в которой для любого* a *можно эффективно найти формулы* C_a^0 *и* C_a^1 *(выражающие* $a \in C^0$ *и* $a \in C^1$ *соответственно), такие, что имеют место сформулированные ниже условия* (a^0), (a^1), (b^0), (b^1).

Доказательство. Методы, с помощью которых мы нашли в системе $\mathbf{N}$ из § 38 формулу C_a, выражающую $(Ex)\,T(a, a, x)$ (начало § 43), позволяют нам теперь найти формулы C_a^0 и C_a^1, выражающие соответственно $a \in C^0$ и $a \in C^1$. В самом деле, пусть

$U(i, a, x) \equiv$ {машина $\mathfrak{M}_i$, будучи применена к a, в момент x обозревает клетку, следующую справа за пустой}

(ср. § 41). Можно найти формулу $\mathrm{U}(\mathrm{i}, \mathrm{a}, \mathrm{x})$, выражающую $U(i, a, x)$, как раньше мы нашли формулу $\mathrm{T}(\mathrm{i}, \mathrm{a}, \mathrm{x})$, выражающую

$T(i, a, x)$. Пусть

$$\mathrm{C}_a^0 \text{ есть } \exists \mathrm{x}\,[\mathrm{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \mathrm{x})\,\&\,\mathrm{U}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \mathrm{x})],$$
$$\mathrm{C}_a^1 \text{ есть } \exists \mathrm{x}\,[\mathrm{T}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \mathrm{x})\,\&\,\neg\,\mathrm{U}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \mathrm{x})].$$

Те же рассмотрения, которые выше дали (a), дают теперь

$$(\mathrm{a}^0)\quad a \in C^0 \to \{\vdash \mathrm{C}_a^0 \text{ в } \mathbf{N}\}, \qquad (\mathrm{a}^1)\quad a \in C^1 \to \{\vdash \mathrm{C}_a^1 \text{ в } \mathbf{N}\},$$

что может быть подробно доказано. Кроме того, в соответствии с очевидной дизъюнктностью множеств C^0 и C^1 можно показать, что

$$(\mathrm{b}^0)\quad a \in C^0 \to \{\vdash \neg\,\mathrm{C}_a^1 \text{ в } \mathbf{N}\}, \qquad (\mathrm{b}^1)\quad a \in C^1 \to \{\vdash \neg\,\mathrm{C}_a^0 \text{ в } \mathbf{N}\}.$$

Теперь пусть $\mathbf{N}'$ — любое просто непротиворечивое расширение системы $\mathbf{N}$. Пусть

$$D^0 = \hat{a}\,\{\vdash \mathrm{C}_a^0 \text{ в } \mathbf{N}'\}, \qquad D' = \hat{a}\,\{\vdash \neg\,\mathrm{C}_a^0 \text{ в } \mathbf{N}'\}.$$

Тогда условие (1) теоремы выполнено в силу простой непротиворечивости системы $\mathbf{N}'$. Условие (2^0) также выполнено; действительно, если $a \in C^0$, то по (a^0) $\vdash \mathrm{C}_a^0$ в $\mathbf{N}$, и, следовательно (поскольку $\mathbf{N}'$ — расширение $\mathbf{N}$), $\vdash \mathrm{C}_a^0$ в $\mathbf{N}'$, т. е. $a \in D^0$. Аналогично, используя (b^1), получаем, что имеет место (2^1).

Из самой природы формальных систем, в данном случае системы $\mathbf{N}'$, вытекает, что можно найти машины Тьюринга $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$, вычисляющие $\varphi^0(n)$ и $\varphi^1(n)$, где $\varphi^0(n)$ — это число a из n-го доказательства (в некоторой нумерации доказательств в системе $\mathbf{N}'$), исходя из доказательств формул вида C_a^0, а $\varphi^1(n)$ определяется аналогично для формул $\neg\,\mathrm{C}_a^0$. Таким образом, множества D^0 и D^1 рекурсивно перечислимы.

Таким образом, все предположения теоремы выполнены. Поэтому существует число f, удовлетворяющее условиям (3^0) и (3^1). Тогда по определению множеств D^0 и D^1 выполнены утверждения (iii) и (ii) следствия. В силу (3^0) и (2^0) $f \notin C^0$; поэтому (i) также имеет место[1]).

Мы называем формальную систему *существенно неразрешимой* (следуя Тарскому, резюме [1949]), если $\mathbf{S}$ просто непротиворечива и каждое ее просто непротиворечивое расширение (включая саму систему $\mathbf{S}$) неразрешимо.

Следствие 2. *Система* $\mathbf{N}$ *из* § 38 *в предположении, что она просто непротиворечива, существенно неразрешима.*

Более общим образом, любая формальная система $\mathbf{N}$, *удовлет-*

---

[1]) Симметрично, (i)—(iii) выполняются с заменой C_f^0 на C_f^1 для некоторого другого выбора f. По крайней мере для системы $\mathbf{N}$ из § 38, используя (A) из § 46, чтобы записать $a \in C^0$ или $a \in C^1$ в виде $(Ex)\,T(\theta(a), \theta(a), x)$, мы получаем (i)—(iii), как они сформулированы в теореме V, но для p, замененного на $q = \theta(f)$ с каким-либо из теперешних f.

воряющая условиям из второго абзаца следствия 1, *существенно неразрешима*.

Доказательство. Допустим, что **N** просто непротиворечива, и пусть **N'** — любое просто непротиворечивое расширение системы **N**. Тогда мы полагаем

$$D^0 = \hat{a}\{\vdash C_a^0 \text{ в } \mathbf{N}'\},\quad D^1 = \hat{a}\{\text{неверно, что } \vdash C_a^0 \text{ в } \mathbf{N}'\}.$$

Теперь (1) получается непосредственно. Как и раньше (в следствии 1), (2^0) выполнено в силу (a^0); (2^1) также выполнено; действительно, если $a \in C^1$, то по (b^1) имеем $\vdash \neg C_a^0$ в **N** и, следовательно, в **N'**, так что в силу простой непротиворечивости системы **N'** неверно, что $\vdash C_a^0$ в **N'**, т. е. $a \in D^1$. Как и прежде, множество D^0 рекурсивно перечислимо.

Теперь предположим, что имеется разрешающая процедура для доказуемости в **N'**, т. е. что существует машина, решающая для каждой формулы A, верно ли, что $\vdash$ A в **N'**. Используя эту машину, мы могли бы найти машину, вычисляющую функцию φ^1, которая перечисляет рассматриваемое здесь множество D^1, так что D^1 также было бы рекурсивно перечислимым. Поэтому в силу теоремы существовало бы число f, такое, что $f \notin D^0$ и $f \notin D^1$. При рассматриваемых здесь D^0 и D^1 это абсурдно.

Приложения к проблемам разрешения для аксиоматических теорий (Тарский). Мотивом исследования Россера [1936] было, вероятно, просто стремление усилить теоремы IV и V за счет использования простой непротиворечивости вместо ω-непротиворечивости. Богатая область приложений следствия 2 была разработана после 1949 г. Тарским и его сотрудниками[1]). Речь идет о доказательстве неразрешимости различных аксиоматических теорий, формализованных в логическом исчислении, которое может быть либо исчислением предикатов, либо исчислением предикатов с равенством. (Тарский использовал второе.) Таким образом, аксиомы теории сформулированы в символизме этого исчисления с предикатными (,индивидными) и функциональными символами; кроме того, исчисление является логикой рассматриваемой теории. Примерами таким образом формализованных аксиоматических теорий являются формальная система теории чисел из § 38 (неразрешимость которой нам уже известна) и системы **G**, **Gp**, **AG**, **AGp** для групп и абелевых групп из § 39. Как мы замечали применительно к **N** и **G**, в таких системах имеют место теорема

[1]) Теорема VIII сама по себе отвечает на один вопрос, касающийся аналогии между иерархиями, описанными в § 46 (Клини [1943], Мостовский [1947] и т. д.), и иерархиями, изучаемыми в «дескриптивной теории множеств» (Борель [1898], Лузин [1930] и т. д.); ср. Клини [1950], Аддисон [1960]. Другие приложения см., например, у Клини [1956], Рабина [1958], Клини и Весли [1965], стр. 112, 183.

о дедукции и другие наши правила введения и удаления (теоремы 13, 21).

Под неразрешимостью формализованной теории или формальной системы S мы понимаем, как и прежде, что не существует разрешающей процедуры, позволяющей ответить на все вопросы относительно того, доказуема ли данная формула A в системе S (формализующей рассматриваемую теорию). Как мы видели в доказательствах теорем IV и VII и далее в § 46, когда мы знаем, что проблема разрешения для некоторого класса вопросов (P) неразрешима, мы можем вывести тот же результат относительно другого класса (Q), сведя вопросы из первого класса к вопросам из второго (короче, сведя первую проблему разрешения ко второй). В частности, применительно к формальным системам, если S_2 неразрешима, то мы можем сделать вывод о неразрешимости S_1, если сможем эффективно найти для каждой формулы B из S_2, формулу B′ из S_1, такую, что $\vdash$ B в S_2 тогда и только тогда, когда $\vdash$ B′ в S_1.

Говорят, что формальная система S, основанная на исчислении предикатов (с равенством или без равенства) как на логике и содержащая дополнительные («нелогические») аксиомы (следуя резюме Тарского [1949]), *конечно аксиоматизируема*, если число этих нелогических аксиом конечно или все они, кроме конечного числа, могут быть опущены без изменения класса доказуемых формул; такое конечное множество нелогических аксиом системы (или множество всех ее нелогических аксиом, если оно конечно) мы можем назвать *конечной аксиоматизацией* системы S.

В случае системы вроде N, заданной с помощью бесконечно большого количества нелогических аксиом (8 конкретных аксиом 14—21 и $\aleph_0$ аксиом по схеме аксиом 13), может быть a priori не очевидно, является ли эта система конечно аксиоматизируемой. (Автор впервые услышал этот вопрос, заданный относительно системы N из § 38, в 1949 г.; отрицательный ответ на него был опубликован Рылль-Нардзевским в [1952].) [1])

Применение метода сведе́ния для доказательства неразрешимости системы S_1 требует наличия некоторой системы S_2, относительно которой было бы уже известно, что она неразрешима, и «теория» которой могла бы развиваться в рамках системы S_1

---

[1]) По следствию теоремы 31 из § 29 теория равенства для конечного списка предикатных и функциональных символов конечно аксиоматизируема в исчислении предикатов.

Если некоторое конечное множество формул системы S может использоваться в качестве набора нелогических аксиом вместо исходного (т. е. без изменения класса доказуемых формул), то некоторое конечное подмножество исходных нелогических аксиом может быть использовано таким же образом (так что S конечно аксиоматизируема в смысле данного выше определения). Почему?

(посредством некоторого перевода формул B системы S_2 в формулы B′ системы S_1). Чем проще S_2, тем вероятнее, что нам удастся проделать это с данной теорией S_1.

Тарский в резюме [1949] заметил, что нам будет особенно удобно сделать это, если мы будем располагать системой S, которая, кроме того, что проста, еще *существенно неразрешима и конечно аксиоматизируема*. Действительно, тогда *неразрешима каждая система* S_1 *(содержащая все символы, имеющиеся в* S*), которая обладает общим с* S *просто непротиворечивым расширением* S_3. Чтобы доказать это, рассмотрим систему S_2, (нелогическими) аксиомами которой являются аксиомы системы S_1 и аксиомы из конечной аксиоматизации системы S (а символами которой являются в точности символы системы S_1). Тогда S_2 есть подсистема S_3, поэтому S_2 также (просто) непротиворечива. Кроме того, S_2 есть расширение системы S; поэтому, согласно существенной неразрешимости системы S, S_2 неразрешима. Теперь рассмотрим аксиомы системы S_2, не являющиеся аксиомами системы S_1. Их конечное число, поскольку все они взяты из конечной аксиоматизации системы S; пусть эти аксиомы суть, скажем, $A_1, \ldots, A_m$. Таким образом, $\vdash B$ в S_2 тогда и только тогда, когда $\forall A_1, \ldots, \forall A_m \vdash B$ в S_1, что по теореме о дедукции и пр. (следствиям теорем 10 и 11) имеет место тогда и только тогда, когда $\vdash \forall A_1 \supset (\ldots (\forall A_m \supset B) \ldots)$ в S_1. Таким образом, мы свели проблему разрешения для неразрешимой системы S_2 к проблеме разрешения для S_1. Следовательно, система S_1 неразрешима, что и требовалось показать.

Упрощая ситуацию, мы начали со случая, когда в S_1 имеются все символы из S. Более общим образом, в S_1 может и недоставать предикатных или функциональных символов из S при условии, что они могут быть «определены» или «проинтерпретированы» в ее непротиворечивом общем с S расширении S_3. Например, если S_1 имеет те же обозначения, что и N, в то время как в S есть предикатный символ $<$, то в непротиворечивом общем расширении могла бы быть доказуема формула $a < b \sim \exists c\, c' + a = b$. Если в S есть символ !, то в S_3 могла бы быть доказуема формула $a! = b \sim \mathrm{F}(a, b)$, где $\mathrm{F}(a, b)$ выражает представляющий предикат $a! = b$ функции $a!$ (см. конец § 38). Дополнительные детали, требующиеся для этого расширения приведенного выше обоснования неразрешимости системы S_1, выходят за рамки этой книги[1]).

После статьи Россера [1936] стало известно, что N существенно неразрешима (хотя термин «существенная неразрешимость» был

[1]) Они включают материал, упомянутый в примечании 1 на стр. 258. См. Тарский, Мостовский и Робинсон [1953] или [BM], стр. 386—388. В случае когда в S_1 нет функциональных символов из S, логика должна быть исчислением предикатов с равенством или в S_1 должен иметься символ = и аксиомы равенства для символов из S_1 должны быть доказуемы в S_3.

впервые использован в резюме Тарского [1949]). Но система **N**, как мы упоминали, не является конечно аксиоматизируемой (Рылль-Нардзевский [1952]). Системы аксиоматической теории множеств фон Неймана [1925], Бернайса [1937—54] и Гёделя [1940] существенно неразрешимы (если они непротиворечивы), поскольку они содержат **N** (если символизм системы **N** в них должным образом определен), и в них имеется только конечное количество аксиом (в отличие от системы Цермело — Френкеля, § 36, где аксиома выделения (II) дает $\aleph_0$ аксиом, когда ее формализуют в исчислении предикатов). Принадлежащий Тарскому метод сведе́ния проблем разрешения для элементарных аксиоматических теорий требует, однако, существенно неразрешимой и конечно аксиоматизируемой системы, которая по своей интерпретации была бы гораздо более элементарной, чем теория множеств.

Такого рода система была впервые описана в резюме Мостовского и Тарского [1949] на основе результата Россера [1936] (включенного в наше следствие 2 теоремы VIII); их система связана с арифметикой целых чисел ..., —2, —1, 0, 1, 2, ..., а не с арифметикой натуральных чисел 0, 1, 2, ...

В резюме Робинсона [1950] показано, что некоторая подсистема системы **N** из § 38 существенно неразрешима и конечно аксиоматизируема. Если в качестве логики использовать исчисление предикатов (Робинсон использовал исчисление предикатов с равенством), то это система, имеющая следующие 13 нелогических аксиом: аксиомы 14—21, четыре аксиомы равенства для $+$ и $\cdot$ и формула $a=0 \vee a>0$. (Эта система является подсистемой системы **N**, поскольку ее пять аксиом, не являющиеся аксиомами системы **N**, доказуемы в **N**.) Чтобы убедиться с помощью доказанного выше следствия 2 в существенной неразрешимости системы Робинсона, нужно только проверить, что она удовлетворяет условиям из второго абзаца следствия 1. Совершенно ясно, что, применяя методы, использованные в доказательстве теоремы VII, исходя из теоремы III (где система $\mathbf{S}_1$ с конечным числом аксиом оказалась достаточной для интересующей нас части теории предиката $(Ex)\,T(a, a, x)$), мы могли бы построить *некоторую систему* с конечным числом аксиом, которая подошла бы нам. В этом состоит то фундаментальное открытие, которое нас здесь интересует. Чтобы сделать этот результат более тонким, показав, что годится некоторая *подсистема* системы **N**, а на самом деле в точности система Робинсона, нужна дополнительная тщательная работа, выходящая за рамки этой книги [1]).

---

[1]) Прежде всего мы могли бы установить, что $T(i, a, x)$ и $U(i, a, x)$ примитивно рекурсивны и, значит (по следствию теоремы 27 на стр. 219 и

Используя метод Тарского с некоторой простой существенно неразрешимой и конечно аксиоматизируемой системой, Тарский и его сотрудники доказали неразрешимость разнообразных формализованных теорий, связанных с арифметикой целых и действительных чисел, с кольцами, группами, полями, структурами и проективными геометриями. В частности, этими средствами Тарский показал, что неразрешима **Gp** и, следовательно, **G** [1]). Однако **Gp** и **G** не являются существенно неразрешимыми; в самом деле, их расширения **AGp** и **AG** разрешимы, как доказала Шмелёва [1948], [1955].

Упражнение 47.1* [2]). Для каждого из следующих случаев скажите, можно ли найти машину Тьюринга $\mathfrak{M}$, которая выполняла бы описываемую операцию. Если да, то дайте идею построения (как это сделано для различных машин в § 42—47) без подробностей (как в § 41). Если нет, то объясните почему. (Мы говорим, что машина $\mathfrak{M}_i$ *перечисляет* множество C натуральных чисел, если $\mathfrak{M}_i$ вычисляет всюду определенную функцию φ_i, такую, что $\varphi_i(0), \varphi_i(1), \varphi_i(2), \ldots$ есть нумерация множества C, возможно с повторениями.)

(a) Будучи применена к i и n, когда $\mathfrak{M}_i$ перечисляет бесконечное множество C, $\mathfrak{M}$ вычисляет n-е число в некоторой нумерации $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ множества C без повторений.

(b) Будучи применена к i и n, когда $\mathfrak{M}_i$ перечисляет непустое множество C, $\mathfrak{M}$ вычисляет n-е число в некоторой нумерации $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ множества C, не содержащей повторений в случае, когда C бесконечно.

(c) Будучи применена к f и n, когда $\hat{a}(Ex)T(f, a, x)$ непусто, $\mathfrak{M}$ вычисляет n-е число $\varphi(n)$ в нумерации $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ множества $\hat{a}(Ex)T(f, a, x)$, возможно с повторениями.

лемме 18b из [BM]), нумерически выражаются формулами T (i, a, x) и U (i, a, x) в системе Робинсона (см. примечание на стр. 298). Тогда в качестве C_a^0 и C_a^1 мы возьмем формулы $\exists x[T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, x) \& \forall y(y < x \supset \neg T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, y)) \& U(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, x)]$ и $\exists x[T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, x) \& \forall y(y < x \supset \neg T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, y)) \& \neg U(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, x)]$. (Здесь при обычной интерпретации часть $\forall y(y < x \supset \neg T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, y))$ лишняя, но присутствие ее облегчает доказательство утверждений (b^0) и (b^1) в слабой системе Робинсона.) Теперь (a^0) и (a^1) получаются сразу; (b^0) и (b^1) также нетрудно установить, используя замечание из [BM], стр. 179, после доказательства *169. Если мы не хотим принимать простую непротиворечивость системы Робинсона на основе ее интерпретации или неэлементарного доказательства Генцена для **N** из § 38 (см. конец § 44), то имеется и элементарное доказательство непротиворечивости в теореме 53 (a) из [BM], стр. 415.

[1]) См. Тарский, Мостовский и Робинсон [1953], гл. 3. Неразрешимость теории **Gp** следует также из полученного позже результата Новикова [1955] о неразрешимости «проблемы тождества» для групп (конец § 45).

[2]) Некоторые решения имеются в [BM], стр 272, 273, 308, 309.

(d) Аналогично с $\hat{a}(x)\overline{T}(f, a, x)$ вместо $\hat{a}(Ex)T(f, a, x)$.

(e) Будучи применена к i и j, когда $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$ перечисляют множества D^0 и D^1, удовлетворяющие условиям (1), (2^0), (2^1) из теоремы VIII, $\mathfrak{M}$ вычисляет число f, удовлетворяющее условиям (3^0), (3^1).

(f) Будучи применена к i, когда $\mathfrak{M}_i$ перечисляет непустое множество C членов множества $\hat{a}(x)\overline{T}(a, a, x)$, $\mathfrak{M}$ вычисляет другой (не принадлежащий C) член множества $\hat{a}(x)\overline{T}(a, a, x)$.

(g) Будучи применена к a, когда a—гёделев номер формулы A системы **N** из § 38 (в фиксированной эффективной гёделевой нумерации этих формул), $\mathfrak{M}$ решает, верно ли, что $\mathrm{A} \vdash_{\mathbf{N}} 1=0$.

(h) Будучи применена к a, когда a есть гёделев номер формулы A системы **N** (как в (g)), $\mathfrak{M}$ решает, разрешимо ли свойство $\mathrm{A} \vdash_{\mathbf{N}} \mathrm{B}$, когда B пробегает произвольные формулы системы **N**.

Глава VI

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ (ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ)

§ 48. Теорема Гёделя о полноте; введение

Продолжим изучение исчисления высказываний и исчисления предикатов, начатое в гл. I—III [1]).

В исчислении высказываний теоретически на каждый вопрос о доказуемости или выводимости можно ответить с помощью истинностных таблиц. Конечно, если мы задаем вопросы относительно слишком сложных или слишком многих формул, то возникают практические трудности. Для формул исчисления предикатов, содержащих переменные, мы не можем полностью построить истинностные таблицы, кроме как в случае конечности области изменения переменных.

На отличие исчисления предикатов от исчисления высказываний указывает теорема VII § 45. В силу доказательства теоремы и результата (A) из § 46 существует формула чистого исчисления предикатов **Pd** (§ 39), недоказуемость которой эквивалентна истинности «великой теоремы» Ферма (§ 40). Математики более 300 лет безуспешно пытаются решить вопрос, состоящий, по существу, в следующем: доказуема эта конкретная предикатная формула или нет? Конечно, мы знаем, что исчисление предикатов не было описано 300 лет назад [2]). Но этот пример хорошо показывает бесполезность такого подхода к проблеме доказуемости и недоказуемости в исчислении предикатов, при котором используются только методы гл. II. Исчисление предикатов — настолько богатая система, что частные задачи, которые обычно рассматривают в математике (быть может, пользуясь исчислением предикатов для проведения стандартных кусков рассуждений), вполне выразимы в чистом исчислении предикатов. Таковы, например, как показывает доказательство теоремы VII, все за-

---

[1]) Многие результаты этой главы относятся к классической нефинитной теории моделей и, таким образом, не принадлежат к метаматематике (§ 37).

[2]) Хотя существенные черты исчисления предикатов описаны еще Фреге в [1879], первая точная формулировка этого исчисления как самостоятельной формальной системы принадлежит (согласно Чёрчу, см. [1956], стр. 279), Гильберту и Аккерману [1928].

дачи о том, имеет ли силу данное утверждение в некоторой формальной аксиоматической теории с конечным числом аксиом, выразимых в символизме исчисления предикатов с предикатными (индивидными) и функциональными символами.

Тем не менее можно еще многое узнать, изучая исчисление предикатов, чистое или прикладное (§ 39), как логическую систему.

Как говорилось в § 23, теорема Гёделя о полноте будет обобщением на случай исчисления предикатов теоремы 14 из § 12: *для каждой формулы* F *исчисления предикатов* (§ 16) *если* F *общезначима* (§ 17), *то* F *доказуема* (§ 21), *или, короче, если* $\models$ F, *то* $\vdash$ F. В дальнейшем мы рассмотрим следствия из этой теоремы и некоторые ее варианты, а пока обратимся к проблеме доказательства утверждения теоремы (выделенного курсивом).

Будем называть «параметрами» (вслед за Бетом [1953] и Крейгом [1957a]) символы или синтаксические объекты в формуле или формулах (и аналогично в термах), которым приписываются значения при построении истинностных таблиц[1]). *Пропозициональный параметр* — это атом в исчислении высказываний (§ 1) и 0-местный ион в исчислении предикатов (§ 16). *Предикатный параметр* — это n-местный ион ($n \geqslant 0$). *Индивидный параметр* — это свободная переменная или 0-местный мезон (§ 28). *Функциональный параметр* — это n-местный мезон ($n \geqslant 0$).

Параметр *формулы* (или *списка формул*) обычно действительно содержится в данной формуле (или в одной из формул списка); но иногда мы располагаем на входах таблицы истинности также значения посторонних параметров (см. начало § 4).

В этой главе мы для определенности будем говорить в основном о формулах, построенных, как и в прикладном исчислении предикатов (§ 39), из индивидных, функциональных, пропозициональных и предикатных символов. Впрочем, все результаты сохранят силу, если пользоваться любыми 0-местными и n-местными мезонами, 0-местными и n-местными ионами, которые допускаются правилами образования § 16, 28.

Вернемся к нашей проблеме. Формула F исчисления предикатов *не* является общезначимой, если F *опровержима* в следующем смысле: существует (непустая) область D и некоторое распределение в D значений параметров формулы F, при котором F принимает значение f. Мы называем такое распределение *опровергающим распределением для* F *в* D и говорим, что формула F

---

[1]) Таким образом, в § 2 (1) параметрами являются P, Q, R; в § 17, пример 1,— P(x), Q, y, или P (—), Q, y, или просто P, Q, y; в § 28 пример 1,— f, x для терма P и f для формулы; в § 29, пример 2,— P, f (но не =). (Однако в этой главе вплоть до § 52 мы не используем соглашения § 29 по которому предикату = приписана фиксированная оценка.)

опровержима в D, или *$\bar{\bar{D}}$-опровержима*. Область D вместе с опровергающим распределением можно назвать *контрпримером* для F[1]). (Заменяя $\mathfrak{f}$ на $\mathfrak{t}$, мы получим понятия *выполнимости*, *выполняющего распределения*, *$\bar{\bar{D}}$-выполнимости* и *примера*.)

Теперь мы хотим выяснить, нельзя ли искать контрпримеры для формул таким систематическим образом, чтобы для любой данной формулы F исчисления предикатов имело место следующее: (I) если существует контрпример для F (т. е. если неверно $\models$ F), то этот контрпример будет найден в процессе поиска; (II) если контрпримера для F не существует (т. е. если $\models$ F), то этот факт обнаружится в конце концов, когда все пути, на которых контрпример мог бы быть найден, окажутся закрытыми, и тогда мы будем в состоянии доказать F (т. е. $\vdash$ F).

Эта идея была использована (независимо друг от друга) Бетом [1955], Хинтиккой [1955], [1955a], Шютте [1956] и Кангером [1957] в доказательствах гёделевской теоремы о полноте, естественным образом выявляющих связь теории моделей с теорией доказательств. Приводимое ниже изложение близко к изложению Бета [1955] и использует его идеи[2]).

Итак, рассмотрим, каким образом можно систематически искать контрпримеры для формул исчисления предикатов.

Пример 1. Пусть F есть формула $\exists x(P \supset Q(x)) \supset (P \supset \forall x Q(x))$. Мы хотим указать (непустую) область D и распределение значений в D для параметров P и Q(x), при котором **(1)** значение $\exists x(P \supset Q(x)) \supset (P \supset \forall x Q(x))$ есть $\mathfrak{f}$. Для этого в таблице истинности для $\supset$ (§ 2) **(2)** значение $\exists x(P \supset Q(x))$ будет $\mathfrak{t}$, а **(3)** значение $P \supset \forall x Q(x)$ будет $\mathfrak{f}$. (2) и (3) также достаточно, чтобы получить нужное значение для (1). По тем же причинам значение $P \supset \forall x Q(x)$ есть $\mathfrak{f}$ тогда и только тогда, когда **(4)** значение P есть $\mathfrak{t}$, а **(5)** значение $\forall x Q(x)$ есть $\mathfrak{f}$.

По правилу оценивания квантора $\exists$ (§ 17) для того, чтобы значение $\exists x(P \supset Q(x))$ было $\mathfrak{t}$, необходимо и достаточно выбрать область D, содержащую некоторый элемент — назовем его a_0, — такой, что **(6)** значение $P \supset Q(a_0)$ есть $\mathfrak{t}$.

---

[1]) Если F — просто формула исчисления высказываний, то нет необходимости упоминать какую-либо область D, и опровергающее распределение (контрпример) может быть просто приписыванием значений $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{f}$ атомам F, при котором F принимает значение $\mathfrak{f}$.

[2]) В некоторых отношениях наше изложение еще ближе к более поздней работе Кангера [1957].

Другие доказательства гёделевской теоремы о полноте имеются у Гильберта и Аккермана в [1938] (2-е изд. книги [1928]), Гильберта и Бернайса [1939], Мостовского [**1948**], Генкина [1949], [1963], Расёвой и Сикорского [**1950**], Ригера [**1951**], Робинсона [**1951**], [1963], Бета [**1951**], Клини [ВМ], [1952b], [1958]. В работах, отмеченных жирным шрифтом, применяется топология и алгебра.

Есть две возможности приписать формуле $P \supset Q(a_0)$ значение t: для этого необходимо и достаточно либо **(i)** приписать **(7)** P значение f, либо **(ii)** приписать **(8)** $Q(a_0)$ значение t. Не обязательно делать и то и другое (хотя, конечно, этого было бы достаточно). Теперь поиск контрпримера раздваивается, и мы можем следовать по любому из двух путей.

Рассмотрим первый путь (i), когда мы хотим приписать P значение f. Но в (4) мы уже должны были приписать той же формуле P значение t. Эти два требования несовместимы. Таким образом, на этом пути мы не можем получить контрпример. Этот путь является «замкнутым» («тупиковым»)—он закрыт для дальнейшего поиска.

Поэтому, если мы вообще можем найти контрпример, то должны следовать по второму пути (ii). В этом случае значение $\forall x Q(x)$ должно быть f (см. (5)); для этого необходимо и достаточно, чтобы область D содержала такой элемент a_1, что (9) $Q(a_1)$ имеет значение f. Нет оснований предполагать, что этот элемент совпадает с введенным в (6) элементом a_0, и поэтому мы обозначаем его через a_1. Теперь на пути (ii) мы приходим к контрпримеру. Действительно, наш последовательный анализ показывает, что для наших целей достаточно выбрать область D, содержащую по крайней мере два элемента, именуемых a_0 и a_1, и указать такое распределение параметров a_0, a_1, P и $Q(x)$, при котором значения (4) P и (8) $Q(a_0)$ суть t, а значение (9) $Q(a_1)$ есть f. Теперь мы поступим следующим образом. Возьмем в качестве D область, состоящую ровно из двух элементов, скажем $D=\{0, 1\}$. Пусть значения a_0 и a_1 будут 0 и 1 соответственно. Припишем P значение t. Значения для $Q(x)$ зададим логической функцией $\mathfrak{l}(x)$, такой, что $\mathfrak{l}(0)$ есть t (тогда значение $Q(a_0)$ есть t), а значение $\mathfrak{l}(1)$ есть f (тогда значение $Q(a_1)$ равно f). (Эта логическая функция с точностью до обозначений совпадает с функцией $\mathfrak{l}_2(x)$ из § 17, пример 1: элементы области, обозначаемые в § 17 через «1» и «2», здесь обозначаются через «0» и «1».) Таким образом, формула F опровержима; поэтому $\models$ F неверно.

Анализ поиска контрпримера в словесной форме оказался весьма длинным. Мы дадим символическое представление для таких анализов. Выберем метод символического представления так, чтобы иметь абсолютно ясную картину поиска контрпримера, включая начальную ситуацию, последующие шаги и всю структуру поиска в целом. Символические представления могут быть довольно громоздкими, но сложность представлений не имеет большого значения, так как наша цель—их изучение, а не практическое применение.

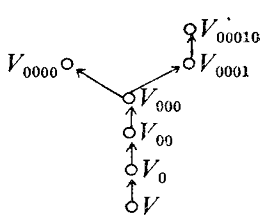
В ходе поиска контрпримера мы после каждого шага по любому пути (если имеется выбор пути или последовательность выборов) получаем два (конечных) списка формул: список Δ (из нуля или более) формул, которым мы хотим приписать значение $\mathfrak{t}$, и список Λ (из нуля или более) формул, которым мы хотим приписать значение $\mathfrak{f}$. Шаги анализа вплоть до последнего (включительно) показывают, что достаточно одновременно всем формулам из Δ приписать значение $\mathfrak{t}$, а всем формулам из Λ — значение $\mathfrak{f}$, чтобы значение исходной формулы F было $\mathfrak{f}$. (Вначале список Δ пуст, а Λ — это просто F.) Чтобы F приняла значение $\mathfrak{f}$, надо хотя бы на одном из возможных путей приписать всем формулам из Δ значение $\mathfrak{t}$, а всем формулам из Λ — значение $\mathfrak{f}$.

Таким образом, ситуация (начальная или наступающая после любого шага) может быть представлена упорядоченной парой $\{\Delta, \Lambda\}$. По причинам, отчасти историческим, мы предпочитаем писать вместо $\{\Delta, \Lambda\}$ «$\Delta \to \Lambda$». Здесь $\to$ есть новый формальный символ (который можно читать как «дает»). Формальное выражение $\Delta \to \Lambda$ (для любых двух конечных последовательностей Δ и Λ, состоящих из нуля или более формул) мы называем *секвенцией*; Δ мы называем *антецедентом*, а Λ — *сукцедентом* секвенции.

Теперь остается описать структуру поиска контрпримера в целом. Для этого мы расположим секвенции в том порядке, в котором мы их получаем. По историческим причинам мы пишем исходную секвенцию $\to$ F в основании нашей схемы. Выполняя каждый следующий шаг, мы проводим сверху горизонтальную черту и пишем одну или (если имеется выбор пути) две секвенции, к которым приводит данный шаг анализа.

Таким образом, мы опишем анализ (поиск) для примера 1 следующим «деревом» (слева):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\times}{\mathrm{P} \to \forall x\mathrm{Q}(x), \mathrm{P}} \qquad \cfrac{\overset{\surd}{\mathrm{Q}(a_0), \mathrm{P} \to \mathrm{Q}(a_1)}}{\mathrm{Q}(a_0), \mathrm{P} \to \forall x\mathrm{Q}(x)}\ {\to}\forall}{\mathrm{P}, \mathrm{P} \supset \mathrm{Q}(a_0) \to \forall x\mathrm{Q}(x)}\ {\supset}{\to}}{\mathrm{P}, \exists x(\mathrm{P} \supset \mathrm{Q}(x)) \to \forall x\mathrm{Q}(x)}\ \exists{\to}}{\exists x(\mathrm{P} \supset \mathrm{Q}(x)) \to \mathrm{P} \supset \forall x\mathrm{Q}(x)}\ {\to}{\supset}}{\vdash \to \exists x(\mathrm{P} \supset \mathrm{Q}(x)) \supset (\mathrm{P} \supset \forall x\mathrm{Q}(x)).}\ {\to}{\supset}$$



Мы отметили крестом «$\times$» вершину пути (ветви), чтобы показать, что путь (обрывается и) *закрыт* для дальнейшего поиска; отметка «$\surd$» в вершине другого пути указывает, что поиск контрпримера закончился успешно. Символ «$\to\supset$» указывает, что рассматриваемый шаг происходит в результате анализа импликации в сукцеденте (которой мы пытаемся приписать значение $\mathfrak{f}$), символ «$\exists\to$» означает, что анализируется формула в антецеденте с квантором существования (которой мы пытаемся приписать значение $\mathfrak{t}$), и т. д.

Дерево секвенций (слева) можно рассматривать как результат размещения секвенций в вершинах геометрического дерева (показанного справа без секвенций). Геометрическое дерево в этом примере состоит из семи вершин, расположение которых («частичное упорядочение») указано с помощью стрелок. Таким образом, секвенция $Q(a_0), P \to \forall x Q(x)$ размещена в вершине V_{0001}. *Путь* («дорога») поиска контрпримера представлен рядом вершин, начинающимся с основания и следующим в направлении стрелок по дереву. В нашем примере имеются два пути: $VV_0V_{00}V_{000}V_{0000}$ и $VV_0V_{00}V_{000}V_{0001}V_{00010}$; эти пути совпадают до вершины V_{000}, а затем расходятся[1]).

Пример 2. Пусть F есть формула $\exists x(P \supset Q(x)) \supset (P \supset \exists x Q(x))$. Вплоть до получения формулы (8) анализ поиска контрпримера будет такой же, как в примере 1, только вместо $\forall x Q(x)$ пишется $\exists x Q(x)$. Теперь, для того чтобы значение (5) $\exists x Q(x)$ было $\mathfrak{f}$, необходимо иметь $\mathfrak{f}$ и значением (9) $Q(a_0)$; этого было бы достаточно только в том случае, когда D содержит только элемент a_0. Поэтому для представления новой ситуации мы не устраняем $\exists x Q(x)$ из списка формул, значение которых должно быть $\mathfrak{f}$. (Мы еще не выбрали окончательно область D и связаны пока только условием, что D имеет хотя бы один элемент a_0, введенный в (6).) Но если мы рассмотрим ситуацию, сложившуюся

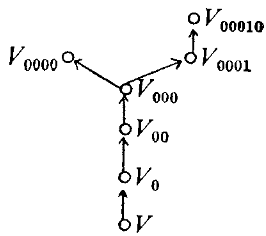
---

[1]) Мы получим другое возможное представление нашего поиска, если просто опустим все эти словесные объяснения и выпишем девять занумерованных формул в две колонки, помеченные значками «истина» ($\mathfrak{t}$) и «ложь» ($\mathfrak{f}$). После формулы (6) возможен выбор пути, и колонки раздваиваются на правую (i) и левую (ii) подколонки. Это дает то, что Бет [1955, 1959] называет *семантической таблицей*:

$\mathfrak{t}$		$\mathfrak{f}$	
(2) $\exists x(P \supset Q(x))$ (1)		(1) $\exists x(P \supset Q(x)) \supset (P \supset \forall x Q(x))$	
(4) P (3)		(3) $P \supset \forall x Q(x)$ (1)	
(6) $P \supset Q(a_0)$ (2)		(5) $\forall x Q(x)$ (3)	
(i)	(ii)	(i)	(ii)
	(8) $Q(a_0)$ (6)	(7) P (6)	(9) $Q(a_1)$ (5)

Если мы намерены практически использовать метод поиска, то таблицы более эффективны, чем секвенциальные деревья, так как они не требуют переписывания неизменяемых формул. Таблицы, однако, не позволяют изобразить конкретные ситуации с максимальной простотой (например, Δ состоит из (4), (8), а Λ из (5) в ситуации, когда вводится формула (8)). Поэтому при доказательстве гёделевской теоремы о полноте и в других теоретических исследованиях мы предпочитаем пользоваться секвенциальными деревьями (см. при-на втором пути (ii), то заметим, что требование, согласно которому значение (9) $Q(a_0)$ есть $\mathfrak{f}$, противоречит требованию: значение (8) $Q(a_0)$ есть $\mathfrak{t}$. Таким образом, в приведенном примере оба пути возможного поиска контрпримера оказываются закрытыми, а само дерево *замкнуто*. Этим закончено неформальное доказательство (в классическом предметном языке) несуществования контрпримера для F, т. е. доказательство общезначимости F. Было бы удивительно, если бы мы не смогли использовать этот метод неформального доказательства соотношения $\models F$ для построения формального доказательства формулы F и показать таким образом, что $\vdash F$. Если формальная система исчисления предикатов гл. II не позволяет провести такое доказательство, то следовало бы искать способы ее усиления. Мы отложим рассмотрение этой части проблемы до § 51. Приведем секвенциальное дерево для примера 2. (Несколько формул выделено жирным шрифтом для удобства дальнейших ссылок.)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\times}{P \to \exists xQ(x),\ \mathbf{P}} \qquad \cfrac{\cfrac{\times}{\mathbf{Q(a_0)},\ P \to \exists xQ(x),\ \mathbf{Q(a_0)}}\ {\to}\exists}{\mathbf{Q(a_0)},\ P \to \exists xQ(x)}}{P,\ \mathbf{P \supset Q(a_0)} \to \exists xQ(x)}\ {\supset}{\to}}{P,\ \mathbf{\exists x(P \supset Q(x))} \to \exists xQ(x)}\ \exists{\to}}{\mathbf{\exists x(P \supset Q(x))} \to P \supset \exists xQ(x)}\ {\to}{\supset}}{\to \exists x(P \supset Q(x)) \supset (P \supset \exists xQ(x)).}\ {\to}{\supset}$$



Теперь мы заметим, что шаги анализа, встречающиеся в поиске контрпримеров, можно кодифицировать. В терминах секвенциальных деревьев каждый шаг анализа может быть выполнен по одному из приведенных ниже 14 правил. Несколько раз мы уже использовали следующий принцип: для того, чтобы значение импликации $A \supset B$ было $\mathfrak{f}$, необходимо и достаточно приписать формуле A значение $\mathfrak{t}$, а формуле B значение $\mathfrak{f}$. Кодифицируем этот принцип с помощью левого верхнего правила, называемого «$\to\supset$», или «$\supset$-сукцедентным правилом». Буквы Γ и Θ обозначают списки из нуля или более формул, которые не меняются при данном шаге анализа, причем формулы из Γ

мечание 2 на стр. 402). (Приведенная таблица ясно показывает, что, когда формула (8) только что введена, достаточно приписать формулам (2), (4), (6), (8) значение $\mathfrak{t}$ и формулам (1), (3), (5) значение $\mathfrak{f}$. Информация этого типа и знание структуры списков формул позволяют обнаружить контрпримеры. Однако и вообще поиск контрпримеров в терминах секвенциальных деревьев представляется более обозримым.)

должны принимать значение t, а формулы из Θ — значение f.

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \supset B} \to \supset \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, A \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \supset B, \Gamma \to \Theta} \supset \to$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A \quad \Gamma \to \Theta, B}{\Gamma \to \Theta, A \& B} \to \& \qquad \frac{A, B, \Gamma \to \Theta}{A \& B, \Gamma \to \Theta} \& \to$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A, B}{\Gamma \to \Theta, A \vee B} \to \vee \qquad \frac{A, \Gamma \to \Theta \quad B, \Gamma \to \Theta}{A \vee B, \Gamma \to \Theta} \vee \to$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg A} \to \neg \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, A}{\neg A, \Gamma \to \Theta} \neg \to$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta, B \quad B, \Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, A \sim B} \to \sim \qquad \frac{A, B, \Gamma \to \Theta \quad \Gamma \to \Theta, A, B}{A \sim B, \Gamma \to \Theta} \sim \to$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A(b)}{\Gamma \to \Theta, \forall x A(x)} \to \forall, \qquad \frac{A(r), \forall x A(x), \Gamma \to \Theta}{\forall x A(x), \Gamma \to \Theta} \forall \to$$

где b не входит свободно в $\Gamma \to \Theta, \forall x A(x)$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \exists x A(x), A(r)}{\Gamma \to \Theta, \exists x A(x)} \to \exists \qquad \frac{A(b), \Gamma \to \Theta}{\exists x A(x), \Gamma \to \Theta} \exists \to,$$

где b не входит свободно в $\exists x A(x), \Gamma \to \Theta$

В этих правилах A и B — произвольные формулы; x — любая переменная; A(x) — любая формула; b — любая переменная, свободная для x в A(x) (и если b отлична от x, то b не входит свободно в A(x)); r — любая переменная, которая может совпадать с другими имеющимися здесь переменными, да и вообще (если используются правила образования, такие, как в § 28) с любыми термами, свободными для x в A(x); A(b) и A(r) — результаты подстановки соответственно b и r вместо свободных вхождений x в A(x); Γ и Θ — любые (конечные) списки (из нуля или более) формул.

Применяя правила $\to\forall$ и $\exists\to$, мы должны учитывать *ограничения на переменные* (устанавливаемые этими правилами); короче говоря, переменная b не должна входить свободно в секвенцию, расположенную ниже черты. (Если A(x) не содержит x свободно, то формула A(b) совпадает с A(x) и b может быть любой переменной; согласимся в этом случае выбирать для анализа переменную b, не входящую свободно в нижнюю секвенцию, так что ограничение правила будет удовлетворяться.)

Для применения правил порядок перечисления формул в антецеденте и сукцеденте считается несущественным. Так, в примерах 1 и 2 правило $\exists\to$ (нижнее справа) применяется на шаге от V_{00} к V_{000} (с a_0 в качестве $\mathfrak{b}$), хотя формула $\exists x(P \supset Q(x))$ и не записана в антецеденте первой.

Обобщим теперь на случай секвенций правила оценивания формул. Секвенция $\Delta \to \Lambda$ принимает значение $\mathfrak{f}$, если все формулы из Δ принимают значение $\mathfrak{t}$, а все формулы из Λ — значение $\mathfrak{f}$; в противном случае секвенция принимает значение $\mathfrak{t}$. Мы говорим, что секвенция $\Delta \to \Lambda$ *опровержима*, если для некоторой (непустой) области D и некоторого распределения в D (по крайней мере) для всех параметров секвенции она принимает значение $\mathfrak{f}$. В противном случае, т. е. когда для каждой (непустой) области и для каждого распределения параметров секвенция $\Delta \to \Lambda$ принимает значение $\mathfrak{t}$, мы говорим, что секвенция $\Delta \to \Lambda$ *общезначима* (символически: $\models \Delta \to \Lambda$).

Каждое из 14 перечисленных правил выбрано так, что обладает свойством, установленным в следующей лемме (примеры 1 и 2 хорошо поясняют (a) необходимость и (b) достаточность условия леммы).

Лемма 6. *Для каждого из* 14 *правил* $\to\supset, \ldots, \exists\to$ *секвенция, записанная под чертой дерева, опровержима* (a) *тогда и* (b) *только тогда, когда секвенция* (*или по крайней мере одна из двух секвенций*), *записанная выше данной черты, опровержима*. Эквивалентная формулировка: *секвенция, записанная под чертой, общезначима* (a) *тогда и* (b) *только тогда, когда секвенция* (*или каждая из секвенций*), *записанная над данной чертой, общезначима*.

Конечно, легче прямо использовать эти правила, чем продумывать заключенные в них принципы.

Продолжая анализ, можно закрыть путь (указывая, что мы потеряли надежду найти контрпример), если мы получили секвенцию, которая не может иметь значение $\mathfrak{f}$. Условимся говорить, что путь закрыт, если мы получили секвенцию вида

$$(\times) \qquad C,\ \Gamma \to \Theta,\ C.$$

Формула C здесь может быть произвольной. Но в дальнейшем (§ 55, 56) нам будет полезно знать, что неудачные попытки найти контрпример всегда могут быть опровергнуты с помощью атомов (простых формул) в качестве C. Поэтому будем считать C атомом. При этом Γ и Θ могут быть любыми списками формул, и порядок формул в антецеденте и сукцеденте несуществен.

Лемма 7. *Секвенция вида* ($\times$) *неопровержима*. Эквивалентная формулировка: *каждая секвенция вида* ($\times$) *общезначима*.

Для формулы из примера 1 имеет место случай (I) предполагаемого подхода к проблеме полноты (см. второй абзац на стр. 341).

В примере 2 будет иметь место (II), если закрытое секвенциальное дерево мы сможем преобразовать в формальное доказательство формулы F. Приведем еще три примера.

Пример 3.

$$
\begin{array}{c l l}
\cdots & & \uparrow \\
P(a_0, a_1), P(a_1, a_2), P(a_2, a_3), \forall x \exists y P(x, y) \to & & \circ V_{0000000} \\
\cline{1-1}
P(a_0, a_1), P(a_1, a_2), \exists y P(a_2, y), \forall x \exists y P(x, y) \to & \exists\to & \circ V_{000000} \\
\cline{1-1}
P(a_0, a_1), P(a_1, a_2), \forall x \exists y P(x, y) \to & \forall\to & \circ V_{00000} \\
\cline{1-1}
P(a_0, a_1), \exists y P(a_1, y), \forall x \exists y P(x, y) \to & \exists\to & \circ V_{0000} \\
\cline{1-1}
P(a_0, a_1), \forall x \exists y P(x, y) \to & \forall\to & \circ V_{000} \\
\cline{1-1}
\exists y P(a_0, y), \forall x \exists y P(x, y) \to & \exists\to & \circ V_{00} \\
\cline{1-1}
\forall x \exists y P(x, y) \to & \forall\to & \circ V_{0} \\
\cline{1-1}
\to \neg \forall x \exists y P(x, y). & \to\neg & \circ V
\end{array}
$$

В этом примере имеется единственный путь (нет разветвлений). Этот путь может быть бесконечно продолжен вверх, и при этом мы не получим ни секвенции вида (×), которая закрывала бы путь (как в вершинах V_{0000} примера 1 и V_{0000}, V_{00010} примера 2), ни секвенции, для которой по указанным правилам невозможно сделать следующий шаг анализа снизу вверх (как в вершине V_{00010} примера 1). Приводит ли построенное дерево к контрпримеру?

Да, приводит, причем при любом из следующих двух подходов. Для того чтобы опровергнуть $\neg \forall x \exists y P(x, y)$ в V_{000}, (необходимо и) достаточно, как мы знаем, приписать $P(a_0, a_1)$ и $\forall x \exists y P(x, y)$ значение t. Имеются две возможности: a_0 и a_1 являются одним и тем же элементом области D или различными элементами. При первом подходе попробуем положить $D = \{0\}$, а в качестве значения a_0 и a_1 взять 0. Оценим P с помощью логической функции I, для которой I(0, 0) равно t, тогда $P(a_0, a_1)$ равно t. Очевидно, $\forall x \exists y P(x, y)$ также будет равно t; иначе говоря, можно показать, что для области D, содержащей только элемент a_0, мы могли бы устранить $\forall x \exists y P(x, y)$ из вершины V_{00}, а следовательно, и из V_{000}. Таким образом, часть дерева вплоть до вершины V_{000} дает нам контрпример.

Пусть теперь вместо этого a_0 и a_1 являются различными элементами D, и пусть в осуществление этого подхода новыми элементами оказываются также a_2, a_3, a_4, ... Пусть $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$; припишем a_0, a_1, ... значения 0, 1, ... Оценим P с помощью такой логической функции I, что $I(x, y)$ равно t, если x и y — последовательные натуральные числа, и равно f (или тоже t) в противном случае. Все атомы в антецеденте примут тогда значение t. Читатель легко увидит, что тем самым все молекулы примут значение t, и потому значение формулы $\neg\forall x \exists y P(x, y)$ в самом нижнем сукцеденте равно f. Таким образом, мы получили контрпример, соответствующий бесконечному пути.

Рассмотрим использованные два подхода в общем случае[1]. При поиске контрпримера на каждом шаге применения правила $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$ имеются две альтернативы для переменной b, введенной на этом шаге, если какие-либо переменные уже были введены (как на шаге (9) или V_{00010} примера 1 и V_{000} примера 3 с a_1 в качестве b). Предположим, что дан контрпример, использующий первый подход, т. е. b интерпретируется тем же элементом области D, что и другая переменная, введенная ранее (как a_0 в примере 3). Тогда можно построить контрпример, используя второй подход. Этот контрпример можно получить с помощью первого контрпримера, дублируя элемент, соответствующий a и b (увеличивая область D на один элемент), и полагая при построении опровергающего распределения значения логических функций (и функций со значениями в D, если в формуле имеются мезоны) от новых элементов такими же, как от дублируемых элементов (один из новых элементов является значением a, другой — значением b)[2]. (Как мы видели в примере 3 на шаге V_{000}, оба подхода возможны; в примере 4 возможен только второй подход.) Следовательно, мы не пропустим контрпримера (если он вообще существует), ограничиваясь вторым подходом. На этом факте основано изложение в § 49, 50. Мы обрываем путь в секвенциальном дереве (даже если правила могут быть применены) на той стадии, когда с него можно «считать» контрпример с помощью второго подхода. Для нашей основной цели (доказательства теоремы Гёделя о полноте) необязательно использовать дополнительную возможность нахождения контрпримера с помощью первого подхода. Конечно, первый подход часто приводит к контрпримеру быстрее или приводит к более простому контрпримеру (как в примере 3).

В примере 3, используя второй подход, мы видели что *бесконечный* контрпример (т. е. контрпример с бесконечной областью D)

---

[1]) Рассмотрения этого параграфа имеют целью предварительное разъяснение процедуры, описанной в § 49. Оправданием этой процедуры будет то, что с ее помощью мы добиваемся успеха при доказательстве гёделевской теоремы о полноте.

[2]) Мы использовали такое удвоение в § 30, пример 5, где требовалось найти пример формулы E, а не контрпример. До § 50 мы пользовались правилами оценки для исчисления предикатов в § 17 или для исчисления предикатов с функциями в § 28, но не правилами оценки для исчисления предикатов с равенством в § 29. Если предикат = встречается в какой-либо формуле, то этот предикат рассматривается так же, как любой другой предикат.

может быть считан с подходящего бесконечного пути. В примере 3 был также построен с помощью первого подхода конечный контрпример. Наши следующие примеры поясняют еще две возможности: (a) существование только бесконечных контрпримеров (пример 4), (b) возможность того, что наш поиск не приведет к построению контрпримера или закрытого дерева (даже если то или другое существует), если не принять заранее некоторый общий план поиска (примеры 4 и 5).

Пример 4. Пусть G есть формула

$$\forall x \neg P(x, x) \mathbin{\&} \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \mathbin{\&} P(y, z) \supset P(x, z)).$$

$$\begin{array}{cl}
\cdots & \\
G, \exists y P(a_0, y), \forall x \exists y P(x, y) \to & \\ \hline
G, \forall x \exists y P(x, y) \to & \forall\!\to \\ \hline
G \mathbin{\&} \forall x \exists y P(x, y) \to & \&\!\to \\ \hline
\to \neg(G \mathbin{\&} \forall x \exists y P(x, y)). & \to\!\neg
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\uparrow \\ \circ\, V_{000} \\ \uparrow \\ \circ\, V_{00} \\ \uparrow \\ \circ\, V_0 \\ \uparrow \\ \circ\, V
\end{array}$$

Приведенное дерево должно быть продолжено бесконечно вверх от вершины V_{00} с помощью тех же секвенций, что и в примере 3 от V_0, за исключением того, что в начале каждого антецедента имеется формула G.

Единственный путь дерева не указывает нам контрпримера. Действительно, в предполагаемом построении дерева снизу вверх мы продолжаем анализировать условия истинности формулы $\forall x \exists y P(x, y)$ (как в примере 3) и не получим никаких условий относительно истинности G.

Покажем теперь, что для $\neg(G \mathbin{\&} \forall x \exists y P(x, y))$ существует контрпример с областью $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$, но не существует конечного контрпримера.

Для этого нам достаточно показать, что значение формулы $G \mathbin{\&} \forall x \exists y P(x, y)$ равно $\mathfrak{t}$ при подходящем распределении в $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$, но всегда равно $\mathfrak{f}$ при распределении в любой конечной (непустой) области.

Легко видеть, что произойдет, если в формуле $G \mathbin{\&} \forall x \exists y P(x, y)$ мы разобьем конъюнкцию, расшифруем сокращение G, отбросим кванторы всеобщности и заменим $P(-, -)$ на $- < -$:

$$\neg\, x < x, \quad x < y \mathbin{\&} y < z \supset x < z, \quad \exists y\, x < y.$$

Приведенные формулы являются аксиомами порядка и истинны (при интерпретации всеобщности для свободных переменных, § 20, 38), если $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и предикат $<$ обозначает обычное отношение порядка между натуральными числами. Таким образом, значение $G \mathbin{\&} \forall x \exists y P(x, y)$ равно $\mathfrak{t}$ (и значение $\neg(G \mathbin{\&} \forall x \exists y P(x, y))$ равно $\mathfrak{f}$), когда $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и P приписывается в качестве значения логическая функция $\mathfrak{l}$, такая, что $\mathfrak{l}(x, y)$ равно $\mathfrak{t}$ при $x < y$ и равно $\mathfrak{f}$ в противном случае.

Покажем теперь, что приведенные аксиомы порядка не выполняются ни в какой конечной (непустой) области. Рассмотрим, например, область D, состоящую из трех элементов. Пусть a_0 — один из элементов области. В силу того что $\exists y x < y$, существует некоторый элемент y, такой, что $a_0 < y$; в силу $\neg x < x$ элемент y не есть a_0. Предположим, что y равен элементу a_1 (отличному от a_0); тогда $a_0 < a_1$. Снова используя $\exists y x < y$, получим такой y, что $a_1 < y$; в силу $\neg x < x$ элемент y не равен a_1 и не равен a_0, так как в этом случае условия $a_0 < a_1$ и $a_1 < a_0$ при $x < y \& y < z \supset x < z$ дают $a_0 < a_0$ в противоречие с $\neg x < x$. Поэтому y равен третьему элементу a_2 и тогда $a_1 < a_2$. В силу $\exists y x < y$ должен существовать элемент y, такой, что $a_2 < y$; но тогда, как и ранее, можно показать, что y не есть ни a_0, ни a_1, ни a_2. Таким образом, невозможно, чтобы все три формулы с предикатом $<$ были одновременно истинны, если область D содержит только три элемента. Если построить истинностные таблицы для $G \& \forall x \exists y P(x, y)$ при $D = \{0, 1, 2\}$ так, как указано в § 17 (таблица будет иметь $2^9 = 512$ строк), мы получим столбцы, состоящие только из $\mathfrak{f}$. То же самое будет в случае любой конечной (непустой) области D (т. е. для $\overline{\overline{D}} = 1, 2, 3, \ldots$).

Существование формул, общезначимых (неопровержимых) в каждой непустой конечной области, но необщезначимых (опровержимых) в $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$, было впервые отмечено Лёвенгеймом в 1915 г.; приведенный пример $\neg(G \& \forall x \exists y P(x, y))$ взят из книги Гильберта и Бернайса [1934], стр. 123—124.

Мы не будем теперь объяснять, каким образом нужно устроить в примере 4 процедуру, чтобы она привела к контрпримеру (упр. 49.3).

Пример 5. Рассмотрим дерево примера 4 с заменой G на $Q \& \neg Q$. Тогда контрпримера не существует (так как в V_{00} мы не можем сделать значение G равным $\mathfrak{t}$). Однако поскольку мы ведем поиск неправильно, то путь поиска не будет закрыт и отсутствие контрпримера не выяснится.

Из примера 4 (и примера 3, если ограничиться вторым подходом) видно, что мы должны интерпретировать требование (I) достаточно широко, принимая во внимание контрпримеры, которые получаются при следовании по некоторым бесконечным путям. Наша цель — показать, что при правильно организованном поиске в том случае, когда контрпримера не существует (F общезначима), отсутствие контрпримера выяснится путем закрытия всех путей после конечного числа шагов поиска (как в примере 2). Поэтому, если формула F общезначима, то мы всегда можем найти ее доказательство (§ 51).

В силу теоремы Чёрча можно ожидать, что хотя в случае (II) всегда должно найтись конечное дерево, но в случае (I) нельзя узнать о существовании контрпримера эффективно за конечное число шагов при любой процедуре поиска. Действительно, если бы это было возможно, то существовал бы алгорифм, или разрешающая процедура (§ 40), для ответа на вопрос: является ли формула F исчисления предикатов общезначимой. Тогда в силу теоремы Гёделя о полноте (которую мы собираемся доказать) и теоремы 12 § 23 существовал бы алгорифм для распознавания доказуемости формулы в исчислении предикатов в противоречие с теоремой VII [1]).

Создавшаяся ситуация противоположна тому, что можно было бы ожидать после § 17, где были найдены некоторые конечные контрпримеры, но требовались общие рассуждения для установления общезначимости.

В примере 3 (при втором подходе) и примере 4, хотя контрпримеры бесконечны, логические функции и предикаты могут быть описаны эффективно (см. примечание на стр. 276), т. е. могут быть заданы алгорифмом, что в случае (I) не всегда будет иметь место [2]).

Упражнения. 48.1. Для каждой из следующих формул с помощью систематического поиска (представленного секвенциальным деревом) либо найдите (и опишите) контрпример, либо покажите, что контрпримера не существует.

(a) $P \vee Q \supset P \& Q$.
(b) $(P \supset \neg P) \supset \neg P$.
(c) $P \vee \forall x Q(x) \supset \forall x (P \vee Q(x))$.
(d) $\exists x P(x) \& \exists x Q(x) \supset \exists x (P(x) \& Q(x))$.

48.2. Покажите, что (в силу определений, предшествующих лемме 6):

(a) $\models A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$ тогда и только тогда, когда для каждой (непустой) области D и каждого распределения значений в D для параметров секвенции $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$ либо $m > 0$ и значение одной из формул $A_1, \ldots, A_m$ равно $\mathfrak{f}$, либо $n > 0$ и значение одной из формул $B_1, \ldots, B_n$ равно $\mathfrak{t}$ (короче, либо некоторые из формул $A_1, \ldots, A_m$ принимают значение $\mathfrak{f}$, либо некоторые из формул $B_1, \ldots, B_n$ принимают значение $\mathfrak{t}$; ср. § 26).

---

[1]) Нетрудно также приспособить доказательство теоремы VII для того, чтобы непосредственно показать (без применения теоремы Гёделя о полноте) несуществование алгорифма для определения общезначимости.

[2]) Логические функции и предикаты всегда имеют степень $\leqslant 1$ (см. § 46) в силу теорем 38 и 40 из [ВМ], стр. 398, 401, и теоремы XI (теорема Поста), [ВМ], стр. 293. Дальнейшая информация о таких предикатах приведена Мостовским [1954], стр. 284—285.

(b) Следовательно, $\models A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ тогда и только тогда, когда $A_1, \ldots, A_m \models B$ (§ 20).

48.3. С помощью содержательного рассмотрения (как в примере 4), а не систематической процедуры поиска найти контрпример с областью $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ для формулы

$$\neg \{\forall x \neg P(x, x) \,\&\, \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \,\&\, P(y, z) \supset$$
$$\supset P(x, z)) \,\&\, \forall x \exists y P(x, y) \,\&\, \forall y \exists x P(x, y)\}.$$

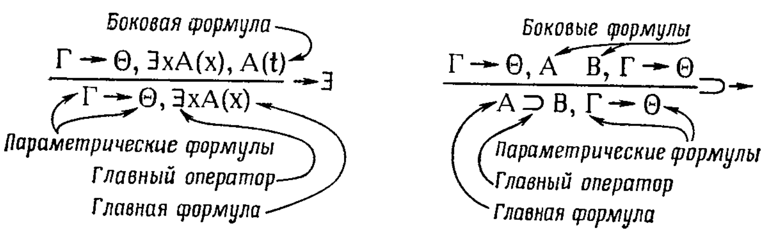
Показать, что для этой формулы не существует конечного контрпримера.

§ 49. Теорема Гёделя о полноте; основной результат

Примеры 4 и 5 показывают, что мы должны иметь общий план проведения систематического поиска контрпримеров, если хотим всегда получать контрпример или замкнутое дерево.

Типы конкретных шагов анализа полностью приведены в нашем списке из 14 правил. Прежде чем определять план поиска контрпримеров, отметим некоторые характерные черты шагов анализа (или правил).

На каждом шаге применения одного из правил мы переписываем список формул, которым хотим приписать значения $\mathfrak{t}$, и список формул, которым хотим приписать значение $\mathfrak{f}$, с одним или двумя изменениями. Эти изменения происходят в силу анализа условий истинности $\mathfrak{t}$ или ложности $\mathfrak{f}$ одной из формул (главной формулы данного шага анализа) по отношению к внешней пропозициональной связке или квантору (главному оператору). На основе этого анализа мы вводим в наши списки одну или две новые формулы (боковые формулы). После этого главная формула становится излишней и вычеркивается, кроме случаев применения правил $\forall\rightarrow$ и $\rightarrow\exists$. Остальные формулы (параметрические формулы) переписываются без изменений. Например:



Очевидно, таким образом, что когда мы делаем шаг анализа по одному из правил, то каждое вхождение формулы (в качестве одного из членов антецедента или сукцедента) в некоторую секвенцию или в одну из секвенций, расположенную над чертой, «происходит из» [или является (*непосредственным*) *предком*] некоторого конкретного вхождения формулы (его *непосредственного потомка*) в секвенцию, расположенную ниже данной черты. Мы предполагаем, что если возникают сомнения, то при анализе фиксируется, какое вхождение является главной формулой и какие формулы (соответственно формула) являются боковыми и параметрическими[1]).

Мы можем проследить предков данного вхождения снизу вверх (или его потомков вниз) по секвенциальному дереву с помощью последовательности шагов. Удобно также, кроме предков данного вхождения формулы в секвенцию (*собственных предков*), рассматривать саму формулу в качестве ее предка (*несобственного предка*); аналогичным образом определим *потомков*. Для пояснения этих определений в примере 2 все шесть предков (единственного вхождения) формулы в антецеденте секвенции в V_0 напечатаны жирными буквами.

Подобные отношения будем рассматривать также для частей формул, вхождений операторов в формулы и вхождений предикатных параметров. В примере 2 первый оператор $\supset$ в нижней секвенции имеет четыре предка, а именно он сам и три оператора в жирных формулах; первый параметр Q имеет шесть предков: он сам и пять жирных Q.

При указании введенных отношений для частей (или самих) формул мы употребляем термин «образ» (или «образ-предок» и «образ-потомок») вместо «предок» или «потомок», когда хотим рассматривать эти отношения для подформул, которые могут отличаться друг от друга разве лишь подстановкой термов вместо переменных (при чтении снизу вверх) или наоборот (при чтении сверху вниз). Скажем, в примере 2, читаемом сверху вниз, выделенное жирным шрифтом вхождение $Q(a_0)$ в V_{00010} имеет в качестве образов-потомков $Q(a_0)$, $Q(a_0)$, $Q(a_0)$, $Q(x)$, $Q(x)$, $Q(x)$, а в качестве потомков $Q(a_0)$, $Q(a_0)$, $(P \supset Q(x))$, $\exists x(P \supset Q(x))$, $\exists x(P \supset Q(x))$, $\exists x(P \supset Q(x)) \supset (P \supset \exists x Q(x))$. При чтении снизу вверх формула $P \supset Q(x)$ в вершине V имеет в качестве образов-предков $P \supset Q(x)$, $P \supset Q(x)$, $P \supset Q(x)$, $P \supset Q(a_0)$. Для вхождений операторов или предикатных параметров термины «образ-предок», «образ-потомок» и соответственно «предок», «потомок» являются синонимами.

Данное вхождение сложной формулы в секвенцию может быть главной формулой только для одного из 14 $(=2 \cdot 7)$ пра-

[1]) Неопределенность возникает только в случае, когда Δ или Λ одной из секвенций $\Delta \to \Lambda$ содержит несколько вхождений одной и той же формулы, а также когда список Δ или Λ при применении правил $\forall \to$ и $\to \exists$ к секвенции, расположенной ниже данной черты, содержит конгруэнтные формулы $\forall x A(x)$ и $\forall y A(y)$ или $\exists x A(x)$ и $\exists y A(y)$.

вил в соответствии с тем, принадлежит данное вхождение антецеденту или сукцеденту (два возможных случая), и в соответствии с типом внешнего оператора (семь возможных случаев). Поэтому можно классифицировать вхождения сложных формул в секвенции в соответствии с правилами, применимыми к ним как к главным формулам.

Проблема поиска опровержения формулы F с помощью нашей процедуры поиска сразу обобщается до вопроса о том, чтобы приписать одновременно m формулам $A_1, \ldots, A_m$ значение $\mathfrak{t}$, а n формулам $B_1, \ldots, B_n$ значение $\mathfrak{f}$, или, эквивалентно (в силу определений, предшествующих лемме 6), приписать секвенции $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$ значение $\mathfrak{f}$ ($m, n \geqslant 0$). Другими словами, формулы $A_1, \ldots, A_m$ должны быть выполнены, а формулы $B_1, \ldots, B_n$ опровергнуты одновременно или секвенция $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$ должна быть опровергнута.

Теперь мы готовы к тому, чтобы описать план систематического поиска контрпримеров.

Сначала (случай (А)) мы займемся поисками опровержения секвенций $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$, где $E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_l$ являются формулами в соответствии с определением § 16, за исключением того, что они могут содержать индивидные символы (но не содержат функциональных символов)[1]. Рассматривая $\to F$ как секвенцию, мы учитываем случай, когда должна быть опровергнута единственная формула F. Секвенция $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ может содержать свободные переменные, но эти переменные не должны входить в нее связанно[2].

Пусть $u_0, \ldots, u_p$ — список (возможно, пустой) свободных переменных и индивидных символов, входящих в $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$. Пусть переменные $a_0, a_1, a_2, \ldots$ не входят в $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$. Термы $u_0, \ldots, u_p, a_0, a_1, a_2, \ldots$ по мере того, как мы их *активируем* (т. е. вводим в действие), будут использоваться в качестве $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{r}$ при применениях предикатных правил $\to\forall$, $\forall\to$, $\to\exists$, $\exists\to$. Поскольку переменные $u_0, \ldots, u_p$ не входят связанно в $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ и $a_0, a_1, a_2, \ldots$ являются «новыми» переменными, не входящими в $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$, то подстановки с результатом $A(\mathfrak{b})$ и $A(\mathfrak{r})$, выполняемые при применении этих правил, являются свободными[3]. Активируемые термы $u_0, \ldots, u_p, a_0,$

[1]) Мы используем буквы E и F, чтобы через «$A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$» обозначать различные секвенции в дереве, имеющем фиксированную нижнюю секвенцию $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$.

[2]) Читатель, который склонен поверить, что план поиска может быть определен (в случае (А)) таким образом, что будет верна лемма 8, может опустить детали и перейти к лемме 9.

[3]) Исключение переменных, входящих в $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ и свободно, и связанно, оказывается необходимым. См. упр. 49.2.

$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots$ предназначены быть именами элементов области D в контрпримере для $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_k \rightarrow \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_l$, который мы пытаемся построить[1]). Так как поиск контрпримера для $\mathrm{E}_1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{E}_k \rightarrow \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_l$ проводится по всем конкретным путям секвенциального дерева, то мы отмечаем на каждом шаге, какие из термов $\mathrm{u}_0, \ldots, \mathrm{u}_p, \mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots$ уже были активированы. Для этого мы можем употреблять в качестве перегородки между переменными вертикальную черту. Первоначально мы проводим перегородку справа от u_p:

$$\mathrm{u}_0, \ldots, \mathrm{u}_p \mid \mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots$$

для указания того, что $\mathrm{u}_0, \ldots, \mathrm{u}_p$ активированы в исходной ситуации, если список $\mathrm{u}_0, \ldots, \mathrm{u}_p$ непуст. Если же список $\mathrm{u}_0, \ldots$ $\ldots, \mathrm{u}_p$ пуст, то первоначально проводим перегородку так:

$$\mathrm{a}_0 \mid \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots$$

для указания того, что переменная a_0 в исходной ситуации активирована. На каждом шаге применения правил $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$ мы используем в качестве $\mathfrak{b}$ новую переменную. Предположим, что $\mathrm{u}_0, \ldots, \mathrm{u}_p, \mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_{i-1}$, или, короче, $\mathrm{t}_0, \ldots, \mathrm{t}_q$ $(q=p+i-1)$, уже активированы, так что список термов имеет вид

$$\mathrm{u}_0, \ldots, \mathrm{u}_p, \mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_{i-1} \mid \mathrm{a}_i, \mathrm{a}_{i+1}, \mathrm{a}_{i+2}.$$

Теперь в качестве $\mathfrak{b}$ для правил $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$ мы используем a_i и одновременно передвинем перегородку для указания того, что новая переменная добавлена к списку уже активированных. Шаги по любому конкретному пути дерева разобьем на *циклы*.

Предположим, что в начале некоторого цикла, пусть это будет цикл d, мы рассматриваем секвенцию $\Delta \rightarrow \Lambda$, или, точнее, $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m \rightarrow \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$. (При $d=0$ рассматриваем $\mathrm{E}_1, \ldots$ $\ldots, \mathrm{E}_k \rightarrow \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_l$; при $d>0$ рассматриваем секвенцию, полученную в конце цикла $d-1$.)

Выполняя цикл d, мы рассматриваем по очереди каждое из вхождений формул $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m, \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$ в полученные ранее секвенции (или, более точно, после первого шага рассматриваем собственный образ-предок этого вхождения формулы) и выполняем, если это возможно, один или несколько шагов применений правил с данным вхождением формулы в каче-

---

[1]) Для секвенции $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_k \rightarrow \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_l$, не содержащей ни свободных, ни связанных переменных, ни индивидных символов, т. е. для секвенции исчисления высказываний, мы можем не упоминать о списке $\mathrm{u}_0, \ldots$, $\ldots, \mathrm{u}_p, \mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \ldots$ (см. примечание 1 на стр. 341). Тогда дальнейшее обсуждение, если выпустить не относящиеся к данному случаю детали, приводит к новой трактовке проблемы полноты для исчисления высказываний.

стве главной формулы (если только, выполняя цикл, мы не закрываем путь, как объясняется ниже).

Если формула, выбранная из списка $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$, является атомом, шаг не выполняется.

В случае когда вхождение формулы имеет один из типов $\rightarrow\supset, \ldots, \sim\rightarrow$, выполняется один шаг, полностью определяемый формулой и соответствующим правилом.

В случае когда это вхождение имеет тип $\rightarrow\forall$, $\exists\rightarrow$, выполняется один шаг цикла по соответствующему правилу с a_i, первой из еще не активированных переменных, в качестве b (как объяснено выше).

В случае когда вхождение имеет тип $\forall\rightarrow$, $\rightarrow\exists$, шаги цикла выполняются по соответствующим правилам с использованием в качестве r каждого из уже активированных термов $t_0, \ldots, t_q$, которые не использовались ранее в качестве r для применяемого правила с той же главной формулой (более точно, с главной формулой, являющейся образом-потомком рассматриваемого вхождения). Таким образом, выполняются шаги цикла с 0 по $q+1$.

Конкретный путь *оборвется и будет закрыт*, когда мы впервые получим секвенцию вида (×) с атомарной формулой C, не обращая, как и раньше, внимания на порядок формул в антецеденте и сукцеденте.

Путь *оборвется, не будучи закрыт*, в том случае, когда получена секвенция, исходя из которой невозможно сделать ни один из описанных шагов. Это происходит, если данная секвенция (при ранее активированных термах $t_0, \ldots, t_q$) содержит только атомы и образы-потомки ее $\forall\rightarrow$- и $\rightarrow\exists$-формул уже использовались как главные формулы с каждым из термов $t_0, \ldots, t_q$ в качестве r. (Последнее может случиться только в конце такого цикла, для которого следующего цикла не существует.)

Мы можем теперь резюмировать план поиска контрпримеров следующим образом. Мы обеспечиваем непустоту области D, активируя термы $u_0, \ldots, u_p$ или a_0 в исходной ситуации. На каждом цикле мы перебираем пару списков $A_1, \ldots, A_m$, $B_1, \ldots, B_n$, полученных в конце предыдущего цикла (или данных первоначально), анализируя затем каждую молекулу и выполняя шаги цикла в соответствии с ее внешним оператором (с ранее активированными термами $t_0, \ldots, t_q$ в качестве r для $\forall\rightarrow$- и $\rightarrow\exists$-правил) и затем начинаем все сначала на следующем цикле.

Лемма 8. *Рассмотрим любой незакрытый путь, обрывающийся или бесконечный, в секвенциальном дереве, построенном снизу вверх исходя из секвенций* $E_1, \ldots, E_k \rightarrow F_1, \ldots, F_l$ *с помощью* 14 *правил при описанном плане поиска. Список* $t_0, \ldots, t_q$ *или* $t_0, t_1, t_2, \ldots$ *термов, которые «активировались» на данном пути, не пуст и содержит все индивидные параметры секвенции* $E_1, \ldots, E_k \rightarrow F_1, \ldots, F_l$ *и все термы, использованные в качестве* $\mathfrak{b}$ *и* $\mathfrak{r}$ *при применениях правил* $\rightarrow\forall$, $\forall\rightarrow$, $\rightarrow\exists$, $\exists\rightarrow$, *и, следовательно, все индивидные параметры каждой секвенции данного пути*[1]. *Каждая молекула, встречающаяся в (антецеденте или сукцеденте) любой секвенции данного пути, используется при этом как главная формула (антецедентная или сукцедентная соответственно), причем только один раз, за исключением случая* $\forall\rightarrow$- *и* $\rightarrow\exists$-*молекул, которые используются как главные для каждого из термов* $t_0, \ldots, t_q$ *или* $t_0, t_1, t_2, \ldots$ *в качестве* $\mathfrak{r}$.

Доказательство. Для вхождения молекулы, не являющегося вхождением типа $\forall\rightarrow$ или $\rightarrow\exists$, его образ-предок используется в качестве главной формулы сразу после цикла, в котором формула впервые появилась (или в первом цикле, когда рассматривается одна из формул $E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_l$). Вхождения $\forall\rightarrow$- или $\rightarrow\exists$-формул, однажды появившись, уже не исчезают. Образ-предок такой формулы используется как главная формула с каждым из активированных термов, не употреблявшихся ранее в качестве $\mathfrak{r}$, при каждом последующем цикле (и в первом цикле, если формула содержится среди $E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_l$) вплоть до обрыва пути или бесконечное число раз. Обрыв пути может произойти только тогда, когда все активированные термы использованы в качестве $\mathfrak{r}$.

Мы выбрали описанный выше план поиска, чтобы проще получить лемму 8 и доказательство теоремы Гёделя о полноте. В действительности поиск контрпримера для $E_1, \ldots, E_k \rightarrow F_1, \ldots, F_l$ часто можно провести более эффективно (не жертвуя, однако, леммой 8), допуская некоторые отклонения от указанного плана. Так, примеры 1 и 2 было бы чуть сложнее рассмотреть в соответствии с нашим планом, чем это сделано в § 48 (упр. 49.1 (a) и (b))[2].

---

[1]) Действительно (в случае (A)), для бесконечного пути, как легко видеть, $\aleph_0$ термов $t_0, t_1, t_2, \ldots$ должны быть активированы, иначе мы закончили бы путь через конечное число шагов. (Это замечание необязательно для наших целей и не всегда верно в случае (B) § 50.)

[2]) По нашему плану поиска, когда список $u_0, \ldots, u_p$ пуст, мы активируем с самого начала a_0, чтобы обеспечить существование активированных термов. Однако экономнее было бы дождаться момента, когда a_0 нужно активировать по первому правилу $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$, встретившемуся до выполнения правил $\forall\rightarrow$ или $\rightarrow\exists$; для любого незакрытого пути, на котором не приходится применять эти правила, следует активировать a_0 (до обрыва пути). Шаги могут выполняться в любом удобном порядке при условии, что процедура, похожая на нашу, в конце концов вводится на каждом бесконечном пути. При применениях правил $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$ к секвенциям, в которые не входит какая-либо из ранее активированных переменных, эта переменная мо-

Лемма 9. *В секвенциальном дереве, построенном из* $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ *с помощью* 14 *правил и описанного плана поиска, любому незакрытому пути, обрывающемуся или бесконечному, соответствует контрпример для* $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ *с областью* $D = \{0, \ldots, q\}$, *если на данном пути активировались только термы* $t_0, \ldots, t_q$, *или* $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$, *если активировались термы* $t_0, t_1, t_2, \ldots$.

Доказательство. Пусть на данном пути встречаются секвенции $\Delta_0 \to \Lambda_0, \ldots, \Delta_t \to \Lambda_t$ (в случае обрывающегося незакрытого пути) или $\Delta_0 \to \Lambda_0$, $\Delta_1 \to \Lambda_1$, $\Delta_2 \to \Lambda_2, \ldots$ (в случае бесконечного пути), где $\Delta_0 \to \Lambda_0$ есть секвенция $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$. Пусть $\bigcup\Delta$ — множество всех формул, содержащихся в каком-либо антецеденте $\Delta_0, \ldots, \Delta_t$ или $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$, и, аналогично, пусть $\bigcup\Lambda$ — объединение всех сукцедентов Λ_i. Покажем, что для указанной области D мы можем выбрать распределение в D так, чтобы все формулы из $\bigcup\Delta$ (включая $E_1, \ldots, E_k$) имели значение $\mathfrak{t}$ и все формулы из $\bigcup\Lambda$ (включая $F_1, \ldots, F_l$) имели значение $\mathfrak{f}$ [1]).

Поскольку данный путь не закрыт, то *никакой атом* C *не входит одновременно в* $\bigcup\Delta$ *и* $\bigcup\Lambda$. Действительно, предположим противное; пусть C впервые появляется в антецеденте Δ_a и в сукцеденте Λ_b. Если атом входит в антецедент (сукцедент), то он проникает в антецеденты (сукцеденты) всех вышележащих секвенций через списки параметрических формул Γ и Θ каждого шага. Поэтому C имелось бы в Δ_c и Λ_c, где $c = \max(a, b)$ (наибольшее из a и b). Таким образом, рассматриваемый путь должен был закрыться при получении секвенции $\Delta_c \to \Lambda_c$ (в силу вида ($\times$) этой секвенции), если этого не произошло ранее.

Отсюда следует, что *для области* D, *указанной в лемме, можно выбрать распределение (по крайней мере) для всех параметров из* $\bigcup\Delta$ *и* $\bigcup\Lambda$, *при котором атомы из* $\bigcup\Delta$ *принимают значение* $\mathfrak{t}$ *и атомы из* $\bigcup\Lambda$ — *значение* $\mathfrak{f}$. В качестве параметров мы берем **(a)** переменные и индивидные символы $t_0, \ldots, t_q$ или $t_0, t_1, t_2, \ldots$, **(b)** пропозициональные символы, а также **(c)** другие предикатные символы, входящие в $\bigcup\Delta$ или $\bigcup\Lambda$. Возьмем $D = \{0, \ldots, q\}$ или $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и припишем индивидным символам $t_0, \ldots, t_q$ значения $0, \ldots, q$ или символам $t_0, t_1, t_2, \ldots$ — значения

жет быть использована в качестве $\mathfrak{b}$ вместо вновь активированной переменной. При применении $\forall \to$ или $\to \exists$, когда A(x) не содержит x свободно, достаточно использовать только одно r. См. также о «первом подходе» в примере 3 § 48.

[1]) Для обрывающейся незакрытой ветви достаточно (ввиду того, как мы обосновывали наш поиск, т. е. в силу леммы 6(b)) приписать правильные значения только формулам верхней секвенции (как видно из примера 1). Однако лучшим способом убедиться, что это можно сделать, часто является приведенное рассуждение.

0, 1, 2, ... В случае (b) припишем пропозициональному атому значение $\mathfrak{t}$, если он содержится в $\mathsf{U}\Delta$, и значение $\mathfrak{f}$, если атом содержится в $\mathsf{U}\Lambda$ (как было показано, атом не может принадлежать и $\mathsf{U}\Delta$ и $\mathsf{U}\Lambda$ одновременно). В случае (c) мы припишем предикатному атому $\mathrm{P}(\mathrm{t}_{x_1}, \ldots, \mathrm{t}_{x_n})$ в качестве значения логическую функцию $\mathfrak{l}$, такую, что $\mathfrak{l}(x_1, \ldots, x_n)$ равно $\mathfrak{t}$, если $\mathrm{P}(\mathrm{t}_{x_1}, \ldots, t_{x_n})$ содержится в $\mathsf{U}\Delta$, и равно $\mathfrak{f}$, если $\mathrm{P}(\mathrm{t}_{x_1}, \ldots, \mathrm{t}_{x_n})$ содержится в $\mathsf{U}\Lambda$ (мы уже видели, что $\mathrm{P}(\mathrm{t}_{x_1}, \ldots, \mathrm{t}_{x_n})$ не может содержаться и в $\mathsf{U}\Delta$, и в $\mathsf{U}\Lambda$), и произвольное значение, скажем $\mathfrak{f}$, если он не входит ни в $\mathsf{U}\Delta$, ни в $\mathsf{U}\Lambda$. В силу второго предложения леммы 8 каждый предикатный атом в $\mathsf{U}\Delta$ или в $\mathsf{U}\Lambda$ имеет вид $\mathrm{P}(\mathrm{t}_{x_1}, \ldots, \mathrm{t}_{x_n})$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих D. Следовательно, все атомы из $\mathsf{U}\Delta$ получат значение $\mathfrak{t}$, а все атомы из $\mathsf{U}\Lambda$ — значение $\mathfrak{f}$, что и требовалось.

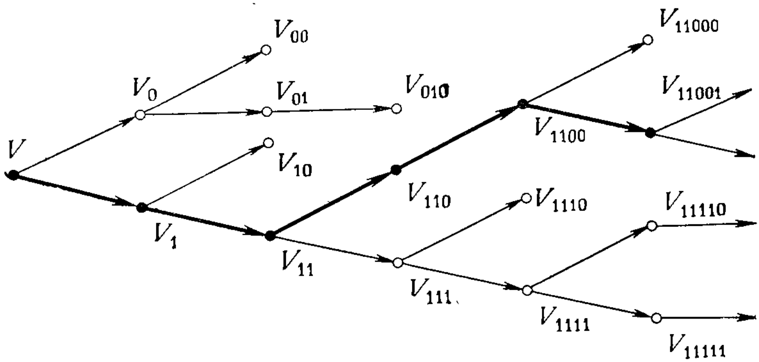
Мы покажем теперь, что если выбраны *область D и распределение, приписывающее значение $\mathfrak{t}$ атомам из $\mathsf{U}\Delta$ и значение $\mathfrak{f}$ атомам из $\mathsf{U}\Lambda$, то значения всех молекул из $\mathsf{U}\Delta$* равны $\mathfrak{t}$, *а значения всех молекул из $\mathsf{U}\Lambda$ равны* $\mathfrak{f}$. Предположим противное. Тогда мы можем выбрать среди молекул из $\mathsf{U}\Delta$, значение которых не равно $\mathfrak{t}$, и молекул из $\mathsf{U}\Lambda$, значение которых не равно $\mathfrak{f}$, молекулу G, содержащую наименьшее число ($\geqslant 1$) вхождений операторов. В силу последнего предложения леммы 8 формула G используется в качестве главной формулы (правила для внешнего оператора G, антецедентного или сукцедентного в соответствии с тем, выбрана формула G из $\mathsf{U}\Delta$ или из $\mathsf{U}\Lambda$). Если G не есть $\forall\rightarrow$- или $\rightarrow\exists$-формула, то рассмотрим соответствующую боковую формулу H (или боковые формулы H и I) из той посылки, которая принадлежит данному пути. Ввиду нашего выбора 14 правил (исключая правила $\forall\rightarrow$ и $\rightarrow\exists$), если формула H (или формулы H и I) имеет (имеют) нужное значение ($\mathfrak{t}$ в антецеденте, $\mathfrak{f}$ в сукцеденте), то этого достаточно, чтобы и формула G имела нужное значение. (Это свойство правил дает нам лемма 6 (b)). Но H (или H и I) содержит меньшее число вхождений операторов, чем G, и, следовательно, имеет нужное значение, так как G по предположению является формулой с минимальным числом вхождений операторов среди формул, не имеющих нужного значения. Поэтому такой молекулы G не существует, если только она не является $\forall\rightarrow$- или $\rightarrow\exists$-формулой, т. е. антецедентной $\forall x\mathrm{A}(x)$ или сукцедентной $\exists x\mathrm{A}(x)$. Тогда в силу леммы 8 формула $\mathrm{A}(\mathrm{r})$ встречается в качестве боковой для каждого из $\mathrm{t}_0, \ldots, \mathrm{t}_q$ или $\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \ldots$ в качестве r. Но при нашем распределении эти переменные именуют все элементы области D. Поэтому формула G должна получить нужное значение в силу того, что нужные значения имеют все боковые формулы $\mathrm{A}(\mathrm{t}_0), \ldots, \mathrm{A}(\mathrm{t}_q)$ или $\mathrm{A}(\mathrm{t}_0), \mathrm{A}(\mathrm{t}_1), \mathrm{A}(\mathrm{t}_2), \ldots$

(так как каждая из них содержит меньшее число вхождений операторов), что противоречит выбору G.

В следующей лемме о геометрических деревьях под частичным путем мы понимаем ряд вершин, связанных стрелками, начинающийся в вершине V. (Под путем мы понимаем аналогичный ряд вершин, продолжающийся бесконечно или до обрыва.)

Лемма 10. (Лемма Кёнига [1926].)[1]) *Если в геометрическом дереве, из каждой вершины которого исходит лишь конечное число стрелок, существуют сколь угодно длинные частичные пути, то существует и бесконечный путь.*

Доказательство и иллюстрация. В применениях леммы, которые нам потребуются, число стрелок, выходящих из вершины, может быть 0, 1 или 2. Простые геометрические деревья этого типа приведены в примерах 1—4; следующее дерево (для экономии места изображенное горизонтально) несколько сложнее:



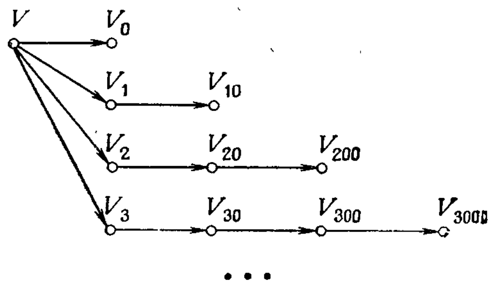
Чтобы дать доказательство в общем случае, рассмотрим дерево со свойствами, описанными в лемме, в котором существуют сколь угодно длинные конечные частичные пути. Мы хотим проследить бесконечный путь. Укажем правило, по которому это можно сделать. Предположим, что мы проследили требуемый путь до вершины V_x (которая является либо начальной вершиной V, либо следует за какой-либо вершиной, как V_{1100} в поясняющем примере), и предположим, что V_x *принадлежит сколь угодно длинным конечным частичным путям* (по предположению такова вершина V). Мы хотим выбрать следующую вершину так, чтобы и она обладала этим свойством (в дальнейшем будем называть это свойство «выделенным»). Вершины, следующие за

[1]) В другой форме у Брауэра [1924] и неявно у Брауэра [1923а] и Скулема [1922—3], стр. 222. См. Клини и Весли [1965], стр. 59.

V_x, существуют, иначе вершина V_x не обладала бы выделенным свойством. В самом деле, пусть $V_{x0}, \ldots, V_{xn}$ — все вершины, следующие за V_x. По крайней мере одна из них должна обладать выделенным свойством; действительно, если бы частичные пути, проходящие через вершины $V_{x0}, \ldots, V_{xn}$, имели не более $b_0, \ldots, b_n$ вершин соответственно, то частичные пути, проходящие через V_x, имели бы $\max(b_0, \ldots, b_n)$ вершин. Таким образом, мы действительно можем выбрать следующую вершину, обладающую выделенным свойством. Тогда, начиная с V, мы можем бесконечное число раз выбрать следующую вершину, обладающую выделенным свойством.

В поясняющем примере если сколь угодно длинные пути проходят через вершины, отмеченные сплошными кружками, то прослеживается бесконечный путь (отмеченный жирными стрелками) $VV_1V_{11}V_{110}V_{1100}V_{11001} \ldots$.

Пример 6. Для деревьев, в которых из вершин выходит бесконечное число стрелок, лемма неверна. Рассмотрим дерево, в котором из вершины V выходит $\aleph_0$ стрелок к следующим вершинам V_x $(x = 0, 1, 2, \ldots)$; из V_x последовательные стрелки приводят к x вершинам $V_{x0}, V_{x00}, \ldots$ следующим образом:



В этом дереве имеются сколь угодно длинные частичные пути, но не существует бесконечного пути.

Теперь с помощью 14 правил поиска начнем, придерживаясь описанного плана, строить секвенциальное дерево, начинающееся с данной секвенции $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ (случай (A)). Последовательность шагов вдоль любого пути указывается планом поиска. Распределим выполнение плана на различных путях, если в дереве имеется ветвление, так что различные пути достраиваются до одного и того же уровня одновременно. Таким образом, после построения 10-х вершин каждого частичного пути, который не окончится раньше, мы возьмем каждую из этих вершин и добавим исходящие из нее одну или две 11-е вершины, прежде чем строить на каком-либо пути 12-ю вершину.

Случай 1. Для некоторого b каждый путь обрывается и закрывается после построения не более чем b вершин. Тогда само дерево закрыто и конечно (имеет, самое большее, $1+2+2^2+\ldots+2^{b-1}=2^b-1$ вершин). Поэтому контрпримера не существует, т. е. $\models E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$. (Чтобы напомнить рассуждение, уже применявшееся в примере 2, заметим, что на каждой стадии построения дерева единственная надежда получить контрпример состоит в том, что хотя бы *одна* из секвенций, расположенных в концевых вершинах ветвей дерева, может быть опровергнута, что верно в силу леммы 6 (b). Но если дерево закрыто, то каждая секвенция на концевой вершине неопровержима по лемме 7.)

Случай 2. Для некоторого b существует незакрытый путь, обрывающийся в b-й вершине. Тогда по лемме 9 существует контрпример для $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ с $D=\{0, \ldots, q\}$. Только конечное число термов $t_0, \ldots, t_q$ может быть активировано на обрывающемся пути в случае (A).

Случай 3. Условия случаев 1 и 2 не выполняются. Тогда дерево имеет сколь угодно длинные частичные пути. В силу леммы Кёнига (лемма 10) существует бесконечный путь. Следовательно, по лемме 9 существует контрпример с областью $D=\{0, \ldots, q\}$ или $D=\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Теперь мы достигли цели настоящего раздела. Для упрощения утверждения (выделенного ниже курсивом) возьмем область $D=\{0, 1, 2, \ldots\}$ как в случае 2, так и в случае 3. Действительно, если существует конечный контрпример, мы можем построить бесконечный контрпример, дублируя элементы данного контрпримера $\aleph_0$ раз и в процессе оценивания полагая значения логических функций для новых элементов такими же, как для исходных. (Идея дублирования элементов была использована в § 30, 48.)

Предварительная формулировка теорем 33 и 34°. *Для секвенции* $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ *в случае* (A) *(не содержащей никакую переменную одновременно и свободно и связанно) либо* (I) *существует контрпример с областью* $\{0, 1, 2, \ldots\}$, *либо* (II) *существует (конечное) замкнутое секвенциальное дерево, построенное с помощью* 14 *правил из* $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$, *и, следовательно, не существует контрпримера, т. е.* $\models E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$.

В качестве побочного результата получаем, что секвенция $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ не может иметь только бесконечные несчетные контрпримеры.

Предварительная формулировка теоремы 35. *Если для секвенции* $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ *в случае* (A) *существует какой-либо контрпример, то существует и контрпример с областью* $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Упражнения. 49.1. Постройте снизу вверх секвенциальное дерево (используя описанный план поиска), начинающееся от следующих секвенций, и получите утверждение (I) (дайте контрпример) или (II):

(a) $\to \exists x (P \supset Q(x)) \supset (P \supset \forall x Q(x))$ (пример 1).
(b) $\to \exists x (P \supset Q(x)) \supset (P \supset \exists x Q(x))$ (пример 2).
(c) $\to \neg (Q \& \neg Q \& \forall x \exists y P(x, y))$ (пример 5).
(d) $\to P \& \exists x (Q(x) \supset Q(x))$.
(e) $\to \exists x P \to \forall x P$.
(f) $\forall x \exists y P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$.
(g) $P \supset Q \to P \supset Q$.

49.2. Примените план поиска контрпримеров к секвенциям $\forall a \forall c (P(c) \& Q(a)) \to Q(b)$ и $\forall a \forall b (P(b) \& Q(a)) \to Q(b)$. Почему для последней секвенции план поиска не приводит к результату?

49.3*. Рассмотрите систематический поиск контрпримера для формулы $\neg \{\forall x \neg P(x, x) \& \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \& P(y, z) \supset \supset P(x, z)) \& \forall x \exists y P(x, y)\}$ (пример 4 § 48) с помощью 14 правил, применяемых снизу вверх, и следующего плана поиска (отличного от плана, принятого в тексте): в цикле 0 выполнить возможные шаги при активации только a_0; в цикле 1 активировать a_1 для правила $\exists \to$ и затем выполнить новые возможные шаги при активированных a_0 и a_1; в цикле 2 активировать a_2 для правила $\exists \to$ и затем выполнить всевозможные шаги при активированных a_0, a_1, a_2 и т. д.

(a) Покажите, что лемма 8 верна для указанного плана поиска.

(b) Покажите, что если шаги поиска выполняются без закрытия путей до окончания цикла d, то существует $3(d+1)^3$ «ветвей», или частичных путей. (Таким образом, при активации a_0, a_1, a_2, как в неформальном обсуждении примера 4, существует 81 путь, если не учитывать возможности закрытия некоторых из этих путей еще до того, как будут закончены все разбиения.)

(c) Используя контрпример, найденный из содержательных соображений в примере 4, выберите при каждом ветвлении секвенцию, которая входит в путь, соответствующий контрпримеру. Выпишите секвенцию, которая получается на этом бесконечном пути после цикла 1.

§ 50. Теорема Гёделя о полноте для формальных систем генценовского типа; теорема Лёвенгейма — Скулема

Если при указанном выше условии (II) (для $k=0$, $l=1$) мы могли бы вывести, что $\vdash$ F в смысле § 21, то мы получили бы первый случай теоремы Гёделя [1930] о полноте: *если* $\models$ F, *то* $\vdash$ F. (Мы сделаем это в § 51.)

Однако мы получили уже основной результат, состоящий в том, что несуществование контрпримера для F (т. е. $\models$ F) может быть подтверждено с помощью конечного механического процесса проверки[1]). Этот процесс (в настоящем изложении) состоит в проверке того, что некоторая конечная фигура является замкнутым секвенциальным деревом, построенным из $\rightarrow$F снизу вверх с помощью 14 правил.

С той точки зрения, которая привела к введению формальных систем и теории доказательств (§ 38), полученный результат — это (в основных чертах) именно то, к чему мы стремимся. Мы могли бы рассматривать сам механический процесс проверки как доказательство формулы F.

Фактически результаты таких проверок по существу уже имеют традиционную форму доказательств в аксиоматических дедуктивных системах, если мы будем проверять корректность получающихся деревьев, читая их сверху вниз, а не наоборот. В концевой вершине каждой ветви, если дерево замкнуто, мы имеем секвенции вида ($\times$) (§ 48), так что ($\times$) можно теперь считать схемой аксиом. (Тогда пометку « $\times$ » можно понимать как «аксиома», вместо «путь закрыт».) Каждый шаг вниз по дереву совершается по одному из 14 правил (ранее читавшихся снизу вверх), которые мы теперь рассматриваем как правила вывода с одной или двумя посылками. (Правило « $\supset\rightarrow$ » называется « $\supset$-введением в антецедент» и т. д.)

Каждое дерево с аксиомами ($\times$) в концевых вершинах ветвей, в котором каждый шаг сверху вниз совершается по одному из 14 правил, представляет собой *доказательство* (своей *нижней* или *концевой секвенции*) в формальной системе $G4$, называемой (*секвенциальной*) *системой генценовского типа*, или *исчислением секвенций*[2]). Такие системы были введены Генценом [1934—5] (и [1932]), использовавшим при этом некоторые идеи Герца [1929].

---

[1]) Основной результат, полученный с помощью другого механического процесса проверки, отличного от представленного здесь, совершенно четко содержится в работе Скулема [1922—3], стр. 220—222 (которая не была известна Гёделю в 1930 г.). См. примечание на стр. 383.

[2]) Системы генценовского типа $G1$, $G2$, $G3$, $G3a$ обсуждаются в § 77—80 [ВМ], на которые мы будем ссылаться в § 54. Система $G4$ близка к $G3$, к системе L Бета [1959], стр. 282, и к LC Кангера [1957]. Первые 8 правил совпадают с пропозициональными правилами Кетонена [1944].

Для различения мы будем называть формальную систему исчисления предикатов из § 21 *системой H гильбертовского типа*. Более точно: «$G4$» и «H» могут обозначать несколько систем, соответствующих различным определениям формул (в частности, простых формул) и термов (см. § 37, 39).

В силу лемм 6(а) и 7 система $G4$ обладает следующим свойством непротиворечивости, аналогичным свойству системы H, установленному в теореме 12_{Pd}.

Теорема 33. *Каждая секвенция* $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$, *доказуемая в* $G4$, *общезначима*; *в символической записи*: *если* $\vdash A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$, *то* $\models A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$.

Теорема представляет собой простую переформулировку того факта, что замыкание секвенциального дерева при указанном поиске контрпримера означает, что все возможности построения контрпримера исчерпаны. Без этого свойства непротиворечивости мы вряд ли захотели бы рассматривать $G4$ как формальную систему.

Лемма 6(b) выражает новое свойство (правил) системы $G4$, которым не обладает система H с правилом modus ponens[1]).

Тот факт, что $G4$ имеет дело с секвенциями и в ней по окончании процедуры поиска доказывается секвенция $\to F$ (а не формула F), не является недостатком. Кто не согласен с этим, может легко видоизменить $G4$, используя формулы, как это сделал Шютте [1950] (хотя секвенции удобнее), или может дополнить $G4$ правилом $\to F/F$.

Характерной чертой системы $G4$ является также тот факт, что доказательства в ней представляют собой конечные деревья («доказательства в форме дерева»), а не конечные (линейные) последовательности формул («доказательства в форме последовательности»). Можно, разумеется, переписать дерево доказательства в форме последовательности, но деревья лучше выявляют логическую структуру и помогают поэтому в исследовании этой структуры. Мы привыкли к линейной записи доказательства (это, конечно, связано с линейностью языка и линейностью письменности, более удобной для обычных целей). Доказательства (и выводы) в системе H могут быть записаны в форме дерева[2]).

Теперь мы рассмотрим другие случаи теоремы Гёделя о полноте.

---

[1]) Система $G3$ (но не $G1$, $G2$ и $G3a$) также обладает указанным свойством.

[2]) См. [BM], стр. 98—99. В [BM] мы используем термин «ветвь» вместо «путь» для систем генценовского и гильбертовского типа. (В противоречие с ботаникой, «ветвь» у нас начинается от (или проходит до) основания дерева, а не от ближайшего «ветвления».) Гильберт и Бернайс [1934] используют термин «нить доказательства» (Beweisfaden).

Начнем (случай (B)) с устранения ограничений на число формул в случае (A), и будем допускать счетную бесконечность формул $\ldots, E_2, E_1, E_0$, значение которых должно быть равно t, и счетную бесконечность формул $F_0, F_1, F_2, \ldots$, значение которых должно быть f. В эти формулы входят свободные переменные и индивидные символы только из конечного списка $u_0, \ldots, u_p$, возможно, пустого (и не входят другие функциональные символы); свободные переменные из этого списка не входят связанно ни в одну формулу. Один из двух списков формул может быть конечным или даже пустым[1]; легко представить себе небольшие изменения в наших обозначениях, которые должны быть при этом сделаны[2].

Для рассматриваемого случая мы обобщим понятие секвенции и родственных понятия, допуская в антецеденте и сукцеденте (или в одном из них) $\aleph_0$ формул. Мы будем теперь иметь дело с $\aleph_0$-секвенцией $\ldots, E_2, E_1, E_0 \to F_0, F_1, F_2, \ldots$ вместо секвенции $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$[3].

Однако, выполняя цикл d для любого конкретного пути в дереве, мы будем активировать только первые $d+1$ формул исходных списков. Предположим, что

$$\ldots, E_{d+2}, E_{d+1}, E_d \mid A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n \mid F_d, F_{d+1}, F_{d+2}, \ldots$$

есть $\aleph_0$-секвенция, полученная после цикла $d-1$ (или, если $d=0$, исходная $\aleph_0$-секвенция с пустыми списками $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_n$). Тогда мы начнем цикл d с перемещения двух перегородок в последней $\aleph_0$-секвенции, чтобы активировать

---

[1]) Один из интересных случаев возникает, когда $\ldots, E_2, E_1, E_0$ являются замыканиями аксиом формальной системы, подобной системе **N** из § 38 а вместо $F_0, F_1, F_2, \ldots$ мы имеем единственную формулу F. Мы обсудим этот случай в конце § 52. Однако при настоящем изложении не требуется, чтобы формулы $\ldots, E_2, E_1, E_0$ (или $F_0, F_1, F_2, \ldots$) были заданы эффективно, как это требуется (см. § 37, 43) от аксиом формальной системы. (Для перенесения на случай бесконечно многих формул результата, упомянутого в примечании 2 на стр. 352, списки формул должны быть эффективными, так что по i формулы E_i и F_i можно построить эффективно.)

[2]) В настоящей книге мы не будем рассматривать языки исчисления предикатов с несчетным числом символов и, следовательно, несчетным числом формул. Такие языки в высшей степени неконструктивны. Однако Мальцев [1936], Генкин [1950], Робинсон [1951] и другие авторы изучали подобные исчисления и нашли их теоретико-модельные применения. Пропозициональное исчисление с несчетным числом символов допускалось в работе Гёделя [1931—2b].

[3]) Читатель, который пропустил детали плана поиска для случая (A), должен заметить следующее (после чего можно перейти к случаям (C) и (D)): если дерево замкнуто и, таким образом, конечно, то лишь конечное число формул $\ldots, E_2, E_1, E_0$ и $F_0, F_1, F_2, \ldots$ (скажем, содержащиеся в списке $E_d, \ldots, E_0$ и $F_0, \ldots, F_d$) могло быть рассмотрено при построении дерева с помощью 14 правил и определении замкнутости по схеме аксиом (X).

E_d и F_d:

$$\ldots, E_{d+1} | E_d, A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n, F_1, \ldots, F_d | F_{d+1}, \ldots .$$

Теперь каждая из формул E_d, A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_n, F_d используется по мере надобности в качестве главной формулы (так же, как использовались $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ в случае (A)). Критерием для закрытия пути является то обстоятельство, что часть $\aleph_0$-секвенции между перегородками (которая сама является секвенцией) является аксиомой по схеме ($\times$), т. е. имеет общий для антецедента и сукцедента атом. После каждого цикла, если путь не закрыт, следует новый цикл, при котором перегородки раздвигаются хотя бы на одну позицию. Если вновь активированные формулы E_d и F_d являются атомами, то может оказаться, что цикл не содержит шагов (т. е. в дереве не появляются новые секвенции); это происходит, если секвенция, расположенная между перегородками в предыдущем цикле, в случае (A) определяет обрыв пути. Тогда, если все формулы за перегородками являются атомами, происходит обрыв пути без закрытия в силу того, что бесконечное число циклов можно выполнить «мгновенно» (перегородки просто раздвигаются шаг за шагом). Обрыв пути без закрытия происходит только при указанных условиях. Если имеет место закрытие пути, то оно происходит в некотором конечном цикле.

После замены «секвенции» на «$\aleph_0$-секвенцию» и «$E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$» на «$\ldots, E_2, E_1, E_0 \to F_0, F_1, F_2, \ldots$» леммы 8 и 9 остаются верны (лемма 10 не зависит от того, какой случай рассматривается). Заметим в заключение, что если мы получаем замкнутое $\aleph_0$-секвенциальное дерево, то из него можно получить замкнутое секвенциальное дерево следующим образом. Так как $\aleph_0$-секвенциальное дерево замкнуто, то оно конечно (как объясняется в случае 1, конец § 49). Рассмотрим концевые вершины дерева (их имеется конечное число), и пусть d есть номер цикла, после выполнения которого все они оказываются закрытыми. Тогда ни в одной секвенции дерева перегородка не стоит левее (образа-предка) E_{d+1} в антецеденте и правее F_{d+1} в сукцеденте. Пары атомов C в верхних $\aleph_0$-секвенциях, которые являются причиной закрытия путей, находятся внутри перегородок, так же как главные и боковые формулы каждого шага. Передвинем теперь перегородки в каждой $\aleph_0$-секвенции вплоть до E_{d+1} и F_{d+1} и отбросим все формулы, находящиеся за перегородками. В результате получим замкнутое секвенциальное дерево с $E_d, \ldots, E_0 \to F_0, \ldots, F_d$ в основании.

Наконец, мы рассмотрим (не разобранные еще) случаи конечного числа формул $E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_l$ (случай (C)) или $\aleph_0$ формул $\ldots, E_2, E_1, E_0, F_0, F_1, F_2, \ldots$ (случай (D)), которые вместе содержат (i) конечное или бесконечное число свободных переменных (которые не должны входить связанно ни в одну формулу) и индивидных символов и **(ii)** конечное или бесконечное число других функциональных символов[1]). Мы выбираем обозначения, предполагая, что имеется хотя бы по одному символу типа (i) и (ii). В противном случае следует представлять себе, что сделаны небольшие изменения[2]).

В рассматриваемых случаях мы заготовляем $\aleph_0$ списков по $\aleph_0$ термов каждый, которые при начальной позиции перегородки в каждом из них имеют вид:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{u}_0 \mid \mathfrak{u}_1,\ \mathfrak{u}_2,\ \mathfrak{u}_3,\ \ldots, & \\
\mid \mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{u}_{01},\ \mathfrak{u}_{02},\ \mathfrak{u}_{03},\ \ldots & (\text{где } \mathfrak{a}_0 \text{ есть } \mathfrak{u}_{00}), \\
\mid \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{u}_{11},\ \mathfrak{u}_{12},\ \mathfrak{u}_{13},\ \ldots & (\text{где } \mathfrak{a}_1 \text{ есть } \mathfrak{u}_{10}), \\
\mid \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{u}_{21},\ \mathfrak{u}_{22},\ \mathfrak{u}_{23},\ \ldots & (\text{где } \mathfrak{a}_2 \text{ есть } \mathfrak{u}_{20}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

Первый список $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, ... — это пересчет всех термов (§ 28, 38, 39), построенных при помощи символов (i) и (ii). Всегда можно пересчитать построенные таким образом термы, например, «методом цифр» (метод (A) из § 32). Так, если рассматриваемые формулы не содержат свободных переменных, но содержат единственный индивидный символ $\mathfrak{e}$ и ровно два функциональных символа $\mathfrak{f}(-)$ и $\mathfrak{g}(-, -)$, то пересчет термов может начинаться с

$$\mathfrak{e},\ \mathfrak{f}(\mathfrak{e}),\ \mathfrak{g}(\mathfrak{e},\ \mathfrak{e}),\ \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(\mathfrak{e})),\ \mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{e},\mathfrak{e})),\ \mathfrak{g}(\mathfrak{e},\ \mathfrak{f}(\mathfrak{e})),\ \mathfrak{g}(\mathfrak{f}(\mathfrak{e}),\ \mathfrak{e}),\ \ldots .$$

Каждый последующий список $\mathfrak{u}_{i0}$, $\mathfrak{u}_{i1}$, $\mathfrak{u}_{i2}$, ... представляет собой пересчет *дополнительных* термов, при построении которых разрешается использовать также переменную $\mathfrak{a}_i$. Таким образом, список $\mathfrak{u}_{i0}$, $\mathfrak{u}_{i1}$, $\mathfrak{u}_{i2}$, ... представляет собой пересчет термов, при построении которых допускаются те же символы, что и при построении $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, ..., и переменные $\mathfrak{a}_0$, ..., $\mathfrak{a}_i$ *с обязательным использованием* $\mathfrak{a}_i$ (так что не включаются термы из предыдущих списков). Для примера, рассмотренного выше, список $\mathfrak{u}_{10}$, $\mathfrak{u}_{11}$, $\mathfrak{u}_{12}$, ... может начинаться с

$$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{f}(\mathfrak{a}_1),\ \mathfrak{g}(\mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{a}_1),\ \mathfrak{g}(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_0)\,\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_1),\ \mathfrak{f}(\mathfrak{f}(\mathfrak{a}_1)),\ \mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{a}_1)).$$

При выполнении шага по правилу $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$ мы используем в качестве $\mathfrak{b}$ первую не активированную еще переменную $\mathfrak{a}_i$ из $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$, ... и, чтобы отметить это, передвигаем на одну позицию перегородку в списке $\mathfrak{u}_{i0}$, $\mathfrak{u}_{i1}$, $\mathfrak{u}_{i2}$, ..., который начинается с этой

---

[1]) Читатель, пропустивший детали плана поиска, может перейти к замечаниям относительно лемм 8 и 9.

[2]) Если не имеется ни одного символа типа (ii), то список $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{u}_{i1}$, $\mathfrak{u}_{i2}$, $\mathfrak{u}_{i3}$, ... сводится к $\mathfrak{a}_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$); тогда должны существовать $\aleph_0$ символов типа (i), иначе мы имели бы случай (A) или (B). Если существуют символы типа (ii), но нет символов (i), то исчезает список $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, ... и первоначально следует активировать $\mathfrak{a}_0$.

переменной. При $\forall\to$- и $\to\exists$-шагах все термы $t_0, \ldots, t_q$, активированные ранее в любом из списков, допускаются в качестве r. Циклы проводятся так же, как в случае (A) или (B), если не считать того, что после окончания любого цикла в начале следующего мы передвигаем перегородку на одно место вправо в каждом списке термов, в котором перегородка не находится в крайнем левом положении. Таким образом, на любом незакрытом пути дерева, если какой-либо терм списка активирован, то каждый терм этого списка будет активирован; эти термы входят в общий список $t_0, t_1, t_2, \ldots$ всех термов, которые когда-либо будут активированы. Термы списка будут активированы и при обрыве закрывающегося пути, когда бесконечное число циклов выполняется «мгновенно» перемещением перегородки в данном списке термов и для случая (D) в списке формул.

Второе предложение леммы 8 теперь записывается так: *список* $t_0, t_1, t_2, \ldots$ *термов, которые активируются на данном пути,—это пересчет всех термов, построенных с помощью индивидных и других функциональных параметров из* $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ *или* $\ldots, E_2, E_1, E_0 \to F_0, F_1, F_2, \ldots$ *и новых переменных* $a_0, a_1, a_2, \ldots$, *которые вводятся на данном пути при применениях правил* $\to\forall$ *и* $\exists\to$; *терм* r *для правила* $\forall\to$ *или* $\to\exists$ *выбирается из указанного списка*; *следовательно, каждый терм, входящий свободно* (§ 28) *в какую-либо секвенцию пути, принадлежит этому списку термов.*

Для леммы 9 мы примем такой порядок действий, что каждый из активированных термов $t_0, t_1, t_2, \ldots$ предназначается для единственного элемента D. Таким образом, мы сможем приписать всем предикатным атомам $P(t_{x_1}, \ldots, t_{x_n})$ из $\bigcup\Delta$ значение $\mathfrak{t}$, а всем предикатным атомам из $\bigcup\Lambda$ значение $\mathfrak{f}$. (Мы хотим описать, по возможности просто, *некоторый* контрпример.)

Возьмем область $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и распределим параметры так, что значения $t_0, t_1, t_2, \ldots$ будут равны $0, 1, 2 \ldots$.

Чтобы сделать это, сначала рассмотрим каждую свободную переменную или индивидный символ, например e; в список $t_0, t_1, t_2, \ldots$ символ e входит единственный раз; предположим, что он есть t_i. Припишем e значение i. Рассмотрим каждый из остальных функциональных символов; для примера возьмем 1-местный функциональный символ f(—). Каждый из термов $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \ldots$ входит единственный раз в список $t_0, t_1, t_2, \ldots$; предположим, что эти термы есть $t_{i_0}, t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots$. Тогда оценим f(—) функцией f, такой, что $f(0) = i_0$, $f(1) = i_1$, $f(2) = i_2, \ldots$.

Рассмотрим теперь процесс оценки термов (§ 28). Мы оцениваем термы последовательно, начиная с оценки переменных и индивидных символов и используя значения, приписанные функциям в нашем распределении. При нашем распределении на каждой стадии (включая последнюю) рассматриваемый (под)терм t оценивается числом i, таким, что значение t есть t_i.

Выбор истинностных значений и логических функций для оценки пропозициональных и предикатных символов производится так же, как и раньше.

При доказательстве того, что все молекулы из $\mathsf{U}\Delta$ принимают значение $\mathfrak{t}$, а все молекулы из $\mathsf{U}\Lambda$—значение $\mathfrak{f}$, мы рассмотрим только случай $\forall\rightarrow$-формулы (случай $\rightarrow\exists$-формулы рассматривается аналогично). Предположим, например, что G является $\forall\rightarrow$-формулой $\forall x\,(P(f(x))\,\&Q)$ из $\mathsf{U}\Delta$ и получает неправильное значение $\mathfrak{f}$, тогда как все 1-операторные (и 0-операторные) формулы из $\mathsf{U}\Delta$ и $\mathsf{U}\Lambda$ получают правильные значения. В силу леммы 8 все формулы $P(f(t_0))\,\&Q$, $P(f(t_1))\&Q$, $P(f(t_2))\,\&Q$, ... входят в $\mathsf{U}\Delta$ как боковые формулы для G и имеют правильное значение, а именно $\mathfrak{t}$. Тогда $\forall x\,(P(f(x))\,\&Q)$ принимает значение $\mathfrak{t}$ (в противоречие с нашим предположением). Действительно, рассмотрим произвольный x. Если x имеет значение x, то значение $f(x)$ равно значению $f(t_x)$, а поэтому значение $P(f(x))\,\&Q$ равно значению $P(f(t_x))\,\&Q$, т. е. равно $\mathfrak{t}$. Приведенное рассуждение справедливо для любого x; поэтому вспомогательная таблица истинности для $P(f(x))\,\&Q$ имеет столбец значений, состоящий только из $\mathfrak{t}$; следовательно, значение $\forall x\,(P(f(x))\,\&Q)$ равно $\mathfrak{t}$.

Если переформулировать заключение, полученное в конце § 49, используя определение доказательства в $G4$ (начало этого параграфа) и добавляя новые случаи (B)—(D), то мы получим следующую теорему.

Теорема 34°. (Теорема Гёделя о полноте для формальной системы $G4$ *генценовского типа.) Пусть* $\left\{\begin{matrix} E_1, \ldots, E_k, F_1, \ldots, F_l \\ \ldots, E_2, E_1, E_0, F_0, F_1, F_2, \ldots \end{matrix}\right\}$ — *формулы исчисления предикатов, связанные переменные которых не входят свободно ни в одну из данных формул. Тогда либо*
(I) $\left\{\begin{matrix} E_1, \ldots, E_k \rightarrow F_1, \ldots, F_l \\ \ldots, E_2, E_1, E_0 \rightarrow F_0, F_1, F_2, \ldots \end{matrix}\right\}$ *опровержима в области натуральных чисел* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ («$\aleph_0$-опровержима»), *либо*
(II) $\left\{\begin{matrix} E_1, \ldots, E_k \rightarrow F_1, \ldots, F_l \\ \textit{для некоторого } d,\ E_d, \ldots, E_0 \rightarrow F_0, \ldots, F_d \end{matrix}\right\}$ *доказуема в* $G4$.

В случаях (A) и (C) (верхняя формулировка теоремы 34) если верно (II), то секвенция $E_1, \ldots, E_k \rightarrow F_1, \ldots, F_l$ неопровержима. (Эта часть заключения § 49 сформулирована отдельно как теорема 33.) Следовательно, если секвенция $E_1, \ldots, E_k \rightarrow F_1, \ldots, F_l$ опровержима, то она опровержима в области $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

В случае $l=0$ мы получаем часть (а) следующей теоремы 35. Действительно, секвенция $E_1, \ldots, E_k \rightarrow$ опровержима в данной области в точности тогда, когда формулы $E_1, \ldots, E_k$ одновременно выполнимы в этой области.

В теореме 35 необязательно соблюдать условие о том, что формулы не содержат связанных переменных, входящих свободно в одну из них. Действительно, в противном случае мы могли бы заменить данные формулы конгруэнтными (§ 16) и удовлетворяющими этому условию формулами, не изменяя истинностных таблиц и распределения при любой области. Тогда после применения теоремы с выполненным условием на переменные мы могли бы вернуться к исходным формулам.

Теорема 35. (Теорема Лёвенгейма—Скулема[1].) *Для исчисления предикатов*

(a) (Лёвенгейм [1915], Скулем [1920]) *если формула* E *выполнима, то она* $\aleph_0$*-выполнима; если формулы* $E_1, \ldots, E_k$ *выполнимы одновременно, то они одновременно* $\aleph_0$*-выполнимы;*

(b) (Скулем [1920]) *если формулы* $E_0, E_1, E_2, \ldots$ *выполнимы одновременно (или хотя бы если для каждого* d *формулы* $E_0, \ldots, E_d$ *выполнимы одновременно* («компактность», Гёдель [1930])), *то* $E_0, E_1, E_2, \ldots$ *одновременно* $\aleph_0$*-выполнимы.*

Доказательство (b) в предположении, что $E_0, E_1, E_2, \ldots$ не содержат связанных переменных, входящих в какую-либо формулу свободно. Применим теорему 33 и последний вариант теоремы 34, опуская $F_0, F_1, F_2, \ldots$.

Предположим, что для каждого d формулы $E_0, \ldots, E_d$ одновременно выполнимы. Это означает, что для каждого d существует область D_d и распределение в D_d, при котором значения формул $E_0, \ldots, E_d$ равны t, и поэтому значение секвенции $E_d, \ldots, E_0 \rightarrow$ равно f, так что неверно $\models E_d, \ldots, E_0 \rightarrow$ и по теореме 33 неверно, что $\vdash E_d, \ldots, E_0 \rightarrow$ в $G4$. Следовательно, для каждого d утверждение (II) теоремы 34 неверно. Остается альтернатива (I): $\ldots, E_2, E_1, E_0 \rightarrow$ опровержимо в $\{0, 1, 2, \ldots\}$, т. е. формулы $E_0, E_1, E_2, \ldots$ одновременно выполняются в $\{0, 1, 2, \ldots\}$ или, короче, одновременно $\aleph_0$-выполнимы.

Упражнения. 50.1.(a) Докажите для $m, n > 0$ следующее:

$$\{\models A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n\} \rightleftarrows \{\models \rightarrow A_1 \& \ldots \& A_m \supset B_1 \vee \ldots \vee B_n\},$$
$$\{\vdash_{G4} A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n\} \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows \{\vdash_{G4} \rightarrow A_1 \& \ldots \& A_m \supset B_1 \vee \ldots \vee B_n\},$$

---

[1]) Приведенные формулировки (кроме «компактности» в (b)) для случаев (A) и (B) могут быть доказаны с помощью рассуждений, приведенных Скулемом [1920], и тривиального соображения (конец § 49) о возможности «расщепления» некоторого элемента конечной области на $\aleph_0$ элементов. Некоторые исторические детали приведены в примечании на стр. 383.

предполагая, что ни одна переменная не входит в $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$ и свободно, и связанно. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения (b) для $m=0 \;\&\; n>0$ и (c) для $m>0 \;\&\; n=0$.

50.2. Докажите следующие варианты теоремы Лёвенгейма — Скулема. *Если секвенция* $E_1, \ldots, E_k \to F_1, \ldots, F_l$ *или* $\ldots, E_2, E_1, E_0 \to F_0, F_1, F_2, \ldots$ *опровержима, то она* $\aleph_0$*-опровержима. Если* $\aleph_0$-$\models F$, *то* $\models F$. *Если* $E_1, \ldots, E_k$ $\aleph_0$-$\models F$, *то* $E_1, \ldots, E_k \models F$.

§ 51. Теорема Гёделя о полноте для формальных систем гильбертовского типа

Для получения теоремы Гёделя о полноте в форме «*если* $\models F$, *то* $\vdash F$» остается доказать «*если* $\vdash \to F$ *в* $G4$, *то* $\vdash F$ *в* H». Мы получим этот результат в следствии теоремы 36 после длинного, но простого упражнения по теории доказательств в H.

Теорема 36. *Если* $\vdash A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$ *в исчислении предикатов* $G4$, *то* $A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_n \vdash P \;\&\; \neg P$ *в исчислении предикатов* H.

Лемма 11. (a) *Для* H *при* $n>0$

$$\{A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_n \vdash P \;\&\; \neg P\} \overset{\circ}{\rightleftarrows} \{A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_{n-1} \vdash B_n\}.$$

(b) *Для* H *при* $m>0$

$$\{A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_n \vdash P \;\&\; \neg P\} \rightleftarrows \{A_2, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_n \vdash \neg A_1\}.$$

Доказательство леммы. Все четыре импликации следуют соответственно из (1) $\neg$-введ. и (двойного) $\neg$-удал., (2) слабого $\neg$-удал., (3) $\neg$-введ., (4) слабого $\neg$-удал. (см. теорему 13, § 11). Мы выполним в деталях доказательство (1), используя запись (А) § 13 (и молчаливо применяя теорему 9).

1. $A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_n \vdash P \;\&\; \neg P$ — по предположению.
2. $A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_n \vdash P$ — &-удал., 1.
3. $A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_n \vdash \neg P$ — &-удал., 1.
4. $A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_{n-1} \vdash \neg\neg B_n$ — $\neg$-введ., 2, 3.
5. $A_1, \ldots, A_m, \neg B_1, \ldots, \neg B_{n-1} \vdash B_n$ — $\neg$-удал., 4.

Доказательство теоремы. Предположим, что дано доказательство $A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$ в $G4$. Такое доказательство имеет форму дерева (§ 50). Мы покажем, что, начиная с концевых вершин ветвей дерева и двигаясь шаг за шагом *вниз*, мы сможем для каждой встречающейся секвенции $\Delta \to \Lambda$ установить, что $\Delta, \neg\Lambda \vdash P \;\&\; \neg P$; при этом если Λ есть список $L_1, \ldots, L_s$, то $\neg\Lambda$ обозначает список $\neg L_1, \ldots, \neg L_s$ (если Λ пусто, то и $\neg\Lambda$ пусто).

Мы должны рассмотреть 15 случаев в соответствии с тем, является ли рассматриваемая секвенция $\Delta \to \Lambda$ верхним концом ветви (в этом случае секвенция является аксиомой вида ($\times$)) или является результатом применения одного из 14 правил. Мы докажем 5 случаев, предоставляя другие читателю (упр. 51.1).

Случай ($\times$). Секвенция $\Delta \to \Lambda$ является аксиомой, т. е. имеет вид C, $\Gamma \to \Theta$, C. Поэтому «Δ, $\neg\Lambda \vdash P \& \neg P$» есть «C, Γ, $\neg\Theta$, $\neg C \vdash P \& \neg P$», что истинно в силу слабого $\neg$-удал. или в силу леммы 11 (a) и теоремы 9 (i).

Случай $\to\supset$. Секвенция $\Delta \to \Lambda$ (вида $\Gamma \to \Theta$, $A \supset B$) получена из $\Delta_1 \to \Lambda_1$ (вида A, $\Gamma \to \Theta$, B) по $\to\supset$. Мы устанавливаем нужное свойство секвенций данного дерева, двигаясь шаг за шагом сверху вниз. Поэтому до того как рассмотреть секвенцию $\Delta \to \Lambda$ (доказывая секвенцию «Δ, $\neg\Lambda \to P \& \neg P$», т. е. «$\Gamma$, $\neg\Theta$, $\neg(A \supset B) \vdash P \& \neg P$»), мы уже проверили это свойство для секвенции $\Delta_1 \to \Lambda_1$ (доказав, что «Δ_1, $\neg\Lambda_1 \vdash P \& \neg P$», т. е. «A, Γ, $\neg\Theta$, $\neg B \vdash P \& \neg P$»). По лемме 11(a) задача сводится к выводу «Γ, $\neg\Theta \vdash A \supset B$» из «A, Γ, $\neg\Theta \vdash B$», который является непосредственным следствием теоремы о дедукции (теорема 11, или $\supset$-введ. в теореме 13).

Случай $\supset\to$. Из (α) Γ, $\neg\Theta$, $\neg A \vdash P \& \neg P$ и (β) B, Γ, $\neg\Theta \vdash$ $\vdash P \& \neg P$ нам нужно получить $A \supset B$, Γ, $\neg\Theta \vdash P \& \neg P$. Используем для этого $\vee$-удал. и *59.

Случай $\to\forall$. Ввиду леммы 11(a) мы хотим получить Γ, $\neg\Theta \vdash$ $\vdash \forall x A(x)$ из (α) Γ, $\neg\Theta \vdash A(b)$. Так как Γ, $\neg\Theta$ не содержат b свободно (в силу ограничений на переменные для правила $\to\forall$), мы можем применить $\forall$-введ. (теорема 21, § 23) к (α) и получим (β) Γ, $\neg\Theta \vdash \forall b A(b)$. В силу условий, следующих за правилами в § 48, выполняются условия леммы 5 в § 24 и в силу *73 $\vdash \forall x A(x) \sim \forall b A(b)$. Последнее вместе с ($\beta$) дает Γ, $\neg\Theta \vdash \forall x A(x)$.

Случай $\to\exists$. Нам надо показать, что если (α) Γ, $\neg\Theta$, $\neg\exists x A(x)$, $\neg A(r) \vdash P \& \neg P$, то Γ, $\neg\Theta$, $\neg\exists x A(x) \vdash P \& \neg P$. По $\exists$-схеме $A(r) \supset \exists x A(x)$, по контрапозиции (*12, § 24) и $\supset$-удал. получаем $\neg\exists x A(x) \vdash \neg A(r)$. Последнее вместе с ($\alpha$) и теоремой 9 дает Γ, $\neg\Theta$, $\neg\exists x A(x) \vdash P \& \neg P$.

Следствие. (a) *Если* $\vdash A_1, \ldots, A_m \to B$, *то* $A_1, \ldots, A_m \vdash B$.
(b) *Если* $\vdash A_1, \ldots, A_m \to B_1, \ldots, B_n$, *то* $\vdash A_1 \& \ldots \& A_m \supset$ $\supset B_1 \vee \ldots \vee B_n$ *(m, n > 0)*[1].
(c) *Если* $\vdash \to B_1, \ldots, B_n$, *то* $\vdash B_1 \vee \ldots \vee B_n$ *(n > 0)*.
(d) *Если* $\vdash A_1, \ldots, A_m \to$, *то* $\vdash \neg(A_1 \& \ldots \& A_m)$ *(m > 0)*.

[1]) Если мы понимаем «$A_1 \& \ldots \& A_m$» при $m=0$ как $\neg(P \& \neg P)$ (или $P \supset P$) и «$B_1 \vee \ldots \vee B_n$» при $n=0$ как $P \& \neg P$ (или $\neg(P \supset P)$), то (b) верно без ограничения «$m, n > 0$».

Доказательство. По теореме, используя лемму 11, $\& \rightarrow$, $\rightarrow \vee$ и т. д.

Применяя теорему 36 и ее следствие в ситуации (II) теоремы 34, получаем аналогичное утверждение для системы *H* гильбертовского типа. Мы приведем некоторые более удобные варианты теоремы о полноте для систем гильбертовского типа в теореме 37.

Обобщая понятие «$E_1, \ldots, E_k \models F$» (§ 20), мы будем говорить, что F является *следствием формул* $E_0, E_1, E_2, \ldots$ (*без варьирования переменных*), или, в символической записи, $E_0, E_1, E_2, \ldots \models F$, если для каждой области D формула F принимает значение t для всех распределений, при которых все $E_0, E_1, E_2, \ldots$ принимают значение t. Заменяя выражение «для каждой области» на «для области $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$», мы получим такое же понятие с «$\aleph_0$-$\models$» вместо «$\models$» (и аналогично для «$\overline{\overline{D}}$-$\models$» при любой другой непустой области D).

Обобщая понятие «$E_1, \ldots, E_k \vdash F$», мы будем говорить, что F *выводима из формул* $E_0, E_1, E_2, \ldots$ (*без варьирования переменных*), или, в символической записи, $E_0, E_1, E_2, \ldots \vdash F$, если существует вывод F из $E_0, E_1, E_2, \ldots$ (без варьирования переменных), определяемый так же, как и раньше в § 21, за исключением того, что в качестве посылок допускается использование формул из бесконечного списка $E_0, E_1, E_2, \ldots$ вместо конечного списка. Однако только конечное число формул из $E_0, E_1, E_2, \ldots$ может быть использовано в данном выводе; поэтому определенное нами понятие «$E_0, E_1, E_2, \ldots \vdash F$», очевидно, эквивалентно «$E_0, \ldots, E_d \vdash F$ для некоторого d».

Ясно, что «$E_0, \ldots, E_d \models F$ для некоторого d» влечет «$E_0, E_1, E_2, \ldots \models F$». Обратное неочевидно (в противоположность случаю с «$\vdash$») и следует из теоремы Гёделя о полноте.

Теорема 37. (Теорема Гёделя о полноте [1930].) *Для исчисления предикатов H*

(a) *если* $\models F$ (*или даже если* $\aleph_0$-$\models F$), *то* $\vdash F$; *если* $E_1, \ldots, E_k \models F$ (*или если* $E_1, \ldots, E_k\ \aleph_0$-$\models F$), *то* $E_1, \ldots, E_k \vdash F$;

(b) *если* $E_0, E_1, E_2, \ldots \models F$ (*или даже если* $E_0, E_1, E_2, \ldots\ \aleph_0$-$\models F$), *то* $E_0, \ldots, E_d \vdash F$ *для некоторого* d *и, следовательно,* $E_0, E_1, E_2, \ldots \vdash F$;

(c) *либо* $E_1, \ldots, E_k$ *одновременно* $\aleph_0$-*выполнимы, либо* $\vdash \neg (E_1 \& \ldots \& E_k)$ $(k > 0)$;

(d) *либо* $E_0, E_1, E_2, \ldots$ *одновременно* $\aleph_0$-*выполнимы, либо* $\vdash \neg (E_0 \& \ldots \& E_d)$ *для некоторого* d.

Доказательства. Так же как в теореме 35, достаточно доказать каждую часть теоремы в предположении, что ни одна формула не содержит связанной переменной, входящей свободно в какие-либо формулы. Действительно, в противном случае мы можем заменить данные формулы конгруэнтными (§ 16) и выполнить условие о переменных, не нарушая теоретико-модельных условий нашей теоремы, а в конце применить теорему 25 и следствие 2 теоремы 23 § 24, чтобы вернуться к исходным формулам в заключениях о выводимости гильбертовского типа.

(a) Предположим $\aleph_0$-$\models$F. Тогда секвенция $\rightarrow$F неопровержима в $\{0, 1, 2, \ldots\}$. В силу (II) теоремы 34 (верхний вариант при $k=0$, $l=1$) $\vdash_{G4}$ F. Поэтому в силу следствия (a) теоремы 36 $\vdash_H$ F. Аналогично для $k>0$.

(b) Предположим, что E_0, E_1, E_2, ... $\aleph_0$-$\models$F. Тогда невозможно в области $\{0, 1, 2, \ldots\}$ приписать одновременно E_0, E_1, E_2, ... значение t и формуле F значение f, т. е. ..., E_2, E_1, $E_0 \rightarrow$ F будет $\aleph_0$-неопровержима. В силу (II) теоремы 34 (нижний вариант) $\vdash E_d, \ldots, E_0 \rightarrow$ F для некоторого d. Теперь применим следствие (a) теоремы 36.

(d) Первая возможность эквивалентна тому, что (I) ..., E_2, E_1, $E_0 \rightarrow$ $\aleph_0$-опровержима. По теореме 34 если первая возможность не реализуется, то (II) $\vdash E_d, \ldots, E_0 \rightarrow$ для некоторого d, а отсюда по следствию (d) теоремы 36 $\vdash \neg(E_0 \,\&\, \ldots \,\&\, E_d)$.

Части теоремы 37 не являются независимыми (упр. 51.2). Кроме того, теорема Лёвенгейма—Скулема (теорема 35) может быть получена из теоремы 12 и 37 (с предположениями, заключенными в скобки) так же просто, как она была получена из теорем 33 и 34 (упр. 51.3).

Значение теоремы Гёделя о полноте и теоремы Лёвенгейма — Скулема будет обсуждаться в конце § 52 и в § 53.

Упражнения. 51.1. Разберите следующие случаи в доказательстве теоремы 36: $\rightarrow\&$, $\&\rightarrow$, $\rightarrow\neg$, $\rightarrow\sim$ (см. упр. 5.3), $\forall\rightarrow$, $\exists\rightarrow$.

51.2°. Докажите все части теоремы 37 и результаты применения теоремы 36 к теореме 34, исходя из каждого из следующих утверждений:

(a) если E_0, E_1, E_2, ... $\aleph_0$-$\models$F, то E_0, E_1, E_2, ... $\vdash$ F. (Эта часть теоремы 37 (b) является наиболее компактной формой теоремы Гёделя о полноте);

(b) часть (d) теоремы 37.

51.3. Докажите теорему 35 с помощью теорем 12_{Pd} и 37 (c), (d).

§ 52. Теорема Гёделя о полноте и теорема Лёвенгейма — Скулема для исчисления предикатов с равенством

В § 48—51 символ = мог быть одним из предикатных символов и мы не рассматривали его специальным образом в процессе оценки (или в вопросах выводимости), как в § 29. При доказательстве леммы 9 мы просто приписывали всем атомам из $\cup\Delta$ значение t, а всем атомам из $\cup\Lambda$ значение f (вместо того, чтобы учитывать специальный характер равенства).

Таким образом, «$\models$» и «$\vdash$» и другие метасимволы в теоремах 34—37 означают то же, что и в § 17, 21, 28, но не в § 29[1]). Если имеется область D и выполняющее распределение для $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_k$ или $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$, при котором $=$ имеет обычное значение равенства (т. е. тождества), и мы применяем теорему Лёвенгейма — Скулема, то у нас нет уверенности, что $=$ имеет обычное значение при новом выполняющем распределении в $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Для теорем 35 и 37 это положение можно исправить простым способом, предложенным Кальмаром [1928—9] и Гёделем [1930]; при этом область может стать конечной. В следующей лемме 12 упоминаются замкнутые аксиомы равенства; эти аксиомы определены в § 29, после теоремы 28.

Лемма 12. *Если перечень* $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$ *содержит замкнутые аксиомы равенства для* $=$ *и всех собственных предикатных и функциональных символов из* $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$ *и по правилам оценки для исчисления предикатов без равенства значения формул* $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$ *равны* $\mathfrak{t}$ *для некоторой непустой области* D *и некоторого распределения, то существуют область* D^* $(0 < \overline{\overline{D^*}} \leqslant \overline{\overline{D}})$ *и распределение, при котором* $=$ *имеет значение равенства (тождества) и значения* $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$ *равны* $\mathfrak{t}$. *Аналогично для* $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_k$.

Доказательство. Рассмотрим данную область D и распределение, при котором $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$ имеют значение $\mathfrak{t}$.

Приспосабливая доказательства теоремы 29 § 29 (используя $\exists$-удал., $\supset$- и $\forall$-введ.), мы видим, что каждая из следующих формул выводима в исчислении предикатов (§ 21 или § 28) из аксиом равенства, которые содержатся в списке $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$:

(i) $\forall x(x = x)$, (ii) $\forall x \forall y(x = y \supset y = x)$, (iii) $\forall(x = y \,\&\, y = z \supset x = z)$,

где $\forall$ означает замыкание формулы, как в § 20 (т. е. (iii) — это $\forall x \forall y \forall z\,(x = y \,\&\, y = z \supset x = z)$).

(iv) для каждого собственного предикатного символа $P(a_1, \ldots, a_n)$ при $n > 0$, входящего в $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$, и каждого i $(i = 1, \ldots, n)$

$$\forall\,[x = y \supset (P(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \sim \sim P(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n))].$$

(v) для каждого функционального символа $f(a_1, \ldots, a_n)$ при $n > 0$, входящего в $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots$, и каждого i $(i = 1, \ldots, n)$

$$\forall\,[x = y \supset f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) = = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n)].$$

[1]) Доказательство теоремы 33 проходит и при любом из указанных пониманий символа $\models$. Мы не определяем формальных систем, отличных от $G4$, для исчисления предикатов с равенством, как мы это делали для H в § 29.

Следовательно (по теореме 12_{Pd} и т. д.), для данной области D и данного распределения все формулы (i)—(v) имеют значение $\mathfrak{t}$.

Пусть $x \simeq y$ есть логическая функция (предикат, бинарное отношение), которая сопоставлена предикатному параметру $=$ при данном распределении; таким образом, для каждых x и y из D $x \simeq y$ верно в точности тогда, когда формула $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ имеет значение $\mathfrak{t}$ при значениях x и y, равных x и y.

Из формул (i)—(iii) (из того, что они имеют значение $\mathfrak{t}$) и правил оценки для $\forall$, $\supset$ и & следует, что отношение $x \simeq y$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. **(a)** $x \simeq x$ для всех x из D, **(b)** $x \simeq y \rightarrow y \simeq x$ для всех x, y из D, **(c)** $x \simeq y \,\&\, y \simeq z \rightarrow x \simeq z$ для всех x, y, z из D (упр. 52.1 (a)). Такое отношение мы называли отношением эквивалентности (§ 30). В силу утверждения (B) из § 20 $\simeq$ разбивает D на непересекающиеся (т. е. не имеющие общих элементов) непустые классы (называемые классами эквивалентности), такие, что элементы x и y из D принадлежат одному классу эквивалентности тогда и только тогда, когда $x \simeq y$. Класс эквивалентности x^*, которому принадлежит x, есть класс всех элементов u из D, для которых $x \simeq u$ (x принадлежит этому классу в силу (a)). Новая область D^* будет множеством всех классов эквивалентности. Ясно, что $0 < \overline{\overline{D^*}} \leqslant \overline{\overline{D}}$.

В силу приведенных определений если x и y являются значениями x и y, то

$$\{\text{значение } \mathrm{x} = \mathrm{y} \text{ есть } \mathfrak{t}\} \equiv x \simeq y \equiv \{x \text{ и } y \text{ принадлежат одному классу эквивалентности}\} \equiv x^* = y^*.$$

Следовательно, истинностное значение формулы $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ при заданных в D значениях x и y для x и y не изменится при замене значения x для x элементом u из D, принадлежащим тому же классу эквивалентности, и при такой же замене значения y для y. Аналогично, в силу (iv) (значение (iv) равно $\mathfrak{t}$) истинностное значение $\mathrm{P}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n)$ при заданных в D для $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n$ значениях $a_1, \ldots, a_n$ не изменится при замене значения a_i для a_i значением c_i из того же класса эквивалентности, т. е. при такой замене, когда значение $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ равно $\mathfrak{t}$, если x, y оцениваются как a_i, c_i ($i = 1, \ldots, n$). Аналогично, в силу (v) класс эквивалентности, которому принадлежит значение $\mathrm{f}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n)$ при заданных значениях $a_1, \ldots, a_n$ для $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n$, не меняется при замене значения a_i для a_i значением c_i из того же класса эквивалентности ($i = 1, \ldots, n$).

Таким образом, на каждом этапе оценивания формулы мы можем пренебречь различием между элементами из D, принадлежащими одному классу эквивалентности: истинностное значение формул при этом не изменится. В действительности мы можем объединить элементы D, принадлежащие одному классу эквивалентности, в один элемент, который ведет себя в процессе оценки так же, как любой из элементов класса. Если мы будем воспринимать элемент, являющийся результатом объединения элементов одного класса эквивалентности, как сам этот класс, то окажется, что мы при этом выполняем оценивание формул, как и предполагали, в области D^*. Так как такое объединение элементов из D не отражается на результатах оценки, то каждая из формул E_0, E_1, $E_2, \ldots$ оценивается в D^* значением t.

Только что описанное распределение в D^*, полученное из данного распределения в D посредством объединения элементов каждого класса эквивалентности, можно описать более точно следующим образом.

Формуле $x = y$ приписывается значение t тогда и только тогда, когда значения x^* и y^* в D^* для x и y являются одним и тем же элементом D^* (именно этого мы хотели достичь). Пропозициональный символ P оценивается в D^* так же, как и в D. Индивидный параметр e, который оценивался в D посредством e, оценивается в D^* посредством e^* (класс эквивалентности, содержащий e). Далее, n-местный предикатный символ P при $n > 0$, который оценивался в D посредством P, оценивается в D^* посредством P^*, где $P^*(a_1^*, \ldots, a_n^*) = \{P(a_1, \ldots, a_n)$ при любом выборе $a_1, \ldots, a_n$ из классов $a_1^*, \ldots, a_n^*$ соответственно$\}$, это значение не зависит от выбора $a_1, \ldots, a_n$ (что доказывается с помощью формул (iv), которые имеют в D значение t). Значение f^* в D^* для n-местного функционального символа f при $n > 0$ определяем аналогично с помощью значения f для f в D (упр. 52.1 (b)).

Пусть «... $(\leqslant \aleph_0)$-$\models$ ...» пишется вместо «... $\overline{\overline{D}}$-$\models$ ... для каждой области D, такой, что $0 \leqslant \overline{\overline{D}} \leqslant \aleph_0$» и «$(\leqslant \aleph_0)$-выполнимо» вместо «выполнимо в некоторой области D, такой, что $0 \leqslant \overline{\overline{D}} \leqslant \aleph_0$».

Теоремы $35_=$ и $37^\circ_=$. *Теоремы* 35 *и* 37 *верны, если в них вместо «исчисление предикатов», «$\aleph_0$-$\models$» и «$\aleph_0$-выполнимо» читать соответственно «исчисление предикатов с равенством», «$(\leqslant \aleph_0)$-$\models$»* и «$(\leqslant \aleph_0)$-выполнимо».

Доказательство. Мы докажем теорему $37_=$ (d). Теорема $37_=$ (a)—(c) и теорема $35_=$ могут быть доказаны аналогично или с помощью теоремы $37_=$ (d) так же, как в упр. 51.2 (b) и 51.3 (упр. 52.2).

В теореме $37_=$ (d) мы разберем случай, когда E_0, E_1, E_2, ... содержат $\aleph_0$ собственных предикатных символов и функциональных символов, приводящих (вместе с $=$) к $\aleph_0$ замкнутым аксиомам равенства Q_0, Q_1, Q_2, ...

Применяя теорему 37 (d) к списку формул E_0, Q_0, E_1, Q_1, E_2, Q_2, ..., получаем две возможности.

Случай I: формулы E_0, Q_0, E_1, Q_1, E_2, Q_2, ... одновременно выполнимы в области $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$ по правилам оценки для исчисления предикатов. Тогда по лемме 12 эти формулы одновременно выполнимы в области D^* $(0 < \overline{\overline{D^*}} \leqslant \overline{\overline{D}} = \aleph_0)$, где $=$ имеет значение равенства, т. е. выполнимы по правилам оценки для исчисления предикатов с равенством. Следовательно, формулы E_0, E_1, E_2, ... выполнимы.

Случай II: в исчислении предикатов $\vdash \neg(E_0 \& Q_0 \& \ldots \& E_c \& Q_c)$ для некоторого $d = 2c$; случай нечетного d рассматривается аналогично. Отсюда средствами исчисления высказываний получаем $Q_0, \ldots, Q_c \vdash \neg(E_0 \& \ldots \& E_c)$ в исчислении предикатов. В силу результатов § 29 $\vdash \neg(E_0 \ldots E_c)$ в исчислении предикатов с равенством.

Закончим этот параграф некоторыми замечаниями о том, как теорема Гёделя [1930] о полноте и теорема о непротиворечивости относительно общезначимости позволяют установить различные эквивалентности между теоретико-модельными понятиями и понятиями теории доказательств. Эти замечания применимы и к исчислению предикатов, и к исчислению предикатов с равенством. (Для исчисления предикатов эти замечания могли быть сделаны в конце § 51.)

В силу теоремы 37 (a) и (b), теоремы 12_{Pd} и утверждений первого абзаца § 23 (или аналогичных результатов для исчисления предикатов с равенством)

$$\{\models F\} \equiv \{\vdash F\},$$
$$\{E_1, \ldots, E_k \models F\} \equiv \{E_1, \ldots, E_k \vdash F\},$$
$$\{E_0, E_1, E_2, \ldots \models F\} \equiv \{E_0, E_1, E_2, \ldots \vdash F\}.$$

Во второй и третьей эквивалентностях, где над символами $\models$ и $\vdash$ не надписаны переменные, имеется в виду условная интерпретация любой свободной переменной, входящей в E_1, ..., E_k или E_0, E_1, E_2, ... (§ 20, 21). Прежде чем применять эти эквивалентности, следует взять замыкание по каждой переменной, имеющей интерпретацию всеобщности, с помощью оператора $\forall'$ из § 20 (и оператора $\forall$, если все переменные имеют интерпретацию всеобщности).

Вторая эквивалентность особенно интересна, когда E_1, ..., E_k являются замыканиями формул A_1, ..., A_k, выражающих аксиомы некоторой формальной аксиоматической теории в символизме исчисления предикатов первого порядка (с равенством или без). Например, A_1, ..., A_k могут быть нелогическими аксиомами E1—E3, G1—G3 формальной системы **G** теории групп, § 39. (Естественно использовать свободные переменные с условной интерпретацией в допущениях, временно вводимых в процессе вывода для удобства рассуждений, но не в аксиомах математической теории. Вместо этого было бы более естественно использовать индивидные символы вроде символа 1 в системе G. Поэтому мы берем полное замыкание аксиом посредством оператора $\forall$, а не $\forall'$.) Теперь «$E_1, \ldots, E_k \models F$» выражает теоретико-модельное понятие, которое означает, что в такой теории верно F, т. е. что F истинно во всех математических системах, в которых $E_1, \ldots, E_k$ одновременно истинны (при интерпретации всеобщности для свободных переменных). Каждую такую систему мы называем теперь «моделью» для $A_1, \ldots, A_k$ (или $E_1, \ldots, E_k$). Более точно, *моделью* для $A_1, \ldots, A_k$ называется (непустая) область D и распределение в D для параметров из $E_1, \ldots, E_k$, при котором значения $E_1, \ldots, E_k$ одновременно равны t (по правилам оценки из § 17, 28 или § 29 в соответствии с тем, рассматриваем ли мы исчисление предикатов без равенства или с равенством[1])). Запись «$E_1, \ldots, E_k \vdash F$» выражает теоретико-доказательственное понятие доказуемости F в той же теории (§ 21, 28 или § 29).

Третья эквивалентность имеет такое же значение, когда формулы $A_0, A_1, A_2, \ldots$ выражают в исчислении предикатов (с равенством или без) аксиомы формальной аксиоматической теории, содержащей $\aleph_0$ аксиом, а $E_0, E_1, E_2, \ldots$ — их замыкания (см. примечание 1 на стр. 367). Например, $A_0, A_1, A_2, \ldots$ могут быть нелогическими аксиомами системы N из § 38, именно аксиомами 14—21 и аксиомами, в количестве $\aleph_0$, по схеме аксиом 13. (Конечного числа аксиом недостаточно для N; см. конец § 47). *Модель* для $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (или $E_0, E_1, E_2, \ldots$) — это непустая область D и распределение в D параметров из $E_0, E_1, E_2, \ldots$, при котором значения $E_0, E_1, E_2, \ldots$ одновременно равны t[2]).

[1]) Часто говорят неточно о математической системе, удовлетворяющей аксиомам, или об аксиомах, истинных при интерпретации, когда следует считать, что свободные переменные, входящие в аксиомы, имеют интерпретацию всеобщности. Точное значение этих выражений дано в определении «модели».

В конкретных рассуждениях, когда мы говорим о выполнимых формулах (выполнимых вообще или в данной области), мы имеем в виду, что выполнимы именно сами эти формулы (но не обязательно их замыкания, если формулы открыты); аналогично понимаются выражения «выполняющее распределение», «опровержимо», «контрпример» и т. д.

[2]) В приведенных в качестве примеров системах G и N аксиомы равенства для = и функциональных символов доказуемы, и в силу следствия теоремы 31 § 29 несущественно различие между понятиями теории доказательств, формулируемыми для исчисления предикатов и для исчисления предикатов с равенством (в этом случае аксиомы E1—E3 или аксиомы 16, 17 излишни). Но (для систем аксиом, содержащих символ =) преимущественный интерес будут представлять именно теоретико-модельные понятия исчисления предикатов с равенством.

Теорема Гёделя о полноте устанавливает эквивалентность гильбертовского теоретико-доказательственного варианта проблемы непротиворечивости для аксиоматических теорий, основанных на исчислении предикатов с равенством или без равенства («Свободна ли теория, выводимая из данных аксиом, от противоречия?»), и более старой теоретико-модельной проблемы («Являются ли аксиомы истинными для некоторой системы объектов?»), § 36.

Во времена создания формальных аксиоматик в общем было ясно, что существование математической системы, удовлетворяющей аксиомам, т. е. как раз того, что мы называем «моделью», влечет невозможность противоречия в теории с данными аксиомами, если теория, где построена эта модель, сама непротиворечива. Обоснование проводилось следующим образом: предположим, что из аксиом можно вывести противоречие; тогда в теории, где построена модель, с помощью соответствующих заключений об объектах модели можно вывести противоречие из соответствующих теорем. Приводимое доказательство неизбежно было нестрогим, так как выражение «теория с данными аксиомами» становится точно определенным только при формализации языка и логики в современной теории доказательств. Принцип «существование модели устанавливает непротиворечивость» мы получаем теперь простой контрапозицией следующей цепи импликаций

$$\{E_1, \ldots, E_k \vdash P \& \neg P\} \rightarrow \{E_1, \ldots, E_k \models P \& \neg P\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \{E_1, \ldots, E_k \text{ невыполнимы одновременно}\};$$

и аналогично для E_0, E_1, E_2, ... в качестве замыканий аксиом.

Обращение этого принципа совсем не очевидно. Рассмотрим его контрапозицию. Почему, если система аксиом бессодержательна (т. е. не истинна ни в одной системе объектов, § 36) или, как мы говорим теперь, если замыкания аксиом невыполнимы одновременно, то противоречие обязательно должно быть выводимо из аксиом с помощью конечного числа элементарных логических шагов? Из теоремы Гёделя о полноте мы знаем, однако, что это действительно так. Разберем случай с $\aleph_0$ аксиомами A_0, A_1, A_2, ... Если их замыкания E_0, E_1, E_2, ... невыполнимы одновременно, то по теореме 37 (d) (или $37_=$ (d)) для некоторого d в исчислении предикатов (или исчислении предикатов с равенством) доказуема формула $\neg(E_0 \& \ldots \& E_d)$; тогда эта формула и противоречащая ей формула $E_0 \& \ldots \& E_d$ доказуемы в формальной системе, основанной на исчислении предикатов (или исчислении предикатов с равенством) и содержащей A_0, A_1, A_2, ... в качестве нелогических аксиом. Другой способ доказательства для исчисления предикатов без равенства (пригодный и для исчисления предикатов с равенством, если включить в список E_0, E_1, E_2, ... аксиомы равенства и применить лемму 12) состоит в следующем:

$\{E_0, E_1, E_2, \ldots$ невыполнимы одновременно$\} \to$
$\to \{$секвенция $\ldots, E_2, E_1, E_0 \to$ опровержима$\} \to$
$\to \{$для некоторого $d \vdash E_d, \ldots, E_0 \to\}$ (теорема 34) $\to$
$\to \{$для некоторого d $E_d, \ldots, E_0 \vdash P \,\&\, \neg P\}$ (теорема 36).

Упражнения. 52.1. Восполните следующие пробелы в доказательстве леммы 12:

(a) докажите транзитивность $\simeq$,

(b) дайте определение f^*.

52.2. Докажите теоремы $37_=$ (b) и $35_=$ (b).

52.3. Докажите (с помощью теории моделей) предложение примечания 3 на стр. 187 § 29.

52.4. Покажите, что в исчислении предикатов без равенства аксиомы 14—18 системы **N** из § 38 не имеют конечной модели (но имеют счетно-бесконечную модель).

§ 53. Парадокс Скулема и нестандартные модели арифметики

Теорема Гёделя [1930] о полноте не столь известна, как его теорема о неполноте [1931]. Впрочем, последняя также весьма замечательна, это видно из рассмотрения ее совместно с теоремой Лёвенгейма—Скулема. Доказательство Скулема [1922—3] близко к доказательству теоремы Гёделя [1930] [1]), и вообще сама тео-

---

[1]) В свете современных представлений (ван Хейеноорт [1967]) в доказательстве Лёвенгейма [1915] теоремы, носящей его имя, имеются существенные пробелы. Утверждение Лёвенгейма есть теорема $35_=$ (a) (если не учитывать всех вариантов нашего определения «формулы»).

Первое корректное доказательство этого утверждения дано Скулемом [1920] с обобщением на случай $\aleph_0$ формул (по существу теорема $37_=$ (a) без «компактности»). В этом доказательстве Скулем использовал теоретико-множественную аксиому выбора (§ 35) и введенные им в [1920] нормальные формы для формул чистого исчисления предикатов (см. Гильберт и Бернайс [1934], стр. 158; [BM], стр. 385).

Можно, впрочем, обойтись при доказательстве теоремы без сведе́ния к скулемовским нормальным формам. Используя вместо них предваренную форму (теорема 27, § 25), мы получим очень простое доказательство следующим образом (Скулем [1929], стр. 24; Клини [1958], стр. 139). Пусть, например, предваренная форма формулы E есть $\forall w \exists x \forall y \exists z A(w, x, y, z)$, где $A(w, x, y, z)$— бескванторная формула, содержащая только переменные v, w, x, y, z и два функциональных символа $\varkappa$, λ (—). Используя аксиому выбора, получаем, что E выполняется в непустой области D при некоторо́м распределении тогда и только тогда, когда формула $\forall w \forall y A(w, \beta(w), y, \delta(w, y))$ (где β(—), δ(—, —)—новые функциональные символы) выполняется в D при том же распределении плюс распределение для β, δ. Мы получим область и выполняющее распределение для последней формулы, если сократи́м D до счетной области D^*, содержащей только значения для v и $\varkappa$ и элементы D, получающиеся из них многократными применениями функций, являющихся значерема Лёвенгейма — Скулема является непосредственным следствием гёделевской теоремы о полноте (упр. 51.3).

Эквивалентности между теоретико-модельными понятиями и понятиями теории доказательств, указанные в конце § 52, замечательны в следующем отношении. Теоретико-модельные понятия (общезначимость, выполнимость и другие) в высшей степени трансцендентны; так, для области из $\aleph_0$ элементов множество всех логических функций (которое участвует в определении

ниями β, λ, δ, а затем «ограничим» функции и предикаты данного распределения на область D^*.

Такое доказательство, использующее аксиому выбора, устанавливает для любой модели какой-либо формулы или списка формул существование конечной или счетно-бесконечной *подмодели* данной модели (в только что проиллюстрированном смысле). Не требуется специального рассмотрения для предикатного символа, который означает тождество: если $=$ уже используется, то оценка $=$ в данной модели переносится в новую модель.

Способ (использованный в § 48—50) выбора истинностных значений атомов при построении выполняющего (или опровергающего) распределения не зависит от значений атомов в данном распределении. При этом способе аксиома выбора не используется, но теряется результат, состоящий в получении подмодели, и (по крайней мере, в известных доказательствах) приходится восстанавливать значение $=$ (как в § 52) в случае исчисления предикатов с равенством. В работах [1922—3] (стр. 220—224) и [1929] (стр. 24—29) Скулем использовал этот способ для доказательства теоремы Лёвенгейма — Скулема (варианта, близкого к теореме 35 (a) и (b)), которое неявно (но, в ретроспективе, очевидным образом) устанавливает все утверждения теоремы Гёделя о полноте (включая компактность) — с двумя исключениями. Во-первых, доказывается только некоторая форма основного результата (начало § 50); далее, не показано, что если общезначимость формулы установлена в результате конечного механического процесса, используемого в изложении Скулема, то формула доказуема в гильбертовском смысле. Скулем едва ли мог это сделать в 1922—1923 гг., так как проблема полноты в гильбертовской теории доказательств была отчетливо поставлена лишь Гильбертом и Аккерманом [1928] (стр. 66). Можно сказать, что Скулем [1922—3] открыл полноту «интуитивной логики» (первого порядка), а независимо от него Гёдель [1930] (не зная результатов Скулема [1922—3] или [1929]) открыл полноту «формальной логики». Во-вторых, Скулем не привел дополнительного объяснения того, что можно восстановить значение $=$. (В работах Скулема [1920], [1922—3] или [1929] нет непосредственного обсуждения влияния равенства на рассматриваемую теорему и не всегда ясно, что́ Скулем имеет в виду относительно $=$.)

Как указывают Дребен и ван Хейеноорт (вводные замечания ван Хейеноорта [1967] к переводу работ Скулема), можно получить теорему Гёделя о полноте [1930] (без равенства), комбинируя доказательства Скулема [1920] и [1922—3] или [1929] с результатами Эрбрана [1930] (плюс известные теперь результаты о предваренной форме, например, теоремы 27, 12 и 19 в нашем изложении).

Упомянутые выше доказательства теоремы Гёделя о полноте не рассматривают непосредственно функций, как это сделано в случаях (C) и (D) § 50 (исключение составляют доказательство, полученное комбинированием результатов Скулема и Эрбрана, и близкое к нему доказательство Клини [1958] и [1961], намеченное в примечании 2 на стр. 414). Конечно (Гильберт и Бернайс [1934]), эти результаты могут быть обобщены на случай функций посредством замены функций их представляющими предикатами (см. § 38, 45; [ВМ], стр. 376).

этих понятий) имеет несчетную мощность $2^{\aleph_0}$ (упр. 34.4 (b)). Понятия теории доказательств, напротив, вполне конкретны; эти понятия финитны. Такого рода результаты были для исчисления предикатов крайне желательны, независимо от того, насколько они соответствовали ожиданиям. Они показывают, что исчисление предикатов (с равенством или без) полностью выполняет (для теорий первого порядка) ту роль, которая предназначалась логике.

Теорема Гёделя о полноте (или теорема Лёвенгейма—Скулема) дает, однако, больше информации, чем это имелось в виду вначале. До результатов Лёвенгейма [1915], Скулема [1920] и Гёделя [1930] никто не пытался (и, по-видимому, не ожидал) получить утверждения теорем 35 и $35_=$. В свете же этих дополнительных результатов теорема Гёделя предстает утверждением не только о полноте (для логики), но и о неполноте (для аксиоматических систем).

Так как теорема Гёделя о полноте и теорема Лёвенгейма—Скулема содержат неконструктивные понятия общезначимости и выполнимости, то они не принадлежат метаматематике и их доказательства не могут быть вполне финитными. Однако доказательства типа приведенных выше неконструктивны лишь в минимальной степени. Фактически, единственные неконструктивные шаги в доказательствах теорем 34 и 37 для «$\aleph_0$-$\models$» состоят в применениях классического закона исключенного третьего к предложениям о счетно-бесконечных совокупностях[1]).

На первый взгляд может не показаться интересным, что формулы $E_1, \ldots, E_k$ или E_0 $E_1, E_2, \ldots$, выполнимые одновременно в некоторой области D, также одновременно выполнимы в области $\{0, 1, 2 \ldots\}$ или в конечной области, как это утверждает теорема Лёвенгейма—Скулема. Предположим, однако, что $E_1, \ldots, E_k$ или $E_0, E_1, E_2, \ldots$ являются замыканиями аксиом теории множеств. Рассмотрим, например, аксиоматическую систему Гёделя [1940], использующую два сорта переменных: переменные по «классам» (конец § 35) и переменные по «множествам». Все множества являются классами и никакие другие объекты не рассматриваются, поэтому аксиомы могут быть сформулированы с помощью только переменных по классам и трех преди-

---

[1]) Используя это наблюдение, Гильберт и Бернайс [1939], стр. 234—253, формализовали свое доказательство теоремы Гёделя о полноте (по существу) в арифметической системе **N** и установили, таким образом, следующую метаматематическую теорему о полноте для чистого исчисления предикатов.

При добавлении к исчислению предикатов недоказуемой формулы в качестве схемы аксиом формальная арифметическая система, основанная на исчислении предикатов и нелогических аксиомах системы **N** (§ 38), *становится* ω-*противоречивой* (§ 47).

катных символов: $x = y$, $x \in y$ и $\mathfrak{M}(x)$ («x есть множество»)[1]. Большинство математиков считает, что аксиомы $A_1, \ldots, A_{17}$ истинны в некоторой непустой области объектов (классов, включая множества, в случае гёделевской теории множеств), т. е. предполагается, что существует непустая область D и распределение в D для предикатных символов $\in$ и $\mathfrak{M}$ ($=$ означает равенство), при котором замыкания $E_1, \ldots, E_{17}$ аксиом принимают значение t. (Область D и данное распределение составляют модель для аксиом.) Но тогда по теореме Лёвенгейма—Скулема существует область D^*, $0 < \overline{\overline{D}}{}^* \leqslant \aleph_0$, в которой $E_1, \ldots, E_{17}$ одновременно выполнимы. Рассмотрение аксиом теории множеств исключает возможность того, что $\overline{\overline{D}}{}^* < \aleph_0$. Значит, если вообще существует модель этой системы, то существует счетно-бесконечная модель (в которой символ $=$ имеет смысл равенства) и в этой новой модели имеется только $\aleph_0$ «множеств». Тем не менее, в теории множеств, основанной на этих аксиомах, верна теорема Кантора ((С) в § 36), в силу которой множество подмножеств натуральных чисел (которое является множеством в рассматриваемой теории) несчетно. В этом и состоит «парадокс» Скулема [1922—3]. Скулем, правда, рассматривал другую аксиоматическую теорию множеств с $\aleph_0$ аксиомами. Для $\aleph_0$ аксиом рассуждения остаются прежними в силу теорем $35_=$ (b) или 35 (b) для теорий множеств (объектами которых являются только множества), где предикат $=$ определяется через $\in$, как в § 26.

«Парадокс» Скулема не является в точном смысле парадоксом, а скорее устанавливает некоторого рода аномалию. Действительно, его можно объяснить: «пересчитывающее множество» упорядоченных пар, которое определяет взаимно-однозначное соответствие между областью D^* и натуральными числами, само не является множеством, допустимым в рассматриваемой аксиоматической теории множеств.

«Парадокс» показывает лишь, что любая аксиоматизация теории множеств в ограниченном исчислении предикатов с помощью счетного числа аксиом не отражает полностью понятий «множество», «множество подмножеств данного множества», «взаимно однозначное соответствие», «счетность» и т. д. Эти понятия, если мы предполагаем их определенными a priori, ускользают от описания с помощью подобной системы аксиом. Однако, в силу парадоксов теории множеств § 35 вряд ли возможно считать эти понятия априорными и не зависящими от системы аксиом. Подобные рассмотрения привели Скулема к той точке зрения, что понятия теории множеств имеют относительный характер («относительность теории мно-

---

[1]) См. [ВМ], стр. 377. Аксиому A1 и предикат $\mathfrak{Cls}(x)$ («x есть класс») можно тогда не вводить.

жеств»). Таким образом, множество, которое несчетно в одной аксиоматизации, может быть счетным в другой, и не существует абсолютного понятия счетности.

Разумеется, другое возможное объяснение скулемовского «парадокса» для рассматриваемой системы аксиом теории множеств состоит в том, что никакой модели вообще нет. При этом в силу теоремы Гёделя о полноте (так же, как в конце § 52) в исчислении предикатов доказуемо $\neg(\mathrm{E}_0 \& \ldots \& \mathrm{E}_k)$ или $\neg(\mathrm{E}_0 \& \ldots \& \mathrm{E}_d)$ для некоторого d. Тогда существовал бы «настоящий» парадокс, т. е. противоречие, однако (в любой из общепринятых аксиоматик теории множеств) парадокса до сих пор не обнаружено.

Мы закончим этот параграф обсуждением двух применений «компактности», т. е. того факта, что если формулы из каждого конечного подмножества списка E_0, E_1, E_2, ... одновременно выполнимы, то и все $\aleph_0$ формул списка одновременно выполнимы (теоремы 35 и $35_=$).

Первое применение (теорема 38) относится к следующей проблеме: можно ли полностью описать ряд натуральных чисел 0, 1, 2, ... с помощью списка аксиом A_0, A_1, A_2, ..., сформулированных в символизме (узкого) исчисления предикатов с равенством.

В частности, являются ли нелогические аксиомы A_0, A_1, A_2, ... теоретико-числовой системы N из § 38 истинными только при подразумеваемой интерпретации, описанной в § 38? Математическая система $S_0 = (D_0, 0_0, {}'_0, +_0, \cdot_0)$, содержащая ряд натуральных чисел $D_0 = \{0, 1, 2 \ldots\}$ в качестве области, нуль и обычные операции (следующий за, сложение и умножение) в качестве значений 0, $'$, $+$ и $\cdot$, образует модель аксиом ($=$ означает равенство); т. е. в этой области и при этом распределении замыкания E_0, E_1, E_2, ... аксиом одновременно принимают значение $\mathfrak{t}$ по правилам оценки для исчисления предикатов с равенством. Спрашивается, имеют ли эти аксиомы какую-либо модель, отличную от S_0.

Тривиальным образом — да, имеют. Действительно, аксиомы не устанавливают, какими должны быть элементы области D. Аксиомы предоставляют нам свободу выбора элементов области при условии, что среди этих элементов можно выбрать некоторый элемент, обозначаемый через 0, и функции, обозначаемые через $'$, $+$ и $\cdot$, обладающие сформулированными в аксиомах свойствами. Поэтому E_0, E_1, E_2, ... выполняются, если взять в качестве D любое счетно-бесконечное множество и одну 1-местную и две 2-местные функции на D, которые при некотором фиксированном пересчете области D определяются через соответствующие обычные функции. Таким образом, следующие три системы: S_0 (обычные натуральные числа), S_1 (неположительные целые числа при необычном определении $'$ и $\cdot$) и S_2 (положительные целые числа при необычном определении 0, $+$ и $\cdot$) являются моделями аксиом A_0, A_1, A_2, ...:

$$S_0=(D_0,\ 0_0,\ '_0,\ +_0,\ \cdot_0)=(\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},\ 0,\ x+1,\ x+y,\ xy),$$
$$S_1=(D_1,\ 0_1,\ '_1,\ +_1,\ \cdot_1)=(\{0,\ -1,\ -2,\ \ldots\},\ 0,\ x-1,\ x+y,\ -xy),$$
$$S_2=(D_2,\ 0_2,\ '_2,\ +_2,\ \cdot_2)=(\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\},\ 1,\ x+1,\ x+y-1,\ (x-1)(y-1)+1).$$

Если нам дано первоначальное понятие целого числа ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., в соответствии с которым множества $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$, $\{0,\ -1,\ -2,\ \ldots\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ различны, то системы S_0, S_1, S_2 также различны, но различны «несущественно». Эти системы имеют общую структуру (строение): они «изоморфны».

Более точно, мы говорим, что данное взаимно-однозначное соответствие, отображающее область D^* на D, есть *изоморфизм* системы $S^*=(D^*,\ 0^*,\ '^*,\ +^*,\ \cdot^*)$ на $S=(D,\ 0,\ ',\ +,\ \cdot)$, если это соответствие сохраняет понятия системы, т. е. (запись $x^* \Leftrightarrow x$ означает, что при данном взаимно-однозначном соответствии элементу x^* из D^* сопоставляется элемент x из D) если $0^* \Leftrightarrow 0$, $x^* \Leftrightarrow x \rightarrow x^{*'*} \Leftrightarrow x'$ и $x^* \Leftrightarrow x \,\&\, y^* \Leftrightarrow y \rightarrow x^* +^* y^* \Leftrightarrow x+y \,\&\, x^* \cdot^* y^* \Leftrightarrow x \cdot y$. Мы говорим, что система S^* *изоморфна* S, если существует изоморфизм S^* на S. Таким образом определены «изоморфизм» и «изоморфность» для систем типа $(D,\ 0,\ ',\ +,\ \cdot)$, где D — непустое множество и 0, $'$, $+$, $\cdot$ являются 0-, 1-, 2- и 2-местными функциями на D со значениями в D. Для систем других типов определения аналогичны; например, для системы $(D,\ <)$, где D — непустое множество и $<$ есть 2-местный предикат на D, в определении изоморфизма $(D^*,\ <^*)$ на $(D,\ <)$ требуется, чтобы $x^* \Leftrightarrow x \,\&\, y^* \Leftrightarrow y \rightarrow (x^* <^* y^* \equiv x < y)$.

Если мы рассматриваем системы типа $(D,\ 0,\ ',\ +,\ \cdot)$, не предполагая, что про элементы D известно более, чем устанавливается отношениями системы, то различные изоморфные системы сливаются в одну «абстрактную» систему, для которой они являются различными представителями; см [BM], § 8. (Такую абстрактную систему можно рассматривать как класс эквивалентности более конкретных систем по отношению эквивалентности «изоморфны».)

Следующая система S_3 (целые числа) неизоморфна S_0: $S_3=(D_3,\ 0_3,\ '_3,\ +_3,\ \cdot_3)=(\{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},\ 0,\ x+1,\ x+y,\ x \cdot y)$. Действительно, предположим, что мы пытаемся установить изоморфизм S_3 на S_0. Пусть, например, $2 \Leftrightarrow 0$ в предполагаемом взаимно-однозначном соответствии между $\{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ и $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$. Тогда условие $x^* \Leftrightarrow x \rightarrow x^{*'*} \Leftrightarrow x'$ в определении изоморфизма вынуждает нас положить $3 \Longleftrightarrow 1$, $4 \Longleftrightarrow 2$, $5 \Longleftrightarrow 3$, ... и в S_0 не остается элементов, которым можно сопоставить элементы ..., -2, -1, 0, 1 из S_3. Система S_3 не является моделью аксиом **N**, так как аксиома 15 ($\neg a' = 0$) неверна в этой модели (при интерпретации всеобщности для a): замыкание этой аксиомы принимает значение f для области и распределения из S_3, так как если a имеет значение -1, то значение $a' = 0$ равно t и значение $\neg a' = 0$ равно f.

Теперь мы переформулируем наш вопрос о системе **N** следующим образом. Являются ли все модели для нелогических аксиом из **N** изоморфными обычной модели $(D_0, 0_0, {}'_0, +_0, \cdot_0)$? В терминологии § 36: является ли система аксиом **N** категоричной? Истинны ли аксиомы из **N** для какой-либо абстрактной математической системы, отличной от натуральных чисел (рассматриваемых абстрактно)?

И вообще, существует ли счетное множество формул $A_0, A_1, A_2, \ldots$ в символизме исчисления предикатов с равенством (включающим по меньшей мере символы 0 и $'$), которое образует категоричное множество аксиом для натуральных чисел?

Следующая теорема отвечает отрицательно на эти вопросы.

Теорема 38. (Теорема Скулема [1934] о нестандартных моделях арифметики.) *Пусть* $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — *формулы исчисления предикатов с символами* 0, $'$, $=$ *и, возможно, другими (индивидными,) функциональными и предикатными символами. Предположим, что* $A_0, A_1, A_2, \ldots$ *истинны (при интерпретации всеобщности для свободных переменных) в системе* S *натуральных чисел* $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$, *в которой* 0, $'$, $=$ *имеют обычные значения (при любых подходящих значениях для других индивидных, функциональных и предикатных символов); т. е.* $S = (D, 0, {}', \ldots)$ *является моделью* $A_0, A_1, A_2, \ldots$ *в исчислении предикатов с равенством. Тогда существует модель* $S^* = (D^*, 0^*, {}'^*, \ldots)$ *формул* $A_0, A_1, A_2, \ldots$ *в исчислении предикатов с равенством, такая, что* $\overline{\overline{D^*}} = \aleph_0$ *и система* $(D^*, 0^*, {}'^*)$ *неизоморфна* $(D, 0, {}')$ *(и, тем самым,* S^* *неизоморфна* S*).*

Доказательство. Можно предполагать, что аксиомы 14 и 15 из **N** включены в список $A_0, A_1, A_2, \ldots$; в противном случае мы могли бы их добавить (так как эти аксиомы истинны в S). Пусть $E_0, E_1, E_2, \ldots$ — замыкания формул $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Пусть i есть некоторый индивидный символ, не содержащийся в $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Рассмотрим список формул

$$E_0,\ 0 \neq i,\ E_1,\ 1 \neq i,\ E_2,\ 2 \neq i,\ \ldots,$$

где (как в § 38) 0, 1, 2, ... обозначают термы 0, $0'$, $0''$, ... (названные «цифрами» в § 43) и $r \neq s$ обозначает формулу $\neg r = s$. Для каждого d первые $d+1$ из выписанных формул одновременно выполнимы в области D натуральных чисел; в самом деле, мы можем использовать модель S для A_0, A_1, A_2, ..., приписывая i значение d, так как $\boldsymbol{d} \neq \mathrm{i}$ (где $\boldsymbol{d}$ есть $0'\ldots'$ с d штрихами, как в § 43) не содержится среди $d+1$ первых формул. Тогда в силу компактности (теорема $35_=$(b) с утверждениями в скобках) все $\aleph_0$ выписанных формул одновременно выполняются в некоторой области D^*, $0 < \overline{\overline{D}}^* \leqslant \aleph_0$; пусть формулы выполняются в D^* при значениях 0, $'$, ..., равных 0^*, $'^*$, ... Так как аксиомы 14 и 15 содержатся среди A_0, A_1, A_2, ..., то мы легко опровергнем случай $\overline{\overline{D}}^* < \aleph_0$ (упр. 53.1); поэтому $\overline{\overline{D}}^* = \aleph_0$. Мы должны показать, что система $(D^*, 0^*, '^*)$ неизоморфна $(\{0, 1, 2, \ldots\}, 0, ')$. Предположим, что существует изоморфизм $(D^*, 0^*, '^*)$ на $(\{0, 1, 2, \ldots\}, 0, ')$. Пусть при этом изоморфизме (с взаимно-однозначным отображением D^* на $\{0, 1, 2, \ldots\}$) $a_0^* \Longleftrightarrow 0$, $a_1^* \Longleftrightarrow 1$, $a_2^* \Longleftrightarrow 2$, ...; тогда $D^* = \{a_0^*, a_1^*, a_2^*, \ldots\}$. Какие значения принимают теперь в S^* цифры 0, 1, 2, ...? Так как значениями цифр в S (вычисленными с помощью обычного нуля и функции «следующий за» как значений символов 0 и $'$) являются натуральные числа 0, 1, 2, ..., то значениями цифр в S^* (вычисленными с помощью 0^* и $'^*$ как значений символов 0 и $'$) в силу свойств $0^* \Longleftrightarrow 0$, $x^* \Longleftrightarrow x \longrightarrow x^{*'*} \Longleftrightarrow x'$ изоморфизма должны быть a_0^*, a_1^*, a_2^*, ... Какой элемент a^* является значением в S^* для i? Так как формулы $0 \neq \mathrm{i}$, $1 \neq \mathrm{i}$, $2 \neq \mathrm{i}$, ... принимают в S^* значение t, то $a_0^* \neq a^*$, $a_1^* \neq a^*$, $a_2^* \neq a^*$, ... Мы пришли к абсурду, потому что $a^* \in D^*$ и $D^* = \{a_0^*, a_1^*, a_2^*, \ldots\}$.

Системы, подобные S^*, которые удовлетворяют аксиомам арифметики, но неизоморфны обычной или «стандартной» числовой системе, называются *нестандартными моделями арифметики* (*теории чисел*), или *скулемовскими моделями*. Теорема о том, что любое (конечное или) счетно-бесконечное множество арифметических аксиом в исчислении предикатов первого порядка с равенством имеет нестандартную модель, была первоначально доказана Скулемом в 1933 г. (для конечного случая) и 1934 г. с помощью непосредственного построения нестандартной модели. Конструкция Скулема была применена Рылль-Нардзевским [1952] для доказательства того, что арифметика не является конечно аксиоматизируемой (§ 47).

Короткое доказательство, приведенное выше и основанное на компактности, принадлежит Генкину [1947], стр. 70, [1950], стр. 90.

Удивительно, что существование нестандартных моделей для обычных аксиом элементарной арифметики не было обнаружено гораздо раньше путем сопоставления теоремы Гёделя о полноте [1930] с теоремой Гёделя о неполноте [1931] следующим

образом[1]):
{формальная арифметика} =
= {исчисление предикатов} + {система арифметических аксиом};
в силу теоремы Гёделя из [1930] {исчисление предикатов} полно;
в силу теоремы Гёделя из [1931] {формальная арифметика} неполна;
поэтому {система арифметических аксиом} неполна.

Чтобы провести это рассуждение более непосредственно для системы **N** из § 38, рассмотрим формулу $\neg C_p$ теоремы V § 43 (теорема Гёделя о неполноте), которая истинна при стандартной интерпретации арифметического символизма, но недоказуема в **N**. В теореме Гёделя о полноте (для варианта с равенством, теорема $37_=$ (b)) «если $E_0, E_1, E_2, \ldots (\leqslant \aleph_0)$-$\models$ F, то $E_0, E_1, E_2, \ldots \vdash$ F» возьмем в качестве $E_0, E_1, E_2, \ldots$ замкнутые арифметические аксиомы и в качестве F формулу $\neg C_p$. Теперь $E_0, E_1, E_2, \ldots$ должны быть истинны при некоторой (нестандартной) интерпретации в счетной области, при которой формула $\neg C_p$ не истинна; иначе из теоремы Гёделя о полноте следовало бы, что $E_0, E_1, E_2, \ldots$ $\ldots \vdash \neg C_p$ в исчислении предикатов с равенством (см. примечание 2 на стр. 381) и поэтому $\vdash \neg C_p$ в **N** в противоречии с теоремой V[2]).

С этой точки зрения теорема Гёделя о неполноте имеет тот же характер, что и невыводимость пятого постулата Евклида и его отрицания из других постулатов геометрии (§ 36). Пятый постулат Евклида (или $\neg C_p$) истинен при одной интерпретации аксиом и ложен при другой.

В любой счетной модели $(D^*, 0^*, {}'^*, +^*, \cdot^*)$ для **N** имеем $\overline{\overline{D}}{}^* = \aleph_0$, так как **N** содержит аксиомы 14 и 15. В нестандартной

---

[1]) Но не совсем в том варианте, что у Гёделя [1931], где неполнота дана для «Principia Mathematica (Уайтхед и Рассел [1910—3]) и родственных систем». PM не имеет вида {исчисление предикатов (первого порядка)} + {арифметическая система аксиом}. Арифметические системы такого вида (подобные **N** § 38) введены Гильбертом [1928] и называются иногда *арифметикой Гильберта*. В [1931—2] (доклад на коллоквиуме, происходившем в 1931 г.) Гёдель сформулировал теоремы неполноты и для таких систем с обычными аксиомами элементарной арифметики.

Когда автор указывал на связь теорем Скулема и Гёделя в [ВМ] ([1952 b]), стр. 380 и [1956], § 18, ему не было известно более раннее обсуждение этой связи в литературе. Недавно автор обнаружил 2 строки в реферате Гёделя на работу Скулема [1933] ([1934], стр. 194, строки 10—11) и 3 строки Генкина [1950] (стр. 91, строки 8—10), указывающие на такую связь.

[2]) Еще два обстоятельства позволяют очень просто показать, что должны существовать нестандартные модели. В силу теоремы об иерархии Клини [1943] предикаты, выразимые в символизме **N**, составляют иерархию, в которой предикаты последовательно более высоких уровней требуют для своего определения все большего числа кванторов (§ 46, включая упр. 46.8, 46.9(a)). Последнее, конечно, доказывается рассуждениями для стандартной модели теории чисел. Но в силу теоремы 40 [ВМ], стр. 356, все выполняющие предикаты в теореме Гёделя о полноте определимы с помощью двух кванторов. Эти результаты были бы несовместимы, если бы существовала только стандартная модель. Подробное доказательство приведено в [ВМ], стр. 379—380.

модели (D^*, 0^*, $'^*$, $+^*$, $\cdot^*$) для **N** часть (D^*, 0^*, $'^*$) также нестандартна, т. е. неизоморфна системе ($\{0, 1, 2, \ldots\}$, 0, $'$), так как аксиомы **N** содержат рекурсивные определения $+$ и $\cdot$ (аксиомы 18—21). Действительно, чтобы сделать значения замыканий этих четырех аксиом равными t в случае, когда 0 и $'$ имеют обычные значения в области $D = \{0, 1, 2, \ldots\}$, мы вынуждены приписать $+$ и $\cdot$ их обычные значения; следовательно, если бы система (D^*, 0^*, $'^*$) была изоморфна (D, 0, $'$), то (D^*, 0^*, $'^*$, $+^*$, $\cdot^*$) была бы изоморфна (D, 0, $'$, $+$, $\cdot$). Таким образом, мы получили теорему Скулема для **N**.

Доказательство теоремы Скулема с помощью сопоставления двух гёделевских теорем применимо только к спискам формул A_0, A_1, A_2, ..., которые могут быть нелогическими аксиомами формальной арифметики. Это влечет за собой требование эффективности, используемое в доказательстве теоремы о неполноте (см. обсуждение в § 43)[1]). Требование эффективности не уменьшает значения теоремы Скулема, показывающей, что ни один список аксиом, который мы могли бы фактически использовать, не описывает натуральный ряд полностью. Однако, доказательство Скулема и приведенное выше доказательство Генкина применимы к любому списку A_0, A_1, A_2, ..., заданному эффективно или нет.

Система аксиом Пеано для натуральных чисел считается обычно категоричной. Определяя систему **N** § 38, мы формализовали эти аксиомы. Кажущееся противоречие между теоремой Скулема и категоричностью аксиом Пеано объясняется следующим образом. Пятая аксиома Пеано утверждает, что принцип математической индукции справедлив для всех свойств (т. е. 1-местных предикатов) натуральных чисел; таких свойств существует $2^{\aleph_0}$. Так как схема аксиом 13 обеспечивает индукцию только для $\aleph_0$ свойств, выразимых формулами A(x) системы **N**, то пятая аксиома Пеано формализована в **N** неполностью.

Процитируем Скулема, переводя с немецкого: "...числовой ряд полностью характеризуется, например, аксиомами Пеано, если рассматривать понятие «множества» или «пропозициональной функции» как нечто наперед заданное и имеющее абсолютное значение независимо от принципов порождения или аксиом. Но если бы мы проводили аксиоматическую точку зрения принципиально (Konsequent), так что и рассуждения о множествах и пропозициональных функциях также были аксиоматизированы, то, как

---

[1]) К любому эффективному списку A_0, A_1, A_2, ..., недостаточному для того, чтобы дать формулы C_a § 43, используя в них только параметры 0, $'$, $+$, $\cdot$, или не содержащему аксиом 14, 15, 18—21, мы могли бы сначала добавить аксиомы **N** из § 38.

Эти рассуждения можно обобщить на некоторые неэффективные списки. Ср. [BM], стр. 381, замечание 1.

мы видели, единственность, или полная характеризация, числового ряда невозможна"[1]).

Нестандартные модели стали в последнее время стандартной областью логических исследований; см. Генкин [1950], Рабин [1958 а], Кемени [1958], Скотт [1961], А. Робинсон [1961], [1963].

Известны, например, порядковые типы в нестандартных моделях арифметики. Мы предполагаем, что рассматриваемый символизм содержит предикатный символ $<$ и что формулы A_0, A_1, A_2, ... содержат по крайней мере все нелогические аксиомы из N § 38 и формулу $a<b \sim \exists c(c'+a=b)$ (символ $<$ является исходным). Тогда из замыканий этих формул E_0, E_1, E_2, ... в исчислении предикатов формула $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ выводима для всех пар цифр $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ для натуральных чисел a, b, таких, что $a<b$, и формула $\neg\, \boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ выводима для всех пар, таких, что $a \geqslant b$ ([BM], стр. 177—178). Какие упорядочения могут иметь нестандартные модели S^* при отношении порядка $a<b \equiv$ {значение $a<b$ равно $\mathfrak{t}$ в S^*, если a, b есть значения в D^* для a, b}? В соответствии с результатом Кемени [1958] (который сообщает, что результат получен в 1947 г. им и Генкиным, но был значительно раньше известен Скулему) возможно только одно упорядочение. При этом упорядочении D^* состоит из обычных натуральных чисел, за которыми следуют семейства элементов, причем элементы каждого семейства упорядочены как целые числа, а сами семейства упорядочены как рациональные числа.

Описание порядкового типа нестандартных моделей, конечно, мы представляем себе в терминах стандартных натуральных чисел, из которых строятся стандартные целые и рациональные числа.

Теорема 38 исключает возможность *формальной аксиоматической* характеризации натурального ряда чисел *в исчислении предикатов первого порядка.*

Мы доказывали в § 36, что формально аксиоматизируемая математика не составляет всей математики. Интуитивное понимание натурального ряда чисел предполагается уже при формулировке теоремы 38. Так, выражение «A_0, A_1, A_2, ...» предполагает понимание читателем того, что означает троеточие «...»; сказанное относится и к записи «$\overline{\overline{D^*}}=\aleph_0$». Мы также не можем рассматривать, как это *обычно* происходит, языки, предназначенные для формализации аксиом, без помощи понятий, по существу эквивалентных понятию натурального числа. Говоря абстрактно, последовательность натуральных чисел имеет такую же структуру, как последовательность выражений |, ||, |||, ..., используемая для представления чисел на ленте машины Тьюринга в § 41.

[1]) [1934], стр. 160. Скулем, как и Пеано, использовал положительные целые числа вместо натуральных.

Возможные выражения в языке вроде языка исчисления предикатов (если только мы не фиксируем верхнюю границу их длины, рассматривая лишь конечное число выражений) образуют подобную систему, но в алфавите с более чем одним символом.

Мальцев [1936] и Генкин [1949] строили нестандартные модели анализа (теории действительных чисел), а А. Робинсон [1961 a], [1963], [1966] применил их, чтобы развить новый подход к (классическому) анализу. Бернстайн и Робинсон [1966] решили этим методом одну проблему из теории гильбертовых пространств.

Теорема 39. (Генкин [1949].) *Если формулы* $A_0, A_1, A_2 \ldots$ *исчисления предикатов с равенством имеют сколь угодно большие конечные модели, то они имеют счетно-бесконечную модель.*

Доказательство. Пусть $E_0, E_1, E_2, \ldots$ являются замыканиями формул $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Пусть $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ — следующие формулы, которые соответственно выполнимы тогда и только тогда, когда в области существует по крайней мере 2, 3, 4, ... элемента:

$$\exists x \exists y (x \neq y), \quad \exists x \exists y \exists z (x \neq y \& x \neq z \& y \neq z),$$
$$\exists w \exists x \exists y \exists z (w \neq x \& w \neq y \& w \neq z \& x \neq y \& x \neq z \& y \neq z), \quad \ldots .$$

С помощью предположения теоремы получаем, что для каждого d первые $d+1$ формул списка

$$E_0, Q_0, E_1, Q_1, E_2, Q_2, \ldots$$

одновременно выполняются в соответствующей области D_d; мы используем одну из данных моделей, имеющую $\geqslant c+2$ элементов, если $d=2c$ или $d=2c+1$. В силу компактности (теорема $35_=$) все выписанные формулы одновременно выполнимы в некоторой области D, $0<\overline{\overline{D}}\leqslant\aleph_0$. Однако $\overline{\overline{D}}<\aleph_0$ приводит к абсурду, потому что тогда формулы Q_i при $i\geqslant\overline{\overline{D}}-1$ не могут выполняться в D.

Упражнения. 53.1. Докажите подробно, что $\overline{\overline{D^*}}=\aleph_0$ в теореме 38. (*Указание*: используйте упр. 38.5.)

53.2. Покажите, что теорема из примечания на стр. 385 не может быть усилена посредством замены «*ω-непротиворечивости*» на «*(простую) непротиворечивость*».

§ 54. Теорема Генцена

В ходе доказательства теоремы Гёделя о полноте (§ 48—51) мы пришли к новой разновидности формализации логики, а именно к системе генценовского типа $G4$. Действительно, сопоставляя теоремы 12_{Pd} и 34 и следствие (а) из теоремы 36, мы получаем, что для любой формулы F, в которую ни одна переменная не входит одновременно свободно и связанно, совпадают следующие три понятия[1]):

$$\{\vdash_H \mathrm{F}\} \overset{\mathrm{C}^\circ}{\equiv} \{\models \mathrm{F}\} \overset{\mathrm{C}^\circ}{\equiv} \{\vdash_{G4} \to \mathrm{F}\}.$$

Значок «C°» указывает здесь на применение классического (нефинитного) теоретико-модельного способа рассуждений.

Основной результат, состоящий в том, что логика предикатов может быть формализована в виде системы, подобной $G4$, а если говорить более точно, эквивалентность $\{\vdash_H \mathrm{F}\} \equiv \{\vdash_{G4} \to \mathrm{F}\}$ (или, позднее, $\{\vdash_H \mathrm{F}\} \equiv \{\vdash_{G4a} \to \mathrm{F}\}$) мы будем называть теоремой Генцена. Из этой эквивалентности легко извлечь основной результат работы Генцена [1934—5], относящийся к классической логике, а также некоторые разновидности теоремы Эрбрана [1930] (§ 55).

Генцен [1934—5] чисто финитными метаматематическими методами установил этот основной результат следующим образом:

$$\{\vdash_H \mathrm{F}\} \equiv \{\vdash_{G1} \to \mathrm{F}\} \equiv \{\vdash_{G1 \text{ без сечения}} \to \mathrm{F}\}.$$

Система, названная Генценом «LK», а в [ВМ] (с точностью до небольшого различия в определении формулы) «$G1$», представляет собой исчисление секвенций, аналогичное $G4$, — с тем лишь отличием, что в нем имеется следующее правило, называемое «сечением»:

$$\frac{\Delta \to \Lambda, \mathrm{C} \quad \mathrm{C}, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \Gamma \to \Lambda, \Theta} \ \text{Сечение}$$

Здесь С — произвольная формула, а Δ, Λ, Γ и Θ — произвольные перечни[2]) формул. Наличие этого правила облегчает доказательство утверждения $\{\vdash_H \mathrm{F}\} \to \{\vdash_{G1} \to \mathrm{F}\}$. Обратное утверждение — это по существу наша теорема 36. В своей «теореме о нормальной форме» («Hauptsatz») Генцен показывает, что применения этого правила можно устранить из любого данного дока-

[1]) Для рассмотрения формул, содержащих свободные и связанные вхождения одних и тех же переменных, мы можем воспользоваться теоремой 25 (как в доказательстве теоремы 27).

[2]) То есть конечные (быть может, пустые) неупорядоченные наборы формул; в [ВМ] (стр. 390—391) прописными греческими буквами обозначаются конечные (*упорядоченные*) последовательности формул, но вводятся специальные структурные правила *перестановки*:

$$\frac{\Gamma \to \Lambda, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \Theta}{\Gamma \to \Lambda, \mathrm{D}, \mathrm{C}, \Theta} \qquad \frac{\Lambda, \mathrm{D}, \mathrm{C}, \Gamma \to \Theta}{\Lambda, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \Gamma \to \Theta}$$

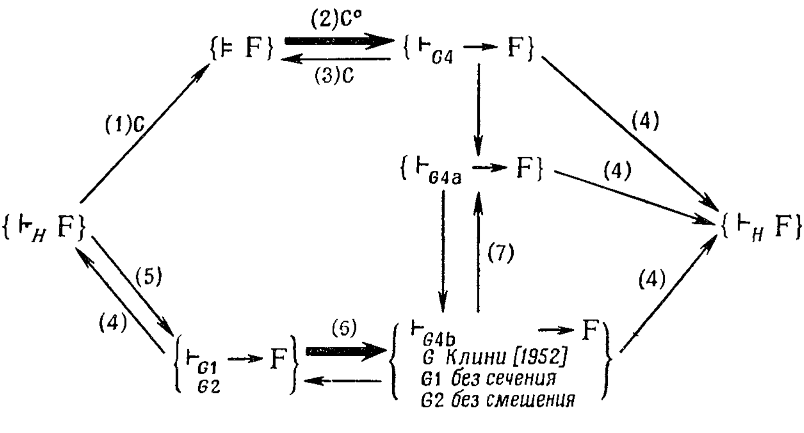
— *Прим. перев.*

зательства в $G1$, в результате чего получится доказательство той же секвенции в «$G1$ без сечения».

Эрбран и Генцен использовали свои теоремы для получения доказательств непротиворечивости в русле гильбертовской программы (см. § 45, примечание на стр. 315, и § 47, примечание на стр. 336) и в других метаматематических целях. Все эти результаты оказались бы значительно менее ценными, если бы их не удалось получить математически. Поэтому, если иметь в виду метаматематические цели, то в наших рассмотрениях в этом пункте имеются пробелы, нуждающиеся в заполнении, — подобно тому, как оставались пробелы и в случае теорем I—VIII[1]).

Генцен предложил также модификацию «LJ» своей системы для интуиционистской логики (система гильбертовского типа для

[1]) Как видно из помещаемой здесь схемы, эти пробелы можно устранить, воспользовавшись доказательствами теорем 46 и 48 из [BM] (§ 77, 78) и пользуясь для наших целей вводимыми ниже системами генценовского типа $G4a$ и $G4b$. Для согласования с [BM] и Клини [1952] мы можем в случае надобности воспринимать в наших системах «A ~ B» как сокращение для (A ⊃ B) & & (B ⊃ A).



(1) Теорема 12_{Pd}. (2) Теорема 34 (теорема Гёделя о полноте для формальной системы генценовского типа). (3) Теорема 33. (4) Следствие (а) из теоремы 36 или теорема 47 из [BM]. (5) Теорема 46 из [BM]. (6) Теорема 48 из [BM] (Hauptsatz) (основная теорема Генцена). (7) Ср. упр. 49.1 (f) и (g) или лемму 9 из Клини [1952]. Системы, сгруппированные вместе, очень похожи (эквивалентность легко доказывается). Незанумерованные следования на схеме тривиальны (одна из систем есть подсистема другой). Жирными стрелками (на каждом из путей) отмечены результаты, требующие наибольшей затраты труда. [Компактное изложение метаматематического доказательства теоремы Генцена, использующее идеи Шютте [1960], приведено в приложении 1 (стр. 442—447). В приложении 2 (стр. 448—450) приведена формулировка теоремы Эрбрана для произвольных формул (см. ниже, § 55) и ее вывод из теоремы Генцена.— *Ред.*]

этой логики описана в конце § 25[1]). Здесь наши теоретико-модельные рассмотрения (связанные с отношением «$\models$ F») мало пригодны, если только не продвинуть предварительно как следует интуиционистскую теорию моделей (т. е. разработать интуиционистский аналог классического понятия «$\models$ F»)[2]).

14 правил системы $G4$ генценовского типа были сформулированы выше таким образом, чтобы осталось как можно меньше неопределенности на каждом шаге *снизу вверх* при систематическом поиске контрпримера к секвенции $\to \mathrm{F}$ или $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_k \to \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_l$. По другой причине мы потребовали, чтобы формула С в схеме аксиом ($\times$) была элементарной.

В тех же случаях, когда контрпримера нет, т. е. $\vdash \to \mathrm{F}$ или $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_k \to \mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_l$, использование описываемых ниже других систем генценовского типа $G4$a или $G4$b иногда позволяет упростить доказательство. Более того, бóльшая гибкость систем $G4$a и $G4$b часто оказывается полезной при попытках построения доказательства *сверху вниз* и при выполнении всякого рода манипуляций с данными доказательствами.

Чтобы получить из $G4$ систему $G4$a, мы добавим к исходной системе четыре новых правила вывода, называемых «утончением» и «сокращением» (соответственно в сукцеденте и в антецеденте):

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathrm{C}} \to У \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\mathrm{C}, \Gamma \to \Theta} У \to$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathrm{C}, \mathrm{C}}{\Gamma \to \Theta, \mathrm{C}} \to С \qquad \frac{\mathrm{C}, \mathrm{C}, \Gamma \to \Theta}{\mathrm{C}, \Gamma \to \Theta} С \to$$

Здесь С есть произвольная формула, а Γ и Θ — произвольные перечни формул. Как и в других правилах, порядок формул в антецедентах и в сукцедентах не играет роли. Эти новые правила (так же как и выводы согласно этим правилам) мы будем называть *структурными*, а старые правила — *логическими*, причем правила $\to \supset, \ldots, \sim \to$ — *пропозициональными*, а $\to \forall, \ldots \ldots, \exists \to$ — *предикатными*. В целях экономии места мы будем обычно объединять последовательные применения правила утончения[3]), за которыми следует применение какого-либо логического пра-

[1]) В пределах этой главы отсутствие значка «°» у обозначения теоремы о доказуемости в системах генценовского типа означает, что известна интуиционистская версия данной теоремы (быть может, с некоторой переформулировкой), использующая интуиционистскую версию одной из систем $G1$, $G2$, $G3$, $G3$a, G. Эту интуиционистскую версию можно найти, если не оговорено противное, в [ВМ] или в Клини [1952].

[2]) По поводу ссылок на интуиционистскую теорию моделей (семантику) Бета см. конец стр. 81 книги Клини и Весли [1965].

[3]) Это соглашение естественно распространить и на последовательные применения сокращения, но автору это в дальнейшем не понадобится.— *Прим. перев.*

вила (в записи дерева доказательства)[1]. В результате этого соглашения 14 логических правил оказываются применимыми, даже если в посылках отсутствуют некоторые формулы.

Пример 7. Следующее доказательство в $G4$ можно преобразовать в более простое доказательство той же секвенции в $G4a$, опустив 13 формул, выделенных жирным шрифтом. Это максимальное упрощение данного доказательства, достигаемое использованием системы $G4a$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(a),\ \mathbf{R},\ \mathbf{\forall x(R\,\&\,P(x)),\ Q(b)}\to\mathbf{\exists xP(x)},\ P(a)}{P(a),\ \mathbf{R},\ \mathbf{\forall x(R\,\&\,P(x)),\ Q(b)}\to\exists x P(x)}\,{\to\exists}}{R\,\&\,P(a),\ \mathbf{\forall x(R\,\&\,P(x)),\ Q(b)}\to\exists x P(x)}\,{\&\to}}{\forall x(R\,\&\,P(x)),\ \mathbf{Q(b)}\to\exists x P(x)}\,{\forall\to} \qquad \dfrac{Q(b),\ \mathbf{\forall x(R\,\&\,P(x))}\to\mathbf{\exists xQ(x)},\ Q(b)}{Q(b),\ \mathbf{\forall x(R\,\&\,P(x))}\to\exists xQ(x)}\,{\to\exists}}{\forall x(R\,\&\,P(x)),\ Q(b)\to\exists xP(x)\,\&\,\exists xQ(x)}\,{\to\&}}{\forall x(R\,\&\,P(x))\to Q(b)\supset\exists xP(x)\,\&\,\exists xQ(x)}\,{\to\supset}}{\forall x(R\,\&\,P(x))\to\forall x(Q(x)\supset\exists xP(x)\,\&\,\exists xQ(x))}\,{\to\forall}$$

Применение $\to\&$ в том виде, как оно здесь появляется в результате вычеркивания выделенных формул, фактически состоит из двух применений $\text{У}\to$ и одного $\to\&$:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(R\&P(x))\to\exists xP(x)}{\forall x(R\&P(x)),\ \mathbf{Q(b)}\to\exists xP(x)}\,{\text{У}\to} \qquad \dfrac{Q(b)\to\exists xQ(x)}{Q(b),\mathbf{\forall x(R\&P(x))}\to\exists xQ(x)}\,{\text{У}\to}}{\forall x(R\,\&\,P(x)),\ Q(b)\to\exists xP(x)\,\&\,\exists xQ(x)}\,{\to\&}$$

Дальнейшее видоизменение этой системы — а именно отказ от требования элементарности формулы C в схеме аксиом — приводит нас к системе $G4b$.

Теоремы 33 и 36 со следствием (и леммы 6 (a) и 7, в формулировки которых включены новые постулаты) без всяких затруднений распространяются на $G4a$ и $G4b$, так как рассмотрение случаев $\to\text{У}$, $\text{У}\to$, $\to C$, $C\to$ и ослабленной схемы аксиом оказывается тривиальным.

Подформулой (подформулами) некоторой формулы F мы будем называть саму F и все формулы, получаемые из F путем последовательного ее расщепления (т. е. вычеркиванием одного за другим входящих в нее операторов — пока не дойдем до элементарных формул); при этом мы считаем результатом вычеркива-

[1]) Без каких-либо специальных оговорок; в [BM] (стр. 392) в записи таких последовательных применений структурных правил — в том числе сокращения (см. предыдущее примечание) и перестановки (см. примечание 2 к стр. 395) — применяется двойная горизонтальная черта, отделяющая посылку применения предыдущего логического правила от его заключения. — *Прим. перев.*

ния $\forall x$ из $\forall x A(x)$ или $\exists x$ из $\exists x A(x)$ формулу $A(r)$, где r — любой терм, свободный для x в $A(x)$.

Более подробно это определение формулируется так. Прежде всего, определяются *непосредственные подформулы* сложной формулы F: это формулы, которые могут быть боковыми формулами в применении любого из 14 логических правил вывода $\rightarrow\supset, \ldots, \exists\rightarrow$ с F в качестве главной формулы. Теперь *подформулами* данной формулы F мы будем называть саму формулу F, ее непосредственные подформулы, если F — сложная формула, непосредственные подформулы последних, если таковые являются сложными, и т. д.

Например, подформулами формулы $\forall a \forall b (P(b) \& Q(a))$ являются: сама формула $\forall a \forall b (P(b) \& Q(a))$, все формулы $\forall b (P(b) \& Q(r))$, где r есть произвольный терм, не содержащий (свободно) b, все формулы $P(u) \& Q(r)$, где u есть терм, не содержащий свободно b, и, наконец, все $P(u)$ и все $Q(r)$ с теми же оговорками относительно u и r, что и выше. В частности, $Q(b)$ не есть подформула формулы $\forall a \forall b (P(b) \& Q(a))$; ср. упр. 49.2.

Сопоставляя определение «подформулы» со сделанными выше (§ 49) замечаниями об отношениях родства в доказательствах системы $G4$ (замечания эти сохраняют свою силу и для $G4a$ и $G4b$), получаем следующий результат.

Лемма 13. (Свойства наследственности и подформульности[1].) *В каждой данной секвенции из доказательства в $G4$, $G4a$ или $G4b$:*

для каждого вхождения формулы можно установить, предком какого вхождения формулы в конечную секвенцию оно является; при этом первая формула является подформулой последней;

для каждой подформулы (или целой формулы) можно установить, образом-предком какой подформулы, входящей в конечную секвенцию, она является; при этом первая подформула либо совпадает с последней, либо получается из нее посредством свободных подстановок термов вместо свободных вхождений переменных;

для каждого вхождения пропозициональной связки или квантора можно установить, предком (образом-предком) какого вхождения той же связки или квантора в конечную секвенцию оно является.

В отличие от $G4$, $G4a$ и $G4b$, упомянутая выше генценовская система LK ($G1$) не обладает свойством подформульности, поскольку формула C из посылки сечения может не быть подформулой никакой формулы из заключения. Точно так же система гильбертовского типа H не обладает соответствующим свойством подформульности, т. е. не каждая формула, входящая в какое-

[1]) В русском издании [ВМ] второй из этих терминов переводится как «свойство подформулы» (стр. 397); Карри [1963] (стр. 324) пользуется термином «свойство композиции» (composition property).— *Прим. перев.*

либо доказательство, непременно является подформулой доказываемой формулы. В самом деле, когда мы выводим B из A и $A \supset B$ по modus ponens, $A \supset B$ заведомо не является подформулой B, да и A вовсе не обязательно является таковой.

Поэтому доказательства в системе *H* обычно состоят не только из «частей» доказываемой формулы. Мы уже говорили об этом обстоятельстве в § 40 как о причине того, что решение проблемы разрешения для рассматривавшихся там формальных систем (гильбертовского типа) не может быть чисто механически извлечено из определения «доказуемой формулы». Но для *исчисления высказываний*, формализованного посредством системы *G*4, мы можем на этом пути (воспользовавшись свойством подформульности) решить проблему разрешения. В самом деле, в системе *G*4 процедура поиска доказательства должна просто закончиться с результатом (I) или (II) после не более чем одного шага вдоль каждой ветви дерева для каждого вхождения пропозициональной связки в формулу F. При использовании систем *G*4a, *G*4b или систем, описанных в [BM], доказательство чуть удлиняется ввиду наличия правил сокращения $\to C$, $C \to$ [1]). Конечно, для классического исчисления высказываний мы получаем таким образом лишь еще одно *доказательство* разрешимости и новый *разрешающий алгорифм*. Для интуиционистского же исчисления высказываний именно так (Генценом [1934—5]) была впервые установлена разрешимость [2]).

Этот способ не годится для исчисления предикатов, так как расщепление $\forall x A(x)$ или $\exists x A(x)$ дает бесконечно много подформул $A(r)$ [3]). И, согласно теореме VII из § 45, не годится никакой другой способ.

Доказательства в системе генценовского типа, обладающей свойством подформульности, находится в «некоторой определенной, хотя ни в коем случае не однозначной нормальной форме» (Генцен [1934—5], стр. 10). В него не вводится никаких понятий, кроме тех, которые содержатся в конечном результате и поэтому обязательно должны быть использованы для получения этого результата [4]). Сам этот результат постепенно строится,

---

[1]) См. [BM], стр. 426—428.

[2]) См. там же.

[3]) Но та же схема использована в [BM] (§ 80) для установления того факта, что некоторые классически доказуемые формулы исчисления предикатов интуиционистски недоказуемы. Интуиционистская недоказуемость доказывается здесь посредством построения бесконечной ветви секвенциального дерева в генценовской системе *G*3. См. также Карри [1950].

[4]) Исключение: могут вводиться (индивидные и) функциональные символы, не входящие в конечную секвенцию, если это допускается правилами данной системы. Однако, согласно нашему доказательству полноты (§ 48—50), для каждой доказуемой (и, следовательно, общезначимой) секвенции может быть

как здание, из своих блоков (подформул), и ничего из того, что уже возведено, не разбивается. «Доказательство не содержит никаких окольных путей (Umwege)».

Такие доказательства мы будем называть «прямыми»[1]).

В содержательной математике и в математике, формализованной в рамках систем гильбертовского типа, доказательства, как правило, не являются «прямыми» в только что определенном смысле. Представим себе, например, что мы доказали в арифметике (элементарной теории чисел), что каждое простое число обладает некоторым свойством *B*. Этот результат мог бы, скажем, фигурировать в учебнике как «теорема 1066». Мы могли бы в дальнейшем применить эту теорему 1066 для получения заключения о том, что число 7 обладает свойством *B*. Было ли бы это доказательство последнего утверждения прямым (исходя из первоначальных посылок)? — Вряд ли. Такое доказательство могло бы быть в действительности очень и очень «окольным» — если, скажем, в доказательстве самой теоремы 1066 пришлось преодолевать какие-нибудь специфические трудности, связанные не с числом 7, а, допустим, с числами 61 и $2^{2281}-1$.

Если E есть конъюнкция $E_1 \& \dots \& E_k$ замыканий аксиом арифметики $A_1, \dots, A_k$, используемых в доказательстве теоремы 1066, то в исчислении предикатов можно формализовать следующее доказательство. Начинается оно с доказательства $E \supset \forall x(\Pr(x) \supset B(x))$ (формулы, выражающей теорему 1066); далее идет доказательство формулы $E \supset \Pr(7)$, и наконец, используя аксиому $\forall x (\Pr(x) \supset B(x)) \supset (\Pr(7) \supset B(7))$ по $\forall$-схеме и средства исчисления высказываний, мы получаем $E \supset B(7)$. Не очень-то прямым получилось бы это доказательство в исчислении предикатов.

в системе *G*4 найдено доказательство, в которое входили бы лишь (индивидные) функциональные и предикатные символы, содержащиеся в этой секвенции. Или же просто в рамках теории доказательств в любом данном доказательстве мы можем заменить (индивидные), функциональные и предикатные символы, не принадлежащие конечной секвенции (или — в гильбертовских системах — заключительной формуле) подобно тому, как это делается в теореме 31 из § 29 и в теоретико-доказательственной трактовке подстановки (примечание на стр. 159, § 25).

[1]) Мы пользуемся здесь термином «прямое» в более общем смысле, нежели в концах § 13 и 25. Там мы называли доказательство (или метод доказательства) «косвенным», если для доказательства утверждения F мы начинали с вывода противоречия из гипотезы $\neg F$ (т. е. получали $\neg\neg F$, подготавливая $\neg$-удаление) или чего-нибудь еще в том же роде.

В § 13 (в начале), 21, 23 и др. термин «прямое» употреблялся еще в одном смысле: в составе термина «прямое правило» — в отличие от «правила вспомогательного вывода».

То, что доказательство в *G*1 без сечения является прямым — в отличие от соответствующего доказательства в *G*1 с сечением — проиллюстрировано в [BM] (пример 1 на стр. 396—397).

Хотим ли мы в каком-нибудь конкретном случае добиваться, чтобы доказательства были прямыми, определяется нашими дальнейшими целями.

Если теорема 1066 у нас уже как-то доказана, то гораздо проще *добавить* к этому доказательству совсем простой вывод импликации $E \supset B$ (7), чем строить ее прямое доказательство, базирующееся на исходных принципах нашей теории.

В математике мы обычно стремимся получать общие теоремы, запас которых в дальнейшем может быть использован и для получения конкретных результатов, и для вывода новых общих теорем. Именно поэтому системы гильбертовского типа оказались удобным средством формализации математики — в том виде, как она в действительности строится. В обычной арифметике нам незачем иметь дело с «$E \supset$» из приведенного только что примера — мы просто включаем $A_1, \ldots, A_k$ в число аксиом нашей системы (скажем, **N** из § 38).

Тем не менее открытие Генцена [1934—5], что если существует какое-нибудь (чисто логическое) доказательство некоторого утверждения, то для этого утверждения существует и прямое доказательство, имеет большое значение[1]). Непосредственные применения это открытие имеет не столько при пополнении запаса доказанных формул, сколько в теоретических логических исследованиях[2]).

Рассмотрим любую (связную) часть A некоторой данной формулы B, не содержащей знака $\sim$ (или хотя бы не содержащей A в области действия $\sim$), — эта часть может быть формулой,

---

[1]) Эрбран [1930] показал, что любую доказуемую формулу исчисления предикатов можно доказать, не пользуясь правилом modus ponens в тех частях доказательства, в которые входят кванторы. Генцен получил свою «основную теорему» («теорему о нормальной форме»), не пользуясь результатом Эрбрана. Изложение Генцена [1934—5] вполне четко, в доказательстве же Эрбрана [1930] обнаружены погрешности, исправленные лишь совсем недавно; см. примечание 1 на стр. 414 (а также статью Г. Е. Минца в книге под редакцией Идельсона и Минца [1967]. — *Перев.*).

[2]) Впрочем, работа Генцена и связанные с ней работы других авторов имеют и практическую сторону. Мы могли убедиться в этом в связи с нашей формулировкой (B_2) в конце § 13. Ее можно получить, если взять подходящую систему генценовского типа, но не выписывать всякий раз формулы, входящие в антецедент. Так Генцен [1934—5] получил свои «системы натурального вывода». [Из некоторых замечаний самого Генцена ([1934—5], стр. 10, [1939], стр. 166) можно было бы сделать вывод, что для него исходными были как раз натуральные системы. Переход к секвенциальным системам вызывался соображениями удобства и изящества метаматематических рассуждений.— *Ред.*] Яськовский [1934] ввел такие системы непосредственно (реализовав идею Лукасевича, высказанную на семинаре в 1926 г.). Похожи на эти системы и семантические таблицы Бета (см. примечание на стр. 344). Но в нашей логической практике мы предпочитаем пользоваться гибким аппаратом выводимых правил, а не привязывать жестко изложение к какой-нибудь одной из подобных систем. См. § 25, а также Правиц [1965].

оператором или предикатным параметром. Как в теореме 24 (для подформул), мы будем называть A *положительной* или *отрицательной* частью B в зависимости от того, входит A в четное или нечетное число частей B вида $\neg D$ и $D \supset E$ (где D и E — формулы). Например, в формуле $\exists x(P \supset Q(x)) \supset (P \supset \exists x Q(x))$ первое вхождение $\supset$ отрицательно, остальные два положительны; первое вхождение P положительно, второе отрицательно; первое вхождение Q(x) отрицательно, второе положительно.

Возьмем теперь в качестве B одну из формул списка Λ в секвенции $\Delta \to \Lambda$; тогда положительные и отрицательные части B мы будем считать соответственно *Положительными* и *Отрицательными* частями всей секвенции $\Delta \to \Lambda$; если же B есть одна из формул списка Δ, то каждую ее положительную часть мы будем считать *Отрицательной* частью всей секвенции, а отрицательную — *Положительной* частью секвенции. Или, что то же самое, часть A секвенции $\Delta \to \Lambda$, не содержащей знака $\sim$, считается *Положительной* или *Отрицательной* в зависимости от того, четное или нечетное число раз (суммарно) эта часть входит в эту секвенцию непосредственно после знака $\neg$ и непосредственно перед знаками $\supset$ и $\to$. (Чтобы подчеркнуть различие между понятиями, относящимися к A как к части формулы B или же как к части секвенции $\Delta \to \Lambda$, мы в последнем случае пишем соответствующие термины с заглавных букв.) Например, в секвенции $\exists x(P \supset Q(x)) \to P \supset \exists x Q(x)$ первое вхождение P отрицательно (как часть формулы $\exists x(P \supset Q(x))$, но в то же время Положительно (как часть всей секвенции).

Лемма 14. (Свойство знака.) *В доказательстве в* $G4$, $G4a$ *или* $G4b$ *секвенции* $\Delta \to \Lambda$, *не содержащей знака* $\sim$, *каждый образ Положительной части* $\Delta \to \Lambda$ *Положителен, а каждый образ Отрицательной части Отрицателен.*

Правильность этого утверждения можно усмотреть из наших примеров; удостовериться в верности его в общем случае можно путем поочередной проверки 12 логических правил (всех, кроме $\to \sim$ и $\sim \to$), а для $G4a$ и $G4b$ еще и 4 структурных правил.

Согласно лемме 14, знак каждой формульной части в секвенции $\Delta \to \Lambda$, не содержащей знака $\sim$, полностью определяет и то, какие правила используются при поиске вывода из $\Delta \to \Lambda$ снизу вверх, и то, что эта часть имеет в качестве образа сукцедентную формулу (если Знак Положителен) или же антецедентную (Знак Отрицателен)[1].

[1]) Подформулы данной формулы, не содержащей $\sim$, в зависимости от того, является ли сама эта формула сукцедентной или антецедентной, соответственно называют *сукцедентными подформулами* (Положительными) или *антецедентными подформулами* (Отрицательными). См. изложение в Клини [1952], стр. 10, которому мы здесь по существу следуем (включая лемму 14). Термины

Два правила $\rightarrow\sim$ и $\sim\rightarrow$ отличаются от прочих тем, что когда $A \sim B$ является главной формулой с данной стороны от стрелки, то получаются два вхождения A с каждой стороны от стрелки (и аналогично по отношению к B).

Если нам дана логическая проблема, сформулированная с использованием $\sim$, то мы можем применить введенные выше понятия «Знак» и пр., заменив каждую часть вида $A \sim B$ на $(A \supset B) \& (B \supset A)$ и применяя п.*63а из теоремы 2. Мы можем также применить предыдущие соображения непосредственно, полагая, что каждая подформула, принадлежащая области действия в точности n вхождений знака $\sim$, имеет «кратность» 2^n; при этом мы можем считать, что у нас есть 2^n экземпляров этой подформулы: 2^{n-1} из них Положительны и 2^{n-1} Отрицательны.

Упражнения 54.1. Покажите, что в $G4a$ и в $G4b$ можно, не изменяя класса доказуемых секвенций, упростить схему аксиом до $C \rightarrow C$, упростить правила $\& \rightarrow$ и $\rightarrow \vee$, опуская любую из боковых формул (получаются четыре правила) и упростить правила $\forall \rightarrow$ и $\rightarrow \exists$, опуская главные формулы в посылке. (В применении к $G4b$ это дает систему Ga, отличающуюся от G из работы Клини [1952] лишь наличием двух $\sim$-правил. В [BM] и Клини [1952] в числе исходных символов нет $\sim$.)

54.2*. Покажите, что если $\vdash F$ в H, то существует доказательство F, содержащее только $\supset$, $\neg$ и те из $\&$, $\vee$, $\sim$, $\forall$, $\exists$, которые входят в F, причем это доказательство — в H или (если в F входит $\forall$, но не входит $\&$) в расширении H, содержащем схему аксиом $\forall x (C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x))$, где C не содержит свободно x. ([BM], теорема 49 на стр. 406.)

*§ 55. Перестановочность; теорема Эрбрана

Типичная проблема логики — исследование условий, при выполнении которых формулы или секвенции определенного вида оказываются доказуемыми.

Тот факт, что доказательства в системах $G4$, $G4a$ и $G4b$ являются «прямыми» (§ 54), облегчает анализ их структуры; благодаря этому информация о существовании доказательств в таких системах оказывается значительно более содержательной, чем аналогичная информация по поводу систем типа H. Поэтому можно начать исследование с того, чтобы с помощью теоремы Генцена констатировать, что если некоторая формула F дока-

---

«предок», «потомок» и «образ» взяты как раз из этой статьи. «Подформула» в этой работе должна была бы определяться как в [BM] или как в настоящей книге (это отметил В. П. Оревков); соответствующее исправление внесено в русское издание этой статьи.

зуема в H (или общезначима), то секвенция $\to \mathrm{F}$ доказуема в $G4$, $G4$a или $G4$b.

Рассматривая доказательства в $G4$, $G4$a или $G4$b, мы будем говорить, что данное применение логического правила *принадлежит* данному вхождению некоторого оператора в конечную секвенцию, если главный оператор этого применения есть предок этого вхождения. В силу леммы 13 доказательство в $G4$ состоит исключительно из применений правил, принадлежащих различным вхождениям операторов в конечную секвенцию, некоторым образом упорядоченным. В системах $G4$a и $G4$b могут также применяться структурные правила вывода. По лемме 14 при отсутствии $\sim$ данному вхождению оператора в конечную секвенцию могут принадлежать лишь применения какого-нибудь одного из 12 логических правил, отличных от $\to\sim$ и $\sim\to$, а именно применение сукцедентного или антецедентного правила для этого оператора в зависимости от того, является данное вхождение Положительным или Отрицательным[1]).

Например, в $G4$, $G4$a или $G4$b доказательство секвенции

$$\to \exists_2 x\,(\mathrm{P} \supset_1 \mathrm{Q}(x)) \supset_5 (\mathrm{P} \supset_4 \exists_3 x \mathrm{Q}(x))$$

(где мы нумеруем операторы для удобства ссылок) состоит из применений правил

$$\exists_2\!\to,\ \ \supset_1\!\to,\ \ \to\supset_5,\ \ \to\supset_4,\ \ \to\exists_3,$$

принадлежащих соответствующим операторам (помеченным соответствующими индексами) и, быть может, применений структурных правил.

В общем случае данному вхождению какого-либо оператора в конечную секвенцию может принадлежать нуль, одно или более одного применений правил вывода.

В завершение нашего обсуждения теоремы Генцена о «нормальной форме» доказательств нам остается рассмотреть порядок, в котором расположены (вместе с применениями структурных правил) применения логических правил, принадлежащие различным вхождениям операторов.

Мы убедимся, что в доказательствах в системах $G4$a и $G4$b, не говоря уже о полной свободе в порядке применения структурных правил, мы можем, в соответствии с нашими целями, выбирать и порядок применений логических правил (с некоторыми сформулированными ниже ограничениями). Таким образом, посредством «перестановки» применений логических правил в данном доказательстве мы сможем приводить его к виду, более удобному для рассмотрения его структуры.

---

[1]) Как поступать в случае $\sim$-правила, указано в последнем абзаце § 54.

Пример 8. Предположим, что два применения правил $\rightarrow\forall$ и $\rightarrow\&$, указанные внизу слева, входят в некоторое доказательство в $G4$a или $G4$b. Главная формула верхнего применения не является боковой формулой нижнего. Эту часть доказательства можно, ничего не меняя в остальных его частях, заменить фигурой (изображенной правее и ниже), в которой $\rightarrow\&$ находится выше, чем $\rightarrow\forall$. Короче говоря, $\rightarrow\&$ можно поднять выше $\rightarrow\forall$, или «переставить» их.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\ P(b),\ Q}{\Gamma\rightarrow\Theta,\ \forall xP(x),\ Q}\rightarrow\forall \qquad \Gamma\rightarrow\Theta,\ \forall xP(x),\ R(a)}{\Gamma\rightarrow\Theta,\ \forall xP(x),\ Q\,\&\,R(a)}\rightarrow\&$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\rightarrow\Theta,\ P(b),\ Q \qquad \Gamma\rightarrow\Theta,\ \forall xP(x),\ R(a)}{\Gamma\rightarrow\Theta,\ P(b),\ \forall xP(x),\ Q\,\&\,R(a)}\rightarrow\&}{\Gamma\rightarrow\Theta,\ \forall xP(x),\ \forall xP(x),\ Q\,\&\,R(a)}\rightarrow\forall}{\Gamma\rightarrow\Theta,\ \forall xP(x),\ Q\,\&\,R(a)}\rightarrow C$$

В этом примере мы не могли бы просто переставить $\rightarrow\&$ и $\rightarrow\forall$, если бы в верхней фигуре вместо $P(b)$ было $P(a)$. Этому помешало бы ограничение на переменные для $\rightarrow\forall$ (§ 48).

Такие трудности не возникают, если доказательство обладает свойством *чистоты переменных*, т. е. если никакая переменная не входит в него одновременно свободно и связанно, и для каждого применения $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$ переменная b этого применения входит лишь в секвенции, расположенные выше заключения. (Если $A(x)$ не содержит x свободно, мы можем выбрать b так, чтобы она удовлетворяла этому условию.)

Лемма о чистоте переменных. *Любое доказательство секвенции* $\Delta\rightarrow\Lambda$, *в которую никакая переменная не входит одновременно свободно и связанно, в любой из систем* $G4$, $G4$a *или* $G4$b *может быть заменено доказательством той же секвенции, обладающим свойством чистоты переменных, посредством простой замены некоторых входящих в это доказательство переменных на вхождения других переменных.*

Доказательство. Рассмотрим данное доказательство секвенции $\Delta\rightarrow\Lambda$. Согласно последней части леммы 13, каждая переменная, входящая связанно в любую часть этого доказательства, непременно входит связанно (а тем самым, согласно предположению, не входит свободно) в конечную секвенцию $\Delta\rightarrow\Lambda$. Каждая из *этих* же переменных, которая входит в данное доказательство также и свободно, может быть заменена (во всех своих свободных вхождениях) на какую-нибудь другую переменную, которая до этого в доказательство вообще не входила. Теперь мы каждому применению $\rightarrow\forall$ или $\exists\rightarrow$ в *новом* доказательстве следующим образом сопоставим некоторое семейство секвенций. Если формула A(x) данного применения не содержит свободно x, то семейство это пусто. В противном же случае оно состоит из посылки данного применения и всех секвенций, содержащих b свободно и таких, что до них можно добраться по дереву от данной посылки, идя по непрерывной цепочке таких секвенций. Согласно ограничению на переменные, для правил $\to\forall$ и $\exists\to$ такое семейство секвенций не содержит заключения данного применения. Два различных таких семейства с одной и той же переменной b не пересекаются (в противном случае нарушалось бы ограничение на переменные для того из этих применений, которое расположено выше). Чтобы получить теперь доказательство секвенции $\Delta\to\Lambda$, обладающее свойством чистоты переменных, нам надо лишь рассмотреть все содержащие b семейства из данного доказательства и заменить в каждом из них b на любую другую переменную, не встречавшуюся до тех пор в доказательстве[1]).

Пример 9. Вот каким образом применение однопосылочного правила может быть поднято выше применения двухпосылочного:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma\to\Theta,\ P(b),\ Q \qquad \Gamma\to\Theta,\ P(b),\ R(a)}{\Gamma\to\Theta,\ P(b),\ Q\,\&\,R(a)}\ \to\&}{\Gamma\to\Theta,\ \forall xP(x),\ Q\,\&\,R(a)}\ \to\forall$$

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma\to\Theta,\ P(b),\ Q,}{\Gamma\to\Theta,\ \forall xP(x)\ Q}\ \to\forall \qquad \cfrac{\Gamma\to\Theta,\ P(b),\ R(a)}{\Gamma\to\Theta,\ \forall xP(x),\ R(a)}\ \to\forall}{\Gamma\to\Theta,\ \forall xP(x),\ Q\,\&\,R(a)}\ \to\&$$

Такое преобразование нарушает свойство чистоты переменных. Но это свойство можно восстановить, для чего достаточно заменить некоторые переменные в соответствии с леммой о чистоте переменных; достаточно, например, заменить все вхождения b над одним из двух новых $\to\forall$ на некоторую переменную c, ранее не входившую в данное доказательство.

Пример 10. Рассмотрим еще раз секвенцию

$$\to \exists_2 x\,(P \supset_1 Q(x)) \supset_5 (P \supset_4 \exists_3 x Q(x)).$$

Насколько свободны мы при выборе порядка применений правил

$$\exists_2\to,\quad \supset_1\to,\quad \to\supset_5,\quad \to\supset_4,\quad \to\exists_3$$

[1]) Описанная в § 49—50 процедура поиска вывода приводит к доказательству с чистыми переменными (когда имеет место II), если ее слегка изменить: при каждом ветвлении (возникающем в результате применения двухпосылочных правил) надо разбивать перечень еще не активированных переменных $a_0, a_1, a_2, \ldots$ на непересекающиеся списки, один из которых использовать для одной посылки, другой — для другой.

в ее доказательстве? Один из допустимых здесь порядков (если читать сверху вниз: $\exists_3$, $\supset_1\to$, $\exists_2\to$, $\to\supset_4$, $\to\supset_5$) приведен в примере 2 из § 48. Ясно, что применения $\to\supset_5$ должны следовать за всеми остальными, так как вхождения всех остальных операторов в конечную секвенцию попадают в область его действия; поэтому применения, используемые для введения этих прочих операторов в процессе построения боковой формулы для $\to\supset_5$, должны появиться выше. По этой же причине каждое применение $\exists_2\to$ должно находиться ниже каждого $\to\supset_1$, а каждое $\to\supset_4$ — ниже каждого $\to\exists_3$. Есть и другое ограничение. Если в упомянутом примере 2 мы вначале поднимали $\supset_1\to$ над $\exists_3$, так что $\exists_2\to$ оказывалось непосредственно под $\to\exists_3$, то мы не можем вслед за этим поднимать $\exists_2\to$ над $\to\exists_3$; если бы мы так сделали, нарушилось бы ограничение на переменные для $\exists_2\to$, так как переменная a_0 вошла бы свободно в заключение.

Оказывается, что при перестановке двух *смежных* применений логических правил (т. е. таких, что между ними применяются разве лишь структурные правила) могут встретиться лишь те два препятствия, которые проиллюстрированы в примере 10. Можно показать, что справедлива следующая

Лемма о перестановке. *Если ни одно из указанных выше препятствий не имеет места, то два соседних применения логических правил в доказательстве в G4a или G4b всегда можно переставить, причем в результате получится доказательство, обладающее свойством чистоты переменных*[1].

Что же этот результат позволяет нам делать с доказательством в целом? Должно быть достаточно очевидно, что посредством конечного числа последовательных перестановок смежных применений логических правил мы можем получить следующий результат. (Если члены нескольких семей стоят в общей очереди, то путем последовательных перестановок стоящих друг за другом членов очереди можно добиться, чтобы каждая семья занимала один отрезок этой очереди.)

Теорема о перестановочности. (Клини [1952].) *Пусть вхождения операторов в конечную секвенцию $\Delta\to\Lambda$ (не содержащую знака $\sim$) доказательства в G4a или G4b, обладающего свойством чистоты переменных, разбиты на q классов $C_1, \ldots, C_q$ от «высшего» до «низшего» таким образом, что* (1) *вхождение одного оператора, находящееся в области действия другого, попадает в тот же класс, что и этот другой, или в более высокий класс и* (2) *каждое вхождение*

---

[1]) В статье Клини [1952] эта лемма о перестановке фигурирует в качестве леммы 7 (в которой дается исчерпывающий обзор всех возможных случаев) для системы G, несущественно отличающейся от G4b (см. упр. 54.1), а (следующая ниже) теорема о перестановочности — в качестве теоремы 2.

оператора вида $\forall\to$ или $\to\exists$ попадает в тот же или более высокий класс, чем любое вхождение оператора вида $\to\forall$ или $\exists\to$, если только оператор одного из последних видов не находится внутри области действия оператора одного из первых. Тогда это доказательство можно перестроить (с сохранением свойства чистоты переменных) в такое доказательство той же секвенции $\Delta\to\Lambda$, что вдоль каждого пути нуль или более применений (принадлежащих вхождениям логических операторов) из класса C_1 идут выше всех, затем C_2, ... — вплоть до применений из самого низшего класса C_q.

Применим этот результат к доказательству в $G4$a, обладающему свойством чистоты переменных (полученному в случае необходимости из данного доказательства с помощью леммы о чистоте переменных), секвенции $\Delta\to\Lambda$, состоящей из предваренных формул (§ 25). Пусть C_1 — это совокупность всех пропозициональных операторов из $\Delta\to\Lambda$, а C_2 — совокупность всех предикатных операторов этой секвенции. Поскольку $\Delta\to\Lambda$ состоит из предваренных формул, условие (1) выполнено. А поскольку все предикатные операторы собраны вместе, то выполнено и условие (2). Поэтому наше доказательство можно перестроить таким образом, чтобы все применения пропозициональных правил стали выше всех применений предикатных правил[1]). Если идти снизу вверх, мы не встретим ветвления, пока не дойдем до применений пропозициональных правил. Рассмотрим теперь секвенцию, являющуюся заключением высшего из применений предикатных правил. В нее могут входить формулы с кванторами (причем все эти кванторы должны непременно стоять в начале этих формул, поскольку последние являются подформулами предваренных формул). Но никакой предок ни одной из этих формул не может выступать в роли расположенной выше главной формулы (так как все применения предикатных правил расположены ниже). Поскольку в $G4$a все формулы C в аксиомах элементарны, никакой предок никакой из этих формул не может играть роль формулы C в аксиоме[2]). Таким образом, если все эти кванторные формулы просто вычеркнуть из рассматриваемой верхней секвенции и выше, а затем выкинуть и все получившиеся в результате такого вычеркивания тождественные применения (у которых заключения совпадают с посылками), то мы получим доказательство результирующей секвенции, из которой с помощью утончений можно уже дойти до рассматриваемой секвенции. Итак:

---

[1]) См. примечание на стр. 405.

[2]) Если пользоваться здесь «основной теоремой» Генцена (см. примечание на стр. 396), то от системы $G4$b переходить к $G4$a надо будет лишь до того момента, когда все аксиомы станут бескванторными. (См. [ВМ], стр 407.)

Для любого доказательства в $G4$а *секвенции* $\Delta \to \Lambda$, *содержащей только предваренные формулы и не содержащей никакой переменной одновременно и свободно, и связанно, можно найти доказательство (также в* $G4$а*) той же самой секвенции, которое обладает свойством чистоты переменных и в которое входит некоторая секвенция (именуемая средней секвенцией), не содержащая кванторов, причем выше этой секвенции в полученном доказательстве будут входить только применения пропозициональных и структурных правил, а ниже нее — только применения предикатных и структурных правил*[1]. Это и есть так называемая *усиленная* (или *обобщенная*) основная теорема Генцена [1934—5][2].

Чтобы выяснить значение этого результата, посмотрим, какие правила используются в части доказательства, идущей вниз от средней секвенции.

Пусть, например, используемые правила образования таковы, что, кроме предикатных параметров (ионов) и переменных, имеется в точности одна индивидная константа $\varkappa$ и один одноместный функциональный символ λ[3]. Пусть $A(w, x, y, z)$ — бескванторная формула. Допустим, что $\vdash \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$ в системе H и что в результате применения теоремы Генцена и ее усиленной формы мы получили в $G4$а доказательство секвенции

---

[1]) Нетрудно видеть, что все утончения $\to У$ и $У \to$ можно сдвинуть вниз от средней секвенции (упр. 55.3; решение его составляет содержание леммы 4 из статьи Клини [1952]).

[2]) «Verschärfter Hauptsatz» (усиление основной теоремы) Генцена (при условии, что оно проведено строго метаматематическими средствами) служит удобной основой для доказательств непротиворечивости различных систем, более слабых, чем **N**. См. четвертый абзац из § 54 и [ВМ], § 79.

В доказательстве усиленной основной теоремы Генцена используется только та часть теоремы о перестановочности, которая позволяет поднять все применения пропозициональных правил выше тех применений предикатных правил, главные формулы которых не являются боковыми формулами применений пропозициональных правил.

Впрочем, более общая теорема о перестановочности формулируется ненамного более громоздко (хотя, конечно, доказательство ее требует разбора большего числа случаев). Генцен [1934—5] (стр. 54) говорит о возможности доказательства такой теоремы о перестановочности, не углубляясь в исследование этого вопроса. См. также Карри [1952].

Классический и интуиционистский варианты теоремы о перестановочности были использованы Клини [1952а] в довольно сложном рассуждении. (Лемма 9 этой работы представляет собой утверждение нашего подстрочного примечания 3 на стр. 187 к § 29, установленное метаматематически как для классической, так и для интуиционистской системы.) На этом опыте автор убедился, насколько эффективным инструментом для исследования подобных проблем служат системы генценовского типа (причем именно в формулировке самого Генцена).

[3]) Поскольку нам понадобилось здесь так много латинских букв («a», «b», ..., «x», «y», «z») в качестве обозначений для переменных, мы позволили себе здесь отойти от соглашений § 28 и использовать в качестве функциональных символов не «f», «g», «h», ..., а строчные греческие буквы «α», «β», «γ», ...

$\to \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$ (обладающее свойством чистоты переменных), часть которого, идущая вниз от средней секвенции, выглядит следующим образом (здесь переменные a, b, c, d, e, f, w, x, y, z отличны друг от друга и от всех прочих переменных формулы $A(w, x, y, z)$, если таковые имеются):

$$
\begin{array}{rl}
\to A(\lambda(b), d, \varkappa, e),\ A(a, b, \lambda(c), f),\ A(a, b, b, c) & \\
\hline
\to A(\lambda(b), d, \varkappa, e),\ \forall z A(a, b, \lambda(c), z),\ A(a, b, b, c) & \to\forall \\
\hline
\to A(\lambda(b), d, \varkappa, e),\ \exists y \forall z A(a, b, y, z),\ A(a, b, b, c) & \to\exists \\
\hline
\to \forall z A(\lambda(b), d, \varkappa, z),\ \exists y \forall z A(a, b, y, z),\ A(a, b, b, c) & \to\forall \\
\hline
\to \exists y \forall z A(\lambda(b), d, y, z),\ \exists y \forall z A(a, b, y, z),\ A(a, b, b, c) & \to\exists \\
\hline
\to \forall x \exists y \forall z A(\lambda(b), x, y, z),\ \exists y \forall z A(a, b, y, z),\ A(a, b, b, c) & \to\forall \\
\hline
\to \forall x \exists y \forall z A(\lambda(b), x, y, z),\ \exists y \forall z A(a, b, y, z),\ \forall z A(a, b, b, z) & \to\forall \\
\hline
\to \forall x \exists y \forall z A(\lambda(b), x, y, z),\ \exists y \forall z A(a, b, y, z) & \to\exists \\
\hline
\to \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z),\ \exists y \forall z A(a, b, y, z) & \to\exists \\
\hline
\to \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z),\ \forall x \exists y \forall z A(a, x, y, z) & \to\forall \\
\hline
\to \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z) & \to\exists
\end{array}
$$

Таким образом, средняя секвенция здесь такова:

$$\text{(i)} \qquad \to A(\lambda(b), d, \varkappa, e),\ A(a, b, \lambda(c), f),\ A(a, b, b, c).$$

Некоторые существенные структурные подробности здесь явным образом не оговорены. Посмотрим теперь, каким образом секвенцию (i) можно привести к обозримой форме (хотя при этом она и перестанет быть средней секвенцией), введя специальные символы для функций, именуемых «эрбрановскими функциями», или «скулемовскими функциями» [1]).

Пополним прежде всего символизм нашей генценовской системы $G4$a двумя новыми функциональными символами $\beta(-)$ и $\delta(-, -)$. Будем считать, что $\beta(-)$ и $\delta(-, -)$ соответствуют кванторам всеобщности $\forall x$ и $\forall z$ в формуле из конечной секвенции, поскольку это сукцедентная формула. (Если бы в нашем примере была антецедентная формула, мы бы ввели функциональные символы, соответствующие кванторам существования.)

Подвергнем теперь наш фрагмент доказательства с чистыми переменными от конечной секвенции до средней секвенции пяти последовательным подстановкам — по одной на каждое применение $\to\forall$. (В общем случае нам пришлось бы говорить обо всех применениях $\to\forall$ и $\exists\to$.) Начнем мы с самого нижнего $\to\forall$, в результате которого в боковую формулу $\exists y \forall z A(a, b, y, z)$ *введена* (мы просматриваем наш фрагмент доказательства *снизу*

---

[1]) Такими функциями в свое время пользовался Эрбран [1930], а еще раньше — Скулем [1920], [1922—3], [1929] (в неявной же форме — еще Лёвенгейм [1915]). Ср. третий абзац примечания к стр. 383.

вверх) переменная $\mathfrak{b}$, не входящая ниже посылки. Теперь в рассматриваемом фрагменте вместо каждого из 31 вхождений переменной $\mathfrak{b}$ подставим терм $\beta(\mathrm{a})$. Конечно, эта процедура «испортит» наш фрагмент как часть доказательства в системе $G4\mathrm{a}$ (точнее говоря, «испорчено» будет лишь рассматриваемое применение $\to\forall$); но это уже не наша забота. Мы используем этот фрагмент, постепенно меняя его, как путь для построения некоторой новой секвенции (ii), имеющей более прозрачную структуру, чем сама средняя секвенция (i). Возьмем теперь следующее (снизу вверх) применение $\to\forall$ в нашем уже единожды измененном фрагменте; его измененная боковая формула выглядит так: $\mathrm{A}(\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a}), \beta(\mathrm{a}), \mathrm{c})$. Вместо каждого из восьми вхождений переменной c (все остальные — сверху от этого) в наш фрагмент мы подставим теперь терм $\delta(\mathrm{a}, \beta(\mathrm{a}))$. Затем мы аналогичным образом поступим с оставшимися тремя применениями $\to\forall$ (в теперь уже дважды измененном фрагменте доказательства) — поочередно, снизу вверх. Иными словами, когда боковой формулой некоторого применения $\to\forall$ становится $\exists\mathrm{y}\forall\mathrm{z}\mathrm{A}(\mathrm{r}, \mathrm{v}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, где r — терм, а v — переменная, мы вместо каждого вхождения v подставляем $\beta(\mathrm{r})$; когда же боковой формулой становится $\mathrm{A}(\mathrm{r}, \mathrm{s}, \mathrm{t}, \mathrm{v})$, где r, s и t — термы, v — переменная, мы вместо каждого вхождения v подставляем терм $\delta(\mathrm{r}, \mathrm{t})$. В конечном счете после выполнения всех 5 подстановок наша средняя секвенция примет вид

$$\text{(ii)}\qquad \begin{aligned}\to \mathrm{A}(\lambda(\beta(\mathrm{a})),\ \beta(\lambda(\beta(\mathrm{a}))),\ \varkappa,\ \delta(\lambda(\beta(\mathrm{a})),\ \varkappa)),\\ \mathrm{A}(\mathrm{a},\ \beta(\mathrm{a}),\ \lambda(\delta(\mathrm{a},\ \beta(\mathrm{a}))),\ \delta(\mathrm{a},\ \lambda(\delta(\mathrm{a},\ \beta(\mathrm{a}))))),\\ \mathrm{A}(\mathrm{a},\ \beta(\mathrm{a}),\ \beta(\mathrm{a}),\ \delta(\mathrm{a},\ \beta(\mathrm{a}))).\end{aligned}$$

Структура этой секвенции такова, что мы можем прочитать по ней всю «историю» получения средней секвенции в $G4\mathrm{a}$ шаг за шагом из конечной секвенции $\to\exists\mathrm{w}\forall\mathrm{x}\exists\mathrm{y}\mathrm{A}(\mathrm{w}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$. По этой зафиксированной в (ii) истории мы можем восстановить (i), а также (с точностью до несущественных деталей) все шаги, ведущие от этой секвенции к $\to\exists\mathrm{w}\,\forall\mathrm{x}\,\exists\mathrm{y}\,\forall\mathrm{z}\,\mathrm{A}(\mathrm{w}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ (упр. 55.1).

Мы можем поступать сходным образом, исходя из любой аналогичной ситуации. На этом мы закончим предварительный обзор наших дальнейших построений.

Исследуем теперь имеющиеся результаты.

Представим себе, что перед тем, как начинать подстановки, мы имеем перед собой не только фрагмент, находящийся снизу от средней секвенции (i), но и целое доказательство секвенции $\to\exists\mathrm{w}\forall\mathrm{x}\exists\mathrm{y}\forall\mathrm{z}\mathrm{A}(\mathrm{w}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ в $G4\mathrm{a}$ со свойствами, описанными в усиленной основной теореме Генцена. Часть, находящаяся сверху от средней секвенции (i) (включая ее саму), состоит из аксиом и применений пропозициональных и структурных правил. Предположим теперь, что подстановки $\beta(a)$ вместо b, $\delta(a, \beta(a))$ вместо c, ... были сделаны во всем доказательстве, включая часть, находящуюся над средней секвенцией. Эти подстановки не разрушают ни применений 10 пропозициональных или 4 структурных правил системы *G*4a, ни аксиом по схеме ($\times$). Поэтому часть, находящаяся над средней секвенцией, которая первоначально была доказательством секвенции (i) в *пропозициональном исчислении* *G*4a (т. е. в исчислении предикатов *G*4a минус 4 предикатных правила), станет после подстановок доказательством секвенции (ii) в пропозициональном исчислении *G*4a (к символизму которого добавлены β, δ). Поэтому по теореме 33 общезначима секвенция (ii), а следовательно, в силу упражнения 50.1b — и формула

$$A(\lambda(\beta(a)), \beta\ \lambda(\beta(a))), \varkappa, \delta(\lambda(\beta(a)), \varkappa)) \vee$$
$$\vee A(a, \beta(a), \lambda(\delta(a, \beta(a))), \delta(a, \lambda(\delta(a, \beta(a))))) \vee$$
$$\vee A(a, \beta(a), \beta(a), \delta(a, \beta(a))),$$

т. е. эта формула является тавтологией согласно таблицам истинности исчисления высказываний § 2 (или доказуема в этом исчислении § 9, что эквивалентно тавтологичности в силу § 11, 12)[1].

Половина («только тогда») приводимого ниже утверждения следует из того, что для любого доказательства секвенции $\rightarrow \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$ со свойствами, описанными в усиленной основной теореме Генцена, наш метод подстановок, примененный к фрагменту, находящемуся снизу от средней секвенции, приводит к общезначимой дизъюнкции указанного вида; иными словами, (i) и (ii) «типичны».

Предваренная формула F *вида* $\exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$ (*все кванторы указаны явно*) *выводима в исчислении предикатов H тогда и только тогда, когда имеется общезначимая* (*или, эквивалентным образом, доказуемая*) *в исчислении высказываний H дизъюнкция вида*

$$A(t_{11}, \beta(t_{11}), t_{12}, \delta(t_{11}, t_{12})) \vee \ldots \vee A(t_{l1}, \beta(t_{l1}), t_{l2}, \delta(t_{l1}, t_{l2}))$$

---

[1] Можно было бы вместо этого заметить, что теорема 36 и ее следствие имеют место для исчислений высказываний *G*4a и *H*; иными словами, их доказательства требуют использования постулатов исчисления предикатов в *H* только в том случае, когда данный вывод в *G*4a использует предикатные правила $\rightarrow\forall$, ..., $\exists\rightarrow$. Применяя следствие (c) к секвенции (i), получаем, что $A(\lambda(b), d, \varkappa, e) \vee A(a, b, \lambda(c), f) \vee A(a, b, b, c)$ доказуема в *H* и, следовательно, общезначима в силу теоремы 12. Наконец, мы можем заметить, что подстановки $\beta(a)$ вместо b, $\delta(a, \beta(a))$ вместо c, ... просто порождают подстановку вместо атомов в смысле теоремы 1 § 3.

(эрбрановская дизъюнкция). Здесь $t_{11}, \ldots, t_{l2}$ *— термы, построенные из переменных, (индивидных,) функциональных и предикатных символов формулы* F *и добавочного* 1*-местного функционального символа* β *и* 2*-местного функционального символа* δ.

Это вариант теоремы Эрбрана° [1930] для случая формулы $\exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$. Точнее, это одно из предложений, известных в качестве частичных вариантов (или частей) «основной теоремы» из диссертации Эрбрана [1930]. Другая такая версия совпадает с усиленной основной теоремой Генцена (с учетом примечания 1 на стр. 410) в применении к $\rightarrow$F. Однако вернемся к нашей теореме [1]).

Мы должны еще доказать вторую половину («тогда») [2]). Итак, допустим, что предъявлена некоторая общезначимая эрбрановская дизъюнкция. Надо показать, что $\exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$ доказуема в *H*. Не умаляя общности, будем считать, что все *l* членов эрбрановской дизъюнкции различны, так как иначе мы могли бы устранить повторения, не нарушая тавтологичности. Аналогично мы можем считать, что все переменные в эрбра-

---

[1]) Другая версия, Гильберт и Бернайс [1939], стр. 163—178, следует из наших рассмотрений без привлечения каких-либо существенных идей. Все эти версии относятся к предваренным формулам, в то время как Эрбран сформулировал и пытался доказать свою теорему для произвольных формул. (Формулировка и доказательство теоремы Эрбрана для произвольных формул составляют содержание приложения 2, стр. 448—450.—*Ред.*)

Эрбран погиб в 1931 году, в возрасте 23 лет. Генцен [1934—5] и Гильберт и Бернайс [1939] проводят четкое рассмотрение упомянутых нами версий, исходя из двух разных точек зрения, отличных от эрбрановской. Этими источниками мы и пользовались. Гильберт и Бернайс ([1939], стр. 158) замечают: «За аргументами (Beweisführung) Эрбрана трудно следить». В 1963 году Дребен, Эндрюс и Андера установили, что две из лемм Эрбрана неверны. Эрбрановский текст стал доступен без затраты излишних усилий лишь после перевода Дребена и ван Хейеноорта, снабженного комментариями ван Хейеноорта [1967]. Дребен и Дентон [1966] разработали основные идеи диссертации Эрбрана, получив, наряду с другими вещами, связь между устранимостью modus ponens (или сечения) и непротиворечивостью арифметики, которая отсутствовала в доказательствах непротиворечивости Генцена [1936], [1938a].

[2]) Доказательство теоремы Гёделя о полноте в Клини [1958] приводит непосредственно к этой половине теоремы Эрбрана в качестве основного результата (вместо полноты генценовской системы *G*4). Это делается путем такого усовершенствования легкого доказательства теоремы Лёвенгейма — Скулема с помощью аксиомы выбора (примечание к стр. 383, абзацы 3, 4), при котором постепенно набираются истинностные значения атомов для построения выполняющего распределения (примечание к стр. 383, абзац 5). В этом отношении оно весьма похоже на доказательства основного результата у Скулема [1922—3] и [1929] (о которых Клини не знал в 1958 г.). Оставшаяся часть доказательства (у Клини [1961]) — это наше доказательство второй половины («тогда») теоремы Эрбрана.

Доказательство в [BM], стр 345—349, весьма похоже, хотя выглядит довольно непохожим. Оно было написано непосредственно после появления статьи Генкина [1949]; основная идея этой статьи приспособлена в [BM] для доказательства первой леммы.

новской дизъюнкции отличны от w, x, y, z; по существу мы всегда могли бы добиться этого, сделав некоторые изменения, согласно теореме 1 § 3.

Рассмотрим различные термы вида $\beta(\mathrm{s})$ (где s — терм) и $\delta(\mathrm{s}, \mathrm{t})$ (где s, t — термы), входящие в нашу эрбрановскую дизъюнкцию, или, если не все из переменных w, x, y, z входят в $A(\mathrm{w}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, то рассмотрим термы указанного вида, входящие в термы, указанные явно в приведенном выше выражении для эрбрановской дизъюнкции. Перечислим их в списке

$$\mathrm{t}_0, \ \ldots, \ \mathrm{t}_p$$

в таком порядке, чтобы *термы, входящие в* s (*включая сам* s), *предшествовали* $\beta(\mathrm{s})$ *и чтобы* $\beta(\mathrm{s})$ *и термы, входящие в* t (*включая сам* t), *предшествовали* $\delta(\mathrm{s}, \mathrm{t})$. Очевидно, что их можно перечислить в таком порядке. Действительно, мы можем перенумеровать все термы, которые можно построить из переменных, индивидных и функциональных символов эрбрановской дизъюнкции (включая β, δ) с помощью метода цифр для алфавита, в котором β предшествует δ ((A) § 32). Рассматриваемые термы $\mathrm{t}_0, \ldots, \mathrm{t}_p$ встретятся в этой нумерации как раз в требуемом порядке.

Далее, сопоставим термам $\mathrm{t}_0, \ldots, \mathrm{t}_p$ соответственно переменные

$$\mathrm{a}_0, \ \ldots, \ \mathrm{a}_p,$$

отличные друг от друга, от всех переменных из эрбрановской дизъюнкции и от w, x, y, z.

Для любого терма r из эрбрановской дизъюнкции пусть $\bar{\mathrm{r}}$ получается из r путем замены каждого максимального подтерма, имеющего вид $\beta(\mathrm{s})$ или $\delta(\mathrm{s}, \mathrm{t})$ (где s, t — термы), на сопоставленную этому подтерму переменную. В силу теории собственных спариваний из § 38 любые два таких максимальных подтерма не налегают друг на друга.

Эрбрановская дизъюнкция (общезначимость которой мы предположили) останется общезначимой после замены каждого ее атома $P(\mathrm{r}_1, \ldots, \mathrm{r}_n)$ на $P(\bar{\mathrm{r}}_1, \ldots, \bar{\mathrm{r}}_n)$. Действительно, одинаковые атомы меняются одинаково, так что мы имеем операцию подстановки в смысле теоремы 1 § 3. Поэтому $\models \mathrm{D}$ в исчислении высказываний *H*, где D — получающаяся дизъюнкция.

Но β и δ — это функциональные символы, не входящие в $A(\mathrm{w}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$. Следовательно, операция замены максимальных подтермов $\beta(\mathrm{s})$ и $\delta(\mathrm{s}, \mathrm{t})$ на соответствующие переменные происходит внутри указанных явно термов t_{i1}, $\beta(\mathrm{t}_{i1})$, t_{i2}, $\delta(\mathrm{t}_{i1}, \mathrm{t}_{i2})$ $(i = 1, \ldots, l)$, которые подставляются вместо w, x, y, z; иными словами, ни один из этих указанных явно термов не является частью бо́льшего терма в каком-либо из дизъюнктивных членов

$A(t_{i1}, \beta(t_{i1}), t_{i2}, \delta(t_{i1}, t_{i2}))$, который (больший терм) заменяется как единое целое. Поэтому результат замены в i-м дизъюнктивном члене можно записать в виде $A(\overline{t_{i1}}, \overline{\beta(t_{i1})}, \overline{t_{i2}}, \overline{\delta(t_{i1}, t_{i2})})$.

Теперь мы видим, что секвенция, находящаяся наверху приводимой ниже фигуры (записанной для случая $l=2$, чтобы упростить обозначения, начиная с этого места), доказуема в $G4a$ либо в силу полноты исчисления высказываний H (теорема 14 § 12), теоремы Генцена (§ 54) и $(l-1)$-кратного применения $\to\forall$ снизу вверх (что возможно в силу теоремы о перестановочности), либо непосредственно с помощью рассуждений § 48, 49.

$$\begin{array}{cl}
\to A(\overline{t_{11}}, \overline{\beta(t_{11})}, \overline{t_{12}}, \overline{\delta(t_{11}, t_{12})}), A(\overline{t_{21}}, \overline{\beta(t_{21})}, \overline{t_{22}}, \overline{\delta(t_{21}, t_{22})}) & \\ \hline
\to \forall z A(\overline{t_{11}}, \overline{\beta(t_{11})}, \overline{t_{12}}, z), A(\overline{t_{21}}, \overline{\beta(t_{21})}, \overline{t_{22}}, \overline{\delta(t_{21}, t_{22})}) & \to\forall \\ \hline
\to \exists y \forall z A(\overline{t_{11}}, \overline{\beta(t_{11})}, y, z), A(\overline{t_{21}}, \overline{\beta(t_{21})}, \overline{t_{22}}, \overline{\delta(t_{21}, t_{22})}) & \to\exists \\ \hline
\to \exists y \forall z A(\overline{t_{11}}, \overline{\beta(t_{11})}, y, z), \forall z A(\overline{t_{21}}, \overline{\beta(t_{21})}, \overline{t_{22}}, z) & \to\forall \\ \hline
\to \exists y \forall z A(\overline{t_{11}}, \overline{\beta(t_{11})}, y, z) & \to\exists \\ \hline
\to \forall x \exists y \forall z A(\overline{t_{11}}, x, y, z) & \to\forall \\ \hline
\to \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z) & \to\exists
\end{array}$$

В силу нашего требования, чтобы члены эрбрановской дизъюнкции были различны, оказываются различными две формулы в верхней секвенции; поэтому (t_{11}, t_{12}) и (t_{21}, t_{22}) — различные пары термов.

В силу установленного порядка в списке $t_0, \ldots, t_p$ терм $\delta(t_{i1}, t_{i2})$ идет в этом списке позже, чем любой подтерм термов t_{i1}, $\beta(t_{i1})$, t_{i2} $(i=1, 2)$. Поэтому «самая правая (свободная) переменная» $\overline{\delta(t_{i1}, t_{i2})}$ из i-й формулы верхней секвенции (это действительно переменная, так как $\delta(t_{i1}, t_{i2})$ — это максимальная часть вида $\delta(s, t)$) идет в списке $a_0, \ldots, a_p$ позже, чем любая другая переменная из этой формулы. Поэтому одна из этих самых правых переменных $\overline{\delta(t_{11}, t_{12})}$, $\overline{\delta(t_{21}, t_{22})}$ (они различны, ибо различны (t_{11}, t_{12}), (t_{21}, t_{22})) идет позже всех в списке $a_0, \ldots, a_p$ (в действительности, это должна быть a_p). Пусть для простоты записи это будет $\overline{\delta(t_{11}, t_{12})}$. Все переменные из списка $a_0, \ldots, a_p$ отличны от всех остальных переменных из рассматриваемой секвенции (т. е. от тех переменных, если таковые имеются, которые входили в эрбрановскую дизъюнкцию и не были устранены в процессе замены максимальных подтермов), а также от w, x, y, z (которые не входят в рассматриваемую секвенцию). Таким образом, $\overline{\delta(t_{11}, t_{12})}$ встречается в верхней секвенции только там, где это указано явно, а w, x, y, z не встречаются вообще. Следовательно, выполнены условия для применения $\rightarrow\forall$, заключением которого будет вторая (сверху) секвенция. В этой секвенции w, x, y, z встречаются только там, где это указано явно, и потому никакие переменные не оказываются связанными в частях $\overline{t}_{11}$, $\overline{\beta(t_{11})}$, $\overline{t_{12}}$, $\overline{t_{21}}$, $\overline{\beta(t_{21})}$, $\overline{t_{22}}$, $\overline{\delta(t_{21}, t_{22})}$. Используя этот факт (относительно $\overline{t}_{12}$), мы можем применить $\rightarrow\exists$ в $G4$a (где главная формула не обязана входить в посылку) к терму $\overline{t}_{12}$ (который мы считаем «непокрытым» при свертывании $\overline{\delta(t_{11}, t_{12})}$ в z) и получить третью (сверху) секвенцию.

Применяя те же рассуждения, что и раньше, получаем, что $\overline{\beta(t_{11})}$, $\overline{\delta(t_{21}, t_{22})}$ — это переменные, расположенные в списке $a_0, \ldots, a_p$ дальше, чем любая переменная из соответствующих формул в третьей секвенции. Поэтому одна из них — самая далекая (в действительности это a_{p-1}) — и входит только там, где это указано явно (и то же верно для w, x, y, z). Пусть для определенности это будет $\overline{\delta(t_{21}, t_{22})}$. Тогда мы можем вывести четвертую секвенцию по $\rightarrow\forall$, причем w, x, y, z встречаются только там, где это указано явно. Хотя (t_{11}, t_{12}), (t_{21}, t_{22}) являются различными парами термов, термы t_{11} и t_{21} не обязательно различны. Пусть, например, они не различны. Тогда в $\rightarrow\exists$, которое мы теперь можем выполнить, так как $\overline{t}_{22}$ не покрыт, первая формула из посылки — это главная формула, так что мы получаем указанную пятую секвенцию (вместо этого мы могли сначала применить $\rightarrow\exists$, не обращая внимания на совпадение t_{11} и t_{21}, а затем применить $\rightarrow C$).

Теперь $\rightarrow\forall$ и $\rightarrow\exists$, законность которых очевидна, ведут к нижней секвенции.

Таким образом, эта секвенция доказуема в $G4$a. По теореме Генцена (точнее, согласно следствию (a) теоремы 36) формула $\exists w\forall x\exists y\forall z A(w, x, y, z)$ доказуема в исчислении предикатов H, что и требовалось показать.

Мы рассмотрели случай $l=2$ и серию упрощающих допущений. Должно быть ясно, что описанный нами процесс всегда может быть проведен. Еще одна иллюстрация получится, если исходить из (ii) с термами, над которыми стоит черта (упр. 55.1).

Мы можем резюмировать теорему Эрбрана, сказав, что она сводит вопрос о доказуемости конкретной формулы с кванторами (в качестве первого примера — предваренной формулы) к вопросу об общезначимости (или доказуемости) в исчислении высказываний какого-либо члена некоторого счетно-бесконечного класса бескванторных формул (эрбрановских дизъюнкций).

Применения теоремы Эрбрана имеются у Гильберта и Бернайса [1939], стр. 178, и, далее, у Крайзеля [1958] и у Дребена и Дентона [1966] [1]).

Упражнения 55.1. Следующим образом примените к (ii) метод, описанный в доказательстве теоремы Эрбрана («тогда»). Возьмите в качестве $t_0, \ldots, t_p$ список $\beta(a)$, $\delta(a, \beta(a))$, $\beta(\lambda(\beta(a)))$, $\delta(\lambda(\beta(a)), \varkappa)$, $\delta(a, \lambda(\delta(a, \beta(a))))$ (проверьте, что он удовлетворяет всем требованиям). Найдите указанным методом шаги в $G4$a, ведущие вниз к $\rightarrow \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$. Это можно сделать без конкретизации переменных $a_0, \ldots, a_p$. Теперь возьмите b, c, d, e, f в качестве $a_0, \ldots, a_p$ и сравните полученный результат с последовательностью шагов, приведшей от $\rightarrow \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$ к (i).

55.2. Для каждого из приводимых ниже утверждений сформулируйте условие, аналогичное тому, которое было дано для $\vdash_H \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$ в нашей формулировке теоремы Эрбрана.

(a) $\vdash_H \neg \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$
$$(\equiv \vdash_{G4a} \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z) \rightarrow).$$

(b) $\exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$ выполнима.

(c) $\vdash_H \forall v B(v) \,\&\, \exists r \forall s \forall t \exists u C(r, s, t, u) \supset \exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$.

55.3*. Докажите утверждение из примечания 1 на стр. 410.

§ 56. Интерполяционная теорема Крейга

В этом параграфе мы используем соотношения, имеющиеся в доказательствах в $G4$ или $G4$a, чтобы установить (в качестве теоремы 41) интерполяционную теорему Крейга (лемму Крейга [1957], [1957a]), включая вариант, заимствованный у Линдона [1959]. До теоремы 42 мы будем заниматься исчислением предикатов без равенства (с функциями или без них) [2]). Основная часть нашей работы — доказательство теоремы 40.

Основная идея такова. Если дано доказательство секвенции $E \rightarrow F$ в $G4$ или $G4$a, то мы можем разбить его вертикально на две части. Мы получим E-*часть*, вычеркивая из каждой секвенции все предки вхождения F в конечную секвенцию $E \rightarrow F$; мы получим F-*часть*, вычеркивая все предки E. Разумеется, E-часть и F-часть не будут в общем случае доказательствами. Но теперь мы спрашиваем себя, нельзя ли исправить обе части или хотя бы одну из них, превратив ее в доказательство и

[1]) См. также Дентон и Дребен [1970].— *Прим. перев.*

[2]) Символ = может встречаться среди предикатных символов, но не должен иметь особого статуса (который он имел в § 29); т. е. он должен быть причислен к предикатным параметрам, и для него не постулировано аксиом до теоремы 42).

используя при этом хотя бы некоторые существенные черты ее строения. Мы хотим сделать эти исправления путем восстановления минимума из того, что было отрезано от этой части во время операции разбиения и не может быть сохранено для доказательства, и удаляя одновременно то, что оказывается лишним и мешает в отсутствие другой части.

Ключ к тому, что мы можем сделать для восстановления E-части или F-части до *E-доказательства* или *F-доказательства*, дается рассмотрением поведения аксиом из данного доказательства при операции разбиения. Назовем аксиому C, $\Gamma \to \Theta$, C из данного доказательства секвенции $E \to F$ *EF-аксиомой*, если одна из ее формул C есть предок E, а другая — предок F. Назовем ее *E-аксиомой*, если обе они — предки E, и *F-аксиомой*, если обе — предки F. Мы предполагаем во всей нашей «теории отношений родства» в доказательствах в *G*4 или *G*4a, что каждое доказательство снабжено анализом, который определяет роль каждого вхождения формулы на каждом шаге (см. примечание на стр. 354).

Сначала рассмотрим EF-аксиому C, $\Gamma \to \Theta$, C, и пусть, для определенности, первая C принадлежит E, а вторая — F. В результате операции разбиения E-часть получает от этой аксиомы C, $\Gamma_E \to \Theta_E$, где Γ_E — предки E, имеющиеся среди вхождений формул в Γ, Θ_E — среди вхождений в Θ. Аналогично, F-часть получает $\Gamma_F \to \Theta_F$, C. Для исправления E-части до доказательства мы должны, очевидно, вернуть направо удаленную C (она подчеркнута), чтобы получить C, $\Gamma_E \to \Theta_E$, $\underline{C}$. Аналогично исправляется слева F-часть. Это, разумеется, только первый шаг к исправлению обеих частей. Но если все аксиомы первоначального доказательства были EF-аксиомами, то все концевые вершины ветвей в каждой части могут быть исправлены таким образом. Тогда, как будет видно из доказательства теоремы 40, мы можем продолжать исправление, двигаясь вниз по обеим частям и выполняя минимум соответствующих шагов, чтобы собрать восстановленные C из различных EF-аксиом в одну формулу I (*интерполяционную формулу*). Таким образом мы можем превратить E-часть в E-доказательство секвенции $E \to I$, а F-часть в F-доказательство секвенции $I \to F$. Здесь I появляется по разные стороны от стрелки в конечных секвенциях E-доказательства и F-доказательства точно так же, как восстановленные C на концевых вершинах ветвей. Удобно строить восстановленные доказательства в *G*4a (§ 54), даже если исходное доказательство было в *G*4.

Теперь рассмотрим E-аксиому C, $\Gamma \to \Theta$, C. При операции разбиения E-часть получает от этой аксиомы секвенцию C, $\Gamma_E \to \Theta_E$, C, а F-часть — секвенцию $\Gamma_F \to \Theta_F$. В E-части C, $\Gamma_E \to \Theta_E$, C — все еще аксиома. Нам не надо делать никакого восстановления. Обе C, которые были жизненными частями в этом месте доказательства, были ему переданы. В F-части $\Gamma_F \rightarrow \Theta_F$ не является аксиомой, по крайней мере в силу анализа, использованного в данном доказательстве секвенции $E \rightarrow F$. Поэтому (если игнорировать возможность изменения анализа для формул Γ_F, Θ_F) мы можем сделать из $\Gamma_F \rightarrow \Theta_F$ аксиому только путем введения двух вхождений одной и той же формулы D для получения $D, \Gamma_F \rightarrow \Theta_F, D$. Секвенция $\Gamma_F \rightarrow \Theta_F$ из F-части не вносит ничего существенного при таком способе построения аксиомы. Мы могли бы с тем же успехом выбросить ее, что мы и сделаем. Если в данном доказательстве $E \rightarrow F$ имеются только E-аксиомы, то спускаясь описанным способом с вершин ветвей по E-части и выбрасывая некоторые ненужные секвенции, мы получим E-доказательство секвенции $E \rightarrow$, выбрасывая F-часть вообще.

Аналогично, если имеются только F-аксиомы, то мы получим F-доказательство секвенции $\rightarrow F$, исправляя F-часть и отбрасывая E-часть.

Если аксиомы данного доказательства секвенции $E \rightarrow F$ включают смесь двух или трех рассмотренных сортов аксиом (EF-аксиом, E-аксиом и F-аксиом), то мы получим результат, описанный для чистого множества аксиом одного из сортов, представленного в данном доказательстве[1]).

При исправлении E-части и F-части или одной из них мы работаем шаг за шагом соответственно секвенциям, которые встречаются при спуске вниз по данному доказательству секвенции $E \rightarrow F$ в $G4$ или $G4a$. Поэтому обобщим заключение, которое мы хотим установить, чтобы получить утверждение, применимое к каждой секвенции $\Delta \rightarrow \Lambda$ из данного доказательства. Теорема 40 утверждает, что каждая секвенция обладает этим свойством[2]).

Теорема 40[3]). *Допустим, что дано доказательство секвенции* $E \rightarrow F$ *в* $G4$ *или* $G4a$. *Для каждой секвенции* $\Delta \rightarrow \Lambda$ *в этом дока-*

---

[1]) Делая для каждой E-аксиомы «ненужные» восстановления в E-части и восстановления в F-части, для которой вклад этой аксиомы не нужен, и аналогично для каждой F-аксиомы, мы могли бы получить E-доказательство секвенции $E \rightarrow I$ и F-доказательство секвенции $I \rightarrow F$ во всех случаях. (Это сводится к использованию соображений теоремы 41 (а) в случаях (E) и (F) для $G4b$ на уровне аксиом.) Эта процедура приводит к ненужному усложнению формулы I, поэтому мы предпочитаем процедуру, описанную в тексте.

[2]) Если забыть о части данного доказательства, ведущей от некоторой секвенции $\Delta \rightarrow \Lambda$ вниз к $E \rightarrow F$, то мы получим теорему о доказательстве в $G4$ или $G4a$ произвольной секвенции $\Delta \rightarrow \Lambda$, в которой вхождения формул из Δ, Λ разбиты на два класса Δ_E, Λ_E и Δ_F, Λ_F.

[3]) Шютте [1962] устанавливает интерполяционную теорему (теорема 41) для интуиционистского исчисления предикатов, используя формальную систему

зательстве пусть Δ_E, Λ_E — *те члены* Δ, Λ *соответственно, которые являются предками* E *в конечной секвенции* $E \to F$; Δ_F, Λ_F — *предки* F. *Для каждой секвенции* $\Delta \to \Lambda$ *в данном доказательстве:*

Или (случай EF) *в данном доказательстве над* $\Delta \to \Lambda$ *имеются* EF-*аксиомы, и тогда найдется формула* J (*без* $\sim$) *и доказательства в* $G4$a *секвенций* $\Delta_E \to \Lambda_E, J$ *и* $J, \Delta_F \to \Lambda_F$, *такие, что*:
(1) *индивидные параметры формулы* J *являются параметрами как секвенции* $\Delta_E \to \Lambda_E$, *так и* $\Delta_F \to \Lambda_F$;
(2) *в доказательстве секвенции* $\Delta_E \to \Lambda_E, J$ *каждая атомарная часть формулы* J *является образом одной* C *из некоторой аксиомы, другая* C *которой спускается до своего образа в одном из* Δ_E, Λ_E, *и аналогично в доказательстве секвенции* $J, \Delta_F \to \Lambda_F$.

Или (случай (E)) *в данном доказательстве над* $\Delta \to \Lambda$ *имеются* E-*аксиомы, и имеется доказательство* $\Delta_E \to \Lambda_E$ *в* $G4$a.

Или (случай (F)) *в данном доказательстве над* $\Delta \to \Lambda$ *имеются* F-*аксиомы, и имеется доказательство* $\Delta_F \to \Delta_F$ *в* $G4$a.

Доказательство. Начиная с концевых вершин ветвей данного доказательства и спускаясь вниз по дереву шаг за шагом, мы можем для каждой секвенции $\Delta \to \Lambda$ установить, что она обладает свойством, описанным в теореме. Мы опишем сейчас, что делать в каждом из случаев, которые могут возникнуть во время этих шагов. Использование этих инструкций иллюстрируется приводимым ниже примером 11.

Если дано доказательство в $G4$a, а не в $G4$, то мы предположим для определенности записи, что все применения логических правил записаны как в $G4$, а все утончения $\to У$, $У \to$ (и сокращения $\to С$, $С \to$) указаны отдельно. Но при записи E-доказательства или F-доказательства утончения могут быть включены в последующие логические выводы[1]).

Сначала мы проиллюстрируем в следующей таблице (случаи 1a—2b) рассмотрение (того, что остается от) аксиом C, $\Gamma \to \Theta$, C в E-части (левый столбец) и в F-части (правый столбец) после операции разбиения. Отсутствие содержимого в одном из столбцов указывает, что в этой части мы выбрасываем секвенцию, получающуюся в результате разбиения (случаи 1a, 1b). Добав-

---

без секвенций, напоминающую генценовскую систему со свойством подформульности.

Чтобы приспособить наши рассмотрения к случаю интуиционистского исчисления предикатов, мы можем использовать теорему 40 для интуиционистского варианта $G3$ или G, изменив формулировку случая (EF) так, чтобы она утверждала возможность построения доказательств либо двух секвенций $\Delta_E \to \Lambda_E$, J и J, $\Delta_F \to \Lambda_F$, либо двух секвенций J, $\Delta_E \to \Lambda_E$ и $\Delta_F \to \Lambda_F$, J.

[1]) При непосредственном рассмотрении доказательств в $G4$a с утончениями, включенными в состав других применений правил, можно применять рассмотрения для приводимых ниже случаев при отсутствии в посылках некоторых формул.

ляемые формулы подчеркиваются здесь с целью выделения, но в дальнейших случаях с той же целью будет использоваться J-символика, а в примере 11 — жирный шрифт. В случае 2a в качестве J из формулировки теоремы берется C, а в случае 2b — формула $\neg C$. Очевидно, что имеют место (1) и (2) из формулировки EF-случая.

E-доказательство	Аксиомы	F-доказательство
Случай 1a $C,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ C$	E-аксиома	
Случай 1b	F-аксиома	$C,\ \Gamma_F \to \Theta_F,\ C$
Случай 2a $C,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \underline{C}$	EF-аксиома, первая C из E-части	$\underline{C},\ \Gamma_F \to \Theta_F,\ C$
Случай 2b $\dfrac{C,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ C}{\Gamma_E \to \Theta_E,\ C,\ \underline{\neg C}} \to\neg$	EF-аксиома, первая C из F-части	$\dfrac{C,\ \Gamma_F \to \Theta_F,\ \underline{C}}{\underline{\neg C},\ C,\ \Gamma_F \to \Theta_F} \neg\to$

Предположим теперь, что уже рассмотрены все секвенции из данного доказательства вплоть до посылки $\Delta_1 \to \Lambda_1$ или двух посылок $\Delta_1 \to \Lambda_1$ и $\Delta_2 \to \Lambda_2$ некоторого применения правила с заключением $\Delta \to \Lambda$. Мы назовем посылку $\Delta_i \to \Lambda_i$ EF-*посылкой*, если это рассмотрение дало доказательство как $\Delta_{iE} \to \Lambda_{iE}$, J, так и J, $\Delta_{iF} \to \Lambda_{iF}$, E-*посылкой*, если оно дало доказательство $\Delta_{iE} \to \Lambda_{iE}$, и F-*посылкой*, если оно дало доказательство $\Lambda_{iF} \to \Lambda_{iF}$. Мы называем рассматриваемое применение правила E-*применением* или F-*применением*, в зависимости от того, какой из формул E, F принадлежит его главная формула (а следовательно, и боковые формулы), если рассматривается логическое правило, или его C, если рассматривается структурное.

Рассмотрим простой случай (3a) E-применения, имеющего хотя бы одну F-посылку. Так как главная и боковые формулы, если применение логическое (или C — если оно структурное), принадлежат E, то все посылки и заключение в F-части переходят просто в $\Gamma_F \to \Theta_F$. По определению «F-посылки» наше исправление F-части над рассматриваемым применением дает доказательство секвенции $\Gamma_F \to \Theta_F$. Поэтому, чтобы распространить наше исправление F-части до заключения рассматриваемого применения, нам нужно только обтесать рассматриваемую F-посылку и притянуть расположенное над ней дерево к заключению, выбросив другую посылку (если она была) и все расположенное над ней, что еще не выброшено. Это суммировано в первой строке следующей таблицы.

Е-доказательство	Применение логических и структурных правил (простые случаи)	F-доказательство
Случай 3a	Е-применение, имеющее хотя бы одну F-посылку $\Gamma_F \to \Theta_F$	
Случай 3b	F-применение, имеющее хотя бы одну Е-посылку $\Gamma_E \to \Theta_E$	

Чтобы собрать вместе случаи 10 пропозициональных и 4 структурных правил, когда мы не можем просто проскочить это применение как выше, мы запишем заключение в виде Π_1, $\Gamma \to \Theta$, Π_2, где одно из Π_1, Π_2 есть главная формула (или С), а другое пусто. Запишем посылки аналогично (каждое из Σ_1, Σ_2 или Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 — это нуль, одна или две боковые формулы или же нуль или два С). Для правила $\supset\to$ в этом случае Π_1, Π_2, Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 — это $A \supset B$, $\varnothing$, $\varnothing$, A, B, $\varnothing$ соответственно, где $\varnothing$ — пустой список. Результат(ы) предшествующего рассмотрения посылок изображен(ы) наверху каждой из фигур на стр. 424, а результат рассмотрения заключения — внизу. Как показывают эти фигуры, мы можем получить последний из первых с помощью нуля, одного или двух применений правил в G4a. Случаи 4b, 5b, 6b, 7b симметричны (или «двойственны») случаям 4a, 5a, 6a, 7a (так же, как 3b, 8b двойственны 3a, 8a). В каждом из этих случаев с EF-посылкой (и пропозициональным правилом) для J из заключения имеют место (1) и (2) из случая (EF) теоремы, так как они имеют место для посылок (посылки).

$\to\forall$-правило рассматривается в рамках подходящего случая из числа случаев 3a—5b. Ввиду ограничения на переменные b не входит в Γ, Θ. Поэтому, если рассматривается Е-применение,

Е-доказательство	Пропозициональные и структурные правила и некоторые предикатные правила (пояснения ниже)	F-доказательство

Случай 4a Однопосылочное Е-применение с Е-посылкой

$$\frac{\Sigma_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Sigma_2}{\Pi_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Pi_2}$$

Случай 5a Однопосылочное Е-применение с EF-посылкой

$$\frac{\Sigma_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Sigma_2,\ J}{\Pi_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Pi_2,\ J} \qquad J,\ \Gamma_F \to \Theta_F$$

Случай 6a Е-применение с двумя Е-посылками

$$\frac{\Sigma_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Sigma_2 \quad \Sigma_3,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Sigma_4}{\Pi_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Pi_2}$$

Случай 7a Е-применение с EF-посылкой (например, первой) и Е-посылкой

$$\frac{\Sigma_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Sigma_2,\ J \quad \Sigma_3,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Sigma_4}{\Pi_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Pi_2,\ J} \qquad J,\ \Gamma_F \to \Theta_F$$

Случай 8a Е-применение с двумя EF-посылками

$$\cfrac{\Sigma_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Sigma_2,\ J_1 \quad \Sigma_3,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Sigma_4,\ J_2}{\dfrac{\Pi_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Pi_2,\ J_1,\ J_2}{\Pi_1,\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \Pi_2,\ J_1 \vee J_2} \to \vee}$$

$$\frac{J_1,\ \Gamma_F \to \Theta_F \quad J_2,\ \Gamma_F \to \Theta_F}{J_1 \vee J_2,\ \Gamma_F \to \Theta_F} \vee \to$$

Случай 8b F-применение с двумя EF-посылками

$$\frac{\Gamma_E \to \Theta_E,\ J_1, \quad \Gamma_E \to \Theta_E,\ J_2}{\Gamma_E \to \Theta_E,\ J_1 \& J_2} \to \&$$

$$\cfrac{J_1,\ \Sigma_1,\ \Gamma_F \to \Theta_F,\ \Sigma_2 \quad J_2,\ \Sigma_3,\ \Gamma_F \to \Theta_F,\ \Sigma_4}{\dfrac{J_1,\ J_2,\ \Pi_1,\ \Gamma_F \to \Theta_F,\ \Pi_2}{J_1 \& J_2,\ \Pi_1,\ \Gamma_F \to \Theta_F,\ \Pi_2} \& \to}$$

то $\mathfrak{b}$ не входит в $\Gamma_F \to \Theta_F$ (F-часть посылки $\Delta_1 \to \Lambda_1$); если рассматривается F-применение, то в $\Gamma_E \to \Theta_E$. Следовательно, при EF-посылке (случаи 5a, 5b) J не содержит $\mathfrak{b}$ свободно, так как для этой посылки выполнено условие (1) из случая (EF) теоремы. Поэтому для нового $\to\forall$ выполнено ограничение на переменные, а для заключения снова выполнено (1)[1]).

Теперь рассмотрим $\forall\to$. Если не имеют места обстоятельства, описываемые ниже, то это правило можно рассмотреть в рамках случаев 3a—5b, с очевидной модификацией в случаях 4a—5b, когда Π_1, Π_2 (в действительности Π_2 пусто) появляются также и в посылке (случаи 4a′—5a′). Допустим, что посылка — это EF-посылка, и A (x) содержит x свободно. В исчислении предикатов без функций r должно быть просто переменной. Пусть рассматривается E-применение, и эта переменная r входит свободно в $\Gamma_F \to \Theta_F$, но не в $\forall x A(x)$, $\Gamma_E \to \Theta_E$. Тогда в силу условия (1) из (EF)-случая формула J для заключения (но не для посылки) не должна содержать r свободно. Предполагая, что J для посылки действительно содержит r свободно (случай 9a), запишем ее в виде «J (r)». Пусть y — переменная (возможно, x), свободная для r в J (r) и не входящая свободно в J (r).

E-доказательство	$\forall\to$ в случае, когда r — это переменная, входящая свободно в J для посылки, но не входящая свободно в E-часть или F-часть заключения	F-доказательство

Случай 9a E-применение с EF-посылкой

$$\dfrac{\dfrac{A(r),\ \forall x A(x),\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ J(r)}{\forall x A(x),\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ J(r)}\ \forall\to}{\forall x A(x),\ \Gamma_E \to \Theta_E,\ \forall y J(y)}\ \to\forall \qquad \dfrac{J(r),\ \Gamma_F \to \Theta_E}{\forall y J(y),\ \Gamma_F \to \Theta_E}\ \forall\to$$

Случай 9b F-применение с EF-посылкой

$$\dfrac{\Gamma_E \to \Theta_E,\ J(r)}{\Gamma_E \to \Theta_E,\ \exists y J(y)}\ \to\exists \qquad \dfrac{\dfrac{J(r),\ A(r),\ \forall x A(x),\ \Gamma_F \to \Theta_F}{J(r),\ \forall x A(x),\ \Gamma_F \to \Theta_F}\ \forall\to}{\exists y J(y),\ \forall x A(x),\ \Gamma_F \to \Theta_F}\ \exists\to$$

---

[1]) Мы добавили к нашему первоначальному плану (второй абзац параграфа) выполнение (1). Индивидные параметры, не являющиеся общими для E-части и F-части, удаляются из формулы J, как только они перестают быть общими, при рассмотрении $\forall\to$ и $\to\exists$. В противном случае нам пришлось бы удалять $\mathfrak{b}$, если она присутствует, при рассмотрении $\to\forall$ и $\exists\to$.

Применение $\to\forall$ в случае 9a законно, так как r не входит свободно в $\forall x A(x)$, $\Gamma_E \to \Theta_E$. По аналогичной причине законно $\exists\to$ в случае 9b (когда r свободно входит в $A(r)$, $\Gamma_E \to \Theta_E$ и $J(r)$, но не в $\forall x A(x)$, $\Gamma_F \to \Theta_F$). В более общем случае исчисления предикатов с функциями (включая индивидные символы), r может содержать свободные переменные $c_1, \ldots, c_m$ и индивидные символы $e_{m+1}, \ldots, e_n$, которые являются параметрами формулы J для посылки, но не являются общими для E-части и F-части заключения (случаи 9a′, 9b′). Запишем r в виде «$r(c_1, \ldots, c_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$» и J для посылки в виде «$J(c_1, \ldots, c_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$». Для случая 9a′ ($\forall x A(x)$, $\Gamma_E \to \Theta_E$ не содержит $c_1, \ldots, c_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ в качестве параметров) мы можем заменить $e_{m+1}, \ldots, e_n$ во всем уже построенном E-доказательстве посылки на соответствующие различные переменные $c_{m+1}, \ldots, c_{m+n}$, не входившие в это доказательство, и получить доказательство секвенции

$$A(r(c_1, \ldots, c_n)), \ \forall x A(x), \ \Gamma_E \to \Theta_E, \ J(c_1, \ldots, c_n).$$

Теперь вместо того, чтобы вывести $\forall y J(y)$ как главную формулу из боковой формулы $J(r)$ путем одного применения правила в каждом из доказательств (случай 9a), мы можем вывести $\forall y_1 \ldots \forall y_n J(y_1, \ldots, y_n)$ из $J(c_1, \ldots, c_n)$ в E-доказательстве и из $J(c_1, \ldots, c_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ в F-доказательстве с помощью n применений тех же правил, что и раньше.

Правила $\exists\to$ и $\to\exists$ рассматриваются аналогично, частично в рамках старых случаев, а частично в качестве новых случаев 10a, 10b, 10a′, 10b′.

Суммируя, мы исправляем E-часть или F-часть, или обе, получаем E-доказательство или F-доказательство, или оба, спускаясь вниз по данному доказательству шаг за шагом и применяя на каждом шаге подходящий случай. Это эффективным образом приводит к одному из трех результатов, описанных в случаях (EF), (E) и (F) теоремы, в зависимости от данного доказательства и данного анализа этого доказательства. Эта процедура может включать ненужную работу по исправлению верхних частей ветвей, которые потом все равно будут выброшены при рассмотрении двухпосылочных правил, подпадающих под случаи 3a, 3b. Если мы заранее распределим аксиомы по классам EF, E и F, а применения двухпосылочных правил по классам E и F, то мы сможем спланировать работу и предвидеть, какие ветви будут выброшены.

Пример 11. Сначала мы приводим данное доказательство секвенции $E \to F$ в G4a. E-часть напечатана обычным шрифтом, F-часть — жирным. Для каждой занумерованной секвенции $\Delta \to \Lambda$ из этого доказательства имеется секвенция с тем же номером в E-доказательстве и в F-доказательстве под ним. Это результаты исправления соответствующих секвенций $\Delta_E \to \Lambda_E$, $\Delta_F \to \Lambda_F$ из E-части и F-части[1]).

EF-аксиома

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{1.\ \mathbf{P}(a),\ \mathbf{S},\ R \to \exists x P(x),\ P(a)}{2.\ \mathbf{P}(a),\ \mathbf{S},\ R \to \exists x P(x)}\,\to\exists}{3.\ \mathbf{P}(a),\ \mathbf{S} \to R \supset \exists x P(x)}\,\to\supset}{4.\ \mathbf{S}\&\mathbf{P}(a) \to R \supset \exists x P(x)}\,\&\to}{5.\ \mathbf{S}\&\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to R \supset \exists x P(x),\ \mathbf{S}\&\mathbf{Q}(\mathbf{b})}\,\to У$$

F-аксиома EF-аксиома

$$\cfrac{\cfrac{5. \qquad \cfrac{\cfrac{6.\ \mathbf{S},\ Q(b),\ \mathbf{P}(a) \to \mathbf{S} \qquad 7.\ Q(b),\ \mathbf{S},\ \mathbf{P}(a) \to \mathbf{Q}(\mathbf{b})}{8.\ \mathbf{S},\ Q(b),\ \mathbf{P}(a) \to \mathbf{S}\&\mathbf{Q}(\mathbf{b})}\,\to\&}{9.\ Q(b),\ \mathbf{S}\&\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to \mathbf{S}\&\mathbf{Q}(\mathbf{b})}\,\&\to}{10.\ (R \supset \exists x P(x)) \supset Q(b),\ \mathbf{S}\&\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to \mathbf{S}\&\mathbf{Q}(\mathbf{b})}\,\supset\to}{\cfrac{11.\ (R \supset \exists x P(x)) \supset Q(b) \to \mathbf{S}\&\mathbf{P}(\mathbf{a}) \supset \mathbf{S}\&\mathbf{Q}(\mathbf{b})}{12.\ (R \supset \exists x P(x)) \supset Q(b) \to \forall \mathbf{x}(\mathbf{S}\&\mathbf{P}(\mathbf{x}) \supset \mathbf{S}\&\mathbf{Q}(\mathbf{b}))}\,\to\forall}\,\to\supset$$

E-доказательство: формулы, вставленные вместо F-части, выделены жирным шрифтом.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{P}(a),\ R \to \exists x P(x);\ P(a)}{1.\ R \to \exists x P(x),\ P(a),\ \neg \mathbf{P}(\mathbf{a})}\,\to\neg}{R \to \exists x P(x),\ \neg \mathbf{P}(\mathbf{a})}\,\to\exists}{2.\ R \to \exists x P(x),\ \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{P}(\mathbf{x})}\,\to\forall}{3,\ 4,\ 5.\ \to R \supset \exists x P(x),\ \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{P}(\mathbf{x})}\,\to\supset \qquad 7,\ 8,\ 9.\ Q(b) \to \mathbf{Q}(\mathbf{b})}{\cfrac{(R \supset \exists x P(x)) \supset Q(b) \to \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{P}(\mathbf{x}),\ \mathbf{Q}(\mathbf{b})}{10,\ 11,\ 12.\ (R \supset \exists x P(x)) \supset Q(b) \to \forall \mathbf{x} \neg \mathbf{P}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{Q}(\mathbf{b})}\,\to\vee}\,\supset\to$$

F-доказательство: формулы, вставленные вместо E-части, напечатаны обычным шрифтом.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{P}(a),\ \mathbf{S} \to P(a)}{1.\ \neg P(a),\ \mathbf{P}(a),\ \mathbf{S} \to}\,\neg\to}{2,\ 3.\ \forall x \neg P(x),\ \mathbf{P}(a),\ \mathbf{S} \to}\,\forall\to}{4.\ \forall x \neg P(x),\ \mathbf{S}\&\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to}\,\&\to}{5.\ \forall x \neg P(x),\ \mathbf{S}\&\mathbf{P}(\mathbf{a}) \to \mathbf{S}\&\mathbf{Q}(\mathbf{b})}\,\to У$$

[1]) В этом примере устраняются только повторения. Никакая исправленная секвенция не выбрасывается впоследствии в рамках случая 3a или 3b для двухпосылочного правила и не меняется при подстановке $c_{m+1}, \ldots, c_n$ вместо $e_{m+1}, \ldots, e_n$ в случаях 9a′, 9b′, 10a′ или 10b′.

$$\cfrac{5. \qquad \cfrac{\cfrac{6.\ \mathrm{S},\ \mathbf{P}(\mathrm{a})\to \mathrm{S} \qquad 7.\ \mathrm{Q}(\mathrm{b}),\ \mathrm{S},\ \mathbf{P}(\mathrm{a})\to \mathbf{Q}(\mathbf{b})}{8.\ \mathrm{Q}(\mathrm{b}),\ \mathrm{S},\ \mathbf{P}(\mathrm{a})\to \mathrm{S}\,\&\,\mathbf{Q}(\mathbf{b})}\ \to\&}{9.\ \mathrm{Q}(\mathrm{b}),\ \mathrm{S}\,\&\,\mathbf{P}(\mathrm{a})\to \mathrm{S}\,\&\,\mathbf{Q}(\mathbf{b})}\ \&\to}{\cfrac{10.\ \forall x\neg \mathrm{P}(x)\vee \mathrm{Q}(\mathrm{b}),\ \mathrm{S}\,\&\,\mathbf{P}(\mathrm{a})\to \mathrm{S}\,\&\,\mathbf{Q}(\mathbf{b})}{\cfrac{11.\ \forall x\neg \mathrm{P}(x)\vee \mathrm{Q}(\mathrm{b})\to \mathrm{S}\,\&\,\mathbf{P}(\mathrm{a})\supset \mathrm{S}\,\&\,\mathbf{Q}(\mathbf{b})}{12.\ \forall x\neg \mathrm{P}(x)\vee \mathrm{Q}(\mathrm{b})\to\forall x(\mathrm{S}\,\&\,\mathbf{P}(x)\supset \mathrm{S}\,\&\,\mathbf{Q}(\mathbf{b}))}\ \to\forall}\ \to\supset}\ \vee\to$$

Теорема 41[1]). (Интерполяционная теорема Крейга [1957], [1957a].)

Пусть в исчислении предикатов без равенства $\vdash \mathrm{E}\supset \mathrm{F}$. *Тогда*

(a) *Если* E *и* F *содержат общий предикатный параметр, то найдется формула* I, *такая, что* $\vdash \mathrm{E}\supset \mathrm{I}$ *и* $\vdash \mathrm{I}\supset \mathrm{F}$ *и все индивидные и предикатные параметры* I *входят как в* E, *так и в* F.

(b) (Клини [1952].) *Если* E *и* F *не содержат общих предикатных параметров* (*или для* $\mathrm{E}\supset \mathrm{F}$, *не содержащей* $\sim$, *если никакой предикатный параметр не входит в обе эти формулы положительно или в обе формулы отрицательно*; см. примечание на стр. 405), *то либо* $\vdash \neg \mathrm{E}$, *либо* $\vdash \mathrm{F}$.

(c) (Линдон [1959]; см. примечание на стр. 405.) *Для* $\mathrm{E}\supset \mathrm{F}$, *не содержащей* $\sim$, *если не имеет места ни* $\vdash \neg \mathrm{E}$, *ни* $\vdash \mathrm{F}$, *то имеется формула* I (*не содержащая* $\sim$), *такая, что* $\vdash \mathrm{E}\supset \mathrm{I}$ *и* $\vdash \mathrm{I}\supset \mathrm{F}$, *все индивидные параметры* I*—общие для* E *и* F, *и предикатный параметр входит в* I $\left\{\begin{matrix}\textit{положительно}\\ \textit{отрицательно}\end{matrix}\right\}$ *тогда и только*

---

[1]) Крейг [1957], [1957a] отмечает, что (b) (без варианта условия, приведенного в скобках) было сообщено ему П. Гилмором. Для генценовской системы G утверждение (b) (в теперешней формулировке и, по существу, с теперешним доказательством) имеется у Клини в [1952] в форме леммы 6 с леммами 3 и 4. Эта комбинация лемм как для классического, так и для интуиционистского случая снова используется у Клини в [1952a], стр. 49, 50, 51, 53, 54.

Мы не можем обойтись без условий «E *и* F *содержат общий предикатный параметр*» в (a) и «*ни* $\vdash \neg \mathrm{E}$, *ни* $\vdash \mathrm{F}$» в (c), так как наши правила образования § 16, 28 не позволяют строить формул, не содержащих предикатных параметров. Например, если $\mathrm{E}\supset \mathrm{F}$ есть $(\mathrm{P}\supset \mathrm{P})\supset(\mathrm{Q}\supset \mathrm{Q})$, то мы не можем найти I для (a) так, чтобы она содержала только общие параметры. Если $\mathrm{E}\supset \mathrm{F}$ есть $\neg \mathrm{P}\supset(\mathrm{Q}\supset \mathrm{Q})\vee \mathrm{P}$, то мы можем выполнить (a), используя $\neg \mathrm{P}$ в качестве I, но (c) провалится.

Если мы примем правила образования, допускающие пропозициональные или предикатные константы (вроде $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ или $=$), которые не считаются параметрами, то мы можем избавиться от упомянутых условий. Тогда $\mathfrak{t}$ или $\neg\mathfrak{f}$ или $\forall x\, x=x\supset\forall x\, x=x$ могут играть роль I как для $(\mathrm{P}\supset \mathrm{P})\supset(\mathrm{Q}\supset \mathrm{Q})$, так и для $\neg \mathrm{P}\supset(\mathrm{Q}\supset \mathrm{Q})\vee \mathrm{P}$.

Линдон [1959] и Генкин [1963] используют такие правила (с пропозициональными константами для истины и лжи). Линдон [1959] (хотя он и говорит, что нашел свой результат, используя генценовскую систему) дает теоретико-модельное доказательство, при котором его «основная теорема» оказывается некорректной (как показал Тайцлин [1960]), но может быть исправлена согласно Генкину [1963].

тогда, когда он входит $\left\{\begin{matrix}\textit{положительно}\\ \textit{отрицательно}\end{matrix}\right\}$ *как в* E, *так и в* F.

Доказательство. Можно считать, что никакая переменная не входит в $E \supset F$ и свободно, и связанно (см. примечание на стр. 395). Предположим, что $\vdash_H E \supset F$. Тогда по теореме Генцена $\vdash_{G4a} \rightarrow E \supset F$, откуда (применяя $\rightarrow\supset$ снизу вверх) $\vdash_{G4a} E \rightarrow F$. Мы применяем теорему 40 к данному доказательству секвенции $E \rightarrow F$ с конечной секвенцией $E \rightarrow F$ в роли $\Delta \rightarrow \Lambda$.

(a) Предположим теперь, что E и F имеют общий предикатный параметр. Если имеет место случай (EF) теоремы 40, то $\vdash E \rightarrow I$ и $\vdash I \rightarrow F$, где I есть J для конечной секвенции в роли $\Delta \rightarrow \Lambda$. В силу (1) I содержит лишь индивидные параметры, общие для E и F. В силу (2) предикатный параметр каждой атомарной части формулы I входит как в E, так и в F, так как он получен в результате спуска от формул C из некоторой аксиомы. Если вместо этого имеет место случай (E) или случай (F), то возьмем предикатный параметр K, общий для E и F, что можно сделать, согласно условию. Пусть D — это $\forall x K(x, \ldots, x)$ (или просто K, если K имеет 0 аргументов). Следующая таблица показывает, как в этих случаях мы получаем $\vdash E \supset I$ и $\vdash I \supset F$ в $G4b$.

Если $\vdash E \rightarrow$, возьмем $\neg(D \supset D)$ в качестве I

$$\frac{E \rightarrow}{E \rightarrow \neg(D \supset D)} \rightarrow У \qquad \dfrac{\dfrac{D \rightarrow F,\ D}{\rightarrow F,\ D \supset D} \rightarrow\supset}{\neg(D \supset D) \rightarrow F} \neg\rightarrow$$

Если $\vdash \rightarrow F$, возьмем $D \supset D$ в качестве I

$$\frac{D,\ E \rightarrow D}{E \rightarrow D \supset D} \rightarrow\supset \qquad \frac{\rightarrow F}{D \supset D \rightarrow F} У\rightarrow$$

Снова I содержит только дозволенные параметры. Во всех случаях имеем $\vdash E \supset I$ и $\dashv I \supset F$, используя $\rightarrow\supset$ и теорему Генцена (или следствие (a) теоремы 36).

(b) Предположим, что $E \supset F$ не содержит $\sim$ и никакой предикатный параметр не содержится положительно в обеих формулах E, F или отрицательно в них обеих. Мы получим тогда, что EF-аксиом нет. Отсюда будет следовать, что не имеет места случай (EF) теоремы 40, а случаи (E) и (F) приводят соответственно к $\vdash \neg E$ и $\vdash F$. Поэтому предположим для приведения к нелепости, что в данном доказательстве секвенции $E \rightarrow F$ имеется EF-аксиома C, $\Gamma \rightarrow \Theta$, C. Используя лемму 13 § 54, получаем, что одна из формул C (пусть Отрицательная антецедентная) спускается до своего образа в формуле E из $E \rightarrow F$, а Положительная С — до образа в F. Тогда по лемме 14 эти образы являются соответственно Отрицательным и Положительным; поэтому как подформулы E и F, рассматриваемых отдельно от секвенции $E \rightarrow F$, оба эти образа являются положительными, порождая, таким образом, положительные вхождения предикатного параметра формулы C как в E, так и в F. Аналогично, если Положительная формула C опускается до E, а Отрицательная — до F, то мы получаем отрицательные вхождения этого параметра как в E, так и в F.

(с) Предположим, что $E \supset F$ не содержит $\sim$ и не имеет места ни $\vdash_H \neg E$, ни $\vdash_H F$. Тогда по теореме Генцена (и применяя $\rightarrow\neg$) получаем, что неверно ни $\vdash_{G4a} E \rightarrow$, ни $\vdash_{G4a} \rightarrow F$. Поэтому должен быть применим именно случай (EF) теоремы 40. Рассмотрим любое вхождение предикатного параметра в I, и пусть C_I — та атомарная часть, которая его содержит. Пусть C_I положительна как часть I и потому Положительна как часть $E \rightarrow I$ и Отрицательна как часть $I \rightarrow F$. Применяя (2) из случая (EF) и лемму 14, получаем, что в доказательстве секвенции $E \rightarrow I$ часть C_I происходит от второй (Положительной) C аксиомы C, $\Gamma_E \rightarrow \Theta_E$, C, причем первая (Отрицательная) C этой аксиомы спускается до своего образа C_E в формуле E из $E \rightarrow I$. Этот образ как часть секвенции $E \rightarrow I$ является Отрицательным, но он положителен как часть E. Доказательство секвенции $I \rightarrow E$ аналогичным образом приводит нас к образу C_F формулы C, который положителен как часть F. Таким образом, этот параметр (о котором предположено, что он входит положительно в I) входит положительно в E и F. Теорема доказана.

В исчислении предикатов с равенством (с функциями или без них) формулировка интерполяционной теоремы Крейга может быть упрощена, так как при построении формул допускается символ = (который теперь не причисляется к параметрам).

Теорема 42. (Интерполяционная теорема Крейга [1957а] для исчисления предикатов с равенством.) *Если* $\vdash E \supset F$ *в исчислении предикатов с равенством, то найдется формула* I, *такая, что* $\vdash E \supset I$ *и* $\vdash I \supset F$, *и все параметры* I *входят как в* E, *так и в* F.

Доказательство. Метод доказательства теоремы 41 с помощью теоремы 40 не применим непосредственно для исключения из I функциональных параметров (от > 0 аргументов), не входящих в E или F. Однако при наличии равенства мы можем сначала использовать идею переформулировки утверждений, использующих функции, с помощью предикатов, которая встретилась нам в § 38.

Предположим, что $\vdash E \supset F$ в исчислении предикатов с равенством. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — открытые аксиомы равенства для

$=$ и остальных предикатных и функциональных символов из $E \supset F$. Тогда по теореме 31 § 29 в системе, состоящей из исчисления предикатов с этими функциональными и предикатными символами и с $A_1, \ldots, A_m$ в качестве дополнительных аксиом, имеет место $\vdash E \supset F$. Пусть в $E \supset F$ входят (индивидные и) функциональные символы $f_k, \ldots, f_1$ ($k \geqslant 0$). Назовем только что описанную систему S_k. В § 45 проиллюстрировано, каким образом можно заменить символы $f_k, \ldots, f_1$ для некоторых функций (независимо от того, какие функции эти символы выражают в данной модели) на символы представляющих предикатов этих функций. Тем самым мы приходим к системе S_0, в которой доказуем результат $E' \supset F'$ переформулировки $E \supset F$ с использованием символов представляющих предикатов вместо функциональных символов. Формула E' содержит те же переменные, что и E, не содержит (индивидных и) функциональных символов, а ее предикатные параметры — это в точности предикатные параметры E плюс символы представляющих предикатов, заменяющих (индивидные и) функциональные символы из E. Параметры из F' связаны с параметрами из F аналогичным образом. Нелогические аксиомы $B_1, \ldots, B_l$ системы S_0 — это открытые аксиомы равенства для $=$ и предикатных символов из $E' \supset F'$, а также формулы $\exists! w F_i(x_1, \ldots, x_{n_i}, w)$ для всех символов $F_1, \ldots, F_k$ представляющих предикатов. Таким образом, каждая из $B_1, \ldots, B_l$ содержит не более одного предикатного параметра, и этот параметр входит в $E' \supset F'$. Пусть список $B_1, \ldots, B_l$ выбран таким образом, что его первая часть $B_1, \ldots, B_k$ (возможно, пустая) содержит только предикатные параметры из E', а его вторая часть $B_{k+1}, \ldots, B_l$ (возможно, пустая) — только предикатные параметры из F'. (Параметры, общие для E' и F', могут входить в любую из частей.) Так как $\vdash E' \supset F'$ в S_0, то, используя $\forall$-удаления, получаем $\forall B_1, \ldots, \forall B_l \vdash E' \supset F'$ в исчислении предикатов H. Отсюда по теореме о дедукции и т. д.

$$\vdash \forall B_1 \& \ldots \& \forall B_k \& E' \supset (\forall B_{k+1} \& \ldots \& \forall B_l \supset F') \text{ в } H.$$

Теперь мы рассуждаем как в теореме 41 (а), используя систему $G4$а генценовского типа с символами только из S_0 (и потому без функциональных символов; см. примечание 4 к стр. 400). В случае (E) или (F) применима теорема 40 с $x = x$ в роли $K(x, \ldots, x)$. Мы получаем формулу I', такую, что в H

$$\vdash \forall B_1 \& \ldots \& \forall B_k \& E' \supset I' \text{ и } \vdash I' \supset (\forall B_{k+1} \& \ldots \& \forall B_l \supset F')$$

и I' содержит только индивидные и предикатные параметры, общие для $\forall B_1 \& \ldots \& \forall B_k \& E'$ и $\forall B_{k+1} \& \ldots \& \forall B_l \supset F'$, но не содержит функциональных параметров. Общие параметры этих формул — это свободные переменные, которые очевидным образом должны быть общими для E' и F', а также предикатные параметры, тоже входящие и в E′, и в F′ ввиду способа, которым мы разбили список $B_1, \ldots, B_l$.

Теперь $\forall B_1, \ldots, \forall B_k \vdash E' \supset I'$ и $\forall B_{k+1}, \ldots, \forall B_l \supset I' \supset F'$ в H. Поэтому $E' \supset I'$ и $I' \supset F'$ выводимы в H из $\forall B_1, \ldots, \forall B_l$, и потому доказуемы в $\mathbf{S}_0$. Переводя наши формулы обратно в термины функциональных символов вместо представляющих предикатов, мы получаем формулу I, такую, что $E \supset I$ и $I \supset E$ доказуемы в $\mathbf{S}_k$, а значит, в исчислении предикатов с равенством. Возможность вернуться к первоначальным $A_1, \ldots, A_m$, E и F дается «теоремой о переводе»[1]). Свободные переменные формулы I те же, что и для I′, и тем самым общие для E′, F′, E, F. Остальные параметры I — это предикатные параметры из I′, являющиеся общими параметрами формул E′, F′, E, F, а также общие функциональные символы E и F, которые при переходе от $\mathbf{S}_k$ к $\mathbf{S}_0$ были заменены символами представляющих предикатов, общими для E′ и F′. Таким образом, все параметры I — общие для E и F.

Упражнения. 56.1. Рассмотрите по образцу примера 11:

(a) Доказательство в $G4$ из примера 7 § 54.

(b) Доказательство секвенции $(P(b) \supset S) \& P(b) \to \forall x Q(x) \supset \supset R \vee Q(b)$, полученное применением снизу вверх правил $\& \to$, $\to \supset$, $\supset \to$ и (в одной из ветвей) $\forall \to$, $\to \vee$.

56.2. Покажите, что в исчислении предикатов (для F, не содержащих $\sim$) имеет место: Если $\vdash$ F, то некоторый предикатный параметр входит в F и положительно, и отрицательно.

§ 57. Теорема Бета об определимости. Теорема Робинсона о непротиворечивости

Пятый постулат Евклида независим от остальных постулатов, т. е. не может быть чисто логически выведен из них. Это было установлено после более чем двух тысячелетий рассуждений путем указания интерпретации, при которой все остальные постулаты истинны, а пятый постулат ложен. Такая интерпретация (§ 36) дается моделью Кэли — Клейна [1871] для неевклидовой геометрии (а для геометрии ограниченной части плоскости — моделью Бельтрами [1868]). Этот метод стал с тех пор в формальной аксиоматике стандартным методом доказательства независимости одной аксиомы из данного списка от остальных или, более общо, данного суждения от данного списка аксиом.

Чтобы сформулировать этот метод в наших терминах, рас-

---

[1]) [BM], теорема 43, стр. 369. Наши E′ и F′ получаются в результате применения к E и F операции ′ на стр. 364 последовательно по отношению к каждому из $f_k, \ldots, f_1$, а I — это результат применения к нашему I′ операции ° из [BM], стр. 370, последовательно по отношению к каждому из $F_1, \ldots, F_k$.

смотрим случай аксиоматической теории, формализуемой в исчислении предикатов (первого порядка) с равенством или без него и, скажем, с $\aleph_0$ аксиомами. Пусть аксиомы выражены формулами A_0, A_1, A_2, ... (и их свободные переменные, если таковые есть, имеют интерпретацию всеобщности), а суждение, независимость которого мы хотим доказать, выражено формулой F. Пусть E_0, E_1, E_2, ... — замыкания формул A_0, A_1, A_2, ... Тогда традиционный метод состоит просто в применении теоремы о непротиворечивости (ср. конец § 52)

$$\{E_0, E_1, E_2, \ldots \vdash F\} \to \{E_0, E_1, E_2, \ldots \models F\},$$

с неформальным использованием *12a (контрапозиции), *82b и *55c (§ 3, 25).

Аналогично, теорема о полноте

$$\{E_0, E_1, E_2, \ldots \models F\} \to \{E_0, E_1, E_2, \ldots \vdash F\}$$

после контрапозиции переходит в утверждение о том, что в принципе традиционный метод всегда срабатывает, т. е. если рассматриваемое суждение не следует логически из аксиом, то оно должно быть ложно при некоторой интерпретации, при которой истинны все аксиомы (ср. § 53).

Точно так же, как мы обычно хотим, чтобы аксиомы формальной теории были независимы, мы хотели бы, чтобы исходные понятия были независимы, т. е. чтобы ни одно из них нельзя было определить через остальные. Как можно показать, что в теории, основанной на аксиомах A_0, A_1, A_2, ... , некоторое понятие q нельзя определить через другие понятия p_0, p_1, p_2, ... этой теории? Падоа [1900] использовал для этого некоторый аналог описанного метода установления независимости аксиом. Он приводил две интерпретации (с одной и той же областью), такие, что при этих интерпретациях все аксиомы A_0, A_1, A_2, ... истинны, понятия p_0, p_1, p_2, ... имеют одни и те же значения, а q имеет разные значения. Действительно, если бы имелось определение понятия q через p_0, p_1, p_2, ... в теории с аксиомами A_0, A_1, A_2, ... , то оно определяло бы значение q через значения p_0, p_1, p_2, ... для любых значений последних, совместимых с одновременной истинностью всех формул A_0, A_1, A_2, ... Поэтому было бы невозможно, чтобы q имело разные значения, когда p_0, p_1, p_2, ... имеют одинаковые значения и все аксиомы A_0, A_1, A_2, ... истинны.

Теперь мы изучим этот метод в современных терминах. Мы обсудим его обобщение, касающееся определимости q через p_0, p_1, p_2, ..., когда замыкания E_0, E_1, E_2, ... аксиом A_0, A_1, A_2, ... могут содержать дополнительные параметры r_0, r_1, r_2, ... Наша запись будет относиться к самому общему случаю $\aleph_0$ аксиом и $\aleph_0$ параметров в каждом из двух списков. Читатель легко поймет, какие нужны изменения, когда один или оба списка конечны или даже пусты. Мы предполагаем, что q и все указанные параметры различны. В рамках настоящего рассмотрения каждый параметр из обоих списков (которые вместе с q должны включать все параметры, входящие в замкнутые аксиомы E_0, E_1, E_2, ...) будет (пропозициональным или) предикатным или индивидным символом, q будет n-местным ($n \geqslant 0$) предикатным символом Q, а логика будет исчислением предикатов без равенства.

Метод Падоа эквивалентен (в силу контрапозиции и т. д.) следующей импликации: {Q определим через p_0, p_1, p_2, ... в теории, основанной на аксиомах E_0, E_1, E_2, ...} $\to$ {Q интерпретируется одинаково при любых двух интерпретациях параметров Q, p_0, p_1, p_2, ..., r_0, r_1, r_2, ..., при которых E_0, E_1, E_2, ... истинны, а p_0, p_1, p_2, ... интерпретируются одинаково} или, короче, $\mathrm{Dfb_E} \to \mathrm{Dfd_I}$.

Сначала разберем $\mathrm{Dfb_E}$. Мы понимаем его как утверждение о возможности дать подходящее определяющее выражение для $Q(x_1, \ldots, x_n)$ (*определяемого*). Такое выражение будет записано в языке рассматриваемой теории, т. е. исчисления предикатов с указанными параметрами. Оно будет содержать свободно лишь переменные $x_1, \ldots, x_n$, а в качестве параметров — только члены списка p_0, p_1, p_2, ..., причем их оно может содержать лишь конечное число, скажем $p_0, \ldots, p_s$. Обозначим это *определяющее* выражение через $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$. Так как логикой является исчисление предикатов, мы должны иметь $s \geqslant 0$, причем среди $p_0, \ldots, p_s$ должен быть хотя бы один предикатный параметр, так как определяющее выражение нельзя построить без использования хотя бы одного предикатного параметра. Наконец, мы должны выразить утверждение о том, что $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$ — определяющее выражение для $Q(x_1, \ldots, x_n)$ в теории, основанной на E_0, E_1, E_2, ... Это значит, что для любой области D и любого распределения значений, выполняющего E_0, E_1, E_2, ..., формула $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$ должна иметь то же истинностное значение, что и $Q(x_1, \ldots, x_n)$, для всех значений $x_1, \ldots, x_n$ в D. Это приводит нас к следующей формулировке $\mathrm{Dfb_E}$[1]).

$\mathrm{Dfb_E^M}$: Для некоторой формулы $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$, содержащей лишь параметры, указанные явно,

$$E_0, E_1, E_2, \ldots \models Q(x_1, \ldots, x_n) \sim R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s).$$

---

[1]) Так как E_0, E_1, E_2, ... замкнуты, то «$E_0, E_1, E_2, \ldots \models Q(x_1, \ldots, x_n) \sim R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$» эквивалентно «$E_0, E_1, E_2, \ldots \models \forall x_1 \ldots \forall x_n [Q(x_1, \ldots, x_n) \sim R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)]$» и аналогично с «$\vdash$» вместо «$\models$». Удобнее использовать более короткие выражения со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$.

Мы говорим в этом случае, что (в смысле *теории моделей*) Q *явно определимо* через p_0, p_1, p_2 ... *в* теории, основанной на замкнутых аксиомах E_0, E_1, E_2, ..., или что E_0, E_1, E_2, ... *делают* Q *определимым*. Далее, для такого $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$ мы говорим, что (в смысле *теории моделей*) E_0, E_1, E_2, ... *явно определяют* Q *через* p_0, p_1, ..., p_s *как* $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$.

Мы можем, эквивалентным образом, заменить «$E_0, E_1, E_2, \ldots \models$» на «для некоторого d $E_0, E_1, \ldots, E_d \vdash$» (ввиду полноты и непротиворечивости исчисления предикатов) и далее на «для некоторого d $E_0 \& \ldots \& E_d \supset$» (по $\supset$-введ. и т. д.). В $E_0 \& \ldots \& E_d$ может входить лишь конечное число параметров. Мы можем, если нужно, увеличить s в $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$ и добиться того, чтобы в $E_0 \& \ldots \& E_d$ входили только $p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t$. После того, как это проделано, Dfb_E^M эквивалентно следующему.

Dfb_E^P: Для некоторой конечной конъюнкции $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$ формул E_0, E_1, E_2, ... и для некоторой формулы $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$, содержащих лишь указанные явно параметры,

$$\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \supset [Q(x_1, \ldots, x_n) \sim \\ \sim R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)].$$

Мы говорим тогда, что (в смысле *теории доказательств*) Q *явно определимо через* $\left\{\begin{matrix} p_0, p_1, p_2, \ldots \\ p_0, \ldots, p_s \end{matrix}\right\}$ *в* теории, основанной на $\left\{\begin{matrix} E_0, E_1, E_2, \ldots \\ E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \end{matrix}\right\}$, или что $\left\{\begin{matrix} E_0, E_1, E_2, \ldots \\ E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} \text{делают} \\ \text{делает} \end{matrix}\right\}$ Q *определимым* таким образом. Далее (в смысле *теории доказательств*), $\left\{\begin{matrix} E_0, E_1, E_2, \ldots \textit{ явно определяют} \\ E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \textit{ явно определяет} \end{matrix}\right\}$ Q *через* $p_0, \ldots, p_s$ *как* $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$. Вариант, соответствующий нижним строкам, может использоваться для любой формулы $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$, содержащей лишь параметры, указанные явно, независимо от того, является ли она конечной конъюнкцией формул E_0, E_1, E_2, ...[1]).

Теперь разберем $\mathrm{Df d_I}$. Пусть Q', r'_0, r'_1, r'_2, ... — новые параметры соответствующих типов (предикатные или индивидные) и с тем же числом аргументных мест, что и Q, r_0, r_1, r_2, ...;

---

[1]) Аналогичным образом мы могли бы ввести $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$ в теоретико-модельную формулировку Dfb_E^M (а также в Dfd_I^M, см. ниже). Если для начала имеется лишь конечное множество аксиом, то $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$ может быть просто их конъюнкцией.

пусть E'_0, E'_1, E'_2, ... получаются из E_0, E_1, E_2, ... путем подстановки Q', r'_0, r'_1, r'_2, ... вместо Q, r_0, r_1, r_2, ... соответственно. Вместо двух интерпретаций для Q, p_0, p_1, p_2, ..., r_0, r_1, r_2, ..., выполняющих E_0, E_1, E_2, ... и придающих p_0, p_1, p_2, ... одни и те же значения, можно эквивалентным образом иметь одну интерпретацию для Q, Q', p_0, p_1, p_2, ..., r_0, r'_0, r_1, r'_1, r_2, r'_2, ..., выполняющую E_0, E'_0, E_1, E'_1, E_2, E'_2, ... Этот прием ведет к следующей формулировке:

$\mathrm{Dfd}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}}$: $E_0, E'_0, E_1, E'_1, E_2, E'_2, \ldots \models Q(x_1, \ldots, x_n) \sim Q'(x_1, \ldots, x_n)$.

Мы говорим в этом случае, что (в смысле *теории моделей*) Q *неявно определимо через* p_0, p_1, p_2, ... (*с* r_0, r_1, r_2, ... *в качестве вспомогательных параметров*) теорией (или *в* теории), построенной на основе E_0, E_1, E_2, ...

С помощью тех же преобразований, что и в случае $\mathrm{Dfb}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{E}}$, устанавливается, что это условие $\mathrm{Dfd}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}}$ эквивалентно следующему условию, где $E(Q', p_0, \ldots, p_s, r'_0, \ldots, r_t)$ обозначает результат подстановки Q', r'_0, ..., r'_t вместо Q, r_0, ..., r_t в $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$.

$\mathrm{Dfd}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}}$: Для некоторой конечной конъюнкции $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$ формул E_0, E_1, E_2, ..., содержащей лишь параметры, указанные явно, имеет место

$$\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \,\&\, E(Q', p_0, \ldots, p_s, r'_0, \ldots, r'_t) \supset$$
$$\supset [Q(x_1, \ldots, x_n) \sim Q'(x_1, \ldots, x_n)].$$

Мы говорим в этом случае, что (в смысле *теории доказательств*) Q *неявно определимо через* $\begin{Bmatrix} p_0, p_1, p_2, \ldots \\ p_0, \ldots, p_s \end{Bmatrix}$ (*с* $\begin{Bmatrix} r_0, r_1, r_2, \ldots \\ r_0, \ldots, r_t \end{Bmatrix}$ *в качестве вспомогательных параметров*) теорией (или *в* теории), основанной на $\begin{Bmatrix} E_0, E_1, E_2, \ldots \\ E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \end{Bmatrix}$.

Резюмируем: метод Падоа основан на импликации, которую (после контрапозиции) мы сформулировали в теории моделей в виде $\mathrm{Dfb}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{E}} \to \mathrm{Dfd}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}}$ или, эквивалентным образом (используя $\mathrm{Dfb}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{E}} \equiv \mathrm{Dfb}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{E}}$ и $\mathrm{Dfd}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}} \equiv \mathrm{Dfd}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}}$), в теории доказательств в виде $\mathrm{Dfb}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{E}} \to \mathrm{Dfd}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}}$.

Метод Падоа легко подкрепить средствами теории доказательств, установив $\mathrm{Dfb}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{E}} \to \mathrm{Dfd}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{I}}$. В действительности любая формула $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$, которая делает Q явно определимым через p_0, ..., p_s, также неявно определяет Q через p_0, ..., p_s (упр. 57.1).

До сих пор наш анализ сводился к непосредственному применению результатов, имевшихся с 1930 года (непротиворечивость относительно общезначимости, например Гильберт и Аккерман [1928], стр. 61—63, теорема о дедукции, теорема Гёделя о полноте [1930]).

Теперь исследуем метод Падоа на полноту. Иными словами, всегда ли он сработает, если одно из основных понятий некоторой аксиоматической теории действительно независимо от остальных? Положительный ответ был бы (в силу контрапозиции) эквивалентен следующему: если невозможно удовлетворить замкнутые аксиомы E_0, E_1, E_2, ... двумя различными значениями Q, совместимыми с данными значениями для p_0, p_1, p_2, ..., то эта неявная теоретико-модельная зависимость Q от p_0, p_1, p_2, ... должна быть выразима путем явного определения в рамках синтаксических ограничений языка. Это заведомо не очевидно.

Однако полнота метода Падоа была установлена (с одним тривиальным исключением) Бетом [1953] [1]). Исключение представляет случай, когда $p_0, \ldots, p_s$ не содержат предикатных параметров; без предикатных параметров мы не можем построить определяющее выражение $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$ в исчислении предикатов без равенства. Возможность дополнительных параметров $r_0, \ldots, r_t$ в неявном определении, не входящих в определяющее выражение, и некоторые другие обобщения результата Бета были описаны Крейгом в [1957a].

В силу предыдущего предварительного анализа мы должны установить $\mathrm{Dfd}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{M}} \to \mathrm{Dfb}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{M}}$ или, эквивалентным образом, $\mathrm{Dfd}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{P}} \to \mathrm{Dfb}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{P}}$. Чтобы установить последнее, достаточно показать, что любая формула $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$, неявно определяющая Q (в смысле теории доказательств) через $p_0, \ldots, p_s$, также делает Q явно определимым через $p_0, \ldots, p_s$.

Мы формулируем это в виде следующего утверждения.

Теорема 43. (Теорема Бета [1953] об определимости.) *Пусть используется символика и логика исчисления предикатов без равенства, но, быть может, с индивидами. В обозначениях, объясненных выше, пусть*

$$\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \,\&\, E(Q', p_0, \ldots, p_s, r_0', \ldots, r_t') \supset$$
$$\supset [Q(x_1, \ldots, x_n) \sim Q'(x_1, \ldots, x_n)],$$

т. е. $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$ *неявно определяет* Q *через* $p_0, \ldots, p_s$ *с* $r_0, \ldots, r_t$ *в качестве вспомогательных параметров. Тогда:*

(a) *Если один из* $p_0, \ldots, p_s$ *является предикатным парамет-*

[1]) Тарский [1934] рассмотрел по существу более простой случай теории, основанной на теории типов. Приводимое доказательство (теоремы 43) с использованием интерполяционной теоремы Крейга по существу то же, что у Крейга [1957a].

ром, имеется формула $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$, *такая, что*

$$\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \supset$$
$$\supset [Q(x_1, \ldots, x_n) \sim R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)],$$

т. е. $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$ *делает* Q *явно определимым через* $p_0, \ldots, p_s$.

(b) *Если ни один из* $p_0, \ldots, p_s$ *не является предикатным параметром, входящим в* $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$, *то*

либо $\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \supset Q(x_1, \ldots, x_n)$,

либо $\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \supset \neg Q(x_1, \ldots, x_n)$,

т. е. $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, r_t)$ *определяет* Q *либо как постоянный предикат «истина», либо как постоянный предикат «ложь».*

Доказательство. Используя главное условие теоремы вместе с исчислением высказываний, имеем

(i) $\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \& Q(x_1, \ldots, x_n) \supset$
$$\supset [E(Q', p_0, \ldots, p_s, r_0', \ldots, r_t'') \supset Q'(x_1, \ldots, x_n)].$$

Это утверждение мы берем в качестве «$\vdash E \supset F$» для интерполяционной теоремы Крейга (теорема 41).

(a_1) Допустим, что один из $p_0, \ldots, p_s$ есть один из предикатных параметров, входящих в $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$. Тогда в силу (a) теоремы 41 имеется формула I, такая, что $\vdash E \supset I$ и $\vdash I \supset F$ и I содержит лишь общие параметры формул E и F. Но это могут быть самое бо́льшее $x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s$. Взяв это I в качестве $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$, мы удовлетворим структурные требования, и

(ii) $\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \& Q(x_1, \ldots, x_n) \supset$
$$\supset R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s),$$

(iii) $\vdash R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s) \supset$
$$\supset [E(Q', p_0, \ldots, p_s, r_0', \ldots, r_t') \supset Q'(x_1, \ldots, x_n)].$$

Доказательство формулы в (iii) останется доказательством после подстановки $Q, r_0, \ldots, r_t$ вместо $Q', r_0', \ldots, r_t'$ [1]). Поэтому

(iv) $\vdash R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s) \supset$
$$\supset [E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \supset Q(x_1, \ldots, x_n)].$$

Из (ii) и (iv) в силу исчисления высказываний

(v) $\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \supset$
$$\supset [Q(x_1, \ldots, x_n) \sim R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)].$$

(a_2) Если один из $p_0, \ldots, p_s$ — предикатный параметр, но ни один предикатный параметр из списка $p_0, \ldots, p_s$ не входит в

---

[1]) См. примечание на стр. 159

$E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$, то применим (устанавливаемый ниже) результат (b), после чего можно тривиально построить $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$.

(b) Допустим, что ни один предикатный параметр из списка $p_0, \ldots, p_s$ не входит в $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$. Тогда по теореме 41 (b)

(vi-1) либо $\vdash \neg [E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \& Q(x_1, \ldots, x_n)]$,
(vi-2) либо $\vdash E(Q', p_0, \ldots, p_s, r'_0, \ldots, r'_t) \supset Q'(x_1, \ldots, x_n)$.

Применяя исчисление высказываний (*60, *49 или *58b) к (vi-1) и подставляя в (vi-2):

(vii-1) либо $\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \supset \neg Q(x_1, \ldots, x_n)$,
(vii-2) либо $\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \supset Q(x_1, \ldots, x_n)$.

Теперь рассмотрим случай исчисления предикатов с равенством и функциональными символами. Параметр q в методе Падоа может быть теперь либо n-местным предикатным символом Q, либо n-местным функциональным символом g (при $n \geqslant 0$).

Теорема 44. (Теорема Бета об определимости для исчисления предикатов с равенством и функциями.) *В исчислении предикатов с равенствами и функциями (при объясненных выше обозначениях):*

(A) *Если*

$$\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \& E(Q', p_0, \ldots, p_s, r'_0, \ldots, r'_t) \supset \\ \supset [Q(x_1, \ldots, x_n) \sim Q'(x_1, \ldots, x_n)],$$

то имеется формула $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$, *такая, что*

$$\vdash E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \supset \\ \supset [Q(x_1, \ldots, x_n) \sim R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)].$$

(B) *Если*

$$\vdash E(g, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \& E(g', p_0, \ldots, p_s, r'_0, \ldots, r'_t) \supset \\ \supset g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = g'(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

то имеется формула $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$, *такая, что*

$$\vdash E(g, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t) \supset \\ \supset [g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n \sim R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)].$$

Доказательство. (а) Проводится, как и раньше, за исключением того, что теперь использование теоремы 42 дает нам $R(x_1, \ldots, x_n, p_0, \ldots, p_s)$ во всех случаях.

(b) в исчислении предикатов с равенством $g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = g'(x_1, \ldots, x_{n-1})$ будет эквивалентно $g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n \sim g'(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n$. Теперь применимы те же рассуждения, что и раньше, с использованием $g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n$ вместо $Q(x_1, \ldots, x_n)$. Теорема доказана.

Как мы отмечали в § 38[1]), если удалить из **N** символ $\cdot$ и его аксиомы 20 и 21, то представляющий предикат $a \cdot b = c$ функции $a \cdot b$ не будет выразим. Следовательно, по теореме 44 (B) (и контрапозиции)[2]) применим метод Падоа. Иными словами, имеются две модели системы **N** с одной и той же областью D и одинаковыми значениями для $0, '$ и $+$ (и $=$, означающим равенство), в которых $\cdot$ имеет в качестве значений различные функции.

В качестве другого приложения интерполяционной теоремы Крейга мы установим теорему А. Робинсона [1956], [1963], стр. 114, о непротиворечивости. Робинсон доказал ее независимо от теоремы Крейга и использовал для доказательства теоремы Бета.

Задача такова. Допустим, что у нас есть две непротиворечивые формальные системы S_1 и S_2 с аксиомами A_0, A_1, A_2, ... и B_0, B_1, B_2, ... и параметрами (отличными от переменных) p_0, p_1, p_2, ... и q_0, q_1, q_2, ... соответственно. (Читатель может пересказать это для случая конечных списков.) Будет ли непротиворечиво объединение $S_1 \cup S_2$, которое имеет аксиомы A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, ... и (отличные от переменных) параметры p_0, q_0, p_1, q_1, p_2, q_2, ... (возможно, с повторениями)?

Не обязательно. Действительно, пусть S_1 — это арифметика **N** с добавлением гёделевской формулы $\neg C_p$ (которая истинна в стандартной модели, но невыводима в **N**), а S_2 — это **N** с добавлением C_p. Каждая из систем S_1, S_2 непротиворечива, так как **N** непротиворечива (ср. § 47, где S_2 названа «**M**»), но объединение $S_1 \cup S_2$ противоречиво. Очевидно, что трудность заключается в неполноте общей части S_1 и S_2, так что мы можем расширить **N** до S_1 и S_2 в двух различных направлениях, совместимых с **N**, но не друг с другом.

Этот пример подсказывает дополнительное условие, при котором мы можем надеяться, что ответ на наш вопрос будет утвердительным: две рассматриваемые формальные системы должны быть в «полном согласии» относительно вопросов, представляющих «взаимный интерес». Иными словами, для каждой формулы I, содержащей лишь общие параметры систем S_1 и S_2, одна и та же из формул I и $\neg$I должна быть доказуема как в S_1, так и в S_2.

Рассуждение здесь, как и в теореме Гёделя о полноте и в большинстве других мест этой главы, где рассматривается $\aleph_0$ формул, не зависит от эффективности задания формул (требуемой от аксиом формальной системы; ср. § 37, 43). Поэтому в формулировке теоремы допускается, чтобы одна из систем S_1, S_2 или обе они были множествами формул, построенными на

[1]) См. примечание 2 на стр. 258.
[2]) См. примечание 2 на стр. 381.

основе исчисления предикатов аналогично множеству выводимых формул формальной системы, основанной на исчислении предикатов, но без требования эффективности для аксиом.

Теорема 45. (Теорема Робинсона [1956] о непротиворечивости.) *Пусть S_1 и S_2 — формальные системы (или множества формул), построенные на основе исчисления предикатов с равенством и функциями или без них. Пусть каждая из систем S_1, S_2 просто непротиворечива. Допустим, что они находятся в полном согласии, т. е. для каждой замкнутой формулы* I *в общей части (или пересечении) их символизмов одна из формул* I, $\neg$I *выводима как в S_1, так и в S_2. Тогда объединение $S_1 \cup S_2$ просто непротиворечиво.*

Доказательство. Начнем со случая исчисления предикатов без равенства и функций (но, возможно, с индивидами). Пусть $E_0, E_1, E_2, \ldots$ и $F_0, F_1, F_2, \ldots$ — замыкания аксиом систем S_1 и S_2. Допустим, что $S_1 \cup S_2$ противоречива. Тогда противоречие $K \& \neg K$ выводимо из E_0, F_0, E_1, F_1, E_2, F_2, ... в исчислении предикатов. Пусть $E_0, \ldots, E_c, F_0, \ldots, F_d$ — это те из формул E_0, F_0, E_1, F_1, E_2, F_2, ..., которые использованы в данном выводе формулы $K \& \neg K$. Тогда $E_0, \ldots, E_c, F_0, \ldots, F_d \vdash K \& \neg K$ в исчислении предикатов. Отсюда в силу исчисления высказываний

$$\vdash E_0 \& \ldots \& E_c \supset \neg (F_0 \& \ldots \& F_d).$$

Возьмем это в качестве «$\vdash E \supset F$» для теоремы 41. Если $E_0 \& \ldots \& E_c$ и $F_0 \& \ldots \& F_d$ не имеют общих предикатных параметров, то по теореме 41(b) $\vdash \neg (E_0 \& \ldots \& E_c)$ или $\vdash \neg (F_0 \& \ldots \& F_d)$. Но тогда соответствующая из систем S_1, S_2 противоречива вопреки предположению. Если есть общий предикатный параметр, то по теореме 41(a) имеется формула I, такая, что

$$\text{(i)} \vdash E_0 \& \ldots \& E_c \supset I \quad \text{и} \quad \text{(ii)} \vdash I \supset \neg (F_0 \& \ldots \& F_d)$$

и I содержит только общие параметры формул $E_0 \& \ldots \& E_c$ и $\neg (F_0 \& \ldots \& F_d)$. Поэтому I замкнута, ибо таковы E_0, E_1, E_2, ... и F_0, F_1, F_2, ... Согласно предположению о «полном согласии», в исчислении предикатов имеем:

либо (iii-1) $E_0, E_1, E_2, \ldots \vdash I$ и (iv-1) $F_0, F_1, F_2, \ldots \vdash I$,
либо (iii-2) $E_0, E_1, E_2, \ldots \vdash \neg I$ и (iv-2) $F_0, F_1, F_2, \ldots \vdash \neg I$.

Но в первом случае (ii) и (iv-1) несовместимы с непротиворечивостью S_2; действительно, применяя к (ii) контрапозицию (*13 из § 24), получаем $\vdash F_0 \& \ldots \& F_d \supset \neg I$. Во втором случае (i) и (iii-2) несовместимы с непротиворечивостью S_1.

Для исчисления предикатов с равенством и функциями мы используем теорему 42.

Упражнение 57.1. Покажите, что если $E(Q, p_0, \ldots, p_s, r_0, \ldots, r_t)$ определяет Q явно через $p_0, \ldots, p_s$, то оно определяет Q и неявно.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Г. Е. Минц

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Нормализация доказательств

Приведем обещанное (примечание на стр. 396) доказательство того, что любое доказательство в $G4$a с сечением можно путем конечного числа стандартных шагов (редукций) нормализовать, т. е. перестроить в доказательство в исходной формулировке $G4$a без сечения. Начиная с этого места, мы будем, не оговаривая этого особо, рассматривать лишь доказательства, обладающие свойством чистоты переменных, ограничиваясь, тем самым, секвенциями, в которые никакая переменная не входит и свободно, и связанно.

Произведением секвенций $\Gamma \to \Delta$ и $\Sigma \to \Lambda$ назовем, следуя Клини [1952], секвенцию $\Gamma, \Sigma \to \Delta, \Lambda$.

Степенью формулы называется число вхождений в нее операторов &, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\sim$, $\exists$, $\forall$. *Степенью сечения*

$$\frac{\Delta \to \Lambda, C \qquad C, \Gamma \to \Theta}{\Delta,\ \Gamma \to \Theta,\ \Lambda}$$

называется степень формулы C, которая называется *формулой сечения*.

Пусть k — натуральное число, F — список формул. Доказательство в $G4$a с сечением назовем $(k,$ F$)$-*доказательством*, если в нем все формулы сечения имеют степень $\leqslant k$, а те из них, которые имеют степень k, содержатся в списке F. Вместо «имеется $(k,$ F$)$-доказательство секвенции S» будем писать $\mid\!\frac{(k,\ \mathrm{F})}{} S$.

Лемма 1. (Обращение правил.)

1. *Если* $\mid\!\frac{(k,\ \mathrm{F})}{} \Delta \to \Lambda, A\&B$, *то* $\mid\!\frac{(k,\ \mathrm{F})}{} \Delta \to \Lambda, A$ и $\mid\!\frac{(k,\ F)}{} \Delta \to \Lambda, B$.

2. *Если* $\mid\!\frac{(k,\ \mathrm{F})}{} \Delta \to \Lambda, \forall x A(x)$, *то* $\mid\!\frac{(k,\ \mathrm{F})}{} \Delta \to \Lambda, A(t)$, *если* t *не содержит связанных переменных из* $\Delta,\ \Lambda,\ \forall x A(x)$.

3. *Если* $\mid\!\frac{(k,\ \mathrm{F})}{} \Delta \to \Lambda, A \supset B$, *то* $\mid\!\frac{(k,\ \mathrm{F})}{} A,\ \Delta \to \Lambda,\ B$.

4. *Если* $\mid\!\frac{(k,\ \mathrm{F})}{} \Delta \to \Lambda, \neg A$, *то* $\mid\!\frac{(k,\ \mathrm{F})}{} A,\ \Delta \to \Lambda$.

5. *Если* $\vdash^{(k,\,F)} \Delta \to \Lambda,\ A \sim B$, *то* $\vdash^{(k,\,F)} A, \Delta \to \Lambda, B$ *и* $\vdash^{(k,\,F)} B, \Delta \to \Lambda,\ A$.

6. *Если* $\vdash^{(k,\,F)} A \vee B,\ \Gamma \to \Theta$, *то* $\vdash^{(k,\,F)} A,\ \Gamma \to \Theta$ *и* $\vdash^{(k,\,F)} B,\ \Gamma \to \Theta$.

7. *Если* $\vdash^{(k,\,F)} \exists x A(x),\ \Gamma \to \Theta$, *то* $\vdash^{(k,\,F)} A(t),\ \Gamma \to \Theta$, *если* t *не содержит связанных переменных из* Γ, Θ, $\exists x A(x)$.

Доказательство. 1. Заменяя в (k, F)-доказательстве секвенции $\Delta \to \Lambda$, A&B все предки указанного явно сукцедентного вхождения A&B, имеющие вид A&B, на A и вычеркивая левые посылки соответствующих $\to \&$ и все, что стоит над правыми посылками, получаем искомое доказательство секвенции $\Delta \to \Lambda$, A:

$$\dfrac{\Delta_1 \to \Lambda_1\ \overset{\downarrow}{A} \qquad \Delta_1 \to \Lambda_1,\ B}{\Delta_1 \to \Lambda_1,\ A\&B} \atop {\downarrow \atop \Delta \to \Lambda,\ A\&B} \qquad\qquad {\Delta_1 \to \Lambda_1',\ \overset{\downarrow}{A} \atop {\downarrow \atop \Delta \to \Lambda,\ A}}$$

Здесь Λ_1' обозначает результат вычеркивания предков A&B из Λ_1.

2. Переименовывая, если нужно, в данном (k, F)-доказательстве переменные b правил $\to \forall$ и $\exists \to$, а также связанные переменные, не входящие в нижнюю секвенцию, добиваемся, чтобы t не содержал упомянутых переменных. Теперь проходит тот же прием, что и в случае 1: все предки $\forall x A(x)$, имеющие вид $\forall x A(x)$, заменяются на $A(t)$; над посылками соответствующих $\to \forall$ делается подстановка t вместо переменной b:

$$\dfrac{\Delta_1 \to \Lambda_1,\ \overset{\downarrow (b)}{A(b)}}{\Delta_1 \to \Lambda_1,\ \forall x A(x)} \atop {\downarrow \atop \Delta \to \Lambda,\ \forall x A(x)} \qquad\qquad {\Delta_1 \to \Lambda_1',\ \overset{\downarrow (t)}{A(t)} \atop {\downarrow \atop \Delta \to \Lambda,\ A(t)}}$$

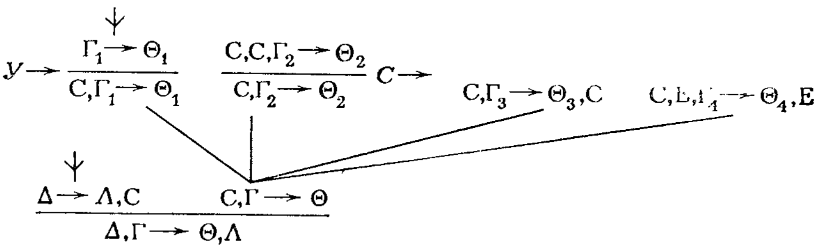
3. Исходное доказательство показано слева, результирующее — справа:

$$\dfrac{A,\ \Delta_1 \overset{\downarrow}{\to} \Lambda_1,\ B}{\Delta_1 \to \Lambda_1,\ A \supset B} \atop {\downarrow \atop \Delta \to \Lambda,\ A \supset B} \qquad\qquad {A,\ \Lambda_1 \overset{\downarrow}{\to} \Lambda_1',\ B \atop {\downarrow \atop A,\ \Delta \to \Lambda,\ B}}$$

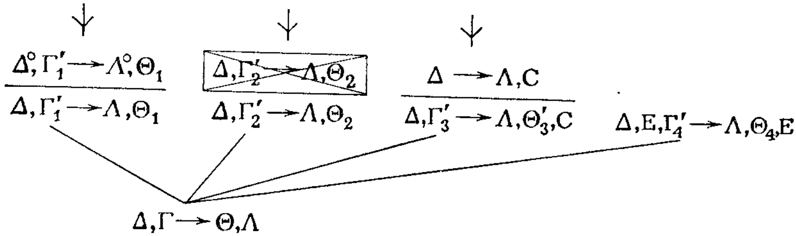
4—7. Аналогично

Лемма 2. *Если* $\vdash^{(0,\ F \cup \{C\})} S$, *то* $\vdash^{(0,\,F)} S$.

Доказательство проводится индукцией по количеству сечений с формулой сечения C (назовем их C-сечениями). Базис индукции тривиален. Для обоснования индукционного перехода выберем в данном доказательстве C-сечение, выше которого нет других C-сечений, и запишем часть данного доказательства, которая заканчивается этим C-сечением, в виде



Теперь вычеркнем из всех секвенций, входящих в доказательство правой посылки, все предки (указанного явно) антецедентного C и умножим все секвенции, содержавшие такие предки, на $\Delta \to \Lambda$. Полученная фигура превращается в (0, F)-доказательство старой секвенции Δ, $\Gamma \to \Theta$, Λ после вычеркивания повторений и надписывания над старыми C-аксиомами вывода левой посылки рассматриваемого C-сечения:



Δ° и Λ° в фигуре, которая появилась на месте C-утончения, означают Δ и Λ, если Γ_1 содержало предки C (тогда новая фигура — просто повторение секвенций), и означают пустые списки в противном случае (в этом случае новая фигура — последовательность утончений, вводящих Δ и Λ). Лемма доказана.

Лемма 3. *Если* $\vdash^{(k,\ F\cup\{C\})} S$ *и степень формулы* C *равна* k, то $\vdash^{(k,\ F)} S$.

Доказательство. В силу леммы 2 можно считать, что $k > 0$. Следует рассмотреть 7 случаев в зависимости от вида формулы. При этом используются соответствующие пункты леммы 1. Как и при доказательстве леммы 3, выбираем одно из самых верхних С-сечений и устраняем его; при этом, однако, оно разобьется на сечения меньшей степени.

Случай 1.

$$\&\to\ \dfrac{A,\ \overset{\downarrow}{B},\ \Gamma_1\to\Theta}{A\&B,\ \Gamma_1\to\Theta}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Delta\to\Lambda,\ A\&B \qquad \overset{\downarrow}{A\&B}\Gamma\to\Theta}{\Delta,\ \Gamma\to\Theta,\ \Lambda}$$

$$\dfrac{\Delta\to\Lambda,B \qquad \dfrac{\Delta\to\Lambda,A \qquad \Delta^\circ,A,B,\ \Gamma_1'\to\Theta_1,\ \Lambda^\circ}{\Delta,\ B,\ \Gamma_1'\to\Theta_1,\ \Lambda}\begin{pmatrix}\text{Сеч.}\\ \text{Сокр.}\end{pmatrix}}{\Delta,\ \Gamma_1'\to\Theta_1,\ \Lambda}\begin{pmatrix}\text{Сеч.}\\ \text{Сокр.}\end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta,\ \Gamma\to\Theta,\ \Lambda$$

Вверху показано данное доказательство, внизу — измененное. Все предки антецедентного $A\&B$, имеющие вид $A\&B$, вычеркнуты, а содержавшие их секвенции домножены на $\Delta\to\Lambda$. (k, F)-доказательства секвенций $\Delta\to\Lambda,A$ и $\Delta\to\Lambda,B$ получены из (k, F)-доказательства секвенции $\Delta\to\Lambda,\ A\&B$ по лемме 1. Сокращения и аксиомы, содержавшие предки $A\&B$, рассматриваются так же, как в лемме 2. Смысл обозначений Δ° и Λ° аналогичен их смыслу в лемме 2.

Случай 2. Слева данное доказательство, справа — измененное.

$$\dfrac{\overset{\downarrow}{A}(t),\ \forall xA(x),\ \Gamma_1\to\Theta_1}{\forall xA(x),\Gamma_1\to\Theta_1}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Delta\to\Lambda,\forall xA(x) \qquad \overset{\downarrow}{\forall}xA(x),\ \Gamma\to\Theta}{\Delta,\ \Gamma\to\Theta,\ \Lambda}$$

$$\dfrac{\Delta\to\Lambda,\ A(t) \qquad \overset{\downarrow}{A}(t),\Gamma_1'\to\Theta_1,\ \Lambda}{\Delta,\ \Gamma_1'\to\Theta_1,\ \Lambda}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta,\ \Gamma\to\Theta,\ \Lambda$$

Для получения доказательства секвенции $\Delta\to\Lambda,\ A(t)$ применяется случай 2 леммы 1.

Случай 6.

$$\dfrac{\Delta_1\to\Lambda_1,\ A,\ B}{\Delta_1\to\Lambda_1,A\vee B}$$

$$\downarrow$$

$$\dfrac{\Delta\to\Lambda,A\vee B \qquad A\vee B,\Gamma\to\Theta}{\Delta,\ \Gamma\to\Theta,\ \Lambda}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Delta_1,\ \Gamma^\circ\to\Theta^\circ,\ \Lambda_1',\ A,\ B \qquad A,\ \Gamma\to\Theta}{\Delta_1,\ \Gamma\to\Theta,\ \Lambda_1',\ B} \qquad B,\ \Gamma\to\Theta}{\Delta_1,\ \Gamma\to\Theta,\ \Lambda_1'}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta,\ \Gamma\to\Theta,\ \Lambda$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Два из них иллюстрированы ниже на примере.

Теорема 1 (о нормальной форме в $G4$а). *По всякому доказательству в $G4$а с сечением можно построить доказательство той же секвенции, не содержащее сечений.*

Для данного доказательства через k обозначим максимальную степень сечения, а через F — список формул сечения, имеющих степень k.

Теорема доказывается индукцией по k. Как базис, так и индукционный переход обосновываются индукцией по числу членов списка F (внутренняя индукция). Базис внутренней индукции очевиден: в случае $k=0$ данное доказательство уже не содержит сечений, а в случае $k>0$ данное доказательство является $(k-1,\ \mathrm{G})$-доказательством для некоторого списка G. Индукционный переход внутренней индукции проводится с помощью леммы 2 (при $k=0$) и леммы 3 (при $k>0$). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим следующее рассуждение, обосновывающее формулу $\exists x\forall y(P(x)\vee\neg P(y))$: если $\exists x P(x)$, то $\forall y(P(a)\vee\neg P(y))$, где a — такой объект, что $P(a)$. Если же $\neg\exists x P(x)$, то для любого d имеет место $\neg P(d)$ и, значит, при любом c $\forall y(P(c)\vee\neg P(y))$. В обоих случаях имеем $\exists x\forall y(P(x)\vee\neg P(y))$. Соответствующее доказательство в $G4$а с сечением таково:

$$\begin{array}{l} P(g)\to P(g),\ \exists x P(x) \\ \hline P(g)\to\exists x P(x) \\ \hline 1.\ \exists x P(x)\to\exists x P(x) \\ \hline \to\exists x P(x),\ \neg\exists x P(x) \\ \hline 0.\ \to\exists x P(x)\vee\neg\exists x P(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P(a)\to E,\ P(a),\ \neg P(b) \\ \hline P(a)\to E,\ P(a)\vee\neg P(b) \\ \hline P(a)\to E,\ \forall y(P(a)\vee\neg P(y)) \\ \hline P(a)\to\exists x\forall y(P(x)\vee\neg P(y)) \\ \hline 2.\ \exists x P(x)\to\exists x\forall y(P(x)\vee\neg P(y)) \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} P(d)\to E,\ P(c),\ P(d),\ \exists x P(x) \\ \hline P(d)\to E,\ P(c),\ \exists x P(x) \\ \hline \to E,\ P(c),\ \neg P(d),\ \exists x P(x) \\ \hline \to E,\ P(c)\vee\neg P(d),\ \exists x P(x) \\ \hline \to E,\ \forall y(P(c)\vee\neg P(y)),\ \exists x P(x) \\ \hline 3.\ \to\exists x\forall y(P(x)\vee\neg P(y)),\ \exists x P(x) \\ \hline \neg\exists x P(x)\to\exists x\forall y(P(x)\vee\neg P(y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2.\quad\quad\quad \neg\exists x P(x)\to\exists x\forall y(P(x)\vee\neg P(y)) \\ \hline 0.\quad \exists x P(x)\vee\neg\exists x P(x)\to\exists x\forall y(P(x)\vee\neg P(y)) \\ \hline \to\exists x\forall y(P(x)\vee\neg P(y)) \end{array}$$

[Через E обозначена доказываемая формула $\exists x\forall y(P(x)\vee\neg P(y))$.] Устраняем (единственное) сечение, заменяя его двумя сечениями по подформулам старой формулы сечения:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{1.\ \exists x P(x)\to\exists x P(x)}{\to\exists x P(x),\ \neg\exists x P(x)} \qquad 2.\ \exists x P(x)\to E}{\to\neg\exists x P(x),\ E} \qquad \dfrac{3.\ \to E,\ \exists x P(x)}{\neg\exists x P(x)\to E}}{\to E}\ \left(\begin{array}{l}\text{Сеч.}\\ \text{Сокр.}\end{array}\right)$$

Имеется в виду, что над секвенциями 1, 2, 3 надписаны их доказательства.

Согласно доказательству теоремы о нормальной форме, устраняем сечение наибольшей степени, т. е. $\neg \exists x P(x)$-сечение:

$$\dfrac{3.\ \to E,\ \exists x P(x) \qquad \dfrac{1.\ \exists x P(x) \to \exists x P(x) \quad 2.\ \exists x P(x) \to E}{\exists x P(x) \to E}}{\to E}$$

Вычеркнем верхнее $\exists x P(x)$-сечение, воспользовавшись тем, что его левая посылка имеет вид $C \to C$, так что заключение совпадает с правой посылкой.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(d) \to E,\ P(c),\ \exists x P(x),\ P(d)}{P(d) \to E,\ P(c),\ \exists x P(x)}}{\to E,\ P(c),\ \neg P(d),\ \exists x P(x)}}{\to E,\ P(c) \vee \neg P(d),\ \exists x P(x)}}{\to E,\ \forall y\,(P(c) \vee \neg P(y)),\ \exists x P(x)}}{3.\qquad \to E,\ \exists x P(x)} \qquad \dfrac{5.\ P(a) \to E}{2.\ \exists x P(x) \to E}}{\to E} \begin{pmatrix}\text{Сеч.}\\ \text{Сокр.}\end{pmatrix}$$

Устраняем оставшееся $\exists x P(x)$-сечение, заменяя a на d в выводе секвенции 5:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(d) \to E,\ P(c),\ P(d) \quad 5'.\ P(d) \to E}{P(d) \to E,\ P(c)}}{\to E,\ P(c),\ \neg P(d)}}{\to E,\ P(c) \vee \neg P(d)}}{\to E,\ \forall y\,(P(c) \vee P(y))}}{\to E}$$

Наконец, устраняем последнее $P(d)$-сечение по лемме 2 и получаем вывод без сечения:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(d) \to E,\ P(d),\ \neg P(b),\ P(c)}{P(d) \to E,\ P(d) \vee \neg P(b),\ P(c)}}{P(d) \to E,\ \forall y\,(P(d) \vee \neg P(y)),\ P(c)}}{P(d) \to E,\ P(c)}}{\to E,\ P(c),\ \neg P(d)}}{\to E,\ P(c) \vee \neg P(d)}}{\to E,\ \forall y\,(P(c) \vee \neg P(y))}}{\to E}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Функциональная форма.
Теорема Эрбрана для непредваренных формул

Формулировка теоремы Эрбрана в полном объеме требует понятия функциональной формы данной формулы. Будем рассматривать лишь такие формулы, в которые никакая переменная не входит и свободно, и связанно, разные вхождения кванторов связывают разные переменные (чего всегда можно добиться переименованием переменных) и отрицание находится только перед атомарными формулами (этого можно достичь, пронося отрицание внутрь по формулам 55 и 49 теоремы 2, 82 теоремы 26), а $\supset$ и $\sim$ не входят совсем. Скулем (например, [1928]) предложил метод замены кванторов функциональными символами, называемый в русской математико-логической литературе «сколемизацией». Сопоставим каждому квантору $\forall x$ символ f_x, не входящий в рассматриваемую формулу, с числом аргументов, равным числу кванторов существования, в области действия которых находится $\forall x$. При этом разным кванторам сопоставим разные функциональные символы. Например, кванторам $\forall x$ и $\forall z$ в формуле $\exists w \forall x \exists y \forall z A(w, x, y, z)$ (стр. 410) будут сопоставлены $f_x(—)$ и $f_z(—, —)$, которые можно обозначать соответственно через β и δ. Кванторам $\forall x$ и $\forall z$ в формуле

$$\exists y ((F(y) \vee P) \& (\neg F(y) \vee \neg P) \& \forall x (\neg F(x) \vee P) \& \forall z (F(z) \vee \neg P))$$

будут сопоставлены $f_x(—)$ и $f_z(—)$. Результат сколемизации квантора $\forall x$ в формуле A (обозначаемый через $\mathscr{S}(x, A)$), — это результат вычеркивания $\forall x$ и замены всех оставшихся вхождений x на $f_x(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, где $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ — список переменных, связанных кванторами существования, в области действия которых находился $\forall x$. В наших примерах это будут

$$\exists w \exists y \forall z A(w, \beta(w), y, z)$$

и

$$\exists y ((F(y) \vee P) \& (\neg F(y) \vee \neg P) \& (\neg F(f_x(y)) \vee P) \& \\ \& \forall z (F(z) \vee \neg P)).$$

Функциональная форма формулы A (обозначаемая через $\Phi(A)$) — это результат сколемизации всех кванторов всеобщности. В наших примерах это будут

$$\exists w \exists y A(w,\ \beta(w),\ y,\ \delta(w,\ y))$$

и

$$\exists y((F(y) \vee P) \,\&\, (\neg F(y) \vee \neg P) \,\&\, (\neg F(f_x(y)) \vee P) \,\&\, \\ \&\, (F(f_z(y)) \vee \neg P)).$$

Приведение к функциональной форме позволило бы ограничиться формулами, вообще не содержащими $\forall$, если бы мы могли доказать, что сколемизация переводит любую формулу в дедуктивно равную ей (т. е. в такую, которая выводима или нет одновременно с исходной формулой). Это можно сделать, например, следующим образом с помощью теоремы Эрбрана для предваренных формул (стр. 413—414).

Вместо «A дедуктивно равна B» будем писать $A \approx B$.

Лемма 4. *Пусть квантор* $\forall x$ *не находится в формуле* A *в области действия других кванторов всеобщности. Тогда* $\mathcal{S}(x,\ A) \approx A$.

Доказательство. (a) Если A — предваренная формула, это следует из упомянутого частного случая теоремы Эрбрана, так как построение эрбрановской дизъюнкции для A начинается с перехода к $\mathcal{S}(x,\ A)$.

(b) Если A не является предваренной формулой, приведем ее к предваренной форме, вынеся сначала все кванторы, в области действия которых находится $\forall x$, затем сам этот квантор (получится формула $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_k \forall x B(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k,\ x)$), а затем в любом порядке все остальные кванторы:

$$\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_k \forall x C(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k,\ x).$$

Эта формула, эквивалентная (и тем более дедуктивно равная) A, согласно (a) дедуктивно равна формуле

$$\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_k C(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k,\ f_x(\alpha_1\ \ldots,\ \alpha_k)),$$

которая эквивалентна формуле $\exists\alpha_1 \ldots \exists\alpha_k B(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k,\ f_x(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k))$, которая в свою очередь эквивалентна $\mathcal{S}(x,\ A)$.

Теорема 2. $\Phi(A) \approx A$.

Получается последовательным применением леммы 1 к кванторам всеобщности, входящим в A.

Если A не содержит $\forall$, то ее *эрбрановской разверткой* назовем любой результат последовательной замены (начиная изнутри) всех подформул вида $\exists\alpha A(\alpha)$ на $B(t_1) \vee B(t_2) \vee \ldots \vee B(t_k)$, где $t_1,\ \ldots,\ t_k$ — термы, построенные из переменных, индивидных и функциональных символов, входящих в А (множество всех таких термов называют иногда *эрбрановским универсумом* формулы А).

Если А содержит $\forall$, то ее *эрбрановские развертки* — это, по определению, эрбрановские развертки формулы Φ (А).

Заметим, что в случае, когда А — предваренная формула, не все эрбрановские дизъюнкции формулы А (согласно определению на стр. 413—414) являются, согласно нашему определению, ее эрбрановскими развертками. Однако их можно превратить в эрбрановские развертки, добавив недостающие дизъюнктивные члены.

Следующее утверждение — это теорема Эрбрана для произвольных формул.

Теорема 3. *Формула А выводима в исчислении предикатов тогда и только тогда, когда некоторая ее эрбрановская развертка выводима (или, что то же самое, общезначима) в исчислении высказываний.*

Доказательство. В силу теоремы 2 и определения эрбрановской развертки можно считать, что А не содержит кванторов всеобщности.

(a) Пусть дано доказательство формулы А в $G4$. Можно считать, что в него входят лишь термы из эрбрановского универсума формулы А (иначе можно было бы заменить термы, начинающиеся с лишних функциональных символов, на новую переменную). Запишем полный список этих термов в виде $t_1, \ldots, t_k$. Заменив теперь во всем доказательстве все формулы $\exists\alpha B\alpha$ на $B(t_1) \vee \ldots \vee B(t_k)$, получим фигуру, которая заканчивается эрбрановской разверткой формулы А и в которой переходы происходят либо по правилам исчисления высказываний, либо по правилу

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ B(t_i)}{\Gamma \to \Delta,\ B(t_1) \vee \ldots \vee B(t_k)},$$

которое достраивается до (серии) $\to\vee$ с помощью утончений.

(b) Если R — произвольная эрбрановская развертка формулы А, то (в рассматриваемом нами случае, когда А не содержит $\supset$, $\forall$ и все отрицания находятся перед атомарными формулами), $R \to A$ выводимо в исчислении предикатов. Это можно легко доказать, например, индукцией по построению А, используя импликации

$$((B_1 \supset B) \& (C_1 \supset C)) \supset (B_1 \& C_1 \supset B \& C),$$
$$((B_1 \supset B) \& (C_1 \supset C)) \supset (B_1 \vee C_1 \supset B \vee C),$$
$$(B(t_1) \vee \ldots \vee B(t_k)) \supset \exists\alpha B(\alpha).$$

R и $R \supset A$ дают А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ [1])

Аддисон (Addison J. W.)

1960. The theory of hierarchies, Logic, methodology and philosophy of science, Proceedings of the 1960 International Congress (Stanford, Aug. 24 — Sept. 2), ed. by Nagel, Suppes and Tarski, Stanford, Calif. (Stanford Univ. Press) 1962, 26—37. [Русский перевод: Теория иерархий, в сб. «Математическая логика и ее применения», М., 1967, 23—36.]

Аддисон, Генкин, Тарский (Addison J. W., Henkin L. Tarski A.)

1965. (редакторы). The theory of models, Proceedings of 1963 the International Symposium at Berkeley, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.)

Аккерман (Ackermann W.)

1924—5. Begründung des «tertium non datur» mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, *Math. Ann*, **93**,1—36.

1940. Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, Ibid., **117**, 162—194.

Амброз, Лазерович (Ambrose A., Lazerowitz M.)

1948. Fundamentals of symbolic logic, New York (Rinehart).

Бар-Хиллел, Перлес, Шамир (Bar-Hillel Y., Perles M., Shamir E.)

1961. On formal properties of simple phase structure grammars, Zeitschrift für Phonetik, *Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung*, **14**, 143—172.

Бахман (Bachmann H.)

1955. Transfinite Zahlen, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, n. s., no. 1, Berlin, Göttingen and Heidelberg (Springer-Velag).

Бенакерраф, Путнам (Benacerraf P., Putnam H.)

1964. (редакторы) Philosophy of mathematics, selected readings, Englewood Cliffs, N. J., (Prentice-Hall).

Бернайс (Bernays P.)

1937—1954. A system of axiomatic set theory — Parts I—VII, *The journal of symbolic logic*, **2** (1937), 65—77, **6** (1941), 1—17, **7** (1942), 65—89, 133—145, 8 (1943), 89—106, **13** (1948), 65—79, **19** (1954), 81—96.

Бернайс, Френкель (Bernays P., Fraenkel A. A.)

1958. Axiomatic set theory [монография Бернайса с историческим введением Френкеля], Amsterdam (North-Holland Pub. Co.).

Бернстайн, Робинсон (Bernstein A. R., Robinson A.).

1966. Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos, *Pacific journ. of math.*, **16**, 421—431.

Бет (Beth E. W.)

1951. A topological proof of the theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenhappen* (Amsterdam), *Proceedings*, ser. A, **54** (или *Indagationes mathematicae*, **13**), 436—444.

1953. On Padoa's method in the theory of definition, Ibid, **56** (or **15**), 330—339.

1955. Semantic entailment and formal derivability, *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen* (Amsterdam), Afd. letterkunde, n. s., **18**, no. 13, 309—342.

1959. The foundations of mathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.).

---

[1]) ° возле даты указывает, что соответствующая работа добавлена в список литературы при переводе.— *Прим. перев.*

Болл (Ball W. W. R.)

1892. Mathematical recreations and essays. [11-е изд. под ред. Коксетера (H. S. M. Coxeter), New York (Macmillan), 1939].

Больцано (Bolzano B.)

1851. Paradoxien des Unendlichen, Berlin.

Борель (Borel É.)

1898. Leçons sur la théorie des fonctions, Paris.

Бохенский (Bochénski I. M.)

1956. Formale Logik, Freiburg and Munich (Verlag Karl Alber).

Брауэр (Brouwer L. E. J.)

1908. De onbetrouwbaarheid der logische principes, *Tijdschrift voor wijsbegeerte*, **2**, 152—158.

1923. Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **154** (1925), 1—7.

1923a. Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten, *Verhandelingen der Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* (Eerste sectie), **13**, no. 2, (Испр. в[1924].)

1924. Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist, *Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam*, Proc. Sect. Sci., **27**, 189—193.

1928. Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, 1928, 48—52. (См. также *Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam*, Proc. Sect. Sci., **31**, 374—379.

Бриттон (Britton J. L.)

1956—8. Solution of the word problem for certain types of groups, II, *Proceedings of the Glasgow Mathematical Association*, **3**, 68—90.

1958. The word problem for groups, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3 s., **8** (1958), 493—506.

1963. The word problem, *Ann. of math.*, 2 s., **77**, 16—32.

Буль (Boole G.)

1847. The mathematical analysis of logic, being an essay toward a calculus of deductive reasoning, Cambridge and London.

Бун (Boone W. W.)

1954—7. Certain simple, unsolvable problems of group theory, I—VI, *Kon. Ned. Akad. Wet.* (Amsterdam), Proc. ser. A., **57** (1954), 231—237, 492—497, **58** (1955), 252—256, 571—577, **60** (1957), 22—27, 227—232 (or *Indag. math.*, **16**, **17**, **19**).

1958. An analysis of Turing's «The word problem in semigroups with cancellation». *Ann of math.*, 2 s., **67**, 195—202.

1959. The word problem, Ibid., **70**, 207—265.

1966. Word problems and recursively enumerable degrees of unsolvability. A first paper on Thue systems, Ibid, **83**, 520—571.

1966a. Word problems and recursively enumerable degrees of unsolvability. A sequel on finitely presented groups, Ibid., **84**, 49—84.

1968. Decision problems about algebraic and logical systems as a whole and recursively enumerable degrees of unsolvability, Contributions to mathematical logic, North-Holland Publ. Co, Amsterdam, 13—33, 72—74.

Бун, Хакен и Поэнару (Boone W. W., Haken W., Poénaru V.)

1968. On recursively unsolvable decision problems in topology and their classification. Ibid., 37—74.

Бурали-Форти (Burali-Forti C.)
1897. Una questione sui numeri transfiniti, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **11** 154—164 (cf. p. 260).

Бюхи (Büchi J. R.)
1962. Turing-machines and the Entscheidungsproblem, *Math. Ann.*, **148**, 201—213.

Ван Хао (Wang H.)
1960. Toward mechanical mathematics, *IBM Journal*, **4**, 2—22. [Русский перевод: Ван Хао, На пути к механической математике, Кибернетический сборник, вып. 5, ИЛ, М., 1962, 114—165.]

Вейль (Weil H.)
1926. Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik, Sonderdruke des Symposion, Erlangen (im Weldkreis-Verlag), Heft 3 (1926); Symposion (Berlin), **1** (1925—7), 1—32. [Русский перевод: Вейль А., Современное состояние проблемы познания в математике, в сб. «О философии математики», ГТТИ, М.—Л., 1934, 9—32.]
1946. Mathematics and logic, *Amer. math. monthly*, **53**, 2—13.
1949. Philosophy of mathematics and natural science, Princeton N. J. (Princeton Univ. Press). Испр. и расшир. англ. изд. [1926].

Венн (Venn J.)
1881. Symbolic logic, London; 2-е расшир. изд. London 1894.

Витгенштейн (Wittgenstein L.)
1921. Logisch-philosophische Abhandlung, *Annalen der Naturphilosophie* (Leipzig), **14**, 185—262; Англ. изд.: Tractatus logico-philosophicus, New York and London, 1922. [Русский перевод: Витгенштейн Л., Логико-философский трактат, ИЛ, М., 1958.]

Гейтинг (Heyting A.)
1930. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, Phys.-math. K 1, 1930, 42—56.
1930a. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, Ibid., 57—71, 158—169.
1934. Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie, Erbeg. Math. Grenzgeb., **3**, no. 4, Berlin (Springer). [Русский перевод: Гейтинг А., Обзор исследований по основаниям математики, М., 1936].
1955. Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration, Paris (Gauthier—Villars) and Louvain (E. Nauwelaerts), 2-е изд. кн. [1934].
1956. Intuitionism. An introduction, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.). [Русский перевод: Гейтинг А., Интуиционизм, М., 1965.]

Генкин (Henkin L.)
1947. The completeness of formal systems, Ph. D. thesis, Princeton.
1949. The completeness of the first-order functional calculus, *Journ. symbolic logic*, **14**, 159—166.
1950. Completeness in the theory of types. Ibid., **15**, 81—91.
1963. An extension of the Craig—Lyndon interpolation theorem, Ibid., **28**, 201—216.

Генцен (Gentzen G.)
1932. Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen, *Math. Ann.*, **107**, 329—350.
1934—5. Untersuchungen über das logische Schliessen. Mathematische Zeitschrift, **39**, 176—210, 405—431. [Русский перевод: Генцен Г., Исследования логических выводов, в кн. Идельсон и Минц [1969], стр. 9—74.]

1936. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, *Math. Ann.*, **112**, 493—565. [Русский перевод: Генцен Г., Непротиворечивость чистой теории чисел, там же, стр. 77—153.]

1939. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, n. s., no. 4, Leipzig (Hirzel), 19—44. [Русский перевод: Генцен Г., Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел, там же, стр. 154—190.]

Герц (Hertz P.)

1929. Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme, *Math. Ann.*, **101**, 457—514.

Гёдель (Gödel K.)

1930. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatsh. Math. Phys.*, **37**, 349—360; англ. перевод в кн. ван Хейеноорт [1967].

1931. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I, Ibid., **38**, 173—198; англ. перевод в кн. Дэвис [1965], 3—38, и ван Хейеноорт [1967].

1931—2. Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 3 (за 1930—1931, опубл. в 1932), 12—13.

1931—2b. Eine Eigenschaft der Realisierung des Aussagenkalküls, Ibid., 20—21.

1932—3. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ibid., Heft 4 (за 1931—1932, опубл. в 1933), 34—38; англ. перевод в кн. Дэвис [1965], 75—81.

1934. On undecidable propositions of formal mathematical systems, Notes by S. C. Kleene and Barkeley Rosser on lectures at the Institute for Advanced Study 1934, mimeographed, Princeton, N. J.; перепечатано (с добавлением) в кн. Дэвис [1965], 39—74.

1934a. Реферат ст. Скулема [1933], *Zentralblatt fur Mathematik und ihre Grenzgebiete*, **7**, 193—194.

1938. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **24**, 556—557.

1939. Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis, Ibid., **25**, 220—224.

1940. The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, Notes by George W. Brown on lectures at the Institute for Advanced Study 1938—1939, Annals of Mathematics studies, no. 3, Princeton, N. J. (Princeton Univ. Press). [Русский перев. А. А. Маркова: Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, *Успехи матем. наук*, **8**, вып. I (1948), 96—149].

1947. What is Cantor's continuum problem?, *American mathematical monthly*, **54**, 515—525; перепечатано с добавлениями в кн. Бенакерраф и Путнам [1964], 258—273.

Гильберт (Hilbert D.)

1899. Grundlagen der Geometrie, 7-е изд. (1930), Leipzig and Berlin (Teubner). [Русский перевод: Гильберт Д., Основания геометрии, М., 1948].

1900a. Mathematical problems, Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900; англ. перев. с нем. *Bull. Amer. Math. Soc.* 8, (1901—1902), 437—479; франц. перев. с некоторыми изменениями и добавлениями: Sur les problèmes futurs des mathématiques, Compte rendus du Deuxième Congrès International des Mathématiciens tenu á Paris du 6 au 12 août 1900, Paris, 1902, 58—114. [Русский перевод: Проблемы Гильберта, М., 1969.]

1904. Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904, Leipzig, 1905, 174—185. Перепечат. в 7-м изд. [1899]. [Русский перевод: Гильберт Д., Об основаниях логики и арифметики, доп. к русск. изд. [1899], 322—334.]

1918. Axiomatisches Denken, *Math. Ann.*, **78**, 405—415.

1926. Über das Unendliche, *Math. Ann.*, **95**, 161—190; перепечатано с некоторыми исправлениями в 7-м изд. [1899], 262—288. [Русский перевод: Гильберт Д., О бесконечном, доп. к русск. изд. [1899], 338—364.]

1928. Die Grundlagen der Mathematik, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **6**, 65—85; перепечатано с сокращениями в 7-м изд. [1899], 289—312. [Русский перевод: Гильберт Д., Обоснования математики, доп. к русск. изд. [1899], 365—388.]

Гильберт, Аккерман (Hilbert D., Ackermann W.)

1928, 1938, 1949. Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin (Springer); 2-е изд. 1938; 3-е изд., Berlin, Göttingen, Heidelberg (Springer) 1949. [Русский перевод со 2-го нем. изд. (с приложением нескольких §§ из 1-го изд.): Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, М., 1947.]

Гильберт, Бернайс (Hilbert D., Bernays P.)

1934 1939. Grundlagen der Mathematik, vol. 1, 1934; vol. 2, 1939, Berlin (Springer).

Дедекинд (Dedekind R.)

1888. Was sind und was sollen die Zahlen?, Braunschweig (6-е изд., 1930).

Де Морган (De Morgan A.)

1847. Formal logic: or, the calculus of inference, necessary and probable, London; перепечатка под ред. Тейлора (Taylor A. E.), Chicago and London, 1926.

Ден (Dehn M.)

1912. Über unendliche diskontinuierliche Gruppen, *Math. Ann.*, **71**, 116—144.

Дентон, Дребен (Denton J., Dreben B.)

1970. Herbrand-style consistensy proofs, Intuitionism and proof theory, North-Holland, Amsterdam, 419—434.

Доджсон (Л. Кэррол) (Dodgson Ch. L. (Carroll))

1887, 1897. The game of logic, London (McMillan) 1887; Symbolic logic, Part I, Elementary, 4th ed. London, New York (McMillan) 1897.

Дребен, Дентон (Dreben B., Denton J.)

1966°. A supplement to Herbrand. *Journ. symbolic logic*, **31**, 393—398.

Дребен, Эндрюс, Андера (Dreben B., Andrews P., Aanderaa S.)

1963. False lemmas in Herbrand, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**, 699—706.

Дэвис (Davis M.)

1950. On the theory of recursive unsolvability, Ph. D. thesis, Princ. Univ.

1965. (ред.) The undecidable. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable functions, Hewlitt, N. Y. (Raven Press); ср. Stefan Bauer-Mengelberg в *Journ. symbolic logic*, **31**, (1966), 484—494.

Дэвис, Путнам (Davis M., Putnam H.)

1960. A computing procedure for quantification theory, *Journal of the Association for Computing Machinery*, **7**, 201—215.

Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д. и Тайцлин М. А.

1965°. Элементарные теории, *Успехи матем. наук*, **20**, вып. 4, 37—108.

Закс (Sacks G. E.)
1963. Degrees of unsolvability, Annals of Mathematics studies, no. 55, Princeton, N. J. (Princeton Univ. Press).

Идельсон А. В., Минц Г. Е.
1967°. (редакторы). Математическая теория логического вывода (сб. переводов, включающий работы Генцена [1934—5], [1936] [1938], § 67, 68, 70 и 92 из книги Бета [1959], статьи Клини [1952] и др. с прилож. статьи Минца [1967]), М., «Наука».

Кальмар (Kalmar L.)
1928—9. Eine Bemerkung zur Entscheidungstheorie, *Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae*, Sectio scientiarum mathematicarum (Szeged), 4, 248—252.
1934—5. Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls, Ibid., 7, 222—243.
1959. An argument against the plausibility of Church's thesis, Constructivity in mathematics, Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam [Aug. 26—31], 1957 (A. Heyting, ed.), Amsterdam (North-Holland Pub. Co.), 72—80.

Кангер (Kanger S.)
1957. Provability in logic, Acta Universitatis Stockholmiensis, Stockholm studies in philosophy 1, Stockholm (Almqvist and Wiksell).

Кантор (Cantor G.)
1874. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, *Journ. reine angew. Math.*, **77**, 258—262.
1895—7. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Math. Ann*, **46**, (1895), 481—512, **49** (1897), 207—246; англ. перевод: Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, Chicado and London, 1915.

Карнап (Carnap R.)
1934. The logical syntax of language, New York (Harcourt, Brace) and London (Kegan Paul, Trench, Trubner), 1937. Расшир. перевод с нем. изд. 1934 г.
1935. Ein Gültigkeitskriterium fur die Sätze der klassischen Mathematik, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **42**, 163—190.

Карри (Curry H. B.)
1950. A theory of formal deducibility, Notre Dame mathematical lectures, no. 6, Univ. of Notre Dame, Notre Dame.
1952. The permutability of rules in the classical inferential calculus, *Journ. symbolic logic*, **17**, 245—248.
1969°. Основания математической логики, перев. с англ. изд. 1963, М., «Мир».

Кемени (Kemeny J. G.)
1958. Undecidable problems of elementary number theory, *Math. Ann.*, **135**, 160—169.

Кетонен (Ketonen O.)
1944. Untersuchungen zum Prädikatenkalkül, Annales Academia Scientarum Fennicae, ser. A, I. Mathematica-Physica 23, Helsinki.

Кёниг (König D.)
1926. Sur les correspondences multivoques des ensembles, *Fund. math.*, **8**, 114—134.

Кларк, Уэлш (Clark R., Welsh P.)
1962. Introduction to logic, Princeton, Toronto, New York and London (Van Nostrand).

Клепхем (Clapham C. R. J.)
1964. Finitely presented groups with word problems of arbitary degrees of insolubility. *Proc. London Math. Soc.*, 3s., **14**, 633—676.

Клини (Kleene S. C.)
1934. Proof by cases in formal logic, *Ann. of Math.*, 2s., **35**, 529—544.
1935. A theory of positive integers in formal logic, *Amer. jour. math.*, **57**, 153—173, 219—244.
1936. General recursive functions of natural numbers, *Math. Ann.*, **112**, 727—742.
1936a. λ-definability and recursiveness, *Duke math. journal*, **2**, 340—353.
1938. On notation for ordinal numbers, *Journ. symbolic logic*, **3**, 150—155.
1943 (abstract 1940). Recursive predicates and quantifiers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53**,41—73.
1950. A symmetric form of Gödel's theorem, *Kon. Ned. Akad. Wet.* (Amsterdam), Proc. Sect. Sci., **53**, 800—802 (или *Indag. math.*, **12**, 244—246).
1952. Permutability of inferences in Gentzen's calculi *LK* and *LJ*. Memoirs Amer. Math. Soc., no. 10, 1—26. Как заметил Г. Е. Минц (см. примечание на стр. 403), во 2-й строке примечания 15 вместо «подформула» надо читать «боковая формула», а в строке 4 в обоих применениях $\neg\rightarrow$ (или $\supset\rightarrow$) должна быть одна и та же главная формула; эти исправления, в числе прочих, внесены в издание [1967]. [Русский перевод: Клини С. Перестановочность применений правил в генценовских исчислениях *LK* и *LY*, в кн. Идельсон и Минц [1967], 208—236.]
1952a. Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols, Ibid., 27—68. На стр. 53 следует более подробно рассмотреть вопрос о применениях $\rightarrow\exists$ и $\rightarrow\&$ по отношению к операторам формулы $N(x)$; это стоило бы сделать и в середине стр. 58. Исправления эти внесены Г. Е. Минцем в русский перевод. [Русский перевод: Клини С., Конечная аппроксимируемость теорий в исчислении предикатов с помощью дополнительных предикатных символов, в кн. Идельсон и Минц [1967], 237—284.]
1952b, [BM]. Introduction to metamathematics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.), Groningen (Noordhoff), New York and Toronto (Van Nostrand). [Русский перевод: Клини С., Введение в метаматематику, ИЛ, М., 1957.]
1955b. Hierarchies of number-theoretic predicates, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61**, 193—213.
1956. A note on computable functionals, *Kon. Ned. Akad. Wet.* (Amsterdam), Proc., Ser. A, **59** (= *Indag. math.*, **18**), 275—280.
1956a. Sets, logic, and mathematical foundations, Notes by H. William Oliver on lectures at a N. S. F. Summer Institute for Teachers of Secondary and College Mathematics, Williams College, Williamstown, Mass., mimeographed.
1957b. Mathematics, Foundations of Mathematics, Encyclopaedia Britannica, 1957 и последующие издания.
1958. Mathematical logic: constructive and non-constructive operations, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 14—21 August 1958, Cambridge (Cambridge Univ. Press), 1960.
1961. Mathematical logic, Notes by Edward Pols on lectures at a N. S. F. Summer Institute, Bowdoin College, Brunswick, Maine, mimeographed.
1964. Computability, *The Voice of America Forum Lectures*, Philosophy of Science Series, no. 6 (прочитано в 1963, опубл. в 1964). Перепечатано в Philosophy of science today (ed. Morgenbesser S.), Basic Books, 1967

Клини, Весли (Kleene S. C., Vesley R. E.)
1965. The foundations of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) (Опечатка: на стр. 113 (11-я строка сверху) вместо по следует читать each).

Клини, Пост (Kleene S. C., Post E.)
1954. The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability, *Ann. of Math.*, 2 s., **59**, 379—407.

Колмогоров А. Н.
1924—5. О принципе tertium non datur, *Матем. сборник*, **32**, 646—667.

Коэн (Cohen P. J.)
1963—4. The independence of the continuum hypothesis, and ibid. II, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **50**, 1143—1148 (1963), **51**, 105—110 (1964).
1966. Set theory and the continuum hypothesis, New York and Amsterdam (W. A. Benjamin). [Русский перевод: Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, «Мир», М., 1969.]

Крайзель (Kreisel G.)
1951—2. On the interpretation of non-finitist proofs, *Jour. symbolic logic*, **16** (1951), **17** (1952), 43—58.
1953. A variant to Hilbert's theory of the foundations of arithmetic, *The British journal for the philosophy of science*, **4** (1953—1954), 107—129, 357.
1958. Mathematical significance of consistency proofs, *Jour. symbolic logic*, **23**, 155—182.
1958c. Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof, Proc. Internat. Congress Math. Edinburgh 1958, 289—299.
1965. Mathematical logic, Lectures on modern mathematics, v. III (ed. by T. L. Saaty), New York (Wiley), 95—195.

Крейг (Craig W.)
1957. Linear reasoning. A new form of the Herbrand-Gentzen theorem, *Jour. symbolic logic.*, **22**, 250—268.
1957a. Three uses of the Herbrand—Gentzen theorem in relating model theory and proof theory, *Ibid*, 269—285.

Куайн (Quine W. van O.)
1940. Mathematical logic, New York (Norton), исправ. изд. Harvard Univ. Press, 1951.
1950. Methods of logic, New York (Henry Holt and Co.), исправ. изд. 1959.

Куратовский К., Мостовский А.
1970°. Теория множеств, пер. с англ. изд. 1967 г., «Мир», М.

Курош А. Г.
1970°. Теория групп, «Наука», М.

Лёвенгейм (Löwenheim L.)
1915. Über Möglichkeiten im Relativkalkul, *Math. Ann.*, **76**, 447—470. Англ. перевод: в кн. ван Хейеноорт [1967].

Линдон (Lyndon R. C.)
1959. An interpolation theorem in the predicate calculus, *Pacific jour. math.*, **9**, 129—142.

Лузин Н. Н.
1930. Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Paris (Gauthier—Villars). [Русский перевод: Лузин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953.]

Лукасевич (Lukasiewicz J.)
1920. O logice trojwartosciowej, *Ruch filozoficzny* (Lwow), **5**, 169—171.

1921. Logika dwuwartosciowa, *Przeglad filozoficzny*, **23**, 189—205.
1934. Zur Geschichte der Aussagenlogik, *Erkenntnis*, 5 (1935—6), 111—131 (перевод с польского).

Льюис (Lewis C. I.)
1912. Implication and the algebra of logic, *Mind*, n. s., **21**, 522—531.
1917. The issues concerning material implication, *The journal of philosophy, psychology and scientific method*, **14**, 350—356.
1918. A survey of symbolic logic, Berkeley, Calif. (Univ. of Calif. Press).

Льюис, Лэнгфорд (Lewis C. I., Langford C. H.)
1932. Symbolic logic, New York and London (The Century Co.)

Мак-Даффи (MacDuffee C. C.)
1954. Theory of equations, New York (Wiley) and London (Chapman and Hall).

Мак-Колл (MacColl H.)
1896—7. The calculus of equivalent statements (пять статей), *Proc. London Math. Soc.*, 28, 156—183.

Мальцев А. И.
1936. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik, *Матем. сборник*, **1**, 323—336.

Марков А. А.
1947. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем, *ДАН СССР*, **55**, 587—590; **58**, 353—356.
1951. Теория алгорифмов, Труды матем. ин-та АН СССР, **38**, 176—189.
1954. Теория алгорифмов, Труды матем. ин-та АН СССР, **42**.
1958. Неразрешимость проблемы гомеоморфии, *ДАН СССР*, 121, 218—220.
1972°. О логике конструктивной математики, «Знание», М.

Маслов С. Ю.
1968°. Обратный метод установления выводимости для логических исчислений, Труды матем. ин-та АН СССР, **98**, 26—87.

Матиясевич Ю. В.
1970°. Диофантовость перечислимых множеств, *ДАН СССР*, **191**, 279—282.

Мендельсон (Mendelson E.)
1963. On some recent criticism of Church's thesis, *Notre Dame journal of formal logic*, **4**, 201—205.

Минц Г. Е.
1967°. Теорема Эрбрана, в кн. Идельсон и Минц [1967], 311—350.

Мостовский (Mostowski A.)
1947. On definable sets of positive integers, *Fund. math.*, **34**, 81—112.
1948b. Logika matematyczna. Kurs uniwersytecki, Monografie matematyczne, t. 18, Varsovie et Wroclaw.
1951a. On the rules of proof in the pure functional calculus of the first order, *Jour. symbolic logic*, **16**, 107—111.
1954. Development and applications of the "projective" classification of sets of integers, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, Sept. 2—9, 1954, v. **III** (1956), 280—288.

Мостовский, Тарский (Mostowski A., Tarski A.)
1949 abstract. Undecidability in the arithmetic of integers and in the theory of rings, *Jour. symbolic logic*, **14**, 76.

Мучник А. А.
1956. Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов, *ДАН СССР*, **108**, 194—197.

1958. Решение проблемы сводимости Поста и некоторых других проблем теории алгоритмов, Труды Моск. матем. о-ва, т. 7, 391—405.

Нагель, Ньюмен (Nagel E., Newman J. R.)
1956, 1958. Gödel's proof, *Scientific american*, **194**, no 6 (June 1956), 71—86. Расшир. изложение отд. кн. New York (New York Univ. Press) [Русский сокр. перевод: Нагель Э., Ньюмен Дж., Теорема Гёделя, М., «Знание», 1970].

фон Нейман (von Neumann J.)
1925. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Jour. reine angew. Math.*, **154**, 219—240, Berichtigung, Ibid, **155** (1926), 128. Англ. перев. в кн. ван Хейеноорт [1967].
1927. Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Math. Zeit.*, **26**, 1—46.

Новиков П. С.
1955°. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, Труды матем. ин-та АН СССР, **44**.

Падоа (Padoa A.)
1900. Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique a une théorie déductive quelconque, Bibliotheque du Congres Internationale de Philosophie, Paris 1900, Paris (1903), v. 3, 309—365.

Паш (Pasch M.)
1882. Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig (Teubner).

Пеано (Peano G.)
1889. Arithmetices principia, nova methodo exposita, Turin (Bocca). Англ. перев. в кн. ван Хейеноорт [1967].

Пирс (Peirce C. S.)
1885. On the algebra of logic: A contribution to the philosophy of notation, *Amer. jour. math.*, **7**, 180—202.

Поппер (Popper K. R.)
1954. Self-reference and meaning in ordinary lanquage, *Mind.*, n. s., **43**, 162—169; ср. J. F. F. Thomson, *Jour. symbolic logic*, **21** (1956), 381.

Пост (Post E.)
1921. Introduction to a general theory of elementary propositios, *Amer. jour. math.*, **43**, 163—185.
1936. Finite combinatory processes—formulation 1, *Jour. symbolic logic*, **1**, 103—105.
1943. Formal reductions of the general combinatorial decision problem, *Amer. jour. math.*, **65**, 197—215.
1944. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50**, 284—316.
1947. Recursive unsolvability of a problem of Thue, *Jour. symbolic logic*, **12**, 1—11.
1948 abstract. Degrees of recursive unsolvability, Preliminary report, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54**, 641—642.

Правиц (Prawitz D.)
1965. Natural deductuion. A proof-theoretical study, Acta Universitattis Stockholmiensis, Stockholm studies in philosophy 3, Stockholm, Göteborg, Uppsala (Almquist and Wicksell).

Пресбургер (Presburger M.)
1930. Über die Vollstandigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt, Sprawozdanie z I Kogresu Matematykow Krajow Slowiańskich (Comptes rendus du I Congres des Mathematiciens des Pays Slaves), Warszawa 1929, Warsaw 1930, 92—101, 395.

Рабин (Rabin M. O.)
1958. Recursive unsolvability of group theoretic problems, *Ann. of Math.*, 2 s., **67**, 172—194.
1958a. On recursively enumerable and arithmetic models of set theory, *Jour. symbolic logic*, **23**, 408—416.

Рабин, Скотт (Rabin M. O., Scott D.)
1959. Finite automata and their decision problems, *IBM journal*, **3**, 114—125.

фон Райт (von Wright G. H.)
1951. An essay in modal logic, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.).

Рамсей (Ramsey F. P.)
1926. The foundations of mathematics, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, **25**, 338—384.

Расёва, Сикорский (Rasiowa H., Sikorski R.)
1950. A proof of the completeness theorem of Gödel, *Fund, math.*, **37**, 193—200.

Рассел (Russell B.)
1902. On finite and infinite cardinal numbers (Section III of A. N. Whitehead's «On cardinal numbers»), *Amer. jour. math.*, **24**, 378—383.
1902a. Letter to Frege, в кн. ван Хейеноорт [1967].
1906. Les paradoxes de la logique, *Revue de metaphysique et de morale*, **14**, 627—650.
1906a. On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types, *Proc. London Math. Soc.*, 2 s., **4**, 29—53.
1919. Introduction to mathematical philosophy, London (G. Allen and Unwin) and New York (McMillan).

Ригер (Rieger L.)
1951. On free $\aleph_\xi$-complete Boolean algebras (with an application to logic), *Fund. math.*, **38**, 35—52.

Ричардсон (Richardson D.)
1966 abstract. Some unsolvabie problems involving functions of a real variable, *Notices Amer. Math. Soc.*, **13**, 135.

Ришар (Richard J.)
1905. Les principes des mathematiques et le probleme des ensembles, *Revue generale des sciences pures et appliquees*, **16**, 541—543; *Acta mathematica*, **30** (1906), 295—296. Англ. перев. в кн. ван Хейеноорт [1967].

Робинсон А. (Robinson A.)
1951. On the metamathematics of algebra, Amsterdam (North-Hollan Pub. Co.).
1956. A result on consistency and its application to the theory of definition, *Kon. Ned. Akad.* (*Amsterdam*), Proc., Ser. A, **59** (=*Indag. math.*, 18), 47—58.
1961. Model theory and non-stamdard arithmetic, Infinitistic methods, Proceedings of the Symposium on Foundations of Mahematics, Warsaw 2—9 September 1959, Oxford, London, New York, Paris (Pergamon Press), Warszawa (Państwowe Wydawnictwo Naukowe) 1961, 265—302.
1961a. Non-standard analysis, *Kon. Ned. Akad. Wet.* (Amsterdam), Proc., Ser. A, **64** (=*Indag. math.*, **23**), 432—440.
1963. Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.) [Русский перевод: Робинсон А, Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, «Наука», М., 1967.]
1966. Non-standard analysis, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.)

Робинсон Дж. (Robinson J. A.)
1963. Theorem-proving on the computer, *Jour. Assoc. Comput. Mach.*, **10**, 163—174.
1965. A machine-oriental logic based on the resolution principle, Ibid., **12**, 23—41. [Русский перевод: Робинсон Дж. А., Машинно-ориентированная логика, основанная на принципе резолюции, Кибернетический сборник (Новая серия), вып. 7, «Мир», М., 1970, 194—218.]

Робинсон Р. (Robinson R. M.)
1950 abstract. An essentially undecidable axiom system, Proceeding of the International Congress of Mathematicians (Cambridge, Mass., U.S.A., Aug. 30—Sept. 6, 1950), Providence, R. I. (Amer. Math. Soc.), 1952, v. 1, 729—730.

Россер (Rosser J. B.)
1935. A mathematical logic without variables. *Ann. of Math.*, 2 s., **36**. 127—150, *Duke math. Jour.*, **1**, 328—355.
1936. Extensions of some theorems of Gödel and Church, *Jour symbolic logic*, **1**, 87—91.

Россер, Тюркетт (Rosser J. B., Turquette A. R.)
1952. Many-valued logics, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.).

Ротман (Rotman J. J.)
1965. Theory of groups: an introduction, Boston (Allyn and Bacon).

Рылль-Нардзевский (Ryll-Nardzewski C.)
1952. The role of the axiom of induction in the elementary arithmetic, *Fund. math.*, **39**, 239—263.

Скарпеллини (Scarpellini B.)
1963. Zwei unentscheidbare probleme der Analysis, *Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **9**, 265—289.

Скотт (Scott Dana)
1961. On constructing models for arithmetic, Infinitistic methods (см. Робинсон А. [1961]), 235—255.
1966. A proof of the independence of the continuum hypothesis, Math. Dept., Stanford Univ., Stanford, Calif., mimeographed.
1967. Existence and description in formal logic, в кн. Bertrand Russell: philosopher of the century (Ralph Schoenman, ed.), London (Allen and Unwin), 181—200.

Скулем (Skolem T.)
1920. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfullbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen Skrifterutgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse 1920, no. 4; англ. перев. в кн. ван Хейеноорт [1967].
1922. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem Fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors, vom 4. bis. 7. Juli 1922, Helsingfors, 1923 217—232.
1928. Über die mathematische Logik, *Norsk matematisk tidsskrift*, **10**, 125—142. Англ. перев. в кн. ван Хейеноорт [1967].
1929. Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, Skr. Oslo (= Kristiania), Mat.-natur. kl. 1929. no. 4.
1933. Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems, Norsk matematisk forenings skrifter, ser, 2, no. 10, 73—82.
1934. Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, *Fund. math.*, **23**, 150—161.

Строусон (Strawson P. F.)
1952. Introduction to logical theory, London(Methuen) and New York (Wiley).

Суппес (Suppes P.)
1957. Introduction to logic. Princeton, Toronto, London and New York (Van Nostrand).

Тайцлин М. А.
1960. Реферат на ст. Линдона [1959], *Jour. symbolic logic.*, **25**, 273—274 (англ.).

Тарский (Tarski A.)
1930. Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik, *Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettre de Varsovie*, Classe III, **23**, 22—29.
1933. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, *Studia philosophica*, **1** (1936), 261—405 (за 1935) Дополн. перев. с польск. изд. 1933 г. Англ. перев. в сб. [1956], 152—278.
1934. Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe, *Erkenntnis*, **5**, 80—100. Пер. с польск. изд. 1934 г. Англ. перев. в сб. [1956], 296—319.
1935. Über den Begriff der logischen Folgerung, Actes du Congres International de Philosophie Scientifique, VII Logique, Actualites scientifique et industriells, 394, Paris (Hermann and C^{ie}) 1936, 1—11. Англ. перев. в сб. [1956], 409—420
1949 abstract. On essential undecidavility, *Jour. symbolic logic*, **14**, 75—76.
1956. Logic, semantics, metamathematics, статьи 1923—1938 г., пер. на англ., Oxford (Clarendon).

Тарский, Мостовский, Робинсон Р. (Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M.)
1953. Undecidable theories, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.).

Томас (Thomas I.)
1958. A 12th century paradox of the infinite, *Jour mbolic logic*, **23**, 133—134.

Тьюринг (Turing A. M.)
1936—7. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math., Soc.*, ser. 2, **42** (1936—1937), 230—265. A correction, Ibid, **43** (1937), 544—546. Перепечатано в кн. Дэвис [1965], 115—154.
1937. Computability and λ-definability. *Jour. symbolic logic*, **2**, 153—163.
1939. Systems of logic based on ordinals, *Proc. London Math. Soc*, 2 s., **45**, 161—228. Перепечатано в кн. Дэвис [1965], 155—222.
1950. The word problem im semi-groups with cancellation, *Ann. of math.*, 2 s., **52**, 491—505; см. Бун [1958].

Уайтхед, Рассел (Whitehead A. N., Russell B.)
1910—13. Principia mathematica, v. 1, 1910; v. 2, 1912; v. 3, 1913, Cambridge, Eng. (Cambridge Univ. Press.).

Фейс (Feys R.)
1965. Modal logics, под ред. и с доп. Дж. Доппа (Dopp), Louvain (E. Nauwelaerts) and Paris (Gauthier-Villars). [Готовится расширенный перевод на русский язык в изд-ве «Наука».]

Феферман (Feferman S.)
1958 abstracts. Ordinal logics re-examined и On the strength of ordinal logics, *Jour. symbolic logic*, 105—106.
1960. Arithmetization of metamathematics in a general setting, *Fund. math.*, **49**, 35—92.

1962. Transfinite recursive progressions of axiomatic theories, *Jour, symbolic* logic, **27**, 259—316.

Фреге (Frege G.)

1879. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle; Англ. перев. в кн. ван Хейеноорт [1967]

1884. Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau; англ. перев.: The foundations of arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number, Oxford and New York, 1950.

Френкель (Fraenkel A. A.)

1922. Der Begriff «definit» und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms Sitz. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1922, 253—257. Англ. перев. в кн. ван Хейеноорт [1967].

1961. Abstract set theory, 2-е изд., Amsterdam (North-Holland Pub. Co).

Френкель, Бар-Хиллел (Fraenkel A. A., Bar-Hillel Y.)

1958. Foundations of set theory, Amsterdam (North-Holland Pub. Co.). [Русский перевод: Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, «Мир», М., 1966.]

Фридберг (Friedberg R. M.)

1956. Article concerning. *Time*, v. 67 no. 12 (March 19, 1956), 83.

1957 (abstract 1956). Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability (solution of Post's problem, 1944), *Proc. Nat. Acad. Sci.* **43**, 237—238.

ван Хейеноорт (van Heijenoort J.)

1967. (ред.) From Frege to Gödel, A source book in mathematical logic, 1879—1931, Cambridgc, Mass (Harvard Univ. Press).

Хигман (Higman G,)

1961. Subgroups of finitely presented groups, *Proceedings of the Rogal Society of London*, ser. A, **262**, 455—475.

Хинтикка (Hintikka K. J. J.)

1955. Form and content in quantification theory, Two papers on symbollic logic, Acta philosophica Fennica, no. 8, Holsinki, 7—55.

1955a. Notes on quantification theory, Societas Scientiarum Fennica, *Commentations physico-mathematicae*. **17**, no. 12.

Холл (Hall M., Jr.)

1959. The theory of groups. New York (McMillan). [Русский перевод: Холл М., Теория групп, ИЛ, М., 1963.]

Цермело (Zermelo E.)

1904. Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.*, **59**, 514—516.

1908a. Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, Ibid., **65**, 107—128.

1908. Untersuchung über die Grundlagen der Mengenlehre, I, Ibid., 261—281.

Чёрч (Church A.)

1936. An unsolvable problem of elementary number theory, *Amer. journ. of math.*, **58**, 345—363.

1936a. A note on the Entscheidungsproblem, *Jour. symbolic logic*, **1**, **40—41**; Correction, Ibid., 101—102,

1938. The constructive second number class, *Bull. Amer. Math, Soc.*, **44**, 224—232.

1956. Introduction to mathematical logic, v. I. Princeton, N. J. (Princeton Univ. Press). [Русский перевод: Чёрч А., Введение в математическую логику, т. I, М., 1960.]

Чёрч, Клини (Church A., Kleene S. C.)
1936. Formal definitions in the theory of ordinal numbers, *Fund. Math.*, **28**, 11—21.

Шанин Н. А.
1955.° О некоторых логических проблемах арифметики, Труды матем. ин-та АН СССР, **43**.
1958.° О конструктивном понимании математических суждений, Труды матем. ин-та АН СССР, **52**, 226—311.

Шанин Н. А., Давыдов Г. В., Маслов С. Ю., Минц Г. Е., Оревков В. П., Слисенко А. О.
1965°. Алгорифм машинного поиска естественного логического вывода в исчислении высказываний, «Наука», М.—Л.

Шефердсон (Schepherdson J. C.)
1965. Machine configuration and word problems of given degree of unsolvability, *Zeitsch. math. Logik Grundlagen Math.*, **11**, 149—175.

Шмелева (Szmielew Vanda)
1948. Decision problem in group theory, Proceedings of the Xth Congress of Philosophy (Amsterdam, Aug. 11—18, 1948), Amsterdam (North-Holland Pub. Co.). 1949, fasc. 2, 763—766.
1955. Elementary properties of Abelian groups, *Fund. math.*, **41**, 203—271.

Шмульян (Smullyan R. M.)
1961. Theory of formal systems, Rev. ed , Annals of Mathematics studies, no. 47, Princeton, N. J. (Princeton Univ. Press).

Шпеккер (Specker E.)
1949. Nicht konstruktiv beweisbare Satze der Analysis, *Jour. symbolic logic*, **14**, 145—158.

Шрёдер (Schröder E.)
1877. Der Operationskreis des Logikkalküls, Leipzig.
1895. Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik), v. 3, Algebra und Logik der Relative, part 1, Leipzig.

Шютте (Schutte K.)
1950. Schlussweisen-Kalküle der Prädikatenlogik, *Math. Ann.*, **122**, 47—65.
1956. Ein System des verknüpfenden Schliessens, *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 2, nos. 2—4, 34—67; *Archiv für philosophie*, **5**, no. 4, 375—387.
1960. Beweistheorie. Berlin, Göttingen, and Heidelberg (Springer-Verlag).
1962. Der Interpolationssatz der intuitionistischen Prädikatenlogik, *Math. Ann.*, **14**, 192—200. [Русский перевод: Шютте К., Интерполяционная теорема для интуиционистской логики предикатов, в кн. Идельсон и Минц [1967], 285—295.]

Эрбран (Herbrand J.)
1928. Sur le theorie de la demonstration, *Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des Sciences* (Paris), **186**, 1274—1276.
1930. Recherches sur la theorie de la demonstration, Travaux de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III sciences math. et phys., no. 33. Англ. перев. гл. 5 в кн. ван Хейеноорт [1967].
1931—2. Sur la non-contradiction de l'arithmetique, *Jour. reine angew. Math.*, **166**, 1—8.

Янг (Young J. W.)
1911. Lectures on fundamental concepts of algebra and geometry, New York (McMillan).

Яськовский (Jaskowski S.)
1934. On the rules of suppositions in formal logic, Studia logica, no 1, Warsaw.

СПИСОК ТЕОРЕМ И ЛЕММ

Теоремы

Леммы

Кроме того, имеются утверждения (A) — (B) (о классах эквивалентности) на стр. 190, (A) — (D) (теория множеств) на стр. 210, 211, 220, (A) — (B) (система **N** и исчисление предикатов) на стр. 252, (A) — (F) (степени и иерархии) на стр. 318 и 322—324, а также пять непронумерованных лемм и теорем (Генцена, Эрбрана) на стр. 406—410, 414.

СПИСОК ПОСТУЛАТОВ

Исчисление высказываний, стр. 46—48, 26—27, 29

1a. $A \supset (B \supset A)$. modus ponens, или $\supset$-правило $\dfrac{A,\ A \supset B}{B}$.

1b. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$.

3. $A \supset (B \supset A \& B)$.

4a. $A \& B \supset A$.

4b. $A \& B \supset B$.

5a. $A \supset A \vee B$.

5b. $B \supset A \vee B$.

6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$.

7. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$.

8. $\neg\neg A \supset A$.

9a. $(A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \sim B))$.

10a. $(A \sim B) \supset (A \supset B)$.

10b. $(A \sim B) \supset (B \supset A)$.

Исчисление предикатов (дополнительные постулаты), стр. 133, 118, 119, 179

$\forall$-схема $\forall x A(x) \supset A(r)$. $\exists$-схема $A(r) \supset \exists x A(x)$.

Терм r должен быть свободным для переменной x в формуле A(x).

$\forall$-правило $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$. $\exists$-правило $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$.

Переменная x не должна входить свободно в формулу C.

Равенство (дополнительные постулаты), стр. 184

(a) $x = x$.

(b) $x = y \supset (x = z \supset (y = z))$.

(c_i^n) $x = y \supset (P(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \supset$
$\supset P(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n))$.

(d_i^n) $x = y \supset f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) =$
$= f(a_1, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

Формальная арифметика (дополнительные постулаты к исчислению предикатов), стр. 249

13. $A(0) \& \forall x (A(x) \supset A(x')) \supset A(x)$.

14. $a' = b' \supset a = b$.

15. $\neg a' = 0$.

16. $a = b \supset (a = c \supset b = c)$.

17. $a = b \supset a' = b'$.

18. $a + 0 = a$.

19. $a + b' = (a + b)'$.

20. $a \cdot 0 = 0$.

21. $a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Выводимые правила введения и удаления для исчислений высказываний и предикатов находятся на стр. 60 и 145.

Постулаты для генценовской системы G4 — на стр. 346—347, 366; дополнительные постулаты для G4a и G4b — на стр. 397.

Нелогические аксиомы теории групп — на стр. 260, 263, 265.

Для интуиционистских систем схема аксиом 8 заменяется на 8^{I}. $\neg A \supset (A \supset B)$.

СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Используемые для (обозначения) выражений предметного языка[1])

Используемые для других целей[2])

[1]) Впрочем, с некоторыми исключениями. Например, на стр. 235 мы пользовались обозначениями «$\forall$» и «$\exists$», а не соответствующими символами из второго списка, поскольку к тому времени мы не располагали еще примечанием 1 к стр. 277; с другой стороны, при обсуждении систем G4 и др. мы пользовались для обозначения списков выражений их предметных языков символами «Γ», «Δ» и т. п., хотя они и не входят в первый список. В примечаниях к стр. 107 и 243 (примечание 2) отмечались другие отклонения от принятых нами соглашений. См. также примечание 4 к стр. 14.

[2]) См. предыдущее примечание.

Обозначения, относящиеся к машинам Тьюринга: стр. 282—287, 291—294.

АВТОРСКИЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ[1])

[1]) В скобках указаны страницы английского оригинала.—*Прим. перев.*

Часть II

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Приложения. *Г. Е. Минц*