Б. С. Кашин, А. А. Саакян

Ортогональные ряды

Издание второе, дополненное

Издательство АФЦ
Москва 1999

УДК 517.5

Б. С. Кашин, А. А. Саакян. **Ортогональные ряды.** Изд. 2-е, доп. – М.: Изд-во АФЦ, 1999. – 560 с.

Излагаются основные методы теории ортогональных рядов. Изучаются ортонормированные системы общего вида и важные конкретные системы, такие как системы Хаара, Франклина, системы всплесков (wavelets). Приведены классические результаты и достижения последних лет. Утверждения, выходящие за рамки университетского курса, излагаются с полными доказательствами.

Для специалистов в области математического анализа, аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Библиография: 250 названий.

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
(проект № 98-01-14020).

Издательство Научно-исследовательского актуарно-финансового центра (АФЦ)
(Лицензия на издательскую деятельность ЛР № 071423 от 10.04.1997)
117966, Москва, ул. Губкина, 8, к. 413.
Тел. 938-37-37. E-mail: izaak@mi.ras.ru

Отпечатано в ППП "Типография "Наука"
121099, Москва, Шубинский пер., 6.
Заказ № 1271

ISBN 5-93379-003-6

Оглавление

Предисловие ко второму изданию

С момента выхода в свет первого издания книги "Ортогональные ряды" прошло пятнадцать лет. Второе издание имеет своей целью представить читателю современное состояние предмета. Анализируя развитие теории ортогональных рядов после 1984 г., мы пришли к выводу, что нет необходимости менять план книги. При этом, в сравнении с первым изданием и американским изданием 1989 г. книга существенно дополнена. Добавлена новая глава, посвященная всплескам (wavelets), – направлению теории ортогональных рядов, бурно развивавшемуся в последние годы. Полностью переработаны §§ 4, 5 главы 6. Новые результаты включены и в другие главы.

Вместе с тем, в книге не нашли отражение некоторые важные результаты о свойствах конечных ортогональных систем, полученные в 80–90 годы с помощью современной техники геометрии выпуклых тел. Эти результаты, на наш взгляд, целесообразно изложить отдельно, предварив их подробным введением в геометрию конечномерных нормированных пространств.

Список литературы и раздел "Примечания" дополнены ссылками на работы, использованные во втором издании. В список литературы включены также опубликованные в последние годы монографии, касающиеся различных направлений теории ортогональных рядов.

В заключение выражаем благодарность за ряд полезных советов и помощь К. И. Осколкову, Г. Г. Геворкяну и редактору книги А. Д. Изааку.

Б. С. Кашин, А. А. Саакян

октябрь, 1999 г.

Предисловие к первому изданию

Книга, которую мы предлагаем читателю, посвящена теории общих ортогональных рядов. Эта теория возникла еще в начале века (как естественное обобщение, на базе интеграла Лебега, теории тригонометрических рядов), но особенно активно разрабатывалась в последние двадцать пять лет. К настоящему времени выяснено, в частности, что:

- многие утверждения о свойствах тригонометрической системы имеют общий характер и остаются справедливыми для широкого класса ортонормированных систем;
- изучение систем функций, более общих, чем ортонормированные системы, часто сводится к изучению последних;
- в ряде вопросов неклассические ортонормированные системы ведут себя “лучше” классических;
- результаты и методы теории общих ортогональных рядов находят разнообразные применения вне этой теории.

Приведенные положения, говорящие о целесообразности систематического изучения свойств различных ортонормированных систем, подтверждаются в определенной степени содержанием этой книги. Отметим при этом, что книга не может претендовать на полноту изложения предмета; рассматриваемая теория весьма обширна, и мы не касаемся некоторых важных тем. Мы не стремились также приводить результаты в их наиболее общей форме. Главной нашей целью было дать читателю представление об основных идеях и методах, применяемых в теории ортогональных рядов. На выбор материала оказала несомненное влияние тематика семинара Д. Е. Меньшова и П. Л. Ульянова по теории функций действительного переменного, который долгие годы работает в Московском университете, являясь “непрерывным продолжением” семинара Н. Н. Лузина двадцатых годов. Учтены и лекции по теории ортогональных рядов, читанные первым автором в Московском университете в 1979–1981 годах. Значительная часть теорем, доказанных в книге, до этого не излагалась в монографиях, и мы надеемся, что и специалисты найдут для себя здесь новое. Все же мы в большой степени ориентировались на начинающих математиков, а потому придерживались правила: доказывать все утверждения, выходящие за рамки университетского курса. Предполагается, что читатель знаком с содержанием книги А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина "Элементы теории функций и функционального анализа", а также с основами теории функций комплексного переменного (например, в объеме книги [91]). Необходимые дополнительные сведения из теории функций и функционального анализа собраны в двух приложениях, помещенных в конце текста. Сведения о том, кем впервые были получены излагаемые в книге результаты, содержатся в разделе "Примечания". Там же даны комментарии к приводимым доказательствам и некоторая дополнительная информация.

В заключение мы хотели бы выразить искреннюю благодарность за ценные советы и помощь нашим коллегам К. И. Осколкову, А. А. Талаляну, К. Тандори, З. Чисельскому и П. Освальду.

Б. С. Кашин, А. А. Саакян

апрель, 1984 г.

Замечания об обозначениях

Мы используем без пояснений ряд общепринятых (и применяемых, в частности, в книге [77]) обозначений (например, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^n$, $L^p(0,1)$, l^p, $C(0,1)$). Кроме того, мы полагаем:

$L^0(0,1)$, $L^0(\mathbb{R}^1)$ – пространство всех измеримых, конечных почти всюду функций, заданных соответственно на отрезке $[0,1]$ и прямой $\mathbb{R}^1$;

$C(-\pi,\pi)$, $L^p(-\pi,\pi)$ – пространства 2π-периодических функций на $\mathbb{R}^1$, соответственно непрерывных и суммируемых в степени p на $[-\pi,\pi]$;

$\mathcal{D}_N$, $N = 1,2,\dots,$ – N-мерное пространство кусочно постоянных функций заданных на $[0,1]$:

$$\mathcal{D}_N := \Bigg\{ f(x) : f(x) = \mathrm{const} = c_i, \text{ если } x \in \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right), \ i = 1,2,\dots,N;$$

$$f\left(\frac{i}{N}\right) = \frac{c_i + c_{i+1}}{2}, \text{ если } 1 \leqslant i < N, \ f(0) = c_1, \ f(1) = c_N \Bigg\}.$$

Аналогично, для произвольного отрезка $[a,b]$

$$\mathcal{D}_N[a,b] := \big\{ f(x), \ x \in [a,b] : g(t) = f(a + t(b-a)) \in \mathcal{D}_N \big\};$$

Нормой матрицы $H = \{h_{ij}\}$, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$, мы называем величину

$$\|H\| = \sup_{\{x_i\},\{y_j\}:\ \sum_{i=1}^m x_i^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2 = 1} \ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_{ij} x_i y_j .$$

$m(E)$ (или $|E|$, если $E = (a,b)$ – интервал) – мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^1$;

$\chi_E(x)$ – характеристическая функция множества E, т.е.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin E. \end{cases}$$

card E или $\#E$ – число элементов конечного множества E.

Если x – элемент банахова пространства X и y – ограниченный линейный функционал на X, то $\langle x, y\rangle$ или $\langle y, x\rangle$ – значение функционала y на элементе x.

Если $f(x)$ – действительная или комплекснозначная функция, то

$$\operatorname{supp} f(x) = \{x : f(x) \neq 0\}.$$

Если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – две последовательности положительных чисел, то запись

$$a_n \asymp b_n$$

означает, что существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, для которых

$$C_1 \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant C_2, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Мы используем сокращения:

О.Н.С. – ортонормированная система; напомним, что система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(a, b)$ называется ортонормированной, если

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \neq m, \end{cases} \qquad n, m = 1, 2, \dots ;$$

П.О.Н.С. – полная ортонормированная система;

п.в. – почти всюду.

С целью указания на то, что некоторое равенство есть определение одной из входящих в него величин, мы вместо знака "$=$" используем знаки "$:=$", "$=:$" или "$\equiv$".

Записи вида "см. теорему 5.1" или "см. § 3.2" означают ссылки на теорему 1 главы 5 и соответственно § 2 главы 3. При ссылках внутри одной главы номер главы опускается.

Глава 1
Предварительные понятия и некоторые общие результаты

В этой главе вводятся понятия, используемые на протяжении всей книги. Здесь приведен также ряд утверждений общего характера, доказательства некоторых из них вынесены в приложение 1.

§ 1. Виды сходимости

Большая часть теорем, доказанных в книге, – это утверждения о сходимости или расходимости некоторых рядов. Поэтому мы начнем изложение с рассматриваемых ниже видов сходимости.

I. *Сходимость рядов по некоторой норме* (в частности, сходимость функциональных рядов в пространствах $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $C(0,1)$).

II. *Сходимость по мере.*

Если ввести в пространстве $L^0(0,1)$ метрику

$$\rho(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\, dx, \tag{1}$$

то $L^0(0,1)$ превращается в полное линейное метрическое пространство. Сходимость последовательности $f_n(x), n = 1, 2, \dots$ $(f_n \in L^0(0,1))$, к функции $f(x)$ по мере эквивалентна сходимости по метрике (1), т.е. условию $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$.

III. *Сходимость почти всюду* (п.в.).

Определение 1. Если ряд[1)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in (0,1), \tag{2}$$

сходится п.в. к некоторой конечной п.в. функции, то *мажорантой частных сумм* этого ряда называется (конечная п.в., измеримая) функция

$$S^*(x) = \sup_{1 \leqslant N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right|. \tag{3}$$

Определение 2. О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, называется *системой сходимости*, если всякий ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \tag{4}$$

сходится п.в. на $(0,1)$.

Каждая система сходимости естественно порождает оператор мажоранты частных сумм S_Φ^*, действующий из пространства l^2 в пространство $L^0(0,1)$.

А именно, для $\{a_n\} \in l^2$

$$S_\Phi^*(\{a_n\}) = \sup_{1 \leqslant N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) \right|. \tag{5}$$

Большинство задач о сходимости п.в. ортогональных рядов сводится к изучению свойств оператора S_Φ^* (для любой системы Φ он определен на плотном в l^2 множестве последовательностей $\{a_n\}$ с конечным числом ненулевых членов). Здесь мы отметим следующее

[1)] Здесь и ниже мы всегда предполагаем, что члены рассматриваемых функциональных рядов и последовательностей являются измеримыми и конечными п.в. функциями.

Утверждение 1. *Для того чтобы О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *являлась системой сходимости*:

а) *необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ *была конечна для п.в.* $x \in (0,1)$, *функция*

$$\sup_{1 \leqslant N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) \right|;$$

б) *достаточно, чтобы при некоторых* $p > 0$ *и* $C_0 < \infty$ *для любой конечной последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ *выполнялось неравенство*

$$\int_0^1 [S_\Phi^*(\{a_n\})]^p \, dx \leqslant C_0 \left(\sum_{n=1}^{M} a_n^2 \right)^{p/2}, \tag{6}$$

где функция $S_\Phi^*(\{a_n\})$ *определена в* (5).

Доказательство. а) В доказательстве нуждается только *достаточность*. Пусть, напротив, найдется ряд вида (4), который расходится на множестве положительной меры. Это означает, что при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдутся последовательности целых чисел M_k и измеримых целочисленных функций $N_k(x)$, где $M_k < N_k(x) < M_{k+1}$, такие, что при $k = 1, 2, \ldots$ для множества

$$G_k := \left\{ x \in (0,1) : \left| \sum_{n=M_k}^{N_k(x)} a_n \varphi_n(x) \right| > \varepsilon \right\}$$

верна оценка $m(G_k) > \delta$.

Определим последовательность λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, положив $\lambda_n = \mathrm{const} = C_k$ при $M_k \leqslant n < M_{k+1}$, где числа $C_k \nearrow \infty$ выбраны растущими так медленно, чтобы была конечна сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n^2$.

Тогда для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \varphi_n(x)$ сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n^2 < \infty$ и в то же время при $x \in G := \varlimsup\limits_{k \to \infty} G_k$ $(m(G) \geqslant \delta)$

$$\sup_{1 \leqslant N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \lambda_n \varphi_n(x) \right| \geqslant \frac{1}{2} \sup_{1 \leqslant k < \infty} \left| \sum_{n=M_k}^{N_k(x)} a_n \lambda_n \varphi_n(x) \right| \geqslant \varepsilon \varlimsup_{k \to \infty} C_k = \infty,$$

что противоречит предположению о конечности п.в. всякой функции вида (5).

б) Пусть, напротив, (6) выполнено, но для некоторой последовательности $\{a_n\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1$,

$$\sup_{1\leqslant N<\infty}\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)\right| = \infty, \qquad x\in G, \quad m(G)>0.$$

Тогда ясно, что для любой постоянной K можно найти функцию $N(x)$ такую, что $\sup\limits_{x\in(0,1)} N(x) = M < \infty$ и

$$m\left\{x\in(0,1): \left|\sum_{n=1}^{N(x)} a_n\varphi_n(x)\right| > K\right\} > \frac{m(G)}{2}.$$

Но тогда для набора $\{a_n\}_{n=1}^{M}$

$$\int_0^1 [S_\Phi^*(\{a_n\})]^p\,dx \geqslant \frac{1}{2}K^p m(G) > C_0,$$

если постоянная K достаточно велика. Последнее неравенство противоречит (6).

IV. *Безусловная сходимость в линейном метрическом (в частности, банаховом) пространстве.*

Определение 3. Ряд из элементов линейного метрического пространства X:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{7}$$

называется *безусловно сходящимся*, если для любой перестановки натурального ряда $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в X ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}. \tag{7'}$$

Легко видеть, что для любого безусловно сходящегося ряда сумма (7′) не зависит от перестановки σ.

Теорема 1. *Для того чтобы ряд* (7) *из элементов полного линейного метрического пространства X сходился безусловно, необходимо и достаточно, чтобы для любого набора чисел $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n - \pm 1$, $n = 1, 2, \ldots$, сходился в X ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n. \tag{8}$$

Доказательство. Ясно, что сходимость всех рядов вида (8) равносильна сходимости всех рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n x_n, \qquad \varepsilon'_n = 0, 1, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{8'}$$

Допустим, что ряд (7) расходится после некоторой перестановки членов $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Это значит, что существуют число $\delta > 0$ и последовательности натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $N_k \leqslant M_k < N_{k+1}$, такие, что

а) $\rho\Big(\sum\limits_{n=N_k}^{M_k} x_{\sigma(n)}, 0\Big) \geqslant \delta$, $k = 1, 2, \dots$ (здесь $\rho(x, 0)$ – расстояние от x до 0);

б) если $A_k = \max\{\sigma(n) : N_k \leqslant n \leqslant M_k\}$, $B_k = \min\{\sigma(n) : N_k \leqslant n \leqslant M_k\}$, то $B_k < A_k < B_{k+1}$, $k = 1, 2 \dots$.

Положим $\varepsilon'_n = 1$, если $n \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{\sigma(m) : N_k \leqslant m \leqslant M_k\}$, и $\varepsilon'_n = 0$ для остальных n. Тогда из соотношений а) и б) следует, что при $k = 1, 2, \dots$

$$\rho\Big(\sum_{n=B_k}^{A_k} \varepsilon'_n x_n, 0\Big) = \rho\Big(\sum_{n=N_k}^{M_k} x_{\sigma(n)}, 0\Big) \geqslant \delta,$$

т.е. существует ряд вида (8′), расходящийся в X.

Предположим теперь, что ряд (7) сходится безусловно, и докажем сходимость всех рядов вида (8′), а следовательно, и (8). В самом деле, если бы какой-то ряд вида (8′) расходился, то мы бы нашли последовательности $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ с $N_k \leqslant M_k < N_{k+1}$ такие, что

$$\rho\Big(\sum_{n=N_k}^{M_k} \varepsilon'_n x_n, 0\Big) \geqslant \delta > 0, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Выбрав затем перестановку $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы для $k = 1, 2, \dots$ члены x_n $(N_k \leqslant n < M_k)$, для которых $\varepsilon'_n = 1$, шли в яде (7′) подряд, мы бы получили расходящуюся перестановку ряда (7), что противоречит его безусловной сходимости. Теорема 1 доказана.

V. *Безусловная сходимость функциональных рядов п.в.*

Определение 4. Ряд (2) называется *безусловно сходящимся п.в.*, если для любой перестановки натурального ряда $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится п.в. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x). \tag{9}$$

(При этом, конечно, множество (меры 0) расходимости ряда (9) может зависеть от перестановки σ.)

Хотя определения 3 и 4 полностью аналогичны, способы доказательства безусловной сходимости рядов п.в. совсем иные, чем в случае сходимости по норме или метрике. Дело в том, что для безусловной сходимости п.в. ряда (2), вообще говоря, недостаточна сходимость п.в. всех рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x), \qquad \varepsilon_n = \pm 1, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{10}$$

Соответствующий пример будет указан в гл. 3 (см. следствие 3.7). Отметим при этом, что из безусловной сходимости п.в. ряда (2) непосредственно следует сходимость п.в. всех рядов вида (10). В свою очередь сходимость п.в. всех рядов (10) влечет (см. теорему 2.14) сходимость п.в. любого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x), \qquad \{\lambda_n\} \in l^{\infty}.$$

Определение 5. О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, называется *системой безусловной сходимости*, если всякий ряд вида (4) безусловно сходится п.в. на $(0,1)$.

§ 2. Полнота, тотальность, биортогональность

Пусть X – банахово пространство, X^* – его сопряженное пространство.

Определение 6. Система элементов $\{x_\alpha\} \subset X$ называется *полной* в X, если замыкание линейной оболочки системы $\{x_\alpha\}$ совпадает с X.

Полная в $L^2(0,1)$ О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется полной ортонормированной системой (П.О.Н.С.).

Определение 7. Система элементов $\{x_\alpha^*\} \subset X^*$ называется *тотальной*, если в X не существует такого ненулевого элемента x, что $\langle x_\alpha^*, x\rangle = 0$ для всех α.

Непосредственным следствием двойственности пространств $L^p(0,1)$ и $L^q(0,1)$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, является

Утверждение 2. *Для того чтобы система* $\Phi = \{\varphi_\alpha\} \subset L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, *была полна в* $L^p(0,1)$, *необходимо и достаточно, чтобы* Φ *была тотальна.*

Доказательство. Пусть Φ полна в $L^p(0,1)$ и для некоторой функции $f \in L^q(0,1)$ выполняется равенство $\int_0^1 \varphi_\alpha(x) f(x)\,dx = 0$ для любой $\varphi_\alpha \in \Phi$. Тогда и для любой функции $g \in L^p(0,1)$, в силу полноты системы Φ, будем иметь $\int_0^1 g(x)f(x)\,dx = 0$, а это значит, что $f(x) = 0$ п.в.

Пусть теперь Φ – тотальная система и X_1 – замыкание линейной оболочки системы Φ. X_1 – замкнутое подпространство в $L^p(0,1)$, и если $X_1 \neq L^p(0,1)$, то по теореме Хана–Банаха существует функция $f \in L^q(0,1)$, $\|f\|_q > 0$, такая, что $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$ для всех $g \in X_1$. В частности, $\int_0^1 f(x)\varphi_\alpha(x)\,dx = 0$ при $\varphi_\alpha \in \Phi$, что противоречит тотальности системы Φ.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность элементов банахова пространства X и X_k $(k = 1,2,\dots)$ – замыкание (по норме X) линейной оболочки элементов $\{x_n\}_{n=1,n\neq k}^\infty$.

Определение 8. Система $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ называется *минимальной* в X, если $x_k \notin X_k$ для всех $k = 1,2,\dots$.

Определение 9. Система $\{x_n, y_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in X$, $y_n \in X^*$, $n = 1,2,\dots$, называется *биортогональной*, если $\langle x_n, y_m\rangle = 0$ при $n \neq m$, и *биортонормированной*, если

$$\langle x_n, y_m\rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases} \qquad n,m = 1,2,\dots. \tag{11}$$

Если $\{x_n, y_n\}$ – биортонормированная система, то $\{y_n\}$ называется *системой, сопряженной к системе* $\{x_n\}$. Сопряженная система, вообще говоря, не единственна, однако, легко видеть, что справедливо

Утверждение 3. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ – полная система в банаховом пространстве X; тогда ее сопряженная система (если она существует) единственна.*

Действительно, если $\{y'_n\}$ и $\{y''_n\}$ удовлетворяют соотношениям (11) (соответственно $y_n = y'_n$ и $y_n = y''_n$), то при любом фиксированном $m = 1,2,\dots$ будем иметь, что $\langle x_n, y'_m - y''_m\rangle = 0$ для произвольного n, откуда в силу полноты системы $\{x_n\}$ следует, что $y'_m = y''_m$.

Теорема 2. *Для того чтобы для данной последовательности $\{x_n\} \subset X$ существовала последовательность $\{y_n\} \subset X^*$, образующая с $\{x_n\}$ биортонормированную систему, необходимо и достаточно, чтобы система $\{x_n\}$ была минимальной в X.*

Доказательство. Если $\{x_n, y_n\}$ – биортонормированная система, то $\{x_n\}$ будет минимальной, так как в силу (11) $\langle x, y_k\rangle = 0$ при любом $x \in X_k$, а $\langle x_k, y_k\rangle = 1$, и потому $x_k \notin X_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Обратно, если $\{x_n\}$ минимальна, то по теореме Хана–Банаха, учитывая, что $x_k \notin X_k$ и что X_k – замкнутое подпространство в X $(k = 1, 2, \dots)$, мы можем найти функционалы $y_k \in X^*$, удовлетворяющие соотношениям (11).

Ясно, что при $X = L^p(0,1)$, $X^* = L^q(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, всякая О.Н.С. $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\varphi_n \in L^p(0,1) \cap L^q(0,1)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяет соотношениям (11) при $x_n = \varphi_n$, $y_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Следовательно, из теоремы 2 вытекает

Утверждение 4. *Всякая О.Н.С.* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *с* $\varphi_n \in L^p(0,1) \cap L^q(0,1)$, $n = 1, 2, \dots$, $1 \leqslant p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, *минимальна в* $L^p(0,1)$ *и является своей сопряженной системой.*

§ 3. Коэффициенты Фурье и частные суммы ортогонального ряда

Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(0,1)$ – О.Н.С.; функция $f \in L^1(0,1)$ такова, что $f\varphi_n \in L^1(0,1)$ при $n = 1, 2, \dots$.

Определение 10. Числа

$$c_n(f) = c_n(f, \Phi) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{12}$$

называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по системе Φ, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n(x) \tag{13}$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ по системе Φ.

Непосредственно из определения 10 вытекает, что для N-й частной суммы ряда (13) справедливо равенство

$$S_N(f,t) := \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\varphi_n(t) = \int_0^1 f(x)K_N(x,t)\,dx, \tag{14}$$

где $t \in (0,1)$ и

$$K_N(x,t) := \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t), \qquad x, t \in (0,1), \quad N = 1, 2, \dots. \tag{15}$$

Определение 11. Функция $K_N(x,t)$, определенная равенством (15), называется *ядром* порядка N системы Φ, а функция

$$L_N(t) := \int_0^1 |K_N(x,t)|\,dx, \qquad t \in [0,1], \quad N = 1,2,\ldots, \tag{16}$$

– N-й *функцией Лебега* системы Φ.

Равномерная ограниченность функций Лебега $L_N(t)$, $N = 1,2,\ldots$, тесно связана со сходимостью рядов Фурье в метриках L^1 и L^∞. Точнее, используя выражение для нормы операторов вида (14) (см. приложение 1, § 1), мы находим, что

а) для любого $t \in [0,1]$

$$\sup_{f:\|f\|_C \leqslant 1} |S_N(f,t)| = L_N(t); \tag{17}$$

б)
$$\sup_{f:\|f\|_1 \leqslant 1} \|S_N(f)\|_1 = \|L_N(t)\|_\infty. \tag{18}$$

Напомним также основные факты о рядах Фурье функций из пространства $L^2(0,1)$. Пусть $f \in L^2(0,1)$ и $S_N(x)$ – некоторый полином по системе Φ:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x). \tag{19}$$

Из ортонормированности системы Φ легко следует, что

$$\|f - S_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=1}^{N} c_n^2(f) + \sum_{n=1}^{N} \bigl(c_n(f) - a_n\bigr)^2, \tag{20}$$

где, как и раньше, $c_n(f)$ – n-й коэффициент Фурье функции f.

Из (20) непосредственно вытекает

Утверждение 5. а) *Из всех сумм вида* (19) *наименее уклоняется* (*по норме* $L^2(0,1)$) *от функции* f *частная сумма* (14) *ее ряда Фурье по системе* Φ; *при этом*

$$\|f - S_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{n=1}^{N} c_n^2(f); \tag{21}$$

б) (неравенство Бесселя) *для любой функции* $f \in L^2(0,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f) \leqslant \|f\|_2^2. \tag{22}$$

Справедливы

Теорема 3 (Рисс–Фишер). *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– О.Н.С. и последовательность* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$. *Тогда существует функция* $f \in L^2(0,1)$ *такая, что* $c_n = c_n(f)$, $n = 1, 2, \ldots$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f) = \|f\|_2^2 . \tag{23}$$

Теорема 4. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– О.Н.С. Следующие условия эквивалентны:*

1) Φ *полна в* $L^2(0,1)$;
2) *ряд Фурье по системе* Φ *каждой функции* $f \in L^2(0,1)$ *сходится к* f *по норме пространства* $L^2(0,1)$;
3) *для любой функции* $f \in L^2(0,1)$ *справедливо равенство* (23) (равенство Парсеваля).

Непосредственно из теоремы 4 вытекает, что если Φ – полная в $L^2(0,1)$ О.Н.С. и $f, g \in L^2(0,1)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) c_n(g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx. \tag{23$'$}$$

Из неравенства Бесселя (см. (22)) следует, что коэффициенты Фурье функций из $L^2(0,1)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Что касается коэффициентов Фурье функций из $L^p(0,1)$ с $1 \leqslant p < 2$, то нетрудно указать пример функции $f \in L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < 2$, и О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\varphi_n \in L^{\infty}(0,1)$ при $n = 1, 2, \ldots$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(f) = +\infty$ (см., например, § 3.2). Однако справедлива

Теорема 5. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– О.Н.С., состоящая из равномерно ограниченных функций*

$$\|\varphi_n\|_{\infty} \leqslant M < \infty, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{24}$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(f, \Phi) = 0$ *для любой функции* $f \in L^1(0,1)$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем (пользуясь плотностью класса $L^2(0,1)$ в $L^1(0,1)$) для данной функции $f(x)$ функцию $g(x) \in L^2(0,1)$ с $\|f - g\|_1 < M^{-1}\varepsilon$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(f, \Phi)| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(g, \Phi)| + \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(f - g, \Phi)| . \tag{25}$$

Так как $|c_n(f - g, \Phi)| \leqslant \|f - g\|_1 \cdot \|\varphi_n\|_{\infty} \leqslant M^{-1}\varepsilon M = \varepsilon$, то из (25) следует, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n(f, \Phi)| \leqslant \varepsilon$, откуда в силу произвольности ε вытекает утверждение теоремы.

§4. Базисность

Определение 12. Система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется *базисом*, если для любого элемента $x \in X$ существует единственный ряд

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \qquad a_n = a_n(x) \in \mathbb{R}^1, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

сходящийся к x по норме пространства X.

Следующий общий результат дает критерий базисности системы (доказательство см. в приложении 1, §3).

Теорема 6. *Для того чтобы система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ была базисом в банаховом пространстве X, необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:*

а) $\{x_n\}$ *полна в* X;

б) $\{x_n\}$ *минимальна*;

в) *существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого $x \in X$*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n \right\| \leqslant M \|x\|, \qquad N = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

где $\{y_n\}$ – система, сопряженная к $\{x_n\}$ (см. теорему 2).

Из теоремы 6 вытекают

Следствие 1. *Если $\{x_n\}$ – базис в X, то функционалы $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. (26)), являются линейными ограниченными функционалами и определяются равенствами*

$$a_n(x) = \langle x, y_n \rangle, \qquad x \in X, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{y_n\}$ – система, сопряженная к $\{x_n\}$.

Доказательство. Так как $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m(x) x_m$ сходится к x по норме пространства X, а y_n, $n = 1, 2, \ldots$, – ограниченный линейный функционал, то при $n = 1, 2, \ldots$

$$\langle x, y_n \rangle = \lim_{N \to \infty} \left\langle \sum_{m=1}^{N} a_m(x) x_m, y_n \right\rangle = a_n(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис в банаховом пространстве X и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сопряженная к $\{x_n\}$ система. Тогда $\{y_n\}$ – базис в пространстве Y – замыкании своей линейной оболочки (с нормой сопряженного к X пространства X^*).*

Доказательство. Система $\{y_n\}$ минимальна (в силу биортогональности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$) и полна в Y. Поэтому нам достаточно доказать (см. теорему 6), что для любого $y \in Y$

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle y, x_n\rangle y_n\right\|_{X^*} \leqslant M\,\|y\|_{X^*}, \qquad N = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

(здесь x_n рассматривается как элемент $(X^*)^*$).

Пусть $y \in Y$ и число N фиксированы. Тогда, используя теорему 6, мы для любого $x \in X$ с $\|x\|_X = 1$ будем иметь

$$\left|\left\langle x, \sum_{n=1}^{N}\langle y, x_n\rangle\, y_n\right\rangle\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\langle x, y_n\rangle\langle y, x_n\rangle\right| = \left|\left\langle y, \sum_{n=1}^{N}\langle x, y_n\rangle x_n\right\rangle\right| \leqslant \|y\|_{X^*}\cdot\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle x, y_n\rangle x_n\right\| \leqslant M\,\|y\|_{X^*},$$

откуда сразу вытекает (28). Теорема 7 доказана.

Следствие 2. *Если система функций $\{\varphi_n(x)\}$ – базис в $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, то сопряженная к ней система $\{\psi_n(x)\}$ является базисом в $L^q(0,1)$ с $1/p + 1/q = 1$.*

Доказательство. В силу теоремы 7 достаточно показать только, что система $\{\psi_n\}$ полна в $L^q(0,1)$. Но если бы это было не так, то, пользуясь утверждением 2, мы бы могли найти функцию $f \in L^p(0,1)$, $\|f\|_p > 0$, для которой $\int_0^1 f(x)\psi_n(x)\,dx = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$, что противоречит базисности системы $\{\varphi_n\}$, так как согласно следствию 1

$$f \overset{L^p}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 f(t)\psi_n(t)\,dt\right)\varphi_n.$$

Следствие 3. *Если О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}$ является базисом в $L^p(0,1)$ и при этом*

$$\varphi_n \in L^p(0,1) \cap L^q(0,1), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p < \infty, \tag{29}$$

то Φ – базис в $L^{p'}(0,1)$ для любого $p' \in \Delta = [\min(p,q), \max(p,q)]$.

Доказательство. Так как Φ является своей сопряженной системой (см. утверждение 4), то, в силу следствия 2, Φ – базис в $L^q(0,1)$. Таким образом, система Φ полна и минимальна в $L^p(0,1)$ и $L^q(0,1)$, а потому Φ полна и минимальна и в $L^{p'}(0,1)$ при $p' \in \Delta$. Далее, операторы частных сумм $S_n(f)$ $(N = 1, 2, \dots)$ имеют ограниченные нормы как операторы из $L^p(0,1)$ в $L^p(0,1)$ и из $L^q(0,1)$ в $L^q(0,1)$:

$$\|S_N(f)\|_p \leqslant M_1 \|f\|_p, \quad \|S_N(f)\|_q \leqslant M_2 \|f\|_q, \qquad N = 1, 2, \dots,$$

откуда в силу интерполяционной теоремы (см. теорему 1 из приложения 1, §2) мы получаем, что $\|S_N(f)\|_{p'} \leqslant M \|f\|_{p'}$ при любом $p' \in \Delta$. Все три условия, содержащиеся в теореме 6, проверены, т.е. Φ – базис в $L^{p'}(0,1)$ для $p' \in \Delta$.

Конкретизируя теорему 6 для пространства $C(0,1)$ и учитывая равенство (17), мы получаем следующий результат.

Теорема 8. *Для того чтобы О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C(0,1)$, полная в $C(0,1)$, была базисом в этом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы функции Лебега системы Φ были равномерно ограничены*:

$$\|L_N(t)\|_C \leqslant M < \infty, \qquad N = 1, 2, \dots . \tag{30}$$

Замечание. Аналогично, из теоремы 6 и равенства (18), с учетом утверждения 4, вытекает, что полная в $L^1(0,1)$ О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}$, состоящая из ограниченных функций, является базисом в $L^1(0,1)$ тогда и только тогда, когда

$$\|L_N(t)\|_\infty \leqslant M < \infty, \qquad N = 1, 2, \dots .$$

Из теоремы 8 легко вытекает

Теорема 9. *Если О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – базис в $C(0,1)$, то Φ является базисом также и в $L^p(0,1)$ при $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Проверим для системы Φ выполнение условий теоремы 6. Полнота системы Φ в $L^p(0,1)$ есть прямое следствие полноты в $C(0,1)$, а минимальность Φ в $L^p(0,1)$ – утверждения 4.

Чтобы проверить условие в), мы, пользуясь неравенством Гёльдера (см.

также (14), (16)), найдем, что для $f \in L^p(0,1)$

$$
\begin{aligned}
|S_N(f,t)| &\leqslant \int_0^1 |K_N(x,t)|^{1/q}\,|K_N(x,t)|^{1/p}\,|f(x)|\,dx \\
&\leqslant \left\{\int_0^1 |K_N(x,t)|\,dx\right\}^{1/q}\left\{\int_0^1 |K_N(x,t)|\cdot|f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}, \\
&\qquad\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Из (31) и (30) мы получаем, что для $f \in L^p(0,1)$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |S_N(f,t)|^p\,dt &\leqslant M^{p/q}\int_0^1\int_0^1 |K_N(x,t)|\,|f(x)|^p\,dx\,dt \\
&= M^{p/q}\int_0^1 |f(x)|^p\int_0^1 |K_N(x,t)|\,dt\,dx \\
&\leqslant M^{p/q+1}\int_0^1 |f(t)|^p\,dt.
\end{aligned}
$$

Теорема 9 доказана.

Отметим, что, как показывает пример системы Фабера–Шаудера (см. гл. 6), условие ортогональности функций базиса в теореме 9 существенно.

Определение 13. Базис $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахова пространства X называется *безусловным*, если для любой перестановки натурального ряда $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ система $\{x_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ также является базисом в X.

Учитывая следствие 1 и теорему 1 о безусловно сходящихся рядах, мы можем утверждать, что для того, чтобы базис $\{x_n\}$ был безусловным, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n = \pm 1$ при $n = 1, 2, \ldots$, и для любого $x \in X$ сходился ряд

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \langle x, y_n\rangle x_n =: T_\varepsilon(x), \tag{32}
$$

где $\{y_n\} \subset X^*$ – система, сопряженная к $\{x_n\}$.

Теорема 10. *Для того чтобы полная и минимальная в X система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ являлась безусловным базисом, необходимо и достаточно,* *чтобы нашлась постоянная M, для которой при любом наборе чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^N$ с $\varepsilon_n = \pm 1$ для $1 \leqslant n \leqslant N$, $N = 1, 2, \ldots$, выполняются неравенства*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \langle x, y_n \rangle x_n \right\| \leqslant M \, \|x\| . \tag{33}$$

Доказательство. а) Если неравенства (33) выполнены, то из теоремы 6 вытекает, что $\{x_n\}$ – базис в X, и нам остается доказать (см. теорему 1), что для любой последовательности $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \langle x, y_n \rangle x_n .$$

Используя оценку (33), мы имеем, что при $N \leqslant N'$

$$\left\| \sum_{n=N}^{N'} \varepsilon_n \langle x, y_n \rangle x_n \right\| \leqslant M \left\| \sum_{n=N}^{N'} \langle x, y_n \rangle x_n \right\| \leqslant \delta_N ,$$

где $\delta_N \to 0$ при $N \to \infty$.

б) Пусть, напротив, $\{x_n\}$ – безусловный базис в X, но не существует постоянной M, для которой все неравенства вида (33) выполняются. Тогда мы можем найти последовательность целых чисел $1 < N_1 < N_2 < \cdots$, последовательности коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, такие, что при $k = 1, 2, \ldots$

$$1) \quad \left\| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n x_n \right\| = 1; \qquad 2) \quad \left\| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \varepsilon_n a_n x_n \right\| \geqslant k^2 . \tag{34}$$

В силу базисности системы $\{x_n\}$ из неравенства (34), 1) мы получаем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n x_n$$

сходится в X к некоторому элементу x и при этом $\langle x, y_n \rangle = k^{-2} a_n$ для $N_k < n \leqslant N_{k+1}$. Тем самым, учитывая (34), 2), мы видим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n$ сходится в X, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \langle x, y_n \rangle x_n$ расходится, что противоречит (см. (32)) безусловной базисности системы $\{x_n\}$. Теорема 10 доказана.

Из теоремы 10 вытекает

Следствие 4. *Для того чтобы полная и минимальная в X система $\{x_n\}$ являлась безусловным базисом, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, были определены операторы $T_\varepsilon(x)$ (см. (32)) и нормы этих операторов были ограничены постоянной, не зависящей от ε. При этом,*

$$B\,\|x\| \leqslant \|T_\varepsilon(x)\| \leqslant A\,\|x\|\,, \qquad x \in X, \tag{35}$$

где постоянные $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от x и ε.

Неравенство $B\,\|x\| \leqslant \|T_\varepsilon(x)\|$ следует из ограниченности оператора T_ε и равенства $T_\varepsilon^2(x) = x$.

Рассмотрим биортогональную систему $\{\varphi_n(x), \psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \varphi_n \in L^p(0,1)$, $\psi_n \in L^q(0,1)$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$. При изучении безусловной базисности $\{\varphi_n\}$ важную роль играют свойства следующего оператора: для $f \in L^p(0,1)$ положим

$$P(f) = P(f,x) := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} [\langle f, \psi_n\rangle \varphi_n(x)]^2\right\}^{1/2}. \tag{36}$$

Функция (36) иногда называется функцией Пэли (связанной с системой $\{\varphi_n\}$). В главе 2, используя неравенства (35), мы докажем следующий результат.

Теорема 11. *Для того чтобы полная и минимальная в $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ являлась безусловным базисом в $L^p(0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой $f \in L^p(0,1)$ функция (36) была конечна п.в. и выполнялось неравенство*

$$B\,\|f\|_p \leqslant \|P(f)\|_p \leqslant A\,\|f\|_p \tag{37}$$

(постоянные $A > 0$, $B > 0$ не зависят от f).

Следствие 5. *В пространстве $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, не существует безусловного, равномерно ограниченного ортонормированного базиса.*

Доказательство. Пусть сначала $p > 2$. Предположим противное: существует О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n\}$ с $|\varphi_n(x)| \leqslant M$ для п.в. $x \in (0,1)$ и $n = 1, 2, \ldots$, которая образует безусловный базис в $L^p(0,1)$. Но тогда, пользуясь неравенством Бесселя (см. также утверждение 4), мы найдем, что п.в. на $(0,1)$

$$P(f,x) \leqslant M\left\{\sum_{n=1}^{\infty} [\langle f, \varphi_n\rangle]^2\right\}^{1/2} \leqslant M\,\|f\|_2\,,$$

т.е. $\|P(f)\|_p \leqslant M\,\|f\|_2$. Пользуясь неравенством (37), мы найдем, что для любой $f \in L^p(0,1)$ $(2 < p < \infty)$

$$\|f\|_p \leqslant MB^{-1}\,\|f\|_2\,,$$

что, конечно, невозможно.

Случай, когда $1 < p < 2$, сводится к случаю $p > 2$ с помощью следствия 2.

В главах 3 и 5 будут построены безусловные ортонормированные базисы в $L^p(0,1)$ для всех p, $1 < p < \infty$. Что касается пространств $L^1(0,1)$ и $C(0,1)$ то мы покажем (см. теоремы 2.13 и 6.2), что в этих пространствах безусловных базисов вообще не существует.

Определение 14. Система $\Phi = \{\varphi_n\}$ элементов гильбертова пространства H называется *системой Рисса*, если существуют постоянные $B, b > 0$ такие, что

$$b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n\right\|_H \leqslant B\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right\}^{1/2} \tag{38}$$

для произвольной последовательности $\{a_n\} \in l^2$. Если система Рисса Φ является базисом в H, то она называется *базисом Рисса*.

Замечание. Если условие (38) выполнено для произвольной финитной последовательности $\{a_n\}$, то и для любой последовательности $\{a_n\} \in l^2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$ сходится в H, и его сумма также удовлетворяет (38).

Следствие 6. *Для того чтобы полная нормированная в $L^2(0,1)$ система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ являлась безусловным базисом в $L^2(0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы Φ была системой Рисса.*

Доказательство. Если система Φ – безусловный базис в $L^2(0,1)$, то она минимальна и имеет единственную сопряженную систему $\{\psi_n\}$ (см. теоремы 6, 2 и утверждение 3). Тогда для произвольного набора чисел $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ $(N = 1, 2, \dots)$ мы будем иметь (см. (36)), что

$$\|P(f)\|_2 = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right\}^{1/2}, \quad \text{если} \quad f = \sum_{n=1}^{N}a_n\varphi_n, \tag{39}$$

и неравенства (38) непосредственно следуют из (37) (см. также замечание после определения 14).

Допустим теперь, что Φ – система Рисса, т.е. имеет место (38). Из первого неравенства в (38) следует, что система Φ минимальна, значит она имеет сопряженную систему $\{\psi_n\}$, причем (в силу полноты Φ и утверждения 3) единственную, и из (38) и (39) мы получим (37) для произвольного полинома по системе Φ. Тогда опять же в силу полноты системы Φ мы будем иметь (37) для всех $f \in L^2(0,1)$ и, применив теорему 11, получим, что Φ – безусловный базис в $L^2(0,1)$. Следствие 6 доказано.

Учитывая следствие 2 и наличие изоморфизма между произвольным сепарабельным гильбертовым пространством и $L^2(0,1)$, получим

Следствие 7. *Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}$ – система Рисса, полная в гильбертовом пространстве H. Тогда*

а) Φ – *безусловный базис в H;*

б) *сопряженная система Φ^* – безусловный базис в H;*

в) *существуют постоянные $B, b > 0$ такие, что*

$$b\|h\|_H \leqslant \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |(h,\varphi_n)|^2\right\}^{1/2} \leqslant B\|h\|_H$$

для всех $h \in H$.

Глава 2
Независимые функции и их первые применения

§1. Определение и построение последовательностей независимых функций

Определение 1. Набор действительных, измеримых, определенных на $(0,1)$ функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$ называется *набором независимых функций*, если для любых интервалов на числовой прямой I_n, $n = 1,2,\dots,N$, справедливо равенство

$$m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in I_n,\ n = 1,2,\dots,N\} = \prod_{n=1}^{N} m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in I_n\}. \qquad (1)$$

Бесконечная последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ называется *последовательностью* (или, что то же самое, *системой*) *независимых функций* (сокращенно П.Н.Ф. или С.Н.Ф.), если для любого $N = 1,2,\dots$ набор $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$ есть набор независимых функций.

Совершенно аналогично определению 1 дается определение набора независимых функций, заданных на произвольном пространстве X с мерой μ при условии $\mu(X) = 1$. В частности, так же, как в определении 1, вводятся независимые функции на множестве $G \subset \mathbb{R}^q$ с q-мерной мерой Лебега $m(G) = 1$. Если же мера множества G, на котором заданы функции $f_n(x)$, не равна 1 (но конечна и положительна), то определение независимости набора принимает вид: набор $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$ называется набором независимых функций, если для любых интервалов $I_n, n = 1, 2, \ldots, N$,

$$m\{x \in G : f_n(x) \in I_n,\ n = 1, 2, \ldots, N\} = [m(G)]^{-N+1} \prod_{n=1}^{N} m\{x \in G : f_n(x) \in I_n\}. \qquad (2)$$

В дальнейшем нам потребуется также

Определение 2. Последовательность измеримых множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \subset (0,1)$, называется *последовательностью независимых множеств*, если характеристические функции этих множеств $\{\chi_{E_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образуют П.Н.Ф.

Последовательности независимых функций всесторонне изучаются в теории вероятностей. Вместе с тем понятие независимости играет важную роль и в теории функций. Хотя ортогональные системы, состоящие из независимых функций, составляют весьма специальный и узкий класс ортогональных систем, без них нельзя обойтись во многих задачах, рассматриваемых в книге. Особенно часто используются свойства системы Радемахера – простейшей нетривиальной С.Н.Ф. В этой главе мы докажем нужные нам в дальнейшем утверждения о С.Н.Ф. и дадим первые применения этих утверждений к задачам о сходимости функциональных рядов. Начнем изложение с явного построения некоторых классов систем независимых функций.

Теорема 1. *Пусть для каждого* $n = 1, 2, \ldots$ *заданы последовательности* $\lambda_{s,n}$ *и* $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots$, *причем* $\lambda_{s,n} \neq \lambda_{s',n}$ *при* $s \neq s'$, *а* $\mu_{s,n} \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \mu_{s,n} = 1$ *для любого* n.

Тогда существует последовательность независимых, кусочно постоянных[1] *функций* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *таких, что*

$$m\{x \in (0,1) : f_n(x) = \lambda_{s,n}\} = \mu_{s,n}, \qquad s, n = 1, 2, \ldots . \qquad (3)$$

[1] Функцию $f(x)$, $x \in (0,1)$, мы называем *кусочно постоянной*, если $f(x) = c_i$ при $x \in \delta_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где $\{\delta_i\}$ – конечный или бесконечный набор попарно непересекающихся интервалов с $m\Big(\bigcup\limits_i \delta_i\Big) = 1$.

Доказательство. Построение искомой последовательности $\{f_n\}$ проведем по индукции, используя при этом следующее обозначение: если функция $g(x)$ определена на интервале $I = (a, b)$ и $I' = (a', b')$ – некоторый другой интервал, то через $T_{I \to I'}(g, x)$ обозначим функцию "подобную" $g(x)$, но определенную на I':

$$T_{I \to I'}(g, x) = g\left(a + \frac{x - a'}{b' - a'}(b - a)\right), \qquad x \in I'. \tag{4}$$

Последовательность $\{f_n\}$ мы будем определять лишь для п.в. $x \in (0, 1)$, так как свойство независимости системы не нарушается при изменения функций на множестве меры нуль. Определим сначала вспомогательные функции

$$g_n(x) = \lambda_{s,n} \quad \text{при} \quad x \in \left(\sum_{p=1}^{s-1} \mu_{p,n}, \sum_{p=1}^{s} \mu_{p,n}\right), \quad s = 1, 2, \dots \tag{5}$$

$\left(\text{здесь } \sum\limits_{p=1}^{0} := 0\right)$. Положим затем $f_1(x) = g_1(x)$, а если набор независимых, кусочно постоянных функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{N}$ уже определен, то для построения $f_{N+1}(x)$ рассмотрим непересекающиеся интервалы постоянства функции $f_N(x)$ – $\{\delta_i\}$ $\left(m\left(\bigcup\limits_i \delta_i\right) = 1\right)$ и положим

$$f_{N+1}(x) = T_{(0,1) \to \delta_i}(g_{N+1}, x) \quad \text{при} \quad x \in \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Ясно, что функция $f_{N+1}(x)$ является кусочно постоянной и что для любого интервала постоянства δ_i функции $f_N(x)$ и любого интервала I_{N+1}

$$\begin{aligned} m\{x \in \delta_i : f_{N+1}(x) \in I_{N+1}\} \\ = m(\delta_i) \cdot m\{x \in (0, 1) : f_{N+1}(x) \in I_{N+1}\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим также, что из построения функций $f_n(x)$ сразу следует, что

(*) все функции $f_n(x)$, $1 \leqslant n \leqslant N$, постоянны на любом интервале постоянства функции $f_{N+1}(x)$.

В силу (7) и (*) мы находим, что для любого набора интервалов I_n, $n = 1, 2, \dots, N + 1$,

$$\begin{aligned} m &:= m\{x \in (0, 1) : f_n(x) \in I_n,\ n = 1, 2, \dots, N + 1\} \\ &= m\{x \in (0, 1) : f_n(x) \in I_n,\ n = 1, 2, \dots, N\} \\ &\quad \times m\{x \in (0, 1) : f_{N+1}(x) \in I_{N+1}\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Пользуясь затем независимостью набора $\{f_n\}_{n=1}^N$ (по предположению индукции), из (8) получим, что

$$m = \prod_{n=1}^{N+1} m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in I_n\}.$$

Тем самым независимость набора $\{f_n\}_{n=1}^{N+1}$, а следовательно, и теорема 1 доказаны.

Последовательность постоянных на $(0,1)$ функций $f_n(x) = \lambda_n = \text{const}$; $x \in (0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$, *является тривиальным* примером системы, к которой приводит конструкция теоремы 1 в случае, если для каждого n только одно из чисел $\mu_{s,n}$ отлично от нуля. Простейший нетривиальный случай теоремы 1 возникает, когда для всех n среди чисел $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots$, только два отличных от нуля: $\mu_{1,n} = \mu_{2,n} = 1/2$. Если при этом взять $\lambda_{1,n} = 1$, $\lambda_{2,n} = -1$, то конструкция теоремы 1 приводит к важнейшей для теории функций С.Н.Ф. – так называемой системе Радемахера $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 3. *Для* $n = 1, 2, \ldots$ n-я *функция Радемахера* задается равенством

$$r_n(x) := \begin{cases} \;\;\,1 \;\; \text{при } x \in \left(\dfrac{i-1}{2^n}, \dfrac{i}{2^n}\right) = \Delta_n^i, \;\; i \text{ – нечетное}, \\ -1 \;\; \text{при } x \in \left(\dfrac{i-1}{2^n}, \dfrac{i}{2^n}\right) = \Delta_n^i, \;\; i \text{ – четное}, \end{cases} \tag{9}$$

$i = 1, 2, \ldots, 2^n$.

Кроме того, в дальнейшем удобно считать, что $r_0(x) = 1$ при $x \in (0,1)$ и что $r_n(i/2^n) = 0$ при $i = 0, 1, \ldots, 2^n$; $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда более компактное определение функций Радемахера можно дать формулой

$$r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x, \qquad x \in [0,1], \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{10}$$

Следствие 1. *Функции* $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, *образуют С.Н.Ф.*

Действительно, как уже отмечалось, система Радемахера – частный случай систем, построенных в теореме 1.

Значения функций $r_n(x)$ прямо связаны со свойствами разложения x в двоичную дробь. В самом деле, пусть двоично-иррациональное число $x \in (0,1)$ представимо в виде бесконечной двоичной дроби:

$$x = 0.\theta_1\theta_2\ldots\theta_p\ldots, \quad \text{где} \;\; \theta_p = \theta_p(x) = 0 \text{ или } 1. \tag{11}$$

Тогда $x = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \theta_p 2^{-p}$, и поэтому для всякого $n \geqslant 1$

$$\sum_{p=1}^{n} \theta_p 2^{-p} < x < \sum_{p=1}^{n} \theta_p 2^{-p} + \sum_{p=n+1}^{\infty} 2^{-p} = \sum_{p=1}^{n} \theta_p 2^{-p} + 2^{-n}. \tag{12}$$

Из последнего неравенства имеем, что

$$\frac{\theta_n(x) + 2m}{2^n} < x < \frac{\theta_n(x) + 2m + 1}{2^n}, \tag{13}$$

где $m \geqslant 0$ – некоторое целое число. Из (9) и (13) следует, что равенство $\theta_n(x) = 0$ имеет место для тех и только тех двоично-иррациональных x, для которых $r_n(x) = 1$.

Иными словами, справедливо соотношение

$$\begin{gathered} r_n(x) = 1 - 2\theta_n(x) = (-1)^{\theta_n(x)}, \\ x \in (0,1), \quad x \neq \frac{i}{2^k}, \quad 1 \leqslant i, k < \infty. \end{gathered} \tag{14}$$

Непосредственно из определения независимости функций, следствия 1 и равенства (14) вытекает

Следствие 2. *Функции* $\theta_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *определенные равенством* (11), *образуют П.Н.Ф.*

Используя следствие 2, построим последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ независимых и равномерно распределенных на $[0,1]$ функций, т.е. функций, для которых

$$m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in I\} = m(I), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

для любого интервала $I \subset (0,1)$. Для этого разобьем натуральный ряд произвольным образом на бесконечное число попарно непересекающихся последовательностей Λ_n: $\Lambda_n = \{k_{s,n}\}_{s=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, \ldots$, и для $x \in (0,1)$, $x \neq i/2^k$, положим

$$f_n(x) = 0.\theta_{k_{1,n}}(x)\theta_{k_{2,n}}(x) \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

т.е.

$$f_n(x) = \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s} \theta_{k_{s,n}}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где числа $\theta_n(x)$ определены в (11).

Теорема 2. *Функции* $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, *определенные равенством* (16), *удовлетворяют условию* (15) *и образуют П.Н.Ф.*

Доказательство. Измеримость функций $f_n(x)$ следует непосредственно из равенства (17). Докажем независимость функций $\{f_n\}$ и одновременно проверим для любого интервала $I \subset (0,1)$ равенства (15). Фиксируем натуральное N и рассмотрим некоторый набор двоичных интервалов

$$\omega_n = \left(\frac{i_n - 1}{2^{m_n}}, \frac{i_n}{2^{m_n}}\right) \subset (0,1),$$
$$1 \leqslant i_n \leqslant 2^{m_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Пусть двоичная запись чисел $(i_n - 1)/2^{m_n}$ имеет вид

$$\frac{i_n - 1}{2^{m_n}} = \sum_{s=1}^{m_n} \varepsilon_{s,n} 2^{-s} \qquad (\varepsilon_{s,n} = 0, 1).$$

Тогда из определения функций f_n (см. (16) и (17)) следует, что $f_n(x) \in \omega_n$ тогда и только тогда, когда $\theta_{k_{s,n}}(x) = \varepsilon_{s,n}$, $1 \leqslant s \leqslant m_n$. Поэтому

$$m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in \omega_n,\ n = 1, 2, \ldots, N\}$$
$$= m\{x \in (0,1) : \theta_{k_{s,n}}(x) = \varepsilon_{s,n},\ s = 1, 2, \ldots, m_n;\ n = 1, 2, \ldots, N\}. \quad (18)$$

Но в силу независимости функций θ_n (см. следствие 2), учитывая, что по построению все числа $k_{s,n}$ различны, мы находим, что правая часть в (18) равна

$$\prod_{n=1}^{N} \prod_{s=1}^{m_n} \frac{1}{2} = \prod_{n=1}^{N} m(\omega_n).$$

Таким образом,

$$m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in \omega_n,\ n = 1, 2, \ldots, N\} = \prod_{n=1}^{N} m(\omega_n). \qquad (19)$$

Из (19) сразу вытекает, что если для каждого $n = 1, 2, \ldots, N$ множество E_n – конечное объединение непересекающихся двоичных интервалов:

$$E_n = \bigcup_{s=1}^{s_n} \omega_{s,n}, \qquad (20)$$

то

$$m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in E_n,\ n = 1,2,\dots,N\} = \prod_{n=1}^{N} m(E_n). \qquad (21)$$

Кроме того, отметим, что для заданного двоично-рационального числа $i/2^k \in [0,1]$ с двоичной записью

$$\frac{i}{2^k} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_s 2^{-s} \qquad (\varepsilon_s = 0 \text{ при } s > k)$$

или

$$\frac{i}{2^k} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon'_s 2^{-s} \qquad (\varepsilon'_s = 1 \text{ при } s > k)$$

равенство $f_n(x) = i/2^k$ выполняется только для x из множества

$$\{x \in [0,1] : \theta_{k_{s,n}}(x) = \varepsilon_s,\ s = 1,2,\dots\} \\ \cup \{x \in [0,1] : \theta_{k_{s,n}}(x) = \varepsilon'_s,\ s = 1,2,\dots\},$$

т.е. (ввиду независимости функций θ_n) на множестве меры нуль. Поэтому

$$m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in \overline{E}_n,\ n = 1,2,\dots,N\} \\ = m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in E_n,\ n = 1,2,\dots,N\}, \qquad (22)$$

где $\overline{E}$ – замыкание множества E. Пусть, наконец, I_n, $n = 1,2,\dots,N$, – произвольный набор интервалов на оси. Так как $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ для $x \in (0,1)$ (см. (16)), то

$$m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in I_n,\ n = 1,2,\dots,N\} \\ = m\{x \in (0,1) : f_n(x) \in I_n \cap [0,1],\ n = 1,2,\dots,N\}. \qquad (23)$$

Ясно также, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти множества E_n и E'_n, $n = 1,2,\dots,N$, вида (20), для которых

$$E_n \subset I_n \cap [0,1] \subset \overline{E}'_n, \quad m(E'_n) - m(E_n) \leqslant \varepsilon, \qquad n = 1,2,\dots,N. \qquad (24)$$

Из (24), учитывая соотношения (21) и (22), находим, что

$$\prod_{n=1}^{N} m\{I_n \cap [0,1]\} - 2^N \varepsilon \\ \leqslant m\{x \in [0,1] : f_n(x) \in I_n \cap [0,1],\ n = 1,2,\dots,N\} \\ \leqslant \prod_{n=1}^{N} m\{I_n \cap [0,1]\} + 2^N \varepsilon,$$

откуда ввиду произвольной малости ε и (23) вытекает равенство

$$m\{x \in [0,1] : f_n(x) \in I_n,\ n = 1,2,\dots,N\} = \prod_{n=1}^{N} m\{I_n \cap [0,1]\}. \tag{25}$$

Тем самым доказаны выполнение равенства (15) (при $N = 1$) и независимость функций f_n. Теорема 2 доказана.

Если в теореме 1 указан способ построения последовательностей независимых функций, множество значений которых счетно, то, исходя из функций (16), можно построить П.Н.Ф. $\{\psi_n(x)\}$, для членов которой

$$m\{x \in (0,1) : \psi_n(x) > t\} = 1 - \lambda_n(t), \qquad t \in \mathbb{R}^1, \quad n = 1,2,\dots, \tag{26}$$

где $\{\lambda_n(t)\}$ – любая, наперед заданная последовательность непрерывных функций распределения. Точнее, справедлива

Теорема 3. *Пусть на оси задана последовательность непрерывных, строго монотонных функций* $\{\lambda_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, *причем* $\lim\limits_{t\to-\infty} \lambda_n(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda_n(t) = 1$ *для* $n = 1,2,\dots$, *и пусть* $\Lambda_n(t) = \lambda_n^{-1}(t)$ – *обратная к* $\lambda_n(t)$ *функция.*

Тогда последовательность $\psi_n(x) = \Lambda_n(f_n(x))$, $x \in (0,1)$, $n = 1,2,\dots$, *есть П.Н.Ф., удовлетворяющая условиям* (26).

Лемма 1. *Пусть* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, – *П.Н.Ф., и пусть* (a_n, b_n) – *конечный или бесконечный интервал, содержащий множество значений функции* $f_n(x)$ (*т.е.* $f_n(x) \in (a_n,b_n)$ *при* $x \in (0,1)$), *а функция* $\Lambda_n(x)$ *непрерывна и строго монотонна на* (a_n, b_n).

Тогда $\{\Lambda_n(f_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ – *П.Н.Ф.*

Доказательство. Положим $\delta_n = (\Lambda_n(a_n), \Lambda_n(b_n))$ при $n = 1,2,\dots$, и пусть $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольный набор интервалов на оси; тогда

$$\begin{aligned} E &:= \{x \in (0,1) : \Lambda_n(f_n(x)) \in I_n,\ n = 1,2,\dots,N\} \\ &= \{x \in (0,1) : \Lambda_n(f_n(x)) \in I_n \cap \delta_n,\ n = 1,2,\dots,N\} \\ &= \{x \in (0,1) : f_n(x) \in \Lambda_n^{-1}(I_n \cap \delta_n),\ n = 1,2,\dots,N\}, \end{aligned}$$

где $\Lambda_n^{-1}(c,d)$ – такой интервал (c', d'), что $\Lambda_n(c') = c$, $\Lambda_n(d') = d$. Поэтому в силу определения независимости

$$
\begin{aligned}
m(E) &= \prod_{n=1}^{N} m\bigl\{x \in (0,1) : f_n(x) \in \Lambda_n^{-1}(I_n \cap \delta_n)\bigr\} \\
&= \prod_{n=1}^{N} m\bigl\{x \in (0,1) : \Lambda_n\bigl(f_n(x)\bigr) \in I_n \cap \delta_n\bigr\} \\
&= \prod_{n=1}^{N} m\bigl\{x \in (0,1) : \Lambda_n\bigl(f_n(x)\bigr) \in I_n\bigr\}.
\end{aligned}
$$

Лемма 1 доказана.

Для доказательства теоремы 3 осталось проверить выполнение равенств (26). Пользуясь теоремой 2 (см. (15)), мы найдем, что

$$
\begin{aligned}
&m\bigl\{x \in (0,1) : \Lambda_n\bigl(f_n(x)\bigr) > t\bigr\} \\
&\quad = m\bigl\{x \in (0,1) : \lambda_n\bigl(\Lambda_n\bigl(f_n(x)\bigr)\bigr) > \lambda_n(t)\bigr\} \\
&\quad = m\bigl\{x \in (0,1) : f_n(x) > \lambda_n(t)\bigr\} = 1 - \lambda_n(t).
\end{aligned}
$$

Теорема 3 доказана

Особое значение имеет П.Н.Ф. $\{\xi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, построенная в теореме 3 в случае, когда при $n = 1, 2, \ldots$

$$\lambda_n(t) = \lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-y^2/2}\, dy, \tag{27}$$

т.е. последовательность независимых, нормально распределенных функций.

Ясно, что $\xi_n \in L^p(0,1)$ при любом $p < \infty$ и $n = 1, 2, \ldots$. Кроме того, справедливы равенства

$$\int_0^1 \xi_n(x)\, dx = 0, \quad \int_0^1 \xi_n^2(x)\, dx = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{28}$$

В самом деле, используя тождество

$$
\begin{gathered}
\int_0^1 [\xi_n(x)]^p\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} t^p\, d\widetilde{\lambda}_\xi(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} t^p \widetilde{\lambda}'_\xi(t)\, dt, \\
\xi \in L^p(0,1), \quad p = 1, 2; \qquad \widetilde{\lambda}_\xi(t) = m\{x \in (0,1) : \xi(x) > t\}
\end{gathered}
\tag{29}
$$

(см. приложение 1, § 1), мы получаем (интегрируя во втором случае по частям)

$$\int_0^1 \xi_n(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2}\,dt = 0,$$

$$\int_0^1 \xi_n^2(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-t^2/2}\,dt$$

$$= -te^{-t^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1.$$

§ 2. Свойства систем независимых функций

Прежде всего отметим следующее, вытекающее непосредственно из определения 1 свойство наборов независимых функций.

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$, $x \in G, G \subset \mathbb{R}^1, 0 < m(G) < \infty$, – набор независимых функций и для $n = 1, 2, \ldots, N$ множество F_n есть конечное объединение интервалов (полуинтервалов, отрезков) на оси; тогда

$$m\{x \in G : f_n(x) \in F_n,\ n = 1, 2, \ldots, N\}$$
$$= [m(G)]^{-N+1}\prod_{n=1}^{N} m\{x \in G : f_n(x) \in F_n\}. \tag{30}$$

С помощью соответствующего предельного перехода равенство (30) может быть распространено на широкий класс множеств F_n, однако мы не будем на этом останавливаться, так как для наших целей достаточно указанного частного случая.

Теорема 4. *Для любого набора независимых, определенных на множестве $G \subset \mathbb{R}^1$, $m(G) > 0$, функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$ с $f_n \in L^1(G)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, функция $\prod_{n=1}^N f_n(x)$ также принадлежит $L^1(G)$ и*

$$\int_G \prod_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx = [m(G)]^{-N+1}\prod_{n=1}^{N}\int_G f_n(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть сначала $N = 2$. Положим для каждого целого k и $\delta > 0$

$$E_{k,\delta} = \{x \in G : f_1(x) \in [(k-1)\delta, k\delta)\}. \tag{31}$$

Пусть сначала $f_1(x) \geqslant 0$ и $f_2(x) \geqslant 0$; тогда по определению интеграла Лебега при любом $\delta > 0$

$$\int_G f_1(x) f_2(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_{k,\delta}} f_1(x) f_2(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} k\delta \int_{E_{k,\delta}} f_2(x)\, dx + \rho,$$

где $|\rho| \leqslant \delta \|f_2\|_{L^1(G)}$. Следовательно,

$$\int_G f_1(x) f_2(x)\, dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} k\delta \int_{E_{k,\delta}} f_2(x)\, dx. \tag{32}$$

В силу равенства (29) при $k = 1, 2, \ldots,$

$$\begin{gathered} \int_{E_{k,\delta}} f_2(x)\, dx = \int_0^{\infty} \lambda_{k,\delta}(t)\, dt, \\ \lambda_{k,\delta}(t) = m\bigl\{x \in E_{k,\delta} : f_2(x) > t\bigr\}; \end{gathered} \tag{33}$$

при этом в силу независимости функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ для $t > 0$ и $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{gathered} \lambda_{k,\delta}(t) = \frac{m(E_{k,\delta})}{m(G)} \lambda_{f_2}(t), \\ \lambda_f(t) = m\bigl\{x \in G : |f(x)| > t\bigr\}. \end{gathered} \tag{34}$$

Из (33) и (34), учитывая, что $\int_0^{\infty} \lambda_{f_2}(t)\, dt = \int_G f_2(x)\, dx$, получаем, что

$$\int_{E_{k,\delta}} f_2(x)\, dx = \frac{m(E_{k,\delta})}{m(G)} \int_G f_2(x)\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{35}$$

Пользуясь последним равенством, из соотношения (32) мы находим, что для неотрицательных $f_1(x)$ и $f_2(x)$

$$\begin{aligned} \int_G f_1(x) f_2(x)\, dx &= \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} k\delta m(E_{k,\delta}) \frac{1}{m(G)} \int_G f_2(x)\, dx \\ &= \frac{1}{m(G)} \int_G f_1(x)\, dx \int_G f_2(x)\, dx, \end{aligned} \tag{36}$$

причем конечность $\int_G f_1(x) f_2(x)\, dx$ следует из конечности интегралов $\int_G f_1(x)\, dx$ и $\int_G f_2(x)\, dx$.

Если теперь заданы независимые, суммируемые функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ произвольного знака, то функции $|f_1(x)|$ и $|f_2(x)|$ также независимы. В самом деле, для любого набора независимых функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, множество $\{x : |f_n(x)| \in I_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$ имеет вид

$$\{x : f_n(x) \in I_n \cup (-I_n),\ n = 1, 2, \ldots, N\},$$

где $-I_n := \{x : -x \in I_n\}$, и остается воспользоваться равенством (30). Следовательно (см. (36)), интеграл $\int_G |f_1(x) f_2(x)|\, dx$ конечен.

Далее рассуждаем также, как и в случае, когда $f_1(x) \geqslant 0$ и $f_2(x) \geqslant 0$: из соотношения

$$\int_G f_1(x) f_2(x)\, dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\delta \int_{E_{k,\delta}} f_2(x)\, dx$$

и равенства (35) (которое, очевидно, верно и при $k < 1$) мы получим, что

$$\int_G f_1(x) f_2(x)\, dx = [m(G)]^{-1} \int_G f_1(x)\, dx \int_G f_2(x)\, dx,$$

т.е. для $N = 2$ теорема 4 доказана.

Докажем теперь теорему 4 для наборов из $N > 2$ функций, предполагая ее справедливость для любого набора из $N - 1$ функций.

Пусть, как и раньше , для целого k и $\delta > 0$ множество $E_{k,\delta}$ определено в (31), и пусть, кроме того, $m(E_{k,\delta}) > 0$. Тогда ясно, что $\{f_n(x)\}_{n=2}^N$ – набор независимых функций на $E_{k,\delta}$, причем (см. (35))

$$\int_{E_{k,\delta}} \prod_{n=2}^N f_n(x)\, dx = [m(E_{k,\delta})]^{-N+2} \prod_{n=2}^N \int_{E_{k,\delta}} f_n(x)\, dx$$
$$= \frac{m(E_{k,\delta})}{[m(G)]^{N-1}} \prod_{n=2}^N \int_G f_n(x)\, dx, \quad k = 0, \pm 1, \ldots . \tag{37}$$

Аналогично,

$$\int_{\widetilde{E}_{k,\delta}} \prod_{n=2}^N |f_n(x)|\, dx = \frac{m(\widetilde{E}_{k,\delta})}{[m(G)]^{N-1}} \prod_{n=2}^N \int_G |f_n(x)|\, dx, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{37'}$$

где $\widetilde{E}_{k,\delta} = \big\{x \in G : |f_1(x)| \in [(k-1)\delta, k\delta)\big\}$, $k = 1, 2, \ldots, \delta > 0$.

Из (37′), взяв $\delta = 1$, мы находим, что

$$\begin{aligned}\int_G \prod_{n=1}^{N} |f_n(x)|\,dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\widetilde{E}_{k,1}} \prod_{n=1}^{N} |f_n(x)|\,dx \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{\widetilde{E}_{k,1}} \prod_{n=2}^{N} |f_n(x)|\,dx \\ &= [m(G)]^{1-N} \prod_{n=2}^{N} \int_G |f_n(x)|\,dx \sum_{k=1}^{\infty} k m(\widetilde{E}_{k,1}) < \infty,\end{aligned}$$

т.е. $\prod\limits_{n=1}^{N} |f_n(x)|$ суммируема. Следовательно, имеет смысл равенство (см. (32))

$$\int_G \prod_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\delta \int_{\widetilde{E}_{k,\delta}} \prod_{n=2}^{N} f_n(x)\,dx,$$

из которого в силу (37) вытекает, что

$$\begin{aligned}\int_G \prod_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx &= [m(G)]^{1-N} \prod_{n=2}^{N} \int_G f_n(x)\,dx \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\delta m(E_{k,\delta}) \\ &= [m(G)]^{1-N} \prod_{n=1}^{N} \int_G f_n(x)\,dx.\end{aligned}$$

Теорема 4 полностью доказана.

Следствие 3. *С.Н.Ф.* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *удовлетворяющая при* $n = 1, 2, \ldots$ *условиям*

$$\int_0^1 \psi_n(x)\,dx = 0, \qquad \int_0^1 \psi_n^2(x)\,dx = 1,$$

есть ортонормированная система.

Ниже мы изучим свойства полиномов и рядов по О.Н.С. независимых функций $\{\psi_n(x)\}$. При этом в ряде случаев мы дополнительно будем требовать, чтобы функции $\psi_n(x)$ были равномерно ограничены: $|\psi_n(x)| \leqslant M$, $x \in (0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$ (ясно, что всегда $M \geqslant 1$, так как $M \geqslant \|\psi_n\|_\infty \geqslant \|\psi_n\|_2 = 1$).

Теорема 5. *Для любого набора независимых функций* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^N$ *с*

$$\|\psi_n\|_2 = 1, \qquad \|\psi_n\|_\infty \leqslant M, \qquad \int_0^1 \psi_n(x)\,dx = 0$$

при $n = 1, 2, \ldots, N$ *и для любого* $t \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\lambda(t) = m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=1}^N a_n\psi_n(x)\right| > t\left(\sum_{n=1}^N a_n^2\right)^{1/2}\right\} \leqslant 2e^{-t^2/(4M^2)}. \tag{38}$$

Доказательство. Отметим, что для любого числа t

$$1 + \sum_{r=2}^\infty \frac{t^r}{r!} \leqslant e^{t^2}. \tag{39}$$

В самом деле, так как $[(2j+1)!]^2 > \frac{1}{2}(2j)!\,(2j+2)!$ при $j \geqslant 1$, пользуясь неравенством $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, мы получим

$$\frac{|t^{2j+1}|}{(2j+1)!} \leqslant \frac{\sqrt{2}\,|t^j t^{j+1}|}{[(2j)!(2j+2)!]^{1/2}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{t^{2j}}{(2j)!} + \frac{t^{2j+2}}{(2j+2)!}\right),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{r=2}^\infty \frac{t^r}{r!} &= 1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{t^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=1}^\infty \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} \\
&\leqslant 1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{t^{2j}}{(2j)!} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{t^2}{2} + \sqrt{2}\sum_{j=2}^\infty \frac{t^{2j}}{(2j)!} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)t^2 + (1+\sqrt{2})\sum_{j=2}^\infty \frac{t^{2j}}{(2j)!} \\
&\leqslant 1 + \sum_{j=1}^\infty \frac{t^{2j}}{j!} = e^{t^2}.
\end{aligned}$$

Покажем теперь, что при любом $z > 0$ и $n = 1, 2, \ldots, N$

$$\int_0^1 \exp\{za_n\psi_n(x)\}\,dx \leqslant \exp\{z^2a_n^2M^2\}. \tag{40}$$

Действительно, разложив функцию $\exp\{za_n\psi_n(x)\}$ в ряд Тейлора и используя равенство $\int_0^1 \psi_n(x)\,dx = 0$, получим

$$\begin{aligned}\int_0^1 \exp\{za_n\psi_n(x)\}\,dx &= \int_0^1 \left[1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(za_n\psi_n(x))^r}{r!}\right]dx \\ &= 1+\sum_{r=2}^{\infty}\int_0^1 \frac{(za_n\psi_n(x))^r}{r!}\,dx \\ &\leqslant 1+\sum_{r=2}^{\infty}\frac{|za_nM|^r}{r!} \leqslant \exp\{z^2a_n^2M^2\}.\end{aligned}$$

Положим $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n\psi_n(x)$ и

$$\lambda'(t) = m\left\{x\in(0,1) : P(x) > t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right\}, \qquad t\geqslant 0.$$

Пользуясь монотонностью функции e^x и неравенством Чебышёва, мы найдем, что для любого $z>0$

$$\begin{aligned}\lambda'(t) &= m\left\{x\in(0,1) : \exp[zP(x)] > \exp\left[zt\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right]\right\} \\ &\leqslant \exp\left[-tz\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right]\int_0^1 \exp[zP(x)]\,dx \\ &= \exp\left[-tz\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right]\int_0^1 \prod_{n=1}^{N}\exp[za_n\psi_n(x)]\,dx. \qquad (41)\end{aligned}$$

В силу теоремы 4 (см. также лемму 1 в теореме 3) правая часть в (41) равна

$$\exp\left[-tz\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right]\prod_{n=1}^{N}\int_0^1 \exp[za_n\psi_n(x)]\,dx,$$

откуда, используя оценку (40), находим, что для любого $z>0$

$$\lambda'(t) \leqslant \exp\left[tz\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2} + z^2M^2\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right]. \qquad (42)$$

Взяв в (42) $z = t\left[2M^2\left(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right]^{-1}$, получим, что

$$\lambda'(t) \leqslant \exp\left[-\frac{t^2}{2M^2} + \frac{t^2M^2}{4M^4}\right] = \exp\left[-\frac{t^2}{4M^2}\right]. \tag{43}$$

Рассматривая затем вместо набора $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^N$ набор $\{-\psi_n(x)\}_{n=1}^N$ и применяя к нему оценку (43), найдем

$$\lambda''(t) := m\left\{x \in (0,1) : P(x) < -t\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right\} \leqslant \exp\left[-\frac{t^2}{4M^2}\right],$$

а следовательно,

$$\lambda(t) = \lambda'(t) + \lambda''(t) \leqslant 2\exp\left[-\frac{t^2}{4M^2}\right].$$

Теорема 5 доказана.

Отметим, что более аккуратные оценки постоянных в теореме 5 позволяют получить для $\lambda(t)$ неравенство $\lambda(t) \leqslant 2\exp\left[-\dfrac{t^2}{2M^2}\right]$, однако для наших целей вполне достаточно любой оценки вида $\lambda(t) \leqslant C\exp[-\gamma t^2]$, где $\gamma = \gamma(M) > 0$, поэтому мы не будем заниматься нахождением точных констант в оценках для $\lambda(t)$.

Из теоремы 5 вытекает ряд следствий, касающихся полиномов и рядов по С.Н.Ф. $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, функции которых удовлетворяют условиям

$$\|\psi_n\|_2 = 1, \quad \|\psi_n\|_\infty \leqslant M, \quad \int_0^1 \psi_n(x)\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{44}$$

Теорема 6 (неравенство Хинчина). *Для каждого числа* $p > 2$ *и* $M \geqslant 1$ *существует такая постоянная* $C_{p,M}$, *что для любого полинома* $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n\psi_n(x)$ *по С.Н.Ф.* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, *удовлетворяющей условиям* (44), *справедливо неравенство*

$$\|P\|_p \leqslant C_{p,M}\|P\|_2 = C_{p,M}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что

$$\|P\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2} = 1.$$

Пусть $\lambda(t) = m\{x \in (0,1) : |P(x)| > t\}$. По теореме 5

$$\lambda(t) \leqslant 2\exp\left(-\frac{t^2}{4M^2}\right).$$

Поэтому (см. приложение 1, (2))

$$\|P\|_p = \left\{p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda(t)\,dt\right\}^{1/p}$$
$$\leqslant \left\{2p\int_0^\infty t^{p-1}\exp\left(-\frac{t^2}{4M^2}\right)dt\right\}^{1/p} = C_{p,M}.$$

Теорема 7. *Для любого полинома по С.Н.Ф., удовлетворяющей условиям* (44), *имеют место неравенства*:

а) $m\{x \in (0,1) : |P(x)| \geqslant \frac{1}{2}\|P\|_2\} \geqslant c_M > 0$;

б) $\|P\|_p \geqslant \|P\|_1 \geqslant c'_M\|P\|_2$ $(c'_M > 0,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Лемма 1. *Для любой функции* $f(x) \geqslant 0$, $x \in (0,1)$, *с* $\|f\|_1 = 1$, $\|f\|_2 = K$ *справедливы оценки*

$$1)\quad m\left\{x \in (0,1) : f(x) \geqslant \frac{1}{4}\right\} \geqslant \frac{1}{8K^2},$$
$$2)\quad m\{x \in (0,1) : f(x) \neq 0\} \geqslant \frac{1}{K^2}.$$

Доказательство. Пусть

$$Q = \left\{x \in (0,1) : f(x) \geqslant \frac{1}{4}\right\}, \qquad E = \{x \in (0,1) : f(x) \geqslant 2K^2\}.$$

Тогда

$$K^2 \geqslant \int_E f^2(x)\,dx \geqslant 2K^2\int_E f(x)\,dx,$$

т.е.

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \int_{(0,1)\setminus E} f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_{(0,1)\setminus E} f(x)\,dx$$
$$= \int_{[(0,1)\setminus E]\cap Q} f(x)\,dx + \int_{[(0,1)\setminus E]\cap[(0,1)\setminus Q]} f(x)\,dx \leqslant 2K^2 m(Q) + \frac{1}{4},$$

откуда имеем $m(Q) \geqslant (8K^2)^{-1}$, что доказывает 1).

Далее, если $G = \{x \in (0,1) : f(x) \neq 0\}$, то по неравенству Гёльдера

$$1 = \|f\|_1 = \int_G f(x)\,dx \leqslant \left(\int_G 1\,dx\right)^{1/2} \left(\int_G f^2(x)\,dx\right)^{1/2} = (mG)^{1/2} \cdot K,$$

т.е. $mG \geqslant (1/K)^2$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 7. Достаточно доказать п. а), так как п. б) есть его непосредственное следствие. В силу теоремы 6 $\|P\|_4 \leqslant C_{4,M}\|P\|_2$, и, применяя лемму 1 к функции $P^2(x)\|P\|_2^{-2}$ (для $\|P\|_2 \neq 0$), мы найдем, что

$$m\Big\{x \in (0,1) : P^2(x)\|P\|_2^{-2} \geqslant \frac{1}{4}\Big\} \geqslant (8C_{4,M}^4)^{-1},$$

откуда следует а) с $c_M = (8C_{4,M}^4)^{-1}$. Теорема 7 доказана.

С помощью теоремы 7 нетрудно получить необходимое условие сходимости по мере ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \tag{45}$$

по С.Н.Ф. $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям (44). Таким условием оказывается конечность суммы квадратов коэффициентов ряда (45):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{46}$$

Неравенство (46) есть и достаточное условие для сходимости по мере и почти всюду ряда по произвольной О.Н.С. независимых функций. Для сходимости по мере это следует из того, что при условии (46) ряд (45) как всякий ортогональный ряд сходится в $L^2(0,1)$, а тем более по мере.

Достаточность оценки (46) для сходимости п.в. ряда (45) будет доказана ниже (см. теорему 9).

Теорема 8. *Если С.Н.Ф.* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, *удовлетворяет условиям* (44) *и ряд* (45) *сходится по мере* (*тем более п.в.*) *на* $(0,1)$, *то выполнено условие* (46). *Кроме того,*

$$m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x)\right| > \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}\right\} \geqslant c_M > 0. \tag{47}$$

Доказательство. Предположив, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$, мы сможем найти такую возрастающую последовательность натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n^2 > k^2, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Тогда по теореме 7, п. а)

$$m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\psi_n(x)\right| > \frac{k}{2}\right\} \geqslant c_M > 0, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

что противоречит сходимости по мере ряда (45). Оценка (47) также вытекает из оценки п. а) теоремы 7 и того факта, что в силу сходимости по мере ряда (45) для любого $\alpha > 0$

$$m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x)\right| > \alpha\right\}$$
$$\geqslant \varlimsup_{N\to\infty} m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x)\right| > 2\alpha\right\}.$$

Теорема 9. *Любая О.Н.С. независимых функций* $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *является системой сходимости* (*см. определение* 1.2), *более того, оператор мажоранты частных сумм* $S_\Psi^*(\{a_n\})$ (*см.* 1.(5)) *есть ограниченный оператор из* l^2 *в* $L^2(0,1)$:

$$\|S_\Psi^*(\{a_n\})\|_2 \leqslant 4\,\|\{a_n\}\|_{l^2}\,. \tag{48}$$

Замечание. В отличие от теоремы 9, для справедливости теорем 5–8 необходимо помимо ортонормированности накладывать на независимые функции $\psi_n(x)$ дополнительные ограничения, например, предполагать выполнение оценок $\|\psi_n\|_\infty \leqslant M$, $n = 1, 2, \dots$. При этом требование равномерной ограниченности функций $\psi_n(x)$ может быть в каждой из этих теорем ослаблено. Например, в теореме 8 оно может быть заменено условием $\|\psi_n\|_1 \geqslant c > 0$, $n = 1, 2, \dots$, которое, как нетрудно показать, является уже необходимым для справедливости теоремы 8.

Лемма 1. *Для любой С.Н.Ф.* $\Psi' = \{\psi'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, *функции которой принимают конечное число значений, и для любых чисел* $\{a_n\}_{n=1}^{N}$

$$\|S^*_{\Psi'}(\{a_n\})\|_2 \leqslant 4 \max_{1\leqslant s\leqslant m\leqslant N}\left\|\sum_{n=s}^{m} a_n\psi'_n\right\|_2 =: 4M. \tag{49}$$

Доказательство. Фиксируем числа $\{a_n\}_{n=1}^{N}$; при этом, не ограничивая общности, считаем, что $M = 1$. Положим

$$S^*(x) = S^*_{\Psi'}(\{a_n\}, x), \qquad S_r(x) = \sum_{n=1}^{r} a_n\psi'_n(x), \quad r = 1, 2, \ldots, N$$

и оценим функцию распределения $\lambda(t) = m\{x \in (0,1) : S^*(x) > t\}$. Отметим предварительно, что в силу неравенства Чебышёва при $1 \leqslant s \leqslant m \leqslant N$

$$m\left\{x \in (0,1) : \sum_{n=s}^{m} a_n\psi'_n(x) < -\frac{3}{2}\right\} \leqslant \frac{4}{9}M^2 < \frac{1}{2}. \tag{50}$$

Положим при $t > 0$

$$G_t^+ = \left\{x \in (0,1) : \max_{1\leqslant r\leqslant N} S_r(x) > t\right\},$$
$$G_t^- = \left\{x \in (0,1) : \min_{1\leqslant r\leqslant N} S_r(x) < -t\right\}.$$

Ясно, что

$$\lambda(t) = m(G_t^+) + m(G_t^-). \tag{51}$$

Множество G_t^+ представим в виде

$$\begin{gathered} G_t^+ = \bigcup_{q=1}^{N} G_t^+(q), \\ G_t^+(q) = \{x \in (0,1) : S_r(x) \leqslant t,\ 1 \leqslant r \leqslant q,\ S_q(x) > t\}. \end{gathered} \tag{52}$$

Как видно из их определения (см. (52)), множества $G_t^+(q)$ с различными q не пересекаются, и каждое $G_t^+(q)$ есть конечное объединение множеств вида $\{x \in (0,1) : \psi'_n(x) = z_n,\ 1 \leqslant n \leqslant q\}$.

Используя независимость функций $\psi'_n(x)$, мы для любого числа z и $q = 1, 2, \ldots, N-1$ получим, что

$$m\left\{x \in G_t^+(q) : \sum_{n=q+1}^{N} a_n\psi'_n(x) > z\right\}$$
$$= m[G_t^+(q)] \cdot m\left\{x \in (0,1) : \sum_{n=q+1}^{N} a_n\psi'_n(x) > z\right\},$$

а следовательно (см. (50), (52)),

$$\begin{aligned}
&m\Big\{x \in G_t^+(q) : S_N(x) > t - \frac{3}{2}\Big\} \\
&\quad \geqslant m\Big\{x \in G_t^+(q) : \sum_{n=q+1}^{N} a_n\psi_n'(x) \geqslant -\frac{3}{2}\Big\} \\
&\quad = m[G_t^+(q)] \cdot m\Big\{x \in (0,1) : \sum_{n=q+1}^{N} a_n\psi_n'(x) \geqslant -\frac{3}{2}\Big\} \\
&\quad > \frac{1}{2} m[G_t^+(q)]. \qquad (53)
\end{aligned}$$

Суммируя неравенства (53) при $q = 1, 2, \ldots, N$, находим, что

$$m\Big\{x \in G_t^+ : S_N(x) > t - \frac{3}{2}\Big\} > \frac{1}{2} m(G_t^+). \qquad (54)$$

Рассматривая вместо набора $\{\psi_n'\}$ набор $\{-\psi_n'\}$, из (54) получим, что

$$m\Big\{x \in G_t^- : S_N(x) < -t + \frac{3}{2}\Big\} > \frac{1}{2} m(G_t^-). \qquad (55)$$

Складывая неравенства (54) и (55) и учитывая (51), найдем

$$\lambda(t) \leqslant 2\lambda'\Big(t - \frac{3}{2}\Big), \qquad \lambda'(t) = m\{x \in (0,1) : |S_N(x)| > t\}. \qquad (56)$$

Из (56), используя равенство (2) из приложения 1, выводим, что

$$\begin{aligned}
\|S^*\|_2^2 &= 2\int_0^\infty t\lambda(t)\,dt \leqslant 2\Big[\int_0^{3/2} t\,dt + \int_{3/2}^\infty t\lambda(t)\,dt\Big] \\
&\leqslant \frac{9}{4} + 4\int_{3/2}^\infty t\lambda'\Big(t - \frac{3}{2}\Big)\,dt = \frac{9}{4} + 4\int_0^\infty t\lambda'(t)\,dt + 6\int_0^\infty \lambda'(t)\,dt \\
&= \frac{9}{4} + 2\|S_N\|_2^2 + 6\|S_N\|_1 < 11M = 11.
\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Сохраняя обозначения, использованные в формулировке и доказательстве леммы 1, отметим для дальнейшего следующее неравенство:

$$\|S^*\|_p \leqslant C_p(M + \|S_N\|_p), \qquad 1 \leqslant p < \infty. \qquad (57)$$

В самом деле, считая, не ограничивая общности, что $M = 1$, из (56) получим

$$\begin{aligned}\|S^*\|_p^p &\leqslant 2p \int_0^\infty t^p \lambda'\Big(t - \frac{3}{2}\Big)\, dt \\ &\leqslant C_p\Big(\int_0^\infty \lambda'(t)\, dt + \int_0^\infty t^p \lambda'(t)\, dt\Big) \leqslant C_p(\|S_N\|_1 + \|S_N\|_p^p) \\ &\leqslant C_p(1 + \|S_N\|_p^p) \leqslant C_p(M + \|S_N\|_p)^p.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 9. В силу утверждения 1.1 нам достаточно для любого конечного набора $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\sum\limits_{n=1}^N a_n^2 = 1$, установить справедливость оценки (48). Аппроксимируем функции $\psi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, независимыми функциями $\psi_n'(x)$, принимающими конечное число значений. Для этого при $-\infty < k < \infty$ и $0 < \delta < \infty$ введем множества

$$E_n(k, \delta) = \big\{x \in (0, 1) : \psi_n(x) \in \big[(k-1)\delta, k\delta\big)\big\}$$

и положим при $n = 1, 2, \ldots, N$, $p = 1, 2, \ldots$,

$$\psi_n(x, p, \delta) = \begin{cases} k\delta, & \text{если } x \in E_n(k, \delta),\ -p < k \leqslant p, \\ -\delta p, & \text{если } \psi_n(x) < -\delta p, \\ \delta p, & \text{если } \psi_n(x) > \delta p. \end{cases}$$

Легко видеть, что при любых p и δ $\Psi_{p,\delta} = \{\psi_n(x, p, \delta)\}_{n=1}^N$ – набор независимых функций, и что $\|\psi_n(x, p, \delta) - \psi_n(x)\|_2 \to 0$ при $p \to \infty$ и $\delta \to 0$. Поэтому

$$\begin{gathered}\lim_{\substack{p\to\infty \\ \delta\to 0}} \max_{1 \leqslant s \leqslant m \leqslant N} \Big\| \sum_{n=s}^{m} a_n \psi_n(x, p, \delta) \Big\|_2 = 1, \\ \lim_{\substack{p\to\infty \\ \delta\to 0}} \big\|S^*_{\Psi_{p,\delta}}(\{a_n\})\big\|_2 = \big\|S^*_\Psi(\{a_n\})\big\|_2.\end{gathered} \tag{58}$$

Из соотношений (58) и леммы 1 непосредственно вытекает неравенство (48) для набора $\{a_n\}_{n=1}^N$. Теорема 9 доказана.

В теории функций, в частности, при построении ортогональных систем с какими-то специальными свойствами часто используется следующее утверждение о последовательностях независимых множеств.

Лемма Бореля–Кантелли. *Если* $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, $E_n \subset (0, 1)$, – *последовательность независимых множеств такая, что*

$$\sum_{n=1}^\infty m(E_n) = \infty, \qquad E_0 = \varlimsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=k}^\infty E_n,$$

то $m(E_0) = 1$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $m\Big(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} E_n\Big) = 1$ при $k = 1, 2, \dots$. Но для любого $q > k$

$$1 - m\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\Big) \leqslant 1 - m\Big(\bigcup_{n=k}^{q} E_n\Big) = m\Big(\bigcap_{n=k}^{q} [(0,1) \setminus E_n]\Big).$$

Так как множества $\{(0,1) \setminus E_n\}_{n=k}^{q}$ также независимы (см. определение 2), то по теореме 4

$$m\Big(\bigcap_{n=k}^{q} [(0,1) \setminus E_n]\Big) = \int_0^1 \prod_{n=k}^{q} \chi_{(0,1)\setminus E_n}(x)\, dx = \prod_{n=k}^{q} \big(1 - m(E_n)\big).$$

Из расходимости ряда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} m(E_n)$ следует, что

$$\lim_{q\to\infty} \prod_{n=k}^{q} \big(1 - m(E_n)\big) = 0,$$

а потому

$$1 - m\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\Big) \leqslant \lim_{q\to\infty} m\Big(\bigcap_{n=k}^{q} [(0,1) \setminus E_n]\Big) = 0.$$

Лемма доказана.

В ряде случаев при исследовании свойств ортогональных рядов требуется следующее усиление леммы Бореля–Кантелли.

Утверждение 1. *Пусть* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \subset (0,1)$, – *такая последовательность измеримых множеств, что*

1) *для любой пары натуральных чисел* (n, j) *с* $n \neq j$

$$m(E_n \cap E_j) = m(E_n) \cdot m(E_j);$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E_n) = \infty$.

Тогда $m\Big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E_n\Big) = 1$.

Доказательство. Как легко видеть, достаточно проверить, что для любого натурального N и любого $\delta > 0$ найдется M такое, что

$$m\left(\bigcup_{n=N}^{M} E_n\right) \geqslant 1 - \delta.$$

Левая часть в последнем неравенстве равна

$$m\{x \in (0,1) : f_{N,M}(x) \neq 0\}, \qquad f_{N,M}(x) = \sum_{n=N}^{M} \chi_{E_n}(x),$$

где, как обычно, χ_E – характеристическая функция множества E. При этом

$$\|f_{N,M}\|_1 = \sum_{n=N}^{M} m(E_n)$$

и, в силу свойства 1),

$$\begin{aligned}\|f_{N,M}\|_2^2 &= \sum_{n=N}^{M} m(E_n) + 2 \sum_{\substack{n,n'=N\\ n\neq n'}}^{M} m(E_n)m(E_{n'})\\ &= \left[\sum_{n=N}^{M} m(E_n)\right]^2 + \sum_{n=N}^{M} m(E_n) - \sum_{n=N}^{M} [m(E_n)]^2.\end{aligned}$$

То есть

$$\|f_{N,M}\|_2 \leqslant \left[\sum_{n=N}^{M} m(E_n)\right] \left(1 + \left(\sum_{n=N}^{M} m(E_n)\right)^{-1}\right)^{1/2}$$

(мы предполагаем, не ограничивая общности, что $m(E_n) > 0$ при $n = 1, 2, \dots$). Применяя к функции

$$f_{N,M}(x)(A_{N,M})^{-1}, \qquad A_{N,M} \equiv \sum_{n=N}^{M} m(E_n),$$

оценку 2) из леммы 1 теоремы 7 и учитывая расходимость ряда $\sum m(E_n)$ (см. 2)), мы видим, что, каковы бы ни были N и $\delta > 0$, при достаточно большом M

$$m\{x \in (0,1) : f_{N,M}(x) \neq 0\} \geqslant \left(1 + \frac{1}{A_{N,M}}\right)^{-1} \geqslant 1 - \delta.$$

Утверждение 1 доказано.

Если предыдущие теоремы, доказанные в этом параграфе, имеют общий характер, то следующий результат посвящен важному для теории ортогональных рядов свойству, которым обладают наборы независимых, нормально распределенных функций (см. § 1, теорему 3 и (27)).

Теорема 10. *Если $\xi = \{\xi_n(x)\}_{n=1}^N$ – набор независимых, нормально распределенных функций с*

$$\int_0^1 \xi_n(x)\,dx = 0, \quad \int_0^1 \xi_n^2(x)\,dx = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$

а $A = \{a_{m,n}\}_{m,n=1}^N$ – ортонормированная матрица, то функции

$$\xi'_m(x) = \sum_{n=1}^N a_{m,n}\xi_n(x), \qquad m = 1, 2, \ldots, N,$$

также образуют набор нормально распределенных, независимых функций с

$$\int_0^1 \xi'_m(x)\,dx = 0, \quad \int_0^1 [\xi'_m(x)]^2\,dx = 1, \qquad m = 1, 2, \ldots, N.$$

Доказательство. При $m = 1, 2, \ldots, N$

$$\int_0^1 \xi'_m(x)\,dx = \sum_{n=1}^N a_{m,n} \int_0^1 \xi_n(x)\,dx = 0,$$

кроме того, так как $\{\xi_n(x)\}$ – О.Н.С., а матрица A ортонормирована, то ясно, что и функции $\xi'_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots, N$, образуют ортонормированный набор, а потому $\int_0^1 [\xi'_m(x)]^2\,dx = 1$, $m = 1, 2, \ldots, N$. Докажем теперь, что для любого набора интервалов на оси I_m, $m = 1, 2, \ldots, N$,

$$m\{x \in (0,1) : \xi'_m(x) \in I_m,\ m = 1, 2, \ldots, N\} = \prod_{m=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_m} e^{-y^2/2}\,dy. \tag{59}$$

Обозначим через $\overline{\xi}(x)$ и $\overline{\xi}'(x)$ векторы

$$\overline{\xi}(x) = \{\xi_1(x), \ldots, \xi_N(x)\}, \qquad \overline{\xi}'(x) = \{\xi'_1(x), \ldots, \xi'_N(x)\},$$

а через π_0 – параллелепипед

$$\pi_0 = \bigl\{y = \{y_m\}_{m=1}^N : y_m \in I_m,\ m = 1, 2, \ldots, N\bigr\} \subset \mathbb{R}^N$$

(мы считаем, что в $\mathbb{R}^N$ зафиксирован некий стандартный базис $\{e_n\}_{n=1}^N$ и координаты всех векторов задаются в этом базисе).

Пусть, далее, $A^{-1}(\pi_0)$ – прообраз параллелепипеда π_0 при вращении в $\mathbb{R}^N$, задаваемом матрицей A, т.е. при вращении, в котором вектор $\{y_n\}_{n=1}^N$ переходит в вектор $\{y'_m\}_{m=1}^N$ с $y'_m = \sum\limits_{n=1}^N a_{m,n} y_n$. Тогда

$$m\{x \in (0,1) : \xi'_m(x) \in I_m,\ m = 1,2,\ldots,N\}$$
$$= m\{x \in (0,1) : \overline{\xi}(x) \in A^{-1}(\pi_0)\}. \qquad (60)$$

Для любого параллелепипеда π с осями, параллельными осям координат, по условию

$$m\{x \in (0,1) : \overline{\xi}(x) \in \pi\} = (2\pi)^{N/2} \int_\pi \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N y_n^2\Big\}\, dy_1 \cdots dy_N,$$

а следовательно, и для любого множества $P \subset \mathbb{R}^N$ вида

$$P = \bigcup_{s=1}^{s'} \overline{\pi}_s, \quad \pi_s \cap \pi_q = \varnothing \ \text{ при } \ s \neq q \qquad (61)$$

(где π_s – открытый параллелепипед с осями, параллельными осям координат, а $\overline{\pi}_s$ – его замыкание), справедливо равенство

$$m\{x \in (0,1) : \overline{\xi}(x) \in P\}$$
$$= (2\pi)^{-N/2} \int_P \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N y_n^2\Big\}\, dy_1 \cdots dy_N. \qquad (62)$$

Но легко видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти два множества P' и P'' вида (61) такие, что

$$\text{а) } P' \subset A^{-1}(\pi_0) \subset P''; \qquad \text{б) } m_N(P'') - m_N(P') \leqslant \varepsilon,$$

где m_N – мера Лебега в $\mathbb{R}^N$. Устремляя ε к нулю и используя равенства (60) и (62), мы найдем, что

$$m\{x \in (0,1) : \xi'_m(x) \in I_m,\ m = 1,2,\ldots,N\}$$
$$= (2\pi)^{-N/2} \int_{A^{-1}(\pi_0)} \exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N y_n^2\Big\}\, dy_1 \cdots dy_N. \qquad (63)$$

Делая замену переменных в интеграле (63): переходя к переменным

$$y'_m = \sum_{n=1}^{N} a_{m,n} y_n, \qquad m = 1, 2, \ldots, N,$$

и пользуясь инвариантностью относительно вращений в $\mathbb{R}^N$ функции $\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} y_n^2\right\}$, мы получим, что правая часть в соотношении (63) равна

$$(2\pi)^{-N/2} \int_{\pi_0} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N} (y'_m)^2\right\} dy'_1 \cdots dy'_N$$
$$= \prod_{m=1}^{N} (2\pi)^{-1/2} \int_{I_m} \exp\left\{-\frac{(y'_m)^2}{2}\right\} dy'_m.$$

Равенство (59), а следовательно, и теорема 10 доказаны.

§3. Сходимость при почти всех выборах знаков и безусловная сходимость

В этом параграфе даются применения результатов §§ 1, 2 к задачам о сходимости функциональных рядов. Материал, содержащийся здесь (см. теоремы 11, 12), очень часто используется в теории ортогональных рядов.

Определение 3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \tag{64}$$

члены которого – элементы линейного метрического пространства X, называется *сходящимся в X при почти всех выборах знаков*, если для п.в. $t \in (0,1)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) x_n \tag{65}$$

сходится в метрике пространства X (здесь $\{r_n(t)\}$ – система Радемахера (см. §1).

Совершенно аналогично определяется сходимость функционального ряда почти всюду при п.в. выборах знаков.

Подход, использующий привлечение случайных рядов (65) для изучения свойств ряда (64), часто оказывается очень полезным. Именно поэтому определение 3 стало уже общепринятым и заслуживает внимательного изучения.

Определение 3 прямо связано с определением безусловной сходимости рядов в пространстве X (см. теорему 1.1), но, как будет видно ниже, изучать сходимость при п.в. выборах знаков гораздо проще, чем безусловную сходимость.

Теорема 11. *Пусть дан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in (0,1). \tag{66}$$

Следующие три условия эквивалентны:

1) *ряд* (66) *сходится п.в. при п.в. выборах знаков;*
2) *ряд* (66) *сходится по мере при п.в. выборах знаков;*
3) *для п.в.* $x \in (0,1)$ *конечна сумма* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$.

Доказательство. Ясно, что из 1) вытекает 2). Докажем, что 2)$\Rightarrow$3), а затем, что 3)$\Rightarrow$1). Тем самым теорема 11 будет доказана.

Пусть, напротив, 2) выполнено, но

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) = \infty \quad \text{при} \quad x \in E, \quad m(E) = \gamma > 0. \tag{67}$$

Тогда можно найти такую последовательность целых чисел $\{N_s\}_{s=1}^{\infty}$, что $1 < N_1 < N_2 < \cdots$ и

$$m(E_s) := m\left\{x \in (0,1) : \sum_{n=N_s+1}^{N_{s+1}} f_n^2(x) > s\right\} > \frac{\gamma}{2}, \qquad s = 1, 2, \ldots . \tag{68}$$

Применяя оценку п. а) теоремы 7 к полиному по системе Радемахера

$$P_s(t,x) = \sum_{n=N_s+1}^{N_{s+1}} r_n(t) f_n(x)$$

(считая $x \in E_s$ фиксированным) и учитывая, что в силу (68) при $x \in E_s$ $\|P_s\|_2 > s^{1/2}$, мы найдем, что

$$m\left\{t \in (0,1) : |P_s(t,x)| > \frac{1}{2}\, s^{1/2}\right\} > c > 0, \qquad x \in E_s.$$

Поэтому плоская мера

$$m_2\Big\{(t,x)\in(0,1)\times(0,1): |P_s(t,x)|>\frac{1}{2}\,s^{1/2}\Big\}>cm(E_s)>\frac{c\gamma}{2}. \tag{69}$$

Из (69) легко следует, что если G_s есть следующее множество:

$$G_s:=\Big\{t\in(0,1): m\Big\{x\in(0,1): |P_s(t,x)|>\frac{1}{2}\,s^{1/2}\Big\}>\frac{c\gamma}{4}\Big\},$$

то $m(G_s)\geqslant c\gamma/4$ при $s=1,2,\dots$, а значит, и $m\Big(\varlimsup_{s\to\infty} G_s\Big)\geqslant c\gamma/4$. Но по самому определению множества $\varlimsup_{s\to\infty} G_s$ для каждого $t\in\varlimsup_{s\to\infty} G_s$ найдется бесконечное число номеров s, для которых $t\in G_s$, т.е.

$$m\Big\{x\in(0,1): |P_s(t,x)|>\frac{1}{2}\,s^{1/2}\Big\}>\frac{c\gamma}{4}.$$

Следовательно, при любом $t\in\varlimsup_{s\to\infty} G_s$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)f_n(x) \tag{70}$$

не сходится по мере, что противоречит условию 2). Тем самым мы показали, что 2)$\Rightarrow$3).

Пусть теперь выполнено условие 3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)<\infty \quad \text{при} \quad x\in E, \quad m(E)=1. \tag{71}$$

Рассмотрим множество F точек (t,x) квадрата $(0,1)\times(0,1)$, в которых не сходится ряд (70). В силу теоремы 9 из (71) следует, что для любого $x\in E$

$$m\big\{t\in(0,1):(t,x)\in F\big\}=0,$$

а потому по теореме Фубини (см. также (71))

$$\int_0^1\int_0^1\chi_F(t,x)\,dx\,dt=\int_0^1\int_0^1\chi_F(t,x)\,dt\,dx=\int_E\int_0^1\chi_F(t,x)\,dt\,dx=0,$$

т.е. $\int_0^1\chi_F(t,x)\,dx=0$ для п.в. $t\in(0,1)$, что означает сходимость ряда (70) п.в. (по x) при п.в. выборах знаков. Импликация 3)$\Rightarrow$1), а вместе с ней и теорема 11 доказаны.

Из теоремы 11 и теоремы 1.1 непосредственно вытекает

Следствие 4. *Если ряд* (66) *безусловно сходится по мере* (*или тем более п.в.*), *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty \quad \textit{для} \quad \textit{п.в.} \quad x \in (0,1).$$

Следующий результат показывает, что в терминах поведения функции $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right)^{1/2}$ можно характеризовать и сходимость в пространстве $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, при п.в. выборах знаков рядов вида (66) с элементами $f_n \in L^p(0,1)$.

Теорема 12. *Для того чтобы ряд* (66) *с элементами* $f_n \in L^p(0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходился в* $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, *при почти всех выборах знаков необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)\right)^{1/2} \in L^p(0,1). \tag{72}$$

Лемма 1. *Пусть дан ряд по системе Радемахера*:

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

и пусть $1 \leqslant p < \infty$. *Справедливы неравенства*:

а) $\|P^*(t)\|_p \leqslant C_p \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}, \quad P^*(t) := \sup\limits_{1 \leqslant r < \infty} \left|\sum\limits_{n=1}^{r} a_n r_n(t)\right|;$

б) $\|P(t)\|_{L^p(E)} \geqslant \|P(t)\|_{L^1(E)} \geqslant \mathrm{c}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}$

для любого множества $E \subset (0,1)$ *с* $m(E) > 1 - \delta$, *где* $c > 0$ *и* $\delta > 0$ – *абсолютные постоянные.*

Доказательство. Ввиду того, что данный ряд сходится п.в. и в $L^p(0,1)$ (см. теоремы 9 и 6), нам достаточно доказать лемму 1 для случая, когда $P(t) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n r_n(t)$ – полином. При этом п. а) доказывается последовательным применением к $P(t)$ оценки (57), а затем неравенства Хинчина (теорема 6). Для доказательства п. б) напомним, что в силу теоремы 7

$$m(Q) := m\left\{t \in (0,1) : |P(t)| > \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right\} > c' > 0.$$

Положив $\delta = \frac{1}{2}c'$, мы для любого множества $E \subset (0,1)$ с $m(E) > 1 - \delta$ будем иметь $m(E \cap Q) \geqslant \frac{1}{2}c'$ и

$$\|P\|_{L^1(E)} \geqslant \int_{E\cap Q} |P(t)|\,dt \geqslant \frac{c'}{2}\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\Big)^{1/2} = c\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\Big)^{1/2}.$$

Лемма 1 доказана.

Замечание. Позднее (см. теорему 9.8) мы покажем, что оценка а) из леммы 1 имеет место не только для систем независимых функций, а и для любой такой О.Н.С., что при некотором $p > 2$ для каждого полинома $P(x)$ по этой системе имеет место неравенство $\|P\|_p \leqslant C\|P\|_2$.

Доказательство теоремы 12. Для доказательства *достаточности* условия (72) предположим противное, т.е. что (72) выполнено, но при $t \in E$, $m(E) = \gamma > 0$[2)] ряд (70) не сходится в $L^p(0,1)$. Это значит, что найдутся последовательности целых чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ и измеримых целозначных функций $\{M_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $N_k \leqslant M_k(t) < N_{k+1}$, $k = 1,2,\ldots$, $t \in (0,1)$, такие, что при $k = 1,2,\ldots$

$$\Big\|\sum_{n=N_k}^{M_k(t)} r_n(t)f_n(x)\Big\|_p \geqslant \rho > 0 \quad \text{при} \quad t \in E_k, \quad m(E_k) > \frac{\gamma}{2}.$$

Из последней оценки, пользуясь теоремой Фубини, находим, что при $k = 1,2,\ldots$

$$\int_0^1\int_0^1\Big|\sum_{n=N_k}^{M_k(t)} r_n(t)f_n(x)\Big|^p dt\,dx \geqslant \frac{\gamma}{2}\rho^p =: c > 0. \qquad (73)$$

Но в силу п. а) леммы 1 для любого $x \in (0,1)$

$$\int_0^1\Big|\sum_{n=N_k}^{M_k(t)} r_n(t)f_n(x)\Big|^p dt \leqslant C_p\Big(\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} f_n^2(x)\Big)^{p/2}. \qquad (74)$$

[2)]Измеримость множества E следует из того, что оно представимо в виде $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, где $A_m = \bigcap\limits_{s=1}^{\infty}\bigcup\limits_{s<p\leqslant q} Q_{p,q,m}$, а множество $Q_{p,q,m} := \Big\{t \in (0,1) : \Big\|\sum\limits_{n=p}^{q} r_n(t)f_n(x)\Big\|_p > m^{-1}\Big\}$ состоит из конечного числа двоичных интервалов.

Из неравенств (73) и (74) следует, что при $k = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=N_k}^{N_{k+1}-1} f_n^2(x) \right)^{p/2} dx > c > 0,$$

но это неравенство противоречит условию (72), так как из (72) вытекает, что

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \left(\sum_{n=N}^{\infty} f_n^2 \right)^{1/2} \right\|_p = 0.$$

Тем самым достаточность условия (72) доказана; докажем его необходимость.

Пусть ряд (70) сходится в $L^p(0,1)$ при почти всех $t \in (0,1)$. Тогда он, очевидно, для п.в. $t \in (0,1)$ сходится по мере, а следовательно, по теореме 11 и почти всюду. Поэтому ряд (70) сходится для п.в. точек (t,x) квадрата $(0,1) \times (0,1)$ и его сумма измерима (как функция двух переменных). Отметим также, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty$ для п.в. x (см. теорему 11).

По предположению, функция

$$\psi(t) = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) r_n(t) \right|^p dx$$

конечна для п.в. $t \in (0,1)$. Поэтому можно найти такое множество E, $E \subset (0,1)$, $m(E) > 1 - \delta$ ($\delta > 0$ – постоянная из п. б) леммы 1), и постоянную K, что $\psi(t) \leqslant K$ при $x \in E$.

Тогда по теореме Фубини

$$\int_0^1 \int_E \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) r_n(t) \right|^p dt\, dx = \int_E \psi(t)\, dt \leqslant K. \tag{74$'$}$$

Оценивая внутренний интеграл в левой части соотношения (74′) с помощью п. б) леммы 1, учитывая конечность для п.в. x суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2(x)$, получаем, что

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) \right)^{p/2} dx \leqslant K.$$

Теорема 12 доказана.

Следствие 5. *Для сходимости ряда* (66) *в* $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, *при п.в. выборах знаков достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^q < \infty, \qquad q = \min(2,p).$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^q \right)^{1/q}, \qquad q = \min(2,p). \tag{75}$$

При $1 \leqslant p \leqslant 2$ для любого $x \in (0,1)$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p \right)^{1/p}$$

(так как $\|y\|_{l^r} \leqslant \|y\|_{l^p}$ при $1 \leqslant p \leqslant r$), следовательно,

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) \right)^{p/2} dx \leqslant \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^p \, dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^p.$$

При $2 < p < \infty$ имеем

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \right)^{1/2} \right\|_p = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \right\|_{p/2}^{1/2} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n^2\|_{p/2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^2 \right)^{1/2}.$$

Неравенство (75), а значит, и следствие 5 доказаны.

Теорема 12 показывает, что сходимость ряда (66) в $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, при п.в. выборах знаков зависит только от поведения величин $|f_n(x)|$ и не зависит от знаков функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$. При $p = \infty$ это уже не так. В самом деле, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(1)}(x), \qquad f_n^{(1)}(x) = a_n = \text{const}, \quad x \in (0,1),$$

сходится в $L^\infty(0,1)$ для п.в. выборов знаков тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ (см. теоремы 8 и 9), в то время как для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(2)}(x), \qquad f_n^{(2)}(x) = a_n r_n(x), \quad x \in (0,1),$$

сходимость в $L^\infty(0,1)$ при п.в. выборах знаков имеет место только при условии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, хотя $|f_n^{(1)}(x)| = |f_n^{(2)}(x)|$ для п.в. $x \in (0,1)$.

Пример последовательности $f_n^{(2)}(x) = a_n r_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ (который легко модифицировать, сделав функции $f_n^{(2)}(x)$ непрерывными), показывает также, что в терминах норм функций нельзя дать нетривиального, т.е. лучшего, чем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_C$, условия, гарантирующего равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n(t)f_n(x)$ для п.в. $t \in (0,1)$. Вместе с тем, используя информацию о знаках функций $f_n(x)$, можно в ряде случаев получить нетривиальные утверждения о равномерной сходимости этого ряда для п.в. $t \in (0,1)$. Например, в § 9.5 мы покажем, что если

$$f_n(x) = \int_0^x \varphi_n(y)dy, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная О.Н.С., то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $[0,1]$ при п.в. выборах знаков $\Big($хотя ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_C$ расходится для широкого класса О.Н.С. $\{\varphi_n\}$, в том числе для тригонометрической системы и для системы Хаара$\Big)$.

Ниже мы несколько раз используем следующее соотношение (фактически уже применявшееся в доказательстве теоремы 12): для любого набора функций $\{f_n\}_{n=1}^{N} \subset L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$c_p \left\| \left(\sum_{n=1}^{N} f_n^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \left\{ \int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^{N} r_n(t) f_n \right\|_p^p dt \right\}^{1/p} \leqslant C_p \left\| \left(\sum_{n=1}^{N} f_n^2 \right)^{1/2} \right\|_p, \tag{76}$$

где C_p и $c_p > 0$ – постоянные, зависящие только от p. (Оценки (76) сразу следуют из теорем 6, 7, п. б), и теоремы Фубини.)

Докажем, пользуясь неравенствами (76), теорему о безусловных базисах, сформулированную в гл. 1 (см. теорему 1.11).

1) Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – безусловный базис в $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, а $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – его сопряженная система. Пользуясь теоремой 1.10 и следствием 1.4, мы найдем, что для любой функции $f \in L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, и любого двоично-иррационального $t \in (0,1)$ при $N > N(f)$ справедливы неравенства

$$b\|f\|_p \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{N} r_n(t) \langle f, \psi_n \rangle \varphi_n \right\|_p \leqslant a\|f\|_p, \tag{77}$$

где постоянные a и $b > 0$ не зависят от f; правое неравенство в (77) имеет место для всех $N = 1, 2, \ldots$, а левое – при таких N, что

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, \psi_n \rangle \varphi_n \right\|_p \leqslant \frac{1}{2} \|f\|_p.$$

Применяя неравенства (76) в случае $f_n(x) = \langle f, \psi_n \rangle \varphi_n(x)$, $1 \leqslant n \leqslant N$, и переходя затем к пределу при $N \to \infty$, мы в силу (77) получим, что

$$m\|f\|_p \leqslant \left\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, \psi_n \rangle \varphi_n)^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \leqslant M\|f\|_p \quad (m > 0). \tag{77'}$$

2) Пусть полная и минимальная в $L^p(0,1)$ система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (с сопряженной $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$) такова, что выполнены соотношения (77'), и пусть задан произвольный набор $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{N}$ с $\varepsilon_n = \pm 1$ при $n = 1, 2, \ldots, N$. Тогда из (77') следует, что для любой функции $f \in L^p(0,1)$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \langle f, \psi_n \rangle \varphi_n \right\|_p &\leqslant m^{-1} \left\| \left\{ \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_n \langle f, \psi_n \rangle \varphi_n)^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \\ &\leqslant m^{-1} \left\| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, \psi_n \rangle \varphi_n)^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \leqslant M m^{-1} \|f\|_p, \end{aligned}$$

а потому (см. теорему 1.10) $\{\varphi_n(x)\}$ – безусловный базис в $L^p(0,1)$.

Теорема 1.11 доказана.

В главе 1 уже говорилось о том, что в пространстве $L^1(0,1)$ нет безусловных базисов. Сейчас, используя неравенства (76), мы докажем этот факт.

Теорема 13. *В пространстве $L^1(0,1)$ не существует безусловного базиса.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что для любой функции $g(x) \in L^1(0,1)$

$$\begin{aligned} &1) \quad \lim_{n \to \infty} \int_0^1 g(x) r_n(x)\, dx = 0; \\ &2) \quad \lim_{n \to \infty} \|g(x) + r_n(x) g(x)\|_1 = \|g(x)\|_1, \end{aligned} \tag{78}$$

где $\{r_n(x)\}$ – система Радемахера.

Равенство 1) в (78) следует из теоремы 1.5. Далее, из определения системы Радемахера (см. (9)) мы имеем

$$\begin{aligned}\|g+r_n g\|_1-\|g\|_1 &= \sum_{i=1}^{2^n}\left[\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}|g(x)|\cdot|1+r_n(x)|\,dx-\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}|g(x)|\,dx\right]\\ &= \sum_{i=1}^{2^n}(-1)^{i-1}\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{\frac{i}{2^n}}|g(x)|\,dx\\ &\leqslant \int_0^{1-\frac{1}{2^n}}\big||g(x)|-|g(x+2^{-n})|\big|\,dx\leqslant\omega_1(2^{-n},|g|),\end{aligned}$$

где $\omega_1(\delta,g)$ – интегральный модуль непрерывности функции $g(x)$, причем $\lim\limits_{\delta\to0}\omega_1(\delta,g)=0$ для каждой $g\in L^1(0,1)$ (см. приложение 1, § 1). Поэтому из полученной оценки вытекает равенство 2) в (78).

Предположим теперь противное: пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – безусловный базис в $L^1(0,1)$ и $\{\psi_n(x)\}\subset L^\infty(0,1)$ – его сопряженная система, т.е. (см. следствие 1.1) для каждой $f\in L^1(0,1)$ ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,\psi_n\rangle\varphi_n(x)$$

сходится безусловно в $L^1(0,1)$.

Построим по индукции последовательность функций $g_s(x)$, $s=0,1,\dots$:

$$g_0(x)=1,\quad g_s(x)=\sum_{j=0}^{s-1}g_j(x)r_{k_s}(x),\qquad x\in(0,1),\quad s=1,2,\dots,$$

где последовательность целых чисел k_s, $s=1,2,\dots$, выбрана так быстро растущей, что

а) $\|g_s-u_s\|_1\leqslant 2^{-s-1}$, где u_s, $s=0,1,\dots$, – "непересекающиеся" полиномы по базису $\{\varphi_n(x)\}$, т.е.

$$u_s(x)=\sum_{n=M_s}^{M_s'}a_n\varphi_n(x),\qquad M_s\leqslant M_s'<M_{s+1},\quad s=0,1,\dots;$$

б) $\dfrac12<\|g_s\|_1=\left\|\sum\limits_{j=0}^{s-1}g_j\right\|_1=\left\|(1+r_{k_{s-1}})\sum\limits_{j=0}^{s-2}g_j\right\|_1<2,\ s=2,3,\dots.$

Возможность выбора нужной последовательности $\{k_s\}$ легко вытекает из соотношений (78); в частности, мы использовали тот факт, что в силу (78), 1) для любой $g \in L^1(0,1)$ и $n = 1, 2, \ldots$ $\lim\limits_{s\to\infty} \langle g \cdot r_s, \psi_n \rangle = 0$, а потому и

$$\lim_{s\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} \langle g \cdot r_s, \psi_n \rangle \varphi_n \right\|_1 = 0$$

для каждого фиксированного N.

Из оценок а) и б) следует, что

$$\left\| \sum_{j=0}^{s} u_j(x) \right\|_1 \leqslant 3, \qquad \|u_j(x)\|_1 \geqslant \frac{1}{4}, \quad s, j = 0, 1, \ldots . \tag{79}$$

Но так как $\{\varphi_n(x)\}$ – безусловный базис, то найдется такая постоянная K, что при п.в. $t \in (0,1)$ и $s = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{s} r_j(t) u_j(x) \right\|_1 &= \left\| \sum_{j=0}^{s} r_j(t) \sum_{n=M_j}^{M_j'} a_n \varphi_n(x) \right\|_1 \\ &\leqslant K \left\| \sum_{j=0}^{s} \sum_{n=M_j}^{M_j'} a_n \varphi_n(x) \right\|_1 \leqslant 3K. \end{aligned} \tag{80}$$

С другой стороны, в силу (76) (см. также (79))

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\| \sum_{j=0}^{s} r_j(t) u_j(x) \right\|_1 dt &\geqslant c \left\| \left\{ \sum_{j=0}^{s} u_j^2(x) \right\}^{1/2} \right\|_1 \\ &\geqslant c\,(s+1)^{-1/2} \sum_{j=0}^{s} \|u_j\|_1 \\ &\geqslant \frac{c}{4}\,(s+1)^{1/2}. \end{aligned} \tag{81}$$

При достаточно больших s оценки (80) и (81) противоречат друг другу. Противоречие, полученное исходя из предположения о том, что $\{\varphi_n\}$ – безусловный базис в $L^1(0,1)$, доказывает теорему 13.

В главе 1 уже упоминался следующий результат о рядах, сходящихся п.в. при любом выборе знаков.

Теорема 14. *Если ряд* (66) *обладает тем свойством, что для любой последовательности* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x) \tag{82}$$

сходится п.в. на $(0,1)$, *то п.в. на* $(0,1)$ *сходится любой ряд вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x), \qquad \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty}. \tag{83}$$

Следствие 6. *Безусловная сходимость п.в. ряда* (66) *влечет безусловную сходимость п.в. ряда* (83).

Доказательство следствия 6. Ясно, что для любой перестановки $\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x)$ безусловно сходится п.в., откуда легко вытекает, что п.в. сходится всякий ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_{\sigma(n)}(x), \qquad \varepsilon_n = \pm 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и остается применить теорему 14, чтобы получить сходимость п.в. ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(n)} f_{\sigma(n)}(x)$.

В доказательстве теоремы 14 нам потребуется

Лемма 1. *Пусть даны функции* $f_n \in L^2(0,1)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, *и числа* λ_n *с* $|\lambda_n| \leqslant 1$ *при* $n = 1, 2, \ldots, N$. *Тогда найдется набор чисел* $\varepsilon_n = \pm 1$, $n = 1, 2, \ldots, N$, *такой, что*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n f_n - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n f_n \right\|_2^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_2^2 . \tag{84}$$

Доказательство. Без ограничения общности мы считаем, что $|\lambda_n| < 1$, $n = 1, 2, \ldots, N$ (в противном случае положим $\varepsilon_n = \lambda_n$ при $|\lambda_n| = 1$ и докажем лемму для остальных функций f_n и чисел λ_n).

Пусть $\{g_n(t)\}_{n=1}^N$, $t \in (0,1)$, – такой набор независимых функций, что при $n = 1, 2, \ldots, N$ функция $g_n(t)$ принимает только два значения: $\lambda_n + 1$ и $\lambda_n - 1$, причем

$$\begin{aligned} m\{t \in (0,1) : g_n(t) = \lambda_n + 1\} &= \frac{1 - \lambda_n}{2}, \\ m\{t \in (0,1) : g_n(t) = \lambda_n - 1\} &= \frac{1 + \lambda_n}{2}. \end{aligned} \tag{85}$$

(Существование набора $\{g_n\}$ показано в теореме 1.) Из (85) вытекает, что

$$\int_0^1 g_n(t)\,dt = 0, \quad \int_0^1 g_n^2(t)\,dt = 1 - \lambda_n^2 \leqslant 1, \qquad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{86}$$

Так как функции $g_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, попарно ортогональны (см. следствие 3), то из (86) мы получим, что

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^N g_n(t) f_n(x)\right]^2 dx\,dt \\ &\quad = \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^N g_n(t) f_n(x)\right]^2 dt\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^N f_n^2(x) \|g_n\|_2^2\,dx \\ &\quad \leqslant \sum_{n=1}^N \|f_n\|_2^2 \left(1 - \lambda_n^2\right) \leqslant \sum_{n=1}^N \|f_n\|_2^2, \end{aligned}$$

а значит, существует точка $t_0 \in (0,1)$, для которой

$$\left\|\sum_{n=1}^N g_n(t_0) f_n(x)\right\|_2^2 \leqslant \sum_{n=1}^N \|f_n\|_2^2. \tag{87}$$

Выбрав набор $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^N$, $\varepsilon_n = \pm 1$, так, чтобы при $n = 1, 2, \ldots, N$ выполнялось равенство $g_n(t_0) = \lambda_n - \varepsilon_n$ (см. (85)), из (87) получим нужную нам оценку (84). Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 14. Допустим противное, т.е. что в условиях теоремы найдется ряд вида (83) с $|\lambda_n| \leqslant 1$ при $n = 1, 2, \ldots$, расходящийся в каждой точке некоторого множества $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$.

В силу теоремы 11 из сходимости п.в. всех рядов вида (82) вытекает, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2(x) < \infty$ для п.в. $x \in (0,1)$, а значит, можно найти такое множество $E_1 \subset (0,1)$ с $m(E_1) > 1 - m(E)$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_1} f_n^2(x)\,dx < \infty.$$

Положим

$$E_2 = E \cap E_1, \qquad g_n(x) = f_n(x)\chi_{E_1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда ясно, что

а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n g_n(x)$ сходится п.в. на $(0,1)$ при любом выборе знаков $\varepsilon_n = \pm 1, n = 1, 2, \ldots;$

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n(x)$ расходится при $x \in E_2, m(E_2) > 0$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_2^2 < \infty$.

Покажем, что условия а), б) и в) не могут выполнятся одновременно. Тем самым мы придем к противоречию.

Из б) следует существование числа $\varepsilon_0 > 0$, множеств A_k с мерой $m(A_k) \geqslant \gamma > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, натуральных чисел $N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$ и измеримых на $(0,1)$ функций $M_k(x)$ с $N_k < M_k(x) \leqslant N_{k+1}$, $x \in (0,1)$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что

$$\left| \sum_{n=N_k+1}^{M_k(x)} \lambda_n g_n(x) \right| > \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad x \in A_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{88}$$

Пусть $\delta_k := \sum\limits_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \|g_n\|_2^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Из в) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \delta_k = 0. \tag{89}$$

Фиксируем число k и для $N_k < n \leqslant N_{k+1}$ и $x \in (0,1)$ положим

$$u_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{если } n \leqslant M_k(x), \\ 0, & \text{если } n > M_k(x). \end{cases} \tag{90}$$

Функции $u_n(x)$ измеримы, принадлежат $L^2(0,1)$, так как измеримы функции $g_n(x)$, $M_k(x)$, $g_n \in L^2(0,1)$ и (см. (88)):

$$\left| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_n u_n(x) \right| > \varepsilon_0 \quad \text{при} \quad x \in A_k. \tag{91}$$

В силу леммы 1 найдется такой набор $\{\varepsilon'_n\}_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}$, $\varepsilon'_n = \pm 1$, что

$$\Big\| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_n u_n - \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \varepsilon'_n u_n \Big\|_2^2 \leqslant \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \|u_n\|_2^2 \leqslant \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \|g_n\|_2^2 = \delta_k.$$

Из последней оценки, применив неравенство Чебышёва и учитывая (89), находим, что при $k > k_0$

$$m(G_k) := m\Big\{x \in (0,1) : \Big| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_n u_n(x) - \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \varepsilon'_n u_n(x) \Big| > \frac{\varepsilon_0}{2} \Big\} \leqslant \frac{4\delta_k}{\varepsilon_0^2} < \frac{1}{2}\gamma.$$

Это значит, что при $k > k_0$ $m(A_k \setminus G_k) > \gamma/2$. Но при $x \in A_k \setminus G_k$ согласно (91)

$$\Big| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \varepsilon'_n u_n(x) \Big| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2},$$

или, что то же самое (см. (90)),

$$\Big| \sum_{n=N_k+1}^{M_k(x)} \varepsilon'_n g_n(x) \Big| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}, \qquad x \in A_k \setminus G_k, \quad k = k_0 + 1, \ldots .$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n g_n(x)$, $\varepsilon'_n = \pm 1$, расходится в каждой точке множества $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} (A_k \setminus G_k)$, а так как $m\Big[\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} (A_k \setminus G_k)\Big] \geqslant \gamma/2 > 0$, то это противоречит условию а). Теорема 14 доказана.

Замечание. Для сходимости по мере также справедлив аналог теоремы 14, точнее, используя лемму 1 и следствие 4, нетрудно показать, что для данной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходимость по мере всех рядов вида (82) влечет за собой сходимость по мере ряда (83). (Для сходимости в любом нормированном пространстве аналог теоремы 14 доказывается совсем просто.)

§ 4. Случайные перестановки

Сфера применений идей, использованных в § 2 этой главы, далеко не ограничивается задачами о системах независимых функций. В этом параграфе по аналогии с теоремой 9 из § 2 рассматривается вопрос о поведении следующей функции на группе $S(N)$ перестановок набора чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$.

Зафиксируем набор чисел $\{a_n\}_{n=1}^N$ и для $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^N \in S(N)$ положим

$$S^*(\sigma) = \max_{1 \leqslant p \leqslant N} |S_p(\sigma)|, \qquad S_p(\sigma) = S_p(\sigma, \{a_n\}) := \sum_{n=1}^{p} a_{\sigma(n)}. \tag{92}$$

Оценки функции $S^*(\sigma)$ и, в частности, оценки мер множеств[3] $\{\sigma \in S(N) : S^*(\sigma) > t\}$, $t > 0$, оказываются полезными в задачах о перестановках ортогональных рядов. В частности, в конце этого параграфа (см. теорему 16) на основе указанных оценок показывается, что члены всякого ортогонального ряда с коэффициентами из l^2 можно так переставить, чтобы полученный ряд стал сходящимся п.в.

Следующая теорема показывает, что при условии $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n = 0$ поведение функции (92) тесно связано с поведением полинома по системе Радемахера:

$$P(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n r_n(x). \tag{93}$$

Теорема 15. *Существуют абсолютные постоянные C и $\gamma > 0$ такие, что при $N = 1, 2, \ldots$ для любого набора чисел $\{a_n\}_{n=1}^N$ с $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n = 0$*

$$\mu\{\sigma \in S(N) : S^*(\sigma) > t\} \leqslant C\, m\{x \in (0,1) : |P(x)| > \gamma t\}, \quad t > 0.$$

Введем предварительно такие обозначения: если $\sigma = \{\sigma(n)\} \in S(N)$, то через $\overline{\sigma}$ будем обозначать перестановку $\overline{\sigma} = \{\overline{\sigma}(n)\}_{n=1}^N$ с $\overline{\sigma}(n) = \sigma(N - n + 1)$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Далее, считая набор чисел $\{a_n\}_{n=1}^N$ фиксированным, положим для $\sigma \in S(N)$, $t < S^*(\sigma)$

$$N_t(\sigma) = \min\{p : |S_p(\sigma, \{a_n\})| > t\}.$$

---

[3]Мы считаем, что на $S(N)$ задана естественная мера $\mu = \mu_N$, при которой мера каждой перестановки $\sigma \in S(N)$ равна $1/N!$.

Лемма 1. *Пусть задан набор чисел* $\{b_n\}_{n=1}^m$, *причем*

$$\left|\sum_{n=1}^m b_n\right| > \left(\sum_{n=1}^m b_n^2\right)^{1/2},$$

и пусть $1 \leqslant p \leqslant m/2$. *Тогда*

$$\mu\left\{\sigma \in S(m) : \left|S_p(\sigma, \{b_m\})\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^m b_n\right|\sqrt{\frac{7}{8}}\right\} \geqslant \frac{1}{7}.$$

Доказательство леммы 1. Нетрудно видеть, что для любых чисел n и k, $1 \leqslant n, k \leqslant m$, $n \neq k$, при $p = 1, 2, \ldots, m$ справедливы равенства

$$\mu\{\sigma \in S(m) : 1 \leqslant \sigma(n) \leqslant p\} = \frac{(m-1)!\,p}{m!} = \frac{p}{m},$$
$$\mu\{\sigma \in S(m) : 1 \leqslant \sigma(n), \sigma(k) \leqslant p\} = \frac{(m-2)!\,(p-1)p}{m!} = \frac{(p-1)p}{(m-1)m},$$

используя которые, мы получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S(m)} S_p^2(\sigma, \{b_m\}) \\
&\quad= \frac{p}{m}\sum_{n=1}^m b_n^2 + \frac{2(p-1)p}{(m-1)m}\sum_{n\neq k} b_n b_k \\
&\quad= \left(\frac{p}{m} - \frac{(p-1)p}{(m-1)m}\right)\sum_{n=1}^m b_n^2 + \frac{(p-1)p}{(m-1)m}\left(\sum_{n=1}^m b_n\right)^2 \\
&\quad\leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^m b_n^2 + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^m b_n\right)^2 \leqslant \frac{3}{4}\left(\sum_{n=1}^m b_n\right)^2.
\end{aligned}$$

Поэтому по неравенству Чебышёва

$$\begin{aligned}
&\mu\left\{\sigma \in S(m) : \left|S_p(\sigma, \{b_n\})\right| > \left|\sum_{n=1}^m b_n\right|\sqrt{\frac{7}{8}}\right\} \\
&\qquad\qquad\leqslant \frac{3}{4}\left(\sum_{n=1}^m b_n\right)^2\left[\sqrt{\frac{7}{8}}\sum_{n=1}^m b_n\right]^{-2} \leqslant \frac{6}{7}.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 15. Сначала мы докажем, что в условиях теоремы 15 справедливо неравенство

$$\mu\{\sigma \in S(N) : S^*(\sigma) > t\} \leqslant 14\,\mu\Big\{\sigma \in S(N) : \big|S_{[N/2]}(\sigma)\big| > \frac{t}{16}\Big\}, \quad (94)$$
$$t > \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2},$$

а затем оценим правую часть в (94). Пусть $t > \left(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}$ фиксировано и

$$G'_t := \big\{\sigma \in S(N) : S^*(\sigma) > t\big\}, \quad G_t := \Big\{\sigma \in G'_t : N_t(\sigma) \leqslant \Big[\frac{N}{2}\Big]\Big\}. \quad (95)$$

Отметим, что

$$\mu(G'_t) \leqslant 2\mu(G_t). \quad (96)$$

В самом деле, ясно, что если перестановка $\sigma \in G'_t$, то и $\overline{\sigma} \in G'_t$, но так как, в силу равенства $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n = 0$, для $\sigma \in G'_t$ имеем $N_t(\sigma) + N_t(\overline{\sigma}) \leqslant N$, то либо σ, либо $\overline{\sigma}$ лежит в G_t, что и доказывает (96).

Представим множество G_t в виде

$$G_t = \bigcup_{q=1}^{[N/2]} G_t(q), \qquad G_t(q) := \big\{\sigma \in S(N) : N_t(\sigma) = q\big\}. \quad (97)$$

Ясно, что множества $G_t(q)$ при разных q не пересекаются, а потому

$$\mu(G_t) = \sum_{q=1}^{[N/2]} \mu\big(G_t(q)\big). \quad (98)$$

Далее, для перестановки $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{N} \in G_t(q)$ обозначим через $\omega = \omega(\sigma)$ набор $\{\sigma(n)\}_{n=1}^{q}$, и пусть

$$G_t(q,\omega) := \big\{\sigma' = \{\sigma'(n)\}_{n=1}^{N} \in G_t(q) : \sigma'(n) = \sigma(n),\ n = 1,2,\dots,q\big\}.$$

Легко видеть, что $G_t(q,\omega)$ содержит все такие перестановки $\sigma' \in S(N)$, что $\sigma'(n) = \sigma(n)$, $1 \leqslant n \leqslant q$, т.е.

$$G_t(q,\omega) := \big\{\sigma' = \{\sigma'(n)\}_{n=1}^{N} \in S(N) : \sigma'(n) = \sigma(n),\ n = 1,2,\dots,q\big\}. \quad (99)$$

Так как множества $G_t(q,\omega)$ не пересекаются, то

$$\mu\big(G_t(q)\big) = \sum_{\omega} \mu\big(G_t(q,\omega)\big), \tag{100}$$

где в (100) суммирование производится по всем различным наборам $\omega = \omega(\sigma) = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{q}$ с $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{N} \in G_t(q)$.

Рассмотрим подробнее множество $G_t(q,\omega)$, $1 \leqslant q < [N/2]$. Пусть $S = \sum\limits_{n=1}^{q} a_{\sigma(n)}$; тогда $\sum\limits_{n=q+1}^{N} a_{\sigma(n)} = -S$, причем по построению множества $G_t(q)$ и выбору числа t (см. (94))

$$|S| > t > \left(\sum_{n=q+1}^{N} a_{\sigma(n)}^2\right)^{1/2}. \tag{101}$$

При этом, если

$$\left|\sum_{n=q+1}^{[N/2]} a_{\sigma(n)}\right| \leqslant |S|\sqrt{\frac{7}{8}},$$

то

$$\left|\sum_{n=1}^{[N/2]} a_{\sigma(n)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{q} a_{\sigma(n)} + \sum_{n=q+1}^{[N/2]} a_{\sigma(n)}\right| \geqslant |S|\left(1-\sqrt{\frac{7}{8}}\right) \geqslant \frac{t}{16}. \tag{102}$$

Но из равенства (99) и леммы 1 (примененной при $m = N-q$, $p = [N/2]-q$, $b_n = a_{\sigma(n+q)}$; см. также (101)) следует, что при $1 \leqslant q \leqslant [N/2]$

$$\mu\big(G_t(q,\omega)\big) \leqslant 7\mu\left\{\sigma' \in G_t(q,\omega) : \left|\sum_{n=q+1}^{[N/2]} a_{\sigma'(n)}\right| \leqslant |S|\sqrt{\frac{7}{8}}\right\},$$

а потому, учитывая (102), мы находим, что при $1 \leqslant q \leqslant [N/2]$ и любом наборе $\omega = \omega(\sigma)$, $\sigma \in G_t(q)$,

$$\mu\big(G_t(q,\omega)\big) \leqslant 7\mu\left[G_t(q,\omega) \cap \left\{\sigma' \in S(N) : \big|S_{[N/2]}(\sigma)\big| > \frac{t}{16}\right\}\right]. \tag{103}$$

Складывая оценки (103) для всех различных $\omega(\sigma)$, $\sigma \in G_t(q)$, $q = 1, 2, \ldots, [N/2]$, и пользуясь соотношениями (96), (98) и (100), мы получаем, что

$$\begin{aligned}\mu(G_t') \leqslant 2\mu(G_t) &\leqslant 14\sum_{q=1}^{[N/2]} \mu\left\{\sigma \in G_t(q) : \big|S_{[N/2]}(\sigma)\big| > \frac{t}{16}\right\} \\ &\leqslant 14\,\mu\left\{\sigma \in S(N) : \big|S_{[N/2]}(\sigma)\big| > \frac{t}{16}\right\}.\end{aligned}$$

Неравенство (94) доказано. Для завершения доказательства теоремы 15 оценим меру $\mu\{\sigma \in S(N) : |S_{[N/2]}(\sigma)| > t/16\}$.

Прежде всего отметим, что при $t \leqslant 16\left(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}$ теорему можно считать доказанной, так как в этом случае (в силу оценки а) из теоремы 7)

$$C\,m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=1}^{N} a_n r_n(x)\right| > \gamma t\right\} > 1,$$

если C достаточно велика, а число $\gamma > 0$ достаточно мало. Кроме того, можно считать, что $N > 16$ так как при малых N нужная оценка легко обеспечивается за счет выбора C и γ.

Для любого $y > \left(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}$ и $N > 16$, пользуясь леммой 1, мы получим, что для каждого p, $\left[\frac{N}{2} - \sqrt{N}\right] \leqslant p \leqslant \left[\frac{N}{2}\right]$,

$$\mu\{\sigma \in S(N) : \left|S_{[N/2]}(\sigma)\right| > y\} \leqslant 7\mu\left\{\sigma \in S(N) : \left|S_p(\sigma)\right| > y\left(1 - \sqrt{\frac{7}{8}}\right)\right\}$$

$\left(\sqrt{N} < \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2}\right.$ при $\left.N > 16\right)$, а потому при $N > 16$

$$\mu\{\sigma \in S(N) : \left|S_{[N/2]}(\sigma)\right| > y\}$$
$$\leqslant 7(N-1)^{-1/2} \sum_{p=\left[\frac{N}{2} - \sqrt{N}\right]}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \mu\left\{\sigma \in S(N) : \left|S_p(\sigma)\right| > y\left(1 - \sqrt{\frac{7}{8}}\right)\right\}. \tag{104}$$

Оценим правую часть в (104), используя свойства системы Радемахера. Легко видеть, что для любого $y > 0$

$$\mu\{\sigma \in S(N) : \left|S_p(\sigma)\right| > y\} = (C_N^p)^{-1} \sum_{\{\sigma(n)\}} 1, \tag{105}$$

где C_N^p – число сочетаний, а суммирование ведется по всем таким наборам $\{\sigma(n)\}_{n=1}^{p}$, $1 \leqslant \sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p) \leqslant N$, что $\left|\sum\limits_{n=1}^{p} a_{\sigma(n)}\right| > y$.

Но из простейших свойств системы Радемахера вытекает, что при

$\sum\limits_{n=1}^{N} a_n = 0$ правая часть в (105) равна

$$\frac{1}{C_N^p}\cdot\operatorname{card}\left\{\{\varepsilon_n\}_{n=1}^N,\ \varepsilon_n=0,1:\sum_{n=1}^N\varepsilon_n=p,\ \left|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n a_n\right|>y\right\}$$
$$=\frac{2^N}{C_N^p}m\left\{x\in(0,1):\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N\bigl(r_n(x)+1\bigr)=p,\ \left|\sum_{n=1}^N a_n r_n(x)\right|>2y\right\}. \quad (106)$$

Учитывая, что при $\left[\frac{N}{2}-\sqrt{N}\right]\leqslant p\leqslant\left[\frac{N}{2}\right]$ имеем $C_N^p > C\frac{2^N}{\sqrt{N}}$[4], из соотношений (104), (105) и (106) мы получаем, что

$$\mu\left\{\sigma\in S(N):\left|S_{[\frac{N}{2}]}(\sigma)\right|>y\right\}$$
$$\leqslant C\sum_{p=[\frac{N}{2}-\sqrt{N}]}^{[\frac{N}{2}]} m\left\{x\in(0,1):\sum_{n=1}^N\bigl(r_n(x)+1\bigr)=2p,\right.$$
$$\left.\left|\sum_{n=1}^N a_n r_n(x)\right|>2y\left(1-\sqrt{\frac{7}{8}}\right)\right\}$$
$$\leqslant Cm\left\{x\in(0,1):\left|\sum_{n=1}^N a_n r_n(x)\right|>\frac{y}{10}\right\},\quad y>\left(\sum_{n=1}^N a_n^2\right)^{1/2}. \quad (107)$$

Оценка (107), примененная при $y=t/16$ (см. также (94)), завершает доказательство теоремы 15.

Применяя для оценки полинома (93) теоремы 5 и 6, непосредственно из теоремы 15 мы получим

Следствие 7. *Для любого набора чисел* $\{a_n\}_{n=1}^N$ с $\sum\limits_{n=1}^N a_n=0$ *справедливы неравенства*:

а) *для любого* $t\geqslant 0$

$$\mu\left\{\sigma\in S(N):S^*(\sigma)>t\left(\sum_{n=1}^N a_n^2\right)^{1/2}\right\}\leqslant C\exp\left(-\gamma t^2\right),\quad \gamma>0;$$

[4] Это нетрудно вывести из формулы Стирлинга.

б) *для любого* p, $1 \leqslant p < \infty$,

$$\left\{\frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S(N)}[S^*(\sigma)]^p\right\}^{1/p} \leqslant C_p\left(\sum_{n=1}^N a_n^2\right)^{1/2}.$$

Справедливо также

Следствие 8. *При* $1 \leqslant p < \infty$ *для любого набора чисел* $\{a_n\}_{n=1}^N$

$$\left\{\frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S(N)}[S^*(\sigma)]^p\right\}^{1/p} \leqslant C_p\left[\left|\sum_{n=1}^N a_n\right| + \left(\sum_{n=1}^N a_n^2\right)^{1/2}\right].$$

В самом деле, положим $a'_n = a_n$ при $n = 1, 2, \ldots, N-1$ и $a'_N = a_N - \sum\limits_{n=1}^N a_N$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^N a'_n = 0$ и в силу п. б) следствия 7

$$\left\{\frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S(N)}[S^*(\sigma,\{a'_n\})]^p\right\}^{1/p} \leqslant C_p\left(\sum_{n=1}^N (a'_n)^2\right)^{1/2} \leqslant C'_p\left[\left|\sum_{n=1}^N a_n\right| + \left(\sum_{n=1}^N a_n^2\right)^{1/2}\right]. \quad (108)$$

Но для любой перестановки σ

$$S^*(\sigma,\{a_n\}) \leqslant S^*(\sigma,\{a'_n\}) + \left|\sum_{n=1}^N a_n\right|,$$

поэтому из (108) вытекает утверждение следствия 8.

Дадим применение полученных результатов к задачам о сходимости ортогональных рядов.

Как будет доказано позднее (см. следствие 3.6 и теорему 10.1), существуют ортогональные ряды вида

$$\sum_{n=1}^\infty a_n\varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty, \quad (109)$$

расходящиеся п.в. на $(0,1)$. В то же время из доказанной в § 3 теоремы 11 непосредственно вытекает, что для п.в. $t \in (0,1)$ ряд

$$\sum_{n=1}^\infty a_n r_n(t)\varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty, \quad (110)$$

сходится для п.в. $x \in (0,1)$. Иными словами, за счет изменения знаков у членов ряда (109) всегда можно добиться сходимости п.в. преобразованного ряда. Недостатком преобразования ряда с помощью изменения знаков у его членов является то обстоятельство, что сумма ряда (109) не имеет ничего общего с суммой (в смысле сходимости в $L^2(0,1)$) ряда (110). Другим возможным преобразованием ряда (109), не меняющим к тому же его сумму (так как ряд (109) сходится в $L^2(0,1)$ безусловно), является перестановка членов ряда.

Следующий результат показывает, что с помощью перестановки членов ряда также можно достичь сходимости п.в.

Теорема 16. *Для любого ортогонального ряда вида* (109) *найдется перестановка натурального ряда* $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) \tag{111}$$

сходится п.в. на $(0,1)$ *и, кроме того,*

$$\int_0^1 \sup_{1\leqslant N<\infty}\left[\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)\right]^2 dx \leqslant C\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}. \tag{112}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^2 = 1$. В силу сходимости ряда (109) в $L^2(0,1)$ можно найти такую последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 = N_1 < N_2 < \cdots$, что

$$\left\|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n\right\|_2 = \left(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n^2\right)^{1/2} \leqslant 2^{-k+1}, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{113}$$

Тогда в силу теоремы Б. Леви ясно, что подпоследовательность частных сумм $S_{N_k}(x)$ ряда (109) сходится п.в. на $(0,1)$ и

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{2\leqslant k<\infty}|S_{N_k}(x)|\right\|_2 &\leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n\right|\right\|_2 \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left\|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n\right\|_2 \leqslant 2.\end{aligned} \tag{114}$$

Перестановку σ мы построим так, чтобы отрезки натурального ряда $N_k < n \leqslant N_{k+1}$, являлись циклами в ней, т.е. $\sigma\big((N_k, N_{k+1}]\big) = (N_k, N_{k+1}]$, $k = 1,2,\ldots$.

Зафиксируем число k и оценим величину

$$I_k = \frac{1}{(N_{k+1}-N_k)!} \sum_{\sigma=\{\sigma(n)\}_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}} \int_0^1 \max_{N_k<p\leqslant N_{k+1}} \left(\sum_{n=N_k+1}^{p} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)\right)^2 dx, \tag{115}$$

где суммирование ведется по множеству $S(N_{k+1}-N_k)$ всех перестановок набора $\{N_k+1,\dots,N_{k+1}\}$. Меняя в (115) порядок интегрирования и суммирования и пользуясь следствием 8 и неравенством (113), мы находим, что

$$I_k \leqslant C\int_0^1 \left\{ \left|\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x)\right| + \left[\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n^2\varphi_n^2(x)\right]^{1/2}\right\}^2 dx \leqslant C2^{-2k},$$
$$k=1,2,\dots. \tag{116}$$

Из оценки (116) вытекает, что для каждого $k=1,2,\dots$ найдется перестановка $\sigma_k = \{\sigma_k(n)\}_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}$ отрезка натурального ряда $(N_k, N_{k+1}]$, для которой

$$\int_0^1 [\delta_k(x)]^2\,dx := \int_0^1 \left[\max_{N_k<p\leqslant N_{k+1}} \sum_{n=N_k+1}^{p} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)\right]^2 dx \leqslant C2^{-2k}. \tag{117}$$

Определим теперь искомую перестановку $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$, положив $\sigma(n) = \sigma_k(n)$ при $n = N_k+1,\dots N_{k+1}$, $k=1,2,\dots$.

Из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 |\delta_k(x)|\,dx$$

(см. (117)) и теоремы Б. Леви следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k(x)=0$ для п.в. $x\in(0,1)$, а значит (так как последовательность $S_{N_k}(x)$ сходится п.в., см. (114)), ряд (111) сходится для п.в. $x\in(0,1)$. Кроме того, из неравенств (113) и (117) находим

$$\int_0^1 \sup_{1\leqslant N<\infty}\left[\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)\right]^2 dx \leqslant \int_0^1\left[\sup_{2\leqslant k<\infty}|S_{N_k}(x)| + \sup_{1\leqslant k<\infty}\delta_k(x)\right]^2 dx$$
$$\leqslant 2\int_0^1 \sup_{2\leqslant k<\infty} S_{N_k}^2(x)\,dx + 2\int_0^1 \sup_{1\leqslant k<\infty}\delta_k^2(x)\,dx$$
$$\leqslant 8 + 2\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k^2(x)\,dx \leqslant C,$$

где C – абсолютная постоянная. Теорема 16 доказана.

Глава 3

Система Хаара

В этой главе изучается одна из классических ортонормированных систем – система Хаара. Систему Хаара можно, видимо, считать простейшей полной ортонормированной системой. Простота и естественность определения объясняют то большое значение, которое имеет эта система в теории функций и приложениях.

§ 1. Определение, вид частных сумм

Прежде чем определить систему Хаара, введем стандартные обозначения двоичных интервалов, которые будут использоваться в дальнейшем на протяжении всего текста. Двоичным интервалом называется интервал вида

$$\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Для $n = 2^k + i, i = 1, 2, \ldots, 2^k, k = 0, 1, \ldots$ обозначим

$$\begin{gathered} \Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right); \qquad \overline{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]; \\ \Delta_1 = \Delta_0^0 = (0,1); \qquad \overline{\Delta}_1 = [0,1]. \end{gathered} \tag{1}$$

Если $\delta \subset (0,1)$ – какой-либо интервал, то через δ^+ и δ^- обозначаются соответственно левая и правая половины интервала δ (без включения средней точки). В частности ($n = 2^k + i$),

$$\begin{gathered} \Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1}, \\ \Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i}. \end{gathered} \tag{2}$$

Интервалы $\{\Delta_k^i\}_{i=1}^{2^k}$ мы будем называть интервалами k-й пачки, $k = 0, 1, \ldots$. Отметим для дальнейшего следующие простые свойства двоичных интервалов:

1) $\Delta_k^i \cap \Delta_k^j = \varnothing$ при $i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, 2^k, k = 1, 2, \ldots$.
2) Если Δ_n и Δ_m – двоичные интервалы и $\Delta_n \cap \Delta_m \neq \varnothing$, то либо $\Delta_n \subset \Delta_m$, либо $\Delta_m \subset \Delta_n$.

Свойство 1) очевидно, а 2) вытекает из того, что при $n = 2^k + i$, $m = 2^l + j$, $k \geqslant l$, в силу равенства

$$\Delta_l^j = \left(\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right) = \left(\frac{2^{k-l}(j-1)}{2^k}, \frac{2^{k-l}j}{2^k}\right),$$

либо $\Delta_m \subset \Delta_n$ (если $2^{k-l}(j-1) < i \leqslant 2^{k-l}j$), либо $\Delta_m \cap \Delta_n \neq \varnothing$ (если $i \leqslant 2^{k-l}(j-1)$ или $i > 2^{k-l}j$).

Определение 1. *Система Хаара* – это система функций

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \qquad x \in [0, 1],$$

в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, а функция $\chi_n(x)$ с $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$, определяется так:

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin \overline{\Delta}_n, \\ 2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_n^-. \end{cases} \tag{3}$$

Значения $\chi_n(x)$ в точках разрыва и в концах отрезка $[0, 1]$ выбираются так, чтобы $\chi_n(x) \in \mathscr{D}_{2^k}$, т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\begin{gathered} \chi_n(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2}[\chi_n(x+\delta) + \chi_n(x-\delta)], \qquad x \in (0, 1), \\ \chi_n(0) = \lim_{\delta \to +0} \chi_n(\delta), \qquad \chi_n(1) = \lim_{\delta \to +0} \chi_n(1-\delta). \end{gathered} \tag{4}$$

Группу функций $\{\chi_n(x)\}_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}$, $k = 0, 1, \ldots$, будем называть k-й пачкой. Часто удобнее вместо обычной, "одинарной" нумерации системы Хаара употреблять нумерацию, прямо указывающую в какой пачке лежит данная функция, точнее, полагают при $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $n = 2^k + i$

$$\chi_k^{(i)}(x) = \chi_n(x), \quad \chi_0^{(0)}(x) = 1, \qquad x \in [0, 1]. \tag{5}$$

Тогда ясно, что система Хаара состоит из объединения пачек $\{\chi_k^{(i)}(x)\}_{i=1}^{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots$, и функции $\chi_0^{(0)}(x)$.

Из свойств 1) и 2) двоичных интервалов непосредственно вытекает, что система Хаара – ортонормированная система. Для того чтобы доказать ее полноту, отметим следующее

Утверждение 1. *Для* $N = 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$, *линейная оболочка* $G_N(\chi)$ *функций* $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^N$ *совпадает с* $\mathscr{D}_N$, *т.е. при* $N = 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$,

$$G_N(\chi) := \left\{ f(x) : f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \chi_n(x) \right\} = \mathscr{D}_N. \qquad (6)$$

Действительно, функции Хаара линейно независимы (так как система Хаара – О.Н.С.), поэтому равенство (6) вытекает из того факта, что $G_N(\chi)$ и $\mathscr{D}_N$ – N-мерные линейные пространства, причем (см. (4)) $G_N(\chi) \subset \mathscr{D}_N$.

Так как множество функций $f \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathscr{D}_{2^k}$ всюду плотно в пространствах $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, из утверждения 1 следует полнота системы Хаара в $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Найдем выражение для частных сумм $S_N(f,x)$ ряда Фурье–Хаара функции $f \in L^1(0,1)$ (см. § 1.3):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \chi_n(x),$$

где $c_n(f) = c_n(f, \chi)$ – коэффициенты Фурье–Хаара функции $f(x)$, причем по определению функций Хаара (см. (3))

$$\begin{aligned} c_1(f) &= \int_0^1 f(x)\,dx, \\ c_n(f) &= 2^{k/2} \left[\int_{\Delta_n^+} f(x)\,dx - \int_{\Delta_n^-} f(x)\,dx \right], \qquad n = 2, 3, \ldots . \end{aligned} \qquad (7)$$

Докажем что при $N = 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$,

$$S_N(f,x) := \sum_{n=1}^N c_n(f) \chi_n(x) = 2^k \int_{\Delta_k^i} f(t)\,dt, \ \ x \in \Delta_k^i, \ i = 1, 2, \ldots, 2^k; \quad (8)$$

$$S_N\Big(f, \frac{i}{2^k}\Big) = 2^{k-1} \left[\int_{\Delta_k^i} f(t)\,dt + \int_{\Delta_k^{i+1}} f(t)\,dt \right], \ i = 1, 2, \ldots, 2^k - 1, \quad (8')$$

$$S_N(f,0) = 2^k \int_{\Delta_k^1} f(t)\,dt, \qquad S_N(f,1) = 2^k \int_{\Delta_k^{2^k}} f(t)\,dt.$$

Определим для $k = 0, 1, \ldots$ функцию $m_k(f) = m_k(f,x) \in \mathscr{D}_{2^k}$, положив

$$m_k(f,x) = 2^k \int_{\Delta_k^i} f(t)\,dt, \qquad x \in \Delta_k^i, \ \ i = 1, 2, \ldots, 2^k \qquad (9)$$

(ясно, что значения функции $m_k(f,x)$ в точках $i/2^k$, $i = 0, 1, \ldots, 2^k$, однозначно определяются равенством (9) и условием $m_k(f) \in \mathscr{D}_{2^k}$).

Учитывая, что функции $\chi_n(x)$ с $1 \leqslant n \leqslant N = 2^k$ и функция $m_k(f,x)$ постоянны на каждом интервале Δ_k^i, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, мы при $n = 1, 2, \ldots, N$ будем иметь

$$\begin{aligned} c_n\bigl(m_k(f)\bigr) &= \sum_{i=1}^{2^k} \int_{\Delta_k^i} m_k(f,x)\chi_n(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{2^k} \chi_n\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) \int_{\Delta_k^i} f(t)\,dt \\ &= \sum_{i=1}^{2^k} \int_{\Delta_k^i} f(t)\chi_n(t)\,dt = c_n(f). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_N(f,x) = S_N\bigl(m_k(f),x\bigr), \qquad N = 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Но $m_k(f) \in \mathscr{D}_N$ и, согласно (6), $m_k(f) \in G_N(\chi)$, поэтому

$$S_N(f,x) = S_N\bigl(m_k(f),x\bigr) = m_k(f,x), \qquad x \in [0,1], \quad N = 2^k, \tag{10}$$

откуда следуют равенства (8) и (8′).

Для частных сумм $S_N(f,x)$ с номерами N вида $N = 2^k + i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k - 1$, $k = 1, 2, \ldots$, учитывая свойство 1) двоичных интервалов, получим следующее выражение:

$$S_N(f,x) = \begin{cases} S_{2^{k+1}}(f,x) & \text{при } x \in \left[0, \dfrac{i}{2^k}\right), \\ S_{2^k}(f,x) & \text{при } x \in \left(\dfrac{i}{2^k}, 1\right], \\ S_{2^k}(f,x) + c_N\chi_N(x) & \text{при } x = \dfrac{i}{2^k}\,. \end{cases} \tag{11}$$

В заключение параграфа отметим, что из (11) и (8) вытекает равенство: при $N = 2, 3, \ldots$

$$S_N(f,x) = \begin{cases} |\Delta_N^+|^{-1} \displaystyle\int_{\Delta_N^+} f(t)\,dt & \text{при } x \in \Delta_N^+, \\ |\Delta_N^-|^{-1} \displaystyle\int_{\Delta_N^-} f(t)\,dt & \text{при } x \in \Delta_N^-. \end{cases} \tag{11′}$$

§ 2. Оценки коэффициентов и теоремы о сходимости рядов Фурье–Хаара

Теорема 1. *Справедливы следующие неравенства*:

$$|c_n(f)| \leqslant (2n)^{-1/2}\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big), \qquad n > 1, \tag{12}$$

если $f \in C(0,1)$;

$$|c_n(f)| \leqslant n^{1/p-1/2}\omega_p\Big(\frac{1}{n}, f\Big), \qquad n > 1, \tag{13}$$

если $f \in L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$. (Здесь $\omega(\delta, f)$ и $\omega_p(\delta, f)$ – модули непрерывности функции $f(x)$ в пространствах C и L^p (см. приложение 1, § 1)).

Доказательство. Пусть $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда для $f \in C(0,1)$, согласно (7) и (1),

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &= 2^{k/2}\bigg|\int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} f(t)\,dt - \int_{(2i-1)/2^{k+1}}^{i/2^k} f(t)\,dt\bigg| \\ &\leqslant 2^{k/2}\int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \big|f(t) - f(t+2^{-k-1})\big|\,dt \\ &\leqslant 2^{k/2}2^{-k-1}\omega(2^{-k-1}, f) \leqslant (2n)^{-1/2}\omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big). \end{aligned}$$

Для $f \in L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, используя неравенство Гёльдера, находим, что

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &\leqslant 2^{k/2}\int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \big|f(t) - f(t+2^{-k-1})\big|\,dt \\ &\leqslant 2^{k/2}\bigg\{\int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \big|f(t) - f(t-2^{-k-1})\big|^p\,dt\bigg\}^{1/p}\cdot 2^{-(k+1)(1-1/p)} \\ &\leqslant 2^{1/p-1}\cdot 2^{k(1/p-1/2)}\omega_p(2^{-k-1}, f) \leqslant n^{1/p-1/2}\omega_p\Big(\frac{1}{n}, f\Big). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. При $1 \leqslant p < 2$ оценка (13) не гарантирует стремления к нулю коэффициентов Фурье–Хаара функции $f \in L^p(0,1)$, и действительно в этом случае $\varlimsup\limits_{n\to\infty} c_n(f)$ может равняться $+\infty$.

Это объясняется тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|\chi_n\|_p = 0$ при $1 \leqslant p < 2$. Например, легко видеть, что функция

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k^{(2)}(x) \in L^p(0,1), \qquad 1 \leqslant p < 2,$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p 2^{-(1/p-1/2)pk} < \infty,$$

так как носители функций $\chi_k^{(2)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, не пересекаются, и потому

$$\|f\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \|\chi_k^{(2)}\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p 2^{-(1/p-1/2)pk}.$$

Теорема 2. *Для произвольной функции $f(x) \in C(0,1)$ ее ряд Фурье–Хаара сходится к $f(x)$ равномерно на $[0,1]$. При этом*

$$\rho_C(f, N) := \|f - S_N(f)\|_C \leqslant 3\omega\Big(\frac{1}{N}, f\Big), \qquad N \geqslant 1. \tag{14}$$

Доказательство. Из (10) и очевидного неравенства

$$\|m_k(f) - f\|_C \leqslant \omega(2^{-k}, f), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

следует, что при $N = 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$,

$$\rho_C(f, N) \leqslant \omega\Big(\frac{1}{N}, f\Big). \tag{15}$$

Если же $N = 2^k + i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$, то согласно соотношениям (11) и (15)

$$\begin{aligned}\rho_C(f, N) &\leqslant \max\{\rho_C(f, 2^{k+1}),\ \rho_C(f, 2^k),\ \rho_C(f, 2^k) + 2^{k/2}|c_N(f)|\}\\ &\leqslant \omega(2^{-k}, f) + 2^{k/2}|c_N(f)|.\end{aligned} \tag{16}$$

Так как $\omega(2^{-k}, f) \leqslant 2\omega(2^{-k-1}, f) \leqslant 2\omega(1/N, f)$, то из неравенств (16) и (12) вытекает утверждение теоремы 2.

Теорема 3. *Система Хаара – базис в пространстве* $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$. *При этом*

$$\rho_p(f,N) := \|f - S_N(f)\|_p \leqslant C_p\omega_p\Big(\frac{1}{N}, f\Big), \qquad N = 1,2,\ldots, \tag{17}$$

где $C_p = 4^{1/p}(1+2^p)^{1/p}$.

Доказательство. Система Хаара полна в $L^p(0,1)$, ее минимальность следует из утверждения 1.4, поэтому (см. теорему 1.6, а также соотношение (7) из приложения 1) нам достаточно доказать неравенство (17).

При $N = 2^k$, $k = 0,1,\ldots$, согласно (10), используя неравенство Гёльдера, мы находим, что

$$\begin{aligned}
\rho_p^p(f,N) &= \int_0^1 |f(x) - m_k(f,x)|^p\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{2^k} 2^{kp} \int_{\Delta_k^i} \left| \int_{\Delta_k^i} [f(x) - f(t)]\,dt \right|^p dx \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{2^k} 2^k \int_{\Delta_k^i}\int_{\Delta_k^i} |f(x) - f(t)|^p\,dt\,dx \\
&= 2^{k+1} \sum_{i=1}^{2^k} \iint_{\{x\in\Delta_k^i,\ t\in\Delta_k^i,\ x<t\}} |f(x) - f(t)|^p\,dt\,dx \\
&\leqslant 2^{k+1} \int_{1-2^{-k}}^1 \int_x^1 |f(x) - f(t)|^p\,dt\,dx \\
&\quad + 2^{k+1} \sum_{i=1}^{2^k-1} \int_{\Delta_k^i} \int_x^{x+2^{-k}} |f(x) - f(t)|^p\,dt\,dx \\
&= 2^{k+1} \int_{1-2^{-k}}^1 \int_0^{1-x} |f(x) - f(x+u)|^p\,du\,dx \\
&\quad + 2^{k+1} \sum_{i=1}^{2^k-1} \int_{\Delta_k^i} \int_0^{2^{-k}} |f(x) - f(x+u)|^p\,du\,dx \\
&= 2^{k+1} \int_0^{2^{-k}} \int_0^{1-u} |f(x) - f(x+u)|^p\,dx\,du \\
&\quad + 2^{k+1} \int_0^{2^{-k}} \int_0^{1-2^{-k}} |f(x) - f(x+u)|^p\,dx\,du \\
&\leqslant 2\omega_p^p(2^{-k}, f) + 2\omega_p^p(2^{-k}, f) = 4\omega_p^p(2^{-k}, f).
\end{aligned} \tag{18}$$

Если теперь $N = 2^k + i$, $i = 1, 2, \dots, 2^k - 1$, $k = 1, 2, \dots$, то в силу (11) и (18) (см. также приложение 1, (7))

$$\begin{aligned}\rho_p^p(f, N) &\leqslant \rho_p^p(f, 2^k) + \rho_p^p(f, 2^{k+1})\\ &\leqslant 4\big[\omega_p^p(2^{-k}, f) + \omega_p^p(2^{-k-1}, f)\big]\\ &\leqslant 4(1 + 2^p)\omega_p^p\Big(\frac{1}{N}, f\Big).\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Ряд Фурье–Хаара каждой функции* $f \in L^1(0,1)$ *сходится к* $f(x)$ *п.в. на* $(0,1)$. *При этом для мажоранты частных сумм ряда*

$$S^*(f, x) := S^*_\chi(f, x) = \sup_{1 \leqslant N < \infty} |S_N(f, x)| \tag{19}$$

справедливы неравенства:

а) $m\big\{x \in (0,1) : S^*(f,x) > y\big\} \leqslant \dfrac{C}{y}\|f\|_1$;

б) $\|f\|_p \leqslant \|S^*(f)\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$, $f \in L^p(0,1)$, $1 < p \leqslant \infty$.

Доказательство. Оценка а) и правое неравенство в п. б) непосредственно следуют из теоремы о максимальной функции (см. приложение 1, теорема 2), так как очевидно, что $|m_k(f,x)| \leqslant M(f,x)$ при $k = 0, 1, \dots$ и $x \in (0,1)$ (см. также (9), (10)).

Далее, из сходимости ряда Фурье–Хаара в метрике $L^1(0,1)$, доказанной в теореме 3, и неравенства а) следует, что при любом $\varepsilon > 0$ и $N = 1, 2, \dots$ мера

$$m\left\{x \in (0,1) : \sup_{M:\, N \leqslant M}\left|\sum_{n=N}^{M} c_n(f)\chi_n(x)\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\left\|\sum_{n=N}^{\infty} c_n(f)\chi_n(x)\right\|_1 \to 0$$

при $N \to \infty$, что и означает сходимость п.в. к $f(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)\chi_n(x)$. Наконец, из сходимости ряда п.в. вытекает соотношение $|f(x)| \leqslant S^*(f,x)$, а значит, и левое неравенство в п. б).

Обладая рядом очень полезных свойств, система Хаара имеет и недостаток – она состоит из разрывных функций. Это приводит к тому, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\chi_n(x)$ с быстро убывающими коэффициентами не может сходиться к непрерывной функции. Следующие два результата дают "количественную характеристику" этого явления.

Теорема 5. *Для коэффициентов Фурье по системе Хаара каждой функции* $f \in C(0,1)$, $f \neq \mathrm{const}$, *справедливо соотношение*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(f)| n^{3/2} > 0.$$

Доказательство. Допустим противное:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(f_0)| n^{3/2} = 0, \quad f_0 \in C(0,1), \quad f_0 \neq \mathrm{const}.$$

Пусть последовательность $n_k = 2^k + i_k$ $(1 \leqslant i_k \leqslant 2^k)$ такова, что

$$|c_{n_k}(f_0)| =: c_{n_k} = \max_{2^k < n \leqslant 2^{k+1}} |c_n(f_0)|.$$

Согласно допущению $2^{k/2} c_{n_k} = 2^{-k}\alpha_k$, где $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Выберем, пользуясь стремлением к нулю чисел α_k, такое число k_0, что $\alpha_k < \alpha_{k_0}$ при $k > k_0$. Тогда

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k/2} c_{n_k} = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\alpha_k < \alpha_{k_0} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} = c_{n_{k_0}} 2^{k_0/2}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\Delta_k^i \cap \Delta_k^j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

получим, что при $x_0 = \dfrac{2i_{k_0} - 1}{2^{k_0+1}}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_{k_0}+1}^{\infty} |c_n(f_0)| \lim_{t\to 0} |\chi_n(x_0+t) - \chi_n(x_0-t)| \\
&\quad \leqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n_k} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \lim_{t\to 0} |\chi_n(x_0+t) - \chi_n(x_0-t)| \\
&\quad = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n_k} 2^{k/2+1} < 2^{k_0/2+1} c_{n_{k_0}}. \qquad (20)
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \sum_{n=1}^{n_{k_0}} |c_n(f_0)|\, |\chi_n(x_0+t) - \chi_n(x_0-t)| \\
&\quad = c_{n_{k_0}} \lim_{t\to 0} |\chi_{n_{k_0}}(x_0+t) - \chi_{n_{k_0}}(x_0-t)| = 2^{k_0/2+1} c_{n_{k_0}}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Из соотношений (20) и (21) следует, что при $N > n_{k_0}$ для частных сумм ряда Фурье–Хаара функции $f_0(x)$ имеет место оценка

$$\lim_{t\to 0} |S_N(f_0, x_0+t) - S_N(f_0, x_0-t)| > \gamma > 0,$$

что противоречит равномерной сходимости сумм $S_N(f_0, x)$ к $f_0(x)$. Теорема 5 доказана.

Пример функции $f(x) \equiv x$, для которой $|c_n(f)| \asymp n^{-3/2}$, показывает точность полученной оценки. Отметим также, что из теоремы 5 вытекает, что соотношение $\lim\limits_{N\to\infty} N\|S_N(f)-f\|_\infty = 0$ невозможно для непрерывной функции $f \neq \mathrm{const}$.

Теорема 6. *Если функция* $f(x)$, $x \in [0,1]$, *абсолютно непрерывна, то*

$$\lim_{k\to\infty} 2^{k/2} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} |c_n(f)| = \frac{1}{4}\int_0^1 |f'(x)|\,dx.$$

Доказательство. В силу абсолютной непрерывности $f(x)$ (см. также (7)) при $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} I_k &:= 2^{k/2} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} |c_n(f)| \\ &= 2^k \sum_{i=1}^{2^k} \left| \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \left[f(x) - f(x+2^{-k-1})\right]\,dx \right| \\ &= 2^k \sum_{i=1}^{2^k} \left| \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \int_0^{2^{-k-1}} f'(x+u)\,du\,dx \right|. \end{aligned} \tag{22}$$

Пусть

$$R_k := I_k - \sum_{i=1}^{2^k} \left| \frac{1}{2} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} f'(x)\,dx \right|,$$

$$L_k := \sum_{i=1}^{2^k} \left| \frac{1}{2} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} f'(x)\,dx \right| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2^k} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} |f'(x)|\,dx.$$

Тогда (см. (22))

$$
\begin{aligned}
|R_k| &\leqslant 2^k \sum_{i=1}^{2^k} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \int_0^{2^{-k-1}} |f'(x+u) - f'(x)|\, du\, dx \\
&\leqslant 2^k \int_0^{2^{-k-1}} \int_0^{1-2^{-k-1}} |f'(x+u) - f'(x)|\, dx\, du \\
&\leqslant \omega_1(2^{-k-1}, f'). \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Кроме того, так как для любой функции $g \in L^1(a,b)$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_a^b |g(x)|\, dx - \left| \int_a^b g(t)\, dt \right| \right| &= \left| \int_a^b \left[|g(x)| - (b-a)^{-1} \left| \int_a^b g(t)\, dt \right| \right] dx \right| \\
&\leqslant \int_a^b \left| g(x) - (b-a)^{-1} \int_a^b g(t)\, dt \right| dx \\
&\leqslant (b-a)^{-1} \int_a^b \int_a^b |g(x) - g(t)|\, dt\, dx,
\end{aligned}
$$

то для L_k мы получаем следующую оценку:

$$
\begin{aligned}
|L_k| &\leqslant 2^k \sum_{i=1}^{2^k} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} |f'(x) - f'(t)|\, dx\, dt \\
&\leqslant 2^{k+1} \int_0^{2^{-k-1}} \int_0^{1-2^{-k-1}} |f'(x+u) - f'(x)|\, dx\, du \\
&\leqslant \omega_1(2^{-k-1}, f'). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Из (23) и (24), учитывая, что $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_1(\delta, f') = 0$ (см. приложение 1, (7)), мы находим, что

$$
\lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2^k} \int_{(i-1)/2^k}^{(2i-1)/2^{k+1}} |f'(x)|\, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 |f'(x)|\, dx \qquad (25)
$$

(правое равенство в (25), справедливое для любой $f' \in L^1(0,1)$, мы уже использовали в доказательстве теоремы 2.13). Теорема 6 доказана.

§ 3. Безусловная сходимость рядов Фурье–Хаара в пространствах $L^p(0,1)$

В соответствии с общими результатами гл. 1 (см. теорему 1.1 и следствие 1.4) изучение безусловной сходимости рядов Фурье–Хаара в $L^p(0,1)$ сводится к изучению свойств оператора $T_\varepsilon(f,x)$, где

$$T_\varepsilon(f,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n(f)\chi_n(x), \qquad x \in (0,1), \tag{26}$$

а $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, – некоторая последовательность "знаков".

Ясно, что так как $\{\chi_n(x)\}$ – О.Н.С., то операторы $T_\varepsilon(f)$ – изометрические операторы из $L^2(0,1)$ в $L^2(0,1)$, т.е.

$$\|T_\varepsilon(f)\|_2 = \|f\|_2, \qquad f \in L^2(0,1). \tag{27}$$

Ниже мы докажем ряд утверждений об операторах T_ε и покажем, в частности, что равенство (26) корректно определяет функцию $T_\varepsilon(f)$ для любой $f \in L^1(0,1)$.

Теорема 7. *Пусть $f \in L^1(0,1)$. Тогда для любой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n = \pm 1$, ряд (26) сходится по мере к некоторой (конечной п.в.) функции $T_\varepsilon(f)$. При этом для любого $y > 0$*

$$m\{x \in (0,1) : |T_\varepsilon(f,x)| > y\} \leqslant \frac{3}{y}\,\|f\|_1. \tag{28}$$

В доказательстве теоремы 7 нам потребуется следующая лемма об операторе $\widetilde{M}(f)$, который каждой $f \in L^1(0,1)$ ставит в соответствие функцию

$$\widetilde{M}(f,x) := \sup_{n:\Delta_n \ni x} |\Delta_n|^{-1} \int_{\Delta_n} |f(t)|\,dt. \tag{29}$$

Легко видеть (см. (8) и (19)), что для двоично-иррациональных $x \in (0,1)$

$$\widetilde{M}(f,x) = S^*(|f|,x). \tag{30}$$

Лемма 1. *Пусть $f \in L^1(0,1)$, $y > \|f\|_1$ и множество $G(y) := \{x \in (0,1) : \widetilde{M}(f,x) > y\}$ непусто. Тогда существуют двоичные интервалы I_s, $s = 1,2,\dots$, такие, что*

а) $G(y) = \bigcup\limits_s I_s$, $I_s \cap I_{s'} = \varnothing$, $s \neq s'$, $s,s' = 1,2,\dots$;

б) $y < |I_s|^{-1} \int_{I_s} |f(t)|\,dt \leqslant 2y$, $s = 1,2,\dots$;

в) $\sum\limits_s |I_s| = m\bigl(G(y)\bigr) \leqslant \dfrac{1}{y}\,\|f\|_1$.

Доказательство леммы 1. Ясно, что (см. (9), (10)) $G(y) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k$, где при $k = 0, 1, \dots$

$$V_k := \left\{ x \in (0,1) : m_k(|f|, x) > y,\ x \neq \frac{i}{2^k},\ i = 0, 1, \dots, 2^k \right\}. \tag{31}$$

Ясно также, что если множество V_k непусто, то оно есть объединение какого-то количества двоичных интервалов ранга k. Поэтому и множество

$$W_k := V_k \setminus \bigcup_{s=0}^{k-1} V_s, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

если оно непусто, также состоит из двоичных интервалов ранга k (попарно непересекающихся в силу свойства 1) двоичных интервалов). Это значит (так как $W_k \cap W_{k'} = \varnothing$, $k \neq k'$, и $V_0 = \varnothing$ в силу условия $y > \|f\|_1$), что

$$G(y) = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k = \bigcup_s I_s, \tag{32}$$

где I_s – непересекающиеся двоичные интервалы (ранга $\geqslant 1$).

Докажем, что для интервалов I_s выполнены оценки б). Пусть $\Delta = I_s \subset W_k$ – некоторый двоичный интервал ранга k ($|\Delta| = 2^{-k}$) из разложения (32) и Δ' – двоичный интервал ранга $k-1$, содержащий Δ, т.е.

$$\Delta \subset \Delta', \qquad |\Delta'| = 2^{-k+1} = 2|\Delta|.$$

Так как $\Delta \subset W_k \subset V_k \setminus V_{k-1}$, то из (31) мы получим, что

$$m_k(|f|, x) > y, \quad m_{k-1}(|f|, x) \leqslant y, \qquad x \in \Delta.$$

Но по определению (см. (9)) при $x \in \Delta \subset \Delta'$

$$m_k(|f|, x) = |\Delta|^{-1} \int_\Delta |f(t)|\, dt,$$
$$m_{k-1}(|f|, x) = |\Delta'|^{-1} \int_{\Delta'} |f(t)|\, dt.$$

Следовательно,

$$y < |\Delta|^{-1} \int_\Delta |f(t)|\, dt \leqslant |\Delta|^{-1} |\Delta'|\, |\Delta'|^{-1} \int_{\Delta'} |f(t)|\, dt \leqslant 2y.$$

Условие в) легко следует из а) и б):

$$m\big(G(y)\big) = \sum_s |I_s| \leqslant \sum_s \frac{1}{y} \int_{I_s} |f(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{y} \|f\|_1.$$

Лемма 1 доказана.

Для доказательства теоремы 7 нам достаточно доказать неравенство (28) в случае, когда $f(x)$ – произвольный полином по системе Хаара. В самом деле, если (28) выполняется для полиномов по системе Хаара, то в силу теоремы 3 для любой функции $f \in L^1(0,1)$ и для любого $\delta > 0$

$$m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=M}^{N+M} \varepsilon_n c_n(f)\chi_n(x)\right| > \delta\right\} \leqslant \frac{3}{\delta} \left\|\sum_{n=M}^{N+M} c_n(f)\chi_n\right\|_1 \to 0$$

при $M \to 0$. Это значит, что частные суммы $P_N(x)$ ряда (26) сходятся по мере к функции $T_\varepsilon(f,x)$, и потому

$$m\big\{x \in (0,1) : |T_\varepsilon(f,x)| > y\big\} \leqslant \varliminf_{N\to\infty} m\big\{x \in (0,1) : |P_N(x)| > y\big\}. \quad (33)$$

Кроме того, так как $P_N(x) = T_\varepsilon\big(S_N(f),x\big)$, где $S_N(f)$, $N = 1,2,\ldots$, – частные суммы ряда Фурье–Хаара функции $f(x)$, то, применяя неравенство (28) к полиному $S_N(f)$, получим

$$\varliminf_{N\to\infty} m\big\{x \in (0,1) : |P_N(x)| > y\big\} \leqslant \varliminf_{N\to\infty} \frac{3}{y} \|S_n(f)\|_1 = \frac{3}{y} \|f\|_1,$$

откуда (см.(33)) вытекает оценка (28) для функции $f(x)$.

Пусть теперь $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n\chi_n(x)$ – произвольный полином по системе Хаара и $y > \|g\|_1$ (при $y \leqslant \|g\|_1$ оценка (28) очевидна). Применяя лемму 1 для $f(x) = g(x)$ и числа y, рассмотрим следующее разложение функции $g(x)$:

$$g(x) = p(x) + h(x), \qquad x \in (0,1), \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} p(x) &= \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in (0,1) \setminus G(y), \\ |I_s|^{-1} \int_{I_s} g(t)\, dt, & \text{если } x \in I_s,\ s = 1,2,\ldots, \end{cases} \\ h(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (0,1) \setminus G(y), \\ g(x) - |I_s|^{-1} \int_{I_s} g(t)\, dt, & \text{если } x \in I_s,\ s = 1,2,\ldots. \end{cases} \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим следующие свойства функций $p(x)$ и $h(x)$:

I) $\|p\|_1 \leqslant \|g\|_1$;

II) $p(x) \leqslant 2y$ для п.в. $x \in (0,1)$;

III) $\int_{I_s} h(x)\,dx = 0$, $s = 1,2,\dots$, $\operatorname{supp} h \subset G(y)$;

IV) $\operatorname{supp} T_\varepsilon(h) \subset G(y)$

(в IV) функция $T_\varepsilon(h)$ определена, так как $h \in L^\infty(0,1)$ и, тем более, $h \in L^2(0,1)$ (см. II) и (27)); напомним также, что $\operatorname{supp} f := \{x \in (0,1) : f(x) \neq 0\}$).

Свойства I) и III) вытекают непосредственно из определения функций $p(x)$ и $h(x)$.

При $x \in G(y)$ оценка II) следует из неравенства б) леммы 1, а при $x \notin G(y)$ – из соотношения (см. (30) и теорему 4)

$$|p(x)| = |g(x)| \leqslant S^*(|g|, x) = \widetilde{M}(g,x) \quad \text{для п.в.} \quad x \notin G(y).$$

Чтобы установить свойство IV), достаточно доказать, что коэффициент Фурье–Хаара

$$c_n(h) = 0, \quad \text{если} \quad \Delta_n \not\subset G(y). \tag{36}$$

В силу п. а) леммы 1 и III)

$$\begin{aligned} c_n(h) = \int_0^1 h(x)\chi_n(x)\,dx &= \int_{G(y)\cap\Delta_n} h(x)\chi_n(x)\,dx \\ &= \sum_s \int_{I_s\cap\Delta_n} h(x)\chi_n(x)\,dx. \end{aligned} \tag{37}$$

При этом, так как $\Delta_n \not\subset G(y)$, по свойству 2) двоичных интервалов либо $\Delta_n \cap I_s = \varnothing$, либо $I_s \subset \Delta_n$, $I_s \neq \Delta_n$. Если $I_s \subset \Delta_n$ и $I_s \neq \Delta_n$, то ясно, что $I_s \subset \Delta_n^+$ или $I_s \subset \Delta_n^-$; в обоих случаях функция $\chi_n(x)$ постоянна на I_s и (см. III))

$$\int_{I_s\cap\Delta_n} h(x)\chi_n(x)\,dx = c\int_{I_s} h(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, все слагаемые в сумме (37) равны нулю. Свойство IV) доказано.

Из I) и II), используя неравенство Чебышёва и (28), получим, что при $y > 0$

$$\begin{aligned} m\{x \in (0,1) : |T_\varepsilon(p,x)| > y\} &\leqslant \frac{1}{y^2}\,\|T_\varepsilon(p)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{y^2}\int_0^1 p^2(x)\,dx \leqslant \frac{2}{y}\int_0^1 |p(x)|\,dx, \end{aligned}$$

откуда согласно IV) (см. также оценку в) леммы 1) следует неравенство

$$m\{x \in (0,1) : |T_\varepsilon(g,x)| > y\} \\ \leqslant m(G(y)) + m\{x \in (0,1) \setminus G(y) : |T_\varepsilon(p,x)| > y\} \leqslant \frac{3}{y}\,\|g\|_1.$$

Теорема 7 доказана.

Из теоремы 7 и теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1. *Ряд Фурье–Хаара всякой функции $f(x) \in L^1(0,1)$ безусловно сходится по мере.*

Следствие 2. *Для каждого p, $1 < p < \infty$, найдется постоянная $C_p > 0$ такая, что*

$$\frac{1}{C_p}\|f\|_p \leqslant \|T_\varepsilon(f)\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$$

для любой $f \in L^p(0,1)$ и любой последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\varepsilon_n = \pm 1$.

Доказательство. Согласно теореме 7 линейный оператор $T_\varepsilon(f)$ определен для всех $f \in L^1(0,1)$, имеет слабый тип $(1,1)$ (см. (28)) и сильный тип $(2,2)$ (см. (27)). Следовательно, по теореме 1 из приложения 1, для $1 < p < 2$ существует такая постоянная $C_p > 0$, что

$$\|T_\varepsilon(f)\|_p \leqslant C_p\|f\|_p, \qquad f \in L^p(0,1). \tag{38}$$

Если теперь $2 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ и $f \in L^p(0,1)$, то, рассматривая сначала частные суммы ряда Фурье–Хаара функции $f - S_N(x)$, мы получим, что при $N = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
\|T_\varepsilon(S_N)\|_p &= \sup_{\|g\|_q \leqslant 1} \int_0^1 T_\varepsilon(S_N,x)g(x)\,dx \\
&= \sup_{\|g\|_q \leqslant 1} \sum_{n=1}^N \varepsilon_n c_n(f)c_n(g) \\
&= \sup_{\|g\|_q \leqslant 1} \int_0^1 S_N(x)T_\varepsilon(g,x)\,dx \\
&\leqslant \sup_{\|g\|_q \leqslant 1} \|S_N\|_p\|T_\varepsilon(g)\|_q \leqslant C_q\|S_N\|_p,
\end{aligned}$$

откуда, переходя к пределу при $N \to \infty$ и учитывая, что $T_\varepsilon(S_N) \to T_\varepsilon(f)$ по мере и $S_N(x) \to f(x)$ в $L^p(0,1)$ (см. теоремы 7 и 3), получим оценку (38) уже при $2 < p < \infty$. С другой стороны, так как $T_\varepsilon^2(f) = f$, то $\|f\|_p = \|T_\varepsilon^2(f)\|_p \leqslant C_p\|T_\varepsilon(f)\|_p$. Следствие 2 доказано.

Пользуясь следствиями 2 и 1.4, мы сразу найдем, что справедлива

Теорема 8. *Система Хаара – безусловный базис в пространстве $L^p(0,1)$ при $1 < p < \infty$.*

В соответствии с результатами §4 гл. 1 (см. теорему 1.11), опираясь на теоремы 7 и 8, мы изучим свойства оператора, ставящего в соответствие функции $f \in L^1(0,1)$ функцию

$$P(f) = P(f,x) := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f)\chi_n^2(x)\right\}^{1/2}, \tag{39}$$

которую мы будем называть функцией Пэли.

Теорема 9. *Для любой функции $f \in L^1(0,1)$ сумма (39) конечна п.в. на $(0,1)$; при этом*

$$1)\quad m\{x \in (0,1) : P(f,x) > y\} \leqslant \frac{C}{y}\|f\|_1, \qquad y > 0;$$

$$2)\quad \frac{1}{C_p}\|f\|_p \leqslant \|P(f)\|_p \leqslant C_p\|f\|_p,$$

если $f \in L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Доказательство. Конечность п.в. суммы (39) непосредственно следует из оценки 1), которую достаточно доказать для полиномов по системе Хаара (так как $P(f,x) = \lim_{N\to\infty} P(S_N,x)$, $x \in (0,1)$, и по теореме 3 $\|S_N\|_1 \leqslant C\|f\|_1$; здесь S_N – частная сумма ряда Фурье–Хаара функции $f(x)$).

Пусть $f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n(f)\chi_n(x)$. Согласно (28) при п.в. $t \in (0,1)$

$$m\{x \in (0,1) : F(x,t) > y\} \leqslant \frac{3}{y}\|f\|_1,$$

$$F(x,t) := \left|\sum_{n=1}^{N} r_n(t)c_n(f)\chi_n(x)\right|,$$

где $y > 0$, а $\{r_n(t)\}$ – система Радемахера. Следовательно,

$$m_2\{(x,t) \in (0,1)\times(0,1) : F(x,t) > y\} \leqslant \frac{3}{y}\|f\|_1, \qquad y > 0. \tag{40}$$

С другой стороны, согласно теореме 2.7, при $x \in (0,1)$

$$m\Big\{t \in (0,1) : F(x,t) > \frac{1}{2}P(f,t)\Big\} \geqslant c_1 > 0.$$

Отсюда и из (40) получаем неравенство

$$m\Big\{x \in (0,1) : \frac{1}{2}P(f,x) > y\Big\}\cdot c_1 \leqslant \frac{3}{y}\|f\|_1, \qquad y > 0,$$

из которого вытекает оценка 1). Оценка 2) есть прямое следствие теорем 8 и 1.11. Теорема 9 доказана.

Замечание. Доказательство оценки 1) в теореме 9 аналогично доказательству теоремы 1.11 (см. §2.3) и использует только то свойство системы Хаара, что для любого оператора T_ε имеет место неравенство слабого типа (28).

Теорема 10. *Существует функция $f_0 \in L^1(0,1)$, для которой*

1) *функция Пэли $P(f_0,x)$ несуммируема;*
2) *ряд Фурье–Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f_0)\chi_n(x) \tag{41}$$

не сходится безусловно в $L^1(0,1)$;

3) *мажоранта частных сумм $S^*(f_0,x)$ ряда (41) несуммируема.*

Доказательство. Для $n = 1,2,\dots$ рассмотрим полином по системе Хаара:

$$Q_n(x) := \chi_0^{(0)}(x) + \sum_{k=0}^{n} 2^{k/2}\chi_k^{(1)}(x).$$

Индукцией по n легко проверить, что

$$Q_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{при } x \in (0,2^{-n-1}),\\ 0 & \text{при } x \in (2^{-n-1},1),\end{cases}$$

и, следовательно,

$$\|Q_n\|_1 = 1, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{42}$$

Вместе с тем

$$\text{а)}\quad \|P(Q_n)\|_1 = \left\| \left\{ 1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k \left[\chi_k^{(1)}(x)\right]^2 \right\}^{1/2} \right\|_1$$
$$\geqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{(\Delta_k^1)^-} \left|2^{k/2}\chi_k^{(1)}(x)\right| dx$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Далее, пусть $Q_n'(x) := \sum\limits_{p=0}^{[n/2]} 2^p \chi_{2p}^{(1)}(x)$; тогда, очевидно,

$$\|Q_n'\|_1 \geqslant \sum_{p=0}^{[n/2]} \|Q_n'\|_{L^1((\Delta_{2p}^1)^-)}.$$

Но $\chi_{2s}^{(1)}(x) = 0$, если $x \in (\Delta_{2p}^1)^-$ и $s > p$, и поэтому

$$|Q_n'(x)| \geqslant \left|2^{2p} - \sum_{k=0}^{p-1} 2^k \chi_{2k}^{(1)}(x)\right| \geqslant 2^{2p} - \sum_{k=0}^{p-1} 2^{2k} \geqslant \frac{1}{2} 2^{2p} \tag{43}$$
$$x \in (\Delta_{2p}^1)^-, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n}{2}\right].$$

Из (43) вытекает, что

$$\text{б)}\qquad \|Q_n'\|_1 \geqslant \sum_{p=1}^{[n/2]} \frac{1}{2} 2^{2p} \cdot 2^{-2p-1} = \frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right], \quad n = 2, 3, \dots ;$$

$$\text{в)}\quad \|S^*(Q_n)\|_1 \geqslant \int_0^1 \frac{1}{2} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left|2^{k/2}\chi_k^{(1)}(x)\right| dx$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \int_{(\Delta_k^1)^-} \left|2^{k/2}\chi_k^{(1)}(x)\right| dx$$
$$\geqslant \frac{1}{4}(n+1), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Положим

$$f_0(x) = \sum_{s=1}^{\infty} 3^{-s} Q_{4^s}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{s:\,4^s \geqslant k} 3^{-s} \Bigr) \chi_k^{(1)}(x).$$

Функция $f_0(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы 10. В самом деле, в силу (42) $\|f_0\|_1 \leqslant \sum\limits_{s=1}^{\infty} 3^{-s} = \frac{1}{2}$. Кроме того, учитывая, что коэффициенты у полиномов Q_n неотрицательны, и пользуясь оценкой а), мы находим

$$\|P(f_0)\|_1 \geqslant \sup_{1 \leqslant s < \infty} 3^{-s} \|P(Q_{4^s})\|_1 \geqslant \frac{1}{2} \sup_{1 \leqslant s < \infty} \Bigl(\frac{4}{3}\Bigr)^s = +\infty.$$

Аналогично, с использованием неравенств б) и в) проверяется, что мажоранта $S^*(f_0) \notin L^1(0,1)$ и что подряд ряда (41):

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_{2p,1}(f_0) \chi_{2p}^{(1)}(x)$$

не сходится в $L^1(0,1)$, а значит (см. теорему 1.1), ряд (41) после некоторой перестановки членов расходится в $L^1(0,1)$.

Теорема 10 доказана.

Выше было показано (см. теоремы 4 и 9), что при $1 < p < \infty$

$$\text{а)}\quad \|P(f)\|_p \asymp \|f\|_p; \qquad \text{б)}\quad \|S^*(f)\|_p \asymp \|f\|_p. \tag{44}$$

При $p = 1$ оба соотношения в (44) теряют силу (см. теорему 10). Однако справедлива

Теорема 11. *Существуют постоянные $C > 0$ и $c > 0$ такие, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$*

$$c\|P(f)\|_1 \leqslant \|S^*(f)\|_1 \leqslant C\|P(f)\|_1.$$

В доказательстве теоремы 11 и некоторых других результатов этой главы важную роль играет следующее свойство системы Хаара.

Лемма 1. *Пусть при $j = 1, 2, \ldots$ A_j – набор интервалов вида*

$$A_j = \bigl\{(0,1), \varnothing, \Delta_n^+, \Delta_n^- : n = 1, 2, \ldots, j\bigr\}, \quad A_0 = \bigl\{(0,1), \varnothing\bigr\}$$

и $\mathscr{F}_j$ – семейство всех множеств, представимых в виде объединения какого-то числа интервалов из A_j, $j = 0, 1, \ldots$. Пусть, далее, $\tau(x)$, $x \in [0,1]$, – функция, принимающая значения $0, 1, \ldots, \infty$ и такая, что

$$e_j := \{x \in (0,1) : \tau(x) = j\} \in \mathscr{F}_j, \qquad j = 0, 1, \ldots. \tag{45}$$

Тогда можно найти такую последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n = 0$ или 1, что

$$\varepsilon_n \chi_n(x) = \begin{cases} \chi_n(x), & \text{если } n \leqslant \tau(x), \\ 0, & \text{если } n > \tau(x), \end{cases} \qquad x \in (0,1) \setminus R_2, \ n = 1, 2, \ldots, \tag{46}$$

где $R_2 = \big\{\{i/2^k\}_{i=0}^{2^k}\big\}_{k=0}^{\infty}$ и, следовательно, для произвольных чисел c_n, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\sum_{n=1}^{\tau(x)} c_n \chi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n \chi_n(x), \qquad x \in (0,1) \setminus R_2 \tag{47}$$

$\Big($*здесь* $\sum\limits_{n=1}^{0} := 0\Big)$.

Доказательство. Отметим прежде всего следующее свойство семейства $\mathscr{F}_j$, $j = 0, 1, \ldots$: если интервал

$$\Delta \in \mathscr{F}_j, \ \ n > j, \ \text{ и } \ \Delta \cap \Delta_n \neq \varnothing, \ \text{ то } \ \Delta_n \subset \Delta. \tag{48}$$

В самом деле, пусть $\Delta = \Delta_s^+$ (или Δ_s^-), $1 \leqslant s \leqslant j$, и $\Delta \cap \Delta_n \neq \varnothing$; тогда если $\Delta_n \not\subset \Delta$, то, согласно свойству 2) двоичных интервалов, $\Delta_s^+ = \Delta \subset \Delta_n$; при этом $\Delta_s^+ \neq \Delta_n$, а значит, и $\Delta_s \subset \Delta_n$, т.е. $s \geqslant n$, что противоречит условиям $s \leqslant j$, $j < n$.

Пусть теперь функция $\tau(x)$ удовлетворяет условию (45). Тогда правая часть в (46) равна

$$\chi_{E_n}(x)\chi_n(x), \qquad E_n := \{x \in (0,1) : \tau(x) \geqslant n\}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{49}$$

где, как обычно, $\chi_{E_n}(x)$ – характеристическая функция множества E_n.

Покажем, что

$$\chi_{E_n}(x) = a_n = \text{const} \quad \text{при} \ \ x \in \Delta_n, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (a_n = 0 \text{ или } 1),$$

и тогда лемма 1 будет доказана, так как в силу (49) равенство (46) будет выполняться с $\varepsilon_n = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть, напротив, найдутся две точки x_1 и x_2 из интервала Δ_n, для которых
$$\tau(x_1) \geqslant n, \qquad \tau(x_2) = j < n.$$
Это значит, что $x_2 \in e_j$, $x_1 \notin e_j$, т.е.
$$e_j \cap \Delta_n \neq \varnothing, \quad e_j \not\supset \Delta_n, \qquad j < n,$$
что противоречит свойству (48) множеств из $\mathscr{F}_j$ (см. также (45)). Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 11. Положим
$$\chi_n^*(x) := |\Delta_n|^{-1}\chi_{\Delta_n}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$
Ясно, что $\chi_n^*(x) = \chi_n^2(x)$ для п.в. $x \in (0,1)$, и поэтому
$$P(f,x) = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f)\chi_n^*(x)\right\}^{1/2}$$
для п.в. x. Пусть, далее, при $N = 1, 2, \ldots$
$$P_N(f,x) = \left\{\sum_{n=1}^{N} c_n^2\chi_n^*(x)\right\}^{1/2} \qquad \bigl(c_n = c_n(f)\bigr),$$
$$S_N^*(f,x) = \sup_{1\leqslant m\leqslant N}\left|\sum_{n=1}^{m} c_n\chi_n(x)\right|.$$
Для фиксированного $t > 0$ рассмотрим функцию
$$\tau(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } P(f,x) \leqslant t, \\ \inf\{N : P_{N+1}(f,x) > t\}, & \text{если } P(f,x) > t. \end{cases} \tag{50}$$
Так как при любом $j = 0, 1, 2, \ldots$ множество
$$e_j := \{x \in (0,1) : \tau(x) = j\}$$
либо пусто, либо совпадает с $\Delta_{j+1} \in \mathscr{F}_j$, то, пользуясь леммой 1, можно определить последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n = 0, 1$, для которой выполнено равенство (46).

Пусть
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\tau(x)} c_n\chi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n\chi_n(x), \qquad x \in (0,1) \setminus R_2.$$
Тогда из (47) и (50) вытекает, что

а) $P(g,x) \leqslant t$ при $x \in (0,1) \setminus R_2$;

б) $S^*(f,x) = S^*(g,x)$, если $P(f,x) \leqslant t$, $x \in (0,1) \setminus R_2$;

в) $P(f,x) = P(g,x)$, если $P(f,x) \leqslant t$, $x \in (0,1) \setminus R_2$.

Из условий а)–в), используя неравенство Чебышёва и эквивалентность: $\|S^*(g)\|_2 \asymp \|P(g)\|_2$, $g \in L^2$ (см. (44)), мы находим, что

$$\begin{aligned}
&m\{x \in (0,1) : S^*(f,x) > t,\ P(f,x) \leqslant t\} \\
&\quad \leqslant m\{x \in (0,1) : S^*(g,x) > t\} \leqslant t^{-2}\|S^*(g)\|_2^2 \leqslant Ct^{-2}\|P(g)\|_2^2 \\
&\quad = Ct^{-2} \int_{\{x:P(f,x)>t\}} P^2(g,x)\,dx + Ct^{-2} \int_{\{x:P(f,x)\leqslant t\}} P^2(g,x)\,dx \\
&\quad \leqslant Cm\{x \in (0,1) : P(f,x) > t\} + Ct^{-2} \int_{\{x:P(f,x)\leqslant t\}} P^2(f,x)\,dx.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\lambda_{S^*(f)}(t) := m\{x \in (0,1) : S^*(f,x) > t\}& \\
\leqslant m\{x \in (0,1) : P(f,x) > t\}& \\
+ m\{x \in (0,1) : S^*(f,x) > t,\ P(f,x) \leqslant t\}& \\
\leqslant (C+1)\lambda_{P(f)}(t) + Ct^{-2} \int_{\{x:P(f,x)\leqslant t\}} P^2(f,x)\,dx&.
\end{aligned}$$

Из последней оценки, пользуясь равенством (см. приложение 1, (2))

$$\begin{gathered}
\int_0^1 |f(x)|^p\,dx = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)\,dt, \\
\lambda_f(t) := m\{x \in (0,1) : |f(x)| > t\},
\end{gathered} \tag{51}$$

получим, что

$$\begin{aligned}
\|S^*(f)\|_1 &= \int_0^\infty \lambda_{S^*(f)}(t)\,dt \\
&\leqslant (C+1)\|P(f)\|_1 + C\int_0^\infty t^{-2} \int_{\{x:P(f,x)\leqslant t\}} P^2(f,x)\,dx\,dt \\
&= (C+1)\|P(f)\|_1 + C\int_0^1 P^2(f,x) \int_{P(f,x)}^\infty t^{-2}\,dt\,dx \\
&= C'\|P(f)\|_1.
\end{aligned}$$

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим для фиксированного $t > 0$ функцию

$$\tau'(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \sup\limits_{N:\,x\in\Delta_N} \|S_N(f)\|_{C(\Delta_N)} \leqslant t, \\ \inf\{N : \|S_{N+1}(f)\|_{C(\Delta_{N+1})} > t,\ x \in \Delta_{N+1}\} \\ \qquad \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{52}$$

Легко видеть, что при любом $j = 0, 1, 2, \dots$ множество $e'_j := \{x \in (0,1) : \tau'(x) = j\}$ либо пусто, либо совпадает с Δ_{j+1}, т.е. всегда $e'_j \in \mathscr{F}_j$. Применим лемму 1 к функции $\tau'(x)$ и положим

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\tau'(x)} c_n \chi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n c_n \chi_n(x), \qquad \varepsilon'_n = 0, 1. \tag{53}$$

Тогда, согласно (46) и (52), мы будем иметь:

а$'$) $S^*(g, x) \leqslant t$ при $x \in (0,1) \setminus R_2$;

б$'$) $S^*(f, x) = S^*(g', x)$ при

$$x \in E := \{x \in (0,1) : \tau'(x) = +\infty\} \setminus R_2; \tag{53$'$}$$

в$'$) $P(f, x) = P(g', x)$ при $x \in E$;

г$'$) $E \subset \{x \in (0,1) : S^*(f, x) \leqslant t\}$.

Покажем также, что

$$m[(0,1) \setminus E] \leqslant 2m\{x \in (0,1) : S^*(f, x) > t\}. \tag{54}$$

Действительно,

$$m[(0,1) \setminus E] \leqslant m\{x \in (0,1) : \tau'(x) < +\infty\} = \sum_{j=0}^{\infty} m(e'_j).$$

При этом, как отмечалось выше, если $e'_j \neq \varnothing$, то $e'_j = \Delta_{j+1}$ и

$$\|S_{j+1}(f)\|_{C(\Delta_{j+1})} > t$$

(см. (52)). Но функция $S_{j+1}(f, x)$ постоянна на половинах Δ^+_{j+1} и Δ^-_{j+1} интервала Δ_{j+1}, поэтому или Δ^+_{j+1} или Δ^-_{j+1} содержится в множестве $\{x \in (0,1) : S^*(f, x) > t\}$. Отсюда, учитывая, что множества e'_j не пересекаются, мы получаем оценку (54).

Из условий а$'$)–г$'$), используя неравенство Чебышёва и (44), находим, что

$$\begin{aligned}
&m\{x \in E : P(f, x) > t\} \\
&\quad = m\{x \in E : P(g', x) > t\} \\
&\quad \leqslant t^{-2}\|P(g')\|_2^2 \leqslant Ct^{-2}\|S^*(g')\|_2^2 \\
&\quad = Ct^{-2}\int_E [S^*(g', x)]^2\, dx + Ct^{-2}\int_{(0,1)\setminus E} [S^*(g', x)]^2\, dx \\
&\quad \leqslant Ct^{-2}\int_{\{x\,:\,S^*(f,x)\leqslant t\}} [S^*(f, x)]^2\, dx + Cm[(0,1) \setminus E].
\end{aligned}$$

Из последней оценки и (54) следует, что

$$\begin{aligned}\lambda_{P(f)}(t) &= \{x \in (0,1) : P(f,x) > t\} \\ &\leqslant m[(0,1) \setminus E] + m\{x \in E : P(f,x) > t\} \\ &\leqslant C'\lambda_{S^*(f)}(t) + Ct^{-2} \int_{\{x\,:\,S^*(f,x)\leqslant t\}} [S^*(f,x)]^2\,dx\end{aligned}$$

и, согласно (51),

$$\begin{aligned}\|P(f)\|_1 &= \int_0^\infty \lambda_{P(f)}(t)\,dt \\ &\leqslant C'\|S^*(f)\|_1 + C\int_0^\infty t^{-2}\int_{\{x\,:\,S^*(f,x)\leqslant t\}} [S^*(f,x)]^2\,dx\,dt \\ &= C'\|S^*(f)\|_1 + C\int_0^1 [S^*(f,x)]^2 \int_{S^*(f,x)}^\infty t^{-2}\,dt\,dx \\ &\leqslant C''\|S^*(f)\|_1.\end{aligned}$$

Теорема 11 доказана.

Следствие 3. *Система Хаара – безусловный базис в пространстве*[1] $L^*(0,1)$ *функций* $f \in L^1(0,1)$, *для которых конечна норма*

$$\|f\|_* := \|S^*(f)\|_1. \tag{55}$$

Действительно, пусть $f \in L^*(0,1)$ и $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ – произвольная последовательность чисел $\varepsilon_n = \pm 1$. Тогда по теореме 11

$$\Big\|\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n c_n(f)\chi_n(x)\Big\|_* \asymp \int_0^1 \Big\{\sum_{n=1}^\infty c_n^2(f)\chi_n^2(x)\Big\}^{1/2} dx \asymp \|f\|_*$$

(здесь постоянные в соотношениях эквивалентности не зависят от ε и f), откуда в силу следствия 1.4 вытекает, что система Хаара – безусловный базис в $L^*(0,1)$.

На основе теоремы 11 доказывается и

Следствие 4. *Для того чтобы ряд Фурье–Хаара функции* $f \in L^1(0,1)$ *безусловно сходился в* $L^1(0,1)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f \in L^*(0,1)$.

---

[1] Нетрудно убедиться, что $L^*(0,1)$ – банахово пространство с нормой (55).

Доказательство. Если $f \in L^*(0,1)$, то ее ряд Фурье–Хаара сходится безусловно в $L^*(0,1)$ (см. следствие 3), а значит, и в $L^1(0,1)$ (так как для любой $g \in L^1(0,1)$ $S^*(g,x) \geqslant |g(x)|$ для п.в. $x \in (0,1)$ (см. теорему 4), и потому $\|g\|_1 \leqslant \|g\|_*$).

Пусть теперь $f \in L^1(0,1)$ и ее ряд Фурье–Хаара сходится безусловно в $L^1(0,1)$. В этом случае, по теореме 1.1, для п.в. $t \in (0,1)$ сходится в $L^1(0,1)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) c_n(f) \chi_n(x),$$

а значит (см. теорему 2.12), $P(f) \in L^1(0,1)$. Но тогда (см. теорему 11) $f \in L^*(0,1)$. Следствие 4 доказано.

Теорема 12. *Пусть T – линейный оператор, действующий из пространства $L^1(0,1)$ в $L^0(0,1)$ и такой, что*

а) *для любой функции $f \in L^*(0,1)$ (см. (55))*

$$m\{x \in (0,1) : |T(f,x)| > t\} \leqslant \frac{M_1}{t} \|f\|_*, \qquad t > 0; \tag{56}$$

б) *для любой функции $f \in L^q(0,1)$ (q – некоторое число, $1 < q < \infty$)*

$$m\{x \in (0,1) : |T(f,x)| > t\} \leqslant M_2 \left(\frac{\|f\|_q}{t} \right)^q, \qquad t > 0. \tag{57}$$

Тогда для каждого p, $1 < p < q$, оператор T – ограниченный оператор из $L^p(0,1)$ в $L^p(0,1)$, т.е.

$$\|T(f)\|_p \leqslant M \|f\|_p, \qquad f \in L^p(0,1).$$

Замечание. Теорема 12 является уточнением теоремы Марцинкевича (см. приложение 1, теорему 1) и показывает, что условие слабого типа $(1,1)$ может быть заменено несколько менее ограничительным условием (56). Теорема 12 потребуется нам только в гл. 6, но ее доказательство прямо связано с теоремой 11 и потому помещено в этом параграфе.

Доказательство теоремы 12. Пусть задано число p, $1 < p < q$, и функция $f \in L^p(0,1)$. Зафиксируем число $t > \|f\|_1$ и рассмотрим функции $\tau'(x)$, $g'(x)$ и множества E, e'_j, $j = 0, 1, \ldots$, определенные в доказательстве теоремы 11 для каждого $t > 0$ (см. (52)–(53)). Было отмечено, что e'_j

либо пусто, либо совпадает с Δ_{j+1}, поэтому (см. (53) и (11)), если $j > 0$ и $x \in e'_j \neq \varnothing$, то

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{j} c_n(f)\chi_n(x) = [m(e'_j)]^{-1} \int_{e'_j} f(y)\,dy. \tag{58}$$

Кроме того, из определения функции $\tau'(x)$ (см. (52)) сразу следует, что при $t > \|f\|_1$ множество e'_0 пусто. Следовательно (см. также (53)),

$$g'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in E, \\ [m(e'_j)]^{-1} \int_{e'_j} f(y)\,dy, & \text{если } x \in e'_j. \end{cases} \tag{59}$$

Из соотношений а$'$), б$'$), г$'$) и оценки (54) вытекает, что

а) $\|g'\|_\infty \leqslant t$;

б) $E \subset (0,1) \setminus G(t)$,

$$G(t) := \bigl\{x \in (0,1) \setminus R_2 : S^*(f,x) > t\bigr\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} e'_j; \tag{60}$$

в) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m(e'_j) \leqslant 2m\bigl(G(t)\bigr)$.

Положим $g''(x) = f(x) - g'(x)$, тогда в силу (59)

$$\operatorname{supp} g'' \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} e'_j, \qquad \int_{e'_j} g''(x)\,dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{61}$$

В силу линейности оператора T

$$\begin{aligned} \lambda(t) &:= m\bigl\{x \in (0,1) : |T(f,x)| > t\bigr\} \\ &\leqslant m\Bigl\{x \in (0,1) : |T(g',x)| > \frac{t}{2}\Bigr\} + m\Bigl\{x \in (0,1) : |T(g'',x)| > \frac{t}{2}\Bigr\} \\ &=: \lambda_1(t) + \lambda_2(t). \end{aligned} \tag{62}$$

Пользуясь оценками (57) и (60), а), в), находим

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &:= m\Bigl\{x \in (0,1) : |T(g',x)| > \frac{t}{2}\Bigr\} \\ &\leqslant \frac{2^q M_2}{t^q} \int_0^1 |g'(x)|^q\,dx \\ &\leqslant 2^q M_2 m[(0,1) \setminus E] + \frac{2^q M_2}{t^q} \int_E |f(x)|^q\,dx \\ &\leqslant 2^q M_2 \biggl[2m\bigl(G(t)\bigr) + t^{-q} \int_{(0,1)\setminus G(t)} |S^*(f,x)|^q\,dx\biggr], \end{aligned}$$

откуда с учетом теоремы 4 и равенства (51) получим, что

$$\begin{aligned}
&\int_{\|f\|_1}^{\infty} t^{p-1}\lambda_1(t)\,dt \\
&\quad\leqslant M'\left\{\int_0^{\infty} t^{p-1} m\big(G(t)\big)\,dt + \int_0^{\infty} t^{-q+p-1}\int_{(0,1)\setminus G(t)} |S^*(f,x)|^q\,dx\,dt\right\} \\
&\quad\leqslant M'\left\{\|S^*(f)\|_p^p + \int_0^1 |S^*(f,x)|^q \int_{S^*(f,x)}^{\infty} t^{-q+p-1}\,dt\,dx\right\} \\
&\quad\leqslant 2M'\|S^*(f)\|_p^p \leqslant M\|f\|_p^p. \qquad (63)
\end{aligned}$$

Далее, в силу оценок (60), а) и (61) $S^*(g'',x) \leqslant S^*(f,x)+t$ для п.в. $x\in(0,1)$ и $\operatorname{supp} S^*(g'') \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} e'_j$,[2] поэтому (см. (56) и (60), б), в))

$$\begin{aligned}
\lambda_2(t) &:= m\left\{x\in(0,1) : |T(g'',x)| > \frac{t}{2}\right\} \leqslant \frac{2M_1}{t}\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} e'_j} S^*(g'',x)\,dx \\
&\leqslant \frac{2M_1}{t}\left\{\int_{G(t)} S^*(f,x)\,dx + \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} e'_j\setminus G(t)} S^*(f,x)\,dx + \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} e'_j} t\,dx\right\} \\
&\leqslant \frac{2M_1}{t}\int_{G(t)} S^*(f,x)\,dx + 6M_1 m\big(G(t)\big).
\end{aligned}$$

Применяя полученную для $\lambda_2(t)$ оценку и снова используя равенство (51) и теорему 4, мы находим, что

$$\begin{aligned}
&\int_{\|f\|_1}^{\infty} t^{p-1}\lambda_2(t)\,dt \\
&\quad\leqslant M'\left\{\int_0^{\infty} t^{p-1} m\big(G(t)\big)\,dt + \int_0^{\infty} t^{p-2}\int_{G(t)} S^*(f,x)\,dx\,dt\right\} \\
&\quad\leqslant M''\left\{\|S^*(f)\|_p^p + \int_0^1 S^*(f,x)\int_0^{S^*(f,x)} t^{p-2}\,dt\,dx\right\} \\
&\quad\leqslant M\|f\|_p^p. \qquad (64)
\end{aligned}$$

[2] Здесь мы использовали, что в силу (61) $c_n(g'') = 0$, если $\Delta_n \not\subset \bigcup\limits_j e'_j$; отметим также, что в доказательстве теоремы 7 использовался по существу этот же факт (см. (36)).

Из неравенств (62), (63) и (64) сразу следует, что

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_p^p &= p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda(t)\,dt \\ &\leqslant p\int_0^{\|f\|_1} t^{p-1}\,dt + p\int_{\|f\|_1}^\infty t^{p-1}\big[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)\big]\,dt \\ &\leqslant M'\big(\|f\|_1^p + \|f\|_p^p\big) \leqslant M'\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Теорема 12 доказана.

§4. Сходимость почти всюду и по мере рядов по системе Хаара

Теорема 13. *Для того чтобы ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^\infty a_n\chi_n(x) \tag{65}$$

сходился п.в. на множестве $E\subset(0,1)$, $m(E)>0$, необходимо и достаточно, чтобы для п.в. $x\in E$ была конечна сумма ряда

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^2\chi_n^2(x). \tag{66}$$

Замечание. Доказательства теорем 11 и 13 весьма схожи, поэтому мы будем для краткости ссылаться на доказательство теоремы 11.

Доказательство достаточности. Пусть сумма (66) конечна для п.в. $x\in E$. Тогда

$$\begin{gathered} F(x) := \sum_{n=1}^\infty a_n^2\chi_n^*(x) < \infty, \quad \text{для п.в. } x\in E, \\ \chi_n^*(x) = |\Delta_n|^{-1}\chi_{\Delta_n}(x), \qquad n=1,2,\dots. \end{gathered} \tag{67}$$

Зафиксируем $\varepsilon\in(0,1)$ и затем возьмем число k таким, что

$$m(G_k)<\varepsilon, \qquad G_k := \big\{x\in E : F(x)>k\big\}. \tag{68}$$

Аналогично равенству (50) определим функцию

$$\tau(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } F(x)\leqslant k, \\ \inf\big\{N : F_{N+1}(x)>k\big\}, & \text{если } F(x)>k, \end{cases} \tag{69}$$

где $F_N(x) := \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^2 \chi_n^*(x)$ – частная сумма ряда (67). Так как при любом $j = 0, 1, \ldots$ множество $\{x \in (0,1) : \tau(x) = j\}$ либо пусто, либо совпадает с $\Delta_{j+1} \in \mathscr{F}_j$, то по лемме 1 из теоремы 11 можно найти последовательность $\varepsilon_n = 0, 1$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой при $n = 1, 2, \ldots$ и $x \in (0,1) \setminus R_2$

$$\varepsilon_n \chi_n(x) = \begin{cases} \chi_n(x), & \text{если } n \leqslant \tau(x), \\ 0, & \text{если } n > \tau(x). \end{cases} \tag{70}$$

Тогда (см. (69), (47))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 a_n^2 \chi_n^2(x) = \sum_{n=1}^{\tau(x)} a_n^2 \chi_n^*(x) \leqslant k; \qquad x \in (0,1) \setminus R_2.$$

Проинтегрировав полученное неравенство, мы находим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 a_n^2 \leqslant k < \infty$, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x) \tag{71}$$

является рядом Фурье–Хаара функции из $L^2(0,1)$ и, следовательно (см. теорему 4), сходится п.в. на $(0,1)$. Но для $x \in E \setminus (G_k \cup R_2)$ ряд (71) совпадает с рядом (65) (см. (47), (69)), а значит, ряд (65) сходится для п.в. x из множества

$$E \setminus G_k, \qquad m(E \setminus G_k) \geqslant m(E) - \varepsilon$$

(см. (68)), откуда в силу произвольной малости ε следует сходимость ряда (65) для п.в. $x \in E$.

Доказательство необходимости. Фиксируем $\varepsilon \in (0,1)$ и найдем такое замкнутое множество G, что

$$G \subset E, \qquad m(E \setminus G) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{72}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x), \tag{73}$$

который получится из ряда (65), если мы отбросим (т.е. положим $c_n = 0$) все члены $a_n \chi_n(x)$, носители которых лежат в одном из дополнительных интервалов множества G. Нетрудно убедиться, что ряд (73) сходится п.в. на $(0,1)$, а следовательно, при достаточно большом M

$$m\Big\{x \in (0,1) : \sup_{1 \leqslant N < \infty} |S_N(x)| > M\Big\} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{74}$$

где $S_N(x)$, $N = 1, 2, \ldots$, – частные суммы ряда (73).

Аналогично равенству (52) определим функцию

$$\tau'(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \sup\limits_{N\,:\,x \in \Delta_N} \|S_N\|_{C(\Delta_N)} \leqslant M, \\ \inf\{N : \|S_{N+1}\|_{C(\Delta_{N+1})} > M,\ x \in \Delta_{N+1}\} \\ \qquad \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{75}$$

В доказательстве теоремы 11 было проверено, что $\{x \in (0,1) : \tau'(x) = j\} \in \mathscr{F}_j$ при $j = 0, 1, \ldots$ и что (см. (54))

$$m\{x \in (0,1) : \tau'(x) < \infty\} \leqslant 2m\Big\{x \in (0,1) : \sup_{1 \leqslant N < \infty} |S_N(x)| > M\Big\}. \tag{76}$$

Пользуясь леммой 1 из теоремы 11, найдем последовательность $\varepsilon_n = 0, 1$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой при $x \in (0,1) \setminus R_2$

$$\varepsilon_n \chi_n(x) = \begin{cases} \chi_n(x), & \text{если } n \leqslant \tau'(x), \\ 0, & \text{если } n > \tau'(x). \end{cases} \tag{77}$$

Тогда ряд

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\tau'(x)} c_n \chi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n \chi_n(x),$$

так же как и ряд (73), сходится п.в. на $(0,1)$; при этом (см. (75))

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n c_n \chi_n(x) \Big\|_\infty \leqslant M, \qquad N = 1, 2, \ldots . \tag{78}$$

Из (78) следует, что $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 c_n^2\Big)^{1/2} \leqslant M$, а потому и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \varepsilon_n^2 c_n^2 \chi_n^2(x)\, dx \leqslant M^2.$$

Из последнего неравенства, пользуясь теоремой Б. Леви, находим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^2 c_n^2 \chi_n^2(x) < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1),$$

а значит (см. (77)),

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \chi_n^2(x) < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in B := \{x \in (0,1) : \tau'(x) = +\infty\}.$$

Но ряды (65) и (73) совпадают в точках множества G, поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in G \cap B. \tag{79}$$

Учитывая, что (см. (74), (76), (72))

$$m\big((0,1) \setminus B\big) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon, \qquad m(G \cap B) \geqslant m(G) - \frac{2}{3}\varepsilon \geqslant m(E) - \varepsilon$$

(причем $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно малым), из (79) мы получаем конечность суммы (66) для п.в. $x \in E$. Теорема 13 доказана.

Следствие 5. *Для произвольного ряда* (65) *по системе Хаара и произвольного множества* $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$, *следующие утверждения эквивалентны*:

а) *ряд* (65) *сходится для п.в.* $x \in E$;

б) *для любых "знаков"* $\varepsilon_n = \pm 1$, $n = 1, 2, \ldots$, *и для п.в.* $x \in E$ *сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x);$$

в) *для п.в.* $x \in E$ *конечна сумма* (66);

г) *ряд* (65) *сходится по мере на* E *при п.в. выборах знаков*;

д) *ряд* (65) *сходится безусловно по мере на* E.

Доказательство. Справедливость импликаций а)⇔б), б)⇔в) вытекает из теоремы 13, а эквивалентность утверждений в) и г) – из теоремы 2.11, наконец, по теореме 1.1, д)⇒г), б)⇒д).

Система Хаара обладает тем свойством, что для каждой измеримой и конечной п.в. функции $f(x)$ найдется ряд вида (65), сходящийся к $f(x)$ почти всюду. Мы получим это утверждение в гл. 11 как следствие одного общего результата.

С другой стороны, следующая теорема показывает, что не существует ряда по системе Хаара, для частных сумм $S_N(x)$ которого выполнено соотношение

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = +\infty, \qquad x \in E, \quad m(E) > 0.$$

Теорема 14. *Если для частных сумм ряда* (65) *выполнено соотношение*

$$\varlimsup_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x) < +\infty, \qquad x \in E, \quad m(E) > 0,$$

то ряд (65) *сходится п.в. на E к конечной п.в. функции.*

Замечание. Теорема 14 потребуется нам в гл. 11 (см. теорему 11.4).

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $a_1 = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $G \subset E$ – такое замкнутое множество, что $m(G) > m(E) - \varepsilon$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}\chi_n(x), \tag{80}$$

который получится из ряда (65), если мы отбросим (т.е. положим $a_n^{(1)} = 0$) те члены $a_n\chi_n(x)$, носители которых содержатся в дополнении к множеству G. Ясно, что

$$a_n^{(1)}\chi_n(x) = a_n\chi_n(x); \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad x \in G. \tag{81}$$

Кроме того, в любой точке $x \in [0,1] \setminus G$ только конечное число членов ряда (80) отлично от нуля. Следовательно,

$$\sup_{1\leqslant N<\infty} S_N^{(1)} := \sup_{1\leqslant N<\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n^{(1)}\chi_n(x) =: M(x) < \infty, \qquad x \in [0,1].$$

Отсюда следует, что для любого $\delta > 0$ можно найти такое число $M = M_\delta > 0$, что

$$m\bigl\{x \in (0,1) : M(x) > M\bigr\} < \delta. \tag{82}$$

Положим при $x \in (0,1)$

$$\tau(x) = \begin{cases} +\infty, \quad \text{если} \sup\limits_{N: x\in\Delta_N} \|S_N^{(1)}\|_{C(\Delta_N)} \leqslant M, \\ \inf\bigl\{N : \|S_{N+1}^{(1)}\|_{C(\Delta_{N+1})} > M,\ x \in \Delta_{N+1}\bigr\} \\ \qquad\qquad \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{83}$$

Легко видеть, что при $j = 1, 2, \ldots$ множество $e_j := \{x \in (0,1) : \tau(x) = j\}$ либо пусто, либо совпадает с $\Delta_{j+1} \in \mathscr{F}_j$. Поэтому, пользуясь леммой 1 из теоремы 11, можно найти числа $\varepsilon_n = 0, 1$, $n = 1, 2, \ldots$, для которых при $x \in (0,1) \setminus R_2$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$\varepsilon_n \chi_n(x) = \begin{cases} \chi_n(x), & \text{если } n \leqslant \tau(x), \\ 0, & \text{если } n > \tau(x). \end{cases}$$

Тогда если положить $a_n^{(2)} = \varepsilon_n a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то при $n = 1, 2, \ldots$

$$a_n^{(2)} \chi_n(x) = a_n^{(1)} \chi_n(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in G_1 := \{x \in (0,1) : \tau(x) = +\infty\}. \tag{84}$$

Оценим меру множества G_1. Если при некотором j множество e_j непусто, то $e_j = \Delta_{j+1}$ и, в силу (83) $\|S_{j+1}^{(1)}\|_{C(\Delta_{j+1})} > M$, но так как функция $S_{j+1}^{(1)}(t)$ постоянна на интервалах Δ_{j+1}^{+} и Δ_{j+1}^{-}, то, значит, один из этих интервалов содержится в множестве $\{x \in (0,1) : M(x) > M\}$ (см. (81)). Поэтому (см. (82)) $m\Big(\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} e_j\Big) \leqslant 2\delta$ и

$$m(G_1) = 1 - m\Big(\bigcup_{j=0}^{\infty} e_j\Big) \geqslant 1 - 2\delta. \tag{85}$$

Из построения функции $\tau(x)$ (см. (83)) ясно, что для п.в. $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leqslant N < \infty} S_N^{(2)}(x) &:= \sup_{1 \leqslant N < \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n^{(2)} \chi_n(x) \\ &= \sup_{1 \leqslant N < \infty} \sum_{n=1}^{\min\{N, \tau(x)\}} a_n^{(1)} \chi_n(x) \leqslant M. \end{aligned} \tag{86}$$

Далее, пусть $B = B_\delta = 2M\delta^{-1}$. Положим

$$\tau'(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \inf\limits_{N : x \in \Delta_N} \Big[\min\limits_{t \in \Delta_N} S_N^{(2)}(t)\Big] \geqslant -B, \\ \inf\Big\{N : \min\limits_{t \in \Delta_{N+1}} S_{N+1}^{(2)}(t) < -B,\ x \in \Delta_{N+1}\Big\} \\ \qquad \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{87}$$

Рассуждая как при построении ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)} \chi_n(x)$, мы найдем числа $\varepsilon'_n = 0, 1$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что если положить $a_n^{(3)} = \varepsilon'_n a_n^{(2)}$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)}\chi_n(x) = \sum_{n=1}^{\tau'(x)} a_n^{(2)}\chi_n(x), \qquad x \in (0,1) \setminus R_2,$$

и, следовательно,

$$a_n^{(3)}\chi_n(x) = a_n^{(2)}\chi_n(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in G_2 := \{x \in (0,1) : \tau'(x) = +\infty\}. \tag{88}$$

При этом (см. (87), (86)) для п.в. $x \in (0,1)$

$$\inf_{1\leqslant N<\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n^{(3)}\chi_n(x) > -B, \qquad \sup_{1\leqslant N<\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n^{(3)}\chi_n(x) \leqslant M. \tag{89}$$

Из (89) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{(3)})^2 \leqslant \max\{M^2, B^2\} < \infty,$$

а значит, по теореме 4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)}\chi_n(x)$ сходится п.в. на $(0,1)$ к некоторой функции $g(x)$ из $L^2(0,1)$. Поэтому (см. (81), (84), (88)) и ряд (65) сходится к $g(x)$ для п.в. $x \in G \cap G_1 \cap G_2$.

Оценим меру множества G_2 и покажем, что

$$m(G_2) \geqslant 1 - \delta. \tag{90}$$

Для этого снова используем уже не раз применявшееся свойство функций вида (87): для любого $j = 0, 1, \ldots$ множество $e'_j = \{x \in (0,1) : \tau'(x) = j\}$ либо пусто, либо совпадает с Δ_{j+1}, и тогда на одном из интервалов Δ_{j+1}^{+} или Δ_{j+1}^{-} имеет место неравенство

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\tau'(x)+1} a_n^{(2)}\chi_n(x) < -B,$$

откуда вытекает, что

$$m\{x \in (0,1) : S(x) < -B\} \geqslant \frac{1}{2} m\{x \in (0,1) : \tau'(x) < +\infty\}. \tag{91}$$

Кроме того (с учетом равенства $a_1^{(3)} = a_1^{(2)} = a_1^{(1)} = 0$), имеем

$$\int_0^1 S(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\tau'(x)} a_n^{(2)}\chi_n(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{e'_{n-1}} a_n^{(2)}\chi_n(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)}\chi_n(x)\,dx = 0 \tag{92}$$

(мы использовали, что $\int_{\Delta_n}\chi_n(x)\,dx = 0$; отметим также, что в силу (86) и (87) $|S(x)| \leqslant M + B$ для п.в. $x \in (0,1)$).

Так как $S(x) \leqslant M$ для п.в. $x \in (0,1)$ (см. (86)), то из (92) получаем:

$$0 = \int_0^1 S(x)\,dx \leqslant M - B\,m\{x \in (0,1) : S(x) < -B\},$$

т.е.

$$m\{x \in (0,1) : S(x) < -B\} \leqslant \frac{M}{B} = \frac{1}{2}\,\delta,$$

откуда в силу (91) вытекает оценка (90).

Применяя неравенства (85) и (90), мы найдем

$$m(G \cap G_1 \cap G_2) \geqslant m(G) - 3\delta \geqslant m(E) - \varepsilon - 3\delta \qquad (G \subset E); \tag{93}$$

при этом было показано, что ряд (65) сходится для п.в. $x \in G \cap G_1 \cap G_2$. Так как числа ε и δ в (93) могут быть взяты сколь угодно малыми, то, значит, ряд (65) сходится для п.в. $x \in E$. Теорема 14 доказана.

§ 5. Абсолютная сходимость почти всюду и безусловная сходимость почти всюду рядов по системе Хаара

Следующий результат показывает, что для рядов по системе Хаара абсолютная сходимость п.в. и безусловная сходимость п.в. эквивалентны.

Теорема 15. *Для безусловной сходимости п.в. на множестве* $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$, *ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x) \tag{94}$$

необходимо и достаточно, чтобы для п.в. $x \in E$ *была конечна сумма*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n\chi_n(x)|.$$

Лемма 1. *Для любого полинома вида*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n \chi_n(x), \qquad 1 < M < N,$$

найдется такая перестановка $\{\sigma(n)\}_{n=M}^{N}$ *чисел* $M, M+1, \ldots, N$, *что для любого* $x \in [0,1]$

$$\max_{M \leqslant p \leqslant q \leqslant N} \left| \sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x) \right| \geqslant \frac{1}{4} \sum_{n=M}^{N} |a_n \chi_n(x)|.$$

Доказательство леммы 1. Пусть t_n, $n = 2, 3, \ldots,$ – середина интервала Δ_n. Тогда при $n = 2, 3, \ldots$

$$\chi_n(x) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant t_n; \qquad \chi_n(x) \leqslant 0, \quad t_n \leqslant x \leqslant 1. \tag{95}$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда все коэффициенты a_n, $n = M, M+1, \ldots, N$, одного знака, например, $a_n \geqslant 0$, $n = M, M+1, \ldots, N$.

Перестановку $\{\sigma(n)\}_{n=M}^{N}$ выберем так, чтобы числа $t_{\sigma(n)}$ шли в порядке возрастания:

$$0 < t_{\sigma(M)} < t_{\sigma(M+1)} < \cdots < t_{\sigma(N)} < 1$$

(отметим, что в силу свойства 2) двоичных интервалов все числа t_n различны).

Тогда (см. (95))

1) если $x \in [0, t_{\sigma(M)})$, то

$$\chi_{\sigma(n)}(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad n = M, M+1, \ldots, N;$$

2) если $x \in [t_{\sigma(M+i)}, t_{\sigma(M+i+1)})$, $0 \leqslant i < N - M$, то

$$\chi_{\sigma(n)}(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad M \leqslant n \leqslant M+i$$

и

$$\chi_{\sigma(n)}(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad M+i < n \leqslant N;$$

3) если $x \in [t_{\sigma(N)}, 1]$, то

$$\chi_{\sigma(n)}(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad n = M, M+1, \ldots, N.$$

Из соотношений 1)–3), учитывая неотрицательность чисел a_n, находим, что

$$\sup_{M\leqslant p\leqslant q\leqslant N}\left|\sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)}\chi_{\sigma(n)}(x)\right| \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=M}^{N}|a_n\chi_n(x)|, \quad x\in[0,1]. \qquad (96)$$

Если теперь знаки коэффициентов a_n произвольны и S – число неотрицательных коэффициентов ($1\leqslant S\leqslant N-M$), то перестановка $\{\sigma(n)\}_{n=M}^{N}$ строится так, чтобы

а) $a_{\sigma(n)}\geqslant 0$ при $M\leqslant n<M+S$, $a_{\sigma(n)}<0$ при $M+S\leqslant n\leqslant N$;

б) в каждой из групп $\{\sigma(n)\}_{n=M}^{M+S-1}$ и $\{\sigma(n)\}_{n=M+S}^{N}$ числа $\sigma(n)$ упорядочены согласно возрастанию точек t_n, т.е. $t_{\sigma(n)}<t_{\sigma(m)}$ при $M\leqslant n<m<M+S$ и при $M+S\leqslant n<m\leqslant N$.

Тогда в силу (96) при $x\in[0,1]$

$$\begin{aligned}&\max_{M\leqslant p\leqslant q\leqslant N}\left|\sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)}\chi_{\sigma(n)}(x)\right|\\ &\geqslant \max\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=M}^{M+S-1}|a_{\sigma(n)}\chi_{\sigma(n)}(x)|,\ \frac{1}{2}\sum_{n=M+S}^{N}|a_{\sigma(n)}\chi_{\sigma(n)}(x)|\right\}\\ &\geqslant \frac{1}{4}\sum_{n=M}^{N}|a_n\chi_n(x)|.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 15. В доказательстве нуждается только *необходимость*. Допустим противное: ряд (94) сходится безусловно п.в. на E, но

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\chi_n(x)| = +\infty \quad \text{при} \quad x\in F\subset E, \quad m(F)>0.$$

Тогда можно найти множества $A_k\subset F$, $m(A_k)>m(F)-1/k$, $k=1,2,\ldots$, и возрастающую последовательность целых чисел N_k, $k=1,2,\ldots$ ($N_1=0$), такие, что

$$\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}|a_n\chi_n(x)|>1, \qquad x\in A_k, \quad k=1,2,\ldots.$$

Применив затем лемму 1 к полиному $\sum\limits_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\chi_n(x)$, найдем такую перестановку $\{\sigma(n)\}_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}$ чисел $N_k+1, N_k+2, \ldots, N_{k+1}$, что

$$\max_{N_k<p\leqslant q\leqslant N_{k+1}} \left|\sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)}\chi_{\sigma(n)}(x)\right| \geqslant \frac{1}{4}, \qquad x \in A_k, \quad k=1,2,\ldots .$$

Но тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}\chi_{\sigma(n)}(x)$ расходится на множестве $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$, т.е. для п.в. $x \in F$, что противоречит безусловной сходимости п.в. на E ряда (94). Теорема 15 доказана.

Теорема 15 существенно упрощает изучение безусловной сходимости п.в. рядов по системе Хаара.

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{k\,2^{k/2}}\,\chi_k^{(i)}(x) \tag{97}$$

с коэффициентами из l^2 не сходится абсолютно ни в одной двоично-иррациональной точке x, то из теоремы 15 вытекает

Следствие 6. *Система Хаара не является системой безусловной сходимости* (*см. определение* 1.5).

Пример ряда (97) позволяет (с учетом теоремы 15 и следствия 5) получить следующее важное для нас утверждение общего характера.

Следствие 7. *Существует функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in (0,1),$$

который не является безусловно сходящимся п.в., хотя все ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x), \qquad \varepsilon_n = \pm 1, \quad n=1,2,\ldots,$$

сходятся п.в. на $(0,1)$.

Следствие 6 допускает следующие уточнения (см. теоремы 16, 17).

Теорема 16. *Существует функция $f \in L^\infty(0,1)$, ряд Фурье–Хаара которой расходится п.в. на $(0,1)$ после некоторой перестановки членов.*

Замечание. В главе 10, опираясь на теорему 16, мы докажем, что для любой П.О.Н.С. найдется непрерывная функция, для которой ряд Фурье по этой системе после некоторой перестановки членов расходится п.в.

Доказательство теоремы 16. Положим для $m = 2, 3, \dots$

$$P_m(x) := m^{-4} \sum_{k=m^8+1}^{m^8+m^7} \sum_{i=1}^{2^k} 2^{-k/2} \chi_k^{(i)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(P_m)\chi_n(x). \tag{98}$$

Для фиксированного m, рассуждая как при доказательстве теоремы 11, мы можем найти числа $\varepsilon_n = 0, 1$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что (см. (53), (52))

$$Q_m(x) := \sum_{n=1}^{\tau_m(x)} c_n(P_m)\chi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n(P_m)\chi_n(x), \tag{99}$$

где

$$\tau_m(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \sup\limits_{N\,:\,x\in\Delta_N} \|S_N(P_m)\|_{C(\Delta_N)} \leqslant 1, \\ \inf\bigl\{N : \|S_{N+1}(P_m)\|_{C(\Delta_{N+1})} > 1,\ x \in \Delta_{N+1}\bigr\} \\ \qquad \text{в противном случае}; \end{cases}$$

при этом (см. (54))

$$m\bigl\{x \in (0,1) : \tau_m(x) < \infty\bigr\} \leqslant 2\,m\bigl\{x \in (0,1) : S^*(P_m, x) > 1\bigr\}. \tag{100}$$

Ясно, что $Q_m(x)$, $m = 2, 3, \dots$, – полиномы по системе Хаара, не имеющие подобных членов (см. (98), (99)). Отметим их некоторые свойства.

По построению функции $\tau_m(x)$

$$\text{а)}\ \|Q_m\|_\infty \leqslant 1; \qquad \text{б)}\ \|Q_m\|_2 \leqslant \|P_m\|_2 \leqslant m^{-1/2}. \tag{101}$$

Если $x \in E_m := \bigl\{x \in (0,1) : \tau(x) = \infty\bigr\}$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(Q_m)\chi_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(P_m)\chi_n(x)| = m^3, \qquad m = 2, 3, \dots. \tag{102}$$

Наконец, из соотношений (100), (44) и неравенства Чебышёва вытекает, что

$$\begin{aligned} m[(0,1) \setminus E_m] &\leqslant 2\,m\bigl\{x \in (0,1) : S^*(P_m, x) > 1\bigr\} \\ &\leqslant 2\|S^*(P_m)\|_2^2 \leqslant C\|P_m\|_2^2 \leqslant Cm^{-1},\ m = 2, 3, \dots. \end{aligned} \tag{103}$$

Докажем, что функция

$$f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} m^{-2} Q_m(x)$$

удовлетворяет требованиям теоремы 16. Действительно, в силу (101), а) $\|f\|_\infty \leqslant \sum\limits_{m=2}^{\infty} m^{-2}$, а в силу (102) (так как полиномы Q_m не имеют подобных членов)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)\chi_n(x)| \geqslant m^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(Q_m)\chi_n(x)| = m, \quad x \in E_m, \ m = 2, 3, \dots,$$

т.е. при $x \in \varlimsup\limits_{m\to\infty} E_m$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)\chi_n(x)| = \infty. \tag{104}$$

Но из (103) вытекает, что $m\Big(\varlimsup\limits_{m\to\infty} E_m\Big) = 1$, а значит (см. доказательство теоремы 15 и (104)), ряд Фурье–Хаара функции $f(x)$ расходится п.в. после некоторой перестановки членов. Теорема 16 доказана.

Определение 2. Последовательность $\{\omega(n)\}$, $1 \leqslant \omega(1) \leqslant \omega(2) \leqslant \cdots$ называется *множителем Вейля для безусловной сходимости п.в. рядов по О.Н.С.* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, если условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) < \infty \tag{105}$$

гарантирует безусловную сходимость п.в. ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$.

Теорема 17. *Для того чтобы последовательность* $\{\omega(n)\}$, $1 \leqslant \omega(1) \leqslant \omega(2) \leqslant \cdots$, *являлась множителем Вейля для безусловной сходимости п.в. рядов по системе Хаара, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega(n)} < \infty. \tag{106}$$

Доказательство. Если для последовательности $\{\omega(n)\}$, $1 \leqslant \omega(1) \leqslant \omega(2) \leqslant \cdots$, конечна сумма (106) и ряд (105) сходится, то, учитывая, что $\|\chi_n\|_1 \leqslant 2n^{-1/2}$, $n = 1, 2, \ldots$, мы, пользуясь неравенством Коши, найдем

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |a_n \chi_n(x)|\, dx &\leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n}} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sqrt{\omega(n)}\, \frac{1}{\sqrt{n\omega(n)}} \\ &\leqslant 2 \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) \Big\}^{1/2} \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega(n)} \Big\}^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

Следовательно, по теореме Б. Леви ряд (94) абсолютно сходится п.в. на $(0, 1)$.

Пусть, напротив, условие (106) не выполнено. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega^{-1}(2^k) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \omega^{-1}(n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega(n)} = \infty$$

и можно найти такую последовательность $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = +\infty$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(2^{k+1}) q_k} = \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(2^{k+1}) q_k^2} < \infty. \tag{107}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^{k/2} \omega(2^{k+1}) q_k} \chi_k^{(i)}(x). \tag{108}$$

Используя соотношения (107), находим, что

а) для п.в. $x \in (0, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \chi_n(x)| \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(2^{k+1}) q_k} = \infty;$$

б) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega(2^{k+1}) q_k^2} < \infty,$$

а значит (см. теорему 15 и определение 2), $\{\omega(n)\}$ не является множителем Вейля для безусловной сходимости п.в. рядов по системе Хаара. Теорема 17 доказана.

В заключение параграфа дадим достаточное условие для абсолютной сходимости п.в. ряда Фурье–Хаара функции $f(x)$, выраженное в терминах поведения интегрального модуля непрерывности функции $f(x)$.

Теорема 18. *Если $f \in L^1(0,1)$ и при некотором $\varepsilon > 0$*

$$\omega_1(\delta, f) = O\left(|\log\delta|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\right) \quad \textit{при} \quad \delta \to 0, \tag{109}$$

то ряд Фурье–Хаара функции f абсолютно сходится п.в.

Доказательство. Положим при $k = 0, 1, \ldots$ и $x \in (0,1)$

$$F_k(x) := \sum_{i=1}^{2^k} |c_{k,i}(f)\chi_k^{(i)}(x)| = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} |c_n(f)\chi_n(x)|.$$

Ясно, что для $x \in (0,1) \setminus R_2$

$$F_k^2(x) = \sum_{i=1}^{2^k} c_{k,i}^2(f)[\chi_k^{(i)}(x)]^2.$$

Следовательно, для $x \in (0,1) \setminus R_2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=2^q}^{2^{q+1}-1} F_k(x) &\leqslant \sum_{q=0}^{\infty} 2^{q/2} \left\{ \sum_{k=2^q}^{2^{q+1}-1} F_k^2(x) \right\}^{1/2} \\ &\leqslant \sum_{q=0}^{\infty} 2^{q/2} \left\{ \sum_{k=2^q}^{\infty} F_k^2(x) \right\}^{1/2} \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} 2^{q/2} P(g_q, x), \end{aligned} \tag{110}$$

где

$$g_q(x) = f(x) - \sum_{n=1}^{2^{2^q}} c_n(f)\chi_n(x),$$

а $P(g_q, x)$ – функция Пэли для $g_q(x)$ (см. (39)).

Рассмотрим множества

$$E_q := \{x \in (0,1) : P(g_q, x) > 2^{-\frac{q}{2}(1+\varepsilon)}\}, \qquad q = 0, 1, \dots . \tag{111}$$

Из теоремы 9 и оценки (17) следует, что

$$m(E_q) \leqslant 2^{\frac{q}{2}(1+\varepsilon)} \|g_q\|_1 \leqslant 2^{\frac{q}{2}(1+\varepsilon)} \omega_1(2^{-2^q}, f) \leqslant C 2^{-\frac{q}{2}\varepsilon},$$

а потому $\sum\limits_{q=0}^{\infty} m(E_q) < \infty$ и, значит, для п.в. $x \in (0,1)$ существует такое число $q(x)$, что $x \notin E_q$ при $q > q(x)$. Но тогда для п.в. $x \in (0,1)$ мы получим (см. (110), (111))

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) &\leqslant \sum_{q=0}^{q(x)} 2^{\frac{q}{2}} P(g_q, x) + \sum_{q=q(x)+1}^{\infty} 2^{\frac{q}{2}} P(g_q, x) \\ &\leqslant \sum_{q=0}^{q(x)} 2^{\frac{q}{2}} P(g_q, x) + \sum_{q=q(x)+1}^{\infty} 2^{-\frac{q}{2}\varepsilon} < \infty.\end{aligned}$$

Теорема 18 доказана.

Следствие 8. *Ряд Фурье–Хаара каждой непрерывной функции $f(x)$ с модулем непрерывности*

$$\omega(\delta, f) = O\big(|\log \delta|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\big) \quad \textit{при} \quad \delta \to 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

сходится абсолютно п.в.

Замечание. Аналогично теореме 16 доказывается, что следствие 8 (а потому и теорему 18) нельзя существенно усилить, т.е. что существует функция $f \in C(0,1)$ с $\omega(\delta, f) \leqslant |\log \delta|^{-\frac{1}{2}}$, $\delta \to 0$, ряд Фурье–Хаара которой абсолютно расходится для п.в. $x \in (0,1)$.

§ 6. Преобразования системы Хаара

Как будет показано в гл. 9, 10 и 11, система Хаара оказывается весьма полезной для решения ряда задач теории общих ортогональных рядов. Точнее говоря, оказывается возможным перенести ряд утверждений, доказанных первоначально для системы Хаара, на широкий класс полных ортонормированных систем. В этом коротком параграфе делаются предварительные "заготовки" для такого переноса.

Пусть задано семейство измеримых множеств

$$\varepsilon = \left\{\{E_k^i\}_{i=1}^{2^k}\right\}_{k=0}^{\infty}, \tag{112}$$

где $E_0^1 = [0,1]$, $E_k^i \subset [0,1]$ при $k > 0$, и выполнены следующие условия:

I) $m(E_k^i) = 2^{-k}$;

II) $E_k^i = E_{k+1}^{2i-1} \cup E_{k+1}^{2i}$;

III) $E_k^i \cap E_k^j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Примером семейства множеств, удовлетворяющего условиям I)–III), является совокупность двоичных интервалов (с подходящим включением концевых точек).

Утверждение 2. *Для любого семейства ε со свойствами* I)–III) *найдется такая измеримая функция $u(x)$, $x \in (0,1)$, что*

1) *для любого измеримого множества $G \subset [0,1]$ множество*

$$u^{-1}(G) \equiv \{x \in (0,1) : u(x) \in G\}$$

измеримо и $m(u^{-1}(G)) = m(G)$;

2) *для $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$ и п.в. $x \in (0,1)$*

$$\chi_{E_k^i}(x) = \chi_{\Delta_k^{(i)}}\big(u(x)\big),$$

где, как обычно, $\chi_E(x)$ – характеристическая функция множества E.

Доказательство. Для $k = 0, 1, \ldots$ положим

$$u_k(x) = \frac{i-1}{2^k} \quad \text{при} \quad x \in E_k^i, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k.$$

Из свойства II) семейства ε вытекает, что $0 \leqslant u_k(x) \leqslant u_{k+1}(x) \leqslant 1$ для любого $x \in [0,1]$ и $k = 0, 1, \ldots$. Поэтому функция

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x)$$

определена для всех $x \in [0,1]$ и измерима (как поточечный предел измеримых функций). Непосредственно из определения функции $u(x)$ следует, что для любого интервала $\Delta \subset (-\infty, \infty)$

$$m\{x \in (0,1) : u(x) \in \Delta\} = \lim_{k\to\infty} m\{x \in (0,1) : u_k(x) \in \Delta\} = m[\Delta \cap (0,1)],$$

а значит, для $\Delta \subset (0,1)$

$$m\{x \in (0,1) : u(x) \in \Delta\} = m\{x \in (0,1) : u(x) \in \overline{\Delta}\} = m(\Delta), \tag{113}$$

где $\overline{\Delta}$ – замыкание интервала Δ.

Из (113) сразу следует, что для любого открытого или замкнутого множества $V \subset [0,1]$

$$m[u^{-1}(V)] = m(V). \tag{114}$$

Кроме того, легко видеть, что если $u(x) \in \Delta_k^i$, то $x \in E_k^i$, т.е.

$$u^{-1}(\Delta_k^i) \subset E_k^i, \qquad k = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k. \tag{115}$$

Из соотношений (114) и (115) с учетом равенства $m(E_k^i) = 2^{-k}$ (см. 1)) мы находим $m[E_k^i \setminus u^{-1}(\Delta_k^i)] = 0$, что доказывает свойство 2) функции $u(x)$.

Пусть теперь $G \subset (0,1)$ – произвольное измеримое множество. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем открытое множество V с условием

$$G \subset V \subset (0,1), \qquad m(G) + \varepsilon \geqslant m(V).$$

Тогда $u^{-1}(G) \subset u^{-1}(V)$ и (см. (114))

$$m^*[u^{-1}(G)] \leqslant m[u^{-1}(V)] \leqslant m(G) + \varepsilon$$

($m^*(E)$ – внешняя мера множества E), откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что

$$m^*[u^{-1}(G)] \leqslant m(G).$$

С другой стороны, если m_* – внутренняя мера, то[3)]

$$\begin{aligned} m_*[u^{-1}(G)] &= 1 - m^*\left[[0,1] \setminus u^{-1}(G)\right] = 1 - m^*\left[u^{-1}([0,1] \setminus G)\right] \\ &= 1 - m^*\left[u^{-1}((0,1) \setminus G)\right] \geqslant 1 - m[(0,1) \setminus G] = m(G)^*. \end{aligned}$$

Следовательно, $u^{-1}(G)$ – измеримое множество и справедливо равенство 1). Утверждение 2 доказано.

Для любого семейства ε со свойствами I)–III) определим на $(0,1)$ систему функций $\{\chi_n(x,\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$, положив

$$\begin{aligned} &\chi_1(x,\varepsilon) \equiv \chi_0^{(0)}(x) \equiv 1, \\ &\chi_n(x,\varepsilon) \equiv \chi_k^{(i)}(x,\varepsilon) = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{если } x \in E_{k+1}^{2i-1}, \\ -2^{k/2}, & \text{если } x \in E_{k+1}^{2i}, \\ 0, & \text{если } x \in (0,1) \setminus E_k^i, \end{cases} \end{aligned} \tag{116}$$

где $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \ldots, i = 1, 2, \ldots, 2^k$.

[3)] Мы используем, что в силу (114) $m\{x \in (0,1) : u(x) = t\} = 0$ для любого t. Отметим также, что в применениях утверждения 2 (см. гл. 10, 11) множества E_k^i имеют такую простую структуру, что вопросы об измеримости становятся очевидными.

Систему $\{\chi_n(x,\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть системой типа Хаара. Из условий I)–III) сразу следует, что любая система типа Хаара – ортонормированная система. Кроме того, из утверждения 2 вытекает, что для любого полинома

$$P(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x,\varepsilon)$$

справедливо равенство

$$P(x) = P'(u(x)) \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1), \qquad P'(x) := \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x), \tag{117}$$

и что функции распределения полиномов $P(x)$ и $P'(x)$ совпадают.

Из сказанного ясно, что многие результаты о системе Хаара переносятся на системы $\{\chi_n(x,\varepsilon)\}$. Отметим, в частности,

Следствие 9. *Если $\{\chi_n(x,\varepsilon)\}$ – произвольная система типа Хаара, то найдется функция $g \in L^\infty(0,1)$, для которой*

$$g(x) \overset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \chi_n(t,\varepsilon) g(t)\, dt\, \chi_n(x,\varepsilon) \tag{118}$$

и ряд (118) *неограниченно расходится п.в. после некоторой перестановки членов.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \chi_n(x) \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty\right) \tag{119}$$

– ряд Фурье–Хаара функции $f \in L^\infty(0,1)$, построенной в теореме 16. Тогда для некоторой перестановки натурального ряда – $\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x)$$

неограниченно расходится при $x \in E$, $m(E) = 1$, а это значит, что для $x \in u^{-1}(E)$, т.е. почти всюду (см. утверждение 2) расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}\big(u(x)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x,\varepsilon).$$

Поэтому, если положить

$$g(x) \overset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x, \varepsilon),$$

то, учитывая, что $g \in L^\infty(0,1)$ (так как, в силу (117) и (8), частные суммы ряда (119) для п.в. $x \in (0,1)$ не превосходят $\|f\|_\infty$), мы получим, что $g(x)$ удовлетворяет требованиям следствия 9.

Замечание. Так как ряд (119) сходится в $L^p(0,1)$ при любом $p \in [1, \infty)$ (см. теорему 3), то, в силу (117), этим же свойством обладает и ряд (118).

Глава 4
Немного о тригонометрической системе и системе Уолша

В этой главе доказывается ряд теорем о свойствах важнейшей ортогональной системы – тригонометрической. В своем большинстве эти теоремы являются классическими и содержатся в монографиях, посвященных теории тригонометрических рядов. Приведены здесь и некоторые сравнительно новые результаты. Мы не претендуем, конечно, на сколь-нибудь полный охват материала. Необходимость рассмотрения свойств тригонометрической системы была обусловлена стремлением авторов сделать изложение замкнутым – избежать ссылок на специальную литературу. Многие результаты теории общих ортогональных рядов явились обобщениями или аналогами утверждений о свойствах тригонометрической системы. Кроме того, в ряде вопросов тригонометрическая система ведет себя наилучшим возможным образом, и на ее примере видна неусиляемость некоторых общих теорем, доказанных в книге.

В § 1 без доказательства приводятся факты, излагаемые в университетских курсах.

В конце главы дается определение и доказываются некоторые свойства другой классической О.Н.С. – системы Уолша.

§ 1. Свойства частных сумм рядов Фурье и коэффициентов Фурье, средние Фейера

Система функций

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos nx,\ \sin nx,\ n=1,2,\ldots,\ x\in[-\pi,\pi]\right\} \tag{1}$$

называется *тригонометрической системой.*

Тригонометрическая система является полной в $L^2(-\pi,\pi)$ ортогональной системой. Функции системы (1) не нормированы в $L^2(-\pi,\pi)$. Ортонормированной является система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ n=1,2,\dots,\ x\in[-\pi,\pi]\right\}.$$

Каждой функции $f\in L^1(-\pi,\pi)$ соответствует ее ряд Фурье:

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} a_n(f)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \qquad n=0,1,\dots,\\ b_n(f)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, \qquad n=1,2,\dots. \end{aligned} \tag{3}$$

Для частных сумм ряда (2) при $N=1,2,\dots$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} S_N(x)=S_N(f,x)&=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_N(t)\,dt, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$D_N(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nt=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}, \qquad t\in[-\pi,\pi], \quad N=1,2,\dots,$$

– так называемое *ядро Дирихле*. Полагают также

$$D_0(t)\equiv\frac{1}{2}, \quad \text{тогда} \quad S_0(f,x)=\frac{a_0(f)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_0(t)\,dt.$$

В силу равенства (4) функции Лебега $L_N(x)$ тригонометрической системы (см. определение 1.11) не зависят от x и равны

$$L_N(x)=L_N=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|\,dt, \qquad x\in[-\pi,\pi]. \tag{5}$$

Тригонометрической системой называется также система комплекснозначных функций $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $x \in [-\pi, \pi]$. Функции $f \in L^1(-\pi, \pi)$ соответствует ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{inx}, \qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \tag{6}$$

который иногда более удобен для изучения, чем ряд (2), хотя, конечно, частные суммы рядов (2) и (6) совпадают:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} = S_N(f, x),$$

где суммы $S_N(f, x)$ определены в (4).

Ниже мы упростим выражение для частных сумм ряда (2), но предварительно отметим некоторые свойства коэффициентов Фурье.

Теорема 1. *Для коэффициентов Фурье функции $f \in L^1(-\pi, \pi)$ справедливы неравенства*

$$\max\{|a_n(f)|, |b_n(f)|\} \leqslant \frac{1}{4\pi}\omega_1^{(2)}\left(\frac{\pi}{n}, f\right) \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

где $\omega_1^{(2)}(\delta, f)$ и $\omega_1(\delta, f)$ – интегральные модули непрерывности соответственно второго и первого порядка функции $f(x)$ (см. приложение 1, (6′)).

Доказательство. Из (3), учитывая, что $\cos n\left(x \pm \dfrac{\pi}{n}\right) = -\cos nx$, мы находим:

$$a_n(f) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\left(x \pm \frac{\pi}{n}\right)dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x \pm \frac{\pi}{n}\right)\cos nx\,dx,$$

а значит,

$$a_n(f) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[2f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{n}\right)\right]\cos nx\,dx,$$

и следовательно,

$$|a_n(f)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\omega_1^{(2)}\left(\frac{\pi}{n}, f\right).$$

Коэффициент $b_n(f)$ оценивается аналогично. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть* $f \in L^1(-\pi,\pi)$, $g \in L^\infty(-\pi,\pi)$. *Тогда коэффициенты Фурье функции* $F_x(t) := f(x+t)g(t)$ *стремятся к нулю равномерно по* $x \in [-\pi,\pi]$.

Доказательство. В силу неравенства (7) достаточно показать, что $\omega_1(\delta, F_x) \to 0$ при $\delta \to 0$ равномерно по x. Пусть $\|g\|_\infty = M$; тогда для любого $\varepsilon > 0$, представляя функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad \|f_1\|_\infty = B < \infty, \quad \|f_2\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{4M},$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} |F_x(t+h) - F_x(t)|\,dt \\
&\quad\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)|\,dt \\
&\qquad + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)| \cdot |g(t+h)|\,dt \\
&\quad\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)|\,dt \\
&\qquad + \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x+t)| \cdot |g(t+h) - g(t)|\,dt + M\omega_1(h,f) \\
&\quad\leqslant B\omega_1(h,g) + \frac{\varepsilon}{2} + M\omega_1(h,f) \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

если число h достаточно мало. Следствие 1 доказано.

Покажем, что для частных сумм произвольной функции $f \in L^1(-\pi,\pi)$ при $N \to \infty$ справедливо соотношение

$$S_N(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)\sin Nt}{t}\,dt + o(1), \tag{8}$$

где $o(1)$ – величина, стремящаяся к нулю равномерно по $x \in [-\pi,\pi]$. Действительно, если положить при $t \in [-\pi,\pi]$ и $N = 1, 2, \ldots$

$$S_N^*(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_N^*(t)\,dt, \qquad D_N^*(t) = \frac{\sin Nt}{t},$$

то справедливо равенство

$$D_N(t) - D_N^*(t) = g(t)\sin Nt + \frac{1}{2}\cos Nt, \tag{9}$$

где
$$g(t) := \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, \qquad \|g\|_{L^\infty(-\pi,\pi)} = A < \infty.$$

Поэтому, в силу следствия 1, при $N \to \infty$
$$S_N(f,x) - S_N^*(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Big[g(t)\sin Nt + \frac{1}{2}\cos Nt\Big]\,dt \to 0$$

равномерно по $x \in [-\pi,\pi]$, что доказывает соотношение (8).

Полагая в (8) $f(x) \equiv 1$, мы получим, что
$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin Nt}{t}\,dt + o(1),$$

а следовательно (см. также (8)), для $f \in L^1(-\pi,\pi)$, $x \in [-\pi,\pi]$
$$S_N(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]\frac{\sin Nt}{t}\,dt + f(x)[o(1)] \qquad (10)$$

(в (10), как и в (8), $o(1)$ – величина, стремящаяся к нулю равномерно на $[-\pi,\pi]$).

Учитывая равенство (9), для констант Лебега (см. (5)) нетрудно получить следующее выражение:
$$L_N = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|\,dt = \frac{4}{\pi^2}\ln N + O(1) \quad \text{при} \quad N \to \infty, \qquad (11)$$

откуда вытекает (см. теорему 1.8 и замечание после нее)

Теорема 2. *Тригонометрическая система не является базисом в пространствах $C(-\pi,\pi)$ и $L^1(-\pi,\pi)$.*

В отличие от частных сумм ряда Фурье непрерывной функции $f(x)$, их средние арифметические всегда равномерно сходятся к $f(x)$. Точнее, если рассмотреть последовательность
$$\sigma_N(x) = \sigma_N(f,x) = \frac{1}{N+1}\sum_{\nu=0}^{N} S_\nu(f,x), \qquad N = 0,1,\ldots, \qquad (12)$$

то $\sigma_N(f,x) \to f(x)$ равномерно по $x \in [-\pi,\pi]$, если $f \in C(-\pi,\pi)$ (см. также § 4, где усиливается этот результат).

Средние $\sigma_N(f,x)$ называются *средними Фейера*. При этом (см. (4)) для каждой функции $f \in L^1(-\pi,\pi)$

$$\sigma_N(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1}{N+1}\sum_{\nu=0}^{N} D_\nu(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_N(t)\,dt, \tag{12'}$$

где $K_N(t)$ – *ядро Фейера*:

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{\nu=0}^{N} D_\nu(t) = \frac{2}{N+1}\left[\frac{\sin\frac{1}{2}(N+1)t}{2\sin\frac{t}{2}}\right]^2; \; N = 0,1,\dots. \tag{13}$$

Отметим, что (см. (13), (12′)) при $N = 0,1,\dots$

$$\text{а)}\ \ K_N(t) \geqslant 0, \quad t \in [-\pi,\pi]; \qquad \text{б)}\ \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = 1. \tag{14}$$

Из соотношений (14) вытекает, что для $f \in C(-\pi,\pi)$ и $x \in [-\pi,\pi]$

$$|\sigma_N(f,x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|K_N(t)\,dt \leqslant \|f\|_{C(-\pi,\pi)}, \; N = 0,1,\dots. \tag{15}$$

Если же $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \leqslant p < \infty$, то в силу неравенства Гёльдера

$$|\sigma_N(f,x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_N^{1/p}(t)K_N^{1/q}(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|^p K_N(t)\,dt\right\}^{1/p}\cdot \pi^{1/q},$$

и следовательно,

$$\|\sigma_N(f)\|_p^p \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|^p K_N(t)\,dt\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)|^p\,dx\,dt$$

$$\leqslant \|f\|_p^p\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = \|f\|_p^p. \tag{16}$$

Из неравенства (16) легко получить сходимость по норме пространства $L^p(-\pi,\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$, средних $\sigma_N(f,x)$ к функции $f \in L^p(-\pi,\pi)$.

Отметим, что при доказательстве оценок (15) и (16) использовалось только то свойство ядра $K_N(t)$, что $\frac{1}{\pi}\|K_n\|_1 \leqslant 1$. Точнее говоря, мы фактически проверили, что для любой функции $Q(t)$ с $\|Q\|_1 \leqslant 1$

$$\|F\|_p \leqslant \|f\|_p,$$
$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)Q(t)\,dt, \quad f \in L^p(-\pi,\pi), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{16'}$$

§2. Наилучшие приближения. Средние Валле Пуссена

Определение 1. Пусть $f \in C(-\pi,\pi)$. Величина

$$E_N = E_N(f) := \inf_T \|T - f\|_{C(-\pi,\pi)}, \qquad N = 0, 1, \ldots,$$

где inf берется по всем тригонометрическим полиномам $T(x)$ порядка N:

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

называется *наилучшим приближением функции $f(x)$ тригонометрическим полиномами порядка N в пространстве $C(-\pi,\pi)$.*

Аналогично, если $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$, то

$$E_N^{(p)} = E_N^{(p)}(f) := \inf_T \|T - f\|_{L^p(-\pi,\pi)}, \qquad N = 0, 1, \ldots,$$

– наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка N в пространстве $L^p(-\pi,\pi)$.

Следующая теорема устанавливает связь между гладкостью функции $f(x)$ и поведением ее наилучших приближений.

Теорема 3. *Существует такая абсолютная постоянная*[1)] C, *что*

а) *для каждой функции $f \in C(-\pi,\pi)$ имеют место неравенства*

$$E_N(f) \leqslant C\omega\Big(\frac{1}{N}, f\Big), \qquad N = 1, 2, \ldots; \tag{17}$$

б) *если $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$, то*

$$E_N^{(p)}(f) \leqslant C\omega_p\Big(\frac{1}{N}, f\Big), \qquad N = 1, 2, \ldots . \tag{18}$$

[1)] Мы не занимаемся вопросом о величине постоянной C.

В доказательстве теоремы 3 мы используем так называемые средние Валле Пуссена – аппарат, очень полезный во многих задачах о приближении функций тригонометрическим полиномами.

Определение 2. *Средними Валле Пуссена* для функции $f \in L^1(-\pi,\pi)$ называются полиномы

$$V_N(x) = V_N(f,x) := \frac{1}{N}\sum_{\nu=N}^{2N-1} S_\nu(f,x), \qquad N = 1,2,\dots. \tag{19}$$

Легко видеть (см. (12), (19)), что справедливо следующее равенство, связывающее средние Валле Пуссена и Фейера:

$$V_N(f,x) = 2\sigma_{2N-1}(f,x) - \sigma_{N-1}(f,x), \qquad N = 1,2,\dots. \tag{20}$$

В силу равенства (20), непосредственно из оценок (15) и (16) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\text{а) } \|V_N(f)\|_C \leqslant 3\|f\|_C,\ N = 1,2,\dots,\ f \in C(-\pi,\pi);\\ &\text{б) } \|V_N(f)\|_p \leqslant 3\|f\|_p,\ N = 1,2,\dots,\ f \in L^p(-\pi,\pi),\ 1 \leqslant p < \infty. \end{aligned} \tag{21}$$

Другое полезное свойство средних Валле Пуссена состоит в том, что для любого тригонометрического полинома порядка m при $N \geqslant m$ справедливо равенство

$$V_N(T_m,x) = T_m(x), \qquad x \in [-\pi,\pi]. \tag{22}$$

Свойств (21) и (22) вполне достаточно, чтобы получить

Утверждение 1. *Для произвольной функции* $f \in C(-\pi,\pi)$

$$E_{2N-1}(f) \leqslant \|V_N(f) - f\|_C \leqslant 4E_N(f). \tag{23}$$

Если $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$, *то*

$$E^{(p)}_{2N-1}(f) \leqslant \|V_N(f) - f\|_p \leqslant 4E^{(p)}_N(f). \tag{24}$$

Доказательство. Так как $V_N(f)$ – тригонометрический полином порядка $2N-1$, то в доказательстве нуждаются только правые неравенства (23) и (24). Пусть $f \in C(-\pi,\pi)$, $N = 1,2,\dots$, и $T_N(x)$ – полином наилучшего приближения (порядка $\leqslant N$) для функции f:

$$\|f - T_N\|_C = E_N(f)$$

(существование такого полинома легко получить из соображений компактности).

Тогда, используя соотношения (21), а) и (22), мы находим

$$
\begin{aligned}
\|V_N(f) - f\|_C &\leqslant \|V_N(f) - T_N\|_C + \|T_N - f\|_C \\
&= \|V_N(f - T_N)\|_C + E_N(f) \leqslant 4E_N(f),
\end{aligned}
$$

что доказывает неравенство (23). Неравенство (24) получаем совершенно аналогично.

Используя представление (12′) для средних Фейера и равенство (20), мы получаем следующее выражение для средних Валле Пуссена:

$$
V_N(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\cos Nt - \cos 2Nt}{N(2\sin\frac{t}{2})^2}\, dt, \tag{25}
$$

так как (см. (13))

$$
\begin{aligned}
2K_{2N-1}(t) - K_{N-1}(t) &= \frac{4\sin^2 Nt}{2N(2\sin\frac{t}{2})^2} - \frac{2\sin^2\frac{N}{2}t}{N(2\sin\frac{t}{2})^2} \\
&= \frac{2\cos^2\frac{N}{2}t - 2\cos^2 Nt}{N(2\sin\frac{t}{2})^2} = \frac{\cos Nt - \cos 2Nt}{N(2\sin\frac{t}{2})^2}.
\end{aligned}
$$

Функция

$$
P_N(t) := \frac{\cos Nt - \cos 2Nt}{N(2\sin\frac{t}{2})^2}
$$

называется *ядром Валле Пуссена* порядка N $(N = 1, 2, \dots)$.

Ядро $P_N(t)$ – четный тригонометрический полином порядка $2N - 1$ (см. (13), (20)); при этом (см. (14))

$$
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_N(t)\, dt = 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P_N(t)|\, dt \leqslant 3, \qquad N = 1, 2, \dots. \tag{26}
$$

Ниже мы используем такое свойство ядра $P_N(t)$: при $y \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$
|Q_N(t)| := \left| \int_{|y|}^{\pi} P_N(t)\, dt \right| \leqslant 10 \min\left(1, \frac{1}{N^2 y^2}\right), \quad N = 1, 2, \dots. \tag{27}
$$

Действительно, так как функция $h(t) = \left(2\sin\dfrac{t}{2}\right)^{-2}$ монотонно убывает на $(0, \pi)$ и для любых a и b $(a, b \in [0, \pi])$

$$
\int_a^b g(t)\, dt \leqslant \frac{3}{N}, \quad \text{где} \quad g(t) := \cos Nt - \cos 2Nt,
$$

то, пользуясь второй теоремой о среднем, находим

$$NQ_N(y) = \int_{|y|}^{\pi} h(t)g(t)\,dt = h(|y|)\int_{|y|}^{\xi} g(t)\,dt, \qquad \xi \in (|y|, \pi),$$

$$N|Q_N(y)| \leqslant \Bigl(2\sin\frac{y}{2}\Bigr)^{-2}\frac{3}{N} \leqslant 3\Bigl(\frac{\pi}{2}\Bigr)^2\frac{1}{y^2N} < \frac{10}{y^2N},$$

что вместе с оценкой $|Q_N(t)| \leqslant 3\pi$ (см. (26)) доказывает неравенство (27). Из (27) следует, что

$$\|Q_N\|_1 = 2\biggl[\int_0^{1/N} 10\,dy + \int_{1/N}^{\pi}\frac{10}{N^2y^2}\,dy\biggr] \leqslant \frac{60}{N}, \quad N = 1, 2, \ldots. \tag{28}$$

Доказательство теоремы 3. Мы будем одновременно доказывать неравенства (17) и (18) (с одной и той же абсолютной постоянной $C \leqslant 44$), обозначая в данном случае $\|f\|_\infty \equiv \|f\|_{C(-\pi,\pi)}$ и через $\omega_p(\delta, f)$ при $p = \infty$ обычный модуль непрерывности функции $f \in C(-\pi, \pi)$.

Покажем, что нужное приближение функции $f(x)$ дают (при любом p) ее средние Валле Пуссена $V_m(f)$, $m = \left[\dfrac{N+1}{2}\right]$ ($V_m(f)$ – полином порядка $\leqslant N$).

Предварительно приблизим функцию $f(x)$ средними вида

$$S_\delta(f, x) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\,dt, \qquad \delta > 0.$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\|f - S_\delta(f)\|_p &= \biggl\{\int_{-\pi}^{\pi}\biggl|\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x+t) - f(x)]\,dt\biggr|^p dx\biggr\}^{1/p} \\ &\leqslant \frac{1}{(2\delta)^{1/p}}\biggl\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t) - f(x)|^p\,dt\,dx\biggr\}^{1/p} \\ &\leqslant \frac{1}{(2\delta)^{1/p}}\biggl\{2\int_0^{\delta}\omega_p^p(t, f)\,dt\biggr\}^{1/p} \leqslant \omega_p(\delta, f)\end{aligned} \tag{29}$$

(мы использовали оценку $\|f\|_{L^1(E)} \leqslant [m(E)]^{1-1/p}\|f\|_{L^p(E)}$, которая сразу вытекает из неравенства Гёльдера). При этом производную функции $S_\delta(f)$ можно оценить так:

$$\|S'_\delta(f)\|_p = \biggl\|\frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{2\delta}\biggr\|_p \leqslant \frac{1}{2\delta}\,\omega_p(2\delta, f) \leqslant \frac{1}{\delta}\,\omega_p(\delta, f). \tag{30}$$

(Отметим, что при $p = \infty$ оценки (29) и (30) сразу следуют из определения модуля непрерывности.) Пусть число N фиксировано. Положим $\delta = 1/N$ и $g(x) = S_{1/N}(f, x)$. Тогда $(m = [(N+1)/2])$

$$\|f - V_m(f)\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - V_m(g)\|_p + \|V_m(f - g)\|_p. \tag{31}$$

Из соотношений (29) и (21) вытекает, что

$$\|f - g\|_p + \|V_m(f - g)\|_p \leqslant 4\omega_p\Big(\frac{1}{N}, f\Big), \tag{32}$$

поэтому нам остается оценить только средний член в правой части неравенства (31). Интегрируя по частям и пользуясь четностью ядра $P_m(t)$, находим

$$\begin{aligned}
V_m(g, x) - g(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [g(x+t) - g(x)]P_m(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [g(x+t) + g(x-t) - 2g(x)]P_m(t)\,dt \\
&= -\frac{1}{\pi}[g(x+t) + g(x-t) - 2g(x)]Q_m(t)\Big|_0^{\pi} \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} Q_m(t)[g'(x+t) - g'(x-t)]\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_m(t)g'(x+t)\operatorname{sign} t\,dt,
\end{aligned}$$

а значит (см. (16′), (28) и (30)),

$$\|g - V_m(g)\|_p \leqslant \frac{1}{\pi}\|Q_m\|_1\|g'\|_p \leqslant 40\omega_p\Big(\frac{1}{N}, f\Big). \tag{33}$$

Складывая неравенства (32) и (33), мы в силу (31) получим

$$\|f - V_m(f)\|_p \leqslant 44\omega_p\Big(\frac{1}{N}, f\Big), \qquad N = 1, 2, \ldots, \quad m = \Big[\frac{N+1}{2}\Big]. \tag{34}$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Аналогично доказательству оценки (34) можно показать, что если 2π-периодическая функция $f(x)$ имеет k-ю производную $f^{(k)}(x) \in C(-\pi, \pi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то

$$\big\|f - V_{[\frac{N+1}{2}]}(f)\big\|_\infty \leqslant \frac{C_k}{N^k}\,\omega\Big(\frac{1}{N}, f^{(k)}\Big), \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

§ 3. Сходимость тригонометрических рядов в L^p и почти всюду

В главе 5 (см. теорему 5.3) будет показано, что для $g \in L^p(-\pi,\pi)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ функция

$$\widetilde{g}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(t)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,dt := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon\leqslant|t-x|\leqslant\pi} \frac{g(t)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,dt \tag{35}$$

существует, конечна для п.в. $x \in [-\pi,\pi]$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\widetilde{g}\|_p \leqslant C_p\|g\|_p, \quad \text{если} \quad 1 < p < \infty. \tag{36}$$

Мы используем оценку (36) в этом параграфе для доказательства базисности тригонометрической системы в пространствах $L^p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$.

Теорема 4. *Тригонометрическая система – базис в* $L^p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$. *При этом для* $f \in L^p(-\pi,\pi)$

$$\|S_N(f) - f\|_p \leqslant C_p E_N^{(p)}(f). \tag{37}$$

Доказательство. Ясно, что тригонометрическая система полна (см., например, теорему 3) и минимальна в $L^p(-\pi,\pi)$, поэтому для доказательства ее базисности достаточно (в силу теоремы 1.6) показать, что при $1 < p < \infty$

$$\|S_N(f)\|_p \leqslant C_p\|f\|_p, \qquad f \in L^p(-\pi,\pi), \quad N = 1,2,\dots. \tag{38}$$

Используя равенство $\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t = \sin Nt\cos\frac{t}{2} + \cos Nt\sin\frac{t}{2}$, частные суммы $S_N(f,x)$ (см. (4)) можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_N(f,x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(t-x)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)\sin N(t-x)}{2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos N(t-x)\,dt \\ &= \frac{\cos Nx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)\sin Nt}{2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}\,dt - \frac{\sin Nx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)\cos Nt}{2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}\,dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos Nt\,dt, \end{aligned} \tag{39}$$

где первые два интеграла в правой части равенства (39) понимаются так же, как в (35), т.е. в смысле главного значения.

Из (39) в силу соотношений (36) и (16) следует, что

$$\|S_N(f)\|_p \leqslant C_p\big(\|f(t)\cos Nt\|_p + \|f(t)\sin Nt\|_p\big) + \|f\|_p \leqslant C_p\|f\|_p.$$

Неравенство (38) доказано. Для получении оценки (37) возьмем полином T_N порядка N такой, что $\|f - T_N\|_p = E_N^{(p)}(f)$. Тогда из (38), учитывая, что $S_N(T_N, x) = T_N(x)$, мы находим

$$\|S_N(f) - f\|_p \leqslant \|S_N(f - T_N)\|_p + \|T_N - f\|_p \leqslant (C_p + 1)E_N^{(p)}(f).$$

Теорема 4 доказана.

Из неравенства (37) и теоремы 3 вытекает

Следствие 2. *Для любой функции $f \in L^p(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, имеют место неравенства*

$$\|S_N(f) - f\|_p \leqslant C_p\omega_p\Big(\frac{1}{N}, f\Big), \qquad N = 1, 2, \dots .$$

Как отмечалось ранее (см. теорему 2), теорема 4 теряет силу при $p = 1$. Этот факт вытекает из соотношения (см. (11))

$$\|D_N\|_1 \geqslant c\ln N, \qquad N = 1, 2, \dots . \tag{40}$$

Следующий результат дает широкое обобщение оценки (40) и показывает, что никаким изменением порядка членов в тригонометрической системе нельзя существенно уменьшить рост функций Лебега.

Теорема 5. *Существует абсолютная постоянная $c_0 > 0$ такая, что для любой последовательности натуральных чисел $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots$ и любых комплексных чисел d_k, $k = 1, 2, \dots$, справедливо неравенство*

$$\int_0^1 \Big|\sum_{k=1}^N d_k e^{2\pi i n_k t}\Big|\, dt \geqslant c_0 \sum_{k=1}^N \frac{|d_k|}{k}, \qquad N = 1, 2, \dots . \tag{41}$$

Следствие 3. *Для любого набора натуральных чисел* $1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_N$ *справедливо неравенство*

$$\|P(t)\|_{L^1(-\pi,\pi)} \geqslant c \ln N, \qquad P(t) := \sum_{k=1}^{N} \cos n_k t, \tag{42}$$

где $c > 0$ – *абсолютная постоянная.*

В самом деле, применяя оценку (41), мы найдем

$$\|P\|_{L^1(-\pi,\pi)} = 2\pi \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} \left(e^{2\pi i n_k t} + e^{-2\pi i n_k t} \right) \right| dt$$
$$= \pi \int_0^1 \left| e^{2\pi i (n_N+1)t} \sum_{k=1}^{N} \left(e^{2\pi i n_k t} + e^{-2\pi i n_k t} \right) \right| dt$$
$$\geqslant \pi c_0 \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} \geqslant c \ln N.$$

Доказательство теоремы 5. Отметим прежде всего три простых факта:

I) Пусть $f \in L^2(0,1)$ – действительная функция с рядом Фурье:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{2\pi i n t}, \qquad c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t}\, dt$$

и

$$h(t) := c_0(f) + 2 \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(f) e^{2\pi i n t},$$

тогда $\operatorname{Re} h(t) = f(t)$.

В самом деле, так как $\operatorname{Re}[(a+ib)(c+id)] = ac - bd$, то

$$\operatorname{Re} h(t) = c_0(f) + 2 \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\operatorname{Re} c_n(f) \cdot \cos 2\pi n t - \operatorname{Im} c_n(f) \cdot \sin 2\pi n t \right),$$

но $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, так как функция $f(t)$ – действительная, поэтому

$$\operatorname{Re} h(t) = c_0(f) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\operatorname{Re} c_n(f) \cdot \cos 2\pi n t - \operatorname{Im} c_n(f) \cdot \sin 2\pi n t \right)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Re} c_n(f) \cdot \cos 2\pi n t - \operatorname{Im} c_n(f) \cdot \sin 2\pi n t \right)$$
$$= \operatorname{Re} f(t) = f(t).$$

II) Для любых комплекснозначных функций $f, g \in L^2(0,1)$ имеет место равенство

$$\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)}. \tag{43}$$

В самом деле, в силу равенства Парсеваля

$$\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)c_{-n}(\overline{g}),$$

но всегда $\overline{c_n(g)} = c_{-n}(\overline{g})$, и мы получаем равенство (43).

III) Если $\operatorname{Re} u \geqslant 0$, то $|e^{-u} - 1| \leqslant 2|u|$.

Действительно, $|e^{-u}| = e^{-\operatorname{Re} u} \leqslant 1$, поэтому $|e^{-u} - 1| \leqslant |e^{-u}| + 1 \leqslant 2|u|$ при $|u| \geqslant 1$; если же $|u| < 1$, то

$$|e^{-u} - 1| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u|^n}{n!} \leqslant |u| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leqslant 2|u|.$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы; при этом, не ограничивая общности, будем считать, что $d_k \neq 0$ при $k = 1, 2, \ldots$. Через α и β мы будем обозначать следующие числа: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \ln 2$, тогда $e^{-\beta} + \alpha = 1$. Разобьем последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ на пачки $\{\Lambda_s\}_{s=1}^{\infty}$ так, чтобы в пачке Λ_s было 100^s членов, причем, если $n_k \in \Lambda_s$, $n_{k'} \in \Lambda_{s'}$ и $n_k < n_{k'}$, то $s \leqslant s'$.

Положим при $s = 1, 2, \ldots$

$$f_s(t) = 100^{-s} \sum_{n_k \in \Lambda_s,} (\operatorname{sign} d_k) e^{2\pi i n_k t}, \qquad t \in [0,1], \tag{44}$$

где $\operatorname{sign} d := d/|d|$ при $d \neq 0$ и $\operatorname{sign} 0 = 0$.

Ясно, что при $s = 1, 2, \ldots$

$$\|f_s\|_C \leqslant 1, \qquad \|f_s\|_2 = 100^{-s/2}. \tag{45}$$

Для каждого $N = 1, 2, \ldots$ мы построим функцию $F_N(t)$, для которой $\|F_N\|_C \leqslant 1$ и

$$I_N := \left|\int_0^1 \sigma_N(t)\overline{F_N(t)}\,dt\right| \geqslant \frac{1}{400} \sum_{k=1}^{N} \frac{|d_k|}{k}, \tag{46}$$

где $\sigma_N(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} d_k e^{2\pi i n_k t}$. Отсюда сразу получим неравенство (41) (с $c_0 = 400^{-1}$), так как $I_N \leqslant \|F_N\|_C \int_0^1 |\sigma_N(t)|\,dt$.

Пусть при $s = 1, 2, \ldots$

$$h_s(t) = c_0(|f_s|) + 2 \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(|f_s|)e^{2\pi i n_k t}, \qquad t \in [0,1].$$

Отметим следующие свойства функций $h_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots$:

а) $\operatorname{Re} h_s(t) = |f_s(t)| \geqslant 0$, $t \in [0,1]$, $s = 1, 2, \ldots$ (см. I));

б) $$\|h_s\|_2 = \Big\{c_0^2(|f_s|) + 4 \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^2(|f_s|)\Big\}^{1/2} \leqslant 2\|f_s\|_2 \leqslant 2/100^{s/2} \ (\text{см. } (45)); \tag{47}$$

в) $c_n(h_s) = 0$ при $n > 0$, $s = 1, 2, \ldots$;

г) ряд Фурье функции $h_s(t)$, $s = 1, 2, \ldots$, сходится абсолютно (так как $|f_s(t)| \in \operatorname{Lip} 1$, это вытекает из доказанного ниже следствия 5).

Определим, наконец, последовательность функций $\{g_s(t)\}_{s=1}^{\infty}$, положив

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \alpha f_1(t), \\ g_{s+1}(t) &= e^{-\beta h_{s+1}(t)} g_s(t) + \alpha f_{s+1}(t), \end{aligned} \qquad t \in [0,1], \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Среди функций $g_s(t)$ мы выберем позднее нужную нам функцию $F_N(t)$ (см. (46)). Докажем прежде всего, что

$$\|g_s\|_C \leqslant 1, \qquad s = 1, 2, \ldots. \tag{48}$$

В силу (45) $\|g_1\|_C \leqslant 1$, а предположив, что неравенство (48) проверено для функции $g_{s-1}(t)$, мы будем иметь (см. (47), а)):

$$\begin{aligned} |g_s(t)| &\leqslant |\exp\{-\beta h_s(t)\}| + \alpha|f_s(t)| \\ &= \exp\{-\beta \operatorname{Re} h_s(t)\} + \alpha|f_s(t)| \\ &= \exp\{-\beta|f_s(t)|\} + \alpha|f_s(t)| \leqslant 1, \qquad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из того, что функция

$$\psi(x) = \exp(-\beta x) + \alpha x$$

выпукла вниз на $[0,1]$ ($\psi''(x) = \beta^2 \exp(-\beta x) > 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 1$, а $|f_s(t)| \leqslant 1$ при $t \in [0,1]$, см. (45)).

Докажем теперь по индукции, что при $s = 1, 2, \ldots$

$$g_s(t) = \alpha \sum_{l=1}^{s} f_l(t) \exp\Big\{-\sum_{m=l+1}^{s} \beta h_m(t)\Big\} \tag{49}$$

$\Big($мы полагаем $\sum\limits_{m=s+1}^{s} = 0\Big)$. При $s = 1$ равенство (49) очевидно.

Предполагая, что равенство (49) для функции g_{s-1} уже проверено, мы получим

$$\begin{aligned}
g_s &= \exp\{-\beta h_s\} g_{s-1} + \alpha f_s \\
&= \exp\{-\beta h_s\}\alpha \sum_{l=1}^{s-1} f_l \exp\Big\{-\sum_{m=l+1}^{s-1} \beta h_m\Big\} + \alpha f_s \\
&= \alpha \sum_{l=1}^{s-1} f_l \exp\Big\{-\sum_{m=l+1}^{s} \beta h_m\Big\} + \alpha f_s,
\end{aligned}$$

что доказывает равенство (49) при всех s.

Функцию $F_N(t)$, для которой выполняется неравенство (46), выберем следующим образом: для данного $N = 1, 2, \ldots$ найдем такое число $s = s(N)$, что $n_N \in \Lambda_s$, и положим

$$F_N(t) = g_s(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{50}$$

Оценим коэффициенты Фурье функции $F_N(t)$ и покажем, что

$$|c_n(F_N) - \alpha c_n(f_j)| \leqslant \frac{\alpha}{2}|c_n(f_j)|, \qquad n \in \Lambda_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant s. \tag{51}$$

Из (51) сразу будет вытекать нужная нам оценка (46). В самом деле, из (51) следует (см. II) и (44)), что

$$\begin{aligned}
I_N &= \Big|\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\sigma_N)\,\overline{c_n(F_N)}\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=1}^{N} c_{n_k}(\sigma_N)\,\overline{c_{n_k}(F_N)}\Big| \\
&= \Big|\sum_{j=1}^{s} \sum_{k\leqslant N,\ n_k\in\Lambda_j} d_k\,\overline{c_{n_k}(F_N)}\Big| \\
&= \Big|\alpha \sum_{j=1}^{s} \sum_{k\leqslant N,\ n_k\in\Lambda_j} \big\{d_k\,\overline{c_{n_k}(f_j)} + c_k\big[\,\overline{c_{n_k}(F_N)} - a c_{n_k}(f_j)\big]\big\}\Big| \\
&\geqslant \alpha \sum_{j=1}^{s} \sum_{k\leqslant N,\ n_k\in\Lambda_j} 100^{-j}|d_k| - \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{s} \sum_{k\leqslant N,\ n_k\in\Lambda_j} |d_k|\,|c_{n_k}(f_j)| \\
&= \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{s} 100^{-j} \sum_{k\leqslant N,\ n_k\in\Lambda_j} |d_k|,
\end{aligned}$$

и, учитывая, что $k \geqslant 100^{j-1}$ при $n_k \in \Lambda_j$, мы получаем, что

$$I_N \geqslant \frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k\leqslant N,\ n_k\in\Lambda_j}\frac{|d_k|}{100k} = \frac{1}{400}\sum_{k=1}^{N}\frac{|d_k|}{k}.$$

Таким образом, нам осталось доказать неравенство (51). Пусть числа j, $1 \leqslant j \leqslant s$, и $n \in \Lambda_j$ фиксированы. Положим

$$E_l(t) = \exp\left\{-\sum_{m=l+1}^{s}\beta h_m(t)\right\}, \qquad l = 1, 2, \ldots, s,$$

и оценим n-й коэффициент Фурье функции $f_l(t)E_l(t)$, а затем воспользуемся равенством (49).

Покажем, что

$$c_n(f_l E_l) = 0 \quad \text{при} \quad l < j. \tag{52}$$

Действительно, в силу (47), в) $c_k(\psi_l) = 0$ при $k > 0$ и $l = 1, 2, \ldots, s$, где

$$\psi_l(t) = -\sum_{m=l+1}^{s}\beta h_m(t),$$

а значит $c_k((\psi_l)^p) = 0$ при любом $p = 0, 1, \ldots$ и $l = 1, 2, \ldots$, если $k > 0$ и

$$c_k(E_l) = c_k(\exp\psi_l) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\int_0^1 \psi_l^p(t)e^{-2\pi ikt}\,dt = 0, \qquad k > 0. \tag{53}$$

Отметим, что так как $\psi_l(t) \in C(-\pi, \pi)$ (см. (47), г)), то ряд $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\psi_l^p(t)$ сходится равномерно по t и его почленное интегрирование законно.

Так как $c_k(f_l) = 0$ при $k \notin \Lambda_l$ (см. (44)), то из (53) мы сразу получаем равенство (52).

Далее, ясно, что

$$c_n(f_l E_l) = c_n(f_l) + c_n(f_l[E_l - 1]), \qquad l = j, j+1, \ldots, s, \tag{54}$$

и так как $c_n(f_l) = 0$, если $l > j$ (в силу условия $n \in \Lambda_j$), то

$$c_n(f_l E_l) = c_n(f_l[E_l - 1]), \qquad l = j+1, \ldots, s. \tag{55}$$

Учитывая равенства (52), (54) и (55), из соотношений (49) и (50) мы находим

$$c_n(F_N) = c_n(g_s) = \alpha \sum_{l=1}^{s} c_n(f_l E_l) = \alpha c_n(f_j) + \alpha \sum_{l=j}^{s} c_n(f_l[E_l - 1]) \quad (56)$$

($n \in \Lambda_j$, $s = s(N)$). Так как $|c_n(f_j)| = 100^{-j}$ (см. (44)), то, как видно из (56), оценка (51) будет доказана, если мы проверим, что

$$Q := \sum_{l=j}^{s} |c_n(f_l[E_l - 1])| \leqslant \frac{1}{2}\, 100^{-j}. \quad (57)$$

Используя неравенство Коши (см. также (45)), получаем

$$|c_n(f_l[E_l - 1])| \leqslant \|f_l(E_l - 1)\|_1 \leqslant \|f_l\|_2 \|E_l - 1\|_2 \leqslant 100^{-l/2} \|E_l - 1\|_2, \quad (58)$$

причем, так как $\operatorname{Re} h_m(t) \geqslant 0$ при $m = 1, 2, \ldots$ (см. (47), а)), то

$$\|E_l - 1\|_2 = \left\| \exp\left\{ \sum_{m=l+1}^{s} \beta h_m(t) \right\} - 1 \right\|_2 \leqslant 2\beta \left\| \sum_{m=l+1}^{s} h_m(t) \right\|_2 \leqslant 4\beta \sum_{m=l+1}^{s} 100^{-m/2} \quad (59)$$

(мы использовали оценку III) и (47), б)).

Из соотношений (58) и (59) следует, что

$$Q \leqslant 4\beta \sum_{l=j}^{\infty} 10^{-l} \sum_{m=l+1}^{\infty} 10^{-m} \leqslant \frac{1}{2}\, 100^{-j}.$$

Оценки (57), (51), а следовательно, и теорема 5 доказаны.

Замечание. В главе 10 мы покажем, что ослабленный вариант следствия 3 остается справедливым для любой О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, с $|\varphi_n(x)| \leqslant M$, $x \in (0, 1)$, $n = 1, 2, \ldots$. Точнее говоря, будет доказано, что для таких систем

$$\frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \left\| \sum_{n=1}^{p} \varphi_n(x) \right\|_1 \geqslant c_M \ln N > 0, \qquad N = 2, 3, \ldots.$$

При этом, как показывает пример системы Уолша $\{w_n(x)\}$ (см. § 5), для которой $|w_n(x)| = 1$ для п.в. $x \in (0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$\left\| \sum_{n=1}^{2^k} w_n(x) \right\|_1 = 1 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

по подпоследовательности номеров $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ нормы $\left\| \sum\limits_{n=1}^{N_k} \varphi_n(x) \right\|_1$ могут быть ограничены.

Перейдем к рассмотрению сходимости тригонометрических рядов почти всюду. Здесь наиболее естественные вопросы оставались открытыми до 1966 г., когда Л. Карлесон доказал следующую очень глубокую теорему.

Теорема К. *Тригонометрическая система является системой сходимости* (см. определение 1.2).

До работы Л. Карлесона не было даже известно, обязан ли сходиться хоть в одной точке ряд Фурье каждой непрерывной функции. К сожалению, имеющиеся доказательства теоремы К слишком сложны, чтобы их можно было изложить здесь. С доказательством в книге приводится результат, который в течение сорока лет до появления работы Л. Карлесона был лучшим.

Теорема 6. *Для сходимости п.в. на* $[-\pi, \pi]$ *ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{60}$$

достаточно, чтобы была конечна сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cdot \ln n < \infty.$$

Утверждение теоремы 6 мы получим как следствие доказанной в гл. 9 теоремы общего характера о связи сходимости п.в. рядов по ортогональной системе с оценками функций Лебега этой системы (см. теорему 9.4).

Теорема К допускает распространение на пространства $L^p(-\pi, \pi)$ при $p > 1$: ряд Фурье каждой функции из $L^p(-\pi, \pi)$, $p > 1$, сходится п.в. С другой стороны, еще в 1923 г. А. Н. Колмогоровым была установлена

Теорема К$'$. *Существует функция* $f \in L^1(-\pi, \pi)$, *ряд Фурье* (см. (2)) *которой расходится для п.в.* $x \in (-\pi, \pi)$.

Утверждение теоремы К$'$ мы получим в гл. 10 как следствие результата общего характера (см. теорему 10.10).

§ 4. Равномерная и абсолютная сходимость рядов Фурье

Как мы уже отмечали (см. теорему 2, а также равенства 1.(17) и (11)), существуют непрерывные, 2π-периодические функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторой точке. В то же время известно много достаточных условий на функцию $f(x)$, гарантирующих равномерную сходимость ряда (2). Одно из таких условий нетрудно получить с помощью теоремы 3.

Теорема 7. *Если для модуля непрерывности функции $f \in C(-\pi,\pi)$ выполнено соотношение*

$$\omega(\delta,f) = o\Big(\ln^{-1}\frac{1}{\delta}\Big) \quad \textit{при} \quad \delta \to 0,$$

то ряд (2) равномерно на $[-\pi,\pi]$ сходится к $f(x)$.

Лемма 1. *Для любой функции $f \in C(-\pi,\pi)$ имеют место неравенства*

$$\|f - S_N(f)\|_C \leqslant C \ln N \cdot E_N(f), \qquad N = 2, 3, \dots, \tag{61}$$

где C – абсолютная постоянная.

В самом деле, пусть T_N – полином наилучшего приближения (порядка N) для функции $f(x)$: $\|f - T_N\|_C = E_N(f)$, тогда, используя соотношение 1.(17) и очевидное равенство $S_N(T_N,x) \equiv T_N(x)$ (см. также (11)), мы находим, что

$$\begin{aligned}\|f - S_N(f)\|_C &\leqslant \|f - T_N\|_C + \|S_N(T_N - f)\|_C \\ &\leqslant (1 + L_N)E_N(f) \leqslant C \ln N \cdot E_N(f), \qquad N = 2, 3, \dots .\end{aligned}$$

Утверждение теоремы 7 непосредственно вытекает из леммы 1 и теоремы 3 (см. (17)).

Замечание. Теорема 7 не может быть усилена в том смысле, что существует функция $f \in C(-\pi,\pi)$ с

$$\omega(\delta,f) = O\Big(\ln^{-1}\frac{1}{\delta}\Big) \quad \text{при} \quad \delta \to 0,$$

для которой ряд (2) расходится при $x = 0$.

Теорема 8. *Для каждой функции $f \in C(-\pi,\pi)$*

$$\frac{1}{N+1}\sum_{\nu=0}^{N} |f(x) - S_\nu(f,x)| \leqslant \frac{C}{N+1}\sum_{\nu=0}^{N} E_\nu(f), \qquad x \in [-\pi,\pi], \qquad N = 0, 1, \dots, \tag{62}$$

где C – абсолютная постоянная.

Из теоремы 8 непосредственно вытекает

Следствие 4. *Для каждой функции $f \in C(-\pi,\pi)$ равномерно по $x \in [-\pi,\pi]$ выполнено соотношение*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{\nu=0}^{N} |f(x) - S_\nu(f,x)| = 0.$$

Свойство частных сумм ряда Фурье непрерывной функции, отмеченное в следствии 4, называется равномерной сильной суммируемостью ряда Фурье. Термин “сильная суммируемость” объясняется тем, что теорема 8 усиливает результат Фейера о равномерной сходимости средних $\sigma_N(f,x)$ к $f(x)$.

Доказательство теоремы 8. Покажем прежде всего, что для любой функции $g \in C(-\pi,\pi)$

$$\frac{1}{N+1} \sum_{\nu=0}^{N} |S_\nu(g,x)| \leqslant C\|g\|_C, \qquad x \in [-\pi,\pi], \quad N = 0,1,\dots . \tag{63}$$

Из (8) следует, что достаточно доказать неравенство (63) с $S_\nu^*(g,x)$ (см. (8), (9)) вместо $S_\nu(g,x)$. Для фиксированного $x \in [-\pi,\pi]$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{N+1} \sum_{\nu=0}^{N} |S_\nu^*(g,x)| &\leqslant \frac{1}{N+1} \sum_{\nu=0}^{N} \varepsilon_\nu \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x+t) \frac{\sin \nu t}{t}\, dt \\ &= \frac{1}{(N+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x+t) \sum_{\nu=0}^{N} \varepsilon_\nu \frac{\sin \nu t}{t}\, dt \\ &\leqslant \frac{1}{(N+1)\pi} \|g\|_C \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{N} \varepsilon_\nu \frac{\sin \nu t}{t} \right| dt, \end{aligned} \tag{64}$$

где $\varepsilon_\nu = \operatorname{sign} S_\nu^*(g,x)$, $\nu = 0,1,\dots,N$.

Далее, используя неравенство Коши и равенство Парсеваля, находим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{N} \varepsilon_\nu \frac{\sin \nu t}{t} \right| dt \leqslant \int_{|t|\leqslant \frac{1}{N+1}} \sum_{\nu=0}^{N} \nu\, dt$$
$$+ \left\{ \int_{\frac{1}{N+1}\leqslant |t| \leqslant \pi} \left[\sum_{\nu=0}^{N} \varepsilon_\nu \sin \nu t \right]^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\frac{1}{N+1}\leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{dt}{t^2} \right\}^{1/2} \leqslant C(N+1),$$

откуда в силу (64) следует оценка (63).

Применяя оценку (63) с $N = 2k$ к функции $f(x) - T_k(f,x)$, где $T_k(f)$ – полином наилучшего приближения порядка k функции $f(x)$, и учитывая, что $S_\nu(T_k) = T_k$ при $\nu \geqslant k$, мы получим

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=k}^{2k} |f(x) - S_\nu(f,x)| &= \sum_{\nu=k}^{2k} |f(x) - T_k(x) - S_\nu(f - T_k, x)| \\ &\leqslant C(2k+1)\|f - T_k\|_C \\ &= C(2k+1)E_k(f), \qquad k = 0, 1, \dots . \qquad (65)\end{aligned}$$

Из (65) следует, что при $r = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{2^r} |f(x) - S_\nu(f,x)| &\leqslant CE_0(f) + C' \sum_{s=0}^{r-1} 2^s E_{2^s}(f) \\ &\leqslant C \sum_{\nu=0}^{2^{r-1}} E_\nu(f) \leqslant C \sum_{\nu=0}^{2^r} E_\nu(f). \qquad (66)\end{aligned}$$

Оценка (62) для произвольного N легко следует из (66), так как, в силу монотонного убывания чисел $E_\nu(f)$,

$$\sum_{\nu=0}^{N} E_\nu(f) \leqslant 2 \sum_{\nu=0}^{2^r} E_\nu(f) \quad \text{при} \quad 2^r \leqslant N < 2^{r+1}.$$

Теорема 8 доказана.

Следующий результат показывает, что, преобразуя данную непрерывную функцию $f(x)$ с помощью подходящей замены переменной, всегда можно получить функцию с равномерно сходящимся рядом Фурье.

Теорема 9. *Для каждой функции $f \in C(-\pi, \pi)$ найдется непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $\tau(x)$ такая, что*

$$-\pi = \tau(-\pi) < \tau(x) < \tau(y) < \tau(\pi) = \pi, \qquad -\pi < x < y < \pi, \qquad (67)$$

и ряд Фурье суперпозиции $F(x) = f(\tau(x))$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. В главе 6 (см. следствие 6.2) будет доказано, что для данной $f \in C(-\pi, \pi)$ всегда найдется непрерывная функция $\tau(x)$ с условием (67) такая, что интегральный модуль непрерывности второго порядка функции $F(x) := f(\tau(x))$ оценивается так:

$$\omega_1^{(2)}(\delta, F) = o(\delta), \qquad \delta \to 0.$$

Но тогда в силу (7)

$$|a_n(F)| + |b_n(F)| = o\Big(\frac{1}{n}\Big), \qquad n \to \infty. \tag{68}$$

Поэтому теорема 9 будет доказана, если мы проверим, что ряд Фурье каждой функции $F \in C(-\pi, \pi)$ с коэффициентами Фурье вида (68) сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Воспользуемся очевидным равенством (см. (12))

$$S_N(F,x) - \sigma_N(F,x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{N+1}\big[a_n(F)\cos nx + b_n(F)\sin nx\big]. \tag{69}$$

Из (69) вытекает, что

$$\|S_N(F) - \sigma_N(F)\|_C \leqslant \frac{1}{N+1}\sum_{n=1}^{N} n\big(|a_n(F)| + |b_n(F)|\big) = o(1), \quad N \to \infty,$$

и так как средние $\sigma_N(F,x)$ равномерно сходятся к $F(x)$, то же самое верно и для частных сумм $S_N(F,x)$. Теорема 9 доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о равномерной сходимости тригонометрического ряда при почти всех выборах знаков (см. определение 2.3). Часто бывает полезна следующая

Теорема 10. *Если для коэффициентов ряда* (60) *при некотором* $\varepsilon > 0$ *выполнено соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\ln^{1+\varepsilon} n < \infty, \tag{70}$$

то ряд (60) *сходится равномерно при п.в. выборах знаков.*

Доказательство. Предварительно условимся, что ниже через $\|f\|_U$ мы обозначаем величину

$$\|f\|_U := \sup_{1\leqslant N<\infty} \|S_N(f)\|_{C(-\pi,\pi)},$$

где, как обычно, $S_N(f)$ – N-я частная сумма ряда Фурье функции f.

В основе доказательства лежит неравенство для функции распределения произвольного полинома по системе Радемахера, полученное в гл. 2 (см. теорему 2.5):

$$m\left\{t \in (0,1) : \left|\sum_{n=1}^{N} a_n r_n(t)\right| > y\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{1/2}\right\} \leqslant 2e^{-y^2/4}, \qquad y \geqslant 0, \quad N = 1, 2, \dots . \tag{71}$$

Из (71) мы выведем, что для любых чисел $a_n, b_n, n = 1, 2, \dots, N$,

$$\mu := m\left\{t \in (0,1) : \left\|\sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r_n(t)\right\|_U > 8\left(\sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)\right)^{1/2} \ln^{1/2} N\right\} \leqslant \frac{200}{N}. \tag{72}$$

Для этого отметим, что для любого тригонометрического полинома $P(x)$ степени $\leqslant N$

$$\|P\|_{C(-\pi,\pi)} \leqslant 2 \max_{-50N^2 \leqslant k \leqslant 50N^2} \left|P\left(\frac{2\pi k}{100N^2}\right)\right|. \tag{73}$$

В самом деле, если $P'(x)$ – производная от $P(x)$, то

$$\|P'\|_C \leqslant N \sum_{n=1}^{N} \big(|a_n| + |b_n|\big) \leqslant N(2N)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)\right)^{1/2} = N^{3/2}(2\pi)^{1/2}\|P\|_2 \leqslant 2\pi N^{3/2}\|P\|_C,$$

и если $x_0 \in (-\pi, \pi)$ – такая точка, что

$$|P(x_0)| = \|P\|_C \quad \text{и} \quad x_0 \in \left[\frac{2\pi(k-1)}{100N^2}, \frac{2\pi k}{100N^2}\right),$$

то по теореме Лагранжа

$$\left|P(x_0) - P\left(\frac{2\pi k}{100N^2}\right)\right| \leqslant \frac{2\pi}{100N^2}\|P'\|_C \leqslant \frac{(2\pi)^2}{100\,N^{\frac{1}{2}}}|P(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}|P(x_0)|,$$

а значит, $\left|P\left(\frac{2\pi k}{100N^2}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2}\|P\|_C$, что доказывает оценку (73).

Пользуясь неравенствами (73) и (71) (и учитывая, что $|a\cos x + b\sin x| \leqslant (a^2+b^2)^{1/2}$), получаем

$$\mu \leqslant m\Biggl\{t\in(0,1) : \max_{\substack{k,M:\,1\leqslant M\leqslant N,\\ -50N^2\leqslant k\leqslant 50N^2}} \Biggl|\sum_{n=1}^{M}\Bigl(a_n\cos\frac{2\pi k}{100N^2} + b_n\sin\frac{2\pi k}{100N^2}\Bigr)r_n(t)\Biggr| \geqslant 4\Bigl(\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\Bigr)^{1/2}\ln^{1/2}N\Biggr\}$$

$$\leqslant 100\,N^3\max_{M,k} m\Biggl\{t\in(0,1) : \Biggl|\sum_{n=1}^{M}\Bigl(a_n\cos\frac{2\pi k}{100N^2} + b_n\sin\frac{2\pi k}{100N^2}\Bigr)r_n(t)\Biggr| \geqslant 4\Bigl(\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\Bigr)^{1/2}\ln^{1/2}N\Biggr\}$$

$$\leqslant 100\,N^3\cdot 2N^{-4} = 200\,N^{-1}.$$

Оценка (72) доказана.

Обозначим через $F(x,t)$ L^2-сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)r_n(t), \tag{74}$$

и пусть при $k=0,1,\ldots$

$$\begin{aligned} Q_k(x,t) &:= \sum_{n=2^{2^k}}^{2^{2^{k+1}}-1}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)r_n(t),\\ d_k &:= \Biggl(\sum_{n=2^{2^k}}^{2^{2^{k+1}}-1}(a_n^2+b_n^2)\Biggr)^{1/2}. \end{aligned} \tag{75}$$

В силу (72) для каждого $k=0,1,\ldots$

$$\mu_k := m\{t\in(0,1) : \|Q_k(x,t)\|_U > 8d_k 2^{(k+1)/2}\} \leqslant 200\cdot 2^{-2^k},$$

а следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k < \infty. \tag{76}$$

Из (76) следует, что для п.в. $t \in (0,1)$, начиная с некоторого номера $k(t)$,

$$\|Q_k(x,t)\|_U \leqslant 8d_k 2^{(k+1)/2}, \qquad k \geqslant k(t),$$

поэтому для п.в. $t \in (0,1)$ (см. (70), (75))

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \|Q_k(x,t)\|_U &= \sum_{k=0}^{k(t)-1} \|Q_k(x,t)\|_U + \sum_{k=k(t)}^{\infty} \|Q_k(x,t)\|_U \\ &\leqslant A(t) + 16 \sum_{k=k(t)}^{\infty} d_k 2^{k/2} \\ &= A(t) + \sum_{k=k(t)}^{\infty} d_k 2^{k(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2})} \cdot 2^{-\frac{k\varepsilon}{2}} \\ &\leqslant A(t) + \left\{ \sum_{k=k(t)}^{\infty} d_k^2 2^{k(1+\varepsilon)} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=k(t)}^{\infty} 2^{-\varepsilon k} \right\}^{1/2} < \infty \end{aligned} \tag{77}$$

(в (77) $A(t)$ – некоторая постоянная, зависящая от t, а число ε то же, что и в (70)). Так как

$$\left\| \sum_{n=2^{2^p}}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r_n(t) \right\|_U \leqslant \sum_{k=p}^{\infty} \|Q_k\|_U, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

то из (77) вытекает утверждение теоремы 10.

И неравенства (72), использованного нами при доказательстве теоремы 10, легко следует, что

$$\int_0^1 \left\| r_1(t) + \sum_{n=1}^{N} r_{2n}(t) \cos nx + r_{2n+1}(t) \sin nx \right\|_C dt \leqslant C(N \ln N)^{1/2},$$
$$N = 2, 3, \ldots . \tag{78}$$

При этом в (72), а потому и в (78), функции Радемахера можно заменить на ортонормированный набор независимых, нормально распределенных функций $\{\xi_n(t)\}_{n=1}^{2N+1}$, $t \in (0,1)$ (см. § 2.1). Это объясняется тем, что в доказательстве неравенства (72) использовалось лишь одно свойство функций Радемахера: экспоненциальная оценка (71), которая остается справедливой и для функций $\{\xi_n(t)\}$ (см. теорему 2.10). Таким образом,

$$\int_0^1 \|G_N(x,t)\|_C \, dt \leqslant C(N \ln N)^{1/2}, \qquad N = 2, 3, \ldots, \tag{79}$$

где

$$G_N(x,t) := \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1(t) + \sum_{n=1}^{N} \xi_{2n}(t)\cos nx + \xi_{2n+1}(t)\sin nx \tag{80}$$

(коэффициент при $\xi_1(t)$ выбран в (80) другим по сравнению с (78); это, очевидно, несущественно). Полезно отметить, что оценки (78) и (79) по порядку окончательны. Особенно просто это можно проверить для функций $\{\xi_n(t)\}$.

Утверждение 2. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\int_0^1 \|G_N(x,t)\|_C\,dt \geqslant c(N\ln N)^{1/2}, \qquad N = 2,3,\ldots, \tag{81}$$

где функции $G_N(x,t)$ определены равенством (80).

Доказательство. Фиксируем число N и рассмотрим набор точек

$$x_k = -\pi + \frac{2\pi k}{2N+1}, \qquad k = 1,2,\ldots,2N+1,$$

и матрицу $A_{2N+1} = \{a_{k,m}\}_{k,m=1}^{2N+1}$, где

$$a_{k,1} = \left(\frac{1}{2N+1}\right)^{1/2},$$

$$a_{k,2n} = \left(\frac{2}{2N+1}\right)^{1/2}\cos nx_k, \quad a_{k,2n+1} = \left(\frac{2}{2N+1}\right)^{1/2}\sin nx_k,$$
$$n = 1,2,\ldots,N, \qquad k = 1,2,\ldots,2N+1.$$

Матрица A_{2N+1} – ортонормированная. В самом деле, при $1 \leqslant k,k' \leqslant 2N+1$

$$\sum_{m=1}^{2N+1} a_{k,m}a_{k',m} = \frac{1}{2N+1} + \frac{2}{2N+1}\sum_{n=1}^{N}\cos n(x_k - x_{k'})$$
$$= \frac{2}{2N+1}D_N(x_k - x_{k'}) = \delta_{k,k'},$$

где $D_N(x)$ – ядро Дирихле (см. (4)), а $\delta_{k,k'} = 1$ при $k = k'$ и $\delta_{k,k'} = 0$ при $k \neq k'$. Пользуясь ортонормированностью матрицы A_{2N+1} и теоремой 2.10, мы получаем, что функции

$$f_k(t) = \left(\frac{2}{2N+1}\right)^{1/2} G_N(x_k,t), \qquad t \in (0,1), \quad k = 1,2,\ldots,2N+1,$$

также образуют набор нормально распределенных, независимых функций. Поэтому (см. равенство 2.(27)),

$$\begin{aligned}
m(E_N) &:= m\left\{t \in (0,1) : \|G_N(x,t)\|_C < \left(\frac{2N+1}{2}\ln N\right)^{1/2}\right\} \\
&\leqslant m\left\{t \in (0,1) : \max_{1\leqslant k\leqslant 2N+1} |f_k(t)| < \ln^{1/2} N\right\} \\
&= \prod_{k=1}^{2N+1}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\ln^{1/2} N}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz\right) \\
&\leqslant \left(1 - \frac{\gamma}{N}\right)^{2N+1} \leqslant \rho < 1,
\end{aligned} \tag{82}$$

где $\gamma \in (0,1)$ и $\rho < 1$ – абсолютные постоянные. Из неравенства (82) вытекает утверждение 2, так как

$$\int_0^1 \|G_N(x,t)\|_C\,dt \geqslant \left(\frac{2N+1}{2}\ln N\right)^{1/2} m\big((0,1)\setminus E_N\big) \geqslant C(N\ln N)^{1/2}.$$

Оценка снизу (81) для равномерной нормы "случайного" полинома вида (80) не является специфическим свойством тригонометрической системы и допускает обобщение. Приведем без доказательства

Утверждение 2′. *Пусть О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *удовлетворяет условию*

$$\|\varphi_n\|_{L^3} \leqslant M, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

а $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, $z \in (0,1)$, *– система независимых функций* (см. § 2.1), *причем*

$$\|f_n\|_{L^2} = 1, \quad \|f_n\|_{L^3} \leqslant M, \quad \int_0^1 f_n(z)\,dz = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда существует постоянная $c = c(M) > 0$ *такая, что при* $N = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^1 \left\|\sum_{n=1}^{N} f_n(z)\varphi_n(x)\right\|_{L^\infty} dz \geqslant c(N\ln N)^{1/2}.$$

Хотя, как отмечалось выше, оценка (78) по порядку точна, для некоторого набора знаков $\varepsilon_n = \pm 1$, $n = 1, 2, \ldots, 2N+1$, норма

$$\left\|\varepsilon_1(t) + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_{2n}\cos nx + \varepsilon_{2n+1}\sin nx\right\|_C$$

не превосходит[2)] $CN^{1/2}$. Действительно, имеет место

Теорема 11. *Существует последовательность чисел* $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ *с* $\varepsilon_n = \pm 1$, *для которой*

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n e^{inx} \right\|_{C(-\pi,\pi)} \leqslant 5N^{1/2}, \qquad N = 0, 1, \dots .$$

Лемма 1. *Пусть* $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ – *последовательность комплексных чисел, по модулю равных единице. Положим* $P_0 = Q_0 = 1$ *и*

$$P_{j+1} = P_j + z_{j+1}Q_j, \quad Q_{j+1} = P_j - z_{j+1}Q_j, \qquad j = 0, 1, \dots . \tag{83}$$

Тогда при $j = 1, 2, \dots$ *числа* P_j *и* Q_j *представимы в виде сумм:*

$$P_j = \sum_{\{\alpha_s\}} \varepsilon(\{\alpha_s\}) \prod_{s=1}^{j} z_s^{\alpha_s}, \quad Q_j = \sum_{\{\alpha_s\}} \varepsilon'(\{\alpha_s\}) \prod_{s=1}^{j} z_s^{\alpha_s}, \tag{84}$$

где суммирование в обоих случаях производится по всем возможным наборам $\{\alpha_s\}_{s=1}^{j}$ *из нулей и единиц, а* $\varepsilon(\{\alpha_s\})$ *и* $\varepsilon'(\{\alpha_s\})$ – *зависящие от набора* $\{\alpha_s\}$ *коэффициенты, равные* $+1$ *и* -1. *Кроме того,*

$$|P_j|^2 + |Q_j|^2 = 2^{j+1}, \qquad j = 0, 1, \dots . \tag{85}$$

Первая часть леммы просто проверяется по индукции. Для доказательства равенства (85) отметим, что при $j = 0$ оно, очевидно, выполнено, и так как

$$\begin{aligned} |P_{j+1}|^2 + |Q_{j+1}|^2 &= (P_j + z_{j+1}Q_j)(\overline{P}_j + \overline{z}_{j+1}\overline{Q}_j) \\ &\quad + (P_j - z_{j+1}Q_j)(\overline{P}_j - \overline{z}_{j+1}\overline{Q}_j) \\ &= 2(|P_j|^2 + |Q_j|^2), \qquad j = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

то (85) справедливо при любом $j = 1, 2, \dots$. Лемма 1 доказана.

[2)] Так как $\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_{2n} \cos nx + \varepsilon_{2n+1} \sin nx \right\|_2 = \left(\frac{2N}{\pi}\right)^{1/2}$, то эта оценка является наилучшей возможной.

Доказательство теоремы 11. Положим $z_j = z_j(x) = \exp(i2^{j-1}x)$, $j = 1, 2, \ldots$, $x \in (-\pi, \pi)$, и пусть $P_j = P_j(x)$, $Q_j = Q_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots$, определены как в лемме 1 (см. (83)). Если число $n = 0, 1, \ldots$ представлено в виде $n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2^{j-1}\alpha_j$, где $\alpha_s = 0$ или 1 при $s = 1, 2, \ldots, j-1$ и $\alpha_j = 1$ (такое представление единственно), то положим (см. (84))

$$\varepsilon_n = \varepsilon(\{\alpha_s\}_{s=1}^j), \qquad \varepsilon'_n = \varepsilon'(\{\alpha_s\}_{s=1}^j).$$

В силу (84) $P_j(x)$ и $Q_j(x)$ – тригонометрические полиномы, имеющие вид

$$P_j(x) = \sum_{n=0}^{2^j-1} \varepsilon_n e^{inx}, \qquad Q_j(x) = \sum_{n=0}^{2^j-1} \varepsilon'_n e^{inx},$$

причем (см. (85)) $\|P_j\|_C \leqslant 2^{(j+1)/2}$, $\|Q_j\|_C \leqslant 2^{(j+1)/2}$.

Из построения полиномов $P_j(x)$ и $Q_j(x)$ (см., в частности, (83)) нетрудно усмотреть, что если $p = r2^j$, $q = (r+1)2^j - 1$, $r = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$, то либо

$$\left|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n e^{inx}\right| = |P_j(x)|, \quad \text{либо} \quad \left|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n e^{inx}\right| = |Q_j(x)|.$$

Следовательно, всегда

$$\left\|\sum_{n=r2^j}^{(r+1)2^j-1} \varepsilon_n e^{inx}\right\|_C \leqslant 2^{\frac{j+1}{2}}. \tag{86}$$

Пусть теперь задано число N с $2^{p-1} < N < 2^p$, $p > 1$. Запишем N в двоичной системе: $N = \sum\limits_{s=1}^{p} \alpha_s 2^{s-1}$, где $\alpha_s = 0$ или 1 ($\alpha_p = 1$). Положим также

$$N_j = \sum_{s=p-j+1}^{p} \alpha_s 2^{s-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \qquad N_0 = 0,$$

тогда справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n e^{inx} = \sum_{j\colon \alpha_{p-j+1} \neq 0} \; \sum_{n=N_{j-1}}^{N_j-1} \varepsilon_n e^{inx} + \varepsilon_N e^{iNx}. \tag{87}$$

Так как число N_{j-1} делится на 2^{p-j} и $N_j - N_{j-1} = \alpha_{p-j+1}2^{p-j} = 2^{p-j}$ (если $\alpha_{p-j+1} \neq 0$), то для оценки внутренних сумм в (87) можно воспользоваться оценкой (86), из которой следует, что

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n e^{inx}\right| \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{p-1} 2^{\frac{j+1}{2}} \leqslant \frac{2^{\frac{p+1}{2}}}{\sqrt{2}-1} < 5N^{1/2}.$$

Теорема 11 доказана.

Замечание. Аналогичными рассуждениями, используя оценку (86), можно проверить, что для построенной в теореме 11 последовательности $\{\varepsilon_n\}$ и любых чисел M и N $(0 \leqslant M < N)$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{n=M}^{N} \varepsilon_n e^{inx} \right\|_C \leqslant C(N-M)^{1/2}.$$

В заключение параграфа рассмотрим вопрос об абсолютной сходимости рядов Фурье. Достаточные условия для абсолютной сходимости, т.е. для сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| + |b_n(f)|, \tag{88}$$

даются следующей теоремой.

Теорема 12. *Пусть функция $f \in L^2(-\pi,\pi)$ и для ее модуля непрерывности в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$ справедливо соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2(\frac{1}{n}, f)}{\sqrt{n}} < \infty;$$

тогда сумма ряда (88) *конечна.*[3)]

Доказательство. По теореме 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(2)}(f) n^{-1/2} < \infty, \tag{89}$$

причем в силу равенства Парсеваля

$$\begin{gathered} E_n^{(2)}(f) = \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k^2 \right\}^{1/2}, \\ \rho_k = \rho_k(f) := [a_k^2(f) + b_k^2(f)]^{1/2}, \qquad k = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{90}$$

Таким образом, конечна сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \right)^{1/2} n^{-1/2} < \infty,$$

---

3) Следовательно, $f(x)$ для п.в. $x \in [-\pi, \pi]$ совпадает с непрерывной функцией.

и мы получим, что

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f)|+|b_n(f)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho_n}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\rho_n}{n}$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{n=k}^{\infty}\rho_n^2\Bigr)^{1/2}\Bigl(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Bigr)^{1/2}$$
$$\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{n=k}^{\infty}\rho_n^2\Bigr)^{1/2}k^{-1/2}<\infty.$$

Теорема 12 доказана.

Отметим следующие два следствия теоремы 12.

Следствие 5. *Пусть функция $f \in C(-\pi,\pi)$ и для некоторого $\alpha > \frac{1}{2}$*

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^{\alpha}) \quad \textit{при} \quad \delta \to 0.$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится абсолютно.

Утверждение следствия 5 непосредственно вытекает из теоремы 12 и неравенства $\omega_2(\delta, f) \leqslant (2\pi)^{1/2}\omega(\delta, f)$.

Следствие 6. *Пусть функция $f \in C(-\pi,\pi)$ имеет ограниченную вариацию и, кроме того, при некотором $\gamma > 2$*

$$\omega(\delta, f) = O\Bigl(\log\frac{1}{\delta}\Bigr)^{-\gamma} \quad \textit{при} \quad \delta \to 0.$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится абсолютно.

Доказательство. Модуль непрерывности в пространстве $L^1(-\pi,\pi)$ каждой функции $f(x)$ ограниченной вариации удовлетворяет соотношению

$$\omega_1(\delta, f) = O(\delta) \quad \text{при} \quad \delta \to 0$$

(см. приложение 1, утверждение 2), поэтому при $\delta < \delta_0 < 1$

$$[\omega_2(\delta, f)]^2 = \sup_{0<h\leqslant\delta}\|f(x+h)-f(x)\|_2^2$$
$$\leqslant \sup_{0<h\leqslant\delta}\|f(x+h)-f(x)\|_C\cdot\sup_{0<h\leqslant\delta}\|f(x+h)-f(x)\|_1$$
$$\leqslant C\delta\Bigl(\log\frac{1}{\delta}\Bigr)^{-\gamma},$$

значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/2}\omega_2\Bigl(\frac{1}{n}, f\Bigr)<\infty$$

и следствие 6 вытекает из теоремы 12.

Замечание. Утверждения следствий 5 и 6 точны в том смысле, что положить в них соответственно $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\gamma = 2$ уже нельзя. Это будет непосредственно вытекать из теорем об общих ортонормированных системах, доказанных в гл. 10 (см. теорему 10.11 и следствие 10.2).

§ 5. Система Уолша. Определение и некоторые свойства

В этом параграфе мы часто будем использовать запись числа x в двоичной системе: для $x \geqslant 0$

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k(x) 2^{-k}, \quad \text{где} \quad \theta_k = 0 \text{ или } 1. \tag{91}$$

Коэффициенты $\theta_k(x)$ определяются однозначно, если дополнительно считать, что для двоично-рациональных x рассматривается разложение (91) с конечным числом ненулевых коэффициентов.

Ясно, что для $x \in (0,1)$ $\theta_k(x) = 0$ при $k \leqslant 0$. В гл. 2 отмечалась связь функций $\theta_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, с системой Радемахера и было показано, что $\{\theta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых функций на $(0,1)$ (см. 2.(14) и следствие 2.2)

Если число $n > 0$ – целое, то

$$\begin{gathered} n = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_{-k}(n) 2^k = \sum_{k=0}^{k(n)} \theta_{-k}(n) 2^k, \\ \theta_{-k(n)}(n) = 1, \qquad k(n) = [\log_2 n]. \end{gathered} \tag{92}$$

Определение 3. *Система Уолша* – это система функций

$$W = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \qquad x \in [0,1],$$

в которой $w_0(x) \equiv 1$, а при $n \geqslant 1$

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)} = r_{k(n)+1}(x) \prod_{k=0}^{k(n)-1} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)}, \tag{93}$$

где $r_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, – функции Радемахера.

Система Уолша – полная в $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, ортонормированная система функций. Попарная ортогональность функций $w_n(x)$ есть прямое следствие того факта, что система Радемахера – С.Н.Ф. (см. теорему 2.4). Для того чтобы доказать полноту системы W в $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, отметим, что из определения (93) следует, что функции $w_n(x)$, $0 \leqslant n < 2^k$, постоянны на каждом из интервалов $\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, $1 \leqslant n \leqslant 2^k$. Поэтому после изменения в конечном числе точек функции $w_n(x)$, $0 \leqslant i < 2^k$, становятся элементами пространства $\mathscr{D}_{2^k}$ и в виду их попарной ортогональности образуют базис в $\mathscr{D}_{2^k}$. Таким образом,

$$\left\{P(x) : P(x) = \sum_{n=0}^{2^k-1} a_n w_n(x)\right\} \cong \mathscr{D}_{2^k}, \qquad k = 0, 1, \dots \tag{94}$$

(знак $\cong$ означает, что $P(x) \in \mathscr{D}_{2^k}$ после изменения в конечном числе точек). Из (94), учитывая, что кусочно постоянные функции плотны в $L^p(0,1)$, сразу получаем полноту системы Уолша в $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Из определения (см. (93)) легко вытекает следующее свойство функций Уолша: для $k \geqslant 0$, $i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$

$$w_{2^k+i}(x) = r_{k+1}(x) w_i(x) = w_{2^k}(x) w_i(x), \qquad x \in [0,1]. \tag{95}$$

Для дальнейшего изучения системы Уолша введем операцию $\dot{+}$ сложения чисел, заданных в двоичной системе счисления: если $x, y \in [0, \infty)$,

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k(x) 2^{-k}, \qquad y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_k(y) 2^{-k},$$

то положим

$$x \dot{+} y := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\theta_k(x) - \theta_k(y)| 2^{-k}. \tag{96}$$

Легко видеть, что

1) если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ – целые числа, то $x \dot{+} y$ – также неотрицательное целое число;
2) если $x, y \in [0,1)$, то $x \dot{+} y \in [0,1)$.

Непосредственно из определения (96) вытекают также следующие свойства операции $\dot{+}$: если $x, y, z \in [0,1)$, то

а) $(x \dot{+} y) \dot{+} z = x \dot{+} (y \dot{+} z)$, $x \dot{+} y = y \dot{+} x$, $x \dot{+} x = 0$;
б) $|(x \dot{+} y) - x| \leqslant y$.

Кроме того, из независимости функций $\theta_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, $x \in (0,1)$, нетрудно вывести, что

в) для любой функции $f \in L^1(0,1)$ функция

$$f_y(x) := f(x \dot{+} y), \qquad x \in (0,1), \tag{97}$$

при фиксированном $y \in [0,1)$ равноизмерима на $(0,1)$ с $f(x)$ и, следовательно,

$$\int_0^1 f_y(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{98}$$

Наконец, покажем, пользуясь индукцией, что

г) для любого целого $N \geqslant 1$ с

$$N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_s}, \qquad k_1 > k_2 > \dots > k_s \geqslant 0,$$

справедливо равенство

$$\{N \dotplus j\}_{j=0}^{N-1} = \bigcup_{l=1}^{s} Q_{k_l}, \tag{99}$$

где $Q_k := \{n : 2^k \leqslant n < 2^{k+1}\}$, $k = 0, 1, \dots$.

Отметим прежде всего, что при $k = 0, 1, \dots, 0 \leqslant j < 2^k$

$$2^k \dotplus j = 2^k + j, \tag{100}$$

откуда вытекает справедливость равенства (99) для чисел N вида $N = 2^k$, $k = 0, 1, \dots$. Предположим теперь, что равенство (99) уже проверено при $N \leqslant 2^k$ $(k = 1, 2, \dots)$, и докажем его для $2^k < N < 2^{k+1}$. Пусть

$$N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_s} = 2^k + i, \qquad i = 2^{k_2} + \dots + 2^{k_s} \quad (k_1 = k).$$

Тогда

$$\{N \dotplus j\}_{j=0}^{N-1} = \{(2^k + i) \dotplus j\}_{j=0}^{2^k-1} \cup \{(2^k + i) \dotplus (2^k + p)\}_{p=0}^{i-1} =: I_1 \cup I_2. \tag{101}$$

Легко видеть, что если $j_1 \neq j_2$, $0 \leqslant j_1, j_2 < 2^k$, то $i \dotplus j_1 \neq i \dotplus j_2$ и при этом $0 \leqslant i \dotplus j_1 < 2^k$, $0 \leqslant i \dotplus j_2 < 2^k$. Отсюда вытекает, что $\{i \dotplus j\}_{j=0}^{2^k-1} = \{j\}_{j=0}^{2^k-1}$, и, используя равенства (100) и а), мы находим

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(2^k \dotplus i) \dotplus j\}_{j=0}^{2^k-1} \\ &= \{2^k \dotplus (i \dotplus j)\}_{j=0}^{2^k-1} = \{2^k + j\}_{j=0}^{2^k-1} = Q_k = Q_{k_1}. \end{aligned} \tag{102}$$

Далее, так как $(2^k + i) \dotplus (2^k \dotplus p) = i + p$, $0 \leqslant i, p < 2^k$, то по предположению индукции получим

$$I_2 = \{i \dotplus p\}_{p=0}^{i-1} = \bigcup_{l=2}^{s} Q_{k_l}. \tag{103}$$

Из соотношений (101), (102) и (103) вытекает справедливость равенства (99) для $2^k < N < 2^{k+1}$, а тем самым и для всех N.

Следующее равенство выясняет связь операции $\dot{+}$ со свойствами системы Уолша:

$$w_n(x)w_m(x) = w_{n\dot{+}m}(x), \qquad n, m \geqslant 0, \quad x \in (0,1) \setminus R_2, \tag{104}$$

где R_2 – множество двоично-рациональных точек отрезка $[0,1]$.

Равенство (104) вытекает из определения функций $w_n(x)$ (см. (93)). Действительно, учитывая, что $|r_k(x)| = 1$ при $x \in (0,1) \setminus R_2$, $k = 0, 1, \ldots$, мы получаем

$$\begin{aligned} w_n(x)w_m(x) &= \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)+\theta_{-k}(m)} \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+1}(x)]^{|\theta_{-k}(n)-\theta_{-k}(m)|} = w_{n\dot{+}m}(x). \end{aligned}$$

Докажем теперь, что при $n \geqslant 0$

$$w_n(x)w_n(y) = w_n(x \dot{+} y), \qquad \{x, y, x \dot{+} y\} \subset (0,1) \setminus R_2. \tag{105}$$

Учитывая, что $r_k(x) = (-1)^{\theta_k(x)}$ при $k = 1, 2, \ldots$ и $x \in (0,1) \setminus R_2$ (см. 2.(14)), мы, согласно (93), имеем

$$\begin{aligned} w_n(x)w_n(y) &= \prod_{k=0}^{\infty} (-1)^{\theta_{k+1}(x)\theta_{-k}(n)} (-1)^{\theta_{k+1}(y)\theta_{-k}(n)} \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} (-1)^{\theta_{-k}(n)[\theta_{k+1}(x)+\theta_{k+1}(y)]}, \quad x, y \in (0,1) \setminus R_2, \end{aligned} \tag{106}$$

и так как $(-1)^{\theta_{k+1}(x)+\theta_{k+1}(y)} = (-1)^{|\theta_{k+1}(x)-\theta_{k+1}(y)|} = (-1)^{\theta_{k+1}(x\dot{+}y)}$ (см. (96)), то из (106) получаем соотношение (105).

Каждой функции $f \in L^1(0,1)$ соответствует ее ряд Фурье по системе Уолша:

$$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) w_n(x), \qquad c_n(f) = \int_0^1 f(x) w_n(x)\, dx. \tag{107}$$

Рассмотрим некоторые свойства коэффициентов и частных сумм ряда (107). Нам потребуется

Утверждение 3. *Если* $f \in L^1(0,1)$ *и* $y \in (0,1) \setminus R_2$, *то* (см. (97))

$$c_n(f_y) = w_n(y) c_n(f), \qquad n = 0, 1, \dots .$$

Доказательство. Пользуясь свойствами а) и в) операции $\dot{+}$, мы получаем, что при $n = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} c_n(f_y) &= \int_0^1 f(x \dot{+} y) w_n(x)\, dx \\ &= \int_0^1 f\big((x \dot{+} y) \dot{+} y\big) w_n(x \dot{+} y)\, dx \\ &= \int_0^1 f(x) w_n(x \dot{+} y)\, dx, \end{aligned}$$

и, учитывая, что при фиксированном $y \in (0,1) \setminus R_2$ равенство (105) выполняется для п.в. $x \in (0,1)$, находим

$$c_n(f_y) = w_n(y) \int_0^1 f(x) w_n(x)\, dx = w_n(y) c_n(f).$$

Следствие 7. *Для коэффициентов Фурье–Уолша функции* $f \in C(0,1)$ *имеет место оценка*

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2}\, \omega(\frac{1}{n}, f), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Доказательство. Пусть $n = 2^k + i$ ($k = 0, 1, \dots, i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$) и $y \in (2^{-k-1}, 2^{-k}) \setminus R_2$. Из (93) видно, что тогда $w_n(y) = -1$ и, в силу утверждения 3,

$$c_n(f_y) = -c_n(f), \qquad 2^k \leqslant n < 2^{k+1}, \quad y \in (2^{-k-1}, 2^{-k}) \setminus R_2. \tag{108}$$

Поэтому (см. также б)) для любого $y \in (2^{-k-1}, 2^{-k}) \setminus R_2$

$$|c_n(f)| = \frac{1}{2} |c_n(f) - c_n(f_y)| \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 |f(x) - f(x \dot{+} y)|\, dx \leqslant \frac{1}{2}\, \omega(y, f),$$

откуда сразу следует, что

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2}\, \omega(2^{-k-1}, f) \leqslant \frac{1}{2}\, \omega\Big(\frac{1}{n}, f\Big).$$

С помощью аналогичных рассуждений доказывается и следующий результат об абсолютной сходимости ряда коэффициентов Фурье–Уолша функции $f(x)$.

Теорема 13. *Пусть* $f \in C(0,1)$ *и* $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$ $(\delta \to 0)$ *при некотором* $\alpha > \frac{1}{2}$. *Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f)| < \infty.$$

Доказательство. Пусть $k = 0, 1, \ldots$, $y \in (2^{-k-1}, 2^{-k})$ и $g_y(x) = f(x) - f(x \dot{+} y) = f(x) - f_y(x)$, $x \in (0,1)$. Тогда в силу (108) $c_n(g_y) = 2c_n(f)$ при $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, и следовательно,

$$\begin{aligned}\delta_k := \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n^2(f) = \frac{1}{4} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n^2(g_y) \\ \leqslant \frac{1}{4} \int_0^1 g_y^2(x)\, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 [f(x) - f(x \dot{+} y)]^2\, dx\end{aligned}$$

(мы использовали здесь неравенство Бесселя). Из последнего соотношения, учитывая оценку б), выводим, что

$$\delta_k \leqslant \frac{1}{4} \omega^2(y, f) \leqslant \omega^2(2^{-k}, f), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

а значит, по неравенству Коши

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |c_n(f)| \leqslant 2^{k/2} \delta_k^{1/2} \leqslant 2^{k/2} \omega(2^{-k}, f), \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{109}$$

Суммируя оценки (109) и используя условие теоремы, согласно которому $\omega(2^{-k}, f) \leqslant C 2^{-k\alpha}$, $\alpha > \frac{1}{2}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)| \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2} \cdot 2^{-k\alpha} < \infty.$$

Теорема 13 доказана.

Рассмотрим теперь функции Лебега системы Уолша:

$$L_N(x) = \int_0^1 |K_N(x, y)| dy, \ \ K_N(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n(x) w_n(y), \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Из (105) следует, что при $x \in (0,1) \setminus R_2$ для п.в. $y \in (0,1)$

$$K_N(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n(x \dot{+} y), \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

и если положить $D_N^W(t) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} w_n(t)$, $t \in (0,1)$, то (см. (97), (98))

$$L_N(x) = \int_0^1 |D_N^W(x \dot{+} y)|\, dy = \int_0^1 |D_N^W(t)|\, dt = L_N, \qquad x \in (0,1) \setminus R_2.$$

Таким образом, функции Лебега системы Уолша не зависят от x при $x \in (0,1) \setminus R_2$. Отметим также, что $w_n(x) = 0$ при $x \in R_2$, $n > N(x)$, а потому для функций Лебега в точке $x \in R_2$ выполнено соотношение $L_N(x) = L_{N(x)}(x)$ при $N > N(x)$.

В силу (95) при $t \in (0,1)$ и $k \geqslant 1$ мы имеем

$$\begin{aligned} r_k(t) D_{2^{k-1}}^W(t) &= \sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} r_k(t) w_n(t) \\ &= \sum_{n=0}^{2^{k-1}-1} w_{2^{k-1}+n}(t) = \sum_{n \in Q_{k-1}} w_n(t). \end{aligned} \tag{110}$$

Поэтому

$$D_{2^k}^W(t) = D_{2^{k-1}}^W(t) + \sum_{n \in Q_{k-1}} w_n(t) = D_{2^{k-1}}^W(t)[1 + r_k(t)],$$

откуда, учитывая, что $\mathrm{D}_1^W(t) = w_0(t) \equiv 1$, мы получаем

$$D_{2^k}^W(t) = \prod_{s=1}^{k} [1 + r_s(t)], \qquad t \in (0,1). \tag{111}$$

Непосредственно из определения Функций Радемахера (см. определение 2.3) и равенства (111) следует, что при $k = 0, 1, \ldots$

$$D_{2^k}^W(t) = \begin{cases} 2^k, & \text{если } t \in (0, 2^{-k}), \\ 0, & \text{если } t \in (2^{-k}, 1), \end{cases} \qquad t \neq \frac{i}{2^k}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2^k, \tag{112}$$

и для $x \in (0,1) \setminus R_2$

$$L_{2^k}(x) = L_{2^k} = \int_0^1 |D_{2^k}^W(t)|\,dt = 1, \qquad k = 0, 1, \dots . \tag{113}$$

Оценим теперь константы L_N для произвольного N. Пусть

$$N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_s}, \qquad k_1 > k_2 > \dots > k_s \geqslant 0.$$

Тогда, в силу равенств (104) и (99) (см. также (110)), для $t \in (0,1) \setminus R_2$ имеем

$$\begin{aligned} w_N(t) D_N^W(t) &= \sum_{n=0}^{N-1} w_N(t) w_n(t) = \sum_{n=0}^{N-1} w_{N \dot{+} n}(t) \\ &= \sum_{l=1}^{s} \sum_{n \in Q_{k_l}} w_n(t) = \sum_{l=1}^{s} r_{k_l+1}(t) D_{2^{k_l}}^W(t). \end{aligned} \tag{114}$$

Из (113) и(114) вытекает, что

$$L_N = \int_0^1 |D_N^W(t)|\,dt = \int_0^1 |w_N(t) D_N^W(t)|\,dt \leqslant \sum_{l=1}^{s} \int_0^1 |D_{2^{k_l}}^W(t)|\,dt = s,$$

и так как $s \leqslant [\log_2 N] + 1$, то тем самым нами доказана оценка

$$L_N \leqslant [\log_2 N] + 1, \qquad N = 1, 2, \dots . \tag{115}$$

С другой стороны,

$$\varlimsup_{N \to \infty} \frac{L_N}{\log_2 N} > 0. \tag{116}$$

Докажем неравенство (116). Положим $N_p = \sum\limits_{k=0}^{p} 2^{2k}$, $p = 1, 2, \dots$; тогда, используя равенство (см. (112)) $r_{k+1}(t) D_{2^k}^W(t) = 2^{k/2} \chi_k^{(1)}(t)$, где $\{\chi_k^{(i)}\}$ – система Хаара и $t \in (0,1) \setminus R_2$, мы из (114) получаем, что

$$w_{N_p}(t) D_{N_p}^W(t) = \sum_{k=0}^{p} r_{2k+1}(t) D_{2^{2k}}^W(t) = \sum_{k=0}^{p} 2^k \chi_{2k}^{(1)}(t), \qquad t \in (0,1) \setminus R_2. \tag{117}$$

В гл. 3 (см. 3.(44)) нами было проверено, что $\left\| \sum\limits_{k=0}^{p} 2^k \chi_{2^k}^{(1)} \right\|_1 \geqslant p/4$, поэтому (см. (117))

$$L_{N_p} = \int_0^1 |w_{N_p}(t) D_{N_p}^W(t)|\, dt \geqslant \frac{p}{4} > \frac{\log_2 N_p}{10} \quad \text{при} \quad p > p_0,$$

что доказывает (116) (обобщение оценки (116) см. в § 10.3).

Следует отметить, что использование связи между системами Хаара и Уолша сильно упрощает изучение вопросов сходимости рядов по системе Уолша. Особенно часто оказывается полезным равенство: для $f \in L^1(0,1)$ и $k = 0, 1, \ldots$

$$S_{2^k}(f, W, x) := \sum_{n=0}^{2^k - 1} c_n(f) w_n(x) = S_{2^k}(f, \chi, x), \quad x \neq \frac{i}{2^k}, \ 0 \leqslant i \leqslant 2^k, \tag{118}$$

где в (118) слева стоит частная сумма ряда Фурье–Уолша, а справа – частная сумма ряда Фурье–Хаара функции $f(x)$.

Так как множества полиномов порядка 2^k по системе Хаара и по системе Уолша совпадают (см. (94) и утверждение 3.1), то равенство (118) для $f \in L^2(0,1)$ сразу следует из утверждения 1.5. Выбрав затем для любой $f \in L^1(0,1)$ последовательность функций $\{f_j\} \subset L^2(0,1)$ с $\|f_j - f\|_1 \to 0$ при $j \to \infty$, мы получим

$$S_{2^k}(f, W, x) = \lim_{j \to \infty} S_{2^k}(f_j, W, x) = \lim_{j \to \infty} S_{2^k}(f_j, \chi, x) = S_{2^k}(f, \chi, x),$$

если $x \neq i/2^k, 0 \leqslant i \leqslant 2^k$, что доказывает равенство (118) в общем случае.

С помощью соотношений (115) и (118) докажем, что справедлива

Теорема 14. *Для $f \in C(0,1)$ и $x \in (0,1) \setminus R_2$ имеет место неравенство*

$$|S_N(f, x) - f(x)| \leqslant C\, \omega\Big(\frac{1}{N}, f\Big) \ln N, \qquad N = 2, 3, \ldots,$$

где $S_N(f, x) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} c_n(f) w_n(x)$ – частная сумма ряда (107), *а C – абсолютная постоянная.*

Доказательство. Пусть $N = 2^k + i$, $k = 1, 2, \ldots, 0 \leqslant i < 2^k$. В силу (118) при $x \in (0,1) \setminus R_2$

$$\begin{aligned} S_N(f, x) - f(x) &= S_N(f, x) - S_{2^k}(f, x) + S_{2^k}(f, x) - f(x) \\ &= S_N(f - S_{2^k}(f), x) + S_{2^k}(f, \chi, x,) - f(x). \end{aligned} \tag{119}$$

По теореме 3.2

$$\|S_{2^k}(f,\chi,x) - f(x)\|_C \leqslant 3\,\omega\Big(\frac{1}{2^k}, f\Big). \tag{120}$$

Используя затем оценку (115) и равенство 1.(17), мы получаем, что при $x \in (0,1) \setminus R_2$

$$\begin{aligned} |S_N(f - S_{2^k}(f), x)| &\leqslant L_N \|f - S_{2^k}(f)\|_\infty \\ &\leqslant 2\log_2 N\, \|f - S_{2^k}(f,\chi)\|_\infty \\ &\leqslant 6\log_2 N\, \omega(2^{-k}, f). \end{aligned} \tag{121}$$

Так как $\omega(2^{-k}, f) \leqslant 2\omega(2^{-k-1}, f) \leqslant 2\omega\Big(\frac{1}{N}, f\Big)$, то, складывая оценки (120 и (121) (см. также (119)), мы получаем утверждение теоремы 14.

Следствие 8. *Если* $f \in C(0,1)$ *и* $\omega(\delta, f) = o\Big(\ln^{-1}\frac{1}{\delta}\Big)$ *при* $\delta \to 0$, *то ряд Фурье–Уолша функции* $f(x)$ *сходится к ней равномерно на множестве* $(0,1) \setminus R_2$.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости рядов Фурье–Уолша в пространствах $L^p(0,1)$. Прежде всего отметим, что в силу неравенства (116) (см. также замечание после теоремы 1.8) система Уолша не является базисом в $L^1(0,1)$, т.е. найдется функция $f \in L^1(0,1)$, для которой ряд (107) не сходится в $L^1(0,1)$. Иначе обстоит дело для пространств $L^p(0,1)$ при $1 < p < \infty$. Имеет место

Теорема 15. *Система Уолша – базис в* $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

Доказательство. Пусть $g \in L^p(0,1)$, рассмотрим сгруппированный ряд по системе Уолша:

$$c_0(g)w_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} E_k(g,x), \qquad E_k(g,x) := \sum_{n \in Q_k} c_n(g) w_n(x). \tag{122}$$

В силу (118) $E_k(g,x)$ – полином по системе Хаара:

$$E_k(g,x) = S_{2^{k+1}}(g,\chi,x) - S_{2^k}(g,\chi,x) = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} d_n(g)\chi_n(x),$$

где $d_n(g)$ – коэффициенты Фурье–Хаара функции $g(x)$. Поэтому, учитывая, что

$$E_k^2(g,x) = \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} d_n^2(g)\chi_n^2(x),$$

и пользуясь теоремой 3.9, мы получим, что для любого набора целых чисел $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_s$

$$\left\|\sum_{l=1}^{s} E_{k_l}(g,x)\right\|_p \leqslant C_p \left\|\left\{\sum_{l=1}^{s} E_{k_l}^2(g,x)\right\}^{1/2}\right\|_p$$
$$\leqslant C_p \left\|\left\{\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2(g)\chi_n^2(x)\right\}^{1/2}\right\|_p \leqslant C_p'\|g\|_p. \quad (123)$$

Оценку (123) мы используем при доказательстве следующего неравенства: для любой функции $f \in L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$,

$$\|S_N(f,W,x)\|_p \leqslant C_p\|f\|_p, \qquad N = 1,2,\dots . \quad (124)$$

Так как система Уолша минимальна (см. утверждение 1.4) и полна в $L^p(0,1)$, то из (124) в силу теоремы 1.6 сразу вытекает утверждение теоремы 15.

Пусть $N \geqslant 1$ фиксировано и $N = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_s}$, $k_1 > k_2 > \cdots > k_s \geqslant 0$. Положим $g(x) = w_N(x)f(x)$. Из (104) следует, что при $n = 0,1,\dots$

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x)w_N(x)w_n(x)\,dx = \int_0^1 g(x)w_{N\dot{+}n}(x)\,dx = c_{N\dot{+}n}(g),$$

и, согласно (99) и (104) (см. также (122)), мы получаем, что

$$w_N(x)S_N(f,W,x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n(f)w_N(x)w_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_{N\dot{+}n}(g)w_{N\dot{+}n}(x)$$
$$= \sum_{l=1}^{s}\sum_{n\in Q_{k_l}} c_n(g)w_n(x) = \sum_{l=1}^{s} E_{k_l}(g,x).$$

Используя последнее равенство и оценку (123), находим

$$\|S_N(f,W,x)\|_p = \|w_N(x)S_N(f,W,x)\|_p \leqslant C_p'\|g\|_p = C_p'\|f\|_p.$$

Неравенство (124), а значит, и теорема 15 доказаны.

Замечание. Как мы видели, многие утверждения о сходимости тригонометрических рядов оказались справедливыми и для рядов Фурье–Уолша. Наличие аналогичных свойств у тригонометрической системы и системы Уолша не случайно и во многом обусловлено тем, что обе эти системы являются так называемыми системами характеров. За недостатком места мы не будем здесь вдаваться в подробности.

Глава 5
Преобразование Гильберта и некоторые пространства функций

§ 1. Преобразование Гильберта

Определение 1. *Преобразованием Гильберта функции* $f \in L^1_{\frac{1}{1+|x|}}(\mathbb{R}^1)$[1] называется функция

$$T(f,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}\,dt := \lim_{\delta\to+0} \int_{\{t:|t-x|>\delta\}} \frac{f(t)}{x-t}\,dt. \tag{1}$$

Аналогично определяется *преобразование Гильберта произвольной меры* μ с ограниченным изменением на $\mathbb{R}^1$:

$$T(\mu,x) := \lim_{\delta\to+0} \int_{\{t:|t-x|>\delta\}} \frac{1}{x-t}\,d\mu(t).$$

Свойства преобразования Гильберта, рассмотрению которых и посвящен этот параграф, играют важнейшую роль в вопросах сходимости тригонометрических рядов, а вследствие этого и при изучении многих функциональных пространств. В гл. 9 и 11 будет показано, что свойства преобразования Гильберта весьма полезны и в теории общих ортогональных рядов.

---

[1] Через $L^1_{\frac{1}{1+|x|}}(\mathbb{R}^1)$ обозначается совокупность всех таких функций $f(x)$, что $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|}{1+|x|}\,dx < \infty$. Легко видеть, что $L^p(\mathbb{R}^1) \subset L^1_{\frac{1}{1+|x|}}(\mathbb{R}^1)$ для любого p, $1 \leqslant p < \infty$.

Ниже мы докажем, что в случае, когда $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant p < \infty$, предел в (1) существует и конечен для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$, но прежде всего отметим, что из определения 1 вытекают соотношения:

а) если $g(x) = f(x+a)$, $a \in \mathbb{R}^1$, то

$$T(g,x) = \lim_{\delta\to+0} \int_{\{t:|t-x|>\delta\}} \frac{f(t+a)}{x-t}\,dt = T(f, x+a); \tag{2}$$

б) если $g'(x) = f(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, то

$$T(g',x) = (\operatorname{sign}\lambda) T(f, \lambda x). \tag{3}$$

В самом деле, при $\lambda = 0$ $g'(x) = \text{const}$ и, согласно (1), $T(g',x) \equiv 0$. При $\lambda \neq 0$

$$T(g',x) = \lim_{\delta\to+0} (\operatorname{sign}\lambda) \int_{\{z:|z-\lambda x|>|\lambda\delta|\}} \frac{f(z)}{\lambda x - z}\,dz = (\operatorname{sign}\lambda) T(f, \lambda x).$$

Пример характеристической функции интервала $(0,1)$ – $\chi_{(0,1)}(x)$, для которой

$$T(\chi_{(0,1)}, x) = \int_0^1 \frac{dt}{x-t} = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|, \qquad x \in \mathbb{R}^1, \quad x \neq 0, 1, \tag{4}$$

показывает, что преобразование Гильберта функции из пространства $L^1(\mathbb{R}^1)$ может не принадлежать этому пространству. Тем не менее имеет место

Теорема 1. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$ предел (1) существует и конечен. При этом оператор $T\colon f \to T(f)$ имеет слабый тип $(1,1)$, т.е.*

$$m\{x \in \mathbb{R}^1 : |T(f,x)| > y\} \leqslant \frac{64}{y} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}, \qquad y > 0. \tag{5}$$

Лемма 1 (основная). *Пусть $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \infty$, δ_a – мера, сосредоточенная в точке $a \in \mathbb{R}^1$ с $\delta_a(a) = 1$, и*

$$\mu = \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_{a_j}, \qquad \mu_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда при любом $y > 0$

$$m\{x \in \mathbb{R}^1 : T(\mu, x) > y\} = \frac{1}{y} \sum_{j=1}^n \mu_j = m\{x \in \mathbb{R}^1 : T(\mu, x) < -y\}. \tag{6}$$

Доказательство. Легко видеть, что функция

$$T(\mu, x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{x-a_j}, \qquad x\neq a_j, \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{7}$$

монотонно убывает в каждом из интервалов (a_j, a_{j+1}), $j=0,1,\ldots,n$ (где $a_0=-\infty$, $a_{n+1}=+\infty$), и, кроме того,

а) $\lim\limits_{x\to a_j+0} T(\mu,x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a_j-0} T(\mu,x)=-\infty$, $j=1,2,\ldots,n$;

б) $T(\mu,x)<0$ при $x\in(-\infty,a_1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} T(\mu,x)=0$;

в) $T(\mu,x)>0$ при $x\in(a_n,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} T(\mu,x)=0$.

Следовательно, в каждом из интервалов (a_j,a_{j+1}), $j=1,2,\ldots,n$, существует единственная точка x_j, в которой $T(\mu,x_j)=y$ и

$$m(E):=m\{x\in\mathbb{R}^1 : T(\mu,x)>y\}=\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)=\sum_{j=1}^{n}x_j-\sum_{j=1}^{n}a_j. \tag{8}$$

Так как числа x_j – корни уравнения $T(\mu,x)=y$, а значит (см. (7)), и уравнения

$$\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)-\frac{1}{y}\sum_{j=1}^{n}\mu_j\prod_{1\leqslant i\leqslant n,\ i\neq j}(x-a_i)=0, \tag{9}$$

то по теореме Виета сумма $\sum\limits_{j=1}^{n}-x_j$ равна коэффициенту при x^{n-1} полинома (9), т.е.

$$-\sum_{j=1}^{n}x_j=-\sum_{j=1}^{n}a_j-\frac{1}{y}\sum_{j=1}^{n}\mu_j,$$

откуда в силу (8) следует, что $m(E)=\dfrac{1}{y}\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j$. Совершенно аналогично проверяется и второе равенство в (6). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $E\subset\mathbb{R}^1$ – компактное множество и $\{I_\alpha\}$ – покрытие множества E интервалами I_α. Тогда из семейства $\{I_\alpha\}$ можно выбрать такой конечный набор попарно непересекающихся интервалов $\{I_j\}_{j=1}^{n}$, что*

$$\sum_{j=1}^{n}|I_j|\geqslant\frac{1}{2}\,m(E).$$

Доказательство (см. также лемму 1 из приложения 1). В силу компактности множества E из семейства $\{I_\alpha\}$ можно выбрать конечное покрытие $\{I_s\}_{s=1}^N$, $I_s = (a_s, b_s)$, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_N$. Как нетрудно понять, мы можем считать (удаляя, если надо, из набора $\{I_s\}_{s=1}^N$ лишние интервалы), что каждая точка оси принадлежит не более чем двум интервалам I_s. Тогда наборы $\{I_{2s-1}\}$, $1 \leqslant 2s-1 \leqslant N$, и $\{I_{2s}\}$, $1 \leqslant 2s \leqslant N$, состоят из попарно непересекающихся интервалов, и так как $\sum\limits_{s=1}^{N} |I_s| \geqslant m(E)$, то один из этих наборов удовлетворяет требованиям леммы.

Пусть для $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и $\delta > 0$

$$T_\delta(f,x) := \int_{\{t:|t-x|>\delta\}} \frac{f(t)}{x-t}\,dt, \qquad T^*(f,x) := \sup_{\delta>0} |T_\delta(f,x)|. \tag{10}$$

Лемма 3. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ при $y > 0$ справедливо неравенство*

$$m\bigl\{x \in \mathbb{R}^1 : T^*(f,x) \geqslant y\bigr\} \leqslant \frac{64}{y}\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}.$$

Доказательство. Пусть сначала $f(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, и $y > 0$ фиксированы. Положим при $\delta > 0$

$$E_\delta^+ := \Bigl\{x \in \mathbb{R}^1 : \sup_{\varepsilon \geqslant \delta} T_\varepsilon(f,x) \geqslant y\Bigr\}, \quad E_\delta^- := \Bigl\{x \in \mathbb{R}^1 : \inf_{\varepsilon \geqslant \delta} T_\varepsilon(f,x) \leqslant -y\Bigr\}.$$

Легко видеть, что множества E_δ^+ и E_δ^- компактны (ограниченность множеств следует из того, что для любого x и $A > 0$

$$|T_\varepsilon(f,x)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{x-A}^{x+A} |f(t)|\,dt + \frac{1}{A}\,\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}$$

(см. (10)), а значит, $|T_\varepsilon(f,x)| < y$ при $\varepsilon \geqslant \delta > 0$ и достаточно больших x).

Для каждой точки $x \in E_\delta^+$ найдется интервал $I = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $\varepsilon = \varepsilon(x) \geqslant \delta$, для которого

$$\int_{\mathbb{R}^1 \setminus I} \frac{f(t)}{x-t}\,dt \geqslant y.$$

Из покрытия множества E_δ^+ интервалами I можно, в силу компактности E_δ^+ и леммы 2, выбрать конечное число попарно непересекающихся интервалов $\{I_j\}_{j=1}^n$ таких, что

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad m(E_\delta^+) \leqslant 2\sum_{j=1}^n |I_j|; \\ &\text{б)}\quad \int_{\mathbb{R}^1\setminus I_j} \frac{f(t)}{c\,(I_j)-t}\,dt \geqslant y, \quad j=1,2,\ldots,n \end{aligned} \tag{11}$$

(через $c\,(I)$ мы обозначаем центр интервала I).

Учитывая равномерную непрерывность функции $(x-t)^{-1}$ на множестве $\{t : |t-x| \geqslant \delta\}$, легко понять, что для любого $\rho > 0$ найдется такое число $\alpha = \alpha(\rho) > 0$, что, разбив действительную ось на интервалы $\omega_s = ((s-1)\alpha, s\alpha)$, $s = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, мы при $j = 1, 2, \ldots, n$ будем иметь

$$\left| \int_{\mathbb{R}^1\setminus I_j} \frac{f(t)}{c(I_j)-t}\,dt - \sum_{s:\, c(\omega_s)\notin I_j} \frac{1}{c(I_j)-c(\omega_s)} \int_{\omega_s} f(t)\,dt \right| < \rho y. \tag{12}$$

Пусть

$$g(x) := \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\int_{\omega_s} f(t)\,dt}{x-c(\omega_s)}, \qquad g_j(x) := \sum_{s:\, c(\omega_s)\in I_j} \frac{\int_{\omega_s} f(t)\,dt}{x-c(\omega_s)}.$$

Ясно, что функция

$$g(x) - g_j(x) = \sum_{s:\, c(\omega_s)\notin I_j} \frac{\int_{\omega_s} f(t)\,dt}{x-c(\omega_s)}$$

монотонно убывает на I_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. При этом, в силу неравенств (11), б) и (12), $g(x) - g_j(x) > y(1-\rho)$ при $x = c\,(I_j)$, а значит, и на всей левой половине интервала I_j:

$$g(x) - g_j(x) > y(1-\rho), \qquad x \in I_j, \quad x \leqslant c\,(I_j). \tag{13}$$

Из (13) следует, что при $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{|I_j|}{2} \leqslant m\Big\{x \in I_j : g(x) > \frac{y}{2}(1-\rho)\Big\} + m\Big\{x \in I_j : g_j(x) < -\frac{y}{2}(1-\rho)\Big\}. \tag{14}$$

Складывая неравенства (14) при $j = 1, 2, \ldots, n$ и учитывая, что для любого $\alpha > 0$

$$m\{x \in I_j : g(x) > \alpha\} = \lim_{N\to\infty} m\left\{x \in I_j : \sum_{s=-N}^{N} \frac{\int_{\omega_s} f(t)\,dt}{x - c(\omega_s)} > \alpha\right\},$$

мы получим, что

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} |I_j| \leqslant \varlimsup_{N\to\infty} m\left\{x \in \mathbb{R}^1 : \sum_{s=-N}^{N} \frac{\int_{\omega_s} f(t)\,dt}{x - c(\omega_s)} > \frac{y}{2}(1-\rho)\right\}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} m\left\{x \in \mathbb{R}^1 : g_j(x) < -\frac{y}{2}(1-\rho)\right\}. \tag{15}$$

Из (15) и леммы 1 сразу следует, что

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} |I_j| \leqslant \frac{2}{y(1-\rho)} \int_{\mathbb{R}^1} f(t)\,dt + \frac{2}{y(1-\rho)} \int_{\mathbb{R}^1} f(t)\,dt.$$

Устремляя в этом неравенстве число ρ к нулю (см. также (11), a)), получим

$$m(E_\delta^+) \leqslant \frac{16}{y} \int_{\mathbb{R}^1} f(t)\,dt. \tag{16}$$

Аналогично проверяется, что

$$m(E_\delta^-) \leqslant \frac{16}{y} \int_{\mathbb{R}^1} f(t)\,dt. \tag{16$'$}$$

Из соотношений (16) и (16$'$) (справедливых при любом $\delta > 0$) вытекает, что для любой неотрицательной функции $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$

$$m\{x \in \mathbb{R}^1 : T^*(f, x) \geqslant y\} \leqslant \frac{32}{y} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}, \qquad y > 0. \tag{17}$$

Если теперь функция $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ произвольного знака, то, представляя ее в виде $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, где

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f^-(x) = f^+(x) - f(x),$$

и пользуясь тем, что

$$\|f^+\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} + \|f^-\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^1)},$$
$$\{x \in \mathbb{R}^1 : T^*(f, x) \geqslant y\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^1 : T^*(f^+, x) \geqslant \frac{y}{2}\right\}$$
$$\cup \left\{x \in \mathbb{R}^1 : T^*(f^-, x) \geqslant \frac{y}{2}\right\},$$

мы из неравенства (17) получим утверждение леммы 3.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$ существует конечный предел (см. (1) и (10))

$$T(f,x) = \lim_{\delta\to+0} T_\delta(f,x).$$

Представим функцию $f(x)$ в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где f_1 – кусочно постоянная функция, а $\|f_2\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} \leqslant \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{\delta,\delta'\to+0}} &|T_\delta(f,x) - T_{\delta'}(f,x)| \\ &\leqslant \overline{\lim_{\delta,\delta'\to+0}} |T_\delta(f_1,x) - T_{\delta'}(f_1,x)| + \overline{\lim_{\delta,\delta'\to0}} |T_\delta(f_2,x) - T_{\delta'}(f_2,x)|. \quad (18)\end{aligned}$$

Так как f_1 кусочно постоянна, то в правой части оценки (18) первое слагаемое равно нулю для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$. Кроме того, в силу леммы 3, для любого $y > 0$

$$\begin{aligned}m\Big\{x \in \mathbb{R}^1 : \overline{\lim_{\delta,\delta'\to+0}} |T_\delta(f_2,x) - T_{\delta'}(f_2,x)| > y\Big\}& \\ \leqslant m\Big\{x \in \mathbb{R}^1 : T^*(f_2,x) > \frac{y}{2}\Big\} \leqslant \frac{128\varepsilon}{y}&,\end{aligned}$$

и так как число $\varepsilon > 0$ в последней оценке может быть взято произвольно малым, то для любого $y > 0$

$$m\Big\{x \in \mathbb{R}^1 : \overline{\lim_{\delta,\delta'\to+0}} |T_\delta(f,x) - T_{\delta'}(f,x)| > y\Big\} = 0,$$

т.е. предел (1) существует и конечен для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$. Но тогда неравенство (5) сразу следует из леммы 3. Теорема 1 доказана.

Замечание. Теорему 1 можно было доказывать и методом, аналогичным примененному при доказательстве неравенства слабого типа в теореме 3.7.

Из теоремы 1 (см. (5)) непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если последовательность функций $f_n \in L^1(\mathbb{R}^1)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится по норме пространства $L^1(\mathbb{R}^1)$ к $f(x)$, то последовательность $T(f_n,x)$ сходится по мере к функции $T(f,x)$.*

Следствие 2. *Для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant p < \infty$, преобразование Гильберта (см. (1)) существует и конечно при п.в. $x \in \mathbb{R}^1$.*

Действительно, пусть при $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } t \in (N, N+1), \\ 0, & \text{при } t \notin (N, N+1), \end{cases}$$

тогда для $x \in (N, N+1)$

$$T(f, x) = T(f_N, x) + \int_{N+1}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}\,dt + \int_{-\infty}^{N} \frac{f(t)}{x-t}\,dt. \tag{19}$$

Применяя неравенство Гёльдера, мы получим, что

$$\left|\int_{N+1}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}\,dt\right| + \left|\int_{-\infty}^{N} \frac{f(t)}{x-t}\,dt\right| \leqslant 2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \left\{\int_{\mathbb{R}^1 \setminus (N,N+1)} |x-t|^{-q}\,dt\right\}^{1/q} < \infty \tag{20}$$

для любого $x \in (N, N+1)$ (здесь $1/p + 1/q = 1$). Так как $f_N \in L^1(\mathbb{R}^1)$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и, значит, по теореме 1 преобразование Гильберта $T(f_N, x)$ существует и конечно для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$, то из соотношений (19) и (20) вытекает утверждение следствия 2.

Следующий результат показывает, что преобразование Гильберта – ограниченный оператор в $L^p(\mathbb{R}^1)$ при $1 < p < \infty$.

Теорема 2. *Для произвольной функции $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$, справедливо неравенство*

$$\|T(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}, \tag{21}$$

где постоянная C_p зависит только от числа p.

Доказательство теоремы 2 разобьем на несколько шагов. Прежде всего отметим, что (см. (4))

$$\|T(\chi_{(0,1)})\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} = c_0 < \infty,$$

а следовательно (см. (2), (3)), для характеристической функции $\chi_\omega(x)$ произвольного интервала $\omega \subset \mathbb{R}^1$ имеет место равенство

$$\|T(\chi_\omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} = c_0 |\omega|^{1/2} = c_0 \|\chi_\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}. \tag{22}$$

Докажем теперь неравенство (21) при $p = 2$ для "простых" функций $f(x)$ вида

$$f(x) = a_i \quad \text{при} \quad x \in \omega_i = (ih, (i+1)h), \quad h > 0, \quad i = 0, \pm 1, \ldots, \tag{23}$$

где только конечное число чисел a_i отлично от нуля. Для этого нам потребуется

Лемма 1. *Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что для любой финитной*[2] *последовательности $\{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ справедливы неравенства*

$$\left\{\sup_{\{b_j\}:\ \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} b_j^2=1}\ \sum_{\substack{i,j=-\infty\\ i\neq j}}^{\infty} \frac{a_i b_j}{(j-i)^s}\right\}^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{\substack{i=-\infty\\ i\neq j}}^{\infty}\frac{a_i}{(j-i)^s}\right]^2 \leqslant C\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^2, \quad s=1,2. \tag{24}$$

Доказательство. При $s = 2$ мы имеем

$$\left|\sum_{\substack{i,j=-\infty\\ i\neq j}}^{\infty}\frac{a_i b_j}{(j-i)^2}\right| = \left|\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i b_{i+k}\right|,$$

откуда, учитывая, что при любом k

$$\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i b_{i+k}\right| \leqslant \left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_{i+k}^2\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^2\right\}^{1/2},$$

мы получаем оценку (24) при $s = 2$. При $s = 1$ используем равенство

$$I \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i=-\infty\\ i\neq j}}^{\infty}\frac{a_i}{j-i}\right)^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\ \sum_{\substack{\nu,\mu=-\infty\\ \nu\neq j,\ \mu\neq j}}^{\infty}\frac{a_\nu a_\mu}{(j-\nu)(j-\mu)} = \sum_{\nu,\mu=-\infty}^{\infty} a_\nu a_\mu \sum_{\substack{j=-\infty\\ j\neq\nu,\mu}}^{\infty}\frac{1}{(j-\nu)(j-\mu)}. \tag{25}$$

Учитывая, что при $j \neq \mu$, $j \neq \nu$, $\mu \neq \nu$

$$\frac{1}{(j-\nu)(j-\mu)} = \frac{1}{\nu-\mu}\left[\frac{1}{j-\nu} - \frac{1}{j-\mu}\right],$$

мы получим, что коэффициент при $a_\nu a_\mu$ $(\nu \neq \mu)$ в правой части соотношений (25) равен

$$\frac{1}{\nu-\mu}\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\neq\nu,\mu}}^{\infty}\left[\frac{1}{j-\nu} - \frac{1}{j-\mu}\right] = \frac{2}{(\nu-\mu)^2},$$

[2] То есть $a_i = 0$, если число $|i|$ достаточно велико.

а следовательно (в силу уже доказанного при $s = 2$ неравенства (24)),

$$|I| \leqslant \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} a_\mu^2 \sum_{\substack{j=-\infty \\ j\neq\mu}}^{\infty} \frac{1}{(j-\mu)^2} + 2\left|\sum_{\substack{\mu,\nu=-\infty \\ \mu\neq\nu}}^{\infty} \frac{a_\nu a_\mu}{(\nu-\mu)^2}\right| \leqslant C \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu^2.$$

Лемма 1 доказана.

Замечание. Если рассмотреть матрицу

$$H_N = \{h_{i,j}\}_{i,j=1}^N \quad \text{с} \quad h_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{i-j} & \text{при } i \neq j, \\ 0 & \text{при } i = j, \end{cases} \qquad N = 2, 3, \ldots$$

(матрица Гильберта), то из леммы 1 следует, что

$$\|H_N\| \leqslant C, \qquad N = 2, 3, \ldots \tag{26}$$

(определение нормы матрицы дано в начале книги). В то же время, как нетрудно проверить,

$$\|\{|h_{i,j}|\}_{i,j=1}^N\| \asymp \ln N. \tag{27}$$

Оценки (26) и (27) часто используются в теории ортогональных рядов.

Отвлекаясь на время от доказательства теоремы 2, изложим также подход к получению оценок норм матриц H вида

$$H = \{h_{s,j}\}_{s,j=-\infty}^{\infty}, \qquad h_{s,j} = c_{s-j}, \tag{28}$$

основанный на свойствах тригонометрической системы.

Лемма 2. *Пусть $\{c_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ – такая последовательность комплексных чисел, что*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$$

и, более того

$$f(x) \overset{L^p}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijx} \in L^\infty(-\pi, \pi). \tag{29}$$

Тогда для нормы матрицы (28) *имеет место оценка*

$$\|H\| = \sup_{\{b_s\}:\ \sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} |b_s|^2 \leqslant 1} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s c_{s-j} \right|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \|f\|_{L^\infty(-\pi,\pi)}.$$

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} |b_s|^2 \leqslant 1$ и

$$g(x) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s e^{-isx}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\, dx = 2\pi \sum_{s=-\infty}^{\infty} |b_s|^2 \leqslant 2\pi. \tag{30}$$

Так как ряды (29) и (30) сходятся в $L^2(-\pi, \pi)$, то для любого $j = 0, \pm 1, \ldots$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) f(x) e^{ijx}\, dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{s=-N}^{N} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} b_s e^{-isx} c_\nu e^{i(\nu+j)x}\, dx$$
$$= 2\pi \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s c_{s-j}.$$

Следовательно (см. (30)),

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s c_{s-j} \right|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) f(x) e^{ijx}\, dx \right|^2$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) f(x)|^2\, dx$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \|f\|^2_{L^\infty(-\pi,\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\, dx \leqslant \|f\|^2_{L^\infty(-\pi,\pi)},$$

и лемма 2 доказана.

Отметим такое следствие леммы 2 (оно потребуется нам в гл. 9 и 11):

Пусть матрица $H_N(A)$ $(N = 2, 3, \ldots,\ A = 1, 2, \ldots, N-1)$ *имеет вид*

$$H_N(A) = \{h_{s,j}\}_{s,j=1}^N, \quad \text{где } h_{s,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{s-j}, & \text{если } 0 < |s-j| \leqslant A, \\ 0, & \text{если } s = j \text{ или } |s-j| > A. \end{cases}$$

Тогда найдется такая абсолютная постоянная C, *что*

$$\|H_N(A)\| \leqslant C, \qquad N = 2, 3, \ldots, \qquad A = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{31}$$

В самом деле, ясно, что

$$\|H_N(A)\| \leqslant \|H'(A)\|, \qquad H'(A) = \{h_{s,j}\}_{s,j=-\infty}^{\infty} = \{c_{s-j}\}_{s,j=-\infty}^{\infty},$$

где $c_j = 1/j$, если $0 < |j| \leqslant A$, и $c_j = 0$ в противном случае. Так как

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\Bigl\|\sum_{\substack{j=-A\\ j\neq 0}}^{A}\frac{1}{j}\,e^{ijx}\Bigr\|_{L^\infty(-\pi,\pi)} &= \Bigl\|\sum_{j=1}^{A}\frac{1}{j}\sin jx\Bigr\|_{L^\infty(-\pi,\pi)}\\ &\leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}\Bigl|\int_0^x\sum_{j=1}^{A}\cos jt\,dt\Bigr|\\ &\leqslant \frac{\pi}{2}+\sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}\Bigl|\int_0^x D_A(t)\,dt\Bigr|\\ &\leqslant C'+\sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}\Bigl|\int_0^x\frac{\sin At}{t}\,dt\Bigr|\leqslant C\end{aligned}$$

($D_A(t)$ – ядро Дирихле порядка A; см. подробнее § 4.1, в частности 4.(4) и 4.(9)), то оценка (31) вытекает из леммы 2.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Пусть $f(x)$ – “простая” функция вида (23) и $x \in \omega_j$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ (см. (23)). Тогда $f(x) = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i\chi_{\omega_i}(x)$ и

$$T(f,x) = \sum_{i:\,|i-j|\leqslant 1} a_i T(\chi_{\omega_i},x) + \sum_{i:|i-j|>1} a_i T(\chi_{\omega_i},x) =: S_1(x) + S_2(x).$$

Из (22) сразу следует, что

$$\int_{\omega_j} S_1^2(x)\,dx \leqslant C(a_{j-1}^2 + a_j^2 + a_{j+1}^2)h. \tag{32}$$

Далее, так как

$$\begin{aligned}S_2(x) &= \sum_{i:\,|i-j|>1} a_i\int_{\omega_i}\frac{dt}{x-t}\\ &= \sum_{i:\,|i-j|>1}\frac{a_i}{j-i} + \sum_{i:\,|i-j|>1} a_i\Bigl(\int_{\omega_i}\frac{dt}{x-t}-\frac{1}{j-i}\Bigr),\end{aligned}$$

то, учитывая, что при $|i-j| > 1$ и $x \in \omega_j$

$$\begin{aligned}\Bigl|\int_{\omega_i}\frac{dt}{x-t}-\frac{1}{j-i}\Bigr| &= \Bigl|\int_{\omega_i}\Bigl[\frac{1}{x-t}-\frac{1}{(j-i)h}\Bigr]\,dt\Bigr|\\ &\leqslant \int_{\omega_i}\Bigl|\frac{(jh-x)-(ih-t)}{(x-t)(j-i)h}\Bigr|\,dt \leqslant \frac{C}{(j-i)^2},\end{aligned}$$

находим

$$\int_{\omega_j} S_2^2(x)\,dx$$
$$\leqslant Ch\Bigl(\sum_{i:\,|i-j|>1}\frac{a_i}{j-i}\Bigr)^2 + Ch\Bigl(\sum_{i:\,|i-j|>1}\frac{|a_i|}{(j-i)^2}\Bigr)^2$$
$$\leqslant C'h\Bigl[\Bigl(\sum_{\substack{i=-\infty,\\ i\neq j}}^{\infty}\frac{a_i}{j-i}\Bigr)^2 + \Bigl(\sum_{\substack{i=-\infty,\\ i\neq j}}^{\infty}\frac{|a_i|}{(j-i)^2}\Bigr)^2 + a_{j-1}^2 + a_{j+1}^2\Bigr]. \quad (33)$$

Суммируя оценки (32) и (33), получим, что

$$\int_{\mathbb{R}^1} T^2(f,x)\,dx$$
$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\omega_j} T^2(f,x)\,dx$$
$$\leqslant Ch\Bigl[\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 + \sum_{j=-\infty}^{\infty}\Bigl(\sum_{\substack{i=-\infty,\\ i\neq j}}^{\infty}\frac{a_i}{j-i}\Bigr)^2 + \sum_{j=-\infty}^{\infty}\Bigl(\sum_{\substack{i=-\infty,\\ i\neq j}}^{\infty}\frac{|a_i|}{(j-i)^2}\Bigr)^2\Bigr],$$

откуда в силу леммы 1 (см. также (23)) следует, что

$$\|T(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leqslant Ch\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^2 = C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}. \quad (34)$$

Таким образом, для "простых" функций неравенство (21) при $p = 2$ проверено.

Переход к произвольным функциям $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ проводится стандартным рассуждением. Действительно, пусть сначала $f(x)$ такова, что $f(x) = 0$ при $|x| > N$, тогда, выбирая последовательность простых функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\|f - f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} = 0,$$

мы, в силу (34) и следствия 1, будем иметь:

а) $\|T(f_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leqslant C\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}$, $n = 1, 2, \ldots$;

б) $T(f_n, x) \to T(f, x)$ по мере на $\mathbb{R}^1$,[3)]

[3)] Из б) следует, что $T(f_{n_i}, x) \to T(f, x)$ для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$ для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}$.

откуда (в силу теоремы Фату) вытекает, что

$$\|T(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T(f_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}.$$

Наконец, пусть $f(x)$ – произвольная функция из $L^2(\mathbb{R}^1)$. Учитывая, что для каждого $x \in \mathbb{R}^1$

$$T(f,x) = \lim_{N\to\infty} T(f\cdot\chi_{(-N,N)}, x)$$

(см. доказательство следствия 2) и что

$$\|T(f\cdot\chi_{(-N,N)})\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^1)},$$

мы, снова используя теорему Фату, получим

$$\|T(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^1). \tag{35}$$

Неравенство (21) при $p = 2$ доказано[4)]

Так как оператор преобразования Гильберта имеет слабый тип $(1,1)$ и сильный тип $(2,2)$ (см. (5) и (35)), то, применяя интерполяционную теорему Марцинкевича (см. приложение 1, теорема 1), получим оценку (21) при $1 < p < 2$. Остается рассмотреть случай $2 < p < \infty$, причем, как мы видели при рассмотрении случая $p = 2$, можно ограничиться доказательством неравенства (21) для "простых" функций $f(x)$.

Проверим предварительно, что для любых "простых" функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}^1} T(f,x)g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^1} f(x)T(g,x)\,dx. \tag{36}$$

Учитывая непрерывность оператора T в $L^2(\mathbb{R}^1)$, можно, не ограничивая общности, считать, что интервалы постоянства функции $f(x)$ (см. (23)) совпадают с интервалами постоянства функции $g(x)$. Используя затем линейность оператора T, можно свести проверку равенства (36) к случаю, когда $f = \chi_\omega$, $g = \chi_{\omega'}$, где ω и ω' – интервалы на оси, причем они либо не пересекаются, либо совпадают. Если $\omega \cap \omega' = \varnothing$, то

$$\int_{\mathbb{R}^1} T(f,x)g(x)\,dx = \int_{\omega'}\int_{\omega} \frac{1}{x-t}\,dx\,dt,$$

[4)]Можно показать, что $\|T(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} = \pi\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}$ для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$.

и так как в этом случае функция двух переменных $(x-t)^{-1}\chi_\omega(x)\chi_{\omega'}(t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, то, применяя теорему Фубини, находим

$$\int_{\mathbb{R}^1} T(f,x)g(x)\,dx = -\int_\omega \int_{\omega'} \frac{1}{t-x}\,dt\,dx = -\int_{\mathbb{R}^1} f(x)T(g,x)\,dx.$$

Если $\omega = \omega' = (a,b)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^1} T(f,x)g(x)\,dx = \int_\omega T(\chi_\omega, x)\,dx = 0,$$

так как непосредственно из определения (см. (1)) легко заметить, что

$$T\left(\chi_\omega, \frac{a+b}{2}+z\right) = -T\left(\chi_\omega, \frac{a+b}{2}-z\right), \qquad z \in \mathbb{R}^1.$$

Таким образом, равенство (36) доказано.

Пусть дано число p, $2 < p < \infty$, и $g(x)$ – простая функция с нормой $\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} \leqslant 1$ $(1/p + 1/q = 1)$.

Тогда $1 < q < 2$, и, используя равенство (36) и оценку (21) (уже доказанную для $1 < p < 2$), мы получаем, что

$$\left|\int_{\mathbb{R}^1} T(f,x)g(x)\,dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^1} f(x)T(g,x)\,dx\right| \\ \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}\|T(g)\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} \leqslant C_q\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}.$$

Из последнего неравенства, учитывая, что для любой функции $F(x)$ $(x \in \mathbb{R}^1)$

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} = \sup \int_{\mathbb{R}^1} F(x)g(x)\,dx,$$

где sup берется по всем простым функциям $g(x)$ с $\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^1)} \leqslant 1$, мы находим, что $\|T(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leqslant C_q\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}$.

Теорема 2 полностью доказана.

Пусть при $A > 0$ (см. (1) и (10))

$$T'_A(f,x) := T(f,x) - T_A(f,x) = \int_{\{t:\,|x-t|\leqslant A\}} \frac{f(t)}{x-t}\,dt. \tag{37}$$

Отметим следующие, вытекающие из теорем 1 и 2 свойства преобразований $T'_A(f,x)$:

a) если $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то $(y > 0)$

$$m\{x \in \mathbb{R}^1 : |T'_A(f,x)| > y\} \leqslant \frac{64}{y}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}; \tag{38}$$

б) если $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$, то

$$\|T'(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leqslant C_{p,A}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}, \tag{39}$$

где постоянная $C_{p,A}$ зависит только от p и A.

Действительно, так как

$$\{x \in \mathbb{R}^1 : |T'_A(f,x)| > y\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^1 : |T(f,x)| > \frac{y}{2}\right\} \\ \cup \left\{x \in \mathbb{R}^1 : |T_A(f,x)| > \frac{y}{2}\right\},$$

то оценка (38) непосредственно следует из неравенства (5) и леммы 3 (см. теорему 1). *Для* $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$, применяя неравенство Гёльдера, получим, что для любого $x \in \mathbb{R}^1$

$$|T_A(f,x)| \leqslant \left\{\int_{\{t:\,|x-t|>A\}} |f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \left\{\int_{\{t:\,|x-t|>A\}} |x-t|^{-q}\,dt\right\}^{1/q} \\ \leqslant C_{p,A}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}$$

$(1/p + 1/q = 1)$, откуда в силу теоремы 2 следует, что

$$\|T'_A(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leqslant \|T(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} + \|T_A(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leqslant C_{p,A}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}.$$

Отметим, что постоянную $C_{p,A}$ в (39) можно взять и не зависящей от числа A, но для наших целей это несущественно. Мы используем неравенства (38) и (39) при изучении "периодического аналога" преобразования Гильберта – оператора перехода к сопряженной функции.

Определение 2. Если функция $f \in L^1(-\pi,\pi)$, то *сопряженной к ней функцией* называется функция

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,dt \\ = \frac{1}{\pi}\int_{\{t:\,|x-t|\leqslant\pi\}} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,dt, \qquad x \in [-\pi,\pi], \tag{40}$$

где интеграл в (40) понимается в смысле главного значения, т.е. как предел при $\varepsilon \to +0$ интегралов

$$\int_{\{t:\,\varepsilon\leqslant|x-t|\leqslant\pi\}} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,dt.$$

Теорема 3. *Для любой функции $f \in L^1(-\pi,\pi)$ сопряженная функция $\widetilde{f}(x)$ существует и конечна п.в. на $(-\pi,\pi)$; при этом*

а) $m\{x \in (-\pi,\pi) : |\widetilde{f}(x)| > y\} \leqslant \dfrac{C_1}{y}\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}$, $y > 0$;

б) *если* $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$, *то* $\widetilde{f} \in L^p(-\pi,\pi)$ *и*

$$\|\widetilde{f}\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant C_p\|f\|_{L^p(-\pi,\pi)}.$$

Доказательство. Ясно, что для $x \in (-\pi,\pi)$

$$\begin{gathered}\widetilde{f}(x) = \int_{\{t:\,|x-t|\leqslant\pi\}} \frac{f_1(t)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,dt,\\ f_1(t) = \frac{1}{\pi}f(t)\chi_{[-2\pi,2\pi]}(t), \qquad t \in \mathbb{R}^1.\end{gathered} \tag{41}$$

Пусть

$$K(x,t) = \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}} - \frac{1}{x-t}.$$

Тогда (см. (37))

$$\widetilde{f}(x) = T'_\pi(f_1,x) + \int_{\{t:\,|x-t|\leqslant\pi\}} K(x,t)f_1(t)\,dt =: T'_\pi(f_1,x) + G(x). \tag{42}$$

Легко видеть, что $|K(x,t)| \leqslant C_0 < \infty$ при $|x-t| \leqslant \pi$, поэтому

$$|G(x)| \leqslant C_0\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} = \frac{2}{\pi}C_0\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}$$

и из неравенства (38) следует, что при $1 < p < \infty$

$$\|\widetilde{f}\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant C'_p\|f\|_{L^p(-\pi,\pi)} + \frac{2}{\pi}C_0\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant C_p\|f\|_{L^p(-\pi,\pi)}.$$

Далее, оценка а), очевидно, верна при $y \leqslant 4C_0\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}$, если $C_1(4C_0)^{-1} \geqslant 2\pi$. При $y > 4C_0\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}$, учитывая, что

$$\{x \in (-\pi,\pi) : |\widetilde{f}(x)| > y\} \subset \{x \in \mathbb{R}^1 : |T'_\pi(f_1,x)| > y - 2C_0\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}\},$$

и пользуясь неравенством (38), мы получим

$$m\{x \in (-\pi,\pi) : |\widetilde{f}(x)| > y\} \leqslant \frac{64\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}}{y - 2C_0\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}} \leqslant \frac{2^{10}}{y}\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)},$$

т.е. оценка а) всегда выполняется с $C_1 = \max(2^{10}, 8\pi C_0)$. Теорема 3 доказана.

§ 2. Пространства $\operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ и BMO

В этом параграфе изучается пространство $\operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ – важное функциональное пространство, состоящее из функций $f \in L^1(-\pi,\pi)$, для которых сопряженная – $\widetilde{f}$ также суммируема. Изучение пространства $\operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ будет продолжено в следующей главе (см. § 6.5) на базе результатов о свойствах ортогональной системы Франклина. Мы существенно используем здесь содержание приложения 2, где собраны факты из теории функций комплексного переменного.

Пусть $\operatorname{Re}\mathscr{H}^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, – пространство функций $f(x)$, являющихся граничными значениями действительных частей функций из пространства H^p (см. § 2 приложения 2):

$$f(x) = \lim_{r\to 1} \operatorname{Re} F(re^{ix}) \quad \text{для п.в.} \quad x \in (-\pi,\pi), \quad F \in H^p. \tag{43}$$

В § 2 приложения 2 доказано, что

$$\operatorname{Re}\mathscr{H}^p = \{f \in L^p(-\pi,\pi) : \widetilde{f} \in L^p(-\pi,\pi)\}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{44}$$

и что $\operatorname{Re}\mathscr{H}^p$ – банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\operatorname{Re}\mathscr{H}^p} = \|f\|_{L^p(-\pi,\pi)} + \|\widetilde{f}\|_{L^p(-\pi,\pi)}; \tag{45}$$

при этом, если в (43) $\operatorname{Im} F(0) = 0$, то

$$\|F\|_{H^p} \leqslant \|f\|_{\operatorname{Re}\mathscr{H}^p} \leqslant \sqrt{2}\,\|F\|_{H^p}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{46}$$

Теорема 3 показывает, что при $1 < p < \infty$ пространство $\operatorname{Re}\mathscr{H}^p$ совпадает с пространством $L^p(-\pi,\pi)$ и

$$\|f\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant \|f\|_{\operatorname{Re}\mathscr{H}^p} \leqslant (1 + C_p)\|f\|_{L^p(-\pi,\pi)}, \qquad 1 < p < \infty.$$

Последнее соотношение теряет силу при $p = 1$ – нетрудно проверить, что при $h > 0$

$$\|\widetilde{f}_h\|_{L^1(-\pi,\pi)} \geqslant c \ln \frac{1}{h} > 0,$$

где

$$f_h(x) = \begin{cases} (2h)^{-1}, & \text{если } 0 \leqslant |x| < h, \\ 0, & \text{если } h \leqslant |x| \leqslant \pi, \end{cases}$$

и следовательно, существует функция $f \in L^1(-\pi,\pi)$, для которой $\widetilde{f} \notin L^1(-\pi,\pi)$. Таким образом, $\operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ – собственное подпространство в $L^1(-\pi,\pi)$. Ниже мы дадим критерий принадлежности функций к пространству $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$.

Множество $I\subset[-\pi,\pi]$ мы будем называть *обобщенным интервалом*, если $\theta(I)=\{z:z=e^{ix},\ x\in I\}$ – дуга на единичной окружности, т.е. I – либо интервал из $[-\pi,\pi]$, либо множество вида

$$I=[-\pi,a)\cup(b,\pi],\qquad -\pi<a<b<\pi. \tag{47}$$

Точку t назовем *центром* обобщенного интервала I, если e^{it} – центр дуги $\theta(I)$. Наконец, длиной обобщенного интервала I естественно назвать величину

$$|I|:=\begin{cases} b-a, & \text{если } I=(a,b)\subset(-\pi,\pi),\\ 2\pi+a-b, & \text{если } I=[-\pi,a)\cup(b,\pi]. \end{cases}$$

Определение 3. Действительную функцию $a(x)\in L^\infty(-\pi,\pi)$ назовем *атомом*, если существует обобщенный интервал I такой, что

а) $\operatorname{supp} a(x)\subset I$;
б) $\int_I a(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}a(x)\,dx=0$;
в) $\|a\|_{L^\infty(-\pi,\pi)}\leqslant|I|^{-1}$.

Атомом назовем также функцию $a(x)=\dfrac{1}{2\pi}$, $x\in[-\pi,\pi]$.

Теорема 4. *Для того чтобы выполнялось включение $f\in\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ допускала представление в виде*[5)]

$$f(x)=\sum_k\lambda_k a_k(x),\qquad \sum_k|\lambda_k|<\infty, \tag{48}$$

где $a_k(x)$, $k=1,2,\dots,$ – атомы. При этом

$$c\|f\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1}\leqslant\inf\sum_k|\lambda_k|\leqslant C\|f\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1}, \tag{49}$$

где inf *берется по всем разложениям вида* (48) *функции $f(x)$, а c и C $(0<c<C<\infty)$ – абсолютные постоянные.*

---

5) В силу условий а) и в) в определении 3 $\|a_k\|_{L^1(-\pi,\pi)}\leqslant1$, $k=1,2,\dots$, поэтому ряд (48) сходится по норме пространства $L^1(-\pi,\pi)$ и п.в.

Доказательство. I) Пусть для функции $f(x)$ нашлось разложение вида (48). Покажем, что $f \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ и $c\|f\|_{\operatorname{Re}\mathscr{H}^1} \leqslant \sum_k |\lambda_k|$. Для этого достаточно проверить, что для любого атома $a(x)$ имеет место неравенство

$$\|a\|_{\operatorname{Re}\mathscr{H}^1} \leqslant \frac{1}{c}. \tag{50}$$

Пусть I – такой обобщенный интервал, что

$$\operatorname{supp} a(x) \subset I, \quad \int_I a(x)\,dx = 0, \quad \|a\|_{L^\infty(-\pi,\pi)} \leqslant |I|^{-1} \tag{51}$$

(случай $a(x) \equiv 1/(2\pi)$ тривиален). Так как $\int_{-\pi}^{\pi} |a(x)|\,dx \leqslant 1$, то нам остается доказать (см. (45)), что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{a}(x)|\,dx \leqslant C'. \tag{52}$$

Для любого измеримого множества $E \subset [-\pi,\pi]$, применяя неравенство Коши и пользуясь теоремой 3 и соотношениями (51), находим

$$\int_E |\widetilde{a}(x)|\,dx \leqslant [m(E)]^{1/2}\left\{\int_E |\widetilde{a}(x)|^2\,dx\right\}^{1/2} \leqslant [m(E)]^{1/2}\|\widetilde{a}\|_{L^2(-\pi,\pi)} \leqslant C[m(E)]^{1/2}|I|^{-1/2}, \tag{53}$$

откуда сразу вытекает (52), в случае, когда $|I| \geqslant \frac{2}{3}\pi$.

Допустим теперь, что $|I| < \frac{2}{3}\pi$, и обозначим через I^* обобщенный интервал длины $3|I|$ с тем же центром, что и I. Из (53) следует, что

$$\int_{I^*} |\widetilde{a}(x)|\,dx \leqslant C|I^*|^{1/2}|I|^{-1/2} = \sqrt{3}\,C.$$

Нам остается оценить интеграл $\int_{[-\pi,\pi]\setminus I^*} |\widetilde{a}(x)|\,dx$. Мы воспользуемся очевидным неравенством

$$\left|\sin\frac{x-t}{2}\right| \geqslant c'\rho(x,t), \qquad -\pi \leqslant x,t \leqslant \pi,$$

где $\rho(x,t)$ – длина наименьшей из двух дуг единичной окружности, соединяющих точки e^{ix} и e^{it}, а $c' > 0$ – абсолютная постоянная. В силу (51) при $x \in [-\pi,\pi] \setminus I^*$ мы имеем

$$\widetilde{a}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a(t)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(t)\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x-\tau}{2}}\right]dt = \frac{1}{2\pi}\int_I a(t)\frac{\sin\frac{t-\tau}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}\sin\frac{x-\tau}{2}}\,dt,$$

где τ – центр обобщенного интервала I. Из последнего соотношения, учитывая, что $\|a\|_{L^\infty(-\pi,\pi)} \leqslant |I|^{-1}$ и $|\sin u| \leqslant \rho(0,u)$, находим

$$|\widetilde{a}(x)| \leqslant C \int_I \frac{|I|^{-1}\rho(\frac{t}{2},\frac{\tau}{2})}{\rho(x,t)\rho(x,\tau)}\,dt \leqslant C\,\frac{|I|}{[\rho(x,I)]^2}, \qquad x \in [-\pi,\pi]\setminus I^*,$$

где $\rho(x,I) := \inf\limits_{t\in I} \rho(x,t)$. Следовательно,

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus I^*} |\widetilde{a}(x)|\,dx \leqslant C\,|I| \int_{[-\pi,\pi]\setminus I^*} [\rho(x,I)]^{-2}\,dx \leqslant C|I| \int_{|I|}^{\infty} y^{-2}\,dy \leqslant C.$$

Оценка (52), а потому и оценка (50) доказаны.

II) Построим для данной функции $f \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ разложение (48), для которого

$$\sum_k |\lambda_k| \leqslant C\|f\|_{\operatorname{Re}\mathscr{H}^1}.$$

Пусть функция $F \in H^1$ с $\operatorname{Im} F(0) = 0$ такова, что выполнено соотношение (43), и пусть $F^*_\sigma(x)$ $(0 < \sigma < 1)$ – нетангенциальная максимальная функция для $F(z)$. Напомним (см. приложение 2), что функция $F^*_\sigma(x)$ определяется равенством

$$F^*_\sigma(x) := \sup_{z\in\Omega_\sigma(x)} |F(z)|, \qquad x \in [-\pi,\pi], \tag{53'}$$

где $\Omega_\sigma(x)$ – область, ограниченная двумя касательными, проведенными из точки e^{ix} к окружности $|z| = \sigma$, и наибольшей дугой окружности $|z| = \sigma$, заключенной между точками касания.

Теорема 7 из приложения 2 утверждает, что $\|F^*_\sigma\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant C_\sigma\|F\|_{H^1}$, поэтому (см. также (46)) нам достаточно найти такое разложение функции $f(x)$ на атомы (см. (48)), что

$$\sum_k |\lambda_k| \leqslant C\|F^*_\sigma\|_{L^1(-\pi,\pi)}, \tag{54}$$

где постоянные C и σ $(0 < \sigma < 1)$ не зависят от f. Для построения разложения (48) с условием (54) фиксируем число σ: пусть например, $\sigma = 1/10$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что

$$\|F^*_\sigma\|_{L^1(-\pi,\pi)} = 1. \tag{55}$$

Рассмотрим на отрезке $[-\pi,\pi]$ множества

$$E_0 = [-\pi,\pi], \qquad E_k = \{x \in [-\pi,\pi] : F^*_\sigma(x) > 2^k\}, \quad k = 1,2,\dots. \tag{56}$$

Так как при любом $y > 0$ множество точек единичной окружности: $\{e^{ix} : F_\sigma^*(x) > y\}$ открыто, то ясно, что при $k = 1, 2, \ldots$ множество E_k (если оно непустое) представимо (единственным образом) в виде суммы непересекающихся обобщенных интервалов:

$$\begin{aligned} &E_k = \bigcup_j I_{k,j}, \qquad I_{k,j} \cap I_{k,i} = \varnothing, \quad i \neq j, \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, \\ &E_0 = I_{0,1} = [-\pi, \pi]. \end{aligned} \tag{57}$$

Положим

$$h_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

и при $k = 1, 2, \ldots$

$$h_k(x) = \begin{cases} |I_{k,j}|^{-1} \int_{I_{k,j}} f(t)\, dt, & \text{если } x \in I_{k,j},\ j = 1, 2, \ldots, \\ f(x), & \text{если } x \notin E_k. \end{cases} \tag{58}$$

Так как $F_\sigma^*(x)$ конечна для п.в. x (см. (55)), то из определения функций $h_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, следует, что для п.в. $x \in [-\pi, \pi]$ $h_k(x) = f(x)$ при $k \geqslant k(x)$, а значит, для п.в. $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = h_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} [h_{k+1}(x) - h_k(x)].$$

Отсюда, учитывая, что $E_{k+1} \subset E_k$, а следовательно (см. (58)), $h_{k+1}(x) = h_k(x) = f(x)$ при $x \notin E_k$, мы находим, что

$$f(x) = h_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{E_k}(x)\, [h_{k+1}(x) - h_k(x)], \tag{59}$$

где χ_{E_k} – характеристическая функция множества E_k. Из (59), учитывая, что $E_k = \bigcup_j I_{k,j}$ (см. (57)), мы для функции $f(x)$ получаем следующее разложение:

$$f(x) = h_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j b_{k,j}(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{60}$$

где

$$b_{k,j}(x) = \chi_{I_{k,j}}(x)[h_{k+1}(x) - h_k(x)], \qquad k = 0, 1, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{61}$$

С помощью функций $b_{k,j}(x)$ мы и построим нужное нам разложение вида (48). Прежде всего отметим, что при $k = 0, 1, \ldots, j = 1, 2, \ldots$

$$\int_{I_{k,j}} b_{k,j}(x)\,dx = 0, \qquad \operatorname{supp} b_{k,j}(x) \subset I_{k,j}. \tag{62}$$

Докажем теперь, что для п.в. $x \in [-\pi, \pi]$

$$|h_k(x)| \leqslant A \cdot 2^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{63}$$

где постоянная $A = A(\sigma)$ зависит только от числа σ, фиксированного нами ранее.

Так как $|f(x)| \leqslant F_\sigma^*(x)$ для п.в. $x \in [-\pi, \pi]$ (см. (43) и (53′)), то из (55) следует, что

$$|h_0(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_\sigma^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} < 1.$$

Пусть теперь $k = 1, 2, \ldots$, $I = I_{k,j}$ – один из обобщенных интервалов в представлении (57), тогда $|I| \leqslant 2^{-k} \leqslant 1/2$ (см. (55), (56)), и если $e^{i\alpha_1}$, $e^{i\alpha_2}$ – концевые точки дуги $\theta(I) = \{e^{ix} : x \in I\}$ $(-\pi \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant \pi)$, то $\alpha_1, \alpha_2 \notin E_k$ (см. (57)), а значит

$$F_\sigma^*(\alpha_i) \leqslant 2^k, \qquad i = 1, 2. \tag{64}$$

Из неравенств (64) согласно (53′) следует, что

$$|F(z)| \leqslant 2^k, \qquad z \in \Omega_\sigma(\alpha_1) \cup \Omega_\sigma(\alpha_2). \tag{65}$$

Легко видеть (учитывая, что $|I| \leqslant 1/2$ и $\sigma = 1/10$), что множества[6] $\partial[\Omega_\sigma(\alpha_1) \setminus \{z : |z| = \sigma\}]$ и $\partial[\Omega_\sigma(\alpha_2) \setminus \{z : |z| = \sigma\}]$ пересекаются в одной точке $\rho e^{i\alpha}$ с

$$\sigma < \rho < 1, \qquad \alpha \in I. \tag{66}$$

Пусть γ_p, $p = 1, 2$ – отрезок, соединяющий точки $e^{i\alpha_p}$ и $\rho e^{i\alpha}$. Так как $\gamma_p \subset \partial[\Omega_\sigma(\alpha_p)]$, $p = 1, 2$, то из непрерывности функции $F(z)$ при $|z| < 1$ и неравенства (65) вытекает, что $|F(z)| \leqslant 2^k$, если $z \in \gamma_p$, $p = 1, 2$ и $|z| < 1$. Поэтому (см. также (66))

$$\left|\frac{F(z)}{z}\right| \leqslant \frac{2^k}{\sigma}, \qquad z \in \gamma_p, \quad p = 1, 2, \quad |z| < 1. \tag{67}$$

---

[6] Через $\partial(\Omega)$ мы обозначаем границу области Ω.

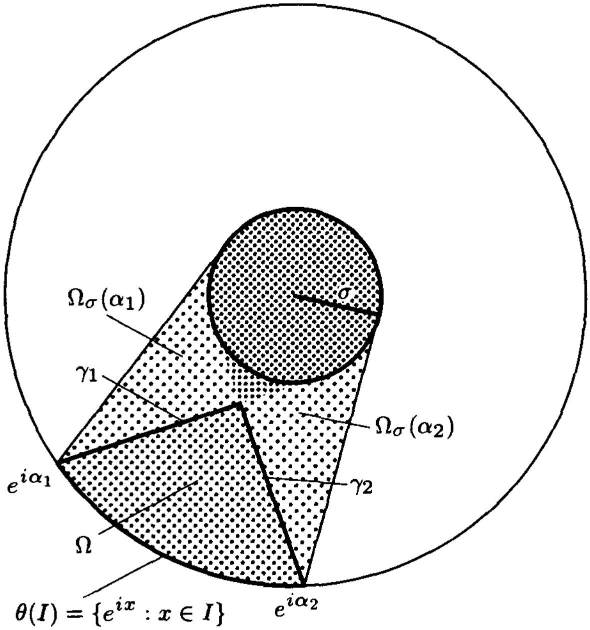

Рис. 1

Рассмотрим область Ω (рис. 1), ограниченную отрезками γ_1 и γ_2 и дугой $\theta(I) = \{e^{ix} : x \in I\}$; пусть, далее, для $r \in (\rho, 1)$

$$\Omega^{(r)} = \Omega \cap \{z : |z| < r\}, \qquad re^{i\alpha_p^{(r)}} = \gamma_p \cap \{z : |z| = r\}, \quad p = 1, 2.$$

По теореме Коши

$$\int_{\partial(\Omega^{(r)})} \frac{F(z)}{z}\, dz = 0.$$

Отсюда и из (67), учитывая, что для любой дуги

$$\Gamma = \left\{z = re^{ix} : -\pi < \alpha < x < \beta < \pi\right\}$$

справедливо равенство

$$\int_\Gamma \frac{F(z)}{z}\, dz = i\int_\alpha^\beta F(re^{ix})\, dx,$$

мы получим[7)]

$$\left|\int_{(\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)})} F(re^{ix})\, dx\right| \leqslant \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \left|\frac{F(z)}{z}\right| d|z| \leqslant \frac{2^k}{\sigma}(|\gamma_1| + |\gamma_2|).$$

[7)] Здесь $(\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)})$ – обобщенный интервал с концами $\alpha_1^{(r)}$ и $\alpha_2^{(r)}$, лежащий в I.

Но в силу теорем 4 и 5 из приложения 2

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{ix})-\Phi(x)|\,dx=0,\qquad \Phi(x)=f(x)+i\widetilde{f}(x),$$

и так как $\lim\limits_{r\to 1}\alpha_p^{(r)}=\alpha_p,\ p=1,2$, то мы находим, что

$$\left|\int_I \Phi(x)\,dx\right|\leqslant \frac{2^k}{\sigma}(|\gamma_1|+|\gamma_2|). \tag{67'}$$

Легко видеть, что отношение $(|\gamma_1|+|\gamma_2|)/|I|$ ограничено сверху числом, зависящим только от σ, поэтому (см. (67′))

$$\left|\int_I \Phi(x)\,dx\right|\leqslant A\,|I|\,2^k,\qquad A=A(\sigma). \tag{68}$$

Так как $f(x)=\operatorname{Re}\Phi(x)$, то из соотношения (68) (см. также (58)) вытекает, что для $x\in E_k$, $k=1,2,\dots$, справедливо неравенство (63). Для п.в. $x\notin E_k$ неравенство (63) сразу следует из определения функций $h_k(x)$ и множеств E_k (см. также (43)).

Пользуясь оценкой (63), из (61) мы получаем, что $\|b_{k,j}\|_{L^\infty(-\pi,\pi)}\leqslant 3A\cdot 2^k$, а это значит (см. также (62)), что функции

$$a_{k,j}(x)=\frac{1}{3A\cdot 2^k|I_{k,j}|}b_{k,j}(x),\qquad k=0,1,\dots,\quad j=1,2,\dots,$$

являются атомами. Тогда, преобразуя равенство (60), мы получаем разложение функции $f(x)$ на атомы:

$$f(x)=\lambda_0\frac{1}{2\pi}+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_j\lambda_{k,j}a_{k,j}(x)\quad\text{для п.в.}\quad x\in[-\pi,\pi],$$

где $\lambda_0=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt$, $\lambda_{k,j}=3A\cdot 2^k|I_{k,j}|$. Оценим сумму модулей коэффициентов указанного разложения. Учитывая равенство (55), имеем

$$\begin{aligned}|\lambda_0|+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_j|\lambda_{k,j}|&\leqslant 1+3A\sum_{k=0}^{\infty}2^k\sum_j|I_{k,j}|=1+3A\sum_{k=0}^{\infty}2^k m(E_k)\\&\leqslant 1+6A\sum_{k=0}^{\infty}2^k[m(E_k)-m(E_{k+1})]\\&\leqslant 1+6A\|F_\sigma^*\|_{L^1(-\pi,\pi)}=1+6A.\end{aligned}$$

Неравенство (54), а потому и теорема 4 доказаны.

Дадим описание пространства $(\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1)^*$, сопряженного к банахову пространству $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$. Нам потребуется

Определение 4. *Пространство* BMO есть совокупность всех функций $f \in L^1(-\pi,\pi)$, удовлетворяющих условию

$$\mathfrak{N}(f) := \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |f(t) - f_I|\, dt \right\} < \infty, \tag{69}$$

где $f_I = |I|^{-1} \int_I f(t)\, dt$, а sup берется по всем обобщенным интервалам $I \subset [-\pi,\pi]$.

Нетрудно убедиться, что BMO является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} = \mathfrak{N}(f) + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \right|. \tag{70}$$

Ясно, что $L^\infty(-\pi,\pi) \subset \mathrm{BMO}$. В то же время BMO содержит и неограниченные функции. Нетрудно проверить, например, что функция $\ln|x| \in \mathrm{BMO}$.

Теорема 5. $(\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1)^* = \mathrm{BMO}$, *т.е.*

а) *если* $b(x) \in \mathrm{BMO}$, *и для произвольной функции* $f(x) \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ *рассмотреть ее разложение на атомы* (см. теорему 4):[8]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k(x), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| < \infty, \quad a_k \text{ -- атомы}, \tag{71}$$

и положить

$$L_b(f) = \langle b, f \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \int_{-\pi}^{\pi} b(x) a_k(x)\, dx, \tag{72}$$

то сумма $L_b(f)$ *ряда* (72) *конечна, не зависит от выбора разложения* (71) *и задает ограниченный линейный функционал на* $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$;

б) *произвольный ограниченный линейный функционал* $L = L(f)$ *на* $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ *представим в виде* (72), *где* $b \in \mathrm{BMO}$. *При этом*

$$\frac{1}{C}\|L\| \leqslant \|b\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C_1 \|L\|$$

(C, C_1 – *абсолютные постоянные*).

---

[8]Возможен случай, когда $a_k(x) \equiv 0$ при $k > k_0$.

Замечание. В общем случае, если $f \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ и $b \in \mathrm{BMO}$, функция $f \cdot b$ может быть несуммируемой.

Действительно, пусть $b(x) = \ln|x| \in \mathrm{BMO}$ и

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k/2}}{k^2} \chi_k^{(2)}(x), & \text{если } x \in (0,1), \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi, \pi] \setminus (0,1) \end{cases}$$

($\{\chi_k^{(i)}(x)\}$ – система Хаара). Так как $a_k(x) = 2^{k/2}\chi_k^{(2)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, являются атомами, то по теореме 4 $f \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^1$. При этом

$$|f(x)b(x)| > \frac{c2^k}{k} > 0 \quad \text{при} \quad x \in (2^{-k}, 2^{-k+1}), \quad k = 2, 3, \ldots,$$

т.е. $f \cdot b \notin L^1(-\pi, \pi)$.

Лемма 1. *Пусть функция $g \in L^1(-\pi,\pi)$ такова, что для любого обобщенного интервала I найдется постоянная C_I, для которой*

$$\frac{1}{|I|} \int_I |g(x) - C_I|\, dx \leqslant M,$$

где M не зависит от I.

Тогда $g \in \mathrm{BMO}$ и $\mathfrak{N}(g) \leqslant 2M$.

Доказательство. Для любого обобщенного интервала I мы имеем

$$\int_I |g(x) - g_I|\, dx \leqslant \int_I |g(x) - C_I|\, dx + |I|\,|C_I - g_I| \leqslant M|I| + \int_I |C_I - g(x)|\, dx \leqslant 2M|I|,$$

откуда согласно (69) получим утверждение леммы 1.

Следствие 3. *Если $b(x) \in \mathrm{BMO}$, то $|b(x)| \in \mathrm{BMO}$ и*

$$\mathfrak{N}(|b|) \leqslant 2\mathfrak{N}(b). \tag{73}$$

Следствие 3 непосредственно вытекает из леммы 1, если учесть, что

$$|I|^{-1} \int_I \big||b(x)| - |b_I|\big|\, dx \leqslant |I|^{-1} \int_I |b(x) - b_I|\, dx \leqslant \mathfrak{N}(b)$$

для произвольного обобщенного интервала I.

Доказательство теоремы 5. а) Пусть $b \in \mathrm{BMO}$. Положим

$$b_N(x) = \begin{cases} N, & \text{если } b(x) \geqslant N, \\ b(x), & \text{если } -N < b(x) < N, \\ -N, & \text{если } b(x) \leqslant -N, \end{cases} \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Так как всегда $\mathfrak{N}(f+g) \leqslant \mathfrak{N}(f) + \mathfrak{N}(g)$ (см. (69)), то, учитывая равенства

$$\max(y,z) = \frac{1}{2}[y + z + |y - z|], \quad \min(y,z) = \frac{1}{2}[y + z - |y - z|] \quad (y, z \in \mathbb{R}^1),$$
$$b_N(x) = \max\{\min[b(x), N], -N\},$$

с помощью следствия 3 находим

$$\mathfrak{N}(b_N) \leqslant 3\mathfrak{N}(b), \qquad N = 1, 2, \ldots. \tag{74}$$

Допустим, что $f \in L^\infty(-\pi, \pi) \subset \operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ (см. теорему 3 и (44)). По теореме 4 существует разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k(x), \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \leqslant C\|f\|_{\operatorname{Re}\mathscr{H}^1}, \tag{75}$$

где функции $a_k(x)$ являются атомами (см. определение 3): $a_0(x) = \dfrac{1}{2\pi}$ и при $k > 0$

$$\operatorname{supp} a_k(x) \subset I_k, \quad \int_{-\pi}^{\pi} a_k(x)\,dx = 0, \quad \|a_k\|_{L^\infty(-\pi,\pi)} \leqslant |I_k|^{-1}. \tag{76}$$

Из соотношений (74), (75) и (76) вытекает, что при $N = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x) b_N(x)\,dx\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \int_{-\pi}^{\pi} a_k(x) b_N(x)\,dx\right| \\
&\leqslant \frac{|\lambda_0|}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} b_N(x)\,dx\right| + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \left|\int_{-\pi}^{\pi} a_k(x)[b_N(x) - (b_N)_{I_k}]\,dx\right| \\
&\leqslant \frac{|\lambda_0|}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} b_N(x)\,dx\right| + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|\,|I_k|^{-1} \int_{I_k} |b_N(x) - (b_N)_{I_k}|\,dx \\
&\leqslant \frac{|\lambda_0|}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} b_N(x)\,dx\right| + \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \mathfrak{N}(b_N) \\
&\leqslant \frac{|\lambda_0|}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} b_N(x)\,dx\right| + 3\mathfrak{N}(b) \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что функции $f(x)b_N(x)$, $N = 1, 2, \dots$, по модулю не превосходят суммируемой функции $|f(x)b(x)|$ и $\lim\limits_{N\to\infty} f(x)b_N(x) = f(x)b(x)$ для п.в. $x \in [-\pi, \pi]$, мы получим, что

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)b(x)\,dx\right| \leqslant \frac{|\lambda_0|}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} b(x)\,dx\right| + 3\mathfrak{N}(b)\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|$$
$$\leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1}.$$

Таким образом, равенством

$$L_b(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)b(x)\,dx, \qquad f \in L^\infty(-\pi, \pi), \tag{77}$$

определяется ограниченный линейный функционал на всюду плотном в $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ линейном многообразии (плотность функций из $L^\infty(-\pi,\pi)$ в $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ вытекает, например, из теоремы 4, так как для всякой функции $f \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ частные суммы разложения (48) сходятся к f по норме $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ (см. (49)) и, очевидно, принадлежат пространству $L^\infty(-\pi,\pi)$). Поэтому функционал L_b можно единственным образом продолжить на все пространство $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$:

$$|L_b(f)| \leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1}, \qquad f \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1. \tag{78}$$

Остается доказать, что для любого разложения вида (71) функции $f \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ ряд (72) сходится и его сумма равна $L_b(f)$. Последнее сразу вытекает из (77) и сходимости ряда (71) по норме $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ к $f(x)$:

$$L_b(f) = \lim_{N\to\infty} L_b\left(\sum_{k=0}^{N}\lambda_k a_k\right)$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\lambda_k L_b(a_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\int_{-\pi}^{\pi} a_k(x)b(x)\,dx.$$

б) Пусть L – произвольный ограниченный линейный функционал на $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$. Тогда (см. теорему 3 и (45)) для любой функции $f \in L^2(-\pi,\pi)$

$$|L(f)| \leqslant \|L\|\,\|f\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1} \leqslant C\,\|L\|\,\|f\|_{L^2(-\pi,\pi)}$$

(C – абсолютная постоянная). Это значит, что L – ограниченный линейный функционал на $L^2(-\pi,\pi)$, а следовательно, найдется функция $b \in L^2(-\pi,\pi)$ с

$$\|b\|_{L^2(-\pi,\pi)} \leqslant C\,\|L\|, \tag{79}$$

для которой

$$L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)b(x)\,dx, \qquad f \in L^2(-\pi,\pi). \tag{80}$$

В частности, равенство (80) выполняется, если $f(x)$ – произвольный атом. Докажем, что

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C_1\|L\|. \tag{81}$$

Пусть I – произвольный обобщенный интервал, $g \in L^\infty(-\pi,\pi)$ – произвольная функция с $\|g\|_{L^\infty(-\pi,\pi)} \leqslant 1$. Тогда функция

$$a(x) = \frac{1}{2}|I|^{-1}\chi_I(x)[g(x) - g_I], \qquad x \in [-\pi,\pi],$$

является атомом и в силу теоремы 4 $\|a\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1} \leqslant C$. Поэтому

$$C\,\|L\| \geqslant \|a\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1}\|L\| \geqslant |L(a)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} a(x)b(x)\,dx\right|$$
$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi} a(x)[b(x) - b_I]\,dx\right| = \frac{1}{2}|I|^{-1}\left|\int_I g(x)[b(x) - b_I]\,dx\right|.$$

Подбирая в последнем неравенстве функцию $g(x)$ оптимальным образом, мы получим, что для любого обобщенного интервала I

$$\frac{1}{|I|}\int_I |b(x) - b_I|\,dx \leqslant 2\,C\,\|L\|,$$

что с учетом соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} b(x)\,dx\right| \leqslant \|b\|_{L^2(-\pi,\pi)} \leqslant C\|L\|$$

(см. (79)) доказывает оценку (81).

Таким образом, для $f \in L^\infty(-\pi,\pi) \subset \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ значение функционала $L(f)$ совпадает со значением ограниченного линейного функционала $L_b(f)$ на элементе f (см. (77) и уже доказанное утверждение а) теоремы 5). Так как пространство $L^\infty(-\pi,\pi)$ плотно в $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$, то, следовательно,

$$L(f) = L_b(f) \quad \text{для любой функции} \quad f \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1.$$

Полученное равенство (см. также (78), (81)) завершает доказательство теоремы 5.

§ 3. Пространства $\mathscr{H}(\Delta)$ и BMO(Δ) (непериодический случай)

В этом параграфе рассматриваются непериодические аналоги пространств $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ и BMO. Приведенные здесь результаты потребуются нам в следующей главе при изучении свойств ортонормированной системы Франклина.

Определение 5. Действительную функцию $a(x)$, $x \in \Delta = [0,1]$, назовем Δ-*атомом*, если существует такой интервал $I \subset \Delta$, что

а$'$) $\operatorname{supp} a(x) \subset I$;

б$'$) $\int_I a(x)\,dx \int_0^1 a(x)\,dx = 0$;

в$'$) $\|a\|_\infty \leqslant |I|^{-1}$.

Δ-атомом назовем также функцию $a(x) = 1$, $x \in \Delta$.

Определение 6. *Пространство* $\mathscr{H}(\Delta)$ есть совокупность всех функций $f \in L^1(0,1)$, представимых в виде[9)]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k(x), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| < \infty, \tag{82}$$

где $a_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots,$ – Δ-атомы.

Легко видеть, что $\mathscr{H}(\Delta)$ становится банаховым пространством, если положить

$$\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} = \inf \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|, \tag{83}$$

где inf берется по всем разложениям вида (82) функции $f(x)$. При этом, конечно,

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)}. \tag{84}$$

Определение 7. *Пространство* BMO(Δ) есть совокупность всех функций $f \in L^1(0,1)$, удовлетворяющих условию

$$\mathfrak{N}_\Delta(f) := \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I|\,dx \right\} < \infty,$$

где sup берется по всем интервалам I, лежащим в Δ.

[9)] Ряд (82) всегда сходится по норме пространства $L^1(0,1)$ и п.в.

$\mathrm{BMO}(\Delta)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\Delta)} = \mathfrak{N}_\Delta(f) + \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|.$$

Обозначим через $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1_+$ и BMO_+ пространство четных функций из $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ и BMO соответственно. Следующее утверждение и его следствия носят вспомогательный характер и позволяют результаты, полученные в периодическом случае, переносить на непериодический случай (и наоборот).

Утверждение 1. *Линейный оператор* $Q\colon L^1(0,1) \to L^1(-\pi,\pi)$, *определенный равенством*

$$Q(f,x) := \begin{cases} f\left(\dfrac{x}{\pi}\right), & \text{если } x \in [0,\pi], \\ f\left(-\dfrac{x}{\pi}\right), & \text{если } x \in [-\pi,0], \end{cases} \qquad f \in L^1(0,1), \tag{85}$$

взаимно однозначно отображает пространство $\mathscr{H}(\Delta)$ *на* $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1_+$ *и пространство* $\mathrm{BMO}(\Delta)$ *на* BMO_+. *При этом*

1) $c\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \leqslant \|Q(f)\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1} \leqslant C\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)}$, $f \in \mathscr{H}(\Delta)$;

2) $c\|g\|_{\mathrm{BMO}(\Delta)} \leqslant \|Q(g)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C\|g\|_{\mathrm{BMO}(\Delta)}$, $g \in \mathrm{BMO}(\Delta)$;

(C, $c > 0$ – *абсолютные постоянные*).

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{H}(\Delta)$, $q(x) = Q(f,x)$ и $\varepsilon > 0$. Пользуясь определением нормы в пространстве $\mathscr{H}(\Delta)$ (см. (83)), найдем разложение функции $f(x)$ на Δ-атомы:

$$f(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(x), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \leqslant \|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} + \varepsilon$$

$$\left(\int_0^1 a_k(x)\,dx = 0, \quad k = 1,2,\ldots\right).$$

Тогда при $x \in [-\pi,\pi]$

$$q(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k Q(a_k,x) = 2\pi\lambda_0 \cdot \frac{1}{2\pi} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k b_k(x) + \lambda_k b_k(-x)],$$

где $b_k(x) = \dfrac{1}{\pi}\chi_{[0,\pi]}(x) Q(a_k,x)$, $k = 1,2,\ldots$. Из определений 3 и 6 сразу следует, что функции $b_k(x)$ и $b_k(-x)$, $x \in [-\pi,\pi]$, $k = 1,2,\ldots$, являются атомами, а следовательно, по теореме 4

$$\|q\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1} \leqslant \frac{2\pi}{c} \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \leqslant \frac{2\pi}{c}(\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} + \varepsilon)$$

(c – постоянная из соотношения (49)). Так как $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно малым, то из последнего неравенства вытекает, что

$$\|Q(f)\|_{\operatorname{Re}\mathscr{H}^1} \leqslant C\,\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \qquad \left(C = \frac{2\pi}{c}\right). \tag{86}$$

Пусть теперь $q(x) \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^1_+$. Пользуясь теоремой 4, найдем разложение

$$q(x) = \frac{\lambda_0}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(x), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \leqslant C\|q\|_{\operatorname{Re}\mathscr{H}^1},$$

где $u_k(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, $k = 1, 2, \ldots$, – атомы $\left(\int_{-\pi}^{\pi} u_k(x)\,dx = 0\right)$.

В силу четности функции $q(x)$ при $x \neq 0, \pm\pi$

$$\begin{aligned} q(x) = \frac{1}{2}\,[q(x) + q(-x)] &= \frac{\lambda_0}{2\pi} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k[u_k(x) + u_k(-x)] \\ &= \frac{\lambda_0}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k[b_k(x) + b_k(-x)], \end{aligned}$$

$$b_k(x) = \frac{1}{2}\,\chi_{[0,\pi]}(x)\,[u_k(x) + u_k(-x)], \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Легко видеть, что для любого атома $u_k(x)$ $\left(u_k \neq \frac{1}{2\pi}\right)$ функция

$$\frac{1}{2}\,\chi_{(0,\pi)}(x)\,[u_k(x) + u_k(-x)]$$

также является атомом, поэтому функция $a_k(x) = b_k(\pi x)$, $x \in (0, 1)$, $k = 1, 2, \ldots$, является Δ-атомом.

Положим

$$f(x) = \frac{\lambda_0}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k(x), \qquad x \in [0, 1].$$

Тогда $f \in \mathscr{H}(\Delta)$, $q(x) = Q(f, x)$ $(x \neq 0, \pm\pi)$ и

$$\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \leqslant C\|q\|_{\operatorname{Re}\mathscr{H}^1}. \tag{87}$$

Объединяя оценки (86) и (87), мы получаем соотношение 1). Соотношение 2) непосредственно следует из того факта, что для любой функции $b \in \mathrm{BMO}_+$

$$\mathfrak{N}(b) \leqslant \mathfrak{N}\big(b\chi_{(0,\pi)}\big) + \mathfrak{N}\big(b\chi_{(-\pi,0)}\big) \leqslant 2 \sup_{I \subset (0,\pi)} \left\{\frac{1}{|I|}\int_I |b(x) - b_I|\,dx\right\},$$

где sup берется по всем интервалам I, лежащим в $(0, \pi)$. Утверждение 1 доказано.

Следствие 4. $(\mathscr{H}(\Delta))^* = \mathrm{BMO}(\Delta)$ (*здесь равенство понимается так же, как в теореме* 5).

Доказательство. По самому определению пространства $\mathscr{H}(\Delta)$, ограниченные функции плотны в $\mathscr{H}(\Delta)$, поэтому нам достаточно показать, что

а) для любой функции $b \in \mathrm{BMO}(\Delta)$

$$\int_0^1 f(x)b(x)\,dx \leqslant C\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\Delta)}, \qquad f \in L^\infty(0,1);$$

б) для любого ограниченного линейного функционала $L = L(f)$ на $\mathscr{H}(\Delta)$ найдется такая функция $b(x) \in \mathrm{BMO}(\Delta)$ с $\|b\|_{\mathrm{BMO}(\Delta)} \leqslant C'\|L\|$, что

$$L(f) = \int_0^1 f(x)b(x)\,dx, \qquad f \in L^\infty(0,1)$$

(C, C' – абсолютные постоянные).

Пользуясь теоремой 5 и утверждением 1 (см., в частности, (77) и (85)), имеем

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)b(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q(f,x)Q(b,x)\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{c}\|Q(f)\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1}\|Q(b)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\Delta)},\end{aligned}$$

откуда следует соотношение а).

Далее отметим, что для $q \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ и $b \in \mathrm{BMO}$

$$\|q(x)+q(-x)\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1} \leqslant 2\|q\|_{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1}, \quad \|b(x)+b(-x)\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant 2\|b\|_{\mathrm{BMO}}. \tag{88}$$

Если $L(f)$ – ограниченный линейный функционал на $\mathscr{H}(\Delta)$, то в силу утверждения 1 и (88) функционал

$$\widetilde{L}(q) := L(f), \quad q \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1, \qquad Q(f,x) = \frac{1}{2}[q(x) + q(-x)]$$

– ограниченный линейный функционал на $\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$. Следовательно, в силу теоремы 5 (см. (80), (81)), для $q \in L^\infty(-\pi,\pi)$ имеет место равенство

$$\widetilde{L}(q) = \int_{-\pi}^{\pi} b(x)q(x)\,dx, \qquad \|b\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C\|\widetilde{L}\| \leqslant C_1\|L\|,$$

а потому для $q \in \operatorname{Re} \mathscr{H}^1_+ \cap L^\infty(-\pi, \pi)$

$$\widetilde{L}(q) = \int_{-\pi}^{\pi} q(x) \frac{b(x) + b(-x)}{2}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} q(x) b'(x)\, dx,$$

где $b' \in$ BMO и $\|b'\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C_2 \|L\|$. Наконец, снова используя утверждение 1, мы находим, что

$$L(f) = \widetilde{L}(Q(f)) = \int_{-\pi}^{\pi} Q(f, x) b'(x)\, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} Q(f, x) Q(b'', x)\, dx = 2\pi \int_0^1 f(x) b''(x)\, dx \quad \big(f \in L^\infty(0,1)\big),$$

где $\|b''\|_{\mathrm{BMO}(\Delta)} \leqslant C' \|L\|$. Следствие 4 доказано.

Из следствия 4 и теоремы Хана–Банаха непосредственно вытекает

Следствие 5. *Для произвольной функции $f \in \mathscr{H}(\Delta)$*

$$c\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \leqslant \sup_{\|b\|_{\mathrm{BMO}(\Delta)} \leqslant 1} \langle b, f \rangle \leqslant C \|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)},$$

где $C > 0$ и $c > 0$ – абсолютные постоянные.

Замечание. Если $f \in L^\infty(0,1)$, то значение функционала $\langle b, f\rangle$ для любой функции $b \in$ BMO(Δ) совпадает с интегралом $\int_0^1 f(x) b(x)\, dx$ (см. доказательство следствия 4).

Следствие 6. *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in [0,1]$, – О.Н.С.* с $f_1 \equiv 1$, $f_n \in$ Lip 1, $n = 1, 2, \dots$.

Если $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – базис в $\mathscr{H}(\Delta)$, то

1) *система $\Phi = \{\varphi_1(x), \varphi_n(x), \widetilde{\varphi}_n(x)\}_{n=2}^\infty$, $x \in [-\pi, \pi]$, где* (см. (85))

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Q(f_n, x), \qquad x \in [-\pi, \pi], \quad n = 1, 2, \dots, \tag{89}$$

является базисом в пространстве $\operatorname{Re} \mathscr{H}^1$;

2) *система $\mathscr{F} = \{F_n(z)\}_{n=1}^\infty$, $|z| < 1$, где*

$$F_1(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \tag{90}$$

$$F_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi_n(t+\theta) + i\widetilde{\varphi}_n(t+\theta)] P_r(t)\, dt, \quad n = 2, 3, \dots$$

($P_r(t)$ – ядро Пуассона; см. приложение 2, (5)), *является базисом в пространстве H^1.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что система $\{f_n(x), f_n(x)\}$ – биортонормированная (так как $f_n \in L^\infty(0,1) \subset \mathrm{BMO}(\Delta)$, $n = 1, 2, \dots$), поэтому (см. утверждение 1.3) коэффициенты разложения функции $f \in \mathscr{H}(\Delta)$ по базису $\{f_n\}$ совпадают с коэффициентами Фурье этой функции.

Легко видеть (см. следствие 1 и замечание 2 из приложения 2), что системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=1}^\infty$, а также система комплекснозначных функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_n + \frac{i}{\sqrt{2}}\widetilde{\varphi}_n\right\}_{n=1}^\infty$ ортонормированы. Кроме того, все функции $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, ортогональны всем функциям $\widetilde{\varphi}_n(x)$, $n = 2, 3, \dots$, так как функции $\varphi_n(x)$ четны, а функции $\widetilde{\varphi}_n(x)$ нечетны (см. (40)). Это значит, что система Φ – О.Н.С. Наконец, отметим, что так как $\varphi_n \in \mathrm{Lip}\,1$, то непосредственно из определения (40) следует, что $\widetilde{\varphi}_n \in L^\infty(-\pi, \pi)$, $n = 2, 3, \dots$.

Докажем, что для любой функции $q \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$

$$q(x) \overset{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1}{=} a_1(q)\varphi_1(x) + \sum_{n=2}^\infty \big(a_n(q)\varphi_n(x) + b_n(q)\widetilde{\varphi}_n(x)\big), \tag{91}$$

где

$$a_n(q) = \int_{-\pi}^{\pi} q(x)\varphi_n(x)\,dx, \qquad b_n(q) = \int_{-\pi}^{\pi} q(x)\widetilde{\varphi}_n(x)\,dx.$$

Пусть $q \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1$ и $\int_{-\pi}^{\pi} q(x)\,dx = 0$. Положим

$$q_+(x) = \frac{1}{2}[q(x) + q(-x)], \qquad q_-(x) = \frac{1}{2}[q(x) - q(-x)],$$

тогда

$$q_+ \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1_+, \quad \widetilde{q}_- \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1_+, \quad q = q_+ + q_-. \tag{92}$$

В силу четности функций q_+, φ_n, $n = 1, 2, \dots$, и нечетности функций q_-, $\widetilde{\varphi}_n$, $n = 2, 3 \dots$ (см. также следствие 1 из приложения 2), мы имеем

$$\begin{aligned} a_n(q) &= \int_{-\pi}^{\pi} q_+(x)\varphi_n(x)\,dx = a_n(q_+), \\ b_n(q) &= \int_{-\pi}^{\pi} q_-(x)\widetilde{\varphi}_n(x)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{q}_-(x)\varphi_n(x)\,dx = -a_n(q). \end{aligned} \tag{93}$$

Но из утверждения 1 и базисности системы $\{f_n\}$ в $\mathscr{H}(\Delta)$ следует, что для любой функции $g \in \mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1_+$

$$g(x) \overset{\mathrm{Re}\,\mathscr{H}^1}{=} \sum_{n=1}^\infty a_n(g)\varphi_n(x)$$

и, согласно определению нормы в $\operatorname{Re}\mathscr{H}^1$,

$$\widetilde{g}(x) \overset{\operatorname{Re}\mathscr{H}^1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)\widetilde{\varphi}_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(g)\widetilde{\varphi}_n(x).$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(q_+)\varphi_n(x) \overset{\operatorname{Re}\mathscr{H}^1}{=} q_+(x),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(\widetilde{q}_-)\widetilde{\varphi}_n(x) \overset{\operatorname{Re}\mathscr{H}^1}{=} \widetilde{(\widetilde{q}_-)}(x) = -q_-(x),$$

откуда (см. (92), (93)) мы получаем равенство (91) и первое утверждение следствия 6.

Для доказательства второго утверждения нам, в силу теорем 4 и 5 из приложения 2, достаточно показать, что для любой функции $q \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ с $\int_{-\pi}^{\pi} q(x)\,dx = 0$ справедливо равенство

$$q(x) + i\widetilde{q}(x) \overset{L^1}{=} \sum_{n=2}^{\infty} c_n(q)\frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_n(x) + i\widetilde{\varphi}_n(x)], \tag{94}$$

где

$$c_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi} [q(x) + i\widetilde{q}(x)][\varphi_n(x) - i\widetilde{\varphi}_n(x)]\,dx.$$

Так как

$$\begin{aligned} c_n(q) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\pi}^{\pi} [(q\varphi_n + \widetilde{q}\widetilde{\varphi}_n) + i(\widetilde{q}\varphi_n - q\widetilde{\varphi}_n)]\,dx \\ &= \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} (q\varphi_n - iq\widetilde{\varphi}_n)\,dx = \sqrt{2}\,[a_n(q) - ib_n(q)], \end{aligned}$$

то, учитывая, что

$$a_n(q) = \int_{-\pi}^{\pi} q\varphi_n\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{q}\widetilde{\varphi}_n\,dx = b_n(\widetilde{q}),$$

$$b_n(q) = \int_{-\pi}^{\pi} q\widetilde{\varphi}_n\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{q}\varphi_n\,dx = -a_n(q),$$

мы находим

$$\begin{aligned} c_n(q)\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_n + i\widetilde{\varphi}_n) &= [a_n(q) - ib_n(q)](\varphi_n + i\widetilde{\varphi}_n) \\ &= a_n(q)\varphi_n + b_n(q)\widetilde{\varphi}_n + i[a_n(q)\widetilde{\varphi}_n - b_n(q)\varphi_n] \\ &= a_n(q)\varphi_n + b_n(q)\widetilde{\varphi}_n + i[a_n(\widetilde{q})\varphi_n + b_n(\widetilde{q})\widetilde{\varphi}_n], \end{aligned}$$

откуда в силу (91) следует равенство (94). Следствие 6 доказано.

Следующий результат показывает, что пространство $\mathscr{H}(\Delta)$ содержит все функции, для которых мажоранта частных сумм ряда Фурье–Хаара суммируема.

Теорема 6. *Если функция* $f \in L^*(0,1)$ (см. 3.(55)), *то* $f \in \mathscr{H}(\Delta)$ *и*

$$\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \leqslant 13\|S^*(f)\|_1,$$

где

$$S^*(f,x) = \sup_{1 \leqslant N < \infty} \left|\sum_{n=1}^{N} c_n(f)\chi_n(x)\right|,$$
$$c_n(f) = \int_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. (Отметим, что мы будем использовать здесь построения, проведенные при доказательстве теоремы 3.11.) Не ограничивая общности, считаем, что $\|S^*(f)\|_1 = 1$.

Определим множества:

$$G_0 := (0,1), \quad G_k := \{x \in (0,1) : S^*(f,x) > 2^k\}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть, далее, $h_0(x) = \int_0^1 f(t)dt$, а при $k = 1, 2, \ldots$ функция $h_k(x)$ совпадает с функцией $g'(x)$, построенной при доказательстве теоремы 3.11 для $t = 2^k$ (см. 3.(53), 3.(52)).

Из свойств функции $g'(x)$, (см. 3.(52)–3.(54)) вытекает, что

а) существуют непересекающиеся интервалы $\delta_{k,j}$, $j = 1, 2, \ldots$, такие, что для п.в. $x \in (0,1)$ имеет место равенство

$$h_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \notin E_k = \bigcup_j \delta_{k,j}, \\ |\delta_{k,j}|^{-1} \int_{\delta_{k,j}} f(t)\,dt, & \text{если } x \in \delta_{k,j} \end{cases} \tag{95}$$

(множество $(0,1) \setminus E_k$ с точностью до счетного числа точек совпадает с множеством E, определенным в 3.(53$'$); см. также 3.(45) и 3.(11$'$));

б) $\|h_k\|_\infty \leqslant 2^k$;

в) $E_{k+1} \subset E_k$;

г) $m(E_k) \leqslant 2m(G_k)$.

Так как $m(G_k) \to 0$ при $k \to \infty$ и $h_k(x) = f(x)$ при $x \in (0,1) \setminus E_k$, то из в) и г) следует, что для п.в. $x \in (0,1)$

$$f(x) = h_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} [h_{k+1}(x) - h_k(x)]$$
$$= h_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{E_k}(x)[h_{k+1}(x) - h_k(x)]. \tag{96}$$

Из (96), учитывая, что $E_k = \bigcup_j \delta_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, получим, что

$$f(x) = h_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j b_{k,j}(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1), \tag{97}$$

где $b_{k,j}(x) = \chi_{\delta_{k,j}}(x)\,[h_{k+1}(x) - h_k(x)]$. В силу а) и б) функции $b_{k,j}(x)$ обладают следующими свойствами:

1) $\operatorname{supp} b_{k,j}(x) \subset \delta_{k,j}$;
2) $\int_0^1 b_{k,j}(x)\,dx = 0$;
3) $\|b_{k,j}\|_\infty \leqslant 3 \cdot 2^k$,

т.е. функции $a_{k,j}(x) := (3 \cdot 2^k |\delta_{k,j}|)^{-1} b_{k,j}(x)$ являются Δ-атомами, и из (97) мы получаем разложение:

$$f(x) = \lambda_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j \lambda_{k,j} a_{k,j}(x), \qquad \lambda_0 = \int_0^1 f(t)\,dt, \quad \lambda_{k,j} = 3 \cdot 2^k |\delta_{k,j}|.$$

Согласно а) и г)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_j |\lambda_{k,j}| = 3 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sum_j |\delta_{k,j}| = 3 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k m(E_k) \leqslant 6 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k m(G_k)$$
$$\leqslant 12 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k [m(G_k) - m(G_{k+1})] \leqslant 12 \|S^*(f)\|_1 = 12.$$

Из последнего неравенства, учитывая также, что $|\lambda_0| \leqslant 1$, мы получаем утверждение теоремы 6.

В заключение главы установим одно свойство функций из пространства BMO(Δ). Очевидно, что BMO(Δ) $\supset L^\infty(\Delta)$. С другой стороны, BMO(Δ) $\subset L^q(\Delta)$ для любого $q < \infty$ (это вытекает, например, из теоремы 5). Используя метод, уже применявшийся нами в гл. 3 при изучении системы Хаара, можно получить и более точный результат.

Теорема 7. *Для произвольной функции $f \in \mathrm{BMO}(\Delta)$ и любого интервала $I \subset \Delta$ справедливо неравенство*

$$m\{x \in I : |f(x) - f_I| > y\} \leqslant B|I| \exp\left\{\frac{-by}{\mathfrak{N}_\Delta(f)}\right\}, \qquad y > 0, \tag{98}$$

где $B > 0$ и $b > 0$ – абсолютные постоянные.

Доказательство. Пусть $I \subset (a, b) \subset \Delta$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что

$$\mathfrak{N}_\Delta(f) = 1, \quad f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,dt = 0, \quad 1 < y < \infty \tag{99}$$

(так как $\mathfrak{N}(f - C) = \mathfrak{N}(f)$, а при $\mathfrak{N}(f) = 1$ и $y \leqslant 1$ оценка в теореме 7 выполняется с $B = e$, $b = 1$). Положим при $x \in I$

$$\widetilde{M}_I(f, x) = \sup_{\delta \ni x} \frac{1}{|\delta|}\int_\delta f(t)\,dt,$$

где sup берется по всем интервалам δ вида

$$\begin{gathered} \delta_k^i = \left(a + \frac{i-1}{2^k}(b-a), a + \frac{i}{2^k}(b-a)\right), \\ k = 0, 1, \ldots, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^k, \end{gathered} \tag{100}$$

содержащим точку x. Если $T\colon (0,1) \to (a, b)$ – преобразование подобия, т.е. $T(z) = a + (b-a)z$, $z \in (0,1)$, то ясно, что $T(\Delta_k^i) = \delta_k^i$. Поэтому интервалы δ_k^i сохраняют свойства 1) и 2) двоичных интервалов Δ_k^i (см. § 3.1) и имеет место равенство

$$\widetilde{M}_I(f, x) = \widetilde{M}(f(T), T^{-1}(x)), \qquad x \in I, \quad T^{-1}(x) \in (0, 1),$$

где функция $\widetilde{M}(f, x)$ определена в гл. 3 (см. 3.(29)).

Пусть $G(y) := \{x \in I : \widetilde{M}_I(f, x) > y\}$, $y > 1$. Если множество $G(y)$ непусто, то, пользуясь леммой 1 из теоремы 3.7, можно найти непересекающиеся интервалы δ_s, $s = 1, 2, \ldots$, вида (100) такие, что

а) $G(y) = \bigcup\limits_s \delta_s$;

б) $y < |\delta_s|^{-1}\int_{\delta_s} |f(x)|\,dx \leqslant 2y$, $s = 1, 2, \ldots$

$\Big($в силу (99) $|I|^{-1}\int_I |f(x)|\,dx \leqslant \mathfrak{N}_\Delta(f) = 1 < y$, поэтому $G(y) \neq I\Big)$.

Для функции $f \in$ BMO соотношение б) можно уточнить: покажем, что

в) $y < |\delta_s|^{-1}\int_{\delta_s}|f(x)|\,dx \leqslant y+2$, $s = 1, 2, \dots$.

В самом деле, так как в концах интервала δ_s функция $\widetilde{M}_I(f,x)$ не превосходит y (см. а)), то, учитывая, что δ_s (месте с одним из концов) лежит в некотором интервале ω вида (100) с $|\omega| = 2|\delta_s|$, мы находим, что

$$|\omega|^{-1}\int_\omega |f(x)|\,dx \leqslant y$$

и

$$\begin{aligned}|\delta_s|^{-1}\int_{\delta_s}|f(x)|\,dx &\leqslant |\delta_s|^{-1}\int_{\delta_s}|f(x)-f_\omega|\,dx + |f_\omega| \\ &\leqslant 2\,|\omega|^{-1}\int_\omega |f(x)-f_\omega|\,dx + |\omega|^{-1}\int_\omega |f(x)|\,dx \\ &\leqslant 2\,\mathfrak{N}(f) + y = y+2.\end{aligned}$$

Докажем теперь, что имеет место неравенство

г) $m\{G(y+4)\} \leqslant \frac{1}{2}m\{G(y)\}$, $y > 1$.

Ясно, что можно считать, что $G(y+4) \neq \varnothing$. Тогда (см. а))

$$G(y) = \bigcup_s \delta_s, \qquad G(y+4) = \bigcup_j \delta'_j,$$

где каждый из интервалов δ'_j содержится в некотором интервале δ_s (так как $G(y+4) \subset G(y)$ и интервалы δ_s не пересекаются). Пусть

$$E_s = \bigcup_{j:\,\delta'_j \subset \delta_s} \delta'_j.$$

Тогда в силу б) (с $y+4$ вместо y)

$$(y+4)m(E_s) = (y+4)\bigcup_{j:\,\delta'_j\subset\delta_s}|\delta'_j| \leqslant \int_{E_s}|f(x)|\,dx.$$

Следовательно (см. в) и (99)), если $m(E_s) > 0$, то

$$\begin{aligned}(y+4) &\leqslant \{m(E_s)\}^{-1}\int_{E_s}|f(x)|\,dx\\ &\leqslant \{m(E_s)\}^{-1}\int_{E_s}|f(x)-f_{\delta_s}|\,dx+|f_{\delta_s}|\\ &\leqslant \frac{|\delta_s|}{m(E_s)}|\delta_s|^{-1}\int_{\delta_s}|f(x)-f_{\delta_s}|\,dx+|\delta_s|^{-1}\int_{\delta_s}|f(x)|\,dx\\ &\leqslant \frac{|\delta_s|}{m(E_s)}\mathfrak{N}_\Delta(f)+y+2=\frac{|\delta_s|}{m(E_s)}+y+2,\end{aligned}$$

т.е. всегда $m(E_s) \leqslant \frac{1}{2}|\delta_s|$, $s = 1, 2, \ldots$. Суммируя по $s = 1, 2, \ldots$, получим неравенство г).

Из г) легко вытекает утверждение теоремы 7. Действительно, согласно (99), нам нужно доказать, что

$$m\{x \in I : |f(x)| > y\} \leqslant B\,|I|\,\exp(-by), \qquad y > 1. \tag{101}$$

Пусть $y > 1$, $k = [(y-1)/4]$, $p = 1 + 4k$. Тогда $1 \leqslant p \leqslant y$ и в силу г)

$$m(G(y)) \leqslant m(G(p)) \leqslant 2^{-(k-1)}|I| \leqslant B|I|2^{-y/4},$$

откуда, с учетом того, что $|f(x)| \leqslant \widetilde{M}_I(f,x)$ для п.в. $x \in I$ (см. 3.(30)), мы получаем оценку (101). Теорема 7 доказана.

Следствие 7. *Для произвольной функции* $f \in L^1(0,1)$[10)]

$$c\mathfrak{N}_{\Delta,2}(f) \leqslant \mathfrak{N}_\Delta(f) \leqslant \mathfrak{N}_{\Delta,2}(f), \tag{102}$$

где $c > 0$ *– абсолютная постоянная и*

$$\mathfrak{N}_{\Delta,2}(f) := \sup_{I\subset(0,1)}\left\{\frac{1}{|I|}\int_I|f(x)-f_I|^2\,dx\right\}^{1/2} \tag{103}$$

(в (103) sup берется по всем интервалам $I \subset (0,1)$).

---

10) Конечно, возможно, что в (102) обе величины равны ∞.

Доказательство. Первое неравенство в (102) сразу вытекает из неравенства Коши: для произвольного интервала I

$$|I|^{-1}\int_I |f(x)-f_I|\,dx \leqslant |I|^{-1}|I|^{1/2}\left\{\int_I |f(x)-f_I|^2\,dx\right\}^{1/2} \leqslant \mathfrak{N}_{\Delta,2}(f),$$

т.е. $\mathfrak{N}_{\Delta}(f) \leqslant \mathfrak{N}_{\Delta,2}(f)$. Пусть теперь $\mathfrak{N}_{\Delta}(f) = 1$, I – произвольный интервал и

$$\lambda(y) := m\{x \in I : |f(x)-f_I| > y\}, \qquad y > 0.$$

Тогда согласно (98) (см. также равенство (2) из приложения 1)

$$\begin{aligned}\int_I |f(x)-f_I|^2\,dx &= 2\int_0^\infty y\lambda(y)\,dy \leqslant 2B|I|\int_0^\infty ye^{-by}\,dy\\ &= 2B|I|b^{-1}\int_0^\infty e^{-by}\,dy = 2B|I|b^{-2},\end{aligned}$$

т.е. (см. (103)) $\mathfrak{N}_{\Delta,2}(f) \leqslant (2B)^{1/2}b^{-1}$. Следствие 7 доказано.

Глава 6

Системы Фабера–Шаудера и Франклина

В этой главе рассматриваются две важные системы функций: Фабера–Шаудера и Франклина. Система Фабера–Шаудера возникла как первый пример базиса в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$, а система Франклина – как первый пример ортогонального базиса в этом пространстве. Позднее свойства этих систем достаточно подробно изучалась и, как оказалось, совсем не напрасно. В последнее время системы Фабера–Шаудера и Франклина нашли различные интересные применения в анализе.

§ 1. Система Фабера–Шаудера

Определение 1. *Системой Фабера–Шаудера* называется система функций

$$\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \qquad x \in [0,1],$$

в которой

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \qquad x \in [0,1],$$

и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left(\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{i}{2^k}\right), \\ 1, & \text{если } x = \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна} & \\ \qquad \text{на } \left[\dfrac{i-1}{2^k}, \dfrac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \text{ и на } \left[\dfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \dfrac{i}{2^k}\right]. & \end{cases} \tag{1}$$

Систему Фабера–Шаудера можно определить также, интегрируя функции Хаара. Точнее говоря, имеют место равенства

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \chi_1(t)\,dt, \quad \varphi_n(x) = 2\|\chi_n\|_\infty \int_0^x \chi_n(t)\,dt, \qquad n = 2, 3, \dots. \quad (2)$$

Рассмотрим ряд по системе Фабера–Шаудера:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^k} A_{k,i}\varphi_k^{(i)}(x) \qquad (3)$$

и предположим, что он сходится в каждой точке отрезка $[0,1]$ к конечной функции $f(x)$. Докажем, что тогда коэффициенты $\{A_n\}$ однозначно определяются функцией $f(x)$, а именно, что

$$\begin{gathered} A_0 = A_0(f) = f(0), \qquad A_1 = A_1(f) = f(1) - f(0), \\ A_n = A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right], \end{gathered} \qquad (4)$$

если $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$.

Используя равенства (см. (1))

$$A_0 = A_0\varphi_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(0),$$

$$A_0 + A_1 = A_0\varphi_0(1) + A_1\varphi_1(1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(1),$$

мы находим, что $A_0 = f(0)$, $A_1 = f(1) - f(0)$. Если же $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, то согласно (1)

$$A_n = \sum_{s=2^k+1}^{2^{k+1}} A_s\varphi_s\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = S_{2^{k+1}}\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - S_{2^k}\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right), \qquad (5)$$

где $S_N(x)$ – частная сумма ряда (3):

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n\varphi_n(x), \qquad N = 0, 1, \dots.$$

Из (1) видно, что функции $\varphi_n(x)$ равны нулю в точках $x = l/2^k$, $l = 0, 1, \ldots, 2^k$, если $n > 2^k$. Следовательно, учитывая, что $S_{2^k}(x)$ линейна на каждом отрезке $\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, из соотношения (5) мы находим, что

$$A_n = S_{2^{k+1}}\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[S_{2^k}\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + S_{2^k}\left(\frac{i}{2^k}\right)\right]$$
$$= f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right].$$

Из доказанных нами формул (4), в частности, вытекает, что при $N = 1, 2, \ldots$ равенство

$$\sum_{n=0}^{N} A_n \varphi_n(x) = 0 \quad \text{всюду на} \quad [0, 1]$$

выполняется только в случае, когда $a_n = 0$ при $n = 0, 1, \ldots, N$, т.е. функции $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N}$ линейно независимы. Из определения функций φ_n, $n = 0, 1, \ldots, N$ (см. (1)), и их линейной независимости вытекает следующее утверждение:

(A) При $N = 1, 2, \ldots$ пространство $G_N = G_N(\Phi)$ полиномов по системе Фабера–Шаудера вида $P_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} A_n \varphi_n(x)$ имеет размерность $N + 1$ и совпадает с пространством L_N, определяемым так:

$$L_1 = \left\{f \in C(0, 1) : f''(x) = 0 \text{ при } x \in (0, 1)\right\},$$
$$L_N = \left\{f \in C(0, 1) : f''(x) = 0 \text{ при } x \in \left(\bigcup_{s=1}^{2i} \Delta_{k+1}^{s}\right) \cup \left(\bigcup_{s=i+1}^{2^k} \Delta_k^s\right)\right\} \tag{6}$$
$$(N = 2^k + i, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k).$$

Отметим также такое свойство системы Фабера–Шаудера:

(B) Для произвольной функции $f(x)$ и $N = 1, 2, \ldots$ сумма

$$S_N(f, x) = \sum_{n=0}^{N} A_n(f) \varphi_n(x),$$

в которой коэффициенты определяются равенствами (4), совпадает с $f(x)$ на множестве π_N:

$$\pi_1 = \{0, 1\}, \qquad \pi_N = \left\{\frac{s}{2^k}\right\}_{s=0}^{2^k} \cup \left\{\frac{2s-1}{2^{k+1}}\right\}_{s=1}^{i} \tag{7}$$
$$(N = 2^k + i, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k).$$

В самом деле, пусть функция $g(x) \in L_N$ такова, что $g(x) = f(x)$ при $x \in \pi_N$. Тогда, в силу (A), $g(x)$ – полином по системе Ф: $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} A_n\varphi_n(x)$ и, как было показано выше, $A_n = A_n(g)$, $n = 0, 1, \ldots, N$.

Но $g(x) = f(x)$ при $x \in \pi_N$, и поэтому (см. (4)) $A_n(g) = A_n(f)$, $n = 0, 1, \ldots$, т.е. $S_N(f, x) \equiv g(x)$ и $S_N(f, x) = f(x)$ при $x \in \pi_N$.

Из утверждений (A) и (B) непосредственно вытекает равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x)$ к произвольной непрерывной функции $f(x)$. Единственность ряда, сходящегося к $f(x)$, была проверена ранее (см. (3), (4)). Таким образом нами получена

Теорема 1. *Система Фабера–Шаудера – базис в пространстве $C(0,1)$. При этом коэффициенты разложения*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x), \qquad f \in C(0,1),$$

определяются формулами (4), *а частные суммы $S_N(f,x)$ этого разложения принадлежат L_N и удовлетворяют соотношению*

$$S_N(f,x) = f(x) \quad \textit{при} \quad x \in \pi_N, \quad N = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Замечание. В главе 1 было доказано (см. теорему 1.9), что всякий ортонормированный базис в $C(0,1)$ является базисом и в $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$. Пример системы Фабера–Шаудера показывает, что для неортогональных базисов положение может быть иным. Система Фабера–Шаудера даже не минимальна в $L^p(0,1)$ при $1 \leqslant p < \infty$. Действительно, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ легко построить такой полином $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n(f)\varphi_n(x)$, что $P(x) = 1$ при $x \in [\varepsilon, 1]$ и $0 \leqslant P(x) \leqslant 1$ при $x \in [0, \varepsilon]$, а это значит, что $\|\varphi_0 - P\|_p \leqslant \varepsilon^{1/p}$.

Следствие 1. *Пусть $f \in C(0,1)$. Имеют место оценки*

а) $|A_n(f)| \leqslant \omega^{(2)}\Big(\dfrac{1}{N}, f\Big)$, $n = 1, 2, \ldots$, *где*

$$\omega^{(2)}(\delta, f) := \sup_{\substack{0<h\leqslant\delta,\\ h\leqslant x\leqslant 1-h}} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|;$$

б) $\|f - S_N(f)\|_C \leqslant \omega^{(2)}\Big(\dfrac{1}{N}, f\Big)$.

Доказательство. Оценка а) непосредственно вытекает из формул (4). Далее отметим, что точки множества π_N разбивают отрезок $[0,1]$ на интервалы длины $< 2/N$. Поэтому оценка б) будет доказана (см. (8)), если мы проверим, что для любого интервала $(\alpha,\beta) \subset (0,1)$

$$I = \max_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x) - \gamma(x)| \leqslant \omega^{(2)}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}, f\right),$$

где $\gamma(x) = f(\alpha) + \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$, $x \in [0,1]$.

Пусть $u(x) = f(x) - \gamma(x) \in C(0,1)$. Учитывая, что $u(\alpha) = u(\beta) = 0$, найдем такую точку $x_0 \in (\alpha,\beta)$, что

$$|u(x_0)| = \max_{x\in(\alpha,\beta)} |u(x)| = I.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $h = x_0 - \alpha \leqslant \beta - x_0$. Тогда $\alpha = x_0 - h < x_0 < x_0 + h \leqslant \beta$, и мы имеем

$$|u(x_0+h) + u(x_0-h) - 2u(x_0)| = |u(x_0+h) - 2u(x_0)| \geqslant I.$$

Но функция $\gamma(x)$ линейна, поэтому $\gamma(x_0+h) + \gamma(x_0-h) - 2\gamma(x_0) = 0$, и, учитывая, что $0 < h < \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$, мы получаем

$$I \leqslant |f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)| \leqslant \omega^{(2)}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}, f\right).$$

Следствие 1 доказано.

Из неравенства а) следствия 1 нетрудно вывести, что для каждой функции $f(x)$ с $\omega(\delta,f) = O\left(\dfrac{1}{\log^{1+\varepsilon} 1/\delta}\right)$ при $\delta \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ ее ряд по системе Фабера–Шаудера абсолютно (а значит, и безусловно) сходится по норме пространства $C(0,1)$. Вместе с тем не для всякой непрерывной функции $f(x)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |A_n(f)\varphi_n(x)|$ сходится равномерно. Последнее вытекает из следующего общего результата, доказательство которого естественно изложить в этом параграфе.

Теорема 2. *В пространстве $C(0,1)$ не существует безусловного базиса.*

Доказательство. Пусть $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ базис в $C(0,1)$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – его сопряженная система (сопряженным пространством к $C(0,1)$ является пространство V функций ограниченной вариации, поэтому $\psi_n \in V$, $n = 1, 2, \dots$; см. также следствие 1.1).

Фиксируем точку $x_0 \in (0,1)$ так, чтобы в этой точке все функции $\psi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, были непрерывны. Пусть n_0 – такое натуральное число, что $n_0^{-1} < \min(x_0, 1 - x_0)$. Для $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ положим

$$\tau_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_0, \\ 0, & \text{если } x \in \left[0, x_0 - \dfrac{1}{n}\right] \cup \left[x_0 + \dfrac{1}{n}, 1\right] \\ \text{линейна и непрерывна} \\ \qquad \text{на } \left[x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0\right] \text{ и на } \left[x_0, x_0 + \dfrac{1}{n}\right]. \end{cases} \tag{9}$$

Легко видеть (учитывая теорему Лейбница о знакопеременных рядах), что для любой последовательности натуральных чисел

$$n_0 = n_1 < n_2 < \cdots \tag{10}$$

функции

$$F_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} \tau_{n_k}(x), \qquad N = 1, 2, \dots,$$

имеют норму в $C(0,1)$, не превосходящую единицы:

$$\|F_N\|_C \leqslant 1, \qquad N = 1, 2, \dots. \tag{11}$$

Допустим, что мы нашли такую последовательность (10), что функции $\tau_{n_k}(x)$, $k = 1, 2, \dots$, представимы в виде

$$\tau_{n_k}(x) = P_k(x) + \eta_k(x), \quad \|\eta_k\|_C \leqslant 2^{-k}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{12}$$

где $P_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, – "непересекающиеся" полиномы по системе $\{g_n\}$:

$$P_k(x) = \sum_{n=t_k+1}^{t_{k+1}} c_n g_n(x), \quad t_k < t_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Тогда, если при $N = 1, 2, \dots$ рассмотреть функции

$$E_N(x) = \sum_{n=t_1+1}^{t_{N+1}} c'_n g_n(x) := \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} P_k(x),$$

где
$$c'_n = \frac{(-1)^k}{k} c_n \quad \text{при} \quad t_k < n \leqslant t_{k+1},$$
то из (11) и (12) следует, что
$$\|E_N\|_C = \left\| \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} (\tau_{n_k} - \eta_k) \right\|_C \leqslant \|F_N\|_C + \sum_{k=1}^{N} \|\eta_k\|_C \leqslant 2. \tag{13}$$

С другой стороны, если положить $\varepsilon_n = (-1)^k$ при $t_k < n \leqslant t_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, то согласно (9) и (12)
$$\left\| \sum_{n=t_1+1}^{t_{N+1}} \varepsilon_n c'_n g_n(x) \right\|_C \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} P_k(x_0) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \tau_{n_k}(x_0) - \sum_{k=1}^{N} \|\eta_k\|_C$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - 1 \geqslant c \ln N, \qquad N = 1, 2, \ldots . \tag{14}$$

В силу теоремы 1.10 из оценок (13) и (14) мы получим, что $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является безусловным базисом в $C(0,1)$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 2 остается построить последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и функции $P_k(x)$, $\eta_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие соотношениям (10) и (12). Положим $n_1 = n_0$, $t_1 = 0$ и выберем (учитывая, что $\{g_n\}$ – базис в $C(0,1)$) число t_2 так, чтобы для полинома $P_1(x) := \sum\limits_{n=t_1+1}^{t_2} \langle \psi_n, \tau_{n_1} \rangle g_n(x)$ выполнялось неравенство
$$\|\eta_1\|_C := \|\tau_{n_1} - P_1\|_C \leqslant \frac{1}{2} \, .$$

Допустим, что числа $n_1, \ldots, n_k$ и функции $P_1, \ldots, P_k$ уже построены. Тогда, используя непрерывность функций $\psi_n(x)$ в точке x_0, выберем число $n_{k+1} > n_k$ так, чтобы
$$W := \left\{ \max_{1 \leqslant n \leqslant t_{k+1}} \operatorname{Var}\left(\left[x_0 - \frac{1}{n_{k+1}}, x_0 + \frac{1}{n_{k+1}} \right], \psi_n \right) \right\} \sum_{n=1}^{t_{k+1}} \|g_n\|_C \leqslant 2^{-k-2},$$
где $\operatorname{Var}([\alpha,\beta],\psi)$ – полная вариация функции $\psi(x)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$. При таком выборе числа n_{k+1} имеет место оценка
$$\left\| \sum_{n=t_1+1}^{t_{k+1}} \langle \psi_n, \tau_{n_{k+1}} \rangle g_n(x) \right\|_C \leqslant \sum_{n=t_1+1}^{t_{k+1}} \left| \int_{x_0 - \frac{1}{n_{k+1}}}^{x_0 + \frac{1}{n_{k+1}}} \tau_{n_{k+1}}(x)\, d\psi_n(x) \right| \cdot \|g_n\|_C$$
$$\leqslant W \leqslant 2^{-k-2}. \tag{15}$$

Выберем затем число $t_{k+2} > t_{k+1}$ так, чтобы

$$\left\| \tau_{n_{k+1}}(x) - \sum_{n=1}^{t_{k+2}} \langle \psi_n, \tau_{n_{k+1}} \rangle g_n(x) \right\|_C \leqslant 2^{-k-2}, \tag{16}$$

и положим

$$P_{k+1}(x) := \sum_{n=t_{k+1}+1}^{t_{k+2}} \langle \psi_n, \tau_{n_{k+1}} \rangle g_n(x), \qquad \eta_{k+1}(x) = \tau_{n_{k+1}}(x) - P_{k+1}(x).$$

Из соотношений (15) и (16) вытекает, что $\|\eta_{k+1}\|_C \leqslant 2^{-k-1}$. Теорема 2 доказана.

Вернемся к рассмотрению системы Фабера–Шаудера. Справедлива

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Для того чтобы ряд* (3) *являлся разложением функции* $f \in \operatorname{Lip}\alpha$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$|A_n| \leqslant Cn^{-\alpha}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{17}$$

Доказательство. Если $f \in \operatorname{Lip}\alpha$, то из оценки а) следствия 1 прямо вытекает (17).

Пусть теперь задан ряд вида (3), для коэффициентов которого выполняется соотношение (17). Тогда этот ряд сходится абсолютно и равномерно, так как при $k = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} |A_n \varphi_n(x)| \leqslant \max_{2^k < n \leqslant 2^{k+1}} |A_n| \leqslant C 2^{-k\alpha},$$

и следовательно, является разложением по системе Φ своей суммы $f(x)$. При этом, для $x, y \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|\, |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \\ &= |A_1|\, |x - y| + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} |A_{k,i}| \big|\varphi_k^{(i)}(x) - \varphi_k^{(i)}(y)\big|. \end{aligned} \tag{18}$$

Отметим (см. (1)), что при любом $k = 0, 1, \ldots$ и $x, y \in [0, 1]$

$$\left|\varphi_k^{(i)}(x) - \varphi_k^{(i)}(y)\right| \leqslant \min\{1, 2^{k+1}|x - y|\}.$$

Кроме того, так как при каждом $k = 1, 2, \ldots$ носители функций $\varphi_k^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, не пересекаются, то для любых $x, y \in [0, 1]$ количество ненулевых слагаемых в сумме $\sum\limits_{i=1}^{2^k} |A_{k,i}| \left|\varphi_k^{(i)}(x) - \varphi_k^{(i)}(y)\right|$ не больше двух. Используя эти замечания и выбирая число k_0 так, чтобы

$$2^{-k_0-1} < |x - y| \leqslant 2^{-k_0},$$

из неравенства (18) мы находим

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leqslant |A_1|\,|x - y| + \sum_{k=0}^{\infty} 2\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^k} |A_{k,i}|\Big) \min\{1, 2^{k+1}|x - y|\} \\
&\leqslant |A_1|\,|x - y| + 2C \sum_{k=0}^{k_0} 2^{-k\alpha} 2^{k+1}|x - y| + 2C \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k\alpha} \\
&\leqslant |A_1|\,|x - y| + 4C|x - y| \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k(1-\alpha)} + C' 2^{-k_0\alpha} \\
&\leqslant K|x - y|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Легко видеть, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} \varphi_k^{(1)}(x) \notin \operatorname{Lip} 1,$$

хотя, очевидно, $|A_n(f)| \leqslant n^{-1}$. Таким образом, утверждение теоремы 3 теряет силу при $\alpha = 1$.

Следующий результат, оказавшийся полезным в некоторых задачах об "улучшения" свойств функций с помощью замены переменной (см., например, теорему 4.9), показывает, что для каждой функции $f \in C(0, 1)$ можно так подобрать замену переменной $\tau(x)$, чтобы функция $f \circ \tau(x) := f(\tau(x))$ имела лакунарный ряд по системе Фабера–Шаудера[1)]

[1)] То есть $f \circ \tau(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{n_k} \varphi_{n_k}(x)$, $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \gamma > 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Утверждение 1. *Пусть $f \in C(0,1)$, $f(0) = f(1) = 0$ и $0 = k_0 < k_1 < \cdots$ – последовательность целых чисел.*

Существуют целые числа i_s, $1 \leqslant i_s \leqslant 2^{k_s}$, $s = 0, 1, \ldots$, и непрерывная на $[0,1]$ функция $\tau(x)$ с условием

$$0 = \tau(0) < \tau(x) < \tau(y) < \tau(1) = 1 \quad \text{при} \quad 0 < x < y < 1 \tag{19}$$

такие, что разложение суперпозиции $F(x) := f \circ \tau(x)$ по системе Фабера–Шаудера имеет вид:

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{k_s, i_s} \varphi_{k_s}^{(i_s)}(x). \tag{20}$$

Доказательство. В силу формулы (4) для доказательства утверждения 1 достаточно построить точки $\big\{\{a_k^i\}_{i=0}^{2^k}\big\}_{k=0}^{\infty}$ и последовательность $\{i_s\}_{s=0}^{\infty}$, $1 \leqslant i_s \leqslant 2^{k_s}$, такие, что

а) $a_0^0 = 0$, $a_0^1 = 1$, $a_k^i < a_m^j$, если $\dfrac{i}{2^k} < \dfrac{j}{2^m}$, и $a_k^i = a_m^j$, если $\dfrac{i}{2^k} = \dfrac{j}{2^m}$;

б) $\lim\limits_{k \to \infty} \Big\{ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} (a_k^i - a_k^{i-1}) \Big\} = 0$;

в) $f(a_{m+1}^{2i-1}) = \dfrac{1}{2}[f(a_m^{i-1}) + f(a_m^i)]$, если $(m, i) \notin \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} (k_s, i_s)$.

Действительно, если такие точки построены, то, положив

$$\tau\left(\frac{i}{2^k}\right) = a_k^i, \qquad k = 0, 1, \ldots, \quad i = 0, 1, \ldots, 2^k,$$

мы можем, в силу а) и б), однозначно продолжить $\tau(x)$ на весь отрезок $[0,1]$ до непрерывной, строго монотонной функции (с $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$). При этом из равенства в) и (4) вытекает, что ряд функции $F(x)$ будет иметь вид (20).

При построении точек $\{a_k^i\}$, которое мы будем вести по индукции, нам потребуется дополнительно следить за тем, чтобы было выполнено условие:

г) для любой пары (m, i), $m = 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, 2^m$, либо

(I) $f(a_m^{i-1}) \neq f(a_m^i)$,

либо

(II) существует такой интервал $(\alpha_m^i, \beta_m^i) \subset (a_m^{i-1}, a_m^i)$, что $f(x) \equiv \text{const} = f(a_m^{i-1}) = f(a_m^i)$ при $x \in (\alpha_m^i, \beta_m^i)$.

Положим $a_0^0 = a_1^0 = 0$, $a_0^1 = a_1^2 = 1$, и выберем точку $a_1^1 \in (0,1)$ так, чтобы $f(a_1^1) \neq 0 = f(0) = f(1)$ (если это невозможно, то $f(x) \equiv 0$ на $[0,1]$, и можно взять $\tau(x) \equiv x$).

Допустим теперь, что точки $\left\{\{a_k^i\}_{i=0}^{2^k}\right\}_{k=0}^{m}$ уже определены, причем для этих точек выполнены соотношения а), в) и г), и пусть $(a_m^{l_m-1}, a_m^{l_m})$ – наибольший из интервалов (a_m^{i-1}, a_m^i), $i = 1, 2, \ldots, 2^m$ (или один из наибольших). Построим точки $\{a_{m+1}^i\}_{i=0}^{2^{m+1}}$; для этого прежде всего положим

$$a_{m+1}^{2i} = a_m^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, 2^m. \tag{21}$$

Построение точек $\{a_{m+1}^{2i-1}\}_{i=1}^{2^m}$ разобьем на два случая.

Случай 1. $m \notin \{k_s\}_{s=0}^{\infty}$, или $m = k_s$ при некотором s, но $i \neq l_{k_s}$.

Если для пары (m, i) выполнено (I), то, учитывая непрерывность функции $f(x)$, точку a_{m+1}^{2i-1} мы выберем так, чтобы

$$a_m^{i-1} < a_{m+1}^{2i-1} < a_m^i, \qquad f(a_{m+1}^{2i-1}) = \frac{1}{2}[f(a_m^{i-1}) + f(a_m^i)]. \tag{22}$$

Если для пары (m, i) имеет место (II), то берем

$$a_{m+1}^{2i-1} = \frac{1}{2}(\alpha_m^i + \beta_m^i).$$

Случай 2. $(m, i) = (k_s, l_{k_s})$ при некотором s.

Если в интервале

$$\left(a_m^{i-1} + \frac{1}{4}(a_m^i - a_m^{i-1}),\, a_m^i - \frac{1}{4}(a_m^i - a_m^{i-1})\right)$$

найдется такая точка ξ, что $f(\xi) \neq f(a_m^{i-1})$, $f(\xi) \neq f(a_m^i)$, то полагаем $a_{m+1}^{2i-1} = \xi$; в противном случае $f(x) \equiv \mathrm{const}$ на этом интервале (причем $f(x) = f(a_m^{i-1})$, или $f(x) = f(a_m^i)$), и мы берем $a_{m+1}^{2i-1} = \frac{1}{2}(a_m^{i-1} + a_m^i)$.

В обоих случаях

$$\max\left\{a_{m+1}^{2i-1} - a_{m+1}^{2i-2},\, a_{m+1}^{2i} - a_{m+1}^{2i-1}\right\} \leqslant \frac{3}{4}(a_m^i - a_m^{i-1}). \tag{23}$$

Точки $\{a_{m+1}^i\}_{i=0}^{2^{m+1}}$ построены. Продолжая указанный процесс, мы определим точки $\left\{\{a_k^i\}_{i=0}^{2^k}\right\}_{k=0}^{\infty}$. Положим также $i_s = l_{k_s}$ при $s = 0, 1, \ldots$. Выполнение условий а), в) и г) вытекает непосредственно из построения (см., в частности, (21), (22)). Кроме того, так как для каждого $s = 0, 1, \ldots$ наибольший из интервалов $(a_{k_s}^{i-1}, a_{k_s}^i)$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{k_s}$, делится точкой $a_{k_s+1}^{2i_s-1}$ на две части, длины которых меньше $\dfrac{3}{4} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 2^{k_s}} (a_{k_s}^i - a_{k_s}^{i-1})$, то

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} (a_k^i - a_k^{i-1}) \right\} = 0,$$

т.е. соотношение б) также выполнено. Утверждение 1 доказано.

Следствие 2. *Для произвольной функции $f \in C(0,1)$ с $f(0) = f(1)$ найдется такая функция $\tau(x)$ вида* (19), *что интегральный модуль непрерывности второго порядка суперпозиции*[2] $F(x) = f \circ \tau(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\omega_1^{(2)}(\delta, F) = o(\delta) \quad \textit{при} \quad \delta \to +0. \tag{24}$$

Доказательство. В силу утверждения 1 достаточно показать, что для любой функции $F \in C(0,1)$ вида

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k^{(i_k)}(x), \qquad 1 \leqslant i_k \leqslant 2^k,$$

справедлива оценка (24).

Легко проверить, что при $k = 0, 1, \ldots, i = 1, 2, \ldots, 2^k, \delta > 0$

$$\omega_1^{(2)}(\delta, \varphi_k^{(i)}) \leqslant C \min\{2^k \delta^2, 2^{-k}\}$$

(C – абсолютная постоянная).

Следовательно, положив $k(\delta) = \left[\frac{1}{2}|\log_2 \delta|\right]$, $\delta > 0$, мы получим

$$\begin{aligned}
\omega_1^{(2)}(\delta, F) &\leqslant C\left[\sum_{k=0}^{k(\delta)-1} |A_k| 2^k \delta^2 + \sum_{k=k(\delta)}^{2k(\delta)} |A_k| 2^k \delta^2 + \sum_{k=2k(\delta)+1}^{\infty} |A_k| 2^{-k}\right] \\
&\leqslant C\left[\max_{0 \leqslant k < \infty} |A_k| \delta^{3/2} + \max_{k(\delta) \leqslant k \leqslant 2k(\delta)} |A_k| \delta + \max_{k > 2k(\delta)} |A_k| \delta\right] \\
&\leqslant \varepsilon(\delta) \cdot \delta,
\end{aligned}$$

где $\varepsilon(\delta) = C\left[\max\limits_{0 \leqslant k < \infty} |A_k| \delta^{1/2} + 2 \max\limits_{k \geqslant k(\delta)} |A_k|\right] \to 0$ при $\delta \to 0$, так как $A_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следствие 2 доказано.

§ 2. Системы типа Фабера–Шаудера

Рассмотрим последовательность точек $\left\{\{a_k^i\}_{i=0}^{2^k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ такую, что

$$a_0^0 = 0, \quad a_0^1 = 1, \quad a_k^i < a_m^j, \text{ если } \frac{i}{2^k} < \frac{j}{2^m}, \quad a_k^i = a_m^j, \text{ если } \frac{i}{2^k} = \frac{j}{2^m},$$

[2] Мы считаем, что $F(x)$ продолжена с периодом 1 с отрезка $[0,1]$ на всю ось. Модули непрерывности второго порядка для периодических функций определены равенством (6′) из приложения 1.

и определим на отрезке $[0,1]$ с помощью этих точек систему типа Фабера–Шаудера, положив $\widetilde{\varphi}_0(x) \equiv 1$, $\widetilde{\varphi}_1(x) = x$ и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = \widetilde{\varphi}_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (a_k^{i-1}, a_k^i), \\ 1, & \text{если } x = a_{k+1}^{2i-1}, \\ \text{линейна и непрерывна} & \\ \qquad \text{на отрезках } [a_k^{i-1}, a_{k+1}^{2i-1}] \text{ и } [a_{k+1}^{2i-1}, a_k^i]. & \end{cases}$$

Ясно, что в случае, когда $a_k^i = \dfrac{i}{2^k}$ при $k = 0, 1, \ldots, i = 0, 1, \ldots, 2^k$, система $\{\widetilde{\varphi}_n\}$ просто совпадает с системой Фабера–Шаудера.

Точно таким же образом, как в случае системы Фабера–Шаудера, можно доказать, что функции $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=0}^{N}$ $(N = 1, 2, \ldots)$ *линейно независимы и*

$(\widetilde{\mathrm{A}})$ пространство $\widetilde{G}_N$ полиномов вида

$$\widetilde{P}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \widetilde{\varphi}_n(x), \qquad N = 2^k + i, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k,$$

совпадает с пространством

$$\widetilde{L}_N := \Bigg\{ f \in C(0,1) : f''(x) = 0 \\ \text{при } x \in \left[\bigcup_{s=1}^{2i} (a_{k+1}^{s-1}, a_{k+1}^{s}) \right] \cup \left[\bigcup_{s=i+1}^{2^k} (a_k^{s-1}, a_k^{s}) \right] \Bigg\};$$

$(\widetilde{\mathrm{B}})$ для произвольной функции $f(x)$ и $N = 2^m + j$, $m = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^k$ сумма

$$\widetilde{S}_N(x) = \widetilde{S}_N(f, x) = \sum_{n=0}^{N} \widetilde{A}_n(f) \widetilde{\varphi}_n(x),$$

в которой коэффициенты $\widetilde{A}_n(f)$ определяются так:

$$\widetilde{A}_0(f) = f(0), \qquad \widetilde{A}_1(f) = f(1) - f(0)$$

и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1 \ldots, i = 1, 2, \ldots, 2^k$

$$\widetilde{A}_n(f) = \widetilde{A}_{k,i}(f) \\ = f(a_{k+1}^{2i-1}) - \left[\frac{a_k^i - a_{k+1}^{2i-1}}{a_k^i - a_k^{i-1}} f(a_k^{i-1}) + \frac{a_{k+1}^{2i-1} - a_k^{i-1}}{a_k^i - a_k^{i-1}} f(a_k^i) \right], \qquad (25)$$

совпадает с $f(x)$ на множестве

$$\widetilde{\pi}_N := \{a_m^s\}_{s=0}^{2^m} \cup \{a_{m+1}^{2s-1}\}_{s=1}^{j}.$$

Из утверждений ($\widetilde{\mathrm{A}}$) и ($\widetilde{\mathrm{B}}$) в том случае, когда

$$\lambda_k := \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^k} (a_k^i - a_k^{i-1}) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{26}$$

выводится следующая

Теорема 4. *Система типа Фабера–Шаудера $\{\widetilde{\varphi}_n\}_{n=0}^{\infty}$, построенная по последовательности точек $\big\{\{a_k^i\}_{i=0}^{2^k}\big\}_{k=0}^{\infty}$ с условием* (26), *является базисом в $C(0,1)$. При этом коэффициенты разложения:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n(f)\widetilde{\varphi}_n(x), \qquad f \in C(0,1),$$

определяются равенствами (25), *а частные суммы $\widetilde{S}_N(f,x)$, $N > 1$, этого разложения принадлежат $\widetilde{L}_N$ и совпадают с $f(x)$ при $x \in \widetilde{\pi}_N$.*

Следствие 3. *Для коэффициентов и частных сумм разложения непрерывной функции $f(x)$ по системе типа Фабера–Шаудера имеют место оценки ($N = 2^k + i$, $k = 0,1,\ldots$, $i = 1,2,\ldots,2^k$):*

а) $|\widetilde{A}_N(f)| \leqslant \omega(\lambda_k, f)$;

б) $\|f - \widetilde{S}_N(f)\|_C \leqslant \omega(\lambda_k, f)$,

где $\omega(\delta, f)$ – модуль непрерывности функции $f(x)$, а числа λ_k определены в (26).

§3. Система Франклина. Определение, простейшие свойства

Проведем ортогонализацию системы Фабера–Шаудера $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ методом Шмидта: пусть

$$f_0(x) = \varphi_0(x), \quad f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} \varphi_i(x), \quad \alpha_n^{(n)} > 0, \tag{27}$$

$$(f_n, \varphi_i) = 0, \quad (f_n, f_n) = 1, \qquad n = 0,1,\ldots, \quad i = 0,1,\ldots,n-1,$$

где (f,g) – скалярное произведение в $L^2(0,1)$: $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Определение 2. О.Н.С. $F = \{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, однозначно определяемая соотношениями (27), называется *системой Франклина.*

Из теоремы 1 следует, что F полна в $C(0,1)$, а значит, и в $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$. Рассмотрим ряды Фурье–Франклина непрерывных функций:

$$
\begin{gathered}
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) f_n(x), \\
c_n(f) = c_n(f, F) = (f, f_n), \qquad n = 0, 1, \ldots .
\end{gathered} \tag{28}
$$

Как вытекает из общих результатов (см. утверждение 1.5), частная сумма ряда (28):

$$
S_N(f, x) = \sum_{n=0}^{N} c_n(f) f_n(x), \qquad N = 1, 2, \ldots,
$$

совпадает с ортогональной проекцией функции $f(x)$ на пространство $G_N = G_N(F)$ полиномов вида $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n f_n(x)$. По построению системы Франклина, $G_N(F) = G_N(\Phi) = L_N$ (см. (6)). Поэтому (см. теорему 1.6) для того, чтобы доказать базисность системы Франклина в $C(0,1)$, нам достаточно проверить, что операторы ортогонального проектирования на L_N, рассматриваемые как операторы из $C(0,1)$ на $C(0,1)$, имеют равномерно (по $N = 1, 2, \ldots$) ограниченные нормы. Ниже мы исследуем более общую задачу:

Пусть π – разбиение отрезка $[0,1]$ на n отрезков точками:

$$
\begin{gathered}
0 = t_{-1} = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_{n+1} = 1, \\
I_k = (t_{k-1}, t_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1,
\end{gathered} \tag{29}
$$

и пусть S_π – пространство ломаных с узлами в точках t_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, т.е.

$$
S_\pi = \bigl\{ f \in C(0,1) : f''(x) = 0 \text{ при } x \in I_k,\ k = 1, 2, \ldots, n \bigr\}, \tag{29$'$}
$$

в частности, $G_N = L_N = S_{\pi_N}$ (см. (6), (7)). Пусть, далее, P_π – оператор ортогонального проектирования из $L^2(0,1)$ на S_π.

Теорема 5. *Для любого разбиения π вида* (29) *и произвольной функции $f \in C(0,1)$*

$$
\|P_\pi(f)\|_C \leqslant 3\|f\|_C.
$$

Доказательство. Выберем в S_π следующий базис:

$$N_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0,1] \setminus (I_j \cup I_{j+1}), \\ \dfrac{t - t_{j-1}}{\delta_j}, & \text{если } t \in \overline{I}_j, \\ \dfrac{t_{j+1} - t}{\delta_{j+1}}, & \text{если } t \in \overline{I}_{j+1}, \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{30}$$

где $\delta_j = |I_j|$, $\overline{I}_j = [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\overline{I}_0 = \overline{I}_{n+1} = \varnothing$. Легко видеть, что

$$N_j(t_s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = j, \\ 0, & \text{если } s \neq j, \end{cases} \qquad s, j = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=0}^{N} N_j(t) = 1, \qquad t \in [0,1], \tag{31}$$

$$(N_j, 1) = \frac{1}{2}(t_{j+1} - t_{j-1}), \quad (N_j, N_j) = \frac{1}{3}\big(t_{j+1} - t_{j-1}\big), \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

и что для произвольной функции $g \in S_\pi$

$$g(t) = \sum_{j=0}^{n} g(t_j) N_j(t), \qquad \|g\|_C = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |g(t_j)|. \tag{32}$$

Пусть $f \in C(0,1)$; тогда (см. (32)) при $t \in [0,1]$

$$P_\pi(f, t) = \sum_{j=0}^{n} b_j N_j(t), \qquad b_j = b_j(f) = P_\pi(f, t_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{33}$$

и, по определению оператора P_π, при $k = 0, 1, \ldots, n$

$$(N_k, f) = (N_k, P_\pi(f)) = b_k (N_k, N_k) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} b_j (N_k, N_j).$$

Если взять число k таким, что $|b_k| = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |b_j|$, то из последнего равенства, учитывая (31), мы находим

$$|b_k| \left[(N_k, N_k) - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (N_k, N_j) \right] \leqslant |(N_k, f)|,$$

а значит $\left(\text{так как } \sum\limits_{j=0}^{n} N_j(t) \equiv 1\right)$,

$$|b_k|\big[2(N_k, N_k) - (N_k, 1)\big] \leqslant \|f\|_C (N_k, 1).$$

Следовательно (см. (31), (32), (33)),

$$\begin{aligned}\|P_\pi(f)\|_C &= \max_{0\leqslant j\leqslant n} |b_j| = |b_k| \leqslant \frac{(N_k, 1)}{2(N_k, N_k) - (N_k, 1)}\|f\|_C \\ &= \frac{\frac{1}{2}(t_{k+1} - t_{k-1})}{\frac{2}{3}(t_{k+1} - t_{k-1}) - \frac{1}{2}(t_{k+1} - t_{k-1})}\|f\|_C = 3\|f\|_C,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 5, как отмечалось выше, вытекает

Теорема 6. *Система Франклина – базис в пространстве $C(0,1)$.*

Теорема 7. *Система Франклина – базис в $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$. При этом для частных сумм $S_N(f,x)$ ряда Фурье–Франклина функции $f \in L^p(0,1)$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) f_n(x), \qquad c_n(f) = \int_0^1 f(x) f_n(x)\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

справедливо неравенство[3)]

$$\|f - S_N(f)\|_p \leqslant C\omega_p\left(\frac{1}{N}, f\right), \qquad N = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

где C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Из теорем 1.9 и 6 вытекает базисность системы Франклина в $L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$ и оценка

$$\|S_N(f)\|_p \leqslant M\|f\|_p, \qquad f \in L^p(0,1), \tag{35}$$

где M – абсолютная постоянная (см. доказательство теоремы 1.9).

Если $f \in L^p(0,1)$ и $g \in G_N$, то, учитывая, что $S_N(g,x) = g(x)$, имеем:

$$\begin{aligned}\|f - S_N(f)\|_p &\leqslant \|f - g\|_p + \|g - S_N(f)\|_p \\ &= \|f - g\|_p + \|S_N(f - g)\|_p \leqslant (M+1)\|f - g\|_p.\end{aligned}$$

[3)] Легко видеть, что оценка (34) верна и при $p = \infty$ для непрерывных функций $f(x)$.

Поэтому для доказательства неравенства (34) достаточно проверить, что

$$E_N(f) = \inf_{g\in G_N} \|f-g\|_p \leqslant B\omega_p\Big(\frac{1}{N}, f\Big). \tag{36}$$

Фиксируем функцию $f \in L^p(0,1)$ и число $k = 0, 1, \ldots$. Из результатов гл. 3 (см. теорему 3.3 и равенства 3.(8)) вытекает, что

$$\|\theta(x) - f(x)\|_p \leqslant C\omega_p(2^{-k}, f), \tag{37}$$

где

$$\theta(x) = \theta_i = 2^k \int_{\Delta_k^i} f(t)\,dt \quad \text{при} \quad x \in \Delta_k^i = \Big(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k.$$

Рассмотрим (при $k \geqslant 1$) функцию $g(x) \in G_{2^k} = L_{2^k}$ (см. (6)), однозначно определяемую условиями

$$g\Big(\frac{i}{2^k}\Big) = \theta_i \quad \text{при} \quad i = 1, 2 \ldots, 2^k, \qquad g(0) = \theta_1.$$

Тогда $g(x) = \theta_1$ при $x \in \Delta_k^1$ и

$$g(x) = 2^k(\theta_i - \theta_{i-1})\Big(x - \frac{i-1}{2^k}\Big) + \theta_{i-1} \quad \text{при} \quad x \in \Delta_k^i, \quad i = 2, 3, \ldots, 2^k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|g-\theta\|_p^p &= \sum_{i=1}^{2^k} \int_{\Delta_k^i} |g(x) - \theta_i|^p\,dx \\
&= \sum_{i=2}^{2^k} 2^{kp}|\theta_i - \theta_{i-1}|^p \int_{\Delta_k^i} \Big|x - \frac{i}{2^k}\Big|^p dx \\
&= \sum_{i=2}^{2^k} 2^{kp}|\theta_i - \theta_{i-1}|^p \frac{1}{p+1} 2^{-k(p+1)} \\
&= \frac{2^{-k}}{p+1} \sum_{i=2}^{2^k} \Big|2^k \int_{\Delta_k^i} f(t)\,dt - 2^k \int_{\Delta_k^{i-1}} f(t)\,dt\Big|^p \\
&\leqslant \frac{1}{p+1} 2^{k(p-1)} \sum_{i=2}^{2^k} \Big[\int_{\Delta_k^{i-1}} |f(t+2^{-k}) - f(t)|\,dt\Big]^p.
\end{aligned}$$

Из последней оценки, применяя неравенство Гёльдера, находим

$$\begin{aligned}\|g-\theta\|_p^p &\leqslant \frac{1}{p+1}2^{k(p-1)}\sum_{i=2}^{2^k}2^{-\frac{kp}{q}}\int_{\Delta_k^{i-1}}|f(t+2^{-k})-f(t)|^p\,dt\\ &\leqslant \frac{1}{p+1}\int_0^{1-2^{-k}}|f(t+2^{-k})-f(t)|^p\,dt \leqslant \frac{1}{p+1}\omega_p^p(2^{-k},f)\end{aligned}$$

$(1/p+1/q=1)$. Отсюда и из (37) вытекает оценка (36) для $N=2^k$, $k=0,1,\dots$. Наконец, если $2^k<N<2^{k+1}$, то, используя неравенство $\omega_p(2\delta,f)\leqslant 2\omega_p(\delta,f)$, $\delta>0$ (см. приложение 1), мы получаем

$$E_N(f)\leqslant E_{2^k}(f)\leqslant B'\omega_p(2^{-k},f)\leqslant 2B'\omega_p(2^{-k-1},f)\leqslant B\omega_p\Big(\frac{1}{N},f\Big).$$

Теорема 7 доказана.

§4. Экспоненциальная оценка для функций Франклина

В этом параграфе мы изучаем характер поведения на отрезке $[0,1]$ функций системы Франклина.

Пусть π_n, $n=1,2,\dots,$ – разбиения, определенные равенством (7), т.е. $\pi_1=\{0,1\}$ и при $n=2^k+i$, $k=0,1,\dots$, $i=1,2,\dots,2^k$

$$\pi_n=\{t_s\}_{s=0}^n,\quad\text{где}\quad t_s=t_s(n)=\begin{cases}\dfrac{s}{2^{k+1}}, & \text{если } s=0,1,\dots,2i;\\[2mm] \dfrac{s-i}{2^k}, & \text{если } s=2i+1,\dots,n.\end{cases}\tag{38}$$

Напомним, что пространство ломаных S_{π_n} мы обозначаем через L_n (см. (29′), (6)). Пусть, кроме того, $t_{-1}=0$, $t_{n+1}=1$, а L_0 – одномерное пространство функций, постоянных на $[0,1]$.

Как отмечалось в начале § 3, пространство полиномов по системе Франклина вида $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kf_k(x)$ совпадает с L_n. Поэтому

$$\begin{gathered}f_n\in L_n,\quad (f_n,f_n)=1,\qquad n=0,1,\dots,\\ (f_n,g)=0,\quad\text{если}\quad g\in L_{n-1},\qquad n=1,2,\dots,\end{gathered}\tag{39}$$

и

$$f_n(x)=\sum_{s=0}^{n}a_sN_s(x),\qquad a_s=a_s(n)=f_n(t_s(n)),\quad s=0,1,\dots,n,\tag{40}$$

где $N_s(x) = N_s(x, \pi_n)$, $s = 0, 1, \ldots, n$, – базис пространства $L_n = S_{\pi_n}$ (см. (30)):

$$N_s \in L_n, \quad N_s(t_j) = \delta_{s,j}, \qquad s, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{41}$$

Теорема 8. *Существуют абсолютные постоянные $C_0, C_1, C_2 > 0$ и q, $0 < q < 1$, такие, что для $n = 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad C_1\sqrt{n} \leqslant \|f_n\|_{C(0,1)} = \|f_n\|_{C(\Delta_n)} \leqslant C_2\sqrt{n}, \\ &\text{б)} \quad |f_n(t)| \leqslant C_0\sqrt{n}q^{n|t-z_n|}, \quad t \in [0,1], \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$z_n := \frac{2i-1}{2^{k+1}} = t_{2i-1}, \qquad \Delta_n = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right) = (t_{2i-2}, t_{2i}),$$

если $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$; $z_1 = 1$, $\Delta_1 = (0, 1)$.

Замечание. Утверждение теоремы 8 называют обычно экспоненциальной оценкой для функций Франклина из-за наличия в правой части неравенства (42), б) множителя $q^{n|t-z_n|}$, экспоненциально быстро убывающего при удалении точки t от интервала Δ_n.

Доказательство теоремы 8. При $n = 1$ неравенства (42) очевидны, так как $f_1(x) = 2\sqrt{3}(x - 1/2)$ (см. (27)) и $\|f_1\|_C < 2$.

Пусть $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$. Рассмотрим функции $\{N_j(t)\}_{j=0}^n$ ($N_j(t) = N_j(t, \pi_n)$), определенные равенством (30) и образующие базис в $L_n = S_{\pi_n}$. Отметим, что разбиение π_n получается из разбиения π_{n-1} добавлением точки t_{2i-1} (см. (38)). Отсюда легко вывести, что $N_j = N_j(x, \pi_n) \in L_{n-1}$, если $|j - (2i-1)| > 1$, $j = 0, 1, \ldots, n$, поэтому (см. (39))

$$(f_n, N_j) = 0, \quad \text{если} \quad |j - (2i-1)| > 1, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Отсюда, учитывая, что (см. (30))

$$(N_s, N_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } |s-j| \geqslant 2; \\ \frac{1}{3}(t_{s+1} - t_{s-1}), & \text{если } s = j; \\ \frac{1}{6}(t_{s+1} - t_s), & \text{если } s = j-1; \\ \frac{1}{6}(t_s - t_{s-1}), & \text{если } s = j+1, \end{cases} \tag{43}$$

получаем такие соотношения для коэффициентов a_s разложения функции f_n по базису $\{N_s\}$ (см. (40))

а) $2a_0 + a_1 = 0$, если $1 < i \leqslant 2^k$; $a_{n-1} + 2a_n = 0$, если $1 \leqslant i < 2^k$;

б) $a_{s-1} + 4a_s + a_{s+1} = 0$ при $|s - (2i-1)| > 1$, $s = 1, 2 \ldots, n-1$.

В случае $1 < i \leqslant 2^k$ в силу а) имеем, что $a_0 = -\frac{1}{2}a_1$, и если $a_{s-1} = -\lambda_s a_s$ при некотором $s = 1, \ldots, 2i-3$, то из б) находим, что

$$a_s = -\lambda_{s+1}a_{s+1}, \quad \text{где} \quad \lambda_{s+1} = \frac{1}{4-\lambda_s}, \quad s = 1, \ldots, 2i-3, \lambda_1 = \frac{1}{2}. \quad (44)$$

Аналогично, в случае $1 \leqslant i < 2^k$ будем иметь, что $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1}$ и

$$a_s = -\lambda_{s-1}a_{s-1}, \quad \text{где} \quad \lambda_{s-1} = \frac{1}{4-\lambda_s}, s = 2i+1, \ldots n-1, \lambda_{n-1} = \frac{1}{2}. \quad (45)$$

Применив индукцию по $s = 2, 3, \ldots, 2i-2$ в первом случае и по $s = n-2$, $n-3, \ldots, 2i$ во втором, находим, что

$$\frac{1}{4} \leqslant \lambda_s \leqslant \frac{2}{7} \quad \text{при} \quad s = 2, 3, \ldots, n-2, \quad s \neq 2i-1 \quad (1 \leqslant i \leqslant 2^k). \quad (46)$$

Таким образом, с учетом (40), мы получили, что

$$\begin{aligned} f_n(t_{s-1}) &= -\lambda_s f_n(t_s), \quad s = 1, \ldots, 2i-2, \quad \text{если} \quad 1 < i \leqslant 2^k; \\ f_n(t_{s+1}) &= -\lambda_s f_n(t_s), \quad s = 2i, \ldots, n-1, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant i < 2^k, \end{aligned} \quad (47)$$

где числа λ_s определены реккурентными формулами (44), (45) и удовлетворяют условиям (46). Так как $f_n(t)$ кусочно линейная непрерывная функция с узлами в точках t_s, отсюда вытекает, что функция $|f_n(t)|$ свое максимальное значение принимает на интервале $\Delta_n = (t_{2i-2}, t_{2i})$ и

$$\|f\|_{C(t_{s-1},t_s)} \leqslant \left(\frac{2}{7}\right)^{|s-(2i-1)|-1} \|f\|_{C(\Delta_n)}, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \quad (48)$$

Учитывая, что $|s-(2i-1)| > \frac{n}{2}|t-z_n|-1$, если $t \in (t_{s-1}, t_s)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, из (48) получим:

$$|f_n(t)| \leqslant C\|f_n\|_{C(\Delta_n)} q^{n|t-z_n|}, \qquad t \in [0,1], \quad (49)$$

где $q = \sqrt{2/7} \in (0,1)$, $C = 3.5^2$.

Для завершения доказательства нам остается показать, что

$$\|f_n\|_{C(\Delta_n)} \asymp \sqrt{n}.$$

Действительно, функция f_n линейна на интервалах $\Delta_n^+ = (t_{2i-2}, t_{2i-1})$ и $\Delta_n^- = (t_{2i-1}, t_{2i})$, а потому

$$\int_{\Delta_n} f_n^2(t)\,dt \asymp \frac{1}{n}\|f_n\|^2_{C(\Delta_n)}.$$

Отсюда и из (49) находим, что

$$1 = \int_0^1 f_n^2(t)\,dt \leqslant C\|f_n\|^2_{C(\Delta_n)} \int_0^1 q^{n|t-z_n|}\,dt$$
$$\leqslant C'\frac{1}{n}\,\|f_n\|^2_{C(\Delta_n)} \leqslant C'' \int_{\Delta_n} f_n^2(t)\,dt \leqslant C'',$$

т.е. $\|f_n\|^2_{C(\Delta_n)} \asymp n$. Теорема 8 доказана.

Замечание. Используя соотношения (44)–(47) нетрудно показать, что $a_s \neq 0$ при $s = 0, 1, \dots, n$ и что любые две функции f_n и $f_{n'}$ из одной и той же двоичной пачки имеют один и тот же вид вне минимального интервала, содержащего Δ_n и $\Delta_{n'}$, точнее, если $n = 2^k + i$, $n' = 2^k + i'$, $1 \leqslant i < i' \leqslant 2^k$, то существуют постоянные γ_1 и γ_2 такие, что

$$f_n(t) = \begin{cases} \gamma_1 f_{n'}(t) & \text{при } t \in (0, t_{2i-2}); \\ \gamma_2 f_{n'}(t) & \text{при } t \in (t_{2i'}, 1). \end{cases}$$

Следствие 4. *Существуют абсолютные постоянные $C > 0$ и q, $0 < q < 1$, такие, что при $n = 1, 2, \dots$ и $t \in [0, 1]$ справедливы неравенства*:

1) $|f_n(t)| \leqslant C\|f_n\|_{C(I)} q^{nd(I,t)}$, *если* $I = [t_s, t_{s+1}]$, $0 \leqslant t < t_{s+1} < z_n$ *или* $z_n < t_s < t \leqslant 1$ $\Bigl($*мы используем обозначение*: $d(I, I') = \inf\limits_{y \in I,\, y' \in I'} |y - y'|$, $I, I' \subset \mathbb{R}^1\Bigr)$;
2) $|f_n'(t)| \leqslant Cn^{3/2} q^{n|t-z_n|}$;
3) $\left|\int_0^t f_n(x)\,dx\right| \leqslant Cn^{-1/2} q^{n|t-z_n|}$;
4) $\|f_n\|_1 \leqslant Cn^{-1/2}$.

Доказательство. Оценка 1) следует из (47); 2) вытекает из (42), б) с учетом того, что для $t \in (t_{s-1}, t_s)$, $1 \leqslant s \leqslant n$ (см. (38)),

$$|f_n'(t)| = \left|\frac{f(t_s) - f(t_{s-1})}{t_s - t_{s-1}}\right| \leqslant 2n|f(t_s) - f(t_{s-1})|.$$

Неравенство 3) также вытекает из (42), б) $\Bigl($при $t > z_n$ нужно учесть, что $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$, т.е. $\int_0^t f_n(x)\,dx = -\int_t^1 f_n(x)\,dx\Bigr)$. Наконец, 4) непосредственно следует из (42), б).

В следующей теореме мы получим экспоненциальную оценку для ядра Дирихле по системе Франклина:

$$K_n(x,t) := \sum_{m=0}^{n} f_m(t) f_m(x), \qquad n = 0, 1, \dots . \tag{50}$$

Теорема 9. *Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что*

$$|K_n(x,t)| \leqslant Cnq^{n|t-x|}, \qquad t, x \in [0,1], \quad n = 1, 2, \dots . \tag{51}$$

Доказательство. Ясно, что при фиксированном x или t функция $K_n(x,t)$ принадлежит пространству $L_n = S_{\pi_n}$ и

$$\int_0^1 K_n(x,t) N_j(t)\, dt = N_j(x), \qquad j = 0, 1, \dots, n. \tag{52}$$

Следовательно (см. (41)),

$$\int_0^1 K_n(t_s,t) N_j(t)\, dt = \delta_{s,j}, \qquad s, j = 0, 1, \dots, n. \tag{53}$$

Фиксируем s и разложим функцию $K_n(t_s,t)$ по базису $\{N_m\}$:

$$K_n(t_s,t) = \sum_{m=0}^{n} b_m N_m(t). \tag{54}$$

Из (53) и (54), учитывая (43), мы получим, что

$$\text{а)}\quad 2b_0 + b_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < s \leqslant n; \\ 6 \cdot 2^{k+1}, & \text{если } s = 0; \end{cases}$$

$$\text{б)}\quad b_{n-1} + 2b_n = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < s \leqslant n; \\ 6 \cdot 2^{k+1}, & \text{если } s = n; \end{cases}$$

$$\text{в)}\quad b_{j-1} + 4b_j + b_{j+1} = 0 \ \text{ при } \ 1 \leqslant j \leqslant s-1, \quad j \neq s;$$

$$\text{г)}\quad b_{s-1} + 4b_s + b_{s+1} = 6 \cdot 2^k, \ \text{ если } \ 1 \leqslant s \leqslant n-1.$$

Из условий а), б) и в), как и в доказательстве теоремы 8, получим, что

$$1)\ b_{j-1} = -\lambda_j b_j,\ j = 1, \dots, s, \ \text{ где } \lambda_1 = \frac{1}{2},\ \ \lambda_j = \frac{1}{4 - \lambda_{j-1}},$$

$$\frac{1}{4} < \lambda_j < \frac{2}{7},\ j = 2, \dots, s, \ \text{если } 0 < s \leqslant n; \tag{55}$$

$$2)\ b_{j+1} = -\beta_j b_j,\ j = s, \dots, n-1, \ \text{ где } \beta_{n-1} = \frac{1}{2},\ \beta_j = \frac{1}{4 - \beta_{j+1}},$$

$$\frac{1}{4} < \beta_j < \frac{2}{7},\ j = s, \dots, n-1, \ \text{если } 0 \leqslant s < n.$$

Это означает, что b_s – наибольшее по модулю среди всех чисел b_j и, с учетом а), б) и г), $|b_s| \leqslant 12 \cdot 2^k$, Следовательно (см. (55)),

$$|b_j| < |b_s| \left(\frac{2}{7}\right)^{|j-s|} \leqslant 12 \cdot 2^k \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{|j-s|},$$

что вместе с (54) доказывает оценку

$$|K_n(t_s, t_j)| = |b_j| \leqslant Cnq^{n|t_s - t_j|}, \qquad 0 < q < 1.$$

Отсюда в силу кусочной линейности функции $K_n(t_s, t_j)$ по переменным x и t (при фиксированных t и x соответственно) вытекает неравенство (51). Теорема 9 доказана.

Из теоремы 9 легко получить оценку для мажоранты частных сумм ряда Фурье–Франклина интегрируемой функции $f(x)$

$$S^*(f,x) = S^*_F(f,x) = \sup_{1 \leqslant N < \infty} |S_N(f,x)| \tag{56}$$

через максимальную функцию $M(f,x)$ (см. определение 2 из приложения 1).

Теорема 10. *Для произвольной функции $f \in L^1(0,1)$ справедливо неравенство*

$$S^*(f,x) \leqslant C \cdot M(f,x), \qquad x \in (0,1), \tag{57}$$

где C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Из (51) следует, что

$$\begin{aligned} |S_N(f,x)| &= \left|\int_0^1 K_n(x,t) f(t)\,dt\right| \leqslant Cn \int_0^1 q^{n|t-x|} |f(t)|\,dt \\ &= Cn \int_0^{1-x} q^{nt} |f(x+t)|\,dt + Cn \int_0^x q^{nt} |f(x-t)|\,dt \\ &=: CI_1 + CI_2. \end{aligned}$$

Для оценки I_1 воспользуемся следующим неравенством, непосредственно вытекающим из определения максимальной функции:

$$F_x(t) := \int_0^t |f(x+\tau)|\,d\tau \leqslant t \cdot M(f,x), \qquad x \in (0,1), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1-x.$$

Имеем:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= n\int_0^{1-x} q^{nt}\,dF_x(t) = n\Big[q^{nt}F_x(t)\Big|_0^{1-x} - n\ln q\int_0^{1-x} q^{nt}F_x(t)\,dt\Big]\\
&\leqslant nq^{n(1-x)}F_x(1-x) + n^2|\ln q|M(f,x)\int_0^{1-x} q^{nt}t\,dt\\
&\leqslant nq^{n(1-x)}(1-x)M(f,x) + C_1M(f,x)\int_0^{1-x} q^{nt}nt\,dnt\\
&\leqslant C_2M(f,x) + C_1M(f,x)\int_0^{\infty} q^{\tau}\tau\,d\tau = C_3M(f,x).
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом доказывается, что $I_2 \leqslant C_4M(f,x)$. Теорема 10 доказана.

Следующий результат вытекает из оценки (57), теоремы 7 и свойств максимальной функции $M(f,x)$ (см. также доказательство теоремы 3.4).

Теорема 11. *Ряд Фурье–Франклина каждой функции $f \in L^1(0,1)$ сходится к $f(x)$ п.в. на $(0,1)$. При этом для мажоранты частных сумм $S^*(f,x)$ справедливы неравенства*:

а) $m\{x \in (0,1) : S^*(f,x) > y\} \leqslant \dfrac{C}{y}\|f\|_1$;

б) $\|f\|_p \leqslant \|S^*(f)\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$, *если* $f \in L^p(0,1)$, $1 < p \leqslant \infty$.

§ 5. Безусловная сходимость рядов Фурье–Франклина в пространствах $\mathscr{H}(\Delta)$ и $L^p(0,1)$.

Теорема 12. *Система Франклина $F = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – безусловный базис в пространстве $\mathscr{H}(\Delta)$.*

В главе 5 (см. § 5.3) было показано, как, отправляясь от какого-то базиса в $\mathscr{H}(\Delta)$, можно построить базисы в пространствах $\operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ и H^1. В частности, если определить, согласно следствию 5.6 (см. равенство 5.(90)), отправляясь от системы Франклина, систему функций $\mathscr{F} = \{F_n(z)\}$, $|z| < 1$, то из теоремы 12 и следствия 5.6 мы получим

Следствие 5. *Система $\mathscr{F} = \{F_n(z)\}$ образует безусловный базис в H^1.*

Таким образом, в отличие от пространства $L^1(0,1)$ (см. теорему 2.13), в пространствах $\mathscr{H}(\Delta)$, $\operatorname{Re}\mathscr{H}^1$, H^1 существуют безусловные базисы.

Интересно отметить, что свойства О.Н.С. Франклина оказались полезными в казалось бы достаточно далекой задаче – о построении безусловного базиса в пространстве аналитических функций H^1.

Теорему 12 мы выведем из следующего результата, утверждающего, что для произвольной функции $f \in L^1(0,1)$ эквивалентны условия:

1) $f \in \mathscr{H}(\Delta)$;
2) мажоранта частных сумм $S^*(f,x) = S^*_F(f,x)$ суммируема;
3) функция Пэли $P(f,x) = P_F(f,x) := \left\{\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2(f) f_n^2(x)\right\}^{1/2}$ суммируема.

Теорема 13. *Существуют абсолютные положительные постоянные C_i, $i = 1,2,3$, такие, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$*[4]

$$\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \leqslant C_1 \|S^*(f)\|_1 \leqslant C_2 \|P(f)\|_1 \leqslant C_3 \|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)}.$$

Замечание. Используя знак эквивалентности $\asymp$, утверждение теоремы 13 можно записать так:

$$\|S^*(f)\|_1 \asymp \|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \asymp \|P(f)\|_1.$$

Подобная запись встречается ниже в этом параграфе в формулировках теорем об эквивалентности норм и других функционалов.

Для доказательства теоремы 13 нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Допустим, что ряд Фурье–Франклина функции $\Phi \in L^2(0,1)$ имеет вид*:

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x); \qquad c_n = c_n(\Phi) = 0, \quad \textit{если} \quad \Delta_n \not\subset I,$$

где $I = (\alpha, \beta) = \left(\dfrac{m-1}{2^{k_0}}, \dfrac{m}{2^{k_0}}\right)$ – двоичный интервал из $(0,1)$.

Тогда

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad \|P(\Phi)\|_p^p \leqslant C_p |I|^{1-p/2} \|\Phi\|_2^p \quad \textit{при} \quad 0 < p \leqslant 2, \\ &\text{б)} \quad \|S^*(\Phi)\|_p^p \leqslant C_p |I|^{1-p/2} \|\Phi\|_2^p \quad \textit{при} \quad 0 < p \leqslant 1, \end{aligned} \tag{58}$$

где C_p – постоянная, зависящая только от p.

---

[4] Возможно, конечно, что все три величины в этой цепочке неравенств одновременно обращаются в бесконечность.

Замечание. В (58) и ниже величина $\|f\|_p$ определяется для $p \in (0,1)$ так же, как и в случае $p \geqslant 1$:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

При этом функционал $\|f\|_p$ не является нормой, если $0 < p < 1$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $\|\Phi\|_2 = 1$. Пусть J – интервал длины $3|I|$ с тем же центром, что I. Применив неравенство Гёльдера (с показателем $2/p \geqslant 1$) и учитывая неравенство б) из теоремы 11 (с $p = 2$), мы будем иметь, что при $0 < p \leqslant 2$

$$\int_J [P(\Phi,x)]^p\,dx + \int_J [S^*(\Phi,x)]^p\,dx \leqslant \|P(\Phi)\|_2^p |J|^{1-p/2} + \|S^*(\Phi)\|_2^p |J|^{1-p/2} \leqslant C_p |I|^{1-p/2}. \tag{59}$$

Далее, применив экспоненциальную оценку (42), б) и неравенство Гёльдера, (с показателем $2/p \geqslant 1$) и учитывая, что количество двоичных интервалов $\Delta_n \subset I, n \in (2^k, 2^{k+1}]$ не превосходит 2^{k-k_0}, получим, что при $x \notin J$ и $k \geqslant k_0$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} |c_n f_n(x)|^p &\leqslant C_p \sum_{\substack{n=2^k+1\\ \Delta_n \subset I}}^{2^{k+1}} |c_n|^p 2^{kp/2} q^{2^k p d(\Delta_n,x)} \\ &\leqslant C_p 2^{kp/2} q^{2^k p d(I,x)} \left\{\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} c_n^2\right\}^{p/2} \cdot 2^{(k-k_0)(1-p/2)} \\ &\leqslant C_p |I|^{1-p/2} 2^k q^{2^k p d(I,x)}.\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание, что $d(I,x) > |I| = 2^{-k_0}$ при $x \notin J$, получим:

$$\int_{(0,1)\setminus J} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n f_n(x)|^p\,dx \leqslant C_p |I|^{1-p/2} \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^k \int_{2^{-k_0}}^{\infty} q^{2^k pt}\,dt \leqslant C_p |I|^{1-p/2}. \tag{60}$$

Так как

$$|P(\Phi,x)| = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} |c_n f_n(x)|^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum_{n=0}^{\infty} |c_n f_n(x)|^p\right\}^{1/p}, \quad 0 < p \leqslant 2,$$

$$|S^*(P,x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |c_n f_n(x)| \leqslant \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n f_n(x)|^p \right\}^{1/p}, \quad 0 < p \leqslant 1,$$ [5]

из (59) и (60) вытекают оценки (58). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* $a(x)$ *является* Δ*-атомом* (см. определение 5.5), *т.е. существует такой интервал* $I = (\alpha, \beta) \subset (0,1)$, *что*

$$1)\quad \operatorname{supp} a \subset I, \qquad 2)\quad \int_I a(x)\,dx = 0, \qquad 3)\quad \|a\|_\infty \leqslant |I|^{-1}. \tag{61}$$

Тогда

$$\|P(a,x)\|_1 \leqslant C,$$

где C *– абсолютная постоянная.*

Доказательство. Нам понадобятся следующие оценки для коэффициентов Фурье–Франклина Δ-атома $a(x)$:

$$\text{а)}\ |c_n(a)| \leqslant C n^{1/2} q^{nd(I,z_n)}, \qquad \text{б)}\ |c_n(a)| \leqslant C|I| n^{3/2} q^{nd(I,z_n)}. \tag{62}$$

Первое неравенство непосредственно вытекает из (42) и (61), 1), 3). Для доказательства второй оценки мы воспользуемся следствием 4 и (61):

$$|c_n(a)| = \left| \int_I a(x) f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_I a(x)[f_n(x) - f_n(\alpha)]\,dx \right|$$
$$\leqslant |I|^{-1} \left\{ \max_{x \in I} |f_n'(x)| \right\} |I|^2 \leqslant C|I| n^{3/2} q^{nd(I,z_n)}.$$

Выберем число $k_0 = 0, 1, \ldots$ так, чтобы

$$2^{-k_0-1} < |I| \leqslant 2^{-k_0}. \tag{63}$$

Тогда при некотором i_0, $1 \leqslant i_0 < 2^{k_0}$, мы будем иметь, что

$$\left(\frac{i_0 - 1}{2^{k_0}}, \frac{i_0 + 1}{2^{k_0}} \right) \supset I.$$

Положим

$$\delta_s = \left(\frac{i_0 - 3 + s}{2^{k_0}}, \frac{i_0 - 2 + s}{2^{k_0}} \right], \ s = 1,2,3,4; \quad J = \bigcup_{s=1}^{4} \delta_s; \quad J^c = [0,1] \setminus J.$$

---

[5] Здесь и ниже мы используем числовое неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^p \right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^q \right)^{1/q}, \qquad 0 < p < q < \infty, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Ясно, что
$$I \subset J, \quad |J| = 4 \cdot 2^{-k_0} \leqslant 8|I|, \quad d(J^c, I) \geqslant 2^{-k_0}. \tag{64}$$
Учитывая, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, определим функции
$$a_s(x) \overset{L^2}{=} \sum_{n:\, \Delta_n \subset \delta_s} c_n(a) f_n(x), \qquad s = 1, 2, 3, 4,$$
$$a_5(x) = \sum_{n=0}^{2^{k_0}} c_n(a) f_n(x), \qquad a_6(x) \overset{L^2}{=} \sum_{\substack{n=2^{k_0}+1 \\ \Delta_n \subset J^c}}^{\infty} c_n(a) f_n(x).$$
Так как $a(x) = a_1(x) + \cdots + a_6(x)$, лемма 2 будет доказана, если мы покажем, что
$$\|P(a_s, x)\|_1 \leqslant C, \qquad s = 1, 2, \ldots, 6. \tag{65}$$
При $s = 1, 2, 3, 4$ неравенство (65) непосредственно следует из леммы 1, (61) и (63):
$$\|P(a_s, x)\|_1 \leqslant C|\delta_s|^{1/2} \|a_s\|_2 \leqslant C 2^{-k_0/2} \|a\|_2 \leqslant 2C|I|^{1/2}|I|^{-1/2} = 2C,$$
Для доказательства (65) при $s = 5$ мы воспользуемся условиями (62), б), (63) и неравенством 4) из следствия 4:
$$\|P(a_5, x)\|_1 \leqslant \left\| \sum_{n=0}^{2^{k_0}} |c_n(a) f_n(x)| \right\|_1 \leqslant C|I| \sum_{n=0}^{2^{k_0}} n q^{n d(I, z_n)}$$
$$\leqslant C|I| \sum_{k=0}^{k_0-1} 2^{k+1} \sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} q^{2^k d(I, z_n)} \leqslant C_1 |I| 2^{k_0} \leqslant C_1.$$
Наконец, учитывая также, что $d(J^c, I) \geqslant 2^{-k_0}$ (см. (64)), получим
$$\|P(a_6, x)\|_1 \leqslant \left\| \sum_{\substack{n=2^{k_0}+1 \\ \Delta_n \subset J^c}}^{\infty} |c_n(a) f_n(x)| \right\|_1$$
$$\leqslant C \sum_{\substack{n=2^{k_0}+1 \\ \Delta_n \subset J^c}}^{\infty} q^{n d(I, z_n)} \leqslant C \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{\substack{n=2^k+1 \\ \Delta_n \subset J^c}}^{2^{k+1}} q^{2^k d(I, z_n)}$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j=2^{k-k_0}}^{\infty} q^j \leqslant C_2 \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{2^{k-k_0}} \leqslant C_3.$$
Неравенства (65), а следовательно и лемма 2 доказаны.

Доказательство теоремы 13. Пусть $f \in \mathscr{H}(\Delta)$. Тогда, рассмотрев произвольное разложение функции $f(x)$ на Δ-атомы (см. 5.(82)):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k a_k(x), \qquad \sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|<\infty,$$

и применив лемму 2, мы будем иметь

$$\|P(f)\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|\cdot\|P(a_k)\|_1 \leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k|. \tag{66}$$

Из определения нормы в пространстве $\mathscr{H}(\Delta)$ (см. 5.(83)) и из (66) получим, что

$$\|P(f)\|_1 \leqslant C\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)}. \tag{67}$$

Допустим теперь, что $P(f)\in L^1(0,1)$, $\|P(f)\|_1=1$, и положим

$$E_k := \left\{x\in(0,1):\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2(f)f_n^2(x)>2^k\right\},\ k=1,2,\dots,\quad E_0:=[0,1],$$

$$B_k := \left\{x\in(0,1):M(\chi_{E_k},x)>\frac14\right\},\quad k=0,1,\dots, \tag{68}$$

где M – оператор максимальной функции (см. определение 2 из приложения 1) и, как обычно, $\chi_E(x)$ – характеристическая функция множества E. Легко видеть, что множество B_k открыто, поэтому для каждого $k=0,1,\dots$ можно найти непересекающиеся интервалы $I_{k,s}$, концы которых не принадлежат B_k, такие, что (см. теорему 2 из приложения 1)

$$\begin{gathered} B_k=\bigcup_s I_{k,s},\qquad I_{k,s}\cap I_{k,s'}=\varnothing\quad(s\neq s'),\\ m(B_k)\leqslant 20m(E_k),\qquad k=0,1,\dots. \end{gathered} \tag{69}$$

Докажем, что

$$\int_{\Delta_n\setminus E_{k+1}} f_n^2(x)\,dx\geqslant c,\quad \text{если}\quad \Delta_n\not\subset B_{k+1}, \tag{70}$$

где $c>0$ – абсолютная постоянная. Действительно, если существует точка $x_0\in\Delta_n\setminus B_{k+1}$, то $M(\chi_{E_{k+1}},x_0)\leqslant\frac14$ и, следовательно,

$$\frac{m(E_{k+1}\cap\Delta_n)}{|\Delta_n|}=\frac{1}{|\Delta_n|}\int_{\Delta_n}\chi_{E_{k+1}}(x)\,dx\leqslant\frac14\,.$$

Это значит, что $m(\Delta_n \setminus E_{k+1}) \geqslant \frac{3}{4}|\Delta_n|$ и

$$m(\Delta_n^+ \setminus E_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}|\Delta_n^+|, \qquad m(\Delta_n^- \setminus E_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}|\Delta_n^-|, \tag{71}$$

где Δ_n^+ и Δ_n^- – соответственно левая и правая половины интервала Δ_n. Учитывая, что функция $f_n(x)$ линейна на интервалах Δ_n^+ и Δ_n^-, находим

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_n \setminus E_{k+1}} f_n^2(x)\,dx &= \int_{\Delta_n^- \setminus E_{k+1}} f_n^2(x)\,dx + \int_{\Delta_n^+ \setminus E_{k+1}} f_n^2(x)\,dx \\ &\geqslant c_1\left[\int_{\Delta_n^-} f_n^2(x)\,dx + \int_{\Delta_n^+} f_n^2(x)\,dx\right] \\ &\geqslant c_2\frac{|\Delta_n|}{2}\left[\|f_n\|^2_{C(\Delta_n^-)} + \|f_n\|^2_{C(\Delta_n^+)}\right] \\ &\geqslant c_3 n^{-1}\|f_n\|^2_{C(\Delta_n)}.\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом оценки $\|f_n\|_{C(\Delta_n)} \geqslant c\sqrt{n}$ (см. (42), а)) вытекает условие (70). Положим

$$\Phi_{k,s}(x) := \sum_{\substack{\Delta_n \subset I_{k,s} \\ \Delta_n \not\subset B_{k+1}}} c_n(f) f_n(x), \qquad x \in (0,1).$$

Из (68) и (70) следует, что

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Phi_{k,s}^2(x)\,dx &= \sum_{\substack{\Delta_n \subset I_{k,s} \\ \Delta_n \not\subset B_{k+1}}} c_n^2(f) \\ &\leqslant \frac{1}{c}\int_{I_{k,s}\setminus E_{k+1}} \sum_{\substack{\Delta_n \subset I_{k,s} \\ \Delta_n \not\subset B_{k+1}}} c_n^2(f) f_n^2(x)\,dx \leqslant C\cdot 2^{k+1}|I_{k,s}| \end{aligned} \tag{72}$$

и, в силу леммы 1,

$$\|S^*(\Phi_{k,s})\|_1 \leqslant C|I_{k,s}|^{1/2}|I_{k,s}|^{1/2}2^{k/2} = C|I_{k,s}|2^{k/2}.$$

Так как $f(x) = \sum\limits_{k,s} \Phi_{k,s}(x)$, отсюда и из (69) мы получаем, что

$$\begin{aligned}\|S^*(f)\|_1 &\leqslant \sum_{k,s}\|S^*(\Phi_{k,s})\|_1 \leqslant C\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2}\sum_s |I_{k,s}| \\ &= C\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2}|B_k| \leqslant 4C\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k/2}|E_k| \leqslant C_1.\end{aligned}$$

Таким образом (см. также (67)), для завершения доказательства теоремы 13 нам остается показать, что если $\|S^*(f)\|_1 = 1$, то $f \in \mathscr{H}(\Delta)$ и

$$\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \leqslant C, \tag{73}$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} &E'_k := \left\{x \in (0,1) : S^*(f,x) > 2^k\right\}, \quad k = 1,2,\ldots, \qquad E_0 := (0,1), \\ &B'_k := \left\{x \in (0,1) : M(\chi_{E'_k}, x) > \frac{1}{8}\right\}, \qquad k = 0,1,\ldots. \end{aligned} \tag{74}$$

Как и в (69), для каждого $k = 0,1,\ldots$ можно найти непересекающиеся интервалы $J_{k,s}$, концы которых не принадлежат B'_k, такие, что

$$\begin{gathered} B'_k = \bigcup_s J_{k,s}, \qquad J_{k,s} \cap J_{k,s'} = \varnothing \quad (s \neq s'), \\ m(B'_k) \leqslant 40m(E'_k), \qquad k = 0,1,\ldots. \end{gathered} \tag{75}$$

Положим $h_0(x) = \int_0^1 f(t)\,dt$, $x \in (0,1)$, и пусть

$$h_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \notin B'_k, \\ \dfrac{1}{|J_{k,s}|}\displaystyle\int_{J_{k,s}} f(t)\,dt, & \text{если } x \in J_{k,s}, \end{cases} \qquad k = 1,2,\ldots. \tag{76}$$

Сначала мы убедимся, что нужная нам оценка (73) вытекает из неравенств:

$$\|h_k\|_\infty \leqslant B \cdot 2^k, \qquad k = 1,2,\ldots, \tag{77}$$

где $B > 0$ – абсолютная постоянная, после чего докажем (77).

Из (74) и (75) следует, что $B'_{k+1} \subset B'_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} m(B'_k) = 0$, значит $\lim\limits_{k\to\infty} h_k(x) = f(x)$ п.в. на $(0,1)$ и, следовательно, для п.в. $x \in (0,1)$ мы будем иметь, что

$$f(x) = h_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\bigl(h_{k+1}(x) - h_k(x)\bigr) = h_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_s \lambda_{k,s} a_{k,s}(x), \tag{78}$$

где

$$a_{k,s}(x) := \frac{1}{\lambda_{k,s}}\,\chi_{J_{k,s}}(x)\bigl(h_{k+1}(x) - h_k(x)\bigr), \qquad \lambda_{k,s} := 3B \cdot 2^k \cdot |J_{k,s}|.$$

Ясно, что $\operatorname{supp} a_{k,s} \subset J_{k,s}$ и $\|a_{k,s}\|_\infty \leqslant |J_{k,s}|^{-1}$, а в силу (76)

$$\int_{J_{k,s}} a_{k,s}(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_{k,s}}\left(\int_{J_{k,s}} h_{k+1}(x)\,dx - \int_{J_{k,s}} h_k(x)\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{\lambda_{k,s}}\left(\int_{J_{k,s}} f(x)\,dx - \int_{J_{k,s}} f(x)\,dx\right) = 0.$$

Это означает, что функция $a_{k,s}$ является Δ-атомом и из (78) и (75) мы находим, что (см. также 5.(83))

$$\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \leqslant \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| + \sum_{k,s} |\lambda_{k,s}| \leqslant 1 + 40B\sum_{k=0}^{\infty} 2^k m(E_k') \leqslant C.$$

Итак, нам остается проверить (77). Так как $m(E_k' \setminus B_k') = 0$, то для п.в. $x \in (0,1) \setminus B_k'$ мы имеем, что $|h_k(x)| = |f(x)| \leqslant S^*(f,x) \leqslant 2^k$, и нам нужно доказать, что для произвольных k и s

$$\frac{1}{|J|}\left|\int_J f(x)\,dx\right| \leqslant B\cdot 2^k, \quad \text{если} \quad J = J_{k,s}.$$

Выберем число k_0 так, чтобы

$$2^{-k_0-1} \leqslant |J| < 2^{-k_0} \tag{79}$$

и рассмотрим разложение

$$f(x) = H(x) + \sum_{l=k_0}^{\infty} Q_l(x), \tag{80}$$

где

$$H(x) := \sum_{n=0}^{2^{k_0}} c_n(f) f_n(x),$$
$$Q_l(x) := \sum_{n=2^l+1}^{2^{l+1}} c_n(f) f_n(x), \ \ l = k_0, k_0+1, \ldots.$$

Ясно, что

$$H \in L_{2^{k_0}},\ \ Q_l \in L_{2^{l+1}},\ \ Q_l \perp L_{2^l},\ \ |Q_l(x)| \leqslant 2S^*(f,x),\ \ l = k_0, k_0+1, \ldots. \tag{81}$$

Из (79) следует, что интервал J содержится в объединении двух двоичных интервалов длины 2^{-k_0}:

$$J \subset \left(\frac{i_0-1}{2^{k_0}}, \frac{i_0+1}{2^{k_0}}\right) = \Delta_{k_0}^{i_0} \cup \Delta_{k_0}^{i_0+1} \text{ при некотором } i_0,\ 1 \leqslant i_0 < 2^{k_0}. \quad (82)$$

При этом $\Delta_{k_0}^{i} \not\subset J$, а значит, и $\Delta_{k_0}^{i} \not\subset B'_k$, $i = i_0, i_0+1$. Но из (74) следует (так же, как при доказательстве (71)), что для произвольного интервала $\delta \subset (0,1)$

$$m\{x \in \delta : S^*(f,x) > 2^k\} \leqslant \frac{1}{8}|\delta|, \quad \text{если} \quad \delta \not\subset B'_k. \quad (83)$$

Следовательно, учитывая, что $|H(x)| \leqslant S^*(f,x)$, мы будем иметь:

$$m\{x \in \Delta_{k_0}^{i} : |H(x)| \leqslant 2^k\} \geqslant \frac{7}{8}|\Delta_{k_0}^{i}|, \qquad i = i_0, i_0+1.$$

Так как функция $H(x)$ линейна на интервалах $\Delta_{k_0}^{i_0}$ и $\Delta_{k_0}^{i_0+1}$, отсюда следует, что $\|H\|_{C(\Delta_{k_0}^{i})} \leqslant 2^{k+1}$, $i = i_0, i_0+1$, и (см. (82))

$$\left|\int_J H(x)\,dx\right| \leqslant 2^{k+1}|J|. \quad (84)$$

Оценим теперь интеграл $\int_J Q_l(x)\,dx$ при $l = k_0, k_0+1, \ldots$. Рассмотрим базис пространства L_{2^l} (см. (30)):

$$N_j(x) = N_j(x, \pi_{2^l}), \quad \omega_j := \operatorname{supp} N_j = \left(\frac{j-1}{2^l}, \frac{j+1}{2^l}\right), \quad j = 0, 1, \ldots, 2^l.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{j=0}^{2^l} N_j(x) = 1$ при $x \in (0,1)$ и

$$\int_{\omega_j} Q_l(x) N_j(x)\,dx = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2^l$$

(см. (81)), будем иметь:

$$\int_J Q_l(x)\,dx = \sum_{j=0}^{2^l} \int_J Q_l(x) N_j(x)\,dx = \sum_{j\in\Omega} \int_{J\cap\omega_j} Q_l(x) N_j(x)\,dx, \quad (85)$$

где

$$\Omega := \{j : J \cap \omega_j \neq \varnothing,\ \omega_j \not\subset J,\ j = 0, 1, \ldots, 2^l\}.$$

Согласно (83) и (81), если $j \in \Omega$, тогда

$$m\{x \in \omega_j : |Q_l(x)| > 2^{k+1}\} \leqslant \frac{1}{8}|\omega_j| = \frac{1}{2} \cdot 2^{-(l+1)}. \tag{86}$$

Так как интервал ω_j состоит из четырех интервалов длины $2^{-(l+1)}$, на каждом из которых функция $Q_l(x)$ линейна, то из (86) вытекает, что $\|Q_l\|_{C(\omega_j)} \leqslant 2^{k+3}$ и из (85), учитывая, что $\operatorname{card}\Omega \leqslant 4$, получим

$$\left|\int_J Q_l(x)\,dx\right| \leqslant \sum_{j\in\Omega} \|Q_l\|_{C(\omega_j)} \cdot |\omega_j| \leqslant 4 \cdot 2^{k+3} \cdot 2^{-l+1} = 2^{k+6} \cdot 2^{-l}. \tag{87}$$

Применив оценки (84) и (87) к разложению (80), окончательно получим, что

$$\left|\int_J f(x)\,dx\right| \leqslant 2^{k+1}|J| + 2^{k+6}\sum_{l=k_0}^{\infty} 2^{-l} = 2^{k+1}\cdot|J| + 2^{k+7}\cdot 2^{-k_0} \leqslant 2^8\cdot 2^k \cdot |J|.$$

Теорема 13 доказана.

Доказательство теоремы 12. Полнота системы F в $\mathscr{H}(\Delta)$ следует из плотности ограниченных функций в $\mathscr{H}(\Delta)$ (см. определение 5.6) и неравенства $\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \leqslant C\|f\|_2$ (см., например, теоремы 5.6 и 3.4), из которого вытекает, что любая функция из $L^\infty(0,1)$ сколь угодно точно аппроксимируется по норме $\mathscr{H}(\Delta)$ полиномом по системе F. Минимальность системы F обеспечивается теоремой 1.2 (сопряженной к системе F является она сама). Таким образом, в силу теоремы 1.10 нам достаточно показать, что для любой функции $f \in \mathscr{H}(\Delta)$ и любой последовательности $\varepsilon_n = \pm 1$, $n = 0, 1, \ldots$,

$$\|T_{\varepsilon,N}(f)\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \leqslant C\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)}, \qquad T_{\varepsilon,N}(f,x) := \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n c_n(f) f_n(x), \tag{88}$$

где C – абсолютная постоянная, а $c_n(f) = \int_0^1 f(x) f_n(x)\,dx$, $n = 0, 1, \ldots$, – коэффициенты Фурье–Франклина функции $f(x)$. Наконец, неравенство (88) непосредственно вытекает из теоремы 13:

$$\begin{aligned}\|T_{\varepsilon,N}(f)\|_{\mathscr{H}(\Delta)} &\leqslant C\left\|\left\{\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n^2 c_n^2(f) f_n^2\right\}^{1/2}\right\|_1 \\ &= C\left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2(f) f_n^2\right\}^{1/2}\right\|_1 \leqslant C_1\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)}.\end{aligned}$$

Теорема 12 доказана.

Из теоремы 12 с помощью интерполяционной теоремы 3.12 выводится

Теорема 14. *Система Франклина – безусловный базис в* $L^p(0,1)$ *при* $1 < p < \infty$.

Доказательство. В силу следствия 1.3 достаточно рассмотреть случай, когда $1 < p < 2$. Согласно теореме 1.10 (см. также теорему 7) нам достаточно доказать существование такой постоянной $C = C_p$, что

$$\|T_{\varepsilon,N}(f)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p \tag{89}$$

для любой функции $f \in L^p(0,1)$ и любого оператора $T_{\varepsilon,N}(f)$ вида (88).

Согласно оценке 5.(84) и теореме 5.6, из (88) следует, что при $f \in L^1(0,1)$, $y > 0$

$$\begin{aligned} m\{x \in (0,1) : |T_{\varepsilon,N}(f,x)| > y\} &\leqslant \frac{1}{y}\, \|T_{\varepsilon,N}(f)\|_1 \leqslant \frac{1}{y}\, \|T_{\varepsilon,N}(f)\|_{\varkappa(\Delta)} \\ &\leqslant \frac{C}{y}\, \|f\|_{\varkappa(\Delta)} \leqslant \frac{13C}{y}\, \|S_\chi^*(f)\|_1. \end{aligned} \tag{90}$$

С другой стороны, в силу ортонормированности системы Франклина

$$m\{x \in (0,1) : |T_{\varepsilon,N}(f,x)| > y\} \leqslant \frac{1}{y^2}\, \|T_{\varepsilon,N}(f)\|_2^2 \leqslant \frac{1}{y^2}\, \|f\|_2^2. \tag{91}$$

Из соотношений (90) и (91), пользуясь теоремой 3.12, мы получаем неравенство (89). Теорема 14 доказана.

Теорема 14 допускает уточнение: оказывается, что системы Франклина и Хаара – эквивалентные базисы в $L^p(0,1)$, точнее, справедлива

Теорема 15. *Имеет место эквивалентность норм*

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x) \right\|_p \overset{p}{\asymp} \left\| \sum_{n=0}^{N} a_n \chi_{n+1}(x) \right\|_p, \qquad 1 < p < \infty, \tag{92}$$

где $\{a_n\}_{n=0}^N$, $N = 0, 1, \ldots$, *– произвольный конечный набор чисел, а знак* $\overset{p}{\asymp}$ *означает, что постоянные в соответствующих неравенствах, связывающих левую и правую части в* (92), *зависят от* p.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $1 < p \leqslant 2$. Действительно, если условие (92) для $1 < p \leqslant 2$ выполняется, то для любого q, $2 < q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ $(1 < p < 2)$, и любой функции $g \in L^p(0,1)$, $\|g\|_p = 1$, мы будем иметь

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{n=0}^N a_n f_n(x) g(x)\,dx &= \sum_{n=0}^N a_n c_n(g) \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^N a_n \chi_{n+1}(x)\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^N c_n(g)\chi_{n+1}(x)\right) dx \\
&\leqslant \left\|\sum_{n=0}^N a_n \chi_{n+1}(x)\right\|_q \cdot \left\|\sum_{n=0}^N c_n(g)\chi_{n+1}(x)\right\|_p \\
&\leqslant C_p \left\|\sum_{n=0}^N a_n \chi_{n+1}(x)\right\|_q \cdot \left\|\sum_{n=0}^N c_n(g) f_n(x)\right\|_p \\
&\leqslant C_p' \left\|\sum_{n=0}^N a_n \chi_{n+1}(x)\right\|_q \|g\|_p = C_q \left\|\sum_{n=0}^N a_n \chi_{n+1}(x)\right\|_q
\end{aligned} \tag{93}$$

(последнее неравенство вытекает из базисности системы Франклина в $L^p(0,1)$; см. теорему 6 и 1.(27)). Из (93) следует неравенство

$$\left\|\sum_{n=0}^N a_n f_n(x)\right\|_q \leqslant C_q \left\|\sum_{n=0}^N a_n \chi_{n+1}(x)\right\|_q, \qquad 2 < q < \infty.$$

Обратное неравенство доказывается аналогично.

Итак, нам остается доказать соотношение (92) при $1 < p \leqslant 2$. Отметим при этом, что согласно теореме 1.11 из безусловной базисности систем Хаара и Франклина в $L^p(0,1)$ (см. теоремы 14 и 3.8) следует эквивалентность норм:

$$\left.\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=0}^N a_n f_n(x)\right\|_p &\overset{p}{\asymp} \left\|\left\{\sum_{n=0}^N a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{1/2}\right\|_p, \\
\left\|\sum_{n=0}^N a_n \chi_{n+1}(x)\right\|_p &\overset{p}{\asymp} \left\|\left\{\sum_{n=0}^N a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\right\}^{1/2}\right\|_p,
\end{aligned}\right\} \quad 1 < p < \infty. \tag{94}$$

Поэтому искомое соотношение (92) для $p \in (1,2]$ вытекает из доказанной ниже оценки (95) в ее частном случае, когда $1 < p \leqslant 2$.

Теорема 16. *Имеет место эквивалентность*[6)]

$$\left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\right\}^{1/2}\right\|_p \overset{p}{\asymp} \left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\right\}^{1/2}\right\|_p, \quad 0<p<\infty. \tag{95}$$

Доказательство. Если (95) имеет место при $1 < p \leqslant 2$, то, как отмечалось выше, теорема 15 будет полностью доказана и тогда из (92) и (94) мы будем иметь (95) также для $p > 2$. Поэтому нам достаточно рассмотреть случай $0 < p \leqslant 2$. Оценим сначала сверху левую часть соотношения (95) через правую. Без ограничения общности можем считать, что

$$\left\|\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\right\}^{1/2}\right\|_p = 1. \tag{96}$$

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} &W_0 := (0,1),\\ &W_k := \left\{x \in (0,1) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \chi_{n+1}^2(x) > 2^k\right\} = \bigcup_s J_{k,s},\ k=1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{97}$$

где $J_{k,s}$ – непересекающиеся при фиксированном k двоичные интервалы. Положим

$$\varphi_{k,s} := \sum_{n\in\Gamma_{k,s}} a_n^2 f_n^2(x), \quad \text{где} \quad \Gamma_{k,s} := \left\{n : \Delta_{n+1} \subset J_{k,s},\ \Delta_{n+1} \not\subset W_{k+1}\right\}.$$

Из (97) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\Gamma_{k,s}} a_n^2 &= \sum_{n\in\Gamma_{k,s}} \int_0^1 a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\,dx\\ &= \int_{J_{k,s}} \sum_{n\in\Gamma_{k,s}} a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\,dx \leqslant 2^{k+1}|J_{k,s}|. \end{aligned} \tag{98}$$

Легко видеть, что для любого двоичного интервала Δ_m

$$\bigcup_{n:\,\Delta_{n+1}\subset\Delta_m} \Delta_n = \Delta_{m-1} \cup \Delta_m. \tag{99}$$

[6)] Возможно, конечно, что левая и правая части в (95) одновременно обращаются в ∞.

Поэтому

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\Gamma_{k,s}} \Delta_n\Big) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{n:\,\Delta_{n+1}\subset J_{k,s}} \Delta_n\Big) \leqslant 3|J_{k,s}|,$$

и, применив лемму 1 из теоремы 13, с учетом (98), находим, что

$$\int_0^1 [\varphi_{k,s}(x)]^{p/2}\,dx \leqslant C|J_{k,s}|^{1-p/2}\cdot\Big\{\sum_{n\in\Gamma_{k,s}} a_n^2\Big\}^{p/2} \leqslant C2^{kp/2}|J_{k,s}|$$

и, следовательно (см. (96) и (97)),

$$\begin{aligned}\int_0^1\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\Big\}^{p/2} dx &= \int_0^1\Big\{\sum_{k,s}\varphi_{k,s}(x)\Big\}^{p/2} dx\\ &\leqslant \int_0^1\sum_{k,s}[\varphi_{k,s}(x)]^{p/2}\,dx \leqslant C\sum_{k,s}2^{kp/2}|J_{k,s}|\\ &= C\sum_{k=0}^{\infty}2^{kp/2}m(W_k)\leqslant C.\end{aligned}$$

Для доказательства обратной оценки допустим, что

$$\Big\|\Big\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 f_n^2(x)\Big\}^{1/2}\Big\|_p = 1,$$

и рассмотрим множества E_k, B_k, $k = 0, 1, \ldots$, определенные как в (68) (с a_n вместо $c_n(f)$), и разложение (69). Положим

$$\psi_{k,s}(x) := \sum_{n:\,\Delta_n\subset I_{k,s},\,\Delta_n\not\subset B_{k+1}} a_n^2\chi_{n+1}^2(x).$$

Так же, как и в (72), мы будем иметь неравенство

$$\int_0^1 \psi_{k,s}(x)\,dx = \sum_{n:\,\Delta_n\subset I_{k,s},\,\Delta_n\not\subset B_{k+1}} a_n^2 \leqslant C\,2^{k+1}|I_{k,s}|.$$

Отсюда, учитывая, что $m(\operatorname{supp}\psi_{k,s}) \leqslant 3|I_{k,s}|$ (см. 99)), получим

$$\int_0^1[\psi_{k,s}(x)]^{p/2}\,dx \leqslant 3\Big\{\int_0^1\psi_{k,s}(x)\,dx\Big\}^{p/2}\cdot|I_{k,s}|^{1-p/2} \leqslant C\,2^{kp/2}|I_{k,s}|.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \chi_{n+1}^2(x)\right\}^{p/2} dx = \int_0^1 \left\{\sum_{k,s} \psi_{k,s}(x)\right\}^{p/2} dx$$

$$\leqslant \int_0^1 \sum_{k,s} [\psi_{k,s}(x)]^{p/2}\, dx \leqslant C \sum_{k,s} 2^{kp/2} |J_{k,s}|$$

$$= C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kp/2} m(B_k) \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kp/2} m(E_k) \leqslant C_2.$$

Теоремы 15 и 16 доказаны.

В заключение главы приведем результат, показывающий, что в терминах поведения ряда Фурье–Франклина функции $f \in L^1(0,1)$ можно дать критерий принадлежности функции $f(x)$ пространству $\mathscr{H}(\Delta)$:

Теорема 17. *Ряд по системе Франклина*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \tag{100}$$

безусловно сходится в $L^1(0,1)$ *тогда и только тогда, когда его сумма* $f(x)$ *принадлежит пространству* $\mathscr{H}(\Delta)$.

Замечание. Теорему 17 можно считать некоторым аналогом следствия 3.4.

Доказательство теоремы 17. Согласно теореме 12, если функция $f \in \mathscr{H}(\Delta)$, то ее ряд Фурье–Франклина безусловно сходится в $\mathscr{H}(\Delta)$, а значит, и в $L^1(0,1)$ (см. 5.(84)).

Пусть теперь ряд (100) безусловно сходится в $L^1(0,1)$ к функции $f(x)$. Тогда по теореме 1.1 для любого $t \in (0,1)$ сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n(t) c_n f_n(x) \quad (\{r_n(t)\} \text{ – система Радемахера})$$

и в силу теоремы 2.12

$$P(f,x) = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 f_n^2(x)\right\}^{1/2} \in L^1(0,1).$$

Следовательно, $f \in \mathscr{H}(\Delta)$ (см. теорему 13). Теорема 17 доказана.

Глава 7

Введение в теорию всплесков

Определение 1. Функция $\psi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ называется *всплеском*, если система функций

$$\psi_{k,l}(x) := 2^{k/2}\psi(2^k x - l), \qquad x \in \mathbb{R}^1, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \tag{$*$}$$

является ортонормированным базисом пространства $L^2(\mathbb{R}^1)$.[1)]

Простейшим примером всплеска является всплеск Хаара:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{2}); \\ -1, & \text{если } x \in [\frac{1}{2}, 1); \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^1 \setminus [0, 1). \end{cases}$$

Действительно, ортонормированность системы $\{\chi\} := \{\chi_{k,l}(x)\}_{k,l\in\mathbf{Z}}$, $x \in \mathbb{R}^1$, легко вывести из простейших свойств двоичных интервалов на оси (см. доказательство ортонормированности системы Хаара на отрезке $[0, 1]$ в §3.1). Чтобы убедиться в полноте системы $\{\chi\}$ в $L^2(\mathbb{R}^1)$ заметим, что L^2 – замыкание ее линейной оболочки – вместе с каждой функцией $f(x)$ содержит также функцию $f(2^k x + l)$, поэтому достаточно доказать, что характеристическая функция $\chi_{(0,1)}(x)$ отрезка $(0, 1)$ содержится в этом замыкании. Но легко проверить, что при $m = 1, 2, \ldots$ для полинома

$$P_m(x) = \sum_{k=-m}^{-1} 2^{k/2}\chi_{k,0}(x)$$

справедливо равенство $\|\chi_{(0,1)}(x) - P_m(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} = 2^{-m}$.

[1)] Здесь мы рассматриваем линейное пространство $L^2(\mathbb{R}^1)$ над полем комплексных чисел, а функция ψ, вообще говоря, принимает комплексные значения.

В восьмидесятые годы было обнаружено, что $\chi(x)$ – далеко не единственный всплеск, среди всплесков имеются функции с весьма различными свойствами. Первый пример непрерывного всплеска (построенный Стрёмбергом) изображен на рис. 2.

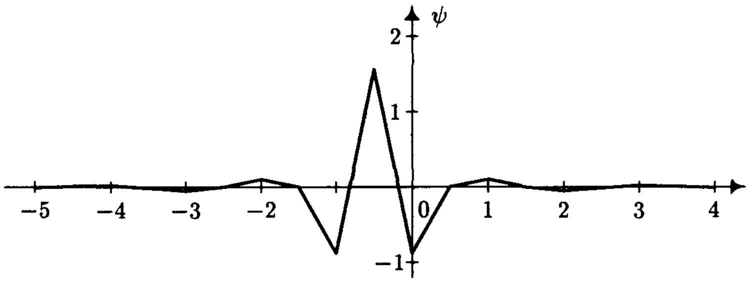

Рис. 2. Всплеск Стрёмберга

Всплеск системы, т.е. полные в $L^2(\mathbb{R}^1)$ ортонормированные системы вида $(*)$, нашли разнообразные приложения в анализе, были широко внедрены в прикладную математику. Тем самым сфера применения теории ортогональных рядов значительно расширилась.

В этой главе рассмотрены основные свойства всплесков и всплеск систем, приведены конкретные примеры всплесков.

§ 1. Кратномасштабный анализ

Сначала мы приведем ряд обозначений, которыми будем пользоваться на протяжении всей главы. Всюду в этой главе, если не оговорено противное, мы рассматриваем функции, определенные на действительной оси $\mathbb{R}^1$, принимающие комплексные значения.

Для функций $f, g \in L^2(\mathbb{R}^1)$ скалярное произведение определяется обычным образом:

$$(f, g) := \int_{\mathbb{R}^1} f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

где $\overline{z}$ – комплексное сопряженное к z.

Для $\psi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ через $\{\psi\}$ обозначим систему функций

$$\{\psi\} := \{\psi_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z}}, \quad \text{где} \quad \psi_{k,l}(x) := 2^{k/2}\psi(2^k x - l), \quad x \in \mathbb{R}^1, \qquad (1)$$

и при фиксированном $k \in \mathbb{Z}$ положим

$$\{\psi\}_k := \{\psi_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}. \qquad (2)$$

Замыкание (по норме $L^2(\mathbb{R}^1)$) линейной оболочки системы $\{\psi\}$ (или $\{\psi\}_k$) мы обозначим через $L\{\psi\}$ (соответственно через $L\{\psi\}_k$).

Для функции $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и числа $d > 0$ через $\mathscr{P}_d[f(x)]$ обозначим периодизацию функции f с периодом d:

$$\mathscr{P}_d[f(x)] := \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(x - ld), \qquad x \in \mathbb{R}^1. \tag{3}$$

В случае $d = 1$ будем писать $\mathscr{P}[f(x)]$ вместо $\mathscr{P}_1[f(x)]$. Заметим, что в силу теоремы Б. Леви ряд (3) сходится п.в. к d-периодической функции, которая интегрируема на $(0, d)$.

Наконец, для подпространства $V \subset L^2(\mathbb{R}^1)$ через $P_V(f)$ будем обозначать ортогональную проекцию функции $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ на подпространство V.

Определение 2. Последовательность $\mathscr{V} = \{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ подпространств пространства $L^2(\mathbb{R}^1)$ называется *кратномасштабным анализом* (КМА), если

(A1) $V_k \subset V_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$;
(A2) $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} V_k} = L^2(\mathbb{R}^1)$;
(A3) $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} V_k = \{0\}$;
(A4) $f(x) \in V_k$ тогда и только тогда, когда $f(2x) \in V_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$;
(A5) существует функция $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ такая, что система $\{\phi\}_0 = \{\phi(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированным базисом в V_0.

Функция ϕ называется *масштабной функцией* КМА $\mathscr{V}$.

Пример. Простейший, но при этом весьма важный, пример кратномасштабного анализа – последовательность подпространств V_k, $k \in \mathbb{Z}$, состоящих из функций, постоянных на двоичных интервалах вида $\left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right)$, $l \in \mathbb{Z}$. Масштабная функция в этом случае – $\chi_{[0,1)}(x)$ – характеристическая функция промежутка $[0, 1)$.

Замечание. Из свойств (A4) и (A5) КМА следует, что для произвольного k система $\{\phi\}_k$ образует ортонормированный базис в V_k, а пространство V_0 инвариантно относительно целочисленных сдвигов, т.е. если $f(x) \in V_0$, то $f(x - l) \in V_0$ при любом $l \in \mathbb{Z}$.

Следующий результат показывает, что в определении 2 условие (A5) может быть заменено формально более слабым условием

(A5)$'$ существует функция $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ такая, что система $\{\phi\}_0 = \{\phi(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в V_0 (см. определение 1.14).

Теорема 1. *Пусть функция $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ такова, что система $\{\phi\}_0 = \{\phi(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса подпространства $V_0 \subset L^2(\mathbb{R}^1)$. Тогда существует функция $\phi_1 \in L^2(\mathbb{R}^1)$ такая, что система $\{\phi_1\}_0 = \{\phi_1(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированным базисом в V_0.*

Лемма 1. *Пусть $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$, b и B – произвольные положительные числа. Для того чтобы имели место неравенства*

$$b\Big\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}|a_l|^2\Big\}^{1/2} \leqslant \Big\|\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l\phi(x-l)\Big\|_2 \leqslant B\Big\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}|a_l|^2\Big\}^{1/2}, \quad \{a_l\}\in l^2, \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$b^2 \leqslant \sum_{l\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\zeta+2\pi l)|^2 \leqslant B^2 \quad \textit{для п.в.} \quad \zeta\in\mathbb{R}^1, \qquad (5)$$

где $\widehat{\phi}(\zeta) = \mathscr{F}(\phi,\zeta)$ – преобразование Фурье функции ϕ (см. § 4 приложения 2).

Доказательство. Пусть l^0 – множество последовательностей $\{a_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ с конечным числом ненулевых членов. Легко видеть (см. замечание после определения 1.14), что в формулировке леммы мы можем заменить условие $\{a_l\}\in l^2$ на $\{a_l\}\in l^0$.

Из свойства 1° преобразования Фурье (см. § 4 приложения 2) следует, что при $\{a_l\}\in l^0$

$$\mathscr{F}\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l\phi(x-l),\zeta\Big) = P(\zeta)\widehat{\phi}(\zeta), \quad \text{где} \quad P(\zeta) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l e^{-il\zeta}. \qquad (6)$$

Применив равенство Планшереля (см. (68) в приложении 2) и учитывая, что P – 2π-периодическая функция, получим:

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l\phi(x-l)\Big\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1}|P(\zeta)|^2|\widehat{\phi}(\zeta)|^2\,d\zeta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(\zeta)|^2\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\zeta+2\pi l)|^2\,d\zeta. \qquad (7)\end{aligned}$$

Это означает, что условие (4) эквивалентно условию:

$$b^2\Big\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}|a_l|^2\Big\} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(\zeta)|^2\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\widehat{\phi}(\zeta+2\pi l)|^2\,d\zeta \leqslant B^2\Big\{\sum_{l\in\mathbb{Z}}|a_l|^2\Big\}$$

для произвольного полинома $P(\zeta) = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} a_l e^{-il\zeta}$. Так как

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |a_l|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(\zeta)|^2 \, d\zeta \tag{8}$$

(равенство Парсеваля), то учитывая полноту тригонометрической системы в $L^2(0, 2\pi)$, находим, что (4) эквивалентно условию

$$b^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(\zeta)| \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l)|^2 \, d\zeta \leqslant B^2 \tag{9}$$

для произвольной функции $f \in L^1(0, 2\pi)$ с $\int_0^{2\pi} |f(\zeta)| \, d\zeta = 1$.

Нетрудно убедиться, что последнее условие эквивалентно (5). Действительно, если, например, первое неравенство в (5) не выполняется на множестве положительной меры $E \subset (0, 2\pi)$, то взяв $f(\zeta) = \dfrac{\chi_E(\zeta)}{m(E)}$, $\zeta \in \mathbb{R}^1$, мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(\zeta)| \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l)|^2 \, d\zeta &= \frac{1}{m(E)} \int_E \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l)|^2 \, d\zeta \\ &< \frac{1}{m(E)} b^2 m(E) = b^2, \end{aligned}$$

что противоречит (9). Лемма 1 доказана.

Так как ортонормированность системы $\{\phi\}_0$ для $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ означает выполнение условий (4) с $B = b = 1$, то из леммы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$. Для ортонормированности системы $\{\phi\}_0 = \{\phi(x - l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l)|^2 = 1 \quad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{10}$$

Утверждение 1. *Пусть функция $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ такова, что $\{\phi\}_0 = \{\phi(x - l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ – система Рисса с постоянными b и B (т.е. имеет место (4)), и пусть $L\{\phi\}_0$ – замыкание линейной оболочки этой системы по норме $L^2(\mathbb{R}^1)$. Тогда*

а) *функция $g \in L\{\phi\}_0$ тогда и только тогда, когда*

$$g(x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l \phi(x - l), \qquad \sum_{l\in\mathbb{Z}} |a_l|^2 < \infty; \tag{11}$$

б) *равенство* (11) *эквивалентно равенству*

$$\widehat{g}(\zeta) = p(\zeta)\widehat{\phi}(\zeta), \quad \text{где} \quad p(\zeta) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l e^{-il\zeta} \in L^2(0, 2\pi); \tag{12}$$

в) *если имеет место* (11) (*или* (12)), *то*

$$\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\|p\|_{L^2(0,2\pi)} \leqslant \|g\|_2 \leqslant \frac{B}{\sqrt{2\pi}}\|p\|_{L^2(0,2\pi)}. \tag{13}$$

Доказательство. а) следует из того, что система Рисса является базисом в замыкании своей линейной оболочки (см. следствие 1.7), при этом, согласно (4), сходимость в $L^2(\mathbb{R}^1)$ ряда $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} a_l\phi(x-l)$ эквивалентна условию $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} |a_l|^2 < \infty$.

Утверждение б) для последовательности $\{a_l\} \in l^0$ было отмечено в (6), а в общем случае выводится из (6) простым предельным переходом, с учетом равенства Планшереля.

Наконец, в) вытекает из равенства Парсеваля для тригонометрической системы.

Лемма 2. *Пусть функция* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ *такова, что система* $\{\phi\}_0 = \{\phi(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ *является базисом Рисса в подпространстве* $V_0 \subset L^2(\mathbb{R}^1)$. *Тогда*

а) *система* $\{\phi_1\}_0 = \{\phi_1(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$, *где* $\phi_1 \in L^2(\mathbb{R}^1)$, *является базисом Рисса в* V_0 *тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{\phi}_1(\zeta) = q(\zeta)\widehat{\phi}(\zeta) \quad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1, \tag{14}$$

где $q(\zeta)$ – 2π*-периодическая измеримая функция с условием*

$$0 < c \leqslant |q(\zeta)| \leqslant C < \infty, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1;$$

б) *система* $\{\phi_1\}_0 = \{\phi_1(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$, *где* $\phi_1 \in L^2(\mathbb{R}^1)$, *является ортонормированным базисом в* V_0 *тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{\phi}_1(\zeta) = q(\zeta)\widehat{\phi}(\zeta) \quad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1,$$

где $q(\zeta)$ – 2π*-периодическая измеримая функция с условием*

$$|q(\zeta)| = \left\{\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l)|^2\right\}^{-1/2}, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1.$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что при условии (14) системы $\{\phi\}_0$ и $\{\phi_1\}_0$ являются системами Рисса одновременно, а в силу утверждения 1, б) замыкания линейных оболочек этих систем совпадают.

Утверждение б) леммы 2 вытекает из а) и из следствия 1.

Для завершения доказательства теоремы 1 нам остается отметить, что согласно лемме 2, б), если функция ϕ_1 определена равенством

$$\widehat{\phi}_1(\zeta) = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l)|^2 \right\}^{-1/2} \widehat{\phi}(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1, \tag{15}$$

то система $\{\phi_1\}_0$ – ортонормированный базис в V_0.

Замечание. Из утверждения б) леммы 2 следует, что если ϕ является масштабной функцией КМА $\mathscr{V}$, то $\mathscr{V}$ имеет множество других масштабных функций. При этом, если ϕ_1 также является масштабной функцией, то $\widehat{\phi}_1(\zeta) = m(\zeta)\widehat{\phi}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}^1$, где $m(\zeta)$ – 2π-периодическая измеримая функция с $|m(\zeta)| = 1$ для п.в. на $\zeta \in \mathbb{R}^1$.

§ 2. Масштабная функция и КМА

Для заданной функции $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ рассмотрим последовательность подпространств

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_\phi = \{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \text{где} \quad V_k = L\{\phi\}_k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{16}$$

(т.е. V_k – замыкание по норме $L^2(\mathbb{R}^1)$ линейной оболочки системы $\{\phi_{k,l}(x)\}_{l \in \mathbb{Z}} \equiv \{2^{k/2}\phi(2^k x - l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$). В этом параграфе мы выясним для каких функций ϕ последовательность пространств $\mathscr{V}_\phi$ является КМА с масштабной функцией $\phi(x)$ (см. определение 2).

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность пространств $\mathscr{V} = \mathscr{V}_\phi = \{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ являлась КМА с масштабной функцией $\phi(x)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

(a1) $\sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l)|^2 = 1$ *для п.в.* $\zeta \in \mathbb{R}^1$;

(a2) *существует 2π-периодическая функция $m_\phi(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}^1$, такая, что*

$$\widehat{\phi}(\zeta) = m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right) \quad \text{для п.в. } \zeta \in \mathbb{R}^1, \ \ m_\phi \in L^2(0, 2\pi); \tag{17}$$

(a3) $\lim\limits_{k \to +\infty} \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2^k}\right)\right| = 1$ *для п.в.* $\zeta \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Отметим прежде всего, что условие (A4) для системы $\mathscr{V} = \mathscr{V}_\phi$ (см. определение 2) непосредственно вытекает из определения этой системы (см. (16)), и, согласно следствию 1, условие (A5) эквивалентно условию (a1).

Если условие (a1) выполнено, то система $\{\phi\}_k$ является ортонормированным базисом пространства V_k $(k \in \mathbb{Z})$ и при этом (см. формулу (69) из приложения 2)

$$\widehat{\phi}_{k,l}(\zeta) = 2^{-k/2}\widehat{\phi}(2^{-k}\zeta)e^{-i2^{-k}l\zeta}, \qquad k, l \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Далее, легко видеть, что условие (A1) будет выполнено, если и только если $V_0 \subset V_1$. Последнее эквивалентно тому, что $\phi \in V_1$. Таким образом, при условии (a1), условие (A1) эквивалентно тому, что функция $\phi(x)$ имеет представление

$$\phi(x) \overset{L^2}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l\phi(2x - l), \qquad \sum_{l\in\mathbb{Z}} |a_l|^2 < \infty, \tag{19}$$

или, что одно и то же,

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) \overset{L^2}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l\phi(x - l), \; a_l = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{x}{2}\right)\overline{\phi(x - l)}\, dx, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

Но согласно утверждению 1, б) (см. также (18)) равенство (20) эквивалентно равенству

$$\widehat{\phi}(2\zeta) = m_\phi(\zeta)\widehat{\phi}(\zeta) \;\; \text{для п.в.} \;\; \zeta \in \mathbb{R}^1, \tag{21}$$

где $m_\phi(\zeta) := \dfrac{1}{2}\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} a_l e^{-il\zeta} \in L^2(0, 2\pi)$, что совпадает с (a2).

Забегая вперед, отметим, что каждое из эквивалентных равенств (17), (19)–(21) называется *масштабным равенством* КМА V_ϕ.

Докажем теперь, что условие (A3) в определении 2 выполняется автоматически, если имеет место (a1) (или (A5), что одно и то же для семейства подпространств вида (16)). Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{k\to-\infty} \|P_k(f)\|_2 = 0, \quad \text{если} \;\; f \in L^2(\mathbb{R}^1), \tag{22}$$

где $P_k = P_{V_k}$ – ортогональный проектор из $L^2(\mathbb{R}^1)$ на подпространство V_k.

Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ и ε – произвольное положительное число. Выберем число $A > 0$ так, чтобы

$$f = f_1 + f_2, \qquad f_1(x) = \chi_{(-A,A)}(x) f(x), \quad \|f_2\|_2 \leqslant \varepsilon. \tag{23}$$

Из (A5) и (16) следует, что система $\{\phi\}_k$ является ортонормированным базисом пространства V_k $(k \in \mathbb{Z})$, следовательно,

$$\begin{aligned}\|P_k(f_1)\|_2^2 &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} |(f_1, \phi_{k,l})|^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left| \int_{-A}^{A} f_1(x) \overline{\phi_{k,l}(x)}\, dx \right|^2 \\ &\leqslant \|f_1\|_2^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^k \int_{-A}^{A} |\phi(2^k x - l)|^2\, dx \\ &\leqslant \|f\|_2^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{-l-2^k A}^{-l+2^k A} |\phi(t)|^2\, dt. \end{aligned} \tag{24}$$

Пусть число k_0 выбрано так, что $2^k A < \frac{1}{2}$, если $k < k_0$. Тогда интервалы $(-l - 2^k A, -l + 2^k A)$, $l \in \mathbb{Z}$, попарно не пересекаются и из (24) мы находим, что

$$\|P_k(f_1)\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2 \int_{\mathbb{R}^1} u_k(t)\, dt, \quad \lim_{k\to-\infty} u_k(t) = 0 \text{ для п.в. } t \in \mathbb{R}^1, \tag{25}$$

где

$$u_k(t) := \chi_{E_k}(t) |\phi(t)|^2, \quad t \in \mathbb{R}^1, \qquad E_k := \bigcup_{l\in\mathbb{Z}} (-l - 2^k A, -l + 2^k A).$$

Учитывая, что $|u_k(t)| \leqslant |\phi(t)|^2$, $t \in \mathbb{R}^1$, и $|\phi(t)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^1)$, применив теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, мы из (25) получим, что $\lim\limits_{k\to-\infty} \|P_k(f_1)\|_2 = 0$. Так как $\|P_k(f_2)\|_2 \leqslant \|f_2\|_2$, то отсюда и из (23) вытекает (22).

Таким образом, теорема 2 будет полностью доказана, если мы покажем, что если имеют место (a1) и (a2) (или, что одно и то же, (A5) и (A1)), то условия (A2) и (a3) эквивалентны. Последнее вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 2. *Пусть функция* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет условиям* (a1) *и* (a2). *Тогда*[2)]

$$L\{\phi\} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^1) : \operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Omega_\phi \right\}, \tag{26}$$

где $\Omega_\phi := \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^1 : \lim\limits_{k\to+\infty} |\widehat{\phi}(2^{-k}\zeta)| = 1 \right\}$.

Предварительно установим две леммы.

[2)] Вложение $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Omega_\phi$ в (26) мы понимаем с точностью до множества меры нуль.

Лемма 1. *Пусть функция* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет условию* (a1). *Тогда для произвольных* $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ *и* $k \in \mathbb{Z}$

$$\|P_k(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}(\zeta)|^2 |\widehat{\phi}(2^{-k}\zeta)|^2\, d\zeta, \tag{27}$$

если $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset (\alpha, \beta)$, $\beta - \alpha \leqslant 2^k \cdot 2\pi$.

Доказательство. Из (a1), с учетом выполнения условия (A4) и следствия 1, вытекает, что

$$P_k(f, x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (f, \phi_{k,l})\phi_{k,l}(x), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{28}$$

Согласно равенству Планшереля (см. (67) в приложении 2) и (18)

$$\begin{aligned}
(f, \phi_{k,l}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \widehat{f}(\zeta)\overline{\widehat{\phi}_{k,l}(\zeta)}\, d\zeta \\
&= \frac{2^{-k/2}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \widehat{f}(\zeta)\overline{\widehat{\phi}(2^{-k}\zeta)}\, e^{i2^{-k}l\zeta}\, d\zeta \\
&= \frac{2^{k/2}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \widehat{f}(2^k t)\overline{\widehat{\phi}(t)}\, e^{ilt}\, dt \\
&= \frac{2^{k/2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathscr{P}_{2\pi}\big[\widehat{f}(2^k t)\overline{\widehat{\phi}(t)}\,\big] e^{ilt}\, dt \\
&= 2^{k/2} c_{-l}\Big(\mathscr{P}_{2\pi}\big[\widehat{f}(2^k t)\overline{\widehat{\phi}(t)}\,\big]\Big),
\end{aligned} \tag{29}$$

где $c_l(g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ilt}\, dt$, $l \in \mathbb{Z}$, – коэффициенты Фурье функции $g \in L^1(0, 2\pi)$ по тригонометрической системе. Применив равенство Парсеваля (для системы $\{\phi\}_k$ и тригонометрической системы), из (28) и (29) находим, что для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\|P_k(f)\|_2^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |(f, \phi_{k,l})|^2 = 2^k \sum_{l \in \mathbb{Z}} \Big| c_{-l}\Big(\mathscr{P}_{2\pi}\big[\widehat{f}(2^k t)\overline{\widehat{\phi}(t)}\,\big]\Big)\Big|^2 \\
&= \frac{2^k}{2\pi}\int_{2^{-k}\alpha}^{2^{-k}\alpha + 2\pi} \Big|\mathscr{P}_{2\pi}\big[\widehat{f}(2^k t)\overline{\widehat{\phi}(t)}\,\big]\Big|^2\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha + 2^k 2\pi} \Big|\mathscr{P}_{2^k \cdot 2\pi}\big[\widehat{f}(\zeta)\overline{\widehat{\phi}(2^{-k}\zeta)}\,\big]\Big|^2\, d\zeta.
\end{aligned}$$

Так как $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset (\alpha,\beta)$ и $\beta < \alpha + 2^k \cdot 2\pi$ (см. (27)), то

$$\mathscr{P}_{2^k\cdot 2\pi}\left[\widehat{f}(\zeta)\overline{\widehat{\phi}(2^{-k}\zeta)}\right] = \widehat{f}(\zeta)\overline{\widehat{\phi}(2^{-k}\zeta)}, \text{ если } \zeta \in (\alpha, \alpha + 2^k \cdot 2\pi),$$

и следовательно,

$$\|P_k(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2^k 2\pi} |\widehat{f}(\zeta)|^2 |\widehat{\phi}(2^{-k}\zeta)|^2\, d\zeta,$$

что совпадает с (27). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет условиям* (a1) *и* (a2). *Тогда*

$$|m_\phi(\zeta)|^2 + |m_\phi(\zeta+\pi)|^2 = 1 \quad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{30}$$

Доказательство. Учитывая, что m_ϕ – 2π-периодическая функция, из (a1) и (17) получим, что для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l)|^2 &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left| m_\phi\left(\frac{\zeta}{2} + \pi l\right)\right|^2 \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}+\pi l\right)\right|^2 \\ &= \left|m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2 \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2} + 2\pi q\right)\right|^2 \\ &\quad + \left|m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)\right|^2 \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2} + \pi + 2\pi q\right)\right|^2 \\ &= \left|m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2 + \left|m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)\right|^2, \end{aligned}$$

откуда следует (30).

Доказательство утверждения 2. Из (30) следует, что $|m_\phi(\zeta)| \leqslant 1$ для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$, и из (a1) и (17) мы находим, что

$$|\widehat{\phi}(\zeta)| \leqslant \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right| \leqslant 1 \quad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{31}$$

Это значит, что для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$ существует предел

$$Q_\phi(\zeta) := \lim_{k\to+\infty} \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2^k}\right)\right|^2 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant Q_\phi(\zeta) \leqslant 1. \tag{32}$$

Докажем, что

$$\lim_{k\to+\infty} \|P_k(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}(\zeta)|^2 Q_\phi(\zeta)\, d\zeta, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^1). \tag{33}$$

Для функций $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ таких, что множество $\operatorname{supp} \widehat{f}$ ограничено, (33) следует из равенства (27) (которое будет выполняться для достаточно больших k) и из соотношений (31) и (32) (с учетом теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла). Так как множество таких функций f всюду плотно в $L^2(\mathbb{R}^1)$, мы будем иметь равенство (33) для всех $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$.

Ясно, что произвольная функция $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ принадлежит множеству $L\{\phi\}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to+\infty} \|P_k(f)\|_2 = \|f\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}(\zeta)|^2\, d\zeta.$$

Отсюда и из (33) находим, что

$$L\{\phi\} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^1) : \int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}(\zeta)|^2 [1 - Q_\phi(\zeta)]\, d\zeta = 0 \right\}. \tag{34}$$

Так как $0 \leqslant Q_\phi(\zeta) \leqslant 1$ (см. (32)), из (34) следует (26). Утверждение 2, а следовательно, и теорема 2 доказаны.

Из равенства (26) вытекает

Следствие 2. *Пусть функция $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ удовлетворяет условиям* (a1) *и* (a2). *Если $L\{\phi\} \neq L^2(\mathbb{R}^1)$ и $L^\perp\{\phi\}$ – ортогональное дополнение подпространства $L\{\phi\}$, то*

$$L^\perp\{\phi\} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^1) : \operatorname{supp} \widehat{f} \subset \Omega_\phi^c := \mathbb{R}^1 \setminus \Omega_\phi \right\}. \tag{35}$$

Доказательство. Действительно, любая функция $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ представима в виде $f = f_1 + f_2$, где функции f_1 и f_2 определяются равенствами

$$\widehat{f_1}(\zeta) = \chi_{\Omega_\phi}(\zeta)\widehat{f}(\zeta), \quad \widehat{f_2}(\zeta) = \chi_{\Omega_\phi^c}(\zeta)\widehat{f}(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1.$$

С другой стороны, из равенства Планшереля следует, что

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f_1}, \widehat{f_2}) = 0,$$

если $f_1 \in L\{\phi\}$ и $\operatorname{supp} \widehat{f_2} \subset \Omega_\phi^c$. Следствие 2 доказано.

Так как $P_k(f) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, если $f \in L^\perp\{\phi\}$, то из (33) и (35) мы находим, что $Q_\phi(\zeta) = 0$ для п.в. $\zeta \in \Omega_\phi^c$. Учитывая также (26), мы получаем следующее

Следствие 3. *Пусть функция $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ удовлетворяет условиям* (a1) *и* (a2). *Тогда*

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2^k}\right)\right| = 0 \textit{ или } 1 \quad \textit{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{36}$$

Следствие 4. *Пусть функция $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ удовлетворяет условиям* (a1) *и* (a2). *Для того чтобы последовательность подпространств $\mathcal{V}_\phi$, определенных в* (16), *являлась КМА с масштабной функцией $\phi(x)$, достаточно выполнения одного из следующих условий*:

(a4.1) *существует предел* $\lim\limits_{\zeta\to 0}|\widehat{\phi}(\zeta)|$;
(a4.2) $\phi \in L^1(\mathbb{R}^1)$;
(a4.3) *функция ϕ имеет ограниченный носитель.*

Доказательство. Если существует предел $\lim\limits_{\zeta\to 0}|\widehat{\phi}(\zeta)| = \lambda$, тогда в силу следствия 3 $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$. Но множество $L\{\phi\}$, очевидно, не пусто, значит $\lambda = 1$ и имеет место условие (a3) из теоремы 2, т.е. $\mathcal{V}_\phi$ является КМА.

Остается отметить, что для произвольной функции $\phi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ из условия (a4.3) следует (a4.2), а из условия (a4.2) следует (a4.1) (см. свойство 3° из приложения 2, § 4).

Следствие 5. *Пусть функция $\phi \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ является масштабной функцией КМА $\mathcal{V}_\phi$. Тогда*

а) $|\widehat{\phi}(0)| = 1$, $\widehat{\phi}(2\pi l) = 0$ *при* $l = \pm1, \pm2, \ldots$;
б) $\left|\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \phi(x-l)\right| = 1$ *для п.в.* $x \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Если $\phi \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то функция $\widehat{\phi}$ непрерывна (см. п. 3° из приложения 2, § 4), в частности, существует предел $\lim\limits_{\zeta\to 0}|\widehat{\phi}(\zeta)| = |\widehat{\phi}(0)|$ и, так же, как в доказательстве следствия 4, получим, что $|\widehat{\phi}(0)| = 1$. Отсюда и из условия (a1) теоремы 2, опять учитывая непрерывность функции $\widehat{\phi}$, получим, что $\widehat{\phi}(2\pi l) = 0$, $l = \pm1, \pm2, \ldots$.

Утверждение б) следует из а) в силу формулы суммирования Пуассона (см. (74) в приложении 2).

Теорема 3. *Пусть функция $\phi \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ удовлетворяет условию* (a2) *и*

а) *существует число $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\widehat{\phi}(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad \textit{при} \quad |\zeta| \to \infty; \tag{37}$$

б) *существуют постоянные $B > b > 0$ такие, что*

$$b \leqslant h_\phi(\zeta) \leqslant B, \quad где \quad h_\phi(\zeta) = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l)|^2 \right\}^{1/2}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{38}$$

Тогда последовательность подпространств $\mathscr{V}_\phi$, определенная в (16), *является КМА с масштабной функцией $\phi_1(\zeta)$, определенной равенством*

$$\widehat{\phi}_1(\zeta) = \frac{\widehat{\phi}(\zeta)}{h_\phi(\zeta)}, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1.$$

Доказательство. В силу леммы 1 из теоремы 1 и следствия 1, из (38) следует, что $\{\phi\}_0$ является системой Рисса, а $\{\phi_1\}_0$ – ортонормированная система. Более того, в силу утверждения 1, б) подпространства $L\{\phi\}_0$ и $L\{\phi_1\}_0$, а следовательно, и последовательности подпространств $\mathscr{V}_\phi$ и $\mathscr{V}_{\phi_1}$ совпадают. Нам остается проверить, что функция ϕ_1 удовлетворяет условию (а4.1) следствия 4.

Условия (а1) и (а2) (для ϕ_1) непосредственно следуют из (38) и условия (а2) (для ϕ). Далее, в силу условия $\phi \in L^1(\mathbb{R}^1)$ функция $\widehat{\phi}(\zeta)$ непрерывна на $\mathbb{R}^1$, а из (37) следует, что ряд в (38) сходится равномерно на $[0, 2\pi)$, т.е. $h_\phi(\zeta)$ является 2π-периодической, непрерывной функцией. Следовательно, функция $\widehat{\phi}_1(\zeta)$ также непрерывна на $\mathbb{R}^1$ и, в частности, для ϕ_1 выполнено условие (а4.1) следствия 4. Теорема 3 доказана.

§3. Всплески, порожденные КМА

В этом параграфе мы покажем как можно построить всплеск, исходя из данного КМА $\mathscr{V} = \{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с масштабной функцией ϕ.

Для $k \in \mathbb{Z}$ через W_k обозначим ортогональное дополнение пространства V_k в пространстве V_{k+1}:

$$V_k \oplus W_k = V_{k+1}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{39}$$

Из свойств (А1)–(А3) КМА (см. определение 2) непосредственно вытекает разложение пространства $L^1(\mathbb{R}^1)$ в прямую сумму попарно ортогональных подпространств:

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k = L^2(\mathbb{R}^1), \tag{40}$$

при этом в силу (А4)

$$f(x) \in W_k \text{ тогда и только тогда, когда } f(2x) \in W_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{41}$$

Допустим теперь, что функция ψ такова, что система $\{\psi\}_0 = \{\psi_{0,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированным базисом в пространстве W_0. Тогда, согласно (41), для любого $k \in \mathbb{Z}$ система $\{\psi\}_k = \{\psi_{k,l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ будет ортонормированным базисом в W_k, а система $\{\psi\} = \{\psi_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z}}$ будет ортонормированным базисом в $L^2(\mathbb{R}^1)$, т.е. функция $\psi(x)$ будет всплеском. В этом случае говорят, что *всплеск ψ порожден КМА $\mathscr{V}$*.

Таким образом, функция ψ является всплеском, порожденным КМА $\mathscr{V}$, если система $\{\psi\}_0$ – ортонормированный базис пространства W_0.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{V} = \{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – КМА с масштабной функцией $\phi(x)$ и пусть функция $m_\phi(\zeta)$ определена равенством* (17). *Функция ψ является всплеском, порожденным КМА $\mathscr{V}$, тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{\psi}(\zeta) = \mu(\zeta)e^{i\frac{\zeta}{2}}\,\overline{m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)}\,\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right) \quad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1, \tag{42}$$

где $\mu(\zeta)$ – некоторая 2π-периодическая измеримая функция с

$$|\mu(\zeta)| = 1, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{43}$$

В нижеследующих двух леммах мы предполагаем, что $\mathscr{V} = \{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – КМА с масштабной функцией $\phi(x)$ и $V_0 \oplus W_0 = V_1$.

Лемма 1. *Для того чтобы $\psi \in W_0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\widehat{\psi}(\zeta) = \mu(\zeta)e^{i\frac{\zeta}{2}}\,\overline{m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)}\,\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right) \quad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1, \tag{44}$$

где $\mu \in L^2(0, 2\pi)$. При этом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\mu\|_{L^2(0,2\pi)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}.$$

Доказательство. По определению пространства W_0 (см. (39)) принадлежность функции ψ пространству W_0 означает выполнение двух условий: $\psi \in V_1$ и $\psi \perp V_0$ (ортогональность ψ пространству V_0). Согласно утверждению 1, б), первое из этих условий эквивалентно тому, что

$$\widehat{\psi}(\zeta) = u\left(\frac{\zeta}{2}\right)\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right), \quad \zeta \in \mathbb{R}^1, \quad \text{где} \quad u \in L^2(0, 2\pi), \tag{45}$$

при этом $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\|u\|_{L^2(0,2\pi)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}$ (см. (13) с $b = B = 1$).

Докажем, что второе условие эквивалентно равенству

$$m_\phi(\zeta)\overline{u(\zeta)} + m_\phi(\zeta+\pi)\overline{u(\zeta+\pi)} = 0 \quad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{46}$$

Действительно, ортогональность $\psi \perp V_0$, согласно (29), означает, что

$$(\psi, \phi_{0,l}) = \mathrm{c}_{-l}\big(\mathscr{P}_{2\pi}[\widehat{\psi}\cdot\overline{\widehat{\phi}}]\big) = 0, \qquad l \in \mathbb{Z},$$

или, что одно и то же,

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(\zeta+2\pi l)\overline{\widehat{\phi}(\zeta+2\pi l)} = 0 \quad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{47}$$

Но в силу (45), (a1) и (a2) (см. теорему 2)

$$\begin{aligned}
&\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(\zeta+2\pi l)\overline{\widehat{\phi}(\zeta+2\pi l)} \\
&\quad= \sum_{l\in\mathbb{Z}} u\left(\frac{\zeta}{2}+\pi l\right)\overline{m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}+\pi l\right)}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}+\pi l\right)\right|^2 \\
&\quad= \sum_{l\in\mathbb{Z}} u\left(\frac{\zeta}{2}\right)\overline{m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}\right)}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}+2\pi l\right)\right|^2 \\
&\qquad+ \sum_{l\in\mathbb{Z}} u\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)\overline{m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}+\pi+2\pi l\right)\right|^2 \\
&\quad= u\left(\frac{\zeta}{2}\right)\overline{m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}\right)} + u\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)\overline{m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)}.
\end{aligned}$$

Следовательно, условия (46) и (47) эквивалентны и, таким образом, принадлежность функции ψ пространству W_0 означает выполнение условий (45) и (46). Но равенство в (46) есть не что иное, как ортогональность в $\mathbb{C}^2$ для п.в. ζ двух векторов: $\big(m_\phi(\zeta),\ m_\phi(\zeta+\pi)\big)$ и $\big(u(\zeta),\ u(\zeta+\pi)\big)$, поэтому, с учетом (30), мы находим, что для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$ вектор $\big(u(\zeta),\ u(\zeta+\pi)\big)$ имеет вид $\lambda(\zeta)\cdot\big(\overline{m_\phi(\zeta+\pi)},\ -\overline{m_\phi(\zeta)}\,\big)$, т.е.

$$u(\zeta) = \lambda(\zeta)\cdot\overline{m_\phi(\zeta+\pi)},\ \ u(\zeta+\pi) = -\lambda(\zeta)\cdot\overline{m_\phi(\zeta)} \ \text{для п.в.}\ \zeta\in\mathbb{R}^1, \tag{48}$$

где $\lambda(\zeta)$ – некоторая 2π-периодическая функция. Заметим, что в силу условия (30) для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$ величины $m_\phi(\zeta)$ и $m_\phi(\zeta+\pi)$ не обращаются в нуль одновременно и поэтому функция $\lambda(\zeta)$ определена однозначно равенствами (48). Взяв $\zeta + \pi$ вместо ζ в (48), получим, что $\lambda(\zeta) = -\lambda(\zeta + \pi)$ для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$. Последнее условие, с учетом 2π-периодичности функции $\lambda(\zeta)$, означает, что она имеет вид:

$$\lambda(\zeta) = e^{-i\zeta}\mu(2\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1, \tag{49}$$

где $\mu(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}^1$, – некоторая 2π-периодическая функция. При этом, согласно (30) и (48)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\mu(\zeta)|^2\, d\zeta &= 2\int_0^{\pi} |\mu(2\zeta)|^2\, d\zeta \\ &= 2\int_0^{\pi} |\lambda(\zeta)|^2 \left[|m_\phi(\zeta+\pi)|^2 + |m_\phi(\zeta)|^2\right] d\zeta \\ &= 2\int_0^{\pi} \left[|u(\zeta)|^2 + |u(\zeta+\pi)|^2\right] d\zeta \\ &= 2\int_0^{2\pi} |u(\zeta)|^2\; d\zeta = 2\pi \|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^1)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (45), (48), (49) получим, что для $\psi \in W_0$ имеет место (44).

Обратно, если для ψ имеет место представление (44), то очевидно, что выполнено (45), причем, как легко проверить, функция $u(\zeta)$ в (45) удовлетворяет условию (46), т.е. $\psi \in W_0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для произвольной функции $\psi \in W_0$ следующие условия эквивалентны:*

1) *ψ является всплеском;*
2) *$\{\psi\}_0$ – ортонормированный базис в W_0;*
3) *$\{\psi\}_0$ – ортонормированная система;*
4) *$|\mu(\zeta)| = 1$ для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$, где функция $\mu(\zeta)$ определена в лемме* 1.

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) непосредственно вытекает из (40), (41). Ясно, что из 2) следует 3). Далее, согласно (44), (30) и (a1) (см. теорему 2)

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\zeta + 2\pi l)|^2 &= |\mu(\zeta)|^2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left| m_\phi\left(\frac{\zeta}{2} + \pi l + \pi\right)\right|^2 \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2} + \pi l\right)\right|^2 \\ &= |\mu(\zeta)|^2 \left(\left|m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2 + \left|m_\phi\left(\frac{\zeta}{2} + \pi\right)\right|^2\right) = |\mu(\zeta)|^2\end{aligned}$$

для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$. Значит в силу следствия 1, условия 3) и 4) эквивалентны. Нам остается доказать, что из ортонормированности системы $\{\psi\}_0$ вытекает ее полнота в пространстве W_0.

Действительно, для произвольного $g \in W_0$, согласно лемме 1, имеет место равенство

$$\widehat{g}(\zeta) = \mu_g(\zeta) e^{i\frac{\zeta}{2}} \overline{m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)}\, \widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right) \quad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1,$$

где $\mu_g \in L^2(0, 2\pi)$. Отсюда и из (44) получим, что $\widehat{g}(\zeta) = p(\zeta)\widehat{\psi}(\zeta)$, где $p(\zeta) = \mu_g(\zeta)/\mu(\zeta)$. Так как $|\mu(\zeta)| = 1$ для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$, то $p \in L^2(0, 2\pi)$ и применив утверждение 1, б), находим, что $g \in L\{\psi\}_0$, т.е. $L\{\psi\}_0 = W_0$. Лемма 2 доказана.

Утверждение теоремы 4 непосредственно вытекает из лемм 1 и 2. Теорема 4 доказана.

Следствие 6. *Если ψ – всплеск, порожденный КМА $\mathcal{V}$ с масштабной функцией ϕ, то для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$*

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad |\widehat{\psi}(\zeta)|^2 + |\widehat{\phi}(\zeta)|^2 = \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2; \\ &\text{б)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^k\zeta)|^2 = |\widehat{\phi}(\zeta)|^2; \\ &\text{в)} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^k\zeta)|^2 = 1. \end{aligned} \tag{50}$$

Доказательство. Из (42), (43), (30) и (17) следует, что для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$

$$\begin{aligned} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2 &= \left|m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}+\pi\right)\right|^2 \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2 \\ &= \left(1 - \left|m_\phi\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2\right) \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2 = \left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2 - |\widehat{\phi}(\zeta)|^2, \end{aligned}$$

что доказывает (50), а).

Согласно (50), а), для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$

$$|\widehat{\psi}(2^k\zeta)|^2 + |\widehat{\phi}(2^k\zeta)|^2 = |\widehat{\phi}(2^{k-1}\zeta)|^2, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Суммируя эти равенства по $k = 1, 2, \ldots$ и учитывая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{\phi}(2^k\zeta) = 0$ для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$ (этот факт легко выводится из интегрируемости функции $|\widehat{\phi}(\zeta)|^2$ на $\mathbb{R}^1$), получим равенство (50), б) для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$.

Далее, из (50), б) имеем, что для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$

$$\sum_{k=-k_0}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^k\zeta)|^2 = |\widehat{\phi}(2^{-k_0}\zeta)|^2, \qquad k_0 = 1, 2, \ldots,$$

откуда, устремив k_0 к $+\infty$ и учитывая условие (а3) (см. теорему 2), получим (50), в).

Следствие 7. *Пусть $\mathcal{V}$ – КМА с масштабной функцией $\phi(x)$. Тогда*

а) *функция $\psi_0(x)$, определенная равенством (см. (17))*

$$\widehat{\psi}_0(\zeta) = e^{i\frac{\zeta}{2}}\, \overline{m_\phi\left(\frac{\zeta}{2} + \pi\right)}\, \widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1, \tag{51}$$

является всплеском;

б) *имеет место равенство*

$$\psi_0(x) \overset{L^2}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (-1)^l\, \overline{a_l}\, \phi(2x + l + 1), \tag{52}$$

где $a_l = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{x}{2}\right) \overline{\phi(x - l)}\, dx$;

в) *всякий всплеск ψ, порожденный КМА $\mathcal{V}$, имеет вид:*

$$\widehat{\psi}(\zeta) = \mu(\zeta)\widehat{\psi}_0(\zeta) \quad \textit{для п.в.} \quad \zeta \in \mathbb{R}^1,$$

где $\mu(\zeta)$ – 2π-периодическая измеримая функция с $|\mu(\zeta)| = 1$, $\zeta \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Утверждения а) и в) непосредственно следуют из теоремы 4. Далее, из (51) и разложения Фурье функции $m_\phi(\zeta)$ (см. (20), (21)) вытекает, что

$$2\widehat{\psi}_0(2\zeta)e^{-i\zeta} = \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} (-1)^l\, \overline{a_l}\, e^{il\zeta}\right)\widehat{\phi}(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{53}$$

Так как левая часть равенства (53) является преобразованием Фурье функции $\psi_0\left(\frac{x-1}{2}\right)$ (см. формулу (69) из приложения 2), то с учетом утверждения 1 будем иметь

$$\psi_0\left(\frac{x-1}{2}\right) \overset{L^2}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} (-1)^l\, \overline{a_l}\, \phi(x + l),$$

что совпадает с (52).

Замечание. Из равенства (52) следует, что функция $\psi_0(x)$ принимает действительные значения, если действительна функция $\phi(x)$. В частности, ϕ и ψ_0 будут действительными функциями, если $\widehat{\phi}$ действительная четная функция (это непосредственно вытекает из определения обратного преобразования Фурье; см. формулу (66) из приложения 2). Полезно подчеркнуть, что для всплеска $\psi_0(x)$, принимающего только действительные значения, система $\{\psi_0\}$ является ортонормированным базисом и в действительном пространстве $L^2(\mathbb{R}^1)$.

Следствие 8. *Пусть* $\mathscr{V}$ – *КМА с масштабной функцией* $\phi(x)$. *Если* $\widehat{\phi}(\zeta) \geqslant 0$, $\zeta \in \mathbb{R}^1$, *то для всплеска* $\psi_0(x)$, *порожденного КМА* $\mathscr{V}$, *определенного соотношением* (51), *имеет место равенство*

$$\widehat{\psi_0}(\zeta) = e^{i\frac{\zeta}{2}} \sqrt{\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2 - |\widehat{\phi}(\zeta)|^2}, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{54}$$

Доказательство. Из (17) имеем, что для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$

$$m_\phi(\zeta) = m_\phi(\zeta + 2\pi l) = \frac{\widehat{\phi}(2\zeta + 4\pi l)}{\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l)}, \quad \text{если} \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l) \neq 0.$$

Но в силу условия (a1) (см. теорему 2) для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$ существует $l \in \mathbb{Z}$ такое, что $\widehat{\phi}(\zeta + 2\pi l) \neq 0$, значит $m_\phi(\zeta) \geqslant 0$ для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$. Отсюда и из (50), а) для всплеска $\psi_0(x)$, определенного равенством (51), мы будем иметь, что для п.в. $\zeta \in \mathbb{R}^1$

$$\overline{m_\phi\left(\frac{\zeta}{2} + 2\pi l\right)}\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right) = |\widehat{\psi_0}(\zeta)| = \sqrt{\left|\widehat{\phi}\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2 - |\widehat{\phi}(\zeta)|^2},$$

что, с учетом (51), доказывает (54).

§ 4. Примеры всплесков

1°. Всплеск Хаара. Всплеск Хаара $\chi(x)$ был определен в начале этой главы. Легко видеть, что всплеск Хаара порожден КМА $\mathscr{V} = \{V_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где V_k – пространство кусочно постоянных функций из $L^2(\mathbb{R}^1)$, постоянных на интервалах $\left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right)$, $l \in \mathbb{Z}$. Как отмечалось выше, масштабной функцией этого КМА является $\chi_{[0,1)}(x)$ – характеристическая функция интервала $[0,1)$, а масштабное равенство (см. (19)) и равенство (52) принимают вид:

$$\begin{aligned} \chi_{[0,1)}(x) &= \chi_{[0,1)}(2x) + \chi_{[0,1)}(2x-1), \\ \chi(x) &= \chi_{[0,1)}(2x) - \chi_{[0,1)}(2x-1), \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}^1.$$

Преобразование Фурье масштабной функции

$$\widehat{\chi}_{[0,1)}(\zeta) = e^{-i\frac{\zeta}{2}} \frac{\sin \zeta/2}{\zeta/2}, \tag{55}$$

очевидно, удовлетворяет условиям (a1)–(a3) теоремы 2, при этом

$$\widehat{\chi}_{[0,1)}(\zeta) = m_{\chi_{[0,1)}}\left(\frac{\zeta}{2}\right) \widehat{\chi}_{[0,1)}\left(\frac{\zeta}{2}\right), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1, \tag{56}$$

где $m_{\chi_{[0,1)}}(\zeta) = e^{-i\frac{\zeta}{2}} \cos \dfrac{\zeta}{2}$.

2°. Всплеск Шеннона–Котельникова. Простейшим примером функции $\widehat{\phi}$, удовлетворяющей условиям (a1)–(a3) теоремы 2, является функция

$$\widehat{\phi}(\zeta) = \chi_{(-\pi,\pi)}(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1.$$

Действительно, выполнение условий (a1) и (a3) очевидно, а (17) имеет место с

$$m_\phi(\zeta) = \chi_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}(\zeta), \quad \zeta \in [-\pi,\pi], \qquad m_\phi(\zeta+2\pi) = m_\phi(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}^1.$$

Соответствующий всплеск ψ, согласно (51), определяется равенством:

$$\widehat{\psi}(\zeta) = e^{i\frac{\zeta}{2}}[\chi_{(-2\pi,-\pi)}(\zeta) + \chi_{(\pi,2\pi)}(\zeta)].$$

Применив обратное преобразование Фурье (см. формулу (66) из приложения 2), получим следующие выражения для масштабной функции $\phi(x)$ и всплеска $\psi(x)$:

$$\phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}, \quad \psi(x) = \frac{2}{\pi(2x+1)}\big(\sin 2\pi(x+1/2) - \sin \pi(x+1/2)\big). \tag{57}$$

3°. Всплески Мейера. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{3}$ и пусть функция $\theta(\zeta) = \theta_\varepsilon(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}^1$, удовлетворяет следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \ 0 \leqslant \theta(\zeta) \leqslant 1, \quad \theta(-\zeta) = \theta(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1;\\
&2)\ \ \theta(\zeta) = 1 \ \text{ при } \ |\zeta| \leqslant (1-\varepsilon)\pi \ \text{ и } \ \theta(\zeta) = 0 \ \text{ при } \ |\zeta| \geqslant (1+\varepsilon)\pi;\\
&3)\ \ \theta^2(\pi - \zeta) + \theta^2(\pi + \zeta) = 1 \ \text{ при } \ \zeta \in [0, \pi].
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Существование непрерывных функции со свойствами (58) почти очевидно: достаточно задать непрерывную на $[(1-\varepsilon)\pi, \pi]$ функцию $\theta(\zeta)$ с $\theta((1-\varepsilon)\pi) = 1$, $\theta(\pi) = 1/\sqrt{2}$, $0 \leqslant \theta(\zeta) \leqslant 1$. Тогда значения $\theta(\zeta)$ для $\zeta \in [\pi, (1+\varepsilon)\pi]$ однозначно определятся из соотношения (58), 3). Более того, нетрудно показать, что существует функция $\theta(\zeta)$, удовлетворяющая условиям (58) и при этом бесконечно дифференцируемая:

$$\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^1). \tag{59}$$

Определим функцию $\phi = \phi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^1)$ равенством

$$\widehat{\phi}(\zeta) = \theta(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{60}$$

Несложно проверить, что ϕ удовлетворяет условиям (a1)–(a3) теоремы 2 с

$$m_\phi(\zeta) = \theta(2\zeta), \quad \zeta \in [-\pi, \pi], \qquad m_\phi(\zeta + 2\pi) = m_\phi(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}^1,$$

т.е. (см. также замечание после следствия 7 и пункты 4° и 6° из приложения 2, §4) имеет место

Утверждение 3. *Пусть функция θ имеет вид* (58) *при некотором $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}]$ и пусть функция ϕ определена равенством* (60). *Тогда последовательность подпространств $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\phi$ (см.* (16)) *является КМА с масштабной функцией ϕ. При этом*

а) $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – *действительная функция*;

б) $\operatorname{supp} \widehat{\phi} \subset [-(1+\varepsilon)\pi, (1+\varepsilon)\pi]$;

в) *если θ удовлетворяет также условию* (59), *то для произвольных $m, r = 0, 1, \ldots$*

$$\left| \frac{d^m \phi(x)}{dx^m} \right| \leqslant C_{m,r}(1 + |x|)^{-r},$$

где $C_{m,r}$ – постоянная, зависящая только от m и r.

Теперь, применив следствие 8, построим *всплеск Мейера* $\psi(x)$, определив его равенством (см. (60))

$$\widehat{\psi}(\zeta) = e^{i\frac{\zeta}{2}} \sqrt{\theta^2(\zeta/2) - \theta^2(\zeta)}, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{61}$$

Теорема 5. *Пусть функция θ имеет вид* (58) *при некотором* $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3}]$. *Тогда функция* $\psi(x)$, *определенная равенством* (61), *является всплеском с масштабной функцией* ϕ, *определенной равенством* (60). *При этом*

а) $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – *действительнозначная функция*;
б) $\operatorname{supp} \widehat{\psi} \subset [-(1+\varepsilon)2\pi, -(1-\varepsilon)\pi] \cup [(1-\varepsilon)\pi, (1+\varepsilon)2\pi]$;
в) $\psi\left(-\frac{1}{2} - x\right) = \psi\left(-\frac{1}{2} + x\right)$ *при* $x \in \mathbb{R}^1$;
г) *если* θ *удовлетворяет также условию* (59), *то для произвольных* $m, r = 0, 1, \ldots$

$$\left|\frac{d^m \psi(x)}{dx^m}\right| \leqslant C_{m,r}(1+|x|)^{-r}.$$

Доказательство. Как мы уже отметили, $\psi(x)$ является всплеском согласно следствию 8. Учитывая, что $u(\zeta) := \sqrt{\theta^2(\zeta/2) - \theta^2(\zeta)}$ – четная функция на $\mathbb{R}^1$ с ограниченным носителем, применив обратное преобразование Фурье (см. (66) из приложения 2, § 4), из (61) получим, что

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} e^{ix\zeta} e^{i\frac{\zeta}{2}} u(\zeta)\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \left[\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)\zeta + i\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\zeta\right] u(\zeta)\,d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} u(\zeta)\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)\zeta\,d\zeta,
\end{aligned}$$

откуда следуют условия а) и в).

Условие б) непосредственно вытекает из (61) и (58), а г) – из (61), с учетом пунктов 4° и 6° из приложения 2, § 4.

4°. Сплайн всплески.

Определение 3. Пусть $k \in \mathbb{Z}$ и $n = 0, 1, \ldots$. Функция $s(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, называется *сплайном порядка* n *с узлами* $2^{-k}\mathbb{Z} := \{2^{-k}l : l \in \mathbb{Z}\}$, если

а) $s(x)$ является полиномом с действительными коэффициентами степени $\leqslant n$ на каждом интервале $\left(2^{-k}(l-1), 2^{-k}l\right)$, $l \in \mathbb{Z}$;
б) $s \in C^{n-1}(\mathbb{R}^1)$.

(При $n = 0$ условие б) отсутствует; при $n = 1$ получаем: $C^0(\mathbb{R}^1) := C(\mathbb{R}^1)$.)

Пространство сплайнов порядка n с узлами $2^{-k}\mathbb{Z}$ обозначим через S_k^n и пусть $S^n := S_0^n$.

Отметим, что каждый многочлен степени $\leqslant n$ является сплайном порядка n (с произвольными узлами). Легко видеть также, что

$$\text{если} \quad s(x) \in S^n, \quad \text{то} \quad s'(x) \in S^{n-1} \quad \text{и} \quad s(2^k x - l) \in S^n_k, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \tag{62}$$

Наша цель – построить всплеск, являющийся сплайном порядка n с узлами $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ $(n = 0, 1, \dots)$. Для $n = 0$ рассмотренная ниже конструкция приводит к всплеску Хаара.

Нам потребуется несколько результатов из теории сплайнов.

Определим по индукции последовательность функций $B_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $n = 0, 1, \dots$, следующим образом:

$$\begin{gathered} B_0(x) = \chi_{[0,1]}(x), \\ B_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}^1} B_n(x-t) B_0(t)\, dt = \int_{x-1}^{x} B_n(t)\, dt. \end{gathered} \tag{63}$$

Функция $B_n(x)$ называется B*-сплайном* (*базисным сплайном*) порядка n $(n = 0, 1, \dots)$. Следующие свойства B-сплайнов легко вывести из (63) индукцией по $n = 0, 1, \dots$:

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad B_n \in S^n; \\ &\text{б)} \quad B_n(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, n+1), \quad \operatorname{supp} B_n = [0, n+1]; \\ &\text{в)} \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} B_n(x-l) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^1; \\ &\text{г)} \quad B'_{n+1}(x) = B_n(x) - B_n(x-1), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \tag{64}$$

Утверждение 4. *Для произвольного* $n = 0, 1, \dots$

а) *функция* $s(x)$ *принадлежит* S^n *тогда и только тогда, когда существуют числа* $a_l \in \mathbb{R}^1$, $l \in \mathbb{Z}$, *такие, что*

$$s(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l B_n(x-l), \qquad x \in \mathbb{R}^1; \tag{65}$$

б) *система* $\{B_n(x-l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ *является базисом Рисса в пространстве* $S^n \cap L^2(\mathbb{R}^1)$.

Лемма 1. *Пусть* $s(x) \in S^n$ *и* $s(x) = 0$ *при* $x \in [p, q]$ $(p, q \in \mathbb{Z})$. *Тогда существуют числа* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^1$ *такие, что*

$$s(x) = \begin{cases} c_1 (x-p)^n, & \textit{если } x \in [p-1, p], \\ c_2 (x-q)^n, & \textit{если } x \in [q, q+1]. \end{cases}$$

Доказательство. По определению, сплайн $s(x)$ на интервале $[p-1,p]$ совпадает с некоторым полиномом $P(x)$ степени $\leqslant n$. Так как $s \in C^{n-1}(\mathbb{R}^1)$, то из условия леммы следует, что $P^{(j)}(p) = 0$ при $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Следовательно, $s(x) = P(x) = c_1(x-p)^n$ при $x \in [p-1,p]$. Аналогичным образом можно показать, что $s(x) = c_2(x-q)^n$ при $x \in [q, q+1]$.

Лемма 2. *Если* $s(x) \in S^n$ *и* $\operatorname{supp} s \subset [0, n+1]$, *то существует постоянная* $c \in \mathbb{R}^1$ *такая, что*

$$s(x) = cB_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}^1.$$

Доказательство. Применим индукцию по $n = 0, 1, \ldots$. При $n = 0$ утверждение леммы очевидно. Предположим лемма верна для $n-1$ и докажем для n.

В силу леммы 1 существуют постоянные c_3 и c_4 такие, что

$$s(x) = c_3(x-n-1)^n, \quad B_n(x) = c_4(x-n-1)^n, \qquad x \in [n, n+1],$$

при этом $c_4 \neq 0$, так как $B_n(x) > 0$ при $x \in [n, n+1]$ (см. (64), б)). Тогда для функции $f(x) = s(x) - cB_n(x)$, где $c = c_3/c_4$, будем иметь, что $f \in S^n$ и $\operatorname{supp} f \subset [0,n]$. Следовательно (см. (62)), $f' \in S^{n-1}$ и $\operatorname{supp} f' \subset [0,n]$ и в силу индукционного предположения $f'(x) = c_5 B_{n-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, где $c_5 \in \mathbb{R}^1$. Но согласно (64), б) при $x > n$

$$0 = f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = c_5 \int_0^x B_{n-1}(t)\,dt = c_5 \int_{\mathbb{R}^1} B_{n-1}(t)\,dt.$$

Так как последний интеграл больше нуля, значит $c_5 = 0$ и $f'(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^1$, откуда, с учетом условия $\operatorname{supp} f \subset [0,n]$, следует, что $f(x) \equiv 0$. Лемма 2 доказана.

Учитывая, что $\operatorname{supp} B_n = [0, n+1]$, из леммы 2 вытекает (см. также (62))

Следствие 9. *Пусть* $s(x) \in S^n$ *и* $\operatorname{supp} s \subset [\alpha, \beta]$. *Если* $\beta - \alpha < n+1$, *то* $s(x) \equiv 0$.

Лемма 3. *Для произвольных* $m \in \mathbb{Z}$ *и полинома* $P(x)$ *степени* $\leqslant n$ *существует единственное представление*

$$P(x) = \sum_{l=m-n}^{m} a_l B_n(x-l), \qquad x \in [m, m+1]. \tag{66}$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $m = 0$. Так как пространство полиномов степени $\leqslant n$ на отрезке $[0, 1]$ имеет размерность $n + 1$, достаточно показать, что система $B_n(x - l)$, $l = -n, -n+1, \ldots, 0$, линейно независима на отрезке $[0, 1]$. Допустим, что

$$g(x) := \sum_{l=-n}^{0} a_l B_n(x - l) = 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, 1]. \tag{67}$$

Тогда в силу (64), б) $\operatorname{supp} g \subset [-n, 0] \cup [1, n+1]$. Легко видеть, что функции $g_1(x) := \chi_{[-n,0]}(x) g(x)$ и $g_2(x) := \chi_{[1,n+1]}(x) g(x)$ принадлежат S^n, и в силу следствия 9 $g_1 \equiv 0, g_2 \equiv 0$, а значит и $g(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^1$. Учитывая, что на интервале $(-n, -n+1)$ функция $g(x)$ совпадает с $a_{-n} B_n(x+n)$, получим, что $a_{-n} = 0$. Затем, рассматривая интервал $(-n + 1, -n + 2)$, найдем, что $a_{-n+1} = 0$ и, аналогично, $a_l = 0$ для всех $l = -n, -n+1, \ldots, 0$. Лемма 3 доказана.

Доказательство утверждения 4. а) Так как для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^1$

$$\#\{l \in \mathbb{Z} : B_n(x - l) \neq 0\} \leqslant n + 1$$

(см. (64), б)), то ясно, что любой ряд вида (65) сходится всюду на $\mathbb{R}^1$ и его сумма $s(x)$ принадлежит S^n.

Допустим теперь, что $s(x)$ – произвольный сплайн из S^n. В силу леммы 3 существуют числа $a_{-n}, \ldots, a_0$ такие, что

$$s_1(x) := \sum_{l=-n}^{0} a_l B_n(x - l) = s(x) \quad \text{при} \quad x \in [0, 1].$$

Тогда $s(x) - s_1(x) = 0$ при $x \in [0, 1]$ и, применив лемму 1 (для сплайнов $s(x) - s_1(x)$, $B_n(x + n + 1)$ и $B_n(x - 1)$), найдем постоянные a_{-n-1} и a_1 такие, что

$$s(x) - s_1(x) - a_{-n-1} B_n(x + n + 1) - a_1 B_n(x - 1) = 0 \quad \text{при} \quad x \in [-1, 2].$$

Продолжив этот процесс, мы получим разложение (65). Его единственность вытекает из единственности разложения (66) в лемме 3.

б) Так как любая система Рисса является базисом в замыкании своей линейной оболочки (см. следствие 1.7), то в силу а) нам достаточно доказать, что $\{B_n(x - l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ – система Рисса.

Согласно (63), (55) и п. 2° из приложения 2, § 4

$$
\begin{aligned}
&\widehat{B}_0(\zeta) = \widehat{\chi}_{[0,1]}(\zeta) = e^{-i\frac{\zeta}{2}}\,\frac{\sin\zeta/2}{\zeta/2}, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1;\\
&\widehat{B}_n(\zeta) = \big(\widehat{B}_0(\zeta)\big)^{n+1}, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1, \quad n = 1, 2, \dots .
\end{aligned} \tag{68}
$$

Так как система $B_0(x-l) = \chi_{[0,1]}(x-l)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $l \in \mathbb{Z}$, ортонормирована, то в силу следствия 1

$$
\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{B}_0(\zeta + 2\pi l)|^2 = 1, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1 \tag{69}
$$

(равенство (69) можно, конечно, вывести непосредственно из (68)). Следовательно,

$$
\begin{gathered}
\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{B}_n(\zeta + 2\pi l)|^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{B}_0(\zeta + 2\pi l)|^{2(n+1)} \leqslant 1,\\
\zeta \in \mathbb{R}^1, \qquad n = 0, 1, \dots .
\end{gathered} \tag{70}
$$

С другой стороны, учитывая непрерывность функции $\widehat{B}_0(\zeta)$ и неравенство $|\widehat{B}_0(\zeta)| > 0$, $\zeta \in (-2\pi, 2\pi)$, будем иметь

$$
G_n(\zeta) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{B}_n(\zeta + 2\pi l)|^2 \geqslant b_n > 0, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{71}
$$

где b_n – постоянная, зависящая только от n. Применив лемму 1 из теоремы 1, из (70) и (71) получим, что $\{B_n(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ является системой Рисса для всех $n = 0, 1, \dots$. Утверждение 4 доказано.

Теорема 6. *Для произвольного $n = 0, 1, \dots$ существует всплеск $\psi_n(x)$, который является сплайном порядка n с узлами $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. При этом*

а) *всплеск $\psi_n(x)$ порожден КМА $\mathcal{V}^n := \{S_k^n \cap L^2(\mathbb{R}^1)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ с масштабной функцией $\phi_n(x)$, определенной равенством*

$$
\widehat{\phi}_n(\zeta) = G_n^{-1/2}(\zeta)\left[e^{-i\frac{\zeta}{2}}\,\frac{\sin\zeta/2}{\zeta/2}\right]^{n+1}; \tag{72}
$$

б) *всплеск $\psi_n(x)$ определяется равенством:*

$$
\widehat{\psi}_n(\zeta) = e^{i\frac{\zeta}{2}}\,\overline{m_{\phi_n}\left(\frac{\zeta}{2} + \pi\right)}\,\widehat{\phi}_n\left(\frac{\zeta}{2}\right), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1, \tag{73}
$$

где

$$
m_{\phi_n}(\zeta) = \left[e^{-i\frac{\zeta}{2}}\cos\frac{\zeta}{2}\right]^{n+1} \frac{G_n^{1/2}(\zeta)}{G_n^{1/2}(2\zeta)} \tag{74}
$$

(*функция G_n в* (72), (74) *определена равенством* (71)).

Доказательство. Из утверждения 4 и леммы 2 из теоремы 1 следует, что система $\{\phi_n\}_0 = \{\phi_n(x-l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированным базисом пространства $S^n \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ и, следовательно, система $\{\phi_n\}_k = \{2^{k/2}\phi_n(2^k x - l)\}_{l\in\mathbb{Z}}$ – ортонормированный базис в $S^n_k \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ при любом $k \in \mathbb{Z}$. Применив следствие 4, мы получим, что при любом $n = 0, 1, \ldots$ последовательность подпространств $\mathcal{V}^n$ является КМА с масштабной функцией $\phi_n(x)$. Действительно, условие (a1) эквивалентно ортонормированности системы $\{\phi_n\}_0$ (см. следствие 1), условие (a2) (с функцией $m_{\phi_n}(\zeta)$, определенной в (74)) непосредственно вытекает из (56), (68) и (72) (напомним также, что условие (a2) эквивалентно условию (A4) определения 2, которое, очевидно, выполняется в нашем случае). Наконец, условие (a4.1) следствия 4 выполняется в силу непрерывности функции $\widehat{\phi_n}(\zeta)$.

Для завершения доказательства теоремы 6 остается воспользоваться следствием 7, п. а).

§ 5. Всплески, не порожденные КМА

Несмотря на то, что обычно исследуются и применяются всплески, порожденные КМА, интересно отметить, что существуют также всплески, не порожденные КМА. Пример такого всплеска приведен в этом параграфе.

Предварительно установим, что справедлива

Теорема 7. *Для того чтобы функция $\psi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ являлась всплеском, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(2^k(\zeta+2\pi l))\,\overline{\widehat{\psi}(\zeta+2\pi l)} = \delta_{0,k} \quad \textit{для п.в.} \quad \zeta\in\mathbb{R}^1; \\ &\text{б)} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^k\zeta)|^2 = 1 \quad \textit{для п.в.} \quad \zeta\in\mathbb{R}^1, \end{aligned} \tag{75}$$

где $\delta_{0,0} = 1$ и $\delta_{0,k} = 0$ для $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из нижеследующих двух лемм.

Лемма 1. *Пусть $\psi \in L^2(\mathbb{R}^1)$. Для того чтобы система $\{\psi\}$ была ортонормированной, необходимо и достаточно выполнения условия* (75), а).

Доказательство. Согласно (1) для произвольных $m, j, k, l \in \mathbb{Z}$ с $k \geqslant m$

$$
\begin{aligned}
(\psi_{m,j}, \psi_{k,l}) &= 2^{\frac{m+k}{2}} \int_{\mathbb{R}^1} \psi(2^m x + j)\overline{\psi(2^k x + l)}\, dx \\
&= 2^{\frac{k-m}{2}} \int_{\mathbb{R}^1} \psi(t)\overline{\psi(2^{k-m}t - 2^{k-m}j + l)}\, dt \\
&= (\psi, \psi_{k-m, 2^{k-m}j-l}).
\end{aligned}
$$

Таким образом, ортонормированность системы $\{\psi\}$ эквивалентна условиям:

$$(\psi, \psi_{k,l}) = 0 \ \text{ при } \ |k| + |l| > 0, \quad k, l \in \mathbb{Z}; \qquad (\psi, \psi) = 1. \tag{76}$$

Так же, как в (29), мы будем иметь, что

$$(\psi, \psi_{k,l}) = 2^{k/2} c_{-l}\big(\mathscr{P}_{2\pi}[\widehat{\psi}(2^k\zeta)\overline{\widehat{\psi}(\zeta)}\,]\big), \qquad k, l \in \mathbb{Z},$$

следовательно, условия (76) эквивалентны тому, что

$$\mathscr{P}_{2\pi}[\widehat{\psi}(2^k\zeta)\overline{\widehat{\psi}(\zeta)}] = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases} \quad \text{для п.в. } \ \zeta \in \mathbb{R}^1,$$

что совпадает с (75), а). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть функция $\psi \in L^2(\mathbb{R}^1)$ такова, что система $\{\psi\}$ ортонормирована. Тогда условие* (75), б) *необходимо и достаточно для полноты системы $\{\psi\}$ в $L^2(\mathbb{R}^1)$.*

Доказательство. Допустим, что условие (75), б) выполнено и докажем полноту системы $\{\psi\}$ в $L^2(\mathbb{R}^1)$. Пусть $W_k = L\{\psi\}_k$ – замыкание линейной оболочки системы $\{\psi\}_k = \{2^{k/2}\psi(2^k x - l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ и пусть $P_k = P_{W_k}$ – ортогональный проектор из $L^2(\mathbb{R}^1)$ на W_k. Нам нужно доказать, что

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|P_k(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 \tag{77}$$

для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$. Равенство (77) достаточно проверить для функций $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ с условиями

$$\operatorname{supp} \widehat{f} \subset (a, b), \quad \|\widehat{f}\|_\infty < \infty \quad (0 < a < b < \infty), \tag{78}$$

так как множество функций $f(x) + g(-x)$, где f и g имеют вид (78), всюду плотно в $L^2(\mathbb{R}^1)$.

Фиксируем число $m = 1, 2, \dots$ и, разложив интервал (a, b) на промежутки I_j:

$$
\begin{gathered}
(a, b) = \bigcup_{j=1}^{j_m} I_j, \\
|I_j| = \frac{b-a}{j_m} \leqslant \frac{2\pi}{2^m}, \qquad \frac{2^m(b-a)}{2\pi} \leqslant j_m \leqslant \frac{2^m(b-a)}{2\pi} + 1,
\end{gathered}
\tag{79}
$$

определим функции $f_j = f_{j,m}$ равенствами

$$
\widehat{f}_j(\zeta) = \chi_{I_j}(\zeta) \cdot \widehat{f}_j(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots, j_m. \tag{80}
$$

Тогда

$$
f(x) = \sum_{j=1}^{j_m} f_j(x), \qquad \operatorname{supp} \widehat{f}_j \subset I_j, \quad j = 1, 2, \dots, j_m, \tag{81}
$$

и, применив лемму 1 из теоремы 2 для функций f_j (см. (27)), получим

$$
\begin{gathered}
\|P_k(f_j)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}_j(\zeta)|^2 |\widehat{\psi}(2^{-k}\zeta)|^2 \, d\zeta, \\
j = 1, 2, \dots, j_m, \qquad k \geqslant -m.
\end{gathered}
\tag{82}
$$

Отсюда в силу (75), б) и равенства Планшереля (см. (68) в приложении 2) следует, что

$$
\begin{aligned}
\left\| f_j - \sum_{k=-m}^{\infty} P_k(f_j) \right\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}_j(\zeta)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^k\zeta)|^2 \, d\zeta \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}_j(\zeta)|^2 \sum_{k=-m}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^{-k}\zeta)|^2 \, d\zeta \\
&\leqslant \|\widehat{f}\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi} \int_{I_j} \sum_{k=m+1}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^k\zeta)|^2 \, d\zeta.
\end{aligned}
$$

Следовательно (см. также (81)),

$$\|f\|_2^2 - \sum_{k=-m}^{\infty} \|P_k(f)\|_2^2 = \left\|f - \sum_{k=-m}^{\infty} P_k(f)\right\|_2^2$$
$$= \left\|\sum_{j=1}^{j_m}\left[f_j - \sum_{k=-m}^{\infty} P_k(f_j)\right]\right\|_2^2$$
$$\leqslant j_m \sum_{j=1}^{j_m}\left\|f_j - \sum_{k=-m}^{\infty} P_k(f_j)\right\|_2^2$$
$$\leqslant j_m \|\widehat{f}\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi}\int_a^b \sum_{k=m+1}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^k\zeta)|^2\,d\zeta$$
$$\leqslant \|\widehat{f}\|_\infty^2 \left(\frac{2^m(b-a)}{2\pi}+1\right)\sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k}\int_{2^k a}^{2^k b} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2\,d\zeta$$
$$\leqslant C_{a,b}\|\widehat{f}\|_\infty^2 \left(\frac{2^m(b-a)}{2\pi}+1\right)2^{-m}\int_{2^m a}^{\infty} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2\,d\zeta.$$

Последний интеграл стремится к нулю при $m \to +\infty$, и тем самым равенство (77) установлено.

Предположим теперь, что (77) имеет место для произвольной $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ и докажем (75), б). Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ – произвольная функция вида (78). Для фиксированного $m = 1, 2, \ldots$ положим

$$f_m^{(t)}(x) = \sum_{j=1}^{j_m} f_j(x) r_j(t), \qquad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0,1], \tag{83}$$

где функции $f_j(x)$ определены в (80), а $r_j(t)$ – функции Радемахера. В силу ортонормированности системы Радемахера, для произвольных $k, l \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\int_0^1 \left|(\psi_{k,l}, f_m^{(t)})\right|^2 dt = \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{j_m} (\psi_{k,l}, f_j) r_j(t)\right|^2 dt = \sum_{j=1}^{j_m} |(\psi_{k,l}, f_j)|^2. \tag{84}$$

Для $k \geqslant -m$, суммируя равенства (84) по $l \in \mathbb{Z}$ и учитывая равенства (82), получим

$$\int_0^1 \left\|P_k(f_m^{(t)})\right\|_2^2 dt = \sum_{j=1}^{j_m} \|P_k(f_j)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{j_m}\int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f_j}(\zeta)|^2 |\widehat{\psi}(2^{-k}\zeta)|^2\,d\zeta.$$

Но согласно (80)

$$\sum_{j=1}^{j_m} |\widehat{f}_j(\zeta)|^2 = |\widehat{f}(\zeta)|^2,$$

следовательно,

$$\int_0^1 \bigl\|P_k(f_m^{(t)})\bigr\|_2^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}(\zeta)|^2 |\widehat{\psi}(2^{-k}\zeta)|^2\,d\zeta, \quad \text{если} \quad k \geqslant -m. \tag{85}$$

Суммируя равенства (85) по $k > -m$ и используя (77), с учетом равенства $\|f_m^{(t)}\|_2 = \|f\|_2$, получим, что

$$\|f\|_2^2 - \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{-m} \bigl\|P_k(f_m^{(t)})\bigr\|_2^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}(\zeta)|^2 \sum_{k=-m+1}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^{-k}\zeta)|^2\,d\zeta. \tag{86}$$

Далее, в силу (29) и равенства Парсеваля для тригонометрической системы, для произвольных $k \leqslant -m$ и $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\bigl\|P_k(f_m^{(t)})\bigr\|_2^2 &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \bigl|(\psi_{k,l}, f_m^{(t)})\bigr|^2 \\ &= \frac{2^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bigl|\mathscr{P}_{2\pi}\bigl[\widehat{f}_m^{(t)}(2^k\zeta)\overline{\widehat{\psi}(\zeta)}\,\bigr]\bigr|^2\,d\zeta.\end{aligned} \tag{87}$$

Так как $\operatorname{supp} \widehat{f}_m^{(t)} = \operatorname{supp} \widehat{f} \subset (a,b)$, то для любого $\zeta \in [0,2\pi]$ количество отличных от нуля слагаемых в сумме

$$\mathscr{P}_{2\pi}\bigl[\widehat{f}_m^{(t)}(2^k\zeta)\overline{\widehat{\psi}(\zeta)}\,\bigr] = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_m^{(t)}(2^k\zeta + 2^k\cdot 2\pi l)\,\overline{\widehat{\psi}(\zeta+2\pi l)}$$

не превосходит $2^{-k}(b-a)+1$. Следовательно, по неравенству Коши

$$\begin{aligned}\bigl|\mathscr{P}_{2\pi}\bigl[\widehat{f}_m^{(t)}(2^k\zeta)\overline{\widehat{\psi}(\zeta)}\,\bigr]\bigr|^2 &\leqslant (2^{-k}(b-a)+1)\,\mathscr{P}_{2\pi}\bigl[|\widehat{f}_m^{(t)}(2^k\zeta)\widehat{\psi}(\zeta)|^2\bigr] \\ &\leqslant (2^{-k}(b-a)+1)\,\mathscr{P}_{2\pi}\bigl[|\widehat{f}(2^k\zeta)\widehat{\psi}(\zeta)|^2\bigr]\end{aligned}$$

и из (87) получаем, что для любого $t \in (0,1)$, $m > 0$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{-m} \bigl\|P_k(f_m^{(t)})\bigr\|_2^2 &\leqslant (b-a+1)\sum_{k=-\infty}^{-m}\int_0^{2\pi} \mathscr{P}_{2\pi}\bigl[|\widehat{f}(2^k\zeta)\widehat{\psi}(\zeta)|^2\bigr]\,d\zeta \\ &= (b-a+1)\sum_{k=-\infty}^{-m}\int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}(2^k\zeta)\widehat{\psi}(\zeta)|^2\,d\zeta \\ &\leqslant (b-a+1)\|\widehat{f}\|_\infty^2 \sum_{k=-\infty}^{-m}\int_{2^{-k}a}^{2^{-k}b} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2\,d\zeta \\ &\leqslant C\|\widehat{f}\|_\infty^2 \int_{2^m a}^{\infty} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2\,d\zeta,\end{aligned} \tag{88}$$

где постоянная C зависит только от a и b. Так как последний интеграл стремится к нулю при $m \to +\infty$, из (86) с учетом равенства Парсеваля находим, что

$$\int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}(\zeta)|^2\, d\zeta = \int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}(\zeta)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^k\zeta)|^2\, d\zeta$$

для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ вида (78). Отсюда следует, что для п.в. $\zeta > 0$ имеет место равенство (75), б). Аналогично, рассматривая функции $f(x)$ вида (78) с $-\infty < a < b < 0$, можно доказать равенство (75), б) для п.в. $\zeta < 0$. Лемма 2, а следовательно, и теорема 7 доказаны.

Так как преобразование Фурье интегрируемой функции является непрерывной функцией, из теоремы 7 (см. (75), б)) вытекает

Следствие 10. *Если функция $\psi \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ является всплеском, то*

$$\int_{\mathbb{R}^1} \psi(x)\, dx = \widehat{\psi}(0) = 0.$$

Следующая теорема показывает, что существуют всплески, не порожденные КМА.

Теорема 8. *Пусть*

$$\Omega = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^1 : |\zeta| \in \left[\frac{4}{7}\pi, \pi\right) \cup \left[4\pi, \frac{32}{7}\pi\right)\right\}.$$

Тогда функция $\psi(x)$, определенная равенством

$$\widehat{\psi}(\zeta) = \chi_\Omega(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1, \tag{89}$$

является всплеском. Этот всплеск не порожден КМА.

Доказательство. Нетрудно проверить, что множество Ω обладает следующими свойствами:

1) $(\Omega + 2\pi l) \cap (\Omega + 2\pi m) = \varnothing$ при $l \neq m, \quad l, m \in \mathbb{Z}$;

2) $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}} (\Omega + 2\pi l) = \mathbb{R}^1$;

3) $(2^k\Omega) \cap \Omega = \varnothing$ при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

4) $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (2^k\Omega) = \mathbb{R}^1$,

где $\Omega + \lambda := \{x + \lambda : x \in \Omega\}$, $\lambda\Omega := \{\lambda x : x \in \Omega\}$, а равенства 1)–4) понимаются с точностью до множеств нулевой меры.

Из свойств 3) и 4) сразу вытекает, что функция $\psi(x)$, определенная равенством (89), удовлетворяет условию (75), б). С другой стороны, согласно (89)

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}\big(2^k(\zeta+2\pi l)\big)\overline{\widehat{\psi}(\zeta+2\pi l)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \chi_{2^{-k}\Omega}(\zeta+2\pi l)\chi_{\Omega}(\zeta+2\pi l),$$

откуда с учетом условий 1)–3) следует (75), а). Применив теорему 7, мы находим, что функция ψ является всплеском.

Для того чтобы доказать, что всплеск ψ не порожден КМА, допустим противное: существует КМА $\mathscr{V} = \{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ с масштабной функцией $\phi(x)$, порождающий всплеск $\psi(x)$. Тогда, согласно следствию 6 (см. (50), б) и (89)) для п.в. $\zeta > 0$

$$|\widehat{\phi}(\zeta)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{\psi}(2^k\zeta)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{2^{-k}\Omega}(\zeta) = \chi_{\Omega_1}(\zeta),$$

где $\Omega_1 = \big(0, \frac{1}{2}\pi\big)\cup\big(\pi, \frac{8}{7}\pi\big)\cup\big(2\pi, \frac{16}{7}\pi\big)$. Поэтому, в силу теоремы 2 (см. (17)), существует 2π-периодическая функция $m(\zeta)$ такая, что

$$\chi_{\Omega_1}(\zeta) = m(\zeta/2)\chi_{2\Omega_1}(\zeta) \quad \text{для п.в.} \quad \zeta > 0. \tag{90}$$

Но легко видеть, что $\big(0, \frac{2}{7}\pi\big) \subset \Omega_1 \cap 2\Omega_1$ и $\big(4\pi, \frac{32}{7}\pi\big) \subset 2\Omega_1 \setminus \Omega_1$, откуда в силу (90) следует, что $m(\zeta) = 1$ при $\zeta \in \big(0, \frac{1}{7}\pi\big)$ и $m(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \big(2\pi, \frac{16}{7}\pi\big)$. Мы пришли к противоречию с периодичностью функции $m(\zeta)$. Теорема 8 доказана.

§6. Всплески в пространствах $L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$

Всплеск системы зарекомендовали себя как весьма полезный аппарат при построении в различных функциональных пространствах базисов, обладающих к тому же хорошими аппроксимационными свойствами. При этом конкретный выбор всплеск системы может быть обусловлен свойствами функционального пространства. Так, при рассмотрении банаховых пространств гладких функций естественно использовать всплески соответствующей гладкости. В пространствах интегрируемых функций всплеск системы оказываются базисами (а часто и безусловными базисами) при весьма слабых дополнительных условиях на всплеск. В этом параграфе изучаются свойства всплеск систем в пространствах $L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < \infty$. Полученные результаты в определенном смысле аналогичны установленным ранее фактам о свойствах систем Хаара и Франклина. Мы докажем, в частности, что при некоторых условиях на скорость убывания всплеска ψ на бесконечности всплеск система $\{\psi\}$ является безусловным базисом в пространстве $L^p(\mathbb{R}^1)$ для всех $1 < p < \infty$. Отметим при этом, что в силу условия $\int_{\mathbb{R}^1} \psi(x)\,dx = 0$ (см. следствие 10), всплеск система не может быть даже полной в пространстве $L^1(\mathbb{R}^1)$.

Пусть $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, – четная, убывающая на $[0,\infty)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$1)\quad \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^1), \qquad 2)\quad \int_0^\infty \varphi(x)\ln(1+x)\,dx < \infty. \tag{91}$$

Всюду в этом параграфе мы будем рассматривать всплески $\psi(x)$, для которых верна оценка

$$|\psi(x)| \leqslant \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^1, \tag{92}$$

где для $\varphi(x)$ выполнены условия (91). Неравенство (92), в частности, гарантирует (в силу утверждения 1.4) для любого p, $1 \leqslant p < \infty$, минимальность системы $\{\psi\}$ в $L^p(\mathbb{R}^1)$, при этом система $\{\psi\}$ является своей сопряженной системой и для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$ мы можем рассмотреть ее ряд Фурье по этой системе:

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{k,l}(f)\psi_{k,l}(x), \qquad c_{k,l}(f) = \int_{\mathbb{R}^1} f(x)\overline{\psi_{k,l}(x)}\,dx. \tag{93}$$

Доказательство безусловной базисности в $L^p(\mathbb{R}^1)$ всплеск систем $\{\psi\}$ с условием (92) аналогично доказательству безусловной базисности системы Хаара в $L^p(0,1)$ (см. 3.8) и основано на изучении свойств оператора

$$T_\varepsilon(f,x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{k,l}c_{k,l}(f)\psi_{k,l}(x), \tag{94}$$

где $\varepsilon = \{\varepsilon_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z}}$, $\varepsilon_{k,l} = \pm 1$, – некоторая последовательность знаков. Ясно, что для произвольного всплеска $T_\varepsilon(f)$ – изометрический оператор из $L^2(\mathbb{R}^1)$ в $L^2(\mathbb{R}^1)$:

$$\|T_\varepsilon(f)\|_2 = \|f\|_2 \quad \text{для всех} \quad f \in L^2(\mathbb{R}^1). \tag{95}$$

Теорема 9. *Пусть ψ – всплеск с условием (92). Для произвольных функции $f \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ и последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z}}$, $\varepsilon_{k,l} = \pm 1$, имеет место неравенство*

$$m\{x \in \mathbb{R}^1 : |T_\varepsilon(f,x)| > y\} \leqslant \frac{C}{y}\|f\|_1 \quad \textit{для всех} \quad y > 0, \tag{96}$$

где постоянная $C = C_\varphi$ зависит только от φ.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, отметим некоторые свойства функции φ, которые нам понадобятся ниже.

Лемма 1. *Для произвольной четной убывающей на* $[0,\infty)$ *функции* $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, *с условиями* (91) *существует постоянная* C *такая, что*

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(x-l) \leqslant C, \quad x \in \mathbb{R}^1; \\ &\text{б)} \quad \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(l)\varphi(x-l) \leqslant C\varphi\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^1; \\ &\text{в)} \quad F_\varphi(x) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\varphi(2^k x) \in L^1(\delta,\infty) \quad \textit{для любого} \quad \delta > 0. \end{aligned} \tag{97}$$

Доказательство. Учитывая убывание функции φ на $[0,\infty)$, будем иметь, что для любого $x > 0$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(x+m) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(m) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} \varphi(t)\,dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt. \tag{98}$$

Так как из условия (91) вытекает интегрируемость функции φ на $\mathbb{R}^1$, то из (98), с учетом четности и ограниченности функции φ, получим (97), а).

Неравенство (97), б) вытекает из (97), а). Действительно, считая, без ограничения общности, что $x > 0$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(l)\varphi(x-l) &\leqslant \sum_{l\leqslant x/2} \varphi(l)\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{l>x/2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi(x-l) \\ &\leqslant 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\varphi(l) + \sum_{l\in\mathbb{Z}}\varphi(x-l)\right) \leqslant C\varphi\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Наконец, условие (97), в) следует из (91):

$$\begin{aligned} \int_\delta^\infty F_\varphi(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_\delta^\infty 2^k\varphi(2^k x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k\delta}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty} \int_{2^m\delta}^{2^{m+1}\delta} \varphi(x)\,dx \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} \int_{2^m\delta}^{2^{m+1}\delta} \varphi(x)\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \int_{2^m\delta}^{2^{m+1}\delta} \varphi(x)\,dx \\ &\leqslant C_\delta \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^m\delta}^{2^{m+1}\delta} \varphi(x)\,\ln(x+1)\,dx \\ &\leqslant C_\delta \int_0^\infty \varphi(x)\,\ln(x+1)\,dx. \end{aligned} \tag{99}$$

Лемма 1 доказана.

Для произвольной функции $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ определим двоичную максимальную функцию $\widetilde{M}(f,x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, следующим образом (ср. 3.(29)):

$$\widetilde{M}(f,x) := \sup_{\{k,l \in \mathbb{Z}: x \in \Delta_k^l\}} \frac{1}{|\Delta_k^l|} \int_{\Delta_k^l} |f(t)|\,dt, \quad \text{где} \quad \Delta_k^l := \left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right).$$

Легко видеть, что

$$|f(x)| \leqslant \widetilde{M}(f,x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{100}$$

Нам понадобится также следующая лемма, которую можно доказать, повторяя дословно доказательство аналогичной леммы для пространства $L^1(0,1)$ (см. лемму 1 из теоремы 3.7).

Лемма 2. *Для произвольных $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и $y > 0$ существуют непересекающиеся двоичные интервалы Δ_k^l, $(k,l) \in S$ (где S – некоторое, конечное или счетное множество пар (k,l), $k,l \in \mathbb{Z}$), такие, что*

$$\text{а)} \quad G(y) := \{x \in \mathbb{R}^1 : \widetilde{M}(f,x) > y\} = \bigcup_{(k,l)\in S} \Delta_k^l;$$

$$\text{б)} \quad y \leqslant \frac{1}{|\Delta_k^l|} \int_{\Delta_k^l} |f(t)|\,dt \leqslant 2y, \quad (k,l) \in S; \tag{101}$$

$$\text{в)} \quad m(G(y)) \leqslant \frac{1}{y}\|f\|_1.$$

Рассмотрим теперь для произвольных $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ и $k \in \mathbb{Z}$ ортогональные проекторы

$$\begin{aligned} P_k(f) &:= \sum_{j<k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l}(f)\psi_{j,l}, \\ Q_k(f) &:= f - P_k(f) = \sum_{j \geqslant k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{j,l}(f)\psi_{j,l}. \end{aligned} \tag{102}$$

Важную роль в доказательстве теоремы 9 играет следующая

Лемма 3. *Существует ограниченная четная убывающая на $[0,\infty)$ интегрируемая на $\mathbb{R}^1$ и постоянная на интервалах $(m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$, функция $\eta(x)$ такая, что для произвольной функции $g \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ с условием $\operatorname{supp} g \subset [0,1]$ имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |c_{k,l}(g)\psi_{k,l}(x)| \leqslant C\|g\|_1 \eta(x) \quad \textit{при} \quad |x| > 10; \\ &\text{б)} \quad |P_0(g,x)| \leqslant C\|g\|_1 \eta(x) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^1 \end{aligned} \tag{103}$$

(*постоянная C и функция $\eta(x)$ зависят только от функции φ*).

Доказательство. а) Рассмотрим разложение:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|c_{k,l}(g)\psi_{k,l}(x)| \\
&\quad= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|l|<5\cdot 2^k}|c_{k,l}(g)\psi_{k,l}(x)| + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|l|\geqslant 5\cdot 2^k}|c_{k,l}(g)\psi_{k,l}(x)| \\
&\quad=: J_1(x) + J_2(x).
\end{aligned} \tag{104}$$

Согласно (92) и (97), а) имеем, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}^1$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\bigl|\psi(2^k t - l)\bigr| \leqslant \sum_{l\in\mathbb{Z}}\varphi(2^k t - l) \leqslant C. \tag{105}$$

С другой стороны, с учетом четности функции φ и ее убывания на $[0,\infty)$, будем иметь, что при $|l| < 5\cdot 2^k$ и $|x| > 10$

$$\bigl|\psi(2^k x - l)\bigr| \leqslant \varphi(2^k x - l) \leqslant \varphi(2^{k-1}x).$$

Отсюда и из (105) вытекает, что при $x > 10$

$$\begin{aligned}
J_1(x) &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|l|<5\cdot 2^k}\int_{\mathbb{R}^1}\bigl|g(t)2^{k/2}\psi(2^k t - l)\bigr|\,dt\cdot 2^{k/2}|\psi(2^k x - l)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}2^k\varphi(2^{k-1}x)\int_{\mathbb{R}^1}|g(t)|\sum_{|l|<5\cdot 2^k}|\psi(2^k t - l)|\,dt \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}2^k\varphi(2^{k-1}x)\|g\|_1\Bigl\|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\varphi(\tau - l)\Bigr\|_\infty \\
&\leqslant C\,F_\varphi\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)\|g\|_1,
\end{aligned} \tag{106}$$

где функция F_φ определена в (97), в).

Для оценки $J_2(x)$ при $x > 10$ мы воспользуемся соотношениями (92) и (97), б):

$$\begin{aligned}
J_2(x) &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|l|\geqslant 5\cdot 2^k}2^k\int_0^1\bigl|g(t)|\psi(2^k t - l)\bigr|\,dt\cdot|\psi(2^k x - l)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|l|\geqslant 5\cdot 2^k}2^k\|g\|_1\Bigl\{\sup_{t\in[0,1]}\varphi(2^k t - l)\Bigr\}\varphi(2^k x - l)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \|g\|_1 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sum_{|l|\geqslant 5\cdot 2^k} \varphi(l-2^k)\varphi(2^k x - l)$$

$$\leqslant \|g\|_1 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(l)\varphi(2^k(x-1)-l)$$

$$\leqslant C\|g\|_1 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \varphi(2^{k-1}(x-1))$$

$$\leqslant C\|g\|_1 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \varphi\left(2^k\cdot\frac{x}{3}\right) = C\|g\|_1 F_\varphi\left(\frac{x}{3}\right). \tag{107}$$

Из (106), (107) и (97), в), с учетом убывания функции $F_\varphi(x)$ на $[0,\infty)$ и ее четности на $\mathbb{R}^1$ (что следует из аналогичных свойств функции $\varphi(x)$), вытекает оценка (103), а) с

$$\eta(x) = F_\varphi\left(\frac{l}{3}\right) \quad \text{при} \quad |x|\in[l,l+1), \quad l=10,11,\ldots. \tag{108}$$

Докажем неравенство (103), б). При $|x|>10$ оно непосредственно вытекает из (103), а):

$$|P_0(g,x)| = |g(x)-Q_0(g,x)| = |Q_0(g,x)| \leqslant C\|g\|_1\eta(x).$$

Для завершения доказательства нам остается показать, что

$$\|P_0(g)\|_\infty \leqslant C\|g\|_1 \tag{109}$$

(тогда мы будем иметь (103), б) также для $|x|\leqslant 10$, положив $\eta(x) = \mathrm{const} > \eta(10)$ при $|x|<10$).

Согласно (92),

$$|c_{k,l}(g)| \leqslant \|g\|_1\cdot\|\psi_{k,l}\|_\infty \leqslant 2^{k/2}\|g\|_1\varphi(0), \qquad k,l\in\mathbb{Z}.$$

Следовательно (см. (92) и (97), а)), для всех $x\in\mathbb{R}^1$

$$|P_0(g,x)| \leqslant \sum_{k<0}\sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_{k,l}(g)|\cdot 2^{k/2}|\psi(2^k x - l)|$$

$$\leqslant C\|g\|_1 \sum_{k<0} 2^k \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(2^k x - l) \leqslant C_1\|g\|_1.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 9. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ и $y > 0$. Применив лемму 2, рассмотрим разложение

$$f(x) = p(x) + h(x), \qquad x \in \mathbb{R}^1, \tag{110}$$

где

$$p(x) = f(x)\chi_{\mathbb{R}^1 \setminus G(y)}(x) + \sum_{(k,l)\in S} P_k(f^{k,l}, x), \quad f^{k,l}(x) = f(x)\chi_{\Delta_k^l(x)},$$

$$h(x) = \sum_{(k,l)\in S} Q_k(f^{k,l}, x), \qquad x \in \mathbb{R}^1. \tag{111}$$

Для фиксированного $(k,l) \in S$ положим $g(x) = 2^{-k} f^{k,l}(2^{-k}(x + l - 1))$, $x \in \mathbb{R}^1$, тогда, используя "двоичную структуру" всплеск систем, легко проверить, что

$$P_k(f^{k,l}, x) = 2^k P_0(g, 2^k x - l + 1), \quad Q_k(f^{k,l}, x) = 2^k Q_0(g, 2^k x - l + 1),$$
$$x \in \mathbb{R}^1, \qquad \operatorname{supp} g \subset [0,1], \qquad \|g\|_1 = \|f^{k,l}\|_1.$$

Следовательно, применив лемму 3, мы получим, что для всех $(k,l) \in S$

а) $\left|T_\varepsilon(Q_k(f^{k,l}), x)\right| \leqslant C \cdot 2^k \|f^{k,l}\|_1 \eta(2^k x - l + 1)$ при $|2^k x - l + 1| > 10$;

б) $\left|P_k(f^{k,l}, x)\right| \leqslant C \cdot 2^k \|f^{k,l}\|_1 \eta(2^k x - l + 1)$ при $x \in \mathbb{R}^1$. $\qquad$ (112)

Согласно (110)

$$\begin{aligned} &m\{x \in \mathbb{R}^1 : |T_\varepsilon(f,x)| > y\} \\ &\quad \leqslant m\{x \in \mathbb{R}^1 : |T_\varepsilon(p,x)| > y/2\} + m\{x \in \mathbb{R}^1 : |T_\varepsilon(h,x)| > y/2\} \\ &\quad =: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{113}$$

Оценим величину I_2. Для $(k,l) \in S$ обозначим $\overset{*}{\Delta}{}_k^l = \left(\dfrac{l-11}{2^k}, \dfrac{l+11}{2^k}\right)$ и пусть $G^* = \bigcup\limits_{(k,l)\in S} \overset{*}{\Delta}{}_k^l$. Тогда в силу (101)

$$m(G^*) \leqslant \sum_{(k,l)\in S} |\overset{*}{\Delta}{}_k^l| = 22 \sum_{(k,l)\in S} |\Delta_k^l| = 22 m(G(y)) \leqslant \frac{22}{y} \|f\|_1. \tag{114}$$

С другой стороны, если $x \notin \overset{*}{\Delta}{}_k^l$, то $|2^k x - l + 1| > 10$ и, следовательно (см. (111) и (112), а)),

$$\int_{\mathbb{R}^1\setminus G^*} |T_\varepsilon(h,x)|\,dx \leqslant \sum_{(k,l)\in S} \int_{\mathbb{R}^1\setminus G^*} \left|T_\varepsilon(Q_k(f^{k,l}),x)\right|\,dx$$
$$\leqslant C \sum_{(k,l)\in S} 2^k \|f^{k,l}\|_1 \int_{\mathbb{R}^1\setminus \overset{*}{\Delta}{}_k^l} \eta(2^k x - l + 1)\,dx$$
$$\leqslant C\|\eta\|_1 \sum_{(k,l)\in S} \|f^{k,l}\|_1 \leqslant C_1\|f\|_1.$$

Отсюда и из (114), применив неравенство Чебышёва, находим, что

$$I_2 \leqslant m(G^*) + m\bigl\{x \in \mathbb{R}^1 \setminus G^* : |T_\varepsilon(h,x)| > y/2\bigr\}$$
$$\leqslant \frac{22}{y}\|f\|_1 + \frac{2}{y}\int_{\mathbb{R}^1\setminus G^*} |T_\varepsilon(h,x)|\,dx \leqslant \frac{C}{y}\|f\|_1. \tag{115}$$

Для оценки величины I_1 в (113) мы воспользуемся неравенством Чебышёва и равенством (95):

$$I_1 \leqslant \frac{4}{y^2}\|T_\varepsilon(p)\|_2^2 = \frac{4}{y^2}\|p\|_2^2.$$

Следовательно (см. также (113) и (115)), неравенство (96), а значит, и теорема 9 будут доказаны, если мы покажем, что

$$\|p\|_2^2 \leqslant C\cdot y\cdot \|f\|_1.$$

Но в силу (100) $|f(x)| \leqslant \widetilde{M}(f,x) \leqslant y$, если $x \in \mathbb{R}^1 \setminus G^*$, значит

$$\|f(x)\chi_{\mathbb{R}^1\setminus G^*}(x)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^1\setminus G^*} f^2(x)\,dx \leqslant y\cdot\|f\|_1$$

и (см. (111)) нам остается доказать, что

$$I_3 := \Bigl\|\sum_{(k,l)\in S} P_k(f^{k,l})\Bigr\|_2^2 \leqslant C\cdot y\cdot\|f\|_1. \tag{116}$$

Так как P_k – ортогональный проектор, то ясно, что для любых $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^1)$ и $k' \geqslant k$

$$\bigl(P_k(f_1), P_{k'}(f_2)\bigr) = \bigl(P_k(f_1), P_k P_{k'}(f_2)\bigr) = \bigl(P_k(f_1), P_k(f_2)\bigr) = \bigl(P_k(f_1), f_2\bigr).$$

Значит, в силу (112), б) мы будем иметь:

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{(k,l)\in S} \sum_{(k',l')\in S} \bigl(P_k(f^{k,l}), P_{k'}(f^{k',l'})\bigr) \\ &\leqslant 2 \sum_{(k,l)\in S} \sum_{\substack{(k',l')\in S,\\ k'\geqslant k}} \int_{\mathbb{R}^1} \bigl|P_k(f^{k,l},x) f^{k',l'}(x)\bigr|\,dx \\ &\leqslant 2C \sum_{(k,l)\in S} 2^k \|f^{k,l}\|_1 \sum_{\substack{(k',l')\in S,\\ k'\geqslant k}} \int_{\Delta_{k'}^{l'}} \bigl|f^{k',l'}(x)\bigr| \eta(2^k x - l + 1)\,dx. \end{aligned} \tag{117}$$

Так как функция $\eta(x)$ постоянна на интервалах $(m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$, то при $k' \geqslant k$ функция $\eta(2^k x - l + 1)$ постоянна на интервале $\Delta_{k'}^{l'}$ и, следовательно (см. также (101), б)),

$$\begin{aligned} &\int_{\Delta_{k'}^{l'}} \bigl|f^{k',l'}(x)\bigr| \eta(2^k x - l + 1)\,dx \\ &\qquad = \frac{1}{|\Delta_{k'}^{l'}|} \int_{\Delta_{k'}^{l'}} \bigl|f^{k',l'}(x)\bigr|\,dx \cdot \int_{\Delta_{k'}^{l'}} \eta(2^k x - l + 1)\,dx \\ &\qquad \leqslant 2y \int_{\Delta_{k'}^{l'}} \eta(2^k x - l + 1)\,dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (117) получим:

$$\begin{aligned} I_3 &\leqslant 4Cy \sum_{(k,l)\in S} 2^k \|f^{k,l}\|_1 \int_{\mathbb{R}^1} \eta(2^k x - l + 1)\,dx \\ &\leqslant 4Cy\|\eta\|_1 \sum_{(k,l)\in S} \|f^{k,l}\|_1 \leqslant C_1 y \|f\|_1. \end{aligned}$$

Неравенство (116), а следовательно, и теорема 9 доказаны.

Следствие 11. *Для произвольного числа p, $1 < p < \infty$, существует постоянная $C_p > 0$ (зависящая также от φ) такая, что*

$$\|T_\varepsilon(f)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p, \quad \textit{если} \quad f \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap L^p(\mathbb{R}^1), \tag{118}$$

для произвольной последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_{k,l}\}$, $\varepsilon_{k,l} = \pm 1$.

Доказательство. Отметим, что оператор $T_\varepsilon(f)$ определен не на всем пространстве $L^1(\mathbb{R}^1)$ и оценка слабого типа $(1,1)$ (см. (96)) имеет место только для функций $f \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap L^1(\mathbb{R}^1)$, т.е. мы не можем прямо применять интерполяционную теорему Марцинкевича (см. теорему 1 из приложения 1). Однако, из доказательства этой теоремы легко видеть, что из соотношений (95) и (96) вытекает оценка (118) для всех p, $1 < p \leqslant 2$.

Если же $p > 2$ и $1/p + 1/q = 1$, то для произвольной функции $g \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$ с $\|g\|_q \leqslant 1$, учитывая, что $1 < q < 2$, мы будем иметь:

$$\begin{aligned}\big(T_\varepsilon(f), g\big) &= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{k,l} c_{k,l}(f)\overline{c_{k,l}(g)} = \big(f, T_\varepsilon(g)\big) \\ &\leqslant \|f\|_p \cdot \|T_\varepsilon(g)\|_q \leqslant C_q \|f\|_p \cdot \|g\|_q \leqslant C_q \|f\|_p,\end{aligned}$$

откуда в силу всюду плотности множества $L^2(\mathbb{R}^1) \cap L^q(\mathbb{R}^1)$ в пространстве $L^q(\mathbb{R}^1)$ следует (118). Следствие 11 доказано.

Для произвольного конечного множества $S \subset \mathbb{Z}^2$ и последовательности знаков $\varepsilon = \{\varepsilon_{k,l}\}$ положим

$$T_{\varepsilon,S}(f) := \sum_{(k,l) \in S} \varepsilon_{k,l} c_{k,l}(f) \psi_{k,l}, \quad T_S(f) := \sum_{(k,l) \in S} c_{k,l}(f) \psi_{k,l}. \tag{119}$$

Следствие 12. *Для произвольного числа p, $1 < p < \infty$, существует постоянная $C_p > 0$ (зависящая также от φ) такая, что*

$$\|T_{\varepsilon,S}(f)\|_p \leqslant C_p \|f\|_p \quad \text{для всех} \quad f \in L^p(\mathbb{R}^1). \tag{120}$$

Доказательство. Для функций $f \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap L^p(\mathbb{R}^1)$ оценка (120) непосредственно вытекает из (118), так как оператор $T_{\varepsilon,S}$ можно представить в виде полусуммы двух операторов типа T_ε. Остается заметить, что при фиксированном (конечном) множестве S оператор $T_{\varepsilon,S}$ ограничен из $L^p(\mathbb{R}^1)$ в $L^p(\mathbb{R}^1)$, а множество $L^2(\mathbb{R}^1) \cap L^p(\mathbb{R}^1)$ всюду плотно в $L^p(\mathbb{R}^1)$.

Теорема 10. *Для произвольного всплеска ψ с условием* (92) *система $\{\psi\}$ является безусловным базисом пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$ при $1 < p < \infty$.*

Доказательство. Согласно следствию 1.3 мы можем считать, без ограничения общности, что $1 < p \leqslant 2$, а в силу теоремы 1.10 и следствия 12 нам остается доказать, что система $\{\psi\}$ полна в $L^p(\mathbb{R}^1)$. Для этого нам достаточно показать, что для произвольной функции $f \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap L^p(\mathbb{R}^1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_{S_n}(f) \overset{L^p}{=} f, \quad \text{где} \quad S_n := \{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 : |k| + |l| = n\}. \tag{121}$$

Так как ряд (121) сходится в $L^2(\mathbb{R}^1)$ (а следовательно, и по мере) к функции f, то равенство (121) будет доказано, если мы покажем, что этот ряд сходится в $L^p(\mathbb{R}^1)$. Допустим противное. Тогда существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $m_k < n_k < m_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\begin{gathered} \|T_{H_k}(f)\|_p = \left\| \sum_{n=m_k}^{n_k} T_{S_n}(f) \right\|_p \geqslant \varepsilon_0, \\ H_k = \bigcup_{n=m_k}^{n_k} S_n, \qquad k = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{122}$$

Отметим, что множества H_k конечны и попарно не пересекаются, а применив неравенство Гёльдера ($1 < p < 2$) мы получим, что при фиксированном $N = 1, 2, \ldots$

$$\int_{|x| \leqslant N} |T_{H_k}(f)|^p \, dx \leqslant (2N)^{\frac{2-p}{2}} \left\{ \int_{|x| \leqslant N} |T_{H_k}(f)|^2 \, dx \right\}^{\frac{p}{2}} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{123}$$

С другой стороны, при фиксированном $k = 1, 2, \ldots$

$$\int_{|x| > N} |T_{H_k}(f)|^p \, dx \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{124}$$

Построим по индукции подпоследовательности натуральных чисел k_s, N_s, $s = 1, 2, \ldots$. Положим $k_1 = N_1 = 1$. Предположив, что числа k_{s-1} и N_{s-1} уже определены, выберем число $k_s > k_{s-1}$ так, чтобы (см. (123))

$$\left(\int_{|x| \leqslant N_{s-1}} |T_{H_{k_s}}(f, x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{4^{s+1}}, \tag{125}$$

затем выберем $N_s > N_{s-1}$ так, чтобы (см. (124))

$$\sum_{j=1}^{s} \left(\int_{|x| > N_s} |T_{H_{k_j}}(f, x)|^p \, dx \right)^{1/p} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{4^{s+1}}. \tag{126}$$

Тогда в силу (122)

$$\left(\int_{N_{s-1}<|x|<N_s} |T_{H_{k_s}}(f,x)|^p\,dx\right)^{1/p} \geqslant \frac{3\varepsilon_0}{4}. \tag{127}$$

Рассмотрим теперь при $m = 1, 2, \ldots$ функцию

$$T_{G_m}(f) = \sum_{s=1}^{m} T_{H_{k_s}}(f), \qquad G_m := \bigcup_{s=1}^{m} H_{k_s}.$$

Из (125)–(127), используя неравенство Гёльдера, получим:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^1} |T_{G_m}(f,x)|^p\,dx\right)^{1/p} &\geqslant \left(\sum_{j=1}^{m}\int_{N_{j-1}<|x|<N_j} |T_{G_m}(f,x)|^p\,dx\right)^{1/p}\\
&\geqslant m^{-(1-1/p)}\sum_{j=1}^{m}\left(\int_{N_{j-1}<|x|<N_j} |T_{G_m}(f,x)|^p\,dx\right)^{1/p}\\
&\geqslant m^{-(1-1/p)}\cdot\Biggl(\sum_{j=1}^{m}\|T_{H_{k_j}}(f,x)\|_{L^p(N_{j-1},N_j)}\\
&\qquad\qquad - \sum_{\substack{s\neq j\\ 1\leqslant s\leqslant m}} \|T_{H_{k_s}}(f,x)\|_{L^p(N_{j-1},N_j)}\Biggr)\\
&\geqslant m^{1/p}\cdot\frac{\varepsilon_0}{4} \to \infty
\end{aligned}$$

при $m \to \infty$, что противоречит условию (120). Теорема 10 доказана.

§ 7. Периодические всплески

В этом параграфе мы покажем, как из всплеск системы можно естественным образом методом периодизации получить полную ортонормированную систему на отрезке $[0, 1]$.

Для $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ рассмотрим ее периодизацию

$$\mathscr{P}[f(x)] = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m). \tag{128}$$

Тогда

$$\int_0^1 \mathscr{P}[|f(x)|]\,dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^1 |f(x+m)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|\,dx \tag{129}$$

и ряд (128) абсолютно сходится п.в. на $\mathbb{R}^1$ и по норме $L^1(0,1)$ к интегрируемой на $(0,1)$, периодической (с периодом 1) функции $\mathscr{P}[f(x)]$.

Пусть ψ – всплеск, порожденный КМА $\mathscr{V} = \{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ с масштабной функцией ϕ. Допустим, что при этом

$$\mathscr{P}[|\psi|] \in L^\infty(\mathbb{R}^1), \qquad \mathscr{P}[|\phi|] \in L^\infty(\mathbb{R}^1). \tag{130}$$

Отметим, что условия (130), в частности, означают, что $\psi, \phi \in L^1(\mathbb{R}^1)$ (см. (129)) и, следовательно, $\widehat{\psi}, \widehat{\phi} \in C(\mathbb{R}^1)$. Рассмотрим функции

$$\widetilde{\psi}_{k,l}(x) := \mathscr{P}[\psi_{k,l}(x)], \quad \widetilde{\phi}_{k,l}(x) := \mathscr{P}[\phi_{k,l}(x)], \qquad x \in [0,1], \quad k,l \in \mathbb{Z},$$

где

$$\psi_{k,l}(x) = 2^{k/2}\psi(2^k x - l), \quad \phi_{k,l}(x) = 2^{k/2}\phi(2^k x - l), \qquad x \in [0,1], \quad k,l \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что в силу равенства

$$\widetilde{\psi}_{k,l}(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{k/2}\psi(2^k(x+m) - l) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^{k/2}\psi(2^k x + 2^k m - l)$$

мы будем иметь, что при $k \geqslant 0$

$$\widetilde{\psi}_{k,l}(x) = \widetilde{\psi}_{k,l+2^k}(x), \qquad \widetilde{\psi}_{k,l+1}(x) = \widetilde{\psi}_{k,l}(x + 2^{-k}) \tag{131}$$

и, аналогичным образом,

$$\widetilde{\phi}_{k,l}(x) = \widetilde{\phi}_{k,l+2^k}(x), \qquad \widetilde{\phi}_{k,l+1}(x) = \widetilde{\phi}_{k,l}(x + 2^{-k}). \tag{132}$$

Согласно формуле суммирования Пуассона (см. (74) в приложении 2) ряды Фурье функций $\widetilde{\psi}_{k,l}$ и $\widetilde{\phi}_{k,l}$ по тригонометрической системе (на интервале $(0,1)$) имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_{k,l}(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_{k,l}(-2\pi n)e^{2\pi i n x}, \\ \widetilde{\phi}_{k,l}(x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}_{k,l}(-2\pi n)e^{2\pi i n x}. \end{aligned} \tag{133}$$

При этом согласно (18)

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_{k,l}(2\pi n) &= 2^{-k/2}e^{-2\pi i n l 2^{-k}}\,\widehat{\psi}\left(\frac{2\pi n}{2^k}\right), \\ \widehat{\phi}_{k,l}(2\pi n) &= 2^{-k/2}e^{-2\pi i n l 2^{-k}}\,\widehat{\phi}\left(\frac{2\pi n}{2^k}\right). \end{aligned} \tag{134}$$

Но из следствия 5, а) мы имеем, что

$$|\widehat{\phi}(0)| = 1 \quad \text{и} \quad \widehat{\phi}(2\pi n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и с учетом следствия 6, а)

$$\widehat{\psi}(4\pi n) = 0, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда и из (133), (134) находим, что

$$\widetilde{\psi}_{k,l}(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad k < 0, \quad k,l \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \widetilde{\psi}_{k,l}(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad k,l \in \mathbb{Z},$$
$$\widetilde{\phi}_{k,l}(x) \equiv 2^{-k/2}\widehat{\phi}(0), \quad k \leqslant 0, \quad k,l \in \mathbb{Z}, \qquad |\widehat{\phi}(0)| = 1. \tag{135}$$

Соотношения (131) и (135) показывают, что в периодизированной всплеск системе $\{\widetilde{\psi}_{k,l}\}_{k,l\in\mathbb{Z}}$ с одной стороны есть повторяющиеся функции, с другой стороны эта система не полна, так как все функции этой системы имеют нулевой интеграл. Ниже мы докажем, что отбросив "лишние" функции и добавив "недостающую" постоянную функцию, мы получим полную ортонормированную систему в $L^2(0,1)$.

Для $k = 0, 1, \ldots$ через $\widetilde{V}_k$ (через $\widetilde{W}_k$) обозначим линейную оболочку системы функций $\widetilde{\phi}_{k,l}$ (соответственно функций $\widetilde{\psi}_{k,l}$), $l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$, и пусть $\widetilde{W}_{-1}$ – множество тождественно постоянных функций.

Отметим, что в силу (132) множество $\widetilde{V}_k$ совпадает с линейной оболочкой функций $\widetilde{\phi}_{k,l}$, $l \in \mathbb{Z}$. Отметим также, что в общем случае $\widetilde{V}_k$ не совпадает с множеством $\{\mathscr{P}[f] : f \in V_k\}$, так в пространстве V_k могут быть функции, для которых периодизация $\mathscr{P}[f]$ не определена (при $f \notin L^1(\mathbb{R}^1)$ ряд (128) может расходится).

Теорема 11. *Пусть ψ – всплеск, порожденный КМА $\mathscr{V}$ с масштабной функцией ϕ и имеет место* (130). *Тогда система*

$$\{\widetilde{\psi}\} := \{1,\ \widetilde{\psi}_{k,l} : k = 0, 1, \ldots,\ l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1\} \tag{136}$$

является полной ортонормированной системой в $L^2(0,1)$. *При этом*

а) $\widetilde{V}_k = \widetilde{W}_{-1} \oplus \widetilde{W}_0 \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_{k-1}$, $k = 0, 1, \ldots$;

б) *для* $k = 0, 1, \ldots$ *система функций* $\widetilde{\phi}_{k,l}$, $l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$, *является ортонормированным базисом в пространстве* $\widetilde{V}_k$.

Доказательство. Сначала проверим ортонормированность системы $\{\widetilde{\psi}\}$. Как мы отметили выше, ее первая функция ортогональна всем остальным (см. (135)), а для $k, k' = 0, 1, \ldots, l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1, l' = 0, 1, \ldots, 2^{k'} - 1$ с учетом условий (130) имеем:

$$\int_0^1 \widetilde{\psi}_{k,l}(x)\overline{\widetilde{\psi}_{k',l'}(x)}\,dx = \sum_{m,m' \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \psi_{k,l}(x+m)\overline{\psi_{k',l'}(x+m')}\,dx$$
$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^1} \psi_{k,l}(x+m)\overline{\psi_{k',l'}(x)}\,dx$$
$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^1} \psi_{k,l-2^k m}(x)\overline{\psi_{k',l'}(x)}\,dx.$$

Отсюда и из ортонормированности всплеск системы $\{\psi\}$ получим ортонормированность системы $\{\widetilde{\psi}\}$.

При фиксированном $k = 0, 1, \ldots$ ортонормированность системы $\widetilde{\phi}_{k,l}$, $l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$, а следовательно, и утверждение б), доказывается аналогично.

Так как

$$\dim(\widetilde{W}_{-1} \oplus \widetilde{W}_0 \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_{k-1}) = 1 + \sum_{s=0}^{k-1} 2^s = 2^k = \dim \widetilde{V}_k,$$

то условие а) будет доказано, если мы покажем, что

$$\widetilde{W}_s \subset \widetilde{V}_k \quad \text{при} \quad s = -1, 0, \ldots, k-1. \tag{137}$$

При $s = -1$ (137) следует из (135):

$$\sum_{l=0}^{2^k-1} \widetilde{\phi}_{k,l}(x) = \sum_{l=0}^{2^k-1} 2^{k/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(2^k x + 2^k m - l)$$
$$= 2^{k/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(2^k x - l) = 2^{k/2} \widetilde{\phi}_{0,0}(2^k x) \equiv \text{const}\,.$$

Если же $0 \leqslant s < k$, то для фиксированного $m = 0, 1, \ldots, 2^s - 1$, учитывая, что $W_s \subset V_k$, мы рассмотрим разложение

$$\psi_{s,m} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_l \phi_{k,l},$$

где в силу (130)

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\alpha_l| &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}|(\psi_{s,m},\phi_{k,l})|\\ &\leqslant 2^{s/2+k/2}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^1}|\psi(2^s x-m)|\cdot|\phi(2^k x-l)|\,dx\\ &\leqslant C2^{s/2+k/2}\int_{\mathbb{R}^1}|\psi(2^s x-m)|\,dx\\ &= C2^{k/2-s/2}\int_{\mathbb{R}^1}|\psi(x)|\,dx<\infty.\end{aligned}$$

Следовательно (см. (132)),

$$\widetilde{\psi}_{s,m}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\alpha_l\mathscr{P}[\phi_{k,l}]=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\alpha_l\widetilde{\phi}_{k,l}=\sum_{l=0}^{2^k-1}\alpha_l'\widetilde{\phi}_{k,l}\in\widetilde{V}_k,$$

откуда следует (137).

Для доказательства полноты системы $\{\widetilde{\psi}\}$ в $L^2(0,1)$ обозначим через $\widetilde{P}_k$ ортогональный проектор из $L^2(0,1)$ в $\widetilde{V}_k=\widetilde{W}_{-1}\oplus\widetilde{W}_0\oplus\cdots\oplus\widetilde{W}_{k-1}$ и покажем, что

$$\lim_{k\to\infty}\|\widetilde{P}_k(f)\|_{L^2(0,1)}=\|f\|_{L^2(0,1)}\quad\text{для всех}\quad f\in L^2(0,1).$$

В силу полноты тригонометрической системы в $L^2(0,1)$ достаточно рассмотреть функции $f(x)=e^{2\pi inx}$, $n\in\mathbb{Z}$, при этом, так как постоянная функция содержится в системе $\{\widetilde{\psi}\}$, можем считать, что $n\neq0$. Согласно б) имеем, что

$$\widetilde{P}_k(f)=\sum_{l=0}^{2^k-1}(f,\widetilde{\phi}_{k,l})\phi_{k,l},\qquad \|\widetilde{P}_k(f)\|^2_{L^2(0,1)}=\sum_{l=0}^{2^k-1}|(f,\widetilde{\phi}_{k,l})|^2. \tag{138}$$

С другой стороны, из (133) и (134) следует, что

$$|(e^{2\pi inx},\widetilde{\phi}_{k,l})|=|\widehat{\phi}_{k,l}(-2\pi n)|=2^{-k/2}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{-2\pi n}{2^k}\right)\right|. \tag{139}$$

Из (138) и (139) получим (см. также следствие 5, а))

$$\|\widetilde{P}_k(f)\|^2_{L^2(0,1)}=\sum_{l=0}^{2^k-1}2^{-k}\left|\widehat{\phi}\left(\frac{-2\pi n}{2^k}\right)\right|^2=\left|\widehat{\phi}\left(\frac{-2\pi n}{2^k}\right)\right|^2\to1$$

при $k\to\infty$. Теорема 11 доказана.

В следующей теореме изучаются свойства системы $\{\widetilde{\psi}\}$ в пространстве $\widetilde{C}(0,1)$ непрерывных на $\mathbb{R}^1$ периодических функций с периодом 1.

Теорема 12. *Пусть $\psi \in C(\mathbb{R}^1)$ – всплеск, порожденный КМА $\mathcal{V}$ с масштабной функцией ϕ, и допустим существуют постоянные $M > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что*

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad |\psi(x)| + |\phi(x)| \leqslant \frac{M}{(1+x)^{1+\varepsilon}}, \\ &\text{б)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left| \widehat{\psi}\left(\frac{x}{2^k}\right) \right| < \infty, \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}^1. \tag{140}$$

Тогда система $\{\widetilde{\psi}\}$ является базисом в пространстве $\widetilde{C}(0,1)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из (140), а) вытекают условия (130) и по теореме 11 $\{\widetilde{\psi}\}$ является полной в $L^2(0,1)$ ортонормированной системой, более того, $\{\widetilde{\psi}\} \subset \widetilde{C}(0,1)$. Согласно теореме 1.8 нам нужно доказать полноту системы $\{\widetilde{\psi}\}$ в $\widetilde{C}(0,1)$ и равномерную ограниченность ее функций Лебега

$$L_{s,j}(x) = \int_0^1 |K_{s,j}(x,t)|\,dt, \tag{141}$$
$$x \in [0,1], \quad s = 0,1,\dots, \quad j = 0,1,\dots,2^s - 1,$$

где

$$\begin{aligned} K_{s,j}(x,t) &= \left\{1 + \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{l=0}^{2^k-1} \widetilde{\psi}_{k,l}(x)\widetilde{\psi}_{k,l}(t)\right\} + \left\{\sum_{l=0}^{j} \widetilde{\psi}_{s,l}(x)\widetilde{\psi}_{s,l}(t)\right\} \\ &=: K'_{s,j}(x,t) + K''_{s,j}(x,t), \qquad x,t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{142}$$

Так как системы $\{1\} \cup \big\{\{\widetilde{\psi}_{k,l}\}_{l=0}^{2^k-1}\big\}_{k=0}^{s-1}$ и $\{\widetilde{\phi}_{s,l}\}_{l=0}^{2^s-1}$ являются ортонормированными базисами в одном и том же пространстве $\widetilde{V}_s$ (см. теорему 11), значит ядра порядка 2^s этих систем совпадают (проверка этого общего факта не вызывает затруднений), т.е.

$$K'_{s,j}(x,t) = \sum_{l=0}^{2^s-1} \widetilde{\phi}_{s,l}(x)\widetilde{\phi}_{s,l}(t), \qquad x,t \in [0,1],$$

и с учетом (129)

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K'_{s,j}(x,t)|\,dt &\leqslant \sum_{l=0}^{2^s-1} |\widetilde{\phi}_{s,l}(x)| \int_0^1 |\widetilde{\phi}_{s,l}(t)|\,dt \\ &= \sum_{l=0}^{2^s-1} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_{s,l}(x+m) \right| \cdot \int_{\mathbb{R}^1} |\phi_{s,l}(t)|\,dt \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{2^s-1} 2^{s/2}\left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(2^s x + 2^s m - l)\right| \cdot 2^{s/2}\int_{\mathbb{R}^1} |\phi(2^s t - l)|\,dt$$
$$\leqslant \|\phi\|_1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{2^s-1} |\phi(2^s x + 2^s m - l)|$$
$$= \|\phi\|_1 \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\phi(2^s x - l)| \leqslant \|\phi\|_1 \cdot \|\mathscr{P}[|\phi|]\|_C. \tag{143}$$

Аналогичным образом докажем, что

$$\int_0^1 |K''_{s,j}(x,t)|\,dt \leqslant \sum_{l=0}^{2^s-1} |\widetilde{\psi}_{s,l}(x)| \int_0^1 |\widetilde{\psi}_{s,l}(t)|\,dt \leqslant \|\psi\|_1 \cdot \|\mathscr{P}[|\psi|]\|_C. \tag{144}$$

Из (140)–(144) находим, что

$$L_{s,j}(x) \leqslant \|\phi\|_1 \cdot \|\mathscr{P}[\phi]\|_C + \|\psi\|_1 \cdot \|\mathscr{P}[\psi]\|_C < \infty$$

для всех $x \in [0,1]$, $s = 0,1,\ldots,j = 0,1,\ldots,2^s-1$.

Для завершения доказательства теоремы 12 нам остается показать, что система $\{\widetilde{\psi}\}$ полна в $\widetilde{C}(0,1)$. Рассмотрим для $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ряд Фурье функции $e^{2\pi i n x}$ по системе $\{\widetilde{\psi}\}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{2^k-1} c_{k,l}^{(n)} \widetilde{\psi}_{k,l}(x) =: \sum_{k=0}^{\infty} T_k^{(n)}(x), \tag{145}$$

где согласно (133) и (134)

$$c_{k,l}^{(n)} = (e^{2\pi i n x}, \widetilde{\psi}_{k,l}) = \widehat{\psi}_{k,l}(-2\pi n), \qquad |c_{k,l}^{(n)}| = 2^{-k/2}\left|\widehat{\psi}\left(\frac{-2\pi n}{2^k}\right)\right|.$$

Из (140) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T_k^{(n)}\|_C \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \sum_{l=0}^{2^k-1} 2^{-k/2}\left|\widehat{\psi}\left(\frac{-2\pi n}{2^k}\right)\right| 2^{k/2} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\psi(2^k x + 2^k m - l)| \right\|_C$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left|\widehat{\psi}\left(\frac{-2\pi n}{2^k}\right)\right| \left\| \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\psi(2^k x - l)| \right\|_C$$
$$\leqslant \|\mathscr{P}[|\psi|]\|_C \sum_{k=0}^{\infty} \left|\widehat{\psi}\left(\frac{-2\pi n}{2^k}\right)\right| < \infty.$$

Это значит, что ряд (145) сходится равномерно на $[0,1]$. Но по норме пространства $L^2(0,1)$ этот ряд сходится к функции $e^{2\pi inx}$, значит его сумма по норме пространства $C(0,1)$ также равна $e^{2\pi inx}$. Отсюда и из полноты тригонометрической системы в $\widetilde{C}(0,1)$ следует, что система $\{\widetilde{\psi}\}$ также полна в $\widetilde{C}(0,1)$ (напомним, что функция $f(x)\equiv 1$ входит в систему $\{\widetilde{\psi}\}$). Теорема 12 доказана.

Согласно теореме 1.9 из теоремы 12 вытекает

Следствие 13. *В условиях теоремы* 12 *система* $\{\widetilde{\psi}\}$ *является базисом в* $L^p(0,1)$ *при* $1\leqslant p<\infty$.

Из формул (133) и (134) видно, что если преобразование Фурье $\widehat{\psi}(\zeta)$ всплеска $\psi(x)$ имеет ограниченный носитель, то система $\{\widetilde{\psi}\}$ состоит из тригонометрических полиномов, более того, формула (134) позволяет контролировать скорость роста степеней этих полиномов. В частности, взяв в качестве исходного всплеска ψ всплеск Мейера (см. § 4, п. 3°), мы приходим к следующему результату.

Теорема 13. *Для произвольного числа* $\varepsilon\in(0,1/3]$ *существуют действительнозначные тригонометрические полиномы*

$$T_n(x)=\sum_{M_n\leqslant|s|\leqslant N_n} c_s^{(n)}e^{2\pi inx},\qquad n=1,2,\ldots,\tag{146}$$

образующие ортонормированный базис в $\widetilde{C}(0,1)$. *При этом*

$$\begin{aligned}&\text{а)}\quad \frac{1-\varepsilon}{4}n\leqslant M_n\leqslant N_n\leqslant(1+\varepsilon)n, && n=1,2,\ldots,\\ &\text{б)}\quad \|S_n(f)-f\|_C\leqslant C\cdot E_{[n/6]}(f), && n=1,2,\ldots,\end{aligned}\tag{147}$$

где $S_n(f)$ *– частная сумма ряда Фурье функции* f *по системе* (146), *а* $E_n(f)$ *– наилучшее приближение функции* f *тригонометрическими полиномами в пространстве* $\widetilde{C}(0,1)$ (см. определение 4.1).

Доказательство. Для заданного ε, $0<\varepsilon<1/3$, рассмотрим произвольную дважды непрерывно дифференцируемую на $\mathbb{R}^1$ функцию $\theta\in C^2(\mathbb{R}^1)$, удовлетворяющую условиям (58), и пусть функции ψ и ϕ определены равенствами

$$\widehat{\phi}(\zeta)=\theta(\zeta),\quad \widehat{\psi}(\zeta)=e^{i\frac{\zeta}{2}}\sqrt{\theta^2(\zeta/2)-\theta^2(\zeta)},\qquad \zeta\in\mathbb{R}^1.$$

Из теоремы 5 следует, что функция ψ является действительнозначным всплеском с масштабной функцией ϕ, при этом

$$\operatorname{supp}\widetilde{\psi} \subset [-(1+\varepsilon)2\pi,\ -(1-\varepsilon)\pi] \cup [(1-\varepsilon)\pi,\ (1+\varepsilon)2\pi]. \tag{148}$$

Более того, так как $\theta \in C^2(\mathbb{R}^1)$, то согласно п. 4° в §4 приложения 2 функции ψ и ϕ удовлетворяют условиям теоремы 12. Следовательно, периодизированная система $\{\widetilde{\psi}\} = \{1\} \cup \{\{\widetilde{\psi}_{k,l}\}_{l=0}^{2^k-1}\}_{k=0}^{\infty}$ является базисом в $\widetilde{C}(0,1)$. Положив $T_0(x) \equiv 1$,

$$T_n(x) = \widetilde{\psi}_{k,l}(x) \quad \text{при} \quad n = 2^k + l, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1, \tag{149}$$

покажем, что функции T_n имеют вид (146) и выполнены утверждения (147) теоремы 13.

Согласно (133) и (134) для фиксированного $n = 2^k + l$ имеем, что

$$T_n(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} c_s^{(n)} e^{2\pi i s x}, \qquad |c_s^{(n)}| = |\widehat{\psi}_{k,l}(2\pi s)| = 2^{k/2}\left|\widehat{\psi}\left(\frac{2\pi s}{2^k}\right)\right|.$$

Отсюда и из (148) находим, что если $c_s^{(n)} \neq 0$ при некотором $s \in \mathbb{Z}$, то

$$(1-\varepsilon)\pi \leqslant \frac{2\pi|s|}{2^k} \leqslant (1+\varepsilon)2\pi,$$

и так как $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, то

$$\frac{1-\varepsilon}{4} n \leqslant \frac{(1-\varepsilon)}{2} 2^k \leqslant |s| \leqslant (1+\varepsilon)2^k \leqslant (1+\varepsilon)n,$$

т.е. $|s| \in [(1-\varepsilon)n/4,\ (1+\varepsilon)n]$, что доказывает (146) с условием (147), а).

Для доказательства (147), б) заметим, что для произвольного n_0 линейная оболочка полиномов $T_0, T_1, \ldots, T_{n_0}$ содержит функции $e^{2\pi i s x}$ для всех $s \in \mathbb{Z}$ с $|s| \leqslant n_0/6$, так как в силу оценок (147), а) $M_n \geqslant n/6$ и, следовательно,

$$(T_n, e^{2\pi i s x}) = 0, \quad \text{если} \quad n > n_0, \quad |s| \leqslant \frac{n_0}{6}.$$

Это значит, что $S_{n_0}(g) = g$, если g – тригонометрический полином порядка $[n_0/6]$. В частности, взяв в качестве g тригонометрический полином наилучшего приближения порядка $[n_0/6]$ к функции f и учитывая равномерную ограниченность операторов S_n, получим, что

$$\begin{aligned} \|S_{n_0}(f) - f\|_C &\leqslant \|S_{n_0}(f) - S_{n_0}(g)\|_C + \|g - f\|_C \\ &= \|S_{n_0}(f-g)\|_C + \|g - f\|_C \\ &\leqslant C\|g - f\|_C = C \cdot E_{[n_0/6]}(f). \end{aligned}$$

Теорема 13 доказана.

Глава 8

Теоремы ортогонализации и факторизации

В этой главе рассматриваются две важные для теории ортогональных рядов темы. Объединяет многие результаты главы то, что они показывают, что в ряде случаев объекты, более общие, чем ортогональные системы, в существенном сводятся к ортогональным системам.

К примеру, в § 3 мы докажем, что если система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, такова, что для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ сходится по мере на $(0,1)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$, $m(E_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, и ортонормированная на $(0,1)$ система функций $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\varphi_n(x) = C_\varepsilon \psi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in E_\varepsilon$.

В ряде задач о функциональных рядах возникает необходимость продолжить заданную на $(0,1)$ систему функций Φ на более широкое множество G ($G \supset (0,1)$, $m(G) > 1$) так, чтобы на G система Φ стала ортогональной системой или полной ортогональной системой. При этом иногда нужно, чтобы система Φ обладала и некоторыми дополнительными свойствами, например, была равномерно ограничена на $G \setminus (0,1)$. Рассмотрению этих вопросов посвящен § 1 этой главы.

Начиная с § 2, мы рассматриваем так называемые теоремы факторизации, а также даем их применения к изучению свойств оператора мажоранты частных сумм S_Φ^*, порожденного ортогональной системой сходимости Φ (см. определение 1.2).

Термин "теоремы факторизации" становится понятным, если рассмотреть исторически первую теорему такого типа:

Всякий линейный ограниченный оператор $T\colon L^2(0,1) \to L^1(0,1)$ представим в виде произведения: $T = T_f \cdot T'$, где $T'\colon L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ – линейный ограниченный оператор, а T_f – оператор умножения на функцию $f \in L^2(0,1)$: $T_f(g) = f(x)g(x)$.

Теоремы факторизации для операторов, действующих в банаховы пространства, нашли важные применения и интенсивно изучаются в функциональном анализе. Для теории функций особенно интересны результаты об операторах, действующих в пространство $L^0(0,1)$ (всех измеримых и конечных п.в. функций). Мы формулируем теоремы факторизации для таких операторов (см. теоремы 5 и 6 из § 2) в эквивалентной форме как утверждения о функциональных рядах.

§ 1. Ортогонализация систем функций с помощью продолжения на более широкое множество

Мы начнем со следующего классического результата.

Теорема 1. *Пусть на отрезке $(0,1)$ задан набор функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in L^2(0,1)$, $n = 1,2,\ldots$, и, кроме того, задано множество E с $(0,1) \subset E \subset \mathbb{R}^1$, $m(E) > 1$. Для того чтобы существовала ортонормированная (на E) система функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\psi_n(x) = \varphi_n(x)$ при $n = 1,2,\ldots$ и $x \in (0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\sup_{\{a_n\}\colon \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \leqslant 1} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L^2(0,1)} \leqslant 1, \qquad N = 1,2,\ldots. \tag{1}$$

Доказательство. *Необходимость* условия (1) очевидна, так как если система Φ продолжена до ортонормированной, то

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L^2(0,1)} \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n \right\|_{L^2(E)} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \right)^{1/2}.$$

Для доказательства *достаточности* отметим, что условие (1) эквивалентно тому, что при $N = 1,2,\ldots$

$$\sup_{\{a_n\}:\, \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^2 \leqslant 1} \sum_{n,m=1}^{N} a_n a_m (\varphi_n, \varphi_m) \leqslant 1.^{1)} \tag{2}$$

Обозначим через G_N матрицу Грама системы функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$: $G_N = \{(\varphi_n, \varphi_m)\}_{n,m=1}^N$, а через I_N – единичную матрицу N-го порядка. Если A – некоторая матрица, то через $(A)_{n,m}$ будем обозначать ее элементы.

Из (2) следует, что квадратичная форма, задаваемая матрицей $G'_N = I_N - G_N$, неотрицательно определена, а потому (как доказывается в курсе линейной алгебры) G'_N представима в виде $G'_N = A_N A_N^*$, или, что то же самое, найдется набор векторов $\{z_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{R}^N$, для которого

$$(z_n, z_m) = (G'_N)_{n,m}, \qquad 1 \leqslant n, m \leqslant N. \tag{3}$$

Из (3) и изометричности систем векторов с одинаковой матрицей Грама (см. приложение 1, утверждение 4) следует, что

а) для любого $N \geqslant 1$ найдется набор $\{\psi_n^N(x)\}_{n=1}^N \subset L^2(E \setminus (0,1))$ такой, что

$$\int_{E\setminus(0,1)} \psi_n^N(x) \psi_m^N(x)\, dx = (G'_N)_{n,m}, \qquad 1 \leqslant n, m \leqslant N; \tag{4}$$

б) если набор $\{\psi_n^{N-1}(x)\}_{n=1}^{N-1}$ уже построен, то набор $\{\psi_n^N(x)\}_{n=1}^N$, для которого верно (4), можно выбрать так, что

$$\psi_n^{N-1}(x) = \psi_n^N(x), \qquad 1 \leqslant n \leqslant N-1. \tag{5}$$

Выберем функцию $\psi_1^1(x)$ таким образом, чтобы

$$\int_0^1 \varphi_1^2(x)\, dx = \int_{E\setminus(0,1)} (\psi_1^1(x))^2\, dx = 1,$$

и построим затем последовательно при $N = 2, 3, \ldots$ наборы $\{\psi_n^N(x)\}_{n=1}^N$ так, чтобы выполнялись равенства (4) и (5).

Положим при $n = 1, 2, \ldots$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x), & \text{если } x \in (0,1), \\ \psi_n^n(x), & \text{если } x \in E \setminus (0,1). \end{cases}$$

[1)] Здесь $(\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi(x)\psi(x)\, dx$.

Функции $\psi_n(x)$ удовлетворяют условиям теоремы, так как в силу (4) и (5) при $n \leqslant m$

$$\begin{aligned}\int_E \psi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx &= \int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx + \int_{E\setminus(0,1)} \psi_n^n(x)\,\psi_m^m(x)\,dx\\ &= \int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx + \int_{E\setminus(0,1)} \psi_n^m(x)\,\psi_m^m(x)\,dx\\ &= (G_m)_{n,m} + (G'_m)_{n,m} = (I_m)_{n,m}.\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Так как все N-мерные евклидовы пространства изоморфны, то ясно, что при ортогонализации конечного набора функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$, $x \in (0,1)$, функции $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^N$, $x \in E \setminus (0,1)$ (см. формулировку теоремы 1), могут быть взяты в любом N-мерном подпространстве пространства $L^2(E \setminus (0,1))$. В частности, если $E = (0,b)$, $b > 1$, то функции $\psi_n(x)$, $x \in (1,b)$, могут быть взяты из $\mathscr{D}_N(1,b)$.

В некоторых задачах требуется так продолжить функции набора $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$, чтобы функции $\varphi_n(x)$ были попарно ортогональны на $E \supset (0,1)$ и, кроме того, равномерно ограничены (константой, не зависящей от N) на множестве $E \setminus (0,1)$.

Такое продолжение легко построить непосредственно, если набор $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет более строгому чем (1) ограничению:

$$\left|\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx\right| \leqslant \frac{C}{N^2} \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

Несколько более точное расмотрение приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subset L^2(0,1)$ – *такой набор функций, что*

1) $\left|\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx\right| \leqslant \gamma_{|n-m|}$, $1 \leqslant n,m \leqslant N$;
2) $\sum\limits_{p=1}^{N-1} \gamma_p < M$.

Тогда функции $\varphi_n(x)$, $1 \leqslant n \leqslant N$, *можно так доопределить на отрезке* $[1, 2M+1]$, *что*

а) $\int_0^{2M+1} \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0$ *при* $n \neq m$, $1 \leqslant n,m \leqslant N$;
б) $|\varphi_n(x)| = 1$ *при* $1 \leqslant x \leqslant 2M+1$, $1 \leqslant n \leqslant N$;
в) *функции* $\varphi_n(x)$, $1 \leqslant n \leqslant N$, *кусочно постоянны на* $[1, 2M+1]$ *с конечным числом интервалов постоянства.*

Доказательство. Фиксируем такое разбиение отрезка $[1, 2M+1]$ точками $1 = t_0 < \dots < t_{N-1} = 2M + 1$, что для интервала $\delta_p = (t_{p-1}, t_p)$ его длина $|\delta_p| > 2\gamma_p$, $1 \leqslant p \leqslant N - 1$, и покажем, что

(*) для каждого p, $1 \leqslant p \leqslant N-1$, на δ_p можно так доопределить кусочно постоянные функции $\varphi_n(x)$, $1 \leqslant n \leqslant N$, чтобы

1) $|\varphi_n(x)| = 1,\ x \in \delta_p$;
2) $\int_{\delta_p} \varphi_n\varphi_m\,dx = -\int_0^1 \varphi_n\varphi_m\,dx$, если $|m-n| = p$, $1 \leqslant n, m \leqslant N$;
3) $\int_{\delta_p} \varphi_n\varphi_m\,dx = 0$, если $|m-n| \neq p$.

Легко видеть, что тогда функции $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, $x \in \bigcup\limits_{p=1}^{N-1} \delta_p$, будут давать требуемое в теореме 2 продолжение набора $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$, $x \in (0, 1)$.

Для доказательства утверждения (*) фиксируем число p, $1 \leqslant p \leqslant N-1$, и разобьем группу чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ на две части P и P', где

$$P = \{n \in [1, N] : 2sp + 1 \leqslant n \leqslant (2s+1)p,\ s = 0, 1, \dots\},$$
$$P' = [1, N] \setminus P.$$

Пусть, далее, δ_p^- и δ_p^+ – соответственно правая и левая половины отрезка δ_p:

$$\delta_p^- = \left(\frac{t_{p-1} + t_p}{2},\, t_p\right), \qquad \delta_p^+ = \left(t_{p-1},\, \frac{t_{p-1} + t_p}{2}\right).$$

Определим на δ_p кусочно постоянные функции $\varphi_n(x)$ с $|\varphi_n(x)| \equiv 1$ при $n = 1, 2, \dots, N$ так, чтобы

$$\int_{\delta_p^+} \varphi_n\varphi_m\,dx = \begin{cases} -\int_0^1 \varphi_n\varphi_m\,dx, & \text{если } m - n = p \text{ и } n \in P, \\ 0, & \text{если } m - n \neq p \text{ или } n \notin P, \end{cases} \tag{6}$$

$$\int_{\delta_p^-} \varphi_n\varphi_m\,dx = \begin{cases} -\int_0^1 \varphi_n\varphi_m\,dx, & \text{если } m - n = p \text{ и } n \in P', \\ 0, & \text{если } m - n \neq p \text{ или } n \notin P'. \end{cases} \tag{7}$$

Ясно, что из (6) и (7) следует (*). Положим сначала при $x \in \delta_p^+$ и $n \in P$

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = 1, \qquad \widetilde{\varphi}_{n+p}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_{p-1} < x \leqslant \alpha_n, \\ -1, & \text{если } \alpha_n < x < \dfrac{t_{p-1} + t_p}{2}, \end{cases}$$

где

$$\alpha_n = -\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_n\varphi_{n+p}\,dx + t_{p-1} + \frac{t_p - t_{p-1}}{4} \in \delta_p^+,$$

так как
$$\frac{t_p - t_{p-1}}{2} > \gamma_p \geqslant \left| \int_0^1 \varphi_n \varphi_{n+p}\, dx \right|.$$

Тогда при $n \in P$
$$\int_{\delta_p^+} \widetilde{\varphi}_n \widetilde{\varphi}_{n+p}\, dx = (\alpha_n - t_{p-1}) - \left(\frac{t_{p-1} + t_p}{2} - \alpha_n \right)$$
$$= -\int_0^1 \varphi_n \varphi_{n+p}\, dx. \tag{8}$$

Числа α_n, $n \in P$, образуют разбиение интервала δ_p^+ на какие-то интервалы ω_s, $1 \leqslant s \leqslant s_0$. Возьмем систему кусочно постоянных функций $\psi_n(x)$, $n \in P$, $x \in \delta_p^+$, чтобы

1) $|\psi_n(x)| \equiv 1$;

2) $\displaystyle\int_{\omega_s} \psi_n \psi_{n'}\, dx = 0$ при $n \neq n'$, $n, n' \in P$, $1 \leqslant s \leqslant s_0$

(такую систему легко построить, перенося преобразованием подобия функции Радемахера с $(0,1)$ на каждый интервал ω_s).

Положим при $x \in \delta_p^+$, $n \in P$
$$\varphi_n(x) = \widetilde{\varphi}_n(x)\psi_n(x), \quad \varphi_{n+p}(x) = \widetilde{\varphi}_{n+p}(x)\psi_n(x) \quad (\text{при } n + p \leqslant N). \tag{9}$$

Соотношениями (9) функции $\varphi_n(x)$ определены на δ_p^+ при всех n, $1 \leqslant n \leqslant N$, причем (в силу (8) и свойств функций $\psi_n(x)$) справедливы равенства (6). Совершенно аналогично построениям, проведенным на δ_p^+, на интервале δ_p^- определяются функции $\varphi_n(x)$, $1 \leqslant n \leqslant N$, для которых выполняются равенства (7). Тем самым теорема 2 доказана.

Замечание. Так как преобразование $f(x) \to \sqrt{b}\, f(x/b)$ есть изометрия между пространствами $L^2(0,1)$ и $L^2(0,b)$, то ясно, что если мы имеем продолжение набора $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ с $(0,1)$ до О.Н.С. на $(0,M)$, $M > 1$, причем
$$\sup_{1 \leqslant x \leqslant M,\, 1 \leqslant n \leqslant N} |\varphi_n(x)| \leqslant K,$$
то для любого числа $M' > 1$ существует продолжение этого набора до О.Н.С. на интервале $(0, M')$ такое, что
$$\sup_{1 \leqslant x \leqslant M',\, 1 \leqslant n \leqslant N} |\varphi_n(x)| \leqslant K \left(\frac{M-1}{M'-1} \right)^{1/2}.$$

Условие (1) в теореме 1 равносильно тому, что норма матрицы Грама $G_\Phi = \{(\varphi_n, \varphi_m)\}_{n,m=1}^{\infty}$ системы Φ не превосходит 1. Напомним, что

$$\|G_\Phi\| = \sup_{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 1} \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m (G_\Phi)_{n,m}.$$

В терминах матрицы Грама системы Φ можно дать и критерий продолжимости этой системы до полной О.Н.С.

Теорема 3. *Пусть на отрезке* $(0,1)$ *задан набор функций* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *с* $\varphi_n \in L^2(0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$, *и, кроме того, задано множество* E *с* $(0,1) \subset E \subset \mathbb{R}^1$, $m(E) > 1$. *Для существования полной в* $L^2(E)$ *ортонормированной системы функций* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *такой, что* $\psi_n(x) = \varphi_n(x)$, $x \in (0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$, *необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:*

1) *система* $\{\varphi_n\}$ *полна в* $L^2(0,1)$;
2) $G_\Phi^2 = G_\Phi$;
3) *матрица* $\widetilde{G} = I - G_\Phi$ *имеет бесконечный ранг.*

Доказательство. I) Пусть указанная в теореме 3 система $\{\psi_n\}$ существует. Выполнение условия 1) очевидно. Положим $\psi_n'(x) = \psi_n(x)\chi_{(0,1)}(x)$, $x \in E$, $n = 1, 2, \ldots$ (где $\chi_U(x)$ – характеристическая функция множества U). Тогда, пользуясь равенством Парсеваля (см. 1.(23′)), получим

$$\begin{aligned}(G_\Phi)_{m,n} &= \int_0^1 \varphi_m \varphi_n \, dx = \int_E \psi_m' \psi_n' \, dx = \sum_{s=1}^{\infty} \int_E \psi_m' \psi_s \, dx \cdot \int_E \psi_n' \psi_s \, dx \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^1 \varphi_m \varphi_s \, dx \cdot \int_0^1 \varphi_n \varphi_s \, dx = \sum_{s=1}^{\infty} (G_\Phi)_{m,s} (G_\Phi)_{n,s}, \qquad (10)\end{aligned}$$

и так как $(G_\Phi)_{n,s} = (G_\Phi)_{s,n}$, то из (10) вытекает равенство 2). Отметим, что ряд в правой части равенства (10) сходится абсолютно для любого m, так как

$$\sum_{s=1}^{\infty} (G_\Phi)_{m,s}^2 = \|\psi_m'\|_{L^2(E)}^2 \leqslant 1.$$

Наконец, так как система функций $\widetilde{\Phi} = \{\psi_n(x)\chi_{E\setminus(0,1)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L^2(E \setminus (0,1))$, то она содержит бесконечную, линейно независимую подсистему, а следовательно, ранг матрицы $G_{\widetilde{\Phi}}$ бесконечен. Так как $G_{\widetilde{\Phi}} = I - G_\Phi$, то и условие 3) доказано.

II) Пусть система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in (0,1)$, удовлетворяет условиям 1)–3). Выберем какую-нибудь полную в $L^2(E \setminus (0,1))$ О.Н.С. $\{f_s\}_{s=1}^\infty$ и положим

$$p_n(x) = \sum_{s=1}^\infty (\widetilde{G})_{n,s} f_s(x), \qquad x \in E \setminus (0,1). \tag{11}$$

Ряд в (11) сходится в $L^2(E \setminus (0,1))$, так как в силу 2) $\sum\limits_{s=1}^\infty (\widetilde{G})_{n,s}^2 < \infty$ при $n = 1, 2, \ldots$. Так как $(\widetilde{G})^2 = (I - G_\Phi)^2 = I - 2G_\Phi + G_\Phi^2 = I - G_\Phi$ (см. 2)), то, пользуясь равенством Парсеваля, находим, что при $1 \leqslant n, k < \infty$

$$\int_{E\setminus(0,1)} p_n p_k \, dx = \sum_{s=1}^\infty (\widetilde{G})_{n,s} (\widetilde{G})_{k,s} = \sum_{s=1}^\infty (\widetilde{G})_{n,s} (\widetilde{G})_{s,k} = (\widetilde{G})_{n,k}. \tag{12}$$

Пусть P – подпространство в $L^2(E \setminus (0,1))$, полученное замыканием линейной оболочки функций $p_n(x)$ (в силу 3) P – бесконечномерно), и пусть $U\colon P \to L^2(E \setminus (0,1))$ – изометрический оператор, отображающий P на все пространство $L^2(E \setminus (0,1))$. Положим при $n = 1, 2, \ldots$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x), & \text{если } x \in (0,1), \\ U(p_n, x), & \text{если } x \in E \setminus (0,1). \end{cases}$$

Тогда (см. (12))

$$\int_E \psi_n \psi_k \, dx = \int_0^1 \varphi_n \varphi_k \, dx + \int_{E\setminus(0,1)} U(p_n) U(p_k) \, dx$$
$$= (G_\Phi)_{n,k} + \int_{E\setminus(0,1)} p_n p_k \, dx = (I)_{n,k},$$

т.е. $\{\psi_n(x)\}$, $x \in E$, – О.Н.С.

Чтобы доказать полноту системы $\{\psi_n\}$, достаточно проверить выполнение равенства Парсеваля для разложения по системе $\{\psi_n\}$ каждой функции некоторой полной в $L^2(E)$ системы Ω. Для этой цели в качестве Ω мы возьмем систему функций:

$$\Omega = \left\{ \psi_n \chi_{(0,1)},\ \psi_n \chi_{E\setminus(0,1)},\ n = 1, 2, \ldots \right\}$$

(легко видеть, что Ω полна в $L^2(E)$). Пользуясь условием 2) при $n = 1, 2, \ldots$, находим

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\int_E \psi_n \chi_{(0,1)} \psi_s\, dx\right)^2 = \sum_{s=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_n \varphi_s\, dx\right)^2 = \sum_{s=1}^{\infty}(G_\Phi)_{n,s}^2$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty}(G_\Phi)_{n,s}(G_\Phi)_{s,n} = (G_\Phi)_{n,n}$$
$$= \int_0^1 \varphi_n^2\, dx = \int_E \left(\psi_n \chi_{(0,1)}\right)^2 dx.$$

Аналогично, в силу (12)

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(\int_{E\setminus(0,1)} \psi_n \psi_s\, dx\right)^2 = \sum_{s=1}^{\infty}\left(\int_{E\setminus(0,1)} p_n p_s\, dx\right)^2 = \sum_{s=1}^{\infty}(\widetilde{G})_{n,s}^2 = (\widetilde{G})_{n,n}$$
$$= \int_{E\setminus(0,1)} p_n^2\, dx = \int_{E\setminus(0,1)} \psi_n^2\, dx.$$

Тем самым полнота системы $\{\psi_n\}$, а следовательно, и теорема 3 доказаны.

При построении различных ортогональных систем часто бывает полезным следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$, $\Phi' = \{\varphi_n(x)\}_{n=N+1}^M$ $(M > N$, $x \in (0,1))$ – *два ортонормированных набора функций. Тогда найдется функция* $\varepsilon(x)$, $|\varepsilon(x)| = 1$ *при* $x \in (0,1)$, *такая, что функции* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^M$, *определенные равенством*

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x), & \text{если } 1 \leqslant n \leqslant N, \\ \varepsilon(x)\varphi_n(x), & \text{если } N < n \leqslant M, \end{cases} \qquad x \in (0,1),$$

образуют О.Н.С.

Лемма 1. *Пусть* $f_1, f_2 \in L^1(0,1)$ *и* $m\{x \in (0,1) : f_1(x) = 0\} = 0$. *Тогда, если при некотором* $\alpha_0 > 0$

$$\min_{\alpha:\ |\alpha|<\alpha_0} \|f_1 + \alpha f_2\|_1 \geqslant \|f_1\|_1, \tag{13}$$

то имеет место равенство

$$\int_0^1 f_2(x)\, \mathrm{sign}\, f_1(x)\, dx = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Так как $f_1(x) \neq 0$ п.в. на $(0,1)$, то $\|f_1 + \alpha f_2\|_1 = \|f_1 \operatorname{sign} f_1 + \alpha f_2 \operatorname{sign} f_1\|_1$. Поэтому нам достаточно рассмотреть случай $f_1(x) \geqslant 0$, $x \in (0,1)$, и показать, что тогда из (13) вытекает равенство

$$\int_0^1 f_2(x)\,dx = 0. \tag{15}$$

В этом случае $f_1(x) > 0$ п.в. на $(0,1)$ и

$$I_\alpha := \int_0^1 |f_1 + \alpha f_2|\,dx = \int_0^1 \left|1 + \alpha\frac{f_2}{f_1}\right| dx = \int_0^1 |1 + \alpha g|\,d\mu, \tag{16}$$

где $\mu = f_1\,dx$ – абсолютно непрерывная мера и $g = \dfrac{f_2}{f_1} \in L^1(\mu)$. Из (16) при $\alpha > 0$ вытекает, что

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_{\{x:\,1+\alpha g\geqslant 0\}} [1+\alpha g]\,d\mu - \int_{\{x:\,1+\alpha g<0\}} [1+\alpha g]\,d\mu \\ &= \int_0^1 [1+\alpha g]\,d\mu - 2\int_{\{x:\,1+\alpha g<0\}} [1+\alpha g]\,d\mu \\ &= \int_0^1 f_1\,dx + \alpha\int_0^1 g\,d\mu - 2\mu\{x : g(x) < -1/\alpha\} \\ &\quad - 2\alpha \int_{\{x:\,g(x)<-1/\alpha\}} g\,d\mu. \end{aligned} \tag{17}$$

Аналогично, при $\alpha < 0$

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_0^1 f_1\,dx + \alpha\int_0^1 g\,d\mu - 2\mu\{x : g(x) > -1/\alpha\} \\ &\quad - 2\alpha \int_{\{x:\,g(x)>-1/\alpha\}} g\,d\mu. \end{aligned} \tag{18}$$

Но так как $g \in L^1(\mu)$ и мера μ абсолютно непрерывна, то

$$\mu\{x : |g(x)| > t\} \leqslant \frac{1}{t}\int_{\{x:\,|g(x)|>t\}} |g|\,d\mu = o\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Следовательно, из (17) и (18) мы получаем, что при $\alpha \to 0$

$$I_\alpha = \int_0^1 f_1\,dx + \alpha\int_0^1 g\,d\mu + o(\alpha),$$

а значит (см. (13)), $\int_0^1 g\,d\mu = \int_0^1 f_2\,dx = 0$. Равенство (15), а вместе с ним и лемма 1 доказаны.

Лемма 2. *Пусть $g \in L^1(0,1)$, $f_i \in L^1(0,1)$, $i = 1,2,\dots,m$, и функция $f_0(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^0 f_i(x)$ такова, что*

$$\|g - f_0\|_1 = \inf_{\{\alpha_i\}} \left\| g - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i \right\|_1. \tag{19}$$

Тогда если для любых чисел α_i, $i = 1,2,\dots,m$,

$$m\left\{ x \in (0,1) : g(x) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) = 0 \right\} = 0, \tag{20}$$

то имеют место равенства

$$\int_0^1 f_i(x) \operatorname{sign}[g(x) - f_0(x)]\, dx = 0, \qquad i = 1,2,\dots,m.$$

Доказательство. Если $\psi(x) = g(x) - f_0(x)$, то по условию (20) $m\{x \in (0,1) : \psi(x) = 0\} = 0$ и (см. (19)) $\|\psi - \alpha f_i\|_1 \geqslant \|\psi\|_1$ при $i = 1,2,\dots,m$ для любого α. Поэтому согласно лемме 1

$$\int_0^1 f_i(x) \operatorname{sign} \psi(x)\, dx = 0, \qquad i = 1,2,\dots,m.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть задан набор функций $\{f_i\}_{i=1}^m \subset L^1(0,1)$. Тогда найдется такая функция $g \in L^1(0,1)$, что равенство (20) имеет место для любых чисел α_i, $i = 1,2,\dots,m$.*

Доказательство. Покажем, что в качестве $g(x)$ можно взять функцию $g(x) = e^{\lambda x}$ при некотором $\lambda \in (0,1)$. Пусть, напротив, для любого $\lambda \in (0,1)$ найдется такой набор коэффициентов $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$, что

$$m(E_\lambda) := m\left\{ x \in (0,1) : e^{\lambda x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \right\} > 0.$$

Тогда ясно, что можно найти число $\delta \in (0,1)$ и последовательность попарно различных чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \subset (0,1)$ таких, что

$$m(E_{\lambda_j}) > \delta, \qquad j = 1,2,\dots.$$

При $R = 1, 2, \ldots$

$$R\delta < \int_0^1 \sum_{j=1}^{R} \chi_{E_{\lambda_j}}(x)\,dx \leqslant Rm\left\{x \in (0,1) : \sum_{j=1}^{R} \chi_{E_{\lambda_j}}(x) > \frac{R\delta}{2}\right\} + \frac{R\delta}{2}$$

и, следовательно,

$$m\left\{x \in (0,1) : \sum_{j=1}^{R} \chi_{E_{\lambda_j}}(x) > \frac{R\delta}{2}\right\} > \frac{R\delta}{2}. \tag{21}$$

Из (21) вытекает, что

$$m\left\{x \in (0,1) : \sum_{j=1}^{R_0} \chi_{E_{\lambda_j}}(x) > m+1\right\} > 0, \quad \text{если} \quad R_0 > \frac{2}{\delta}(m+1),$$

а значит, среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{R_0}$ найдутся λ_{j_s}, $s = 1, 2, \ldots, m+1$, такие, что

$$m(G) > 0, \quad \text{где} \quad G = \bigcap_{s=1}^{m+1} E_{\lambda_{j_s}}. \tag{22}$$

Неравенство (22) означает, что

$$\exp(\lambda_{j_s} x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(s)} f_i(x), \qquad s = 1, 2, \ldots, m+1, \quad x \in G,$$

т.е. функции $\exp(\lambda_{j_s} x)$, $x \in G$, лежат в m-мерном линейном пространстве и, следовательно, линейно зависимы:

$$\sum_{s=1}^{m+1} \beta_s \exp(\lambda_{j_s} x) = 0, \qquad x \in G, \quad m(G) > 0, \quad \sum_{s=1}^{m+1} \beta_s^2 > 0.$$

Так как функция $F(z) = \sum\limits_{s=1}^{m+1} \beta_s \exp(\lambda_{j_s} z)$ – целая, то из последнего равенства и теоремы единственности для аналитических функций вытекает, что $F(x) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$, и мы пришли к противоречию, так как очевидно, что при $x \to +\infty$

$$F(x) \sim \beta_\nu \exp(\lambda_{j_\nu} x), \quad \text{где} \quad \lambda_{j_\nu} = \max\{\lambda_{j_s} : \beta_s \neq 0,\ s = 1, 2, \ldots, m+1\}.$$

Лемма 3 доказана.

Следствие 1. *Для любого набора* $\{f_i\}_{i=1}^m \subset L^1(0,1)$ *найдется функция* $\varepsilon(x)$ *с* $|\varepsilon(x)| = 1$ *для п.в.* $x \in (0,1)$ *такая, что*

$$\int_0^1 f_i(x)\varepsilon(x)\,dx = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство. Используя лемму 3, найдем функцию $g(x)$, для которой равенство (20) выполняется при любых α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Далее, если $L \subset L^1(0,1)$ – подпространство, натянутое на f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, то возьмем функцию $f_0 \in L$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\|f_0 - g\|_1 = \inf_{f \in L} \|f - g\|_1.$$

Тогда, в силу леммы 2, функция $\varepsilon(x) = \operatorname{sign}[g(x) - f_0(x)]$ удовлетворяет требованиям следствия 1.

Утверждение теоремы 4 сразу вытекает из следствия 1. Действительно, если рассмотреть набор функций

$$\varphi_n(x)\varphi_m(x), \qquad 1 \leqslant n \leqslant N < m \leqslant M,$$

то, применив к этому набору следствие 1, мы найдем функцию $\varepsilon(x)$ ($|\varepsilon(x)| = 1$, $x \in (0,1)$), для которой

$$\int_0^1 \varphi_n(x)[\varepsilon(x)\varphi_m(x)]\,dx = 0, \qquad 1 \leqslant n \leqslant N < m \leqslant M.$$

Из последнего равенства следует ортонормированность системы $\{\psi_n\}$. Теорема 4 доказана.

§ 2. Две теоремы о функциональных последовательностях

В этом параграфе доказываются две теоремы, которые могут являться основой для получения многих теорем факторизации. Некоторые приложения полученных здесь результатов даны в следующих параграфах. Для формулировки теорем нам потребуются два определения.

Определение 1. Система измеримых функций

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty, \qquad x \in (0,1), \tag{23}$$

называется *A-системой*, если для любой последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, $\sum_{n=1}^\infty |\xi_n| < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n f_n(x) = 0 \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1).$$

Определение 2. Система измеримых функций (23) называется *системой абсолютной сходимости*, если для любой последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n f_n(x)| < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1).$$

Замечание. Ясно, что система (23) является A-системой или системой абсолютной сходимости одновременно с системой $\{|f_n(x)|\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 5. *Для того чтобы система функций* (23) *была A-системой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$, $m(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$, и постоянная C_ε такие, что для любого $y > 0$*

$$m\{x \in E_\varepsilon : |f_n(x)| > y\} \leqslant \frac{C_\varepsilon}{y}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{24}$$

Теорема 6. *Для того чтобы система функций* (23) *была системой абсолютной сходимости, необходимо достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$, $m(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$, и постоянная C_ε такие, что*

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \int_{E_\varepsilon} |f_n(x)|\, dx \leqslant C_\varepsilon. \tag{25}$$

В доказательстве обеих теорем нам понадобится следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Пусть последовательность функций $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится в $L^p(0,1)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ к $g(x)$ и при этом для $k = 1, 2, \ldots$*

$$1) \quad 0 \leqslant g_k(x) \leqslant 1, \quad x \in (0,1); \qquad 2) \quad \int_0^1 g_k(x)\, dx \geqslant \delta > 0.$$

Тогда $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$ для п.в. $x \in (0,1)$ и найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$m\bigl\{x \in (0,1) : g(x) > \varepsilon\bigr\} \geqslant \delta. \tag{26}$$

Доказательство. Для любого множества $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$, в силу слабой сходимости $g_k(x)$ к $g(x)$, имеем

$$\int_E g(x)\,dx = \int_0^1 \chi_E(x)g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^1 \chi_E(x)g_k(x)\,dx \geqslant 0,$$

откуда следует, что $g(x) \geqslant 0$ для п.в. $x \in (0,1)$. Аналогично, из соотношения

$$\int_E [1 - g(x)]\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_E [1 - g_k(x)]\,dx \geqslant 0, \qquad E \subset (0,1),$$

мы получаем, что $g(x) \leqslant 1$ для п.в. $x \in (0,1)$. Далее, пусть

$$G = \bigl\{x \in (0,1) : g(x) > 0\bigr\}.$$

Тогда

$$m(G) \geqslant \int_0^1 g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^1 g_k(x)\,dx \geqslant \delta.$$

Если $m(G) > \delta$, то так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} m\{x : 0 < g(x) < \varepsilon\} = 0$, то при достаточно малом ε будет выполняться оценка (26). Случай $m(G) = \delta$ возможен только при условии, что $g(x) = 1$ для п.в. $x \in G$, и тогда опять имеет место (26). Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 5. *Достаточность* условия (24). Фиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что в случае выполнения неравенств (24) последовательность $\xi_n f_n(x)$ $\Bigl(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n| < \infty\Bigr)$ сходится к нулю для п.в. $x \in E_\varepsilon$. Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и оценки $m(E_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, будет вытекать сходимость последовательности $\xi_n f_n(x)$ к нулю для п.в. $x \in (0,1)$. В силу (24) для любых $\delta > 0$ и $\{\xi_n\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n| < \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\bigl\{x \in E_\varepsilon : |\xi_n f_n(x)| > \delta\bigr\} \leqslant C_\varepsilon \delta^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n| < \infty,$$

а следовательно,

$$m\Bigl\{\varlimsup_{n\to\infty}\{x \in E_\varepsilon : |\xi_n f_n(x)| > \delta\}\Bigr\} = 0. \tag{27}$$

Так как в (27) число $\delta > 0$ можно взять произвольно малым, то мы получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}|\xi_n f_n(x)| = 0$ для п.в. $x \in E_\varepsilon$.

Необходимость условия (24). Прежде всего заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant M_n < \infty, \qquad n = 1, 2, \dots, \quad x \in (0,1). \tag{28}$$

Тот факт, что можно ограничиться неотрицательными функциями, уже отмечался (см. замечание после определения 2). Если $f'_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \dots,$ – A-система, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти числа M_n такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(G_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad G_n := \{x \in (0,1) : f'_n(x) > M_n\}.$$

Тогда ясно, что функции f_n, $n = 1, 2, \dots,$ с

$$f_n(x) = \begin{cases} f'_n(x), & \text{если } x \notin G_n, \\ 0, & \text{если } x \in G_n, \end{cases} \qquad x \in (0,1),$$

также образуют A-систему и удовлетворяют неравенствам (28). Предполагая, что для системы $\{f_n\}$ необходимость условия (24) уже проверена, мы найдем множество $E_{\varepsilon/2} \subset (0,1)$, $m(E_{\varepsilon/2}) > 1-\varepsilon/2$, и постоянную $C_{\varepsilon/2}$, для которых выполнены соотношения (24). Но тогда, положив $C'_\varepsilon = C_{\varepsilon/2}$ и $E'_\varepsilon = E_{\varepsilon/2} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, мы получим, что

$$m\{x \in E'_\varepsilon : f'_n(x) > y\} \leqslant \frac{C'_\varepsilon}{y}, \quad n = 1, 2, \dots, \qquad m(E'_\varepsilon) > 1 - \varepsilon,$$

т.е. и для системы $\{f'_n\}$ соотношения (24) имеют место при любом $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь $\{f_n\}$ – A-система, удовлетворяющая неравенствам (28). Доказательство необходимости условия (24) мы для удобства разобьем на несколько частей.

а) Нам нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$ и постоянная C_ε такие, что

$$\int_{E_\varepsilon} \chi_{n,z}(x)\,dx \leqslant C_\varepsilon z, \quad n = 1, 2, \dots, \quad z > 0, \tag{29}$$

где $\chi_{n,z}(x)$ – характеристическая функция множества

$$E_{n,z} = \left\{x \in (0,1) : f_n(x) > \frac{1}{z}\right\}.$$

Для последовательности $\{f_n\}$ реализуется одна из следующих двух возможностей:

I) Для любых $\varepsilon > 0$ и $z_0 > 0$ найдутся множество F_{ε,z_0}, $m(F_{\varepsilon,z_0}) \geqslant 1-\varepsilon$, и постоянная A_ε (зависящая только от ε) такие, что

$$\int_{F_{\varepsilon,z_0}} \chi_{n,z}(x)\,dx \leqslant A_\varepsilon z, \qquad n = 1,2,\dots, \quad z \geqslant z_0.$$

II) Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого A найдется число $z_0 = z_0(A) > 0$ такое, что для всякого множества $F \subset (0,1)$, $m(F) > 1 - \varepsilon_0$,

$$m\left\{x \in F : f_{n'}(x) > \frac{1}{z'}\right\} > Az' \tag{30}$$

при некоторых $n' \geqslant 1$ и $z' > z_0$.

Покажем, что если для последовательности $\{f_n\}$ имеет место случай I), то выполнены соотношения (29), а следовательно, и нужные нам оценки (24). Фиксируем $\varepsilon > 0$, возьмем последовательность $z_j = 1/j$, $j = 1,2,\dots$, и пусть $\Phi_j = F_{\varepsilon,z_j}$, $j = 1,2,\dots$, – такие множества, что $m(\Phi_j) \geqslant 1 - \varepsilon$ при $j = 1,2,\dots$ и

$$\int_{\Phi_j} \chi_{n,z}(x)\,dx \leqslant A_\varepsilon z \quad \text{при} \quad n = 1,2,\dots, \quad z \geqslant \frac{1}{j}. \tag{31}$$

В силу слабой компактности единичного шара в $L^2(0,1)$ из последовательности $\{\chi_{\Phi_j}\}_{j=1}^{\infty}$ характеристических функций множеств Φ_j можно извлечь подпоследовательность $\chi_{\Phi_{j_k}}(x)$, $k = 1,2,\dots$, слабо сходящуюся в $L^2(0,1)$ к некоторой функции $\chi^0(x)$. Тогда в силу (31)

$$\int_0^1 \chi^0(x)\chi_{n,z}(x)\,dx \leqslant A_\varepsilon z \quad \text{при} \quad z > 0, \quad n = 1,2,\dots. \tag{32}$$

При этом (см. лемму 1) $m\{x \in (0,1) : \chi^0(x) \geqslant \eta\} \geqslant 1 - \varepsilon$ для некоторого числа $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$. Пусть $E_\varepsilon = \{x \in (0,1) : \chi^0(x) \geqslant \eta\}$. Тогда (см. (32))

$$\int_{E_\varepsilon} \chi_{n,z}(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\eta}\int_0^1 \chi^0(x)\chi_{n,z}(x)\,dx \leqslant \frac{A_\varepsilon}{\eta} z$$

при всех $n = 1,2,\dots$ и $z > 0$, т.е. имеет место нужное нам неравенство (29).

б) Покажем, что для A-системы $\{f_n\}$ случай II) невозможен и тем самым всегда имеет место уже разобранный случай I).

Предположим противное, т.е. что для A-системы $\{f_n\}$ имеет место случай II). Наша ближайшая цель – построить (пользуясь неравенствами (30)) для любой постоянной $A > 0$ числа $z_1, z_2, \ldots, z_N$ и попарно различные номера $n_1, n_2, \ldots, n_N$ такие, что

$$\begin{aligned} &1)\ \ z_i > 0;\\ &2)\ \ \sum_{i=1}^{N} z_i \leqslant \frac{1}{A};\\ &3)\ \ z_i f_{n_i}(x) \geqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \end{aligned} \tag{33}$$

где множества E_i попарно не пересекаются и $m\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} E_i\Big) \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Для этого будем последовательно (при $s = 1, 2, \ldots$) строить наборы положительных чисел $\{\eta_i^s\}_{i=1}^{i_s}$ попарно различных натуральных чисел $\{n_i^s\}_{i=1}^{i_s}$ и непересекающиеся множества $\{E_i^s\}_{i=1}^{i_s}$ так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\begin{aligned} &1)\ \ 0 < \eta_i^s \leqslant \frac{m(E_i^s)}{A};\\ &2)\ \ \eta_i^s f_{n_i^s}(x) \geqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in E_i^s;\\ &3)\ \ \sum_{i=1}^{i_s} m(E_i^s) \geqslant \min\Big\{\varepsilon_0,\ Az_0 + \sum_{i=1}^{i_{s-1}} m(E_i^{s-1})\Big\} \quad (z_0 = z_0(A),\ \ \text{см. (30)}). \end{aligned} \tag{34}$$

Из неравенства 3) сразу вытекает, что тогда при некотором $s_0 < \varepsilon_0/(Az_0)$ оценки (33) будут выполнены, если положить $N = i_{s_0}$, $z_i = \eta_i^{s_0}$, $n_i = n_i^{s_0}$, $E_i = E_i^{s_0}$, $i = 1, 2, \ldots, i_{s_0}$ (и мы останавливаем процесс построения на шаге с номером s_0).

Пусть при $s = 1$ $i_1 = 1$, а числа n_1^1, η_1^1 и множество E_1^1 выбраны так, что

$$E_1^1 = \{x \in (0,1) : \eta_1^1 f_{n_1^1}(x) > 1\}, \qquad m(E_1^1) > A\eta_1^1 \geqslant Az_0$$

(возможность такого выбора вытекает из (30)). Тогда ясно, что при $s = 1$ соотношения 1), 2) и 3) в (34) выполнены $\Big($мы считаем, что $i_0 = 0$, $\sum\limits_1^0 = 0\Big)$.

Пусть наборы $\{\eta_i^s\}$, $\{n_i^s\}$, $\{E_i^s\}$ уже построены и $\sum\limits_{i=1}^{i_s} m(F_i^s) < \varepsilon_0$. Построим наборы $\{\eta_i^{s+1}\}$, $\{n_i^{s+1}\}$, $\{E_i^{s+1}\}$. Положим $\mathscr{F}_0 = (0,1) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{i_s} E_i^s$, тогда $m(\mathscr{F}_0) > 1 - \varepsilon_0$ и в силу (30) найдутся числа $\widetilde{n}$ и $\widetilde{\eta} > z_0$, для которых

$$m(\widetilde{E}) > A\widetilde{\eta} > Az_0, \quad \text{где} \quad \widetilde{E} = \left\{x \in \mathscr{F}_0 : f_{\widetilde{n}}(x) > \frac{1}{\widetilde{\eta}}\right\}. \tag{35}$$

Возможны два случая:

i) $\widetilde{n} \notin \{n_i^s\}_{i=1}^{i_s}$. Тогда положим $i_{s+1} = i_s + 1$, и пусть $\eta_i^{s+1} = \eta_i^s$, $n_i^{s+1} = n_i^s$, $E_i^{s+1} = E_i^s$, если $1 \leqslant i \leqslant i_s$, $n_{i_{s+1}}^{s+1} = \widetilde{n}$, $\eta_{i_{s+1}}^{s+1} = \widetilde{\eta}$, $E_{i_{s+1}}^{s+1} = \widetilde{E}$. Легко видеть (учитывая неравенство (35)), что для определенных таким образом наборов соотношения (34) остаются справедливыми.

ii) $\widetilde{n} \in \{n_i^s\}_{i=1}^{i_s}$, т.е. $\widetilde{n} = n_{i_0}^s$ при некотором i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant i_s$. Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \widetilde{\eta} \leqslant \frac{m(E)}{A};\\
&\text{б)}\quad \eta_{i_0}^s \leqslant \frac{m(E_{i_0}^s)}{A};\\
&\text{в)}\quad \widetilde{\eta} f_{n_{i_0}^s}(x) \geqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in \widetilde{E};\\
&\text{г)}\quad \eta_{i_0}^s f_{n_{i_0}^s}(x) \geqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in E_{i_0}^s.
\end{aligned} \tag{36}$$

Положим $i_{s+1} = i_s$, и пусть $\eta_i^{s+1} = \eta_i^s$, $n_i^{s+1} = n_i^s$, $E_i^{s+1} = E_i^s$ при $i \neq i_0$ $1 \leqslant i \leqslant i_{s+1}$. Кроме того, пусть

$$n_{i_0}^{s+1} = n_{i_0}^s, \quad \eta_{i_0}^{s+1} = \max\{\widetilde{\eta}, \eta_{i_0}^s\}, \quad E_{i_0}^{s+1} = \widetilde{E} \cup E_{i_0}^s. \tag{37}$$

Тогда справедливость неравенств 1) и 2) из (34) вытекает непосредственно из (36), а неравенство 3) из (34) следует из определения множества $E_{i_0}^{s+1}$ и (35).

Обосновав шаг индукции, мы тем самым доказали существование при $s = 1, 2, \ldots$ наборов со свойствами (34), а следовательно, и существование для любой постоянной $A > 0$ наборов $\{z_i\}$, $\{n_i\}$, $\{E_i\}$, удовлетворяющих соотношениям (33). Если в соотношениях (33) брать число A равным последовательно $1, 2^2, 3^2, \ldots$, то мы для каждого $k = 1, 2, \ldots$ найдем наборы $\{z_i^{(k)}\}_{i=1}^{N_k}$, $\{n_i^{(k)}\}_{i=1}^{N_k}$, для которых

$$\begin{gathered}
z_i^{(k)} > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N_k, \qquad \sum_{i=1}^{N_k} z_i^{(k)} \leqslant \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots,\\
\max_{1 \leqslant i \leqslant N_k} z_i^{(k)} f_{n_i^{(k)}}(x) \geqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in Q_k, \quad m(Q_k) \geqslant \varepsilon_0 > 0.
\end{gathered} \tag{38}$$

При этом, как нетрудно видеть, учитывая ограниченность функций $f_n(x)$ (см. (28)), наборы $\{n_i^{(k)}\}$ можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N_k} n_i^{(k)} < \min_{1\leqslant i\leqslant N_{k+1}} n_i^{(k+1)}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Определим числовую последовательность, положив при $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n = \begin{cases} z_i^{(k)}, & \text{если } n = n_i^{(k)} \text{ при некотором } k = 1, 2, \dots \text{ и } 1 \leqslant i \leqslant N_k, \\ 0, & \text{если } n \notin \{n_i^{(k)}\}, \end{cases}$$

и пусть $Q = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} Q_k$. Тогда из (38) вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \qquad m(Q) \geqslant \varepsilon_0 > 0,$$

и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \xi_n f_n(x) \geqslant 1$ для любого $x \in Q$, что противоречит тому, что $\{f_n\}$ – A-система. Тем самым мы показали, что для A-систем случай II) невозможен. Теорема 5 полностью доказана.

Доказательство теоремы 6. Если неравенства (25) справедливы, то можно найти последовательность множеств $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, $m(E_k) \geqslant 1 - 1/k$, таких, что

$$\sup_{1\leqslant n<\infty} \int_{E_k} |f_n(x)|\, dx = C_k < \infty.$$

Тогда для любой последовательности ξ_n, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_k} |\xi_n f_n(x)|\, dx \leqslant C_k \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty,$$

откуда по теореме Б. Леви следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n f_n(x)$ сходится п.в. на E_k при $k = 1, 2, \dots$, а значит, и п.в. на $(0, 1)$.

Необходимость неравенств (25) является существенно более глубоким фактом. При ее доказательстве нам потребуется следующее утверждение (теорема фон Неймана о минимаксе; доказательство см. в приложении 1, § 3):

Пусть $A = \{a_{i,j}\}$, $a_{i,j} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *– матрица с неотрицательными элементами, и пусть*

$$\sigma_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \ldots, x_m),\ x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}.$$

Тогда для билинейной формы

$$F(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} x_i y_j \qquad (x = \{x_i\},\quad y = \{y_j\})$$

справедливо равенство

$$\min_{y \in \sigma_n} \max_{x \in \sigma_m} F(x, y) = \max_{x \in \sigma_m} \min_{y \in \sigma_n} F(x, y). \tag{39}$$

С помощью равенства (39) доказывается

Лемма 2. *Пусть задан набор неотрицательных ограниченных функций* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{N}$, $x \in (0, 1)$, *и числа* $R > 0$, $\sigma \in (0, 1)$. *Пусть, далее, для любого набора* $\overline{\xi} = \{\xi_n\}_{n=1}^{N} \in \sigma_N$ *найдется множество* $E_{\overline{\xi}}$ *с* $m(E_{\overline{\xi}}) \geqslant \delta$, *для которого*

$$\int_{E_{\overline{\xi}}} \sum_{n=1}^{N} \xi_n f_n(x) \leqslant R.$$

Тогда существует такая функция $\chi(x)$, $x \in (0, 1)$, *что*

$$\begin{aligned} &1)\quad 0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1, \quad x \in (0, 1);\\ &2)\quad \int_0^1 \chi(x)\, dx \geqslant \delta;\\ &3)\quad \int_0^1 \chi(x) \sum_{n=1}^{N} \xi_n f_n(x)\, dx \leqslant 2R \end{aligned} \tag{40}$$

для любого набора $\overline{\xi} = \{\xi_n\}_{n=1}^{N} \in \sigma_N$.

Доказательство леммы 2. Пусть $\Omega = \{\overline{\xi}^{(1)}, \overline{\xi}^{(2)}, \ldots, \overline{\xi}^{(k)}\} \subset \sigma_N$ – такое множество наборов, что для любого набора $\overline{\xi} = \{\xi_n\}_{n=1}^{N} \in \sigma_N$ найдется такой элемент $\overline{\xi}^{(i)} = \{\xi_n^{(i)}\}_{n=1}^{N} \in \Omega$, что

$$\sum_{n=1}^{N} \int_0^1 |\xi_n - \xi_n^{(i)}| f_n(x)\, dx \leqslant R \tag{41}$$

(существование множества Ω сразу вытекает из компактности σ_N).

Согласно условию леммы 2 для любого $\overline{\xi}^{(i)} \in \Omega$ найдется множество E_i, $m(E_i) \geqslant \delta$, для которого

$$\int_0^1 \chi_{E_i}(x) \sum_{n=1}^{N} \xi_n^{(i)} f_n(x)\, dx \leqslant R, \tag{42}$$

где $\chi_{E_i}(x)$ – характеристическая функция множества E_i.

Для $\overline{\xi} = \{\xi_n\}_{n=1}^N \in \sigma_N$ и $\overline{\eta} = \{\eta_i\}_{i=1}^k \in \sigma_k$ положим

$$F(\overline{\xi}, \overline{\eta}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} \xi_n \eta_i \int_0^1 \chi_{E_i}(x) f_n(x)\, dx$$

и покажем, что для любого $\overline{\xi} \in \sigma_N$

$$\min_{\overline{\eta} \in \sigma_k} F(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \leqslant 2R. \tag{43}$$

В самом деле, пусть $\overline{\xi}^{(i)} \in \Omega$ – набор, для которого выполнено неравенство (41). Тогда (см. (42))

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{N} \xi_n \chi_{E_i}(x) f_n(x)\, dx \leqslant \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} \xi_n^{(i)} \chi_{E_i}(x) f_n(x)\, dx + \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} |\xi_n - \xi_n^{(i)}| f_n(x)\, dx \leqslant 2R,$$

а это значит, что $F(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \leqslant 2R$ при $\overline{\eta} = \{0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0\}$. Оценка (43) доказана. Пользуясь теоремой фон Неймана (см. (39)), из (43) мы выводим, что

$$\min_{\overline{\eta} \in \sigma_k} \max_{\overline{\xi} \in \sigma_N} F(\overline{\xi}, \overline{\eta}) = \max_{\overline{\xi} \in \sigma_N} \min_{\overline{\eta} \in \sigma_k} F(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \leqslant 2R. \tag{44}$$

Пусть $\overline{\eta}^0 = \{\eta_i^0\}_{i=1}^k$ – набор, при котором

$$\max_{\overline{\xi} \in \sigma_N} F(\overline{\xi}, \overline{\eta}^0) = \min_{\overline{\eta} \in \sigma_k} \max_{\overline{\xi} \in \sigma_N} F(\overline{\xi}, \overline{\eta})$$

и

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i^0 \chi_{E_i}(x).$$

Тогда

1) $0 \leqslant \chi(x) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \eta_i^0 = 1, \ x \in (0,1);$

2) $\int_0^1 \chi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \eta_i^0 \int_0^1 \chi_{E_i}(x)\,dx \geqslant \delta \sum_{i=1}^{k} \eta_i^0 = \delta;$

3) в силу (44) и определения набора $\overline{\eta}^0$ для любого $\overline{\xi} = \{\xi_n\} \in \sigma_N$

$$\int_0^1 \chi(x) \sum_{n=1}^{N} \xi_n f_n(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} \xi_n \sum_{i=1}^{k} \eta_i^0 \chi_{E_i}(x) f_n(x)\,dx$$
$$= F(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \leqslant 2R.$$

Функция $\chi(x)$ обладает всеми нужными свойствами. Лемма 2 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству необходимости неравенств (25) в теореме 6. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{f_n\}$ состоит из неотрицательных, ограниченных (каждая своей постоянной) функций. Это проверяется точно так же, как и в теореме 5 (см. рассуждения после соотношения (28)).

Предположим противное, т.е. что существует система абсолютной сходимости $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 \leqslant f_n(x) \leqslant M_n, x \in (0,1), n = 1, 2, \dots)$ такая, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \int_E f_n(x)\,dx = \infty \tag{45}$$
$$\text{для любого} \quad E \subset (0,1), \quad m(E) \geqslant \delta_0 = 1 - \varepsilon_0.$$

а) Покажем, что из (45) следует существование для каждого $k = 1, 2, \dots$ такой последовательности $\overline{\xi}^{(k)} = \{\xi_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ с $\xi_n^{(k)} \geqslant 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(k)} = 1$, что

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(k)} f_n(x)\,dx \geqslant k^2 \tag{46}$$
$$\text{для любого} \quad E \subset (0,1), \quad m(E) \geqslant \delta_0 = 1 - \varepsilon_0.$$

Действительно, в противном случае нашлось бы число k_0 такое, что для любой последовательности $\overline{\xi} = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\xi_n \geqslant 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n = 1$ найдется множество $E_{\overline{\xi}}$ с $m(E_{\overline{\xi}}) \geqslant \delta_0$, для которого

$$\int_{E_{\overline{\xi}}} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f_n(x)\,dx \leqslant k_0^2. \tag{47}$$

Но тогда, фиксировав N и находя для каждого набора $\overline{\xi} = \{\xi_n\} \in \sigma_N$ множество $E_{\overline{\xi}}$ с $m(E_{\overline{\xi}}) \geqslant \delta_0$, для которого верна оценка (47), мы можем затем воспользоваться леммой 2 и выбрать функцию $\chi_N(x)$ $\left(0 \leqslant \chi_N(x) \leqslant 1, \int_0^1 \chi_N(x)\,dx \geqslant \delta_0\right)$ для которой

$$\sup_{\overline{\xi}\in\sigma_N} \sum_{n=1}^{N} \xi_n \int_0^1 \chi_N(x) f_N(x)\,dx \leqslant 2k_0^2,$$

а следовательно, в силу равенства

$$\sup_{\overline{\xi}\in\sigma_N} \sum_{n=1}^{N} a_n\xi_n = \max_{1\leqslant n\leqslant N} a_n, \qquad a_n \geqslant 0, \quad 1 \leqslant n \leqslant N,$$

мы будем иметь, что

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N} \int_0^1 \chi_N(x) f_n(x)\,dx \leqslant 2k_0^2, \qquad N = 1, 2, \dots . \tag{48}$$

Из последовательности $\{\chi_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$, пользуясь слабой компактностью единичного шара в $L^2(0,1)$, а затем леммой 1, можно выбрать подпоследовательность $\chi_{N_s}(x)$, $s = 1, 2, \dots$, слабо сходящуюся в $L^2(0,1)$ к неотрицательной функции $\chi(x)$, для которой при некотором $\gamma > 0$

$$m(E) \geqslant \delta_0 > 0, \quad \text{где} \quad E = \{x \in (0,1) : \chi(x) \geqslant \gamma\}.$$

Тогда, в силу слабой сходимости функций $\chi_{N_s}(x)$ к $\chi(x)$ и неравенств (48), мы находим

$$\sup_{1\leqslant n<\infty} \int_E f_n(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\gamma} \sup_{1\leqslant n<\infty} \int_0^1 \chi(x) f_n(x)\,dx \leqslant \frac{2k_0^2}{\gamma} < \infty, \ m(E) \geqslant \delta_0,$$

что противоречит предположению о справедливости равенства (45). Тем самым мы показали, что предположение (45) влечет существование последовательностей $\overline{\xi}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, для которых верны неравенства (46).

б) Определим последовательность $\{\xi_n^0\}_{n=1}^{\infty}$, положив

$$\xi_n^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_n^{(k)}}{k^2}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

где для $\{\xi_n^{(k)}\}$ выполнены неравенства (46), и рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^0 f_n(x). \tag{49}$$

В силу (46) для любого множества $E \subset (0,1)$, $m(E) \geqslant \delta_0$, мы имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \int_E \xi_n^0 f_n(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_n^{(k)}}{k^2} \int_E f_n(x)\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(k)} \int_E f_n(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty. \end{aligned}\tag{50}$$

Из (50) следует, что ряд (49) расходится на множестве положительной меры,[2)] хотя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^0 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

что противоречит тому, что $\{f_n\}$ – система абсолютной сходимости. Полученное противоречие опровергает предположение (45) и завершает доказательство теоремы 6.

§ 3. Структура систем сходимости по мере для l^2

Определение 3. Система измеримых функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, называется *системой сходимости по мере для* l^2, если всякий ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \tag{51}$$

сходится по мере на $(0,1)$.

Теорема 7. *Для того чтобы система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являлась системой сходимости по мере для l^2, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$, $m(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$, и*

[2)] Так как для каждого сходящегося п.в. ряда с положительными членами найдется множество E_0, $m(E_0) \geqslant \delta_0$, на котором сумма ряда равномерно ограничена, а тогда для $E = E_0$ оценка (50) не может иметь места.

постоянная C_ε такие, что всякий ряд вида (51) *сходится в $L^2(E_\varepsilon)$ и справедливо неравенство*

$$\sup_{\{a_n\}:\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2=1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n \right\|_{L^2(E_\varepsilon)} \leqslant C_\varepsilon. \tag{52}$$

Из теоремы 1 и теоремы 7 непосредственно вытекает такое описание систем сходимости по мере для l^2.

Следствие 2. *Для того чтобы система $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являлась системой сходимости по мере для l^2, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$, $m(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$, постоянная C_ε и ортонормированная на отрезке $(0,1)$ система функций $\Psi_\varepsilon = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что*

$$\varphi_n(x) = C_\varepsilon\psi_n(x), \qquad n=1,2,\ldots, \quad x\in E_\varepsilon.$$

Доказательство теоремы 7. а) Пусть для системы функций $\Phi = \{\varphi_n\}$ при $\varepsilon = 1/2, 1/3, \ldots$ найдется такое множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$, $m(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$, что любой ряд вида (51) сходится в $L^2(E_\varepsilon)$. Тогда очевидно, что этот ряд сходится по мере на E_ε, $\varepsilon = 1/2, 1/3, \ldots$, и следовательно, сходится по мере на $(0,1)$, т.е. Φ – система сходимости по мере для l^2.

б) Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}$ – система сходимости по мере для l^2. Рассмотрим последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ – совокупность всех (занумерованных произвольным образом) квадратов полиномов по системе Φ с рациональными коэффициентами из единичного шара пространства l^2, т.е.

$$f_k(x) = \left\{\sum_{n=1}^{N_k} a_n^k\varphi_n(x)\right\}^2, \qquad \sum_{n=1}^{N_k}(a_n^k)^2 \leqslant 1,$$

a_n^k – рациональное число.

Ниже мы используем обозначение

$$a^k = \{a_n^k\}_{k=1}^{N_k}, \quad P_k(x) = \sum_{n=1}^{N_k} a_n^k\varphi_n(x), \qquad k=1,2,\ldots. \tag{53}$$

Для завершения доказательства теоремы 7 нам достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$, $m(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$, и постоянная C_ε такие, что

$$\sup_{1\leqslant k<\infty} \int_{E_\varepsilon} f_k(x)\,dx \leqslant C_\varepsilon. \tag{54}$$

В самом деле, если оценки (54) доказаны, то и для любого полинома

$$P(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \leqslant 1,$$

из соображений непрерывности мы получим, что

$$\int_{E_\varepsilon} P^2(x)\,dx \leqslant C_\varepsilon,$$

откуда легко вывести, что всякий ряд (50) сходится в $L^2(E_\varepsilon)$ и

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)\right\|_{L^2(E_\varepsilon)} \leqslant C_\varepsilon\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right\}^{1/2}.$$

В силу теоремы 6 оценки (54) (а следовательно, и теорема 7) будут доказаны, если мы проверим, что имеет место

Лемма 1. *Система $\{f_k\}$ – система абсолютной сходимости.*

Для получения леммы 1 нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 2. *Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система сходимости по мере для l^2, а последовательность $b^k = \{b_n^k\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$, $k = 0, 1, \ldots$, такова, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|b^k - b^0\|_{l^2} = 0$. Тогда последовательность функций $g_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^k\varphi_n(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, сходится по мере к функции $g_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^0\varphi_n(x)$.*

Доказательство леммы 2. Не ограничивая общности, можно считать, что $b^0 \equiv 0$. Пусть, напротив, последовательность $\{g_k\}$ не сходится по мере к нулевой функции, хотя $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|b^k\right\|_{l^2} = 0$. Это значит, что найдутся числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и подпоследовательность номеров $\{k_s\}_{s=1}^{\infty}$ такие, что при $s = 1, 2, \ldots$

$$1)\ \ m\big\{x \in (0,1) : |g_{k_s}(x)| > \varepsilon\big\} > \delta; \qquad 2)\ \ \|b^{k_s}\|_{l^2} \leqslant \frac{1}{s^2}. \tag{55}$$

В силу оценки (55), 1) и сходимости по мере ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^k\varphi_n(x)$ мы можем найти такие числа N_s, $s = 1, 2, \ldots$, что

$$m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=1}^{N_s} b_n^{k_s}\varphi_n(x)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} > \frac{\delta}{2}, \qquad s = 1, 2, \ldots. \tag{56}$$

Кроме того, из неравенств (55), 2) следует, что если число N фиксировано, то $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n^k \varphi_n(x) \to 0$ по мере при $s \to \infty$, а значит, найдется такая последовательность N_s', $s = 1, 2, \ldots, N_s' \leqslant N_s$, $\lim\limits_{s\to\infty} N_s' = \infty$, что

$$m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=N_s'}^{N_s} b_n^{k_s}\varphi_n(x)\right| > \frac{\varepsilon}{3}\right\} > \frac{\delta}{3}, \qquad s = 1, 2, \ldots. \tag{57}$$

Возьмем последовательность целых чисел $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$, растущую так быстро, что $N_{s_j} < N_{s_{j+1}}'$ при $j = 1, 2, \ldots$, и положим

$$\beta_n = \begin{cases} b_n^{k_{s_j}}, & \text{если } N_{s_j}' \leqslant n \leqslant N_{s_j},\ j = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{для остальных } n. \end{cases}$$

Тогда из (57) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n\varphi_n(x)$ не сходится по мере на $(0, 1)$, хотя

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \|b^{k_s}\|_{l^2}^2 < \infty,$$

т.е. Φ не является системой сходимости по мере для l^2. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Пусть* $\{a^k\}_{k=1}^{\infty} \subset l^2$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|a^k\|_{l^2}^2 < \infty$. *Тогда для п.в.* $t \in (0, 1)$ *сходится в* l^2 *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)a^k,$$

где $\{r_k(t)\}$ *– система Радемахера.*

Лемма 3 непосредственно вытекает из изоморфизма пространств l^2 и $L^2(0, 1)$ и следствия 2.5.

Доказательство леммы 1. Пусть дана произвольная последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty$. Рассмотрим ряд в l^2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)|\xi_k|^{1/2}a^k, \tag{58}$$

где a^k, $k = 1, 2, \ldots$, определены в (53). Так как $\|a^k\|_{l^2} \leqslant 1$ при $k = 1, 2, \ldots$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\xi_k^{1/2} a^k\|_{l^2}^2 < \infty$ и в силу леммы 3 ряд (58) сходится в l^2 для п.в. $t \in (0,1)$. Но тогда, по лемме 2 (см. также (53)), для п.в. $t \in (0,1)$ сходится по мере ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) |\xi_k|^{1/2} P_k(x),$$

откуда, пользуясь теоремой 2.11, мы выводим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} [|\xi_k|^{1/2} P_k(x)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_k f_k(x)| < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1).$$

Лемма 1, а следовательно, и теорема 7 доказаны.

§ 4. Свойства оператора мажоранты частных сумм

Напомним, что О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, называется *системой сходимости*, если всякий ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \tag{59}$$

сходится п.в. на $(0,1)$ (см. определение 1.2). Системами сходимости являются, к примеру, системы Радемахера, Хаара, Уолша и тригонометрическая система.

Каждая система сходимости Φ порождает оператор мажоранты частных сумм $S_\Phi^* \colon l^2 \to L^0(0,1)$ (см. 1.(5)):

$$S_\Phi^*(a) = S_\Phi^*(a,x) = \sup_{1 \leqslant N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) \right|, \qquad a = \{a_n\} \in l^2. \tag{60}$$

Задача о сходимости рядов п.в. – одна из наиболее интересных тем в теории ортогональных рядов, а большинство полученных по этой теме результатов можно сформулировать как утверждения о свойствах оператора S_Φ^*. Поэтому операторы S_Φ^* как для конкретных, так и для общих систем Φ, достаточно подробно изучаются в книге.

В этом параграфе выясняется, какими дополнительными свойствами обладает оператор S_Φ^*, порожденный произвольной системой сходимости.

В главе 9 (см. следствие 9.1) будет построена О.Н.С., которая не является системой сходимости. В основе этого построения лежит следующий факт, обнаруженный Д. Е. Меньшовым (см. лемму 1 из теоремы 9.2):

Для каждого $N = 1, 2, \ldots$ найдется такая О.Н.С. $\Psi_0(N) = \{\psi_n^N(x)\}_{n=1}^N$, $x \in (0,1)$, что

$$m\left\{x \in (0,1) : \max_{1 \leqslant j \leqslant N}\left|\sum_{n=1}^{j} \psi_n^N(x)\right| > c_0 N^{1/2} \ln N\right\} \geqslant \frac{1}{4}, \tag{61}$$

где $c_0 > 0$ – абсолютная постоянная.

Отложив доказательство оценки (61) до гл. 9, мы используем ее здесь для получения следующего результата.

Теорема 8. *Существует О.Н.С. сходимости* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *такая, что для некоторой последовательности* $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$

$$S_\Phi^*(a) \notin \bigcup_{p>0} L^p(0,1).$$

Доказательство. Обозначим через ω_k при $k = 0, 1, \ldots$ интервал $\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+1}\right)$, а через M_k – число $2^{2^{k+1}} - 2^{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots$. Систему Φ определим, положив при $n \in [2^{2^k}, 2^{2^{k+1}} - 1]$, $k = 0, 1, \ldots$

$$\varphi_{n-1}(x) = \begin{cases} [(k+1)(k+2)]^{1/2} \psi^{M_k}_{n+1-2^{2^k}}\left[(k+1)(k+2)\left(x - \frac{1}{k+2}\right)\right] \\ \quad \text{при } x \in \omega_k, \\ 0 \ \text{при } x \notin \omega_k. \end{cases}$$

Иными словами, функции $\varphi_n(x)$ с номерами от $2^{2^k} - 1$ до $2^{2^{k+1}} - 2$ образуют набор $\Psi_0(M_k)$ (см. (61)), перенесенный преобразованием подобия (с сохранением нормы в $L^2(0,1)$) с интервала $(0,1)$ на ω_k.

Ясно, что для любого $x \in (0,1)$ $\varphi_n(x) = 0$ при $n > n(x)$, поэтому система Φ является системой сходимости.

Определим последовательность $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$, положив

$$a_n = \frac{1}{k+1} M_k^{-1/2} \quad \text{для} \quad 2^{2^k} - 1 \leqslant n \leqslant 2^{2^{k+1}} - 2, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

В то же время, используя неравенство (61), мы находим, что при любом $p > 0$

$$\int_0^1 [S_\Phi^*(a,x)]^p\,dx \geqslant \sup_{k\geqslant 0} \int_{\omega_k} [S_\Phi^*(a,x)]^p\,dx$$
$$\geqslant \sup_{k\geqslant 0} (C\,2^k)^p \frac{1}{4(k+1)(k+2)} = \infty.$$

Теорема 8 доказана.

Из теоремы 8 следует, что S_Φ^* не является, вообще говоря, ограниченным оператором в $L^p(0,1)$. Следующий результат, основанный на теореме 5, имеет противоположный характер и показывает, что для любой системы сходимости оператор S_Φ^* есть ограниченный оператор из l^2 в $L^p(E_\varepsilon)$ для любого $p < 2$ и некоторого множества $E_\varepsilon \subset (0,1)$ с $m(E_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon$.

Теорема 9. *Пусть О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in (0,1)$, – система сходимости. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$ с $m(E_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon$ и постоянная C_ε такие, что*

$$m\{x \in E_\varepsilon : S_\Phi^*(a,x) > y\} \leqslant \frac{C_\varepsilon}{y^2} \sum_{n=1}^\infty a_n^2$$

для любой последовательности $a = \{a_n\} \in l^2$ и любого $y > 0$.

Лемма 1. *Пусть О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n\}$ – система сходимости, а последовательность $a^k = \{a_n^k\}_{n=1}^\infty \in l^2$, $k = 1, 2, \dots$, такова, что*

$$\sum_{k=1}^\infty \|a^k\|_{l^2}^2 < \infty.$$

Тогда для п.в. $x \in (0,1)$

$$\lim_{k\to\infty} S_\Phi^*(a^k, x) = 0.$$

Доказательство. Покажем, что в условиях леммы

$$\varlimsup_{k\to\infty} S_\Phi^*(a^k,x) < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1). \tag{62}$$

Применяя затем оценку (62) к последовательности $\widetilde{a}^k = \lambda_k a^k$, $k = 1, 2, \dots$, где числа $\lambda_k > 0$ таковы, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$, но $\sum\limits_{k=1}^\infty \|\widetilde{a}^k\|_{l^2}^2 < \infty$, и учитывая, что $S_\Phi^*(\widetilde{a}^k) = \lambda_k S_\Phi^*(a^k)$, мы получим утверждение леммы 1.

Пусть $N_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, – такая измеримая, целочисленная, ограниченная ($N_k(x) < M_k$ для $x \in (0,1)$) функция, что

$$\left|\sum_{n=1}^{N_k(x)} a_n^k \varphi_n(x)\right| > \frac{1}{2}\, S_\Phi^*(a^k, x) \quad \text{для} \quad x \in (0,1) \setminus E_k, \quad m(E_k) < 2^{-k}. \tag{63}$$

Положим затем при $k, m = 1, 2, \ldots$

$$S_{k,m}(x) = \sum_{n=1}^{N_k(x)} a_n^m \varphi_n(x).$$

Из (63) следует, что для любого $x \in G := (0,1) \setminus \varlimsup\limits_{k\to\infty} E_k$ можно найти такое число $k(x)$, что

$$|S_{k,k}(x)| > \frac{1}{2} S_\Phi^*(a^k, x) \quad \text{при} \quad k > k(x),$$

и так как $m(G) = 1$ (см. (63)), то соотношение (62), а следовательно, и лемма 1 будут доказаны, если мы проверим, что

$$\varlimsup_{k\to\infty} |S_{k,k}(x)| < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1). \tag{64}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_n^m r_m(t) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_n^m r_m(t)\right] \varphi_n(x) =: \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(x), \tag{65}$$

где $r_m(t)$ – функции Радемахера. По условию леммы $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} (a_n^m)^2 < \infty$, поэтому ряд в левой части соотношения (65) сходится (при любом порядке суммирования) в $L^2((0,1) \times (0,1))$, а ряды $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_n^m r_m(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходятся в $L^2(0,1)$.

В силу ортонормированности системы Радемахера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 c_n^2(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_n^m)^2 < \infty,$$

откуда по теореме Б. Леви выводим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(t) < \infty \quad \text{для п.в.} \quad t \in (0,1). \tag{66}$$

Так как Φ – система сходимости, то из (66) следует, что

$$A(t,x) := \sup_{1\leqslant N<\infty}\left|\sum_{n=1}^{N} c_n(t)\varphi_n(x)\right| < \infty \quad \text{п.в. на} \quad (0,1)\times(0,1). \tag{67}$$

При $k = 1,2,\dots$ рассмотрим суммы

$$F_k(t,x) := \sum_{n=1}^{N_k(x)} c_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{N_k(x)}\left[\sum_{m=1}^{\infty} a_n^m r_m(t)\right]\varphi_n(x)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} r_m(t) \sum_{n=1}^{N_k(x)} a_n^m \varphi_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} r_m(t) S_{k,m}(x). \tag{68}$$

(Равенство (68) справедливо для п.в. точек $(t,\ x)$ квадрата $(0,1)\times(0,1)$.) Обоснование перемены порядка суммирования в (68) не составляет труда, если использовать ограниченность функции $N_k(x)$ и вытекающую из теоремы 2.9 сходимость для п.в. $t\in(0,1)$ рядов $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_n^m r_m(t)$, $n = 1,2,\dots$.

Из соотношений (68) и (67) мы получаем, что при $k = 1,2,\dots$

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} r_m(t) S_{k,m}(x)\right| \leqslant A(t,x) < \infty \quad \text{п.в. на} \quad (0,1)\times(0,1). \tag{69}$$

Фиксируем произвольное число α, $0<\alpha<1$, и найдем такую постоянную N_α, что плоская мера

$$m_2(G_\alpha) := m_2\big\{(t,x)\in(0,1)\times(0,1) : A(t,x) < N_\alpha\big\} > 1-\alpha^2.$$

Тогда легко видеть, что

$$m(P_\alpha) \geqslant 1-\alpha, \tag{70}$$

где

$$P_\alpha = \big\{x\in(0,1) : m\{t\in(0,1) : (t,x)\in G_\alpha\} > 1-\alpha\big\}.$$

Для каждого $x\in P_\alpha$, в силу (69), при $k = 1,2,\dots$

$$m\left\{t\in(0,1) : \left|\sum_{m=1}^{\infty} r_m(t) S_{k,m}(x)\right| \geqslant N_\alpha\right\} \leqslant \alpha.$$

Отсюда, в силу теоремы 2.8 при $\alpha < c_1$ (где c_1 – постоянная из теоремы 2.8), мы получаем, что при $x\in P_\alpha$ и $k = 1,2,\dots$

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_{k,m}^2(x) \leqslant (4N_\alpha)^2,$$

а поэтому и

$$S^2_{k,k}(x) \leqslant (4N_\alpha)^2, \ \alpha < c_1, \ x \in P_\alpha, \quad m(P_\alpha) \geqslant 1-\alpha, \ k = 1,2,\ldots. \quad (71)$$

Так как число α в (71) может быть взято сколь угодно малым, то из (71) вытекает нужная нам оценка (64). Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 9. Пусть $\{a^k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность элементов пространства l^2, плотная в единичном шаре этого пространства ($a^k = \{a^k_n\}_{n=1}^\infty$, $\|a^k\|_{l^2} \leqslant 1$).

Пусть, далее, $\{\xi_k\}$, $\sum\limits_{k=1}^\infty |\xi_k| < \infty$, – произвольная последовательность из l^1. Тогда, положив $b^k = |\xi_k|^{1/2} a^k$, $k = 1,2,\ldots$, мы будем иметь

$$\sum_{k=1}^\infty \|b^k\|^2_{l^2} = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|\,\|a^k\|^2_{l^2} < \infty,$$

откуда в силу леммы 1 вытекает, что для п.в. $x \in (0,1)$

$$\lim_{k\to\infty} |\xi_k|^{1/2} S^*_\Phi(a^k, x) = \lim_{k\to\infty} S^*_\Phi(b^k, x) = 0. \quad (72)$$

Возводя в квадрат левую и правую части соотношения (72), мы получаем, что для любой последовательности $\{\xi_k\}$, $\sum\limits_{k=1}^\infty |\xi_k| < \infty$,

$$\lim_{k\to\infty} |\xi_k| [S^*_\Phi(a^k, x)]^2 = 0 \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1),$$

т.е. система функций $[S^*_\Phi(a^k, x)]^2$ – A-система.

Теперь мы можем воспользоваться теоремой 5 и для любого $\varepsilon > 0$ найти множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$, $m(E_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon$, и постоянную C_ε такие, что при $k = 1,2,\ldots$ и $y > 0$

$$m\{x \in E_\varepsilon : [S^*_\Phi(a^k, x)]^2 > y\} \leqslant \frac{C_\varepsilon}{y},$$

или, что то же самое,

$$m\{x \in E_\varepsilon : S^*_\Phi(a^k, x) > y\} \leqslant \frac{C_\varepsilon}{y^2}, \qquad y > 0. \quad (73)$$

Но тогда из соображений непрерывности следует, что и для любой последовательности $a = \{a_n\} \in l^2$ с $\|a\|_{l^2} \leqslant 1$ и любой ограниченной, целочисленной, измеримой функции $N(x)$ справедлива оценка

$$m\left\{x \in E_\varepsilon : \left|\sum_{n=1}^{N(x)} a_n \varphi_n(x)\right| > y\right\} \leqslant \frac{C_\varepsilon}{y^2}, \qquad y > 0. \quad (74)$$

В самом деле, легко видеть, что если $\lim\limits_{s\to\infty} \|a^{k_s} - a\|_{l^2} = 0$, то

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{n=1}^{N(x)} a_n^{k_s} \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{N(x)} a_n \varphi_n(x)$$

по мере. Из (74) сразу получаем, что

$$m\{x \in E_\varepsilon : S_\Phi^*(a,x) > y\} \leqslant \frac{C_\varepsilon}{y}, \quad y > 0, \ \|a\|_{l^2} \leqslant 1, \ m(E_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon. \quad (75)$$

Учитывая, наконец, что $S_\Phi^*(a) = \|a\|_{l^2} S_\Phi^*(a/\|a\|_{l^2})$, мы из оценки (75) выводим утверждение теоремы 9.

При сравнении теорем 7 и 9 естественно возникает вопрос о возможности усиления теоремы 9, т.е. о том, можно ли всегда найти множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$, $m(E_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$, для которого мажоранта $S_\Phi^*(a) \in L^2(E_\varepsilon)$ при всех $a \in l^2$. Ответ на этот вопрос отрицательный, точнее, имеет место такой результат:

Существует О.Н.С. сходимости $\Phi_0 = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in (0,1)$, такая, что для любого множества $E \subset (0,1)$ с $m(E) > 0$ найдется последовательность $a = \{a_n\} \in l^2$, для которой

$$S_\Phi^*(a) \notin L^2(E).$$

Доказательство этого утверждения (опирающееся на неравенство (61)) мы изложим в гл. 11 (см. теорему 11.3).

Отметим, что в главе 11 будет выяснена важность для задач о представлении измеримых функций ортогональными рядами по системе Φ вопроса о том, можно или нет для системы Φ получать оценки мажоранты $S_\Phi^*(a)$ по норме пространства L^2.

Глава 9

Теоремы о сходимости общих ортогональных рядов

Наличие содержательных общих утверждений "положительного" характера о сходимости ортогональных рядов является одним из основных аргументов в пользу целесообразности систематического изучения свойств ортонормированных систем, а каждое такое утверждение представляет значительный интерес. В этой главе приводится ряд ставших уже классическими теорем о сходимости п.в. общих ортогональных рядов (см., например, теоремы 1, 4, 5) и в некоторых случаях доказывается их неусиляемость. Кроме того, рассматриваются вопросы о свойствах проинтегрированных О.Н.С. и о возможности выделить из данной О.Н.С. подсистему с некоторыми "хорошими" свойствами.

§ 1. Сходимость почти всюду ортогональных рядов

Теорема 1. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, – *произвольная О.Н.С. Тогда для п.в.* $x \in (0,1)$ *сходится всякий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log_2^2(n+1) < \infty. \tag{2}$$

Более того, если $S_\Phi^*(a,x)$ $(a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ – *мажоранта частных сумм ряда* (1) (см. определение 1.1), *то при условии* (2) *имеет место оценка*

$$\|S_\Phi^*(a,x)\|_2 \leqslant CL^{1/2}, \tag{3}$$

где C – *абсолютная постоянная.*

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}$ – *О.Н.С. Для любого набора чисел* $\{a_n\}_{n=1}^N$ *имеет место неравенство*

$$\int_0^1 \delta^2(x)\,dx \leqslant K\left(\sum_{n=1}^N a_n^2\right)\log_2^2(N+1),$$

$$\delta(x) := \max_{1\leqslant j\leqslant N}\left|\sum_{n=1}^j a_n\varphi_n(x)\right|,$$

где K – *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $N = 2^r$, $r = 1, 2\ldots$ (положив $a_n = 0$ при $N < n \leqslant 2^r$ в случае, когда $2^{r-1} < N < 2^r$).

Для каждого j, $j = 1, 2, \ldots, 2^r$, рассмотрим запись числа j в двоичной системе счисления:

$$j = \sum_{k=0}^r \varepsilon_k 2^{r-k}, \qquad \varepsilon_k = \varepsilon_k(j) = 0 \text{ или } 1, \quad k = 0, 1, \ldots, r.$$

Ясно, что тогда любую сумму чисел вида $\sum\limits_{n=1}^j b_n$ можно представить так:

$$\sum_{n=1}^j b_n = \sum_{k:\,\varepsilon_k\neq 0}\ \sum_{\sum\limits_{s=0}^{k-1}\varepsilon_s 2^{r-s} < n \leqslant \sum\limits_{s=0}^{k}\varepsilon_s 2^{r-s}} b_n, \tag{4}$$

откуда, воспользовавшись неравенством Коши, мы получаем, что

$$\left|\sum_{n=1}^l b_n\right|^2 \leqslant (r+1)\sum_{k:\,\varepsilon_k\neq 0}\left(\sum_{\sum_{s=0}^{k-1}\varepsilon_s 2^{r-s} < n \leqslant \sum_{s=0}^{k}\varepsilon_s 2^{r-s}} b_n\right)^2$$

$$\leqslant (r+1)\sum_{k=0}^r\sum_{p=0}^{2^k-1}\left(\sum_{n=p2^{r-k}+1}^{(p+1)2^{r-k}} b_n\right)^2.$$

Применив последнее неравенство к оценке суммы $\left|\sum\limits_{n=1}^{j(x)} a_n\varphi_n(x)\right|$, где функция $j(x)$ выбрана так, что

$$\left|\sum_{n=1}^{j(x)} a_n\varphi_n(x)\right| = \delta(x), \qquad x \in (0,1),$$

получим

$$\delta^2(x) \leqslant (r+1) \sum_{k=0}^{r} \sum_{p=0}^{2^k-1} \left[\sum_{n=p2^{r-k}+1}^{(p+1)2^{r-k}} a_n \varphi_n(x) \right]^2. \tag{5}$$

Интегрируя неравенство (5) и пользуясь ортонормированностью функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, мы находим

$$\int_0^1 \delta^2(x)\, dx \leqslant (r+1) \sum_{k=0}^{r} \sum_{n=1}^{N} a_n^2 = (r+1)^2 \sum_{n=1}^{N} a_n^2 = (1+\log_2 N)^2 \sum_{n=1}^{N} a_n^2.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Покажем сначала, что для п.в. $x \in (0,1)$ сходится последовательность

$$S_{2^k}(a,x) = \sum_{n=1}^{2^k} a_n \varphi_n(x), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и оценим норму в $L^2(0,1)$ функции $S'(a,x) := \sup\limits_{0 \leqslant k < \infty} |S_{2^k}(a,x)|$.

Пусть

$$\Psi_k(x) := \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \varphi_n(x), \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Тогда $\|\Psi_k\|_2^2 = \sum\limits_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n^2$ и, в силу (2), $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|\Psi_k\|_2^2 (k+1)^2 \leqslant 2L$, а потому

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \|\Psi_k\|_1 &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|\Psi_k\|_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|\Psi_k\|_2 (k+1)(k+1)^{-1} \\ &\leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \|\Psi_k\|_2^2 (k+1)^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{-2} \right\}^{1/2} \leqslant 2L^{1/2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из неравенства (6) и теоремы Б. Леви вытекает, что для п.в. $x \in (0,1)$ сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\Psi_k(x)|$, а следовательно, и последовательность $S_{2^k}(a,x)$, $k = 0, 1, \ldots$. Кроме того, $S'(a,x) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\Psi_k(x)|$, $x \in (0,1)$, откуда (см. (6)) мы находим

$$\|S'(a,x)\|_2 \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{\infty} |\Psi_k| \right\|_2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|\Psi_k\|_2 \leqslant 2L^{1/2}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$S''(a,x) := \sup_{0<k<\infty} \delta_k(x),$$

$$\delta_k(x) := \max_{2^k \leqslant j < 2^{k+1}} \left| \sum_{n=2^k}^{j} a_n \varphi_n(x) \right|, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

В силу леммы 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \delta_k^2(x)\, dx \leqslant K \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^2 \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n^2 \leqslant 2KL, \tag{8}$$

откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k(x) = 0$ для п.в. $x \in (0,1)$, что вместе с доказанной ранее сходимостью п.в. на $(0,1)$ последовательности $S_{2^k}(a,x)$, $k = 0, 1, \dots$, гарантирует сходимость п.в. на $(0,1)$ ряда (1). Кроме того, так как

$$S_\Phi^*(a,x) \leqslant S'(a,x) + S''(a,x), \qquad x \in (0,1),$$

и $[S''(a,x)]^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k^2(x)$, то, учитывая неравенства (7) и (8), мы получаем

$$\|S_\Phi^*(a,x)\|_2 \leqslant \|S'(a,x)\|_2 + \|S''(a,x)\|_2 \leqslant 2L^{1/2} + (2KL)^{1/2} = CL^{1/2}.$$

Теорема 1 доказана.

Определение 1. Последовательность чисел $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, $1 = \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots$, называется *множителем Вейля для сходимости п.в. рядов по О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, если сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n$$

гарантирует сходимость п.в. ряда (1).

Привлекая понятие множителя Вейля, результат, полученный в теореме 1, можно сформулировать так: *последовательность* $\omega_n = \log_2^2(n+1)$, $n = 1, 2, \dots$, *является множителем Вейля для сходимости п.в. рядов по любой О.Н.С.* Как показывает следующее утверждение, теорема 1 точна.

Теорема 2. *Существует О.Н.С. $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, такая, что для каждой последовательности $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $1 = \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots$ и $\omega_n = o(\log_2^2 n)$ при $n \to \infty$ найдется расходящийся п.в. ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty. \tag{9}$$

Следствие 1. *Существует расходящийся п.в. ортогональный ряд с коэффициентами из l^2.*

В основе доказательства теоремы 2 лежит следующая

Лемма 1. *Существует такая постоянная $c_0 > 0$, что для каждого $N = 1, 2, \ldots$ найдется ортонормированный набор функций $\Psi(N) = \{\psi_k^N\}_{k=1}^{N}$, $x \in (0,1)$, для которого*

$$m\left\{x \in (0,1) : \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \left|\sum_{k=1}^{j} \psi_k^N(x)\right| > c_0 N^{1/2} \log_2 N\right\} \geqslant \frac{1}{4} \tag{10}$$

и, кроме того,

$$\psi_k^N(x) \in \mathscr{D}_{4N} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \psi_k^N(x)\,dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{11}$$

Доказательство. Фиксируем число $N > 1$ и обозначим через $\chi(x)$ функцию $\chi(x) = \operatorname{sign} \sin 4N\pi x$, $x \in (0,1)$. Определим сначала набор $\Psi(N)$ на интервале $(0, \frac{1}{2})$. Для этого разобьем интервал $(0, \frac{1}{2})$ на N равных частей:

$$I_s = \left(\frac{s-1}{2N}, \frac{s}{2N}\right), \qquad s = 1, 2, \ldots, N,$$

и положим

$$\psi_k^N(x) := \begin{cases} \chi(x) \dfrac{\gamma N^{1/2}}{s-k} & \text{для } x \in I_s,\ s \neq k, \\ 0 & \text{для } x \in I_k, \end{cases} \qquad 1 \leqslant s, k \leqslant N, \tag{12}$$

где не зависящая от N постоянная $\gamma > 0$ будет указана позднее.

Учитывая, что $|\chi(x)| = 1$ для п.в. $x \in (0,1)$, мы получаем[1)]

$$I_N := \sup_{\{a_k\}\in B_2^N} \Big\| \sum_{k=1}^N a_k \psi_k^N \Big\|_{L^2(0,1/2)} = \sup_{\{a_k\}\in B_2^N} \Big\| \sum_{k=1}^N a_k \chi(x) \psi_k^N \Big\|_{L^2(0,1/2)}$$
$$= \gamma N^{1/2} \sup_{\{b_s\}\in B_2^N} \sup_{\{a_k\}\in B_2^N} (2N)^{-1/2} \sum_{s=1}^N b_s \sum_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^N \frac{a_k}{s-k}$$
$$= \frac{\gamma}{2} \sup_{\{b_s\}\in B_2^N} \sup_{\{a_k\}\in B_2^N} \sum_{\substack{s,k=1\\ k\neq s}}^N \frac{a_k b_s}{s-k}.$$

Пользуясь оценкой нормы матрицы Гильберта, полученной в гл. 5 (см. 5 (24)), выберем постоянную $\gamma > 0$ так, чтобы при $N = 2,3,\dots$ выполнялось неравенство $I_N < 1$. Применяя затем теорему об ортогонализации (см. теорему 8.1 и замечание после этой теоремы), мы сможем так выбрать функции $\psi_k^N(x)$, $x \in (\frac12, 1)$, $k = 1,2,\dots$, чтобы набор $\Psi(N) = \{\psi_k^N(x)\}_{k=1}^N$ стал ортонормированным на $(0,1)$ и, кроме того, функции $\psi_k^N(x)$, $x \in (\frac12, 1)$, имели вид $\psi_k^N(x) = \chi(x)\widetilde{\psi}_k^N(x)$, где $\widetilde{\psi}_k^N$, $k = 1,2,\dots,N$, постоянны на каждом из интервалов

$$\left(\frac{s-1}{2N}, \frac{s}{2N}\right), \qquad s = N+1, N+2, \dots, 2N.$$

Тогда при $k = 1,2,\dots,N$ функции $\psi_k^N \in \mathscr{D}_{4N}$ (при надлежащем определении в точках $s/(4N)$, $s = 0,1,\dots,4N$, что для нас несущественно) и $\int_0^1 \psi_k^N(x)\,dx = 0$, так как для любого $s = 1,2,\dots,2N$ и $k = 1,2,\dots,N$

$$\int_{(s-1)/(2N)}^{s/(2N)} \psi_k^N(x)\,dx = C \int_{(s-1)/(2N)}^{s/(2N)} \chi(x)\,dx = 0.$$

Докажем справедливость оценки (10). Для этого положим $j(x) = s$ при $x \in I_s$, $s = 1,2,\dots,N$. Тогда для $x \in I_s$, $s = 1,2,\dots,N$,

$$\Big|\sum_{k=1}^{j(x)} \psi_k^N(x)\Big| = \gamma N^{1/2} \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{s-k} = \gamma N^{1/2} \sum_{p=1}^{s-1} \frac{1}{p} \geqslant \mathrm{c} N^{1/2} \log_2 s. \tag{13}$$

[1)] Напомним, что $B_2^N = \Big\{\{a_k\}_{k=1}^N : \sum\limits_{k=1}^N a_k^2 \leqslant 1\Big\}$.

Из неравенства (13) вытекает, что для п.в. $x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

$$\left|\sum_{k=1}^{j(x)} \psi_k^N(x)\right| > c_0 N^{1/2} \log_2 N.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Продолжим построенные в лемме 1 функции $\psi_k^N(x)$, $k = 1, 2, \dots, N$, $N = 2, 3, \dots$, с периодом 1 с отрезка $[0, 1]$ на всю ось. Определим последовательность целых чисел R_q, $q = 0, 1, \dots$:

$$R_0 = 1, \qquad R_{q+1} = 4^{q+1} R_q, \quad q = 0, 1, \dots, \tag{14}$$

и положим $\psi_1(x) = 1$, $x \in (0, 1)$, и если $n = 2^q + m$, $0 \leqslant m \leqslant 2^q - 1$, $q = 1, 2, \dots$, то

$$\psi_n(x) = \psi_{m+1}^{2^q}(R_q x), \qquad x \in (0, 1). \tag{15}$$

Мы покажем, что система $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет требованиям теоремы 2. Прежде всего проверим, что Ψ – О.Н.С. Если $2^q \leqslant n, n' < 2^{q+1}$, $q = 1, 2, \dots$, то непосредственно из леммы 1 и (15) вытекает, что

$$\int_0^1 \psi_n(x)\psi_{n'}(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{при } n = n', \\ 0 & \text{при } n \neq n'. \end{cases}$$

Если же $n' < 2^q \leqslant n < 2^{q+1}$, $q = 1, 2, \dots$, то, учитывая, что функция $\psi_n(x)$ имеет период, равный R_q^{-1} и $\int_0^1 \psi_n(x)\,dx = 0$ (см. (11)), а функция $\psi_{n'}(x)$ постоянна на любом интервале вида $\left(\frac{i-1}{N_{q-1}}, \frac{i}{N_{q-1}}\right)$, где $N_{q-1} = 4 \cdot 2^{q-1} R_{q-1} = 2^{-(q-1)} R_q$ (см. (11), (14) и (15)), мы находим, что

$$\int_0^1 \psi_{n'}(x)\psi_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N_{q-1}} c_i \int_{(i-1)/N_{q-1}}^{i/N_{q-1}} \psi_n(x)\,dx = 0.$$

Пусть задана последовательность $\{\omega_n\}$ с $\omega_n = o(\log_2^2 n)$ при $n \to \infty$ $(1 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots)$. Тогда можно найти такую возрастающую последовательность целых чисел q_j, $j = 1, 2, \dots$, что

$$1 \leqslant \omega_{2^{q_j}+1}^{1/2} < j^{-3} q_j, \qquad j = 1, 2, \dots . \tag{16}$$

Определим затем последовательность коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$a_n = \begin{cases} \left[2^{q_j}\omega_{2^{q_j+1}}\right]^{-1/2} j^{-1}, & \text{если } 2^{q_j} \leqslant n < 2^{q_j+1},\ j = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{для остальных } n. \end{cases} \tag{17}$$

В силу оценки (10) и равенства (15) при $j = 1, 2, \ldots$

$$m\left\{x \in (0,1) : \max_{2^{q_j} \leqslant l < 2^{q_j+1}} \left| \sum_{n=2^{q_j}}^{l} a_n \psi_n(x) \right| > c_0 a_{2^{q_j}} 2^{\frac{1}{2} q_j} q_j \right\} \geqslant \frac{1}{4},$$

откуда, учитывая (16) и (17), получаем, что при $j = 1, 2, \ldots$

$$m(E_j) := m\left\{x \in (0,1) : \max_{2^{q_j} \leqslant l < 2^{q_j+1}} \left| \sum_{n=2^{q_j}}^{l} a_n \psi_n(x) \right| > c_0 j^2 \geqslant \frac{1}{4}. \tag{18}$$

Из соотношения (18) сразу следует расходимость на множестве положительной меры ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ с коэффициентами (17). Кроме того, легко видеть, что множества E_j независимы (см. определение 2.2), а поэтому из леммы Бореля–Кантелли (см. § 2.2) и (18) вытекает равенство

$$m\Big(\varlimsup_{j\to\infty} E_j\Big) = 1,$$

которое влечет расходимость п.в. на $(0,1)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$.

Нам осталось проверить, что последовательность коэффициентов (17) удовлетворяет условию (9). В самом деле,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=2^{q_j}}^{2^{q_j+1}-1} a_n^2 \omega_n \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_{2^{q_j}}^2 \omega_{2^{q_j+1}} 2^{q_j} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что построение всех известных примеров наборов ортогональных функций $\{\psi_k^N(x)\}_{k=1}^{N}$, для которых верна оценка (10), так или иначе основано на свойствах матрицы Гильберта $\left\{\dfrac{1}{i-j}\right\}$. Вместе с тем "по внешнему виду" такие примеры могут резко отличаться от набора, построенного при доказательстве теоремы 2. Например, справедлива

Теорема 3. *Существует О.Н.С.* $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *с* $|\psi_n(x)| = 1$ *для п.в.* $x \in (0,1)$ *и* $n = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяющая всем требованиям теоремы* 2.

Лемма 1. *Существуют такие постоянные* $A_1 > 0$ *и* $A_2 > 0$, *что для* $p = 1, 2, \ldots$ *найдется О.Н.С.* $\Psi(p) = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{2p^2}$, $x \in (0,1)$, *для которой* $|\psi_n(x)| = 1$ *для п.в.* $x \in (0,1)$ *и* $n = 1, 2, \ldots, 2p^2$ *и*

$$m\left\{x \in (0,1) : \max_{1 \leqslant j \leqslant 2p^2} \left|\sum_{n=1}^{j} \psi_n(x)\right| > A_1 p \log_2 p\right\} \geqslant A_2.$$

Кроме того, функции $\psi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots, 2p^2$, *кусочно постоянны с конечным числом интервалов постоянства.*

Ниже мы докажем лемму 1. Вывод теоремы 3 из леммы 1 мы опускаем, так как он проводится вполне аналогично доказательству теоремы 2.

Доказательство леммы 1. Определим сначала на интервале $(0, 4)$ вспомогательную систему функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots, 2p$:

$$f_n(x) = \frac{1}{2(s - p - n - 1/2)} \quad \text{при} \quad x \in \left(\frac{s-1}{p}, \frac{s}{p}\right), \quad s = 1, 2, \ldots, 4p. \tag{19}$$

Пусть при $1 \leqslant n, l \leqslant 2p$

$$\alpha_{n,l} = \int_0^4 f_n(x) f_l(x)\, dx.$$

Тогда

$$\alpha_{n,n} \leqslant \frac{C}{p} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(s - 1/2)^2} \leqslant \frac{C_1}{p}, \qquad 1 \leqslant n \leqslant 2p. \tag{20}$$

Если $n > l$, то

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,l} &= \frac{1}{4p} \sum_{s=1}^{4p} \frac{1}{(s - p - n - 1/2)(s - p - l - 1/2)} \\
&= \frac{1}{4p(n-l)} \sum_{s=1}^{4p} \left\{\frac{1}{s - p - n - 1/2} - \frac{1}{s - p - l - 1/2}\right\} \\
&= \frac{1}{4p(n-l)} \left\{\sum_{s=1-p-n}^{3p-n} \frac{1}{s - 1/2} - \sum_{s=1-p-l}^{3p-l} \frac{1}{s - 1/2}\right\} \\
&= \frac{1}{4p(n-l)} \left\{\sum_{s=1-p-n}^{-p-l} \frac{1}{s - 1/2} - \sum_{s=3p-n+1}^{3p-l} \frac{1}{s - 1/2}\right\},
\end{aligned}$$

откуда сразу следует, что

$$\alpha_{n,l} \leqslant \frac{C_2}{p^2}, \qquad n \neq l. \tag{21}$$

Легко проверить (так же, как при доказательстве леммы 1 в теореме 2, см. (13)), что

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 2p} \sum_{n=1}^{j} f_n(x) \geqslant c_3 \log_2 p \quad \text{для п.в.} \quad x \in (2,3). \tag{22}$$

Положим

$$g_{r+(s-1)p}(x) = f_s(x), \qquad x \in (0,4), \quad r = 1,2,\ldots,p, \quad s = 1,2,\ldots,2p. \tag{23}$$

Тогда из соотношений (20) и (21) вытекает, что

$$\int_0^4 g_n(x)g_m(x)\,dx \leqslant \gamma_{|n-m|}, \qquad n,m = 1,2,\ldots,2p^2,$$

где

$$\gamma_i = \begin{cases} C_1p^{-1}, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant p-1, \\ C_2p^{-2}, & \text{если } p \leqslant i \leqslant 2p^2-1. \end{cases}$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{2p^2-1} \gamma_i \leqslant C_4$, то, используя теорему 8.2, мы сможем так определить функции $g_n(x)$, $n = 1,2,\ldots,2p^2$, на интервале $(4,M)$, $M = 5 + 2C_4$, что

1) $\{g_n\}_{n=1}^{2p^2}$ – ортогональная система на $(0,M)$;
2) $|g_n(x)| = 1$ для п.в. $x \in (4,M)$ и $|g_n(x)| \leqslant 1$ для $x \in (0,4)$ (см. (19));
3) функции $g_n(x)$ кусочно постоянны на $(4,M)$, а следовательно (см. (19)), и на $(0,M)$.

Таким образом, система

$$h_n(x) = g_n(Mx), \qquad x \in (0,1), \quad 1 \leqslant n \leqslant 2p^2,$$

есть ортогональная (но не нормированная) система кусочно постоянных функций, для которой $h_n(x) \leqslant 1$, $x \in (0,1)$, $n = 1,2,\ldots,2p^2$, и в силу (22) и (23)

$$m\Big\{x \in (0,1) : \max_{1\leqslant j\leqslant 2p^2} \Big|\sum_{n=1}^{j} h_n(x)\Big| \geqslant c_3 \log_2 p\Big\} \geqslant c_5 > 0. \tag{24}$$

Разобьем интервал $(0,1)$ на попарно непересекающиеся интервалы I_r, $r=1,2,\ldots,R$, на каждом из которых все функции $h_n(x)$ постоянны:

$$h_n(x)=\rho_n(r), \qquad x\in I_r=(a_r,b_r), \quad 1\leqslant r\leqslant R, \quad 1\leqslant n\leqslant 2p^2. \tag{25}$$

Пусть для $r=1,2,\ldots,R$ $\{\chi_n^r(x)\}_{n=1}^{2p^2}$ – набор независимых кусочно постоянных функций, определенных на I_r и таких, что $\int_{I_r}\chi_n^r(x)\,dx=0$ и функция $\chi_n^r(x)$ принимает два значения: $1-\rho_n(r)$ и $-1-\rho_n(r)$ (см. теорему 2.1).

С помощью функций $\chi_n^r(x)$ определим искомый набор $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{2p^2}$. Положим $\psi_n(x)=h_n(x)+\chi_n^r(x)$ при $x\in I_r$, $r=1,2,\ldots,R$, $n=1,2,\ldots,2p^2$, или, что то же самое,[2)]

$$\psi_n(x)=h_n(x)+\psi'_n(x), \quad \text{где} \quad \psi'_n(x)=\sum_{r=1}^{R}\chi_n^r(x), \quad x\in(0,1). \tag{26}$$

Тогда, по построению, функции $\psi_n(x)$ кусочно постоянны и $|\psi_n(x)|=1$ для п.в. $x\in(0,1)$ и $n=1,2,\ldots,2p^2$. Проверим ортогональность системы $\{\psi_n\}_{n=1}^{2p^2}$. При $k\neq l$ в силу (26)

$$\int_0^1\psi_k(x)\psi_l(x)\,dx=\int_0^1 h_k(x)h_l(x)\,dx+\int_0^1 h_k(x)\psi'_l(x)\,dx \\ +\int_0^1 h_l(x)\psi'_k(x)\,dx+\int_0^1\psi'_k(x)\psi'_l(x)\,dx=0,$$

так как система $\{h_n\}$ ортогональна и для любых k и $l\neq k$ (см. (25))

$$\int_0^1 h_k(x)\chi_l^r(x)\,dx=\rho_k(r)\int_{I_r}\chi_l^r(x)\,dx=0,$$
$$\int_{I_r}\chi_k^r(x)\chi_l^r(x)\,dx=0, \qquad r=1,2,\ldots,R.$$

Пусть I_r – любой интервал, для которого при некотором $j=j(r)$, $1\leqslant j\leqslant 2p^2$,

$$\left|\sum_{n=1}^{j(r)}h_n(x)\right|\geqslant c_3\log_2 p, \qquad x\in I_r. \tag{27}$$

[2)]Мы предполагаем, что функции $\chi_n^r(x)$ определены и равны нулю вне интервала I_r.

В силу (24) сумма мер таких интервалов не меньше c_5, и поэтому для завершения доказательства леммы 1 достаточно показать, что при $p \geqslant p_0$

$$m\left\{x \in I_r : \left|\sum_{n=1}^{j(r)} \psi_n(x)\right| \geqslant \frac{c_3}{2} p \log_2 p\right\} \geqslant \frac{1}{2}|I_r| \tag{28}$$

для каждого интервала I_r, удовлетворяющего соотношению (27).

Пользуясь попарной ортогональностью χ_n^r и оценкой $\|\chi_n^r\|_\infty \leqslant 2$, $n = 1, 2, \ldots, 2p^2$ (см. определение функций $\chi_n^r(x)$), мы получаем

$$\int_{I_r} \left[\sum_{n=1}^{j(r)} \chi_n^r(x)\right]^2 dx = \sum_{n=1}^{j(r)} \int_{I_r} [\chi_n^r(x)]^2\, dx \leqslant 2p^2 4|I_r| = 8p^2|I_r|. \tag{29}$$

Применяя неравенство Чебышёва, из (29) выводим, что

$$m\left\{x \in I_r : \left|\sum_{n=1}^{j(r)} \chi_n^r(x)\right| > \frac{c_3}{2} p \log_2 p\right\} \leqslant \frac{c_6|I_r|}{\log_2^2 p} \leqslant \frac{1}{2}|I_r|, \tag{30}$$

если p достаточно велико $\left(\dfrac{c_6}{\log_2^2 p} < \dfrac{1}{2}\right)$. Из соотношений (27) и (30) вытекает, что

$$m\left\{x \in I_r : \left|\sum_{n=1}^{j(r)} [h_n(x) + \chi_n^r(x)]\right| \geqslant \frac{c_3}{2} p \log_2 p\right\} \geqslant \frac{1}{2}|I_r|.$$

Так как $h_n(x) + \chi_n^r(x) = \psi_n(x)$ при $x \in I_r$, то тем самым оценка (28), а вместе с ней и лемма 1 доказаны.

До сих пор не найдено достаточно общих условий на систему $\{\varphi_n\}$, гарантирующих возможность усиления теоремы 1. Однако для некоторых систем такое усиление можно получить, исходя из следующего результата.

Теорема 4. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in (0,1)$, *– О.Н.С. и* $L_n(t)$, $t \in (0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$, *– ее функции Лебега* (см. определение 1.11). *Если для п.в.* t *из некоторого множества* $E \subset (0,1)$ *справедливо соотношение*

$$L_n(t) \leqslant C\lambda_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \text{где} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots, \tag{31}$$

то конечность суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n < \infty \tag{32}$$

влечет сходимость п.в. на E ряда (1).

Применяя теорему 4 для тригонометрической системы, мы с учетом оценки 4 (11) получаем утверждение теоремы 4.6. Аналогичный результат получается и для рядов по системе Уолша.

В основе доказательства теоремы 4 лежит следуюшая лемма, применимая и к изучению сходимости подпоследовательностей частных сумм ортогональных рядов.

Лемма 1. *Пусть для некоторой последовательности номеров $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\nu_1 < \nu_2 < \cdots)$ функции Лебега $L_{\nu_k}(t)$ О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n\}$ таковы, что*

$$L_{\nu_k}(t) \leqslant C\lambda_{\nu_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad t \in E, \quad 0 < \lambda_{\nu_1} \leqslant \lambda_{\nu_2} \leqslant \cdots, \tag{33}$$

для некоторого множества положительной меры $E \subset (0,1)$. Тогда частные суммы всякого ряда (1), *для которого*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \tag{34}$$

удовлетворяют неравенству

$$|S_{\nu_k}(x)| \leqslant C_x \lambda_{\nu_k}^{1/2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad \text{для п.в.} \quad x \in E,$$

где C_x – постоянная, зависящая от x, но не от k.

Доказательство. Пусть $k_n(x)$ – наименьшее из чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$, для которого достигается $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} S_{\nu_k}(x)\lambda_{\nu_k}^{-1/2}$, т.е.

$$\delta_n^+(x) := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_{\nu_k}(x)\lambda_{\nu_k}^{-1/2} = S_{k_n(x)}(x)\lambda_{k_n(x)}^{-1/2}, \qquad x \in (0,1). \tag{35}$$

Очевидно, что

$$\delta_1^+(x) \leqslant \delta_2^+(x) \leqslant \cdots \quad \text{и} \quad \int_0^1 |\delta_1^+(x)|\, dx < \infty. \tag{36}$$

Покажем, что
$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^+(x) < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in E. \tag{37}$$
Для этого, в силу (36), достаточно проверить, что
$$\lim_{n\to\infty} \int_E \delta_n^+(x)\, dx < \infty. \tag{38}$$

Используя равенство (см. 1.(14))
$$S_N(x) = \int_0^1 S_\nu(t) K_N(t,x)\, dt, \qquad N \leqslant \nu, \quad K_N(t,x) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(t)\varphi_n(x)$$
и неравенство Коши, мы получим
$$\begin{aligned}\int_E \delta_n^+(x)\, dx &= \int_E \lambda_{k_n(x)}^{-1/2} \int_0^1 S_{\nu_n}(t) K_{k_n(x)}(t,x)\, dt\, dx \\ &= \int_0^1 S_{\nu_n}(t) \int_E K_{k_n(x)}(t,x)\lambda_{k_n(x)}^{-1/2}\, dx\, dt \\ &\leqslant \left\{\int_0^1 S_{\nu_n}^2(t)\, dt\right\}^{1/2} \left\{\int_0^1 \left[\int_E K_{k_n(x)}(t,x)\lambda_{k_n(x)}^{-1/2}\, dx\right]^2 dt\right\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{39}$$

В силу сходимости ряда (1) в $L^2(0,1)$ (см. (34))
$$\left\{\int_0^1 S_{\nu_n}^2(t)\, dt\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum_{p=1}^\infty a_p^2\right\}^{1/2} = C < \infty.$$

Учитывая этот факт и записывая квадрат интеграла в (39) в виде произведения интегралов, мы из (39) выводим, что
$$\begin{aligned}&\int_E \delta_n^+(x)\, dx \\ &\leqslant C\left\{\int_0^1 \int_E \int_E K_{k_n(x)}(t,x) K_{k_n(y)}(t,y) \lambda_{k_n(x)}^{-1/2} \lambda_{k_n(y)}^{-1/2}\, dx\, dy\, dt\right\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{40}$$

Интегрируя в (40) сначала по t и учитывая монотонность последовательности $\{\lambda_{\nu_k}\}$ и вытекающее из ортонормированности системы Φ равенство
$$\int_0^1 K_{k_n(x)}(t,x) K_{k_n(y)}(t,y)\, dt = K_{k_n(x,y)}(x,y),$$

где $k_n(x,y) = \min\{k_n(x), k_n(y)\}$, мы находим, что

$$\int_E \delta_n^+(x)\,dx$$

$$\leqslant C\Big\{\int_E\int_E |K_{k_n(x,y)}(x,y)\lambda_{k_n(x,y)}^{-1}|\,dx\,dy\Big\}^{1/2}$$

$$\leqslant C\Big\{\int_E\int_E |K_{k_n(x)}(x,y)|\lambda_{k_n(x)}^{-1}\,dx\,dy + \int_E\int_E |K_{k_n(y)}(x,y)|\lambda_{k_n(y)}^{-1}\,dx\,dy\Big\}^{1/2}$$

$$\leqslant C\Big\{\int_E L_{k_n(x)}(x)\lambda_{k_n(x)}^{-1}\,dx + \int_E L_{k_n(y)}(y)\lambda_{k_n(y)}^{-1}\,dy\Big\}^{1/2}.$$

В силу (33) из последнего неравенства сразу следует оценка (38), а потому и соотношение (37).

Рассматривая вместо ряда (1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -a_n\varphi_n(x)$, мы из (37) получим, что

$$\begin{gathered}\varliminf_{n\to\infty} \delta_n^-(x) > -\infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in E,\\ \delta_n^-(x) := \min_{1\leqslant k\leqslant n} S_{\nu_k}(x)\lambda_{\nu_k}^{-1/2}.\end{gathered} \tag{41}$$

Соотношения (37) и (41) означают, что п.в. на E

$$f^-(x) = \varliminf_{n\to\infty} \delta_n^-(x) \leqslant S_{\nu_k}(x)\lambda_{\nu_k}^{-1/2} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \delta_n^+(x) = f^+(x), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где функции $f^-(x)$ и $f^+(x)$ конечны п.в. на E, а следовательно, $|S_{\nu_k}(x)| \leqslant \{|f^-(x)| + |f^+(x)|\}\lambda_{\nu_k}^{1/2}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 4. Найдем последовательность $\{\mu_n\}$, $1 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots$, для которой (см. (32))

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\lambda_n\mu_n < \infty, \tag{42}$$

и обозначим через $\sigma_N(x)$ N-ю частную сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_n\mu_n)^{1/2}\varphi_n(x). \tag{43}$$

Для оценки частных сумм $S_N(x)$ ряда (1) запишем очевидное равенство $(1 \leqslant p, q < \infty)$

$$S_{q+p}(x) - S_q(x) = \sum_{n=q+1}^{q+p} \frac{1}{(\lambda_n\mu_n)^{1/2}} a_n(\lambda_n\mu_n)^{1/2}\varphi_n(x) \tag{44}$$

и применим к сумме (44) преобразование Абеля. Получим[3)]

$$
\begin{aligned}
&|S_{q+p}(x) - S_q(x)| \\
&\quad\leqslant \sum_{n=q+1}^{q+p-1} \left[(\lambda_n\mu_n)^{-1/2} - (\lambda_{n+1}\mu_{n+1})^{-1/2}\right]|\sigma_n(x)| \\
&\qquad + (\lambda_{q+1}\mu_{q+1})^{-1/2}|\sigma_q(x)| + (\lambda_{q+p}\mu_{q+p})^{-1/2}|\sigma_{q+p}(x)|. \qquad (45)
\end{aligned}
$$

Используя лемму 1 (с $\nu_k = k$) для оценки частных сумм ряда (43), мы для п.в. $x \in E$ получим оценку

$$
|\sigma_{q+p}(x)| \leqslant C_x \lambda_{q+p}^{1/2} |\sigma_q(x)| \leqslant C_x \lambda_q^{1/2}, \qquad 1 \leqslant q, p < \infty,
$$

а потому из (45) следует, что для п.в. $x \in E$ при $q \to \infty$

$$
|S_{q+p}(x) - S_q(x)| \leqslant \sum_{n=q+1}^{q+p-1} \left[(\lambda_n\mu_n)^{-1/2} - (\lambda_{n+1}\mu_{n+1})^{-1/2}\right]|\sigma_n(x)| + o_x(1),
$$

где $o_x(1)$ – величина, зависящая от x и q, стремящаяся к нулю при $q \to \infty$. Для доказательства теоремы 4 нам осталось показать, что для п.в. $x \in E$

$$
\sup_{1\leqslant p<\infty} \sum_{n=q+1}^{q+p-1} \left[(\lambda_n\mu_n)^{-1/2} - (\lambda_{n+1}\mu_{n+1})^{-1/2}\right]|\sigma_n(x)| = o_x(1) \text{ при } q \to \infty.
$$

Для этого, в силу теоремы Б. Леви, достаточно проверить, что

$$
S := \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[(\lambda_n\mu_n)^{-1/2} - (\lambda_{n+1}\mu_{n+1})^{-1/2}\right]|\sigma_n(x)|\,dx < \infty. \qquad (46)
$$

Пользуясь монотонностью последовательности $\lambda_n\mu_n$, $n = 1, 2, \dots$, и оценкой (42), мы находим

$$
\begin{aligned}
S &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\lambda_n\mu_n)^{-1/2} - (\lambda_{n+1}\mu_{n+1})^{-1/2}\right]\|\sigma_n(x)\|_2 \\
&\leqslant \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\lambda_n\mu_n\right\}^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\lambda_n\mu_n)^{-1/2} - (\lambda_{n+1}\mu_{n+1})^{-1/2}\right] < \infty.
\end{aligned}
$$

Соотношение (46), а следовательно и теорема 4 доказаны.

[3)] При $p = 1$ $\sum\limits_{n=q+1}^{q} = 0$.

§ 2. Безусловная сходимость почти всюду

В этом параграфе изучается безусловная сходимость п.в. (см. определение 1.4) рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \qquad \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in (0,1), \quad \text{- О.Н.С.} \tag{47}$$

Еще при изучении рядов по системе Хаара было показано (см. следствие 3.7), что в отличие от безусловной сходимости рядов в метрическом пространстве, безусловная сходимость п.в. ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ не вытекает, вообще говоря, из сходимости п.в. всех рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x), \qquad \varepsilon_n = \pm 1, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Поэтому для решения задач безусловной сходимости п.в. ортогональных рядов часто требуется преодолеть трудности, связанные с изучением всех возможных перестановок данной О.Н.С. Что касается условий на коэффициенты ряда (47), которые для любой О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n\}$ гарантируют безусловную сходимость п.в. этого ряда, то такие (неусиляемые условия известны, и мы изложим их ниже.

Теорема 5. *Если для коэффициентов ряда* (47) *выполнено неравенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2 \log_2^2 n\right]^{1/2} < \infty, \qquad \nu_k = 2^{2^k}, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{48}$$

то ряд (47) *безусловно сходится п.в.*

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $a_1 = a_2 = 0$. При $k = 0, 1, \dots$ набор натуральных чисел $\{\nu_k + 1, \dots, \nu_{k+1}\}$ обозначим через H_k. Пусть, далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) \tag{49}$$

– произвольная перестановка ряда (47). Определим для $k = 0, 1, \dots$ последовательность $\{\varepsilon_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ чисел, равных 0 или 1, положив

$$\varepsilon_n^k = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(n) \in H_k, \\ 0, & \text{если } \sigma(n) \notin H_k. \end{cases}$$

Тогда ясно, что для любых p, q $(p \leqslant q)$ и $x \in (0,1)$

$$\sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n^k a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) \tag{50}$$

(ряд в правой части равенства (50) сходится для любого $x \in (0,1)$, так как все члены в нем начиная с некоторого номера равны 0). Пусть при $k = 0, 1, \ldots$

$$\delta_k(x) = \sup_{1\leqslant p<q<\infty}\left|\sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n^k a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)\right|. \tag{51}$$

В силу леммы 1 из теоремы 1 и неравенства

$$\delta_k(x) \leqslant 2\sup_{1\leqslant q<\infty}\left|\sum_{n=1}^{q} \varepsilon_n^k a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)\right|$$

мы имеем

$$\int_0^1 \delta_k(x)\,dx \leqslant \left\{\int_0^1 \delta_k^2(x)\,dx\right\}^{1/2} \leqslant K2^k\left\{\sum_{n\in H_k} a_n^2\right\}^{1/2},$$

откуда (см. (48)) вытекает, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \delta_k(x)\,dx < \infty$$

и, по теореме Б. Леви,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k(x) < \infty, \qquad x \in G \subset (0,1), \quad m(G) = 1. \tag{52}$$

Для каждого $x \in G$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(x,\varepsilon)$, что

$$\sum_{k=N}^{\infty}\delta_k(x) < \varepsilon.$$

Но тогда, если число $p = p(x,\varepsilon)$ так велико, что сумма $\sum\limits_{n=1}^{p-1} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)$ содержит все функции $\varphi_n(x)$ с номерами из H_k, $0 \leqslant k \leqslant N(x,\varepsilon)$, то в силу равенства (50) при любом $q \geqslant p$

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)\right| \leqslant \sum_{k=N}^{\infty}\delta_k(x) < \varepsilon. \tag{53}$$

Так как число $\varepsilon > 0$ в (53) может быть взято произвольно малым, то тем самым нами доказана сходимость ряда (49) в каждой точке $x \in G$, $m(G) = 1$. Теорема 5 доказана.

Следствие 2. *Если для коэффициентов ряда* (47) *при некотором* $\varepsilon > 0$ *выполнено соотношение*

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \log_2^2 n (\log_2 \log_2 n)^{1+\varepsilon} < \infty,$$

то ряд (47) *безусловно сходится п.в.*

Следствие 3. *Если при некотором* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2-\varepsilon} < \infty,$$

то ряд (47) *безусловно сходится п.в.*

В самом деле, рассмотрим такую перестановку ряда (47):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x), \tag{54}$$

что числа $|a_{\sigma(n)}|$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют невозрастающую последовательность

$$|a_{\sigma(1)}| \geqslant |a_{\sigma(2)}| \geqslant \cdots .$$

Тогда[4] $|a_{\sigma(n)}|^{2-\varepsilon} \leqslant Cn^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, а потому при некотором $\delta > 0$

$$|a_{\sigma(n)}| \leqslant Cn^{-(1/2+\delta)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и из теоремы 5 вытекает безусловная сходимость п.в. ряда (54), или, что то же самое, безусловная сходимость п.в. ряда (47). Следствие 3 доказано.

Следующий результат показывает окончательность теоремы 5.

Теорема 6. *Существует О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, *такая, что для всякой последовательности* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty \qquad (b_k > 0) \tag{55}$$

ряд ($\nu_k = 2^{2^k}$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^k \nu_k} \sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} \varphi_n(x) =: \sum_{n=3}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{56}$$

расходится п.в. на $(0, 1)$ *после некоторой перестановки членов.*

---

[4]Мы использовали тот простой факт, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots$, то $b_n = O(n^{-1})$ при $n \to \infty$.

Замечание. Условие (55) в теореме 6 необходимо в том смысле, что если $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|b_k|<\infty$, то для коэффициентов ряда (56):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} a_n^2\log_2^2 n\right]^{1/2}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|<\infty$$

и по теореме 5 ряд (56) безусловно сходится п.в. Что касается условия $b_k>0$, то оно несущественно и предполагается лишь для удобства (см. также теорему 2.14).

Из теоремы 6, взяв $b_k=\dfrac{1}{k\log_2 k}$, $k=2,3,\dots$, получим

Следствие 4. *Существует расходящийся п.в. после некоторой перестановки членов ортогональный ряд* (47), *для которого*

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2\log_2^2 n\log_2\log_2 n<\infty.$$

Ниже через $\mathscr{D}_N^0(I)$, $I=(a,b)\subset(0,1)$, мы обозначаем $(N-1)$-мерное подпространство в $\mathscr{D}_N(I)$, состоящее из функций $f(x)$, для которых $\int_I f(x)\,dx=0$.

Доказательство теоремы 6 основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Для каждого* $N\geqslant 100$ *и каждого интервала* $I=(a,b)\subset(0,1)$ *найдется ортонормированный базис в* $\mathscr{D}_{2N}^0(I)$:

$$\Psi_{2N-1}(I)=\{\psi_n^{2N-1}(x,I)\}_{n=1}^{2N-1}=\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{2N-1},$$

функции которого удовлетворяют условиям:

1) *при* $n=1,2,\dots,N-1$ *функция* $\psi_n(x)$ *на интервале* $\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$ *меняет знак лишь один раз, т.е. для некоторой точки* $\xi_n\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$ *имеем:* $\psi_n(x)\leqslant 0$, *если* $\dfrac{a+b}{2}<x<\xi_n$ *и* $\psi_n(x)\geqslant 0$, *если* $\xi_n<x<b$, *причем*

$$\frac{a+b}{2}\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\dots\leqslant\xi_{N-1}\leqslant b \tag{57}$$

(*точку* ξ_n *назовем точкой существенной перемены знака функции* $\psi_n(x)$);

2) *для п.в.* $x \in \left(a + \frac{5}{8}|I|, a + \frac{7}{8}|I|\right)$ *выполнено соотношение*

$$\sum_{n=1}^{m(x)} \psi_n(x) \geqslant c\, \frac{N^{1/2}}{|I|^{1/2}} \log_2 N, \tag{58}$$

$$m(x) := \max\{m : \xi_m < x,\ m = 1, 2, \ldots, N-1\},$$

где $c > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Прежде чем доказывать лемму 1, напомним, что в гл. 5 (см. 5.(31)) было показано, что существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что для $A = 1, 2, \ldots$ и $N = 1, 2, \ldots$ норма матрицы

$$\|H_N(A)\| \leqslant C, \qquad H_N(A) = \{h_{s,k}\}_{s,k=1}^{N}, \tag{59}$$

где

$$h_{s,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{s-k}, & \text{если } 0 < |s-k| \leqslant A, \\ 0, & \text{если } s = k \text{ или } |s-k| > A, \end{cases} \qquad s, k = 1, 2, \ldots, N.$$

Доказательство леммы 1. Легко видеть, что достаточно рассмотреть случай, когда $I = (0,1)$, а затем перенести преобразованием подобия (с сохранением нормы в $L^2(0,1)$) функции системы $\Psi_{2N-1}((0,1))$ на интервал I и обозначить полученную систему через $\Psi_{2N-1}(I)$.

Наборы $\Psi_{2N-1}((0,1))$ будут являться некоторой модификацией О.Н.С., построенных в теореме 2 (см. (10)). Положим сначала при $N^{1/2} < n < N - N^{1/2}$ и $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\gamma N^{1/2}}{s-n}, & \text{если } x \in \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{s-1}{2N}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{s}{2N}\right), \\ & 0 < |s-n| \leqslant N^{1/2}, \\ 0 & \text{для остальных } x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right), \end{cases} \tag{60}$$

где не зависящая от N постоянная $\gamma > 0$ будет выбрана ниже.

Пусть, далее, при $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\psi_n(x) = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant n \leqslant N^{1/2} \ \text{ и } \ N - N^{1/2} \leqslant n \leqslant N-1. \tag{60'}$$

Тогда, если взять

$$\xi_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при } 1 \leqslant n \leqslant N^{1/2}, \\ \dfrac{n-1}{2N} + \dfrac{1}{2} & \text{при } N^{1/2} < n < N - N^{1/2}, \\ 1 & \text{при } N - N^{1/2} \leqslant n \leqslant N-1, \end{cases}$$

то нетрудно проверить, что для определенной соотношениями (60) и (60′) системы функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{N-1}$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $N \geqslant 100$, условия 1) и 2) будут выполнены. Кроме того, из (59) выводится (точно так же, как при доказательстве леммы 1 в теореме 2), что для достаточно малой постоянной $\gamma > 0$

$$\sup_{\{a_n\}\in B_2^{N-1}} \left\| \sum_{n=1}^{N-1} a_n \psi_n(x) \right\|_{L^2(\frac{1}{2},1)} < 1,$$

а тогда (см. теорему 8.1 и замечание после этой теоремы) функции $\psi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$, можно так доопределить на интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, что

$$\begin{aligned} &\text{а) } \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{N-1}, \ x \in (0,1), \ - \text{ О.Н.С.;} \\ &\text{б) } \psi_n \in \mathscr{D}_N^0\left(0, \frac{1}{2}\right), \ n = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{61}$$

Так как $\int_{1/2}^{1} \psi_n(x)\,dx = 0$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$ (см. (60), (60′)), то из (61) следует, что $\psi_n \in \mathscr{D}_{2N}^0((0,1))$ при $n = 1, 2, \ldots, N-1$ (после изменения в конечном числе точек $s/(2N)$, что для нас несущественно). Наконец, дополняя произвольным образом систему $\{\psi_n\}_{n=1}^{N-1}$ до ортонормированного базиса в $\mathscr{D}_{2N}^0((0,1))$, мы получим искомую систему $\Psi_{2N-1}((0,1))$.

Доказательство теоремы 6. Построение системы $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем вести так, чтобы при каждом $k = 3, 4, \ldots$ группа функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\nu_k}$ ($\nu_k = 2^{2^k}$) образовывала ортонормированный базис в $\mathscr{D}_{\nu_k} := \mathscr{D}_{\nu_k}((0,1))$.

Функции $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots, \nu_3$, возьмем произвольным образом, лишь бы они образовали ортонормированный базис в $\mathscr{D}_{\nu_3}$. Группа функций $\varphi_n(x)$, $n = \nu_k + 1, \ldots, \nu_{k+1}$, при $k = 3, 4, \ldots$ определяется следующим образом: если

$$n = \nu_k + (p-1)(\nu_k - 1)j, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \nu_k, \quad 1 \leqslant j = j(n) \leqslant \nu_k - 1, \tag{62}$$

то функция $\varphi_n(x)$ сосредоточена на интервале $\Delta_{2^k}^p = \left(\frac{p-1}{\nu_k}, \frac{p}{\nu_k}\right)$ и равна

$$\varphi_n(x) = \psi_j^{\nu_k - 1}(x, \Delta_{2^k}^p), \tag{63}$$

где функции $\psi_j^{2N-1}(x, I)$ определены в лемме 1.

Легко видеть, что тогда $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, – О.Н.С. и функции $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\nu_k}$ образуют базис в $\mathscr{D}_{\nu_k}$ ($k = 3, 4, \ldots$).

Докажем, что система Φ удовлетворяет требованиям теоремы 6. Для каждого числа $n > \nu_3$ с (см. (62))

$$1 \leqslant j(n) \leqslant \frac{1}{2}\nu_k - 1 \tag{64}$$

(такие числа n мы для краткости назовем числами "вида (64)") обозначим через ξ_n точку существенной перемены знака функции $\psi_j^{\nu_k-1}(x, \Delta_{2^k}^p)$ (ограничение (64) вызвано тем, что точки существенной перемены знака определены у функций $\psi_j^{2N-1}(x, I)$, только если $1 \leqslant j \leqslant N-1$; см. лемму 1).

Если обозначить через $\delta_{2^k}^p$ интервал $\left(\frac{p-1}{\nu_k} + \frac{5}{8\nu_k}, \frac{p-1}{\nu_k} + \frac{7}{8\nu_k}\right)$, $k = 3, 4, \ldots$, $p = 1, 2, \ldots, \nu_k$, то из условия 2) леммы 1 и равенства (63) непосредственно вытекает, что

$$\sum_{n=\nu_k+(p-1)(\nu_k-1)+1}^{m_{k,p}(x)} \varphi_n(x) \geqslant c\nu_k 2^k \quad \text{для п.в.} \quad x \in \delta_{2^k}^p, \tag{65}$$

где

$$m_{k,p}(x) = \max\bigl\{m : \xi_m < x,\ m = \nu_k+(p-1)(\nu_k-1)+1, \ldots, \nu_k+p(\nu_k-1)\bigr\}.$$

Зафиксируем последовательность $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, $b_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$, и построим расходящуюся п.в. перестановку ряда (56). Предварительно отметим, что если обозначить через $\chi(x, k)$, $k = 3, 4, \ldots$, характеристическую функцию множества $\bigcup\limits_{p=1}^{\nu_k} \delta_{2^k}^p$, то легко видеть, что функции $\chi(x, k)$ независимы и $\int_0^1 \chi(x, k)\, dx = 1/4$, $k = 3, 4, \ldots$. Докажем, что

$$\sum_{k=3}^{\infty} b_k \chi(x, k) = \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0, 1). \tag{66}$$

Пусть последовательность $\{c_k\}_{k=3}^{\infty}$ такова, что $0 \leqslant c_k \leqslant b_k$, $\sum\limits_{k=3}^{\infty} c_k = \infty$, $\sum\limits_{k=3}^{\infty} c_k^2 < \infty$. Тогда $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{4} c_k = \infty$, а по теореме 2.9 ряд $\sum\limits_{k=3}^{\infty} c_k \left[\chi(x, k) - \frac{1}{4}\right]$ сходится п.в. на $(0, 1)$ $\Bigl($так как $\left\{\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\chi(x, k) - \frac{1}{4}\right]\right\}_{k=3}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, есть О.Н.С. независимых функций$\Bigr)$. Это значит, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \chi(x, k)$ расходится п.в. на $(0, 1)$, откуда в силу условия $0 \leqslant c_k \chi(x, k) \leqslant b_k \chi(x, k)$ получаем (66).

Используя неравенства (66), найдем такую последовательность k_s, $s = 1, 2, \dots$ $(3 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots)$, что при $s = 1, 2, \dots$

$$m\left\{x \in (0,1) : \sum_{k=k_s}^{k_{s+1}-1} b_k \chi(x,k) > s\right\} > 1 - \frac{1}{s}. \tag{67}$$

Нужная нам перестановка $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ будет такова, что

$$\{\sigma(n)\}_{n=\nu_{k_s}+1}^{\nu_{k_{s+1}}} = \{n\}_{n=\nu_{k_s}+1}^{\nu_{k_{s+1}}}, \qquad s = 1, 2, \dots,$$

а при фиксированном s функции $\varphi_n(x)$, $n = \nu_{k_s} + 1, \dots, \nu_{k_{s+1}}$, переставляются следующим образом:

функции $a_n \varphi_n(x)$ с номерами "вида (64)" переставляются в порядке возрастания точек существенной перемены знака, т.е. так, чтобы из неравенства $\xi_{\sigma(n_1)} < \xi_{\sigma(n_2)}$ следовало, что $n_1 < n_2$;

функции $a_n \varphi_n(x)$, для которых число $j(n)$ в разложении (69) не удовлетворяет неравенствам (64), ставятся в произвольном порядке после всех функций с номерами "вида (64)".

Рассмотрим сумму

$$G_s(x) = \sum_{n=\nu_{k_s}+1}^{M_s(x)} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x), \tag{68}$$

где

$$M_s(x) = \max\{m : \xi_{\sigma(n)} < x,\ m = \nu_{k_s} + 1, \dots, \nu_{k_{s+1}}\}.$$

Так как $\varphi_n(x) \geqslant 0$ для $x \in (\xi_n, 1)$ (см. условие 1) леммы 1 и (63)), то по построению перестановки σ все слагаемые в сумме (68) неотрицательны, откуда, учитывая неравенства (65), мы выводим, что для п.в. $x \in (0,1)$

$$G_s(x) \geqslant c \sum_{n=k_s}^{k_{s+1}-1} b_k \chi(x,k).$$

Из последнего неравенства и (67) следует, что

$$m\{x \in (0,1) : G_s(x) > cs\} > 1 - \frac{1}{s}, \qquad s = 1, 2, \dots,$$

т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x)$ расходится п.в. Теорема 6 доказана.

§ 3. Подпоследовательности сходимости почти всюду

В § 1 было показано, что ортогональные ряды с коэффициентами из l^2 могут расходиться п.в. на $(0,1)$. Вместе с тем из сходимости по мере всякого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \quad \Phi = \{\varphi_n\} \text{ – О.Н.С.}, \tag{69}$$

вытекает сходимость п.в. некоторой подпоследовательности его частных сумм S_{N_k}, $k = 1, 2, \ldots$. Вовсе не очевидно, однако, что при этом для данной системы Φ номера N_k можно выбрать не зависящими от коэффициентов ряда (69). Как показывает следующее утверждение, такой выбор возможен.

Теорема 7. *Для любой О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *найдется такая возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, *что для любого ряда вида* (69) *последовательность* $S_{N_k}(x) = \sum_{n=1}^{N_k} a_n \varphi_n(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, *сходится п.в. на* $(0,1)$ *и справедливо неравенство*[5)]

$$\Big\| \sup_{1 \leqslant q < \infty} |S_{N_q}(x)| \Big\|_2 \leqslant C \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2}. \tag{70}$$

Доказательство. Разложим функции системы Φ по системе Хаара:

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{n,j} \chi_j(x), \qquad b_{n,j} = \int_0^1 \chi_j(x) \varphi_n(x)\, dx, \quad n, j = 1, 2, \ldots .$$

Тогда в силу равенства Парсеваля (см. теорему 1.4) и полноты системы Хаара

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_{n,j}^2 = \|\varphi_n\|_2^2 = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{71}$$

и по неравенству Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,j}^2 \leqslant \|\chi_j\|_2^2 = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots . \tag{72}$$

[5)] В (70) абсолютная постоянная C не зависит от системы Φ.

Определим искомую последовательность $\{N_k\}_{k=0}^{\infty}$ и одновременно вспомогательную последовательность $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$. Положим $N_0 = w_0 = 0$, $N_1 = w_1 = 1$, и если числа N_k и w_k построены для всех натуральных $k < k_0$, то N_{k_0} и w_{k_0} выбираются так, чтобы $N_{k_0} > N_{k_0-1}$, $w_{k_0} > w_{k_0-1}$ и

$$1) \sum_{j=1}^{w_{k_0-1}} \sum_{n=N_{k_0}}^{\infty} b_{n,j}^2 < 4^{-k_0}; \qquad 2) \sum_{n=1}^{N_{k_0-1}} \sum_{n=w_{k_0}}^{\infty} b_{n,j}^2 < 4^{-k_0}. \tag{73}$$

Легко видеть (см. (71), (72)), что если числа N_{k_0} и w_{k_0} взять достаточно большими, то неравенства (73) будут выполнены.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x)\Bigg), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant 1, \tag{74}$$

сходимость п.в. которого нам надо доказать, и изучим подробнее его общий член. Справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x) &= \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n \sum_{j=1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x) \\
&= \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n \Bigg[\sum_{j=1}^{w_{k-1}} b_{n,j}\chi_j(x) + \sum_{j=w_{k-1}+1}^{w_{k+2}} b_{n,j}\chi_j(x) + \sum_{j=w_{k+2}+1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x)\Bigg] \\
&=: I_k^{(1)}(x) + I_k^{(2)}(x) + I_k^{(3)}(x),
\end{aligned}$$

где (см. (73), (74))

$$\begin{aligned}
\text{a) } \|I_k^{(1)}(x)\|_2 &= \Bigg\|\sum_{j=1}^{w_{k-1}} \chi_j(x) \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n b_{n,j}\Bigg\|_2 \\
&= \Bigg\{\sum_{j=1}^{w_{k-1}} \Bigg(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n b_{n,j}\Bigg)^2\Bigg\}^{1/2} \\
&\leqslant \Bigg\{\sum_{j=1}^{w_{k-1}} \Bigg(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n^2\Bigg)\Bigg(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} b_{n,j}^2\Bigg)\Bigg\}^{1/2} \\
&\leqslant \Bigg\{\sum_{j=1}^{w_{k-1}} \sum_{n=N_k+1}^{\infty} b_{n,j}^2\Bigg\}^{1/2} < 2^{-k};
\end{aligned}$$

$$\text{б) } \|I_k^{(3)}(x)\|_2 = \Big\| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n \sum_{j=w_{k+2}+1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x) \Big\|_2$$

$$\leqslant \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} |a_n| \Big\| \sum_{j=w_{k+2}+1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x) \Big\|_2$$

$$\leqslant \Big\{ \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n^2 \Big\}^{1/2} \Big\{ \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \Big\| \sum_{j=w_{k+2}+1}^{\infty} b_{n,j}\chi_j(x) \Big\|_2^2 \Big\}^{1/2}$$

$$\leqslant \Big\{ \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \Big(\sum_{j=w_{k+2}+1}^{\infty} b_{n,j}^2 \Big) \Big\}^{1/2} < 2^{-k}.$$

Поэтому при $k > 1$

$$\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x) = \sum_{j=w_{k-1}+1}^{w_{k+2}} \chi_j(x) \Big(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n b_{n,j} \Big) + \delta_k(x)$$

$$= \sum_{j=w_{k-1}+1}^{w_{k+2}} \alpha_j^{(k)} \chi_j(x) + \delta_k(x) =: f_k(x) + \delta_k(x), \tag{75}$$

где

$$\|\delta_k\|_2 \leqslant 2 \cdot 2^{-k}, \qquad \alpha_j^{(k)} := \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n b_{n,j}. \tag{76}$$

В силу соотношений (75) и (76)

$$\sum_{j=w_{k-1}+1}^{w_{k+2}} (\alpha_j^{(k)})^2 = \Big\| \sum_{j=w_{k-1}+1}^{w_{k+2}} \alpha_j^{(k)} \chi_j(x) \Big\|_2^2$$

$$\leqslant \Big\{ \Big\| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x) \Big\|_2 + 2^{-k+1} \Big\}^2$$

$$\leqslant 2 \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n^2 + 2 \cdot 2^{-2k+2},$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=w_{k-1}+1}^{w_{k+2}} (\alpha_j^{(k)})^2 \leqslant 3. \tag{77}$$

Из неравенства (76) по теореме Б. Леви вытекает сходимость п.в. ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} |\delta_k(x)|$. Кроме того (см. (76)),

$$\Big\| \sup_{2\leqslant q<\infty} \Big| \sum_{k=2}^{q} \delta_k(x) \Big| \Big\|_2 \leqslant \Big\| \sum_{k=2}^{\infty} |\delta_k(x)| \Big\|_2 \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \|\delta_k(x)\|_2 \leqslant 1,$$

а поэтому (см. (75), (74))

$$\begin{aligned} \Big\| \sup_{1\leqslant q<\infty} |S_{N_q(x)}| \Big\|_2 &= \Big\| \sup_{1\leqslant q<\infty} \Big| \sum_{k=0}^{q} \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x) \Big| \Big\|_2 \\ &\leqslant \|a_1\varphi_1\|_2 + \Big\| \sum_{n=2}^{N_2} a_n\varphi_n \Big\|_2 \\ &\quad + \Big\| \sup_{2\leqslant q<\infty} \Big| \sum_{k=2}^{q} \delta_k(x) \Big| \Big\|_2 + \Big\| \sup_{2\leqslant q<\infty} \Big| \sum_{k=2}^{q} f_k(x) \Big| \Big\|_2 \\ &\leqslant 3 + \Big\| \sup_{2\leqslant q<\infty} \Big| \sum_{k=2}^{q} f_k(x) \Big| \Big\|_2 . \end{aligned}$$

Тем самым для доказательства теоремы 7 достаточно показать, что для п.в. $x \in (0,1)$ сходится ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} f_k(x), \tag{78}$$

и оценить норму в $L^2(0,1)$ мажоранты частных сумм этого ряда. В главе 3 (см. теорему 3.4) было доказано, что всякий ряд вида

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j\chi_j(x), \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty, \tag{79}$$

сходится п.в. на $(0,1)$, а для мажоранты его частных сумм имеет место оценка

$$\Big\| \sup_{1\leqslant M<\infty} \Big| \sum_{j=1}^{M} a_j\chi_j(x) \Big| \Big\|_2 \leqslant K \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \Big)^{1/2}, \tag{80}$$

где K – абсолютная постоянная. Мы воспользуемся этим результатом. Заметим, что ряд (78) можно разбить на три ряда:

$$\sum_{p=1}^{\infty} f_{3p-1}(x) + \sum_{p=1}^{\infty} f_{3p}(x) + \sum_{p=1}^{\infty} f_{3p+1}(x), \tag{81}$$

где, в силу определения функций f_k, (см. (75), а также (77)), каждый из рядов в (81) есть сгруппированный ряд по системе Хаара вида (79). Поэтому ряды в (81), а следовательно, и ряд (78) сходятся п.в. на $(0,1)$, и имеет место неравенство (см. (80) и (77))

$$\left\|\sup_{2\leqslant q<\infty}\left|\sum_{k=2}^{q} f_k(x)\right|\right\|_2 \leqslant \sum_{i=-1}^{1}\left\|\sup_{1\leqslant M<\infty}\left|\sum_{p=1}^{M} f_{3p+i}(x)\right|\right\|_2 \leqslant 3\sqrt{3}\,K.$$

Теорема 7 доказана.

Следствие 5. *Из любой О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *можно извлечь подсистему* $\Phi_1 = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \cdots$, *которая является системой сходимости* (см. определение 1.2), *и, более того,*

$$\|S^*_{\Phi_1}(\{a_k\},x)\|_2 \leqslant C\|\{a_k\}\|_{l^2},$$

где $S^*_{\Phi_1}$ *– оператор мажоранты частных сумм, а* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– произвольная последовательность из* l^2.

В самом деле, если $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность чисел, построенная в теореме 7 для системы Φ, то, взяв числа n_k, $k = 1,2,\ldots$, так, чтобы $N_k < n_k \leqslant N_{k+1}$, мы из теоремы 7 получим, что система $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет требованиям следствия 5.

§ 4. Лакунарные системы

Определение 2. О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, называется *S_p-системой* $(2 < p < \infty)$, если существует такая постоянная K, что для любого полинома по системе Φ: $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)$ справедливо неравенство

$$\|P(x)\|_p \leqslant K\|P(x)\|_2. \tag{82}$$

Заметим, что если $\{\varphi_n\}$ – S_p-система и L – подпространство в $L^2(0,1)$, состоящее из функций вида $f(x) \overset{L^2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, то непосредственно из определения 2 вытекает, что любой ортонормированный базис в L также будет S_p-системой. Поэтому часто естественнее говорить о S_p-подпространствах в $L^2(0,1)$, т.е. о таких подпространствах L, что

$$\|f\|_2 \leqslant \|f\|_p \leqslant K\|f\|_2, \qquad f \in L \quad (2 < p < \infty).$$

Примерами S_p-систем (при любом p, $2 < p < \infty$) являются О.Н.С. независимых, равномерно ограниченных функций (это вытекает из теоремы 2.6). В то же время класс S_p-систем существенно шире класса систем независимых функций. Последнее мы постараемся пояснить следующим образом.

Если О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ образует базис в пространстве $\mathscr{D}_N$, то легко показать, что Φ не может содержать подсистему независимых функций с числом элементов, большим, чем $1 + \log_2 N$. С другой стороны, можно показать (методом, аналогичным примененному в доказательстве теоремы 9 этого параграфа), что всякая О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ с $\|\varphi_n\|_8 \leqslant B$, $1 \leqslant n \leqslant N$, содержит такую подсистему $\{\varphi_{n_i}\}_{i=1}^{i_0}$ с числом элементов $i_0 \geqslant N^\gamma$, $\gamma > 0$, что для любого полинома $P(x) = \sum\limits_{i=1}^{i_0} a_{n_i}\varphi_{n_i}(x)$ имеет место оценка $\|P\|_4 \leqslant C_B\|P\|_2$.

Покажем, что каждая S_p-система является системой сходимости.

Теорема 8. *Если* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in (0,1)$, *–* S_p*-система (для некоторого числа* $p > 2$*), то всякий ряд*

$$\sum_{n=1}^\infty a_n\varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty,$$

сходится п.в. на $(0,1)$, *причем* (см. 1.(5))

$$\|S_\Phi^*(\{a_n\})\|_p \leqslant C_\Phi\left(\sum_{n=1}^\infty a_n^2\right)^{1/2}. \tag{83}$$

Замечание. Постоянная C_Φ в (83) зависит только от p и постоянной $K = K(\Phi)$ в определении 2 (см. (82)).

Из теоремы 8, учитывая замечание, сделанное в начале этого параграфа, мы сразу получаем

Следствие 6. *Всякая* S_p*-система* ($2 < p < \infty$) *есть система безусловной сходимости* (см. определение 1.5).

Доказательство теоремы 8. В силу утверждения 1.1 нам достаточно проверить, что для всякой конечной последовательности $\{a_n\}_{n=1}^M$ имеет место неравенство (83).

Для пояснения основной идеи доказательства сначала рассмотрим частный случай, когда $M = 2^r$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_M = 1$. Пусть

$$\delta(x) = \sup_{1 \leqslant N \leqslant 2^r}\left|\sum_{n=1}^N a_n\varphi_n(x)\right|.$$

Используя то же разбиение суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)$ на "двоичные блоки", что применялось в доказательстве теоремы 1 (см. равенство (4)), мы получаем, что

$$\delta(x) \leqslant \sum_{k=0}^{r} \max_{0\leqslant q\leqslant 2^k-1} \left| \sum_{n\in\Omega_q^k} a_n\varphi_n(x)\right|, \tag{84}$$

где $\Omega_q^k = \{q\cdot 2^{r-k}+1, q\cdot 2^{r-k}+2,\dots,(q+1)\cdot 2^{r-k}\}$.

Из (84) следует, что

$$\delta(x) \leqslant \sum_{k=0}^{r} \left\{ \sum_{q=0}^{2^k-1} \left| \sum_{n\in\Omega_q^k} a_n\varphi_n(x)\right|^p \right\}^{1/p}$$

а потому, учитывая, что Φ – S_p-система и $a_n = 1$ при $n = 1,2,\dots,M$, мы находим

$$\begin{aligned}\|\delta(x)\|_p &\leqslant \sum_{k=0}^{r} \left\{ \int_0^1 \sum_{q=0}^{2^k-1} \left| \sum_{n\in\Omega_q^k} \varphi_n(x)\right|^p dx \right\}^{1/p}\\ &\leqslant K \sum_{k=0}^{r} \left\{ \sum_{q=0}^{2^k-1} 2^{\frac{(r-k)p}{2}} \right\}^{1/p} = K\, 2^{\frac{r}{2}} \sum_{k=0}^{r} 2^{\frac{k}{p}(1-\frac{p}{2})}\\ &\leqslant M^{\frac12} K\bigl(1-2^{\frac1p-\frac12}\bigr)^{-1},\end{aligned}$$

что доказывает оценку (83) для указанного частного случая.

Доказательство неравенства (83) в общем случае, к которому мы приступаем, проводится аналогично приведенному выше рассуждению, при этом, однако, разбиение отрезка натурального ряда на равные блоки Ω_q^k, $q = 0,1,\dots,2^k-1$, заменяется разбиением на такие блоки $\widetilde{\Omega}_q^k$, что величины $\sum\limits_{n\in\widetilde{\Omega}_q^k} a_n^2$ примерно одинаковы для всех q, $q = 0,1,\dots,2^k-1$.

Лемма 1. *Пусть задан вектор* $a = \{(a)_n\}_{n=1}^N$. *Найдутся число* l, $1 \leqslant l \leqslant N$, *и два вектора* a' *и* a'' *следующего вида*:

$$\begin{aligned} a' &= \{(a)_1,\dots,(a)_{l-1},(a')_l,0,\dots,0\},\\ a'' &= \{0,\dots,0,(a'')_l,(a)_{l+1},\dots,(a)_N\}\end{aligned} \tag{85}$$

такие, что выполнены соотношения:

1) $a' + a'' = a$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{N}(a')_n^2 \leqslant \frac{1}{2}A$, $\sum\limits_{n=1}^{N}(a'')_n^2 \leqslant \frac{1}{2}A$, *где* $A = \sum\limits_{n=1}^{N}(a)_n^2$;

3) $|(a')_l| \leqslant |(a)_l|$, $|(a'')_l| \leqslant |(a)_l|$.

Несмотря на громоздкую формулировку, лемма 1 весьма проста. Если существует такое число q, $q = 1, 2, \ldots, N-1$, что $\sum\limits_{n=1}^{q}(a)_n^2 = \sum\limits_{n=q+1}^{N}(a)_n^2$, то достаточно положить $l = q$, $(a')_l = 0$, $(a'')_l = (a)_l$, и лемма 1 доказана. Если такого числа q нет, то в качестве l возьмем число, для которого

$$\sum_{n=1}^{l-1}(a)_n^2 < \frac{A}{2} < \sum_{n=1}^{l}(a)_n^2$$

$\left(\text{мы, как обычно, считаем, что } \sum\limits_{n=1}^{0} = 0\right)$. Пусть $\delta = \frac{A}{2} - \sum\limits_{n=1}^{l-1}(a)_n^2$. Тогда

$$\text{а) } 0 < \delta < (a)_l^2;$$

$$\text{б) } \sum_{n=l+1}^{N}(a)_n^2 = A - \sum_{n=1}^{l}(a)_n^2 = A - \left(\frac{A}{2} - \delta\right) - (a)_l^2. \tag{86}$$

Положим

$$(a')_l = \frac{\delta}{(a)_l}, \qquad (a'')_l = (a)_l - (a')_l.$$

Тем самым фактически определены векторы a' и a'', причем $a' + a'' = a$. Кроме того, в силу (86), а), $|(a')_l| = \left|\frac{\delta}{(a)_l}\right| < |(a)_l|$, и, учитывая, что числа $(a)_l$ и $(a')_l$ одного знака, мы получаем, что $|(a'')_l| < |(a)_l|$, т.е. условие 3) выполнено. Наконец, используя соотношения (86), мы находим

$$\sum_{n=1}^{N}(a')_n^2 = \sum_{n=1}^{l-1}(a)_n^2 + (a')_l^2 = \frac{A}{2} - \delta + \left(\frac{\delta}{(a)_l}\right)^2 < \frac{A}{2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{N}(a'')_n^2 = (a'')_l^2 + \sum_{n=l+1}^{N}(a)_n^2 = (a'')_l^2 + \frac{A}{2} + \delta - (a)_l^2$$

$$= \left[(a)_l - \frac{\delta}{(a)_l}\right]^2 + \frac{A}{2} + \delta - (a)_l^2 = \frac{A}{2} - \delta + \left(\frac{\delta}{(a)_l}\right)^2 < \frac{A}{2}.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть задан произвольный набор чисел $a = \{a_n\}_{n=1}^{M}$, который мы будем рассматривать как вектор M-мерного пространства и для которого мы должны доказать неравенство (83). Ниже нам удобнее координаты вектора a обозначать $(a)_n$, $n = 1, 2, \ldots, M$. Из соображений однородности и непрерывности можно считать, что $\sum\limits_{n=1}^{M} (a)_n^2 = 1$ и $(a)_n \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots, M$.

Определим разложения вектора a на сумму векторов:

$$a = \sum_{\nu=0}^{2^s-1} r_\nu^s, \qquad s = 0, 1, \ldots, s_0, \tag{87}$$

где $r_0^0 = a$, а векторы r_ν^s строятся последовательно: если вектор r_ν^{s-1} уже построен, то, применяя лемму 1 (с $a = r_\nu^{s-1}$), представим его в виде $r_\nu^{s-1} = r_{2\nu}^s + r_{2\nu+1}^s$, где координаты векторов $r_{2\nu}^s$ и $r_{2\nu+1}^s$ определяются согласно равенствам (85). Тогда векторы r_ν^s, $\nu = 0, 1, \ldots, 2^s - 1$, будут иметь вид

$$r_\nu^s = \big(0, \ldots, 0, a'_{l_\nu^s}, (a)_{l_\nu^s+1}, \ldots, (a)_{l_{\nu+1}^s-1}, a''_{l_{\nu+1}^s}, 0, \ldots, 0\big), \tag{88}$$

где $1 = l_0^s \leqslant l_1^s \leqslant \cdots \leqslant l_{2^s}^s = M$.

При этом, по построению (см. лемму 1), при $\nu = 0, 1, \ldots, 2^s - 1$

$$\begin{aligned} &\max\big\{\|r_{2\nu}^s\|_{l^2}^2, \|r_{2\nu+1}^s\|_{l^2}^2\big\} \leqslant \frac{1}{2}\|r_\nu^{s-1}\|_{l^2}^2, \\ &\max\big\{\|r_{2\nu}^s\|_{l^\infty}, \|r_{2\nu+1}^s\|_{l^\infty}\big\} \leqslant \|r_\nu^{s-1}\|_{l^\infty}. \end{aligned} \tag{89}$$

Число s_0 (см. (87)) выбираем настолько большим, чтобы число ненулевых координат каждого вектора $r_\nu^{s_0}$, $\nu = 0, 1, \ldots, 2^{s_0} - 1$, не превосходило двух (это возможно в силу первой оценки в (89)). Удобно положить также $r_{2^s}^s = 0$, $s = 1, 2, \ldots, s_0$.

Из соотношений (87) и (88) ясно, что при любых $s = 1, 2, \ldots, s_0$, $j = 1, 2, \ldots, 2^s$

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{j-1} r_\nu^s\Big)_n = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{\nu=0}^{2^s-1} r_\nu^s\Big)_n = (a)_n, & \text{если } n = 1, 2, \ldots, l_j^s - 1, \\ 0, & \text{если } n = l_j^s + 1, \ldots, M, \end{cases}$$

т.е. (см. также (89))

$$\sum_{\nu=0}^{j-1} r_\nu^s = \big((a)_1, \ldots, (a)_{l_j^s-1}, a''_{l_j^s}, 0, \ldots, 0\big), \qquad |a_{l_j^s}| \leqslant \|a\|_{l^\infty}. \tag{90}$$

Пользуясь соотношением (90) и выбрав для данного N, $N = 1, 2, \ldots, M-1$, число $j = j(N)$ так, что $l^{s_0}_{j-1} \leqslant N < l^{s_0}_j$, для вектора $a(N) = ((a)_1, \ldots, (a)_N, 0, \ldots, 0)$ получим разложение

$$a(N) = \sum_{\nu=0}^{j-1} r^{s_0}_\nu + b, \qquad |(b)_n| \leqslant \|a\|_{l^\infty}, \quad 1 \leqslant n \leqslant M, \tag{91}$$

где число ненулевых координат вектора b не превосходит двух. Из (91), учитывая, что $r^s_{2\nu} + r^s_{2\nu+1} = r^{s-1}_\nu$, мы находим

$$\begin{gathered} a(N) = \sum_{s=1}^{s_0} r^s_{\nu(s,N)} + b \\ \bigl(0 \leqslant \nu(s,N) \leqslant 2^s \text{ при } s = 1, 2, \ldots, s_0\bigr), \end{gathered} \tag{92}$$

а следовательно, для любых чисел $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ сумму $\sum\limits_{n=1}^N a_n y_n$ $(1 \leqslant N \leqslant M)$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^N a_n y_n = \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{n=1}^M \bigl(r^s_{\nu(s,N)}\bigr)_n y_n + \Delta, \\ |\Delta| \leqslant 2 \max_{1 \leqslant n \leqslant M} |a_n y_n|. \end{gathered} \tag{93}$$

Применяя разложение (93) в случае, когда $y_n = \varphi_n(x)$, а число $N = N(x)$ таково, что

$$\left|\sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)\right| = \delta(x) := \max_{1 \leqslant N' \leqslant M} \left|\sum_{n=1}^{N'} a_n \varphi_n(x)\right|,$$

мы находим

$$\begin{aligned} \delta(x) &\leqslant \sum_{s=1}^{s_0} \left|\sum_{n=1}^M \bigl(r^s_{\nu(s,N(x))}\bigr)_n \varphi_n(x)\right| + 2 \max_{1 \leqslant n \leqslant M} |a_n \varphi_n(x)| \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{s_0} \left\{\sum_{\nu=0}^{2^s-1} \left|\sum_{n=1}^M (r^s_\nu)_n \varphi_n(x)\right|^p\right\}^{1/p} + 2\left\{\sum_{n=1}^M |a_n \varphi_n(x)|^p\right\}^{1/p}. \end{aligned} \tag{94}$$

Учитывая, что $\|r^s_\nu\|^2_{l^2} \leqslant 2^{-s}$ (см. (89)) и пользуясь тем, что $\Phi - S_p$-система (см. (82)), мы из неравенства (94) выводим

$$\begin{aligned}\|\delta(x)\|_p &\leqslant \sum_{s=1}^{s_0}\left\|\left\{\sum_{\nu=0}^{2^s-1}\left|\sum_{n=1}^{M}(r_\nu^s)_n\varphi_n(x)\right|^p\right\}^{1/p}\right\|_p \\ &\quad + 2\left\|\left\{\sum_{n=1}^{M}|a_n\varphi_n(x)|^p\right\}^{1/p}\right\|_p \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{s_0}\left\{\sum_{\nu=0}^{2^s-1}\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{M}(r_\nu^s)_n\varphi_n(x)\right|^p dx\right\}^{1/p} \\ &\quad + 2\left\{\sum_{n=1}^{M}\int_0^1|a_n\varphi_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \\ &\leqslant K\sum_{s=1}^{s_0}\left\{\sum_{\nu=0}^{2^s-1}\|r_\nu^s\|_{l^2}^p\right\}^{1/p} + 2K\left\{\sum_{n=1}^{M}|a_n|^p\right\}^{1/p} \\ &\leqslant K\sum_{s=1}^{s_0}2^{s(1-\frac{p}{2})\frac{1}{p}} + 2K \leqslant C_\Phi < \infty.\end{aligned}$$

Оценка (83), а следовательно, и теорема 8 доказаны.

Определение 3. О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, называется *системой Сидона*, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \tag{95}$$

сходится в пространстве $L^\infty(0,1)$ тогда и только тогда, когда конечна сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty. \tag{96}$$

Нетрудно проверить, что для того чтобы система $\Phi = \{\varphi_n\}$ была системой Сидона, необходимо и достаточно, чтобы для любого полинома $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)$ выполнялись неравенства

$$c\sum_{n=1}^{N}|a_n| \leqslant \|P\|_\infty \leqslant C\sum_{n=1}^{N}|a_n|, \tag{97}$$

где постоянные $c > 0$ и C не зависят от полинома $P(x)$.

Из неравенства (97) вытекает, что системами Сидона могут быть только равномерно ограниченные О.Н.С., т.е. системы, для которых

$$\|\varphi_n\|_\infty \leqslant K, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{98}$$

Необходимое условие (98) не является, конечно, достаточным для того, чтобы система Φ была системой Сидона. Так, используя неравенства 4.(72), несложно показать, что если система $\{\sqrt{2}\cos 2\pi n_k x\}_{k=1}^\infty$, $x \in (0,1)$, – система Сидона, то заведомо последовательность $\{n_k\}$ – такая редкая, что

$$\lambda(N) := \sum_{k\colon n_k < N} 1 \leqslant C \log_2 N, \qquad N = 2, 3, \ldots. \tag{99}$$

Системами Сидона являются, например, система Радемахера и системы вида $\{\sqrt{2}\cos 2\pi n_k x\}_{k=1}^\infty$, где последовательность целых чисел n_k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию $n_{k+1} > \gamma n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\gamma > 1$.

Следует отметить, что если равномерно ограниченная О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $x \in (0,1)$, обладает тем свойством, что для некоторого множества $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$ (например, для $(\frac{1}{2}, 1)$), из сходимости ряда (95) в $L^\infty(E)$ вытекает условие (96), то Φ будет системой Сидона независимо от того, какие значения принимают функции $\varphi_n(x)$ для $x \in (0,1) \setminus E$. Иными словами, свойство системы $\Phi = \{\varphi_n(x)\}$, $x \in (0,1)$, быть системой Сидона не дает, вообще говоря, никакой информации (помимо оценок (98)) о поведении функций $\varphi_n(x)$ на интервале $(0, \frac{1}{2})$.

Одной из причин рассмотрения нами систем Сидона является то обстоятельство, что при изучении этих систем естественно вводятся произведения Рисса – важный для теории ортогональных рядов аппарат, о котором нам хотелось рассказать.

С помощью произведений Рисса можно показать, что из каждой О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n\}$, функции которой равномерно ограничены (см. (98)), можно извлечь подсистему Сидона $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$. Здесь мы получим количественный аналог этого результата.

Теорема 9. *Из всякого ортонормированного набора функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ *с* $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant M$ *при* $n = 1, 2, \ldots, N$ *можно выбрать функции* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^s$, $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_s \leqslant N$, *с* $s \geqslant \max\{[\frac{1}{6}\log_2 N], 1\}$ *такие, что для любых чисел* a_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{M}\Bigl\|\sum_{k=1}^s a_k\varphi_{n_k}\Bigr\|_\infty \leqslant \sum_{k=1}^s |a_k| \leqslant 4M\Bigl\|\sum_{k=1}^s a_k\varphi_{n_k}\Bigr\|_\infty. \tag{100}$$

Замечание. Как показывает пример тригонометрической системы (см. (99)), оценка $s \geqslant \left[\frac{1}{6}\log_2 N\right]$ по порядку неулучшаема.

Доказательство теоремы 9. Прежде всего отметим, что левое неравенство в (100) справедливо для любого полинома по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$. Кроме того, так как

$$\left\|\sum_{k=1}^{s} a_k\varphi_{n_k}\right\|_\infty \geqslant \left\|\sum_{k=1}^{s} a_k\varphi_{n_k}\right\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{s} a_k^2\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{k=1}^{s}|a_k|,$$

то для любой подсистемы $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^s$ с $\sqrt{s} < 4M$ правая оценка в (100) также очевидна. Тем самым при доказательстве правого неравенства в (100) мы, не теряя общности, будем считать, что

$$s \geqslant (4M)^2 \geqslant 16 \tag{101}$$

(в (101) мы учли, что всегда $M \geqslant \|\varphi_1\|_\infty \geqslant \|\varphi_1\|_2 = 1$).

Покажем, что правое неравенство (100) будет выполняться для любого полинома по системе $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^s$, если имеет место оценка

$$I(\{n_k\}) := \sum_{\{\varepsilon_k\}\in\Omega_s}\left\{\int_0^1 \prod_{k=1}^{s}\left[\frac{\varphi_{n_k}(x)}{M}\right]^{\varepsilon_k} dx\right\}^2 \leqslant 10^{-s}, \tag{102}$$

где в (102) через Ω_s обозначена совокупность всех возможных наборов $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^s$ таких, что

$$\text{а) } \varepsilon_k = 0, 1 \text{ или } 2; \quad \text{б) } \sum_{k:\,\varepsilon_k=2} 1 \leqslant 1; \quad \text{в) } \sum_{k:\,\varepsilon_k=1} 1 \geqslant 1. \tag{103}$$

В самом деле, пусть справедливо неравенство (102), и пусть задан какой-то полином $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{s} a_k\varphi_{n_k}(x)$. Для оценки нормы $\|P(x)\|_\infty$ введем произведение (*произведение Рисса*)

$$\prod_{k=1}^{s}\left[1 + \frac{\operatorname{sign} a_k}{M}\varphi_{n_k}(x)\right].$$

Используя неотрицательность этого произведения (сразу вытекающую из того, что $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant M$), мы находим

$$\begin{aligned}\sigma &:= \int_0^1 P(x)\prod_{k=1}^{s}\left[1+\frac{\operatorname{sign} a_k}{M}\varphi_{n_k}(x)\right]dx\\ &\leqslant \|P(x)\|_\infty \int_0^1 \prod_{k=1}^{s}\left[1+\frac{\operatorname{sign} a_k}{M}\varphi_{n_k}(x)\right]dx\\ &\leqslant \|P(x)\|_\infty + \|P(x)\|_\infty \sum_{\{\varepsilon_k\}\in\Omega'_s}\left|\int_0^1 \prod_{k=1}^{s}\left[\frac{\varphi_{n_k}(x)}{M}\right]^{\varepsilon_k}dx\right|, \qquad (104)\end{aligned}$$

где через Ω'_s обозначена совокупность всех возможных наборов из нулей и единиц $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^s$ с $\sum\limits_{k=1}^{s}\varepsilon_k \geqslant 1$. Учитывая оценку (102) и применяя неравенство Коши, из (104) мы получим, что

$$\sigma \leqslant \|P(x)\|_\infty\left[1+2^{\frac{s}{2}}I^{\frac12}(\{n_k\})\right] \leqslant 2\|P(x)\|_\infty. \qquad (105)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_0^1\left[\sum_{p=1}^{s}a_p\varphi_{n_p}(x)\right]\prod_{k=1}^{s}\left[1+\frac{\operatorname{sign} a_k}{M}\varphi_{n_k}(x)\right]dx\\ &= \sum_{p=1}^{s}a_p\int_0^1 \varphi_{n_p}(x)\,dx\\ &\quad + \sum_{p=1}^{s}a_p\int_0^1 \varphi_{n_p}(x)\sum_{\{\varepsilon_k\}\in\Omega'_s}\prod_{k=1}^{s}\left[\frac{\operatorname{sign} a_k}{M}\varphi_{n_k}(x)\right]^{\varepsilon_k}dx. \qquad (106)\end{aligned}$$

Отделяя в правой части равенства (106) слагаемые вида

$$a_p\int_0^1 \varphi_{n_p}(x)\frac{\operatorname{sign} a_p}{M}\varphi_{n_p}(x)\,dx = |a_p|\cdot\frac{1}{M}, \qquad p=1,2,\ldots,s,$$

мы получим, что

$$\sigma \geqslant \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{s}|a_k| - \Big(\sum_{k=1}^{s}|a_k|\Big)M\sum_{\{\varepsilon_k\}\in\Omega_s}\left|\int_0^1\prod_{k=1}^{s}\left(\frac{\varphi_{n_k}(x)}{M}\right)^{\varepsilon_k}dx\right|, \qquad (107)$$

где в (107) суммирование производится уже по всем наборам $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^s$, удовлетворяющим условиям (103).

Применяя неравенство Коши и вновь пользуясь оценкой (102), из (107) выводим, что

$$\sigma \geqslant \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{s}|a_k| - \left(\sum_{k=1}^{s}|a_k|\right)M(s2^s)^{1/2}I^{1/2}(\{n_k\})$$
$$\geqslant \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{s}|a_k| - \left(\sum_{k=1}^{s}|a_k|\right)M\left(\frac{s2^s}{10^s}\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{2M}\sum_{k=1}^{s}|a_k|, \qquad (108)$$

так как в силу (101) $\left(\frac{s}{5^s}\right)^{1/2} \leqslant \frac{8}{s} \leqslant \frac{1}{2M^2}$.

Соединяя оценки (105) и (108), мы находим, что если для набора $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{s}$ справедливо неравенство (102), то для любого полинома $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{s} a_k\varphi_{n_k}(x)$ имеет место оценка нормы

$$\|P(x)\|_\infty \geqslant \frac{1}{4M}\sum_{k=1}^{s}|a_k|,$$

т.е. теорема 9 будет доказана, если мы докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Из любого набора функций* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ $\left(\frac{1}{6}\log_2 N \geqslant 1\right)$, *удовлетворяющего условиям теоремы* 9, *можно выбрать функции* $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{s}$, $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_s \leqslant N$, *с* $s \geqslant \frac{1}{6}\left[\log_2 N\right]$, *для которых справедливо неравенство* (102).

Доказательство. Для данного числа s оценим сумму

$$G := \sum_{\{n_k\}\in E_N^s} I(\{n_k\})$$
$$= \sum_{\{n_k\}\in E_N^s}\ \sum_{\{\varepsilon_k\}\in\Omega_s}\left[\int_0^1 \prod_{k=1}^{s}\left(\frac{\varphi_{n_k}(x)}{M}\right)^{\varepsilon_k} dx\right]^2, \qquad (109)$$

где через E_N^s обозначена совокупность всех наборов натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{s}$ с $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_s \leqslant N$. Сумма G состоит из слагаемых вида (см. (103))

$$\left[\frac{1}{M^j}\int_0^1 \prod_{k=1}^{j}\varphi_{n_k}(x)\,dx\right]^2, \qquad 1 \leqslant j \leqslant s, \quad \{n_k\} \in E_N^j,$$

и вида

$$\left[\frac{1}{M^{j+1}}\int_0^1 \varphi_{n_q}(x)\prod_{k=1}^{j}\varphi_{n_k}(x)\,dx\right]^2, \quad 1 < j \leqslant s,\ 1 \leqslant q \leqslant j,\ \{n_k\} \in E_N^j,$$

причем нетрудно проверить, что при $s > 1$ каждое из этих слагаемых встречается в сумме (109)

$$C_{N-j}^{s-j} \text{ раз} \tag{110}$$

(C_m^l – число сочетаний из m по l).

Оценим суммы:

•

$$G_j' := \sum_{\{n_k\}\in E_N^j}\left[\int_0^1 \prod_{k=1}^{j}\varphi_{n_k}(x)\,dx\right]^2, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \tag{111}$$

$$G_j'' := \sum_{\{n_k\}\in E_N^j}\sum_{q=1}^{j}\left[\int_0^1 \varphi_{n_q}(x)\prod_{k=1}^{j}\varphi_{n_k}(x)\,dx\right]^2, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \tag{112}$$

По неравенству Бесселя

$$G_1' = \sum_{n=1}^{N}\left[\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx\right]^2 \leqslant \|1\|_2^2 = 1. \tag{113}$$

Далее, при $j > 1$

$$G_j' \leqslant \sum_{\{p_k\}\in E_N^{j-1}}\ \sum_{\{n_k\}\in E_N^j}\delta(\{p_k\},\{n_k\})\left[\int_0^1 \prod_{k=1}^{j}\varphi_{n_k}(x)\,dx\right]^2, \tag{114}$$

где

$$\delta(\{p_k\},\{n_k\}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{p_k\}\subset\{n_k\},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Так как, в силу неравенства Бесселя, для каждого набора $\{p_k\} \in E_N^{j-1}$

$$\sum_{\{n_k\}\in E_N^j:\,\{n_k\}\supset\{p_k\}}\left[\int_0^1 \prod_{k=1}^{j}\varphi_{n_k}(x)\,dx\right]^2$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{N}\left\{\int_0^1\left[\prod_{k=1}^{j-1}\varphi_{p_k}(x)\right]\varphi_n(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \left\|\prod_{k=1}^{j-1}\varphi_{p_k}(x)\right\|_2^2 \leqslant M^{2(j-1)},$$

то из (114) вытекает, что

$$G'_j \leqslant \sum_{\{p_k\} \in E_N^{j-1}} M^{2(j-1)} = C_N^{j-1} M^{2(j-1)}, \qquad j = 2, 3, \ldots, s. \tag{115}$$

Для оценки суммы G''_j (см. (112)) запишем равенство

$$G''_j = \sum_{p=1}^{N} G''_j(p),$$

где

$$G''_j(p) = \sum_{\{n_k\} \in E_N^{j-1} : \{n_k\} \not\ni p} \left[\int_0^1 \varphi_p^2(x) \prod_{k=1}^{j-1} \varphi_{n_k}(x)\, dx \right]^2.$$

Оценивая сумму $G''_j(p)$ с помощью неравенства Бесселя, точно так же, как и суммы G'_j, мы найдем, что

$$G''_j(p) \leqslant C_{N-1}^{j-2} M^{2j}, \qquad j = 2, 3, \ldots, s,$$

а следовательно,

$$G''_j \leqslant N C_{N-1}^{j-2} M^{2j}, \qquad j = 2, 3, \ldots, s. \tag{116}$$

Учитывая (110), из неравенств (115) и (116) мы получаем такую оценку для суммы (109):

$$G \leqslant \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{M^{2j}} C_{N-1}^{s-j} (G'_j + G''_j) \leqslant \sum_{j=1}^{s} C_{N-j}^{s-j} (C_N^{j-1} + N C_{N-1}^{j-2}) \tag{117}$$

($G''_1 = C_{N-1}^{-1} = 0$; мы учли также, что $M \geqslant 1$). Количество элементов в E_N^s равно C_N^s, поэтому из (117) вытекает, что

$$\min_{\{n_k\} \in E_N^s} I(\{n_k\}) \leqslant \frac{G}{C_N^s} \leqslant \sum_{j=1}^{s} \frac{C_{N-j}^{s-j}}{C_N^s} (C_N^{j-1} + N C_{N-1}^{j-2}). \tag{118}$$

Так как $jC_N^{j-1} \geqslant NC_{N-1}^{j-2}$, то правая часть в неравенстве (118) не больше, чем

$$2(1+s) \sum_{j=1}^{s} \frac{C_{N-j}^{s-j} C_N^{j-1}}{C_N^s} = 2(1+s) \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{N-j+1} \cdot \frac{s!}{(s-1)!\,(j-1)!}$$
$$\leqslant \frac{2(1+s)}{N-s} \sum_{j=1}^{s} C_s^j \leqslant \frac{(1+s)2^{s+1}}{N-s} \leqslant 10^{-s},$$

если $N \geqslant (64)^s$, т.е. $s \leqslant \frac{1}{6} \log_2 N$. Лемма 1, а следовательно, и теорема 9 доказаны.

§ 5. Свойства проинтегрированных ортонормированных систем

Вопросы о равномерной сходимости ортогональных рядов, естественно возникавшие при изучении тригонометрической и других классических систем, становятся малосодержательными, если рассматривать ряды по общим ортогональным системам. Дело в том, что функции О.Н.С. могут быть весьма "плохими", например, неограниченными. Если же мы рассмотрим систему функций

$$F_n(y) = \int_0^y \varphi_n(x)\,dx, \quad \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} - \text{О.Н.С.} \quad (x, y \in (0,1)), \tag{119}$$

то оказывается, что можно получать нетривиальные утверждения общего характера о равномерной сходимости рядов по таким системам. Оказывается, в частности, что для любой системы вида (119) и для п.в. $t \in (0,1)$ равномерно (по y) сходятся ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)F_n(y); \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(t)F_n(y), \tag{120}$$

где $\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – система Радемахера, а $\{\xi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – О.Н.С. независимых, нормально распределенных функций. В силу теорем 2.6 и 2.10 эти утверждения являются частными случаями следующего результата.

Теорема 10. *Пусть О.Н.С.* $\{\eta_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $t \in (0,1)$, *является* S_p*-системой при некотором* $p > 2$. *Пусть, далее,* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– произвольная О.Н.С. Тогда для п.в.* $t \in (0,1)$ *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^y \varphi_n(x)\,dx \tag{121}$$

сходится равномерно (по y*) на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство. Мы будем пользоваться теоремой 8, согласно которой для любых чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\eta_n(t)$ сходится п.в. и

$$\left\| \sup_{1\leqslant N<\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n\eta_n(t) \right| \right\|_p \leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2}. \tag{122}$$

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_n(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} 1^2\,dx = \beta-\alpha, \quad 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1, \tag{123}$$

и, в частности,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_{0}^{y}\varphi_n(x)\,dx\right\}^2 \leqslant 1, \qquad 0\leqslant y\leqslant 1. \tag{124}$$

Из неравенства (124) (см. также (122)) следует, что при любом фиксированном y ряд (121) сходится для п.в. $t\in(0,1)$, а следовательно:

(*) существует такое множество $E_0\subset(0,1)$, $m(E_0)=1$, что ряд (121) сходится для каждой пары точек (t,y) такой, что $t\in E_0$, $y\in R_2$, где $R_2 := \left\{\left\{\frac{i}{2^k}\right\}_{i=0}^{2^k}\right\}_{k=0}^{\infty}$.

Пусть

$$S_N(t,y)=\sum_{n=1}^{N}\eta_n(t)\int_0^y\varphi_n(x)\,dx. \tag{125}$$

Пусть, далее, π_m – следующее множество точек: $\pi_m = \left\{\frac{2s-1}{2^{m+1}}\right\}_{s=1}^{2^m}$, $m=1,2,\ldots$. Наконец, для каждого $y=\frac{2s-1}{2^{m+1}}\in\pi_m$ положим

$$\rho_m(t,y)=\sup_{1\leqslant N<\infty}\left|S_N(t,y)-S_N\left(t,\frac{s-1}{2^m}\right)\right| \tag{126}$$

и

$$R_m(t)=\max_{y\in\pi_m}\rho_m(t,y). \tag{127}$$

Учитывая непрерывность функций $\int_0^y\varphi_n(x)\,dx$ и тот факт, что $S_N(t,0)=0$ для $t\in(0,1)$ и $N=1,2,\ldots$, из определения чисел $R_m(t)$ мы получаем, что для каждого фиксированного $t\in(0,1)$

$$\|S_N(t,y)\|_C\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}R_m(t), \qquad N=1,2,\ldots, \tag{128}$$

$$\left|S_N(t,y)-S_N\left(t,\frac{i-1}{2^k}\right)\right|\leqslant\sum_{m=k}^{\infty}R_m(t), \quad y\in\left(\frac{i-1}{2^k},\frac{i}{2^k}\right), \tag{129}$$

$$i=1,2,\ldots,2^k, \qquad N=1,2,\ldots.$$

Из неравенства (129) следует, что равномерная (по y) сходимость ряда (121) имеет место при любом $t \in E_0$ (см. $(*)$), для которого

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(t) < \infty. \tag{130}$$

В самом деле, если для $t \in E_0$ выполнено соотношение (130), то, задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, найдем сначала такое $k = 1, 2, \ldots$, что $\sum\limits_{m=k}^{\infty} R_m(t) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Затем, учитывая $(*)$, найдем такое число N_0, что при любых $N > N_0$ и $N' > N_0$ во всех точках вида $\dfrac{i}{2^k}$, $i = 0, 1, \ldots, 2^k$, выполняется неравенство

$$\left|S_{N'}\left(t, \frac{i}{2^k}\right) - S_N\left(t, \frac{i}{2^k}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда из (129) вытекает, что при $N' > N_0$ и $N > N_0$

$$|S_{N'}(t,y) - S_N(t,y)| < \varepsilon \quad \text{для любого} \quad y \in [0,1].$$

Тем самым для доказательства теоремы 10 достаточно показать, что неравенство (130) справедливо для п.в. $t \in (0,1)$.

Фиксируем сначала произвольную точку $y = \dfrac{2s-1}{2^{m+1}} \in \pi_m$. Тогда для функции $\rho_m(t,y)$, определенной в (126), справедливо равенство

$$\rho_m(t,y) = \sup_{1 \leqslant N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} \eta_n(t) \int_{(s-1)/2^m}^{y} \varphi_n(x)\, dx \right|,$$

откуда в силу оценок (122) и (123) вытекает, что

$$\left\{\int_0^1 [\rho_m(t,y)]^p dt\right\}^{1/p} \leqslant C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{(s-1)/2^m}^{y} \varphi_n(x)\, dx\right]^2 \right\}^{1/2} \leqslant C \cdot 2^{-m/2}. \tag{131}$$

Из (131), применяя неравенство $m\{t \in (0,1) : |f(t)| > z\} \leqslant \left(\dfrac{\|f\|_p}{z}\right)^p$, мы выводим, что для любого $y \in \pi_m$

$$m\{t \in (0,1) : \rho_m(t,y) > 2^{\frac{m}{2p}(1-\frac{p}{2})}\} \leqslant C^p\, 2^{-\frac{mp}{2}}\, 2^{\frac{m}{2}(-1+\frac{p}{2})},$$

а поэтому

$$m\left\{t \in (0,1) : R_m(t) > 2^{\frac{m}{2p}(1-\frac{p}{2})}\right\}$$
$$\leqslant 2^m\left[C^p\, 2^{-\frac{mp}{2}}\, 2^{\frac{m}{2}(-1+\frac{p}{2})}\right] = C^p\, 2^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}p)} = C'\, 2^{-\gamma m},$$

где $\gamma = \gamma(p) > 0$. Из последней оценки следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\left\{t \in (0,1) : R_m(t) > 2^{\frac{m}{2p}(1-\frac{p}{2})}\right\} < \infty,$$

а значит, для п.в. $t \in (0,1)$ $R_m(t) \leqslant 2^{\frac{m}{2p}(1-\frac{p}{2})}$ при $m > m(t)$ и тем самым для п.в. $t \in (0,1)$ конечна сумма ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} R_m(t)$. Как отмечалось выше, из этого факта следует утверждение теоремы 10.

В заключение главы рассмотрим свойства суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n^2(y)$, где функции $F_n(y)$ определены в (119).

Если система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ полна, то по равенству Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n^2(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^y \varphi_n(x)\,dx\right]^2 = y.$$

В случае произвольной О.Н.С. верно следующее

Утверждение 1. *Для любой О.Н.С.* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *сумма ряда*

$$S(y) := \sum_{n=1}^{\infty} F_n^2(y), \qquad y \in [0,1],$$

непрерывна и удовлетворяет условию Липшица порядка $1/2$.

В самом деле, используя неравенство Бесселя, мы находим

$$|S(y) - S'(y)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}[F_n^2(y) - F_n^2(y')]\right|$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |F_n(y) - F_n(y')| \cdot |F_n(y) + F_n(y')|$$
$$\leqslant \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(y) - F_n(y')|^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} F_n(y)^2\right\}^{1/2}$$
$$+ \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(y) - F_n(y')|^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} F_n(y')^2\right\}^{1/2}$$
$$\leqslant 2\,|y - y'|^{1/2},$$

что и требовалось доказать.

Как показывает пример О.Н.С. $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, в которой $\varphi_1(x) = c(1-x)^{\frac{\varepsilon-1}{2}}$, $0 < x < 1$ $(0 < \varepsilon < 1)$, а функции $\varphi_n(x)$, $n = 2, 3, \ldots$, равны нулю при $x > 1/2$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется О.Н.С. $\{\varphi_n\}$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^y \varphi_n(x)\,dx\right]^2 \notin \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right),$$

т.е. показатель гладкости в утверждении 1 точен.

Глава 10
Теоремы общего характера о расходимости ортогональных рядов

Важным итогом ряда работ, выполненных в 60–70-е годы и посвященных изучению общих ортогональных систем, было выяснение того факта, что основные теоремы о расходимости рядов Фурье или рядов коэффициентов Фурье по тригонометрической системе имеют общий характер и могут быть распространены на широкие классы О.Н.С. Такое распространение потребовало развития новых методов, оказавшихся полезными и в более широком круге задач, и одновременно прояснило природу примеров расходящихся в том или ином смысле тригонометрических рядов. Изложению результатов общего характера о расходимости ортогональных рядов и посвящена эта глава.

§1. Расходимость рядов Фурье класса L^2 почти всюду после перестановки членов

Теорема 1. *Не существует полных ортонормированных систем безусловной сходимости* (см. определение 1.5).

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что для произвольной П.О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, найдется функция $g \in L^2(0,1)$, ряд Фурье которой расходится п.в. после некоторой перестановки. Мы докажем несколько больше, а именно, что существует функция $g \in L^\infty(0,1)$, для которой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \qquad c_n = c_n(g,\Phi) = \int_0^1 g(x)\varphi_n(x)\,dx, \quad n = 1,2,\ldots,$$

неограниченно расходится п.в. после некоторой перестановки членов $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$, т.е.

$$\sup_{1\leqslant N<\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)\right| = +\infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1). \tag{1}$$

Это утверждение мы выведем из аналогичного результата о системах типа Хаара (см. § 3.6 и, в частности, следствие 3.9). Нам потребуется

Лемма 1. *Для любой П.О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *найдутся система типа Хаара* $\{\chi_n(x,\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ *и последовательность полиномов по системе* Φ:

$$P_n(x) = \sum_{s=m_n+1}^{m_{n+1}} a_s\varphi_s(x), \qquad 0 = m_1 < m_2 < \cdots, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

такие, что

а) $\chi_n(x,\varepsilon) = P_n(x) + \eta_n(x)$, $x \in (0,1)$, $\|\eta_n\|_2 \leqslant 2^{-n}$, $n = 1,2,\ldots$;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{m=m_n+1}^{\infty}[c_m(\eta_k,\Phi)]^2\right\}^{1/2} \leqslant 2^{-n}, \quad n = 2,3,\ldots .$

Доказательство. Систему типа Хаара $\{\chi_n(x,\varepsilon)\}$, или, что то же самое, семейство множеств $\varepsilon = \{E_k^i\}$ со свойствами I)–III) (см. § 3.6 и, в частности, 3.(112) и 3.(116)), мы будем строить по индукции, следя одновременно за тем, чтобы выполнялось условие:

IV) каждое множество $E_k^i \in \varepsilon$ представимо в виде конечного объединения двоичных интервалов одинаковой длины.

Положим $E_0^1 = (0,1)$ и $\chi_1(x,\varepsilon) := 1$ при $x \in (0,1)$. Используя полноту системы Φ, найдем число $m_2 > m_1 = 0$ такое, что для полинома

$$P_1(x) = \sum_{s=1}^{m_2} a_s\varphi_s(x), \qquad a_s = c_s(\chi_1(x,\varepsilon),\Phi), \quad s = 1,2,\ldots,m_2,$$

выполнено соотношение а) (при $n = 1$).

Предположим теперь, что при некотором $k = 0,1,\ldots$ построены функции $\{\chi_n(x,\varepsilon)\}_{n=1}^{2^k}$, полиномы $\{P_n(x)\}_{n=1}^{2^k}$, и множества $\{E_k^i\}_{i=1}^{2^k}$, причем соотношения а) и б) для $n \leqslant 2^k$ справедливы. Построим последовательно при $n = 2^k+1, 2^k+2, \ldots, 2^{k+1}$ функции $\chi_n(x,\varepsilon)$ и полиномы $P_n(x)$, а также множества $\{E_{k+1}^i\}_{i=1}^{2^{k+1}}$.

Фиксируем число $n = 2^k + i$, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$, при этом мы считаем, что функции $\chi_s(x,\varepsilon)$ и полиномы $P_s(x)$ с $s < n$ уже построены и тем самым определено число m_n (см. (2)), и рассмотрим функции

$$\psi_j(x) = 2^{k/2} r_j(x) \chi_{E_k^i}(x), \qquad x \in (0,1), \quad j = 1,2,\ldots, \tag{3}$$

где $\{r_j(x)\}$ – система Радемахера и $\chi_E(x)$ – характеристическая функция множества E. Так как $m(E_k^i) = 2^{-k}$, то $\|\psi_j\|_2 = 1$, $j = 1,2,\ldots$. Кроме того, из условия IV) и определения системы Радемахера вытекает, что для достаточно большого j' функции $\psi_j(x)$, $j \geqslant j'$, попарно ортогональны. Следовательно, при $m = 1,2,\ldots$ коэффициенты Фурье

$$c_m(\psi_j, \Phi) = \int_0^1 \psi_j(x)\varphi_m(x)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty,$$

а значит, найдется число $j_0 > j'$ такое, что

$$\left\| \sum_{m=1}^{m_n} c_m(\psi_{j_0}, \Phi)\varphi_m(x) \right\|_2 = \left\{ \sum_{m=1}^{m_n} c_m^2(\psi_{j_0}, \Phi) \right\}^{1/2} \leqslant 2^{-n-1}. \tag{4}$$

Далее, учитывая, что Φ – П.О.Н.С., выберем число $m_{n+1} > m_n$ настолько большим, что выполняется оценка б) и неравенство

$$\left\| \sum_{m=1}^{m_{n+1}} c_m(\psi_{j_0}, \Phi)\varphi_m(x) - \psi_{j_0}(x) \right\|_2 \leqslant 2^{-n-1}. \tag{5}$$

Положим

$$\begin{gathered} \chi_n(x,\varepsilon) = \chi_k^i(x,\varepsilon) = \psi_{j_0}(x), \\ P_n(x) = \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} c_m(\psi_{j_0}, \Phi)\varphi_m(x), \qquad x \in (0,1), \\ E_{k+1}^{2i-1} = \{x \in (0,1) : \psi_{j_0}(x) = 2^{k/2}\}, \\ E_{k+1}^{2i} = \{x \in (0,1) : \psi_{j_0}(x) = -2^{k/2}\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Тогда из (4) и (5) непосредственно вытекает, что

$$\|\chi_n(x,\varepsilon) - P_n(x)\|_2 \leqslant 2^{-n},$$

т.е. соотношение а) справедливо.

Из построения (см. (3), (6)) ясно, что множество E^i_{k+1} $(1 \leqslant i \leqslant 2^{k+1})$ состоит из двоичных интервалов одинаковой длины и

$$m(E^i_{k+1}) = 2^{-k-1},$$
$$E^i_{k+1} \cap E^j_{k+1} = \varnothing, \quad \text{если} \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2,\ldots,2^{k+1},$$
$$E^i_k = E^{2i-1}_{k+1} \cup E^{2i}_{k+1}, \quad i = 1,2,\ldots,2^k.$$

Проводя указанные построения при всех $k \geqslant 0$, мы получаем семейство $\varepsilon = \{E^i_k\}$, для которого выполнены условия I)–III) (см. § 3.6), а значит, система $\{\chi_n(x,\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ – система типа Хаара. Справедливость соотношений а) и б) при $n = 1,2,\ldots$ была проверена ранее. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}$ – П.О.Н.С. Пользуясь леммой 1, найдем систему типа Хаара $\chi_\varepsilon = \{\chi_n(x,\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ и полиномы $P_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$, вида (2), удовлетворяющие соотношениям а) и б) леммы 1. Согласно следствию 3.9 существует функция $g \in L^\infty(0,1)$, для которой ряд Фурье по системе χ_ε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x,\varepsilon), \qquad b_n = \int_0^1 g(t)\chi_n(t,\varepsilon)\,dt, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

после некоторой перестановки членов – $\sigma' = \{\sigma'(n)\}_{n=1}^{\infty}$ неограниченно расходится п.в. на $(0,1)$, т.е.

$$\sup_{1\leqslant N<\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} b_{\sigma'(n)} \chi_{\sigma'(n)}(x,\varepsilon) \right| = \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1). \tag{8}$$

При этом, конечно, ряд (7) сходится в пространстве L^2 к $g(x)$. Докажем, что и ряд Фурье $g(x)$ по системе Φ неограниченно расходится п.в. после некоторой перестановки. Для этого достаточно проверить, что

$$\sup_{1\leqslant N<\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} Q_{\sigma'(n)}(x) \right| = \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1), \tag{9}$$

где $Q_n(x) = \sum\limits_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} c_m\varphi_m(x)$, $c_m = c_m(g,\Phi)$, $n,m = 1,2,\ldots$. Положим при $n = 1,2,\ldots$

$$\beta_n(x) = Q_n(x) - b_n\chi_n(x,\varepsilon) \tag{10}$$

и докажем, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\beta_n\|_2 < \infty. \tag{11}$$
Отсюда (см. (8) и (10)) мы сразу получим равенство (9), так как, в силу теоремы Б. Леви, из (11) вытекает, что
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n(x)| < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1).$$

При $n = 1, 2, \dots$ и $m_n < m \leqslant m_{n+1}$ мы имеем (см. лемму 1)
$$\begin{aligned}
c_m = c_m(g, \Phi) &= \int_0^1 \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \chi_\nu(x, \varepsilon)\right] \varphi_m(x)\, dx \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \left[\int_0^1 P_\nu(x)\varphi_m(x)\, dx + \int_0^1 \eta_\nu(x)\varphi_m(x)\, dx\right] \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \int_0^1 \sum_{s=m_\nu+1}^{m_{\nu+1}} a_s\varphi_s(x)\varphi_m(x)\, dx + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu c_m(\eta_\nu, \Phi) \\
&= b_n a_m + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu c_m(\eta_\nu, \Phi)
\end{aligned}$$
(ряд в правой части последнего равенства сходится, так как в силу леммы 1 $|c_m(\eta_\nu, \Phi)| \leqslant \|\eta_\nu\|_2 \leqslant 2^{-\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$).

Следовательно (см. (10) и лемму 1),
$$\begin{aligned}
\beta_n(x) &\equiv \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} c_m\varphi_m(x) - b_n\chi_n(x, \varepsilon) \\
&= b_n P_n(x) + \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu c_m(\eta_\nu, \Phi)\right] \varphi_m(x) - b_n\chi_n(x, \varepsilon) \\
&= b_n\eta_n(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} c_m(\eta_\nu, \Phi)\varphi_m(x).
\end{aligned}$$

Отсюда, полагая $b = \sup\limits_{1 \leqslant n < \infty} |b_n|$ и используя неравенство Бесселя и соотношения а) и б) из леммы 1, мы выводим

$$\begin{aligned}
\|\beta_n\|_2 &\leqslant b\cdot 2^{-n} + b\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} c_m^2(\eta_\nu,\Phi)\right\}^{1/2} \\
&\leqslant b\cdot 2^{-n} + b\sum_{\nu=1}^{n-2}\left\{\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} c_m^2(\eta_\nu,\Phi)\right\}^{1/2} + b\sum_{\nu=n-1}^{\infty}\|\eta_n\|_2 \\
&\leqslant b\cdot 2^{-n} + b\cdot 2^{-n+1} + b\cdot 2^{-n+2} = 7b\cdot 2^{-n}, \qquad n=3,4,\dots.
\end{aligned}$$

Сходимость ряда (11), а потому и теорема 1 доказаны.

Следствие 1. *Для любой П.О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *имеют место соотношения*

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n^+(x)]^2 = \infty \quad \textit{для п.в.} \quad x\in(0,1), \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n^-(x)]^2 = \infty \quad \textit{для п.в.} \quad x\in(0,1).$$

где $\varphi_n^+(x) = \max\{0,\varphi_n(x)\}$, $\varphi_n^-(x) = \varphi_n(x) - \varphi_n^+(x)$.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать соотношение (12). Допустим противное: существуют множество $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$, и постоянная $M > 0$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n^+(x)]^2 \leqslant M^2 \ \text{ при } \ x\in E.$$

Докажем, что тогда для любой последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n\varphi_n(x)| < \infty \ \text{ для п.в. } \ x\in E. \tag{13}$$

Тем самым мы придем к противоречию, так как в доказательстве теоремы 1 была построена функция $g \in L^{\infty}(0,1) \subset L^2(0,1)$, для ряда Фурье которой имеет место равенство (1).

Без ограничения общности можно считать, что $c_n \geqslant 0$, $n=1,2,\dots$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 = 1$. При $x \in E$ мы имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n^+(x) \leqslant \left\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n^+(x)]^2\right\}^{1/2} \leqslant M < \infty, \tag{14}$$

а следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n^+(x)$ сходится в $L^2(E)$ (мы использовали, что $c_n\varphi_n^+(x) \geqslant 0$). Но тогда, учитывая сходимость в $L^2(E)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ и равенство $\varphi_n^-(x) = \varphi_n(x) - \varphi_n^+(x)$, мы получаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n^-(x) \tag{15}$$

также сходится в пространстве $L^2(E)$. Так как $c_n\varphi_n^-(x) \leqslant 0$ при $n = 1, 2, \ldots$ и $x \in E$, то сходимость ряда (15) в $L^2(E)$ влечет его сходимость п.в.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n^-(x) = M'(x) > -\infty \quad \text{п.в. на} \quad E.$$

Отсюда и из (14) в силу равенства $|\varphi_n(x)| = \varphi_n^+(x) - \varphi_n^-(x)$ вытекает соотношение (13). Следствие 1 доказано.

Теорема 1 может быть усилена:

Теорема 2. *Для любой П.О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *найдется функция* $f \in C(0,1)$, *ряд Фурье которой по системе* Φ *после некоторой перестановки членов неограниченно расходится п.в. на* $(0,1)$.

В доказательстве теоремы 1 для любой П.О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была построена функция $g \in L^{\infty}(0,1)$, ряд Фурье которой после некоторой перестановки членов неограниченно расходится п.в. (см. (1)). Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно проверить, что справедлива

Лемма 1. *Если для О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *существует функция* $g \in L^{\infty}(0,1)$, *для которой ряд Фурье по системе* Φ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(g)\varphi_n(x), \qquad c_n(g) = c_n(g,\Phi) = \int_0^1 g(x)\varphi_n(x)\,dx \tag{16}$$

неограниченно расходится п.в. на $(0,1)$, *то существует и непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $f(x)$, *обладающая тем же свойством.*

Лемма 2. *Пусть* $f_1(x)$, $f_2(x)$ *– измеримые функции на* $(0,1)$ *и* n *– натуральное число. Найдется целое* j, $1 \leqslant j \leqslant n$, *такое, что*

$$m\Big\{x \in (0,1) : |f_1(x) + jf_2(x)| \geqslant \frac{1}{2}|f_2(x)|\Big\} \geqslant 1 - \frac{1}{n}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $G = \{x \in (0,1) : f_2(x) \neq 0\}$ и при $j = 1, 2, \dots, n$

$$E_j = \left\{x \in G : f_1(x) \in \left(-jf_2(x) - \frac{1}{2}|f_2(x)|, -jf_2(x) + \frac{1}{2}|f_2(x)|\right)\right\}.$$

Так как множества $E_j \subset (0,1)$, $j = 1, 2, \dots, n$, не пересекаются, то ясно, что $m(E_j) \leqslant 1/n$ для некоторого $j = 1, 2, \dots, n$, откуда в силу равенства

$$m\left\{x \in (0,1) : |f_1(x) + jf_2(x)| < \frac{1}{2}|f_2(x)|\right\} = m(E_j)$$

получим (17).

Доказательство леммы 1. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|g\|_\infty = 1$. Так как ряд (16) неограниченно расходится п.в. на $(0,1)$, то для каждого $k = 1, 2, \dots$ можно найти число $M_k > 0$ и измеримую целочисленную функцию $N_k(x)$, $1 \leqslant N_k(x) \leqslant M_k$, такие, что

$$m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=1}^{N_k(x)} c_n(g)\varphi_n(x)\right| > 2^k + 1\right\} \geqslant 1 - 2^{-k-1}. \tag{18}$$

Учитывая, что для $h \in L^2(0,1)$ $|c_n(g) - c_n(h)| \leqslant \|g - h\|_2$, $n = 1, 2, \dots$, мы можем утверждать, что если функция

$$f_k(x) \in C(0,1), \qquad \|f_k\|_C \leqslant 1, \tag{19}$$

взята достаточно близкой по норме $L^2(0,1)$ к $g(x)$, то имеет место неравенство

$$m\{x \in (0,1) : |F_k(x)| > 2^k\} \geqslant 1 - 2^{-k}, \tag{20}$$

где

$$F_k(x) = \sum_{n=1}^{N_k(x)} c_n(f_k)\varphi_n(x).$$

Покажем, что для достаточно редкой последовательности натуральных чисел $\{k_s\}_{s=1}^\infty$ и для некоторых чисел b_s, $1 \leqslant b_s \leqslant k_s^2$, $s = 1, 2, \dots$, функция

$$f(x) = \sum_{s=1}^\infty \frac{1}{k_s^4} b_s f_{k_s}(x), \qquad x \in (0,1), \tag{21}$$

удовлетворяет требованиям леммы 1, т.е. $f \in C(0,1)$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n(x)$$

неограниченно расходится п.в. на $(0,1)$. Числа k_s и b_s будем строить последовательно при $s = 1, 2, \ldots$. При этом используем обозначение

$$Q_j(x) = \sum_{s=1}^{j} \frac{1}{k_s^4} b_s f_{k_s}(x), \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Последовательность $\{k_s\}_{s=1}^{\infty}$ выберем таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$k_1 = 1, \qquad \sum_{s=j+1}^{\infty} \frac{1}{k_s^2} \leqslant (M_{k_j} \cdot 2^j)^{-1}, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

Далее, положим $b_1 = 1$, и если числа b_s, $s = 1, 2, \ldots, s_0$, уже определены, то, используя лемму 2, выберем число b_{s_0+1}, $1 \leqslant b_{s_0+1} \leqslant k_{s_0+1}^2$, так, чтобы выполнялось неравенство (см. (20))

$$m\left\{x \in (0,1) : \left| \sum_{n=1}^{N_{k_{s_0+1}}(x)} c_n(Q_{s_0})\varphi_n(x) + \frac{b_{s_0+1}}{k_{s_0+1}^4} F_{k_{s_0+1}}(x) \right| \geqslant \frac{1}{2} \frac{F_{k_{s_0+1}}(x)}{k_{s_0+1}^4} \right\}$$
$$\geqslant 1 - \frac{1}{k_{s_0+1}^2} .$$

Тогда в силу (20) мы получим, что

$$m\left\{x \in (0,1) : \left| \sum_{n=1}^{N_{k_{s_0+1}}(x)} c_n(Q_{s_0+1})\varphi_n(x) \right| \geqslant \frac{2^{k_{s_0+1}}}{2k_{s_0+1}^4} \right\}$$
$$\geqslant 1 - 2^{-k_{s_0+1}} - k_{s_0+1}^{-2}. \tag{23}$$

Числа k_s, b_s, $s = 1, 2, \ldots$, а значит, и функция $f(x)$ построены. При этом равномерная сходимость ряда (21) и тем самым непрерывность функции $f(x)$ вытекают из (19) и неравенств $b_s \leqslant k_s^2$, $s = 1, 2, \ldots$. Покажем, что ряд Фурье функции $f(x)$ неограниченно расходится п.в. на $(0,1)$. Пусть $j > 1$ и

$$\Delta_j(x) = \sum_{s=j+1}^{\infty} \frac{1}{k_s^4} b_s f_{k_s}(x).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{N_{k_j}(x)} c_n(f)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{N_{k_j}(x)} c_n(Q_j)\varphi_n(x) + \sum_{n=1}^{N_{k_j}(x)} c_n(\Delta_j)\varphi_n(x)$$
$$=: \psi_j^{(1)}(x) + \psi_j^{(2)}(x). \tag{24}$$

Согласно (23)

$$m\{x \in (0,1) : |\psi_j^{(1)}(x)| > A_j\} \geqslant 1 - \varepsilon_j, \tag{25}$$

где $A_j \to \infty$ и $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$. С другой стороны (см. (19), (22)),

$$\|\Delta_j\|_C \leqslant \sum_{s=j+1}^{\infty} \frac{1}{k_s^2} \leqslant (M_{k_j} \cdot 2^j)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\|\psi_j^{(2)}\|_2 \leqslant \sum_{n=1}^{M_{k_j}} |c_n(\Delta_j)| \leqslant \sum_{n=1}^{M_{k_j}} \|\Delta_j\|_2 \leqslant 2^{-j},$$

а значит,

$$m\{x \in (0,1) : |\psi_j^{(2)}(x)| > 1\} \leqslant \|\psi_j^{(2)}\|_2^2 \leqslant 2^{-2j}, \qquad j = 1, 2, \dots .$$

Отсюда и из (25) (см. также (24)) мы находим, что

$$m\left\{x \in (0,1) : \left|\sum_{n=1}^{N_{k_j}(x)} c_n(f)\varphi_n(x)\right| > A_j - 1\right\} > 1 - \varepsilon_j - 2^{-2j}, \quad j = 1, 2, \dots .$$

Лемма 1 доказана.

§ 2. Коэффициенты Фурье непрерывных функций

Из теоремы 2 и следствия 9.3 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Для любой П.О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *найдется такая непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $f(x)$, *что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^{2-\varepsilon} = \infty \ \text{ для любого } \varepsilon > 0, \ \ c_n(f) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx. \tag{26}$$

Легко видеть, что в теореме 3 условие полноты системы отбросить нельзя. Вместе с тем ниже доказывается, что для широкого класса О.Н.С. (не обязательно полных) утверждение, полученное в теореме 3, остается справедливым и даже может быть существенно уточнено.

Теорема 4. *Пусть О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, удовлетворяет условию*

$$\|\varphi_n\|_1 \geqslant \gamma > 0, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{27}$$

Тогда для любой последовательности $\{d_n\}$ с $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$ найдется такая непрерывная на $[0,1]$ функция $f(x)$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n c_n(f)| = \infty, \quad c_n(f) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx, \;\; n = 1, 2, \ldots . \tag{28}$$

Замечание 1. Условие (27) в теореме 4 необходимо. Точнее говоря, если для О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}$ (27) не выполнено, то можно указать такую последовательность $\{d_n^0\}_{n=1}^{\infty}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(d_n^0)^2 = \infty$, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |d_n^0 c_n(f)| < \infty$ для любой ограниченной функции $f(x)$. Для этого, в силу оценки $|c_n(f)| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|\varphi_n\|_1$, достаточно выбрать последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{n_k}\|_1 < \infty$, и положить $d_n^0 = 1$, если $n \in \{n_k\}$, и $d_n^0 = 0$, если $n \notin \{n_k\}$.

Замечание 2. Легко проверить (пользуясь неравенством Гёльдера), что если последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{2+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$, то каждая функция $f(x)$, удовлетворяющая соотношению (28), обладает свойством (26).

Доказательство теоремы 4. Допустим противное: для некоторой последовательности $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n c_n(f)| = C(f) < \infty, \qquad f \in C(0,1). \tag{29}$$

Тогда очевидно, что для любого конечного набора $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{N}$, $\varepsilon_n = \pm 1$,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} d_n \varepsilon_n c_n(f)\right| = \left|\int_0^1 f(x) \sum_{n=1}^{N} d_n \varepsilon_n \varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant C(f). \tag{30}$$

Пусть $\{t_s\}_{s=1}^{\infty}$ – перенумерованное произвольным образом множество рациональных точек из отрезка $[0,1]$. Из (30) вытекает, что для любой непрерывной на $[0,1]$ функции $f(x)$

$$\left|\int_0^1 f(x) K_{N,s}(x)\,dx\right| \leqslant C(f). \tag{31}$$

где

$$K_{N,s}(x) = \sum_{n=1}^{N} d_n r_n(t_s)\varphi_n(x), \qquad N, s = 1, 2, \ldots$$

($\{r_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – система Радемахера).

Иными словами, последовательность ограниченных, линейных функционалов на пространстве $C(0,1)$:

$$L_{N,s}(f) := \int_0^1 f(x) K_{N,s}(x)\, dx, \qquad N, s = 1, 2, \ldots,$$

обладает тем свойством, что для любой $f \in C(0,1)$ $|L_{N,s}(f)| \leqslant C(f)$, $N, s = 1, 2, \ldots$. Отсюда, учитывая, что норма функционала $L_{N,s}$ равна $\int_0^1 |K_{N,s}(x)|\, dx$, и применяя теорему Банаха–Штейнгауза, мы получим

$$\sup_{1 \leqslant N, s < \infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} d_n r_n(t_s)\varphi_n(x) \right| dx = C < \infty.$$

Следовательно, для любого $t \in [0,1]$

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} d_n r_n(t)\varphi_n(x) \right| dx \leqslant C, \qquad N = 1, 2, \ldots. \tag{32}$$

Интегрируя неравенство (32) по t и применяя теорему Фубини, находим

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} d_n r_n(t)\varphi_n(x) \right| dt\, dx \leqslant C, \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Из последнего соотношения и теоремы 2.7 вытекает, что

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{n=1}^{N} d_n^2 \varphi_n^2(x) \right\}^{1/2} dx \leqslant C' < \infty, \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

и, тем самым,

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \varphi_n^2(x) < \infty \ \text{ п.в. на } \ [0,1].$$

Так как функция $F(x)$ конечна п.в., то можно указать такую постоянную M, что

$$m(E) \geqslant 1 - \frac{\gamma}{16}, \quad \text{где} \quad E = \left\{ x \in (0,1) : \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \varphi_n^2(x) \leqslant M \right\}$$

(здесь постоянная $\gamma > 0$ та же, что и в (27)). Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \int_E \varphi_n^2(x)\,dx \leqslant M. \tag{33}$$

Но из (27) и нормированности функций $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, в $L^2(0,1)$ вытекает (см. лемму 1 в теореме 2.7) оценка

$$m\Big\{x \in (0,1) : |\varphi_n(x)| > \frac{\gamma}{4}\Big\} \geqslant \frac{\gamma}{8}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

а значит,

$$\int_E \varphi_n^2(x)\,dx \geqslant \frac{\gamma^2}{16} \cdot \frac{\gamma}{8}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Следовательно (см. (33)), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty$, что противоречит предположению о расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^2$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 4.

Если несколько сузить по сравнению с теоремой 4 класс рассматриваемых ортонормированных систем, то можно получить еще более точный результат, имеющий окончательный характер.

Теорема 5. *Пусть О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *такова, что при некотором* $p > 2$

$$\|\varphi_n\|_p \leqslant M < \infty, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{34}$$

Тогда для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *с* $a_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \dots$, *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ *найдется непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $F(x)$ *с*

$$\|F\|_C \leqslant C_{p,M} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{1/2},$$

для которой

$$|c_n(F)| \geqslant a_n, \qquad c_n(F) = \int_0^1 F(x)\varphi_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \dots .$$

(В формулировке теоремы 5 $C_{p,M}$ – постоянная, зависящая только от p и M).

Лемма 1. *Пусть заданы О.Н.С.* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, *удовлетворяющая условию* (34) (*с некоторым* $p > 2$), *и последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *с* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1$. *Тогда найдется последовательность* $\varepsilon_n = \pm 1$, $n = 1, 2, \ldots$, *такая, что функция*

$$f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \varphi_n(x) \tag{35}$$

для каждого $\eta > 0$ *представима в виде*

$$\begin{gathered} f(x) = g(x) + h(x), \\ g \in C(0,1), \qquad \|g\|_C \leqslant \eta, \qquad \|h\|_2 \leqslant \frac{K}{\eta^\alpha} \equiv \omega(\eta), \end{gathered} \tag{36}$$

где $\alpha = p/2 - 1 > 0$, *а* K – *постоянная, зависящая только от* p *и* M.

Доказательство. Используя неравенство Хинчина для системы Радемахера (см. теорему 2.6 и лемму 1 из теоремы 2.12) и оценку 2.(75), мы находим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) a_n \varphi_n(x) \right|^p dx\,dt &\leqslant C_p^p \int_0^1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(x) \right\}^{p/2} dx \\ &\leqslant C_p^p \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|\varphi_n\|_p^2 \right\}^{p/2} \leqslant C_p^p M^p. \end{aligned}$$

Поэтому для некоторой двоично-иррациональной точки $t_0 \in (0,1)$

$$\left\{ \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t_0) a_n \varphi_n(x) \right|^p dx \right\}^{1/p} \leqslant C_p M.$$

Это значит, что для функции $f(t)$, определенной равенством (35) при $\varepsilon_n = r_n(t_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, имеет место оценка

$$\|f\|_p \leqslant C_p M. \tag{37}$$

Для фиксированного $\eta > 0$ положим

$$g'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant \eta, \\ 0, & \text{если } |f(x)| > \eta, \end{cases} \qquad h'(x) = f(x) - g'(x), \quad x \in (0,1).$$

Учитывая, что $h'(x) = 0$, если $x \notin E \equiv \{x \in (0,1) : |f(x)| > \eta\}$, мы из (37) выводим

$$(C_p M)^p \geqslant \int_0^1 |f(x)|^p\,dx \geqslant \int_E |h'(x)|^p\,dx$$
$$\geqslant \int_E |h'(x)|^2 |h'(x)|^{p-2}\,dx \geqslant \eta^{p-2} \int_E |h'(x)|^2\,dx = \eta^{p-2}\|h'\|_2^2,$$

т.е. $\|h'\|_2 \leqslant \eta^{-\alpha}(C_p M)^{p/2}$. Приблизив достаточно хорошо в метрике пространства $L^2(0,1)$ функцию $g'(x)$ непрерывной функцией $g(x)$ ($\|g\|_C \leqslant \eta$), мы получим искомое разложение (35) с $K = 2(C_p M)^p$.

Замечание. Если задана последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2\right\}^{1/2} = \delta$, то, применяя лемму 1 для последовательности $a_n = \delta^{-1} c_n$, $n = 1, 2, \ldots$, мы сможем найти такие числа $\varepsilon_n = \pm 1$, $n = 1, 2, \ldots$, что функция $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n \varphi_n(x)$ для любого $\eta > 0$ представима в виде (см. (36))

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n c_n \varphi_n(x) = g(x) + h(x), \qquad \|g\|_C \leqslant \eta, \quad \|h\|_2 \leqslant \delta\omega\Big(\frac{\eta}{\delta}\Big). \tag{38}$$

Доказательство теоремы 5. Фиксируем последовательность $\lambda_j = ((1+j)N)^R$, $j = 0, 1, \ldots$, где $R = 2/\alpha$, а число N выбрано настолько большим, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\omega(\lambda_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j+1}\right)^R \frac{K}{N^{R\alpha}(1+j)^{R\alpha}} \leqslant \frac{1}{4} \tag{38$'$}$$

(мы сохранили обозначения из леммы 1 (см. (36))).

Положим

$$\begin{aligned} &\delta_0 = (2\lambda_0)^{-1}, \quad \delta_{j+1} = \frac{\omega(\lambda_j)}{\lambda_j}, \\ &\eta_0 = 0, \qquad\quad\ \ \eta_{j+1} = \delta_j \lambda_j, \end{aligned} \qquad j = 0, 1, \ldots. \tag{39}$$

Из (38$'$) и (39) вытекает, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \lambda_j = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}} \omega(\lambda_{j-1}) \leqslant \frac{3}{4}. \tag{40}$$

Поэтому для доказательства теоремы 5 достаточно проверить, что для любой последовательности $a_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \dots$, с $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2\right\}^{1/2} \leqslant \delta_0$ найдется функция $G(x) \in C(0,1)$, для которой

$$|c_n(G)| \geqslant \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j\right) a_n \geqslant \frac{1}{4} a_n, \qquad \|G\|_C \leqslant 1 \tag{41}$$

(отметим, что δ_0 зависит только от p и M).

Построим на отрезке $(0,1)$, по индукции, три последовательности функций: $\{F_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{G_j\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{H_j\}_{j=0}^{\infty}$ с $F_j = H_j + G_j$, $j = 0, 1, \dots$, удовлетворяющие условиям:

а) $F_j \in L^2(0,1)$, $|c_n(F_j)| \geqslant \left(1 - \sum\limits_{s=0}^{j} \eta_s\right) a_n$, $n = 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, \dots$;

б) $G_0(x) \equiv 0$, $G_j \in C(0,1)$, $\|G_j - G_{j-1}\|_C \leqslant \eta_j$, $j = 1, 2, \dots$;

в) $\|H_j\|_2 \leqslant \delta_j$, $j = 0, 1, \dots$;

г) $H_j(x) = g_j(x) + h_j(x)$, $g_j \in C(0,1)$, $\|g_j\|_C \leqslant \eta_{j+1}$,
$\|h_j\|_2 \leqslant \delta_j\, \omega\left(\dfrac{\eta_{j+1}}{\delta_j}\right)$, $j = 0, 1, \dots$.

Легко видеть, что при этих условиях последовательность $G_j(x)$, $j = 0, 1, \dots$, будет равномерно сходится к некоторой функции $G(x) \in C(0,1)$, для которой справедливы оценки (41) (см. а), б), в) и (40)).

Положим $G_0(x) \equiv 0$ и, пользуясь замечанием к лемме 1 (см. (38)), найдем такую последовательность $\varepsilon_n = \pm 1$, $n = 1, 2, \dots$, что функция $F_0(x) = H_0(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \varphi_n(x)$ представима в виде

$$H_0(x) = g_0(x) + h_0(x), \quad g_0 \in C(0,1), \ \|g_0\|_C \leqslant \eta_1, \ \|h_0\|_2 \leqslant \delta_0\, \omega\left(\frac{\eta_1}{\delta_0}\right).$$

Ясно, что условия а)–г) для $j = 0$ выполнены. Допустим теперь, что для некоторого $j \geqslant 0$ построены функции $\{F_s, G_s, H_s\}_{s=0}^{j}$, удовлетворяющие условиям а)–г).

Положим

$$G_{j+1}(x) = G_j(x) + g_j(x), \qquad x \in [0,1]. \tag{42}$$

Для того чтобы определить функцию H_{j+1}, рассмотрим множество натуральных чисел:

$$Q = \left\{ n : |c_n(G_{j+1})| < a_n \left(1 - \sum_{s=0}^{j+1} \eta_s\right) \right\} \tag{43}$$

и положим

$$H_{j+1}(x) = \sum_{n\in Q} \varepsilon_n 2a_n\left(1 - \sum_{s=0}^{j+1}\eta_s\right)\varphi_n(x), \tag{44}$$

где числа $\varepsilon_n = \pm 1$, $n \in Q$, выбраны таким образом, чтобы существовало разложение

$$\begin{gathered} H_{j+1}(x) = g_{j+1}(x) + h_{j+1}(x), \\ g_{j+1} \in C(0,1), \qquad \|g_{j+1}\|_C \leqslant \eta_{j+2}, \\ \|h_{j+1}\|_2 \leqslant \|H_{j+1}\|_2\,\omega\left(\eta_{j+2}\cdot\frac{1}{\|H_{j+1}\|_2}\right) \end{gathered} \tag{45}$$

(такой выбор возможен в силу замечания к лемме 1 (см. (38)).

Проверим выполнение соотношений а)–г) для функций $G_{j+1}(x)$, $H_{j+1}(x)$ и $F_{j+1}(x) := G_{j+1}(x) + H_{j+1}(x)$.

а$'$) Согласно (43) и (44) при $n \notin Q$

$$|c_n(F_{j+1})| = |c_n(G_{j+1}) + c_n(H_{j+1})| = |c_n(G_{j+1})| \geqslant a_n\left(1 - \sum_{s=0}^{j+1}\eta_s\right),$$

и при $n \in Q$

$$\begin{aligned} |c_n(F_{j+1})| &\geqslant |c_n(H_{j+1})| - |c_n(G_{j+1})| \\ &\geqslant 2a_n\left(1 - \sum_{s=0}^{j+1}\eta_s\right) - a_n\left(1 - \sum_{s=0}^{j+1}\eta_s\right) = a_n\left(1 - \sum_{s=0}^{j+1}\eta_s\right). \end{aligned}$$

б$'$) Так как функция $H_j(x)$ удовлетворяет соотношению г), то из (42) вытекает, что

$$\|G_{j+1}(x) - G_j(x)\|_C = \|g_j(x)\|_C \leqslant \eta_{j+1}.$$

в$'$) Пользуясь равенством Парсеваля и учитывая, что $\sum\limits_{s=0}^{j+1}\eta_s \geqslant \eta_1 = \dfrac{1}{2}$ (см. (39)), мы находим

$$\|H_{j+1}\|_2 = 2\left(1 - \sum_{s=0}^{j+1}\eta_s\right)\left\{\sum_{n\in Q} a_n^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\sum_{n\in Q} a_n^2\right\}^{1/2}. \tag{46}$$

Так как функция $F_j(x)$ удовлетворяет условию а), то для $n \in Q$ (см. (43))

$$|c_n(F_j - G_{j+1})| = |c_n(F_j) - c_n(G_{j+1})| \geqslant a_n\eta_{j+1},$$

причем (см. (42) и свойство г) функции $H_j(x)$)

$$\begin{aligned}F_j(x) - G_{j+1}(x) &= [G_j(x) + H_j(x)] - G_{j+1}(x)\\ &= [G_j(x) + g_j(x) + h_j(x)] - [G_j(x) + g_j(x)] = h_j(x).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n\in Q} a_n^2\Big)^{1/2} &\leqslant \frac{1}{\eta_{j+1}}\Big\{\sum_{n\in Q} c_n^2(F_j - G_{j+1})\Big\}^{1/2}\\ &\leqslant \frac{1}{\eta_{j+1}}\|F_j - G_{j+1}\|_2 \leqslant \frac{1}{\eta_{j+1}}\|h_j\|_2.\end{aligned}$$

Отсюда и из (46), учитывая, что $\|h_j\|_2 \leqslant \delta_j\,\omega\Big(\dfrac{\eta_{j+1}}{\delta_j}\Big)$, мы получаем (см. также (39))

$$\|H_{j+1}\|_2 \leqslant \frac{1}{\eta_{j+1}}\delta_j\,\omega\Big(\frac{\eta_{j+1}}{\delta_j}\Big) = \frac{1}{\lambda_j}\,\omega(\lambda_j) = \delta_{j+1}, \tag{47}$$

что доказывает в).

г$'$) Соотношение г) непосредственно вытекает из (45), (47) и монотонности функции $\omega(\eta)$:

$$\|h_{j+1}\|_2 \leqslant \|H_{j+1}\|_2\,\omega\Big(\eta_{j+2}\frac{1}{\|H_{j+1}\|_2}\Big) \leqslant \delta_{j+1}\,\omega\Big(\frac{\eta_{j+2}}{\delta_{j+1}}\Big).$$

Итак, мы проверили, что функции G_{j+1}, H_{j+1} и $F_{j+1} = H_{j+1} + G_{j+1}$ при $j = 0, 1, \ldots$ удовлетворяют условиям а)–г). Как отмечалось выше, отсюда следует утверждение теоремы 5.

В заключение параграфа докажем один результат о коэффициентах разложения по базисам пространств $L^p(0,1)$ функций из классов $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Теорема 6. *Пусть* $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– базис пространства* $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, *и* $\|\psi_n\|_p = 1$, $n = 1, 2, \ldots$.

Существует функция $F \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha = \min\Big(1 - \dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{2}\Big)$, *с* $F(0) = F(1) = 0$, *для которой расходится ряд абсолютных величин коэффициентов разложения по базису* Ψ, *т.е.*

$$F(x) \overset{L^p}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty. \tag{48}$$

Следствие 2. *Для произвольной П.О.Н.С.* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *найдется функция* $F \in \operatorname{Lip}\frac{1}{2}$, $F(0) = F(1) = 0$, *для которой*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(F)| = \infty, \qquad c_n(F) = \int_0^1 F(x)\varphi_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Замечание 1. Показатель гладкости функции $F(x)$ – α в теореме 6 точен, т.е. не может быть увеличен ни при одном p, $1 < p < \infty$. Это показывают примеры нормированных в L^p систем Хаара (при $1 < p \leqslant 2$) и тригонометрической (при $2 \leqslant p < \infty$) (см. теорему 3.1 и следствие 4.5).

Замечание 2. Как видно из доказательства теоремы 6, она может быть обобщена на широкий класс систем функций, не являющихся базисами.

Доказательство теоремы 6. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим "пачку" функций Фабера–Шаудера $\{\varphi_k^i(x)\}_{i=1}^{2^k}$, и пусть $\chi_{\Delta_k^i}(x)$ – характеристическая функция интервала $\Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$. Разложим функции $\varphi_k^i(x)$ по базису Ψ:

$$\varphi_k^i(x) \overset{L^p}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k,i}\psi_n(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant 2^k. \tag{49}$$

Мы можем считать, что для всех i и k

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{k,i}| < \infty, \tag{50}$$

иначе в качестве искомой функции $F(x)$ можно взять $\varphi_k^i(x) \in \operatorname{Lip} 1$. Оценим коэффициенты $a_n^{k,i}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \sum_{i=1}^{2^k} \int_0^1 \varphi_k^i(x)\chi_{\Delta_k^i}(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^{2^k} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{k,i}\psi_n(x)\chi_{\Delta_k^i}(x)\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \psi_n(x)\left[\sum_{i=1}^{2^k} a_n^{k,i}\chi_{\Delta_k^i}(x)\right]dx. \end{aligned} \tag{51}$$

Применяя для оценки интегралов в (51) неравенство Гёльдера и учитывая, что

$$\left\|\sum_{i=1}^{2^k} a_i \chi_{\Delta_k^i}(x)\right\|_q = \left\{2^{-k}\sum_{i=1}^{2^k}|a_i|^q\right\}^{1/q},$$

мы из (51) выводим, что

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|\psi_n\|_p\left\{2^{-k}\sum_{i=1}^{2^k}|a_n^{k,i}|^q\right\}^{1/q} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{2^{-k}\sum_{i=1}^{2^k}|a_n^{k,i}|^q\right\}^{1/q}. \tag{52}$$

Рассмотрим функцию

$$F_{k,t}(x) = \sum_{i=1}^{2^k} r_i(t)\varphi_k^i(x), \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad x, t \in (0,1), \tag{53}$$

где $r_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ – функции Радемахера. В силу (49)

$$F_{k,t}(x) \overset{L^p}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{2^k} r_i(t)a_n^{k,i}\right]\psi_n(x) =: \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,k}(t)\psi_n(x), \tag{54}$$

при этом $\|F_{k,t}\|_\infty \leqslant 1$ и (см. теорему 2.7)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}|A_{n,k}(t)|\,dt &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{2^k} r_i(t)a_n^{k,i}\right| dt \\ &\geqslant \mathrm{c}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{2^k}(a_n^{k,i})^2\right\}^{1/2},\end{aligned} \tag{55}$$

где $\mathrm{c} > 0$ – абсолютная постоянная.

Из неравенств (55) и (52), учитывая. что при $n = 1, 2, \ldots$

$$\left\{\sum_{i=1}^{2^k}(a_n^{k,i})^2\right\}^{1/2} \geqslant 2^{k(\alpha-1/q)}\left\{\sum_{i=1}^{2^k}|a_n^{k,i}|^q\right\}^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

мы выводим

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}|A_{n,k}(t)|\,dt \geqslant \mathrm{c}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-1/q)}\left\{\sum_{i=1}^{2^k}|a_n^{k,i}|^q\right\}^{1/q} \geqslant \frac{\mathrm{c}}{2}\,2^{k\alpha},$$

$k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, при $k = 1, 2, \ldots$ для некоторой двоично-иррациональной точки $t_k \in (0, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{n,k}(t_k)| \geqslant \frac{c}{2}\, 2^{k\alpha}. \tag{56}$$

Положим

$$F(x) = \sum_{s=1}^{\infty} P_{k_s}(x), \tag{57}$$

где $P_k(x) = 2^{-k\alpha} F_{k,t_k}(x)$, $x \in (0,1)$, $k = 1, 2, \ldots$, а последовательность k_s, $s = 1, 2, \ldots$, выбрана растущей так быстро, что коэффициенты разложения функций $P_{k_s}(x)$ по базису Ψ – $a_n(P_{k_s})$, $n = 1, 2, \ldots$, при разных s "сосредоточены на разных местах", точнее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(F)| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(P_{k_s})|. \tag{58}$$

Этого можно добиться, последовательно строя числа k_s, $s = 1, 2, \ldots$, и учитывая при этом оценку (50) и неравенство $|a_n(P_k)| \leqslant C\|P_k\|_p$ (см. теорему 1.6), в силу которого для каждого n имеем $a_n(P_k) \to \infty$ при $k \to \infty$.

Из (54), (56) и (58) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(F)| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-k_s\alpha} \cdot \frac{c}{2}\, 2^{k_s\alpha} = \infty.$$

Кроме того, $F(0) = F(1) = 0$, и так как коэффициенты разложения $c_{k,i}(F)$ функции F по системе Фабера–Шаудера удовлетворяют неравенству $|c_{k,i}(F)| \leqslant 2^{-k\alpha}$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. (53), (57)), то по теореме 5.2 $F \in \operatorname{Lip}\alpha$. Теорема 6 доказана.

§ 3. Некоторые свойства равномерно ограниченных ортонормированных систем

Прежде чем сформулировать утверждения о свойствах О.Н.С., установим несколько неравенств, играющих основную роль в доказательствах этого параграфа.

Пусть на оси $\mathbb{R}^1$ задана измеримая функция $f(x)$ и, как обычно,

$$\lambda_f(t) = m\{x \in \mathbb{R}^1 : |f(x)| > t\}, \qquad \Delta_h(f, x) = f(x+h) - f(x).$$

Напомним (см. приложение 1), что

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^1)} = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_f(t)\,dt, \qquad 1 \leqslant p < \infty, \tag{59}$$

и, следовательно, для каждого $b > 0$

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^1:|f(x)|>b\}} |f(x)|\,dx = b\lambda_f(b) + \int_b^\infty \lambda_f(t)\,dt \geqslant \int_b^\infty \lambda_f(t)\,dt. \tag{60}$$

Положим[1)]

$$N(f, W_2^{1/2}) = \left\{\int_0^\infty h^{-2}\|\Delta_h(f,x)\|_2^2\,dh\right\}^{1/2}.$$

Утверждение 1. *Для произвольной функции $f(x)$ имеет место неравенство*

$$N^2(f, W_2^{1/2}) \leqslant 8\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)}, \tag{61}$$

где $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} := \sup\limits_{h>0,\, x\in\mathbb{R}^1} h^{-1}|\Delta_h(f,x)|$.

Доказательство. В силу однородности обеих частей неравенства (61) можно, не ограничивая общности, считать, что $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} = 1$. Для каждого $h > 0$ определим множества

$$E(h) := \big\{x \in \mathbb{R}^1 : |f(x)| \leqslant h,\ |f(x+h)| \leqslant h\big\}, \qquad F(h) := \mathbb{R}^1 \setminus E(h).$$

Очевидно, что $m\{F(h)\} \leqslant 2\lambda_f(h)$ и что для любых $x \in \mathbb{R}^1$ и $h > 0$ имеют место оценки:

а) $|\Delta_h(f,x)| \leqslant |f(x)| + |f(x+h)|$;

б) $|\Delta_h(f,x)| \leqslant h$.

Так как

$$\|\Delta_h(f,x)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^1)} = \|\Delta_h(f,x)\|^2_{L^2(E(h))} + \|\Delta_h(f,x)\|^2_{L^2(F(h))},$$

[1)]Такое обозначение связано с тем, что с помощью функционала $N(f, W_2^{1/2})$ вводится норма в пространство Соболева $W_2^{1/2}$.

то, оценивая первое из этих слагаемых с помощью а), а второе с помощью б) и используя равенство (59) (при $p = 2$), мы получим

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_h(f,x)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} &\leqslant 2\int_{E(h)}[f^2(x)+f^2(x+h)]\,dx + h^2 m\{F(h)\} \\
&\leqslant 4\int_{\{x\in\mathbb{R}^1:|f(x)|\leqslant h\}} f^2(x)\,dx + 2h^2\lambda_f(h) \\
&= 8\int_0^h t[\lambda_f(t)-\lambda_f(h)]\,dt + 2h^2\lambda_f(h) \\
&\leqslant 8\int_0^h t\lambda_f(t)\,dt. \qquad (62)
\end{aligned}
$$

Следовательно (см. (59)),

$$
\begin{aligned}
N^2(f, W_2^{1/2}) &\leqslant 8\int_0^\infty h^{-2}\int_0^h t\lambda_f(t)\,dt\,dh \\
&= 8\int_0^\infty\int_t^\infty h^{-2}t\lambda_f(t)\,dh\,dt \\
&= 8\int_0^\infty \lambda_f(t)\,dt = 8\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^1)},
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

В этом параграфе (при доказательстве теоремы 11) нам потребуется также следующая модификация утверждения 1:

Для любой функции $f(x)$, *заданной на конечном интервале* $(0,a)$ *с* $\|f'\|_{L^\infty(0,a)} \leqslant 1$, *и любого числа* β, $0<\beta<\min(1,a)$,

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(f,\beta) &:= \int_\beta^a h^{-2}\int_0^{a-h}[f(x)-f(x+h)]^2\,dx\,dh \\
&\leqslant 8\left[\beta\int_0^a |f(x)|\,dx + \int_{\{x:|f(x)|>\beta^2\}}|f(x)|\,dx\right]. \qquad (63)
\end{aligned}
$$

Различие неравенств (61) и (63) состоит в том, что в (61) дается оценка снизу интеграла $\int |f(x)|\,dx$ по всей области определения, а в (63) – только по множеству, где $|f(x)| > \beta^2$.

Чтобы получить неравенство (63), отметим, что доказательство оценки (62) без каких-либо изменений применимо и к функциям, заданным на конечном интервале, т.е. для любой функции $f(x)$, $\|f'\|_{L^\infty(0,a)} \leqslant 1$ и $h \in (0,a)$

$$\int_0^{a-h} |\Delta_h(f,x)|^2\,dx \leqslant 8\int_0^h t\lambda_f(t)\,dt, \qquad (64)$$
$$\lambda_f(t) = m\{x \in (0,a) : |f(x)| > t\}.$$

Из (64), интегрируя и учитывая соотношения (59) и (60), мы выводим

$$\begin{aligned}
\sigma^2(f,\beta) &\leqslant 8\int_\beta^a h^{-2}\int_0^h t\lambda_f(t)\,dt\,dh \\
&= 8\int_0^a t\lambda_f(t)\int_{\max(t,\beta)}^a h^{-2}\,dh\,dt \\
&\leqslant 8\left[\int_0^\beta \beta^{-1}t\lambda_f(t)\,dt + \int_\beta^a \lambda_f(t)\,dt\right] \\
&\leqslant 8\left[\beta\int_0^{\beta^2}\lambda_f(t)\,dt + \int_{\beta^2}^\beta \lambda_f(t)\,dt + \int_\beta^a \lambda_f(t)\,dt\right] \\
&\leqslant 8\left[\beta\int_0^a |f(x)|\,dx + \int_{\{x\in(0,a):|f(x)|>\beta^2\}} |f(x)|\,dx\right].
\end{aligned}$$

Неравенство (63) доказано.

Ниже мы используем дискретный вариант утверждения 1:

Для любого набора чисел $\{a_n\}_{n=1}^N$, $N = 1,2,\ldots,$

$$\Bigl(\max_{1\leqslant n\leqslant N}|a_n|\Bigr)\sum_{m=1}^N\left|\sum_{n=1}^m a_n\right| \geqslant c\sum_{\nu=0}^{N-1}\sum_{\mu=\nu+1}^N \frac{\left(\sum_{n=\nu+1}^\mu a_n\right)^2}{(\mu-\nu)^2}, \qquad (65)$$

где $c > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Чтобы получить неравенство (65), определим по данному набору $\{a_n\}_{n=1}^N$ непрерывную на $\mathbb{R}^1$ функцию $f(x)$, положив

$$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^m a_n, & \text{если } |x-m| \leqslant \frac13,\ m = 1,2,\ldots,N; \\ 0, & \text{если } -\infty < x \leqslant \frac13; \\ \text{линейна на } \left[m-\frac23, m-\frac13\right], & m = 1,2,\ldots,N; \end{cases}$$

$$f(N+x) = f(N-x).$$

Легко видеть, что

$$\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^1)} \leqslant 3 \max_{1\leqslant n\leqslant N} |a_n|, \qquad \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} \leqslant C \sum_{m=1}^{N} \left| \sum_{n=1}^{m} a_n \right|.$$

Применение неравенства (61) к функции $f(x)$ дает:

$$\begin{aligned}
&\Big(\max_{1\leqslant n\leqslant N} |a_n|\Big) \sum_{m=1}^{N} \left| \sum_{n=1}^{m} a_n \right| \\
&\geqslant c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x}^{\infty} \left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right]^2 dy\, dx \\
&\geqslant c_1 \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{N} \int_{\nu-1/3}^{\nu+1/3} \int_{\mu-1/3}^{\mu+1/3} \left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right]^2 dy\, dx \\
&\geqslant \frac{4}{9} c_1 \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{N} \frac{\left(\sum_{n=\nu+1}^{\mu} a_n\right)^2}{(\mu-\nu)^2}.
\end{aligned}$$

Неравенство (65) доказано.

Теперь мы можем перейти к рассмотрению свойств О.Н.С., состоящих из равномерно ограниченных функций. Оказывается, что для таких систем можно получить ряд утверждений общего характера о расходимости рядов Фурье. Установим прежде всего, что справедлива

Теорема 7. *Существуют абсолютные постоянные $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$ такие, что для любой О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$, $x \in (0,1)$, $N = 1, 2, \ldots$, функции которой удовлетворяют условию*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant M \quad \textit{для п.в.} \quad x \in (0,1), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{66}$$

выполняются соотношения:

1) $\displaystyle \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} \varphi_n(x) \right| dx \geqslant \frac{\gamma_1}{M} \ln N;$

2) $\displaystyle \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} L_m(x) \geqslant \frac{\gamma_2}{M^2} \ln N$ *для* $x \in E_N \subset (0,1)$, $m(E_N) \geqslant \dfrac{1}{4M^2}$,

где $L_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, – функции Лебега системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ (см. определение 1.11).

Доказательство. 1) Применим неравенство (65) для набора чисел $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$, $x \in (0,1)$, а затем интегрируя по x и используя равенство Парсеваля, мы находим

$$\sum_{m=1}^{N} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} \varphi_n(x)\right| dx$$

$$= \int_0^1 \sum_{m=1}^{N} \left|\sum_{n=1}^{m} \varphi_n(x)\right| dx$$

$$\geqslant c\Big(\max_{1\leqslant n\leqslant N} \|\varphi_n\|_\infty\Big)^{-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{N} \frac{1}{(\mu-\nu)^2} \int_0^1 \bigg(\sum_{n=\nu+1}^{\mu} \varphi_n(x)\bigg)^2 dx$$

$$\geqslant \frac{c}{M} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{N} \frac{1}{\mu-\nu} \geqslant \frac{\gamma_1}{M} N \ln N.$$

2) Пусть

$$E_N := \left\{x \in (0,1) : F_N(x) \geqslant \frac{1}{4}N\right\}, \qquad F_N(x) := \sum_{\frac{N}{4}<n\leqslant \frac{3N}{4}+1} \varphi_n^2(x).$$

Оценим меру множества E_N. Так как $\|F_N\|_1 \geqslant N/2$ и $\|F_N\|_\infty \leqslant M^2 N$, то

$$\frac{N}{2} \leqslant \int_0^1 F_N(x)\,dx = \int_{E_N} F_N(x)\,dx + \int_{(0,1)\setminus E_N} F_N(x)\,dx$$
$$\leqslant M^2 N m(E_N) + \frac{1}{4}N, \quad \text{т.е.} \quad m(E_N) \geqslant \frac{1}{4M^2}\,.$$

Далее, аналогично доказательству соотношения 1), применяя неравенство (65) для набора чисел $\{\varphi_n(x)\cdot\varphi_n(t)\}_{n=1}^N$, $x, t \in (0,1)$, мы находим

$$\sum_{m=1}^{N} L_m(x) = \int_0^1 \sum_{m=1}^{N} \left|\sum_{n=1}^{m} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dt$$

$$\geqslant cM^{-2} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{N} \frac{1}{(\mu-\nu)^2} \int_0^1 \bigg(\sum_{n=\nu+1}^{\mu} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\bigg)^2 dt$$

$$= cM^{-2} \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{N} \frac{1}{(\mu-\nu)^2} \sum_{n=\nu+1}^{\mu} \varphi_n^2(x)$$

$$= cM^{-2} \sum_{n=1}^{N} \varphi_n^2(x) \sum_{\nu,\mu:\, 0\leqslant\nu<n\leqslant\mu\leqslant N} \frac{1}{(\mu-\nu)^2}$$

$$\geqslant c' M^{-2} F_N(x) \ln N,$$

т.е. для каждого $x \in E_N$

$$\sum_{m=1}^{N} L_m(x) \geqslant \frac{c'}{4} M^{-2} N \ln N = \gamma_2 M^{-2} N \ln N.$$

Теорема 7 доказана.

Замечание. В условиях теоремы 7 полученные оценки 1) и 2) являются наилучшими возможными. Это показывают примеры тригонометрической системы и системы Уолша. Для этих систем (см. 4.(11), 4.(115))

$$L_m(x) \equiv L_m \leqslant C \ln m, \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Непосредственно из теоремы 7 вытекает

Следствие 3. *Пусть функции О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *равномерно ограничены* (*т.е. имеет место* (66)). *Тогда для функций Лебега системы выполняются соотношения*:

1) $\max\limits_{1 \leqslant m \leqslant N} L_m(x) \geqslant c_M \ln N > 0$ *для* $x \in E_N \subset (0,1)$, $m(E_N) > c'_M > 0$;

2) $\varlimsup\limits_{m \to \infty} \dfrac{L_m(x)}{\ln m} > c_M > 0$ *для* $x \in E \subset (0,1)$, $m(E) > c'_M > 0$.

$\Big($Здесь множества E_N те же, что и в теореме 7, и $E = \varlimsup\limits_{m \to \infty} E_N$.$\Big)$

Интересно отметить, что для общих О.Н.С. можно и наоборот: выводить утверждения типа теоремы 7 из формально более слабых оценок типа следствия 3. Мы продемонстрируем этот прием, получив, пользуясь только оценкой

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant N} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} \varphi_n(x) \right| dx \geqslant \frac{\gamma_1}{M} \ln N \tag{67}$$

($\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ – О.Н.С., $\|\varphi_n\|_\infty \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots, N$), которая, конечно, вытекает из теоремы 7, следующее утверждение.

Следствие 4. *Для любого ортогонального* (*не обязательно нормированного*) *набора функций* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{N} \subset L^2(0,1)$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} \psi_n(x) \right| dx + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} \psi_n(x) \right| dx \geqslant \gamma_3 \Big(N \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \|\psi_n\|_\infty \Big)^{-1} \sum_{n=1}^{N} \|\psi_n\|_2^2 \ln N, \tag{68}$$

где $\gamma_3 > 0$ – *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Положим $\psi_{j+N}(x) = \psi_j(x)$, $x \in (0,1)$, $j = 1,2,\ldots,N$, и пусть $a_n = \|\psi_n\|_2$, $n = 1,2,\ldots,2N$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^2 = \sum_{n=1}^{N} \|\psi_n\|_2^2 = N.$$

Определим систему функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$, положив

$$\varphi_n(x) = \psi_{j+n}\left(N\left(x - \frac{j-1}{N}\right)\right), \text{ если } x \in \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right), \quad n,j = 1,2,\ldots,N. \tag{69}$$

Легко видеть, что $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{N}$ есть О.Н.С., при этом

$$\|\varphi_n\|_\infty \leqslant M \equiv \max_{1\leqslant n\leqslant N} \|\psi_n\|_\infty, \qquad n = 1,2,\ldots,N.$$

Применив для этой системы неравенство (67), мы находим, что при некотором m, $1 \leqslant m \leqslant N$,

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_1}{M}\ln N &\leqslant \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} \varphi_n(x)\right| dx \\
&= \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)/N}^{j/N} \left|\sum_{n=1}^{m} \psi_{j+n}\left(N\left(x - \frac{j-1}{N}\right)\right)\right| dx \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \int_0^1 \left|\sum_{n=j+1}^{m+j} \psi_n(x)\right| dx \\
&\leqslant \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m+j} \psi_n(x)\right| dx + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{j} \psi_n(x)\right| dx.
\end{aligned} \tag{70}$$

Но так как $\psi_{j+N}(x) = \psi_j(x)$, $j = 1,2,\ldots,N$ и $1 \leqslant m \leqslant N$, то

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m+j} \psi_n(x)\right| dx &\leqslant \sum_{j=1}^{2N} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{j} \psi_n(x)\right| dx \\
&\leqslant N\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{N} \psi_n(x)\right| dx + 2\sum_{j=1}^{N} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{j} \psi_n(x)\right| dx.
\end{aligned}$$

Из последней оценки и (70) вытекает утверждение следствия 4 (см. (68)).

Используя установленную еще в гл. 1 связь между базисностью О.Н.С. в пространствах $C(0,1)$ и $L^1(0,1)$ и ограниченностью функций Лебега этой системы (см. теорему 1.8 и замечание к ней), мы, в силу следствия 3, получим

Следствие 5. *В пространствах $C(0,1)$ и $L^1(0,1)$ не существует ортонормированного, равномерно ограниченного базиса.*

По существу так же доказывается и несколько более точный результат.

Теорема 8. *Пусть О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, удовлетворяет условию* (66). *Тогда*

1) *существует непрерывная на $[0,1]$ функция, ряд Фурье по системе Φ которой расходится в некоторой точке;*
2) *существует функция $f \in L^1(0,1)$, ряд Фурье по системе Φ которой расходится в пространстве $L^1(0,1)$.*

Доказательство. 1) Пусть точка $x_0 \in (0,1)$ такова, что для каждой функции $f \in C(0,1)$ последовательность частных сумм (см. 1.(14))

$$S_N(f,x_0) = \int_0^1 f(t)K_N(t,x_0)\,dt,$$
$$K_N(t,x) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t), \qquad N = 1,2,\ldots,$$

сходится. Это значит, что последовательность линейных ограниченных функционалов на $C(0,1)$: $S_N(f,x_0)$, $N = 1,2,\ldots$, удовлетворяет условию

$$\sup_{1 \leqslant N < \infty} |S_N(f,x_0)| < \infty$$

для любой $f \in C(0,1)$. Но тогда, по теореме Банаха–Штейнгауза, эти функционалы имеют равномерно ограниченные нормы, т.е. (см. 1.(17))

$$\sup_{1 \leqslant N < \infty} L_N(x_0) < \infty, \qquad L_N(x_0) := \int_0^1 |K_N(t,x_0)|\,dt.$$

Следовательно $x_0 \notin E$, где множество $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$, определено для системы Φ соотношением 2) следствия 3.

Утверждение 2) теоремы 8 доказывается совершенно аналогично с учетом равенства 1.(18).

С помощью следствий 3 или 4 можно для произвольного ортонормированного базиса в пространстве непрерывных функций – $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ получить оценку роста при $N \to \infty$ величины $\max_{1 \leqslant n \leqslant N} \|\varphi_n\|_\infty$.

Теорема 9. *Пусть О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *с* $\varphi_n \in L^{\infty}(0,1)$, $n = 1,2,\ldots$, *обладает тем свойством, что ряд Фурье по системе* Φ *каждой непрерывной на* $[0,1]$ *функции сходится равномерно на* $[0,1]$. *Тогда для некоторого числа* $\alpha = \alpha(\Phi) > 0$

$$M(N) := \max_{1\leqslant n\leqslant N} \|\varphi_n\|_{\infty} \geqslant \alpha N^{1/2}, \qquad N = 1,2,\ldots. \tag{71}$$

Напомним, что для систем Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и Франклина $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

$$\|\chi_n\|_{\infty} \asymp \|f_n\|_{\infty} \asymp n^{1/2} \qquad (n\to\infty),$$

так что оценка (71) точна по порядку.

Доказательство теоремы 9. По условию, для любой функции $f \in C(0,1)$

$$\sup_{1\leqslant N<\infty} \|S_N(f)\|_{\infty} < \infty,$$

$$S_N(f,x) = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)\,dt\,\varphi_n(x), \qquad N = 1,2,\ldots,$$

откуда в силу теоремы Банаха–Штейнгауза вытекает равномерная ограниченность норм операторов $S_N(f)$, $N = 1,2,\ldots$, действующих из $C(0,1)$ в $L^{\infty}(0,1)$. Следовательно (см. 1.(17)), функции Лебега системы Φ равномерно ограничены:

$$\begin{gathered}\sup_{1\leqslant N<\infty} \|L_N(t)\|_{\infty} = K < \infty,\\ L_N(t) = \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)\varphi_n(t)\right| dx, \qquad N = 1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{72}$$

Из соотношения (72) мы сразу находим, что при $n = 1,2,\ldots$ и $t \in (0,1)$

$$2K \geqslant \left\|\int_0^1 |\varphi_n(x)\varphi_n(t)|\,dx\right\|_{\infty} = \|\varphi_n\|_{\infty}\cdot\|\varphi_n\|_1. \tag{73}$$

Докажем, что для некоторой постоянной $c = c(K) > 0$ при $N = 1,2,\ldots$ имеют место неравенства

$$\max_{1\leqslant m\leqslant N} \|L_m\|_{\infty} \geqslant c(K)\ln\frac{N}{M^2(N)}, \tag{74}$$

и тем самым получим утверждение теоремы (см. (72), (71)).

Пусть число N фиксировано. Покажем прежде всего, что найдется множество $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$, для каждой точки которого выполнены соотношения

$$\begin{cases} I(t) := \sum\limits_{n=1}^{N} \varphi_n^2(t) \geqslant N/2; \\ 4K \cdot I(t) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{N} \|\varphi_n\|_\infty |\varphi_n(t)|, \end{cases} \qquad t \in E. \tag{75}$$

В самом деле, пусть $E' = \{t \in (0,1) : I(t) \geqslant N/2\}$, тогда

$$\int_{E'} I(t)\,dt = N - \int_{(0,1)\setminus E'} I(t)\,dt \geqslant \frac{N}{2}. \tag{76}$$

С другой стороны, в силу (73)

$$\int_{E'} \sum_{n=1}^{N} \|\varphi_n\|_\infty |\varphi_n(t)|\,dt \leqslant 2KN. \tag{77}$$

Из (76) и (77) следует, что

$$m(E) > 0, \qquad E = \left\{ t \in E' : 4K \cdot I(t) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \|\varphi_n\|_\infty |\varphi_n(t)| \right\},$$

причем в каждой точке $t \in E$ выполнены соотношения (75).

Чтобы получить для данного N неравенство (74), достаточно, конечно, проверить, что

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant N} L_m(t) \geqslant \mathrm{c}(K) \ln \frac{N}{M^2(N)}, \quad \text{если} \quad t \in E. \tag{78}$$

Для этой пели фиксируем произвольную точку $t \in E$ и определим набор чисел $\{k_i\}_{i=0}^{s}$, $0 = k_0 < k_1 < \cdots < k_s = N$, следующим образом.

Через k_1 обозначим наименьшее из чисел $k = 1, 2, \ldots, N$, для которых

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} \varphi_n(t)\varphi_n(x) \right\|_\infty \geqslant \frac{1}{2} M^2(N);$$

если такого числа нет, то положим $k_1 = N$.

Пусть уже построены числа $k_1 < \cdots < k_{i-1} < N$. В качестве k_i возьмем наименьшее из чисел $k = k_{i-1} + 1, \ldots, N$, для которых

$$\left\| \sum_{n=k_{i-1}+1}^{k} \varphi_n(t)\varphi_n(x) \right\|_\infty \geqslant \frac{1}{2} M^2(N);$$

если такого числа нет, то положим $k_i = N$.

Указанный процесс заканчивается на некотором шаге с номером $s = s(t)$, когда $k_s = N$.

Так как $|\varphi_n(t)\varphi_n(x)| \leqslant M^2(N)$, $x \in (0,1)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, то из построения следует, что

а) при $i = 1, 2, \ldots, s$

$$\left\| \sum_{n=k_{i-1}+1}^{k_i} \varphi_n(t)\varphi_n(x) \right\|_\infty \leqslant 2M^2(N); \tag{79}$$

б) при $s > 1$ и $i = 1, 2, \ldots, s-1$

$$\frac{1}{2} M^2(N) \leqslant \left\| \sum_{n=k_{i-1}+1}^{k_i} \varphi_n(t)\varphi_n(x) \right\|_\infty . \tag{80}$$

Ниже мы будем считать, что $s \geqslant 3$, так как при $s < 3$ в силу (79)

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(t)\varphi_n(x) \right\|_\infty \leqslant 4M^2(N),$$

откуда, учитывая (75), мы выводим

$$\begin{aligned} L_N(t) &\geqslant \frac{1}{4M^2(N)} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(t)\varphi_n(x) \right|^2 dx \\ &= \frac{I(t)}{4M^2(N)} \geqslant \frac{N}{8M^2(N)} \geqslant \frac{1}{8} \ln \frac{N}{M^2(N)}, \end{aligned}$$

т.е. в случае, когда $s = s(t) < 3$, оценка (78) заведомо справедлива. Итак, пусть $s = s(t) \geqslant 3$. Положим

$$\psi_i(x) = \sum_{n=k_{i-1}+1}^{k_i} \varphi_n(t)\varphi_n(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Ясно, что функции $\psi_i(x)$ попарно ортогональны и в силу соотношений (75), (79), (80)

$$\begin{aligned} &1)\ \sum_{i=1}^{s} \|\psi_i\|_2^2 = I(t) \geqslant \frac{N}{2}; \\ &2)\ \frac{M^2(N)}{2} \leqslant \|\psi_i\|_\infty \leqslant 2M^2(N),\ 1 \leqslant i \leqslant s-1,\ \ \|\psi_s\|_\infty \leqslant 2M^2(N). \end{aligned} \tag{81}$$

Кроме того (см. (75)),

$$\sum_{i=1}^{s} \|\psi_i\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{N} |\varphi_n(t)|\, \|\varphi_n\|_\infty \leqslant 4K \cdot I(t). \tag{82}$$

Из неравенств (81), п. 2) и (82) вытекает, что

$$\frac{s}{2} < s - 1 \leqslant \frac{8K \cdot I(t)}{M^2(N)}. \tag{83}$$

Воспользуемся теперь следствием 4: применяя к функциям $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, неравенство (68) и учитывая (81), п. 1), получим

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{s} \psi_i(x) \right| dx + \frac{1}{s} \sum_{m=1}^{s} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) \right| dx \geqslant \frac{\gamma_3 I(t) \ln s}{2M^2(N) s}. \tag{84}$$

Так как функция $\dfrac{\ln s}{s}$ монотонно убывает при $s \geqslant 3$, то из (84) (см. также (83), (75)) мы выводим, что

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leqslant m \leqslant s} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x) \right| dx \\ &\qquad \geqslant \frac{\gamma_3}{2} \cdot \frac{I(t)}{2M^2(N)} \left[\frac{16K \cdot I(t)}{M^2(N)} \right]^{-1} \ln \frac{16K \cdot I(t)}{M^2(N)} \\ &\qquad \geqslant \frac{\gamma_3}{64K} \ln \frac{8KN}{M^2(N)}, \end{aligned}$$

а следовательно, и

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant s} L_{k_m}(t) \geqslant c(K) \ln \frac{N}{M^2(N)} > 0.$$

Неравенство (78) для произвольной точки $t \in E$, $m(E) > 0$, доказано. Как отмечалось выше, тем самым доказана и теорема 9.

В § 4.3 указывалось, что существует суммируемая функция с расходящимся п.в. на периоде рядом Фурье по тригонометрической системе. Здесь мы получим обобщение этого результата.

Теорема 10. *Для любой О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *удовлетворяющей условию* (66), *найдется функция* $f \in L^1(0,1)$, *ряд Фурье по системе* Φ *которой неограниченно расходится в каждой точке некоторого множества* $E \subset (0,1)$ *положительной меры.*

Замечание. Можно показать, что в условиях теоремы 10 и при дополнительном требовании полноты системы Φ, утверждать существование функции $f \in L^1(0,1)$ с расходящимся п.в. на $(0,1)$ рядом Фурье по системе Φ, вообще говоря, нельзя. Вместе с тем для некоторых О.Н.С. непосредственно из теоремы 10 можно выводить существование функций с расходящимся п.в. рядом Фурье. Например, если Φ – тригонометрическая система,[2)] то, выбрав (пользуясь теоремой 10) функцию $f(x)$, $\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)} = 1$, ряд Фурье которой неограниченно расходится на множестве $E \subset (-\pi,\pi)$, $m(E) = \alpha > 0$, мы можем затем определить последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ с $N_{k+1} > 2N_k$, $k = 1,2,\ldots$, такую, что для полиномов $P_k(x) = V_{N_{k+1}}(f,x) - V_{N_k}(f,x)$, $k = 1,2,\ldots$, выполнены соотношения

$$m(E_k) > \frac{\alpha}{2}, \qquad E_k := \bigl\{x \in (-\pi,\pi) : S^*(P_k,x) > 2^k\bigr\}.$$

Здесь $V_N(f,x)$ – средние Валле Пуссена функции $f(x)$ (определение 4.2); в силу свойств этих средних $\|P_k\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant 6$, $k = 1,2,\ldots$ (см. 4.(21), 4.(22)), $S^*(P_k)$ – мажоранта частных сумм ряда Фурье функции P_k. Тогда нетрудно убедиться, что для некоторых чисел $\theta_k \in (-\pi,\pi)$, $k = 1,2,\ldots$, ряд Фурье функции

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} P_{2k}(x - \theta_k) \in L^1(-\pi,\pi)$$

неограниченно расходится для п.в. $x \in (-\pi,\pi)$ (числа θ_k надо выбрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$m\Bigl\{\varlimsup_{k\to\infty} (E_k)_{\theta_k}\Bigr\} = 2\pi,$$

где $(E_k)_\theta = \{x + \theta \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) : x \in E_k\}$).

Лемма 1. *Пусть О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $|\varphi_n(x)| \leqslant M$ *при* $n = 1,2,\ldots$ *и* $x \in (0,1)$, *обладает тем свойством, что для каждого* $R = 1,2,\ldots$ *найдется функция* $g_R(x)$, $\|g_R\|_1 \leqslant 2^{-R}$, *удовлетворяющая соотношению*

$$m\bigl\{x \in (0,1) : S^*(g_R,x) > 2^R\bigr\} > \alpha > 0;$$
$$S^*(g_R,x) = \sup_{1\leqslant N<\infty} |S_N(g_R,x)| \tag{85}$$

[2)] Тригонометрическую систему мы определяли на $(-\pi,\pi)$, а не на $(0,1)$, но это, очевидно, не является существенным.

(в (85) постоянная α от R не зависит; $S_N(g,x)$ – частная сумма ряда Фурье функции g по системе Φ).

Тогда существует функция $f \in L^1(0,1)$, для которой ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n(x), \qquad c_n(f) = \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)\,dt, \quad n = 1,2,\ldots,$$

неограниченно расходится в каждой точке некоторого множества положительной меры.

Доказательство. Можно считать, что при $R = 1,2,\ldots$ для частных сумм ряда Фурье функции g_R справедливо соотношение

$$\varlimsup_{N\to\infty} |S_N(g_R,x)| < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1), \tag{86}$$

иначе в качестве искомой функции $f(x)$ можно взять одну из функций g_R.

Покажем, что для некоторой последовательности $R_1 < R_2 < \cdots$ требованиям леммы удовлетворяет функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_{R_j}(x). \tag{87}$$

Будем последовательно строить числа R_j, при этом мы используем обозначение:

$$G_j(x) = \sum_{s=1}^{j} g_{R_s}(x), \qquad x \in (0,1), \quad j = 1,2,\ldots.$$

Пусть числа $\{R_s\}_{s=1}^{j}$ уже построены, причем

$$m\Big\{x \in (0,1) : \sup_{1\leqslant N\leqslant B_j} |S_N(G_j,x)| > 2^j\Big\} > \frac{\alpha}{2}, \tag{88}$$

где B_j – некоторое, зависящее от j число (при $j = 1$ соотношение (88) выполнено (см. (85)), если $G_1 = g_1$ и B_1 достаточно велико). Отметим, что

а) так как для $n = 1,2,\ldots$ $|c_n(g_R)| \leqslant M\|g_R\|_1 \to 0$ при $R \to \infty$, то при достаточно большом R

$$\sum_{n=1}^{B_j} |c_n(g_R)\varphi_n(x)| \leqslant 2^{-j} \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1); \tag{89}$$

б) так как $\varlimsup\limits_{N\to\infty} |S_N(G_j,x)| < \infty$ для п.в. $x \in (0,1)$ (см. (86)), то при достаточно больших R и B в силу (85)

$$m\Big\{x \in (0,1) : \sup_{1\leqslant N\leqslant B} |S_N(G_j + g_R,x)| > 2^{j+1}\Big\} > \frac{\alpha}{2}. \tag{90}$$

Выберем числа $R_{j+1} > R_j$ и $B_{j+1} > B_j$ так, чтобы для $R = R_{j+1}$ и $B = B_{j+1}$ выполнялись соотношения (89) и (90). Продолжая указанные построения, мы получим последовательность функций $\{g_{R_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ и тем самым (см. (87)) функцию $f \in L^1(0,1)$. При этом в силу (89)

$$\sum_{n=1}^{B_j} |c_n(f - G_j)\varphi_n(x)| \leqslant \sum_{s=j+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{B_j} |c_n(g_{R_s})\varphi_n(x)|$$
$$\leqslant \sum_{s=j+1}^{\infty} 2^{-s} < 1 \text{ для п.в. } x \in (0,1),\ j = 1, 2, \dots .$$

Следовательно, при $j = 1, 2, \dots$ (см. (88))

$$m\Big\{x \in (0,1) : \sup_{1 \leqslant N \leqslant B_j} |S_N(f,x)| > 2^j - 1\Big\}$$
$$\geqslant m\Big\{x \in (0,1) : \sup_{1 \leqslant N \leqslant B_j} |S_N(G_j,x)| > 2^j\Big\} > \frac{\alpha}{2}.$$

Из последнего соотношения непосредственно вытекает расходимость (неограниченная) ряда Фурье функции $f(x)$ на множестве положительной меры. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть на единичном кубе I^N пространства $\mathbb{R}^N$ ($I^N = \{x = (x_1, \dots, x_N) : 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \dots, N\}$) задана последовательность измеримых функций $\{F_p(x)\}_{p=1}^{\infty}$, причем для п.в. $x \in I^N$*

$$0 \leqslant G(x) := \varlimsup_{p \to \infty} F_p(x) < \infty.$$

Тогда найдутся измеримые, целочисленные функции $p_s(x)$, $s = 1, 2, \dots$, с $0 < p_1(x) < p_2(x) < \cdots$ такие, что для п.в. $x \in I^N$

$$G(x) = \lim_{s \to \infty} F_{p_s(x)}(x). \tag{91}$$

Доказательство. Фиксируем последовательность $\{\varepsilon_s\}$ с $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$ и $\lim_{s \to \infty} \varepsilon_s = 0$ и положим для $x \in \{x \in I^N : G(x) < \infty\}$

$$p_1(x) = \inf\big\{p : F_p(x) > G(x) - \varepsilon_1\big\}$$

и при $s > 1$

$$p_s(x) = \inf\big\{p : p > p_{s-1}(x),\ F_p(x) > G(x) - \varepsilon_s\big\}.$$

Ясно, что тогда для п.в. $x \in I^N$ справедливо равенство (91). Остается доказать измеримость функций $p_s(x)$. При $s = 1, 2, \dots$

$$\{x : p_1(x) = j\} = \Big(\bigcap_{1 \leqslant p \leqslant j-1} \{x : F_p(x) \leqslant G(x) - \varepsilon_1\}\Big) \cap \{x : F_j(x) > G(x) - \varepsilon_1\}. \tag{92}$$

Аналогично, при $s > 1$ и $j = 2, 3, \dots$

$$\{x : p_s(x) = j\} = \bigcup_{\nu=1}^{j-1} \Big[\{x : p_{s-1}(x) = \nu\} \cap \{x : F_p(x) \leqslant G(x) - \varepsilon_s,\ \nu < p < j\} \cap \{x : F_j(x) > G(x) - \varepsilon_s,\ \nu < p < j\}\Big]. \tag{93}$$

Из соотношений (92) и (93) непосредственно вытекает измеримость функций $p_1(x)$, $p_2(x)$ и т. д. Лемма 2 доказана.

Отметим также, что если функции $p(x) > 0$, $f_1(x), f_2(x), \dots, x \in I^N$, измеримы, а $p(x)$ принимает только целые значения, то измерима и функция $f_{p(x)}(x)$.

Лемма 3. *Пусть О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *удовлетворяет условию* (66). *Тогда для каждого* $N = 1, 2, \dots$ *найдется множество* $\Omega = \Omega(N)$ *точек* $(t, \theta_1, \dots, \theta_N)$ *куба* I^{N+1} *с*

$$m_{N+1}(\Omega) \geqslant \alpha > 0 \tag{94}$$

такое, что для любой точки $(t, \theta_1, \dots, \theta_N) \in \Omega$ *и некоторой зависящей от* t *(но не от* θ_i*) последовательности натуральных чисел* $\{m_q(t)\}_{q=1}^{\infty}$, $Nq \leqslant m_q(t) < N(q+1)$, $q = 1, 2, \dots$, *выполняется соотношение*

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=Nq}^{m_q(t)} \varphi_n(t)\varphi_n(\theta_i) \geqslant BN \ln N > 0$$

(*постоянные* B *и* α *зависят только от числа* M *из* (66)).

Доказательство. Пусть число $N = 1, 2, \dots$ фиксировано и

$$H_q = \left\{t \in (0,1) : V_q(t) \geqslant \frac{1}{2}N\right\}, \quad V_q(t) = \sum_{n=Nq}^{N(q+1)-1} \varphi_n^2(t), \qquad q = 1, 2, \dots .$$

В силу нормированности функций $\varphi_n(t)$ в $L^2(0,1)$ и оценки (66)

$$N = \int_{H_q} V_q(t)\,dt + \int_{(0,1)\setminus H_q} V_q(t)\,dt \leqslant M^2 N m(H_q) + \frac{1}{2}N.$$

Следовательно, $m(H_q) \geqslant (2M^2)^{-1}$, $q = 1, 2, \dots$, а потому

$$m(T) \geqslant (2M^2)^{-1}, \qquad T := \varlimsup_{q\to\infty} H_q. \tag{95}$$

По определению множества T для любого $t \in T$ существует такая возрастающая последовательность номеров $\{q_p(t)\}_{p=1}^{\infty}$, что

$$\sum_{n=Nq_p(t)}^{N(q_p(t)+1)-1} \varphi_n^2(t) \geqslant \frac{1}{2}N, \qquad p = 1, 2, \dots . \tag{96}$$

Отсюда, применяя следствие 4 к системе функций $\psi_n(x) = \varphi_n(t)\varphi_n(x)$, $Nq_p(t) \leqslant n < N(q_p(t) + 1)$, $p = 1, 2, \dots$, мы выводим, что для любого $t \in T$ найдется такая последовательность $\{m'_p(t)\}_{p=1}^{\infty}$, $Nq_p(t) \leqslant m'_p(t) < N(q_p(t) + 1)$, что

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=Nq_p(t)}^{m'_p(t)} \varphi_n(t)\varphi_n(x)\right| dx \geqslant B_1 \ln N, \quad p = 1, 2, \dots \quad \big(B_1 = B_1(M) > 0\big). \tag{97}$$

Положим для $t \in T$ и $\theta \in (0,1)$

$$F_p(t,\theta) = \sum_{n=Nq_p(t)}^{m'_p(t)} \varphi_n(t)\varphi_n(\theta), \qquad p = 1, 2, \dots, \tag{98}$$

и докажем, что для любого $t \in T$ и любой последовательности $\{p_s\}_{s=1}^{\infty}$, $1 < p_1 < p_2 < \cdots$

$$\varlimsup_{s\to\infty} F_{p_s}(t,\theta) \geqslant 0 \ \text{ для п.в. } \ \theta \in (0,1); \tag{99}$$

$$\int_0^1 \varlimsup_{s\to\infty} F_{p_s}(t,\theta)\,d\theta \geqslant B_2 \ln N \quad \big(B_2 = B_2(M) > 0\big). \tag{100}$$

Действительно, при фиксированном $t \in T$ последовательность функций (98) по переменной θ образует ортогональную и ограниченную (константой NM^2) систему, поэтому (см. теорему 1.5) для любого измеримого множества $E \subset (0,1)$

$$\lim_{s\to\infty} \int_E F_{p_s}(t,\theta)\,d\theta = 0, \tag{101}$$

а следовательно, $m\Big\{\theta \in (0,1) : \varlimsup_{s\to\infty} F_{p_s}(t,\theta) < 0\Big\} = 0$.

Для доказательства оценки (100) обозначим через $F_p^+(t,\theta)$ положительную часть функции $F_p(t,\theta)$:

$$F_p^+(t,\theta) = \max\{F_p(t,\theta), 0\}, \qquad p = 1, 2, \ldots .$$

Тогда, последовательно используя (99), теорему Б. Леви[3] и (101), мы находим

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varlimsup_{s\to\infty} F_{p_s}(t,\theta)\,d\theta &= \int_0^1 \varlimsup_{s\to\infty} F_{p_s}^+(t,\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^1 \lim_{s\to\infty} \Big\{\sup_{j\geqslant s} F_{p_j}^+(t,\theta)\Big\}\,d\theta \\
&= \lim_{s\to\infty} \int_0^1 \Big\{\sup_{j\geqslant s} F_{p_j}^+(t,\theta)\Big\}\,d\theta \\
&\geqslant \varlimsup_{s\to\infty} \int_0^1 F_{p_s}^+(t,\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2} \varlimsup_{s\to\infty} \int_0^1 |F_{p_s}(t,\theta)|\,d\theta,
\end{aligned}$$

откуда в силу (97) (см. также (98)) следует (100).

Введем функции

$$\Phi_p(t,\theta_1,\ldots,\theta_N) = \sum_{i=1}^N F_p(t,\theta_i), \qquad p = 1, 2, \ldots, \tag{102}$$

заданные при каждом фиксированном $t \in T$ в кубе

$$I^N = \big\{(\theta_1,\ldots,\theta_N) : 0 \leqslant \theta_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, N\big\}.$$

[3] Возможность применения теоремы Б. Леви вытекает из равномерной ограниченности функций $F_p(t,\theta)$.

Чтобы оценить функции (102), определим семейство подпоследовательностей натурального ряда:

$$\left\{p_s^{(i)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)\right\}_{s=1}^{\infty}, \qquad t\in T,\quad 0\leqslant\theta_i\leqslant 1,\quad i=1,2,\ldots,N.$$

Последовательности $\{p_s^{(1)}(t,\theta_1)\}_{s=1}^{\infty}, \theta_1\in[0,1]$ (для фиксированного $t\in T$), выберем таким образом, чтобы

1) $\varlimsup\limits_{p\to\infty} F_p(t,\theta_1) = \lim\limits_{s\to\infty} F_{p_s^{(1)}(t,\theta_1)}(t,\theta_1)$ для п.в. $\theta_1\in(0,1)$;

2) функции переменной θ_1 $p_s^{(1)}(t,\theta_1)$, $s=1,2,\ldots$, измеримы.

Возможность такого выбора следует из леммы 2.

Затем для каждого $\theta_2\in[0,1]$, снова используя лемму 2, а также следующее за ней замечание, выберем из последовательности $\{p_s^{(1)}(t,\theta_1)\}_{s=1}^{\infty}$ подпоследовательность $\{p_s^{(2)}(t,\theta_1,\theta_2)\}_{s=1}^{\infty}$ [4] таким образом, чтобы

1) $\varlimsup\limits_{s\to\infty} F_{p_s^{(1)}(t,\theta_1)}(t,\theta_2) = \lim\limits_{s\to\infty} F_{p_s^{(2)}(t,\theta_1,\theta_2)}(t,\theta_2)$ для п.в. $(\theta_1,\theta_2)\in I^2$;

2) функции двух переменных θ_1 и θ_2 $p_s^{(2)}(t,\theta_1,\theta_2)$, $s=1,2,\ldots$, измеримы.

Продолжая это процесс до номера N, получим семейство последовательностей $\{p_s^{(i)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)\}_{s=1}^{\infty}$, $i=1,2,\ldots,N$, для которых всегда

$$\left\{p_s^{(i+1)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_{i+1})\right\}_{s=1}^{\infty}\subset\left\{p_s^{(i)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)\right\}_{s=1}^{\infty},\quad i=1,2,\ldots,N-1,$$

и выполняется соотношение

$$\varlimsup_{s\to\infty} F_{p_s^{(i)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)}(t,\theta_{i+1}) = \lim_{s\to\infty} F_{p_s^{(i+1)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_{i+1})}(t,\theta_{i+1}) \tag{103}$$

для п.в. $(\theta_1,\ldots,\theta_{i+1})\in I^{i+1}$. При этом функции переменных $\theta_1,\ldots,\theta_i$ $p_s^{(i)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)$, $s=1,2,\ldots$, измеримы.

В силу (103) (см. также (102)) для п.в. $(\theta_1,\ldots,\theta_N)\in I^N$

$$\begin{aligned}\varlimsup_{p\to\infty}\Phi_p(t,\theta_1,\ldots,\theta_N) &\geqslant \lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{N} F_{p_s^{(N)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_N)}(t,\theta_i)\\ &=\sum_{i=1}^{N}\lim_{s\to\infty} F_{p_s^{(N)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_N)}(t,\theta_i)\\ &=\sum_{i=1}^{N}\varlimsup_{s\to\infty} F_{p_s^{(i-1)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_{i-1})}(t,\theta_i)\end{aligned} \tag{104}$$

---

[4] То есть $p_s^{(2)}(t,\theta_1,\theta_2) = p^{(1)}_{\nu_s(\theta_2)}(t,\theta_1)$, $s=1,2,\ldots$, где $\{\nu_s(\theta_2)\}$ – некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, зависящих от θ_2.

(мы обозначили $\{p_s^{(0)}(t)\}$ последовательность $p_s^{(0)}(t) = s$, $s = 1, 2, \ldots$).

При этом из соотношений (99) и (100), учитывая измеримость функций $F_{p_s^{(i-1)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_{i-1})}(t,\theta_i)$, мы выводим существование таких измеримых функций переменных $\theta_1, \ldots, \theta_i - G_i(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, что

$$\begin{aligned} &\text{а) } 0 \leqslant G_i(t,\theta_1,\ldots,\theta_i) \leqslant \varlimsup_{s\to\infty} F_{p_s^{(i-1)}(t,\theta_1,\ldots,\theta_{i-1})}(t,\theta_i) \\ &\quad\text{для п.в. } (\theta_1,\ldots,\theta_i) \in I^i; \\ &\text{б) } \int_0^1 G_i(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)\,d\theta_i = B_2 \ln N > 0. \end{aligned} \tag{105}$$

В силу (105), п. б)

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^N G_i(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)\right] d\theta_1 \ldots d\theta_N = B_2 N \ln N. \tag{106}$$

С другой стороны, используя (105), п. а), (106), а также неравенство $|F_p(t,\theta)| \leqslant NM^2$, $t, \theta \in [0,1]$, мы получим

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^N G_i(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)\right]^2 d\theta_1 \ldots d\theta_N \\ &\quad= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^N G_i^2(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)\right] d\theta_1 \ldots d\theta_N \\ &\qquad+ 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \int_0^1 \cdots \int_0^1 G_i(t,\theta_1,\ldots,\theta_i)\, G_j(t,\theta_1,\ldots,\theta_j)\, d\theta_1 \ldots d\theta_N \\ &\quad\leqslant B_2 N^2 M^2 \ln N + 2B_2^2 N^2 \ln N \\ &\quad\leqslant B_3 N^2 \ln^2 N, \qquad B_3 = B_3(M) > 0. \end{aligned} \tag{107}$$

Из соотношений (106) и (107) и леммы 1 из теоремы 2.7 вытекает, что для любого $t \in T$

$$m_N\left\{(\theta_1,\ldots,\theta_N) : \sum_{i=1}^N G_i(t,\theta_1,\ldots,\theta_i) \geqslant \frac{B_2}{4} N \ln N\right\} \geqslant \frac{B_2^2}{8B_3},$$

а значит (см. (105), (104), (95)),

$$\begin{aligned} m_{N+1}(\Omega) &:= m_{N+1}\left\{(t,\theta_1,\ldots,\theta_N) : t \in T,\ \varlimsup_{p\to\infty} \sum_{i=1}^N F_p(t,\theta_i) \geqslant \frac{B_2}{4} N \ln N\right\} \\ &\geqslant m(T)\frac{B_2^2}{8B_3} \geqslant \frac{B_2^2}{16MB_3} > 0. \end{aligned}$$

Из последней оценки и определения функций $F_p(t,\theta)$ (см. (98)) мы получаем утверждение леммы 3.

Доказательство теоремы 10. Для $N = 1, 2, \dots$ обозначим через E^N подмножество куба I^N, состоящее из точек $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяющих соотношениям

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} \int_{\theta_i}^{\theta_i+h} \varphi_n(x)\,dx = \varphi_n(\theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \; n = 1, 2, \dots. \tag{108}$$

Тогда $m_N(E^N) = m_N(I^N) = 1$ (по теореме о дифференцируемости неопределенного интеграла; см. также замечание к теореме 2 из приложения 1), и в силу леммы 3 для каждого $N = 1, 2, \dots$ можно найти точку $\theta = (\theta_1^{(N)}, \dots, \theta_N^{(N)}) \in E^N$ такую, что

$$\begin{gathered} \lim_{q\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=Nq}^{m_q(t)} \varphi_n(t)\varphi_n(\theta_i^{(N)}) \geqslant B \ln N, \\ Nq \leqslant m_q(t) < N(q+1), \qquad q = 1, 2, \dots, \end{gathered} \tag{109}$$

при любом $t \in T(N) \subset (0,1)$, $m(T(N)) > \alpha/2 > 0$. Из соотношения (109) следует, что для достаточно большого $q_0 = q_0(N, \Phi)$

$$m\left\{ t \in (0,1) : \sup_{1\leqslant q<q_0} \sup_{Nq\leqslant m<N(q+1)} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi_n(t)\varphi_n(\theta_i^{(N)}) > \frac{B_2}{2} \ln N \right\} > \frac{\alpha}{3},$$

а значит,

$$m\left\{ t \in (0,1) : \sup_{1\leqslant m<Nq_0} \sum_{n=1}^{m} \varphi_n(t) \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi_n(\theta_i^{(N)}) \right] > \frac{B_2}{4} \ln N \right\} > \frac{\alpha}{3}. \tag{110}$$

Рассмотрим на интервале $(0,1)$ для достаточно малого $h > 0$ функции

$$f_{h,N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} h^{-1} \chi_{(\theta_i^{(N)}, \theta_i^{(N)}+h)}(x), \qquad \|f_{h,N}\|_1 = 1$$

($\chi_{(a,b)}(x)$ – характеристическая функция интервала (a,b)).

В силу (108) для коэффициентов Фурье функций $f_{h,N}(x)$ выполнено соотношение

$$\lim_{h\to+0} c_n(f_{h,N}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi_n(\theta_i^{(N)}), \qquad n = 1, 2, \dots,$$

а следовательно, для частных сумм $S_m(f_{h,N}, x)$ рядов Фурье функций $f_{h,N}(x)$ при $m = 1, 2, \ldots$ мы имеем

$$\lim_{h\to+0}\left\|S_m(f_{h,N}, x) - \sum_{n=1}^{m}\varphi_n(x)\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi_n(\theta_i^{(N)})\right]\right\|_2 = 0. \tag{111}$$

Из (110) и (111) вытекает, что для $N = 1, 2, \ldots$ и $h < h_0 = h_0(N, \Phi)$

$$m\left\{x \in (0,1) : \sup_{1\leqslant m\leqslant Nq_0} S_m(f_{h,N}, x) > \frac{B_2}{5}\ln N\right\} > \frac{\alpha}{4}. \tag{112}$$

Теперь остается воспользоваться леммой 1: в силу (112) для каждого $R = 1, 2, \ldots$ можно найти такие $N = N(R)$ и $h = h(R) > 0$, что функция $g_R(x) = (\ln^{-1/2} N) f_{h,N}(x)$ имеет норму $\|g_R\|_1 \leqslant 2^{-R}$ и удовлетворяет соотношению (85). Теорема 10 доказана.

Последний результат этой главы относится к вопросам абсолютной сходимости ортогональных рядов.

В главе 4 мы показали (см. следствия 4.5 и 4.6), что для абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f \in C(-\pi, \pi)$ достаточно выполнения одного из следующих условий:

а) $f \in \mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ при некотором $\varepsilon > 0$;

б) $f(x)$ имеет ограниченную вариацию и модуль непрерывности, удовлетворяющий соотношению $\omega(\delta, f) = O\left(\log^{-(2+\varepsilon)}\frac{1}{\delta}\right)$ при $\delta \to 0$ $(\varepsilon > 0)$.

В § 2 этой главы было выяснено (см. следствие 2), что условие а) нельзя существенно ослабить ни для какой П.О.Н.С. в том смысле, что для каждой П.О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ найдется функция $F \in \mathrm{Lip}\,\frac{1}{2}$ с $F \overset{L^2}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \infty$. Что касается условия б), то для некоторых О.Н.С. оно является излишне ограничительным. Например, для коэффициентов Фурье–Хаара произвольной функции ограниченной вариации $f(x)$ имеет место оценка

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}}|c_n(f,\chi)| = O(2^{-k/2}) \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{113}$$

(оценка (113) вытекает из 3.(17) и неравенства $\omega_1(\delta, f) \leqslant 4\delta V(f)$, где $V(f)$ – полная вариация функции f (см. приложение 1)), а значит, ряд Фурье–

Хаара каждой функции ограниченной вариации сходится абсолютно. Оказывается, однако, что указанным свойством системы Хаара не может обладать ни одна П.О.Н.С., состоящая из равномерно ограниченных функций. Более того, имеет место

Теорема 11. *Для любой П.О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *удовлетворяющей условию* (66), *найдется непрерывная функция ограниченной вариации* $F(x)$ *с* $F(0) = F(1) = 0$ *и модулем непрерывности* $\omega(\delta, F) = O\left(\log^{-2}\frac{1}{\delta}\right)$ *при* $\delta \to 0$, *для которой расходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(F)| = \infty, \qquad c_n(F) = \int_0^1 F(x)\varphi_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Для $f \in C(0,1)$ через $\|f\|_{H^\omega}$ будем обозначать величину (удовлетворяющую всем аксиомам нормы)

$$\|f\|_{H^\omega} = \|f\|_C + \sup_{0 \leqslant x \leqslant x' \leqslant 1} |f(x) - f(x')| \ln^2(x' - x),$$

а через $V(f)$ – полную вариацию функции $f(x)$ на $[0,1]$. Ясно, что $\|f\|_{H^\omega} < \infty$ тогда и только тогда, когда $\omega(\delta, f) = O\left(\log^{-2}\frac{1}{\delta}\right)$ при $\delta \to 0$.

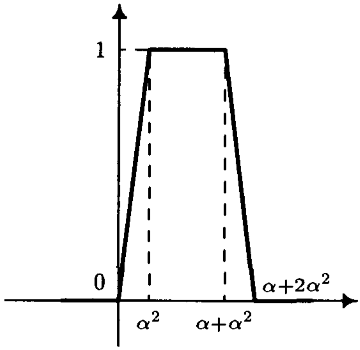

Рис. 3

Для данного $\alpha \in (0, 1/4)$ определим функцию $\chi_\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, положив (рис. 3)

$$\chi_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha^2 \leqslant x \leqslant \alpha + \alpha^2, \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0 \text{ или } x \geqslant \alpha + 2\alpha^2, \\ \text{линейна и непрерывна на } [0, \alpha^2] \text{ и на } [\alpha + \alpha^2, \alpha + 2\alpha^2]. \end{cases}$$

Легко проверить, что $V(\chi_\alpha) = 2$ и что при любом $t \in (0, 1/2)$

$$\|\chi_\alpha(x-t)\|_{H^\omega} = \|\chi_\alpha(x)\|_{H^\omega} \leqslant K \ln^2 \alpha, \tag{114}$$

где K – абсолютная постоянная.

Мы можем предположить, что для любых $\alpha \in (0, 1/4)$ и $t \in (0, 1/2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bigl|c_n\bigl(\chi_\alpha(x-t)\bigr)\bigr| < \infty, \tag{115}$$

иначе в качестве искомой функции $F(x)$ можно взять одну из функций $\chi_\alpha(x-t)$. Более того, если

$$\sup_{0<\alpha<\frac14,\, 0<t<\frac12} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\chi_\alpha(x-t))|}{\ln^2 \alpha} = \infty,$$

т.е.

$$\sup_{0<\alpha<\frac14,\, 0<t<\frac12} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(\chi_\alpha(x-t))|}{\|\chi_\alpha(x-t)\|_{H^\omega}} = \infty, \tag{116}$$

то искомая функция $F(x)$ может быть получена в виде

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x), \qquad F_k(x) = 2^{-k} \ln^{-2} \alpha_k \cdot \chi_{\alpha_k}(x - t_k), \tag{117}$$

где $\{\alpha_k\}$ – некоторая стремящаяся к нулю последовательность и $t_k \in (0, 1/2)$, $k = 1, 2, \ldots$. Действительно, учитывая, что при $N = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{N} \bigl|c_n\bigl(\chi_\alpha(x-t)\bigr)\bigr| \leqslant NM\|\chi_\alpha\|_1 \leqslant 2NM\alpha \to 0 \ \text{ при } \ \alpha \to 0,$$

мы можем при условии (116) (см. также (115)) последовательно при $k = 1, 2, \ldots$ выбрать числа α_k и t_k так, что

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \bigl|c_n\bigl(\chi_{\alpha_k}(x-t_k)\bigr)\bigr| \geqslant 3^k \ln^2 \alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots;$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Bigl|c_n\Bigl(\sum\limits_{s=1}^{k} F_s\Bigr)\Bigr| \geqslant \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n(F_k)|,\ k = 1, 2, \ldots,$

а тогда для функции (117) мы будем иметь

$$F(0) = F(1) = 0, \quad \|F\|_{H^\omega} < \infty, \quad V(F) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(F)| = \infty.$$

Таким образом, нам достаточно доказать теорему в случае, когда

$$\sup_{0<\alpha<\frac14,\, 0<t<\frac12} \left\{ \ln^{-2} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \bigl|c_n\bigl(\chi_\alpha(x-t)\bigr)\bigr| \right\} = C_0 < \infty. \tag{118}$$

Лемма 1 (основная). *Если для системы* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, *удовлетворяющей условиям теоремы* 11, *выполнено соотношение* (118), *то при* $\alpha \leqslant \alpha_0 < 1/4$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^{1/2} \Biggl\{ \sum_{n:\, |c_n(\chi_\alpha(x-t))| > \alpha^4} \bigl|c_n\bigl(\chi_\alpha(x-t)\bigr)\bigr|\, dt \Biggr\} \geqslant c \ln \frac{1}{\alpha} \tag{119}$$

(*постоянные* $\alpha_0 > 0$ *и* $c > 0$ *зависят от системы* Φ).

Отметим, что если Φ – тригонометрическая система, то оценка (119) точна по порядку, так как в этом случае при любом t

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bigl|c_n\bigl(\chi_\alpha(x-t)\bigr)\bigr| \asymp \ln \frac{1}{\alpha}\,.$$

Доказательство леммы 1. Считая число $\alpha \in (0, 1/4)$ фиксированным, положим при $n = 1, 2, \dots$ и $t \in (0, 1/2)$

$$f_n(t) = c_n\bigl(\chi_\alpha(x-t)\bigr) = \int_0^1 \chi_\alpha(x-t)\varphi_n(x)\, dx. \tag{120}$$

Из ограниченности функций $\varphi_n(x)$ (см. (66)) следует, что при $t, t' \in (0, 1/2)$

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_n(t')| &\leqslant \int_0^1 |\chi_\alpha(x-t) - \chi_\alpha(x-t')| \cdot |\varphi_n(x)|\, dx \\ &\leqslant M \int_0^1 |\chi_\alpha(x-t) - \chi_\alpha(x-t')|\, dx \leqslant 4M|t-t'|. \end{aligned} \tag{121}$$

В силу равенства Парсеваля из определения функций $f_n(t)$ следует, что при $0 \leqslant t < t' < 1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f_n(t')|^2 = \int_0^1 |\chi_\alpha(x-t) - \chi_\alpha(x-t')|^2\, dx. \tag{122}$$

Но легко видеть, что если $2\alpha^2 < t' - t < \alpha$, $0 \leqslant t < t' < 1/2$, то

$$\int_0^1 |\chi_\alpha(x-t) - \chi_\alpha(x-t')|^2\, dx \geqslant \frac{1}{3}(t'-t).$$

Поэтому из (122) вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{2\alpha^2}^{\alpha}h^{-2}\int_0^{1/2-h}[f_n(t+h)-f_n(t)]^2\,dt\,dh$$
$$=\int_{2\alpha^2}^{\alpha}h^{-2}\int_0^{1/2-h}\sum_{n=1}^{\infty}[f_n(t+h)-f_n(t)]^2\,dt\,dh$$
$$\geqslant\frac{1}{3}\int_{2\alpha^2}^{\alpha}h^{-2}\int_0^{1/2-h}h\,dt\,dh\geqslant\frac{1}{12}\int_{2\alpha^2}^{\alpha}h^{-1}\,dh\geqslant\frac{1}{24}\ln\frac{1}{\alpha}\,. \tag{123}$$

Применяя к функциям $\dfrac{1}{4M}f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, неравенство (63) с $\alpha=1/2$, $\beta=\alpha^2$, мы получим (см. (121), (123))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{4M}\int_{\{t\in(0,1/2):|f_n(t)|>4M\alpha^4\}}|f_n(t)|\,dt+\frac{\alpha^2}{4M}\int_0^{1/2}|f_n(t)|\,dt\right\}$$
$$\geqslant\frac{1}{5000M^2}\ln\frac{1}{\alpha}\,,$$

а значит ($M\geqslant1$),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/2}|f_n(t)|\,\chi\{t\in(0,1/2):|f_n(t)|>\alpha^4\}\,dt$$
$$\geqslant c'\ln\frac{1}{\alpha}-\int_0^{1/2}\alpha^2\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(t)|\,dt, \tag{124}$$

где постоянная $c'>0$ зависит только от M (через $\chi\{E\}$ в (124) обозначается характеристическая функция множества E).

Меняя порядок интегрирования и суммирования в левой части неравенства (124) и учитывая соотношение (118), выполненное по условию леммы 1, мы находим

$$\int_0^{1/2}\left\{\sum_{n:\,|c_n(\chi_\alpha(x-t))|>\alpha^4}\left|c_n\big(\chi_\alpha(x-t)\big)\right|\right\}dt$$
$$\geqslant c'\ln\frac{1}{\alpha}-C_0\alpha^2\ln^2\alpha\geqslant\frac{c'}{2}\ln\frac{1}{\alpha}\,,$$

если $\alpha\leqslant\alpha_0$ достаточно мало. Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 11. Применяя равенство

$$\int_0^{1/2} g(t)\,dt = \int_0^{1/(2m)} \sum_{p=0}^{m-1} g\Big(t + \frac{p}{2m}\Big)\,dt, \qquad m = 1, 2, \dots,$$

справедливое, очевидно, для любой функции $g \in L^1(0,1)$, мы из леммы получаем, что для каждого $m = 1, 2, \dots$ и $\alpha \leqslant \alpha_0$ найдется такая точк $t_0 = t_0(m, \alpha) \in (0, 1/(2m))$, что

$$\frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1}\Bigg\{\sum_{n:\left|c_n\left(\chi_\alpha\left(x-\frac{p}{2m}-t_0\right)\right)\right|>\alpha^4}\left|c_n\Big(\chi_\alpha\Big(x-\frac{p}{2m}-t_0\Big)\Big)\right|\Bigg\} \geqslant c\ln\frac{1}{\alpha} > 0. \qquad (125)$$

Отметим, что если для любых $\alpha \in (0, 1/4)$, $m = 1, 2, \dots$ и $t \in (0, 1/(2m$ определить множество целых чисел

$$E(t, m, \alpha) = \Big\{n : \max_{0\leqslant p<m}\Big|c_n\Big(\chi_\alpha\Big(x - \frac{p}{2m} - t\Big)\Big)\Big| > \alpha^4\Big\}, \qquad (126)$$

то, используя равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\Big(\chi_\alpha\Big(x - \frac{p}{2m} - t\Big)\Big) = \Big\|\chi_\alpha\Big(x - \frac{p}{2m} - t\Big)\Big\|_2^2 \leqslant C\alpha,$$

мы найдем, что $[\operatorname{card} E(t, m, \alpha)](\alpha^4)^2 \leqslant C\alpha m$, т.е.

$$\operatorname{card} E(t, m, \alpha) \leqslant C m \alpha^{-7}, \qquad (127)$$

где C – абсолютная постоянная.

Определим числа

$$\alpha_k = (2^{10^k})^{-1}\alpha_0, \qquad m_k = k^{-1/2}10^{2k} \qquad (128)$$

и затем для каждого $k = 1, 2, \dots$ и $y \in (0, 1)$ рассмотрим функцию

$$u_{k,y}(x) = \frac{1}{m_k}\sum_{p=0}^{m_k-1} r_{p+1}(y)\chi_{\alpha_k}\Big(x - \frac{p}{2m_k} - t_k\Big), \qquad x \in (0, 1), \qquad (129)$$

где точка $t_k \equiv t_0(m_k, \alpha_k) \in (0, 1/(2m_k))$ такова, что имеет место оценка (125), а $r_p(y)$ – функции Радемахера. Тогда для любых $y \in (0,1)$ и $k = 1, 2, \ldots$

$$u_{k,y}(0) = u_{k,y}(1) = 0 \quad \text{и} \quad V(u_{k,y}) \leqslant 2. \tag{130}$$

Кроме того, слагаемые в сумме (129) имеют непересекающиеся носители (это вытекает из неравенства $2\alpha_k < m_k^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. (128))), поэтому из определения функций $\chi_\alpha(x)$ сразу следует, что при любом $y \in (0,1)$ и $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \ \|u_{k,y}\|_C \leqslant m_k^{-1};\\ &\text{б)}\ \ \|u'_{k,y}\|_\infty := \sup_{0 \leqslant x' < x \leqslant 1} \left| \frac{u_{k,y}(x) - u_{k,y}(x')}{x - x'} \right| \leqslant \alpha_k^{-2} m_k^{-1};\\ &\text{в)}\ \ \|u_{k,y}\|_1 \leqslant 2\alpha_k. \end{aligned} \tag{131}$$

Если обозначить через E_k множество целых чисел $E_k = E_k(T_k, m_k, \alpha_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. (126)), то, используя теорему 2.7 и оценку (125) (см. также (126)), мы найдем, что при $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left\{ \sum_{n \in E_k} |c_n(u_{k,y})| \right\} dy \\ &\quad = \sum_{n \in E_k} \int_0^1 \left| \frac{1}{m_k} \sum_{p=0}^{m_k - 1} r_{p+1}(y) c_n \left(\chi_{\alpha_k} \left(x - \frac{p}{2m_k} - t_k \right) \right) \right| dy \\ &\quad \geqslant \frac{c}{m_k} \sum_{n \in E_k} \left\{ \sum_{p=0}^{m_k - 1} c_n^2 \left(\chi_{\alpha_k} \left(x - \frac{p}{2m_k} - t_k \right) \right) \right\}^{1/2} \\ &\quad \geqslant \frac{c}{m_k^{3/2}} \sum_{n \in E_k} \sum_{p=0}^{m_k - 1} \left| c_n \left(\chi_{\alpha_k} \left(x - \frac{p}{2m_k} - t_k \right) \right) \right| \\ &\quad \geqslant \frac{c}{m_k^{1/2}} \ln \frac{1}{\alpha_k} \geqslant c \left(\frac{k^{1/2}}{10^{2k}} \right)^{1/2} 10^k = c k^{1/4}, \end{aligned}$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

Следовательно, при $k = 1, 2, \ldots$ и некотором $y_0 = y_0(k) \in (0,1)$ функция $g_k(x) := u_{k,y_0}(x)$ удовлетворяет соотношению (см. также (127))

$$\sum_{n \in E_k} |c_n(g_k)| > c k^{1/4} > 0, \qquad \operatorname{card} E_k \leqslant C m_k \alpha_k^{-7} < C' \alpha_k^{-8}. \tag{132}$$

Покажем, наконец, что для некоторой последовательности $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \dots$, функция

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k^{5/4}} g_k(x) \tag{133}$$

является искомой.

Во-первых, в силу (131), п. а) и (130), независимо от выбора чисел $\varepsilon_k = \pm 1$ в (133) мы имеем

$$\begin{gathered} F \in C(0,1), \qquad \|F\|_C \leqslant 2, \qquad F(0) = F(1) = 0, \\ V(F) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/4} < \infty. \end{gathered} \tag{134}$$

Докажем, что для любых $\varepsilon_k = \pm 1$

$$\|F\|_{H^\omega} \leqslant C = C(\Phi) < \infty. \tag{135}$$

Пусть $h \in (0, \alpha_1)$ и число sтаково, что $\alpha_{s+1}^2 \leqslant h < \alpha_s^2$. Тогда, учитывая, что $|\ln \alpha_k| \leqslant C'(\Phi) \cdot 10^k$, $k = 1, 2, \dots$ (см. (128)), мы в силу (131), п. б) получим

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^{s} \frac{\varepsilon_k}{k^{5/4}} g_k(x+h) - \sum_{k=1}^{s} \frac{\varepsilon_k}{k^{5/4}} g_k(x) \right| \\ &\qquad \leqslant \sum_{k=1}^{s} \frac{h}{k^{5/4} m_k \alpha_k^2} \leqslant \alpha_s^2 \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{k^{5/4} m_k \alpha_k^2} \\ &\qquad \leqslant C \frac{\alpha_s^2}{s^{5/4} m_s \alpha_s^2} < C 10^{-2s} \\ &\qquad < C_1 \ln^{-2} \alpha_{s+1} \leqslant C_1 \ln^{-2} h, \qquad x, x+h \in [0,1]. \end{aligned} \tag{136}$$

Далее (см. (131), п. а), (128)),

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k^{5/4}} g_k(x+h) - \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k^{5/4}} g_k(x) \right| \\ &\qquad \leqslant 2 \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/4}} \|g_k\|_C \\ &\qquad \leqslant 2 \sum_{k=s+1}^{\infty} k^{-3/4} 10^{-2k} \\ &\qquad \leqslant 10^{-2s} < C_2 \ln^{-2} h, \qquad x, x+h \in [0,1]. \end{aligned} \tag{137}$$

Складывая неравенства (136) и (137) (см. также определение нормы $\|F\|_{H^\omega}$ и (134)), получим оценку (135).

Нам остается выбрать числа $\varepsilon_k = \pm 1$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(F)| = \infty.$$

Для этого заметим, что при любых n и k

$$|c_n(g_k)| \leqslant M\, \|g_k\|_1 \leqslant 2M\alpha_k = B_1(2^{10^k})^{-1} \tag{138}$$

(см. (66) и (131), п. в)), откуда в силу оценки $\operatorname{card} E_k \leqslant C'\alpha_k^{-8} = C \cdot 2^{8\cdot 10^k}$ (см. (132)) мы выводим, что при $k' > k$

$$\sum_{n\in E_k} |c_n(g_{k'})| \leqslant [\operatorname{card} E_k]\cdot B_1(2^{10^k})^{-1} \leqslant B_2(2^{10^{k'-1}})^{-1},$$

а следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k'=k+1}^{\infty}\sum_{n\in E_k} |c_n(g_{k'})| \leqslant B_2 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k'=k+1}^{\infty} (2^{10^{k'-1}})^{-1} \leqslant B_3 < \infty. \tag{139}$$

Кроме того, если положить $\Omega_k = E_k \setminus \bigcup\limits_{s=1}^{k-1} E_s$ при $k = 2, 3, \ldots$, то в силу (132) и (138) при $k > k_0$

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\Omega_k} |c_n(g_k)| &\geqslant ck^{1/4} - \sum_{n\in\bigcup_{s=1}^{k-1} E_s} |c_n(g_k)| \\ &\geqslant ck^{1/4} - \left[\operatorname{card}\left(\bigcup_{s=1}^{k-1} E_s\right)\right] B_1\cdot(2^{10^k})^{-1} \\ &\geqslant ck^{1/4} - B_4\cdot 2^{s\cdot 10^{k-1}}\cdot(2^{10^k})^{-1} \geqslant B_5 k^{1/4} > 0. \end{aligned}\tag{140}$$

Числа $\varepsilon_k = \pm 1$ мы будем выбирать последовательно так, чтобы на каждом шаге (т.е. для каждого $k = 2, 3, \ldots$) выполнялось неравенство

$$\sum_{n\in\Omega_k} \left| c_n\left(\sum_{s=1}^{k-1} \frac{\varepsilon_s}{k^{5/4}} g_s(x) + \frac{\varepsilon_k}{k^{5/4}} g_k(x)\right)\right| \geqslant \frac{1}{k^{5/4}} \sum_{n\in\Omega_k} |c_n(g_k)| \tag{141}$$

(это всегда можно обеспечить, так как в любом нормированном пространстве $\max\{\|a+a'\|, \|a-a'\|\} \geqslant \|a'\|$). Тогда, используя оценки (139), (140) и (141), мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(F)| \geqslant \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n\in\Omega_k} |c_n(F)|$$

$$\geqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{5/4}} \sum_{n\in\Omega_k} |c_n(g_k)| - B_3 \geqslant B_5 \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} - B_3 = \infty.$$

Теорема 11 доказана.

Глава 11

Некоторые теоремы о представлении функций ортогональными рядами

В этой главе мы рассмотрим еще одно направление теории ортогональных рядов – теоремы о представлении измеримых функций рядами.

Задачи, о которых пойдет речь ниже, весьма схематично можно описать так: пусть заданы система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и класс измеримых функций $F = \{f(x)\}$ и одновременно фиксирован некий вид сходимости, обозначаемый ниже через ρ (например, сходимость п.в., сходимость в каком-то метрическом пространстве и т. д.). Требуется выяснить возможность нахождения для каждой функции $f \in F$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

сходящегося к $f(x)$ в смысле ρ-сходимости.

Теоремы о представлении можно считать некоторыми аналогами одного из первоначальных фактов теории ортогональных рядов – теоремы 1.4, согласно которой для любой П.О.Н.С. Φ и любой функции $f \in L^2$ найдется ряд по системе Φ, сходящийся в L^2 к $f(x)$. Следует при этом подчеркнуть отличие теорем о представлении от результатов (естественных в случае, когда ρ – метрика) о полноте системы Φ в классе F, т.е. о возможности сколь угодно точной аппроксимации полиномами по системе Φ в ρ-метрике каждой функции f из F. Необходимость получить ряд, частные суммы которого сходятся к $f(x)$, существенно меняет характер задачи и определяет специфику теорем о представлении функций рядами.

Все результаты главы 11, за исключением теоремы 5, относятся к основному в этой тематике (но, конечно, не единственно возможному) случаю, когда Φ – П.О.Н.С.

Стоит также отметить, что, хотя ниже встречаются довольно длинные доказательства, глава 11, на наш взгляд, не сложнее, чем предыдущие главы книги.

§ 1. Представление функций рядами, сходящимися по мере

Теорема 1. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$ – *П.О.Н.С. Тогда для любой измеримой функции* $f(x)$, $-\infty \leqslant f(x) \leqslant +\infty$, $x \in (0,1)$, *найдется ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

сходящийся к $f(x)$ *по мере.*

Замечание. В теореме 1 мы допускаем обращение функции $f(x)$ на некоторых измеримых множествах B и C соответственно в $+\infty$ и $-\infty$. При этом последовательность конечных п.в. функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, называется сходящейся по мере к $f(x)$, если она сходится по мере в обычном смысле на $(0,1) \setminus (B \cup C)$ и для $M = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} m\bigl\{x \in B : f_n(x) < M\bigr\} = \lim_{n\to\infty} m\bigl\{x \in C : f_n(x) > -M\bigr\} = 0.$$

Доказательство теоремы 1 основано на двух леммах.

Лемма 1. *Пусть функции* $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *определены на некотором интервале* $\omega \subset (0,1)$ *и принадлежат пространству* $L^2(\omega)$. *Тогда для любых чисел* $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *и* $\varepsilon > 0$ *можно определить функцию* $\psi(x) \in L^\infty(\omega)$ *и множество* e, *обладающие следующими свойствами:*

1) $\psi(x) = \psi_0(x)$, *если* $x \notin e$, $e \subset \omega$, $m(e) \leqslant \varepsilon_0 |\omega|$;
2) $\|\psi\|_{L^2(\omega)} \leqslant 2\varepsilon_0^{-1/2} \|\psi_0\|_{L^2(\omega)}$;
3) $|(\psi, \psi_i)_\omega| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *где* $(f,g)_\omega := \int_\omega f(x) g(x)\, dx$.

Доказательство. Пусть r – натуральное число. Разобьем интервал ω на 2^r равных интервалов $\omega_1, \ldots, \omega_{2^r}$ и положим для $g \in L^2(\omega)$

$$g^{(r)}(x) = |\omega_k|^{-1} \int_{\omega_k} g(t)\, dt, \quad \text{если} \quad x \in \omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots, 2^r.$$

Тогда

$$\lim_{r\to\infty} \|g^{(r)} - g\|_{L^2(\omega)} = 0, \qquad \|g^{(r)}\|_{L^2(\omega)} \leqslant \|g\|_{L^2(\omega)}, \quad r = 1, 2, \ldots. \quad (1)$$

Действительно, если $\omega = (0,1)$, то $g^{(r)}(x)$ совпадает с частной суммой $S_{2^r}(g,x)$ ряда Фурье–Хаара функции g (см. 3.(8), 3.(1)), откуда вытекает (1) для $\omega = (0,1)$. Случай произвольного ω сводится к уже рассмотренному с помощью преобразования подобия.

Из (1) вытекает, что

$$\lim_{r\to\infty}(\psi_i^{(r)},\psi_0^{(r)})_\omega = (\psi_i,\psi_0)_\omega, \qquad i=1,2,\ldots,m. \tag{2}$$

Внутри каждого интервала ω_k, $k=1,2,\ldots,2^r$, выберем интервал δ_k длины

$$|\delta_k| = \varepsilon_0|\omega_k|, \qquad k=1,2,\ldots,2^r, \tag{3}$$

и положим $e_r = \bigcup\limits_{i=1}^{2^r}\delta_k$ и

$$f_r(x) = \begin{cases} \varepsilon_0^{-1}\psi_0^{(r)}(x), & \text{если } x\in\delta_k,\ k=1,2,\ldots,2^r,\\ 0, & \text{если } x\notin e_r. \end{cases}$$

Докажем, что множество e_r и функция

$$\psi(x) = \psi_0(x) - f_r(x) \tag{4}$$

удовлетворяют условиям 1)–3), если r достаточно велико. Легко видеть, что при $i=1,2,\ldots,m$

$$(\psi_i^{(r)},\psi_0^{(r)})_\omega = (\psi_i^{(r)},f_r)_\omega, \qquad r=1,2,\ldots. \tag{5}$$

Кроме того, при $r=1,2,\ldots$

$$\begin{aligned}\|f_r\|^2_{L^2(\omega)} &= \sum_{k=1}^{2^r}|\delta_k|\left\{\varepsilon_0^{-1}|\omega_k|^{-1}\int_{\omega_k}\psi_0(x)\,dx\right\}^2\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{2^r}\varepsilon_0^{-1}\int_{\omega_k}\psi_0^2(x)\,dx = \varepsilon_0^{-1}\|\psi_0\|^2_{L^2(\omega)}.\end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно (см. также (1)),

$$\begin{aligned}&\bigl|(\psi_i^{(r)},f_r)_\omega - (\psi_i,f_r)_\omega\bigr|\\ &\qquad\leqslant \|\psi_i^{(r)}-\psi_i\|_{L^2(\omega)}\varepsilon_0^{-1/2}\|\psi_0\|_{L^2(\omega)} \to 0 \ \text{ при } \ r\to\infty.\end{aligned} \tag{7}$$

Из соотношений (7) и (5) мы получаем, что для $i=1,2,\ldots,m$

$$\bigl|(\psi_i,f_r)_\omega - (\psi_i^{(r)},\psi_0^{(r)})_\omega\bigr| \to 0 \ \text{ при } \ r\to\infty,$$

а значит (см. (2) и (4)), при достаточно больших r функция $\psi(x)$ удовлетворяет условию 3). Выполнение условий 1) и 2) вытекает из определения функции $\psi(x)$ (см. (3), (4)) и оценки (6). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *– П.О.Н.С., а* $f(x)$, $x \in (0,1)$, *– измеримая, конечная функция. Тогда для произвольных чисел* $0 < \delta < 1$ *и* $k = 1, 2, \ldots$ *найдутся множество* E *и числа* $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_m$ *такие, что*

1) $E \subset (0,1), \quad m(E) \leqslant \delta;$

2) $\displaystyle \left\| \sum_{n=k+1}^{m} a_n\varphi_n(x) - f(x) \right\|_{L^2(G)} \leqslant \delta, \quad G = (0,1) \setminus E;$

3) $\displaystyle \left\| \sum_{n=k+1}^{s} a_n\varphi_n(x) \right\|_{L^2(D)} \leqslant \delta + \|f\|_{L^2(D)}, \quad s = k+1, \ldots, m,$

где $D \subset G$ *– произвольное измеримое множество.*

Доказательство. Так как $|f(x)| < \infty$ для $x \in (0,1)$, то можно выбрать функцию $F \in L^\infty(0,1)$, для которой

$$m(P) < \frac{\delta}{2}, \qquad P := \bigl\{x \in (0,1) : f(x) \neq F(x)\bigr\}. \tag{8}$$

Взяв затем число N достаточно большим, разобьем интервал $(0,1)$ на N непересекающихся интервалов $\omega_1, \ldots, \omega_N$ так, чтобы

$$\|F\|_{L^2(\omega_i)} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{4}\right)^{3/2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{9}$$

Положим $n_1 = k$ и применим лемму 1 к функциям $F(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n_1}(x)$, рассматриваемым на интервале ω_1. По этой лемме, взяв $\varepsilon_0 = \delta/4$ и $0 < \varepsilon < \delta$, мы найдем функцию $F_1 \in L^\infty(\omega_1)$ и множество e_1, обладающие свойствами:

(I) $F_1(x) = F(x)$, если $x \in \omega_1 \setminus e_1$, $e_1 \subset \omega_1$, $m(e_1) \leqslant \dfrac{\delta}{4}|\omega_1|$;

(II) $\displaystyle \|F_1\|_{L^2(\omega_1)} \leqslant 2\left(\frac{\delta}{4}\right)^{-1/2} \|F\|_{L^2(\omega_1)};$

(III) $\displaystyle \left|\int_{\omega_1} F_1(x)\varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots, n_1.$

Отсюда и из (9) мы получим, что если ε $(0 < \varepsilon < \delta)$ достаточно мало, то функция

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{если } x \in \omega_1, \\ 0, & \text{если } x \in (0,1) \setminus \omega_1, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям:

а) $\|\Phi_1\|_{L^2(\omega_1)} \leqslant \delta/4$;

б) $|c_n(\Phi_1)| \leqslant \delta/(4Nk), n = 1, 2, \ldots, n_1$;

в) $\|S_n(\Phi_1)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \delta/(4N), n = 1, 2, \ldots, n_1$.

Мы используем обычные обозначения: для $f \in L^2(0,1)$

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx, \quad S_n(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j(f)\varphi_j(x), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Так как $\{\varphi_n(x)\}$ – П.О.Н.С., то согласно а)

в′) $\|S_n(\Phi_1)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \delta/4, n = 1, 2, \ldots$,

и если n_2 – достаточно большое число, то

г) $\|S_n(\Phi_1) - \Phi_1\|_{L^2(0,1)} \leqslant \delta/(4N)$ при $n \geqslant n_2$.

Аналогичным образом, применяя лемму 1 последовательно при $i = 2, 3, \ldots, N$ к системам функций $\{F(x),\ \varphi_n(x),\ 1 \leqslant n \leqslant n_i\}$, $x \in \omega_i$ (где число n_i определяется на предыдущем шаге), мы получим функции $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_N(x)$, $x \in (0,1)$, последовательность $k = n_1 < n_2 < \cdots < n_{N+1}$ и множества $e_1, e_2, \ldots, e_N$, обладающие свойствами:

А) $\Phi_i(x) = F(x)$, если $x \in \omega_i \setminus e_i$, и $\Phi_i(x) = 0$, если $x \in (0,1) \setminus \omega_i$,

$$e_i \subset \omega_i, \quad m(e_i) \leqslant \frac{\delta}{4}\,|\omega_i|, \qquad i = 1, 2, \ldots, N;$$

Б) $|c_n(\Phi_i)| \leqslant \delta/(4Nn_i) \leqslant \delta/(4Nk), n = 1, 2, \ldots, n_i, i = 1, 2, \ldots, N$;

В) $\|S_n(\Phi_i)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \delta/(4N), n = 1, 2, \ldots, n_i$, $\|S_n(\Phi_i)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \delta/4$, $n = 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, N$;

Г) $\|S_n(\Phi_i) - \Phi_i\|_{L^2(0,1)} \leqslant \delta/(4N), n \geqslant n_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, N$.

Положим (см. (8) и А))

$$m = m_{N+1}, \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x), \quad E = P \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} e_i\right) \tag{10}$$

и докажем, что множество E и числа $a_n = c_n(\Phi), n = k+1, k+2, \ldots, m$, удовлетворяют требованиям 1)–3) леммы 2. Соотношение 1) непосредственно вытекает из (8), А) и из определения множества E (см. (10)). Далее, согласно Б)

$$|c_n(\Phi)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |c_n(\Phi_i)| \leqslant \frac{\delta}{4k}, \qquad n = 1, 2, \ldots, k, \tag{11}$$

и в силу Г)

$$\left\|\Phi(x) - \sum_{i=1}^{m} c_n(\Phi)\varphi_n(x)\right\|_{L^2(0,1)} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta}{4N} = \frac{\delta}{4}. \tag{12}$$

Используя неравенства (11) и (12) и учитывая, что (см. (8), А)) $\Phi(x) = F(x) = f(x)$ при $x \in (0,1) \setminus E = G$, мы получим

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=k+1}^{m} a_n\varphi_n(x) - f(x)\right\|_{L^2(G)} \\ &\leqslant \left\|\sum_{n=1}^{k} a_n\varphi_n(x)\right\|_{L^2(G)} + \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n\varphi_n(x) - \Phi(x)\right\|_{L^2(G)} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{k} |a_n| + \frac{\delta}{4} < \delta.\end{aligned}$$

Нам осталось доказать справедливость оценок 3) для произвольного измеримого множества $D \subset G$. Фиксировав число s, $n < s \leqslant m$, найдем такой номер i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant N$, что

$$n_{i_0} < s \leqslant n_{i_0+1}. \tag{13}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|S_s(\Phi)\|_{L^2(D)} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{i_0-1} S_s(\Phi_i)\right\|_{L^2(D)} \\ + \|S_s(\Phi_{i_0})\|_{L^2(D)} + \left\|\sum_{i=i_0+1}^{N} S_s(\Phi_i)\right\|_{L^2(D)}\end{aligned} \tag{14}$$

(при $i_0 = 1$ первое, а при $i_0 = N$ третье слагаемое в правой части неравенства (14) отсутствует). Из соотношений Г), А), и (13) следует, что

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{i_0-1} S_s(\Phi_i)\right\|_{L^2(D)} &\leqslant \sum_{i=1}^{i_0-1} \|S_s(\Phi_i) - \Phi_i\|_{L^2(D)} + \left\|\sum_{i=1}^{i_0-1} \Phi_i\right\|_{L^2(D)} \\ &\leqslant \frac{\delta}{4} + \|f\|_{L^2(D)}.\end{aligned} \tag{15}$$

Третье слагаемое в (14) оценим с помощью В) (см. также (13)):

$$\left\|\sum_{i=i_0+1}^{N} S_s(\Phi_i)\right\|_{L^2(D)} \leqslant \sum_{i=i_0+1}^{N} \|S_s(\Phi_i)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{\delta}{4}. \tag{16}$$

Наконец, в силу второго неравенства В)

$$\|S_s(\Phi_{i_0})\|_{L^2(D)} \leqslant \frac{\delta}{4}. \tag{17}$$

В итоге (см. (14)–(17)) мы получаем

$$\|S_s(\Phi)\|_{L^2(D)} \leqslant \frac{3}{4}\delta + \|f\|_{L^2(D)}.$$

Кроме того (см. (11)),

$$\|S_k(\Phi)\|_{L^2(D)} \leqslant \|S_k(\Phi)\|_{L^2(0,1)} \leqslant \sum_{n=1}^{k} |a_n| \leqslant \frac{\delta}{4}.$$

Следовательно,

$$\left\|\sum_{n=k+1}^{s} a_n\varphi_n\right\|_{L^2(D)} = \|S_s(\Phi) - S_k(\Phi)\|_{L^2(D)} \leqslant \delta + \|f\|_{L^2(D)}.$$

Лемма 2 доказана.

Замечание. Из леммы 2 следует, что для любой П.О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $k = 1, 2, \ldots$ система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=k+1}^{\infty}$ полна в пространстве $L^0(0,1)$ с метрикой сходимости по мере (см. 1.(1)), т.е. для любых $f \in L^0(0,1)$ и $\varepsilon > 0$ найдется полином

$$P(x) = \sum_{n=k+1}^{m} a_n\varphi_n(x) \quad \text{с} \quad \rho(P, f) \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 1. Нам достаточно рассмотреть случай неотрицательных функций $f(x)$; для функций произвольного знака искомый ряд может быть получен затем в виде разности рядов, сходящихся по мере к $f^+(x)$ и $f^-(x)$, где $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = f^+(x) - f(x)$.

Фиксируем измеримую функцию $f(x)$, $0 \leqslant f(x) \leqslant +\infty$, $x \in (0,1)$, и обозначим

$$A = \{x \in (0,1) : f(x) < +\infty\}, \qquad B = \{x \in (0,1) : f(x) = +\infty\}.$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ с $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$, $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$ и с ее помощью определим коэффициенты a_n, $n = 1, 2, \ldots$, искомого ряда. Построение чисел a_n мы будем вести группами номеров n:

$m_{i-1} < n \leqslant m_i$ последовательно при $i = 1, 2, \ldots$. Пусть $m_0 = 0, m_1 = 1$, $a_1 = 0$. Предположим теперь, что для некоторого $i > 1$ числа $a_1, \ldots, a_{m_{i-1}}$ уже определены. Применяя лемму 2 для $\delta = \varepsilon_i$, $k = m_{i-1}$ и функции

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) - \sum\limits_{n=1}^{m_{i-1}} a_n\varphi_n(x), & \text{если } x \in A, \\ 1, & \text{если } x \in B, \end{cases} \tag{18}$$

мы найдем измеримое множество E_i и числа $a_{m_{i-1}+1}, \ldots, a_{m_i}$ такие, что

α) $E_i \subset (0,1), \qquad m(E_i) \leqslant \varepsilon_i$;

β) $\displaystyle\Bigg\| \sum_{n=m_{i-1}+1}^{m_i} a_n\varphi_n(x) - f_i(x) \Bigg\|_{L^2((0,1)\setminus E_i)} \leqslant \varepsilon_i$;

γ) $\displaystyle\Bigg\| \sum_{n=m_{i-1}+1}^{s} a_n\varphi_n(x) \Bigg\|_{L^2(D)} \leqslant \varepsilon_i + \|f\|_{L^2(D)}, \quad m_{i-1} < s \leqslant m_i$,

где $D \subset (0,1) \setminus E_i$ – произвольное измеримое множество.

Продолжая указанный процесс, мы определим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Докажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x) \tag{19}$$

сходится по мере к $f(x)$.

Пусть δ – произвольно малое положительное число. Выберем число $i_0 > 1$ так, чтобы

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_i \leqslant \frac{\delta}{4},$$

и положим $A_\delta = A \setminus \left(\bigcup\limits_{i=i_0}^{\infty} E_i \right)$. Тогда

$$m(A_\delta) > m(A) - \frac{\delta}{4}.$$

Для произвольного m, $m_i < m \leqslant m_{i+1}$, $i > i_0$, имеем

$$\Bigg\| \sum_{n=1}^{m} a_n\varphi_n - f \Bigg\|_{L^2(A_\delta)} \leqslant \Bigg\| \sum_{n=1}^{m_i} a_n\varphi_n - f \Bigg\|_{L^2(A_\delta)} + \Bigg\| \sum_{n=m_i+1}^{m} a_n\varphi_n \Bigg\|_{L^2(A_\delta)}. \tag{20}$$

Но согласно (18) и β)

$$\left|\sum_{n=1}^{m_i} a_n\varphi_n(x) - f(x)\right| = \left|\sum_{n=m_{i-1}+1}^{m_i} a_n\varphi_n(x) - f_i(x)\right|,$$

если $x \in A_\delta$, и

$$\|f_{i+1}\|_{L^2(A_\delta)} = \left\|f_i - \sum_{n=m_{i-1}+1}^{m_i} a_n\varphi_n\right\|_{L^2(A_\delta)} \leqslant \varepsilon_i.$$

Отсюда и из (20), используя также оценку γ), мы получим

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n\varphi_n - f\right\|_{L^2(A_\delta)} &\\ \leqslant \left\|\sum_{n=m_{i-1}+1}^{m_i} a_n\varphi_n - f_i\right\|_{L^2(A_\delta)} &+ \varepsilon_i + \|f_{i+1}\|_{L^2(A_\delta)} \\ \leqslant 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} < 3\varepsilon_i.&\end{aligned}$$

Следовательно, по неравенству Чебышёва, для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}m\left\{x \in A : \left|\sum_{n=1}^{m} a_n\varphi_n(x) - f(x)\right| > \varepsilon\right\}& \\ \leqslant m(A \setminus A_\delta) + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n\varphi_n - f\right\|^2_{L^2(A_\delta)} &\leqslant \frac{\delta}{4} + \left(\frac{3\varepsilon_i}{\varepsilon}\right)^2 < \delta,\end{aligned}$$

если m достаточно велико. Тем самым мы доказали, что ряд (19) сходится на множестве A по мере к $f(x)$.

Докажем теперь, что на множестве B ряд (19) сходится по мере к $+\infty$. Для этой цели фиксируем натуральное M и δ, $0 < \delta < 1$, и найдем такой номер N, что

$$m\left\{x \in B : \sum_{n=1}^{m} a_n\varphi_n(x) < M\right\} < \delta, \quad \text{если} \quad m > N. \tag{21}$$

Пусть i_1 и K – такие натуральные числа, что

$$\sum_{i=i_1+1}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\delta}{4}, \quad m\left\{x \in B : \left|\sum_{n=1}^{m_{i_1}} a_n\varphi_n(x)\right| > K\right\} < \frac{\delta}{4}, \quad \frac{4}{K^2} < \frac{\delta}{4}. \tag{22}$$

Тогда (см. (18) и β)) при $i > i_1$

$$\left\| \sum_{n=m_{i_1}+1}^{m_i} a_n\varphi_n(x) - (i - i_1) \right\|_{L^2(B)} \leqslant \sum_{i=i_1+1}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\delta}{4},$$

где $B_\delta = B \setminus \bigcup\limits_{i=i_1+1}^{\infty} E_i$, $m(B_\delta) \geqslant m(B) - \delta/4$ (см. α)). Следовательно,

$$m\left\{x \in B_\delta : \left| \sum_{n=m_{i_1}+1}^{m_i} a_n\varphi_n(x) - (i - i_1) \right| > 1 \right\} < \left(\frac{\delta}{4}\right)^2 < \frac{\delta}{4}, \quad i > i_1.$$

Отсюда и из (22) мы получим, что при $i > i_1$

$$m\left\{x \in B_\delta : \sum_{n=m_{i_1}+1}^{m_i} a_n\varphi_n(x) < i - i_1 - K - 1 \right\} < \frac{\delta}{2}. \tag{23}$$

Кроме того, если $m_i < m \leqslant m_{i+1}$, $i > i_1$, то согласно γ)

$$\left\| \sum_{n=m_i}^{m} a_n\varphi_n \right\|_{L^2(B_\delta)} \leqslant \varepsilon_{i+1} + \|f_{i+1}\|_{L^2(B_\delta)} \leqslant 2,$$

а значит (см. также (22)),

$$\begin{aligned} m(Q) := m(Q_m) := m\left\{x \in B_\delta : \left| \sum_{n=m_i+1}^{m} a_n\varphi_n(x) \right| > K \right\} \\ \leqslant \frac{4}{K^2} < \frac{\delta}{4}; \quad m_i < m \leqslant m_{i+1}, \quad i > i_1. \end{aligned} \tag{24}$$

Положим $i_2 = i_1 + 2K + 1 + M$. Тогда, используя неравенства (22)–(24), мы получим, что для $m > N = m_{i_2}$ ($m_i < m \leqslant m_{i+1}, i \geqslant i_2$)

$$\begin{aligned} & m\left\{x \in B : \sum_{n=1}^{m} a_n\varphi_n(x) < M \right\} \\ & \leqslant m(B \setminus B_\delta) + m(Q) + m\left\{x \in B_\delta \setminus Q : \sum_{n=1}^{m_i} a_n\varphi_n(x) < i_2 - i_1 - 2K - 1 \right\} \\ & \leqslant \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + m\left\{x \in B_\delta \setminus Q : \sum_{n=1}^{m_i} a_n\varphi_n(x) < i - i_1 - K - 1 \right\} < \delta, \end{aligned}$$

т.е. имеет место (21). Сходимость по мере ряда (19) к $f(x)$, а вместе с тем и теорема 1 полностью доказаны.

Для формулировки следствия теоремы 1 введем

Определение 1. Ортогональный ряд вида (19) называется *нуль-рядом в смысле сходимости по мере* (*почти всюду*), если он сходится по мере (соответственно почти всюду) к функции $f(x) \equiv 0$ и $a_{n_0} \neq 0$ для некоторого номера n_0.

Следствие 1. *По любой П.О.Н.С.* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *существует нуль-ряд в смысле сходимости по мере.*

В самом деле, построенный при доказательстве теоремы 1 ряд (19), сходящийся по мере к данной функции $f(x)$, имел первый коэффициент $a_1 = 0$. Поэтому, взяв $f(x) = \varphi_1(x)$, мы найдем ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n' \varphi_n(x),$$

сходящийся к $\varphi_1(x)$ по мере. Тогда

$$\varphi_1(x) - \sum_{n=2}^{\infty} a_n' \varphi_n(x)$$

– нуль-ряд в смысле сходимости по мере. Следствие 1 доказано.

§ 2. Представление функций рядами, сходящимися почти всюду

Теорема 2. *Существует П.О.Н.С.* $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *такая, что всякий ряд вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty, \tag{25}$$

расходится на множестве положительной меры.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Пусть П.О.Н.С.* Ψ *та же, что в теореме* 2, *и пусть* $\mathscr{F}$ *– множество функций, представимых сходящимся п.в. рядом по этой системе.*

Тогда $\mathscr{F} \subset L^2(0,1)$.

Следствие 2 показывает, что столь общего, как теорема 1, результата для случая сходимости п.в. получить нельзя. Забегая вперед, отметим, что можно указать (см. теорему 4) широкие достаточные условия на П.О.Н.С. Φ, гарантирующие возможность представления каждой конечной п.в. измеримой функции $f(x)$ сходящимся к ней п.в. рядом по системе Φ.

Отметим также, что по системе Ψ из теоремы 2 не существует нуль-рядов в смысле сходимости п.в., так как нуль-ряды не могут быть рядами Фурье функций из $L^2(0,1)$.

Доказательство теоремы 2. Ниже мы используем свойства ортонормированных наборов

$$\Psi(N) = \{\psi_k^N(x)\}_{k=1}^N \subset \mathscr{D}_{4n}, \qquad N = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

построенных в лемме 1 из теоремы 9.2 (см. 9.(12)). Из определения функций $\psi_k^N(x)$ легко выводится (аналогично выводу оценки 9.(13)), что для $p = 3, 4, \ldots$ и любых чисел c_k, $k = 1, 2, \ldots, 2^p$, имеет место неравенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{j_p(x)} c_k \psi_k^{2^p}(x) \right| dx \geqslant \frac{cp}{2^{p/2}} \left| \sum_{k=1}^{a(p)} c_k \right|, \tag{27}$$

где $a(p) = 2^p - [2^{p/2}]$ и

$$j_p(x) = \min\{i, a(p)\}, \quad \text{если} \quad x \in \left(\frac{i-1}{2^{p+1}}, \frac{i}{2^{p+1}}\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^{p+1}$$

($c > 0$ – абсолютная постоянная).

Далее, при $N = 3, 4, \ldots$ определим ортонормированную матрицу $A_N = \{a_{\nu,r}^N\}_{\nu,r=1}^N$, положив

$$a_{\nu,r}^N = \begin{cases} 1 - (N-1)^{-1}, & \text{если } \nu = r < N, \\ 0, & \text{если } \nu = r = N, \\ -(N-1)^{-1}, & \text{если } \nu \neq r,\ \nu, r < N, \\ (N-1)^{-1/2}, & \text{если } \nu = N \text{ или } r = N,\ \nu \neq r. \end{cases} \tag{28}$$

Теперь мы можем перейти к построению искомой системы Ψ. Функции $\psi_n(x)$ удобнее определять на интервале $(0,2)$ (затем с помощью преобразования $f(x) \to \sqrt{2}\, f(2x)$ функции $\psi_n(x)$ можно, конечно, перенести на $(0,1)$). Построим сначала вспомогательную О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}$, $x \in (0,2)$: пусть $\varphi_n(x) = 2^{-1/2} r_n(x)$, $x \in (0,2)$, $n = 1, 2, \ldots, 8$ и

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} r_{s_p}(x) \psi_{n-2^p}^{2^p}(x), & \text{если } x \in (0,1), \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} r_n(x), & \text{если } x \in [1,2), \end{cases} \tag{29}$$

$$2^p < n < 2^{p+1}, \ p = 3, 4, \ldots,$$

где $r_n(x)$ – функции Радемахера, продолженные с периодом 1 с интервала $(0,1)$ на всю числовую ось, а последовательность $s_p, p = 3,4,\ldots$, в (29) выбрана растущей так быстро, чтобы функции $\{\varphi_n(x)\}$, $n \neq 2^p$, $p = 4,5,\ldots$, образовывали О.Н.С. (это возможно, так как $\psi_k^{2^p}(x) \in \mathscr{D}_{2^{p+2}}$ (см. (26)). При $n = 2^p$, $p = 4,5,\ldots$, функции $\varphi_n(x)$ не определяем совсем.

Фиксируем затем такой набор функций $\{u_p(x)\}_{p=3}^{\infty}$, $x \in (0,2)$, что система $\{\varphi_n(x)\} \cup \{u_p(x)\}$ есть полная в $L^2(0,2)$ О.Н.С., и положим

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n(x), \qquad n = 1,2,\ldots,8, \quad x \in (0,2),$$

и при $n = 2^p + \nu$, $\nu = 1,2,\ldots,2^p$, $p = 3,4,\ldots$,

$$\psi_n(x) = \sum_{r=1}^{2^p-1} a_{\nu,r}^{2^p} \varphi_{2^p+r}(x) + a_{\nu,2^p}^{2^p} u_p(x). \tag{30}$$

Построенная система $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,2)$, – П.О.Н.С., так как матрицы A_{2^p} – ортонормированные и все функции $\varphi_n(x)$ и $u_p(x)$ можно выразить через функции $\psi_n(x)$. Покажем, что Ψ удовлетворяет требованиям теоремы 2: рассмотрим произвольный ряд вида (25) и проверим, что он расходится на множестве положительной меры.

Пусть при $p = 3,4,\ldots$

$$\beta_p = \left\{ \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} a_n^2 \right\}^{1/2}, \qquad d_p = 2^{-p/2} \left| \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} a_n \right|.$$

По неравенству Коши, $\beta_p \geqslant d_p$, $p = 3,4,\ldots$. Фиксируем абсолютную постоянную

$$c_0 = \frac{1}{20} c_1^{1/2} \leqslant \frac{1}{20},$$

где c_1 – постоянная из теоремы 2.7 (т.е. $c_1 = c_M$, $M = 1$), и разобьем все натуральные числа $p \geqslant 3$ на две группы. В первую группу S_1 отнесем те числа p, для которых

$$c_0 \beta_p \leqslant d_p. \tag{31}$$

Остальные числа отнесем к группе S_2.

Возможны два случая:

1) $\sum\limits_{p \in S_1} \beta_p^2 = \infty$. Тогда мы покажем, что ряд (25) расходится в каждой точке некоторого множества $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$.
2) $\sum\limits_{p \in S_1} \beta_p^2 < \infty$. Тогда (см. (25)) $\sum\limits_{p \in S_2} \beta_p^2 = \infty$, и мы покажем, что ряд (25) не сходится по мере на отрезке $[1,2]$.

Рассмотрим случай 1). Пусть $p \in S_1$. Из определения матриц A_{2^p} (см. (28)) и равенства (30) сразу следует, что при $2^p < n < 2^{p+1}$, $p = 3, 4, \ldots$,

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) + \Delta_n(x),$$

где

$$\int_0^2 |\Delta_n(x)|\,dx \leqslant 2\left\{\int_0^2 \Delta_n^2(x)\,dx\right\}^{1/2} \leqslant \frac{8}{2^{p/2}}\,.$$

Поэтому для любой целочисленной измеримой функции $N(x)$, $2^p + 1 \leqslant N(x) \leqslant 2^{p+1}$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|\sum_{n=2^p+1}^{N(x)} a_n\psi_n(x)\right| dx \\
&\quad= \int_0^1 \left|\sum_{n=2^p+1}^{N(x)} a_n\varphi_n(x) + \sum_{n=2^p+1}^{N(x)} a_n\Delta_n(x)\right| dx \\
&\quad\geqslant \int_0^1 \left|\sum_{n=2^p+1}^{N(x)} a_n\varphi_n(x)\right| dx - \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} |a_n| \int_0^1 |\Delta_n(x)|\,dx \\
&\quad\geqslant \int_0^1 \left|\sum_{n=2^p+1}^{N(x)} a_n\varphi_n(x)\right| dx - \frac{8}{2^{p/2}} \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} |a_n| \\
&\quad\geqslant \int_0^1 \left|\sum_{n=2^p+1}^{N(x)} a_n\varphi_n(x)\right| dx - 8\beta_p.
\end{aligned} \tag{32}$$

Пусть $c_k = a_{2^p+k}$, $k = 1, 2, \ldots, 2^p$. Тогда ясно, что

$$\sum_{k=1}^{2^p} c_k^2 = \beta_p^2, \quad 2^{-p/2}\left|\sum_{k=1}^{2^p} c_k\right| = d_p, \qquad p = 3, 4, \ldots\,. \tag{33}$$

При этом, по неравенству Коши,

$$\left|\sum_{k=a(p)+1}^{2^p} c_k\right| \leqslant 2^{p/4}\left\{\sum_{k=1}^{2^p} c_k^2\right\}^{1/2} = \beta_p \cdot 2^{p/4},$$

а значит, для достаточно больших $p \in S_1$ (см. (31))

$$2^{-p/2}\left|\sum_{k=1}^{a(p)} c_k\right| \geqslant 2^{-p/2}\left|\sum_{k=1}^{2^p} c_k\right| - \beta_p \cdot 2^{-p/4} = d_p - \beta_p \cdot 2^{-p/4} \geqslant \frac{c_0}{2}\,\beta_p.$$

Следовательно (см. (32), (29), (27)), для достаточно больших p

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=2^p+1}^{2^p+j_p(x)} a_n \psi_n(x) \right| dx \geqslant \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{j_p(x)} c_k \psi_k^{2^p}(x) \right| dx - 8\beta_p$$
$$\geqslant c\, p\, 2^{-p/2} \left| \sum_{k=1}^{a_p} c_k \right| - 8\beta_p$$
$$\geqslant c \frac{c_0}{2}\, p\, \beta_p - 8\beta_p \geqslant c' p\, \beta_p > 0. \tag{34}$$

С другой стороны, в силу леммы 1 из теоремы 9.1 (лемма Меньшова–Радемахера)

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=2^p+1}^{2^p+j_p(x)} a_n \psi_n(x) \right|^2 dx \leqslant K(\ln 2^p)\beta_p < K p \beta_p. \tag{35}$$

Из соотношений (34) и (35), пользуясь леммой 1 из теоремы 2.7, мы выводим, что

$$m\left\{ x \in (0,1) : \left| \sum_{n=2^p+1}^{2^p+j_p(x)} a_n \psi_n(x) \right| > \frac{c'}{4} p \beta_p \right\} \geqslant c'' > 0 \tag{36}$$

при любом достаточно большом $p \in S_1$. Так как мы предположили, что $\sum\limits_{p \in S_1} \beta_p^2 = \infty$, то $\overline{\lim\limits_{p \in S_1}}\, p\beta_p = \infty$ и из неравенства (36) вытекает расходимость ряда (25) на некотором множестве $E \subset (0,1)$ положительной меры $(m(E) \geqslant c'')$ в случае 1).

Рассмотрим теперь случай 2). Пусть $p \in S_2$, тогда в силу (30) и ортонормированности матриц A_{2^p} мы имеем

$$\sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} a_n \psi_n(x) = \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}-1} \gamma_n \varphi_n(x) + \omega_p u_p(x),$$

где

$$\beta_p^2 = \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} a_n^2 = \omega_p^2 + \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}-1} \gamma_n^2.$$

При этом из определения матрицы A_{2^p} сразу следует, что

$$|\omega_p| \leqslant (2^p-1)^{-1/2}\left|\sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} a_n\right| + (2^p-1)^{-1/2}\max_{2^p<n\leqslant 2^{p+1}}|a_n|$$

$$\leqslant 2d_p + 2^{1-p/2}\beta_p,$$

$$\sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}-1} \gamma_n^2 = \beta_p^2 - \omega_p^2 \geqslant \beta_p^2 - (2d_p + 2^{1-p/2}\beta_p)^2.$$

Из этих оценок (учитывая, что по определению множества S_2 при $p \in S_2$ $d_p < c_0\beta_p \leqslant \frac{1}{20}\beta_p$) мы выводим, что для достаточно больших $p \in S_2$

$$\sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}-1} \gamma_n^2 \geqslant \frac{1}{2}\beta_p^2, \qquad \left(\sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}-1} \gamma_n^2\right)\frac{c_1}{20} \geqslant \omega_p^2. \tag{37}$$

Возьмем такую последовательность натуральных чисел $m_1 < m_2 < \cdots$, что оценки (37) справедливы для любого $p \geqslant m_1$, $p \in S_2$ и

$$\sum_{p=m_s}^{m_{s+1}-1} \beta_p^2 = \sum_{n=2^{m_s}+1}^{2^{m_s+1}} a_n^2 \geqslant s+1, \qquad s = 1, 2, \ldots. \tag{38}$$

Рассмотрим суммы

$$\sum_{n=2^{m_s}+1}^{2^{m_s+1}} a_n\psi_n(x) = I_s'(x) + I_s''(x), \tag{39}$$

где

$$I_s'(x) = \sum_{p\in S_1\cap[m_s,m_{s+1})}\ \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} a_n\psi_n(x),$$

$$I_s''(x) = \sum_{p\in S_2\cap[m_s,m_{s+1})}\ \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} a_n\psi_n(x).$$

Так как, по предположению, $\sum\limits_{p\in S_1}\beta_p^2 < \infty$, то

$$\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^2 [I_s'(x)]^2\,dx \leqslant \sum_{p\in S_1}\beta_p^2 < \infty. \tag{40}$$

Далее,

$$I_s''(x) = \sum_{p\in S_2\cap[m_s,m_{s+1})} \left[\omega_p u_p(x) + \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}-1} \gamma_n \varphi_n(x)\right].$$

При этом в силу (37) и (38)

$$J_s := \sum_{p\in S_2\cap[m_s,m_{s+1})} \sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}-1} \gamma_n^2 \geqslant \frac{20}{c_1} \sum_{p\in S_2\cap[m_s,m_{s+1})} \omega_p^2$$

и для достаточно больших s (см. также (40))

$$J_s \geqslant \frac{1}{2} \sum_{p\in S_2\cap[m_s,m_{s+1})} \beta_p^2 \geqslant \frac{s}{2}.$$

Так как $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n(x)$ при $x \in (1,2)$ и $n \neq 2^p$, $p = 4,5,\ldots$, то имеет место равенство

$$I_s''(x) = P_s(x) + Q_s(x), \qquad Q_s(x) = \sum_{p\in S_2\cap[m_s,m_{s+1})} \omega_p u_p(x),$$

где $P_s(x)$ – полином по системе Радемахера и ($s > s_0$)

$$\int_1^2 P_s^2(x)\,dx = \frac{1}{2} J_s \geqslant \frac{s}{4}, \qquad \sum_{p\in S_2\cap[m_s,m_{s+1})} \omega_p^2 \leqslant J_s \frac{c_1}{20}.$$

Пользуясь неравенством Чебышёва и попарной ортогональностью функций $u_p(x)$, мы находим

$$m\left\{x \in (1,2) : |Q_s(x)| > \frac{J_s^{1/2}}{3}\right\} \leqslant \frac{9}{J_s}\|Q_s\|_2^2 \leqslant \frac{9}{20} c_1 < \frac{c_1}{2}. \tag{41}$$

С другой стороны, по теореме 2.7

$$m\left\{x \in (1,2) : |P_s(x)| > \frac{1}{2\sqrt{2}} J_s^{1/2}\right\} \geqslant c_1. \tag{42}$$

Из оценок (41) и (42) следует, что при $s > s_0$

$$m\left\{x \in (1,2) : |I_s''(x)| > \frac{1}{100} J_s^{1/2} \geqslant \frac{1}{200} s^{1/2}\right\} \geqslant \frac{c_1}{2}.$$

Отсюда, учитывая (40) (см. также (39)), мы сразу получаем, что в случае 2) ряд (25) не сходится по мере на $(1,2)$. Теорема 2 полностью доказана.

Определение 2. О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, называется *системой строгой сходимости*, если выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

необходимо и достаточно для сходимости п.в. ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

Пример системы строгой сходимости – система Радемахера.

Теорема 2′. *Существует полная в $L^2(0,1)$ О.Н.С. строгой сходимости.*

Доказательство этого результата во многом аналогично доказательству теоремы 2, но технически сложнее, и поэтому мы не будем его приводить. Мы ограничимся доказательством следующего утверждения, играющего при доказательстве теоремы 2′ вспомогательную роль, но имеющего и самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Существует О.Н.С. сходимости $\Phi_0 = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$* (см. определение 1.2), *такая, что для любого измеримого множества $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$, найдется последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$, для которой*

$$S^*_{\Phi_0}(\{a_n\}, x) := \sup_{1 \leqslant N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) \right| \notin L^2(E).$$

Функции из системы Φ_0 заменяют при построении полной системы строгой сходимости функции $\psi_k^N(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ (см. (26), (27)), которые использовались в доказательстве теоремы 2. Напомним также, что формулировка теоремы 3 приводилась в конце гл. 8 для подтверждения окончательности доказанной там теоремы 8.9.

Доказательство теоремы 3. При построении системы Φ_0 мы вновь используем ортонормированные наборы $\Psi(N) = \{\psi_k^N(x)\}_{k=1}^{N}$, определенные в гл. 9 (см. лемму 1 из теоремы 9.2). Напомним некоторые свойства функций (см. 9.(11), 9.(13)):

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad \psi_k^N \in \mathscr{D}_{4N}, \quad \int_0^1 \psi_k^N(x)\,dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N; \\ &\text{б)}\quad m\left\{x \in (0,1) : \sup_{1 \leqslant j < N} \left| \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\sqrt{N}} \psi_k^N(x) \right| > c_0 \ln N \right\} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{N}} \end{aligned} \tag{43}$$

($c_0 > 0$ – абсолютная постоянная).

Для каждого N вида $N = 2^{2q}$, $q \geqslant 4$, определим на оси $(-\infty, \infty)$ еще один набор функций $G(N) = \{g_k^N(x)\}_{k=1}^N$, положив сначала при $x \in (0,1]$ и $k = 1, 2, \ldots, N$

$$g_k^N(x) = \begin{cases} (\log_2 N)^{-1} 2^{s/2} \psi_k^N(2^s(x - 2^{-s})), \\ \qquad \text{если } 2^{-s} < x \leqslant 2^{-(s-1)},\ s = 1, 2, \ldots, \log_2^2 N, \\ 0, \quad \text{если } 0 < x \leqslant 2^{-\log_2^2 N}, \end{cases} \tag{44}$$

а затем положив $g_k^N(x + r) = g_k^N(x)$, если r – целое и $x \in (0,1]$.

Используя ортонормированность набора $\Psi(N)$ и соотношения (43), п. а), мы получим:

$$\text{а)}\ \ g_k^N \in \mathscr{D}_{4N 2^{\log_2^2 N}}, \quad \int_0^1 g_k^N(x)\,dx = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N;$$

$$\text{б)}\ \int_0^1 g_k^N(x) g_{k'}^N(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если } k = k', \\ 0, & \text{если } k \neq k', \end{cases} \qquad 1 \leqslant k, k' \leqslant N; \tag{45}$$

$$\text{в)}\ \int_{2^{-s}}^{2^{-(s-1)}} \left\{ \sum_{k=1}^N a_k g_k^N(x) \right\}^2 dx = (\log_2 N)^{-2} \sum_{k=1}^N a_k^2, \quad s = 1, 2, \ldots, \log_2^2 N.$$

Кроме того, если

$$g_0^N(x) := \sup_{1 \leqslant j < N} \left| \sum_{k=1}^j N^{-1/2} g_k^N(x) \right|,$$

то из (43), п. б) вытекает, что для любого множества $A \subset (2^{-s}, 2^{-(s-1)})$ с $m(A) \geqslant \frac{3}{5} 2^{-s}$ интеграл

$$\int_A [g_0^N(x)]^2 dx \geqslant c > 0, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant s \leqslant \log_2^2 N. \tag{46}$$

Докажем еще одно свойство набора $G(N)$.

Лемма 1. *Для любых чисел $y > 0$, $N = 2^q$, $q = 4, 5, \ldots$, и любой последовательности $a = \{a_k\}_{k=1}^N$ имеет место оценка*

$$m\left\{ x \in (0,1) : g(a, x) := \sup_{1 \leqslant j \leqslant N} \left| \sum_{k=1}^j a_k g_k^N(x) \right| > y \right\} \leqslant \frac{C}{y^2} \sum_{k=1}^N a_k^2. \tag{47}$$

Доказательство. Считая последовательность $a = \{a_k\}$ фиксированной, положим

$$F(x) = (\log_2 N)^{-1} \sup_{1 \leqslant j \leqslant N} \left| \sum_{k=1}^{j} a_k \psi_k^N(x) \right|,$$

$$\lambda(t) = m\{x \in (0,1) : F^2(x) > t\}, \qquad t > 0.$$

Из определения функций $g_k^N(x)$ (см. (44)) следует, что

$$m\{x \in (2^{-s},\, 2^{-(s-1)}) : g(a,x) > y\}$$
$$= 2^{-s} m\{x \in (0,1) : F(x) > 2^{-s/2} y\} = 2^{-s}\lambda(2^{-s}y^2)$$

при $s = 1, 2, \ldots, \log_2^2 N$. Суммируя по s и учитывая монотонность функции $\lambda(t)$, найдем

$$m\{x \in (2^{-\log_2^2 N}, 1) : g(a,x) > y\}$$
$$= \sum_{s=1}^{\log_2^2 N} 2^{-s}\lambda(2^{-s}y^2) \leqslant \frac{2}{y^2} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s-1} y^2 \lambda(2^{-s}y^2)$$
$$\leqslant \frac{2}{y^2} \sum_{s=1}^{\infty} \int_{2^{-s-1}y^2}^{2^{-s}y^2} \lambda(t)\,dt \leqslant \frac{2}{y^2} \int_0^{\infty} \lambda(t)\,dt = \frac{2}{y^2} \int_0^1 F^2(x)\,dx. \tag{48}$$

Оценивая правую часть в (48) с помощью леммы 1 из теоремы 9.1, согласно которой

$$\int_0^1 F^2(x)\,dx \leqslant K \sum_{k=1}^{N} a_k^2,$$

и учитывая, что $g_k^N(x) = 0$ при $x \in (0, 2^{-\log_2^2 N})$, мы получим утверждение леммы.

Построим теперь искомую систему Φ_0. Возьмем такую последовательность натуральных чисел $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $s_1 = 0$, числа $N_j = s_{j+1} - s_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ представимы в виде $N_j = 2^q$ $(q \geqslant 4)$ и при каждом $j = 1, 2, \ldots$

$$4N_j^2 2^{\log_2^2 N_j} < N_{j+1}. \tag{49}$$

Затем для $n \in (s_j, s_{j+1}]$, $j = 1, 2, \ldots$, положим

$$\varphi_n(x) = g_{n-s_j}^{N_j}(N_j x), \qquad x \in (0,1). \tag{50}$$

В силу (45), п. а) и (49) при $s_j < n \leqslant s_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$, функции $\varphi_n(x)$ постоянны на каждом интервале вида

$$\left(\frac{i-1}{2^q}, \frac{i}{2^q}\right), \qquad 1 \leqslant i \leqslant 2^q, \quad 2^q = 4N_j^2 2^{\log_2^2 N_j}.$$

В то же время период функций $\varphi_n(x)$ с $s_{j+1} < n \leqslant s_{j+2}$ равен $N_{j+1}^{-1} = 2^{-q'}$, $q' > q$ (см. (50)). Поэтому, учитывая соотношения (45), пп. а), б), мы получаем, что $\Phi_0 = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система.

Докажем, что Φ_0 – система сходимости. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{51}$$

В силу сказанного выше функции

$$f_j(x) = \sum_{n=s_j+1}^{s_{j+1}} a_n \varphi_n(x), \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

есть "непересекающиеся" полиномы по системе Хаара

$$\left(\text{т.е.}\ \ f_j(x) = \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} a_k \chi_k(x), \quad m_1 < m_2 < \cdots\right),$$

ряд из которых сходится в $L^2(0,1)$. Отсюда, пользуясь теоремой 3.4, мы получаем, что последовательность

$$S_{s_j}(x) = \sum_{n=1}^{s_j} a_n \varphi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{j-1} f_\nu(x), \qquad j = 2, 3, \ldots,$$

сходится для п.в. $x \in (0,1)$. Поэтому нам достаточно показать, что для любого $y > 0$ конечна сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} m\left\{x \in (0,1) : \sup_{s_j < N \leqslant s_{j+1}} \left|\sum_{n=s_j+1}^{N} a_n \varphi_n(x)\right| > y\right\} < \infty. \tag{52}$$

Но в силу (50) и леммы 1

$$m\left\{x \in (0,1) : \sup_{s_j < N \leqslant s_{j+1}} \left|\sum_{n=s_j+1}^{N} a_n \varphi_n(x)\right| > y\right\} \leqslant \frac{C}{y^2} \sum_{n=s_j+1}^{s_{j+1}} a_n^2,$$

откуда (см. (51)) следует соотношение (52).

Для завершения доказательства теоремы 3 требуется для всякого множества E (которое можно считать замкнутым) с $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$ определить ряд вида (51) такой, что

$$\int_E \sup_{1 \leqslant N < \infty} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x) \right|^2 dx = \infty. \tag{53}$$

Нам достаточно проверить, что

$$\varlimsup_{j \to \infty} \int_E \sup_{s_j < N \leqslant s_{j+1}} \left| \sum_{n=1}^{N} N_j^{-1/2} \varphi_n(x) \right|^2 dx = \infty; \tag{54}$$

нужный ряд можно получить затем в виде

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \sum_{n=s_{j_\nu}+1}^{s_{j_\nu+1}} N_{j_\nu}^{-1/2} \varphi_n(x),$$

где $\{j_\nu\}$, $1 < j_1 < j_2 < \cdots$, – некоторая последовательность целых чисел.

Для этой цели фиксируем число ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{100}$, и найдем такой конечный набор непересекающихся отрезков $\{I_l\}$ с двоично-рациональными концами, что

$$E \subset \bigcup_l I_l =: I, \qquad m(E) > (1 - \varepsilon) m(I). \tag{55}$$

Для $j = 1, 2, \ldots$ и $\nu = 1, 2, \ldots$ определим множество

$$G_{j,\nu} = \bigcup_{i=1}^{N_j} \omega_i(j,\nu); \qquad \omega_i(j,\nu) = \left(\frac{i-1}{N_j} + \frac{1}{2^\nu N_j}, \frac{i-1}{N_j} + \frac{1}{2^{\nu-1} N_j} \right].$$

Ясно, что $m\big(\omega_i(j,\nu)\big) = 2^{-\nu} N_j^{-1}$, $m(G_{j,\nu}) = 2^{-\nu}$, $j, \nu = 1, 2, \ldots$.

Легко видеть также, что для $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{j \to \infty} N_j^{-1} \cdot \operatorname{card}\{i : \omega_i(j,\nu) \subset I\} = m(G_{j,\nu}) \cdot m(I) = 2^{-\nu} m(I). \tag{56}$$

Из (56) вытекает, что для достаточно больших j и $\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{10\varepsilon}\right]$

$$N_j^{-1} \cdot \operatorname{card}\left\{ i : m\big(\omega_i(j,\nu) \cap E\big) > \frac{3}{5} m\big(\omega_i(j,\nu)\big) \right\} \geqslant \frac{1}{2} 2^{-\nu} m(I); \tag{57}$$

В силу (45), п. а) и (49) при $s_j < n \leqslant s_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$, функции $\varphi_n(x)$ постоянны на каждом интервале вида

$$\left(\frac{i-1}{2^q}, \frac{i}{2^q}\right), \qquad 1 \leqslant i \leqslant 2^q, \quad 2^q = 4N_j^2 2^{\log_2^2 N_j}.$$

В то же время период функций $\varphi_n(x)$ с $s_{j+1} < n \leqslant s_{j+2}$ равен $N_{j+1}^{-1} = 2^{-q'}$, $q' > q$ (см. (50)). Поэтому, учитывая соотношения (45), пп. а), б), мы получаем, что $\Phi_0 = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система.

Докажем, что Φ_0 – система сходимости. Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty. \tag{51}$$

В силу сказанного выше функции

$$f_j(x) = \sum_{n=s_j+1}^{s_{j+1}} a_n \varphi_n(x), \qquad j = 1, 2, \dots,$$

есть "непересекающиеся" полиномы по системе Хаара

$$\left(\text{т.е. } f_j(x) = \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} a_k \chi_k(x), \quad m_1 < m_2 < \cdots\right),$$

ряд из которых сходится в $L^2(0,1)$. Отсюда, пользуясь теоремой 3.4, мы получаем, что последовательность

$$S_{s_j}(x) = \sum_{n=1}^{s_j} a_n \varphi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{j-1} f_\nu(x), \qquad j = 2, 3, \dots,$$

сходится для п.в. $x \in (0,1)$. Поэтому нам достаточно показать, что для любого $y > 0$ конечна сумма

$$\sum_{j=1}^{\infty} m\left\{x \in (0,1) : \sup_{s_j < N \leqslant s_{j+1}} \left| \sum_{n=s_j+1}^{N} a_n \varphi_n(x) \right| > y \right\} < \infty. \tag{52}$$

Но в силу (50) и леммы 1

$$m\left\{x \in (0,1) : \sup_{s_j < N \leqslant s_{j+1}} \left| \sum_{n=s_j+1}^{N} a_n \varphi_n(x) \right| > y \right\} \leqslant \frac{C}{y^2} \sum_{n=s_j+1}^{s_{j+1}} a_n^2,$$

откуда (см. (51)) следует соотношение (52).

Для завершения доказательства теоремы 3 требуется для всякого множества E (которое можно считать замкнутым) с $E \subset (0,1)$, $m(E) > 0$ определить ряд вида (51) такой, что

$$\int_E \sup_{1\leqslant N<\infty}\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)\right|^2 dx = \infty. \tag{53}$$

Нам достаточно проверить, что

$$\varlimsup_{j\to\infty}\int_E \sup_{s_j<N\leqslant s_{j+1}}\left|\sum_{n=1}^{N} N_j^{-1/2}\varphi_n(x)\right|^2 dx = \infty; \tag{54}$$

нужный ряд можно получить затем в виде

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\sum_{n=s_{j_\nu}+1}^{s_{j_\nu+1}} N_{j_\nu}^{-1/2}\varphi_n(x),$$

где $\{j_\nu\}$, $1<j_1<j_2<\cdots$, – некоторая последовательность целых чисел.

Для этой цели фиксируем число ε, $0<\varepsilon<\frac{1}{100}$, и найдем такой конечный набор непересекающихся отрезков $\{I_l\}$ с двоично-рациональными концами, что

$$E\subset\bigcup_l I_l =: I, \qquad m(E) > (1-\varepsilon)m(I). \tag{55}$$

Для $j=1,2,\dots$ и $\nu=1,2,\dots$ определим множество

$$G_{j,\nu}=\bigcup_{i=1}^{N_j}\omega_i(j,\nu); \qquad \omega_i(j,\nu)=\left(\frac{i-1}{N_j}+\frac{1}{2^\nu N_j},\ \frac{i-1}{N_j}+\frac{1}{2^{\nu-1}N_j}\right].$$

Ясно, что $m\big(\omega_i(j,\nu)\big)=2^{-\nu}N_j^{-1}$, $m(G_{j,\nu})=2^{-\nu}$, $j,\nu=1,2,\dots$.

Легко видеть также, что для $\nu=1,2,\dots$

$$\lim_{j\to\infty} N_j^{-1}\cdot\operatorname{card}\{i:\omega_i(j,\nu)\subset I\}=m(G_{j,\nu})\cdot m(I)=2^{-\nu}m(I). \tag{56}$$

Из (56) вытекает, что для достаточно больших j и $\nu=1,2,\dots,\left[\frac12\log_2\frac{1}{10\varepsilon}\right]$

$$N_j^{-1}\cdot\operatorname{card}\left\{i: m\big(\omega_i(j,\nu)\cap E\big)>\frac35\, m\big(\omega_i(j,\nu)\big)\right\}\geqslant\frac12\,2^{-\nu}m(I); \tag{57}$$

иначе бы мы при $j > j_0$ получили, что

$$m(I \setminus E) \geqslant \frac{2}{5} m\big(\omega_1(j,\nu)\big) \cdot N_j \cdot \frac{1}{4} 2^{-\nu} m(I) = \frac{1}{10} 2^{-2\nu} m(I) \geqslant \varepsilon m(I),$$

что противоречит оценке (55).

Используя затем определение функций $\varphi_n(x)$ (см. (50)) и оценку (46), мы с помощью соотношения (57) получим: при $\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{10\varepsilon}\right]$

$$\varliminf_{j\to\infty} \int_{G_{j,\nu}\cap E} \sup_{s_j < N \leqslant s_{j+1}} \left| \sum_{n=s_j+1}^{N} N_j^{-1/2} \varphi_n(x) \right|^2 dx \geqslant \mathrm{c}(E) > 0.$$

Складывая эти неравенства по $\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{10\varepsilon}\right]$, найдем

$$\varliminf_{j\to\infty} \int_{E} \sup_{s_j < N \leqslant s_{j+1}} \left| \sum_{n=s_j+1}^{N} N_j^{-1/2} \varphi_n(x) \right|^2 dx \geqslant c(E) \ln \frac{1}{\varepsilon}. \tag{58}$$

Так как ε может быть сколь угодно малым числом, то из (58) следует равенство (54). Теорема 3 полностью доказана.

Вопрос об ограниченности оператора мажоранты частных сумм: $S^*_\Phi \colon l^2 \to L^2(0,1)$ оказался весьма существенным для задач о представлении функций рядами по системе Φ. Как указывалось выше (см. теорему $2'$), тот факт, что П.О.Н.С. Φ есть система сходимости, не гарантирует возможность представления функции $f \notin L^2(0,1)$ сходящимся п.в. рядом по этой системе. Однако, если о системе Φ известно чуть больше, то уже можно получить результат положительного характера.

Теорема 4. *Пусть П.О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, *такова, что оператор мажоранты частных сумм* S^*_Φ (см. 1.(5) и утверждение 1.1) *есть ограниченный оператор из* l^2 *в* $L^2(0,1)$. *Тогда для любой измеримой и конечной п.в. на* $(0,1)$ *функции* $g(x)$ *найдется ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

сходящийся к $g(x)$ *п.в. на* $(0,1)$.

Замечание 1. Очевидно, что в формулировке теоремы 4 условие ограниченности оператора S^*_Φ можно переписать так: *для любой функции* $f \in L^2(0,1)$

$$\|S^*_\Phi(f)\|_2 \leqslant K\|f\|_2, \tag{59}$$

где постоянная K *не зависит от функции* f *и*

$$\begin{gathered} S^*_\Phi(f,x) = \sup_{1 \leqslant N < \infty} \left|\sum_{n=1}^N c_n(f)\varphi_n(x)\right|, \\ c_n(f) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx, \qquad n = 1,2,\ldots . \end{gathered} \tag{60}$$

Замечание 2. В отличие от теоремы 1, в теореме 4 не утверждается возможность представления функций, обращающихся в ∞ на множестве положительной меры. Для таких функций утверждение теоремы 4 теряет силу. Действительно, в гл. 3 (см. теорему 3.14) было показано, что ряд по системе Хаара (для которой в силу теоремы 3.4 имеет место оценка (59)) не может сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры.

Замечание 3. Помимо системы Хаара, условию теоремы 4 удовлетворяют тригонометрическая система, системы Уолша и Франклина. Можно сказать также, что полные О.Н.С., не удовлетворяющие условию теоремы 4, являются "исключением из общего правила" (это высказывание допускает и строгую формулировку).

Доказательство теоремы 4 довольно длинно и будет разбито на несколько пунктов.

1°. Здесь мы покажем, что достаточно представить сходящимся п.в. рядом по системе Φ только (конечные п.в.) функции $g(x)$ вида

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1), \tag{61}$$

где

$$g_n \in C(0,1), \quad 0 < g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x) - 2^{-n}, \qquad n = 1,2,\ldots .$$

С этой целью проверим, что для каждой функции $f \in L^0(0,1)$ найдутся функции $g'(x)$ и $g''(x)$ вида (61) такие, что $f(x) = g'(x) - g''(x)$ для п.в. $x \in (0,1)$. Пользуясь теоремой Лузина, выберем такую последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, что $f_1(x) \equiv 0$ и

$$m\{x \in (0,1) : f_n(x) \neq f(x)\} \leqslant \frac{1}{n^2}, \qquad n = 2,3,\ldots .$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1),$$

где

$$F_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и, обозначая для $F \in C(0,1)$

$$F^+(x) = \max\{F(x), 0\}, \qquad F^-(x) = -\min\{F(x), 0\},$$

мы находим: для п.в. $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n^+(x) - \sum_{n=1}^{\infty} F_n^-(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [F_n^+(x) + 2^{-n}] - \sum_{n=1}^{\infty} [F_n^-(x) + 2^{-n}] =: g'(x) - g''(x). \end{aligned}$$

2°. **Лемма 1.** *Пусть функции $f_p \in L^1(0,1)$, $p = 1, 2, \ldots$, имеют равномерно ограниченные нормы*

$$\|f_p\|_1 \leqslant M, \qquad p = 1, 2, \ldots. \tag{62}$$

Тогда найдется последовательность целых чисел $\{p_s\}_{s=1}^{\infty}$, $p_1 < p_2 < \cdots$, такая, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} m\{x \in (0,1) : |f_{p_s}(x)| \geqslant s\} < \infty. \tag{63}$$

Доказательство. Построим по индукции семейство целочисленных последовательностей $\{p_s(k)\}_{s=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots$, с условием

$$\{p_s(k)\}_{s=1}^{\infty} \subset \{p_s(k-1)\}_{s=1}^{\infty}, \qquad k = 2, 3, \ldots, \tag{64}$$

и числа $\mu_k \in [0,1]$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\mu_k \leqslant m\{x \in (0,1) : |f_{p_s(k)}(x)| \geqslant k\} \leqslant \mu_k + \frac{1}{k^2}, \qquad s = 1, 2, \ldots. \tag{65}$$

Положим $p_s(1) = s$, $s = 1, 2, \ldots$, $\mu_1 = 0$, и если последовательность $\{p_s(k-1)\}_{s=1}^{\infty}$ и число μ_{k-1} уже построены, то, учитывая очевидное соотношение

$$m\{x \in (0,1) : |f_{p_s(k-1)}(x)| \geqslant k\} \in [0,1], \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

мы можем выбрать подпоследовательность $\{p_s(k)\}_{s=1}^{\infty}$ последовательности $\{p_s(k-1)\}_{s=1}^{\infty}$ и число μ_k так, что выполнено (65).

Докажем, что последовательность $p_s = p_s(s)$, $s = 1, 2, \dots,$ – искомая. В самом деле, в силу (64), (65), при $s = 1, 2, \dots$ мы имеем

$$\mu_k \leqslant m\big\{x \in (0,1) : |f_{p_s}(x)| \geqslant k\big\} \leqslant \mu_k + \frac{1}{k^2}, \qquad k = 1, 2, \dots, s. \tag{66}$$

С другой стороны, согласно (62), при $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} & m\big\{x \in (0,1) : |f_{p_s}(x)| \geqslant k\big\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} m\big\{x \in (0,1) : j \leqslant |f_{p_s}(x)| < j+1\big\} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot m\big\{x \in (0,1) : j \leqslant |f_{p_s}(x)| < j+1\big\} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{x\in(0,1):j\leqslant|f_{p_s}(x)|<j+1\}} |f_{p_s}(x)|\,dx \\
&\leqslant \int_0^1 |f_{p_s}(x)|\,dx \leqslant M.
\end{aligned}$$

Теперь, пользуясь оценкой (66), мы находим: для $s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{s} & m\big\{x \in (0,1) : |f_{p_k}(x)| \geqslant k\big\} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{s}\Big(\mu_k + \frac{1}{k^2}\Big) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{s} m\{x \in (0,1) : |f_{p_s}(x)| \geqslant k\} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant M + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.
\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

3°. Здесь мы построим вспомогательную систему $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$ (во многом аналогичную системе Хаара), а также целочисленную последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, $N_1 < N_2 < \cdots$, и отметим для дальнейшего ряд их свойств (см. ниже а)–д)). Последовательно, при $k = 1, 2, \dots,$

определяя функцию $\psi_k(x)$, а затем и число N_{k+1}, мы будем следить за тем, чтобы выполнялись соотношения (см. (60)):

а) $\sum\limits_{n=1}^{N_k} |c_n(\psi_k)| \leqslant 2^{-k}, \ k = 2, 3, \dots;$

б) $\sum\limits_{l=1}^{k} \Big\{ \sum\limits_{n=N_{k+1}+1}^{\infty} c_n^2(\psi_l) \Big\}^{1/2} \leqslant 2^{-k}, \ k = 1, 2, \dots;$

в) $\psi_k \in \mathcal{D}_{2^\nu}$ для $k = 1, 2, \dots$ и некоторого $\nu = \nu(k)$.[1)]

Положим $\psi_1(x) \equiv 1$, $N_1 = 0$ и, используя неравенство Бесселя, выберем число $N_2 > N_1$ так, чтобы выполнялась оценка б) при $k = 1$. Функции $\psi_k(x)$, $k > 1$, мы будем строить группами (пачками) $\{\psi_k(x)\}_{k=k_p+1}^{k_{p+1}}$ (числа k_p, $1 = k_1 < k_2 < \cdots$, будут определены ниже). Первая пачка состоит из одной функции (т.е. $k_2 = 2$):

$$\psi_2(x) = r_{j_2}(x), \qquad x \in (0, 1),$$

где номер j_2 функции Радемахера $r_{j_2}(x)$ возьмем настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{n=1}^{N_2} |c_n(\psi_2)| \equiv \sum_{n=1}^{N_2} \left| \int_0^1 r_{j_2}(x) \varphi_n(x)\, dx \right| \leqslant 2^{-2}.$$

Затем, используя неравенство Бесселя, выберем число $N_3 > N_2$ так, чтобы выполнялась оценка б) при $k = 2$.

Допустим теперь, что уже построены функции $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{k_p}$ ($p = 2, 3, \dots$), числа N_k, $k = 1, 2, \dots, k_p + 1$, и при этом справедливы соотношения а)–в). Построим p-ю пачку: $\{\psi_k(x)\}_{k=k_p+1}^{k_{p+1}}$. Для этого рассмотрим такое разбиение отрезка $(0, 1)$ на двоичные интервалы:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s, \qquad \delta_i \cap \delta_j = \varnothing \ \text{ при } \ i \neq j, \qquad \bigcup_{i=1}^{s} \delta_i = (0, 1), \tag{67}$$

что функции $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, k_p$, постоянны на каждом интервале δ_i, $i = 1, 2, \dots, s$ (см. в)); p-я пачка будет состоять из s функций (т.е. $k_{p+1} = k_p + s$), причем $\operatorname{supp} \psi_{k_p+i}(x) = \delta_i$, $i = 1, 2, \dots, s$.

[1)] Здесь и ниже в этом параграфе при рассмотрении равенств между функциями или множествами мы пренебрегаем двоично-рациональными точками отрезка $[0, 1]$.

Если функции $\psi_1(x), \dots, \psi_{k-1}(x)$, $k = k_p + i$, $i = 1, 2, \dots, s$, и числа $N_1, \dots, N_k$ уже построены (и выполнены соотношения а)–в)), то функция $\psi_k(x)$ и число N_{k+1} определяются следующим образом: положим

$$\psi_k(x) = \chi_{\delta_i}(x) r_{j_k}(x), \tag{68}$$

где $\chi_\delta(x)$ – характеристическая функция интервала δ, а номер j_k функции Радемахера $r_{j_k}(x)$ выбран столь большим, что

$$j_k > j_{k-1}, \qquad \int_{\delta_i} r_{j_k}(x)\,dx = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{N_k} |c_n(\psi_k)| = \sum_{n=1}^{N_2} \left| \int_{\delta_i} r_{j_k}(x)\varphi_n(x)\,dx \right| \leqslant 2^{-k}$$

для любого интервала $\delta \subset (0,1)$; возможность такого выбора следует из того, что

$$\lim_{j\to\infty} \int_\delta r_j(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Затем найдем (снова используя неравенство Бесселя) число N_{k+1} такое, что имеет место оценка б). Справедливость соотношения в) для $\psi_k(x)$ непосредственно вытекает из (68).

Система $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ со свойствами а)–в) построена. Из построения (см. (67), (68)) сразу следует, что если обозначить через $\Delta(k)$ двоичный интервал – носитель функции $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, то для $p = 1, 2, \dots$ имеет место

г) $\displaystyle\bigcup_{k=k_p+1}^{k_{p+1}} \Delta(k) = (0,1)$, $\Delta(k) \cap \Delta(k') = \varnothing$, если $k_p < k < k' \leqslant k_{p+1}$.

Отметим также, что по построению (см. (68)) каждая функция $\psi_k(x)$, $k = 2, 3, \dots$, является полиномом по системе Хаара вида

$$\psi_k(x) = \sum_{i:\, \Delta^i_{j_k-1} \subset \Delta(k)} 2^{-(j_k-1)/2} \chi^{(i)}_{j_k-1}(x), \qquad x \in (0,1) \tag{69}$$

(все функции Хаара в (69) из пачки с номером $j_k - 1$), и при этом

$$|\psi_k(x)| = \chi_{\Delta(k)}(x), \qquad x \in (0,1). \tag{70}$$

Отметим, наконец, следующее свойство системы Ψ, вытекающее из г) и (69) (с учетом того, что числа j_k, $k = 2, 3, \dots$, в (69) возрастают, а носители функций Хаара, входящих в одну пачку, не пересекаются):

д) любому ряду по системе Ψ:

$$\sum_{k=1}^\infty d_k \psi_k(x) \tag{71}$$

соответствует ряд по системе Хаара:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A(d_n)\chi_n(x) \equiv d_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i:\, \Delta^i_{j_k-1} \subset \Delta(k)} d_k 2^{-(j_k-1)/2} \chi^{(i)}_{j_k-1}(x) \quad (72)$$

такой, что частные суммы рядов (71) и (72) и соответственно рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 \psi_k^2(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} [A(d_n)]^2 \chi_n^2(x)$$

имеют одинаковые верхние и нижние пределы в каждой двоично-иррациональной точке $x \in (0,1)$.

4°. Пусть при $p = 1, 2, \ldots$ (см. (60))

$$S_p^*(x) := \left\{ \sum_{k=k_p+1}^{k_{p+1}} [S_\Phi^*(\psi_k, x)]^2 \right\}^{1/2}. \quad (73)$$

В силу (59), г) и (70)

$$\int_0^1 [S_p^*(x)]^2\, dx \leqslant K^2 \sum_{k=k_p+1}^{k_{p+1}} \int_0^1 \psi_k^2(x)\, dx = K^2.$$

Применяя лемму 1 с $f_p(x) = [S_p^*(x)]^2$, $p = 1, 2, \ldots$, $M = K^2$, найдем такую подпоследовательность натурального ряда $\{p_s\}_{s=1}^{\infty}$, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} m\bigl\{x \in (0,1) : [S_{p_s}^*(x)]^2 \geqslant s\bigr\} < \infty. \quad (74)$$

Из (74) следует, что

$$\lim_{s\to\infty} (s \ln s)^{-1/2} S_{p_s}^*(x) = 0 \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1). \quad (75)$$

Введя обозначение

$$\Omega = \bigcup_{s=2}^{\infty} \bigl\{k : k_{p_s} < k \leqslant k_{p_{s+1}}\bigr\}, \quad (76)$$

рассмотрим ряд по системе Ψ:

$$\sum_{k\in\Omega} b_k\psi_k(x) := \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{k=k_{p_s}+1}^{k_{p_s+1}} (s\ln s)^{-1/2}\psi_k(x) \tag{77}$$

(положим также для удобства $b_k = 0$, если $k \notin \Omega$). Так как (см. г) и (70))

$$\sum_{k=k_p+1}^{k_{p+1}} \psi_k^2(x) = 1, \qquad x \in (0,1), \quad p = 1,2,\dots,$$

то из определения коэффициентов b_k (см. (77)) мы получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\psi_k^2(x) = \sum_{s=2}^{\infty}(s\ln s)^{-1} = \infty, \qquad x \in (0,1),$$

и, согласно д) (см. (72)),

$$\sum_{n=1}^{\infty}[A(b_n)]^2\chi_n^2(x) = +\infty, \qquad x \in (0,1).$$

Отсюда в силу теорем 3.13 и 3.14 следует, что

$$\varlimsup_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} A(b_n)\chi_n(x) = +\infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1)$$

и (см. д))

$$\varlimsup_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} b_k\psi_k(x) = +\infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1). \tag{78}$$

Имеет место

Лемма 2. *Для любой конечной п.в. функции* $g(x)$ *вида* (61) *найдется подряд ряда* (77):

$$\sum_{k\in\Omega_1} b_k\psi_k(x), \qquad \Omega_1 \subset \Omega, \tag{79}$$

сходящийся к $g(x)$ *п.в. на* $(0,1)$:

$$\sum_{k\in\Omega_1} b_k\psi_k(x) = g(x) \quad \textit{для} \quad \textit{п.в.} \quad x \in (0,1). \tag{80}$$

Доказательство. Учитывая (61), для данной функции $g(x)$ легко построить последовательность функций $\{G_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ с

$$G_0(x) \equiv 0, \quad G_n(x) \in \mathscr{D}_{2^{k_n}}, \quad k_n < k_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{81}$$

такую, что

$$\begin{gathered} g_n(x) \leqslant G_n(x) \leqslant g_{n+1}(x), \\ G_{n+1}(x) \geqslant G_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}}, \quad x \in (0,1), \quad n = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{82}$$

Тогда для п.в. $x \in (0,1)$

$$0 < G_n(x) < g(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} G_n(x) = g(x). \tag{83}$$

Определим по индукции целочисленные последовательности $\{N_l\}_{l=1}^{\infty}$, $N_1 < N_2 < \cdots$, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varepsilon_k = 0, 1$, и множества $E_l \subset (0,1)$, $l = 1, 2, \ldots$, такие, что

1) $P_l(x) := \sum\limits_{k=1}^{N_l} \varepsilon_k b_k \psi_k(x) \geqslant G_{l-1}(x)$, если $x \in E_l$, $m(E_l) \geqslant 1 - 1/l$, $l = 1, 2, \ldots$;
2) $\sum\limits_{k=1}^{N} \varepsilon_k b_k \psi_k(x) < G_l(x)$ при $x \in (0,1)$, $N = 1, 2, \ldots, N_l$, $l = 1, 2, \ldots$.

Положим $N_1 = 1$, $\varepsilon_1 = 0$, $E_1 = (0,1)$. Выполнение условий 1) и 2) при $l = 1$ очевидно.

Допустим, что числа N_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, ε_k, $k = 1, 2, \ldots, N_l$, и множества E_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, удовлетворяющие условиям 1) и 2), уже определены. Определим N_{l+1}, E_{l+1} и ε_k, $k = N_{l+1}, \ldots, N_{l+1}$. Для этого нам потребуется вспомогательная (зависящая от l) последовательность чисел $\{\delta_k\}_{k=N_l+1}^{\infty}$, $\delta_k = 0, 1$, которая строится следующим образом.

Учитывая, что носитель функции $\psi_k(x)$ – двоичный интервал $\Delta(k)$, длина которого стремится к нулю при $k \to \infty$ (см. (70)), найдем номер $q > N_l$ такой, что (см. (81))

$$G_l(x) = \text{const} \quad \text{при} \quad x \in \Delta(k), \quad k = q, q+1, \ldots, \tag{84}$$

и при этом (см. (77))

$$0 \leqslant b_k \leqslant 2^{-l-1}, \quad k = q, q+1, \ldots. \tag{85}$$

Положим

$$\delta_k = 0, \quad k = N_l + 1, \ldots, q. \tag{86}$$

Если числа δ_k, $k = N_l + 1, \ldots, k_0$ ($k_0 \geqslant q$), уже построены и при этом

$$I_{k_0}(x) := P_l(x) + \sum_{k=N_l+1}^{k_0} \delta_k b_k \psi_k(x) < G_{l+1}(x), \qquad x \in (0,1) \tag{87}$$

(для $k_0 = q$ это следует из 2)), то положим

$$\delta_{k_0+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } I_{k_0}(x) < G_l(x),\ x \in \Delta(k_0+1), \\ 0, & \text{если } I_{k_0}(x) \geqslant G_l(x),\ x \in \Delta(k_0+1) \end{cases} \tag{88}$$

(напомним, что функции $I_{k_0}(x)$ и $G_l(x)$ постоянны на $\Delta(k_0+1)$; см. (67), (84)). Так как (см. (82))

$$G_{l+1}(x) \geqslant G_l(x) + 2^{-l-1}, \qquad x \in (0,1),$$

то из соотношений (70), (85) и (88) следует, что $I_{k_0+1}(x) < G_{l+1}(x)$, $x \in (0,1)$. Продолжая указанное построение, мы определим последовательность $\{\delta_k\}_{k=N_l+1}^{\infty}$. При этом, по построению (см. также (86)), оценка (87) имеет место для любого $k_0 \geqslant N_l + 1$.

Для $s = q, q+1, \ldots$ рассмотрим множество (см. (87))

$$Q_s = \bigl\{x \in (0,1) : I_s(x) < G_l(x)\bigr\}. \tag{89}$$

По построению чисел δ_k (см. (88)), $Q_s \supset Q_{s+1}$, $s = q,\ q+1, \ldots$. Пусть

$$Q = \bigcap_{s=q}^{\infty} Q_s.$$

Если x – произвольная точка из Q, то в силу (88) и (89) из включения: $x \in \Delta(k)$, $k > q$, следует, что $\delta_k = 1$ и, значит (см. также (86), (87)),

$$\begin{aligned} \sum_{k=q}^{s} b_k \psi_k(x) &= \sum_{k=N_l+1}^{s} \delta_k b_k \psi_k(x) \\ &= I_{k_0}(x) - P_l(x) < G_{l+1}(x) - P_l(x), \qquad x \in Q, \quad s > q. \end{aligned}$$

Отсюда и из (78) мы получаем, что $m(Q) = 0$, и если номер s_0 достаточно велик, то

$$m(Q_{s_0}) < \frac{1}{l+1}\,. \tag{90}$$

Положим $N_{l+1} = s_0$, $\varepsilon_k = \delta_k$, $k = N_l + 1, \ldots, N_{l+1}$, $E_{l+1} = (0,1) \setminus Q_{s_0}$, тогда условия 1) и 2) для номера $l + 1$ будут выполнены (см. (87), (89)).

Последовательности $\{N_l\}$, $\{\varepsilon_k\}$, $\{E_l\}$ со свойствами 1) и 2) определены. Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k b_k \psi_k(x) \equiv \sum_{k\in\Omega_1} b_k \psi_k(x), \qquad \Omega_1 = \{k : \varepsilon_k b_k \neq 0\}, \tag{91}$$

сходится п.в. на $(0,1)$ к $g(x)$, и тем самым завершим доказательство леммы 2. Из 2) и (83) следует, что частные суммы ряда (91) ограничены сверху функцией $g(x)$. Но тогда (см. д))

$$\varlimsup_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} A(\varepsilon_n b_n)\chi_n(x) \leqslant g(x), \qquad x \in (0,1),$$

и по теореме 3.14 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A(\varepsilon_n b_n)\chi_n(x)$, а следовательно, и ряд (91) сходятся п.в. на $(0,1)$. Сходимость ряда (91) к $g(x)$ вытекает теперь из соотношения (см. 1), 2), (82), (83))

$$\varlimsup_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k b_k \psi_k(x) = g(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1).$$

Лемма 2 доказана.

5°. Завершим доказательство теоремы 4. Фиксируем функцию $g(x)$ вида (61) и рассмотрим ряд вида (79), сходящийся к $g(x)$ п.в. на $(0,1)$. Согласно (77)

$$b_k > 0, \quad k \in \Omega, \qquad b := \sup_{k\in\Omega} b_k = (2\ln 2)^{-1/2} < 1.$$

Следовательно (см. свойство а) системы $\{\psi_k\}$), для любого $n = 1, 2, \ldots$ конечна сумма

$$\sum_{k\in\Omega_1} b_k c_n(\psi_k) =: a_n, \tag{92}$$

причем

$$|a_1| \leqslant b \sum_{k=2}^{\infty} |c_1(\psi_k)| \leqslant b \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} < 1 \tag{93}$$

(оценка (93) потребуется нам только при доказательстве следствия из теоремы 4). Покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = g(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1). \tag{94}$$

В силу (92) для $k = 2, 3, \dots$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} S_{N_k}(x) := \sum_{n=1}^{N_k} a_n \varphi_n(x) &= \sum_{n=1}^{N_k} \sum_{l \in \Omega_1} b_l c_n(\psi_l) \varphi_n(x) \\ &= \sum_{l \in \Omega_1} b_l \sum_{n=1}^{N_k} c_n(\psi_l) \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Пользуясь этим равенством и учитывая полноту системы Φ и свойства а), б) системы Ψ, мы получим ($b_l = 0$ при $l \notin \Omega_1$)

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{l=1}^{k-1} b_l \psi_l(x) - S_{N_k}(x) \right\|_2 \\ &\quad\leqslant \left\| \sum_{l=1}^{k-1} b_l \left[\psi_l(x) \sum_{n=1}^{N_k} c_n(\psi_l) \varphi_n(x) \right] \right\|_2 + \left\| \sum_{l=k}^{\infty} b_l \sum_{n=1}^{N_k} c_n(\psi_l) \varphi_n(x) \right\|_2 \\ &\quad\leqslant b \sum_{l=1}^{k-1} \left\{ \sum_{n=N_k+1}^{\infty} c_n^2(\psi_l) \right\}^{1/2} + b \sum_{l=k}^{\infty} \sum_{n=1}^{N_k} |c_n(\psi_l)| \\ &\quad\leqslant b\, 2^{-k+1} + b \sum_{l=k}^{\infty} 2^{-l} = 4b\, 2^{-k} < 2^{-k+2}, \qquad k = 2, 3, \dots . \end{aligned}$$

Из полученных оценок и теоремы Б. Леви сразу следует, что для п.в. $x \in (0,1)$

$$\lim_{k \to \infty} \left| \sum_{l=1}^{k} b_l \psi_l(x) - S_{N_k}(x) \right| = 0$$

и (см. (80))

$$\lim_{k \to \infty} S_{N_k}(x) = g(x).$$

Таким образом, сходимость п.в. ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ к $g(x)$ будет установлена, если мы проверим, что

$$\lim_{k \to \infty} S_\Phi^* \left(\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n \varphi_n,\, x \right) = 0 \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1). \tag{95}$$

Согласно (92) при $k = 2, 3, \ldots$

$$\sigma_k(x) := \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} a_n\varphi_n(x) = \sum_{l=1}^{\infty}\Big\{ b_l \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} c_n(\psi_l)\varphi_n(x)\Big\}$$
$$= \sum_{l<k} + \sum_{l=k} + \sum_{l>k} =: \sigma_k^{(1)}(x) + \sigma_k^{(2)}(x) + \sigma_k^{(3)}(x). \qquad (96)$$

В силу соотношения б) и равенства Парсеваля

$$\|\sigma_k^{(1)}(x)\|_2 \leqslant b\sum_{l=1}^{k-1}\Big\{\sum_{n=N_k+1}^{\infty} c_n^2(\psi_l)\Big\}^{1/2} \leqslant 2^{-k+1}, \qquad k = 2, 3, \ldots.$$

Следовательно (см. (59)),

$$\sum_{k=2}^{\infty} \|S_\Phi^*(\sigma_k^{(1)}, x)\|_2 \leqslant K \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k+1} < \infty$$

и по теореме Б. Леви

$$\lim_{k\to\infty} S_\Phi^*(\sigma_k^{(1)}, x) = 0 \ \text{ для п.в. } \ x \in (0,1). \qquad (97)$$

Аналогично, используя оценку (см. а))

$$\|\sigma_k^{(3)}(x)\|_2 \leqslant b \sum_{l=k+1}^{\infty} \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} |c_n(\psi_l)|$$
$$\leqslant b \sum_{l=k+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N_l} |c_n(\psi_l)| \leqslant \sum_{l=k+1}^{\infty} 2^{-l} = 2^{-k}, \qquad k = 2, 3, \ldots,$$

получаем

$$\lim_{k\to\infty} S_\Phi^*(\sigma_k^{(3)}, x) = 0 \ \text{ для п.в. } \ x \in (0,1). \qquad (98)$$

Оценим, наконец, мажоранту $S_\Phi^*(\sigma_k^{(2)}, x)$. При этом можно считать, что $k \in \Omega_1$, так как $b_k = 0$, если $k \notin \Omega_1$. В этом случае (см. (76), (77), (79)) $k_{p_s} < k \leqslant k_{p_s+1}$, $b_k = (s\ln s)^{-1/2}$ для некоторого $s = s(k)$ и

$$S_\Phi^*(\sigma_k^{(2)}, x) \leqslant 2(s\ln s)^{-1/2} S_\Phi^*(\psi_k, x) \leqslant 2(s\ln s)^{-1/2} S_{p_s}^*(x),$$

где функции $S_p^*(x)$, $p = 1, 2, \ldots$, определены в (73). Из последней оценки и (75), учитывая, что $s = s(k) \to \infty$ при $k \to \infty$, мы выводим

$$\lim_{k\to\infty} S_\Phi^*(\sigma_k^{(2)}, x) = 0 \ \text{ для п.в. } \ x \in (0,1). \qquad (99)$$

Таким образом (см. (96)–(99)), мы показали, что справедливо соотношение (95). Равенство (94), а вместе с ним теорема 4 доказаны.

Следствие 3. *По любой П.О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}$, *удовлетворяющей условиям теоремы* 4, *существует нуль-ряд в смысле сходимости п.в.*

В самом деле, в доказательстве теоремы 4 мы для каждой функции $g \in L^0(0,1)$ построили ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\{g\}\varphi_n(x), \qquad |a_1\{g\}| < 1,$$

сходящийся к $g(x)$ п.в. на $(0,1)$. Пусть $g(x) \equiv \varphi_1(x)$, тогда ряд

$$(a_1\{\varphi_1\} - 1)\varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\{\varphi_1\}\varphi_n(x)$$

сходится к нулю для п.в. $x \in (0,1)$, хотя $a_1\{\varphi_1\} - 1 \neq 0$. Следствие 3 доказано.

§3. Две теоремы об универсальных рядах

Определение 3. Пусть X – банахово пространство. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \qquad x_n \in X, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{100}$$

называется *универсальным* (в X) *относительно перестановок*, если для каждого $y \in X$ найдется такая перестановка натурального ряда – $\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} \overset{X}{=} y.$$

Аналогично вводится определение ряда, универсального относительно перестановок и для других видов сходимости (в частности, для сходимости почти всюду, по мере и др.). Сам термин "универсальный" объясняется, видимо, тем, что с помощью преобразований (в данном случае перестановок) одного ряд (100) представляется любой элемент пространства X.

Можно вводить и другие определения универсальности ряда (например, универсальность относительно изменений знаков у его членов и др.). При этом само существование универсальных рядов в бесконечномерных пространствах, как правило, не является очевидным. Следующая теорема (см. также следующий за ней пример) дает достаточные условия для того, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad f_n \in L^2(0,1), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{101}$$

был универсальным в $L^2(0,1)$ относительно перестановок.

Теорема 5. *Пусть последовательность функций* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(0,1)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

а) *ряд* (101) *сходится по норме пространства* $L^2(0,1)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2^2 < \infty$;

в) *для любой функции* $g \in L^2(0,1)$, $\|g\|_2 > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(g, f_n)| := \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 g(x) f_n(x)\, dx \right| = \infty.$$

Тогда ряд (101) – *универсальный в* $L^2(0,1)$ *относительно перестановок.*

Для доказательства теоремы 5 нам потребуются три леммы.

Лемма 1. *Пусть даны функции* $f_n \in L^2(0,1)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, *и числа* λ_n, $0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots, N$. *Найдется набор чисел* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{N}$, $\varepsilon_n = 0,\ 1$, *такой, что*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n f_n - \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n f_n \right\|_2 \leqslant \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_2^2 \right\}^{1/2}. \tag{102}$$

Доказательство. Применив лемму 1 из теоремы 2.14 для чисел $\lambda'_n = 2\lambda_n - 1$ ($|\lambda'_n| \leqslant 1$), $n = 1, 2, \ldots, N$, найдем числа $\delta_n = \pm 1$, $n = 1, 2, \ldots$, для которых

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \lambda'_n f_n - \sum_{n=1}^{N} \delta_n f_n \right\|_2 \leqslant \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_2^2 \right\}^{1/2} =: I.$$

Тогда

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda'_n + 1}{2} f_n - \sum_{n=1}^{N} \frac{\delta_n + 1}{2} f_n \right\|_2 \leqslant \frac{1}{2} I.$$

Положив $\varepsilon_n = \frac{1}{2}(\delta_n + 1)$ ($\varepsilon_n = 0,\ 1$), $n = 1, 2, \ldots, N$, и учитывая, что $\frac{1}{2}(\lambda'_n + 1) = \lambda_n$, мы получим оценку (102). Лемма 2 доказана.

Лемма 2. *Пусть даны функции* $g_n \in L^2(0,1)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, *и*

$$\sum_{n=1}^{N} g_n(x) = g(x).$$

Найдется такая перестановка $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{N}$ *набора чисел* $(1, 2, \ldots, N)$, *что*

$$q(\sigma) := \max_{1 \leqslant m \leqslant N} \left\| \sum_{n=1}^{m} g_{\sigma(n)} \right\|_2^2 \leqslant C\left(\|g\|_2^2 + \sum_{n=1}^{N} \|g_n\|_2^2 \right)$$

(C *– абсолютная постоянная*).

Доказательство. Используя следствие 2.8 (при $p = 2$), находим (ниже, как обычно, $S(N)$ – группа перестановок набора чисел $(1, 2, \ldots, N)$)

$$\begin{aligned}
\min_{\sigma \in S(N)} q(\sigma) &\leqslant \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S(N)} q(\sigma) \\
&\leqslant \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S(N)} \int_0^1 \left(\max_{1 \leqslant m \leqslant N} \left| \sum_{n=1}^{m} g_{\sigma(n)}(x) \right| \right)^2 dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S(N)} \left(\max_{1 \leqslant m \leqslant N} \left| \sum_{n=1}^{m} g_{\sigma(n)}(x) \right| \right)^2 dx \\
&\leqslant C \left\{ \int_0^1 g^2(x)\, dx + \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 g_n^2(x)\, dx \right\}.
\end{aligned}$$

Лемма 3. *Пусть* B *– выпуклое подмножество* $L^2(0,1)$ *такое, что для любой функции* $g \in L^2(0,1)$ *и любого числа* T *найдется функция* $p \in B$, *для которой* $(g, p) > T$. *Тогда множество* B *всюду плотно в* $L^2(0,1)$.

Доказательство. Допустим противное: замыкание $\overline{B}$ множества B не совпадает с $L^2(0,1)$. Тогда найдутся $f_0 \in L^2(0,1)$ и $r > 0$ такие, что

$$K := \left\{ f \in L^2(0,1) : \|f - f_0\|_2 \leqslant r \right\} \subset L^2(0,1) \setminus \overline{B}.$$

По известному следствию теоремы Хана–Банаха выпуклые множества K и $\overline{B}$ разделимы линейным функционалом: для некоторых $g_0 \in L^2(0,1)$ и постоянной T имеем $(g_0, p) \leqslant T \leqslant (g_0, f)$, если $p \in \overline{B}$, $f \in K$ (ссылку на теорему Хана–Банаха можно в данном случае заменить простым геометрическим рассуждением). В частности, для всех $p \in B$ выполняется неравенство $(g_0, p) \leqslant T < \infty$, что противоречит условию леммы 3.

Доказательство теоремы 5. Пусть заданы функция $p \in L^2(0,1)$, целое $N \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$. Покажем, что найдется полином

$$Q(x) = Q(p, N, \varepsilon, x) = \sum_{n=N+1}^{N+M} \varepsilon_n f_n(x), \quad \varepsilon_n = 0,\ 1, \quad M = 1, 2, \ldots, \tag{103}$$

для которого

$$\|Q(p, N, \varepsilon, x) - p(x)\|_2 \leqslant \varepsilon + A_N, \tag{104}$$

где

$$A_N = \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_2^2 \right\}^{1/2} < \infty. \tag{105}$$

Пусть Ω_N – множество всех полиномов вида (103) и

$$\Lambda_N = \left\{ P(x) : P(x) = \sum_{n=N+1}^{N+M} \lambda_n f_n(x),\ 0 \leqslant \lambda_n \leqslant 1,\ M = 1, 2, \ldots \right\}. \tag{106}$$

Легко видеть, что Λ_N выпукло и $\Lambda_N \supset \Omega_N$. Из условий а) и в) следует, что для любой функции $g \in L^2(0,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g, f_n)^+ = \infty, \quad \text{где} \quad (g, f_n)^+ = \max\{(g, f_n), 0\},$$

т.е.

$$\sup_{Q \in \Omega_N} (g, Q) = \infty$$

и, тем более,

$$\sup_{p \in \Lambda_N} (g, p) = \infty. \tag{107}$$

Из соотношения (107) и леммы 4 вытекает, что Λ_N всюду плотно в $L^2(0,1)$, и мы можем найти полином $P \in \Lambda_N$ такой, что

$$\|P - p\|_2 \leqslant \varepsilon. \tag{108}$$

Затем, пользуясь леммой 1, найдем полином $Q \in \Omega_N$, для которого

$$\|Q - P\|_2 \leqslant \left\{ \sum_{n=N+1}^{N+M} \|f_n\|_2^2 \right\}^{1/2} \leqslant A_N. \tag{109}$$

Объединяя неравенства (108) и (109), получим (104).

Фиксируем теперь произвольную функцию $g \in L^2(0,1)$ и последовательность $\rho_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = 0$. Пусть $Q_1(x) = Q(g, 0, \rho_1, x)$. Тогда (см. (103), (104))

$$\|Q_1 - g\|_2 \leqslant \rho_1 + A_0.$$

Если полином Q_1 имеет вид

$$Q_1(x) = \sum_{n=1}^{M_1} \varepsilon_n^{(1)} f_n(x), \qquad \varepsilon_n^{(1)} = 0,\ 1,$$

то положим

$$Q_1'(x) = \sum_{n\in[1,M_1]:\, \varepsilon_n^{(1)}=1} f_n(x) + \delta_1 f_1(x),$$

где $\delta_1 = 1 - \varepsilon_1^{(1)}$ (т.е. функция $f_1(x)$ всегда "входит" в $Q_1'(x)$). Ясно, что

$$\|g - Q_1'\|_2 \leqslant \rho_1 + A_0 + \|f_1\|_2.$$

На следующем шаге рассмотрим полином

$$Q_2(x) = Q(g - Q_1', M_1, \rho_2, x) = \sum_{n=M_1+1}^{M_2} \varepsilon_n^{(2)} f_n(x), \qquad \varepsilon_n^{(2)} = 0,\ 1,$$

и положим

$$Q_2'(x) = \sum_{n\in[M_1+1,M_2]:\, \varepsilon_n^{(2)}=1} f_n(x) + \delta_2 f_2(x),$$

где $\delta_2 = 0$, если $\varepsilon_2^{(1)} + \varepsilon_2^{(2)} > 0$ (т.е. если функция $f_2(x)$ входила в полином $Q_1(x)$ или $Q_2(x)$), и $\delta_2 = 1$ в противном случае. По построению (см. (104))

$$\|g - (Q_1' + Q_2')\|_2 \leqslant \rho_2 + A_{M_1} + \|f_2\|_2.$$

Продолжая указанное построение, мы получим последовательность сумм $Q_k'(x)$ вида

$$Q_k'(x) = \sum_{i=1}^{i_k} f_{n_i}(x), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{110}$$

При этом каждая из функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, входит в сумму (110) в точности для одного значения k и (см. (104))

$$\|g - (Q_1' + Q_2' + \cdots + Q_k')\|_2 \leqslant \rho_k + A_{M_k} + \|f_k\|_2, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{111}$$

$(M_1 < M_2 < \cdots)$. В силу б) правая часть в неравенстве (111) стремится к нулю, если $k \to \infty$, поэтому из (111) вытекает существование перестановки ряда (101): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{\sigma'(n)}(x)$, для которой

$$\lim_{k\to\infty}\left\| g - \sum_{n=1}^{N_k} f_{\sigma'(n)} \right\|_2 = 0, \qquad N_1 < N_2 < \cdots . \tag{112}$$

Используем, наконец, лемму 2: переставим функции $f_{\sigma'(n)}(x)$ с помощью перестановки $\{\sigma(n)\}$ внутри пачек $\{f_{\sigma'(n)}(x) \,:\, N_k < n \leqslant N_{k+1}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, так, чтобы имели место оценки

$$\max_{N_k < m \leqslant N_{k+1}} \left\| \sum_{n=N_k+1}^{m} f_{\sigma'(n)} \right\|_2 \leqslant C\left\{ \left\| \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} f_{\sigma'(n)} \right\|_2^2 + \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \|f_{\sigma'(n)}\|_2^2 \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{113}$$

$\left(\{\sigma(n)\}_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} = \{\sigma'(n)\}_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}, k = 1, 2, \ldots\right)$. Тогда (см. (112), (113), б)) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x)$ будет сходиться в $L^2(0,1)$ к $g(x)$. Универсальность ряда (101) доказана.

Пример. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – П.О.Н.С. Положим $N_k = k(k+1)/2$ при $k = 0, 1, \ldots$ (т.е. $N_k - N_{k-1} = k$, $k = 1, 2, \ldots$) и рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{114}$$

$$f_n(x) = \frac{(-1)^k}{k\ln(k+1)}\varphi_{n-N_{k-1}}(x), \quad \text{если} \quad N_{k-1} < n \leqslant N_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда ряд (114) универсален в $L^2(0,1)$ относительно перестановок. Чтобы это показать, проверим выполнение условий теоремы 5 для последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Так как при $k = 1, 3, 5, \ldots$

$$\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} f_n(x) + \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} f_n(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\ln(k+2)}\varphi_{k+1(x)} + \Delta_k(x),$$

где $\sum_k \|\Delta_k\|_2 < \infty$ и, в силу равенства Парсеваля,

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\max_{N_{k-1}<m\leqslant N_k}\left\|\sum_{n=N_{k-1}+1}^{m} f_n\right\|_2\right\} = 0,$$

то ряд (114) сходится в $L^2(0,1)$. Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2\ln^2(k+1)} < \infty.$$

Наконец, учитывая, что для произвольной функции $g \in L^2(0,1)$, $\|g\|_2 > 0$, в силу полноты системы $\{\varphi_n\}$, некоторый коэффициент Фурье (g,φ_{k_0}), $1 \leqslant k_0 < \infty$, не равен нулю, мы находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(g,f_n)| \geqslant |(g,\varphi_{k_0})|\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{k\ln k} = \infty.$$

Универсальность ряда (114) доказана.

Теорема 6. *Для любой П.О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, функции которой при некотором $p > 2$ удовлетворяют условию*

$$\|\varphi_n\|_p \leqslant M < \infty, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{115}$$

существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \tag{116}$$

универсальный относительно перестановок для сходимости п.в. в пространстве всех измеримых функций на $(0,1)$.

Замечание. В теореме 6, как и в теореме 1, допускается возможность обращения измеримых функций в $+\infty$ и $-\infty$ на множествах положительной меры.

Доказательство следующего вспомогательного утверждения основано на лемме 1 из теоремы 1 и свойствах перестановок числовых рядов, изложенных в § 2.4.

Лемма 1. *Пусть П.О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию* (115) *с $p > 2$ и $f(x)$ – измеримая конечная п.в. функция. Для произвольных чисел $\delta \in (0,1)$ и $N = 1,2,\ldots$ найдутся полином*

$$P(x) = \sum_{n=N+1}^{m} a_n\varphi_n(x),$$

перестановка $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=N+1}^{m}$ *набора чисел* $\{N+1, \dots, m\}$ *и множество* $E \subset (0,1)$ *такие, что*

1) $m(E) \leqslant \delta$;
2) $|P(x) - f(x)| \leqslant \delta$ *при* $x \in (0,1) \setminus E$;
3) $P^*(\sigma, x) := \sup\limits_{N<k\leqslant m} \left| \sum\limits_{n=N+1}^{k} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) \right| \leqslant |f(x)| + \delta$ *при* $x \in (0,1) \setminus E$.

Доказательство. Выберем функцию $F \in L^\infty(0,1)$, для которой

$$m(E_0) \leqslant \frac{\delta}{4}, \qquad E_0 := \bigl\{x \in (0,1) : f(x) \neq F(x)\bigr\},$$

и пусть $R = R(\delta, p, M, \|F\|_\infty)$ – достаточно большое натуральное число (значение R уточняется ниже). Построим по индукции последовательность полиномов

$$P_r(x) = \sum_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} a_n\varphi_n(x), \quad r = 1, 2, \dots, R, \;\; N = N_0 < N_1 < \dots < N_R,$$

и множества E_r, $r = 1, 2, \dots, R$, удовлетворяющие условиям:

$$\text{I)} \quad \left|P_r(x) - \frac{F(x)}{R}\right| \leqslant \frac{\delta}{2R}, \qquad x \in (0,1) \setminus E_r, \quad m(E_r) \leqslant \frac{\delta}{2R};$$

$$\text{II)} \quad \|P_r\|_2 = \left(\sum_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} a_n^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{4\|F\|_\infty}{(R\delta)^{1/2}}.$$

Построение полинома P_r производится следующим образом: применяя лемму 1 из теоремы 1 к системе

$$\left\{\frac{1}{R}F(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{N_{r-1}}(x)\right\},$$

$$\omega = (0,1), \qquad \varepsilon_0 = \frac{\delta}{4R}, \qquad \varepsilon = \frac{\delta^{3/2}}{4R^{3/2}(N_{r-1}+1)},$$

найдем функцию $F_r' \in L^\infty(0,1)$ и множество $E_r' \subset (0,1)$, для которых

а) $F_r'(x) = \dfrac{1}{R}F(x)$ при $x \in (0,1) \setminus E_r'$, $m(E_r') \leqslant \dfrac{\delta}{4R}$;

б) $\|F_r'\|_2 \leqslant 2\left(\dfrac{4R}{\delta}\right)^{1/2} \dfrac{1}{R}\|F\|_2 \leqslant \dfrac{4\,\|F\|_\infty}{(R\delta)^{1/2}}$;

в) $|c_n(F_r')| \leqslant \varepsilon$, $n = 1, 2, \dots, N_{r-1}$, где $c_n(f) := \displaystyle\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx$.

Выберем затем, пользуясь полнотой системы $\{\varphi_n\}$, число $N_r > N_{r-1}$ настолько большим, что

$$\left\|\sum_{n=1}^{N_r} c_n(F_r')\varphi_n - F_r'\right\|_2 \leqslant \varepsilon, \tag{117}$$

и положим

$$P_r(x) = \sum_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} a_n\varphi_n(x), \quad a_n = c_n(F_r'), \ n = N_{r-1}+1, \dots, N_r. \tag{118}$$

Тогда (см. в) и (117))

$$\|P_r - F_r'\|_2 \leqslant (N_{r-1}+1)\varepsilon = \frac{\delta^{3/2}}{4R^{3/2}}$$

и, следовательно, по неравенству Чебышёва

$$m(E_r'') := m\left\{x \in (0,1) : |P_r(x) - F_r'(x)| > \frac{\delta}{2R}\right\} \leqslant \frac{4R^2}{\delta^2} \cdot \frac{\delta^3}{16R^3} = \frac{\delta}{4R}.$$

Если положить $E_r = E_r' \cup E_r''$, то последняя оценка и а) обеспечивают выполнение условия I). Условие II) выполнено в силу б) (см. также (118)).

Пусть $m = N_r$ и

$$P(x) = \sum_{n=N+1}^{m} a_n\varphi_n(x) = \sum_{r=1}^{R} P_r(x). \tag{119}$$

Построим теперь искомую перестановку $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=N+1}^{m}$. Для этого при $r = 1, 2, \dots, R$ рассмотрим множество S_r всех перестановок набора чисел $\{N_{r-1}+1, \dots, N_r\}$ и для $\sigma = \{\sigma(n)\} \in S_r$ положим

$$P_r^*(\sigma, x) = \sup_{N_{r-1}<k\leqslant N_r}\left|\sum_{n=N_{r-1}+1}^{k} a_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x)\right|.$$

В силу следствия 2.8

$$\begin{aligned}\Sigma &:= \frac{1}{(N_r - N_{r-1})!}\sum_{\sigma\in S_r}\int_{(0,1)\setminus E_r} |P_r^*(\sigma,x)|^p\,dx \\ &\leqslant C_p\int_{(0,1)\setminus E_r}\bigl(|P_r(x)| + Q_r(x)\bigr)^p\,dx \\ &\leqslant 2^pC_p\left[\int_{(0,1)\setminus E_r}|P_r(x)|^p\,dx + \int_{(0,1)\setminus E_r} Q_r(x)^p\,dx\right], \end{aligned} \tag{120}$$

где

$$Q_r(x) := \left(\sum_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} a_n^2\varphi_n^2(x)\right)^{1/2}, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

а C_p – постоянная из следствия 2.8. При этом для $x \in (0,1) \setminus E_r$ (см. свойство I) полиномов P_r)

$$|P_r(x)| \leqslant \frac{\|F\|_\infty + \delta}{R}$$

и (см. неравенство 2.(75) и свойство II))

$$\int_{(0,1)\setminus E_r} Q_r(x)^p\,dx \leqslant \left(\sum_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} \|a_n\varphi_n(x)\|_p^2\right)^{p/2}$$
$$\leqslant M^p\left(\sum_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} a_n^2\right)^{p/2} \leqslant \left[\frac{4M\|F\|_\infty}{(R\delta)^{1/2}}\right]^p.$$

В итоге

$$\Sigma \leqslant 2^p C_p\left[\left(\frac{\|F\|_\infty + \delta}{R}\right)^p + \left(\frac{4M\|F\|_\infty}{(R\delta)^{1/2}}\right)^p\right] \leqslant \frac{\delta^{p+1}}{2^{p+2}R}, \qquad (121)$$

если число $R = R(\delta, p, M, \|F\|_\infty)$ достаточно велико. Оценка (121) влечет существование перестановки $\sigma_r = \{\sigma_r(n)\}_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} \in S_r$, для которой

$$\int_{(0,1)\setminus E_r} |P_r^*(\sigma_r, x)|^p\,dx \leqslant \frac{\delta^{p+1}}{2^{p+2}R},$$

а следовательно, по неравенству Чебышёва

$$m(G_r) := m\left\{x \in (0,1) : P_r^*(\sigma_r, x) > \frac{\delta}{2}\right\} \leqslant \left(\frac{2}{\delta}\right)^p \frac{\delta^{p+1}}{2^{p+2}R} = \frac{\delta}{4R}. \qquad (122)$$

Положим $E = E_0 \cup \left[\bigcup_{r=1}^{R}(E_r \cup G_r)\right]$, а перестановку $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=N+1}^{m}$ определим так:

$$\sigma(n) = \sigma_r(n), \quad \text{если} \quad N_{r-1} < n \leqslant N_r, \quad r = 1, 2, \ldots, R.$$

Тогда в силу (122) и свойства I) $m(E) \leqslant \delta$ и (см. также (119)) $|P(x) - f(x)| \leqslant \delta/2$, если $x \in (0,1) \setminus E$. Тем самым мы проверили справедливость соотношений 1) и 2) из формулировки леммы 1. Далее, по построению перестановки σ, с учетом свойства I) и неравенства (122), при $x \in (0,1) \setminus E$ имеем

$$P^*(\sigma, x) \leqslant \sum_{r=1}^{R} |P_r(x)| + \max_{1\leqslant r\leqslant R} P_r^*(\sigma_r, x) \leqslant |f(x)| + \delta,$$

т.е. имеет место и 3). Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 6. Пусть последовательность функций $\{V_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $V_k \in L^{\infty}(0,1)$, $\|V_k\|_{\infty} = M_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и для любой измеримой функции $F(x)$ некоторая подпоследовательность $\{V_{k_p}\}$ сходится к F почти всюду:

$$\lim_{p\to\infty} V_{k_p}(x) = F(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1) \tag{123}$$

(в качестве $\{V_k\}$ можно взять, например, совокупность полиномов по системе Хаара с рациональными коэффициентами; отметим, кстати, что из теоремы 1 легко следует, что нужным свойством обладает и совокупность полиномов с рациональными коэффициентами по произвольной П.О.Н.С., состоящей из ограниченных функций).

Выберем четные числа A_k, $k = 1, 2, \ldots$, так, что

$$A_1 < A_2 < \cdots, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{M_k}{A_k} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{A_k} < 1, \tag{124}$$

и положим

$$\Omega_k = \{B_{k-1} + 1, \ldots, B_k\}, \quad \text{где} \quad B_k = \sum_{j=1}^{k} A_j, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad B_0 = 0,$$

и

$$v_i(x) = \frac{(-1)^i V_k(x)}{A_k} \quad \text{при} \quad i \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$\sum_{i\in\Omega_k} v_i(x) = 0, \qquad \max_{B_{k-1}<N\leqslant B_k} \Bigl\| \sum_{i=B_{k-1}+1}^{N} v_i(x) \Bigr\|_{\infty} \leqslant \frac{M_k}{A_k}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{125}$$

Докажем сначала, что универсальным является ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_i(x), \tag{126}$$

а затем уже, пользуясь этим фактом и леммой 1, установим существование универсального ряда и по системе $\{\varphi_n\}$.

Пусть $F(x)$, $-\infty \leqslant F(x) \leqslant \infty$, – произвольная измеримая функция, и для последовательности $\{k_p\}_{p=1}^{\infty}$ имеет место (123). Так как ряд

$$\sum_{i\notin\Omega} v_i(x), \qquad \Omega := \bigcup_{p=1}^{\infty} \Omega_{k_p},$$

сходится всюду к нулю (см. (125)), то нам достаточно доказать, что ряд

$$\sum_{i\in\Omega} v_i(x)$$

после некоторой перестановки $\sigma_0 = \{\sigma_0(i)\}_{i\in\Omega}$ сходится к $F(x)$ почти всюду (а затем положить $\sigma_0(i) = i$, если $i \notin \Omega$).

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} b = \min\{i : i \in \Omega\} = B_{k_1-1} + 1, \\ \alpha_i = \frac{(-1)^i}{A_k}, \quad \text{если} \quad i \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots . \end{gathered} \tag{127}$$

Перестановку σ_0 множества натуральных чисел Ω строим следующим образом: $\sigma_0(b) = b + 1$ (отметим, что $\alpha_{b+1} > 0$), и если для $i \in \Omega$ набор

$$I = \{\sigma_0(j) : j \in \Omega,\ j < i\}$$

уже определен, то полагаем

$$\sigma_0(i) = \begin{cases} \min\{j : j \in \Omega \setminus I,\ \alpha_j > 0\}, & \text{если } \sum\limits_{j\in I} \alpha_j \leqslant 1; \\ \min\{j : j \in \Omega \setminus I,\ \alpha_j < 0\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим также, что по построению в случае, когда $i < j$ и $\operatorname{sign} \alpha_{\sigma_0(i)} = \operatorname{sign} \alpha_{\sigma_0(j)}$, мы имеем $\sigma_0(i) < \sigma_0(j)$.

Легко видеть, что $\{\sigma_0(i)\}_{i\in\Omega}$ – перестановка элементов из Ω, обладающая свойствами:

1) ряд $\sum\limits_{i\in\Omega} \alpha_{\sigma_0(i)}$ сходится и его сумма $s = 1$;

2) при $v \geqslant b$

$$s(v) := \sum_{i\in\Omega,\, i\leqslant v} \alpha_{\sigma_0(i)} = \sum_{p=1}^{p(v)} \frac{d(p, v)}{A_{k_p}}, \quad d(p, v) \geqslant 0,$$

где $d(p, v)$ – разность между количеством положительных и количеством отрицательных слагаемых по модулю равных $(A_{k_p})^{-1}$, входящих в сумму $s(v)$, причем $s(v) \to 1$, когда $v \to \infty$.

Так как $\sum\limits_{i\in\Omega} \alpha_i = 0$, $k = 1, 2, \dots$, то

$$p'(v) := \min\{p : d(p, v) \neq 0\} \to \infty \quad \text{при} \quad v \to \infty. \tag{128}$$

Используя свойства 1) и 2) перестановки σ_0, мы получаем

$$S(v,x) := \sum_{i\in\Omega,\, i\leqslant v} v_{\sigma_0(i)}(x) = \sum_{p=p'(v)}^{p(v)} \frac{d(p,v)}{A_{k_p}} V_{k_p}(x) \tag{129}$$

и, следовательно, для таких x, что $|F(x)| < \infty$,

$$|S(v,x) - s(v)F(x)| \leqslant 2 \sup_{p\geqslant p'(v)} |V_{k_p}(x) - F(x)|. \tag{130}$$

Из (123), (130) и (128) вытекает, что для почти всех x из множества, где $|F(x)| < \infty$, ряд

$$\sum_{i\in\Omega} v_{\sigma_0(i)}(x) \tag{131}$$

сходится п.в. к $F(x)$. Сходимость п.в. ряда (131) к $+\infty$ и $-\infty$ на множествах, где функция $F(x)$ принимает соответственно значения $+\infty$ и $-\infty$, легко следует из (123), (129), (128). Тем самым универсальность ряда (126) установлена.

Применяя теперь лемму 1, найдем полиномы по системе $\{\varphi_n\}$:

$$P_i(x) = \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i} a_n\varphi_n(x), \qquad 0 = v_0 < v_1 < \cdots, \quad i = 1,2,\dots,$$

и перестановки σ_i наборов чисел $\{v_{i-1}+1,\dots v_i\}$, $i = 1,2,\dots$, такие, что

$$m\bigl\{x \in (0,1) : |v_i(x) - P_i(x)| \geqslant 2^{-i}\bigr\} \leqslant 2^{-i}, \tag{132}$$

$$m\bigl\{x \in (0,1) : P_i^*(\sigma_i,x) \geqslant |v_i(x)| + 2^{-i}\bigr\} \leqslant 2^{-i}, \tag{133}$$

и докажем, что для заданных тем самым коэффициентов a_n, $n = 1,2,\dots$, ряд (116) – универсальный. Действительно, в силу (132)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |v_i(x) - P_i(x)| < \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1),$$

а значит, из сходимости п.в. ряда (131) к $F(x)$ следует сходимость п.в. ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_{\sigma_0(i)}(x)$$

к функции $F(x) + G_0(x)$, где

$$G_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \bigl(P_i(x) - v_i(x)\bigr).$$

Более того, учитывая (133) и тот факт, что $\|v_i\|_\infty \to 0$ при $i \to \infty$ (см. (124)), мы можем утверждать, что некоторая перестановка ряда (116) сходится п.в. к $F(x) + G_0(x)$. Отсюда вытекает универсальность ряда (116). Теорема 6 доказана.

Приложение 1.
Некоторые сведения из теории функций действительного переменного и функционального анализа

§ 1. Равенства для интегралов. Модули непрерывности

1°. Утверждение 1. *Пусть* $f \in L^1(0,1)$ *и для* $t \in \mathbb{R}^1$

$$\lambda_f(t) = m\{x \in (0,1) : |f(x)| > t\}, \quad \widetilde{\lambda}_f(t) = m\{x \in (0,1) : f(x) > t\}.$$

Тогда

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} t\,d\widetilde{\lambda}_f(t), \tag{1}$$

и если $f \in L^p(0,1)$, $0 < p < \infty$, *то*

$$\int_0^1 |f(x)|^p\,dx = -\int_0^{\infty} t^p\,d\lambda_f(t) = p\int_0^{\infty} t^{p-1}\lambda_f(t)\,dt. \tag{2}$$

Доказательство. Равенство (1) легко следует из определения интегралов Лебега и Лебега–Стилтьеса:

Если $\{t_i^{(n)}\}_{i=-\infty}^{\infty}$, $n = 1, 2, \ldots,$ – последовательность разбиений действительной оси: $\cdots < t_{-k}^{(n)} < \cdots < t_{-1}^{(n)} < t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_k^{(n)} < \cdots,$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{-\infty<i<\infty}\big(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\big)\Big) = 0,$$

то интегралы $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, где $f_n(x) = t_i^{(n)}$, если $x \in E_i^{(n)} \equiv \big\{x \in (0,1) : t_i^{(n)} < f(x) \leqslant t_{i+1}^{(n)}\big\}$, $i = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$ стремятся (при $n \to \infty$) к $\int_0^1 f(x)\,dx$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} t_i^{(n)} m(E_i^{(n)}) \\ &= -\sum_{i=-\infty}^{\infty} t_i^{(n)}\big[\widetilde{\lambda}_f(t_{i+1}^{(n)}) - \widetilde{\lambda}_f(t_i^{(n)})\big] \\ &\to -\int_{-\infty}^{\infty} t\,d\widetilde{\lambda}_f(t) \quad \text{при} \quad n\to\infty,\end{aligned}$$

что доказывает (1).

Пусть теперь $f \in L^p(0,1)$, $0 < p < \infty$. В силу (1), учитывая, что $\widetilde{\lambda}_{|f|}(t) = 1$ при $t < 0$, мы имеем

$$\int_0^1 |f(x)|^p\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} t\,d\widetilde{\lambda}_{|f|^p}(t) = -\int_0^{\infty} t\,d\widetilde{\lambda}_{|f|^p}(t). \tag{2'}$$

Так как при $t > 0$

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}_{|f|^p}(t) &= m\{x \in (0,1) : |f(x)|^p > t\} \\ &= m\{x \in (0,1) : |f(x)| > t^{1/p}\} = \lambda_f(t^{1/p}),\end{aligned}$$

то из соотношения (2′) (делая замену переменных $t = (t')^p$), мы сразу получаем первое из равенств (2). Далее, для любого $A > 0$

$$\begin{aligned}-\int_0^A t^p\,d\lambda_f(t) &= -t^p\,\lambda_f(t)\big|_0^A + \int_0^A \lambda_f(t)\,dt^p \\ &= -A^p\,\lambda_f(A) + p\int_0^A \lambda_f(t)t^{p-1}\,dt.\end{aligned}$$

Для доказательства второго неравенства в (2) достаточно устремить в последнем соотношении число A к ∞ и использовать оценку

$$A^p\,\lambda_f(A) \leqslant \int_{\{x\in(0,1):|f(x)|>A\}} |f(x)|^p\,dx = o(1) \quad \text{при} \quad A\to\infty.$$

Замечание 1. Легко видеть, что конечность интеграла $\int_0^\infty \lambda_f(t)t^{p-1}dt$ эквивалентна принадлежности функции $f(x)$ пространству $L^p(0,1)$.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ задана на $\mathbb{R}^1$, то, применив равенство (2) для функций $f_k(x) \equiv f(x+k)$, $x \in (0,1)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, и учитывая, что

$$\lambda_f(t) = m\{x \in \mathbb{R}^1 : |f(x)| > t\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_{f_k}(t),$$

мы получим

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^p\,dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f_k(x)|^p\,dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} p\int_0^{\infty} t^{p-1}\lambda_{f_k}(t)\,dt \\ &= p\int_0^{\infty} t^{p-1}\lambda_f(t)\,dt, \qquad 0 < p < \infty. \end{aligned} \tag{3}$$

2°. Модули непрерывности. Пусть задана функция $f \in C(0,1)$ (или $f \in L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$). *Модуль непрерывности* (соответственно *интегральный модуль непрерывности*) f определяется равенством

$$\begin{aligned}\omega(\delta, f) &= \sup_{\substack{0 \leqslant x < x+h \leqslant 1 \\ 0<h\leqslant\delta}} |f(x+h) - f(x)|, \qquad 0 < \delta < 1, \\ \omega_p(\delta, f) &= \left\{\sup_{0<h\leqslant\delta} \int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}, \qquad 0 < \delta < 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Модулем непрерывности второго порядка функции $f \in C(0,1)$ (*интегральным модулем непрерывности второго порядка* функции $f \in L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$) называется функция

$$\omega^{(2)}(\delta, f) = \sup_{\substack{0 \leqslant x-h < x+h \leqslant 1 \\ 0<h\leqslant\delta}} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|, \quad 0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}, \tag{5}$$

соответственно,

$$\omega_p^{(2)}(\delta, f) = \left\{\sup_{0<h\leqslant\delta} \int_h^{1-h} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}. \tag{5'}$$

Для периодических функций модули непрерывности определяются несколько иначе:

Если функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}^1$ и имеет период $T > 0$, то

$$\text{а)}\quad \omega(\delta, f) = \sup_{\substack{x\in[0,T]\\ 0<h\leqslant\delta}} |f(x+h) - f(x)|,$$

$$\omega^{(2)}(\delta, f) = \sup_{\substack{x\in[0,T]\\ 0<h\leqslant\delta}} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|,$$

$$\delta > 0, \quad f \in C(0,T),$$

$$\text{б)}\quad \omega_p(\delta, f) = \left\{\sup_{0<h\leqslant\delta} \int_0^T |f(x+h) - f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}, \tag{6}$$

$$\omega_p^{(2)}(\delta, f) = \left\{\sup_{0<h\leqslant\delta} \int_0^T |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

$$\delta > 0, \quad f \in L^p(0,T).$$

Отметим основные свойства модулей непрерывности:

$$\text{(I)}\quad \lim_{\delta\to 0}\omega(\delta, f) = \lim_{\delta\to 0}\omega^{(2)}(\delta, f) = \lim_{\delta\to 0}\omega_p(\delta, f) = \lim_{\delta\to 0}\omega_p^{(2)}(\delta, f) = 0,$$

$$\text{(II)}\quad \omega(2\delta, f) \leqslant 2\omega(\delta, f), \qquad \omega^{(2)}(2\delta, f) \leqslant 4\omega^{(2)}(\delta, f),$$

$$\omega_p(2\delta, f) \leqslant 2\omega_p(\delta, f), \qquad \omega_p^{(2)}(2\delta, f) \leqslant 4\omega_p^{(2)}(\delta, f), \tag{7}$$

$$\text{(III)}\quad \omega^{(2)}(\delta, f) \leqslant 2\omega(\delta, f), \qquad \omega_p^{(2)}(\delta, f) \leqslant 2\omega_p(\delta, f).$$

Соотношения (II) и (III) в (7) непосредственно вытекают из определения модулей непрерывности. Равенства (I) в случае, когда $f \in C(0,1)$, сразу следуют из равномерной непрерывности функции f на отрезке $[0,1]$. Если же $f \in L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, то, находя для заданного $\varepsilon > 0$ такую функцию $g \in C(0,1)$, что $\|g - f\|_p \leqslant \varepsilon/3$, мы для достаточно малых $h > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned}
&\|f(x+h) - f(x)\|_{L^p(0,1-h)} \\
&\quad \leqslant \|f(x+h) - g(x+h)\|_{L^p(0,1-h)} \\
&\qquad + \|g(x+h) - g(x)\|_{L^p(0,1-h)} + \|g(x) - f(x)\|_{L^p(0,1-h)} \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

что доказывает равенство $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_p(\delta, f) = 0$.

Утверждение 2. *Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, имеет период T и ограниченную вариацию на $[0,T]$. Тогда*

$$\omega_1(\delta, f) \leqslant 4\delta \cdot V(f), \qquad 0 < \delta < T,$$

где $V(f) = V_0^T(f)$ – полная вариация функции f на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. Пусть $f_1(x) = V_0^x(f)$, $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$, $x \in [0,T]$. Учитывая, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – неубывающие функции, мы находим, что при $h \in [0,T]$, $i = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h} |f_i(x+h) - f_i(x)|\,dx &= \int_0^{T-h} f_i(x+h)\,dx - \int_0^{T-h} f_i(x)\,dx\\ &= \int_h^T f_i(x)\,dx - \int_0^{T-h} f_i(x)\,dx\\ &= \int_{T-h}^T f_i(x)\,dx - \int_0^h f_i(x)\,dx\\ &\leqslant [f_i(T) - f_i(0)]\cdot h.\end{aligned}$$

Следовательно, при $h \in (0,T)$

$$\begin{aligned}&\int_0^T |f(x+h) - f(x)|\,dx = \int_0^{T-h} + \int_{T-h}^T\\ &\quad\leqslant [f_1(T) - f_1(0) + f_2(T) - f_2(0)]\cdot h + h \sup_{x,x' \in [0,T]} |f(x) - f(x')|\\ &\quad\leqslant [2\{f_1(T) - f_1(0)\} + f(0) - f(T)]\cdot h + h\cdot V(f) \leqslant 4h\cdot V(f),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Если $\omega(\delta)$ – некоторая выпуклая вверх функция ($\omega(0) = 0$), то мы полагаем

$$H_\omega = \bigl\{f \in C(0,1) : \omega(\delta, f) = O\bigl(\omega(\delta)\bigr) \text{ при } \delta \to 0\bigr\}. \tag{8}$$

Класс функций H_{δ^α}, $0 < \alpha \leqslant 1$ (класс Липшица порядка α), обозначается в тексте $\operatorname{Lip}\alpha$.

3°. При изучении свойств частных сумм рядов Фурье по ортонормированным системам возникают операторы

$$S(f) = S(f,x) = \int_0^1 f(t)K(x,t)\,dt.$$

Ясно, что если ядро $K(x,t) \in C([0,1]\times[0,1])$, то оператор $S(f)$ действует из $C(0,1)$ в $C(0,1)$. При этом нетрудно убедиться, что

$$\|S\|_{C\to C} \equiv \sup_{\|f\|_{C(0,1)}\leqslant 1} \|S(f)\|_{C(0,1)} = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,t)|\,dt. \tag{9}$$

Ясно также, что для ядер $K(x,t) \in L^\infty([0,1]\times[0,1])$ оператор $S(f)$ действует из $L^1(0,1)$ в $L^\infty(0,1)$. Проверим, что в этом случае

$$\|S\|_{L^1\to L^1} \equiv \sup_{\|f\|_1\leqslant 1} \|S(f)\|_1 = \left\| \int_0^1 |K(x,t)|\,dx \right\|_\infty. \tag{10}$$

Положим

$$I(t) = \int_0^1 |K(x,t)|\,dx \qquad t \in [0,1].$$

Если $\|f\|_1 \leqslant 1$, то

$$\|S(f)\|_1 \leqslant \int_0^1 |f(t)| \int_0^1 |K(x,t)|\,dx\,dt \leqslant \|I(t)\|_\infty,$$

т.е.

$$\|S\|_{L^1\to L^1} \leqslant \left\| \int_0^1 |K(x,t)|\,dx \right\|_\infty. \tag{11}$$

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим множество E тех точек $y \in (0,1)$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} 2n \int_{y-1/n}^{y+1/n} K(x,t)\,dt = K(x,y) \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1). \tag{12}$$

В силу теоремы Лебега о дифференцируемости абсолютно непрерывных функций и теоремы Фубини

$$m(E) = 1. \tag{13}$$

Для фиксированного $y \in E$ положим

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n, & \text{если } t \in \left(y - \dfrac{1}{n}, y + \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & \text{если } t \in (0,1) \setminus \left(y - \dfrac{1}{n}, y + \dfrac{1}{n}\right), \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда $\|f_n(t)\|_1 = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, и, применяя теорему Фату, мы находим, что для любого $y \in E$

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^1 |K(x,y)|\,dx \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^1 \left| 2n \int_{y-\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} K(x,t)\,dt \right| dx \\ &= \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \int_0^1 f_n(t) K(x,t)\,dt \right| dx \\ &= \varlimsup_{n\to\infty} \|S(f_n)\|_1 \leqslant \|S\|_{L^1\to L^1}. \end{aligned}$$

Таким образом (см. (13)), $\|I(y)\|_\infty \leqslant \|S\|_{L^1\to L^1}$ и (см. также (11)) мы получили искомое равенство (10).

§ 2. Максимальная функция и интерполяционная теорема

1°. Интерполяционная теорема Марцинкевича.

Определение 1. Оператор T, действующий из пространства $L^p(\mathbb{R}^1)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ в $L^0(\mathbb{R}^1)$, называется *оператором слабого типа* (p, p), если для любого $y > 0$

$$m\{x \in \mathbb{R}^1 : |T(f, x)| > y\} \leqslant \frac{M}{y^p} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^1)}, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^1), \tag{14}$$

и *оператором типа* (p, p), если

$$\|T(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leqslant M \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^1)}, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^1) \tag{15}$$

(постоянная M в оценках (14) и (15) не зависит от $f(x)$). Если $p = \infty$, то скажем, что оператор T имеет слабый тип (p, p), если он имеет тип (p, p).

Из неравенства Чебышёва непосредственно вытекает, что любой оператор типа (p, p) есть оператор слабого типа (p, p). Справедлива

Теорема 1. *Если линейный оператор T имеет слабый тип (p_1, p_1) и одновременно слабый тип (p_2, p_2) $(1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty)$, то T имеет тип (p, p) для любого p из интервала (p_1, p_2).*

Замечание. Мы считаем, что оператор T расширен с сохранением линейности до оператора, действующего из пространства

$$L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \oplus L^{p_2}(\mathbb{R}^1) = \{f : f = f_1 + f_2,\ f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1),\ f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^1)\}, \tag{16}$$

т.е. (см. (16)) $T(f, x) = T(f_1, x) + T(f_2, x)$ для любой функции $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \oplus L^{p_2}(\mathbb{R}^1)$. Легко видеть, что такое определение функции $T(f, x)$ не зависит от выбора f_1 и f_2 в (16). Так как $L^p(\mathbb{R}^1) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^1) \oplus L^{p_2}(\mathbb{R}^1)$, $p_1 < p < p_2$, то тем самым оператор T определен и на пространстве $L^p(\mathbb{R}^1)$.

Доказательство теоремы 1. Мы будем считать, что $p_2 < \infty$ (только этот случай используется в тексте). Если $p_2 = \infty$, то в доказательство надо внести небольшие изменения (фактически необходимые рассуждения приведены ниже при доказательстве теоремы 2).

Фиксируем функцию $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$ и число $t > 0$ и оценим величину

$$\lambda(t) = m\{x \in \mathbb{R}^1 : |T(f, x)| > t\}.$$

Положим для $x \in \mathbb{R}^1$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| > t, \\ 0, & \text{если } |f(x)| \leqslant t, \end{cases} \qquad g(x) = f(x) - h(x).$$

Тогда $h \in L^{p_1}(\mathbb{R}^1)$, $g \in L^{p_2}(\mathbb{R}^1)$ и

$$T(f,x) = T(h,x) + T(g,x).$$

Следовательно,

$$\lambda(t) \leqslant m\{x \in \mathbb{R}^1 : |T(h,x)| > t/2\} + m\{x \in \mathbb{R}^1 : |T(g,x)| > t/2\}.$$

Отсюда, используя оценки слабого типа (p_1, p_1) и (p_2, p_2) (см. (14)), мы находим, что при $t > 0$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &\leqslant \frac{2^{p_1} M_1}{t^{p_1}} \int_{\mathbb{R}^1} |h(x)|^{p_1}\,dx + \frac{2^{p_2} M_2}{t^{p_2}} \int_{\mathbb{R}^1} |g(x)|^{p_2}\,dx \\ &= \frac{2^{p_1} M_1}{t^{p_1}} \int_{\{x \in \mathbb{R}^1 : |f(x)| > t\}} |f(x)|^{p_1}\,dx \\ &\quad + \frac{2^{p_2} M_2}{t^{p_2}} \int_{\{x \in \mathbb{R}^1 : |f(x)| \leqslant t\}} |f(x)|^{p_2}\,dx. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и формулы (3) получаем

$$\begin{aligned} \|T(f)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^1)} &= p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(t)\,dt \\ &\leqslant p 2^{p_1} M_1 \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{t^{p_1}} \int_{\{x \in \mathbb{R}^1 : |f(x)| > t\}} |f(x)|^{p_1}\,dx\,dt \\ &\quad + p 2^{p_2} M_2 \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{t^{p_2}} \int_{\{x \in \mathbb{R}^1 : |f(x)| \leqslant t\}} |f(x)|^{p_2}\,dx\,dt \\ &= p 2^{p_1} M_1 \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^{p_1} \int_0^{|f(x)|} t^{p-p_1-1}\,dt\,dx \\ &\quad + p 2^{p_2} M_2 \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^{p_2} \int_{|f(x)|}^\infty t^{p-p_2-1}\,dt\,dx \\ &= \frac{p 2^{p_1} M_1}{p - p_1} \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^p\,dx + \frac{p 2^{p_2} M_2}{p_2 - p} \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^p\,dx \\ &= M \cdot \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^1)}, \end{aligned}$$

т.е. оператор T имеет тип (p, p). Теорема 1 доказана.

2°. Максимальная функция.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, суммируема на любом интервале $(-A, A)$, $A > 0$. *Максимальной функцией* (для $f(x)$) называется функция

$$M(f,x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)|\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$

где sup берется по всем интервалам I, содержащим точку x.

Теорема 2. а) *Если функция $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то для любого $t > 0$*

$$m\{x \in \mathbb{R}^1 : M(f,x) > t\} \leqslant \frac{5}{t} \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|\,dx;$$

б) *если $f \in L^p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p \leqslant \infty$, то*

$$\|M(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^1)} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^1)},$$

где C_p – постоянная, зависящая только от числа p.

Лемма 1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^1$ – измеримое множество и $\{I_\alpha\}$ – семейство интервалов ограниченной длины, покрывающее E: $E \subset \bigcup\limits_\alpha I_\alpha$. Тогда из этого семейства можно выбрать последовательность $I_1, I_2, \ldots$ попарно непересекающихся интервалов (конечную или бесконечную) такую, что*

$$\sum_k |I_k| \geqslant \frac{1}{5}\, m(E). \tag{17}$$

Доказательство леммы 1. Будем строить интервалы $I_1, I_2, \ldots$ по индукции. На первом шаге выберем из семейства $\{I_\alpha\}$ интервал I_1, для которого $|I_1| \geqslant \dfrac{1}{2} \sup\limits_\alpha |I_\alpha|$. Предположив теперь, что интервалы $I_1, I_2, \ldots, I_k$ уже построены, найдем непересекающийся с $I_1, I_2, \ldots, I_k$ интервал I_{k+1} с

$$|I_{k+1}| \geqslant \frac{1}{2} \sup\bigl\{|I_\alpha| : I_\alpha \cap I_j = \varnothing,\ j = 1, 2, \ldots, k\bigr\}.$$

Если такого интервала не существует, то построение заканчивается.

Последовательность $I_1, I_2, \ldots$ определена. Докажем неравенство (17). В рассмотрении нуждается только случай $\sum\limits_k |I_k| < \infty$. Пусть I_k^* – интервал с тем же центром, что и I_k, но в пять раз большей длины: $|I_k^*| = 5|I_k|$. Докажем, что

$$E \subset \bigcup_k I_k^*. \tag{18}$$

Для этого достаточно проверить, что любой интервал I из семейства $\{I_\alpha\}$ содержится в $\bigcup\limits_k I_k^*$.

Так как $\sum\limits_k |I_k| < \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} |I_k| = 0$ и для достаточно больших k

$$|I_{k+1}| < \frac{1}{2}\,|I|. \tag{19}$$

Пусть k_0 $(1 \leqslant k_0 < \infty)$ – наименьшее из чисел k, удовлетворяющих оценке (19). Согласно построению I пересекает один из интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_{k_0}$, т.е. для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant k_0$, $I \cap I_j \neq \varnothing$ и $\frac{1}{2}|I| \leqslant |I_j|$. Но тогда $I \subset I_j^*$, и мы получили соотношение (18). Наконец, из (18) мы находим, что

$$m(E) \leqslant \sum_k |I_k^*| = 5\sum_k |I_k|.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$. Фиксируем число $t > 0$ и положим

$$E_t = \bigl\{x \in \mathbb{R}^1 : M(f,x) > t\bigr\}.$$

Согласно определению максимальной функции для любого $x \in E_t$ существует интервал I_x такой, что

$$x \in I_x \quad \text{и} \quad \int_{I_x} |f(u)|\,du > t|I_x|. \tag{20}$$

Семейство интервалов $\{I_x\}_{x\in E_t}$ ограниченной длины (см. (20)) покрывает E_t. В силу леммы 1 найдется последовательность непересекающихся интервалов $\{I_k\}$ с

$$\sum_k |I_k| \geqslant \frac{1}{5}\,m(E_t). \tag{21}$$

Так как (см. (20))

$$\sum_k |I_k| < \frac{1}{t}\sum_k \int_{I_k} |f(u)|\,du \leqslant \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^1} |f(u)|\,du,$$

то из (21) вытекает конечность меры $m(E_t)$ и оценка

$$m(E_t) < \frac{5}{t}\int_{\mathbb{R}^1} |f(u)|\,du.$$

Докажем теперь утверждение б). При $p = \infty$ оценка б) (с константой $C_\infty = 1$) очевидна. Если $1 < p < \infty$, то, фиксировав $t > 0$, положим

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| > t/2, \\ 0, & \text{если } |f(x)| \leqslant t/2, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^1.$$

Тогда $|f(x)| \leqslant |h(x)| + t/2$ и $M(f,x) \leqslant M(h,x) + t/2$, $x \in \mathbb{R}^1$. Следовательно,

$$E_t \equiv \{x \in \mathbb{R}^1 : M(f,x) > t\} \subset \{x \in \mathbb{R}^1 : M(h,x) > t/2\}$$

и (см. а))

$$m(E_t) \leqslant \frac{10}{t} \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^1)} = \frac{10}{t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^1 : |f(x)| > t/2\}} |f(x)|\, dx.$$

В заключение используем равенство (3):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} M^p(f,x)\, dx &= p \int_0^\infty t^{p-1} m(E_t)\, dt \\ &\leqslant 10p \int_0^\infty t^{p-1} \cdot \frac{1}{t} \int_{\{x \in \mathbb{R}^1 : |f(x)| > t/2\}} |f(x)|\, dx\, dt \\ &= 10p \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)| \int_0^{2|f(x)|} t^{p-2}\, dt\, dx \\ &= C_p \int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^p\, dx. \end{aligned}$$

Замечание. Из пункта а) теоремы 2 нетрудно вывести теорему Лебега о дифференцируемости п.в. неопределенного интеграла.

§ 3. Некоторые сведения из функционального анализа

1°. Определение 3. Пусть $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N \subset L^2(E)$ – система функций, заданных на множестве E ($E \subset \mathbb{R}^1$, $1 \leqslant N \leqslant \infty$). *Матрицей Грама* системы Φ называется матрица

$$G = G_\Phi = \{u_{n,j}\}_{n,j=1}^N, \quad \text{где} \quad u_{n,j} = \int_E \varphi_n(x)\varphi_j(x)\, dx.$$

Несложно проверить (это делается в курсе линейной алгебры для любых евклидовых пространств), что справедливо

Утверждение 3. *Система функций* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N \subset L^2(E)$, $1 \leqslant N < \infty$, *линейно независима тогда и только тогда, когда определитель* $\det G_\Phi \neq 0$.

Утверждение 4. *Пусть в* $L^2(E)$ *заданы две системы функций* $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ *и* $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=1}^N$, $1 \leqslant N < \infty$, *и* L_Φ, L_Ψ – *подпространства, натянутые на функции* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ *и соответственно* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^N$. *Тогда если матрицы Грама систем* Φ *и* Ψ *равны:* $G_\Phi = G_\Psi$, *то существует такой изометрический оператор* $T\colon L_\Phi \to L_\Psi$ (*т.е.* $\|T(f)\|_{L^2(E)} = \|f\|_{L^2(E)}$, *если* $f \in L_\Phi$), *что*

$$T(\varphi_n) = \psi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{22}$$

2°. Теорема о минимаксе.

Теорема (фон Нейман). *Пусть* $A = \{a_{i,j}\}$ ($a_{i,j} \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$) – *матрица с неотрицательными элементами и*

$$\sigma_m = \left\{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, \ldots, x_m),\ x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^m x_i = 1\right\}.$$

Тогда для билинейной формы

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \qquad (x = \{x_i\},\ y = \{y_j\})$$

справедливо равенство

$$\min_{y \in \sigma_n} \max_{x \in \sigma_m} F(x, y) = \max_{x \in \sigma_m} \min_{y \in \sigma_n} F(x, y). \tag{23}$$

Доказательство. Обозначим через γ и ρ соответственно левую и правую части равенства (23). Неравенство $\gamma \geqslant \rho$ проверяется совсем просто. Действительно, если $x_0 \in \sigma_m$ – такая точка, что $\min\limits_{y \in \sigma_n} F(x_0, y) = \rho$, то, учитывая неравенство

$$\max_{x \in \sigma_m} F(x, y) \geqslant F(x_0, y), \qquad y \in \sigma_n,$$

находим

$$\gamma = \min_{y \in \sigma_n} \max_{x \in \sigma_m} F(x, y) \geqslant \min_{y \in \sigma_n} F(x_0, y) = \rho.$$

Для доказательства обратного неравенства $\gamma \leqslant \rho$ рассмотрим замкнутые множества

$$A(x,\varepsilon) = \{y \in \sigma_n : F(x,y) \leqslant \rho + \varepsilon\}, \qquad x \in \sigma_m, \quad \varepsilon > 0.$$

Достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\bigcap_{\nu=1}^{s} A(x^\nu,\varepsilon) \neq \varnothing, \qquad s = 1,2,\ldots, \tag{24}$$

где $x^\nu = \{x_1^\nu,\ldots,x_m^\nu\}$, $\nu = 1,2,\ldots,$ – последовательность, всюду плотная в σ_m. Действительно, из (24) и замкнутости множеств $A(x,\varepsilon)$ следует, что найдется такая точка $y_0 \in \sigma_n$, что $y_0 \in A(x^\nu,\varepsilon)$ для $\nu = 1,2,\ldots,$ т.е.

$$\max_{1\leqslant\nu<\infty} F(x^\nu,y_0) \leqslant \rho + \varepsilon. \tag{25}$$

Так как функция $F(x,y)$ непрерывна, то из (25) вытекает, что

$$\max_{x\in\sigma_m} F(x,y_0) \leqslant \rho + \varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получим неравенство $\gamma \leqslant \rho$.

Пусть числа $s = 1,2,\ldots$ и $\varepsilon > 0$ фиксированы и

$$P = \{(\zeta_1,\ldots,\zeta_s) \in \mathbb{R}^s : \zeta_\nu \leqslant \rho + \varepsilon,\ \nu = 1,2,\ldots,s\}.$$

Пусть, кроме того, $Q \subset \mathbb{R}^s$ – совокупность всех векторов вида

$$\big(F(x^1,y), F(x^2,y),\ldots,F(x^s,y)\big), \qquad y \in \sigma_n.$$

Ясно, что Q – выпуклое, замкнутое, ограниченное множество. Покажем, что

$$P \cap Q \neq \varnothing. \tag{26}$$

Допустим противное: $P \cap Q = \varnothing$. Тогда в силу известного следствия из теоремы Хана–Банаха выпуклые множества P и Q разделимы линейным функционалом:

Найдутся вектор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ и число $\alpha \in \mathbb{R}^1$ такие, что

$$\begin{aligned}
&1)\quad \sum_{\nu=1}^{s} |\alpha_\nu| = 1;\\
&2)\quad \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu\zeta_\nu \leqslant \alpha, \quad \text{если} \quad (\zeta_1,\ldots,\zeta_s) \in P;\\
&3)\quad \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu\zeta_\nu \geqslant \alpha, \quad \text{если} \quad (\zeta_1,\ldots,\zeta_s) \in Q.
\end{aligned} \tag{27}$$

Так как векторы $(0,\dots 0,\zeta_\nu,0,\dots,0) \in P$, если $\zeta_\nu \leqslant \rho$, $1 \leqslant \nu \leqslant s$, то из (27), 2) следует, что $\alpha_\nu \geqslant 0$, $\nu = 1,2,\dots,s$. Рассмотрим вектор

$$x^0 = (x_1^0,\dots,x_m^0) = \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu x^\nu, \quad \text{т.е.} \quad x_i^0 = \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu x_i^\nu.$$

Так как $\alpha_\nu \geqslant 0$ и $x^\nu \in \sigma_m$, $1 \leqslant \nu \leqslant s$, то $x_i^0 \geqslant 0$ и (см. (27), 1))

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^0 = \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu \sum_{i=1}^{m} x_i^\nu = \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu = 1,$$

т.е. $x^0 \in \sigma_m$.

С другой стороны, учитывая, что s-мерный вектор $(\rho+\varepsilon,\dots,\rho+\varepsilon) \in P$, мы из (27), 2) и 3) выводим, что для любого $y \in \sigma_n$

$$F(x^0,y) = \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu F(x^\nu,y) \geqslant \alpha \geqslant \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu(\rho+\varepsilon) > \rho,$$

что противоречит определению числа ρ. Тем самым соотношение (26) доказано.

Фиксируем произвольный вектор $(\zeta_1^0,\dots,\zeta_s^0) \in P \cap Q$. Тогда

$$\zeta_\nu^0 \leqslant \rho+\varepsilon \quad \text{и} \quad \zeta_\nu^0 = F(x^\nu,y^0), \qquad \nu = 1,2,\dots,s, \quad y^0 \in \sigma_n$$

(см. определение множеств P и Q), т.е. $y^0 \in A(x^\nu,\varepsilon)$, $\nu = 1,2,\dots,s$. Соотношение (24), а значит, и теорема доказаны.

3°. Доказательство теоремы 1.6 (см. § 1.4).

Необходимость. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ – базис в банаховом пространстве X, т.е. для любого $x \in X$ существует единственный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n = x,$$

сходящийся к x по норме пространства X.

Ясно, что система $\{x_n\}$ полна в X. Рассмотрим множество Y всех числовых последовательностей $A = \{a_n\}_{n=1}^\infty$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ сходится по норме X. Для $A = \{a_n\} \in Y$ положим

$$\|A\|_Y = \sup_{1 \leqslant N < \infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\|_X. \tag{28}$$

Легко видеть, что равенством (28) определена норма на линейном пространстве Y. Покажем, что Y – банахово пространство с нормой (28).

Пусть $A^{(k)} = \{a_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty} \in Y$, $k = 1, 2, \dots$, и

$$\|A^{(k)} - A^{(k+p)}\|_Y \to 0, \quad \text{если} \quad k \to \infty, \quad p = 1, 2, \dots .$$

Тогда, согласно (28), для любого $\varepsilon > 0$ найдется число k_0 такое, что для $N, R, p = 1, 2, \dots$

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+R} a_n^{(k)} x_n - \sum_{n=N}^{N+R} a_n^{(k+p)} x_n \right\|_X \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad k \geqslant k_0. \tag{29}$$

Из (29), в частности, вытекает, что для $n = 1, 2, \dots$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} a_n^{(k)} = a_n$. Фиксировав в (29) числа k, N, R и устремив p к бесконечности, найдем

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+R} a_n^{(k)} x_n - \sum_{n=N}^{N+R} a_n x_n \right\|_X \leqslant \varepsilon, \qquad k \geqslant k_0, \quad N, R = 1, 2, \dots . \tag{30}$$

Так как $\{a_n^{k_0}\} \in Y$, то для достаточно большого числа $N_0 = N_0(\varepsilon)$

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+R} a_n^{(k_0)} x_n \right\|_X \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad N \geqslant N_0, \quad R = 1, 2, \dots .$$

Отсюда и из (30) следует, что при $N \geqslant N_0$

$$\left\| \sum_{n=N}^{N+R} a_n x_n \right\|_X \leqslant 2\varepsilon, \qquad R = 1, 2, \dots,$$

т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ сходится в X и $A = \{a_n\} \in Y$. Оценка (30) показывает, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|A^{(k)} - A\|_Y = 0$. Таким образом, Y – банахово пространство.

Рассмотрим линейный оператор $T\colon Y \to X$, который каждому элементу $A = \{a_n\} \in Y$ сопоставляет сумму (в X) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, т.е.

$$T(A) \equiv T(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Из базисности системы $\{x_n\}$ в X и определения нормы в пространстве Y (см. (28)) непосредственно вытекает, что T – линейный, ограниченный оператор, взаимно однозначно отображающий Y на X. По теореме Банаха об обратном операторе, оператор T^{-1} также ограничен, т.е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\sup_{1\leqslant N<\infty}\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n\right\|_X \leqslant M\|x\|_X, \qquad x\in X, \tag{31}$$

и мы доказали, что базис $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию в) (см. формулировку теоремы 1.6).

Кроме того, из (31) следует ограниченность линейных функционалов $a_n(x)$, $x \in X$, $n = 1,2,\ldots$, а потому (см. теорему 1.2) и минимальность системы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – полная и минимальная система в пространстве X, а $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ – сопряженная к $\{x_n\}$ система (существование и единственность $\{y_n\}$ показана в гл. 1). Пусть, кроме того, существует число M такое, что для любого $x \in X$

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \langle y_n, x\rangle\, x_n\right\|_X \leqslant M\|x\|_X, \qquad N=1,2,\ldots. \tag{32}$$

Докажем, что $\{x_n\}$ – базис в X. Фиксируем произвольный элемент x из X и $\varepsilon > 0$. В силу полноты системы $\{x_n\}$ найдется полином по этой системе: $P = \sum\limits_{n=1}^{R} a_n x_n$, для которого

$$\|P-x\|_X \leqslant \varepsilon. \tag{33}$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{N} \langle y_n, P\rangle\, x_n = P$, если $N \geqslant R$, то из (32) и (33) получим

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{N} \langle y_n, x\rangle\, x_n - x\right\|_X &\leqslant \left\|\sum_{n=1}^{N} \langle y_n, x\rangle\, x_n - P\right\|_X + \|P-x\|_X\\ &\leqslant \left\|\sum_{n=1}^{N} \langle y_n, x-P\rangle\, x_n\right\|_X + \varepsilon\\ &\leqslant M\|x-P\|_X + \varepsilon \leqslant (M+1)\varepsilon,\end{aligned}$$

если $N \geqslant R$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle y_n, x\rangle\, x_n$ сходится в X к x. Единственность такого ряда следует из биортонормированности системы $\{x_n, y_n\}$: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ сходится к x, то при $n = 1, 2, \ldots$

$$\langle y_n, x\rangle = \left\langle y_n, \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle y_n, x_k\rangle = a_n.$$

Теорема доказана.

Приложение 2.
Некоторые сведения из теории функций комплексного переменного

§ 1. Интеграл Пуассона

Если $f(x)$ и $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, – суммируемые на $[-\pi, \pi]$ 2π-периодические комплекснозначные функции, то через $f * g(x)$ будем обозначать свертку

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t)\, dt.$$

Из теоремы Фубини легко следует, что свертка суммируемых функций также суммируема на $[-\pi, \pi]$ и

$$c_n(f * g) = c_n(f) \cdot c_{-n}(g), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\{c_n(f)\}$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Пусть $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Рассмотрим при $0 \leqslant r < 1$ функцию

$$f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) r^{|n|} e^{inx}, \qquad x \in [-\pi, \pi], \tag{2}$$

где ряд в правой части равенства (2) сходится равномерно по x для любого фиксированного r, $0 \leqslant r < 1$. Коэффициенты Фурье функции $f_r(x)$ равны $c_n(f_r) = c_n(f) r^{|n|}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а это согласно (1) значит, что $f_r(x)$ можно представить в виде свертки:

$$f_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) P_r(t)\, dt, \tag{3}$$

где

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}, \qquad t \in [-\pi, \pi]. \tag{4}$$

Функция двух переменных $P_r(t)$, $0 \leqslant r < 1$, $t \in [-\pi, \pi]$, называется *ядром Пуассона*, а интеграл (3) – *интегралом Пуассона*. Легко видеть, что

$$P_r(t) = \operatorname{Re}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int}\right] = \operatorname{Re}\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}.$$

Следовательно,

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t}, \qquad 0 \leqslant r < 1, \quad t \in [-\pi, \pi]. \tag{5}$$

Если $f \in L^1(-\pi, \pi)$ – действительная функция, то, учитывая, что $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, из соотношения (2) получим

$$\begin{aligned} f_r(x) &= c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) r^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n(f)} r^n e^{-inx} \\ &= \frac{1}{2}\left[F(re^{ix}) + \overline{F(re^{ix})}\right] = \operatorname{Re} F(re^{ix}), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$F(z) = c_0(f) + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) r^n e^{inx} \qquad (z = re^{ix}) \tag{7}$$

– аналитическая в единичном круге функция. Равенство (6) показывает, что для любой действительной функции $f \in L^1(-\pi, \pi)$ интегралом Пуассона (3) определяется гармоническая в единичном круге функция

$$u(z) = f_r(e^{ix}), \qquad z = re^{ix}, \quad 0 \leqslant r < 1, \quad x \in [-\pi, \pi]. \tag{8}$$

При этом гармонически сопряженная с $u(z)$ функция $v(z)$ с $v(0) = 0$ задается формулой

$$v(z) = \operatorname{Im} F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-i(\operatorname{sign} n) r^{|n|} c_n(f)\right] e^{inx}, \tag{8}$$

где, как обычно,

$$\operatorname{sign}\alpha = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{|\alpha|}, & \text{если } \alpha \neq 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0, \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}^1. \tag{9}$$

Утверждение 1. *Пусть $u(z)$ – гармоническая (или аналитическая) в круге $|z| < 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ функция и $f(x) = u(e^{ix})$, $x \in [-\pi, \pi]$. Тогда*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P_r(t)\,dt, \qquad z = re^{ix}, \quad |z| < 1. \tag{10}$$

Так как ядро Пуассона – действительная функция, то равенство (10) достаточно проверить в случае, когда $u(z)$ – аналитическая функция:

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad |z| < 1 + \varepsilon.$$

Но тогда

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{ix})e^{-inx}\,dx = \begin{cases} c_n, & \text{если } n \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } n < 0, \end{cases}$$

и равенство (10) сразу следует из (2) и (3).

Прежде чем перейти к изучению поведения функции $f_r(x)$ при $r \to 1$, отметим некоторые свойства ядра Пуассона:

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad P_r(t) \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant r < 1, \quad t \in [-\pi, \pi]; \\ &\text{б)} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\,dt = 1, \qquad 0 \leqslant r < 1; \\ &\text{в)} \quad \text{для любого } \delta > 0 \quad \mu_\delta(r) := \sup_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} P_r(t) = o(1) \ \text{при } r \to 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Соотношения а) и в) сразу следуют из формулы (5), а для доказательства б) достаточно положить в (2) и (3) $f(x) \equiv 1$.

Теорема 1. *Для произвольной (комплекснозначной) функции $f \in L^p(-\pi, \pi)$, $1 \leqslant p < \infty$, имеет место равенство*

$$\lim_{r \to 1} \|f - f_r\|_{L^p(-\pi,\pi)} = 0$$

(см. (3)); *если же $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то*

$$\lim_{r \to 1} \|f - f_r\|_{C(-\pi,\pi)} = 0.$$

Доказательство. В силу (3) и свойства б) ядра Пуассона

$$f_r(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]P_r(t)\,dt. \tag{12}$$

Для любой функции $g \in L^q(-\pi,\pi)$, $1/p+1/q=1$, $\|g\|_{L^q(-\pi,\pi)} = 1$, пользуясь неравенством Гёльдера и положительностью ядра Пуассона, находим

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}[f_r(x) - f(x)]g(x)\,dx \\
&\quad= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t) - f(x)]g(x)\,dx\right\}P_r(t)\,dt \\
&\quad\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(x+t) - f(x)\|_{L^p(-\pi,\pi)}\|g\|_{L^q(-\pi,\pi)}P_r(t)\,dt \\
&\quad\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega_p(|t|,f)P_r(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|f_r - f\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega_p(|t|,f)P_r(t)\,dt,$$

и если для данного $\varepsilon > 0$ найти число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $\omega_p(t,f) \leqslant \varepsilon/2$ при $t \in (0,\delta)$, то для r, достаточно близких к единице, мы получим оценку (см. (11))

$$\begin{aligned}
&\|f_r - f\|_{L^p(-\pi,\pi)} \\
&\quad\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}\omega_p(|t|,f)P_r(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\omega_p(|t|,f)P_r(t)\,dt \\
&\quad\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_{L^p(-\pi,\pi)}\cdot\mu_\delta(r) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Аналогично, второе утверждение в теореме 1 вытекает из неравенства (см. (12) и (11), а), б))

$$\|f_r - f\|_{C(-\pi,\pi)} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(|t|,f)P_r(t)\,dt.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (Фату). *Пусть $f(x)$ – комплекснозначная функция из $L^1(-\pi,\pi)$. Тогда*

$$\lim_{r\to 1} f_r(x) = f(x) \quad \text{для п.в.} \quad x\in[-\pi,\pi].$$

Доказательство. Покажем, что для $x\in[-\pi,\pi]$ и $0<r<1$

$$|f_r(x)| \leqslant C\cdot M(f,x), \tag{13}$$

где C – абсолютная постоянная, а $M(f,x)$ – максимальная функция для $f(x)$[1)] (см. определение 2 из приложения 1). Для этой цели используем легко выводимую из (5) оценку

$$P_r(t) \leqslant K\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+t^2}, \qquad \varepsilon = 1-r, \quad 0<r<1, \quad t\in[-\pi,\pi]$$

(K – абсолютная постоянная).

Пусть $k_0 = k_0(\varepsilon)$ – такое число, что

$$2^{k_0}\varepsilon < \pi \leqslant 2^{k_0+1}\varepsilon.$$

Тогда для $x\in[-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned}
|f_r(x)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P_r(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{k_0-1}\int_{2^k\varepsilon<|t|\leqslant 2^{k+1}\varepsilon} |f(x+t)|P_r(t)\,dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{2^{k_0}\varepsilon<|t|\leqslant\pi} |f(x+t)|P_r(t)\,dt \\
&\leqslant \frac{K}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^k\varepsilon<|t|\leqslant 2^{k+1}\varepsilon} |f(x+t)|\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+t^2}\,dt \\
&\leqslant \frac{K}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+2^{2k}\varepsilon^2}\int_{0<|t|\leqslant 2^{k+1}\varepsilon} |f(x+t)|\,dt \\
&\leqslant M(f,x)\,\frac{K}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon(1+2^{2k})}\,2^{k+2}\varepsilon \leqslant C\cdot M(f,x).
\end{aligned}$$

Неравенство (13) доказано.

[1)] Мы считаем, что $f(x)$ продолжена с сохранением периодичности на отрезок $[-2\pi,2\pi]$ (т.е. $f(x)=f(y)$, если $x,y\in[-2\pi,2\pi]$, $x-y=2\pi$) и $f(x)=0$, если $|x|>2\pi$.

Используя затем слабый тип $(1,1)$ оператора $f(x) \to M(f,x)$ (см. теорему 2 из приложения 1), найдем такую последовательность функций $\{f^{(n)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in \mathbb{R}^1$, что

$$\begin{gathered} f^{(n)} \in C(-2\pi, 2\pi), \ f^{(n)}(x) = 0, \text{ если } |x| > 2\pi, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = f(x), \ \lim_{n\to\infty} M(f^{(n)} - f, x) = 0 \text{ для п.в. } x \in (-2\pi, 2\pi). \end{gathered} \tag{14}$$

Согласно (13) при $x \in (-\pi, \pi)$

$$\begin{aligned} &|f_r(x) - f(x)| \\ &\quad \leqslant |f_r(x) - f_r^{(n)}(x)| + |f_r^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)| + |f^{(n)}(x) - f(x)| \\ &\quad \leqslant C \cdot M(f^{(n)} - f, x) + |f_r^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)| + |f^{(n)}(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Из последней оценки и (14), учитывая, что по теореме 1 $\lim\limits_{r\to 1} f_r^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ для каждого $x \in [-\pi, \pi]$, мы получаем утверждение теоремы 2.

Замечание. Используя вместо (13) более сильное неравенство (59), которое мы докажем в §3, можно показать, что $f_r(t) \to f(x)$ для п.в. $x \in (-\pi, \pi)$, когда точка re^{it} стремится к e^{ix} по некасательному к окружности $|z| = 1$ пути (см. подробнее §3).

§2. Пространства H^p

Определение 1. *Пространство* H^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ – совокупность аналитических в единичном круге функций $F(z)$, для которых конечна норма

$$\|F\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^p \, dt \right\}^{1/p}. \tag{15}$$

Пусть комплекснозначная функция $\Phi(x) \in L^p(-\pi, \pi)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(t) e^{int} \, dt = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

тогда функция $F(z)$, определенная равенством

$$F(z) = \Phi_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x+t) P_r(t) \, dt, \qquad z = re^{ix}, \tag{17}$$

принадлежит пространству H^p, причем

$$\|F\|_{H^p} = \|\Phi\|_{L^p(-\pi,\pi)}. \tag{18}$$

Действительно, аналитичность функции $F(z)$ следует из (16) и равенства (2). Кроме того, в силу равенства

$$\|f * g\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant \frac{1}{2\pi}\, \|f\|_{L^p(-\pi,\pi)} \|g\|_{L^1(-\pi,\pi)}$$

(см., например, доказательство оценки 4.(16)), мы имеем

$$\|F\|_{H^p} \leqslant \frac{1}{2\pi}\, \|\Phi\|_{L^p(-\pi,\pi)} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)\, dt = \|\Phi\|_{L^p(-\pi,\pi)}.$$

Наконец, в силу теоремы 1 (а при $p = \infty$ в силу теоремы 2) $\|\Phi\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant \|F\|_{H^p}$, и мы получим равенство (18).

Ниже мы докажем, что каждую функцию $F \in H^p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ можно представить в виде (17). Для этого нам потребуется

Теорема 3. *Пусть комплекснозначная функция $\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[-\pi,\pi]$, непрерывна слева на $(-\pi,\pi]$ и*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, d\varphi(t) = 0 \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

Тогда $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна на $[-\pi,\pi]$.

Замечание. В (19) и ниже рассматривается интеграл Лебега–Стилтьеса, построенный по комплекснозначной функции ограниченной вариации $\varphi(t)$. Мы говорим, что функция $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ имеет ограниченную вариацию (абсолютно непрерывна), если обе действительные функции $u(t)$ и $v(t)$ имеют ограниченную вариацию (соответственно абсолютно непрерывны). При этом интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, d\varphi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, du(t) + i \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dv(t)$$

определен для каждой непрерывной на $[-\pi,\pi]$ функции $f(t)$, а также если $f(t) = \chi_F(t)$ – характеристическая функция замкнутого множества $F \subset [-\pi,\pi]$.

Доказательство теоремы 3. Нам достаточно проверить, что для любого замкнутого множества $F \subset (-\pi, \pi)$, $m(F) = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi_F(t)\, d\varphi(t) = 0. \tag{20}$$

Действительно, из (20) следует, что φ абсолютно непрерывна на $(-\pi, \pi)$, а значит, $\varphi(t) = \varphi_1(t) + s(t)$, где φ_1 абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, $s(t) = 0$ при $t \in (-\pi, \pi]$, $s(-\pi) = \lambda$. Но тогда

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, d\varphi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, d\varphi_1(t) - \lambda e^{-in\pi} = o(1) - \lambda e^{-in\pi}, \quad n \to \infty,$$

т.е. $\lambda = 0$ и φ абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$.

Нам потребуется

Лемма 1. *Пусть F – замкнутое, а V – открытое множества, причем $F \subset V \subset (-\pi, \pi)$ и $m(F) = 0$. Тогда для всякого ε, $0 < \varepsilon < 1/3$, существует функция $g(t) \in C^\infty(-\pi, \pi)$ вида*

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g) e^{int}, \tag{21}$$

обладающая свойствами:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad |g(t) - 1| \leqslant 3\varepsilon, \quad \textit{если} \quad t \in F;\\
&\text{б)}\quad |g(t)| \leqslant 3\varepsilon, \quad \textit{если} \quad t \notin V;\\
&\text{в)}\quad \|g\|_{C(-\pi,\pi)} \leqslant 3.
\end{aligned} \tag{22}$$

Выведем из леммы 1 равенство (20), а затем докажем саму лемму 1.

Пусть $(-\pi, \pi) \setminus F = \bigcup\limits_k (a_k, b_k)$, где (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots,$ – конечная или бесконечная последовательность дополнительных интервалов множества F, и для $r = 1, 2, \ldots$, $\nu = 3, 4, \ldots$

$$V_{r,\nu} = (-\pi, \pi) \setminus \bigcup_{k \leqslant r} \left[a_k + \frac{1}{\nu}(b_k - a_k),\, b_k - \frac{1}{\nu}(b_k - a_k)\right].$$

Очевидно, что $V_{r,\nu}$ – открытое множество и $F \subset V_{r,\nu}$. Рассмотрим для данных $\varepsilon > 0$, $r, \nu = 3, 4, \ldots$ функцию $g(t) = g_{\varepsilon,r,\nu}(t)$, построенную в лемме 1 для числа ε и множества $V_{r,\nu}$. Тогда нетрудно проверить, что если $r, \nu \to \infty$, а $\varepsilon \to 0$, то разность

$$\int_{-\pi}^{\pi} \chi_F(t)\, d\varphi(t) - \int_{-\pi}^{\pi} g_{\varepsilon,r,\nu}(t)\, d\varphi(t) \to 0. \tag{23}$$

Но в силу (19) и равномерной сходимости ряда (21)

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_{\varepsilon,r,\nu}(t)\, d\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g_{\varepsilon,r,\nu}) \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\, d\varphi(t) = 0,$$

и (см. (23)) мы получаем равенство (20).

Доказательство леммы 1. Пусть $f(t)$ – непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция, для которой

$$\|f\|_{C(-\pi,\pi)} \leqslant 1,$$
$$f(t) = 1, \text{ если } t \in F, \text{ и } f(t) = 0, \text{ если } t \notin V.$$

Так как средние Фейера (см. 4.(12)) $\sigma_N(f,t)$, $N = 1, 2, \ldots$, равномерно сходятся к $f(t)$ и $\|\sigma_N(f)\|_{C(-\pi,\pi)} \leqslant \|f\|_{C(-\pi,\pi)}$, то существует тригонометрический полином

$$G(t) = \sum_{|n| \leqslant m} \alpha_n e^{int} \tag{24}$$

такой, что

$$\begin{gathered} \|G\|_{C(-\pi,\pi)} \leqslant 1, \\ |G(t) - 1| < \varepsilon, \text{ если } t \in F, \text{ и } |G(t)| < \varepsilon, \text{ если } t \notin V. \end{gathered} \tag{25}$$

Пусть $\varepsilon = e^{-A}$ $(A > 1)$. Рассмотрим для каждого $\delta > 0$ такую функцию $h_\delta(t) \in C(-\pi,\pi)$, что

1) $h_\delta(t) = -2A + \dfrac{\varepsilon}{2}$, если $t \in F$,

2) $-2A + \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant h_\delta(t) \leqslant 0$, для любого $t \in (-\pi,\pi)$,

3) $\|h_\delta\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant \delta$

(функцию $h_\delta(t)$ можно построить следующим образом: взять замкнутое множество $B \subset [-\pi,\pi]$, $B \cap F = \varnothing$, $-\pi, \pi \in B$, с мерой $m(B)$ достаточно близкой к 2π, и положить

$$h_\delta(t) = \Big(-2A + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \frac{\rho(t,B)}{\rho(t,F) + \rho(t,B)}, \qquad \rho(t,E) := \inf_{y \in E} |t - y| \Big).$$

Так как
$$\sum_{|n|\leqslant m} |c_n(h_\delta)| \leqslant (2m+1)\|h_\delta\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant (2m+1)\delta$$
(здесь число m то же, что в (24)), то для достаточно малых $\delta > 0$ функция
$$h(t) = h_\delta(t) - \sum_{|n|\leqslant m} c_n(h_\delta)e^{int}$$
удовлетворяет соотношениям
$$|h(t) + 2A| < \varepsilon, \text{ если } t \in F, \quad -2A < h(t) < \varepsilon, \text{ если } t \in [-\pi, \pi]. \tag{26}$$
При этом $c_n(h) = 0$, если $|n| \leqslant m$. Тогда средние Фейера $\sigma_N(h,t)$ функции $h(t)$ имеют вид
$$P(t) := \sigma_N(h,t) = \sum_{n=-N}^{-m-1} \beta_n e^{int} + \sum_{n=m+1}^{N} \beta_n e^{int}$$
и при достаточно большом N (см. (26))
$$|P(t) + 2A| < \varepsilon, \text{ если } t \in F, \quad -2A < P(t) < \varepsilon, \text{ если } t \in [-\pi, \pi]. \tag{27}$$
Положим
$$P^+(t) = \sum_{n=m+1}^{N} \beta_n e^{int}, \qquad P^-(t) = \sum_{n=-N}^{-m-1} \beta_n e^{int}. \tag{28}$$
Так как $h(t)$ – действительная функция, то $c_n(h) = \overline{c_{-n}(h)}$, и $\beta_n = \overline{\beta_{-n}}$, $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$. Поэтому
$$P^+(t) = \overline{P^-(t)} \text{ и } \operatorname{Re} P^+(t) = \frac{P(t)}{2}, \qquad t \in [-\pi, \pi]. \tag{29}$$
Определим искомую функцию $g(t)$:
$$g(t) = G(t)\big[1 - \exp\{P^+(t)\}\big] = -G(t)\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[P^+(t)]^\nu}{\nu!}.$$
Ясно, что $g \in C^\infty(-\pi,\pi)$, а из (24) и (28) следует, что $c_n(g) = 0$ при $n < 0$, т.е.
$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g)e^{int}. \tag{30}$$

В силу соотношений (25), (27) и (29) для $t \in F$

$$\begin{aligned}|g(t)-1| &\leqslant |g(t)-G(t)|+|G(t)-1| \leqslant \exp\{\operatorname{Re} P^+(t)\}+\varepsilon \\ &\leqslant \exp\left\{\frac{P(t)}{2}\right\}+\varepsilon \leqslant \exp\left\{-A+\frac{\varepsilon}{2}\right\}+\varepsilon \leqslant 3\varepsilon,\end{aligned}$$

а для $t \in [-\pi,\pi] \setminus V$

$$|g(t)| \leqslant \varepsilon\bigl[1+\exp\{\operatorname{Re} P^+(t)\}\bigr] = \varepsilon\left[1+\exp\frac{P(t)}{2}\right] < 3\varepsilon.$$

Наконец, для любого $t \in [-\pi,\pi]$

$$|g(t)| \leqslant 1+\exp\{\operatorname{Re} P^+(t)\} < 3.$$

Таким образом, функция $g(t)$ обладает всеми нужными свойствами (см. (22)). Лемма 1, а вместе с ней и теорема 3 доказаны.

Теорема 4. *Пусть функция $F \in H^p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Тогда для п.в. $x \in [-\pi,\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to 1} F(re^{ix}) = \Phi(x). \tag{31}$$

При этом

1) $F(re^{ix}) = \Phi_r(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x+t)P_r(t)\,dt, \quad 0 \leqslant r < 1, \ x \in [-\pi,\pi];$

2) $\lim\limits_{r\to 1} \|F(re^{ix})-\Phi(x)\|_{L^p(-\pi,\pi)} = 0, \quad 1 \leqslant p < \infty;$

3) $\|F\|_{H^p} = \|\Phi\|_{L^p(-\pi,\pi)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$

Доказательство. Нам достаточно доказать, что для каждой функции $F \in H^1$ найдется функция $\Phi \in L^1(-\pi,\pi)$ такая, что имеет место 1). Действительно, если $F \in H^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то тем более $F \in H^1$ и из 1) и теоремы 2 вытекает справедливость равенства (31) для п.в. $x \in [-\pi,\pi]$. При этом

$$\|\Phi\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant \sup_{0<r<1} \|F(re^{ix})\|_{L^p(-\pi,\pi)} < \infty$$

и по теореме 1

$$\lim_{r\to 1} \|F(re^{ix})-\Phi(x)\|_{L^p(-\pi,\pi)} = 0, \qquad 1 \leqslant p < \infty.$$

Наконец, из 1) следует (см. также (2)), что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)e^{inx}\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

а тогда (см. (18))

$$\|F\|_{H^p} = \|\Phi\|_{L^p(-\pi,\pi)}.$$

Пусть $F \in H^1$. Для построения искомой функции $\Phi \in L^1(-\pi,\pi)$ положим

$$\varphi_r(t) = \int_{-\pi}^{t} F(re^{ix})\,dx, \qquad t \in [-\pi,\pi], \quad 0 < r < 1.$$

Функции $\varphi_r(t)$, $0 < r < 1$, имеют равномерно ограниченную вариацию на $[-\pi,\pi]$:

$$V_{[-\pi,\pi]}(\varphi_r) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{ix})|\,dx \leqslant \|F\|_{H^1}.$$

Из последнего соотношения, учитывая определение интеграла Стилтьеса и теорему Хелли, легко вывести, что найдутся непрерывная слева на $(-\pi,\pi]$ функция ограниченной вариации $\varphi(t)$ и последовательность $\{r_k\}$, $0 < r_k < 1$, $k = 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 1$, такие, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,d\varphi(t) = \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,d\varphi_{r_k}(t) \equiv \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)F(r_k e^{it})\,dt \tag{32}$$

для любой функции $g \in C(-\pi,\pi)$. При этом (см. (32)) для $n = 1, 2, \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,d\varphi(t) = \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}F(r_k e^{it})\,dt = 0$$

(мы учли аналитичность функции $F(z)$ в единичном круге) и, следовательно (см. теорему 3), $\varphi(t)$ абсолютно непрерывна: существует функция $\Phi \in L^1(-\pi,\pi)$, для которой

$$\varphi(t) = \int_{-\pi}^{t} \Phi(u)\,du, \qquad t \in [-\pi,\pi].$$

Тогда (см. (32))

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\Phi(t)\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)F(r_k e^{it})\,dt, \qquad g \in C(-\pi,\pi). \tag{33}$$

Зафиксируем число r, $0 < r < 1$. Функция $F_k(z) = F(r_k z)$, $k = 1, 2, \ldots$, аналитична в круге $|z| < 1/r_k$ $(1/r_k > 1)$, поэтому согласно утверждению 1

$$F(r_k re^{ix}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(r_k e^{it})P_r(t-x)\,dt, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

В пределе при $k \to \infty$ из последнего равенства вытекает, что

$$\begin{aligned} F(re^{ix}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-x)\Phi(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x+t)P_r(t)\,dt, \qquad 0 \leqslant r < 1, \quad x \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Равенство 1), а вместе с ним и теорема 4 доказаны.

Обозначим через $\mathscr{H}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ класс тех функций $\Phi(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, которые являются граничными значениями функций из H^p, т.е. представимы в виде (см. также (31))

$$\Phi(x) = \lim_{r \to 1} F(re^{ix}) \quad \text{для п.в.} \quad x \in [-\pi, \pi], \quad F \in H^p.$$

В силу пунктов 3) и 2) теоремы 4 $\mathscr{H}^p \subset L^p(-\pi, \pi)$ и каждая функция $\Phi \in \mathscr{H}^p$ удовлетворяет условию (16). С другой стороны, выше мы доказали, что для произвольной $\Phi \in L^p(-\pi, \pi)$ с условием (16) интеграл Пуассона (17) определяет функцию из H^p. Следовательно (см. также теорему 2),

$$\mathscr{H}^p = \left\{\Phi \in L^p(-\pi, \pi) : \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)e^{inx}\,dx = 0, \ n = 1, 2, \ldots\right\}. \tag{34}$$

Из (34) вытекает, что $\mathscr{H}^p$ – (замкнутое) подпространство пространства $L^p(-\pi, \pi)$, а H^p – банахово пространство с нормой (15) (см. также п. 3) теоремы 4).

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Положим

$$H_0^p = \{F \in H^p : \operatorname{Im} F(0) = 0\}, \quad \mathscr{H}_0^p = \left\{\Phi \in \mathscr{H}^p : \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im}\Phi(x)\,dx = 0\right\}$$

и

$$\operatorname{Re}\mathscr{H}^p = \{f(x) : f(x) = \operatorname{Re}\Phi(x), \ x \in [-\pi, \pi], \ \Phi \in \mathscr{H}^p\}. \tag{35}$$

Справедлива

Теорема 5. *Следующие условия эквивалентны* $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$:

а) $\Phi \in \mathscr{H}_0^p$;

б) $\Phi \in L^p(-\pi,\pi)$, $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im}\Phi(x)\,dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)e^{inx}\,dx = 0$, $n = 1, 2, \ldots$;

в) $F(re^{ix}) = \Phi * P_r(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x+t)P_r(t)\,dt \in H_0^p$;

г) $\Phi(x) = f(x) + i\widetilde{f}(x)$,

где $f \in L^p(-\pi,\pi)$ – *такая действительная функция, что ее сопряженная* $\widetilde{f}$ (см. определение 5.2) *также принадлежит* $L^p(-\pi,\pi)$:

$$\widetilde{f}(x) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)-f(x)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,dt \in L^p(-\pi,\pi). \tag{36}$$

Доказательство. Эквивалентность условий а) и б) непосредственно вытекает из (34), а эквивалентность условий а) и в) – из теорем 4 и 2.

Докажем, что из г) следует б). Для этого достаточно проверить, что в случае, когда функция и ее сопряженная суммируемы: $f, \widetilde{f} \in L^1(-\pi,\pi)$, имеют место равенства

$$c_n(\widetilde{f}\,) = -i(\operatorname{sign} n)c_n(f), \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{37}$$

(см. (9)). Непосредственный подсчет по формуле (36) показывает, что $\widetilde{\cos nx} = \sin nx$, $n = 0, 1, \ldots$, $\widetilde{\sin nx} = -\cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$ (в этом случае $[f(t) - f(x)]/[2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}] \in L^1(-\pi,\pi)$). Следовательно, равенства (37) выполняются, если f – произвольный тригонометрический полином.

Пусть число $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ фиксировано. Для произвольной функции $f \in L^1(-\pi,\pi)$ и $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$\left.\begin{aligned} I_{f,k}(t) &= \frac{1}{2^k}\sum_{j=-k+1}^{k} f(x_j+t), \\ I^*_{f,k}(t) &= \frac{1}{2k}\sum_{j=-k+1}^{k} \widetilde{f}(x_j+t)e^{-in(x_j+t)}, \end{aligned}\right\} \qquad t \in [-\pi,\pi],$$

где $x_j = (\pi j)/k$, $j = -k+1, -k+2, \ldots, k$.

Покажем, что равенство (37) для фиксированного нами номера n вытекает из следующих свойств функций $I_{f,k}(t)$ и $I^*_{f,k}(t)$ (наличие этих свойств у $I_{f,k}(t)$ и $I^*_{f,k}(t)$ устанавливается ниже):

1) $m\{t \in [-\pi,\pi] : |I_{f,k}(t)| > \varepsilon\} \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}, \quad \varepsilon > 0, \ k = 1, 2, \dots;$
2) при $k \to \infty$ функции $I_{f,k}(t)$, $t \in (-\pi,\pi)$, сходятся по мере к $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \equiv \text{const}$;
3) $m\{t \in [-\pi,\pi] : |I^*_{f,k}(t)| > \varepsilon\} \leqslant \dfrac{C}{\varepsilon}\|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}, \quad \varepsilon > 0, \ k = 1, 2, \dots,$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Итак, предположим, что имеют место соотношения 1)–3).

Легко видеть, что $I^*_{f,k}(t) = I_{g,k}(t)$ где $g(x) = \widetilde{f}(x)e^{-inx} \in L^1(-\pi,\pi)$, поэтому из 2) вытекает сходимость по мере последовательности функций $I^*_{f,k}(t)$, $k = 1, 2, \dots$:

$$I^*_{f,k}(t) \to c_n(\widetilde{f}) \ \text{ по мере при } \ k \to \infty. \tag{38}$$

Для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ найдем тригонометрический полином $f_1(x)$ такой, что

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad \|f_2\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4(C+1)}. \tag{39}$$

Тогда согласно 3)

$$m\left\{t \in [-\pi,\pi] : |I^*_{f_2,k}(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant \frac{2C}{\varepsilon}\|f_2\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{40}$$

и (см. (38)) при $k \geqslant k_0$

$$m\left\{t \in [-\pi,\pi] : |I^*_{f_1,k}(t) - c_n(\widetilde{f_1})| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{41}$$

Так как $f_1(x)$ – полином, то $c_n(\widetilde{f_1}) = -i(\operatorname{sign} n)c_n(f_1)$ и (см. (39))

$$\begin{aligned} |c_n(\widetilde{f_1}) + i(\operatorname{sign} n)c_n(f)| &\leqslant |c_n(f_1) - c_n(f)| \\ &= |c_n(f_2)| \leqslant \|f_2\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \tag{42}$$

Учитывая, что $I^*_{f,k}(t) = I^*_{f_1,k}(t) + I^*_{f_2,k}(t)$, и пользуясь оценками (40)–(42), мы находим

$$m\big\{t \in [-\pi,\pi] : |I^*_{f,k}(t) + i(\operatorname{sign} n)c_n(f)| > \varepsilon\big\} \leqslant \varepsilon, \qquad k > k_0,$$

что вместе с (38) доказывает равенство (37).

Докажем теперь, что для произвольной функции $f \in L^1(-\pi,\pi)$ справедливы соотношения 1)–3). Оценка 1) сразу следует из неравенства Чебышёва, так как

$$\|I_{f,k}(t)\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant \frac{1}{2k} \sum_{j=-k+1}^{k} \|f(x_j+t)\|_{L^1(-\pi,\pi)} = \|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}. \tag{43}$$

Чтобы доказать 2), фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0,1)$ и представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = g(x) + h(x), \qquad g \in C(-\pi,\pi), \quad \|h\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2}\,.$$

Из непрерывности функции $g(x)$ легко следует, что

$$\lim_{k\to\infty} I_{g,k}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx$$

равномерно по $t \in [-\pi,\pi]$. Поэтому при достаточно больших k ($k > k'$) с учетом (43) мы будем иметь

$$\begin{aligned} &\left|I_{g,k}(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right| \\ &\quad\leqslant \left|I_{g,k}(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad t \in [-\pi,\pi]. \end{aligned} \tag{44}$$

Кроме того, в силу 1) и (43)

$$m\left\{t \in [-\pi,\pi] : |I_{h,k}(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\,\|h\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant \varepsilon.$$

Из этого неравенства и (44) вытекает, что при $k > k'$

$$\begin{aligned} &m\left\{t \in [-\pi,\pi] : \left|I_{f,k}(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right| > \varepsilon\right\} \\ &\qquad\qquad\leqslant m\left\{t \in [-\pi,\pi] : |I_{h,k}(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Для доказательства оценки 3) заметим, что

$$|I^*_{f,k}(t)| = \left|\frac{1}{2k}\sum_{j=-k+1}^{k}\widetilde{f}(x_j+t)e^{-inx_j}\right| = |\widetilde{F}(t)|,$$

где

$$F(t) = \frac{1}{2k}\sum_{j=-k+1}^{k} f(x_j+t)e^{-inx_j}.$$

Применяя неравенство а) из теоремы 5.3 для функции $F(t)$ и учитывая, что $\|F\|_{L^1(-\pi,\pi)} \leqslant \|f\|_{L^1(-\pi,\pi)}$, получим 3).

Свойства 1)–3) доказаны. Тем самым установлено, что из условия г) в теореме 5 следует б). Для завершения доказательства теоремы 5 достаточно показать, что из в) вытекает г).

Пусть $\Phi(x) = f(x)+ig(x), x \in [-\pi,\pi]$ ($f = \operatorname{Re}\Phi$, $g = \operatorname{Im}\Phi$) и $F(re^{ix}) = \Phi * P_r(x) \in H^p_0$. Тогда $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $g \in L^p(-\pi,\pi)$ (см. теорему 4), и надо доказать только, что $g(x) = \widetilde{f}(x)$ для п.в. $x \in [-\pi,\pi]$.

Так как ядро Пуассона – действительная функция, мы можем утверждать, что при $0 \leqslant r < 1$ и $x \in [-\pi,\pi]$ (см. (3))

$$u(re^{ix}) = \operatorname{Re}F(re^{ix}) = f_r(x), \qquad v(re^{ix}) = \operatorname{Im}F(re^{ix}) = g_r(x).$$

С другой стороны, из (2), (8) и (37) вытекает, что для любого r, $0 < r < 1$,

$$g_r(x) = \widetilde{f}_r(x), \qquad x \in [-\pi,\pi]. \tag{45}$$

Согласно теореме 1

$$\lim_{r\to 1}\|f - f_r\|_{L^1(-\pi,\pi)} = \lim_{r\to 1}\|g - g_r\|_{L^1(-\pi,\pi)} = 0. \tag{46}$$

Кроме того, в силу теоремы 5.3, из сходимости $f_r \xrightarrow{L^1} f$ $(r \to 1)$ следует сходимость по мере функций $\widetilde{f}_r(x)$ к $\widetilde{f}(x)$. Таким образом (см. (45)),

$$g_r(x) \to \widetilde{f}(x) \quad \text{по мере при} \quad r \to 1,$$

а потому (см. (46)) $g(x) = \widetilde{f}(x)$ для п.в. $x \in [-\pi,\pi]$. Теорема 5 доказана.

Следствие 1. а) *Если* $f \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^1$, *то* $\widetilde{f} \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^1$;

б) *если* $f \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^1$ *и* $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$, *то* $f = -(\widetilde{\widetilde{f}})$;

в) *если* $f \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^p$, $g \in \operatorname{Re}\mathscr{H}^q$, $1/p+1/q = 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\widetilde{g}(x)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{f}(x)g(x)\,dx. \tag{47}$$

Доказательство. Соотношения а) и б) сразу следуют из эквивалентности условий а) и г) в теореме 5.

Чтобы получить в), положим

$$F(re^{ix}) = (f + i\widetilde{f}) * P_r(x), \qquad G(re^{ix}) = (g + i\widetilde{g}) * P_r(x).$$

Согласно теореме 5 $F \in H_0^p$, $G \in H_0^q$, а следовательно, $F \cdot G \in H_0^1$. Но тогда для п.в. $x \in [-\pi, \pi]$

$$\Phi(x) := \big(f(x) + i\widetilde{f}(x)\big)\big(g(x) + i\widetilde{g}(x)\big) = \lim_{r\to 1} F(re^{ix})G(re^{ix}) \in \mathscr{H}_0^1,$$

и мы получаем (см. определение класса $\mathscr{H}_0^p$), что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im} \Phi(x)\, dx = 0. \tag{48}$$

Из (48) непосредственно вытекает равенство (47).

Замечание 1. Если $1 < p < \infty$, то в силу п. г) теоремы 5 и теоремы 5.3 пространство $\operatorname{Re} \mathscr{H}^p$ совпадает с $L^p(-\pi, \pi)$. Для $p = 1$ это не так. Пространство $\operatorname{Re} \mathscr{H}^1$ у́же, чем $L^1(-\pi, \pi)$, и состоит (см. п. г) теоремы 5) из функций $f \in L^1(-\pi, \pi)$, для которых и $\widetilde{f} \in L^1(-\pi, \pi)$. $\operatorname{Re} \mathscr{H}^1$ – банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\operatorname{Re} \mathscr{H}^1} = \|f\|_{L^1(-\pi,\pi)} + \|\widetilde{f}\|_{L^1(-\pi,\pi)}. \tag{49}$$

Полнота $\operatorname{Re} \mathscr{H}^1$ с нормой (49) следует из теоремы 5.3 и полноты пространства $L^1(-\pi, \pi)$: если

$$\|f_n - f_m\|_{\operatorname{Re} \mathscr{H}^1} \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

то $f_n \xrightarrow{L^1} f$, $\widetilde{f}_n \xrightarrow{L^1} g$, $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$, и так как $\widetilde{f}_n \to \widetilde{f}$ по мере при $n \to \infty$, то $g = \widetilde{f}$ и $\|f_n - f\|_{\operatorname{Re} \mathscr{H}^1} \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечание 2. Согласно замечанию 1 равенство (47) выполняется, в частности, в случае, когда $f \in L^p(-\pi, \pi)$, $g \in L^q(-\pi, \pi)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$.

Отметим также, что, взяв в (47) вместо $f(x)$ функцию $\widetilde{f}(x)$ и учитывая б), мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x)\, dx, \quad \text{если} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0. \tag{50}$$

§ 3. Произведение Бляшке. Нетангенциальная максимальная функция

Пусть последовательность ненулевых комплексных чисел (не обязательно различных) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$|a_n| < 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1 - |a_n|) < \infty. \tag{51}$$

Рассмотрим произведение (произведение Бляшке)

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \cdot \frac{\bar{a}_n}{|\bar{a}_n|} =: \prod_{n=1}^{\infty} b(z, a_n). \tag{52}$$

Для фиксированного r, $0 < r < 1$, при $|z| \leqslant r$ имеет место оценка

$$\big|1 - b(z, a_n) \cdot |a_n|\big| = \frac{1 - |a_n|^2}{|1 - \bar{a}_n z|} \leqslant \frac{2(1 - |a_n|)}{1 - r}\,. \tag{53}$$

Так как ряд (51) сходится, то из (53) легко вывести, что произведение (52) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \leqslant r$, т.е. функция $B(z)$ аналитична в единичном круге и имеет нули в точках a_n, $n = 1, 2, \ldots$, и только в этих точках. При этом, пользуясь неравенством $|b(z, a_n)| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$, мы находим

$$|B(z)| \leqslant 1, \qquad |z| \leqslant 1. \tag{54}$$

Допустим теперь, что $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ $(|a_n| \leqslant 1)$ – нули некоторой функции $F(z) \in H^1$ с $F(0) \neq 0$, причем каждый из них повторяется со своей кратностью. Докажем, что тогда ряд (51) сходится. Положим

$$B_m(z) = \prod_{n=1}^{m} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}, \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Функция $B_m(z)$, $m = 1, 2, \ldots$, аналитична в круге радиуса больше единицы, и $|B_m(z)| = 1$, если $|z| = 1$. Следовательно,

$$F_m(z) := F(z) \cdot (B_m(z))^{-1} \in H^1$$

и (см. п. 3) теоремы 4) $\|F_m\|_{H^1} = \|F\|_{H^1}$. Но тогда

$$\left|\frac{F(0)}{\prod_{n=1}^{m} a_n}\right| = |F_m(0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} F_m\Big(\frac{1}{2}e^{it}\Big)\,dt\right| \leqslant \|F_m\|_{H^1} = \|F\|_{H^1}$$

и
$$\prod_{n=1}^{m} |a_n| \geqslant \frac{|F(0)|}{\|F\|_{H^1}} > 0, \qquad m = 1, 2, \ldots . \tag{55}$$

Так как $|a_n| < 1$, $n = 1, 2, \ldots$, то из (55) вытекает сходимость произведения $\prod\limits_{n=1}^{m} |a_n|$, а значит, и сходимость ряда (51).

Пусть $F(z)$ – аналитическая в круге $|z| < 1$ функция и a_n, $n = 1, 2, \ldots$ $(0 < |a_n| < 1)$, – ее нули, повторяющиеся со своей кратностью. Пусть также $p \geqslant 0$ – кратность нуля функции F при $z = 0$. Произведение (см. (52))
$$B(z) = z^p \prod_n b(z, a_n) \tag{56}$$
называется *произведением Бляшке* функции $F(z)$.

Теорема 6. *Каждая функция $F \in H^1$ представима в виде*
$$F(z) = B(z) \cdot G(z),$$
где $B(z)$ – произведение Бляшке функции $F(z)$, а $G(z)$ не имеет нулей в круге $|z| < 1$ и
$$G \in H^1, \qquad \|G\|_{H^1} = \|F\|_{H^1}.$$

Доказательство. Пусть $a_n, n = 1, 2, \ldots$ $(0 < |a_n| < 1)$, – нули функции F (или, что то же самое, нули функции $F(z)/z^p \in H^1$). Тогда, как отмечалось выше, $B(z)$ – аналитическая в круге $|z| < 1$ функция и
$$|B(z)| < 1, \qquad |z| < 1. \tag{57}$$

При этом функция $G(z) = F(z)/B(z)$ также аналитична в единичном круге, не имеет в нем нулей и (см. (57)) $\|G\|_{H^1} \geqslant \|F\|_{H^1}$.

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим частные произведения (56):
$$B_m(z) = z^p \prod_{n=1}^{m} b(z, a_n), \qquad m = 1, 2, \ldots, \quad |z| \leqslant 1.$$

Так как $|B_m(e^{ix})| = 1$ для любого $x \in [-\pi, \pi]$, то по теореме 4
$$\left\| \frac{F}{B_m} \right\|_{H^1} = \|F\|_{H^1}$$

и
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{F(re^{ix})}{B_m(re^{ix})}\right|dx \leqslant \|F\|_{H^1}, \quad \text{если} \quad 0<r<1.$$

Устремив в последнем неравенстве число m к бесконечности и учитывая, что $B_m(re^{ix}) \to B(e^{ix})$ (при $m \to \infty$) равномерно по $x \in [-\pi,\pi]$, мы получим
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{F(re^{ix})}{B(re^{ix})}\right|dx \leqslant \|F\|_{H^1}, \qquad 0<r<1,$$
т.е. $G \in H^1$ и $\|G\|_{H^1} = \|F\|_{H^1}$. Теорема 6 доказана.

Пусть σ, $0 \leqslant \sigma < 1$, – произвольное число. Обозначим через $\Omega_\sigma(x)$, $x \in [-\pi,\pi]$, область, ограниченную двумя касательными, проведенными из точки e^{ix} к окружности $|z| = \sigma$, и наибольшей из дуг окружности, заключенных между точками касания (при $\sigma = 0$ область $\Omega_\sigma(x)$ вырождается в радиус единичного круга). Для $f \in L^1(-\pi,\pi)$ положим
$$f_\sigma^*(x) = \sup_{re^{i\theta}\in\Omega_\sigma(x)} |f_r(\theta)|, \qquad x \in [-\pi,\pi],$$
где $f_r(x)$ – интеграл Пуассона функции $f(x)$ (см. (3)).

Функция $f_\sigma^*(x)$ называется *нетангенциальной максимальной функцией* (для $f(x)$). В силу теоремы 2
$$|f(x)| \leqslant f_\sigma^*(x) \quad \text{для п.в.} \quad x \in [-\pi,\pi]. \tag{58}$$

Установим, что для произвольной функции $f \in L^1(-\pi,\pi)$ величина $f_\sigma^*(x)$ не превосходит (по порядку) значения максимальной функции[2)] $M(f)$ в точке x, т.е.
$$f_\sigma^*(x) \leqslant C_\sigma \cdot M(f,x), \qquad x \in [-\pi,\pi]. \tag{59}$$
Пусть $re^{i\theta} \in \Omega_\sigma(x)$ и $x - \theta = \zeta$. По определению интеграла Пуассона
$$f_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+t)P_r(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P_r(t+\zeta)\,dt.$$

Положим $F(t) = \int_0^t f(x+u)\,du$. Тогда будем иметь
$$\begin{aligned}2\pi f_r(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t+\zeta)\,dF(t)\\ &= P_r(\pi+\zeta)F(\pi) - P_r(-\pi+\zeta)F(-\pi) - \int_{-\pi}^{\pi} F(t)P_r'(t+\zeta)\,dt\end{aligned}$$

[2)] Так как функция $M(f,x)$ определялась в приложении 1 для функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}^1$, то мы дополнительно полагаем $f(x) = 0$, если $|x| > 2\pi$; $f(x) = f(x+2\pi)$ при $-2\pi \leqslant x < -\pi$ и $f(x) = f(x-2\pi)$ при $\pi < x \leqslant 2\pi$.

и, в силу неравенства $|F(t)| \leqslant |t| \cdot M(f,x)$, $t \in [-\pi,\pi]$, и периодичности $P_r(t)$,

$$2\pi|f_r(\theta)| \leqslant M(f,x)\left[2\pi P_r(\pi+\zeta) + \int_{-\pi}^{\pi} |tP_r'(t+\zeta)|\,dt\right]. \tag{60}$$

Так как обе функции $g(t) = -t$ и $g_1(t) = P_r'(t)$ положительны при $t \in (-\pi,0)$ и отрицательны при $t \in (0,\pi)$ (см. (5)), то, предполагая без ограничения общности, что $\zeta > 0$, мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |tP_r'(t+\zeta)|\,dt = -\int_{-\pi}^{-\zeta} + \int_{-\zeta}^{0} - \int_{0}^{\pi-\zeta} + \int_{\pi-\zeta}^{\pi} tP_r'(t+\zeta)\,dt. \tag{61}$$

Для $-\pi \leqslant a < b \leqslant \pi$ имеют место оценки

$$2\pi \geqslant \int_a^b P_r(t+\zeta)\,dt = tP_r(t+\zeta)\Big|_a^b - \int_a^b tP_r'(t+\zeta)\,dt,$$

$$\left|\int_a^b tP_r'(t+\zeta)\,dt\right| \leqslant 2\pi + |b|P_r(b+\zeta) + |a|P_r(a+\zeta).$$

Следовательно (см. (60) и (61)), для доказательства неравенства (59) достаточно проверить, что

$$|t|P_r(t+\zeta) \leqslant C_\sigma \quad \text{при} \quad t = -\pi,\ -\zeta,\ \pi-\zeta,\ \pi, \tag{62}$$

если $re^{i\zeta} \in \Omega_\sigma(x)$. Пусть $t = -\zeta$, тогда

$$|t|P_r(t+\zeta) = \zeta P_r(0) \leqslant 2\,\frac{x-\zeta}{1-r} \leqslant C_\sigma.$$

В остальных случаях неравенство (62) очевидно. Из (58), (59) и теоремы 2 приложения 1 вытекает, что для любой функции $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$,

$$\|f\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant \|f_\sigma^*\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant C_{\sigma,p}\|f\|_{L^p(-\pi,\pi)}, \tag{63}$$

где $C_{\sigma,p}$ – постоянная, зависящая от σ и p.

Теорема 7. *Пусть $F \in H^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $0 \leqslant \sigma < 1$ и*

$$F_\sigma^*(x) = \sup_{z\in\Omega_\sigma(x)} |F(z)|, \qquad x \in [-\pi,\pi].$$

Тогда $F_\sigma^* \in L^p(-\pi,\pi)$ и

$$\|F\|_{H^p} \leqslant \|F_\sigma^*\|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant C_{\sigma,p}\|F\|_{H^p}. \tag{64}$$

Доказательство. Утверждение теоремы 7 в случае, когда $1 < p < \infty$, есть прямое следствие оценки (63) и теоремы 4. Пусть теперь $F \in H^1$. По теореме 6 $F(z) = B(z)G(z)$, где $|B(z)| \leqslant 1$, $G(z) \neq 0$, если $|z| < 1$ и $\|G\|_{H^1} = \|F\|_{H^1}$. Из функции $G(z)$ можно извлечь корень: существует функция $E(z) \in H^2$ такая, что $E^2(z) = G(z)$ и, следовательно (см. (64) для $p = 2$),

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_\sigma^*(x)\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} G_\sigma^*(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} [E_\sigma^*(x)]^2\,dx$$
$$\leqslant C_{\sigma,2}^2 \|E\|_{H^2}^2 = C_\sigma \|G\|_{H^1} = C_\sigma \|F\|_{H^1}.$$

Оценка снизу для $\|F_\sigma^*\|_{L^1(-\pi,\pi)}$ вытекает из (58). Теорема 7 доказана.

§ 4. Некоторые свойства преобразования Фурье

Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется функция

$$\mathscr{F}(f,\zeta) = \widehat{f}(\zeta) := \int_{\mathbb{R}^1} f(x)e^{-i\zeta x}\,dx, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{65}$$

Если $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то интеграл в (65) сходится абсолютно для каждого $\zeta \in \mathbb{R}^1$. Если же $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$, то $\widehat{f}$ определяется как предел по норме $L^2(\mathbb{R}^1)$ последовательности функций $\widehat{f}_N(\zeta) := \int_{-N}^{N} f(x)e^{-i\zeta x}dx$, когда $N \to \infty$.

Для функций $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ имеет место формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \widehat{f}(\zeta)e^{i\zeta x}\,d\zeta, \qquad x \in \mathbb{R}^1. \tag{66}$$

Интегральный оператор (66), ставящий в соответствие функции $\widehat{f}$ функцию f называется *обратным преобразованием Фурье* $\Big($аналогично предыдущему интеграл (66) понимается как предел в $L^2(\mathbb{R}^1)$ функций $(2\pi)^{-1}\int_{-N}^{N}\widehat{f}(\zeta)e^{i\zeta x}d\zeta$, $N \to \infty\Big)$.

Для функций $f, g \in L^2(\mathbb{R}^1)$ имеет место *равенство Планшереля*:

$$\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \widehat{f}(\zeta)\overline{\widehat{g}(\zeta)}\,d\zeta, \tag{67}$$

в частности,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^1)}, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^1). \tag{68}$$

Следующие свойства преобразования Фурье несложно вывести из его определения:

1°. Если $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ и $g(x) = f(ax+b)$, $x \in \mathbb{R}^1$ $(a, b \in \mathbb{R}^1)$, тогда

$$\widehat{g}(\zeta) = |a|^{-1} e^{ia^{-1}b\zeta} \widehat{f}(a^{-1}\zeta). \tag{69}$$

2°. Если $f, g \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^1} f(x-t)g(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}^1,$$

то $h \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и

$$\widehat{h}(\zeta) = \widehat{f}(\zeta) \cdot \widehat{g}(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^1. \tag{70}$$

3°. Если $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$, тогда

$$\widehat{f} \in C(\mathbb{R}^1) \quad \text{и} \quad \lim_{|\zeta| \to \infty} \widehat{f}(\zeta) = 0.$$

4°. Если функция $f(x)$ такова, что при некотором $r = 1, 2, \ldots$ функция $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна и $f, \ldots, f^{(r)} \in L^1(\mathbb{R}^1)$, то

$$|\widehat{f}(\zeta)| = o\left(\frac{1}{|\zeta|^r}\right) \quad \text{при} \quad |\zeta| \to \infty. \tag{71}$$

В частности, (71) имеет место для всех $r = 1, 2, \ldots$, если f бесконечно дифференцируемая функция с ограниченным носителем.

5°. Если функция $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ такова, что $x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$, $k = 1, 2, \ldots, r$ при некотором $r = 1, 2, \ldots$, то ее преобразование Фурье $\widehat{f}(\zeta)$ имеет производные до r-го порядка включительно.

В частности, если $f(x)$ – интегрируемая функция с ограниченным носителем, то $\widehat{f}(\zeta)$ бесконечно дифференцируема.

6°. В силу формулы обращения (66) свойства 3°–5° имеют место для $f(x)$, если соответствующим условиям удовлетворяет $\widehat{f}(\zeta)$.

7°. Для функции $f \in L^1(\mathbb{R}^1)$ определим ее периодизацию:

$$\mathscr{P}[f(x)] := \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(x-l), \qquad x \in \mathbb{R}^1, \tag{72}$$

где по теореме Б. Леви ряд в (72) сходится почти всюду к интегрируемой на $(0,1)$ периодической функции (с периодом 1). Легко проверить, что тогда

$$c_n(\mathscr{P}[f]) := \int_0^1 \mathscr{P}[f(x)]e^{-2\pi inx}\,dx = \widehat{f}(-2\pi n), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{73}$$

Равенство (73) часто пишут в следующей форме:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(x-l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(2\pi n)e^{-2\pi inx} \tag{74}$$

и называют ***формулой суммирования Пуассона.*** Отметим, что равенство (73) означает только, что ряд справа в (74) является рядом Фурье (по тригонометрической системе, рассмотренной на отрезке $[0,1]$) функции $\mathscr{P}[f(x)]$, а равенство в (74) имеет место при дополнительных условиях на функцию f, гарантирующих сходимость этого ряда.

Примечания

Прежде всего отметим, что теории общих ортогональных рядов посвящены книги Качмажа и Штейнгауза [53] (первое издание этой книги вышло в 1935 году на немецком языке, русский перевод, дополненный большой обзорной статьей Р. С. Гутера и П. Л. Ульянова, появился в 1958 году), Алексича [2] и А. М. Олевского [124]. В этих книгах освещены и некоторые, почти не затронутые нами, темы (например суммирование ортогональных рядов или свойства рядов и коэффициентов Фурье по общим О.Н.С. функций из L^p, $p \neq 2$). В [124] дан также обзор ряда направлений, разработанных в теории ортогональных рядов в период с 1960 по 1975 год. Следует при этом сказать, что монографическую литературу по теории общих ортогональных рядов нельзя назвать богатой. Не заполняет всех пробелов в изложении материала и эта книга.

Дадим теперь литературные указания к рассмотренному нами материалу.

Глава 1

Эта глава носит вводный характер; результаты, изложенные здесь, были получены в основном до 1935 года. Мы ограничимся краткими указаниями.

Теорема 1 доказана Орличем [129]. Теорема 2 вероятно впервые была опубликована в [53] (см. [53; с. 306]). Теоремы 3 и 4 относятся к основам теории функций действительного переменного и всегда включаются в университетский курс, исторические указания о них см. в [2]. Теорема 5 была получена еще в 1909 году Лебегом (см. [2; с. 252]). Теорема 6 доказана Банахом [9], ему же по существу принадлежит и теорема 7 (см. подробнее [42], [40]). Теорема 8 фактически доказана Хааром [177] еще в 1910 году, хотя само понятие базиса было введено Шаудером позднее (см. [9], [42]). Частный случай теоремы 9 (случай системы Хаара; см. главу 3) был рассмотрен в работе Шаудера [195], в общем случае доказательство аналогично. Теорема 10 – простое следствие теорем 6 и 1. О теореме 11 см. примечания к главе 2.

Понятие системы Рисса (см. определение 14) введено Н.К. Бари [203]. О следствиях 6 и 7 см., например, [53; с. 440].

Глава 2

В § § 1, 2 вводятся и изучаются последовательности независимых функций. На языке теории вероятностей основное определение главы – определение 1 – есть не что иное, как определение набора независимых случайных величин $\{f_n\}$, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, где $\Omega = (0,1)$, $\mathscr{F}$ – система борелевских множеств, а P – мера Лебега на $(0,1)$. На вероятностном языке формулируются чаще всего и все теоремы § § 1, 2. К примеру, теорема 4 утверждает, что математическое ожидание произведения независимых случайных величин есть произведение их математических ожиданий. Избранный нами способ построения последовательностей независимых функций применялся в 30-е годы в работах польских математиков (Штейнгауз, Марцинкевич, Зигмунд и др., см. подробнее [93; с. 235] и [53]), а в дискретном случае еще в работе А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина [78]. Этот (возможно несколько старомодный) способ близок к теории функций и имеет то преимущество, что не требует никаких дополнительных сведений из теории меры. Доказанные в § § 1, 2 теоремы 1–10 относятся к основам теории вероятностей и за подробными комментариями к ним мы отсылаем читателя к монографиям, посвященным этой теории. Мы ограничимся несколькими замечаниями.

Функции Радемахера $r_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, введены в 1922 году в работе Радемахера [142], но поведение сумм $\sum\limits_{n=1}^{N} r_n(x)$ при $N \to \infty$ и $x \in (0,1)$ изучалось и гораздо раньше, в связи с рассмотрением свойств двоичных разложений действительных чисел (см., например, [83; с. 56]). Теоремы 5 и 6 в частном случае системы Радемахера были получены в 1923 году А.Я. Хинчиным [181], а позднее были распространены и на другие системы независимых функций (в наиболее общей форме неравенство Хинчина (теорема 6) доказано в 1937 г. Марцинкевичем и Зигмундом (см. [93; с. 257]). Теорема 7 была получена Пэли и Зигмундом [141] как непосредственное следствие неравенства Хинчина и простой, но важной леммы 1 (см. теорему 7), вероятно впервые сформулированной в [141]. Теорема 8 принадлежит А. Н. Колмогорову [78] (оценка (47) в [78] не приводилось, но как и утверждение теоремы 7, легко выводится из результата § 3 работы [78]). Теорема 9 также доказана А. Н. Колмогоровым [74] (случай системы Радемахера был рассмотрен ранее в [142]). В [74] была получена оценка (неравенство Колмогорова):

$$m\{x \in (0,1) : S_\psi^*(\{a_n\}) > y\} \leqslant \frac{1}{y^2} \sum a_n^2, \qquad y > 0, \tag{$*$}$$

чуть менее точная, чем оценка (47). Следует отметить, что метод оценки мажорант, предложенный в [74] при доказательстве неравенства ($*$) оказался очень важным для теории вероятностей и теории функций. Мы не раз используем его в главе 3. Оценка (47) в теореме 9 доказана Марцинкевичем и Зигмундом (см. [93; с. 238]), но сразу вытекает и из модификации неравенства ($*$), полученной в [75].

Утверждение 1, усиливающее классическую лемму Бореля–Кантелли, находит применение не только в анализе, но и в теории чисел (см., в частности, [242]).

Применение свойств систем независимых функций для изучения функциональных рядов (см. § 3) было начато почти одновременно Орличем [126], [127], [128] и Пэли и Зигмундом [140], [141] (см. также работы Литлвуда [85] и [86]). Случайные ряды играют в настоящее время важнейшую роль в теории ортогональных рядов и функциональном анализе (см., в частности, [50], [17], [108], [90]) и часто используются в этой книге.

В теореме 11 импликация 2)$\Rightarrow$3) доказана Орличем [128], а 3)$\Rightarrow$1) Пэли и Зигмундом [140]. Следствие 4 принадлежит Орличу [128]. В теореме 12 необходимость условия (72) для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ в L^p при п.в. выборах знаков было получена Орличем [129], а достаточность (в чуть более слабой форме следствия 5) Пэли и Зигмундом [140]. Из теорем 12 и 1.10 легко вытекает сформулированная в главе 1 и доказанная в § 2.3 теорема 1.11. Теорема 13 получена Пелчинским [132] (приводимое доказательство близко к изложенному в [104]). Теорема 14 и следствие 6 доказаны Б. С. Кашиным [55]. В [55] и независимо Морэем и Пизье [110] получен также аналогичный факт для сходимости по мере (см. замечание в конце § 3). Лемма 1 из теоремы 14 (с неточной константой в (84)) содержалась в работе Дробота [37] (см. также теорему 10.5). Приводимое нами доказательство дает точную константу в неравенстве (84).

Рассмотрение случайных перестановок функциональных рядов (см. § 4) было начато Гарсиа [26], [27]. Теорема 16 доказана Гарсиа в работе [26], а следствие 8 и п. б) следствия 7 – в [27]. Теорема 15 и п. а) следствия 7 (см. [65; с. 386]) представляют собой некоторое уточнение оценок из [27]. Приводимое нами доказательство теоремы 15, как и рассуждения в [27], во многом аналогично доказательству неравенства Колмогорова (см. (*)). Впервые для изучения перестановок эта аналогия была использована Розеном [240].

Глава 3

Система Хаара была введена в диссертации Хаара в 1909 году (см. [177]) и в настоящее время широко используется в теории функций, а также в теории вероятностей и вычислительной математике. С точки зрения теории вероятностей частные суммы $S_N(x)$, $N = 1, 2, \ldots$, произвольного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ по системе Хаара – есть частный случай последовательности случайных величин, образующих мартингал (о мартингалах см., например, в [38], [198]). Мартингалы интенсивно изучаются в теории вероятностей и некоторые теоремы, доказанные в главе 3, впервые были установлены в теоретико-вероятностных терминах для мартингалов. Отметим также, что в ряде случаев утверждения о свойствах системы Хаара обобщаются на мартингалы без привлечения существенно новых дополнительных идей.

Формулы частных сумм ряда Фурье–Хаара найдены самим Хааром [177]. Оценки коэффициентов Фурье–Хаара (см. теорему 1) были отмечены для $f \in C(0,1)$ Чисельским, [185] а для $f \in L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$, П. Л. Ульяновым [165], которым было начато систематическое изучение системы Хаара в СССР. Равномерная сходимость рядов Фурье–Хаара непрерывных функций (см. теорему 2) была установлена Хааром (построение О.Н.С. с этим свойством было одной их исходных целей Хаара, см. [177]), неравенство (14) в теореме 2 отмечено Б. Секефальви-Надем в работе [147], посвященной общим О.Н.С. Базисность системы Хаара в пространствах $f \in L^p(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$ (см. теорему 3), установлена Шаудером [195], а оценка (17) – П. Л. Ульяновым [165]. Сходимость п.в. произвольного ряда Фурье–Хаара (см. теорему 4) установлена Хааром [177], а свойства мажоранты частных сумм этого ряда отмечены Марцинкевичем (см. [93; с. 310]). Теорема 10 доказана Б. И. Голубовым [29], а теорема 6 С. В. Бочкаревым [11] (см. также [17]).

Изучение безусловной сходимости рядов Фурье–Хаара в пространствах $L^p(0,1)$ (см. § 3) было начато Марцинкевичем (см. [93; с. 308]), который получил утверждение теоремы 8 и неравенство 2) в теореме 9 как прямое следствие результатов Пэли о системе Уолша. Теорема 7 и оценка 1) в теореме 9 установлены Яно [201]. Приводимое доказательство теоремы 7, опирающееся на лемму 1 – двоичный аналог разложения Кальдерона–Зигмунда (см. гл. 1 в [150]), – предложено Ватари [19] (см. также [43]). В теореме 10 утверждение 2) вытекает из теоремы 2.13, а 3) получено П. Л. Ульяновым [167] и затем распространено А.М. Олевским (см. [124; с. 75]) на произвольные П.О.Н.С. Теорема 11 доказана сразу для мартингалов Бурхольдером и Ганди [18] и Дэвисом [39]. Отметим, что метод доказательства теоремы 11 (см., в частности, лемму 1) типичен для теории мартингалов и имеет общие черты с классическим доказательством неравенства Колмогорова (см. теорему 2.9 и примечания к главе 2). Теорема 12 может быть получена как следствие общих интерполяционных теорем, приводимое в тексте прямое доказательство предложено А. А. Саакяном. Теорема 13 доказана независимо Ф. Г. Арутюняном [4] и (для мартингалов) Ганди [24]. Теорема 14 вытекает из результатов Чоу [192] о мартингалах и была получена также Ф.Г. Арутюняном [4] (см. также [24], [156]).

Первый результат о безусловной сходимости п.в. рядов Фурье–Хаара получил П. Л. Ульянов: в работе [160] им были доказаны следствия 6 и 7 (см. § 5). Теорема 15 доказана Е.М. Никишиным и П. Л. Ульяновым [116], а теорема 16 А.М. Олевским [118], [119]. Теорема 17 и следствие 8 установлены П. Л. Ульяновым [163], [164], [168], а теорема 18 – С.В. Бочкаревым [12].

Преобразования системы Хаара, сходные с рассмотренными в § 6, использовались еще Шаудером [195] для построения базисов в пространствах $L^p(\Omega)$ (Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$). Следствие 9 принадлежит А.М. Олевскому (см. [124; с. 61], а также примечания к главе 10).

Отметим в заключение, что ряд неизложенных нами результатов о системе Хаара приведен в обзорной статье Б.И. Голубова [30].

Глава 4

В §§ 1–4 рассматривается тригонометрическая система . Тригонометрическим рядам посвящена огромная литература, в том числе капитальные монографии Н.К. Бари [10] и Зигмунда [41], в которых приведена обширная библиография.

§ 1 главы 4 содержит стандартный материал. Теорема 3 (см. § 2) доказана в 1911 году Джексоном. Сам Джексон рассматривал только непрерывные функции, но его доказательство без сколь нибудь существенных изменений применено и к функциям из $L^p(-\pi, \pi)$, $1 \leqslant p < \infty$ (см. подробнее [41], [66]). Приводимое нами доказательство теоремы 3 близко к изложенному в [184] и основано на свойствах средних Валле Пуссена. Отметим, что средние Валле Пуссена, введенные Валле Пуссеном в 1918 году играют весьма важную роль в теории приближений (см. [95; с. 375] и [35]).

Теорема 4 доказана М. Риссом (см. [10; с. 592]). Следствие 3 было независимо доказано С. В. Конягиным [81] и Мак-Ги, Пинье и Смитом [88]. В работе [88], методу которой мы следуем, получена и теорема 5. Теорема Карлесона доказана в [46]. Позднее Хант [178] методом Карлесона показал, что п.в. сходится ряд Фурье произвольной функции $f \in L^p(-\pi, \pi)$, $p > 1$. Существование функции $f \in L^1(-\pi, \pi)$ ряд Фурье которой расходится п.в. было обнаружено А. Н. Колмогоровым еще в 1923 году (см. [10; с. 391]). Теорема 6 была получена А. Н. Колмогоровым и Г. А. Селиверстовым, а также А. И. Плесснером (см. [10;с. 332]).

Теорема 7 получена еще в прошлом веке Дини и Липшицем [96; с. 155]. Изучение сильной суммируемости рядов Фурье было начато Харди и Литлвудом, важные результаты о сильной суммируемости получены Марцинкевичем, см. подробнее [10; с. 488]; теорема 8 доказана Алексичем и Краликом [3] (см. также [51]). Теорема 9 доказана Г. Бором методами теории функций комплексного переменного, приводимое нами доказательство предложено А. А. Саакяном [144] (см. также [145], [51]). Теорема 10 получена Пэли и Зигмундом (см. [10; с. 306]). Об уточнениях окончательного характера этого результата см. работу Салема и Зигмунда [241] и монографию [90]. Утверждение 2′, обобщающее некоторые оценки из [241] получено Б. С. Кашиным и Л. Цафрири [223] (см. также [224]).

Система Уолша введена Уолшем [170] в 1923 году и в настоящее время используется в различных областях математики, а также в прикладных вопросах. Рассматриваемая в § 5 (и в большинстве работ, посвященных системе Уолша) нумерация функций Уолша была предложена Пэли [139], который доказал ряд важных свойств системы Уолша (и, в частности, теорему 15). Оценка (115) функций Лебега системы Уолша получено Н. Я. Виленкиным [21], а следствие 7 Файном [172]. Многие свойства системы Уолша (см. например теоремы 13 и 14) аналогичны свойствам тригонометрической системы, что нередко обусловлено тем, что обе эти системы – системы характеров коммутативных компактных групп. Подробнее о системе Уолша и системах характеров см. монографии [218], [249], а также [1], [8].

Глава 5

Преобразование и матрица Гильберта (см. (27)) были введены Гильбертом около 1900 года. Сам Гильберт (см. [28], [180]) доказал, что преобразование Гильберта есть ограниченный оператор из $L^2(\mathbb{R}^1)$ в $L^2(\mathbb{R}^1)$. Позднее, близкое к понятию преобразования Гильберта понятие сопряженной функции (см. определение 2) было введено Н. Н. Лузиным [87] в теорию тригонометрических рядов. В рассматриваемых нами вопросах изучение преобразования Гильберта и оператора перехода к сопряженной функции равносильно.

Существование и конечность для п.в. $x \in \mathbb{R}^1$ преобразования Гильберта $T(f,x)$ произвольной функции $f \in L^1(R^1)$ (см. теорему 1) доказано И.И. Приваловым [138], а неравенство (5) А.Н. Колмогоровым [73] (см. также [10], [41]). Приводимое нами доказательство теоремы 1 близко к изложенному в [27]; отметим, что основной момент доказательства – лемма 1 была получена Дж. Булем еще в 1857 году (см. [84; с. 68]).

Теорема 2 доказана М. Риссом [143]. Теорема 3 получается объединением упомянутых результатов Привалова, Колмогорова и Рисса.

Пространство BMO было введено Джоном и Ниренбергом в работе [33] и в настоящее время активно используется в анализе; в [33] доказана и теорема 7. Теоремы 4 и 5 получены Феферманом (см. [173], [71]), и вероятно наиболее известны среди большой серии результатов о свойствах пространств Харди H^p и их многомерных аналогов, установленных в семидесятые годы (мы затрагиваем эту обширную тему в основном с связи с рассмотрением в главе 6 системы Франклина, подробнее см. [72], [174]). В изложении теоремы 4 мы используем рассуждения из работы [22], упрощенные применительно к одномерному случаю Освальдом.

Теорема 6 приведена в работе Койфмана и Вейс [72].

Глава 6

Система Фабера–Шаудера была введена в 1910 году Фабером [171], который построил ее, проинтегрировав функции Хаара (см. равенство (2)). В [171] была доказана и теорема 1. В 1927 году Шаудер [194] переоткрыл систему Фабера–Шаудера: эта система явилась простейшим базисом среди семейства базисов в пространстве $C(0,1)$, построенных в [194].

В следствии 1 оценка а) непосредственно вытекает из теоремы 1, а б) получена Матвеевым [94]. Теорема 2 установлена Карлиным [48], приводимое доказательство предложено Ф.Г. Арутюняном [5]. Теорема 3 доказана Чисельским [186] (см. также [146]). Утверждение 1 и следствие 2 получены А.А. Саакяном [144]. О рассматриваемых в §2 системах типа Фабера–Шаудера см. [53; с. 63] и [194].

Система Франклина введена в 1928 году в работе Франклина [176] как первый пример ортонормированного базиса в пространстве непрерывных функций (см. теорему 6). После этого система Франклина не изучалась вплоть до работ Чисельского, который начал систематическое изучение этой системы. В работах Чисельского [187], [188] были установлены теоремы 5, 7–11 и следствие 4. Приведенные в тексте доказательства теорем 8 и 9 предложены Г. Г. Геворкяном (см., в частности, [211]). Отметим при этом, что равенства (44), лежащие в основе доказательства теоремы 8, установлены Чисельским [188], а использованные в доказательствах теорем 8 и 9 функции $N_j(t)$ (см. (30)) есть частный случай базисов из так называемых B-сплайнов (см. 7.(63)), введенных в работе [49]. Отметим также, что теорема 8 играет важную роль во многих работах о системе Франклина.

Теорема 12 и следствие 5 установлены Войташчиком [23]; в [23] существенно использовались рассуждения из работы Карлесона [47]. До работ Карлесона и Войташчика, Морэем [109] было обнаружено (неконструктивным методом), что в пространстве H^1 безусловный базис существует. В связи с теоремой Войташчика следует отметить, что еще в 1969 году Чисельский [189] и Шенфельд [196] применили систему Франклина для построении базиса в пространстве $C^1(I^2)$ непрерывно дифференцируемых функций на квадрате. Затем С. В. Бочкарев [14] (преобразовав функции из системы Франклина в аналитические по правилу, указанному в следствии 5.6, см. 5.(90)) применил эту систему для построения базиса в пространстве C_A аналитических в круге $|z| < 1$ функций, непрерывных вплоть до границы (вопрос о существовании базисов в пространствах $C^1(I^2)$ и C_A отмечался в [9]). Таким образом система Франклина оказалась весьма полезной для построения базисов в различных функциональных пространствах.

Приведенное в тексте доказательство теоремы 12 отлично от [23] и основано на теореме 13, которая получена как следствие трех неравенств для норм:

а) $\|P(f)\|_1 \leqslant C\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)}$;
б) $\|S^*(f)\|_1 \leqslant C\|P(f)\|_1$;
в) $\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)} \leqslant C\|S^*(f)\|_1$.

Неравенство а) (точнее, эквивалентность норм $\|P(f)\|_1$ и $\|f\|_{\mathscr{H}(\Delta)}$) установлено Войташчиком [23]; доказательство мы излагаем следуя работе [248]. Неравенство б) вытекает из результатов работ [23] и [250] (см. также [247] и [248]). Неравенство в) доказано Г. Г. Геворкяном в работе [214]. Интересно отметить, что величины $\|P(f)\|_p$ и $\|S^*(f)\|_p$ эквивалентны также при $0 < p < 1$ (см. [214], [238], [248]), а при $1/2 < p < 1$ они эквивалентны также $\|f\|_{\mathscr{H}^p(\Delta)}$ (см. [248]). Напомним, что при $1 < p < \infty$ все три нормы эквивалентны норме функции $\|f\|_p$.

Теорема 14 доказана С.В. Бочкаревым [14], а теорема 15 Чисельским, Симоном и Шелином [191]. В отличие от теоремы 15, утверждение которой теряет силу уже при $p = 1$ (см. [246]), теорема 16 имеет место при любом p, $0 < p < \infty$. Случаи $1/2 < p \leqslant 1$ и $0 < p \leqslant 1/2$ в теореме 16 впервые рассмотрены соответственно в [248] и [215]. В связи с теоремой 16, показывающей схожесть свойств систем Хаара и Франклина, отметим, что теоремы 3.13, 3.15, 3.17, доказанные нами для системы Хаара справедливы также для системы Франклина (см. [216], [213], [212]). Теорема 17 доказана Чангом и Чисельским [183].

Наконец отметим, что к настоящему времени достаточно подробно изучены и обобщения системы Франклина – системы ортогональных сплайнов (см. подробнее [190], [148], [248]), а также общие системы Франклина, которые получаются ортогонализацией методом Шмидта систем типа Фабера–Шаудера, рассмотренных нами в §6.3 (см. подробнее [245], [217]).

Глава 7

Понятие всплеска была введено Мейером в работе [232], где и были построены всплески Мейера, рассмотренные нами в § 4. При этом первый непрерывный всплеск был построен ранее Стрёмбергом [243]. Понятие КМА и метод построения всплеска, порожденного КМА были введены Малла в работе [231], где получены основные результаты § § 1–3 (см. также [234]).

Возможность замены условия (A5) в определении КМА более слабым условием (A5$'$) (см. теорему 1), т.е. перехода от базиса Рисса пространства V_0 к ортонормированному базису (см. лемму 2 из теоремы 1) была установлена Лемарье и Мейером [227]. Утверждение 2 доказано в [229].

Другой способ построения КМА, основанный на определении коэффициентов $\{a_k\}$ масштабного уравнения (20) был предложен Добеши, построившей произвольно гладкие всплески с компактным носителем (см. [222], [221]; отметим, что все рассмотренные нами примеры всплесков, кроме всплеска Хаара, имеют неограниченный носитель).

Сплайн всплески были определены совершенно иным способом Стрёмбергом [243], затем в рассмотренной нами форме они были изучены Лемарье [226] и Батлем [204]. В терминах преобразования Фурье всплески Стрёмберга изучены в [233].

Существование всплеска не порожденного КМА (см. теорему 8) было установлено Журне и приведено в работе [231]. Интересно отметить, что все достаточно “хорошие” всплески (например с компактным носителем, или достаточно гладкие и быстро убывающие) всегда порождены КМА (см. [202], [228]). В терминах преобразования Фурье достаточно простое необходимое и достаточное условие для того, чтобы всплеск был порожден КМА, получено Грипенбергом [220]. Теорему 7 в несколько иной формулировке можно найти в [226] (см. также [220], [221]).

Теоремы 9 и 10 были установлены Войташчиком [209]. Ранее безусловная базисность всплеск систем в пространствах $L^p(R^1)$ при более ограничительных чем (92) условиях регулярности всплеска была доказана Мейером [234] (см. также [221], [208], [219], [244]).

Периодические всплески были рассмотрены разными авторами (см., например, [234], [221], [208]). Теорема 13 была установлена Оффиным и Осколковым [236], которые впервые применили всплески для построения полиномиальных базисов. Задача нахождения оптимального роста последовательности $\lambda_n = \deg T_n$ – степеней тригонометрических полиномов T_n, образующих базис в пространстве непрерывных периодических функций, была поставлена П. Л. Ульяновым (см. [166]), и изучалась многими математиками (см., например, [205], [210], [239], [230]). В классе всех базисов базисов задача была решена А. А. Приваловым (см. [237], [238]), который а) доказал, что для любого базиса существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\lambda_n \geqslant (1/2 + \varepsilon)n$ для всех достаточно больших n; б) для произвольного $\varepsilon > 0$ построил (неортонормированный) базис с $\lambda_n \leqslant (1/2+\varepsilon)n$. Ортонормированный базис с оптимальным ростом $\lambda_n \leqslant (1/2 + \varepsilon)n$ был построен Лоренцом и Саакяном [230].

В заключение отметим, что всплескам и их приложениям посвящена обширная литература. См., в частности, монографии [208], [221], [234], [244]. На русском языке см. обзор [235].

Глава 8

Рассматриваемые в § 1 теоремы ортогонализации играют обычно вспомогательную роль при построении различных ортонормированных систем. Теорема 1 доказана И. Шуром [199] (см. также [53]). Теорема 2 получена Д. Е. Меньшовым [103], использованный при ее доказательстве способ ортогонализации вероятно впервые применялся в работе А. Н. Колмогорова и Д. Е. Меньшова [76]. Критерии продолжимости системы функций до полной ортонормированной системы (см. теорему 3) давали В. Я. Козлов [69] и (в приведенной нами форме) А. М. Олевский (см. [123], [124; с. 57]).

Следствие 1 известно вероятно с тридцатых годов; в работе Хобби и Райса [182] получен более точный результат: показано, что искомая функция $\varepsilon(x)$ (см. следствие 1) может быть выбрана среди функций, имеющих $\leqslant m$ перемен знака. Теорема 4 непосредственно вытекает из следствия 1.

В §§2–4 рассматриваются теоремы факторизации и их приложения к теории ортогональных рядов. Эта тематика была открыта работой Гротендика [32], один из результатов которой приведен в начале главы. Кроме того, здесь необходимо отметить и работу А.Н. Колмогорова [73]. В [73] на конкретном примере оператора (преобразования) Гильберта $f(x) \to T(f,x)$ (см. §5.1) было показано, как, используя информацию о том, что функция $T(f,x)$ конечна п.в. для любой $f \in L^1$ можно получить существенно больше – оценку слабого типа 5.(5). Позднее этот подход А.Н. Колмогорова был обобщен Стейном [149].

Существенное развитие теоремы факторизации получили в работах Е.М. Никишина [112], [113], [115], а позднее Морэя, Пизье и др. (см. [108]). Е.М. Никишин, в отличие от Гротендика, рассматривал операторы, действующие не только в банаховы пространства, но и в пространство всех измеримых, конечных п.в. функций, это заметно расширило сферу применения теорем факторизации. В настоящее время теоремы факторизации нашли разнообразные применения в теории ортогональных рядов, теории вероятностей и функциональном анализе (см., в частности, библиографию в работах [45], [67]).

Теоремы 5 и 6 доказаны Е.М. Никишиным соответственно в работах [113] и [112]. Теорема 7 опубликована Морэем [107], но сразу получается последовательным применением теорем Никишина (см. [113; теорема 4]) и Гротендика [32]. В связи с теоремой 7 отметим следующий результат (см. [110], [130], а также [108′]): для того, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in (0,1),$$

безусловно сходился по мере, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись множество $E_\varepsilon \subset (0,1)$, $m(E_\varepsilon) > 1-\varepsilon$, постоянная K_ε и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty, \quad \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{ – О.Н.С. на } (0,1),$$

такие, что $f_n(x) = K_\varepsilon a_n\varphi_n(x)$ для $x \in E_\varepsilon$ и $n = 1,2,\ldots$ (мы не включили в текст доказательство этого утверждения, так как оно проводится методами, лежащими несколько в стороне от темы книги).

Теорема 8 – следствие результатов А. М. Олевского [121], а теорема 9 установлена Е. М. Никишиным [114], [115].

Глава 9

Теорема 1 – знаменитая теорема Меньшова–Радемахера [99], [142], в работе Д. Е. Меньшова [99] доказана и теорема 2. Теорема 3 получена Б. С. Кашиным [57], приводимое в тексте, более простое доказательство было предложено Тандори [159]. Теорема 4 установлена Качмажем [54], но основная идея доказательства этой теоремы содержалась уже в работах Колмогорова–Селиверстова и Плесснера о сходимости п.в. тригонометрических рядов (см. примечания к главе 4 и [2; с. 182]). В доказательстве теоремы 4 мы следуем книге [2], об окончательности этого результата см. [158]. О теоремах 1 и 4 см. также работу Шипа [197].

Следствие 3 установлено Д. Е. Меньшовым [100], вероятно, это первый результат о безусловной сходимости функциональных рядов. Следствие 2 получено Орличем [125], методом работы [125] доказывается и теорема 5. Окончательную форму достаточным условиям для безусловной сходимости п.в. ортогонального ряда (накладываемым на коэффициенты ряда) придал Тандори [157] – см. теорему 5.

Теорема 6 и следствие 4 доказаны Тандори [157]. Точнее говоря, Тандори доказал несколько больше, а именно, что для фиксированной последовательности $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots$, ряд (47) безусловно сходится п.в. для любой О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (48). Позднее Тандори дал более простое доказательство этого результата, в тексте мы приводим рассуждения Тандори в модифицированном виде.

Следствие 5 получено Д. Е. Меньшовым [101] и Марцинкевичем [92] (см. также [93; с. 164]). Теорема 7 доказана Марцинкевичем [92] и чуть позднее Д. Е. Меньшовым [102], при этом в работе [102] фактически повторялись рассуждения из [101]. Следует сказать, что методы доказательства в работах [101] и [92], несмотря на их внешнее различие, аналогичны.

В связи со следствием 5 отметим результат Комлоша [80], который доказал, что из любой О.Н.С. можно выбрать подсистему безусловной сходимости.

Теорема 8 и следствие 6 были установлены в частном случае подсистем тригонометрической системы Эрдешом [200], а в общем случае (аналогичным методом) С. Б. Стечкиным (см. [25], [166]).

Оценка плотности подсистем Сидона тригонометрической системы (см. (99)) получена С. Б. Стечкиным [151]. Отмеченный в § 4 результат о возможности выбора из любой ограниченной в совокупности О.Н.С. подсистемы Сидона установлен В. Ф. Гапошкиным [25]. Теорема 9 доказана Б. С. Кашиным [64] (о приложениях утверждений типа теоремы 9 к вопросам геометрии нормированных пространств см. [105]).

Позднее разными авторами был получен целый ряд результатов о возможности выбора из общих О.Н.С. "достаточно плотных" лакунарных подсистем. Отметим здесь глубокий результат Бургейна [206], согласно которому при любом $p > 2$ из произвольной конечной О.Н.С. $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ $(N = 1, 2, \dots)$, состоящей из равномерно ограниченных функций, можно выделить "S_p-подсистему" с числом элементов $\asymp N^{2/p}$.

Теорема 10 получена Б.С. Кашиным и представляет собой некоторое обобщение теоремы Нисио (см. [83; с. 125]); М. Нисио доказала, что любой ряд вида (120), 2) для п.в. t сходится равномерно (по y) на $(0, 1)$. Наконец, утверждение 1 получено Мак-Лафлиным [89].

Глава 10

Рассматриваемая в главе 10 тематика сформулировалась после работ П. Л. Ульянова [162], [161] и А.М. Олевского [117], в которых, с использованием установленного ранее в [160] следствия 3.6, была доказана теорема 1. Среди более ранних работ о расходимости ортогональных рядов и рядов коэффициентов Фурье по общим системам отметим статьи Орлича [125], [127] и В.Я. Козлова [70].

Систематическое изучение вопросов расходимости ортогональных рядов и рядов коэффициентов Фурье по общим системам было проведено С.В. Бочкаревым (см. [17], [12]), получившим ряд окончательных результатов.

Следствие 1 установлено В.Я. Козловым [70] и усиливает результат Орлича [123], согласно которому для любой полной О.Н.С. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(x) = \infty$ для п.в. x. Теоремы 1 и 3 доказаны А.М. Олевским [118], [119]. Теорема 4 впервые установлена Махмудовым [97], но его доказательство практически повторяет рассуждения Орлича [127] (см. также [10; с. 313]), который получил аналогичный результат для равномерно ограниченных О.Н.С.

Утверждение теоремы 5 в частном случае, когда $\{\varphi_n\}$ – тригонометрическая система, доказано в [34], затем С. В. Хрущев отметил, что метод работы [34] вполне достаточен для получения результатов об общих О.Н.С., в том числе теоремы 5 (см. также [68]). Теорема 6 установлена Б. С. Кашиным [56], [60], следствие 2 было получено ранее Б. С. Митягиным [106] и обобщает известный результат С. Н. Бернштейна (см. [10; с. 623]), относящийся к случаю тригонометрической системы. Приводимое в тексте доказательство теоремы 6, отличается от изложенного в [60] и ближе к работам С. В. Бочкарева (см., например, [17]).

В §3 главы 10 рассматриваются равномерно ограниченные О.Н.С. Первые оценки снизу функций Лебега равномерно ограниченных систем, с доказательств которых начинается §3, были получены А. М. Олевским [120] (в работе [120] установлены теорема 8 и следствие 5). Позднее А. М. Олевский [122], [124] получил и следствие 3. С. В. Бочкарев [15], [16] другим методом доказал несколько более точный результат – теорему 7. Подход С. В. Бочкарева был модифицирован в заметке [62], следуя которой мы устанавливаем утверждение 1 и неравенство (63), играющие в §3 важную роль. В связи со следствием 5 отметим более сильный результат Шарека [193], который (используя, в частности, метод Олевского) показал, что для произвольного базиса $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L^1(0,1)$ с

$$\|\psi_n\|_1 = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и для любого числа $p > 1$ имеет место соотношение:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|\psi_n\|_p = \infty.$$

Теорема 9 доказана А. С. Кранцбергом [82]. Теорема 10 установлена С. В. Бочкаревым [16], позднее К. С. Казарян [44] показал, что и при дополнительном требовании полноты системы Φ утверждать существование ряда Фурье, расходящегося почти всюду, вообще говоря нельзя.

О неравенстве (113) см. в работе [165]. Теорема 11 получена С. В. Бочкаревым [12]. В работе [13] (см. также [17]) С. В. Бочкаревым установлен и более точный результат: в условиях теоремы 11 для любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$ с

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega(1/n)}}{n} = \infty$$

искомая функция ограниченной вариации $F(x)$, ряд коэффициентов Фурье которой не сходится абсолютно, может быть выбрана из класса H_ω (как показывает пример тригонометрической системы (см. [10; с. 614]) дальнейшее увеличение гладкости функции $F(x)$ вообще говоря невозможно).

В изложении доказательства теоремы 11 мы следуем работам [60] и [62], см. также статью Вика [20], в которой был рассмотрен важнейший частный случай теоремы 11 – случай тригонометрической системы.

Глава 11

В главе 11 рассматриваются теоремы метрического характера о представлении функций общими ортогональными рядами (мы не касаемся гораздо более старой тематики о представлении функций всюду сходящимися тригонометрическими рядами).

Разработка указанного направления теории ортогональных рядов была начата Н. Н. Лузиным [87] и продолжена Д. Е. Меньшовым, построившим в 1916 году в работе [98] нуль-ряд по тригонометрической системе. Первоначально изучались только тригонометрические ряды, вопросы представлении функций общими тригонометрическими рядами начал рассматривать в середине тридцатых годов Марцинкевич (см. [93; с. 312]). В настоящее время теоремы о представлении функций занимают заметное место в теории общих ортогональных рядов. Подробнее об этой теме см. обзорные статьи А. А. Талаляна [154] и П. Л. Ульянова [169], а также работы [63], [136], [155], [6], [111].

Теорема 1 и следствие 1 доказаны А. А. Талаляном (см. [152], [153]). Теоремы 2, $2'$ и 3 доказаны Б. С. Кашиным (см. [58], [59], [61]). При доказательстве теоремы $2'$ было выяснено (см. [59]) существенное различие в вопросах представления функций рядами между общими системами сходимости и чуть более узким классом таких систем – классом Q (П.О.Н.С. $\Psi \in Q$, если оператор мажоранты частных сумм S^*_Ψ ограничен из L^2 в L^2). В связи с этим естественно возник вопрос: всегда ли можно представить конечную п.в. измеримую функцию сходящимся п.в. рядом по системе из класса Q? Положительный ответ на этот вопрос дала теорема 4 – теорема Арутюняна–Погосяна. Теорема 4 была анонсирована Ф. Г. Арутюняном [7] и Н. Б. Погосяном [137] в заметках, одновременно представленных в журнал, и докладывались ими на семинарах. Доказательство этого результата впервые было опубликовано в первом издании этой книги. Излагая теорему 4, мы следуем, в основном, доказательству предложенному Ф. Г. Арутюняном. Лемма 1 в теореме 4 непосредственно вытекает из результатов работы [79] и впервые применялось в смежных вопросах Н. Б. Погосяном [135]. Использование системы Хаара в вопросах представления функций общими ортогональными рядами было начато Арутюняном (см. [6]).

Следует отметить, что возможность представления каждой конечной п.в. функции сходящимся п.в. рядом по тригонометрической системе, а также системе Хаара, была установлена задолго до доказательства теорем 1 и 4 соответственно Д. Е. Меньшовым и Н. К. Бари (см. подробнее [154]).

Отметим еще, что, как показал С. В. Конягин [225], тригонометрический ряд не может сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры.

Теорема 5 доказана Дроботом [37]. Более общий подход к получению подобных теорем был предложен Д. В. Печерским [133], [134], см. также [175]. О лемме 1 в теореме 5 см. примечания к теореме 2.14.

Теорема 6 была установлена Н. Б. Погосяном [136], а в его заметке [137] содержится утверждение о существовании универсальных рядов по произвольной П.О.Н.С. (без дополнительного условия (115)). Случай системы Хаара был рассмотрен ранее Г. М. Мушегяном (см. [137]).

Приложения

Понятие максимальной функции введено и изучено Харди и Литлвудом [179] в 1930 году. В [179] были даны и первые приложения этого понятия к задачам о сходимости функциональных рядов. В § 2 приложения 1 мы следуем книге [150], см. также [41].

О теоремах минимакса см., например, [131].

Подробнее содержание приложения 2 изложено в книгах [31], [41]. Теорему 3 из этого приложения, установленную братьями Ф. и М. Рисс в 1916 году, мы излагаем следуя работе [36].

Список литературы

[1] Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. Баку: ЭЛМ, 1981.

[2] Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1963.

[3] Алексич, Кралик (Alexits G., Kralik D.) Über die Approximation mit starken de la Valle-Poussinschen Mitteln // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 1965. V. 16. P. 43–49.

[4] Арутюнян Ф. Г. О рядах по системе Хаара // Докл. АН Арм. ССР. 1966. Т. 42. №3. С. 134–140.

[5] Арутюнян Ф. Г. О базисах пространства $L^1(0,1)$ и $C(0,1)$ // Матем. заметки. 1972. Т. 11. №3. С. 241–249.

[6] Арутюнян Ф. Г. Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами // Матем. сб. 1973. Т. 90. №3. С. 483–520.

[7] Арутюнян Ф. Г. Представление функций кратными рядами // Докл. АН Арм ССР. 1977. Т. 64. №2. С. 72–76.

[8] Балашов Л. А., Рубинштейн А. И. Ряды по системе Уолша и их обобщения // В сб. “Итоги науки. Математический анализ, 1970”. М., 1971. С. 147–202.

[9] Банах (Banach S.) Theorie des operations lineaires. Warszawa: Subwncji Funduszu Narodowej, 1932.

[10] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

[11] Бочкарев С. В. О коэффициентах рядов Фурье по системе Хаара // Матем. сб. 1969. Т. 80. №1. С. 97–116.

[12] Бочкарев С. В. Абсолютная сходимость рядов Фурье по полным ортонормированным системам // Успехи матем. наук. 1972. Т. 27. №2. С. 53–76.

[13] Бочкарев С. В. Об абсолютной сходимости рядов Фурье по ограниченным полным ортонормированным системам функций // Матем. сб. 1974. Т. 93. №2. С. 203–217.

[14] Бочкарев С. В. Существование базиса в пространстве функций аналитических в круге и некоторые свойства системы Франклина // Матем. сб. 1974. Т. 95. №1. С. 3–18.

[15] Бочкарев С. В. Логарифмический рост средних арифметических от функций Лебега ограниченных ортонормированных систем // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. №1. С. 16–19.

[16] Бочкарев С. В. Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы // Матем. сб. 1975. Т. 98. №3. С. 436–449.

[17] Бочкарев С. В. Метод усреднений в теории ортогональных рядов и некоторые вопросы теории базисов // Труды МИАН. 1978. Т. 146. С. 1–87.

[18] Бурхольдер, Ганди (Burkholder D. L., Gundy R. F.) Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales // Acta Math. 1970. V. 124. P. 249–304.

[19] Ватари (Watari C.) Mean convergence of Walsh Fourier series // Tôhoku Math. J. (2). 1964. V. 16. P. 183–188.

[20] Вик (Wik I.) Criteria for abcolute convergence of Fourier series of functions of bounded variation // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 163. №1. P. 1–24.

[21] Виленкин Н. Я. Об одном классе полных ортогональных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. С. 363–400.

[22] Вильсон (Wilson J. M.) A simple proof of the atomic decomposition for $H^p(R^n), 0 < p \leqslant 1$ // Studia Math. 1982. V. 74. №1. P. 25–33.

[23] Войташчик (Wojtaszczyk P.) The Franclin system is an unconditional basis in H_1 // Ark. Mat. 1982. V. 20. №2. P. 293–300.

[24] Ганди (Gundy R.) Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. №2. P. 228–248.

[25] Гапошкин В. Ф. Лакунарные ряды и независимые функции // Успехи матем. наук. 1966. Т. 21. №6. С. 3–82.

[26] Гарсиа (Garsia A. M.) Existence of almost everywhere convergent rearrangements for Fourier series of L^2-functions // Ann. of Math. (2). 1964. V. 79. P. 623–629.

[27] Гарсиа (Garsia A. M.) Topics in almost everywhere convergence. Chicago: Markham, 1970.

[28] Гильберт (Hilbert D.) Grundzuge einer alligemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Lpz.–Berlin, 1912.

[29] Голубов Б. И. О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. №6. С. 1271–1296.

[30] Голубов Б. И. Ряды Фурье по системе Хаара // В сб. "Итоги Науки. Математический анализ, 1970". №М., 1971. С. 109–146.

[31] Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.

[32] Гротендик (Grothendieck A.) Resume de la theorie metrique des produits tensoriels topologiques // Boll. Soc. Mat. Sao Paulo. 1956. Т. 8. №1–2. С. 1–79.

[33] Джон, Ниренберг (John F., Nirenberg L.) On functions of bounded mean oscillation // Commun. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.

[34] Де Лю, Кацнельсон, Кахан (De Leeuw K., Katznelson Y., Kahane J.-P.) Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A. 1977. V. 285. №16. P. 1001–1003.

[35] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

[36] Досс (Doss R.) Elementary proof of the Rudin–Carleson and the F. and M. Riesz theorems // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 82. №4. P. 599–602.

[37] Дробот (Drobot V.) Rearrangements of series of functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 142. P. 239–248.

[38] Дуб Дж. П. Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

[39] Дэвис (Davis B.) On the integrability of the martingale square function // Israel J. Math. 1970. Т. 8. С. 187–190.

[40] Дэй М. Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ, 1961.

[41] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.

[42] Зингер (Singer I.) Bases in Banach spaces. I. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

[43] Игари (Igari S.) An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz. II // Tôhoku Math J. (2). 1963. V. 15. P. 343–358.

[44] Казарян К. С. О некоторых вопросах теории ортогональных рядов // Матем. сб. 1982. Т. 119. №2. С. 278–294.

[45] Кальтон, Пек, Робертс (Kalton N. J., Peck N. T., Roberts J. W.) L_0-valued vector measures are bounded // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. Т. 85. №4. С. 575–582.

[46] Карлесон (Carleson L.) On the convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. V. 116. P. 135–137.

[47] Карлесон (Carleson L.) An explicit unconditional basis in H_1 // Bull. Sci. Math. (2). 1980. V. 104. P. 405–416.

[48] Карлин (Karlin S.) Bases in Banach spaces // Duke Math. J. 1948. V. 15. P. 971–985.

[49] Карри, Шенберг (Curry H. B., Shoenberg I. J.) On Polya frequency functions. IV: The fundamental spine functions and their limits // J. Anal. Math. 1966. V. 17. P. 71–107.

[50] Кахан Ж. П. Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.

[51] Кахан, Кацнельсон (Kahane J.-P., Katznelson Y.) Series de Fourier des fonctions bornees // "Studies in Pure Math. a la Memoire de P. Turan". Budapest: Acad. Kiado, 1983. P. 395–410.

[52] Кахан, Салем (Kahane J. P., Salem R.) Ensembles parfaits et series trigonometriques. Paris: Hermann, 1963.

[53] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

[54] Качмаж (Kaczmarz S.) Sur la convergence et la sommabilite des developpements orthogonaux // Studia Math. 1929. V. 1. P. 87–122.

[55] Кашин Б. С. Об устойчивости безусловной сходимости почти всюду // Матем. заметки. 1973. Т. 14. №5. С. 645–654.

[56] Кашин Б. С. О некоторых свойствах функциональных и ортогональных рядов // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1976.

[57] Кашин Б. С. On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series // Anal. Math. 1976. V. 2. №4. P. 249–266.

[58] Кашин Б. С. Об одной полной ортонормированной системе // Матем. сб. 1976. Т. 99. №3. С. 356–365.

[59] Кашин Б. С. Об ортогональных системах сходимости // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228. №2. С. 285–286.

[60] Кашин Б. С. О коэффициентах разложения одного класса функций по полным системам // Сиб. матем. журн. 1977. Т. 18. №1. С. 122–131.

[61] Кашин Б. С. О некоторых свойствах ортогональных систем сходимости // Труды МИАН. 1977. Т. 143. С. 68–87.

[62] Кашин Б. С. Замечания об оценке функций Лебега ортонормированных систем // Матем. сб. 1978. Т. 106. №3. С. 380–385.

[63] Кашин Б. С. Общие ортонормированные системы и некоторые вопросы теории приближений (автореферат докт. диссерт.) // Матем. заметки. 1979. Т. 26. №2. С. 299–315.

[64] Кашин Б. С. О некотрых свойствах пространства тригонометрических полиномов с равномерной нормой // Труды МИАН. 1980. Т. 145. С. 111–116.

[65] Кашин Б. С. О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1980. Т. 15. №5. С. 379–394.

[66] Кваде (Quade E. S.) Trigonometric approximation in the mean // Duke Math. J. 1937. V. 3. P. 529–543.

[67] Кисляков С. В. p-абсолютно суммирующие операторы // В сб. "Геометрия линейных пространств и теория операторов". Ярославль, 1977. С. 114–174.

[68] Кисляков С. В. Коэффициенты Фурье граничных значений функций аналитических в круге и в бидиске // Труды МИАН. 1981. Т. 155. С. 77–94.

[69] Козлов В. Я. О локальной характеристике полной ортогональной системы функций // Матем. сб. 1948. Т. 23. №3. С. 441–474.

[70] Козлов В. Я. О распределении положительных и отрицательных значений функций, образующих полную систему // Матем. сб. 1948. Т. 23. №3. С. 475–480.

[71] Койфман (Coifman R. R.) A real variable characterization of H^p // Studia Math. 1974. V. 51. №3. P. 269–274.

[72] Койфман, Вейс (Coifman R. R., Weiss G.) Extension of Hardy spaces and their use in analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. №4. P. 569–645.

[73] Колмогоров А. Н. Sur les functions harmoniques conjugees et les series de Fourier // Fund. Math. 1925. V. 7. P. 23–28.

[74] Колмогоров А. Н. Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhangiger Grossen // Math. Ann. 1928. V. 99. P. 309–319.

[75] Колмогоров А. Н. Über das Gesetz des iterierten Logarithmus // Math. Ann. 1929. V. 101. P. 126–135.

[76] Колмогоров А. Н., Меньшов Д. Е. Sur la convergence des series de functions orthogonales // Math. Z. 1927. V. 26. P. 432–441.

[77] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа (изд. 3-е). М.: Наука, 1972.

[78] Колмогоров А. Н., Хинчин А. Я. Über Konvergenz von Reihen deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden // Матем. сб. 1925. Т. 32. №3. С. 668–677.

[79] Комлош (Komlos J.) A generalisation of a problem of Steinhaus // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1967. V. 18. №1–2. P. 217–229.

[80] Комлош (Komlos J.) Every sequence converging to 0 weakly in L_2 contains an unconditional convergence sequence // Ark. Mat. 1974. V. 12. №1. P. 41–49.

[81] Конягин С. В. О проблеме Литлвуда // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №2. С. 243–265.

[82] Кранцберг А. С. О системах сходимости в C и базисах в L // Матем. заметки. 1979. Т. 26. №2. С. 183–200.

[83] Ламперти Д. Вероятность. М.: Наука, 1973.

[84] Левинсон (Levinson N.) Gap and density theorems. New York: Amer. Math. Soc., 1963.
[85] Литлвуд (Littlewood J. E.) On the mean values of power series // Proc. Lond. Math. Soc. 1926. V. 25. №5. P. 328–337.
[86] Литлвуд (Littlewood J. E.) On bounded bilinear forms in an infinite number of variables // Quart. J. of Math. (2). 1930. V. 1. P. 164–174.
[87] Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М., 1915; изд. 2-е. М., 1951.
[88] Мак-Ги, Пиньо, Смит (McGehee O. C., Pigno L., Smith B.) Hardy's inequality and the L^1 norm of exponential sums // Ann. of Math. (2). 1981. V. 113. №3. P. 613–618.
[89] Мак-Лафлин (McLaughlin J. R.) Integrated orthonormal series // Pacific J. Math. 1972. V. 42. №2. P. 469–475.
[90] Маркус, Пизье (Marcus M., Pisier G.) Random Fourier series with applications to harmonic analysis. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981.
[91] Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций (изд. 4-е). М.: Наука, 1978.
[92] Марцинкевич (Marcinkiewicz J.) Sur la convergence des series orthogonales // Studia Math. 1936. V. 6. P. 39–45.
[93] Марцинкевич (Marcinkiewicz) Collected papers. Warszawa: PWN, 1964.
[94] Матвеев В. А. О рядах по системе Шаудера // Матем. заметки. 1967. Т. 2. №3. С. 267–278.
[95] Математическая энциклопедия. Т. 1. М., 1977.
[96] Математическая энциклопедия. Т. 2. М., 1979.
[97] Махмудов А. С. Коэффициенты Фурье и Тейлора непрерывных функций III // В сб. "Некоторые вопросы функционального анализа и его приложений". Баку, 1965. С. 103–117.
[98] Меньшов Д. Е. Sur l'inicite de developpement trigonometrique // C. R. Acad. Sci. Paris. 1916. V. 163. P. 433–436.
[99] Меньшов Д. Е. Sur les series de fonctions orthogonales I // Fund. Math. 1923. V. 4. P. 82–105.
[100] Меньшов Д. Е. Sur la convergence des series de fonctions orthogonales // C. R. Acad. Sci. Paris. 1924. V. 178. P. 301–303.
[101] Меньшов Д. Е. Sur la convergence et la sommation des series de fonctions orthogonales // Bull. Soc. Math. France. 1936. V. 64. P. 147–170.
[102] Меньшов Д. Е. Суммирование рядов по ортогональным функциям линейными методами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1937. С. 203–230.
[103] Меньшов Д. Е. Sur les series des fonctions orthogonales bornees dans leur ensembles // Матем. сб. 1938. Т. 3. С. 103–120.
[104] Мильман В. Д. Геометрическая теория пространств Банаха II // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. №6. С. 73–149.
[105] Мильман, Вольфсон (Milman V. D., Wolfson H.) Minkowski spaces with extremal distance from the Euclidean space // Israel J. Math. 1978. V. 29. №2–3. P. 113–131.
[106] Митягин Б. С. Об абсолютной сходимости ряда коэффициентов Фурье // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. №5. С. 1047–1050.

[107] Морэй (Maurey B.) Sur une application de la theorie des operateurs p-sommants // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1972. V. 274. №17. P. 1304–1307.
[108] Морэй (Maurey B.) Theoremes de factorisation pour des operateurs lineaires a valeurs dans les espaces L^p // Asterisque. 1974. V. 11. P. 1–163.
[108′] Морэй (Maurey B.) Quelques problems de factorisation d'operateurs lineaires // Proc. of Int. Congr. of Math., Vancouver, 1974 1975. V. 2. P. 75–79.
[109] Морэй (Maurey B.) Isomorphismes entre espaces H_1 // Acta Math. 1980. V. 145. P. 79–120.
[110] Морэй, Пизье (Maurey B., Pisier G.) Un theoreme d'extrapolation et ses consequences // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. 1973. V. 277. №1. P. 39–42.
[111] Мушегян Г. М. О коэффициентах всюду сходящихся рядов по некоторым переставленным ортонормированным системам // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. №4. С. 807–832.
[112] Никишин Е. М. О системах абсолютной сходимости // Матем. сб. 1967. Т. 74. №4. С. 544–583.
[113] Никишин Е. М. Резонансные теоремы и надлинейные операторы // Успехи матем. наук. 1970. Т. 25. №6. С. 129–191.
[114] Никишин Е. М. Резонансные теоремы и функциональные ряды // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1971.
[115] Никишин Е. М. Резонансная теорема и ряды по собственным функциям оператора Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. №4. С. 795–813.
[116] Никишин Е. М., Ульянов П. Л. Об абсолютной и безусловной сходимости // Успехи матем. наук. 1967. Т. 22. №3. С. 240–242.
[117] Олевский А. М. Расходящиеся ряды из L^2 по полным системам // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. №3. С. 545–548.
[118] Олевский А. М. Расходящиеся ряды Фурье непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. №1. С. 28–31.
[119] Олевский А. М. Расходящиеся ряды Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27. №3. С. 343–366.
[120] Олевский А. М. Ряды Фурье непрерывных функций по ограниченным ортонормированным системам // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. №3. С. 387–432.
[121] Олевский А. М. Об одной ортонормальной системе // Матем. сб. 1966. Т. 71. №3. С. 297–336.
[122] Олевский А. М. Ряды Фурье и функция Лебега // Успехи матем. наук. 1967. Т. 22. №2. С. 237–239.
[123] Олевский А. М. О продолжении последовательности функций до полной ортонормированной системы // Матем. заметки. 1969. Т. 6. С. 737–747.
[124] Олевский А. М. Fourier series with respect to general orthogonal systems. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
[125] Орлич (Orlicz W.) Zur Theorie der Orthogonalreihen // Bull. Intern. Acad. Sci. Polon. Cracovie. 1927. P. 81–115.
[126] Орлич (Orlicz W.) Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen. II // Studia Math. 1929. V. 1. P. 241–255.
[127] Орлич (Orlicz W.) Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen. III // Bull. Intern. Acad. Polon. Sci. A. 1932. №8/9. P. 229–238.
[128] Орлич (Orlicz W.) Über die Divergenz von allgemeinen Ortogonalreihen // Studia Math. 1933. V. 4. P. 27–32.

[129] Орлич (Orlicz W.) Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen. I // Studia Math. 1933. V. 4. P. 33-37.

[130] Орно (Orno P.) A note on unconditionally converging series in L_p // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 59. № 2. P. 252–254.

[131] Партхасаратхи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974.

[132] Пелчинский (Pelczynski A.) Projections in certain Banach spaces // Studia Math. 1960. V. 19. P. 209-228.

[133] Печерский Д. В. О перестановках членов функциональных рядов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. №6. С. 1283–1285.

[134] Печерский Д. В. Теорема о проекциях переставленных рядов с членами из L^p // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 1. С. 203–214.

[135] Погосян Н. Б. Об одном свойстве полных ортонормированных систем // Матем. заметки. 1975. Т. 17. №5. С. 681–690.

[136] Погосян Н. Б. Представление измеримых функций ортогональными рядами // Матем. сб. 1975. Т. 98. № 1. С. 102–112.

[137] Погосян Н. Б. Представление измеримых функций базисами $L^p(0,1)$ ($p \geqslant 2$) // Докл. АН Арм ССР. 1976. Т. 63. № 4. С. 205–209.

[138] Привалов И. И. Интеграл Cauchy. Саратов, 1919.

[139] Пэли (Paley R. E. A. C.) A remarkable series of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc. 1932. V. 34. P. 241-279.

[140] Пэли, Зигмунд (Paley R. E. A. C., Zygmund A.) On some series of functions (1), (2) // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1930. V. 26. P. 337-357, 458-474.

[141] Пэли, Зигмунд (Paley R. E. A. C., Zygmund A.) On some series of functions. III // Proc. Camb. Philos. Soc. 1932. V. 28. P. 190–205.

[142] Радемахер (Rademacher H.) Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Ann. 1922. V. 87. P. 111-138.

[143] Рисс (Riesz M.) Sur les functions conjugees // Math. Z. 1927. V. 27. P. 218–244.

[144] Саакян А. А. О свойствах коэффициентов Фурье у суперпозиции функций // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 2. С. 302–306.

[145] Саакян А. А. Интегральные модули гладкости н коэффициенты Фурье у суперпозиции функций // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 2. С. 597–608.

[146] Сабурова Т. Н. О некоторых свойствах коэффициентов Фурье по системе Фабера–Шаудера // Сообщ. АН Груз. ССР. 1976. Т. 82. № 2. С. 297–300.

[147] Секефальви-Надь (Szokefalvi-Nagy B.) Approximation properties of orthogonal expansions // Acta Sci. Math. 1953. V. 15. P. 31–37.

[148] Семадени (Semadeni Z.) Shauder bases in Banach spaces of continuous functions // Lecture Notes in Math. V. 918. Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[149] Стейн (Stein E. M.) On limits of sequences of operators // Ann. of Math. (2). 1961. V. 74. P. 140–170.

[150] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

[151] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимсоти рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. С. 385–412.

[152] Талалян А. А. О сходимотси ортогональных рядов // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. С. 515–516.

[153] Талалян А. А. Представление измеримых функций рядами // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15. №5. С. 77–141.
[154] Талалян А. А. Вопросы представления и единственности в теории ортогональных рядов // В сб. "Итоги науки. Математический анализ, 1970". М., 1971. С. 5–64.
[155] Талалян А. А. Об аппроксимативных свойствах некоторых неполных систем // Матем. сб. 1981. Т. 115. №4. С. 499–531.
[156] Талалян А. А., Арутюнян Ф. Г. О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$ // Матем. сб. 1965. Т. 66. №2. С. 240–247.
[157] Тандори (Tandori K.) Über die orthogonalen Functionen. X (Unbedinge Konvergenz) // Acta Sci. Math. 1962. V. 23. №3–4. P. 185–221.
[158] Тандори (Tandori K.) Über die Lebesqueschen Funktionen. II // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1977. V. 29. №1–2. P. 177–184.
[159] Тандори (Tandori K.) Einfacher Beweis Satzes von B. S. Kashin // Acta Sci. Math. 1977. V. 39. №1–2. P. 175–178.
[160] Ульянов П. Л. Расходящиеся ряды Фурье класса L^p $(p \geqslant 2)$ // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. №4. С. 768–789.
[161] Ульянов П. Л. Расхдящиеся ряды по системе Хаара и по базисам // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. №3. С. 556–559.
[162] Ульянов П. Л. Расходящиеся ряды Фурье // Успехи матем. наук. 1961. Т. 16. №3. С. 64–142.
[163] Ульянов П. Л. О точных множителях Вейля для безусловной сходимости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. №5. С. 1048–1049.
[164] Ульянов П. Л. О множителях Вейля для безусловной сходимости // Матем. сб. 1963. Т. 60. №1. С. 39–62.
[165] Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара // Матем. сб. 1964. Т. 63. №3. С. 356–391.
[166] Ульянов П. Л. Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов // Успехи матем. наук. 1964. Т. 19. №1. С. 3–69.
[167] Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. №4. С. 925–950.
[168] Ульянов П. Л. О некоторых свойствах рядов по системе Хаара // Матем. заметки. 1967. Т. 1. №1. С. 17–23.
[169] Ульянов П. Л. Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // Успехи матем. наук. 1972. Т. 27. №2. С. 3–52.
[170] Уолш (Walsh J. L.) A closed set of normal orthogonal functions // Amer. J. Math. 1923. V. 45. P. 5–24.
[171] Фабер (Faber G.) Über die Ortogonalenfunctionen des Herrn Haar // Jahresber. Deutsch Math. Verein. 1910. V. 19. P. 104–112.
[172] Файн (Fine N. J.) On the Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 65. №3. P. 372–414.
[173] Феферман (Fefferman C.) Characterizations of bounded mean oscillation // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. P. 587–588.
[174] Феферман, Стейн (Fefferman C., Stein E. M.) H^p spaces of several variables // Acta Math. 1972. V. 129. P. 137–193.
[175] Фонф В. П. Об условно сходящихся рядах в равномерно гладком пространстве Банаха // Матем. заметки. 1972. Т. 11. №2. С. 209–214.

[176] Франклин (Franklin Ph.) A set of continuous orthogonal functions // Math. Ann. 1928. V. 100. P. 522–529.

[177] Хаар (Haar A.) Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. V. 69. P. 331–371.

[178] Хант (Hunt R. A.) On the convergence of Fourier series // Orthogonal Expansions continuous Analog., Proc. Conf. Southern Illinois Univ. Edwardsville, 1967, 1968. P. 235–255.

[179] Харди, Литлвуд (Hardy G. H., Littlewood J. E.) A maximal theorem with function-theoretic applications // Acta Math. 1930. V. 54. P. 81–116.

[180] Харди Г. Г., Литлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

[181] Хинчин (Khinchin A.) Über dyadiche Bruche // Math. Z. 1923. V. 18. P. 109–116.

[182] Хобби, Райс (Hobby C. R., Rice J. R.) A moment problem in L_1 approximation // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. № 4. P. 665–670.

[183] Чанг, Чисельский (Chung Sun Yung A., Ciesielski Z.) Spline characterization of H^1 // Studia Math. 1983. V. 75. P. 183–192.

[184] Чини (Cheney E. W.) Introduction to approximation theory. New York: McGraw-Hill, 1966.

[185] Чисельский (Ciesielski Z.) On Haar functions and on the Schauder basis of the space $C_{\langle 0,1\rangle}$ // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 1959. V. 7. P. 227–232.

[186] Чисельский (Ciesielski Z.) Some properties of Schauder basis of the space $C_{\langle 0,1\rangle}$ // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 1960. V. 8. P. 141–144.

[187] Чисельский (Ciesielski Z.) Properties of the orthonormal Franklin system // Studia Math. 1963. V. 23. P. 141–157.

[188] Чисельский (Ciesielski Z.) Properties of the orthonormal Franklin system. II // Studia Math. 1966. V. 27. P. 289–323.

[189] Чисельский (Ciesielski Z.) A construction of basis in $C^{(1)}(I^2)$ // Studia Math. 1969. V. 33. P. 243–247.

[190] Чисельский (Ciesielski Z.) Convergence of spline expansions // В сб. "Linear Spaces and Approximation" / Ed. P.L. Butzer, B. Sz.-Nagy. Basel, 1978. P. 433–448.

[191] Чисельский, Симон, Шёлин (Ciesielski Z., Simon P., Sjölin P.) Equivalence of Haar and Franklin bases in L_p spaces // Studia Math. 1977. V. 60. P. 195–210.

[192] Чоу (Chow Y. S.) Convergence theorems of martingales // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. 1963. V. 1. P. 340–346.

[193] Шарек (Szarek S. J.) Bases and biorthogonal systems in the spaces C and L^1 // Ark. Mat. 1979. V. 17. P. 255–271.

[194] Шаудер (Shauder J.) Zur Theorir stetiger Abbildungen in Funktionalraumen // Math. Z. 1927. V. 26. P. 47–65.

[195] Шаудер (Shauder J.) Einige Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems // Math. Z. 1928. V. 28. P. 317–320.

[196] Шенфельд (Schonefeld S.) Schauder bases in spaces of differentiable functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75. P. 586–590.

[197] Шипп (Schipp F.) Maximal inequalities // В сб. "Approximation and function spaces". Proceedings of the International Conference, Gdansk, August 27–31, 1979. Warszawa: PWN. P. 629–644.
[198] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
[199] Шур (Schur I.) Über endliche Gruppen und Hermitische Formen // Math. Z. 1918. V. 1. P. 183–207.
[200] Эрдеш (Erdös P.) On the convergence of trigonometric series // J. Math. Phys. 1943. V. 22. P. 37–39.
[201] Яно (Yano S.) On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series // Tôhoku Math. J. (2). 1959. V. 11. P. 191–215.

Список литературы II[1)]

[202] Ашер (Auscher P.) Solution of two problems on wavelets // J. Geom. Anal. 1995. V. 5. №2. P. 181–236.
[203] Бари Н. К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. зап. МГУ. 1951. вып. 148. Т. IV. С. 69–107.
[204] Батл (Battle G.) A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarie functions // Comm. Math. Phys. 1987. V. 110. P. 601–615.
[205] Бочкарев С. В. Построение интерполяционного диадического базиса в пространстве непрерывных функций на основе ядер Фейера // Труды МИАН. 1985. Т. 172. С. 29–59.
[206] Бургейн (Bourgain J.) Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$-set problem // Acta Math. 1989. V. 162. №3/4. P. 227–245.
[207] Бургейн (Bourgain J.) On Kolmogorov's rearrangement problem for orthogonal systems and Garsia's conjecture. Geometric aspects of functional analysis, Isr. Semin., GAFA, Isr. 1987–88 // Lecture Notes in Math / Ed. J. Lindenstrauss, V. Milman. V. 1376, 1989. P. 209–250.
[208] Войтащик (Wojtaszczyk P.) A mathematical introduction to wavelets. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1997.
[209] Войтащик (Wojtaszczyk P.) Wavelets as unconditional bases in $L_p(\mathbf{R})$ // J. Fourier Anal. Appl. 1999. V. 5. №1. P. 73–85.
[210] Войтащик, Возняковский (Wojtaszczyk P., Wozniakowski K.) Ortonormal polynomial bases in function spaces // Israel J. Math. 1991. V. 75. №2/3. P. 167–191.
[211] Геворкян Г. Г. Неограниченность оператора сдвига по системе Франклина в пространстве L^1 // Матем. заметки. 1985. Т. 38. №4. С. 523–533.
[212] Геворкян Г. Г. О множителях Вейля для безусловной сходимости рядов по системе Франклина // Матем. заметки. 1987. Т. 41. №6. С. 789–797.
[213] Геворкян Г. Г. Об абсолютной и безусловной сходимости рядов по системе Франклина // Матем. заметки. 1989. Т. 45. №3. С. 30–42.

1) Добавлено при втором издании.

[214] Геворкян Г. Г. Некоторые теоремы о безусловной сходимости и мажоранте рядов по системе Франклина и их приложения к пространствам $\mathrm{Re}(H^p)$ // Труды МИАН. 1989. Т. 190. С. 49–74.
[215] Геворкян Г. Г. О рядах по системам Хаара и Франклина с одинаковыми коэффициентами // Научн. Зап. ЕГУ. 1989. Т. 3. С. 3–9.
[216] Геворкян Г. Г. О рядах по системе Франклина // Anal. Math. 1990. V. 16. P. 87–114.
[217] Геворкян, Камонт (Gevorkyan G., Kamont A.) On general Franklin systems // Diss. Math. 1998. V. 374.
[218] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
[219] Грипенберг (Gripenberg G.) Wavelet bases in $L_p(\mathbf{R})$ // Studia Math. 1993. V. 106. №2. P. 175–187.
[220] Грипенберг (Gripenberg G.) A necessary and sufficient condition for the existence of a father wavelet // Studia Math. 1995. V. 114. №3. P. 207–226.
[221] Добеши (Daubechies I.) Ten lectures on wavelets. Philadelphia, PA: SIAM, 1992.
[222] Добеши (Daubechies I.) Orthonormal bases of compactly supported wavelets // Commun. Pure Appl. Math. 1988. V. 41. №7. P. 909–996.
[223] Кашин, Цафрири (Kashin B., Tzafriri L.) Lower estimates for the supremum of some random processes // East J. Approx. 1995. V. 1. №1. P. 125–139.
[224] Кашин, Цафрири (Kashin B., Tzafriri L.) Lower estimates for the supremum of some random processes. II // East J. Approx. 1995. V. 1. №3. P. 373–377.
[225] Конягин С. В. О пределах неопределенности тригонометрических рядов // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №6. С. 770–784.
[226] Лемарье (Lemarie P.-G.) Ondelettes à localisation exponentielle // J. Math. Pures Appl. (9). 1988. V. 67. №3. P. 227–236.
[227] Лемарье, Мейер (Lemarie P. G., Meyer Y.) Ondelettes et bases Hilbertiennes // Rev. Math. Iber. 1987. V. 2. №1/2. P. 1–18.
[228] Лемарье-Рьёссе (Lemarie-Rieusset P.-G.) Projecteurs invariants, matrices de dilatation, ondelettes de dimension n et analyses multi-resolution // Rev. Math. Iber. 1994. V. 10. №2. P. 283–347.
[229] Лоренц, Мадич, Саакян (Lorentz R. A., Madych W. R., Sahakian A. A.) Translation and dilation invariant subspaces of $L^2(\mathbf{R})$ and multiresolution analyses // Appl. Comput. Harmon. Anal. 1998. V. 5. №4. P. 375–388.
[230] Лоренц, Саакян (Lorentz R. A., Sahakian A. A.) Orthonormal trigonometric Schauder bases of optimal degree for $C(K)$ // J. Fourier Anal. Appl. 1994. V. 1. №1. P. 103–112.
[231] Малла (Mallat S. G.) Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L_2(R)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 315. №1. P. 69–87.
[232] Мейер (Meyer Y.) Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algebres d'operateurs // Seminaire Bourbaki. 1985–1986. V. 38. №662.
[233] Мейер (Meyer Y.) Constructions de bases orthonormees d'ondelettes // Rev. Math. Iber. 1988. V. 4. №1. P. 31–39.

[234] Мейер (Meyer Y.) Wavelets and operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

[235] Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. №6. С. 53–128.

[236] Оффин, Осколков (Offin D., Oskolkov K. I.) A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1993. V. 9. №2–3. P. 319–325.

[237] Привалов А. А. О росте степеней полиномиальных базисов и приближение тригонометрических проекторов // Матем. заметки. 1987. Т. 42. №2. С. 207–214.

[238] Привалов А. А. О росте степеней полиномиальных базисов // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №4. С. 69–78.

[239] Привалов А. А. Об одном ортонормированном тригонометрическом базисе // Матем. сб. 1991. Т. 182. №3. С. 384–394.

[240] Розен (Rosén B.) Limit theorems for sampling from finite populations // Ark. Mat. 1965. V. 5. P. 383–424.

[241] Салем, Зигмунд (Salem R., Zygmund A.) Some properties of trigonometric series whose terms have random signs // Acta Math. 1954. V. 91. P. 245–301.

[242] Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.

[243] Стрёмберг (Strömberg J.-O.) A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces // В сб. "Conference in Harmonic Analysis in Honor of A. Zigmund", Chicago, 1981. V. 2, 1983. P. 475–494.

[244] Хернандез, Вейс (Hernandez E., Weiss G.) A first course on wavelets. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.

[245] Чисельский, Камонт (Ciesielski Z., Kamont A.) Projections onto piecewise linear functions // Funct. Approx. Comment. Math. 1997. V. 25. P. 129–143.

[246] Шёлин (Sjölin P.) The Haar and Franklin systems are not equivalent bases in L^1 // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 1978. V. 25 (1977). P. 1099–1100.

[247] Шёлин (Sjölin P.) Convergence almost everywhere of spline expansions in Hardy spaces // В сб. "Topics in Modern Harmonic Analysis", Proc. Semin., Tuzin and Milan, 1982. V. 2, 1983. P. 645–651.

[248] Шёлин, Стрёмберг (Sjölin P., Strömberg J. O.) Basis properties of Hardy spaces // Ark. Mat. 1983. V. 21. P. 111–125.

[249] Шип, Вэйд, Симон (Schipp F., Wade W. R., Simon, P.) Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. With the assistance from J. Pal. Bristol: Adam Hilger, 1990.

[250] Шип, Симон (Schipp F., Simon P.) Investigation of Haar and Franklin series in Hardy spaces // Anal. Math. 1982. V. 8. P. 47–56.

Предметный указатель